



**Eduardo Pasquetti**

**Métodos Aproximados de Solução de Sistemas  
Dinâmicos Não-Lineares**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Paulo Batista Gonçalves

Rio de Janeiro, Abril de 2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



**Eduardo Pasquetti**

## **Métodos Aproximados de Solução de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Paulo Batista Gonçalves**

Orientador

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

**Prof. Djenane Cordeiro Pamplona**

PUC-Rio

**Prof. José Manoel Balthazar**

UNESP

**Prof. Marcelo Amorim Savi**

COPPE-UFRJ

**Prof. Raul Rosas e Silva**

PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 14 de Abril de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Eduardo Pasquetti**

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade de Passo Fundo. Obteve o título de Mestre em Estruturas pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

#### Ficha Catalográfica

Eduardo Pasquetti

Métodos Aproximados de Solução de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares/ Eduardo Pasquetti; orientador: Paulo Batista Gonçalves. - 2008.

255 f: il. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia Civil - Teses. 2. Dinâmica não-linear. 3. Métodos aproximados. 4. Não-linearidades não polinomiais. 5. Métodos de perturbação. I. Gonçalves, Paulo Batista. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Aos meus pais Luiz e Realda, ao meu irmão Luiz Ricardo e à minha filha  
Maria Eduarda.

## Agradecimentos

Ao meu orientador, Paulo Batista Gonçalves, pelo conhecimento transmitido, incentivo, paciência e dedicação ao longo destes sete anos.

À PUC-Rio e aos professores do departamento, por terem me admitido no programa de pós-graduação.

À banca examinadora.

À CNPQ, pelo apoio financeiro.

Aos meus colegas do Tecgraf: Lula, por sua compreensão e paciência ao longo destes últimos anos. À Antônio Sergio, Anderson e Júlio César, pelas dicas de LaTeX.

Pela amizade e agradável convivência, aos amigos de longa data Müller e Ramires, e aos que que ganhei aqui no Rio, em especial a Walter, Sidiclei, Gilmar, Harry, Del Savio, José Roberto, Diego, Frederico, Magnus e Hilton.

Aos professores Agenor, Ignacio, Zacarias e Moacir que lá no início da graduação me incentivaram para que eu chegasse até aqui.

Aos meus tios Darcia e Gerônimo, Adriana e Alceu, obrigado por tudo.

À minha Natália, obrigado por tudo.

À minha família pelo apoio e incentivo.

## Resumo

Pasquetti, Eduardo; Gonçalves, Paulo Batista. **Métodos Aproximados de Solução de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares** Rio de Janeiro, 2008. 255p. Tese de Doutorado — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Sistemas dinâmicos não-lineares são comuns em engenharia. Este tipo de problema é resolvido por integração numérica das equações de movimento ou por métodos analíticos aproximados (métodos de perturbação) ou semi-analíticos como o método do Balanço Harmônico. A integração numérica é um processo lento e oneroso em análises paramétricas. Já os outros métodos aproximados são extremamente rápidos, mas são menos precisos e em problemas com certos tipos de não-linearidade, tais como expoentes fracionários, são de difícil, ou impossível, aplicação. Neste trabalho, são apresentados dois métodos alternativos, baseados nas séries de Taylor, para a análise de sistemas não-lineares. No primeiro método, a resposta é escrita em série de Taylor e propriedades de simetria do sistema no espaço de fase são utilizadas para se determinar a relação frequência-amplitude ou pontos fixos da resposta. No segundo método a solução é escrita em série de Fourier e as amplitudes dos harmônicos são determinadas da mesma forma que os coeficientes da série de Taylor. A simetria do sistema agora fica implícita na solução em série de Fourier, e a relação frequência-amplitude ou os pontos fixos da resposta são obtidos utilizando equações suplementares. Através de comparações com outros métodos, mostra-se que os métodos desenvolvidos são de fácil implementação e precisos. Estes possuem as vantagens de serem aplicados a problemas com diversos tipos de não-linearidade e de fornecerem uma resposta em série de Fourier onde as amplitudes são determinadas analiticamente resolvendo-se um sistema de equações algébricas lineares.

## Palavras-chave

dinâmica não-linear; métodos aproximados; não-linearidades não polinômiais; métodos de perturbação

## Abstract

Pasquetti, Eduardo; Gonçalves, Paulo Batista (Advisor). **Approximate Solution Methods for Nonlinear Dynamical Systems** Rio de Janeiro, 2008. 255p. PhD. Thesis — Department of Civil Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nonlinear dynamical systems are rather common in engineering. This class of problems is usually solved by numerical integration or through the use of approximate analytical methods (perturbation methods) or semi-analytical methods such as the harmonic balance method. The numerical integration is a slow and cumbersome process in parametric analyses. The other methods are usually extremely fast but they are less precise and their application to problems involving certain types of non-linearity, such as fractional power non-linearities, are difficult or even impossible. In this work two alternative methodologies for the analysis of non-linear dynamical systems, based on Taylor series expansions, are proposed. In the first method, the solution of the initial value problem is obtained by expanding the response in Taylor series and the symmetries of the response in phase space are used to obtain the frequency-amplitude relation or the fixed points of the steady-state response. In the second method the response is written as a Fourier series and the modal amplitudes are obtained using the same methodology used in the previous method for the determination of the coefficients of the Taylor expansion. The symmetries of the response are implicit in the Fourier series, and supplementary equations are proposed for the determination of the frequency-amplitude relation and the fixed points of the response. Comparisons with other existing methods show that the two proposed methods are precise and can be easily applied to the analysis of several dynamical systems. The main advantages of the proposed methods are that they can be applied to several types of non-linearities and that analytic expression for the Fourier coefficients can be obtained by the solution of a system of linear algebraic equations.

## Keywords

nonlinear dynamics; approximate methods; non-polynomial nonlinearities; perturbation methods

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>20</b>
1.1	Conceitos Básicos em Oscilações Não-Lineares . . . . .	25
1.2	Objetivos . . . . .	29
1.3	Novos Métodos Propostos . . . . .	30
1.4	Histórico . . . . .	31
1.5	Descrição da tese . . . . .	38
<b>2</b>	<b>Vibração em Sistemas Contínuos</b>	<b>41</b>
2.1	Relação deformação-deslocamentos . . . . .	41
2.2	Viga contínua - solução linear . . . . .	43
2.3	Viga contínua - formulação não-linear . . . . .	47
2.4	Viga contínua com imperfeição inicial . . . . .	50
2.5	Viga contínua - solução com não-linearidades mais completas . .	52
<b>3</b>	<b>Métodos de Perturbação</b>	<b>54</b>
3.1	Método Lindstedt-Poincaré . . . . .	55
3.1.1	Vibração Forçada . . . . .	59
3.1.2	Vibração Forçada Amortecida . . . . .	62
3.1.3	Programa em Álgebra simbólica . . . . .	64
3.2	Método Lindstedt-Poincaré Modificado . . . . .	65
3.2.1	Vibração Forçada . . . . .	71
3.2.2	Vibração Forçada Amortecida . . . . .	73
3.3	Método Múltiplas Escalas . . . . .	76
3.3.1	Vibração Forçada . . . . .	81
3.3.2	Programa em Álgebra simbólica . . . . .	86
3.3.3	Vibração Forçada Amortecida . . . . .	87
3.4	Não-Linearidade Quadrática . . . . .	91
3.4.1	Método Lindstedt-Poincaré . . . . .	91
3.4.2	Método de Lindstedt-Poincaré Modificado . . . . .	94
3.4.3	Método das Múltiplas escalas . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Método do Balanço Harmônico</b>	<b>101</b>
4.1	Newton-Raphson com Comprimento de Arco . . . . .	102
4.2	Vibração livre . . . . .	102
4.3	Vibração Forçada . . . . .	105
4.3.1	Solução de sistemas algébricos não-lineares através do método de perturbação . . . . .	107
4.4	Vibração Forçada Amortecida . . . . .	110
4.5	Método de Galerkin-Urabe . . . . .	111
4.6	Método do balanço harmônico incremental . . . . .	112
4.7	Não Linearidade Quadrática . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Sistemas Lineares com Coeficientes Periódicos</b>	<b>116</b>
5.1	Multiplicadores de Floquet . . . . .	117

5.2	Estabilidade de sistemas não-lineares . . . . .	119
5.2.1	Determinante de Hill . . . . .	120
<b>6</b>	<b>Solução de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares por Séries</b>	<b>122</b>
6.1	Séries de Potências . . . . .	122
6.2	Método baseado em séries de Taylor . . . . .	123
6.2.1	Vibração livre . . . . .	125
6.2.2	Equação de Duffing . . . . .	126
6.2.3	Relação entre os métodos de Taylor e LP . . . . .	134
6.2.4	Soluções em série de Fourier a partir da série de Taylor .	141
6.2.5	Aproximações de Padé . . . . .	146
6.2.6	Vibração Forçada . . . . .	147
6.2.7	Equação de Duffing . . . . .	150
6.2.8	Validação da Solução em série . . . . .	161
6.3	Método de Fourier-Taylor (FT) . . . . .	162
6.3.1	Resolução de problemas de vibração livre . . . . .	163
6.3.2	Equação de Duffing . . . . .	164
6.3.3	Método Fourier-Taylor-Galerkin (FTG) . . . . .	167
6.3.4	Resolução de problemas de vibração forçada sem amor- tecimento . . . . .	168
6.3.5	Resolução de problemas de vibração forçada com amor- tecimento . . . . .	172
<b>7</b>	<b>Não-linearidades não-polinomiais</b>	<b>177</b>
7.1	Sistema dinâmico com não-linearidade fracionária . . . . .	178
7.1.1	$\ddot{x} + \text{sgn}(x) = 0$ . . . . .	183
7.2	Pêndulo plano . . . . .	186
7.3	Pêndulo Elíptico . . . . .	188
7.4	Viga com não-linearidades não-polinomiais . . . . .	193
7.5	Arco sujeito a uma carga constante aplicada de forma súbita . .	194
7.6	Equação de Mathieu não-linear . . . . .	197
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>201</b>
<b>9</b>	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>204</b>
<b>A</b>	<b>Programa em Maple: Lindsted Poincaré modificado - vibração forçada</b>	<b>212</b>
A.1	Rotinas do método da perturbação . . . . .	212
A.2	Equação de Duffing . . . . .	214
A.2.1	Resolve as equações . . . . .	216
A.2.2	Relação frequência-deslocamento . . . . .	219
A.2.3	Soluções . . . . .	219
A.2.4	Curva de ressonância . . . . .	220
<b>B</b>	<b>Programa em Maple: Método de Taylor - vibração livre</b>	<b>223</b>
B.1	Solução . . . . .	223
B.2	Relação frequência-amplitude . . . . .	224
B.3	Exemplo . . . . .	224

B.3.1	Verificação da solução: integração numérica. . . . .	225
B.3.2	Transformação da solução em série de Taylor em uma série de Fourier . . . . .	226
B.4	Transformação da solução em série de Taylor em uma solução de Lindstedt-Poincaré . . . . .	229
B.4.1	Determinação das constantes . . . . .	232

**C Programa em Maple: Fourier-Taylor - vibração forçada amortecida** **234**

C.1	Solução . . . . .	234
C.1.1	Transforma a solução em série de Taylor em uma série de Fourier . . . . .	235
C.1.2	Exemplo . . . . .	243
C.2	Exportação de arquivo para programa em C++ . . . . .	246
C.2.1	Escreve o arquivo . . . . .	247
C.2.2	Arquivo exportado . . . . .	250

## Lista de Figuras

1.1	Relação frequência-deslocamento inicial, eq. (1-1), sendo $\omega_0 = 1$ e $F(t) = 0$ . $\square$ , $\beta = 0$ ; $+$ , $\beta > 0$ ; $\diamond$ , $\beta < 0$ . . . . .	26
1.2	Oscilação livre não-amortecida, eq. (1-1), $\omega_0 = 1$ e $F(t) = 0$ . $\square$ , $x_0 = 1$ e $\beta = 0$ ; $+$ , $x_0 = 1$ e $\beta = 1$ ; $\diamond$ , $x_0 = 1,5$ e $\beta = 1$ . . . . .	26
1.3	Curvas de ressonância para diferentes valores de não-linearidade do problema (1-1). . . . .	27
1.4	Respostas caóticas. Condições iniciais: $\square$ , (1; 0); $+$ , (0, 99999; 0). (a) Instantes iniciais; (b) Intervalo de tempo mais distante do instante inicial. . . . .	28
1.5	$\ddot{x} + x + x^3 = 3 + F_1 \cos t$ : (a) Diagrama de Bifurcação; (b) Amplitude máxima. . . . .	29
1.6	Diagrama de Bifurcação em 3d. . . . .	29
2.1	Deformação de um segmento infinitesimal. . . . .	42
2.2	Viga plana sujeita a um carregamento transversal $q(x)$ e axial $P$	43
2.3	Não-linearidade da viga-coluna versus nível de carregamento. . . . .	49
3.1	Relação $\omega$ - $x_0$ . $\square$ , RK; $+$ , eq. (3-29); $\diamond$ , eq. (3-30); $\triangle$ , eq. (3-31). (a) Série convergente, $\omega_0 = \beta = 1$ ; (b) Série não convergente, $\omega_0 = \beta = 0,1$ . . . . .	60
3.2	Relação $\omega$ - $x_0$ . $\square$ , RK; $+$ , eq. (3-86); $\diamond$ , eq. (3-87). (a) $\omega_0 = \beta = 1$ ; (b) $\omega_0 = \beta = 0,1$ . . . . .	70
3.3	$\square$ , RK; $+$ , aproximação com 2 termos; $\diamond$ , aproximação com três termos. (a) versão 1 do método; (b) versão 2. . . . .	86
3.4	Curva de ressonância do problema $\ddot{x} + x + 0,1x^2 = \cos \Omega t$ . $\square$ , RK; $+$ , LP com 1 termo; $\diamond$ , dois termos; $\triangle$ , três termos. . . . .	94
3.5	Deslocamento inicial vs frequência da resposta. $\square$ , RK; $+$ , LP Modificado com dois termos; $\diamond$ , três termos. . . . .	96
3.6	LP modificado vs solução numérica do problema $\ddot{x} + x + 0,1x^2 = \cos \Omega t$ . $\square$ , RK; $+$ , 1 termo; $\diamond$ , dois termos; $\triangle$ , três termos. . . . .	97
3.7	Deslocamento inicial vs frequência: $\square$ , RK; $+$ , MMS com 2 termos; $\diamond$ , três termos. . . . .	100
4.1	$\omega$ vs deslocamento inicial, diversas soluções aproximadas. (a) Uma amplitude é escolhida para ser função das demais amplitudes, $c_i = f(x_0, c_j)$ para $i \neq j$ : $\square$ , $i = 1$ ; $+$ , $i = 2$ ; $\diamond$ , $i = 3$ ; $\triangle$ , $i = 4$ ; $\bigcirc$ , $i = 5$ . (b) Uma amplitude é escolhida como parâmetro de controle, $c_i = cte$ : $\square$ , $i = 1$ ; $+$ , $i = 2$ ; $\diamond$ , $i = 3$ ; $\triangle$ , $i = 4$ ; $\bigcirc$ , $i = 5$ . . . . .	105
5.1	Espaço de fase . . . . .	116
5.2	Relação entre um autovalor de $\Phi$ e um autovalor de $A$ . . . . .	118
5.3	Possibilidades de perda de estabilidade de uma solução periódica	119
6.1	Plano de fase: (a) com dupla simetria; (b) com uma única simetria	126
6.2	Convergência em $\tau$ das aproximações. $\square$ , RK; $+$ , Taylor com cinco termos (eq. (6-33)); $\diamond$ , Taylor com seis termos; $\bigcirc$ , Taylor com sete termos. . . . .	131
6.3	Curva correspondente a um erro inferior ou igual a 0,01%. . . . .	132

6.4	Soluções aproximadas, $\square$ , RK. (a) +, Taylor com cinco termos, eq. (6-35); $\diamond$ ; LP, solução obtida a partir da aproximação em série de Taylor com cinco termos, eq. (6-60); (b) +, Taylor com seis termos; $\diamond$ ; LP, solução obtida a partir da aproximação em série de Taylor com seis termos. . . . .	141
6.5	Variação do erro em $\delta$ obtidos com a aproximação em série (dezesesseis termos) e com a solução harmônica contruída a partir desta série (quinze harmônicos). . . . .	145
6.6	Solução no tempo do problema $x'' + x + 7,5x^3 = 0$ para as condições iniciais (1,0): $\square$ , RK; +, Taylor com cinco termos; $\diamond$ , série de Fourier com quatro harmônicos. . . . .	145
6.7	Plano de fase de um problema forçado amortecido e com não-linearidade ímpar. . . . .	149
6.8	Importância dos termos não-nulos da série de Taylor que representa $\cos \Omega t$ , avaliados em diferentes instantes de tempo: (a) $\square$ , instante $t = 0, 5T$ ; $\circ$ , $t = T$ ; (b) $t = 2T$ . . . . .	162
6.9	Soluções exata e aproximadas com diferentes números de harmônicos: $\square$ , RK; +, FT com dois harmônicos; $\diamond$ , FT com três harmônicos; $\circ$ , FT com quatro harmônicos; . . . . .	166
6.10	Resíduo causado por (6-134) para $\omega_0 = 1, 5$ , $\beta = 3$ e $x_0 = 2$ : $\square$ , $\omega$ dado por (6-135); +, $\omega$ dado por (6-146). . . . .	169
6.11	Resíduo da solução (6-152) para o problema $\ddot{x} + x + x^3 = 50 \cos 5t$ : $\square$ , $x_0$ dado por (6-158); +, $x_0$ obtido ao se considerar (6-159); $\diamond$ , $x_0$ obtido ao se considerar (6-160). . . . .	172
6.12	Curvas de ressonância do problema $\ddot{x} + x + x^3 = 50 \cos \Omega t$ : $\square$ , RK; +, HBM com três harmônicos; $\diamond$ , FTG com três harmônicos. . . . .	173
6.13	Variação da coordenada do ponto fixo do problema $\ddot{x} + 0, 2\dot{x} + x + 3x^3 = \cos \Omega t$ : $\square$ , RK; +, HBM com três pares de harmônicos; $\diamond$ , FTG com dois pares de harmônicos. . . . .	175
6.14	Problema $\ddot{x} + 0, 4\dot{x} + x + x^3 = 50 \cos \Omega t$ . $\square$ , RK; +, HBM com três pares de harmônicos; $\diamond$ , FT com 10 pares de harmônicos; (a) Curva $x_0 - \Omega$ ; (b) curva $v_0 - \Omega$ . . . . .	175
7.1	Simetria no campo de deslocamentos. $\square$ , $q = 1$ ; +, $q < 1$ ; $\diamond$ $q > 1$ . . . . .	179
7.2	Energia potencial. $\square$ , $q = 0$ ; +, $q = 0, 5$ ; $\diamond$ , $q = 1$ ; $\triangle$ , $q = 10$ . . . . .	179
7.3	Curva frequência-deslocamento inicial. $\square$ , RK; +, dois termos, eq. (7-5); $\diamond$ , quatro termos, eq. (7-7): (a) $\ddot{x} + \text{sgn}(x) x ^{4/3} = 0$ ; (b) $\ddot{x} + \text{sgn}(x) x ^{3/4} = 0$ . . . . .	182
7.4	Influência da não-linearidade para diferentes deslocamentos iniciais: $\square$ , RK e $x_0 = 2$ ; $\diamond$ , FT com sete harmônicos e $x_0 = 2$ ; +, RK e $x_0 = 0, 5$ ; $\triangle$ , FT com sete harmônicos e $x_0 = 0, 5$ . . . . .	184
7.5	Solução no tempo do problema $\ddot{x} + \text{sgn}(x) = 0$ : $\square$ , RK; +, eq. (7-11); $\diamond$ , eq. (7-17); $\triangle$ , eq. (7-18). . . . .	186
7.6	Curva frequência-deslocamento inicial do problema $\ddot{x} + \sin x = 0$ : $\square$ , RK; +, eq. (7-22); $\diamond$ , eq. (7-21); $\triangle$ , eq. (7-23). . . . .	188
7.7	Curva frequência- $g/l$ : $\square$ , RK e $\theta_0 = 85, 7^\circ$ ; +, Taylor com 5 termos; $\diamond$ , RK $\theta_0 = 5^\circ$ ; $\triangle$ , FT com cinco harmônicos. . . . .	189

7.8	Respostas no plano de fase do problema $\ddot{x} + \sin x = 0$ : (a) $\theta_0 = 86^\circ$ , $\square$ , RK; +, FT com cinco harmônicos; (b) $\theta_0 = 170^\circ$ , $\square$ , RK; +, FT com oito harmônicos; $\diamond$ , FT com doze harmônicos.	189
7.9	Pêndulo elíptico. . . . .	190
7.10	Curva $\omega_2$ - $\theta_0$ : (a) $m_A = 100$ $m_B = 1$ . $\square$ , RK - pêndulo 1gl; +, RK - pêndulo 2gl; $\diamond$ , FT com dois harmônicos. (b) $m_A = 1$ $m_B = 1$ . $\square$ , RK; +, FT com dois harmônicos, eq. (7-39); $\diamond$ , Taylor com três termos, eq. (7-35). . . . .	193
7.11	Solução no tempo da eq. (7-40) com os seguintes parâmetros: $x_0 = 2$ , $P = 69311, 51$ , $EI = 5672067$ , $q = 0$ e $m = 1$ . $\square$ , RK; +, aproximação com 3 termos; $\diamond$ , 5 termos; $\triangle$ , 7 termos. . . . .	194
7.12	Curva frequência-deslocamento inicial do problema (7-40) com os seguintes parâmetros: $P = 69311, 51$ , $EI = 5672067$ , $q = 0$ e $m = 1$ . $\square$ , RK; +, Taylor com três termos; $\diamond$ , Taylor com quatro termos; $\triangle$ , FT com três harmônicos. . . . .	195
7.13	Sistema idealizado com um grau de liberdade. . . . .	195
7.14	Respostas no plano fase: (a) $\square$ , $q = 0, 2$ ; +, $q = 0, 42$ ; (b) $q = 0, 6196$	
7.15	Curva frequência-carregamento. $\square$ , RK; +, eq. (7-46); $\diamond$ , Taylor com 5 termos; $\triangle$ , eq. (7-48). . . . .	198
7.16	Espaço de fase do problema $\ddot{\epsilon} + 0, 2\dot{\epsilon} + (1 + 9, 78519(\cos 2t)^2)\epsilon - (5, 41808 \cos 2t)\epsilon^2 + \epsilon^3 = 0$ . $\square$ , RK; +, FT com três pares de harmônicos; $\diamond$ , FT com cinco pares de harmônicos. . . . .	200

## Lista de Tabelas

6.1	Convergência da solução linear. . . . .	130
6.2	Convergência da solução não-linear para $b = 1$ . . . . .	130
6.3	Convergência da solução não-linear para $b = 1, 1$ . . . . .	131
6.4	Máximos valores do parâmetro de não-linearidade, $b$ , para que as aproximações apresentem um erro de aproximadamente 0,01% em $\delta$ . . . . .	132
6.5	Diferenças entre as amplitudes dos harmônicos da série de Fourier, obtida a partir da série de Taylor, e da solução obtida com o HBM. . . . .	144
6.6	Diferenças entre as amplitudes dos harmônicos da série de Fourier, obtida a partir da série de Taylor, e da solução obtida pelo HBM. . . . .	144
6.7	Convergência da série de Padé (solução linear).. . . . .	147
6.8	Convergência da série de Padé do problema não-linear, $b = 1$ . . . . .	147
6.9	Convergência da série de Padé, tendo um número variável de termos no numerador, do problema não-linear $b = 1$ . . . . .	148
6.10	Convergência da relação $f - \delta$ aproximada do problema linear não-amortecido. . . . .	153
6.11	Convergência da solução linear amortecida em $t = T/2$ do problema $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos 2t$ . . . . .	154
6.12	Convergência das coordenadas do ponto fixo da solução de $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos 2t$ . . . . .	155
6.13	Convergência da solução de $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos(2t + \phi)$ . . . . .	155
6.14	Convergência do deslocamento máximo e $\phi$ do problema $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos(2t + \phi)$ . . . . .	156
6.15	Convergência do instante $t$ que limita o erro da aproximação a menos de 0,01% do ponto fixo do problema $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$ . . . . .	156
6.16	Convergência do cálculo do ponto fixo do problema $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$ . . . . .	157
6.17	Convergência da solução do problema $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$ . . . . .	157
6.18	Convergência da solução do problema $\ddot{x} + x + 2,5x^3 = 2 \cos 2t$ . . . . .	157
6.19	Convergência da solução do problema $\ddot{x} + x + 0,8x^3 = 10 \cos 2t$ . . . . .	157
6.20	Convergência da solução não-linear amortecida, eqs. (6-83). . . . .	158
6.21	Convergência da solução não-linear amortecida, eqs. (6-86). . . . .	158
6.22	Comparação entre as amplitudes da solução obtida com o HBM e da solução em série de Fourier, obtida a partir da solução em série de Taylor. . . . .	160
7.1	Resultados obtidos com o método de Taylor para $x_0 = 1$ e diferentes não-linearidades e aproximações, comparados com os apresentados por Gottlieb [1]. . . . .	181
7.2	Resultados obtidos com o FT para diferentes aproximações tendo $x_0 = 1$ , comparados a solução exata. . . . .	183
7.3	Resultados obtidos com o método de Fourier Taylor e o erro em relação a solução exata, eq. (7-13). . . . .	186

## Lista de Símbolos

### Caracteres Romanos

- $A$  → Área, amplitude da resposta, matriz dos coeficientes
- $a$  → Amplitude da resposta, amplitude de harmônico
- $a_i$  → Coordenadas generalizadas, amplitude do harmônico  $i$
- $\overline{AB}$  → Segmento que une os pontos  $A$  e  $B$
- $\overline{AB}_x$  → Componente segundo  $x$  do segmento  $AB$
- $\overline{AB}_y$  → Componente segundo  $y$  do segmento  $AB$
- $\overline{A'B'}$  → Segmento que une os pontos  $A'$  e  $B'$
- $B$  → Amplitude da resposta
- $b$  → Amplitude de harmônico, parâmetro adimensional de não-linearidade cúbica
- $C_i$  → Constantes de integração
- $c_i$  → Amplitude dos harmônico  $i$ , parcela que compõe a amplitude de um harmônico
- $d_i$  → Amplitude dos harmônico  $i$ , parcela que compõe a amplitude de um harmônico
- $dx$  → Elemento infinitesimal segundo a direção  $x$
- $ds$  → Elemento infinitesimal  $dx$  após sofrer deformação e deslocamentos
- $d_x$  → Deslocamento segundo  $x$
- $d_y$  → Deslocamento segundo  $y$
- $d_x^A$  → Deslocamento segundo  $x$  do ponto  $A$

$d_y^A$	→ Deslocamento segundo $y$ do ponto $A$
$d_x^B$	→ Deslocamento segundo $x$ do ponto $B$
$d_y^B$	→ Deslocamento segundo $y$ do ponto $B$
$dU$	→ Energia interna de deformação de um elemento infinitesimal
$E$	→ Módulo de Young do material
$e_i$	→ Parcela que compõe a frequência da resposta
$EI$	→ Rigidez a flexão
$F$	→ Funcional, amplitude da excitação
$f$	→ Parâmetro adimensional de força
$F_0$	→ Parcela constante da excitação
$F_1$	→ Parcela variável da excitação
$g$	→ Constante gravitacional
$I$	→ Funcional
$i$	→ Componente imaginária
$L$	→ Lagrangiano
$l$	→ Comprimento da viga, comprimento do pêndulo
$m$	→ Massa
$P$	→ Carregamento axial, série de Padé
$P(t)$	→ Função periódica
$q$	→ Carregamento lateral, não-linearidade
$R$	→ Resíduo, matriz, raio de convergência
$T$	→ Período da resposta
$\bar{T}$	→ Energia cinética
$t$	→ Tempo
$T_i$	→ Escalas de tempo

$t_0$	→ Instante inicial
$U$	→ Energia interna de deformação da estrutura
$u$	→ Deslocamento
$u_0$	→ Imperfeição inicial
$V$	→ Potencial
$v$	→ Parâmetro adimensional de velocidade
$v_0$	→ Condição inicial de velocidade
$x, x(t)$	→ Deslocamento
$x_i(t)$	→ Função de deslocamento que compõe a resposta $x(t)$
$\dot{x}$	→ Velocidade
$x_0$	→ Condição inicial de deslocamento
$W, W_i$	→ Função peso
$w$	→ Deslocamento
$w_i$	→ Parcela que compõe a frequência da resposta
$w_0$	→ Imperfeição inicial
$X$	→ Matriz de soluções

### Caracteres Gregos

$\alpha$	→ Parâmetro de não-linearidade quadrática, numerador da não-linearidade fracionária
$\beta$	→ Parâmetro de não-linearidade cúbica, denominador da não-linearidade fracionária
$\Delta$	→ Deslocamento da carga $P$
$\delta$	→ Perturbação, relação entre as frequências ( $\omega/\omega_0$ )
$\delta^1$	→ Primeira variação do funcional
$\delta_w$	→ Variação de $w$

$\delta'_w$	→	Varição de $w'$
$\epsilon$	→	Deformação específica, perturbação
$\epsilon_0$	→	Deformação específica da linha neutra, perturbação inicial
$\Phi$	→	Matriz de transição
$\phi$	→	Ângulo de fase
$\phi(t)$	→	Função periódica
$\phi_i$	→	Modos naturais de vibração
$\phi_1$	→	Ângulo de fase
$\gamma$	→	Ângulo de fase
$\lambda$	→	Autovalor
$\varphi$	→	Resíduo
$\mu$	→	Expoente característico
$\Omega$	→	Frequência da excitação
$\omega$	→	Frequência da resposta
$\omega_0$	→	Frequência natural da equação linear
$\Pi$	→	Energia potencial total
$\theta$	→	Ângulo de rotação
$\theta_0$	→	Imperfeição inicial, ângulo inicial
$\rho$	→	Densidade
$\sigma$	→	Parâmetro de sintonia (do Inglês detuning parameter)
$\tau$	→	Tempo adimensionalizado
$\zeta$	→	Coefficiente de amortecimento

## Sobrescritos e Subscritos

$\Delta_{()}$   $\longrightarrow$  Variação

$()'$   $\longrightarrow$  Derivada em relação a  $x$ , derivada em relação a  $\tau$

$()_{max}$   $\longrightarrow$  Valor máximo

$()^*$   $\longrightarrow$  Coordenada de ponto fixo

## Siglas e Abreviaturas

*FT*  $\longrightarrow$  Método de Fourier-Taylor

*HBM*  $\longrightarrow$  Método do Balanço Harmônico (do inglês *harmonic balance method*)

*KBM*  $\longrightarrow$  Método de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski

*LP*  $\longrightarrow$  Método de Lindstedt-Poincaré

*MMS*  $\longrightarrow$  Método das Múltiplas Escalas (do inglês *method of multiple scales*)

# 1

## Introdução

Sistemas físicos são de natureza não-linear. Os problemas lineares são casos particulares dos não-lineares e, portanto, a aplicabilidade da solução nestes casos é limitada. Em engenharia, muitas vezes, essas condições particulares não se aplicam e o problema é então formulado para um caso mais geral, o que conduz a equações diferenciais não-lineares.

Em engenharia de estruturas, as não-linearidades podem ser de natureza física, quando o material não possui uma relação linear entre tensões e deformações, ou geométrica, quando o material se comporta linearmente mas os deslocamentos da estrutura não seguem uma lei linear. As não-linearidades podem ser de origem elásticas, inerciais, ou dissipativas e geralmente são aproximadas por polinômios que podem conter termos quadráticos e cúbicos ou de ordem superior.

Em estruturas sujeitas a grandes deslocamentos e pequenas deformações, geralmente apenas os efeitos da não-linearidade geométrica são considerados. No estudo do movimento de uma viga plana, por exemplo, se a discretização contemplar um único grau de liberdade e considerando certas simplificações, se chega a uma equação de movimento do tipo Duffing,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F(t) \quad (1-1)$$

Em vibrações, a análise da resposta permanente de sistemas sob a ação de cargas harmônicas recebe uma atenção especial. Sabe-se que sistemas não-lineares comportam-se diferentemente de sistemas lineares. Múltiplas soluções, pontos de bifurcação, onde a resposta qualitativamente sofre mudanças bruscas, respostas com período diferente ao da excitação, sensibilidade às condições iniciais, ressonâncias super e sub-harmônicas, são alguns dos fenômenos presentes em sistemas não-lineares que vêm sendo amplamente estudados nas últimas décadas.

Os fenômenos que ocorrem em sistemas não-lineares tornam-se mais fáceis de serem visualizados quando uma análise paramétrica é realizada. Na análise paramétrica um determinado parâmetro é escolhido como parâmetro

de controle. Geralmente adota-se a amplitude ou a frequência da excitação como parâmetros de controle, e os demais parâmetros do sistema são mantidos constantes enquanto que o parâmetro de controle é lentamente modificado. Isto fornece ao projetista um completo entendimento do que pode ocorrer com o sistema quando se varia determinado parâmetro. Se algumas propriedades do sistema forem utilizadas como parâmetro de controle, pode-se encontrar uma faixa segura em que a excitação, ao variar, não irá provocar uma resposta caótica ou com grandes deslocamentos. Sendo assim, a análise paramétrica busca revelar a faixa de valores que determinados parâmetros podem assumir, sem que o sistema apresente vibrações com amplitude excessiva ou sensibilidade às condições iniciais.

Segundo Ren (1995)[2], as análises paramétricas são comumente realizadas pela integração no tempo, que é menos atraente devido ao seu alto custo computacional. Para Lau e Yuen (1993)[3] a análise no tempo é ineficiente em estudos paramétricos e extremamente lenta para pequenos amortecimentos. Para Xu et. al. (2003)[4], ela consome muito tempo, principalmente quando a taxa de convergência é lenta.

Para uma equação diferencial não-linear, dificilmente é possível obter uma solução analítica exata. Segundo Mickens (1984)[5], exceto em casos especiais, soluções fechadas não existem. Geralmente, a única forma de obter a solução exata é através da integração numérica das equações diferenciais no tempo, mas apenas respostas estáveis são obtidas, e algoritmos especiais, tais como o método da continuação ([6],[7]), devem ser usados para se obter trajetórias instáveis.

Felizmente, existem vários métodos aproximados para resolver uma equação diferencial não-linear, que resultam em soluções analíticas aproximadas. Dispondo de uma solução analítica, a análise paramétrica torna-se mais simples e rápida. Segundo Lewandowski (1992)[8], os métodos mais populares são os métodos de perturbação e o método do Balanço Harmônico (Harmonic Balance Method - HBM). Dentre os métodos de perturbação pode-se considerar como mais populares os métodos de Lindstedt-Poincaré (LP), Krilov-Bogoliubov-Mitropolki (KBM) e Múltiplas Escalas (Method of Multiple Scales).

Uma outra razão para dar preferência a uma solução analítica frente a uma numérica é que, como mostrado por Tongue (1987)[9], uma escolha indevida do tamanho do passo de tempo na integração numérica pode conduzir a resultados espúrios. Através de mapas de Poincaré, Tongue mostra um exemplo em que o movimento pode ser erroneamente classificado como caótico quando se utiliza um determinado  $\Delta t$  e corretamente classificado como de período cinco quando se utiliza um  $\Delta t$  quatro vezes menor.

Apesar das vantagens dos métodos analíticos em relação aos métodos numéricos, eles não fornecem soluções caóticas ou quasi-periódicas, mas somente soluções periódicas.

O HBM é, sem dúvida, o método mais utilizado. Ele possui a forma mais simples de aplicação, e apresenta resultados precisos. Assim como no método de Galerkin-Urabe, escreve-se a solução permanente em uma série de Fourier. O único inconveniente é definir quantos termos são necessários para uma boa aproximação. Geralmente poucos termos são necessários. Porém, a quantidade de termos presentes altera qualitativamente a solução, como alertado por Leung (1991)[10]. De acordo com Leung (1990)[11], se um número insuficiente de harmônicos for utilizado, pode-se obter resultados incorretos, e, se um número excessivo for usado, o custo computacional é desnecessariamente aumentado. Leung afirma que o número de harmônicos presentes na solução aproximada deve atender a dois critérios: completabilidade e balanceabilidade. A condição de completabilidade obriga que todos os harmônicos da expansão de Fourier necessários sejam considerados. Assim, na análise de uma ressonância sub ou superharmônica de ordem  $p$ , a solução aproximada deve conter o termo constante e o  $p$ -ésimo harmônico, totalizando  $p + 1$  termos. A condição de balanceabilidade diz respeito à importância dos harmônicos não considerados. Como a solução encontrada é aproximada, ela produz um resíduo quando inserida na equação diferencial do problema. Os resíduos dos harmônicos não considerados devem ser pequenos.

Segundo Hassan e Barton (1995)[12], encontrar a “mistura” de harmônicos que conduz a resultados qualitativamente corretos é algo complicado. Quando poucos harmônicos são utilizados, as seguintes falhas, que também são apontadas por Rapp e Mees (1977)[13], podem ocorrer:

- falha por não prever a existência de certas soluções periódicas;
- falha por prever soluções periódicas que não existem;

Uma crítica que é feita ao HBM é que é necessário conhecer a priori quais harmônicos devem ser incluídos na análise. O conhecimento a priori dos harmônicos que deverão estar contidos na solução aproximada é fornecido pelas não-linearidades do problema, pela excitação, e pela presença ou não do amortecimento. Lau et. al.(1990)[14] apontam que, para encontrar uma solução satisfatória, o resíduo correspondente aos harmônicos utilizados deve ser estimado, mas também o resíduo correspondente aos harmônicos de mais alta ordem não incluídos deve ser controlado.

Lau et. al.(1983)[15] citam ainda que a formulação do HBM é muito tediosa se o sistema não-linear possuir muitos graus de liberdade e com

altos harmônicos sendo considerados. Segundo estes autores, uma alternativa para contornar estes problemas seria a formulação incremental do método do Balanço Harmônico (IHBM), que é mais simples e econômica porque apenas equações linearizadas são criadas e resolvidas em cada passo. Segundo Lau et. al.(1991)[16], sempre que houver necessidade de aumentar a precisão da solução, o sistema linearizado permite inserir mais harmônicos na aproximação em curso de uma forma bastante simples. Mas, segundo Ferri, [17], o IHBM é na verdade o HBM executado na ordem inversa. No HBM, a solução aproximada é inserida na equação diferencial e um sistema de equações algébricas não-lineares é obtido e resolvido, aplicando-se Newton-Raphson. No IHBM, o primeiro passo é a expansão da equação diferencial não-linear em séries de Taylor. Em seguida, os termos de mais alta ordem são desprezados e a solução aproximada é inserida na equação diferencial. Os harmônicos são coletados ou o método de Galerkin é aplicado para minimizar o resíduo. Assim, chega-se ao mesmo sistema linear que seria obtido ao se aplicar Newton-Raphson ao sistema não-linear obtido com o HBM.

Sistemas não-lineares sujeitos a cargas harmônicas podem apresentar diversas soluções estáveis para certos parâmetros. A resposta que o sistema irá apresentar depende das condições iniciais do problema. De acordo com Lewandoski (1997)[18], a parcela permanente dessas respostas pode ser harmônica, sub-harmônica, superharmônica, quase periódica ou caótica. Quando uma solução aproximada é encontrada, é necessário determinar sua estabilidade, pois os métodos aproximados, com exceção da integração numérica, fornecem tanto soluções estáveis quanto instáveis. Segundo Hassan (1996)[19], dependendo do grau de aproximação da solução aproximada, a análise da estabilidade pode conduzir a resultados incorretos ou interpretações erradas.

Para determinar a estabilidade de uma solução periódica, inicialmente aplica-se uma pequena perturbação a esta solução e em seguida a solução perturbada é inserida na equação não-linear do problema, o que conduz a uma nova equação, tendo agora como variável dependente a perturbação. Esta nova equação é linearizada para poder fazer uso da teoria de Floquet de sistemas lineares. Se a perturbação crescer exponencialmente ao longo do tempo, o sistema é instável. Se a perturbação tender a zero com o passar do tempo, então o sistema é assintoticamente estável. A equação diferencial linearizada apresenta coeficientes variáveis no tempo (equação de Hill). Transformando a equação de Hill em um sistema de equações de primeira ordem do tipo,

$$\dot{\delta} = A(t)\delta \quad (1-2)$$

Resolvendo o sistema (1-2) via integração numérica, ou por aplicação de qualquer método aproximado, para diferentes condições iniciais ortogonais, constrói-se uma matriz de soluções, cujos autovalores são chamados de multiplicadores de Floquet e identificam o comportamento da perturbação ao longo do tempo.

Vários autores já compararam métodos de soluções aproximados. Hamdan (2001)[20] comparou o MMS com o HBM. Ele mostra que o MMS falha para amplitudes relativamente pequenas nos casos de forte não-linearidade. Hassan (1995)[21] mostra que algumas soluções de segunda ordem determinadas pelo MMS na realidade não existem. Hamdam e Burton(1993)[22] apresentam duas deficiências dos métodos de perturbação em relação ao HBM. Uma delas é que os métodos de perturbação podem não convergir para certos valores dos parâmetros. Assim, adicionando mais termos à solução aproximada, pode-se piorar quantitativamente o resultado. A outra é que, ao adicionar mais termos à solução aproximada, o HBM acomoda mudanças qualitativas na resposta devido ao acoplamento das equações, enquanto que nos métodos de perturbação, o comportamento qualitativo das soluções de baixa ordem é mantido ao se adicionar mais termos.

Vários autores comentam que os métodos de perturbação só podem ser aplicados quando as não-linearidades são pequenas, [5, 3, 8, 12, 14, 22, 23, 4]. Porém, a definição de pequena não-linearidade não é algo simples, sendo preferível que estes métodos sejam evitados ou comparados com integração numérica, pois pode-se obter soluções quantitativamente e qualitativamente incorretas caso a não-linearidade seja na verdade uma não-linearidade moderada ou se a amplitude dos deslocamentos for relativamente grande. É preferível utilizar uma técnica geral e que apresente resultados precisos, tal como o HBM. Conforme Lau e Yuen (1993)[3], um engano comum é considerar a não-linearidade pequena quando de fato ela não é.

Os métodos mencionados anteriormente têm sido amplamente aplicados a análise de sistemas dinâmicos com não-linearidades quadráticas e cúbicas ([6], [24]). Entretanto, muitos sistemas físicos podem ser modelados de uma forma mais precisa por não-linearidades não-polinomiais, tais como não linearidades fracionárias e não-linearidades descritas por funções transcendentais tais como as funções trigonométricas e hiperbólicas. Entretanto, a aplicação dos métodos clássicos a estes sistemas é bastante complexa ([25], [1]), exigindo grande manipulação algébrica, ou mesmo impossível. Um dos objetivos desta tese é apresentar alguns métodos capazes de resolver esta classe de problemas.

## 1.1 Conceitos Básicos em Oscilações Não-Lineares

Uma equação diferencial e as condições iniciais associadas definem o que é chamado de problema de valor inicial (PVI). O número de condições iniciais necessárias para definir a unicidade da solução é igual à ordem da mais alta derivada presente na equação diferencial. Elas envolvem a função e suas  $(n - 1)$  primeiras derivadas.

Ao contrário de sistemas lineares, sistemas não lineares geralmente não apresentam soluções analíticas exatas. O método aproximado mais utilizado para se resolver equações diferenciais não-lineares ainda é a integração numérica devido a sua precisão. Na integração numérica, cada PVI é resolvido separadamente ao se integrar as equações diferenciais numericamente no domínio do tempo. A integração numérica é realizada atribuindo-se um valor pequeno para o passo de tempo e novas configurações de deslocamento e velocidade são obtidas ao final de cada passo de tempo.

A não-linearidade mais simples é a cúbica, presente na equação de Duffing, (1-1). A presença do parâmetro  $\beta$  faz com que o sistema mude sua frequência natural em função da amplitude dos deslocamentos. Em problemas lineares, a frequência natural é uma característica do sistema, mas em problemas não-lineares ela depende da amplitude dos deslocamentos e do tipo de não-linearidade. A figura 1.1 exibe a relação entre a frequência da resposta e o deslocamento inicial para diferentes valores do parâmetro não-linear  $\beta$  em (1-1). É possível observar que, quando o parâmetro de não-linearidade é negativo, um acréscimo no deslocamento produz um decréscimo na frequência da resposta, conseqüentemente diz-se que ocorre uma diminuição na rigidez do sistema. Quando  $\beta$  é positivo, há um ganho no valor da rigidez e o conseqüente aumento na frequência natural toda vez que o deslocamento cresce.

O mesmo fenômeno é ilustrado na figura 1.2, onde pode-se observar, através da resposta no tempo, a diminuição no período da resposta à medida em que crescem o parâmetro de não-linearidade e a condição inicial de deslocamento.

Como a resposta no tempo de um sistema não-linear sob vibração livre não pode ser representada por um único harmônico, mas sim, por uma série de Fourier que contém infinitos harmônicos, é de se esperar que em sistemas forçados pouco amortecidos, a curva de ressonância apresente diversos picos, pois a frequência da excitação pode ser igual a qualquer múltiplo de frequência presente na série de Fourier da resposta em vibração livre. Vale lembrar que no caso linear, só há um pico na curva de ressonância, que acontece quando

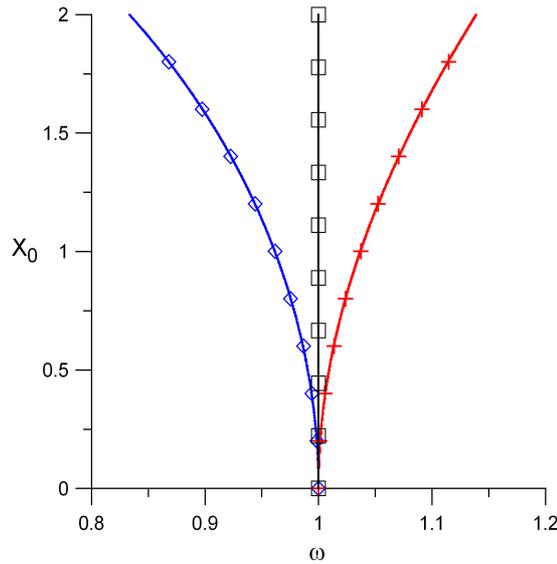


Figura 1.1: Relação frequência-deslocamento inicial, eq. (1-1), sendo  $\omega_0 = 1$  e  $F(t) = 0$ .  $\square$ ,  $\beta = 0$ ;  $+$ ,  $\beta > 0$ ;  $\diamond$ ,  $\beta < 0$ .

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0310919/CB

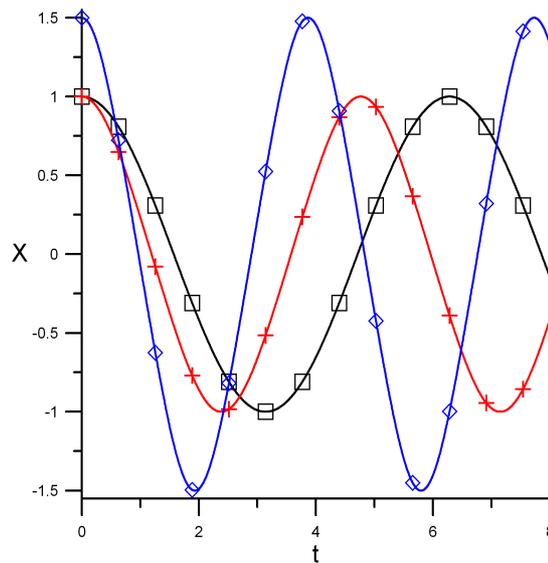


Figura 1.2: Oscilação livre não-amortecida, eq. (1-1),  $\omega_0 = 1$  e  $F(t) = 0$ .  $\square$ ,  $x_0 = 1$  e  $\beta = 0$ ;  $+$ ,  $x_0 = 1$  e  $\beta = 1$ ;  $\diamond$ ,  $x_0 = 1,5$  e  $\beta = 1$ .

há igualdade entre as frequências excitadora e fundamental.

Na análise de sistemas não-lineares forçados, a curva de ressonância sofre um dobramento, fazendo com que seja possível se ter mais de uma solução para determinados parâmetros. Além disso, a ausência de amortecimento não implica em deslocamentos infinitos para frequências de excitação bem próximas à frequência natural. Considerando a equação de Duffing forçada, eq. (1-1), um  $\beta$  positivo provoca um comportamento do tipo hardening, em que há ganho de rigidez com o aumento dos deslocamentos, e  $\beta$  negativo faz com o sistema

perca rigidez à medida que os deslocamentos aumentam (softening), ou seja, é o mesmo comportamento do problema de vibração livre. Isto ocorre porque a excitação é, na verdade, uma perturbação imposta à solução livre. Portanto, a solução forçada deve ficar próxima à solução livre, como mostra a figura 1.3, onde três curvas de ressonância são apresentadas. Para os casos não-lineares, as respectivas soluções em vibração livre são exibidas em linha tracejada.

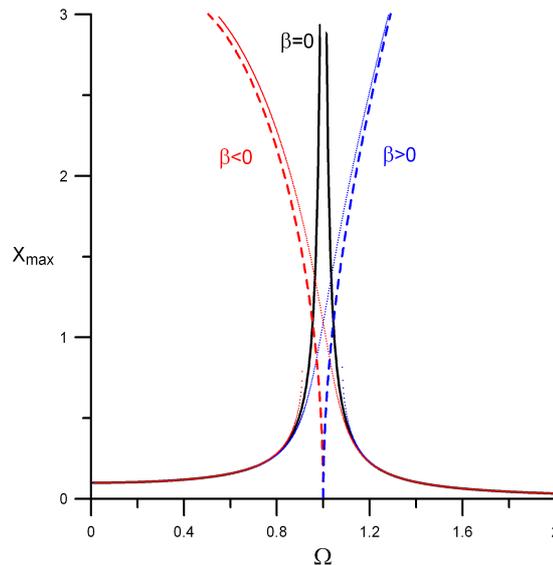


Figura 1.3: Curvas de ressonância para diferentes valores de não-linearidade do problema (1-1).

Uma ferramenta muito importante numa análise temporal foi desenvolvida por Henry Poincaré. Chamada de mapeamento de Poincaré, ela mostra o fluxo da solução no espaço de fase. Esta técnica consiste em verificar a posição e velocidade dos  $n$  graus de liberdade em intervalos de tempo igualmente espaçados. O intervalo de tempo corresponde ao período da excitação ou então a um múltiplo dela.

O número de pontos no mapa de Poincaré da solução permanente de um sistema forçado revela a periodicidade da resposta. Quando os pontos presentes no mapa de Poincaré se repetem, eles são chamados de pontos fixos e a resposta é periódica, quando há um número infinito deles, a resposta pode ser caótica ou quase-periódica.

Caos é o nome dado ao tipo de comportamento que alguns sistemas determinísticos não-lineares podem apresentar. Sistemas desse tipo apresentam uma grande sensibilidade a mudanças nas condições iniciais. Visto que erros em medições do estado inicial de um sistema sempre podem ocorrer, a previsibilidade destes sistemas é muito difícil. A figura 1.4 exhibe um caso de sensibilidade às condições iniciais, onde a diferença entre as condições iniciais é  $1e-5$  no deslocamento.

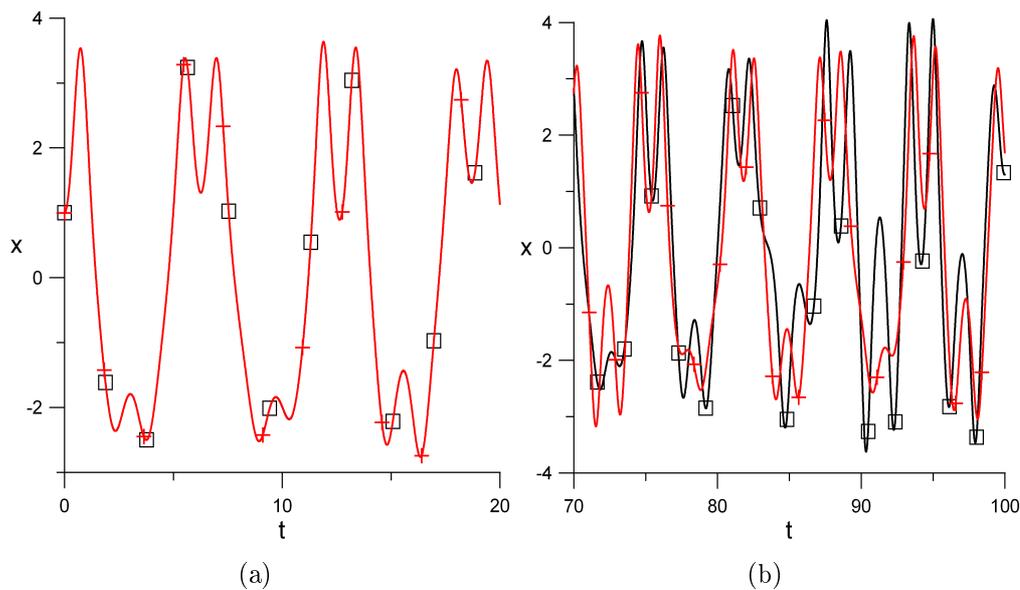


Figura 1.4: Respostas caóticas. Condições iniciais: □, (1;0); +, (0,99999;0). (a) Instantes iniciais; (b) Intervalo de tempo mais distante do instante inicial.

O mapeamento de Poincaré obtido por integração numérica fornece apenas os pontos fixos associados às trajetórias estáveis, já que as trajetórias instáveis não são soluções possíveis na integração numérica. Como mostrado por Gonçalves e Machado (1995)[26], através de um mapeamento do espaço de condições iniciais associado ao método de Newton-Raphson e integração numérica, é possível obter os pontos fixos associados a trajetórias estáveis e instáveis. Os pontos fixos instáveis são importantes pois suas variedades estáveis definem as fronteiras das bacias de atração das respostas estáveis. A classificação da estabilidade de um ponto fixo pode ser feita utilizando integração numérica: se um possível ponto fixo estável for tomado como condição inicial, após um certo número de períodos, a resposta deve retornar a este mesmo ponto, caso contrário o ponto fixo é na verdade instável.

A medida que um parâmetro do problema é variado, mudanças qualitativas no comportamento do sistema podem ocorrer. Quando isto acontece diz-se que o sistema sofreu uma bifurcação. Se o parâmetro de controle for a amplitude do carregamento, por exemplo, o valor da carga que faz o sistema atingir o ponto de bifurcação é chamado de carga crítica dinâmica. A figura 1.5(a) apresenta um diagrama de bifurcação, onde o eixo vertical contém a coordenada de deslocamento do ponto fixo, tal como apresentado por Van Dooren e Janssen(1996)[27], enquanto que na figura 1.5(b) têm-se a amplitude máxima dos deslocamentos. A figura 1.6 exhibe o diagrama de bifurcação em 3d, o que dá uma idéia de como ocorre a variação da posição dos pontos fixos no mapa de Poincaré.

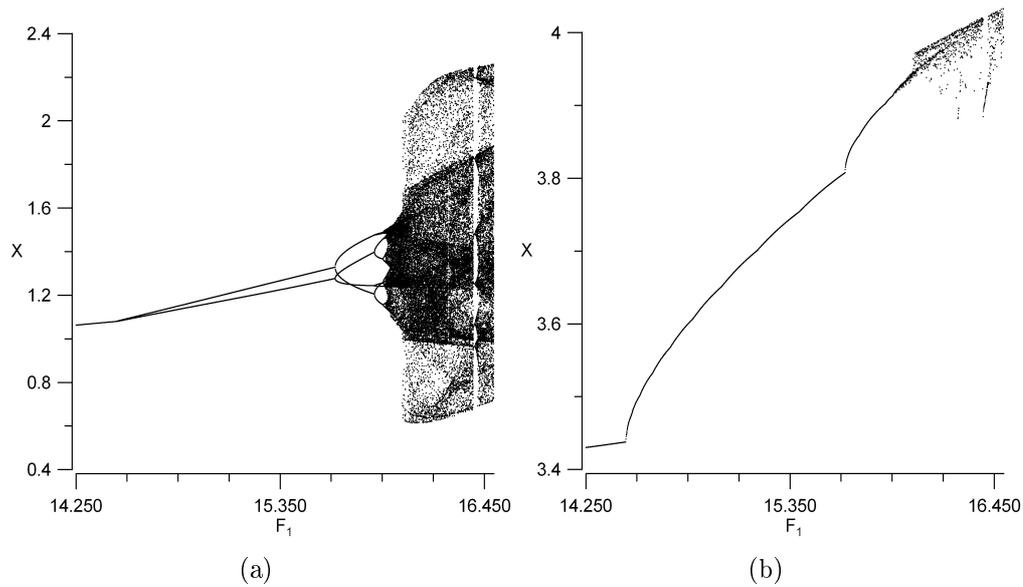


Figura 1.5:  $\ddot{x} + x + x^3 = 3 + F_1 \cos t$ : (a) Diagrama de Bifurcação; (b) Amplitude máxima.

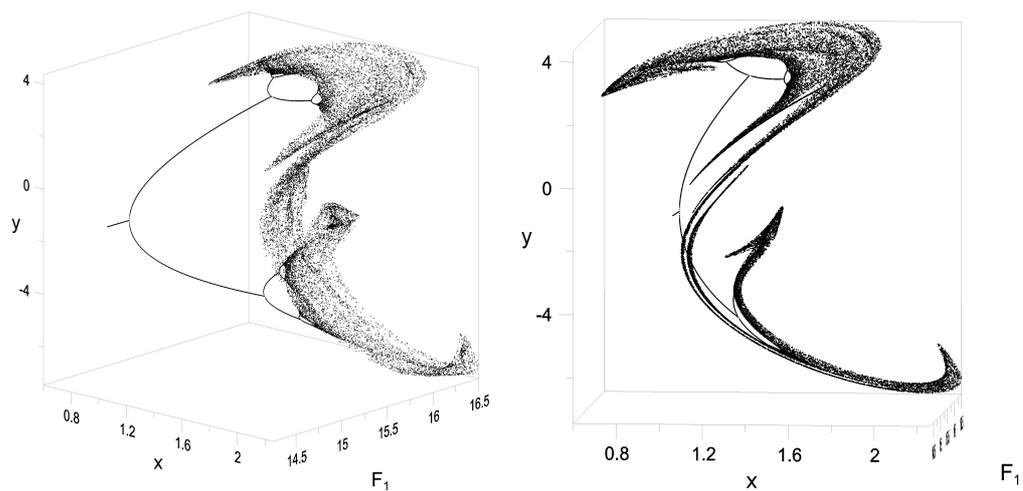


Figura 1.6: Diagrama de Bifurcação em 3d.

## 1.2 Objetivos

No estudo de oscilações não-lineares de sistema dinâmicos descritos por equações diferenciais ordinárias no tempo, ou se obtém uma resposta por integração direta das equações diferenciais, ou se usam métodos aproximados que permitam obter soluções analíticas para as equações de movimento.

O objetivo deste trabalho é o de comparar os métodos aproximados mais utilizados e propor duas novas metodologias para análise de sistemas dinâmicos não-lineares que permitem a análise de sistemas com não-linearidades mais

gerais, diferentemente dos métodos clássicos que são preferencialmente utilizados nas análises de sistemas com não-linearidades polinomiais. Para comparar os métodos aproximados, tomou-se a equação de Duffing por ser esta, muito utilizada para representar de forma aproximada estruturas tais como pórticos, vigas, arcos, placas, etc.

Como um segundo objetivo deste trabalho, tem-se a automação dos métodos clássicos mais utilizados, o que permite obter aproximações de ordem elevada para problemas que apresentem um alto grau de não-linearidade. De forma um pouco diferente da automação em álgebra simbólica em Maple apresentada por Nayfeh e Chin (1999), [28], alguns dos métodos automatizados em Maple possuem a finalidade de gerar um arquivo de saída em linguagem C++, para que a solução do problema faça parte de um programa independente que faz a análise paramétrica a partir de um arquivo de entrada de dados. Assim, nos programas em Maple os únicos dados de entrada são a equação e a ordem da solução desejada, enquanto que nos programas em C++ os dados são os valores dos parâmetros e a faixa de valores e o incrementos dos parâmetros que serão variados na análise. No anexo A tem-se a automatização do método de Lindsted-Poincaré modificado.

### 1.3

#### Novos Métodos Propostos

No primeiro método proposto, a solução aproximada da equação de movimento é escrita em um série de potências de  $t$ . Os coeficientes da série são determinados igualando as derivadas da solução em série, avaliadas no instante inicial, com a solução exata desconhecida e suas derivadas, também avaliadas no instante inicial. Isto faz com que a solução em série de potências assuma a forma da série de Taylor da solução exata, com centro em torno do instante inicial, onde os dois primeiros coeficientes são as condições iniciais do problema. Os demais termos da série contém derivadas de mais alta ordem da solução, que são obtidas a partir da equação diferencial.

À medida que mais termos são adicionados à série, maior é o intervalo de tempo em que a aproximação e a solução exata são coincidentes, pois após um determinado instante, as potências de  $t$  presentes na solução em série fazem com que a aproximação divirja. Se a solução em série possuir um número de termos que garanta a convergência dentro de um intervalo, no mínimo, igual ao período da solução exata, então se pode utilizar a solução em série para escrever que as condições iniciais de deslocamento e velocidade se repetem

após um período de tempo  $T$ , ou seja,

$$x(0) = x(T)$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(T)$$

permitindo se determinar a frequência da resposta, no caso de vibração livre, ou, no caso de vibração forçada, as coordenadas do ponto fixo, associado ao instante inicial, da solução periódica.

Geralmente as energias cinética e potencial, utilizadas para se escrever as equações de movimento, apresentam alguma simetria. Esta simetria é refletida no espaço de fase da solução, o que permite se avaliar as soluções em série em instantes menores que  $T$ , o que aumenta a precisão dos resultados obtidos para a frequência da resposta, no caso de vibração livre, e coordenadas do ponto fixo, no caso de vibração forçada, além do que, diminui o número de termos necessários na série, já que não é mais necessário que a solução em série seja coincidente com a solução exata ao menos durante um período da resposta.

No segundo método, a solução aproximada é escrita em série de Fourier e as equações são obtidas da mesma forma com que são obtidas as equações utilizadas para determinar os coeficientes da série de potências do primeiro método. Isto é, a solução exata desconhecida e suas primeiras derivadas, avaliadas no instante inicial, são igualadas com a solução aproximada e suas primeiras derivadas, também avaliadas no instante inicial. As  $n$  primeiras equações são utilizadas para escrever um sistema linear que fornece as  $n$  amplitudes dos harmônicos. A frequência da resposta, no caso de vibração livre, ou as coordenadas do ponto fixo, no caso de vibração forçada, são obtidas resolvendo as equações restantes, isto é, a partir da equação  $n + 1$  em diante. Estas equações adicionais também são não-lineares e por isso são resolvidas iterativamente.

## 1.4

### Histórico

Nesta seção apresenta-se um histórico das pesquisas em métodos de soluções analíticas para sistemas não-lineares com ênfase nas contribuições que foram consultadas durante este trabalho.

Os métodos aproximados permitem obter soluções analíticas para as equações de movimento que podem ser usadas com eficiência em uma análise paramétrica. Quanto aos métodos aproximados, temos basicamente duas grandes famílias: (1) os métodos de perturbação, tais como o MMS, LP, KBM,

dentre outros, e (2) métodos que independem de um parâmetro de perturbação, como, por exemplo, o HBM e de Galerkin-Urabe.

Segundo Sanchez (1996)[29], os primeiros esforços para determinação de uma solução analítica para uma equação não linear foram feitos por Euler em 1772, descritos em um trabalho de 775 páginas sobre o movimento lunar ( $\beta_0$ ). Ele expandiu as coordenadas da lua numa série de potências de excentricidades da órbita da lua em torno do sol e da inclinação de sua órbita ( $\beta_1$ ).

Segundo Hagedorn(1984)[32], foi na mecânica celeste onde os métodos de perturbação foram utilizados pela primeira vez. As soluções continham termos que cresciam indefinidamente com o tempo, e esses termos passaram a ser chamados de termos seculares. Giorgilli (1998)[33] comenta que os termos que possuem coeficientes  $t, t^2, \dots$ , são tradicionalmente chamados de termos seculares porque nos movimentos dos planetas eles corresponderiam às diferenças das órbitas e da posição dos eixos, que são observados pela medição ao longo de alguns poucos séculos, em relação à teoria de Kepler. Em 1882, o astrônomo Lindstedt desenvolveu uma técnica que evitava o surgimento de termos seculares na solução. Ele percebeu que a frequência do sistema era afetada pela amplitude do movimento e então resolveu escrevê-la em um série de potências da perturbação. Mais tarde, Poincaré (1892) provou que a expansão obtida por Lindstedt era assintótica e hoje o método geralmente é chamado de Lindstedt-Poincaré. Segundo Nayfeh (1973)[34], Bohlin (1889) e Gylden (1893) também desenvolveram técnicas para evitar o surgimento de termos seculares.

Segundo Roy (1994)[35], o método devido a Krylov e Bogoliubov é na verdade, a forma moderna do método da média (Averaging Method). De acordo com Nayfeh [34], Krylov e Bogoliubov desenvolveram a técnica em 1947. Ela foi depois ampliada por Bogoliubov e Mitropolski em 1961 e estendida a soluções não estacionárias por Mitropolski em 1965, desde então o método é chamado de Krylov-Bogoliubov-Mitropolski (KBM).

O MMS [34, 36, 29] surgiu durante a década de 60. Nayfeh tem contribuição destacada no desenvolvimento do método. Em um de seus livros sobre métodos de perturbação (vide [34]), ele faz um apanhado contendo inúmeros problemas que foram tratados com o MMS. Hassan (1997)[37] mostra que os resultados obtidos pelo KBM e o MMS são idênticos para qualquer ordem de aproximação. Ele dá preferência ao KBM, por apresentar algumas vantagens na manipulação algébrica.

Urabe e Retter (1966)[38] apresentam vários exemplos numéricos resolvidos com o método hoje denominado Galerkin-Urabe. Eles afirmam que aproximações com 15 a 20 termos apresentam resultados suficientemente precisos e de-

envolvem um método para estimar o erro da solução aproximada. Utilizando a equação de Van Der Pol harmonicamente forçada, eles mostram que, para certos valores dos parâmetros, a primeira aproximação dada pelos métodos de perturbação não apresenta bons resultados mesmo para a determinação da existência e estabilidade da solução periódica.

Rapp e Mees em 1977[13] apresentam um exemplo em que o HBM apresenta soluções espúrias. Eles apontam que o HBM é provavelmente a técnica mais utilizada no estudo do comportamento de ciclos limites e também são citados alguns exemplos, de décadas anteriores, em que o HBM falha por não prever a existência de soluções periódicas.

Nayfeh (1983)[39] estudou a resposta de uma equação que governa um problema de uma bolha de gás imersa em um líquido, sujeita a um campo de som harmônico. A equação possui não-linearidades quadráticas e cúbicas. Utilizando uma aproximação de segunda ordem no MMS, ele encontra as soluções permanentes corretas e determina sua estabilidade.

Atadan e Huseyin (1984)[40] apresentaram um método de análise que é um misto de perturbação e balanço harmônico. A solução é escrita como um somatório de harmônicos em que a frequência e a amplitude são funções de um parâmetro de perturbação. Os autores afirmam que, com o método, evita-se o perigo de omitir qualquer contribuição importante dos vários harmônicos de uma aproximação e, para comprovar a eficiência do método, utilizam um exemplo bem conhecido em que a solução da equação de Duffing com não-linearidades quadrática e cúbica é inicialmente considerada como tendo um único harmônico.

Bajkowski e Szemplinska-Stupnicka (1986), [41], estudaram em sistemas de dois graus de liberdade os efeitos da ressonância interna, segunda frequência natural de vibração sendo três vezes maior que a primeira frequência natural ( $\omega_2 = 3\omega_1$ ). Foram utilizados o método da média e o método de Ritz. Eles mostram que o método da média falha ao prever o comportamento do sistema, enquanto que o método de Ritz produz resultados precisos.

Bajkowski e Szemplinska-Stupnicka (1986), [42], estudaram respostas caóticas da equação de Duffing amortecida e com não-linearidades quadráticas e cúbicas. Eles mostram que o movimento caótico aparece na vizinhança da região próxima ao limite de estabilidade da primeira ressonância subharmônica. Eles utilizaram o HBM com um número mínimo de harmônicos na expansão.

Nayfeh e Zavodney (1986)[43] utilizaram o MMS para construir uma expansão de primeira ordem de um sistema de dois graus de liberdade com não-linearidades quadráticas. Eles estudaram a ressonância interna nos casos em que a segunda frequência natural é duas vezes maior que a primeira frequência

natural, sendo que a frequência da excitação era dada pela soma das duas frequências naturais e também igual a primeira frequência. Eles mostram que os resultados descrevem qualitativamente a resposta exata para os parâmetros escolhidos, porém quantitativamente ocorre um erro de 66% na amplitude do deslocamento da segunda coordenada.

Leung e Fung (1989)[44] aplicaram o IHBm para obter regiões caóticas. A estabilidade das soluções foi determinada através da aplicação da teoria de Floquet e os diagramas de bifurcação foram obtidos descartando-se os ramos instáveis. As regiões caóticas foram então determinadas como sendo os trechos com ausência de soluções periódicas estáveis de alto grau. O movimento caótico destas regiões foi então confirmado pela integração numérica. Uma vantagem de utilizar o critério da estabilidade das soluções periódicas obtidas pelo HBM para definir as regiões caóticas é que, como mostrado por Tongue (1987)[9], uma escolha indevida de um passo de tempo na integração numérica pode conduzir a resultados espúrios com respeito a existência ou não de soluções caóticas.

Nayfeh et. al. (1989)[45] estudaram a equação de Duffing com não-linearidades quadráticas e cúbicas. Uma expansão de segunda ordem foi utilizada e levou ao mesmo número de soluções estáveis obtidas por integração numérica. Como observado por eles, as soluções aproximadas tornavam-se mais imprecisas a medida em que se aumentava a não-linearidade.

Laurence e Cartee (1990)[46] estudaram o escape de um vale potencial da equação de Duffing com não-linearidade cúbica. Eles compararam os resultados dos métodos aproximados: MMS (aproximação de segunda ordem) e do HBM (aproximação de primeira ordem). Eles afirmam que, para propostas práticas, a solução contendo apenas um único harmônico no HBM conduz a uma boa estimativa do valor do parâmetro que causará o escape.

Lau et. al.(1990), [14], aplicaram o IHBm a sistemas tipo Duffing com não-linearidades cúbicas. Um método incremental de comprimento de arco foi utilizado para traçar as curvas de respostas automaticamente e a estabilidade das soluções periódicas encontradas foram determinadas através do método de Hsu.

Lau et. al.(1991)[16] analisaram um sistema de um grau de liberdade sujeito a uma excitação periódica com o IHBm. Todas as possíveis ressonâncias harmônicas, subharmônicas e superharmônicas foram encontradas. Os pontos de bifurcação também são encontrados e os resultados são comparados com a literatura.

Lewandowski (1992)[8] combinou elementos finitos e o HBM. Ele apresenta uma formulação baseada no Lagrangiano total para o comportamento elástico

de um elemento sujeito a grandes deslocamentos e pequenas deformações. As equações de movimento são obtidas seguindo a metodologia usual do Método dos Elementos Finitos e a solução no tempo é assumida ser uma série de Fourier. Então aplica-se o HBM para se obter o sistema de equações não-lineares. As potências e produtos trigonométricos são transformados em somatórios de harmônicos.

Hamdan e Burton (1993), [22], utilizaram o HBM para estudar as respostas permanentes de um oscilador de Duffing. Através de diagramas de bifurcação, eles demonstram que assumir a solução aproximada com dois harmônicos produz resultados qualitativamente diferentes dos obtidos com uma solução contendo um único harmônico. Eles também comparam os resultados numéricos e da solução com dois harmônicos com a solução de segunda ordem dada pelo MMS modificado, apresentado por Burton e Rahman [47]. Eles afirmam que o MMS diverge do verdadeiro comportamento da resposta, e, além disso, apresenta resultados piores que os dados pela aproximação de primeira ordem deste mesmo método.

Hassan (1995)[21] comparou as aproximações de primeira e segunda ordem dadas pelo MMS e o método da expansão da frequência amortecida. Ele mostra que ambos os métodos apresentam soluções estranhas para a expansão de segunda ordem. Hassan ainda afirma que a razão pela qual o HBM apresenta resultados mais precisos para uma região bem maior dos parâmetros é que, ao se aumentar o número de termos, corrige-se automaticamente a contribuição dos termos de mais baixa ordem. Isto não ocorre nos métodos de perturbação, onde ao aumentar a ordem da solução, somente adiciona-se mais um termo à solução, sem alterar os termos já existentes.

Hassan e Barton (1995)[12] apresentam um exemplo em que algumas soluções periódicas existentes não são previstas pelo HBM, enquanto que algumas soluções previstas na realidade não existem. Eles afirmam que os resíduos dos harmônicos de ordem mais alta podem ser usados para estimar a importância dos harmônicos omitidos. Entretanto, isto é de pouca ou nenhuma ajuda quando deseja-se detectar uma falha qualitativa da aproximação. Portanto eles recomendam que, para evitar resultados errôneos, deve-se comparar com resultados numéricos ou aumentar a ordem da aproximação.

Sarma (1995)[48] estudou os casos de vibrações livres da equação de Duffing com não-linearidades quadráticas e cúbicas. Ele comparou os resultados obtidos com LP e HBM com os resultados provenientes de integração numérica. Ele comenta que, em todos os casos analisados, o HBM com quatro termos apresenta resultados muito próximos da solução exata e que a técnica de LP é trabalhosa e pode ser aplicada apenas para pequenas amplitudes.

Ao invés de utilizar funções trigonométricas como solução aproximada, alguns métodos utilizam funções elípticas. Chen e Cheung (1996)[49] citam o método do Balanço Harmônico elíptico, o Krylov-Bogoliubov elíptico, o Averaging elíptico, e o Galerkin elíptico. A maioria destes métodos dão apenas aproximações de primeira ordem e, para grandes amplitudes, podem produzir erros inaceitáveis. Chen e Cheung apresentam um método que usa funções elípticas Jacobianas. As soluções aproximadas são comparadas com a integração no tempo e com alguns outros métodos elípticos. Como o método proposto pode dar aproximações de segunda ordem, os resultados acabam sendo melhores que as aproximações de primeira ordem dos outros métodos.

Lewandowski (1997), [18], mostra uma formulação geral para análise de estruturas com não-linearidades geométricas sujeitas a carregamentos harmônicos. É mostrada a equivalência dos métodos de Galerkin, Ritz e Balanço Harmônico na montagem do sistema não-linear de equações, o que conduz a idênticas soluções quando os mesmos harmônicos são tomados na solução aproximada.

Blair et. al. (1997)[50] utilizaram Newton-Raphson com comprimento de arco para resolver o sistema algébrico não-linear obtido pelo HBM. Em seguida, a análise de Floquet foi utilizada para determinar a estabilidade da resposta. O método do comprimento de arco consiste em adicionar mais uma equação ao problema. Assim, para certos conjuntos de parâmetros em que o sistema original não converge, o parâmetro de controle passa a ser incógnita no sistema com a equação adicional (comprimento de arco) e é possível encontrar uma solução.

Franciosi e Tomasiello (1998)[51] apresentam um código automatizado no programa Mathematica que utiliza o LP modificado proposto por Chen e Cheung[52] para tratar problemas de dois graus de liberdade com não-linearidades cúbicas. Os exemplos numéricos comparados com outros resultados da literatura apresentaram bons resultados.

Khanin et. al. (2000)[53] apresentam uma implementação computacional geral do MMS usando o programa Mathematica.

Andrianov e Awrejcewicz (2000)[54] estudaram a equação de Duffing em vibração livre. Eles compararam resultados numéricos com os dados por Nayfeh [34], para o MMS e para o LP. Eles afirmam que o acréscimo no número de termos da aproximação pode levar a um decréscimo na precisão da resposta. Segundo Amore et al (2004)[55], métodos de perturbação freqüentemente conduzem a séries assintoticamente divergentes.

Inúmeras modificações nos métodos clássicos, visando melhorar quantitativamente os resultados têm sido propostas. Hu (2004)[56] atenta para o fato de

que já existe um método de perturbação clássico que é válido para grandes não-linearidades (LP Modificado). Ele compara os resultados deste método com dois outros métodos propostos e com a solução exata na análise da equação de Duffing não amortecida e com apenas não-linearidade cúbica. O método apresentado por Hu é o que produz os melhores resultados.

Recentemente Mickens (2001)[57] estudou o problema de vibração livre com não-linearidade fracionária. Após isolar o termo que apresenta não-linearidade fracionária na equação diferencial, Mickens elevou ambos os lados da equação a uma potência de forma que a potência fracionária passa a ter valor unitário e então ele aplicou o HBM com um único harmônico na solução aproximada e obteve uma solução analítica geral para a relação frequência-deslocamento inicial para não-linearidades fracionárias onde ambos, numerador e denominador, são ímpares.

Através do HBM, Gottlieb (2003)[1] obteve uma solução de primeira ordem sem a manipulação prévia da equação diferencial realizada por Mickens, que, como mostrado por Gottlieb, altera o balanço dos harmônicos, piorando os resultados. Na solução obtida por Gottlieb, a frequência é dada em termos de uma função Gamma e obtém-se resultados mais precisos que a solução obtida por Mickens. Entretanto, se mais harmônicos são adicionados à aproximação da equação manipulada conforme Mickens, melhores resultados são obtidos, como mostrado por Mickens (2002)[58] na aproximação contendo dois harmônicos.

He (1999)[59] apresentou um novo método de perturbação baseado na técnica de Homotopia. A técnica da homotopia é originalmente utilizada na resolução de sistemas algébricos não-lineares, que podem apresentar múltiplas soluções e divergem rapidamente dependendo das condições iniciais. A dificuldade na convergência que pode ocorrer com certas condições iniciais é contornada com a técnica da homotopia. O procedimento consiste de inserir no problema um novo parâmetro,  $\lambda$ , que varia de 0 a 1, sendo que para  $\lambda = 0$  tem-se um sistema simples, de fácil resolução e para  $\lambda = 1$  tem-se o sistema original para qual deseja-se encontrar a solução. O parâmetro  $\lambda$  é então variado lentamente de 0 a 1 e para cada valor de  $\lambda$  a solução é obtida. Quando  $\lambda = 1$ , tem-se a solução desejada.

No método de He, chamado de Homotopy Perturbation Method (HPM), um novo parâmetro  $p$ , que por definição varia de 0 a 1, é inserido no problema e escreve-se a função de homotopia. Quando  $p = 0$ , tem-se o problema linear, e quando  $p = 1$  tem-se o problema não-linear original. Em seguida, a solução é escrita como uma série de potências de  $p$ , e substituída na função de homotopia. Os termos de mesma potência em  $p$  são coletados e um sistema linear de equações diferenciais é obtido. O parâmetro  $p$  é feito igual a 1 e então tem-se

a solução desejada. Para um oscilador tipo Duffing, He (1999), [59], utilizou apenas uma solução de primeira ordem e determinou a frequência da resposta ao igualar a zero os coeficientes de  $\cos t$  da segunda equação, o que impede o aparecimento de termos seculares na próxima iteração. Ele mostra que a aproximação para a frequência da resposta apresenta um erro menor de 5,4% para qualquer valor de não-linearidade.

Como apontado por He (2004), [60], soluções de alta ordem não são obtidas porque os termos seculares que surgem nestas soluções não podem ser retirados e então ele contorna esta limitação expandindo também a frequência da resposta em série de potências. Porém há duas formas de aplicar este método em que a frequência da resposta também é expandida em série, que são desprezando ou não a solução homogênea que surge em cada integração. He (2006), [61] obtém a solução da equação de Duffing igualando a zero as constantes de integração que surgem em cada passo. Desta forma ele obtém uma aproximação para a frequência da resposta que é pior que a obtida ao se aplicar o método de Lindsted-Poincaré modificado. Se as constantes de integração são determinadas de forma a atender as condições iniciais, conforme Belendez et al (2008) [62], onde a solução de uma equação de Duffing com termo linear nulo é obtida através do HPM, se obtém as mesmas soluções, para o deslocamento no tempo e frequência da resposta, dadas pelo método de LP modificado.

Uma forma diferente de aplicar o HPM da forma como é aplicada por He (1999)[59], na obtenção da solução da equação de Duffing, seria a de desprezar a solução homogênea e então determinar a frequência da resposta através da condição inicial de deslocamento. Ao se anular as constantes de integração, se evita o surgimento de termos seculares na solução seguinte. A frequência da resposta pode ser obtida através da condição inicial de deslocamento, mas as soluções de mais alta ordem acabam se tornando muito custosas de ser obtidas. Esta forma apresenta resultados levemente melhores que os obtidos por He porém piores que os obtidos com o LP modificado.

## 1.5

### Descrição da tese

Esta tese apresenta alguns dos métodos clássicos de resolução de equações diferenciais não-lineares e propõem dois novos métodos. As soluções de cada método são validados através da comparação com as soluções obtidas a partir da integração numérica das equações de movimento. Por ser muito utilizado e

de fácil implementação, o Runge Kutta (RK) de quarta ordem foi o método de integração numérica escolhido para fornecer as soluções de referência. Detalhes da formulação deste método podem ser obtidos no livro de Craig ([3]).

O capítulo 2 apresenta a metodologia comumente usada no estudo da dinâmica não-linear de estruturas contínuas. Utilizando uma viga como exemplo, as equações de movimento dos casos linear e não-linear (Duffing) são obtidas.

Embora exista uma vasta literatura sobre métodos analíticos aproximados para solução de sistemas dinâmicos não-lineares, poucas são as obras que apresentam os diversos métodos de solução e suas variantes, permitindo assim uma comparação entre os diversos procedimentos. Assim, no Capítulo 3 são apresentados os métodos de perturbação de Lindstedt-Poincaré tradicional e modificado e múltiplas escalas. Os métodos são apresentados em exemplos de vibração livre, forçada e forçada amortecida.

No Capítulo 4 apresentam-se os métodos do Balanço Harmônico, Galerkin-Urabe e Balanço Harmônico Incremental, juntamente com exemplos de aplicação.

No capítulo 5, apresenta-se a teoria da estabilidade de soluções periódicas.

No capítulo 6 apresentam-se o método de Taylor e o método de Taylor escrito em séries de Fourier, propostas deste trabalho.

No capítulo 7, vários exemplos contendo não-linearidades não-polinômiais são apresentados e analisados usando-se as metodologias propostas neste trabalho.

O primeiro exemplo trata do problema envolvendo não-linearidade fracionária estudado recentemente por Mickens (2002), [58], Swamy et al (2003), [64], van Horssen (2003) e Gottlieb (2003), [1], entre outros. Os resultados apresentados por Gottlieb são comparados com os obtidos com os métodos propostos, onde se verifica que as aproximações em série de Taylor a partir de cinco termos já apresentam resultados melhores.

O segundo exemplo trata da não-linearidade devida à função trigonométrica presente na equação de movimento do pêndulo plano. A aplicação dos métodos tradicionais neste tipo de problema geralmente é feita após se substituir, na equação diferencial, a função trigonométrica por sua série de Taylor, o que resulta em uma equação com não-linearidades polinômiais e ímpares. A aplicação do método de Taylor permite se obter expressões analíticas para a frequência da resposta levando em conta a não-linearidade original dada pela função trigonométrica. Os resultados obtidos para vibração livre são comparados com integração numérica e verifica-se a proximidade das soluções, até mesmo para grandes ângulos sendo tomados como condições iniciais.

Também a influência dos parâmetros na frequência da resposta é estudada e comparada com a integração numérica.

Como terceiro exemplo tem-se um pêndulo elíptico, onde um pêndulo é preso a uma massa livre para se deslocar horizontalmente. As equações de movimento apresentadas por Ge e Lin (2007), [65], são obtidas aplicando o princípio de Hamilton e verifica-se a presença de não-linearidades inerciais. As relações frequência-amplitude são obtidas utilizando os métodos propostos e os resultados são comparados com integração numérica.

O quarto exemplo trata da equação com não-linearidades não-polinomiais que descreve o movimento de uma viga bi-apoiada. Esta equação é obtida na seção 2.5. A curva frequência-amplitude é traçada utilizando diferentes aproximações e comparada com integração numérica.

O quinto exemplo é o estudo do escape de um vale potencial de um arco abatido sujeito a um carregamento brusco, estudado por Lin e Bradford (2008), [66]. Através da curva frequência-amplitude obtida com os métodos propostos, é possível verificar a mudança de comportamento que ocorre quando a carga atinge o valor que provoca o escape do vale potencial.

Finalmente, no último exemplo, tem-se o estudo da estabilidade de soluções periódicas através da equação não-linear de Mathieu. Esta equação é obtida ao se aplicar uma perturbação  $\epsilon$  à uma solução periódica  $x(t)$  da equação de Duffing. Três soluções periódicas são analisadas e para a solução instável se obteve uma solução periódica para a perturbação coincidente com a integração numérica.

No capítulo 8, são apresentados as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

Finalmente, apresenta-se a bibliografia consultada para o desenvolvimento desta pesquisa.

Com a finalidade de ilustrar a aplicabilidade dos métodos estudados neste trabalho à análise de elementos estruturais esbeltos onde a não-linearidade geométrica é predominante, apresenta-se a seguir a teoria de vigas esbeltas e o desenvolvimento de modelos não-lineares simplificados com um grau de liberdade para a análise da relação frequência-amplitude e da ressonância. Cabe ressaltar que o desenvolvimento de modelos consistentes com um pequeno número de graus de liberdade para a análise dinâmica não-linear de sistemas contínuos tem sido um tópico de grande interesse nos últimos anos.

Uma forma muito utilizada de se obter a equação de movimento de um sistema é através da aplicação do princípio de Hamilton. O princípio de Hamilton afirma que o caminho descrito pelo corpo entre os instantes  $t_1$  e  $t_2$ , que satisfaz a lei de Newton, irá extremizar o seguinte funcional (Dym e Shames (1973)[67]),

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (\bar{T} - \Pi) dt \quad (2-1)$$

onde  $\bar{T}$  é a energia cinética e  $\Pi$  é a energia potencial total.

Do cálculo variacional, sabe-se que a condição necessária de extremo de um funcional é que a primeira variação seja nula. Assim, para que uma solução extremize o funcional (2-1), é necessário que

$$\delta^1 I = 0 \quad (2-2)$$

## 2.1

### Relação deformação-deslocamentos

Considere inicialmente uma barra esbelta indeformada de eixo reto e material elástico e linear e seja um elemento infinitesimal  $\overline{AB}$  de comprimento  $dx$ , conforme figura 2.1. O segmento  $\overline{AB}$ , após sofrer deslocamentos e deformações passa a ser  $\overline{A'B'}$ , com comprimento  $ds$ . A deformação do elemento  $\overline{AB}$  é dada

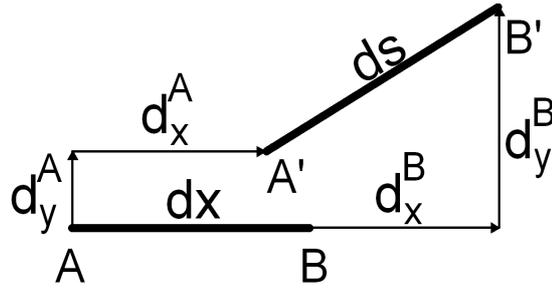


Figura 2.1: Deformação de um segmento infinitesimal

por,

$$\epsilon = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{ds - dx}{dx} \quad (2-3)$$

As componentes em  $x$  e  $y$  do segmento deformado são:

$$\begin{aligned} \overline{A'B'}_x &= \overline{AB}_x + d_x^B - d_x^A \\ \overline{A'B'}_y &= \overline{AB}_y + d_y^B - d_y^A \end{aligned} \quad (2-4)$$

sendo  $d_i^j$ , o deslocamento segundo a direção  $i$  do ponto  $j$ .

Escrevendo os deslocamentos em  $B$  como aproximações em série de Taylor em torno do ponto  $A$ , tem-se

$$\begin{aligned} d_x^B &= d_x^A + \frac{\partial d_x}{\partial x} \overline{AB}_x \\ d_y^B &= d_y^A + \frac{\partial d_y}{\partial x} \overline{AB}_x \end{aligned} \quad (2-5)$$

e substituindo (2-5) em (2-4) e lembrando que  $\overline{AB} = dx$ , tem-se

$$\begin{aligned} \overline{A'B'}_x &= \left(1 + \frac{\partial d_x}{\partial x}\right) dx \\ \overline{A'B'}_y &= \frac{\partial d_y}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (2-6)$$

Assim, o comprimento do elemento após a deformação é,

$$ds = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial d_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial d_y}{\partial x}^2} dx \quad (2-7)$$

Substituindo (2-7) em (2-3), tem-se para a deformação,

$$\epsilon = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial d_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial d_y}{\partial x}^2} - 1 \quad (2-8)$$

Expandindo (2-8) em série de Taylor, obtém-se a seguinte aproximação

para as deformações,

$$\epsilon = \frac{\partial d_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial d_x^2}{\partial x} + \frac{\partial d_y^2}{\partial x} \right) \quad (2-9)$$

## 2.2

### Viga contínua - solução linear

Considerando pequenos deslocamentos, a deformação (2-9) pode ser considerada como sendo linear, isto é

$$\epsilon = \frac{\partial d_x}{\partial x} \quad (2-10)$$

O campo de deslocamentos no plano de um viga quando se considera que as seções permanecem planas e perpendiculares à linha neutra, é dado por

$$\begin{aligned} d_x &= u(x) + y \sin \theta(x) \\ d_y &= w(x) + y \cos \theta(x) \end{aligned} \quad (2-11)$$

sendo  $w$  o deslocamento na direção transversal ao eixo da viga e  $u$  o deslocamento na direção longitudinal (figura 2.2).

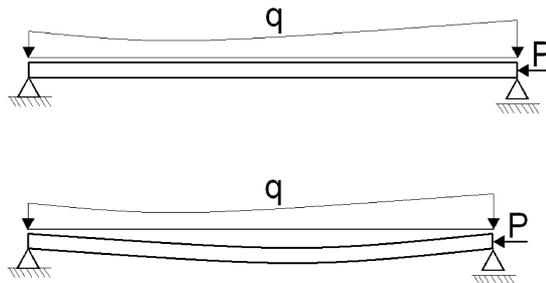


Figura 2.2: Viga plana sujeita a um carregamento transversal  $q(x)$  e axial  $P$

Substituindo (2-11) em (2-10), obtém-se

$$\epsilon = u' + y\theta' \cos \theta \quad (2-12)$$

onde  $()'$  representa a derivada em relação a  $x$ .

Chamando a deformação da linha neutra de  $\epsilon_0$ , tem-se para  $y = 0$  em (2-12)

$$\epsilon_0 = u' \quad (2-13)$$

Substituindo  $u'$  por  $\epsilon_0$  em (2-12), tem-se

$$\epsilon = \epsilon_0 + y\theta' \cos \theta \quad (2-14)$$

Considerando que a linha neutra é inextensível, o elemento infinitesimal sobre a linha neutra sofre apenas uma rotação de corpo rígido. Conseqüentemente, se pode escrever que

$$\sin \theta = -w'$$

Assim, derivando  $\sin \theta$  em relação a  $x$ , obtém-se

$$\theta' = -\frac{w''}{\cos \theta} \quad (2-15)$$

e substituindo (2-15) em (2-14) encontra-se a seguinte expressão para a deformação

$$\epsilon = \epsilon_0 - yw'' \quad (2-16)$$

Considerando que a linha neutra da viga é inextensível, hipótese usualmente empregada na análise de vigas esbeltas ([67]), tem-se que  $\epsilon_0 = 0$  e, assim, a energia interna de deformação de um elemento infinitesimal

$$dU = \frac{1}{2}E\epsilon^2 \quad (2-17)$$

torna-se

$$dU = \frac{1}{2}Ey^2w''^2$$

Integrando  $dU$  ao longo do volume, obtém-se a energia interna de deformação da viga,

$$U = \frac{1}{2}EI \int_0^l w''^2 dx$$

A energia potencial total,  $\Pi$ , da viga é dada pela soma da energia interna de deformação,  $U$ , mais o potencial das cargas externas. Considerando-se que as cargas externas atuando sobre a viga são uma carga distribuída  $q(x)$  e uma carga pontual aplicada na extremidade,  $P$ , conforme mostra a figura 2.2. O potencial destas cargas é dado por

$$V = - \int_0^l q(x)w dx - P\Delta \quad (2-18)$$

onde  $\Delta$  é o deslocamento do apoio que é dado pela integral ao longo do comprimento do deslocamento na direção  $x$ , ou seja,

$$\Delta = \int_0^l (1 - \cos \theta) dx = \int_0^l (1 - \sqrt{1 - w'^2}) dx \approx \int_0^l \frac{1}{2} w'^2 dx \quad (2-19)$$

Assim tem-se para a energia potencial total da viga,

$$\Pi = \int_0^l \frac{1}{2} EI w''^2 - q(x)w - \frac{1}{2} P w'^2 dx \quad (2-20)$$

Considerando apenas os deslocamentos transversais, tem-se para a energia cinética,

$$\bar{T} = \int_0^l \frac{1}{2} \rho A \dot{w}^2 dx \quad (2-21)$$

Substituindo (2-21) e (2-20) em (2-1), tem-se o funcional a ser extremizado,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \frac{1}{2} \rho A \dot{w}^2 dx - \int_0^l \frac{1}{2} EI w''^2 - q(x)w - \frac{1}{2} P w'^2 dx \right\} dt \quad (2-22)$$

Aplicando o cálculo variacional para extremizar o funcional (2-22), tem-se

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \rho A \dot{w}^2 - \frac{1}{2} EI w''^2 + q(x)w + \frac{1}{2} P w'^2 \\ \delta^1 I &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} \delta \dot{w} + \frac{\partial F}{\partial w} \delta w + \frac{\partial F}{\partial w'} \delta w' + \frac{\partial F}{\partial w''} \delta w'' \right\} dx dt \\ &= \int_0^l \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} \delta w \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} \right) \delta w \right\} dt dx + \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{\partial F}{\partial w} \delta w \right\} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial w'} \delta w' \Big|_0^l - \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) \delta w \right\} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial w''} \delta w'' \Big|_0^l - \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) \delta w' \right\} dx dt \end{aligned}$$

Considerando que  $\delta w = 0$  nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ , tem-se

$$\begin{aligned} \delta^1 I &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left( - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) \right) \delta w dx dt + \\ &\quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial w'} \delta w' \Big|_0^l dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial w''} \delta w'' \Big|_0^l dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) \delta w' \Big|_0^l dt \end{aligned}$$

Assim, a função que extremiza o funcional (2-22) deve atender à seguinte equação de movimento

$$- \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{w}} \right) + \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) = 0 \quad (2-23)$$

ou seja,

$$\rho A \ddot{w} + Pw'' + EIw'''' = q \quad (2-24)$$

Considerando  $q = 0$ , a solução de (2-24) pode ser obtida utilizando separação de variáveis. Escrevendo

$$w(x, t) = f(t)g(x)$$

e substituindo em (2-24) e separando as funções de  $x$  e  $t$  e igualando-as a uma constante, tem-se duas novas equações,

$$\ddot{f} + \omega_0^2 f = 0 \quad (2-25)$$

$$-Pg'' - EIg'''' + \rho A \omega_0^2 g = 0 \quad (2-26)$$

A solução não-trivial da eq. (2-26) é,

$$g = c_1 e^{-\sqrt{\frac{1}{2EI}(p+\lambda)}x} + c_2 e^{\sqrt{-\frac{1}{2EI}(p+\lambda)}x} + c_3 e^{-\sqrt{-\frac{1}{2EI}(p-\lambda)}x} + c_4 e^{\sqrt{-\frac{1}{2EI}(p-\lambda)}x}$$

$$\lambda = \sqrt{p^2 + 4EI\omega_0^2 \rho A}$$

A partir das condições de contorno nas duas extremidades da viga, obtêm-se os modos de vibração e as frequências naturais. Os modos de vibração formam uma família de funções ortogonais no intervalo  $[0, l]$ .

A solução da viga para  $q \neq 0$  pode ser escrita como

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t)\phi_i(x) \quad (2-27)$$

onde  $a_i$  são as amplitudes, também chamadas de coordenadas generalizadas, e  $\phi_i$  são os modos de vibração. Substituindo a solução (2-27) em (2-24) e usando as propriedades de ortogonalidade dos modos, se obtém  $n$  equações diferenciais desacopladas no tempo, que regem as amplitudes  $a_i$ .

A expressão (2-27), considerando um número finito de modos, tem sido largamente empregada, juntamente com os métodos de Ritz ou Galerkin, para se obter soluções aproximadas para o problema não-linear.

## 2.3

**Viga contínua - formulação não-linear**

Considera-se agora a expressão não-linear da deformação dada pela eq. (2-9). Substituindo o campo de deslocamentos (2-11) em (2-9), obtém-se,

$$\epsilon = \left( \frac{1}{2}(\cos \theta)^2 + \frac{1}{2}(\sin \theta)^2 \right) \theta' y^2 + (u' \cos \theta + \cos \theta - w' \sin \theta) \theta' y + u' + \frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{2} w'^2 \quad (2-28)$$

Considerando que  $u' + \frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{2} w w' = \epsilon_0$ , tem-se

$$\epsilon = \frac{1}{2} \theta' y^2 + (\cos \theta (1 + u') - w' \sin \theta) \theta' y + \epsilon_0 \quad (2-29)$$

Aplicando uma rotação de corpo rígido a um elemento infinitesimal, tem-se

$$\begin{aligned} -w' &= \sin \theta \\ 1 + u' &= \cos \theta \end{aligned} \quad (2-30)$$

Substituindo (2-30) em (2-29) e considerando  $\epsilon_0 = 0$ , obtém-se

$$\epsilon = \frac{1}{2} \theta' y^2 + \theta' y$$

Desprezando os termos de mais alta ordem em  $y$ , e substituindo  $\theta'$  pelo valor dado em (2-15), obtém-se para a deformação

$$\epsilon = \theta' y = -\frac{w''}{\cos \theta} y = -\frac{w''}{\sqrt{1 - w'^2}} y$$

Assim, a energia interna de deformação é dada por

$$dU = \frac{1}{2} E \epsilon^2 = \frac{1}{2} E y^2 \frac{w''^2}{1 - w'^2}$$

Aproximando o denominador em série de Taylor, tem-se

$$dU = \frac{1}{2} E y^2 w''^2 (1 + w'^2)$$

Integrando  $dU$  ao longo do volume, obtém-se

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^l w''^2 (1 + w'^2) dx$$

Considerando mais termos na expansão de  $\Delta$  em série de Taylor, eq. (2-19), tem-se

$$\Delta = \int_0^l \frac{1}{2}w'^2 + \frac{1}{8}w'^4 dx \quad (2-31)$$

A energia potencial total da viga é, neste caso, dada por

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EIw''^2(1 + w'^2) - 2qw - P \left( w'^2 + \frac{1}{4}w'^4 \right) \right\} dx \quad (2-32)$$

Sendo a energia cinética dada por (2-21), obtém-se o seguinte funcional

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \rho A \dot{w}^2 - EIw''^2(1 + w'^2) + 2qw + P \left( w'^2 + \frac{1}{4}w'^4 \right) \right\} dx dt$$

Aplicando o cálculo variacional, obtém-se a seguinte equação de movimento

$$\rho A \ddot{w} + EI(4w''w'w''' + w'''' + w''''w'^2 + w''^3) + P(w'' + \frac{3}{2}w'^2w'') = q \quad (2-33)$$

O método de Galerkin é então utilizado para discretizar a geometria contínua presente em (2-33).

Utilizando a solução aproximada igual a utilizada na solução linear, eq. (2-27), com apenas um modo, tem-se

$$w(x, t) = a_1(t)\phi_1(x)$$

que, no caso de uma viga simplesmente apoiada, torna-se

$$w(x, t) = a_1(t) \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \quad (2-34)$$

Considerando a função peso como a derivada de (2-34) em relação à coordenada generalizada  $a_1(t)$ , e aplicando o método de Galerkin, chega-se à seguinte equação diferencial não-linear

$$\ddot{a}_1 + \left( \frac{\pi^4}{ml^3} EI - \frac{\pi^2}{ml} P \right) a_1 + \left( \frac{\pi^6}{2ml^5} EI - \frac{3\pi^4}{8ml^3} P \right) a_1^3 = \frac{4ql}{m\pi} \quad (2-35)$$

onde  $m = \rho Al$ .

A eq. (2-35) é do tipo Duffing. A solução que descreve o comportamento ao longo do tempo da amplitude  $a_1$  da função  $\phi_1$  é obtida através de integração numérica ou a partir dos métodos aproximados que fornecem soluções analíticas. Adicionando mais termos à solução aproximada (2-34), chega-se a um sistema de  $n$  equações não-lineares acopladas.

A eq. (2-35) tem sido largamente empregada para se estudar a relação

frequência-amplitude e o comportamento de vigas sob cargas harmônicas ([68]). Equação semelhante, com termo não-linear cúbico, é obtida para placas e pórticos simétricos ([69]).

Introduzindo os parâmetros

$$P_{cri} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$x(t) = \frac{\pi}{l} a_1(t)$$

$$\lambda = \frac{P}{P_{cri}}$$

em (2-35), e em seguida aplicando a transformação  $\tau = \omega_0 t$ , onde

$$\omega_0 = \frac{\pi^2 P_{cri}}{ml} (1 - \lambda)$$

obtém-se

$$x_{,\tau\tau} + x + bx^3 = \bar{q}$$

onde o parâmetro não-linear  $b$  é dado por

$$b = \frac{3\lambda - 4}{8(\lambda - 1)} \quad (2-36)$$

e é exibido na figura 2.3, onde se pode ver que  $b < 1$  para valores de carregamento inferiores a 80% da carga crítica.

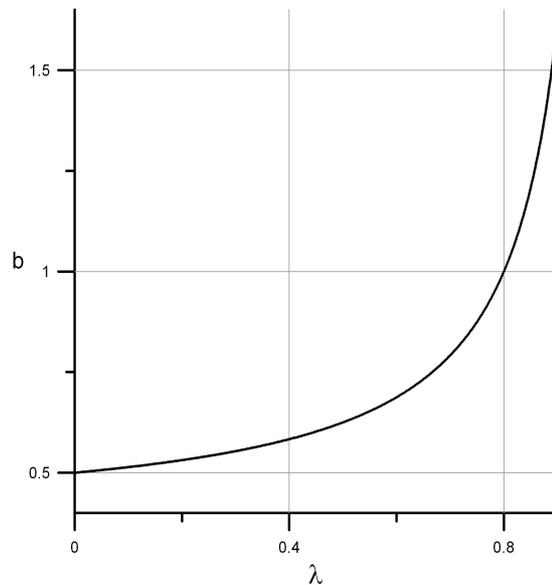


Figura 2.3: Não-linearidade da viga-coluna versus nível de carregamento.

## 2.4

**Viga contínua com imperfeição inicial**

Considerando agora uma viga com imperfeição inicial, o campo de deslocamentos passa a ser dado por,

$$\begin{aligned}d_x &= u_0(x) + u(x) + y \sin(\theta_0(x) + \theta(x)) \\d_y &= w_0(x) + w(x) + y \cos(\theta_0(x) + \theta(x))\end{aligned}\quad (2-37)$$

onde  $u_0(x)$ ,  $w_0(x)$  e  $\theta_0(x)$  descrevem a forma inicial da viga imperfeita.

Substituindo o campo de deslocamentos (2-37) em (2-9), obtém-se,

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{y^2}{2}(\theta' + \theta'_0)^2 + y\{(u'_0\theta' + u'_0\theta'_0 + u'\theta' + u'\theta'_0 + \theta' + \theta'_0) \cos(\theta + \theta_0) - \\&(w'_0 + w')(\theta' + \theta'_0) \sin(\theta + \theta_0)\} + u'_0 + u' + \frac{1}{2}(w'_0 + w')^2 + \\&\frac{1}{2}(u'_0 + u')^2\end{aligned}\quad (2-38)$$

Considerando que a linha neutra não sofre deformação, (2-38) toma a forma

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{y^2}{2}(\theta' + \theta'_0)^2 + y\{(u'_0\theta' + u'_0\theta'_0 + u'\theta' + u'\theta'_0 + \\&\theta' + \theta'_0) \cos(\theta + \theta_0) - (w'_0 + w')(\theta' + \theta'_0) \sin(\theta + \theta_0)\}\end{aligned}\quad (2-39)$$

A rotação de corpo rígido sofrida por um elemento infinitesimal localizado na linha neutra da viga passa a ser

$$\begin{aligned}-w' - w'_0 &= \sin(\theta + \theta_0) \\1 + u' + u'_0 &= \cos(\theta + \theta_0)\end{aligned}\quad (2-40)$$

Substituindo (2-40) em (2-39), obtém-se

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\theta' + \theta'_0)^2 y^2 + (\theta' + \theta'_0)y$$

Desprezando os termos de mais alta ordem em  $y$ , e considerando que

$$\theta' + \theta'_0 = -\frac{w''_0 + w''}{\cos(\theta + \theta_0)}$$

obtém-se para a deformação

$$\epsilon = \theta' y = -\frac{w'' + w''_0}{\cos(\theta + \theta_0)} y = -\frac{w'' + w''_0}{\sqrt{1 - (w' + w'_0)^2}} y\quad (2-41)$$

Considerando como referência a posição inicial deformada, deve-se diminuir da deformação (2-41) a imperfeição inicial. Desta forma, tem-se

$$\epsilon = -\frac{w'' + w_0''}{\sqrt{1 - (w' + w_0')^2}}y + \frac{w_0''}{\sqrt{1 - w_0'^2}}y \quad (2-42)$$

Substituindo (2-42) em (2-17), integrando ao longo do volume e aproximando os denominadores por séries de Taylor, se obtém a seguinte expressão para a energia interna de deformação:

$$U = EI \int_0^l \left\{ \frac{1}{2}w_0''^2 w'^2 - w_0''^2 - \frac{3}{2}w_0''^2 w_0'^2 - \frac{1}{2}w_0'' w'' w_0'^2 + \frac{1}{2}w''^2 w'^2 + w_0'' w'' w_0' w' + w_0'' w'' w'^2 + \frac{1}{2}w''^2 + \frac{1}{2}w''^2 w_0'^2 + w''^2 w_0' w' \right\} dx \quad (2-43)$$

Da mesma forma, o deslocamento  $\Delta$ , dado em (2-19), sofre modificações. A variação de  $\Delta$  entre as posições inicial e final é dada por:

$$\Delta = \int_0^l (-\sqrt{1 - (w' + w_0')^2} + \sqrt{1 - w_0'^2}) dx$$

que, aproximado por série de Taylor, torna-se

$$\Delta = \int_0^l (w_0' w' + \frac{1}{2}w'^2 + \frac{1}{2}w_0'^3 w' + \frac{3}{4}w_0'^2 w'^2 + \frac{1}{2}w_0' w'^3 + \frac{1}{8}w'^4) dx \quad (2-44)$$

Substituindo (2-44) em (2-18) se obtém para a energia potencial total da viga com imperfeição inicial

$$\begin{aligned} \Pi = \int_0^l \left\{ EI \left( \frac{1}{2}w_0''^2 w'^2 - w_0''^2 - \frac{3}{2}w_0''^2 w_0'^2 - \frac{1}{2}w_0'' w'' w_0'^2 + \frac{1}{2}w''^2 w'^2 + w_0'' w'' w_0' w' + \frac{1}{2}w''^2 + \frac{1}{2}w''^2 w_0'^2 + w''^2 w_0' w' \right) - \right. \\ \left. qw - P \left( w_0' w' + \frac{1}{2}w'^2 + \frac{1}{2}w_0'^3 w' + \frac{3}{4}w_0'^2 w'^2 + \frac{1}{2}w_0' w'^3 + \frac{1}{8}w'^4 \right) \right\} dx \end{aligned} \quad (2-45)$$

Com a energia cinética sendo dada por (2-21), obtém-se o seguinte funcional,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \rho A \dot{w}^2 - EI \left( \frac{1}{2}w_0''^2 w'^2 - w_0''^2 - \frac{3}{2}w_0''^2 w_0'^2 - \frac{1}{2}w_0'' w'' w_0'^2 + \frac{1}{2}w''^2 w'^2 + w_0'' w'' w_0' w' + \frac{1}{2}w''^2 + \frac{1}{2}w''^2 w_0'^2 + w''^2 w_0' w' \right) \right\} dx$$

$$qw + P \left( w_0' w' + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{2} w_0'^3 w' + \frac{3}{4} w_0'^2 w'^2 + \frac{1}{2} w_0' w'^3 + \frac{1}{8} w'^4 \right) \} dx dt \quad (2-46)$$

Extremizando o funcional (2-46), a seguinte equação diferencial é obtida

$$\begin{aligned} m\ddot{w} + (w_0'' w' w_0''' - 3w_0''' w_0' w_0'' + 4w_0'' w''' w_0' + w_0'''' w'^2 + w_0'''' w_0'^2 + w''^3 + \\ w'''' + w_0'''' w'^2 + 2w_0''^2 w'' + 3w_0'' w''^2 - \frac{1}{2} w_0'''' w_0'^2 + w_0'''' w_0' w' + \\ 2w_0'''' w_0' w' - w_0''^3 + 3w_0'' w'' w_0' + 4w_0'' w'' w' + 4w_0'' w''' w' + 4w'' w_0' w''' + \\ 4w'' w' w''') EI + P(w_0'' + w'' + \frac{3}{2} w_0'^2 w_0'' + 3w_0' w' w_0'' + \frac{3}{2} w_0'^2 w'' + \\ \frac{3}{2} w_0'' w'^2 + 3w_0' w' w'' + \frac{3}{2} w'^2 w'') = q \end{aligned} \quad (2-47)$$

Considerando uma pequena imperfeição inicial pela função

$$w_0 = 0,05l \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

e (2-34) como solução aproximada, e utilizando o método de Galerkin, chega-se à seguinte equação diferencial

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \left( \frac{99,813}{ml^4} EI - \frac{10,144}{ml^2} P \right) a_1 + \left( \frac{72,104}{ml^5} EI - \frac{5,479}{ml^3} P \right) a_1^2 + \\ \left( \frac{\pi^6}{2ml^6} EI - \frac{3\pi^4}{8ml^4} P \right) a_1^3 = 0,015 \frac{EI}{ml^3} + \frac{1,273}{m} q + \frac{0,498}{ml} P \end{aligned}$$

que possui não-linearidade cúbica e quadrática. É interessante observar que o coeficiente não-linear cúbico obtido é o mesmo do caso da viga perfeita. Uma equação semelhante, com não-linearidade quadrática e cúbica, é obtida para arcos abatidos ([70],[71]) e cascas ([72]).

## 2.5

### Viga contínua - solução com não-linearidades mais completas

Considerando que o deslocamento  $\Delta$  seja dado de forma exata em vez da aproximação (2-31), tem-se que

$$\Delta = \int_0^l 1 - \sqrt{1 - w'^2} \quad (2-48)$$

Seguindo os mesmos passos da seção 2.3, mas desta vez sem aproximar

o denominador da energia interna de deformação por uma série de Taylor, chega-se ao seguinte funcional

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \rho A \dot{w}^2 - \frac{EI w'^2}{1 - w'^2} + 2qw + P(1 - \sqrt{1 - w'^2}) \right\} dx dt$$

que, ao ser extremizado, leva à seguinte equação de movimento

$$m\ddot{w} + \left( \frac{4w''^3 w'^2}{(1 - w'^2)^3} + \frac{4w'' w' w'''}{(1 - w'^2)^2} + \frac{w''''}{1 - w'^2} + \frac{w''^3}{(1 - w'^2)^2} \right) EI + P \left( \frac{w''}{\sqrt{1 - w'^2}} + \frac{w'^2 w''}{(1 - w'^2)^{3/2}} \right) = q \quad (2-49)$$

Aplicando o método de Galerkin usando a função aproximada (2-34), e atribuindo, por exemplo,  $l = 20$ , chega-se à seguinte equação diferencial no tempo

$$10m\ddot{a}_1 + \left( \frac{\pi^8}{800} a_1^5 - \pi^6 a_1^3 + 200\pi^4 a_1 \right) \frac{i}{(a_1^2 \pi^2 - 400)^{5/2}} EI + \frac{40P}{\pi a_1} \left( \text{EllipticE} \left\{ \frac{\pi}{20} \text{csgn}(a_1) a_1 \right\} - \text{EllipticK} \left\{ \frac{\pi}{20} \text{csgn}(a_1) a_1 \right\} \right) = \frac{40}{\pi} q \quad (2-50)$$

que, devido às não-linearidades não-polinomiais, não pode ser resolvida utilizando os métodos aproximados convencionais. A eq. (2-50) será resolvida no capítulo 7, com os métodos propostos no capítulo 6.

### 3

## Métodos de Perturbação

O objetivo deste capítulo é apresentar os métodos de perturbação mais utilizados na análise de sistemas dinâmicos não-lineares, bem como modificações destes métodos apresentadas na literatura recente com o objetivo de melhorar o desempenho dos métodos clássicos. São também apresentados os algoritmos que, programados em álgebra simbólica, permitem a automação dos métodos.

Os métodos de perturbação podem ser utilizados na resolução de problemas com pequenas não-linearidades. A solução é escrita através de uma série de potências de um determinado parâmetro de perturbação. Geralmente, quanto mais termos tiver a série, mais precisa será a solução. Entretanto, em alguns casos, de acordo com Andrianov e Awrejcewicz (2000) e Amore et. al. (2004)[54, 55], o acréscimo no número de termos da aproximação pode conduzir a uma série divergente.

A medida que a não-linearidade cresce, a solução aproximada deve conter mais termos para que se tenha uma boa aproximação. Em alguns casos, pode não ser possível aplicar o método devido à complexidade da solução.

Seja a equação com não linearidade cúbica

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (3-1)$$

onde o parâmetro  $\beta$ , associado ao grau de não-linearidade, pode ser tomado como um parâmetro de perturbação, desde que  $\beta$  seja suficientemente pequeno.

O método consiste em expandir a solução  $x(t)$  da equação (3-1) por uma série em torno de  $\beta=0$ . Seja a solução aproximada:

$$x(t) = \sum_{i=0}^n \beta^i x_i(t) \quad (3-2)$$

Substituindo (3-2) em (3-1), e agrupando os termos de acordo com as potências de  $\beta$ , tem-se para  $n = 1$ , por exemplo:

$$\beta^4 x_1^3 + 3x_0 \beta^3 x_1^2 + 3x_0^2 \beta^2 x_1 + (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + x_0^3) \beta + \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-3)$$

Considerando que os termos de mais alta ordem são muito pequenos, já que  $\beta$  é pequeno, para que a igualdade (3-3) seja atendida, os termos que multiplicam  $\beta^0$  e  $\beta^1$  devem ser nulos, ou seja

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-4)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^3 \quad (3-5)$$

A solução para  $x_0$  em (3-4) é, já considerando as condições iniciais  $x_0(0) = x(0)$  e  $\dot{x}_0(0) = 0$ ,

$$x_0 = x(0) \cos \omega_0 t \quad (3-6)$$

A substituição de (3-6) em (3-5), leva a uma equação diferencial não-homogênea em  $x_1$  cuja solução é,

$$x_1 = -\frac{1}{32} \frac{x(0)^3}{\omega_0^2} \cos \omega_0 t - \frac{3}{8} \frac{x(0)^3}{\omega_0^2} t \sin \omega_0 t + \frac{1}{32} \frac{x(0)^3}{\omega_0^2} \cos 3\omega_0 t \quad (3-7)$$

A solução para  $x_1$  é composta de uma parcela homogênea mais uma particular. Uma forma de fazer com que a solução aproximada (3-2) atenda as condições iniciais do problema (3-1) é fazendo com que todas as condições iniciais nas equações seguintes sejam nulas ( $x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0; i \geq 1$ ). Dessa forma, as novas constantes que surgem em cada solução homogênea, tornam-se função de  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$ , que são as condições iniciais de (3-1).

Os termos lineares em  $t$ , presentes em (3-7), são chamados de termos seculares e limitam a aplicabilidade da solução aproximada para apenas pequenos intervalos de tempos. Lindstedt, em 1882, desenvolveu uma técnica que evita o surgimento destes termos.

### 3.1 Método Lindstedt-Poincaré

No LP expande-se a frequência da solução em uma série de potências da perturbação, ou seja

$$\omega = \omega_0 + \sum_{i=1}^n e_i \beta^i \quad (3-8)$$

Para que a frequência da resposta fique explícita na equação, aplica-se a seguinte transformação do tempo,

$$\tau = \omega t \quad (3-9)$$

Assim,  $x$  deixa de ser função de  $t$  e passa a ser função de  $\tau$  e a eq. (3-1) torna-se

$$\omega^2 x'' + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (3-10)$$

Considerando uma aproximação com três termos para  $x(\tau)$  e para a frequência  $\omega$ , tem-se

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \beta x_1(\tau) + \beta^2 x_2(\tau) + \beta^3 x_3(\tau) \quad (3-11)$$

$$\omega = \omega_0 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3 \quad (3-12)$$

onde  $e_i$  são as correções da frequência em função da amplitude.

Substituindo (3-11) e (3-12) em (3-10) e agrupando os termos de mesma potência em  $\beta$ , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-13)$$

$$\omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 = -2\omega_0 e_1 x_0'' - x_0^3 \quad (3-14)$$

$$\omega_0^2 x_2'' + \omega_0^2 x_2 = -3x_0^2 x_1 - 2\omega_0 e_2 x_0'' - e_1^2 x_0'' - 2\omega_0 e_1 x_1'' \quad (3-15)$$

$$\omega_0^2 x_3'' + \omega_0^2 x_3 = -3x_0 x_1^2 - 3x_0^2 x_2 - 2\omega_0 e_3 x_0'' - 2e_1 e_2 x_0'' - 2\omega_0 e_2 x_1'' - e_1^2 x_1'' - 2\omega_0 e_1 x_2'' \quad (3-16)$$

Inicialmente, encontra-se  $x_0$  resolvendo a eq. (3-13)

$$x_0 = C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau \quad (3-17)$$

Aplicando as condições iniciais de deslocamento  $x_0(0) = x(0)$  e velocidade  $x_0'(0) = v(0)$ ,  $x_0$  torna-se

$$x_0 = v(0) \sin \tau + x(0) \cos \tau \quad (3-18)$$

Substituindo (3-18) na eq. (3-14), tem-se

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 + \left( \frac{3}{4} v(0)^3 + \frac{3}{4} v(0) x(0)^2 - 2\omega_0 e_1 v(0) \right) \sin \tau + \\ \left( \frac{3}{4} v(0)^2 x(0) + \frac{3}{4} x(0)^3 - 2\omega_0 e_1 x(0) \right) \cos \tau + \left( \frac{3}{4} v(0) x(0)^2 - \right. \\ \left. \frac{1}{4} v(0)^3 \right) \sin 3\tau + \left( -\frac{3}{4} v(0)^2 x(0) + \frac{1}{4} x(0)^3 \right) \cos 3\tau = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo esta equação, encontra-se  $x_1$ , a saber

$$\begin{aligned} x_1 = \left( \left( -\frac{3x(0)^3}{8\omega_0^2} - \frac{3v(0)^2 x(0)}{8\omega_0^2} + \frac{e_1 x(0)}{\omega_0} \right) \tau - \frac{3v(0)^3}{8\omega_0^2} + C_4 - \right. \\ \left. \frac{3v(0) x(0)^2}{8\omega_0^2} + \frac{e_1 v(0)}{\omega_0} \right) \sin \tau + \left( \frac{3v(0) x(0)^2}{32\omega_0^2} - \frac{v(0)^3}{32\omega_0^2} \right) \sin 3\tau + \\ \left( \left( \frac{3v(0)^3}{8\omega_0^2} - \frac{e_1 v(0)}{\omega_0} + \frac{3v(0) x(0)^2}{8\omega_0^2} \right) \tau + C_3 \right) \cos \tau + \left( \frac{x(0)^3}{32\omega_0^2} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{3}{32} \frac{v(0)^2 x(0)}{\omega_0^2} \right) \cos 3\tau \quad (3-19)$$

Novamente as constantes devem ser determinados de acordo com as condições iniciais. Como foi imposto que  $x_0(0)$  e  $x_0'(0)$  são idênticos às condições iniciais, tem-se, com base na eq. (3-11), que  $x_1(0)$ ,  $x_1'(0)$ ,  $x_2(0)$ ,  $x_2'(0)$ ,  $x_3(0)$  e  $x_3'(0)$  devem ser nulos. Dessa forma tem-se

$$C_3 = \frac{x(0)}{32\omega_0^2} (3v(0)^2 - x(0)^2) \quad (3-20)$$

$$C_4 = \frac{3v(0)}{32\omega_0^2} (v(0)^2 - 3x(0)^2)$$

A solução de  $x_1$  apresenta termos que crescem indefinidamente com o tempo. Eles devem ser eliminados para que a solução passe a ser periódica. Igualando a zero os termos que multiplicam  $\tau \sin \tau$  e  $\tau \cos \tau$  em (3-19), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{e_1 x(0)}{\omega_0} - \frac{3}{8\omega_0^2} x(0)^3 - \frac{3}{8\omega_0^2} v(0)^2 x(0) &= 0 \\ -\frac{e_1 v(0)}{\omega_0} + \frac{3}{8\omega_0^2} v(0)^3 + \frac{3}{8\omega_0^2} v(0) x(0)^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3-21)$$

E qualquer uma das eqs. (3-21) conduzem a:

$$e_1 = \frac{3}{8\omega_0} (v(0)^2 + x(0)^2) \quad (3-22)$$

e

$$x_1 = \left( (3v(0)^3 - 9v(0)x(0)^2) \sin \tau + (3v(0)x(0)^2 - v(0)^3) \sin 3\tau + \right. \\ \left. (3v(0)^2 x(0) - x(0)^3) \cos \tau + (x(0)^3 - 3v(0)^2 x(0)) \cos 3\tau \right) \frac{1}{32\omega_0^2}$$

As soluções  $x_0$  e  $x_1$  são agora inseridas em (3-15) e  $x_2$  é determinado,

$$\begin{aligned} x_2 = & \left( \left( \frac{33v(0)^2 x(0)^3}{128\omega_0^4} + \frac{e_2 x(0)}{\omega_0} + \frac{21x(0)^5}{256\omega_0^4} - \frac{3v(0)^4 x(0)}{256\omega_0^4} \right) \tau + \right. \\ & \left. \frac{33v(0)^3 x(0)^2}{128\omega_0^4} + C_6 + \frac{21x(0)^4 v(0)}{256\omega_0^4} - \frac{3v(0)^5}{256\omega_0^4} + \frac{e_2 v(0)}{\omega_0} \right) \sin \tau + \\ & \left( \frac{3v(0)^5}{256\omega_0^4} - \frac{3x(0)^4 v(0)}{32\omega_0^4} + \frac{3v(0)^3 x(0)^2}{256\omega_0^4} \right) \sin 3\tau + \left( \frac{v(0)^5}{1024\omega_0^4} + \right. \\ & \left. \frac{5x(0)^4 v(0)}{1024\omega_0^4} - \frac{5v(0)^3 x(0)^2}{512\omega_0^4} \right) \sin 5\tau + \left( \left( \frac{3v(0)^5}{256\omega_0^4} - \frac{33v(0)^3 x(0)^2}{128\omega_0^4} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{e_2 v(0)}{\omega_0} - \frac{21x(0)^4 v(0)}{256\omega_0^4} \right) \tau + C_5 \Big) \cos \tau + \left( \frac{9v(0)^4 x(0)}{256\omega_0^4} - \frac{3x(0)^5}{128\omega_0^4} + \right. \\ & \left. \frac{27v(0)^2 x(0)^3}{256\omega_0^4} \right) \cos 3\tau + \left( \frac{x(0)^5}{1024\omega_0^4} - \frac{5v(0)^2 x(0)^3}{512\omega_0^4} + \right. \\ & \left. \frac{5v(0)^4 x(0)}{1024\omega_0^4} \right) \cos 5\tau \end{aligned} \quad (3-23)$$

As constantes de integração  $C_5$  e  $C_6$  são obtidas fazendo-se  $x_2(0) = 0$  e  $x_2'(0) = 0$ , e os termos seculares são retirados de  $x_2$ , determinando-se  $e_2$ . Tem-se então

$$C_5 = -\frac{x(0)}{1024\omega_0^4} (-23x(0)^4 + 41v(0)^4 + 98v(0)^2 x(0)^2) \quad (3-24)$$

$$C_6 = -\frac{v(0)}{1024\omega_0^4} (41v(0)^4 - 263x(0)^4 - 14v(0)^2 x(0)^2)$$

$$e_2 = \frac{3}{256\omega_0^3} (v(0)^4 - 22v(0)^2 x(0)^2 - 7x(0)^4) \quad (3-25)$$

Em seguida  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$  são substituídos na eq. (3-16) e  $x_3$  é obtido. As constantes de integração são determinadas fazendo-se  $x_3(0) = 0$  e  $x_3' = 0$  e, novamente, os termos seculares são retirados de  $x_3$  e obtém-se  $e_3$ .

$$e_3 = -\frac{3}{2048\omega_0^5} (-21v(0)^4 x(0)^2 + 23v(0)^6 - 167v(0)^2 x(0)^4 - 27x(0)^6) \quad (3-26)$$

Uma vez determinados  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$ , tem-se a solução periódica em  $\tau$  e pode-se escrever a relação frequência-amplitude. Considerando que  $v(0) = 0$ , da eq. (3-11) vem

$$\begin{aligned} x(\tau) = & \frac{x(0)^7}{32768\omega_0^6} \beta^3 \cos 7\tau + \left( \frac{x(0)^5}{1024\omega_0^4} \beta^2 - \frac{3x(0)^7}{2048\omega_0^6} \beta^3 \right) \cos 5\tau + \\ & \left( \frac{x(0)^3}{32\omega_0^2} \beta - \frac{3x(0)^5}{128\omega_0^4} \beta^2 + \frac{297x(0)^7}{16384\omega_0^6} \beta^3 \right) \cos 3\tau + \\ & \left( x(0) - \frac{x(0)^3}{32\omega_0^2} \beta + \frac{23x(0)^5}{1024\omega_0^4} \beta^2 - \frac{547x(0)^7}{32768\omega_0^6} \beta^3 \right) \cos \tau \end{aligned} \quad (3-27)$$

Para escrever a solução em termos da variável original  $t$ , basta substituir  $\tau$  por  $\omega t$  na eq. (3-27).  $\omega$  é obtido substituindo os valores de  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$  na eq. (3-12). Assim, tem-se

$$\omega = \omega_0 + \frac{3x(0)^2}{8\omega_0} \beta - \frac{21x(0)^4}{256\omega_0^3} \beta^2 + \frac{81x(0)^6}{2048\omega_0^5} \beta^3 \quad (3-28)$$

Escrevendo as eqs. (3-2) e (3-8) para  $n$  valendo de 1 até 6, após a retirada

dos termos seculares, encontram-se, respectivamente, as seguintes relações frequência-amplitude.

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}\beta x(0)^2 \quad (3-29)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}\beta x(0)^2 - \frac{21}{256\omega_0^3}\beta^2 x(0)^4 \quad (3-30)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}\beta x(0)^2 - \frac{21}{256\omega_0^3}\beta^2 x(0)^4 + \frac{81}{2048\omega_0^5}\beta^3 x(0)^6 \quad (3-31)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}\beta x(0)^2 - \frac{21}{256\omega_0^3}\beta^2 x(0)^4 + \frac{81}{2048\omega_0^5}\beta^3 x(0)^6 - \frac{6549}{262144\omega_0^7}\beta^4 x(0)^8 \quad (3-32)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}\beta x(0)^2 - \frac{21}{256\omega_0^3}\beta^2 x(0)^4 + \frac{81}{2048\omega_0^5}\beta^3 x(0)^6 - \frac{6549}{262144\omega_0^7}\beta^4 x(0)^8 + \frac{37737}{2097152\omega_0^9}\beta^5 x(0)^{10} \quad (3-33)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}\beta x(0)^2 - \frac{21}{256\omega_0^3}\beta^2 x(0)^4 + \frac{81}{2048\omega_0^5}\beta^3 x(0)^6 - \frac{6549}{262144\omega_0^7}\beta^4 x(0)^8 + \frac{37737}{2097152\omega_0^9}\beta^5 x(0)^{10} - \frac{936183}{67108864\omega_0^{11}}\beta^6 x(0)^{12} \quad (3-34)$$

Como se pode observar, a complexidade da solução cresce com o número de termos,  $n$ , adotado em (3-2) e (3-8).

A figura 3.1 apresenta a frequência da resposta em função da condição inicial de deslocamento  $x(0) = x_0$  para as diferentes relações  $\omega$ - $x(0)$  dadas em (3-29) a (3-31) e também a solução obtida por integração numérica da equação de movimento. Na figura 3.1(a) utilizou-se  $\omega_0 = 1$  e  $\beta = 1$ , e em 3.1(b) utilizou-se  $\omega_0 = 0,1$  e  $\beta = 0,1$ . Em 3.1(b) é possível perceber que a solução não é convergente. Isto ocorre porque, a medida que mais termos são adicionados, os denominadores em (3-29) à (3-34), que contêm potências de  $\omega_0$ , decrescem, crescendo a contribuição dos termos mais altos da série.

### 3.1.1

#### Vibração Forçada

O problema agora é escrito como

$$\Omega^2 x''(\tau) + \omega_0^2 x(\tau) + \beta x(\tau)^3 = \beta F \sin \tau \quad (3-35)$$

onde  $\tau = \Omega t$ , sendo  $\Omega$  a frequência da excitação. Ao impor que a força é proporcional a  $\beta$ , admite-se que a amplitude da força não é muito grande.

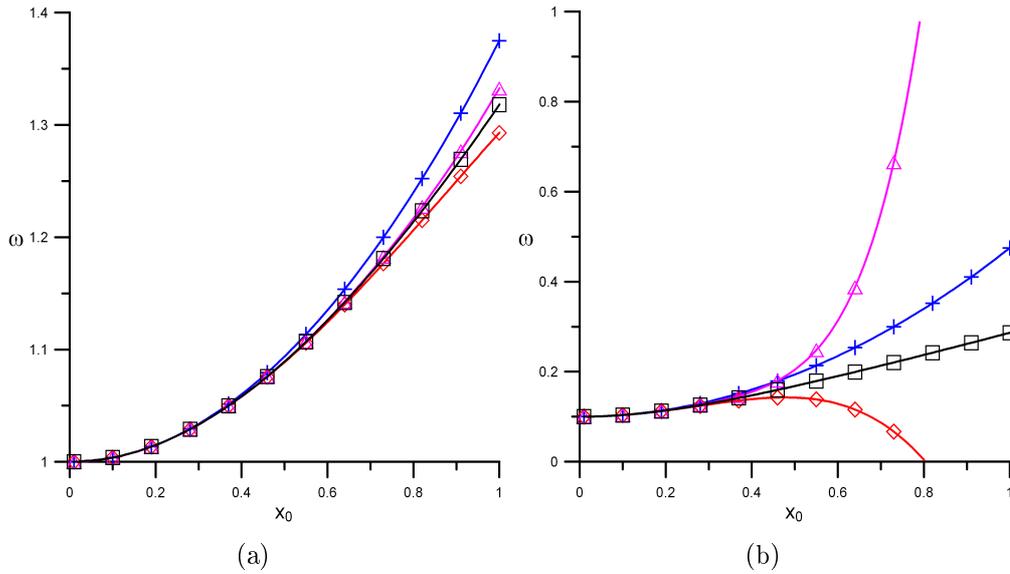


Figura 3.1: Relação  $\omega-x_0$ .  $\square$ , RK;  $+$ , eq. (3-29);  $\diamond$ , eq. (3-30);  $\triangle$ , eq. (3-31). (a) Série convergente,  $\omega_0 = \beta = 1$ ; (b) Série não convergente,  $\omega_0 = \beta = 0, 1$ .

Considerando novamente uma aproximação com três termos, tem-se

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \beta x_1(\tau) + \beta^2 x_2(\tau) + \beta^3 x_3(\tau) \quad (3-36)$$

$$\Omega = \omega_0 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3 \quad (3-37)$$

Substituindo (3-36) e (3-37) em (3-35) e coletando termos de mesma ordem em  $\beta$ , obtém-se

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-38)$$

$$\omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 = F \sin \tau - 2\omega_0 e_1 x_0'' - x_0^3 \quad (3-39)$$

$$\omega_0^2 x_2'' + \omega_0^2 x_2 = -3x_0^2 x_1 - 2\omega_0 e_2 x_0'' - e_1^2 x_0'' - 2\omega_0 e_1 x_1'' \quad (3-40)$$

$$\omega_0^2 x_3'' + \omega_0^2 x_3 = -3x_0 x_1^2 - 3x_0^2 x_2 - 2\omega_0 e_3 x_0'' - 2e_1 e_2 x_0'' - 2\omega_0 e_2 x_1'' - e_1^2 x_1'' - 2\omega_0 e_1 x_2'' \quad (3-41)$$

A única diferença do sistema de equações (3-38)-(3-41) em relação ao problema de vibração livre, eqs. (3-13)-(3-16), é a presença de  $F \sin \tau$  em (3-39).

Somente interessa a resposta permanente da solução. Dessa forma, admite-se que a solução de  $x_0$  está em fase com a força aplicada

$$x_0 = A \sin \tau \quad (3-42)$$

Substituindo (3-42) na eq. (3-39), obtém-se

$$\omega_0^2 (x_1'' + x_1) - 2\omega_0 e_1 A \tau \sin \tau - \frac{A^3}{4} \sin 3\tau +$$

$$\left(\frac{3A^3}{4} - F\right) \sin \tau = 0 \quad (3-43)$$

Resolvendo (3-43), encontra-se para  $x_1$

$$x_1 = C_1 \cos \tau + C_2 \sin \tau - \frac{e_1 A}{\omega_0} \tau \cos \tau - \frac{A^3}{32\omega_0^2} \sin 3\tau + \frac{3A^3}{8\omega_0^2} \tau \cos \tau - \frac{F}{2\omega_0^2} \tau \cos \tau \quad (3-44)$$

Agora as parcelas homogêneas das soluções são desprezadas fazendo  $C_i = 0$ . Neste caso

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3-45)$$

Retirando os termos seculares de  $x_1$ , tem-se

$$e_1 = \frac{3A^2}{8\omega_0} - \frac{-F}{2\omega_0 A} \quad (3-46)$$

$$x_1 = -\frac{A^3}{32\omega_0^2} \sin 3\tau \quad (3-47)$$

Inserindo as soluções  $x_0$  e  $x_1$  em (3-40) e resolvendo-a, tem-se

$$\begin{aligned} C_3 &= 0 \\ C_4 &= 0 \\ e_2 &= \frac{1}{256\omega_0^3} \left( -15A^4 + 48AF - 32\frac{F^2}{A^2} \right) \end{aligned} \quad (3-48)$$

$$x_2 = \frac{A^5}{1024\omega_0^4} (21 \sin 3\tau + \sin 5\tau) - \frac{9A^2 F}{256\omega_0^4} \sin 3\tau \quad (3-49)$$

Em seguida  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$  são inseridos na eq. (3-41) e  $x_3$  é obtido, as constantes de integração  $C_5$  e  $C_6$  são anuladas e os termos seculares são retirados de  $x_3$ , obtendo-se

$$e_3 = \frac{1}{8192\omega_0^5} \left( 123A^6 - 512\frac{F^3}{A^3} - 708A^3 F + 1152F^2 \right) \quad (3-50)$$

$$\begin{aligned} x_3 &= -\frac{A^7}{32768\omega_0^6} (\sin 7\tau + 417 \sin 3\tau + 43 \sin 5\tau) + \\ &\quad \frac{A^4 F}{12288\omega_0^6} (567 \sin 3\tau + 26 \sin 5\tau) - \frac{81AF^2}{2048\omega_0^6} \sin 3\tau \end{aligned} \quad (3-51)$$

A partir de (3-37), obtém-se para a curva de ressonância não-linear a seguinte relação frequência-amplitude

$$\Omega = \omega_0 + \frac{\beta}{8\omega_0 A}(3A^3 - 4F) + \frac{\beta^2}{256\omega_0^3 A^2}(-15A^6 + 48A^3 F - 32F^2) + \frac{\beta^3}{8192\omega_0^5 A^3}(1152A^3 F^2 - 512F^3 + 123A^9 - 708A^6 F) \quad (3-52)$$

Para um dado valor de  $F$ , a amplitude  $A$  pode ser retirada da eq. (3-52), uma vez que  $\Omega$  é conhecido.

Da eq. (3-36), pode-se escrever a solução no tempo, substituindo  $\tau$  por  $\Omega t$ , ou seja

$$x(t) = -\frac{A^7 \beta^3}{32768\omega_0^6} \sin 7\Omega t + \left\{ \frac{A^5 \beta^2}{1024\omega_0^4} + \beta^3 \left( \frac{13A^4 F}{6144\omega_0^6} - \frac{43A^7}{32768\omega_0^6} \right) \right\} \sin 5\Omega t + \left\{ -\frac{A^3 \beta}{32\omega_0^2} + \beta^2 \left( \frac{21A^5}{1024\omega_0^4} - \frac{9A^2 F}{256\omega_0^4} \right) + \beta^3 \left( \frac{189A^4 F}{4096\omega_0^6} - \frac{417A^7}{32768\omega_0^6} - \frac{81AF^2}{2048\omega_0^6} \right) \right\} \sin 3\Omega t + A \sin \Omega t \quad (3-53)$$

O deslocamento máximo é então obtido avaliando (3-53) ao longo do tempo.

### 3.1.2 Vibração Forçada Amortecida

O problema passa a ser escrito como

$$\Omega^2 x(\tau)'' + 2\Omega\beta\zeta\omega_0 x(\tau)' + \omega_0^2 x(\tau) + \beta x(\tau)^3 = \beta F \sin(\tau + \phi) \quad (3-54)$$

onde  $\tau = \Omega t$ . Agora o amortecimento também é considerado proporcional a  $\beta$ , isto é, não é muito grande. Considera-se uma aproximação com apenas um termo em  $\beta$ , pois para mais termos não é possível retirar os termos seculares das soluções. Também é admitido que há um ângulo de fase  $\phi$  entre a resposta e a força aplicada. O ângulo de fase é uma das incógnitas do problema em sistemas amortecidos, e pode ser inserido tanto na resposta quanto na excitação. Por simplificação, em (3-54) ele é inserido na excitação.

Sejam as aproximações

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \beta x_1(\tau) \quad (3-55)$$

$$\Omega = \omega_0 + \beta e_1 \quad (3-56)$$

Inserindo as eqs. (3-55) e (3-56) em (3-54) e equacionando os termos de mesma potência em  $\beta$ , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-57)$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 &= F \sin \tau \cos \phi + F \cos \tau \sin \phi - \\ & x_0^3 - 2\omega_0 e_1 x_0'' - 2\zeta \omega_0^2 x_0' \end{aligned} \quad (3-58)$$

A solução permanente da eq. (3-57) é tomada da forma:

$$x_0 = A \sin \tau \quad (3-59)$$

Substituindo (3-59) em (3-58), tem-se

$$\begin{aligned} \omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 &= F(\sin \tau \cos \phi + \cos \tau \sin \phi) + \frac{A^3}{4} \sin 3\tau - \\ & \frac{3A^3}{4} \sin \tau + 2\omega_0 e_1 A \sin \tau - 2\zeta \omega_0^2 A \cos \tau \end{aligned} \quad (3-60)$$

Resolvendo (3-60) e desprezando a parcela homogênea da solução, tem-se para  $x_1$

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{A^3}{32\omega_0^2} \sin 3\tau - \frac{3A^3}{8\omega_0^2} \sin \tau + \frac{3A^3}{8\omega_0^2} \tau \cos \tau + \frac{e_1 A}{\omega_0} \sin \tau - \\ & \frac{e_1 A}{\omega_0} \tau \cos \tau - \zeta A \tau \sin \tau + \frac{F}{4\omega_0^2} \sin \tau \cos \phi + \\ & \frac{F}{4\omega_0^2} \cos \tau \sin \phi - \frac{F}{2\omega_0^2} \tau \cos \tau \cos \phi + \frac{F}{2\omega_0^2} \tau \sin \tau \sin \phi \end{aligned} \quad (3-61)$$

Os termos seculares de (3-61) são eliminados fazendo-se

$$\begin{aligned} -\zeta A + \frac{F}{2\omega_0^2} \sin \phi &= 0 \\ -\frac{e_1 A}{\omega_0} + \frac{3A^3}{8\omega_0^2} - \frac{F}{2\omega_0^2} \cos \phi &= 0 \end{aligned} \quad (3-62)$$

de onde se obtém o ângulo de fase  $\phi$  e  $e_1$ , a saber

$$\sin \phi = \frac{2\zeta A \omega_0^2}{F} \quad (3-63)$$

$$e_1 = \frac{3A^2}{8\omega_0} - \sqrt{\frac{F^2}{4\omega_0^2 A^2} - \zeta^2 \omega_0^2} \quad (3-64)$$

Assim, a solução de  $x_1$  torna-se

$$x_1 = -\frac{A^3}{32\omega_0^2} \sin 3\tau + \frac{\zeta A}{2} \cos \tau - \frac{1}{4\omega_0^2} \sin \tau \sqrt{F^2 - 4\zeta^2 A^2 \omega_0^4} \quad (3-65)$$

Inserindo as soluções (3-59) e (3-65) em (3-55) e fazendo  $\tau = \Omega t$ , chega-se à solução no tempo:

$$x(t) = A \sin \Omega t - \frac{\beta A^3}{32\omega_0^2} \sin 3\Omega t + \frac{\beta \zeta A}{2} \cos \Omega t - \frac{\beta}{4\omega_0^2} \sin \Omega t \sqrt{F^2 - 4\zeta^2 A^2 \omega_0^4} \quad (3-66)$$

Inserindo (3-64) na eq. (3-56), obtém-se para a curva de ressonância do sistema amortecido

$$\Omega = \omega_0 + \frac{3\beta A^2}{8\omega_0} - \beta \sqrt{\frac{F^2}{4\omega_0^2 A^2} - \zeta^2 \omega_0^2} \quad (3-67)$$

Com  $A$  obtido através de (3-67), a amplitude da resposta é então conhecida observando-se a evolução da resposta no tempo, eq. (3-66).

### 3.1.3

#### Programa em Álgebra simbólica

A seguir são apresentados os passos necessários para a automatização do problema de vibração livre não amortecida ou vibração forçada, amortecida ou não, para  $n$  termos na aproximação. A restrição de vibração livre não-amortecida é devida ao método, porque as amplitudes das soluções aproximadas são constantes no tempo.

O programa, desenvolvido em álgebra simbólica, na linguagem MAPLE, executa os seguintes passos:

1. Aplica-se uma transformação de coordenadas à equação diferencial que se deseja estudar.  $\left\{ \begin{array}{l} \tau = \Omega t \\ x(t) \Rightarrow x(\tau) \end{array} \right.$
2. A solução aproximada e a relação entre as frequências são substituídas na equação diferencial.  $\left\{ \begin{array}{l} x(\tau) = \sum_{i=0}^n \beta^i x_i \\ \Omega = \omega_0 + \sum_{i=1}^n \beta^i e_i \end{array} \right.$
3. Os termos que multiplicam  $\beta$  são agrupados de acordo com a potência de  $\beta$ . Dessa forma constrói-se um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem não-homogêneas. Uma solução de amplitude desconhecida, representando apenas a parcela permanente da resposta, é adotada no caso de vibração forçada.  $\left\{ \begin{array}{l} eq_0 : \\ \omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0 \\ x_0 = A \cos \tau \\ ou \\ x_0 = x(0) \cos \tau \\ + v(0) \sin \tau \end{array} \right.$
4. Se o problema for de vibração forçada, as parcelas homogêneas das soluções de  $x_{i+1}$  são desprezadas, anulando-se as constantes que surgem na integração. Na vibração livre, as constantes de integração são determinadas de forma a atender as  $\left\{ \begin{array}{l} C_j = 0 \\ ou \\ x_{i+1}(0) = 0 \\ x_{i+1}'(0) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow C_j$

condições iniciais  $x_{i+1}(0) = 0$  e  $x_{i+1}'(0) = 0$ .

5. Os termos seculares presentes na solução encontrada no passo 4 são eliminados, determinando-se o valor de  $e_{i+1}$  que anula estes termos. Com  $e_{i+1}$  determinado, uma nova solução  $x_{i+1}$  é escrita, onde a periodicidade está assegurada.

$$\begin{cases} x_{i+1} \Rightarrow e_{i+1} \\ \Downarrow \\ x_{i+1} \text{periódica} \end{cases}$$

6. Os passos 4, 5 e 6 são repetidos até que todos os  $x_i$  periódicos sejam determinados. Isto permite reescrever a solução  $x(\tau)$  e a relação entre as frequências da excitação e a natural do passo 2. Agora basta atribuir valores aos parâmetros e encontrar a valor do parâmetro  $A$ .

$$\begin{cases} \Omega = \omega_0 + \sum_{i=1}^n \beta^i e_i \\ \Downarrow \\ A \end{cases}$$

7. Substitui-se  $A$  em  $x(\tau)$  e aplica-se mais um transformação de variáveis, obtendo-se a resposta no tempo.

$$\begin{cases} A \Rightarrow x(\tau) \\ \tau = \Omega t \\ x(\tau) \Rightarrow x(t) \end{cases}$$

8. O valor máximo da resposta no tempo é encontrado.

$$\begin{cases} x(t) \Rightarrow x_{max} \end{cases}$$

### 3.2

#### Método Lindstedt-Poincaré Modificado

Nos últimos anos, diversos métodos foram propostos com o objetivo de fornecer respostas quantitativamente consistentes para fortes não-linearidades. Burton e Hamdan (1983)[73] citam alguns desses métodos, entre os quais o LP modificado.

Alguns métodos derivados do LP original consistem em introduzir um novo parâmetro de perturbação que permanece pequeno mesmo quando o parâmetro original é muito grande [51]. Burton (1984)[74] usou a relação  $\alpha = \beta a^2 / (4 + 3\beta a^2)$  e expandiu a solução em potências de  $\alpha$  no lugar de a expandir em potências de  $\beta$ , fazendo com que as soluções no tempo e na frequência apresentem resultados convergentes.

He (2000) [75] propôs uma nova técnica de perturbação a partir do LP, que, segundo Hu (2004) [56, 76], apresenta resultados inferiores ao de uma técnica considerada clássica (método apresentado nesta seção). Segundo Hu, esta técnica é válida para grandes não-linearidades. Sanchez (2005) [77] mostra que o método proposto por He apresenta erros enormes na amplitude da resposta, enquanto que os erros no período ficam em faixas bem menores. Sanchez comenta que quando o erro exibido pelo método de He para o período

é menor que 5% para  $\beta = 100$  em (3-1), o erro na amplitude da solução é 392%.

Utilizando a seguinte expansão para a frequência da resposta,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \sum_{i=1}^n e_i \beta^i \quad (3-68)$$

ao invés da expansão dada pela eq. (3-8), obtêm-se resultados superiores ao do LP clássico, tal como apontado por Andrianov (2000) [54]. De (3-68) tem-se que

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \sum_{i=1}^n e_i \beta^i \quad (3-69)$$

Para Burton (1984)[74], a eq. (3-68) apresenta resultados superiores por conter  $\omega^2$ , que aparece naturalmente na formulação, já que a equação diferencial é de segunda ordem.

Considerando uma aproximação com três termos para a solução no tempo e para a frequência  $\omega_0$ , tem-se

$$x(t) = x_0(t) + \beta x_1(t) + \beta^2 x_2(t) + \beta^3 x_3(t) \quad (3-70)$$

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \beta e_1 - \beta^2 e_2 - \beta^3 e_3 \quad (3-71)$$

Substituindo (3-70) e (3-71) em (3-1) e agrupando os termos de mesma potência em  $\beta$ , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (3-72)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = e_1 x_0 - x_0^3 \quad (3-73)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = e_1 x_1 + e_2 x_0 - 3x_0^2 x_1 \quad (3-74)$$

$$\ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 = e_3 x_0 + e_2 x_1 + e_1 x_2 - 3x_0 x_1^2 - 3x_0^2 x_2 \quad (3-75)$$

Da mesma forma que no método clássico, encontra-se primeiramente a solução de  $x_0$

$$x_0 = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \quad (3-76)$$

Aplicando as condições iniciais  $x_0(0) = x(0)$  e  $\dot{x}_0(0) = v(0)$  e determinando as constantes, tem-se

$$x_0 = \frac{v(0)}{\omega} \sin \omega t + x(0) \cos \omega t \quad (3-77)$$

Substituindo (3-77) na eq. (3-73), tem-se

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \frac{e_1 v(0)}{\omega} \sin \omega t + e_1 x(0) \cos \omega t + \frac{v(0)^3}{4\omega^3} \sin 3\omega t -$$

$$\begin{aligned} & \frac{3v(0)^3}{4\omega^3} \sin \omega t - \frac{3v(0)^2 x(0)}{4\omega^2} \cos \omega t + \frac{3v(0)^2 x(0)}{4\omega^2} \cos 3\omega t - \\ & \frac{3v(0)x(0)^2}{4\omega} \sin 3\omega t + \frac{3v(0)x(0)^2}{4\omega} \sin \omega t - \frac{x(0)^3}{4} \cos 3\omega t - \\ & \frac{3x(0)^3}{4} \cos \omega t \end{aligned} \tag{3-78}$$

Resolvendo (3-78), encontra-se  $x_1$

$$\begin{aligned} x_1 = & \left( \frac{3v(0)x(0)^2}{32\omega^3} - \frac{v(0)^3}{32\omega^5} \right) \sin 3\omega t - \left( \frac{3v(0)^2 x(0)}{32\omega^4} - \right. \\ & \left. \frac{x(0)^3}{32\omega^2} \right) \cos 3\omega t + \left( C_3 - \frac{e_1 v(0)t}{2\omega^2} + \frac{3v(0)^3 t}{8\omega^4} + \right. \\ & \left. \frac{3tv(0)x(0)^2}{8\omega^2} \right) \cos \omega t + \left( C_4 - \frac{3v(0)^3}{8\omega^5} - \frac{3}{8\omega^3} v(0)x(0)^2 - \right. \\ & \left. \frac{3tx(0)^3}{8\omega} + \frac{e_1 \dot{x}(0)}{2\omega^3} + \frac{e_1 x(0)t}{2\omega} - \frac{3v(0)^2 x(0)t}{8\omega^3} \right) \sin \omega t \end{aligned} \tag{3-79}$$

Novamente as constantes de integração são determinadas aplicando as condições iniciais. Como foi imposto que  $x_0(0)$  e  $\dot{x}_0(0)$  são idênticos às condições iniciais  $x(0)$  e  $v(0)$ , da eq. (3-70) tem-se que  $x_1(0)$ ,  $\dot{x}_1(0)$ ,  $x_2(0)$ ,  $\dot{x}_2(0)$ ,  $x_3(0)$  e  $\dot{x}_3(0)$  devem ser nulos, dessa forma tem-se

$$\begin{aligned} C_3 = & -\frac{e_1 x(0)}{2\omega^2} + \frac{15v(0)^2 x(0)}{32\omega^4} + \frac{11x(0)^3}{32\omega^2} \\ C_4 = & \frac{e_1 v(0)}{2\omega^3} - \frac{9v(0)^3}{32\omega^5} - \frac{21v(0)x(0)^2}{32\omega^3} \end{aligned} \tag{3-80}$$

Substituindo (3-80) em (3-79), a solução  $x_1$  ainda contém termos que crescem indefinidamente com o tempo. Eles devem ser retirados para que a solução passe a ser periódica. Igualando a zero os termos que multiplicam  $t \sin \omega t$  e  $t \cos \omega t$  em (3-79), tem-se

$$\frac{e_1 x(0)}{2\omega} - \frac{3v(0)^2 x(0)}{8\omega^3} - \frac{3x(0)^3}{8\omega} = 0 \tag{3-81}$$

de onde determina-se  $e_1$ ,

$$e_1 = \frac{3v(0)^2}{4\omega^2} + \frac{3x(0)^2}{4} \tag{3-82}$$

e  $x_1$

$$x_1 = \left( \frac{3v(0)^3}{32\omega^5} - \frac{9v(0)x(0)^2}{32\omega^3} \right) \sin \omega t + \left( \frac{3v(0)x(0)^2}{32\omega^3} - \frac{v(0)^3}{32\omega^5} \right) \sin 3\omega t +$$

$$\left( \frac{3v(0)^2x(0)}{32\omega^4} - \frac{x(0)^3}{32\omega^2} \right) \cos \omega t + \left( \frac{x(0)^3}{32\omega^2} - \frac{3v(0)^2x(0)}{32\omega^4} \right) \cos 3\omega t$$

Inserindo  $x_0$  e  $x_1$  na eq. (3-74), tem-se para  $x_2$

$$\begin{aligned} x_2 = & \left( \frac{15v(0)^3x(0)^2}{256\omega^7} - \frac{3x(0)^4v(0)}{128\omega^5} - \frac{3v(0)^5}{256\omega^9} \right) \sin 3\omega t + \left( C_6 - \frac{21v(0)^5}{256\omega^9} + \right. \\ & \frac{3x(0)^5}{256\omega^3}t + \frac{15v(0)^3x(0)^2}{128\omega^7} + \frac{3x(0)^4v(0)}{256\omega^5} + \frac{15v(0)^2x(0)^3}{128\omega^5}t + \frac{e_2v(0)}{2\omega^3} + \frac{e_2x(0)}{2\omega}t - \\ & \left. \frac{21v(0)^4x(0)}{256\omega^7}t \right) \sin \omega t + \left( \frac{5x(0)^4v(0)}{1024\omega^5} + \frac{v(0)^5}{1024\omega^9} - \frac{5v(0)^3x(0)^2}{512\omega^7} \right) \sin 5\omega t + \\ & \left( \frac{15x(0)^3v(0)^2}{256\omega^6} - \frac{9v(0)^4x(0)}{256\omega^8} \right) \cos 3\omega t + \left( \frac{x(0)^5}{1024\omega^4} - \frac{5x(0)^3v(0)^2}{512\omega^6} + \right. \\ & \left. \frac{5v(0)^4x(0)}{1024\omega^8} \right) \cos 5\omega t + \left( \frac{21v(0)^5}{256\omega^8}t + C_5 - \frac{e_2v(0)}{2\omega^2}t - \frac{15v(0)^3x(0)^2}{128\omega^6}t - \right. \\ & \left. \frac{3x(0)^4v(0)}{256\omega^4}t \right) \cos \omega t \end{aligned}$$

As constantes de integração  $C_5$  e  $C_6$  são obtidas fazendo-se  $x_2(0) = 0$  e  $\dot{x}_2(0) = 0$ , e os termos seculares são retirados de  $x_2$ , determinando-se  $e_2$ , ou seja

$$\begin{aligned} C_5 = & -\frac{85x(0)^3v(0)^2}{512\omega^6} - \frac{e_2x(0)}{2\omega^2} + \frac{115v(0)^4x(0)}{1024\omega^8} - \frac{13x(0)^5}{1024\omega^4} \\ C_6 = & -\frac{53v(0)^5}{1024\omega^9} - \frac{5v(0)^3x(0)^2}{512\omega^7} + \frac{v(0)e_2}{2\omega^3} + \frac{59v(0)x(0)^4}{1024\omega^5} \\ e_2 = & -\frac{3x(0)^4}{128\omega^2} + \frac{21v(0)^4}{128\omega^6} - \frac{15x(0)^2v(0)^2}{64\omega^4} \\ x_2 = & \left( \frac{47x(0)^4v(0)}{1024\omega^5} + \frac{31v(0)^5}{1024\omega^9} - \frac{65v(0)^3x(0)^2}{512\omega^7} \right) \sin \omega t - \\ & \left( \frac{3x(0)^4v(0)}{128\omega^5} + \frac{3v(0)^5}{256\omega^9} - \frac{15v(0)^3x(0)^2}{256\omega^7} \right) \sin 3\omega t + \\ & \left( \frac{v(0)^5}{1024\omega^9} - \frac{5v(0)^3x(0)^2}{512\omega^7} + \frac{5x(0)^4v(0)}{1024\omega^5} \right) \sin 5\omega t - \\ & \left( \frac{x(0)^5}{1024\omega^4} + \frac{25v(0)^2x(0)^3}{512\omega^6} - \frac{31v(0)^4x(0)}{1024\omega^8} \right) \cos \omega t + \\ & \left( \frac{15v(0)^2x(0)^3}{256\omega^6} - \frac{9v(0)^4x(0)}{256\omega^8} \right) \cos 3\omega t + \\ & \left( \frac{x(0)^5}{1024\omega^4} + \frac{5v(0)^4x(0)}{1024\omega^8} - \frac{5v(0)^2x(0)^3}{512\omega^6} \right) \cos 5\omega t \end{aligned}$$

Em seguida  $x_0$ ,  $x_1$  e  $x_2$  são inseridos na eq. (3-75),  $x_3$  é obtido, as constantes de integração são determinadas fazendo-se  $x_3(0) = 0$  e  $\dot{x}_3(0) = 0$ , e, novamente, os termos seculares são retirados de  $x_3$ , e tem-se finalmente  $e_3$ , a saber.

$$e_3 = \frac{33v(0)^6}{512\omega^{10}} + \frac{21v(0)^2x(0)^4}{512\omega^6} - \frac{45v(0)^4x(0)^2}{256\omega^8} \quad (3-83)$$

Uma vez determinados  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$ , tem-se a solução periódica no tempo e pode-se reescrever a relação frequência amplitude (eq. (3-68)) na forma

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3\beta v(0)^2}{4\omega^2} + \frac{3\beta x(0)^2}{4} - \frac{3\beta^2 x(0)^4}{128\omega^2} + \frac{21\beta^2 v(0)^4}{128\omega^6} - \\ \frac{15\beta^2 v(0)^2 x(0)^2}{64\omega^4} + \frac{33\beta^3 v(0)^6}{512\omega^{10}} + \frac{21\beta^3 v(0)^2 x(0)^4}{512\omega^6} - \\ \frac{45\beta^3 v(0)^4 x(0)^2}{256\omega^8} \end{aligned} \quad (3-84)$$

Melhores resultados são obtidos a medida que mais termos são considerados nas aproximações (3-70) e (3-68).

Considerando que as condições sejam sempre

$$\begin{aligned} x(0) &\neq 0 \\ v(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3-85)$$

e escrevendo as eqs. (3-70) e (3-68) para  $n$  valendo 1, 2, 3, 4, 5 e 6, após tirar os termos seculares, encontram-se, respectivamente, as seguintes relações frequência-amplitude:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^2 \quad (3-86)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^2 - \frac{3}{128\omega^2}\beta^2 x(0)^4 \quad (3-87)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^2 - \frac{3}{128\omega^2}\beta^2 x(0)^4 \quad (3-88)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^2 - \frac{3}{128\omega^2}\beta^2 x(0)^4 + \frac{21}{131072\omega^6}\beta^4 x(0)^8 \quad (3-89)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^2 - \frac{3}{128\omega^2}\beta^2 x(0)^4 + \frac{21}{131072\omega^6}\beta^4 x(0)^8 \quad (3-90)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^2 - \frac{3}{128\omega^2}\beta^2 x(0)^4 + \\ \frac{21}{131072\omega^6}\beta^4 x(0)^8 - \frac{33}{16777216\omega^{10}}\beta^6 x(0)^{12} \end{aligned} \quad (3-91)$$

Ao contrário do método tradicional, eqs. (3-29) à (3-34), onde se obtém uma expressão explícita para  $\omega$  em função dos parâmetros do sistema, no método modificado deve-se resolver uma equação não-linear para se determinar  $\omega$ .

Para resolver cada uma das eqs. (3-86) à (3-91), pode-se utilizar Newton-Raphson ou programas de álgebra simbólica. As eqs. (3-86) e (3-87) podem ser resolvidas analiticamente. As suas soluções são respectivamente

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{(4\omega_0^2 + 3\beta x(0)^2)} \tag{3-92}$$

$$\omega = \frac{1}{4} \sqrt{(8\omega_0^2 + 6\beta x(0)^2 + \sqrt{64\omega_0^4 + 96\omega_0^2\beta x(0)^2 + 30\beta^2 x(0)^4})} \tag{3-93}$$

As soluções no tempo correspondentes às frequências naturais obtidas através de (3-92) e (3-93) são respectivamente

$$x = \left( x(0) - \beta \frac{x(0)^3}{32\omega^2} \right) \cos \omega t + \beta \frac{x(0)^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t \tag{3-94}$$

$$x = \left( x(0) - \beta \frac{x(0)^3}{32\omega^2} - \frac{\beta^2 x(0)^5}{1024\omega^4} \right) \cos \omega t + \beta \frac{x(0)^3}{32\omega^2} \cos 3\omega t + \beta^2 \frac{x(0)^5}{1024\omega^4} \cos 5\omega t \tag{3-95}$$

A figura 3.2 apresenta a frequência da resposta em função da condição inicial de deslocamento  $x(0) = x_0$  para diferentes relações  $\omega-x_0$  e também a solução obtida por integração numérica da equação de movimento. Diferentemente do método tradicional (figura 3.1), o método pode apresentar

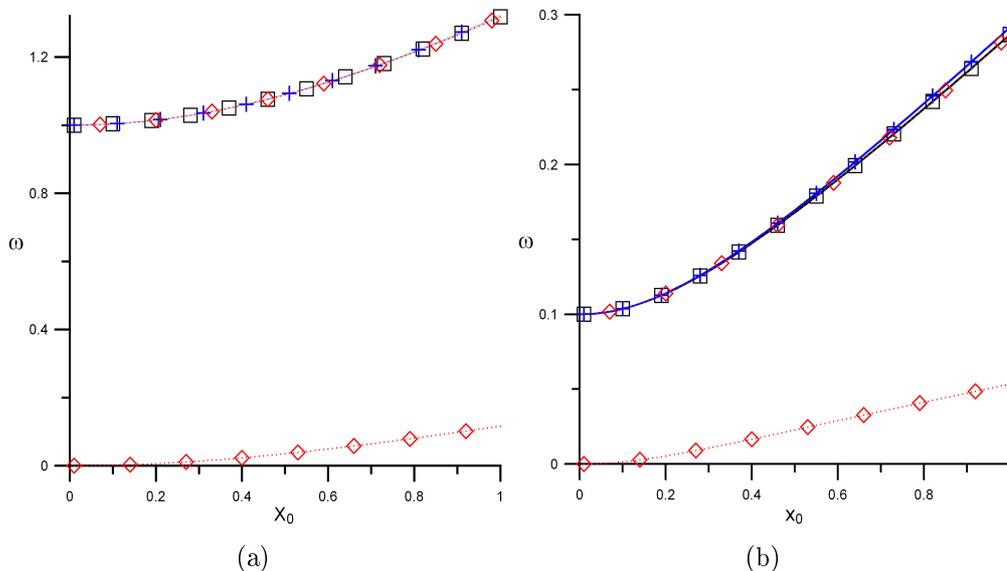


Figura 3.2: Relação  $\omega-x_0$ .  $\square$ , RK;  $+$ , eq. (3-86);  $\diamond$ , eq. (3-87). (a)  $\omega_0 = \beta = 1$ ; (b)  $\omega_0 = \beta = 0, 1$ .

mais de uma solução para a frequência, sendo que a solução correta sempre será a maior. Entretanto o método não apresenta problemas de convergência

para pequenos valores de  $\omega_0$ , pois potências de  $\omega$  estão nos denominadores nas relações (3-86) à (3-91).

### 3.2.1

#### Vibração Forçada

Considera-se agora que a aproximação

$$x(t) = x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3 \quad (3-96)$$

seja a solução de

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \beta F \sin \Omega t \quad (3-97)$$

Substituindo (3-96) em (3-97) e levando em consideração que a frequência da excitação é aproximadamente

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3 \quad (3-98)$$

tem-se,

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_0 + \beta \ddot{x}_1 + \beta^2 \ddot{x}_2 + \beta^3 \ddot{x}_3 + (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3) \Omega^2 - \\ & (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3) \beta e_1 - (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3) \beta^2 e_2 - \\ & (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3) \beta^3 e_3 + \beta (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3)^3 \\ & = \beta F \sin \Omega t \end{aligned}$$

Igualando os termos de mesma potência em  $\beta$ , chega-se ao seguinte sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem,

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (3-99)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = F \sin \Omega t + e_1 x_0 - x_0^3 \quad (3-100)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = e_1 x_1 + e_2 x_0 - 3x_0^2 x_1 \quad (3-101)$$

$$\ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 = e_3 x_0 + e_2 x_1 + e_1 x_2 - 3x_0 x_1^2 - 3x_0^2 x_2 \quad (3-102)$$

A solução da eq. (3-99) é escrita como

$$x_0 = A \sin \Omega t \quad (3-103)$$

já que é de interesse apenas a resposta permanente do sistema (3-97).

A solução  $x_0$  é inserida na segunda equação em (3-100) e encontra-se  $x_1$ . A parcela transiente da nova solução é novamente desprezada anulando-se as constantes de integração. Dessa forma a solução  $x_1$  é dado por

$$x_1 = \left( \frac{3A^3}{8\Omega} - \frac{F}{2\Omega} - \frac{e_1 A}{2\Omega} \right) t \cos \Omega t - \left( \frac{3A^3}{8\Omega^2} - \frac{F}{2\Omega^2} + \right.$$

$$\left. \frac{e_1 A}{2\Omega^2} \right) \sin \Omega t - \frac{A^3}{32\Omega^2} \sin 3\Omega t \quad (3-104)$$

Retirando os termos seculares, encontra-se  $e_1$

$$e_1 = \frac{3}{4}A^2 - \frac{F}{A} \quad (3-105)$$

e  $x_1$  passa a ser periódico

$$x_1 = -\frac{1}{32\Omega^2}A^3 \sin 3\Omega t \quad (3-106)$$

Substituindo (3-103) e (3-106) na eq. (3-101), encontra-se  $x_2$ . Desprezando a parcela homogênea da solução, tem-se

$$\begin{aligned} x_2 = & \left( \frac{3A^5}{256\Omega^3} - \frac{e_2 A}{2\Omega} \right) t \cos \Omega t + \left( \frac{e_2 A}{2\Omega^2} - \frac{3A^5}{256\Omega^4} \right) \sin \Omega t - \\ & \left( \frac{3A^5}{1024\Omega^4} + \frac{A^2 F}{256\Omega^4} \right) \sin 3\Omega t + \frac{A^5}{1024\Omega^4} \sin 5\Omega t \end{aligned} \quad (3-107)$$

Para anular os termos seculares, é necessário que:

$$e_2 = \frac{3A^4}{128\Omega^2} \quad (3-108)$$

Assim a solução(3-107) toma a forma

$$x_2 = \frac{A^5}{1024\Omega^4} \sin 5\Omega t - \left( \frac{3A^5}{1024\Omega^4} + \frac{FA^2}{256\Omega^4} \right) \sin 3\Omega t \quad (3-109)$$

Substituindo (3-103), (3-106) e (3-109) em (3-102) e repetindo o procedimento de desprezar a parte homogênea da solução e retirar os termos seculares, encontra-se

$$e_3 = \frac{3FA^3}{1024\Omega^4} + \frac{15A^6}{4096\Omega^4} \quad (3-110)$$

e chega-se a

$$\begin{aligned} x_3 = & -\frac{A^7}{32768\Omega^6} \sin 7\Omega t + \left( \frac{5A^7}{32768\Omega^6} + \frac{FA^4}{6144\Omega^6} \right) \sin 5\Omega t - \\ & \left( \frac{9A^7}{32768\Omega^6} + \frac{3FA^4}{4096\Omega^6} + \frac{F^2 A}{2048\Omega^6} \right) \sin 3\Omega t \end{aligned} \quad (3-111)$$

Reescrevendo (3-96) e (3-98), tem-se respectivamente

$$x(t) = A \sin \Omega t + \frac{\beta^2 A^4}{1024\Omega^4} \left( A + \beta \left( \frac{F}{6\Omega^2} + \frac{5A^3}{32\Omega^2} \right) \right) \sin 5\Omega t -$$

$$\frac{\beta^3 A^7}{32768\Omega^6} \sin 7\Omega t - \left( \frac{\beta A^3}{32\Omega^2} + \beta^2 \left( \frac{3A^5}{1024\Omega^4} + \frac{A^2 F}{256\Omega^4} \right) + \beta^3 \left( \frac{3A^4 F}{4096\Omega^6} + \frac{AF^2}{2048\Omega^6} + \frac{9A^7}{32768\Omega^6} \right) \right) \sin 3\Omega t \quad (3-112)$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \beta \left( \frac{3}{4} A^2 - \frac{F}{A} \right) + \beta^2 \left( \frac{3A^4}{128\Omega^2} \right) + \beta^3 \left( \frac{3FA^3}{1024\Omega^4} + \frac{15A^6}{4096\Omega^4} \right) \quad (3-113)$$

Deve-se notar a semelhança entre as eqs. (3-52) e (3-113), e (3-53) e (3-112).

### 3.2.2

#### Vibração Forçada Amortecida

Agora o amortecimento é considerado. A equação diferencial assume a seguinte forma:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\beta\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = \beta F \sin(\Omega t + \phi) \quad (3-114)$$

onde  $\phi$  é o ângulo de fase entre a excitação e a resposta.

Considerando que a aproximação

$$x(t) = x_0 + \beta x_1 \quad (3-115)$$

é a solução da eq. (3-114), substituindo (3-115) em (3-114) e levando em consideração que a frequência da excitação é

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \beta e_1 \quad (3-116)$$

tem-se,

$$\ddot{x}_0 + \beta\ddot{x}_1 + 2\beta\zeta\omega_0\dot{x}_0 + 2\beta^2\zeta\omega_0\dot{x}_1 + (x_0 + \beta x_1)\Omega^2 - (x_0 + \beta x_1)\beta e_1 + \beta(x_0 + \beta x_1)^3 = \beta F \sin \Omega t \cos \phi + \beta F \cos \Omega t \sin \phi \quad (3-117)$$

Igualando os termos de mesma potência em  $\beta$ , chega-se ao seguinte sistema de equações,

$$\ddot{x}_0 + \Omega^2 x_0 = 0 \quad (3-118)$$

$$\ddot{x}_1 + \Omega^2 x_1 = F \sin \Omega t \cos \phi + F \cos \Omega t \sin \phi + e_1 x_0 - x_0^3 - 2\zeta\omega_0\dot{x}_0 \quad (3-119)$$

Novamente a solução da eq. (3-118) é escrita como

$$x_0 = A \sin \Omega t \quad (3-120)$$

A solução  $x_0$  é inserida na equação seguinte (3-119) e encontra-se  $x_1$ :

$$x_1 = \left( C_1 + \frac{3A^3}{8\Omega} t - \frac{F}{2\Omega} t \cos \phi - \frac{\zeta\omega_0 A}{\Omega} + \frac{F}{4\Omega^2} \sin \phi - \frac{e_1 A}{2\Omega} t \right)$$

$$\cos \Omega t + \left( C_2 + \frac{F}{4\Omega^2} \cos \phi + \frac{F}{2\Omega} t \sin \phi - \zeta \omega_0 A t \right) \sin \Omega t - \frac{A^3}{32\Omega^2} \sin 3\Omega t \quad (3-121)$$

Desprezando a solução homogênea de (3-121), os termos seculares são eliminados fazendo-se,

$$-\zeta \omega_0 A + \frac{F \sin \phi}{2\Omega} = 0 \quad (3-122)$$

$$\frac{3A^3}{8\Omega} - \frac{e_1 A}{2\Omega} - \frac{F}{2\Omega} \cos \phi = 0 \quad (3-123)$$

de onde o ângulo de fase  $\phi$  e  $e_1$  são determinados

$$\sin \phi = \frac{2\zeta A \omega_0 \Omega}{F} \quad (3-124)$$

$$e_1 = \frac{3A^2}{4} - \sqrt{\frac{F^2}{A^2} - 4\zeta^2 \omega_0^2 \Omega^2} \quad (3-125)$$

Assim, a solução  $x_1$  torna-se

$$x_1 = -\frac{A^3}{32\Omega^2} \sin 3\Omega t + \frac{\zeta \omega_0 A}{2\Omega} \cos \Omega t - \frac{1}{4\Omega^2} \sin \Omega t \sqrt{F^2 - 4\zeta^2 A^2 \omega_0^2 \Omega^2} \quad (3-126)$$

Inserindo as soluções (3-120) e (3-126) em (3-115), tem-se a solução no tempo:

$$x(t) = A \sin \Omega t - \frac{\beta A^3}{32\Omega^2} \sin 3\Omega t - \frac{\beta \zeta \omega_0 A}{2\Omega} \cos \Omega t + \frac{\beta}{4\Omega^2} \sqrt{F^2 - 4\zeta^2 A^2 \omega_0^2 \Omega^2} \sin \Omega t \quad (3-127)$$

Inserindo (3-125) na eq. (3-116), obtém-se

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3\beta A^2}{4} - \beta \sqrt{\frac{F^2}{A^2} - 4\zeta^2 \omega_0^2 \Omega^2} \quad (3-128)$$

de onde pode-se determinar o valor de  $A$  a partir dos demais parâmetros.

Com  $A$  conhecido, a amplitude da resposta é então retirada da solução no tempo, eq. (3-127).

O LP modificado permite encontrar uma aproximação para a solução forçada amortecida até a ordem dois, enquanto que na versão tradicional (com a expansão (3-56) no lugar de (3-116)) a partir de  $x_2$  não é mais possível retirar os termos seculares da solução.

Considerando as seguintes aproximações de segunda ordem,

$$x(t) = x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 \tag{3-129}$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 \tag{3-130}$$

chega-se às seguintes expressões para  $x_2(t)$  e  $e_2$ :

$$x_2 = \left( -\frac{3A^5}{1024\Omega^4} - \frac{7A^2}{256\Omega^4} \sqrt{F^2 - 4\omega_0^2\zeta^2 A^2\Omega^2} \right) \sin 3\Omega t + \frac{3A^3\omega_0\zeta}{128\Omega^3} \cos 3\Omega t + \frac{A^5}{1024\Omega^4} \sin 5\Omega t \tag{3-131}$$

$$e_2 = \frac{3A}{8\Omega^2} \sqrt{F^2 - 4\omega_0^2\zeta^2 A^2\Omega^2} + \frac{3A^4}{128\Omega^2} + \frac{F^2}{4A^2\Omega^2}$$

### Programa em Álgebra simbólica

A seguir são apresentados os passos necessários à automatização do problema de vibração forçada não amortecida para  $n$  termos na aproximação. O programa, desenvolvido em álgebra simbólica, executa os seguintes passos:

1. A solução aproximada e a relação entre as frequências são substituídas na equação diferencial.  $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sum_{i=0}^n \beta^i x_i \\ \omega_0^2 = \Omega^2 - \sum_{i=1}^n \beta^i e_i \end{array} \right.$

2. Os termos que multiplicam  $\beta$  são agrupados de acordo com a potência de  $\beta$ . Dessa forma constrói-se um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem não-homogêneas. Uma solução de amplitude desconhecida representando apenas a parcela permanente da resposta é adotada no caso de vibração forçada.  $\left\{ \begin{array}{l} eq_0 \Rightarrow \Omega^2 x_0 + x_0 = 0 \\ x_0 = A \sin \Omega t \\ ou \\ eq_0 \Rightarrow \omega^2 \ddot{x}_0 + x_0 = 0 \\ x_0 = x(0) \cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \Omega t \end{array} \right.$

3. As soluções conhecidas são inseridas na próxima equação diferencial a ser resolvida e encontra-se a solução desta equação.  $\left\{ \begin{array}{l} x_0, \dots, x_i \\ \Downarrow \\ eq_{i+1} \Rightarrow x_{i+1} \end{array} \right.$

4. No caso de vibração forçada, a parcela homogênea das soluções de  $x_{i+1}$  são desprezadas, anulando as constantes que surgem na integração. Na vibração livre, as constantes de integração são determinadas de forma a atender às condições iniciais  $x_{i+1}(0) = 0$  e  $\dot{x}_{i+1}(0) = 0$ .  $\left\{ \begin{array}{l} C_j = 0 \\ ou \\ x_{i+1}(0) = 0 \\ \dot{x}_{i+1}(0) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow C_j$

5. Os termos seculares presentes na solução encontrada no passo 4 são eliminados, determinando-se o valor de  $e_{i+1}$  que anula estes termos.

Com  $e_{i+1}$  determinado, uma nova solução  $x_{i+1}$  é escrita, onde a periodicidade está assegurada. Havendo amortecimento, na determinação de  $e_1$  deve-se também determinar o ângulo de fase  $\phi$  da força ( $F \sin(\Omega t + \phi)$ ), sendo depois possível retirar os termos seculares de  $x_2$ .

$$\begin{cases} x_{i+1} \Rightarrow e_{i+1} \\ \Downarrow \\ x_{i+1} \text{periódica} \end{cases}$$

6. Os passos 4, 5 e 6 são repetidos até que todos os  $x_i$  periódicos sejam determinados. Isto permite reescrever a solução  $x(t)$  e a relação entre as frequências da excitação e a natural do passo 2. Agora basta atribuir valores aos parâmetros e encontrar o parâmetro  $A$ .

$$\begin{cases} \Omega^2 = \omega_0^2 + \sum_{i=1}^n \beta^i e_i \\ \Downarrow \\ A \end{cases}$$

7. Substituir  $A$  em  $x(t)$ .

8. O valor máximo da resposta no tempo é encontrado.  $\begin{cases} x(t) \Rightarrow x_{max} \end{cases}$

### 3.3 Método Múltiplas Escalas

Segundo Sanchez (1996)[29], contribuíram para o surgimento do MMS, Sturrock(1957), Frieman(1963), Kevorkian(1963) e Nayfeh(1965). No MMS, as parcelas  $x_i$  da solução da equação(3-11) ,que são funções do tempo, agora passam a ser funções de múltiplas escalas de tempo,  $T_0, T_1$ , etc. Tomando

$$T_i = \beta^i t \tag{3-132}$$

a solução de uma equação de movimento pode ser escrita como,

$$x = \sum_{i=0}^n x_i(T_0, \dots, T_n) \beta^i \tag{3-133}$$

Substituindo (3-133) na equação diferencial, um sistema de equações é obtido coletando os termos de mesma potência em  $\beta$ . A solução da primeira das equações deste sistema é

$$x_0 = A(T_1, \dots, T_n) e^{\omega_0 T_0 i} + B(T_1, \dots, T_n) e^{-\omega_0 T_0 i} \tag{3-134}$$

Esta solução é substituída na segunda equação do sistema e os termos que irão produzir termos seculares na nova solução são retirados. Resolvendo esta equação, encontra-se  $x_1$ , onde apenas a parcela permanente é considerada. As

soluções para  $x_0$  e  $x_1$  são agora inseridas na próxima equação do sistema e assim por diante.

Para anular os termos que provocam o surgimento de termos seculares, novas equações são escritas, ao invés de resolvê-las como equações diferenciais parciais, pode-se combina-las numa única equação.

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{i=1}^n \beta^i \frac{\partial A(T_1, \dots, T_n)}{\partial T_i} \quad (3-135)$$

onde as derivadas de  $A$  em relação a  $T_i$  são obtidas a partir das equações geradas para eliminar os termos seculares. Segundo Nayfeh (2005)[78], esta técnica é chamada de método de reconstituição.

Assume-se que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}a(t)e^{\phi(t)i} \\ B &= \frac{1}{2}a(t)e^{-\phi(t)i} \end{aligned} \quad (3-136)$$

e insere-se estas expressões na equação(3-135). Separando as partes reais e imaginárias, a equação(3-135) produz duas novas equações que permitem determinar  $a(t)$  e  $\phi(t)$  e, conseqüentemente, (3-133) é determinada.

Tomando como exemplo a equação

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (3-137)$$

uma aproximação para  $x$  que contém termos até a potência três é construída:

$$\begin{aligned} x &= x_0(T_0, T_1, T_2, T_3) + \beta x_1(T_0, T_1, T_2, T_3) + \\ &\beta^2 x_2(T_0, T_1, T_2, T_3) + \beta^3 x_3(T_0, T_1, T_2, T_3) \end{aligned} \quad (3-138)$$

A seguir, (3-138) é inserida em (3-137) e as derivadas parciais são obtidas de acordo com a regra da cadeia:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=0}^3 \beta^i \frac{\partial x_j(T_0, T_1, T_2, T_3)}{\partial T_i} \quad (3-139)$$

Agrupando os termos de mesma potência em  $\beta$ , chega-se ao seguinte sistema de quatro equações:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-140)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - x_0^3 \quad (3-141)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_2 = -3x_0^2 x_1 - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} \quad (3-142)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_3}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_3 = & -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_3} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 3x_0 x_1^2 - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_2} - \\ & 2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0 \partial T_1} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1 \partial T_2} - 3x_0^2 x_2 \end{aligned} \quad (3-143)$$

Segundo Nayfeh(2005)[78], a solução da eq. (3-140) pode ser escrita como

$$x_0 = A(T_1, T_2, T_3)e^{\omega_0 T_0 i} + B(T_1, T_2, T_3)e^{-\omega_0 T_0 i} \quad (3-144)$$

onde o termo que contém  $B$  é o complexo conjugado de  $A$ .

Substituindo (3-144) na eq. (3-141) e expandindo esta equação, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + 2i \frac{\partial A}{\partial T_1} \omega_0 e^{\omega_0 T_0 i} - 2i \frac{\partial B}{\partial T_1} \omega_0 e^{-i\omega_0 T_0} + A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \\ 3A^2 e^{\omega_0 T_0 i} B + 3A e^{-i\omega_0 T_0} B^2 + B^3 e^{-3i\omega_0 T_0} + \omega_0^2 x_1 = 0 \end{aligned} \quad (3-145)$$

Resolvendo a eq. (3-145), a solução  $x_1$  conterà termos seculares devidos aos termos  $e^{\omega_0 T_0 i}$  e  $e^{-\omega_0 T_0 i}$  presentes em (3-145) e, por isso, são retirados da eq. (3-145) para que a solução  $x_1$  não apresente termos seculares. Retirando estes termos, tem-se para (3-145)

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + B^3 e^{-3i\omega_0 T_0} + \omega_0^2 x_1 = 0 \quad (3-146)$$

Para que os termos que produzem o surgimento de termos seculares sejam anulados, as seguintes equações devem ser atendidas:

$$\begin{aligned} 2i \frac{\partial A}{\partial T_1} \omega_0 + 3A^2 B = 0 \\ -2i \frac{\partial B}{\partial T_1} \omega_0 + 3AB^2 = 0 \end{aligned} \quad (3-147)$$

Isolando as derivadas de  $A$  e  $B$  em relação a  $T_1$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T_1} = \frac{3}{2\omega_0} i A^2 B \\ \frac{\partial B}{\partial T_1} = \frac{-3}{2\omega_0} i A B^2 \end{aligned} \quad (3-148)$$

A solução permanente da eq. (3-146) é

$$x_1 = \frac{A^3}{8\omega_0^2} e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{B^3}{8\omega_0^2} e^{-3i\omega_0 T_0} \quad (3-149)$$

Agora as derivadas (3-148) e as soluções (3-144) e (3-149) são substituídas na próxima equação diferencial, eq. (3-142). Evitando o surgimento de termos seculares, a eq. (3-142) torna-se

$$\begin{aligned} 8 \frac{\partial^2 x_2}{T_0^2} \omega_0^2 - 21A^4 e^{3i\omega_0 T_0} B - 21B_0^4 e^{-3i\omega_0 T_0} A + \\ 8\omega_0^4 x_2 + 3A^5 e^{5i\omega_0 T_0} + 3B^5 e^{-5i\omega_0 T_0} = 0 \end{aligned} \quad (3-150)$$

cuja solução permanente é:

$$\begin{aligned} x_2 = -\frac{21}{64\omega_0^4} (A^4 e^{3i\omega_0 T_0} B + B^4 e^{-3i\omega_0 T_0} A) + \\ \frac{1}{64\omega_0^4} (A^5 e^{5i\omega_0 T_0} + B^5 e^{-5i\omega_0 T_0}) \end{aligned} \quad (3-151)$$

Ao evitar o aparecimento dos termos seculares, as derivadas de  $A$  e  $B$  em relação a  $T_2$  são encontradas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T_2} = -\frac{15}{16\omega_0^3} iA^3 B^2 \\ \frac{\partial B}{\partial T_2} = \frac{15}{16\omega_0^3} iA^2 B^3 \end{aligned} \quad (3-152)$$

Finalmente, substituindo as derivadas (3-148), (3-152) e as soluções (3-144), (3-149) e (3-151) na eq. (3-143) e retirando os termos que provocam o surgimento de termos seculares, tem-se a solução permanente de  $x_3$

$$\begin{aligned} x_3 = -\frac{43}{512\omega_0^6} (A^6 e^{5i\omega_0 T_0} B + B^6 e^{-5i\omega_0 T_0} A) + \\ \frac{417}{512\omega_0^6} (A^5 e^{3i\omega_0 T_0} B^2 + B^5 e^{-3i\omega_0 T_0} A^2) + \\ \frac{1}{512\omega_0^6} (A^7 e^{7i\omega_0 T_0} + B^7 e^{-7i\omega_0 T_0}) \end{aligned} \quad (3-153)$$

As derivadas de  $A$  e  $B$  em relação a  $T_3$  são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T_3} = \frac{123}{128\omega_0^5} iA^4 B^3 \\ \frac{\partial B}{\partial T_3} = -\frac{123}{128\omega_0^5} iA^3 B^4 \end{aligned} \quad (3-154)$$

Falta determinar  $A$  e  $B$ . Substituindo (3-148), (3-152) e (3-154) na equação de reconstituição (3-135), tem-se

$$\frac{dA}{dt} = \frac{3\beta}{2\omega_0} iA^2 B - \frac{15\beta^2}{16\omega_0^3} iA^3 B^2 + \frac{123\beta^3}{128\omega_0^5} iA^4 B^3 \quad (3-155)$$

A única forma de resolver (3-155) é substituindo  $A$  e  $B$  pelas expressões (3-136). Assim, (3-155) fica,

$$\frac{1}{2} \frac{da(t)}{dt} + \frac{1}{2} ia(t) \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{3}{16384\omega_0^5} i\beta a(t)^3 (1024\omega_0^4 - 160\beta a(t)^2 \omega_0^2 + 41\beta^2 a(t)^4) \quad (3-156)$$

Simplificando as soluções  $x_i$ , têm-se

$$x_0 = a(t) \cos(\phi(t) + \omega_0 t) \quad (3-157)$$

$$x_1 = \frac{1}{32\omega_0^2} a(t)^3 \cos(3\phi(t) + 3\omega_0 t) \quad (3-158)$$

$$x_2 = \frac{a(t)^5}{1024\omega_0^4} (-21 \cos(3\phi(t) + 3\omega_0 t) + \cos(5\phi(t) + 5\omega_0 t)) \quad (3-159)$$

$$x_3 = \frac{a(t)^7}{32768\omega_0^6} \{417 \cos(3\phi(t) + 3\omega_0 t) - 43 \cos(5\phi(t) + 5\omega_0 t) + \cos(7\phi(t) + 7\omega_0 t)\} \quad (3-160)$$

Separando as partes real e imaginária na eq. (3-156), obtêm-se as equações diferenciais

$$\begin{aligned} \frac{da(t)}{dt} &= 0 \\ \frac{1}{2} a(t) \frac{d\phi(t)}{dt} &= \frac{3}{16\omega_0} \beta a(t)^3 - \frac{15}{512\omega_0^3} \beta^2 a(t)^5 + \frac{123}{16384\omega_0^5} \beta^3 a(t)^7 \end{aligned} \quad (3-161)$$

Da primeira das eqs. (3-161) determina-se que  $a(t)$  é uma constante e apenas  $\phi$  é variável no tempo.

$$\begin{aligned} a(t) &= a \\ \phi(t) &= \left( \frac{123}{8192\omega_0^5} a^6 \beta^3 - \frac{15}{256\omega_0^3} a^4 \beta^2 + \frac{3}{8\omega_0} a^2 \beta \right) t + \phi_0 \end{aligned} \quad (3-162)$$

Novamente, reescrevendo as soluções dos  $x_i$ , e com base nestas soluções, tem-se

$$x_0 = a \cos(\omega t + \phi_0) \quad (3-163)$$

$$x_1 = \frac{1}{32\omega_0^2} a^3 \cos(3\omega t + 3\phi_0) \quad (3-164)$$

$$x_2 = \frac{a^5}{1024\omega_0^4} (-21 \cos(3\omega t + 3\phi_0) + \cos(5\omega t + 5\phi_0)) \quad (3-165)$$

$$x_3 = \frac{a^7}{32768\omega_0^6} \{417 \cos(3\omega t + 3\phi_0) - 43 \cos(5\omega t + 5\phi_0) + \cos(7\omega t + 7\phi_0)\} \quad (3-166)$$

sendo que

$$\omega = \left| \left( \frac{123}{8192\omega_0^5} a^6 \beta^3 - \frac{15}{256\omega_0^3} a^4 \beta^2 + \frac{3}{8\omega_0} a^2 \beta \right) + \omega_0 \right| \quad (3-167)$$

A solução para o deslocamento é

$$x = x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 + \beta^3 x_3 \quad (3-168)$$

Inserindo as respostas (3-163), (3-164), (3-165) e (3-166) na solução (3-168), determina-se  $a$  e  $\phi_0$  em função das condições iniciais.

Para se obter  $a$  e  $\phi_0$  a partir das condições iniciais  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$ , pode-se utilizar Newton-Raphson:

$$\begin{Bmatrix} \Delta a \\ \Delta \phi_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial \phi_0} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial a} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial \phi_0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x(0) - x \\ -\dot{x} \end{Bmatrix} \quad (3-169)$$

Partindo de  $\phi_0 = 0$  e um  $a$  qualquer como valores iniciais para se resolver o sistema (3-169), a correção  $\Delta \phi_0$  é nula já que  $\phi_0 = 0$ . Conseqüentemente, menos soluções serão encontradas, pois possivelmente existem soluções para  $\phi_0 \neq 0$ . As soluções que deixam de ser encontradas geralmente apresentam um maior valor para  $a$ , e, conseqüentemente, maior amplitude e freqüência da resposta. Fazendo-se  $\phi_0 = 0$ , geralmente encontram-se soluções em que a amplitude máxima coincide com a condição inicial de deslocamento.

### 3.3.1 Vibração Forçada

Seja a equação de movimento

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \beta x(t)^3 = \frac{1}{2} \beta F e^{\Omega T_0 i} + \frac{1}{2} \beta F e^{-\Omega T_0 i} \quad (3-170)$$

onde a freqüência da excitação é escrita como

$$\Omega = \omega_0 + \beta \sigma \quad (3-171)$$

sendo  $\sigma$  definido como um parâmetro de sintonia.

Escrevendo a solução como em (3-133), adotada-se a solução

$$x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \beta x_1(T_0, T_1, T_2) + \beta^2 x_2(T_0, T_1, T_2) \quad (3-172)$$

Substituindo (3-171) e (3-172) em (3-170) e separando os termos de mesma potência em  $\beta$ , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-173)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_1 = & -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - x_0^3 + \frac{1}{2} F e^{\omega_0 T_0 i} e^{\sigma T_1 i} + \\ & \frac{1}{2} F e^{-\omega_0 T_0 i} e^{-\sigma T_1 i} \end{aligned} \quad (3-174)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_2 = -3x_0^2 x_1 - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} \quad (3-175)$$

A solução da eq. (3-173) é,

$$x_0 = A(T_1, T_2) e^{\omega_0 T_0 i} + B(T_1, T_2) e^{-\omega_0 T_0 i} \quad (3-176)$$

Procedendo da mesma forma que no problema de vibração livre, da retirada dos termos que irão produzir termos seculares nas soluções  $x_i$ , determinam-se as derivadas de  $A$  em relação as escalas  $T_i$ . Tem-se assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T_1} &= \frac{3}{2\omega_0} i A^2 B - \frac{iF}{4\omega_0} e^{\sigma T_1 i} \\ \frac{\partial A}{\partial T_2} &= \left( \frac{3F}{8\omega_0^3} i AB + \frac{F\sigma}{8\omega_0^2} i \right) e^{\sigma T_1 i} - \frac{3F}{16\omega_0^3} i A^2 e^{-\sigma T_1 i} - \frac{15}{16\omega_0^3} i A^3 B^2 \end{aligned} \quad (3-177)$$

As derivadas dos respectivos complexos conjugados são,

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial T_1} &= \frac{iF}{4\omega_0} e^{-\sigma T_1 i} - \frac{3}{2\omega_0} i AB^2 \\ \frac{\partial B}{\partial T_2} &= - \left( \frac{3F}{8\omega_0^3} i AB + \frac{F\sigma}{8\omega_0^2} i \right) e^{-\sigma T_1 i} + \frac{3F}{16\omega_0^3} i B^2 e^{\sigma T_1 i} + \frac{15}{16\omega_0^3} i A^2 B^3 \end{aligned}$$

As parcelas permanentes das soluções de cada equação diferencial são:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A^3}{8\omega_0^2} e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{B^3}{8\omega_0^2} e^{-3i\omega_0 T_0} \\ x_2 &= \frac{21AB^4}{64\omega_0^4} e^{-3\omega_0 T_0} + \frac{21A^4B}{64\omega_0^4} e^{3\omega_0 T_0} + \frac{9A^2F}{256\omega_0^4} e^{\sigma T_1 - 3\omega_0 T_0} + \\ & \frac{9B^2F}{256\omega_0^4} e^{-\sigma T_1 + 3\omega_0 T_0} + \frac{9A^2F}{256\omega_0^4} e^{\sigma T_1 + 3\omega_0 T_0} + \frac{9B^2F}{256\omega_0^4} e^{-\sigma T_1 - 3\omega_0 T_0} + \\ & \frac{A^5}{64\omega_0^4} e^{5\omega_0 T_0} + \frac{B^5}{64\omega_0^4} e^{-5\omega_0 T_0} - \left( \frac{9iB^2F}{256\omega_0^4} + \frac{9A^2F}{256\omega_0^4} + \frac{9}{256\omega_0^4} B^2 F - \right. \\ & \left. \frac{9iA^2F}{256\omega_0^4} \right) \cos(\sigma T_2 - 3\omega_0 T_0) + \left( \frac{9A^2F}{256\omega_0^4} + \frac{9B^2F}{256\omega_0^4} - \frac{9iA^2F}{256\omega_0^4} + \right. \\ & \left. \frac{9iB^2F}{256\omega_0^4} \right) \cos(\sigma T_2 + 3\omega_0 T_0) \end{aligned}$$

A equação de reconstituição é:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \beta \frac{\partial A}{\partial T_1} + \beta^2 \frac{\partial A}{\partial T_2} \quad (3-178)$$

As derivadas de  $A$  em relação a  $T_i$  são dadas pelas eqs. (3-177). A seguir, assume-se que

$$A = \frac{1}{2}a(t)e^{\phi(t)i} \quad (3-179)$$

$$B = \frac{1}{2}a(t)e^{-\phi(t)i} \quad (3-180)$$

Considerando as eqs. (3-180) e substituindo as derivadas (3-177) em (3-178), chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{a} + \frac{1}{2}ia\dot{\phi} &= \frac{1}{4\omega_0}\beta F \sin(-\phi + \sigma T_1) - \frac{1}{8\omega_0^2}\beta^2 F \sigma \sin(-\phi + \sigma T_1) - \\ &\frac{9}{64\omega_0^3}\beta^2 a^2 F \sin(-\phi + \sigma T_1) - \frac{1}{4\omega_0}i\beta F \cos(-\phi + \sigma T_1) + \\ &\frac{3}{16\omega_0}i\beta a^3 + \frac{1}{8\omega_0^2}i\beta^2 F \sigma \cos(-\phi + \sigma T_1) + \\ &\frac{3}{64\omega_0^3}i\beta^2 a^2 F \cos(-\phi + \sigma T_1) - \frac{15}{512\omega_0^3}i\beta^2 a^5 \end{aligned} \quad (3-181)$$

onde o ponto indica derivada em relação ao tempo.

Separando as partes real e imaginária de (3-181), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \left( \left( -\frac{F\sigma}{4\omega_0^2} - \frac{9a^2F}{32\omega_0^3} \right) \beta^2 + \frac{\beta F}{2\omega_0} \right) \sin(-\phi + \sigma T_1) \\ \dot{\phi} &= \left( \left( \frac{F\sigma}{4a\omega_0^2} + \frac{3aF}{32\omega_0^3} \right) \beta^2 - \frac{F\beta}{2a\omega_0} \right) \cos(-\phi + \sigma T_1) - \\ &\frac{15a^4\beta^2}{256\omega_0^3} + \frac{3a^2\beta}{8\omega_0} \end{aligned} \quad (3-182)$$

Segundo Nayfeh(1979)[24], as eqs. (3-182) devem ser transformadas num sistema autônomo, onde a variável  $T_1$  não apareça explicitamente.

Fazendo

$$\gamma = \sigma T_1 - \phi \quad (3-183)$$

tem-se então,

$$\dot{\gamma} = \sigma\beta - \dot{\phi}$$

Dessa forma, o sistema (3-182) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \left( \frac{\beta F}{2\omega_0} - \left( \frac{F\sigma}{4\omega_0^2} + \frac{9a^2F}{32\omega_0^3} \right) \beta^2 \right) \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= \left( \frac{F\beta}{2a\omega_0} - \left( \frac{F\sigma}{4a\omega_0^2} + \frac{3aF}{32\omega_0^3} \right) \beta^2 \right) \cos \gamma + \end{aligned}$$

$$\frac{15a^4\beta^2}{256\omega_0^3} - \frac{3a^2\beta}{8\omega_0} + \sigma\beta \quad (3-184)$$

Os pontos de equilíbrio no sistema (3-184) podem ser encontrados fazendo-se

$$\begin{aligned} \dot{a} &= 0 \\ \dot{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (3-185)$$

Segundo Nayfeh(1979)[24], nos pontos de equilíbrio a amplitude  $a$  e o ângulo de fase  $\gamma$  não variam com o tempo, e a resposta do sistema é um movimento permanente. Retirando  $\sin \gamma$  e  $\cos \gamma$  das eqs. (3-184), tem-se

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= 0 \\ \cos \gamma &= \frac{a(15a^4\beta - 96a^2\omega_0^2 + 256\sigma\omega_0^3)}{8F(8\beta\sigma\omega_0 + 3a^2\beta - 16\omega_0^2)} \end{aligned} \quad (3-186)$$

e escrevendo

$$(\sin \gamma)^2 + (\cos \gamma)^2 = 1 \quad (3-187)$$

tem-se que, como  $\sin \gamma = 0$ ,

$$\cos \gamma = 1 \quad (3-188)$$

ou seja,

$$\frac{a(15a^4\beta - 96a^2\omega_0^2 + 256\sigma\omega_0^3)}{8F(8\beta\sigma\omega_0 + 3a^2\beta - 16\omega_0^2)} = 1 \quad (3-189)$$

Através das considerações (3-180) e (3-185), as soluções  $x_i$  podem ser reescritas na forma

$$x_0 = a \cos(\sigma\beta t - \gamma + \omega_0 t) \quad (3-190)$$

$$x_1 = \frac{a^3}{32\omega_0^2} \cos(3\sigma\beta t - 3\gamma + 3\omega_0 t) \quad (3-191)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{9a^2F}{1024\omega_0^4} \{ \sin(2\sigma\beta t - 2\gamma + \sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) - \sin(-2\sigma\beta t + 2\gamma + \\ &\sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) \} + \frac{9a^2F}{512\omega_0^4} \{ \cos(3\sigma\beta t - 2\gamma + 3\omega_0 t) + \cos(-3\sigma\beta t + \\ &2\gamma + 3\omega_0 t) \} + \frac{a^5}{1024\omega_0^4} \cos(5\sigma\beta t - 5\gamma + 5\omega_0 t) - \frac{9a^2F}{1024\omega_0^4} \{ \\ &\sin(2\sigma\beta t - 2\gamma - \sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) - \sin(-2\sigma\beta t + 2\gamma - \sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) \} - \\ &\frac{21a^5}{1024\omega_0^4} \cos(3\sigma\beta t - 3\gamma + 3\omega_0 t) - \frac{9a^2F}{1024\omega_0^4} \{ \cos(-2\sigma\beta t + 2\gamma - \\ &\sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) + \cos(2\sigma\beta t - 2\gamma - \sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) \} + \frac{9a^2F}{1024\omega_0^4} \{ \\ &\cos(-2\sigma\beta t + 2\gamma + \sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) + \cos(2\sigma\beta t - 2\gamma + \sigma\beta^2 t + 3\omega_0 t) \} \end{aligned} \quad (3-192)$$

O valor de  $a$  é retirado numericamente da eq. (3-189). Uma vez determinado  $a$ , obtém-se  $\gamma$  da eq. (3-184). O valor máximo do deslocamento  $x$  e de seu período é dado pela análise da resposta no tempo. A resposta no tempo é obtida inserindo as eqs. (3-190), (3-191) e (3-192) em (3-172).

A eq. (3-171) exhibe a relação entre a frequência da excitação  $\Omega$  e a frequência da natural da estrutura  $\omega_0$ . Se, ao invés de (3-171), utiliza-se a relação

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \beta\sigma \quad (3-193)$$

as respostas  $x_i$  terão  $\Omega$  no denominador, ao invés de  $\omega_0$ , como nas soluções (3-190) à (3-192). Além disso, as respostas são bem mais simples e não há necessidade da transformação de coordenadas (3-183) para tornar o sistema homogêneo. Ambas as soluções apresentam o mesmo resultado quando  $\Omega = \omega_0$ .

Utilizando (3-193) ao invés de (3-171), o problema é escrito da seguinte forma,

$$\ddot{x}(t) + (\Omega^2 - \beta\sigma)x(t) + \beta x(t)^3 = \frac{1}{2}\beta F e^{\Omega T_0 i} + \frac{1}{2}\beta F e^{-\Omega T_0 i} \quad (3-194)$$

e chega-se às seguintes expressões.

$$\begin{aligned} x_0 &= a \cos(\phi + \Omega t) \\ x_1 &= \frac{a^3}{32\Omega^2} \cos(3\phi + 3\Omega t) \\ x_2 &= \frac{a^5}{1024\Omega^4} \cos(5\phi + 5\Omega t) + \left( -\frac{21a^5}{1024\Omega^4} + \frac{a^3\sigma}{32\Omega^4} \right) \cos(3\phi + 3\Omega t) + \\ &\quad \frac{9a^2 F}{256\Omega^4} \cos(2\phi + 3\Omega t) \end{aligned}$$

A figura 3.3 apresenta a curva de ressonância a partir da relação (3-171), que será doravante chamada de versão 1 do MMS, e a partir da relação (3-193), versão 2. Foram consideradas aproximações em (3-172) com potências 1 e 2 do parâmetro não-linear. Pode-se ver que a relação (3-193) apresenta melhores resultados que (3-171), principalmente quando se aumenta a ordem da solução, uma vez que a aproximação de segunda ordem da versão 1 passa a divergir a partir de  $\Omega > 1,5$ . Já as aproximações da versão 2 exibem grandes deslocamentos para pequenos valores de  $\Omega$ , isto ocorre porque potências de  $\Omega$  estão presentes nos denominadores da solução aproximada. A aproximação de segunda ordem da versão 2 apresenta ainda um ramo de soluções bem diferentes dos dados pela integração numérica.

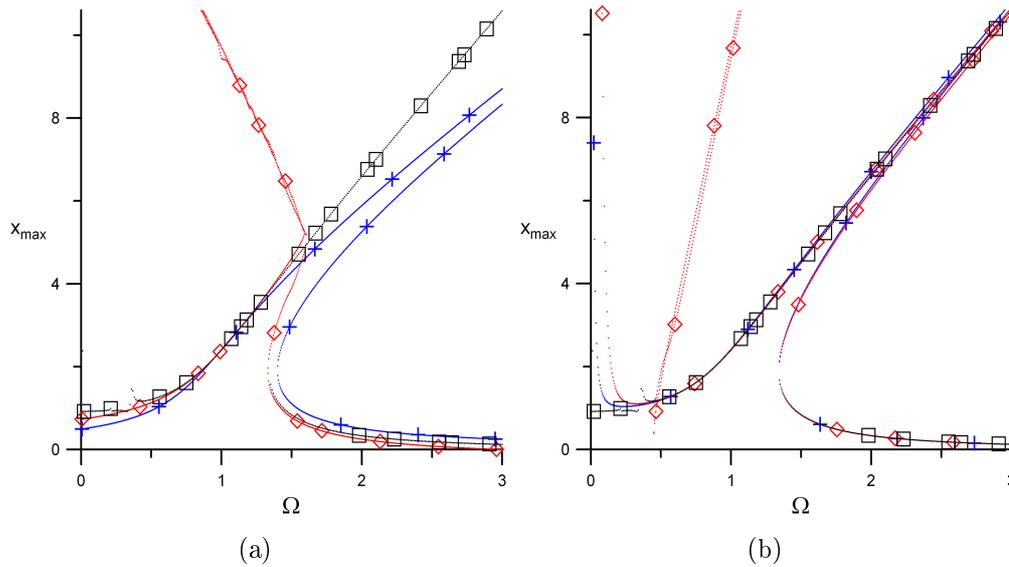


Figura 3.3:  $\square$ , RK;  $+$ , aproximação com 2 termos;  $\diamond$ , aproximação com três termos. (a) versão 1 do método; (b) versão 2.

### 3.3.2

#### Programa em Álgebra simbólica

A seguir são apresentados os passos necessários à solução do problema de vibração forçada não amortecida.

O programa, desenvolvido em álgebra simbólica, executa os seguintes passos na sua resolução:

1. A solução aproximada, função de múltiplas escalas de tempo, é inserida na equação  $\left\{ \begin{matrix} x(t) = \sum_{i=0}^n \beta^i x_i(T_i, \dots, T_n) \end{matrix} \right.$  diferencial.
2. Os termos que multiplicam  $\beta$  são agrupados de acordo com a potência de  $\beta$ . Dessa forma, constrói-se um sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem não-homogêneas.  $\left\{ \begin{matrix} \beta^0 \Rightarrow eq_0 \\ \beta^i \Rightarrow eq_i \end{matrix} \right.$
3. Assume-se que a solução da primeira equação possui amplitudes variáveis no tempo. As soluções conhecidas são inseridas na próxima equação diferencial a ser resolvida.
4. Antes de encontrar a nova solução, as parcelas que produzem termos seculares ao se resolver a equação diferencial, são retiradas, o que leva à construção de um sistema de duas equações, que permite determinar as derivadas de  $A$  e  $B$  em relação às escalas  $T_i$ .  $\left\{ \begin{matrix} \sin \omega_0 T_0(\dots) = 0 \\ \cos \omega_0 T_0(\dots) = 0 \\ \downarrow \\ \frac{\partial A(T_1, \dots, T_n)}{\partial T_i} \\ \frac{\partial B(T_1, \dots, T_n)}{\partial T_i} \end{matrix} \right.$

5. A equação é resolvida e encontra-se  $x_i$  sem termos seculares e a parcela homogênea da solução é desprezada.

6. Repetem-se os passos 3, 4 e 5 até que todas soluções  $x_n$  sejam encontradas. Porém, entre os passos 3 e 4, deve-se substituir na equação também as derivadas de  $A$  e  $B$  em relação às escalas  $T_i$  já conhecidas.

7.  $A$  e  $B$  são escritos na forma polar. Através do método da reconstituição, separando as componentes reais e imaginárias, escreve-se um sistema de duas equações.

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}a(t)e^{\phi(t)i} \\ B = \frac{1}{2}a(t)e^{-\phi(t)i} \\ \dot{A} = \beta \frac{\partial A}{\partial T_1} + \dots + \beta^n \frac{\partial A}{\partial T_n} \\ \downarrow \\ \dot{a} = f(a(t), \phi(t)) \\ \dot{\phi} = g(a(t), \phi(t)) \end{cases}$$

8. Vibração livre:  $a(t)$  e  $\phi(t)$  são determinados integrando no tempo cada uma das equações. Para vibração livre não-amortecida tem-se  $\dot{a} = 0$ . Uma vez que  $a(t)$  e  $\phi(t)$  estejam determinados, seus valores são inseridos em  $x(t)$ .

Vibração forçada:  $a(t)$  e  $\phi(t)$  são determinados procurando soluções estacionárias. Então  $a$  e  $\phi$  são inseridos em  $x(t)$ .

$$\begin{cases} \dot{a} = 0 = f(a, \phi) \Rightarrow \sin \phi = f(a) \\ \dot{\phi} = 0 = g(a, \phi) \Rightarrow \cos \phi = g(a) \\ (\sin \phi)^2 + (\cos \phi)^2 = 1 \Rightarrow a \\ a \Rightarrow \phi \end{cases}$$

9. Vibração livre: A amplitude  $a$  e o ângulo de fase  $\phi_0$  de  $x(t)$  são determinados aplicando as condições iniciais. Deve-se utilizar Newton-Raphson de forma a encontrar o par de soluções  $a$  e  $\phi_0$  que atendam às condições iniciais  $x(0)$  e  $\dot{x}(0)$ .

Vibração forçada: Deve-se retirar a amplitude e o período da solução através da análise de  $x(t)$ , pois  $a$  é apenas a amplitude do primeiro harmônico.

10. Vibração livre: Deve-se retirar a amplitude e o período da solução através da análise de  $x(t)$ , pois  $a$  é apenas a amplitude do primeiro harmônico.

### 3.3.3

#### Vibração Forçada Amortecida

Toma-se como exemplo um dos problemas tratados por Sanchez (1996)[29]. O oscilador analisado por Sanchez é

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\epsilon(2\mu\dot{x} - \alpha x^3 + Fx \cos \Omega t) \quad (3-195)$$

Utilizando a seguinte relação entre as frequências,

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \epsilon\sigma \quad (3-196)$$

o problema é aqui escrito na forma exponencial para análise

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = -\epsilon(2\mu\dot{x} - \alpha x^3 + \frac{1}{2}Fxe^{\Omega T_0} + \frac{1}{2}Fxe^{-\Omega T_0}) \quad (3-197)$$

A solução aproximada adotada é,

$$x = x_0(T_0, T_1, T_2) + \beta x_1(T_0, T_1, T_2) + \beta^2 x_2(T_0, T_1, T_2) \quad (3-198)$$

Substituindo (3-198) em (3-197) e separando os termos de mesma potência em  $\beta$ , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \Omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-199)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \Omega_0^2 x_1 = -2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - \alpha x_0^3 + \sigma x_0 - 2\mu\frac{\partial x_0}{\partial T_0} - \frac{1}{2}x_0 F(e^{\Omega T_0 i} + e^{-\Omega T_0 i}) \quad (3-200)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_2 = -\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} + \sigma x_1 - 2\frac{\partial x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - 2\mu\frac{\partial x_0}{\partial T_1} - 2\mu\frac{\partial x_1}{\partial T_0} + 3\alpha x_0^2 x_1 - 2\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} - \frac{1}{2}x_0 F(e^{\Omega T_0 i} + e^{-\Omega T_0 i}) \quad (3-201)$$

A solução da eq. (3-199) é,

$$x_0 = A(T_1, T_2)e^{\Omega_0 T_0 i} + B(T_1, T_2)e^{-\Omega_0 T_0 i} \quad (3-202)$$

Procedendo como anteriormente, retirando os termos que produzem termos seculares nas soluções  $x_i$ , determinam-se as derivadas de  $A$  e  $B$  em relação a  $T_i$ ,

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} = -\frac{3}{2\Omega}i\alpha A^2 B - \frac{1}{2\Omega}i\sigma A - \mu A \quad (3-203)$$

$$\frac{\partial A}{\partial T_2} = -\frac{\Omega^3}{12}iF^2 A - \frac{1}{8\Omega^3}i\sigma^2 A - \frac{15}{16\Omega^3}i\alpha^2 A^3 B^2 - \frac{1}{2\Omega}i\mu^2 A -$$

$$\frac{1}{8\Omega^3}iF^2B - \frac{3}{4\Omega^3}i\sigma\alpha A^2B - \frac{3}{2\Omega^2}\mu\alpha A^2B \quad (3-204)$$

$$\frac{\partial B}{\partial T_1} = \frac{3}{2\Omega}i\alpha AB^2 + \frac{1}{2\Omega}i\sigma B - \mu B \quad (3-205)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial T_2} = & \frac{3}{4\Omega^3}i\alpha B^2\sigma A + \frac{15}{16\Omega^3}i\alpha^2 B^3 A^2 + \frac{1}{8\Omega^3}iF^2 A + \frac{1}{12\Omega^3}iF^2 B + \\ & \frac{1}{2\Omega}i\mu^2 B + \frac{1}{8\Omega^3}i\sigma^2 B - \frac{3}{2\Omega^2}\mu\alpha AB^2 \end{aligned} \quad (3-206)$$

As parcelas permanentes das soluções de cada equação diferencial são:

$$\begin{aligned} x_1 = & \left( \frac{1}{6\Omega^2}FB + \frac{1}{6\Omega^2}FA \right) \cos 2\Omega T_0 - \left( \frac{1}{8\Omega^2}\alpha B^3 + \right. \\ & \left. \frac{1}{8\Omega^2}\alpha A^3 \right) \cos 3\Omega T_0 + \left( \frac{1}{8\Omega^2}i\alpha B^3 - \frac{1}{8\Omega^2}i\alpha A^3 \right) \sin 3\Omega T_0 + \end{aligned} \quad (3-207)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{6\Omega^2}iFA - \frac{1}{6\Omega^2}iFB \right) \sin 2\Omega T_0 - \frac{1}{2\Omega^2}FA - \frac{1}{2\Omega^2}FB \\ x_2 = & \left( \frac{1}{2\Omega^4}F\alpha A^2B + \frac{23}{48\Omega^4}\alpha B^3F + \frac{1}{2\Omega^4}\alpha B^2FA + \frac{23}{48\Omega^4}\alpha A^3F + \right. \\ & \left. \frac{1}{18\Omega^4}\sigma FB + \frac{1}{18\Omega^4}\sigma FA \right) \cos 2\Omega T_0 - \left( \frac{1}{8\Omega^4}\sigma\alpha B^3 + \right. \\ & \left. \frac{3}{16\Omega^3}i\mu\alpha B^3 - \frac{1}{96\Omega^4}F^2B - \frac{1}{96\Omega^4}F^2A + 2\frac{1}{64\Omega^4}AB^4\alpha^2 - \right. \\ & \left. \frac{3}{16\Omega^3}i\alpha A^3\mu + 2\frac{1}{64\Omega^4}A^4B\alpha^2 + \frac{1}{8\Omega^4}\sigma\alpha A^3 \right) \cos 3\Omega T_0 + \\ & \left( \frac{1}{64\Omega^4}B^5\alpha^2 + \frac{1}{64\Omega^4}A^5\alpha^2 \right) \cos 5\Omega T_0 - \left( \frac{3}{80\Omega^4}\alpha B^3F + \right. \\ & \left. \frac{3}{80\Omega^4}\alpha A^3F \right) \cos 4\Omega T_0 - \left( \frac{1}{96\Omega^4}iF^2B + \frac{2}{64\Omega^4}iA^4B\alpha^2 - \right. \\ & \left. \frac{1}{8\Omega^4}i\sigma\alpha B^3 + \frac{1}{8\Omega^4}i\sigma\alpha A^3 + \frac{3}{16\Omega^3}\alpha A^3\mu - \frac{1}{96\Omega^4}iF^2A - \right. \\ & \left. \frac{2}{64\Omega^4}i\alpha^2 B^4A + \frac{3}{16\Omega^3}\mu\alpha B^3 \right) \sin 3\Omega T_0 + \left( -\frac{23}{48\Omega^4}i\alpha B^3F + \right. \\ & \left. \frac{1}{2\Omega^4}iF\alpha A^2B + \frac{23}{48\Omega^4}i\alpha A^3F + \frac{1}{18\Omega^4}i\sigma FA - \frac{1}{18\Omega^4}i\sigma FB - \right. \\ & \left. \frac{1}{2\Omega^4}iF\alpha AB^2 \right) \sin 2\Omega T_0 + \left( \frac{3}{80\Omega^4}i\alpha B^3F - \frac{3}{80\Omega^4}i\alpha A^3F \right) \\ & \sin 4\Omega T_0 + \left( -\frac{1}{64\Omega^4}iB^5\alpha^2 + \frac{1}{64\Omega^4}iA^5\alpha^2 \right) \sin 5\Omega T_0 - \\ & \frac{5}{2\Omega^4}\alpha B^2FA - \frac{1}{2\Omega^4}\sigma FA - \frac{5}{2\Omega^4}F\alpha A^2B - \frac{1}{2\Omega^4}\sigma FB \end{aligned} \quad (3-208)$$

Assumindo que

$$A_0 = \frac{1}{2}a(t)e^{\phi(t)i}$$

$$B_0 = \frac{1}{2}a(t)e^{-\phi(t)i}$$

substituindo as eqs. (3-203) à (3-206) na equação de reconstituição e separando as partes reais e imaginárias, chega-se ao seguinte sistema homogêneo:

$$\dot{a}(t) = \left( -\frac{1}{8\Omega^3}a(t)F^2 \sin 2\phi(t) - \frac{3}{8\Omega^2}a(t)^3\mu\alpha \right) \beta^2 - \beta a(t)\mu \quad (3-209)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) = & -\left( \frac{1}{12\Omega^3}F^2 + \frac{1}{8\Omega^3}\sigma^2 + \frac{15}{256\Omega^3}a(t)^4\alpha^2 + \frac{1}{2\Omega}\mu^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{8\Omega^3}F^2 \cos 2\phi(t) + \frac{3}{16\Omega^3}a(t)^2\sigma\alpha \right) \beta^2 - \left( \frac{3}{8\Omega}a(t)^2\alpha + \frac{1}{2\Omega}\sigma \right) \beta \end{aligned} \quad (3-210)$$

que está de acordo com o obtido por Sanchez (1996)[29].

Assim, as soluções são permanentes quando o sistema de eqs. (3-209) e (3-210) for homogêneo. Dessa forma

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi \\ a(t) &= a \end{aligned} \quad (3-211)$$

Das eqs. (3-209) e (3-210) tem-se, respectivamente

$$\sin 2\phi = -\frac{8}{aF^2} \left( \frac{a\mu}{\beta} + \frac{3a^3\mu\alpha}{8\Omega^2} \right) \Omega^3 \quad (3-212)$$

$$\begin{aligned} \cos 2\phi = & -\frac{8}{F^2} \left( \frac{3a^2\alpha}{8\Omega\beta} + \frac{\sigma}{2\Omega\beta} + \frac{\mu^2}{2\Omega} + \frac{15a^4\alpha^2}{256\Omega^3} + \right. \\ & \left. \frac{\sigma^2}{8\Omega^3} + \frac{3a^2\alpha\sigma}{16\Omega^3} + \frac{F^2}{12\Omega^3} \right) \Omega^3 \end{aligned} \quad (3-213)$$

Substituindo (3-213) em

$$(\sin 2\phi)^2 + (\cos 2\phi)^2 = 1$$

e simplificando, chega-se a

$$\begin{aligned} & \frac{225\alpha^4}{1024F^4}a^8 + \left( \frac{45\Omega^2\alpha^3}{16F^4\beta} + \frac{45\sigma\alpha^3}{32F^4} \right) a^6 + \left\{ \frac{9\Omega^4\alpha^2}{F^4\beta^2} + \frac{51\sigma^2\alpha^2}{16F^4} + \frac{5\alpha^2}{8F^2} + \right. \\ & \left. \left( \frac{51\alpha^2\sigma}{4F^4\beta} + \frac{51\mu^2\alpha^2}{4F^4} \right) \Omega^2 \right\} a^4 + \left( \left( \frac{72\mu^2\alpha}{F^4\beta} + \frac{2\alpha\sigma}{4F^4\beta^2} \right) \Omega^4 + \right. \\ & \left. \left( \frac{4\alpha}{F^2\beta} + \frac{18\alpha\sigma^2}{F^4\beta} + \frac{12\sigma\alpha\mu^2}{F^4} \right) \Omega^2 + \frac{2\sigma\alpha}{F^2} + \frac{3\sigma^3\alpha}{F^4} \right) a^2 + \frac{64\Omega^6\mu^2}{F^4\beta^2} + \\ & \left( \frac{16\mu^4}{F^4} + \frac{32\sigma\mu^2}{F^4\beta} + \frac{16\sigma^2}{F^4\beta^2} \right) \Omega^4 + \left( \frac{8\sigma^2\mu^2}{F^4} + \frac{16\sigma}{3F^2\beta} + \frac{8\sigma^3}{F^4\beta} + \right. \\ & \left. \frac{16\mu^2}{3F^2} \right) \Omega^2 + \frac{\sigma^4}{F^4} + \frac{4}{9} + \frac{4\sigma^2}{3F^2} = 1 \end{aligned} \quad (3-214)$$

Da eq. (3-214), retira-se  $a$ . Conhecido o  $a$ ,  $\phi$  é obtido de (3-213). As soluções  $x_i$  são finalmente reescritas em função de  $a$  e  $\phi$ ,

$$x_0 = a \cos(\phi + \Omega t) \quad (3-215)$$

$$x_1 = -\frac{\alpha}{32\Omega^2} a^3 \cos(3\phi + 3\Omega t) + \frac{F}{6\Omega^2} a \cos(\phi + 2\Omega t) - \frac{F}{2\Omega^2} a \cos \phi \quad (3-216)$$

$$x_2 = -\left(\frac{\sigma\alpha}{32\Omega^4} a^3 + \frac{21\alpha^2}{1024\Omega^4} a^5\right) \cos(3\phi + 3\Omega t) - \left(\frac{5\alpha F}{8\Omega^4} a^3 + \frac{\sigma F}{2\Omega^4} a\right) \cos \phi + \frac{\alpha^2}{1024\Omega^4} a^5 \cos(5\phi + 5\Omega t) + \left(\frac{\sigma F}{18\Omega^4} a + \frac{\alpha F}{8\Omega^4} a^3\right) \cos(\phi + 2\Omega t) + \frac{F^2}{961\Omega^4} a \cos(\phi + 3\Omega t) - \frac{3\alpha\mu}{641\Omega^3} a^3 \sin 3\phi + 3\Omega t + \frac{23\alpha F}{192\Omega^4} a^3 \cos(3\phi + 2\Omega t) - \frac{3\alpha F}{320\Omega^4} a^3 \cos(3\phi + 4\Omega t) \quad (3-217)$$

### 3.4

#### Não-Linearidade Quadrática

Apresenta-se agora um resumo dos métodos apresentados anteriormente para sistemas com não-linearidade quadrática. Neste caso a equação de Duffing assume a forma.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0 \quad (3-218)$$

#### 3.4.1

##### Método Lindstedt-Poincaré

Fazendo a transformação de coordenadas  $\tau = \omega t$ , a eq. (3-218) torna-se,

$$\omega^2 x'' + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0 \quad (3-219)$$

Seja uma aproximação de terceira ordem para a resposta e sua frequência  $\omega$ ,

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \alpha x_1(\tau) + \alpha x_2(\tau) + \alpha x_3(\tau) \quad (3-220)$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3 \quad (3-221)$$

Substituindo (3-220) e (3-221) na eq. (3-219) e agrupando os termos de mesma potência em  $\alpha$ , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 &= -2\omega_0 e_1 x_0'' - x_0^2 \\
 \omega_0^2 x_2'' + \omega_0^2 x_2 &= -2x_0 x_1 - 2\omega_0 e_2 x_0'' - e_1^2 x_0'' - 2\omega_0 e_1 x_1'' \\
 \omega_0^2 x_3'' + \omega_0^2 x_3 &= -x_1^2 - 2x_0 x_2 - 2\omega_0 e_3 x_0'' - 2e_1 e_2 x_0'' - \\
 &\quad 2\omega_0 e_2 x_1'' - e_1^2 x_1'' - 2\omega_0 e_1 x_2''
 \end{aligned} \tag{3-222}$$

As condições iniciais do problema (3-218) são,

$$\begin{aligned}
 x(0) &= a \\
 \dot{x}(0) &= 0
 \end{aligned}$$

As soluções de (3-222) atendem às condições iniciais da seguinte forma,

$$\left. \begin{aligned}
 x_0(0) &= a; & x_i(0) &= 0 \\
 x_0'(0) &= 0; & x_i'(0) &= 0
 \end{aligned} \right\} i > 0 \tag{3-223}$$

Resolvendo cada uma das eqs. (3-222), encontra-se

$$\begin{aligned}
 x_0 &= a \cos \tau \\
 x_1 &= \frac{1}{3\omega_0^2} a^2 \cos \tau + \frac{1}{6\omega_0^2} a^2 \cos 2\tau - \frac{1}{2\omega_0^2} a^2 \\
 e_1 &= 0 \\
 x_2 &= \frac{1}{9\omega_0^4} a^3 \cos 2\tau + \frac{1}{48\omega_0^4} a^3 \cos 3\tau + \frac{29}{144\omega_0^4} a^3 \cos \tau - \frac{1}{3\omega_0^4} a^3 \\
 e_2 &= -\frac{5}{12\omega_0^3} a^2 \\
 x_3 &= \frac{119}{432\omega_0^6} a^4 \cos \tau + \frac{1}{48\omega_0^6} a^4 \cos 3\tau - \frac{25}{48\omega_0^6} a^4 + \\
 &\quad \frac{1}{432\omega_0^6} a^4 \cos 4\tau + \frac{2}{9\omega_0^6} a^4 \cos 2\tau \\
 e_3 &= -\frac{5}{18\omega_0^5} a^3
 \end{aligned}$$

e a frequência da resposta, dada pela aproximação (3-221), torna-se

$$\omega = \omega_0 - \frac{5}{12\omega_0^3} \alpha^2 a^2 - \frac{5}{18\omega_0^5} \alpha^3 a^3 \tag{3-224}$$

### Vibração forçada

Seja a equação

$$\Omega^2 x''(\tau) + \omega_0^2 x(\tau) + \alpha x(\tau)^2 = F \cos \tau \tag{3-225}$$

Considera-se a seguinte aproximação para a resposta no tempo

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \alpha x_1(\tau) + \alpha^2 x_2(\tau) \quad (3-226)$$

e para a frequência  $\omega$ ,

$$\Omega = \omega_0 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 \quad (3-227)$$

Inserindo (3-226) e (3-227) em (3-225) e agrupando os termos de mesma potência em  $\alpha$ , chega-se ao seguinte sistema:

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-228)$$

$$\omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 = F \cos \tau - x_0^2 - 2\omega_0 e_1 x_0'' \quad (3-229)$$

$$\omega_0^2 x_2'' + \omega_0^2 x_2 = -2\omega_0 e_2 x_0'' - 2\omega_0 e_1 x_1'' - 2x_0 x_1 - e_1^2 x_0'' \quad (3-230)$$

A solução da equação (3-228) é

$$x_0 = a \cos \tau \quad (3-231)$$

Resolvendo (3-229) e desprezando as constantes de integração, encontra-se

$$x_1 = \frac{1}{6\omega_0^2} a^2 \cos 2\tau - \frac{1}{2\omega_0^2} a^2 \quad (3-232)$$

$$e_1 = -\frac{1}{2a\omega_0} F \quad (3-233)$$

Substituindo (3-231) a (3-233) em (3-230), encontra-se

$$x_2 = \frac{1}{48\omega_0^4} a^3 \cos 3\tau + \frac{2}{9\omega_0^4} F a \cos 2\tau \quad (3-234)$$

$$e_2 = -\frac{5}{12\omega_0^3} a^2 - \frac{1}{8a^2\omega_0^3} F^2 \quad (3-235)$$

Da eq. (3-227), tem-se para a relação frequência-amplitude

$$\Omega = \omega_0 - \frac{F}{2a\omega_0} \alpha + \left( -\frac{5}{12\omega_0^3} a^2 - \frac{1}{8\omega_0^3 a^2} F^2 \right) \alpha^2 \quad (3-236)$$

sendo a solução no tempo

$$x = -\frac{1}{2\omega_0^2} \alpha a^2 + a \cos \Omega t + \left( \frac{1}{6\omega_0^2} \alpha a^2 + \frac{2}{9\omega_0^4} \alpha^2 F a \right) \cos 2\Omega t + \frac{1}{48\omega_0^4} \alpha^2 a^3 \cos 3\Omega t \quad (3-237)$$

A figura 3.4 compara a solução obtida com integração numérica e diferentes aproximações do problema  $\ddot{x} + x + 0,1x^2 = \cos \Omega t$ . Na solução obtida através da integração numérica utilizou-se um pequeno nível de amortecimento, de

forma que os valores das amplitudes praticamente não foram alteradas. Na faixa inicial de  $\Omega$ , as amplitudes obtidas com a integração numérica são bem maiores que as obtidas pelas aproximações.

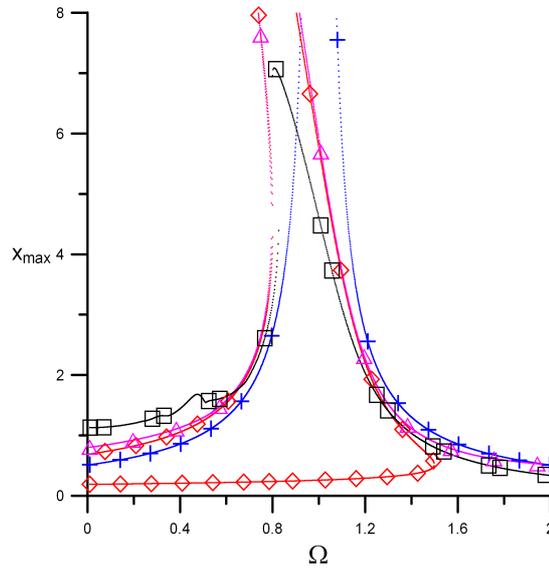


Figura 3.4: Curva de ressonância do problema  $\ddot{x} + x + 0,1x^2 = \cos \Omega t$ .  $\square$ , RK; +, LP com 1 termo;  $\diamond$ , dois termos;  $\triangle$ , três termos.

### 3.4.2 Método de Lindstedt-Poincaré Modificado

Utilizando o LP modificado, deseja-se resolver a seguinte equação,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0 \tag{3-238}$$

Considera-se uma aproximação de terceira ordem para a resposta no tempo,

$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \alpha^3 x_3(t) \tag{3-239}$$

Considera-se também que a relação entre as frequências da resposta e a frequência natural seja,

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3 \tag{3-240}$$

de onde se escreve,

$$\omega_0^2 = \omega^2 - \alpha e_1 - \alpha^2 e_2 - \alpha^3 e_3 \tag{3-241}$$

Substituindo (3-239) e (3-241) em (3-238) e agrupando os termos de mesma potência em  $\alpha$ , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0 \\
 \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= e_1 x_0 - x_0^2 \\
 \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= -2x_0 x_1 + e_1 x_1 + e_2 x_0 \\
 \ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 &= -2x_0 x_2 - x_1^2 + e_1 x_2 + e_2 x_1 + e_3 x_0
 \end{aligned}
 \tag{3-242}$$

As condições iniciais do problema (3-238) são,

$$\begin{aligned}
 x(0) &= a \\
 \dot{x}(0) &= 0
 \end{aligned}$$

As soluções de (3-242) atendem às condições iniciais ao se impor que,

$$\left. \begin{aligned}
 x_0(0) &= a; & x_i(0) &= 0 \\
 \dot{x}_0(0) &= 0; & \dot{x}_i(0) &= 0
 \end{aligned} \right\} i > 0
 \tag{3-243}$$

Resolvendo cada uma das eqs. (3-242), encontram-se

$$\begin{aligned}
 x_0 &= a \cos \omega t \\
 x_1 &= \frac{1}{3\omega^2} a^2 \cos \omega t + \frac{1}{6\omega^2} a^2 \cos 2\omega t - \frac{1}{2\omega^2} a^2 \\
 e_1 &= 0 \\
 x_2 &= \frac{1}{9\omega^4} a^3 \cos 2\omega t + \frac{1}{48\omega^4} a^3 \cos 3\omega t + \frac{29}{144\omega^4} a^3 \cos \omega t - \frac{1}{3\omega^4} a^3 \\
 e_2 &= -\frac{5}{6\omega^2} a^2 \\
 x_3 &= -\frac{1}{432\omega^6} a^4 \cos \omega t + \frac{1}{12\omega^6} a^4 \cos 2\omega t + \frac{1}{48\omega^6} a^4 \cos 3\omega t + \\
 &\quad \frac{1}{432\omega^6} a^4 \cos 4\omega t - \frac{5}{48\omega^6} a^4 \\
 e_3 &= -\frac{5}{9\omega^4} a^3
 \end{aligned}$$

e a frequência da resposta, eq. (3-240), torna-se

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{5}{6\omega^2} \alpha^2 a^2 - \frac{5}{9\omega^4} \alpha^3 a^3
 \tag{3-244}$$

A figura 3.5 exhibe alguns resultados obtidos com o método para  $\omega_0 = \alpha = 1$ .

### Vibração forçada

Agora o LP modificado é utilizado para resolver o problema de vibração forçada com não-linearidade quadrática,

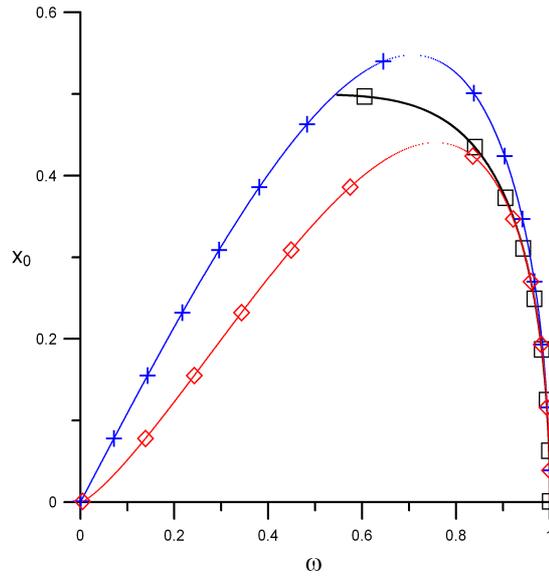


Figura 3.5: Deslocamento inicial vs frequência da resposta. □, RK; +, LP Modificado com dois termos; ◇, três termos.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = F \cos \Omega t \quad (3-245)$$

Considerando uma aproximação de segunda ordem para a resposta no tempo e para a frequência,

$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) + \alpha x_2(t) \quad (3-246)$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 \quad (3-247)$$

e isolando  $\omega_0^2$  em (3-247), tem-se

$$\omega_0^2 = \Omega^2 - \alpha e_1 - \alpha^2 e_2 \quad (3-248)$$

Substituindo (3-246) e (3-248) em (3-245) e agrupando os termos de mesma potência em  $\alpha$ , chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\ddot{x}_0 + \Omega^2 x_0 = 0 \quad (3-249)$$

$$\ddot{x}_1 + \Omega^2 x_1 = e_1 x_0 F \cos \Omega t - x_0^2 \quad (3-250)$$

$$\ddot{x}_2 + \Omega^2 x_2 = -2x_0 x_1 + e_1 x_1 + e_2 x_0 \quad (3-251)$$

A solução da eq. (3-249) é

$$x_0 = a \cos \Omega t$$

e as soluções das eqs. (3-250) e (3-251), desprezando a parte homogênea de cada solução, são:

$$x_1 = \frac{a^2}{6\Omega^2} \cos 2\Omega t - \frac{a^2}{2\Omega^2}$$

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \frac{-F}{a} \\
 x_2 &= \frac{1}{18\Omega^4} Fa \cos 2\Omega t + \frac{1}{48\Omega^4} a^3 \cos 3\Omega t + \frac{Fa}{2\Omega^4} \\
 e_2 &= -\frac{5a^2}{6\Omega^2}
 \end{aligned}$$

A frequência da resposta é dada pela aproximação (3-247):

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{F}{a}\alpha - \frac{5}{6\Omega^2}a^2\alpha^2 \tag{3-252}$$

e a solução no tempo é dada por

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a \cos \Omega t + \left( \frac{a^2}{6\Omega^2} \cos 2\Omega t - \frac{a^2}{2\Omega^2} \right) \alpha + \\
 &\left( \frac{Fa}{18\Omega^4} \cos 2\Omega t + \frac{a^3}{48\Omega^4} \cos 3\Omega t + \frac{Fa}{2\Omega^4} \right) \alpha^2
 \end{aligned} \tag{3-253}$$

A figura 3.6 compara algumas soluções aproximadas com a solução numérica com um pequeno amortecimento. Os resultados obtidos são piores que os obtidos com o LP na forma tradicional.

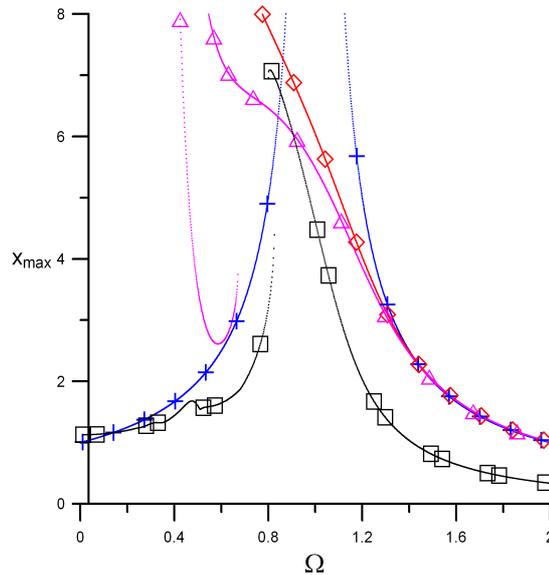


Figura 3.6: LP modificado vs solução numérica do problema  $\ddot{x} + x + 0,1x^2 = \cos \Omega t$ .  $\square$ , RK; +, 1 termo;  $\diamond$ , dois termos;  $\triangle$ , três termos.

### 3.4.3 Método das Múltiplas escalas

Seja a equação

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0 \tag{3-254}$$

Novamente adota-se uma aproximação para  $x$  que contém termos até a potência três

$$x = x_0(T_0, T_1, T_2, T_3) + \alpha x_1(T_0, T_1, T_2, T_3) + \alpha^2 x_2(T_0, T_1, T_2, T_3) + \alpha^3 x_3(T_0, T_1, T_2, T_3) \quad (3-255)$$

A seguir, substituindo (3-255) em (3-254), obtêm-se as derivadas parciais

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=0}^3 \alpha^i \frac{\partial x_j(T_0, T_1, T_2, T_3)}{\partial T_i} \quad (3-256)$$

Agrupando os termos de mesma potência em  $\alpha$ , chega-se ao seguinte sistema:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (3-257)$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} - x_0^2 \quad (3-258)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_2 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_2} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} - 2x_0 x_1 \quad (3-259)$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial T_0^2} + \omega_0^2 x_3 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_3} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} - 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_2} - 2x_0 x_2 - x_1^2 - 2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial T_0 \partial T_1} - 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1 \partial T_2} \quad (3-260)$$

A solução da equação (3-257) é escrita como

$$x_0 = A_0(T_1, T_2, T_3)e^{\omega_0 T_0 i} + B_0(T_1, T_2, T_3)e^{-\omega_0 T_0 i} \quad (3-261)$$

onde o termo que contém  $B$  é o complexo conjugado de  $A$ . Resolvendo as equações e eliminando os termos seculares, encontram-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial T_1} &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial T_1} &= 0 \\ \frac{\partial A}{\partial T_2} &= -\frac{5}{3\omega_0^3} i A^2 B \\ \frac{\partial B}{\partial T_2} &= \frac{5}{3\omega_0^3} i A B^2 \\ \frac{\partial A}{\partial T_3} &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial T_3} &= 0 \end{aligned}$$

Escrevendo a equação de reconstituição,

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{5\alpha^2}{3\omega_0^3}iA^2B \quad (3-262)$$

assumindo que,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}a(t)e^{\phi(t)i} \\ B &= \frac{1}{2}a(t)e^{-\phi(t)i} \end{aligned} \quad (3-263)$$

e substituindo (3-263) em (3-262) e separando as partes reais e imaginárias, encontra-se

$$\begin{aligned} a(t) &= a \\ \phi(t) &= -\frac{5}{12\omega_0^3}\alpha^2a^2t + \phi_0 \end{aligned}$$

Assim, as soluções podem ser escritas como,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6\omega_0^2}a^2 \cos 2\omega t - \frac{1}{2\omega_0^2}a^2 \\ x_2 &= \frac{1}{48\omega_0^4}a^3 \cos 3\omega t \\ x_3 &= \frac{59}{432}\frac{1}{\omega_0^6}a^4 \cos 2\omega t + \frac{1}{432\omega_0^6}a^4 \cos 4\omega t - \frac{19}{72\omega_0^6}a^4 \end{aligned}$$

sendo que

$$\omega = -\frac{5}{12\omega_0^3}\alpha^2A^2 + \omega_0 \quad (3-264)$$

A solução para o deslocamento é então dada pela aproximação

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 \quad (3-265)$$

Inserindo as respostas  $x_i$  na solução (3-265), determinam-se  $a$  e  $\phi_0$  de acordo com as condições iniciais.

A figura 3.7 exhibe as soluções obtidas com o MMS e com a integração numérica.

Os resultados mostram que problemas com não-linearidade quadrática apresentam maiores problemas de convergência, exigindo um maior número de termos nas expansões para a frequência que no caso de não-linearidade cúbica.

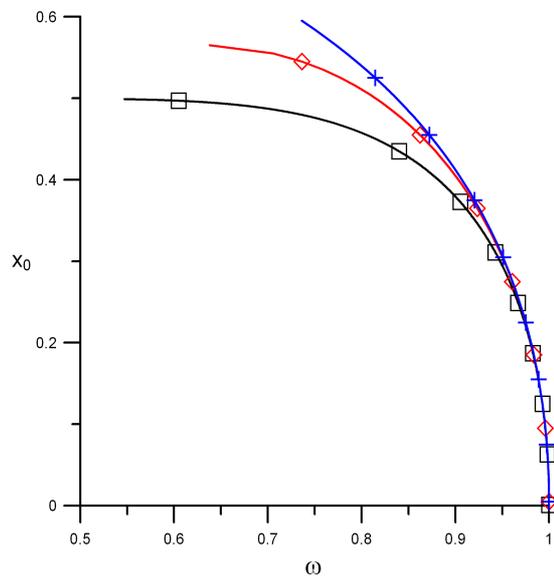


Figura 3.7: Deslocamento inicial vs frequência:  $\square$ , RK; +, MMS com 2 termos;  $\diamond$ , três termos.

## Método do Balanço Harmônico

O HBM possui a forma mais simples e direta de aplicação. Um somatório de harmônicos, acrescido de um termo constante, tal qual a série de Fourier, é tomado como solução aproximada

$$x(t) \approx c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \cos i\omega t + d_i \sin i\omega t \quad (4-1)$$

Esta solução aproximada é substituída na equação diferencial. As potências e produtos trigonométricos que surgem devidos às não-linearidades, são substituídos pela expansão destas potências em somatórios de harmônicos. O passo seguinte é coletar os coeficientes de cada harmônico em (4-1) e fazer o “balanço” dos harmônicos resultantes, isto é, igualar os coeficientes do lado esquerdo aos coeficientes do lado direito da equação. Cada harmônico de interesse em (4-1) produz uma equação não-linear. Tomando todos as equações, tem-se um sistema não-linear que é resolvido iterativamente por Newton-Raphson, para se determinar as constantes da solução aproximada (4-1).

O aspecto mais importante a ser considerado ao escrever a solução aproximada é o tipo de não-linearidade do problema e, em alguns casos, a característica da excitação. Ao inserir (4-1) na equação diferencial, resultam potências destes harmônicos. Tomando como exemplo uma potência cúbica e uma quártica de cosseno, as seguintes relações trigonométricas são válidas:

$$\begin{aligned} (\cos x)^3 &= \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x \\ (\cos x)^4 &= \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \end{aligned} \quad (4-2)$$

A expansão de potências pares, gera um termo constante e harmônicos pares, enquanto que apenas harmônicos ímpares são gerados na expansão de potências ímpares. Assim sendo, a não linearidade cúbica exige apenas a presença dos harmônicos ímpares, exceto nos casos forçados onde o carregamento possui algum termo constante, enquanto que a solução aproximada para uma não-linearidade quadrática necessita de todos os harmônicos, pois,

devido aos termos lineares sempre presentes, os harmônicos ímpares também são necessários.

Em problemas de vibração livre ou vibração forçada não-amortecida, não é necessário que a solução aproximada tenha termos em seno e cosseno, basta ter um dos dois. É preferível adotar um somatório de cossenos pois a solução aproximada irá atender à condição de deslocamento inicial. Somente nos problemas forçados amortecidos, os termos de seno e cosseno devem estar presentes, ou, então, deve-se adicionar um ângulo de fase a cada harmônico. Assim, a expansão (4-1) pode ser reescrita como

$$x(t) \approx c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \sin(i\omega t + \phi_i) \quad (4-3)$$

#### 4.1

#### Newton-Raphson com Comprimento de Arco

O HBM conduz a um sistema algébrico não-linear que é resolvido iterativamente por Newton-Raphson. Para o traçado da curva de ressonância, tanto a frequência quanto a amplitude podem ser tomados como parâmetros de controle. O procedimento de solução usual consiste em fixar um valor para o parâmetro de controle e iterar até que as demais variáveis atendam ao sistema. Frequentemente, ao incrementar o parâmetro de controle, pode-se perder ramos da solução, pois não se pode prosseguir além de certos pontos limite.

A única forma de fazer o sistema contornar os pontos limites é transformando o parâmetro de controle numa variável como as demais, onde o método de Newton-Raphson irá fornecer seu valor adequado.

Para poder resolver o problema com mais uma variável é preciso dispor de mais uma equação. Esta nova equação é acrescida como uma restrição ao problema. Há várias técnicas que permitem tornar o parâmetro de controle uma variável. Como mostrado por Carrera (1992)[79], cada método apresenta uma equação diferente. O método adotado neste trabalho é o Comprimento de Arco Constante, proposto por Crisfield em 1981[80].

#### 4.2

#### Vibração livre

A seguir é descrita a metodologia do HBM para o caso de vibração livre.

Para tanto considera-se novamente a equação de movimento

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \beta x^3(t) = 0 \quad (4-4)$$

Inicialmente, assume-se a solução aproximada

$$x(t) = c_1 \cos \omega t \quad (4-5)$$

Substituindo (4-5) em (4-4) e expandindo  $(\cos \omega t)^3$ , chega-se a

$$-c_1 \omega^2 \cos \omega t + c_1 \omega_0^2 \cos \omega t - \frac{1}{4} \beta c_1^3 \cos 3\omega t + \frac{3}{4} \beta c_1^3 \cos \omega t = 0 \quad (4-6)$$

Para que (4-5) seja solução, a igualdade (4-6) precisa ser atendida. Coletando os harmônicos, tem-se

$$\cos \omega t \left( -\omega^2 c_1 + \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4} \beta c_1^3 \right) = 0 \quad (4-7)$$

$$\cos 3\omega t \left( -\frac{1}{4} \beta c_1^3 \right) = 0 \quad (4-8)$$

Evidentemente somente a eq. (4-7) pode ser atendida, permitindo explicitar a frequência  $\omega$  da resposta em função dos parâmetros  $c_1$ ,  $\beta$  e  $\omega_0$ . Não há forma de atender a eq. (4-8) quando  $c_1 \neq 0$ , portanto (4-8) é um resíduo resultante da solução aproximada. Para que este resíduo possa ser desprezado e conseqüentemente a solução (4-5) seja uma boa aproximação, é necessário que  $\beta$  e  $c_1$  não sejam muito grandes. Adicionando mais harmônicos em (4-5), os resíduos dos harmônicos superiores se tornam cada vez menores.

Admitindo que

$$c_1 = x(0) \quad (4-9)$$

a solução da eq. (4-7) é

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{(4\omega_0^2 + 3\beta x(0)^2)} \quad (4-10)$$

que é igual à solução dada pelo LP, eq. (3-92).

Considerando mais harmônicos na solução adotada, eq. (4-5), chega-se a soluções mais complexas para  $\omega$ , tornando-se necessário um procedimento numérico para se obter a solução do sistema não-linear resultante. Seja a aproximação

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_3 \cos 3\omega t \quad (4-11)$$

Substituindo (4-11) em (4-4) e expandindo as potências trigonométricas

e coletando somente os harmônicos presentes na solução aproximada (4-11), chega-se a um sistema de duas equações e três incógnitas ( $c_1$ ,  $c_3$  e  $\omega$ ):

$$\begin{aligned} -c_1\omega^2 + \omega_0^2c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^2c_3 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 + \frac{3}{2}\beta c_1c_3^2 &= 0 \\ -9c_3\omega^2 + \omega_0^2c_3 + \frac{3}{2}\beta c_1^2c_3 + \frac{1}{4}\beta c_1^3 + \frac{3}{4}\beta c_3^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4-12)$$

Uma das incógnitas deve ser tomada como parâmetro de controle e mantida constante para poder se resolver o sistema. Uma opção é considerar  $x(0)$  como parâmetro de controle,

$$x(0) = c_1 + c_3 \quad (4-13)$$

o que permite correlacionar as duas incógnitas,

$$c_1 = x(0) - c_3 \quad (4-14)$$

Substituindo (4-14) no sistema (4-12),  $c_1$  é eliminado e  $x(0)$  passa a ser o novo parâmetro de controle, restando como incógnitas  $c_3$  e  $\omega$ .

$$\begin{aligned} c_3\omega^2 - \omega^2x(0) - \omega_0^2c_3 + \omega_0^2x(0) - \frac{3}{2}\beta c_3^3 + \frac{9}{4}\beta c_3^2x(0) \\ - \frac{3}{2}\beta c_3x(0)^2 + \frac{3}{4}\beta x(0)^3 &= 0 \\ -9c_3\omega^2 + \omega_0^2c_3 + 2\beta c_3^3 - \frac{9}{4}\beta c_3^2x(0) + \frac{3}{4}\beta c_3x(0)^2 + \frac{1}{4}\beta x(0)^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4-15)$$

Se a eq. (4-13) não for considerada antes de se encontrar as soluções,  $x(0)$  deve ser determinado a partir da solução aproximada no instante inicial para se poder traçar uma curva de frequência de resposta versus deslocamento inicial. Substituir (4-14) em (4-12) é melhor que acrescentar (4-13) como uma nova equação porque converge mais rapidamente. Quando  $x(0)$  não é adicionado ao sistema através da eq. (4-13), deve-se evitar de tomar outra amplitude além de  $c_1$  como parâmetro de controle, porque isto possibilita encontrar soluções corretas no tempo, mas expúrias no domínio da frequência. Por exemplo, mantendo  $c_3$  constante em (4-12), as incógnitas são  $\omega$  e  $c_1$ . Este sistema pode conduzir a uma solução onde apenas o terceiro harmônico possuirá amplitude não nula, e a frequência  $\omega$  da resposta será 1/3 da frequência dada pela eq. (4-10), de forma a tornar a solução aproximada idêntica à solução encontrada contendo um único harmônico, eq. (4-5). A figura 4.1(a) mostra que isto não ocorre quando  $x(0)$  é inserido no sistema.

Na figura 4.1 utilizou-se uma solução aproximada contendo os cinco primeiros harmônicos ímpares. Na figura (a), de forma semelhante que na eq. (4-14),  $x(0)$  toma o lugar da amplitude escolhida, permanecendo com valor

constante enquanto as iterações do método de Newton-Raphson são executadas. Independente da amplitude da resposta, as soluções coincidem com a solução numérica. Em 4.1(b),  $x(0)$  não é parte do sistema original e sempre uma amplitude é escolhida e mantida constante durante as iterações. A solução correta é encontrada unicamente quando a amplitude do primeiro harmônico é mantida constante. Nas demais situações, as soluções são incorretas

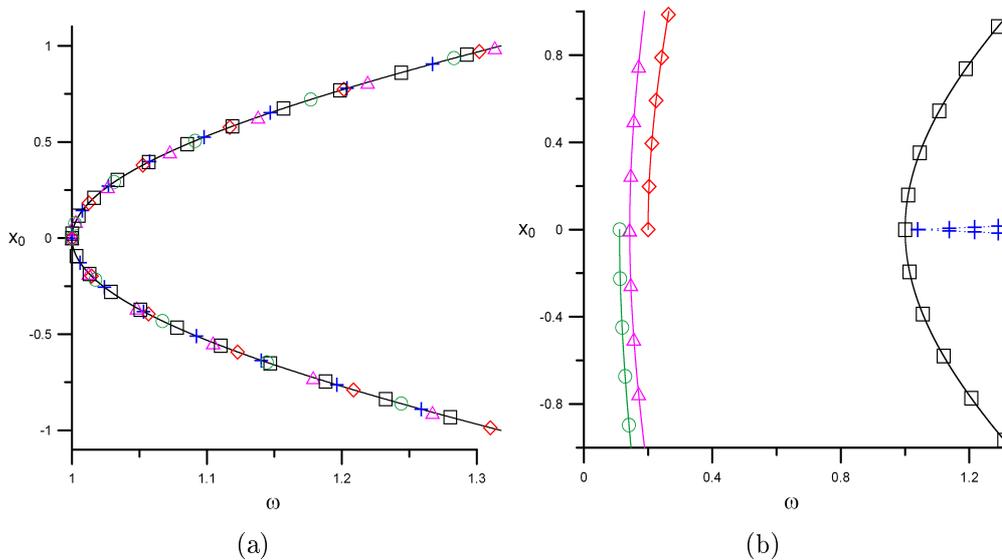


Figura 4.1:  $\omega$  vs deslocamento inicial, diversas soluções aproximadas. (a) Uma amplitude é escolhida para ser função das demais amplitudes,  $c_i = f(x_0, c_j)$  para  $i \neq j$ :  $\square$ ,  $i = 1$ ;  $+$ ,  $i = 2$ ;  $\diamond$ ,  $i = 3$ ;  $\triangle$ ,  $i = 4$ ;  $\circ$ ,  $i = 5$ . (b) Uma amplitude é escolhida como parâmetro de controle,  $c_i = cte$ :  $\square$ ,  $i = 1$ ;  $+$ ,  $i = 2$ ;  $\diamond$ ,  $i = 3$ ;  $\triangle$ ,  $i = 4$ ;  $\circ$ ,  $i = 5$ .

### 4.3 Vibração Forçada

Para resolver o problema de vibração forçada,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F \sin \Omega t \tag{4-16}$$

admite-se que a solução seja do tipo

$$x = c_1 \sin \Omega t \tag{4-17}$$

Como anteriormente, substitui-se a solução aproximada na equação diferencial (4-16), obtendo-se

$$-c_1 \Omega^2 \sin \Omega t + \omega_0^2 c_1 \sin \Omega t - \frac{1}{4} \beta c_1^3 \sin 3\Omega t +$$

$$\frac{3}{4}\beta c_1^3 \sin \Omega t - F \sin \Omega t = 0 \quad (4-18)$$

Observa-se que, para que a igualdade (4-18) seja atendida, é necessário que

$$-c_1\Omega^2 + \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 - F = 0 \quad (4-19)$$

enquanto que o termo  $\beta c_1^3/4$ , que é a amplitude do terceiro harmônico em (4-18), é o resíduo da solução aproximada, idêntico ao caso de vibração livre, eq. (4-8).

Esta é a equação da curva de ressonância não-linear. Para um dado par  $(F, \Omega)$  que define a força externa, tem-se uma equação cúbica em  $c_1$ . Resolvendo (4-19) encontram-se três raízes, que, dependendo dos parâmetros, poderão ser uma real e um par complexo conjugado ou três raízes reais.

Considerando mais harmônicos na solução aproximada,

$$x = c_1 \sin \Omega t + c_3 \sin 3\Omega t + c_5 \sin 5\Omega t + c_7 \sin 7\Omega t \quad (4-20)$$

obtém-se o seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\begin{aligned} & -\frac{3}{4}\beta c_1^2 c_3 + \frac{3}{2}\beta c_1 c_3^2 + \frac{3}{4}\beta c_3^2 c_5 - F - \frac{3}{4}\beta c_3^2 c_7 + \frac{3}{2}\beta c_1 c_5^2 - \\ & \frac{3}{2}\beta c_1 c_3 c_5 + \frac{3}{2}\beta c_3 c_5 c_7 - c_1\Omega^2 + \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 - \frac{3}{2}\beta c_1 c_5 c_7 + \\ & \frac{3}{2}\beta c_1 c_7^2 = 0 \\ & \frac{3}{2}\beta c_1^2 c_3 + \frac{3}{4}\beta c_3^3 + \frac{3}{2}\beta c_3 c_7^2 - \frac{3}{2}\beta c_1 c_3 c_7 + \frac{3}{4}\beta c_5^2 c_7 + \frac{3}{2}\beta c_3 c_5^2 + \\ & \frac{3}{2}\beta c_1 c_3 c_5 - \frac{3}{4}\beta c_1^2 c_5 - \frac{1}{4}\beta c_1^3 - 9c_3\Omega^2 + \omega_0^2 c_3 + \frac{3}{2}\beta c_1 c_5 c_7 = 0 \quad (4-21) \\ & -\frac{3}{4}\beta c_1^2 c_3 + \frac{3}{4}\beta c_1 c_3^2 + \frac{3}{2}\beta c_3^2 c_5 - 25c_5\Omega^2 + \omega_0^2 c_5 + \frac{3}{2}\beta c_5 c_7^2 - \\ & \frac{3}{4}\beta c_1^2 c_7 + \frac{3}{2}\beta c_1 c_3 c_7 + \frac{3}{2}\beta c_3 c_5 c_7 + \frac{3}{4}\beta c_5^3 + \frac{3}{2}\beta c_1^2 c_5 = 0 \\ & -\frac{3}{4}\beta c_1 c_3^2 + \frac{3}{4}\beta c_7^3 + \frac{3}{2}\beta c_1^2 c_7 + \frac{3}{2}\beta c_5^2 c_7 + \frac{3}{2}\beta c_3^2 c_7 + \frac{3}{4}\beta c_3 c_5^2 + \\ & \frac{3}{2}\beta c_1 c_3 c_5 - \frac{3}{4}\beta c_1^2 c_5 - 49c_7\Omega^2 + \omega_0^2 c_7 = 0 \end{aligned}$$

que deve ser resolvido numericamente.

Freqüentemente sistemas não-lineares tais como o (4-21) apresentam pontos críticos ou pontos limites onde o método de Newton-Raphson não converge. Neste casos, deve-se utilizar o método do comprimento de arco.

Adicionando a equação de restrição

$$(c_1 - \widehat{c}_1)^2 + (c_3 - \widehat{c}_3)^2 + (c_5 - \widehat{c}_5)^2 + (c_7 - \widehat{c}_7)^2 + (\Omega - \widehat{\Omega})^2 = r^2$$

ao sistema (4-21), onde  $\widehat{c}_1$ ,  $\widehat{c}_3$ ,  $\widehat{c}_5$ ,  $\widehat{c}_7$  e  $\widehat{\Omega}$  são os valores da última solução encontrada, e  $r$  é um valor pequeno, torna-se possível ultrapassar os pontos limites, obtendo-se a curva de ressonância desejada.

### 4.3.1

#### Solução de sistemas algébricos não-lineares através do método de perturbação

O sistema não-linear (4-21) pode ser resolvido usando uma expansão em termos de um parâmetro de perturbação, tal como apresentado por Richards(2002)[81].

Seja a expansão para a frequência  $\Omega$ :

$$\Omega = \omega_0 + \beta\Omega_1 + \beta^2\Omega_2 + \beta^3\Omega_3 \quad (4-22)$$

Observando que a força na eq. (4-16) contém apenas o primeiro harmônico, sua expansão conterá apenas um único termo em  $\beta$ . Para que  $F$  apareça na equação correspondente à primeira potência de  $\beta$ , considera-se, como no capítulo anterior, que a força  $F$  seja multiplicada pelo parâmetro não-linear  $\beta$ .

Considera-se de forma similar que o terceiro, o quinto e o sétimo harmônicos da solução aproximada (4-20) só aparecem a partir da primeira, segunda e terceira ordem da potência de  $\beta$  respectivamente. Assim, as expansões para as constantes em (4-20) são

$$c_1 = A \quad (4-23)$$

$$c_3 = \beta c_{31} + \beta^2 c_{32} + \beta^3 c_{33} \quad (4-24)$$

$$c_5 = \beta^2 c_{52} + \beta^3 c_{53} \quad (4-25)$$

$$c_7 = \beta^3 c_{73} \quad (4-26)$$

Substituindo (4-22) a (4-26) em (4-21), e também  $F$  por  $\beta F$ , e coletando os termos de mesma potência em  $\beta$ , partindo da potência 1 até a potência três, são obtidas nove novas equações. A duas primeiras eqs. em (4-21) fornecem cada uma três novas equações, enquanto que a terceira fornece duas novas equações e a última apenas uma equação, totalizando nove equações, necessárias para se obter as nove incógnitas envolvidas,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$ , que determinam a frequência da resposta e as constantes  $c_{31}$ ,  $c_{32}$ ,  $c_{33}$ ,  $c_{52}$ ,  $c_{53}$  e  $c_{73}$  que determinam as amplitudes dos harmônicos mais altos em termos da amplitude do primeiro harmônico,  $A$ . Coletando as potências de  $\beta$  na primeira eq. de (4-21), tem-se

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{4}A^2c_{32} + \frac{3}{2}Ac_{31}^2 - A(2\omega_0\Omega_3 + 2\Omega_1\Omega_2) = 0 \\
& -A(2\omega_0\Omega_2 + \Omega_1^2) - \frac{3}{4}A^2c_{31} = 0 \\
& -2A\omega_0\Omega_1 + \frac{3}{4}A^3 - F = 0
\end{aligned} \tag{4-27}$$

que fornecem

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= -\frac{F}{2A\omega_0} + \frac{3A^2}{8\omega_0} \\
\Omega_2 &= -\frac{A^2F^2}{8\omega_0^3} + \frac{3AF}{16\omega_0^3} - \frac{9A^4}{128\omega_0^3} - \frac{3A}{8\omega_0}c_{31} \\
\Omega_3 &= \frac{3}{8\omega_0}(-Ac_{32} + 2c_{31}^2) + -\frac{3c_{31}}{64\omega_0^3}(4F - 3A^3) - \\
& \quad \frac{1}{1024A^3\omega_0^5}(64F^3 - 144F^2A^3 + 108FA^6 - 27A^9)
\end{aligned}$$

Coletando as potências de  $\beta$  na segunda das eqs. de (4-21), tem-se

$$\begin{aligned}
& -9c_{31}(2\omega_0\Omega_2 + \Omega_1^2) - 18c_{32}\omega_0\Omega_1 - 8c_{33}\omega_0^2 - \frac{3}{4}A^2c_{52} + \frac{3}{2}A^2c_{32} = 0 \\
& -18c_{31}\omega_0\Omega_1 - 8c_{32}\omega_0^2 + \frac{3}{2}A^2c_{31} = 0 \\
& -8c_{31}\omega_0^2 - \frac{1}{4}A^3 = 0
\end{aligned} \tag{4-28}$$

Da última das eqs. (4-28) retira-se  $c_{31}$ , da segunda  $c_{32}$  e da primeira,  $c_{33}$ , a saber

$$\begin{aligned}
c_{31} &= -\frac{A^3}{32\omega_0^2} \\
c_{32} &= -\frac{21A^5}{1024\omega_0^4} - \frac{9A^2F}{256\omega_0^4} \\
c_{33} &= -\frac{3A^2}{32\omega_0^2}c_{52} - \frac{207A^7}{16384\omega_0^6} + \frac{189A^4F}{4096\omega_0^6} - \frac{81AF^2}{2048\omega_0^6}
\end{aligned} \tag{4-29}$$

Coletando as potências de  $\beta$  na terceira eq. de (4-21), escreve-se duas novas equações

$$\begin{aligned}
& -50c_{52}\omega_0\Omega_1 - 24c_{53}\omega_0^2 + \frac{3}{4}Ac_{31}^2 + \frac{3}{2}A^2c_{52} - \frac{3}{4}A^2c_{32} = 0 \\
& -\frac{3}{4}A^2c_{31} - 24c_{52}\omega_0^2 = 0
\end{aligned}$$

de onde são retirados  $c_{52}$ , e  $c_{53}$ ,

$$c_{52} = \frac{A^5}{1024\omega_0^4}$$

$$c_{53} = -\frac{43A^7}{32768\omega_0^6} + \frac{13A^4F}{6144\omega_0^6}$$

Da última das eqs. (4-21), ao coletar as potências de  $\beta$ , obtém-se mais uma equação,

$$-\frac{3}{4}Ac_{31}^2 - 48c_{73}\omega_0^2 - \frac{3}{4}A^2c_{52} = 0 \quad (4-30)$$

que permite a obtenção de  $c_{73}$

$$c_{73} = -\frac{A^7}{32768\omega_0^6} \quad (4-31)$$

De posse de todas as constantes, pode-se escrever a frequência (4-22) e a solução aproximada (4-20)

$$\Omega = \omega_0 - \frac{1}{8A\omega_0}\beta(-3A^3 + 4F) - \frac{\beta^2}{256A^2\omega_0^3}(15A^6 - 48A^3F + 32F^2) - \frac{\beta^3}{8192A^3\omega_0^5}(-123A^9 + 708A^6F - 1152A^3F^2 + 512F^3) \quad (4-32)$$

$$x(t) = A \sin \Omega t + \left\{ -\frac{1}{32\omega^2}\beta A^3 + \beta^2\left(\frac{21}{1024\omega^4}A^5 - \frac{9}{256\omega^4}A^2F\right) + \beta^3\left(-\frac{417}{32768\omega^6}A^7 + \frac{189}{4096F\omega^6}A^4 - \frac{81}{2048\omega^6}AF^2\right) \right\} \sin 3\Omega t + \left(\frac{1}{1024\omega^4}\beta^2 A^5 + \beta^3\left(-\frac{43}{32768\omega^6}A^7 + \frac{13}{6144\omega^6}A^4F\right)\right) \sin 5\Omega t - \frac{1}{32768\omega^6}\beta^3 A^7 \sin 7\Omega t \quad (4-33)$$

Os resultados são coincidentes com os encontrados pelo LP tradicional, eqs. (3-52) para  $\Omega$  e (3-53) para  $x(t)$ .

Pode-se, entretanto, considerar a seguinte expansão para  $\omega_0$ ,

$$\omega_0^2 = \Omega^2 - \beta\omega_{01} - \beta^2\omega_{02} - \beta^3\omega_{03} \quad (4-34)$$

Repetindo todo o processo, encontram-se a seguinte relação frequência-amplitude e solução no tempo

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \beta\left(-\frac{1}{A}F + \frac{3}{4}A^2\right) + \frac{3}{128\Omega^2}\beta^2 A^4 + \left(\frac{15}{4096\Omega^4}A^6 + \frac{3}{1024\Omega^4}A^3F\right)\beta^3 \quad (4-35)$$

$$x(t) = A \sin \Omega t - \left(\frac{A^3}{32\beta\omega_0^2} - \frac{21\beta^2 A^5}{1024\omega_0^4} + \frac{9\beta^2 A^2 F}{256\omega_0^4} + \frac{417\beta^3 A^7}{32768\omega_0^6} - \frac{189\beta^3 A^4 F}{4096\omega_0^6} + \frac{81\beta^3 A F^2}{2048\omega_0^6}\right) \sin 3\Omega t + \left(\frac{\beta^2 A^5}{1024\omega_0^4} - \frac{43\beta^3 A^7}{32768\omega_0^6} + \right)$$

$$\left. \frac{13\beta^3 A^4 F}{6144\omega_0^6} \right) \sin 5\Omega t - \frac{\beta^3 A^7}{32768\omega_0^6} \sin 7\Omega t \quad (4-36)$$

A frequência dada por (4-35) e a solução no tempo (4-33) coincidem com as encontradas pelo LP modificado, eqs. (3-113) e (3-112).

#### 4.4

#### Vibração Forçada Amortecida

Inserindo um termo de amortecimento na eq. (4-16), tem-se

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = F \sin \Omega t \quad (4-37)$$

a solução aproximada é escrita contendo um único harmônico e com um ângulo de fase  $\phi$ , ou seja

$$x = c_1 \sin(\Omega t + \phi_1) \quad (4-38)$$

Como anteriormente, substitui-se a solução aproximada na equação diferencial (4-37) e, após a expansão das potências, obtém-se

$$\begin{aligned} & -c_1 \sin(\Omega t + \phi_1)\Omega^2 + 2\zeta\omega_0 c_1 \cos(\Omega t + \phi_1)\Omega + \omega_0^2 c_1 \sin(\Omega t + \phi_1) - \\ & \frac{1}{4}\beta c_1^3 \sin 3\Omega t + \frac{3}{4}\beta c_1^3 \sin(\Omega t + \phi_1) - F \sin(\Omega t + \phi_1) = 0 \end{aligned} \quad (4-39)$$

Expandindo  $\sin(\Omega t + \phi_1)$  e  $\cos(\Omega t + \phi_1)$  em (4-39) e pondo em evidência os harmônicos  $\sin \Omega t$  e  $\cos \Omega t$ , chega-se respectivamente às seguintes equações:

$$\begin{aligned} & \left( \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 - c_1 \Omega^2 \right) \cos \phi_1 - F - 2\zeta\omega_0 \Omega c_1 \sin \phi_1 = 0 \\ & \left( \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 - c_1 \Omega^2 \right) \sin \phi_1 + 2\zeta\omega_0 \Omega c_1 \cos \phi_1 = 0 \end{aligned} \quad (4-40)$$

onde as incógnitas são a amplitude  $c_1$  e ângulo de fase  $\phi_1$ . O ângulo  $\phi_1$  é determinado isolando  $\cos \phi_1$  na primeira das eqs. (4-40). Depois  $\cos \phi_1$  é substituído na segunda das eqs. (4-40) e obtém-se  $\sin \phi_1$  e conseqüentemente  $\phi_1$ . A amplitude  $c_1$  é obtida ao se escrever  $(\cos \phi_1)^2 + (\sin \phi_1)^2 = 1$ , mas não será apresentada por ser uma expressão muito extensa. O ângulo de fase é dado por

$$\sin \phi_1 = - \frac{2\zeta\omega_0 c_1 \Omega F}{\left( \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 - c_1 \Omega^2 \right)^2 \left( 1 + \frac{4\zeta^2 \omega_0^2 c_1^2 \Omega^2}{\left( \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 - c_1 \Omega^2 \right)^2} \right)} \quad (4-41)$$

A eq. (4-38) é a solução analítica do problema de vibração forçada amortecida pelo HBM. Adicionando mais termos, não é possível encontrar uma solução analítica. Porém, ao serem inseridos mais termos na solução (4-38) é mais conveniente escrever a solução aproximada sem o ângulo fase.

#### 4.5 Método de Galerkin-Urabe

O método de Galerkin-Urabe é semelhante ao HBM. A diferença é que, em vez de se expandir as potências e produtos das funções trigonométricas e fazer o “balanço” dos harmônicos, emprega-se o método de Galerkin para gerar um sistema de equações algébricas não-lineares para a determinação das amplitudes dos harmônicos.

Considerando novamente a eq. (4-4) como exemplo, a solução aproximada é tomada na forma

$$x = c_1 \cos \omega t + c_3 \cos 3\omega t \quad (4-42)$$

Substituindo a solução aproximada (4-42) em (4-4), tem-se

$$\begin{aligned} & -c_1 \omega^2 \cos \omega t - 9c_3 \omega^2 \cos 3\omega t + \omega_0^2 c_1 \cos \omega t + \omega_0^2 c_3 \cos 3\omega t + \\ & \beta c_1^3 (\cos \omega t)^3 + 3\beta c_1^2 c_3 (\cos \omega t)^2 \cos 3\omega t + \\ & 3\beta c_1 c_3^2 \cos \omega t (\cos 3\omega t)^2 + \beta c_3^3 (\cos 3\omega t)^3 = 0 \end{aligned} \quad (4-43)$$

Como a igualdade (4-43) não é atendida, o lado esquerdo é na verdade um resíduo.

Deseja-se que o resíduo ao longo de todo o domínio seja zero, dessa forma o resíduo é multiplicado por funções peso e integrado ao longo do domínio da equação diferencial e feito igual a zero. As funções peso são

$$W_i = \frac{\partial x}{\partial c_i} \quad (4-44)$$

$$W_1 = \cos \omega t \quad (4-45)$$

$$W_2 = \cos 3\omega t \quad (4-46)$$

O sistema de equações não-lineares de onde a solução será retirada é obtido fazendo a integração, ao longo de um período, do resíduo multiplicado pela função peso, isto é

$$\int_0^T (W_i R dt) = 0 \quad (4-47)$$

A partir de (4-47), chega-se ao sistema

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\omega} \left( -c_1\omega^2 + c_1\omega_0^2 + \frac{3}{2}\beta c_1 c_3^2 + \frac{3}{4}\beta c_1^2 c_3 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 \right) &= 0 \\ \frac{\pi}{\omega} \left( \frac{3}{4}\beta c_3^3 - 9\omega^2 c_3 + \frac{3}{2}\beta c_1^2 c_3 + \frac{1}{4}\beta c_1^3 + \omega_0^2 c_3 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4-48)$$

que é um sistema similar ao obtido com o HBM, eq. (4-12). Percebe-se que as equações obtidas com o método de Galerkin são  $\pi/\omega$  vezes maiores que as equações obtidas com o HBM. Isto ocorre pela integração das funções trigonométricas ao longo do período.

#### 4.6 Método do balanço harmônico incremental

O IHBM foi desenvolvido por Cheung e Lau (1981) [2]. No HBM tradicional, chega-se a um sistema não-linear de equações. Para resolvê-lo, aplica-se o método de Newton-Raphson, que é a expansão em séries de Taylor das equações não-lineares, onde os termos de alta ordem são desprezados. Neste método, a expansão da série de Taylor ocorre antes da substituição da solução aproximada no problema a ser resolvido.

Considerando somente o problema mais geral de vibração forçada amortecida, tem-se que

$$\varphi = \Omega^2 x'' + 2\Omega\zeta\omega_0\beta x' + \omega_0^2 x + \beta x^3 - F \cos \tau = 0 \quad (4-49)$$

Expandindo a função  $\varphi$  em série de Taylor e desprezando os termos de mais alta ordem, tem-se

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial x''} \Delta x'' + \frac{\partial\varphi}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial \Omega} \Delta \Omega + \frac{\partial\varphi}{\partial F} \Delta F + \frac{\partial\varphi}{\partial \beta} \Delta \beta \quad (4-50)$$

onde

$$\varphi_0 = \Omega^2 x'' + 2\Omega\zeta\omega_0\beta x' + \omega_0^2 x + \beta x^3 - F \cos \tau \quad (4-51)$$

Agora  $x$ ,  $x'$ ,  $x''$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta x'$ , e  $\Delta x''$  são dados por séries de Fourier.

Utilizando a mais simples solução possível para uma equação com não-linearidade ímpar amortecida, adota-se

$$\begin{aligned} x &= c_1 \sin \tau + d_1 \cos \tau \\ x' &= c_1 \cos \tau - d_1 \sin \tau \\ x'' &= -c_1 \sin \tau - d_1 \cos \tau \\ \Delta x &= \Delta c_1 \sin \tau + \Delta d_1 \cos \tau \\ \Delta x' &= \Delta c_1 \cos \tau - \Delta d_1 \sin \tau \end{aligned}$$

$$\Delta x'' = -\Delta c_1 \sin \tau - \Delta d_1 \cos \tau \quad (4-52)$$

Inserindo (4-51) e as eqs. (4-52) em (4-50), simplificando as potências trigonométricas, e coletando os harmônicos, chega-se ao sistema

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}\beta c_1 d_1 \Delta_{d_1} + \omega_0^2 \Delta_{c_1} + \frac{3}{4}\Delta_\beta c_1 d_1^2 + \frac{3}{4}\beta c_1^3 + 2\Delta_{\omega_0} \omega_0 c_1 + \frac{3}{4}\Delta_\beta c_1^3 + \\ & \frac{9}{4}\beta c_1^2 \Delta_{c_1} + \frac{3}{4}\beta d_1^2 \Delta_{c_1} - 2\zeta \omega_0 d_1 - 2\zeta \omega_0 \Delta_{d_1} - \Omega^2 c_1 - 2\Omega \Delta_\Omega c_1 + \\ & \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1 d_1^2 - \Omega^2 \Delta_{c_1} - 2\Delta_{\omega_0} \zeta d_1 = 0 \end{aligned} \quad (4-53)$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4}\beta c_1^2 d_1 + \frac{9}{4}\beta d_1^2 \Delta_{d_1} + \omega_0^2 \Delta_{d_1} - 2\Omega \Delta_\Omega d_1 + \frac{3}{4}\beta d_1^3 + \frac{3}{2}\beta c_1 d_1 \Delta_{c_1} - \\ & F + \frac{3}{4}\Delta_\beta d_1^3 + \frac{3}{4}\Delta_\beta c_1^2 d_1 + 2\zeta \omega_0 \Delta_{c_1} + 2\Delta_{\omega_0} \zeta c_1 + 2\Delta_{\omega_0} \omega_0 d_1 + \\ & \frac{3}{4}\beta c_1^2 \Delta_{d_1} + 2\zeta \omega_0 c_1 - \Omega^2 d_1 + \omega_0^2 d_1 - \Omega^2 \Delta_{d_1} = 0 \end{aligned} \quad (4-54)$$

Escolhendo apenas as amplitudes dos harmônicos  $c_1$  e  $d_1$  como incógnitas, tem-se que  $\Omega$ ,  $F$  e  $\beta$  são constantes. Assim  $\Delta\Omega$ ,  $\Delta F$  e  $\Delta\beta$  valem zero em (4-53) e (4-54). Obtém-se, de (4-53) e (4-54), o sistema sob a forma matricial,

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} \frac{3\beta}{4}(3c_1^2 + d_1^2) + \omega_0^2 - \Omega^2 & \frac{3}{2}\beta c_1 d_1 - 2\zeta \omega_0 \\ \frac{3}{2}\beta c_1 d_1 + 2\zeta \omega_0 & \frac{3\beta}{4}(c_1^2 + 3d_1^2) + \omega_0^2 - \Omega^2 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \Delta c_1 \\ \Delta d_1 \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} \frac{3}{4}\beta c_1^3 - 2\zeta \omega_0 d_1 - \Omega^2 c_1 + \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1 d_1^2 \\ \frac{3}{4}\beta c_1^2 d_1 + \frac{3}{4}\beta d_1^3 - F + 2\zeta \omega_0 c_1 - \Omega^2 d_1 + \omega_0^2 d_1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4-55)$$

Inicialmente são atribuídos valores quaisquer para  $c_1$  e  $d_1$  e encontram-se  $\Delta c_1$  e  $\Delta d_1$  resolvendo o sistema (4-55). Dessa forma  $c_1$  e  $d_1$  são atualizados e encontram-se novos  $\Delta c_1$  e  $\Delta d_1$ . Atualiza-se  $c_1$  e  $d_1$  até que  $\Delta c_1 \cong \Delta d_1 \cong 0$ . Quando isso acontecer, tem-se a solução  $c_1$  e  $d_1$  para os parâmetros  $\Omega$ ,  $F$ ,  $\beta$  e  $\omega_0$ . Eventualmente em alguns pontos críticos da curva de ressonância o sistema (4-55) não irá convergir. Novamente o comprimento de arco é utilizado através da equação.

$$\varphi_1 = (c_1 - \widehat{c}_1)^2 + (d_1 - \widehat{d}_1)^2 + (\Omega - \widehat{\Omega})^2 - r^2 \quad (4-56)$$

onde  $\widehat{c}_1$ ,  $\widehat{d}_1$  e  $\widehat{\Omega}$  correspondem à última solução conhecida. Expandindo (4-56) em série de Taylor, tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_1 \approx & (c_1 - \widehat{c}_1)^2 + (d_1 - \widehat{d}_1)^2 + (\Omega - \widehat{\Omega})^2 - r^2 + (2\Omega - 2\widehat{\Omega})\Delta_\Omega + \\ & (2c_1 - 2\widehat{c}_1)\Delta_{c_1} + (2d_1 - 2\widehat{d}_1)\Delta_{d_1} \end{aligned} \quad (4-57)$$

Assim, o sistema de eqs. (4-55) passa a ter a forma

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a & \frac{3}{2}\beta c_1 d_1 - 2\zeta\omega_0 & -2\Omega c_1 \\ \frac{3}{2}\beta c_1 d_1 + 2\zeta\omega_0 & b & -2\Omega d_1 \\ 2c_1 - 2c_{10} & 2d_1 - 2d_{10} & 2\Omega - 2\Omega_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta c_1 \\ \Delta d_1 \\ \Delta \Omega \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} \frac{3}{4}\beta c_1^3 - 2\zeta\omega_0 d_1 - \Omega^2 c_1 + \omega_0^2 c_1 + \frac{3}{4}\beta c_1 d_1^2 \\ \frac{3}{4}\beta c_1^2 d_1 + \frac{3}{4}\beta d_1^3 - F + 2\zeta\omega_0 c_1 - \Omega^2 d_1 + \omega_0^2 d_1 \\ (c_1 - c_{10})^2 + (d_1 - d_{10})^2 + (\Omega - \Omega_0)^2 - r^2 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4-58)$$

onde

$$a = \frac{9}{4}\beta c_1^2 + \frac{3}{4}\beta d_1^2 + \omega_0^2 - \Omega^2 \quad (4-59)$$

$$b = \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta c_1^2 + \frac{9}{4}\beta d_1^2 - \Omega^2 \quad (4-60)$$

que é idêntico ao resultado obtido com o HBM.

#### 4.7

#### Não Linearidade Quadrática

Seja novamente a equação

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^2 = 0 \quad (4-61)$$

A solução aproximada necessita conter o harmônico fundamental  $\omega$  já que o termo linear está presente, além do termo constante e o harmônico típico da não-linearidade quadrática,  $\cos 2\omega t$ . Tem-se pois a aproximação

$$x(t) = c_0 + c_1 \cos \omega t + c_2 \cos 2\omega t \quad (4-62)$$

Substituindo (4-62) em (4-61) e coletando os termos constantes e os coeficientes dos harmônicos presentes em (4-62), chega-se ao sistema

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha c_2^2 + \alpha c_0^2 + \omega_0^2 c_0 + \frac{1}{2}\alpha c_1^2 &= 0 \\ 2\alpha c_1 c_0 + \alpha c_1 c_2 + \omega_0^2 c_1 - c_1 \omega^2 &= 0 \\ 2\alpha c_2 c_0 + \frac{1}{2}\alpha c_1^2 + \omega_0^2 c_2 - 4c_2 \omega^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4-63)$$

Utilizando a condição inicial de deslocamento,

$$x(0) = c_0 + c_1 + c_2 \quad (4-64)$$

pode-se por qualquer constante em função das demais, mas isto pode trazer problemas de convergência, além de múltiplas soluções que embora atendam (4-63), não existem na realidade. Isto é evitado ao se fixar a amplitude  $c_1$  do primeiro harmônico ao se resolver o sistema (4-63).

## 5

# Sistemas Lineares com Coeficientes Periódicos

Este capítulo trata de forma sucinta do estudo da estabilidade de soluções periódicas de sistemas dinâmicos não-lineares.

Segundo Rand [83], a teoria de Floquet é a teoria mais geral que trata de equações diferenciais lineares com coeficientes periódicos do tipo

$$\dot{x} = A(t)x \quad (5-1)$$

Fazendo um mapeamento de Poincaré de um sistema linear, pode-se verificar que as coordenadas que determinam o estado do sistema num determinado instante de tempo  $t$  (vetor de estado  $x$  em  $t$ ) estão linearmente conectadas com as coordenadas num instante defasado de um certo  $\Delta t$  através de uma matriz  $\Phi$ , tal como ilustrado na figura 5.1, ou seja

$$\{x\}_{t+\Delta t} = [\Phi]_{t+\Delta t,t} \{x\}_t \quad (5-2)$$

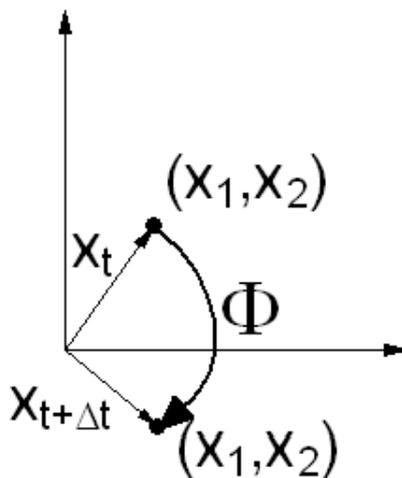


Figura 5.1: Espaço de fase

$\Phi$  é chamada de matriz de transição ou matriz de monodromia.

Se  $A$  em (5-1) for constante,  $\Phi$  é dado por

$$\Phi_{t,0} = e^{At} \quad (5-3)$$

Nos casos em que  $A$  é periódico, o teorema de Floquet afirma que a matriz de transição assume a forma.

$$\Phi_{t,0} = P(t)e^{Rt} \quad (5-4)$$

onde  $P(t)$  é uma função periódica e  $R$  é uma matriz constante.

Em geral é muito difícil obter  $\Phi$  analiticamente, para estes casos é necessário definir as matrizes de soluções que possibilitam o cálculo de  $\Phi$  numericamente. De forma semelhante à eq. (5-2), pode-se escrever que

$$[X]_{t+T} = [\Phi]_{t+T,t} [X]_t \quad (5-5)$$

Assim,

$$[\Phi]_{t+T,t} = [X]_{t+T} [X]_t^{-1} \quad (5-6)$$

## 5.1 Multiplicadores de Floquet

Com base em (5-3), sabe-se que, quando  $A$  é constante, seus autovalores definem o comportamento do sistema ao longo do tempo. Autovalores positivos indicam que a solução irá crescer indefinidamente, autovalores nulos indicam órbitas periódicas e, para autovalores negativos, a solução tende assintoticamente para zero. Portanto, os autovalores da matriz de transição  $\Phi$  e da matriz  $A$  estão relacionados. A relação é dada pela eq. (5-3). Logo os autovalores de  $\Phi$  são as exponenciais dos autovalores  $\lambda$  de  $A$ , como ilustra a figura 5.2. Os autovalores de  $\Phi$  são chamados de multiplicadores de Floquet e indicam instabilidade para valores maiores que 1.

O módulo dos multiplicadores de Floquet relacionam o módulo das componentes de dois vetores de estado, separados por um intervalo de tempo  $\Delta t$  igual ao período  $T$  de  $A$ .

A seguinte relação entre os multiplicadores de Floquet e a parte real dos

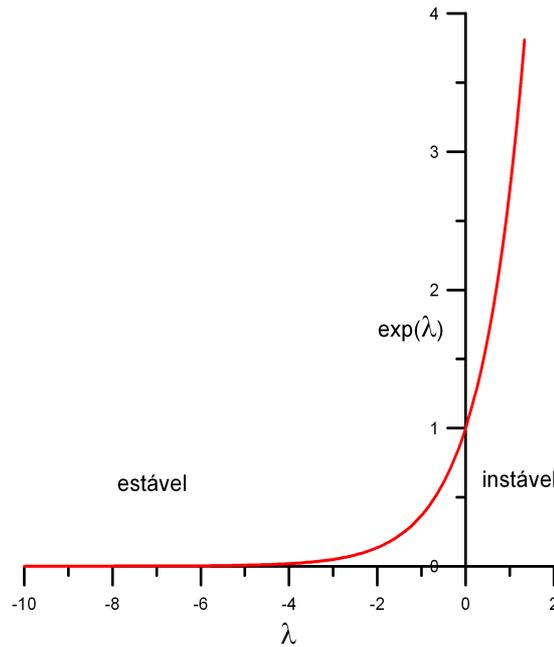


Figura 5.2: Relação entre um autovalor de  $\Phi$  e um autovalor de  $A$

autovalores de  $A$  é válida, quando  $A$  é constante

$$\begin{aligned}
 |\lambda_{\Phi}^i| > 1 &\Rightarrow |x_{t+T}^i| > |x_t^i| \Rightarrow \lambda_A^i > 0 \\
 |\lambda_{\Phi}^i| = 1 &\Rightarrow |x_{t+T}^i| = |x_t^i| \Rightarrow \lambda_A^i = 0 \\
 |\lambda_{\Phi}^i| < 1 &\Rightarrow |x_{t+T}^i| < |x_t^i| \Rightarrow \lambda_A^i < 0
 \end{aligned}
 \tag{5-7}$$

Portanto, se o módulo de algum multiplicador de Floquet for maior que 1, há instabilidade associada a alguma direção do espaço de fase.

A matriz  $\Phi$  pode ser computada em (5-6) a partir de uma matriz diagonal de soluções

$$X_t = \begin{bmatrix} \delta & & \\ & \ddots & \\ & & \delta \end{bmatrix}
 \tag{5-8}$$

Em geral assume-se  $\delta = 1$ , o que permite simplificar um pouco a eq. (5-6), obtendo-se

$$[\Phi]_{(t+T,t)} = [X]_{t+T}
 \tag{5-9}$$

Como os autovalores de  $\Phi$  podem ser complexos conjugados, diversos autores classificam os tipos de bifurcações de acordo com as formas com que estes autovalores ultrapassam o módulo unitário. Isto é visualizado por um plano onde o eixo horizontal corresponde à parte real do autovalor e o eixo vertical contém a componente imaginária do autovalor, como mostra a figura 5.3 ([84]).

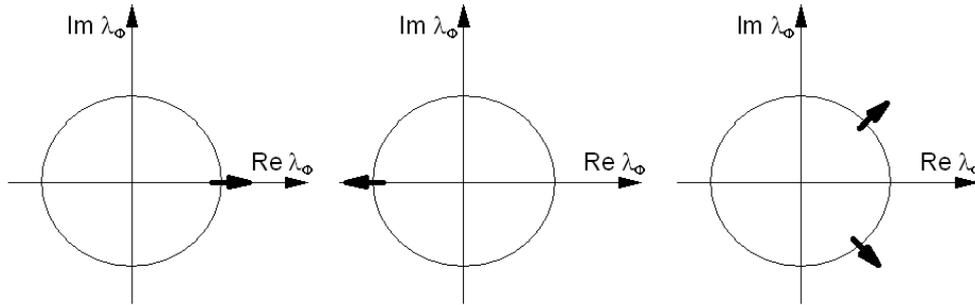


Figura 5.3: Possibilidades de perda de estabilidade de uma solução periódica.

### 5.2 Estabilidade de sistemas não-lineares

A estabilidade de soluções periódicas de sistemas não-lineares é determinada pela avaliação ao longo do tempo de uma perturbação  $\epsilon$ , muito pequena, que é adicionada à solução periódica conhecida. Se a perturbação cresce com o passar do tempo, então o sistema é instável.

Para saber a tendência da perturbação, basta linearizar a equação. A equação linearizada obrigatoriamente terá coeficientes periódicos, o que conduz à utilização da teoria de Floquet.

Tomando como exemplo a equação de Duffing, ao se adicionar uma perturbação  $\epsilon(t)$  à solução  $x(t)$ , tem-se

$$\ddot{x} + \ddot{\epsilon} + 2\zeta\omega_0(\dot{x} + \dot{\epsilon}) + \omega_0^2(x + \epsilon) + \beta(x + \epsilon)^3 = F \sin \Omega t \quad (5-10)$$

Eliminando os termos não-lineares em  $\epsilon$  e tendo em mente que  $\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = F \sin \Omega t$ , obtém-se,

$$\ddot{\epsilon} + 2\zeta\omega_0\dot{\epsilon} + \omega_0^2\epsilon + 3\beta x^2\epsilon = 0 \quad (5-11)$$

onde o coeficiente  $3\beta x^2$  é uma função periódica em  $t$ , dado que  $x(t)$  é a solução periódica cuja estabilidade se deseja analisar.

Assumindo as seguintes relações

$$\epsilon = \epsilon_1$$

$$\dot{\epsilon} = \epsilon_2$$

a eq. (5-11) é transformada em um sistema de primeira ordem

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 - 3\beta x^2 & -2\zeta\omega_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{Bmatrix} \quad (5-12)$$

O que deseja-se é encontrar os autovalores da matriz de transição  $\Phi$  do sistema (5-12). Com a matrix de condições iniciais sendo uma identidade, pode-se obter  $\Phi$  através de (5-9), integrando (5-12) durante um período  $T$  correspondente à solução da equação diferencial não-linear,  $x(t)$ .

### 5.2.1 Determinante de Hill

Considerando novamente o equação de Duffing,

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = F \sin \Omega t \quad (5-13)$$

a solução aproximada pode ser escrita como,

$$x = a \cos \Omega t + b \sin \Omega t \quad (5-14)$$

Acrescentando uma perturbação  $\epsilon$  à solução aproximada (5-14), e desprezando os termos não-lineares, chega-se à seguinte equação que rege a perturbação,

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon} + 2\omega_0\zeta\dot{\epsilon} + (\omega_0^2 + \frac{3}{2}\beta(a^2 + b^2) + 3\beta ab \sin 2\Omega t + \\ \frac{3}{2}\beta(a^2 - b^2) \cos 2\Omega t)\epsilon = 0 \end{aligned} \quad (5-15)$$

cuja solução, segundo Floquet, é dada por

$$\epsilon = e^{\mu t} \phi(t) \quad (5-16)$$

onde  $\mu$  é chamado expoente característico.

Substituindo (5-16) em (5-15), tem-se

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + (2\mu + 2\omega_0\zeta)\dot{\phi} + (\mu^2 + 2\omega_0\zeta\mu + \omega_0^2 + \frac{3}{2}\beta(a^2 + b^2) + \\ 3\beta ab \sin 2\Omega t + (\frac{3}{2}\beta(a^2 - b^2) \cos 2\Omega t)\phi = 0 \end{aligned} \quad (5-17)$$

Aplicando o HBM, substitui-se

$$\phi = c \cos \omega t + d \sin \omega t \quad (5-18)$$

em (5-17) e realiza-se o balanço dos harmônicos.

De acordo com Hayashi (1964) [85], fazendo  $\omega = \Omega$ , os expoentes característicos  $\mu$  estarão associados à região da primeira ressonância. Para as regiões

de ressonância par é necessário considerar o termo constante em (5-18).

Para  $\omega = \Omega$ , o HBM conduz ao seguinte sistema de equações lineares,

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix} = 0 \quad (5-19)$$

sendo

$$\begin{aligned} M_{11} &= 2\omega_0\zeta\mu + \mu^2 + \frac{3}{4}\beta b^2 + \omega_0^2 + \frac{9}{4}\beta a^2 - \Omega^2 \\ M_{12} &= 2\mu\Omega + \frac{3}{2}\beta ab + 2\omega_0\zeta\Omega \\ M_{21} &= -2\mu\Omega + \frac{3}{2}\beta ab - 2\omega_0\zeta\Omega \\ M_{22} &= \mu^2 + 2\omega_0\zeta\mu + \omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta a^2 + \frac{9}{4}\beta b^2 - \Omega^2 \end{aligned}$$

Para que existam soluções não triviais, é necessário que o determinante da matriz do sistema linear (5-19) seja nulo. Igualando o determinante a zero, encontra-se uma equação que permite que o expoente característico  $\mu$  seja determinado. Tem-se assim

$$\begin{aligned} &\mu^4 + 4\omega_0\zeta\mu^3 + (3\beta(a^2 + b^2) + 4\omega_0^2\zeta^2 + 2(\Omega^2 + \omega_0^2))\mu^2 + \\ &(4\omega_0\zeta\Omega^2 + 6\omega_0\zeta\beta(a^2 + b^2) + 4\omega_0^3\zeta)\mu + 3\omega_0^2\beta a^2 - 3\beta b^2\Omega^2 + \\ &\frac{27}{8}\beta^2 b^2 a^2 + 3\beta b^2\omega_0^2 + 4\omega_0^2\zeta^2\Omega^2 - 3\beta a^2\Omega^2 + \omega_0^4 + \frac{27}{16}\beta^2 a^4 - \\ &2\omega_0^2\Omega^2 + \frac{27}{16}\beta^2 b^4 + \Omega^4 = 0 \end{aligned} \quad (5-20)$$

Se  $\mu$  for imaginário, a solução (5-16) é estável, se  $\mu$  for real a solução é instável, pois  $e^{-\mu t}\phi(-t)$  também é uma solução independente que atende (5-15).  $\mu$  só será real se o termo independente de (5-20) for menor que zero. Portanto, o que ocorre na prática, ao se avaliar a estabilidade de uma solução periódica é fazer  $\mu = 0$  e calcular o determinante. Determinante positivo corresponde a um  $\mu$  imaginário e conseqüentemente a solução será estável, e determinante negativo, a uma solução instável.

Fazendo  $\mu = 0$  em (5-20), tem-se

$$\begin{aligned} &4\omega_0^2\zeta^2\Omega^2 - 3\beta a^2\Omega^2 + \omega_0^4 + \frac{27}{16}\beta^2 a^4 + 3\omega_0^2\beta a^2 - 3\beta b^2\Omega^2 + \\ &\frac{27}{8}\beta^2 b^2 a^2 + 3\beta b^2\omega_0^2 + \Omega^4 - 2\omega_0^2\Omega^2 + \frac{27}{16}\beta^2 b^4 = 0 \end{aligned} \quad (5-21)$$

Conseqüentemente, as soluções obtidas com o HBM (tal como (5-14)) para o problema (5-13) são estáveis quando (5-21) for maior que zero.

Neste capítulo são apresentados dois novos métodos desenvolvidos nesta tese para a solução de sistemas dinâmicos não-lineares. Eles utilizam a teoria de séries, particularmente séries de Taylor, séries de Fourier e transformadas de Padé e são de fácil implementação.

O uso de expansões em série de potência para a solução de equações diferenciais lineares, em particular, equações de segunda ordem com coeficientes variáveis, é uma técnica clássica sendo apresentada em muitos livros, tal como o de Boyce e Diprima, [86]. De fato, esta técnica pode ser utilizada para resolver problemas de valor inicial envolvendo também equações diferenciais não-lineares de qualquer ordem. Porém um dos problemas usualmente associados com as séries de potências é o tamanho do raio de convergência e a lenta convergência para instantes distantes do instante inicial, o que requer um grande número de termos para se obter a convergência. Entretanto, se alguns conceitos de simetria forem utilizados, estes problemas podem ser contornados ou minimizados.

### 6.1 Séries de Potências

Equações diferenciais lineares possuem famílias de soluções com um certo número de constantes arbitrárias. Em geral, deseja-se que a solução respeite um conjunto de restrições que, no caso de um sistema dinâmico, correspondem a um conjunto de condições iniciais. Dessa forma, uma única solução, dentre a família de soluções que atende ao problema, irá atender às condições iniciais.

Segundo Kreyszig (1993), [87], o método das séries de potências é um método eficiente para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes variáveis ou não. O método consiste em se escrever a solução da equação em forma de uma série de potências

$$x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 + \dots \quad (6-1)$$

onde os  $a_i$  são os coeficientes a serem determinados e  $t_0$  é uma constante chamada de centro da série.

A solução em séries de potências é inserida na equação diferencial e os termos de mesma potência em  $t - t_0$  são coletados, escrevendo-se com isso um sistema de equações que permite determinar, de forma recursiva, os coeficientes da série. Os coeficientes de ordem mais baixa da série representam as condições iniciais do problema. Assim, numa equação diferencial de segunda ordem,  $a_0$  e  $a_1$  em (6-1) representam as condições iniciais de deslocamento e velocidade, respectivamente, e os demais coeficientes são escritos em função destes.

A precisão da solução aproximada (6-1) decai a medida que  $t$  se afasta do centro. Quanto maior for o valor de  $|t - t_0|$ , mais termos são necessários para se obter um dado nível de precisão.

Uma propriedade importante das séries de potências é o raio de convergência. Dependendo do problema, a série (6-1) pode apresentar um raio de convergência infinito, isto é, para qualquer valor de  $t$ , a solução converge à medida que mais termos são adicionados à série. O raio de convergência,  $R$ , de uma série é definido por,

$$R = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right|} \quad (6-2)$$

Quando o raio de convergência é finito, a série converge para todo  $|t - t_0| < R$  e diverge para todo  $|t - t_0| > R$ .

Considerando o problema de vibração livre da equação de Duffing,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (6-3)$$

para  $\beta = 0$  a solução em séries de potências é convergente para qualquer  $t$ . Entretanto, para o caso não-linear, não é possível garantir a convergência para todo  $t$ , mas, para pequenos valores do par de condições iniciais, a série é convergente. Qaisi (1996), [88], aplicou a transformação  $\tau = \sin \omega t$  à eq. (6-3), transformando a variável  $t$  em uma nova variável. Dessa forma,  $\tau$  oscila entre -1 e 1. Qaisi assume que a série de potências escrita em termos de  $\tau$  é convergente para  $|\tau| < 1$ , ou seja, para qualquer  $t$  porque a série de potências em  $\tau$  acaba gerando uma função periódica em  $t$ .

## 6.2

### Método baseado em séries de Taylor

Este é o primeiro método desenvolvido. Ele utiliza séries de Taylor e será

chamado de método de Taylor no restante desta tese.

Assim como na seção anterior, a solução para um problema de vibração,

$$f(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) = 0 \quad (6-4)$$

também é escrita como uma série de potências,

$$x(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + a_3(t - t_0)^3 + \dots \quad (6-5)$$

porém agora os coeficientes  $a_i$  são determinados igualando a solução em série e suas derivadas, avaliadas em  $t = t_0$ , com a solução exata desconhecida e suas derivadas, também avaliadas no instante inicial. Então para a igualdade (6-5) tem-se,

$$\begin{aligned} x(t_0) &= a_0 \\ \dot{x}(t_0) &= a_1 \\ \ddot{x}(t_0) &= 2a_2 \\ \left. \frac{d\ddot{x}}{dt} \right|_{t_0} &= 6a_3 \end{aligned} \quad (6-6)$$

onde  $x$  representa a solução exata desconhecida.

Esta forma de determinar os coeficientes faz com que a solução em série de potências (6-5) assuma a forma da série de Taylor da solução exata, com centro em torno do instante inicial, onde os dois primeiros coeficientes são as condições iniciais do problema. Assim, a série (6-5) torna-se

$$x(t) = x(t_0) + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} \Delta t + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_0} \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3x}{dt^3} \right|_{t_0} \Delta t^3 + \dots \quad (6-7)$$

sendo que  $\Delta t = (t - t_0)$ , e, a segunda derivada,  $\ddot{x}$ , é retirada diretamente de (6-4), a saber

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \quad (6-8)$$

Já as derivadas de mais alta ordem, presentes na série (6-7), são obtidas derivando sucessivamente  $\ddot{x}$  em (6-8) em relação ao tempo. Tem-se, por exemplo, para a terceira derivada.

$$\begin{aligned} \frac{d\ddot{x}}{dt} &= \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{df(x, \dot{x}, t)}{dt} \\ &= \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{df(x, \dot{x}, t)}{dt} \end{aligned} \quad (6-9)$$

Substituindo (6-8) em (6-9), a terceira derivada passa a ser função apenas

de  $x$  e  $\dot{x}$ ,

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} f(x, \dot{x}, t) + \frac{df(x, \dot{x}, t)}{dt} \quad (6-10)$$

A derivada de quarta ordem agora pode ser obtida a partir de (6-10), resultando também em uma função de  $x$  e  $\dot{x}$ , bem como as demais derivadas de ordem superior, o que faz com que cada termo da série seja função das condições iniciais, uma vez que cada derivada é avaliada no instante inicial.

No caso em que  $t_0 = 0$ , a série de Taylor é também conhecida como série de Maclaurin. É conveniente adotar como centro da série  $t_0 = 0$ , pois nesse ponto, o deslocamento e a velocidade são conhecidos, por serem parte do problema de valor inicial.

### 6.2.1

#### Vibração livre

Seja o seguinte problema de vibração livre,

$$f(\ddot{x}, x) = 0 \quad (6-11)$$

A função de energia total associada à equação de movimento (6-11) apresenta simetria em relação à velocidade ( $\bar{T}(\dot{x}) = \bar{T}(-\dot{x})$ ), quando a energia cinética,  $\bar{T}$ , é uma função quadrática de  $\dot{x}$ , e também simetria em relação aos deslocamentos, quando a não-linearidade em  $x$  em (6-11) for uma função ímpar, isto é, ( $U(x) = U(-x)$ ), onde  $U$  é a energia interna de deformação. Tem-se assim que a solução apresenta, no espaço de fase, simetria com relação aos eixos  $x$  e  $\dot{x}$ . As propriedades de simetria, presentes em quase todos os sistemas dinâmicos, não têm sido exploradas na solução destes problemas.

Como exibido na figura 6.1(a), nos problemas de dupla simetria, a solução consome o mesmo tempo para percorrer cada quadrante do plano de fase, ou seja, em cada quadrante do plano de fase tem-se um quarto de período. Já nos problemas em que a energia não possui dupla simetria, ( $U(x) \neq U(-x)$ ), como, por exemplo, problemas envolvendo não-linearidades quadráticas (figura 6.1(b)), o tempo gasto em cada quadrante é diferente, sendo possível saber apenas o instante correspondente a meio período de solução, já que a simetria com relação ao eixo  $x$  persiste pois  $\bar{T}(\dot{x}) = \bar{T}(-\dot{x})$ .

As propriedades dos sistemas duplamente simétricos e com uma simetria, ilustradas na figura 6.1, permitem determinar, a partir das aproximações do deslocamento ou velocidade, o período  $T$ .

Assim, para o caso com dupla simetria, tem-se, partindo das condições

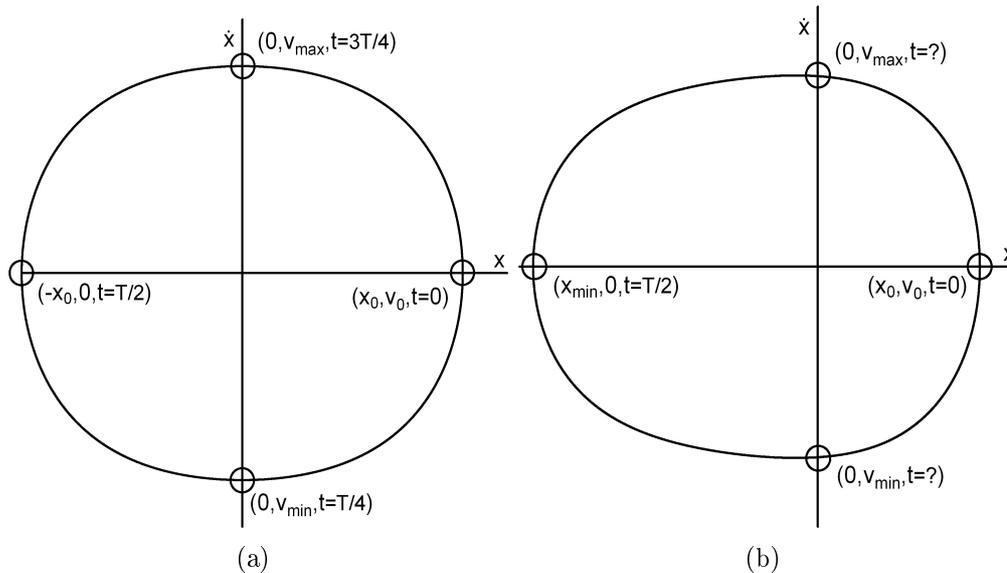


Figura 6.1: Plano de fase: (a) com dupla simetria; (b) com uma única simetria

iniciais  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = 0$ , que

$$x(T/4) = 0 \tag{6-12}$$

e nos casos com uma simetria em relação a  $x$ , tem-se que

$$\dot{x}(T/2) = 0 \tag{6-13}$$

Utilizando a solução em série de Taylor, eq. (6-7), nas igualdades (6-12) e (6-13) e levando em consideração a relação  $T = 2\pi/\omega$ , obtém-se uma aproximação para a frequência,  $\omega$ , da resposta. Quanto mais termos são utilizados na série (6-7), mais exato será o valor de  $\omega$ .

Na eq. (6-12) são necessários menos termos na série de Taylor que em (6-13) porque o intervalo de tempo em que a solução é aproximada é a metade do utilizado em (6-13). Além disso, em (6-13) utiliza-se a derivada da aproximação, o que também diminui a precisão. Cabe também ressaltar que, dada a simetria em ambos os casos com relação a  $x$ , a convergência no intervalo  $0 \leq t \leq T/2$  é suficiente para se obter a resposta exata ao longo de um período já que a resposta pode ser espelhada no intervalo  $-T/2 \leq t \leq 0$ .

### 6.2.2 Equação de Duffing

Seja, como exemplo de aplicação do método, a equação de Duffing.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (6-14)$$

Utilizando como solução aproximada a expansão em série de Taylor de  $x(t)$ , eq. (6-7), com termos de até segunda ordem em  $t$ , tem-se

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2!} \ddot{x}(0) t^2 \quad (6-15)$$

Para determinar  $\ddot{x}(0)$ , primeiro explicita-se  $\ddot{x}$  em (6-14). Assim, tem-se

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \beta x^3 \quad (6-16)$$

Avaliando (6-16) no instante inicial, tem-se

$$\ddot{x}(0) = -\omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 \quad (6-17)$$

Substituindo (6-17) em (6-15) e considerando que a velocidade inicial é nula, obtém-se a seguinte aproximação para o deslocamento

$$x(t) = x_0 - \left( \frac{1}{2} \omega_0^2 x_0 + \frac{1}{2} \beta x_0^3 \right) t^2 \quad (6-18)$$

Derivando (6-18) com relação ao tempo, obtém-se a aproximação para a velocidade,

$$\dot{x}(t) = -(\omega_0^2 x_0 + \beta x_0^3) t \quad (6-19)$$

Substituindo  $t = T/4$ , com  $T = 2\pi/\omega$ , em (6-18) e dividindo ambos os lados por  $x_0$ , chega-se a

$$1 - \frac{\pi^2 \omega_0^2}{8\omega^2} - \frac{\pi^2 \beta x_0^2}{8\omega^2} = 0 \quad (6-20)$$

A relação frequência-amplitude dada em (6-20) pode ser escrita de uma forma mais simples se forem inseridos novos parâmetros,

$$\delta^2 - \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2 b}{8} = 0 \quad (6-21)$$

onde  $\delta$  expressa a razão entre as frequências da resposta e natural, e  $b$  expressa a não-linearidade, a saber

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (6-22)$$

$$b = \frac{\beta x_0^2}{\omega_0^2} \quad (6-23)$$

A solução no tempo (6-18), escrita em termos de  $\omega_0$ ,  $\beta$ ,  $x_0$  e  $t$ , também pode ser simplificada, passando a ser escrita em termos de  $b$ ,  $x_0$  e  $\tau$ , ou seja

$$x(\tau) = x_0 - \left( \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}bx_0 \right) \tau^2 \quad (6-24)$$

onde

$$\tau = \omega_0 t \quad (6-25)$$

Finalmente pode-se escrever (6-24) sob uma forma adimensional através da divisão de (6-24) por  $x_0$

$$\frac{x(\tau)}{x_0} = 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}b \right) \tau^2 \quad (6-26)$$

A frequência da solução,  $\omega$ , é conhecida após se obter  $\delta$  em (6-21),

$$\delta = \pi \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}b} \quad (6-27)$$

e substituir os parâmetros (6-22) e (6-23) em (6-27):

$$\omega = \pi \sqrt{\frac{\omega_0^2}{8} + \frac{x_0^2 \beta}{8}} \quad (6-28)$$

Com três termos na aproximação para os deslocamentos, a solução obtida é

$$\frac{x(t)}{x_0} = 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}b \right) \tau^2 + \left( \frac{1}{24} + \frac{1}{6}b + \frac{1}{8}b^2 \right) \tau^4 \quad (6-29)$$

e a relação frequência-amplitude obtida em termos de  $\delta$  e  $b$  é

$$\delta^4 - \frac{\pi^2}{8}\delta^2 - \frac{\pi^2}{8}\delta^2 b + \frac{\pi^4}{384} + \frac{\pi^4}{96}b + \frac{\pi^4}{128}b^2 = 0 \quad (6-30)$$

de onde se obtém

$$\delta = \frac{\pi}{12} \sqrt{9 + 9b + 3\sqrt{-9b^2 - 6b + 3}} \quad (6-31)$$

Tomando uma aproximação com quatro e cinco termos, obtém-se, respectivamente, as seguintes soluções aproximadas para o deslocamento

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{x_0} = & 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}b \right) \tau^2 + \left( \frac{1}{24} + \frac{1}{6}b + \frac{1}{8}b^2 \right) \tau^4 - \\ & \left( \frac{1}{720} + \frac{5}{144}b + \frac{17}{240}b^2 + \frac{3}{80}b^3 \right) \tau^6 \end{aligned} \quad (6-32)$$

$$\begin{aligned} \frac{x(t)}{x_0} = & 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b\right)\tau^2 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{6}b + \frac{1}{8}b^2\right)\tau^4 - \\ & \left(\frac{1}{720} + \frac{5}{144}b + \frac{17}{240}b^2 + \frac{3}{80}b^3\right)\tau^6 + \\ & \left(\frac{1}{40320} + \frac{13}{2520}b + \frac{47}{2240}b^2 + \frac{3}{112}b^3 + \frac{7}{640}b^4\right)\tau^8 \end{aligned} \quad (6-33)$$

e também as seguintes relações frequência-amplitude,

$$\delta^6 - \frac{\pi^2}{8}\delta^4(1-b) + \frac{\pi^4}{384}\delta^2(1+4b+3b^2) - \pi^6 \left(\frac{1}{46080} + \frac{5}{9216}b + \frac{17}{15360}b^2 + \frac{3}{5120}b^3\right) = 0 \quad (6-34)$$

$$\begin{aligned} \delta^8 - \frac{\pi^2}{8}\delta^6(1+b) + \frac{\pi^4}{384}\delta^4(1+4b+3b^2) - \pi^6\delta^2 \left(\frac{1}{46080} + \frac{5}{9216}b + \right. \\ \left. \frac{17}{15360}b^2 + \frac{3}{5120}b^3\right) + \pi^8 \left(\frac{1}{10321920} + \frac{13}{645120}b + \frac{47}{573440}b^2 + \right. \\ \left. \frac{3}{28672}b^3 + \frac{7}{163840}b^4\right) = 0 \end{aligned} \quad (6-35)$$

No anexo B tem-se a solução em série de Taylor da equação de Duffing (6-14).

### Convergência da solução linear

Quando o parâmetro não-linear  $\beta$ , em (6-14), é igualado a zero, a frequência  $\omega$  da solução aproximada deve ser igual à frequência da solução do problema linear, isto é,  $\omega = \omega_0$ . O mesmo acontece quando o deslocamento inicial é nulo, independentemente do grau de não-linearidade.

Fazendo  $b = 0$ , o parâmetro  $\delta$ , obtido através das eqs. (6-27) e (6-30), deve ser igual a 1 para atender a relação entre  $\delta$  e  $\omega$ , eq. (6-22).

Substituindo  $b = 0$  em (6-27), encontra-se  $\delta = 1, 11$ . Já Substituindo  $b = 0$  em (6-30) encontram-se duas raízes para  $\delta$ , a de interesse é  $\delta = 0, 98$ . Fazendo  $b = 0$  em (6-34) e (6-35) obtém-se respectivamente  $\delta = 1, 0005$  e  $\delta = 0, 9999$ . O último resultado é praticamente coincidente com a resposta esperada ( $\delta = 1$ ). A tabela 6.1 exhibe estes resultados e o erro obtido com cada aproximação. Verifica-se que as aproximações são convergentes e que a aproximação com 5 termos é suficiente para se obter um valor preciso de  $\omega$ .

### Validação da solução linear

A solução do problema (6-14) para  $\beta = 0$  é

n° de termos	$\delta$	$ \delta - 1 $	erro (%)
2	1,110720734	0,110720734	11
3	0,986402021	0,013597978	1,36
4	1,000567233	0,000567233	0,06
5	0,999984249	0,000015750	0,0016

Tabela 6.1: Convergência da solução linear.

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \tag{6-36}$$

Escrevendo (6-36) em série de Taylor, chega-se a

$$\frac{x(\tau)}{x_0} = 1 - \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^4 - \frac{1}{720}\tau^6 + \dots \tag{6-37}$$

que é a mesma série obtida com a aproximação de quatro termos, eq. (6-32), com  $b = 0$ .

### Convergência da solução não-linear

Quando  $b$  é diferente de zero, tem-se o problema com não-linearidade. Neste caso, as soluções aproximadas necessitam de um número crescente de termos a medida que  $b$  aumenta para se obter uma solução convergente no intervalo de interesse.

A tabela (6.2) mostra a convergência do parâmetro  $\delta$  com  $b = 1$ , obtido ao se substituir em (6-12), diferentes soluções aproximadas, com um número crescente de termos.

n° de termos	$\delta$	$ \delta - \delta_{exato} $	erro (%)
5	-	-	-
6	1,357606555	0,039819994	3,02
7	1,261243896	0,056542665	4,29
8	1,334632001	0,016845440	1,28
9	1,302941478	0,014845083	1,13
10	1,324637050	0,006850489	0,52
13	1,315997839	0,001788722	0,14
16	1,318165233	0,000378672	0,03
19	1,317686254	0,000100307	0,008

Tabela 6.2: Convergência da solução não-linear para  $b = 1$ .

Para  $b = 1$ , a aproximação com cinco termos, eq. (6-35), não permite encontrar uma raiz para  $\delta$  porque a solução (6-33) diverge um pouco antes

do deslocamento cortar o eixo horizontal, como mostra a figura 6.2. Já para a aproximação com seis e sete termos é possível obter aproximadamente o instante em que  $x = 0$ .

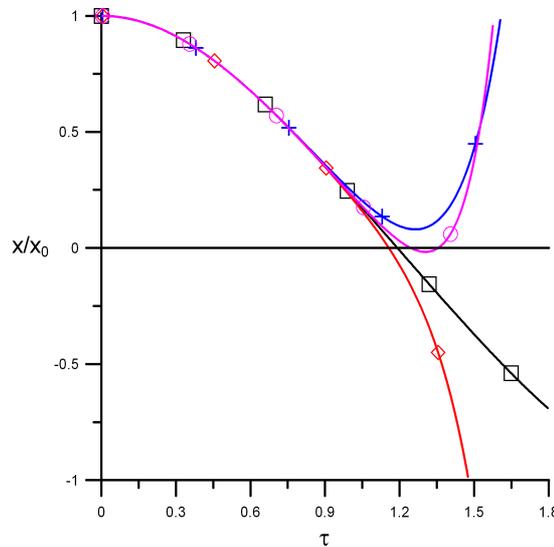


Figura 6.2: Convergência em  $\tau$  das aproximações.  $\square$ , RK;  $+$ , Taylor com cinco termos (eq. (6-33));  $\diamond$ , Taylor com seis termos;  $\circ$ , Taylor com sete termos.

Devido as características das potências de  $b$  nas aproximações, a velocidade de convergência da solução diminui quando este parâmetro é maior que 1, como mostra a tabela 6.3, para  $b = 1, 1$ . Convém salientar que  $b = 1$  já representa um problema com grande não-linearidade.

n° de termos	$\delta$	$ \delta - \delta_{exato} $	erro (%)
5	-	-	-
6	1,390457096	0,045216509	3,36
7	-	-	-
8	1,365417429	0,020176842	1,5
9	1,324992260	0,020248327	1,5
10	1,353916132	0,008675545	0,64
13	1,342561260	0,002679327	0,2
16	1,345724780	0,000484193	0,03
19	1,344976040	0,000264547	0,02
26	1,345132441	0,000010814	0,008

Tabela 6.3: Convergência da solução não-linear para  $b = 1, 1$ .

A tabela 6.4 apresenta o máximo valor de  $b$  obtido em aproximações com diferente números de termos, para que o erro em  $\delta$  seja aproximadamente igual a 0,01%. A figura 6.3 exibe a curva onde o erro é aproximadamente 0,01%. Valores abaixo da curva correspondem a um erro inferior a 0,01%. Pode-se ver

n° de termos	$b_{max}$	$\delta$	$ \delta - \delta_{exato} $	erro (%)
5	0,003	1,001040747	0,000108643	0,01
6	0,015129	1,00565916	0,000074571	0,007
7	0,050176	1,01861519	0,000080762	0,008
8	0,120409	1,04404616	0,000104425	0,01
9	0,16	1,05807185	0,000104333	0,01
10	0,25	1,08914753	0,000115775	0,01
11	0,330625	1,11621354	0,000117394	0,01
12	0,400689	1,13912456	0,000103038	0,009
13	0,501264	1,17117561	0,000109687	0,009
14	0,600625	1,20192849	0,000118381	0,01
15	0,700569	1,23200948	0,000126563	0,01
16	0,781456	1,25578985	0,000131438	0,01
17	0,861184	1,27878619	0,000120495	0,009
18	0,94090	1,30143195	0,000121088	0,009
19	1,030225	1,32612585	0,000125857	0,009
20	1,140624	1,35605640	0,000130015	0,009
21	1,279161	1,39269897	0,000125185	0,009
22	1,380625	1,41893228	0,000137869	0,01
23	1,449616	1,43647615	0,000144322	0,01

Tabela 6.4: Máximos valores do parâmetro de não-linearidade,  $b$ , para que as aproximações apresentem um erro de aproximadamente 0,01% em  $\delta$ .

que a curva pode ser aproximada por uma reta, então para uma determinada não-linearidade, a equação da reta pode ser utilizada para estimar o número mínimo de termos para que a série seja precisa.

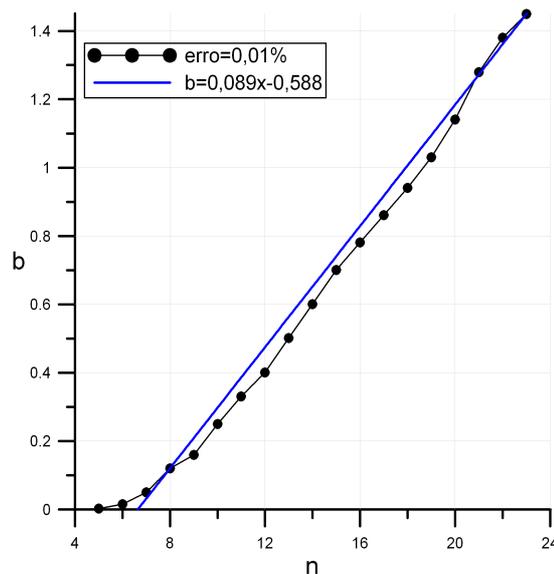


Figura 6.3: Curva correspondente a um erro inferior ou igual a 0,01%.

### Validação da solução não-linear

Assumindo como exemplo  $b = 1,1$  em (6-33), tem-se pelo método aqui proposto

$$\frac{x(\tau)}{x_0} = 1 - 1,05\tau^2 + 0,37625\tau^4 - 0,175204167\tau^6 + 0,082753177\tau^8 \quad (6-38)$$

Para o mesmo problema, obtém-se com o HBM a seguinte solução, considerando três harmônicos.

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} &= 0,980682954 \cos \delta\tau + 0,018957528 \cos 3\delta\tau + 0,000359517 \cos 5\delta\tau \\ \delta &= 1,345130894 \end{aligned}$$

que, escrita em série de Taylor, é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} &= 1 - 1,049699864\tau^2 + 0,373892418\tau^4 \\ &\quad - 0,167985518\tau^6 + 0,070655635\tau^8 + \dots \end{aligned} \quad (6-39)$$

Comparando (6-38) com (6-39), observa-se que os termos constantes são iguais e que o segundo e terceiro termos em ambas as soluções são bem próximos.

Já para uma aproximação com sete harmônicos, tem-se com o HBM,

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} &= 0,980676137 \cos \delta\tau + 0,018957267 \cos 3\delta\tau + \\ &\quad 0,000359641 \cos 5\delta\tau + 0,000006823 \cos 7\delta\tau + 0,000000129 \cos 9\delta\tau + \\ &\quad 0,000000002 \cos 11\delta\tau + 0,0000000005 \cos 13\delta\tau \\ \delta &= 1,345126674 \end{aligned}$$

de onde obtém-se a seguinte série de Taylor,

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} &= 1 - 1,05\tau^2 + 0,376249994\tau^4 - 0,175204081\tau^6 + \\ &\quad 0,082752542\tau^8 + \dots \end{aligned} \quad (6-40)$$

Ao se comparar a série (6-40) com a solução em série de Taylor (6-38), percebe-se que, agora, aumentou-se o número de casas decimais em que os termos são coincidentes.

Cabe ressaltar que cada termo da série de Taylor (6-39) ou (6-40) tem contribuições de todos os harmônicos usados na solução aproximada com o

HBM. Assim, a medida que aumenta o número de harmônicos, os coeficientes da série correspondente à solução harmônica aproximada convergem para os valores obtidos pelo método de Taylor. Pode-se afirmar que cada termo da série de Taylor obtida pelo método proposto tem contribuição de um número infinito de harmônicos.

Por outro lado, a medida que  $\tau$  cresce, a série de Taylor exige um número cada vez maior de termos para a convergência, enquanto que as soluções em termos de funções trigonométricas mantêm seu grau de aproximação para qualquer  $\tau$ .

Entretanto, como tanto no caso da vibração livre quanto na forçada, todos os métodos se restringem a fornecer apenas a resposta periódica permanente, a série de Taylor pode fornecer uma solução precisa com poucos termos usando as propriedades de simetria da resposta no espaço de fase.

### 6.2.3

#### Relação entre os métodos de Taylor e LP

Mostrou-se nos capítulos anteriores a relação entre os diversos métodos e o método clássico LP. A seguir, mostra-se a correlação entre a solução obtida com o método de Taylor e a solução obtida através do método de LP.

A solução de primeira ordem encontrada com o LP para a equação de Duffing com não-linearidade cúbica é

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{1}{32\omega_0^2} \beta x_0^3 \right) \cos \omega t + \frac{1}{32\omega_0^2} \beta x_0^3 \cos 3\omega t \quad (6-41)$$

onde

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0} \beta x_0^2 \quad (6-42)$$

Utilizando os parâmetros adimensionais (6-22) e (6-23) para reescrever (6-41) e (6-42), tem-se

$$\frac{x(\tau)}{x_0} = \left( 1 - \frac{1}{32} b \right) \cos \delta \tau + \frac{1}{32} b \cos 3\delta \tau \quad (6-43)$$

$$\delta = 1 + \frac{3}{8} b \quad (6-44)$$

Substituindo (6-44) em (6-43) e expandindo (6-43) em série de Taylor em torno de  $t = 0$  e coletando os termos em  $b$ , chega-se a

$$\frac{x(\tau)}{x_0} = \left( 1 - \frac{1}{2} \tau^2 + \frac{1}{24} \tau^4 - \frac{1}{720} \tau^6 + \dots \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & b\left(-\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^4 - \frac{5}{144}\tau^6 + \dots\right) + \\
 & b^2\left(-\frac{21}{128}\tau^2 + \frac{49}{256}\tau^4 - \frac{379}{5120}\tau^6 + \dots\right) + \\
 & b^3\left(-\frac{9}{512}\tau^2 + \frac{99}{1024}\tau^4 - \frac{279}{4096}\tau^6 + \dots\right) + \dots
 \end{aligned} \tag{6-45}$$

A comparação da solução (6-45) com as soluções obtidas em séries de Taylor torna-se mais fácil se estas últimas também forem reescritas com os termos de mesma potência em  $b$  em evidência. Tomando a solução com quatro termos, (6-32), tem-se,

$$\begin{aligned}
 \frac{x(\tau)}{x_0} = & 1 - \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^4 - \frac{1}{720}\tau^6 + b\left(-\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^4 - \frac{5}{144}\tau^6\right) + \\
 & b^2\left(\frac{1}{8}\tau^4 - \frac{17}{240}\tau^6\right) - \frac{3}{80}\tau^6 b^3
 \end{aligned} \tag{6-46}$$

Pode-se observar que apenas os termos até a potência 1 em  $b$  são coincidentes. Isto ocorre porque a solução obtida com LP é de primeira ordem em  $b$ .

Considerando uma solução aproximada de terceira ordem dada pelo LP, tem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{x(\tau)}{x_0} = & \cos \delta\tau + \left(-\frac{1}{32}\cos \delta\tau + \frac{1}{32}\cos 3\delta\tau\right)b + \\
 & \left(\frac{23}{1024}\cos \delta\tau + \frac{1}{1024}\cos 5\delta\tau - \frac{3}{128}\cos 3\delta\tau\right)b^2 + \\
 & \left(-\frac{547}{32768}\cos \delta\tau + \frac{297}{16384}\cos 3\delta\tau + \frac{1}{32768}\cos 7\delta\tau - \right. \\
 & \left. \frac{3}{2048}\cos 5\delta\tau\right)b^3
 \end{aligned} \tag{6-47}$$

$$\delta = 1 + \frac{3}{8}b - \frac{21}{256}b^2 + \frac{81}{2048}b^3 \tag{6-48}$$

Substituindo (6-48) em (6-47) e expandindo (6-47) em série de Taylor, tem-se,

$$\begin{aligned}
 \frac{x(\tau)}{x_0} = & \left(1 - \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^4 - \frac{1}{720}\tau^6 + \frac{1}{40320}\tau^8 + \dots\right) + \\
 & b\left(-\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^4 - \frac{5}{144}\tau^6 + \frac{13}{2520}\tau^8 + \dots\right) + \\
 & b^2\left(\frac{1}{8}\tau^4 - \frac{17}{240}\tau^6 + \frac{47}{2240}\tau^8 + \dots\right) +
 \end{aligned}$$

$$b^3 \left( -\frac{3}{80}\tau^6 + \frac{3}{112}\tau^8 + \dots \right) + \frac{84723}{14680064}\tau^8 b^4 + \dots \quad (6-49)$$

A solução por Taylor com termos até  $\tau^8$ , eq. (6-33), reescrita com  $b$  em evidência, toma a forma

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} = & 1 - \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^4 - \frac{1}{720}\tau^6 + \frac{1}{40320}\tau^8 + \\ & \left( -\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^4 - \frac{5}{144}\tau^6 + \frac{13}{2520}\tau^8 \right) b + \\ & \left( \frac{1}{8}\tau^4 - \frac{17}{240}\tau^6 + \frac{47}{2240}\tau^8 \right) b^2 + \\ & \left( -\frac{3}{80}\tau^6 + \frac{3}{112}\tau^8 \right) b^3 + \frac{7}{640}\tau^8 b^4 \end{aligned} \quad (6-50)$$

Comparando (6-49) com (6-50) pode-se ver que, novamente, para os termos com potência em  $b$  igual ou inferior à ordem da solução aproximada obtida com o LP, os resultados são coincidentes.

Para que os termos que multiplicam  $b^4$  em (6-49) e (6-50) sejam coincidentes é necessário que a expansão em LP contemple o termo de quarta ordem. Isto quer dizer que, ao se adicionar mais um termo na série de Taylor, na verdade se está adicionando o primeiro termo da série de Taylor de um dado super-harmônico em Lindstedt-Poincaré e mais um termo em todas as séries já existentes de todos os harmônicos inferiores.

### Reconstrução das soluções de LP a partir das séries de Taylor

Devido a correspondência que há entre as soluções de LP e séries de Taylor, pode-se obter a solução que seria obtida aplicando o LP a partir de uma solução escrita em série de Taylor.

Seja a aproximação em série de Taylor com cinco termos da equação de Duffing.

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + \left( -\frac{1}{2}\omega_0^2 x_0 - \frac{1}{2}\beta x_0^3 \right) t^2 + \left( \frac{1}{24}\omega_0^4 x_0 + \frac{1}{6}\omega_0^2 \beta x_0^3 + \right. \\ & \left. \frac{1}{8}\beta^2 x_0^5 \right) t^4 + \left( -\frac{1}{720}\omega_0^6 x_0 - \frac{5}{144}\omega_0^4 \beta x_0^3 - \frac{17}{240}\omega_0^2 \beta^2 x_0^5 - \right. \\ & \left. \frac{3}{80}\beta^3 x_0^7 \right) t^6 + \left( \frac{1}{40320}\omega_0^8 x_0 + \frac{13}{2520}\omega_0^6 \beta x_0^3 + \right. \\ & \left. \frac{47}{2240}\omega_0^4 \beta^2 x_0^5 + \frac{3}{112}\omega_0^2 \beta^3 x_0^7 + \frac{7}{640}\beta^4 x_0^9 \right) t^8 \end{aligned} \quad (6-51)$$

Deseja-se, por exemplo, uma solução similar à obtida com o LP com quatro

harmônicos, isto é,

$$x(t) = (a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3) \cos \omega t + (b_1\beta + b_2\beta^2 + b_3\beta^3) \cos 3\omega t + (c_2\beta^2 + c_3\beta^3) \cos 5\omega t + d_3\beta^3 \cos 7\omega t \quad (6-52)$$

com

$$\omega = w_0 + w_1\beta + w_2\beta^2 + w_3\beta^3 \quad (6-53)$$

onde os coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  e  $w_i$  são incógnitas a serem determinadas.

A ordem da solução a ser obtida deve sempre ser, no máximo, igual à maior potência de  $\beta$  presente na série (6-51) menos um. Caso contrário, faltariam equações para determinar todos os coeficientes em (6-52) e (6-53).

Para cada harmônico em (6-52) tem-se que a série de Taylor é dada por

$$\cos \bar{x}t = 1 - \frac{1}{2}\bar{x}^2t^2 + \frac{1}{24}\bar{x}^4t^4 - \frac{1}{720}\bar{x}^6t^6 + \frac{1}{40320}\bar{x}^8t^8 + \dots \quad (6-54)$$

com  $\bar{x} = \omega, 3\omega, 5\omega, \dots$

Substituindo (6-54) em (6-52) e eliminando na expressão resultante os termos em  $\beta$  com potências maiores que a ordem da solução a ser encontrada, chega-se a,

$$\begin{aligned} x(t) = & a_0 + (a_1 + b_1)\beta + (a_2 + b_2 + c_2)\beta^2 + (a_3 + b_3 + c_3 + d_3)\beta^3 - \\ & \left\{ \frac{1}{2}w_0^2a_0 + \beta \left( w_0w_1a_0 + \frac{1}{2}w_0^2a_1 + \frac{9}{2}w_0^2b_1 \right) + \beta^2 \left( \frac{25}{2}w_0^2c_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. (w_0w_2 + \frac{1}{2}w_1^2)a_0 + w_0w_1a_1 + \frac{1}{2}w_0^2a_2 + 9w_0w_1b_1 + \frac{9}{2}w_0^2b_2 \right) + \right. \\ & \left. \beta^3 \left( (w_0w_3 + w_1w_2)a_0 + \left( \frac{1}{2}w_1^2 + w_0w_2 \right)a_1 + w_0w_1a_2 + \frac{1}{2}w_0^2a_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. (9w_0w_2 + \frac{9}{2}w_1^2)b_1 + 9w_0w_1b_2 + \frac{9}{2}w_0^2b_3 + 25w_0w_1c_2 + \frac{25}{2}w_0^2c_3 + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{49}{2}w_0^2d_3 \right) \right\} t^2 + \left\{ \frac{1}{24}w_0^4a_0 + \left( \frac{1}{6}w_0^3w_1a_0 + \frac{1}{24}w_0^4a_1 + \frac{27}{8}w_0^4b_1 \right) \beta + \right. \\ & \left( \left( \frac{1}{4}w_0^2w_1^2 + \frac{1}{6}w_0^3w_2 \right)a_0 + \frac{1}{6}w_0^3w_1a_1 + \frac{1}{24}w_0^4a_2 + \frac{27}{2}w_0^3w_1b_1 + \right. \\ & \left. \frac{27}{8}w_0^4b_2 + \frac{625}{24}w_0^4c_2 \right) \beta^2 + \left( \left( \frac{1}{6}w_0w_1^3 + \frac{1}{6}w_0^3w_3 + \frac{1}{2}w_0^2w_1w_2 \right)a_0 + \right. \\ & \left( \frac{1}{6}w_0^3w_2 + \frac{1}{4}w_0^2w_1^2 \right)a_1 + \frac{1}{6}w_0^3w_1a_2 + w_0^4 + \frac{1}{24}w_0^4a_3 + \\ & \left( \frac{81}{4}w_0^2w_1^2 + \frac{27}{2}w_0^3w_2 \right)b_1 + \frac{27}{2}w_0^3w_1b_2 + \frac{27}{8}w_0^4b_3 + \\ & \left. \left. \frac{625}{6}w_0^3w_1c_2 + \frac{625}{24}w_0^4c_3 + \frac{2401}{24}w_0^4d_3 \right) \beta^3 \right\} t^4 - \left\{ \frac{1}{720}w_0^6a_0 + \right. \\ & \left. \left( \frac{1}{720}w_0^6a_1 + \frac{81}{80}w_0^6b_1 + \frac{1}{120}w_0^5w_1a_0 \right) \beta + \left( \left( \frac{1}{48}w_0^4w_1^2 + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{1}{120}w_0^5w_2)a_0 + \frac{1}{120}w_0^5w_1a_1 + \frac{1}{720}w_0^6a_2 + \frac{243}{40}w_0^5w_1b_1 + \\
 & \frac{81}{80}w_0^6b_2 + \frac{3125}{144}w_0^6c_2)\beta^2 + \left(\frac{1}{120}w_0^5w_3 + \frac{1}{36}w_0^3w_1^3 + \right. \\
 & \frac{1}{24}w_0^4w_1w_2)a_0 + \left(\frac{1}{48}w_0^4w_1^2 + \frac{1}{120}w_0^5w_2\right)a_1 + \frac{1}{120}w_0^5w_1a_2 + \\
 & \left.\left(\frac{1}{720}w_0^6a_3 + \left(\frac{243}{16}w_0^4w_1^2 + \frac{243}{40}w_0^5w_2\right)b_1 + \frac{243}{40}w_0^5w_1b_2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{81}{80}w_0^6b_3 + \frac{3125}{24}w_0^5w_1c_2 + \frac{3125}{144}w_0^6c_3 + \frac{117649}{720}d_3w_0^6\right)\beta^3\right\}t^6 \\
 & + \left\{ \frac{1}{40320}w_0^8a_0 + \left(\frac{1}{5040}w_0^7w_1a_0 + \frac{1}{40320}w_0^8a_1 + \frac{729}{4480}w_0^8b_1\right)\beta + \right. \\
 & \left(\frac{1}{1440}w_0^6w_1^2 + \frac{1}{5040}w_0^7w_2\right)a_0 + \frac{1}{5040}w_0^7w_1a_1 + \frac{1}{40320}w_0^8a_2 + \\
 & \frac{729}{560}w_0^7w_1b_1 + \frac{729}{4480}w_0^8b_2 + \frac{78125}{8064}w_0^8c_2)\beta^2 + \\
 & \left(\frac{1}{5040}w_0^7w_3 + \frac{1}{5040}w_0^7w_3 + \frac{1}{720}w_0^5w_1^3 + \frac{1}{720}w_0^6w_1w_2\right)a_0 + \\
 & \left(\frac{1}{1440}w_0^6w_1^2 + \frac{1}{5040}w_0^7w_2\right)a_1 + \frac{1}{5040}w_0^7w_1a_2 + \frac{1}{40320}w_0^8a_3 + \\
 & \left(\frac{729}{160}w_0^6w_1^2 + \frac{729}{560}w_0^7w_2\right)b_1 + \frac{729}{560}w_0^7w_1b_2 + \frac{729}{4480}w_0^8b_3 + \\
 & \left. \frac{78125}{1008}w_0^7w_1c_2 + \frac{78125}{8064}w_0^8c_3 + \frac{823543}{5760}d_3w_0^8\right)\beta^3\left\}t^8 \right. \quad (6-55)
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Igualando os termos de mesma potência em  $t$  em (6-55) e (6-51), obtêm-se um sistema de cinco equações. Em cada uma destas equações, igualando, a seguir, os termos de mesma potência em  $\beta$ , obtêm-se quatro novas equações.

A seguinte equação é obtida dos termos em  $t^0$ ,

$$x_0 = a_0 + (a_1 + b_1)\beta + (a_2 + b_2 + c_2)\beta^2 + (a_3 + b_3 + c_3 + d_3)\beta^3 \quad (6-56)$$

Igualando os termos de mesma potência em  $\beta$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 a_0 &= x_0 \\
 a_1 + b_1 &= 0 \\
 a_2 + c_2 + b_2 &= 0 \\
 b_3 + a_3 + d_3 + c_3 &= 0
 \end{aligned}$$

onde a primeira equação já permite determinar o valor de  $a_0$ .

Igualando os termos em  $t^2$  nas eqs. (6-55) e (6-51), e, posteriormente, igualando os termos de mesma potência em  $\beta$ , tem-se

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}\omega_0^2x_0 &= -\frac{1}{2}\omega_0^2x_0 \\
 -4\omega_0^2b_1 - \omega_0w_1x_0 &= -\frac{1}{2}\beta x_0^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -8\omega_0 w_1 b_1 - \frac{1}{2} w_1^2 x_0 - \omega_0 w_2 x_0 - 12\omega_0^2 c_2 - 4\omega_0^2 b_2 = 0 \\
& -8\omega_0 w_2 b_1 - w_1 w_2 x_0 - \omega_0 w_3 x_0 - 4\omega_0^2 b_3 - 24d_3 \omega_0^2 - 12\omega_0^2 c_3 - \\
& 8\omega_0 w_1 b_2 - 24\omega_0 w_1 c_2 - 4w_1^2 b_1 = 0
\end{aligned} \tag{6-57}$$

onde a primeira eq. em (6-57) é uma identidade e deve ser, portanto, desconsiderada.

A partir de (6-57) pode-se escrever que

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{8\omega_0^2} x_0^3 - \frac{1}{4\omega_0} w_1 x_0 \\
b_2 &= -\frac{1}{4\omega_0^3} w_1 x_0^3 + \frac{3}{8\omega_0^2} w_1^2 x_0 - \frac{1}{4\omega_0} w_2 x_0 - 3c_2 \\
b_3 &= \frac{3}{8\omega_0^4} w_1^2 x_0^3 - \frac{1}{2\omega_0^3} w_1^3 x_0 - 6d_3 - 3c_3 + \\
& \frac{3}{4\omega_0^2} w_1 w_2 x_0 - \frac{1}{4\omega_0^3} w_2 x_0^3 - \frac{1}{4\omega_0} w_3 x_0
\end{aligned}$$

Igualando os termos em  $t^4$  nas eqs.(6-55) e (6-51) e igualando os termos de mesma potência em  $\beta$ , tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{5}{12} \omega_0^2 x_0^3 - \frac{2}{3} \omega_0^3 w_1 x_0 &= \frac{1}{6} \omega_0^2 x_0^3 \\
-\frac{11}{6} \omega_0^2 w_1^2 x_0 + 16\omega_0^4 c_2 - \frac{2}{3} \omega_0^3 w_2 x_0 + \frac{5}{6} \omega_0 w_1 x_0^3 &= \frac{1}{8} x_0^5 \\
\frac{5}{12} w_1^2 x_0^3 + \frac{5}{6} \omega_0 x_0^3 w_2 + 64\omega_0^3 w_1 c_2 - \frac{3}{2} \omega_0 w_1^3 x_0 - \frac{2}{3} \omega_0^3 w_3 x_0 + \\
16\omega_0^4 c_3 + 80d_3 \omega_0^4 - \frac{11}{3} \omega_0^2 w_1 w_2 x_0 &= 0
\end{aligned}$$

de onde se determina

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{3}{8\omega_0} x_0^2 \\
c_2 &= \frac{9}{2048\omega_0^4} x_0^5 + \frac{1}{24\omega_0} w_2 x_0 \\
c_3 &= -\frac{87}{16384\omega_0^6} x_0^7 - \frac{11}{384\omega_0^3} w_2 x_0^3 + \frac{1}{24\omega_0} w_3 x_0 - 5d_3
\end{aligned}$$

Igualando agora os termos em  $t^6$  nas eqs. (6-55) e (6-51) e posteriormente igualando os termos de mesma potência em  $\beta$ , tem-se

$$\begin{aligned}
-\frac{11}{96} \omega_0^2 x_0^5 - \frac{8}{15} \omega_0^5 w_2 x_0 &= -\frac{17}{240} \omega_0^2 x_0^5 \\
-\frac{89}{1024} x_0^7 - 64d_3 \omega_0^6 - \frac{8}{15} w_3 x_0 \omega_0^5 - \frac{53}{60} w_2 x_0^3 \omega_0^3 &= \frac{3}{80} x_0^7
\end{aligned}$$

Com isso tem-se que

$$w_2 = -\frac{21}{256\omega_0^3}x_0^4$$

$$d_3 = \frac{59}{163840\omega_0^6}x_0^7 - \frac{1}{120\omega_0}w_3x_0$$

Finalmente, igualando os termos em  $t^8$  nas eqs. (6-55) e (6-51) encontra-se mais uma equação. Nesta nova equação, igualando os termos de mesma potência em  $\beta$ , tem-se

$$-\frac{16}{35}\omega_0^7w_3x_0 + \frac{201}{4480}\omega_0^2x_0^7 = \frac{3}{112}\omega_0^2x_0^7$$

necessária para se obter  $w_3$ ,

$$w_3 = \frac{81}{2048\omega_0^5}x_0^6$$

Assim todas as incógnitas em (6-52) e (6-53) estão determinadas, obtendo-se

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{1}{32\omega_0^2}x_0^3\beta + \frac{23}{1024\omega_0^4}x_0^5\beta^2 - \frac{547}{32768\omega_0^6}x_0^7\beta^3 \right) \cos \omega t +$$

$$\left( \frac{1}{32\omega_0^2}x_0^3\beta - \frac{3}{128\omega_0^4}x_0^5\beta^2 + \frac{297}{16384\omega_0^6}x_0^7\beta^3 \right) \cos 3\omega t +$$

$$\left( \frac{1}{1024\omega_0^4}x_0^5\beta^2 - \frac{3}{2048\omega_0^6}x_0^7\beta^3 \right) \cos 5\omega t +$$

$$\frac{1}{32768\omega_0^6}x_0^7\beta^3 \cos 7\omega t$$
(6-58)

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8\omega_0}x_0^2\beta - \frac{21}{256\omega_0^3}x_0^4\beta^2 + \frac{81}{2048\omega_0^5}x_0^6\beta^3$$
(6-59)

Escrevendo (6-59) em termos dos parâmetros adimensionais, tem-se

$$\delta = 1 + \frac{3}{8}b - \frac{21}{256}b^2 + \frac{81}{2048}b^3$$
(6-60)

A figura 6.4(a) exhibe as curvas obtidas com as eqs. (6-60) e (6-35). Com a eq. (6-35) foi possível se obter respostas para  $\delta$  somente até  $b = 0,69$ . A curva obtida a partir de (6-60), mostra-se melhor. Já na figura 6.4(b), adicionou-se mais um termo na série de Taylor e conseqüentemente foi possível se obter uma solução de LP contendo um harmônico a mais. Os resultados obtidos com o LP são melhores que os obtidos com séries de Taylor somente em um pequeno intervalo de valores de  $b$ . A partir disto, a solução em série de Taylor apresenta melhores resultados. Nota-se que um pequeno número de termos na série de

Taylor é suficiente para se obter soluções precisas até valores elevados de  $b$ .

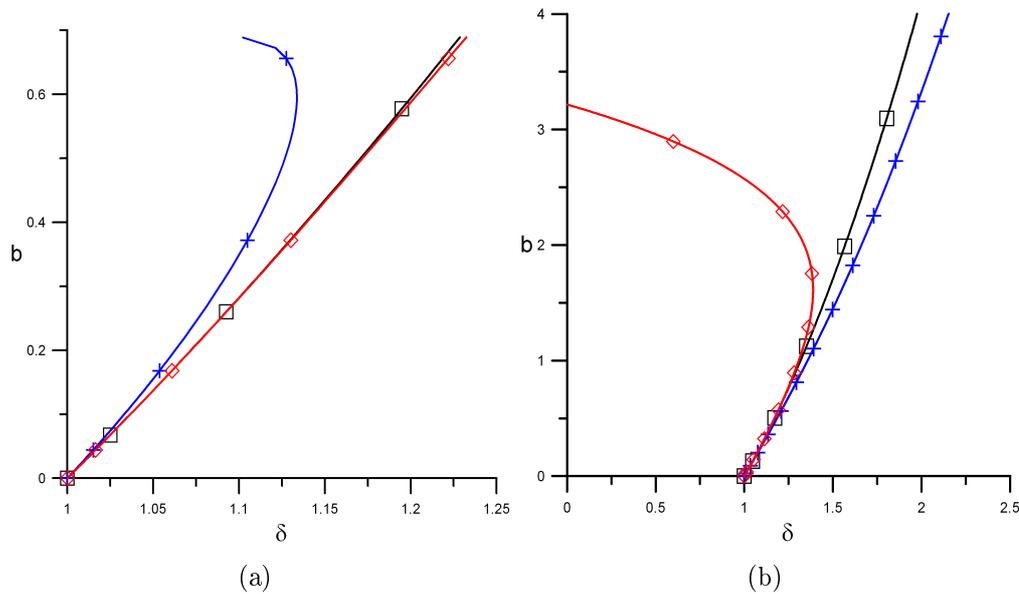


Figura 6.4: Soluções aproximadas,  $\square$ , RK. (a)  $+$ , Taylor com cinco termos, eq. (6-35);  $\diamond$ ; LP, solução obtida a partir da aproximação em série de Taylor com cinco termos, eq. (6-60); (b)  $+$ , Taylor com seis termos;  $\diamond$ ; LP, solução obtida a partir da aproximação em série de Taylor com seis termos.

No item 4 do anexo B tem-se o procedimento que obtém as soluções de LP a partir de séries de Taylor.

### 6.2.4 Soluções em série de Fourier a partir da série de Taylor

Como foi visto através das eqs. (6-38) e (6-40), há uma correspondência entre a série de Taylor de uma solução obtida com o HBM e a solução do método de Taylor. Então, a série de Taylor também pode ser utilizada para se obter soluções em séries de Fourier.

Igualando os termos de mesma potência em  $t$  da solução em série de Taylor e da série de Taylor obtida a partir de uma série de Fourier, pode-se determinar as amplitudes e a frequência da série de Fourier. Considerando uma série de Fourier com os três primeiros harmônicos, tem-se,

$$x(t) = a_1 \cos \omega t + a_3 \cos 3\omega t + a_5 \cos 5\omega t \tag{6-61}$$

e escrevendo (6-61) em série de Taylor, tem-se

$$x(t) = a_1 + a_3 + a_5 - \left( a_1 + 9a_3 + 25a_5 \right) \frac{\omega^2 t^2}{2} + \left( a_1 + 81a_3 + \right.$$

$$625a_5 \frac{\omega^4 t^4}{24} - \left( a_1 + 729a_3 + 15625a_5 \right) \frac{\omega^6 t^6}{720} + \dots \quad (6-62)$$

Igualando os primeiros termos de mesma potência em  $t$  de (6-62) e da solução em série de Taylor para a equação de Duffing,

$$x(t) = x_0 - \left( \omega_0^2 x_0 + \beta x_0^3 \right) \frac{t^2}{2} + \left( \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 + 3\beta^2 x_0^5 \right) \frac{t^4}{24} - \left( \omega_0^6 x_0 + 25\omega_0^4 \beta x_0^3 + 51\omega_0^2 \beta^2 x_0^5 + 27\beta^3 x_0^7 \right) \frac{t^6}{720} + \dots \quad (6-63)$$

obtém-se o seguinte sistema,

$$x_0 = a_1 + a_3 + a_5 \quad (6-64)$$

$$-\frac{1}{2}\omega_0^2 x_0 - \frac{1}{2}\beta x_0^3 = -\frac{25}{2}a_5 \omega^2 - \frac{1}{2}a_1 \omega^2 - \frac{9}{2}a_3 \omega^2 \quad (6-65)$$

$$\frac{1}{24}\omega_0^4 x_0 + \frac{1}{6}\omega_0^2 \beta x_0^3 + \frac{1}{8}\beta^2 x_0^5 = \frac{625}{24}a_5 \omega^4 + \frac{27}{8}a_3 \omega^4 + \frac{1}{24}a_1 \omega^4 \quad (6-66)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{720}\omega_0^6 x_0 - \frac{5}{144}\omega_0^4 \beta x_0^3 - \frac{17}{240}\omega_0^2 \beta^2 x_0^5 - \frac{3}{80}\beta^3 x_0^7 \\ & = -\frac{81}{80}a_3 \omega^6 - \frac{3125}{144}a_5 \omega^6 - \frac{1}{720}a_1 \omega^6 \end{aligned} \quad (6-67)$$

que permitem determinar as amplitudes dos harmônicos e a frequência da solução (6-61).

Com as eqs. (6-64) a (6-66) monta-se um sistema linear,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}\omega^2 & -\frac{9}{2}\omega^2 & \frac{25}{2}\omega^2 \\ \frac{1}{24}\omega^4 & \frac{27}{8}\omega^4 & \frac{625}{24}\omega^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ \frac{1}{2}\omega_0^2 x_0 + \frac{1}{2}\beta x_0^3 \\ -\frac{1}{24}\omega_0^4 x_0 - \frac{1}{6}\omega_0^2 \beta x_0^3 - \frac{1}{8}\beta^2 x_0^5 \end{Bmatrix}$$

cujas soluções fornece

$$a_1 = \left( \frac{75}{64} - \frac{17\omega_0^2}{96\omega^2} + \frac{\omega_0^4}{192\omega^4} \right) x_0 + \left( -\frac{17}{96\omega^2} + \frac{\omega_0^2}{48\omega^4} \right) \beta x_0^3 + \frac{\beta^2 x_0^5}{64\omega^4} \quad (6-68)$$

$$a_3 = \left( \frac{13\omega_0^2}{64\omega^2} - \frac{25}{128} - \frac{\omega_0^4}{128\omega^4} \right) x_0 + \left( \frac{13}{64} - \frac{\omega_0^2}{32\omega^2} \right) \frac{\beta x_0^3}{\omega^2} - \frac{3\beta^2 x_0^5}{128\omega^4} \quad (6-69)$$

$$a_5 = \left( \frac{3}{128} - \frac{5\omega_0^2}{192\omega^2} + \frac{\omega_0^4}{384\omega^4} \right) x_0 + \left( -\frac{5}{192} + \frac{\omega_0^2}{96\omega^2} \right) \frac{\beta x_0^3}{\omega^2} + \frac{\beta^2 x_0^5}{128\omega^4} \quad (6-70)$$

A eq. (6-67) é então utilizada para a determinação da relação frequência-amplitude. Substituindo (6-68) a (6-70) em (6-67) obtém-se,

$$-\frac{1}{720}\omega_0^6 x_0 - \frac{5}{144}\omega_0^4 \beta x_0^3 - \frac{17}{240}\omega_0^2 \beta^2 x_0^5 - \frac{3}{80}\beta^3 x_0^7 = \left( \frac{259\omega^2 \omega_0^2}{720} - \right.$$

$$\left(\frac{5\omega^4}{16} - \frac{7\omega_0^4}{144}\right)\omega^2 x_0 + \left(\frac{259}{720}\omega^2 - \frac{7\omega_0^2}{36}\right)\omega^2 \beta x_0^3 - \frac{7\omega^2 \beta^2 x_0^5}{48} \quad (6-71)$$

que é mais exata que a relação  $\omega$ - $x_0$  que pode ser obtida ao se aplicar o conceito de simetria à solução (6-63).

Utilizando menos harmônicos em (6-61), é possível se obter expressões analíticas para  $\omega$  ou  $\delta$ . Assim, para (6-61) com somente os dois primeiros harmônicos, encontra-se a seguinte solução para os deslocamentos

$$\frac{x}{x_0} = \left(\frac{9}{8} - \frac{1}{8\delta^2}b - \frac{1}{8\delta^2}\right) \cos \delta\tau + \left(\frac{1}{8\delta^2}b - \frac{1}{8} + \frac{1}{8\delta^2}\right) \cos 3\delta\tau$$

e a seguinte relação frequência-amplitude

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{3} \sqrt{5 + 5b + \sqrt{16 + 14b - 2b^2}} \quad (6-72)$$

Utilizando apenas o primeiro harmônico em (6-61) encontra-se a relação,

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 + b} \quad (6-73)$$

e a correspondente solução no tempo

$$\frac{x}{x_0} = \cos \delta\tau \quad (6-74)$$

A vantagem do presente método sobre o HBM é que, neste método, os coeficientes dos harmônicos são obtidos através de um sistema de equações lineares, enquanto que no HBM, obtém-se um sistema não-linear.

Convém ressaltar que os coeficientes dos harmônicos  $a_i$  aqui determinados não são iguais aos determinados através do HBM. Entretanto, a diferença entre os coeficientes obtidos através dos dois métodos, diminui a medida que o número de harmônicos cresce nas duas aproximações.

Isto acontece porque, a medida que mais harmônicos são acrescentados na solução do HBM, a série de Taylor desta solução torna-se cada vez mais próxima da solução do método de Taylor. Isto é, a série de Taylor obtida a partir de uma solução do HBM que possui ou não todos os harmônicos relevantes para o cálculo da amplitude da resposta, não é exata. A diferença entre os termos correspondentes destas séries é crescente, como já foi mostrado através das eqs. (6-38), (6-39) e (6-40).

Como exemplo tem-se

$$x'' + x + 1,1x^3 = 0 \quad (6-75)$$

onde  $x(t)$  passou a ser escrito como  $x(\tau)$  através da transformação  $\tau = \omega_0 t$ .

Utilizando uma aproximação contendo três harmônicos, para a solução da eq. (6-75),

$$x(\tau) = a_1 \cos \delta\tau + a_3 \cos 3\delta\tau + a_5 \cos 5\delta\tau$$

as respostas obtidas aplicando o HBM e as eqs. (6-68) a (6-71) são apresentadas, respectivamente, nas segunda e terceira colunas da tabela 6.5. Observa-se que a diferença entre as amplitudes é crescente.

harmônico i	HBM $a_i$	Taylor $a_i$	dif. (%)
1	0,9806829543	0,9810838194	0,04
3	0,0189575282	0,0184871156	2,48
5	0,0003595175	0,0429064999	19,3

Tabela 6.5: Diferenças entre as amplitudes dos harmônicos da série de Fourier, obtida a partir da série de Taylor, e da solução obtida com o HBM.

Já ao se comparar as soluções de mais alta ordem, verifica-se que a diferença na amplitude de cada harmônico diminui, como mostrado na tabela 6.6, onde as amplitudes das soluções de cinco harmônicos são comparadas.

harmônico i	HBM $a_i$	Taylor $a_i$	dif. (%)
1	0,9806761397	0,9806797579	0,0004
3	0,0189572665	0,0189527993	0,02
5	0,0003596415	0,0003607078	2,96
7	0,0000068227	0,0000065676	3,74
9	0,0000001294	0,0000001673	29

Tabela 6.6: Diferenças entre as amplitudes dos harmônicos da série de Fourier, obtida a partir da série de Taylor, e da solução obtida pelo HBM.

Como já mencionado, a relação frequência-amplitude obtida ao se transformar a solução em série de Taylor em uma série de Fourier é mais precisa que relação frequência-amplitude obtida ao se aplicar as propriedades de simetria à solução em série, como mostra a figura 6.5, que apresenta o erro obtido no cálculo de  $\delta$  com a aproximação em série de Taylor com 16 termos e o erro obtido com a solução de 15 harmônicos, gerada a partir desta série de 16 termos.

Esta melhoria ocorre principalmente nos casos em que a série de potências diverge antes de atingir um quarto de período, sendo assim impossível se obter uma estimativa para a frequência da resposta com o método de Taylor. Ao se determinar a série de Fourier que gera a solução em série de Taylor, sempre

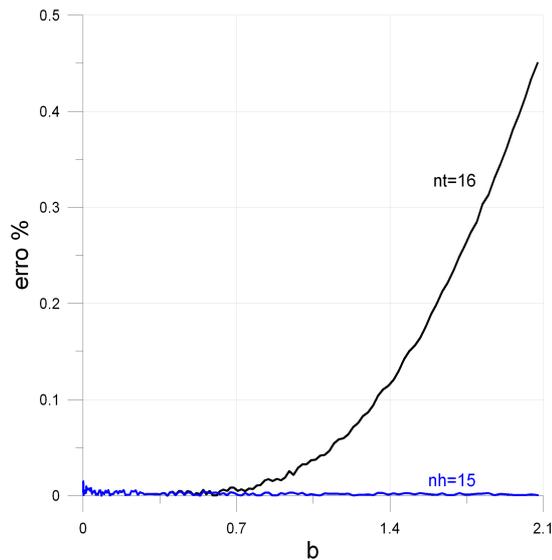


Figura 6.5: Variação do erro em  $\delta$  obtidos com a aproximação em série (dezesseis termos) e com a solução harmônica contruída a partir desta série (quinze harmônicos).

se obtém uma estimativa para freqüência da resposta, conforme mostrado na figura 6.6, onde é apresentado uma série de Taylor com 5 termos, que diverge antes do instante  $t = T/4$ , mas que pode ser utilizada para escrever uma série de Fourier com quatro harmônicos que converge para todo o período.

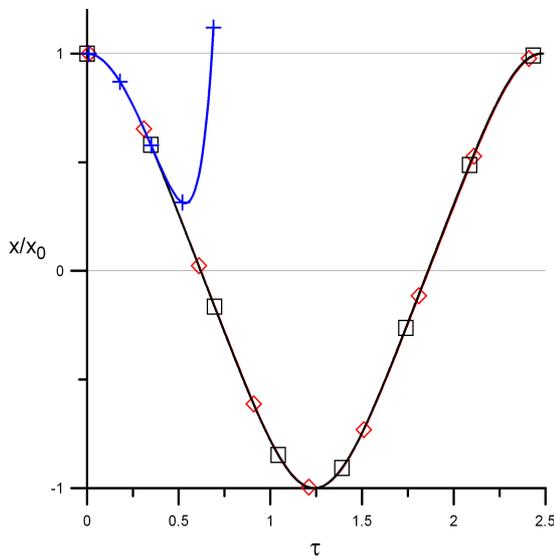


Figura 6.6: Solução no tempo do problema  $x'' + x + 7.5x^3 = 0$  para as condições iniciais (1,0):  $\square$ , RK; +, Taylor com cinco termos;  $\diamond$ , série de Fourier com quatro harmônicos.

No item 3.2 do anexo B tem-se o procedimento que transforma a solução em série de Taylor em uma série de Fourier.

### 6.2.5 Aproximações de Padé

Segundo Richards (2002)[81], aproximações por funções racionais, tais como funções de Padé, são algumas vezes bem superiores às séries de potências.

O método de obtenção da aproximação de Padé se dá pela substituição da série de potência  $\sum_{n=0}^N a_n t^n$  por uma razão de polinômios

$$P_M^N = \frac{\sum_{i=0}^N A_i t^i}{\sum_{j=0}^M B_j t^j} \quad (6-76)$$

onde se impõe  $B_0 = 1$ . Seguindo o procedimento apresentado por Richards (2002)[81], fazendo  $M = N$  ao igualar (6-76) à série de potência já determinada e coletando as mesmas potências em  $t$ , chega-se a um sistema linear de  $2N + 1$  equações que permite determinar os coeficientes  $A_i$  e  $B_i$  em função dos coeficientes  $a_n$  da série de potência. O Maple permite a obtenção destas séries de Padé, onde se pode inclusive, variar os parâmetros  $M$  e  $N$ . Quando  $M$  e  $N$  não são informados, o Maple atribui automaticamente os valores de  $M$  e  $N$ , sendo que  $M$  é sempre igual a  $N$ .

A série de Taylor contendo apenas dois termos não pode ser transformada em uma série de Padé. A solução em série de Taylor com três termos, eq. (6-29), quando transformada em uma série de Padé de acordo com os parâmetros default do Maple é

$$5\pi^2 - 48\delta^2 + 3\pi^2 b = 0 \quad (6-77)$$

Novamente, utilizando os parâmetros default do Maple, as séries de Padé obtidas a partir das séries de Taylor com quatro e cinco termos são, respectivamente

$$5\pi^2 - 48\delta^2 + 3\pi^2 b = 0 \quad (6-78)$$

$$\begin{aligned} &313\pi^4 + 3894\pi^4 b - 27600\pi^2 \delta^2 + 92880\pi^2 \delta^2 b + 241920\delta^4 + \\ &6840\pi^4 b^2 + 3618\pi^4 b^3 - 1451520\delta^4 b + 144720\pi^2 \delta^2 b^2 + \\ &567\pi^4 b^4 + 45360\pi^2 \delta^2 b^3 - 725760\delta^4 b^2 = 0 \end{aligned} \quad (6-79)$$

A tabela 6.7 apresenta a convergência, do caso linear ( $b = 0$ ), das séries de Padé geradas com os parâmetros default do Maple e comparadas com a convergência das séries de Taylor. Pode-se ver que as séries de Padé apresentam piores resultados.

Já para o caso não-linear com  $b = 1$ , as séries de Padé obtidas com

n° de termos	$\delta_{taylor}$	erro (%)	$\delta_{pade}$	erro (%)
2	1,110720734	11	-	-
3	0,986402021	1,36	1,013944669	1,39
4	1,000567233	0,06	1,013944669	1,39
5	0,999984249	0,0016	0,999981166	0,0019
7	0,999999996	0	-	-

Tabela 6.7: Convergência da série de Padé (solução linear).

os parâmetros default do Maple obtiveram melhores resultados que as série de Taylor, como mostrado na tabela 6.8. Os resultados podem ser ainda melhorados ao se escolher os valores de  $M$  e  $N$ , como mostra a tabela 6.9.

n° de termos	$\delta_{taylor}$	erro (%)	$\delta_{pade}$	erro (%)
4	-	-	1,282549831	2,67
5	-	-	1,319949652	0,16
6	1,357606555	3,02	1,319949652	0,16
7	1,261243896	4,29	1,317794830	0,0006

Tabela 6.8: Convergência da série de Padé do problema não-linear,  $b = 1$ .

### 6.2.6 Vibração Forçada

No problema de vibração forçada, se assume que o período da resposta permanente seja igual ao período da excitação. Então, o que se procura no problema de vibração forçada são as condições iniciais  $x_0$  e  $v_0$  que tornam a solução aproximada estacionária, isto é, as coordenadas do ponto fixo da seção de Poincaré.

Analisando primeiramente o problema sem amortecimento,

$$f(\ddot{x}, x, t) = 0 \tag{6-80}$$

as propriedades de simetria utilizadas no problema de vibração livre permanecem aplicáveis pois tem-se para o ponto fixo que  $v_0 = 0$ . Nos casos em que a não-linearidade em (6-80) é ímpar, se pode escrever que

$$x(T/4) = 0 \tag{6-81}$$

n° de termos	$\delta_{pade}$ (Tab. 6.8)	erro (%)	$\bar{\delta}_{pade}$ (com M e N)	$ \bar{\delta}_{pade} - \delta_{exato} $	erro (%)	M	N
4	1,28254983	2,67	1,32164066	0,00385410	0,29	4	2
5	1,31994965	0,16	1,31994965	0,00216309	0,16	4	4
6	1,31994965	0,16	1,31774659	0,00003997	0,003	4	6
7	1,31779483	0,0006	1,31774659	0,00003997	0,003	4	6

Tabela 6.9: Convergência da série de Padé, tendo um número variável de termos no numerador, do problema não-linear  $b = 1$ .

Em se tratando de não-linearidade par, tem-se

$$\dot{x}(T/2) = 0 \tag{6-82}$$

Deve ser observado que (6-81) e (6-82) são iguais às equações utilizadas para determinar  $\omega$  no problema de vibração livre com duas, ou uma, simetrias respectivamente. A única diferença está na aplicação: agora estas equações são utilizadas para determinar  $x_0$ .

Já na presença do amortecimento, a coordenada de velocidade do ponto fixo deixa de ser zero e, portanto, agora são necessárias duas equações para determinar as coordenadas do ponto fixo. Novamente a figura 6.1 pode ser utilizada para determinar estas equações. Pode-se ver que para condições iniciais tendo  $v_0 \neq 0$ , as igualdades (6-81) e (6-82) não são mais válidas. Porém, as propriedades de simetria da resposta no plano de fase indicam, para o caso de não-linearidade ímpar, as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} x(T/2) &= -x_0 \\ \dot{x}(T/2) &= -v_0 \end{aligned} \tag{6-83}$$

e para não-linearidades pares, há simetria apenas na velocidade

$$\begin{aligned} x(T) &= x_0 \\ \dot{x}(T/2) &= -v_0 \end{aligned} \tag{6-84}$$

As eqs. (6-83) e (6-84) também são válidas para o problema forçado amortecido, sendo que o sistema (6-84) necessita de um número maior de termos na solução em série que em (6-83), porque a aproximação para o deslocamento é avaliada em  $t = T$ .

Entretando, como mostrado na figura 6.7, em alguns casos, tais como ressonâncias de ordem mais altas, a resposta no plano de fase não apresenta

nenhuma simetria. Então nestes casos, deve-se utilizar a periodicidade da resposta, isto é,

$$\begin{aligned} x(T) &= x_0 \\ \dot{x}(T) &= v_0 \end{aligned} \tag{6-85}$$

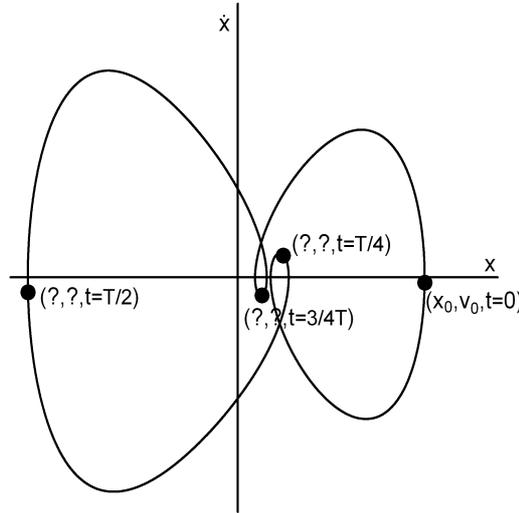


Figura 6.7: Plano de fase de um problema forçado amortecido e com não-linearidade ímpar.

Uma forma de se utilizar a eq. (6-81) ou (6-82) como aproximação para o problema não-linear amortecido, é inserindo um ângulo de fase  $\phi$  na excitação. O ângulo de fase permite mudar a posição do ponto fixo da solução permanente. Isto faz com que se possa impor  $v_0 = 0$ , permitindo que as eqs. (6-81) e (6-82) sejam usadas na região da primeira ressonância.

Considerando que  $x(T/4) = 0$  é verdadeiro para o problema não-linear amortecido,  $\ddot{x}(T/4)$  também será nulo porque  $x$  é periódica. Assim tem-se as seguintes equações para não-linearidade ímpar,

$$\begin{aligned} x(T/4) &= 0 \\ f(\dot{x}(T/4), T/4, \phi) &= 0 \end{aligned} \tag{6-86}$$

Da mesma forma, para o caso de não-linearidade par, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}(T/2) &= 0 \\ f(\ddot{x}(T/2), x(T/2), T/2, \phi) &= 0 \end{aligned} \tag{6-87}$$

Ao se inserir o ângulo de fase  $\phi$ , obtém-se um sistema de equações que não fornece, como solução, as coordenadas  $x_0$  e  $v_0$  do ponto fixo, mas sim, um  $x'_0$  e um  $\phi$ . Onde  $x'_0$  é o deslocamento máximo.

### 6.2.7 Equação de Duffing

Considera-se agora o problema forçado-amortecido. Seja a equação

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = F \cos \Omega t \quad (6-88)$$

Utilizando uma aproximação com quatro termos com centro em  $t = 0$ , tem-se

$$x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2!}\ddot{x}(0)t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_{t=0}t^3 \quad (6-89)$$

Da eq. (6-88), tem-se

$$\ddot{x} = F \cos \Omega t - 2\zeta\omega_0\dot{x} - \omega_0^2x - \beta x^3 \quad (6-90)$$

que avaliado no instante inicial  $t_0 = 0$ , leva a

$$\ddot{x}(0) = F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3 \quad (6-91)$$

Derivando (6-90) em relação ao tempo, obtém-se,

$$\frac{d\ddot{x}}{dt} = -F\Omega \sin \Omega t - 2\zeta\omega_0\ddot{x} - \omega_0^2\dot{x} - 3\beta x^2\dot{x} \quad (6-92)$$

Substituindo (6-90) em (6-92) e avaliando no instante  $t = 0$ , tem-se,

$$\left.\frac{d^3x}{dt^3}\right|_{t=0} = 4\zeta^2\omega_0^2v_0 + (2\omega_0^3x_0 + 2\omega_0\beta x_0^3 - 2\omega_0F)\zeta - (\omega_0^2 + 3\beta x_0^2)v_0 \quad (6-93)$$

Substituindo (6-93) e (6-91) em (6-89), obtém-se finalmente a aproximação para os deslocamentos,

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + v_0t + \frac{1}{2!}(F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3)t^2 \\ & + \frac{1}{3!}(4\zeta^2\omega_0^2v_0 + 2\zeta\omega_0^3x_0 + 2\zeta\omega_0\beta x_0^3 - \omega_0^2v_0 - 3\beta x_0^2v_0 - \\ & 2\zeta\omega_0F)t^3 \end{aligned} \quad (6-94)$$

Derivando (6-94) em relação a  $t$ , tem-se a aproximação para a velocidade

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & v_0 + (F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3)t + \frac{1}{2}(-2\zeta\omega_0F + \\ & 4\zeta^2\omega_0^2v_0 + 2\zeta\omega_0^3x_0 + 2\zeta\omega_0\beta x_0^3 - \omega_0^2v_0 - 3\beta x_0^2v_0)t^2 \end{aligned} \quad (6-95)$$

Substituindo (6-94) e (6-95) nas eqs. (6-83), chega-se ao sistema de equações

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\pi^2}{2\Omega^2}\beta + \frac{\pi^3}{3\Omega^3}\zeta\omega_0\beta \right)x_0^3 + \left( 2 - \frac{\pi^2}{2\Omega^2}\omega_0^2 + \frac{\pi^3}{3\Omega^3}\zeta\omega_0^3 \right)x_0 + \\ & \left( \frac{\pi}{\Omega} - \frac{\pi^2}{\Omega^2}\zeta\omega_0 + \frac{\pi^3\omega_0^2}{3\Omega^3} \left( 2\zeta^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi^3}{2\Omega^3}\beta x_0^2 \right)v_0 + \end{aligned} \quad (6-96)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{2\Omega^2}F - \frac{\pi^3}{3\Omega^3}\zeta\omega_0F = 0 \\ & \left( -\frac{\pi}{\Omega}\beta + \frac{\pi^2}{\Omega^2}\zeta\omega_0\beta \right)x_0^3 + \left( -\frac{\pi}{\Omega}\omega_0^2 + \frac{\pi^2}{\Omega^2}\zeta\omega_0^3 \right)x_0 + \\ & \left( 2 - 2\frac{\pi}{\Omega}\zeta\omega_0 + \frac{\pi^2\omega_0^2}{\Omega^2} \left( 2\zeta^2 - \frac{1}{2} \right) - \frac{3\pi^2}{2\Omega^2}\beta x_0^2 \right)v_0 + \end{aligned} \quad (6-97)$$

$$\frac{\pi}{\Omega}F - \frac{\pi^2}{\Omega^2}\zeta\omega_0F = 0$$

que permitem obter, de forma aproximada, as coordenadas do ponto fixo,  $x_0$  e  $v_0$ .

Inserindo um ângulo de fase em (6-88), tem-se,

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = F \cos(\Omega t + \phi) \quad (6-98)$$

cuja solução aproximada é dada por

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + \left( \frac{1}{2}F \cos \phi - \frac{1}{2}\omega_0^2x_0 - \frac{1}{2}\beta x_0^3 \right)t^2 + \left( \frac{1}{3}\zeta\omega_0^3x_0 - \right. \\ & \left. \frac{1}{6}F\Omega \sin \phi - \frac{1}{3}\zeta\omega_0F \cos \phi + \frac{1}{3}\zeta\omega_0\beta x_0^3 \right)t^3 \end{aligned} \quad (6-99)$$

Derivando (6-99) em relação a  $t$ , obtém-se a aproximação para a velocidade,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & (F \cos \phi - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3)t + \left( \zeta\omega_0^3x_0 - \frac{1}{2}F\Omega \sin \phi - \right. \\ & \left. \zeta\omega_0F \cos \phi + \frac{1}{3}\zeta\omega_0\beta x_0^3 \right)t^2 \end{aligned} \quad (6-100)$$

Substituindo (6-99) e (6-100) nas eqs. (6-86), obtém-se

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{\pi^2}{8\Omega^2}\beta + \frac{\pi^3}{24\Omega^3}\zeta\omega_0\beta \right)x_0^3 + \left( -\frac{\pi^2}{8\Omega^2}\omega_0^2 + 1 + \frac{\pi^3}{24\Omega^3}\zeta\omega_0^3 \right)x_0 + \\ & \left( \frac{\pi^2}{8\Omega^2}F - \frac{\pi^3}{24\Omega^3}\zeta\omega_0F \right) \cos \phi - \frac{\pi^3}{48\Omega^2}F \sin \phi = 0 \end{aligned} \quad (6-101)$$

$$\begin{aligned} & \left( \zeta\pi\frac{\omega_0}{\Omega}F - \frac{1}{2\Omega^2}\zeta^2\omega_0^2\pi^2F \right) \cos \phi + \left( F - \frac{1}{4\Omega}\zeta\omega_0\pi^2F \right) \sin \phi + \\ & \left( -\zeta\pi\frac{\pi\omega_0}{\Omega}\beta + \frac{1}{2\Omega^2}\zeta^2\omega_0^2\pi^2\beta \right)x_0^3 + \left( -\zeta\pi\frac{\omega_0^3}{\Omega} + \right. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\Omega^2} \zeta^2 \omega_0^4 \pi^2 \Big) x_0^3 = 0 \quad (6-102)$$

que levam a melhores resultados que as eqs. (6-96) e (6-97) para pequenos valores de não-linearidade ou amortecimento, pois foram obtidas avaliando as funções aproximadas em  $T/4$ .

Inserindo em (6-96), (6-97), (6-101) e (6-102) os seguintes parâmetros adimensionais

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\Omega}{\omega_0} \\ b &= \frac{\beta x_0^2}{\omega_0^2} \\ f &= \frac{F}{x_0 \omega_0^2} \\ v &= \frac{v_0}{u_0 \omega_0} \end{aligned} \quad (6-103)$$

obtêm-se para as eqs. (6-96) e (6-97)

$$\begin{aligned} &\left( -\delta\pi^2\zeta + \frac{2\pi^3}{3}\zeta^2 + \delta^2\pi - \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi^3}{2}b \right)v + \left( -\frac{\pi^3}{3}\zeta + \frac{\pi^2}{2}\delta \right)f + \\ &\left( -\frac{\pi^2}{2}\delta + \frac{\pi^3}{3}\zeta \right)b + 2\delta^3 + \frac{\pi^3}{3}\zeta - \frac{\pi^2}{2}\delta = 0 \\ &\left( -2\delta\pi\zeta + 2\pi^2\zeta^2 + 2\delta^2 - \frac{\pi^2}{2} - \frac{3\pi^2}{2}b \right)v + (-\pi^2\zeta + \delta\pi)f + \\ &(\pi^2\zeta - \delta\pi)b + \pi^2\zeta - \delta\pi = 0 \end{aligned} \quad (6-104)$$

e para as eqs. (6-101) e (6-102)

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\pi^2}{8\delta^2}f - \frac{\pi^3}{24\delta^3}\zeta f \right) \cos \phi + \left( -\frac{\pi^2}{8\delta^2} + \frac{\pi^3}{24\delta^3}\zeta \right)b + 1 + \\ &\frac{\pi^3}{24\delta^3}\zeta - \frac{\pi^2}{8\delta^2} - \frac{\pi^3}{48\delta^2}f \sin \phi = 0 \\ &\left( -\frac{\pi^2}{2\delta^2}\zeta^2 f + \frac{\pi}{\delta}\zeta f \right) \cos \phi + \left( -\frac{\pi^2}{4\delta}\zeta f + f \right) \sin \phi + \\ &\left( -\frac{\pi}{\delta}\zeta + \frac{\pi^2}{2\delta^2}\zeta^2 \right)b + \frac{\pi^2 + 2\delta^2}{\zeta} - \frac{\pi}{\delta}\zeta = 0 \end{aligned} \quad (6-105)$$

### Convergência da solução linear não-amortecida

Considerando  $\beta = 0$  e que o coeficiente  $\zeta$  seja muito pequeno, a solução permanente de (6-88) é dada aproximadamente por

$$x = \frac{F}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \Omega t \tag{6-106}$$

Utilizando as relações (6-103), chega-se à seguinte expressão para o deslocamento máximo obtido em (6-106),

$$f = 1 - \delta^2 \tag{6-107}$$

Fazendo  $\beta = 0$ ,  $\zeta = 0$  e  $v_0 = 0$  em (6-94) tem-se,

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(F - \omega_0^2 x_0)t^2 \tag{6-108}$$

Substituindo (6-108) em (6-81) e utilizando as relações (6-103), obtém-se

$$f = 1 - \frac{8\delta^2}{\pi^2} \approx 1 - 0.81\delta^2 \tag{6-109}$$

A medida que mais termos são adicionados à aproximação (6-108), (6-81) da lugar à soluções cada vez mais precisas, fazendo com que as relações aproximadas de  $f$  e  $\delta$  sejam cada vez mais próximas da solução exata (6-107).

Para  $\delta = 2$ , a eq. (6-107) fornece  $f = -3$ . A tabela 6.10 apresenta os valores de  $f$ , e os respectivos erros, obtidos com as equações construídas ao se utilizar a eq. (6-81).

n° de termos	f	erro (%)
2	-2,242	25,2
3	-3,087	-2,9
4	-2,996	0,13
5	-3,0001	-0,003
6	-3,000	-0,00006

Tabela 6.10: Convergência da relação  $f - \delta$  aproximada do problema linear não-amortecido.

### Convergência da solução linear amortecida

Seja o problema linear amortecido

$$\ddot{x} + 2\omega_0\zeta\dot{x} + \omega_0^2x = F \cos \Omega t$$

A parcela permanente da solução exata é dada por,

$$x = \frac{F((\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \Omega t + 2\Omega\omega_0\zeta \sin \Omega t)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\omega_0^2\Omega^2\zeta^2} \tag{6-110}$$

Avaliando (6-110) e sua derivada em relação a  $t$  em  $t = 0$ , tem-se as coordenadas do ponto fixo

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)F}{\omega_0^4 + (4\zeta^2 - 2)\Omega^2\omega_0^2 + \Omega^4} \\ v^* &= \frac{2\zeta\omega_0\Omega^2F}{\omega_0^4 + (4\zeta^2 - 2)\Omega^2\omega_0^2 + \Omega^4} \end{aligned} \tag{6-111}$$

Como mostrado nas tabelas 6.11 a 6.14, o sistema (6-86) converge mais rapidamente que o sistema (6-83). Assumindo  $F = 10$ ,  $\Omega = 2$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $\zeta = 0,05$  e  $\beta = 0$ , a tabela 6.11 exibe a convergência da aproximação para o deslocamento e velocidade em  $t = T/2$ , tendo como condições iniciais o ponto fixo exato (6-111), enquanto que a tabela 6.12 exibe a convergência das coordenadas do ponto fixo obtidas resolvendo o sistema (6-83). Já a tabela 6.13 exibe a convergência da aproximação para o deslocamento e velocidade em  $t = T/4$ , do problema (6-98), que contem o ângulo de fase,  $\phi$ , na excitação. Agora as condições iniciais são os valores exatos do deslocamento máximo de (6-98) e o  $\phi$  que anula a velocidade no instante inicial. Em  $t = T/4$ , a solução exata fornece,  $x(T/4) = 0$  e  $v(T/4) = 6,652$ . Finalmente, a tabela 6.14 exibe a convergência do deslocamento máximo e de  $\phi$ , obtidos ao se resolver o sistema (6-86).

n° de termos	$x(T/2)$	$ x(T/2) - x(T/2)_{exato} $	erro (%)	$v(T/2)$	$ v(T/2) - v(T/2)_{exato} $	erro (%)
3	13,753	10,434	314	21,294	21,736	4912
4	12,610	9,291	279	19,110	19,553	4418
5	-0,859	4,178	126	-15,189	14,746	3333
6	-0,295	3,614	108	-13,393	12,950	2927
7	4,136	0,817	24,6	3,533	3,975	898
9	3,222	0,096	2,9	-1,035	0,593	134
11	3,326	0,008	0,23	-0,386	0,057	12,8
13	3,318	0,0004	0,01	-0,446	0,004	0,85
15	3,319	0,00002	0,0006	-0,442	0,0002	0,04

Tabela 6.11: Convergência da solução linear amortecida em  $t = T/2$  do problema  $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos 2t$ .

n° de termos	$x_0$	$v_0$
4	2,626	-17,171
5	-9,647	13,286
6	-7,885	9,508
7	-1,782	-2,166
9	-3,565	0,825
11	-3,294	0,407
13	-3,320	0,445
15	-3,318	0,442

Tabela 6.12: Convergência das coordenadas do ponto fixo da solução de  $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos 2t$ .

n° de termos	$x(T/4)$	$v(T/4)$
4	0,844	10,721
5	-0,075	6,117
6	-0,073	6,127
7	0,003	6,683
9	-0,0001	6,651
11	0,000002	6,652

Tabela 6.13: Convergência da solução de  $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos(2t + \phi)$

### Convergência da solução não-linear sem amortecimento

Neste caso se pode utilizar a eq. (6-81) ou em caso de não-linearidade par, eq. (6-82).

Tomando como condição inicial de deslocamento a coordenada do ponto fixo da solução obtida com o HBM, as aproximações em série de Taylor cobrem, com precisão, um intervalo de tempo cada vez maior a medida que mais termos são adicionados à aproximação, como mostrado na tabela 6.15, onde, para o problema  $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$ , são apresentados os máximos valores de  $t$  e as correspondentes porcentagens de período que representam, ao limitar o erro entre as soluções do HBM e em série de Taylor em 0,01% de  $x_0$ , isto é, o ponto de divergência da série de Taylor. Conforme a tabela 6.15 é esperado que a partir da aproximação com vinte termos, o ponto fixo já seja obtido aproximadamente com a eq. (6-81), pois a série é convergente em aproximadamente um quarto de período.

A tabela 6.16 apresenta a coordena  $x_0$  do ponto fixo obtida com eq.

n° de termos	deslocamentos máximos			$\phi$
	$ x $	$ x - x_{exato} $	erro (%)	
4	4,532	1,206	36	-0,116
5	3,221	0,105	3,2	-0,060
6	3,223	0,103	3,09	-0,061
7	3,331	0,005	0,14	-0,067
9	3,326	0,0001	0,004	-0,0665
11	3,326	0,000003	0,00008	-0,0666

Tabela 6.14: Convergência do deslocamento máximo e  $\phi$  do problema  $\ddot{x} + 0,1\dot{x} + x = 10 \cos(2t + \phi)$ .

n° de termos	$t$	$\frac{t}{T}(\%)$
10	1,143	18,19
20	1,453	23,12
40	1,633	26,00

Tabela 6.15: Convergência do instante  $t$  que limita o erro da aproximação a menos de 0,01% do ponto fixo do problema  $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$ .

(6-81). Entretanto, para não-linearidade maiores, a necessidade de um número muito grande de termos na série torna-se um empecilho para as soluções em série, como mostram as tabelas 6.17 à 6.19. Nestas tabelas, são apresentados, a porcentagem de  $T$  em que a aproximação fornece um erro menor ou equivalente a 0,01% de  $x_0$  e também a coordenada  $x_0$  do ponto fixo obtido utilizando a eq. (6-81). Na tabela 6.17 tem-se o problema  $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$ . Já na tabela 6.18, tem-se o problema  $\ddot{x} + x + 2,5x^3 = 2 \cos 2t$ , enquanto que na tabela 6.19, tem-se o problema  $\ddot{x} + x + 0,8x^3 = 10 \cos 2t$ .

### Convergência da solução não-linear amortecida

Na presença de amortecimento a utilização do método torna-se mais complicada porque se eleva o custo computacional. Embora as eqs. (6-86) não sejam exatas, para pequenos níveis de amortecimento elas devem apresentar melhores resultados que o sistema (6-83). Considerando o problema  $\ddot{x} + 0.1\dot{x} + x + x^3 = 0.5 \cos t$ , a convergência da solução no tempo e do cálculo do ponto fixo é apresentada na tabela 6.20 para as eqs (6-83). e utilizando as eqs. (6-86) o erro obtido com as soluções é apresentado na tabela 6.21.

n° de termos	$x_0$	erro (%)
10	0,865	2,7
20	0,888	0,19
40	0,889	0,0004

Tabela 6.16: Convergência do cálculo do ponto fixo do problema  $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$ .

n° de termos	$t$	$\frac{t}{T}$ (%)	$x_0$	erro (%)
10	0,99	15,75	1,047	7,83
20	1,255	19,97	1,081	4,83
40	1,409	22,43	1,103	2,82
80	1,492	23,74	1,118	1,54

Tabela 6.17: Convergência da solução do problema  $\ddot{x} + x + x^3 = 0,5 \cos t$ .

n° de termos	$t$	$\frac{t}{T}$ (%)	$x_0$	erro (%)
10	0,476	15,16	1,403	10,14
20	0,603	19,2	1,446	7,38
40	0,677	21,55	1,474	5,6
80	0,717	22,81	1,491	4,53

Tabela 6.18: Convergência da solução do problema  $\ddot{x} + x + 2,5x^3 = 2 \cos 2t$ .

n° de termos	$t$	$\frac{t}{T}$ (%)	$x_0$	erro (%)
10	0,413	13,16	2,855	14,86
20	0,552	16,64	2,892	13,75
40	0,586	18,67	2,914	13,11
80	0,62	19,75	2,925	12,76

Tabela 6.19: Convergência da solução do problema  $\ddot{x} + x + 0,8x^3 = 10 \cos 2t$ .

### Solução em série de Fourier

Da mesma forma que na vibração livre, a série de Taylor será utilizada para obter a solução em série de Fourier. Para vibração forçada ainda não foi possível encontrar um relação entre as soluções de LP e o presente método.

n° de termos	$t$	$\frac{t}{T}$ (%)	$x_0$	erro (%)	$v_0$	erro (%)
10	0,709	11,28	0,564	35,1	0,106	42,3
20	1,203	19,15	0,607	30,2	-0,003	101,8
40	1,453	23,12	0,576	33,7	0,052	71,9
80	1,637	26,06	0,583	32,9	0,031	83,3

Tabela 6.20: Convergência da solução não-linear amortecida, eqs. (6-83).

n° de termos	$x'_0$	erro (%)	$\phi$	erro (%)
10	0,782	11,6	-103,35	-
20	0,856	3,2	0,205	19,6
40	0,888	0,4	0,167	2,3
80	0,891	0,8	0,16	6,4

Tabela 6.21: Convergência da solução não-linear amortecida, eqs. (6-86).

Considerando a solução (6-94), serão adicionados termos de mais alta ordem em  $t$  para que uma solução com um maior número de harmônicos possa ser construída.

Igualando os termos de mesma potência em  $t$  da solução em série de Taylor e da série de Taylor da solução em série de Fourier

$$x(t) = a_1 \cos \Omega t + b_1 \sin \Omega t + a_3 \cos 3\Omega t + b_3 \sin 3\Omega t \quad (6-112)$$

obtem-se as seguintes equações

$$x_0 = a_1 + a_3 \quad (6-113)$$

$$v_0 = 3b_3\Omega + b_1\Omega \quad (6-114)$$

$$\frac{F}{2} - \zeta\omega_0 v_0 - \frac{\omega_0^2}{2}x_0 - \frac{\beta}{2}x_0^3 = -\frac{9}{2}a_3\Omega^2 - \frac{1}{2}a_1\Omega^2 \quad (6-115)$$

$$\left(\frac{2\zeta^2\omega_0^2}{3} - \frac{\omega_0^2}{6} - \frac{\beta}{2}x_0^2\right)v_0 - \frac{\zeta\omega_0 F}{3} + \frac{\zeta\omega_0^3}{3}x_0 + \frac{\zeta\omega_0\beta}{3}x_0^3 = -\frac{9}{2}b_3\Omega^3 - \frac{1}{6}b_1\Omega^3 \quad (6-116)$$

$$\frac{\beta^2 x_0^5}{8} + \left(-\frac{\zeta^2 \omega_0^2 \beta}{6} + \frac{\omega_0^2 \beta}{6}\right)x_0^3 + \left(\frac{\zeta \omega_0 \beta}{2}v_0 - \frac{\beta F}{8}\right)x_0^2 + \left(\frac{\omega_0^4}{24} - \frac{\beta}{4}v_0^2 - \frac{\zeta^2 \omega_0^4}{6}\right)x_0 + \frac{\zeta^2 \omega_0^2 F}{6} + \left(-\frac{\zeta^3 \omega_0^3}{3} + \frac{\zeta \omega_0^3}{6}\right)v_0 - \frac{F\Omega^2}{24} - \quad (6-117)$$

$$\frac{\omega_0^2 F}{24} = \frac{27}{8}a_3\Omega^4 + \frac{1}{24}a_1\Omega^4$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\zeta\omega_0\beta^2}{10}x_0^5 + \frac{9\beta^2}{40}v_0x_0^4 + \left(\frac{\zeta^3\omega_0^3\beta}{15} - \frac{2\zeta\omega_0^3\beta}{15}\right)x_0^3 + \left(\left(\frac{\omega_0^2\beta}{5} - \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{3\zeta^2\omega_0^2\beta}{10}\right)v_0 + \frac{\zeta\omega_0\beta F}{10}\right)x_0^2 + \left(-\frac{3\beta F}{20}v_0 - \frac{\zeta\omega_0^5}{30} + \frac{\zeta^3\omega_0^5}{15} + \right. \\
 & \left. \frac{2\zeta\omega_0\beta}{5}v_0^2\right)x_0 - \frac{\beta}{20}v_0^3 + \frac{\zeta\omega_0 F\Omega^2}{60} + \left(\frac{2\zeta^4\omega_0^4}{15} + \frac{\omega_0^4}{120} - \frac{\zeta^2\omega_0^4}{10}\right)v_0 + \\
 & \frac{\zeta\omega_0^3 F}{30} - \frac{\zeta^3\omega_0^3 F}{15} = \frac{81}{40}b_3\Omega^5 + \frac{1}{120}b_1\Omega^5
 \end{aligned} \tag{6-118}$$

que permitem determinar as amplitudes dos harmônicos e as coordenadas  $x_0$  e  $v_0$  do ponto fixo.

Com as eqs. (6-113) à (6-116), monta-se um sistema linear e obtém-se a seguinte solução para as amplitudes

$$a_1 = \frac{1}{8\Omega^2}(F - 2\omega_0\zeta v_0 - \omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3) + \frac{9}{8}x_0 \tag{6-119}$$

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{8\Omega^3}(9\Omega^2 + 4\omega_0^2\zeta^2 - \omega_0^2 - 3\beta x_0^2)v_0 + \\
 & \frac{1}{4\Omega^3}(\omega_0\beta x_0^3 - \omega_0 F + \omega_0^3 x_0)\zeta
 \end{aligned} \tag{6-120}$$

$$a_3 = \frac{1}{8\Omega^2}(-F + 2\zeta\omega_0 v_0 + \omega_0^2 x_0 + \beta x_0^3) - \frac{x_0}{8} \tag{6-121}$$

$$\begin{aligned}
 b_3 &= \frac{1}{24\Omega^3}(\omega_0^2 - 4\zeta^2\omega_0^2 + 3\beta x_0^2 - \Omega^2)v_0 + \\
 & \frac{1}{12\Omega^3}(\omega_0 F - \omega_0\beta x_0^3 - \omega_0^3 x_0)\zeta
 \end{aligned} \tag{6-122}$$

As eqs. (6-117) e (6-118) são utilizadas para determinar  $x_0$  e  $v_0$ . Com a determinação das amplitudes dos harmônicos, estas equações passam a ser

$$\begin{aligned}
 & \frac{\beta^2}{8}x_0^5 + \left(-\frac{\zeta^2\omega_0^2\beta}{6} - \frac{5\Omega^2\beta}{12} + \frac{\omega_0^2\beta}{6}\right)x_0^3 + \left(\frac{\zeta\omega_0\beta}{2}v_0 - \frac{\beta F}{8}\right)x_0^2 + \\
 & \left(-\frac{5\Omega^2\omega_0^2}{12} - \frac{\zeta^2\omega_0^4}{6} - \frac{\beta}{4}v_0^2 + \frac{3\Omega^4}{8} + \frac{\omega_0^4}{24}\right)x_0 - \frac{\zeta^3\omega_0^3}{3}v_0 + \\
 & \frac{\zeta^2\omega_0^2 F}{6} + \frac{3F\Omega^2}{8} + \left(\frac{\omega_0^3}{6} - \frac{5\Omega^2\omega_0}{6}\right)\zeta v_0 - \frac{\omega_0^2 F}{24} = 0 \\
 & -\frac{\zeta\omega_0\beta^2}{10}x_0^5 + \frac{9\beta^2}{40}v_0x_0^4 + \left(\frac{\zeta^3\omega_0^3\beta}{15} + \left(-\frac{2\omega_0^3\beta}{15} + \frac{\Omega^2\omega_0\beta}{6}\right)\zeta\right)x_0^3 + \\
 & \left(-\frac{3\zeta^2\omega_0^2\beta}{10}v_0 + \left(\frac{\omega_0^2\beta}{5} - \frac{\Omega^2\beta}{4}\right)v_0 + \frac{\zeta\omega_0\beta F}{10}\right)x_0^2 + \left(-\frac{3\beta F}{20}v_0 + \right. \\
 & \left. \frac{\zeta^3\omega_0^5}{15} + \left(\frac{\Omega^2\omega_0^3}{6} - \frac{\omega_0^5}{30} + \frac{2\omega_0\beta}{5}v_0^2\right)\zeta\right)x_0 + \frac{2\zeta^4\omega_0^4}{15}v_0 - \frac{\zeta^3\omega_0^3 F}{15} + \\
 & \left(-\frac{3\omega_0 F\Omega^2}{20} + \frac{\omega_0^3 F}{30}\right)\zeta - \frac{\beta}{20}v_0^3 + \left(\frac{\Omega^2\omega_0^2}{3} - \frac{\omega_0^4}{10}\right)v_0\zeta^2 +
 \end{aligned}$$

$$\left( -\frac{1}{12}\Omega^2\omega_0^2 + \frac{1}{120}\omega_0^4 + \frac{3}{40}\Omega^4 \right) v_0 = 0$$

Como já mencionado, a série de Taylor obtida a partir de uma solução do HBM não é coincidente com a série obtida através do método de Taylor. A medida que mais harmônicos são adicionados à aproximação, o HBM irá fornecer uma solução que ao ser convertida em série de Taylor, se aproxima cada vez mais da solução obtida com o método de Taylor. Isto significa que ao se obter uma solução em série de Fourier a partir da solução em série de Taylor, tem-se uma solução diferente da obtida com o HBM, mas, conforme mais harmônicos são adicionados, obtém-se uma série de Fourier cada vez mais próxima da solução que seria obtida com o HBM.

Tomando como referência soluções com diferentes número de harmônicos, obtidas com o HBM para o problema forçado sem amortecimento,  $\ddot{x} + x + x^3 = \cos 2t$ , a tabela 6.22 exibe o erro obtido em cada amplitude, ao se comparar as amplitudes dos harmônicos das séries de Fourier, obtidas a partir da série (6-94), com as amplitudes das soluções do HBM que contém o mesmo número de harmônicos. Para a solução com três harmônicos, as amplitudes  $c_i$ , da solução de referência (HBM), e  $\tilde{c}_i$ , da solução obtida a partir de (6-94), são mostradas. Para as soluções com 7 e 10 harmônicos, apenas as diferenças em cada harmônico são exibidas.

$c_i$	$\tilde{c}_i$	erro(%)		
		n° de termos		
		3	7	10
2,108	2,094	0,65	0,0007	0,000003
0,083	0,073	12,49	0,018	0,0001
0,003	0,004	31,34	0,11	0,0007
			1,03	0,008
			6,78	0,07
			32,45	0,63
			93,64	4,08
				20,03
				69,24
				143

Tabela 6.22: Comparação entre as amplitudes da solução obtida com o HBM e da solução em série de Fourier, obtida a partir da solução em série de Taylor.

Embora a solução com três harmônicos apresente um grande erro nas amplitudes do segundo e terceiro harmônicos, a solução é bem próxima da obtida com o HBM porque estas amplitudes são pequenas.

### 6.2.8 Validação da Solução em série

A solução da seguinte equação diferencial,

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0x + \beta x^3 = F \cos \Omega t \quad (6-123)$$

obtida através do método da série de Taylor é,

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 + v_0t + \left(\frac{1}{2}F - \zeta\omega_0v_0 - \frac{1}{2}\omega_0^2x_0 - \frac{1}{2}\beta x_0^3\right)t^2 + \\ & \left(-\frac{1}{3}\zeta\omega_0F + \frac{2}{3}\zeta^2\omega_0^2v_0 + \frac{1}{3}\zeta\omega_0^3x_0 + \frac{1}{3}\zeta\omega_0\beta x_0^3 - \right. \\ & \left. \frac{1}{6}\omega_0^2v_0 - \frac{1}{2}\beta x_0^2v_0\right)t^3 + \dots \end{aligned} \quad (6-124)$$

Substituindo (6-124) em (6-123) obtém-se

$$F - \frac{1}{2}t^2F\Omega^2 + \frac{1}{24}t^4F\Omega^4 + \dots = F \cos \Omega t \quad (6-125)$$

Os termos à esquerda da igualdade em (6-125) são exatamente a série de Taylor da excitação. Logo, se pode concluir que a solução em série de Taylor é exata.

Porém, o que acontece na prática é que as eqs. (6-81) ou (6-83) por exemplo, não apresentam resultados exatos porque a série não é exata nos pontos de avaliação,  $t = T/4$  e  $t = T/2$ . Isto pode ser melhor compreendido ao considerar a solução em série de Taylor como se fosse a série de Taylor de uma série de Fourier que contém infinitos harmônicos. E os super-harmônicos de amplitudes bem pequenas, que seriam facilmente desprezados ao se escrever a solução em série de Fourier, passam a ser importantes, causando o erro.

O erro acontece porque quando se está avaliando a série em um determinado instante de tempo, na verdade se está avaliando a série de cada harmônico individualmente. E para vários super-harmônicos, de amplitude bem pequena, o instante  $T/4$  por exemplo, pode ser bem superior ao período do próprio super-harmônico.

Escrevendo um harmônico em série de Taylor tem-se,

$$a \cos \Omega_i t = a - \frac{a}{2}\Omega_i^2 t^2 + \frac{a}{24}\Omega_i^4 t^4 - \frac{a}{720}\Omega_i^6 t^6 + \frac{a}{40320}\Omega_i^8 t^8 + \dots \quad (6-126)$$

A figura 6.8(a), mostra que a importância de cada termo da série (6-126) cresce com o tempo. Para que a série seja precisa quando avaliada em um instante igual ao dobro do período do harmônico,  $t = 2T_i$ , é necessário um número bem maior de termos, como mostrado na figura 6.8(b), para que todos os termos importantes sejam considerados.

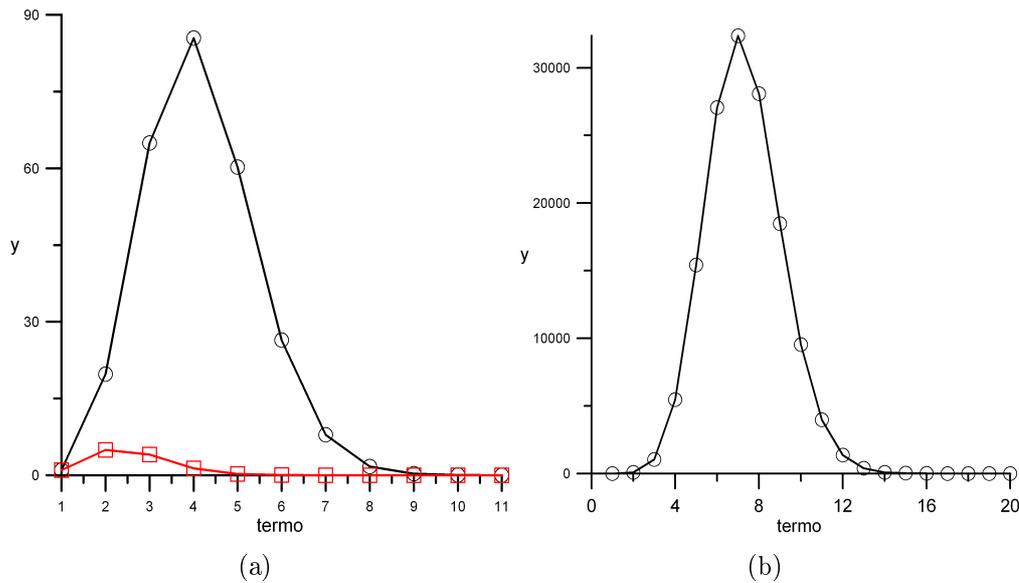


Figura 6.8: Importância dos termos não-nulos da série de Taylor que representa  $\cos \Omega t$ , avaliados em diferentes instantes de tempo: (a)  $\square$ , instante  $t = 0, 5T$ ;  $\circ$ ,  $t = T$ ; (b)  $t = 2T$ .

Utilizando uma série de 30 termos é possível, até com uma certa folga, cobrir com precisão três períodos de qualquer harmônico isoladamente. Assim, para garantir que a solução em série seja coincidente com a solução numérica em  $t = T/4$ , bastaria considerar que os harmônicos importantes de uma possível solução em série de Fourier, isto é, aqueles que possuem amplitudes que não podem ser desprezadas, não devem ter período inferior a  $T/12$ , o que corresponde ao décimo segundo harmônico. Porém, este critério não funciona. Os harmônicos superiores, de amplitude menor ainda, podem acabar gerando um erro ao se avaliar a série em  $T/4$ . Então nestes casos é necessário um número muito grande de termos.

### 6.3 Método de Fourier-Taylor (FT)

Foi demonstrado, para os casos de vibração livre e forçada, que uma forma de melhorar as soluções em série de Taylor é transforma-las em soluções periódicas tais como séries de Fourier.

Como será demonstrado mais adiante, esta transformação da série de Taylor em série de Fourier pode ser feita de imediato se for utilizada uma série de Fourier no lugar da série de potências na solução aproximada. Como este método utiliza conceitos de séries de Taylor e Fourier, ao longo do texto será chamado de método Fourier-Taylor (FT). Seja a série de Fourier,

$$\tilde{x} = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i \cos i\omega t + \sum_{i=1}^n d_i \sin i\omega t \quad (6-127)$$

Os coeficientes da solução aproximada (6-127) são determinados da mesma forma que foram determinados os coeficientes da série de Taylor. A solução aproximada  $\tilde{x}(t)$  e suas derivadas são avaliadas no instante inicial e igualadas aos valores dados pela solução exata desconhecida,  $x(t)$ , e suas derivadas, também avaliadas no instante inicial. As equações assumem então a forma:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(0) &= x_0 \\ \frac{d\tilde{x}(0)}{dt} &= v_0 \\ \frac{d^2\tilde{x}(0)}{dt^2} &= \ddot{x}(0) \\ \frac{d^3\tilde{x}(0)}{dt^3} &= \left. \frac{d\ddot{x}}{dt} \right|_0 \\ &\vdots \\ \frac{d^n\tilde{x}(0)}{dt^n} &= \left. \frac{d^{n-2}\ddot{x}}{dt^{n-2}} \right|_0 \end{aligned} \quad (6-128)$$

Assim como no HBM, o esforço computacional pode ser reduzido se for levada em consideração o tipo de não-linearidade e de excitação. Quando todas as não-linearidades são ímpares e a excitação não possuir termos constantes, pode-se retirar o termo constante,  $c_0$ , e os demais harmônicos pares em (6-127).

Na ausência de amortecimento e em problemas em que  $v_0 = 0$ , se pode simplificar ainda mais ao se retirar todos os termos de seno da solução aproximada.

A seguir, descreve-se a aplicação do método em função do tipo de problema.

### 6.3.1 Resolução de problemas de vibração livre

A solução é escrita com  $n$  harmônicos de cossenos. As condições iniciais são  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = 0$ . A frequência,  $\omega$ , da resposta faz parte do conjunto de incógnitas, juntamente com as amplitudes dos harmônicos.

Para a resolução do problema são necessárias  $n + 1$  equações em (6-128). Sendo que as equações que possuem derivadas ímpares são desprezadas, pois produzem a igualdade  $0 = 0$ .

O procedimento consiste em escrever na forma de um sistema linear as  $n$

primeiras equações não nulas de (6-128), para determinar as amplitudes dos harmônicos e do termo constante, quando for o caso. A frequência  $\omega$  é retirada da última das eqs. (6-128). Esta equação é não-linear em  $\omega$ . A razão pela qual se utiliza sempre a última equação para determinar  $\omega$  é que desta forma a solução aproximada atenderá automaticamente as condições iniciais.

### 6.3.2 Equação de Duffing

Tomando como exemplo a equação de Duffing do problema de vibração livre,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = 0 \quad (6-129)$$

e a aproximação

$$x = c_1 \cos \omega t + c_3 \cos 3\omega t \quad (6-130)$$

são necessárias três equações para determinar a solução aproximada, duas para os coeficientes dos harmônicos e uma para a frequência  $\omega$ . Para montar estas equações, primeiramente deve-se avaliar a solução aproximada e suas derivadas em relação a  $t$ , no instante inicial,

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_3 \\ \dot{x}(0) &= 0 \\ \ddot{x}(0) &= -c_1\omega^2 - 9c_3\omega^2 \\ x'''(0) &= 0 \\ x''''(0) &= c_1\omega^4 + 81c_3\omega^4 \end{aligned} \quad (6-131)$$

Avaliando  $\ddot{x}$  e as demais derivadas no instante inicial, levando em conta que  $v_0 = 0$ , tem-se,

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \\ \ddot{x}(0) &= -\omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 \\ x'''(0) &= 0 \\ x''''(0) &= \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 - 6\beta x_0 v_0^2 + 3\beta^2 x_0^5 \end{aligned} \quad (6-132)$$

Igualando as eqs. (6-131) e (6-132), tem-se as equações necessárias para a obtenção da solução aproximada,

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= x_0 \\ -c_1\omega^2 - 9c_3\omega^2 &= -\omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 \\ c_1\omega^4 + 81c_3\omega^4 &= \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 + 3\beta^2 x_0^5 \end{aligned} \quad (6-133)$$

As duas primeiras eqs. em (6-133) formam um sistema linear que permite se determinar os valores de  $c_1$  e  $c_3$ . Assim tem-se para (6-130),

$$x(t) = \left( \frac{9}{8} - \frac{\omega_0^2}{8\omega^2} - \frac{\beta x_0^2}{8\omega^2} \right) x_0 \cos \omega t + \left( \frac{\omega_0^2}{8\omega^2} + \frac{\beta x_0^2}{8\omega^2} - \frac{1}{8} \right) x_0 \cos 3\omega t \quad (6-134)$$

A última eq. em (6-133), a ser utilizada como relação frequência-amplitude, toma a forma

$$9\omega^4 x_0 - (10\beta x_0^3 + 10\omega_0^2 x_0)\omega^2 + \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 + 3\beta^2 x_0^5 = 0 \quad (6-135)$$

Adimensionalizando (6-135), tem-se,

$$1 + 4b + 3b^2 + 9\delta^4 - 10(1 + b)\delta^2 = 0 \quad (6-136)$$

Adicionando mais um harmônico à solução aproximada,

$$x = c_1 \cos \omega t + c_3 \cos 3\omega t + c_5 \cos 5\omega t \quad (6-137)$$

e aplicando o presente método, chega-se ao seguinte sistema linear para a determinação dos coeficientes de (6-137).

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\omega^2 & -9\omega^2 & -25\omega^2 \\ \omega^4 & 81\omega^4 & 625\omega^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_5 \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} x_0 \\ -\omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 \\ \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 + 3\beta^2 x_0^5 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6-138)$$

Resolvendo (6-138), obtém-se a solução no tempo e a relação frequência-amplitude. Escrevendo a solução no tempo em termos dos parâmetros adimensionais tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} &= \left( \frac{b^2}{64\delta^4} + \frac{75}{64} - \frac{17}{96\delta^2} - \frac{17b}{96\delta^2} + \frac{1}{192\delta^4} + \frac{b}{48\delta^4} \right) \cos \delta\tau + \\ & \left( \frac{13}{64\delta^2} - \frac{1}{128\delta^4} - \frac{25}{128} - \frac{b}{32\delta^4} - \frac{3b^2}{128\delta^4} + \frac{13b}{64\delta^2} \right) \cos 3\delta\tau + \\ & \left( \frac{3}{128} - \frac{5b}{192\delta^2} + \frac{1}{384\delta^4} + \frac{b}{96\delta^4} + \frac{b^2}{128\delta^4} - \frac{5}{192\delta^2} \right) \cos 5\delta\tau \end{aligned} \quad (6-139)$$

Para a relação frequência-amplitude na forma adimensional, tem-se

$$225\delta^6 - (259 + 259b)\delta^4 + (105b^2 + 35 + 140b)\delta^2 - 25b - 51b^2 - 27b^3 = 1 \quad (6-140)$$

Com quatro e cinco harmônicos na solução aproximada obtém-se respectivamente as seguintes relações  $\delta$ - $b$ .

$$11025\delta^8 - (12916 + 12916b)\delta^6 + (5922b^2 + 7896b + 1974)\delta^4 - (2268b^3 + 4284b^2 + 2100b + 84)\delta^2 + 1 + 208b + 846b^2 + 1080b^3 + 441b^4 = 0 \tag{6-141}$$

$$893025\delta^{10} - (1057221b + 1057221)\delta^8 + (691240b + 172810 + 518430b^2)\delta^6 - (237006b^3 + 447678b^2 + 219450b + 8778)\delta^4 + (34320b + 139590b^2 + 165 + 72765b^4 + 178200b^3)\delta^2 - 1 - 1849b - 15078b^2 - 36126b^3 - 34425b^4 - 11529b^5 = 0 \tag{6-142}$$

A figura 6.9 exibe a convergência da relação freqüência-amplitude obtida com as aproximações com dois, três e quatro harmônicos, respectivamente eqs. (6-136), (6-140) e (6-141).

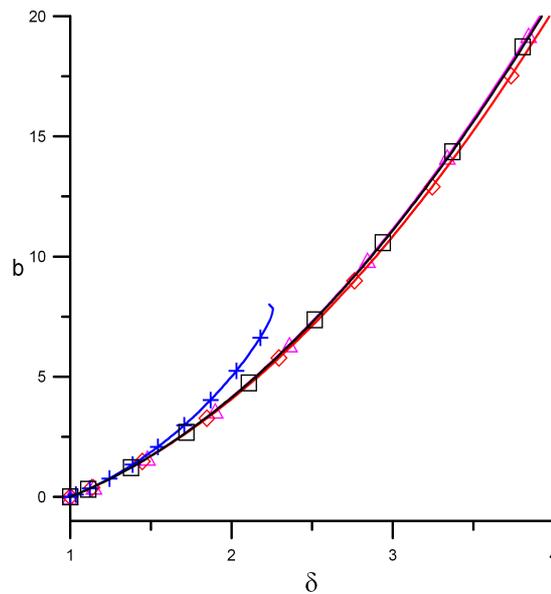


Figura 6.9: Soluções exata e aproximadas com diferentes números de harmônicos:  $\square$ , RK;  $+$ , FT com dois harmônicos;  $\diamond$ , FT com três harmônicos;  $\circ$ , FT com quatro harmônicos;

**Relação entre os métodos de Taylor e Fourier-Taylor**

Adimensionalizando a solução (6-134) e escrevendo-a em série de Taylor, têm-se

$$\frac{x(\tau)}{x_0} = 1 - \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\right)\tau^2 + \left(\frac{5}{12}\delta^2b - \frac{3}{8}\delta^4 + \frac{5}{12}\delta^2\right)\tau^4 +$$

$$\left(\frac{1}{8}\delta^6 - \frac{91}{720}\delta^4 b - \frac{91}{720}\delta^4\right)\tau^6 + \dots \quad (6-143)$$

Comparando (6-143) com (6-32) se observa que os termos de potência zero e dois em  $\tau$  são iguais.

Já escrevendo a solução com três harmônicos, eq. (6-139), em série de Taylor,

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau)}{x_0} = & 1 - \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\right)\tau^2 + \left(\frac{1}{24} + \frac{b}{6} + \frac{b^2}{8}\right)\tau^4 - \\ & \left((7 + 28b + 21b^2)\frac{\delta^2}{144} - \frac{259}{720}(1 + b)\delta^4 + \frac{5}{16}\delta^6\right)\tau^6 + \dots \end{aligned}$$

encontra-se mais uma parcela coincidente com a série exata (6-32), como era de se esperar.

Através das comparações pode-se concluir que cada novo harmônico acrescentado à solução corresponde a um novo termo da série de Taylor. Dessa forma, o procedimento de transformar a solução em série de Taylor em uma série de Fourier é equivalente à aplicação do FT.

O FT apresenta duas vantagens sobre o método de Taylor. A primeira é que a solução é periódica. A segunda vantagem é que, por ser periódica, a função aproximadora possui infinitas derivadas, permitindo que seja construído um número qualquer de equações, e, com isso, se escreve uma equação adicional, para se determinar a frequência  $\omega$ . Em Taylor, a aproximação possui derivadas finitas e portanto, todas as equações são utilizadas para determinar os coeficientes da série. Então,  $\omega$  é obtida avaliando a função de deslocamento em  $T/4$  ou  $T/2$ , de acordo com o tipo de não linearidade, o que pode conduzir a um  $\omega$  com um grande erro se um número insuficiente de termos for utilizado. O FT possui uma forma diferente de determinar aproximadamente  $\omega$ , que geralmente apresenta melhores resultados em relação ao Taylor.

### 6.3.3 Método Fourier-Taylor-Galerkin (FTG)

Ao se substituir uma determinada solução aproximada em uma equação diferencial, obtém-se um resíduo. Este resíduo é justamente provocado porque a solução aproximada não consegue atender a igualdade de forma exata. Quanto mais exata for a solução, menor será seu resíduo.

As soluções obtidas com o FT atendem a igualdade (6-129) no instante inicial e conseqüentemente no instante correspondente a um período da resposta. Substituindo soluções com diferentes números de harmônicos em (6-129), se

verifica que o resíduo diminui a medida que o que cresce o número de harmônicos. Porém, nota-se que dentro do intervalo  $[0, T]$ , (6-129) é satisfatoriamente atendida somente nos instantes que correspondem à  $t = 0$ ,  $t = T/4$ ,  $t = T/2$ ,  $t = 3T/4$  e  $t = T$ , enquanto que no HBM ou Galerkin-Urabe, conforme se utilizam soluções com mais harmônicos, além de diminuir o resíduo, também se aumenta o número de vezes em que o resíduo torna-se nulo dentro do intervalo  $[0, T]$ .

As relações frequência-deslocamento obtidas na seção anterior podem ser melhoradas se forem obtidas de forma a se minimizar o resíduo na equação diferencial, ao longo do período da resposta.

Utilizando Galerkin para minimizar o resíduo provocado pelas soluções, tem-se

$$\int_0^{2\pi/\omega} WR = 0 \quad (6-144)$$

onde  $R$  é o resíduo obtido ao substituir a solução aproximada na equação diferencial e  $W$  é a função peso dada por

$$W = \frac{\partial x}{\partial \omega} \quad (6-145)$$

sendo que  $x$  é a solução aproximada.

Assim, a relação frequência-deslocamento passa a ser dada por (6-144).

Tomando como exemplo a solução (6-134), (6-144) torna-se

$$\begin{aligned} & -\frac{45x_0^2}{64}\omega^{10} + \left(-\frac{1703x_0^4}{32768}\beta + \frac{5x_0^2\omega_0^2}{64}\right)\omega^8 + \left(\frac{45x_0^2\omega_0^4}{64} + \right. \\ & \left. \frac{10317x_0^4\omega_0^2}{8192}\beta + \frac{4557x_0^6}{8192}\beta^2\right)\omega^6 - \left(\frac{5x_0^2\omega_0^6}{64} + \frac{4825x_0^4\omega_0^4}{16384}\beta + \right. \\ & \left. \frac{2905x_0^6\omega_0^2}{8192}\beta^2 + \frac{2265x_0^8\beta^3}{16384}\right)\omega^4 + \left(\frac{217x_0^4\omega_0^6}{8192}\beta + \frac{651x_0^6\omega_0^4}{8192}\beta^2 + \right. \\ & \left. \frac{651x_0^8\omega_0^2}{8192}\beta^3 + \frac{217x_0^{10}}{8192}\beta^4\right)\omega^2 - \frac{63x_0^4\omega_0^8}{32768}\beta - \frac{63x_0^6\omega_0^6}{8192}\beta^2 - \\ & \left. \frac{63x_0^{10}\omega_0^2}{8192}\beta^4 - \frac{189x_0^8\omega_0^4}{16384}\beta^3 - \frac{63x_0^{12}}{32768}\beta^5 = 0 \end{aligned} \quad (6-146)$$

O resíduo provocado pela solução (6-134) ao se obter  $\omega$  em (6-146) no lugar de se utilizar (6-135), é significativamente reduzido, como mostra a figura 6.10, conseqüentemente a curva  $\omega-x_0$  se torna mais precisa.

### 6.3.4

#### Resolução de problemas de vibração forçada sem amortecimento

Neste caso tem-se o mesmo número de incógnitas da vibração livre. Agora a frequência da solução é igual à frequência  $\Omega$  da excitação ou a um múltiplo desta frequência, e  $x_0$  passa a ser incógnita, representando a coordenada do ponto fixo da solução permanente.

Para a obtenção das amplitudes dos harmônicos e de  $x_0$ , as equações que possuem derivadas ímpares em (6-128) devem ser novamente desprezadas. Da mesma forma que na vibração livre, monta-se um sistema linear tendo as amplitudes como incógnitas. A coordenada  $x_0$  do ponto fixo é determinada resolvendo a última das eqs. (6-128), que será sempre não-linear em  $x_0$ . Como tem-se uma única equação não-linear, pode-se utilizar o Maple para resolver esta equação, facilitando a aplicabilidade do método, pois todas as raízes são obtidas de uma única vez através de um simples comando.

### Equação de Duffing

Para resolver o problema,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F \cos \Omega t \tag{6-147}$$

a solução é aproximada por,

$$\tilde{x}(t) = c_1 \cos \Omega t + c_3 \cos 3\Omega t \tag{6-148}$$

Avaliando a função  $x(t)$  e suas derivadas no instante inicial, e as igualando

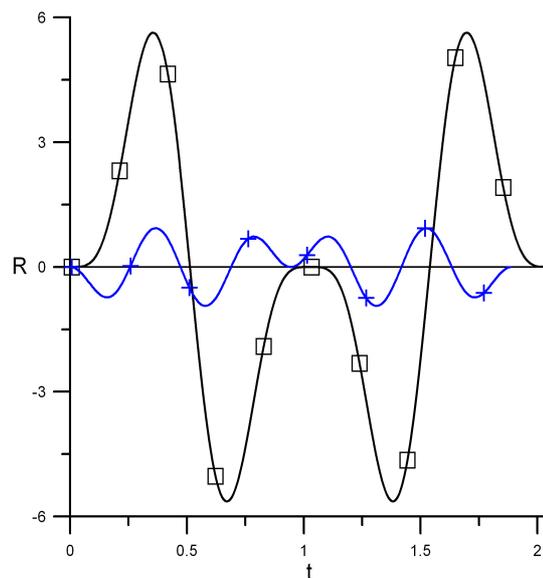


Figura 6.10: Resíduo causado por (6-134) para  $\omega_0 = 1,5$ ,  $\beta = 3$  e  $x_0 = 2$ : □,  $\omega$  dado por (6-135); +,  $\omega$  dado por (6-146).

à função aproximada (6-148) e suas derivadas, tem-se as seguintes equações,

$$\begin{aligned} x_0 &= c_1 + c_3 \\ F - \omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 &= -c_1 \Omega^2 - 9c_3 \Omega^2 \\ -F(\Omega^2 + \omega_0^2) + \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 - 3\beta x_0^2 F + \\ 3\beta^2 x_0^5 &= c_1 \Omega^4 + 81c_3 \Omega^4 \end{aligned} \quad (6-149)$$

Resolvendo as duas primeiras eqs. de (6-149), encontra-se para  $c_1$  e  $c_3$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{9}{8}x_0 + \frac{1}{8\Omega^2}(F - \omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3) \\ c_3 &= -\frac{x_0}{8} + \frac{1}{8\Omega^2}(-F + \omega_0^2 x_0 + \beta x_0^3) \end{aligned} \quad (6-150)$$

e a última das eqs. (6-149), que será utilizada para determinar  $x_0$ , torna-se

$$\begin{aligned} -F\Omega^2 - \omega_0^2 F + \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 - 3\beta x_0^2 F + 3\beta^2 x_0^5 \\ = 10\Omega^2 \beta x_0^3 + (-9\Omega^4 + 10\Omega^2 \omega_0^2)x_0 - 10F\Omega^2 \end{aligned} \quad (6-151)$$

Com uma aproximação com três harmônicos,

$$\tilde{x}(t) = c_1 \cos \Omega t + c_3 \cos 3\Omega t + c_5 \cos 5\Omega t \quad (6-152)$$

chega-se ao seguinte sistema linear,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\Omega^2 & -9\Omega^2 & -25\Omega^2 \\ \Omega^4 & 81\Omega^4 & 625\Omega^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_5 \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} x_0 \\ F - \omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 \\ -F(\Omega^2 + \omega_0^2 + 3\beta x_0^2) + \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 + 3\beta^2 x_0^5 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6-153)$$

e à seguinte relação freqüência-amplitude,

$$\begin{aligned} -18\beta F^2 x_0 + (\omega_0^4 + \Omega^4 + \omega_0^2 \Omega^2 + (42\omega_0^2 \beta + 3\beta \Omega^2)x_0^2 + \\ 45\beta^2 x_0^4)F - \omega_0^6 x_0 - 25\omega_0^4 \beta x_0^3 - 51\omega_0^2 \beta^2 x_0^5 - 27\beta^3 x_0^7 \\ = -c_1 \Omega^6 - 729c_3 \Omega^6 - 15625c_5 \Omega^6 \end{aligned} \quad (6-154)$$

Resolvendo (6-153), obtém-se

$$c_1 = \left( \frac{11}{64\Omega^2} - \frac{\omega_0^2}{192\Omega^4} \right) F + \left( -\frac{17\omega_0^2}{96\Omega^2} + \frac{75}{64} + \frac{\omega_0^4}{192\Omega^4} \right) x_0 -$$

$$\frac{\beta F}{64\Omega^4}x_0^2 + \left(\frac{\omega_0^2\beta}{48\Omega^4} - \frac{17\beta}{96\Omega^2}\right)x_0^3 + \frac{\beta^2}{64\Omega^4}x_0^5 \quad (6-155)$$

$$c_3 = \left(-\frac{25}{128\Omega^2} + \frac{\omega_0^2}{128\Omega^4}\right)F + \left(\frac{13\omega_0^2}{64\Omega^2} - \frac{25}{128} - \frac{\omega_0^4}{128\Omega^4}\right)x_0 + \quad (6-156)$$

$$\frac{3\beta F}{128\Omega^4}x_0^2 + \left(\frac{13\beta}{64\Omega^2} - \frac{\omega_0^2\beta}{32\Omega^4}\right)x_0^3 - \frac{3\beta^2}{128\Omega^4}x_0^5$$

$$c_5 = \left(\frac{3}{128\Omega^2} - \frac{\omega_0^2}{384\Omega^4}\right)F + \left(-\frac{5\omega_0^2}{192\Omega^2} + \frac{3}{128} + \frac{\omega_0^4}{384\Omega^4}\right)x_0 - \quad (6-157)$$

$$\frac{\beta F}{128\Omega^4}x_0^2 + \left(-\frac{5\beta}{192\Omega^2} + \frac{\omega_0^2\beta}{96\Omega^4}\right)x_0^3 + \frac{\beta^2}{128\Omega^4}x_0^5$$

e a eq. (6-154) torna-se

$$\begin{aligned} & -27\beta^3x_0^7 + (105\Omega^2\beta^2 - 51\omega_0^2\beta^2)x_0^5 + 45\beta^2x_0^4F - (259\Omega^4\beta - \\ & 140\Omega^2\omega_0^2\beta + 25\omega_0^4\beta)x_0^3 - (102\beta\Omega^2 - 42\omega_0^2\beta)Fx_0^2 - (18\beta F^2 - \\ & 35\Omega^2\omega_0^4 + \omega_0^6 + 259\Omega^4\omega_0^2 - 225\Omega^6)x_0 - (34\omega_0^2\Omega^2 - \omega_0^4 - \\ & 225\Omega^4)F = 0 \end{aligned} \quad (6-158)$$

Assim como ocorreu nos casos de vibração livre, é de se esperar que as soluções apresentem um resíduo maior quando  $x_0$  é retirado de uma das eqs. (6-128). Substituindo as soluções aproximadas na equação diferencial e aplicando o método de Galerkin para minimizar o resíduo ao longo do período da resposta, se obtém uma relação frequência-amplitude mais precisa.

Substituindo (6-155) à (6-157) em (6-152) e esta na eq. diferencial (6-147) e aplicando o método de Galerkin utilizando como função peso

$$W = \frac{\partial x}{\partial \Omega} \quad (6-159)$$

encontra-se melhores resultado que ao se considerar a função peso sendo dada por

$$W = \frac{\partial x}{\partial x_0} \quad (6-160)$$

como mostrado na figura 6.11.

A figura 6.12 exhibe as curvas frequência-amplitudes do problema  $\ddot{x} + x + x^3 = 50 \cos \Omega t$ , obtidas utilizando o FT com Galerkin (FTG), tendo (6-159) como função peso, integração numérica (utilizando um pequeno amortecimento) e HBM. Pode-se ver que com o FTG também é possível se obter boa precisão com poucos termos.

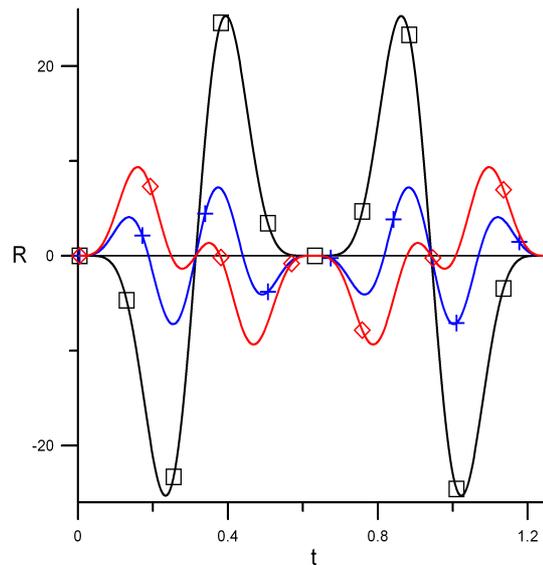


Figura 6.11: Resíduo da solução (6-152) para o problema  $\ddot{x} + x + x^3 = 50 \cos 5t$ :  $\square$ ,  $x_0$  dado por (6-158);  $+$ ,  $x_0$  obtido ao se considerar (6-159);  $\diamond$ ,  $x_0$  obtido ao se considerar (6-160).

### 6.3.5

#### Resolução de problemas de vibração forçada com amortecimento

Agora tem-se o dobro de incógnitas dos casos anteriores, pois o amortecimento exige a presença de harmônicos em seno na solução aproximada e, além de  $x_0$ , agora se deve encontrar a coordenada  $v_0$  do ponto fixo da solução permanente. Além disso, as equações com derivadas ímpares em (6-128) deixam de ser nulas e passam a ser utilizadas na determinação das amplitudes dos harmônicos em seno.

Da mesma forma, um sistema linear é montado com as primeiras  $n - 2$  equações em (6-128), o que permite determinar as amplitudes dos harmônicos. As duas equações restantes são utilizadas para determinar as coordenadas do ponto fixo. Como são não-lineares, agora tem-se mais dificuldade que na vibração forçada sem amortecimento pois tem-se um sistema não-linear que necessita de resolução numérica.

#### Equação de Duffing

A solução aproximada do problema

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x + \beta x^3 = F \cos \Omega t \tag{6-161}$$

é escrita segundo um somatório de senos e cossenos,

$$x(t) = c_1 \cos \Omega t + d_1 \sin \Omega t + c_3 \cos 3\Omega t + d_3 \sin 3\Omega t \quad (6-162)$$

Avaliando a função  $x(t)$  e suas derivadas no instante inicial, e igualando respectivamente à função aproximada (6-162) e suas derivadas, tem-se as seguintes equações,

$$\begin{aligned} x_0 &= c_1 + c_3 \\ v_0 &= d_1 \Omega + 3d_3 \Omega \\ F - 2\omega_0 \zeta v_0 - \omega_0^2 x_0 - \beta x_0^3 &= -c_1 \Omega^2 - 9c_3 \Omega^2 \\ 2\zeta \omega_0 \beta x_0^3 - 3\beta x_0^2 v_0 + 2\zeta \omega_0^3 x_0 + \\ (4\zeta^2 \omega_0^2 - \omega_0^2) v_0 - 2\zeta \omega_0 F &= -d_1 \Omega^3 - 27d_3 \Omega^3 - \\ F \Omega^2 + 4\omega_0^2 \zeta^2 F - 8\omega_0^3 \zeta^3 v_0 - 4\omega_0^4 \zeta^2 x_0 - 4\omega_0^2 \zeta^2 \beta x_0^3 + 4\omega_0^3 \zeta v_0 + \\ 12\omega_0 \zeta \beta x_0^2 v_0 - \omega_0^2 F + \omega_0^4 x_0 + 4\omega_0^2 \beta x_0^3 - 6\beta x_0 v_0^2 - 3\beta x_0^2 F + \\ 3\beta^2 x_0^5 &= c_1 \Omega^4 + 81c_3 \Omega^4 - \\ 4\omega_0^5 \zeta x_0 - 12\omega_0^4 \zeta^2 v_0 - 8\omega_0^3 \zeta^3 F + 8\omega_0^3 \zeta^3 \beta x_0^3 + 4\omega_0^3 \zeta F - \\ 16\omega_0^3 \zeta \beta x_0^3 - 12\omega_0 \zeta \beta^2 x_0^5 + 12\omega_0 \zeta \beta x_0^2 F + 8\omega_0^5 \zeta^3 x_0 + 2\omega_0 \zeta F \Omega^2 + \\ 27\beta^2 x_0^4 v_0 - 36\omega_0^2 \zeta^2 \beta x_0^2 v_0 + 16\omega_0^4 \zeta^4 v_0 + 48\omega_0 \zeta \beta x_0 v_0^2 + \\ 24\omega_0^2 \beta x_0^2 v_0 - 18\beta x_0 F v_0 - 6\beta v_0^3 + \omega_0^4 v_0 &= d_1 \Omega^5 + 243d_3 \Omega^5 \end{aligned} \quad (6-163)$$

sendo que as duas últimas em (6-163) são para a determinação de  $x_0$  e  $v_0$ .

Resolvendo as quatro primeiras equações em (6-163), obtêm-se as seguintes

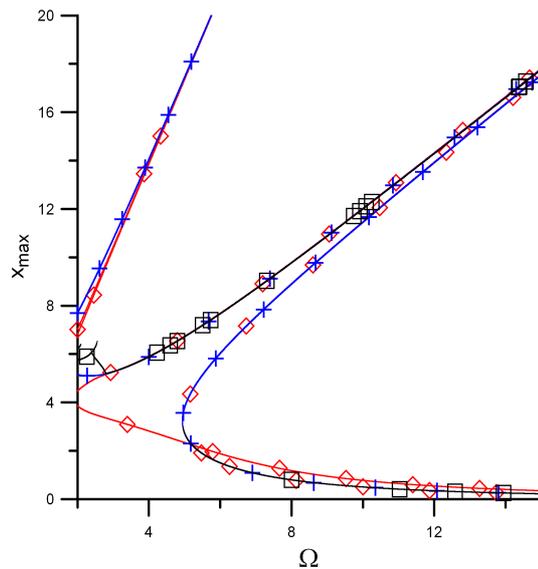


Figura 6.12: Curvas de ressonância do problema  $\ddot{x} + x + x^3 = 50 \cos \Omega t$ :  $\square$ , RK;  $+$ , HBM com três harmônicos;  $\diamond$ , FTG com três harmônicos.

soluções para as amplitudes

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{9}{8}x_0 + \frac{1}{8\Omega^2}(F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3) \\
 c_3 &= -\frac{1}{8}x_0 - \frac{1}{8\Omega^2}(F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3) \\
 d_1 &= \frac{9}{8\Omega}v_0 + \frac{1}{8\Omega^3}(-2\zeta\omega_0(F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3) - \\
 &\quad \omega_0^2v_0 - 3\beta x_0^2v_0) \\
 d_3 &= -\frac{1}{24\Omega}v_0 - \frac{1}{24\Omega^3}(-2\zeta\omega_0(F - 2\zeta\omega_0v_0 - \omega_0^2x_0 - \beta x_0^3) - \\
 &\quad \omega_0^2v_0 - 3\beta x_0^2v_0)
 \end{aligned} \tag{6-164}$$

e as equações adicionais necessárias para determinar  $x_0$  e  $v_0$  tornam-se

$$\begin{aligned}
 3\beta^2x_0^5 + (-4\omega_0^2\zeta^2\beta + 4\omega_0^2\beta)x_0^3 + (12\omega_0\zeta\beta v_0 - 3\beta F)x_0^2 + \\
 (\omega_0^4 - 6\beta v_0^2 - 4\omega_0^4\zeta^2)x_0 + (-8\omega_0^3\zeta^3 + 4\omega_0^3\zeta)v_0 - F\Omega^2 + \\
 4\omega_0^2\zeta^2F - \omega_0^2F = 10\Omega^2\beta x_0^3 + (10\Omega^2\omega_0^2 - 9\Omega^4)x_0 -
 \end{aligned} \tag{6-165}$$

$$\begin{aligned}
 10F\Omega^2 + 20\Omega^2\omega_0\zeta v_0 \\
 - 12\omega_0\zeta\beta^2x_0^5 + 27\beta^2x_0^4v_0 + (8\omega_0^3\zeta^3\beta - 16\omega_0^3\zeta\beta)x_0^3 + ((24\omega_0^2\beta - \\
 36\omega_0^2\zeta^2\beta)v_0 + 12\omega_0\zeta\beta F)x_0^2 + (-4\omega_0^5\zeta + 48\omega_0\zeta\beta v_0^2 - 18\beta Fv_0 + \\
 8\omega_0^5\zeta^3)x_0 - 6\beta v_0^3 + (16\omega_0^4\zeta^4 - 12\omega_0^4\zeta^2 + \omega_0^4)v_0 - 8\omega_0^3\zeta^3F + \\
 4\omega_0^3\zeta F + 2\omega_0\zeta F\Omega^2 = -20\Omega^2\omega_0\zeta\beta x_0^3 + 30\Omega^2\beta x_0^2v_0 - \\
 20\Omega^2\omega_0^3\zeta x_0 + (10\Omega^2\omega_0^2 - 40\Omega^2\omega_0^2\zeta^2 - 9\Omega^4)v_0 + 20\omega_0\zeta F\Omega^2
 \end{aligned} \tag{6-166}$$

No lugar de se utilizar as eqs. (6-165) e (6-166), pode-se aplicar o método de Galerkin para minimizar o resíduo.

Substituindo (6-164) em (6-162) tem-se a solução aproximada de (6-161). Utilizando como funções peso

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{\partial x}{\partial \Omega} \\
 W_2 &= \frac{\partial x}{\partial v_0}
 \end{aligned} \tag{6-167}$$

e aplicando o método de Galerkin obtém-se duas novas equações.

A figura 6.13 apresenta as coordenadas do ponto fixo versus  $\Omega$ , obtidas com integração numérica, HBM e FTG, do problema  $\ddot{x} + 0,4\dot{x} + x + 3x^3 = 50 \cos \Omega t$ . Pode-se ver que em alguns trechos já há uma boa precisão, porém há um grande número de ramos que não existem nas soluções obtidas com integração numérica e HBM.

Já com soluções contendo mais harmônicos, fica difícil aplicar Galerkin,

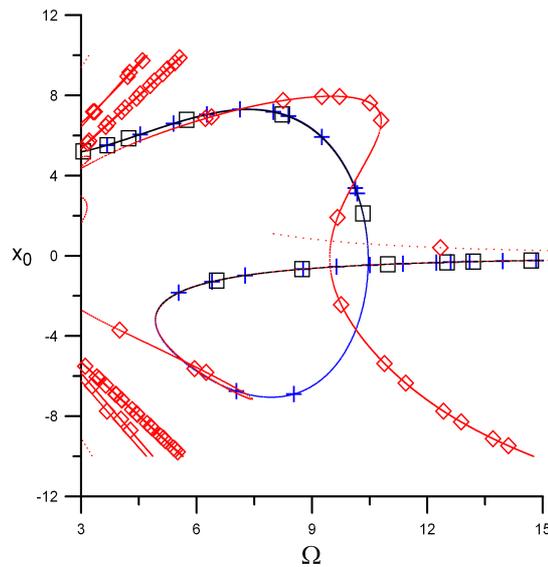


Figura 6.13: Variação da coordenada do ponto fixo do problema  $\ddot{x} + 0,2\dot{x} + x + 3x^3 = \cos\Omega t$ :  $\square$ , RK; +, HBM com três pares de harmônicos;  $\diamond$ , FTG com dois pares de harmônicos.

mas o maior número de termos acaba reduzindo o resíduo, como mostram as figuras 6.14(a) e 6.14(b).

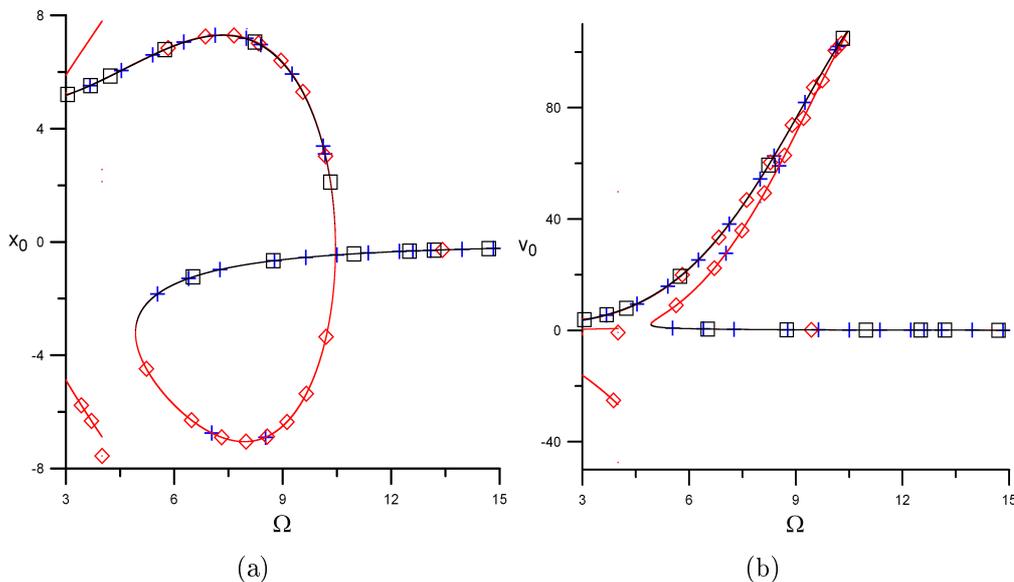


Figura 6.14: Problema  $\ddot{x} + 0,4\dot{x} + x + x^3 = 50 \cos\Omega t$ .  $\square$ , RK; +, HBM com três pares de harmônicos;  $\diamond$ , FT com 10 pares de harmônicos; (a) Curva  $x_0 - \Omega$ ; (b) curva  $v_0 - \Omega$ .

Cabe ressaltar que em todos os exemplos deste capítulo considerou-se uma grande não-linearidade ou um valor bastante elevado da magnitude da força com o intuito de verificar as potencialidades dos métodos aqui propostos.

No anexo C tem-se a solução da equação de Duffing (6-14) do problema de vibração forçada amortecida. Primeiramente a solução do problema é escrita

em série de Taylor e em seguida ela é transformada em série de Fourier. Diferentemente do anexo B, agora as derivadas de ordem superior da solução não são determinadas previamente. Em vez disto, elas são determinadas recursivamente sempre que necessário. No item C.1.2 tem-se um exemplo de como uma solução é obtida. No item C.2 as rotinas e as derivadas da solução são exportadas para um arquivo cpp, assim as soluções serão obtidas de forma semelhante ao do exemplo C.1.2, mas de uma forma muito mais rápida, por um programa escrito na linguagem C++. No item C.2.2 tem-se o arquivo gerado pelo programa em Maple que é utilizado pelo programa em C++ para encontrar os pontos fixos de uma aproximação com dois pares de harmônicos.

Como mostrado neste trabalho, além dos métodos de integração numérica, alguns métodos aproximados tais como o HBM e os métodos de perturbação permitem resolver problemas de valor inicial associados a equações diferenciais não-lineares, estes últimos tendo a vantagem de fornecer uma solução analítica.

A maior parte da literatura de sistemas dinâmicos não-lineares trata de equações com não-linearidades polinomiais, em particular, sistemas com não-linearidades quadráticas ou cúbicas, (Nayfeh (1979), [24]). Assim, a maior parte dos métodos aproximados são desenvolvidos tendo em mente estes tipos de não-linearidades. Entretanto, um crescente número de pesquisas nos últimos anos tem sido dedicado ao estudo de sistemas com outros tipos de não-linearidade, de forma destacada para problemas com não-linearidades fracionárias, que foram analisados por métodos numéricos, métodos de perturbação e HBM, entre outras técnicas.

Em uma série de artigos, Mickens ([57], [58], [89]) estudou vários exemplos de equações diferenciais com não-linearidades fracionárias. Em particular osciladores envolvendo um único termo não-linear do tipo

$$\ddot{x} + \operatorname{sgn}(x)|x|^{1/(2n+1)} = 0$$

onde  $n$  é um inteiro positivo e a  $\operatorname{sgn}$  é a função definida como

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(x) &= \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ \operatorname{sgn}(x) &= 0, & x = 0 \end{aligned}$$

Este tipo de oscilador também foi estudado recentemente por Swamy et al (2003), [64], van Horssen (2003), [90], e Awrejcewicz e Andrianov (2003), [91], que deram atenção especial ao caso limite

$$\ddot{x} + \operatorname{sgn}(x) = 0$$

que ocorre quando  $n \rightarrow \infty$ . Uma solução exata para este problema foi obtida

por Lipscom e Mickens (1994), [92], Philipchuk (1999), [93] e Potti et al (1999), [94], entre outros.

Hu e Xiong (2003), [95] analisaram um oscilador cujo potencial tem a forma

$$V(x) = V_0 x^{(2m+2)/(2n+1)}$$

Gottlieb (2003), [1], estudou osciladores com um único termo não-linear. Além do caso acima, ele considerou a não-linearidade como uma potência fracionária mais geral. Para vários casos particulares ele obteve a expressão exata para a frequência da resposta em termos de funções Beta e Gama, e soluções aproximadas com o HBM e comparou a aplicabilidade dos dois tipos de soluções.

Recentemente, Hu (2006), [96], estudou a solução de um oscilador com não-linearidade fracionária por um método iterativo e Ramos (2007), [97], investigou a mesma classe de problemas usando um método denominado “piecewise-linearized” baseado em expansões em série de Taylor da equação diferencial não-linear. Entretanto, nestas referências, várias manipulações algébricas são necessárias para resolver cada problema particular.

No capítulo anterior, dois métodos simples e eficientes foram apresentados. Embora possam apresentar algumas desvantagens em relação ao HBM, por exemplo, eles não se limitam apenas aos casos em que a não-linearidade é polinomial, mas permitem resolver problemas com não-linearidades fracionárias ou de qualquer outro tipo, sem a necessidade de alterar suas metodologias, como será mostrado a seguir com alguns exemplos.

## 7.1

### Sistema dinâmico com não-linearidade fracionária

Seja a seguinte equação,

$$\ddot{x} + \operatorname{sgn}(x)|x|^q = 0 \quad (7-1)$$

onde  $q$  pode assumir qualquer valor real.

O termo  $\operatorname{sgn}(x)$  em (7-1) faz com que a resposta se comporte qualitativamente igual às respostas de problemas com não-linearidade polinomial ímpar, mesmo quando  $q$  for par, como mostra a figura 7.1, que exhibe a função  $\operatorname{sgn}(x)|x|^q$  para diferentes valores de  $q$ .

A energia potencial do problema (7-1) é exibida na figura 7.2, para diferentes valores de  $q$ .

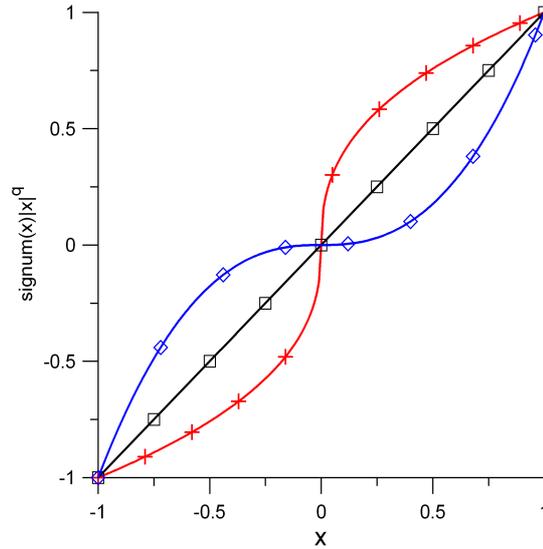


Figura 7.1: Simetria no campo de deslocamentos.  $\square$ ,  $q = 1$ ; +,  $q < 1$ ;  $\diamond$   $q > 1$ .

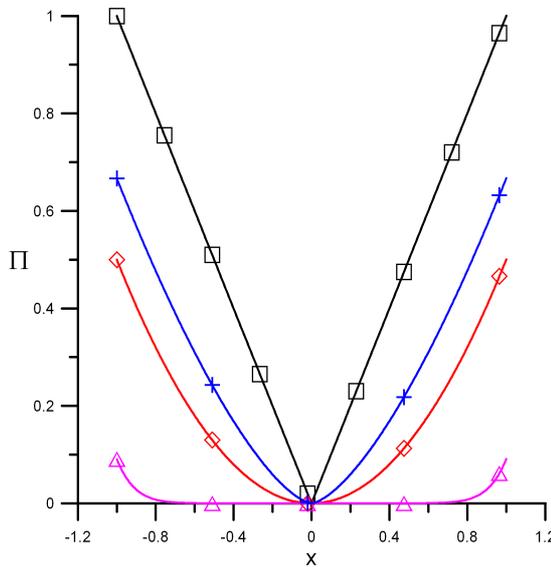


Figura 7.2: Energia potencial.  $\square$ ,  $q = 0$ ; +,  $q = 0,5$ ;  $\diamond$ ,  $q = 1$ ;  $\triangle$ ,  $q = 10$ .

O seguinte problema com não-linearidade fracionária foi analisado por Gottlieb (2003), [1].

$$\ddot{x} + \text{sgn}(x) |x|^{\frac{\alpha}{\beta}} = 0 \tag{7-2}$$

Escrevendo a solução aproximada de (7-2) em série de Taylor, têm-se,

$$x(t) = x(t_0) + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2x}{dt^2} \right|_{t_0} (t - t_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3x}{dt^3} \right|_{t_0} (t - t_0)^3 + \dots \tag{7-3}$$

e utilizando como centro da série o instante inicial, tem-se para (7-3)

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) |x|^{\frac{\alpha}{\beta}} t^2 - \frac{1}{6} \frac{d \operatorname{sgn}(x)}{dt} |x|^{\frac{\alpha}{\beta}} t^3 + \dots \quad (7-4)$$

Ao se utilizar a propriedade de simetria do problema ( $x(T/4) = 0$ ), as raízes da equação resultante correspondem a um quarto de período e permitem obter a frequência da solução ao considerar que  $T = 2\pi/\omega$ .

Com uma aproximação para os deslocamentos contendo termos em  $t$  até a potência 2 em (7-4) e considerando como condições iniciais um deslocamento  $x_0$  e uma velocidade nula, obtém-se para a frequência  $\omega$ ,

$$\omega = \frac{\pi}{4x_0} \sqrt{2|x_0|^{1 + \frac{\alpha}{\beta}}} \quad (7-5)$$

Considerando os termos até  $t^3$  em (7-4) obtém-se,

$$\omega = \frac{\pi}{12} \left( \frac{\sqrt[3]{6a}}{x_0} + \frac{6^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a}} |x_0|^{\frac{\alpha}{\beta}} \right) \quad (7-6)$$

sendo

$$a = x_0^2 |x_0|^{\frac{\alpha}{\beta}} \sqrt{-6 \frac{|x_0|^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x_0}}$$

Gottlieb, [1], comparou a sua aproximação de primeira ordem com a aproximação de primeira ordem proposta por Mickens (2001), [57], para diversos valores de  $\alpha$  e  $\beta$  utilizando como condição inicial  $x_0 = 1$ . Para  $x_0 = 1$ , (7-5) fornece sempre como resultado  $\omega = \pi/(2\sqrt{2}) \cong 1,11$

Na tabela 7.1 comparam-se os resultados obtidos para  $\omega$  com a solução aproximada escrita em série de Taylor e os resultados apresentados por Gottlieb, [1], para diversos valores de  $\alpha$  e  $\beta$ . Na terceira e quarta colunas tem-se, respectivamente para a frequência  $\omega$ , os resultados exatos e aproximados apresentados por Gottlieb. Em sua aproximação, ele utilizou o HBM com uma solução de primeira ordem. Os resultados aproximados obtidos por Gottlieb são mais precisos que os obtidos por Mickens, [57], com o HBM após manipular a equação, de forma a tornar a não-linearidade uma potência inteira. Já nas demais colunas, tem-se as frequências  $\omega_i$  obtidas com o método de Taylor onde o índice  $i$  indica o número de termos utilizados na aproximação.

Para  $\alpha = 4$ ,  $\beta = 3$ ,  $v_0 = 0$  e assumindo que  $x_0$  seja sempre dado por um valor positivo, se obtém, a partir de (7-4), a seguinte relação frequência-amplitude:

$\alpha$	$\beta$	$\omega$				
		exato	[1]	Taylor - n° de termos - $\omega_i$		
				3	4	5
3	4	1,024957	1,025674 (0,1%)	1,026172 (0,1%)	1,026172	1,025261
5	7	1,028660	1,029613 (0,1%)	1,031161 (0,2%)	1,030068	1,029017
2	3	1,033652	1,034982 (0,1%)	1,037605 (0,4%)	1,035324	1,034081
3	5	1,040749	1,042734 (0,2%)	1,046260 (0,5%)	1,042774	1,041280
3	7	1,059596	1,064045 (0,4%)	1,066857 (0,7%)	1,062224	1,060339
1	2	1,051637	1,054910 (0,3%)	1,058540 (0,7%)	1,054086	1,052305
1	3	1,070451	1,076845 (0,6%)	1,077433 (0,6%)	1,073094	1,071238
1	4	1,080181	1,088681 (0,8%)	1,086257 (0,6%)	1,082587	1,080935
1	5	1,086126	1,096092 (0,9%)	1,091378 (0,5%)	1,088264	1,086816
1	6	1,090133	1,101695 (1,1%)	1,094725 (0,4%)	1,092036	1,090760
1	7	1,093018	1,104867 (1,1%)	1,097083 (0,4%)	1,094725	1,093588
1	8	1,095194	1,107679 (1,1%)	1,098835 (0,3%)	1,096737	1,095715
1	9	1,096894	1,109890 (1,2%)	1,100188 (0,3%)	1,098300	1,097373
1	10	1,098258	1,111675 (1,2%)	1,101265 (0,3%)	1,099549	1,098700
1	11	1,099377	1,113145 (1,2%)	1,102142 (0,2%)	1,100570	1,099788

Tabela 7.1: Resultados obtidos com o método de Taylor para  $x_0 = 1$  e diferentes não-linearidades e aproximações, comparados com os apresentados por Gottlieb [1].

$$x_0 - \frac{\pi^2}{8\omega^2}|x_0|^{4/3} + \frac{\pi^4}{288\omega^4}|x_0|^{5/3} - \frac{7\pi^6}{103680\omega^6}|x_0|^2 = 0 \quad (7-7)$$

As figuras 7.3(a) e 7.3(b) exibem as curvas frequência-deslocamento inicial, obtidas com a eq. (7-5), com a aproximação de quatro termos, eq. (7-7), e com integração numérica. Pode-se ver que a solução com quatro termos já apresenta resultados precisos até valores bastante elevados de  $x_0$ . É interessante observar que para expoentes fracionários menores que 1, a frequência da resposta diminui à medida que o deslocamento inicial aumenta. Quando a não-linearidade é maior que 1, a frequência cresce ao se aumentar o deslocamento. Os resultados mostram que o método de Taylor leva a soluções analíticas bastante precisas para a relação frequência-amplitude com um número pequeno de termos.

Já com o FT, a seguinte solução harmônica,

$$x(t) = a_1 \cos \omega t + a_3 \cos 3\omega t + a_5 \cos 5\omega t \quad (7-8)$$

pode ser obtida seguindo a metodologia apresentada anteriormente ou simplesmente igualando os termos de mesma potência em  $t$  da série de Taylor

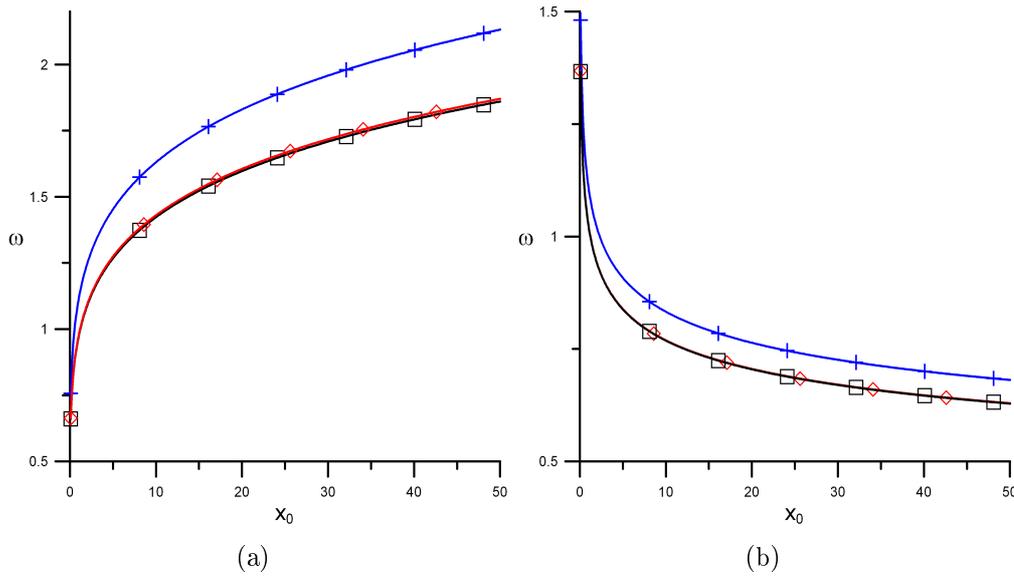


Figura 7.3: Curva frequência-deslocamento inicial. □, RK; +, dois termos, eq. (7-5); ◇, quatro termos, eq. (7-7): (a)  $\ddot{x} + \text{sgn}(x)|x|^{4/3} = 0$ ; (b)  $\ddot{x} + \text{sgn}(x)|x|^{3/4} = 0$ .

gerada a partir de (7-8) com a solução (7-4). Então, escrevendo (7-8) em série de Taylor e igualando os termos de mesma potência em  $t$  com os de (7-4), obtêm-se quatro equações que, considerando que o deslocamento inicial seja sempre positivo, assumem a seguinte forma

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 &= |x_0| \\ \omega^2(a_1 + 9a_3 + 25a_5) &= |x_0|^{\alpha/\beta} \\ \omega^4(a_1 + 81a_3 + 625a_5) &= \frac{\alpha}{\beta|x_0|} (|x_0|^{\alpha/\beta})^2 \\ \omega^6(a_1 + 729a_3 - 15625a_5) &= \frac{\alpha}{\beta^2}(4\alpha - 3\beta)|x_0|^{(3\alpha-2\beta)/\beta} \end{aligned}$$

as primeiras três equações são utilizadas para determinação das amplitudes e a última, para determinação de  $\omega$ . Estas equações conduzem à seguinte relação frequência-deslocamento quando  $\alpha = 4$  e  $\beta = 3$ :

$$-28|x_0|^2 = -2025x_0\omega^6 + 2331\omega^4|x_0|^{4/3} - 420|x_0|^{5/3}\omega^2 \quad (7-9)$$

onde o valor de  $\omega$  encontrado é um pouco mais afastado da solução exata do que o obtido a partir da eq. (7-7), como pode-se ver na tabela 7.2, que compara várias frequências, obtidas com o FT utilizando um número crescente de harmônicos e a solução exata.

A figura 7.4 mostra as curvas frequência da resposta versus o parâmetro  $\alpha/\beta$ , relacionado à não-linearidade do sistema, para duas condições iniciais de

		$\omega$					
		FT - n° de termos					
$\alpha$	$\beta$	exato	3	4	5	9	
3	4	1,024957	1,019216 (-0,6%)	1,021082	1,022102	1,023682	
5	7	1,028660	1,021909 (-0,7%)	1,024076	1,025268	1,027127	
2	3	1,033652	1,025477 (-0,8%)	1,028059	1,029489	1,031743	
3	5	1,040749	1,030432 (-1,0%)	1,033617	1,035397	1,038243	
3	7	1,059596	1,042954 (-1,6%)	1,047793	1,050563	1,055140	
1	2	1,051637	1,037775 (-1,3%)	1,041908	1,044251	1,048070	
1	3	1,070451	1,049775 (-1,9%)	1,055589	1,058957	1,064622	
1	4	1,080181	1,055664 (-2,3%)	1,062360	1,066278	1,072963	
1	5	1,086126	1,059162 (-2,5%)	1,066399	1,070656	1,077985	
1	6	1,090133	1,061480 (-2,6%)	1,069081	1,073570	1,081338	
1	7	1,093018	1,063129 (-2,7%)	1,070992	1,075647	1,083736	
1	8	1,095194	1,064361 (-2,8%)	1,072423	1,077204	1,085535	
1	9	1,096894	1,065318 (-2,9%)	1,073533	1,078414	1,086936	
1	10	1,098258	1,066081 (-2,9%)	1,074421	1,079381	1,088056	
1	11	1,099377	1,066705 (-3,0%)	1,075147	1,080171	1,088974	

Tabela 7.2: Resultados obtidos com o FT para diferentes aproximações tendo  $x_0 = 1$ , comparados a solução exata.

deslocamento distintas. Pode-se ver que, ao se aumentar a relação  $\alpha/\beta$ , quando  $x_0 < 1$ , a frequência da resposta diminui, enquanto que, quando  $x_0 > 1$ , a frequência da resposta aumenta ao se aumentar  $\alpha/\beta$ .

Observa-se que os resultados obtidos com o FT fornecem resultados coincidentes com o da integração numérica para todos os valores de  $\alpha/\beta$  aqui analisados.

### 7.1.1

$$\ddot{x} + \text{sgn}(x) = 0$$

Um caso partical do problema (7-2) é

$$\ddot{x} + \text{sgn}(x) = 0 \tag{7-10}$$

e recentemente foi estudado por Beléndez et all (2007 e 2008) [8], [62], que utilizaram o método de perturbação com homotopia de He (HPM), [59].

Escrevendo a solução de (7-10) em série de Taylor, se obtém

$$x(t) = x_0 - \frac{1}{2} \text{sgn}(x_0) t^2 \tag{7-11}$$

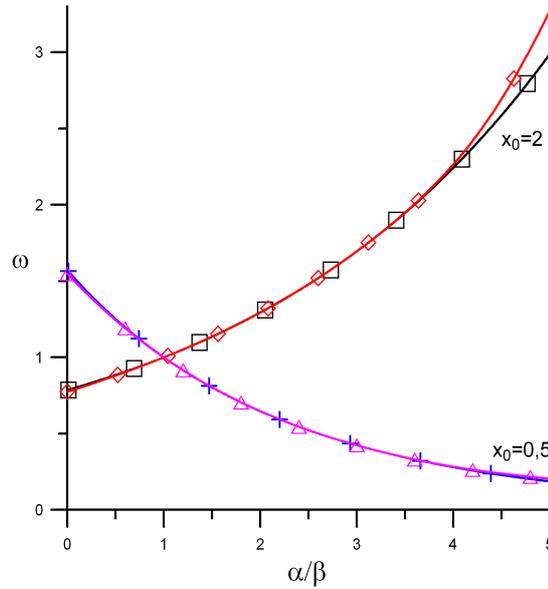


Figura 7.4: Influência da não-linearidade para diferentes deslocamentos iniciais: □, RK e  $x_0 = 2$ ; ◇, FT com sete harmônicos e  $x_0 = 2$ ; +, RK e  $x_0 = 0,5$ ; △, FT com sete harmônicos e  $x_0 = 0,5$ .

sendo que os termos de ordem mais alta em  $t$  são todos nulos.

De acordo com Beléndez et all, [62], a solução exata de (7-10) é dada por

$$x(t) = \begin{cases} x_0 - \frac{t^2}{2} & 0 \leq t \leq \frac{T}{4} \\ \frac{t^2}{2} - 2\sqrt{2x_0}t + 3x_0 & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4} \\ -\frac{t^2}{2} + 4\sqrt{2x_0}t - 15x_0 & \frac{3T}{4} \leq t \leq T \end{cases} \quad (7-12)$$

o que revela que a solução (7-11) é a solução exata no primeiro quarto de período, justificando assim que os termos de ordem superior em  $t$  sejam nulos.

Como (7-11) é exata no primeiro quarto de período, ao se aplicar as propriedades de simetria do problema ( $x(T/4) = 0$ ), a frequência exata da resposta periodica é obtida. Desta forma tem-se

$$\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{2|x_0|}} \approx \frac{1,110721}{\sqrt{|x_0|}} \quad (7-13)$$

Beléndez et all, [62], aplicando o HPM, obtiveram a seguinte aproximação de terceira ordem:

$$\begin{aligned} x(t) = & 1,03216x_0 \cos \omega_3 t - 0,038333x_0 \cos 3\omega_3 t + \\ & 0,008251x_0 \cos 5\omega_3 t - 0,003006x_0 \cos 7\omega_3 t + \\ & 0,001414x_0 \cos 9\omega_3 t \end{aligned} \quad (7-14)$$

onde  $\omega_3 = 1,111358/\sqrt{x_0}$ .

Soluções periódicas podem ser obtidas aplicando o método de FT. Utilizando uma solução com o mesmo número de harmônicos que em (7-14), se obtém as seguintes equações

$$\begin{aligned}
 x_0 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\
 \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_0) &= \left( \frac{1}{2} a_1 + \frac{9}{2} a_2 + \frac{25}{2} a_3 + \frac{49}{2} a_4 + \frac{81}{2} a_5 \right) \omega^2 \\
 0 &= \left( \frac{1}{24} a_1 + \frac{27}{8} a_2 + \frac{625}{24} a_3 + \frac{2401}{24} a_4 + \frac{2187}{8} a_5 \right) \omega^4 \\
 0 &= \left( \frac{1}{720} a_1 + \frac{81}{80} a_2 + \frac{3125}{144} a_3 + \frac{117649}{720} a_4 + \frac{59049}{80} a_5 \right) \omega^6 \\
 0 &= \left( \frac{1}{40320} a_1 + \frac{729}{4480} a_2 + \frac{78125}{8064} a_3 + \frac{823543}{5760} a_4 + \frac{4782969}{4480} a_5 \right) \omega^8 \\
 0 &= (a_1 + 59049 a_2 + 9765625 a_3 + 282475249 a_4 + 3486784401 a_5) \omega^{10}
 \end{aligned} \tag{7-15}$$

Resolvendo as primeiras equações em (7-15) se obtém as amplitudes dos harmônicos. Assim da última das eqs. (7-15) se obtém para a frequência

$$\omega = \frac{1,088056}{\sqrt{|x_0|}} \tag{7-16}$$

e conseqüentemente a solução periódica torna-se

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 1,023126x_0 \cos \omega t - 0,025262x_0 \cos 3\omega t + \\
 &0,002339x_0 \cos 5\omega t - 0,000213x_0 \cos 7\omega t + \\
 &0,000011x_0 \cos 9\omega t
 \end{aligned} \tag{7-17}$$

onde  $\omega$  é dado por (7-16)

A solução (7-17) não é coincidente com a resposta obtida através de integração numérica porque a aproximação (7-16) para a frequência possui um erro de 2,04%. Utilizando a solução exata para a frequência, eq. (7-13), a solução periódica torna-se

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 1,030725x_0 \cos \omega t - 0,035115x_0 \cos 3\omega t + \\
 &0,00504x_0 \cos 5\omega t - 0,000704x_0 \cos 7\omega t + \\
 &0,000054x_0 \cos 9\omega t
 \end{aligned} \tag{7-18}$$

e passa a ser coincidente com a solução obtida com integração numérica, como mostra a figura 7.5.

A medida que mais harmônicos são utilizados na solução, a aproximação para a frequência obtida com o método de Fourier-Taylor tende ao valor exato

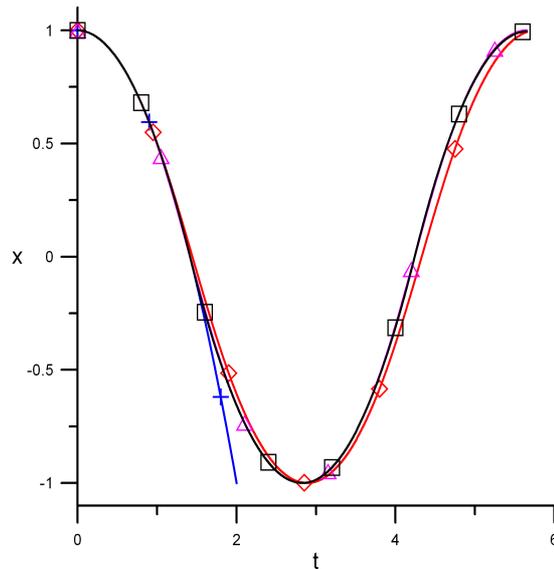


Figura 7.5: Solução no tempo do problema  $\ddot{x} + \text{sgn}(x) = 0$ :  $\square$ , RK;  $+$ , eq. (7-11);  $\diamond$ , eq. (7-17);  $\triangle$ , eq. (7-18).

obtido com o método de Taylor, eq. (7-13), como mostrado na tabela 7.3.

n° de harmônicos	$\omega$	erro (%)
1	$1/\sqrt{x_0}$	9,97
2	$1,054092/\sqrt{x_0}$	5,1
3	$1,072898/\sqrt{x_0}$	3,4
4	$1,082367/\sqrt{x_0}$	2,55
5	$1,088056/\sqrt{x_0}$	2,04
7	$1,094553/\sqrt{x_0}$	1,46
10	$1,099419/\sqrt{x_0}$	1,01
20	$1,105081/\sqrt{x_0}$	0,51
40	$1,107904/\sqrt{x_0}$	0,25

Tabela 7.3: Resultados obtidos com o método de Fourier Taylor e o erro em relação a solução exata, eq. (7-13).

## 7.2 Pêndulo plano

A equação que rege o movimento do pêndulo plano em vibração livre é dada por

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \tag{7-19}$$

onde  $g$  é a aceleração,  $l$  é o comprimento do pêndulo e  $\theta$ , o deslocamento angular.

Em geral, para se obter uma solução analítica deste problema, expande-se  $\sin \theta$  em séries de Taylor, retendo termos em  $\theta$  até a potência 3 ou 5, o que limita a validade da solução a pequenos valores de  $\theta_0$  ou se escreve a solução em termos de funções elípticas.

Escrevendo a solução de (7-19) em série de Taylor, tem-se a seguinte solução para a condição inicial  $\dot{\theta}(0) = 0$ ,

$$\theta = \theta_0 - \left(\frac{g}{2l} \sin \theta_0\right)t^2 + \frac{g^2}{24l^2}(\cos \theta_0 \sin \theta_0)t^4 + \dots \quad (7-20)$$

Substituindo  $t = T/4$  em (7-20), sendo  $T = 2\pi/\omega$ , obtém-se a seguinte relação frequência-amplitude,

$$\omega = \frac{\sqrt{3}\pi}{12} \sqrt{\frac{g}{\theta_0 l} (3 \sin \theta_0 \pm \sqrt{9(\sin \theta_0)^2 - 6\theta_0 \cos \theta_0 \sin \theta_0})} \quad (7-21)$$

e considerando apenas os dois primeiros termos em (7-20), chega-se a

$$\omega = \frac{\pi}{4\theta_0} \sqrt{2\theta_0 \frac{g}{l} \sin \theta_0} \quad (7-22)$$

Utilizando o FT com a seguinte solução aproximada,

$$\theta(t) = c_1 \cos \omega t + c_3 \cos 3\omega t + c_5 \cos 5\omega t$$

obtém-se os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{192l^2\omega^4}(-34l\omega^2g + g^2 \cos \theta_0) \sin \theta_0 + \frac{75}{64}\theta_0 \\ c_3 &= -\frac{1}{128l^2\omega^4}(-26l\omega^2g + g^2 \cos \theta_0) \sin \theta_0 - \frac{25}{128}\theta_0 \\ c_5 &= \frac{1}{384l^2\omega^4}(-10l\omega^2g + g^2 \cos \theta_0) \sin \theta_0 + \frac{3}{128}\theta_0 \end{aligned}$$

e a seguinte relação frequência-deslocamento

$$\begin{aligned} -\left(\frac{g}{l}\right)^3 (4(\cos \theta_0)^2 - 3) \sin \theta_0 &= -225\omega^6\theta_0 + 259\frac{g}{l}\omega^4 \sin \theta_0 - \\ 35\left(\frac{g}{l}\right)^2 \omega^2 \cos \theta_0 \sin \theta_0 & \end{aligned} \quad (7-23)$$

A figura 7.6 apresenta as curvas frequência-deslocamento obtidas a partir das relações (7-22), (7-21) e (7-23), sendo estas comparadas com os resultados

da integração numérica. Pode-se ver que poucos termos são suficientes para apresentar bons resultados, para todos os valores possíveis de  $\theta_0$ . Verifica-se que a frequência natural decresce a medida que  $|\theta_0|$  aumenta e torna-se nula em  $\theta_0 = \pm\pi$ , que corresponde à posição do pêndulo invertido (posição de equilíbrio instável).

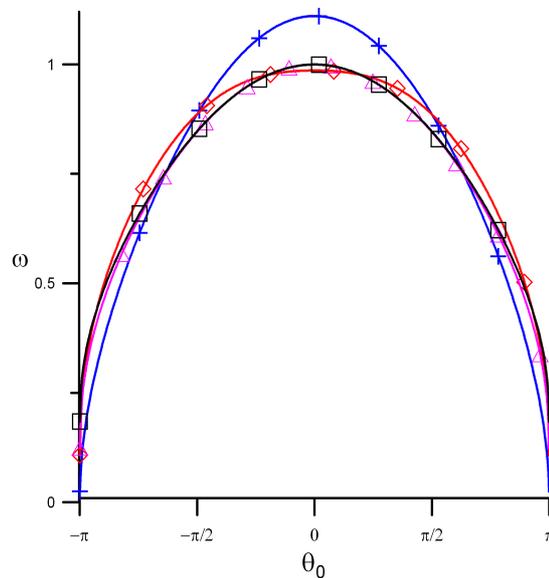


Figura 7.6: Curva frequência-deslocamento inicial do problema  $\ddot{x} + \sin x = 0$ :  $\square$ , RK;  $+$ , eq. (7-22);  $\diamond$ , eq. (7-21);  $\triangle$ , eq. (7-23).

Verifica-se em (7-23) que, para um dado  $\theta_0$ , a frequência é função de potências de  $g/l$ . Na figura 7.7 é apresentada a influência da relação  $g/l$  sobre a frequência da resposta para dois valores de  $\theta_0$  ( $\theta_0 = 85,7^\circ$  e  $\theta_0 = 5^\circ$ ). Quanto mais curto for o pêndulo, maior será sua frequência natural não-linear. Nota-se que, independente dos valores de  $\theta_0$  e  $g/l$ , os dois métodos propostos fornecem resultados bastante precisos.

A seguir, na figura 7.8 são apresentadas algumas trajetórias no plano de fase obtidas com o FT e com integração numérica, considerando  $\theta_0 = 86^\circ$  e  $\theta_0 = 170^\circ$ . Nota-se a boa concordância com a solução numérica mesmo para grandes valores de  $\theta_0$ , próximos da posição invertida, quando se tem um alto grau de não-linearidade.

### 7.3 Pêndulo Elíptico

O pêndulo elíptico consiste de um pêndulo preso a uma massa livre para se mover na horizontal, conforme mostra a figura 7.9. O comportamento caótico do pêndulo elíptico foi estudado por Ge e Lin (2007), [65], entre outros.

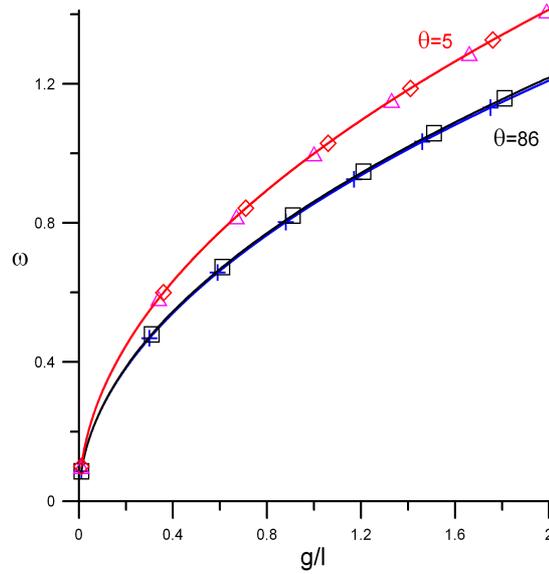


Figura 7.7: Curva frequência- $g/l$ :  $\square$ , RK e  $\theta_0 = 85, 7^\circ$ ;  $+$ , Taylor com 5 termos;  $\diamond$ , RK  $\theta_0 = 5^\circ$ ;  $\triangle$ , FT com cinco harmônicos.

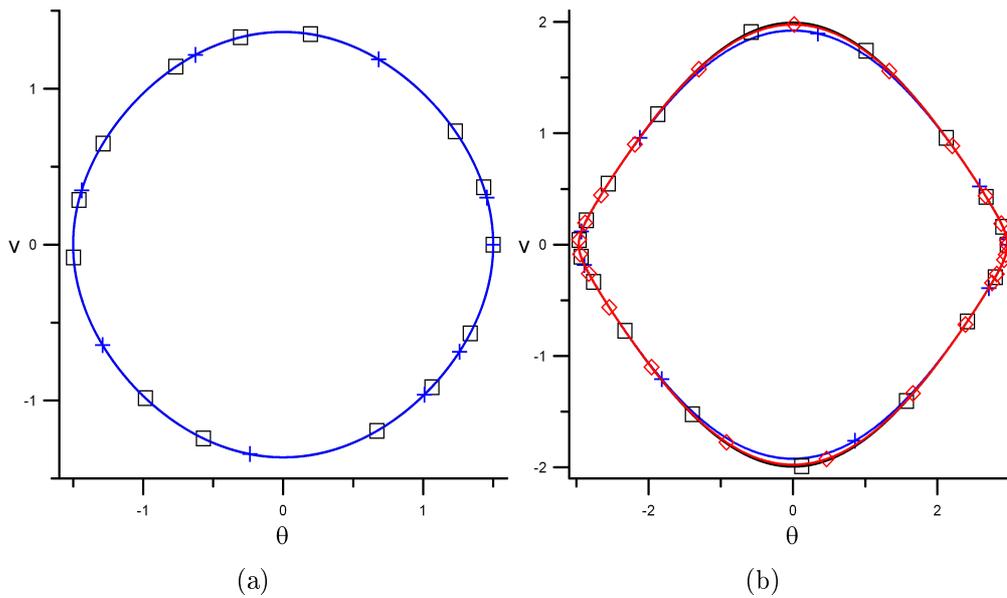


Figura 7.8: Respostas no plano de fase do problema  $\ddot{x} + \sin x = 0$ : (a)  $\theta_0 = 86^\circ$ ,  $\square$ , RK;  $+$ , FT com cinco harmônicos; (b)  $\theta_0 = 170^\circ$ ,  $\square$ , RK;  $+$ , FT com oito harmônicos;  $\diamond$ , FT com doze harmônicos.

As equações de movimento deste tipo de estrutura permitem demonstrar a aplicação dos métodos de Taylor e Fourier-Taylor para uma não-linearidade envolvendo funções trigonométricas um pouco mais complexa que a presente no pêndulo simples e, também, a aplicação em um exemplo contendo dois graus de liberdade.

As energias cinética e potencial do pêndulo são:

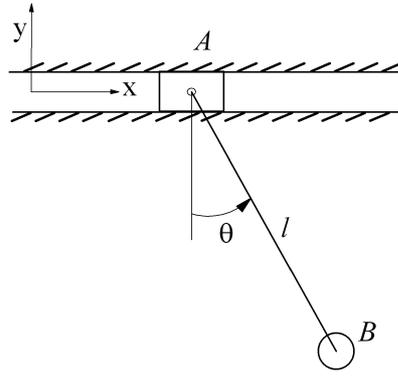


Figura 7.9: Pêndulo elíptico.

$$\bar{T} = \frac{1}{2}(m_A \dot{x}_A^2 + m_B(\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2)) \quad (7-24)$$

$$\Pi = m_B g l (1 - \cos \theta)$$

sendo as coordenadas da massa do pêndulo dadas por:

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + l \sin \theta \\ y_B &= -l \cos \theta \end{aligned} \quad (7-25)$$

Substituindo (7-25) em (7-24) e aplicando o princípio de Hamilton, obtêm-se as equações de movimento

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} &= 0 \\ -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (7-26)$$

onde

$$L = \bar{T} - \Pi$$

isto é,

$$\begin{aligned} (m_A + m_B)\ddot{x}_A - m_B l \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_B l \ddot{\theta} \cos \theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{\ddot{x}_A}{l} \cos \theta &= 0 \end{aligned} \quad (7-27)$$

Manipulando as eqs. de movimento (7-27) de forma a desacoplar as acelerações, elas tornam-se,

$$(m_A + m_B(1 - (\cos \theta)^2))\ddot{x}_A - m_B \sin \theta (l \dot{\theta}^2 + g \cos \theta) = 0 \quad (7-28)$$

$$\left(1 - \frac{m_B}{m_A + m_B} (\cos \theta)^2\right) \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{m_B}{m_A + m_B} \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (7-29)$$

Utilizando o método de Taylor, as soluções aproximadas para os deslocamentos  $x_A(t)$  e  $\theta(t)$  são dadas por duas expansões independentes:

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2!} \ddot{x}_A \Big|_{t=0} t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d\ddot{x}_A}{dt} \Big|_{t=0} t^3 + \frac{1}{4!} \frac{d^2\ddot{x}_A}{dt^2} \Big|_{t=0} t^4 + \dots \\ \theta &= \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \frac{1}{2!} \ddot{\theta} \Big|_{t=0} t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d\ddot{\theta}}{dt} \Big|_{t=0} t^3 + \frac{1}{4!} \frac{d^2\ddot{\theta}}{dt^2} \Big|_{t=0} t^4 + \dots \end{aligned} \quad (7-30)$$

onde  $x_0$  e  $v_0$  são as condições iniciais da massa  $m_A$ , e  $\theta_0$  e  $\dot{\theta}_0$ , as condições iniciais do pêndulo. Os termos  $\ddot{x}_A$  e  $\ddot{\theta}$  são diretamente retirados das eqs. (7-28) e (7-29). Com isso, as séries de potências estão determinadas. Assim tem-se para o deslocamento da massa A para  $v_0 = 0$ ,

$$\begin{aligned} x_A(t) &= x_0 + \frac{gm_2}{2a} (\sin \theta_0 \cos \theta_0) t^2 + \left( -\frac{m_2^3 g^2}{6la^3} \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^6 + \right. \\ &\quad \frac{1}{24la^3} (-4m_2 g^2 a^2 + 7m_2^2 g^2 a) \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^2 + \frac{m_2 g^2}{8la} \sin \theta_0 + \\ &\quad \left. \frac{1}{24la^3} (4m_2^3 g^2 - 8m_2^2 g^2 a) \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^4 \right) t^4 + \dots \end{aligned} \quad (7-31)$$

e para o pêndulo, com  $\dot{\theta}_0 = 0$ ,

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 + \left( -\frac{g}{2l} \sin \theta_0 - \frac{m_2 g}{2la} \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^2 \right) t^2 + \\ &\quad \left( \frac{m_2^3 g^2}{6l^2 a^3} \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^7 + \frac{1}{24l^2 a^3} (g^2 a^3 - 4m_2 g^2 a^2) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \right. \\ &\quad \frac{1}{24l^2 a^3} (9m_2^2 g^2 a - 4m_2^3 g^2) \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^5 + \\ &\quad \left. \frac{1}{24l^2 a^3} (6m_2 g^2 a^2 - 8m_2^2 g^2 a) \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^3 \right) t^4 + \dots \end{aligned} \quad (7-32)$$

onde

$$a = m_1 + m_2 (1 - (\cos \theta_0)^2) \quad (7-33)$$

Substituindo  $t = \pi/(2\omega_1)$  em (7-31) e  $t = \pi/(2\omega_2)$  em (7-32) tem-se as equações que permitem se obter as frequências de cada resposta.

Utilizando uma aproximação com três termos e assumindo que as condições iniciais são  $(0, 0)$  e  $(\theta_0, 0)$ , as seguintes expressões para as frequências são obtidas:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{12la \cos \theta_0} \left( lg \cos \theta_0 (-4m_B^2 (\cos \theta_0)^4 + 8am_B (\cos \theta_0)^4) + \right.$$

$$4a^2(\cos \theta_0)^2 + 4m_B^2(\cos \theta_0)^6 - 7am_B(\cos \theta_0)^2 - 3a^2) \quad (7-34)$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{3\pi}}{12a} \sqrt{\frac{g}{l}} \left( -3a^2m_B(\sin \theta_0)^3 + (3a^3 + 3m_Ba^2) \sin \theta_0 + \right. \\ \left. \left\{ \theta_0(24a^3m_B^3(\sin \theta_0)^7 + (-48a^3m_B^3 - 54a^4m_B^2)(\sin \theta_0)^5 + \right. \right. \\ (36a^5m_B + 60a^4m_B^2 + 24a^3m_B^3)(\sin \theta_0)^3 - (12a^5m_B + 6a^6 + \\ 6a^4m_B^2) \sin \theta_0) \cos \theta_0 + 9a^4m_B^2(\sin \theta_0)^6 - 18(a^4m_B^2 + a^5m_B) \\ \left. \left. (\sin \theta_0)^4 + 9(a^6 + a^4m_B^2 + 2a^5m_B)(\sin \theta_0)^2 \right\}^{1/2} \right)^{1/2} \quad (7-35)$$

sendo  $a$  definido em (7-33).

Utilizando o FT, as soluções aproximadas são escritas como

$$x(t) = c_1 \cos \omega_1 t + c_3 \cos 3\omega_1 t + \dots \\ \theta(t) = d_1 \cos \omega_2 t + d_3 \cos 3\omega_2 t + \dots \quad (7-36)$$

Utilizando dois harmônicos em cada aproximação de (7-36), as soluções aproximadas tornam-se,

$$x(t) = \left( \frac{m_B g}{8a\omega_1^2} \cos \theta_0 \sin \theta_0 + \frac{9}{8} x_A \right) \cos \omega_1 t - \\ \left( \frac{m_B g}{8a\omega_1^2} \cos \theta_0 \sin \theta_0 + \frac{1}{8} x_A \right) \cos 3\omega_1 t \\ \theta(t) = \left( -\frac{m_B g}{8la\omega_2^2} \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^2 - \frac{g}{8l\omega_2^2} \sin \theta_0 + \frac{9}{8} \theta_0 \right) \cos \omega_2 t + \\ \left( \frac{m_B g}{8la\omega_2^2} \sin \theta_0 (\cos \theta_0)^2 + \frac{g}{8l\omega_2^2} \sin \theta_0 - \frac{1}{8} \theta_0 \right) \cos 3\omega_2 t \quad (7-37)$$

e as expressões para as frequências são dadas por

$$\omega_1 = \frac{1}{a\sqrt{10} \cos \theta_0} \sqrt{\frac{g}{l}} (4m_B^2(\cos \theta_0)^6 + (\cos \theta_0)^4(8am_B - 4m_B^2) + \\ (\cos \theta_0)^2(4a^2 - 7am_B) - 3a^2)^{1/2} \\ \omega_2 = \frac{1}{3la} \sqrt{\frac{g}{l\theta_0 a}} \left( -5(\sin \theta_0)^3 a^2 m_B + (5a^3 + 5m_B a^2) \sin \theta_0 + \right. \\ \left( \theta_0(36a^3 m_B^3 (\sin \theta_0)^7 + (-72a^3 m_B^3 - 81a^4 m_B^2) (\sin \theta_0)^5 + \right. \\ (36a^3 m_B^3 + 54a^5 m_B + 90a^4 m_B^2) (\sin \theta_0)^3 - 9(2a^5 m_B + \\ a^6 + a^4 m_B^2) \sin \theta_0) \cos \theta_0 + 25(\sin \theta_0)^6 a^4 m_B^2 - 50(a^4 m_B^2 + \right. \\ \left. \left. (\sin \theta_0)^4 + 9(a^6 + a^4 m_B^2 + 2a^5 m_B) (\sin \theta_0)^2 \right) \right)^{1/2} \quad (7-38)$$

$$a^5 m_B)(\sin \theta_0)^4 + 25(a^6 + a^4 m_B^2 + 2a^5 m_B)(\sin \theta_0)^2)^{1/2})^{1/2} \quad (7-39)$$

Nas figuras 7.10(a) e 7.10(b) é possível compreender o comportamento do pêndulo elíptico sujeito a um deslocamento inicial  $\theta_0$  e demais condições iniciais nulas. Em 7.10(a), a massa  $m_A$  é 100 vezes maior que a massa  $m_B$  e o pêndulo se comporta de forma semelhante ao pêndulo preso em extremidade fixa da seção anterior. Na figura 7.10(b) a razão entre as massas é 1 e os movimentos de pequena amplitude do pêndulo, apresentam períodos bem menores que em 7.10(a). Também pode-se ver que agora, ao se manter o mesmo número de termos na aproximação, perde-se um pouco da precisão, mas mesmo assim, obtém-se com apenas três termos em Taylor ou dois harmônicos com o FT uma boa aproximação com os resultados da integração numérica.

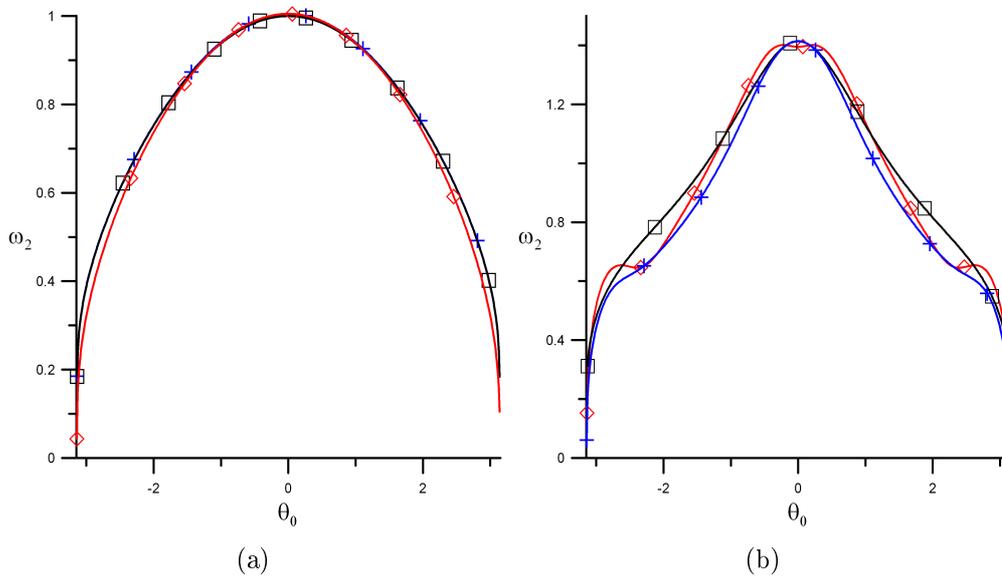


Figura 7.10: Curva  $\omega_2-\theta_0$ : (a)  $m_A = 100, m_B = 1$ .  $\square$ , RK - pêndulo 1g; +, RK - pêndulo 2g;  $\diamond$ , FT com dois harmônicos. (b)  $m_A = 1, m_B = 1$ .  $\square$ , RK; +, FT com dois harmônicos, eq. (7-39);  $\diamond$ , Taylor com três termos, eq. (7-35).

### 7.4

#### Viga com não-linearidades não-polinomiais

A equação da viga com não-linearidades mais completas,

$$10m\ddot{x} + \left( \frac{\pi^8}{800}x^5 - \pi^6x^3 + 200\pi^4x \right) \frac{i}{(x^2\pi^2 - 400)^{5/2}}EI + \frac{40P}{\pi x} \left( \text{EllipticE}\left\{ \frac{\pi}{20} \text{csgn}(x)x \right\} - \text{EllipticK}\left\{ \frac{\pi}{20} \text{csgn}(x)x \right\} \right) = \frac{40}{\pi}q \quad (7-40)$$

obtida na seção 2.5, não pode ser resolvida pelos métodos convencionais.

Utilizando o método de Taylor, obtém-se como aproximação,

$$\begin{aligned}
 x = x_0 + \frac{2P}{mx_0\pi} & \left( \text{EllipticK}\left(\frac{\pi}{20}x_0\right) - \text{EllipticE}\left(\frac{\pi}{20}x_0\right) + \right. \\
 & \frac{iEI}{m(x_0^2\pi^2 - 400)^{5/2}} \left( -10x_0\pi^4 + \frac{\pi^6}{20}x_0^3 - \frac{\pi^8}{16000}x_0^5 \right) + \\
 & \left. \frac{2q}{m\pi} \right) t^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{7-41}$$

A figura 7.11 exibe a convergência da solução aproximada a medida que mais termos são adicionados em (7-41), sendo estas comparadas com a integração numérica no tempo. Verifica-se uma rápida convergência até  $t = T/4$ , o que permite obter uma solução analítica precisa com poucos termos.

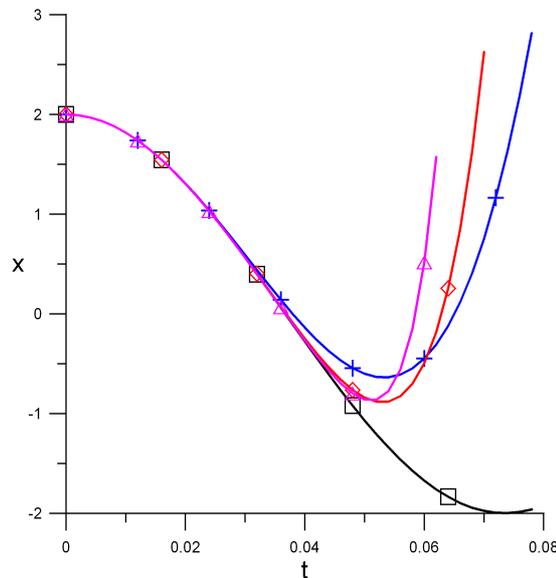


Figura 7.11: Solução no tempo da eq. (7-40) com os seguintes parâmetros:  $x_0 = 2$ ,  $P = 69311, 51$ ,  $EI = 5672067$ ,  $q = 0$  e  $m = 1$ .  $\square$ , RK; +, aproximação com 3 termos;  $\diamond$ , 5 termos;  $\triangle$ , 7 termos.

A figura 7.12 exibe a curva frequência-deslocamento inicial obtida com algumas aproximações.

### 7.5

#### Arco sujeito a uma carga constante aplicada de forma súbita

O problema da flambagem dinâmica ou escape de um vale potencial, de um arco abaulado foi estudado por Lin e Bradford (2008) [66] entre outros. Através

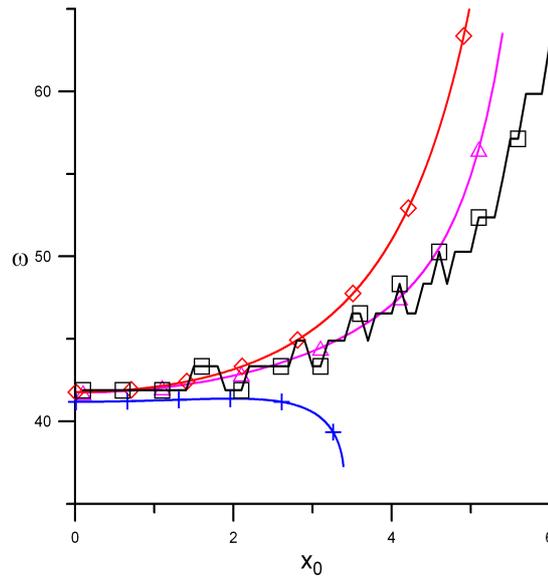


Figura 7.12: Curva frequência-deslocamento inicial do problema (7-40) com os seguintes parâmetros:  $P = 69311,51$ ,  $EI = 5672067$ ,  $q = 0$  e  $m = 1$ .  $\square$ , RK;  $+$ , Taylor com três termos;  $\diamond$ , Taylor com quatro termos;  $\triangle$ , FT com três harmônicos.

do princípio da conservação de energia eles determinaram a carga constante  $q$ , que aplicada de forma súbita, faz com que ocorra a flambagem dinâmica do modelo simplificado da figura 7.13.

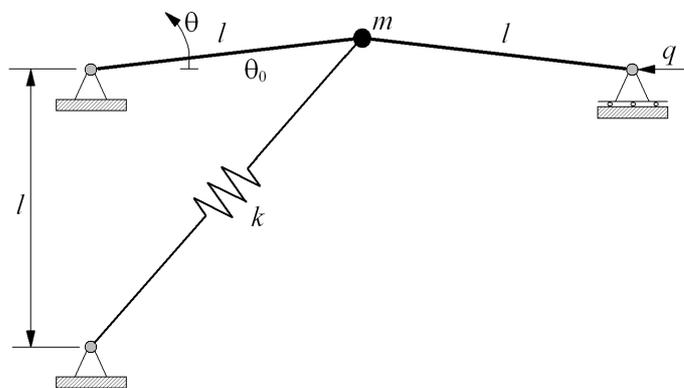


Figura 7.13: Sistema idealizado com um grau de liberdade.

A energia potencial total do problema, escrita na forma adimensional, é dada por

$$\frac{\Pi}{kl^2} = (\sqrt{1 + \sin \theta} - \sqrt{1 + \sin \theta_0})^2 - q(\cos \theta_0 - \cos \theta) \quad (7-42)$$

sendo  $\theta_0$  a imperfeição inicial.

A energia cinética adimensional é dada por

$$\bar{T} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \tag{7-43}$$

Subtraindo (7-42) de (7-43) tem-se o Lagrangiano. Aplicando o cálculo variacional, encontra-se a seguinte equação de movimento

$$\ddot{\theta} + \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \sin \theta}}(\sqrt{1 + \sin \theta} - \sqrt{1 + \sin \theta_0}) - q \sin \theta = 0 \tag{7-44}$$

Aplicando o princípio da energia potencial estacionária encontra-se os pontos de equilíbrio correspondentes a cada nível do carregamento horizontal  $q$ . Estes pontos de equilíbrio são os atratores das oscilações. Para pequenos valores de carregamento tem-se 3 pontos de equilíbrio, sendo dois estáveis. Assim, a estrutura irá oscilar em torno da configuração de equilíbrio mais próxima da configuração inicial  $\theta_0$ . Já para valores maiores da carga  $q$ , tem-se apenas um único ponto de equilíbrio estável, sendo assim, a oscilação ocorre em outro vale potencial e a amplitude da resposta é muito mais ampla, como mostrado nas figuras 7.14(a) e 7.14(b).

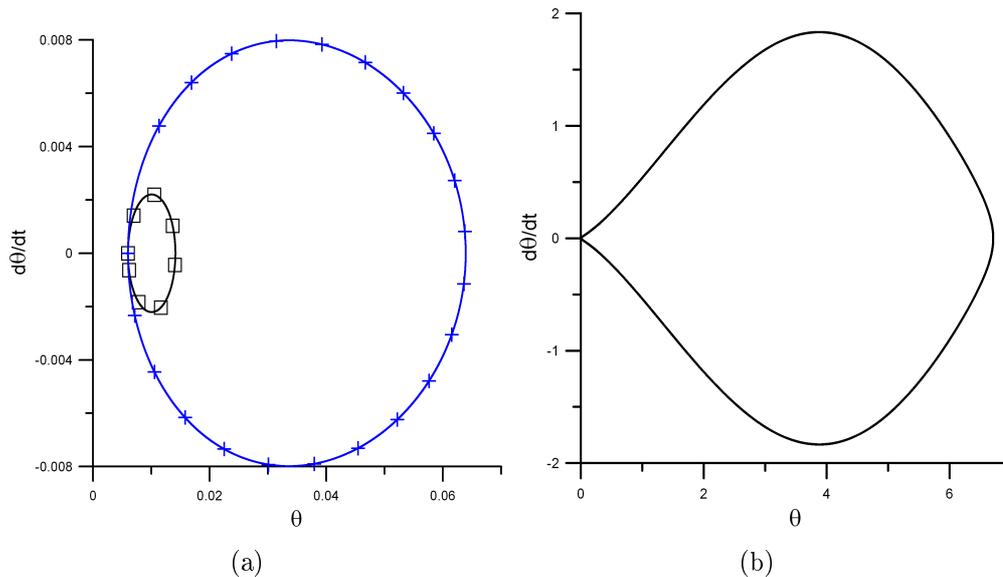


Figura 7.14: Respostas no plano fase: (a)  $\square$ ,  $q = 0, 2$ ;  $+$ ,  $q = 0, 42$ ; (b)  $q = 0, 6$

As soluções aproximadas permitem obter a curva freqüência-deslocamento do problema.

Escrevendo a solução em série de Taylor e considerando que as condições iniciais são  $\theta(0) = \theta_0$  e  $\dot{\theta}(0) = 0$ , tem-se

$$\theta(\tau) = \theta_0 + \frac{q}{2} \sin \theta_0 \tau^2 + \left(\frac{q}{48} - \frac{q}{48} (\cos \theta_0)^2\right) \tau^4 + \left(\frac{q^2}{24} \cos \theta_0 - \frac{q}{48}\right) \sin \theta_0 \tau^4 + \dots \tag{7-45}$$

e aplicando a propriedade de simetria  $\dot{\theta}(T/2) = 0$ , chega-se a seguinte relação frequência-amplitude,

$$\pi q \delta^3 \sin \theta_0 + ((2q \cos \theta_0 - 1) \sin \theta_0 + (1 - (\cos \theta_0)^2)) \frac{\pi^3 q}{12} \delta = 0 \quad (7-46)$$

Já utilizando o FT com a seguinte solução aproximada,

$$\theta(\tau) = c_0 + c_1 \cos \delta\tau + c_2 \cos 2\delta\tau$$

obtém-se

$$\begin{aligned} \theta(\tau) = & \frac{1}{\delta^4} \left( -\frac{1}{8} q (\cos \theta_0)^2 + \frac{1}{4} q^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \frac{1}{24} (30q\delta^2 \sin \theta_0 + \right. \\ & \left. 24\theta_0\delta^4 - 3q(\sin \theta_0 - 1)) + \left\{ \frac{1}{6} q (\cos \theta_0)^2 - \frac{1}{3} q^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \right. \right. \\ & \left. \frac{1}{24} (32q\delta^2 \sin \theta_0 - 4q \sin \theta_0 + 4q) \right\} \cos \delta\tau + \left\{ -\frac{1}{24} q (\cos \theta_0)^2 + \right. \\ & \left. \frac{1}{12} q^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - \frac{1}{24} (-q - 2q\delta^2 \sin \theta_0 + q \sin \theta_0) \right\} \cos 2\delta\tau \end{aligned} \quad (7-47)$$

e a seguinte relação frequência-amplitude

$$\begin{aligned} & \frac{q}{4} (-13(\cos \theta_0)^3 q + 16q^2(\cos \theta_0)^2 \sin \theta_0 - (\cos \theta_0)^2 \sin \theta_0 + 2(\cos \theta_0)^2 - \\ & 4q \cos \theta_0 \sin \theta_0 + 13q \cos \theta_0 - 2 - 12q^2 \sin \theta_0 + 2 \sin \theta_0) \\ & = -\frac{1}{2} (10q \cos \theta_0 \sin \theta_0 - 5 \sin \theta_0 + 8\delta^2 \sin \theta_0 - 5(\cos \theta_0)^2 + 5) q \delta^2 \end{aligned} \quad (7-48)$$

A figura 7.15 mostra as curvas frequência-carregamento obtidas com as eqs. (7-46) e (7-48) para  $\theta_0 = 0,006$  e também soluções de mais alta ordem obtidas com o método de Taylor. Pode-se ver que o FT apresenta resultados coincidentes com a integração numérica tendo apenas dois harmônicos na aproximação enquanto que o método de Taylor precisa de um número bem maior de termos. Também pode-se ver através da solução obtida com integração numérica que em  $q \approx 0,42$  ocorre uma mudança drástica na curva  $\delta - q$ , que é justamente a mudança de vale potencial já mostrada na figura 7.14.

## 7.6

### Equação de Mathieu não-linear

A eq. (5-10), obtida ao se aplicar uma perturbação  $\epsilon$  à solução periódica  $x(t)$  da equação de Duffing, será agora utilizada para estudar a estabilidade de  $x(t)$ .

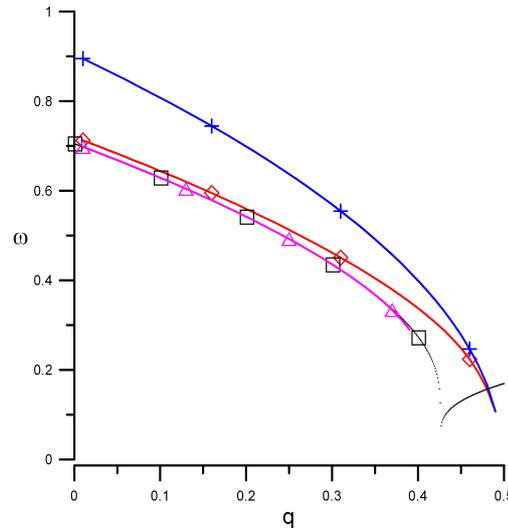


Figura 7.15: Curva frequência-carregamento. □, RK; +, eq. (7-46); ◇, Taylor com 5 termos; △, eq. (7-48).

Retirando os termos que se anulam em (5-10), tem-se

$$\ddot{\epsilon} + 2\zeta\omega_0\dot{\epsilon} + (\omega_0^2 + 3\beta x^2)\epsilon + 3\beta x\epsilon^2 + \beta\epsilon^3 = 0 \tag{7-49}$$

A eq. (7-49) poderá ter um único ponto fixo localizado em (0, 0), ou dois, ou quatro e assim por diante, dependendo dos parâmetros. Assim, quando houver um único ponto fixo, qualquer condição inicial faz com que a perturbação atinja o ponto de equilíbrio (0, 0), o que corresponde a solução perturbada  $x(t) + \epsilon(t)$  voltar para sua trajetória  $x(t)$ , conseqüentemente  $x(t)$  é estável. Quando houver mais de um ponto fixo, após o transiente ser eliminado, a perturbação  $\epsilon$  terá uma trajetória fechada, o que impede, portanto, que  $x(t) + \epsilon(t)$  volte para sua trajetória  $x(t)$  original. Nestes casos, a trajetória  $x(t)$  é dita instável. Desta forma, as incógnitas do problema (7-49) são as coordenadas  $\epsilon_0$  e  $v_0$  do ponto fixo associado a trajetória de  $\epsilon(t)$  e a frequência da resposta,  $\omega$ .

Para a análise da estabilidade das soluções periódicas do problema

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = F \cos \Omega t \tag{7-50}$$

será primeiramente utilizado o HBM para se obter as soluções periódicas, pois a solução com um único harmônico já apresenta grande precisão para a região de primeira ressonância.

Apesar de (7-50) não ser amortecida, na equação da perturbação será inserido um amortecimento  $\zeta = 0.1$  apenas para que as respostas em  $\epsilon$  sejam trajetórias periódicas ou assintoticamente estáveis.

Para os parâmetros  $\omega_0 = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $F = 1$  e  $\Omega = 2$ , as soluções da eq. (7-50)

são,

$$x_1(t) = 2,14949 \cos 2t \quad (7-51)$$

$$x_2(t) = -1,80603 \cos 2t \quad (7-52)$$

$$x_3(t) = -0,34346 \cos 2t \quad (7-53)$$

Sabendo-se que as trajetórias (7-51) e (7-53) são estáveis e que (7-52) é instável, o que se espera é que seja obtido um ponto fixo somente para a trajetória (7-52).

Utilizando o FT com uma solução contendo três pares de harmônicos,

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & c_1 \cos \omega t + d_1 \sin \omega t + c_3 \cos 3\omega t + d_3 \sin 3\omega t + \\ & c_5 \cos 5\omega t + d_5 \sin 5\omega t \end{aligned} \quad (7-54)$$

as primeiras equações envolvendo  $\epsilon$  e suas derivadas são utilizadas para montar o sistema linear que fornece as amplitudes  $c_i$  e  $d_i$  presentes em (7-54). As demais equações são não-lineares em  $\epsilon_0$ ,  $v_0$  e  $\omega$ , incógnitas que são obtidas iterativamente.

Ao se estudar a estabilidade da trajetória dada por (7-52), obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 1,4341 \\ v_0 &= -0,4137 \\ \omega &= 2,0234 \end{aligned} \quad (7-55)$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & 1,393790160 \cos \omega t - 0,199121037 \sin \omega t + \\ & 0,040367228 \cos 3\omega t - 0,001837654 \sin 3\omega t + \\ & 0,000031505 \cos 5\omega t + 0,000035855 \sin 5\omega t \end{aligned} \quad (7-56)$$

Já ao se utilizar uma aproximação com 5 pares de harmônicos em (7-54), obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 1,4718 \\ v_0 &= -0,4149 \\ \omega &= 1,9999 \end{aligned} \quad (7-57)$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon(t) = & 1,429458773 \cos \omega t - 0,201623570 \sin \omega t + \\ & 0,042296489 \cos 3\omega t - 0,002021651 \sin 3\omega t + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &0,000031489 \cos 5\omega t + 0,000050007 \sin 5\omega t - \\
 &0,000002798 \cos 7\omega t - 0,000001095 \sin 7\omega t + \\
 &0,000000061 \cos 9\omega t - 0,000000011 \sin 9\omega t
 \end{aligned} \tag{7-58}$$

A figura 7.16 mostra no espaço de fase as trajetórias dadas através das eqs. (7-56), (7-58) e a trajetória obtida com a integração numérica da eq. (7-49), tendo como condições iniciais  $\epsilon_0$  e  $v_0$  dados em (7-57) e  $x(t)$  sendo dado por (7-52). Pode-se ver que a integração numérica também fornece uma trajetória fechada, sendo coincidente com a aproximação que possui cinco pares de harmônicos.

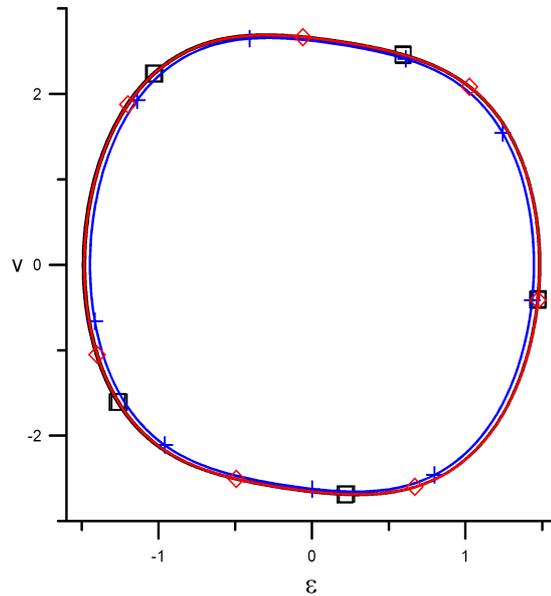


Figura 7.16: Espaço de fase do problema  $\ddot{\epsilon} + 0,2\dot{\epsilon} + (1 + 9,78519(\cos 2t)^2)\epsilon - (5,41808 \cos 2t)\epsilon^2 + \epsilon^3 = 0$ .  $\square$ , RK; +, FT com três pares de harmônicos;  $\diamond$ , FT com cinco pares de harmônicos.

## 8

### Conclusões

Neste trabalho foram apresentados os principais métodos aproximados e suas variantes para a resolução de equações não-lineares de movimento. Todos os métodos foram descritos em detalhes, tendo a equação de Duffing como exemplo de aplicação. Esta equação foi escolhida por representar de forma aproximada, através de modelos de dimensão reduzida, o movimento de vários sistemas estruturais tais como vigas, placas e pórticos simétricos, como ilustrado no capítulo 2.

Os métodos encontrados na literatura se dividem em duas classes, os métodos de perturbação, como o método de Lindstedt-Poincaré, o método das múltiplas escalas, e os métodos baseados em expansões de harmônicos, como o método do Balanço Harmônico e o método de Galerkin-Urabe. Na literatura técnica comenta-se sobre as vantagens e desvantagens de cada método. As análises mostram que em todos os métodos existem casos onde a solução diverge ou se obtém respostas inconsistentes. Tem-se também que a dificuldade de aplicação dos métodos cresce à medida que cresce a não-linearidade. Os exemplos apresentados na tese ilustram vários destes casos.

A principal desvantagem dos métodos de perturbação é que estes são bastante trabalhosos, envolvendo a solução de uma série de equações diferenciais, e só podem ser aplicados para não-linearidades pequenas ou moderadas.

O método do Balanço Harmônico, que é o método aproximado mais utilizado na literatura, pode ser aplicado para qualquer grau de não-linearidade. Porém, à medida que cresce a não-linearidade, são necessários mais harmônicos para se garantir a precisão da resposta. Para a obtenção das amplitudes modais, necessita-se resolver um sistema de equações não-lineares cuja solução apresenta em geral dificuldades em virtude da sensibilidade do método de Newton-Raphson aos valores escolhidos para o início do processo iterativo, podendo levar a soluções divergentes ou fisicamente inexistentes. Em casos onde há pontos limite, é necessário o uso de métodos de continuação. Também, neste método, não se obtém uma expressão analítica para as amplitudes modais, o que dificulta a análise paramétrica. O método de Galerkin-Urabe tem as mes-

mas características que o método do Balanço Harmônico.

Estes métodos foram desenvolvidos para equações envolvendo não-linearidades polinomiais, em particular equações com não-linearidades cúbicas e quadráticas. A extensão destes métodos a problemas envolvendo outros tipos de não-linearidade é usualmente impossível ou exige um grande número de manipulações matemáticas que são específicas para cada tipo de problema.

Nesta tese são apresentadas duas metodologias alternativas para análise de sistemas dinâmicos não-lineares que podem ser usadas para problemas envolvendo diversos tipos de não-linearidade e que são de fácil aplicação prática.

O primeiro método consiste em escrever a solução do problema não-linear em séries de Taylor para, através da utilização das propriedades de simetria da resposta no espaço de fase, se obter a relação frequência-amplitude em problemas de vibração livre ou os pontos fixos da resposta permanente em problemas de vibração forçada, permitindo desta forma se obter as curvas de ressonância. Os coeficientes da série de Taylor são obtidos de forma recursiva, sendo escritos em função das condições iniciais. Mostra-se, para o caso de vibração livre, a correspondência que existe entre este método, aqui denominado método de Taylor, com o método de Lindstedt-Poincaré. O desenvolvimento teórico mostra que a não-linearidade de uma dada resposta pode ser mensurada por um único parâmetro, envolvendo a frequência natural, o deslocamento máximo e o coeficiente do termo não-linear.

Exemplos envolvendo a equação de Duffing com elevada não-linearidade, mostram que o método pode fornecer soluções analíticas precisas, quando comparadas com a solução obtida por integração numérica, com um pequeno número de termos. Estas soluções analíticas permitem a identificação da influência de cada parâmetro na resposta do sistema, facilitando a análise paramétrica.

O segundo método consiste no uso de séries de Taylor e séries de Fourier, sendo aqui denominado método de Fourier-Taylor. Neste método iguala-se cada termo da solução expandida em série de Taylor ao termo correspondente da série de Taylor de uma série de Fourier com um dado número de harmônicos. Outra alternativa consiste em simplesmente escrever diretamente a solução em série de Fourier e obter os coeficientes da série avaliando as derivadas da resposta no instante inicial. Para a determinação das amplitudes modais, obtém-se um sistema de equações lineares, o que é uma vantagem com relação ao método do Balanço Harmônico, onde as amplitudes são obtidas a partir da solução de um sistema não-linear. Assim, pode-se obter, usando-se programas de álgebra simbólica, uma solução analítica para as amplitudes

modais, facilitando a análise paramétrica.

Este método não utiliza as propriedades de simetria do espaço de fase. A vantagem sobre a primeira metodologia é que neste caso obtém-se uma solução capaz de representar com exatidão a resposta periódica em qualquer instante de tempo. Com isto, supera-se o principal problema da série de Taylor que é a divergência da resposta após um certo instante de tempo. Assim, nos casos em que a série de Taylor não possui um número suficiente de termos para convergir até um dado ponto de simetria, a correspondente solução em série de Fourier desta série de Taylor permite sempre encontrar resultados para a frequência da resposta ou coordenadas dos pontos fixos.

Uma forma de melhorar os resultados mantendo fixo o número de harmônicos é a utilização do método de Galerkin para minimizar o resíduo provocado pela solução aproximada. Desta forma são alteradas as equações que permitem obter o ponto fixo ou a frequência da resposta. Diversos exemplos envolvendo comparações com métodos existentes e com os resultados obtidos por integração numérica, demonstram a convergência das soluções e a qualidade dos resultados obtidos.

Vários exemplos envolvendo não-linearidades não-polinomiais, em particular não-linearidades descritas por funções transcendentais e por expoentes fracionários, demonstram que os métodos propostos permitem a obtenção de soluções analíticas precisas, inclusive em problemas envolvendo alto grau de não-linearidade e problemas de instabilidade.

Em resumo, como principais vantagens em relações aos demais métodos, pode-se citar que os métodos de Taylor e Fourier-Taylor são aplicáveis para diversos tipos de não-linearidade, como demonstrado no capítulo anterior, e fornecem soluções em série de Fourier analíticas, a partir da resolução de um sistema linear.

Como continuação do presente projeto de pesquisa, sugere-se:

Aprofundar a comparação entre os métodos existentes e os métodos propostos nesta tese, o que pode levar a aprimoramentos nas metodologias, em particular nos problemas envolvendo vibração forçada amortecida.

Usar as ferramentas desenvolvidas neste trabalho para a análise de diversos problemas não-lineares encontrados na área de estruturas, em particular aqueles envolvendo não-linearidades não-polinomiais.

A aplicação dos métodos propostos a sistemas com vários graus de liberdade.

- 1 GOTTLIEB, H. P. W. Frequencies of oscillators with fractional-power non-linearities. *Journal of Sound and Vibration*, v. 261, p. 557–566, 2003.
- 2 REN, Y. The receptance-based perturbative multi-harmonic balance method for the calculation of the aperiodic steady state response of non-linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 181, n. 2, p. 331–339, 1995.
- 3 LAU, S. L.; YUEN, S. W. Solution diagram of non-linear dynamic systems by the ihb method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 167, n. 2, p. 303–316, 1993.
- 4 XU, L.; LU, M. W.; CAO, Q. Bifurcation and chaos of a harmonically excited oscillator with both stiffness and viscous damping piecewise linearities by incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 264, p. 873–882, 2003.
- 5 MICKENS, R. E. Comments on the method of harmonic balance. *Journal of Sound and Vibration*, v. 94, n. 3, p. 456–460, 1984.
- 6 NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B. *Applied Nonlinear Dynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1995.
- 7 PARKER, T. S.; CHUA, L. O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. New York: Springer-Verlag, 1991.
- 8 LEWANDOESKI, R. Non-linear, steady-state vibration of structures by harmonic balance method/finite element method. *Computer & Structures*, v. 44, p. 287–296, 1992.
- 9 TONGUE, B. H. Characteristics of numerical simulations of chaotic systems. *American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, v. 54, p. 695–699, 1987.
- 10 LEUNG, A. Y. T. Rigorous studies of a duffing oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, v. 149, n. 1, p. 147–149, 1991.
- 11 LEUNG, A. Y. T.; FUNG, T. C. Geometrically non-linear vibration of spinning structures by finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 139, n. 1, p. 43–62, 1990.

- 12 HASSAN, A.; BURTON, T. D. Extraneous solutions predicted by the harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 182, n. 4, p. 523–539, 1995.
- 13 RAPP, P. E.; MEES, A. I. Spurious predictions of limit cycles in a non-linear feedback system by the describing function method. *International Journal Control*, v. 26, n. 6, p. 821–829, 1977.
- 14 CHEUNG, Y. K.; CHEN, S. H.; LAU, S. L. Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 140, n. 2, p. 273–286, 1990.
- 15 LAU, S. L.; CHEUNG, Y. K.; WU, S. Incremental harmonic balance method with multiple time scales for aperiodic vibration of nonlinear systems. *Journal of Sound and Vibration*, v. 50, p. 871–876, 1983.
- 16 WONG, C. W.; ZHANG, W. S.; LAU, S. L. Periodic forced vibration of unsymmetrical piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 149, n. 1, p. 91–105, 1991.
- 17 FERRI, A. A. On the equivalence of the incremental harmonic balance method and the harmonic balance-newton raphson method. *Journal of Applied Mechanics*, v. 53, p. 455–457, 1986.
- 18 LEWANDOWSKI, R. Computational formulation for periodic vibration of geometrically nonlinear structures-part 1: theoretical background. *International Journal of Solids Structures*, v. 34, n. 15, p. 1925–1947, 1997.
- 19 HASSAN, A. On the local stability of the approximate harmonic balance solutions. *Nonlinear Dynamics*, v. 10, p. 105–133, 1996.
- 20 HAMDAN, M. N.; AL-QAISIA, A. A.; AL-BEDDOOR, B. O. Comparison of analytical techniques for nonlinear vibrations of a parametrically excited cantilever. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 43, p. 1521–1542, 2001.
- 21 HASSAN, A. A second comparison of two higher order perturbation schemes. *Journal of Sound and Vibration*, v. 184, n. 5, p. 907–928, 1995.
- 22 HAMDAN, M. N.; BURTON, T. D. On the steady state response and stability of non-linear oscillators using harmonic balance. *Journal of Sound and Vibration*, v. 166, n. 2, p. 255–266, 1993.
- 23 WU, B. S.; LIM, C. W.; MA, Y. F. Analytical approximation to large-amplitude oscillation of a non-linear conservative system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 38, p. 1037–1043, 2003.
- 24 NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. *Nonlinear Oscillations*. New York: John Wiley & Sons, 1979.

- 25 MICKENS, R. E.; COOPER, K. Generalized harmonic balance/numerical method for determining analytical approximations to the periodic solutions of the  $x^{4/3}$  potential. *Journal of Sound and Vibration*, v. 250, n. 5, p. 951–954, 2002.
- 26 GONÇALVES, P. B.; MACHADO, V. L. S. S. A computational strategy for determining bifurcation diagrams for non-linear oscillating systems. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, v. 19, n. 4, p. 344–352, 1995.
- 27 DOOREN, R. V.; JANSSEN, H. A continuation algorithm for discovering new chaotic motions in forced duffing systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 66, p. 527–541, 1996.
- 28 NAYFEH, A. H.; CHIN, C.-M. *Perturbation Methods with Maple*. [S.l.]: Dynamics Press, Inc., 1999.
- 29 SANCHEZ, N. E. The method of multiple scales: Asymptotic solutions and normal forms for nonlinear oscillatory problems. *Journal Symbolic Computation*, v. 19, p. 344–352, 1996.
- 30 HISTORY/MATHEMATICIANS/EULER.HTML <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/>. 7/5/2005.
- 31 HTTP://WWW.DANG.SE/TEXTER/MOON.TXT. 7/5/2005.
- 32 HAGEDON, P. *Oscilações não-lineares*. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1984.
- 33 GIORGILLI, A. Small denominators and the exponential stability: from poincaré to the present time. *Journal of Applied Mechanics*, v. 53, p. 455–457, 1998.
- 34 NAYFEH, A. H. *Perturbation Methods*. New York: John Wiley & Sons, 1973.
- 35 VALÉRY, R. R. Averaging method for strongly non-linear oscillators with periodic excitations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 29, p. 737–753, 1994.
- 36 NAYFEH, A. H. *Problems in Perturbation*. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- 37 HASSAN, A. The kbm derivative expansion method is equivalent to the multiple-time-scales method. *js*, v. 200, n. 4, p. 433–440, 1997.
- 38 MINORU, U.; RETTER, A. Numerical computation of nonlinear forced oscillations by galerkin's procedure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 14, p. 107–140, 1966.
- 39 NAYFEH, A. H. The response of single degree of freedom systems with quadratic and cubic non-linearities to a subharmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, v. 89, n. 4, p. 457–470, 1983.

- 40 ATADAN, A. S.; HUSEYIN, K. An intrinsic method of harmonic analysis for non-linear oscillations (a perturbation technique). *Journal of Sound and Vibration*, v. 95, n. 4, p. 525–530, 1984.
- 41 BAJKOWSKI, J.; SZEMPLINSKA-STUPNICKA, W. Internal resonances effects - simulation versus analytical methods results. *Journal of Sound and Vibration*, v. 104, n. 2, p. 259–275, 1986.
- 42 BAJKOWSKI, J.; SZEMPLINSKA-STUPNICKA, W. The 1/2 subharmonic resonance and its transition to chaotic motion in a non-linear oscillator. *International Journal of Non-Linear Mechanics* v. 21, n. 5, p. 401–419, 1986.
- 43 NAYFEH, A. H.; ZAVODNEY, L. D. The response of two-degree-of-freedom systems with quadratic non-linearities to a combination parametric resonance. *Journal of Sound and Vibration*, v. 107, n. 2, p. 329–350, 1986.
- 44 LEUNG, A. Y. T.; FUNG, T. C. Construction of chaotic regions. *Journal of Sound and Vibration*, v. 131, n. 3, p. 445–455, 1989.
- 45 NAYFEH, A. H.; ZAVODNEY, L. D.; SANCHEZ, N. E. The response of a single-degree-of-freedom system with quadratic and cubic non-linearities to a principal parametric resonance. *Journal of Sound and Vibration*, v. 129, n. 3, p. 417–442, 1989.
- 46 VIRGIN, L. N.; CARTEE, L. A. A note on the escape from a potential well. *International Journal of Non-Linear Mechanics* v. 26, n. 3/4, p. 449–452, 1991.
- 47 BURTON, T. D.; RAHMAN, Z. On the multi-scale analysis of strongly non-linear forced oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 21, n. 2, p. 135–146, 1986.
- 48 SARMA, M. S. Applicability of the perturbation technique to the period solution of  $\ddot{x} + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 = 0$ . *js*, v. 180, p. 177–184, 1995.
- 49 CHEN, S. H.; CHEUNG, Y. K. An elliptic perturbation method for certain strongly non-linear oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, v. 192, p. 453–464, 1996.
- 50 BLAIR, K. B.; KROUSGRILL, C. M.; N., F. T. Harmonic balance and continuation techniques in the dynamic analysis of duffing's equation. *Journal of Sound and Vibration*, v. 202, n. 5, p. 717–731, 1997.
- 51 FRANCIOSI, C.; TOMASIELLO, S. The use of mathematica for the analysis of strongly nonlinear two-degree-of-freedom systems by means of the modified lindstedt-poincaré method. *js*, v. 211, p. 145–156, 1998.
- 52 CHEN, S. H.; CHEUNG, Y. K. A modified lindstedt-poincaré method for a strongly non-linear two degree-of-freedom system. *js*, v. 193, p. 751–762, 1996.

- 53 KHANIN, R.; CARTMELL, M.; GILBERT, A. A computerised implementation of the multiple scales perturbation method using mathematica. *Computer & Structures*, v. 76, p. 565–575, 2000.
- 54 ANDRIANOV, I.; AWREJCEWICZ, J. A role of initial conditions choice on the results obtained using different perturbation methods. *Journal of Sound and Vibration*, v. 236, n. 1, p. 161–165, 2000.
- 55 AMORE, P.; ARANDA, A.; PACE, A. de; LÓPEZ, J. A. Comparative study of quantum anharmonic potentials. *Physics Letters A*, v. 329, p. 451–458, 2004.
- 56 HU, H. A classical perturbation technique which is valid for large parameters. *Journal of Sound and Vibration*, v. 269, p. 409–412, 2004.
- 57 MICKENS, R. E. Oscillations in an  $x^{4/3}$  potential. *Journal of Sound and Vibration*, v. 246, n. 2, p. 375–378, 2001.
- 58 MICKENS, R. E. Analysis of non-linear oscillators having non-polynomial elastic terms. *Journal of Sound and Vibration*, v. 255, n. 5, p. 789–792, 2002.
- 59 HE, J.-H. Homotopy perturbation technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 178, p. 257–262, 1999.
- 60 HE, J.-H. The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities. *Applied Mathematics and Computation*, v. 151, p. 287–292, 2004.
- 61 HE, J.-H. New interpretation of homotopy perturbation method. *International Journal of Modern Physics B*, v. 20, n. 18, p. 2561–2568, 2006.
- 62 BELÉNDEZ, A.; BELÉNDEZ, T.; MÁRQUEZ, A.; NEIPP, C. Application of he's homotopy perturbation method to conservative truly nonlinear oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, v. 37, p. 770–780, 2008.
- 63 CRAIG, R. R.; KURDILA, A. J. *Fundamentals of structural dynamics*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.
- 64 SWAMY, N. S.; NATARAJA, H. R.; SAI, K. S.; RAO, N. On the periodic solution for  $\ddot{x} + x^{1/(2n+1)} = 0$ . *Journal of Sound and Vibration*, v. 261, p. 952–954, 2003.
- 65 GE, Z. M.; LIN, T. N. Regular and chaotic dynamic analysis and control of an elliptical pendulum on a vibrating basement. *Journal of Sound and Vibration*, v. 230, p. 1045–1068, 2000.
- 66 PI, Y.-L.; BRADFORD, M. A. Dynamic buckling of shallow pin-ended arches under a sudden central concentrated load. *manuscript*.
- 67 DYM, C. L.; SHAMES, I. H. *Solid Mechanics: A Variational Approach*. Tokio: McGraw-Hill, 1973.

- 68 SATHYAMMORTHY, M. *Nonlinear analysis of structures*. Madras, India: C. R. C. Press, 1997.
- 69 CHIA, C. *Nonlinear analysis of plates*. New York: McGraw-Hill, 1980.
- 70 PINTO, O. C. *Controle ativo de vibrações não-lineares de estruturas flexíveis*. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1999.
- 71 BUFFONI, S. *Estudo da Flambagem de Armaduras Longitudinais em Pilares de Concreto Armado*. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2004.
- 72 SOLIMAN, M. S.; GONÇALVES, P. B. Chaotic behavior resulting in transient and steady state instabilities of pressure-loaded shallow spherical shells. *Journal of Sound and Vibration*, v. 259, p. 497–512, 2003.
- 73 BURTON, T. D.; HAMDAN, M. N. Analysis of non-linear autonomous conservative oscillators by a time transformation method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 87, n. 4, p. 543–554, 1983.
- 74 BURTON, T. D. A perturbation method for certain non-linear oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 19, n. 5, p. 397–407, 1984.
- 75 HE, J.-H. A new perturbation technique which is also valid for large parameters. *Journal of Sound and Vibration*, v. 229, n. 5, p. 1257–1263, 2000.
- 76 HU, H.; XIONG, Z. G. Comparison of two Lindsted-Poincaré-type perturbation methods. *Journal of Sound and Vibration*, v. 278, p. 437–444, 2004.
- 77 SANCHEZ, N. E. A view to the new perturbation technique valid for large parameters. *js*, v. 282, p. 1309–1316, 2005.
- 78 NAYFEH, A. H. Resolving controversies in the application of the method of multiple scales and the generalized method of averaging. *Nonlinear Dynamics*, v. 40, p. 61–102, 2005.
- 79 CARRERA, E. A study on arc-length-type methods and their operation failures illustrated by a simple model. *Computer & Structures*, v. 50, n. 2, p. 217–229, 1994.
- 80 CRISFIELD, M. A. A fast incremental-iterative solution procedure that handles snap-through. *Computer & Structures*, v. 13, p. 55–62, 1981.
- 81 RICHARDS, D. *Advanced Mathematical Methods with Maple*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- 82 LAU, S. L.; CHEUNG, Y. K.; WU, S. Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic systems. *Journal of Applied Mechanics*, v. 48, p. 959–964, 1981.

- 83 RAND, R. H. Lecture notes on nonlinear vibrations. 2003.
- 84 THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B. *Nonlinear dynamics and chaos*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 1986.
- 85 HAYASHI, C. *Nonlinear Oscillations in Physical Systems*. New Jersey: Princeton University Press, 1964.
- 86 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (eighth ed.)*. New York: Wiley Inc., 2005.
- 87 KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, 1993.
- 88 QAISI, M. I. A power series approach for the study of periodic motion. *Journal of Sound and Vibration*, v. 196, p. 401–406, 1996.
- 89 MICKENS, R. E. Iteration method solutions for conservative and limit-cycle  $x^{1/3}$  force oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, v. 292, p. 964–968, 2006.
- 90 HORSSSEN, W. van. On the periods of the periodic solutions of the non-linear oscillator equation. *Journal of Sound and Vibration*, v. 260, p. 961–964, 2003.
- 91 AWREJCEWICZ, J.; ANDRIANOV, I. V. Oscillations of non-linear system with restoring force close to  $\text{sign}(x)$ . *Journal of Sound and Vibration*, v. 252, p. 962–966, 2002.
- 92 LIPSCOMB, T.; MICKENS, R. E. Exact solution to the antisymmetric, constant force oscillator equation. *Journal of Sound and Vibration*, v. 169, p. 138–140, 1994.
- 93 PILIPCHUK, V. N. An explicit form general solution for oscillators with a non-smooth restoring force  $\ddot{x} + \text{sign}(x)f(x) = 0$ . *Journal of Sound and Vibration*, v. 226, p. 795–798, 1999.
- 94 POTTI, P. K. G.; SARMA, M. S.; RAO, B. N. On the exact periodic solution for  $\ddot{x} + \text{sign}(x) = 0$ . *Journal of Sound and Vibration*, v. 220, p. 380–383, 1999.
- 95 HU, H.; XIONG, Z. G. Oscillations in a  $x^{(2m+2)/(2n+1)}$  potential. *Journal of Sound and Vibration*, v. 259, p. 977–980, 2003.
- 96 HU, H. Solutions of nonlinear oscillators with fractional powers by an iteration procedure. *Journal of Sound and Vibration*, v. 294, p. 608–614, 2006.
- 97 RAMOS, J. I. Piecewise-linearized methods for oscillators with fractional-power nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration*, v. 300, p. 502–521, 2007.

- 98 BELÉNDEZ, A.; PASCUAL, C.; ORTUÑO, M.; BELÉNDEZ, T.; GAL-LEGO. Application of he's homotopy perturbation method to obtain higher-order approximations to a nonlinear oscillator with discontinuities. *Nonlinear Analysis: Real world Applications*, 2007.

## A

### Programa em Maple: Lindsted Poincaré modificado - vibração forçada

```
> restart;
Ordem da solução
> nt:=2;
nt := 2
```

#### A.1

##### Rotinas do método da perturbação

```
> solucao_aproximada_frequencia:=proc(pot1,pot2,epsilon)
> global eq,omega,omega0,_X,i,__omega;
> __omega:=Omega^pot1;
> for i from 1 to pot2 do
> __omega:=__omega-epsilon^i*_e[i];
> od;
> eq:=subs(omega0^pot1=__omega,eq);
> end proc:
> solucao_aproximada_tempo:=proc(pot,epsilon)
> global eq,tau,X,XX,__x,i;
> X:=0: XX:=0:
> for i from 0 to pot do
> X:=X+epsilon^i*__x[i](t);
> XX:=XX+epsilon^i*__x[i];
> od;
> eq:=subs(x(t)=X,eq);
> end proc:
```

```

> monta_equacoes:=proc(pot)
> global eq,_eq; local i,j,AA,eq1;
> eq1:=expand(eq);
> for i from pot by -1 to 1 do
> eq1:=subs((mu^i)=AA[i],eq1): _eq[i]:=diff(eq1,AA[i]);
AA[i]:=0;
> od;
> _eq[0]:=eq1;
> for i from 1 to pot do
> for j from 0 to i-1 do
> _eq[i]:=subs(_x[j](t)=xxx[j](t),_eq[i]);
> od;
> od;
> end proc:
> resolva:=proc(i)
> global _eq,_x,t;
> _x[i]:=rhs(dsolve(_eq[i],_x[i](t)));
> end proc:
> resolva_eqd:=proc(eq_,ivar_)
> global omega,t,_x,solu;
> local eq1,eq2,i,ii,AAAA,BBBB,D1,D2,solu1,op2;
> ii:=nops(op(1,eq_))-2;
> op2:=op(2,eq_);
> eq1:=subs({diff(_x[ivar_](t),t$2)=AAAA,_x[ivar_](t)=BBBB
> },op(1,eq_)):
> D2:=diff(eq1,AAAA);
> D1:=diff(eq1,BBBB);
> eq1:=subs({AAAA=0,BBBB=0},eq1)=op2:
> solu:=0:
> if(ii>1)then
> for i from 1 to ii do
> eq2:=D2*diff(_x[ivar_](t),'$(t,2))+D1*_x[ivar_](t)=
-op(i,op(1,eq1));
> solu1:=rhs(dsolve(eq2,_x[ivar_](t)));
> if(i>1)then
> solu1:=subs(cat(_C,2*ind-1)=0,cat(_C,2*ind)=0,solu1);
> end if:
> solu:=solu+solu1;
> od;
> else
> eq2:=D2*diff(_x[ivar_](t),'$(t,2))+D1*_x[ivar_](t)=
-op(1,eq1);
> rhs(dsolve(eq2,_x[ivar_](t)));
> solu:=solu+%;
> end if;
> solu;
> end proc:

```

Rotina para resolver equações diferenciais lineares com muitos termos não-homogeneos.

```

> resolva_eqd_old:=proc(eq_, ivar_)
> global Omega, t, __x, solu, ind, SIMPLIFY;
> local eq1, eq2, i, ii, CCC, DDD, v1, v2, solu1;
> eq1:=subs(diff(__x[ivar_](t), t$2)=CCC, op(1, eq_));
> v1:=diff(eq1, CCC);
> eq1:=subs(__x[ivar_](t)=DDD, eq1);
> v2:=diff(eq1, DDD);
> eq1:=subs(CCC=0, DDD=0, eq1);
> eq1:=SIMPLIFY(eq1);
> ii:=nops(eq1);
> solu:=0;
> if(ii>1)then
> for i from 1 to ii do
> eq2:=v1*diff(__x[ivar_](t), '$'(t,2))+v2*__x[ivar_](t)=
-op(i, eq1);
> solu1:=rhs(dsolve(eq2, __x[ivar_](t)));
> if(i>1)then
> solu1:=subs(cat(_C, 2*ind-1)=0, cat(_C, 2*ind)=0, solu1);
> end if;
> solu:=solu+% ;
> od;
> else
> eq2:=v1*diff(__x[ivar_](t), '$'(t,2))+v2*__x[ivar_](t)=-eq1;
> rhs(dsolve(eq2, __x[ivar_](t)));
> solu:=solu+% ;
> end if;
> solu;
> end proc:
> elimina_secular_term:=proc(i)
> global Omega, t, __x, _e; local AA, AAA;
> subs(Omega*t=AAA, __x[i]);
> diff(%, t);
> subs(sin(AAA)=AA, %); diff(%, AA);
> _e[i]:=rhs(isolate(simplify(%=0), _e[i]));
> end proc:
> aplica_condicoes_iniciais:=proc(eq_, icte)
> global __x, _C, t;
> t:=0;
> solve(eq_, cat('_C', icte));
> end proc:
> EXPANDE:=proc(eqq)
> subs({sin=SINN, cos=COSS}, eqq);
> expand(%);
> subs({SINN=sin, COSS=cos}, %);
> end proc:

```

## A.2

### Equação de Duffing

```
> printlevel:=2;
```

*printlevel := 2*

```
> eqd:=diff(x(t),t$2)+2*mu*zeta*omega0*diff(x(t),t)+
omega0^2*x(t)+alpha*x(t)^2+beta*x(t)^3=mu*F(t);
```

$$eqd := \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) + 2\mu\zeta\omega_0 \left(\frac{d}{dt} x(t)\right) + \omega_0^2 x(t) + \alpha x(t)^2 + \beta x(t)^3 = \mu F(t)$$

Analisando a não linearidade quadrática

```
> beta:=0; zeta:=0; eqd:=subs(F(t)=F*cos(Omega*t),eqd);
```

$$\beta := 0$$

$$\zeta := 0$$

$$eqd := \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) + \omega_0^2 x(t) + \alpha x(t)^2 = \mu F \cos(\Omega t)$$

```
> eq:=eqd: mu:=alpha:
```

```
> solucao_aproximada_frequencia(2,nt,mu);
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) + (\Omega^2 - \alpha_{e_1} - \alpha^2_{e_2}) x(t) + \alpha x(t)^2 = \alpha F \cos(\Omega t)$$

Frequência da resposta -  $\Omega$ .

```
> i:='i':
```

```
> Omega^2=omega0^2+sum(mu^i*_e[i], 'i'=1..nt);
```

```
> omega0^2=Omega^2-sum(mu^i*_e[i], 'i'=1..nt);
```

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \alpha_{e_1} + \alpha^2_{e_2}$$

$$\omega_0^2 = \Omega^2 - \alpha_{e_1} - \alpha^2_{e_2}$$

```
> eq:=expand(eq);
```

$$eq := \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) + x(t) \Omega^2 - x(t) \alpha_{e_1} - x(t) \alpha^2_{e_2} + \alpha x(t)^2 = \alpha F \cos(\Omega t)$$

```
> solucao_aproximada_tempo(nt,mu);
```

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \%1\right) + \%1 \Omega^2 - \%1 \alpha_{e_1} - \%1 \alpha^2_{e_2} + \alpha \%1^2 = \alpha F \cos(\Omega t)$$

$$\%1 := \_x_0(t) + \alpha \_x_1(t) + \alpha^2 \_x_2(t)$$

```
> eqd;
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) + \omega_0^2 x(t) + \alpha x(t)^2 = \alpha F \cos(\Omega t)$$

```
> X;
```

$$\_x_0(t) + \alpha \_x_1(t) + \alpha^2 \_x_2(t)$$

```
> eq:=expand(eq):
```

```
> monta_equacoes(nt):
```

```
> for i from 0 to nt do
```

```
> _eq[i]; od;
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \_x_0(t)\right) + \Omega^2 \_x_0(t) = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \_x_1(t)\right) + \Omega^2 \_x_1(t) - \_e_1 \_x_0(t) + \_x_0(t)^2 = F \cos(\Omega t)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \_x_2(t)\right) + \Omega^2 \_x_2(t) - \_e_1 \_x_1(t) - \_e_2 \_x_0(t)$$

$$+ 2 \_x_0(t) \_x_1(t) = 0$$

```
> eqd:
```

```
> subs(x(t)=X,eqd):
```

```
> auxaux:=collect(expand(%),mu):
```

```
> for i from 1 to nt do
```

```
> eqaux[i]:=subs(_x[i](t)=0,op(1,_eq[i]));
```

```
> eqaux[i]:=expand(eqaux[i])-op(2,_eq[i]);
```

```
> od:
```

## A.2.1

## Resolve as equações

```

> RETIRA_TERMOS_SECULARES:=proc()
> global __x,ind,t,_e,eq,eq1,eq2;
> local i,AAA,BBB,solu;
> eq:=__x[ind]:
> for i from 1 to 10*ind do
> eq:=subs(sin(i*Omega*t)=AAA[i],eq);
> eq:=subs(cos(i*Omega*t)=BBB[i],eq);
> od:
> solu[1]:=0: solu[2]:=0:
> eq:=diff(eq,t);
> #SENOS
> eq1:=diff(eq,AAA[1]);
> if(eq1<>0)then
> solu[1]:=expand(solve(eq1=0,_e[ind]));
> end if;
> #COSSENOS
> eq2:=diff(eq,BBB[1]);
> if(eq2<>0)then
> solu[2]:=expand(solve(eq2=0,_e[ind]));
> end if;
> _e[ind]:=solu[1];
> if(expand(eq1)=0)then
> if(expand(eq2)<>0)then
> _e[ind]:=solu[2];
> end if;
> else
> _e[ind]:=solu[2];
> end if;
> end proc:
> unassign('_e'); unassign('__x');
> ind:=0;
> __x[ind]:=a*subs({mu=1,F=1},op(2,eqd));
> __v[ind]:=diff(__x[ind],t);

```

$$ind := 0$$

$$__x_0 := a \cos(\Omega t)$$

$$__v_0 := -a \sin(\Omega t) \Omega$$

```

> printlevel:=2;

```

```

> for ind from 1 to nt do
> cat("EQUACAO ",ind);
> cat("SIMPLIFICANDO A EQUACAO ",ind);
> eq:=expand(eqaux[ind]);
> eq:=subs({seq(xxx[j](t)=_x[j],j=0..ind-1)},eq);
> _eq[ind]:=diff(_x[ind](t),t$2)+Omega^2*_x[ind](t)+
EXPANDE(combine(e
> q,trig))=0;
> "RESOLVENDO A EQUACAO";
> _x[ind]:=resolva_eqd(_eq[ind],ind);
> "IMPONDO AS CONDICÕES INICIAIS";
> _x[ind]:=subs({_C1=0,_C2=0},_x[ind]);
> cat("SIMPLIFICANDO A SOLUCAO ",ind);
> _x[ind]:=collect(EXPANDE(_x[ind]),{sin,cos});
> _v[ind]:=diff(_x[ind],t);
> "RETIRANDO OS TERMOS SECULARES";
> RETIRA_TERMOS_SECULARES();
> _x[ind]:=EXPANDE(_x[ind]);
> od;

```

*printlevel := 2*

“EQUACAO 1”

“SIMPLIFICANDO A EQUACAO 1”

$$eq := -_e_1 xxx_0(t) + xxx_0(t)^2 - F \cos(\Omega t)$$

$$eq := -_e_1 a \cos(\Omega t) + a^2 \cos(\Omega t)^2 - F \cos(\Omega t)$$

$$\begin{aligned} \_eq_1 := & \left( \frac{d^2}{dt^2} \_x_1(t) \right) + \Omega^2 \_x_1(t) - \_e_1 a \cos(\Omega t) + \frac{1}{2} a^2 \cos(2\Omega t) \\ & + \frac{a^2}{2} - F \cos(\Omega t) = 0 \end{aligned}$$

“RESOLVENDO A EQUACAO”

$$\begin{aligned} \_x_1 := & \frac{\sin(\Omega t) \_C2 + \cos(\Omega t) \_C1 + \frac{1}{2} \_e_1 a (\cos(\Omega t) + \sin(\Omega t) \Omega t)}{\Omega^2} \\ & + \frac{1}{6} \frac{a^2 \cos(2\Omega t)}{\Omega^2} - \frac{a^2}{2\Omega^2} + \frac{1}{2} \frac{F (\cos(\Omega t) + \sin(\Omega t) \Omega t)}{\Omega^2} \end{aligned}$$

“IMPONDO AS CONDICÕES INICIAIS”

$$\begin{aligned} \_x_1 := & \frac{1}{2} \frac{\_e_1 a (\cos(\Omega t) + \sin(\Omega t) \Omega t)}{\Omega^2} + \frac{1}{6} \frac{a^2 \cos(2\Omega t)}{\Omega^2} - \frac{a^2}{2\Omega^2} \\ & + \frac{1}{2} \frac{F (\cos(\Omega t) + \sin(\Omega t) \Omega t)}{\Omega^2} \end{aligned}$$

“SIMPLIFICANDO A SOLUCAO 1”

$$\begin{aligned} \_x_1 := & \left( \frac{1}{2} \frac{\_e_1 a t}{\Omega} + \frac{F t}{2\Omega} \right) \sin(\Omega t) + \left( \frac{1}{2} \frac{\_e_1 a}{\Omega^2} + \frac{F}{2\Omega^2} \right) \cos(\Omega t) \\ & + \frac{1}{6} \frac{a^2 \cos(2\Omega t)}{\Omega^2} - \frac{a^2}{2\Omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \_ \_ v_1 := & \left( \frac{1}{2} \frac{e_1 a}{\Omega} + \frac{F}{2\Omega} \right) \sin(\Omega t) + \left( \frac{1}{2} \frac{e_1 a t}{\Omega} + \frac{F t}{2\Omega} \right) \cos(\Omega t) \Omega \\ & - \left( \frac{1}{2} \frac{e_1 a}{\Omega^2} + \frac{F}{2\Omega^2} \right) \sin(\Omega t) \Omega - \frac{1}{3} \frac{a^2 \sin(2\Omega t)}{\Omega} \end{aligned}$$

“RETIRANDO OS TERMOS SECULARES”

$$\_ \_ x_1 := \frac{1}{6} \frac{a^2 \cos(2\Omega t)}{\Omega^2} - \frac{a^2}{2\Omega^2}$$

“EQUACAO 2”

“SIMPLIFICANDO A EQUACAO 2”

$$eq := \frac{F \_ \_ x_1(t)}{a} - \_ \_ e_2 \_ \_ x_0(t) + 2 \_ \_ x_0(t) \_ \_ x_1(t)$$

$$\begin{aligned} eq := & \frac{F \left( \frac{1}{6} \frac{a^2 \cos(2\Omega t)}{\Omega^2} - \frac{a^2}{2\Omega^2} \right)}{a} - \_ \_ e_2 a \cos(\Omega t) \\ & + 2 a \cos(\Omega t) \left( \frac{1}{6} \frac{a^2 \cos(2\Omega t)}{\Omega^2} - \frac{a^2}{2\Omega^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \_ \_ eq_2 := & \left( \frac{d^2}{dt^2} \_ \_ x_2(t) \right) + \Omega^2 \_ \_ x_2(t) + \frac{1}{6} \frac{F a \cos(2\Omega t)}{\Omega^2} - \frac{F a}{2\Omega^2} \\ & - \_ \_ e_2 a \cos(\Omega t) - \frac{5}{6} \frac{a^3 \cos(\Omega t)}{\Omega^2} + \frac{1}{6} \frac{a^3 \cos(3\Omega t)}{\Omega^2} = 0 \end{aligned}$$

“RESOLVENDO A EQUACAO”

$$\begin{aligned} \_ \_ x_2 := & 5 \sin(\Omega t) \_ \_ C2 + 5 \cos(\Omega t) \_ \_ C1 + \frac{1}{18} \frac{F a \cos(2\Omega t)}{\Omega^4} + \frac{F a}{2\Omega^4} \\ & + \frac{1}{2} \frac{e_2 a (\cos(\Omega t) + \sin(\Omega t) \Omega t)}{\Omega^2} + \frac{5}{12} \frac{a^3 (\cos(\Omega t) + \sin(\Omega t) \Omega t)}{\Omega^4} \\ & + \frac{1}{48} \frac{a^3 \cos(3\Omega t)}{\Omega^4} \end{aligned}$$

“IMPONDO AS CONDICOES INICIAIS”

$$\begin{aligned} \_ \_ x_2 := & \frac{1}{18} \frac{F a \cos(2\Omega t)}{\Omega^4} + \frac{F a}{2\Omega^4} + \frac{1}{2} \frac{e_2 a (\cos(\Omega t) + \sin(\Omega t) \Omega t)}{\Omega^2} \\ & + \frac{5}{12} \frac{a^3 (\cos(\Omega t) + \sin(\Omega t) \Omega t)}{\Omega^4} + \frac{1}{48} \frac{a^3 \cos(3\Omega t)}{\Omega^4} \end{aligned}$$

“SIMPLIFICANDO A SOLUCAO 2”

$$\begin{aligned} \_ \_ x_2 := & \left( \frac{1}{2} \frac{e_2 a t}{\Omega} + \frac{5 a^3 t}{12 \Omega^3} \right) \sin(\Omega t) + \left( \frac{1}{2} \frac{e_2 a}{\Omega^2} + \frac{5 a^3}{12 \Omega^4} \right) \cos(\Omega t) \\ & + \frac{1}{18} \frac{F a \cos(2\Omega t)}{\Omega^4} + \frac{F a}{2\Omega^4} + \frac{1}{48} \frac{a^3 \cos(3\Omega t)}{\Omega^4} \\ \_ \_ v_2 := & \left( \frac{1}{2} \frac{e_2 a}{\Omega} + \frac{5 a^3}{12 \Omega^3} \right) \sin(\Omega t) + \left( \frac{1}{2} \frac{e_2 a t}{\Omega} + \frac{5 a^3 t}{12 \Omega^3} \right) \cos(\Omega t) \Omega \\ & - \left( \frac{1}{2} \frac{e_2 a}{\Omega^2} + \frac{5 a^3}{12 \Omega^4} \right) \sin(\Omega t) \Omega - \frac{1}{9} \frac{F a \sin(2\Omega t)}{\Omega^3} - \frac{1}{16} \frac{a^3 \sin(3\Omega t)}{\Omega^3} \end{aligned}$$

“RETIRANDO OS TERMOS SECULARES”

$$x_2 := \frac{1}{18} \frac{F a \cos(2 \Omega t)}{\Omega^4} + \frac{F a}{2 \Omega^4} + \frac{1}{48} \frac{a^3 \cos(3 \Omega t)}{\Omega^4}$$

## A.2.2

### Relação frequência-deslocamento

```
> for i from 1 to nt do
>   _e[i]; j:='j':
>   __eq[i]:=omega0^2+sum(mu^j*_e[j], 'j'=1..i)-Omega^2;
>   V[i]:=__eq[i]:
>   H[i]:=diff(V[i],omega);
>   od:
> for i from 1 to nt do
>   __eq[i];
>   od;
```

$$\omega_0^2 - \frac{\alpha F}{a} - \Omega^2$$

$$\omega_0^2 - \frac{\alpha F}{a} - \frac{5 \alpha^2 a^2}{6 \Omega^2} - \Omega^2$$

```
> unassign('Omega'):
> for i from 1 to nt do isolate(__eq[i],Omega^2); od;
```

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\alpha F}{a}$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\alpha F}{a} - \frac{5 \alpha^2 a^2}{6 \Omega^2}$$

## A.2.3

### Soluções

```
> v0:=0; omega0:='omega0':
> for i from 1 to nt do
>   j:='j':
>   __eq[i]:=omega0+sum(mu^j*_e[j], 'j'=1..i)-Omega;
>   __X[i]:=sum(mu^j*__x[j], 'j'=0..i);
>   od;
```

$$v_0 := 0$$

$$j := j$$

$$__eq_1 := \omega_0 - \frac{\alpha F}{a} - \Omega$$

$$__X_1 := a \cos(\Omega t) + \alpha \left( \frac{1}{6} \frac{a^2 \cos(2 \Omega t)}{\Omega^2} - \frac{a^2}{2 \Omega^2} \right)$$

$$j := j$$

$$__eq_2 := \omega_0 - \frac{\alpha F}{a} - \frac{5 \alpha^2 a^2}{6 \Omega^2} - \Omega$$

$$\begin{aligned} \_X_2 := & a \cos(\Omega t) + \alpha \left( \frac{1}{6} \frac{a^2 \cos(2\Omega t)}{\Omega^2} - \frac{a^2}{2\Omega^2} \right) \\ & + \alpha^2 \left( \frac{1}{18} \frac{F a \cos(2\Omega t)}{\Omega^4} + \frac{F a}{2\Omega^4} + \frac{1}{48} \frac{a^3 \cos(3\Omega t)}{\Omega^4} \right) \end{aligned}$$

#### A.2.4

##### Curva de ressonância

```
> A:='A': Omega:='Omega': F:='F': F0:='F0':
> alpha:='alpha': omega0:='omega0':
> __eq[1];
```

$$\omega_0 - \frac{\alpha F}{a} - \Omega$$

```
> F0;
```

$$F_0$$

```
> F:=F0/mu; __eq[nt];
```

$$\begin{aligned} F := & \frac{F_0}{\alpha} \\ \omega_0 - & \frac{F_0}{a} - \frac{5\alpha^2 a^2}{6\Omega^2} - \Omega \end{aligned}$$

```
> __X[1];
```

$$a \cos(\Omega t) + \alpha \left( \frac{1}{6} \frac{a^2 \cos(2\Omega t)}{\Omega^2} - \frac{a^2}{2\Omega^2} \right)$$

```
> with(Optimization);
> FindAmplitude:=proc(_a)
> global __x,a,mu,t,Omega,XXX;
> local i,T,max,min,dt;
> a:=_a; XXX:=0; max:=0;
> for i from 0 to nt do
> XXX:=XXX+mu^i*__x[i];
> od;
> T:=evalf(2*Pi/Omega);
> max:=Maximize(XXX,t=0..4*T)[1];
> min:=abs(Minimize(XXX,t=0..4*T)[1]);
> dt:=T/500;
> for t from 0 by dt to 4*T do
> if(abs(evalf(XXX))>max)then
> max:=evalf(XXX);
> end if;
> od;
> t:='t':
> if(max>min) then
> max;
> else
> min;
> end if;
> end proc;
```

[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPSolve, QPSolve]

```

> CurvaResonancia:=proc(vi,delta1,vf,parte)
> global __eq,nt,a,Amp,solu,Omega,d,cont,delta,fd,txt;
> local i,j,k,kk,init,RA2,RA3,aux1,soluu;
> Omega:=vi; delta:=delta1;
> txt:=sprintf("CurvaResonancia_F0=%2.3g_alpha=%2.3g_beta=
> %2.3g_omega0=%2.3g_OmegaxA_nt=%d.dat",
> F0,alpha,beta,omega0,nt);
> fd:=fopen(txt,WRITE,BINARY);
> fprintf(fd,"   Omega      a      Amp      a[1]
> a[2]\n");
> for i from 1 by 1 while Omega<= vf do
> a:='a':
> __eq[nt];
> if(omega0-Omega<>0)then
> soluu:=solve(__eq[nt],a);
> k:=nops([soluu]):
> if(k=1)then
> solu[1]:=soluu;
> else
> solu:=soluu;
> end if;
> for j from 1 to k do
> if(Im(solu[j])=0)then
> Amp:=FindAmplitude(Re(solu[j]));
> aux1:=subs({cos(Omega*t)=AAA,cos(2*Omega*t)=BBB,
> cos(3*Omega*t)=CCC},__X[nt]);
> RA2:=evalf(diff(aux1,BBB)/diff(aux1,AAA));
> RA3:=evalf(diff(aux1,CCC)/diff(aux1,AAA));
> fprintf(fd,"%7.4f %14.10f %14.10f %14.10f
> %14.10f\n",Omega,a,Amp,RA2,RA3);
> end if;
> od;
> end if;
> Omega:=Omega+delta;
> od;
> fclose(fd);
> end proc:
> __X[nt];

```

$$\begin{aligned}
 & a \cos(\Omega t) + \alpha \left( \frac{1}{6} \frac{a^2 \cos(2\Omega t)}{\Omega^2} - \frac{a^2}{2\Omega^2} \right) \\
 & + \alpha^2 \left( \frac{1}{18} \frac{F0 a \cos(2\Omega t)}{\alpha \Omega^4} + \frac{F0 a}{2\Omega^4 \alpha} + \frac{1}{48} \frac{a^3 \cos(3\Omega t)}{\Omega^4} \right)
 \end{aligned}$$

```
> F0:=1; omega0:=1; alpha:=1; F;
```

$F0 := 1$

$\omega0 := 1$

$\alpha := 1$

1

```
> __eq[1]; __eq[2];
```

```

1 - \frac{1}{a} - \Omega
1 - \frac{1}{a} - \frac{5 a^2}{6 \Omega^2} - \Omega
> t:='t':
> eqd;
(\frac{d^2}{dt^2} x(t)) + x(t) + x(t)^2 = \cos(\Omega t)
> NT:=nt;
NT := 2
> for i from 1 to NT do
> nt:=i; a:='a': t:='t':
> CurvaResonancia(0.01,0.01,2.0);
> od;
nt := 1
a := a
t := t
nt := 2
a := a
t := t
> t:='t': a:='a': Omega:='Omega';
> __X[1]; collect(__X[2],cos);
\Omega := \Omega
a \cos(\Omega t) + \frac{1}{6} \frac{a^2 \cos(2 \Omega t)}{\Omega^2} - \frac{a^2}{2 \Omega^2}
a \cos(\Omega t) + (\frac{a^2}{6 \Omega^2} + \frac{a}{18 \Omega^4}) \cos(2 \Omega t) + \frac{a}{2 \Omega^4} - \frac{a^2}{2 \Omega^2} + \frac{1}{48} \frac{a^3 \cos(3 \Omega t)}{\Omega^4}
> __eq[1]; __eq[2];
1 - \frac{1}{a} - \Omega
1 - \frac{1}{a} - \frac{5 a^2}{6 \Omega^2} - \Omega

```

## B

### Programa em Maple: Método de Taylor - vibração livre

```
> restart;  
> with(linalg):
```

#### B.1

##### Solução

```
> eqd:=diff(u(t),t$2)+omega0^2*u(t)+alpha*u(t)^2+beta*u(t)^3=F(t);
```

$$eqd := \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t)\right) + \omega_0^2 u(t) + \alpha u(t)^2 + \beta u(t)^3 = F(t)$$

```
> eqd:=subs({alpha=0,F(t)=0},eqd);
```

$$eqd := \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t)\right) + \omega_0^2 u(t) + \beta u(t)^3 = 0$$

nt = maior potência da série + 1

```
> nt:=4+1;
```

$$nt := 5$$

```
> eqd;
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} u(t)\right) + \omega_0^2 u(t) + \beta u(t)^3 = 0$$

```
> isolate(%,diff(u(t),t$2));
```

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) = -\omega_0^2 u(t) - \beta u(t)^3$$

```
> u2:=rhs(%);
```

$$u2 := -\omega_0^2 u(t) - \beta u(t)^3$$

```
> taylor(u(t),t=0,4);
```

$$u(0) + D(u)(0)t + \frac{1}{2}(D^{(2)}(u)(0))t^2 + \frac{1}{6}(D^{(3)}(u)(0))t^3 + O(t^4)$$

série de taylor

```
> i:='i': unassign('c');
```

```
> U:=sum(c[i]*t^i,i=0..nt-1);
```

$$U := c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4$$

```
> dU:=diff(U,t);
```

$$dU := c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3$$

ausência de amortecimento

```
> v0:=0;
```

$$v_0 := 0$$

derivadas da série polinomial

```
> dt[0]:=U;
> for i from 1 to nt-1 do
> dt[i]:=diff(dt[i-1],t);
> od:
      dt0 := c0 + c1 t + c2 t^2 + c3 t^3 + c4 t^4
> eq[0]:=u0; eq[1]:=v0; eq[2]:=u2;
> for i from 3 to nt-1 do
> diff(eq[i-1],t):
> eq[i]:=expand(subs(diff(u(t),'$(t,2))=eq[2],%));
> od:
      eq0 := u0
      eq1 := 0
      eq2 := -omega^2 u(t) - beta u(t)^3
> for i from 0 to nt-1 do
> EQ[i]:=expand(subs({diff(u(t),t)=v0,u(t)=u0},eq[i]));
> od:
coeficientes da série
> for i from 0 to nt-1 do
> c[i]:=EQ[i]/i!;
> od:
> U;
> dU;
```

$$u0 + \left(-\frac{1}{2}\omega^2 u0 - \frac{1}{2}\beta u0^3\right)t^2 + \left(\frac{1}{24}\omega^4 u0 + \frac{1}{6}\omega^2 \beta u0^3 + \frac{1}{8}\beta^2 u0^5\right)t^4$$

$$2\left(-\frac{1}{2}\omega^2 u0 - \frac{1}{2}\beta u0^3\right)t + 4\left(\frac{1}{24}\omega^4 u0 + \frac{1}{6}\omega^2 \beta u0^3 + \frac{1}{8}\beta^2 u0^5\right)t^3$$

## B.2

### Relação frequência-amplitude

```
> omega:='omega':
> subs({t=T/4,v0=0},U)=0:
> EQ:=subs(T=2*Pi/omega,%):
> EQ:=expand(%/u0);
```

$$EQ := 1 - \frac{\pi^2 \omega^2}{8\omega^2} - \frac{u0^2 \pi^2 \beta}{8\omega^2} + \frac{\pi^4 \omega^4}{384\omega^4} + \frac{u0^2 \pi^4 \omega^2 \beta}{96\omega^4} + \frac{u0^4 \pi^4 \beta^2}{128\omega^4} = 0$$

## B.3

### Exemplo

```
> u0:='u0': omega0:='omega0': omega:='omega': beta:='beta':
b:='b':
> omega0:=1.2; beta:=0.0001; u0:=0.3;
```

```

omega0 := 1.2
beta := 0.0001
u0 := 0.3

```

```
> U;
```

$$0.3 - 0.2160013500 t^2 + 0.02592064800 t^4$$

### B.3.1

#### Verificação da solução: integração numérica

```

> eqd2:=y(t)=diff(x(t),t),diff(y(t),t)=-omega0^2*x(t)-beta*x(t)^3;
> init:=x(0)=u0,y(0)=v0;

```

$$eqd2 := y(t) = \frac{d}{dt} x(t), \frac{d}{dt} y(t) = -1.44x(t) - 0.0001x(t)^3$$

$$init := x(0) = 0.3, y(0) = 0$$

```

> f:=dsolve({eqd2,init},type=numeric,method=classical[rk4],
maxfun=999999,output=procedurelist):

```

```

> vi:=0; vf:=6;
> #escrevendo na lista
> delta:=0.01: cont:=0:
> for k from vi by delta to vf do
> cont:=cont+1;
> od: cont;
> d1:=array(1..cont,1..2): d2:=array(1..cont,1..2):
> cont:=0:
> for k from vi by delta to vf do
> cont:=cont+1;
> d1[cont,1]:=k;
> d1[cont,2]:=eval(x(t),f(k));
> d2[cont,1]:=k;
> d2[cont,2]:=eval(y(t),f(k));
> od:
> d1g:=convert(d1,listlist):
> d2g:=convert(d2,listlist):

```

$$vi := 0$$

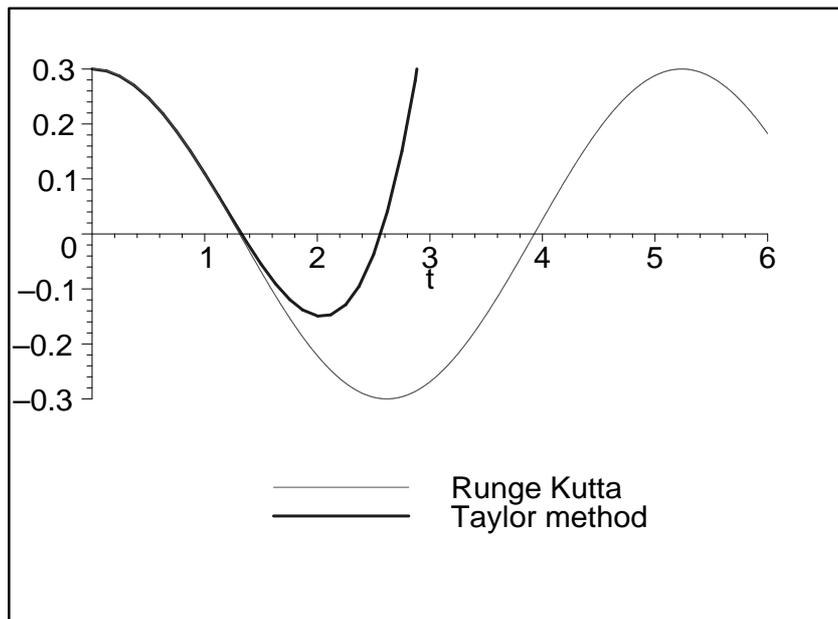
$$vf := 6$$

$$601$$

```

> plot([d1g,U],t=0..vf,y=-u0..u0,color=[red,blue],thickness=
[2,4],legend=["Runge Kutta","Taylor method"]);

```



### B.3.2

#### Transformação da solução em série de Taylor em uma série de Fourier

```

> printlevel:=1;
> unassign('a'); unassign('w');
> unassign('A'); unassign('_omega'); unassign('omega');
> omega0:='omega0': beta:='beta': delta:= 'delta':
> b:='b': u0:='u0':

```

*printlevel := 1*

número de harmônicos

```

> nh:=nops(U)-1;#(nt-1)/2;
> i:='i': omega:='omega':
> xx:=sum(A[i]*cos((2*i-1)*omega*t),i=1..nh);

```

*nh := 2*

$xx := A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(3\omega t)$

série de cada harmônico

```

> a*cos(x*t);
> taylor(%,t,nt):
> serie:=convert(%,polynom):

```

*a cos(x t)*

```

> serie2:=subs({seq((x^2)^i=x2^i,i=1..nt)},serie):
> EXPANDE:=proc(equacao)
> local k,i,soma:
> k:=nops(equacao);
> soma:=0:
> for i from 1 to k do
> soma:=soma+expand(op(i,equacao));
> od;
> soma;
> end proc:

```

substituição dos harmônicos na fórmula da série

```
> for i from 1 to nh do
> for j from 1 to 1 do
> expand(subs(x=(2*i-1)*omega,serie));
> subs(a=A[i],%);
> parte[i]:=%;
> od;
> cat("harmonico ",i),"ok";
> od;
> UHBM:=0:
> for i from 1 to nh do
> UHBM:=UHBM+collect(parte[i],t);
> od:
> UHBM:=collect(UHBM,t):
        "harmonico 1", "ok"
        "harmonico 2", "ok"
> xx;
```

$$A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(3\omega t)$$

primeiras equações

```
> p0:=subs(t=0,U):
> p1:=subs(t=0,UHBM):
> eq[1]:=p0;
> eqhbm[1]:=p1;
```

$$eq_1 := u_0$$

$$eqhbm_1 := A_1 + A_2$$

demais equações

```
> cont:=1:
> for j from 2 by 2 to nt-1 do
> if(cont>nh)then break; end if;
> for k from 1 by 1 to 1 do
> cont:=cont+1:
> subs({seq(t^i=0,i=2..j-2),seq(t^i=0,i=j+1..2*nt)},U)-p0:
> eq[cont]:=subs(t=1,%);
> subs({seq(t^i=0,i=2..j-2),seq(t^i=0,i=j+1..nt)},UHBM)-p1:
> eqhbm[cont]:=subs(t=1,%);
> od:
> t^j,cat("equacao ",cont),"ok";
> od;
```

$$t^2, \text{ "equacao 2", "ok"}$$

$$t^4, \text{ "equacao 3", "ok"}$$

```
> neq:=cont;
```

$$neq := 3$$

### Determinação das constantes

```
> eq[1]-eqhbm[1]=0;
> A[1]:=solve(%,A[1]);
```

$$u_0 - A_1 - A_2 = 0$$

```

      
$$A_1 := u_0 - A_2$$

> expand(eq[2]-eqhbm[2]=0);
      
$$-\frac{\omega_0^2 u_0}{2} - \frac{\beta u_0^3}{2} + \frac{\omega^2 u_0}{2} + 4 A_2 \omega^2 = 0$$

> M:=Matrix(nh-1): V:=Matrix(1..nh-1,1):
> for i from 2 to nh do
>   cont:=1:
>   for j from 2 by 1 to nh do
>     M[i-1,cont]:=diff(expand(eq[i]-eqhbm[i]),A[j]);
>     cont:=cont+1:
>   od:
>   V[i-1,1]:=-subs({seq(A[jj]=0,jj=2..nh)},expand(eq[i]-eqhbm[i]));
>   od:
> M;
      
$$\begin{bmatrix} 4\omega^2 \end{bmatrix}$$

> V;
      
$$\begin{bmatrix} \frac{\omega_0^2 u_0}{2} + \frac{\beta u_0^3}{2} - \frac{\omega^2 u_0}{2} \end{bmatrix}$$

> R:=evalm(inverse(M)&*V):
> for i from 2 to nh do
>   A[i]:=R[i-1,1];
> od:

frequência da resposta
> _eq:=expand(eq[nh+1]-eqhbm[nh+1]):
> omega0:=1.2; beta:=0.0001; u0:=0.3;
      
$$\omega_0 := 1.2$$

      
$$\beta := 0.0001$$

      
$$u_0 := 0.3$$

> aux:=fsolve(_eq,omega);
      
$$aux := -1.200002812, -0.4000040625, 0.4000040625, 1.200002812$$

> aux[4];
      
$$1.200002812$$

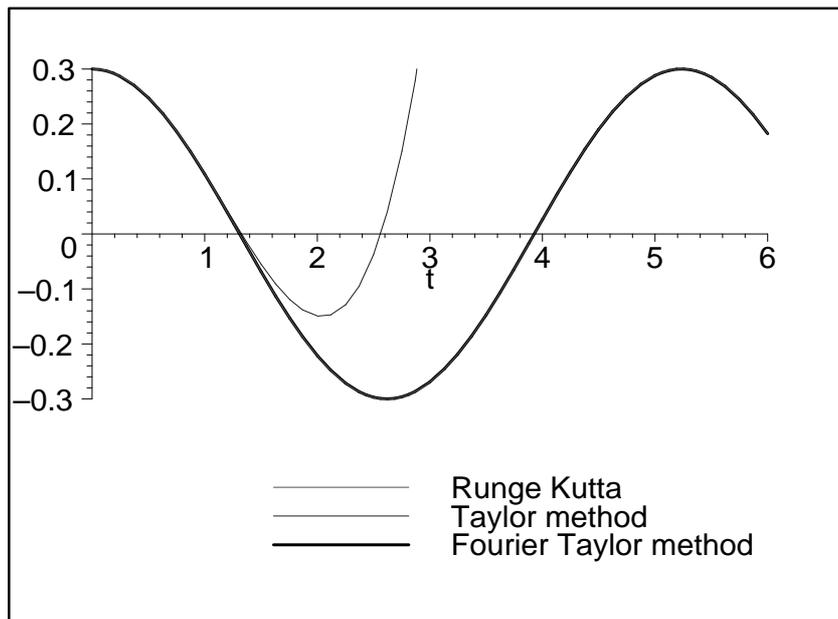
> omega:=%;
      
$$\omega := 1.200002812$$

> i:='i':
> xxx:=sum(A[i]*cos((2*i-1)*omega*t),i=1..nh);
      
$$xxx := 0.2999999414 \cos(1.200002812 t) +$$

      
$$0.5861083642 \cdot 10^{-7} \cos(3.600008436 t)$$

> plot([d1g,U,xxx],t=0..vf,y=-u0..u0,color=[red,blue,black],
thickness=[2,2,4],legend=["Runge Kutta","Taylor method",
"Fourier Taylormethod"]);

```



```
> u0:='u0': omega0:='omega0':
> omega:='omega': beta:='beta':
```

#### B.4

#### Transformação da solução em série de Taylor em uma solução de Lindstedt-Poincaré

```
> printlevel:=1;
> unassign('a'); unassign('w');
> unassign('A'); unassign('_omega'); unassign('omega');
> omega0:='omega0': beta:='beta': delta:= 'delta': u0:='u0':
```

*printlevel := 1*

```
> collect(U, {beta, t});
```

$$u0 + \left(-\frac{1}{2} \omega0^2 u0 - \frac{1}{2} \beta u0^3\right) t^2 + \left(\frac{1}{24} \omega0^4 u0 + \frac{1}{6} \omega0^2 \beta u0^3 + \frac{1}{8} \beta^2 u0^5\right) t^4$$

```
> nops(%);
```

3

aproximação até  $\beta$  será correta

máxima potência em beta - se for número de termos-1 faltará uma equação

```
> pb:=%-2;
```

número de harmônicos

```
> nh:=pb+1; i:='i': omega:='omega':
```

retirada das potências de beta que não podem ser representadas corretamente pela solução de LP

```
> Ucopy:=subs({seq(beta^i=0, i=pb+1..10*pb)}, U):
```

```
> xx:=sum(A[i]*cos((2*i-1)*omega*t), i=1..nh);
```

```

                                pb := 1
                                nh := 2
                                xx := A1 cos(ω t) + A2 cos(3 ω t)
> xx2:=xx: ni:=0: j:='j':
> for i from 1 to nh do
> ni:=ni+(pb-(i-1)+1);
> xx2:=subs(A[i]=sum(a[i,j]*beta^j,j=i-1..pb),xx2);
> A[i]:=sum(a[i,j]*beta^j,j=i-1..pb);
> _omega[i]:=(2*i-1)*omega;
> od;
> xx2;
                                (a1,0 + a1,1 β) cos(ω t) + a2,1 β cos(3 ω t)
> ni;
                                3
> j:='j':
> "número de incógnitas";
> ni:=ni+pb+1;
> xx2:=subs({omega=sum(w[j]*beta^j,j=0..pb)},xx2);
> omega:=sum(w[j]*beta^j,j=0..pb);
                                "número de incógnitas"
                                ni := 5
xx2 := (a1,0 + a1,1 β) cos((w0 + w1 β) t) + a2,1 β cos(3 (w0 + w1 β) t)
                                ω := w0 + w1 β
> unassign('a'); unassign('w');
série de cada harmônico
> a*cos(x*t);
> taylor(%,t,nt);
> serie:=convert(%,polynom);
                                a cos(x t)
                                a -  $\frac{a x^2}{2} t^2 + \frac{a x^4}{24} t^4 + O(t^5)$ 
                                serie := a -  $\frac{1}{2} a x^2 t^2 + \frac{1}{24} a x^4 t^4$ 
> serie2:=subs({seq((x^2)^i=x2^i,i=1..nt)},serie);
                                serie2 := a -  $\frac{1}{2} a x^2 t^2 + \frac{1}{24} a x^2 t^4$ 
> _omega[2];
                                3 w0 + 3 w1 β
> pb;
                                1
> EXPANDE:=proc(equacao)
> local k,i,soma;
> k:=nops(equacao);
> soma:=0;
> for i from 1 to k do
> soma:=soma+expand(op(i,equacao));
> od;
> soma;
> end proc:

```

```

> expand(_omega[2]^2);
          9 w_0^2 + 18 w_0 w_1 beta + 9 w_1^2 beta^2
> subs({seq(beta^i=0,i=pb+1..10*pb)},%);
          9 w_0^2 + 18 w_0 w_1 beta
substituição dos harmônicos na fórmula da série
> ULP:=0:
> for i from 1 to nh do
> for j from 1 to 1 do
> #expandindo omega^2
> expand(_omega[i]^2):
> #retirando as potencias em beta que nao interessam
> subs({seq(beta^i=0,i=pb+1..10*pb)},%);
> #substituindo o omega^2 com as potencias em beta que
interessam
> expand(subs(x2=%,serie2));
> #retirando as novas potencias em beta que nao interessam
> subs({seq(beta^i=0,i=pb+1..10*pb)},%);
> #inserindo a amplitude do harmonico
> subs(a=A[i],%);
> #retirando as novas potencias em beta que nao interessam
> parte[i]:=subs({seq(beta^i=0,i=pb+1..10*pb)},expand(%));
> od;
> cat("harmonico ",i),"made";
> od;
> ULP:=0:
> for i from 1 to nh do
> ULP:=ULP+collect(parte[i],t);
> od:
> ULP:=collect(ULP,t):
          "harmonico 1", "made"
          "harmonico 2", "made"
> sort(subs({seq(beta^i=0,i=pb+1..10*pb)},ULP),t,ascending);

          a_{1,1} beta + a_{2,1} beta + a_{1,0} + (-\frac{1}{2} w_0^2 a_{1,0} - \frac{1}{2} w_0^2 a_{1,1} beta - w_0 w_1 beta a_{1,0}
          - \frac{9}{2} a_{2,1} beta w_0^2) t^2 + (\frac{1}{24} w_0^4 a_{1,0} + \frac{1}{24} w_0^4 a_{1,1} beta + \frac{1}{6} w_0^3 w_1 beta a_{1,0}
          + \frac{27}{8} a_{2,1} beta w_0^4) t^4
primeiras equações
> p0:=subs(t=0,Ucopy):
> p1:=subs(t=0,ULP):
> eq[1]:=p0;
> eq1p[1]:=p1;
          eq_1 := u0
          eq1p_1 := a_{2,1} beta + a_{1,0} + a_{1,1} beta
número de incógnitas
> ni;

```

demais equações

```

> cont:=1:
> for j from 2 by 2 to nt-1 do
> for k from 1 by 1 to 1 do
> cont:=cont+1:
> subs({seq(t^i=0,i=2..j-2),seq(t^i=0,i=j+1..2*nt)},
Ucopy)-p0:
> eq[cont]:=subs(t=1,%);
> subs({seq(t^i=0,i=2..j-2),seq(t^i=0,i=j+1..nt)},ULP)-p1:
> eqlp[cont]:=subs(t=1,%);
> od:
> t^j,cat("equacao ",cont),"ok";
> od;

```

$t^2$ , "equacao 2", "ok"

$t^4$ , "equacao 3", "ok"

```

> neq:=cont:

```

### B.4.1

#### Determinação das constantes

```

> unassign('a'); unassign('w');
> i:='i':
> a[1,0]:=u0: w[0]:=omega0:
> printlevel:=1;
> for k from 1 to neq do
> cat("EQUACAO ",k);
> for KKK from 1 to 1 do
> variaveis:=1:
> p0:=subs(beta=0,eq[k]):
> p1:=subs(beta=0,eqlp[k]):
> #potencia beta^0
> if(expand(p0-p1)<>0)then
> if(k=1)then
> isolate(p0=p1,a[k,0]);
> a[k,k-1]:=expand(rhs(%));
> variaveis:=variaveis,sprintf("a[%d,%d]",k,k-1);
> else
> isolate(p0=p1,w[k-2]);
> w[k-2]:=expand(rhs(%));
> variaveis:=variaveis,sprintf("w[%d]",k-2);
> end if;
> end if;
> #potencia beta^j
> for j from 1 to pb do
> aux1:=subs(subs({seq(beta^i=0,i=j+1..pb),beta^j=AAA},
eq[k]))-p0:
> aux2:=subs(subs({seq(beta^i=0,i=j+1..pb),beta^j=AAA},
eqlp[k]))-p1:
> if(subs({AAA=1,beta=0},expand(aux1-aux2))<>0)then
> subs({AAA=1,beta=0},aux1=aux2);
> if(j+1<k)then
> isolate(%,w[j]);
> w[j]:=expand(rhs(%));
> variaveis:=variaveis,sprintf("w[%d]",j);
> else

```

```

> isolate(%, a[k, j]);
> a[k, j] := expand(rhs(%));
> variaveis := variaveis, sprintf("a[%d, %d]", k, j);
> end if;
> end if;
> od;
> od;
> "found", variaveis;
> od;

```

```

      printlevel := 1
      "EQUACAO 1"
      "found", 1, "a[1,1]"
      "EQUACAO 2"
      "found", 1, "a[2,1]"
      "EQUACAO 3"
      "found", 1, "w[1]"

```

```

> xx2;

```

$$\left(u_0 - \frac{u_0^3 \beta}{32 \omega_0^2}\right) \cos\left(\left(\omega_0 + \frac{3 u_0^2 \beta}{8 \omega_0}\right) t\right) + \frac{1}{32} \frac{u_0^3 \beta \cos\left(3\left(\omega_0 + \frac{3 u_0^2 \beta}{8 \omega_0}\right) t\right)}{\omega_0^2}$$

```

> omega;

```

$$\omega_0 + \frac{3 u_0^2 \beta}{8 \omega_0}$$

solução de primeira ordem obtida com LP tradicional

```

> omega0+3/8*beta/omega0*x0^2-21/256*beta^2/omega0^3*x0^4
+81/2048*beta^3/omega0^5*x0^6;

```

$$\omega_0 + \frac{3 \beta x_0^2}{8 \omega_0} - \frac{21 \beta^2 x_0^4}{256 \omega_0^3} + \frac{81 \beta^3 x_0^6}{2048 \omega_0^5}$$

```

> xx2;

```

$$\left(u_0 - \frac{u_0^3 \beta}{32 \omega_0^2}\right) \cos\left(\left(\omega_0 + \frac{3 u_0^2 \beta}{8 \omega_0}\right) t\right) + \frac{1}{32} \frac{u_0^3 \beta \cos\left(3\left(\omega_0 + \frac{3 u_0^2 \beta}{8 \omega_0}\right) t\right)}{\omega_0^2}$$

```

> U;

```

$$u_0 + \left(-\frac{1}{2} \omega_0^2 u_0 - \frac{1}{2} \beta u_0^3\right) t^2 + \left(\frac{1}{24} \omega_0^4 u_0 + \frac{1}{6} \omega_0^2 \beta u_0^3 + \frac{1}{8} \beta^2 u_0^5\right) t^4$$

```

> sprintf("%d termos = %d harmonicos", nops(U), pb+1);

```

```

      "3 termos = 2 harmonicos"

```

## C

### Programa em Maple: Fourier-Taylor - vibração forçada amortecida

```
> restart;  
> with(linalg):
```

#### C.1

#### Solução

```
> eqd:=diff(u(t),t$2)+2*zeta*omega0*diff(u(t),t)+omega0^2*u(t)  
+alpha*u(t)^2+beta*u(t)^3=F(t);
```

$$eqd := \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t)\right) + 2\zeta\omega_0 \left(\frac{d}{dt} u(t)\right) + \omega_0^2 u(t) + \alpha u(t)^2 + \beta u(t)^3 = F(t)$$

```
> eqd:=subs({alpha=0,F(t)=F*cos(Omega*t)},eqd);
```

$$eqd := \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t)\right) + 2\zeta\omega_0 \left(\frac{d}{dt} u(t)\right) + \omega_0^2 u(t) + \beta u(t)^3 = F \cos(\Omega t)$$

```
> nt:=7;
```

$$nt := 7$$

```
> eqd;
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} u(t)\right) + 2\zeta\omega_0 \left(\frac{d}{dt} u(t)\right) + \omega_0^2 u(t) + \beta u(t)^3 = F \cos(\Omega t)$$

```
> isolate(%,diff(u(t), '$'(t,2)));
```

$$\frac{d^2}{dt^2} u(t) = F \cos(\Omega t) - 2\zeta\omega_0 \left(\frac{d}{dt} u(t)\right) - \omega_0^2 u(t) - \beta u(t)^3$$

```
> u2:=rhs(%);
```

$$u2 := F \cos(\Omega t) - 2\zeta\omega_0 \left(\frac{d}{dt} u(t)\right) - \omega_0^2 u(t) - \beta u(t)^3$$

```
> diff(u2,t$2);
```

$$\begin{aligned} & -F \cos(\Omega t) \Omega^2 - 2\zeta\omega_0 \left(\frac{d^3}{dt^3} u(t)\right) - \omega_0^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t)\right) - 6\beta u(t) \left(\frac{d}{dt} u(t)\right)^2 \\ & - 3\beta u(t)^2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t)\right) \end{aligned}$$

```
> c[0]:=u0;
```

```
> c[1]:=v0;
```

```
> c[2]:=u2;
```

```
> for i from 3 to nt do
```

```
> c[i]:=diff(c[i-1],t);
```

```
> od:
```

$$c_0 := u0$$

$$c_1 := v0$$

```

c2 := F cos(Ω t) - 2 ζ ω0 (d/dt u(t)) - ω02 u(t) - β u(t)3
> c0[0] := u0;
> c0[1] := v0;
> c0[2] := subs({u(t)=u0, diff(u(t), t)=v0,
> cos(Ω t+phi)=cos(phi), sin(Ω t+phi)=sin(phi),
> cos(Ω t)=1, sin(Ω t)=0}, u2);
c0_0 := u0
c0_1 := v0
c0_2 := F - 2 ζ ω0 v0 - ω02 u0 - β u03
> for i from 3 to nt do
> c0[i] := expand(subs({u(t)=u0, diff(u(t), t)=v0,
> cos(Ω t+phi)=cos(phi), sin(Ω t+phi)=sin(phi),
> cos(Ω t)=1, sin(Ω t)=0, seq(diff(u(t), 't'(t, j))=
du[j](u0, v0, Ω t), j=2..i-1)}, c[i]));
> od:
série de taylor
> i:='i':
> U:=sum(c0[i]*ti/i!, i=0..nt-1):

```

### C.1.1

Transforma a solução em série de Taylor em uma série de Fourier

```

> printlevel:=1:
> unassign('a'); unassign('w');
> unassign('A'); unassign('B'); unassign('_omega');
> unassign('omega'); unassign('Omega');
> omega0:='omega0': beta:='beta': delta:= 'delta': F:='F':
zeta:='zeta':
> F0:='F0':
> b:='b': u0:='u0': phi:='phi': v0:='v0':
> nops(U)-2: (%-1)/2: round(%-.01):
número de harmônicos
> nh:=%;
> i:='i': omega:='omega':
> xx:=sum(A[i]*cos((2*i-1)*Ω t)+B[i]*sin((2*i-1)*Ω t),
i=1..nh);
nh := 2
xx := A1 cos(Ω t) + B1 sin(Ω t) + A2 cos(3 Ω t) + B2 sin(3 Ω t)
> a*cos(x*t);
> taylor(%, t, nt):
> serie:=convert(%, polynom):
a cos(x t)
> serie2:=subs({seq((x2)i=x2i, i=1..nt)}, serie):
> b*sin(x*t);
> taylor(%, t, nt):
> serie_s:=convert(%, polynom):
b sin(x t)
> serie2_s:=subs({seq((x3)i=x3i, i=1..nt)}, serie_s):

```

```

> EXPANDE:=proc(equacao)
> local k,i,soma:
> k:=nops(equacao);
> soma:=0:
> for i from 1 to k do
> soma:=soma+expand(op(i,equacao));
> od;
> soma;
> end proc:
> for i from 1 to nh do
> for j from 1 to 1 do
> expand(subs(x=(2*i-1)*Omega,serie));
> subs(a=A[i],%);
> parte[i]:=%;
> expand(subs(x=(2*i-1)*Omega,serie_s));
> subs(b=B[i],%);
> parte[i]:=parte[i]+%;
> od;
> cat("harmonico ",i),"ok";
> od;
> UHBM:=0:
> for i from 1 to nh do
> UHBM:=UHBM+collect(parte[i],t);
> od:
> UHBM:=collect(UHBM,t):
           "harmonico 1", "ok"
           "harmonico 2", "ok"

> xx;
       $A_1 \cos(\Omega t) + B_1 \sin(\Omega t) + A_2 \cos(3 \Omega t) + B_2 \sin(3 \Omega t)$ 
primeiras equações
> p0:=subs(t=0,U):
> p1:=subs(t=0,UHBM):
> eq[1]:=p0;
> eqhbm[1]:=p1;
            $eq_1 := u_0$ 
            $eqhbm_1 := A_1 + A_2$ 

demais equações
> cont:=1:
> for j from 1 by 1 to nt do
> if(cont>2*nh+1)then break; end if;
> for k from 1 by 1 to 1 do
> cont:=cont+1:
> subs({seq(t^i=0,i=j+1..nt),t^j=1},U)-p0:
> eq[cont]:=subs(t=0,%);
> subs({seq(t^i=0,i=j+1..nt),t^j=1},UHBM)-p1:
> eqhbm[cont]:=subs(t=0,%);
> od:
> t^j,cat("equacao ",cont),"ok";
> od;
           t, "equacao 2", "ok"
           t^2, "equacao 3", "ok"
           t^3, "equacao 4", "ok"

```

```

t4, "equacao 5", "ok"
t5, "equacao 6", "ok"
> neq:=cont;
                                neq := 6
> for i from 1 to 5 do
> eq[i]=eqhbm[i];
> od;
                                u0 = A1 + A2
                                v0 = B1 Ω + 3 B2 Ω
                                F
                                2
                                - ζ ω0 v0 -
                                ω02 u0
                                2
                                -
                                β u03
                                2
                                = -
                                1
                                2
                                A1 Ω2 -
                                9
                                2
                                A2 Ω2
-
                                1
                                3
                                ζ ω0 du2(u0, v0, Ω) -
                                ω02 v0
                                6
                                -
                                β u02 v0
                                2
                                = -
                                1
                                6
                                B1 Ω3 -
                                9
                                2
                                B2 Ω3
-
                                F Ω2
                                24
                                -
                                1
                                12
                                ζ ω0 du3(u0, v0, Ω) -
                                1
                                24
                                ω02 du2(u0, v0, Ω) -
                                β u0 v02
                                4
                                -
                                1
                                8
                                β u02 du2(u0, v0, Ω) =
                                1
                                24
                                A1 Ω4 +
                                27
                                8
                                A2 Ω4
> xx2:=subs({seq(A[i]=cc[i](u0,v0,0mega),i=0..nh),
> seq(B[i]=dd[i](u0,v0,0mega),i=1..nh)},xx);
                                xx2 := cc1(u0, v0, Ω) cos(Ω t) + dd1(u0, v0, Ω) sin(Ω t)
                                + cc2(u0, v0, Ω) cos(3 Ω t) + dd2(u0, v0, Ω) sin(3 Ω t)

```

### Determinação das amplitudes

```

> nh;
                                2
> nops(xx);
                                4
> neq;
                                6
> M:=Matrix(2*nh): V:=Matrix(1..2*nh,1):
> for i from 1 to neq-2 do
> cont:=1:
> for j from 1 by 1 to nh do
> M[i,cont]:=diff(expand(eq[i]-eqhbm[i]),B[j]);
> cont:=cont+1:
> M[i,cont]:=diff(expand(eq[i]-eqhbm[i]),A[j]);
> cont:=cont+1:
> od:
> V[i,1]:=-subs({seq(A[jj]=0,jj=0..nh),
> seq(B[jj]=0,jj=1..nh)},expand(eq[i]-eqhbm[i]));
> od:
> cont;
                                5
> M;

```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -\Omega & 0 & -3\Omega & 0 \\ 0 & \frac{\Omega^2}{2} & 0 & \frac{9\Omega^2}{2} \\ \frac{\Omega^3}{6} & 0 & \frac{9\Omega^3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

```

> R:=evalm(inverse(M)&*V):
> cont:=1:
> for i from 1 by 2 to 2*nh do
> B[cont]:=R[i,1];
> A[cont]:=R[i+1,1];
> cont:=cont+1:
> od:
> _eq[1]:=eq[2*nh+1]-eqhbm[2*nh+1]:
> _eq[2]:=eq[2*nh+2]-eqhbm[2*nh+2]:

```

### Equações que determinam os pontos fixos

```

> _eq[3]:=(u0-u0_0)^2+(v0-v0_0)^2+(Omega-Omega_0)^2-r^2;
> HH2:=Matrix([[diff(_eq[1],u0),diff(_eq[1],v0)],
> [diff(_eq[2],u0),diff(_eq[2],v0)]]):
> VV2:=Matrix([[-_eq[1]],[-_eq[2]]]):
> HH3:=Matrix(
> [[diff(_eq[1],u0),diff(_eq[1],v0),diff(_eq[1],Omega)],
> [diff(_eq[2],u0),diff(_eq[2],v0),diff(_eq[2],Omega)],
> [diff(_eq[3],u0),diff(_eq[3],v0),diff(_eq[3],Omega)]]):
> VV3:=Matrix([[-_eq[1]],[-_eq[2]],[-_eq[3]]]):

```

$$\_eq_3 := (u0 - u0\_0)^2 + (v0 - v0\_0)^2 + (\Omega - \Omega\_0)^2 - r^2$$

```

> EXCUTE_NR:=proc(naprox)
> global HH2,VV2,u0,v0,DELTA;
> local i;
> for i from 1 to naprox do
> DELTA:=evalm(inverse(evalf(HH2))&*VV2);
> u0:=u0+evalf(DELTA[1,1]);
> v0:=v0+evalf(DELTA[2,1]);
> od:
> "residuo",evalf(DELTA[1,1]),evalf(DELTA[2,1]);
> end proc:
> EXCUTE_NR3:=proc(naprox)
> global HH3,VV3,u0,phi,Omega,DELTA,u00,phi0,Omega0,r;
> local i;
> for i from 1 to naprox do
> DELTA:=evalm(inverse(evalf(HH3))&*VV3);
> u0:=u0+evalf(DELTA[1,1]);
> phi:=phi+evalf(DELTA[2,1]);
> Omega:=Omega+evalf(DELTA[3,1]);
> od:
> "residuo",evalf(DELTA[1,1]),evalf(DELTA[2,1]),
> evalf(DELTA[3,1]);
> end proc:

```

```

> for i from 1 to 2 do
> aux:=HH2[i,1]:
> for j from 1 to nt do
> aux:=subs(diff(du[j](u0,v0,Omega),u0)=duu0[j],aux);
> od:
> HH2[i,1]:=subs({seq(du[ii](u0,v0,Omega)=du[ii],
> ii=1..nt)},aux):
> aux:=HH2[i,2]:
> for j from 1 to nt do
> aux:=subs(diff(du[j](u0,v0,Omega),v0)=duv0[j],aux);
> od:
> HH2[i,2]:=subs({seq(du[ii](u0,v0,Omega)=du[ii],
> ii=1..nt)},aux):
> VV2[i,1]:=subs({seq(du[ii](u0,v0,Omega)=du[ii],ii=1..nt)
> },VV2[i,1]):
> od:
> for i from 1 to 3 do
> aux:=HH3[i,1]:
> for j from 1 to nt do
> aux:=subs(diff(du[j](u0,v0,Omega),u0)=duu0[j],aux);
> od:
> HH3[i,1]:=subs({seq(du[ii](u0,v0,Omega)=du[ii],
> ii=1..nt)},aux):
> aux:=HH3[i,2]:
> for j from 1 to nt do
> aux:=subs(diff(du[j](u0,v0,Omega),v0)=duv0[j],aux);
> od:
> HH3[i,2]:=subs({seq(du[ii](u0,v0,Omega)=du[ii],
> ii=1..nt)},aux):
> aux:=HH3[i,3]:
> for j from 1 to nt do
> aux:=subs(diff(du[j](u0,v0,Omega),Omega)=duomega[j],aux);
> od:
> HH3[i,3]:=subs({seq(du[ii](u0,v0,Omega)=du[ii],
> ii=1..nt)},aux):
> VV3[i,1]:=subs({seq(du[ii](u0,v0,Omega)=du[ii],ii=1..nt)
> },VV3[i,1]):
> od:

```

## Remontagem do problema

```

> unassign('cc'); unassign('dd');
> unassign('du'); unassign('duu0'); unassign('duv0');
> unassign('ccu0'); unassign('ccv0');
> unassign('ddu0'); unassign('ddv0');
> unassign('ccu0u0'); unassign('ccu0v0');
> unassign('ccv0u0'); unassign('ccv0v0');
> unassign('ddu0u0'); unassign('ddu0v0');
> unassign('ddv0u0'); unassign('ddv0v0');
> omega0:='omega0': beta:='beta': delta:= 'delta': F:='F':
> zeta:='zeta': F0:='F0': Omega:='Omega':
> b:='b': u0:='u0': phi:='phi': v0:='v0':
> xx2;

```

```

cc1(u0, v0, Omega) cos(Omega t) + dd1(u0, v0, Omega) sin(Omega t)
+ cc2(u0, v0, Omega) cos(3 Omega t) + dd2(u0, v0, Omega) sin(3 Omega t)
> xx2:=subs(
> {seq(cc[jj](u0,v0,Omega)=cc[jj],jj=0..nt),
> seq(dd[jj](u0,v0,Omega)=dd[jj],jj=1..nt)},xx2);
xx2 := cc1 cos(Omega t) + dd1 sin(Omega t) + cc2 cos(3 Omega t) + dd2 sin(3 Omega t)

```

solução

```

> CC[0]:=subs({seq(du[jj](u0,v0,Omega)=du[jj],
> jj=1..nt)},A[0]);
> for i from 1 to nh do;
> CC[i]:=subs({seq(du[jj](u0,v0,Omega)=du[jj],
> jj=1..nt)},A[i]);
> DD[i]:=subs({seq(du[jj](u0,v0,Omega)=du[jj],
> jj=1..nt)},B[i]);
> od:
> c0[0];

```

$$u0$$

```
> c0[2];
```

$$F - 2\zeta\omega_0 v_0 - \omega_0^2 u_0 - \beta u_0^3$$

```
> c0[5];
```

$$-2\zeta\omega_0 du_4(u_0, v_0, \Omega) - \omega_0^2 du_3(u_0, v_0, \Omega) - 6\beta v_0^3 \\ - 18\beta u_0 v_0 du_2(u_0, v_0, \Omega) - 3\beta u_0^2 du_3(u_0, v_0, \Omega)$$

derivadas fundamentais

```

> DU[0]:=u0;
> DU[1]:=v0;
> for i from 2 to nt do;
> DU[i]:=expand(subs({seq(du[jj](u0,v0,Omega)=du[jj],
jj=2..i-1)},c0[i]));
> od:

```

$$DU_0 := u_0$$

$$DU_1 := v_0$$

```
> DU[2];
```

```
> DU[3];
```

```
> DU[4];
```

```
> DU[5];
```

$$F - 2\zeta\omega_0 v_0 - \omega_0^2 u_0 - \beta u_0^3 \\ - 2\zeta\omega_0 du_2 - \omega_0^2 v_0 - 3\beta u_0^2 v_0 \\ - F\Omega^2 - 2\zeta\omega_0 du_3 - \omega_0^2 du_2 - 6\beta u_0 v_0^2 - 3\beta u_0^2 du_2 \\ - 2\zeta\omega_0 du_4 - \omega_0^2 du_3 - 6\beta v_0^3 - 18\beta u_0 v_0 du_2 - 3\beta u_0^2 du_3$$

derivadas das derivadas fundamentais

```

> for i from 0 to 2 do;
> DUu0[i]:=diff(DU[i],u0);
> DUv0[i]:=diff(DU[i],v0);
> DUomega[i]:=diff(DU[i],Omega);
> od:
> for i from 3 to nt do;
> DUu0[i]:=subs({seq(diff(du[jj](u0,v0,Omega),u0)=duu0[jj],
jj=2..i),

```

```

> seq(du[jj](u0,v0,Omega)=du[jj],jj=2..i)}, diff(c0[i],u0));
> DUv0[i]:=subs({seq(diff(du[jj](u0,v0,Omega),v0)=duv0[jj],
jj=2..i)},
> seq(du[jj](u0,v0,Omega)=du[jj],jj=2..i)}, diff(c0[i],v0));
> DUomega[i]:=subs({seq(diff(du[jj](u0,v0,Omega),Omega)
= duomega[jj],jj=2..i)},seq(du[jj](u0,v0,Omega)=du[jj],
jj=2..i)}, diff(c0[i],Omega));
> od:

```

## Rotinas

```

> COMPUTE_TRUE_DU:=proc()
> global zeta,omega0,beta,F0,F,Omega,u0,v0,nt,du,DU,true_du;
> local i,j;
> true_du[0]:=DU[0];
> true_du[1]:=DU[1];
> true_du[2]:=DU[2];
> for i from 3 to nt do
> true_du[i]:=expand(subs({seq(du[j]=true_du[j],j=2..i-1)},
DU[i]));
> od;
> "ok";
> end proc:
> COMPUTE_TRUE_DDU:=proc()
> global zeta,omega0,beta,F0,F,Omega,u0,v0,nt,
> duu0,duv0,du,DUu0,DUv0,
> DUomega,DU,true_du,true_duu0,true_duv0,true_duomega;
> local i,j;
> true_duu0[0]:=DUu0[0]; true_duv0[0]:=DUv0[0];
> true_duomega[0]:=DUomega[0];
> true_duu0[1]:=DUu0[1]; true_duv0[1]:=DUv0[1];
> true_duomega[1]:=DUomega[1];
> true_duu0[2]:=DUu0[2]; true_duv0[2]:=DUv0[2];
> true_duomega[2]:=DUomega[2];
> for i from 3 to nt do
> true_duu0[i]:=expand(subs({seq(du[j]=true_du[j],j=2..i-1),
> seq(duu0[j]=true_duu0[j],j=2..i-1)}, DUu0[i]));
> true_duv0[i]:=expand(subs({seq(du[j]=true_du[j],j=2..i-1),
> seq(duv0[j]=true_duv0[j],j=2..i-1)}, DUv0[i]));
> true_duomega[i]:=expand(subs({seq(du[j]=true_du[j],
j=2..i-1),
> seq(duomega[j]=true_duomega[j],j=2..i-1)}, DUomega[i]));
> od;
> "ok";
> end proc:
> COMPUTE_TRUE_VV:=proc()
> global zeta,omega0,beta,F0,F,Omega,u0,v0,nt,duu0,duv0,du,
> true_du,true_duu0,true_duv0,true_vv,VV2;
> local i;
> true_vv:=Matrix(2,1):
> for i from 1 to 2 do
> true_vv[i,1]:=subs({seq(du[j]=true_du[j],j=2..nt)},
VV2[i,1]);

```

```

> od:
> "ok";
> end proc:
> COMPUTE_TRUE_VV3:=proc()
> global zeta,omega0,beta,F0,F,Omega,u0,v0,nt,
> duu0,duv0,du,true_du,
> true_duu0,true_duv0,true_vv3,VV3;
> local i;
> true_vv3:=Matrix(3,1):
> for i from 1 to 2 do
> true_vv3[i,1]:=subs({seq(du[j]=true_du[j],j=2..nt)},
VV3[i,1]);
> od:
> true_vv3[3,1]:=VV3[3,1]:
> "ok";
> end proc:
> COMPUTE_TRUE_HH:=proc()
> global zeta,omega0,beta,F0,F,Omega,u0,v0,
> Omega_0,u0_0,v0_0,r,nt,
> duu0,duv0,du,true_du,true_duu0,true_duv0,true_hh,HH2;
> local i;
> true_hh:=Matrix(2):
> for i from 1 to 2 do
> true_hh[i,1]:=subs({seq(du[j]=true_du[j],j=2..nt),
> seq(duu0[j]=true_duu0[j],j=2..nt)},HH2[i,1]);
> od:
> for i from 1 to 2 do
> true_hh[i,2]:=subs({seq(du[j]=true_du[j],j=2..nt),
> seq(duv0[j]=true_duv0[j],j=2..nt)},HH2[i,2]);
> od:
> "ok";
> end proc:
> COMPUTE_TRUE_HH3:=proc()
> global zeta,omega0,beta,F0,F,Omega,u0,v0,
> Omega_0,u0_0,v0_0,r,nt,
> duu0,duv0,du,true_du,true_duu0,true_duv0,true_hh3,HH3;
> local i;
> true_hh3:=Matrix(3):
> for i from 1 to 2 do
> true_hh3[i,1]:=subs({seq(du[j]=true_du[j],j=2..nt),
> seq(duu0[j]=true_duu0[j],j=2..nt)},HH3[i,1]);
> od:
> for i from 1 to 2 do
> true_hh3[i,2]:=subs({seq(du[j]=true_du[j],j=2..nt),
> seq(duv0[j]=true_duv0[j],j=2..nt)},HH3[i,2]);
> od:
> for i from 1 to 2 do
> true_hh3[i,3]:=subs({seq(du[j]=true_du[j],j=2..nt),
> seq(duomega[j]=true_duomega[j],j=2..nt)},HH3[i,3]);
> od:
> true_hh3[3,1]:=HH3[3,1]: true_hh3[3,2]:=HH3[3,2]:
> true_hh3[3,3]:=HH3[3,3]:
> "ok";
> end proc:

```

```

> COMPUTE_ONE_STEP:=proc()
> global true_hh,true_vv,u0,v0,COMPUTE_TRUE_DU,
> COMPUTE_TRUE_VV,COMPUTE_TRUE_DDU,COMPUTE_TRUE_HH;
> COMPUTE_TRUE_DU();
> COMPUTE_TRUE_VV();
> COMPUTE_TRUE_DDU();
> COMPUTE_TRUE_HH();
> evalm(inverse(true_hh)*true_vv);
> u0:=u0+%[1,1];
> v0:=v0+%%[2,1];
> evalf(%%[1,1]),evalf(%%[2,1]);
> end proc:
> COMPUTE_ONE_AUTOMATIC_STEP:=proc()
> global
> true_hh3,true_vv3,u0,v0,Omega,COMPUTE_TRUE_DU,
> COMPUTE_TRUE_VV3,COMPUTE_TRUE_DDU,COMPUTE_TRUE_HH3;
> local aux;
> COMPUTE_TRUE_DU();
> COMPUTE_TRUE_VV3();
> COMPUTE_TRUE_DDU();
> COMPUTE_TRUE_HH3();
> aux:=evalm(inverse(true_hh3)*true_vv3);
> u0:=u0+%[1,1];
> v0:=v0+%%[2,1];
> Omega:=Omega+%%[3,1];
> evalf(aux[1,1]),evalf(aux[2,1]),evalf(aux[3,1]);
> end proc:
> COMPUTE_TRUE_SOLUTION:=proc()
> global zeta,omega0,beta,F0,F,Omega,u0,v0,nt,nh,du,cc,dd,
> true_du,true_cc,true_dd,true_xx;
> local i,j;
> true_du[0]:=DU[0];
> true_du[1]:=DU[1];
> true_du[2]:=DU[2];
> true_cc[0]:=0;
> for i from 1 to nh do
> true_cc[i]:=expand(subs({seq(du[j]=true_du[j],
> j=2..nt)},CC[i]));
> true_dd[i]:=expand(subs({seq(du[j]=true_du[j],
> j=2..nt)},DD[i]));
> od;
> i:='i':
> true_xx:=true_cc[0]+sum(true_cc[i]*cos((2*i-1)*Omega*t)+
> true_dd[i]*sin((2*i-1)*Omega*t),i=1..nh);
> end proc:

```

### C.1.2 Exemplo

```

> t:='t':

```

```

> eqd;
      (d^2 u(t)) + 2 zeta omega0 (d/dt u(t)) + omega0^2 u(t) + beta u(t)^3 = F cos(Omega t)
> zeta:=0.05; omega0:=1; alpha:=0; beta:=1;
> F:=1; Omega:=2;
      zeta := 0.05
      omega0 := 1
      alpha := 0
      beta := 1
      F := 1
      Omega := 2

> eqd;
      (d^2 u(t)) + 0.10 (d/dt u(t)) + u(t) + u(t)^3 = cos(2 t)
Chute inicial para as coordenadas do ponto fixo da solução periódica
> u0:=1.2;
> v0:=0.2;
      u0 := 1.2
      v0 := 0.2

> for i from 1 to 15 do
> COMPUTE_ONE_STEP();
> od:
> COMPUTE_ONE_STEP();
> u0,v0;
      0.1673185730 10^-11, 0.1835355378 10^-9
      -1.933790430, 0.09771591379

> u0,v0;
      -1.933790430, 0.09771591379

> XX:=COMPUTE_TRUE_SOLUTION();
      XX := -1.858154359 cos(2 t) + 0.02044165762 sin(2 t)
      - 0.0756360712 cos(6 t) + 0.009472099763 sin(6 t)

```

### Verificação da solução: integração numérica

```

> t:='t':
> eqd;
      (d^2 u(t)) + 0.10 (d/dt u(t)) + u(t) + u(t)^3 = cos(2 t)
> eqd2:=y(t)=diff(x(t),t),diff(y(t),t)=F*cos(Omega*t)
-2*omega0*zeta*dif
> f(x(t),t)
> +alpha*x(t)^2-omega0^2*x(t)-beta*x(t)^3;
> init:=x(0)=u0,y(0)=v0;
      eqd2 := y(t) = d/dt x(t), d/dt y(t) = cos(2 t) - 0.10 (d/dt x(t)) - x(t) - x(t)^3
      init := x(0) = -1.933790430, y(0) = 0.09771591379

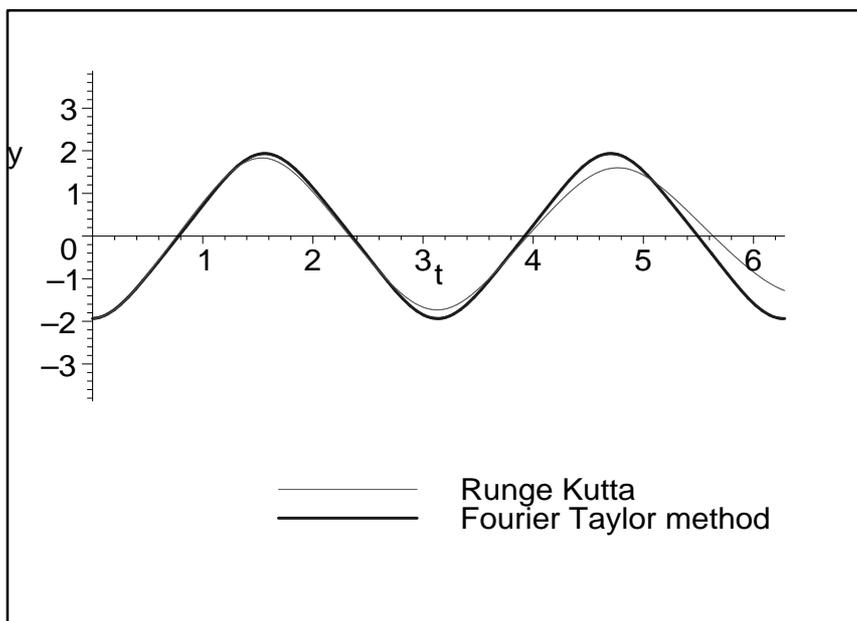
> f:=dsolve({eqd2,init
> },type=numeric,method=classical[rk4],maxfun=999999,
output=procedurelist):

```

```

> T:=evalf(2*Pi/Omega);
      T := 3.141592654
> vi:=0; vf:=evalf(2*T);
> #escrevendo na lista
> delta:=evalf(T/200): cont:=0:
> for k from vi by delta to vf do
>   cont:=cont+1;
>   od: cont;
>   dd1:=array(1..cont,1..2): dd2:=array(1..cont,1..2):
>   cont:=0:
>   for k from vi by delta to vf do
>     cont:=cont+1;
>     dd1[cont,1]:=k;
>     dd1[cont,2]:=eval(x(t),f(k));
>     dd2[cont,1]:=k;
>     dd2[cont,2]:=eval(y(t),f(k));
>   od:
>   d1g:=convert(dd1,listlist):
>   d2g:=convert(dd2,listlist):
      vi := 0
      vf := 6.283185308
      401
> plot([d1g,XX],t=0..vf,y=-2*u0..2*u0,color=[red,blue],
thickness=[2,4],legend=["Runge Kutta","Fourier Taylor
method"]);

```



## C.2

## Exportação de arquivo para programa em C++

```

> with(CodeGeneration):
> omega0:='omega0': beta:='beta': delta:= 'delta': F:='F':
> zeta:='zeta': F0:='F0': Omega:='Omega':
> b:='b': u0:='u0': phi:='phi': v0:='v0': x0:='x0':
> declarations:=[c::numeric, d::numeric, omega0::numeric,
> beta::numeric, Omega::numeric, F::numeric, t::numeric,
> u0::numeric, phi::numeric, u00::numeric, phi0::numeric,
> Omega0::numeric,
> du::numeric, duu0::numeric, duv0::numeric,
> duomega::numeric,
> cc::numeric, dd::numeric]:
> for i from 2 to nt do
> for k from 1 to 1 do
> nomes:=sprintf("duII%dJJ",i-1);
> du_toC[i]:=C(DU[i],resultname=nomes,declare=declarations,
precision=double,output=string,optimize=false):
> od:
> evalf(100*i/nt);
> od:
> for i from 2 to nt do
> for k from 1 to 1 do
> nomes:=sprintf("duu0II%dJJ",i-1);
> duu0_toC[i]:=C(DUu0[i],resultname=nomes,
> declare=declarations,precision=double,output=string,
optimize=false):
> nomes:=sprintf("duv0II%dJJ",i-1);
> duv0_toC[i]:=C(DUv0[i],resultname=nomes,
> declare=declarations, precision=double,output=string,
optimize=false):
> nomes:=sprintf("duomegaII%dJJ",i-1);
> duomega_toC[i]:=C(DUomega[i],resultname=nomes,
> declare=declarations, precision=double,output=string,
optimize=false):
> od:
> evalf(100*i/nt);
> od:
> for i from 1 to 3 do
> for k from 1 to 1 do
> nomes:=sprintf("vII%dJJ",i-1);
> v_toC[i]:=C(VV3[i,1],resultname=nomes,
> declare=declarations,precision=double,output=string,
optimize=true):
> for j from 1 to 3 do
> nomes:=sprintf("hII%dJJII%dJJ",i-1,j-1);
> m_toC[i,j]:=C(HH3[i,j],resultname=nomes,
> declare=declarations,precision=double,output=string,
optimize=true):
> od:
> od:
> evalf(100*i/3);
> od:

```

```

> for i from 1 to nh do
> for k from 1 to 1 do
> nomes:=sprintf("cII%dJJ",i-1);
> ci_toC[i]:=C(CC[i],resultname=nomes,
> declare=declarations,precision=double,output=string,
optimize=false):
> nomes:=sprintf("dII%dJJ",i-1);
> di_toC[i]:=C(DD[i],resultname=nomes,
> declare=declarations,precision=double,output=string,
optimize=false):
> od:
> evalf(100*i/nh);
> od:
> xx2;
       $cc_1 \cos(\Omega t) + dd_1 \sin(\Omega t) + cc_2 \cos(3\Omega t) + dd_2 \sin(3\Omega t)$ 
> subs(t=0,xx2):
> dx0[0]:=%;
> x0:=%:
> for i from 1 to nt do
> subs(t=0,evalf(diff(xx2/(2*nh-1)^i,t$i))):
> dx0[i]:=collect(%,Omega);
> od:
       $dx0_0 := cc_1 + cc_2$ 
> x0;
       $cc_1 + cc_2$ 
> nomes:=sprintf("x0",i-1):
> x0_toC:=C(x0,resultname=nomes,
> declare=declarations,precision=double,output=string,
optimize=false):
> for i from 0 to nt do
> for k from 1 to 1 do
> nomes:=sprintf("dx0II%dJJ",i);
> dx0_toC[i]:=C(dx0[i],resultname=nomes,
> declare=declarations,precision=double,output=string,
optimize=false):
> od:
> evalf(100*i/nt);
> od:

```

### C.2.1

#### Escreve o arquivo

```

> classname:="FTMapleForced_nt";
       $classname := \text{"FTMapleForced\_nt"}$ 

```

```

> PRINT_HEADING := proc(fd)
> fprintf(fd,"//equações from Maple\n"):
> fprintf(fd,"\n"):
> fprintf(fd,"#include <math.h>\n"):
> fprintf(fd,"#include \"ftmaple.h\"\n"):
> fprintf(fd,"\n"):
> end proc:
> PRINT_LOCAL_VARS := proc(fd)
> local cont,i,j;
> fprintf(fd,"//local vars\n"):
> cont:=0:
> for i from 1 to 10*nh do
> cont:=cont+1:
> fprintf(fd,"static double t%d",cont):
> for j from 1 to nt do
> cont:=cont+1:
> fprintf(fd,",t%d",cont):
> od:
> fprintf(fd,";\n"):
> od:
> fprintf(fd,"\n\n"):
> end proc:
> PRINT_COMPUTE_DU := proc(fd) global ci_toC,di_toC; local
i;
> fprintf(fd,"void %s%d::ComputedU()\n",classname,nh):
> fprintf(fd,"{\n"):
> for i from 2 to nt do
> fprintf(fd,"%s",du_toC[i]):
> od:
> fprintf(fd,"}\n"):
> end proc:
> PRINT_COMPUTE_DDU := proc(fd) global ci_toC,di_toC; local
i;
> fprintf(fd,"void %s%d::ComputedDU()\n",classname,nh):
> fprintf(fd,"{\n"):
> for i from 2 to nt do
> fprintf(fd,"%s",duu0_toC[i]):
> fprintf(fd,"%s",duv0_toC[i]):
> fprintf(fd,"%s",duomega_toC[i]):
> od:
> fprintf(fd,"}\n"):
> end proc:
> PRINT_CONSTRUCTOR := proc(fd)
> fprintf(fd,"%s%d::~%s%d()\n",classname,nh,classname,nh):
> fprintf(fd,"{\n"):
> fprintf(fd,"}\n"):
> fprintf(fd,"\n"):
> fprintf(fd,"%s%d::~~%s%d()\n",classname,nh,classname,nh):
> fprintf(fd,"{\n"):
> fprintf(fd,"}\n"):
> fprintf(fd,"\n"):
> end proc:

```

```

> PRINT_SOLUTION := proc(fd) global ci_toC,di_toC; local i;
> fprintf(fd,"void %s%d::Solution()\n",classname,nh):
> fprintf(fd,"{\n"):
> for i from 1 to nh do
> fprintf(fd,"%s",ci_toC[i]):
> fprintf(fd,"%s",di_toC[i]):
> od:
> fprintf(fd,"}\n"):
> end proc:
> PRINT_EQ := proc(fd) global m_toC,v_toC; local i,j,k;
> fprintf(fd,"void %s%d::Eq()\n",classname,nh):
> fprintf(fd,"{\n"):
> fprintf(fd,"ComputeDU();\n"):
> fprintf(fd,"ComputeDDU();\n"):
> for i from 1 to 3 do
> fprintf(fd,"%s",v_toC[i]):
> od:
> for i from 1 to 3 do
> for j from 1 to 3 do
> fprintf(fd,"%s",m_toC[i,j]):
> od:
> od:
> fprintf(fd,"}\n"):
> fprintf(fd,"\n"):
> end proc:
> PRINT_COMPUTE_DX0 := proc(fd) global x0_toC,dx0_toC; local
i;
> fprintf(fd,"void %s%d::ComputedX0()\n",classname,nh):
> fprintf(fd,"{\n"):
> fprintf(fd,"%s",x0_toC):
> for i from 0 to nt do
> fprintf(fd,"%s",dx0_toC[i]):
> od:
> fprintf(fd,"for(int i=0;i<nh;++i)\n"):
> fprintf(fd," dx0[i]*=pow(2*nh-1,i);\n"):
> fprintf(fd,"}\n"):
> end proc:
> fname:=sprintf("c:\ftmaple_n13_nt=%d.cpp",nh);
      fname := "c:\ftmaple_n13_nt=2.cpp"

```

writing...

```

> fname;
> fd:=fopen(fname,WRITE,BINARY);
> PRINT_HEADING(fd);
> PRINT_LOCAL_VARS(fd);
> PRINT_SOLUTION(fd);
> PRINT_COMPUTE_DX0(fd);
> PRINT_COMPUTE_DU(fd);
> PRINT_COMPUTE_DDU(fd);
> PRINT_EQ(fd);
> fclose(fd);

```

"c:\ftmaple\_n13\_nt=2.cpp"

*fd* := 0

2  
2  
2  
2  
2  
1

## C.2.2

### Arquivo exportado

```
//equações from Maple
#include <math.h>
#include "ftmaple.h"
//local vars
static double t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8;
static double t9,t10,t11,t12,t13,t14,t15,t16;
static double t17,t18,t19,t20,t21,t22,t23,t24;
static double t25,t26,t27,t28,t29,t30,t31,t32;
static double t33,t34,t35,t36,t37,t38,t39,t40;
static double t41,t42,t43,t44,t45,t46,t47,t48;

void FTMapleForced_nt2::Solution()
{
c[0]=0.9e1/0.8e1 * u0 - pow(Omega, - 0.2e1) * ( - F/0.2e1 + zeta * omega0 *
v0 + omega0 * omega0 * u0/0.2e1 + beta * pow(u0,0.3e1)/0.2e1)/0.4e1;
d[0]=0.9e1/0.8e1/Omega * v0 - 0.3e1/0.4e1 * pow(Omega, - 0.3e1) * (zeta
* omega0 * du[1]/0.3e1 + omega0 * omega0 * v0/0.6e1 + beta * u0 * u0 *
v0/0.2e1);
c[1]= - u0/0.8e1 + pow(Omega, - 0.2e1) * ( - F/0.2e1 + zeta * omega0 * v0
+ omega0 * omega0 * u0/0.2e1 + beta * pow(u0,0.3e1)/0.2e1)/0.4e1;
d[1]= - 0.1e1/Omega * v0/0.24e2 + pow(Omega, - 0.3e1) * (zeta * omega0 *
du[1]/0.3e1 + omega0 * omega0 * v0/0.6e1 + beta * u0 * u0 * v0/0.2e1)/0.4e1;
}

void FTMapleForced_nt2::ComputeDX0()
{
x0=cc[0] + cc[1];
dx0[0]=cc[0] + cc[1];
dx0[1]=(0.3333333333e0 * dd[0] + 0.1e1 * dd[1]) * Omega;
dx0[2]=( - 0.1111111111e0 * cc[0] - 0.1e1 * cc[1]) * Omega * Omega;
dx0[3]=( - 0.3703703704e - 1 * dd[0] - 0.1e1 * dd[1]) * pow(Omega,0.3e1);
dx0[4]=(0.1234567901e - 1 * cc[0] + 0.1e1 * cc[1]) * pow(Omega,0.4e1);
dx0[5]=(0.4115226337e - 2 * dd[0] + 0.1e1 * dd[1]) * pow(Omega,0.5e1);
dx0[6]=( - 0.1371742112e - 2 * cc[0] - 0.1e1 * cc[1]) * pow(Omega,0.6e1);
dx0[7]=( - 0.4572473708e - 3 * dd[0] - 0.1e1 * dd[1]) * pow(Omega,0.7e1);
for(int i=0; i<nh; ++i)
```

```
dx0[i] * =pow(2 * nh - 1,i);
}
```

```
void FTMapleForced_nt2::ComputeDU()
{
du[1]=F - 0.2e1 * zeta * omega0 * v0 - omega0 * omega0 * u0 - beta *
pow(u0,0.3e1);
du[2]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * du[1] - omega0 * omega0 * v0 - 0.3e1 * beta
* u0 * u0 * v0;
du[3]= - F * Omega * Omega - 0.2e1 * zeta * omega0 * du[2] - omega0 *
omega0 * du[1] - 0.6e1 * beta * u0 * v0 * v0 - 0.3e1 * beta * u0 * u0 * du[1];
du[4]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * du[3] - omega0 * omega0 * du[2] - 0.6e1 *
beta * pow(v0,0.3e1) - 0.18e2 * beta * u0 * v0 * du[1] - 0.3e1 * beta * u0 *
u0 * du[2];
du[5]=F * pow(Omega,0.4e1) - 0.2e1 * zeta * omega0 * du[4] - omega0 *
omega0 * du[3] - 0.36e2 * beta * v0 * v0 * du[1] - 0.18e2 * beta * u0 *
pow(du[1],0.2e1) - 0.24e2 * beta * u0 * v0 * du[2] - 0.3e1 * beta * u0 * u0 *
du[3];
du[6]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * du[5] - omega0 * omega0 * du[4] - 0.90e2 *
beta * v0 * pow(du[1],0.2e1) - 0.60e2 * beta * v0 * v0 * du[2] - 0.60e2 * beta
* u0 * du[1] * du[2] - 0.30e2 * beta * u0 * v0 * du[3] - 0.3e1 * beta * u0 * u0
* du[4];
}
```

```
void FTMapleForced_nt2::ComputeDDU()
{
duu0[1]= - omega0 * omega0 - 0.3e1 * beta * u0 * u0;
duv0[1]= - 0.2e1 * zeta * omega0;
duomega[1]=0;
duu0[2]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * duu0[1] - 0.6e1 * beta * u0 * v0;
duv0[2]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * duv0[1] - omega0 * omega0 - 0.3e1 * beta
* u0 * u0;
duomega[2]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * duomega[1];
duu0[3]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * duu0[2] - omega0 * omega0 * duu0[1] -
0.6e1 * beta * v0 * v0 - 0.6e1 * beta * u0 * du[1] - 0.3e1 * beta * u0 * u0 *
duu0[1];
duv0[3]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * duv0[2] - omega0 * omega0 * duv0[1] -
0.12e2 * beta * u0 * v0 - 0.3e1 * beta * u0 * u0 * duv0[1];
duomega[3]= - 0.2e1 * F * Omega - 0.2e1 * zeta * omega0 * duomega[2] -
omega0 * omega0 * duomega[1] - 0.3e1 * beta * u0 * u0 * duomega[1];
duu0[4]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * duu0[3] - omega0 * omega0 * duu0[2] -
0.18e2 * beta * v0 * du[1] - 0.18e2 * beta * u0 * v0 * duu0[1] - 0.6e1 * beta *
u0 * du[2] - 0.3e1 * beta * u0 * u0 * duu0[2];
duv0[4]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * duv0[3] - omega0 * omega0 * duv0[2] -
0.18e2 * beta * v0 * v0 - 0.18e2 * beta * u0 * du[1] - 0.18e2 * beta * u0 * v0
* duv0[1] - 0.3e1 * beta * u0 * u0 * duv0[2];
duomega[4]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * duomega[3] - omega0 * omega0 *
duomega[2] - 0.18e2 * beta * u0 * v0 * duomega[1] - 0.3e1 * beta * u0 * u0 *
```

```

duomega[2];
duu0[5]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * duu0[4] - omega0 * omega0 * duu0[3] -
0.36e2 * beta * v0 * v0 * duu0[1] - 0.18e2 * beta * pow(du[1],0.2e1) - 0.36e2
* beta * u0 * du[1] * duu0[1] - 0.24e2 * beta * v0 * du[2] - 0.24e2 * beta * u0
* v0 * duu0[2] - 0.6e1 * beta * u0 * du[3] - 0.3e1 * beta * u0 * u0 * duu0[3];
duv0[5]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * duv0[4] - omega0 * omega0 * duv0[3] -
0.72e2 * beta * v0 * du[1] - 0.36e2 * beta * v0 * v0 * duv0[1] - 0.36e2 * beta
* u0 * du[1] * duv0[1] - 0.24e2 * beta * u0 * du[2] - 0.24e2 * beta * u0 * v0 *
duv0[2] - 0.3e1 * beta * u0 * u0 * duv0[3];
duomega[5]=0.4e1 * F * pow(Omega,0.3e1) - 0.2e1 * zeta * omega0 *
duomega[4] - omega0 * omega0 * duomega[3] - 0.36e2 * beta * v0 * v0 *
duomega[1] - 0.36e2 * beta * u0 * du[1] * duomega[1] - 0.24e2 * beta * u0 *
v0 * duomega[2] - 0.3e1 * beta * u0 * u0 * duomega[3];
duu0[6]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * duu0[5] - omega0 * omega0 * duu0[4] -
0.180e3 * beta * v0 * du[1] * duu0[1] - 0.60e2 * beta * v0 * v0 * duu0[2] -
0.60e2 * beta * du[1] * du[2] - 0.60e2 * beta * u0 * duu0[1] * du[2] - 0.60e2 *
beta * u0 * du[1] * duu0[2] - 0.30e2 * beta * v0 * du[3] - 0.30e2 * beta * u0 *
v0 * duu0[3] - 0.6e1 * beta * u0 * du[4] - 0.3e1 * beta * u0 * u0 * duu0[4];
duv0[6]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * duv0[5] - omega0 * omega0 * duv0[4] -
0.90e2 * beta * pow(du[1],0.2e1) - 0.180e3 * beta * v0 * du[1] * duv0[1] -
0.120e3 * beta * v0 * du[2] - 0.60e2 * beta * v0 * v0 * duv0[2] - 0.60e2 * beta
* u0 * duv0[1] * du[2] - 0.60e2 * beta * u0 * du[1] * duv0[2] - 0.30e2 * beta
* u0 * du[3] - 0.30e2 * beta * u0 * v0 * duv0[3] - 0.3e1 * beta * u0 * u0 *
duv0[4];
duomega[6]= - 0.2e1 * zeta * omega0 * duomega[5] - omega0 * omega0 *
duomega[4] - 0.180e3 * beta * v0 * du[1] * duomega[1] - 0.60e2 * beta * v0 *
v0 * duomega[2] - 0.60e2 * beta * u0 * duomega[1] * du[2] - 0.60e2 * beta *
u0 * du[1] * duomega[2] - 0.30e2 * beta * u0 * v0 * duomega[3] - 0.3e1 * beta
* u0 * u0 * duomega[4];
}

void FTMapleForced_nt2::Eq()
{
ComputeDU();
ComputeDDU();
t1=Omega * Omega;
t4=zeta * omega0;
t8=omega0 * omega0;
t9=du[1];
t13=v0 * v0;
t16=u0 * u0;
t31=0.1e1/t1 * ( - F/0.2e1 + t4 * v0 + t8 * u0/0.2e1 + beta * t16 *
u0/0.2e1)/0.4e1;
t33=t1 * t1;
v[0]=F * t1/0.24e2 + t4 * du[2]/0.12e2 + t8 * t9/0.24e2 + beta * u0 *
t13/0.4e1 + beta * t16 * t9/0.8e1 + (0.9e1/0.8e1 * u0 - t31) * t33/0.24e2 +
0.27e2/0.8e1 * ( - u0/0.8e1 + t31) * t33;
t1=zeta * omega0;

```

```

t5=omega0 * omega0;
t6=du[2];
t9=v0 * v0;
t14=du[1];
t18=u0 * u0;
t19=beta * t18;
t23=0.1e1/Omega * v0;
t25=Omega * Omega;
t35=0.1e1/t25/Omega * (t1 * t14/0.3e1 + t5 * v0/0.6e1 + t19 * v0/0.2e1);
t38=t25 * t25;
t39=t38 * Omega;
v[1]=t1 * du[3]/0.60e2 + t5 * t6/0.120e3 + beta * t9 * v0/0.20e2 +
0.3e1/0.20e2 * beta * u0 * v0 * t14 + t19 * t6/0.40e2 + (0.9e1/0.8e1 *
t23 - 0.3e1/0.4e1 * t35) * t39/0.120e3 + 0.81e2/0.40e2 * ( - t23/0.24e2 +
t35/0.4e1) * t39;
t2=pow(u0 - u0_0,0.2e1);
t4=pow(v0 - v0_0,0.2e1);
t6=pow(Omega - Omega_0,0.2e1);
t7=r * r;
v[2]= - t2 - t4 - t6 + t7;
t5=omega0 * omega0;
t6=duu0[1];
t9=v0 * v0;
t16=u0 * u0;
t17=beta * t16;
t20=Omega * Omega;
t26=0.1e1/t20 * (t5/0.2e1 + 0.3e1/0.2e1 * t17)/0.4e1;
t28=t20 * t20;
h[0][0]= - zeta * omega0 * duu0[2]/0.12e2 - t5 * t6/0.24e2 - beta * t9/0.4e1 -
beta * u0 * du[1]/0.4e1 - t17 * t6/0.8e1 - (0.9e1/0.8e1 - t26) * t28/0.24e2 -
0.27e2/0.8e1 * ( - 0.1e1/0.8e1 + t26) * t28;
t5=omega0 * omega0;
t6=duv0[1];
t12=u0 * u0;
t16=Omega * Omega;
h[0][1]= - zeta * omega0 * duv0[2]/0.12e2 - t5 * t6/0.24e2 - beta * u0 *
v0/0.2e1 - beta * t12 * t6/0.8e1 - 0.5e1/0.6e1 * t16 * zeta * omega0;
t3=zeta * omega0;
t7=omega0 * omega0;
t8=duomega[1];
t11=u0 * u0;
t22= - F/0.2e1 + t3 * v0 + t7 * u0/0.2e1 + beta * t11 * u0/0.2e1;
t26=Omega * Omega;
t29=0.1e1/t26 * t22/0.4e1;
t31=t26 * Omega;
h[0][2]= - F * Omega/0.12e2 - t3 * duomega[2]/0.12e2 - t7 * t8/0.24e2 - beta
* t11 * t8/0.8e1 + 0.5e1/0.3e1 * Omega * t22 - (0.9e1/0.8e1 * u0 - t29) *
t31/0.6e1 - 0.27e2/0.2e1 * ( - u0/0.8e1 + t29) * t31;

```

```

t1=zeta * omega0;
t5=omega0 * omega0;
t6=duu0[2];
t13=beta * u0;
t14=duu0[1];
t21=u0 * u0;
t25=Omega * Omega;
h[1][0]= - t1 * duu0[3]/0.60e2 - t5 * t6/0.120e3 - 0.3e1/0.20e2 * beta * v0
* du[1] - 0.3e1/0.20e2 * t13 * v0 * t14 - t13 * du[2]/0.20e2 - beta * t21 *
t6/0.40e2 - t25 * (t1 * t14/0.3e1 + t13 * v0)/0.2e1;
t1=zeta * omega0;
t5=omega0 * omega0;
t6=duv0[2];
t9=v0 * v0;
t12=beta * u0;
t16=duv0[1];
t20=u0 * u0;
t21=beta * t20;
t24=0.1e1/Omega;
t26=Omega * Omega;
t34=0.1e1/t26/Omega * (t1 * t16/0.3e1 + t5/0.6e1 + t21/0.2e1);
t37=t26 * t26;
t38=t37 * Omega;
h[1][1]= - t1 * duv0[3]/0.60e2 - t5 * t6/0.120e3 - 0.3e1/0.20e2 * beta * t9 -
0.3e1/0.20e2 * t12 * du[1] - 0.3e1/0.20e2 * t12 * v0 * t16 - t21 * t6/0.40e2
- (0.9e1/0.8e1 * t24 - 0.3e1/0.4e1 * t34) * t38/0.120e3 - 0.81e2/0.40e2 * ( -
t24/0.24e2 + t34/0.4e1) * t38;
t1=zeta * omega0;
t5=omega0 * omega0;
t6=duomega[2];
t10=duomega[1];
t14=u0 * u0;
t15=beta * t14;
t18=Omega * Omega;
t20=0.1e1/t18 * v0;
t22=t18 * t18;
t31=t1 * du[1]/0.3e1 + t5 * v0/0.6e1 + t15 * v0/0.2e1;
t32=0.1e1/t22 * t31;
t35=0.1e1/t18/Omega;
t38=t35 * zeta * omega0 * t10;
t41=Omega * t22;
t45=0.1e1/Omega * v0;
t47=t35 * t31;
h[1][2]= - t1 * duomega[3]/0.60e2 - t5 * t6/0.120e3 - 0.3e1/0.20e2 * beta
* u0 * v0 * t10 - t15 * t6/0.40e2 - ( - 0.9e1/0.8e1 * t20 + 0.9e1/0.4e1 *
t32 - t38/0.4e1) * t41/0.120e3 - (0.9e1/0.8e1 * t45 - 0.3e1/0.4e1 * t47) *
t22/0.24e2 - 0.81e2/0.40e2 * (t20/0.24e2 - 0.3e1/0.4e1 * t32 + t38/0.12e2) *
t41 - 0.81e2/0.8e1 * ( - t45/0.24e2 + t47/0.4e1) * t22;

```

```
h[2][0]=0.2e1 * u0 - (double)(2 * u0_0);  
h[2][1]=2 * v0 - 2 * v0_0;  
h[2][2]=0.2e1 * Omega - (double)(2 * Omega_0);  
}
```

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)