

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA  
DO RIO DE JANEIRO



**Plínio Glauber Carvalho dos Prazeres**

**Desenvolvimento de elementos finitos híbridos  
para a análise de problemas dinâmicos  
usando superposição modal avançada**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro  
Agosto de 2005.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**Plínio Glauber Carvalho dos Prazeres**

**Desenvolvimento de elementos finitos híbridos  
para a análise de problemas dinâmicos  
usando superposição modal avançada**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Ney Augusto Dumont**

Presidente/Orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

**Prof. Remo Magalhães de Souza**

Departamento de Engenharia Civil - UFPA

**Prof. Raul Rosas e Silva**

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

**Profa. Deane de Mesquita Roehl**

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial

do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 04 de Agosto de 2005.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Plínio Glauber Carvalho dos Prazeres**

Graduou-se em Engenharia Civil, pela Universidade Federal do Pará, em novembro de 2002. Durante a graduação atuou na área de estruturas no desenvolvimento de um programa para análise de seções de concreto armado.

#### Ficha Catalográfica

Prazeres, Plínio Glauber Carvalho dos

Desenvolvimento de Elementos Finitos Híbridos Para a Análise de Problemas Dinâmicos Usando Superposição Modal Avançada / Plínio Glauber Carvalho dos Prazeres; orientador: Ney Augusto Dumont - Rio de Janeiro: PUC, Departamento de Engenharia Civil, 2005.

170f.:il.; 29,7cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Incluí referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Teses. 2. Elementos Finitos Híbridos. 3. Análise Dinâmica. 4. Superposição Modal Generalizada. I. Dumont, Ney Augusto II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Aos meus pais, Raimundo e Enilda,  
por acreditarem em meus sonhos e  
por sonharem junto comigo.

## **Agradecimentos**

A Deus.

Aos meus pais pelo apoio irrestrito, confiança incondicional e amor pleno.

À Márcia, minha amada namorada que sempre me apoiou e tanto me incentivou.

Ao prof. Ney Augusto Dumont pela dedicação e conhecimento transmitido ao longo de toda pesquisa que possibilitaram a conclusão deste trabalho.

Ao prof. Remo Magalhães de Souza pela amizade, apoio e incentivo que me levaram à seguir a vida acadêmica.

Aos meus irmãos, Letícia, Ângelo e Jamile, que contribuíram e fazem parte de minha formação e caráter, pelos quais tenho um grande carinho.

Ao CNPq, à PUC-Rio e à FUNPEA-ELETRONORTE/UFPa pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

## Resumo

Prazeres, Plínio Glauber Carvalho dos.; Dumont, Ney Augusto. **Desenvolvimento de elementos finitos híbridos para a análise de problemas dinâmicos usando superposição modal avançada.** Rio de Janeiro, 2005. 170p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O método híbrido de elementos finitos, proposto por Pian com base no potencial de Hellinger-Reissner, provou ser um avanço conceitual entre as formulações de discretização, tendo sido explorado extensivamente desde então por códigos acadêmicos e comerciais, também levando em conta uma série independente dos mais recentes desenvolvimentos chamados métodos de Trefftz. O método híbrido de elementos de contorno é uma generalização bem sucedida da formulação original de Pian, em que funções de Green são usadas como funções de interpolação no domínio, possibilitando assim a modelagem robusta e precisa de formas arbitrárias submetidas a vários tipos de ações. Mais recentemente, uma proposição de Przemieniecki – para a análise geral de vibração livre de elementos de treliça e viga – foi incorporada à formulação de elementos híbridos de contorno e estendida para a análise de problemas dependentes do tempo fazendo uso de um processo de superposição modal avançada que leva em conta condições iniciais gerais assim como ações de corpo gerais, além de efeitos inerciais. A presente contribuição pretende trazer para elementos finitos os melhoramentos conceituais obtidos no contexto do método híbrido de elementos de contorno. Uma grande família de macro elementos finitos híbridos é introduzida para o tratamento unificado em 2D e 3D, de problemas estáticos e transientes de elasticidade e potencial com base nas soluções fundamentais não-singulares. É também mostrado que materiais não-homogêneos, como os novos materiais com gradação funcional, podem ser tratados consistentemente, pelo menos para problemas de potencial. Alguns exemplos numéricos simples são apresentados como ilustração dos desenvolvimentos teóricos.

## Palavras-chave

Elementos finitos híbridos; elementos finitos dinâmicos; análise dinâmica; superposição modal generalizada; materiais com gradação funcional.

## Abstract

Prazeres, Plínio Glauber Carvalho dos.; Dumont, Ney Augusto. **Development of hybrid finite elements for analysis of dynamics problems using advanced mode superposition.** Rio de Janeiro, 2005. 170p. Msc. Dissertation - Department of Civil Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The hybrid finite element method, proposed by Pian on the basis of the Hellinger-Reissner potential, has proved itself a conceptual breakthrough among the discretization formulations, and has been extensively explored both academically and in commercial codes also taking into account an independent series of more recent developments called Trefftz methods. The hybrid boundary element method is a successful generalization of Pian's original formulation, in which Green's functions are taken as interpolation functions in the domain, thus enabling the robust and accurate modeling of arbitrarily shaped bodies submitted to several types of actions. More recently, a proposition by Przemieniecki – for the generalized free vibration analysis of truss and beam elements – was incorporated into the hybrid boundary element formulation and extended to the analysis of time-dependent problems by making use of an advanced mode superposition procedure that takes into account general initial conditions as well as general body actions, besides the inertial effect. The present contribution aims to bring to finite elements the conceptual improvements obtained in the frame of the hybrid boundary element method. A large family of hybrid, macro finite elements is introduced for the unified treatment of 2D and 3D, static and transient problems of elasticity and potential on the basis of nonsingular fundamental solutions. It is also shown that nonhomogeneous materials, as the novel functionally graded materials, may be dealt with consistently, at least for potential problems. Some simple numerical examples are shown to illustrate the theoretical developments.

## Keywords

Hybrid finite element; dynamic finite element; dynamic analysis; generalized mode superposition; functionally graded materials.



# Sumário

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>12</b>
<b>LISTA DE TABELAS .....</b>	<b>17</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>18</b>
1.1. COLOCAÇÃO DO PROBLEMA .....	18
1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	20
1.3. OBJETIVOS.....	22
1.4. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	23
<b>2 O MÉTODO HÍBRIDO DOS ELEMENTOS FINITOS.....</b>	<b>25</b>
2.1. CONCEITOS DE TEORIA DO POTENCIAL.....	25
2.1.1. <i>Problema de Potencial quase-harmônico</i> .....	26
2.1.2. <i>Problema de Potencial Harmônico</i> .....	29
2.2. CONCEITOS DE TEORIA DA ELASTICIDADE .....	30
2.3. SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS .....	33
2.4. O PRINCÍPIO DE HAMILTON.....	35
2.5. O POTENCIAL DE HELLINGER-REISSNER GENERALIZADO.....	37
2.6. FORMULAÇÃO DO MÉTODO HÍBRIDO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	40
2.6.1. <i>Particularização da Condição de Estacionariedade do Potencial de Hellinger-Reissner para o Caso de Soluções Fundamentais Não-Singulares</i> .....	40
2.6.2. <i>Discretização da Condição de Estacionariedade do Potencial de Hellinger-Reissner para Soluções Não-Singulares</i> .....	41
2.6.3. <i>Propriedades Físicas Relacionadas às Matrizes <math>H</math>, <math>F</math> e <math>K</math></i> .....	44
2.7. ANÁLISE GERAL DE PROBLEMAS DEPENDENTES DO TEMPO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	46
2.7.1. <i>Mudança do Domínio do Tempo para o Domínio da Frequência</i> .....	46
2.7.2. <i>Propriedades Espectrais das Matrizes <math>H_0</math> e <math>F_0</math></i> .....	47
2.7.3. <i>Desenvolvimento das Matrizes <math>F</math> e <math>H</math> em Séries de Frequência</i> .....	49
2.8. SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE AUTOVALOR NÃO-LINEAR.....	51
2.9. USO DE UM PROCESSO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL.....	54
2.9.1. <i>Processo de Superposição Modal</i> .....	54
2.9.2. <i>Consideração de Velocidades e Deslocamentos Iniciais</i> .....	56

2.9.3. Consideração de Deslocamentos Nodais Forçados .....	58
2.9.4. Avaliação dos Resultados em Pontos Internos .....	59
2.10. OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ COMO UMA SÉRIE DE FREQUÊNCIAS	60
<b>3 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS NÃO-SINGULARES .....</b>	<b>62</b>
3.1. PROBLEMAS DE POTENCIAL .....	62
3.1.1. Problemas de Potencial Quase-harmônicos .....	63
3.1.2. Problemas de Potencial Harmônicos .....	66
3.2. PROBLEMAS DE ELASTICIDADE .....	68
3.2.1. Elastostática .....	68
3.2.2. Elastodinâmica .....	73
3.3. ESPAÇOS NULOS RELACIONADOS À PARTE ESTÁTICA DAS SOLUÇÕES	
FUNDAMENTAIS NÃO-SINGULARES .....	77
<b>4 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA CONDUÇÃO DE CALOR EM</b>	
<b>MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL .....</b>	<b>79</b>
4.1. EQUAÇÃO DE GOVERNO .....	79
4.1.1. Problema Isotrópico .....	80
4.1.2. Problema Ortotrópico .....	80
4.2. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE GOVERNO PARA PROBLEMAS 2D E 3D .....	83
4.2.1. Problema Isotrópico .....	84
4.2.2. Problema Ortotrópico .....	88
4.3. RESUMO DAS EXPRESSÕES OBTIDAS NA SEÇÃO 4.2 .....	92
<b>5 ELEMENTOS UNIDIMENSIONAIS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS</b>	
<b>APORTICADAS .....</b>	<b>93</b>
5.1. FORMULAÇÃO DE UM ELEMENTO DE TRELIÇA .....	93
5.1.1. Formulação do Problema .....	94
5.1.2. Obtenção da matriz de rigidez .....	94
5.2. FORMULAÇÃO DE UM ELEMENTO DE VIGA – VIGA ESBELTA .....	98
5.2.1. Formulação do Problema .....	98
5.2.2. Obtenção da Matriz de Rigidez .....	98
5.3. FORMULAÇÃO DE UM ELEMENTO DE VIGA – VIGA DE TIMOSHENKO .....	105
5.3.1. Formulação do Problema .....	105
5.3.2. Obtenção da Matriz de Rigidez .....	107
5.4. MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA EFETIVA PARA ELEMENTOS DE TRELIÇA	
2D .....	109
5.4.1. Formulação do Problema .....	109

5.4.2. Obtenção da Matriz de Rigidez Geométrica.....	110
<b>6 EXEMPLOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>112</b>
6.1. AVALIAÇÃO DA PRECISÃO PARA PROBLEMAS DE FLUXO EM ESTADO PERMANENTE .....	112
6.2. CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE BIDIMENSIONAL EM UMA PLACA QUADRADA HOMOGÊNEA .....	120
6.3. CONDUÇÃO DE CALOR TRANSIENTE BIDIMENSIONAL EM UMA PLACA QUADRADA NÃO-HOMOGÊNEA.....	124
6.4. VIGA SOB CARREGAMENTO DE MOMENTO FLETOR LINEAR.....	126
6.5. VIGA SOB CARREGAMENTO DE MOMENTO FLETOR CONSTANTE.....	129
6.6. ANÁLISE DINÂMICA DE UMA BARRA FIXA E LIVRE SOB CARGA DINÂMICA AXIAL POR ELEMENTOS DE TRELIÇA UNIDIMENSIONAIS .....	131
6.7. ANÁLISE DINÂMICA DE UM PÓRTICO SUBMETIDO A UM PULSO TRIANGULAR POR ELEMENTOS DE VIGA PLANA DE BERNOULLI-EULER.....	135
6.8. ANÁLISE DINÂMICA DE UMA TRELIÇA PLANA COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE .....	139
<b>7 CONCLUSÃO.....</b>	<b>142</b>
7.1. VANTAGENS DO MÉTODO .....	143
7.2. DESVANTAGENS DO MÉTODO .....	143
7.3. ANÁLISE DOS RESULTADOS .....	144
7.4. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	145
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>146</b>
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>150</b>
APÊNDICE A - OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ PARA PROBLEMAS DE ELASTOSTÁTICA NO MÉTODO HÍBRIDO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....	150
APÊNDICE B - AVALIAÇÃO DE DESLOCAMENTOS NO DOMÍNIO EM PROBLEMAS DE ELASTOSTÁTICA .....	152
APÊNDICE C - CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDES K NO CONTEXTO DO MÉTODO HÍBRIDO SIMPLIFICADO DE ELEMENTOS FINITOS.....	154
APÊNDICE D - MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO PARA ELEMENTOS DE TRELIÇA E VIGA.....	157
D.1 - Matrizes de transformação para o elemento de treliça plana.....	157
D.2 - Matriz de transformação para o elemento de viga com 6 graus de liberdade .....	161

APÊNDICE E - FORMULAÇÃO ANALÍTICA DE CABOS FLEXÍVEIS.....	163
<i>E.1 - Equação de governo</i> .....	163
<i>E.2 - Cabo Parabólico</i> .....	165
<i>E.3 - Cabo em Catenária</i> .....	166
APÊNDICE F - CONDENSAÇÃO ESTÁTICA DOS GRAUS DE LIBERDADE 3 E 6 DO ELEMENTO DE VIGA.....	169

## Lista de figuras

Figura 1.1: Malha de elementos finitos - problema plano.	18
Figura 2.1: Corpo elástico em equilíbrio.	30
Figura 2.2: Gráfico da energia interna de deformação de um corpo elástico.	38
Figura 3.1: Elementos 2D – T6 e Q8.	72
Figura 3.2: Elementos 3D – Tetraedro de 10 nós e H20.	72
Figura 4.1: Sistema de coordenadas para descrição de um FGM com propriedades $\bar{k}$ e $\bar{c}$ definidas em $Z = \bar{Z}$ (coordenada global), a qual é equivalente a $z = \bar{z}$ (coordenada local).	80
Figura 4.2: Padrões de variação ilustrativos da função exponencial $k(z)$ .	86
Figura 4.3: Padrões de variação ilustrativos da função quadrática $k(z)$ , para alguns valores de $\alpha$ .	87
Figura 4.4: Padrões de variação ilustrativos da função trigonométrica $k(z)$ , para alguns valores de $\alpha$ e $\beta$ .	88
Figura 5.1: Elemento de treliça.	94
Figura 5.2: a) Sistema de coordenadas para a derivação da matriz de rigidez de um elemento de treliça e sistema interno de coordenadas; b) definição do domínio $\Omega$ , contornos $\Gamma_1$ e $\Gamma_2$ e correspondentes co-senos diretores $\eta_1$ e $\eta_2$ do elemento de treliça.	95
Figura 5.3: a) sistema de coordenadas para a matriz de rigidez; b) convenção de esforços para viga.	99
Figura 5.4: a) sistema de coordenadas locais e; b) sistema de coordenadas globais de um elemento de viga com 6 graus de liberdade.	102
Figura 5.5: sistema de coordenadas locais de um elemento de treliça no plano.	103
Figura 5.6: sistema de coordenadas globais para um elemento de treliça plana.	104
Figura 5.7: a) sistema de coordenadas para obtenção da matriz de rigidez geométrica de um elemento de treliça; b) configuração dos esforços de tração no elemento.	109
Figura 6.1: Exemplo para a avaliação da solução numérica da equação de Laplace.	113

- Figura 6.2: a) malhas utilizadas no estudo; b)Valores da norma de erro da equação (6.1.1) para várias malhas e números de pontos de Gauss. 113
- Figura 6.3: Resultado para o potencial, obtido de forma analítica. 114
- Figura 6.4: Resultado para o potencial, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 1x1 do elemento Q4, sobreposto ao resultado analítico. 114
- Figura 6.5: Resultado para o potencial, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 2x2 do elemento Q4, sobreposto ao resultado analítico. 115
- Figura 6.6: Resultado para o potencial, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 1x1 do elemento Q8, sobreposto ao resultado analítico. 115
- Figura 6.7: Resultado para o potencial, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 2x2 do elemento Q8, sobreposto ao resultado analítico. 115
- Figura 6.8: Resultado para o fluxo em x, obtido de forma analítica. 116
- Figura 6.9: Resultado para o fluxo em x, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 1x1 do elemento Q4, sobreposto ao resultado analítico. 116
- Figura 6.10: Resultado para o fluxo em x, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 2x2 do elemento Q4, sobreposto ao resultado analítico. 116
- Figura 6.11: Resultado para o fluxo em x, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 1x1 do elemento Q8, sobreposto ao resultado analítico. 117
- Figura 6.12: Resultado para o fluxo em x, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 2x2 do elemento Q8, sobreposto ao resultado analítico. 117
- Figura 6.13: Resultado para o fluxo em y, obtido de forma analítica. 117
- Figura 6.14: Resultado para o fluxo em y, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 1x1 do elemento Q4, sobreposto ao resultado analítico. 118
- Figura 6.15: Resultado para o fluxo em y, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 2x2 do elemento Q4, sobreposto ao resultado analítico. 118
- Figura 6.16: Resultado para o fluxo em y, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 1x1 do elemento Q8, sobreposto ao resultado analítico. 118
- Figura 6.17: Resultado para o fluxo em y, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 2x2 do elemento Q8, sobreposto ao resultado analítico. 119
- Figura 6.18: Geometria e condições de contorno do problema de condução de calor transiente bidimensional em uma placa quadrada, e as malhas usadas na discretização do problema. 120
- Figura 6.19: Autovalores de acordo com a equação (2.7.1) para a malha 4x4 da figura 6.18, usando-se de 1 a 4 matrizes de massa generalizada. 121
- Figura 6.20: a) Resultados de temperatura ao longo da face  $Z = 0$  para vários instantes de tempo, obtidos com uma malha 3x3 de elementos quadráticos;

b) Detalhe para a curva de temperatura $t = 0,75$ .	121
Figura 6.21: a) Resultados de temperatura ao longo da face $Z = 0$ para vários instantes de tempo, obtidos com uma malha $4 \times 4$ de elementos quadráticos;	
b) Detalhe para a curva de temperatura $t = 0,75$ .	122
Figura 6.22: Autovalores de acordo com a equação (2.7.1) usando-se de 1 a 4 matrizes de massa generalizada, para três diferentes malhas de contorno.	122
Figura 6.23: a) Resultados de temperatura ao longo da face $Z = 0$ da figura 6.18 para vários instantes de tempo, obtidos com a malha Q24 de 24 nós (11 gdl); b) Detalhe para a curva de temperatura $t = 0,75$ .	123
Figura 6.24: Exemplo de padrão de variação trigonométrica das propriedades do material.	124
Figura 6.25: Autovalores de acordo com a equação (2.7.1) usando-se 1, 2 e 3 matrizes de massa generalizada.	124
Figura 6.26: Resultados de temperatura ao longo da face $Z = 0$ usando-se malhas $2 \times 2$ , $3 \times 3$ e $4 \times 4$ .	125
Figura 6.27: Viga de comprimento $L$ e altura $c$ , sob carregamento de momento fletor linear.	126
Figura 6.28: Malhas 1, 2 e 3, para uma viga de comprimento $L = 100$ e altura $c = 10$ .	126
Figura 6.29: Malhas 4 e 5, para uma viga de comprimento $L = 20$ e altura $c = 10$ e Malhas 6 e 7, para uma viga de comprimento $L = 10$ e altura $c = 20$ .	127
Figura 6.30: Análise de convergência dos elementos Q4 e Q8 para a viga da figura 6.27 com comprimento $L = 100$ e altura $c = 10$ e submetida a carregamento de momento fletor linear de acordo com a equação (6.4.1).	128
Figura 6.31: Viga de comprimento $L$ e altura $c$ , sob carregamento de momento fletor constante.	129
Figura 6.32: Barra fixa e livre submetida a carregamento dinâmico em sua extremidade livre.	131
Figura 6.33: Deslocamento no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência juntamente com uma malha de 1 elemento.	132
Figura 6.34: Deslocamento no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência juntamente com uma malha de 2 elementos.	132
Figura 6.35: Deslocamento no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência juntamente com uma malha de 3 elementos.	132

- Figura 6.36: Deslocamento no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência e para uma malha de três elementos com a utilização de 1 matriz de massa. 133
- Figura 6.37: Deslocamento no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência e para uma malha de três elementos com a utilização de 2 matrizes de massa. 133
- Figura 6.38: Deslocamento no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência e para uma malha de três elementos com a utilização de 4 matrizes de massa. 133
- Figura 6.39: Autovalores de acordo com a equação (2.7.1) para a malha de 3 elementos, usando-se de 1 a 4 matrizes de massa generalizada. 134
- Figura 6.40: Pórtico plano com seis barras e doze graus de liberdade. 135
- Figura 6.41: Carregamento dinâmico. 136
- Figura 6.42: Resposta do grau de liberdade número 4. 136
- Figura 6.43: Comparação entre os autovalores para a utilização de 1, 2, 3 e 4 matrizes de massa. 137
- Figura 6.44: Resposta do grau de liberdade número 4 para um impulso de tempo igual a 0,1 do tempo do impulso mostrado na figura 6.41. 138
- Figura 6.45: treliça plana com 3 graus de liberdade. 139
- Figura 6.46: deslocamentos horizontais no tempo do nó 2 da treliça para a utilização de 1 a 8 matrizes de massa (amplitudes decrescentes nos primeiros instantes de tempo). 140
- Figura 6.47: deslocamentos horizontais no tempo do nó 2 da treliça da figura 6.45 obtidos pela utilização de elementos de viga de Bernoulli-Euler com a utilização de 1 a 4 matrizes de massa (mesma convenção de cores da figura 6.46). 140
- Figura 6.48: Comparação entre as frequências encontradas com a utilização de 1 a 8 matrizes de massa: a convergência se dá por valores superiores. 141
- Figura D.1: a) Sistema de coordenadas naturais (sem deslocamentos de corpo rígido) de um elemento de treliça; b) sistema de coordenadas globais de um elemento de treliça. 157
- Figura D.2: Deslocamentos unitários do sistema global do elemento medidos a partir do sistema natural. 158
- Figura D.3: Sistema de coordenadas local (com apenas 1 deslocamento de corpo rígido) de um elemento de treliça. 159
- Figura D.4: Sistema de coordenadas local (com três deslocamentos de corpo



rígido) de um elemento de treliça plana.	159
Figura D.4: a) Sistema de coordenadas local (com três deslocamentos de corpo rígido) de um elemento de viga; b) sistema de coordenadas global de um elemento de viga.	161
Figura E.1: Configurações de carregamento sobre um cabo flexível: a) cabo sujeito a forças concentradas $F$ ; b) cabo sob carregamento distribuído $w$ .	163
Figura E.2: Diagrama do corpo livre de um elemento infinitesimal de cabo.	164
Figura E.3: Configuração de eixos e carregamento em um cabo parabólico.	165
Figura E.4: a) cabo em catenária e eixos coordenados; b) diagrama de corpo livre de uma porção finita do cabo de comprimento $s$ .	167
Figura F.1: Graus de liberdade de um elemento de viga plana.	169

## Lista de tabelas

Tabela 3.1: Resumo de elementos 2D e 3D para problemas de potencial.	65
Tabela 3.2: Resumo de elementos 2D e 3D para problemas de elasticidade.	71
Tabela 4.1: Resumo das soluções $p(z)$ e $k(z)$ para os padrões de variação adotados.	92
Tabela 4.2: Resumo das soluções $p(z')$ , $k_z(z')$ e $c(z')$ para os padrões de variação adotados de difusividade térmica $a(z') = k_z(z')/c(z')$ .	92
Tabela 6.1: Resumo dos elementos e malhas do exemplo 6.1, com valores de referência N da figura 6.2.	113
Tabela 6.2: Deslocamento vertical ( $\times 10^3$ ) do nó da extremidade inferior direita da viga da figura (6.27) para as diferentes configurações de malha apresentadas nas figuras 6.28 e 6.29.	127
Tabela 6.3: Deslocamentos verticais (multiplicados por $-1,0 \times 10^3$ ) do nó da extremidade inferior direita da viga da figura 6.31 para as diferentes configurações de malha apresentadas nas figuras 6.28 e 6.29.	129

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1. Colocação do Problema

Na engenharia, assim como em outras áreas do conhecimento, muitas vezes é necessário dividir um problema grande em problemas menores, de tal forma que a solução somada de cada um dos problemas menores leva à solução do problema maior como um todo.

Essa forma de pensar, aliada ao avanço dos computadores, levou ao desenvolvimento do mundialmente difundido método dos elementos finitos, que consiste, de forma simplificada, em se dividir o domínio do problema em subdomínios ou sub-regiões de geometria simples, conforme é mostrado na figura abaixo.

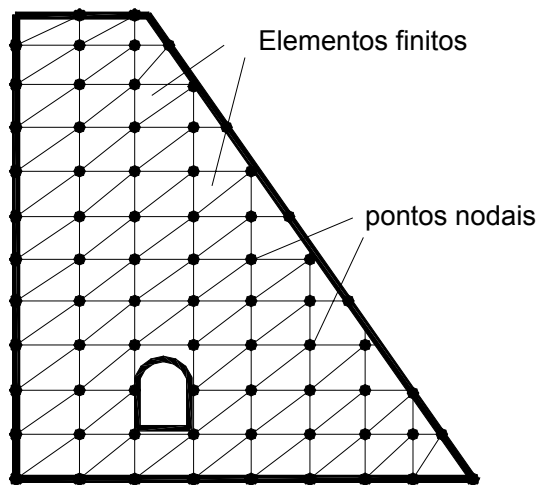


Figura 1.1: Malha de elementos finitos - problema plano.

O método dos elementos finitos é um método numérico aproximado para a solução de problemas de meios contínuos, descritos por meio de equações diferenciais, para determinadas condições de contorno e condições iniciais, pela subdivisão do domínio em subdomínios. Falar de elementos finitos é falar de uma forma bastante genérica, já que existem vários métodos de elementos finitos, dentre os quais, o método da rigidez direta ou método dos deslocamentos é o mais difundido.

Já em 1969, Theodore H. H. Pian e Pin Tong escreveram um artigo que formulava vários métodos de elementos finitos baseados em diversos princípios variacionais. Neste mesmo artigo eles classificaram os vários métodos de elementos finitos em quatro categorias principais, quais sejam: métodos de compatibilidade, métodos de equilíbrio, métodos híbridos e métodos mistos.

Mais recentemente, em contrapartida ao método dos elementos finitos que, como já foi dito, consiste basicamente em se discretizar o domínio, surgiu o método dos elementos de contorno, que grosso modo consiste em um método de discretização do contorno do problema e serve basicamente para solução das mesmas equações diferenciais de que trata o método dos elementos finitos.

O método dos elementos de contorno trouxe junto consigo a vantagem de tratar integrais apenas de contorno e a facilidade de representar as mais variadas formas. Porém, diferentemente do método dos elementos finitos, o método dos elementos de contorno tradicional não tem uma base variacional.

Foi então, com o intuito de se dar um embasamento variacional ao método dos elementos de contorno que, em 1987, Dumont, baseado nos trabalhos desenvolvidos por Reissner e Pian, formulou o método híbrido dos elementos de contorno.

Junto com o método híbrido dos elementos de contorno, Dumont e seus colaboradores desenvolveram várias ferramentas matemáticas, que possibilitaram o desenvolvimento do método híbrido dos elementos finitos na forma como é apresentado neste trabalho. Dentre tais ferramentas, é válido citar o procedimento completamente geral para a obtenção de matrizes inversas generalizadas (Dumont e Oliveira, 2001; Dumont, 2005) obtidas como uma série de potência a partir de matrizes  $\Lambda$  generalizadas e o procedimento avançado de superposição modal (Dumont e Oliveira, 2001).

No que se segue no decorrer do desenvolvimento deste trabalho, serão apresentados conceitos e formulações que servem tanto para o método híbrido dos elementos finitos quanto para o método híbrido de elementos de contorno, com uma diferença básica: as soluções fundamentais aqui utilizadas são não-singulares, diferentemente das soluções fundamentais utilizadas em contorno, o que torna o método híbrido dos elementos finitos mais fácil e simples de se trabalhar que os métodos de contorno em geral, devido à ausência da singularidade, além de mais preciso que o método de elementos finitos convencional devido à utilização no domínio de soluções que satisfazem exatamente à equação diferencial de governo do problema.

## 1.2.Revisão Bibliográfica

Como ponto de partida das pesquisas que levaram ao desenvolvimento do método híbrido de elementos finitos pode-se citar o artigo de Hellinger (1914), que motivou Reissner (1950) a estabelecer o potencial conhecido por potencial de Hellinger-Reissner, aparentemente o primeiro de uma série de notáveis realizações neste campo (Hu, 1955; Washizu, 1955).

Como continuação dos desenvolvimentos no campo variacional na mecânica do contínuo, deve-se mencionar Pian (1964), o qual propôs a primeira de novas metodologias sistemáticas de implementação computacional, que abriu uma nova área de aplicações ao emergente método de elementos finitos. Também foi Pian (1983) quem primeiro utilizou o nome “elementos finitos híbridos”, para designar elementos que mantêm equilíbrio ou compatibilidade em seu domínio e satisfazem compatibilidade ou equilíbrio, respectivamente, ao longo do contorno do elemento.

Ainda a respeito dos desenvolvimentos feitos no campo variacional, deve-se mencionar Trefftz (1926), que, aparentemente sem ter conhecimento do trabalho de Hellinger de 1914, escreveu com várias décadas de avanço um artigo clássico cobrindo o mesmo assunto estudado por Reissner e propondo a mesma metodologia que foi batizada como Potencial de Hellinger-Reissner.

O artigo de Trefftz permaneceu parcialmente esquecido por várias décadas até que Jirousek o trouxe à linha de frente das aplicações computacionais com uma série de artigos (Jirousek e Leon, 1977). O trabalho de Jirousek desencadeou um grande número de desenvolvimentos neste campo, que são agora conhecidos como “métodos de Trefftz”, embora muitas dessas formulações não sejam completamente relacionadas à proposição original de Trefftz (Qin, 2003).

No que diz respeito ao método de elementos finitos, Gupta (1973, 1976, 1978, 1979, 1984) e Paz (1975), entre outros (Voss, 1987), desenvolveram famílias de elementos para os mais diversos problemas no campo da análise de vibrações livres, influenciados por Przemieniecki (1968), que introduziu o conceito de matrizes de massa e rigidez dependentes da frequência para elementos de barra e de viga. Estes elementos foram denominados “dinâmicos”, talvez inapropriadamente, já que só foram usados para problemas de vibração livre.

Mais tarde, Dumont e Oliveira (1993, 1997, 2001) e Dumont e Chaves (2003), em continuação aos desenvolvimentos feitos a partir do potencial de

Hellinger-Reissner, os quais geraram o método híbrido de elementos de contorno (Dumont, 1987, 1989), generalizaram o método para a análise de problemas dinâmicos completamente gerais, no domínio da frequência, para qualquer tipo de carregamento nodal e de deslocamentos iniciais, inspirados em Przemieniecki, mas independentemente dos trabalhos de Gupta e Paz.

É então, a partir destes desenvolvimentos e das ferramentas adquiridas ao longo de quase duas décadas de desenvolvimento do método híbrido dos elementos de contorno, que surge a proposta do método híbrido de elementos finitos do presente trabalho, que generaliza o potencial de Hellinger-Reissner para aplicações de elementos finitos dinâmicos, com soluções fundamentais mais genéricas que as de Trefftz e fazendo uso de uma técnica avançada de superposição modal (Dumont e Oliveira, 1997, 2001).

### 1.3. Objetivos

O intuito deste trabalho é o de desenvolver uma família de elementos finitos híbridos como alternativa aos elementos finitos convencionais, tanto para a análise estática quanto para a análise dinâmica em domínios 2D e 3D.

Como objetivos específicos, citam-se:

- A obtenção de elementos finitos mais precisos, se comparados aos elementos finitos do método dos deslocamentos.
- A obtenção de elementos apropriados à análise dinâmica no domínio da frequência.
- A obtenção de elementos apropriados à resolução de problemas de materiais com gradação funcional.
- A consolidação do ferramental matemático desenvolvido junto ao método híbrido dos elementos de contorno, de forma completamente geral, na aplicação ao método híbrido de elementos finitos.
- A implementação de um programa didático de elementos finitos híbridos para a análise 2D e 3D de problemas de potencial e de elasticidade.
- A implementação de um programa didático de elementos finitos híbridos unidimensionais para a análise dinâmica de estruturas aporticadas e em especial estruturas de cabos de linhas de transmissão

## 1.4. Organização do Texto

O Capítulo 2 está dividido em dez seções, organizadas de forma a apresentar desde os conceitos básicos aos conceitos mais avançados da formulação do método híbrido dos elementos finitos. Nas duas primeiras seções são apresentados os conceitos básicos da teoria do potencial e da elasticidade, Seções 2.1 e 2.2, respectivamente. Na Seção 2.3 é apresentado o conceito de solução fundamental não-singular de forma completamente geral e na Seção 2.4 é apresentado o princípio de Hamilton.

Na Seção 2.5 apresenta-se o potencial de Hellinger-Reissner de forma completamente geral para problemas dependentes do tempo e na Seção 2.6 é apresentada a formulação do método híbrido de elementos finitos, com base no potencial de Hellinger-Reissner generalizado.

Na Seção 2.7 apresenta-se uma análise completamente geral de problemas dependentes do tempo para uma formulação em frequência que leva a um problema de autovalores não-linear, cuja solução é dada na Seção 2.8. A Seção 2.9 apresenta o processo de superposição modal avançada, a consideração de deslocamentos e velocidades iniciais e a obtenção de deslocamento em pontos internos.

Fechando o Capítulo 2, a Seção 2.10 apresenta o processo de obtenção da matriz de rigidez como uma série de frequências, de acordo com o que é exposto na Seção 2.6.

O Capítulo 3 está dividido em três seções. Nas duas primeiras seções é abordado de forma mais detalhada o conceito de soluções fundamentais não-singulares, tanto para problemas de potencial, Seção 3.1, quanto de elasticidade, Seção 3.2. Na Seção 3.3 são apresentados os espaços nulos relacionados à parte estática das soluções fundamentais não-singulares para problemas de potencial e elasticidade 2D e 3D.

O Capítulo 4 apresenta o problema de condução de calor em materiais com gradação funcional (FGM na sigla em inglês), no contexto de uma formulação híbrida de elementos finitos, com a utilização de soluções fundamentais não-singulares. A apresentação se dá em duas etapas. Na primeira etapa, apresenta-se a equação de governo do problema de condução de calor, Seção 4.1. Na segunda etapa, Seção 4.2, apresentam-se as soluções da equação de governo do problema. Na Seção 4.3, são apresentadas duas tabelas contendo um resumo das principais equações desenvolvidas na Seção 4.2 para problemas isotrópicos e ortotrópicos.



O Capítulo 5 apresenta um estudo de elementos finitos unidimensionais (elementos de treliça e viga) com o método híbrido de elementos finitos, seções 5.1 a 5.3, e aborda de maneira geral o problema da análise de cabos flexíveis, Seção 5.4. O intuito deste capítulo é apresentar a formulação de elementos finitos híbridos unidimensionais de forma a possibilitar sua implementação em um programa de análise dinâmica de estruturas apertadas adequado à análise de trechos de linhas de transmissão. A motivação deste capítulo é o estudo feito pelo Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia – NiCAE, que é coordenado pelo professor Remo Magalhães de Souza, do Departamento de Engenharia Civil do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Pará em convênio com a Eletronorte/UFPa, com a participação do autor e do orientador desta dissertação.

O Capítulo 6 aborda alguns exemplos numéricos simples relacionados aos assuntos estudados nos capítulos anteriores, tanto para os casos de potencial como os de elasticidade, de forma a possibilitar a validação do método híbrido dos elementos finitos, assim como avaliar sua precisão numérica.

Por fim, o Capítulo 7 apresenta alguns comentários e reflexões sobre as possíveis conclusões a respeito das vantagens e desvantagens do método, assim como algumas sugestões de desenvolvimentos e melhoramentos que possam vir a ser feitos em um estudo futuro.

No final deste trabalho encontram-se ainda três apêndices. Os dois primeiros contêm alguns esclarecimentos que se fazem necessários para os casos particulares de obtenção da matriz de rigidez e de avaliação de deslocamentos em pontos internos do elemento para problemas de elastostática (ou, potencial em regime permanente), Apêndices A e B, respectivamente. O Apêndice C traz um breve resumo do método híbrido simplificado de elementos finitos, o qual oferece um ganho de tempo significativo no processo de obtenção da matriz de rigidez, se comparado ao método híbrido de elementos finitos (apresentado neste trabalho).

Todos os desenvolvimentos feitos neste trabalho são baseados e fortemente influenciados pelas apostilas, notas de aulas e artigos utilizados durante o curso de método híbrido de elementos de contorno desenvolvido e ministrado pelo professor Dumont, desde 1987, na PUC-Rio.

## 2

# O MÉTODO HÍBRIDO DOS ELEMENTOS FINITOS

Este Capítulo tem por finalidade apresentar a formulação do método híbrido dos elementos finitos. Para tanto, parte-se da introdução de conceitos básicos da teoria do potencial e da teoria da elasticidade para problemas dinâmicos, seguidos do conceito de soluções fundamentais.

Em continuação apresenta-se o potencial de Hellinger-Reissner generalizado e a formulação do método híbrido dos elementos finitos para problemas dinâmicos no domínio do tempo.

Finalmente, apresenta-se a formulação geral do método para problemas no domínio da frequência, com uma solução para o problema de autovalores não-lineares relacionado à equação de equilíbrio dinâmica no domínio da frequência, o processo de superposição modal e a obtenção da matriz de rigidez como uma série de frequências.

### 2.1. Conceitos de Teoria do Potencial

Muitos problemas de engenharia, tais como condução de calor, condução elétrica, campos gravitacionais, campos eletrostáticos, fluxo irrotacional de fluidos ideais, percolação através de um meio poroso, torção de barras prismáticas, são governados por uma mesma equação diferencial, denominada equação quase-harmônica (Zienkiewicz, 1977), por representar problemas que não são puramente transientes e nem harmônicos. Exemplos da equação quase-harmônica são as conhecidas equações de Poisson e de Laplace.

No item 2.1.1 são apresentados o problema de potencial quase-harmônico e a equação de Poisson de forma geral, possibilitando sua aplicação a qualquer um dos exemplos dados acima. Referências em particular serão feitas ao problema de fluxo de calor, de forma a situar as expressões apresentadas com os exemplos a serem mostrados no Capítulo 5. O mesmo será feito no item 2.1.2, o qual apresentará o problema de potencial harmônico e a equação de Helmholtz.

### 2.1.1. Problema de Potencial quase-harmônico

Em certos problemas, a difusão ou o fluxo de certas quantidades, tais como o calor, é de grande relevância. A taxa de transferência por unidade de área de tais quantidades,  $\mathbf{q}$ , pode ser expressa por suas componentes cartesianas como

$$\mathbf{q}^T = [q_x \quad q_y \quad q_z] \quad (2.1.1)$$

Sendo  $Q$  a taxa em que a quantidade em questão é gerada por unidade de volume, o equilíbrio ou continuidade necessária para o fluxo em estado permanente é dado por

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = Q \quad \text{ou} \quad \nabla^T \mathbf{q} - Q = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.1.2)$$

em que  $\Omega$  é o domínio do problema e

$$\nabla = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (2.1.3)$$

De forma geral a taxa de fluxo é relacionada ao gradiente de certa quantidade potencial  $u$ , que para problemas de fluxo de calor representa a temperatura, sendo  $\mathbf{q}$  neste caso o fluxo de calor por unidade de área. Tal relação se expressa de forma geral como

$$\mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{c} q_x \\ q_y \\ q_z \end{array} \right\} = -\mathbf{k} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right\} = -\mathbf{k} \nabla u \quad (2.1.4)$$

onde  $\mathbf{k}$  é uma matriz 3x3 (para o caso geral de problemas 3D), geralmente simétrica devido a argumentos de energia. Para problemas de fluxo de calor,  $\mathbf{k}$  representa a matriz de condutividade térmica do material.

A equação final de governo para problemas de potencial é obtida pela substituição de (2.1.4) em (2.1.2),

$$\nabla^T (\mathbf{k} \nabla u) + Q = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.1.5)$$

Na solução de problemas físicos em termos de equações diferenciais, é em geral necessário satisfazer um certo número de condições iniciais ou

condições de contorno. As condições de contorno podem ser: em potencial, em fluxo, proporcionais e mistas.

Condições de contorno apenas em potencial são conhecidas como condições de contorno essenciais ou de Dirichlet. Condições de contorno unicamente em fluxo são conhecidas como condições de contorno naturais ou de Neumann.

As condições de contorno em que o fluxo é proporcional ao potencial, ou seja,

$$q_n = \bar{q} + \alpha u \quad (2.1.6)$$

são também denominadas de condições de contorno de Robin. Na equação (2.1.6)  $\alpha$  é um coeficiente de transferência ou radiação,  $\bar{q}$  é o valor de densidade de fluxo conhecida e  $q_n$  é a componente de fluxo normal à superfície.

Já as condições de contorno mistas são aquelas em que se tem potencial em uma parte do contorno, denominado de  $\Gamma_u$ , ou seja,

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.1.7)$$

e fluxo em certas partes do contorno, denominadas de  $\Gamma_q$ , isto é,

$$q_n = \bar{q} \quad \text{em } \Gamma_q \quad (2.1.8)$$

onde  $\bar{u}$  é o valor de potencial conhecido e  $q_n$ , componente de fluxo normal à superfície, é dada por

$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} = -(\mathbf{k} \nabla u)^T \mathbf{n} \quad (2.1.9)$$

levando em conta que se tenham apenas as condições de contorno mista.

Na equação acima,  $\mathbf{n}$  é um vetor de co-senos diretores da normal à superfície:

$$\mathbf{n}^T = [n_x \quad n_y \quad n_z] \quad (2.1.10)$$

No caso de as direções cartesianas (x,y,z) coincidirem com as direções principais do material, ou seja,  $k_{xy} = k_{xz} = k_{yz} = 0$ , tem-se

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (2.1.11)$$

Dessa forma a equação (2.1.5) fica da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + Q = 0 \quad (2.1.12)$$

Se, além disso, o meio em questão for isotrópico e homogêneo, então neste caso a equação (2.1.5) se escreve na forma

$$k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + Q = 0 \quad (2.1.13)$$

em que  $k = k_x = k_y = k_z$ .

A equação (2.1.13) é conhecida como equação de Poisson. Para o caso de problemas de potencial quase-harmônico sem fonte interna em meio homogêneo e isotrópico, a equação governante se torna a equação de Laplace, ou seja,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 u = 0 \quad (2.1.14)$$

### 2.1.2. Problema de Potencial Harmônico

No item anterior, deduziu-se a equação (2.1.5) para o caso geral de fluxo em estado permanente.

Já para o caso do fluxo variando com o tempo, a equação (2.1.5) sofre uma ligeira alteração, sendo então

$$\nabla^T \mathbf{k} \nabla u + Q = \bar{c} \frac{\partial u}{\partial t} \text{ em } \Omega \quad (2.1.15)$$

Onde  $\bar{c} = c\rho$ , no caso de problema de fluxo de calor, sendo  $c$  o calor específico e  $\rho$  a densidade do material em questão.

Para material homogêneo e isotrópico, a equação (2.1.15) assume a expressão

$$k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + Q = \bar{c} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1.16)$$

a partir da equação (2.1.14).

Para o potencial expresso por meio de uma formulação dependente da freqüência, parte-se da separação de variáveis

$$u = u(\omega)\tau(t, \omega) \quad (2.1.17)$$

em que  $\tau(t, \omega)$  é definido de tal forma que

$$\frac{\partial \tau(t, \omega)}{\partial t} = -\omega \tau(t, \omega) \quad (2.1.18)$$

e  $\omega$  é uma quantidade matemática em princípio arbitrária, cuja interpretação física depende do problema em estudo. Com isso, a equação (2.1.16) torna-se

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + Q + \tilde{\kappa}^2 u = 0 \quad (2.1.19)$$

em que  $\tilde{\kappa}^2 = \bar{c}\omega/k$  é a constante de separação também denominada de “número de onda”, qualquer que seja o problema em questão.

A equação (2.1.19) é a equação de governo para problemas de potencial harmônico em meio homogêneo e isotrópico e é conhecida como equação de Helmholtz, cuja solução fundamental será apresentada no item 3.1 do Capítulo 3.

## 2.2. Conceitos de Teoria da Elasticidade

Na teoria da elasticidade, busca-se determinar a distribuição estática ou dinâmica dos deslocamentos e das tensões em uma estrutura submetida a ações externas conhecidas. Para isso deve-se obter uma solução para as equações básicas da elasticidade que satisfaça as condições de contorno impostas, que podem ser em deslocamentos ou em forças. Tais equações são: equações de equilíbrio de forças, equações de compatibilidade entre deformações e deslocamentos e equações constitutivas.

As grandezas relacionadas a essas equações (deslocamentos, forças, deformações e tensões) devem ser descritas em dois sistemas básicos de referência ou de coordenadas. Tem-se um sistema global ou externo, no qual estão representados os deslocamentos absolutos  $u_i$  e as forças relacionadas, que podem ser tanto forças de massa  $f_i$ , que atuam no domínio  $\Omega$  do corpo, como as forças de superfície  $t_i$ , que atuam no contorno  $\Gamma$  do corpo. Tem-se também um sistema local ou interno, no qual se representam os deslocamentos relativos, ou seja, as deformações  $\varepsilon_{ij}$ , assim como as tensões  $\sigma_{ij}$  relacionadas.

Nesta e nas próximas seções, os subscritos  $i$  e  $j$  assumirão os valores 1, 2 ou 3, conforme se referam às coordenadas globais  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , respectivamente. Um subscrito depois de uma vírgula representa derivada em relação à direção coordenada correspondente. Índices repetidos indicam um somatório de três termos, no caso geral de problemas tridimensionais.

Seja um corpo elástico em equilíbrio, sujeito a pequenos deslocamentos, com condições iniciais em deslocamento e velocidade conhecidas em todo o corpo, que está submetido a forças de massa  $\bar{f}_i$  no domínio  $\Omega$  e forças de superfície  $\bar{t}_i$  no contorno  $\Gamma_\sigma$  e deslocamentos prescritos  $\bar{u}_i$  no contorno  $\Gamma_u$ , conforme a fig 2.1.

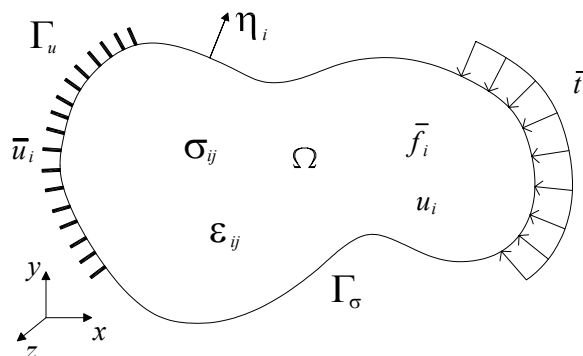


Figura 2.1: Corpo elástico em equilíbrio.

As equações de equilíbrio de forças e tensões relacionadas a este corpo são:

$$\sigma_{ji,j} - \rho \ddot{u}_i + \bar{f}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.2)$$

$$\bar{t}_i = \sigma_{ji} \eta_j \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (2.2.3)$$

Elas expressam as transformações entre as forças descritas no sistema global e as tensões descritas no sistema local de coordenadas, incluindo a condição de simetria do tensor das tensões. A grandeza escalar  $\rho$  é a densidade de massa do meio e  $\eta_j$  são os co-senos diretores de um elemento de superfície

$d\Gamma$ . A derivada no tempo é indicada por pontos, ou seja,  $\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ .

As equações de compatibilidade entre deformações e deslocamentos são dadas por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.2.5)$$

Na equação (2.2.4) tem-se a expressão das transformações cinemáticas entre os deslocamentos descritos no sistema global e as deformações no sistema local de coordenadas. Na equação (2.2.5) tem-se a relação de compatibilidade entre os deslocamentos  $u_i$  no contorno  $\Gamma_u$  e os deslocamentos prescritos  $\bar{u}_i$ .

Por fim, as equações constitutivas que representam as relações entre as tensões e as deformações no corpo elástico são dadas por

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.6)$$

$C_{ijkl}$  é a matriz constitutiva do material, a qual, para um material linearmente elástico, isotrópico e homogêneo, se expressa na forma

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.2.7)$$

em que  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal ou de cisalhamento e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, ou seja:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.2.8)$$



A substituição da equação (2.2.7) em (2.2.6) e a posterior substituição deste resultado em (2.2.1), considerando a equação (2.2.4) e a condição de simetria da matriz constitutiva,  $C_{ijkl}$ , fornece a equação conhecida como equação de Navier:

$$Gu_{i,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)}u_{k,ki} - \rho\ddot{u}_i + \bar{f}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.9)$$

que pode ser expressa na forma

$$c_2^2 u_{i,kk} + (c_1^2 - c_2^2) u_{k,ki} - \ddot{u}_i + \frac{\bar{f}_i}{\rho} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.10)$$

As grandezas  $c_1$  e  $c_2$  são a velocidade de propagação de ondas irrotacionais e a velocidade de propagação de ondas de cisalhamento no meio elástico, dadas por

$$c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}} \quad (2.2.11)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.2.12)$$

A consideração de que as velocidades e as acelerações são nulas nas equações acima leva à equação da elastostática, para a qual são obviamente válidas todas as transformações anteriores:

$$Gu_{i,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)}u_{k,ki} + \bar{f}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.13)$$

### 2.3. Soluções Fundamentais

Nesta seção apresenta-se de maneira geral o conceito de soluções fundamentais, de forma a fornecer ao leitor não familiarizado com tal assunto condições de acompanhar o desenvolvimento da formulação do método híbrido de elementos finitos.

Soluções fundamentais são conjuntos de funções de interpolação de campo, em equilíbrio com o fluxo ou a tensão, para problemas de potencial ou elasticidade, respectivamente. Isto é, são funções que satisfazem as equações de equilíbrio do problema, independentemente das condições de contorno.

Os campos de tensões  $\sigma_{ij}^f$  e de deslocamentos  $u_i^f$  no domínio  $\Omega$ , este último a menos de constantes de corpo rígido, podem ser pensados como uma superposição de uma solução particular  $\sigma_{ij}^p$  e uma solução homogênea  $\sigma_{ij}^*$  da equação da elastodinâmica,

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i + \bar{f}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.2.1)$$

ou seja,

$$\sigma_{ij}^f = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p \quad (2.3.1)$$

$$u_i^f = u_i^* + u_i^p \quad (2.3.2)$$

em que

$$\sigma_{ij,j}^p - \rho \ddot{u}_i^p + \bar{f}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.3.3)$$

$$\sigma_{ij,j}^* - \rho \ddot{u}_i^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.3.4)$$

As funções  $\sigma_{ij}^*$  e  $u_i^*$  podem ser representadas em termos de parâmetros nodais de força  $p_m^*$ , na forma

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* p_m^* \quad (2.3.5)$$

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* \quad (2.3.6)$$

o que, de acordo com a equação (2.3.4), significa que

$$\sigma_{ijm,j}^* - \rho \ddot{u}_{im}^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.3.7)$$

Uma função  $\sigma_{ijm}^*$  que satisfaça a equação (2.3.7) é chamada de solução fundamental e é caracterizada pelo sobrescrito (\*).

O campo de deslocamentos  $u_i^*$  correspondente ao campo de tensões  $\sigma_{ij}^*$  também pode ser representado em termos de parâmetros nodais de força  $p_m^*$ , a menos de constantes de corpo rígido, ou seja,

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* + u_{is}^r r_s \equiv (u_{im}^* + u_{is}^r C_{sm}) p_m^* \quad (2.3.8)$$

onde  $u_{im}^*$  é chamada de solução fundamental em termos de deslocamentos e  $u_{is}^r$  é um conjunto de funções arbitrárias de deslocamentos de corpo rígido (Chaves, 2003), que aparecem multiplicadas por parâmetros arbitrários  $r_s$ . No termo mais à direita da equação (2.3.8), tais parâmetros de corpo rígido são expressos em termo de parâmetros de força  $p_m^*$ , multiplicados por uma matriz de constantes arbitrárias  $C_{sm}$  (ver Chaves, 2003). No Apêndice B mostra-se como é feita a avaliação de deslocamentos em pontos do domínio para problemas estáticos considerando deslocamentos de corpo rígido.

As soluções fundamentais podem ser funções singulares ou não-singulares. Soluções fundamentais singulares, quando requeridas a satisfazer certas condições de contorno, são chamadas de funções de Green. Soluções fundamentais singulares gerais são também chamadas de funções de Green de campo livre. Já as soluções fundamentais não-singulares são chamadas de funções de Trefftz pelos pesquisadores que seguiram o trabalho pioneiro de Trefftz (1926).

Na hipótese da utilização de soluções fundamentais singulares para obtenção da solução homogênea da equação (2.2.1), as equações (2.3.4) e (2.3.7) assumem expressão ligeiramente diferente, ou seja,

$$\sigma_{ij,j}^* - \rho \ddot{u}_i^* = -\Delta p_i^* \quad \text{em } \Omega \quad (2.3.9)$$

$$\sigma_{ijm,j}^* - \rho \ddot{u}_{im}^* = -\Delta_{im} \quad \text{em } \Omega \quad (2.3.10)$$

em que  $\Delta$  ou  $\Delta_{im}$  é uma função singular (delta de Dirac) nula em todo o domínio exceto em uma região  $\Omega_0$  arbitrariamente pequena de  $\Omega$  e que envolve o ponto de aplicação da força  $p_i^*$ . Porém as soluções fundamentais singulares não fazem parte do escopo deste trabalho e não mais serão mencionadas daqui para frente, e qualquer citação a soluções fundamentais dirá respeito unicamente as soluções fundamentais não-singulares. Mais detalhes sobre soluções fundamentais singulares podem ser obtidos em De Souza (1992), Chaves (1999) e Brebbia (1978).

## 2.4.O Princípio de Hamilton

Considere um corpo elástico, como na figura 2.1, no qual as deformações variam continuamente entre os instantes  $t_0$  e  $t_1$ . Os efeitos de tempo a ser considerados são aqueles devidos à inércia de um corpo elástico. Considere ainda que os deslocamentos virtuais  $\delta u_i$  aplicados sobre o corpo elástico variam com o tempo de tal modo que  $\delta u_i = 0$  nos limites de integração  $t_0$  e  $t_1$ .

Seja  $u_i$  um campo de pequenos deslocamentos, função do tempo  $t$ , de tal modo que  $\delta u_i = 0$  em  $\Gamma_u$ .

O princípio dos trabalhos virtuais aplicado a este corpo, levando-se em conta as forças dinâmicas, se expressa da seguinte forma, para um certo instante de tempo:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{f}_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega \quad (2.4.1)$$

Para um corpo elástico, pode-se expressar

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta U_0 d\Omega = \delta U \quad (2.4.2)$$

como a variação da energia interna de deformação  $U$ . Além disso,

$$\int_{\Omega} \bar{f}_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma = \delta W = -\delta V \quad (2.4.3)$$

representa a variação do potencial de trabalho  $W$  das forças externas.

A parcela  $-\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega$  que aparece na equação (2.4.1) representa a variação de energia relacionada às forças dinâmicas, de acordo com o princípio de D'Alembert, que diz que um corpo de massa  $m$  desenvolve uma força, denominada de força de inércia proporcional à aceleração da massa e de sentido contrário.

A integração da expressão do princípio dos trabalhos virtuais, equação (2.4.1), no intervalo de tempo  $(t_0, t_1)$ , fornece

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega dt \quad (2.4.4)$$

Além disso, a segunda integral do lado direito da igualdade na equação (2.4.4) pode ser relacionada à variação da energia cinética  $K$  do corpo, através da seguinte integração por partes:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega dt = \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \delta u_i d\Omega \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i d\Omega dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i d\Omega dt \quad (2.4.5)$$

visto que  $\int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \delta u_i d\Omega \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$  com base na hipótese de que os deslocamentos virtuais  $\delta u_i$  são nulos nos limites de integração no tempo ( $t_0, t_1$ ). Portanto, a equação (2.4.4) pode ser escrita como:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\Pi - K) dt = 0 \quad (2.4.6)$$

onde:

$$\Pi = U + V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{f}_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i u_i d\Gamma \quad (2.4.7)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i d\Omega \quad (2.4.8)$$

A equação (2.4.6) é conhecida como o princípio de Hamilton e diz que a integral  $\int_{t_0}^{t_1} (\Pi - K) dt$  tem valor estacionário, em um sistema elástico submetido a um carregamento dinâmico conservativo.

## 2.5.O Potencial de Hellinger-Reissner Generalizado

O potencial de Hellinger-Reissner é um potencial mais geral do que aquele tradicionalmente utilizado no método convencional de elementos finitos, pois ele conta com dois campos, um de tensões  $\sigma_i^f$  no domínio  $\Omega$  do elemento e outro de deslocamentos  $\tilde{u}_i$  no contorno  $\Gamma$  do elemento, diferentemente do potencial utilizado no método convencional, que conta apenas com um campo de deslocamentos, para o domínio e o contorno do elemento.

Com o intuito de se chegar a uma formulação híbrida de elementos finitos, a ser abordada na próxima seção, a equação (2.4.6) apresentada na seção anterior deve ter relaxada a condição de compatibilidade entre deformações e deslocamentos dada pela equação (2.2.4), de forma a se ter uma versão generalizada do princípio de Hamilton (Dumont e Oliveira, 1997).

Abaixo tem-se a equação (2.4.6) reescrita de forma mais conveniente:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_{\Omega} U_0(\varepsilon_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} \bar{f}_i u_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i u_i d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i d\Omega \right) dt = 0 \quad (2.4.6)$$

O princípio de Hamilton pode ser generalizado na forma:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_{\Omega} U_0(\varepsilon_{ij}^f) d\Omega - \int_{\Omega} \bar{f}_i \tilde{u}_i d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \bar{t}_i \tilde{u}_i d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{u}_i^f \dot{u}_i^f d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_{ij} \left( \varepsilon_{ij}^f - \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_i (u_i^f - \tilde{u}_i) d\Omega \right) dt = 0 \quad (2.5.1)$$

em que se tem um campo de tensões  $\sigma_{ij}^f$ , com conseqüentes deformações  $\varepsilon_{ij}^f$  e deslocamentos  $u_i^f$ , de tal maneira que as equações de equilíbrio dinâmico (2.2.1) e (2.2.2) sejam satisfeitas em  $\Omega$  como premissa, e um campo de deslocamentos  $\tilde{u}_i$  que satisfaça a condição de compatibilidade (2.2.5) em  $\Gamma_u$ . Os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_{ij}$  e  $\lambda_i$  são necessários para a inclusão adequada dos dois termos de energia advindos do relaxamento da equação de compatibilidade (2.2.4) assim como do fato de que se têm dois campos de deslocamentos distintos.

Pode-se reconhecer nos multiplicadores de Lagrange da equação (2.5.1) um sentido mecânico: a variável  $\lambda_{ij}$  corresponde a tensões no domínio  $\Omega$ , enquanto  $\lambda_i$  se refere a forças dinâmicas que agem no domínio  $\Omega$  do elemento. Além disso, observa-se que a imposição de estacionariedade do potencial da equação (2.5.1) estabelece que as variáveis presentes devem ser relacionadas entre si através das equações (2.2.1)-(2.2.6). Sendo as equações (2.2.1) e

(2.2.2) satisfeitas como premissa (para o campo de tensões no domínio dado como uma série de soluções fundamentais), pode-se atribuir a  $\lambda_{ij}$  o sentido físico mais estrito de tensões  $\sigma_{ij}^f$ , enquanto que  $\lambda_i$  assume sem erro o sentido estrito de forças dinâmicas  $-\rho\ddot{u}_i^f$ .

Por outro lado, sendo as deformações  $\varepsilon_{ij}^f$  funções das tensões  $\sigma_{ij}^f$ , deve-se expressar a densidade de energia de deformação  $U_0$  (ver figura 2.2) em termos da densidade de energia de deformação complementar  $U_0^c$ , ou seja,

$$\int_{\Omega} U_0(\varepsilon_{ij}^f) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^f \varepsilon_{ij}^f d\Omega - \int_{\Omega} U_0^c(\sigma_{ij}^f) d\Omega \quad (2.5.2)$$

Para materiais linearmente elásticos, os valores dos termos  $U_0^c(\sigma_{ij}^f)$  e  $U_0(\varepsilon_{ij}^f)$  são iguais. A diferença existente consiste na forma conceitual como estas duas parcelas são descritas, conforme ilustra a figura 2.2.

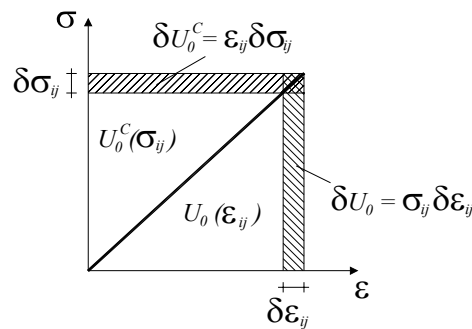


Figura 2.2: Gráfico da energia interna de deformação de um corpo elástico.

Aplicando-se o teorema de Green ao quinto termo de integração da equação (2.5.1), em que se escreve  $\sigma_{ij}^f$  em lugar de  $\lambda_{ij}$ , visto que são equivalentes como mencionado anteriormente, e levando em conta a simetria do tensor  $\sigma_{ij}^f$ , equação (2.2.2), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^f \left( \varepsilon_{ij}^f - \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \right) d\Omega &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^f \varepsilon_{ij}^f d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^f \tilde{u}_{i,j} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \sigma_{ij}^f \varepsilon_{ij}^f d\Omega - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^f \eta_j \tilde{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^f \tilde{u}_i d\Omega \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

onde  $\eta_j$  é o vetor dos co-senos diretores de um elemento de superfície  $d\Gamma$ , de acordo com a figura 2.1.

A substituição das equações (2.5.2) e (2.5.3) na equação (2.5.1), escrevendo-se  $-\rho\ddot{u}_i^f$  em lugar de  $\lambda_i$ , fornece:

$$\begin{aligned}
-\delta\Pi_R = & \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left[U_0^c + (\sigma_{ij}^f + \bar{f}_i)\tilde{u}_i\right]d\Omega dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma_\sigma}\bar{t}_i\tilde{u}_i d\Gamma dt - \\
& - \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma}\sigma_{ij}^f\eta_j\tilde{u}_i d\Gamma dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i^f\dot{u}_i^f d\Omega dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\ddot{u}_i^f(u_i^f - \tilde{u}_i)d\Omega dt = 0
\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

que é a expressão mais geral do potencial de Hellinger-Reissner, apresentada de maneira adequada em sua forma estacionária. Nesta expressão têm-se apenas duas variáveis independentes entre si, que são o campo expresso em termos de tensões  $\sigma_{ij}^f$  e deslocamentos  $u_i^f$  no domínio  $\Omega$ , aproximados por soluções fundamentais, e o campo de deslocamentos  $\tilde{u}_i$ , que necessitam ser descritos apenas no contorno  $\Gamma$  do corpo, por funções de interpolação como no método de elementos finitos tradicional. A integral de domínio do termo entre colchetes na equação (2.5.4) não será avaliada, pelo fato de  $U_0^c$  ser expresso em termos de soluções fundamentais, como se verá na próxima seção, além do fato de se fazer uma transformação da expressão de  $\bar{f}_i\tilde{u}_i$ , para levar sua integral do domínio para o contorno (não discutido nesta dissertação).



## 2.6. Formulação do Método Híbrido dos Elementos Finitos

O ponto de partida para a formulação do método híbrido dos elementos finitos é a condição de estacionariedade do Potencial de Hellinger-Reissner, eq. (2.5.4), reescrita abaixo por motivo de conveniência:

$$\begin{aligned} -\delta\Pi_R = & \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left[U_0^c + (\sigma_{ij,j}^f + \bar{f}_i)\tilde{u}_i\right]d\Omega dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma_\sigma}\bar{t}_i\tilde{u}_i d\Gamma dt - \\ & -\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma}\sigma_{ij}^f\eta_j\tilde{u}_i d\Gamma dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i^f\dot{u}_i^f d\Omega dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\ddot{u}_i^f(u_i^f - \tilde{u}_i)d\Omega dt = 0 \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Nas próximas subseções são feitas transformações no potencial de Hellinger-Reissner de forma a se obter sua expressão matricial e alguns comentários acerca das propriedades físicas das matrizes obtidas.

### 2.6.1. Particularização da Condição de Estacionariedade do Potencial de Hellinger-Reissner para o Caso de Soluções Fundamentais Não-Singulares

Sobre a equação (2.5.4) faz-se a seguinte transformação, relacionada ao quarto termo de integração do lado direito da primeira igualdade:

$$\begin{aligned} \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\frac{\rho\dot{u}_i^f\dot{u}_i^f}{2}d\Omega dt &= \int_{\Omega}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\rho\delta\dot{u}_i^f{}^2}{2}dt d\Omega = \int_{\Omega}\rho\left(\left[\dot{u}_i^f\delta u_i^f\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\ddot{u}_i^f\delta u_i^f dt\right)d\Omega \\ &= -\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\ddot{u}_i^f\delta u_i^f d\Omega dt = -\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\ddot{u}_i^f u_i^f d\Omega dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\delta\ddot{u}_i^f u_i^f d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Tal transformação fornece a seguinte expressão para a condição de estacionariedade do potencial de Hellinger-Reissner,

$$\begin{aligned} -\delta\Pi_R = & \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left[U_0^c + (\sigma_{ij,j}^f + \bar{f}_i - \rho\ddot{u}_i^f)\tilde{u}_i\right]d\Omega dt + \delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma_\sigma}\bar{t}_i\tilde{u}_i d\Gamma dt - \\ & -\delta\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma_\sigma}\sigma_{ij}^f\eta_j\tilde{u}_i d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\delta\ddot{u}_i^f u_i^f d\Omega dt = 0 \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

O desenvolvimento da variação (expressa pelos termos em  $\delta$ ) fornece:

$$\begin{aligned} -\delta\Pi_R = & \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left(\delta U_0^c + \delta\sigma_{ij,j}^f\tilde{u}_i - \rho\delta\ddot{u}_i^f\tilde{u}_i\right)d\Omega dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\left(\sigma_{ij,j}^f + \bar{f}_i - \rho\ddot{u}_i^f\right)\delta\tilde{u}_i d\Omega dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma_\sigma}\bar{t}_i\delta\tilde{u}_i d\Gamma dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma}\delta\sigma_{ij}^f\eta_j\tilde{u}_i d\Gamma dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Gamma}\sigma_{ij}^f\eta_j\delta\tilde{u}_i d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}\rho\delta\ddot{u}_i^f u_i^f d\Omega dt = 0 \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Porém, o termo relativo à energia de deformação complementar ainda pode ser desenvolvido da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \delta U_0^c d\Omega dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \delta \sigma_{ij}^f u_{i,j}^f d\Omega dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} (\delta \sigma_{ij}^f u_i^f)_{,j} d\Omega dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \delta \sigma_{ij,j}^f u_i^f d\Omega dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \delta \sigma_{ij}^f \eta_j u_i^f d\Gamma dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} \delta \sigma_{ij,j}^f u_i^f d\Omega dt \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

Sua substituição na equação (2.6.3) fornece a equação do potencial de Hellinger-Reissner em sua forma mais adequada à discretização numérica, qual seja:

$$\begin{aligned} -\delta \Pi_R &= -\int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} (\delta \sigma_{ij}^f - \rho \delta \ddot{u}_i^f) (u_i^f - \tilde{u}_i) d\Omega dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \delta \sigma_{ij}^f \eta_j (u_i^f - \tilde{u}_i) d\Gamma dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j}^f + \bar{f}_i - \rho \ddot{u}_i^f) \delta \tilde{u}_i d\Omega dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^f \eta_j - \bar{t}_i) \delta \tilde{u}_i d\Gamma dt = 0 \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Entretanto, antes que se faça tal discretização, ainda é possível tornar a equação (2.6.5) mais simples e direta para a discretização numérica.

Tal simplificação se dá através da condição expressa pelas equações (2.3.3) e (2.3.4) que, para solução fundamental não-singular, torna nulos o primeiro e o terceiro termos de integração da equação (2.6.5), fornecendo:

$$-\delta \Pi_R = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \delta \sigma_{ij}^f \eta_j (u_i^f - \tilde{u}_i) d\Gamma dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^f \eta_j - \bar{t}_i) \delta \tilde{u}_i d\Gamma dt = 0 \quad (2.6.6)$$

que é a expressão mais adequada do potencial de Hellinger-Reissner para soluções fundamentais não-singulares.

## 2.6.2. Discretização da Condição de Estacionariedade do Potencial de Hellinger-Reissner para Soluções Não-Singulares

De acordo com a Seção 2.3, as tensões  $\sigma_{ij}^f$  e os deslocamentos  $u_i^f$  no domínio  $\Omega$  são expressos como

$$\sigma_{ij}^f = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p \quad (2.3.1)$$

$$u_i^f = u_i^* + u_i^p \quad (2.3.2)$$

A substituição destas expressões, equações (2.3.1) e (2.3.2), na equação (2.6.6), fornece:

$$\begin{aligned} -\delta \Pi_R &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} (\delta \sigma_{ij}^* + \delta \sigma_{ij}^p) \eta_j (u_i^* + u_i^p - \tilde{u}_i) d\Gamma dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} [(\sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^p) \eta_j - \bar{t}_i] \delta \tilde{u}_i d\Gamma dt = 0 \end{aligned} \quad (2.6.7)$$

Deve-se aqui lembrar que o termo  $\sigma_{ij}^p$  que aparece na equação (2.3.1) é um termo constante e portanto sua variação  $\delta \sigma_{ij}^p$  na equação acima é nula.

A discretização numérica da equação (2.6.7) é feita através das seguintes expressões para as tensões  $\sigma_{ij}^*$  e deslocamentos  $u_i^*$  no domínio  $\Omega$  e os deslocamentos  $\tilde{u}_i$  no contorno  $\Gamma$  do elemento, respectivamente,

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* p_m^* \quad (2.6.8)$$

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* \quad (2.6.9)$$

$$\tilde{u}_i = u_{im} d_m \quad (2.6.10)$$

onde  $p_m^*$  são parâmetros nodais de força,  $d_m$  são parâmetros nodais de deslocamento e  $u_{im}$  são funções de interpolação de deslocamentos iguais às utilizadas no método de elementos finitos convencional.

Utilizando-se por fim as expressões dadas pelas equações (2.6.8), (2.6.9) e (2.6.10), a equação (2.6.7) torna-se:

$$\begin{aligned} -\delta\Pi_R = & \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \delta p_m^* \eta_j (u_{in}^* p_n^* + u_i^p - u_{in} d_n) d\Gamma dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} [(\sigma_{ijm}^* p_m^* + \sigma_{ij}^p) \eta_j - \bar{t}_i] u_{in} \delta d_n d\Gamma dt = 0 \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Então, a nova expressão para a forma estacionária do potencial de Hellinger-Reissner, escrita na forma matricial, passa a ser

$$-\delta\Pi_R = \int_{t_0}^{t_1} [\delta\mathbf{p}^{*T} (\mathbf{F}\mathbf{p}^* - \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{b}) - \delta\mathbf{d}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* + \mathbf{p}^b - \mathbf{p})] dt = 0 \quad (2.6.12)$$

em que as quantidades  $\mathbf{p}^*$  e  $\mathbf{d}$  são vetores contendo os parâmetros  $p_m^*$  e  $d_m$ , respectivamente – incógnitas primárias do problema. A matriz  $\mathbf{F}$  é a matriz de flexibilidade, simétrica por construção, como pode ser visto na equação (2.6.13) abaixo;  $\mathbf{H}$  é uma matriz de transformação cinemática, e  $\mathbf{b}$  um vetor de deslocamentos nodais equivalentes às forças de corpo, como mostram as equações (2.6.14) e (2.6.15), a seguir:

$$[\mathbf{F}] \equiv [F_{mn}] = \int_{\Gamma} u_{in}^* \sigma_{ijm}^* \eta_j d\Gamma \quad (2.6.13)$$

$$[\mathbf{H}^T] \equiv [H_{mn}] = \int_{\Gamma} u_{in} \sigma_{ijm}^* \eta_j d\Gamma \quad (2.6.14)$$

$$[\mathbf{b}^T] \equiv [b_m] = \int_{\Gamma} u_i^p \sigma_{ijm}^* \eta_j d\Gamma \quad (2.6.15)$$

As quantidades  $\mathbf{p}^b$  e  $\mathbf{p}$  que aparecem na equação (2.6.12) são vetores de forças nodais equivalentes relativos às forças de corpo  $\bar{f}_i$  e às forças de tração  $\bar{t}_i$ , respectivamente, e são definidas como

$$[\mathbf{p}^b] \equiv [p_m^b] = \int_{\Gamma} u_{im} \sigma_{ij}^p \eta_j d\Gamma \quad (2.6.16)$$

$$[\mathbf{p}] \equiv [p_m] = \int_{\Gamma} u_{im} \bar{t}_i d\Gamma \quad (2.6.17)$$

Quanto à matriz  $\mathbf{b}$  da equação (2.6.15), é possível escrever

$$\mathbf{b} = \int_{\Gamma} u_i^p \sigma_{ijm}^* \eta_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{in} d_n^b \sigma_{ijm}^* \eta_j d\Gamma = \mathbf{H} \mathbf{d}^b \quad (2.6.18)$$

em que  $\mathbf{d}^b$  contém deslocamentos  $u_i^p$  medidos diretamente em pontos nodais do contorno.

Portanto, para um determinado instante de tempo e valores arbitrários de  $\delta \mathbf{p}^*$  e  $\delta \mathbf{d}$  a equação (2.6.12) decompõe-se em duas novas equações:

$$\mathbf{F} \mathbf{p}^* = \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (2.6.19)$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (2.6.20)$$

Eliminando-se  $\mathbf{p}^*$  nestas equações, tem-se, finalmente,

$$\mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (2.6.21)$$

em que

$$\mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} = \mathbf{K} \quad (2.6.22)$$

é uma matriz de rigidez positiva semidefinida, que transforma deslocamentos nodais  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  em forças nodais em equilíbrio com o conjunto de forças nodais equivalentes  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$  definidas no lado direito da equação (2.6.21).

A matriz  $\mathbf{H}$ , para o caso de soluções fundamentais não-singulares construídas para um conjunto polinomial completo, é em geral uma matriz retangular, visto que há mais parâmetros de força  $\mathbf{p}^*$  do que parâmetros de deslocamentos  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  na equação (2.6.19), isto é  $\dim(\mathbf{p}^*) \geq \dim(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  (ver tabelas 3.1 e 3.2, no Capítulo 3), ao contrário do que ocorre no método híbrido de elementos de contorno, onde  $\mathbf{H}$  é sempre quadrada.

Para problemas no domínio do tempo com a utilização de soluções fundamentais não-singulares, a matriz  $\mathbf{F}$  é não-singular e sua inversa pode ser encontrada diretamente, como indica a equação (2.6.22). Já para problemas estáticos ou de regime permanente, a matriz  $\mathbf{F}$  é singular e sua inversa deve ser obtida através do procedimento apresentado no Apêndice A.

### 2.6.3. Propriedades Físicas Relacionadas às Matrizes $\mathbf{H}$ , $\mathbf{F}$ e $\mathbf{K}$

Tecer-se-ão aqui alguns comentários acerca das propriedades físicas relacionadas às matrizes  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{K}$ , as quais dizem respeito às transformações sofridas pelos vetores de deslocamentos nodais  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  e de forças nodais  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$  que aparecem na equação (2.6.21).

No sistema externo ou global, os deslocamentos nodais  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  descrevem um campo de deslocamentos compatível em todo o contorno  $\Gamma$ . A estes deslocamentos  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  correspondem as forças nodais  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$  energeticamente equivalentes às solicitações externas que atuam no contorno. Os deslocamentos  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  podem assumir valores arbitrários, porém as forças equivalentes  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$  devem ser sempre auto-equilibradas.

No sistema interno ou local, a parcela estática das forças nodais  $\mathbf{p}^*$  define um campo de tensões no domínio  $\Omega$ . A estas forças nodais  $\mathbf{p}^*$  correspondem deslocamentos nodais  $\mathbf{d}^*$  que podem ser definidos a partir do princípio dos trabalhos virtuais como,

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{F}\mathbf{p}^* \quad (2.6.23)$$

em termos da matriz de flexibilidade  $\mathbf{F}$ , previamente definida. Estes deslocamentos nodais equivalentes não existem fisicamente, de modo a serem diretamente mensuráveis, mas são grandezas mecanicamente equivalentes, em termos de trabalhos virtuais, ao campo de deslocamento correspondente às forças aplicadas.

A substituição da equação (2.6.23) na equação (2.6.19) permite concluir que  $\mathbf{H}$  é uma matriz de incidência cinemática, que relaciona os deslocamentos nodais  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  do sistema externo com os deslocamentos nodais equivalentes  $\mathbf{d}^*$  do sistema interno de coordenadas:

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (2.6.24)$$

Da equação (2.6.20) advém que a matriz  $\mathbf{H}^T$  realiza uma transformação de equilíbrio entre forças nodais  $\mathbf{p}^*$  do sistema interno e as forças nodais equivalentes  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$  do sistema externo de coordenadas, que equivale ao princípio da contragradência.

Já das equações (2.6.21) e (2.6.22), como mencionado acima e ressaltado novamente, tem-se que  $\mathbf{K}$  é uma matriz de rigidez, que realiza uma

transformação linear dos deslocamentos nodais  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  em forças nodais equivalentes  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ :

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) = \mathbf{K}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (2.6.25)$$

## 2.7. Análise Geral de Problemas Dependentes do Tempo no Domínio da Frequência

Nesta seção faz-se a análise de problema sem amortecimento. Uma abordagem generalizada para problemas com amortecimento viscoso é feita em Dumont (2005a).

### 2.7.1. Mudança do Domínio do Tempo para o Domínio da Frequência

Com o objetivo de se chegar a uma formulação no domínio da frequência a partir dos desenvolvimentos gerais feitos nos itens anteriores, supõe-se que as funções de tensões  $\sigma_{ij}^*$ , equação (2.6.8), e de deslocamentos  $u_i^*$ , equação (2.6.9), no domínio  $\Omega$ , assim como as funções de deslocamentos  $\tilde{u}_i$  no contorno  $\Gamma$ , equação (2.6.10), podem ser expressas por uma separação de variáveis de espaço e de tempo, para uma dada frequência circular de vibração  $\omega$ :

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^*(\omega) p_m^*(\omega) \tau(t, \omega) \quad \text{em } \Omega \quad (2.7.1)$$

$$u_i^* = u_{im}^*(\omega) p_m^*(\omega) \tau(t, \omega) \quad \text{em } \Omega \quad (2.7.2)$$

$$\tilde{u}_i = u_{im} d_m(\omega) \tau(t, \omega) \quad \text{em } \Gamma \quad (2.7.3)$$

Sendo  $\tau(t, \omega)$  definido de tal maneira que,

$$\frac{\partial^2 \tau(t, \omega)}{\partial t^2} = -\omega^2 \tau(t, \omega) \quad (2.7.4)$$

De acordo com o que é exposto na Seção 2.3, as equações (2.7.1) e (2.7.2) são expressões de soluções fundamentais e portanto satisfazem a equação (2.3.7) para uma dada frequência circular  $\omega$ , ou seja,

$$\sigma_{ij,j}^*(\omega) + \omega^2 \rho u_i^*(\omega) = 0 \quad (2.7.5)$$

Portanto, de acordo com as equações (2.7.1)-(2.7.3), as equações (2.6.19) e (2.6.20) ficam, para uma dada frequência circular  $\omega$ ,

$$\mathbf{F}(\omega) \mathbf{p}^*(\omega) - \mathbf{H}(\omega) (\mathbf{d}(\omega) - \mathbf{d}^b(\omega)) = 0 \quad (2.7.6)$$

$$\mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{p}^*(\omega) - (\mathbf{p}(\omega) - \mathbf{p}^b(\omega)) = 0 \quad (2.7.7)$$

em que  $\mathbf{p}^b(\omega)$ ,  $\mathbf{p}(\omega)$  e  $\mathbf{d}^b(\omega)$  são, de acordo com as equações (2.6.16), (2.6.17) e (2.6.18), os componentes harmônicos dos vetores gerais dependentes do tempo  $\mathbf{p}^b$ ,  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{d}^b$ , respectivamente. As matrizes  $\mathbf{H}(\omega)$  e  $\mathbf{F}(\omega)$ , nas equações (2.7.6) e (2.7.7), são matrizes não-singulares, e por isso a obtenção de  $\mathbf{K}$ , de acordo com a equação (2.6.22), é direta.

As soluções da equação (2.7.5) podem ser expressas adequadamente como

$$\sigma_{ijm}^*(\omega) \leftarrow \sigma_{ijm}^*(0) + \sigma_{ijm}^*(\omega) \quad (2.7.8)$$

$$u_{im}^*(\omega) \leftarrow u_{im}^*(0) + u_{im}^*(\omega) \quad (2.7.9)$$

em que  $\sigma_{ijm}^*(0)$  e  $u_{im}^*(0)$  correspondem à solução fundamental da parte estática do problema.

Como conseqüência de escrever as soluções fundamentais na forma das equações (2.7.8) e (2.7.9), as matrizes  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{H}$ , das equações (2.7.6) e (2.7.7), podem ser formalmente representadas como

$$\mathbf{F}(\omega) \leftarrow \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_\omega \quad (2.7.10)$$

$$\mathbf{H}(\omega) \leftarrow \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\omega \quad (2.7.11)$$

em que os termos  $\mathbf{F}_0$  e  $\mathbf{H}_0$  correspondem às matrizes da formulação estática.

### 2.7.2. Propriedades Espectrais das Matrizes $\mathbf{H}_0$ e $\mathbf{F}_0$

As matrizes  $\mathbf{F}_0$  e  $\mathbf{H}_0$  que aparecem nas equações (2.7.10) e (2.7.11) possuem certas propriedades espectrais que merecem alguns comentários.

Se os deslocamentos  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  corresponderem a movimento de corpo rígido, a parte independente do tempo do vetor de forças nodais equivalentes  $(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0^b)$  deve ser nula, o que em termos de trabalhos virtuais significa que

$$\mathbf{W}^T (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0^b) = 0 \quad (2.7.12)$$

em que  $\mathbf{W}$  é uma matriz cujas colunas formam uma base ortonormal do espaço dos deslocamentos de corpo rígido, tal que

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I} \quad (2.7.13)$$

onde,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. A equação (2.7.13) implica

$$\mathbf{W} \mathbf{W}^T = \text{matriz idempotente única} \quad (2.7.14)$$

No caso de um domínio limitado, deslocamentos de corpo rígido, representados pela matriz ortogonal  $\mathbf{W}$ , não podem ser transformados em deslocamentos nodais equivalentes  $\mathbf{d}^*$  pela parte estática da matriz cinemática,  $\mathbf{H}_0$ , conseqüência da condição de ortogonalidade de  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$  ao espaço de deslocamentos de corpo rígido dada pela equação (2.7.12), ou seja,

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (2.7.15)$$



o que significa que há em geral uma matriz  $\mathbf{V}$  cujas colunas formam uma base ortogonal do espaço de forças  $\mathbf{p}^*$  que correspondem a forças nodais equivalentes  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$  desequilibradas, referentes a deslocamentos de corpo rígido, ou seja,

$$\mathbf{H}_0^T \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (2.7.16)$$

de tal modo que

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (2.7.17)$$

De fato, a matriz  $\mathbf{V}$  é um conjunto de autovetores correspondentes aos autovalores nulos da matriz  $\mathbf{H}_0^T$ . Porém, a obtenção de  $\mathbf{V}$  através deste procedimento pode encontrar problemas de mau condicionamento. Uma solução para este problema é considerar que, se ambos os conjuntos de deslocamentos  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  e  $\mathbf{d}^*$  são fisicamente os mesmos graus de liberdade, então as bases  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  são linearmente dependentes. Como consequência, há uma base não-normalizada  $\tilde{\mathbf{V}}$  cuja normalização produz a base ortonormal  $\mathbf{V}$ , que pode ser projetada em  $\mathbf{W}$ , na forma

$$\mathbf{W}\mathbf{W}^T \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W} \quad (2.7.18)$$

Então,  $\tilde{\mathbf{V}}$  pode ser obtida como solução do sistema

$$(\mathbf{H}^T + \mathbf{W}\mathbf{W}^T) \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W} \quad (2.7.19)$$

Como a matriz  $(\mathbf{H}^T + \mathbf{W}\mathbf{W}^T)$  é não singular por construção,  $\tilde{\mathbf{V}}$  tem solução única na equação acima. Conseqüentemente, a normalização da matriz  $\tilde{\mathbf{V}}$  leva à base  $\mathbf{V}$  que satisfaz a equação (2.7.16).

Em consequência da equação (2.7.16), e de acordo com a equação (2.6.23), conclui-se que

$$\mathbf{F}_0 \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (2.7.20)$$

o que, em outras palavras, significa que a matriz de flexibilidade  $\mathbf{F}_0$  é singular, e o espaço nulo desta matriz é o mesmo da matriz  $\mathbf{H}_0^T$ .

As propriedades espectrais dadas pelas equações (2.7.15), (2.7.16) e (2.7.20) são importantes para a correta interpretação da inversa  $\mathbf{F}_0^{-1}$  necessária na expressão da matriz de rigidez, equação (2.6.22), no caso de problemas estáticos ou quase-harmônicos.

### 2.7.3. Desenvolvimento das Matrizes $\mathbf{F}$ e $\mathbf{H}$ em Séries de Frequência

Retornando, após o breve adendo sobre propriedades espectrais das matrizes  $\mathbf{F}_0$  e  $\mathbf{H}_0$ , ao problema de domínio da frequência, nota-se pelas equações (2.7.6) e (2.7.7), que as variáveis envolvidas no problema são funções de uma dada frequência  $\omega$ . Porém, ao invés de se formular o problema para uma dada frequência, pode-se expressar as soluções fundamentais, equações (2.7.1) e (2.7.2), como uma série de potência de frequências:

$$\sigma_{jk}^* = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \sigma_{ijks}^* p_s^* = \left( \sigma_{0jks}^* + \omega^2 \sigma_{1jks}^* + \omega^4 \sigma_{2jks}^* + \cdots + \omega^{2n} \sigma_{njks}^* \right) p_s^* \quad (2.7.21)$$

$$u_j^* = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} u_{ijs}^* p_s^* = \left( u_{0js}^* + \omega^2 u_{1js}^* + \omega^4 u_{2js}^* + \cdots + \omega^{2n} u_{njs}^* \right) p_s^* \quad (2.7.22)$$

Como conseqüência, as matrizes  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{H}$ , definidas nas equações (2.6.13) e (2.6.14), assim como  $\mathbf{K}$ , definida na equação (2.6.22), também se tornam séries de potência de frequências, truncadas com um número arbitrário  $n$  de termos:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{F}_i \quad (2.7.23)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{H}_i \quad (2.7.24)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{K}_i = \mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n \omega^{2i} \mathbf{M}_i \quad (2.7.25)$$

onde  $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_0$ , para  $i = 0$ , é a matriz de rigidez estática da formulação de elementos discretos e  $\mathbf{K}_i = -\mathbf{M}_i$ , para  $i > 0$ , são matrizes aqui denominadas matrizes de massa generalizadas  $\mathbf{M}_i$  (Dumont e Oliveira, 2001), que constituem na verdade uma mistura de matrizes de massa e rigidez. A única exceção é a matriz  $\mathbf{M}_1$ , que corresponde à matriz de massa obtida na formulação convencional, a qual é truncada depois de  $\omega^2$ .

A obtenção da matriz  $\mathbf{K}$  como uma série de potência de frequência passa pela inversão da matriz  $\mathbf{F}$  dada também como uma série de potência de frequência, conforme a equação (2.7.23). Na Seção 2.10 é mostrado como é feita tal inversão para o caso particular de matrizes simétricas positivas semi-definidas (Dumont e Oliveira, 2001). Para casos gerais de inversão de matrizes em série de potência ver (Dumont, 2005).

Compondo-se o vetor dependente do tempo,  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ , de deslocamentos nodais, o qual se deseja encontrar, como a série truncada de  $m$  termos

$$\mathbf{d} - \mathbf{d}^b \equiv \mathbf{d}(t) - \mathbf{d}^b(t) = \sum_{j=1}^m (d_j - d_j^b) \tau(t, \omega_j) \quad (2.7.26)$$

torna-se possível modelar o comportamento de estruturas sem amortecimento, de acordo com a equação (2.6.25), como:

$$\sum_{j=1}^m \left( \mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n \omega_j^{2i} \mathbf{M}_i \right) (\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_j^b) \tau(t, \omega_j) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t) \quad (2.7.27)$$

que para valores de  $n$  igual a 3, por exemplo, resulta em,

$$\sum_{j=1}^m \left( \mathbf{K}_0 - \omega_j^2 \mathbf{M}_1 - \omega_j^4 \mathbf{M}_2 - \omega_j^6 \mathbf{M}_3 \right) (\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_j^b) \tau(t, \omega_j) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t) \quad (2.7.27a)$$

Para elementos de treliça e viga sem amortecimento, Przemieniecki (1968) escreveu a matriz de rigidez efetiva  $\mathbf{K}$  da equação (2.7.25) na forma

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_1 - \omega^4 (\mathbf{M}_2 - \mathbf{K}_2) - \omega^6 (\mathbf{M}_3 - \mathbf{K}_3) + O(\omega^8) \quad (2.7.28)$$

mas alguns autores Voss (1987) também obtiveram

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - \omega^2 (\mathbf{M}_1 - \mathbf{K}_1) - \omega^4 (\mathbf{M}_2 - \mathbf{K}_2) - \omega^6 (\mathbf{M}_3 - \mathbf{K}_3) + O(\omega^8) \quad (2.7.29)$$

com uma matriz coeficiente  $\mathbf{K}_2$  multiplicando  $\omega^2$ , o que não está correto, já que este termo é nulo em qualquer formulação consistente de elementos finitos, o que está coerente com os desenvolvimentos dos livros clássicos sobre dinâmica que mantém os termos até  $\omega^2$ :  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_1 + O(\omega^4)$ .

Na equação (2.7.27) os vetores de deslocamentos  $(\mathbf{d}_j - \mathbf{d}_j^b)$  são as incógnitas do problema, a serem determinadas para as forças de domínio e contorno, além de velocidades e deslocamentos nodais iniciais. O número  $n$  de matrizes relacionadas à frequência é arbitrário.

A vantagem de tal formulação baseada em série de frequências é que ela proporciona uma melhor satisfação da equação diferencial de equilíbrio dinâmico de tensões, equação (2.2.1), em pontos internos do corpo elástico (Dumont e Oliveira, 1997), o que, para uma mesma discretização do domínio da estrutura, comparada ao método de elementos finitos convencional, fornece resultados com maior precisão numérica.

De acordo com a definição de  $\tau(t, \omega)$  na equação (2.7.4), a equação (2.7.27) pode ser escrita alternativamente como,

$$\left( \mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{M}_i \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t) \quad (2.7.30)$$

a qual é um sistema acoplado de equações diferenciais de alta ordem de tempo que faz uso de matrizes obtidas na formulação de frequência.

## 2.8. Solução para o Problema de Autovalor Não-linear

O problema de autovalores não-linear relacionado à equação (2.7.30) tem a forma

$$\mathbf{K}_0 \Phi - \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i \Phi \Omega^{2i} = \mathbf{0} \quad (2.8.1)$$

onde  $\Omega^2$  é uma matriz diagonal com tantos autovalores  $\omega^2$  quanto o número de graus de liberdade da estrutura e  $\Phi$  é uma matriz cujas colunas são os autovetores correspondentes. Este problema de autovalor não-linear é de difícil tratamento, visto que a convergência numérica não pode ser facilmente assegurada e que erros de arredondamento ocorrem inevitavelmente.

Uma maneira de se tratar este problema adequadamente consiste em transformar a equação (2.8.1) em um problema de autovalor linear, através da utilização de matrizes aumentadas, com o custo de se ter aumentado de  $n$  vezes o número de incógnitas do problema.

Assim sendo, o problema de autovalor linear aumentado, relacionado à equação (2.7.30) e correspondente à equação (2.8.1), é

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \cdots & \Phi_{0,n-1} \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n-1,0} & \Phi_{n-1,1} & \cdots & \Phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \ddots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \cdots & \Phi_{0,n-1} \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n-1,0} & \Phi_{n-1,1} & \cdots & \Phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_0^2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_1^2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Omega_{n-1}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.8.2)$$

em que

$$\Phi_{00} \equiv \Phi, \quad \Omega_0^2 \equiv \Omega^2 \quad \text{e} \quad \Phi_{ij} = \Phi_{0j} \Omega_j^{2i} \quad i=1, \dots, n-1, \quad j=0, \dots, n-1. \quad (2.8.3)$$

Os autovalores e autovetores aumentados que aparecem nas equações (2.8.2) e (2.8.3) são em geral complexos. Entretanto, apenas o cálculo dos subconjuntos reais  $\Omega$  e  $\Phi$  é requerido em uma aplicação prática.

Sendo o problema de autovalor aumentado expresso pela equação (2.8.2) linear em  $\Omega_j^2$ , os autovetores correspondentes constituem uma base ortogonal, embora ainda não ortonormal. O critério de normalização para estes autovetores é, classicamente,

$$\begin{bmatrix} \Phi_{00}^T & \Phi_{10}^T & \cdots & \Phi_{n-1,0}^T \\ \Phi_{01}^T & \Phi_{11}^T & \cdots & \Phi_{n-1,1}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{0,n-1}^T & \Phi_{1,n-1}^T & \cdots & \Phi_{n-1,n-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \ddots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \cdots & \Phi_{0,n-1} \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n-1,0} & \Phi_{n-1,1} & \cdots & \Phi_{n-1,n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (2.8.4)$$

A avaliação da submatriz (0,0) do sistema acima, tendo em conta a equação (2.8.3), permite que se perceba que  $\Phi_{00} \equiv \Phi$  será uma base ortonormal apenas se

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \Omega^{2j-2i} \Phi^T \mathbf{M}_j \Phi \Omega^{2i-2} = \mathbf{I} \quad (2.8.5)$$

A expressão acima, para  $n$  igual a 3, vale

$$\begin{aligned} & \Phi^T \mathbf{M}_1 \Phi + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_2 \Phi + \Omega^4 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi + \\ & \Phi^T \mathbf{M}_2 \Phi \Omega^2 + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^2 + \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^4 = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2.8.5a)$$

ou, para um par de autovalor  $\omega_j^2$  e autovetor  $\Phi_j$ ,

$$\Phi_j^T (\mathbf{M}_1 + 2\omega_j^2 \mathbf{M}_2 + 3\omega_j^4 \mathbf{M}_3) \Phi_j = 1 \quad (2.8.5b)$$

Portanto, deve-se apenas trabalhar com  $\Phi$  de forma que a equação (2.8.5) seja atendida. Os autovetores  $\Phi_{00} \equiv \Phi$ , quando obtidos através da equação (2.8.2), ainda não estão normalizados de forma a atender à equação (2.8.5). Para isso relaciona-se o autovetor não normalizado,  $\tilde{\Phi}$ , com o normalizado por meio de uma matriz diagonal  $\Lambda$ ,

$$\Phi = \tilde{\Phi} \Lambda \quad (2.8.6)$$

que pode ser encontrada através da substituição da equação (2.8.6) em (2.8.5), resultando

$$\Lambda = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \Omega^{2j-2i} \tilde{\Phi}^T \mathbf{M}_j \tilde{\Phi} \Omega^{2i-2} \right)^{-1/2} \quad (2.8.7)$$

A expressão acima, para  $n = 3$  e um par de autovalor  $\omega_j^2$  e autovetor  $\Phi_j$ , vale

$$\lambda = \left( \tilde{\Phi}_j^T (\mathbf{M}_1 + 2\omega_j^2 \mathbf{M}_2 + 3\omega_j^4 \mathbf{M}_3) \tilde{\Phi}_j \right)^{-1/2} \quad (2.8.7a)$$

Além disso, pode-se expressar que, desde que a equação (2.8.4) assegure a normalização dos vetores, então, da equação (2.8.2),

$$\begin{pmatrix} \Phi_{00}^T & \Phi_{10}^T & \cdots & \Phi_{n-1,0}^T \\ \Phi_{01}^T & \Phi_{11}^T & \cdots & \Phi_{n-1,1}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{0,n-1}^T & \Phi_{1,n-1}^T & \cdots & \Phi_{n-1,n-1}^T \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.8.8)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_{00} & \Phi_{01} & \cdots & \Phi_{0,n-1} \\ \Phi_{10} & \Phi_{11} & \cdots & \Phi_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{n-1,0} & \Phi_{n-1,1} & \cdots & \Phi_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_0^2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_1^2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \Omega_{n-1}^2 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista a equação (2.8.3), pode-se calcular a submatriz (0,0) do sistema acima, a qual, juntamente com a equação (2.8.5), constrói a partir da equação (2.8.2) a expressão

$$\left( \Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \Omega^{2i} \Phi^T \mathbf{M}_{j+i} \Phi \Omega^{2j} \right) - \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \Omega^{2j} \Phi^T \mathbf{M}_j \Phi \Omega^{2i-2} \right) \Omega^2 = 0 \quad (2.8.8)$$

ou, como consequência de os autovetores  $\Phi$  serem ortonormais,

$$\left( \Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \Omega^{2i} \Phi^T \mathbf{M}_{j+i} \Phi \Omega^{2j} \right) = \Omega^2 \quad (2.8.9)$$

A expressão da equação acima, para  $n$  igual a 3, vale

$$\left( \Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_2 \Phi \Omega^2 + \Omega^2 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^4 + \Omega^4 \Phi^T \mathbf{M}_3 \Phi \Omega^2 \right) = \Omega^2 \quad (2.8.9a)$$

ou, para um par de autovalor  $\omega_j^2$  e autovetor  $\Phi_j$ ,

$$\Phi_j^T (\mathbf{K}_0 + \omega_j^4 \mathbf{M}_2 + 2\omega_j^6 \mathbf{M}_3) \Phi_j = \omega_j^2 \quad (2.8.9b)$$

## 2.9. Uso de um Processo de Superposição Modal

### 2.9.1. Processo de Superposição Modal

Apesar de toda a complexidade envolvida na solução da equação (2.7.30), reescrita abaixo,

$$\left( \mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{M}_i \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t) \quad (2.7.30)$$

é possível utilizar-se de um processo de superposição modal na solução deste sistema de equações diferenciais parciais de alta ordem.

Independentemente da suposição feita sobre a forma do vetor de deslocamentos dependentes do tempo  $(\mathbf{d}(t) - \mathbf{d}^b(t))$ , pode-se introduzir um conjunto de deslocamentos auxiliares  $\mathbf{d}_{(i)}(t)$ , em que o subscrito entre parênteses indica que eles constituem um conjunto, tal que

$$\mathbf{d}_{(i)} = (-1)^i \frac{\partial^{2i}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)}{\partial t^{2i}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.9.1)$$

Portanto, de acordo com a equação (2.9.1), a equação (2.7.30) pode ser reescrita como um sistema aumentado,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{d}_{(1)} \\ \mathbf{d}_{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{(n-1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \ddots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}} - \ddot{\mathbf{d}}^b \\ \ddot{\mathbf{d}}_{(1)} \\ \ddot{\mathbf{d}}_{(2)} \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{d}}_{(n-1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.9.2)$$

em que os dois pontos sobre os elementos do vetor que multiplica a segunda matriz aumentada representa a segunda derivada em relação ao tempo.

Então, partindo-se da equação (2.9.1), pode-se aproximar os deslocamentos dependentes do tempo  $(\mathbf{d}(t) - \mathbf{d}^b(t))$  e  $\mathbf{d}_{(i)}(t)$  como uma soma finita de contribuições dos vetores aumentados (normalizados)  $\Phi_{i0}$ , introduzidos como a primeira coluna da matriz de autovetores aumentados na equação (2.9.2), multiplicados por um conjunto de vetores de amplitudes  $\eta_j \equiv \eta_j(t)$ , os quais serão as novas incógnitas do problema:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{d}_{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{(n-1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi \Omega^2 \\ \vdots \\ \Phi \Omega^{2n-2} \end{bmatrix} (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^b) \quad (2.9.3)$$

De acordo com a equação (2.9.3), a equação (2.9.2) se torna

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi \Omega^2 \\ \vdots \\ \Phi \Omega^{2n-2} \end{bmatrix} (\eta - \eta^b)_+ \quad (2.9.4)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{0} & \ddots & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi \Omega^2 \\ \vdots \\ \Phi \Omega^{2n-2} \end{bmatrix} (\ddot{\eta} - \ddot{\eta}^b) = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

Finalmente, pré-multiplicando-se esta equação por  $\Phi_{i_0}^T$ , levando-se em conta a equação (2.9.3) e considerando que os autovetores são normalizados de acordo com a equação (2.9.4), tal que a equação (2.8.8) seja satisfeita, chega-se a uma expressão muito simples para a submatriz (0,0) do sistema aumentado de equações:

$$\Omega^2 (\eta - \eta^b)_+ \ddot{\eta} - \ddot{\eta}^b = \Phi^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) \quad (2.9.5)$$

que equivale à equação (2.7.30). Porém, a equação (2.9.5) é um sistema desacoplado de equações diferenciais parciais de segunda ordem, com tantas equações diferenciais quanto o número de autovetores de interesse a serem considerados e que pode ser facilmente integrada por meio de métodos de integração padrões.

Esta equação é equivalente a

$$\Omega^2 \eta + \ddot{\eta} = \Phi^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) + \Phi^T \left( \mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{M}_i \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) \mathbf{d}^b \quad (2.9.6)$$

A expressão da equação (2.9.5), para problemas que não consideram as forças de domínio, é

$$\Omega^2 \eta + \ddot{\eta} = \Phi^T \mathbf{p} \quad (2.9.7)$$

A expressão equivalente à equação (2.9.5) para problemas de potencial é

$$\Omega^2 (\eta - \eta^b)_+ \dot{\eta} - \dot{\eta}^b = \Phi^T (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) \quad (2.9.8)$$

um sistema desacoplado de equações diferenciais parciais de primeira ordem, análogo ao sistema da equação (2.9.5).



## 2.9.2. Consideração de Velocidades e Deslocamentos Iniciais

Para condições iniciais não-homogêneas, é necessário expressar  $\boldsymbol{\eta}(t = t_0)$  e  $\dot{\boldsymbol{\eta}}(t = t_0)$  como funções dos deslocamentos  $\mathbf{d}(t = t_0)$  e velocidades  $\dot{\mathbf{d}}(t = t_0)$  nodais iniciais. Com esse intuito, tem-se que solucionar o sistema geralmente retangular da equação (2.9.3) em termos das incógnitas  $(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^b)$ . O desenvolvimento a seguir está em (Dumont e Oliveira, 2001).

Pré-multiplicando-se ambos os lados da equação (2.9.3) pela matriz de rigidez aumentada da equação (2.9.2) e, subseqüentemente, pré-multiplicando-se a equação resultante por  $\boldsymbol{\Omega}_{t_0}^T$ , obtém-se

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T & \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\Phi}^T & \dots & \boldsymbol{\Omega}^{2n-2} \boldsymbol{\Phi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{d}_{(1)} \\ \mathbf{d}_{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{(n-1)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega}^2 (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^b) \quad (2.9.9)$$

já que os autovalores satisfazem a equação (2.8.9).

Desprezando-se os efeitos de forças de corpo, por motivo de conveniência, porém sem perda de generalidade, ler-se-á na equação acima o vetor de deslocamentos  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  como  $\mathbf{d}$  e o vetor de amplitudes  $(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^b)$  como  $\boldsymbol{\eta}$ .

Então, em continuação fazem-se os produtos matriciais, considerando a equação (2.9.1), obtendo-se,

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\Omega}^{-2} \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d} + \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{\Omega}^{2i-2} \boldsymbol{\Phi}^T \sum_{j=1}^{n-i} (-1)^j \mathbf{M}_{j+i} \frac{\partial^{2j} \mathbf{d}}{\partial t^{2j}} \quad (2.9.10)$$

Entretanto, esta equação só é aplicável se  $\mathbf{d}$  e todas as suas  $2n-1$  derivadas forem conhecidas no início do intervalo. Como em geral apenas os deslocamentos e as velocidades são conhecidas, deve-se obter uma solução alternativa.

Substituindo-se os valores de  $\mathbf{d}_{(i)}(t)$ , para  $i > 0$ , na equação (2.9.9), por suas expressões dadas pela equação (2.9.3), obtém-se

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^T & \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\Phi}^T & \dots & \boldsymbol{\Omega}^{2n-2} \boldsymbol{\Phi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \dots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\eta} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^{2n-2} \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{\eta} \quad (2.9.11)$$

Então, executando todas as operações matriciais indicadas pela equação (2.9.11), resulta que

$$[\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi] \boldsymbol{\eta} = \Phi^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d} \quad (2.9.12)$$

já que, de acordo com a equação (2.8.9), as séries de produtos de matrizes multiplicando  $\boldsymbol{\eta}$  simplificam para o termo em colchetes. Por fim, pode-se concluir sem suposições a mais que, se a equação (2.9.3) é válida, então

$$\boldsymbol{\eta} = [\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi]^{-1} \Phi^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d} \quad (2.9.13)$$

também é válida e, conseqüentemente,

$$\boldsymbol{\eta}(t = t_0) = [\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi]^{-1} \Phi^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d}(t = t_0) \quad (2.9.14)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(t = t_0) = [\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi]^{-1} \Phi^T \mathbf{K}_0 \dot{\mathbf{d}}(t = t_0) \quad (2.9.15)$$

que são as relações desejadas para expressar as condições iniciais nodais de um problema transiente, para  $\Phi$  e  $\Omega$  relacionados aos modos e freqüências de deformação elástica pura, respectivamente. Por outro lado, para os modos  $\Phi_{rig}$  e freqüências  $\Omega_{rig} \equiv 0$  relacionados aos deslocamentos de corpo rígido, tem-se:

$$\boldsymbol{\eta}_{rig} = \Phi_{rig}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{d} \quad (2.9.16)$$

O conjunto de equações diferenciais de tempo de segunda ordem desacoplado, equação (2.9.5), junto com as equações (2.9.13) e (2.9.16) para a consideração de deslocamentos iniciais, é a transformação da equação (2.7.30) para a solução de uma ampla gama de problemas dependentes do tempo por meio de uma superposição nodal e com base na formulação em freqüência.

Note que se poderia ter escrito a seguinte seqüência de equações:

$$\mathbf{d} = \Phi \boldsymbol{\eta} \quad (2.9.17)$$

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{d} = \mathbf{K}_0 \Phi \boldsymbol{\eta} \quad (2.9.18)$$

$$\Phi^T \mathbf{K}_0 \mathbf{d} = \Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi \boldsymbol{\eta} \quad (2.9.19)$$

chegando assim à equação (2.9.13) por meio de um processo muito simples. Entretanto, pré-multiplicar a segunda das equações acima pela matriz  $\Phi^T$ , a qual pode em geral ser retangular (se apenas alguns modos de deformação são de interesse), requer uma justificativa, a qual apenas ocorre no contexto do procedimento que terminou de ser traçado: o uso das propriedades ortogonais expressas pela equação (2.8.9). Além disso, note que a inversão do produto de matrizes simétrico indicado na equação (2.9.13) é inevitável no contexto dessa formulação não-linear dependente da freqüência.

### 2.9.3. Consideração de Deslocamentos Nodais Forçados

Quando parte dos deslocamentos nodais são funções de tempo conhecidas, procede-se exatamente como na análise dinâmica convencional (Przemieniecki, 1968) e (Chaves, 2003), reescrevendo-se a equação (2.7.30) em termos de submatrizes,

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^{pp} & \mathbf{K}_0^{pf} \\ \mathbf{K}_0^{fp} & \mathbf{K}_0^{ff} \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^n (-1)^i \begin{bmatrix} \mathbf{M}_i^{pp} & \mathbf{M}_i^{pf} \\ \mathbf{M}_i^{fp} & \mathbf{M}_i^{ff} \end{bmatrix} \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) \begin{Bmatrix} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)^p \\ (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)^f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)^p \\ (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)^f \end{Bmatrix} \quad (2.9.20)$$

em que os subscritos  $p$  e  $f$  referem-se a subconjuntos de deslocamentos nodais prescritos e livres, respectivamente. O segundo conjunto de submatrizes da equação acima pode ser dado explicitamente como:

$$\left( \mathbf{K}_0^{ff} - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{M}_i^{ff} \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)^f = (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)^f - \left( \mathbf{K}_0^{fp} - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{M}_i^{fp} \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right) (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)^p \quad (2.9.21)$$

Desde que todas as quantidades do lado direito da equação (2.9.21) são funções de tempo conhecidas, esta equação é formalmente equivalente à equação (2.7.30), para o propósito do processo de superposição modal usado para se chegar à equação (2.9.5). Uma vez que os deslocamentos  $\mathbf{d}^f$  são obtidos, depois da transformação da equação (2.9.21) em um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem desacoplado, as forças de reação dependentes do tempo relacionadas aos nós prescritos podem ser calculadas usando-se o primeiro conjunto da equação (2.9.20) de submatrizes. Uma palavra de cautela é necessária no que concerne à implementação numérica da equação (2.9.21) (Chaves, 2003), já que as altas ordens de derivação no lado direito da equação (2.9.21) podem conduzir a resultados não confiáveis se  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)^p$  não é uma expressão fechada de tempo, mas ao invés, uma aproximação em série.

### 2.9.4. Avaliação dos Resultados em Pontos Internos

Em formulações harmônicas, os parâmetros de força  $\mathbf{p}^*(\omega)$  são obtidos, conforme a equação (2.7.6), por,

$$\mathbf{p}^*(\omega) = \mathbf{S}(\omega)(\mathbf{d}(\omega) - \mathbf{d}^b(\omega)) \quad (2.9.22)$$

onde  $\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{F}^{-1}(\omega)\mathbf{H}(\omega)$ . Para as séries de potências de frequências introduzidas na subseção 2.7.3, de acordo com as equações (2.7.21)-(2.7.25), a equação acima é trocada por,

$$\mathbf{p}^*(\omega) \approx \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{S}_i (\mathbf{d}(\omega) - \mathbf{d}^b(\omega)) \quad (2.9.23)$$

com

$$\sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{S}_i = \left( \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{F}_i \right)^{-1} \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{H}_i \quad (2.9.24)$$

De acordo com a equação (2.7.22), os deslocamentos em pontos internos podem ser expressos como,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n \omega_j^{2i} u_i^* \mathbf{p}^* \equiv \sum_{i=0}^n u_i^* \boldsymbol{\Omega}^{2i} \mathbf{p}^* \quad (2.9.25)$$

Em que, substituindo-se  $\mathbf{p}^*$  por sua expressão dada pela equação (2.9.23) e considerando-se a expressão de  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  dada pela equação (2.9.3), tem-se:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \mathbf{u}_j^* \mathbf{S}_{i-j} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^{2i} (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}^b) \quad (2.9.26)$$

que para  $n = 3$ , fornece:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = & \left[ \mathbf{u}_0^* \mathbf{S}_0 \boldsymbol{\Phi} + (\mathbf{u}_0^* \mathbf{S}_1 + \mathbf{u}_1^* \mathbf{S}_0) \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^2 + (\mathbf{u}_0^* \mathbf{S}_2 + \mathbf{u}_1^* \mathbf{S}_1 + \mathbf{u}_2^* \mathbf{S}_0) \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^4 + \right. \\ & \left. + (\mathbf{u}_0^* \mathbf{S}_3 + \mathbf{u}_1^* \mathbf{S}_2 + \mathbf{u}_2^* \mathbf{S}_1 + \mathbf{u}_3^* \mathbf{S}_0) \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega}^6 \right] \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (2.9.26a)$$

Para a avaliação adequada da expressão acima, para o caso particular de problemas estáticos ou de regime permanente (para os quais se deve considerar a parcela relativa a deslocamentos de corpo rígido, que aparece na equação (2.3.8)), o leitor encontrará mais detalhes no Apêndice B.

Particularmente no que concerne à inversão de matrizes em série de frequência, o leitor terá mais detalhes, de forma completamente geral, em Dumont (2005). No item a seguir é feita uma particularização do problema de inversão de matrizes em séries de frequência para os casos de matrizes simétricas, positivas semidefinidas.

## 2.10. Obtenção da Matriz de Rigidez como uma Série de Freqüências

O caminho para se obter a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  como uma série de potência de freqüência (Dumont e Oliveira, 2001), de acordo com a equação (2.7.25), passa pela inversão da matriz de flexibilidade  $\mathbf{F}$ , como indicado na equação (2.6.22). Esta inversão pode se dar de duas formas, conforme a natureza dos limites do domínio, que podem ser: domínio infinito e domínio finito.

No caso de domínio infinito, a matriz  $\mathbf{F}_0$  correspondente à parte estática da formulação em freqüência, como indicado na equação (2.7.10), é não-singular tornando assim o processo de obtenção da inversa de  $\mathbf{F}$  simples e direto, como é mostrado abaixo.

$$\mathbf{X} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{X}_i \quad (2.10.1)$$

em que

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{F}_0^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_i = -\mathbf{X}_0 \sum_{j=1}^i \mathbf{F}_i \mathbf{X}_{i-j}, \quad i = 1 \dots n \quad (2.10.2)$$

é a inversa de  $\mathbf{F}$ , tal que

$$\mathbf{X}\mathbf{F} = \mathbf{F}\mathbf{X} = \mathbf{I} + O(\omega^{2n+2}) \quad (2.10.3)$$

(As equações (2.10.1)-(2.10.3) aplicam-se de maneira análoga para a inversão de uma matriz de rigidez dependente da freqüência).

Já para domínios finitos, a matriz  $\mathbf{F}_0$  é singular, como indicado pela equação (2.7.20), e por isso o cálculo da matriz inversa de  $\mathbf{F}$  que satisfaça a equação (2.10.3) deixa de ser feito da forma simples e direta como anteriormente e requer o uso avançado da teoria de matrizes inversas generalizadas (Ben-Israel e Greville, 1980; Zielke, 1970; Schulz, 1933, Dumont, 2005).

O processo de inversão de  $\mathbf{F}$  para o caso de domínios finitos se dá da seguinte forma: a matriz  $\mathbf{X}$ , da equação (2.10.1), passa a ser expressa como,

$$\mathbf{X} = \sum_{i=-1}^n \omega^{2i} \mathbf{X}_i \quad (2.10.4)$$

onde se percebe o aparecimento de um termo adicional,  $\omega^{-2} \mathbf{X}_{-1}$ , em que

$$\mathbf{X}_{-1} = \mathbf{V} \left( \mathbf{V}^T \mathbf{F}_1 \mathbf{V} \right)^{-1} \mathbf{V}^T \quad (2.10.5)$$

A matriz  $\mathbf{F}_1$  que aparece na equação acima é não-singular, visto que ela é fisicamente relacionada à primeira matriz de massa do corpo elástico, mas poderia ser singular (Dumont, 2005). Introduzindo-se uma matriz auxiliar  $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}_1^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) \quad (2.10.6)$$

pode-se demonstrar que a matriz coeficiente  $\mathbf{X}_0$  da equação (2.10.4) é expressa como

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{Y}(\mathbf{Y}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{Y} + \mathbf{V}\mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{Y}^T - \mathbf{X}_{-1} \mathbf{F}_2 \mathbf{X}_{-1} \quad (2.10.7)$$

Quanto aos termos restantes, eles podem ser obtidos de maneira recorrente:

$$\mathbf{X}_i = -\mathbf{X}_0 \sum_{j=1}^{i+1} \mathbf{F}_j \mathbf{X}_{i-j} - \mathbf{X}_{-1} \sum_{j=1}^{i+1} \mathbf{F}_{j+1} \mathbf{X}_{i-j}, \quad i = 1 \dots n \quad (2.10.8)$$

Embora haja uma potência negativa da frequência na equação (2.10.4), o produto matricial

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \sum_{j=-1}^i \mathbf{X}_j \mathbf{H}_{i-j} \equiv \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{S}_i \quad (2.10.9)$$

requerido em ambas as expressões de  $\mathbf{p}^*$  na equação (2.6.12), como uma função de  $\mathbf{d}$ , e como um passo intermediário no cálculo da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , não contém o termo  $\omega^{-2} \mathbf{X}_{-1}$ , já que

$$\mathbf{H}_0^T \mathbf{X}_{-1} = \mathbf{0} \quad (2.10.10)$$

de acordo com as equações (2.7.16) e (2.10.5).

Portanto, finalmente, pode-se expressar a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  como a série de potência,

$$\mathbf{K} \equiv \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \sum_{j=0}^i \mathbf{H}_j^T \mathbf{S}_j \quad (2.10.11)$$

ou, conforme a equação (2.7.25),

$$\mathbf{K} = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \sum_{j=0}^i \mathbf{H}_j^T \mathbf{S}_j = \sum_{i=0}^n \omega^{2i} \mathbf{K}_i = \mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n \omega^{2i} \mathbf{M}_i \quad (2.10.12)$$

onde  $\mathbf{K}_i = -\mathbf{M}_i$  para  $i > 0$ .

O processo de obtenção da inversa da matriz  $\mathbf{F}_0$  para o cálculo da matriz de rigidez  $\mathbf{K}_0$  para o caso particular de problemas de elastostática é dado diretamente pela seguinte expressão:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T [\mathbf{F} + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1} \mathbf{H} \quad (2.10.13)$$

O Apêndice A no final deste trabalho mostra como é obtida a expressão dada pela equação (2.10.13). Uma apresentação geral do processo de inversão de matrizes em série de potência é feita em Dumont (2005).

### 3 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS NÃO-SINGULARES

Este Capítulo apresenta as soluções fundamentais não-singulares, também conhecidas como funções T completas que nada mais são do que soluções homogêneas regulares da equação diferencial do problema, aplicadas no presente trabalho a problemas no domínio da frequência.

O nome de funções T completas vem sendo usado em homenagem ao seu criador Trefftz. O termo *completas* tem a ver com um polinômio completo. Tais soluções são aqui apresentadas, tanto para o caso de problemas de potencial como para problemas de elasticidade, num contexto independente e mais geral do que se pode obter na literatura (Qin, 2003).

Inicialmente são abordadas as soluções fundamentais para os casos de problemas de potencial quase-harmônicos e harmônicos, Seção 3.1. Em seguida são apresentadas as soluções fundamentais para os casos estáticos e dinâmicos de elasticidade, este último no domínio da frequência, Seção 3.2. E finalmente, são abordados os casos de espaços nulos relacionados à parte estática das soluções fundamentais, Seção 3.3.

Neste trabalho interessam apenas as soluções fundamentais não-singulares, as quais passarão a ser chamadas a partir deste ponto apenas de soluções fundamentais. Os desenvolvimentos aqui feitos são fortemente influenciados pelas apostilas e notas de aulas do curso de Método Híbrido de Elementos de Contorno ministrado na PUC-Rio pelo professor Dumont. Uma exposição resumida do que será aqui apresentado pode ser encontrada em (Dumont e Prazeres, 2004, 2005).

#### 3.1. Problemas de Potencial

Nesta seção, diferentemente do que se fez na Seção 2.1, será priorizado o uso da notação indicial e todas as equações aqui utilizadas, mesmo aquelas já apresentadas na Seção 2.1, serão reescritas com uma nova numeração, com o intuito de facilitar o acompanhamento das deduções.

### 3.1.1. Problemas de Potencial Quase-harmônicos

A equação diferencial de equilíbrio para problemas de potencial quase-harmônicos (Zienkiewicz) é a equação de Poisson (para problemas com fonte interna) ou a equação de Laplace, como apresentado na Seção 2.1. Seja então a equação de Laplace, equação (2.1.14), reescrita abaixo em notação indicial:

$$u_{,ii} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.1.1)$$

A questão de se achar a solução fundamental da equação (3.1.1) envolve encontrar um campo potencial  $u_0^*$  que a satisfaça.

A função  $u_0^*$  pode ser expressa como

$$u_0^* = f(r)g(\theta) \equiv fg \quad (3.1.2)$$

para problema 2D, em coordenadas polares. Portanto, a equação (3.1.1) se expressa

$$f_{rr}g + \frac{1}{r}f_rg + \frac{1}{r^2}fg_{\theta\theta} = 0 \quad (3.1.3)$$

em que os subscritos denotam derivadas parciais. Esta equação pode ser subdivida em duas equações,

$$f_{rr} + \frac{1}{r}f_r - \frac{m^2}{r^2}f = 0 \quad (3.1.4)$$

$$g_{\theta\theta} = -m^2g \quad (3.1.5)$$

em que  $m$  é uma constante de separação, de valor qualquer, a princípio.

A solução geral da equação (3.1.5) é

$$g = C_1 \cos(m\theta) + C_2 \sin(m\theta) \quad (3.1.6)$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias.

Como se requer que

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= g(\pi) \\ g_{\theta}(-\pi) &= g_{\theta}(\pi) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

verifica-se que  $m$  tem que ser um número inteiro, positivo ou negativo.

A solução geral da equação (3.1.4) é uma combinação linear qualquer das funções  $r^m$  e  $r^{-m}$ . No entanto, como somente interessam soluções que resultem em polinômios, toma-se apenas a primeira das soluções, com o que se obtém a expressão de  $u_0^*$ , de acordo com a equação (3.1.2):

$$u_0^* = r^m (C_1 \cos(m\theta) + C_2 \sin(m\theta)) \quad (3.1.8)$$



A expressão correspondente em coordenadas cartesianas se obtém fazendo

$$x = r \cos(\theta) \text{ e } y = r \sin(\theta) \quad (3.1.9)$$

Para corresponder a soluções que devem ser não-singulares e únicas,  $m$  deve ser um inteiro positivo. Note que haverá apenas uma solução possível para  $m=0$  e duas soluções para cada valor subsequente de  $m$ , o que corresponde a  $2n+1$  soluções compreendidas por polinômios completos de grau  $n$  em coordenadas cartesianas.

Para ilustrar o que foi dito até então, o conjunto de tais termos polinomiais para  $n=3$  é dado abaixo para o vetor  $u_{0s}^*$ , em que  $s$  está relacionado ao grau de liberdade de  $p_s^*$ ,

$$\begin{aligned} u_{0s}^* &= \langle 1 \mid r \cos \theta \quad r \sin \theta \mid r^2 \cos 2\theta \quad r^2 \sin 2\theta \mid r^3 \cos 3\theta \quad r^3 \sin 3\theta \rangle \\ &\equiv \langle 1 \mid x \quad y \mid xy \quad -x^2 + y^2 \mid -3xy^2 + x^3 \quad -3yx^2 + y^3 \rangle \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Pode-se demonstrar que para o caso de problemas 3D a expressão de  $u_0^*$ , em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ , corresponde a:

$$u_0^* = r^m L_\ell^m(\cos \theta)(C_1 \sin \ell \theta + C_2 \cos \ell \theta) \quad (3.1.11)$$

em que

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \text{ e } z = r \cos(\theta) \quad (3.1.12)$$

e  $L_\ell^m(\cos \theta)$  é a função associada de Legendre de primeira ordem, com argumento  $\cos \theta$ , na verdade uma função trigonométrica de  $\theta$  calculada no contexto de “harmônicos esféricos”

(<http://mathworld.wolfram.com/SphericalHarmonic.html>).  $L_\ell^m = L_\ell^m(\cos \theta)$  existe apenas para  $\ell \leq m$ . Então, para todo  $m \geq 0$  existem  $2m+1$  soluções compreendidas na equação (3.1.11) e, como resultado, o conjunto de possíveis polinômios em coordenadas cartesianas até o grau  $n$  corresponde a  $(n+1)^2$ .

Para  $n = 3$ , por exemplo, obtém-se um vetor  $u_{0s}^*$  com 16 soluções fundamentais:

$$\begin{aligned} u_{0s}^* &= \langle 1 \mid r L_0^1 \quad r L_1^1 \sin \varphi \quad r L_1^1 \cos \varphi \mid r^2 L_0^2 \quad r^2 L_1^2 \sin \varphi \quad r^2 L_1^2 \cos \varphi \quad r^2 L_2^2 \sin 2\varphi \quad r^2 L_2^2 \cos 2\varphi \mid \\ &\quad r^3 L_0^3 \quad r^3 L_1^3 \sin \varphi \quad r^3 L_1^3 \cos \varphi \quad r^3 L_2^3 \sin 2\varphi \quad r^3 L_2^3 \cos 2\varphi \quad r^3 L_3^3 \sin 3\varphi \quad r^3 L_3^3 \cos 3\varphi \rangle \\ &\equiv \langle 1 \mid x \quad y \quad z \mid xy \quad -x^2 + y^2 \quad xz \quad yz \quad -x^2 + z^2 \mid \\ &\quad x^3 - 3xy^2 \quad -3x^2y + y^3 \quad xyz \quad y^2z - x^2z \quad xz^2 - xy^2 \quad -x^2y + yz^2 \quad -3x^2z + z^3 \rangle \end{aligned}$$

$$(3.1.13)$$

Na Tabela abaixo é feito um resumo dos elementos 2D e 3D mais simples para problemas de potencial. Nela são apresentados o número de graus de liberdade interno (dimensão de  $\mathbf{p}^*$ ) de cada elemento e a dimensão e o posto das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{F}$  relacionadas. O valor  $n$  apresentado na segunda linha da tabela é o grau da função polinomial  $u_{0s}^*$ .

Tabela 3.1: Resumo de elementos 2D e 3D para problemas de potencial.

Dimensão	2D				3D			
$n$	1	2	3	4	1	2	3	4
$\dim(\mathbf{p}^*)$	$2n+1$				$(n+1)^2$			
	3	5	7	9	4	9	16	25
Elemento	T3	Q4	T6	Q8	Te4	H8	Te10	H20
Dimensão de $\mathbf{H}$	3x3	5x4	7x6	9x8	4x4	9x8	16x10	25x20
Posto de $\mathbf{H}$	2	3	5	7	3	7	9	19
Dimensão de $\mathbf{F}$	3x3	5x5	7x7	9x9	4x4	9x9	16x16	25x25
Posto de $\mathbf{F}$	2	4	6	8	3	8	15	24

Ilustrações dos elementos T6 (triângulo de 6 nós), Q8 (quadrilátero de 8 nós), Te10 (tetraedro de 10 nós) e H20 (hexaedro de 20 nós) são apresentadas nas Figuras 3.1 e 3.2 da Subseção 3.3.1. Delas também podem ser obtidas as formas dos elementos T3 (triângulo de 3 nós), Q4 (quadrilátero), tetraedro de 4 nós e H8 (hexaedro de 8 nós) através da desconsideração dos nós nos meios das faces ou arestas, nos elementos 2D e 3D, respectivamente.

### 3.1.2. Problemas de Potencial Harmônicos

A equação de governo do problema de potencial harmônico foi apresentada na Seção 2.1.2, equação (2.1.17), e é apresentada aqui novamente em notação indicial, sem consideração de fonte interna, ou seja,

$$u_{,ii} + \tilde{k}^2 u = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.1.14)$$

A questão de se achar a solução fundamental da equação (3.1.14) envolve encontrar um campo potencial  $u^*$  que a satisfaça.

Novamente, assim como feito para a função  $u_0^*$  na Seção anterior, a função  $u^*$  pode ser expressa como

$$u^* = f(r)g(\theta) \equiv fg \quad (3.1.15)$$

Portanto, em coordenadas polares, a equação (3.1.14) se expressa como

$$f_{rr}g + \frac{1}{r}f_rg + \frac{1}{r^2}fg_{\theta\theta} + k^2fg = 0 \quad (3.1.16)$$

em que os subscritos denotam derivadas parciais. Por seu lado, esta equação pode ser subdivida em duas,

$$f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)f = 0 \quad (3.1.17)$$

$$g_{\theta\theta} = -m^2g \quad (3.1.18)$$

em que  $m$  é uma constante de separação, de valor qualquer a princípio.

A solução geral da equação (3.1.18) é:

$$g = C_1 \sin(m\theta) + C_2 \cos(m\theta) \quad (3.1.19)$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes arbitrárias. Como se requer que

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= g(\pi) \\ g_{\theta}(-\pi) &= g_{\theta}(\pi) \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

verifica-se que  $m$  tem que ser um número inteiro, positivo ou negativo.

A solução geral da equação (3.1.17) é uma combinação linear qualquer das funções de Bessel  $J_m(\tilde{k}r)$  e  $Y_m(\tilde{k}r)$ , de primeira e segunda espécie e ordem  $m$ , com argumento  $\tilde{k}r$ . Como somente interessam soluções que resultem em polinômios, toma-se apenas a primeira das soluções, com o que se obtém a expressão de  $u^*$ , de acordo com a equação (3.1.15):

$$u^* = (C_1 \sin(m\theta) + C_2 \cos(m\theta))J_m(\tilde{k}r) \quad (3.1.21)$$

Uma maneira mais adequada de escrever a solução  $u^*$  dada na equação (3.1.21) é:

$$u^* = \left(\frac{2}{\tilde{k}}\right)^m m! J_m(\tilde{k}r)(C_1 \cos m\theta + C_2 \sin m\theta) \quad (3.1.22)$$

em que o termo que multiplica  $J_m(\tilde{k}r)$  é escolhido de tal maneira que  $\lim_{\tilde{k} \rightarrow 0} u^* = u_0^*$  para  $u_0^*$  dado na equação (3.1.8). Como conseqüência, pode-se expressar o vetor  $u_s^*$  de  $2n+1$  soluções fundamentais na forma de  $u_{0s}^*$  na equação (3.1.10), apenas trocando  $r^m$  por  $\left(\frac{2}{\tilde{k}}\right)^m m! J_m(\tilde{k}r)$ , considerando  $n$  o grau do polinômio completo que se obtém quando  $\tilde{k} \rightarrow 0$ .

A solução geral não-singular da equação de Helmholtz, equação (3.1.14), para problemas 3D em coordenadas esféricas, é

$$u^* = \frac{(2m+1)!\sqrt{\pi}}{m!(2\tilde{k})^m} J_{m+1/2}(\tilde{k}r) L_\ell^m(\cos\theta)(C_1 \sin \ell\theta + C_2 \cos \ell\theta) \quad (3.1.23)$$

com um fator multiplicando a função de Bessel de tal maneira que a equação (3.1.11) seja obtida como o caso limite de  $\tilde{k} \rightarrow 0$ . As funções de Bessel de ordem  $m+1/2$  são na verdade funções trigonométricas. Como ocorrido para o caso 2D, pode-se expressar o vetor  $u_s^*$  das soluções fundamentais com  $(n+1)^2$  termos usando  $u_{0s}^*$  definido na equação (3.1.13) com  $\frac{(2m+1)!\sqrt{\pi}}{m!(2\tilde{k})^m} J_{m+1/2}(\tilde{k}r)$  no lugar de  $r^m$ .

## 3.2. Problemas de Elasticidade

### 3.2.1. Elastostática

A equação diferencial de equilíbrio da elastostática, apresentada na equação (2.2.13), é reescrita abaixo por motivo de conveniência, sem a consideração de forças de corpo e levando em conta o que foi exposto na Seção 2.3, no Capítulo 2, ficando então

$$u_{im,jj}^* + \frac{1}{(1-2\nu)} u_{jm,ji}^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.2.1)$$

Uma solução do problema proposto pode ser obtida considerando-se que o campo de deslocamentos  $u_{im}^*$  possa ser expresso em termos de uma função potencial  $\Phi_{im}$  (função de Marguerre) na forma

$$u_{0im}^* = \Phi_{im,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} \Phi_{km,ik} \quad (3.2.2)$$

sendo

$$u_{0jm,ji}^* = \Phi_{jm,kkji} - \frac{1}{2(1-\nu)} \Phi_{km,jkji} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \Phi_{jm,kkji} \quad (3.2.3)$$

$$u_{0im,jj}^* = \Phi_{im,kkjj} - \frac{1}{2(1-\nu)} \Phi_{km,ikjj} \quad (3.2.4)$$

a equação (3.2.1) resulta em

$$\Phi_{im,kkjj} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2(\nabla^2 \Phi_{im}) = 0 \quad (3.2.5)$$

onde se considera que

$$\Phi_{im} = \Phi_0 \delta_{im} \quad (3.2.6)$$

em que o índice 0 na função  $\Phi_0$  se refere à solução estática e  $\delta_{im}$  é um delta de Kronecker generalizado, onde o índice  $i$  corresponde às direções coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  para o caso geral de problemas 3D e o índice  $m$  varia de 1 até o número de graus de liberdade do problema.

Assim, uma solução simples pode ser formulada num sistema polar de coordenadas, para problemas bidimensionais, ou num sistema esférico de coordenadas, para problemas tridimensionais.

A solução pode ser obtida pelo produto de uma função do raio  $r$  e uma função do ângulo  $\theta$ , para problemas bidimensionais.

Seja o duplo sistema de equações diferenciais, obtido a partir da equação (3.2.5), e considerando a equação (3.2.6),

$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi_0 = 0 \\ \nabla^2 \Phi_0 = \Psi_0 \end{cases} \quad (3.2.7)$$

em que o índice 0 na função  $\Psi_0$  tem o mesmo significado de se referir ao problema estático com mencionado acima. Quanto aos subscritos *im*, que aparecem nas equações (3.2.5) e (3.2.6), são omitidos na equação acima apenas por simplicidade de notação.

A função  $\Psi_0$  pode ser expressa como o produto de duas funções,

$$\Psi_0 = f(r)g(\theta) \equiv fg \quad (3.2.8)$$

Portanto, em coordenadas polares, a primeira das equações (3.2.7) se expressa

$$f_{rr}g + \frac{1}{r}f_r g + \frac{1}{r^2}fg_{\theta\theta} = 0 \quad (3.2.9)$$

em que os subscritos denotam derivadas parciais. Por seu lado, esta equação pode ser subdivida em duas equações,

$$f_{rr} + \frac{1}{r}f_r - \frac{m^2}{r^2}f = 0 \quad (3.2.10)$$

$$g_{\theta\theta} = -m^2g \quad (3.2.11)$$

em que  $m$  é uma constante de separação, de valor qualquer, a princípio. Note que esse procedimento é igual ao procedimento utilizado na seção anterior (Seção 3.1).

Assim como na Seção 3.2 a solução geral da equação (3.2.11) tem a forma

$$g = C_{1m} \text{sen}(m\theta) + C_{2m} \text{cos}(m\theta) \quad (3.2.12)$$

em que  $C_{1m}$  e  $C_{2m}$  são constantes arbitrárias.

Também aqui, assim como na seção anterior, se requer que

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= g(\pi) \\ g_{\theta}(-\pi) &= g_{\theta}(\pi) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

em que se verifica que  $m$  tem que ser um número inteiro, positivo ou negativo.

Como já se sabe, a solução geral da equação (3.2.10) é uma combinação linear qualquer das funções  $r^m$  e  $r^{-m}$ . E, como somente interessam soluções que resultem em polinômios, apenas a primeira das soluções é válida, e portanto a expressão de  $\Psi_0$ , de acordo com a equação (3.2.8) fica

$$\Psi_0 = r^m (C_{1m} \text{sen}(m\theta) + C_{2m} \text{cos}(m\theta)) \quad (3.2.14)$$

Para a solução da segunda das equações (3.2.7), supõe-se também que  $\Phi_0$  possa ser expressa por

$$\Phi_0 = f(r)g(\theta) \equiv fg \quad (3.2.15)$$

em que  $f$  e  $g$  são funções a determinar (diferentes das funções obtidas acima), de acordo com a equação

$$f_{rr}g + \frac{1}{r}f_rg + \frac{1}{r^2}fg_{\theta\theta} = (C_{1m}\sin(m\theta) + C_{2m}\cos(m\theta))r^m \quad (3.2.16)$$

A solução homogênea desta equação tem a mesma expressão de  $\Psi$ , na equação (3.2.14), com outras constantes de integração. Uma solução particular desta equação pode ser obtida se se escrever

$$f_{rr}^p + \frac{1}{r}f_r^p + \frac{1}{r^2}f^p \frac{g_{\theta\theta}}{g} = \frac{1}{g}(C_{1m}\sin(m\theta) + C_{2m}\cos(m\theta))r^m \quad (3.2.17)$$

Ficando evidente, então, que se pode supor para  $g$  a mesma expressão da equação (3.2.12), resultando para  $f^p$  a equação

$$f_{rr}^p + \frac{1}{r}f_r^p - \frac{m^2}{r^2}f^p = r^m \quad (3.2.18)$$

cuja solução é

$$f^p = \frac{r^{m+2}}{4(m+1)} \quad (3.2.19)$$

e, portanto, tem-se a solução geral da equação (3.2.7):

$$\Phi_0 = (C_{1n}\sin(n\theta) + C_{2n}\cos(n\theta))r^n + \frac{r^{m+2}}{4(m+1)}(C_{3m}\sin(m\theta) + C_{4m}\cos(m\theta)) \quad (3.2.20)$$

em que  $n$  e  $m$  são números inteiros positivos quaisquer. Esta função pode compor qualquer solução da função potencial geral  $\Phi_{im}$ , conforme a proposição do problema. A equação acima pode ser expressa, de maneira mais simples, como

$$\Phi_0 = r^n [C_{1n}\sin(n\theta) + C_{2n}\cos(n\theta) + C_{3n}\sin((n-2)\theta) + C_{4n}\cos((n-2)\theta)] \quad (3.2.21)$$

A função  $\Phi_0$  pode ser dada em termos da função  $u_0^*$  da equação (3.2.8) ou da equação (3.2.11) para problemas 2D ou 3D, respectivamente, ficando

$$\Phi_0 = r^2 u_0^* \quad (3.2.22)$$

Sendo assim a expressão de  $u_{0im}^*$  da equação (3.2.2) que é função de  $\Phi_0$ , que por sua vez é função de  $u_0^*$ , é

$$u_{0im}^* = r^2 \Phi_{0im,kk}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} r^2 \Phi_{0km,ik}^* \quad (3.2.23)$$

Para efeito de ilustração, as soluções  $u_{0is}^*$  como desenvolvimento da equação (3.2.2), em que  $s$  se refere ao grau de liberdade de  $p_s^*$ , para os casos bi e tridimensionais são, respectivamente:

$$u_{0is}^* = \frac{1}{1-\nu} \left[ \begin{array}{cc|cccc} 3-4\nu & 0 & (5-8\nu)x & -y & (7-8\nu)y & -x & \dots \\ 0 & 3-4\nu & -y & (7-8\nu)x & -x & (5-8\nu)y & \dots \end{array} \right] \quad (3.2.24)$$

$$u_{0is}^* = \frac{1}{1-\nu} \left[ \begin{array}{ccc|cccc} 5-6\nu & 0 & 0 & (7-10\nu)x & -y & -z & (9-10\nu)y \\ 0 & 5-6\nu & 0 & -y & (9-10\nu)x & 0 & -x \\ 0 & 0 & 5-6\nu & -z & 0 & (9-10\nu)x & 0 \\ -x & 0 & (9-10\nu)z & 0 & -x & \dots \\ (7-10\nu)y & -z & 0 & (9-10\nu)z & -y & \dots \\ -z & (9-10\nu)y & -x & -y & (7-10\nu)z & \dots \end{array} \right] \quad (3.2.25)$$

O número de solução compreendidas pelo índice  $s$  dos deslocamentos  $u_{0is}^*$  corresponde a um polinômio completo de grau  $n$ , ou seja,  $2(2n+1)$  para problemas 2D e  $3(n+1)^2$  para problemas 3D.

Na tabela abaixo é feito um resumo dos elementos 2D e 3D mais simples para problemas de elasticidade. Nela são apresentados o número de graus de liberdade interno (dimensão de  $\mathbf{p}^*$ ) de cada elemento e a dimensão e o posto das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{F}$  relacionadas.

Tabela 3.2: Resumo de elementos 2D e 3D para problemas de elasticidade.

Dimensão	2D				3D			
$n$	1	2	3	4	1	2	3	4
$\dim(\mathbf{p}^*)$	$2(2n+1)$				$3(n+1)^2$			
	6	10	14	18	12	27	48	75
Elemento	CST	Q4	T6	Q8	Te4	H8	Te10	H20
Dimensão de $\mathbf{H}$	6x6	10x8	14x12	18x16	12x12	27x24	48x30	75x60
Posto de $\mathbf{H}$	3	5	9	13	6	18	24	54
Dimensão de $\mathbf{F}$	6x6	10x10	14x14	18x18	12x12	27x27	48x48	75x75
Posto de $\mathbf{F}$	3	7	11	15	6	21	42	69



Nas figuras a seguir são ilustrados os elementos T6 (triângulo de 6 nós), Q8 (quadrilátero de 8 nós), Te10 (tetraedro de 10 nós) e H20 (hexaedro de 20 nós), aos quais se referem a tabela acima e a tabela 3.1.

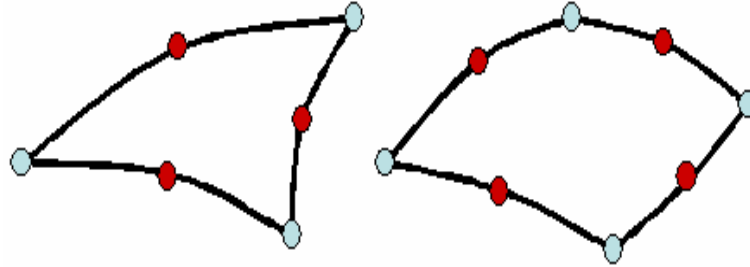


Figura 3.1: Elementos 2D – T6 e Q8.

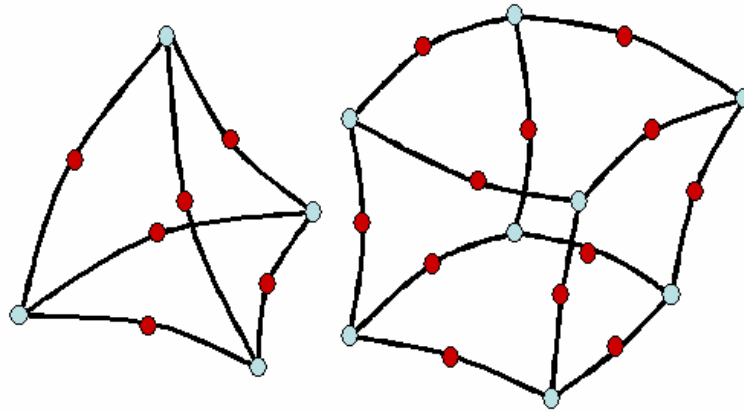


Figura 3.2: Elementos 3D – Tetraedro de 10 nós e H20.

### 3.2.2. Elastodinâmica

A equação diferencial de equilíbrio da elastodinâmica, equação (2.2.1), é reescrita abaixo sem a consideração de forças de corpo:

$$\sigma_{ij,j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.2.26)$$

Foi demonstrado na Seção 2.2, Capítulo 2, que a aplicação da lei de Hooke à equação (3.2.26) leva a

$$G u_{i,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{k,ki} - \rho \ddot{u}_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.2.27)$$

que nada mais é que a equação diferencial da elastodinâmica em termos de deslocamentos.

Para que se possa ter uma formulação no domínio da frequência, supôs-se que estes deslocamentos possam ser expressos como o produto de duas funções, como exposto na Seção 2.6, equação (2.7.2), em que  $\tau(t, \omega)$  satisfaz a equação (2.7.4) e dessa forma  $u_{im}^*$  deve satisfazer a equação diferencial

$$G u_{im,jj}^* + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{jm,ji}^* + \rho \omega^2 u_{im}^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.2.28)$$

Que pode ser expressa da seguinte forma, em analogia com o que foi feito na Seção 2.2:

$$c_2^2 u_{im,jj}^* + (c_1^2 - c_2^2) u_{jm,ji}^* + \omega^2 u_{im}^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.2.29)$$

Uma solução para a equação acima pode ser obtida a partir da substituição

$$u_{im}^* = \Phi_{im,kk} + k_1^2 \Phi_{im} - \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \Phi_{km,ik} \quad (3.2.30)$$

em que  $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$  e  $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$ . Então,

$$u_{jm,ji}^* = \Phi_{jm,ji} + \frac{k_1^2}{k_2^2} \Phi_{km,jkji} \quad (3.2.31)$$

$$u_{im,jj}^* = \Phi_{im,kkjj} + k_1^2 \Phi_{im,jj} - \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2}\right) \Phi_{km,ikjj} \quad (3.2.32)$$

Portanto, a equação de equilíbrio se expressa como

$$\Phi_{im,kkjj} + k_1^2 \Phi_{im,jj} + k_2^2 \Phi_{im,jj} + k_1^2 k_2^2 \Phi_{im} = 0 \quad (3.2.33)$$

que pode ser posta na forma

$$\left(\nabla^2 + k_1^2\right) \left(\nabla^2 + k_2^2\right) \Phi_{im} = 0 \quad (3.2.34)$$

onde se considera, por simplicidade, que

$$\Phi_{im} = \Phi \delta_{im} \quad (3.2.35)$$

É válido mencionar que, para problema estáticos, em que  $\omega = 0$ ,  $k_1 = k_2 = 0$

$$\text{e } \frac{k_1^2}{k_2^2} = \frac{(1-2\nu)}{(2-2\nu)}.$$

A partir da equação (3.2.34) e considerando a equação (3.2.35), pode-se formular o seguinte duplo sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k_1^2)\Psi = 0 \\ (\nabla^2 + k_2^2)\Phi = \Psi \end{cases} \quad (3.2.36)$$

para cada termo da função potencial  $\Phi_{im}$ .

A função  $\Psi$  pode ser expressa como

$$\Psi = f(r)g(\theta) \equiv fg \quad (3.2.37)$$

Portanto, em coordenadas polares, a primeira das equações (3.2.36) se expressa como

$$f_{rr}g + \frac{1}{r}f_rg + \frac{1}{r^2}fg_{\theta\theta} + k_1^2fg = 0 \quad (3.2.38)$$

em que os subscritos denotam derivadas parciais. Por seu lado, esta equação pode ser subdivida em duas equações,

$$f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \left(k_1^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)f = 0 \quad (3.2.39)$$

$$g_{\theta\theta} = -m^2g \quad (3.2.40)$$

em que  $m$  é uma constante de separação, de valor qualquer a princípio.

A solução geral da equação (3.2.40) é:

$$g = C_{1m}\text{sen}(m\theta) + C_{2m}\text{cos}(m\theta) \quad (3.2.41)$$

em que  $C_{1m}$  e  $C_{2m}$  são constantes arbitrárias. Como se requer que

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= g(\pi) \\ g_{\theta}(-\pi) &= g_{\theta}(\pi) \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

verifica-se que  $m$  tem que ser um número inteiro, positivo ou negativo.

A solução geral da equação (3.2.39) é uma combinação linear qualquer das funções  $J_m(k_1r)$  e  $Y_m(k_1r)$ , que são de ordem  $m$ . Como somente interessam soluções que resultem em polinômios, toma-se apenas a primeira das soluções, com o que se obtém a expressão de  $\Psi$ , de acordo com a equação (3.2.37):

$$\Psi = (C_{1m}\text{sen}(m\theta) + C_{2m}\text{cos}(m\theta))J_m(k_1r) \quad (3.2.43)$$

Como se pode perceber, a equação (3.2.36) é simétrica em relação às funções  $\Psi$  e  $\Phi$ , o que permite dizer que sua solução é uma combinação do resultado obtido acima para a função  $\Psi$ , de forma a se terem 4 constantes de integração e duas funções de Bessel de primeira ordem com argumentos  $k_1$  e  $k_2$ . Portanto, a solução geral da equação (3.2.36), adequadamente escrita, é

$$\begin{aligned} \Phi = & (C_{1n} \sin(n\theta) + C_{2n} \cos(n\theta)) \left( \frac{J_n(k_1 r)}{k_1^n} + \frac{J_n(k_2 r)}{k_2^n} \right) + \\ & + \frac{C_{3m} \sin(m\theta) + C_{4m} \cos(m\theta)}{k_1^2 - k_2^2} \left( \frac{J_m(k_1 r)}{k_1^m} - \frac{J_m(k_2 r)}{k_2^m} \right) \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

de modo a se obter  $\Phi_0$  da equação (3.2.21) para  $\omega \rightarrow 0$ .

É possível escrever a função  $\Phi$  em termos da função potencial  $u_0^*$  encontrada na Seção 3.1 do Capítulo 3 na forma

$$\Phi = \frac{(J_d(k_1 r)/k_1^d - J_d(k_2 r)/k_2^d) 2^{d+2} (d+1)!}{r^d (k_2^2 - k_1^2)} u_0^* \quad (3.2.45)$$

para problemas 2D, ou

$$\Phi = \frac{(J_{d+1/2}(k_1 r)/k_1^{d+1/2} - J_{d+1/2}(k_2 r)/k_2^{d+1/2}) \sqrt{\pi} (2d+3)!}{r^{d+1/2} (k_2^2 - k_1^2) 2^{d+1/2} (d+1)!} u_0^* \quad (3.2.46)$$

para problemas 3D, em que  $d$  é o grau do polinômio  $u_0^*$  em coordenadas cartesianas. As funções de Bessel de ordem  $m + \frac{1}{2}$  são na verdade funções trigonométricas. Os fatores multiplicadores nas equações (3.2.45) e (3.2.46) são escolhidos de tal maneira que a expressão de  $\Phi$  para  $\omega \rightarrow 0$  se torna igual a equação (3.2.21).

Seja  $\dim(u_{0s}^*)$  a dimensão do vetor de soluções potenciais da Seção 3.2, a qual é  $2n+1$  para problemas 2D e  $(n+1)^2$  para problema 3D, onde  $n$  é o grau do polinômio completo que se está usando. Seja ainda  $D$  uma constante igual a 2 ou 3, para problemas 2D ou 3D, respectivamente. Então, para  $u_0^*$  expandido como o vetor  $u_{0s}^*$  da equação (3.2.10) ou (3.2.13), pode-se expressar um vetor de funções  $\Phi_\ell$  nas equações (3.2.45) ou (3.2.46) e, considerando-se a solução geral  $\Phi_{is}$  na forma  $\Phi_{is} = \Phi \delta_{is}$ , compõe-se uma matriz de soluções  $u_{is}^* \equiv u_{i(D\ell+k-D)}^*$  da equação diferencial (3.2.28) ou (3.2.29) fazendo-se uso da equação (3.2.30) na forma

$$u_{i(D\ell+k-D)}^* = (\Phi_{\ell, jj} + k_1^2 \Phi_\ell) \delta_{ik} + (k_1^2/k_2^2 - 1) \Phi_{\ell, ik} \quad i=1..D, \quad k=1..D, \quad \ell=1..\dim(u_0^*) \quad (3.2.47)$$

O número de soluções compreendidas pelo índice  $s \equiv D\ell + k - D$  dos deslocamentos  $u_{is}^*$  corresponde a um polinômio completo de grau  $n$ , assim como no caso estático, ou seja,  $2(2n+1)$  para problemas 2D e  $3(n+1)^2$  para problemas 3D.

### 3.3. Espaços Nulos Relacionados à Parte Estática das Soluções Fundamentais Não-Singulares

A implementação no domínio da frequência das soluções fundamentais deduzidas nas seções anteriores resulta em matrizes  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{H}$  de posto cheio, como é apresentado na Seção 2.7. Entretanto, as matrizes  $\mathbf{F}_0$  e  $\mathbf{H}_0$  do caso estático têm espaços nulos, como foi indicado nas equações (2.7.15), (2.7.16) e (2.7.20). A matriz  $\mathbf{W}$  de potencial constante ou deslocamentos de corpo rígido é construída de maneira direta (apesar de dependente de modos no caso de elasticidade, devido a rotações de corpo rígido), como dada abaixo para um modelo discretizado com  $nnp$  coordenadas de pontos nodais  $(x_s, y_s, z_s)$ .

$$\tilde{\mathbf{W}} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \quad (3.3.1)$$

para problemas de potencial tanto 2D quanto 3D, ou

$$\tilde{\mathbf{W}} = \left[ \begin{array}{cc|cc|ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & & & \\ \hline y_1 & -x_1 & y_2 & -x_2 & \dots & y_{nnp} & -x_{nnp} & & & \end{array} \right]^T \quad (3.3.2)$$

para problemas de elasticidade 2D, ou ainda

$$\tilde{\mathbf{W}} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & -z_1 & y_1 & 0 & -z_2 & y_2 & \dots & 0 & -z_{nnp} & y_{nnp} & \\ z_1 & 0 & -x_1 & z_2 & 0 & -x_2 & \dots & z_{nnp} & 0 & -x_{nnp} & \\ -y_1 & x_1 & 0 & -y_2 & x_2 & 0 & \dots & -y_{nnp} & x_{nnp} & 0 & \end{array} \right]^T \quad (3.3.3)$$

para problemas de elasticidade 3D. Nas equações (3.3.1)-(3.3.3), uma matriz não-ortogonal  $\tilde{\mathbf{W}}$  está sendo representada ao invés de  $\mathbf{W}$ , por motivo de simplicidade.  $\mathbf{W}$  é obtida por ortogonalização de  $\tilde{\mathbf{W}}$ , tal que  $\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I}$ . As equações (3.3.1)-(3.3.3) são válidas também para materiais não-homogêneos.

A base ortogonal representada por  $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$  nas equações (2.7.16) e (2.7.20) é, em caso de material homogêneo,

$$\mathbf{V} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (3.3.4)$$

para problemas de potencial tanto 2D quanto 3D, e

$$\mathbf{V} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & \dots & 0 & & & \end{array} \right]^T \quad (3.3.5)$$

para casos de elasticidade 2D, ou

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.3.6)$$

para casos de elasticidade 3D.

As séries de produtos  $u_{0s}^* V_s$  para  $\mathbf{V}$  dado na equação (3.3.4) e  $u_{0s}^*$  dado em (3.1.10) ou em (3.1.13) correspondem a potencial constante puro (dando assim fluxo zero). Também, as séries de produtos  $u_{0is}^* V_{sj}$  para  $\mathbf{V}$  dado nas equações (3.3.5) ou (3.3.6) e  $u_{0is}^*$  dado pelas respectivas equações (3.2.24) e (3.2.25) correspondem a deslocamentos de corpo rígido puros. Abaixo é mostrado, a título de ilustração, como ficam tais produtos para potencial e elasticidade 2D, respectivamente.

$$u_{0s}^* V_s = \left\langle 1 \mid x \quad y \mid xy \quad -x^2 + y^2 \mid -3xy^2 + x^3 \quad y^3 - 3yx^2 \quad \dots \right\rangle \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = 1 \quad (3.3.7)$$

$$u_{0is}^* V_{sj} = \frac{1}{1-\nu} \begin{bmatrix} 3-4\nu & 0 & (5-8\nu)x & -y & (7-8\nu)y & -x & \dots \\ 0 & 3-4\nu & -y & (7-8\nu)x & -x & (5-8\nu)y & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3-4\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{-8(1-\nu)y}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3-4\nu}{1-\nu} & \frac{8(1-\nu)x}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

Para materiais não-homogêneos, entretanto, as equações (3.3.4)-(3.3.6) valem apenas aproximadamente. Um modelo dependente mais preciso da base  $\mathbf{V}$  deve ser obtido como um espaço nulo aproximado de  $\mathbf{F}_0$  na equação (2.7.20).

## 4

# SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA CONDUÇÃO DE CALOR EM MATERIAIS COM GRADAÇÃO FUNCIONAL

Neste Capítulo são obtidas as soluções fundamentais não-singulares para problemas de condução de calor, 2D e 3D, em materiais cujas propriedades variam (materiais com gradação funcional, ou FGM, na sigla em inglês) em uma das direções, de acordo com três diferentes padrões, no contexto de uma formulação híbrida de elementos finitos para análise no domínio da frequência, assim como é feito nos capítulos anteriores. O presente desenvolvimento conta exclusivamente com funções de variáveis reais tanto para problemas 2D quanto 3D.

Cheng (1984) já havia feito um desenvolvimento similar ao presente trabalho, aplicado a fluxo em estado permanente em materiais heterogêneos e isotrópicos, baseado em um desenvolvimento teórico de Georghitza (1969). O problema de condução de calor em meio não-homogêneo no contexto de uma formulação de integrais de contorno foi também tratado de maneira extensiva por Divo e Kassab (2003). Todavia, os desenvolvimentos feitos aqui foram executados de maneira independente e de acordo com uma abordagem que possibilita a total compreensão das possibilidades de variação do material (Dumont e Chaves, 2003).

### 4.1. Equação de Governo

Considera-se o problema de condução de calor dependente do tempo, com as propriedades do material variando com a direção  $z$ , de acordo com a figura 4.1 (Dumont e Chaves, 2003). Ainda de acordo com a figura 4.1, o problema é descrito em termos das coordenadas globais  $(X,Y,Z)$  e se está procurando uma solução fundamental referida às coordenadas locais  $(x,y,z)$ . Como ilustrado na figura 4.1,  $\bar{Z}$  é a coordenada global  $Z$  de um certo valor de referência  $\bar{k}$  para  $k(z)$  e  $\bar{c}$  para  $c(z)$  correspondendo a  $\bar{z}$  em coordenadas locais  $(x,y,z)$ .



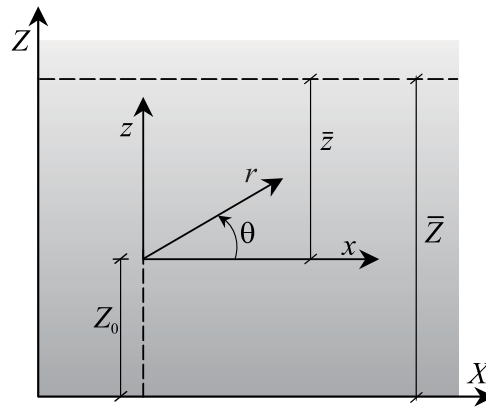


Figura 4.1: Sistema de coordenadas para descrição de um FGM com propriedades  $\bar{k}$  e  $\bar{c}$  definidas em  $Z = \bar{Z}$  (coordenada global), a qual é equivalente a  $z = \bar{z}$  (coordenada local).

#### 4.1.1. Problema Isotrópico

Para problema isotrópico, a equação de fluxo, para o potencial  $u^* \equiv u^*(x, y, z)$ , é

$$q_i = -k(z)u^*_{,i} \quad (4.1.1)$$

onde  $k(z) = \bar{k}f(z)$  é a condutividade térmica do material. Na ausência de fontes de corpo, a equação de equilíbrio de fluxo do problema para calor específico  $c(z) = \bar{c}f(z)$  se escreve, em notação indicial,

$$q_{i,i} = -c(z) \frac{\partial u^*}{\partial t} \quad (4.1.2)$$

Assim, da substituição da equação (4.1.1) em (4.1.2) tem-se:

$$ku^*_{,ii} + k_{,z} u^*_{,z} = c \frac{\partial u^*}{\partial t} \quad (4.1.3)$$

ou, em uma formulação no domínio da frequência, para  $\tilde{k}^2 = \frac{\bar{c}\omega}{k}$ , de acordo com a notação das equações (3.1.22) e (3.1.23):

$$u^*_{,ii} + \frac{k_{,z}}{k} u^*_{,z} = -\tilde{k}^2 u^* \quad (4.1.4)$$

#### 4.1.2. Problema Ortotrópico

As equações de fluxo para materiais ortotrópicos com graduação funcional são:

$$q_x = -\tilde{k}_x(z)u_{,x}^* \equiv -\bar{k}k_x(z)u_{,x}^* \equiv -\bar{k}k_x u_{,x}^* \quad (4.1.5a)$$

$$q_y = -\tilde{k}_y(z)u_{,y}^* \equiv -\bar{k}k_y(z)u_{,y}^* \equiv -\bar{k}k_y u_{,y}^* \quad (4.1.5b)$$

$$q_z = -\tilde{k}_z(z)u_{,z}^* \equiv -\bar{k}k_z(z)u_{,z}^* \equiv -\bar{k}k_z u_{,z}^* \quad (4.1.5c)$$

com  $\bar{k}$  definido na Seção 4.1.1 em certos valores de referência para a condutividade em coordenadas  $\bar{Z}$ , de acordo com a figura 4.1.  $k_x(z) \equiv k_x$  e  $k_y(z) \equiv k_y$  são em princípio funções arbitrárias de  $z = Z - Z_0$ , como na figura 4.1.  $k_z(z) \equiv k$ , no qual o subscrito foi abolido, por simplicidade, será obtido como famílias de funções, para FGM's ortotrópicos. Nas equações (4.1.5), é requerido que  $k_x(\bar{z}) = k_y(\bar{z}) = k_z(\bar{z}) = 1$ .

Além do mais, a equação de equilíbrio pode ser expressa como

$$q_{i,i} = -\tilde{c}(z) \frac{\partial u^*}{\partial t} \equiv -\bar{c}c(z) \frac{\partial u^*}{\partial t} \equiv -\bar{c}c \frac{\partial u^*}{\partial t} \quad (4.1.6)$$

com  $\bar{c}$  definido na Seção 4.1.1 e  $c(z) \equiv c$  sendo a variação de calor específico a ser obtida no contexto de famílias de funções que não são necessariamente coincidentes com  $k$ , contrário ao procedimento da Seção 4.1.1.

Escreve-se, por conveniência, a equação (4.1.6) mais uma vez como

$$\frac{q_{i,i}}{\bar{c}c} = -\frac{\bar{c}}{\bar{k}} \frac{\partial u^*}{\partial t} \quad (4.1.7)$$

da qual segue a equação de Helmholtz para uma formulação no domínio da frequência, como na equação (4.1.4), embora ainda em termos de fluxos:

$$\frac{q_{i,i}}{\bar{c}c} = \frac{\bar{c}\omega}{\bar{k}} u^* \equiv \tilde{k}^2 u^* \quad (4.1.8)$$

em que  $u^* \equiv u^*(x, y, z)$  é uma função dependente apenas das coordenadas espaciais.

Com o intuito de se chegar a uma expressão da equação (4.1.8) que seja adequada à manipulação, tão parecida quanto possível à equação (4.1.4), introduz-se a seguinte transformação de coordenadas (Dumont e Chaves, 2004) entre o sistema cartesiano original  $(x, y, z)$  e um sistema auxiliar  $(x', y', z')$ :

$$x = \sqrt{\frac{k_x}{c}} x' \quad \rightarrow \quad \frac{\partial x'}{\partial x} = \sqrt{\frac{c}{k_x}} \quad (4.1.9)$$

$$y = \sqrt{\frac{k_y}{c}} y' \quad \rightarrow \quad \frac{\partial y'}{\partial y} = \sqrt{\frac{c}{k_y}} \quad (4.1.10)$$

$$z = \int_0^{z'} \sqrt{\frac{\bar{k}}{c}} dz' + Const. \rightarrow \frac{\partial z'}{\partial z} = \sqrt{\frac{c}{\bar{k}}} \quad t = \int_0^{t'} \bar{c}/\bar{k} dt' \quad (4.1.11)$$

Supõe-se, desde que de outra forma poderia se torna extremamente complicado para se chegar a soluções simples, que o sistema auxiliar de coordenadas  $(x',y',z')$  tem a mesma origem que  $(x,y,z)$ . Então, a constante indicada nas equações (4.1.9)-(4.1.11) tem que ser calculada de tal maneira que  $z = 0$  quando  $z' = 0$ . De acordo com a transformação introduzida, as seguintes expressões de fluxo e suas derivadas primeiras são obtidas:

$$q_x = -\bar{k}k_x u^*_{,x'} \sqrt{\frac{c}{k_x}} \rightarrow q_{x,x} = -\bar{k}k_x u^*_{,x'x'} \frac{c}{k_x} = -\bar{k}c u^*_{,x'x'} \quad (4.1.12)$$

$$q_y = -\bar{k}k_y u^*_{,y'} \sqrt{\frac{c}{k_y}} \rightarrow q_{y,y} = -\bar{k}k_y u^*_{,y'y'} \frac{c}{k_y} = -\bar{k}c u^*_{,y'y'} \quad (4.1.13)$$

$$q_z = -\bar{k}k_z u^*_{,z'} \sqrt{\frac{c}{k_z}} = -\bar{k}u^*_{,z'} \sqrt{ck} \rightarrow \quad (4.1.14)$$

$$q_{z,z} = -\bar{k}c u^*_{,z'z'} - \frac{1}{2} \bar{k}u^*_{,z'} \frac{1}{\sqrt{ck}} (kc)_{,z'} \sqrt{\frac{c}{k}} = -\bar{k}c u^*_{,z'z'} - \frac{(kc)_{,z'}}{2k} \bar{k}u^*_{,z'}$$

e, após algumas manipulações, chega-se à equação de Helmholtz (Dumont e Chaves, 2004)

$$u^*_{,x'x'} + u^*_{,y'y'} + u^*_{,z'z'} + \frac{(kc)_{,z'}}{2kc} u^*_{,z'} = -\tilde{k}^2 u^* \quad (4.1.15)$$

em que o número de onda é simplesmente  $\tilde{k}^2 = \omega$ .

## 4.2. Solução da Equação de Governo para Problemas 2D e 3D

Tendo em vista que o problema isotrópico é um caso particular do problema ortotrópico, o desenvolvimento apresentado a seguir é feito diretamente para o caso de problema ortotrópico, cuja equação de governo é dada pela equação (4.1.15). Particularizações referentes ao problema isotrópico podem ser feitas diretamente do desenvolvimento feito para o problema ortotrópico, como será mostrado mais à frente.

Procura-se uma solução  $u^* \equiv u^*(x, y, z)$  que satisfaça a equação (4.1.15), tanto para problemas 2D quanto para problemas 3D. Tal solução pode ser expressa da seguinte maneira:

$$u^* = h(x', y', z', \tilde{k})p(z') \quad (4.2.1)$$

para o caso geral de problemas 3D.

Então as derivadas de  $u^*$  que aparecem na equação (4.1.15) expressam-se da seguinte forma:

$$u^*_{,x'x'} = h_{,x'x'} p \quad (4.2.2a)$$

$$u^*_{,y'y'} = h_{,y'y'} p \quad (4.2.2b)$$

$$u^*_{,z'} = h_{,z'} p + hp_{,z'} \quad (4.2.2c)$$

$$u^*_{,z'z'} = h_{,z'z'} p + 2h_{,z'} p_{,z'} + hp_{,z'z'} \quad (4.2.2d)$$

e suas substituições na referida equação, eq. (4.1.15), resultam em:

$$h_{,ii} + h_{,z'} \left( \frac{(kc)_{,z'}}{2kc} + 2 \frac{p_{,z'}}{p} \right) + h \left( \frac{p_{,z'z'}}{p} + \frac{(kc)_{,z'} p_{,z'}}{2kc p} \right) = -\tilde{k}^2 h \quad (4.2.3)$$

Para que haja consistência da equação (4.2.3), os seguintes termos, expressos como função da variável  $z$ , devem ser constantes, ou seja,

$$\left( \frac{p_{,z'z'}}{p} + \frac{(kc)_{,z'} p_{,z'}}{2kc p} \right) = \pm \beta^2 = const. \quad (4.2.4)$$

$$\left( \frac{(kc)_{,z'}}{2kc} + 2 \frac{p_{,z'}}{p} \right) = \lambda = const. \quad (4.2.5)$$

As equações do caso particular do problema isotrópico podem ser obtidas pela substituição das coordenadas  $(x', y', z')$  por  $(x, y, z)$  diretamente nas equações acima. Todas as equações anteriores são válidas para o caso 2D, bastando para tanto suprimir a coordenada  $y'$  das equações, em que teríamos como eixo coordenado para o caso 2D o eixo  $(x', z')$ .

Seis casos particulares podem ser contemplados, em princípio, com o objetivo de se chegar a padrões de variação para as propriedades  $k(z')$  e  $c(z')$  do

material, já que a primeira constante  $\beta$  pode ser negativa, positiva ou igual a zero e a segunda constante  $\lambda$  pode ser igual a zero ou diferente de zero. Porém, as soluções para  $\lambda \neq 0$  correspondem a padrões de variação de  $k(z)$ , no caso de problemas isotrópicos, e de  $k(z')$ , para problemas ortotrópicos, que são fisicamente inviáveis.

Então, para  $\lambda = 0$  na equação (4.2.5), a equação (4.2.3) torna-se:

$$h_{,ii} + \psi^2 h = 0 \quad (4.2.6)$$

onde  $\psi = \sqrt{\tilde{k}^2 \pm \beta^2}$  e  $\beta$  é um parâmetro do material a ser obtido a partir de testes experimentais, a partir dos desenvolvimentos feitos a seguir.

A solução geral da equação (4.1.15) para o caso geral de problemas ortotrópicos é obtida na forma do produto de funções apresentado na equação (4.2.1), ou colocado de forma mais conveniente,

$$u^* \rightarrow h(r', \psi) p(z') \quad (4.2.7)$$

onde  $h(r', \psi)$  é a mesma função  $u^*(r', \psi)$  dada nas equações (3.1.22) e (3.1.23), para problemas 2D e 3D, respectivamente, em que  $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$  substitui  $r$  e  $\psi$  substitui  $\tilde{k}$ .

Os três diferentes tipos de soluções para as expressões de  $p(z')$ ,  $k(z')$  e  $c(z')$  como funções da difusividade térmica, correspondendo a  $\lambda = 0$ , são apresentados na tabela 4.2 da Seção 4.3 para problemas ortotrópicos. Na subseção a seguir serão apresentados os padrões de variação para os casos de problema isotrópico e logo em seguida, na Subseção 4.2.2, é feita uma generalização dos padrões de variação para problemas ortotrópicos.

#### 4.2.1. Problema Isotrópico

Para os casos de padrão de variação de problema isotrópico apresentados nesta seção, é necessário que se faça a substituição das coordenadas  $(x', y', z')$  por  $(x, y, z)$  e de  $\frac{(kc)_{,z'}}{2kc}$  por  $\frac{k_{,z}}{k}$  nas equações apresentadas anteriormente, onde se supõe que  $c$  seja constante, embora não seja necessário.

### 4.2.1.1. Solução Exponencial

Neste padrão de gradação funcional, as hipóteses adotadas são  $\beta^2 < 0$  e  $\lambda = 0$ . Tais hipóteses levam ao padrão de gradação mais freqüentemente sugerido na literatura de materiais com gradação funcional.

Reescrevendo as equações (4.2.4) e (4.2.5) na forma do sistema de equações diferenciais, de acordo com as substituições necessárias mencionadas acima,

$$\frac{p_{,zz}}{p} + \frac{k_{,z}}{k} \frac{p_{,z}}{p} = -\beta^2 \quad (4.2.8)$$

$$\frac{k_{,z}}{k} + 2 \frac{p_{,z}}{p} = 0 \quad (4.2.9)$$

tem-se a seguinte solução geral (Dumont e Chaves, 2003):

$$k = k_0 e^{-2\beta z} (\alpha e^{2\beta z} + 1)^2 \quad \text{com} \quad k_0 = \bar{k} e^{2\beta \bar{z}} (\alpha e^{2\beta \bar{z}} + 1)^{-2} \quad (4.2.10)$$

$$p = p_0 e^{\beta z} (\alpha e^{2\beta z} + 1)^{-1} \quad \text{com} \quad p_0 = k_0^{-1} e^{\beta z_0} (\alpha e^{2\beta z_0} + 1)^{-1} \quad (4.2.11)$$

em termos das constantes do material  $\alpha$ ,  $\beta$ , as quais serão obtidas experimentalmente. A constante  $k_0$  é expressa de tal maneira que  $k(\bar{z}) = \bar{k}$ , o parâmetro físico de referência. Além disso,  $k(z)$  é intencionalmente expressa como uma função de  $Z \equiv z + Z_0$ , de forma a se ter sempre a mesma descrição material desconsiderando-se a coordenada local de referência, de acordo com a figura (4.1). Este conceito de invariância à translação é requisito básico, no caso de soluções fundamentais singulares (Dumont e Chaves, 2003), mas não no caso de soluções fundamentais não-singulares, que são as únicas de interesse neste trabalho. No entanto, mantém-se esta condição, já que não afeta os resultados dos desenvolvimentos feitos aqui.

A figura 4.2 (Dumont e Chaves, 2003) mostra dois gráficos de alguns padrões de variação de  $k(z)$ , dados pela equação (4.2.10), para o caso exponencial, para alguns valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . No primeiro gráfico o valor de  $\beta = 1,5$  está fixo e  $\alpha$  varia de 0,0 a 0,22. No segundo fixa-se o valor de  $\alpha = 0,2$ , variando  $\beta$  de 0,0 a 1,6.

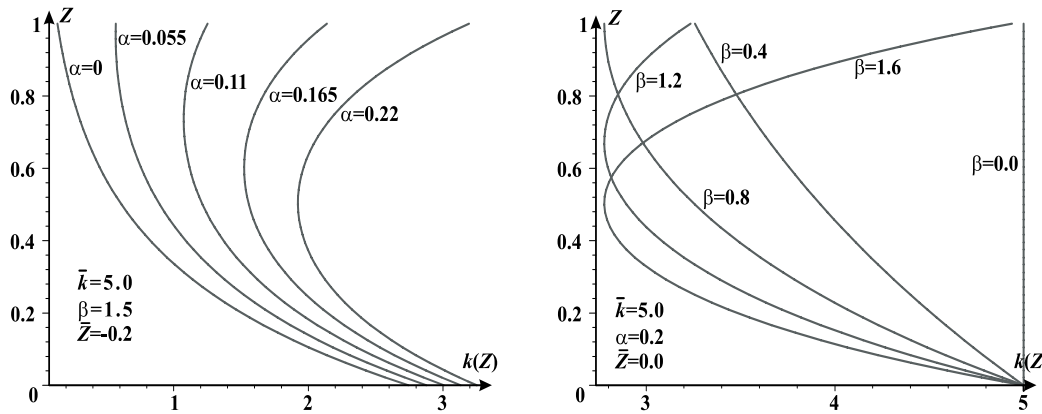


Figura 4.2: Padrões de variação ilustrativos da função exponencial  $k(z)$ .

Ao invés das equações (4.2.10) e (4.2.11), pode-se escrever a solução mais restritiva das equações (4.2.8) e (4.2.9), correspondendo a  $\alpha = 0$ :

$$k = \bar{k} e^{2\beta(\bar{Z}-Z)} \quad (4.2.12)$$

$$p = \bar{k}^{-1} e^{\beta(Z+Z_0-2\bar{Z})} \quad (4.2.13)$$

Este é o caso de material com gradação exponencial encontrado na literatura. As equações (4.2.10) e (4.2.11) permitem mais flexibilidade no padrão de variação de  $k(z)$ .

#### 4.2.1.2. Solução Quadrática

Este padrão de variação adota a hipótese mais simples  $\beta = \lambda = 0$ , levando ao seguinte sistema de equações diferenciais, já considerando as substituições necessárias mencionadas no início desta subseção,

$$\frac{p_{,zz}}{p} + \frac{k_{,z}}{k} \frac{p_{,z}}{p} = 0 \quad (4.2.14)$$

$$\frac{k_{,z}}{k} + 2 \frac{p_{,z}}{p} = 0 \quad (4.2.15)$$

cuja solução geral (Dumont e Chaves, 2003) é dada por

$$k = k_0 (\alpha Z + 1)^2 \quad \text{com} \quad k_0 = \bar{k} (\alpha \bar{Z} + 1)^{-2} \quad (4.2.16)$$

$$p = p_0 (\alpha Z + 1)^{-1} \quad \text{com} \quad p_0 = k_0^{-1} (\alpha Z_0 + 1)^{-1} \quad (4.2.17)$$

em termos da constante do material  $\alpha$ , obtida experimentalmente. A constante de referência  $\bar{k}$  é expressa de tal forma que  $k(\bar{z}) = \bar{k}$ . Assim como no primeiro caso,  $k(z)$  é expressa explicitamente como uma função de  $Z \equiv z + Z_0$ , em forma a se ter sempre a mesma descrição material desprezando-se a coordenada local de referência. O parâmetro  $p_0$  é avaliado de acordo com os mesmos tipos de

considerações que dizem respeito às equações (4.2.10) e (4.2.11) no primeiro caso.

A propriedade material  $k(z)$  varia como um polinômio do segundo grau, o qual representa aproximadamente e é uma alternativa para a função exponencial do primeiro caso. Note que  $\alpha Z + 1 \neq 0$  é requerido, neste caso.

A figura 4.3 (Dumont e Chaves, 2003) mostra o gráfico de alguns padrões de variação de  $k(z)$ , dado pela equação (4.2.16), para o caso polinomial, para alguns valores de  $\alpha$ .

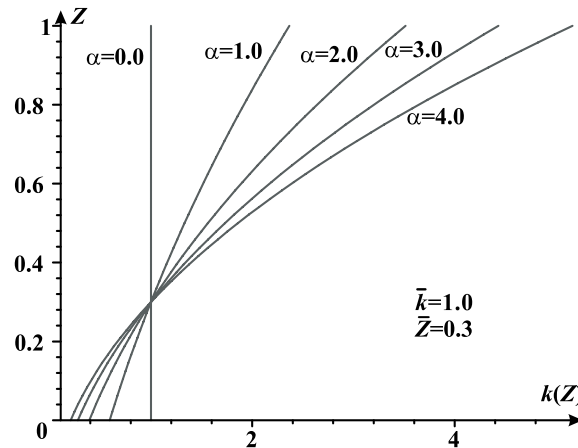


Figura 4.3: Padrões de variação ilustrativos da função quadrática  $k(z)$ , para alguns valores de  $\alpha$ .

#### 4.2.1.3. Solução Trigonométrica

Para este padrão de variação, as hipóteses adotadas são  $\beta^2 > 0$  e  $\lambda = 0$ . As quais levam às equações (4.2.4) e (4.2.5) a serem reescritas na forma do sistema de equações diferenciais, de acordo com as necessárias substituições mencionadas no início desta subseção,

$$\frac{p_{,zz}}{p} + \frac{k_{,z}}{k} \frac{p_{,z}}{p} = \beta^2 \quad (4.2.18)$$

$$\frac{k_{,z}}{k} + 2 \frac{p_{,z}}{p} = 0 \quad (4.2.19)$$

para o qual a solução geral (Dumont e Chaves, 2003) é dada por

$$k = k_0 (\alpha \sin(\beta Z) + \cos(\beta Z))^2 \quad \text{com} \quad k_0 = \bar{k} (\alpha \sin(\beta \bar{Z}) + \cos(\beta \bar{Z}))^{-2} \quad (4.2.20)$$

$$p = p_0 (\alpha \sin(\beta Z) + \cos(\beta Z))^{-1} \quad \text{com} \quad p_0 = k_0^{-1} (\alpha \sin(\beta Z_0) + \cos(\beta Z_0))^{-1} \quad (4.2.21)$$

em termos das constantes materiais  $\alpha$ ,  $\beta$  e um valor de referência  $\bar{k}$ . A propriedade material  $k(z)$  varia de acordo com uma curva que não pode ser aproximada pela função exponencial do primeiro caso, conduzindo assim a uma



descrição de um padrão material completamente diferente. O parâmetro  $p_0$  é avaliado de acordo com os mesmos tipos de considerações que dizem respeito às equações (4.2.10) e (4.2.11), no primeiro caso. Observe que uma translação de coordenadas também é possível neste modelo material, em vista de que as constantes  $\alpha$  e  $\beta$  foram ajustadas de forma a expressar  $k(z)$  como uma função de  $Z \equiv z + Z_0$ .

A figura 4.4 (Dumont e Chaves, 2003) mostra o gráfico de alguns padrões de variação de  $k(z)$ , dado pela equação (4.2.20), para o caso trigonométrico, para alguns valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . No primeiro gráfico o valor de  $\beta = 1,5$  está fixo e  $\alpha$  varia de 1,0 a 1,8. No segundo fixa-se o valor de  $\alpha = 1,0$ , variando  $\beta$  de 0 a 1,6

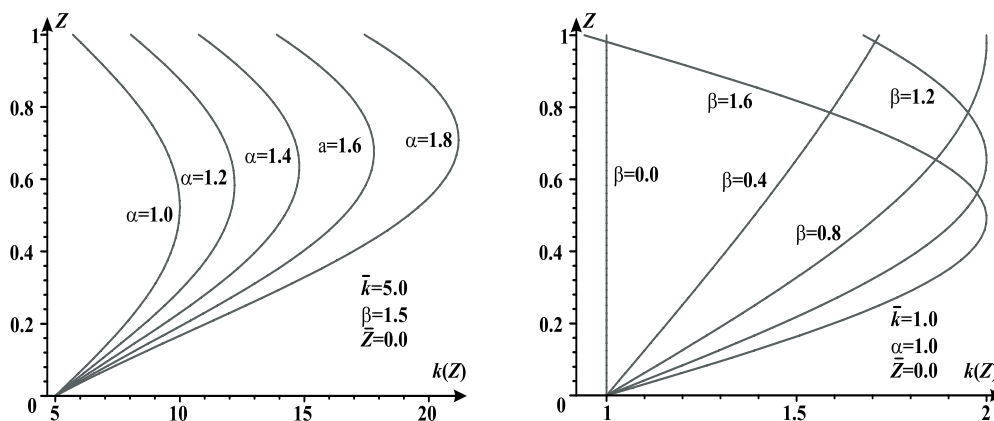


Figura 4.4: Padrões de variação ilustrativos da função trigonométrica  $k(z)$ , para alguns valores de  $\alpha$  e  $\beta$ .

#### 4.2.2. Problema Ortotrópico

Como consequência de o processo de obtenção das equações (4.2.4) e (4.2.5) ser o mesmo para materiais isotrópicos e ortotrópicos, como já mencionado no início da Seção 4.2, as soluções delineadas na Subseção 4.2.1 são imediatamente aplicáveis, não apenas em termos das constantes básicas  $\beta$  e  $\lambda$  que se podem escolher para se chegar a expressões viáveis das funções incógnitas  $z'$ , de acordo com

$$\frac{p_{z,z'}}{p} + \frac{(kc)_{z'}}{2kc} \frac{p_{z,z'}}{p} = \pm \beta^2, \quad \frac{(kc)_{z'}}{2kc} + 2 \frac{p_{z,z'}}{p} = \lambda \quad (4.2.24)$$

mas também em termos das soluções de  $p(z')$ , as quais têm a mesma expressão de  $p(z)$ , exceto pela constante embutida, a qual deve ser reinterpretada, haja vista que se está trabalhando em um espaço transformado.

Dada a expressão de  $p \equiv p(z')$ , é possível executar a transformação de coordenadas entre  $Z$  e  $z'$ , de acordo com as equações (4.1.9)-(4.1.11) (Dumont e Chaves, 2004):

$$z = \int \sqrt{\frac{k(z')}{c(z')}} dz' + Const. = \sqrt{C_1} \int \frac{z'^{\lambda} dz'}{p(z')^2 c(z')} + Const. \quad (4.2.25)$$

$$z' = \int \sqrt{\frac{c(Z)}{k(Z)}} dZ + Const. = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \int \frac{p(Z)^2 c(Z)}{Z^{\lambda}} dZ + Const. \quad (4.2.26)$$

É importante lembrar que as constantes de integração nas equações acima devem ser calculadas de tal maneira que  $Z = Z_0$  quando  $z' = 0$  (e particularizada para  $\lambda = 0$ ).

Diferentemente do que foi feito na seção anterior, para material isotrópico, na presente formulação os padrões de variação para a condutividade  $k(Z)$  e o calor específico  $c(Z)$  não são obtidos diretamente, haja vista que as transformações de coordenadas entre  $Z$  e  $z'$ , dadas nas equações (4.2.25) e (4.2.26), e as expressões explícitas de  $p(z')$  e  $c(z')$  são interdependentes.

De acordo com a segunda das equações (4.2.24) obtém-se

$$k(z')c(z') = C_1 \frac{z'^{2\lambda}}{p(z')^4} \quad (4.2.27)$$

Adiante, a substituição de  $kc$  na primeira das equações (4.2.24), para a expressão de  $p \equiv p(z')$ , fornece:

$$\frac{p_{,z'z'}}{p} + \frac{\lambda p_{,z'}}{z' p} - \frac{2(p_{,z'})^2}{p^2} = \pm \beta^2 \quad (4.2.28)$$

Um procedimento que parece funcionar (Dumont e Chaves, 2004, 2005) começa com uma presumida família de relações entre a condutividade e o calor específico dada pela relação  $c(z)/k(z)$ , conduzindo assim a uma expressão de  $z'$  a partir da equação (4.2.26). Em um segundo passo, calcula-se  $p(z')$  na equação (4.2.28), executando-se a transformação de coordenadas para expressar  $p(z)$  e finalmente usa-se alguma heurística para inferir qual família de funções  $k(z)$  e  $c(z)$  satisfaz tanto o produto  $k(z)c(z)$  na equação (4.2.27) quanto a relação inicialmente presumida  $c(z)/k(z)$  (sempre tendo  $\lambda = 0$ ). Nos itens a seguir é mostrado o desenvolvimento que leva às expressões de  $k(z)$  e  $c(z)$ .

#### 4.2.2.1. Hipótese a respeito da relação entre condutividade e calor específico

Inicia-se com a hipótese

$$\sqrt{\frac{c(z)}{k(z)}} = f(z) \equiv f(z + Z_0) \quad (4.2.29)$$

tal que, por definição, como introduzido nas equações (4.1.5),

$$f(\bar{Z}) = 1, \quad k(\bar{z}) = c(\bar{z}) = 1 \quad (4.2.30)$$

#### 4.2.2.2. Cálculo da coordenada transformada $z'$ a partir da equação (4.2.26)

A seguir, obtém-se  $z'$  a partir da equação (4.2.26), cuidando para que  $f(Z)$  seja integrável e tal que  $z' = 0$  quanto  $z = 0$ .

#### 4.2.2.3. Cálculo da função $p(z')$ como uma solução da equação (4.2.28) em termos dos parâmetros $\alpha$ e $\beta$

Então, é possível expressar  $p(z')$  como uma solução da equação (4.2.28), em termos dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , como mostra a tabela 4.2 na seção seguinte, escrita de forma geral como

$$p = p_0 P(\alpha, \beta, Z) \equiv p_0 P \quad (4.2.31)$$

onde a constante  $p_0$  é obtida de tal forma que

$$k(Z_0)p(Z_0) = 1 \quad (4.2.32)$$

de acordo com o desenvolvimento feito na Seção 4.2 para material isotrópico.

#### 4.2.2.4. Cálculo das funções para condutividade e calor específico

Partindo das equações (4.2.29) e (4.2.27) e usando a notação da equação (4.2.31), segue que

$$k = \frac{\sqrt{C_1}}{f(p_0 P)^2}, \quad c = \frac{\sqrt{C_1} f}{(p_0 P)^2} \quad (4.2.33)$$

Calculando as constantes  $\sqrt{C_1}$  e  $p_0$  das equações (4.2.30) e (4.2.32)

$$\sqrt{C_1} = \left( f(Z_0) \frac{P(Z_0)}{P(\bar{Z})} \right)^2, \quad P_0 = f(Z_0) \frac{P(Z_0)}{P(\bar{Z})^2} \quad (4.2.34)$$

obtêm-se as expressões finais da condutividade e do calor específico

$$k = \frac{1}{f(Z)} \left( \frac{P(\bar{Z})}{P(Z)} \right)^2, \quad c = f(Z) \left( \frac{P(\bar{Z})}{P(Z)} \right)^2 \quad (4.2.35)$$

Estas expressões em termos das funções presumidas  $f(Z)$ , como na equação (4.2.29), e dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , devem ser checadas em relação aos

parâmetros reais do material com gradação funcional, obtidos em laboratório, com ajustes feitos de forma iterativa até uma concordância satisfatória entre o experimento e o modelo.

Além disso, na obtenção da expressão de  $p(z')$  na equação (4.2.31),

$$p = f(Z_0) \frac{P(Z_0)}{P(\bar{Z})^2} P(Z) \quad (4.2.36)$$

pode-se também fazer uso do seguinte produto na implementação numérica:

$$kp = \frac{f(Z_0)P(Z_0)}{f(Z)P(Z)} \quad (4.2.37)$$

### 4.3. Resumo das expressões obtidas na Seção 4.2

Nas tabelas a seguir é feito um resumo das equações desenvolvidas na Seção 4.2 para as funções  $p(z)$  e  $k(z)$  para problemas isotrópicos e as funções  $p(z')$ ,  $k_z(z')$  e  $c(z')$  para problemas ortotrópicos em termos das suposições feitas para a constante  $\beta$  tendo  $\lambda = 0$ .

A tabela 4.1 apresenta as expressões de  $p(z)$  e  $k(z)$  de acordo com a hipótese adotada para  $\beta$  na equação (4.2.4) adaptada para problema isotrópico, conforme é explicado na Subseção 4.2.1.

Tabela 4.1: Resumo das soluções  $p(z)$  e  $k(z)$  para os padrões de variação adotados.

	Funções $k(z)$ e $p(z)$
$\beta = 0$ (Quadrática)	$k = k_0(\alpha Z + 1)^2$ , $k_0 = \bar{k}(\alpha \bar{Z} + 1)^{-2}$ $p = p_0(\alpha Z + 1)^{-1}$ , $p_0 = k_0^{-1}(\alpha Z_0 + 1)^{-1}$
$+\beta^2$ (Trigonométrica)	$k = k_0(\alpha \text{sen}(\beta Z) + \cos(\beta Z))^2$ , $k_0 = \bar{k}(\alpha \text{sen}(\beta \bar{Z}) + \cos(\beta \bar{Z}))^{-2}$ $p = p_0(\alpha \text{sen}(\beta Z) + \cos(\beta Z))^{-1}$ , $p_0 = k_0^{-1}(\alpha \text{sen}(\beta Z_0) + \cos(\beta Z_0))^{-1}$
$-\beta^2$ (Exponencial)	$k = k_0 e^{-2\beta Z} (\alpha e^{2\beta Z} + 1)^2$ , $k_0 = \bar{k} e^{2\beta \bar{Z}} (\alpha e^{2\beta \bar{Z}} + 1)^{-2}$ $p = p_0 e^{\beta Z} (\alpha e^{2\beta Z} + 1)^{-1}$ , $p_0 = k_0^{-1} e^{\beta Z_0} (\alpha e^{2\beta Z_0} + 1)^{-1}$

A tabela 4.2 apresenta um resumo das soluções  $p(z')$ ,  $k_z(z')$  e  $c(z')$  em função da difusividade térmica  $a(z') = k_z(z')/c(z')$ , de acordo com as hipóteses adotadas para  $\beta$  na equação (4.2.4).

Tabela 4.2: Resumo das soluções  $p(z')$ ,  $k_z(z')$  e  $c(z')$  para os padrões de variação adotados de difusividade térmica  $a(z') = k_z(z')/c(z')$ .

$z' = \int_{z_0}^z \frac{dZ}{\sqrt{a(Z)}}$	$\beta = 0$ (Quadrática)	$p = \frac{(\alpha \bar{z}' + 1)^2 \sqrt{a_0}}{(\alpha z' + 1)}$	$k_z = \frac{p(\bar{z}')^2}{p(z')^2} \sqrt{a(Z)}$ $c = \frac{p(\bar{z}')^2}{p(z')^2} \frac{1}{\sqrt{a(Z)}}$
	$+\beta^2$ (Trigonométrica)	$p = \frac{(\alpha \text{sen}(\beta \bar{z}') + \cos(\beta \bar{z}'))^2 \sqrt{a_0}}{(\alpha \text{sen}(\beta z') + \cos(\beta z'))}$	
	$-\beta^2$ (Exponencial)	$p = \frac{e^{\beta z'} (\alpha (e^{2\beta z'} - 1) + 1)^2 \sqrt{a_0}}{e^{2\beta z'} (\alpha (e^{2\beta z'} - 1) + 1)}$	

## 5

# ELEMENTOS UNIDIMENSIONAIS PARA ANÁLISE DE ESTRUTURAS APORTICADAS

Neste Capítulo é desenvolvida a formulação do método híbrido de elementos finitos para elementos unidimensionais (elemento de treliça e elemento de viga) seguindo-se de maneira semelhante o desenvolvimento da formulação apresentado de forma completamente geral no Capítulo 2 para elementos bi- e tridimensionais.

A motivação deste capítulo é o estudo realizado pelo Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia – NiCAE, que é coordenado pelo professor Remo Magalhães de Souza, do Departamento de Engenharia Civil do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Pará através do convênio Eletronorte/UFPa, com a participação do autor e do orientador desta dissertação.

O intuito deste capítulo é apresentar a formulação de elementos finitos híbridos unidimensionais de forma a possibilitar sua implementação em um programa de análise dinâmica de estruturas aporticadas adequado à análise de trechos de linhas de transmissão, de acordo com os objetivos do NiCAE.

Os desenvolvimentos feitos neste Capítulo são fortemente influenciados pelas apostilas e notas de aulas do curso de método híbrido de elementos de contorno ministrado na PUC-Rio pelo professor Dumont.

### 5.1. Formulação de um elemento de treliça

Elementos de treliça são os elementos mais simples da análise estrutural. São definidos como elementos que trabalham unicamente sob cargas axiais (tração ou compressão). São denominados elementos unidimensionais, por possuírem apenas uma dimensão predominante (Figura 5.1).

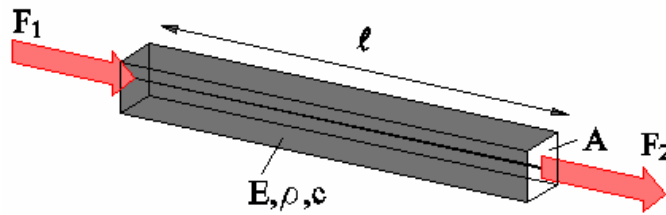


Figura 5.1: Elemento de treliça.

### 5.1.1. Formulação do Problema

A equação diferencial do problema de elasticidade para um elemento de treliça de comprimento  $\ell$ , seção transversal constante  $A$ , módulo de elasticidade  $E$ , massa específica  $\rho$  e amortecimento viscoso  $c$ , submetido a vibração harmônica, é dada por,

$$E \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (5.1.1)$$

onde  $c = 2\zeta\rho$  é definido por unidade de volume e  $u(x,t)$  é o deslocamento no tempo na direção do eixo longitudinal  $x$  da barra.

Supõe-se que o deslocamento  $u(x,t)$  possa ser definido em termos de uma separação de variáveis de espaço  $0 \leq x \leq \ell$  e tempo  $t \geq 0$ , como:

$$u(x,t) = u^*(x)e^{-i\omega t} \quad (5.1.2)$$

em que  $e^{-i\omega t}$  é função  $\tau(t,\omega)$  definida na equação (2.7.4). Portanto, a nova expressão para a equação (5.1.1), passa a ser

$$E \frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} + \rho(\omega^2 + 2i\zeta\omega)u^*(x) = 0 \quad (5.1.3)$$

ou ainda, de forma mais simples,

$$\frac{\partial^2 u^*(x)}{\partial x^2} + k^2 u^*(x) = 0 \quad (5.1.4)$$

em que

$$k^2 = \frac{\rho}{E}(\omega^2 + 2i\zeta\omega) \quad (5.1.5)$$

### 5.1.2. Obtenção da matriz de rigidez

A solução geral da equação (5.1.4) é:

$$u^*(x) = C_1 \frac{\text{sen } kx}{k} + C_2 \cos kx \quad (5.1.6)$$

de tal maneira que a solução estática alcançada como o caso limite seja

$$\lim_{k \rightarrow 0} u^*(x) = C_1 x + C_2 \quad (5.1.7)$$

Como se está analisando um problema no domínio da frequência, em termos de uma superposição de harmônicos, requer-se que

$$C_2 = 0 \quad (5.1.8)$$

já que a solução oscila em torno de  $u^*(x) = 0$ .

Uma forma adequada de expressar o campo de deslocamentos  $u^*$  (Dumont, 2005) é

$$u^* = \frac{1}{EA} \left\langle \frac{\text{sen } kx}{k} \quad \frac{\text{sen } k(\ell - x)}{k} \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \quad (5.1.9)$$

como uma função de dois parâmetros de força  $p_1^*$  e  $p_2^*$ , os quais são interpretados como as bases do sistema interno ou auxiliar de coordenadas, caracterizado por  $(^*)$ . Conseqüentemente, obtém-se para as tensões normais:

$$\sigma^* = E \frac{du^*}{dx} = \frac{1}{A} \langle \cos kx \quad -\cos k(\ell - x) \rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \equiv \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{p}^* \quad (5.1.10)$$

Por outro lado, pode-se descrever para os deslocamentos nas extremidades do elemento, definidas como os contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ :

$$u = \langle 1 \quad 0 \rangle \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_1 \mathbf{d} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad u = \langle 0 \quad 1 \rangle \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_2 \mathbf{d} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (5.1.11)$$

em que  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  são as funções  $u_{im}$  definidas na equação (2.6.10). Observa-se que neste caso especial de elementos unidimensionais,  $u_{im}$  é constante, valendo 1 ou 0, de acordo com a equação (5.1.11).

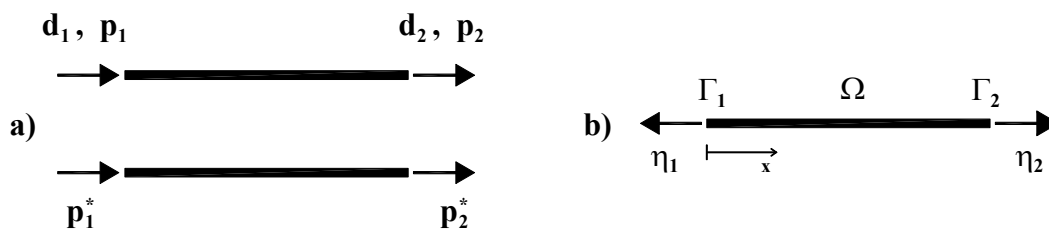


Figura 5.2: a) Sistema de coordenadas para a derivação da matriz de rigidez de um elemento de treliça e sistema interno de coordenadas; b) definição do domínio  $\Omega$ , contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  e correspondentes co-senos diretores  $\eta_1$  e  $\eta_2$  do elemento de treliça.



A matriz  $\mathbf{H}$  de transformação cinemática entre os sistemas  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{p}^*$  se expressa, de acordo com a equação (2.6.14), como:

$$\mathbf{H} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^{*T} \eta \mathbf{N} d\Gamma = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\cos k\ell \end{array} \right\} (-1) \langle 1 \ 0 \rangle + \left\{ \begin{array}{c} \cos k\ell \\ -1 \end{array} \right\} \langle 0 \ 1 \rangle = \begin{bmatrix} -1 & \cos k\ell \\ \cos k\ell & -1 \end{bmatrix} \quad (5.1.12)$$

onde  $\eta$  é a normal ao contorno do elemento e assume os valores  $-1$  e  $1$ , para os contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente, de acordo com a figura 5.2b. Deve-se observar que, para o elemento de treliça, a matriz de incidência cinemática  $\mathbf{H}$  é quadrada, como mostra a equação (5.1.12).

A matriz de flexibilidade no sistema interno  $\mathbf{p}^*$  se expressa, de acordo com a equação (2.6.13), como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^{*T} \eta \mathbf{u}^* d\Gamma = \frac{1}{EA} \left[ \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\cos k\ell \end{array} \right\} (-1) \left\langle 0 \ \frac{\sin k\ell}{k} \right\rangle + \left\{ \begin{array}{c} \cos k\ell \\ -1 \end{array} \right\} \left\langle \frac{\sin k\ell}{k} \ 0 \right\rangle \right] \\ &= \frac{\sin k\ell}{kEA} \begin{bmatrix} \cos k\ell & -1 \\ -1 & \cos k\ell \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

com a correspondente inversa

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{-kEA}{\sin^3 k\ell} \begin{bmatrix} \cos k\ell & 1 \\ 1 & \cos k\ell \end{bmatrix} \quad (5.1.14)$$

Finalmente, obtém-se a matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} = \frac{kEA}{\sin k\ell} \begin{bmatrix} \cos k\ell & -1 \\ -1 & \cos k\ell \end{bmatrix} \quad (5.1.15)$$

em que se pode verificar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{K} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1.16)$$

É válido mencionar que as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{F}$  expressas pelas equações (5.1.12) e (5.1.13), respectivamente, são obtidas para uma dada frequência angular  $\omega$  e também que elas são não-singulares, como foi dito na Subseção 2.7.1.

Como já foi dito na Subseção 2.7.3, pode-se, ao invés de se formular o problema para uma dada frequência  $\omega$ , expressar as soluções fundamentais, dadas nesta seção pela na equação (5.1.9), como uma série de potência de frequências, ou seja,

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{EA} \left( \left( x - \frac{\rho x^3}{6E} \omega^2 + \frac{\rho^2 x^5}{120E^2} \omega^4 - \frac{\rho^3 x^7}{5040E^3} \omega^6 + 0(\omega^8) \right) \right. \\ &\left. \left( (\ell - x) + \frac{\rho(-\ell + x)^3}{6E} \omega^2 - \frac{\rho^2(-\ell + x)^5}{120E^2} \omega^4 + \frac{\rho^3(-\ell + x)^7}{5040E^3} \omega^6 + 0(\omega^8) \right) \right) \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

$$\sigma^* = \frac{1}{A} \left\langle \left( 1 - \frac{\rho x^2}{2E} \omega^2 + \frac{\rho^2 x^4}{24E^2} \omega^4 - \frac{\rho^3 x^6}{720E^3} \omega^6 + 0(\omega^8) \right) \right. \\ \left. \left( -1 + \frac{\rho(-\ell+x)^2}{2E} \omega^2 - \frac{\rho^2(-\ell+x)^4}{24E^2} \omega^4 + \frac{\rho^3(-\ell+x)^6}{720E^3} \omega^6 + 0(\omega^8) \right) \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \equiv \boldsymbol{\sigma}^* \mathbf{p}^* \quad (5.1.18)$$

e dessa forma se obter as matrizes  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{K}$  também em série de freqüências como

$$\mathbf{H} = \int_{\Gamma} \left( \boldsymbol{\sigma}_0^* + \omega^2 \boldsymbol{\sigma}_1^* + \omega^4 \boldsymbol{\sigma}_2^* + \omega^6 \boldsymbol{\sigma}_3^* + \mathbf{0}(\omega^8) \right)^T \eta \mathbf{N} d\Gamma = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3 + \mathbf{0}(\omega^8) = \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{\rho}{E} \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{\ell^2}{2} \\ \frac{\ell^2}{2} & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho^2}{E^2} \omega^4 \begin{bmatrix} 0 & \frac{\ell^2}{24} \\ \frac{\ell^2}{24} & 0 \end{bmatrix} - \frac{\rho^3}{E^3} \omega^6 \begin{bmatrix} 0 & \frac{\ell^6}{720} \\ \frac{\ell^6}{720} & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.1.19)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} \left( \boldsymbol{\sigma}_0^* + \omega^2 \boldsymbol{\sigma}_1^* + \omega^4 \boldsymbol{\sigma}_2^* + \omega^6 \boldsymbol{\sigma}_3^* + \mathbf{0}(\omega^8) \right)^T \eta \left( \mathbf{u}_0^* + \omega^2 \mathbf{u}_1^* + \omega^4 \mathbf{u}_2^* + \omega^6 \mathbf{u}_3^* + \mathbf{0}(\omega^8) \right) d\Gamma = \\ \int_{\Gamma} \left( \boldsymbol{\sigma}_0^{*T} \mathbf{u}_0^* + \omega^2 \left( \boldsymbol{\sigma}_0^{*T} \mathbf{u}_1^* + \boldsymbol{\sigma}_1^{*T} \mathbf{u}_0^* \right) + \omega^4 \left( \boldsymbol{\sigma}_0^{*T} \mathbf{u}_2^* + \boldsymbol{\sigma}_1^{*T} \mathbf{u}_1^* + \boldsymbol{\sigma}_2^{*T} \mathbf{u}_0^* \right) + \right. \\ \left. + \omega^6 \left( \boldsymbol{\sigma}_0^{*T} \mathbf{u}_3^* + \boldsymbol{\sigma}_1^{*T} \mathbf{u}_2^* + \boldsymbol{\sigma}_2^{*T} \mathbf{u}_1^* + \boldsymbol{\sigma}_3^{*T} \mathbf{u}_0^* \right) + \mathbf{0}(\omega^8) \right) \eta d\Gamma = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{0}(\omega^8) = \\ \frac{\ell}{EA} \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\rho}{E} \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{2\ell^2}{3} & -\frac{\ell^2}{6} \\ -\frac{\ell^2}{6} & \frac{2\ell^2}{3} \end{bmatrix} + \frac{\rho^2}{E^2} \omega^4 \begin{bmatrix} \frac{2\ell^4}{15} & -\frac{\ell^4}{120} \\ -\frac{\ell^4}{120} & \frac{2\ell^4}{15} \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \frac{\rho^3}{E^3} \omega^6 \begin{bmatrix} \frac{4\ell^6}{315} & -\frac{\ell^6}{5040} \\ -\frac{\ell^6}{5040} & \frac{4\ell^6}{315} \end{bmatrix} \right) + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.1.20)$$

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{\ell} \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\rho \ell^2}{6E} \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{\rho^2 \ell^4}{45E^2} \omega^4 \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} & 1 \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \frac{\rho^3 \ell^6}{45E^3} \omega^6 \begin{bmatrix} \frac{2}{21} & \frac{31}{336} \\ \frac{31}{336} & \frac{2}{21} \end{bmatrix} \right) + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.1.21)$$

Fica claro na equação (5.1.20) que a primeira das matrizes no desenvolvimento em série da matriz  $\mathbf{F}$ , ou seja  $\mathbf{F}_0$ , é singular, como já se havia mencionado na Subseção 2.7.2, do Capítulo 2, e sua inversão pode ser obtida de acordo com o que apresenta o Apêndice A.

Na equação (5.1.21) estão explícitas as matrizes de rigidez e massa,  $\mathbf{K}_0$  e  $\mathbf{M}_1$ , encontradas na análise dinâmica pelo método convencional de elementos finitos denominadas apenas por  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$ .

## 5.2. Formulação de um Elemento de Viga – Viga Esbelta

Nesta formulação de viga, viga esbelta ou viga de Bernoulli-Euler, não se considera a deformação por cisalhamento, tampouco se considera a inércia à rotação, consideração que corresponderia a uma proposta de Rayleigh, que no entanto, não é consistente.

### 5.2.1. Formulação do Problema

A equação diferencial do problema de viga esbelta é:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (5.2.1)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $I$  é o momento de inércia,  $m = \rho A$  é a densidade específica (por unidade de comprimento), sendo  $A$  a área da seção transversal e  $\rho$  a massa específica, e  $c = 2\zeta\rho$  é o amortecimento viscoso, definido por unidade de comprimento.

Supõe-se que o deslocamento  $w(x,t)$  possa ser definido em termos de uma separação de variáveis de espaço  $x$  e de tempo  $t$ , como:

$$w(x,t) = w^*(x)e^{-i\omega t} \quad (5.2.2)$$

Então, a equação (5.2.1) passa a ser expressa como:

$$\frac{\partial^4 w^*(x)}{\partial x^4} - \frac{m}{EI}(\omega^2 + 2i\zeta\omega)w^*(x) = 0 \quad (5.2.3)$$

ou de forma mais adequada,

$$\frac{\partial^4 w^*(x)}{\partial x^4} - k^4 w^*(x) = 0 \quad (5.2.4)$$

onde

$$k^4 = \frac{m}{EI}(\omega^2 + 2i\zeta\omega) \quad (5.2.5)$$

### 5.2.2. Obtenção da Matriz de Rigidez

A solução geral da equação (5.2.4) se expressa, de maneira conveniente,

$$w^*(x) = C_1 \frac{\sin kx + \sinh kx}{k} + C_2 \frac{\sin kx - \sinh kx}{k^3} + C_3 (\cos kx + \cosh kx) + C_4 \frac{\cos kx - \cosh kx}{k^2} \quad (5.2.6)$$

de tal modo que

$$\lim_{k \rightarrow 0} w^*(x) = C_3 + C_1 x - C_4 x^2 - C_2 x^3 \quad (5.2.7)$$

O campo de deslocamentos transversais pode ser expresso na forma

$$w^* = \left\langle \frac{\text{sen } kx + \text{senh } kx}{k} \quad \frac{\text{sen } kx - \text{senh } kx}{k^3} \quad \cos kx + \cosh kx \quad \frac{\cos kx - \cosh kx}{k^2} \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \quad (5.2.8)$$

$$\equiv \langle \mathbf{w}_1^* \quad \mathbf{w}_2^* \quad \mathbf{w}_3^* \quad \mathbf{w}_4^* \rangle \mathbf{p}^* \equiv \mathbf{w}^* \mathbf{p}^*$$

em função de quatro parâmetros de força, numa formulação híbrida de elementos finitos. Estes parâmetros  $\mathbf{p}^*$  não têm necessariamente um sentido físico definido, embora pudessem tê-lo, como se fez para a dedução de matriz de rigidez do elemento de treliça. Para efeito de estabelecimento das equações que governam o problema da viga, escreve-se, com a mesma notação usada para o elemento de treliça,

$$\left\{ \frac{dw^*}{dx} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^* & \mathbf{w}_2^* & \mathbf{w}_3^* & \mathbf{w}_4^* \\ \frac{d\mathbf{w}_1^*}{dx} & \frac{d\mathbf{w}_2^*}{dx} & \frac{d\mathbf{w}_3^*}{dx} & \frac{d\mathbf{w}_4^*}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \quad (5.2.9)$$

Conseqüentemente, obtém-se para os esforços seccionais:

$$\begin{Bmatrix} Q^* \\ M^* \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{d^3 \mathbf{w}_1^*}{dx^3} & \frac{d^3 \mathbf{w}_2^*}{dx^3} & \frac{d^3 \mathbf{w}_3^*}{dx^3} & \frac{d^3 \mathbf{w}_4^*}{dx^3} \\ \frac{d^2 \mathbf{w}_1^*}{dx^2} & \frac{d^2 \mathbf{w}_2^*}{dx^2} & \frac{d^2 \mathbf{w}_3^*}{dx^2} & \frac{d^2 \mathbf{w}_4^*}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}^* \mathbf{p}^* \quad (5.2.10)$$

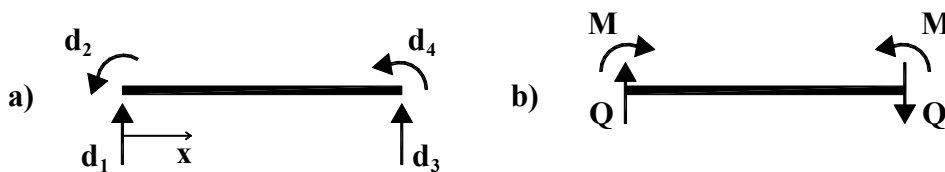


Figura 5.3: a) sistema de coordenadas para a matriz de rigidez; b) convenção de esforços para viga.

Por outro lado, usando a primeira das figuras 5.3 para a definição das grandezas do sistema externo de coordenadas e a segunda para a convenção de momentos fletores e esforços cortantes positivos, pode-se descrever para os deslocamentos e rotações nas extremidades do elemento, definidas como os contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , assim como para as matrizes  $\eta$  com os co-senos diretores:

$$\left\{ \begin{array}{c} w \\ \frac{dw}{dx} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{N}_1 \mathbf{d}; \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (5.2.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} w \\ \frac{dw}{dx} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{N}_2 \mathbf{d}; \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (5.2.12)$$

A matriz  $\mathbf{H}$  de transformação cinemática entre os sistemas  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{p}^*$  se expressa, de acordo com a equação (2.6.14), como

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=0} \boldsymbol{\eta}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=\ell} \boldsymbol{\eta}_2 \mathbf{N}_2 \quad (5.2.13)$$

Escrevendo, por simplicidade,  $C = \cosh k\ell$ ,  $c = \cos k\ell$ ,  $S = \sinh k\ell$ ,  $s = \sen k\ell$ , tem-se:

$$\mathbf{H} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & k^2(c-C) & k(S-s) \\ -2 & 0 & C+c & -(S+s)/k \\ 0 & 0 & -k^3(S+s) & k^2(C-c) \\ 0 & 2 & k(S-s) & -C-c \end{bmatrix} \quad (5.2.14)$$

Pode-se verificar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{H} = 2EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.2.15)$$

A matriz de flexibilidade no sistema interno  $\mathbf{p}^*$  se expressa, de acordo com a equação (2.6.13), como

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=0} \boldsymbol{\eta}_1 \mathbf{u}^{*T} \Big|_{x=0} + \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=\ell} \boldsymbol{\eta}_2 \mathbf{u}^{*T} \Big|_{x=\ell} \quad (5.2.16)$$

ou,

$$\mathbf{F} = -2EI \begin{bmatrix} k(Cs - Sc) & 0 & k^2 Ss & -1 + Cc \\ 0 & (Sc - Cs)/k^3 & 1 - Cc & -Sc/k^2 \\ k^2 Ss & 1 - Cc & k^3 (Sc + Cs) & 0 \\ -1 + Cc & -Ss/k^2 & 0 & -(Sc + Cs)/k \end{bmatrix} \quad (5.2.17)$$

Pode-se verificar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{F} = -2EI\ell \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\ell^3/3 & 0 & \ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ell & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.2.18)$$

Após a avaliação da inversa  $\mathbf{F}^{-1}$ , realiza-se o produto  $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}$ , conforme equação (2.6.22), obtendo-se

$$\mathbf{K} = \frac{EI k}{1 - Cc} \begin{bmatrix} k^2(Sc + Cs) & kSs & -k^2(S + s) & k(C - c) \\ kSs & Cs - Sc & k(c - C) & S - s \\ -k^2(S + s) & k(c - C) & k^2(Sc + Cs) & -kSs \\ k(C - c) & S - s & -kSs & Cs - Sc \end{bmatrix} \quad (5.2.19)$$

Pode-se verificar que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{K} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (5.2.20)$$

Dada a equação (5.2.19), pode-se expressar a expansão em série de potência de frequência da matriz de rigidez efetiva do elemento de viga, como:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} - \frac{m\ell}{35} \omega^2 \begin{bmatrix} 13 & \frac{11\ell}{6} & \frac{9}{2} & -\frac{13\ell}{12} \\ \frac{11\ell}{6} & \frac{\ell^2}{2} & \frac{13\ell}{2} & -\frac{\ell^2}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{13\ell}{3} & 12 & \frac{4}{3} \\ \frac{13\ell}{12} & \frac{\ell^2}{4} & 13 & -\frac{11\ell}{6} \end{bmatrix} - \frac{m^2 \ell^5}{161700EI} \omega^4 \begin{bmatrix} 59 & \frac{223\ell}{18} & \frac{1279}{24} & -\frac{1681\ell}{144} \\ \frac{223\ell}{18} & \frac{71\ell^2}{71} & \frac{1681\ell}{24} & -\frac{1097\ell^2}{144} \\ \frac{1279}{24} & \frac{1681\ell}{71} & 59 & -\frac{432}{223\ell} \\ \frac{24}{1681\ell} & \frac{144}{1097\ell^2} & \frac{223\ell}{71\ell^2} & \frac{18}{27} \end{bmatrix} - \frac{m^3 \ell^9}{E^2 I^2} \omega^6 \begin{bmatrix} \frac{551}{794593800} & \frac{3547\ell}{23837814000} & \frac{5801}{8475667200} & -\frac{112631\ell}{762810048000} \\ \frac{3547\ell}{23837814000} & \frac{127\ell^2}{3972969000} & \frac{112631\ell}{762810048000} & -\frac{899\ell^2}{28252224000} \\ \frac{5801}{8475667200} & \frac{112631\ell}{762810048000} & \frac{551}{794593800} & -\frac{3547\ell}{23837814000} \\ -\frac{112631\ell}{762810048000} & -\frac{899\ell^2}{28252224000} & -\frac{3547\ell}{23837814000} & \frac{127\ell^2}{3972969000} \end{bmatrix} + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.2.21)$$

A combinação das matrizes de rigidez efetiva dadas pelas equações (5.1.15) e (5.2.19), obtidas para os sistemas de coordenadas indicados pelas figuras 5.2a e 5.4a, respectivamente, permite escrever a matriz de rigidez efetiva de um elemento de viga de Bernoulli-Euler em um sistema de coordenadas locais com 6 graus de liberdade (de acordo com a figura 5.4a) na forma:

$$\mathbf{K} = \frac{EI k}{1 - Cc} \begin{bmatrix} \frac{k' EA c' (1 - Cc)}{s'} & \frac{EI k}{EI k} & 0 & 0 & -\frac{k' EA (1 - Cc)}{s'} & 0 & 0 \\ 0 & k^2 (Sc + Cs) & kSs & 0 & 0 & -k^2 (S + s) & k(C - c) \\ 0 & kSs & Cs - Sc & 0 & 0 & k(c - C) & S - s \\ -\frac{k' EA (1 - Cc)}{s'} & 0 & 0 & \frac{k' EA c' (1 - Cc)}{s'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 (S + s) & k(c - C) & 0 & 0 & k^2 (Sc + Cs) & -kSs \\ 0 & k(C - c) & S - s & 0 & 0 & -kSs & Cs - Sc \end{bmatrix} \quad (5.2.22)$$

onde:  $c' = \cos k' x$ ,  $s' = \sin k' x$  e  $k' = \sqrt{\frac{\rho}{E}(\omega^2 + 2i\zeta\omega)}$ .

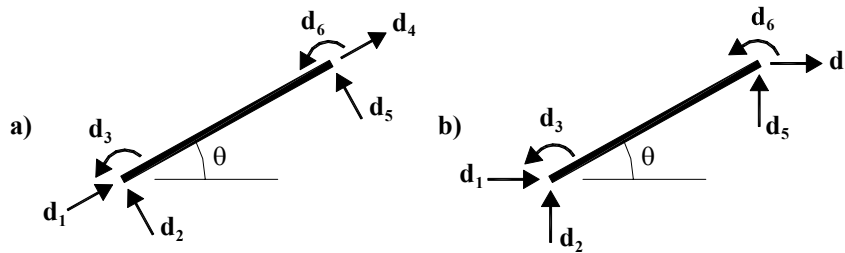


Figura 5.4: a) sistema de coordenadas locais e; b) sistema de coordenadas globais de um elemento de viga com 6 graus de liberdade.

A matriz de rigidez expressa pela equação (5.2.22) corresponde ao sistema local indicado pela figura (5.4a). Porém, em geral se quer trabalhar com uma matriz de rigidez de um elemento de viga que corresponda ao sistema de coordenadas da figura 5.4b. Para tanto é necessário utilizar-se de uma matriz de transformação (ver Apêndice D) que transforme os deslocamentos do sistema da figura 5.4b para o sistema da figura 5.4a. Tal matriz de transformação é:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2.23)$$

A relação que expressa a transformação da matriz de rigidez do elemento de viga no sistema local, equação (5.2.22), para a matriz de rigidez no sistema global do elemento, através da utilização da matriz de transformação  $\mathbf{T}$ , equação (5.2.23), é expressa como:

$$\mathbf{K}^g = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{M}_2 \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{M}_3 \mathbf{T} + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.2.24)$$

onde  $\mathbf{K}^g$  é a matriz de rigidez do elemento de viga para o sistema de coordenadas indicado pela figura 5.4b.

A expressão mais à direita da equação (5.2.24) expressa a transformação das matrizes de rigidez e massa generalizada do sistema local para o sistema

global do elemento, nela percebe-se que tal transformação pode ser realizada após o desenvolvimento em série da matriz de rigidez efetiva, dada pela equação (5.2.22).

A matriz de rigidez da equação (5.2.22) é também o ponto de partida para se obter a matriz de rigidez efetiva de um elemento de treliça em um sistema de coordenadas locais com 4 graus de liberdade, conforme ilustra a figura 5.5. Para tanto é necessário que se faça uma condensação dinâmica (ver Apêndice F) dos graus de liberdade 3 e 6 da figura 5.4a.

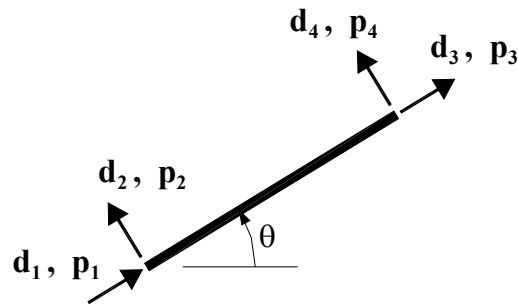


Figura 5.5: sistema de coordenadas locais de um elemento de treliça no plano.

Depois de feita a condensação dinâmica dos referidos graus de liberdade, obtêm-se a seguinte matriz de rigidez para um elemento de treliça plana (de acordo com a figura 5.5):

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{\ell} \left( \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\rho \ell^2}{6E} \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{\rho^2 \ell^4}{45E^2} \omega^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda^2}{21} & 0 & \frac{31\lambda^2}{336} \\ \frac{7}{8} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{31\lambda^2}{336} & 0 & \frac{2\lambda^2}{21} \end{bmatrix} \\ - \frac{\rho^3 \ell^6}{45E^3} \omega^6 \begin{bmatrix} \frac{2}{21} & 0 & \frac{31}{336} & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda^4}{2079} & 0 & \frac{73\lambda^4}{76032} \\ \frac{31}{336} & 0 & \frac{2}{21} & 0 \\ 0 & \frac{73\lambda^4}{76032} & 0 & \frac{2\lambda^4}{2079} \end{bmatrix} + \mathbf{O}(\omega^8) \end{array} \right) \quad (5.2.25)$$

onde:  $\lambda = \frac{\ell}{r}$  é o índice de esbeltez da barra, em que  $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$  é o raio de giração.

Pode-se concluir da equação (5.2.25) que, num elemento de treliça, a influência da rigidez a flexão é tão maior quanto maior for o índice de esbeltez da barra, ou seja, quanto maior for o comprimento da barra, maior será a influência de EI no



deslocamento transversal da barra, aproximando o comportamento da treliça ao comportamento de uma viga.

O mesmo tipo de transformação expressa pela equação (5.2.24) pode ser aplicado à equação (5.2.25), em que a matriz de transformação  $\mathbf{T}$  passa a ser expressa como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.1.22)$$

e permite transformar a matriz de rigidez da equação (5.2.25), correspondente ao sistema de coordenadas da figura 5.5, para a matriz de rigidez de um elemento de treliça no sistema global dado pela figura 5.6.

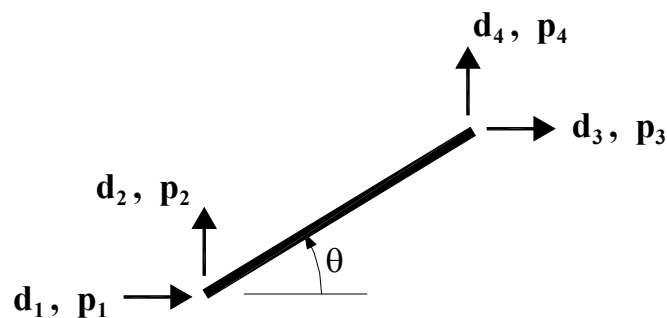


Figura 5.6: sistema de coordenadas globais para um elemento de treliça plana.

No Apêndice D são dados mais detalhes sobre a obtenção das matrizes de transformação entre sistemas de coordenadas distintos para elementos de treliça e viga no plano.

### 5.3. Formulação de um Elemento de Viga – Viga de Timoshenko

Nesta formulação de viga, considera-se tanto a deformação por cisalhamento quanto a inércia de rotação. Não será mostrada nesta seção, por questão de espaço, a expansão em série de frequência da matriz de rigidez efetiva do elemento de viga de Timoshenko. Porém, através do desenvolvimento apresentado a seguir, o leitor será capaz de efetuar tal expansão em série, de forma análoga ao que é feito na seção anterior.

#### 5.3.1. Formulação do Problema

Em decorrência da deformação por cisalhamento, a rotação  $\psi(x,t)$  de uma seção transversal, sobre a qual o momento fletor realiza trabalho,

$$M = EI \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \quad (5.3.1)$$

e a derivada da elástica  $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$  diferem entre si de uma parcela  $\gamma_0(x,t)$ :

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \psi + \gamma_0 \quad (5.3.2)$$

devido à deformação causada pelo esforço cortante,

$$Q = GA\kappa\gamma_0 \quad (5.3.3)$$

onde  $\kappa$  é um fator de forma que leva em conta a forma da seção transversal. A equação (5.3.2) expressa a compatibilidade de deformações de uma seção da viga, para momento fletor  $M$  e esforço cortante  $Q$  obtidos segundo as equações constitutivas (5.3.1) e (5.3.3).

Um elemento infinitesimal da viga está em equilíbrio segundo as equações:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} + q - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2\zeta m \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (5.3.4)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow Q - \frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{mI}{A} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (5.3.5)$$

Considerando o carregamento transversal  $q \equiv 0$ , tem-se das equações (5.3.1) a (5.3.5):

$$GA\kappa \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 2\zeta m \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (5.3.6)$$

$$GA\kappa \left( \frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) + EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{mI}{A} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (5.3.7)$$

Fazendo

$$y(x,t) = y^*(x)e^{-i\omega t} \quad (5.3.8)$$

$$\psi(x,t) = \psi^*(x)e^{-i\omega t} \quad (5.3.9)$$

têm-se as equações (5.3.6) e (5.3.7) na forma transformada:

$$GA\kappa \left( \frac{\partial^2 y^*}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) + (m\omega^2 + 2i\omega\zeta m)y^* = 0 \quad (5.3.10)$$

$$GA\kappa \left( \frac{\partial y^*}{\partial x} - \psi^* \right) + EI \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{mI}{A} \omega^2 \psi^* = 0 \quad (5.3.11)$$

Nestas equações,  $E$  é o módulo de elasticidade,  $I$  é o momento de inércia,  $m$  é a densidade específica (por unidade de comprimento),  $c = 2\zeta\rho$  é o amortecimento viscoso, definido por unidade de comprimento e  $\kappa$  é o fator de forma para deformação de uma seção por esforço cortante.

Eliminando  $\psi^*(x)$  nas equações (5.3.10) e (5.3.11) tem-se a equação

$$\frac{\partial^4 y^*(x)}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 y^*(x)}{\partial x^2} - k^4 y^*(x) = 0 \quad (5.3.12)$$

onde

$$k^4 = \frac{1}{EI} \left( 1 - \frac{mI\omega^2}{GA^2\kappa} \right) (m\omega^2 + 2i\zeta\omega - w) \quad (5.3.13)$$

$$T = \frac{1}{EI} \left[ \frac{mI}{A} \omega^2 + \frac{EI}{GA\kappa} (m\omega^2 + 2i\zeta\omega - w) \right] \quad (5.3.14)$$

A solução da equação (5.3.12) é expressa convenientemente na forma

$$y^*(x) = C_1 \frac{\sin k_1 x + \sinh k_2 x}{k} + C_2 \frac{\sin k_1 x - \sinh k_2 x}{k^3} + C_3 (\cos k_1 x + \cosh k_2 x) + C_4 \frac{\cos k_1 x - \cosh k_2 x}{k^2} \quad (5.3.15)$$

onde

$$k_1 = \sqrt{\sqrt{k^4 + \frac{T^2}{4}} + \frac{T}{2}} \quad (5.3.16)$$

$$k_2 = \sqrt{\sqrt{k^4 + \frac{T^2}{4}} - \frac{T}{2}} \quad (5.3.17)$$

Analogamente, obtém-se da equação (5.3.10) a expressão de  $\psi^*(x)$ :

$$\psi^*(x) = C_1 \frac{K_2 \cos k_1 x + K_1 \cosh k_2 x}{k} + C_2 \frac{K_2 \cos k_1 x - K_1 \cosh k_2 x}{k^3} + C_3 (-K_2 \sin k_1 x + K_1 \sinh k_2 x) + C_4 \frac{-K_2 \sin k_1 x - K_1 \sinh k_2 x}{k^2} \quad (5.3.18)$$

onde

$$K_1 = \frac{k_1^2 - \frac{m\omega^2}{EA}}{k_2} \quad (5.3.19)$$

$$K_2 = \frac{k_2^2 + \frac{m\omega^2}{EA}}{k_1} \quad (5.3.20)$$

As expressões de  $y^*(x)$  e  $\psi^*(x)$  nas equações (5.3.15) e (5.3.18) foram obtidas de tal modo que

$$\lim_{k \rightarrow 0} y^*(x) = 2C_3 + 2C_1x - C_4x^2 - C_2 \left( \frac{x^3}{3} - \frac{EIx}{2GA\kappa} \right) \quad (5.3.21)$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \psi^*(x) = 2C_1 - 2C_4x - C_2 \left( x^2 - \frac{3EI}{2GA\kappa} \right) \quad (5.3.22)$$

### 5.3.2. Obtenção da Matriz de Rigidez

O campo de deslocamentos transversais  $y^*(x)$  e as rotações  $\psi^*(x)$  podem ser expressos na forma

$$y^* = \left\langle \frac{\text{sen}k_1x + \text{senh}k_2x}{k} \quad \frac{\text{sen}k_1x - \text{senh}k_2x}{k^3} \quad \cos k_1x + \cosh k_2x \quad \frac{\cos k_1x - \cosh k_2x}{k^2} \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix}$$

$$\equiv \langle y_1^* \quad y_2^* \quad y_3^* \quad y_4^* \rangle \mathbf{p}^* \equiv \mathbf{y}^* \mathbf{p}^* \quad (5.3.23)$$

$$\psi^* = \left\langle \frac{K_2 \cos k_1x + K_1 \cosh k_2x}{k} \quad \frac{K_2 \cos k_1x - K_1 \cosh k_2x}{k^3} \right. \\ \left. - K_2 \text{sen}k_1x + K_1 \text{senh}k_2x \quad \frac{-K_2 \text{sen}k_1x - K_1 \text{senh}k_2x}{k^2} \right\rangle \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \quad (5.3.24)$$

$$\equiv \langle \psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \psi_3^* \quad \psi_4^* \rangle \mathbf{p}^* \equiv \boldsymbol{\psi}^* \mathbf{p}^*$$

em função de quatro parâmetros de força, numa formulação híbrida de elementos finitos. Os parâmetros  $\mathbf{p}^*$  não têm necessariamente um sentido físico definido, embora se pudesse fazer alguma atribuição a partir dos limites das equações (5.3.21) e (5.3.22). Para efeito de estabelecimento das equações que governam o problema da viga, escreve-se, com a mesma notação usada para o elemento de treliça,

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ \psi^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1^* & y_2^* & y_3^* & y_4^* \\ \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \quad (5.3.25)$$

Conseqüentemente, obtém-se para os esforços seccionais, segundo as equações (5.3.1) e (5.3.3):

$$\begin{Bmatrix} Q^* \\ M^* \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{d^2 \psi_1^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA} \psi_1^* & \frac{d^2 \psi_2^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA} \psi_2^* & \frac{d^2 \psi_3^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA} \psi_3^* & \frac{d^2 \psi_4^*}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{EA} \psi_4^* \\ \frac{d\psi_1^*}{dx} & \frac{d\psi_2^*}{dx} & \frac{d\psi_3^*}{dx} & \frac{d\psi_4^*}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}^* \mathbf{p}^* \quad (5.3.26)$$

De acordo com a seção anterior pode-se, usando a primeira das figuras 5.4 para a definição das grandezas do sistema externo de coordenadas e a segunda para a convenção de momentos fletores e esforços cortantes positivos, descrever para os deslocamentos e rotações nas extremidades do elemento, definidas como os contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , e para as matrizes  $\boldsymbol{\eta}$  dos co-senos,

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ \psi^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_1 \mathbf{d}; \quad \boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad em \Gamma_1 \quad (5.3.27)$$

$$\begin{Bmatrix} y^* \\ \psi^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_2 \mathbf{d}; \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad em \Gamma_2 \quad (5.3.28)$$

Desta forma, a matriz  $\mathbf{H}$  de transformação cinemática entre os sistemas  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{p}^*$  se expressa como

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=0} \boldsymbol{\eta}_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=\ell} \boldsymbol{\eta}_2 \mathbf{N}_2 \quad (5.3.29)$$

e a matriz de flexibilidade no sistema interno  $\mathbf{p}^*$  se expressa na forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=0} \boldsymbol{\eta}_1 \mathbf{u}^{*T} \Big|_{x=0} + \mathbf{N}^{*T} \Big|_{x=\ell} \boldsymbol{\eta}_2 \mathbf{u}^{*T} \Big|_{x=\ell} \quad (5.3.30)$$

Portanto, após a avaliação da inversa  $\mathbf{F}^{-1}$ , é possível realizar-se o produto  $\mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}$ , obtendo-se assim a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  do elemento de viga de Timosheko, de acordo com a equação (2.6.22).

## 5.4. Matriz de rigidez geométrica efetiva para elementos de treliça 2D

Para o estudo de cabos flexíveis através de elementos de treliça é necessário que se introduza na análise a matriz de rigidez geométrica, que leva em conta a influência da não-linearidade geométrica e permite a simulação do efeito do esforço de tração no cabo.

Na figura 5.7a é mostrado o sistema de coordenadas conveniente ao estudo do efeito de uma força de tração  $T$  sobre um elemento de treliça, e a figura 5.7b ilustra a configuração da força  $T$  no elemento.

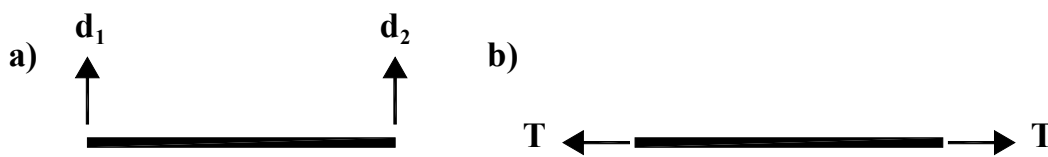


Figura 5.7: a) sistema de coordenadas para obtenção da matriz de rigidez geométrica de um elemento de treliça; b) configuração dos esforços de tração no elemento.

### 5.4.1. Formulação do Problema

A equação diferencial do problema em questão, sem a consideração de amortecimento, é a equação conhecida como equação da corda vibrante:

$$T \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.4.1)$$

onde  $T$  é a força de tração no elemento e  $m = \rho A$  é a massa por unidade de comprimento do elemento.

Supõe-se que o deslocamento transversal  $v(x,t)$  possa ser definido em termos de uma separação de variáveis de espaço  $0 \leq x \leq \ell$  e tempo  $t \geq 0$ , como:

$$v(x,t) = v^*(x)e^{-i\omega t} \quad (5.4.2)$$

em que  $e^{-i\omega t}$  é a função  $\tau(t,\omega)$  definida na equação (2.7.4). Portanto, a nova expressão para a equação (5.4.1) passa a ser expressa como

$$T \frac{\partial^2 v^*(x)}{\partial x^2} + m\omega^2 v^*(x) = 0 \quad (5.4.3)$$

ou ainda, de forma mais simples,

$$\frac{\partial^2 v^*(x)}{\partial x^2} + k^2 v^*(x) = 0 \quad (5.4.4)$$

em que

$$k^2 = \frac{m}{T} \omega^2 \quad (5.4.5)$$

#### 5.4.2. Obtenção da Matriz de Rigidez Geométrica

Como se pode notar, a equação (5.4.4) tem a mesma forma da equação (5.1.4), e portanto, sua solução é análoga à solução apresentada na Seção 5.1, lembrando-se que  $k$  está definido pela equação (5.4.5) e não mas pela equação (5.1.5).

Então, seguindo-se o desenvolvimento feito na Seção 5.1 chega-se à expressão da matriz de rigidez geométrica de elemento um elemento de treliça, que se expressa como

$$\mathbf{K}_{geo} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} = \frac{kT}{\text{sen } k\ell} \begin{bmatrix} \cos k\ell & -1 \\ -1 & \cos k\ell \end{bmatrix} \quad (5.4.6)$$

Desenvolvendo-se em série de frequência em  $\omega$  a expressão da matriz de rigidez geométrica acima, tem-se:

$$\mathbf{K}_{geo} = \frac{T}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{m}{T} \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{\ell^2}{3} & \frac{\ell^2}{6} \\ \frac{\ell^2}{6} & \frac{\ell^2}{3} \end{bmatrix} - \frac{m^2}{T^2} \omega^4 \begin{bmatrix} \frac{\ell^4}{45} & \frac{7\ell^4}{360} \\ \frac{7\ell^4}{360} & \frac{\ell^4}{45} \end{bmatrix} - \frac{m^3}{T^3} \omega^6 \begin{bmatrix} \frac{2\ell^6}{945} & \frac{31\ell^6}{15120} \\ \frac{31\ell^6}{15120} & \frac{2\ell^6}{945} \end{bmatrix} + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.4.7)$$

Deve-se lembrar que a matriz de rigidez geométrica dada pelas equações (5.4.6) e (5.4.7) diz respeito aos graus de liberdade  $d_1$  e  $d_2$  mostrados na figura 5.5a, os quais são perpendiculares aos graus de liberdade  $d_1$  e  $d_2$  mostrados na figura 5.2a.

A matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_{geo}$  dada pela equação (5.4.7) deve ser adicionada à matriz de rigidez elástica dada pela equação (5.2.25), levando em conta sua contribuição no grau de liberdade correspondente (comparar figuras 5.7a e 5.5). ou seja,

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_{geo} \quad (5.4.8)$$

onde  $\mathbf{K}_E$  é a matriz de rigidez elástica dada pela equação (5.2.25). Desta forma obtem-se a matriz de rigidez efetiva de um elemento de treliça que leva em conta os efeitos da formulação das equações de equilíbrio para a configuração deformada (o que é bastante apropriado para o estudo de cabos).

Dada de maneira Explícita, a equação (5.4.8) expressa-se da seguinte forma:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{\ell} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{T}{EA} & 0 & -\frac{T}{EA} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{T}{EA} & 0 & \frac{T}{EA} \end{bmatrix} - \frac{\rho \ell^2}{6E} \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right. \\
 - \frac{\rho^2 \ell^4}{45E^2} \omega^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{8} & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda^2}{21} + \frac{AE}{T} & 0 & \frac{31\lambda^2}{336} + \frac{7AE}{8T} \\ \frac{7}{8} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{31\lambda^2}{336} + \frac{7AE}{8T} & 0 & \frac{2\lambda^2}{21} + \frac{AE}{T} \end{bmatrix} \\
 \left. - \frac{\rho^3 \ell^6}{45E^3} \omega^6 \begin{bmatrix} \frac{2}{21} & 0 & \frac{31}{336} & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda^4}{2079} + \frac{2A^2E^2}{21T^2} & 0 & \frac{73\lambda^4}{76032} + \frac{31A^2E^2}{336T^2} \\ \frac{31}{336} & 0 & \frac{2}{21} & 0 \\ 0 & \frac{73\lambda^4}{76032} + \frac{31A^2E^2}{336T^2} & 0 & \frac{2\lambda^4}{2079} + \frac{2A^2E^2}{21T^2} \end{bmatrix} \right) + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (5.4.9)$$

(comparar com a equação (5.2.25)).

Um estudo mais elaborado deste Capítulo está sendo preparado para publicação (Dumont e Prazeres, 2006).



## 6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste Capítulo são apresentados alguns exemplos simples da utilização do método híbrido de elementos finitos, tanto para problemas de potencial quanto para problemas de elasticidade, de forma a permitir sua validação.

Os exemplos foram rodados em quatro programas implementados na linguagem Maple versão 8, quais sejam: um programa para a análise estática e dinâmica de problemas de elasticidade 2D, um programa para a análise estática e dinâmica de problemas de estruturas aporticadas por elementos de viga 2D, um programa para a análise estática e dinâmica de problemas de estruturas aporticadas por elementos de treliça 2D e um programa para a análise de problemas de potencial 2D quase-harmônico e harmônico.

A escolha da linguagem Maple se deu pela simplicidade na implementação e pela facilidade de se trabalhar com operações simbólicas, o que foi de grande ajuda quanto ao processo de obtenção das soluções fundamentais utilizadas e nas expansões em série de frequência destas soluções.

Os exemplos foram rodados em um computador com as seguintes características: processador Pentium(R) 4, CPU 1.70 GHz, memória RAM de 256 MB, disco rígido de 19 GB e sistema operacional Microsoft Windows XP.

### 6.1. Avaliação da Precisão para Problemas de Fluxo em Estado Permanente

A equação de Laplace (2.1.14) é resolvida para o problema representado na figura 6.1, usando-se várias malhas quadradas, como resumido na tabela 6.1. Usa-se como norma de erro a expressão

$$|e| = \sqrt{0.5 \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} (u_{num} - u_{exato}) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} (u_{num} - u_{exato}) \right)^2 \right) d\Omega} \quad (6.1.1)$$

como sugerido por Jirousek e Stojek (1995), para avaliar a convergência de resultados, como mostrado na figura 6.2, comparando-se 4 malhas quadradas para os elementos Q4 e Q8 e usando  $n \times n = 1 \times 1$ ,  $2 \times 2$  e  $5 \times 5$  pontos de Gauss para se obter o erro dado pela equação (6.1.1).

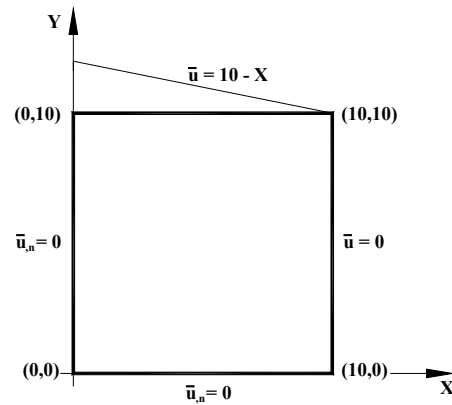


Figura 6.1: Exemplo para a avaliação da solução numérica da equação de Laplace.

Como se pode notar na figura 6.2b, os gradientes são avaliados com mais precisão em pontos mais distantes dos pontos nodais, com melhores resultados para  $n = 1$ . Na figura 6.2b, as linhas em vermelho (maiores valores de  $\ln|e|$ ) dizem respeito aos elementos Q4 e as linhas em azul aos elementos Q8.

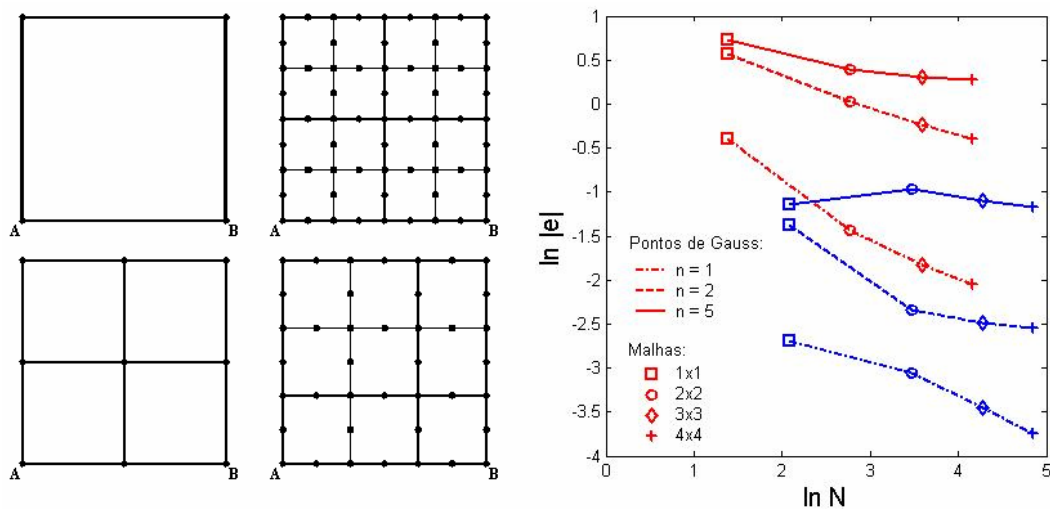


Figura 6.2: a) malhas utilizadas no estudo; b) Valores da norma de erro da equação (6.1.1) para várias malhas e números de pontos de Gauss.

Tabela 6.1: Resumo dos elementos e malhas do exemplo 6.1, com valores de referência N da figura 6.2.

$u_s^*$	$u_n$	F	H	K	N			
					1x1	2x2	3x3	4x4
Quadrático 5 gdl	Linear 4 gdl	5x5 posto 4	5x4 posto 3	4x4 posto 3	4	16	36	64
4º grau 9 gdl	Quadrático 8 gdl	9x9 posto 8	9x8 posto 7	8x8 posto 7	8	32	72	128

Nas figuras 6.3-6.17 são mostrados o potencial e os fluxos na direção  $x$  e na direção  $y$ , calculados de forma analítica e numérica, com a utilização de malhas  $1 \times 1$  e  $2 \times 2$  dos elementos Q4 e Q8, juntamente com seus resultados analíticos, respectivamente, para que se possa ter idéia do grau de precisão alcançado com estes elementos.

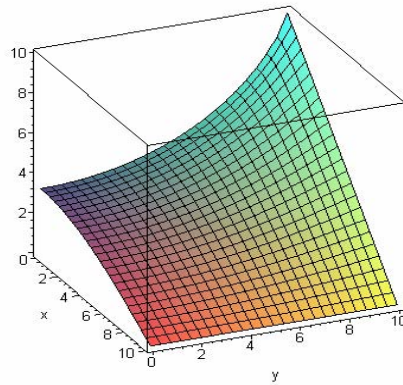


Figura 6.3: Resultado para o potencial, obtido de forma analítica.

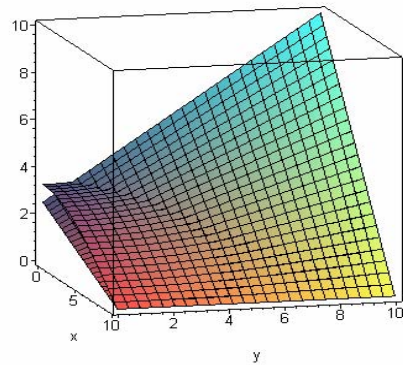


Figura 6.4: Resultado para o potencial, obtido pelo método híbrido através de uma malha de  $1 \times 1$  do elemento Q4, sobreposto ao resultado analítico.

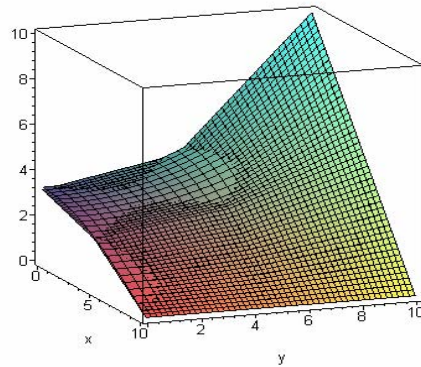


Figura 6.5: Resultado para o potencial, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 2x2 do elemento Q4, sobreposto ao resultado analítico.

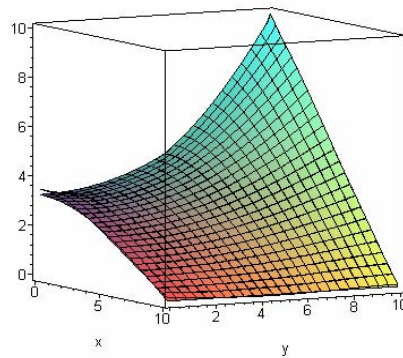


Figura 6.6: Resultado para o potencial, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 1x1 do elemento Q8, sobreposto ao resultado analítico.

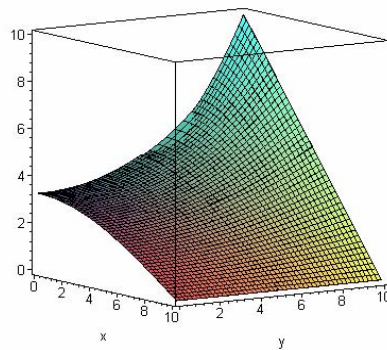


Figura 6.7: Resultado para o potencial, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 2x2 do elemento Q8, sobreposto ao resultado analítico.

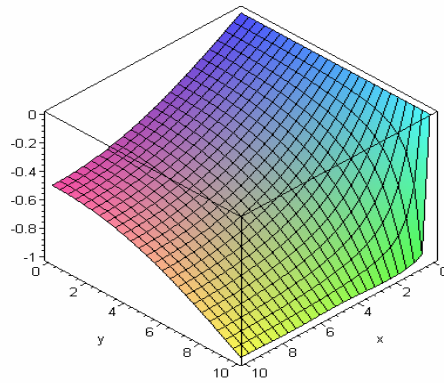


Figura 6.8: Resultado para o fluxo em x, obtido de forma analítica.

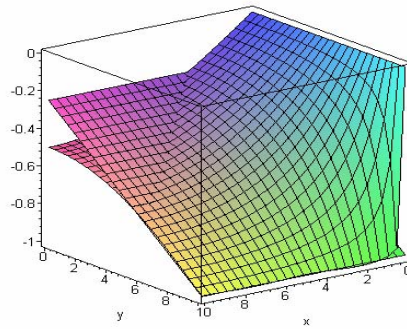


Figura 6.9: Resultado para o fluxo em x, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 1x1 do elemento Q4, sobreposto ao resultado analítico.

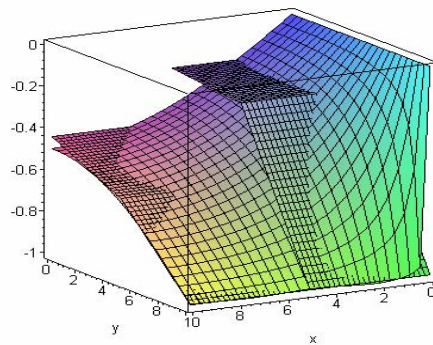


Figura 6.10: Resultado para o fluxo em x, obtido pelo método híbrido através de uma malha de 2x2 do elemento Q4, sobreposto ao resultado analítico.

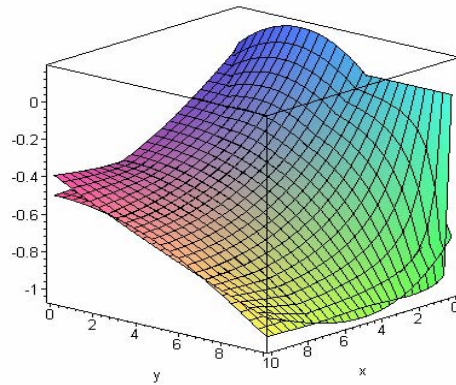


Figura 6.11: Resultado para o fluxo em  $x$ , obtido pelo método híbrido através de uma malha de  $1 \times 1$  do elemento Q8, sobreposto ao resultado analítico.

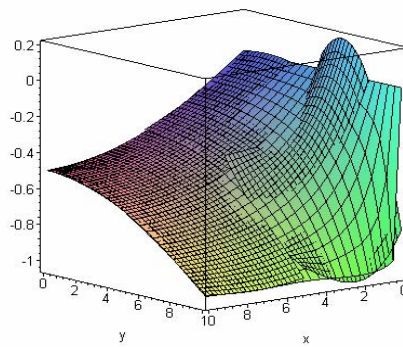


Figura 6.12: Resultado para o fluxo em  $x$ , obtido pelo método híbrido através de uma malha de  $2 \times 2$  do elemento Q8, sobreposto ao resultado analítico.

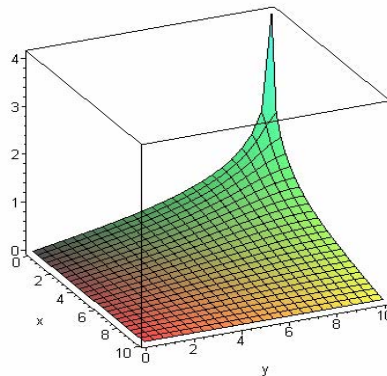


Figura 6.13: Resultado para o fluxo em  $y$ , obtido de forma analítica.

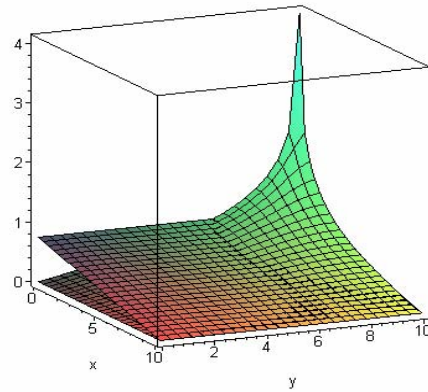


Figura 6.14: Resultado para o fluxo em  $y$ , obtido pelo método híbrido através de uma malha de  $1 \times 1$  do elemento Q4, sobreposto ao resultado analítico.

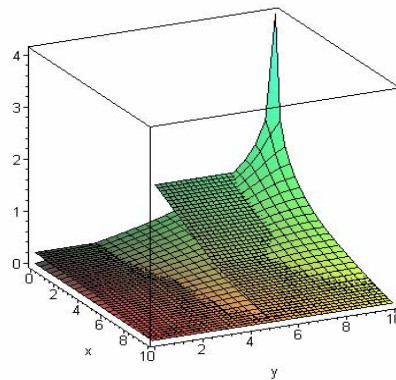


Figura 6.15: Resultado para o fluxo em  $y$ , obtido pelo método híbrido através de uma malha de  $2 \times 2$  do elemento Q4, sobreposto ao resultado analítico.

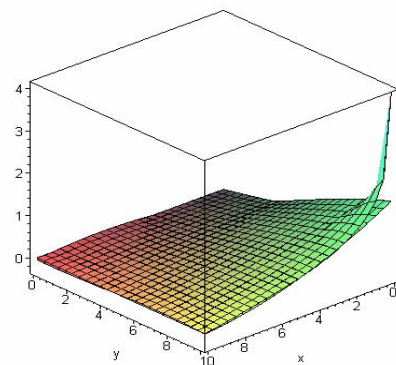


Figura 6.16: Resultado para o fluxo em  $y$ , obtido pelo método híbrido através de uma malha de  $1 \times 1$  do elemento Q8, sobreposto ao resultado analítico.

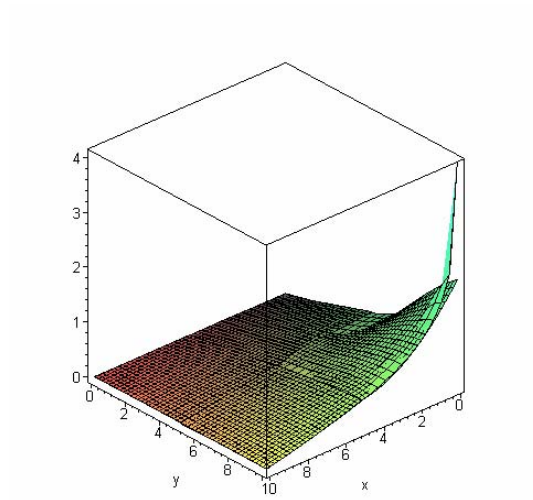


Figura 6.17: Resultado para o fluxo em  $y$ , obtido pelo método híbrido através de uma malha de  $2 \times 2$  do elemento Q8, sobreposto ao resultado analítico.



## 6.2. Condução de Calor Transiente Bidimensional em uma Placa Quadrada Homogênea

Este problema foi proposto por Bruch e Zvoloski (1974) e consiste na condução de calor homogênea no domínio quadrado da figura 6.18, para as condições de contorno indicadas. A condição de temperatura inicial é  $u(X, Z, 0) = 0$  em todo o domínio. A condutividade térmica isotrópica é  $k = 1$  e o calor específico é  $c = 1$ .

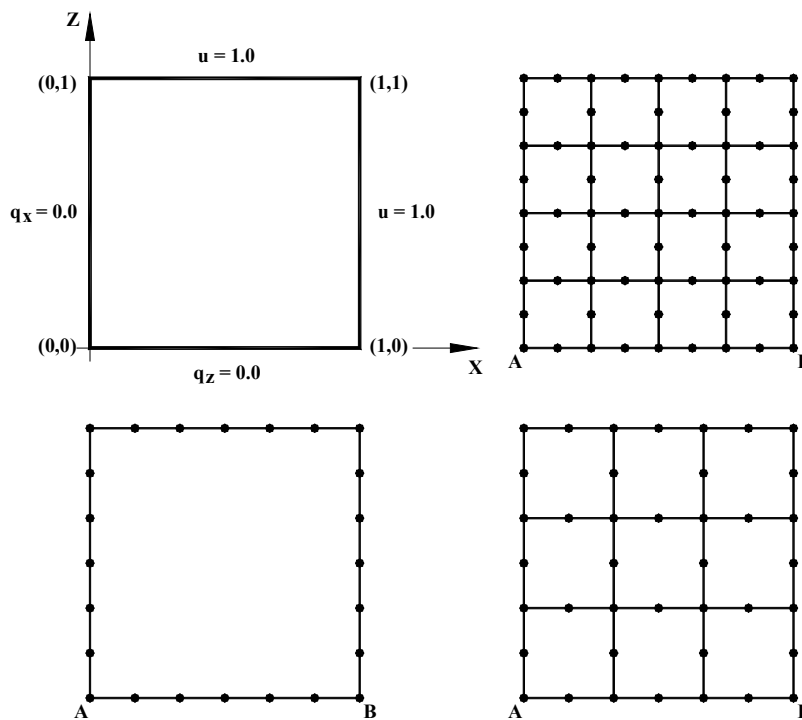


Figura 6.18: Geometria e condições de contorno do problema de condução de calor transiente bidimensional em uma placa quadrada, e as malhas usadas na discretização do problema.

A figura 6.19 mostra os autovalores calculados para uma malha quadrada de  $4 \times 4$  com elementos quadráticos (como ilustra a figura 6.18) e usando-se de 1 a 4 matrizes de massa generalizada, de acordo com a equação (2.7.1), comparados com os valores analíticos. Devido às condições de contorno em potencial prescrito, o problema tem um total de 48 graus de liberdade. Pode-se perceber que os resultados melhoram com o uso de mais matrizes de massa, embora erros de arredondamentos afetem a precisão dos autovalores mais altos. Note que vários autovalores ocorrem em pares (degrau na figura 6.19), devido à simetria do problema.

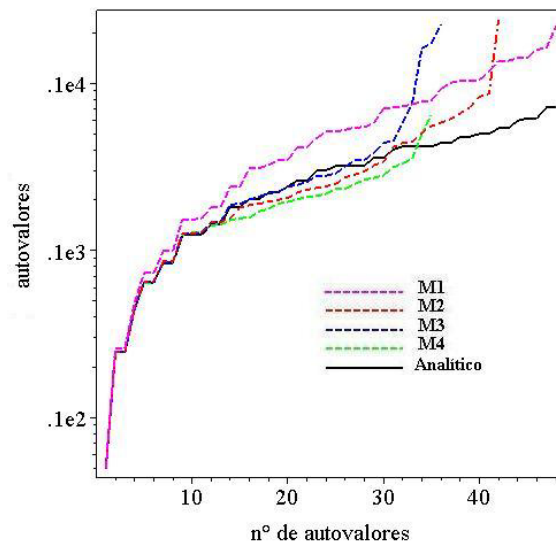


Figura 6.19: Autovalores de acordo com a equação (2.7.1) para a malha 4x4 da figura 6.18, usando-se de 1 a 4 matrizes de massa generalizada.

Como concerne ao problema transiente, o gráfico na figura 6.20 mostra resultados ao longo da face  $Z = 0$  (o qual é o mesmo ao longo da face  $X = 0$ , devido à simetria) usando uma malha 3x3, para vários instantes de tempo, comparando-se com a solução analítica. Os erros são maiores para pequenos valores de tempo, quando altos gradientes estão presentes, decaindo com o tempo, quando a temperatura tende a um valor constante, o que se percebe melhor na figura 6.23.

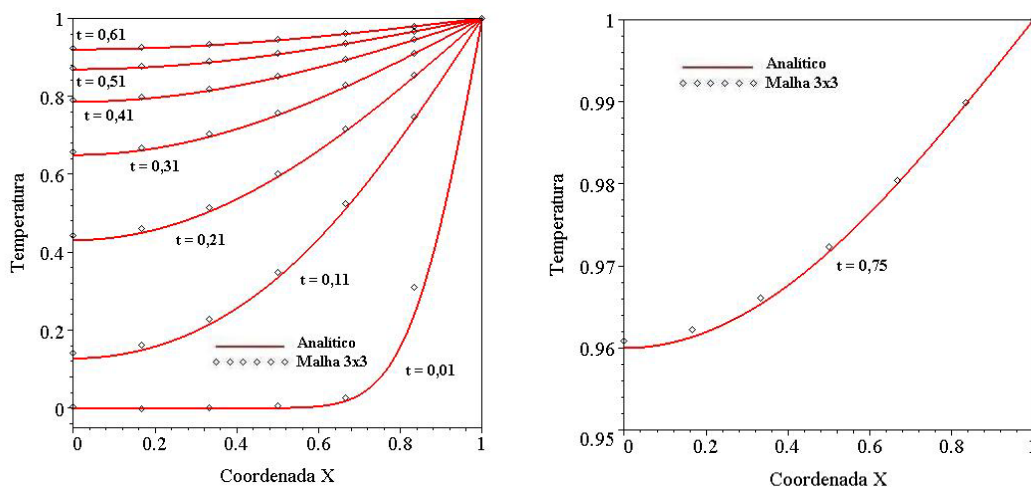


Figura 6.20: a) Resultados de temperatura ao longo da face  $Z = 0$  para vários instantes de tempo, obtidos com uma malha 3x3 de elementos quadráticos; b) Detalhe para a curva de temperatura  $t = 0,75$ .

O gráfico da figura 6.21 mostra resultados ao longo da face  $Z = 0$ , assim como na figura 6.20, usando uma malha  $4 \times 4$ , para vários instantes de tempo, comparando-se com a solução analítica.

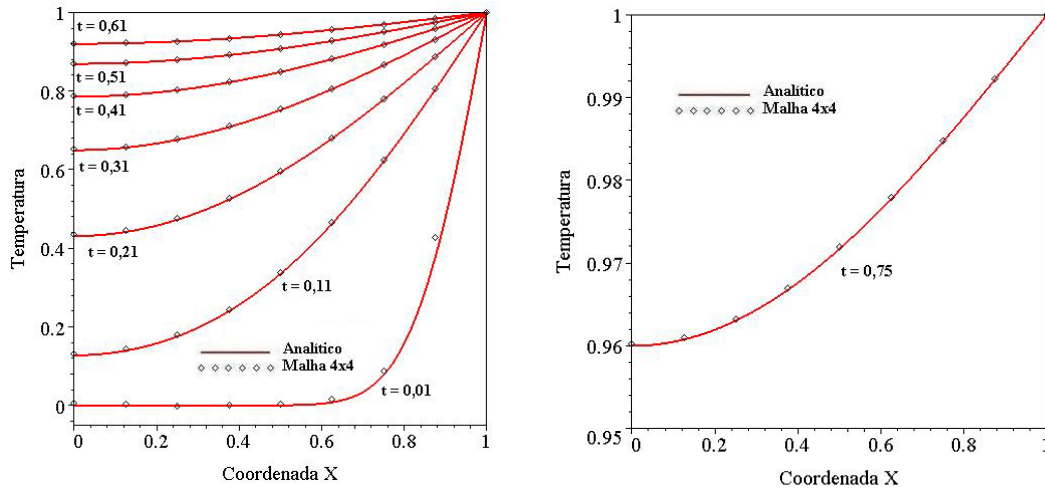


Figura 6.21: a) Resultados de temperatura ao longo da face  $Z = 0$  para vários instantes de tempo, obtidos com uma malha  $4 \times 4$  de elementos quadráticos; b) Detalhe para a curva de temperatura  $t = 0,75$ .

A figura 6.22 mostra os autovalores computados para o mesmo problema da figura 6.18, analisada com três diferentes macro-elementos com graus de liberdade apenas no contorno: um elemento quadrático, três elementos lineares e três elementos quadráticos são usados ao longo de cada lado para malhas Q8, Q12 e Q24, respectivamente.

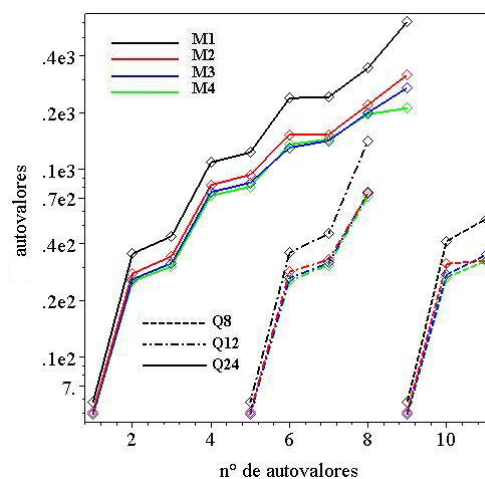


Figura 6.22: Autovalores de acordo com a equação (2.7.1) usando-se de 1 a 4 matrizes de massa generalizada, para três diferentes malhas de contorno.

Devido às condições de contorno, estas malhas (Q8, Q12 e Q24) correspondem a 3, 5 e 11 graus de liberdade, respectivamente. O fato de não serem percebidos pares de autovalores como os obtidos com a malha no domínio da figura 6.19 deve-se provavelmente à diferente topologia do problema. Apesar do pequeno número de graus de liberdade, a resposta transiente mostrada na figura 6.23, para a malha Q24, é qualitativamente comparável ao resultado da figura 6.20a obtida com 27 graus de liberdade.

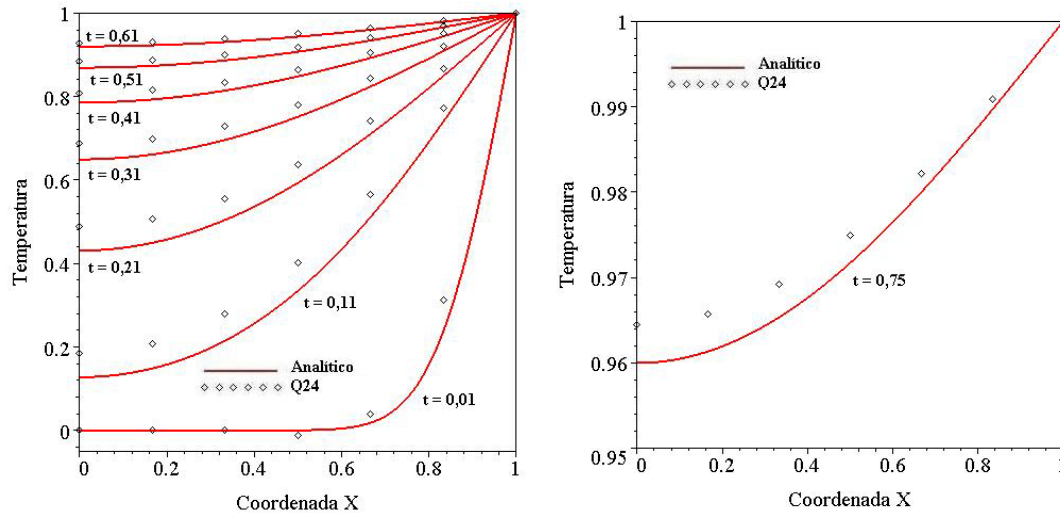


Figura 6.23: a) Resultados de temperatura ao longo da face  $Z = 0$  da figura 6.18 para vários instantes de tempo, obtidos com a malha Q24 de 24 nós (11 gdl); b) Detalhe para a curva de temperatura  $t = 0,75$ .

### 6.3. Condução de Calor Transiente Bidimensional em uma Placa Quadrada Não-homogênea

O mesmo problema da figura 6.18 é analisado para um material não-homogêneo e ortotrópico, de acordo com o que foi apresentado no Capítulo 4, com as mesmas propriedades mostradas na figura 6.24: padrão de variação trigonométrica com parâmetros de material  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.2$  e difusividade térmica  $k_z/c = (1+Z)^2/4$ , correspondendo à condutividades:

$$k_z = 0.005109967 [\text{sen}(0.4 \ln(Z+1)) + 10 \cos(0.4 \ln(Z+1))]^2 (Z+1) \quad (6.3.1)$$

$$k_x = 0.004087974 [\text{sen}(0.4 \ln(Z+1)) + 10 \cos(0.4 \ln(Z+1))]^2 / (Z+1) \quad (6.3.2)$$

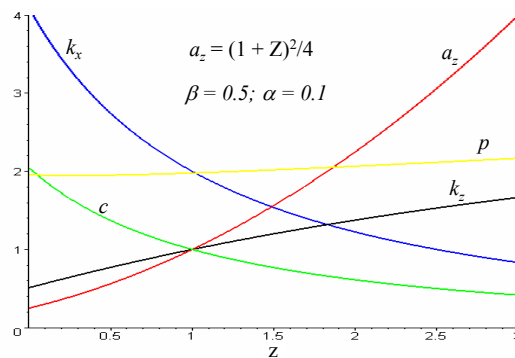


Figura 6.24: Exemplo de padrão de variação trigonométrica das propriedades do material.

A figura 6.25 mostra os autovalores calculados para uma malha quadrada 4x4 com elementos quadráticos e usando-se 1, 2 e 3 matrizes de massa generalizada, de acordo com a equação (2.7.1) – não há resultados analíticos para comparação.

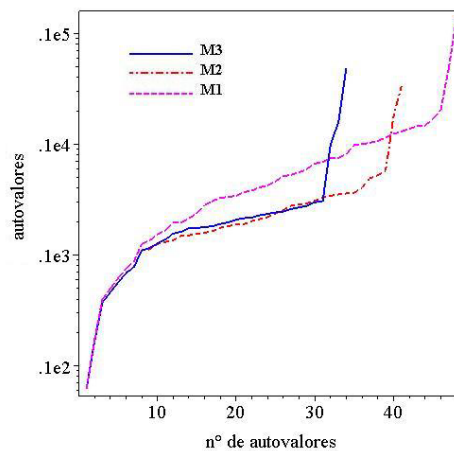


Figura 6.25: Autovalores de acordo com a equação (2.7.1) usando-se 1, 2 e 3 matrizes de massa generalizada.

A figura 6.26 mostra o mesmo tipo de resultado mostrado nas figuras 6.20, 6.21 e 6.23, para este problema não-homogêneo, usando-se malhas 2x2, 3x3 e 4x4, de tal forma que se possa ter uma estimativa de convergência.

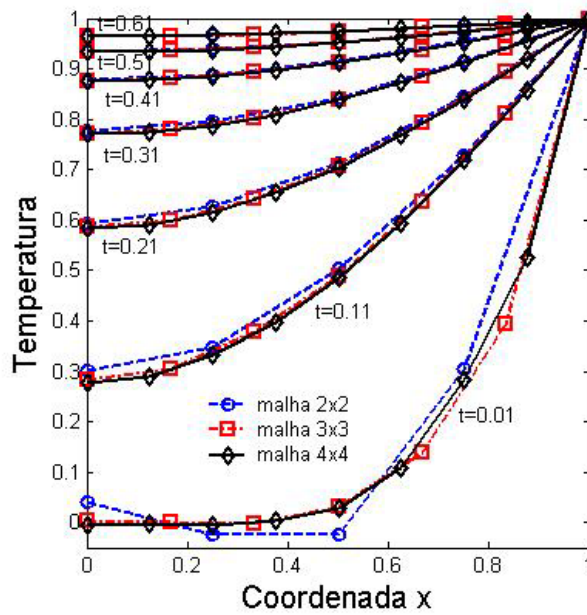


Figura 6.26: Resultados de temperatura ao longo da face  $Z = 0$  usando-se malhas 2x2, 3x3 e 4x4.

## 6.4. Viga sob Carregamento de Momento Fletor Linear

No exemplo apresentado nesta seção faz-se uma comparação numérica entre três métodos de elementos finitos, o método convencional de deslocamentos, o método elementos finitos de funções globais (Dumont e Fernandez, 1998) e o método híbrido. Nele tem-se uma viga, figura (6.27), engastada e livre sob o carregamento de uma carga  $P = \int \tau dA$  aplicada em sua extremidade livre, assim como é mostrado na figura (6.27), que é analisada para 7 diferentes malhas, figuras (6.28) e (6.29), de acordo com (Dumont e Fernandez, 1998) e anteriormente proposto por Lee e Bathe.

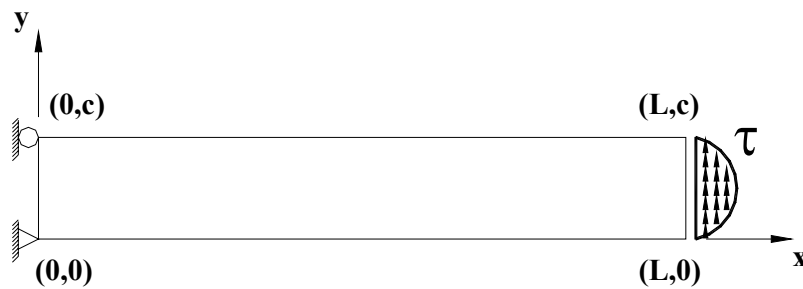


Figura 6.27: Viga de comprimento  $L$  e altura  $c$ , sob carregamento de momento fletor linear.

A viga analisada tem módulo de elasticidade  $E = 1,0 \times 10^7$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e espessura  $t = 1,0$ . O carregamento  $\tau$  está distribuído ao longo da altura da viga  $c$ , de acordo com a equação (6.4.1),

$$\tau = \frac{120y}{L} - \frac{120y^2}{cL} \quad (6.4.1)$$

As figuras 6.28 e 6.29 mostram as configurações de malhas utilizadas na análise da viga da figura 6.27.

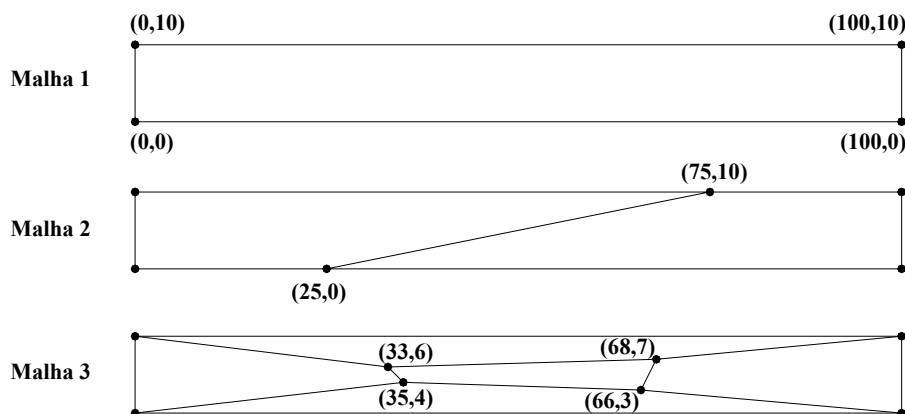


Figura 6.28: Malhas 1, 2 e 3, para uma viga de comprimento  $L = 100$  e altura  $c = 10$ .

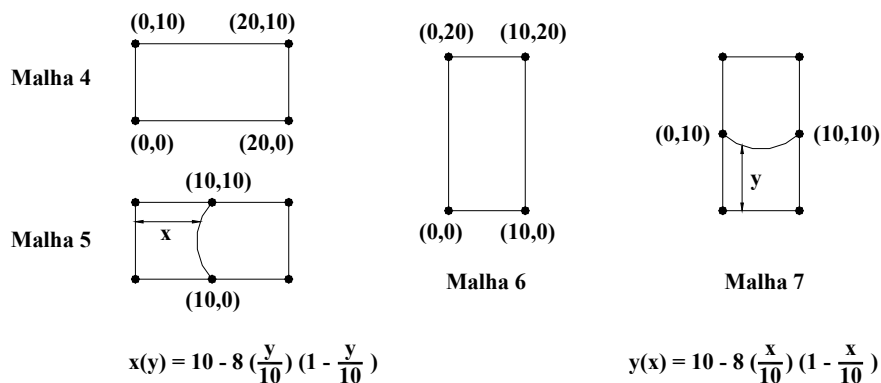


Figura 6.29: Malhas 4 e 5, para uma viga de comprimento  $L = 20$  e altura  $c = 10$  e Malhas 6 e 7, para uma viga de comprimento  $L = 10$  e altura  $c = 20$ .

Na tabela 6.2 têm-se os resultados para o deslocamento vertical do nó da extremidade inferior direita da viga para os três métodos e o valor analítico correspondente para as diferentes configurações de malha apresentadas nas figuras 6.28 e 6.29 sob o carregamento de momento linear indicado na figura 6.27 e dado pela equação (6.4.1).

Tabela 6.2: Deslocamento vertical ( $\times 10^3$ ) do nó da extremidade inferior direita da viga da figura (6.27) para as diferentes configurações de malha apresentadas nas figuras 6.28 e 6.29.

Malha	Q4			Q8			Q12			Q16			Solução Exata
	EFC	EFG	EFH	EFC	EFG	EFH	EFC	EFG	EFH	EFC	EFG	EFH	
1	0,204	0,204	0,206	6,281	6,281	8,871	8,046	8,046	8,054	8,046	8,046	8,046	8,046
2	0,305	0,337	0,672	1,611	6,364	7,033	5,011	8,046	8,087	8,046	8,132	8,537	8,046
3	0,192	0,212	0,202	0,452	6,291	6,355	0,744	8,046	8,050	8,046	7,947	8,043	8,046
4	0,143	0,143	0,168	0,349	0,349	0,422	0,366	0,366	0,402	0,366	0,366	0,401	0,336
5	0,254	0,254	0,323	0,334	0,376	0,402	0,350	0,376	0,404	0,366	0,390	0,412	0,336
6	0,129	0,129	0,243	0,112	0,112	0,434	0,132	0,132	0,498	0,132	0,132	1,348	0,132
7	0,082	0,082	0,321	0,128	0,136	0,405	0,130	0,133	0,539	0,131	0,138	0,573	0,132

EFC = Elementos Finitos Convencionais; EFG = Elementos Finitos Globais; EFH = Elementos Finitos Híbridos.

A tabela 6.2 mostra que para as três primeiras malhas os elementos Q4 e Q8 do método híbrido apresentaram excelentes resultados em comparação ao método convencional, sendo melhor inclusive que os elementos globais com exceção do resultado do elemento Q4 para o caso da malha 3. Já o elemento Q12 apresentou bons resultados para as mesmas 3 primeiras malhas, porém não tão bons quanto os resultados obtidos pelo elemento Q12 do método global.



Os resultados obtidos para o elemento Q16 não foram satisfatórios. Este resultado foi influenciado de forma negativa pelo alto grau dos polinômios envolvidos na solução fundamental do elemento, o que gerou mau condicionamento da matriz de rigidez do elemento e erros de arredondamento. Este tipo de problem foi verificado também para outras malhas.

A figura 6.30 apresenta um gráfico de análise de convergência para os elementos Q4 e Q8 para o problema representado pela viga da figura 6.27 com comprimento  $L = 100$  e altura  $c = 10$  e submetida a carregamento de momento fletor linear de acordo com a equação (6.4.1).

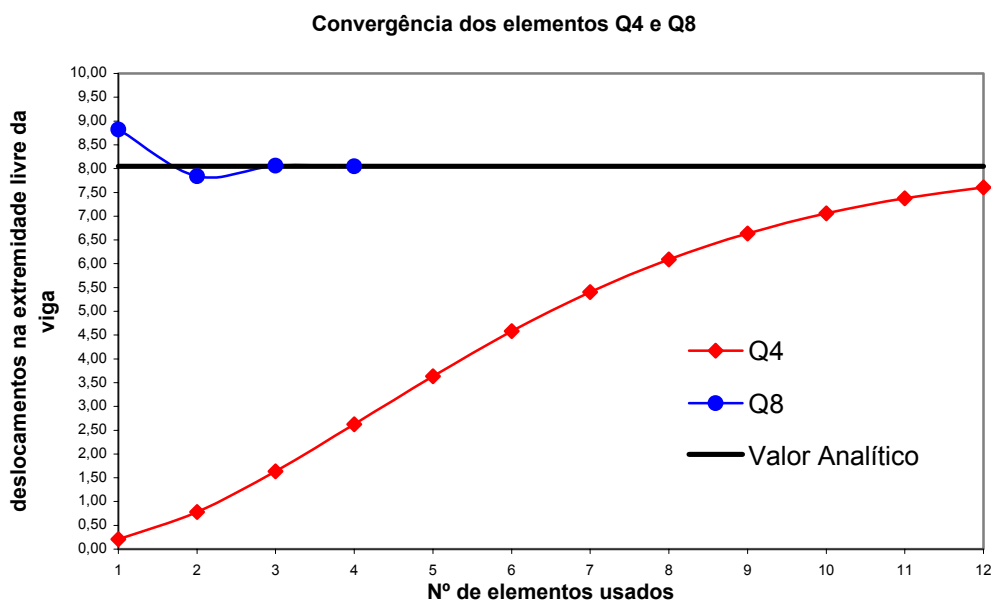


Figura 6.30: Análise de convergência dos elementos Q4 e Q8 para a viga da figura 6.27 com comprimento  $L = 100$  e altura  $c = 10$  e submetida a carregamento de momento fletor linear de acordo com a equação (6.4.1).

Como se pode constatar através da figura 6.30, há uma clara convergência dos dois elementos, sendo que o elemento Q8 convergiu mais rapidamente que o elemento Q4, como era de se esperar. Outra observação que pode ser feita quanto à convergência é o fato de o elemento Q8 ter se comportado na maneira típica de elementos híbridos, ou seja, com convergência amonotônica.

## 6.5. Viga sob Carregamento de Momento Fletor Constante

O exemplo apresentado nesta seção utiliza-se da mesma viga engastada e livre da seção anterior, porém não mais sob carregamento de momento linear, mas sim sob carregamento de um momento constante, como é ilustrado pela figura 6.31 abaixo.

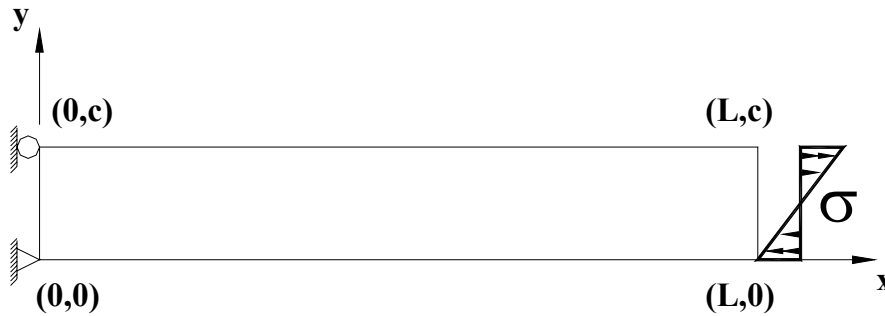


Figura 6.31: Viga de comprimento  $L$  e altura  $c$ , sob carregamento de momento fletor constante.

As propriedades da viga acima são as mesmas da viga apresentada na seção anterior. O carregamento  $\sigma$  está distribuído ao longo da altura da viga  $c$ , de acordo com a equação (6.5.1),

$$\sigma = \frac{240y}{c} - 120 \quad (6.5.1)$$

As análises feitas para este exemplo seguem a mesma discretização feita para o exemplo da seção anterior e estão resumidas na tabela 6.3.

Tabela 6.3: Deslocamentos verticais (multiplicados por  $-1,0 \times 10^3$ ) do nó da extremidade inferior direita da viga da figura 6.31 para as diferentes configurações de malha apresentadas nas figuras 6.28 e 6.29.

Malha	Q4	Q8			Q12			Q16			Solução
	EFH	EFC	EFG	EFH	EFC	EFG	EFH	EFC	EFG	EFH	Exata
1	0,307	12,000	12,000	12,000	12,000	12,000	12,000	12,000	12,000	13,895	12,000
2	0,618	2,328	12,057	11,955	5,934	12,000	12,000	12,000	12,105	11,732	12,000
3	0,300	0,477	12,000	12,000	0,691	12,000	12,000	12,000	12,065	12,320	12,000
4	0,217	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480	0,480
5	0,421	0,441	0,497	0,481	0,477	0,485	0,480	0,479	0,521	0,480	0,480
6	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060
7	0,058	0,060	0,060	0,061	0,060	0,060	0,060	0,060	0,060	0,059	0,060

EFC = Elementos Finitos Convencionais; EFG = Elementos Finitos Globais; EFH = Elementos Finitos Híbridos.

Os resultados apresentados na tabela 6.3, para os elementos Q8 e Q12, evidenciam a superioridade de precisão obtida pelo método híbrido de elementos finitos em comparação com o método de elementos finitos convencional.

Quanto aos resultados apresentados para o elemento Q16, pode-se concluir que houve uma influencia negativa do alto grau dos polinômios da solução fundamental do referido elemento, o que ocasionou mau condicionamento da matriz de rigidez e erros de arredondamento, como se havia comentado na ocasião da análise dos resultados do exemplo anterior.

## 6.6. Análise Dinâmica de uma Barra Fixa e Livre sob Carga Dinâmica Axial por Elementos de Treliça Unidimensionais

A figura 6.32 ilustra uma barra uniforme submetida a um carregamento dinâmico  $P(t)$  na direção de seu eixo. A barra tem as seguintes propriedades:

$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $A = 0,35 \text{ m}^2$ ,  $L = 50 \text{ m}$  e  $\rho = 7,85 \frac{\text{t}}{\text{m}^3}$ . O carregamento aplicado

$P(t)$  é dado pela equação (6.6.1)

$$P(t) = -10^8 \text{ sen}(1,35\omega_0 t) \quad (6.6.1)$$

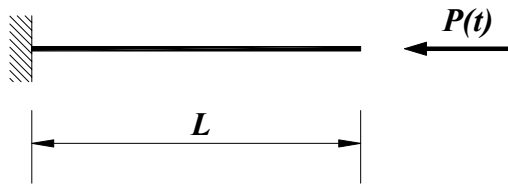


Figura 6.32: Barra fixa e livre submetida a carregamento dinâmico em sua extremidade livre.

A solução de referência do problema da figura 6.32 é dada pelas seguintes expressões, para uma série com 20 termos:

$$\omega(n) = \frac{(2n-1)\pi\sqrt{E/\rho}}{2L} \quad (6.6.2)$$

$$\omega_1 = 1,35\omega(1) \quad (6.6.3)$$

$$\Phi(n, x) = \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \quad (6.6.4)$$

$$\Psi(n, x) = \frac{2(-10^8)\text{sen}(\omega_1 t) - \frac{\omega_1 \text{sen}(\omega(n)t)}{\omega(n)}}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega(n)}\right)^2 \rho AL \omega(n)^2} \quad (6.6.5)$$

$$d = -\sum_{n=1}^{20} \Phi(n, x)\Psi(n, x)(-1)^n \quad (6.6.6)$$

onde  $d$  representa os deslocamentos em um ponto distante de  $L$  da extremidade fixa da barra devido ao carregamento dado pela equação (6.6.1).

A barra foi discretizada com 1, 2 e 3 elementos de treliça unidimensional. Nas figuras 6.33-6.35 tem-se a resposta do deslocamento no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência e para a solução encontrada com 1, 2 e 3 elementos, respectivamente, utilizando-se 3 matrizes de massa.

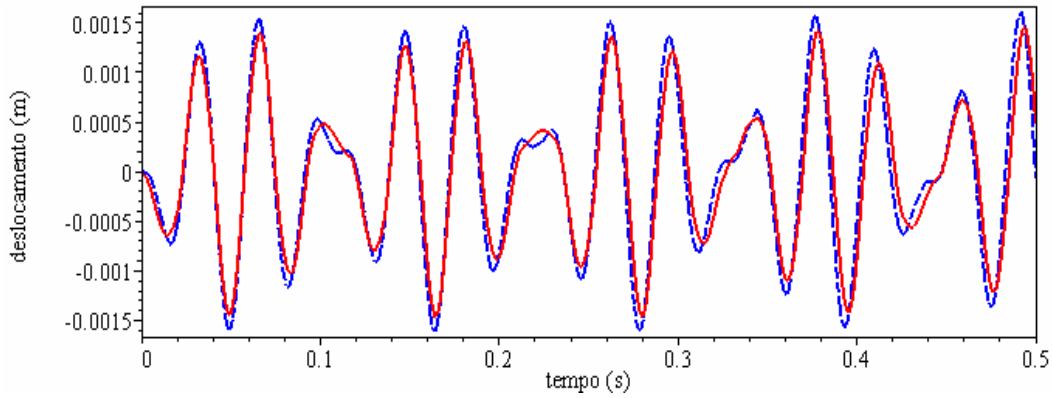


Figura 6.33: Deslocamento no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência juntamente com uma malha de 1 elemento.

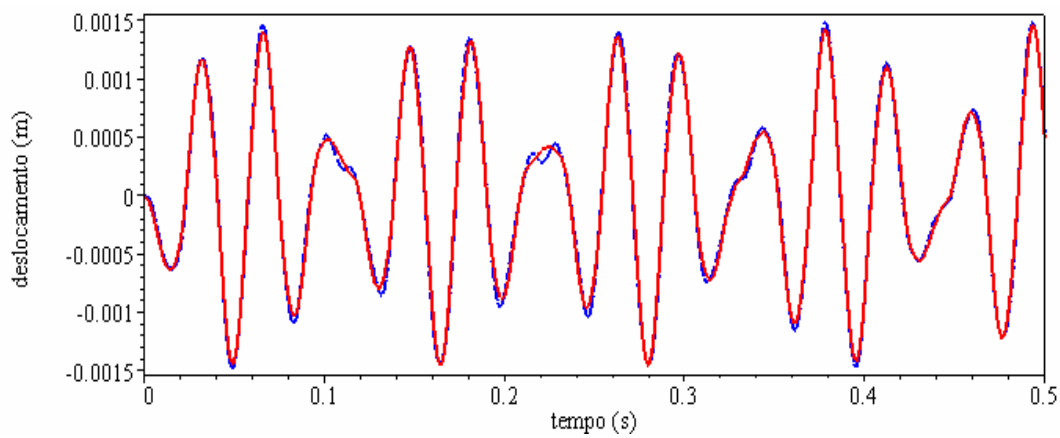


Figura 6.34: Deslocamento no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência juntamente com uma malha de 2 elementos.

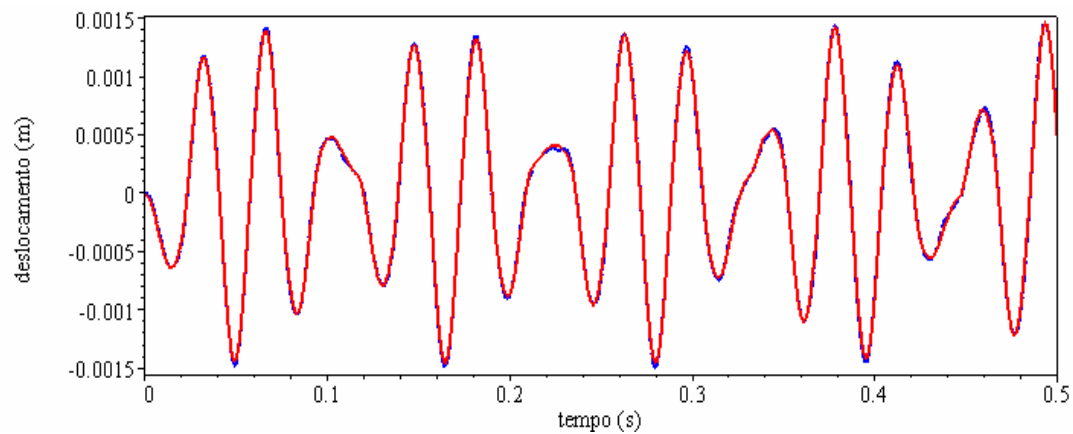


Figura 6.35: Deslocamento no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência juntamente com uma malha de 3 elementos.

Nas figuras 6.36-6.38 tem-se a resposta dos deslocamentos no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência e para uma discretização

com 3 elementos com a utilização de 1, 2 e 4 matrizes de massa, respectivamente.

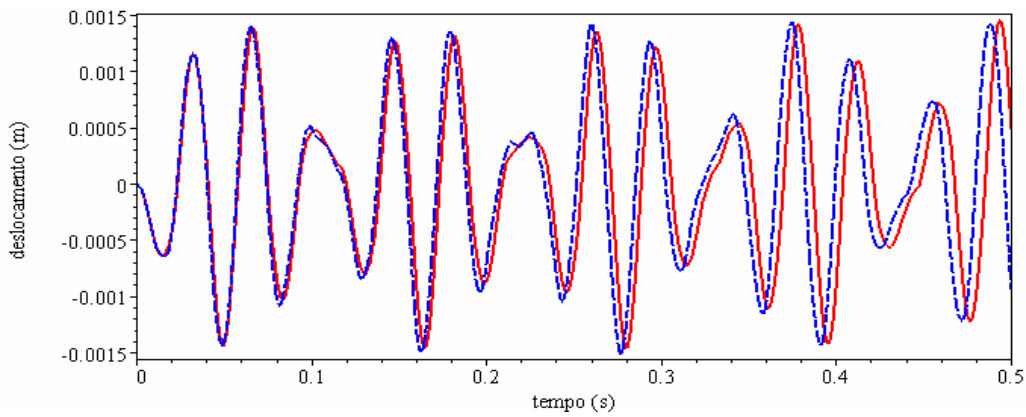


Figura 6.36: Deslocamento no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência e para uma malha de três elementos com a utilização de 1 matriz de massa.

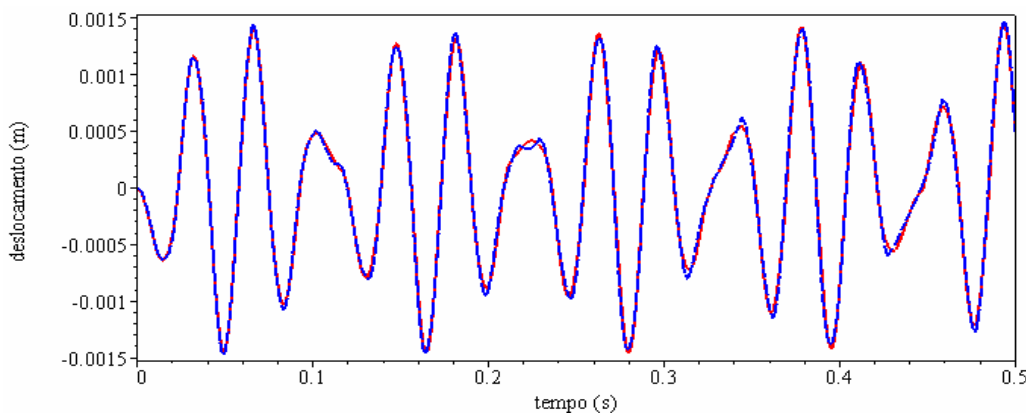


Figura 6.37: Deslocamento no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência e para uma malha de três elementos com a utilização de 2 matrizes de massa.

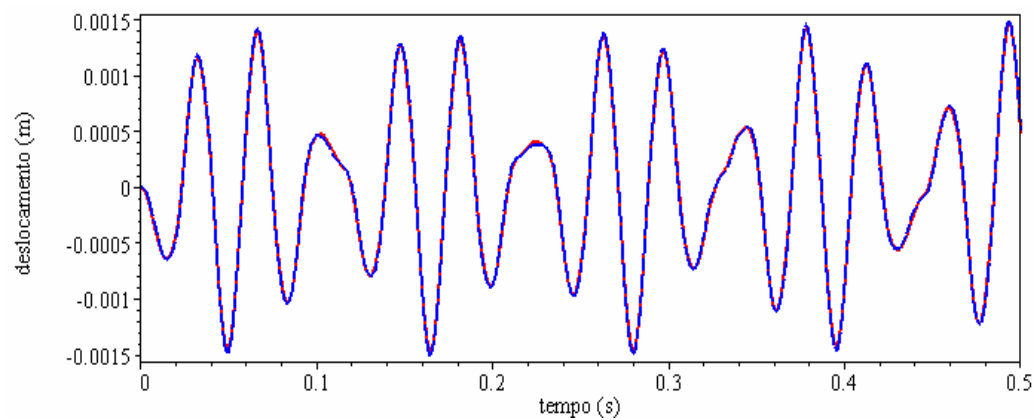


Figura 6.38: Deslocamento no tempo da extremidade livre da barra para a solução de referência e para uma malha de três elementos com a utilização de 4 matrizes de massa.

A figura 6.39 mostra os autovalores calculados para uma malha de três elementos de treliça e usando-se de 1 a 4 matrizes de massa generalizada, de acordo com a equação (2.7.1).

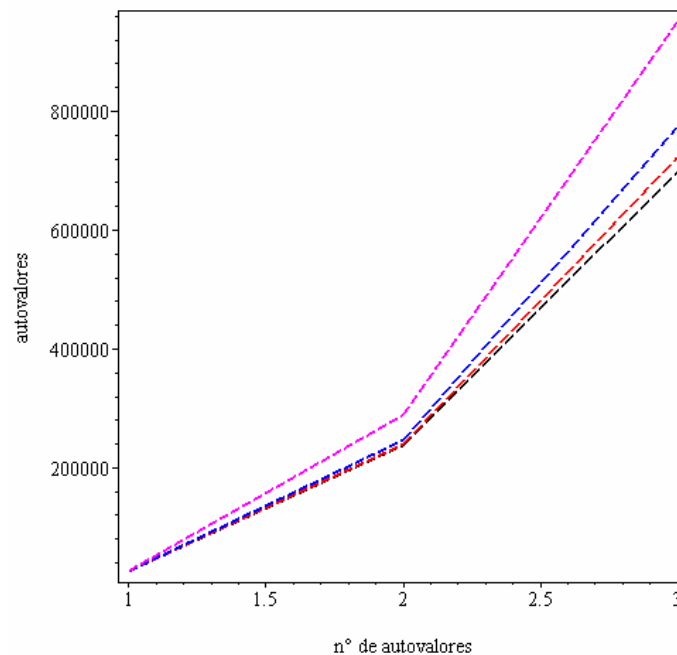


Figura 6.39: Autovalores de acordo com a equação (2.7.1) para a malha de 3 elementos, usando-se de 1 a 4 matrizes de massa generalizada.

Os resultados apresentados pelas figuras 6.36-6.38 mostram claramente que a utilização de mais matrizes de massa melhora significativamente a precisão da resposta encontrada, sem que se tenha que aumentar a discretização da malha, como feito na seqüência de figuras 6.33-6.35. Porém, nada impede que se faça uma combinação de ambos os recursos (discretização da malha e aumento do número de matrizes de massa utilizadas) para a obtenção de resultados cada vez mais precisos.

A melhora provocada pelo aumento do número de matrizes de massa utilizadas na solução do problema está diretamente ligada à influência dos modos de vibração mais elevados. Quanto maior a contribuição dos modos mais elevados, maior será a precisão dos resultados com o aumento do número de matrizes de massa, de acordo com o gráfico da figura 6.39. Em outras palavras, o aumento do número de matrizes de massa utilizadas significa uma maior satisfação da equação dinâmica de governo do problema que leva à obtenção de autovalores mais precisos.

### 6.7. Análise Dinâmica de um Pórtico Submetido a um Pulso Triangular por Elementos de Viga Plana de Bernoulli-Euler

A figura 6.40 ilustra um pórtico plano com doze graus de liberdade (12 gdl), proposto por Weaver (1987). O pórtico consiste de seis barras prismáticas rigidamente conectadas, todas com os mesmos valores de  $E$ ,  $\rho$ ,  $A$ , e  $I_z$ . Tais propriedades das barras de aço do pórtico da figura 6.40 valem:

$$E = 3,0 \times 10^4 \text{ k/in.}^2, \quad A = 30 \text{ in.}^2, \quad L = 50 \text{ in.}, \quad \rho = 7,35 \times 10^{-7} \frac{\text{ks}^2}{\text{in.}^4} \text{ e } I_z = 1,0 \times 10^3 \text{ in.}^4.$$

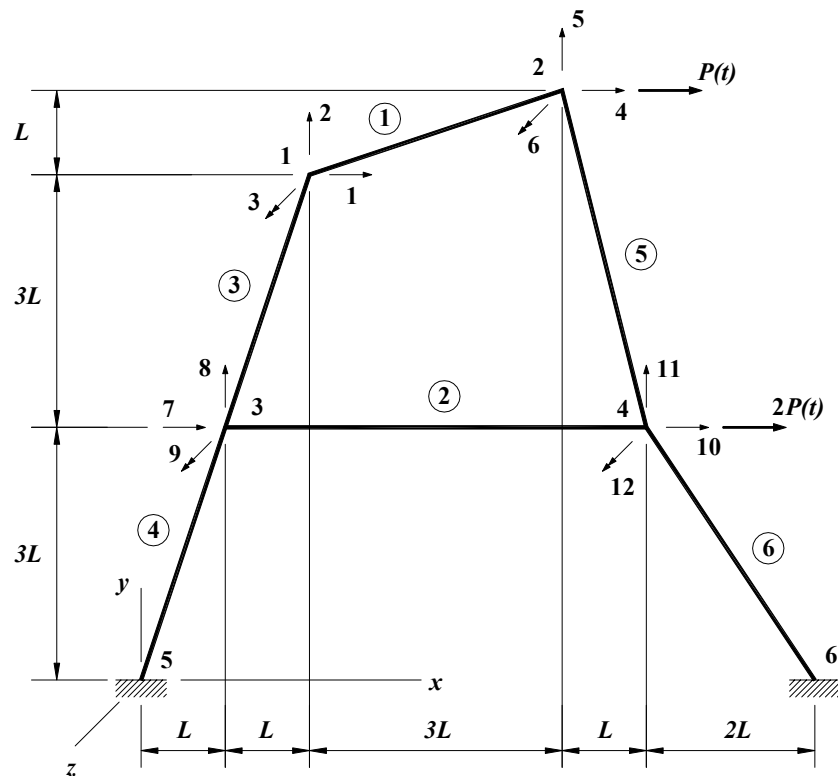


Figura 6.40: Pórtico plano com seis barras e doze graus de liberdade.

Como ilustrado pela figura 6.40, forças dinâmicas  $P(t)$  e  $2P(t)$  são aplicadas na direção  $x$  nos nós 2 e 4. Na figura 6.41 tem-se a variação no tempo da carga  $P(t)$ . As quantidades que nela aparecem valem:  $P_1 = 10 \text{ k}$  e  $t_2 = 2t_1 = 35 \text{ ms}$ . A expressão analítica de  $P(t)$ , desejável para que possa fazer uma integração analítica no tempo das equações modais, é

$$P(t) = \frac{(H(t)H(t_1-t)p_1t + H(t-t_1)H(2t_1-t)(2p_1t_1 - p_1t))}{t_1},$$

em que  $H(t)$  é a função Heaviside de  $t$ , de acordo com a figura 6.41.



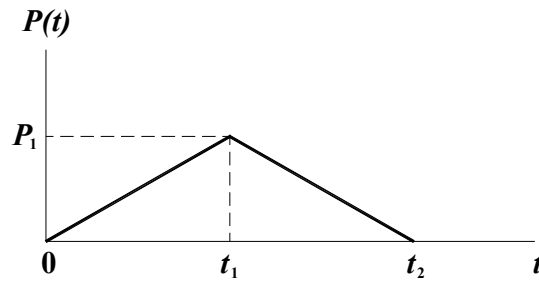


Figura 6.41: Carregamento dinâmico.

Na figura 6.42 tem-se o deslocamento no tempo do grau de liberdade 4 (deslocamento horizontal do nó 2 onde é aplicada a carga  $P(t)$ ). A curva cheia e a curva tracejada representam, respectivamente, os resultados obtidos através do método híbrido com a utilização de 1 e 4 matrizes de massa, e os pontos em cruz são os resultados tirados do gráfico apresentado por Weaver.

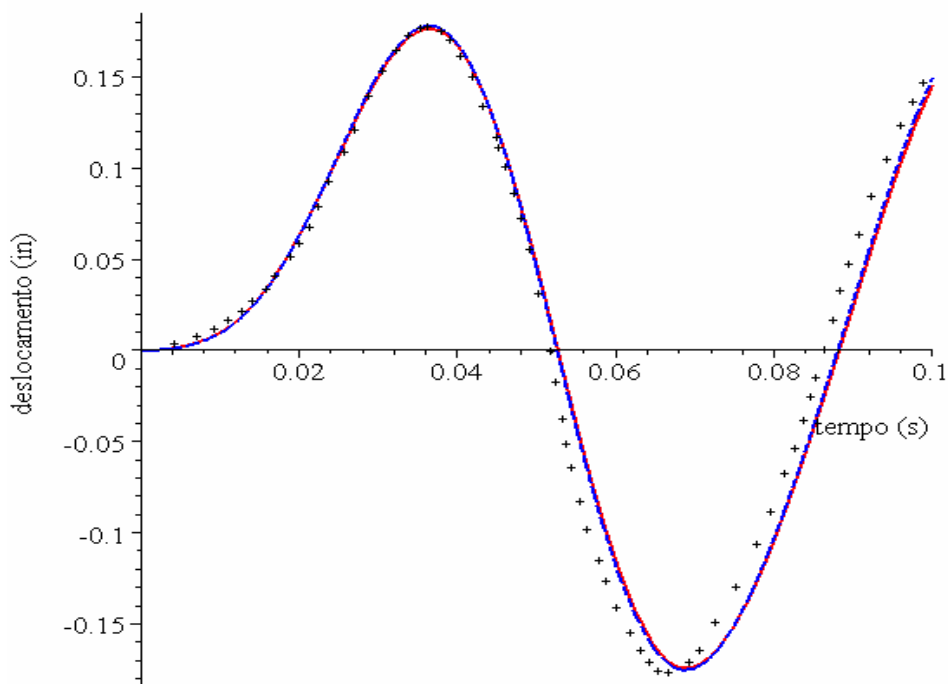


Figura 6.42: Resposta do grau de liberdade número 4.

Nela, figura 6.42, a diferença entre os resultados obtidos através da utilização de 1 e de 4 matrizes de massa é muito pequena (a defasagem em relação aos valores de referência talvez se explique pelo fato de eles terem sido obtidos por cópia da página do livro do Prof. Weaver). A rápida convergência de resultados evidencia que a contribuição dos modos mais altos que os modos 1 e

2, para o caso particular do carregamento indicado pelas figuras 6.40 e 6.41, é muito pequena, conforme se depreende da figura 6.43.

A figura 6.43 apresenta uma comparação entre os autovalores encontrados para a estrutura da figura 6.40 com a utilização de 1 até 4 matrizes de massa. Nela percebe-se que há uma convergência dos autovalores conforme se aumenta o número de matrizes de massa envolvidas no cálculo. A curva mais acima é relativa à utilização de apenas uma matriz de massa e as curvas abaixo desta são relativas à utilização de duas, três e quatro matrizes.

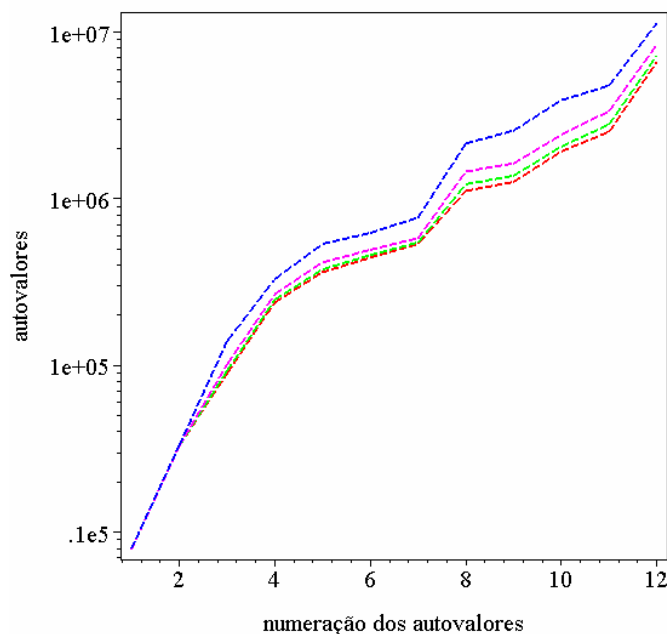


Figura 6.43: Comparação entre os autovalores para a utilização de 1, 2, 3 e 4 matrizes de massa.

A figura 6.44 mostra um gráfico análogo ao gráfico da figura 6.42. Nela utilizou-se para o carregamento (ilustrado na figura 6.40) um impulso triangular com apenas um décimo do tempo do impulso dado pela figura 6.41. As curvas apresentadas são relativas ao deslocamento do grau de liberdade 4 (figura 6.40) no tempo, e são obtidas com a utilização de 1 a 4 matrizes de massa (curvas azul, magenta, verde e vermelha, respectivamente).

A utilização de um carregamento com um tempo de duração mais curto teve o intuito de provocar uma maior influência dos modos de vibração mais altos no comportamento da estrutura da figura 6.40, de forma a se mostrar que quando há uma contribuição maior dos modos mais elevados, a utilização de mais matrizes de massa melhora significativamente o resultado obtido, de

acordo com o que se havia comentado no exemplo anterior do elemento de treliça unidimensional.

O que se pode perceber na figura 6.44 é que há uma clara convergência das curvas com o aumento do número de matrizes de massa utilizadas, curvas azul, magenta, verde e vermelha, respectivamente.

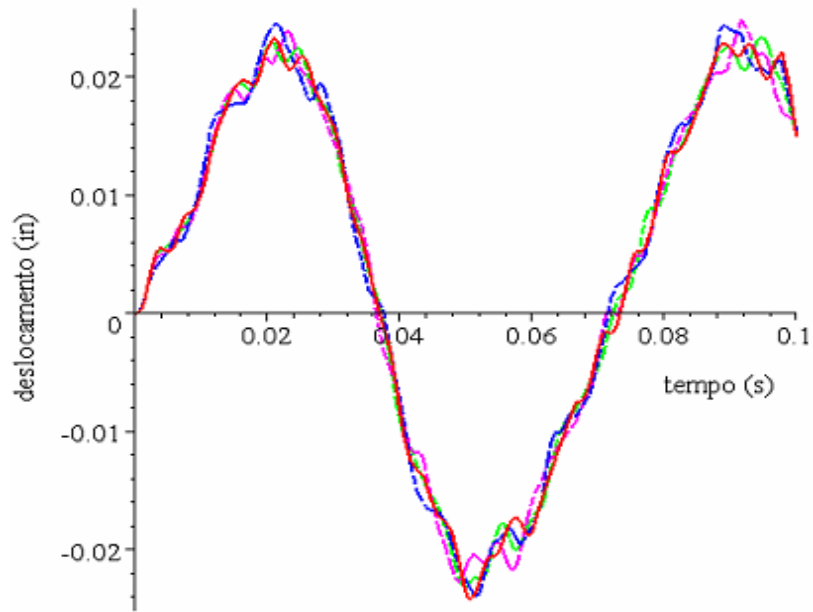


Figura 6.44: Resposta do grau de liberdade número 4 para um impulso de tempo igual a 0,1 do tempo do impulso mostrado na figura 6.41.

## 6.8. Análise dinâmica de uma treliça plana com três graus de liberdade

A figura 6.45 ilustra uma treliça plana com três graus de liberdade (3 gdl) e também foi proposta por Weaver (1987) para a análise das freqüências e modos de vibração. Porém, no exemplo aqui apresentado, utilizaram-se propriedades diferentes das utilizadas por Weaver para as barras da treliça com a finalidade de se simular uma estrutura com barras comercializadas no Brasil (além disso, o exemplo de Weaver não fornece o valor do momento de inércia). Todas as barras têm os mesmos valores de  $E$ ,  $\rho$ ,  $A$ , e  $I$ , dados para uma seção circular vazada, conforme a figura 6.45, em que  $R_e = 0,05715 \text{ m}$  e  $R_i = 0,0529 \text{ m}$ . As propriedades das barras são:  $E = 2,07 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $A = 1,4694 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $L = 6,35 \text{ m}$ ,  $\rho = 7,85 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  e  $I = 8,911 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ .

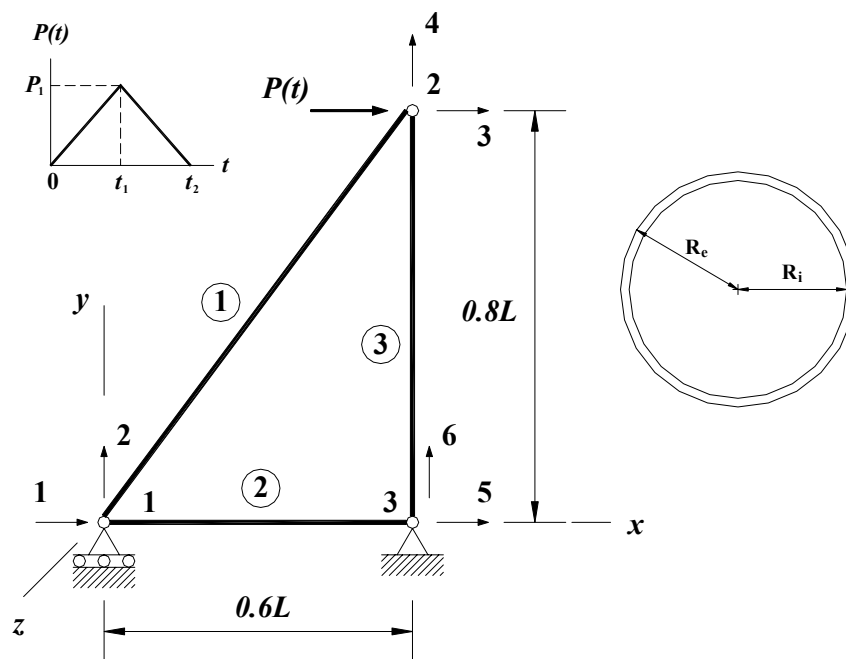


Figura 6.45: treliça plana com 3 graus de liberdade.

À treliça acima foi aplicada uma carga dinâmica em força de um pulso triangular, conforme mostra o gráfico superior esquerdo da figura 6.45, em que  $P_1 = 10 \text{ N}$  e  $t_2 = 2t_1 = 35 \text{ ms}$ .

Apresentam-se na figura 6.46 os deslocamentos horizontais no tempo do nó 2 da treliça obtidos pela utilização de 1 a 8 matrizes de massa (curvas tracejadas em azul, magenta, verde e curvas cheias em cian, vermelho, verde,

amarelo e preto, respectivamente, que correspondem a amplitudes decrescentes no primeiro instante da resposta dinâmica), de acordo com as equações (2.7.30) e (5.2.25).

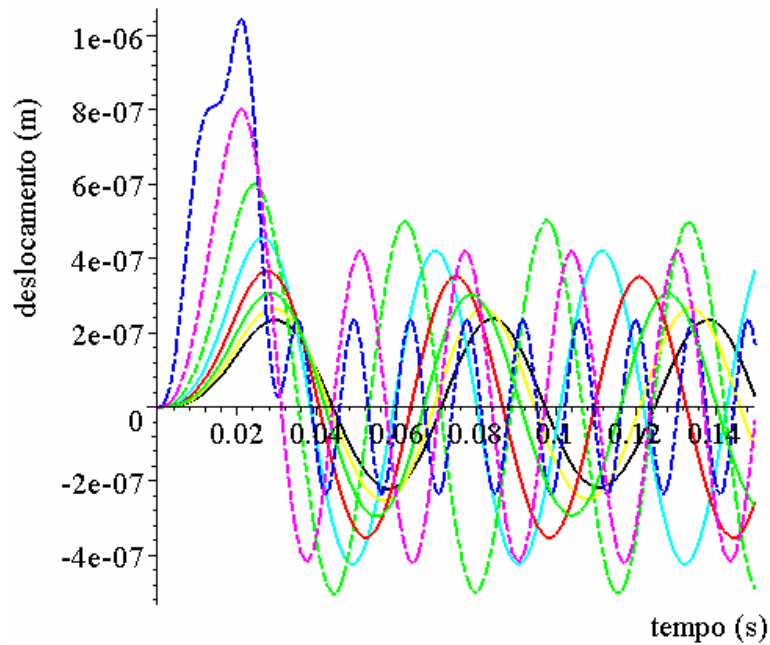


Figura 6.46: deslocamentos horizontais no tempo do nó 2 da treliça para a utilização de 1 a 8 matrizes de massa (amplitudes decrescentes nos primeiros instantes de tempo).

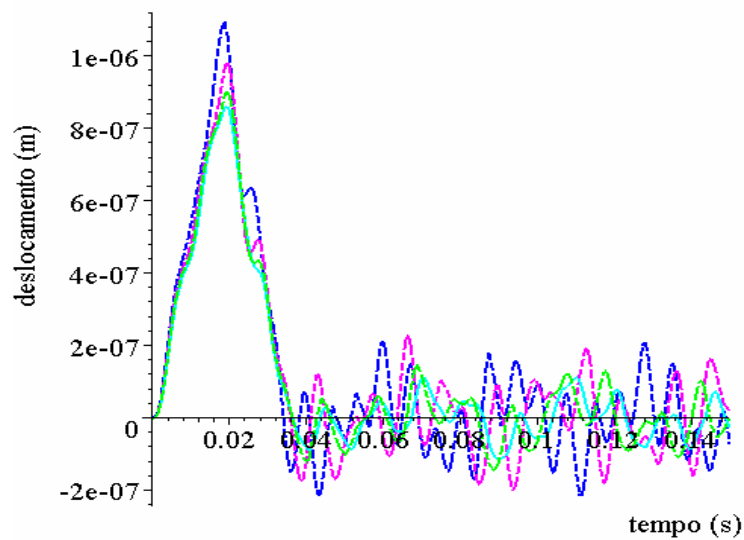


Figura 6.47: deslocamentos horizontais no tempo do nó 2 da treliça da figura 6.45 obtidos pela utilização de elementos de viga de Bernoulli-Euler com a utilização de 1 a 4 matrizes de massa (mesma convenção de cores da figura 6.46).

A figura 6.48 mostra os autovalores obtidos com a utilização de elementos de treliça com 1 a 8 matrizes de massa (da curva mais acima à curva mais abaixo, consecutivamente).

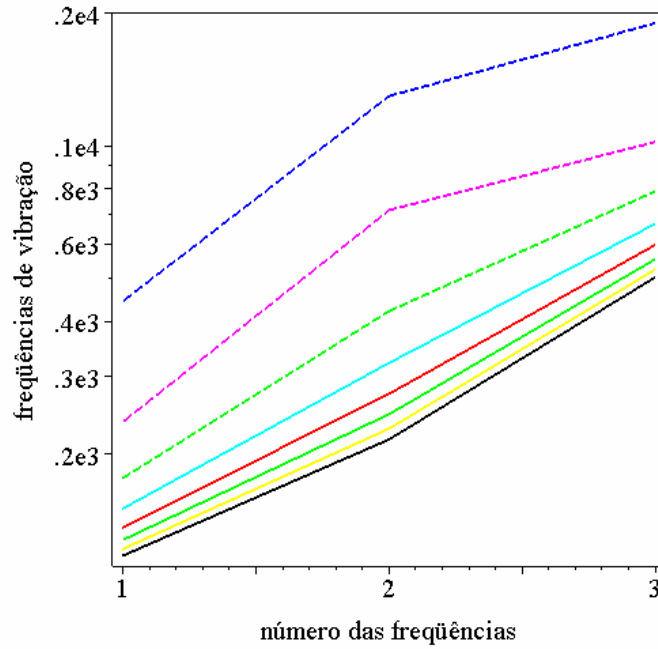


Figura 6.48: Comparação entre as frequências encontradas com a utilização de 1 a 8 matrizes de massa: a convergência se dá por valores superiores.

## 7 CONCLUSÃO

O método híbrido de elementos finitos, como apresentado neste trabalho para a análise de problemas dinâmicos no domínio da frequência, permite a generalização do procedimento tradicionalmente usado para a análise de problemas dinâmicos pelo método de elementos finitos convencional, que faz uso apenas do primeiro termo da série de potência em  $\omega$  apresentada pela equação (2.7.30), ou seja,

$$\left( \mathbf{K} + \mathbf{M} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{d}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (7.1)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez do sistema e  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa. A equação (2.7.30), evidencia que, além das matrizes de rigidez  $\mathbf{K}$  (ou  $\mathbf{K}_0$  como é denominada na equação (2.7.30)) e massa  $\mathbf{M}$  (denominada de  $\mathbf{M}_1$  na equação (2.7.30)) podem ser usadas ainda  $n-1$  matrizes de massa  $\mathbf{M}_i$ , com  $i > 2$  (que são em verdade uma mistura de massa e rigidez), de acordo com a precisão que se queira obter.

Com a utilização de mais termos da expansão em série da matriz de rigidez efetiva no domínio da frequência, o método híbrido dos elementos finitos permite uma melhor satisfação da equação de movimento do problema, em comparação com o método de análise dinâmica por elementos finitos convencional, que só utiliza um termo, garantindo assim uma maior precisão nos resultados.

Além disso, a utilização das soluções fundamentais não-singulares como funções de interpolação dos deslocamentos no domínio do elemento torna o método mais fácil e simples de implementar que os métodos de elementos de contorno em geral, devido à ausência da singularidade na solução fundamental, embora possa resultar em problemas com problema de condicionamento..

## 7.1. Vantagens do Método

A técnica de superposição modal generalizada permite tratar problemas dependentes do tempo no contexto do domínio da frequência de forma simples (sem a necessidade de transformadas).

Outra vantagem do método é o fato de a formulação precisar apenas de integrais de contorno, o que reduz em uma dimensão o problema de integração e possibilita a geração de formas polinomiais arbitrárias de maneira sistemática.

O método também possibilita o tratamento preciso de problemas de fraturas, cantos ou elementos perfurados, com a utilização de funções de soluções locais. Problemas que envolvem materiais heterogêneos com gradação funcional também são tratados de forma simples e direta, ao menos para problemas de potencial.

## 7.2. Desvantagens do Método

Em relação às desvantagens do método híbrido de elementos finitos aqui apresentado, pode-se concluir que:

- O método é mais lento se comparado ao método dos elementos finitos devido à necessidade de se montar uma matriz de flexibilidade do elemento para em seguida invertê-la, no processo de obtenção da matriz de rigidez do elemento.
- Na solução de problemas dinâmicos, o método requer a solução de um problema de autovalor não-linear, representado pela equação (2.8.1), o que pode encarecer o tempo de processamento.
- Soluções polinomiais de grau muito alto podem resultar em matrizes de rigidez mal-condicionadas, no caso de domínios muito distorcidos.



### 7.3. Análise dos Resultados

Quanto aos resultados apresentados nos exemplos do Capítulo 6 pode-se tirar as seguintes conclusões:

- O método apresentou boa precisão tanto para problemas estáticos ou de regime permanente quanto para problemas dinâmicos ou transientes, principalmente com a utilização de matrizes de massa de ordem mais altas.
- O método se mostrou bastante adequado à análise de problemas com gradação funcional, pelo menos para problemas de potencial.
- A utilização de elementos com um número grande de graus de liberdade (como no caso dos elementos Q12 e Q16 dos exemplos 6.4 e 6.5) gera problemas de matrizes de rigidez com mau condicionamento, devido ao alto grau dos polinômios da solução fundamental envolvida. A sugestão que se faz é que se usem apenas elementos com poucos graus de liberdade, tais como os elementos T3, T6, Q4 e Q8 no caso de problemas bidimensionais.
- O método apresentou convergência típica de métodos híbridos, ou seja, não monotônica, como pode ser visto no gráfico da figura 6.30 para o elemento Q8, que se mostrou muito boa em comparação com o método dos deslocamentos.

#### 7.4.Sugestões para Trabalhos Futuros

Como sugestões para trabalhos futuros em continuação ao que foi desenvolvido neste trabalho, apresentam-se:

- Aperfeiçoar os métodos de solução de autovalores não-lineares, para a obtenção de autovalores mais precisos e de maneira mais confiável (Dumont e Cruz, 2006) que nos algoritmos usados, com menor esforço computacional e sem a necessidade da utilização de matrizes aumentadas (Chaves, 2003), que encarece o processo computacional.
- Realizar uma análise comparativa entre a técnica de superposição modal avançada utilizada neste trabalho e as técnicas de solução puramente no domínio da frequência (com o uso de transformadas) ou puramente no domínio do tempo, existentes na literatura.
- Desenvolver um programa em uma linguagem mais robusta (por exemplo, o Fortran) e fazer uma análise comparativa com o método dos deslocamentos.

## Referências Bibliográficas

- Atluri, S. N., 1983. Gallagher, R. H. & Zienkiewicz O. C. (eds.), Hybrid and Mixed Finite Element Methods, John Wiley & Sons.
- Ben-Israel, A., Greville, T. N. E., 1980. Generalized Inverses: Theory and Applications. Krieger, New York.
- Brebbia, C. A., 1978. The boundary element method for engineers. Pentech Press, London.
- Bruch, J. C., Zvoloski, G., 1974. Transient two-dimensional heat conduction problems solved by the finite element method. Int. J. Numer. Meth. Engng., 8: 481-494.
- Chaves, R. A. P., 1999. Estudo do Método Híbrido dos Elementos de Contorno e Proposta de uma Formulação Simplificada. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Brasil.
- Chaves, R. A. P., 2003. O Método Híbrido Simplificado dos Elementos de Contorno Aplicado a Problemas Dependentes do Tempo. Tese de Doutorado, PUC-Rio, Brasil.
- Cheng. A. H.-D., 1984, Darcy's flow with variable permeability: a boundary integral solution. Water Resources Research, 20: 980-984.
- De Souza, R. M., 1992. O Método Híbrido dos Elementos de Contorno para a Análise Elastostática de Sólidos. Dissertação de Mestrado, PUC-Rio, Brasil.
- Divo, E. A., Kassab, A. J., 2003. Boundary Element Methods for Heat Conduction: With Applications in Non-Homogeneous Media, Topics in Engineering, Vol. 44 WITpress.
- Dumont, N. A., 1996, "Notas de Aula: Método Híbrido dos Elementos de Contorno", Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro.
- Dumont, N. A., 2003, Variationally-based Hybrid Boundary Element Methods, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 10, 407-430.
- Dumont, N. A., 2005, An Advanced Mode Superposition Technique for the General Analysis of Time-Dependent Problems, BETeq – Montreal, July 26-28, in Advances in Boundary Element Techniques VI, A. P. S. Selvadurai, C. L. Tan, M. H. Aliabadi, eds., CL Ltd., England, pp 333-344

- Dumont, N. A., 2005, On the Inverse of Generalized Lambda Matrices With Singular Leading Term, *aceito Int. J. Numer. Meth. Engng.*,
- Dumont, N. A., Chaves, R. A. P., 2003, General Time-Dependent Analysis with the Frequency-Domain Hybrid Boundary Element Method, *Comp. Assisted Mechs. and Engng. Sciences (CAMES)*, 10, 431-452.
- Dumont, N. A., Chaves, R. A. P., 2003, Transient Heat Conduction in Functionally Graded Materials by the Hybrid Boundary Element Method, *NMCM 2003 - 9th Conference on Numerical Methods in Continuum Mechanics*, Žilina, República Eslovaca, 9-12 September, 20 pp
- Dumont, N. A., Chaves, R. A. P., 2004, Transient heat conduction in orthotropic functionally graded materials by the hybrid boundary element methods, *Extended Abstracts IABEM 2004 – International Association of Boundary Element Methods Conference*, Minneapolis, USA, 24-26 May, 3 pp.
- Dumont, N. A., Cruz, E. A., 2006, On the Solution of Generalized Non-Linear Complex-Symmetric Eigenvalue Problems. A ser submetido.
- Dumont, N. A., Fernandez, J. A. L., 1998, “A New Family Of High Performing Finite Elements – Revisiting an Old Idea?”, *International Symposium on the Use of Computers in Engineering and the Quality of the Software*, Rio de Janeiro, 9-10 de novembro, in *Computational Mechanics and the Use of Computers in Engineering*, eds: A. J. Ferrante, M. V. Rodriguez y Rodriguez, B. A. Schrefler, A. Natali, pp 109-117, UniverCidade Editora
- Dumont, N. A., Oliveira, R., 1997, The exact dynamic formulation of the hybrid boundary element method, *XVIII CILAMCE – Iberian Latin American Congress on Comput. Methods*, Brasília, Brazil, 357-364.
- Dumont, N. A., Oliveira, R., 2001, From frequency-dependent mass and stiffness matrices to the dynamic response of elastic systems, *Int. J. Sol. Struct.*, 38, 10-13, 1813-1830.
- Dumont, N. A., Prazeres, P. G. C., 2004. A Family of Advanced Hybrid Finite Elements for the General Analysis of time-dependent Problems. *XXV CILAMCE – Iberian Latin American Congress on Comput. Methods*, Pernambuco, Brasil, 15 pp em CD.
- Dumont, N. A., Prazeres, P. G. C., 2005. Hybrid Dynamic Finite Element Families for the General Analysis of Time-Dependent Problems. *Procs. The 3<sup>rd</sup> International Conference on Structural Stability and Dynamics*, Kissimmee, Florida, June 19-22, 10 pp em CD.
- Dumont, N. A., Prazeres, P. G. C., 2006. General Hybrid Dynamic Truss and Beam Elements for the Analysis of Transient Problems. A ser submetido.

- Gupta, A. K. & Asce, M. 1986, Frequency-Dependent Matrices for Tapered Beams. *Journal of Structural Engineering*, Vol.112. 85-103.
- Gupta, K. K., 1976, On a Finite Dynamic Element Method for Free Vibration Analysis of Structures, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 9, 105-120.
- Gupta, K. K., 1978, Development of a Finite Dynamic Element for Free Vibration Analysis of Two-Dimensional Structures, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 12, 1311-1327.
- Gupta, K. K., 1979, Finite Dynamic Element Formulation for a Plane Triangular Element, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 14, 1431-1448.
- Hellinger, E., 1914. Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua, *Enz. math. Wis.* 4, 602-694.
- Hu, H.-C., 1955. On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity, *Scientia Sinica*, 4, 33-54.
- Jirousek, J. & Leon, N., 1977. A powerful finite element for plate bending, *Com. Meths. in Appl. Mech. Engng.*, 12, 77-96.
- Jirousek, J. & Stojek, M., 1995. Numerical assessment of a new T-element approach, *Comp. & Structs.*, 57, 3,367-378.
- Lancaster, P., 2002, *Lambda-Matrices & Vibrating Systems*, Dover Publications.
- Maunder, E. (org.), 2002. Trefftz Method – Development and Applications in Computational Mechanics (IACM special interest conference), 16-18 September, Exeter, UK.
- Merian, James L., 1985, *Estática*, 2<sup>a</sup> ed., Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro.
- Paz, M., Dung, L., 1975, Power Series Expansion of the General Stiffness Matrix for Beam Elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 9, 449-459
- Pian, T. H. H., 1964, Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution. *AIAA J.*, 2, 1333-1336.
- Pian, T. H. H., 1983. Reflections and remarks on hybrid and mixed finite element methods, *Hybrid and Mixed Finite Element Methods*, Atluri, S. N., Gallagher, R. H. & Zienkiewicz O. C. (eds.), John Wiley & Sons.
- Pian, T. H. H. & Tong, P., 1969, Basis of Finite Element Methods for Solid Continua. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1, 3-28.
- Przemieniecki, J. S., 1968, *Theory of Matrix Structural Analysis*, Dover Publications, New York.
- Qin, Q. H., 2003. *The Trefftz Finite and Boundary Element Method*, WITPress.
- Reddy, J. N., 2002. *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*, Wiley, 2nd ed.

- Reissner, E. 1950. On a variational theorem in elasticity, J. Math. Phys., 29, 90-95.
- Trefftz, E., 1926. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. Proc. 2nd International Congress of Applied Mechanics, Zurich, Switzerland.
- Washizu, K., 1955. On the Variational Principles of Elasticity and Plasticity, Techn. Report. 25-18, M.I.T.
- Weaver, W., Jr., and Johnston, P. R., 1987. Structural Dynamics by Finite Elements, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Voss, H., 1987, A New Justification of Finite Dynamic Element Methods, Numerical Treatment of Eigenvalue Problems, Vol. 4, 232-242, eds. J. Albrecht, L. Collatz, W. Velte, W. Wunderlich, International Series on Numerical Mathematics 83, Birkhäuser Verlag, Stuttgart.
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L., 1989. The Finite Element Method, Vol. I Basic Formulations and Linear Problems, McGraw-Hill.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A -

#### Obtenção da matriz de rigidez para problemas de elastostática no método híbrido dos elementos de contorno

A matriz de rigidez  $\mathbf{K}_0$  para problemas de elastostática pode ser obtida por meio de um procedimento mais simples e direto (Dumont, 2005) do que o método geral apresentado na seção 2.10 do capítulo 2.

De acordo com o que é exposto no item 2.7.2, do capítulo 2, a singularidade de  $\mathbf{H}_0^T$  (para problemas estáticos) significa que certas forças  $\mathbf{p}^*$  não podem ser transformadas em forças nodais equivalentes  $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$ . Isto implica a não-existência de uma solução única para o sistema representado pelas equações (2.6.19) e (2.6.20). Esta unicidade da solução deve então ser provida, adicionando-se a condição de ortogonalidade

$$\mathbf{V}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{0} \quad (\text{A.1})$$

para completar o sistema. Em outras palavras, o vetor  $\mathbf{p}^*$  correspondente à solução desejada do sistema deve ser ortogonal às forças pertencentes ao espaço coberto pela base  $\mathbf{V}$ .

A partir da equação (A.1), pode-se resolver a primeira equação do sistema das equações (2.6.19)-(2.6.20) para as forças  $\mathbf{p}^*$  formalmente como:

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) [\mathbf{F}(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (\text{A.2})$$

onde  $(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) [\mathbf{F}(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T) + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1}$  é chamada de inversa do Bott-Duffin da matriz de flexibilidade  $\mathbf{F}$  e  $(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{V}^T)$  é o projetor ortogonal ao espaço coberto pela base  $\mathbf{V}$  (Ben-Israel e Greville, 1980).

Substituindo-se a equação (A.2) na equação (2.6.20) e considerando a equação (2.7.16), obtém-se a expressão final:

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}^b = \mathbf{H}^T [\mathbf{F} + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T [\mathbf{F} + \mathbf{V}\mathbf{V}^T]^{-1} \mathbf{H} \quad (\text{A.4})$$

é a matriz de rigidez do método híbrido de elementos finitos para problemas estáticos. Esta matriz é simétrica, positiva semi-definida por construção ortogonal a deslocamentos de corpo rígido:

$$\mathbf{W}^T \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (\text{A.5})$$



## APÊNDICE B - Avaliação de deslocamentos no domínio em problemas de elastostática

Diferentemente do que acontece no método de elementos finitos convencional, no método híbrido de elementos finitos apresentado a contribuição de corpo rígido aos deslocamentos internos em problemas estáticos tem que ser calculada explicitamente durante o processo de pós-análise, já que nenhuma referência é feita direta às constantes  $C_{sm}$  da equação (2.3.8) durante a formulação do método (Dumont, 2003). Isso tem a ver com o fato conceitual de o método estar baseado num campo de tensões e não de deslocamentos.

No entanto, deslocamentos de corpo rígido inerentes ao problema e, portanto, deslocamentos absolutos, podem ser calculados uma vez conhecidos os deslocamentos nodais  $\mathbf{d}$  em todo  $\Gamma$ , como se descreve a seguir. Inicialmente, expressa-se a função de deslocamentos de corpo rígido  $u_{is}^r$  da equação (2.3.8) de forma normalizada, de tal modo que, nos pontos nodais do contorno  $\Gamma$  seja coincidente com os valores da matriz normalizada  $W_{si}$ , que é a base dos deslocamentos de corpo rígido, introduzida na Seção 2.7.2. Sejam  $\tilde{u}_{is}^r$  funções genéricas de corpo rígido, ainda não-normalizadas. Funções normalizadas

$$u_{ij}^r = \tilde{u}_{ik}^r \Lambda_{kj} \quad (\text{B.1})$$

podem ser obtidas pela determinação da matriz quadrada, não-singular  $\Lambda_{kj}$  a partir da imposição de que, nos pontos nodais do contorno,  $u_{mj}^r \equiv U_{mj}^r = W_{mj}$ , ou seja,

$$U_{mj}^r \equiv W_{mj} = \tilde{U}_{mk}^r \Lambda_{kj} \quad \text{ou} \quad \mathbf{U}^r \equiv \mathbf{W} = \tilde{\mathbf{U}}^r \mathbf{\Lambda} \quad (\text{B.2})$$

usando notação tanto indicial quanto matricial, de onde se obtém, pré-multiplicando-se toda a equação por  $\mathbf{W}^T$  e observando a equação (2.7.13):

$$\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{W}^T \tilde{\mathbf{U}}^r)^{-1} \quad (\text{B.3})$$

Além disso, pode-se reescrever a equação (2.3.8) em uma forma equivalente, na qual os deslocamentos de corpo rígido são expressos separadamente, para certo vetor de parâmetros  $\mathbf{r} \equiv r_s$ :

$$u_i^f = u_i^* + u_i^b = (u_{im}^* + u_{ij}^r C_{jm}) p_m^* + u_i^b + u_{ij}^r r_j \quad (\text{B.4})$$

Para ser consistente, a equação (B.4) deve ser válida nos pontos nodais,

$$\mathbf{d} = (\mathbf{U}^* + \mathbf{WC}) \mathbf{p}^* + \mathbf{d}^b + \mathbf{Wr} \quad \text{ou} \quad d_m = (U_{mn}^* + W_{mi} C_{in}) p_n^* + d_m^b + W_{mi} r_i \quad (\text{B.5})$$

em notação matricial e indicial, respectivamente. Neste equação,  $\mathbf{U}^*$  é uma matriz obtida expressando-se a solução fundamental  $u_{im}^*$  nos pontos nodais do elemento.

Então, pré-multiplicando-se a equação (B.5) em ambos os lados por  $\mathbf{W}^T$  (lembrando que  $\mathbf{W}$  é ortonormal) e isolando-se  $\mathbf{r}$ , resulta:

$$\mathbf{r} = \mathbf{W}^T(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) - (\mathbf{W}^T \mathbf{U}^* + \mathbf{C}) \mathbf{p}^* \quad \text{ou} \quad r_s = W_{ms} (d_m - d_m^b) - (W_{ms} U_{mn}^* + C_{sn}) p_n^* \quad (\text{B.6})$$

Finalmente, substituindo-se esta expressão em (B.4), obtém-se a expressão dos deslocamentos em pontos internos do método híbrido para problemas estáticos com consideração de corpo rígido:

$$u_i^* = (u_{im}^* - u_{is}^r W_{ns} U_{nm}^*) p_m^* + u_i^b + u_{is}^r W_{ns} (d_m - d_m^b) \quad (\text{B.7})$$

Observe que, nesta expressão,  $u_i^*$  depende apenas dos valores encontrados na análise para  $\mathbf{p}^*$  e  $\mathbf{d} - \mathbf{d}^b$ , já que a constante  $\mathbf{C}$  é cancelada.

## APÊNDICE C - Cálculo da matriz de rigidez $\mathbf{K}$ no contexto do Método híbrido simplificado de elementos finitos

Alternativamente à forma como é calculada a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  durante todo o presente trabalho, existe uma forma mais simples, eficiente e tão precisa quanto, que ao invés de necessitar da matriz de flexibilidade  $\mathbf{F}$  (como na Seção 2.6.2, necessita apenas que se avalie a solução fundamental nos pontos nodais do elemento, gerando uma matriz denominada  $\mathbf{U}^*$ , sem a necessidade de integração no contorno. Além disso, o processo de inversão de  $\mathbf{U}^*$  (necessário para a obtenção de  $\mathbf{K}$  como será mostrado a seguir) é mais simples, já que  $\mathbf{U}^*$  é não-singular, mesmo para problemas estáticos.

Essa forma alternativa de obtenção da matriz de rigidez é a característica principal do denominado método híbrido *simplificado* de elementos de contorno (Chaves, 1999, 2003) e de elementos finitos. A seguir é apresentado de maneira sucinta o processo de obtenção da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  através do método híbrido simplificado de elementos finitos.

A partir do equilíbrio de forças nodais em termos de trabalhos virtuais, é possível se chegar exatamente à equação (2.6.20),

$$\mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (2.6.20)$$

sem a necessidade de se fazer qualquer menção ao potencial de Hellinger-Reissner.

Os deslocamentos no domínio  $\Omega$  do corpo elástico são expressos de acordo com as equações (2.3.2) e (2.6.9):

$$u_i^f = u_{im}^* p_m^* + u_i^p \quad (C.1)$$

e os deslocamentos no contorno  $\Gamma$ , de acordo com a equação (2.6.10):

$$\tilde{u}_i = u_{im} d_m \quad (2.6.10)$$

Pode-se forçar que ambas as hipóteses de deslocamentos coincidam nos pontos nodais, o que em notação matricial se escreve, a partir da equação (C.1),

$$\mathbf{d} = \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* + \mathbf{d}^b \quad (C.2)$$

onde  $\mathbf{U}^* \equiv U_{mn}^*$  é uma matriz de deslocamentos medidos em pontos nodais em termos da solução fundamental, dada pela equação (5.1.9), e  $\mathbf{d}^b \equiv u_m^b$  é o vetor de deslocamentos relacionados à solução particular.

A matriz  $\mathbf{U}^* \equiv U_{mn}^*$ , que no método híbrido simplificado de elementos de contorno é simétrica por construção, no método híbrido simplificado de elementos finitos é não-simétrica para a maioria dos elementos. Uma outra

diferença da matriz  $\mathbf{U}^*$  obtida através do método híbrido de elementos finitos em relação à obtida através do método híbrido de elementos de contorno é que ela é não-singular, tanto para problemas no domínio da freqüência quanto para problemas estáticos.

Um caso particular em que a matriz  $\mathbf{U}^*$  é simétrica é o dos elementos unidimensionais (apresentados no Capítulo 5), para os quais a utilização da matriz  $\mathbf{U}^*$  fornece exatamente a mesma matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  obtida com a utilização da matriz de flexibilidade  $\mathbf{F}$ , já que nenhuma aproximação é feita em relação às funções de interpolação utilizadas no contorno destes elementos.

Eliminando-se  $\mathbf{p}^*$  nas equações (2.6.20) e (C.2), obtém-se

$$\mathbf{H}^T(\mathbf{U}^*)^{-1}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (\text{C.3})$$

em que

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T(\mathbf{U}^*)^{-1} \quad (\text{C.4})$$

é uma matriz de rigidez que, devido à equação (C.2) ser formulada sem base variacional, é em geral não-simétrica.

Como mencionado no item 2.6.3 do Capítulo 2, em geral há mais graus de liberdade internos, relacionados a  $\mathbf{p}^*$ , do que graus de liberdade externos, relacionados a  $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ , ou seja,  $\dim(\mathbf{p}^*) \geq \dim(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$  (ver tabelas 3.1 e 3.2 do Capítulo 3), o que ocasiona uma matriz  $\mathbf{U}^*$  retangular (exceto em casos especiais, como o caso particular de elementos unidimensionais apresentados no Capítulo 5), que só pode ser invertida através de procedimentos de obtenção de matrizes inversas generalizadas.

Para o caso particular de elementos de treliça, apresentados na seção 5.1 do Capítulo 5, a matriz  $\mathbf{U}^*$  dada para uma determinada freqüência assume a forma

$$\mathbf{U}^* = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\text{sen } k\ell}{k} \\ \frac{\text{sen } k\ell}{k} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

de acordo com a equação (5.1.9), ou em um desenvolvimento em série de freqüência,

$$\mathbf{U}^* = \frac{\ell}{EA} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\rho}{E} \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{\ell^2}{6} \\ \frac{\ell^2}{6} & 0 \end{bmatrix} + \frac{\rho^2}{E^2} \omega^4 \begin{bmatrix} 0 & \frac{\ell^4}{120} \\ \frac{\ell^4}{120} & 0 \end{bmatrix} - \frac{\rho^3}{E^3} \omega^6 \begin{bmatrix} 0 & \frac{\ell^6}{5040} \\ \frac{\ell^6}{5040} & 0 \end{bmatrix} \right) + \mathbf{0}(\omega^8) \quad (\text{C.6})$$

de acordo com a equação (5.1.17).

A inversa da matriz  $\mathbf{U}^*$  como uma série de frequência, a partir da equação (C.6), necessária para obtenção da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$ , dada na equação (C.4), deve ser obtida através do procedimento de inversão de matrizes em série de frequência apresentado na seção 2.10 do capítulo 2, conforme as equações (2.10.1) e (2.10.2), visto que  $\mathbf{U}_0^*$  é não-singular. Deve-se notar que o processo de obtenção de  $\mathbf{K}$ , para elementos unidimensionais através de  $\mathbf{U}^*$ , é extremamente vantajoso e mais simples do que a obtenção através  $\mathbf{F}$ , visto que apenas a inversão de  $\mathbf{U}_0^*$  se torna necessária.

## APÊNDICE D - Matrizes de transformação para elementos de treliça e viga

Neste apêndice são apresentadas algumas das matrizes de transformação entre os deslocamentos de sistemas de coordenadas que podem ser utilizados para os elementos de treliça e viga apresentados no capítulo 5.

Será denominado de *natural* o sistema de coordenadas com o menor número de graus de liberdade possível por elemento; de *local* o sistema de coordenadas em que os graus de liberdade se encontrarem na direção axial ou perpendicular ao elemento; e de *global* o sistema de coordenadas do elemento com o maior número de graus de liberdade dispostos de acordo com os graus de liberdade globais da estrutura.

### D.1 - Matrizes de transformação para o elemento de treliça plana

O sistema de coordenada natural mais simples para os deslocamentos e esforços de um elemento de treliça no plano é o apresentado na Figura D.1a,

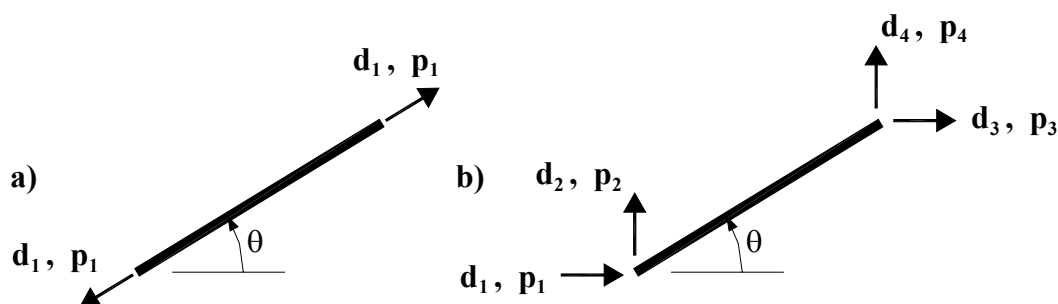


Figura D.1: a) Sistema de coordenadas naturais (sem deslocamentos de corpo rígido) de um elemento de treliça; b) sistema de coordenadas globais de um elemento de treliça.

Neste sistema de coordenadas, figura D.1a, não aparecem deslocamentos de corpo rígido e a matriz de rigidez do elemento tem ordem de  $1 \times 1$ , visto que o elemento possui apenas um grau de liberdade. Porém, em geral, para o estudo de treliças no plano, deseja-se obter a matriz de rigidez do elemento no sistema apresentado pela figura D.1b, em que aparecem quatro graus de liberdade, dos quais três correspondem a deslocamentos de corpo rígido.

Para que se possa obter uma matriz de rigidez no sistema de coordenadas globais (figura D.1b) partindo-se da matriz de rigidez obtida para o sistema de coordenadas naturais (figura D.1a), deve-se utilizar uma matriz de transformação, que permita transformar deslocamentos do sistema de

coordenadas globais (figura D.1b) para o sistema de coordenadas naturais (figura D.1a).

Tal matriz de transformação é obtida aplicando-se um deslocamento unitário no grau de liberdade do sistema global, mantendo-se nulos todos os outros graus do referido sistema, e medindo-se o valor desse deslocamento unitário no sistema de coordenadas naturais, conforme ilustra a Figura D.2.

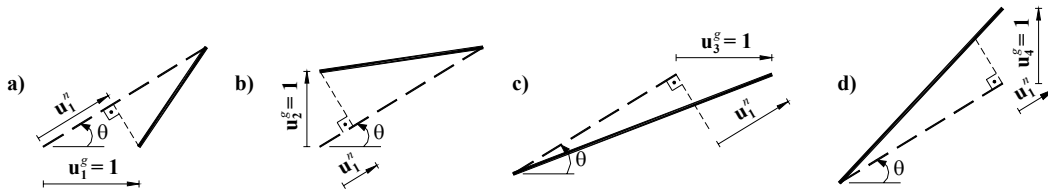


Figura D.2: Deslocamentos unitários do sistema global do elemento medidos a partir do sistema natural.

O procedimento ilustrado pela figura D.2 fornece, para os sistemas de coordenadas da Figura D.1, a seguinte matriz de transformação:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

que se relaciona com as matrizes de rigidez dos sistemas acima pela expressão:

$$\mathbf{K}^g = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^n \mathbf{T} \quad (\text{D.2})$$

em que  $\mathbf{K}^g$  é a matriz de rigidez do elemento no sistema global (Figura D.1b) e

$\mathbf{K}^n = \frac{EA}{\ell}$  é a matriz de rigidez do elemento no sistema natural (Figura D.1a).

Portanto,  $\mathbf{K}^g$  é igual a:

$$\mathbf{K}^g = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

onde  $c = \cos \theta$  e  $s = \sin \theta$ .

De acordo com o desenvolvimento feito na seção 5.1 do Capítulo 5, o sistema de coordenadas mais adequado para a obtenção da matriz de rigidez de um elemento de treliça pelo método híbrido de elementos finitos é:

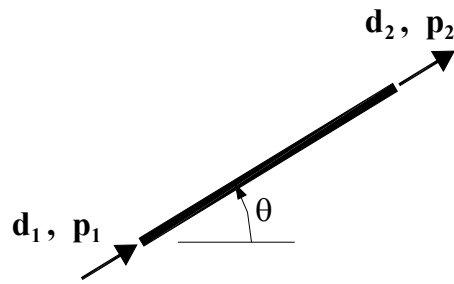


Figura D.3: Sistema de coordenadas local (com apenas 1 deslocamento de corpo rígido) de um elemento de treliça.

Ele fornece a matriz de rigidez apresentada na equação (5.1.21) e a matriz de transformação entre este sistema de coordenadas e o sistema da figura D.1b tem a forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad (\text{D.4})$$

$$\mathbf{K}^g = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^\ell \mathbf{T} \quad (\text{D.5})$$

onde  $\mathbf{K}^\ell$  é

$$\mathbf{K}^\ell = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.6})$$

e  $\mathbf{K}^g$  é a matriz de rigidez do elemento de treliça no sistema global, exatamente igual à matriz de rigidez encontrada usando a equação (D.3).

Outro sistema de coordenadas, muito difundido devido ao método da rigidez direta, é o da Figura D.4:

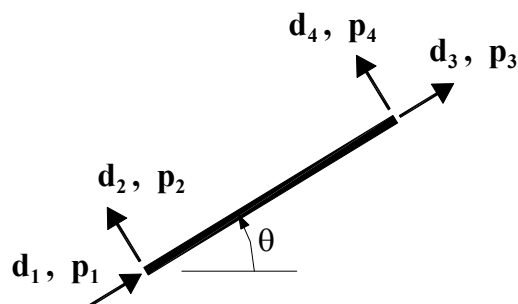


Figura D.4: Sistema de coordenadas local (com três deslocamentos de corpo rígido) de um elemento de treliça plana.



Nele aparecem todos os graus de liberdade possíveis em um elemento de treliça plana. A matriz de transformação entre os deslocamentos do sistema da Figura D.1b e os deslocamentos da Figura D.4 tem a seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

A transformação entre as matrizes do sistema local e global é dada pela equação (D.4), onde  $\mathbf{K}^\ell$  tem a forma:

$$\mathbf{K}^\ell = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

## D.2 - Matriz de transformação para o elemento de viga com 6 graus de liberdade

Em geral os elementos de viga são apresentados com 6 graus de liberdade, conforme mostra a Figura D.4, e não apenas com 4 graus de liberdade, como feito nas seções 5.2 e 5.3 do Capítulo 5.

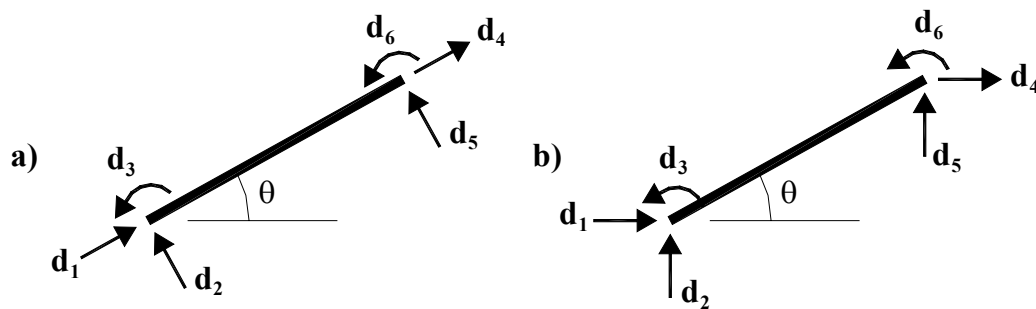


Figura D.4: a) Sistema de coordenadas local (com três deslocamentos de corpo rígido) de um elemento de viga; b) sistema de coordenadas global de um elemento de viga.

A matriz de rigidez local para um elemento de viga esbelta com os graus de liberdade da Figura D.4a é igual a:

$$\mathbf{K}^{\ell} = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} \frac{A\ell^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{A\ell^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6\ell & 0 & -12 & 6\ell \\ 0 & 6\ell & 4\ell^2 & 0 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -\frac{A\ell^2}{I} & 0 & 0 & \frac{A\ell^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6\ell & 0 & 12 & -6\ell \\ 0 & 6\ell & 2\ell^2 & 0 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

na qual se percebe o acréscimo de mais duas linhas e colunas para representar as parcelas de rigidez correspondente aos graus de liberdade  $d_1$  e  $d_2$ , que são exatamente iguais às rigidezes calculadas para o elemento de treliça da Seção 5.1 do capítulo 5. Da mesma forma, as parcelas referentes às matrizes de massa do elemento de treliça da Seção 5.1 devem ser adicionadas as matrizes de massa do elemento de viga das Seções 5.2 e 5.3 para a obtenção das matrizes de massa do elemento de viga com 6 graus de liberdade (de acordo com a Figura D.4a).

A matriz de transformação que relaciona os deslocamentos do sistema global de coordenadas da Figura D.4b aos respectivos deslocamentos no sistema local da Figura D.4a tem a seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

sendo a transformação entre as matrizes do sistema local e global para um elemento de treliça expressa pela equação (D.4), onde  $\mathbf{T}$  é dada pela equação (D.9) e  $\mathbf{K}^\ell$  pela equação (D.8).

## APÊNDICE E - Formulação analítica de cabos flexíveis

O cabo, ou fio, flexível, é um elemento estrutural muito utilizado em linhas de transmissão, pontes pênséis, transportes funiculares etc. Em seu cálculo admite-se, por hipótese, que o cabo seja um corpo em equilíbrio e que nele não haja nenhum esforço resistente à flexão, o que implica só existirem no cabo esforços normais que agem na direção axial. Seu estudo envolve o conhecimento das relações que existem entre as tensões, o vão, a flecha e o seu comprimento (Merian, 1985).

As forças que agem sobre os cabos flexíveis podem ser: forças concentradas, como mostra a figura E.1a, ou forças distribuídas em seu comprimento, como mostra a figura E.1b, onde  $w$  é uma carga de intensidade variável.

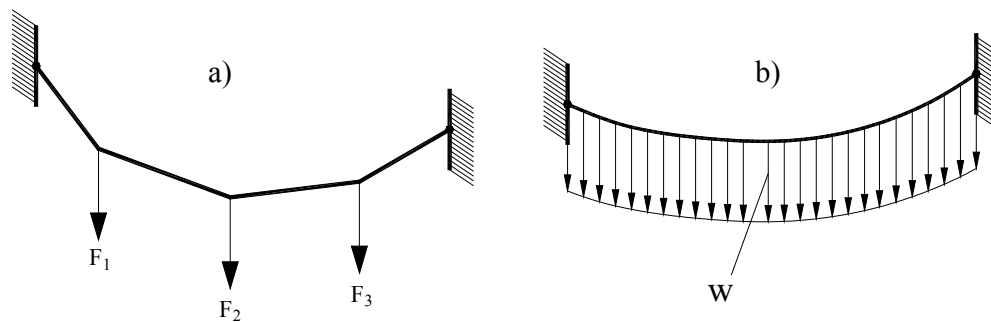


Figura E.1: Configurações de carregamento sobre um cabo flexível: a) cabo sujeito a forças concentradas  $F$ ; b) cabo sob carregamento distribuído  $w$ .

### E.1 - Equação de governo

Para que seja satisfeita a condição de equilíbrio do cabo, supõe-se que cada parcela infinitesimal do cabo esteja em equilíbrio. Na figura E.2 é mostrado o diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal, em que  $T$  é a tração no cabo,  $\theta$  é o ângulo que o cabo forma com a horizontal na direção  $x$ ,  $w$  é uma carga distribuída verticalmente ao longo da componente horizontal e  $\mu$  uma carga distribuída verticalmente ao longo do cabo, podendo ser, por exemplo, seu próprio peso.

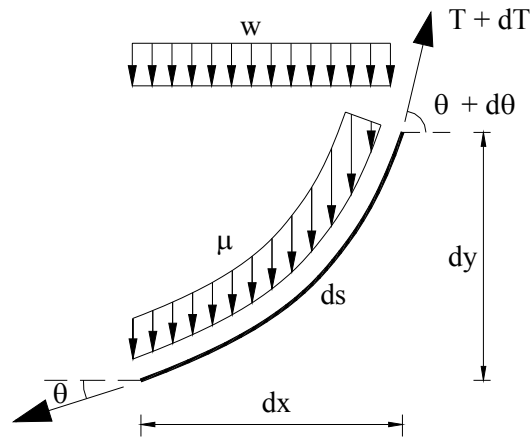


Figura E.2: Diagrama do corpo livre de um elemento infinitesimal de cabo.

Fazendo-se o somatório das forças verticais e das forças horizontais, respectivamente, tem-se:

$$(T + dT)\text{sen}(\theta + d\theta) = T \text{sen} \theta + wdx + \mu ds \quad (\text{E.1})$$

$$(T + dT)\text{cos}(\theta + d\theta) = T \text{cos} \theta \quad (\text{E.2})$$

Desenvolvendo o seno e o co-seno da soma dos dois ângulos, levando em consideração que, no limite,  $\text{sen} d\theta = d\theta$  e  $\text{cos} d\theta = 1$ , e cancelando os termos de segunda ordem, obtém-se:

$$T \text{cos}(\theta)d\theta + dT \text{sen} \theta = wdx + \mu ds \quad (\text{E.3})$$

$$-T \text{sen}(\theta)d\theta + dT \text{cos} \theta = 0 \quad (\text{E.4})$$

que se pode escrever como

$$d(T \text{sen} \theta) = wdx + \mu ds \quad (\text{E.5})$$

$$d(T \text{cos} \theta) = 0 \quad (\text{E.6})$$

A equação (E.6) mostra que a componente horizontal de  $T$  é uma constante, ou seja,

$$T \text{cos} \theta = T_0 \quad (\text{E.7})$$

que combinada com a equação (E.5), fornece:

$$d(T_0 \tan \theta) = wdx + \mu ds \quad (\text{E.8})$$

Lembrando que  $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ , chega-se a

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w}{T_0} + \frac{\mu}{T_0} \frac{ds}{dx} \quad (\text{E.9})$$

que é a equação diferencial dos cabos flexíveis. A solução desta equação deve levar em conta as condições de contorno.

## E.2 - Cabo Parabólico

Quando o peso próprio do cabo é pequeno em relação ao carregamento que nele age e tal carregamento é constante e uniformemente distribuído pela distância horizontal (vão), o cabo assume a configuração de um arco parabólico.

Sendo então  $w$  o carregamento constante e  $\mu$  o peso próprio do cabo, desprezível, tem-se:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w}{T_0} \quad (\text{E.10})$$

Integrando-se uma vez a equação (E.10), chega-se a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{T_0} x + C_1 \quad (\text{E.11})$$

onde  $C_1$  é uma constante de integração.

Uma segunda integração da equação (E.10) fornece:

$$y = \frac{w}{2T_0} x^2 + C_2 \quad (\text{E.12})$$

Adotando os eixos coordenados no vértice da parábola, conforme mostra a figura E.3a (abaixo), tem-se que,  $\frac{dy}{dx} = 0$ , quando  $x = 0$ , de modo que  $C_1 = 0$ . Da mesma forma  $y = 0$ , quando  $x = 0$ , e portanto  $C_2 = 0$ .

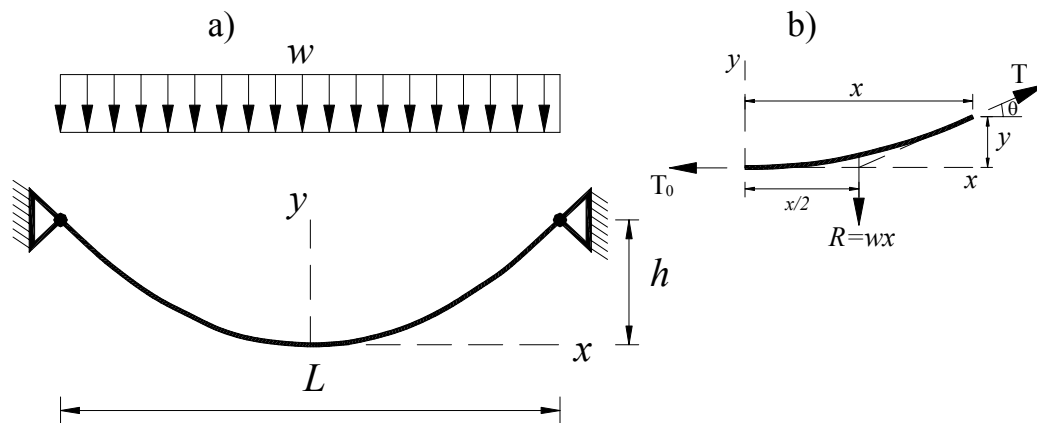


Figura E.3: Configuração de eixos e carregamento em um cabo parabólico.

Então a equação que define a configuração do cabo parabólico, de acordo com a figura E.3a é:

$$y = \frac{w}{2T_0} x^2 \quad (\text{E.13})$$

Como se pode notar, na figura E.3b, a componente horizontal da tração do cabo é a própria tração do cabo na origem. Entrando-se na equação (E.13) com os valores  $x = L/2$  e  $y = h$ , tem-se,

$$T_0 = \frac{wL^2}{8h} \quad (\text{E.14})$$

$$y = \frac{4hx^2}{L^2} \quad (\text{E.15})$$

A tração  $T$  é dada pela seguinte expressão, de acordo com o diagrama de corpo livre da figura E.3b,

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2x^2} \quad (\text{E.16})$$

ou, eliminando-se  $T_0$ ,

$$T = w\sqrt{x^2 + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2} \quad (\text{E.17})$$

A tração máxima ocorre quando  $x = L/2$  e vale

$$T_{\text{máx}} = \frac{wL}{2} \sqrt{1 + \frac{L^2}{16h^2}} \quad (\text{E.18})$$

Para se obter o comprimento  $S$  de um seguimento de cabo, utiliza-se da relação diferencial  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ . Portanto,

$$S = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{wx}{T_0}\right)^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{wx}{T_0}\right)^2} + \frac{T_0}{2w} \ln \left( \frac{wx}{T_0} + \sqrt{1 + \left(\frac{wx}{T_0}\right)^2} \right) \quad (\text{E.19})$$

### E.3 - Cabo em Catenária

Quando o cabo está sujeito somente à ação do seu peso próprio, sua equação de governo torna-se:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0} \frac{ds}{dx} \quad (\text{E.20})$$

A figura E.4a mostra um cabo em catenária e os eixos coordenados adotados. Na figura E.4b tem-se o diagrama de corpo livre de uma porção finita do cabo de comprimento  $s$ . Este diagrama de corpo livre difere daquele de figura E.3b pelo fato de ser agora a força vertical suportada igual ao peso da parte do

cabo de comprimento  $s$ , em lugar da carga uniformemente distribuída em relação à horizontal.

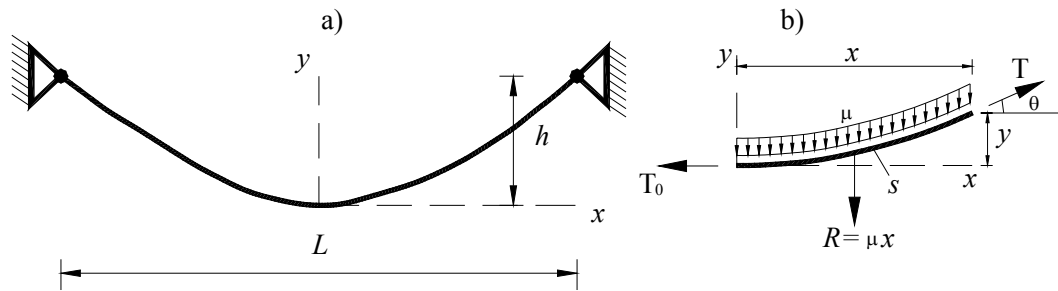


Figura E.4: a) cabo em catenária e eixos coordenados; b) diagrama de corpo livre de uma porção finita do cabo de comprimento  $s$ .

A partir da relação diferencial  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ , modifica-se a equação (E.20), de forma a torná-la

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (\text{E.21})$$

que é a equação diferencial da curva catenária formada pelo cabo.

Utilizando-se as expressões do co-seno hiperbólico, do seno hiperbólico e de suas derivadas é possível chegar à solução da equação (E.21) de maneira bastante simples.

Primeiramente, percebendo-se a semelhança entre a derivada do seno hiperbólico de  $ax$ , equação (E.22), e a equação (E.21),

$$\frac{d \sinh ax}{dx} = a \cosh ax = a \sqrt{1 + \sinh^2 ax} \quad (\text{E.22})$$

chega-se à conclusão que

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{\mu}{T_0}x\right) \quad (\text{E.23})$$

Portanto, a integração da equação (E.23) fornece:

$$y = \frac{T_0}{\mu} \cosh\left(\frac{\mu}{T_0}x\right) + C \quad (\text{E.24})$$

em que  $C$  é a constante de integração. Considerando-se que  $y = 0$ , quando  $x = 0$ , conclui-se que  $C = -T_0/\mu$  e, portanto,

$$y = \frac{T_0}{\mu} \left( \cosh\left(\frac{\mu}{T_0}x\right) - 1 \right) \quad (\text{E.25})$$



a qual é a equação da curva catenária formada pelo cabo suspenso sob a ação do seu próprio peso.

Do diagrama de corpo livre da figura E.4b e das expressões anteriores vem

$$s = \int_0^x ds = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^x \cosh \frac{\mu x}{T_0} dx = \frac{T_0}{\mu} \sinh \frac{\mu x}{T_0} \quad (\text{E.26})$$

A tração  $T$  no cabo é obtida do triângulo de equilíbrio das forças na figura E.4b. Assim,

$$T^2 = T_0^2 + \mu^2 s^2 \quad (\text{E.27})$$

A substituição do valor de  $s$  dado pela equação (E.26) na equação (E.27) fornece,

$$T^2 = T_0^2 \left(1 + \sinh^2 \frac{\mu x}{T_0}\right) = T_0^2 \cosh^2 \frac{\mu x}{T_0} \quad (\text{E.28})$$

ou, em função de  $y$ , através da utilização da equação (E.25),

$$T = T_0 \cosh \frac{\mu x}{T_0} = T_0 + \mu y \quad (\text{E.29})$$

A solução de problemas de catenária para cabos muito tencionados (cabos em que a relação flecha-vão é pequena), pode ser obtida, de maneira aproximada, pelas fórmulas apresentadas para o caso de cabo parabólico. Em problemas em que os cabos são suspensos em pontos que não estão no mesmo nível, pode-se aplicar as relações acima de forma isolada em ambos os lados do cabo, de forma a se resolver o problema por inteiro.

## APÊNDICE F -

### Condensação Estática dos graus de liberdade 3 e 6 do elemento de viga

Para se obter o elemento de treliça com 4 graus de liberdade (conforme a Figura 5.5), deve-se pensar o elemento de viga com seis graus de liberdade da Figura F.1, como tendo dois graus de liberdade internos ( $d_3$  e  $d_6$ ) e quatro externos ( $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_4$  e  $d_5$ ).

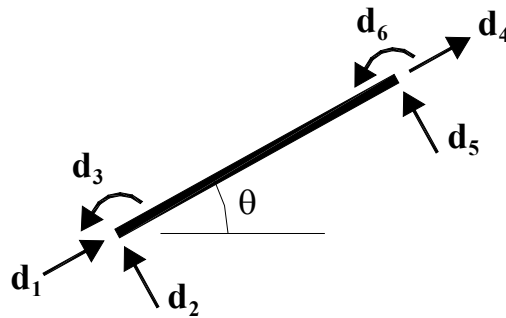


Figura F.1: Graus de liberdade de um elemento de viga plana.

Desta forma pode-se escrever a matriz do elemento de viga, dada pela equação (5.2.22) reescrita abaixo,

$$\mathbf{K} = \frac{Elk}{1-Cc} \begin{bmatrix} \frac{k'EA c'}{s'}(1-Cc) & 0 & 0 & -\frac{k'EA}{s'}(1-Cc) & 0 & 0 \\ 0 & Elk & k^2(Sc+Cs) & kSs & 0 & -k^2(S+s) & k(C-c) \\ 0 & 0 & kSs & Cs-Sc & 0 & k(c-C) & S-s \\ -\frac{k'EA}{s'}(1-Cc) & 0 & 0 & \frac{k'EA c'}{s'}(1-Cc) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2(S+s) & k(c-C) & 0 & k^2(Sc+Cs) & -kSs \\ 0 & k(C-c) & S-s & 0 & 0 & -kSs & Cs-Sc \end{bmatrix} \quad (5.2.22)$$

como:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11}^{ee} & K_{12}^{ee} & K_{13}^{ei} & K_{14}^{ee} & K_{15}^{ee} & K_{16}^{ei} \\ K_{21}^{ee} & K_{22}^{ee} & K_{23}^{ei} & K_{24}^{ee} & K_{25}^{ee} & K_{26}^{ei} \\ K_{31}^{ie} & K_{32}^{ie} & K_{33}^{ii} & K_{34}^{ie} & K_{35}^{ie} & K_{36}^{ii} \\ K_{41}^{ee} & K_{42}^{ee} & K_{43}^{ei} & K_{44}^{ee} & K_{45}^{ee} & K_{46}^{ei} \\ K_{51}^{ee} & K_{52}^{ee} & K_{53}^{ei} & K_{54}^{ee} & K_{55}^{ee} & K_{56}^{ei} \\ K_{61}^{ie} & K_{62}^{ie} & K_{63}^{ii} & K_{64}^{ie} & K_{65}^{ie} & K_{66}^{ii} \end{bmatrix} \quad (F.1)$$

em que, os índices  $ee$ ,  $ei$ ,  $ie$  e  $ii$  nos elementos da matriz indicam a relação destes elementos com os graus de liberdade externos e internos.

Desta forma é possível montar as seguintes submatrizes a partir da matriz  $\mathbf{K}$ , conforme equações (F.1) e (5.2.22):

$$\mathbf{K}_{ee} = \begin{bmatrix} K_{11}^{ee} & K_{12}^{ee} & K_{14}^{ee} & K_{15}^{ee} \\ K_{21}^{ee} & K_{22}^{ee} & K_{24}^{ee} & K_{25}^{ee} \\ K_{41}^{ee} & K_{42}^{ee} & K_{44}^{ee} & K_{45}^{ee} \\ K_{51}^{ee} & K_{52}^{ee} & K_{54}^{ee} & K_{55}^{ee} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k^t EAc^t}{s^t} & 0 & -\frac{k^t EA}{s^t} & 0 \\ 0 & \frac{k^3 EI(Sc + Cs)}{1 - Cc} & 0 & -\frac{k^3 EI(S + s)}{1 - Cc} \\ -\frac{k^t EA}{s^t} & 0 & \frac{k^t EAc^t}{s^t} & 0 \\ 0 & -\frac{k^3 EI(S + s)}{1 - Cc} & 0 & \frac{k^3 EI(Sc + Cs)}{1 - Cc} \end{bmatrix} \quad (\text{F.2})$$

$$\mathbf{K}_{ei} = \begin{bmatrix} K_{13}^{ei} & K_{16}^{ei} \\ K_{23}^{ei} & K_{26}^{ei} \\ K_{43}^{ei} & K_{46}^{ei} \\ K_{53}^{ei} & K_{56}^{ei} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k^2 EISs}{1 - Cc} & \frac{k^2 EI(C - c)}{1 - Cc} \\ 0 & 0 \\ -\frac{k^2 EI(C - c)}{1 - Cc} & -\frac{k^2 EISs}{1 - Cc} \end{bmatrix} \quad (\text{F.3})$$

$$\mathbf{K}_{ie} = \begin{bmatrix} K_{31}^{ie} & K_{32}^{ie} & K_{34}^{ie} & K_{35}^{ie} \\ K_{61}^{ie} & K_{62}^{ie} & K_{64}^{ie} & K_{65}^{ie} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k^2 EISs}{1 - Cc} & 0 & -\frac{k^2 EI(C - c)}{1 - Cc} \\ 0 & \frac{k^2 EI(C - c)}{1 - Cc} & 0 & -\frac{k^2 EISs}{1 - Cc} \end{bmatrix} \quad (\text{F.4})$$

$$\mathbf{K}_{ie} = \begin{bmatrix} K_{33}^{ii} & K_{36}^{ii} \\ K_{63}^{ii} & K_{66}^{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{kEI(-Sc + Cs)}{1 - Cc} & \frac{kEI(S - s)}{1 - Cc} \\ \frac{kEI(S - s)}{1 - Cc} & \frac{kEI(-Sc + Cs)}{1 - Cc} \end{bmatrix} \quad (\text{F.5})$$

Sendo a equação da matriz de rigidez condensada dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{K}_{cond} = \mathbf{K}_{ee} - \mathbf{K}_{ei} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ie} \quad (\text{F.6})$$

então, a matriz de rigidez condensada efetiva do elemento de viga é igual a:

$$\mathbf{K}_{cond} = \begin{bmatrix} \frac{k^t EAc^t}{s^t} & 0 & -\frac{k^t EA}{s^t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{k^3 EI(Sc - Cs)}{Ss} & 0 & -\frac{1}{2} \frac{k^3 EI(S - s)}{Ss} \\ -\frac{k^t EA}{s^t} & 0 & \frac{k^t EAc^t}{s^t} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{k^3 EI(S - s)}{Ss} & 0 & \frac{1}{2} \frac{k^3 EI(Sc - Cs)}{Ss} \end{bmatrix} \quad (\text{F.7})$$

que é a matriz de rigidez efetiva do elemento de treliça bi-dimensional, cuja expansão em série de frequência leva à equação (5.2.25).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)