

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Oscar Fabricio Zuleta Inch

**Elementos Finitos com Funções “Spline” para
Instabilidade e Dinâmica de Estruturas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Raul Rosas e Silva

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Oscar Fabricio Zuleta Inch

**Elementos Finitos com Funções “Spline” para
Instabilidade e Dinâmica de Estruturas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Raul Rosas e Silva

Presidente/Orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. João Luis Pascal Roehl

Departamento de Engenharia Civil - UFPA

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil - UFAL

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial

do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 22 de Fevereiro de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Oscar Fabricio Zuleta Inch

Graduou-se em Engenharia Civil, pela Universidad Mayor de San Andrés, em abril de 2003. Durante a graduação atuou na área de estruturas na análise de placas pré-fabricadas e protendidas.

Ficha Catalográfica

Zuleta Inch, Oscar Fabricio

Elementos Finitos com Funções “Spline” para Instabilidade e Dinâmica de Estruturas / Oscar Fabricio Zuleta Inch; orientador: Raul Rosas e Silva.– 2008.

96 f.:il.; 29,7cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia civil)– Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia civil – Teses. 2. Elementos finitos. 3. Funções spline. 4. Instabilidade. 5. Dinâmica. 6. Vigas de paredes finas. I. Silva, Raul Rosas e. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Aos meus pais, Oscar e Carmen;
Meus irmãos, Mónica, Fátima e Cristian.

Agradecimentos

A Deus pelas oportunidades que colocou na minha vida, aos meus pais, Oscar Zuleta e Carmen Inch e ao meu avô Alberto Inch, pelo amor, educação e exemplo que me oferecem todos os dias.

A minhas irmãs Mónica e Fátima pelo amor, apoio e força que me deram, a meu irmão Cristian Guerra pela amizade incondicional.

A Gricel por me incentivar e ser minha parceira no desafio do mestrado, preenchendo de muita felicidade e amor esses dois anos de estudo.

Ao Professor Raul Rosas e Silva pela orientação e esclarecimento de muitas dúvidas que ajudaram no desenvolvimento da dissertação. Ao Professor João Luis Pascal Roehl pela amizade e ensino que vai além dos temas de engenharia. A todos os professores do departamento de engenharia civil da PUC-RIO.

A meu grande amigo Carlos Aguilar pelas muitas conversas, conselhos e principalmente porque me apoio nos momentos difíceis, as minhas amigas Carmen Ayquipa e Jackeline Castañeda pela amizade sincera, aos meus colegas e amigos da turma Hyllttonn Bazan, Roberto Machado dos Santos, Gilberto Lopes, Daniel Huamán, Tarciso, aos amigos da pós graduação Lucas, Amanda Jarek, Wagner Nahas, André Pinto, Gladys Hurtado, Roberto Quevedo, Rafael de Sousa, Elaine Ponte, Elvidio Gavassoni, Jean Aguilera e Rafael Castro.

A CAPES, e a PUC-RIO pela oportunidade de cursar a pós-graduação.

Resumo

Zuleta Inch, Oscar Fabricio.; Silva, Raul Rosas e.
Elementos Finitos com Funções “Spline” para Instabilidade e Dinâmica de Estruturas. Rio de Janeiro, 2008. 94p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

No presente trabalho se estuda um elemento finito subparamétrico que aproxima o campo de deslocamentos com funções “spline”, implementando um programa que pode ser utilizado para cálculo estático, dinâmico e de instabilidade de estruturas compostas de placas, vigas de paredes finas, vigas caixão e em geral em elementos alongados (pontes e perfis metálicos). O grau de liberdade de rotação perpendicular ao plano do elemento é introduzido na formulação para possibilitar uma análise tridimensional. Apresenta-se um método que serve como base para determinar a constante de rigidez correspondente. Nos exemplos apresentados avalia-se a precisão obtida utilizando pouco número de divisões longitudinais do contínuo, vantagem que justifica o uso desses elementos em estudos de pré-projeto ou otimização de estruturas. Comparam-se os resultados com soluções teóricas ou resultados de outros programas estruturais, permitindo apreciar as possibilidades e limitações da modelagem usando elementos finitos com funções “spline”. As diferenças observadas, que surgem principalmente em placas espessas, são explicadas pela aproximação da deformação de cisalhamento encontrada na literatura para os elementos utilizados na comparação. Mostra-se também exemplos de instabilidade analisados em três dimensões que permitem considerar diferentes condições de apoio e discutir os resultados de fórmulas conhecidas.

Palavras-chave

Elementos finitos, funções spline, instabilidade, dinâmica, vigas de paredes finas.

Abstract

Zuleta Inch, Oscar Fabricio.; Silva, Raul Rosas e.

Finite elements with spline functions applied to Structural Dynamics and Instability. Rio de Janeiro, 2008. 94p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The present work presents a subparametric finite element model with spline displacement functions, implemented for static, dynamic and instability analysis of folded plates, thin-walled beams, box girders, and elongated structures such as bridges and structural shapes. A drilling degree of freedom (rotation about an axis perpendicular to the plane of the element) is introduced in the formulation to allow for three-dimensional analysis. A method for determining the corresponding contribution to the stiffness matrix is presented. The examples presented evaluate the accuracy obtained using a small number of longitudinal subdivisions of the continuum, convenient in the case of analyses for preliminary design and optimization. The results obtained are compared to theoretical solutions or results of standard structural analysis programs, allowing for an appraisal of the advantages and limitations of modeling with use of spline functions. The differences in the results, observed specially in the case of thick plates, are explained by the approximations for the shear strain in the elements used for comparison. From the examples it is possible to comment results of three-dimensional modeling of instability problems with different boundary conditions.

Keywords

Finite elements, spline functions, instability, dynamics, thin-walled beams.

Sumário

1. Introdução	15
1.1. Revisão bibliográfica	16
1.2. Objetivos	17
1.3. Organização do texto	18
2. Base Teórica	19
2.1. Funções spline	19
2.2. Campo de deslocamentos	23
2.3. Matriz de rigidez e vetor de forças	25
2.4. Matrizes de massa e geométrica	27
3. Implementação do elemento finito	28
3.1. Hipóteses cinemáticas	28
3.2. Tipo de elemento e funções de deslocamento	28
3.3. Esforços e deformações	31
3.3.1. Vetor de deformações generalizadas	31
3.3.2. Vetor de tensões generalizadas	32
3.3.3. Relações esforço-deformação	32
3.4. Grau de liberdade “drilling”	33
3.4.1. Rigidez artificial	33
3.4.2. Formulação variacional	34
3.4.3. Redução por condensação cinemática	35
3.5. Vetor de forças	38
3.6. Condições de contorno	39
3.7. Matriz de massa e geométrica	39
3.8. Freqüências naturais e cargas críticas	40
4. Exemplos	42
4.1. Viga simplesmente apoiada	42
4.2. Viga em balanço (teste de Cook)	44
4.3. Placa simplesmente apoiada	45
4.4. Freqüências naturais de placa em balanço	50

4.5. Freqüências Naturais de viga caixão	54
4.6. Carga crítica de placa em balanço	58
4.7. Carga crítica de viga em balanço	59
5. Conclusões e sugestões	64
5.1. Conclusões	64
5.2. Sugestões para trabalhos futuros	66
6. Referências bibliográficas	67
A. Entrada e saída de dados	69
B. Listagem do programa	74
B.1. Programa principal	74
B.2. Definições	91
B.3. Rotinas Gerais	91
B.4. Entrada de dados	93
B.5. Saída de dados	95

Lista de figuras

Figura 1.1 - (a) Modelagem tridimensional reduzida a uma serie de soluções de elemento finito bidimensional. (b) Redução a serie de soluções de elemento finito unidimensional [3]	16
Figura 2.1 - (a) funções spline periódicas, (b) funções spline não periódicas	20
Figura 2.2 - Função-base para funções periódicas de 3° grau (B3-spline)	21
Figura 2.3 - (a) Funções-base e parâmetros de controle arbitrários (b) Função para os valores dados em (a)	21
Figura 2.4 - (a) Valor constante (b) Variação linear da função	22
Figura 2.5 - Interpolação dos deslocamentos u e v para esforço plano	24
Figura 2.6 - Funções de Lagrange (a) segunda ordem, (b) terceira ordem	24
Figura 2.7 - Graus de liberdade para deslocamento de placa na teoria de Kirchhoff	25
Figura 2.8 - Intervalo de integração para a submatriz $[\phi_0 \phi_2]$	26
Figura 3.1 - Coordenadas locais do elemento	28
Figura 3.2 - Parâmetros de deslocamento	30
Figura 3.3 - Elemento diferencial de placa depois do carregamento [1]	31
Figura 3.4 - Sentidos positivos dos esforços. A direção de Q_{xz} e Q_{yz} nas faces positivas é do eixo z [8]	32
Figura 3.5 - Momentos resultantes para uma rotação unitária no nó 1 e zero para os demais nós	34
Figura 3.6 - Componente do tensor de pequenas rotações	35
Figura 3.7 - Elemento quadrilateral com rotações normais [2]	35
Figura 3.8 - Lado de um elemento quadrilateral [2]	36
Figura 3.9 - Modo de deslocamento com zero energia [2]	37

Figura 4.1 - (a) Momento unitário aplicado por um par de forças. (b) Momento unitário aplicado como carregamento consistente nos três nós do elemento	43
Figura 4.2 - Variação da rotação com o valor de ϕ e m	44
Figura 4.3 - Teste de Cook	44
Figura 4.4 - (a) Placa de espessura fina. (b) Placa de maior espessura	46
Figura 4.5 - Elemento quadrilateral de placa [2]	47
Figura 4.6 - Lado genérico de um elemento [2]	48
Figura 4.7 - Deslocamento vertical na placa fina	50
Figura 4.8 - (a) Placa fina em balanço. (b) Placa de concreto em balanço	51
Figura 4.9 - Modos de vibração da placa fina	52
Figura 4.10 - Modos de vibração da placa espessa	53
Figura 4.11 - Freqüências naturais do primeiro e quarto modos	54
Figura 4.12 - Viga caixão de ponte	55
Figura 4.13 - Dimensões da viga caixão	55
Figura 4.14 - Modelagem da viga caixão	55
Figura 4.15 - Modos de vibração da viga caixão	57
Figura 4.16 - Carga crítica de placa em balanço	58
Figura 4.17 - Modos de flambagem de placa engastada-livre	59
Figura 4.18 - Carga crítica de viga estreita em balanço. (a) Planta. (b) Elevação. (c) Seção [6]	60
Figura 4.19 - Viga em balanço com o grau de liberdade θ_z livre	61
Figura 4.20 - Viga em balanço totalmente engastada	61
Figura 4.21 - Distribuição de momentos no engaste	62
Figura 4.22 - Modos de flambagem da viga em balanço	62
Figura 4.23 - Cargas críticas do primeiro e segundo modos	63
Figura A.1 - Arquivo de texto DADOS1	69
Figura A.2 - Arquivo de texto DADOS2	70
Figura A.3 - Arquivo de texto RESEST	71
Figura A.4 - Arquivo de texto RESDIN	72
Figura A.5 - Arquivo de texto RESINS	73

Lista de tabelas

Tabela 4.1 - Deslocamentos e rotações na viga simplesmente apoiada	43
Tabela 4.2 - Relação de deslocamentos em C para vários tipos de elementos	45
Tabela 4.3 - Deslocamentos e rotações na placa fina	45
Tabela 4.4 - Deslocamentos e rotações na placa espessa	46
Tabela 4.5 - Freqüências naturais da placa fina em balanço	51
Tabela 4.6 - Freqüências naturais da placa espessa	52
Tabela 4.7 - Freqüências naturais da viga caixão	56
Tabela 4.8 - Cargas críticas da placa em balanço	58
Tabela 4.9 - Cargas críticas da viga em balanço parcialmente engastada	61
Tabela 4.10 - Cargas críticas da viga em balanço totalmente engastada	62

Lista de símbolos

B	matriz de deformação-deslocamento.
b_f	carga distribuída de corpo.
E	módulo de elasticidade.
f	vetor de forças.
K	matriz de rigidez.
K_G	matriz geométrica.
L	comprimento do elemento.
L_f	matriz com funções de forma.
M	matriz de massa consistente.
m	número de divisões ao longo do eixo x .
N	matriz com funções de forma transversais.
P_c	carga pontual que atua sobre parâmetros de deslocamento.
P_{cr}	carga crítica.
p	número de funções de forma transversais.
q_A	carga distribuída de superfície.
q_L	carga distribuída em uma linha nodal.
t	espessura da placa.
u, v, w	deslocamentos nas direções x , y e z , respectivamente.
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	deslocamentos nas direções x , y e z , respectivamente.
η	coordenada normalizada paralela a x .
ξ	coordenada normalizada paralela a y .
ϕ	função “spline”.
δ	vetor de deslocamentos.
δ_{ij}	vetor de parâmetros de deslocamentos.
ε	deformação unitária normal.

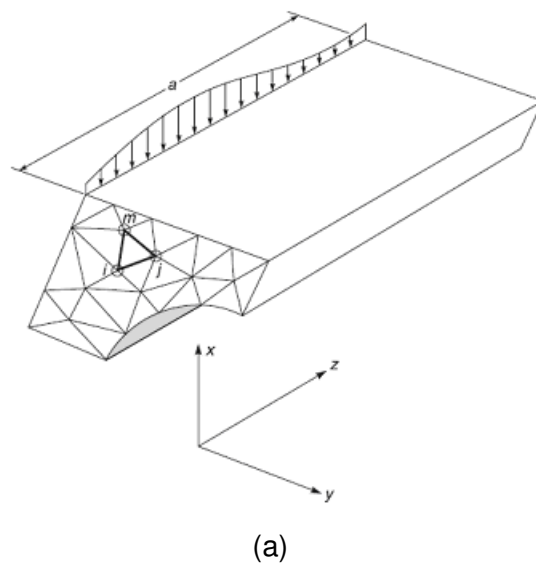
γ	deformação de cisalhamento.
σ	tensão normal.
τ	tensão cisalhante.
μ	coeficiente de poisson.
ρ	densidade do material.
ω	freqüência natural circular.
λ	parâmetro de carga crítica.
Π	energia potencial total.

1 INTRODUÇÃO

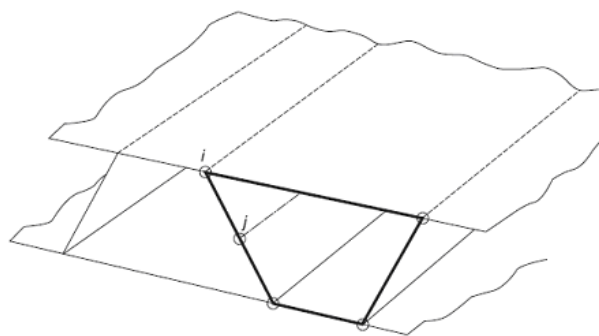
Na atualidade contamos com elementos finitos muito eficientes, incluídos em programas computacionais que conseguem modelar diversos sistemas estruturais como vigas caixão, placas e cascas tridimensionais. No entanto, para aplicações mais específicas, podemos adotar um elemento que, perdendo em generalidade, apresente outras vantagens como maior precisão com malhas menos refinadas, reduzindo significativamente o esforço no pré- e pós-processamento de dados. Ainda mais, tal elemento poderia ser utilizado em programas de otimização que precisam de várias entradas de dados, para uso em projetos preliminares, ou como superelementos em pesquisa de estruturas que tenham um número de graus de liberdade considerável. Os elementos com funções adicionais e as faixas finitas são exemplos desse tipo de elemento, sendo que o elemento finito com funções “spline” combina algumas características de ambos. O contínuo é dividido em um número finito de partes, e por cada uma delas passam várias funções que aproximam o campo de deslocamentos, resultando o somatório de todas as funções em uma função contínua do grau requerido em todo o domínio.

As funções “spline” geralmente são usadas para interpolar o deslocamento ao longo de um eixo do espaço. Em estruturas modeladas por elementos tridimensionais o plano perpendicular a esse eixo é dividido em elementos finitos triangulares ou retangulares. Quando o sistema é modelado bidimensionalmente, como no caso de placas, em uma direção temos funções “spline” enquanto que a outra dimensão pode ser dividida como se tivéssemos elementos finitos unidimensionais. Ambos os casos estão representados na Figura 1.1.

Pelo fato de o contínuo precisar de menor número de divisões no eixo onde se encontram as funções “spline”, este tipo de elementos finitos são mais efetivos para análise de estruturas alongadas como vigas-caixão para pontes e perfis metálicos em geral. Além disso, ao se conseguir continuidade de maior ordem da função deslocamento, as propriedades do material ao longo deste eixo devem ser constantes em todo o elemento para não ter mudanças bruscas nas tensões. Caso tivéssemos materiais diferentes, teríamos que dividir a estrutura em mais de um elemento.



(a)



(b)

Figura 1.1. (a) Modelagem tridimensional reduzida a uma serie de soluções de elemento finito bidimensional. (b) Redução a serie de soluções de elemento finito unidimensional [3].

1.1. Revisão Bibliográfica

Em 1936 Leonid Kantorovich [9] publica um método para resolução de problemas variacionais que era uma modificação ao método de Ritz. Em lugar de multiplicar as funções das variáveis independentes por constantes a serem determinadas, multiplica-as por uma função contínua em uma das variáveis independentes.

Y.K. Cheung desenvolve um elemento denominado por ele como faixa finita [7]. Sob a formulação de elementos finitos aproxima o campo de deslocamentos utilizando funções contínuas ao longo de um eixo e funções discretas nas outras direções. As funções longitudinais mais usadas foram as trigonométricas e as funções base ou auto-funções de uma viga. Os problemas

analisados foram de esforço plano, flexão e a combinação dessas solicitações, principalmente em placas aplicadas em pontes, incluindo também análise dinâmica e instabilidade desses elementos. A principal desvantagem encontrava-se na aplicação das condições de contorno porque elas dependiam da função contínua utilizada. O próprio Cheung elimina essa limitação usando funções “spline” [3], que permitem analisar problemas estruturais com diferentes condições de contorno, ainda que as matrizes de rigidez, geométrica e de massa tenham termos mais acoplados.

Posteriormente Cheung e Au estudam elementos isoparamétricos com funções “spline” para análise estática [10], dinâmica e de instabilidade [11, 12]. Nesse caso a geometria do elemento no sentido longitudinal é também definida através de funções “spline”, o que permite modelar diversos tipos de estruturas que vão desde vigas caixão curvas, cascas cilíndricas até parabolóides hiperbólicos. Porém, devido ao fenômeno de “shear locking”, têm que usar integração seletiva e reduzida.

Choi, Kim e Hong utilizam elementos finitos com funções “spline” não periódicas na modelagem de pontes de concreto protendido [13], em que o uso dessas funções evitaria a transformação de matrizes no processo de aplicação de condições de contorno. O cálculo das forças de protensão leva em conta perdas por atrito, acomodação da ancoragem e influência do procedimento de protendido. Um programa de otimização para pontes e estruturas compostas por placas protendidas é apresentado por Bergamini e Biondini aproveitando a rapidez no pré-processamento de dados e atualização das variáveis no processo de otimização [14].

Lau, Cheung e Cheng propõem o uso de elementos com funções “spline” no estudo tridimensional de “flutter” em pontes [15]. Embora não se conte com suficientes dados experimentais, utilizam as expressões para elementos unidimensionais de Scanlan e Tomko e distribuem estas forças na seção transversal. Uma distribuição que considera a forma espacial da ponte deveria melhorar os resultados.

1.2. Objetivos

Implementar um programa de elementos finitos com funções “spline” que possa ser utilizado para cálculo estático, dinâmico e de instabilidade de estruturas como placas, vigas de parede fina, vigas caixão, e em geral, em elementos alongados que tenham uma dimensão maior que as duas restantes.

Estudar as alternativas para a inclusão do grau de liberdade “drilling” que deve ser introduzido no elemento para que este possa ser capaz de entrar em uma análise tridimensional, determinando a constante de rotação que aparece na formulação da matriz de rigidez devido a esse efeito.

Analisar exemplos conhecidos com o programa implementado, comparar com soluções teóricas ou resultados de outros programas estruturais, e avaliar as possibilidades e limitações da modelagem com elementos finitos subparamétricos com funções “spline”.

Em problemas de estática, dinâmica e de instabilidade, analisar o comportamento da solução aproximada com reduzido número de divisões longitudinais da estrutura, o que justificaria o uso de funções “spline” em estudos de pré-projeto ou otimização de estruturas.

1.3.Organização do Texto

O capítulo 2 proporciona a base teórica que serve como fundamento para o capítulo seguinte referente à implementação do elemento finito, apresentando as características das funções “spline” e uma revisão das fórmulas usadas em elementos finitos. No capítulo 3, temos um detalhe das fórmulas básicas utilizadas na implementação e se discutem alguns problemas que surgiram na formulação do elemento finito subparamétrico com funções “spline”.

O capítulo 4 apresenta exemplos de problemas estáticos, dinâmicos e de instabilidade fazendo comparações com outras soluções. As conclusões deste trabalho e sugestões para trabalhos futuros apresentam-se no capítulo 5.

Dois apêndices são incluídos ao final, o primeiro com indicações de entrada e saída de dados no programa e o segundo apresentando a listagem do programa implementado.

2 BASE TEÓRICA

Este capítulo apresenta a formulação teórica do elemento finito utilizando funções “spline”. Com este objetivo descrevem-se primeiro as funções que definem os deslocamentos no elemento. A partir dessas funções, com uso da sistemática usual de elementos finitos, derivam-se as fórmulas das matrizes de rigidez, de massa e geométrica.

2.1. Funções Spline

As funções “spline” são funções de interpolação que se obtêm com a fórmula recursiva apresentada na Equação 2.1, onde $\phi_{j,k(\eta)}$ é o valor da função j de grau k na posição η :

$$\phi_{j,0(\eta)} = \begin{cases} 1 & \text{if } \eta_j \leq \eta < \eta_{j+1} \\ 0 & \text{de outro modo} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\phi_{j,k(\eta)} = \frac{\eta - \eta_j}{\eta_{j+k} - \eta_j} \phi_{j,k-1(\eta)} + \frac{\eta_{j+k+1} - \eta}{\eta_{j+k+1} - \eta_{j+1}} \phi_{j+1,k-1(\eta)}$$

O valor interpolado na posição η é obtido através da equação:

$$\delta_{(\eta)} = \sum_{j=0}^{h-k-1} \delta_j \phi_{j,k(\eta)} \quad , \eta \in [\eta_k, \eta_{h-k}] \quad (2.2)$$

Na Equação 2.2, os δ_j são parâmetros de controle e h é o número de pontos dentro e fora do domínio. Em relação à disposição e separação destes pontos, as funções “spline” se classificam em periódicas e não-periódicas (Figura 2.1); e em uniformes e não-uniformes.

A função periódica tem pontos dentro e fora do domínio e usa a mesma base de funções (funções-base) para todos os intervalos, enquanto a não periódica tem todos os pontos dentro do domínio e utiliza funções-base diferentes nos extremos. Diz-se que é uniforme quando os pontos têm a mesma separação entre eles e não uniforme no caso contrario.

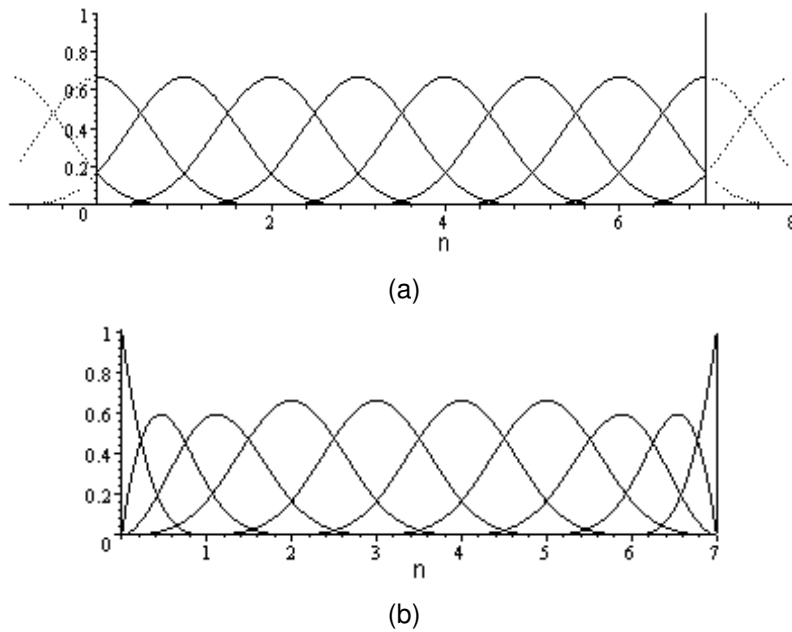


Figura 2.1 (a) funções spline periódicas, (b) funções spline não periódicas.

Neste trabalho utiliza-se a função “spline” periódica, uniforme e de terceiro grau, denominada por alguns autores “B3-spline”. As fórmulas (2.1) e (2.2) são simplificadas:

$$\begin{aligned}
 \phi_{i(\eta)} &= \begin{cases} 0 & \eta \leq i-2 \\ \frac{1}{6}(\eta-i+2)^3 & i-2 \leq \eta \leq i-1 \\ \frac{2}{3} + \frac{\eta}{2} - \frac{i}{2} + \frac{(\eta-i+1)^2}{2} - \frac{(\eta-i+1)^3}{2} & i-1 \leq \eta \leq i \\ \frac{2}{3} + \frac{i}{2} - \frac{\eta}{2} + \frac{(i+1-\eta)^2}{2} - \frac{(i+1-\eta)^3}{2} & i \leq \eta \leq i+1 \\ \frac{1}{6}(i+2-\eta)^3 & i+1 \leq \eta \leq i+2 \\ 0 & \eta \geq i+2 \end{cases} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

$$\delta = \sum_{i=-1}^{m+1} \delta_i \phi_{i(\eta)} \quad (2.4)$$

Para aplicar estas fórmulas temos que dividir o domínio em um número m de intervalos supondo que cada um deles tem comprimento unitário. Fora do domínio temos um intervalo externo tanto à esquerda como a direita. O valor da

função em qualquer ponto é o somatório de quatro funções-base (Figura 2.2), cada uma delas multiplicada por um parâmetro de controle δ_i . Em outras palavras, dentro de cada intervalo o valor da função é calculado somente com as funções-base que passam por esse intervalo, multiplicadas por seus respectivos parâmetros; por todos e cada um dos intervalos passam só quatro funções base. Na Figura 2.3 vemos uma função que resulta da aplicação de parâmetros de controle arbitrários.

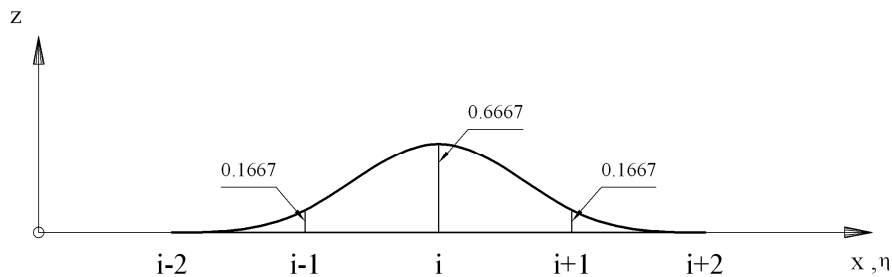
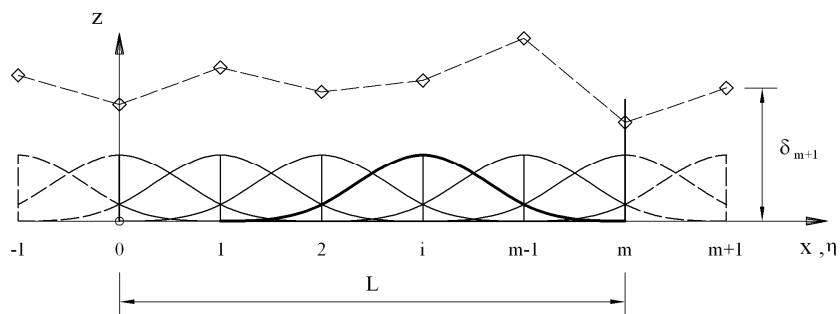
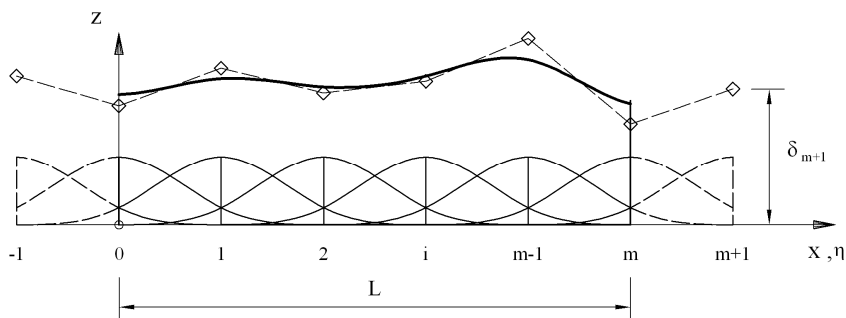


Figura 2.2. Função-base para funções periódicas de 3º grau (B3-spline).



(a)

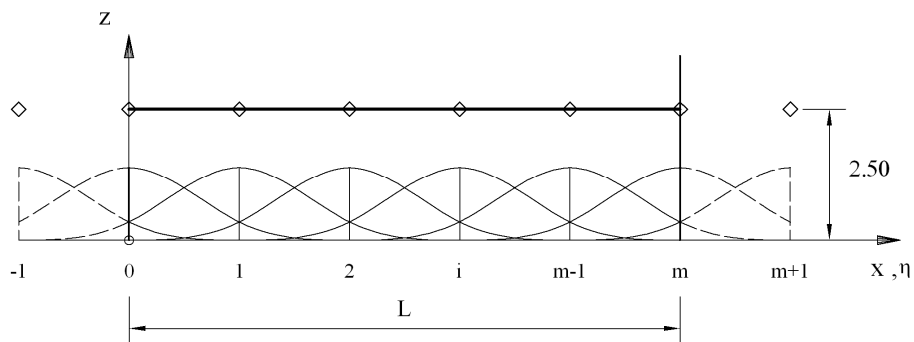


(b)

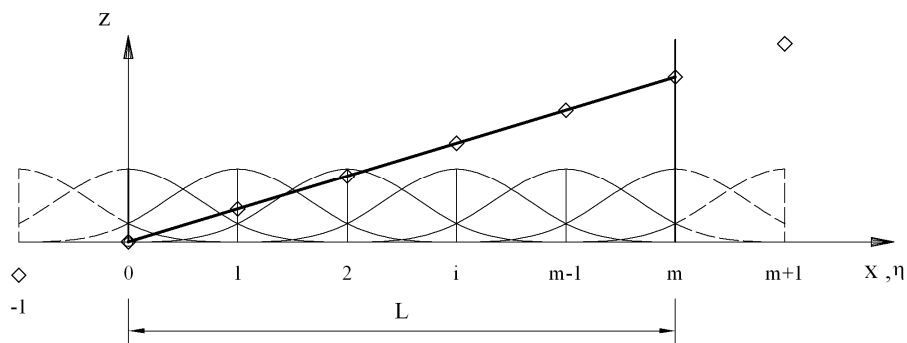
Figura 2.3. (a) Funções-base e parâmetros de controle arbitrários (b) Função para os valores dados em (a).

Entre as propriedades mais importantes das funções “spline” podem-se citar:

- Possuem continuidade até a segunda derivada em todo o domínio, ou seja, são funções de interpolação C^2 .
- Podem representar perfeitamente um valor constante ou uma função linear (Figura 2.4), o que permite que os movimentos de corpo rígido tanto de translação como de rotação sejam possíveis dentro do campo de deslocamentos.
- Quando se somam os valores das quatro funções-base que participam em um intervalo, o resultado é sempre 1 em qualquer ponto, propriedade conhecida como partição da unidade (“partition of unity”).
- A área sob uma função-base é também igual à unidade.



(a)



(b)

Figura 2.4. (a) Valor constante (b) Variação linear da função.

2.2. Campo de Deslocamentos

Os deslocamentos, três translações e três rotações, são aproximados pela multiplicação de funções de interpolação polinomiais no sentido transversal e funções “spline” no sentido longitudinal, como na fórmula seguinte:

$$\delta = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^p N_{j(\xi)} \phi_{i(\eta)} \{\delta_{ij}\} \quad (2.5)$$

Aqui p é o número de funções de interpolação transversais e m o número de divisões do comprimento da peça.

As funções transversais poderiam ser tanto funções de Lagrange ou de Hermite (ou outras), mas dependendo das hipóteses simplificadoras e da geometria do elemento a eleição de uma delas é implícita.

Ao considerarmos os deslocamentos de um elemento em esforço plano e utilizarmos funções de Lagrange de primeira ordem, a Equação 2.5 resulta na Equação 2.6, o que pode ser visualizado na Figura 2.5.

$$\delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^2 N_{j(\xi)} \phi_{i(\eta)} \{\delta_{ij}\}$$

$$\delta = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{m+1} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i1} \\ v_{i1} \\ u_{i2} \\ v_{i2} \end{Bmatrix} \phi_{i(\eta)} \quad (2.6)$$

$$N_1 = \frac{1-\xi}{2} \quad N_2 = \frac{1+\xi}{2}$$

A Figura 2.6 mostra funções de Lagrange de segunda e terceira ordem. Para utilizar estas funções deve-se adicionar uma e duas linhas nodais ao elemento, respectivamente.

Em um elemento de placa, além da translação perpendicular à superfície média, temos as rotações da seção transversal. Na hipótese de Kirchhoff as funções de Hermite poderiam ser utilizadas, enquanto para a hipótese de Mindlin, que precisa de um campo de rotações independente da translação, são mais adequadas as funções de Lagrange.

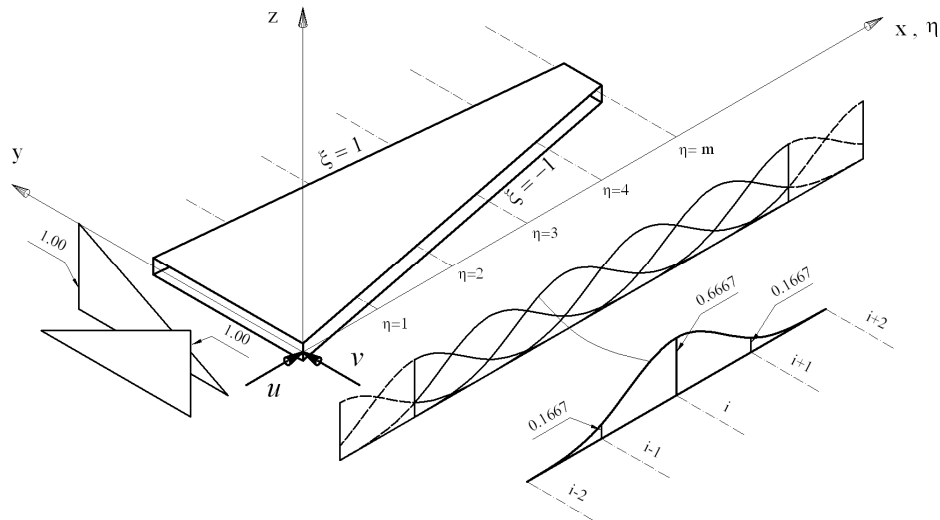


Figura 2.5. Interpolação dos deslocamentos u e v para esforço plano.

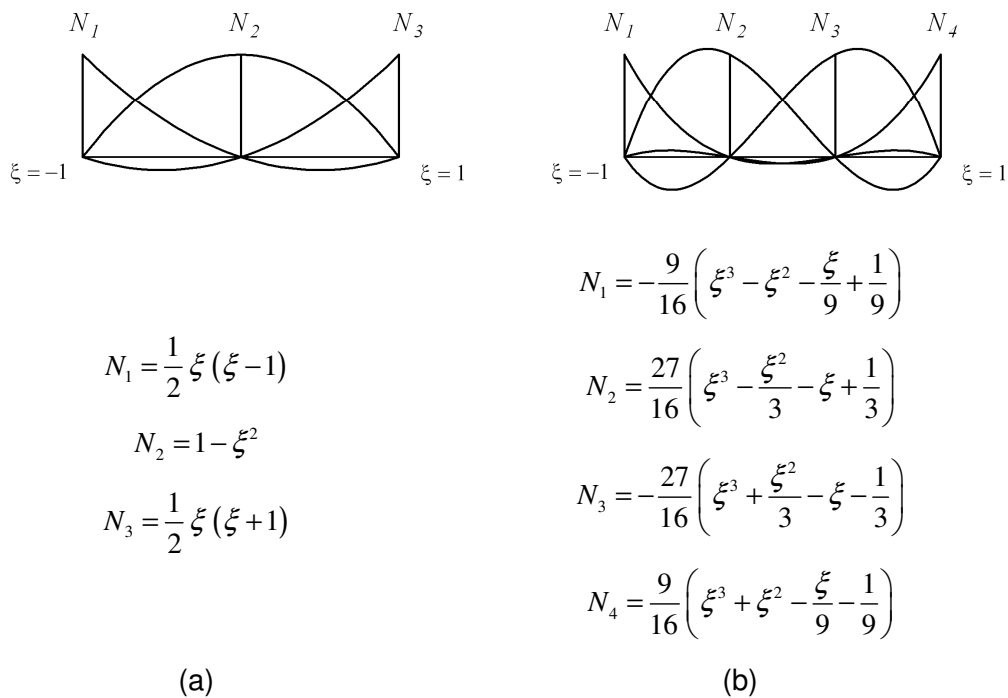


Figura 2.6. Funções de Lagrange (a) segunda ordem, (b) terceira ordem.

Geometricamente existe outra restrição para o uso da teoria de Kirchhoff junto com as funções de Hermite. Como se pode observar na Figura 2.7, somente a rotação θ_x pode ser interpolada no elemento, enquanto a rotação θ_y é diretamente calculada como a derivada do deslocamento. No caso de ter um elemento com uma ou duas linhas nodais não perpendiculares à seção transversal e conectado a outro elemento, precisaríamos de uma transformação de graus de liberdade de rotação, que é mais complexa se a rotação θ_y implica derivadas da função deslocamento. Essa dificuldade é eliminada se todas as

rotações aparecem como graus de liberdade, o que acontece com a teoria de Mindlin.

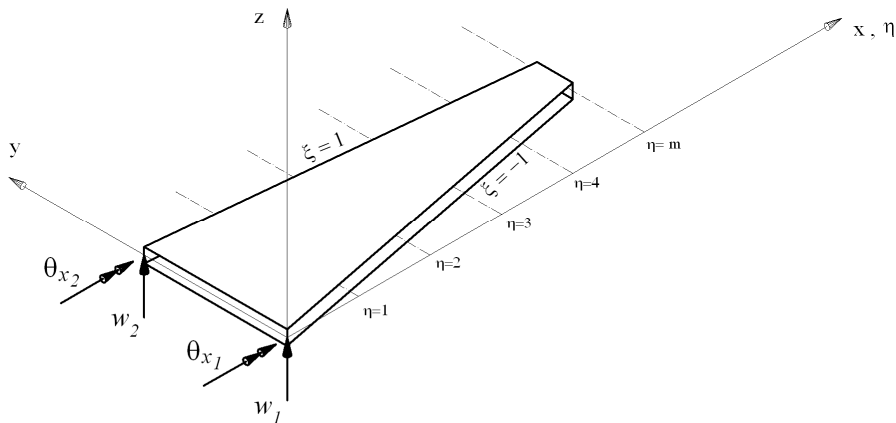


Figura 2.7. Graus de liberdade para deslocamento de placa na teoria de Kirchhoff.

2.3. Matriz de Rigidez e Vetor de Forças

Depois de definir o campo de deslocamentos os conceitos de elementos finitos são aplicados para obter a matriz de rigidez e o vetor das forças.

As deformações se determinam aplicando um operador diferencial sobre os deslocamentos, com o que se obtém:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^p \partial N_{j(\xi)} \phi_{i(\eta)} \{\delta_{ij}\} = B \{\delta_{ij}\} \quad (2.7)$$

Na Equação 2.7, ∂ é a matriz que contém os operadores diferenciais que devem ser aplicados aos deslocamentos, e B é a chamada matriz deformação-deslocamento [4].

A matriz de rigidez é calculada com a fórmula:

$$K = \int_v B^T E B dV \quad (2.8)$$

onde E é a matriz constitutiva do material.

Explicitamente a matriz de rigidez se pode escrever como na Equação 2.9. A submatriz $[\phi_0 \phi_2]$ obtém-se integrando a Equação 2.10 dentro do intervalo 0 até 2 como se observa na Figura 2.8. Vemos que as submatrizes que têm diferença entre subscritos maior a quatro são submatrizes iguais a zero.

$$K = \begin{bmatrix} [\phi_{-1} \phi_{-1}] & [\phi_{-1} \phi_0] & [\phi_{-1} \phi_1] & [\phi_{-1} \phi_2] & \cdots & \cdots & [\phi_{-1} \phi_m] & [\phi_{-1} \phi_{m+1}] \\ [\phi_0 \phi_{-1}] & [\phi_0 \phi_0] & [\phi_0 \phi_1] & [\phi_0 \phi_2] & \cdots & \cdots & [\phi_0 \phi_m] & [\phi_0 \phi_{m+1}] \\ [\phi_1 \phi_{-1}] & [\phi_1 \phi_0] & [\phi_1 \phi_1] & [\phi_1 \phi_2] & \cdots & \cdots & [\phi_1 \phi_m] & [\phi_1 \phi_{m+1}] \\ [\phi_2 \phi_{-1}] & [\phi_2 \phi_0] & [\phi_2 \phi_1] & [\phi_2 \phi_2] & \cdots & \cdots & [\phi_2 \phi_m] & [\phi_2 \phi_{m+1}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ [\phi_m \phi_{-1}] & [\phi_m \phi_0] & [\phi_m \phi_1] & [\phi_m \phi_2] & \cdots & \cdots & [\phi_m \phi_m] & [\phi_m \phi_{m+1}] \\ [\phi_{m+1} \phi_{-1}] & [\phi_{m+1} \phi_0] & [\phi_{m+1} \phi_1] & [\phi_{m+1} \phi_2] & \cdots & \cdots & [\phi_{m+1} \phi_m] & [\phi_{m+1} \phi_{m+1}] \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$[\phi_0 \phi_2] = \int_v B_0^T E B_2 dV \quad (2.10)$$

$$B_0 = \sum_{j=1}^p \partial N_j \phi_0 \quad B_2 = \sum_{j=1}^p \partial N_j \phi_2$$

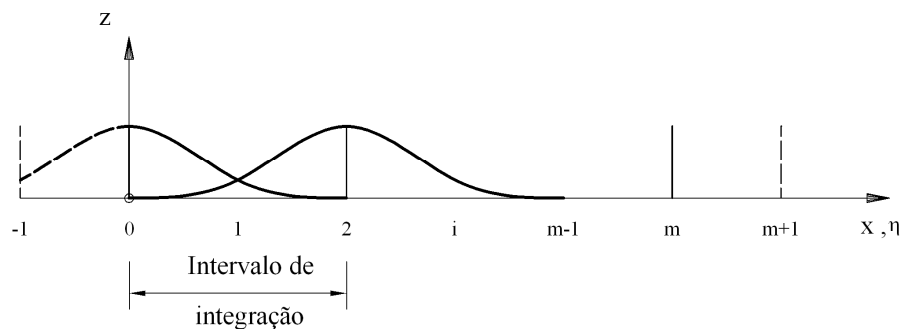


Figura 2.8. Intervalo de integração para a submatriz $[\phi_0 \phi_2]$.

Para simplificar as fórmulas seguintes definimos a matriz L_f como sendo:

$$L_f = \sum_{i=-1}^{m+1} \sum_{j=1}^p N_{j(\xi)} \phi_{i(\eta)} \quad (2.11)$$

O vetor de forças consistente f pode levar em conta forças de corpo, superficiais, de linha e pontuais, como na expressão seguinte, onde b_f são as forças de corpo, q_A a carga superficial, q_L é a carga distribuída sobre uma linha nodal e P_c a carga pontual corrigida para atuar sobre os parâmetros de deslocamentos.:

$$f = \int_V L_f^T b_f dV + \int_A L_f^T q_A dA + \int_L L_f^T q_L dL + P_c \quad (2.12)$$

A influência de tensões e deformações iniciais não está considerada no vetor de forças acima, porém poderiam também ser incluídas.

2.4. Matrizes de Massa e Geométrica

A matriz de massa consistente é calculada com a seguinte fórmula [1]:

$$M = \int_V L_f^T \rho L_f dV \quad (2.13)$$

Na Equação 2.13 ρ é a densidade de massa do material.

Para o cálculo da matriz geométrica é preciso aplicar um novo operador diferencial aos deslocamentos, chamando w ao deslocamento transversal, as deformações de membrana produzidas por pequenas quantidades deste deslocamento são [1]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} w_{,x}^2 \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2} w_{,y}^2 \quad \gamma_{xy} = w_{,x} w_{,y} \quad (2.14)$$

O operador diferencial está definido pela seguinte fórmula:

$$\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = \sum_{i=-1}^{m+1} \sum_{j=1}^p \partial_G N_j \phi_i \{\delta_{ij}\} = G \{\delta_{ij}\} \quad (2.15)$$

Disto resulta a matriz geométrica:

$$K_G = \int_A G^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} G dA \quad (2.16)$$

Na expressão acima, a matriz central está composta pelas forças de membrana normais N_x e N_y e tangencial N_{xy} .

3 IMPLEMENTAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

Neste capítulo apresentam-se as considerações mais importantes para a implementação do elemento finito generalizado com funções “spline”.

3.1. Hipóteses Cinemáticas

Na formulação do elemento foram assumidas as seguintes hipóteses:

- Consideram-se deslocamentos e rotações pequenas.
- Os segmentos perpendiculares à superfície média antes da deformação continuam retas, mas não necessariamente perpendiculares à superfície média deformada (Teoria de Mindlin).
- Esforços normais à superfície média são desprezados.
- O material é considerado linear, elástico e isotrópico.

3.2. Tipo de Elemento e Funções de Deslocamento

O elemento é do tipo subparamétrico de lados retos, definido pela coordenada local x à direita, pelas coordenadas y das quatro esquinas e a espessura constante t , como indicado na Figura 3.1. Os quatro pontos dos cantos e então qualquer ponto na superfície média estão contidos no mesmo plano.

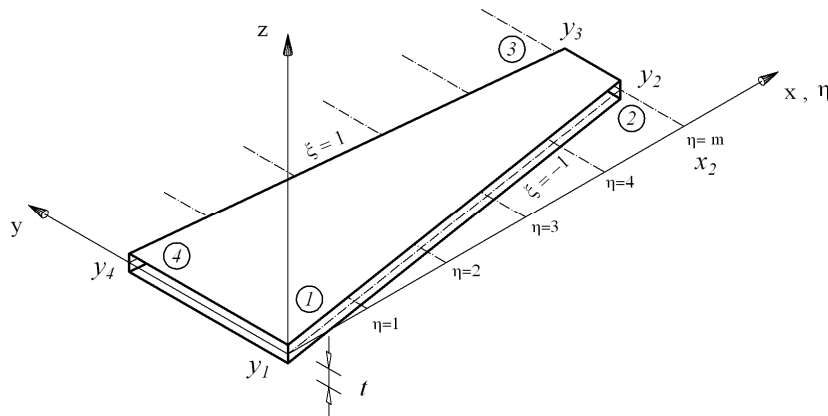


Figura 3.1. Coordenadas locais do elemento.

As coordenadas de um ponto na superfície média podem ser calculadas através de uma interpolação linear e em coordenadas naturais η e ξ , com as fórmulas seguintes, onde m é o número de divisões ao longo do comprimento.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{x2}^* \\ N_{y1}^* \\ N_{y2}^* \\ N_{y3}^* \\ N_{y4}^* \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

$$N_{x2}^* = \frac{\eta}{m} \quad (3.2)$$

$$N_{y1}^* = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta}{m} \right) (1 - \xi) \quad N_{y2}^* = \frac{1}{2} \frac{\eta}{m} (1 - \xi) \quad (3.3)$$

$$N_{y3}^* = \frac{1}{2} \frac{\eta}{m} (1 + \xi) \quad N_{y4}^* = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\eta}{m} \right) (1 + \xi)$$

O jacobiano da transformação é igual a:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{x_2}{m} \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = -\frac{1}{2m} [-y_2(1-\xi) - (y_3 - y_4)(1+\xi)]$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\eta}{m} (-y_2 + y_3 - y_4) + y_4 - y_1 \right]$$

O determinante deste jacobiano pode ser determinado pela fórmula:

$$\det J = \frac{x_2}{2m} \left[\frac{\eta}{m} (-y_2 + y_3 - y_4) + y_4 - y_1 \right] \quad (3.5)$$

Para que o elemento possa ser utilizado na modelagem tridimensional devemos levar em conta os seis graus de liberdade, três translações e três rotações.

Adota-se um campo de deslocamentos Lagrangiano de segundo grau no sentido transversal, pois isto atende a diferentes situações no que se refere a esforço plano e a flexão. Se um polinômio linear fosse utilizado no estado de esforço plano, vários elementos seriam necessários no sentido transversal para modelar o exemplo mais simples que é uma viga esbelta simplesmente apoiada com carregamento uniforme. Já no caso de flexão, a escolha é feita com a idéia de simplificar o elemento, já que um polinômio de terceiro grau pode ser mais efetivo, porém teríamos maior número de graus de liberdade por elemento.

Com isto o campo de deslocamentos torna-se:

$$\{\delta\} = \sum_{i=1}^{m+1} [N_1 [I] \quad N_2 [I] \quad N_3 [I]] \phi_{i(\eta)} \{\delta_i\}$$

$$\{\delta_i\}^T = \{u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z\} \quad (3.6)$$

$$\{\delta_i\}^T = \{u_{i1} \quad v_{i1} \quad w_{i1} \quad \theta_{xi1} \quad \theta_{yi1} \quad \theta_{zi1} \quad u_{i2} \quad v_{i2} \quad w_{i2} \quad \theta_{xi2} \quad \theta_{yi2} \quad \theta_{zi2} \quad \dots \\ \dots \quad u_{i3} \quad v_{i3} \quad w_{i3} \quad \theta_{xi3} \quad \theta_{yi3} \quad \theta_{zi3}\}$$

Na expressão acima, a matriz I é uma matriz identidade de ordem seis e δ_i é o vetor de parâmetros de deslocamento que se mostram em forma esquemática na Figura 3.2. Observa-se que tais parâmetros na realidade não são deslocamentos físicos.

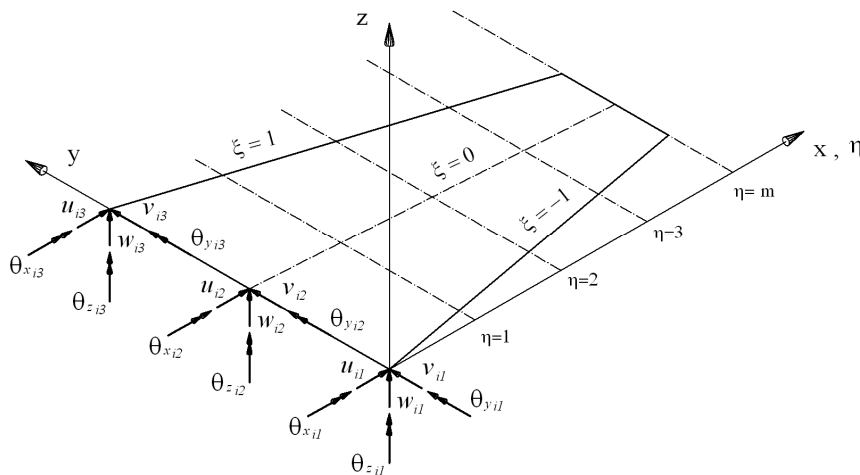


Figura 3.2. Parâmetros de deslocamento.

3.3. Esforços e Deformações

3.3.1. Vetor de Deformações Generalizadas

Para simplificar o problema trabalha-se com um vetor de deformações generalizadas.

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x^p \quad \varepsilon_y^p \quad \gamma_{xy}^p \quad \kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \quad \varepsilon_\theta\} \quad (3.7)$$

As três primeiras deformações apresentadas na Equação 3.8 são produzidas por forças contidas na superfície média do elemento, considerando-se esforço plano. O sobrescrito p é usado para diferenciar estas deformações das produzidas por flexão.

$$\varepsilon_x^p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^p = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^p = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.8)$$

As seguintes cinco deformações levam em conta o efeito da flexão do elemento. Segundo as hipóteses básicas assumidas e de acordo com a Figura 3.3 o campo de deslocamentos fica sendo [1]:

$$u = z \theta_{y(x,y)}, \quad v = -z \theta_{x(x,y)}, \quad w = w_{(x,y)} \quad (3.9)$$

Aplicando as fórmulas deformação-deslocamento da teoria da elasticidade, tem-se que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= z \theta_{y,x} & \varepsilon_y &= -z \theta_{x,y} & \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= z (\theta_{y,y} - \theta_{x,x}) & \gamma_{xz} &= \theta_y + w_{,x} & \gamma_{yz} &= -\theta_x + w_{,y} \end{aligned} \quad (3.10)$$

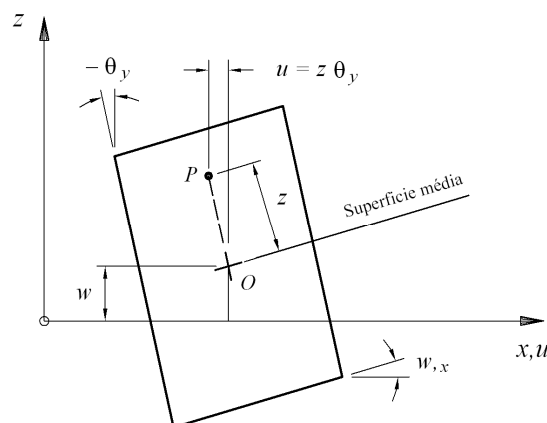


Figura 3.3. Elemento diferencial de placa depois do carregamento [1].

Depois de fazer a integração na espessura obtêm-se as deformações generalizadas:

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \theta_{y,x} & \gamma_{xz} &= -\theta_y - w_{,x} \\ \kappa_y &= -\theta_{x,y} & \gamma_{yz} &= \theta_x - w_{,y} \\ \kappa_{xy} &= \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Os sinais das deformações γ_{xz} e γ_{yz} estão invertidos para que a fórmula tensão-deformação seja afim com a fórmula apresentada na referencia [1].

Já a última deformação generalizada leva em conta o efeito “drilling” e será estudada com mais detalhe num parágrafo posterior.

3.3.2. Vetor de Tensões Generalizadas

Os esforços ou tensões generalizadas são:

$$\{\sigma^g\}^T = \{N_x \quad N_y \quad N_{xy} \quad M_x \quad M_y \quad M_{xy} \quad Q_{xz} \quad Q_{yz} \quad M_z\} \quad (3.12)$$

Obtêm-se os primeiros oito esforços por meio de uma integração através da espessura, sendo cada um deles calculado num comprimento unitário, com as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz & N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz & N_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \\ M_x &= -\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz & M_y &= -\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz & M_{xy} &= -\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \\ Q_{xz} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz & Q_{yz} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \end{aligned} \quad (3.13)$$

Os sinais decorrem da convenção de sentidos mostrados na Figura 3.4.

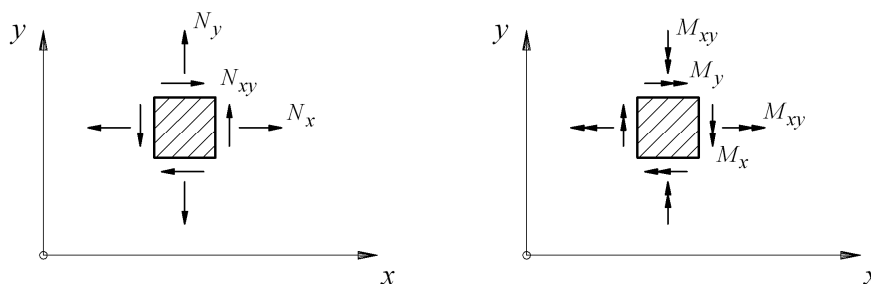


Figura 3.4. Sentidos positivos dos esforços. A direção de Q_{xz} e Q_{yz} nas faces positivas é do eixo z [8].

3.3.3 Relações esforço-deformação

Para o estado de tensões plano temos a Equação 3.14, onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^p \\ \epsilon_y^p \\ \gamma_{xy}^p \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

Em flexão as relações generalizadas são as seguintes:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)D}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Gt}{1.2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{Gt}{1.2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

Na Equação 3.15 foram introduzidas as quantidades

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.16)$$

Os dois últimos termos da diagonal da matriz na Equação 3.15 dividem-se por 6/5 para permitir que a distribuição parabólica de τ_{xz} e τ_{yz} seja substituída pela distribuição uniforme [1].

3.4. Grau de Liberdade “Drilling”

No que segue, são apresentados três procedimentos diferentes encontrados na literatura para inclusão do efeito “drilling”: rigidez artificial, formulação variacional e condensação cinemática.

3.4.1. Rigidez Artificial

Na referência [1] encontra-se uma matriz de rigidez artificial para um elemento triangular:

$$\begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \alpha EV \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \\ \theta_{z3} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Onde V é o volume do elemento e α é um número igual o menor a 0.3.

Porém, se aplicamos uma rotação unitária em θ_{z1} e zero nas demais, em cada nó atuam as forças apresentadas na Figura 3.5, como se pode ver, ainda que o sistema esteja em equilíbrio, existe uma falta de concordância entre as forças e a cinemática do elemento.

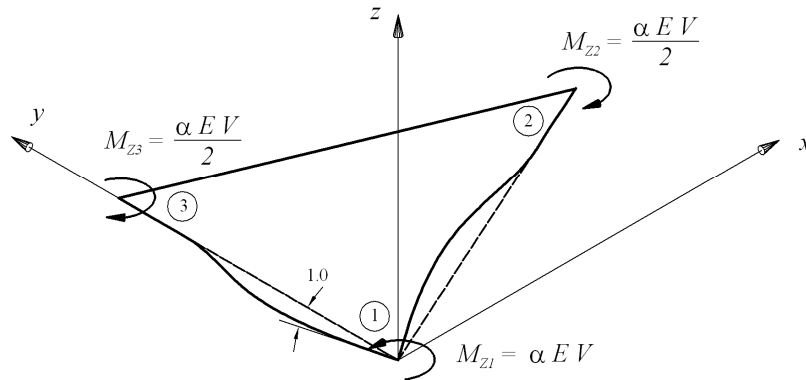


Figura 3.5. Momentos resultantes para uma rotação unitária no nó 1 e zero para os demais nós.

3.4.2. Formulação Variacional

A inclusão do efeito “drilling” na matriz de rigidez também pode ser feita através do princípio da energia potencial estacionária. Reissner, em 1965, introduz um campo de rotações na formulação variacional, que foi modificado por Hughes e Brezzi em 1989 e por Atluri em 1984 [16].

Segundo as referencias [13, 17] a energia Π pode ser escrita:

$$\Pi = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \frac{1}{2} \Phi G (\theta_z - \omega_{xy})^2 dV - W \quad (3.18)$$

Na expressão acima Φ é um número diretamente relacionado com a rigidez ao efeito “drilling” e será determinado no primeiro exemplo do capítulo seguinte; θ_z é a rotação num ponto; e ω_{xy} é um componente do tensor de pequenas rotações, dado por:

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.19)$$

Fisicamente se pode entender ω_{xy} como a rotação da bissetriz de um elemento diferencial de lados inicialmente perpendiculares [18] e é chamada rotação absoluta, como se observa na Figura 3.6. O princípio de energia

potencial estacionária minimiza a diferença entre a rotação num ponto e a rotação absoluta.

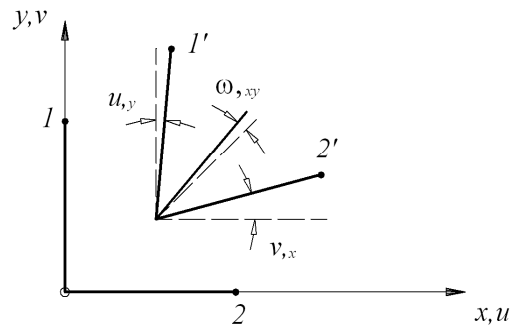


Figura 3.6. Componente do tensor de pequenas rotações.

Do anterior pode-se dizer que a deformação generalizada para o efeito “drilling” é:

$$\varepsilon_{\theta} = \theta_z - \omega_{xy} \quad (3.20)$$

E que os componentes da matriz de rigidez devidos a este efeito são:

$$K_{\theta} = \Phi G t \int_A B_{\theta}^T B_{\theta} dA \quad (3.21)$$

3.4.3. Redução por Condensação Cinemática

Segundo a referência [2] o elemento é obtido pelo seguinte método.

Inicialmente tem-se um elemento de 16 graus de liberdade translacionais, mostrado na Figura 3.7a.

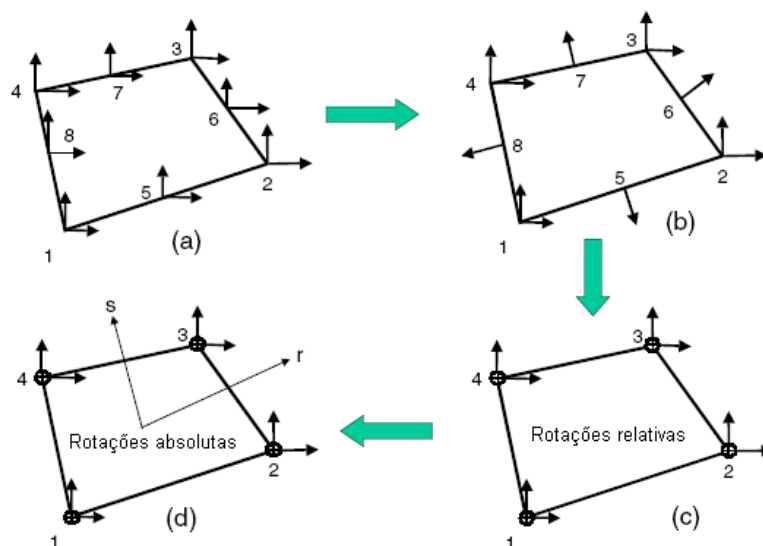


Figura 3.7. Elemento quadrilátero com rotações normais [2].

Com os seus deslocamentos definidos por:

$$\begin{aligned} u_{(r,s)} &= \sum_{i=1}^4 N_{i(r,s)} u_i + \sum_{i=5}^8 N_{i(r,s)} \Delta u_i \\ v_{(r,s)} &= \sum_{i=1}^4 N_{i(r,s)} v_i + \sum_{i=5}^8 N_{i(r,s)} \Delta v_i \end{aligned} \quad (3.22)$$

As oito funções de forma são:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-r)(1-s)/4 & N_2 &= (1+r)(1-s)/4 \\ N_3 &= (1+r)(1+s)/4 & N_4 &= (1-r)(1+s)/4 \\ N_5 &= (1-r^2)(1-s)/2 & N_6 &= (1+r)(1-s^2)/2 \\ N_7 &= (1-r^2)(1+s)/2 & N_8 &= (1-r)(1-s^2)/2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Calculam-se as componentes normais e tangenciais dos deslocamentos dos nós 5 até 8, sendo que somente a componente normal é retida, reduzindo os graus de liberdade a 12 como na Figura 3.7b.

Utilizando-se uma restrição parabólica para os deslocamentos normais ao lado do elemento se consegue introduzir as quatro rotações relativas que substituem aos deslocamentos dos nós 5 até 8. Este procedimento é realizado por meio das seguintes fórmulas e complementado pela Figura 3.8.

$$\Delta u_{ij} = \frac{L_{ij}}{8} (\Delta \theta_j - \Delta \theta_i) \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= \cos \alpha_{ij} \Delta u_{ij} = \cos \alpha_{ij} \frac{L_{ij}}{8} (\Delta \theta_j - \Delta \theta_i) \\ \Delta v &= -\sin \alpha_{ij} \Delta u_{ij} = -\sin \alpha_{ij} \frac{L_{ij}}{8} (\Delta \theta_j - \Delta \theta_i) \end{aligned} \quad (3.25)$$

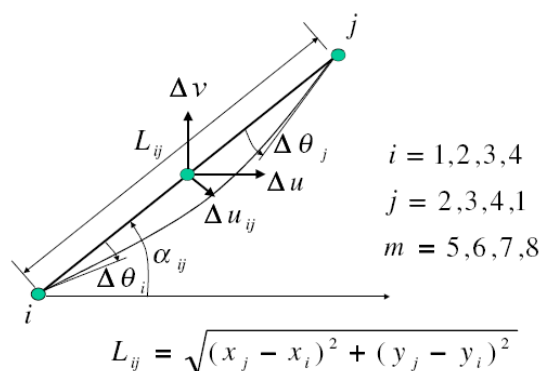


Figura 3.8. Lado de um elemento quadrilateral [2].

Estes incrementos de deslocamento podem ser calculados para todos os lados do elemento. Substituindo a Equação 3.25 na Equação 3.22 obtêm-se:

$$\begin{aligned} u_{(r,s)} &= \sum_{i=1}^4 N_{i(r,s)} u_i + \sum_{i=5}^8 M_{xi(r,s)} \Delta\theta_i \\ v_{(r,s)} &= \sum_{i=1}^4 N_{i(r,s)} v_i + \sum_{i=5}^8 M_{yi(r,s)} \Delta\theta_i \end{aligned} \quad (3.26)$$

A relação deformação-deslocamento pode ser escrita em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B_{11} \quad B_{12}] \begin{Bmatrix} u \\ \Delta\theta \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Para que o elemento cumpra com o “patch test” de esforço constante a matriz B_{12} deve ser substituída por:

$$\bar{B}_{12} = B_{12} - \frac{1}{A} \int_A B_{12} dA \quad (3.28)$$

Finalmente para eliminar o modo de deslocamento com zero energia de deformação que se mostra na Figura 3.9, calcula-se a diferença entre a rotação absoluta e a média das rotações relativas no elemento:

$$\bar{\theta}' = \omega_{xy} - \sum_{i=1}^4 N_{i(0,0)} \Delta\theta_i = \bar{B}_o u \quad (3.29)$$

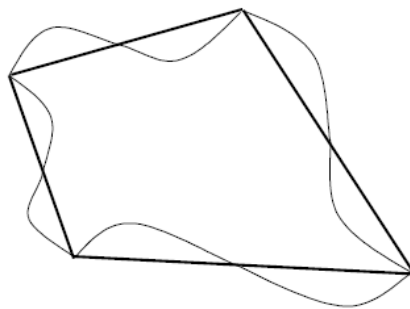


Figura 3.9. Modo de deslocamento com zero energia [2].

A seguir a matriz de rigidez que leva em conta esta restrição e que é avaliada através da seguinte fórmula:

$$K_o = \int_V \bar{B}_o^T k_o \bar{B}_o dV = k_o Vol \bar{B}_o^T \bar{B}_o \quad (3.30)$$

Deve ser adicionada à matriz de rigidez do elemento calculada a partir das Equações 3.27 e 3.28. O valor recomendado para k_O é $0.025 G$.

Entre estas três opções para introduzir o efeito “drilling”, a que melhor se adapta para o nosso elemento é aquela derivada da formulação variacional. Isto porque as deformações generalizadas já incluem ε_θ e a matriz B pode ser calculada para conter B_θ . Desta forma o processo de cálculo da matriz de rigidez segue a formulação geral de elementos finitos que foi apresentada no capítulo anterior.

3.5. Vetor de Forças.

Dois tipos de cargas são considerados, carga uniforme distribuída sobre linhas nodais e carga pontual.

Para calcular o vetor de forças da carga distribuída utilizamos a seguinte fórmula:

$$f_L = \int_L L_f^T q_L dL \quad (3.31)$$

A matriz L_f é igual a:

$$L_f = \sum_{i=1}^{m+1} [N_1[I] \quad N_2[I] \quad N_3[I]] \phi_i \quad (3.32)$$

Na expressão acima, I é uma matriz identidade de ordem seis, q_L o vetor de cargas distribuídas também de ordem seis, e cada componente representa um grau de liberdade.

Para o vetor de forças proveniente de cargas pontuais devemos considerar a transformação de parâmetros de deslocamentos em deslocamentos reais que está definido como:

$$\delta_i^{real} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{i-1} \\ \delta_i \\ \delta_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

A consequência desta transformação é que somente duas terças partes da carga pontual são aplicadas no ponto de aplicação real e o restante divide-se entre o ponto anterior e posterior.

3.6. Condições de Contorno

Para impor as condições de contorno devemos transformar os parâmetros de deslocamento em deslocamentos reais naqueles pontos nos quais vão ser aplicadas restrições.

Da Equação 3.33 podemos obter:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{i-1} \\ \delta_i \\ \delta_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{i-1}^{real} \\ \delta_i^{real} \\ \delta_{i+1}^{real} \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} \delta_{i-1}^{real} \\ \delta_i^{real} \\ \delta_{i+1}^{real} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

A matriz T se pode expandir para toda a placa, com o que depois se segue com as regras de transformação para matrizes e vetor de forças:

$$K^{real} = T^T K T \quad F^{real} = T^T F \quad (3.35)$$

Na verdade a matriz de transformação contém muitos zeros e então a fórmula anterior é uma representação formal. No programa deve ser utilizada uma rotina mais simples que multiplica só algumas linhas e colunas em lugar da multiplicação de matrizes especificada.

3.7. Matriz de Massa e Geométrica

Para o cálculo da matriz de massa utiliza-se a Fórmula 2.13 do Capítulo 2, porém integrada através da espessura. Cada uma das suas submatrizes é representada por:

$$M_{ik} = \int_A L_{fi}^T \rho L_{fk} dA \quad (3.36)$$

onde as funções de forma L_i foram definidas no capítulo anterior e são repetidas abaixo por conveniência.

$$L_{fi} = \sum_{j=1}^3 N_{j(\xi)} \phi_{i(\eta)} \quad (3.37)$$

A matriz ρ que contém a densidade de massa e que leva em conta a integração através da espessura é determinada pela Equação 3.38. Quando se despreza a inércia à rotação somente os três primeiros termos da diagonal são diferentes de zero.

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \rho t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho t^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho t^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Para o cálculo da matriz geométrica primeiro determinam-se as forças de membrana definidas na Equação 3.13 provenientes de um carregamento inicial, assumindo que estas são independentes dos deslocamentos transversais, e depois se resolve a seguinte integral:

$$K_G = \int_A G^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} G dA \quad (3.39)$$

Esta matriz está formada por $m+3$ submatrizes da forma:

$$K_{G_{ik}} = \int_A G_i^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} G_k dA \quad (3.40)$$

onde a matriz G_i é igual a:

$$G_i = \begin{bmatrix} [0]_{2 \times 2} & (N_1 \phi_i)_{,x} & [0]_{2 \times 5} & (N_2 \phi_i)_{,x} & [0]_{2 \times 5} & (N_3 \phi_i)_{,x} & [0]_{2 \times 3} \\ & (N_1 \phi_i)_{,y} & & (N_2 \phi_i)_{,y} & & (N_3 \phi_i)_{,y} & \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

3.8. Frequências Naturais e Cargas Críticas

O cálculo das frequências naturais e respectivos modos de vibração conduz a um problema linear de autovalor e autovetor generalizado da forma

$$(K - \omega^2 M)\{\delta\} = 0 \quad (3.42)$$

onde os autovalores representam o quadrado das frequências naturais circulares e os autovetores os modos de vibração.

Em um problema de instabilidade linearizado, em acordo com as hipóteses descritas anteriormente, o cálculo de carga crítica e do modo de flambagem também resulta em um problema de autovalor linear generalizado, na forma abaixo.

$$(K + \lambda K_c)\{\delta\} = 0 \quad (3.43)$$

O autovalor λ é um fator pelo qual se deve multiplicar a carga inicial para obter a carga crítica, os autovetores são os modos de flambagem.

4 EXEMPLOS

Apresentam-se exemplos estáticos, dinâmicos e de instabilidade. O primeiro exemplo permite determinar a constante de rigidez relacionada com o efeito “drilling”. Os dois exemplos estáticos seguintes ajudam a validar o comportamento do elemento. Os cálculos de frequências naturais e cargas críticas se apresentam nos últimos exemplos. Em todos os casos utiliza-se o sistema internacional de medidas *SI*.

Toda vez que usemos a denominação “Malha $a \times b$ ”, teremos que a é o número de divisões longitudinais e b o número de elementos no sentido transversal.

4.1. Viga Simplesmente Apoiada

Para encontrar um valor do coeficiente Φ recorremos a um exemplo que foi apresentado na Referência [19]. A viga simplesmente apoiada da Figura 4.1 é submetida a dois tipos de carregamento. Cada um deve produzir o mesmo deslocamento no meio do vão e a mesma rotação nos extremos; porém, pela característica do segundo carregamento, que está aplicado diretamente sobre o grau de liberdade “drilling”, os deslocamentos têm direta dependência com a constante de rigidez procurada.

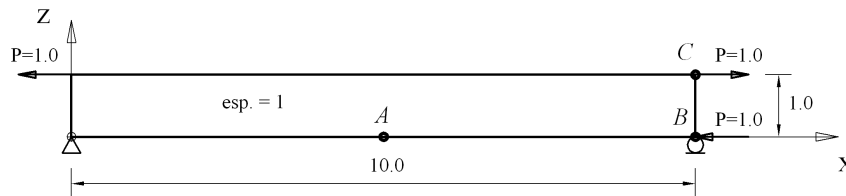
Da resistência de materiais, com $E = 100,00$ e $\mu = 0,00$ temos:

$$w_A = \frac{M L^2}{8 E I} = 1,50 \qquad \theta_{yB} = \theta_{yC} = \frac{M L}{2 E I} = 0,60 \qquad (4.1)$$

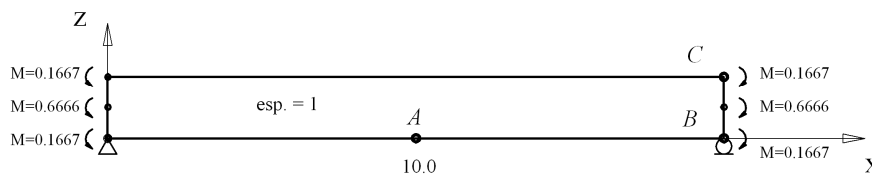
Com o primeiro tipo de carregamento reproduzem-se exatamente estes valores teóricos, qualquer que seja o número de divisões feitas ao longo do comprimento. Na Tabela 4.1 podem-se observar os deslocamentos diferentes de zero dos pontos A , B e C .

Como também pode se ver na Tabela 4.1, para o segundo tipo de carregamento os deslocamentos e rotações dependem do coeficiente de rigidez Φ e do número de divisões m adotadas para o comprimento. Tem-se maior variação nas rotações que representam o grau de liberdade “drilling”, ainda que

a rotação total da seção calculada através dos deslocamentos dos pontos B e C seja a correta, quer dizer igual a 0,60.



(a)



(b)

Figura 4.1. (a) Momento unitário aplicado por um par de forças. (b) Momento unitário aplicado como carregamento consistente nos três nós do elemento.

Tabela 4.1. Deslocamentos e rotações na viga simplesmente apoiada.

Tipo de modelagem	w_A	u_B	θ_{yB} e θ_{yC}
Par de forças nos extremos $\Phi = 0,25$ $m = 6$	1,50	-0,60	0,60
Momento aplicado através de carregamento consistente $\Phi = 0,25$ $m = 6$	1,51	-0,60	1,12
Momento aplicado através de carregamento consistente $\Phi = 0,25$ $m = 12$	1,51	-0,60	1,65
Momento aplicado através de carregamento consistente $\Phi = 5,00$ $m = 6$	1,51	-0,60	0,65

Na Figura 4.2 observa-se a variação mencionada no parágrafo anterior. Para valores maiores de Φ a rotação depende menos do número de divisões longitudinais, no entanto a referência citada [19] recomenda um valor menor para obter melhores resultados na análise tridimensional. Achemos conveniente um valor de 0,25, para o qual a variação com respeito ao número m não chega a ser

excessiva, e com esse valor obtemos uma rotação do grau de liberdade “drilling” que se aproxima ao valor da referencia que é igual a 1,44.

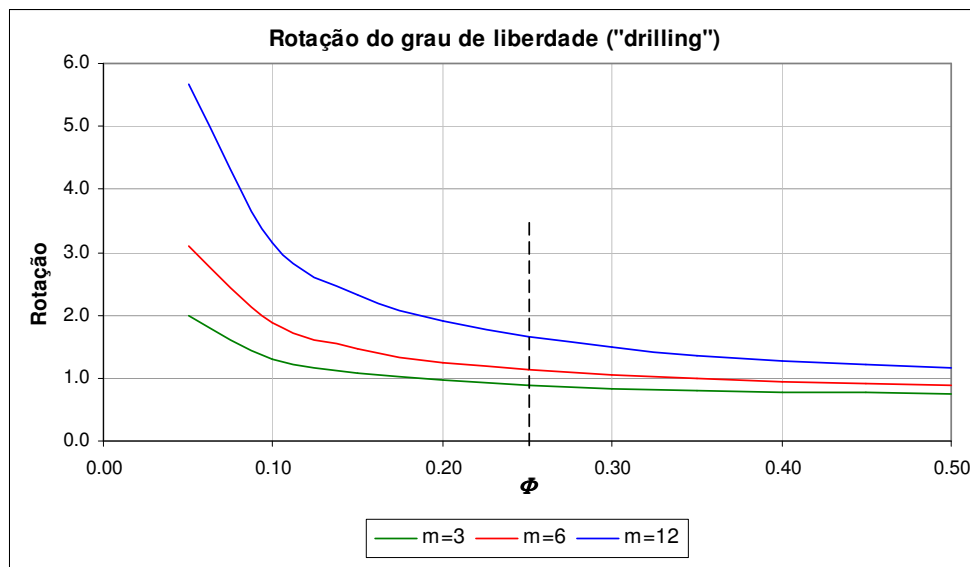


Figura 4.2. Variação da rotação com o valor de Φ e m .

4.2. Viga em Balanço (Teste de Cook)

É um teste que ajuda a provar a precisão dos resultados em elementos quadriláteros que não possuem ângulos retos. Na Figura 4.3 observa-se as condições do problema. Na Tabela 4.2 apresentam-se os resultados da ref. [1] e os resultados obtidos com funções “spline”. Em todos os casos a divisão transversal e longitudinal é igual a quatro.

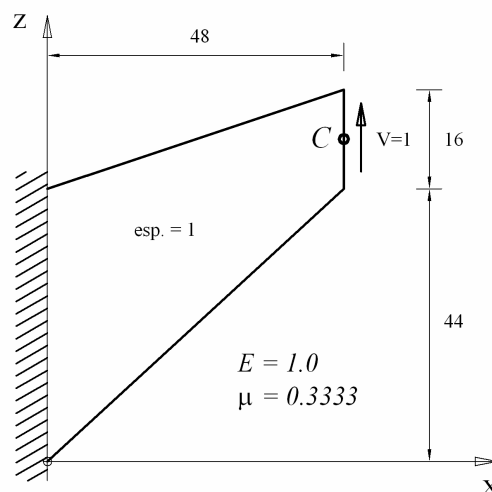


Figura 4.3. Teste de Cook.

Na segunda coluna da Tabela 4.2 temos a relação entre o deslocamento calculado e o melhor valor de deslocamento obtido que é $w_{mv} = 23,91$ [19]. Segundo a Referência [1] com o elemento *QM6* obtêm-se resultados que se aproximam aos do elemento quadrático.

Tabela 4.2. Relação de deslocamentos em *C* para vários tipos de elementos.

Tipo de Elemento	$R = \frac{w_c}{w_{mv}}$
Elemento bi linear	0,769
Elemento QM6	0,967
Triângulo com GDL rotacionais	0,950
Triângulo plano híbrido	0,969
Elemento finito com funções (“spline”)	0,998

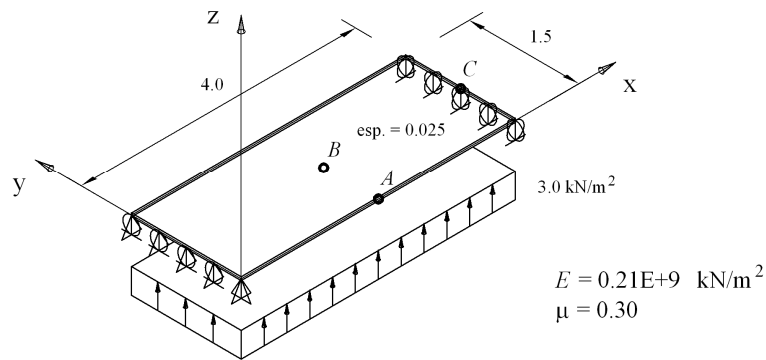
4.3. Placa Simplesmente Apoiada.

Os resultados de duas placas de espessura diferente, simplesmente apoiadas e com carregamento uniforme são comparados com os resultados de pacotes estruturais como o *SAP 2000* e o *Ansys*.

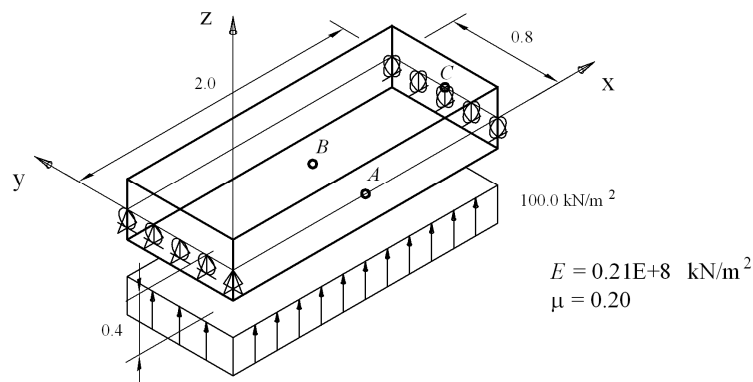
Na Figura 4.4 podemos ver as duas placas e os dados utilizados no cálculo. A Tabela 4.3 compara os resultados para placa fina, onde observa-se concordância entre os resultados obtidos com funções “spline” e aqueles com elementos dos programas estruturais indicados na tabela.

Tabela 4.3. Deslocamentos e rotações na placa fina.

Tipo de Elemento	w_A	θ_{xA}	w_B	θ_{yC}
Elemento finito com funções (“spline”) Malha 20 x 15	3,7138E-02	-4,2823E-03	3,5600E-02	2,8441E-02
8node93 <i>Ansys</i> Malha 160 x 60	3,7148E-02	-4,2919E-03	3,5607E-02	2,8441E-02
Thick Shell <i>SAP 2000</i> Malha 160 x 60	3,7127E-02	-4,2720E-03	3,5594E-02	2,8438E-02



(a)



(b)

Figura 4.4. (a) Placa de espessura fina. (b) Placa de maior espessura.

Na placa de maior espessura, Tabela 4.4, o efeito do cortante nos deslocamentos é mais importante. Observa-se que o valor da rotação ao redor do eixo x no ponto A calculada com funções “spline” é igual à obtida com o *ANSYS*, mas tem diferença de 8.6% com aquela obtida com o *SAP 2000*. Nos parágrafos seguintes explica-se a causa dessa diferença.

Tabela 4.4. Deslocamentos e rotações na placa espessa.

Tipo de Elemento	w_A	θ_{xA}	w_B	θ_{yC}
Elemento finito com funções (“spline”) Malha 20 x 16	2,0702E-04	-3,3605E-05	2,0062E-04	2,9562E-04
8node93 <i>Ansys</i> Malha 160 x 64	2,0702E-04	-3,3605E-05	2,0062E-04	2,9562E-04
Thick Shell <i>SAP 2000</i> Malha 160 x 64	2,0625E-04	-3,0700E-05	2,0036E-04	2,9530E-04

No caso do elemento finito com funções “spline” e do elemento de oito nós usado no *ANSYS*, as deformações de cisalhamento transversal que cumprem com as hipóteses assumidas na teoria de Mindlin são calculadas por:

$$\gamma_{xz} = \theta_y + w_{,x} \quad \gamma_{yz} = -\theta_x + w_{,y} \quad (4.2)$$

O deslocamento w e as rotações são interpolados dentro do elemento através das funções de forma e nenhuma restrição adicional é imposta. Já no *SAP 2000* obriga-se a que as deformações transversais cumpram com condições adicionais como pode ser observado na formulação do elemento “thick shell” [2].

O elemento quadrilateral com 16 rotações mostrado na Figura 4.5a é base para a formulação.

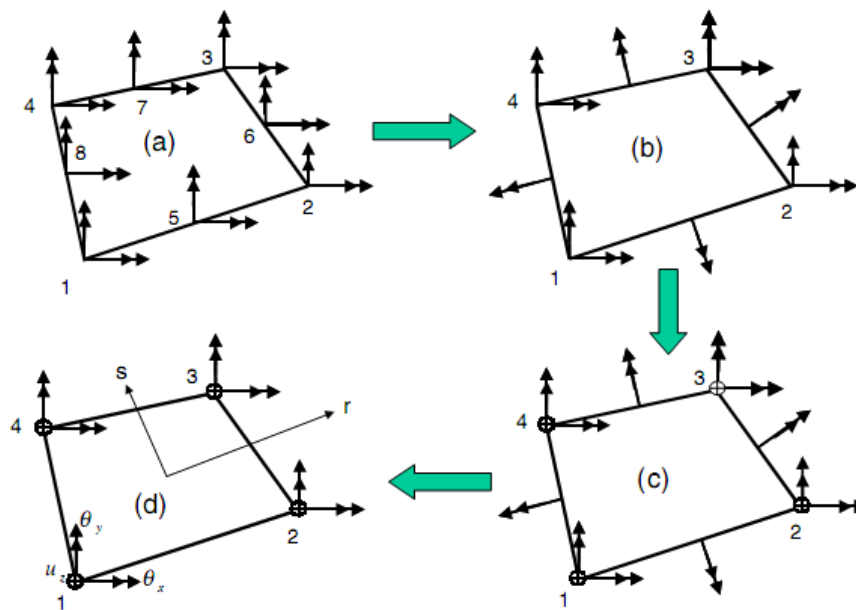


Figura 4.5. Elemento quadrilateral de placa [2].

As rotações dentro do elemento são obtidas através das formulas:

$$\begin{aligned} \theta_{x(r,s)} &= \sum_{i=1}^4 N_{i(r,s)} \theta_{xi} + \sum_{i=5}^8 N_{i(r,s)} \Delta \theta_{xi} \\ \theta_{y(r,s)} &= \sum_{i=1}^4 N_{i(r,s)} \theta_{yi} + \sum_{i=5}^8 N_{i(r,s)} \Delta \theta_{yi} \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde as oito funções de forma são:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (1-r)(1-s)/4 & N_2 &= (1+r)(1-s)/4 \\
 N_3 &= (1+r)(1+s)/4 & N_4 &= (1-r)(1+s)/4 \\
 N_5 &= (1-r^2)(1-s)/2 & N_6 &= (1+r)(1-s^2)/2 \\
 N_7 &= (1-r^2)(1+s)/2 & N_8 &= (1-r)(1-s^2)/2
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

A seguir, encontram-se as componentes normal e tangencial das rotações que estão no meio de cada lado, Figura 4.5b. A rotação tangencial é anulada e então, como se pode ver na Figura 4.6, as componentes em x e y da rotação normal resultam iguais a:

$$\begin{aligned}
 \Delta\theta_x &= \sin\alpha_{ij} \Delta\theta_{ij} \\
 \Delta\theta_y &= -\cos\alpha_{ij} \Delta\theta_{ij}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

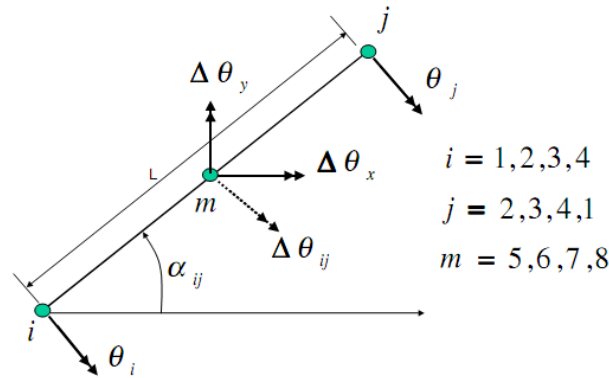


Figura 4.6. Lado genérico de um elemento [2].

Os graus de liberdade são reduzidos a 12 e agora a Equação 4.3 pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \theta_{x(r,s)} &= \sum_{i=1}^4 N_{i(r,s)} \theta_{xi} + \sum_{i=5}^8 M_{xi(r,s)} \Delta\theta_i \\
 \theta_{y(r,s)} &= \sum_{i=1}^4 N_{i(r,s)} \theta_{yi} + \sum_{i=5}^8 M_{yi(r,s)} \Delta\theta_i
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Os deslocamentos no plano segundo a teoria de Mindlin são:

$$\begin{aligned}
 u_{(r,s)} &= z \theta_{y(r,s)} \\
 v_{(r,s)} &= -z \theta_{x(r,s)}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

O deslocamento w e as rotações nos lados do elemento são definidos pelas seguintes fórmulas:

$$w = N_{L1} w_i + N_{L2} w_j + N_{L3} \beta_1 + N_{L4} \beta_2 \quad (4.8)$$

$$\theta = N_{L1} \theta_i + N_{L2} \theta_j + N_{L3} \Delta\theta$$

As funções de forma são definidas por:

$$N_{L1} = \frac{1-s}{2} \quad N_{L2} = \frac{1+s}{2} \quad (4.9)$$

$$N_{L3} = 1-s^2 \quad N_{L4} = s(1-s^2)$$

A deformação de cisalhamento transversal para um lado do elemento é uma função de s que contém termos constantes, lineares e quadráticos. Duas restrições são feitas nesta etapa, com os termos lineares e quadráticos sendo igualados a zero, para obter valores de β_1 e β_2 . Assim sendo, a deformação transversal de corte num lado do elemento é constante e igual a:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{L} (w_j - w_i) - \frac{1}{2} (\theta_i + \theta_j) - \frac{2}{3} \Delta\theta_{ij} \quad (4.10)$$

Quando o elemento não é retangular ainda se devem encontrar as deformações de cisalhamento nos nós do elemento através de uma transformação de deformações, para que depois uma interpolação bi-linear permita obter a deformação transversal de corte em qualquer outro ponto. As outras deformações unitárias são calculadas com as fórmulas apresentadas no capítulo anterior.

Entende-se que esta diferença na determinação da deformação de cisalhamento é a responsável pela variação encontrada na rotação ao redor do eixo x , entre resultados do *SAP 2000* e funções “spline”, precisamente em placa de maior espessura onde, como se disse antes, o efeito da deformação de cisalhamento não pode ser desprezado.

Deve-se mencionar que no cálculo com funções “spline” a carga distribuída foi introduzida como carregamento uniforme nas linhas nodais, e se emprega para a distribuição transversal o conceito de carga nodal consistente.

A Figura 4.7 apresenta os resultados do deslocamento vertical no ponto A da placa fina para diferentes divisões longitudinais, enquanto no sentido transversal manteve-se constante o número de quinze elementos.

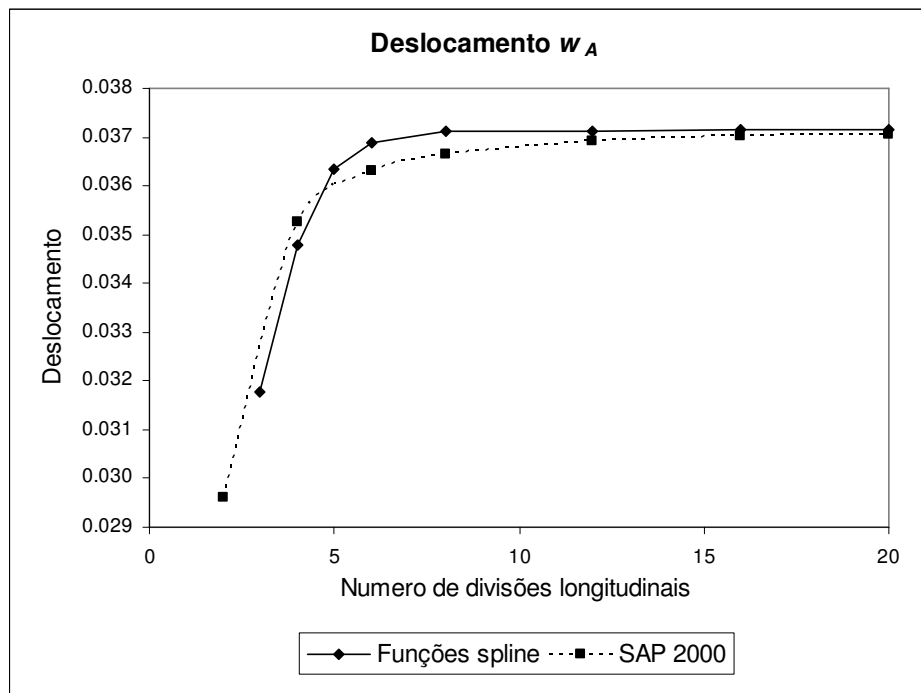


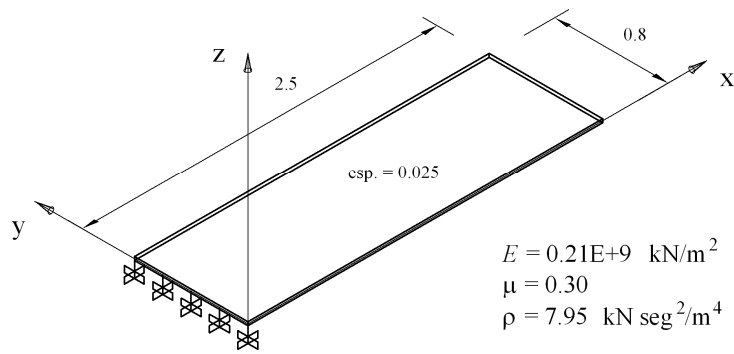
Figura 4.7. Deslocamento vertical na placa fina.

4.4. Freqüências Naturais de Placa em Balanço

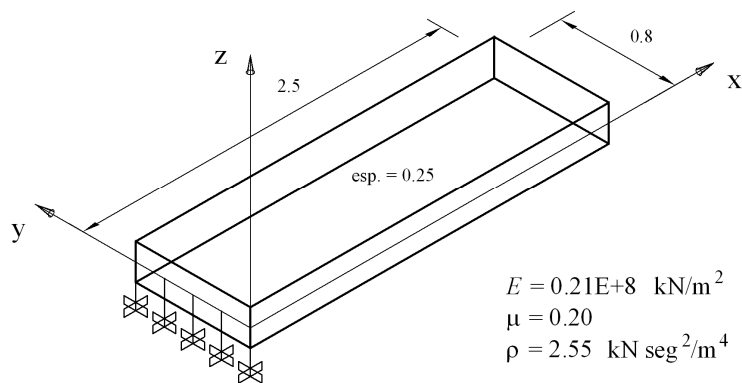
Calculam-se as seis primeiras freqüências naturais e modos de vibração de duas placas compridas, ambas com condições de contorno iguais, engaste num dos seus extremos e livre no outro. Os dados do problema se apresentam na Figura 4.8.

Dois tipos de considerações são feitas no cálculo com funções “spline” levando em conta ou não o efeito da inércia rotacional, e os resultados são mostrados na Tabela 4.5 para a placa mais fina e Tabela 4.6 para a placa de maior espessura, onde são também apresentados os valores das freqüências obtidas pelo *SAP 2000*. Os seis primeiros modos de vibração estão desenhados na Figura 4.9 e na Figura 4.10 para placa fina e espessa respectivamente.

No primeiro caso apenas o sexto modo de vibração está contido no plano da placa. Portanto, os primeiros cinco modos de vibração poderiam ser afetados pela inércia rotacional, mas devido a ter-se uma placa fina vê-se que somente o terceiro, quarto e quinto modos apresentam diferença na freqüência, sendo esta menor a 0,1%.



(a)



(b)

Figura 4.8. (a) Placa fina em balanço. (b) Placa de concreto em balanço.

Tabela 4.5. Freqüências naturais da placa fina em balanço.

Número de modo	Freqüências naturais [ciclos/s]			
	Funções "Spline"			SAP 2000 Thick Shell Malha 100 x 32
	Com inércia rotacional Malha 16 x 10	Sem inércia rotacional Malha 16 x 10	Diferença %	
1	3,38	3,38	0,00	3,38
2	21,13	21,13	0,00	21,13
3	21,56	21,58	0,09	21,68
4	59,31	59,32	0,02	59,32
5	67,53	67,57	0,06	67,86
6	99,10	99,10	0,00	99,09

Tabela 4.6. Freqüências naturais da placa espessa.

Número de modo	Freqüências naturais [ciclos/s]			
	Funções "Spline"			SAP 2000 Thick Shell Malha 100 x 32
	Com inércia rotacional Malha 16 x 10	Sem inércia rotacional Malha 16 x 10	Diferença %	
1	18,50	18,54	0,22	18,59
2	55,45	55,45	0,00	55,44
3	104,58	109,59	4,57	112,63
4	111,08	112,44	1,21	124,32
5	261,21	261,21	0,00	261,20
6	287,39	287,39	0,00	287,39

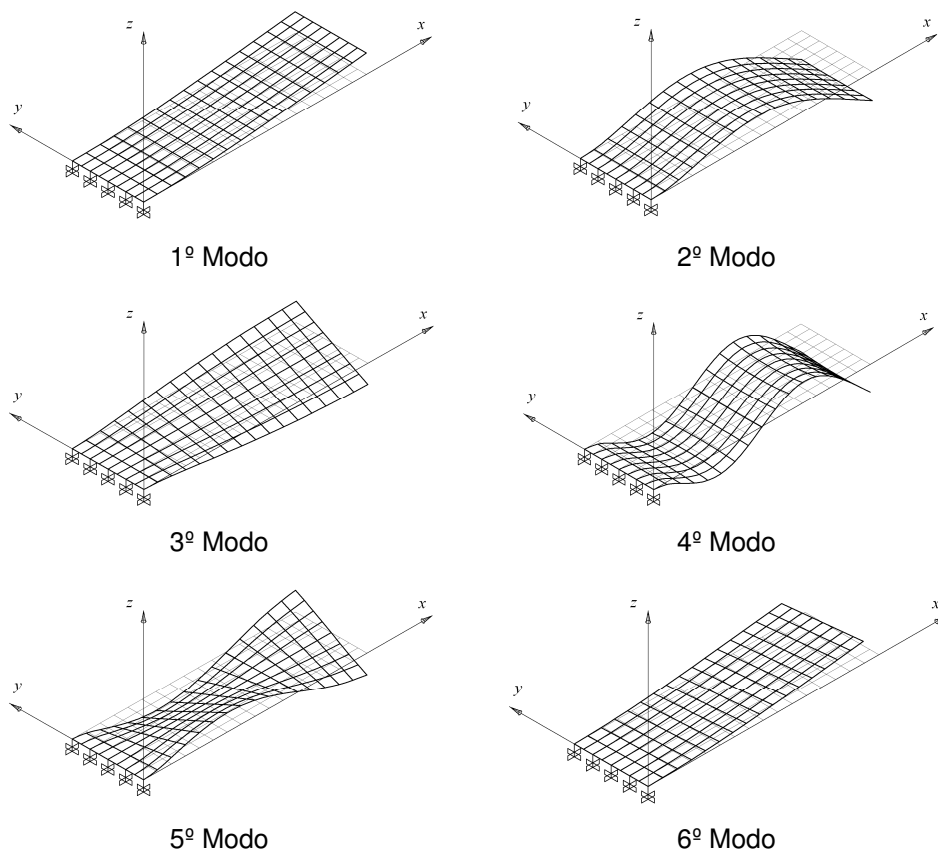


Figura 4.9. Modos de vibração da placa fina.

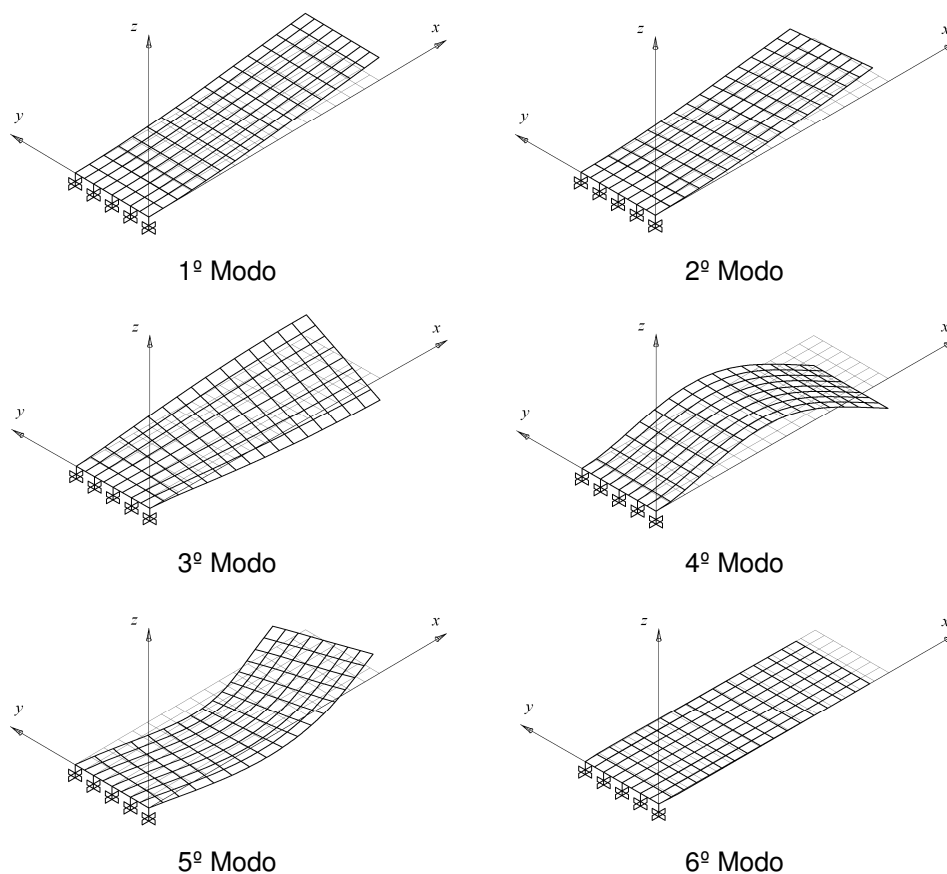
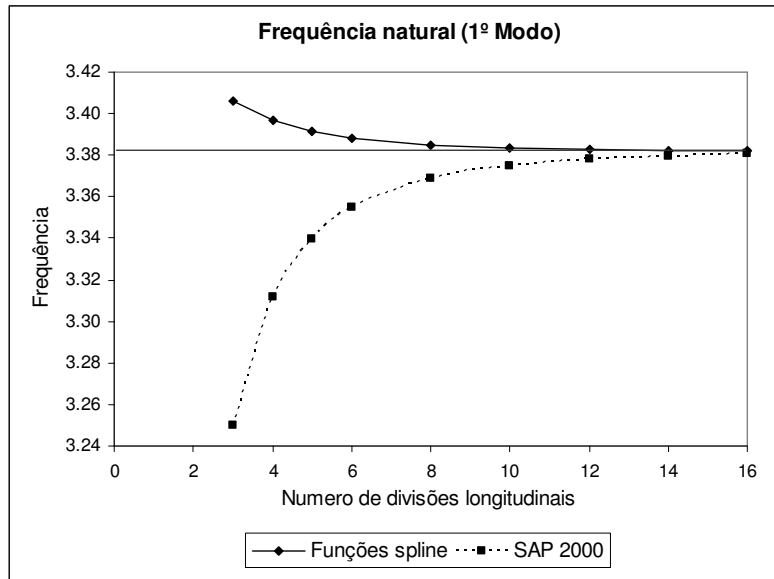


Figura 4.10. Modos de vibração da placa espessa.

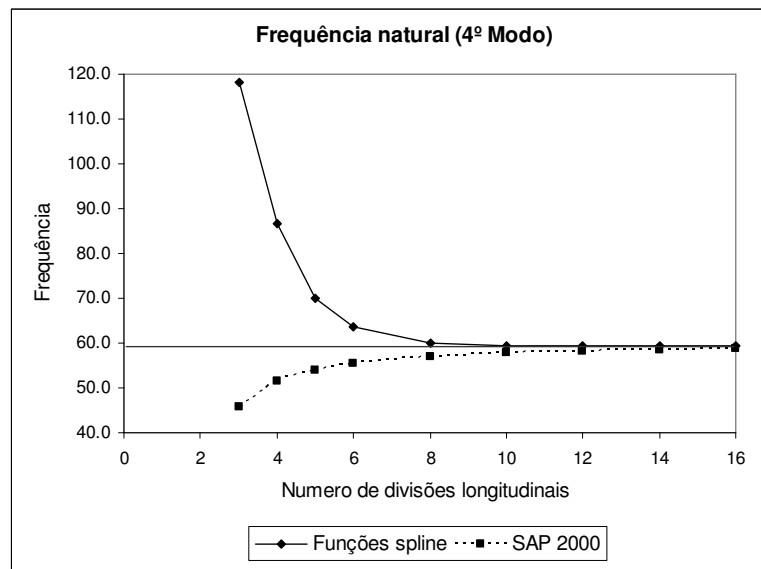
Na placa de maior espessura, devido à altura da mesma, há influência da inércia rotacional no primeiro, terceiro e quarto modos, que são os modos de vibração nos quais a superfície média não permanece no plano da placa. A maior diferença pode observar-se no terceiro modo que corresponde a um modo de torção da placa.

A diferença com relação aos valores do *SAP 2000* explica-se novamente pela forma de calcular a deformação cisalhante, que influi no cálculo da energia de deformação e então na matriz de rigidez, o que explica porque a diferença é maior na placa espessa. Isto além da matriz de massa não ser consistente e não levar em conta o efeito da inércia rotacional.

Os resultados das freqüências naturais para o primeiro e quarto modo da placa fina em função do número de divisões longitudinais são mostrados na Figura 4.11. Transversalmente foram usados dez elementos.



1º Modo



4º Modo

Figura 4.11. Frequências naturais do primeiro e quarto modos.

4.5. Frequências Naturais de Viga Caixaõ

A estrutura da Figura 4.12 representa uma parte de uma ponte em uma etapa construtiva, cujas dimensões em metros são mostradas na Figura 4.13. Para o cálculo das frequências naturais fazem-se algumas simplificações: a viga caixaõ é modelada por placas cujas dimensões podem ser vistas na Figura 4.14 e se supõe que a viga está em balanço, assumindo que no extremo esquerdo

tem-se um contrapeso com rigidez muito maior que a viga caixão. As constantes do material são: $E = 0,21E+8$ [kN/m²], $\mu = 0,30$ e $\rho = 2,55$ [kN seg²/m⁴].

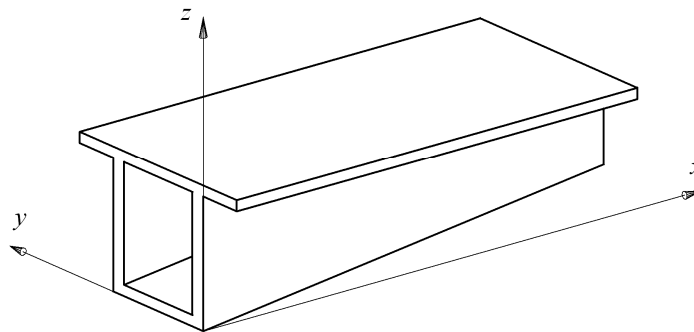


Figura 4.12. Viga caixão de ponte.

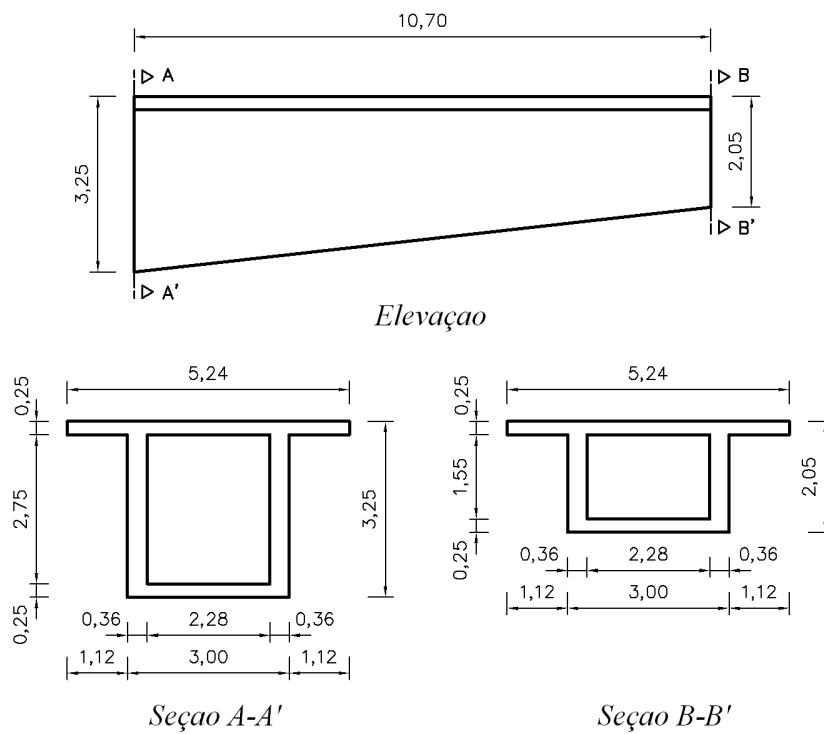


Figura 4.13. Dimensões da viga caixão.

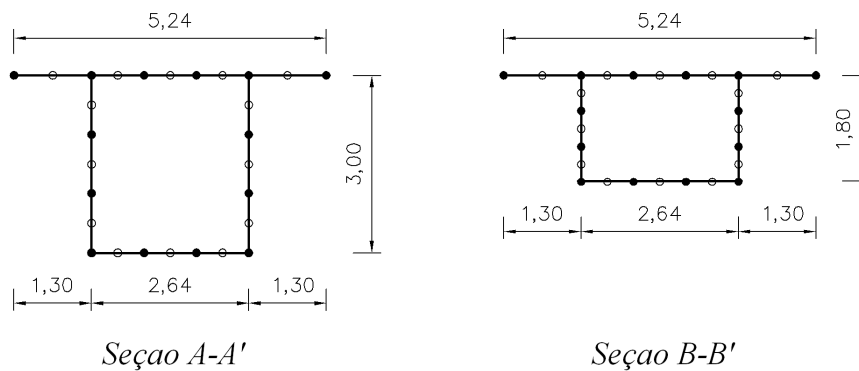
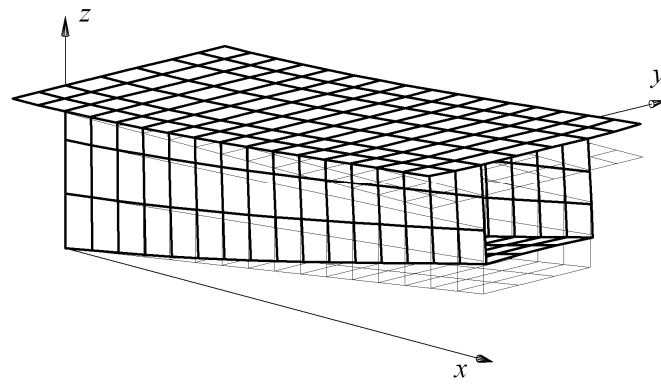


Figura 4.14. Modelagem da viga caixão.

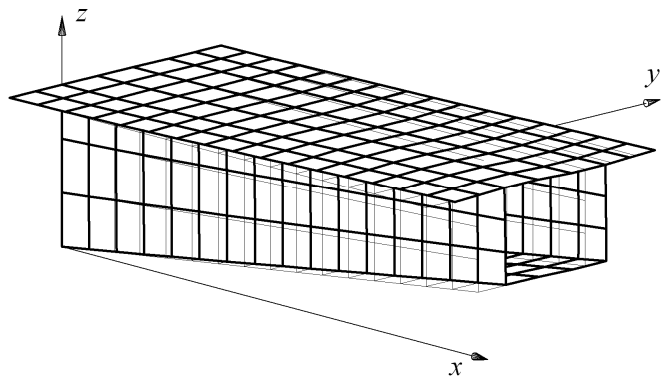
Como se pode observar, a seção transversal da viga foi modelada por quatorze elementos e o comprimento foi dividido em dezesseis partes. Os resultados das primeiras doze frequências apresentam-se na Tabela 4.7 e os quatro primeiros modos de vibração estão desenhados na Figura 4.15.

Tabela 4.7. Frequências naturais da viga caixão.

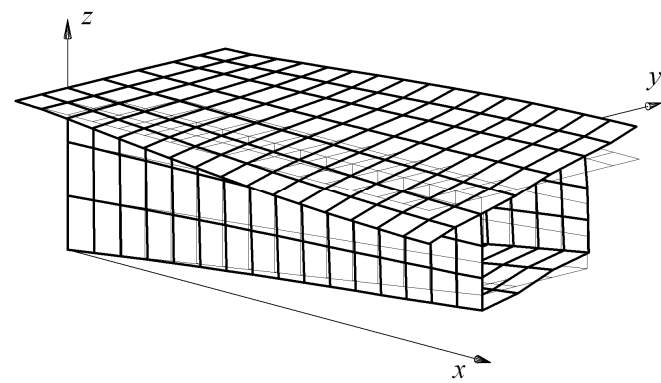
Número de modo	Frequências naturais [ciclos/s]				
	Funções "Spline"				SAP 2000 Thick Shell Malha 100 x 32
	Com inércia rotacional Malha 16 x 14		Sem inércia rotacional Malha 16 x 14		
	$\Phi = 0,25$	$\Phi = 5,00$	$\Phi = 0,25$	$\Phi = 5,00$	
1	14,13	14,17	14,13	14,17	14,34
2	16,00	16,04	16,00	16,04	15,82
3	32,29	32,50	32,33	32,54	31,80
4	38,63	38,93	38,75	39,06	37,95
5	48,44	48,85	48,53	48,94	47,60
6	52,39	52,68	52,44	52,74	52,52
7	54,86	55,08	55,15	55,36	52,82
8	56,88	57,28	57,05	57,45	54,92
9	60,86	61,11	61,20	61,46	59,54
10	69,85	70,07	70,11	70,12	66,33
11	70,10	70,12	70,22	70,44	69,04
12	71,13	71,64	71,60	72,10	69,25



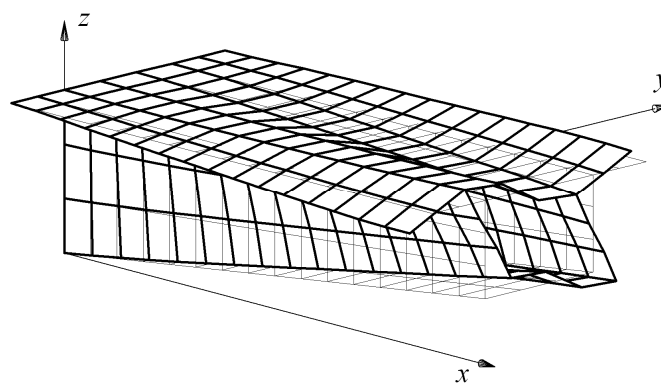
1º Modo



2º Modo



3º Modo



4º Modo

Figura 4.15. Modos de vibração da viga caixão.

4.6. Carga Crítica de Placa em Balanço

A Figura 4.16 mostra uma placa esbelta em balanço, com carga distribuída aplicada no extremo livre na direção x e contida no plano da placa, e procura-se o valor crítico deste carregamento. Inicialmente assume-se $\mu = 0$ para comparar o resultado com a fórmula teórica para colunas, depois se calcula a carga crítica para $\mu = 0,3$.

Aplicando os dados do problema na fórmula para coluna engastada-livre temos:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I}{4 L^2} = 86,36 \quad [kN] \quad (4.11)$$

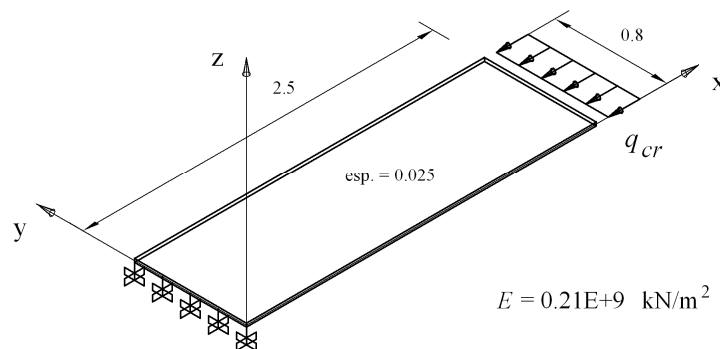


Figura 4.16. Carga crítica de placa em balanço.

Para o cálculo com funções “spline” a carga uniforme inicial é distribuída nos nós como carga consistente e a placa se divide transversalmente em quatro elementos e longitudinalmente em dez partes. As cargas críticas obtidas são mostradas na Tabela 4.8.

Tabela 4.8. Cargas críticas da placa em balanço.

Coeficiente de Poisson	Carga crítica	
	Distribuída q_{cr}	Total P_{cr}
0.00	107,94	86,35
0.30	110,68	88,54

Os dois primeiros modos de flambagem apresentam-se na Figura 4.17.

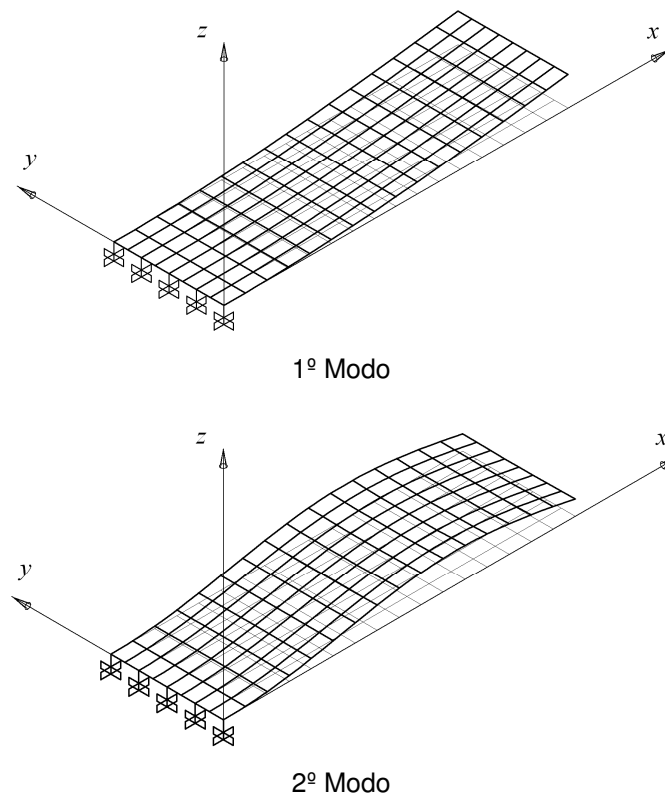


Figura 4.17. Modos de flambagem de placa engastada-livre.

4.7. Carga Crítica de Viga em Balanço

Timoshenko deduziu a carga crítica para uma viga retangular estreita em balanço com uma carga pontual na extremidade livre, cujo valor encontra-se com a fórmula seguinte:

$$P_{cr} = \frac{4.013 \sqrt{E I_{\eta} C}}{L^2} \left(1 - \frac{a}{L} \sqrt{\frac{E I_{\eta}}{C}} \right) \quad (4.12)$$

onde $C = G J$, com G igual ao módulo de elasticidade transversal e J a constante de torção da seção. O momento de inércia I_{η} e a constante de torção para uma seção retangular, cujas variáveis geométricas são definidas na Figura 4.18, são iguais a:

$$I_{\eta} = \frac{b^3 h}{12} \quad J = \frac{b^3 h}{3} \quad (4.13)$$

As equações de equilíbrio de momentos são:

$$M_y = -P(L-x) \quad M_z = 0 \quad M_x = P(-u_1 + u) \quad (4.14)$$

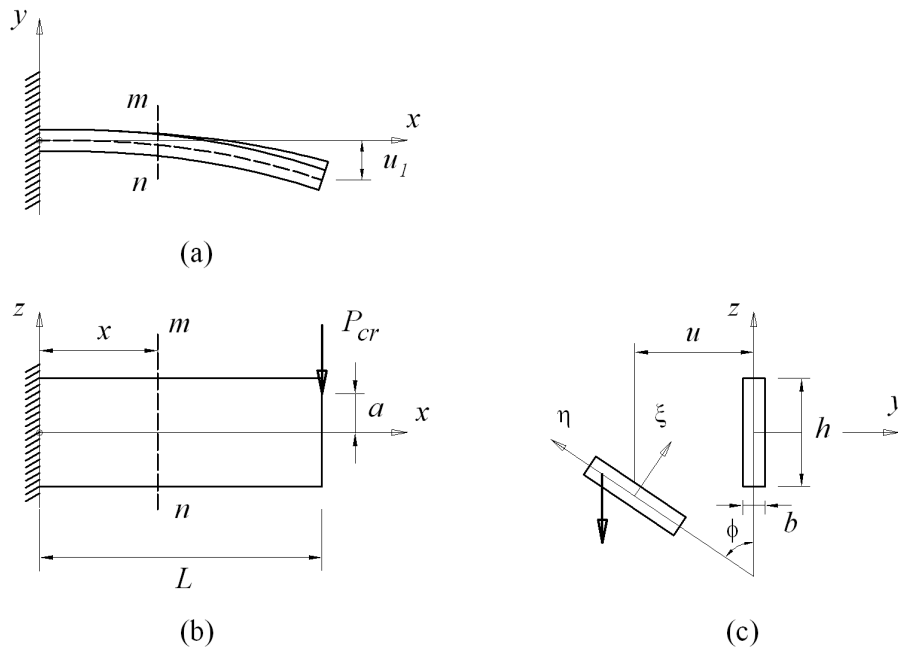


Figura 4.18. Carga crítica de viga estreita em balanço. (a) Planta. (b) Elevação. (c) Seção [6].

A Equação 4.12 assumiu que o momento ao redor do eixo z era zero em toda a seção, porém o momento pode ter valores diferentes de zero ao longo da seção, mas o somatório ser igual a zero. Para ilustrar estes dois casos analisem-se os seguintes exemplos.

A Figura 4.19 apresenta uma viga em balanço com carga pontual na parte superior da seção. No centróide todos os graus de liberdade estão impedidos, nos outros nós da seção engastada somente a rotação ao redor do eixo z é permitida. Substituindo os dados na Equação 4.12 temos:

$$P_{cr} = 176,16 \text{ [kN]} \quad (4.15)$$

Se o carregamento estivesse na parte inferior da seção a carga crítica seria igual a:

$$P_{cr} = 221,11 \text{ [kN]} \quad (4.16)$$

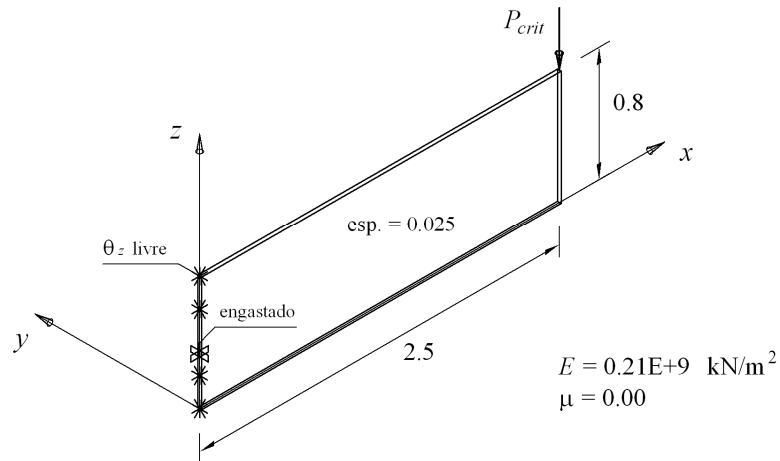


Figura 4.19. Viga em balanço com o grau de liberdade θ_z livre.

Analisando o problema com funções “spline”, dividindo a placa em oito elementos no sentido transversal e em vinte partes no sentido longitudinal obtemos os resultados da Tabela 4.9. A segunda carga crítica representa o caso em que a viga estaria carregada na parte inferior da seção.

Tabela 4.9. Cargas críticas da viga em balanço parcialmente engastada.

Número de modo	Carga Crítica Malha 20 x 8 [kN]	Diferença com Equação 4.12 %
1	171,06	2,90
2	-219,06	0,93

Se o engaste é completo, Figura 4.20, então todos os graus de liberdade são impedidos e obteremos os resultados mostrados na Tabela 4.10.

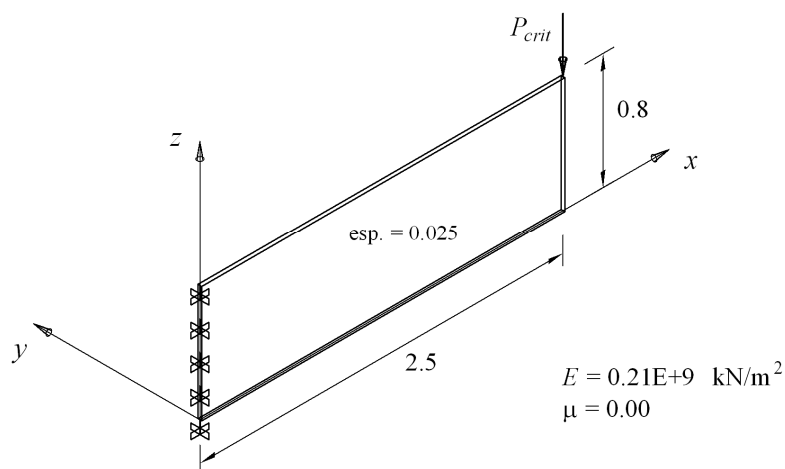


Figura 4.20. Viga em balanço totalmente engastada.

Tabela 4.10. Cargas críticas da viga em balanço totalmente engastada.

Número de modo	Carga Crítica Malha 32 x 8 [kN]	Diferença com viga parcialmente engastada %
1	192,28	11,04
2	-250,22	12,45

A distribuição de momentos M_z no engaste calculados em *SAP 2000* pode ser visto na Figura 4.21, onde o somatório ao longo da seção é igual a zero cumprindo com a equação de equilíbrio de momentos. Os modos de flambagem correspondentes às cargas críticas são apresentados na Figura 4.22.

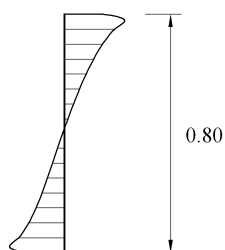
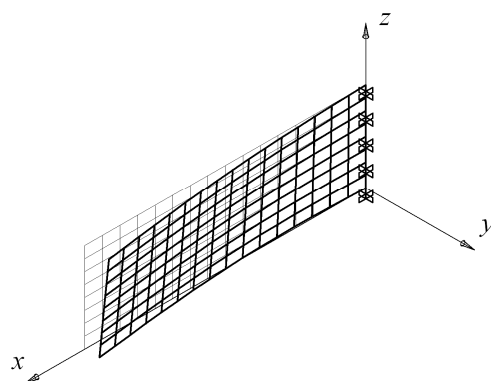
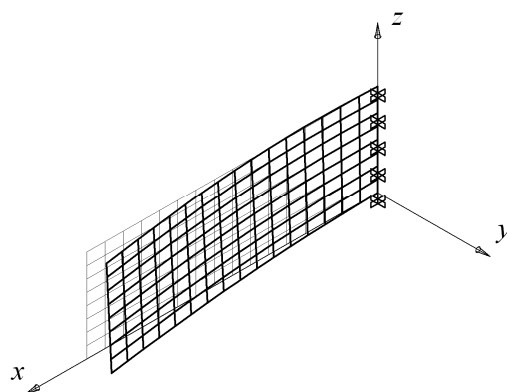


Figura 4.21. Distribuição de momentos no engaste.



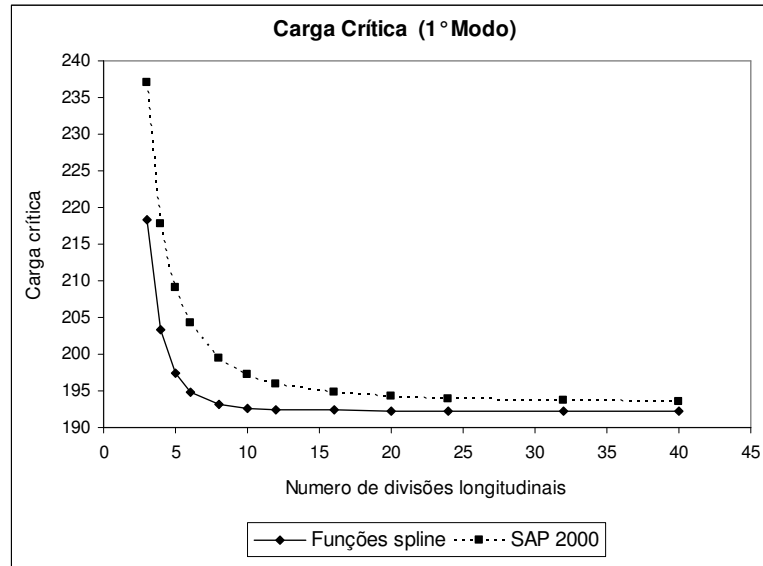
1º Modo



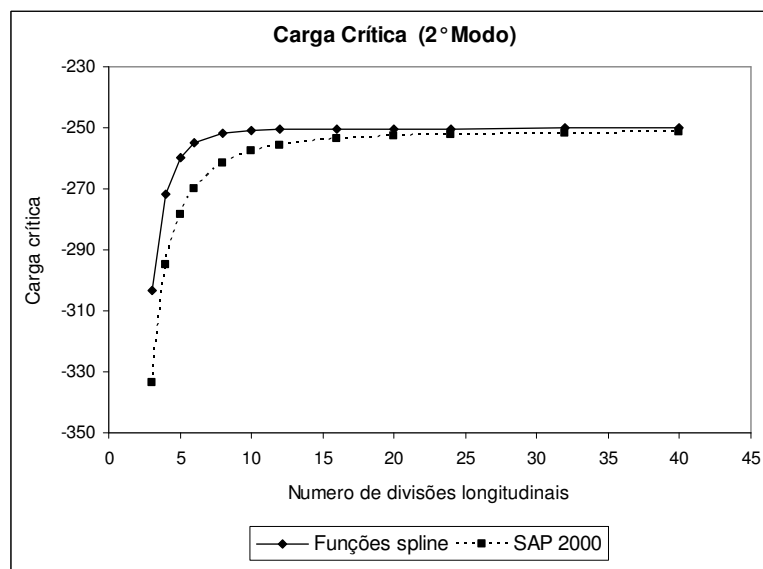
2º Modo

Figura 4.22. Modos de flambagem da viga em balanço.

Na Figura 4.23 podemos ver os resultados das cargas críticas enquanto modificamos o número de divisões longitudinais, tomando o número de elementos no sentido transversal constante e igual a oito.



1º Modo



2º Modo

Figura 4.23. Cargas críticas do primeiro e segundo modos.

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1. Conclusões

Os resultados obtidos através de elementos finitos com funções “spline”, nos exemplos do capítulo quatro, convergem mais rapidamente comparados com aqueles que utilizam elementos com funções convencionais. Essa vantagem é mais importante à medida que uma dimensão do elemento torna-se maior que as outras.

O elemento finito com funções “spline” utiliza pontos fora do contínuo para interpolar o campo de deslocamentos, característica do método de diferenças finitas. Portanto, pode-se esperar que assuma algumas vantagens e desvantagens desse método, por exemplo convergência mais rápida e necessidade de continuidade das propriedades do material ao longo do eixo das funções “spline”.

O primeiro exemplo estático apresenta um método para determinar a constante de rigidez ao efeito “drilling”. Este método, que foi usado como exemplo para avaliar um outro tipo de elemento finito [19], é uma alternativa que pode ser utilizada como base para o cálculo da constante, ainda que outros exemplos tridimensionais sejam necessários para obter um valor mais apurado.

Assumir as hipóteses de Mindlin permite a junção de placas em problemas tridimensionais porque as rotações são interpoladas de forma independente dos deslocamentos, e também admite análise de placas finas e espessas levando em conta o efeito das deformações de cisalhamento. No exemplo de placa espessa, a comparação entre resultados obtidos com funções “spline” e o elemento “*Thick Shell*” do *SAP 2000* mostra uma diferença de 0,5% em deslocamento e 8,6% em rotação no extremo da seção central da placa. O cálculo da deformação de cisalhamento na formulação do *SAP 2000* seria o motivo responsável, pois esta diferença é mais acentuada em elementos de maior espessura. Na formulação do elemento finito com funções “spline” e do elemento “*8node93*” do *ANSYS*, a deformação de cisalhamento é calculada em função de pequenos deslocamentos com as fórmulas da elasticidade. Já no elemento do *SAP 2000* a deformação de cisalhamento é função dos graus de

liberdade nodais e da rotação no ponto central, chegando inclusive a ter valor constante para placas retangulares ortogonais aos eixos.

No gráfico que relaciona o deslocamento do ponto central da placa fina com o número de divisões longitudinais, observa-se que os resultados com funções “spline” convergem mais rápido que o *SAP 2000* para a solução esperada. No entanto, no caso particular de quatro divisões o valor do deslocamento tem menor precisão que o resultado do *SAP 2000*. Isto ocorre devido ao fato observado por Cook [1]: com elementos baseados estritamente na teoria de Mindlin não é possível chegar a resultados satisfatórios com poucas divisões pois as cargas nodais consistentes não levam em conta a contribuição dos momentos.

Nos exemplos dinâmicos a análise foi feita considerando ou não a inércia rotacional. Para placa espessa a diferença entre freqüências naturais foi de aproximadamente 5% no terceiro modo que corresponde a um modo de torção da placa. As diferenças entre resultados com funções “spline” e *SAP 2000* são explicadas novamente pela forma de calcular a deformação cisalhante. Os gráficos que apresentam as freqüências naturais em função do número de divisões longitudinais, para o primeiro e quarto modos, permitem ver que existe uma rápida convergência dos resultados com funções “spline” para o primeiro modo, porém isto não se observa no caso do quarto modo, para número de divisões menor que oito. Observando a forma deste modo de vibração vemos que tem três ondas longitudinais; como cada uma delas deve ser aproximada por três parâmetros de deslocamento para não haver interferência entre ondas, a precisão melhora somente a partir de oito divisões.

Em problemas tridimensionais o efeito do grau de liberdade “drilling” é maior, como se pode notar no segundo exemplo dinâmico. Um valor da constante de rigidez $\Phi = 5.00$, que no primeiro exemplo estático aproxima melhor o grau de liberdade de rotação com o resultado teórico, conduz a freqüências mais altas, o que confirma que além do método indicado para determinar a constante devemos conferir seu valor com problemas tridimensionais.

Os problemas de instabilidade permitem observar a importância que se deve dar à análise destes problemas em três dimensões, devido a que as condições de contorno da estrutura podem influir significativamente na determinação da carga crítica. Considerando condições de apoio que tentam reproduzir as hipóteses assumidas por Timoshenko para calcular a carga crítica de uma viga em balanço, obtêm-se valores próximos aos teóricos. Os resultados

são aproximados porque os elementos com funções “spline” levam em conta a deformação cisalhante, além do fato das condições de contorno nunca serem iguais às teóricas.

5.2. Sugestões para Trabalhos Futuros

Entre as sugestões para trabalhos futuros podemos citar:

- Realizar um estudo sobre elementos isoparamétricos com funções “spline”, pois com estes elementos se poderiam modelar estruturas com eixos curvos.
- Ampliar o estudo a problemas com não-linearidade geométrica e de material. No último caso o elemento subparamétrico pode ser aplicado, mas no primeiro se precisará atualizar a geometria do elemento e então um elemento isoparamétrico com funções “spline” deveria ser utilizado.
- Adicionar forças provenientes de cabos protendidos no programa implementado. Estas forças poderiam incluir efeitos de retração do concreto e fluência do aço além das perdas por atrito e acomodação da ancoragem [13].
- Estudar elementos que aproximem o campo de deslocamentos com funções “spline” em duas direções. Desta forma se conseguiria modelar placas retangulares além das estruturas alongadas, conservando as vantagens implícitas do uso das funções “spline”.

Referências Bibliográficas

- [1] Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Third edition, John Wiley & Sons, 1989.
- [2] Wilson, E. L., Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures, Third edition, Computers & Structures, 2002.
- [3] Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L., The Finite Element Method, Fifth edition, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [4] Bathe, K. J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, 1982.
- [5] Weaver, W. J.; Johnston, P. R., Finite Elements for Structural Analysis, Prentice-Hall, 1984.
- [6] Timoshenko, S. P.; Gere, J. M., Theory of Elastic Stability, Second edition, McGraw-Hill, 1961
- [7] Cheung, Y. K., Finite Strip Method in Structural Analysis, First edition, Pergamon Press, 1976.
- [8] CSI Analysis Reference Manual for SAP 2000, Computers & Structures, 2005.
- [9] Elsgoltz, L., Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional, Editorial MIR, 1969.
- [10] Cheung, Y. K.; Au F. T. K., "Isoparametric Spline Finite Strip for Degenerate Shells", Thin-Walled Struct., 21 (1995) 65-92.
- [11] Au, F. T. K.; Cheung, Y. K., "Free Vibration and Stability Analysis of Shells by the Isoparametric Spline Finite Strip Method", Thin-Walled Struct., 24 (1996) 53-82.
- [12] Au, F. T. K.; Cheung, Y. K., "Static and Free Vibration Analysis of Variable-depth Bridges of arbitrary alignments Using the Isoparametric Spline Finite Strip Method", Thin-Walled Struct., 24 (1996) 19-51.
- [13] Choi, C. K.; Kim, K. H.; Hong, H. S., "Spline Finite Strip Analysis of Prestressed Concrete Box-girder Bridges", Engng. Struct., 24 (2002) 1575-1586.

- [14] Bergamini, A.; Biondini, F., "Finite Strip Modeling for Optimal Design of Prestressed Folded Plate Structures", *Engng. Struct.*, 26 (2004) 1043-1054.
- [15] Lau, D. T.; Cheung, M. S.; Cheng, S. H., "3D Flutter Analysis of Bridges by Spline Finite Strip Method", *J. Struct. Engng.*, 126 (10) (2000) 1246-1254.
- [16] Knight, N. F. J., "Assumed-stress Hybrid Elements with Drilling Degrees of Freedom for Nonlinear Analysis of Composite Structures", *Depart. Aerospace Engng.*, Final report, Dec. 1995.
- [17] Shuli, S.; Mingwu, Y.; Pu, C., "A Practical Quadrilateral Membrane Element with Drilling Degrees of Freedom" *Acta Mech. Solid.* 10 (2) (1997) 179-188.
- [18] Papachristidis, A. G.; Badaloukas, G. N.; Badalouka, B. G., "Experimental Verification of Shear Wall Modeling Using Finite Element Analysis", 6th National Congress of Mechanics, Greece, 2001
- [19] Pimpinelli, G., "An Assumed Strain Quadrilateral Element with Drilling Degrees of Freedom", *Finite Elem. Analysis Design*, 41 (2004) 267-283.

A ENTRADA E SAÍDA DE DADOS

O programa utiliza dois arquivos de texto para ingresso de dados denominados "DADOS1" e "DADOS2". O primeiro contém dados gerais sobre a análise e pode ser utilizado pelo programa para gerar o segundo arquivo com todas as variáveis iguais a zero. As Figuras A.1 e A.2 mostram os dados para uma viga em balanço com carga pontual no extremo livre, dividida transversalmente em dois elementos e com quatro divisões longitudinais.

Os arquivos "RESEST", "RES DIN" E "RESINS" contêm os resultados da análise estática, dinâmica e de instabilidade, respectivamente. As Figuras A.3, A.4 e A.5 são exemplos de como são apresentados os dados em estes arquivos.

```
PROGRAMA "ELEMENTOS FINITOS COM FUNÇÕES SPLINE"  
  
DADOS GERAIS  
  
Numero de tramos           :1  
Numero de nós              :5  
Numero de elementos        :2  
  
Calculo estático? (s/n)    :s  
  
Calculo de frequencias  
naturais? (s/n)           :s  
  
Incluir efeito da inercia  
rotacional? (s/n)         :s  
  
Numero de frequências      :2  
  
Calculo  
da carga critica? (s/n)    :s  
  
Numero de modos            :2
```

Figura A.1 Arquivo de texto DADOS1.

PROGRAMA "ELEMENTOS FINITOS COM FUNÇÕES SPLINE"

PROPRIEDADES DO MATERIAL

Modulo de elasticidad em [KN/m²] : 0.21E+09
 Coeficiente de Poisson : 0.3000
 Densidade especifica [KN*seg²/m⁴] : 7.9500

INFORMAÇÃO DOS NOS

COORDENADAS SECAO 1

x: 0.00

No 1	y:	0.00	z:	0.00
No 2	y:	0.00	z:	0.10
No 3	y:	0.00	z:	0.20
No 4	y:	0.00	z:	0.30
No 5	y:	0.00	z:	0.40

COORDENADAS SECAO 2

x: 5.00

No 1	y:	0.00	z:	0.00
No 2	y:	0.00	z:	0.10
No 3	y:	0.00	z:	0.20
No 4	y:	0.00	z:	0.30
No 5	y:	0.00	z:	0.40

NUMERO DE DIVISOES POR TRAMO

Para o calculo Para os resultados
 Tramo 1: 4 Tramo 1: 4

INFORMAÇÃO DOS ELEMENTOS

Elemento 1	No inic.:	1	No inter:	2	No final:	3	Espes.:	0.025
Elemento 2	No inic.:	3	No inter:	4	No final:	5	Espes.:	0.025

CARREGAMENTO UNIFORME POR LINHA NODAL

TRAMO 1

No 1	qx:	0.00	qy:	0.00	qz:	0.00
No 2	qx:	0.00	qy:	0.00	qz:	0.00
No 3	qx:	0.00	qy:	0.00	qz:	0.00
No 4	qx:	0.00	qy:	0.00	qz:	0.00
No 5	qx:	0.00	qy:	0.00	qz:	0.00

CARREGAMENTO PONTUAL NOS NÓS

SECAO 1

No 1	Fx:	0.00	Fy:	0.00	Fz:	0.00	Mx:	0.00	My:	0.00	Mz:	0.00
No 2	Fx:	0.00	Fy:	0.00	Fz:	0.00	Mx:	0.00	My:	0.00	Mz:	0.00
No 3	Fx:	0.00	Fy:	0.00	Fz:	0.00	Mx:	0.00	My:	0.00	Mz:	0.00
No 4	Fx:	0.00	Fy:	0.00	Fz:	0.00	Mx:	0.00	My:	0.00	Mz:	0.00
No 5	Fx:	0.00	Fy:	0.00	Fz:	0.00	Mx:	0.00	My:	0.00	Mz:	0.00

SECAO 2

No 1	Fx:	0.00	Fy:	0.00	Fz:	0.00	Mx:	0.00	My:	0.00	Mz:	0.00
No 2	Fx:	0.00	Fy:	0.00	Fz:	0.00	Mx:	0.00	My:	0.00	Mz:	0.00
No 3	Fx:	0.00	Fy:	0.00	Fz:	0.00	Mx:	0.00	My:	0.00	Mz:	0.00
No 4	Fx:	0.00	Fy:	0.00	Fz:	0.00	Mx:	0.00	My:	0.00	Mz:	0.00
No 5	Fx:	0.00	Fy:	0.00	Fz:	10.00	Mx:	0.00	My:	0.00	Mz:	0.00

RESTRICÇÕES

SEÇÃO 1

No 1	Rx:	1	Ry:	1	Rz:	1	Mx:	1	My:	1	Mz:	1
No 2	Rx:	1	Ry:	1	Rz:	1	Mx:	1	My:	1	Mz:	1
No 3	Rx:	1	Ry:	1	Rz:	1	Mx:	1	My:	1	Mz:	1
No 4	Rx:	1	Ry:	1	Rz:	1	Mx:	1	My:	1	Mz:	1
No 5	Rx:	1	Ry:	1	Rz:	1	Mx:	1	My:	1	Mz:	1

SEÇÃO 2

No 1	Rx:	0	Ry:	0	Rz:	0	Mx:	0	My:	0	Mz:	0
No 2	Rx:	0	Ry:	0	Rz:	0	Mx:	0	My:	0	Mz:	0
No 3	Rx:	0	Ry:	0	Rz:	0	Mx:	0	My:	0	Mz:	0
No 4	Rx:	0	Ry:	0	Rz:	0	Mx:	0	My:	0	Mz:	0
No 5	Rx:	0	Ry:	0	Rz:	0	Mx:	0	My:	0	Mz:	0

Figura A.2 Arquivo de texto DADOS2.

Deslocamentos e Rotações

Nó N° 1							
x	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz	
0.0000	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	
1.2500	0.38681213E-03	0.00000000E+00	0.12758221E-02	0.00000000E+00	-0.19407311E-02	0.00000000E+00	
2.5000	0.66620888E-03	0.00000000E+00	0.46403785E-02	0.00000000E+00	-0.33433061E-02	0.00000000E+00	
3.7500	0.83326904E-03	0.00000000E+00	0.93970335E-02	0.00000000E+00	-0.41740764E-02	0.00000000E+00	
5.0000	0.88880185E-03	0.00000000E+00	0.14851074E-01	0.00000000E+00	-0.44484467E-02	0.00000000E+00	
Nó N° 2							
x	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz	
0.0000	-0.67762636E-20	0.00000000E+00	-0.27105054E-19	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	
1.2500	0.19310570E-03	0.00000000E+00	0.12699057E-02	0.00000000E+00	-0.19399136E-02	0.00000000E+00	
2.5000	0.33260242E-03	0.00000000E+00	0.46360886E-02	0.00000000E+00	-0.33376816E-02	0.00000000E+00	
3.7500	0.41627878E-03	0.00000000E+00	0.93952296E-02	0.00000000E+00	-0.41724572E-02	0.00000000E+00	
5.0000	0.44417443E-03	0.00000000E+00	0.14851426E-01	0.00000000E+00	-0.44498595E-02	0.00000000E+00	
Nó N° 3							
x	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz	
0.0000	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	
1.2500	-0.31036634E-07	0.00000000E+00	0.12679296E-02	0.00000000E+00	-0.19377107E-02	0.00000000E+00	
2.5000	0.63160388E-07	0.00000000E+00	0.46346573E-02	0.00000000E+00	-0.33322884E-02	0.00000000E+00	
3.7500	-0.69599861E-07	0.00000000E+00	0.93946240E-02	0.00000000E+00	-0.41697241E-02	0.00000000E+00	
5.0000	-0.10459666E-06	0.00000000E+00	0.14851958E-01	0.00000000E+00	-0.44497932E-02	0.00000000E+00	
Nó N° 4							
x	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz	
0.0000	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.27105054E-19	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	
1.2500	-0.19315946E-03	0.00000000E+00	0.12699386E-02	0.00000000E+00	-0.19397633E-02	0.00000000E+00	
2.5000	-0.33248722E-03	0.00000000E+00	0.46360426E-02	0.00000000E+00	-0.33378799E-02	0.00000000E+00	
3.7500	-0.41640119E-03	0.00000000E+00	0.93952475E-02	0.00000000E+00	-0.41721077E-02	0.00000000E+00	
5.0000	-0.44463307E-03	0.00000000E+00	0.14852955E-01	0.00000000E+00	-0.44557606E-02	0.00000000E+00	
Nó N° 5							
x	Dx	Dy	Dz	Rx	Ry	Rz	
0.0000	-0.13552527E-19	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00	
1.2500	-0.38684287E-03	0.00000000E+00	0.12758901E-02	0.00000000E+00	-0.19404392E-02	0.00000000E+00	
2.5000	-0.66612413E-03	0.00000000E+00	0.46402841E-02	0.00000000E+00	-0.33436900E-02	0.00000000E+00	
3.7500	-0.83333937E-03	0.00000000E+00	0.93970721E-02	0.00000000E+00	-0.41733730E-02	0.00000000E+00	
5.0000	-0.89012743E-03	0.00000000E+00	0.14854183E-01	0.00000000E+00	-0.44608110E-02	0.00000000E+00	

Figura A.3 Arquivo de texto RESEST.

Frequencias Naturais da Estrutura

0.840988773800051		6.10692587848329	
MODO N° 1			
Nó N° 1			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	-0.43368087E-18	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.21906722E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.77561756E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.15227937E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.23346430E+00	0.00000000E+00
Nó N° 2			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.22012007E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.77610666E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.15230139E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.23345812E+00	0.00000000E+00
Nó N° 3			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.22047507E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.77626591E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.15230900E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.23345641E+00	0.00000000E+00
Nó N° 4			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.22012007E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.77610666E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.15230139E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.23345812E+00	0.00000000E+00
Nó N° 5			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	-0.86736174E-18	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.21906722E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.77561756E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.15227937E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.23346430E+00	0.00000000E+00
MODO N° 2			
Nó N° 1			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	-0.17347235E-17	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	-0.42031146E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	-0.75932224E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	-0.22018457E-01	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.12217808E+00	0.00000000E+00
Nó N° 2			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	0.17347235E-17	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	-0.42010691E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	-0.75653286E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	-0.21752124E-01	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.12226751E+00	0.00000000E+00
Nó N° 3			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	0.86736174E-18	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	-0.42004924E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	-0.7559451E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	-0.21664100E-01	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.12229710E+00	0.00000000E+00
Nó N° 4			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	-0.86736174E-18	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	-0.42010691E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	-0.75653286E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	-0.21752124E-01	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.12226751E+00	0.00000000E+00
Nó N° 5			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	0.86736174E-18	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	-0.42031146E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	-0.75932224E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	-0.22018457E-01	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.12217808E+00	0.00000000E+00

Figura A.4 Arquivo de texto RESDIN.

Fatores de Cargas Criticas da Estrutura

-2.43854774991853		2.63758106412435	
MODO N° 1			
Nó N° 1			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.34589146E-02	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.36521377E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.10688441E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.20350093E+00	0.00000000E+00
Nó N° 2			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.61947221E-02	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.41524595E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.11252586E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.20937077E+00	0.00000000E+00
Nó N° 3			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.88685884E-02	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.46464307E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.11811463E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.21523376E+00	0.00000000E+00
Nó N° 4			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.11479898E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.51340147E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.12365060E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.22109092E+00	0.00000000E+00
Nó N° 5			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.14029054E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.56150887E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.12913410E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.22694254E+00	0.00000000E+00
MODO N° 2			
Nó N° 1			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	-0.21684043E-18	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.14315144E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.57068186E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.13049084E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.22793273E+00	0.00000000E+00
Nó N° 2			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	0.00000000E+00	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.11862376E-01	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.52619777E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.12573934E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.22321532E+00	0.00000000E+00
Nó N° 3			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	-0.10842022E-18	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.93459842E-02	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.48105925E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.12093702E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.21849362E+00	0.00000000E+00
Nó N° 4			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	-0.81315163E-19	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.67655041E-02	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.43527953E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.11608353E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.21376756E+00	0.00000000E+00
Nó N° 5			
x	Dx	Dy	Dz
0.0000	0.00000000E+00	-0.54210109E-19	0.00000000E+00
1.2500	0.00000000E+00	0.41215503E-02	0.00000000E+00
2.5000	0.00000000E+00	0.38886333E-01	0.00000000E+00
3.7500	0.00000000E+00	0.11117894E+00	0.00000000E+00
5.0000	0.00000000E+00	0.20903659E+00	0.00000000E+00

Figura A.5 Arquivo de texto RESINS.

B LISTAGEM DO PROGRAMA

Este apêndice apresenta o programa implementado em Fortran. As rotinas estão divididas em cinco grupos: programa principal, definições, rotinas gerais, entrada e saída de dados.

B.1. Programa Principal

```

PROGRAM Mindlin_Spline
  USE geral
  CALL Leitura_dados
  CALL Calculos
  IF (CALC_EST.EQ."s") THEN
    CALL Resul_est
  END IF
  IF (CALC_DIN.EQ."s") THEN
    CALL Resul_din
  END IF
  IF (CALC_INS.EQ."s") THEN
    CALL Resul_ins
  END IF
END PROGRAM Mindlin_Spline

SUBROUTINE Calculos
  USE IMSLF90
  USE lin_geig_gen_int
  USE geral
  USE calc
  INTEGER :: IAUX
  IAUX=6*NNOS*(3*NTRAMOS+SUM(MPT))
  ALLOCATE (RKG(IAUX,IAUX),RFG(IAUX),UG(IAUX))
  RKG=0.0D0;RFG=0.0D0;UG=0.0D0
  IF (CALC_DIN.EQ."s") THEN
    ALLOCATE (RMG(IAUX,IAUX),BETA(IAUX),ALPHA(IAUX),AUTOV(IAUX,IAUX) &
      ,RMODO(IAUX,NFREQ))
    RMG=0.0D0;BETA=0.0D0;ALPHA=0.0D0;AUTOV=0.0D0;RMODO=0.0D0
    IDIN=1
  END IF
  IF (CALC_INS.EQ."s") THEN
    ALLOCATE (RGG(IAUX,IAUX),BETAI(IAUX),ALPHAI(IAUX),AUTOVI(IAUX,IAUX) &
      ,RMODEI(IAUX,NMODOS))
    RGG=0.0D0;BETAI=0.0D0;ALPHAI=0.0D0;AUTOVI=0.0D0;RMODEI=0.0D0
  END IF
  DO I=1,NTRAMOS
    DO J=1,NELEM
      CALL Coord_locais(I,J)
      CALL Matriz_Elem(I,J)
      CALL Ensamblar(I,J)
    END DO
  END DO
  CALL CargaUniforme
  CALL CargaPontual
  CALL DeslocFisicos(IAUX)
  CALL Restricoes(IAUX)
  IF (CALC_DIN.EQ."s") THEN
    CALL lin_geig_gen(RKG, RMG, ALPHA, BETA, v=AUTOV)
    RMODO=REAL(AUTOV(1:IAUX,1:NFREQ))
    CALL RMODOParametros
  END IF
  IF (CALC_INS.EQ."s") THEN

```

```

        ALLOCATE(RKGI(IAUX,IAUX))
        RKGI=0.0D0
        RKGI=RKG
    END IF
    IF (CALC_EST.EQ."s" .OR. CALC_INS.EQ."s") THEN
        CALL Sol(RKG,RFG,UG,IAUX)
        CALL UGparametros
    END IF
    IF (CALC_INS.EQ."s") THEN
        DO I=1,NTRAMOS
            DO J=1,NELEM
                CALL Param_elem(I,J)
                CALL Coord_locais(I,J)
                CALL Transf_local(MPT(I))
                CALL Matriz_Geom(I,J)
                CALL Ensam_geom(I,J)
            END DO
        END DO
        CALL DeslFis_geom(IAUX)
        CALL Restric_geom(IAUX)
        CALL lin_geig_gen(RKGI, RGG, ALPHAI, BETAI, v=AUTOVI)
        RMODOI=REAL(AUTOVI(1:IAUX,1:NMODOS))
        CALL RMODOIparam_geom
    END IF
END SUBROUTINE Calculos

SUBROUTINE Coord_locais(NTR,NEL)                !NTR=# de tramo; NEL=# de elemento
    USE geral
    USE calc
    REAL(KIND(0.0D0)), DIMENSION(3) ::P1,P2,P3,P4,V1,V2,V3
    REAL(KIND(0.0D0)) :: C1,C2,C3
    P1=COORD(NTR, INCID(NEL,1), :)
    P2=COORD(NTR+1, INCID(NEL,1), :)
    P3=COORD(NTR+1, INCID(NEL,3), :)
    P4=COORD(NTR, INCID(NEL,3), :)
    V1=P2-P1
    VLY=P4-P1
    VLZ(1)=V1(2)*VLY(3)-V1(3)*VLY(2)
    VLZ(2)=-V1(1)*VLY(3)+V1(3)*VLY(1)
    VLZ(3)=V1(1)*VLY(2)-V1(2)*VLY(1)
    VLX(1)=P2(1)-P1(1)
    C1=VLZ(2)*VLY(3)-VLZ(3)*VLY(2)
    C2=VLZ(3)*VLY(2)-VLZ(2)*VLY(3)
    VLX(2)=(VLZ(1)*VLY(3)-VLZ(3)*VLY(1))*VLX(1)-P1(2)*C1/C2-P1(2)
    VLX(3)=(VLZ(2)*VLY(1)-VLZ(1)*VLY(2))*VLX(1)-P1(3)*C1/C2-P1(3)
    V2=V1-VLX
    V3=P3-P2
    CALL ModuloVetor(VLX,C3)
    LONG=C3
    DO I=1,3
        COSDIR(1,I)=VLX(I)/C3
    END DO
    CALL ModuloVetor(V2,C3)
    Y(2)=C3
    CALL ModuloVetor(V3,C3)
    Y(3)=Y(2)+C3
    CALL ModuloVetor(VLY,C3)
    Y(4)=C3
    DO I=1,3
        COSDIR(2,I)=VLY(I)/C3
    END DO
    CALL ModuloVetor(VLZ,C3)
    DO I=1,3
        COSDIR(3,I)=VLZ(I)/C3
    END DO
END SUBROUTINE Coord_locais

SUBROUTINE Matriz_Elem(NTR,NEL)                !NTR=# de tramo; NEL=# de elemento
    USE geral
    USE calc
    USE pmatrizloc
    REAL(KIND(0.0D0)), DIMENSION(5) :: FX1,W1,FX2,W2                !p/Quad. de Gauss
    REAL(KIND(0.0D0)) :: AKA(18,18),AMA(18,18),Z,RN,RV,XIX,CESP
    INTEGER :: INROT
    IF (E1.EQ.0) THEN
        E1=ELAST/(1.-POISS**2)
        E2=ELAST*POISS/(1.-POISS**2)
    
```

```

E3=ELAST/(1.+POISS)/2.
GZ=E3
RKO=0.25D0                                !RKO=Constante drilling
END IF
CESP=ESPES(NEL)
M=MPT(NTR)
EP1=E1*CESP**3/12.
EP2=E2*CESP**3/12.
EP3=E3*CESP**3/12.
ALLOCATE (RKEL(18*(M+3),18*(M+3)),RKEG(18*(M+3),18*(M+3)))
RKEL=0.0D0;RKEG=0.0D0
IF (IDIN.EQ.1) THEN
  ALLOCATE (RMEL(18*(M+3),18*(M+3)),RMEG(18*(M+3),18*(M+3)))
  RMEL=0.0D0;RMEG=0.0D0
END IF
NN=4                                        !Pontos de Gauss em x
NE=4                                        !Pontos de Gauss em y
CALL Qgauss(NN,NE,FX1,W1,FX2,W2)
DO II=1,(M+3)
  DO JJ=II,(M+3)
    I=II-2
    J=JJ-2
    NT=0
    IF (I.EQ.-1 .AND. J.EQ.-1 .OR. I.EQ.-1 .AND. J.EQ.0 .OR. I.EQ.&
      -1 .AND. J.EQ.1 .OR. I.EQ.M+1 .AND. J.EQ.M+1 .OR. I.EQ.M .AND.&
      J.EQ.M+1 .OR. I.EQ.M-1 .AND. J.EQ.M+1) NT=1
    IF (I.EQ.0 .AND. J.EQ.0 .OR. I.EQ.0 .AND. J.EQ.1 .OR. I.EQ.M &
      .AND. J.EQ.M .OR. I.EQ.M-1 .AND. J.EQ.M) NT=2
    IF (I.EQ.1 .AND. J.EQ.1 .OR. I.EQ.M-1 .AND. J.EQ.M-1) NT=3
    IF (J-I.LT.4 .AND. NT.EQ.0) NT=I-J+4
    IF (NT.NE.0) THEN
      AKA=0.0D0
      AMA=0.0D0
      DO IQ=1,NT
        DO IG=1,NN
          Z=FX1(IG)
          CALL Pinic(I,IQ,NT,M,IP)
          RN=(Z+1.)/2.+REAL(IP,KIND(0.0D0))
          CALL Defun(I,J,IQ,NT,RN,LONG,M,2)
          RV=RN*(-Y(2)+Y(3)-Y(4))/REAL(M,KIND(0.0D0))+Y(4)
          DO JG=1,NE
            XI=FX2(JG)
            XIX=((1.-XI)*(-Y(2))-(1.+XI)*(Y(3)-Y(4)))/LONG/RV
            R1=0.5*XI*(XI-1.)
            R2=1.-XI**2
            R3=0.5*XI*(XI+1.)
            S1Y=(XI-0.5)*2./RV
            S2Y=-4.*XI/RV
            S3Y=(XI+0.5)*2./RV
            S1X=(XI-0.5)*XIX
            S2X=-2.*XI*XIX
            S3X=(XI+0.5)*XIX
            CALL MakeKA(CESP)
            IF (IDIN.EQ.1) THEN
              IF (INER_ROT.EQ."s") THEN
                INROT=1
              END IF
              CALL MakeMA(CESP,RHO,INROT)
            END IF
            DO IS=1,18
              DO JS=1,18
                AKA(IS,JS)=AKA(IS,JS)+W1(IG)*W2(JG)*RKA(IS,JS)*RV
                IF (IDIN.EQ.1) THEN
                  AMA(IS,JS)=AMA(IS,JS)+W1(IG)*W2(JG)*RMA(IS,JS)*RV
                END IF
              END DO
            END DO
          END DO
        END DO
      END DO
    END DO
  END DO
DO IA=1,18
  DO IB=1,18
    RKEL(18*I+18+IA,18*J+18+IB)=LONG*AKA(IA,IB)/4./REAL(M,KIND(0.0D0))
    RKEL(18*J+18+IB,18*I+18+IA)=RKEL(18*I+18+IA,18*J+18+IB)
    IF (IDIN.EQ.1) THEN
      RMEL(18*I+18+IA,18*J+18+IB)=LONG*AMA(IA,IB)/4./REAL(M,KIND(0.0D0))
      RMEL(18*J+18+IB,18*I+18+IA)=RMEL(18*I+18+IA,18*J+18+IB)
    END IF
  END DO
END DO

```

```

        END IF
      END DO
    END DO
  END IF
END DO
CALL Matriz_global(M)
END SUBROUTINE Matriz_Elem

!ROTINA PARA DETERMINAR O PONTO INICIAL DE INTEGRAÇÃO
SUBROUTINE Pinic(I,IQ,NT,M,IP)
  INTEGER, INTENT(IN) :: I,IQ,NT,M
  INTEGER, INTENT(OUT) :: IP
  IF (I.GE.-1 .AND. I.LE.M-2) THEN
    IP=1-NT+IQ+I
  ELSE IF (I.EQ.M-1 .OR. I.EQ.M) THEN
    IP=M-1-NT+IQ
  ELSE IF (I.EQ.M+1) THEN
    IP=M-1
  END IF
END SUBROUTINE Pinic

!ROTINA PARA DETERMINAR AS FUNÇÕES SPLINE, JJ=2 PARA CALCULAR PI E PJ, JJ=1 SÓ PI
SUBROUTINE Detfun(I,J,IQ,NT,RN,RL,M,JJ)
  USE pmatrizloc
  INTEGER, INTENT(IN) :: I,J,IQ,NT,M,JJ
  REAL(KIND(0.0D0)), INTENT(IN) :: RN,RL
  REAL(KIND(0.0D0)) :: RM,RK,PP,QQ,QQ2
  RM=REAL(M,KIND(0.0D0))
  DO KK=1,JJ
    IF (KK.EQ.1) THEN
      RK=REAL(I,KIND(0.0D0))
      IF (I.GE.-1 .AND. I.LE.M-2) THEN
        IC=4-NT+IQ
      ELSE IF (I.EQ.M-1) THEN
        IC=3-NT+IQ
      ELSE IF (I.EQ.M) THEN
        IC=2-NT+IQ
      ELSE IF (I.EQ.M+1) THEN
        IC=1
      END IF
    END IF
    IF (KK.EQ.2) THEN
      RK=REAL(J,KIND(0.0D0))
      IF (J.EQ.-1) THEN
        IC=4
      ELSE IF (J.EQ.0) THEN
        IC=2+IQ
      ELSE IF (J.EQ.1) THEN
        IC=1+IQ
      ELSE IF (J.GE.2 .AND. J.LE.M+1) THEN
        IC=IQ
      END IF
    END IF
    SELECT CASE (IC)
      CASE (1)
        PP=(RN-(RK-2.))**3/6.
        QQ=((RN-RK+2.)**2/2.)*RM/RL
      CASE (2)
        PP=(1.+3.*(RN-(RK-1.))+3.*(RN-(RK-1.))**2-3.*(RN-(RK-1.))**3)/6.
        QQ=(3./2.+RN-RK-3.*(RN-RK+1.))**2/2.)*RM/RL
      CASE (3)
        PP=(1.+3.*((RK+1.)-RN)+3.*((RK+1.)-RN)**2-3.*((RK+1.)-RN)**3)/6.
        QQ=(-3./2.-RK+RN+3.*(RK+1-RN)**2/2.)*RM/RL
      CASE (4)
        PP=((RK+2.)-RN)**3/6.
        QQ=(-(RK+2.-RN)**2/2.)*RM/RL
    END SELECT
    IF (KK.EQ.1) THEN
      FI=PP
      QI=QQ
    ELSE IF (KK.EQ.2) THEN
      FJ=PP
      QJ=QQ
    END IF
  END DO
END SUBROUTINE Detfun

```

!ROTINA PARA CALCULAR SUBMATRIZ KA 18x18
SUBROUTINE MakeKA(CESP)

```

USE pmatrizloc
REAL(KIND(0.0D0)), INTENT(IN) :: CESP
RKA(1,1)=CESP*((R1*QI+S1X*FI)*E1*(R1*QJ+S1X*FJ)+S1Y**2*FI*E3*FJ)+RKO*GZ*CESP &
*S1Y**2*FI*FJ/0.4D1
RKA(1,2)=CESP*((R1*QI+S1X*FI)*E2*S1Y*FJ+S1Y*FI*E3*(R1*QJ+S1X*FJ))+RKO*GZ*CESP &
*S1Y*FI*(-R1*QJ/0.2D1-S1X*FJ/0.2D1)/0.2D1
RKA(1,6)=RKO*GZ*CESP*S1Y*FI*R1*FJ/0.2D1
RKA(1,7)=CESP*((R1*QI+S1X*FI)*E1*(R2*QJ+S2X*FJ)+S1Y*FI*E3*S2Y*FJ)+RKO*GZ*CESP &
*S1Y*FI*S2Y*FJ/0.4D1
RKA(1,8)=CESP*((R1*QI+S1X*FI)*E2*S2Y*FJ+S1Y*FI*E3*(R2*QJ+S2X*FJ))+RKO*GZ*CESP &
*S1Y*FI*(-R2*QJ/0.2D1-S2X*FJ/0.2D1)/0.2D1
RKA(1,12)=RKO*GZ*CESP*S1Y*FI*R2*FJ/0.2D1
RKA(1,13)=CESP*((R1*QI+S1X*FI)*E1*(R3*QJ+S3X*FJ)+S1Y*FI*E3*S3Y*FJ)+RKO*GZ &
*CESP*S1Y*FI*S3Y*FJ/0.4D1
RKA(1,14)=CESP*((R1*QI+S1X*FI)*E2*S3Y*FJ+S1Y*FI*E3*(R3*QJ+S3X*FJ))+RKO*GZ &
*CESP*S1Y*FI*(-R3*QJ/0.2D1-S3X*FJ/0.2D1)/0.2D1
RKA(1,18)=RKO*GZ*CESP*S1Y*FI*R3*FJ/0.2D1
RKA(2,1)=CESP*(S1Y*FI*E2*(R1*QJ+S1X*FJ)+(R1*QI+S1X*FI)*E3*S1Y*FJ)+RKO*GZ*CESP &
*(-R1*QI/0.2D1-S1X*FI/0.2D1)*S1Y*FJ/0.2D1
RKA(2,2)=CESP*(S1Y**2*FI*E1*FJ+(R1*QI+S1X*FI)*E3*(R1*QJ+S1X*FJ))+RKO*GZ*CESP &
*(-R1*QI/0.2D1-S1X*FI/0.2D1)*(-R1*QJ/0.2D1-S1X*FJ/0.2D1)
RKA(2,6)=RKO*GZ*CESP*(-R1*QI/0.2D1-S1X*FI/0.2D1)*R1*FJ
RKA(2,7)=CESP*(S1Y*FI*E2*(R2*QJ+S2X*FJ)+(R1*QI+S1X*FI)*E3*S2Y*FJ)+RKO*GZ*CESP &
*(-R1*QI/0.2D1-S1X*FI/0.2D1)*S2Y*FJ/0.2D1
RKA(2,8)=CESP*(S1Y*FI*E1*S2Y*FJ+(R1*QI+S1X*FI)*E3*(R2*QJ+S2X*FJ))+RKO*GZ*CESP &
*(-R1*QI/0.2D1-S1X*FI/0.2D1)*(-R2*QJ/0.2D1-S2X*FJ/0.2D1)
RKA(2,12)=RKO*GZ*CESP*(-R1*QI/0.2D1-S1X*FI/0.2D1)*R2*FJ
RKA(2,13)=CESP*(S1Y*FI*E2*(R3*QJ+S3X*FJ)+(R1*QI+S1X*FI)*E3*S3Y*FJ)+RKO*GZ &
*CESP*(-R1*QI/0.2D1-S1X*FI/0.2D1)*S3Y*FJ/0.2D1
RKA(2,14)=CESP*(S1Y*FI*E1*S3Y*FJ+(R1*QI+S1X*FI)*E3*(R3*QJ+S3X*FJ))+RKO*GZ &
*CESP*(-R1*QI/0.2D1-S1X*FI/0.2D1)*(-R3*QJ/0.2D1-S3X*FJ/0.2D1)
RKA(2,18)=RKO*GZ*CESP*(-R1*QI/0.2D1-S1X*FI/0.2D1)*R3*FJ
RKA(3,3)=((-R1*QI-S1X*FI)*(-R1*QJ-S1X*FJ)+S1Y**2*FI*FJ)*GZ*CESP/1.2D0
RKA(3,4)=-S1Y*FI*R1*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(3,5)=-(-R1*QI-S1X*FI)*R1*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(3,9)=((-R1*QI-S1X*FI)*(-R2*QJ-S2X*FJ)+S1Y*FI*S2Y*FJ)*GZ*CESP/1.2D0
RKA(3,10)=-S1Y*FI*R2*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(3,11)=-(-R1*QI-S1X*FI)*R2*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(3,15)=((-R1*QI-S1X*FI)*(-R3*QJ-S3X*FJ)+S1Y*FI*S3Y*FJ)*GZ*CESP/1.2D0
RKA(3,16)=-S1Y*FI*R3*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(3,17)=-(-R1*QI-S1X*FI)*R3*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(4,3)=-S1Y*FI*R1*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(4,4)=S1Y**2*FI*EP1*FJ+(-R1*QI-S1X*FI)*EP3*(-R1*QJ-S1X*FJ)+R1**2*FI*FJ*GZ &
*CESP/1.2D0
RKA(4,5)=-S1Y*FI*EP2*(R1*QJ+S1X*FJ)+(-R1*QI-S1X*FI)*EP3*S1Y*FJ
RKA(4,9)=-R1*FI*S2Y*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(4,10)=S1Y*FI*EP1*S2Y*FJ+(-R1*QI-S1X*FI)*EP3*(-R2*QJ-S2X*FJ)+R1*FI*R2*FJ &
*GZ*CESP/1.2D0
RKA(4,11)=-S1Y*FI*EP2*(R2*QJ+S2X*FJ)+(-R1*QI-S1X*FI)*EP3*S2Y*FJ
RKA(4,15)=-R1*FI*S3Y*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(4,16)=S1Y*FI*EP1*S3Y*FJ+(-R1*QI-S1X*FI)*EP3*(-R3*QJ-S3X*FJ)+R1*FI*R3*FJ &
*GZ*CESP/1.2D0
RKA(4,17)=-S1Y*FI*EP2*(R3*QJ+S3X*FJ)+(-R1*QI-S1X*FI)*EP3*S3Y*FJ
RKA(5,3)=-R1*FI*(-R1*QJ-S1X*FJ)*GZ*CESP/1.2D0
RKA(5,4)=-(-R1*QI+S1X*FI)*EP2*S1Y*FJ+S1Y*FI*EP3*(-R1*QJ-S1X*FJ)
RKA(5,5)=(R1*QI+S1X*FI)*EP1*(R1*QJ+S1X*FJ)+S1Y**2*FI*EP3*FJ+R1**2*FI*FJ*GZ &
*CESP/1.2D0
RKA(5,9)=-R1*FI*(-R2*QJ-S2X*FJ)*GZ*CESP/1.2D0
RKA(5,10)=-(-R1*QI+S1X*FI)*EP2*S2Y*FJ+S1Y*FI*EP3*(-R2*QJ-S2X*FJ)
RKA(5,11)=(R1*QI+S1X*FI)*EP1*(R2*QJ+S2X*FJ)+S1Y*FI*EP3*S2Y*FJ+R1*FI*R2*FJ*GZ &
*CESP/1.2D0
RKA(5,15)=-R1*FI*(-R3*QJ-S3X*FJ)*GZ*CESP/1.2D0
RKA(5,16)=-(-R1*QI+S1X*FI)*EP2*S3Y*FJ+S1Y*FI*EP3*(-R3*QJ-S3X*FJ)
RKA(5,17)=(R1*QI+S1X*FI)*EP1*(R3*QJ+S3X*FJ)+S1Y*FI*EP3*S3Y*FJ+R1*FI*R3*FJ*GZ &
*CESP/1.2D0
RKA(6,1)=RKO*GZ*CESP*S1Y*FI*R1*FJ/0.2D1
RKA(6,2)=RKO*GZ*CESP*R1*FI*(-R1*QJ/0.2D1-S1X*FJ/0.2D1)
RKA(6,6)=RKO*GZ*CESP*R1**2*FI*FJ
RKA(6,7)=RKO*GZ*CESP*R1*FI*S2Y*FJ/0.2D1
RKA(6,8)=RKO*GZ*CESP*R1*FI*(-R2*QJ/0.2D1-S2X*FJ/0.2D1)
RKA(6,12)=RKO*GZ*CESP*R1*FI*R2*FJ
RKA(6,13)=RKO*GZ*CESP*R1*FI*S3Y*FJ/0.2D1
RKA(6,14)=RKO*GZ*CESP*R1*FI*(-R3*QJ/0.2D1-S3X*FJ/0.2D1)
RKA(6,18)=RKO*GZ*CESP*R1*FI*R3*FJ

```

$RKA(7,1) = CESP * ((R2 * QI + S2X * FI) * E1 * (R1 * QJ + S1X * FJ) + S1Y * FI * E3 * S2Y * FJ) + RKO * GZ * CESP * S1Y * FI * S2Y * FJ / 0.4D1$
 $RKA(7,2) = CESP * ((R2 * QI + S2X * FI) * E2 * S1Y * FJ + S2Y * FI * E3 * (R1 * QJ + S1X * FJ)) + RKO * GZ * CESP * S2Y * FI * (-R1 * QJ / 0.2D1 - S1X * FJ / 0.2D1) / 0.2D1$
 $RKA(7,6) = RKO * GZ * CESP * R1 * FI * S2Y * FJ / 0.2D1$
 $RKA(7,7) = CESP * ((R2 * QI + S2X * FI) * E1 * (R2 * QJ + S2X * FJ) + S2Y * E3 * FJ) + RKO * GZ * CESP * S2Y * E3 * FI * FJ / 0.4D1$
 $RKA(7,8) = CESP * ((R2 * QI + S2X * FI) * E2 * S2Y * FJ + S2Y * FI * E3 * (R2 * QJ + S2X * FJ)) + RKO * GZ * CESP * S2Y * FI * (-R2 * QJ / 0.2D1 - S2X * FJ / 0.2D1) / 0.2D1$
 $RKA(7,12) = RKO * GZ * CESP * S2Y * FI * R2 * FJ / 0.2D1$
 $RKA(7,13) = CESP * ((R2 * QI + S2X * FI) * E1 * (R3 * QJ + S3X * FJ) + S2Y * FI * E3 * S3Y * FJ) + RKO * GZ * CESP * S2Y * FI * S3Y * FJ / 0.4D1$
 $RKA(7,14) = CESP * ((R2 * QI + S2X * FI) * E2 * S3Y * FJ + S2Y * FI * E3 * (R3 * QJ + S3X * FJ)) + RKO * GZ * CESP * S2Y * FI * (-R3 * QJ / 0.2D1 - S3X * FJ / 0.2D1) / 0.2D1$
 $RKA(7,18) = RKO * GZ * CESP * S2Y * FI * R3 * FJ / 0.2D1$
 $RKA(8,1) = CESP * (S2Y * FI * E2 * (R1 * QJ + S1X * FJ) + (R2 * QI + S2X * FI) * E3 * S1Y * FJ) + RKO * GZ * CESP * (-R2 * QI / 0.2D1 - S2X * FI / 0.2D1) * S1Y * FJ / 0.2D1$
 $RKA(8,2) = CESP * (S1Y * FI * E1 * S2Y * FJ + (R2 * QI + S2X * FI) * E3 * (R1 * QJ + S1X * FJ)) + RKO * GZ * CESP * (-R2 * QI / 0.2D1 - S2X * FI / 0.2D1) * (R1 * QJ + S1X * FJ) / 0.2D1$
 $RKA(8,6) = RKO * GZ * CESP * (-R2 * QI / 0.2D1 - S2X * FI / 0.2D1) * R1 * FJ$
 $RKA(8,7) = CESP * (S2Y * FI * E2 * (R2 * QJ + S2X * FJ) + (R2 * QI + S2X * FI) * E3 * S2Y * FJ) + RKO * GZ * CESP * (-R2 * QI / 0.2D1 - S2X * FI / 0.2D1) * S2Y * FJ / 0.2D1$
 $RKA(8,8) = CESP * (S2Y * E3 * FI * E1 * FJ + (R2 * QI + S2X * FI) * E3 * (R2 * QJ + S2X * FJ)) + RKO * GZ * CESP * (-R2 * QI / 0.2D1 - S2X * FI / 0.2D1) * (-R2 * QJ / 0.2D1 - S2X * FJ / 0.2D1)$
 $RKA(8,12) = RKO * GZ * CESP * (-R2 * QI / 0.2D1 - S2X * FI / 0.2D1) * R2 * FJ$
 $RKA(8,13) = CESP * (S2Y * FI * E2 * (R3 * QJ + S3X * FJ) + (R2 * QI + S2X * FI) * E3 * S3Y * FJ) + RKO * GZ * CESP * (-R2 * QI / 0.2D1 - S2X * FI / 0.2D1) * S3Y * FJ / 0.2D1$
 $RKA(8,14) = CESP * (S2Y * FI * E1 * S3Y * FJ + (R2 * QI + S2X * FI) * E3 * (R3 * QJ + S3X * FJ)) + RKO * GZ * CESP * (-R2 * QI / 0.2D1 - S2X * FI / 0.2D1) * (-R3 * QJ / 0.2D1 - S3X * FJ / 0.2D1)$
 $RKA(8,18) = RKO * GZ * CESP * (-R2 * QI / 0.2D1 - S2X * FI / 0.2D1) * R3 * FJ$
 $RKA(9,3) = (-R2 * QI - S2X * FI) * (-R1 * QJ - S1X * FJ) + S1Y * FI * S2Y * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(9,4) = -R1 * FI * S2Y * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(9,5) = (-R2 * QI - S2X * FI) * R1 * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(9,9) = (-R2 * QI - S2X * FI) * (-R2 * QJ - S2X * FJ) + S2Y * E3 * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(9,10) = -S2Y * FI * R2 * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(9,11) = (-R2 * QI - S2X * FI) * R2 * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(9,15) = (-R2 * QI - S2X * FI) * (-R3 * QJ - S3X * FJ) + S2Y * FI * S3Y * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(9,16) = -S2Y * FI * R3 * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(9,17) = (-R2 * QI - S2X * FI) * R3 * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(10,3) = -S1Y * FI * R2 * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(10,4) = S1Y * FI * EP1 * S2Y * FJ + (-R2 * QI - S2X * FI) * EP3 * (-R1 * QJ - S1X * FJ) + R1 * FI * R2 * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(10,5) = -S2Y * FI * EP2 * (R1 * QJ + S1X * FJ) + (-R2 * QI - S2X * FI) * EP3 * S1Y * FJ$
 $RKA(10,9) = -S2Y * FI * R2 * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(10,10) = S2Y * E3 * FI * EP1 * FJ + (-R2 * QI - S2X * FI) * EP3 * (-R2 * QJ - S2X * FJ) + R2 * E3 * FI * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(10,11) = -S2Y * FI * EP2 * (R2 * QJ + S2X * FJ) + (-R2 * QI - S2X * FI) * EP3 * S2Y * FJ$
 $RKA(10,15) = -R2 * FI * S3Y * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(10,16) = S2Y * FI * EP1 * S3Y * FJ + (-R2 * QI - S2X * FI) * EP3 * (-R3 * QJ - S3X * FJ) + R2 * FI * R3 * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(10,17) = -S2Y * FI * EP2 * (R3 * QJ + S3X * FJ) + (-R2 * QI - S2X * FI) * EP3 * S3Y * FJ$
 $RKA(11,3) = -R2 * FI * (-R1 * QJ - S1X * FJ) * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(11,4) = (-R2 * QI + S2X * FI) * EP2 * S1Y * FJ + S2Y * FI * EP3 * (-R1 * QJ - S1X * FJ)$
 $RKA(11,5) = (R2 * QI + S2X * FI) * EP1 * (R1 * QJ + S1X * FJ) + S1Y * FI * EP3 * S2Y * FJ + R1 * FI * R2 * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(11,9) = -R2 * FI * (-R2 * QJ - S2X * FJ) * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(11,10) = (-R2 * QI + S2X * FI) * EP2 * S2Y * FJ + S2Y * FI * EP3 * (-R2 * QJ - S2X * FJ)$
 $RKA(11,11) = (R2 * QI + S2X * FI) * EP1 * (R2 * QJ + S2X * FJ) + S2Y * E3 * FI * EP3 * FJ + R2 * E3 * FI * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(11,15) = -R2 * FI * (-R3 * QJ - S3X * FJ) * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(11,16) = (-R2 * QI + S2X * FI) * EP2 * S3Y * FJ + S2Y * FI * EP3 * (-R3 * QJ - S3X * FJ)$
 $RKA(11,17) = (R2 * QI + S2X * FI) * EP1 * (R3 * QJ + S3X * FJ) + S2Y * FI * EP3 * S3Y * FJ + R2 * FI * R3 * FJ * GZ * CESP / 1.2D0$
 $RKA(12,1) = RKO * GZ * CESP * S1Y * FI * R2 * FJ / 0.2D1$
 $RKA(12,2) = RKO * GZ * CESP * R2 * FI * (-R1 * QJ / 0.2D1 - S1X * FJ / 0.2D1)$
 $RKA(12,6) = RKO * GZ * CESP * R1 * FI * R2 * FJ$
 $RKA(12,7) = RKO * GZ * CESP * S2Y * FI * R2 * FJ / 0.2D1$
 $RKA(12,8) = RKO * GZ * CESP * R2 * FI * (-R2 * QJ / 0.2D1 - S2X * FJ / 0.2D1)$
 $RKA(12,12) = RKO * GZ * CESP * R2 * E3 * FI * FJ$
 $RKA(12,13) = RKO * GZ * CESP * R2 * FI * S3Y * FJ / 0.2D1$
 $RKA(12,14) = RKO * GZ * CESP * R2 * FI * (-R3 * QJ / 0.2D1 - S3X * FJ / 0.2D1)$
 $RKA(12,18) = RKO * GZ * CESP * R2 * FI * R3 * FJ$
 $RKA(13,1) = CESP * ((R3 * QI + S3X * FI) * E1 * (R1 * QJ + S1X * FJ) + S1Y * FI * E3 * S3Y * FJ) + RKO * GZ * CESP * S1Y * FI * S3Y * FJ / 0.4D1$
 $RKA(13,2) = CESP * ((R3 * QI + S3X * FI) * E2 * S1Y * FJ + S3Y * FI * E3 * (R1 * QJ + S1X * FJ)) + RKO * GZ * CESP * S3Y * FI * (-R1 * QJ / 0.2D1 - S1X * FJ / 0.2D1) / 0.2D1$
 $RKA(13,6) = RKO * GZ * CESP * R1 * FI * S3Y * FJ / 0.2D1$


```

RKA(13,7)=CESP*((R3*QI+S3X*FI)*E1*(R2*QJ+S2X*FJ)+S2Y*FI*E3*S3Y*FJ)+RKO*GZ &
  *CESP*S2Y*FI*S3Y*FJ/0.4D1
RKA(13,8)=CESP*((R3*QI+S3X*FI)*E2*S2Y*FJ+S3Y*FI*E3*(R2*QJ+S2X*FJ))+RKO*GZ &
  *CESP*S3Y*FI*(-R2*QJ/0.2D1-S2X*FJ/0.2D1)/0.2D1
RKA(13,12)=RKO*GZ*CESP*R2*FI*S3Y*FJ/0.2D1
RKA(13,13)=CESP*((R3*QI+S3X*FI)*E1*(R3*QJ+S3X*FJ)+S3Y**2*FI*E3*FJ)+RKO*GZ &
  *CESP*S3Y**2*FI*FJ/0.4D1
RKA(13,14)=CESP*((R3*QI+S3X*FI)*E2*S3Y*FJ+S3Y*FI*E3*(R3*QJ+S3X*FJ))+RKO*GZ &
  *CESP*S3Y*FI*(-R3*QJ/0.2D1-S3X*FJ/0.2D1)/0.2D1
RKA(13,18)=RKO*GZ*CESP*S3Y*FI*R3*FJ/0.2D1
RKA(14,1)=CESP*(S3Y*FI*E2*(R1*QJ+S1X*FJ)+(R3*QI+S3X*FI)*E3*S1Y*FJ)+RKO*GZ &
  *CESP*(-R3*QI/0.2D1-S3X*FI/0.2D1)*S1Y*FJ/0.2D1
RKA(14,2)=CESP*(S1Y*FI*E1*S3Y*FJ+(R3*QI+S3X*FI)*E3*(R1*QJ+S1X*FJ))+RKO*GZ &
  *CESP*(-R3*QI/0.2D1-S3X*FI/0.2D1)*(-R1*QJ/0.2D1-S1X*FJ/0.2D1)
RKA(14,6)=RKO*GZ*CESP*(-R3*QI/0.2D1-S3X*FI/0.2D1)*R1*FJ
RKA(14,7)=CESP*(S3Y*FI*E2*(R2*QJ+S2X*FJ)+(R3*QI+S3X*FI)*E3*S2Y*FJ)+RKO*GZ &
  *CESP*(-R3*QI/0.2D1-S3X*FI/0.2D1)*S2Y*FJ/0.2D1
RKA(14,8)=CESP*(S2Y*FI*E1*S3Y*FJ+(R3*QI+S3X*FI)*E3*(R2*QJ+S2X*FJ))+RKO*GZ &
  *CESP*(-R3*QI/0.2D1-S3X*FI/0.2D1)*(-R2*QJ/0.2D1-S2X*FJ/0.2D1)
RKA(14,12)=RKO*GZ*CESP*(-R3*QI/0.2D1-S3X*FI/0.2D1)*R2*FJ
RKA(14,13)=CESP*(S3Y*FI*E2*(R3*QJ+S3X*FJ)+(R3*QI+S3X*FI)*E3*S3Y*FJ)+RKO*GZ &
  *CESP*(-R3*QI/0.2D1-S3X*FI/0.2D1)*S3Y*FJ/0.2D1
RKA(14,14)=CESP*(S3Y**2*FI*E1*FJ+(R3*QI+S3X*FI)*E3*(R3*QJ+S3X*FJ))+RKO*GZ &
  *CESP*(-R3*QI/0.2D1-S3X*FI/0.2D1)*(-R3*QJ/0.2D1-S3X*FJ/0.2D1)
RKA(14,18)=RKO*GZ*CESP*(-R3*QI/0.2D1-S3X*FI/0.2D1)*R3*FJ
RKA(15,3)=-((-R3*QI-S3X*FI)*(-R1*QJ-S1X*FJ)+S1Y*FI*S3Y*FJ)*GZ*CESP/1.2D0
RKA(15,4)=-R1*FI*S3Y*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(15,5)=-((-R3*QI-S3X*FI)*R1*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(15,9)=-((-R3*QI-S3X*FI)*(-R2*QJ-S2X*FJ)+S2Y*FI*S3Y*FJ)*GZ*CESP/1.2D0
RKA(15,10)=-R2*FI*S3Y*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(15,11)=-((-R3*QI-S3X*FI)*R2*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(15,15)=-((-R3*QI-S3X*FI)*(-R3*QJ-S3X*FJ)+S3Y**2*FI*FJ)*GZ*CESP/1.2D0
RKA(15,16)=-S3Y*FI*R3*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(15,17)=-((-R3*QI-S3X*FI)*R3*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(16,3)=-S1Y*FI*R3*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(16,4)=S1Y*FI*EP1*S3Y*FJ+(-R3*QI-S3X*FI)*EP3*(-R1*QJ-S1X*FJ)+R1*FI*R3*FJ &
  *GZ*CESP/1.2D0
RKA(16,5)=-S3Y*FI*EP2*(R1*QJ+S1X*FJ)+(-R3*QI-S3X*FI)*EP3*S1Y*FJ
RKA(16,9)=-S2Y*FI*R3*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(16,10)=S2Y*FI*EP1*S3Y*FJ+(-R3*QI-S3X*FI)*EP3*(-R2*QJ-S2X*FJ)+R2*FI*R3*FJ &
  *GZ*CESP/1.2D0
RKA(16,11)=-S3Y*FI*EP2*(R2*QJ+S2X*FJ)+(-R3*QI-S3X*FI)*EP3*S2Y*FJ
RKA(16,15)=-S3Y*FI*R3*FJ*GZ*CESP/1.2D0
RKA(16,16)=S3Y**2*FI*EP1*FJ+(-R3*QI-S3X*FI)*EP3*(-R3*QJ-S3X*FJ)+R3**2*FI*FJ &
  *GZ*CESP/1.2D0
RKA(16,17)=-S3Y*FI*EP2*(R3*QJ+S3X*FJ)+(-R3*QI-S3X*FI)*EP3*S3Y*FJ
RKA(17,3)=-R3*FI*(-R1*QJ-S1X*FJ)*GZ*CESP/1.2D0
RKA(17,4)=-R3*QI+S3X*FI)*EP2*S1Y*FJ+S3Y*FI*EP3*(-R1*QJ-S1X*FJ)
RKA(17,5)=(R3*QI+S3X*FI)*EP1*(R1*QJ+S1X*FJ)+S1Y*FI*EP3*S3Y*FJ+R1*FI*R3*FJ*GZ &
  *CESP/1.2D0
RKA(17,9)=-R3*FI*(-R2*QJ-S2X*FJ)*GZ*CESP/1.2D0
RKA(17,10)=-R3*QI+S3X*FI)*EP2*S2Y*FJ+S3Y*FI*EP3*(-R2*QJ-S2X*FJ)
RKA(17,11)=(R3*QI+S3X*FI)*EP1*(R2*QJ+S2X*FJ)+S2Y*FI*EP3*S3Y*FJ+R2*FI*R3*FJ*GZ &
  *CESP/1.2D0
RKA(17,15)=-R3*FI*(-R3*QJ-S3X*FJ)*GZ*CESP/1.2D0
RKA(17,16)=-R3*QI+S3X*FI)*EP2*S3Y*FJ+S3Y*FI*EP3*(-R3*QJ-S3X*FJ)
RKA(17,17)=(R3*QI+S3X*FI)*EP1*(R3*QJ+S3X*FJ)+S3Y**2*FI*EP3*FJ+R3**2*FI*FJ*GZ &
  *CESP/1.2D0
RKA(18,1)=RKO*GZ*CESP*S1Y*FI*R3*FJ/0.2D1
RKA(18,2)=RKO*GZ*CESP*R3*FI*(-R1*QJ/0.2D1-S1X*FJ/0.2D1)
RKA(18,6)=RKO*GZ*CESP*R1*FI*R3*FJ
RKA(18,7)=RKO*GZ*CESP*S2Y*FI*R3*FJ/0.2D1
RKA(18,8)=RKO*GZ*CESP*R3*FI*(-R2*QJ/0.2D1-S2X*FJ/0.2D1)
RKA(18,12)=RKO*GZ*CESP*R2*FI*R3*FJ
RKA(18,13)=RKO*GZ*CESP*S3Y*FI*R3*FJ/0.2D1
RKA(18,14)=RKO*GZ*CESP*R3*FI*(-R3*QJ/0.2D1-S3X*FJ/0.2D1)
RKA(18,18)=RKO*GZ*CESP*R3**2*FI*FJ
END SUBROUTINE MakeKA

```

```

SUBROUTINE Matriz_global(M)
  USE calc
  INTEGER, INTENT(IN) :: M
  REAL(KIND(0.0D0)) :: AUX1(18*(M+3),18*(M+3)), SUM1
  REAL(KIND(0.0D0)) :: AUX2(18*(M+3),18*(M+3)), SUM2
  AUX1=0.0D0
  AUX2=0.0D0
  DO KI=1,6*(M+3)

```

```

DO KJ=1,6*(M+3)
DO I=1,3
DO J=1,3
SUM1=0.0D0
SUM2=0.0D0
DO K=1,3
SUM1=SUM1+COSDIR(K,I)*RKEL(3*(KI-1)+K,3*(KJ-1)+J)
IF (IDIN.EQ.1) THEN
SUM2=SUM2+COSDIR(K,I)*RMEL(3*(KI-1)+K,3*(KJ-1)+J)
END IF
END DO
AUX1(3*(KI-1)+I,3*(KJ-1)+J)=SUM1
IF (IDIN.EQ.1) THEN
AUX2(3*(KI-1)+I,3*(KJ-1)+J)=SUM2
END IF
END DO
END DO
END DO
DO KI=1,6*(M+3)
DO KJ=1,6*(M+3)
DO I=1,3
DO J=1,3
SUM1=0.0D0
SUM2=0.0D0
DO K=1,3
SUM1=SUM1+AUX1(3*(KI-1)+I,3*(KJ-1)+K)*COSDIR(K,J)
IF (IDIN.EQ.1) THEN
SUM2=SUM2+AUX2(3*(KI-1)+I,3*(KJ-1)+K)*COSDIR(K,J)
END IF
END DO
RKEG(3*(KI-1)+I,3*(KJ-1)+J)=SUM1
IF (IDIN.EQ.1) THEN
RMEG(3*(KI-1)+I,3*(KJ-1)+J)=SUM2
END IF
END DO
END DO
END DO
END SUBROUTINE Matriz_global

SUBROUTINE Ensamblar(NTR,NEL)
USE geral
USE calc
INTEGER, INTENT(IN) :: NTR,NEL
INTEGER :: LM(18)
INTEGER :: IAUX, IAUX1, IAUX2
IF (NTR.EQ.1) THEN
IAUX=0
ELSE
IAUX=6*NNOS*(3*(NTR-1)+SUM(MPT(1:NTR-1)))
END IF
DO L=1,6
LM(L)=6*(INCID(NEL,1)-1)+L
LM(6+L)=6*(INCID(NEL,2)-1)+L
LM(12+L)=6*(INCID(NEL,3)-1)+L
END DO
DO IJ=1,MPT(NTR)+3
IAUX1=IAUX+6*NNOS*(IJ-1)
DO IK=1,MPT(NTR)+3
IAUX2=IAUX+6*NNOS*(IK-1)
DO J=1,18
DO K=1,18
RKG(IAUX1+LM(J),IAUX2+LM(K))=RKG(IAUX1+LM(J),IAUX2+LM(K)) &
+RKEG(18*(IJ-1)+J,18*(IK-1)+K)
IF (IDIN.EQ.1) THEN
RMG(IAUX1+LM(J),IAUX2+LM(K))=RMG(IAUX1+LM(J),IAUX2+LM(K)) &
+RMEG(18*(IJ-1)+J,18*(IK-1)+K)
END IF
END DO
END DO
END DO
DEALLOCATE (RKEL,RKEG)
IF (IDIN.EQ.1) THEN
DEALLOCATE (RMEL,RMEG)
END IF

```

```
END SUBROUTINE Ensamblar
```

```
SUBROUTINE CargaUniforme
```

```
USE geral
REAL(KIND(0.0D0)) :: FACT, RL
DO IT=1,NTRAMOS
  IF (IT.EQ.1) THEN
    IAUX=0
  ELSE
    IAUX=6*NNOS*(3*(IT-1)+SUM(MPT(1:IT-1)))
  END IF
  DO I=1,MPT(IT)+3
    RL=COORD(IT+1,1,1)-COORD(IT,1,1)
    RM=REAL(MPT(IT),KIND(0.0D0))
    IF (I.EQ.1 .OR. I.EQ.MPT(IT)+3) THEN
      FACT=RL/(24.*RM)
    ELSE IF (I.EQ.2 .OR. I.EQ.MPT(IT)+2) THEN
      FACT=RL/(2.*RM)
    ELSE IF (I.EQ.3 .OR. I.EQ.MPT(IT)+1) THEN
      FACT=23.*RL/(24.*RM)
    ELSE
      FACT=RL/RM
    END IF
    DO J=1,NNOS
      DO K=1,3
        RFG(IAUX+6*NNOS*(I-1)+6*(J-1)+K)=CARUNIF(IT,J,K)*FACT
      END DO
    END DO
  END DO
END SUBROUTINE CargaUniforme
```

```
SUBROUTINE CargaPontual
```

```
USE geral
DO IS=1,NSEC
  IF (IS.EQ.1) THEN
    IAUX=6*NNOS
  ELSE
    IAUX=6*NNOS*(SUM(MPT(1:IS-1))+3*IS-5)
  END IF
  DO J=1,NNOS
    DO K=1,6
      IF (CARPONT(IS,J,K).NE.0.) THEN
        RFG(IAUX-6*NNOS+6*(J-1)+K)=RFG(IAUX-6*NNOS+6*(J-1)+K)+CARPONT(IS,J,K)/6.
        RFG(IAUX+6*(J-1)+K)=RFG(IAUX+6*(J-1)+K)+2.*CARPONT(IS,J,K)/3.
        RFG(IAUX+6*NNOS+6*(J-1)+K)=RFG(IAUX+6*NNOS+6*(J-1)+K)+CARPONT(IS,J,K)/6.
      END IF
    END DO
  END DO
END SUBROUTINE CargaPontual
```

```
!SUBSTITUIÇÃO PELOS DESLOCAMENTOS FISICOS E VETOR DE CARGA MODIFICADO
```

```
SUBROUTINE DeslocFisicos(IORMA)
```

```
!IORMA=Ordem da matriz
```

```
USE geral
INTEGER, INTENT(IN) :: IORMA
INTEGER :: I1,I2
DO IS=1,NSEC
  IF (IS.EQ.1) THEN
    I1=0
  ELSE
    I1=6*NNOS*(3*(IS-1)+SUM(MPT(1:(IS-1))))
  END IF
  DO IN=1,NNOS
    DO I=1,6
      I2=6*(IN-1)+I
      IF (IRESTR(IS,IN,I).EQ.1) THEN
        IF (IS.NE.1) THEN
          DO IA=1,IORMA
            RKG(I1-18*NNOS+I2,IA)=RKG(I1-18*NNOS+I2,IA)-RKG(I1-12*NNOS+I2,IA)/4.
            RKG(I1-6*NNOS+I2,IA)=RKG(I1-6*NNOS+I2,IA)-RKG(I1-12*NNOS+I2,IA)/4.
            RKG(I1-12*NNOS+I2,IA)=3.*RKG(I1-12*NNOS+I2,IA)/2.
            IF (CALC_DIN.EQ."s") THEN
              RMG(I1-18*NNOS+I2,IA)=RMG(I1-18*NNOS+I2,IA)-RMG(I1-12*NNOS &
                +I2,IA)/4.
              RMG(I1-6*NNOS+I2,IA)=RMG(I1-6*NNOS+I2,IA)-RMG(I1-12*NNOS+I2,IA)/4.
              RMG(I1-12*NNOS+I2,IA)=3.*RMG(I1-12*NNOS+I2,IA)/2.
            END IF
          END DO
        END IF
      END DO
    END DO
  END DO
END SUBROUTINE DeslocFisicos
```

```

      END IF
    END DO
    RFG(I1-18*NNOS+I2)=RFG(I1-18*NNOS+I2)-RFG(I1-12*NNOS+I2)/4.
    RFG(I1-6*NNOS+I2)=RFG(I1-6*NNOS+I2)-RFG(I1-12*NNOS+I2)/4.
    RFG(I1-12*NNOS+I2)=3.*RFG(I1-12*NNOS+I2)/2.
    DO IA=1,IORMA
      RKG(IA,I1-18*NNOS+I2)=RKG(IA,I1-18*NNOS+I2)-RKG(IA,I1-12*NNOS+I2)/4.
      RKG(IA,I1-6*NNOS+I2)=RKG(IA,I1-6*NNOS+I2)-RKG(IA,I1-12*NNOS+I2)/4.
      RKG(IA,I1-12*NNOS+I2)=3.*RKG(IA,I1-12*NNOS+I2)/2.
      IF (CALC_DIN.EQ."s") THEN
        RMG(IA,I1-18*NNOS+I2)=RMG(IA,I1-18*NNOS+I2)-RMG(IA,I1-12*NNOS &
          +I2)/4.
        RMG(IA,I1-6*NNOS+I2)=RMG(IA,I1-6*NNOS+I2)-RMG(IA,I1-12*NNOS+I2)/4.
        RMG(IA,I1-12*NNOS+I2)=3.*RMG(IA,I1-12*NNOS+I2)/2.
      END IF
    END DO
  END IF
  IF (IS.NE.NSEC) THEN
    DO IA=1,IORMA
      RKG(I1+I2,IA)=RKG(I1+I2,IA)-RKG(I1+6*NNOS+I2,IA)/4.
      RKG(I1+12*NNOS+I2,IA)=RKG(I1+12*NNOS+I2,IA)-RKG(I1+6*NNOS+I2,IA)/4.
      RKG(I1+6*NNOS+I2,IA)=3.*RKG(I1+6*NNOS+I2,IA)/2.
      IF (CALC_DIN.EQ."s") THEN
        RMG(I1+I2,IA)=RMG(I1+I2,IA)-RMG(I1+6*NNOS+I2,IA)/4.
        RMG(I1+12*NNOS+I2,IA)=RMG(I1+12*NNOS+I2,IA)-RMG(I1+6*NNOS+I2,IA)/4.
        RMG(I1+6*NNOS+I2,IA)=3.*RMG(I1+6*NNOS+I2,IA)/2.
      END IF
    END DO
    RFG(I1+I2)=RFG(I1+I2)-RFG(I1+6*NNOS+I2)/4.
    RFG(I1+12*NNOS+I2)=RFG(I1+12*NNOS+I2)-RFG(I1+6*NNOS+I2)/4.
    RFG(I1+6*NNOS+I2)=3.*RFG(I1+6*NNOS+I2)/2.
    DO IA=1,IORMA
      RKG(IA,I1+I2)=RKG(IA,I1+I2)-RKG(IA,I1+6*NNOS+I2)/4.
      RKG(IA,I1+12*NNOS+I2)=RKG(IA,I1+12*NNOS+I2)-RKG(IA,I1+6*NNOS+I2)/4.
      RKG(IA,I1+6*NNOS+I2)=3.*RKG(IA,I1+6*NNOS+I2)/2.
      IF (CALC_DIN.EQ."s") THEN
        RMG(IA,I1+I2)=RMG(IA,I1+I2)-RMG(IA,I1+6*NNOS+I2)/4.
        RMG(IA,I1+12*NNOS+I2)=RMG(IA,I1+12*NNOS+I2)-RMG(IA,I1+6*NNOS+I2)/4.
        RMG(IA,I1+6*NNOS+I2)=3.*RMG(IA,I1+6*NNOS+I2)/2.
      END IF
    END DO
  END IF
END DO
END DO
END DO
END DO
END SUBROUTINE DeslocFisicos

SUBROUTINE Restricoes(IORMA)                                !IORMA=Ordem da Matriz
  USE geral
  INTEGER, INTENT(IN) :: IORMA
  INTEGER :: I1,I2
  DO IS=1,NSEC
    IF (IS.EQ.1) THEN
      I1=0
    ELSE
      I1=6*NNOS*(3*(IS-1)+SUM(MPT(1:(IS-1))))
    END IF
    DO IN=1,NNOS
      DO I=1,6
        I2=6*(IN-1)+I
        IF (IRESTR(IS,IN,I).EQ.1) THEN
          IF (IS.NE.1) THEN
            DO IA=1,IORMA
              RKG(I1-12*NNOS+I2,IA)=0.0D0
              RKG(IA,I1-12*NNOS+I2)=0.0D0
              IF (CALC_DIN.EQ."s") THEN
                RMG(I1-12*NNOS+I2,IA)=0.0D0
                RMG(IA,I1-12*NNOS+I2)=0.0D0
              END IF
            END DO
          END DO
          RFG(I1-12*NNOS+I2)=0.0D0
          RKG(I1-12*NNOS+I2,I1-12*NNOS+I2)=1.0D0
        END IF
      END IF
    END IF
    IF (IS.NE.NSEC) THEN
      DO IA=1,IORMA
        RKG(I1+6*NNOS+I2,IA)=0.0D0
      END DO
    END IF
  END DO

```

```

        RKG(IA,I1+6*NNOS+I2)=0.0D0
        IF (CALC_DIN.EQ."s") THEN
            RMG(I1+6*NNOS+I2,IA)=0.0D0
            RMG(IA,I1+6*NNOS+I2)=0.0D0
        END IF
    END DO
    RFG(I1+6*NNOS+I2)=0.0D0
    RKG(I1+6*NNOS+I2,I1+6*NNOS+I2)=1.0D0
END IF
END DO
END DO
END DO
END SUBROUTINE Restricoes

SUBROUTINE Sol(A,C,X,NEQ)
    IMPLICIT REAL(KIND(0.0D0)) (A-H,O-Z)
    INTENT(OUT) :: X
    DIMENSION A(NEQ,NEQ),C(NEQ),X(NEQ)
    DO K=2,NEQ
        DO I=K,NEQ
            R=A(I,K-1)/A(K-1,K-1)
            C(I)=C(I)-R*C(K-1)
            DO J=K,NEQ
                A(I,J)=A(I,J)-R*A(K-1,J)
            END DO
        END DO
    END DO
    X(NEQ)=C(NEQ)/A(NEQ,NEQ)
    DO K=NEQ-1,1,-1
        X(K)=C(K)
        DO J=K+1,NEQ
            X(K)=X(K)-A(K,J)*X(J)
        END DO
        X(K)=X(K)/A(K,K)
    END DO
END SUBROUTINE Sol

!RETORNA A UG PARAMETROS
SUBROUTINE UGparametros
    USE geral
    INTEGER :: I1,I2
    DO IS=1,NSEC
        IF (IS.EQ.1) THEN
            I1=0
        ELSE
            I1=6*NNOS*(3*(IS-1)+SUM(MPT(1:(IS-1))))
        END IF
        DO IN=1,NNOS
            DO I=1,6
                I2=6*(IN-1)+I
                IF (IRESTR(IS,IN,I).EQ.1) THEN
                    IF (IS.NE.1) THEN
                        UG(I1-12*NNOS+I2)=3.*UG(I1-12*NNOS+I2)/2.- (UG(I1-18*NNOS+I2) &
                            +UG(I1-6*NNOS+I2))/4.
                    END IF
                    IF (IS.NE.NSEC) THEN
                        UG(I1+6*NNOS+I2)=3.*UG(I1+6*NNOS+I2)/2.- (UG(I1+I2)+UG(I1+12*NNOS &
                            +I2))/4.
                    END IF
                END IF
            END DO
        END DO
    END DO
END SUBROUTINE UGparametros

!RETORNA A RMOD PARAMETROS
SUBROUTINE RMODparametros
    USE geral
    INTEGER :: I1,I2
    DO IS=1,NSEC
        IF (IS.EQ.1) THEN
            I1=0
        ELSE
            I1=6*NNOS*(3*(IS-1)+SUM(MPT(1:(IS-1))))
        END IF
        DO IN=1,NNOS

```

```

DO I=1,6
  I2=6*(IN-1)+I
  IF (IRESTR(IS,IN,I).EQ.1) THEN
    IF (IS.NE.1) THEN
      DO J=1,NFREQ
        RMODO(I1-12*NNOS+I2,J)=3.0D0*RMODO(I1-12*NNOS+I2,J)/2.0D0-(RMODO(I1 &
          -18*NNOS+I2,J)+RMODO(I1-6*NNOS+I2,J))/4.0D0
      END DO
    END IF
    IF (IS.NE.NSEC) THEN
      DO J=1,NFREQ
        RMODO(I1+6*NNOS+I2,J)=3.0D0*RMODO(I1+6*NNOS+I2,J)/2.0D0-(RMODO(I1 &
          +I2,J)+RMODO(I1+12*NNOS+I2,J))/4.0D0
      END DO
    END IF
  END IF
END DO
END SUBROUTINE RMODoparametros

!ROTINA PARA CALCULAR SUBMATRIZ MA 18x18
SUBROUTINE MakeMA(CESP,RHO,INROT)
  USE pmatrizloc
  REAL(KIND(0.0D0)), INTENT(IN) :: CESP,RHO
  INTEGER, INTENT(IN) :: INROT
  RMA(1,1) = R1 ** 2 * FI * RHO * CESP * FJ
  RMA(1,7) = R1 * FI * RHO * CESP * R2 * FJ
  RMA(1,13) = R1 * FI * RHO * CESP * R3 * FJ
  RMA(2,2) = R1 ** 2 * FI * RHO * CESP * FJ
  RMA(2,8) = R1 * FI * RHO * CESP * R2 * FJ
  RMA(2,14) = R1 * FI * RHO * CESP * R3 * FJ
  RMA(3,3) = R1 ** 2 * FI * RHO * CESP * FJ
  RMA(3,9) = R1 * FI * RHO * CESP * R2 * FJ
  RMA(3,15) = R1 * FI * RHO * CESP * R3 * FJ
  RMA(7,1) = R1 * FI * RHO * CESP * R2 * FJ
  RMA(7,7) = R2 ** 2 * FI * RHO * CESP * FJ
  RMA(7,13) = R2 * FI * RHO * CESP * R3 * FJ
  RMA(8,2) = R1 * FI * RHO * CESP * R2 * FJ
  RMA(8,8) = R2 ** 2 * FI * RHO * CESP * FJ
  RMA(8,14) = R2 * FI * RHO * CESP * R3 * FJ
  RMA(9,3) = R1 * FI * RHO * CESP * R2 * FJ
  RMA(9,9) = R2 ** 2 * FI * RHO * CESP * FJ
  RMA(9,15) = R2 * FI * RHO * CESP * R3 * FJ
  RMA(13,1) = R1 * FI * RHO * CESP * R3 * FJ
  RMA(13,7) = R2 * FI * RHO * CESP * R3 * FJ
  RMA(13,13) = R3 ** 2 * FI * RHO * CESP * FJ
  RMA(14,2) = R1 * FI * RHO * CESP * R3 * FJ
  RMA(14,8) = R2 * FI * RHO * CESP * R3 * FJ
  RMA(14,14) = R3 ** 2 * FI * RHO * CESP * FJ
  RMA(15,3) = R1 * FI * RHO * CESP * R3 * FJ
  RMA(15,9) = R2 * FI * RHO * CESP * R3 * FJ
  RMA(15,15) = R3 ** 2 * FI * RHO * CESP * FJ
  IF (INROT.EQ.1) THEN
    RMA(4,4) = R1 ** 2 * FI * RHO * CESP ** 3 * FJ / 0.12D2
    RMA(4,10) = R1 * FI * RHO * CESP ** 3 * R2 * FJ / 0.12D2
    RMA(4,16) = R1 * FI * RHO * CESP ** 3 * R3 * FJ / 0.12D2
    RMA(5,5) = R1 ** 2 * FI * RHO * CESP ** 3 * FJ / 0.12D2
    RMA(5,11) = R1 * FI * RHO * CESP ** 3 * R2 * FJ / 0.12D2
    RMA(5,17) = R1 * FI * RHO * CESP ** 3 * R3 * FJ / 0.12D2
    RMA(10,4) = R1 * FI * RHO * CESP ** 3 * R2 * FJ / 0.12D2
    RMA(10,10) = R2 ** 2 * FI * RHO * CESP ** 3 * FJ / 0.12D2
    RMA(10,16) = R2 * FI * RHO * CESP ** 3 * R3 * FJ / 0.12D2
    RMA(11,5) = R1 * FI * RHO * CESP ** 3 * R2 * FJ / 0.12D2
    RMA(11,11) = R2 ** 2 * FI * RHO * CESP ** 3 * FJ / 0.12D2
    RMA(11,17) = R2 * FI * RHO * CESP ** 3 * R3 * FJ / 0.12D2
    RMA(16,4) = R1 * FI * RHO * CESP ** 3 * R3 * FJ / 0.12D2
    RMA(16,10) = R2 * FI * RHO * CESP ** 3 * R3 * FJ / 0.12D2
    RMA(16,16) = R3 ** 2 * FI * RHO * CESP ** 3 * FJ / 0.12D2
    RMA(17,5) = R1 * FI * RHO * CESP ** 3 * R3 * FJ / 0.12D2
    RMA(17,11) = R2 * FI * RHO * CESP ** 3 * R3 * FJ / 0.12D2
    RMA(17,17) = R3 ** 2 * FI * RHO * CESP ** 3 * FJ / 0.12D2
  END IF
END SUBROUTINE MakeMA

!ROTINA PARA CALCULAR SUBMATRIZ GA 18x18
SUBROUTINE MakeGA(RNX,RNY,RNXY)

```

```

USE pmatrizloc
REAL(KIND(0.0D0)), INTENT(IN) :: RNX,RNY,RNXy
RGA(3,3) = ((R1 * QI + S1X * FI) * RNX + S1Y * FI * RNXY) * (R1 *&
  QJ + S1X * FJ) + ((R1 * QI + S1X * FI) * RNXY + S1Y * FI * RNY) *&
  S1Y * FJ
RGA(3,9) = ((R1 * QI + S1X * FI) * RNX + S1Y * FI * RNXY) * (R2 *&
  QJ + S2X * FJ) + ((R1 * QI + S1X * FI) * RNXY + S1Y * FI * RNY) *&
  S2Y * FJ
RGA(3,15) = ((R1 * QI + S1X * FI) * RNX + S1Y * FI * RNXY) * (R3 *&
  QJ + S3X * FJ) + ((R1 * QI + S1X * FI) * RNXY + S1Y * FI * RNY) *&
  S3Y * FJ
RGA(9,3) = ((R2 * QI + S2X * FI) * RNX + S2Y * FI * RNXY) * (R1 *&
  QJ + S1X * FJ) + ((R2 * QI + S2X * FI) * RNXY + S2Y * FI * RNY) *&
  S1Y * FJ
RGA(9,9) = ((R2 * QI + S2X * FI) * RNX + S2Y * FI * RNXY) * (R2 *&
  QJ + S2X * FJ) + ((R2 * QI + S2X * FI) * RNXY + S2Y * FI * RNY) *&
  S2Y * FJ
RGA(9,15) = ((R2 * QI + S2X * FI) * RNX + S2Y * FI * RNXY) * (R3 *&
  QJ + S3X * FJ) + ((R2 * QI + S2X * FI) * RNXY + S2Y * FI * RNY) *&
  S3Y * FJ
RGA(15,3) = ((R3 * QI + S3X * FI) * RNX + S3Y * FI * RNXY) * (R1 *&
  QJ + S1X * FJ) + ((R3 * QI + S3X * FI) * RNXY + S3Y * FI * RNY) *&
  S1Y * FJ
RGA(15,9) = ((R3 * QI + S3X * FI) * RNX + S3Y * FI * RNXY) * (R2 *&
  QJ + S2X * FJ) + ((R3 * QI + S3X * FI) * RNXY + S3Y * FI * RNY) *&
  S2Y * FJ
RGA(15,15) = ((R3 * QI + S3X * FI) * RNX + S3Y * FI * RNXY) * (R3*&
  * QJ + S3X * FJ) + ((R3 * QI + S3X * FI) * RNXY + S3Y * FI * RNY)&
  * S3Y * FJ
END SUBROUTINE MakeGA

SUBROUTINE Param_elem(NTR,NEL)
  USE geral
  USE calc
  INTEGER, INTENT(IN) :: NTR,NEL
  INTEGER :: LM(18)
  INTEGER :: IAUX, IAUX1,IAUX2
  M=MPT(NTR)
  ALLOCATE (UGEL(18*(M+3)),UGEG(18*(M+3)))
  UGEL=0.0D0;UGEG=0.0D0
  IF (NTR.EQ.1) THEN
    IAUX=0
  ELSE
    IAUX=6*NNOS*(3*(NTR-1)+SUM(MPT(1:NTR-1)))
  END IF
  DO L=1,6
    LM(L)=6*(INCID(NEL,1)-1)+L
    LM(6+L)=6*(INCID(NEL,2)-1)+L
    LM(12+L)=6*(INCID(NEL,3)-1)+L
  END DO
  DO IJ=1,MPT(NTR)+3
    IAUX1=IAUX+6*NNOS*(IJ-1)
    DO J=1,18
      UGEG(18*(IJ-1)+J)=UG(IAUX1+LM(J))
    END DO
  END DO
END SUBROUTINE Param_elem

SUBROUTINE Transf_local(M)
  USE calc
  INTEGER, INTENT(IN) :: M
  REAL(KIND(0.0D0)) :: SUM1
  DO KI=1,6*(M+3)
    DO I=1,3
      SUM1=0.0D0
      DO J=1,3
        SUM1=SUM1+COSDIR(I,J)*UGEG(3*(KI-1)+J)
      END DO
      UGEL(3*(KI-1)+I)=SUM1
    END DO
  END DO
END SUBROUTINE Transf_local

SUBROUTINE Matriz_Geom(NTR,NEL)
  USE geral
  USE calc
  USE pmatrizloc

```

```

REAL(KIND(0.0D0)), DIMENSION(5) :: FX1,W1,FX2,W2
REAL(KIND(0.0D0)) :: AGA(18,18),Z,RN,RV,XIX,CESP
REAL(KIND(0.0D0)), ALLOCATABLE :: RMNX(:, :), RMNY(:, :), RMNXY(:, :)
REAL(KIND(0.0D0)) :: RNX, RNY, RNXY
IF (E1.EQ.0) THEN
  E1=ELAST/(1.-POISS**2)
  E2=ELAST*POISS/(1.-POISS**2)
  E3=ELAST/(1.+POISS)/2.0D0
END IF
CESP=ESPES(NEL)
M=MPT(NTR)
ALLOCATE (RGEL(18*(M+3),18*(M+3)),RGEN(18*(M+3),18*(M+3)))
RGEL=0.0D0;RGEN=0.0D0
NN=4
NE=4
CALL Qgauss(NN,NE,FX1,W1,FX2,W2)
ALLOCATE (RMNX(M*NN,NE),RMNY(M*NN,NE),RMNXY(M*NN,NE))
RMNX=0.0D0;RMNY=0.0D0;RMNXY=0.0D0
DO IM=1,M
  DO ING=1,NN
    RN=(FX1(ING)+1.0D0)/2.0D0+REAL((IM-1),KIND(0.0D0))
    RV=RN*(-Y(2)+Y(3)-Y(4))/REAL(M,KIND(0.0D0))+Y(4)
    DO IEG=1,NE
      XI=FX2(IEG)
      XIX=((1.0D0-XI)*(-Y(2))-(1.0D0+XI)*(Y(3)-Y(4)))/LONG/RV
      R1=0.5D0*XI*(XI-1.)
      R2=1.0D0-XI**2
      R3=0.5D0*XI*(XI+1.0D0)
      S1Y=(XI-0.5D0)*2.0D0/RV
      S2Y=-4.0D0*XI/RV
      S3Y=(XI+0.5D0)*2.0D0/RV
      S1X=(XI-0.5D0)*XIX
      S2X=-2.0D0*XI*XIX
      S3X=(XI+0.5D0)*XIX
      CALL Esf_inic(M,RN,RNX,RNY,RNXY)
      RMNX(NN*(IM-1)+ING,IEG)=CESP*RNX
      RMNY(NN*(IM-1)+ING,IEG)=CESP*RNY
      RMNXY(NN*(IM-1)+ING,IEG)=CESP*RNXY
    END DO
  END DO
END DO
DO II=1,(M+3)
  DO JJ=II,(M+3)
    I=II-2
    J=JJ-2
    NT=0
    IF (I.EQ.-1 .AND. J.EQ.-1 .OR. I.EQ.-1 .AND. J.EQ.0 .OR. I.EQ.&
      -1 .AND. J.EQ.1 .OR. I.EQ.M+1 .AND. J.EQ.M+1 .OR. I.EQ.M .AND.&
      J.EQ.M+1 .OR. I.EQ.M-1 .AND. J.EQ.M+1) NT=1
    IF (I.EQ.0 .AND. J.EQ.0 .OR. I.EQ.0 .AND. J.EQ.1 .OR. I.EQ.M &
      .AND. J.EQ.M .OR. I.EQ.M-1 .AND. J.EQ.M) NT=2
    IF (I.EQ.1 .AND. J.EQ.1 .OR. I.EQ.M-1 .AND. J.EQ.M-1) NT=3
    IF (J-I.LT.4 .AND. NT.EQ.0) NT=I-J+4
    IF (NT.NE.0) THEN
      AGA=0.0D0
      DO IQ=1,NT
        DO IG=1,NN
          Z=FX1(IG)
          CALL Pinic(I,IQ,NT,M,IP)
          RN=(Z+1.0D0)/2.0D0+REAL(IP,KIND(0.0D0))
          CALL Detfun(I,J,IQ,NT,RN,LONG,M,2) !2 SE VAI CALCULAR PI E PJ
          RV=RN*(-Y(2)+Y(3)-Y(4))/REAL(M,KIND(0.0D0))+Y(4)
          DO JG=1,NE
            XI=FX2(JG)
            XIX=((1.0D0-XI)*(-Y(2))-(1.0D0+XI)*(Y(3)-Y(4)))/LONG/RV
            R1=0.5D0*XI*(XI-1.0D0)
            R2=1.0D0-XI**2
            R3=0.5D0*XI*(XI+1.0D0)
            S1Y=(XI-0.5D0)*2.0D0/RV
            S2Y=-4.0D0*XI/RV
            S3Y=(XI+0.5D0)*2.0D0/RV
            S1X=(XI-0.5D0)*XIX
            S2X=-2.0D0*XI*XIX
            S3X=(XI+0.5D0)*XIX
            RNX=RMNX(NN*IP+IG,JG)
            RNY=RMNY(NN*IP+IG,JG)
            RNXY=RMNXY(NN*IP+IG,JG)
          END DO
        END DO
      END IF
    END DO
  END DO
END DO

```



```

      CALL MakeGA(RNX,RNY,RNXY)
      DO IS=1,18
        DO JS=1,18
          AGA(IS,JS)=AGA(IS,JS)+W1(IG)*W2(JG)*RGA(IS,JS)*RV
        END DO
      END DO
    END DO
  END DO
END DO
DO IA=1,18
  DO IB=1,18
    RGEL(18*I+18+IA,18*J+18+IB)=LONG*AGA(IA,IB)/4./REAL(M,KIND(0.0D0))
    RGEL(18*J+18+IB,18*I+18+IA)=RGEL(18*I+18+IA,18*J+18+IB)
  END DO
END DO
END IF
END DO
END DO
DEALLOCATE(RMNX,RMNY,RMNXY)
CALL Geom_global(M)
END SUBROUTINE Matriz_Geom

SUBROUTINE Esf_inic(M,RN,RNX,RNY,RNXY)
  USE calc
  USE pmatrizloc
  INTEGER, INTENT(IN) :: M
  REAL(KIND(0.0D0)), INTENT(IN) :: RN
  REAL(KIND(0.0D0)), INTENT(OUT) :: RNX,RNY,RNXY
  INTEGER :: I
  REAL(KIND(0.0D0)) :: RI, RM, FIC(4), QIC(4), S1, S2, S3
  RNX=0.0D0
  RNY=0.0D0
  RNXY=0.0D0
  I=INT(RN)
  RI=REAL(I,KIND(0.0D0))
  RM=REAL(M,KIND(0.0D0))
  FIC(1)=(RI+1-RN)**3/6.0D0
  FIC(2)=(1.0D0+3.0D0*(RI+1-RN)+3.0D0*(RI+1-RN)**2-3.0D0*(RI+1-RN)**3)/6.0D0
  FIC(3)=(1.0D0+3.0D0*(RN-RI)+3.0D0*(RN-RI)**2-3.0D0*(RN-RI)**3)/6.0D0
  FIC(4)=(RN-RI)**3/6.0D0
  QIC(1)=- (RI+1-RN)**2*RM/(2.0D0*LONG)
  QIC(2)=- (1.0D0+2.0D0*(RI+1-RN)-3.0D0*(RI+1-RN)**2)*RM/(2.0D0*LONG)
  QIC(3)=(1.0D0+2.0D0*(RN-RI)-3.0D0*(RN-RI)**2)*RM/(2.0D0*LONG)
  QIC(4)=(RN-RI)**2*RM/(2.0D0*LONG)
  DO J=1,4
    S1=E1*(R1*QIC(J)+S1X*FIC(J))*UGEL(18*(I+J-1)+1)+E2*S1Y*FIC(J)*UGEL(18*(I &
      +J-1)+2)
    S2=E1*(R2*QIC(J)+S2X*FIC(J))*UGEL(18*(I+J-1)+7)+E2*S2Y*FIC(J)*UGEL(18*(I &
      +J-1)+8)
    S3=E1*(R3*QIC(J)+S3X*FIC(J))*UGEL(18*(I+J-1)+13)+E2*S3Y*FIC(J)*UGEL(18*(I &
      +J-1)+14)
    RNX=RNX+S1+S2+S3
    S1=E2*(R1*QIC(J)+S1X*FIC(J))*UGEL(18*(I+J-1)+1)+E1*S1Y*FIC(J)*UGEL(18*(I &
      +J-1)+2)
    S2=E2*(R2*QIC(J)+S2X*FIC(J))*UGEL(18*(I+J-1)+7)+E1*S2Y*FIC(J)*UGEL(18*(I &
      +J-1)+8)
    S3=E2*(R3*QIC(J)+S3X*FIC(J))*UGEL(18*(I+J-1)+13)+E1*S3Y*FIC(J)*UGEL(18*(I &
      +J-1)+14)
    RNY=RNY+S1+S2+S3
    S1=E3*S1Y*FIC(J)*UGEL(18*(I+J-1)+1)+E3*(R1*QIC(J)+S1X*FIC(J))*UGEL(18*(I &
      +J-1)+2)
    S2=E3*S2Y*FIC(J)*UGEL(18*(I+J-1)+7)+E3*(R2*QIC(J)+S2X*FIC(J))*UGEL(18*(I &
      +J-1)+8)
    S3=E3*S3Y*FIC(J)*UGEL(18*(I+J-1)+13)+E3*(R3*QIC(J)+S3X*FIC(J))*UGEL(18*(I &
      +J-1)+14)
    RNXY=RNXY+S1+S2+S3
  END DO
END SUBROUTINE Esf_inic

SUBROUTINE Geom_global(M)
  USE calc
  INTEGER, INTENT(IN) :: M
  REAL(KIND(0.0D0)) :: AUX1(18*(M+3),18*(M+3)), SUM1
  REAL(KIND(0.0D0)) :: AUX2(18*(M+3),18*(M+3)), SUM2
  AUX1=0.0D0
  AUX2=0.0D0
  DO KI=1,6*(M+3)

```

```

DO KJ=1,6*(M+3)
DO I=1,3
DO J=1,3
SUM1=0.0D0
SUM2=0.0D0
DO K=1,3
SUM1=SUM1+COSDIR(K,I)*RGEL(3*(KI-1)+K,3*(KJ-1)+J)
END DO
AUX1(3*(KI-1)+I,3*(KJ-1)+J)=SUM1
END DO
END DO
END DO
DO KI=1,6*(M+3)
DO KJ=1,6*(M+3)
DO I=1,3
DO J=1,3
SUM1=0.0D0
SUM2=0.0D0
DO K=1,3
SUM1=SUM1+AUX1(3*(KI-1)+I,3*(KJ-1)+K)*COSDIR(K,J)
END DO
RGEG(3*(KI-1)+I,3*(KJ-1)+J)=SUM1
END DO
END DO
END DO
END SUBROUTINE Geom_global

SUBROUTINE Ensam_geom(NTR,NEL)
USE geral
USE calc
INTEGER, INTENT(IN) :: NTR,NEL
INTEGER :: LM(18)
INTEGER :: IAUX, IAUX1, IAUX2
IF (NTR.EQ.1) THEN
IAUX=0
ELSE
IAUX=6*NNOS*(3*(NTR-1)+SUM(MPT(1:NTR-1)))
END IF
DO L=1,6
LM(L)=6*(INCID(NEL,1)-1)+L
LM(6+L)=6*(INCID(NEL,2)-1)+L
LM(12+L)=6*(INCID(NEL,3)-1)+L
END DO
DO IJ=1,MPT(NTR)+3
IAUX1=IAUX+6*NNOS*(IJ-1)
DO IK=1,MPT(NTR)+3
IAUX2=IAUX+6*NNOS*(IK-1)
DO J=1,18
DO K=1,18
RGG(IAUX1+LM(J),IAUX2+LM(K))=RGG(IAUX1+LM(J),IAUX2+LM(K))&
+RGEG(18*(IJ-1)+J,18*(IK-1)+K)
END DO
END DO
END DO
END DO
DEALLOCATE (UGEL,UGEG,RGEL,RGEG)
END SUBROUTINE Ensam_geom

SUBROUTINE DeslFis_geom(IORMA)
USE geral
INTEGER, INTENT(IN) :: IORMA
INTEGER :: I1,I2
DO IS=1,NSEC
IF (IS.EQ.1) THEN
I1=0
ELSE
I1=6*NNOS*(3*(IS-1)+SUM(MPT(1:(IS-1))))
END IF
DO IN=1,NNOS
DO I=1,6
I2=6*(IN-1)+I
IF (IRESTR(IS,IN,I).EQ.1) THEN
IF (IS.NE.1) THEN
DO IA=1,IORMA
RGG(I1-18*NNOS+I2,IA)=RGG(I1-18*NNOS+I2,IA)-RGG(I1-12*NNOS+I2,IA)/4.

```

```

      RGG(I1-6*NNOS+I2, IA)=RGG(I1-6*NNOS+I2, IA)-RGG(I1-12*NNOS+I2, IA)/4.
      RGG(I1-12*NNOS+I2, IA)=3.*RGG(I1-12*NNOS+I2, IA)/2.
    END DO
    DO IA=1, IORMA
      RGG(IA, I1-18*NNOS+I2)=RGG(IA, I1-18*NNOS+I2)-RGG(IA, I1-12*NNOS+I2)/4.
      RGG(IA, I1-6*NNOS+I2)=RGG(IA, I1-6*NNOS+I2)-RGG(IA, I1-12*NNOS+I2)/4.
      RGG(IA, I1-12*NNOS+I2)=3.*RGG(IA, I1-12*NNOS+I2)/2.
    END DO
  END IF
  IF (IS.NE.NSEC) THEN
    DO IA=1, IORMA
      RGG(I1+I2, IA)=RGG(I1+I2, IA)-RGG(I1+6*NNOS+I2, IA)/4.
      RGG(I1+12*NNOS+I2, IA)=RGG(I1+12*NNOS+I2, IA)-RGG(I1+6*NNOS+I2, IA)/4.
      RGG(I1+6*NNOS+I2, IA)=3.*RGG(I1+6*NNOS+I2, IA)/2.
    END DO
    DO IA=1, IORMA
      RGG(IA, I1+I2)=RGG(IA, I1+I2)-RGG(IA, I1+6*NNOS+I2)/4.
      RGG(IA, I1+12*NNOS+I2)=RGG(IA, I1+12*NNOS+I2)-RGG(IA, I1+6*NNOS+I2)/4.
      RGG(IA, I1+6*NNOS+I2)=3.*RGG(IA, I1+6*NNOS+I2)/2.
    END DO
  END IF
END DO
END DO
END DO
END SUBROUTINE DeslFis_geom

SUBROUTINE Restric_geom(IORMA)
  USE geral
  INTEGER, INTENT(IN) :: IORMA
  INTEGER :: I1, I2
  DO IS=1, NSEC
    IF (IS.EQ.1) THEN
      I1=0
    ELSE
      I1=6*NNOS*(3*(IS-1)+SUM(MPT(1:(IS-1))))
    END IF
    DO IN=1, NNOS
      DO I=1, 6
        I2=6*(IN-1)+I
        IF (IRESTR(IS, IN, I).EQ.1) THEN
          IF (IS.NE.1) THEN
            DO IA=1, IORMA
              RGG(I1-12*NNOS+I2, IA)=0.0D0
              RGG(IA, I1-12*NNOS+I2)=0.0D0
            END DO
          END IF
          IF (IS.NE.NSEC) THEN
            DO IA=1, IORMA
              RGG(I1+6*NNOS+I2, IA)=0.0D0
              RGG(IA, I1+6*NNOS+I2)=0.0D0
            END DO
          END IF
        END IF
      END DO
    END DO
  END DO
END SUBROUTINE Restric_geom

!RETORNA A RMODOI PARAMETROS
SUBROUTINE RMODOIparam_geom
  USE geral
  INTEGER :: I1, I2
  DO IS=1, NSEC
    IF (IS.EQ.1) THEN
      I1=0
    ELSE
      I1=6*NNOS*(3*(IS-1)+SUM(MPT(1:(IS-1))))
    END IF
    DO IN=1, NNOS
      DO I=1, 6
        I2=6*(IN-1)+I
        IF (IRESTR(IS, IN, I).EQ.1) THEN
          IF (IS.NE.1) THEN
            DO J=1, NMODOS
              RMODOI(I1-12*NNOS+I2, J)=3.0D0*RMODOI(I1-12*NNOS+I2, J)/2.0D0-(RMODOI &
                (I1-18*NNOS+I2, J)+RMODOI(I1-6*NNOS+I2, J))/4.0D0
            END DO
          END IF
        END IF
      END DO
    END DO
  END DO
END SUBROUTINE RMODOIparam_geom

```

```

        END DO
    END IF
    IF (IS.NE.NSEC) THEN
        DO J=1,NMODOS
            RMODOI(I1+6*NNOS+I2,J)=3.0D0*RMODOI(I1+6*NNOS+I2,J)/2.0D0-(RMODOI &
                (I1+I2,J)+RMODOI(I1+12*NNOS+I2,J))/4.0D0
        END DO
    END IF
    END IF
END DO
END DO
END DO
END SUBROUTINE RMODOIparam_geom

```

B.2. Definições

```

MODULE geral
    INTEGER :: NTRAMOS,NNOS,NELEM,NSEC,NFREQ,NMODOS
    CHARACTER(1) :: CALC_EST,CALC_DIN,INER_ROT,CALC_INIS
    REAL(KIND(0.0D0)) :: ELAST,POISS,RHO
    REAL(KIND(0.0D0)),ALLOCATABLE :: COORD(:, :, ),ESPES(:),CARUNIF(:, :, ),&
        CARPONT(:, :, )
    INTEGER, ALLOCATABLE :: MPT(:),NDIV(:),INCID(:, ),IRESTR(:, :, )
    REAL(KIND(0.0D0)),ALLOCATABLE ::
    RKG(:, ),RMG(:, ),RGG(:, ),RKGI(:, ),RFG(:),UG(:)
    REAL(KIND(0.0D0)),ALLOCATABLE :: BETA(:),RMODO(:, ),BETAI(:),RMODOI(:, )
    COMPLEX(KIND(0.0D0)),ALLOCATABLE :: ALPHA(:),AUTOV(:, ),ALPHAI(:),AUTOVI(:, )
END MODULE geral

MODULE calc
    INTEGER :: IDIN
    REAL(KIND(0.0D0)) :: VLX(3),VLY(3),VLZ(3),LONG,Y(4)
    REAL(KIND(0.0D0)) :: COSDIR(3,3)
    REAL(KIND(0.0D0)), ALLOCATABLE :: RKEL(:, ), RKEG(:, ), RMEL(:, ), RMEG(:, ),&
        RGEL(:, ), RREG(:, ), UGEL(:), UGEG(:)
END MODULE calc

MODULE pmatrizloc
    REAL(KIND(0.0D0)) :: E1,E2,E3,EP1,EP2,EP3,GZ,RKO
    REAL(KIND(0.0D0)) :: RKA(18,18),RMA(18,18),RGA(18,18),FI,QI,FJ,QJ
    REAL(KIND(0.0D0)) :: R1,R2,R3,S1Y,S2Y,S3Y,S1X,S2X,S3X
END MODULE pmatrizloc

```

B.3. Rotinas Gerais

```

!CALCULA O MODULO DE UM VETOR DE TRÊS DIMENSÕES
SUBROUTINE ModuloVetor(VETOR,RMOD)
    REAL(KIND(0.0D0)), INTENT(IN) :: VETOR(3)
    REAL(KIND(0.0D0)), INTENT(OUT) :: RMOD
    REAL(KIND(0.0D0)) :: AUX(3),S
    AUX=VETOR**2
    S=SUM(AUX)
    RMOD=SQRT(S)
END SUBROUTINE ModuloVetor

!ROTINA PARA CALCULAR PONTOS E PESOS NA QUADRATURA DE GAUSS
SUBROUTINE Qgauss(NN,NE,F1,W1,F2,W2)
    INTEGER, INTENT(IN) :: NN,NE
    REAL(KIND(0.0D0)), INTENT(OUT) :: F1(5),W1(5),F2(5),W2(5)
    IF (NN.EQ.1) THEN
        F1(1)=0
        W1(1)=2
    END IF
    IF (NN.EQ.2) THEN
        F1(1)=-1./SQRT(3.)
        F1(2)=1./SQRT(3.)
        W1(1)=1
        W1(2)=1
    END IF
    IF (NN.EQ.3) THEN
        F1(1)=-SQRT(3./5.)
        F1(2)=0
    END IF

```

```

      F1(3)=SQRT(3./5.)
      W1(1)=5./9.
      W1(2)=8./9.
      W1(3)=5./9.
    END IF
    IF (NN.EQ.4) THEN
      F1(1)=-SQRT((3.+2.*SQRT(6./5.))/7.)
      F1(2)=-SQRT((3.-2.*SQRT(6./5.))/7.)
      F1(3)=SQRT((3.-2.*SQRT(6./5.))/7.)
      F1(4)=SQRT((3.+2.*SQRT(6./5.))/7.)
      W1(1)=0.5-SQRT(5./6.)/6.
      W1(2)=0.5+SQRT(5./6.)/6.
      W1(3)=0.5+SQRT(5./6.)/6.
      W1(4)=0.5-SQRT(5./6.)/6.
    END IF
    IF (NN.EQ.5) THEN
      F1(1)=-SQRT(5.+2.*SQRT(10./7.))/3.
      F1(2)=-SQRT(5.-2.*SQRT(10./7.))/3.
      F1(3)=0.
      F1(4)=SQRT(5.-2.*SQRT(10./7.))/3.
      F1(5)=SQRT(5.+2.*SQRT(10./7.))/3.
      W1(1)=(322.-13.*SQRT(70.))/900.
      W1(2)=(322.+13.*SQRT(70.))/900.
      W1(3)=512./900.
      W1(4)=(322.+13.*SQRT(70.))/900.
      W1(5)=(322.-13.*SQRT(70.))/900.
    END IF
    IF (NE.EQ.1) THEN
      F2(1)=0
      W2(1)=2
    END IF
    IF (NE.EQ.2) THEN
      F2(1)=-1./SQRT(3.)
      F2(2)=1./SQRT(3.)
      W2(1)=1
      W2(2)=1
    END IF
    IF (NE.EQ.3) THEN
      F2(1)=-SQRT(3./5.)
      F2(2)=0
      F2(3)=SQRT(3./5.)
      W2(1)=5./9.
      W2(2)=8./9.
      W2(3)=5./9.
    END IF
    IF (NE.EQ.4) THEN
      F2(1)=-SQRT((3.+2.*SQRT(6./5.))/7.)
      F2(2)=-SQRT((3.-2.*SQRT(6./5.))/7.)
      F2(3)=SQRT((3.-2.*SQRT(6./5.))/7.)
      F2(4)=SQRT((3.+2.*SQRT(6./5.))/7.)
      W2(1)=0.5-SQRT(5./6.)/6.
      W2(2)=0.5+SQRT(5./6.)/6.
      W2(3)=0.5+SQRT(5./6.)/6.
      W2(4)=0.5-SQRT(5./6.)/6.
    END IF
    IF (NE.EQ.5) THEN
      F2(1)=-SQRT(5.+2.*SQRT(10./7.))/3.
      F2(2)=-SQRT(5.-2.*SQRT(10./7.))/3.
      F2(3)=0.
      F2(4)=SQRT(5.-2.*SQRT(10./7.))/3.
      F2(5)=SQRT(5.+2.*SQRT(10./7.))/3.
      W2(1)=(322.-13.*SQRT(70.))/900.
      W2(2)=(322.+13.*SQRT(70.))/900.
      W2(3)=512./900.
      W2(4)=(322.+13.*SQRT(70.))/900.
      W2(5)=(322.-13.*SQRT(70.))/900.
    END IF
  END SUBROUTINE Qgauss

```

B.4. Entrada de Dados

```

SUBROUTINE Leitura_dados
CHARACTER(1)::I
WRITE(*,*) "Introduzir os dados iniciais no arquivo DADOS1 antes de continuar"
WRITE(*,*) " 1. Criar arquivo DADOS2 com informacao adicional"
WRITE(*,*) " 2. Dados adicionais inseridos, Continuar"
WRITE(*,*) " 3. Salir"
READ(*,*) I
SELECT CASE (I)
CASE ("1")
CALL Ler_dados1
CALL Criar_dados2
STOP
CASE ("2")
CALL Ler_dados1
CALL Ler_dados2
CASE ("3")
STOP
CASE DEFAULT
STOP
END SELECT
END SUBROUTINE Leitura_dados

SUBROUTINE Ler_dados1
USE geral
OPEN(11,FILE='DADOS1.ASC',STATUS='UNKNOWN')
READ(11,"(4/,30X,I10)") NTRAMOS
READ(11,"(30X,I10)") NNOS,NELEM
READ(11,"(/,30X,A)") CALC_EST
READ(11,"(2/,30X,A)") CALC_DIN
READ(11,"(2/,30X,A)") INER_ROT
READ(11,"(/,30X,I10)") NFREQ
READ(11,"(2/,30X,A)") CALC_INS
READ(11,"(/,30X,I10)") NMODOS
NSEC=NTRAMOS+1
CLOSE(11)
END SUBROUTINE Ler_dados1

SUBROUTINE Criar_dados2
USE geral
OPEN(12,FILE='DADOS2.ASC',STATUS='UNKNOWN')
WRITE(12,*) "PROGRAMA VIGA GENERALIZADA COM FUNCOES SPLINE"
WRITE(12,"(2/, ' PROPRIEDADES DO MATERIAL')")
WRITE(12,"(/, ' Modulo de elasticidad em [KN/m^2] :',E10.2)") 0.21E+09
WRITE(12,"(' Coeficiente de Poisson :',F8.4)") 0.3
WRITE(12,"(' Densidade especifica [KN*seg^2/m^4] :',F8.4)") 7.95
WRITE(12,"(2/, ' INFORMAÇÃO DOS NOS')")
DO I=1,NSEC
WRITE(12,"(/, ' COORDENADAS SECAO',I3)") I
WRITE(12,"(' x:',F7.2)") 6.*(REAL(I)-1)
DO J=1,NNOS
WRITE(12,"(' No',I3, ' y:',F7.2, ' z:',F7.2)")&
J,0.,0.
END DO
END DO
WRITE(12,"(/, ' NUMERO DE DIVISOES POR TRAMO')")
WRITE(12,"(' Para o calculo',7X,'Para os resultados')")
DO I=1,NTRAMOS
WRITE(12,"(' Tramo',I3,':',I3,9X,'Tramo',I3,':',I3)") I,5,I,8
END DO
WRITE(12,"(2/, ' INFORMAÇÃO DOS ELEMENTOS',/)")
DO I=1,NELEM
WRITE(12,"(' Elemento',I3, ' No inic.:',I3, ' No inter:',I3,&
' No final:',I3, ' Espes.:',F7.2)") I,2*I-1,2*I,2*I+1,0.05
END DO
WRITE(12,"(2/, ' CARREGAMENTO UNIFORME POR LINHA NODAL')")
DO I=1,NTRAMOS
WRITE(12,"(/, ' TRAMO',I3)") I
DO J=1,NNOS
WRITE(12,"(' No',I3, ' qx:',F7.2,&
' qy:',F7.2, ' qz:',F7.2)")&
J,0.,0.,0.
END DO
END DO
END DO

```

```

WRITE(12,"(2/,' CARREGAMENTO PONTUAL NOS NÓS'")
DO I=1,NSEC
WRITE(12,"(/,' SECAO',I3) ) I
DO J=1,NNOS
WRITE(12,"(' No',I3,' Fx:',F7.2,' Fy:',F7.2,' Fz:',F7.2,&
' Mx:',F7.2,' My:',F7.2,' Mz:',F7.2)")&
J,0.,0.,0.,0.,0.,0.
END DO
END DO
WRITE(12,"(2/,' RESTRIÇÕES'")
DO I=1,NSEC
WRITE(12,"(/,' SEÇÃO',I3) ) I
DO J=1,NNOS
WRITE(12,"(' No',I3,' Rx:',I3,' Ry:',I3,&
' Rz:',I3,' Mx:',I3,' My:',I3,' Mz:',I3)")&
J,0,0,0,0,0,0
END DO
END DO
CLOSE(12)
END SUBROUTINE Criar_dados2

SUBROUTINE Ler_dados2
USE geral
REAL(KIND(0.0D0)) :: X
ALLOCATE (COORD(NSEC,NNOS,3),MPT(NTRAMOS),NDIV(NTRAMOS),INCID(NELEM,3) &
,ESPES(NELEM),CARUNIF(NTRAMOS,NNOS,3),CARPONT(NSEC,NNOS,6) &
,IRESTR(NSEC,NNOS,6))
MPT=0;NDIV=0;INCID=0;ESPES=0.;IRESTR=0
COORD=0.0D0;CARUNIF=0.0D0;CARPONT=0.0D0
OPEN(12,FILE='DADOS2.ASC',STATUS='UNKNOWN')
READ(12,"(5/,(39X,F22.0)") ELAST,POISS,RHO
READ(12,"(2/)"
DO I=1,NSEC
READ(12,"(2/,(3X,F22.0)") X
DO J=1,NNOS
COORD(I,J,1)=X
READ(12,"(12X,F22.0,2X,F22.0,2X,F22.0)") (COORD(I,J,K),K=2,3)
END DO
END DO
READ(12,"(2/)"
DO I=1,NTRAMOS
READ(12,"(10X,I12,9X,I12)") MPT(I),NDIV(I)
END DO
READ(12,"(3/)"
DO I=1,NELEM
READ(12,"(25X,I9,9X,I9,9X,I12,7X,F22.0)") (INCID(I,J),J=1,3),ESPES(I)
END DO
READ(12,"(2/)"
DO I=1,NTRAMOS
READ(12,"(/)"
DO J=1,NNOS
READ(12,"(12X,F22.0,3X,F22.0,3X,F22.0)") (CARUNIF(I,J,K),K=1,3)
END DO
END DO
READ(12,"(2/)"
DO I=1,NSEC
READ(12,"(/)"
DO J=1,NNOS
READ(12,"(12X,F14.0,3X,F14.0,3X,F14.0,3X,F14.0,3X,F14.0,3X,F14.0)") &
(CARPONT(I,J,K),K=1,6)
END DO
END DO
READ(12,"(2/)"
DO I=1,NSEC
READ(12,"(/)"
DO J=1,NNOS
READ(12,"(12X,I9,3X,I9,3X,I9,3X,I9,3X,I9,3X,I9)") (IRESTR(I,J,K),K=1,6)
END DO
END DO
CLOSE(12)
END SUBROUTINE Ler_dados2

```

B.5. Saída de Dados

```

SUBROUTINE Resul_est
  USE geral
  INTEGER :: NTR, IN, ID
  REAL(KIND(0.0D0)) :: X, A1(6), DESL
  OPEN(14, FILE='RESEST.ASC', STATUS='UNKNOWN')
  WRITE(14, *) 'Deslocamentos e Rotações'
  DO IN=1, NNOS
    WRITE(14, "(' Nó N° ', I3)") IN
    WRITE(14, "(5X, 'x', 17X, 'Dx', 16X, 'Dy', 16X, 'Dz', 16X, 'Rx', 16X, 'Ry', 16X, 'Rz')")
    DO IC=1, 6
      CALL Desloc(1, IN, IC, 1, 1, 0.0D0, DESL)
      A1(IC)=DESL
    END DO
    WRITE(14, "(F12.4, 2X, 6E18.8)") 0.0D0, (A1(I), I=1, 6)
    DO NTR=1, NTRAMOS
      DO IX=1, NDIV(NTR)
        X=COORD(NTR, 1, 1)+REAL(IX, KIND(0.0D0))*(COORD(NTR+1, 1, 1) &
          -COORD(NTR, 1, 1))/REAL(NDIV(NTR), KIND(0.0D0))
        DO ID=1, 6
          CALL Desloc(NTR, IN, ID, 1, 1, X, DESL)
          A1(ID)=DESL
        END DO
        WRITE(14, "(F12.4, 2X, 6E18.8)") X, (A1(I), I=1, 6)
      END DO
    END DO
  END DO
  CLOSE(14)
END SUBROUTINE Resul_est

SUBROUTINE Resul_din
  USE geral
  REAL(KIND(0.0D0)) :: X, A1(3), DESL
  INTEGER :: IR, NTR
  OPEN(15, FILE='RES DIN.ASC', STATUS='UNKNOWN')
  DO I=1, NFREQ
    IF (REAL(ALPHA(I)).LT.0.0D0) THEN
      IR=1
    END IF
  END DO
  IF (IR.EQ.0) THEN
    WRITE(15, *) 'Frequencias Naturais da Estrutura'
    WRITE(15, *) SQRT(REAL(ALPHA(1:NFREQ)/BETA(1:NFREQ)))/2.0D0/3.141593D0
    DO IM=1, NFREQ
      WRITE(15, "(' MODO N° ', I3)") IM
      DO IN=1, NNOS
        WRITE(15, "(' Nó N° ', I3)") IN
        WRITE(15, "(5X, 'x', 17X, 'Dx', 16X, 'Dy', 16X, 'Dz')")
        DO IC=1, 3
          CALL Desloc(1, IN, IC, 2, IM, 0.0D0, DESL)
          A1(IC)=DESL
        END DO
        WRITE(15, "(F12.4, 2X, 3E18.8)") 0.0D0, (A1(I), I=1, 3)
      END DO
      DO NTR=1, NTRAMOS
        DO IX=1, NDIV(NTR)
          X=COORD(NTR, 1, 1)+REAL(IX, KIND(0.0D0))*(COORD(NTR+1, 1, 1) &
            -COORD(NTR, 1, 1))/REAL(NDIV(NTR), KIND(0.0D0))
          DO ID=1, 3
            CALL Desloc(NTR, IN, ID, 2, IM, X, DESL)
            A1(ID)=DESL
          END DO
          WRITE(15, "(F12.4, 2X, 3E18.8)") X, (A1(I), I=1, 3)
        END DO
      END DO
    END DO
  ELSE
    WRITE(15, *) 'Autovalores da equação característica negativos'
  END IF
  CLOSE(15)
END SUBROUTINE Resul_din

SUBROUTINE Resul_ins
  USE geral

```



```

REAL(KIND(0.0D0)) :: X, A1(3), DESL
INTEGER :: NTR
OPEN(16, FILE='RESINS.ASC', STATUS='UNKNOWN')
WRITE(16, *) 'Cargas Criticas da Estrutura'
WRITE(16, *) -1.0D0*REAL(ALPHAI(1:NMODOS)/BETAI(1:NMODOS))
DO IM=1, NMODOS
  WRITE(16, "(' MODO N° ', I3)") IM
  DO IN=1, NNOS
    WRITE(16, "(' Nó N° ', I3)") IN
    WRITE(16, "(5X, 'x', 17X, 'Dx', 16X, 'Dy', 16X, 'Dz'")
    DO IC=1, 3
      CALL Desloc(1, IN, IC, 3, IM, 0.0D0, DESL)
      A1(IC)=DESL
    END DO
    WRITE(16, "(F12.4, 2X, 3E18.8)") 0.0D0, (A1(I), I=1, 3)
  DO NTR=1, NTRAMOS
    DO IX=1, NDIV(NTR)
      X=COORD(NTR, 1, 1)+REAL(IX, KIND(0.0D0))*(COORD(NTR+1, 1, 1) &
        -COORD(NTR, 1, 1))/REAL(NDIV(NTR), KIND(0.0D0))
      DO ID=1, 3
        CALL Desloc(NTR, IN, ID, 3, IM, X, DESL)
        A1(ID)=DESL
      END DO
      WRITE(16, "(F12.4, 2X, 3E18.8)") X, (A1(I), I=1, 3)
    END DO
  END DO
END DO
END DO
END DO
CLOSE(16)
END SUBROUTINE Resul_ins

SUBROUTINE Desloc(NTR, NNO, ID, IDAN, IMOD, X, DESL)          !IDAN (EST=1 DIN=2 INS=3)
  USE geral
  INTEGER, INTENT(IN) :: NTR, NNO, ID, IDAN, IMOD
  REAL(KIND(0.0D0)), INTENT(IN) :: X
  REAL(KIND(0.0D0)), INTENT(OUT) :: DESL
  INTEGER :: IAUX, I
  REAL(KIND(0.0D0)) :: RL, RM, RN, RI, FI(4), Q(4)
  DESL=0.
  IF (NTR.EQ.1) THEN
    IAUX=0
  ELSE
    IAUX=6*NNOS*(3*(NTR-1)+SUM(MPT(1:NTR-1)))
  END IF
  RL=COORD(NTR+1, 1, 1)-COORD(NTR, 1, 1)
  RM=REAL(MPT(NTR), KIND(0.0D0))
  RN=RM*X/RL
  I=INT(RN)
  RI=REAL(I, KIND(0.0D0))
  FI(1)=(RI+1-RN)**3/6.
  FI(2)=(1.+3.*(RI+1-RN)+3.*(RI+1-RN)**2-3.*(RI+1-RN)**3)/6.
  FI(3)=(1.+3.*(RN-RI)+3.*(RN-RI)**2-3.*(RN-RI)**3)/6.
  FI(4)=(RN-RI)**3/6.
  DO J=1, 4
    SELECT CASE (IDAN)
      CASE (1)
        IF (.NOT.(X.EQ.RL .AND. J.EQ.4)) THEN
          Q(J)=UG(IAUX+6*NNOS*(I+J-1)+6*(NNO-1)+ID)
          DESL=DESL+FI(J)*Q(J)
        END IF
      CASE (2)
        IF (.NOT.(X.EQ.RL .AND. J.EQ.4)) THEN
          Q(J)=RMODE(IAUX+6*NNOS*(I+J-1)+6*(NNO-1)+ID, IMOD)
          DESL=DESL+FI(J)*Q(J)
        END IF
      CASE (3)
        IF (.NOT.(X.EQ.RL .AND. J.EQ.4)) THEN
          Q(J)=RMODEI(IAUX+6*NNOS*(I+J-1)+6*(NNO-1)+ID, IMOD)
          DESL=DESL+FI(J)*Q(J)
        END IF
    END SELECT
  END DO
END SUBROUTINE Desloc

```

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)