UNIJUÍ-UNIVERSIDADE DO NOROESTE DO ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL
MESTRADO EM EDUCAÇÃO NAS CIÊNCIAS

MARIA ARLITA DA SILVEIRA SOARES

OS NÚMEROS RACIONAIS E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: ANÁLISE DE PLANEJAMENTOS DAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

IJUÍ/RS
2007

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

MARIA ARLITA DA SILVEIRA SOARES

OS NÚMEROS RACIONAIS E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: ANÁLISE DE PLANEJAMENTOS DAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada junto ao Curso de Mestrado em Educação nas Ciências da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (Unijuí) como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação nas Ciências, sob a orientação da Profª. Drª Cátia Maria Nehring e co-orientação da Profª. Drª Rita Pistóia Mariani.

IJUÍ-RS
2007

MARIA ARLITA DA SILVEIRA SOARES

OS NÚMEROS RACIONAIS E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA: ANÁLISE DE PLANEJAMENTOS DAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada junto ao Curso de Mestrado em Educação nas Ciências da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (Unijuí) como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação nas Ciências.

Aprovada em ______ de ______________ de _______

BANCA EXAMINADORA

____

Profª. Drª. Cátia Maria Nehring (Orientadora) – DEFEM/UNIJUÍ

____

Profª. Drª. Rita de Cássia P. Mariani (co-orientadora) – URI/Santiago

____

Profª. Drª. Maria Cristina Pansera de Araújo - DBQ/UNIJUÍ

____

Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges – DEFEM/UNIJUÍ

____

Profª. Drª. Cláudia Regina Flores – UFSC

AGRADECIMENTOS

A Deus...
pela vida e por iluminar meu caminho...

À família...
pelo que representa para mim...
em especial, a minha irmã... Juliana... e ao Leugim
que sempre me incentivaram a dar continuidade a minha formação,

Às professoras Cátia Maria Nehring e Rita de Cássia P. Mariani ...
pela ajuda, disponibilidade e dedicação...
ao orientar-me em todas as etapas...
contribuindo para que os desafios fossem superados...

Aos professores Pedro Augusto P. Borges, Maria Cristina P. de Araújo e
Cláudia Regina Flores pelas contribuições pertinentes
na análise do trabalho

Aos professores do Mestrado em Educação nas Ciências da Unijuí
pelo que representaram na minha formação

Aos colegas, principalmente a Isabel
pelos estudos compartilhados

Aos professores participantes da pesquisa
por compartilhar seus conhecimentos e experiências...
em especial, a professora que disponibilizou o seu
planejamento para análise.

À CAPES que me proporcionou a condições para a
realização deste trabalho.

“Sim, sou eu, eu mesmo, tal qual
resultei de tudo ... quanto fui,
quanto não fui, tudo isso sou...
Quanto quis, quanto não quis,
tudo isso me forma ...”

Fernando Pessoa

RESUMO

O presente estudo teve como objetivo analisar os planejamentos de 4ª a 8ª série, elaborados por uma professora, em relação ao número racional sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica, desenvolvida por Raymond Duval, considerando a coordenação de registros para a aprendizagem matemática. De acordo com este autor, os conceitos matemáticos só são acessíveis por meio da mobilização de pelo menos dois registros de representação semiótica. O método utilizado foi a pesquisa qualitativa na forma de estudo de caso. Os dados da pesquisa foram coletados por meio da análise dos planejamentos de 4ª a 8ª séries, elaborados por uma professora, bem como entrevistas sistemáticas. Estas análises permitiram concluir que, a organização do planejamento para ensinar o número racional tem um caráter linear, predominando o uso de regras, bem como em diversas situações a confusão entre objeto e representação. Quanto a apresentação dos vários registros de representação do número racional observou-se que foram mobilizados todos os registros no decorrer das séries finais do ensino fundamental, com ênfase no registro numérico. Na 4ª série e início da 5ª prevaleceu o uso dos registros figural e numérico fracionário, nas demais séries (5ª, 6ª, 7ª) destacou-se o registro numérico nas representações fracionárias e decimais. Como conseqüência deste fato, constatamos que prevalecem tratamentos no registro numérico em todas as séries. No que se refere as conversões observamos que estas são promovidas, na maioria das vezes, em um único sentido. Sendo que na 4ª e 5ª séries são potencializadas conversões entre os registros figural e fracionário, na 6ª e 7ª entre os registros algébricos e numéricos, bem como em raros exemplos entre os registros fracionários e decimais, o que levou a concluir que aparecem de forma pouco significativa, ocorrendo confusão entre objeto e a representação, principalmente, quando a professora utiliza diferentes terminologias: fração, número fracionário, número decimal, como sendo objetos diferentes e não representações do número racional.

Palavras-Chave: Planejamento de Ensino. Registro de Representação Semiótica. Número Racional. Educação Matemática.

ABSTRACT

The present work had as a goal to analyse the planning of 4ª until 8ª series, elaborated by a teacher with regard to the racional number below the theory of the optics of the semiotic's representation developed by Raymond Duval, considering the coordenation of the registers to learn mathematics. According to this author the mathematics concepts just are accessible by the mobilization of, at least, two semiotic's representation. The method used was the quality research as a case study. The data of the research were collected through the analysis of the planning from 4ª until 8ª series elaborated by a teacher, and through systematics interviews. These analysis permited to conclude that, the organizationof the plan to teach the racional number has a linear aspect, predominating the use of rules and and in some different situations the confusion among representation and the object. About the presentation of the registers of the racional numbers it was possible to observe that were mobilized all the registers during the final series of the fundamental teaching, with emphasis in the numerical register. In the 4ª serie and in the beginning of the 5ª predominated the use of the figural register and the fractionary numerical, in the other series (5ª. 6ª, 7ª) was emphasized the numerical register in the fractionary and decimal representations. As the consequence of this, we verified that predominate the numerical register in all the series. And about to the conversion we observed that they are promoted, in almost all cases, in just one sense. The 4ª and 5ª series are work more the conversions between the figural register and the fractionary numerical, and at 6ª and 7ª the work is between the algebraic and numerical registers, and in rare examples between the fractionary and decimal, then it made me to conclude that they occur in a less significative, and that there are a confusion among the object and the representation, mainly, when the teacher uses different terminology: fraction, fractionary number, decimal number, like different objects and not racional number representation.

Key-words: Education Planning. Semiotic's Representation Register. Racional Number. Mathematics Education

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

PROBLEMATIZAÇÃO

Atualmente vivemos numa sociedade globalizada, marcada por inúmeras mudanças tecnológicas, novos paradigmas políticos, sociais e educacionais, tornando-a cada vez mais complexa, diversificada e desigual, exigindo respostas mais flexíveis e mecanismos participativos que envolvam todos os membros da população. Nessa sociedade o mais importante não será saber tudo, nem apenas o conhecimento científico, mas saber significar esse conhecimento, saber buscar alternativas para resolver os problemas e saber comunicar-se, pois a comunicação é uma forma de emancipação humana.

Neste contexto, a instituição escola e a matemática, disciplina que ocupa um espaço curricular singular na formação dos alunos, têm um papel cada vez mais importante na sociedade atual, preparar os sujeitos para atuarem num meio cultural que diversifica intensamente, os modos de representação. Para tanto, essa instituição deve assumir um caráter de permanente recomeço, renovação e ressignificação na busca do aprimoramento para a era tecnológica, para significação do conhecimento científico, focalizando a aquisição crítica dos instrumentos informativos, analíticos e materiais, levando os indivíduos a se verem nesse espaço e reconhecerem-se como sujeitos históricos e sociais, aprendizes em um tempo de fluxos intensos.

Sendo assim, o objetivo da matemática como ciência viva, aberta, com grande participação na sociedade contemporânea não é só formar futuros matemáticos, nem dar instrumentos que só serão eventualmente úteis mais tarde, mas contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização (DUVAL, 2003), bem como auxiliá-los na resolução dos problemas que surgem no dia-a-dia. Além disso, na visão de Duval (apud COLOMBO et. al, 2005, p.47), levar o aluno a compreender a articulação dos vários registros de representação da informação e diferenciar os diversos tipos de funcionamento cognitivos, são alguns dos objetivos da matemática que se revelam interessantes e úteis aos não-matemáticos.

Para tanto, nos espaços das salas de aulas, de acordo com Marques (2000, p. 115) “não se ensinam ou aprendem coisas, ou saberes prontos, mas relações conceituais em que se articulam as práticas sociais com as razões que as impulsionam e delas derivam”. O trabalho didático/pedagógico voltado para aquisição dos conceitos matemáticos possibilita ao aluno aprender princípios (incluindo regras e axiomas) e, na seqüência, solucionar problemas que envolvam esses conceitos e princípios, ampliando, dessa forma, sua estrutura de conhecimento.

A importância da aquisição do conceito de número racional, conforme Behr, Lesh e Post, citados por Moreira (2005, p. 60), pode ser vista de várias perspectivas: (a) *perspectiva prática*, a competência para lidar com estes conceitos melhora consideravelmente a compreensão e a resolução de situações do mundo real; (b) *perspectiva psicológica*, os números racionais promovem uma grande área com a qual os alunos podem desenvolver e expandir as estruturas mentais necessárias para continuarem o seu desenvolvimento intelectual; (c) *perspectiva matemática*, a compreensão dos números racionais proporciona o princípio sobre o qual as operações algébricas elementares irão se basear mais tarde. Portanto, a não-aquisição do conceito de número racional pelo aluno pode acarretar prejuízos na aquisição de um conjunto de informações necessárias à interpretação de fatos, fenômenos e eventos do mundo real, bem como na construção de estruturas mentais essenciais às atividades matemática e científica.

A história da Matemática mostra que o conceito de número racional não é elementar; ele é uma complexa e importante estrutura dessa disciplina. As dificuldades de ensino e aprendizagem do conceito de número racional têm sido alvo de várias pesquisas, sob diversos enfoques, tais como: o estudo de diferentes teorias cognitivas, novas metodologias, e análise de material didático, em especial o livro didático. Citaremos, a seguir, algumas pesquisas que analisamos na perspectiva de delimitar nosso foco de estudo.

Romanatto (1997), em sua tese de doutorado, primeiramente fez um estudo teórico-metodológico, sobre o processo de ensinar e aprender números racionais, buscando a criação de um modelo para o trabalho com esse conteúdo matemático. Em seguida, analisou o modelo elaborado, sugerindo indicadores ou propostas para se repensar a formação inicial e continuada de professores, principalmente no trabalho com a conceitualização das operações em Q[1].

O modelo proposto por Romanatto (1997) para a compreensão do número racional, fundamentado teoricamente nas idéias de Behr et. al, Kieren, Ohlsson, entre outros, pode ser visto de modo análogo a uma "teia de aranha", sendo que no centro estaria a notação *a/b*, com *a* e *b* inteiros e *b* diferente de zero. Emergindo ou incidindo desse ponto central, teríamos um feixe de relações (medida, quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade e número), construídos ou adquiridos considerando diferentes contextos em que esse número esteja

---

[1] Conjunto dos números racionais.

presente. Por fim, enredando o feixe de relações emergente ou incidente, estariam as representações do número racional (a/b, decimal, porcentagem, pictóricas), que revelam um outro feixe de significados.

Para o autor, citado acima, para ensinar os números racionais é necessário compreender os contextos e, por decorrência, as relações presentes em tais contextos, ou seja, é importante entender que a notação a/b assume diferentes significados dependendo do contexto ao qual está inserida; pois muitas vezes os alunos dominam os algoritmos associados aos racionais, mas não a sua utilização, enquanto noções e princípios para a solução qualitativa dos problemas. Talvez um dos aspectos que colaboram para essas dificuldades seja a ênfase dada pelos livros didáticos aos algoritmos e não a compreensão conceitual. Neste sentido, a vivência e a resolução de problemas são aspectos significativos a serem também considerados na elaboração dos planejamentos dos professores, cujo intuito é a construção, compreensão e representação do número racional.

Quanto às várias representações do número racional, Romanatto (1997) chama a atenção dos professores para verificarem se tais representações estão sendo compreendidas pelos alunos, pois $\frac{3}{4}$, 0,75 ou 75% podem ser representações de uma mesma situação-problema. Segundo ele:

> É importante deixarmos claro para a criança que os números racionais possuem várias representações e que elas existem porque certas relações podem ser melhor expressas ou trabalhadas operatoriamente, numa determinada notação do que em outra. (ROMANATTO, 1997, p.150)

Moutinho (2005) realizou um estudo diagnóstico ancorado na Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud e nas idéias de Nunes e Bryant, sobre o ensino e aprendizagem do conceito de fração. Para estes a origem da compreensão desse conceito deve ser buscada em contextos que propiciem situações de divisões, assim como um trabalho com os cinco significados possíveis de fração: número (N), parte-todo (P/T), medida (M), quociente (Q), operador multiplicativo (OP). Sendo o objetivo dessa pesquisa, investigar e comparar as concepções que um grupo de alunos de 4ª e 8ª séries, de São Paulo/SP, apresenta sobre o conceito de fração ao resolver uma série de questões propostas pelo pesquisador.

A análise dos resultados obtidos a partir da resolução dos alunos foi realizada em duas etapas: sendo a primeira uma análise quantitativa dos dados e a segunda uma análise qualitativa dos resultados. Estes revelam que os alunos da 4ª série tiveram um percentual de acertos (30,77%) maior que os da 8ª série (25,86%), sendo que a maioria concebe a fração como parte-todo, pois os alunos da 4ª série obtiveram 60,31% de respostas certas nesse significado e os de 8ª série 40,68%, enquanto que nos demais significados os percentuais de acertos foram baixos.

Além disso, na análise qualitativa dos dados, os alunos apresentaram erros classificados em categorias como: *relação parte-parte* (o aluno despreza o todo); *inversão do numerador com denominador* (principalmente nas frações que o numerador é maior que o denominador); *quociente remete a parte-todo* (o aluno despreza as duas grandezas envolvidas, levando em conta só uma delas); *interpreta a fração literalmente* (alunos não conseguem fazer a mudança de registro da forma fracionária para a decimal); *desprezo da conservação da área* (os alunos utilizam-se da contagem dupla, ou seja, contam o total de partes para identificar o denominador e as partes pintadas para o numerador, sem levar em conta o tamanho e a grandeza das partes envolvidas[2]); *porcentagem* (os alunos não conseguem transformar a representação fracionária em porcentagem).

A partir desses dados Moutinho (2005) concluiu que, os alunos da 8ª série tiveram um rendimento menor que os alunos da 4ª série. A concepção de fração como parte-todo é a mais acentuada para os alunos de ambas as séries, mas também são utilizadas pelos alunos as concepções: parte-parte, presentes nas situações que abordam o significado parte-todo e medida; quociente que sofre influências do falso teorema[3] e fração como dois números inteiros sobrepostos. O que nos leva a acreditar que o ensino do conceito de fração, que auxilia na aquisição do conceito de número racional, está sendo concentrado em determinadas séries não havendo um ensino progressivo. Além disso, o trabalho voltado ao ensino das diferentes representações do número racional e a articulação entre elas, ainda precisa de mais ênfase.

A pesquisa de Santos (2005) revela as concepções de número racional, em sua representação fracionária, de 3 grupos de professores[4] que atuavam no ensino fundamental da cidade de São Paulo. Para tanto, foi solicitado que os professores elaborassem seis problemas contemplando o número racional em sua representação fracionária, sendo os enunciados dos problemas classificados conforme as variáveis da pesquisa: significados (N, P/T, M, Q, OP), quantidades (continua - icônica e não icônica e discreta - icônica e não icônica) e invariantes (ordem e equivalência). Posteriormente, o pesquisador reencontrou os sujeitos da pesquisa com intuito que resolvessem os problemas por eles elaborados.

---

[2] Esse erro pode estar ligado ao fato de os professores não trabalharem com a coordenação dos registros numéricos e geométricos para o conceito de fração.

[3] A idéia de fração ter o numerador menor que o denominador.

[4] Os grupos foram denominados G_1 (professores que atuavam nas 1ª e 2ª séries), G_2 (professores que atuavam nas 3ª e 4ª séries) e G_3 (professores que atuavam nas 5ª e 6ª séries).

Na análise dos dados, Santos (2005) constatou que não há uma distribuição eqüitativa, em relação aos cinco significados, pois o significado *operador multiplicativo* teve uma ocorrência mais acentuada em todos os grupos de professores. Segundo o pesquisador esta evidência pode estar associada à concepção do professor em relação à própria matemática (fazer matemática significa fazer cálculos), pois os problemas elaborados envolvendo o significado operador multiplicativo possibilitavam o emprego de um conjunto de técnicas operatórias e procedimentos para a resolução. O segundo significado mais explorado foi o de parte-todo, seguido do significado quociente, sendo que os significados número e medida tiveram uma incidência muito baixa nos três grupos, ou mesmo não tiveram. Quanto à utilização das quantidades contínuas e discretas os resultados de todos os grupos demonstram que ambas foram contempladas, com ênfase para quantidades contínuas envolvendo o significado parte-todo e nos problemas envolvendo operador multiplicativo, as quantidades discretas. Os invariantes do conceito de fração (ordem e equivalência) tiveram uma ocorrência quase nula na elaboração dos problemas.

O autor ao analisar qualitativamente os tipos de resolução e estratégias utilizadas pelos professores, frente às situações por eles elaboradas, identificou três categorias: algoritmo, icônica e mista. Houve uma tendência em valorizar um conjunto de regras e técnicas para resolver os problemas, tendência que em algumas ocasiões conduziu a certos equívocos, principalmente, relacionados à conservação da unidade e a tentativa de extensão das operações realizadas no campo dos naturais para as operações com frações. Os problemas elaborados pelos professores e as estratégias utilizadas para resolvê-los levaram o pesquisador a concluir que, as concepções dos professores polivalentes sobre conceito de fração estão bem próximas das concepções dos professores especialistas. Há fortes indícios de uma valorização, em sala de aula, dos aspectos procedimentais do que conceituais da fração, valorização essa que pode prejudicar a aquisição do conceito de número racional.

O estudo realizado por Penteado (2004), investigou as concepções e as reações de um grupo de professores do ensino médio, da rede pública do Estado de São Paulo, frente aos diferentes registros de representação dos números reais, quando analisada a propriedade de densidade. Para tanto, a pesquisadora elaborou uma seqüência de ensino, composta de dez atividades, embasadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, utilizando os registros da língua natural, decimal, fracionário e gráfico, bem como a coordenação entre eles. A densidade do conjunto dos números reais foi trabalhada/discutida através de dois procedimentos diferentes: "primeiro, a obtenção de números racionais entre dois racionais dados, por meio da média aritmética; segundo, a obtenção de números irracionais entre dois reais dados a partir da troca de um ou mais algarismos, da representação decimal de um deles" (PENTEADO, 2004, p. 2). Neste último, o procedimento da média aritmética, trabalhado na Educação Básica, não se aplica. Portanto, a pesquisadora recorreu ao procedimento de troca de um ou mais algarismos inspirado no processo da diagonal de Cantor.

Durante o desenvolvimento das atividades Penteado verificou que, para exemplificarem números racionais, a maioria dos professores utilizou a representação fracionária, já para os números irracionais foi usado a representação simbólica, por exemplo, raízes quadradas não exatas e o π, mantendo os padrões de número irracional presentes na maioria dos livros didáticos. A representação decimal infinita dos números reais foi discutida em vários momentos da seqüência, pois alguns professores questionaram a biunivocidade entre os pontos da reta e os números reais, explicitando que "se um ponto tem representação decimal infinita, o ponto a ele correspondente 'pode variar' de acordo com o número de casas decimais representadas". Este caso revela que, os professores associam a identificação do número com sua representação, pois de acordo com o número de casas decimais escritas, cada representação de um mesmo número parece referir-se a números diferentes. Além disso, em algumas respostas, a linguagem utilizada é desprovida de precisão matemática, por exemplo, um grupo de professores escreveu $\frac{3,1}{11}$ e $\frac{3,2}{11}$ como sendo dois números que podemos encontrar entre $\frac{3}{11}$ e $\frac{4}{11}$, sem a preocupação de representar um número racional como quociente de dois inteiros (PENTEADO, 2004, p. 171).

A pesquisadora concluiu que, apesar do envolvimento dos professores durante o desenvolvimento da seqüência de ensino, algumas dificuldades ainda persistem como, por exemplo, associação da representação infinita com irracionalidade e a identificação de um número racional como sendo somente aquele que tem representação finita; também ficou clara na fala de um professor a dificuldade de converter uma dízima periódica para fração "4,212121... tem período e tem uma regra pra voltar, só não lembro" (PENTEADO, 2004, p. 81). O que revela as várias dificuldades apresentadas pelos professores ao trabalhar com números racionais, dificuldades estas que podem surgir no momento da elaboração dos planejamentos, levando-os a optarem por atividades que possam ser resolvidas por um conjunto de regras e técnicas e não que explorem os aspectos conceituais, consequentemente acarretando problemas na aprendizagem dos alunos, evidenciadas pela pesquisa de Moutinho (2005).

Worle (1999) em sua dissertação de mestrado desenvolveu uma seqüência didática com duas turmas de alunos de sexta série, cujo objetivo era a aquisição do conceito de número racional. As representações fracionárias e decimais desses números foram ensinadas concomitantemente e a coordenação entre essas representações estabelecidas através da atividade cognitiva da conversão[5], pois a pesquisadora observava, em sua prática, que alguns alunos apresentavam erros como: ¼ = 1,4, ½= 1,2, levando-a a deduzir que o traço da fração não tem ainda significado de divisão para eles. Esse erro também foi observado na pesquisa de Moutinho, citada acima. Portanto, Worle trabalhou a compreensão dos números racionais positivos, sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, em que se integram aspectos da semiósis (representação) e noésis (conceitualização), dos sistemas de representação fracionário, decimal, bem como verbal e geométrico.

Ao desenvolver as atividades, dando ênfase às várias representações do número racional e a conversão entre elas, para a pesquisadora, os alunos que fazem bem as conversões têm sucesso ao efetuar os tratamentos das operações, tornando evidente a apreensão mais global do objeto matemático (número racional); as conversões deram aos alunos oportunidades de resolver seus exercícios de diferentes maneiras e controlar/confrontar seus resultados, bem como rapidez na execução dos tratamentos matemáticos.

A pesquisa de Worle revela que quando o professor entende a especificidade do funcionamento cognitivo relacionado ao objeto matemático a ser ensinado consegue ajudar o aluno a compreender esse objeto, pois organiza seu planejamento com atividades que exploram os vários registros em que esse objeto pode ser representado, bem como a transição entre esses registros.

Podemos citar ainda, o trabalho desenvolvido por Catto (2000), que apontou algumas dificuldades encontradas pelos alunos em articular as várias representações do número racional e, analisou livros didáticos via Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Foram analisadas duas coleções que abrangiam todo o ensino fundamental, sendo elas: “A conquista da Matemática” dos autores José Ruy Giovanni e José Ruy Giovanni Jr da editora FTD e “Novo Caminho-Matemática” para 1ª a 4ª série e “Matemática” para 5ª a 8ª dos autores Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, da editora Scipione, olhando para quais registros eram mobilizados na apresentação do conteúdo (número racional), como se procediam os tratamentos dentro de um mesmo registro e se ocorriam as conversões num único sentido.

---

[5] Esse termo será explicitado no capítulo 1. Em termos gerais, Duval define conversão como sendo uma transformação de uma representação, mudando de sistema, mas conservando a referência aos mesmos objetos.

A pesquisadora concluiu que, ambas as coleções analisadas trabalham os tratamentos, uma priorizando os tratamentos no registro numérico e outra no figural. Quanto à conversão, ambas as coleções a desenvolvem num único sentido e entre dois registros. Embora a introdução do número racional no registro decimal seja realizada em ambas as coleções, com a transição dos registros: Figural (F), Fração Decimal (FD), Decimal (D) e a Língua Natural (LN), nos demais conteúdos as conversões mais usadas e o sentido em que ocorrem nas coleções, estão representadas no quadro abaixo.

Quadro1: Tipos de conversões apresentadas pelos livros didáticos

Sentido mais abordado	(F)→(NF)[6] ou (F)→(D)
Menor freqüência	(NF) →(F) ou (D)→(F)
Único Sentido	(F)→(NF)→(LN) ou (F)→(FD)→(D)
Poucos Casos	(NF)→(LN) ou (LN)→(NF)

Fonte: Catto, 2000, p. 146

O quadro mostra que, o trabalho com as conversões entre os vários registros de representação do número racional não é uma prioridade dos livros didáticos analisados. É imprescindível analisar a forma como o livro didático explora a atividade cognitiva da conversão, pois conforme Duval (2003) para o aluno aprender matemática torna-se necessário que ele consiga trocar a todo o momento de registro de representação (conversão). Além disso, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1998) os conteúdos matemáticos são trabalhados pelos professores com base nas propostas apresentadas pelos livros didáticos, pois esse material se torna freqüentemente a única ferramenta disponível para desenvolverem suas práticas de sala de aula.

A problemática do ensino e aprendizagem dos números racionais abordada pelas pesquisas analisadas, também faz parte das discussões dos PCN ao afirmarem que:

> Embora as representações fracionárias e decimais desses números sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial, os que envolvem os racionais na forma decimal. (BRASIL, 1998, p. 100)

O processo de ensinar e aprender o conceito de número racional é um tema que suscitou preocupações e indagações, durante minha graduação, pois durante as aulas particulares que ministrava, durante o curso e a participação em vários projetos de pesquisa e

---

[6] Número Fracionário.

extensão, oferecidos pela universidade, nos quais trabalhávamos com alunos das séries finais do ensino fundamental, ensino médio e acadêmicos do curso de Matemática, constatamos que esses alunos apresentavam dificuldades em trabalhar com o conceito de número racional nas suas diferentes representações, além de dificuldades ao utilizarem diferentes representações para um mesmo objeto matemático, não conseguindo, em geral, utilizar e transitar por suas representações numéricas, algébricas e gráficas. Um exemplo que demonstra estas dificuldades era quando as atividades propostas, por nós, requeriam do aluno escrever $0{,}25$ como $\frac{1}{4}$, ou verificar a equivalência entre eles. Esse fato levou-me a fazer alguns questionamentos, por exemplo, como e quais materiais didáticos são utilizados na prática pedagógica dos professores para ensinar o conceito de número racional, o que é priorizado pelos professores, os algoritmos e regras ou a conceitualização.

Diante deste contexto, verificamos que o processo de ensino e aprendizagem do conceito de número racional é complexo, visto que as nossas práticas e as pesquisas demonstram dificuldades tanto de alunos quanto de professores na sua aquisição, bem como a grande influência dos livros didáticos no desenvolvimento do trabalho didático do professor.

Assim, visando compreender quais são os meios/didáticos metodológicos[7] escolhidos pelo professor para ensinar o conceito de número racional, bem como a explicitação de dados para a organização desta pesquisa; inserimos-nos em um grupo de estudos de matemática organizado pela Secretaria Municipal de Educação de Santiago/RS em parceria com a universidade local, que realizava discussões sobre assuntos referentes à educação matemática, e aplicamos um questionário aberto aos professores que atuavam nas séries finais do Ensino Fundamental.

Este instrumento de coleta de dados questionava sobre a forma como esse grupo de professores trabalhava a disciplina de matemática, em especial, os números racionais, no que tange aos meios/didáticos metodológicos utilizados para desenvolver a prática pedagógica.

Com o questionário aberto e algumas entrevistas individuais, constatamos que quando os professores falam sobre os meios/didáticos metodológicos utilizados para desenvolver suas práticas pedagógicas, há uma tendência ao uso de jogos, desafios, recortes de jornais, materiais concretos, livro didático, resolução de problemas, história da matemática, entre outros. No entanto, não podemos afirmar qual a opção metodológica adotada por eles. Em

---

[7] Este termo será utilizado por nós para referenciar os materiais didáticos que o professor usa na sua prática pedagógica (livros didáticos, jogos, desafios, softwares educativos), bem como as opções metodológicas para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos (resolução de problemas, história da matemática, contextualização,...)

relação ao número racional, em específico, o discurso revela um trabalho por meio da resolução de problemas, material concreto, história da matemática, sendo que o trabalho com as várias representações desse número foi citado de forma mais evidente por apenas um professor.

O aspecto mais relevante deste levantamento é o fato de que mesmo os professores citando alguns meios/didáticos metodológicos como: jogos, materiais concretos, resolução de problemas, ficou evidente no discurso deles que o planejamento, documento que revela os recursos selecionados e a organização dos conteúdos para ensinar determinado conceito, é na maioria das vezes elaborado por meio da pesquisa em vários livros didáticos, ou seja, os professores elaboram seus planejamentos diante da variedade de propostas apresentadas pelos livros didáticos e utilizam os meios/didáticos metodológicos apresentados por esses materiais. Portanto, o livro didático é o principal recurso utilizado para desenvolver seus trabalhos didáticos. Sendo o professor um sujeito de ação, planejamento e decisão, o responsável pela gestão da classe e dos conceitos a serem ensinados; tornando-se importante, para esta pesquisa, investigar suas escolhas ao elaborar seu planejamento, pois são essas escolhas que potencializam o aprendizado dos alunos.

Em função dessas informações, optamos por analisar sob a ótica dos registros de representação semiótica os planejamentos de 4ª a 8ª série, em relação ao número racional, elaborados por uma professora participante do grupo de estudos investigado. A escolha dessa professora se deu porque ela atua de 4ª a 8ª série, na mesma escola e, desta forma, podemos acompanhar suas escolhas para a aquisição do conceito de número racional por seus alunos. Além disso, ela demonstrou interesse em participar da pesquisa, disponibilizando seus planejamentos e recebendo a pesquisadora para o esclarecimento de possíveis dúvidas.

Para atingir tal objetivo, pretendemos responder à seguinte questão:

- O planejamento, elaborado pela professora, para ensinar o conceito de número racional potencializa a mobilização de vários registros de representação semiótica, bem como a coordenação entre eles?

Assim, os Registros de Representação Semiótica de Duval (1993, 2000, 2003, 2004), é o referencial teórico que sustenta nosso trabalho, em especial, no que se refere à coordenação de registros, enfocando aspectos relacionados aos tratamentos e sentidos das conversões.

A opção metodológica escolhida é a pesquisa qualitativa, na forma de estudo de caso, uma vez que centramos nosso interesse na análise descritiva e detalhada do planejamento elaborado por uma professora para ensinar os números racionais, cujos instrumentos de coleta de dados foram os planejamentos de 4ª a 8ª séries, bem como entrevistas sistemáticas realizadas com essa professora.

Cabe ressaltar que, muito se tem avançado em termos de pesquisas em relação ao conceito de número racional, sendo vários os estudos que levam em consideração o estudo de diferentes teorias cognitivas, novas metodologias, análise de material didático, a aprendizagem, bem como a conceitualização e suas relações com os registros de representações semióticas. No entanto, até o momento nenhuma pesquisa revelou a forma como o professor organiza o planejamento para ensinar esse conceito. Analisar essa questão sob a ótica dos registros de representação semiótica, na forma de estudo de caso, pode contribuir para a construção de novas alternativas metodológicas e para repensar a formação inicial e continuada dos professores, pois conforme Ponte (2006) analisar uma situação específica/única/especial, procurando nela o que há de mais essencial e característico, colaborará na compreensão geral de certo fenômeno.

Para responder nossa questão de pesquisa e alcançar o objetivo proposto, organizamos este trabalho em quatro capítulos:

O capítulo 1 apresenta o quadro teórico desta pesquisa. Enfocamos a Teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval (1993, 2000, 2003, 2004) em relação a especificidade do saber matemático escolar não estar nos conceitos, mas nas representações semióticas, desencadeadas por estes.

No capítulo 2, destacamos a metodologia do estudo, baseada na pesquisa qualitativa na forma de estudo de caso. Para isso, descrevemos os sujeitos e os instrumentos de coleta de dados da pesquisa, bem como os critérios de análise do planejamento.

No capítulo 3, apresentamos a análise do planejamento, da professora pesquisada, realizada por série, bem como a síntese dos resultados.

Para concluir, o capítulo 4, apresenta as considerações finais da pesquisa.

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentaremos os aspectos mais relevantes da teoria que fundamenta nosso trabalho. Adotamos como pressupostos iniciais que o ato de aprender está ligado ao ato de ensinar e a especificidade do saber matemático não está nos conceitos, mas nas representações semióticas, desencadeadas por estes. Por isso, procuramos explorar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Duval (1993, 2000, 2003, 2004).

1.1 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Ensinar e aprender matemática, frequentemente, não é uma tarefa fácil. Várias pesquisas revelam dificuldades tanto de alunos quanto de professores na compreensão dessa disciplina. Mas, a sociedade contemporânea, dinâmica e complexa, permeada de novas tecnologias requer dos que nela atuam uma maior formação matemática inicial, visto a importância desta disciplina, cujo objetivo é "contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e visualização" (DUVAL, 2003, p. 11), indispensáveis para quem vive numa sociedade globalizada.

Segundo Duval (2004) durante os últimos cinqüenta anos ocorreram muitas mudanças na educação matemática, principalmente no currículo e nas formas de ensino. No entanto, isso não aconteceu nas explicações dos processos de compreensão e aprendizagem da matemática. A teoria dos registros de representação semiótica, elaborada pelo autor, procura determinar o funcionamento cognitivo implicado na atividade matemática, sem restringir-se ao campo da matemática ou a sua história; com intuito de explicar os problemas que surgem na compreensão dos seus processos e na sua aprendizagem, chamando a atenção para a importância do uso de representações no ensino dessa disciplina. Tendo em vista, segundo ele, não ser possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento, em especial o matemático, sem recorrer à noção de representação semiótica, isto porque não há conhecimento que possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação.

Para compreender e interpretar os símbolos e sinais utilizados pela linguagem matemática é necessário entender aspectos da teoria da linguagem – a *semiótica*[8] - ciência que estuda os sistemas de signos, ou seja, a linguagem formal. Porque a diferença entre a atividade cognitiva exigida pela matemática e aquela exigida em outras áreas do conhecimento (física, química, biologia), não deve ser procurada nos conceitos, mas no fato de que os objetos matemáticos não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos; isto é, eles dependem das representações semióticas, para comunicação e realização das funções de objetivação e de tratamento. Além disso, uma das características importantes da atividade cognitiva requerida pela matemática é a diversidade de registros de representação semiótica, que torna-se necessário mobilizar para compreendê-la (DUVAL, 2004).

Em suas palavras Damm salienta que:

> Em matemática toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto para seu ensino precisamos considerar as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. (DAMM, 2002, p. 135)

Neste sentido, é importante compreender o que seriam essas representações essenciais ao funcionamento e desenvolvimento do conhecimento matemático, pois o progresso da matemática esteve sempre ligado ao desenvolvimento de diferentes sistemas de representações, por exemplo, as notações simbólicas originaram-se da escrita, levando a criação da escrita algébrica e mais tarde a criação das linguagens formais; bem como, as atividades de raciocinar e visualizar em matemática estão intrinsecamente ligadas à utilização de representações semióticas.

São representações semióticas utilizadas para representar objetos/conteúdos/conceitos matemáticos: língua natural, escrita numérica (fracionária, decimal, binária,...), escrita algébrica, gráficos cartesianos, entre outras, pois podem ser convertidas em representações equivalentes em outro sistema semiótico. Duval (2004) considera os diferentes sistemas semióticos que produzem essas representações, porque eles permitem uma diversificação das representações de um mesmo objeto, aumentando as capacidades cognitivas dos sujeitos e, portanto suas representações mentais.

---

[8] A teorização da semiótica pode ser vista em: PIERCE, C. S. *Semiótica*. Tradução José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005.

A noção de representação é muito geral, então, Duval (2004) estabeleceu três perspectivas para essa noção: as representações mentais, as computacionais e as semióticas. As representações mentais são representações internas e conscientes do sujeito, referem-se as crenças, as explicações e as concepções de fenômenos físicos e naturais, ocorrendo no nível do pensamento. Já as representações computacionais são representações internas e não conscientes do sujeito, isto é, o sujeito realiza algumas tarefas sem pensar em todos os passos necessários para sua realização. As representações semióticas são externas e conscientes do sujeito, são relativas a um sistema particular de signos como os sistemas de escrita: numérica (fracionária, decimal), algébrica, língua natural, entre outros (DAMM, 2002).

Os três tipos de representações não são espécies diferentes de representação, mas representações que realizam funções diferentes. As representações mentais têm por função a objetivação, isto é, a função de objetivação (expressão particular) é independente da comunicação (expressão para o outro). As representações computacionais têm a função de tratamento, pois a função de tratamento não pode ser completada pelas representações mentais.

> As representações semióticas realizam de maneira indissociável, uma função de objetivação e uma função de expressão. Elas realizam de alguma forma uma função de tratamento, porém este tratamento é intencional, função fundamental para a aprendizagem humana. (DAMM, 2002, p. 141).

O cálculo, por exemplo, é uma atividade de tratamento que está diretamente ligada à utilização de representações semióticas.

Portanto, as representações mentais nunca podem considerar-se independentes das representações semióticas Porém, muitos consideram erroneamente que as representações semióticas são apenas exteriorização das representações mentais para permitir a comunicação, mas elas são igualmente essenciais para a atividade do pensamento (DUVAL, 2004), porque potencializam a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento.

Assim, as representações semióticas representam um papel essencial no desenvolvimento das representações mentais, visto estas dependerem de uma interiorização de representações semióticas; na realização de diferentes funções cognitivas, ou seja, a função de objetivação, comunicação e tratamento; na produção de conhecimentos, pois as representações semióticas permitem representações diferentes de um mesmo objeto a medida em que podem ser destacadas de sistemas semióticos diferentes (DUVAL, 2004).

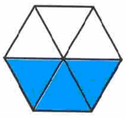
Para mencionar os diferentes tipos de representação semiótica utilizados em matemática Duval (2003) faz uso do termo registro de representação semiótica. Esse termo foi primeiramente empregado por Descartes para diferenciar a escrita algébrica das curvas e suas representações figurais. Só é considerado um registro de representação, um sistema semiótico que potencialize a comunicação, objetivação e o tratamento. O autor considera como exemplos de registros os sistemas de numeração, as escritas algébricas, as figuras geométricas, tabelas, língua natural, entre outros, pois desempenham as funções de comunicação, objetivação e tratamento, além disso, podem ser transformados em outros sistemas semióticos, o que não acontece com os códigos. A função destes é somente de comunicação e não há a possibilidade de transformá-los em outros elementos sem perder a caracterização do objeto.

Duval (2004) afirma que não é possível separar os diversos registros de representação semiótica da função cognitiva do pensamento humano. Para ele, não há noésis (apreensão conceitual de um objeto) sem sémiosis (apreensão ou produção de uma representação semiótica).

Essas considerações podem ser exemplificadas: considere um número racional e seus diferentes registros de representação.

(1) Representação fracionária: $\frac{1}{2}$

(2) Representação decimal: 0,5

(3) Representação figural: 

(4) Representação pela língua natural: um meio ou metade

Portanto, temos um número racional representado de quatro formas diferentes: fracionária, decimal, figural e em língua natural, destacando que a única mudança nestes quatro registros foi na forma de representação e não o conteúdo representado. O fato de o aluno saber resolver uma atividade envolvendo o número racional na forma fracionária ou qualquer outra (sémiosis) não garante que ele tenha o conceito do objeto número racional (noésis). Isto porque, conforme Duval (1993), os registros de representação de cada objeto matemático são parciais em relação a ele. Sendo parciais, para ocorrer a noésis é necessário integrar todos os registros de representação significativos com suas especificidades próprias.

Segundo Duval (2003), um objeto matemático não pode ser confundido com seu registro de representação. Este aspecto demonstra o caráter paradoxal da atividade matemática, isto é, como não confundir um objeto matemático com seu registro de representação se o acesso a ele passa necessariamente por representações semióticas. O autor afirma que, somente os alunos que conseguem realizar mudanças de registros de representação não confundem o objeto com sua representação. Pois, o trabalho com um objeto matemático em um único registro de representação “conduz a um fechamento de registros de representação para os alunos dificultando o reconhecimento dos mesmos objetos através das representações que lhes são dadas por sistemas semióticos diferentes” (Duval, 1993, p.52), bem como a transferência dos conhecimentos em outros contextos diferentes daqueles do ensino. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ seria o número racional e não uma representação do objeto matemático. Podendo ocorrer de o aluno negar que $\frac{1}{2} = 0{,}5$. Cabe ressaltar a forte ligação entre “sémiosis” e “noésis”, pois para chegar à conceituação de um objeto matemático e não confundi-lo com sua representação é necessário a apreensão ou produção de diferentes representações semióticas para o mesmo objeto.

Duval (2004) chama a atenção para a forte ligação entre “sémiosis” e “noésis”, no funcionamento cognitivo do pensamento e analisa diferentes atividades cognitivas ligadas à sémiosis. Para tanto, é necessário definições mais precisas do que faz com que um sistema semiótico seja considerado um registro de representação. Ele deve permitir as três atividades cognitivas ligadas a sémiois:

- A formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado: estabelecida na elaboração de um texto ou esquema, enunciado compreensível na escrita de uma sentença, de um gráfico, desenho de uma figura geométrica. Essa formação se faz em função de unidades e regras de formação que são próprias do registro semiótico que a representação é produzida. As regras já estão estabelecidas na sociedade, não sendo competências do sujeito criá-las, mas sim utilizá-las para reconhecer as representações.
- O tratamento de uma representação é a transformação dessa representação no próprio registro do qual ela foi elaborada.
- A conversão de uma representação é uma transformação dessa representação em outra representação conservando a totalidade/ou uma parte do conteúdo da representação inicial.

Exemplificação das situações acima:

(1) Aurélio plantou berinjelas em três oitavos de sua horta, pepinos em um quarto, cenouras em sete quarenta avos e tomates em um quinto da horta. Portanto, a parte que

Aurélio plantou as berinjelas é maior ou menor que a parte em que ele plantou pepinos? Qual é o número que representa a diferença entre essas partes?

Resolução: $Berinjelas : \frac{3}{8}; \; Pepinos : \frac{1}{4}$ (conversão: registro da língua natural para registro numérico).

$$Berinjelas(B) : \frac{3x2}{8x2} = \frac{6}{16}; \; Pepinos(P) : \frac{1x4}{4x4} = \frac{4}{16}; \; \frac{6}{16} > \frac{4}{16}, \log o \, B > P \; e \; \frac{6}{16} - \frac{4}{16} = \frac{2}{16}$$

(tratamento: transformações dentro de um mesmo registro numérico).

A identificação da representação também está presente no exemplo acima, pois para fazer a conversão do registro da língua natural para o registro numérico, é necessário identificar o objeto matemático: número racional.

Conforme Duval (2003, p. 14) a diversidade de registros de representação semiótica, necessários ao funcionamento matemático, assume a seguinte classificação:

Quadro 2: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis na atividade matemática

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS (não-algoritmizáveis)	Língua Natural Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: • argumentos a partir de observações, de crenças; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS (algoritmizáveis)	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesiano. • mudanças de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: DUVAL, 2003, p. 14

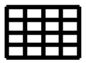
Na perspectiva de Duval (2003), só ocorre apreensão do objeto matemático, quando o indivíduo passa a utilizar pelo menos dois registros de representação semiótica, pois as regras devem ser utilizadas no reconhecimento das representações dos conteúdos estudados. Portanto, para o autor, as representações do registro serão suficientes, na compreensão conceitual do objeto representado, se o registro de representação for bem escolhido e se ocorrer à articulação de ao menos dois registros de representação, sendo esta articulação efetivada pela atividade cognitiva de conversão.

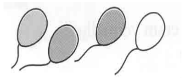
Além disso, essa articulação deve ocorrer, preferencialmente, entre um registro multifuncional e outro monofuncional, para o mesmo objeto. Os registros multifuncionais são aqueles em que os tratamentos não são algoritmizáveis, por exemplo, língua natural, figuras geométricas, formas de raciocinar (argumentação, dedução). Os registros monofuncionais são aqueles em que os tratamentos são principalmente algoritmos, por exemplo, sistemas de escrita numéricas e algébricas, cálculo, gráficos cartesianos. No entanto, a conceituação (noésis) só será alcançada quando este conseguir coordenar (converter) os distintos registros de representação de um determinado objeto.

Com o intuito de estabelecer uma organização aos diferentes registros de representação existentes para representar o nosso objeto de estudo número racional, estabelecemos uma classificação, levando em consideração o quadro elaborado por Duval (2003) e a pesquisa de Catto (2000), pois os números racionais podem ser explicitados em vários sistemas semióticos de representação, sendo que os mais conhecidos são a representação fracionária e a representação decimal.

Quadro 3: Os diferentes registros de representação do número racional

<table>
<tr><th colspan="3">Registros de Representação Semiótica e o Número Racional</th></tr>
<tr><th></th><th>Representação Discursiva</th><th>Representação Não-Discursiva</th></tr>
<tr>
<td><i>Registros Multifuncionais</i>
O tratamento não é algoritmizável, usados para a comunicação e tratamento dos objetos.</td>
<td>Registro na Língua Natural
Um número racional na forma $\frac{a}{b}$ com $a\,e\,b$ inteiros e $b \neq 0$ está representado por uma fração.
Um número racional pode ser escrito seguindo as regras e convenções do Sistema Decimal de Numeração</td>
<td>Registro Figural
Contínuo

Discreto
</td>
</tr>
<tr>
<td><i>Registros Monofuncionais</i>
Os tratamentos são principalmente algoritmos, desenvolvidos para um tipo de tratamento, a fim de conseguir desempenhos mais econômicos e poderosos.</td>
<td>Registro Simbólico
<table>
<tr><th>Numérico</th><th>Algébrico</th></tr>
<tr><td>Fracionário: $\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{a}{b}, b \neq 0, a, b \in Z$</td></tr>
<tr><td>Decimal exato: $0,5$
Decimal não exato: $0,333...$</td><td>$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_nx^0$</td></tr>
<tr><td>Potência de 10 ou Notação Científica</td><td>$a.10^n \; ou \; a.10^{-n}$</td></tr>
<tr><td>Percentual: 20%</td><td></td></tr>
</table>
.</td>
<td>Registro Gráfico</td>
</tr>
</table>

Fonte: De nossa autoria, baseado na pesquisa de Catto (2000) e quadro apresentado por Duval (2003, p. 14)

O registro pela Língua Natural é um sistema semiótico de representação, que é classificado por Duval (2003) como um registro multifuncional na representação discursiva, o qual é aprendido pelo indivíduo, simultaneamente, com a Matemática. Esse registro é constituído de um vocabulário próprio de uma cultura e cabe ao indivíduo seu uso adequado, de modo que lhe permita comunicar e expressar-se corretamente. Para o autor:

> O grau de profundidade das dificuldades levantadas para aprendizagem da Matemática não é o mesmo segundo a natureza dos registros em presença dos quais uma pessoa se encontra. No que se refere aos tratamentos, as dificuldades mais sérias concernem aos registros plurifuncionais [...] (DUVAL, 2003, p. 25).

O registro figural é classificado como um registro multifuncional na representação não-discursiva. No caso do número racional a representação figural não se restringe ao aspecto da repartição de uma grandeza contínua ou discreta, pois a reta na representação unidimensional apresenta a correspondência entre o número racional e o ponto que ele ocupa. Nessa correspondência, existe a abstração do número racional com o desligamento do concreto e o favorecimento da ordenação e comparação dos diferentes registros que um mesmo número admite (CATTO, 2000). Porém, o que observa-se no ensino do conceito de número racional é uma ênfase dada a repartição de uma grandeza contínua (figuras geométricas) em partes iguais, em detrimento ao trabalho com a reta numérica.

O registro simbólico é classificado como um registro monofuncional na representação discursiva. Ele pode ser dividido em simbólico numérico e simbólico algébrico. No registro simbólico numérico encontra-se a representação fracionária do número racional, a qual surgiu como uma das primeiras formas para expressar numericamente medidas de segmentos. Já o registro decimal é mais recente, sua representação atual existe há cerca de 500 anos. No registro decimal, temos dois grupos: os decimais exatos, que apresentam um número finito de casas decimais e os decimais não exatos, que são as dízimas periódicas cuja parte decimal possui infinitas casas decimais, com características de apresentar um período. Ainda no registro numérico, existe o registro das potências, por exemplo, a notação científica que é útil no emprego com números muito grandes ou muito pequenos. Também no registro simbólico, encontra-se o registro algébrico, de grande importância, pois por meio de sua escrita simbólica é entendido de mesmo modo nas diferentes partes do mundo.

Ao destacar a representação fracionária, verifica-se que uma mesma representação $\frac{a}{b}, b \neq 0$, suscita diferentes significados, conforme o contexto, tais como parte/todo, quociente, número, medida e operador multiplicativo*,* classificados por Nunes (2003), citada por Moutinho (2005) e Santos (2005)[9], sendo que o símbolo $\frac{a}{b}$ atua como elemento comum, a esses distintos aspectos, que segundo os PCN não devem ser tratados isoladamente, mas sim, analisados em cada contexto.

A relação parte/todo significa a divisão de um dado objeto em n partes, isto é, quando um todo (unidade) é dividido em partes iguais, sendo cada parte representada por $\frac{1}{n}$, e o procedimento da dupla contagem dá conta de se chegar a uma resposta correta.

A representação fracionária pode ser vista também como o quociente de um inteiro por outro $(a:b = a/b; b \neq 0)$, representando o tamanho de cada grupo quando se conhece o número de grupos a ser formado.

Outro aspecto a ser observado, diz respeito a representação fracionária com o significado de número. Nesse significado está envolvida a idéia da notação $\frac{a}{b}$, expressar um número na reta numérica, ou ainda sua representação na notação decimal.

A medida traz em seu significado a idéia de dividirmos uma unidade em partes iguais (sub-unidades), e verificarmos quantas dessas partes caberão naquele que se quer medir.

Um último aspecto da representação fracionária tratada como operador multiplicativo, ou seja, quando é interpretado como razão. Isso ocorre, por exemplo, quando se lida com informações do tipo “2 de cada 3 habitantes de uma cidade são imigrantes”.

O registro gráfico, classificado como monofuncional na representação não-discursiva, encontra-se bastante utilizado para representar relações, funções, sistemas entre outros. Observa-se a presença do número racional, na maioria das vezes, nestes gráficos cartesianos, na formação de pares ordenados, bem como na graduação dos eixos cartesianos.

Cabe ressaltar que o registro monofuncional na representação discursiva (simbólico numérico), é visto como “o sucesso, para grande parte dos alunos em matemática” (DUVAL, 2003, p. 21), pelo fato de os tratamentos serem principalmente algoritmos, por isso é o mais utilizado para trabalhar, por exemplo, o conceito de número racional. Desta forma, ocorre:

> um ‘enclausuramento’ de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos,

---

[9] Maiores informações sobre significados da representação fracionária do número racional podem ser vistas em: MOUTINHO, L. V. *Fração e seus diferentes significados um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental.* Dissertação de mestrado. PUC/SP, 2005 e SANTOS, A. *O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnostico junto a professores que atuam no ensino fundamental.* Dissertação de mestrado. PUC/SP, 2005.

> fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem. (DUVAL, 2003, p. 21).

Confirmando a idéia de que só ocorre apreensão do objeto matemático, quando o indivíduo passa a utilizar pelo menos dois registros de representação semiótica.

Podemos perguntar: *como ocorre a aquisição de um conceito por meio da coordenação de vários registros de representação?* Para responder a esta questão, torna-se necessário mostrarmos significados mais precisos de *tratamento* e *conversão*, pois conforme Duval (2003, p. 15) "Existe uma diferença-chave para analisar a atividade matemática numa perspectiva de aprendizagem (e de ensino) e não uma perspectiva de pesquisa matemática por matemáticos." é a partir da mobilização desses dois tipos radicalmente diferentes de transformação de representações semióticas que ocorre a aquisição de um conceito matemático, conforme esquema a seguir:

Quadro 4: A distinção entre tratamento e conversão

Transformação

De uma representação semiótica em
uma *outra* representação semiótica

Permanecendo no mesmo sistema: ***Tratamento***	Mudando de sistema, mas conservando a referencia aos mesmos objetos: ***Conversão***
Quase sempre, é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista "pedagógico", tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.	Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não-congruência. Isso se traduz pelo fato de os *alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes.* A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

Fonte: DUVAL, 2003, p. 15

Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo, resolver equações algébricas sem sair do registro algébrico. Existem regras de tratamento próprias a cada registro, sua natureza e o número de tratamentos variam, consideravelmente, de um registro para outro. As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados, por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica.

A conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente da atividade do tratamento, exemplos dessa situação são ilustrados por Duval numa pesquisa realizada com alunos do "seconde"[10] na França, na qual observou que os alunos efetuam com sucesso a adição de dois números racionais escritos na forma decimal e dois escritos na forma fracionária (tratamentos), mas quando solicitados a conversão do decimal para o fracionário não conseguem.

A distinção entre tratamentos e conversões é raramente feita no ensino, pois do ponto de vista matemático ela intervém somente na escolha do registro ao qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de guia para os tratamentos que estão sendo realizados em outro registro. Isso pode levar os professores considerarem a conversão como uma forma particular de tratamento, ou que ela depende de uma compreensão conceitual, ou seja, de uma atividade a-semiótica - "puramente mental" (DUVAL, 2003). No entanto, a atividade de conversão do ponto de vista cognitivo, é aquela que conduz os mecanismos subjacentes à compreensão matemática, ela não é uma operação cognitiva neutra, pois "mudar a forma de uma representação parece ser, para muitos alunos, nos diferentes níveis de ensino, uma operação difícil e muitas vezes impossível" (DUVAL, 2004, p. 19).

Como a atividade de conversão não é "puramente mental", mas uma atividade semiótica é preciso considerar que ela não é adquirida naturalmente pelos alunos, por exemplo, se o aluno consegue converter a representação fracionária para a representação decimal de um número não significa que saiba converter a representação decimal do mesmo número para a fracionária. O fato dos sujeitos não conseguirem converter um objeto matemático de um registro para outro está ligado a dois fenômenos que podem ocorrer na conversão: congruência e não-congruência. Duval (2003) coloca que ocorre congruência quando a representação terminal transparece na representação de saída e, não-congruência quando a representação terminal não transparece absolutamente na inicial. Assim, quando o professor vai desenvolver um conceito em sala de aula torna-se necessário trabalhar com as conversões congruentes e não-congruentes - estas últimas geram mais dificuldades. Pois, segundo o referido autor, nas conversões não-congruentes geralmente não existem regras para

---

[10] No Brasil corresponde a alunos da 1ª série do ensino médio.

realizá-las. Além disso, é importante considerar, no planejamento do professor, o sentido da conversão, "Nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada." (DUVAL, 2003, p. 20), por exemplo, um aluno que converte uma representação figural de um número racional para a representação decimal, nem sempre consegue converter a representação decimal em representação figural do mesmo número.

Ainda conforme o autor:

> Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela idéia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos são instintivamente escolhidos, evidentemente, nos casos de congruência. (DUVAL, 2003, p. 20)

O trabalho com conversões nas direções congruentes e não-congruentes, requer, também, que a organização dos conteúdos não siga uma forma excessivamente hierarquizada. Isto é, uma organização dominada pela idéia de pré-requisito, mesmo que alguns conhecimentos precedam outros, não existem amarras tão fortes que não possam, por exemplo, estabelecer as conversões entre a representação fracionária do número racional e sua representação decimal. Pois, frequentemente, os professores trabalham com a representação fracionária dos números racionais, para posteriormente introduzir a representação decimal, sem fazer as articulações entre elas (BRASIL, 1998, p. 22).

A coordenação de registros é uma condição essencial para que ocorra a aprendizagem na matemática e não uma conseqüência dessa aprendizagem. Pois, "uma tal coordenação não se opera espontaneamente e não é conseqüência de nenhuma 'conceitualização' a-semiótica" (DUVAL, 2003, p. 29).

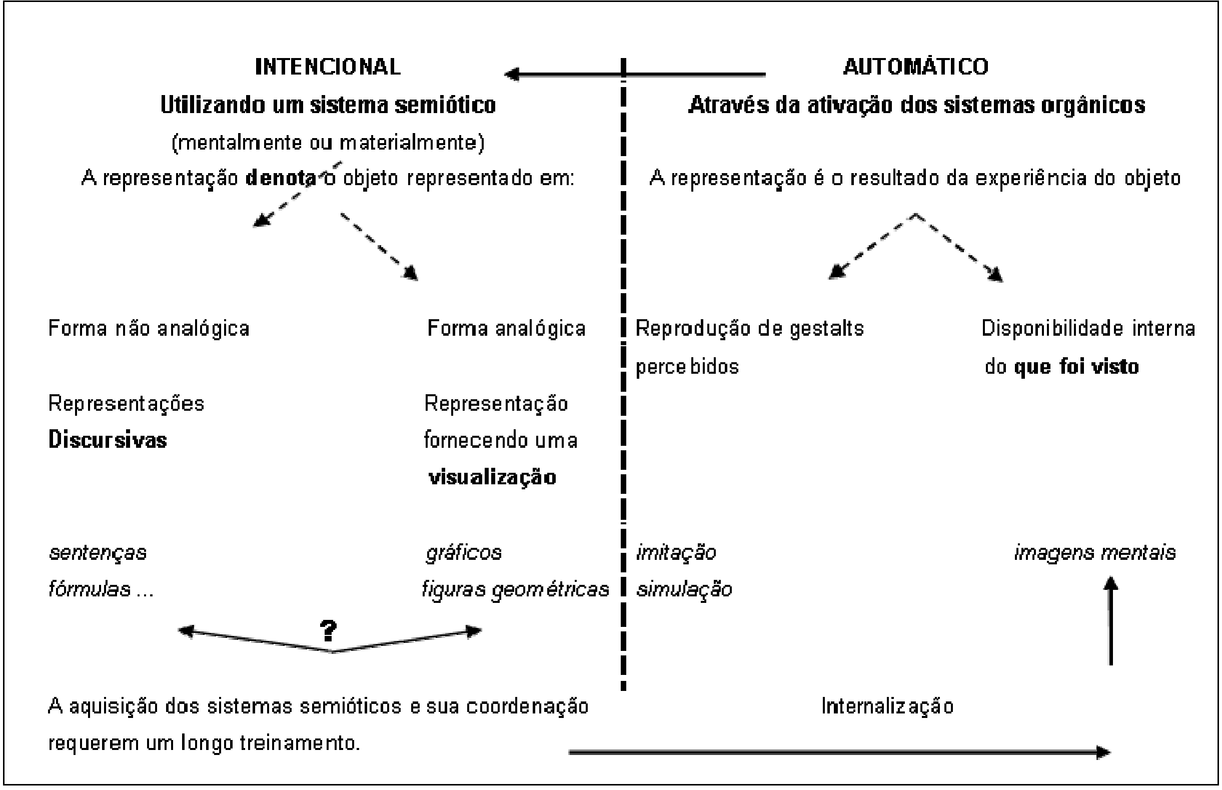
Cabe ressaltar que, compreender matemática exige uma organização mais complexa que a destacada pelos modelos psicológicos de processamento de informação, cujo entendimento consciente depende do funcionamento automático (inconsciente) da organização de sistemas diversos e heterogêneos, configurando a arquitetura cognitiva do sujeito epistêmico, pois torna-se imprescindível incluir os sistemas semióticos nos modelos de arquitetura cognitiva das pessoas. Assim, para entender matemática, o sujeito precisa integrar na sua própria arquitetura cognitiva todos os registros de representação semiótica necessários como novos sistemas de representação (DUVAL, 2000)[11].

A seguir é reproduzido o quadro que revela o esquema utilizado por Duval (2000) para explicitar o funcionamento da arquitetura cognitiva do indivíduo, no intuito de aprender matemática.

---

[11] Tradução livre.

Quadro 5: Arquitetura Cognitiva do indivíduo



Fonte: DUVAL, 2000

Na perspectiva de inclusão dos sistemas semióticos na arquitetura cognitiva das pessoas, quatro idéias são essenciais:

> 1. O desenvolvimento da *capacidade mental de representação* depende do desenvolvimento cultural de *sistemas semióticos*, porque esses sistemas não preenchem somente uma função de comunicação, mas também uma função de transformação de representações ("tratamento") e de objetivação consciente para o sujeito. [..]
> 2. Nos indivíduos em período de desenvolvimento e de formação inicial, o progresso de aquisição de conhecimentos matemáticos depende da coordenação de registros de representação semiótica. Essa coordenação não é espontânea, mas deve ser levada em conta na apropriação de cada um dos sistemas semióticos.
> 3. Cetras variáveis cognitivas podem ser retomadas como variáveis didáticas.
> 4. Na medida em que a matemática tende a diversificar os registros de representação, sua aprendizagem específica pode contribuir fortemente para o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos indivíduos. [...] (DUVAL, 2003, p. 29-30)

Portanto, para o aluno aprender matemática (aquisição/significação de conceitos), precisa envolver tanto a incorporação de registros monofuncionais quanto a diferenciação dos possíveis meios de operar nos registros multifuncionais, e também, envolver a discriminação e coordenação de sistemas semióticos de representação a fim de torná-los capazes de qualquer representação (DUVAL, 2000). Assim, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica ganha pertinência como uma maneira didática/metodológica que o professor pode utilizar para analisar/escolher materiais didáticos (livros didáticos) e organizar seu planejamento, de acordo com as exigências de sua proposta pedagógica, bem como desenvolver um trabalho pedagógico voltado para aquisição/significação dos conceitos matemáticos, potencializando a construção da arquitetura cognitiva do sujeito; arquitetura essa que cria habilidades posteriores para novas aprendizagens e para um entendimento mais abrangente, possibilitando esses compreenderem e interpretarem a realidade na qual estão inseridos, sendo cidadãos num tempo de mudanças intensas.

CAPÍTULO 2

AS ESCOLHAS METODOLÓGICAS

Neste capítulo, apresentaremos o desenho metodológico de nossa pesquisa. Iniciaremos pela exposição do contexto inicial da investigação por meio dos estudos exploratórios que definiram o foco do estudo. Apresentaremos o objetivo e a questão de pesquisa, seguidos da opção metodológica de uma pesquisa qualitativa na forma de estudo de caso. Destacaremos ainda, o sujeito, o instrumento selecionado para a coleta e análise dos dados, bem como os critérios de análise desses dados.

2.1. O CONTEXTO INICIAL DA PESQUISA: ESTUDOS EXPLORATÓRIOS

A história da matemática e as pesquisas realizadas recentemente revelam que o processo de ensino e aprendizagem do conceito de número racional é complexo, há dificuldades tanto de alunos quanto de professores na sua aquisição. Em nossa prática percebíamos que os alunos apresentavam dificuldades para compreender o número racional nas suas múltiplas representações. Além disso, observávamos a grande influência dos livros didáticos no desenvolvimento do trabalho didático dos professores.

Considerando que o ato de aprender está ligado ao de ensinar, ou seja, que as dificuldades dos alunos em aprender determinado conceito estão associadas à prática e às escolhas dos meios/didáticos metodológicos do professor quando ensina esse conceito, bem como a especificidade do saber matemático não está nos conceitos, mas nas representações semióticas desencadeadas por estes, buscamos, primeiramente, compreender quais são os meios/didáticos metodológicos escolhidos pelos professores para ensinar o conceito de número racional, bem como a revelação de dados para a organização do trabalho; nos inserimos em um grupo de estudos de matemática organizado pela Secretaria Municipal de Educação de Santiago/RS em parceria com a universidade local, que realizava discussões sobre assuntos referentes à educação matemática, e aplicamos um questionário aberto a um grupo de 18 (dezoito) professores que atuavam nas séries finais do Ensino Fundamental.

O questionário foi dividido em duas partes. A primeira parte, constituída de questões referentes ao perfil dos professores. A segunda parte, constituída por dois comentários seguidos de algumas questões sobre as mudanças no processo de ensinar, exigidas pela sociedade atual e as influências do livro didático nesse processo. Para relatar os dados do questionário decidimos identificar os dezoito professores por letras do alfabeto, a fim de assegurar o anonimato desses sujeitos.

Entre os resultados, observamos que a maioria dos professores pesquisados são licenciados em Matemática, com especialização nas áreas de Ensino de Matemática e Ciências ou Educação Matemática. Apesar de fazer pouco tempo que eles concluíram a graduação, em média seis anos, esses já trabalharam ou trabalham a disciplina de matemática com todas as séries finais do ensino fundamental, ou seja, já tiveram a oportunidade de desenvolver vários conteúdos relacionados ao conceito de número racional.

Analisando as falas desses professores[12] no que tange aos meios/didáticos metodológicos adotados nas práticas, podemos inferir que eles buscam durante o desenvolvimento das aulas de matemática dar ênfase ao caráter utilitário dessa disciplina, ou seja, mostrar a utilidade ou aplicação da matemática em situações do dia-a-dia.

> **Professor B:** "Busco materiais didáticos que possibilitem mostrar a importância da Matemática no seu dia-a-dia de uma forma diversificada e de fácil entendimento para que o aluno seja capaz de utilizar esta Matemática na sua caminhada social e profissional e não para ser reproduzida no espaço escolar."
> **Professor Q:** "Abordar os assuntos (conteúdos) por meio de situações problemas, envolvendo de maneira crítica citações de rádio, TV, jornais e revistas, levando os estudantes vivenciar os problemas da atualidade; sempre que possível material concreto, jogos e desafios".

Observamos que o uso de jogos, desafios, trabalhos de pesquisa são meios/didáticos metodológicos utilizados pelo professor no intuito de desenvolver a capacidades de raciocinar e investigar.

> **Professor M:** "Jogos, situações problemas, desafios que levem os alunos raciocinar e buscar sempre mais".
> **Professor L:** "Desafios e questionamentos instigando o espírito investigador do aluno, buscando suas respostas e não as dando pronta. Jogos também, contribuem para a cooperação e socialização".

A resolução de situações problemas que envolvam o cotidiano, bem como o uso de materiais concretos também está presente no discurso dos professores, como podemos verificar nos comentários abaixo:

> **Professor A:** "... assuntos relacionados à prática cotidiana do aluno; ... materiais manipulativos; resolução de situações problemas que dão ao aluno condições de expressar o seu pensamento".

---

[12] Quando utilizamos o "termo fala do professor" estamos nos referindo as respostas dadas as perguntas do questionário aplicado.

O professor G ao falar de sua prática busca *"... desenvolver os conteúdos matemáticos com atividades desafiadoras ou curiosas envolvendo textos de jornais e revistas; cálculo mental e estimativo; tratamento da informação por meio de gráfico, tabela, pesquisas estatísticas, geometria experimental, ..."*, verificamos a presença do trabalho com várias representações, em especial a representação gráfica. Tal representação também é citada pelo professor I: *"Atividades que desafiem o aluno a construir o conhecimento; jogos matemáticos; trabalho com gráficos, de pesquisa e principalmente procurar associar o conteúdo a vivência do aluno"*. O trabalho com a mobilização e coordenação de várias representações semióticas é destacado por Duval (2003) como um dos elementos fundamentais para a conceitualização dos objetos matemáticos. Cabe destacar que, o trabalho com as várias representações dos objetos matemáticos não foi citada de forma direta pelos professores, encontramos alguns indícios nas suas falas como apresentamos acima.

Podemos constatar, pelo depoimento dos professores e pelas respostas dos questionários, que eles utilizam meios/didáticos metodológicos citados pelas produções mais recentes em educação matemática. Contudo, Pires (2000) salienta que apesar dos vários recursos metodológicos existentes, na prática há grande dificuldade para incorporá-los à ação pedagógica, a maioria das vezes, são utilizados de forma esporádica e/ou adaptados ao velho esquema do percurso único. Ou seja, o professor escolhe algum(ns) desses recursos para a apresentação dos conteúdos, em seguida expõe exemplos para posterior aplicação nas atividades de fixação.

Além disso, verificamos na maioria das falas dos professores uma preocupação em desenvolver os conceitos matemáticos que podem ser aplicados à realidade dos alunos. Mas, na fala do professor O: *"Procuro dar significado aos conteúdos por meio de situações problemas, que façam os alunos pensar, analisar, julgar e decidir como solucioná-las, para isso uso jogos, cálculo mental e história da matemática, levando os alunos a perceber que os conteúdos podem ser descontextualizados e novamente contextualizados em outras situações"*, observamos que ele busca não só nas questões do dia-a-dia significar os conteúdos, mas utiliza-se, entre outros, da história da matemática para significá-los. Pois, segundo os PCN (1998), se não forem buscados pelos professores outros contextos além das situações cotidianas para significar os conceitos como as questões internas da própria matemática e sua história, muitos conceitos importantes serão descartados por não terem aplicação prática imediata (1998, p.23). Assim como, algumas formas de representá-los, por exemplo, no trabalho com o conceito de número racional os segmentos de reta (registro figural) não são contemplados por muitos livros didáticos. O que pode prejudicar o trabalho com a idéia de comensurabilidade.

Em relação, especificamente, aos meios/didáticos metodológicos utilizados para ensinar o número racional constatamos que, os professores pesquisados assim como as pesquisas analisadas consideram o ensino do número racional como uma tarefa complexa. Esse fato é exposto pelo professor A ao revelar que:

> **Professor A:** "Esse assunto eu acho um dos mais difíceis na parte da abstração, então procuro introduzi-lo com material concreto e com situações que possibilitem que meu aluno utilize, por exemplo, na execução de receitas".

Por se tratar de um conceito complexo os professores buscam vários recursos para ensiná-lo, por meio de situações problemas e material concreto.

> **Professor I:** "Ao introduzir o conceito de número racional os alunos estão em uma faixa etária em que o abstrato (conteúdo) torna-se muito difícil de assimilar, portanto, procuro aproximar o conteúdo ao dia-a-dia dos alunos".
> **Professor L:** "Utilizando material concreto, entre eles o multibase; papel colorido, bolo, reta numerada, grãos, líquido, receitas, observando a sala de aula e verificando tudo que pode ser dividido e o que não pode".
> **Professor M:** "Procuro situações do cotidiano, onde precisamos o número racional, para trabalhar em sala de aula e introduzir esse conceito".

Conforme os PCN (1998) os problemas históricos envolvendo medidas, que deram origem ao saber (número racional), oferecem bons contextos para seu ensino. A história da matemática é apontada pelos professores como um dos recursos para mostrar a importância de adquirir o conceito do número racional.

> **Professor B:** "Primeiro informando o aluno sobre a história de como tudo começou, a importância e a necessidade deste novo conjunto de números. Após, utilizo materiais concretos para exposição deste conteúdo".

Mas podemos perceber nos encontros individuais realizados com os professores que eles justificam a necessidade da criação dos números racionais pela insuficiência dos números naturais em determinadas situações-problemas que envolvam o resultado de uma divisão, ou seja, eles trabalham o conceito de número racional a partir dos naturais.

> **Professor D:** "Revisando os conjuntos numéricos, fazendo diagramas com exemplos e analisando a característica que cada conjunto tem e porque é preciso dividi-los".
> **Professor Q:** "Conhecendo os números naturais, o número racional é o quociente entre dois números, cujo divisor não pode ser zero, daí ampliando o conhecimento de divisão exata a dizimas periódicas simples e compostas, conforme o grau de aprendizagem e a maturidade da série em estudo".

Os PCN chamam a atenção para a ampliação do conjunto dos números naturais para os racionais, pois "a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com as idéias construídas para os naturais" (BRASIL, 1998, p.101).

Os racionais assumem diferentes significados nos diversos contextos como podemos constatar nos trabalhos analisados na problematização de Moutinho e Santos. Esses trabalhos revelaram que tanto os alunos quanto os professores tem mais sucesso quando o número racional assume o significado de parte/todo. Na fala dos professores C e E observamos a importância dada a esse significado.

> **Professor C:** "Tento mostrar de onde vem o número racional, como e onde está no nosso dia-a-dia, ex: em partes de um todo".
> **Professor E:** "Como trabalho com 5ª série desde que comecei no Magistério, eu trabalho com os números racionais na forma fracionária, retomo o significado de fração como parte de um todo, aplicando os conhecimentos de frações no cotidiano. Ex: ¾ xícara de açúcar, ½ litro de leite".

Percebemos nas falas dos professores E, G e R o trabalho com as várias representações do número racional.

> **Professor R:** "Os números racionais são introduzidos a partir do quociente entre dois números inteiros, representados geometricamente na reta".
> **Professor N:** "Através de resoluções de problemas, atividades que exploram a compreensão de regras e cálculos, situações desafiadoras, interpretação de números em textos, tabelas e gráficos".

Fica mais evidente o trabalho com as diferentes representações do número racional na fala do professor G.

> **Professor G:** "Trabalho as diferentes representações e transformações do numero racional ($^{2}\!/_{10} \rightarrow 0{,}2 \rightarrow 2 : 10$). Relaciono frações com porcentagens e decimais. Enfatizo o significado das operações com número. Destaco a utilização no dia-a-dia do número racional (dinheiro, sistemas de medida, etc.)".

O trabalho com as diferentes representações, como já comentamos e as conversões entre elas, em especial do número racional, pode levar os alunos a adquirirem esse conceito, bem como decidir qual delas é mais adequada para expressar um resultado. Por exemplo, numa situação em que se deva comunicar um desconto numa compra é mais freqüente dizer, que o desconto foi de 5% $\left(\frac{5}{100}\right)$ do que $\frac{1}{20}$.

Um dos aspectos que mais se destacaram nesse estudo exploratório inicial foi o fato de que todos os professores pesquisados baseiam-se nos livros didáticos para a organização do planejamento, sendo que para a elaboração desse os sujeitos recorrem a vários livros. Mas, aproximadamente 39% dos professores utilizam a seqüência proposta pelo livro didático[13] no ensino de alguns conteúdos, como podemos verificar na figura abaixo:

---

[13] Essa seqüência é normalmente extraída do livro didático que foi escolhido pela escola, pois todos os alunos têm esse livro.

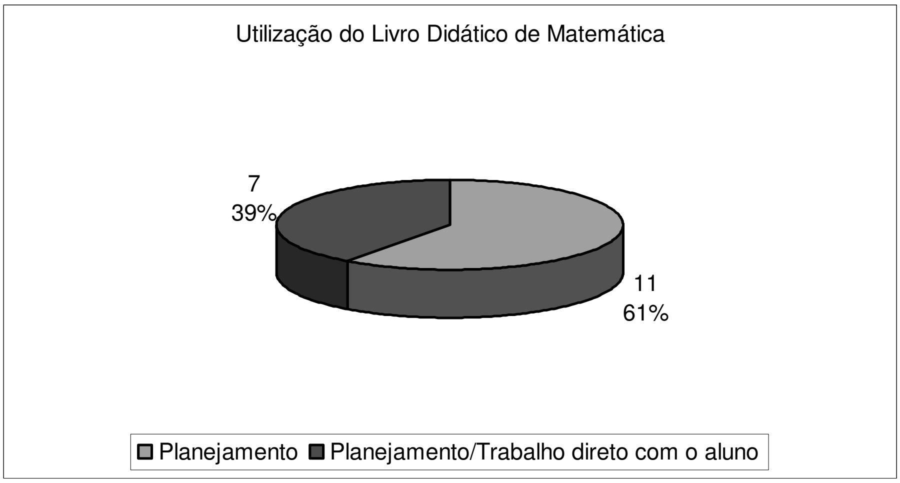


FIGURA - 1: Utilização do Livro Didático de Matemática

Conforme as falas dos professores, abaixo descritas, seus planejamentos são elaborados a partir da pesquisa em vários livros didáticos:

> **Professor R:** "O planejamento é feito consultando vários autores [de livros didáticos], embora os alunos trabalhem com o livro "Novo Praticando a Matemática", mas eles têm o conhecimento (conteúdo) de várias visões".
> **Professor L:** "Faço uma pesquisa comparando vários autores [de livros didáticos] dando ênfase aos livros novos que recebemos".
> **Professor S:** "O livro é um apoio, eu não trabalho só com um livro procuro em várias fontes".

Na fala do professor N percebemos que o livro é uma das ferramentas para a realização do trabalho didático: *"Na verdade, o livro didático não é a única fonte de pesquisa para o planejamento, mas nos fornece diferentes situações problemas que podem se bem exploradas, nos ajudar no processo de ensino-aprendizagem. Penso ainda, que se os alunos aproveitarem como reforço e leitura em turno oposto ajudaria mais para desenvolver raciocínio e até senso crítico, pois estes livros mais atualizados trazem questões que nos fazem "pensar" para chegarmos a solução".* Verificamos, assim, que o professor N cita outros recursos que podem contribuir para a (re)contextualização do saber matemático. No entanto, mesmo visualizando outros elementos que contribuem para a elaboração e desenvolvimento de seu trabalho didático, não está presente na fala deste professor nem dos demais, os livros de álgebra, aritmética e geometria, nem os paradidáticos e os resultados de pesquisas na área de educação matemática.

Cabe ressaltar que, concordamos com Duval (2003) ao enfatizar que a análise epistemológica e histórica dos saberes matemáticos a serem ensinados não é suficiente, é preciso, também uma abordagem cognitiva, ou seja, procurar descrever o funcionamento cognitivo que possibilite o aluno compreender, efetuar e controlar a diversidade de processos matemáticos que são propostos no ensino. Para tanto, no momento que o professor seleciona um livro didático para elaborar seu planejamento, torna-se necessário buscar livros que privilegiem os vários registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, bem como a coordenação entre eles.

Os livros didáticos mais utilizados pelos professores para ensinar matemática podem ser verificados na figura 2:

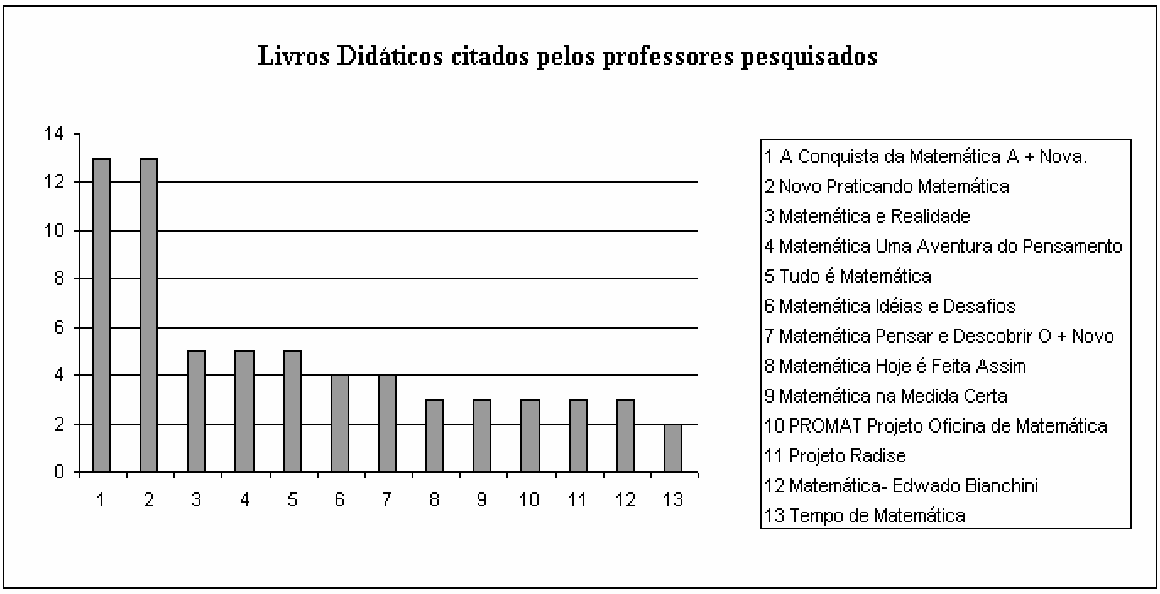


FIGURA - 2: Livros Didáticos citados pelos professores pesquisados

Conforme o PNLD (2005) a concepção linear é uma das características marcantes de uma das obras mais citadas pelos professores, *"A Conquista da Matemática"*. Esta obra apresenta uma abordagem compartimentalizada, cujos conteúdos nem mesmo são articulados entre si, os exemplos são ponto de partida para se chegar aos conceitos, regras e propriedades, bem como há um grande número de exercícios de fixação valorizando os processos algorítmicos. Isso nos revela uma incoerência entre os critérios citados pelos professores para a escolha dos livros didáticos e as características dos livros mais utilizados por eles. Catto (2000) ao analisar o livro *"A Conquista da Matemática",* no que tange ao conceito de número racional concluiu que, as articulações entre os registros fracionário e decimal, essenciais para a formação do conceito de número racional são pouco exploradas, provavelmente, pela própria estrutura metodológica adotada pela coleção.

Tendo por referência os resultados dos estudos exploratórios, principalmente, a organização dos planejamentos para ensinar matemática, ou seja, o planejamento dos professores pesquisados constitui-se de recortes extraídos de livros didáticos, e após verificarmos nas pesquisas analisadas seus objetivos e os resultados que obtiveram, decidimos por analisar o planejamento elaborado por uma professora[14] para ensinar o número racional. Sendo assim, a problemática central que envolve esta pesquisa é a análise do trabalho didático (planejamento) desenvolvido pelo professor para ensinar o número racional sob a ótica dos registros de representação semiótica, tendo em vista a importância do trabalho com os vários registros no desenvolvimento da atividade cognitiva requerida pela matemática.

Assim, o objetivo desta pesquisa é analisar sob a ótica dos registros de representação semiótica os planejamentos de 4ª a 8ª série, em relação ao número racional, elaborados pela professora B.

Para atingirmos tal objetivo, pretendemos responder à seguinte questão:

- O planejamento, elaborado pela professora, para ensinar o conceito de número racional potencializa a mobilização de vários registros de representação semiótica, bem como a coordenação entre eles?

A questão de investigação formulada revela a preocupação de uma compreensão detalhada e descritiva do trabalho didático desenvolvido por uma professora, no que se refere ao conceito de número racional. Por buscarmos entender as complexidades/especificidades do trabalho didático, elaborado por uma professora, acreditamos ser impossível quantificar. Assim, esta investigação caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa na forma de estudo de caso.

A seguir, descreveremos aspectos teóricos da metodologia que sustenta nosso trabalho.

2.2 A PESQUISA QUALITATIVA E O ESTUDO DE CASO

Atualmente as pesquisas são, em linhas gerais, classificadas como pesquisas quantitativas ou qualitativas. Nas pesquisas em educação podemos observar uma opção crescente pela pesquisa qualitativa, pois a pesquisa qualitativa fundamenta-se na idéia que há sempre um aspecto subjetivo no conhecimento produzido.

Segundo Bogdan e Biklen citados por Lüdke e André (1986) uma das características principais da pesquisa qualitativa é o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o

---

[14] Como já mencionamos utilizamos letras do alfabeto para identificar os professores investigados, durante o estudo exploratório, a professora que vamos analisar o planejamento tinha recebido como identificação a letra B, vamos continuar mantendo essa letra para identificá-la.

pesquisador como seu principal instrumento. Portanto, para obtermos os dados do estudo exploratório, durante o segundo semestre de dois mil e cinco, nos inserimos em um grupo de estudos de matemática, organizado pela Secretaria Municipal de Educação em parceria com a universidade local que realizava discussões sobre assuntos referentes à educação matemática, bem como análises de metodologias, conteúdos e materiais didáticos. Os dados da pesquisa foram obtidos no contato direto com a professora pesquisada durante o ano letivo de dois mil e seis. A opção de manter um contato direto com o sujeito da pesquisa se deu em função de que o sujeito é influenciado pelo contexto, além de, "as circunstâncias particulares em que um determinado objeto se insere são essenciais para que se possa entendê-lo." (LÜDKE e ANDRÉ 1986, p. 12).

Para os autores citados acima, os dados coletados numa pesquisa qualitativa são predominantemente descritivos. Tanto nos estudos exploratórios quanto na investigação da problemática central da pesquisa buscamos descrever detalhadamente o trabalho didático desenvolvido por um grupo específico de professores de matemática nesta área do saber ou por um único professor, no que se refere ao conceito de número racional. Para tanto, muitas vezes recorremos às falas dos professores ou trechos do planejamento analisado para subsidiar as afirmações feitas, visto que numa pesquisa qualitativa o pesquisador deve "atentar para o maior número possível de elementos presentes na situação estudada, pois um aspecto supostamente trivial pode ser essencial para a melhor compreensão do problema que está sendo estudado." (LÜDKE e ANDRÉ 1986, p. 12). Assim, as preocupações são maiores com o processo do que com o produto.

Outra característica indicada por Bogdan e Biklen (apud LÜDKE e ANDRÉ 1986), refere-se ao foco de atenção do pesquisador, ou seja, o pesquisador deve buscar compreender o significado que as pessoas dão às coisas. É importante interpretar o problema estudado a luz dos significados que os sujeitos pesquisados trazem para ele.

Além disso, Bogdan e Biklen (apud LÜDKE e ANDRÉ, 1986) descrevem que a análise dos dados numa pesquisa qualitativa tende a seguir um processo indutivo, ou seja, o pesquisador não se preocupa em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas antes do início dos estudos. O pesquisador pode trabalhar por meio de um plano aberto e flexível, focalizando a realidade de forma complexa e contextualizada, ou seja, as abstrações surgem da inspeção dos dados. O fato de desenvolver a pesquisa por meio de um plano aberto e flexível não significa a inexistência de um quadro teórico que oriente a coleta e análise de dados. A definição de nosso referencial teórico foi iniciada no primeiro semestre de dois mil e cinco e estendeu-se ao longo do desenvolvimento do trabalho, na busca de estudos que pudessem contribuir para análise e interpretação dos resultados, principalmente, aqueles voltados à área da Educação Matemática que focalizassem o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos relacionados ao número racional. Além disso, ao analisarmos os dados do questionário aplicado ao grupo de professores, definimos os instrumentos de coleta de dados da pesquisa.

Nesse processo de análise dos dados que o quadro de nossa pesquisa foi ganhando forma, os instrumentos de coleta de dados e os conceitos foram se tornando mais precisos. Conforme Lüdke e André (1986) nas pesquisas qualitativas o processo de coleta e análise dos dados é como um funil, ou seja, no início as coisas são mais abertas, com o intuito de o pesquisador adquirir uma visão ampla da situação, dos sujeitos, do contexto, das questões do estudo, depois as coisas vão se tornando mais fechadas e específicas.

Independentemente da etapa de busca por informações gerais ou específicas uma, entre as várias formas de se desenvolver uma pesquisa qualitativa é a pesquisa do tipo estudo de caso, pois este contribui na hora de descrever o processo e analisar os dados descritivos da investigação.

O estudo de um caso é caracterizado como aquele que investiga uma entidade bem delimitada, por exemplo, uma instituição de ensino, uma entidade social, uma pessoa. Visa "compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador." (PONTE, 2006, p. 107). Esse tipo de investigação trabalha em cima de uma situação específica/única/especial, procurando nela o que há de mais essencial e característico, de modo a colaborar na compreensão geral de certo fenômeno.

Além disso, um estudo de caso, no entendimento de Ponte:

> [...] não tem de ser meramente descritivo- de um modo geral, quando isso acontece o seu valor é muito reduzido. Na verdade, um estudo de caso pode ter um profundo alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes. Pode assim ajudar a gerar novas teorias e novas questões para futura investigação. (PONTE, 2006, p. 113)

Com tais perspectivas para a realização de nossa investigação, a caracterizamos como uma pesquisa qualitativa na forma de estudo de caso, pois investigamos primeiramente um grupo específico de dezoito professores de matemática e depois o planejamento elaborado por um desses professores. Procurando o que há de essencial na realização de seu trabalho didático, para ensinar o número racional sob a ótica dos registros de representação semiótica, com o intuito de colaborar para a compreensão geral do processo de ensinar e aprender esse conceito. Mais uma vez destacamos que, o nosso trabalho caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa, mas também ressaltamos que esta investigação se configura na forma de estudo de caso pelas características apontadas anteriormente, bem como pelas apresentadas a seguir.

As características do estudo de caso, conforme Lüdke e André (1996) se superpõem às características gerais da pesquisa qualitativa, já descritas. Reproduziremos algumas das características do estudo de caso citadas pelas autoras:

- O estudo de caso procura, mesmo que o pesquisador parta de alguns pressupostos teóricos iniciais, manter-se atento aos elementos novos que podem emergir como importantes durante o estudo.

Em nosso trabalho adotamos como pressupostos iniciais que o ato de aprender está diretamente ligado ao ato de ensinar, bem como que a especificidade de um objeto matemático não está nos conceitos, mas nas representações semióticas, desencadeadas por estes. Admitindo que o conhecimento seja algo inacabado, buscamos durante o desenvolvimento de nosso trabalho novas respostas e novas indagações para os pressupostos iniciais.

- Um princípio básico do estudo de caso para uma apreensão mais completa do objeto, é levar em conta o contexto em que ele se situa.

Para compreendermos, como a professora pesquisada desenvolve seu trabalho didático, procuramos levar em conta a influência das questões discutidas no grupo de estudos, no qual ela participava.

- O estudo de caso busca retratar a realidade de forma completa e profunda, assim o pesquisador procura revelar a multiplicidade de dimensões presentes numa determinada situação problema, focalizando-o como um todo.

Neste sentido, para analisarmos os meios/didáticos metodológicos escolhidos pela professora para ensinar o conceito de número racional fomos levados a investigar os planos de ensino propostos pela escola, onde a professora atua, e depois os planejamentos de 4ª a 8ª séries, elaborados por ela.

- No estudo de caso o pesquisador recorre a uma variedade de dados, coletados em diferentes momentos, em situações variadas e com uma variedade de tipos de informantes.

Os dados do estudo exploratório foram coletados por meio da aplicação de um questionário aberto e encontros individuais com um grupo de professores. Após a análise desses dados optamos pela análise dos planejamentos de uma professora. Para tanto, realizamos entrevistas individuais sistemáticas com a professora escolhida, bem como a cada quinze dias buscávamos os seus planejamentos. Essas entrevistas foram realizadas na residência de cada professor, por, geralmente, ser esse o ambiente no qual a maioria dos professores elabora/organiza seu trabalho didático. Além disso, o professor por estar nesse ambiente pode recorrer aos seus planejamentos antigos, as produções dos alunos, aos seus livros didáticos, entre outros meios/didáticos metodológicos utilizados na elaboração/organização do trabalho didático.

- Os relatos escritos do estudo de caso apresentam, geralmente, um caráter informal, narrativo, ilustrado por figuras de linguagem, citações, exemplos e descrições. É possível também que um mesmo caso tenha diferentes formas de relato, dependendo do usuário a que se destina. A preocupação aqui é com uma transmissão direta, clara e bem articulada do caso e num estilo que se aproxime da experiência pessoal do leitor.

Quando analisamos os questionários, marcamos encontros individuais com os professores com a intenção de apresentarmos os primeiros resultados. Esses resultados foram expostos informalmente por meio de slides que continham algumas citações dos próprios professores. Para apresentarmos os relatos da problemática central da pesquisa, optamos por utilizar recortes dos planejamentos da professora de modo a transmitir de forma direta e clara as escolhas estabelecidas para ensinar o número racional.

Por se tratar de generalizações realizadas por meio da análise de um caso específico muitas são as críticas feitas aos estudos de caso. Ponte ao falar das críticas que este tipo de pesquisa recebe relata:

> Trata-se de uma crítica que tem por detrás a tradição positivista, que persegue enunciados sobre a forma de "leis gerais" ou "generalizações", eventualmente "verificáveis", e que durante muitas décadas foi largamente dominante em Educação. [...] os resultados a que tem conduzido a tradição positivista têm ficado muito aquém das expectativas. O problema é que a grande complexidade das situações educativas e o facto delas serem vividas por actores humanos com

> grande variedade de intenções e significados tem-se mostrado um terreno pouco propício a essa abordagem. (PONTE, 2006, p. 122)

As situações educativas por serem vividas por seres humanos complexos não podem exigir das pesquisas soluções para todos os problemas, nem a criação e comprovação de leis que descrevam o funcionamento dos fenômenos, mas que tragam novos elementos que enriqueçam o conhecimento coletivo a cerca da complexidade do processo educativo. Assim, a crítica feita aos estudos de caso não permitirem generalizações, de acordo com Ponte, erra o alvo, pois o objetivo deste tipo de investigação "não é esse mas sim produzir conhecimento acerca de objectos muito particulares." (PONTE, 2006, p. 122).

Ponte busca em Yin (1984) mais argumentos para responder as críticas que são feitas aos estudos de caso, este afirma que os estudos de caso "não generalizam para um universo, ou seja, não fazem uma generalização em extensão, mas sim para a teoria, isto é, ajudam a fazer surgir novas teorias ou a confirmar ou infirmar as teorias existentes." (PONTE, 2006, p. 122). No estudo de caso, então, não faz sentido formular conclusões sob a forma de proposições gerais, mas levantar hipóteses a serem testadas em novas investigações.

Por fim, para Ponte esse tipo de pesquisa é: "Mais que uma metodologia, um estudo de caso é essencialmente um *design* de investigação." (2006, p. 112) quando o investigador não pretende modificar a situação, mas compreendê-la da forma como ela é.

2.3 O CONTEXTO DA PESQUISA

Segundo os pressupostos teóricos mencionados, um estudo de caso, deve desenvolver-se de forma natural em um contexto bem definido e ter como finalidade a compreensão dos comportamentos e significados atribuídos pelos sujeitos da pesquisa.

Neste item, apresentaremos o contexto em que foi realizada esta pesquisa, mostrando mais detalhes sobre o sujeito, os instrumentos de coleta de dados, bem como os critérios de análise dos dados.

2.3.1 O Sujeito da Pesquisa, os Instrumentos de Coleta de Dados e os Critérios de Análise dos Planejamentos

Como os dados coletados no estudo exploratório revelaram que os 18 professores investigados elaboram seus planejamentos por meio da pesquisa em vários livros didáticos e por este motivo utilizam os meios/didáticos metodológicos sugeridos pelos livros e, sendo nosso objetivo compreender quais meios/didáticos metodológicos são utilizados para ensinar o número racional durante todo o Ensino Fundamental, surgiu a necessidade de investigar os planejamentos dos professores. Porém, tornou-se inviável analisar os planejamentos dos 18 professores que participaram do estudo exploratório, uma vez que nem todos atuavam em todas as séries durante o ano em que coletamos os dados.

A decisão de investigar o planejamento elaborado por um professor, neste caso o da professora B, se deu por ela trabalhar com todas as séries finais do Ensino Fundamental, na mesma escola, pois no grupo de professores que participou do estudo exploratório somente ela estava trabalhando com todas essas séries. Além disso, a professora demonstrou grande interesse em participar da pesquisa, disponibilizando seus planejamentos e recebendo a pesquisadora para esclarecimento a dúvidas que possivelmente surgissem.

A professora B graduou-se em Matemática Licenciatura Plena, no segundo semestre de dois mil e três, bem como se especializou em Educação Matemática, no primeiro semestre de dois mil e sete. Tanto a graduação quanto a especialização foram realizadas na universidade local. Ela atua a três anos numa escola particular da cidade de Santiago/RS, na qual trabalha com as turmas de 4ª a 8ª série do Ensino Fundamental e 1° ano do Ensino Médio.

Como já mencionamos o instrumento de coleta de dados desta investigação foi os planejamentos, de 4ª a 8ª série, elaborados pela professora, bem como entrevistas sistemáticas realizadas com ela.

Cabe ressaltar que, estamos fundamentados nas idéias de Ponte (2006) sobre estudo de caso, ou seja, esta investigação é particularística, busca compreender uma situação específica, neste caso os planejamentos da professora B, procurando descobrir na situação o que existe de mais essencial e característico, de modo a contribuir para a compreensão global do fenômeno estudado, o processo de ensino do número racional.

Os planejamentos de 4ª a 8ª série, elaborados pela professora B, devem seguir os planos de ensino da escola, ou seja, para cada uma das séries mencionadas acima existem vários conteúdos a serem desenvolvidos e por meio desses várias competências e habilidades devem ser alcançadas pelos alunos. Em cada uma das séries a disciplina de matemática tem 6h/a por semana e como requisito para a aprovação os alunos devem obter uma média maior ou igual a 60 (sessenta) e uma freqüência maior ou igual a 75% (setenta e cinco por cento).

Conforme os planos de ensino de 4ª a 8ª série, fornecidos pela professora B, elaboramos os quadros abaixo para descrever os conteúdos referentes ao conceito de número racional que devem ser trabalhados em cada série, bem como as competências e habilidades a serem alcançadas pelos alunos por meio do planejamento elaborado pela professora.

Quadro 6: Plano de Ensino dos conteúdos envolvendo o conceito de número racional para a 4ª série

Conteúdos	Competências	Habilidades
Números Fracionários 1-Termos, representação e leitura de frações; 2-Tipos de frações; 3-Número misto.	*Aplicar o conceito de frações em situações do cotidiano;	*Perceber a idéia de parte através do material concreto; *Construir o significado de números racionais e sua representação fracionária; *Reconhecer os diferentes tipos de frações e estabelecer comparações entre eles; *Identificar o número misto como medida maior que o inteiro, em desenho.

Fonte: Planos de Ensino da escola, na qual a professora B atua.

Em uma das entrevistas sistemáticas realizadas com a professora, ela relatou que o trabalho com conteúdos relacionados ao conceito de número racional, na escola, inicia-se na 4ª série quando são apresentadas situações aos alunos que exigem a representação de partes de um inteiro, ou seja, nas séries iniciais essa idéia não é trabalhada. Além disso, a professora revelou que geralmente os conteúdos relacionados ao conceito de número racional previstos para a quarta série não são trabalhados, sendo desenvolvidos na 5º série.

Quadro 7: Plano de Ensino dos conteúdos envolvendo o conceito de número racional para a 5ª série

Conteúdos	**Competências**	**Habilidades**
A forma fracionária dos números racionais 1-Noção de fração; 2-Nomenclatura e representação de fração; 3-Nomes de frações; 4-Frações equivalentes; 5-Comparação de frações; 6-Simplificação de frações; 7-Fração irredutível; 8-As frações e a reta numérica; 9-Reduções de frações ao mesmo denominador comum; 10-As frações e a porcentagem; 11-Operações com os números fracionários: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação; 12-Expressões numéricas com frações; 13-Problemas com números fracionários.	*Utilizar as operações básicas na resolução de problemas; *Aplicar o conceito de fração em situações do cotidiano;	*Propor o estudo do mínimo múltiplo comum e do máximo divisor comum com o objetivo de ampliar a compreensão do conjunto dos números racionais; *Perceber a idéia de parte através do material concreto; *Representar frações com o material concreto; *Reconhecer os diferentes tipos de frações e estabelecer comparações entre eles; *Enfatizar o estudo das frações, bem como as operações com as mesmas; *Diversificar as formas de atividades com operações de números racionais para que haja compreensão e entendimento dos mesmos.
Números Decimais 1-Fração Decimal; 2-Leitura de um número decimal; 3-Transformação de fração decimal em número decimal e vice-versa; 4-Propriedade fundamental dos números decimais; 5-Comparação de decimais; 6-Adição e subtração de números decimais; 7-Multiplicação de números decimais; 8-Multiplicação por potência de dez; 9-Potência de números decimais; 10-Divisão de números decimais: divisões exatas e não exatas.	*Aplicar o conceito de números decimais em situações do cotidiano.	*Perceber a idéia de fração decimal; *Compreender a leitura de um número decimal; *Transformar uma fração decimal em número decimal e vice e versa; *Utilizar as propriedades fundamentais dos números decimais em situações do dia-a-dia; *Oportunizar as situações problemas que envolvam números decimais para trabalhar situações da vida diária com exatidão e rapidez; *Utilizar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão para efetuar cálculos com números decimais; *Calcular o valor de uma expressão numérica aplicando as definições anteriores.

Fonte: Planos de Ensino da escola, na qual a professora B atua.

Em relação aos conteúdos previstos para a 5ª série, a professora informou que nessa série são desenvolvidos, praticamente, todos os conteúdos relacionados ao conceito de número racional. Por meio de uma breve análise desse plano de estudo e da fala da professora observamos que o currículo da escola caracteriza-se por concentrar os campos matemáticos por série, com ênfase dada a números e operações na 5ª e 6ª séries, pois nessa série deve ser trabalhada a representação fracionária do número racional (noção, equivalência, simplificação, comparação, ...) e operações com números racionais na forma fracionária, bem como a representação decimal do número racional (noção, comparação, transformação...) e operações. No entanto, a representação decimal dos números racionais aparece no plano de estudos da 5ª série como números decimais, ou seja, outro tipo de número. Cabe ressaltar que, nessa série são trabalhados os números racionais absolutos.

Quadro 8: Plano de Ensino dos conteúdos envolvendo o conceito de número racional para a 6ª série

Conteúdos	Competências	Habilidades
Potências e raízes 1-Potência de um número racional; 2-Propriedades da potenciação; 3-Potência de base 10; 4-Números quadrados perfeitos; 5-Raiz quadrada exata de um número racional;	*Identificar um número na forma a^n, como um número racional e suas propriedades; *Usar a definição para determinar a raiz quadrada exata de um número racional.	*Identificar o símbolo a^n, com $a \in Q_+$, com $n \geq 2$, como um número racional; *Conhecer e aplicar as propriedades da potenciação; *Identificar e reconhecer números que são quadrados perfeitos; *Resolver expressões que envolvam potenciação e raiz quadrada; *Resolver expressões com potência de dez; *Calcular a raiz exata de um número racional não negativo.
Conjunto dos Números racionais 1-Representação geométrica dos números racionais; 2-Módulo ou valor absoluto de número racional; 3-Números racionais opostos ou simétricos; 4-Adição e subtração de números racionais; 5-Multiplicação e divisão de números racionais; 6-Potenciação e raiz quadrada exata de números racionais; 7-Expressões numéricas.	*Reconhecer como número racional todo aquele que pode ser escrito na forma de fração, com termos inteiros e denominador diferente de zero; *Resolver e comparar números racionais na forma fracionária, na forma decimal e na forma percentual; *Reconhecer que frações indicam partes, medidas ou resultados de divisões.	*Reconhecer frações e decimais como números racionais; *Representar na reta o conjunto dos números racionais; *Reconhecer números racionais opostos ou simétricos; *Efetuar adições e subtrações com números racionais utilizando essas operações na resolução de situações problemas do cotidiano; *Efetuar multiplicações e divisões com números racionais utilizando essas operações na resolução de situações problemas; *Reconhecer e aplicar as propriedades das operações em Q, relacionando a adição e subtração como operações inversas; *Calcular potências de bases racionais e expoentes inteiros.

Fonte: Planos de Ensino da escola, na qual a professora B atua.

Na 6ª série, conforme afirma a professora, é trabalhada primeiramente, a operação de potenciação de números racionais absolutos, em seguida é introduzido o conjunto dos números inteiros, para depois retornar o trabalho com os números racionais. Nessa série é formalizado o conjunto dos números racionais, por meio da representação algébrica. Ou seja, é apresentado aos alunos o conjunto dos números racionais como sendo aquele formado pelos números que podem ser escritos como quociente de dois números inteiros, com divisor diferente de zero $Q = \{x / x = \frac{a}{b},\ com\ a \in Z,\ b \in Z\ e\ b \neq 0\}$.

Quadro 9: Plano de Ensino dos conteúdos envolvendo o conceito de número racional para a 7ª série

Conteúdos	Competências	Habilidades
Os números reais 1-Os números racionais; 2-Representação dos números racionais; 3-Números quadrados perfeitos; 4-Os números irracionais e os números reais; 5-A reta real.	*Reconhecer os números racionais e irracionais no contexto diário; *Aprender informações úteis, para que desenvolva conhecimentos sólidos da Matemática, com a aplicação do conjunto dos números reais; *Conhecer e reconhecer o conjunto dos números reais nas suas diversas formas a aplicações, bem como relacioná-los com situações do seu cotidiano; *Utilizar operações básicas na resolução de situações problemas envolvendo os números reais.	*Diferenciar os números racionais dos números irracionais; *Identificar números racionais e irracionais em suas diferentes formas e usos; *Relacionar cada número com seu respectivo conjunto; *Decompor os números e identificar os quadrados perfeitos; *Representar os números através da reta numérica e comprovar que cada número real corresponde a um único ponto da reta; *Decompor números para a realização de cálculos que identifica um número como sendo quadrado perfeito; *Calcular a geratriz de uma dízima periódica; *Reconhecer a existência de um número decimal ilimitado não-periódico.

Fonte: Planos de Ensino da escola, na qual a professora B atua.

A professora relatou que na 7ª série é realizado o "fechamento dos conjuntos numéricos", ou seja, retoma-se a definição de número racional, mostra-se para os alunos que existem outros números que não podem ser escritos na forma $\frac{a}{b},\ com\ a \in Z,\ b \in Z\ e\ b \neq 0$, surgindo a necessidade de um novo conjunto - os números irracionais, sendo que a união do conjunto dos números racionais com os irracionais forma o conjunto dos números reais.

Quadro 10: Plano de Ensino dos conteúdos envolvendo o conceito de número racional para a 8ª série

Conteúdos	Competências	Habilidades
Potências e raízes 1-Calculando com potências; 2- Notação Científica; 3-Calculando com raízes; 4-Potência com expoente fracionário: relacionado radiciação com potenciação; 5-Propriedades dos radicais;	*Aprender informações úteis para que desenvolva conhecimentos sólidos da Matemática, utilizando potências e raízes; *Conhecer e reconhecer cada conteúdo nas suas diversas formas e aplicações, bem como relacioná-los com situações do cotidiano.	*Calcular potências e raízes de números reais; *Aplicar as propriedades das potências e raízes; *Reconhecer a necessidade do uso d anotação científica;

Fonte: Planos de Ensino da escola, na qual a professora B atua.

Na 8ª série trabalha-se a notação científica, uma das formas de representar os números racionais muito pequenos ou muito grandes e a operação de potenciação com expoentes fracionários. No entanto, conforme a professora, a ênfase dada nessa série é para a resolução de equações do segundo grau e a geometria, ou seja, os conjuntos numéricos são retomados de forma rápida no início do ano.

Como nosso referencial teórico baseia-se nos Registros de Representação Semiótica de Duval (1993, 2000, 2003, 2004) é importante considerar os planos de ensino que orientam o planejamento da professora no momento da análise do planejamento, especialmente no que se refere à coordenação de registros, enfocando aspectos relacionados aos tratamentos e sentidos das conversões para desenvolver os conteúdos sugeridos pelos planos de ensino.

Com base nas indicações constatadas por estes instrumentos de coleta de dados, considerando as afirmações de Duval, que os métodos a serem utilizados numa pesquisa são sempre relativos à natureza dos fenômenos a estudar, ou seja, no ensino de matemática, "os fenômenos cognitivos reveladores da atividade matemática concernem na mobilização de vários registros de representação semiótica e à conversão dessas representações." (DUVAL, 2003, p. 24), organizamos os critérios de análise dos planejamentos enfocando a coordenação dos Registros de Representação.

Na coordenação dos registros, privilegiamos a mobilização de vários registros de representação semiótica no momento de introduzir os conteúdos relativos ao conceito de número racional, os tratamentos trabalhados no interior de cada registro de representação, bem como os sentidos das conversões, ou seja, se as atividades propostas pela professora enfatizam a mudança de um registro de representação para outro e vice-versa.

As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro. São as conversões que segundo Duval (2003) possibilitam a apreensão do objeto matemático, ou seja, a conceitualização, pois ela estabelece as relações entre os registros, evidenciando vários pontos de vista diferentes de um mesmo objeto matemático. São exemplos de conversões:

- Conversão do registro numérico decimal para o registro numérico fracionário: $0{,}25 = \frac{25}{100}$;
- Conversão do registro da língua natural para o registro numérico fracionário: $\textit{um quarto} = \frac{1}{4}$.

Na análise dos planejamentos não vamos considerar conversão do registro da língua natural para outro registro, quando esse é utilizado apenas como enunciado de uma atividade, isto é, o registro da língua natural visa dar uma “ordem”, pois a atividade só exige tratamentos em um determinado registro. Por exemplo:

- Escreva de dois modos diferentes cada um dos quocientes[15].

$$a)\,8 \div 10$$
$$b)\,4 \div 25$$
$$c)\,9 \div 8$$

Podemos observar, neste caso, que o registro da língua natural é utilizado com a intenção de explicar o que é para fazer na atividade, não exigindo uma transformação desse registro para outro, pois para resolver essa atividade torna-se necessário transformar os quocientes dados no registro numérico fracionário e convertê-los para o registro numérico decimal, ou seja, na letra a $8 \div 10 = \frac{8}{10} = 0{,}8$.

O organograma abaixo, busca descrever a organização desses critérios de análise.

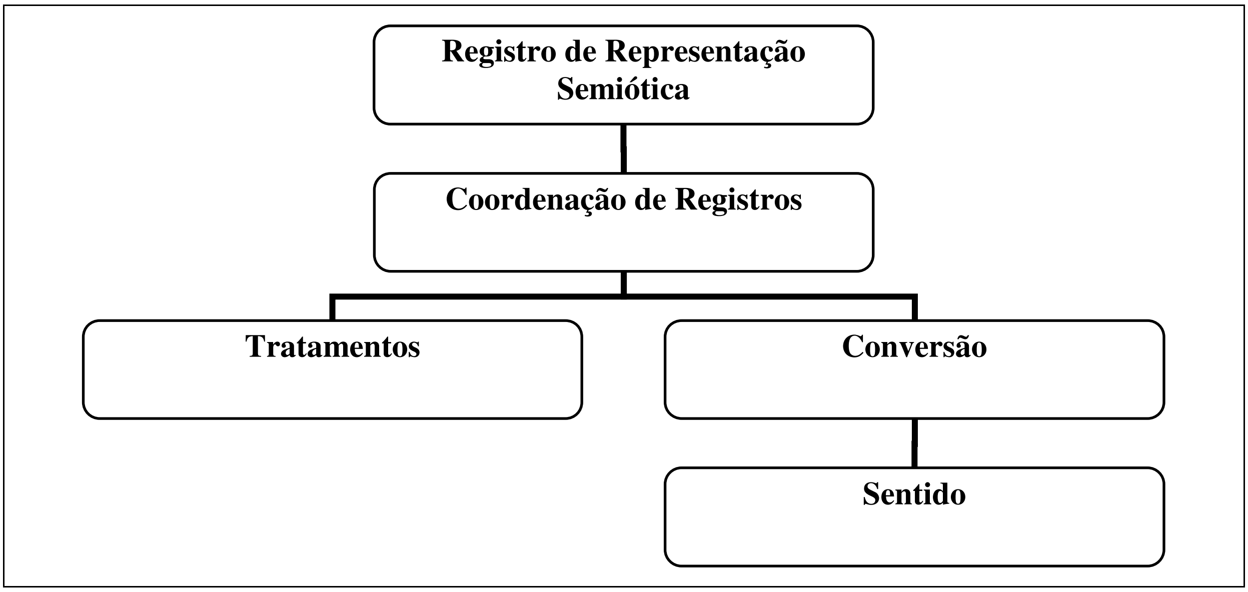


FIGURA - 3: Organograma de análise

---

[15] Este exemplo foi extraído do planejamento da professora B.

CAPÍTULO 3

O TRABALHO DIDÁTICO DE UM PROFESSOR: ANÁLISE DO PLANEJAMENTO

No capítulo anterior, apresentamos o contexto de nosso estudo e a metodologia empregada na coleta e análise dos dados. Com base nesses dados, o presente capítulo tem a intenção de realizar a análise sob a ótica dos registros de representação semiótica dos planejamentos de 4ª a 8ª séries, elaborados pela professora B. A análise será realizada por série e, para finalizar, apresentaremos uma síntese dos resultados desta investigação.

3.1 A ANÁLISE DO PLANEJAMENTO

Neste capítulo, o objetivo será analisar se os planejamentos elaborados, pela professora B, para ensinar o conceito de número racional potencializa a mobilização de vários registros de representação semiótica, bem como a coordenação entre eles, ou seja, verificar como são explorados os tratamentos e o sentido das conversões, por essa professora.

Ao longo da análise, sentimos necessidade de colocar alguns fragmentos do planejamento, com o intuito de esclarecer que são trechos selecionados pela professora para ensinar o número racional. Cabe ressaltar que, a professora prepara suas aulas por meio da seleção de conceitos, exemplos, atividades, ..., em vários livros didáticos, principalmente: "A Mais Nova Conquista da Matemática dos autores Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr.; "Construindo Consciências Matemáticas" dos autores Jackson e Elizabeth; "Matemática e Realidade" dos autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado; "Matemática na medida certa" dos autores Centurión, Jakubo e Lellis. Assim, os diários da professora, materiais que utilizamos para realizar a análise do planejamento de 4ª a 8ª séries, contêm várias folhas xerocadas, que podem ser caracterizadas como "recortes" de vários livros didáticos. Portanto, a principal fonte de referência para a elaboração dos planejamentos dessa professora é o livro didático.

3.1.1 O Planejamento da 4ª série

Os conteúdos relativos ao conceito de número racional começam a ser desenvolvidos pela professora no final da 4ª série, ao trabalhar o conceito de fração. Para tanto, a professora selecionou um texto que explora uma das necessidades das sociedades, ou seja, a necessidade de exprimir numericamente a medida de objetos. No texto, um menino usando seu palmo como unidade de medida (figura 4) mostra que nem sempre a unidade escolhida cabe um número inteiro de vezes no objeto a ser medido, por exemplo, ao medir o comprimento da mesa encontrou 6 palmos e mais metade de um palmo.

FIGURA – 4: Palmo como unidade de medida[16]

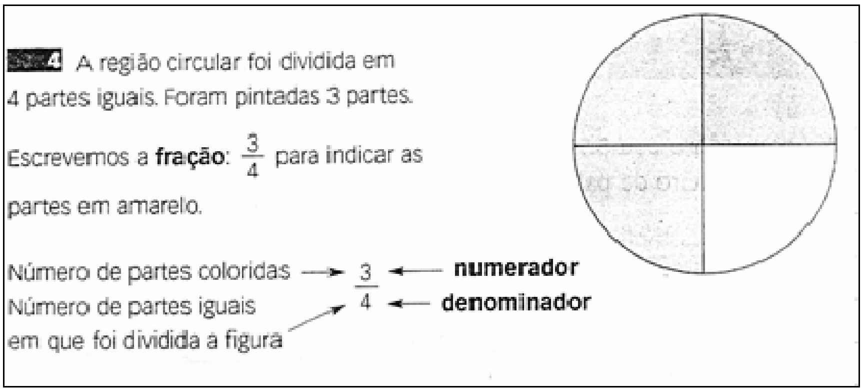
A questão do texto é como representar numericamente "metade de um palmo", pois até então o campo numérico conhecido é o dos números naturais. Por meio de uma fração: $"\frac{1}{2}\,palmo"$ é a resposta dada pelo texto, sem explorar o conceito de fração e a necessidade de criação de um novo campo numérico, os racionais. Nesta introdução, percebemos aspectos relacionados ao surgimento do saber matemático número racional, ou seja, a necessidade de medir uma grandeza (comprimento), quando o dividendo não é múltiplo do divisor. No entanto, os problemas envolvendo a medida de uma grandeza, problemas esses que deram origem aos números racionais, oferecendo, conforme os PCN, bons contextos para seu ensino, foram desconsiderados pela professora, pois não observamos outra atividade deste tipo nem nesta e nem nas séries posteriores.

Na seqüência do planejamento a professora apresenta como título "*Números Racionais: representação fracionária*" e passa a explorar o significado parte/todo da fração,

---

[16] As figuras presentes neste capítulo foram extraídas do planejamento da professora B e foram identificadas conforme a nomenclatura utilizada por ela para ensinar o número racional.

por meio de figuras divididas em partes iguais (figura 5), destacando quantas partes o todo foi dividido (denominador) e quantas destas partes foram tomadas (numerador). Como podemos observar na figura abaixo, os registros envolvidos são o numérico e o figural e as quantidades são contínuas.



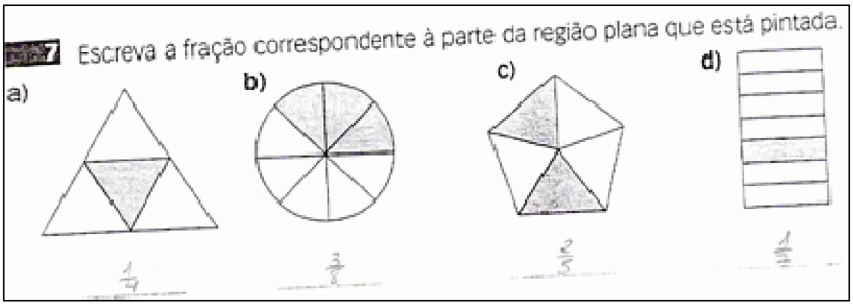
4 A região circular foi dividida em 4 partes iguais. Foram pintadas 3 partes.

Escrevemos a **fração**: $\frac{3}{4}$ para indicar as partes em amarelo.

Número de partes coloridas → 3 ← **numerador**
Número de partes iguais em que foi dividida a figura → 4 ← **denominador**

FIGURA – 5: Região circular dividida em partes iguais

As atividades propostas solicitam uma conversão do registro figural para o numérico (representação fracionária). Mas como podemos observar na figura 6, para resolvê-las o aluno pode utilizar do método da dupla contagem[17], pois nenhuma figura apresenta a idéia de conservação da área[18].



7 Escreva a fração correspondente à parte da região plana que está pintada.

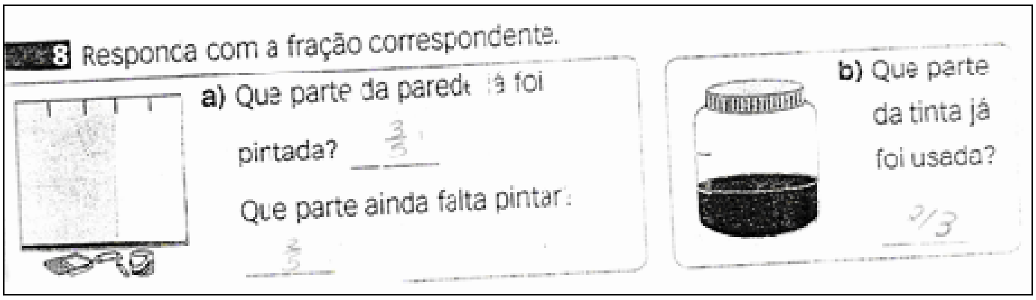
FIGURA – 6: Figuras geométricas divididas em partes iguais (a)

O significado parte/todo continua sendo explorado por meio da conversão dos registros figural e numérico (representação fracionária), o que muda em relação à outra atividade é que nessa (figura 7) foi solicitada a representação fracionária da parte pintada e da não pintada. As quantidades envolvidas são contínuas.

---

[17] Este método consiste em contar quantas partes o todo foi dividido (denominador) e o número de partes tomadas (numerador).

[18] Levar em conta o tamanho ou grandeza das partes envolvidas.



8 Responca com a fração correspondente.

a) Que parte da parede já foi pirtada? $\frac{3}{5}$

Que parte ainda falta pintar? $\frac{2}{5}$

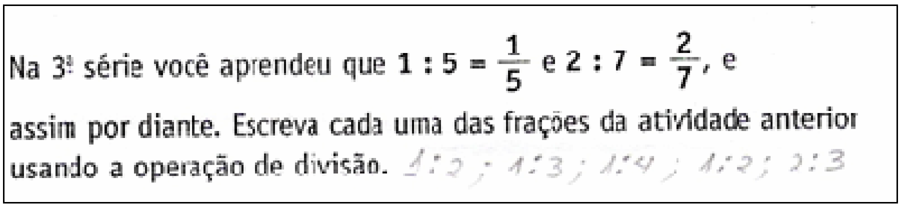
b) Que parte da tinta já foi usada? 2/3

FIGURA – 7: Objetos divididos em partes iguais (a)

Para dar continuidade, a professora trabalha algumas situações do dia-a-dia que envolvem frações, por meio de um texto em quadrinhos. A primeira situação cuja representação fracionária é: $\frac{8}{2}$, envolve o significado de quociente, pois expressa: "*Eu tinha oito adesivos e dei metade para minha amiga*".

As questões referentes às situações propostas são apresentadas em língua natural, por exemplo, *"A parte de chocolate que André e seus amigos ganharam"*, exigindo uma conversão do registro na língua natural para o registro fracionário[19].

A atividade mostrada na figura 8 traz o significado quociente, ou seja, revela que a representação fracionária assume alguns significados dependendo do contexto.



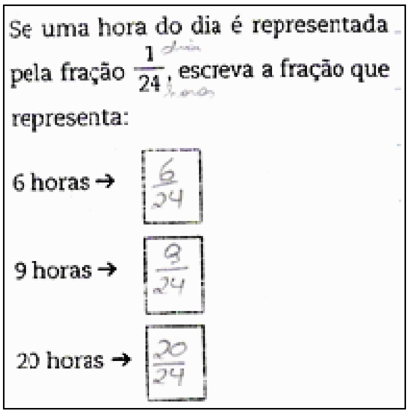
Na 3ª série você aprendeu que $1 : 5 = \frac{1}{5}$ e $2 : 7 = \frac{2}{7}$, e assim por diante. Escreva cada uma das frações da atividade anterior usando a operação de divisão. 1:2 ; 1:3 ; 1:4 ; 1:2 ; 2:3

FIGURA – 8: Fração como quociente

Para trabalhar esse significado a professora escolhe 3 atividades que podem ser resolvidas por meio do tratamento no registro fracionário, por exemplo, a atividade mostrada na figura 9.

---

[19] Quando utilizamos este termo estamos nos referindo ao registro numérico na representação fracionária.



Se uma hora do dia é representada pela fração $\frac{1}{24}$, escreva a fração que representa:

6 horas → $\frac{6}{24}$

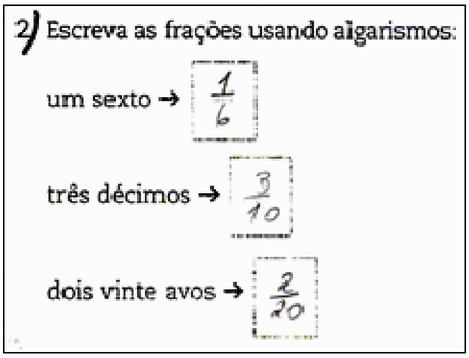
9 horas → $\frac{9}{24}$

20 horas → $\frac{20}{24}$

FIGURA – 9: Frações das horas do dia

A partir de então a professora começa a explorar atividades direcionadas a leitura de frações. Por meio de nossa análise verificamos que, para indicar a necessidade de ampliação do campo numérico dos naturais para os racionais a professora buscou explicar pelo surgimento histórico desse conjunto numérico, ou seja, a necessidade de exprimir numericamente a medida de objetos, porém esse significado não foi mais explorado, pois em seguida é apresentado o significado parte/todo; sendo essa idéia a mais trabalhada nas atividades, por meio das conversões entre o registro figural e o registro numérico (representação fracionária). O registro algébrico $\frac{a}{b}$ não aparece no planejamento da 4ª série.

As atividades que exploram a leitura de uma fração envolvem, principalmente, a conversão do registro numérico (representação fracionária) para o registro na língua natural e vice-versa. Como, por exemplo, a atividade reproduzida (figura 10):



2) Escreva as frações usando algarismos:

um sexto → $\frac{1}{6}$

três décimos → $\frac{3}{10}$

dois vinte avos → $\frac{2}{20}$

FIGURA – 10: Leitura de frações

Com o auxílio de material manipulável (discos fracionários)[20] a professora trabalhou, uma atividade composta por 5 tarefas, que permite a conversão entre os registros figural e

---

[20] São círculos cortados em papel cartão colorido, contendo um inteiro, a metade, a terça parte, a quarta parte do inteiro, ...

numérico (representação fracionária). Para analisar esta atividade vamos considerar o material manipulável elaborado pela professora como um registro figural, visto que esses foram representados na forma figural, pois conforme Duval (2003, p. 14), os objetos matemáticos não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis, eles necessitam de um sistema de representação para designá-los.

Nesta atividade, primeiramente, é proposto que o inteiro seja dividido em duas partes iguais, solicitando a denominação de cada parte (registro na língua natural) e quantas partes são necessários para compor um inteiro, dois inteiros, três inteiros, entre outros. Este tipo de tarefa permite a mobilização da reversibilidade da dupla contagem das partes, ou seja, se para obter metade da figura, realizamos a divisão em duas partes de mesma área, então, quando possuímos apenas uma dessas, torna-se necessário realizar o caminho inverso para obter o inteiro.

A tarefa seguinte exige a representação fracionária de cada parte e questiona se o numeral representado é natural. Segundo o registro da professora a resposta dada a questão é "*não, porque é um número fracionário, isto é, um número racional*". Neste caso, pelos encaminhamentos propostos, não foi explorado o que se entende por número fracionário e por número racional, fazendo uma "confusão" de terminologias e significados. Pois, conforme Silva (2005) o termo número fracionário pode ser utilizado para indicar aquele que pode ser representado por uma classe de frações, $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$ e a,b pertencentes a um anel de integridade, se tratando do Ensino Fundamental, a *e* b podem ser números reais ou polinômios. Essa confusão na terminologia utilizada conduz a uma confusão entre o objeto representado (número racional) e o seu representante (representação fracionária), principalmente quando estamos trabalhando com o campo dos racionais, pois manipulam-se representações do mesmo tipo para indicar um mesmo número, por exemplo $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{5}{10}, \ldots$ todas representam o número racional $\frac{1}{2}$. Duval (2003) chama a atenção para que, ocorra a aprendizagem em matemática torna-se necessário não confundir o objeto e sua representação.

Por meio da composição de partes foi explorada a idéia de equivalência, isto é, com quatro partes podemos formar 2 inteiros, cuja representação fracionária $\frac{4}{2}$; com uma parte é possível formar $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4}$.

A professora propôs ainda, a realização de algumas operações (figura 11) por meio da conversão do registro figural para o numérico (representação fracionária), por exemplo, "duas vezes um inteiro"; entre outros. Esta tarefa pode potencializar a compreensão, pela visualização no registro figural de que multiplicar com números racionais nem sempre aumenta.

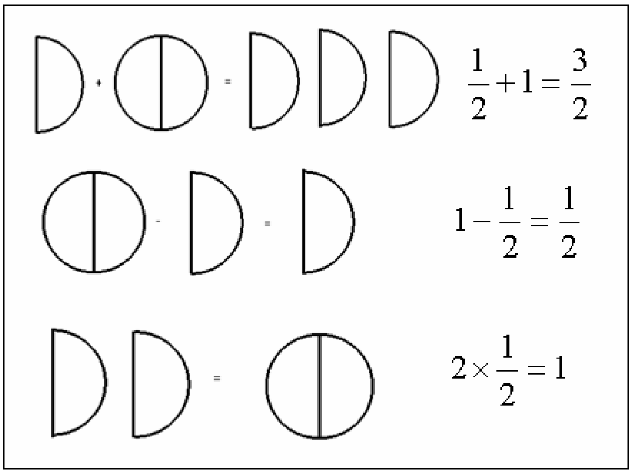


FIGURA – 11: Operações com material manipulável

A última tarefa planejada envolve a representação de números racionais na reta numérica. É a primeira vez que a professora propõe um trabalho com reta, solicitando a localização dos meios, isto é, o número racional que divide os intervalos ao meio [0, 1]; [1, 2]; [3, 4]; ... A descoberta dos meios foi realizada pela idéia de média aritmética, por exemplo, o número racional que divide o intervalo [3, 4] ao meio é $\frac{3+4}{2}=\frac{7}{2}$.

Esta atividade explora aspectos até então não trabalhados pela professora, por este motivo em uma das entrevistas questionamos sobre a elaboração de tal atividade. Segundo ela foi outra professora da escola quem organizou as questões tanto que, não sabia dizer a fonte utilizada para a elaboração.

Ao terminar a atividade com discos fracionários a professora retoma o trabalho com o significado parte/todo.

1) Gabriel comprou uma barra de chocolate da marca Choco:

FIGURA – 12: Objeto dividido em partes iguais (b)

Na atividade da figura 12, pede-se para identificar quantas partes formam o todo, quantas partes estão marcadas com letras, o que indica o número oito (denominador), qual fração corresponde ao chocolate todo. Esta atividade pode ser resolvida pela dupla contagem e envolve a conversão do registro figural para o registro numérico (representação fracionária). Assim como, as figuras geométricas (figura 13) apresentadas para escrever a fração correspondente a parte colorida. Nenhum dos casos envolve a necessidade da conservação da área, imprescindível para a compreensão do significado parte/todo.

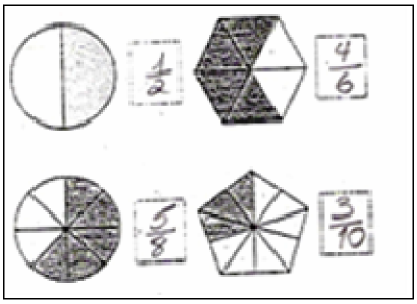
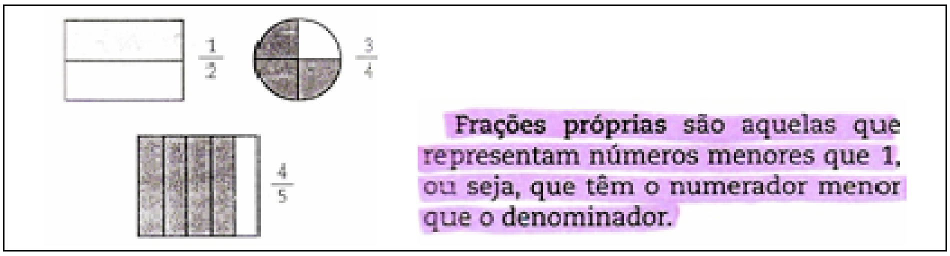


FIGURA – 13: Figuras geométricas divididas em partes iguais (b)

Quando a professora vai trabalhar o tópico tipos de frações, previsto nos planos de ensino, ela utiliza os registros figural (quantidades contínuas), numérico na representação fracionária, bem como a língua natural para explicitar as regras de classificação das frações. Como podemos observar na figura 14.



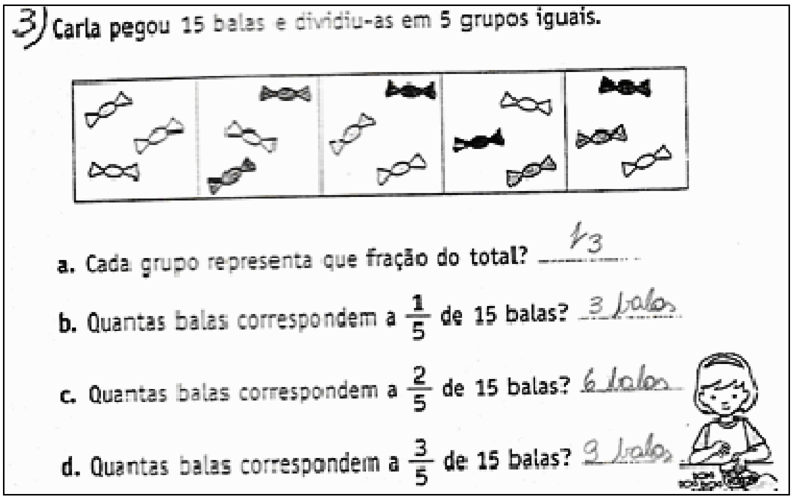
Frações próprias são aquelas que representam números menores que 1, ou seja, que têm o numerador menor que o denominador.

FIGURA – 14: Regra para determinar frações impróprias

A forma como a professora apresenta esse tópico não permite ao aluno fazer conjecturas, observar as características, pois os registros já são dados prontos. Seria interessante apresentar várias frações no registro figural e solicitar o registro numérico (representação fracionária), em seguida, solicitar que os alunos observem se as frações formam inteiros ou não, bem como se formam inteiros e algumas partes para então construir uma regra no registro da língua natural para classificar as frações, possibilitando aos alunos mobilizar vários registros de representação para o mesmo objeto matemático.

As atividades propostas para desenvolver a classificação das frações, requerem que o aluno classifique algumas frações (no registro numérico) nomeadas por própria, imprópria ou aparente. O aluno pode resolver essas atividades sem entender o significado de cada tipo, apenas analisando o valor do numerador e do denominador, sugeridos pelas regras dadas. Este procedimento pode levar o aluno a pensar a fração não como um número, mas como um número sobre o outro.

A professora termina o trabalho com o conceito de número racional nessa série propondo sete atividades de revisão. A primeira atividade explora o entendimento de numerador e denominador, por meio dos registros: numérico (representação fracionária) e língua natural. A segunda apresenta grandezas contínuas, no registro figural, com as repartições já realizadas, cabendo ao aluno identificar/contar o número de partes que o todo foi dividido e o número de partes que foram tomadas, para converter do registro figural para o numérico (representação fracionária). Já as demais atividades envolvem o significado parte/todo e requerem, também, a conversão do registro figural para o numérico (representação fracionária), porém a quantidade é discreta. Como podemos perceber na figura 15.



3) Carla pegou 15 balas e dividiu-as em 5 grupos iguais.

a. Cada grupo representa que fração do total? 1/3

b. Quantas balas correspondem a $\frac{1}{5}$ de 15 balas? 3 balas

c. Quantas balas correspondem a $\frac{2}{5}$ de 15 balas? 6 balas

d. Quantas balas correspondem a $\frac{3}{5}$ de 15 balas? 9 balas

FIGURA – 15: Grandeza discreta dividida em partes iguais (a)

Acreditamos que, pela forma como foi apresentado o registro figural, levou a professora a cometer um dos raros enganos observados, ao responder a questão ”a” com a resposta $\frac{1}{3}$, sendo que o correto seria $\frac{1}{5}$, imaginamos que ela tenha considerado um item do grupo e não um grupo do todo.

Como mencionamos o último conteúdo trabalhado pela professora na 4ª série foi frações. Nesta série foram trabalhados ainda: Sistema de Numeração Decimal (ordens, classes e valor posicional), o estudo das operações (múltiplos, divisores, divisibilidade, números primos). Estava previsto nos planos de ensino, o trabalho com a idéia de número misto na 4ª série, mas não foi trabalhado pela professora. Além disso, não foi trabalhado o registro numérico representação decimal, talvez porque o enfoque desta série esteja nas representações fracionárias e não nos números racionais. Segundo informações obtidas em uma das entrevistas realizadas com a professora não está previsto no plano de ensino para a 4ª série o trabalho com números decimais. Este conteúdo está previsto no plano de ensino da 5ª série, o qual será abordado a seguir.

3.1.2 O Planejamento da 5ª série

A professora retoma o trabalho com frações, no início da 5ª série, envolvendo os alunos, numa atividade de divisão de uma folha em partes iguais, pintando uma dessas partes (figura 16), cuja intenção era identificar qual fração representa a parte pintada.

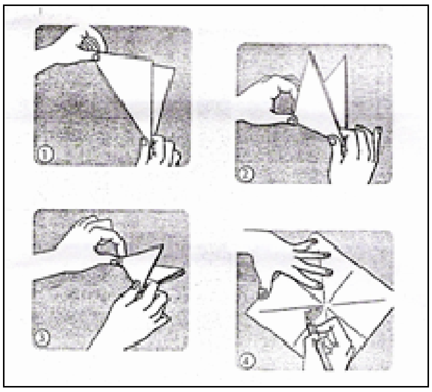


FIGURA – 16: Material manipulável para explicar partes de um inteiro

O trabalho segue com um exemplo (figura 17) envolvendo o registro figural e o registro fracionário, cujo significado presente é parte/todo. No registro fracionário são identificados numerador e denominador, após a definição dada para fração, expressa no registro da língua natural: “*um número que pode representar parte de uma unidade ou de uma* *quantidade que foi dividida em partes iguais*". Não havendo a articulação com o registro algébrico $\frac{a}{b}, a\ e\ b \in N, com\ b \neq 0$.

Estudando frações

A figura a seguir está dividida em partes iguais. **João pintou algumas dessas partes.**

A figura está dividida em 9 partes, das quais João pintou 5. Considerando essa figura 1 inteiro, podemos representar as partes pintadas pela **fração** ao lado:

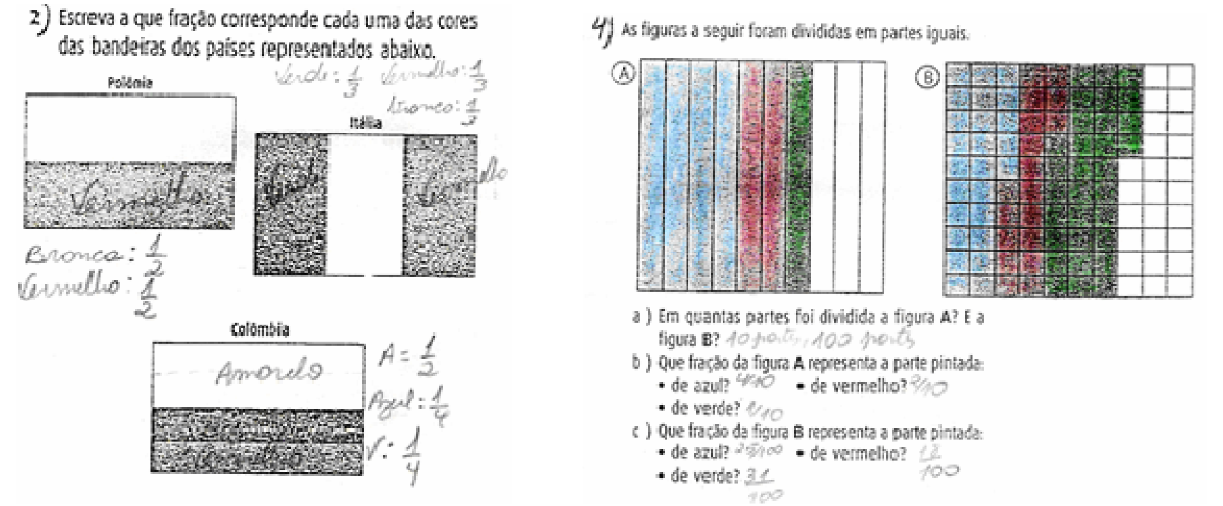
partes pintadas → 5 ← numerador
quantidade de partes em que a figura está dividida → 9 ← denominador

Saiba que...

Fração é um número que pode representar parte de uma unidade ou de uma quantidade que foi dividida em partes iguais.

FIGURA – 17: Definição de fração

As atividades selecionadas para explorar o conceito de fração proporcionam a conversão entre os registros figural e fracionário, sendo que o significado envolvido é parte/todo. As oito atividades propostas podem ser resolvidas pelo processo da dupla contagem, ou seja, conta-se o número de partes em que o todo foi dividido e o número de partes que foram tomadas. Como podemos observar nas atividades mostradas pela figura 18.



2) Escreva a que fração corresponde cada uma das cores das bandeiras dos países representados abaixo.

Verde: $\frac{1}{3}$ Vermelho: $\frac{1}{3}$
Branco: $\frac{1}{3}$

Branca: $\frac{1}{2}$
Vermelho: $\frac{1}{2}$

A = $\frac{1}{2}$
Azul: $\frac{1}{4}$
V: $\frac{1}{4}$

4) As figuras a seguir foram divididas em partes iguais.

a) Em quantas partes foi dividida a figura **A**? E a figura **B**? 10 partes, 100 partes

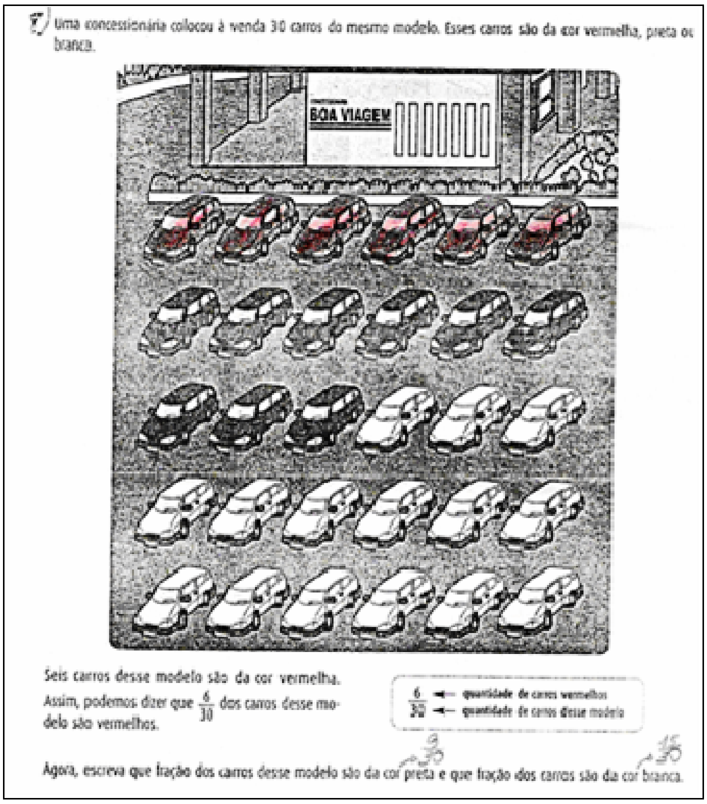
b) Que fração da figura **A** representa a parte pintada:
- de azul? 4/10
- de vermelho? 2/10
- de verde? 1/10

c) Que fração da figura **B** representa a parte pintada:
- de azul? 25/100
- de vermelho? $\frac{12}{100}$
- de verde? $\frac{31}{100}$

FIGURA – 18: Objetos divididos em partes iguais (c)

Dentre essas atividades é também explorada, por meio da atividade 4, a idéia de fração decimal, como: “toda fração cujo denominador é 10,100,1000,...“, bem como a leitura de uma fração com base no número que aparece no denominador. Para isso, foram utilizados exemplos de números no registro fracionário e da língua natural, mostrando como se realiza a leitura de frações com denominadores menores que 10, denominadores iguais a potência de base dez e maiores que dez, diferentes de 100 e 1000. Verificamos que não há uma ligação com a representação decimal para esses números, dando a idéia que a fração é um tipo de número e não uma representação para os números racionais.

Nesta primeira parte do trabalho as grandezas envolvidas nas atividades selecionadas, pela professora, para enfocar o significado parte/todo são grandezas contínuas, com exceção para a atividade que envolve a venda de carros (figura 19). A questão requer assim como as anteriores a representação fracionária do número de carros da cor preta e da cor branca, por meio da conversão do registro figural para o numérico, mas podemos perceber que a questão pode ser realizada pela dupla contagem.


7) Uma concessionária colocou à venda 30 carros do mesmo modelo. Esses carros são da cor vermelha, preta ou branca.

Seis carros desse modelo são da cor vermelha. Assim, podemos dizer que $\frac{6}{30}$ dos carros desse modelo são vermelhos.

$\frac{6}{30}$ ← quantidade de carros vermelhos
← quantidade de carros desse modelo

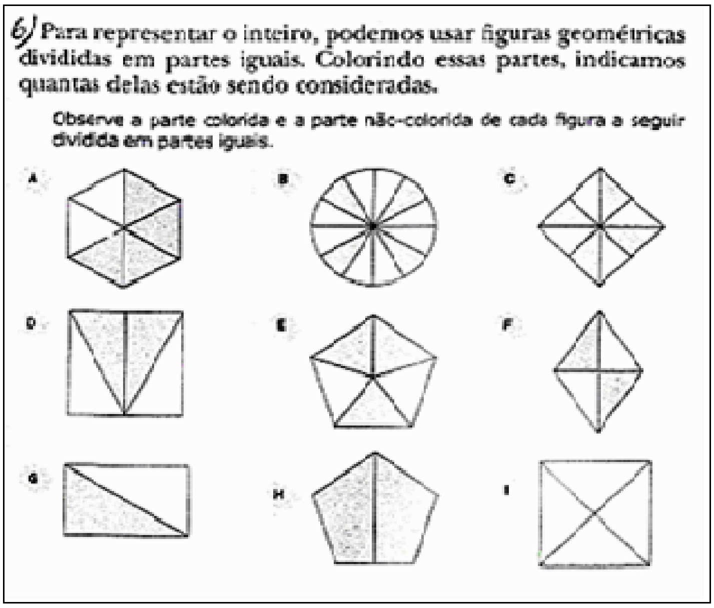
$\frac{9}{30}$ $\frac{15}{30}$

Agora, escreva que fração dos carros desse modelo são da cor preta e que fração dos carros são da cor branca.

FIGURA – 19: Grandeza discreta dividida em partes iguais (b)

Podemos observar que, a noção de fração até então trabalhada é de: uma ou mais partes iguais de uma unidade, sendo essa unidade, carros, cores das bandeiras de países, figuras geométricas. Não há, portanto, uma ligação entre a noção de fração e a medição de grandezas. O que denota um enfraquecimento da ligação entre fração e medição de grandezas, não envolvendo mais a idéia de comensurabilidade dos números racionais.

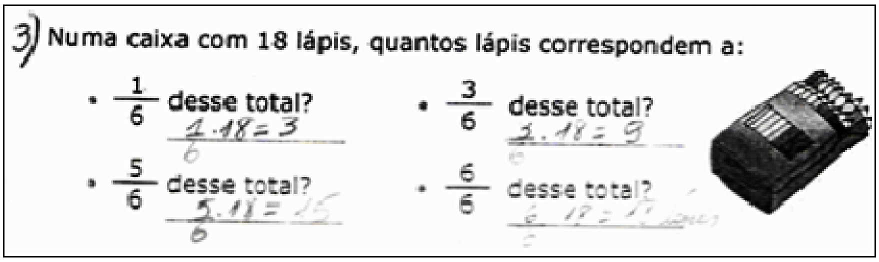
Ainda explorando o significado parte/todo a professora seleciona algumas figuras geométricas divididas em partes iguais (figura 20), para os alunos determinarem a representação fracionária da parte colorida e da não-colorida, por meio da conversão do registro figural para o numérico. Percebemos que, prevalecem na apresentação inicial das frações, as grandezas contínuas. Essas, ainda, aparecem comumente por meio das figuras geométricas, como mostra a figura abaixo, os cortes são padronizados e simétricos, induzindo o aluno a resolver pela dupla contagem. Talvez fosse interessante um trabalho com cortes não convencionais e as partes com tamanhos e formas diferentes, potencializando ao aluno descobrir outras relações que não apenas a da congruência entre as partes como, por exemplo, a igualdade entre as partes pode estar nas formas das partes, bem como nas áreas dessas mesmas partes (ROMANATTO, 1997).


6) Para representar o inteiro, podemos usar figuras geométricas divididas em partes iguais. Colorindo essas partes, indicamos quantas delas estão sendo consideradas.

Observe a parte colorida e a parte não-colorida de cada figura a seguir dividida em partes iguais.

FIGURA – 20: Figuras geométricas divididas em partes iguais (c)

Em seguida, são selecionadas 4 atividades que envolvem grandezas discretas e o significado operador multiplicativo. Nesse tipo de grandeza o operador multiplicativo atua como um multiplicador/divisor, já nas grandezas contínuas funciona como uma máquina que reduz ou amplia essa grandeza no processo (MOUTINHO, 2005, p.36). A atividade mostrada pela figura 21 pode ser resolvida por tratamentos no registro numérico, utilizando processos de multiplicação e divisão. Os processos para encontrar os resultados dessas atividades são diferentes dos utilizados nas atividades trabalhadas anteriormente, pois antes bastava saber em quantas partes o todo foi dividido e quantas dessas partes foram consideradas.



3) Numa caixa com 18 lápis, quantos lápis correspondem a:

- $\frac{1}{6}$ desse total? $\frac{1 \cdot 18}{6} = 3$
- $\frac{3}{6}$ desse total? $\frac{3 \cdot 18}{6} = 9$
- $\frac{5}{6}$ desse total? $\frac{5 \cdot 18}{6} = 15$
- $\frac{6}{6}$ desse total? $\frac{6 \cdot 18}{6} = 18$ [illegible]

FIGURA – 21: Grandeza discreta dividida em partes iguais (c)

Nesta atividade, o desenho da caixa de lápis não pode ser considerado como um registro figural, pois não permite o tratamento, é só uma ilustração da situação.

A explicação dada para essa situação foi que ao conhecer um todo (o número de unidades de uma coleção) o aluno tem a oportunidade de determinar parte ou partes desse todo, representando as relações com frações. Ou seja, percebemos aqui a tentativa de explicar para o aluno que há diferentes significados que podem ser representados por uma mesma notação $\frac{a}{b}$.

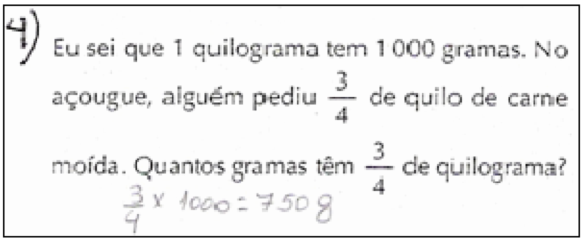
Na tentativa de explorar os diferentes significados assumidos pelos números racionais a professora seleciona 6 atividades que exploram o significado quociente. Uma das atividades (figura 22) requer a conversão do registro numérico (representação fracionária) para o figural, as demais exigem a conversão do figural para o numérico.

No seu caderno, represente graficamente as frações: $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{2}$

FIGURA – 22: Representação gráfica das frações

Pela resolução da professora, observamos um equívoco, pois ao representar $\frac{1}{3}$ no registro figural, acabou representando $\frac{1}{4}$. Além disso, as representações geométricas não favorecem a comparação entre os números racionais a serem representados, talvez se fossem utilizadas figuras na forma de pizza, para todos os números, exceto $\frac{1}{3}$, facilitaria a comparação entre os números representados.

Pela primeira vez, constatamos no planejamento da professora referências aos números racionais, ao explicar que as representações gráficas das frações, utilizadas para resolver as atividades mostradas figura 20 e 21, ajudam a compreender as diferentes situações em que aparecem os números racionais. No entanto, não há maiores explicações/definições para o que sejam esses números, pois a professora dá seqüência ao seu planejamento selecionando mais 9 atividades envolvendo o significado operador multiplicativo, sendo que a maioria delas pode ser resolvida por tratamentos no registro numérico. Como podemos observar na figura 23.

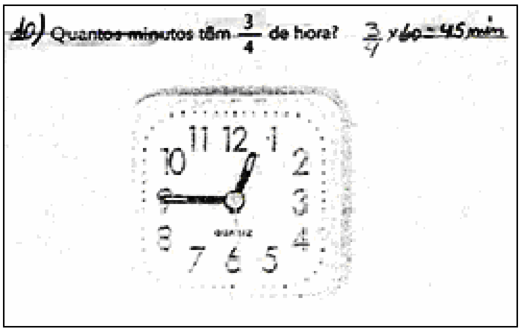


4) Eu sei que 1 quilograma tem 1 000 gramas. No açougue, alguém pediu $\frac{3}{4}$ de quilo de carne moída. Quantos gramas têm $\frac{3}{4}$ de quilograma?

$\frac{3}{4} \times 1000 = 750$ g

FIGURA – 23: Operador multiplicativo (a)

Constatamos que, ao trabalhar o significado operador multiplicativo com grandezas contínuas não há referências de que foi explorada a idéia que esse significado, nessas grandezas, funciona como uma máquina de transformação, bem como a presença de figuras ilustrativas nas atividades, não podem ser classificadas como registros de representação. Conforme podemos observar na figura 24.

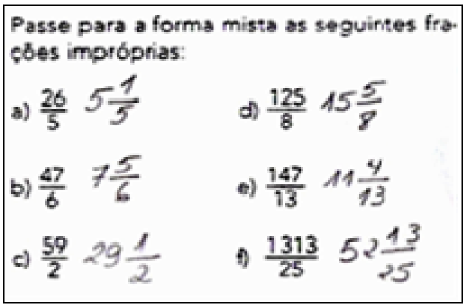


10) Quantos minutos têm $\frac{3}{4}$ de hora? $\frac{3}{4} \times 60 = 45$ min

FIGURA – 24: Operador multiplicativo (b)

Para retomar os três tipos de frações a professora buscou atividades que envolvessem os registros figural, numérico e língua natural. No entanto, assim como na 4ª série o enfoque dado é para os números que aparecem no numerador e no denominador. Como podemos verificar na explicação dada a frações impróprias: "... são aquelas em que o numerador é maior ou igual ao denominador.”. As atividades escolhidas para trabalhar os três tipos de frações, 13 ao total, envolvem os registros figural e numérico.

A forma mista de representar uma fração imprópria é trabalhada pela professora, por tratamentos no registro numérico, utilizando-se do algoritmo da divisão, ou seja, a explicação dada pela professora para representar uma fração na forma mista: “basta dividir o numerador pelo denominador”. Verificamos que não foi explorada a transformação de uma fração na forma mista pela decomposição do numerador, por exemplo, $\frac{17}{10}=\frac{10}{10}+\frac{7}{10}=1\frac{7}{10}$. No entanto, para transformar um número misto em fração imprópria os procedimentos adotados foram: transformar o número natural em fração aparente, utilizando o mesmo denominador da parte fracionária. Esses procedimentos podem ficar sem significado para o aluno, pois não foi proposto o trabalho nos dois sentidos (decomposição do numerador e transformação do número natural em fração). As 4 atividades envolvendo a forma mista requerem tratamentos no registro numérico, observamos estes tratamentos na figura 25.



Passe para a forma mista as seguintes frações impróprias:

a) $\frac{26}{5}$ $5\frac{1}{5}$

b) $\frac{47}{6}$ $7\frac{5}{6}$

c) $\frac{59}{2}$ $29\frac{1}{2}$

d) $\frac{125}{8}$ $15\frac{5}{8}$

e) $\frac{147}{13}$ $11\frac{4}{13}$

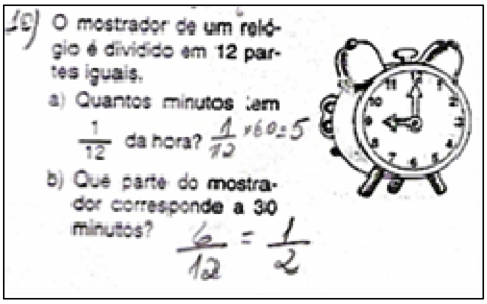
f) $\frac{1313}{25}$ $52\frac{13}{25}$

FIGURA – 25: Forma mista das frações

Constatamos que, a professora trabalha cada tópico proposto pelo plano de estudos, por meio de várias atividades, assim, as explicações e ampliações dos conceitos surgem, geralmente, entre as atividades. Além disso, a revisão dos conteúdos trabalhados é realizada normalmente no final de cada três tópicos.

Até então, na 5ª série, foram explorados os seguintes assuntos: noção de fração, nomenclatura, representação e tipos de frações. Observamos que, estes mesmos tópicos foram trabalhados no final da 4ª série. Por meio de uma análise comparativa entre os dois planejamentos verificamos, em alguns momentos, enfoques diferenciados visto que a noção de fração foi introduzida por meio de aspectos históricos na 4ª série, no entanto, esta perspectiva foi totalmente abandonada na 5ª série, na qual foram retomados os significados parte/todo e quociente de forma muito semelhante a realizada na série anterior o que nos leva a concluir que, aparentemente não existe a intenção de retomar e ampliar os conceitos já trabalhados.

Para revisar os tópicos desenvolvidos até o momento a professora seleciona 18 atividades. Nessas atividades, observamos mais uma vez, a preocupação de retomar os significados parte/todo, operador multiplicativo, bem como os tipos de frações e a forma mista de representar uma fração. Das 18 atividades, 10 exploram o significado operador multiplicativo, podendo ser resolvidas por tratamentos numéricos, como demonstra a figura 26.



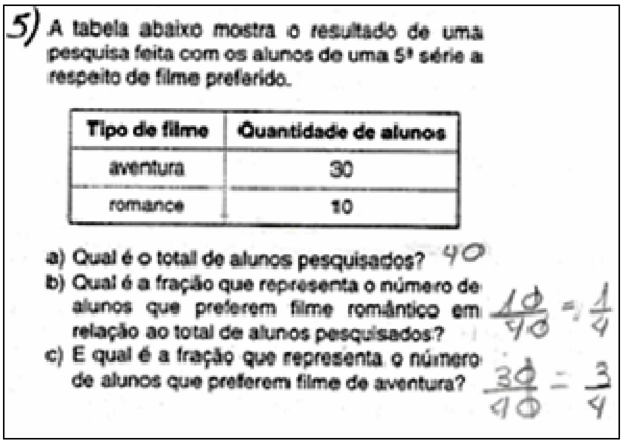
15) O mostrador de um relógio é dividido em 12 partes iguais.

a) Quantos minutos tem $\frac{1}{12}$ da hora? $\frac{1}{12} \times 60 = 5$

b) Que parte do mostrador corresponde a 30 minutos? $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

FIGURA - 26: Operador multiplicativo (c)

Dentre essas atividades observamos o uso de tabelas. Por exemplo, na atividade abaixo, para resolvê-la o aluno precisa converter do registro gráfico (tabela) para o registro fracionário.



5) A tabela abaixo mostra o resultado de uma pesquisa feita com os alunos de uma 5ª série a respeito de filme preferido.

Tipo de filme	Quantidade de alunos
aventura	30
romance	10

a) Qual é o total de alunos pesquisados? 40

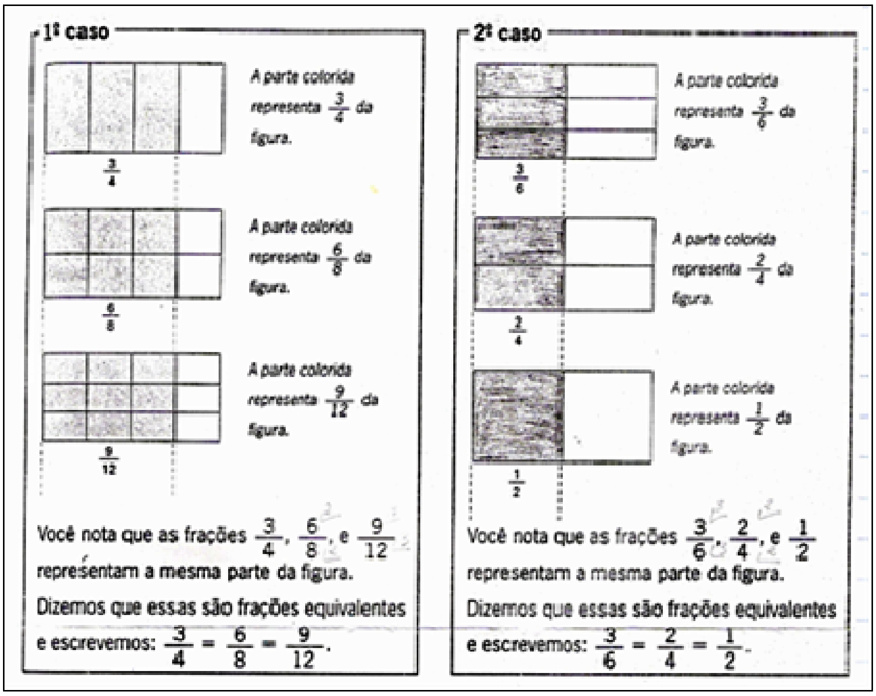
b) Qual é a fração que representa o número de alunos que preferem filme romântico em relação ao total de alunos pesquisados? $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

c) E qual é a fração que representa o número de alunos que preferem filme de aventura? $\frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

FIGURA – 27: Frações das variáveis da tabela

Para introduzir a comparação entre números racionais na representação fracionária, a professora utiliza círculos de papel, representando o inteiro, metade do inteiro, terça parte do inteiro, ..., com o intuito de levar os alunos a compreenderem que nas frações unitárias quanto menor é a peça, maior é o denominador da fração e vice-versa. E, ainda, quando os denominadores são iguais o menor é aquele que apresenta o menor numerador. Porém, não são propostas atividades que permitem verificar as diferenças e até mesmo as equivalências entre os números racionais, empregando os termos “é maior que”, “é menor que” ou “é igual a”, na língua natural. Observamos que, o termo número racional surge novamente no planejamento, mas continua sem maiores esclarecimentos ou explicações sobre sua definição.

A noção de equivalência é introduzida no registro figural, articulando-o com os diferentes registros fracionários, além de ser definida em língua natural “Duas ou mais frações que representam a mesma porção da unidade são chamadas frações equivalentes” (figura 28).



1º caso

A parte colorida representa $\frac{3}{4}$ da figura.

A parte colorida representa $\frac{6}{8}$ da figura.

A parte colorida representa $\frac{9}{12}$ da figura.

Você nota que as frações $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, e $\frac{9}{12}$ representam a mesma parte da figura.

Dizemos que essas são frações equivalentes e escrevemos: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$.

2º caso

A parte colorida representa $\frac{3}{6}$ da figura.

A parte colorida representa $\frac{2}{4}$ da figura.

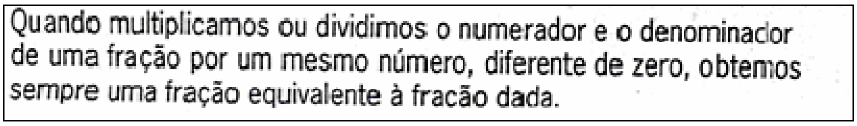
A parte colorida representa $\frac{1}{2}$ da figura.

Você nota que as frações $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{4}$, e $\frac{1}{2}$ representam a mesma parte da figura.

Dizemos que essas são frações equivalentes e escrevemos: $\frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

FIGURA – 28: Equivalência de frações

Nos exemplos, acima as frações equivalentes são encontradas com o auxilio do registro figural, possível de ser utilizado, porém existe a questão do “custo”, explorado por Duval em suas pesquisas, isto é, no registro figural os tratamentos são mais demorados. Seguindo essa idéia são apresentados, pela professora, tratamentos matemáticos no registro fracionário de modo a encontrar outras frações equivalentes as frações dadas sem a ajuda do registro figural, sendo enunciada em língua natural a propriedade fundamental das frações (figura 29). Essa propriedade pode ter “custo” reduzido, pois pode ser aplicada por meio de um tratamento no registro numérico.

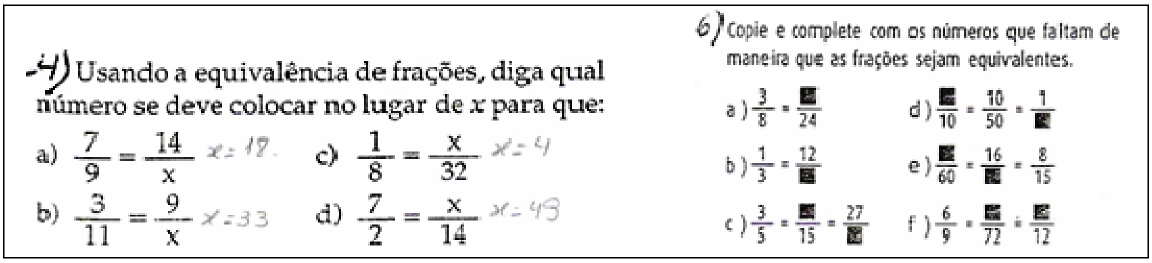


Quando multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, obtemos sempre uma fração equivalente à fração dada.

FIGURA – 29: Propriedade fundamental da equivalência

A possibilidade de troca de registro, conforme Duval (1993) potencializa efetuar tratamentos de uma forma mais econômica e mais poderosa. No entanto, para este autor a escolha do registro, pela maioria dos professores, envolve basicamente aqueles que podem ser enunciados por regras, no caso analisado, o registro escolhido é o numérico.

Para explorar a propriedade fundamental das frações a professora seleciona 17 atividades. Destas atividades, 13 envolvem tratamentos no registro fracionário. Duas das atividades (figura 30) apresentam indícios de registro algébrico, ou seja, na primeira o aluno deve descobrir o valor de x e na segunda aparecem quadrinhos que devem ser substituídos por números que tornam as frações equivalentes, aplicando a propriedade fundamental das frações; que mais uma vez foi trabalhada por meio de regras dadas no registro da língua natural, assim como ocorreu no planejamento da 4ª e 5ª séries quando esta professora abordou os tipos de frações.



4) Usando a equivalência de frações, diga qual número se deve colocar no lugar de x para que:

a) $\frac{7}{9} = \frac{14}{x}$ $x=17.$

b) $\frac{3}{11} = \frac{9}{x}$ $x=33$

c) $\frac{1}{8} = \frac{x}{32}$ $x=4$

d) $\frac{7}{2} = \frac{x}{14}$ $x=49$

6) Copie e complete com os números que faltam de maneira que as frações sejam equivalentes.

a) $\frac{3}{8} = \frac{\blacksquare}{24}$

b) $\frac{1}{3} = \frac{12}{\blacksquare}$

c) $\frac{3}{5} = \frac{\blacksquare}{15} = \frac{27}{\blacksquare}$

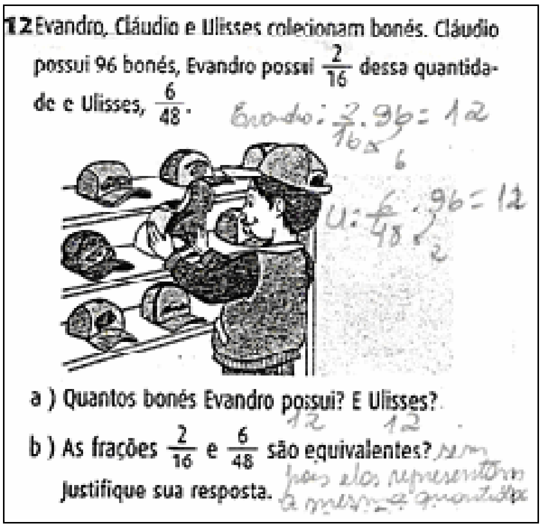
d) $\frac{\blacksquare}{10} = \frac{10}{50} = \frac{1}{\blacksquare}$

e) $\frac{\blacksquare}{60} = \frac{16}{\blacksquare} = \frac{8}{15}$

f) $\frac{6}{9} = \frac{\blacksquare}{72} = \frac{\blacksquare}{12}$

FIGURA – 30: Atividades sobre equivalência (a)

A atividade número doze (figura 31) potencializa, na letra “b”, a conversão do registro fracionário para o registro da língua natural, pouco explorada até aqui.



12 Evandro, Cláudio e Ulisses colecionam bonés. Cláudio possui 96 bonés, Evandro possui $\frac{2}{16}$ dessa quantidade e Ulisses, $\frac{6}{48}$.

Evando: $\frac{2}{16} \cdot 96 = 12$

U: $\frac{6}{48} \cdot 96 = 12$

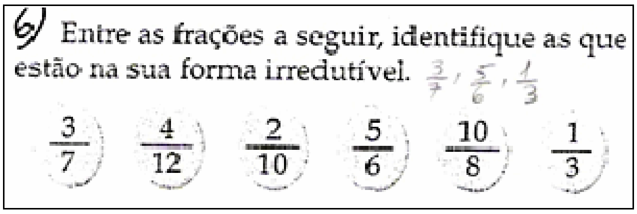
a) Quantos bonés Evandro possui? E Ulisses? 12 12

b) As frações $\frac{2}{16}$ e $\frac{6}{48}$ são equivalentes? sim

Justifique sua resposta. pois elas representam a mesma quantidade

FIGURA – 31: Atividades sobre equivalência (b)

O tópico simplificação de uma fração é trabalhado por meio da obtenção de frações equivalentes, ou seja, dividi-se numerador e denominador pelo mesmo número até encontrar números que não possuem divisores comuns, resultando numa fração irredutível. Portanto, a simplificação de uma fração requer tratamentos no registro numérico. Como podemos observar na atividade representada na figura 32.



6) Entre as frações a seguir, identifique as que estão na sua forma irredutível. $\frac{3}{7}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}$

$\frac{3}{7}$ $\frac{4}{12}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{10}{8}$ $\frac{1}{3}$

FIGURA - 32: Atividades sobre frações irredutíveis

Para finalizar os tópicos de comparação, equivalência e simplificação de frações a professora seleciona 8 atividades de revisão. Entre elas a atividade da figura 33, que para ser resolvida exige somente tratamentos no registro numérico.

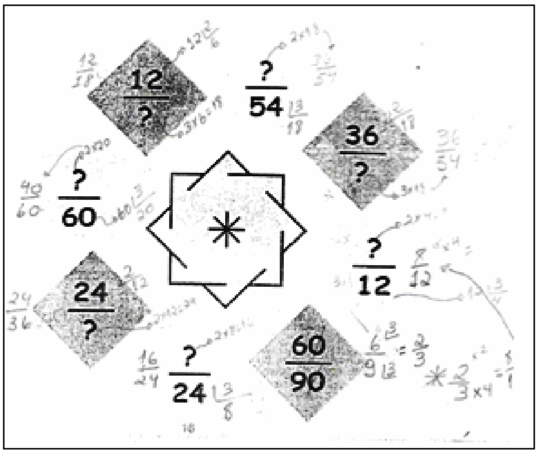


FIGURA – 33: Um giro pelos quadrados

No trabalho desenvolvido até o momento, especialmente, com a propriedade da equivalência, constatamos que, foram privilegiados os tratamentos no registro fracionário. As conversões são, geralmente, do registro figural (grandeza contínua) para o registro numérico. Os significados envolvidos na maioria das atividades foram parte/todo e operador multiplicativo. Em alguns casos, podemos observar a tentativa de explorar a conversão entre outros registros como: do registro numérico para o da língua natural, do registro algébrico para o fracionário.

Durante o trabalho com a simplificação de frações há uma grande ênfase para os tratamentos no registro fracionário, pois das 10 atividades selecionadas para explorar essa noção, 7 só exigem tratamentos nesse registro, as demais envolvem a conversão do registro figural para o fracionário. Além disso, podemos verificar que, a reta numérica não foi trabalhada, nem quando foi explorada a equivalência de frações, momento em que se poderia explorar que todos os racionais podem ser representados por um ponto na reta. A questão da comensurabilidade que poderia ser explicada nesse momento também não foi. Observamos que, na 4ª série entre as atividades desenvolvidas apenas uma explorou a localização de números racionais na reta.

O próximo tópico desenvolvido pela professora, é a redução de frações ao mesmo denominador comum. Neste tópico, constatamos a presença de terminologias diferentes para tratar de números racionais na representação fracionária, pois consta no diário da professora a seguinte explicação "Ao comparar números fracionários escritos na forma de fração, utilizamos figuras ou a idéia de frações equivalentes, ...". No entanto, destacamos mais uma vez que, ainda não há definições para número racional, utilizado freqüentemente nos enunciados das atividades e agora surgem números fracionários também sem explicações. Isso pode gerar uma confusão entre o objeto matemático (número racional) e suas representações (representação fracionária), dificultando a compreensão desse conceito por parte dos alunos. Além disso, pode aumentar as dificuldades dos alunos perceberem que um número racional pode ser representado por uma fração, pois a professora não enfatizou o significado número para as frações.

A necessidade de reduzir frações ao mesmo denominador comum, surge pela dificuldade de comparar frações com denominadores diferentes. Portanto, os procedimentos de como realizar a redução são explicados pela professora no registro da língua natural (figura 34), seguidos de exemplos com tratamentos no registro numérico.

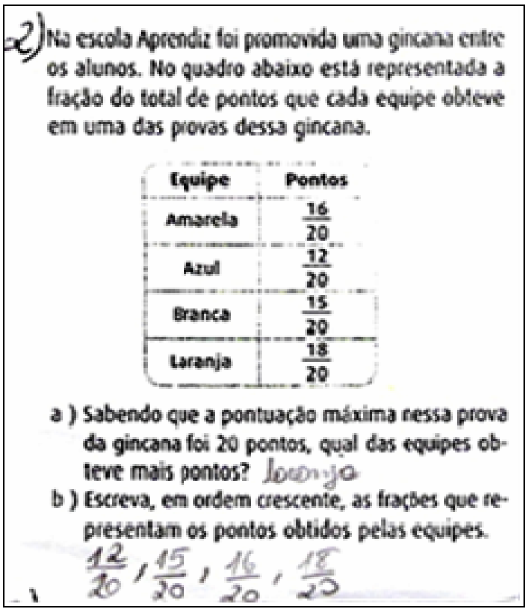
Para comparar frações com denominadores diferentes:
* Reduzimos as frações ao menor denominador comum, isto é; calculamos o m.m.c dos denominadores e, a seguir, encontramos frações equivalentes às iniciais, que tenham nos denominadores esse m.m.c;
* Comparamos as frações equivalentes às iniciais;

Então temos:
1º Ex:
$\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$ o m.m.c(5,4) = 20
8 < 10
Os novos denominadores devem ser iguais a 20.
$\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$
20 ÷ 5 = 4 20 ÷ 4 = 5

Logo $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ e $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$
Agora é fácil comparar, pois os denominadores são iguais
Portanto: $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$

FIGURA – 34: Regras para comparar frações

Na seqüência do planejamento, a professora escolhe 17 atividades com o objetivo de explorar mais a comparação de números racionais na representação fracionária, envolvendo denominadores diferentes. A maioria das atividades escolhidas requer tratamentos no registro fracionário. Porém, algumas atividades exploram as conversões entre os registros, como podemos observar na atividade abaixo (figura 35) que promove a conversão do registro gráfico (tabela) para o fracionário, mediados pelo registro da língua natural.



2) Na escola Aprendiz foi promovida uma gincana entre os alunos. No quadro abaixo está representada a fração do total de pontos que cada equipe obteve em uma das provas dessa gincana.

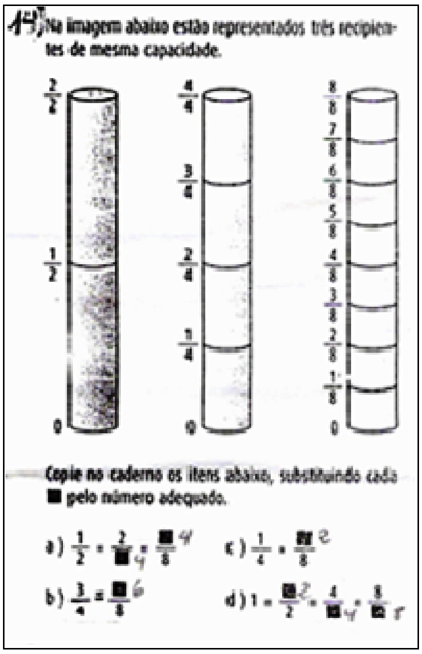
Equipe	Pontos
Amarela	$\frac{16}{20}$
Azul	$\frac{12}{20}$
Branca	$\frac{15}{20}$
Laranja	$\frac{18}{20}$

a) Sabendo que a pontuação máxima nessa prova da gincana foi 20 pontos, qual das equipes obteve mais pontos? Laranja

b) Escreva, em ordem crescente, as frações que representam os pontos obtidos pelas equipes.
$\frac{12}{20}, \frac{15}{20}, \frac{16}{20}, \frac{18}{20}$

FIGURA – 35: Ordem das frações na tabela

Em outra atividade (figura 36), constatamos mais uma vez o trabalho com indícios do registro algébrico. Para resolver essa atividade o aluno precisa substituir os quadrinhos por números que mantenham a igualdade, sendo possível utilizar em alguns casos o registro figural para encontrar o número correto.



14) Na imagem abaixo estão representados três recipientes de mesma capacidade.

Copie no caderno os itens abaixo, substituindo cada ■ pelo número adequado.

a) $\frac{1}{2} = \frac{2}{\blacksquare}\,4 = \frac{\blacksquare}{8}\,4$

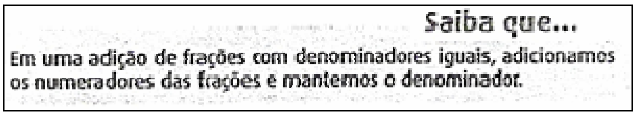
b) $\frac{3}{4} = \frac{\blacksquare}{8}\,6$

c) $\frac{1}{4} = \frac{\blacksquare}{8}\,2$

d) $1 = \frac{\blacksquare}{2}\,2 = \frac{4}{\blacksquare}\,4 = \frac{8}{\blacksquare}\,8$

FIGURA – 36: Atividades sobre equivalência (c)

O trabalho com as operações de adição e subtração de frações é iniciado por meio de um exemplo no registro figural, no qual um menino pinta um quadrado, dividido em 9 partes iguais, de duas cores. Ele pintou $\frac{5}{9}$ de amarelo e $\frac{2}{9}$ de azul. É questionado logo a seguir que fração representa a parte pintada da figura. A resposta é dada pela adição das frações $\frac{5}{9}$ *e* $\frac{2}{9}$, em seguida, no registro da língua natural (figura 37), é dada a regra como se adiciona frações com denominadores iguais.

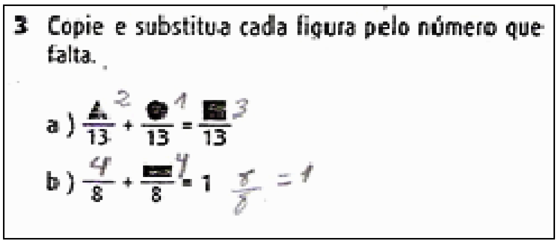


Saiba que...

Em uma adição de frações com denominadores iguais, adicionamos os numeradores das frações e mantemos o denominador.

FIGURA – 37: Regra para adição de frações com denominadores iguais

De modo análogo é explicado como se faz a subtração entre frações com denominadores iguais. Podemos observar que, as regras são dadas com base em um exemplo sem a ação do aluno. Após os exemplos, seguem 4 atividades de fixação das regras dadas. No entanto, dentre essas atividades, verificamos a presença de uma atividade que envolve a conversão do registro algébrico para o numérico (figura 38).



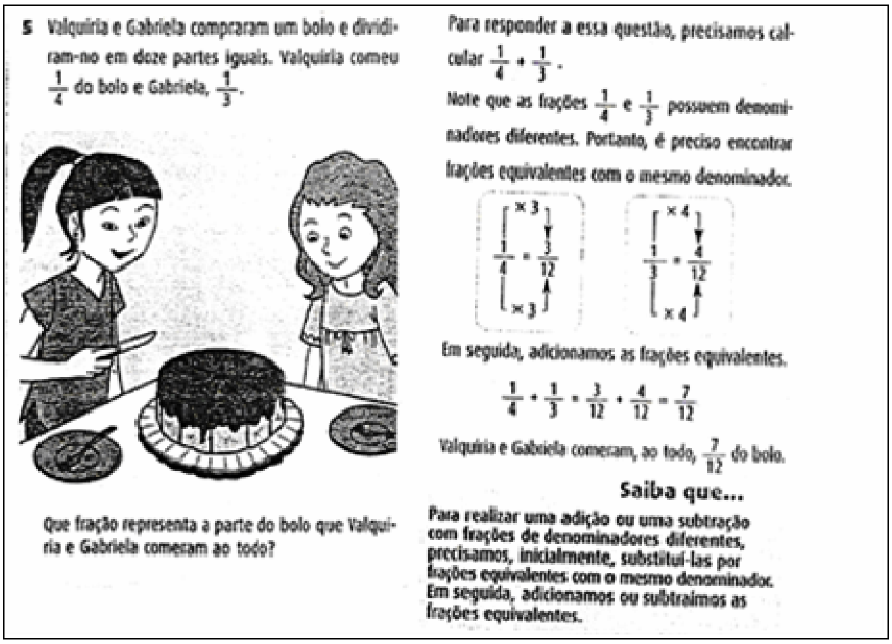
3 Copie e substitua cada figura pelo número que falta.

a) $\frac{\blacktriangle^{2}}{13} + \frac{\bullet^{1}}{13} = \frac{\blacksquare^{3}}{13}$

b) $\frac{4}{8} + \frac{\blacksquare^{4}}{8} = 1 \quad \frac{8}{8} = 1$

FIGURA – 38: Atividade sobre adição de frações

Na seqüência, as operações de adição e subtração com denominadores diferentes são exploradas por meio de situações problemas, nas quais a solução é dada de forma direta, pois não há a conversão entre registros. Como podemos observar na situação problema, selecionada pela professora (figura 39), para trabalhar a adição e subtração com denominadores diferentes, pois mesmo o problema sendo apresentado na língua natural, não podemos caracterizá-lo como uma conversão do registro da língua natural para o fracionário, a resolução requer apenas tratamentos no registro fracionário, seguindo a regra dada anteriormente.



5 Valquíria e Gabriela compraram um bolo e dividiram-no em doze partes iguais. Valquíria comeu $\frac{1}{4}$ do bolo e Gabriela, $\frac{1}{3}$.

Que fração representa a parte do bolo que Valquíria e Gabriela comeram ao todo?

Para responder a essa questão, precisamos calcular $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$.

Note que as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ possuem denominadores diferentes. Portanto, é preciso encontrar frações equivalentes com o mesmo denominador.

$$\frac{1}{4} \xrightarrow[\times 3]{\times 3} \frac{3}{12} \qquad \frac{1}{3} \xrightarrow[\times 4]{\times 4} \frac{4}{12}$$

Em seguida, adicionamos as frações equivalentes.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{7}{12}$$

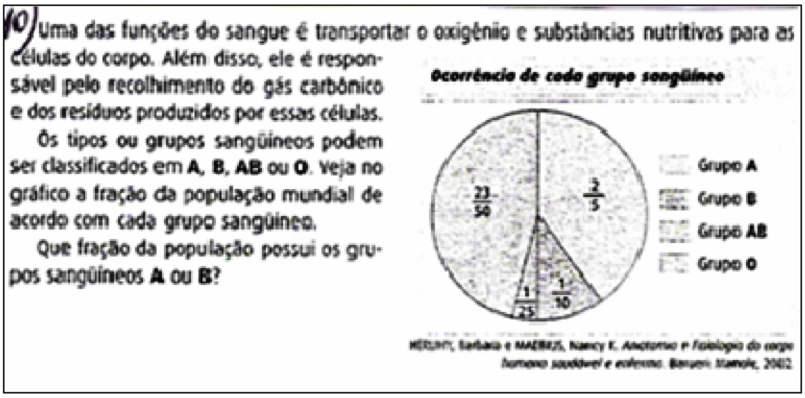
Valquíria e Gabriela comeram, ao todo, $\frac{7}{12}$ do bolo.

Saiba que...

Para realizar uma adição ou uma subtração com frações de denominadores diferentes, precisamos, inicialmente, substituí-las por frações equivalentes com o mesmo denominador. Em seguida, adicionamos ou subtraímos as frações equivalentes.

FIGURA – 39: Regra para adição de frações com denominadores diferentes

As 4 atividades selecionadas para explorar esse conteúdo, assim como as anteriores, tratam na maioria das vezes, os tratamentos no registro numérico. Porém, na atividade abaixo (figura 40), a ocorrência dos grupos sanguíneos A, B, AB e O são representados por um registro gráfico. É necessário chamar a atenção que a resolução, na forma que está apresentada, não exige uma conversão do registro gráfico para o numérico, ficando somente no tratamento. Por meio dessa atividade, a professora “mostra” aos alunos outros registros utilizados para representar dados estatísticos.



10) Uma das funções do sangue é transportar o oxigênio e substâncias nutritivas para as células do corpo. Além disso, ele é responsável pelo recolhimento do gás carbônico e dos resíduos produzidos por essas células.

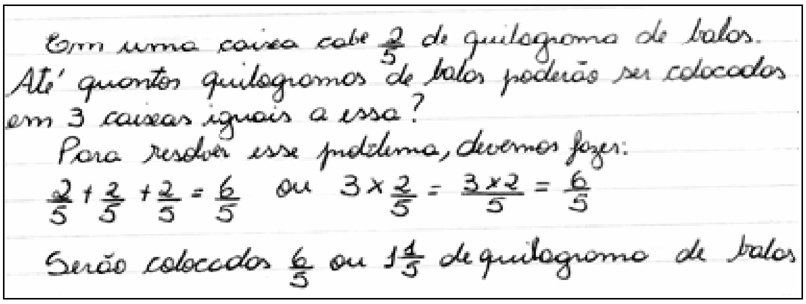
Os tipos ou grupos sangüíneos podem ser classificados em **A**, **B**, **AB** ou **O**. Veja no gráfico a fração da população mundial de acordo com cada grupo sangüíneo.

Que fração da população possui os grupos sangüíneos **A** ou **B**?

HERLIHY, Barbara e MAEBIUS, Nancy K. Anatomia e Fisiologia do corpo humano saudável e enfermo. Barueri: Manole, 2002.

FIGURA – 40: Gráfico representando os grupos sangüíneos

Para trabalhar a multiplicação de um número natural por um “número fracionário” (termo utilizado pela professora)[21], foi explorada a extensão da adição de parcelas iguais utilizadas com números naturais para os racionais (figura 41). Neste caso, os alunos podem não ter dificuldades para compreenderem, pois é mantida a idéia de que ao multiplicar dois números, o resultado obtido é sempre um número maior.



Em uma caixa cabe $\frac{2}{5}$ de quilograma de balas.
Até quantos quilogramas de balas poderão ser colocados em 3 caixas iguais a essa?
Para resolver esse problema, devemos fazer:
$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$ ou $3\times\frac{2}{5}=\frac{3\times2}{5}=\frac{6}{5}$
Serão colocados $\frac{6}{5}$ ou $1\frac{1}{5}$ de quilograma de balas

FIGURA – 41: Exemplo de multiplicação de um número inteiro por um número fracionário

No entanto, para encontrar o resultado de $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$, proposto pela professora, logo em seguida, a ampliação dos naturais para os racionais exige um trabalho de maior profundidade,

---

[21] Como já citamos anteriormente a professora passou a utilizar o termo número fracionário sem maiores explicações, talvez na intenção de mostrar que as frações também assumem, em terminados contextos, o significado de números. Mas, perceba que, esse significado não foi enfatizado pela professora. Ela trabalhou parte/todo, operador multiplicativo e quociente. Portanto, temos mais uma vez uma confusão entre objeto matemático e suas representações.

conforme Romanatto (1997, p. 113). Mas, a professora prefere explicar que “a palavra “de” em matemática pode ser substituída pelo sinal × de multiplicação” (figura 42).

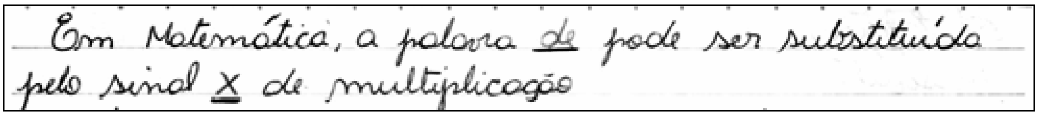
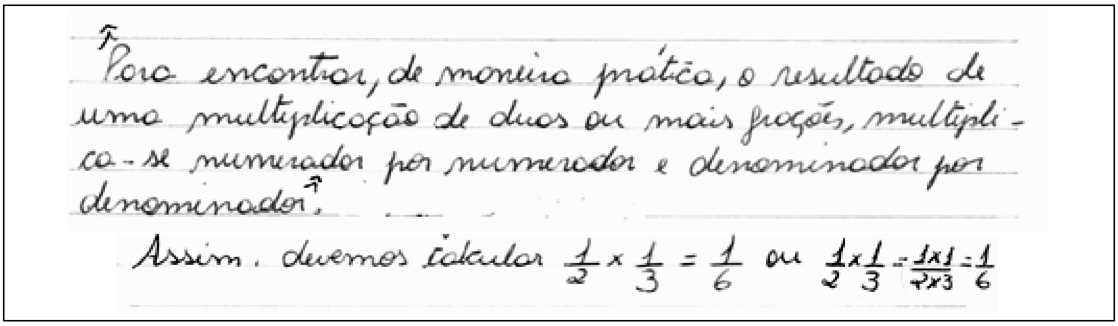

Em Matemática, a palavra de pode ser substituída pelo sinal X de multiplicação

FIGURA – 42: Significado da palavra “de”

Assim, para encontrar $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, afirma (figura 43):


Para encontrar, de maneira prática, o resultado de uma multiplicação de duas ou mais frações, multiplica-se numerador por numerador e denominador por denominador.

Assim, devemos calcular $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$

FIGURA – 43: Regra para multiplicação de frações

Constatamos que, a professora preferiu enunciar por meio do registro da língua natural uma regra para resolver a multiplicação de duas ou mais frações, sem esclarecer os significados dessa multiplicação, bem como utilizou para resolução apenas o registro fracionário; não utilizando o registro figural para identificar que “a multiplicação com frações pode ser pensada como “partes de partes de um todo”” (BRASIL, 1998, p. 104). Isso significa que, a multiplicação nos racionais não se apóia na idéia de adição reiterada. Assim, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ deve ser entendido como: ‘quanto vale $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de um todo’, isto é, o todo-referência sofre duas operações. Primeiro, o todo é dividido em duas partes e tomada 1 delas e, em seguida, esse $\frac{1}{2}$ sofre outra divisão, agora por 3 e é tomada uma parte dessas novas partes. Por fim, esse pedaço resultante das duas divisões, é comparado com o todo inicial. Esses processos podem ser compreendidos pelos alunos por meio do registro figural, mostrado pela figura 44.

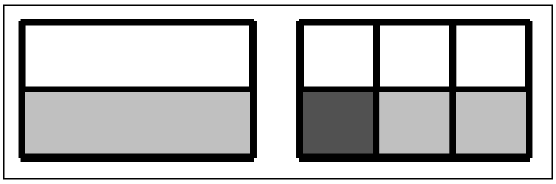


FIGURA – 44: Registro figural para multiplicação de números racionais na representação fracionária (a)
Fonte: Elaboração própria

O registro figural também auxilia no momento de mostrar para o aluno a propriedade comutativa da multiplicação, ou seja, se $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, então $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ também tem como resultado $\frac{1}{6}$. Veja figura 45:

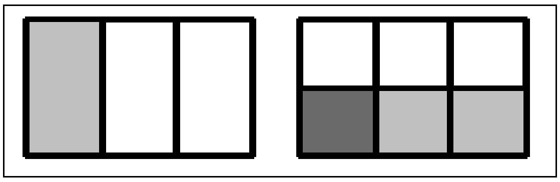
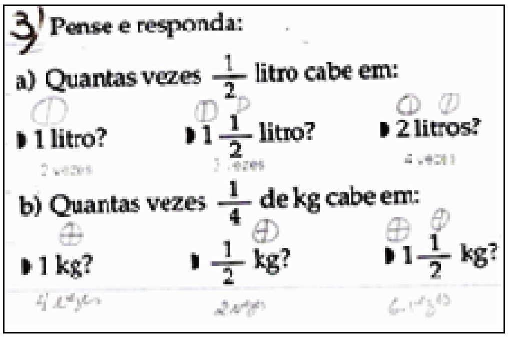


FIGURA – 45: Registro figural para multiplicação de números racionais na representação fracionária (b)
Fonte: Elaboração própria

Além disso, deve ficar claro para os alunos, que na multiplicação entre dois números racionais nem sempre o resultado é maior, pois se a multiplicação for pensada como "partes de partes de um todo" parte de uma parte do todo é comparativamente menor que o todo. Em uma de nossas entrevistas, quando questionamos a professora porque não trabalhou com o registro figural articulado com numérico e também porque não explorou os outros significados que a multiplicação entre racionais pode assumir, já que na 4ª série em uma atividade chegou introduzir a articulação entre o registro figural e o fracionário, para operação de multiplicação. Ela respondeu-nos que não se sentiu segura para explicar a multiplicação por meio da articulação entre os registros figural e fracionário. Esse fato revela que muitas vezes os professores ao optarem por um único registro, para representar o objeto matemático a ser ensinado, não contribuem para a compreensão conceitual deste. Pois, segundo Duval (2003), as representações do registro serão suficientes, na compreensão conceitual do objeto representado, se o registro de representação for bem escolhido e se ocorrer à articulação de ao menos dois registros de representação, e esta articulação se dá pela atividade cognitiva de conversão.

Antes de iniciar a divisão a professora escolhe quatro atividades para trabalhar a multiplicação de frações. Dentre essas atividades apenas uma explora a articulação entre o registro figural e o numérico (figura 46), visível através dos registros utilizados pela professora.



3) Pense e responda:

a) Quantas vezes $\frac{1}{2}$ litro cabe em:

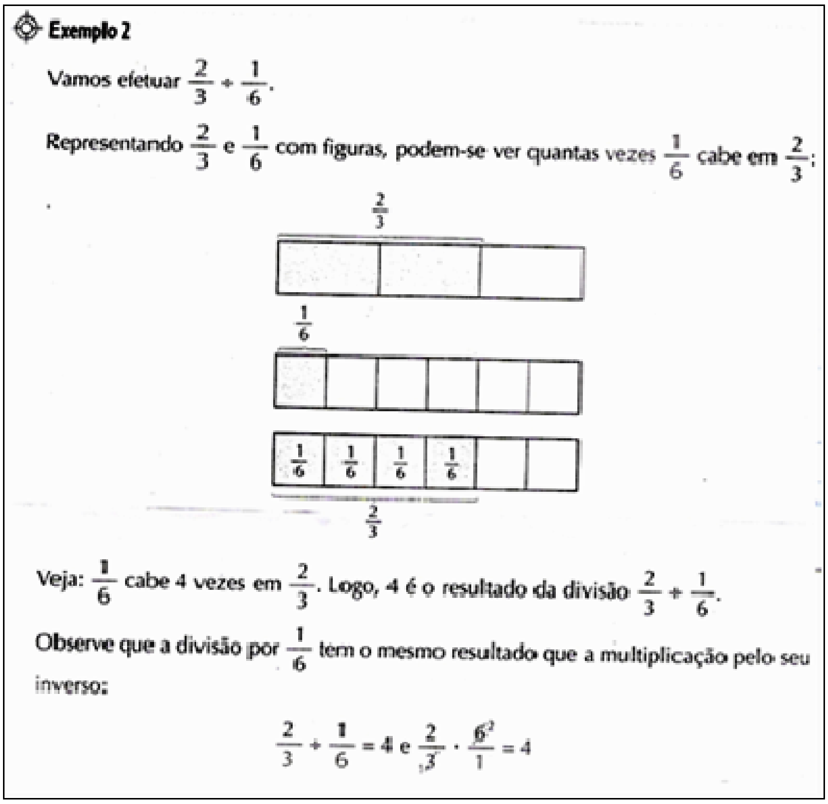
- 1 litro? 2 vezes
- $1\frac{1}{2}$ litro? 3 vezes
- 2 litros? 4 vezes

b) Quantas vezes $\frac{1}{4}$ de kg cabe em:

- 1 kg? 4 [illegible]
- $\frac{1}{2}$ kg? 2 [illegible]
- $1\frac{1}{2}$ kg? 6 [illegible]

FIGURA – 46: Atividade sobre multiplicação de frações

A divisão de frações foi apresentada por meio do registro figural, explorando a idéia de quantas partes cabem em, conforme indicação dos PCN-Matemática. Como podemos visualizar na figura 47.



Exemplo 2

Vamos efetuar $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6}$.

Representando $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{6}$ com figuras, podem-se ver quantas vezes $\frac{1}{6}$ cabe em $\frac{2}{3}$:

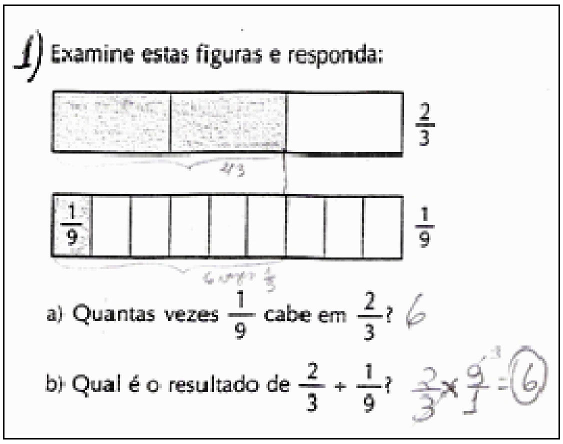
Veja: $\frac{1}{6}$ cabe 4 vezes em $\frac{2}{3}$. Logo, 4 é o resultado da divisão $\frac{2}{3} \div \frac{1}{6}$.

Observe que a divisão por $\frac{1}{6}$ tem o mesmo resultado que a multiplicação pelo seu inverso:

$$\frac{2}{3} \div \frac{1}{6} = 4 \text{ e } \frac{2}{\cancel{3}_1} \cdot \frac{\cancel{6}^2}{1} = 4$$

FIGURA – 47: Divisão de frações

Na divisão, constatamos o uso dos registros figural e numérico, pela professora, processo esse que auxilia na compreensão dos alunos. Como nem sempre as representações figurais permitem a visualização do resultado, torna-se necessário buscar outras estratégias, trabalhadas pela professora por meio da idéia de inverso multiplicativo que a divisão se apropria, ou seja, “dividir é multiplicar pelo inverso” (BRASIL, 1998, p.105). Para tanto, a professora utiliza-se da regra prática, no registro da língua natural: “Para dividir uma fração por outra, multiplicamos a primeira pela inversa da segunda”, apresentando, na seqüência, alguns exemplos no registro numérico seguidos de 5 atividades. Uma das atividades explora a conversão do registro figural para o numérico, as demais exploram tratamentos no registro fracionário (figura 48).


1) Examine estas figuras e responda:

a) Quantas vezes $\frac{1}{9}$ cabe em $\frac{2}{3}$? 6

b) Qual é o resultado de $\frac{2}{3} + \frac{1}{9}$? $\frac{2}{3} \times \frac{9^{3}}{1} = \textcircled{6}$

FIGURA – 48: Atividade sobre divisão de frações

Cabe destacar que, a professora introduziu a divisão por meio do registro figural, registro esse que pode potencializar a construção da regra prática pelos alunos, mas mesmo assim ela preferiu dar a regra pronta.

Como de costume a professora, ao finalizar o trabalho com as quatro operações entre frações, seleciona algumas atividades para revisar o conteúdo desenvolvido. Foram propostas 15 questões, dessas 9 envolvem a divisão e multiplicação de frações e podem ser resolvidas por meio do tratamento no registro fracionário, 4 envolvem as quatro operações e também podem ser resolvidas por tratamentos nesse registro. Das duas questões restantes, uma delas envolve indícios do registro algébrico, articulando-o com o fracionário, quando dados os valores de $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{2}{3}$, pede-se para determinar $x + y$; $y - x$; xy e $x \div y$. Na outra questão, podemos observar pela primeira vez, nesta série, no planejamento da professora, o registro figural que traz indícios da reta numérica para localizar seis centímetros e meio. Caberia uma explicação que por ser a régua (figura 49), semelhante a representação de uma reta numérica, essa representação figural, conforme Duval, não é o próprio objeto, mas guarda propriedades deste.

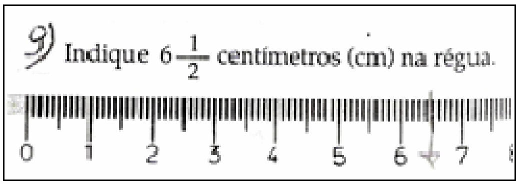
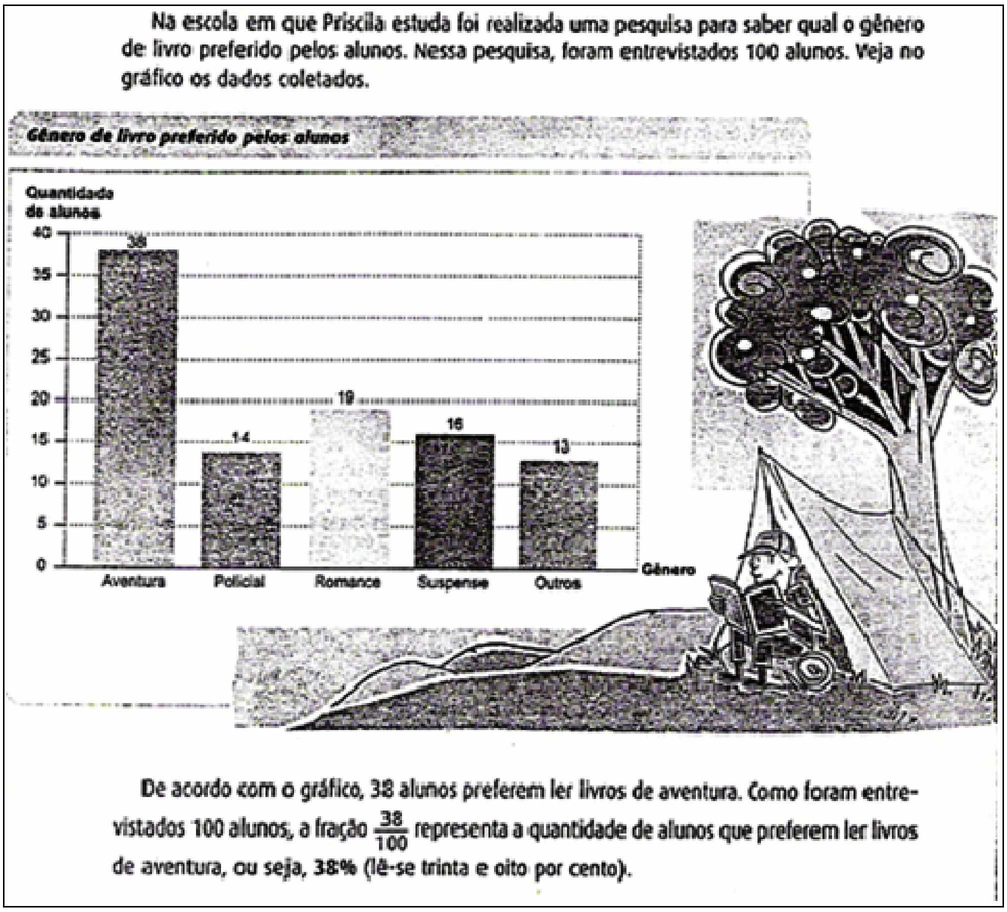

9) Indique $6\frac{1}{2}$ centímetros (cm) na régua.

FIGURA – 49: Régua

Percebemos que, a localização de números racionais na reta numérica não foi trabalhada diretamente pela professora, tendo apenas seus indícios apresentados na atividade representada pela figura 49. No entanto, estava previsto nos planos de ensino da 5ª série um trabalho com a reta numérica e as frações.

Na seqüência de seu planejamento a professora retoma a noção de frações decimais, com o intuito de trabalhar a noção de porcentagem. Para tanto, seleciona uma situação problema representada por um gráfico de barras (figura 50).

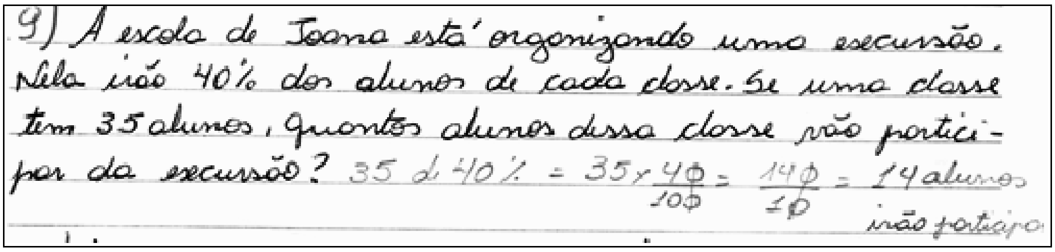


Na escola em que Priscila estuda foi realizada uma pesquisa para saber qual o gênero de livro preferido pelos alunos. Nessa pesquisa, foram entrevistados 100 alunos. Veja no gráfico os dados coletados.

De acordo com o gráfico, 38 alunos preferem ler livros de aventura. Como foram entrevistados 100 alunos, a fração $\frac{38}{100}$ representa a quantidade de alunos que preferem ler livros de aventura, ou seja, 38% (lê-se trinta e oito por cento).

FIGURA – 50: Gráfico para estudo de porcentagem

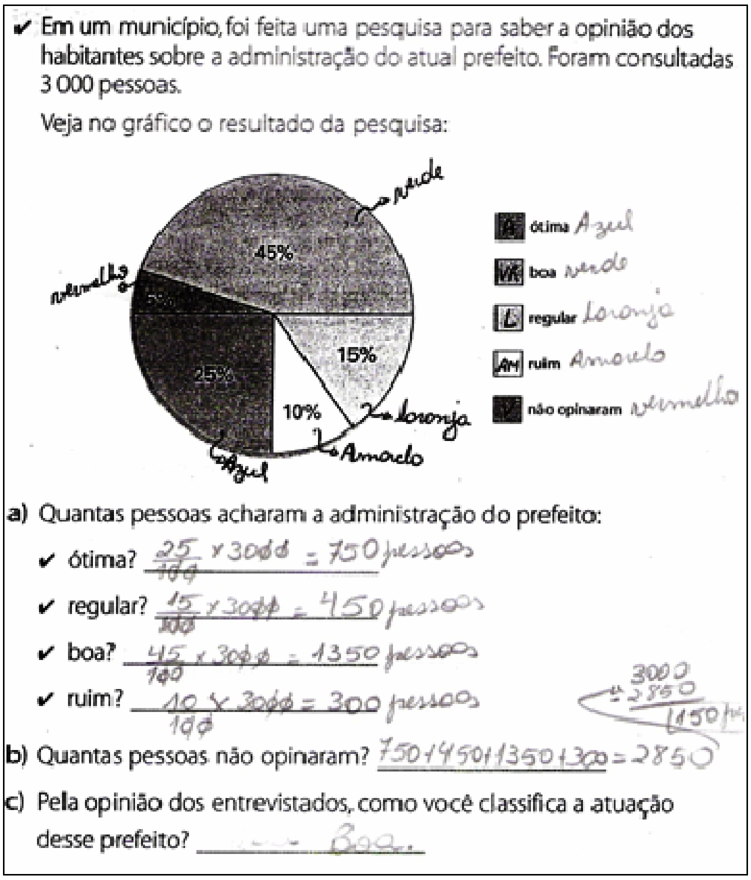
Em seguida, apresenta o conceito de porcentagem no registro da língua natural como sendo "parte de um total de 100 partes, indicada pelo símbolo %". Alguns exercícios são propostos para exemplificar o conceito dado. Na maioria desses exercícios é solicitado que o aluno converta da representação percentual para a representação fracionária, bem como o sentido inverso. Podemos observar ainda que, são propostos exercícios com a situação problema no registro da língua natural (figura 51), e para resolvê-los bastam tratamentos no registro fracionário, não podendo ser caracterizado como uma conversão entre os registros.



9) A escola de Joana está organizando uma excursão. Nela irão 40% dos alunos de cada classe. Se uma classe tem 35 alunos, quantos alunos dessa classe vão participar da excursão? 35 de 40% = $35 \times \frac{40}{100} = \frac{140}{10}$ = 14 alunos irão participa

FIGURA – 51: Atividade sobre porcentagem

Dentre esses exercícios um (figura 52) explora a articulação entre os registros gráfico, representação percentual e fração decimal.



✔ Em um município, foi feita uma pesquisa para saber a opinião dos habitantes sobre a administração do atual prefeito. Foram consultadas 3 000 pessoas.

Veja no gráfico o resultado da pesquisa:

a) Quantas pessoas acharam a administração do prefeito:

✔ ótima? $\frac{25}{100} \times 3000 = 750$ pessoas

✔ regular? $\frac{15}{100} \times 3000 = 450$ pessoas

✔ boa? $\frac{45}{100} \times 3000 = 1350$ pessoas

✔ ruim? $\frac{10}{100} \times 3000 = 300$ pessoas

$3000 - 2850 = 150$ p

b) Quantas pessoas não opinaram? 750+450+1350+300 = 2850

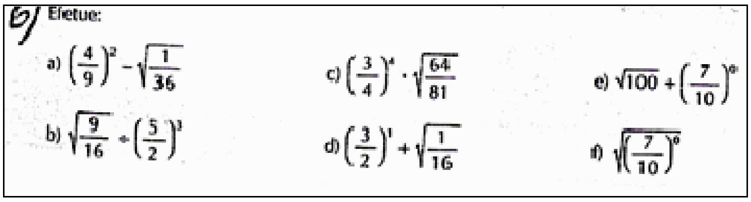
c) Pela opinião dos entrevistados, como você classifica a atuação desse prefeito? Boa.

FIGURA – 52: Atividade sobre porcentagem envolvendo gráfico

Constatamos que, a professora procura selecionar a cada lista de atividades uma que apresente dados estatísticos, por meio de registros gráficos como: tabelas, gráficos de barras e gráficos de pizzas. Essas atividades potencializam a articulação entre os vários registros de representação, bem como "o desenvolvimento de formas particulares de pensamento e raciocínio para resolver determinadas situações-problema" (BRASIL, 1998, p.134). Conforme Duval (2003, p. 29), a compreensão em matemática está ligada ao fato do aluno dispor de, pelo menos, dois registros de representação para o mesmo objeto matemático, pois a compreensão requer a articulação entre diferentes registros.

Ao desenvolver os tópicos de potenciação, radiciação e expressões numéricas envolvendo números racionais a professora prioriza os tratamentos no registro fracionário. Nesses tópicos aparece frequentemente o termo "números racionais", como fica evidente na explicação dada a potenciação: "As potências de números racionais são definidas da mesma maneira que as potências de números naturais", mas até o momento não há uma definição/explicação para o que são números racionais, ora utiliza frações, números fracionários ora utiliza números racionais.

Como comentamos anteriormente, a prioridade foi dada às atividades que requerem tratamentos no registro fracionário, para desenvolver os tópicos de potenciação, radiciação e expressões numéricas, observadas na figura 53.



6/ Efetue:

a) $\left(\frac{4}{9}\right)^2 - \sqrt{\frac{1}{36}}$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \sqrt{\frac{64}{81}}$ e) $\sqrt{100} + \left(\frac{7}{10}\right)^0$

b) $\sqrt{\frac{9}{16}} + \left(\frac{5}{2}\right)^3$ d) $\left(\frac{3}{2}\right)^1 + \sqrt{\frac{1}{16}}$ f) $\sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^0}$

FIGURA – 53: Atividade sobre potenciação e radiciação de frações

Por meio dessas atividades a professora encerra o estudo dos números racionais na representação fracionária, título dado nos planos de ensino e inicia o trabalho com os números decimais.

Para introduzir o trabalho com os números decimais[22] a professora apresenta figuras que mostram a presença desses números no cotidiano, seguidas da fala de personagens, exemplificadas na figura 54.

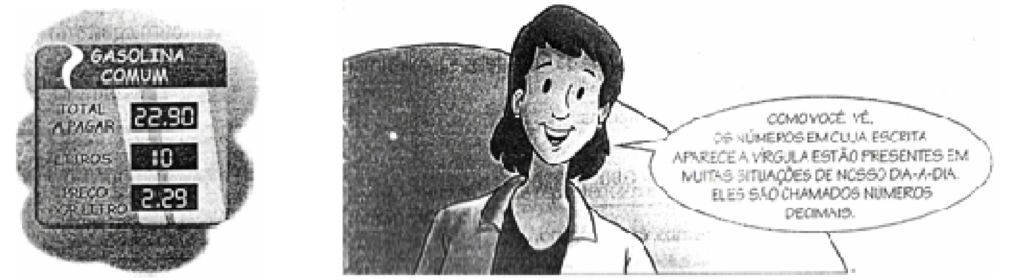


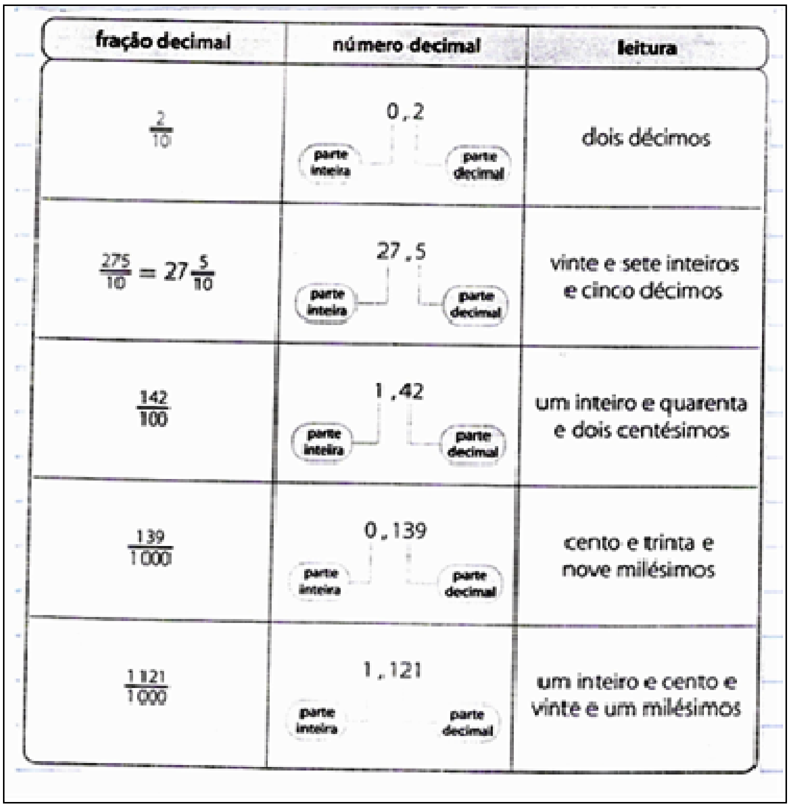
FIGURA – 54: Os números com vírgula

---

[22] Cabe destacar aqui que, nem nos planos de estudos foi feito referências a representação decimal dos números racionais. Da forma como é introduzido esse conteúdo, temos a sensação que é outro tipo de número bem diferente das frações tratadas anteriormente.

As figuras e os personagens buscam enfatizar a presença da vírgula na representação dos números mostrados. Em seguida, os exemplos utilizados para explicar os décimos, centésimos e milésimos trabalham a conversão do registro figural para o numérico na representação fracionária e decimal. Há, portanto, a articulação entre os registros figural (RF) e a fração decimal (FD) e dessa para o registro numérico na representação decimal (RND) e, ainda, o registro da língua natural (RLN).

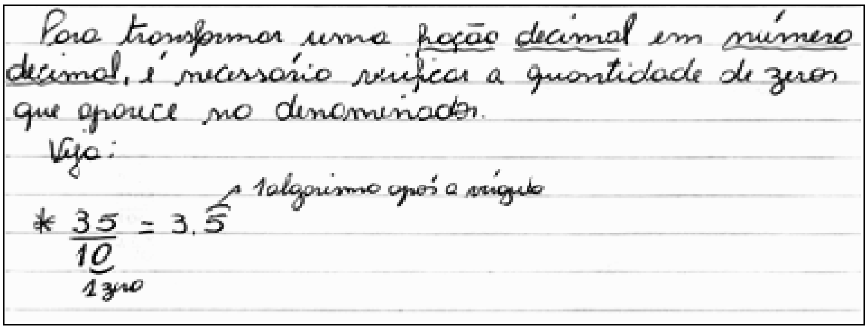
É importante, destacar a ordem que as conversões ocorrem, pois constatamos uma tendência de seguirem a mesma ordem, identificadas no esquema: $RF \rightarrow FD \rightarrow RND \rightarrow RLN$ (figura 55) em outras atividades verificamos o mesmo sentido, porém o registro figural é abandonado.



fração decimal	número decimal	leitura
$\frac{2}{10}$	0,2 parte inteira parte decimal	dois décimos
$\frac{275}{10} = 27\frac{5}{10}$	27,5 parte inteira parte decimal	vinte e sete inteiros e cinco décimos
$\frac{142}{100}$	1,42 parte inteira parte decimal	um inteiro e quarenta e dois centésimos
$\frac{139}{1000}$	0,139 parte inteira parte decimal	cento e trinta e nove milésimos
$\frac{1121}{1000}$	1,121 parte inteira parte decimal	um inteiro e cento e vinte e um milésimos

FIGURA – 55: Transformações entre fração decimal e número decimal

Com o intuito de explicar, como é realizada a transformação de fração decimal na representação decimal do número racional, a professora utiliza uma regra (figura 56) que leva em conta a quantidade de zeros no denominador. Portanto, a conversão entre o registro de fração decimal e o decimal não é realizado pela divisão do numerador pelo denominador.



Para transformar uma fração decimal em número decimal, é necessário verificar a quantidade de zeros que aparece no denominador.

Veja:

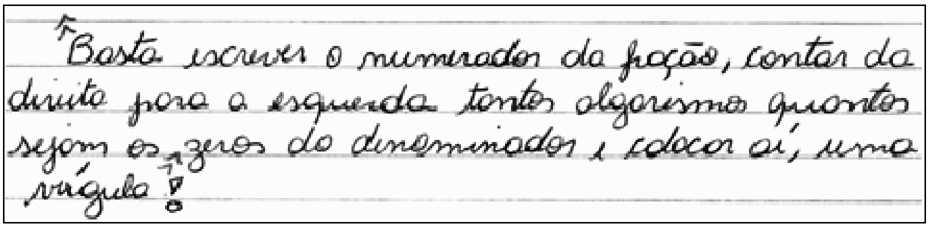
1 algarismo após a vírgula

$* \ \frac{35}{10} = 3,5$

1 zero

FIGURA – 56: Exemplo para transformar fração decimal para número decimal

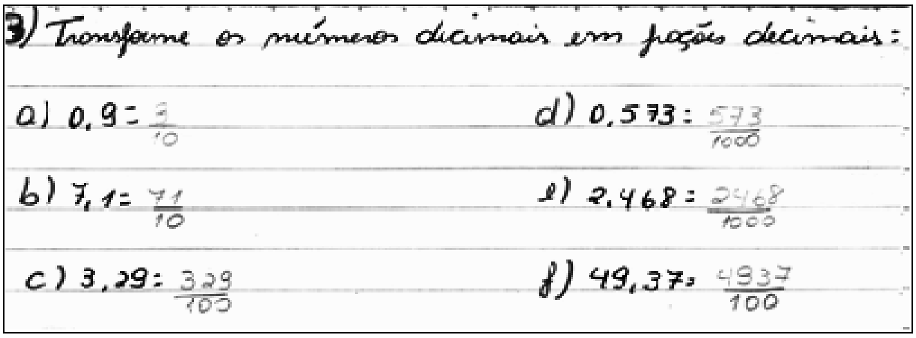
Por fim, no registro da língua natural (figura 57) explica:



Basta escrever o numerador da fração, contar da direita para a esquerda tantos algarismos quantos sejam os zeros do denominador e colocar aí, uma vírgula!

FIGURA – 57: Regra para transformar fração decimal em número decimal

As atividades selecionadas são de aplicação da regra dada e envolvem a conversão da fração decimal para a representação decimal (figura 58).



3) Transforme os números decimais em frações decimais:

a) $0,9 = \frac{9}{10}$

b) $7,1 = \frac{71}{10}$

c) $3,29 = \frac{329}{100}$

d) $0,573 = \frac{573}{1000}$

e) $2,468 = \frac{2468}{1000}$

f) $49,37 = \frac{4937}{100}$

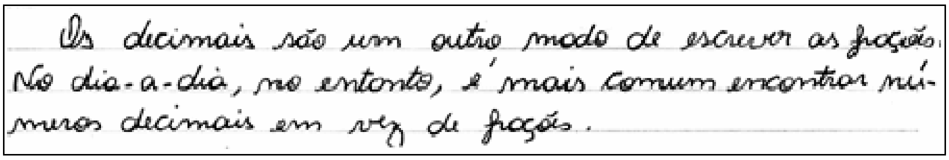
FIGURA – 58: Atividades de transformação de número decimal para fração decimal

As articulações dos registros de fração decimal e decimal passaram a ocorrer nos dois sentidos depois que a professora apresenta a regra por meio do registro da língua natural para essa transformação, ou seja, verifica-se a quantidade de casas que aparecem depois da vírgula, escreve-se o número dado como numerador, sem a vírgula, e como denominador escreve-se o número 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do número dado.

Cabe ressaltar que, as transformações do registro fracionário para o decimal só ocorrem quando o denominador é uma potência de base 10, ou seja, são explorados apenas exemplos no qual se pode utilizar diretamente a regra dada anteriormente. As transformações de números racionais na representação fracionária como: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$..., para a representação decimal não são trabalhadas.

O tópico comparação de números decimais é desenvolvido de forma breve, pois é explicado que para comparar números decimais basta primeiramente comparar a parte inteira, se a parte inteira dos números for igual comparam-se os algarismos depois da vírgula. Em seguida, são apresentados exemplos de aplicação da regra.

Para introduzir a adição e subtração de números racionais na representação decimal a professora seleciona um pequeno texto (figura 59) que faz o seguinte comentário:

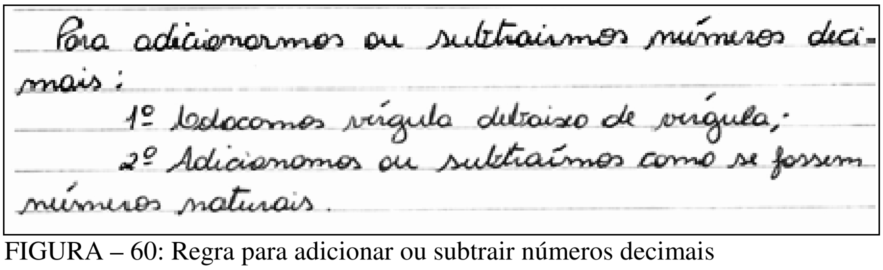


Os decimais são um outro modo de escrever as frações. No dia-a-dia, no entanto, é mais comum encontrar números decimais em vez de frações.

FIGURA – 59: Explicação sobre outra forma de escrever frações

Percebemos no planejamento, o reconhecimento da relação entre números decimais e frações, mas pelo material analisado a professora não associa números decimais e frações como sendo duas formas de representar os números racionais. O que fica evidente é associação dos números na forma decimal a números com vírgula. Brousseau, conforme Igliori (1999) refere-se a esta associação como a "vulgarização" dos números na forma decimal pelo ensino.

A adição e subtração de números na representação decimal são desenvolvidas, pela professora, enfocando a vírgula. Como podemos verificar na figura 60.



Para adicionarmos ou subtraimos números decimais:

1º Colocamos vírgula debaixo de vírgula;

2º Adicionamos ou subtraímos como se fossem números naturais.

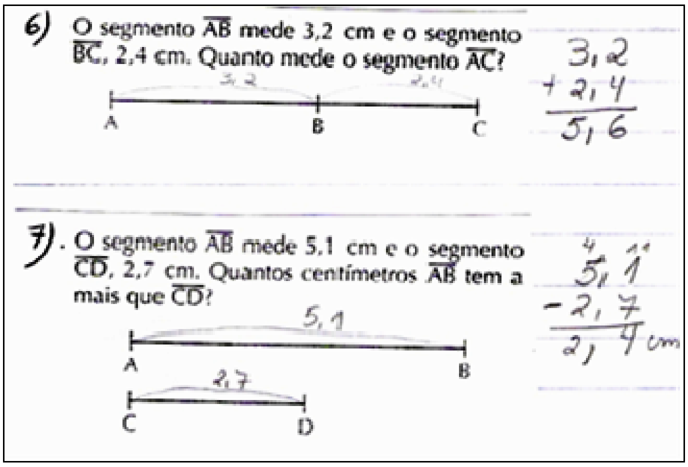
FIGURA – 60: Regra para adicionar ou subtrair números decimais

Depois, a professora, seleciona alguns exemplos e atividades de aplicação da regra dada. Foram propostas 7 atividades envolvendo adição e subtração de números racionais na representação decimal. Dentre essas atividades 5 requerem tratamentos no registro decimal[23].

---

[23] Quando utilizamos este termo, estamos nos referindo ao registro numérico na representação decimal.

Duas dessas atividades (figura 61) envolvem a articulação entre o registro figural (segmentos) e o registro na representação decimal.



6) O segmento $\overline{AB}$ mede 3,2 cm e o segmento $\overline{BC}$, 2,4 cm. Quanto mede o segmento $\overline{AC}$?

3,2
+ 2,4
5,6

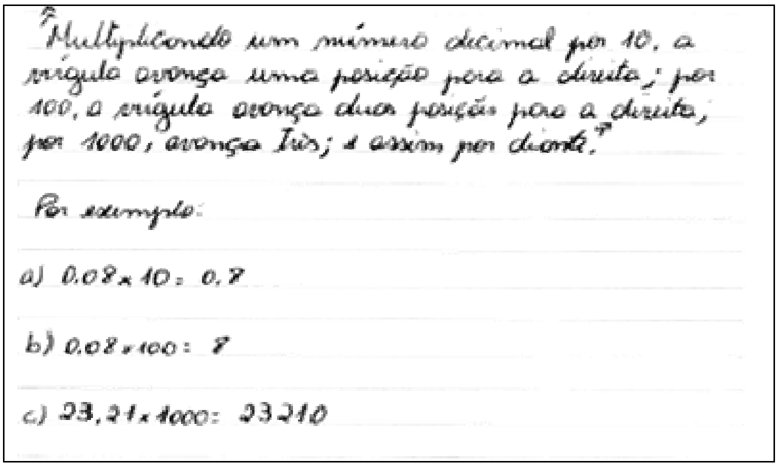
7). O segmento $\overline{AB}$ mede 5,1 cm e o segmento $\overline{CD}$, 2,7 cm. Quantos centímetros $\overline{AB}$ tem a mais que $\overline{CD}$?

4 11
5,1
− 2,7
2,4 cm

FIGURA – 61: Atividades sobre adição e subtração de números decimais

As pesquisas de Worle (1999), Catto (2000) revelam que, os alunos possuem dificuldades com o conceito, a escrita, a leitura e as operações com números racionais na representação decimal. Trabalhar as frações decimais simultaneamente com a ampliação do conceito de número e também o Sistema de Numeração Decimal, para a escrita desses números, poderá auxiliá-los a superar algumas dificuldades. Constatamos que, a professora iniciou trabalhando as frações decimais concomitantemente com a representação decimal dos números racionais, porém em seguida abandona-as, dando ênfase às regras. Além disso, o Sistema de Numeração Decimal não é trabalhado simultaneamente.

Ao desenvolver a multiplicação de um número racional na representação decimal por potências de base dez, mais uma vez, a professora recorre a regras dadas na língua natural, seguidos de exemplos. Como podemos verificar na figura 62.



"Multiplicando um número decimal por 10, a vírgula avança uma posição para a direita; por 100, a vírgula avança duas posições para a direita; por 1000, avança três; e assim por diante."

Por exemplo:

a) 0,08 x 10 = 0,8

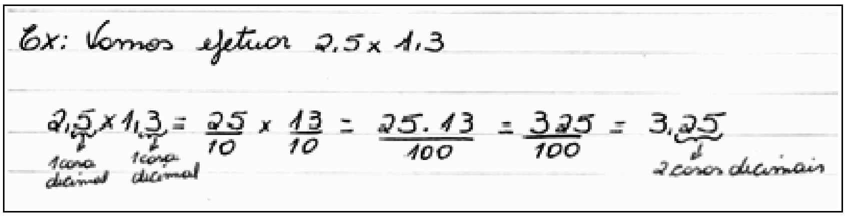
b) 0,08 x 100 = 8

c) 23,21 x 1000 = 23210

FIGURA – 62: Regra e exemplos para multiplicar números decimais por potencias de base dez

Verificamos mais uma vez que, não há uma articulação entre registros, pois o que prevalece é a aplicação da regra, tão pouco um trabalho que leve o aluno a chegar a conclusão dada acima na língua natural.

Para trabalhar a multiplicação entre dois números na representação decimal, a professora, escolhe partir de um exemplo (figura 63) que coordena os registros decimal e fracionário de dois números racionais. Por meio desse exemplo é dada a regra para realizar esse tipo de multiplicação, ou seja, multiplica-se os números e o número de casas do resultado é a soma das casas decimais dos fatores.

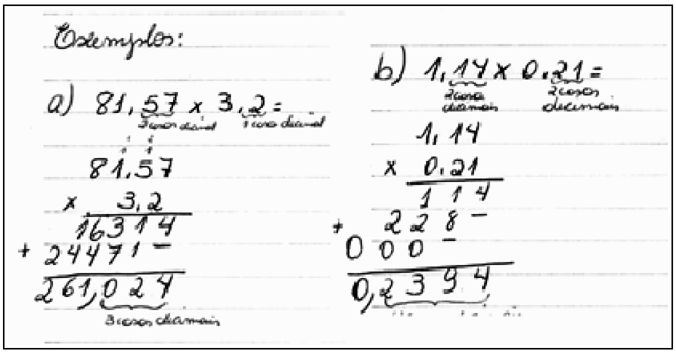


Ex: Vamos efetuar 2,5 x 1,3

$2,\underset{\text{1 casa decimal}}{5} \times 1,\underset{\text{1 casa decimal}}{3} = \frac{25}{10} \times \frac{13}{10} = \frac{25.13}{100} = \frac{325}{100} = 3,\underbrace{25}_{\text{2 casas decimais}}$

FIGURA – 63: Exemplo sobre multiplicação de números decimais (a)

Cabe ressaltar que, a coordenação entre os registros decimais e fracionários não é mais utilizada nos demais exemplos, simplesmente aplica-se a regra dada. Como podemos visualizar na figura 64.



Exemplos:

a) $81,\underset{\text{2 casas decimal}}{57} \times 3,\underset{\text{1 casa decimal}}{2} =$

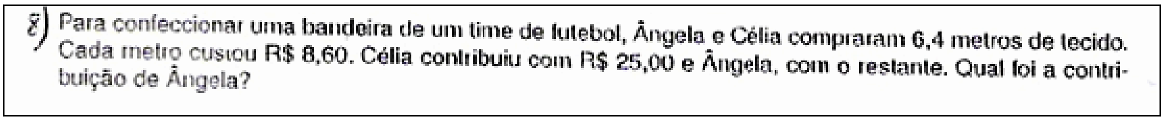
$$\begin{array}{r} 81,57 \\ \times \quad 3,2 \\ \hline 16314 \\ +\ 24471- \\ \hline 261,\underbrace{024}_{\text{3 casas decimais}} \end{array}$$

b) $1,\underset{\text{2 casas decimais}}{14} \times 0,\underset{\text{2 casas decimais}}{21} =$

$$\begin{array}{r} 1,14 \\ \times \quad 0,21 \\ \hline 114 \\ +\ 228- \\ 000-- \\ \hline 0,\underbrace{2394} \end{array}$$

FIGURA – 64: Exemplo sobre multiplicação de números decimais (b)

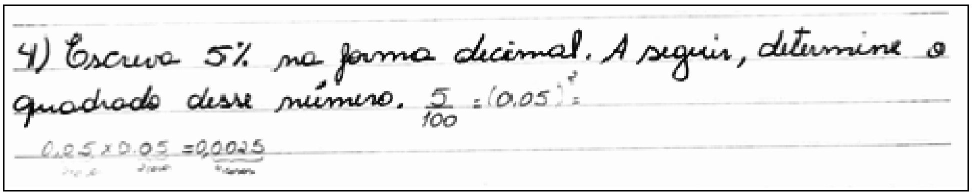
São propostas oito atividades envolvendo multiplicação de números na forma decimal. Todas as atividades exigem tratamentos no registro numérico decimal, mesmo as que apresentam situações problemas em língua natural, pois para resolvê-las basta multiplicar os números dados. Esse fato é verificado na atividade da figura 65.



8) Para confeccionar uma bandeira de um time de futebol, Ângela e Célia compraram 6,4 metros de tecido. Cada metro custou R$ 8,60. Célia contribuiu com R$ 25,00 e Ângela, com o restante. Qual foi a contribuição de Ângela?

FIGURA – 65: Situação problema sobre multiplicação de números na forma decimal

Na potenciação, de números racionais na representação decimal, foram desenvolvidas atividades que exploram a conversão entre registros. É o caso do exemplo (figura 66), no qual para resolvê-lo é necessário a conversão entre o registro percentual e a fração decimal e dessa para o registro decimal.

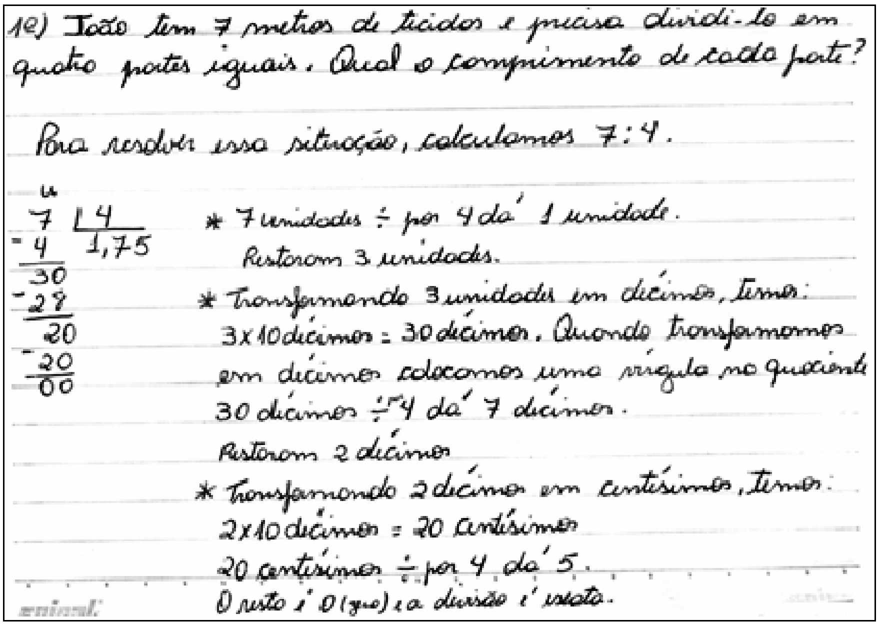


4) Escreva 5% na forma decimal. A seguir, determine o quadrado desse número. $\frac{5}{100} = (0,05)^2 =$

$0,05 \times 0,05 = 0,0025$

FIGURA – 66: Situação problema envolvendo porcentagem

A divisão de números racionais na representação decimal é apresentada aos alunos por meio de 4 exemplos, nos quais são exploradas as conversões entre os registros fracionários e decimais, bem como o Sistema de Numeração Decimal (figuras 67 e 68), o que não foi realizado na multiplicação.



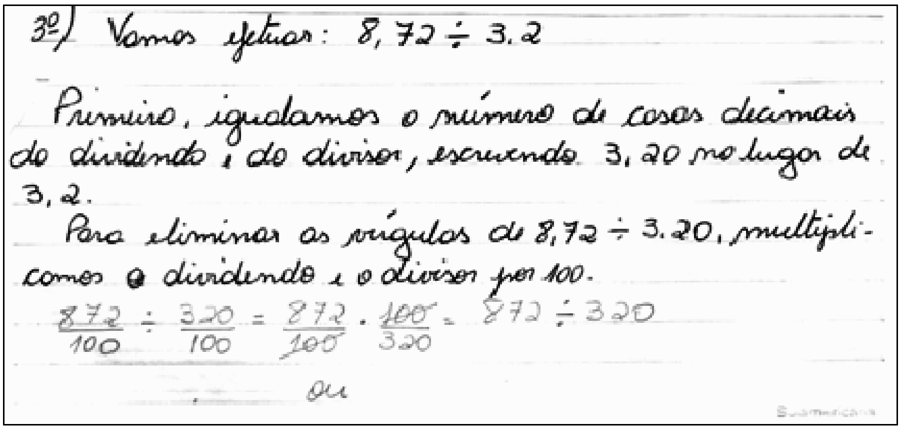
1º) João tem 7 metros de tecidos e precisa dividi-lo em quatro partes iguais. Qual o comprimento de cada parte?

Para resolver essa situação, calculamos 7 : 4.

$$\begin{array}{r|l} \overset{u}{7} & 4 \\ \cline{2-2} -4 & 1,75 \\ \cline{1-1} 30 & \\ -28 & \\ \cline{1-1} 20 & \\ -20 & \\ \cline{1-1} 00 & \end{array}$$

* 7 unidades ÷ por 4 dá 1 unidade.
Restaram 3 unidades.
* Transformando 3 unidades em décimos, temos:
3 x 10 décimos = 30 décimos. Quando transformamos em décimos colocamos uma vírgula no quociente
30 décimos ÷ 4 dá 7 décimos.
Restaram 2 décimos
* Transformando 2 décimos em centésimos, temos:
2 x 10 décimos = 20 centésimos
20 centésimos ÷ por 4 dá 5.
O resto é 0 (zero) e a divisão é exata.

FIGURA – 67: Exemplo sobre divisão de números decimais (a)



3º) Vamos efetuar: 8,72 ÷ 3.2

Primeiro, igualamos o número de casas decimais do dividendo e do divisor, escrevendo 3,20 no lugar de 3,2.

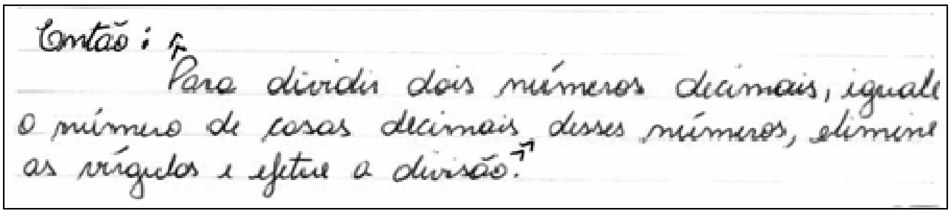
Para eliminar as vírgulas de 8,72 ÷ 3.20, multiplicamos o dividendo e o divisor por 100.

$$\frac{872}{100} \div \frac{320}{100} = \frac{872}{\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{100}}{320} = 872 \div 320$$

ou

FIGURA – 68: Exemplo sobre divisão de números decimais (b)

No entanto, nas atividades propostas de divisão a articulação entre o registro fracionário e o decimal não foi explorada, pois após a explicação de como se resolve uma divisão entre números racionais na representação decimal foi dada a seguinte regra (figura 69):



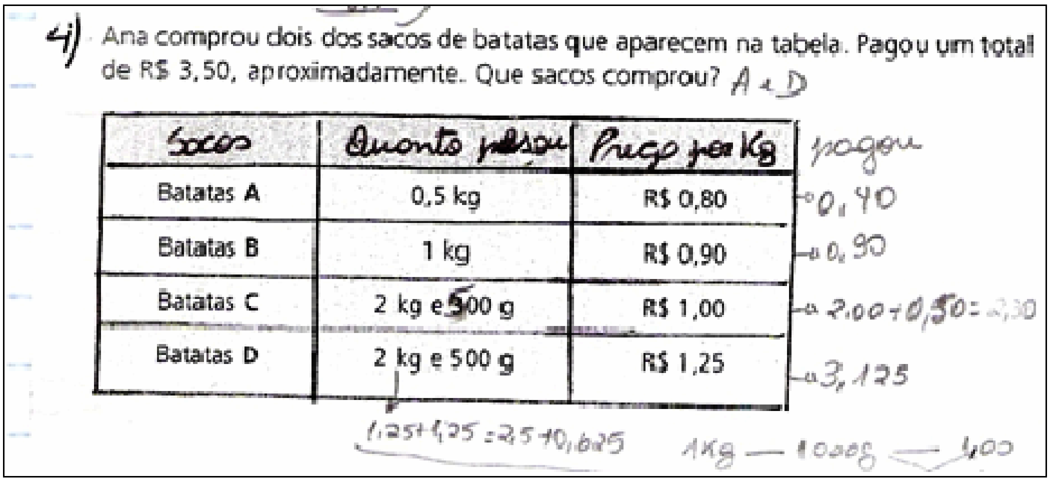
Então:

"Para dividir dois números decimais, iguale o número de casas decimais desses números, elimine as vírgulas e efetue a divisão."

FIGURA – 69: Regra para divisão de números decimais

Pelos registros no diário da professora constatamos que, os alunos foram incentivados a utilizar a regra para resolver as atividades propostas. Essas atividades, no total 8, priorizam os tratamentos no registro decimal.

Para finalizar o trabalho com as operações entre números racionais na forma decimal a professora seleciona 8 atividades. Verificamos que 6 das 8 atividades requerem tratamentos no registro decimal. Portanto, uma delas (figura 70) requer a articulação entre registros, isto é, como de costume a professora seleciona atividades que tragam os dados em tabelas (registro gráfico).



4) Ana comprou dois dos sacos de batatas que aparecem na tabela. Pagou um total de R$ 3,50, aproximadamente. Que sacos comprou? A e D

Sacos	Quanto pesou	Preço por Kg	pagou
Batatas A	0,5 kg	R$ 0,80	0,40
Batatas B	1 kg	R$ 0,90	0,90
Batatas C	2 kg e 500 g	R$ 1,00	2,00+0,50=2,30
Batatas D	2 kg e 500 g	R$ 1,25	3,125

1,25+1,25=2,5+0,625

1Kg — 1000g — 1,00

FIGURA – 70: Tabela de preços envolvendo números decimais

Constatamos que, a professora não trabalhou com as divisões não exatas de números racionais na forma decimal, bem como não deixou clara a relação existente entre números racionais nas representações decimais e fracionárias, pois desenvolveu os conteúdos como se existissem duas formas de números: os números fracionários e os números decimais e a única ligação que há entre eles é que todo número decimal pode ser transformado em fração decimal.

Além disso, verificamos uma grande ênfase ao trabalho com a representação fracionária dos números racionais, tratada pela professora como estudo das frações, em detrimento da representação decimal. O que poderia ser feito articulando-se as duas representações do número racional.

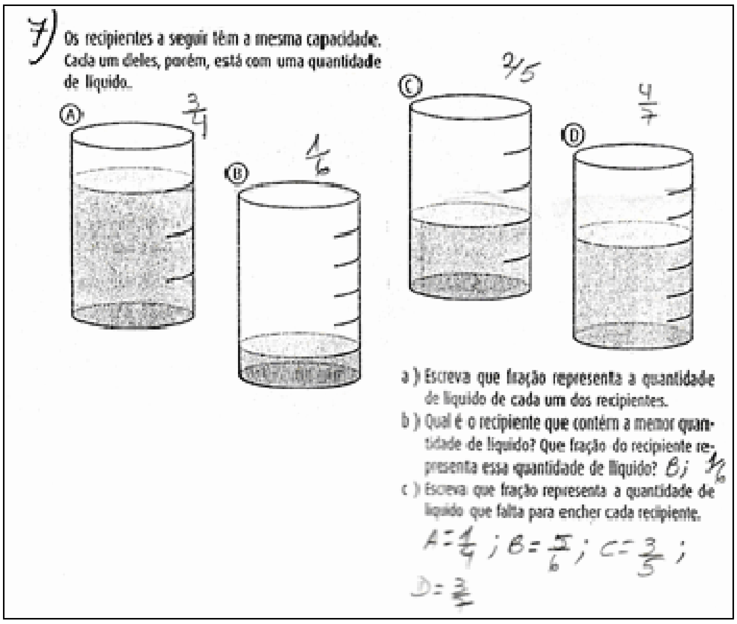
Cabe destacar mais uma vez que, em nenhum momento foi trabalhada a idéia de que número racional é todo aquele que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, sendo essa o quociente de a por b, em que a e b são números naturais, e b deve ser diferente de zero. Nem mesmo quando a professora explorou o significado quociente para as frações.

Além destes tópicos, na 5ª série ainda foram trabalhados os sistemas de medidas e algumas noções de geometria. Apesar de, em algumas atividades, serem explorados números racionais optamos por não analisá-los, pois o foco dessas atividades não estava no número racional e suas várias representações. A seguir, apresentaremos a análise do planejamento da 6ª série.

3.1.3 O Planejamento da 6ª série

Logo nas primeiras aulas, o trabalho com conteúdos relacionados ao número racional na 6ª série, desenvolve-se com uma revisão dos conteúdos estudados na 5ª série. Nessa revisão, a professora seleciona 17 atividades que exploram, principalmente, as operações com frações e números decimais[24], sendo que 10 delas requerem apenas tratamentos no registro numérico fracionário ou decimal, sem articulação entre esses registros.

A atividade número sete (figura 71) requer uma conversão do registro figural (RF) para o fracionário (RNF). Cabe aqui ressaltar que, mais duas atividades propostas na revisão também exigem a conversão no sentido $RF \rightarrow RNF$.



7) Os recipientes a seguir têm a mesma capacidade. Cada um deles, porém, está com uma quantidade de líquido.

a) Escreva que fração representa a quantidade de líquido de cada um dos recipientes.

b) Qual é o recipiente que contém a menor quantidade de líquido? Que fração do recipiente representa essa quantidade de líquido? B; $\frac{1}{6}$

c) Escreva que fração representa a quantidade de líquido que falta para encher cada recipiente.

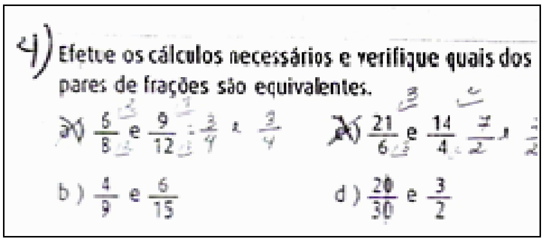
$A = \frac{1}{4}$; $B = \frac{5}{6}$; $C = \frac{3}{5}$;
$D = \frac{3}{7}$

FIGURA - 71: Objetos divididos em partes iguais (d)

A propriedade de equivalência de frações (figura 72) é retomada com o intuito de relembrar as regras para as operações de adição e subtração. As atividades que exploram essa propriedade enfatizam tratamentos no registro fracionário.

---

[24] Estamos utilizando os termos frações e números decimais, pois foram os termos utilizados pela professora na 5ª série.



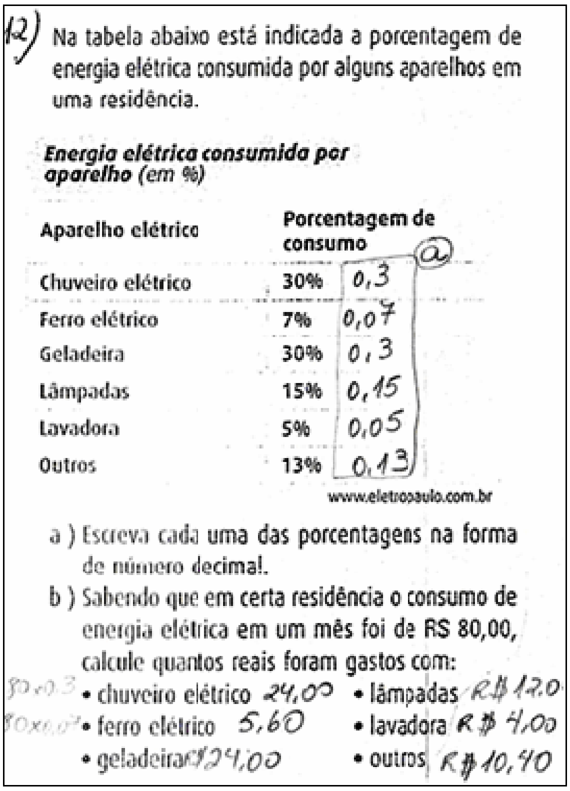
4) Efetue os cálculos necessários e verifique quais dos pares de frações são equivalentes.

~~a)~~ $\frac{6}{8}$ e $\frac{9}{12}$ = $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{4}$ ~~c)~~ $\frac{21}{6}$ e $\frac{14}{4}$ $\frac{7}{2}$,

b) $\frac{4}{9}$ e $\frac{6}{15}$ d) $\frac{20}{30}$ e $\frac{3}{2}$

FIGURA – 72: Atividade sobre equivalência (d)

Na atividade número 12 (figura 73), temos a articulação entre o registro gráfico (tabela), percentual e o decimal. Mas, podemos perceber, pelos escritos da professora, que a conversão do registro percentual para o registro decimal é realizada de forma direta sem passar pela fração decimal. Essa conversão imediata pode dificultar o entendimento do aluno, pois segundo Duval na atividade de conversão há aspectos como os da congruência e não-congruência que devem ser levados em consideração. Isto é, as dificuldades de conversão entre os registros percentual (RNP) e decimal (RND) podem ser distintas à conversão dos registros percentual (RNP) à fração decimal (FD).



12) Na tabela abaixo está indicada a porcentagem de energia elétrica consumida por alguns aparelhos em uma residência.

***Energia elétrica consumida por aparelho** (em %)*

Aparelho elétrico	Porcentagem de consumo	ⓐ
Chuveiro elétrico	30%	0,3
Ferro elétrico	7%	0,07
Geladeira	30%	0,3
Lâmpadas	15%	0,15
Lavadora	5%	0,05
Outros	13%	0,13

www.eletropaulo.com.br

a) Escreva cada uma das porcentagens na forma de número decimal.

b) Sabendo que em certa residência o consumo de energia elétrica em um mês foi de R$ 80,00, calcule quantos reais foram gastos com:

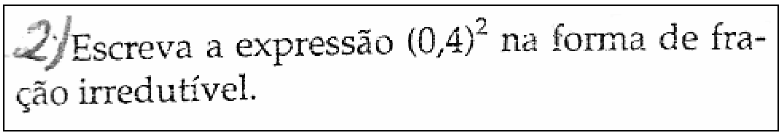
80x0,3 • chuveiro elétrico 24,00 • lâmpadas R$ 12,0
80x0,07 • ferro elétrico 5,60 • lavadora R$ 4,00
• geladeira R$ 24,00 • outros R$ 10,40

FIGURA – 73: Porcentagem e número decimal

Verificamos que, a revisão de conteúdos trabalhados na 5ª série, assim como a revisão dos conteúdos trabalhados na 4ª série, privilegiou o estudo das frações, no significado parte/todo. Os tratamentos são, na maioria, propostos no registro numérico e a grande parte das conversões é do registro figural para o registro fracionário. Não há conversões entre as representações fracionárias e decimais dos números racionais, mostrando que essas representações foram trabalhadas sem ligações entre si, ou seja, números fracionários e números decimais são desenvolvidos como números diferentes.

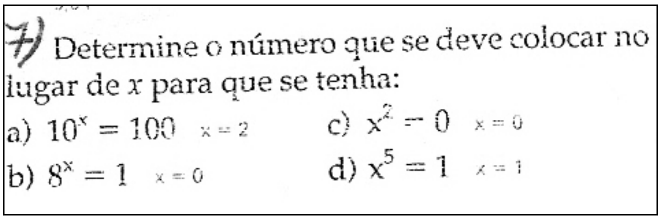
Após a revisão, a professora inicia o trabalho com as operações de potenciação e radiciação de números racionais. O título “Potência de um número racional” e “Raiz quadrada de um número racional” foram escolhidos para desenvolver esses conteúdos, não teria problema nenhum utilizar esses títulos na 6ª série, pois os alunos já estudaram as operações com números racionais na série anterior. No entanto, como destacamos, mais uma vez, no planejamento da 5ª série não fica claro o que é número racional, pela forma como é dada ênfase as frações e aos números decimais sem estabelecer uma relação entre eles e não é ampliada de forma clara a idéia de número para além da contagem.

Para desenvolver a potenciação de números racionais, a professora trabalha 8 atividades, das quais 5 requerem tratamentos no registro numérico. As demais exploram a conversão entre registros. Como podemos observar na atividade 2 (figura 74), para resolvê-la é necessário que o aluno transforme o registro decimal em fracionário. Já a atividade 7 (figura 75) requer a coordenação entre o registro algébrico e o numérico.



2) Escreva a expressão $(0,4)^2$ na forma de fração irredutível.

FIGURA – 74: Atividade sobre fração irredutível



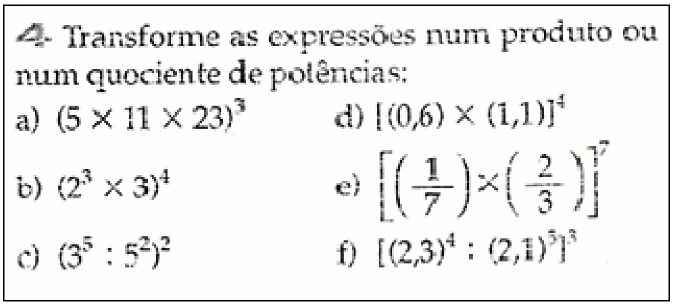
7) Determine o número que se deve colocar no lugar de x para que se tenha:

a) $10^x = 100$ $x = 2$ c) $x^2 = 0$ $x = 0$

b) $8^x = 1$ $x = 0$ d) $x^5 = 1$ $x = 1$

FIGURA – 75: Atividade de potenciação (a)

As propriedades das potências são trabalhadas nos registros numérico e algébrico. Observamos que, os exemplos e as atividades propostas para desenvolver essas propriedades exploram os números racionais ou na representação fracionária ou na representação decimal, mas em nenhum dos casos envolvem as duas representações na mesma atividade. Como demonstra a atividade 4 (figura 76).



4- Transforme as expressões num produto ou num quociente de potências:

a) $(5 \times 11 \times 23)^3$

b) $(2^3 \times 3)^4$

c) $(3^5 : 5^2)^2$

d) $[(0,6) \times (1,1)]^4$

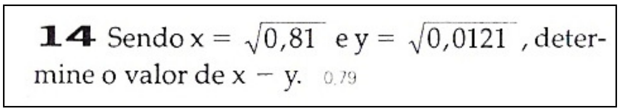
e) $\left[\left(\frac{1}{7}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)\right]^7$

f) $[(2,3)^4 : (2,1)^5]^3$

FIGURA – 76: Propriedade das potências

O trabalho com a raiz quadrada de um número racional é desenvolvido por meio de uma situação problema, na qual o aluno deveria descobrir a medida do lado do curral que Agenor queria construir, sendo que a área disponível era de $225m^2$. Os registros envolvidos para resolver a situação são o figural e o numérico. No entanto, essa articulação entre os registros figural e numérico é abandonada durante as demais atividades, pois a maioria exige tratamentos no registro numérico. Segundo Duval, não é conveniente trabalhar com apenas um registro, pois um registro é sempre parcial em relação ao objeto representado.

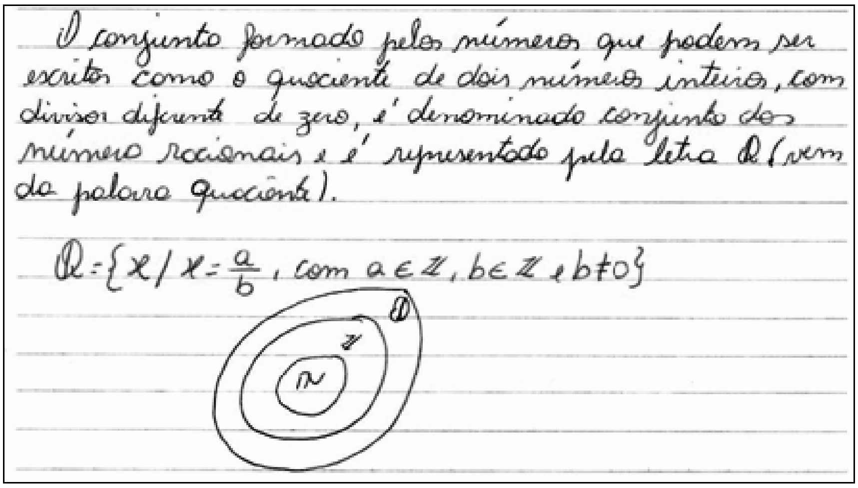
A atividade proposta número 14 (figura 77), oportuniza a articulação entre o registro algébrico e o numérico.



14 Sendo $x = \sqrt{0,81}$ e $y = \sqrt{0,0121}$, determine o valor de $x - y$. 0,79

FIGURA – 77: Atividade envolvendo princípios algébricos (a)

Após desenvolver os conteúdos referentes ao conjunto dos números inteiros, a professora passa a trabalhar com o conjunto dos números racionais. Para tanto, define esse conjunto, nos registros da língua natural, algébrico e simbólico (figura 78) como:



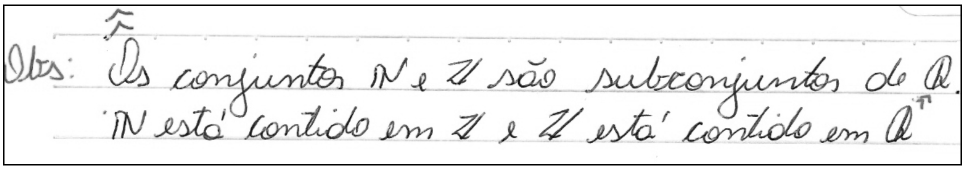
O conjunto formado pelos números que podem ser escritos como o quociente de dois números inteiros, com divisor diferente de zero, é denominado conjunto dos número racionais e é representado pela letra Q (vem da palavra quociente).

$\mathbb{Q} = \{x / x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0\}$

FIGURA – 78: Definição de número racional

Até esse momento, não tínhamos encontrado no planejamento da professora definições para os números racionais e o uso do registro algébrico para definir esses números, somente depois de desenvolver o conjunto dos números inteiros foi definido o número racional.

De forma imediata, é dada a informação em língua natural que o conjunto dos naturais e dos inteiros são subconjuntos do conjunto Q (figura 79).



Obs: Os conjuntos N e Z são subconjuntos do Q.
N está contido em Z e Z está contido em Q

FIGURA – 79: Subconjunto dos racionais

Em seguida, é trabalhada a noção de módulo ou valor absoluto de um número racional, bem como a noção de opostos ou simétricos, sendo utilizado o registro figural (reta) para mostrar a localização de dois números racionais opostos na reta e, destacado que ambos estão a mesma distância do zero, como pode ser observado na figura 80.

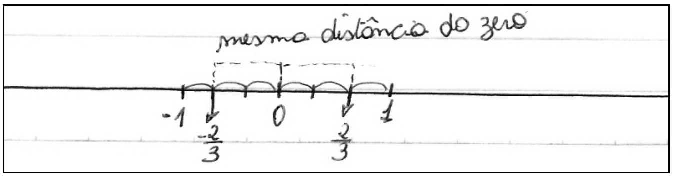
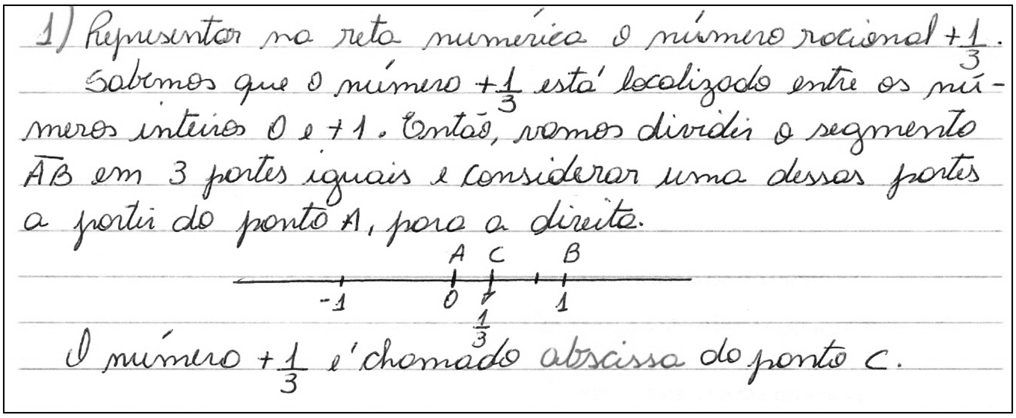


FIGURA – 80: Reta numérica

Pela primeira vez, é dedicado um tópico para trabalhar com a reta numérica, fazendo referências a localização de números inteiros relativos na reta. No entanto, esse registro figural (reta), importante para a abstração do conceito de número racional, é desenvolvido de forma rápida e direta, como podemos observar na explicação dada para localizar $\frac{1}{3}$ na reta. É suposto que, o aluno saiba que $\frac{1}{3}$ está localizado entre 0 e 1 (figura 81), não sendo incentivada a conversão do registro fracionário para o decimal, uma das formas de verificar, realmente, se esse número racional é maior que zero e menor que 1.



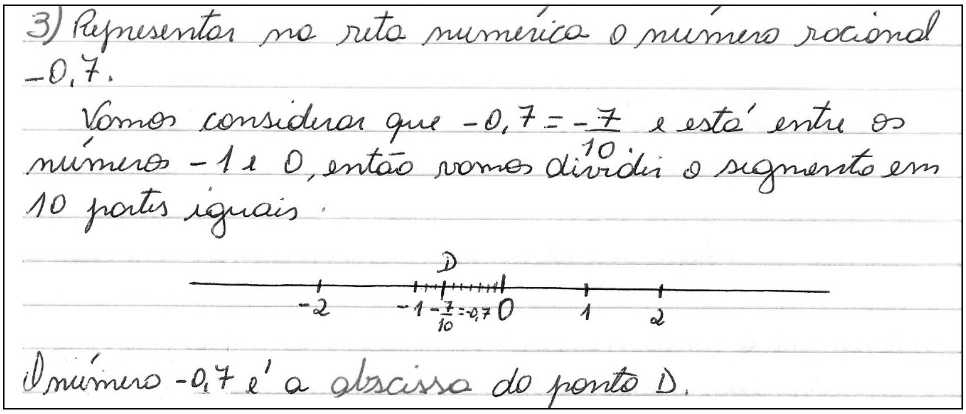
1) Representar na reta numérica o número racional $+\frac{1}{3}$.

Sabemos que o número $+\frac{1}{3}$ está localizado entre os números inteiros 0 e +1. Então, vamos dividir o segmento $\overline{AB}$ em 3 partes iguais e considerar uma dessas partes a partir do ponto A, para a direita.

O número $+\frac{1}{3}$ é chamado abscissa do ponto C.

FIGURA – 81: Localização do número racional na reta (a)

Durante a explicação de como se localiza um número racional na reta, foi proposta a localização de $-0,7$ (figura 82). Observe que, um número na representação decimal pela primeira vez, no planejamento da professora, foi considerado um número racional, pois na 5ª série era denominado número decimal.



3) Representar na reta numérica o número racional $-0,7$.

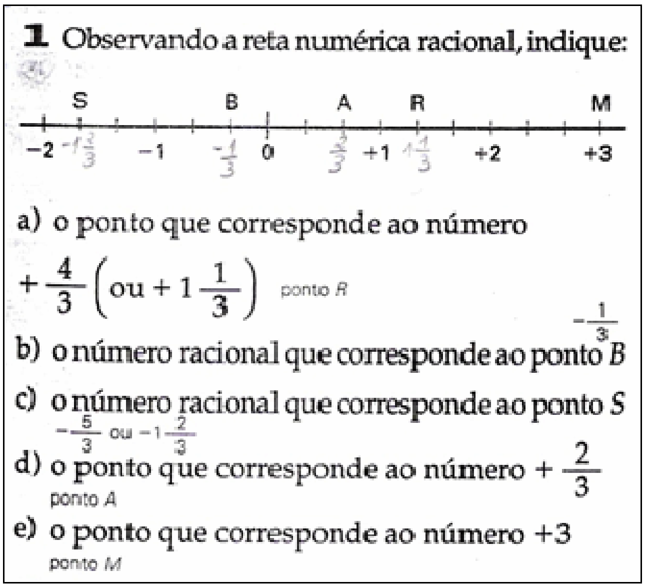
Vamos considerar que $-0,7 = -\frac{7}{10}$ e está entre os números -1 e 0, então vamos dividir o segmento em 10 partes iguais.

O número $-0,7$ é a abscissa do ponto D.

FIGURA – 82: Localização do número racional na reta (b)

Os exemplos e atividades que exploram esse aspecto de localização dos números racionais na reta são raros. Foram ao total 3 exemplos e 4 atividades. Desse modo, torna-se difícil para o aluno adquirir o conceito de número racional, uma vez que, um mesmo número possui uma multiplicidade de representações.

Além disso, nas atividades selecionadas pela professora há uma tendência em localizar apenas números racionais na representação fracionária, por exemplo, na figura 83. Nenhuma das atividades potencializa a conversão entre os registros fracionários e decimais.



1 Observando a reta numérica racional, indique:

a) o ponto que corresponde ao número $+\frac{4}{3}\left(\text{ou } +1\frac{1}{3}\right)$ ponto *R*

b) o número racional que corresponde ao ponto *B* $-\frac{1}{3}$

c) o número racional que corresponde ao ponto *S*
$-\frac{5}{3}$ ou $-1\frac{2}{3}$

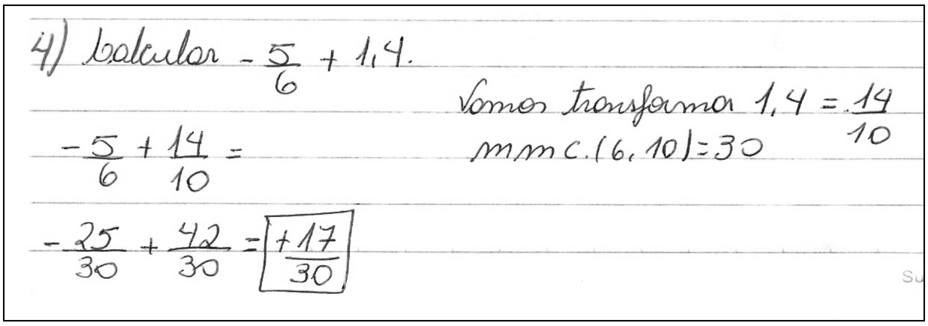
d) o ponto que corresponde ao número $+\frac{2}{3}$
ponto *A*

e) o ponto que corresponde ao número +3
ponto *M*

FIGURA – 83: Localização do número racional na reta (c)

No entanto, a multiplicidade de representações de um número racional, não se restringe apenas a representação fracionária, pois um mesmo número racional pode ser representado numericamente no registro fracionário e no decimal, sendo que pelo domínio desses registros, potencializados, especialmente pela atividade de conversão, a conceituação do número racional pode ser concretizada.

Um dos raros exemplos que favorecem essa conversão, é trabalhado na adição e subtração de números racionais, como podemos verificar na figura 84:



4) Calcular $-\frac{5}{6} + 1{,}4.$

Vamos transforma $1{,}4 = \frac{14}{10}$

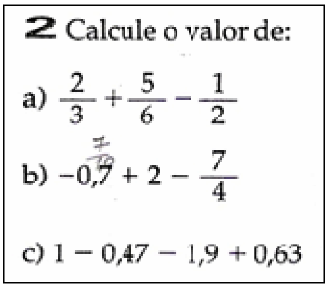
mmc.(6, 10) = 30

$-\frac{5}{6} + \frac{14}{10} =$

$-\frac{25}{30} + \frac{42}{30} = \boxed{+\frac{17}{30}}$

FIGURA – 84: Transformação de número decimal em fração decimal

Além desse exemplo, encontramos nas atividades propostas de adição e subtração de números racionais (figuras 85 e 86), mais duas oportunidades do aluno converter o registro decimal em fracionário. No entanto, pelos registros da professora, a conversão do registro fracionário em decimal não foi realizada durante as atividades.



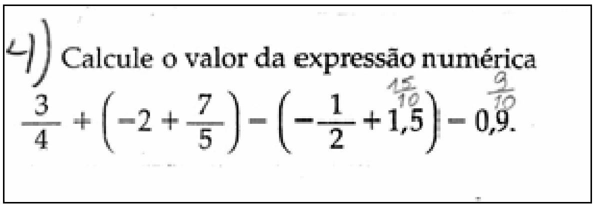
2 Calcule o valor de:

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$

b) $-0,\overset{\frac{7}{10}}{7}+2-\frac{7}{4}$

c) $1-0,47-1,9+0,63$

FIGURA – 85: Operações entre números racionais (a)

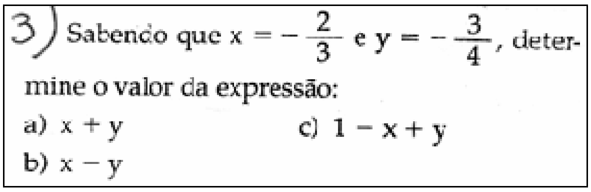


4) Calcule o valor da expressão numérica

$$\frac{3}{4}+\left(-2+\frac{7}{5}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\overset{\frac{15}{10}}{1,5}\right)-\overset{\frac{9}{10}}{0,9}.$$

FIGURA – 86: Expressão numérica

Outro exemplo de conversão, trabalhado pela professora, é do registro algébrico para o numérico fracionário, apresentado na figura 87.



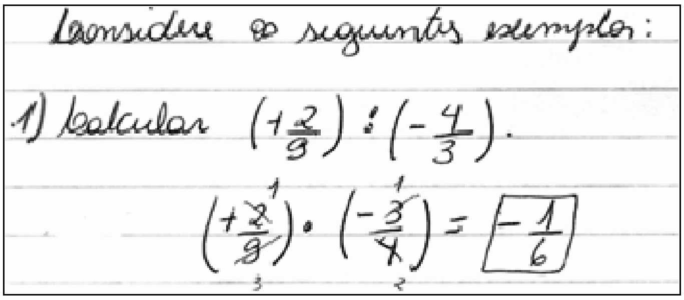
3) Sabendo que $x=-\frac{2}{3}$ e $y=-\frac{3}{4}$, determine o valor da expressão:

a) $x+y$ c) $1-x+y$

b) $x-y$

FIGURA – 87: Atividade envolvendo princípios algébricos (b)

Por meio de exemplos, dados ora no registro fracionário ora no registro decimal, sem a conversão entre eles, a professora desenvolve as operações de multiplicação e divisão de números racionais, como podemos verificar nas figuras 88 e 89:

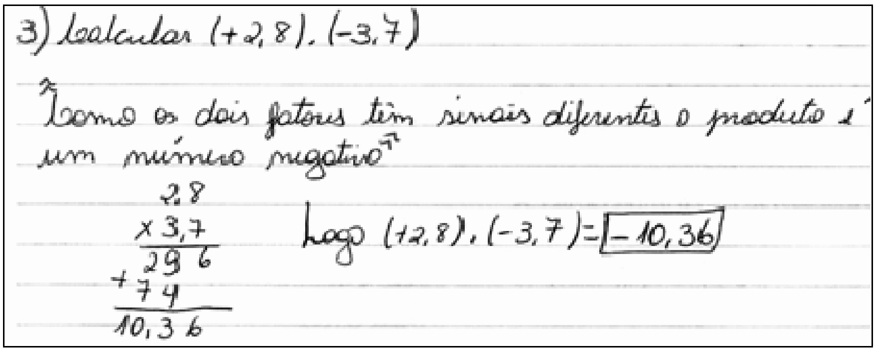


Considere os seguintes exemplos:

1) Calcular $\left(+\frac{2}{9}\right):\left(-\frac{4}{3}\right)$.

$$\left(+\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{9}}}\right)\cdot\left(-\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}\right)=\boxed{-\frac{1}{6}}$$

FIGURA – 88: Operações entre números racionais (b)



3) Calcular (+2,8).(-3,7)

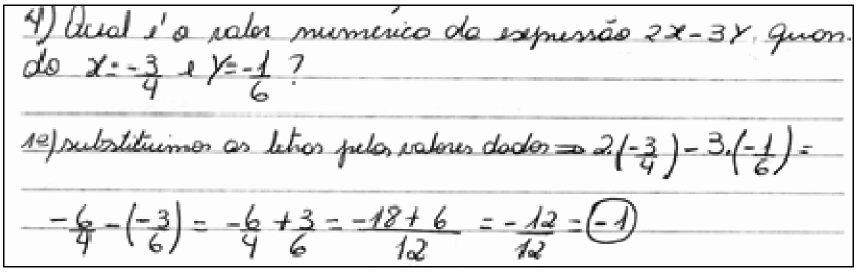
Como os dois fatores têm sinais diferentes o produto é um número negativo

$$\begin{array}{r} 2,8 \\ \times\ 3,7 \\ \hline 296 \\ +\ 74 \\ \hline 10,36 \end{array}$$

Logo $(+2,8).(-3,7)=\boxed{-10,36}$

FIGURA – 89: Operações entre números racionais (c)

Além desses exemplos, são trabalhados exemplos que potencializam a conversão entre o registro algébrico e o numérico fracionário (figura 90), conversão essa que vem sendo explorada pela professora em várias atividades.



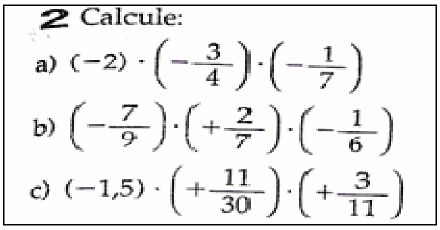
4) Qual é o valor numérico da expressão $2X - 3Y$ quando $X = -\frac{3}{4}$ e $Y = -\frac{1}{6}$?

1º) substituímos as letras pelos valores dados $\Rightarrow 2\left(-\frac{3}{4}\right) - 3.\left(-\frac{1}{6}\right) =$

$-\frac{6}{4} - \left(-\frac{3}{6}\right) = -\frac{6}{4} + \frac{3}{6} = \frac{-18+6}{12} = -\frac{12}{12} = \boxed{-1}$

FIGURA – 90: Atividade envolvendo princípios algébricos (c)

Para revisar as quatro operações, entre números racionais, são selecionadas 15 atividades. Dessas 15, 12 podem ser resolvidas por tratamentos no registro fracionário ou decimal. Porém, dessas 12 atividades, 2 delas foram divididas em quatro itens de “a” até “d”, sendo que em uma das letras oportuniza a conversão entre o registro fracionário e o decimal. No caso, da atividade número dois (figura 91) a letra “c”, potencializa a conversão entre o registro fracionário e o decimal.



2 Calcule:

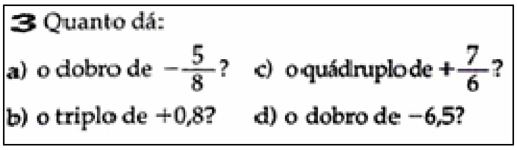
a) $(-2) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$

b) $\left(-\frac{7}{9}\right) \cdot \left(+\frac{2}{7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$

c) $(-1{,}5) \cdot \left(+\frac{11}{30}\right) \cdot \left(+\frac{3}{11}\right)$

FIGURA – 91: Atividade sobre multiplicação de números racionais (a)

Um exemplo de conversão do registro da língua natural para o registro fracionário, é trabalhado na atividade três (figura 92). Conversões desse tipo são raras no planejamento da professora. Em geral, são mais trabalhados os tratamentos no registro fracionário.



3 Quanto dá:

a) o dobro de $-\frac{5}{8}$?

b) o triplo de +0,8?

c) o quádruplo de $+\frac{7}{6}$?

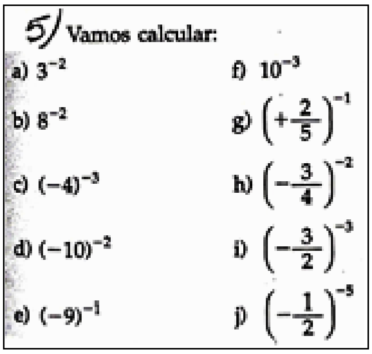
d) o dobro de −6,5?

FIGURA – 92: Atividade sobre multiplicação de números racionais (b)

Observamos que, a maioria dos exemplos e atividades, envolvendo as quatro operações, selecionados pela professora, foram extraídos do livro “A Conquista da

Matemática". Catto (2000) ao analisar esse livro, no que tange ao conceito de número racional, concluiu que, é privilegiada a atividade de tratamento (cálculo) no registro numérico, priorizando os algoritmos e as regras e raramente ocorre a conversão entre os registros fracionário e decimal. Um dos raros exemplos que essa conversão é necessária, é no cálculo numérico da expressão $-\frac{5}{6}+1,4$, também utilizado pela professora.

Além das quatro operações fundamentais com números racionais, é retomada e ampliada a potenciação desses números, introduzindo a noção de expoente negativo. As atividades selecionadas para explorar essa noção (figura 93) envolvem tratamentos no registro fracionário.



5/ Vamos calcular:

a) 3^{-2}

b) 8^{-2}

c) $(-4)^{-3}$

d) $(-10)^{-2}$

e) $(-9)^{-1}$

f) 10^{-3}

g) $\left(+\frac{2}{5}\right)^{-1}$

h) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$

i) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$

j) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}$

FIGURA – 93: Atividade de potenciação (b)

Na 6ª série não foi trabalhada a noção de decimais periódicos. Podemos intuir que, essa noção não foi tratada, porque são raros os exemplos e atividades que potencializam a conversão do registro numérico fracionário para o decimal.

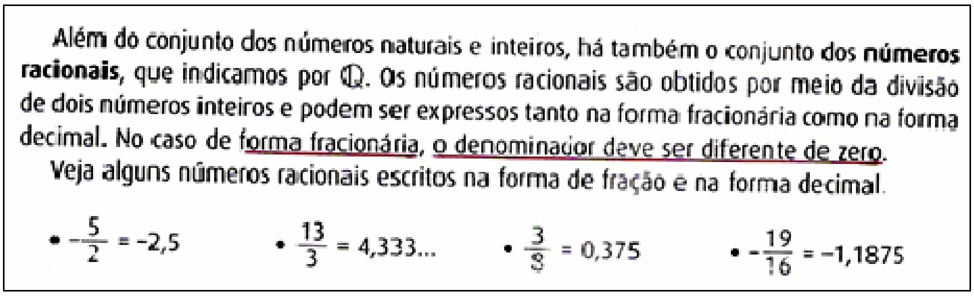
Portanto, o número racional, na 6ª série, foi definido como qualquer número que pode ser representado na forma $\frac{p}{q}$, sendo p e q inteiros e q não-nulo, registro algébrico não apresentado na 5ª série. Lembrando que, nesta série também não foi trabalhado as articulações entre os registros fracionário e decimal e na 6ª série constatamos que são raros os exemplos de articulação entre esses registros, contrariando as recomendações presentes nos documentos oficiais, por exemplo, os PCN. Esse fato nos leva a concluir que o desenvolvimento dos conteúdos relacionados ao número racional foi limitado.

Além destes tópicos, na 6ª série ainda foram trabalhadas as equações, inequações e razão e proporção Apesar de, em algumas atividades, serem explorados números racionais optamos por não analisá-los, pois o foco dessas atividades não estava no número racional e suas várias representações. A seguir, apresentaremos a análise do planejamento da 7ª série.

3.1.4 O Planejamento da 7ª série

Na 7ª série os conteúdos relacionados ao conceito de número racional são desenvolvidos quando, a professora, aborda o tópico conjuntos numéricos. Esse tópico tem um caráter de revisão e ampliação dos conceitos estudados nas séries anteriores. Isso porque, ao tratar dos conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais trabalhou-se, somente, a forma de representar esses conjuntos e abordou-se como conteúdo novo a representação decimal infinita dos números racionais, que não havia sido desenvolvida na 6ª série, bem como o conjunto dos números irracionais e reais.

Em relação aos números racionais, pela primeira vez no planejamento verificamos referências as formas de representar esses números, ou seja, no texto (figura 94) selecionado para retomar o conjunto dos números racionais está a seguinte frase: "Os números racionais são obtidos por meio da divisão de dois números inteiros e podem ser expressos tanto na forma fracionária como na forma decimal.", bem como aparece a igualdade entre as representações fracionárias e decimais.



Além do conjunto dos números naturais e inteiros, há também o conjunto dos **números racionais**, que indicamos por ℚ. Os números racionais são obtidos por meio da divisão de dois números inteiros e podem ser expressos tanto na forma fracionária como na forma decimal. No caso de forma fracionária, o denominador deve ser diferente de zero.

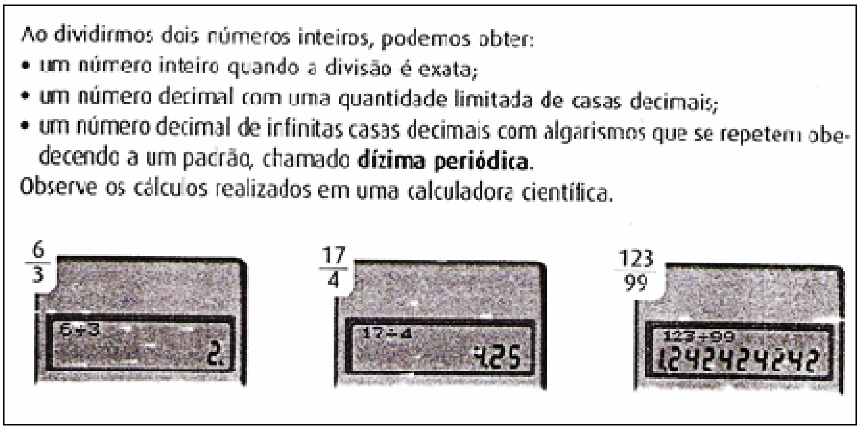
Veja alguns números racionais escritos na forma de fração e na forma decimal.

- $-\frac{5}{2} = -2,5$
- $\frac{13}{3} = 4,333...$
- $\frac{3}{8} = 0,375$
- $-\frac{19}{16} = -1,1875$

FIGURA – 94: Formas de representar os números racionais

Exemplos como os acima, não foram trabalhados nas séries anteriores. Constatamos, apenas, a conversão do registro decimal (exato) para o fracionário. Na perspectiva de registros, deixar de trabalhar as conversões nos dois sentidos pode acarretar dificuldades na aprendizagem relacionadas ao fenômeno da diferenciação entre objeto matemático e suas representações, isto é, o aluno pode não identificar que $\frac{1}{4}$ e $0,25$ são representações de um mesmo número.

Após definir os números racionais como o resultado da divisão de dois números inteiros e explicitar as formas numéricas de representar esses números, a professora explora os resultados obtidos quando se divide dois números inteiros (figura 95), por meio dos registros da língua natural, fracionário e decimal. Percebemos que, a professora continua selecionando textos que utilizam a terminologia "número decimal".



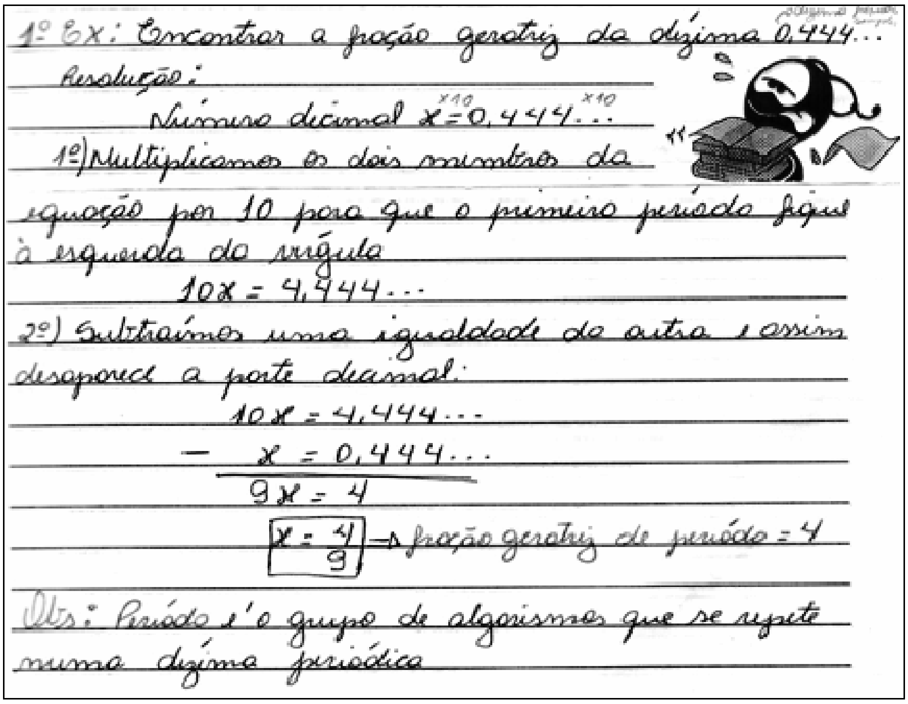
Ao dividirmos dois números inteiros, podemos obter:

- um número inteiro quando a divisão é exata;
- um número decimal com uma quantidade limitada de casas decimais;
- um número decimal de infinitas casas decimais com algarismos que se repetem obedecendo a um padrão, chamado **dízima periódica**.

Observe os cálculos realizados em uma calculadora científica.

FIGURA – 95: Divisão de números inteiros

Em seguida, é trabalhada a conversão do registro decimal periódico para o fracionário, por meio de exemplos que envolvem tratamentos algébricos, apresentados na figura 96.



1º Ex: Encontrar a fração geratriz da dízima 0,444...

Resolução:

Número decimal $\overset{\times 10}{x} = 0{,}444\overset{\times 10}{\ldots}$

1º) Multiplicamos os dois membros da equação por 10 para que o primeiro período fique à esquerda da vírgula

$10x = 4{,}444\ldots$

2º) Subtraímos uma igualdade da outra e assim desaparece a parte decimal:

$$\begin{array}{r} 10x = 4{,}444\ldots \\ -\quad x = 0{,}444\ldots \\ \hline 9x = 4 \end{array}$$

$\boxed{x = \frac{4}{9}}$ → fração geratriz de período = 4

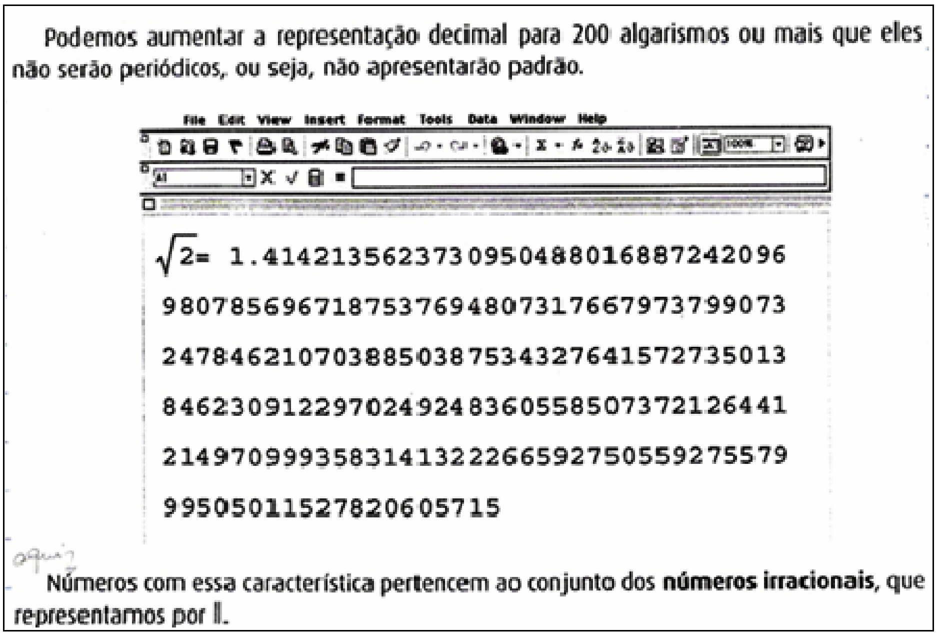
Obs: Período é o grupo de algarismos que se repete numa dízima periódica

FIGURA – 96: Regra para encontrar a fração geratriz

Conforme o encaminhamento dado pela professora, as dízimas periódicas são números decimais periódicos. Não são abordadas, como uma forma de representar os números racionais. Esse tipo de encaminhamento pode levar o aluno a considerar como números racionais somente aqueles cuja representação decimal é finita, concepções presentes ainda entre professores como revelou a pesquisa de Penteado (2004). Para o grupo de professores analisados, números racionais são aqueles que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, como as dízimas periódicas requerem tratamentos algébricos para essa transformação, nem sempre lembrados, eles as classificam como números irracionais.

Podemos verificar ainda, no planejamento, que as propriedades relacionadas às representações decimais finita e infinita não são abordadas, ou seja, não desenvolve-se que a divisão de dois números inteiros só vai ter uma representação decimal finita, se a fatoração do denominador apresentar os fatores 2 e 5, ou só 2 ou só 5. Além disso, as dízimas periódicas terminadas em 9 não são exploradas, por exemplo, mostrar que $0{,}9999...=1$, bem como a localização na reta de dízimas periódicas.

De modo análogo, ao utilizado para representar os resultados da divisão de dois números inteiros, a professora mostra aos alunos que existem números cuja representação decimal é infinita, mas não é periódica (figura 97). Esses números são chamados irracionais.



Podemos aumentar a representação decimal para 200 algarismos ou mais que eles não serão periódicos, ou seja, não apresentarão padrão.

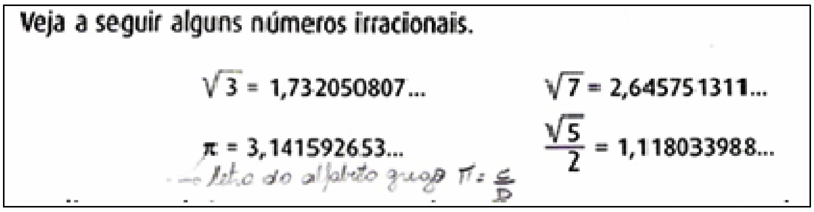
```
√2= 1.4142135623730950488016887242096
980785696718753769480731766797379907З
2478462107038850387534327641572735013
8462309122970249248360558507372126441
21497099935831413222665927505592755 79
99505011527820605715
```

aqui?

Números com essa característica pertencem ao conjunto dos **números irracionais**, que representamos por 𝕀.

FIGURA – 97: Representação decimal de $\sqrt{2}$

Após essa constatação, a professora mostra outros exemplos de números irracionais, apresentados na figura 98.



Veja a seguir alguns números irracionais.

$\sqrt{3} = 1{,}732050807...$ $\sqrt{7} = 2{,}645751311...$

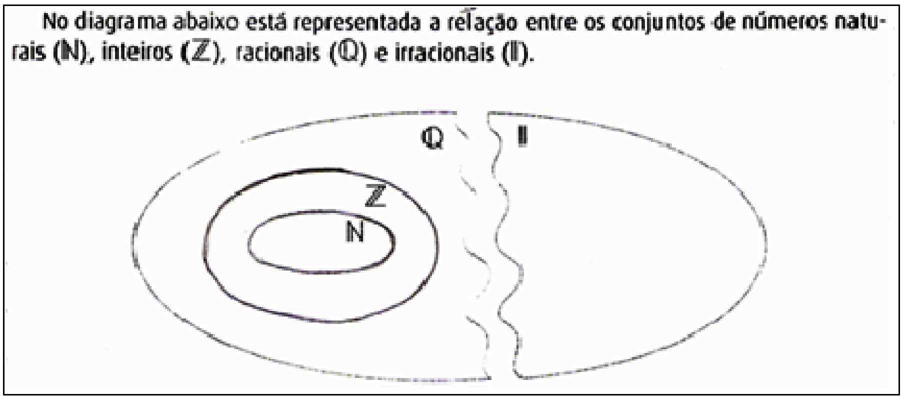
$\pi = 3{,}141592653...$ $\frac{\sqrt{5}}{2} = 1{,}118033988...$

→ letra do alfabeto grego $\pi = \frac{C}{D}$

FIGURA – 98: Exemplos de números irracionais

Acreditamos que, uma maneira de trabalhar com os irracionais de forma mais significativa, que simplesmente defini-los como: um número que não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}, com\ a \in Z, b \in Z\ e\ b \neq 0$; um número que não pode ser escrito na forma de fração; um número cuja representação decimal é infinita e não periódica, seria por meio da evolução histórica, destacando a descoberta da incomensurabilidade, bem como utilizar os vários registros de representação no trabalho com esses números, não somente os exemplos clássicos que aparecem nos livros didáticos (raízes quadradas não exatas, π, ...).

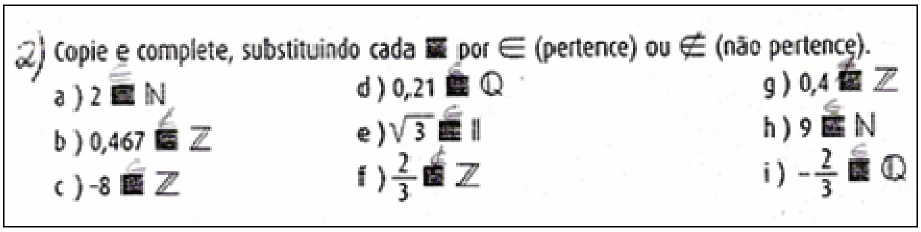
Por meio de um diagrama (figura 99) é enunciada a relação entre os conjuntos numéricos, sem fazer referências que os números irracionais não são uma extensão dos números racionais. O diagrama mostra de forma direta que existe uma relação de inclusão entre os naturais, inteiros e racionais, o que não acontece com os irracionais. No entanto, essa relação nem sempre é abstraída pelos alunos.



No diagrama abaixo está representada a relação entre os conjuntos de números naturais (ℕ), inteiros (ℤ), racionais (ℚ) e irracionais (𝕀).

FIGURA – 99: Diagrama dos conjuntos numéricos (a)

As atividades, selecionadas para revisar os conjuntos numéricos, têm um caráter de classificação, ou seja, são apresentados números e conjuntos e questiona-se se esse número pertence ou não ao conjunto dado. Observe que, na atividade número dois (figura 100) não há números racionais na representação decimal periódica, nem números irracionais na representação decimal.



2) Copie e complete, substituindo cada $\blacksquare$ por $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence).

a) $2 \overset{\in}{\blacksquare} \mathbb{N}$

b) $0,467 \overset{\notin}{\blacksquare} \mathbb{Z}$

c) $-8 \overset{\in}{\blacksquare} \mathbb{Z}$

d) $0,21 \overset{\in}{\blacksquare} \mathbb{Q}$

e) $\sqrt{3} \overset{\in}{\blacksquare} \mathbb{I}$

f) $\frac{2}{3} \overset{\notin}{\blacksquare} \mathbb{Z}$

g) $0,4 \overset{\notin}{\blacksquare} \mathbb{Z}$

h) $9 \overset{\in}{\blacksquare} \mathbb{N}$

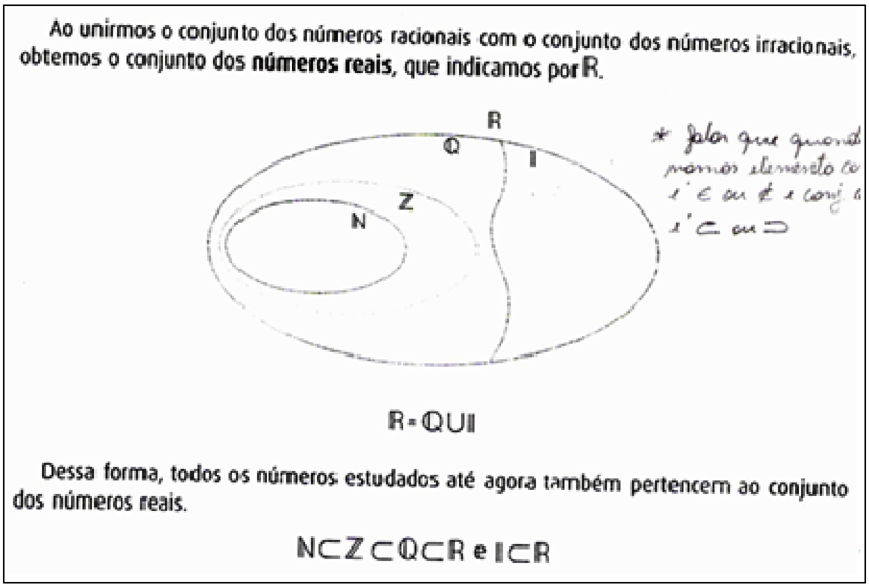
i) $-\frac{2}{3} \overset{\in}{\blacksquare} \mathbb{Q}$

FIGURA – 100: Relação de pertinência

Não foi desenvolvido um trabalho com a representação decimal infinita não periódica e o registro figural (reta), por exemplo, a existência do número $0,12345678910111213...$ pode ser explicada por ser um ponto da reta, facilitando os alunos a aceitarem essa forma de representação como números; pois pesquisas revelam que os alunos freqüentemente se sentem inseguros ao responder questões que não envolvam os exemplos contextualizados, por exemplo, $\sqrt{2}$. Além disso, a discussão da infinidade tanto do conjunto dos números racionais quanto do conjunto dos irracionais não foi trabalhada, bem como a propriedade de densidade de ambos os conjuntos.

A propriedade de densidade nos racionais pode ser desenvolvida por meio do processo de média aritmética, articulando os registros de representação decimal e figural (reta) dos números racionais, trazendo exemplos para mostrar porque o conjunto dos números inteiros não é um conjunto denso. No conjunto dos números irracionais a densidade pode ser abordada por meio da representação decimal infinita não periódica e o registro figural (reta), para mostrar que entre dois irracionais existem infinitos irracionais, trocando apenas um algarismo, conforme trabalho realizado por Penteado (2004) em sua dissertação de mestrado.

O diagrama apresentado anteriormente foi retomado para definir o conjunto dos números reais (figura 101), isto é, para obter o conjunto dos números reais, conforme indicação do texto selecionado pela professora, basta unir o conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.



Ao unirmos o conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais, obtemos o conjunto dos **números reais**, que indicamos por R.

* falar que quand
[illegible] elemento co
1' ∈ ou ∉ e conj. c
1' ⊂ ou ⊃

$R = Q \cup I$

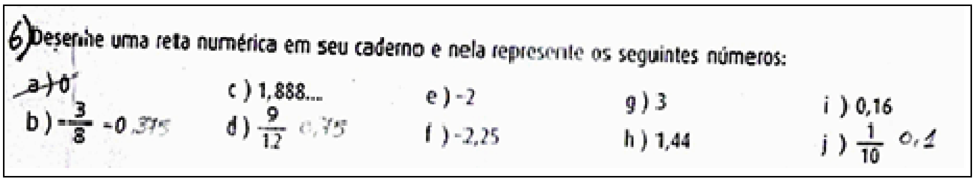
Dessa forma, todos os números estudados até agora também pertencem ao conjunto dos números reais.

$N \subset Z \subset Q \subset R$ e $I \subset R$

FIGURA – 101: Diagrama dos conjuntos numéricos (b)

Ao retomar o conceito de número racional na 7ª série a professora seleciona um texto que traz as duas formas numéricas de representar esses números (fracionária e decimal), por meio da linguagem de conjuntos. No entanto, as conversões entre essas representações continuam sendo pouco exploradas, visto que a maioria das atividades tem um caráter classificatório, ou seja, solicitam aos alunos classificar a representação de um número como sendo racional ou irracional.

Para finalizar o trabalho com os conjuntos numéricos na 7ª série a professora seleciona 13 atividades de revisão. Dessas 13 atividades, 5 envolvem as relações de pertinência e inclusão, 5 a conversão entre o registro decimal periódico e fracionário e 2 envolvem a reta numérica. No entanto, apenas uma dessas 2 requer que o aluno construa a reta numérica (figura 102) e localize nela os números racionais dados, um exemplo de conversão do registro numérico para o figural (reta) pouco explorado pela professora.

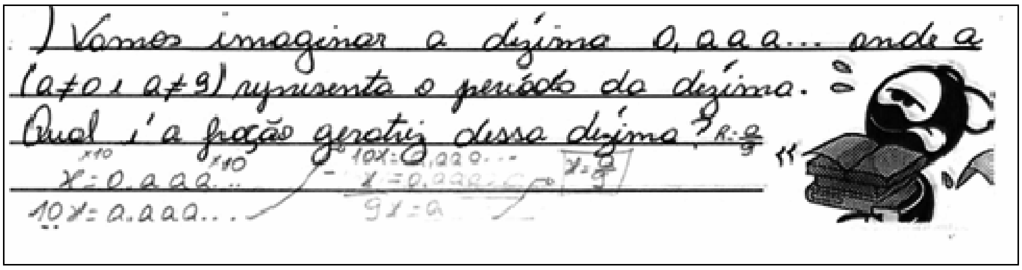


6) Desenhe uma reta numérica em seu caderno e nela represente os seguintes números:

~~a) 0~~
b) $-\frac{3}{8}$ $-0,375$
c) 1,888...
d) $\frac{9}{12}$ 0,75
e) -2
f) -2,25
g) 3
h) 1,44
i) 0,16
j) $\frac{1}{10}$ 0,1

FIGURA – 102: Localização na reta de números racionais

A outra atividade (figura 103), das 13 escolhidas, requer tratamentos no registro algébrico.



) Vamos imaginar a dízima 0,aaa... onde a ($a \neq 0$ e $a \neq 9$) representa o período da dízima. Qual é a fração geratriz dessa dízima? R: $\frac{a}{9}$

$x = 0,aaa\ldots$ (×10)

$10x = a,aaa\ldots$

$10x = a,aaa\ldots$

$- x = 0,aaa\ldots$

$9x = a$

$x = \frac{a}{9}$

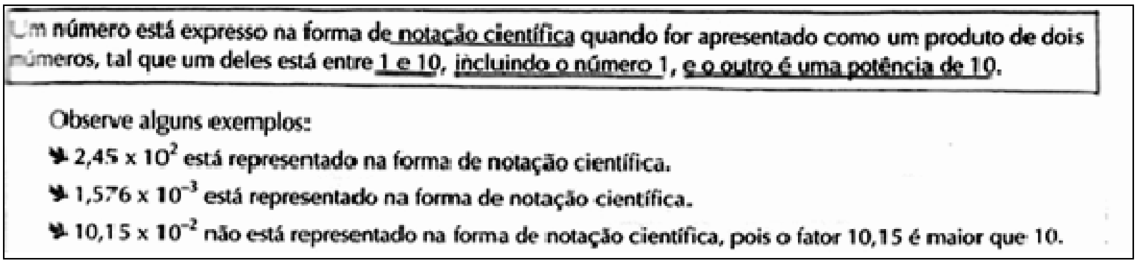
FIGURA – 103: Atividade sobre fração geratriz

Além destes tópicos, na 7ª série trabalhou-se ainda cálculo algébrico, produto notáveis, frações algébricas, equações fracionárias e literais, retas, ângulos e polígonos. Apesar de, em algumas atividades, serem explorados números racionais optamos por não analisá-los, pois o foco dessas atividades não estava no número racional e suas várias representações. A seguir, apresentaremos a análise do planejamento da 8ª série.

3.1.5 O Planejamento da 8ª série

Na 8ª série são desenvolvidos os conteúdos relacionados ao conceito de número racional, nas primeiras aulas, principalmente, quando a professora retoma as operações de potenciação e radiciação e desenvolve os tópicos de notação científica, bem como potência com expoente racional.

Para introduzir a notação científica, uma das formas de representar números racionais muito pequenos ou muito grandes, a professora opta por um pequeno texto (figura 104) que traz exemplos de profissionais que utilizam essa notação em seus trabalhos. Em seguida, retoma as propriedades de base dez, com o intuito de explicar os procedimentos necessários para representar números racionais muito grandes ou muito pequenos pela notação científica. Os procedimentos são dados no registro da língua natural, seguidos de exemplos e atividades de aplicação.



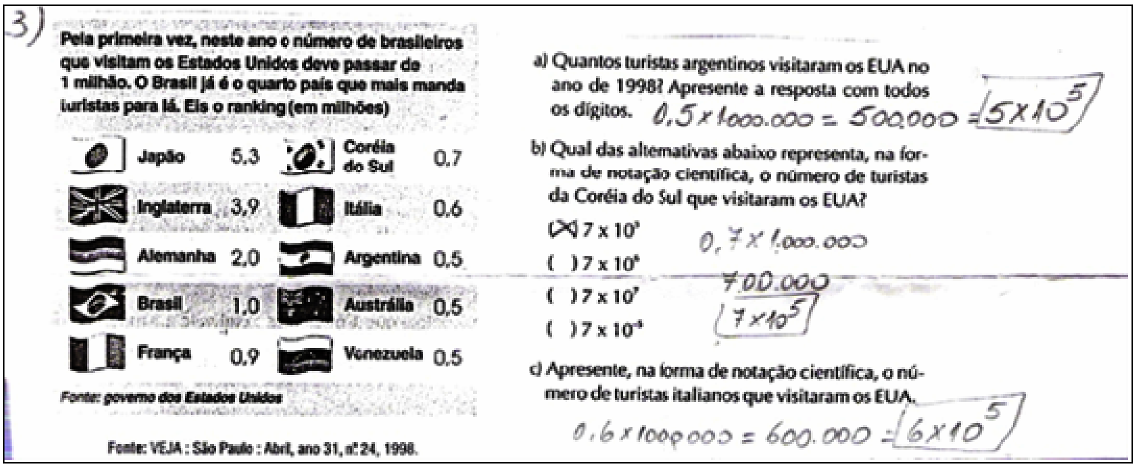
Um número está expresso na forma de notação científica quando for apresentado como um produto de dois números, tal que um deles está entre 1 e 10, incluindo o número 1, e o outro é uma potência de 10.

Observe alguns exemplos:

- $2,45 \times 10^2$ está representado na forma de notação científica.
- $1,576 \times 10^{-3}$ está representado na forma de notação científica.
- $10,15 \times 10^{-2}$ não está representado na forma de notação científica, pois o fator 10,15 é maior que 10.

FIGURA – 104: Notação científica

As atividades, 5 ao total, podem ser resolvidas por tratamentos no registro numérico. Verificamos, mais uma vez que, a professora busca selecionar atividades que apresentem os dados por meio de tabelas (registro gráfico). Como podemos observar no exemplo da figura 105:



3) Pela primeira vez, neste ano o número de brasileiros que visitam os Estados Unidos deve passar de 1 milhão. O Brasil já é o quarto país que mais manda turistas para lá. Eis o ranking (em milhões)

Japão	5,3	Coréia do Sul	0,7
Inglaterra	3,9	Itália	0,6
Alemanha	2,0	Argentina	0,5
Brasil	1,0	Austrália	0,5
França	0,9	Venezuela	0,5

Fonte: governo dos Estados Unidos

Fonte: VEJA : São Paulo : Abril, ano 31, nº 24, 1998.

a) Quantos turistas argentinos visitaram os EUA no ano de 1998? Apresente a resposta com todos os dígitos. $0,5 \times 1000.000 = 500.000 = \boxed{5 \times 10^5}$

b) Qual das alternativas abaixo representa, na forma de notação científica, o número de turistas da Coréia do Sul que visitaram os EUA?

☒ 7×10^5 $0,7 \times 1.000.000$

( ) 7×10^6 700.000

( ) 7×10^7 $\boxed{7 \times 10^5}$

( ) 7×10^{-5}

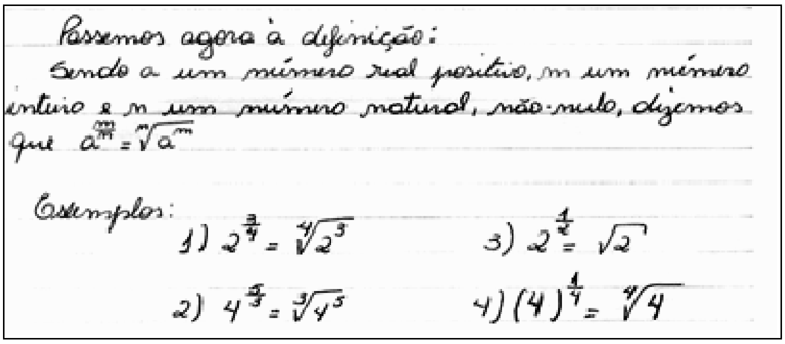
c) Apresente, na forma de notação científica, o número de turistas italianos que visitaram os EUA.

$0,6 \times 1000000 = 600.000 = \boxed{6 \times 10^5}$

FIGURA – 105: Atividade envolvendo notação científica

Podemos observar ainda que, as questões referentes a atividade 3 requerem uma conversão do registro decimal para a notação científica.

Em seguida, a professora trabalha o tópico “Potência com expoente racional”. Para tanto, retoma alguns exemplos de potenciação de um número real, como por exemplo, $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ e define por meio do registro da língua natural potência com expoente racional (figura 106). Os exemplos e atividades selecionados para abordar esse tópico são, na maioria, de aplicação da definição.



Passemos agora à definição:

Sendo a um número real positivo, m um número inteiro e n um número natural, não-nulo, dizemos que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Exemplos:

1) $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

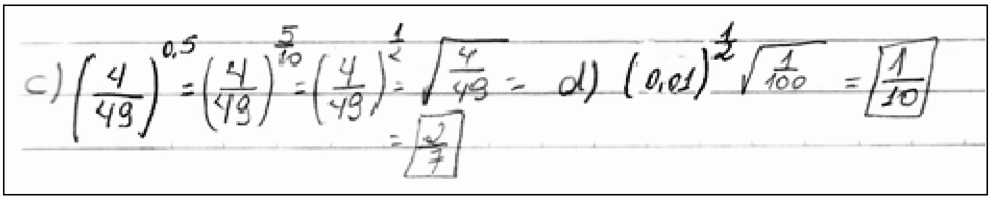
2) $4^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{4^5}$

3) $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

4) $(4)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4}$

FIGURA – 106: Expoente fracionário

Percebemos, em algumas atividades (figura 107), a conversão entre os registros decimal e fracionário, tanto no expoente como na base da potência.



c) $\left(\frac{4}{49}\right)^{0,5} = \left(\frac{4}{49}\right)^{\frac{5}{10}} = \left(\frac{4}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{49}} = \boxed{\frac{2}{7}}$ d) $(0,01)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{100}} = \boxed{\frac{1}{10}}$

FIGURA – 107: Atividade sobre expoente fracionário

A retomada da potenciação e radiciação foi desenvolvida com o objetivo de explorar mais tarde as propriedades e operações com radicais, bem como a racionalização de denominadores, primeiro conteúdo selecionado para a 8ª série. Após esses conteúdos, foram desenvolvidos ainda, equações do 2ª grau, estatística, proporcionalidade em geometria, semelhança de figuras, polígonos regulares e áreas, o que demonstra uma grande ênfase para a Geometria nesta série. Podemos perceber que, na 8ª série não há um tópico específico para a retomada e ampliação dos conjuntos numéricos.

3.2 SÍNTESE DOS RESULTADOS DA ANÁLISE DO PLANEJAMENTO

Na 4ª série constatamos que, a professora tenta significar o surgimento de um outro tipo de número, diferente dos naturais, explorando problemas envolvendo a medida de uma grandeza, problemas esses que deram origem aos números racionais. No entanto, esses problemas não são mais trabalhados nem nesta série nem nas demais.

A maioria das atividades propostas, nesta série, solicita uma conversão do registro figural (figuras geométricas) para o numérico na representação fracionária, envolvendo o significado parte/todo para grandezas contínuas, sendo que para resolvê-las o aluno pode utilizar do método da dupla contagem, pois nenhuma figura apresenta a idéia de conservação da área. Esse significado é, geralmente, o mais enfatizado, como já mostraram as pesquisas de Catto (2000), Moutinho (2005) e Santos (2005). Além do significado parte/todo, também é explorado o significado quociente, porém com poucas atividades.

A professora propõe ainda, a realização de uma atividade com materiais manipuláveis (discos fracionários), na qual explora algumas operações por meio da conversão do registro figural para o numérico (representação fracionária), bem como a localização na reta dos números que dividem os seguintes intervalos ao meio [0, 1]; [1, 2]; [3, 4]; ..., pela idéia de média aritmética. Essa idéia não é mais explorada pela professora nas demais séries. Além disso, os tipos de frações são explorados por meio da utilização de regras no registro da língua natural.

Ao retomar a noção de fração no início da 5ª série há uma tendência por atividades que requerem a conversão entre os registros figural e fracionário, sendo que o significado envolvido é parte/todo e as grandezas são contínuas. O significado operador multiplicativo é trabalhado, também, principalmente com grandezas discretas, sem explicitar que nesse tipo de grandeza o operador multiplicativo atua como um multiplicador/divisor, já nas grandezas contínuas funciona como uma máquina que reduz ou amplia essa grandeza no processo. As atividades, envolvendo o significado operador multiplicativo, exigem somente tratamentos no registro fracionário. Além desses significados, o significado quociente é explorado em poucas atividades. Cabe destacar que a representação fracionária com o significado número, em nenhuma dessas duas séries, foi explorada. No entanto, a professora, no enunciado de algumas atividades, faz uso de expressões como: "*número fracionário"* e "*número racional*", o que pode revelar que ela compreende a representação fracionária como sendo um número que pode ser representado na reta numérica, mas como a professora não promove atividades que explorem esse registro figural, o aluno pode associar, erroneamente, o número racional a dois números sobrepostos.

Os tipos de frações são retomados enfocando-se as regras para a classificação. A forma mista de representar uma fração imprópria é desenvolvida, por tratamentos no registro numérico, utilizando-se do algoritmo da divisão.

Para introduzir a noção de equivalência é utilizado o registro figural, articulando-o com os diferentes registros fracionários, além de ser definida em língua natural. No entanto, a maioria das atividades selecionadas para explorar essa noção, assim como a simplificação de frações envolvem tratamentos no registro fracionário. A comparação entre números racionais na forma fracionária é pouco explorada pela professora.

As operações fundamentais envolvendo números racionais na forma fracionária são desenvolvidas dando ênfase às regras, principalmente a operação de multiplicação. Pois, no trabalho com as operações de adição, subtração e divisão há uma tentativa de utilizar a articulação entre os registros figural e fracionário, porém prevalecendo o enfoque às regras. As atividades selecionadas para abordar as operações em sua maioria requerem tratamentos no registro fracionário. Para desenvolver os tópicos de potenciação, radiciação e expressões numéricas dá-se prioridade, às atividades que requerem tratamentos no registro fracionário. Já a noção de porcentagem é desenvolvida articulando a fração decimal com o registro percentual.

A representação decimal dos números racionais é introduzida por meio de figuras e da fala de personagens que enfatizam a presença da vírgula na representação dos números mostrados. Os exemplos e atividades utilizados para explicar os décimos, centésimos e milésimos trabalham a conversão do registro figural para o numérico na representação fracionária e decimal, seguindo a ordem indicada no esquema: $RF \rightarrow FD \rightarrow RND \rightarrow RLN$ em outras atividades verificamos o mesmo sentido, porém o registro figural é abandonado.

A transformação de uma fração decimal na representação decimal do número racional é abordada, mais uma vez, por meio de uma regra que leva em conta a quantidade de zeros no denominador, ou seja, a conversão entre o registro de fração decimal e o decimal não é realizada pela divisão do numerador pelo denominador, bem como a transformação inversa. Essas transformações do registro fracionário para o decimal só ocorrem quando o denominador é uma potência de base 10, ou seja, são explorados apenas exemplos no qual se pode utilizar diretamente a regra dada.

A comparação de números racionais na representação decimal é desenvolvida de forma breve e as operações, assim como na forma fracionária, são trabalhadas com ênfase nas regras. Há uma tentativa de articulação entre os registros fracionários e decimais, bem como um trabalho concomitante com o Sistema de Numeração Decimal para abordar a divisão de números racionais na forma fracionária. No entanto, a maioria das atividades selecionadas para trabalhar as operações de números racionais na forma decimal pode ser resolvida por tratamentos no registro decimal, sem articulação com o registro fracionário.

Entre as atividades propostas, nesta série, verificamos que a professora sempre busca algumas que explorem a articulação entre o registro algébrico e o numérico, bem como atividades que apresentem os dados por meio de gráficos estatísticos. No entanto, constatamos que, a professora não dá ênfase às articulações entre o registro fracionário e o decimal dos números racionais, desenvolvendo os conteúdos como se existissem duas formas de números: os números fracionários e os números decimais e a única ligação que há entre eles é que todo número decimal pode ser transformado em fração decimal. Além disso, a maioria das situações problemas propostas no registro da língua natural, que inicialmente requer uma passagem do texto para a linguagem matemática, não potencializam a conversão, pois podem ser resolvidas por tratamentos no registro numérico.

Na 6ª série a professora inicia o trabalho retomando os conteúdos desenvolvidos na 5ª série. Nessa retomada o enfoque dado é para o estudo das frações, no significado parte/todo. Os tratamentos são, na maioria, propostos no registro numérico e a grande parte das conversões é do registro figural para o registro fracionário. Não há conversões entre as representações fracionárias e decimais dos números racionais, mostrando que essas representações são trabalhadas sem ligações entre si.

É na 6ª série que encontramos pela primeira vez no planejamento da professora definições para os números racionais e o uso do registro algébrico para definir esses números, bem como é dedicado um tópico para trabalhar com a reta numérica. No entanto, esse registro figural (reta), importante para a abstração do conceito de número racional, é desenvolvido de forma rápida e direta. Os exemplos e atividades que exploram esse aspecto de localização, dos números racionais na reta, são raros e privilegiam a localização de números no registro fracionário. Além disso, a partir desta série a professora considera um número na representação decimal como sendo um número racional. É o caso do exemplo que solicita que se localize na reta o número racional $-0,7$.

As operações entre números racionais são desenvolvidas por meio de exemplos dados tanto no registro fracionário quanto no registro decimal sem, na maioria das vezes, exigirem a conversão entre eles. Um dos raros exemplos que favorecem a conversão entre esses registros, é o que solicita a resolução de $-\frac{5}{6}+1,4$. As atividades selecionadas para trabalhar esse tópico podem ser resolvidas, em sua maioria, por tratamentos no registro fracionário ou decimal. Além das quatro operações fundamentais com números racionais, é retomada e ampliada a potenciação desses números, introduzindo a noção de expoente negativo, sendo que as atividades selecionadas para explorar essa noção, envolvem tratamentos no registro fracionário.

Assim como na 5ª série, em algumas atividades a professora procura articular o registro algébrico com o numérico. Mas, as situações problemas propostas no registro da língua natural, em sua maioria, exigem somente tratamentos no registro numérico. Além disso, na 6ª série não é trabalhada a noção de decimais periódicos. Podemos intuir que, essa noção não é explorada, porque são raros os exemplos e atividades propostos, que solicitam a conversão do registro numérico fracionário para o decimal.

Na 7ª série, pela primeira vez, dá-se enfoque as formas numéricas de representar os números racionais, ou seja, a forma fracionária e a decimal, por meio de exemplos que mostram a igualdade entre a forma fracionária e a decimal, não apenas com frações decimais, como trabalhado na 5ª e 6ª séries.

Ao abordar os conjuntos numéricos, a professora trabalha a representação decimal periódica de um número racional. Sendo explorada a conversão do registro decimal periódico para o fracionário, por meio de exemplos que envolvem tratamentos algébricos. No entanto, as propriedades relacionadas às representações decimais (finita e infinita) não são abordadas, ou seja, não se desenvolve que a divisão de dois números inteiros só vai ter uma representação decimal finita se a fatoração do denominador apresentar os fatores 2 e 5, ou só 2 ou só 5, bem como a propriedade de densidade.

As atividades selecionadas para revisar os conjuntos numéricos, têm um caráter de classificação, ou seja, são apresentados números e conjuntos e questiona-se se esse número pertence ou não ao conjunto dado. Além disso, as conversões trabalhadas nesta série são poucas, na maioria das vezes, entre o registro decimal periódico para o fracionário.

A notação científica, uma forma de representar um número racional muito grande ou muito pequeno, é desenvolvida na 8ª série, por meio de procedimentos dados no registro da língua natural, seguidos de exemplos e atividades de aplicação. Nesta série também é trabalhada a potência com expoente racional da mesma forma como é desenvolvida a notação científica, isto é, os exemplos e atividades seguem as regras dadas.

A seguir, apresentaremos um quadro, no qual pretendemos mostrar a forma como a professora organiza seus planejamentos de 4ª a 8ª séries para ensinar o número racional, enfocando os registros utilizados em cada série, bem como a coordenação dos registros, destacando os tratamentos e os sentidos das conversões propostas.

Quadro 11: Organização do planejamento elaborado pela professora pesquisada

Série	Conteúdos	Registros	Coordenação de Registros	
			Tratamentos	Sentido das Conversões[25]
4ª série	**Números fracionários**: termos, representação, leitura; tipos de frações;	Registro Fracionário; Registro Figural; Registro da Língua Natural.	Registro Fracionário Registro Figural	$RF \rightarrow RNF$ $RLN \leftrightarrow RNF$
5ª série	**Fração**: noção, nomenclatura, representação, tipos, equivalência, comparação, simplificação, fração irredutível, frações e a porcentagem, operações com frações. **Números decimais**: fração decimal, leitura, transformação de fração decimal em número decimal e vice-versa, comparação, operações;	Registro Fracionário; Registro Figural; Registro Decimal; Registro Percentual; Registro da Língua Natural.	Registro Fracionário Registro Figural Registro Algébrico (indícios) Registro Decimal	$RF \leftrightarrow RNF$ $RGt \rightarrow RNF$ $RNF \leftrightarrow RLN$ $RA \rightarrow RNF$ $RP \rightarrow RNF$ $RF \rightarrow FD \rightarrow RND$ $RGt \rightarrow RND$ $RND \leftrightarrow RFD$ $RF \rightarrow RND$ $RP \rightarrow RFD \rightarrow RND$
6ª série	**Conjunto dos números racionais**: representação geométrica, módulo, opostos, operações;	Registro Fracionário; Registro Decimal; Registro Figural (reta) Registro Algébrico; Registro da Língua Natural.	Registro Fracionário Registro Decimal Registro Figural (reta)	$RGt \rightarrow RP \rightarrow RND$ $RND(exato) \leftrightarrow RNF$ $RA \rightarrow RNF$
7ª série	**Os números reais:** os números racionais, representação dos racionais, os números irracionais e os números reais, reta real;	Registro Fracionário; Registro Decimal; Registro Figural (reta) Registro Algébrico; Registro da Língua Natural.	Registro Fracionário Registro Decimal Registro Algébrico Registro Figural (reta)	$RND(exato) \rightarrow RNF$ $RND(periódico) \rightarrow RNF$ $RND(periódico) \rightarrow RF$
8ª série	**Potências e raízes**: notação científica, potência com expoente fracionário;	Registro da Língua Natural; Notação Científica.	Notação Científica Registro Fracionário Registro Decimal	$RND \rightarrow NC$ $RND \rightarrow RNF$

Fonte: Elaboração própria, baseada na análise do planejamento da professora B.

---

[25] Nesta coluna utilizamos as seguintes abreviações: RF – Registro Figural, RNF – Registro Numérico Figural, RLN – Registro da Língua Natural, RGt – Registro Gráfico (tabela), RA – Registro Algébrico, RP – Registro Percentual, RND – Registro Numérico Decimal, RFD – Registro Fração Decimal, NC – Notação Científica.

Por meio da análise do quadro 10 é possível observar que, a professora organiza o seu planejamento conforme a seqüência proposta pelo plano de ensino da escola, já exposto na metodologia desse trabalho (Capítulo 2), cujo caráter é linear, pois busca concentrar o estudo do número racional em uma única série, no caso a 5ª. Nesta série são trabalhadas as noções de fração e número decimal, como conteúdos, aparentemente, distintos que não são identificadas como representações do número racional. A definição desse número, no registro algébrico, só é apresentada na 6ª série, quando a professora aborda o conjunto dos números racionais.

Quanto a apresentação dos vários registros de representação do número racional, constatamos a mobilização de todos os registros, com ênfase a alguns, em determinadas séries, enfatizando a mobilização desses na representação numérica, ou seja, os registros mais abordados estão nas representações fracionárias e decimais.

No que se refere aos tratamentos, este são realizados com todos os registros mobilizados, durante a apresentação dos conteúdos, com exceção para o registro da língua natural, normalmente utilizado para apresentar as regras e na ordem dos exercícios. No decorrer das séries, no entanto são privilegiados os tratamentos no registro numérico (fracionário e decimal). Este fato pode estar ligado à forma como o livro didático "A Mais Nova Conquista da Matemática”, que geralmente embasa o planejamento da professora, explora a coordenação dos registros de representação semiótica do número racional, pois conforme Catto (2000) esse livro prioriza os tratamentos no registro numérico.

As conversões propostas pela professora em seu planejamento, na maioria das vezes, privilegiam um único sentido, são raras as conversões que potencializam o sentido inverso da conversão, como se observa no quadro 10. Além disso, constata-se que nem todas as conversões são trabalhadas em mais de uma série, o que revela mais uma vez o caráter linear do planejamento analisado. Cabe destacar que, as conversões que estão presentes em mais de uma série são: $RF \rightarrow RNF$ e $RLN \leftrightarrow RNF$ (4ª e 5ª séries), $RA \rightarrow RNF$ (5ª e 6ª séries), $RND(exato) \rightarrow RNF$ (6ª, 7ª e 8ª séries).

Verifica-se, a partir do quadro, que o planejamento da professora privilegia os tratamentos, visto que as conversões poderiam ser melhor trabalhadas entre os diferentes registros, bem como em ambos os sentidos, pois segundo Duval a atividade de conversão não é automática, ela envolve os aspectos de congruência e não-congruência, ou seja, trabalhar as conversões num único sentido não significa que os alunos conseguirão fazê-la no sentido inverso. Além disso, o trabalho com conversões requer que a organização dos conteúdos não siga uma forma excessivamente hierarquizada.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve por objetivo analisar, sob a ótica dos registros de representação semiótica, os planejamentos de 4ª a 8ª série, em relação ao número racional, elaborados por uma professora. Para atingirmos tal objetivo, percorremos um longo caminho, o qual teve início com a problematização, revisão de pesquisas já realizadas sobre o assunto e elaboração da questão de pesquisa.

Na seqüência, buscamos subsídios teóricos que pudessem nos auxiliar no desenvolvimento de nosso estudo. Para tanto, apoiamos-nos, sobretudo na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003, 2004), na qual os conceitos matemáticos só são acessíveis por meio da mobilização de pelo menos dois registros de representação semiótica (Capítulo 1).

Sustentados por essa teoria e à luz das leituras de pesquisas, relacionadas a nossa investigação, realizamos um estudo exploratório envolvendo um grupo de dezoito (18) professores de matemática das séries finais do ensino fundamental de Santiago/RS, com o intuito de investigar quais os meios/didáticos metodológicos utilizados por eles para ensinar matemática, especificamente o número racional, bem como definirmos o foco central e a metodologia desse trabalho (Capítulo 2). Em função dos resultados do estudo exploratório o foco central da nossa pesquisa centrou-se na análise do trabalho didático (planejamento) desenvolvido pelo professor para ensinar o número racional sob a ótica dos registros de representação semiótica, tendo em vista a importância do trabalho com os vários registros no desenvolvimento da atividade cognitiva requerida pela matemática (Capítulo 3).

Assim, o presente capítulo se propõe a apresentar algumas conclusões baseadas na análise dos resultados encontrados no capítulo 3.

4.1 RESPONDENDO A QUESTÃO DA PESQUISA

No início desse estudo procuramos considerar aspectos relacionados a sociedade atual e o papel da escola, em especial da matemática nessa sociedade. Destacamos, neste sentido, que a sociedade contemporânea está inserida num mundo globalizado, cada vez mais complexo, diversificado e desigual, num ritmo de transformação extremamente rápido, exigindo respostas mais flexíveis e mecanismos participativos que envolvam todos os membros da sociedade. Diante de inúmeras mudanças, a instituição escola e a matemática, como disciplina que ocupa um espaço curricular singular na formação escolar, assumem um papel cada vez mais importante, isto é, preparar os alunos para atuarem num meio cultural que diversifica intensamente, os modos de representação, bem como para um tempo de fluxos intensos.

Nesta perspectiva, o objetivo da Matemática, como ciência viva, aberta, com grande participação na sociedade contemporânea, não é só formar futuros matemáticos, mas contribuir para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização dos alunos (DUVAL, 2003, pg. 11), bem como auxiliá-los na resolução dos problemas que surgem no cotidiano.

Para tanto, o espaço e o tempo da disciplina de matemática precisam ser ocupados pelo ensino e a aprendizagem de conceitos. Pois, o trabalho didático voltado para aquisição dos conceitos matemáticos possibilita ao aluno aprender princípios (incluindo regras e axiomas) e, na seqüência, solucionar problemas que envolvam esses conceitos e princípios, ampliando, dessa forma, sua estrutura de conhecimento.

Um dos importantes conceitos matemáticos é o do número racional, pois a aquisição desse conceito pelo aluno contribui na aquisição de um conjunto de informações necessárias à interpretação de fatos, fenômenos e eventos do mundo real, bem como na construção de estruturas mentais essenciais às atividades matemática e científica. No entanto, no início dessa pesquisa levantamos certas dificuldades tanto de professores quanto de alunos no entendimento desse conceito, bem como o importante papel que o livro didático desempenha na relação de ensino e aprendizagem. Pois, segundo o Programa Nacional do Livro Didático - PNLD (2005) ele exerce grande influência sobre o trabalho do professor, porque frequentemente se torna a única ferramenta disponível para seu trabalho. Fato este verificado durante a análise do estudo exploratório com o grupo de professores, que contribuiu na definição da problemática central da pesquisa.

O estudo exploratório revelou que o livro didático é o principal recurso utilizado pelo grupo de professores para desenvolverem seus planejamentos. Tais planejamentos são elaborados por meio da pesquisa em vários livros didáticos.

Assim, nosso interesse foi direcionado a analisar, sob a ótica dos registros de representação semiótica, os planejamentos de 4ª a 8ª série, em relação ao número racional, elaborados por uma professora participante do grupo de estudos investigado. Tendo como pressupostos iniciais que o ato de aprender está ligado ao ato de ensinar, bem como a especificidade do saber matemático não está nos conceitos, mas nas representações semióticas, desencadeada por estes.

Apoiados, nesses pressupostos e nos resultados do estudo exploratório, para atingirmos tal objetivo, lançamos mão da seguinte questão:

- O planejamento, elaborado pela professora, para ensinar o conceito de número racional potencializa a mobilização de vários registros de representação semiótica, bem como a coordenação entre eles?

Pautados na análise dos planejamentos de 4ª a 8ª séries, elaborados pela professora pesquisada, conclui-se que o planejamento elaborado para ensinar o número racional potencializa a mobilização de todos os registros de representação semiótica, classificados por Duval (2003): simbólico, figural e língua natural, no decorrer do Ensino Fundamental. No entanto, em determinadas séries, não são mobilizados todos os registros do número racional e ainda nas séries que este fato ocorre, há ênfase para alguns registros, o que revela o caráter linear do planejamento elaborado pela professora pesquisada. Por exemplo, na 4ª e início da 5ª série uso dos registros figural e numérico fracionário, nas demais séries (5ª, 6ª, 7ª) destaque para o registro numérico nas representações fracionárias e decimais. Além disso, em diversas situações há confusão entre objeto e a representação, principalmente, quando a professora utiliza diferentes terminologias: fração, número fracionário, número decimal, como sendo objetos diferentes e não representações do número racional.

Cabe destacar a forma como foram abordados os tratamentos e as conversões em cada série. Na 4ª série, a maioria das atividades propostas solicita uma conversão do registro figural (RF) para o numérico na representação fracionária (RNF), envolvendo o significado parte/todo para grandezas contínuas. Menos freqüentes são as conversões entre o registro fracionário (RNF) e da língua natural (RLN).

A partir da 5ª série, há uma tendência para o uso de regras descritas em língua natural, principalmente nas operações, bem como no início dessa série a articulação entre o registro figural, na maioria figuras geométricas, e o fracionário. Encontramos ainda, a articulação entre a fração decimal (FD) e o registro numérico percentual (RNP) e por diversas vezes a conversão entre o registro algébrico (RA) e o numérico, destaque para o numérico fracionário. Um dos raros exemplos articulando mais de dois registros foi trabalhado na introdução do número racional na representação decimal, por meio da conversão entre o registro figural (RF), fração decimal (FD) e deste para o registro decimal (RND). No entanto, nesta série não houve outras conversões entre os registros fracionário e decimal. Além disso, foram privilegiados os tratamentos (cálculos) no registro numérico.

Na 6ª série, foi trabalhada de forma rápida a conversão entre os registros figural (reta) e numérico (fracionário e decimal), bem como em raros exemplos e atividades, a conversão entre os registros fracionário (RNF) e decimal (RND), no sentido $RND \rightarrow RNF$. Assim como na 5ª série, os tratamentos são no registro numérico.

A articulação entre os registros fracionário e decimal foi abordada com mais ênfase na 7ª série, pois os exemplos dados não exigiam apenas transformações de frações decimais no registro decimal, como foi trabalhado na 5ª e 6ª séries. Nesta série, foi explorada também a conversão do registro decimal periódico para o fracionário, por meio de exemplos que envolvem tratamentos algébricos. Já na 8ª série, encontramos poucos tópicos envolvendo os números racionais entre eles a notação científica e a potência de expoente fracionário.

Cabe destacar que, foram raros os exemplos e atividades que envolveram a articulação entre vários registros, pois a maioria das conversões restringe a mobilizar dois registros, bem como são potencializadas em um único sentido. A tabela abaixo apresenta as conversões mais trabalhadas pela professora e o sentido que elas ocorrem no planejamento.

Quadro 12: O sentido e a freqüência das conversões abordadas pela professora

$RF \rightarrow RNF$, destaque para figuras geométricas. $RA \rightarrow RNF$ ou $RA \rightarrow RND$	Sentido mais abordado
$RNF \rightarrow RLN$ ou $RND \rightarrow RLN$ $FD \rightarrow RNP$ ou $RNP \rightarrow FD$	Menor freqüência
$RNF \rightarrow RND$ ou $RND \rightarrow RNF$	Raros casos
$Tabelas,\ gráficos \rightarrow RNF$ ou $Tabelas,\ gráficos \rightarrow RND$	Único sentido

Fonte: De nossa autoria, baseado na análise do planejamento da professora B.

O quadro mostra que, o trabalho com as conversões entre os vários registros de representação do número racional não é uma prioridade do planejamento analisado. Assim, como também não era prioridade do livro didático a "A Mais Nova Conquista da Matemática", analisado por Catto (2000), livro esse citado pela professora como um dos guias para a elaboração do seu planejamento.

Além disso, os dados mostraram uma tendência em valorizar o uso de regras dadas no registro da língua natural de forma imediata sem a participação do aluno, bem como a resolução das atividades por meio de procedimentos e algoritmos. Este fato permite-nos concluir que a professora faz uso de técnicas operatórias (regras) que não são construídas pelo aluno, mas repassadas de forma direta, talvez do mesmo modo como ela aprendeu na Formação Inicial, ou até mesmo na Educação Básica. Tal fato revela a importância de se repensar a formação inicial e continuada dos professores, uma formação mais voltada para aprender a potencializar a aprendizagem do aluno, conforme Buratto (2006).

Concordamos com o documento da SBEM, publicado em Salvador/abril/ 2003, ao afirmar que a formação do professor de Matemática não pode ter como objetivo principal o acúmulo de informações. É fundamental que ele passe a ser um construtor de seu próprio conhecimento, numa perspectiva crítica, analítica e reflexiva, condição indispensável para a profissionalização do professor. Além disso, é imprescindível considerar a relação que o professor mantém com o objeto matemático a ensinar, bem como seu trabalho didático.

Neste sentido, a formação inicial ou continuada do professor deve levar esse profissional a entrar em contato com outras formas de ensinar e aprender, bem como outras formas de entender o objeto matemático. Assim, a teoria dos registros de representação semiótica surge como um suporte didático/metodológico importante para a compreensão do processo de ensino e aprendizagem da matemática. Pois, segundo Duval (2003), compreendendo o objeto matemático a ensinar para, depois, escolher os registros de representação semiótica, que ajudarão na aquisição desse objeto matemático, é uma eficiente estratégia didática a ser assumida pelo professor.

Considerando uma nova sociedade em que o mais importante não será saber tudo, não será apenas o conhecimento científico, mas saber significar esse conhecimento, saber buscar alternativas para resolver os problemas e saber comunicar-se, o desafio da escola é preparar os alunos para esse tempo de mudanças. Assim, o objetivo do ensino de Matemática deve transcender a formação de futuros matemáticos. Nesta perspectiva, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica ganha pertinência como uma maneira didática/metodológica que o professor pode utilizar quando o objetivo é a aquisição dos conceitos, que são sempre modelos mentais, instrumentos do pensar e agir, construídos pelo sujeito a partir de suas experiências, ao longo de seu processo de desenvolvimento e à medida que a matemática passa a diversificar os registros de representação, sua aprendizagem específica contribui, fortemente, para o desenvolvimento das capacidades cognitivas globais dos sujeitos (DUVAL, 2003).

No decorrer da análise e durante a elaboração da conclusão desse trabalho algumas questões surgiram e cabe-nos então apontá-las para novas investigações que envolvam aspectos relacionados a educação matemática, visando contribuir para a formação de professores. Um primeiro questionamento seria: como organizar os planos de ensino de uma escola, no que tange aos conteúdos relacionados ao número racional, de forma a possibilitar um trabalho com os vários registros de representação semiótica? Sugerimos que este estudo seja pautado na discussão/reflexão com os professores de matemática da escola, por meio da criação de um grupo de estudo, dos novos enfoques didáticos e pedagógicos sobre o conceito de número racional. Assim, os dados poderão ser coletados a partir de instrumentos como: avaliação dos planos de ensino já existentes na escola, avaliação dos conhecimentos dos professores sobre os números racionais, análise das reflexões produzidas no grupo de estudos. Uma outra variação desta pesquisa seria a realização de uma pesquisa análoga envolvendo mais escolas na construção dos planos de ensino.

Outra possibilidade seria o questionamento: como iniciar um trabalho de formação continuada, por meio do diálogo e reflexão com os professores das séries finais do Ensino Fundamental, que tenha como meta identificar/construir novos enfoques didáticos e pedagógicos fundamentais a construção de noções de matemática, especialmente o número racional? Para responder esta questão o pesquisador deveria formar um grupo de professores, no contexto da escola, e num processo de diálogo e incentivo levar os professores a uma mudança de perspectivas quanto ao ato de ensinar e aprender Matemática. O que poderia ser realizado em três etapas: a primeira seria analisar a forma como o professor elabora seus planejamentos e a partir desses elaborar, junto com ele, uma seqüência de ensino pautada nos registros de representação semiótica. A segunda etapa consistiria na aplicação desta seqüência e a última etapa seria dedicada à análise reflexiva dos resultados obtidos por meio da aplicação da seqüência.

BIBLIOGRAFIA

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto**. Guia dos livros didáticos 5ª a 8ª. Séries-PNLD. Brasília: SEF, 2005.

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto**. Parâmetros Curriculares Nacionais- Matemática 5ª a 8ª série. Brasília: SEF, 1998.

BURATTO, I. C.F. **Representação semiótica no ensino da geometria**: uma alternativa metodológica na formação de professores. Dissertação de Mestrado, UFSC, 2006.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Edição revisada por Paulo Almeida. 5ª ed. Gradiva, 2003.

CATTO, G. G. **Registros de representação e o número racional**: uma abordagem nos livros didáticos- dissertação de mestrado- PUC-SP, 2000.

COLOMBO, J. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. **Representações do número racional na formação de professores que ensinam matemática**. In: REREMAT - Revistas Eletrônica em Educação Matemática. UFSC, p. 41-48, 2005. http://www.redemat.mtm.ufsc.br/reremat_2005.htm. 02 de outubro de 2007.

DAMM, R. F. **Registros de Representação**. In: Machado, Silvia Dias Alcântara. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo. EDUC, pp. 135-153, 2002.

DOCUMENTO BASE DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: subsídios para a discussão de propostas para os cursos de licenciatura em matemática, no seminário nacional de licenciaturas em matemática. Salvador/abril/2003. http://www.mat.ufmg.br/syok/diretrizes/Salvador.doc. 12 de setembro de 2004.

DUVAL, R. **Registres de représention sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. In : Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM de Strasbourg, vol V, p.37-65, 1993.
________. Basic Issues for Research in Mathematics Education. In Poceedings of PME-24, 2000.

________. **Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica- Campinas, São Paulo. Papirus, pp. 11-33, 2003.

________. **Semiosis y Pensamiento Humano**. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels: Santiago de Calai, Colômbia: 2004.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, p. 77-98, 2004.

IGLIORI, S. B. C. **A noção de “obstáculo epistemológico” e a educação matemática**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo. EDUC, pp. 89-113, 2002.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. **A pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MARANHÃO, M. C. S.A., IGLIORI, S. B. C. **Registros de Representação e Números Racionais**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas, São Paulo: Papirus, pp. 57-70, 2003.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor**: licenciatura e prática escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

MOUTINHO, L. V. **Fração e seus diferentes significados um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado. PUC/SP, 2005.

PENTEADO, C. B. **Concepções dos professores do Ensino Médio Relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade**. Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 2004.

PIRES, C. M. C. **Currículos de Matemática**: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

PONTE, J. P. **Estudo de Caso em Educação Matemática**. In: Bolema, ano 19, n. 25, p. 105-132, 2006.

ROMANATTO, M. C. **Número Racional**: Relações necessárias à sua compreensão. Tese de Doutorado, UNICAMP, 1997.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no ensino fundamental. Dissertação de mestrado. PUC/SP, 2005.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. Tese de Doutorado, PUC-SP, 2005.

WOERLE, N. H. **Números Racionais no Ensino Fundamental**: múltiplas representações. Dissertação de Mestrado PUC-SP, 1999.

YIN, R. **Case study research:** deseing and methods. Newbury Park, CA: Sage, 1984.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo