Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática

Inferência em Processos Compostos com Dependência

Gilmar Jorge de Oliveira Júnior

Orientador: Helio S. Migon

Rio de Janeiro

Junho/2007

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

INFERÊNCIA EM PROCESSOS COMPOSTOS COM DEPENDÊNCIA

Gilmar Jorge de Oliveira Júnior

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Rio de Janeiro

Junho/2007

INFERÊNCIA EM PROCESSOS COMPOSTOS COM DEPENDÊNCIA

Gilmar Jorge de Oliveira Júnior

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovada por:

Prof. Helio dos Santos Migon
IM-UFRJ - Orientador

Prof. Fernando Antônio da Silva Moura
IM-UFRJ

Prof. Sergio Pinheiro Firpo
PUC-RJ

Rio de Janeiro
Junho/2007

A minha tia Marta Duarte de Barros

(*in memorian)*

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por me dar força e saúde para lutar pelos meus objetivos.

Ao professor e orientador Helio dos Santos Migon, pelos conhecimentos transmitidos, pela amizade e por acreditar e incentivar a realização deste trabalho.

A minha mãe Auxiliadora, meu pai Gilmar e meu irmão Edmar. Agradeço a paciência, apoio e carinho indispensáveis para atravessar este período de estudos.

Ao meu segundo "pai", tio Odilon, por me introduzir nesse mundo fascinante das ciências exatas.

A minha família, por toda a torcida e pensamentos positivos, que mesmo de longe se fizeram presentes.

A Bruna, por estar sempre ao meu lado em todos os momentos, complicados e bons que passei. Principalmente, por compreender e entender o quanto este trabalho era importante para mim.

A todos meus amigos que conquistei aqui no Rio, em especial Raphael, Everton, Ana, Hellen e Marcus Vinicius.

Aos meus amigos e companheiros de Cuiabá, que sempre apostaram em mim. Uma saudação especial ao meu grande mestre Evandro.

Aos professores do mestrado que tenham contribuído de alguma forma para minha formação.

Aos colegas da Pós-Graduação em atuária, que me ajudaram muito na adaptação ao Rio de Janeiro e a me preparar para o mestrado.

Ao José Roberto Montello e toda a equipe da Jessé Montello, pela compreensão e apoio que me deram nesses últimos meses.

A todos os amigos com quem dividi sala de aula, biblioteca, laboratório... durante o mestrado. Quero destacar o Vinicius P. Israel, pela grande colaboração em me ajudar a revisar o texto. E ao meu grande amigo Marcus Vinicius Moraes Fernandes, que me auxiliou nas disciplinas do mestrado e na conclusão desta dissertação.

Enfim, à todos que, mesmo anonimamente, tenham torcido por mim.

Muito Obrigado!

Resumo

A teoria do risco tradicional assume os riscos individuais de uma carteira de seguro como sendo independentes. Ela também determina a função distribuição dos sinistros agregados através de recursões de Panjer e de De Pril, convolução ou aproximação por momentos. Porém, uma tendência moderna em atuária é modelar conjuntamente os riscos atuarial e financeiro, gerando assim, somas de variáveis aleatórias dependentes.

Neste trabalho, apresenta-se dois métodos para se fazer inferência com somas de variáveis aleatórias dependentes. O primeiro consiste em determinar limites inferior e superior para a distribuição desta soma e o segundo baseia-se na estatística Bayesiana. Utiliza-se a provisão total de IBNR, para ilustrar os métodos.

Palavras-chave: Limites inferior e superior, IBNR, comonotonicidade, prêmio de *stop-loss*.

Abstract

The theory of the traditional risk assumes: The individual risks of an insurance portfolio are independent and determines the distribution function of the aggregate claims through Panjer recursion, De Pril recursion, convolution or moment based approximations. A modern tendency in actuarial science is modeling the actuarial jointly and financial risks, generating like this, sums of dependent random variables.

This paper, presents two methods of inference with sums of dependent random variables. The first consists on determining lower bound and upper bound for the distribution of this sum and the second is based on the Bayesiana statistics. The total provision of IBNR is used, to illustrate the methods.

Keywords: Lower bound and upper bound, IBNR, comonotonicity, stop-loss premium.

Lista de Tabelas

2.1 Quantis de S^c e S. 22

4.1 Valores dos quantis de S,S^l e S^c, com μ e σ^2 conhecido. 42

4.2 Valores dos prêmios de *stop-loss* de S, S^l e S^c, para diferentes "d", com μ e σ^2 conhecido. 43

4.3 Taxas de juros ocorridas no período de 1996 a 2005 43

4.4 Valores dos quantis de S, S^l e S^c, com μ e σ^2 estimado. 45

4.5 Valores dos prêmios de *stop-loss* de S, S^l e S^c, para diferentes "d", com μ e σ^2 estimado. 45

5.1 Triângulo de *Run-off* do montante de sinistros. 47

5.2 Triângulo de *Run-off* dos montantes de sinistros não acumulados. 57

5.3 Especificações do modelo, estimador de máxima verossimilhança e erro padrão, ($\beta_1 = 0$). 58

5.4 Valores dos quantis de S, S^l e S^c (deve-se multiplicar por 10^3). 59

5.5 Estimativas para os parâmetros α, β, μ e σ^2 do modelo 2. 61

5.6 Estimativas do modelo 2 para cada ano de origem (deve-se multiplicar o valor estimado por 10^3). 62

5.7 Estimativas do modelo 2 para os gastos dos anos correntes (deve-se multiplicar o valor estimado por 10^3). 62

5.8 Estimativas do modelo 2 para o IBNR (deve-se multiplicar o valor estimado por 10^3). 63

5.9 Montantes de sinistros previstos (modelo 2). 64

5.10 Estimativas do modelo 3 para cada ano de origem (deve-se multiplicar o valor estimado por 10^3). 64
5.11 Estimativas do modelo 3 para os gastos dos anos correntes (deve-se multiplicar o valor estimado por 10^3). 65
5.12 Estimativas do modelo 3 para o IBNR (deve-se multiplicar o valor estimado por 10^3). 65
5.13 Montantes de sinistros previstos (modelo 3). 66
5.14 Quantis dos limites inferior e superior dos modelos 1, 2 e 3 (deve-se multiplicar por 10^3). 67
5.15 Os erros quadráticos médios (EQM) dos modelos 2 e 3. 68

Lista de Figuras

2.1 Gráfico de dispersão de dados simulados das cópulas de Fréchet. 12

2.2 Linha dos quantis das cópulas de Fréchet C^+ (esquerda) e C^- (direita). . 12

2.3 Suporte comonotônico de (X,Y). Os pontos representam probabilidades positivas. Pode-se verficar pela linha em pontilhado, que todos elementos do suporte, são não decrescentes. 18

2.4 Gráfico da definição de F_X^{-1}, F_X^{-1+} e $F_X^{-1(\alpha)}$. 19

2.5 Funções distribuições acumuladas de S^c e S, respectivamente. 22

3.1 Função do $max(x-d,0)$ 24

3.2 Dois prêmios de *stop-loss* $E[(X-t)_+]$ e $E[(Y-t)_+]$ onde $X \leq_{cx} Y$. Neste gráfico pode-se verificar a relação da equação (3.3). 28

3.3 Função distribuição acumulada de S (linha), de S^l (tracejado), de S^c (pontilhado) e de S^u (linha) quando $a = 0$. 34

3.4 Função distribuição acumulada de S (linha), de S^l (linha), de S^c (tracejado) e de S^u (tracejado) quando $a = 1$. 34

4.1 Funções distribuições acumuladas de S(pontilhado), S^l(pontilhado) e S^c (linha), com μ e σ^2 conhecido. 41

4.2 QQ-plot das distribuições de S^l (bola) e S^c (quadrado) em relação a S, com μ e σ^2 conhecido. 41

4.3 Os prêmios de *stop-loss* com retenção d, para S(pontilhado), S^l(pontilhado) e S^c(linha),com μ e σ^2 conhecido. 42

4.4 Funções distribuições acumuladas de S(linha), S^l(linha) e S^c (pontilhado), com μ e σ^2 estimado. 44

4.5 QQ-plot das distribuições de S^l (bola) e S^c (quadrado) em relação a S, com μ e σ^2 estimado. 44
4.6 Os prêmios de *stop-loss* com retenção d, para S(pontilhado), S^l(pontilhado) e S^c(linha), com μ e σ^2 estimado. 45

5.1 Funções distribuições acumuladas de S(linha), S^l(linha) e S^c (pontilhado) 59
5.2 QQ-plot dos quantis de S^l (bola) e S^c (quadrado) em relação a S. 59
5.3 Gráfico entre o valor da provisão total de IBNR e o número de iterações (modelo 2). 63
5.4 Histograma da provisão total de IBNR (modelo 2). 63
5.5 Gráfico entre o valor da provisão total de IBNR e o número de iterações (modelo 3). 65
5.6 Histograma da provisão total de IBNR (modelo 3). 66
5.7 QQ-plot dos valores observados pelos previstos do modelo 2. 67
5.8 QQ-plot dos valores observados pelos previstos do modelo 3. 68

Sumário

1 Introdução **1**

2 Comonotonicidade **6**

2.1 Cópulas e Limites de Fréchet 6

2.1.1 Cópulas 7

2.1.2 Limites de Fréchet 10

2.1.3 Exemplo de Cópulas Bidimensionais 13

2.2 Conjuntos e vetores comonotônicos 14

2.2.1 Conjuntos Comonotônicos 14

2.2.2 Vetor Aleatório Comonotônico 16

2.3 Soma de Variáveis Aleatórias Comonotônicas 18

3 Limites para Soma de Variáveis Aleatórias Dependentes **23**

3.1 Ordenação de Variáveis Aleatórias 23

3.1.1 Ordem de *stop-loss* 25

3.1.2 Ordem Convexa 26

3.2 Limite Superior (S^c) 27

3.3 Limite Superior Melhorado (S^u) 29

3.4 Limite Inferior (S^l) 31

4 Valor Presente de Fluxo de Pagamento **35**

4.1 Limites para Soma (S) 36

4.1.1 Limite Superior (S^c) 36

4.1.2 Limite Superior Melhorado (S^u) 37
4.1.3 Limite Inferior (S^l) 38
4.2 Ilustração Numérica 39
4.2.1 Taxa de juros com média e variância conhecida 40
4.2.2 Taxa de juros com média e variância estimadas 42

5 Provisão de Sinistros Ocorridos mas não Avisados (IBNR) 46
5.1 Triângulo de *Run-off* 47
5.2 Modelo Estatístico 48
5.2.1 Modelo 1 49
5.2.2 Modelo 2 50
5.2.3 Modelo 3 51
5.3 Métodos Estatísticos 52
5.3.1 Limites para Provisão Total de IBNR 52
5.3.2 Método Bayesiano 54
5.4 Ilustração Numérica 56
5.4.1 Modelo 1 (Limites para Provisão de IBNR) 57
5.4.2 Modelo 2 (Estatística Bayesiana) 60
5.4.3 Modelo 3 (Estatística Bayesiana) 60
5.4.4 Comparando os Resultados 64

6 Considerações Finais 69

Referências Bibliográficas 71

Capítulo 1

Introdução

Na teoria do risco tradicional, os riscos individuais de uma carteira de seguro são geralmente supostos independentes. A determinação da função distribuição dos sinistros agregados ocorre através das técnicas: Recursão de Panjer e de De Pril, convolução ou aproximação por momentos. Os seguros são baseados no fato de que com o aumento do número de risco segurado, os quais são assumidos independentes e identicamente distribuídos, o risco médio torna-se cada vez mais previsível por causa da Lei dos Grandes Números. Isto pode ser explicado pelo fato de que o valor pago em uma apólice pode ser compensado por outras apólices. Outra lei da estatística em que se baseia esta teoria é o teorema central do limite, que assumindo independência, os sinistros agregados da carteira são, aproximadamente, normais distribuídos, contanto, que os números de riscos segurados sejam bem grandes. Para um estudo mais ambrangente consultar (Bowers, Gerber, Hickman, Jones, & Nesbitt, 1997) e (Ferreira, 2002).

Segundo (Dhaene, Denuit, Goovaerst, Kaas, & Vyncke, 2002) uma tendência em atuária é de analisar conjuntamente os riscos atuariais e financeiros. Ao combiná-los não se pode assumir independência entre os riscos individuais de uma carteira de seguro. A seguir serão ilustradas algumas situações onde os riscos individuais não podem ser considerados independentes.

(a) Uma anuidade de vida (a_x) de um indivíduo de idade(x) paga uma quantia de 1 u.m.(unidade monetária), no fim de cada ano, caso o segurado esteja vivo naquele ano. Considere T uma variável aleatória não-negativa, contínua, representando o tempo de

vida remanescente do indivíduo de idade (x). A função distribuição de T é denotada por $F_T(t) = {}_tq_x$ $(t \geq 0)$. A última idade da tábua biométrica é denotada por ω, isto significa que $\omega - x$ é o tempo de vida remanescente do indivíduo, para o qual ${}_{\omega-x}q_x = 1$, ou equivalente, $F_T^{-1}(1) = \omega - x$. Assuma que o fator de desconto **determinístico** tem taxa de juros r. O valor presente dos futuros pagamentos de uma apólice, denotado por S, é igual a soma dos valores presentes dos pagamentos nos respectivos anos: $S = \sum_{t=1}^{\lceil \omega - x \rceil - 1} V_t$, onde $\lceil . \rceil$ significa o menor valor inteiro. E as variáveis aleatórias V_t são dadas por $V_t = v^t I(T > t)$ com $v = (1+r)^{-1}$ e $I(.)$ denotando a função indicadora, i.e., $I(c) = 1$ se a condição c é verdadeira e $I(c) = 0$, caso contrário. Os V_t são funções não decrescentes do tempo remanescente de vida T, significando que o vetor $\mathbf{V}$ possui uma forte dependência positiva. Neste exemplo, temos o seguinte produto $\{v^t I(T > t)\}$, onde v^t representa o fator de desconto e $I(T > t)$ representa a quantia paga.

No caso do fator de desconto ser **estocástico**, isto é, substituindo o fator de desconto determinístico v^t pela variável aleatória Y_t, a soma $S = \sum_{t=1}^{\lceil \omega - x \rceil - 1} V_t$ é uma soma de variáveis aleatórias com dependência positiva, onde a dependência é também causada pela dependência entre os Y_t. Considere os instantes Y_t e Y_{t+j}, com j pequeno. O desconto no período $[0, t+j]$ é igual ao desconto no período $[0, t] \bigcup [t, t+j]$. Conseqüentemente, em qualquer modelo real, estes fatores de descontos Y_t e Y_{t+j} possuem dependência positiva. Intuitivamente, na presença de dependência positiva, valores grandes de um termo em uma soma de variáveis aleatórias tendem a obter valores grandes nos outros termos, ou seja, se a quantia no período $[0, t]$ for grande, a quantia no período $[0, t+j]$ será grande também.

(b) Considere agora o caso onde X_i representa a perda ou ganho de diferentes apólices em uma carteira de seguro e que todos t_i sejam idênticos e iguais a t. A variável aleatória $S = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_t$ pode ser interpretada como as perdas ou ganhos da carteira em um certo período de tempo, por exemplo um ano.

Se o fator de desconto Y_t é **estocástico** então S é uma soma de variáveis aleatórias com dependência positiva, onde cada variável aleatória individual $X_i Y_t$ contém o mesmo fator desconto Y_t.

Agora, se o fator de desconto Y_t é assumido **determinístico** então, freqüentemente, a

suposta independência não estará longe da realidade e pode ser usada para determinação da distribuição de S. Em certas situações, porém, os riscos individuais X_i não serão mutuamente independentes, i.e., quando eles estão sujeitos ao mesmo mecanismo gerador ou são influênciados pelos ambientes físico ou econômico.

Veja algumas situações onde os riscos individuais não podem ser considerados independentes: Um terremoto, no qual os riscos estão localizados na mesma área geográfica, observa-se que os riscos individuais são altamente correlacionados. Em um dia de temporal, todos os carros de uma mesma região têm alta probabilidade de se envolver em um acidente. Durante o verão quente e seco, todas as casas de madeira estão mais expostas ao fogo.

(c) Para uma abordagem teórica admita uma carteira de seguro constituída de n riscos. Os pagamentos feitos pela seguradora é descrito pelo vetor aleatório $(X_1, X_2, ..., X_n)$, onde X_i são as perdas ou ganhos da apólice i durante o período segurado. Assuma que todos os pagamentos são realizados no final do período segurado [0,1]. Em um cenário financeiro determinístico, o valor presente no tempo 0 das quantias agregadas $X_1+X_2+...+X_n$ que será pago pela seguradora no tempo 1 é determinado por $S = (X_1 + X_2 + ... + X_n)v$, onde $v = (1 + r)^{-1}$ é o fator de desconto determinístico e r é a taxa de juro. Esta deverá ser escolhida de forma conservadora (i.e., suficientemente pequena), se a seguradora não quiser subestimar as futuras obrigações. Para demonstrar o efeito de introduzir um juro aleatório nos negócios de seguro, veja o seguinte caso especial.

Assuma que todas as quantias X_i são não-negativas, independentes e identicamente distribuídas, ($X \stackrel{d}{=} X_i$, onde o símbolo $\stackrel{d}{=}$ é usado para igualdade de distribuição). O pagamento médio $(\frac{S}{n})$ tem esperança e variância dadas por:

$$E\left[\frac{S}{n}\right] = vE[X]; \quad Var\left[\frac{S}{n}\right] = \frac{v^2}{n}Var[X].$$

A estabilidade necessária para ambos, segurados e segurador, é mantida pela Lei dos Grandes Números, contanto que n seja realmente "grande"e que os riscos sejam bem comportados. Esta estabilidade não é mantida, por exemplo, para riscos de catástrofes, para o qual a variância pode ser muito grande ou até mesmo infinita.

Verifique agora, a conseqüência de introduzir um fator de desconto estocástico. Tro-

cando o fator de desconto fixo v por uma variável aleatória Y, o valor presente das quantias agregadas se torna $S = (X_1 + X_2 + ... + X_n)Y$.

Se considerar que o fator de desconto é independente dos pagamentos, conclui-se que o pagamento médio ($\frac{S}{n}$) possui esperança e variância dadas por:

$$E\left[\frac{S}{n}\right] = E[X]E[Y]; \quad Var\left[\frac{S}{n}\right] = \frac{Var[X]}{n}E[Y^2] + (E[X])^2 Var[Y]$$

Com $E[X]$ e $Var[Y]$ sendo positiva, a Lei dos Grandes Números não elimina todos os riscos envolvidos. Isto porque, para $n \to \infty$, $Var[\frac{S}{n}]$ converge para o segundo termo. Então, para avaliar o risco total, são necessárias as distribuições do risco segurado e do risco financeiro. Logo, riscos agregados e carteiras grandes não são ferramentas suficientes para eliminar ou reduzir o risco médio. Esta observação implica que ao introduzir o aspecto financeiro estocástico em modelos atuariais, imediatamente, verifica-se a necessidade da determinação da função distribuição da soma das variáveis aleatórias dependentes "S".

O grande problema está em determinar a função distribuição destas somas, onde se conhece as distribuições marginais, mas a distribuição conjunta não é especificada ou é muito trabalhosa. O desconhecimento ou a natureza complexa da dependência entre as variáveis aleatórias é a razão do porque é impossível determinar a função distribuição exata de S.

A literatura atuarial recente tem se preocupado em determinar limites superiores e inferiores para somas desse tipo. Esses limites são baseados em seqüências de ordem convexa, as quais estão relacionadas a noção de ordem de *stop-loss*, conceito familiar no meio atuarial. Estas ordens estocásticas, dadas pelos limites inferior e superior, expressam o quanto uma variável aleatória é menos atraente que a outra.

Com o objetivo de demonstrar como são determinados esses limites para a soma de variáveis aleatórias dependentes e como a estatística Bayesiana resolve este tipo de problema organizou-se esta dissertação da seguinte forma. No segundo capítulo serão tratadas as variáveis aleatórias com dependência positiva perfeita (comonotonicidade), desde de sua construção baseada em cópulas e limites de Fréchet, passando pelas definições e caracterizações de conjuntos e vetores comonotônicos até chegar na soma

de variáveis aleatórias comonotônicas (ou soma de variáveis aleatórias com dependência positiva perfeita). No terceiro capítulo, são discutidos os limites para soma de variáveis aleatórias com dependência positiva, iniciando pelas ordens estocásticas (convexa e de *stop-loss*) e evoluindo até os limites utilizados na atuária (inferior, superior e superior melhorado). Os capítulos quatro e cinco serão ilustrados com aplicações de taxa de juro e de sinistros ocorridos, mas ainda não avisados (IBNR). Na aplicação do IBNR é verificado que utilizando a estatística Bayesiana pode-se resolver facilmente esse problema. E no último capítulo, é feita a conclusão do trabalho e as considerações finais pertinentes.

Capítulo 2

Comonotonicidade

Em vários problemas de atuária e finanças, existe grande dificuldade em determinar a função distribuição de S, onde S é a soma de variáveis aleatórias dependentes com distribuições marginais dadas. Utilizando os conceitos de cópulas pode-se determinar a função distribuição conjunta baseando-se nas marginais. A cópula denominada por limite superior de Fréchet tem um destaque especial neste capítulo, uma vez que, através desta, pode-se determinar variáveis aleatórias com dependência positiva perfeita (comonotônicas).

Neste capítulo serão abordadas as principais definições e os resultados mais importantes a respeito de comonotonicidade. Na primeira seção, defini-se cópulas e limites de Fréchet. Na seção seguinte, apresenta-se os conceitos de conjunto e vetor comonotônico, bem como suas principais características. Na última seção, será abordada as somas de variáveis aleatórias comonotônicas.

2.1 Cópulas e Limites de Fréchet

Nesta seção relacionar-se-á os conceitos de cópulas e limites de Fréchets com comonotonicidade, exemplificando-os.

2.1.1 Cópulas

A dependência entre variáveis aleatórias de valores reais $X_1, X_2, ..., X_n$ é completamente descrita por sua função de distribuição conjunta,

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_n \leq x_n]$$

Em muitos casos ocorre que não se consegue facilmente determinar esta função de distribuição conjunta. O conceito de cópulas nos permite obter a função distribuição conjunta baseada nas funções de distribuições marginais.

Suponha que se transforme o vetor aleatório $(X_1, X_2, ..., X_n)$ componente a componente de tal forma, que se passe a ter componentes com distribuições marginais uniformes-padrão, isto é, "$Unif(0,1)$". Se $X_1, X_2, ..., X_n$ têm distribuições marginais contínuas $F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_n(x_n)$, então essa transformação pode ser obtida usando-se a transformada integral de probabilidade.

Proposição 2.1.1 *Seja X uma variável aleatória com distribuição F e denote por $F^{-1}(\alpha) = inf\{x|F(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in (0,1)$ a sua inversa.*

Se F é contínua então a variável aleatória $F(X)$ é distribuída uniformemente, ou seja, $F(X) \sim Unif(0,1)$.

A função de distribuição conjunta C de $(F_1(X_1), F_2(X_2), ..., F_n(X_n))$ é chamada de cópula do vetor aleatório $(X_1, X_2, ..., X_n)$, ou a distribuição multivariada F. Isto porque:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P[F_1(X_1) \leq F_1(x_1), F_2(X_2) \leq F_2(x_2), ..., F_n(X_n) \leq F_n(x_n)] =$$

$$= C(F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_n(x_n)).$$

Logo, as cópulas podem ser vistas de duas maneiras. Sob um ponto de vista, cópulas são funções que conectam funções distribuições conjuntas a suas funções de distribuições marginais. Alternativamente, cópulas são funções distribuições multivariadas, cujas marginais unidimensionais são distribuições uniformes no intervalo (0,1).

Formalmente, a definição de cópulas é dada por:

Definição 2.1.1 *Uma cópula de dimensão n é uma função distribuição de um vetor aleatório em $\mathbb{R}^n$ com marginais uniformes (0,1). Ou seja, uma função cópula C é qualquer função $C : [0,1]^n \to [0,1]$ que satisfaça as seguintes propriedades:*

1. *$C(x_1, ..., x_n)$ é crescente em cada componente;*

2. *$C(1, ..., 1, x_i, 1, ..., 1) = x_i, \ \forall i = 1, ..., n \quad e \quad x_i \in (0,1)$;*

3. *Para todo $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)$ em $[0,1]^n$ com $a_i < b_i$ tem-se que:*

$$\sum_{i_1=1}^{2} ... \sum_{i_n=1}^{2} (-1)^{i_1+...+i_n} C(x_{1i_1}, ..., x_{ni_n}) \geq 0, \tag{2.1}$$

onde $x_{j1} = a_j$ e $x_{j2} = b_j$ para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

Note que definir uma cópula como função de distribuição cujas marginais são uniformes no intervalo $[0,1]$ é equivalente a definir cópula a partir das três propriedades acima. Veja que a propriedade 1 é conseqüência do fato de estar lidando com uma função de distribuição que é estritamente crescente; a propriedade 2 decorre do fato que as marginais são uniformes-padrão; a propriedade 3 pelo fato da cópula ser uma função de distribuição, é verdadeira, uma vez que a soma (2.1) pode ser interpretada como $P[a_1 \leq X_1 \leq b_1, ..., a_n \leq X_n \leq b_n]$.

Para uma melhor interpretação, veja a definição para o caso bivariado. Seja $\mathbf{I} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ e $\mathbf{I^2} = \mathbf{I} \times \mathbf{I}$. Uma cópula bidimensional é uma função C definida em $\mathbf{I^2}$ e assumindo valores em $\mathbf{I}$ com as seguintes propriedades:

1. Para todo $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$

$$C(x_1, 0) = 0 = C(0, x_2)$$

$$C(x_1, 1) = x_1, \quad C(1, x_2) = x_2$$

2. Para cada x_1, x_2, y_1, y_2 em $\mathbf{I}$ tais que $x_1 \leq y_1$ e $x_2 \leq y_2$,

$$C(x_2, y_2) - C(x_2, y_1) - C(x_1, y_2) + C(x_1, y_1) \geq 0$$

Segundo (Anjos, Ferreira, Kolev, & Mendes, 2004) o teorema de Sklar é o resultado mais importante na teoria de cópulas, abrangendo a existência e unicidade da função C.

Teorema 1 *Seja F uma função de distribuição conjunta com marginais $F_1, ..., F_n$. Então existe uma cópula n-dimensional C tal que*

$$F(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)) \tag{2.2}$$

Se $F_1, ..., F_n$ são todas contínuas então C é única, caso contrário C é unicamente determinada no conjunto $Im(F_{X_1}) \times ... \times Im(F_{X_n})$, onde Im representa a imagem.

Reciprocamente, se C é uma cópula n-dimensional e $F_1, ..., F_n$ são funções de distribuição, então a função F definida por (2.2) é uma função de distribuição conjunta n-dimensional.

Uma prova deste resultado pode ser vista em (Sklar, 1959). Da expressão (2.2) tem-se que a cópula C é uma função que conecta a função distribuição conjunta a suas marginais.

A parte recíproca do teorema 1 é importante para a modelagem de densidades multivariadas e implica que se pode acoplar distribuições univariadas, de qualquer tipo, com qualquer cópula, definindo-se uma distribuição multivariada válida. Para uma leitura mais extensiva, veja (Sklar, 1959).

O seguinte corolário mostra que pode-se extrair uma cópula de qualquer distribuição multivariada e usá-la independentemente das distribuições marginais originais.

Corolário 2.1.1 *Sejam $F, F_1, ..., F_n$ como no teorema 1 e sejam $F_1^{-1}, ..., F_n^{-1}$ inversas de $F_1, ..., F_n$ respectivamente. Então para qualquer $u_i \in [0, 1]$ existe uma cópula n-dimensional C tal que*

$$C(u_1, ..., u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), ..., F_n^{-1}(u_n)). \tag{2.3}$$

Exemplo 2.1 Se a distribuição conjunta de (X_1, X_2) é dada por

$$F(x_1, x_2) = [1 + exp(-x_1) + exp(-x_2)]^{-1}, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

então as marginais são dadas por $F_1(x_1) = (1 + e^{-x_1})^{-1}$ e $F_2(x_2) = (1 + e^{-x_2})^{-1}$. Suas inversas são dadas por $F_1^{-1}(u) = -ln(u^{-1} - 1)$ para $u \in (0, 1)$ e $F_2^{-1}(v) = -ln(v^{-1} - 1)$ para $v \in (0, 1)$. De acordo com (2.3), a cópula $C(u, v)$ associada com $F(x_1, x_2)$ é

$$C(u, v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) = \frac{uv}{u + v - uv}.$$

Utilizando o teorema de Sklar, verifica-se que a cópula C conecta as marginais $F_1(x_1)$ e $F_2(x_2)$ a conjunta $F(x_1, x_2)$.

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

ou seja,

$$F(x_1, x_2) = \frac{(1 + e^{-x_1})^{-1}(1 + e^{-x_2})^{-1}}{(1 + e^{-x_1})^{-1} + (1 + e^{-x_2})^{-1} - (1 + e^{-x_1})^{-1}(1 + e^{-x_2})^{-1}}$$
$$F(x_1, x_2) = [1 + e^{-x_1} + e^{-x_2}]^{-1}$$

Com isso, constata-se que dada a função distribuição conjunta pode-se encontrar as funções marginais e a cópula associada a ela. Reciprocamente, caso tenha-se a cópula e as funções marginais pode-se encontrar a função distribuição conjunta associada a esta cópula.

A cópula de qualquer F captura diversos tipos de dependência entre as variáveis, mesmo quando elas tenham sido objeto de transformações monótonas. Esta propriedade de invariância garante, por exemplo, que retornos financeiros e seus logaritimos tenham a mesma cópula. Esta característica de invariância a transformações crescentes e contínuas nas marginais pode ser expressa da seguinte forma: Se $(X_1, ..., X_n)$ possui cópula C e $T_1, ..., T_n$ são funções contínuas crescentes então $(T_1(X_1), ..., T_n(X_n))$ também tem cópula C.

Este resultado pode ser muito útil em algumas situações nas quais seja mais conveniente trabalhar com transformações crescentes das variáveis observadas e quando se deseja investigar a estrutura de dependência de $(X_1, ..., X_n)$.

Algumas cópulas são de grande importância teórica e prática, destaca-se na próxima subseção as de Fréchet (dependência perfeita).

2.1.2 Limites de Fréchet

Utiliza-se os limites de Fréchet para determinar o limite inferior e superior da distribuição conjunta $F(\mathbf{x})$ do vetor aleatório $(X_1, ..., X_n)$.

Definição 2.1.2 *Dada uma distribuição conjunta $F(\mathbf{x})$, onde suas marginais são dadas por $F_{X_1}, ..., F_{X_n}$, obtem-se os limites inferior e superior de Fréchet por:*

$W(\mathbf{x}) = max\{0, \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) - n + 1\}$ *e* $M(\mathbf{x}) = min\{F_{X_1}(x_1), ..., F_{X_n}(x_n)\}$, *respectivamente.*

O próximo teorema é denominado desigualdade de Fréchet-Hoeffding, ele associa os limites de Fréchet vistos acima, com cópulas.

Teorema 2 *Se $C(\mathbf{u})$ é uma cópula qualquer, então para todo $\mathbf{u} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$,*

$$C^{-}(\boldsymbol{u}) \leq C(\boldsymbol{u}) \leq C^{+}(\boldsymbol{u}). \tag{2.4}$$

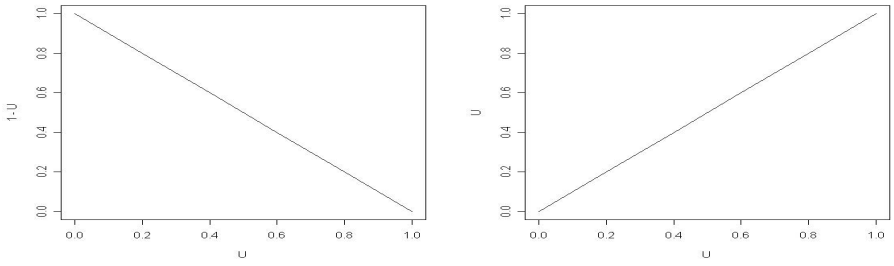
onde $C^{-}(\boldsymbol{u}) = max\{\sum_{i=1}^{n} u_i - n + 1, 0\}$ é o limite inferior da cópula $C(\boldsymbol{u})$ e $C^{+}(\boldsymbol{u}) = min\{u_1, ..., u_n\}$ é o limite superior da cópula $C(\boldsymbol{u})$.

Alguns autores como (Nelsen, 1998) e (Anjos et al., 2004) sugerem para uma leitura mais abrangente sobre limites de Fréchet associados a cópulas, inclusive a prova do teorema de Fréchet-Hoeffding, consultar (Mikusinsky, Sherwood, & Taylor, 1992).

As cópulas $C^{-}(u_1, u_2) = max\{u_1 + u_2 - 1, 0\}$ e $C^{+}(u_1, u_2) = min\{u_1, u_2\}$ são conhecidas como cópulas de Fréchet, e correspondem ao caso bivariado dos limites de Fréchet-Hoeffding, sendo portanto relacionadas com algum tipo de dependência perfeita, conforme explicado a seguir.

Seja $U \sim Unif(0, 1)$. A cópula $C^{-}(u_1, u_2) = P[U \leq u_1, 1 - U \leq u_2]$ é a distribuição do vetor aleatório $(U, (1 - U))$ que põe toda a massa de probabilidade na diagonal ligando $(0, 1)$ e $(1, 0)$ e corresponde a uma dependência negativa perfeita. Por outro lado, $C^{+}(u_1, u_2) = P[U \leq u_1, U \leq u_2]$ é a distribuição do vetor aleatório (U, U) que põe toda a massa na diagonal ligando $(0, 0)$ e $(1, 1)$, e corresponde a uma dependência positiva perfeita.

Os gráficos 2.1 e 2.2 possibilitam duas maneiras diferentes de ter uma melhor intuição sobre as cópulas C^{+} e C^{-}. Pode-se perceber que toda a densidade de probabilidade esta concentrada sobre um segmento de reta. Este fato é coerente com a idéia de dependência perfeita entre as variáveis marginais da distribuição bivariada, ou seja, neste caso há uma relação determinísticas entre as marginais.



(a) Cópula $C^-(u_1, u_2)$ (b) Cópula $C^+(u_1, u_2)$

Figura 2.1: Gráfico de dispersão de dados simulados das cópulas de Fréchet.

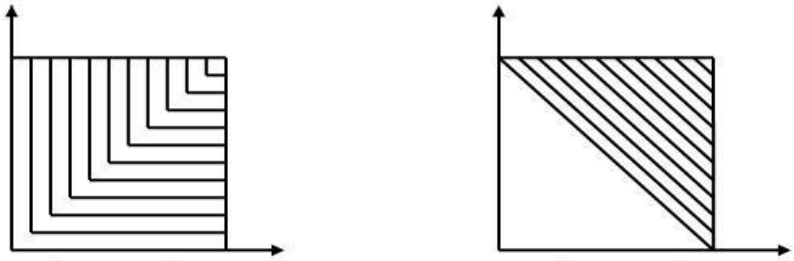


Figura 2.2: Linha dos quantis das cópulas de Fréchet C^+ (esquerda) e C^- (direita).

Assim, se duas variáveis aleatórias possuem cópulas C^+(ou C^-), então cada uma é quase certamente uma função crescente (ou decrescente) da outra. Este é o conceito de variáveis comonotônicas e contramonotônicas.

Definição 2.1.3 *Se $(X_1, ..., X_n)$ é um vetor aleatório com distribuição contínua e tem cópula C^+, então $X_1, ..., X_n$ são denominadas comonotônicas; se $(X_1, ..., X_n)$ é um vetor aleatório com distribuição contínua e tem cópula C^-, então $X_1, ..., X_n$ são denominadas contramonotônicas.*

Na próxima subseção exemplifica-se os conceitos e definições vistos acima.

2.1.3 Exemplo de Cópulas Bidimensionais

Considere o vetor aleatório bidimensional contínuo (X_1, X_2) com distribuição conjunta $F(x_1, x_2)$. Suas funções marginais são dadas por $F(x_1, \infty) = F_1(x_1)$ e $F(\infty, x_2) = F_2(x_2)$. Como definido na subseção 2.1.1, cópula é uma função "C"que conecta a função distribuição conjunta a suas marginais, aqui $F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$. Este conceito está ilustrado por três casos especiais.

- $C^+(u_1, u_2) = min\{u_1, u_2\}$;
- $C^\perp(u_1, u_2) = u_1 v_2$; $\qquad 0 < u_1 < 1, \;\; 0 < u_2 < 1$
- $C^-(u_1, u_2) = max\{0, u_1 + u_2 - 1\}$.

Como foi visto $C^+(u_1, u_2)$ é o limite superior de Fréchet-Hoeffding e $C^-(u_1, u_2)$ é o limite inferior de Fréchet-Hoeffding. A outra função cópula $C^\perp(u_1, u_2)$ simplesmente representa o caso que X_1 e X_2 são independentes. Considerando o caso especial onde as marginais $F_1(x_1) = x_1$ e $F_2(x_2) = x_2$ têm distribuições uniformes $(0, 1)$, determina-se que a cópula $C(u_1, u_2)$ deve ser uma função de distribuição conjunta bidimensional, e portanto, $C(u_1, 1) = u$ e $C(1, u_2) = u_2$.

Assuma que (U_1, U_2) é um vetor aleatório com distribuição conjunta gerada por alguma função cópula $C(u_1, u_2)$ e que suas marginais são ambas uniformes $(0, 1)$. Como verificado na subseção anterior, se $C = C^+$, obtém-se o vetor (U_1, U_1), logo $U_2 \equiv U_1$; se $C = C^-$, obtém-se o vetor $(U_1, (1 - U_1))$, logo $U_2 \equiv 1 - U_1$; e se $C = C^\perp$, simplesmente, U_1 e U_2 são independentes.

Mistura de cópulas são também uma cópula, abaixo será demonstrado como escolher uma combinação convexa das três cópulas usadas acima, que gere um vetor aleatório com distribuições marginais uniformes e uma correlação entre -1 e +1.

Para $p_1, p_2, p_3 \geq 0$ com $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, tem-se que

$$C(u_1, u_2) = p_1 C^+(u_1, u_2) + p_2 C^\perp(u_1, u_2) + p_3 C^-(u_1, u_2),$$

Com isso, o vetor aleatório (U_1, U_2), pode ser representado por $(U_1, I_1 U_1 + I_2 U_1^\perp + I_3(1 - U_1))$ onde $I_i, i = 1, 2, 3$ são variáveis aleatórias com distribuição de Bernoulli (p_i)

e $I_1 + I_2 + I_3 \equiv 1$; $U_1^{\perp} \sim Unif(0,1)$, independentes de U_1. Para determinar a correlação $r(U_1, U_2)$, note que

$$E[U_1U_2] = p_1E[U_1^2] + p_2E[U_1U_1^{\perp}] + p_3E[U_1(1-U_1)] = \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{6}p_3,$$

logo,

$$r(U_1, U_2) = \frac{E[U_1U_2] - E[U_1]E[U_2]}{\sqrt{Var[U_1]Var[U_2]}} = p_1 - p_3$$

Se $r(U_1, U_2) = 1 \Rightarrow p_1 = 1$, logo quando se tem a correlação igual a 1, existe uma dependência positiva perfeita (U_1 e U_2 são comonotônicas), e se $r(U_1, U_2) = -1 \Rightarrow p_3 = 1$, logo quando se tem a correlação igual a -1, existe uma dependência negativa perfeita (U_1 e U_2 são contramonotônicas), e $r(U_1, U_2) = 0 \Rightarrow p_1 = p_3$. A independência ocorre somente se $p_1 = p_3 = 0$.

Os conceitos vistos nesta seção foram úteis para demonstrar como construir a função distribuição conjunta baseada nas marginais, além disso, para verificar que variáveis aleatórias com dependência positiva perfeita tem sua distribuição conjunta coincidindo com o limite superior de Fréchet. Estas são chamadas de variáveis aleatórias comonotônicas.

2.2 Conjuntos e vetores comonotônicos

Nesta seção serão discutidos os conjuntos e vetores comonotônicos, bem como as suas principais características.

2.2.1 Conjuntos Comonotônicos

Pela definição 2.1.3, um vetor aleatório com distribuição contínua e com cópula C^+, têm variáveis aleatórias comonotônicas.

Verifica-se que a função de distribuição conjunta F para um par (x_1, x_2) de variáveis aleatórias coincide com o limite superior de Fréchet-Hoeffding (i.e. coincide com a cópula C^+) se e somente se o suporte de F (possíveis valores de F) for não decrescente. Para provar essa afirmação, necessita-se de dois lemas.

Lema 2.1 *A é um subconjunto de* $\mathbb{R}^2$. *Então A é não decrescente se e somente se para cada* (x_1, x_2) *em* $\mathbb{R}^2$, *ocorrer:*

$$Para\ \ todo\ \ (u_1, u_2)\ \ em\ \ A,\ u_1 \leq x_1 \Rightarrow u_2 \leq x_2;\ \ ou \tag{2.5}$$

$$Para\ \ todo\ \ (u_1, u_2)\ \ em\ \ A,\ u_2 \leq x_2 \Rightarrow u_1 \leq x_1. \tag{2.6}$$

Lema 2.2 *Se* X_1 *e* X_2 *são variáveis aleatórias com distribuição conjunta* F. *Então* F *coincide com limite de Fréchet-Hoeffding se e somente se para todos* (x_1, x_2) *em* $\mathbb{R}^2$, *ocorrer:*

$$P[X_1 > x_1, X_2 \leq x_2] = 0\ \ ou\ \ P[X_1 \leq x_1, X_2 > x_2] = 0$$

Prova. Sendo F_1 e F_2 as marginais de F, então

$$\begin{aligned} F_1(x_1) = P[X_1 \leq x_1] &= P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2] + P[X_1 \leq x_1, X_2 > x_2] \\ &= F(x_1, x_2) + P[X_1 \leq x_1, X_2 > X_2] \\ F_2(x_2) = P[X_2 \leq x_2] &= P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2] + P[X_1 > x_1, X_2 \leq x_2] \\ &= F(x_1, x_2) + P[X_1 > x_1, X_2 \leq x_2] \end{aligned}$$

Aqui $F(x_1, x_2) = C^+(x_1, x_2)$ se e somente se $min(P[X_1 \leq x_1, X_2 > x_2], P[X_1 > x_1, X_2 \leq x_2]) = 0$

Se A denota o suporte de F, e se (x_1, x_2) é um par em $\mathbb{R}^2$, então (2.5) ocorrerá se e somente se $\{(u_1, u_2) | u_1 \leq x_1\ \ e\ \ u_2 > x_2\} \bigcap S = \emptyset$, onde S é um subconjunto contido em $(0, 1)$; ou equivalente, se e somente se $P[X_1 \leq x_1, X_2 > x_2] = 0$. Similarmente, (2.6) ocorrerá se e somente se $\{(u_1, u_2) | u_1 > x_1\ \ e\ \ u_2 \leq x_2\} \bigcap S = \emptyset$, ou equivalente, se e somente se $P[X_1 > x_1, X_2 \leq x_2] = 0$. ■

Estendendo o caso particular (bidimensional) para $n \geq 2$, tem-se que: Um n-vetor $(x_1, x_2, ..., x_n)$ será denotado por $\mathbf{x}$, para dois n-vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, a notação $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ será usada para ordenar as componentes, $x_i \leq y_i$ para $i = 1, 2, ..., n$.

O conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é comonotônico se para todos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em A, ocorra que $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ ou $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$. Logo, um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é comonotônico se para todos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em A, a inequação $x_i \leq y_i$ para todo i, implique que $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$. Note que qualquer subconjunto de um conjunto comonotônico é também comonotônico.

2.2.2 Vetor Aleatório Comonotônico

Um vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ é comonotônico se ele tem um suporte comonotônico. Assim, pode-se concluir que a comonotonicidade é uma estrutura de dependência muito forte, pois se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são elementos do suporte comonotônico de $\mathbf{X}$, isto é, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são possíveis resultados de $\mathbf{X}$, então ele tem suas componentes ordenadas.

A comonotonicidade do vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ implica que quanto maior o valor de um componente X_i, maior o valor de qualquer outro componente X_j, $i \neq j$, e pode ser interpretado como extensão do conceito de correlação perfeita.

Nos teoremas seguintes, apresenta-se algumas caracterizações de um vetor aleatório comonotônico.

Teorema 3 *Um vetor aleatório $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ é comonotônico se e somente se uma das seguintes condições equivalentes ocorrer:*

1. *$\mathbf{X}$ tem um suporte comonotônico;*

2. *Para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ temos $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), ..., F_{X_n}(x_n)\}$;*

3. *Para alguma variável aleatória $U \sim$Unif[0,1], temos:*

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), ..., F_{X_n}^{-1}(U))$$

   onde $F_X^{-1}(p) = inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}, p \in [0, 1]$;

4. *Existe uma variável aleatória z e uma função não decrescente $f_i, (i = 1, 2, ..., n)$ tal que:*

$$\boldsymbol{X} \stackrel{d}{=} (f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z)).$$

Prova. (1) $\Rightarrow$ (2): Assuma que B seja suporte comonotônico de $\mathbf{X}$, onde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ e A_j seja definida por

$$A_j = \{\mathbf{y} \in B | y_j \leq x_j\}, \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Por causa da comonotonicidade de B, existe um i tal que $A_i = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$. Portanto,

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = Pr(\mathbf{X} \in \bigcap_{j=1}^{n} A_j) = Pr(\mathbf{X} \in A_i) = F_{X_i}(x_i)$$

$$= min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), ..., F_{X_n}(x_n)\}.$$

A última igualdade segue por $A_i \subset A_j$ tal que $F_{X_i}(x_i) \leq F_{X_j}(x_j)$ ocorre para todo valor de j.

(2) $\Rightarrow$ (3): Agora assuma que $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), ..., F_{X_n}(x_n)\}$ para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Então

$$Pr[F_{X_1}^{-1}(U) \leq x_1, ..., F_{X_n}^{-1}(U) \leq x_n] = Pr[U \leq F_{X_1}(x_1), ..., U \leq F_{X_n}(x_n)]$$

$$= Pr[U \leq min_{j=1,...,n}\{F_{X_j}(x_j)\}] = min_{j=1,...,n}\{F_{X_j}(x_j)\}$$

(3) $\Rightarrow$ (4): Direto.

(4) $\Rightarrow$ (1): Assuma que exista uma variável aleatória z com suporte B, e função não decrescente f_i,$(i = 1, 2, ..., n)$, tal que

$$\mathbf{X} \stackrel{d}{=} (f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z)).$$

O conjunto de possíveis resultados de $\mathbf{X}$ é $\{(f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z))|z \in B\}$ o qual é obviamente comonotônico, o que implica que $\mathbf{X}$ é de fato comonotônico. ■

Portanto, o vetor aleatório $\mathbf{X}$ é comonotônico se e somente se sua distribuição conjunta coincide com limite superior de Fréchet.

Teorema 4 *Um vetor aleatório* $\mathbf{X}$ *é comonotônico se e somente se os pares* (X_i, X_j) *são comonotônicos para todo i e j em (1,2,...,n).*

Exemplo 2.2 Assuma $X \sim Unif(discreta)$ $\{0, 1, 2, 3\}$ e $Y \sim$ Binomial $(3, \frac{1}{2})$. É fácil verificar que

$$(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(u)) = \begin{cases} (0,0) & para\ 0 < u \leq \frac{1}{8}, \\ (0,1) & para\ \frac{1}{8} < u \leq \frac{2}{8}, \\ (1,1) & para\ \frac{2}{8} < u \leq \frac{4}{8}, \\ (2,2) & para\ \frac{4}{8} < u \leq \frac{6}{8}, \\ (3,2) & para\ \frac{6}{8} < u \leq \frac{7}{8}, \\ (3,3) & para\ \frac{7}{8} < u < 1. \end{cases}$$

O suporte de (X^c, Y^c) é formado somente por estes seis pontos. A linha da figura que liga (1,1) e (2,2) não é paralela aos eixos. Isto acontece porque em $u = \frac{1}{2}$, ambos $F_X(y)$

e $F_Y(y)$ tem segmentos horizontais. Estes dois pontos tem probabilidades $\frac{2}{8}$ e os outros pontos $\frac{1}{8}$.

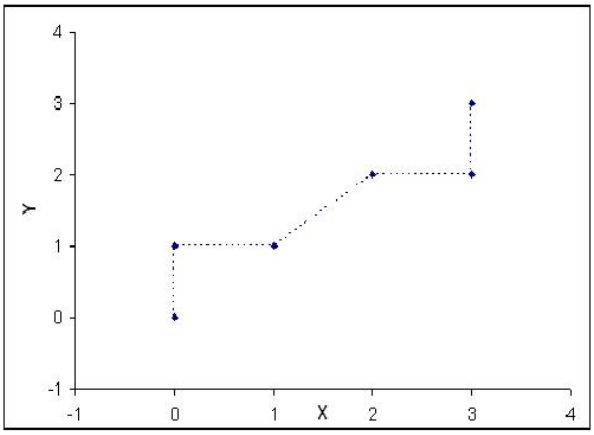


Figura 2.3: Suporte comonotônico de (X,Y). Os pontos representam probabilidades positivas. Pode-se verficar pela linha em pontilhado, que todos elementos do suporte, são não decrescentes.

Teorema 5 *Para todo vetor aleatório* (X_1, X_2) *a seguinte inequação ocorrerá,* $r(X_1, X_2) \leq r(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U))$*, com a desigualdade estrita caracterizando que* (X_1, X_2) *não é comonotônico.*

As demonstrações dos teoremas acima, podem ser obtidas em (Dhaene et al., 2002).

Nesta seção definiu-se e exemplificou-se conjuntos e vetores comonotônicos, a seção seguinte tratará das somas das variáveis aleatórias comonotônicas.

2.3 Soma de Variáveis Aleatórias Comonotônicas

Nesta seção defini-se a soma de variáveis aleatórias comonotônicas e determina-se sua função distribuição. Ilustra-se no final com um exemplo.

Primeiramente, denota-se a inversa de uma função distribuição não decrescente e contínua por:

- $F_X^{-1}(p) = inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}, \quad p \in [0, 1];$

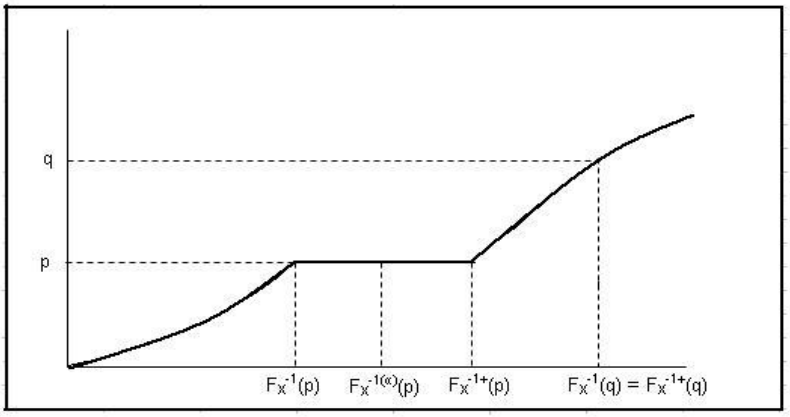


Figura 2.4: Gráfico da definição de F_X^{-1}, F_X^{-1+} e $F_X^{-1(\alpha)}$.

- $F_X^{-1+}(p) = sup\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \leq p\}, \quad p \in [0,1];$
- $F_X^{-1(\alpha)}(p) = \alpha F_X^{-1}(p) + (1-\alpha) F_X^{-1+}(p), \quad p \in [0,1] \;\; \alpha \in [0,1].$

A figura 2.4 ajuda a esclarecer melhor a notação utilizada para função distribuição inversa.

No teorema seguinte veja a relação entre as funções distribuições inversas das variáveis aleatórias X e $g(X)$, onde g é uma função monótona.

Teorema 6 *Seja X e $g(X)$ variáveis aleatórias e $0 < p < 1$.*

- *Se g é não decrescente e contínua a esquerda, então $F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(p))$;*
- *Se g é não decrescente e contínua a direita, então $F_{g(X)}^{-1+}(p) = g(F_X^{-1+}(p))$;*
- *Se g é não crescente e contínua a esquerda, então $F_{g(X)}^{-1+}(p) = g(F_X^{-1}(1-p))$;*
- *Se g é não crescente e contínua a direita, então $F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1+}(1-p))$.*

Uma prova deste resultado pode ser vista em (Dhaene et al., 2002).

A notação S^c será usada para a soma de variáveis aleatórias comonotônicas, logo,

$$S^c = X_1^c + X_2^c + ... + X_n^c.$$

Uma estratégia muito utilizada em atuaria é aproximar a função distribuição da soma de variáveis aleatórias dependentes $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ pela função distribuição da soma de variáveis aleatórias comonotônicas $S^c = X_1^c + X_2^c + ... + X_n^c$. Ao utilizar esta estratégia diminui-se a complexibilidade do problema, uma vez que a função de distribuição de S^c é facilmente determinada, o que pode não ocorrer com a função de distribuição de S.

Para determinar a função distribuição de S^c, tem-se o seguinte teorema.

Teorema 7 *A função distribuição inversa da soma de variáveis aleatórias comonotônicas, com funções de distribuições marginais estritamente crescentes $F_{X_1}, F_{X_2}, ..., F_{X_n}$ é dada por:*

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p), \quad 0 < p < 1$$

Prova. Considere o vetor aleatório $(X_1, X_2, ..., X_n)$ e as componentes comonotônicas dele $(X_1^c, X_2^c, ..., X_n^c)$. Foi visto no teorema 3 que se $\mathbf{X}$ é comonotônico, então para alguma variável aleatória $U \sim Unif(0,1)$, $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), ..., F_{X_n}^{-1}(U))$. Logo, $S^c = X_1^c + X_2^c + ... + X_n^c \stackrel{d}{=} g(U)$, com a função g definida por

$$g(u) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(u), \quad 0 < u < 1.$$

Onde g é não decrescente e contínua a esquerda. Aplicando o teorema 6, tem-se que

$$F_{S^c}^{-1}(p) = F_{g(U)}^{-1}(p) = g(F_U^{-1}(p)) = g(p), \quad 0 < p < 1.$$

Portanto, a função distribuição inversa de S^c pode ser escrita por

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p), \quad 0 < p < 1.$$

■

Note que se as funções de distribuições marginais são estritamente crescentes e contínuas então a função de distribuição de S^c será única e determinada por:

$$F_{S^c}^{-1}(F_{s^c}(x)) = x \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x, \quad F_{S^c}^{-1+}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1),$$

Exemplo 2.3 Considere um vetor $\mathbf{X}$ com funções de distribuições marginais exponenciais $X_i \sim Exp(1/\beta_i)$. Então, tem-se que, $F_{X_i}(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta_i}}, \beta_i > 0,\ x \geq 0$.
Para se obter a função distribuição inversa da soma comonotônica S^c, necessita-se primeiro determinar a função de distribuição inversa de X_i: $F_{X_i}^{-1}(p) = -\beta_i ln(1-p), 0 < p < 1$.
Como visto no teorema 7 a função distribuição inversa da soma comonotônica S^c será determinada pela soma das funções distribuições inversas de X_i, portanto,

$$F_{S^c}^{-1}(p) = -(\sum_{i=1}^{n} \beta_i) ln(1-p), \qquad 0 < p < 1.$$

Isto significa que a soma de variáveis aleatórias comonotônicas com funções de distribuições marginais exponenciais é também distribuída exponencialmente com parâmetro $\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$. De acordo com as propriedades acima, pode-se confirmar esta observação, uma vez que, as funções distribuições marginais são estritamente crescentes e contínuas tem-se que a função distribuição de S^c é única e determinada por:

$$F_{S^c}^{-1}(F_{s^c}(x)) = x \ \Rightarrow\ -(\sum_{i=1}^{n} \beta_i) ln(1 - F_{S^c}(x)) = x$$

$$-\beta ln(1 - F_{S^c}(x)) = x$$

$$ln(1 - F_{S^c}(x)) = \frac{-x}{\beta}$$

$$1 - F_{S^c}(x) = e^{\frac{-x}{\beta}}$$

$$F_{S^c}(x) = 1 - e^{\frac{-x}{\beta}}$$

A figura 2.5 apresenta no gráfico superior a função distribuição acumulada da soma comonotônica, obtido supondo que $X_i \sim Exp(\frac{1}{2}),\ \forall\ i = 1, 2, ..., 10$. Logo, $S^c \sim Exp(\frac{1}{20})$. No gráfico inferior tem a distribuição acumulada de S sob a suposição de independência, i.e., $S \sim Ga(10, \frac{1}{2})$.

De modo a facilitar a compreensão, apresenta-se a tabela 2.1 com alguns quantis das funções distribuições inversas acumuladas de S^c e S.

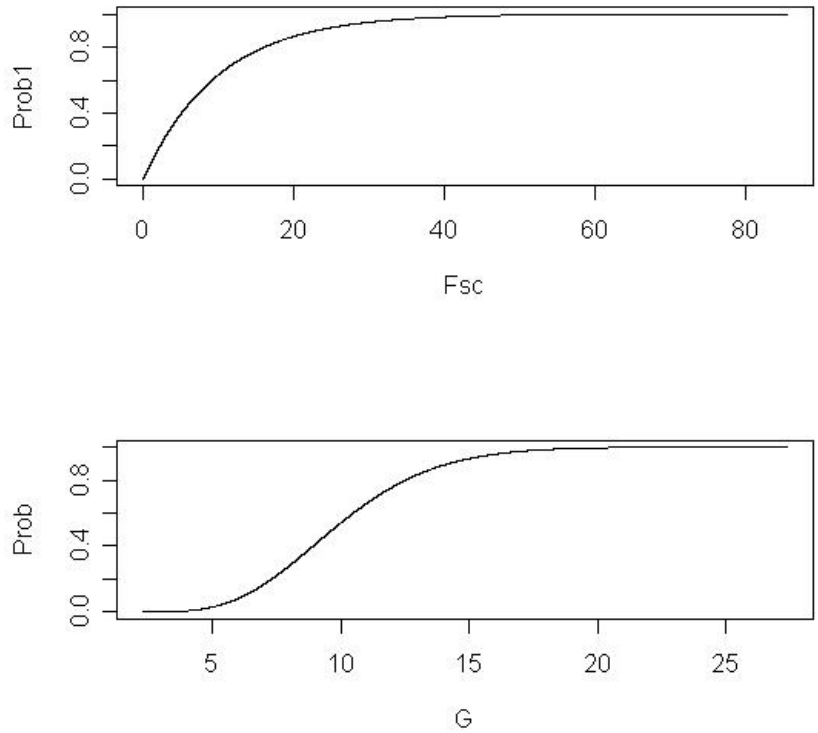


Figura 2.5: Funções distribuições acumuladas de S^c e S, respectivamente.

p	$F_{S^c}^{-1}(p)$	$F_S^{-1}(p)$
0.90	22.739	14.372
0.95	29.396	15.907
0.99	44.112	19.018

Tabela 2.1: Quantis de S^c e S.

Capítulo 3

Limites para Soma de Variáveis Aleatórias Dependentes

Como mencionado na introdução, a determinação da distribuição de S pode ser complexa. Uma alternativa adotada na literatura atual de atuária é determinar limites para a soma $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Neste capítulo serão discutidos os limites para soma $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ das variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ com distribuições marginais dadas. Primeiro são apresentados dois conceitos de ordenação, denominados ordem *stop-loss* e ordem convexa. Em seguida será definido o limite superior (S^c), o limite superior melhorado (S^u) e o limite inferior (S^l), bem como suas funções distribuições e os seus prêmios de *stop-loss*.

3.1 Ordenação de Variáveis Aleatórias

Nesta seção defini-se prêmio de *stop-loss*, ordem de *stop-loss* e ordem convexa, de forma a ordenar as variáveis aleatórias.

Considere de agora em diante que as variáveis aleatórias sempre terão médias finitas, ou seja, a variável aleatória X é integrável.

Definição 3.1.1 *Seja X uma variável aleatória qualquer e F sua função de distribuição. A esperança de X é definida por $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$.*

Usando a técnica de integração por partes determina-se $E[X] = -\int_{-\infty}^{0} F_X(x)dx + \int_0^{\infty}(1 - F_X(x))dx$.

Para uma leitura mais detalhada, ver (James, 2002).

Como descrito antes, é comum na prática trocar uma variável aleatória, por outra "menos atraente", que apresente uma estrutura simples, com função distribuição de fácil determinação. É claro que é preciso esclarecer o que significa uma variável aleatória ser "menos atraente". Para isto, primeiro se define prêmio de *stop-loss*. O prêmio de *stop-loss* com retenção d de uma variável aleatória X é definido por $E[(X-d)_+]$, onde $(X-d)_+ = max(X-d, 0)$. Usando integração por partes, obtem-se

$$E[(X-d)_+] = \int_d^{\infty}(1 - F_X(x))dx, \quad -\infty < d < \infty,$$

logo, o prêmio de *stop-loss* com retenção d pode ser considerado como o peso da cauda superior da distribuição de X. Definido o ponto d pode-se comparar duas variáveis aleatórias pelo prêmio de *stop-loss*. A variável aleatória que possui o prêmio de *stop-loss* maior, será a menos atraente, pois é mais provável que ocorra um valor em seu extremo (a cauda da sua distribuição abrange uma superfície maior).

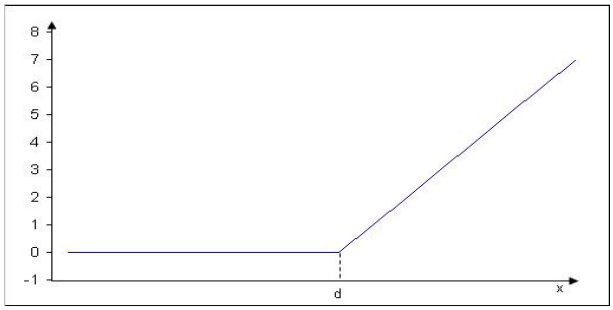


Figura 3.1: Função do $max(x-d, 0)$

Pode-se ainda determinar o prêmio de *stop-loss* para uma soma de variáveis aleatórias, ao invés de uma única variável aleatória. O teorema a seguir mostra o caso da soma de variáveis aleatórias comonotônicas.

Teorema 8 *O prêmio de* stop-loss *da soma S^c das componentes do vetor aleatório*

comonotônico $(X_1^c, X_2^c, ..., X_n^c)$ *é dado por:*

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - d_i)_+], \quad F_{S^c}^{-1+}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1),$$

com d_i *dado por*

$$d_i = F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) \text{ e } d = \sum_{i=1}^{n} d_i, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

e onde $(\alpha_d) \in [0, 1]$ *é determinado por*

$$F_{S^c}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) = d$$

Uma prova desta ilustração pode ser vista em (Dhaene et al., 2002). Abaixo, apresenta-se um exemplo com o intuito de facilitar a compreensão do prêmio de *stop-loss*.

Exemplo 3.1 Suponha que o vetor aleatório $(X_1, X_2, ..., X_n)$ seja comonotônico e tenha cada componente X_i com distribuição lognormal $(ln(X_i) \sim N(\mu_i, \sigma_i^2))$, em (DeGroot, 1986) defini-se o prêmio de *stop-loss* de X_i por:

$$E[(X_i - d_i)_+] = e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}} \Phi(d_{i,1}) - d_i \Phi(d_{i,2}), \quad d_i > 0 \tag{3.1}$$

onde $d_{i,1}$ e $d_{i,2}$ são determinados por

$$d_{i,1} = \frac{\mu_i + \sigma_i^2 - ln(d_i)}{\sigma_i}, \quad d_{i,2} = d_{i,1} - \sigma_i, \tag{3.2}$$

usando o teorema 8, pelo fato do vetor $\mathbf{X}$ ser comonotônico, obtém-se:

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - d_i)_+] = \sum_{i=1}^{n} e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}} \Phi(d_{i,1}) - d_i \Phi(d_{i,2}), \quad d > 0.$$

3.1.1 Ordem de *stop-loss*

Nesta subseção utiliza-se o conceito de prêmio de *stop-loss*, para ordenar variáveis aleatórias.

Definição 3.1.2 *Considere duas variáveis aleatórias* X_1 *e* X_2*, tem-se que* X_1 *é menor ou igual a* X_2 *em ordem de* stop-loss*,* $(X_1 \leq_{sl} X_2)$*, se e somente se,* X_1 *tem prêmio de* stop-loss *menor que* X_2*, isto é, se*

$$E[(X_1 - d)_+] \leq E[(X_2 - d)_+], \quad d \in \mathbb{R}.$$

A ordem de *stop-loss* corresponde a uma função utilidade v convexa não decrescente, $E[v(X_1)] \leq E[v(X_2)]$, com esperança finita. Assim, a ordem de *stop-loss* é, frequentemente, chamada de "ordem convexa crescente".

Recordando o problema original de trocar um pagamento aleatório X por um pagamento Y "menos atrativo", para o qual a função distribuição é facilmente obtida. Se $X \leq_{sl} Y$, tem-se então, que $E[X] \leq E[Y]$ e intuitivamente a melhor aproximação surge no caso onde $E[X] = E[Y]$. Isto conduz ao que se chama de ordem convexa.

3.1.2 Ordem Convexa

Definição 3.1.3 *Tem-se que X é menor ou igual a Y em ordem convexa, $X \leq_{cx} Y$, se e somente se, suas médias forem iguais e ($X \leq_{sl} Y$), ou seja,*

$$E[X] = E[Y] \quad e \quad E[(X-d)_+] \leq E[(Y-d)_+], \qquad d \in \mathbb{R}.$$

Isto implica que ordem convexa pode também ser caracterizada da seguinte maneira:

$$X \leq_{cx} Y \Leftrightarrow \begin{cases} E[(X-d)_+] \leq E[(Y-d)_+], & -\infty < d < +\infty \\ E[(d-X)_+] \leq E[(d-Y)_+], & -\infty < d < +\infty. \end{cases}$$

A prova de que $X \leq_{cx} Y$ se e somente se $E[v(X)] \leq E[v(Y)]$, para toda função convexa v, com experança finita pode ser vista em (Kaas, Goovaerts, Dhaene, & Denuit, 2001). Isto explica o porque do nome "ordem convexa". Note que quando se caracterizou a ordem de *stop-loss*, a função convexa v era não decrescente, logo a ordem convexa engloba a ordem de *stop-loss*.

Existe uma relação entre a variância de uma variável aleatória e o seu prêmio de *stop-loss*, como demonstrado abaixo:

$$\frac{1}{2}Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (E[(X-t)_+] - (E[X]-t)_+)dt. \tag{3.3}$$

Para provar esta relação, basta verificar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (E[(X-t)_+] - (E[X]-t)_+)dt = \int_{-\infty}^{E[X]} E[(t-X)_+]dt + \int_{E[X]}^{\infty} E[(X-t)_+]dt.$$

Desenvolvendo o 1º termo do lado direito da igualdade e trocando a ordem de integração, determina-se

$$\int_{-\infty}^{E[X]} E[(t-X)_+]dt = \int_{-\infty}^{E[X]} \int_{-\infty}^{t} F_X(x)dxdt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} (x-E[X])^2 dF_X(x).$$

Similarmente,

$$\int_{E[X]}^{\infty} E[(X-t)_+]dt = \frac{1}{2}\int_{t}^{\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x).$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{t} (x-E[X])^2 dF_X(x) + \frac{1}{2}\int_{t}^{\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x) = \frac{1}{2}Var[X].$$

■

Supondo $X \leq_{cx} Y$ e usando (3.3) obtem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E[(Y-t)_+] - E[(X-t)_+]|dt = \frac{1}{2}\{Var[Y] - Var[X]\} \tag{3.4}$$

A interpretação gráfica das relações (3.3) e (3.4) é apresentada na figura 3.2.

Deste modo, se $X \leq_{cx} Y$, a integal da diferença absoluta dos respectivos prêmios de *stop-loss*, são iguais a metade da diferença das variâncias destas duas variáveis aleatórias. A integração acima é não negativa, então se $Var[X] = Var[Y]$, necessariamente os prêmios de *stop-loss* serão iguais, isto implica que eles tem distribuições iguais. Logo, se $X \leq_{cx} Y$, e X e Y não são iguais em distribuição, tem-se que $Var[X] < Var[Y]$.

3.2 Limite Superior (S^c)

Nesta seção será conceituado o limite superior (S^c), da soma $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$, de variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$ com distribuições marginais dadas. A seguir prova-se que S^c é limite superior de S.

Teorema 9 *Para qualquer vetor aleatório* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *tem-se que*

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \leq_{cx} X_1^c + X_2^c + ... + X_n^c.$$

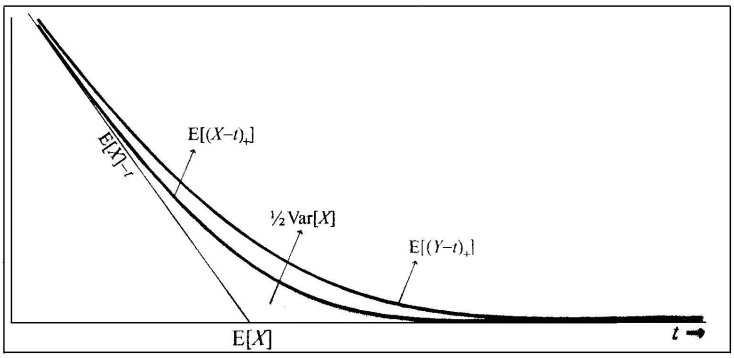


Figura 3.2: Dois prêmios de *stop-loss* $E[(X-t)_+]$ e $E[(Y-t)_+]$ onde $X \leq_{cx} Y$. Neste gráfico pode-se verificar a relação da equação (3.3).

Prova. Como foi visto na subseção 3.1.2, para que uma variável aleatória seja menor que a outra em ordem convexa, elas precisam ter médias iguais e uma ter a ordem de *stop-loss* menor que a outra. Logo, é necessário provar que

$$E[(X_1 + ... + X_n - d)_+] \leq E[(X_1^c + ... + X_n^c - d)_+]$$

ocorrerá para toda retenção d com $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$.

Sabe-se que para todo $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ quando $d_1 + ... + d_n = d \in \mathbb{R}$, ocorrerá que

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n - d)_+$$

$$= ((x_1 - d_1) + (x_2 - d_2) + ... + (x_n - d_n))_+$$

$$\leq ((x_1 - d_1)_+ + (x_2 - d_2)_+ + ... + (x_n - d_n)_+)_+$$

$$= (x_1 - d_1)_+ + (x_2 - d_2)_+ + ... + (x_n - d_n)_+.$$

Trocando as constantes por variáveis aleatórias, tem-se na desigualdade acima que

$$E[(X_1 + ... + X_n - d)_+] \leq E[(X_1 - d_1)_+] + ... + E[(X_n - d_n)_+]$$

ocorrerá para todo d e d_i tal que $\sum_{i=1}^n d_i = d$.

Pelo teorema 8, verificou-se que $E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - d_i)_+]$, portanto,

$$E[(S - d)_+] \leq E[(S^c - d)_+] \Rightarrow S \leq_{cx} S^c$$

Com isso, pode-se definir S^c como limite superior de S. ■

Portanto, a soma de componentes de um vetor aleatório com funções de distribuições marginais dadas, quando obtida na forma

$$S^c = X_1^c + X_2^c + ... + X_n^c = F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) + ... + F_{X_n}^{-1}(U) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U), \qquad (3.5)$$

onde $U \sim Unif[0,1]$ é chamada de limite superior de S.

No caso especial onde as funções de distribuições marginais são estritamente crescentes e contínuas, a função de distribuição acumulada $F_{S^c}(x)$ é única e determinada por:

$$F_{S^c}^{-1}(F_{s^c}(x)) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x, \quad F_{S^c}^{-1+}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1). \qquad (3.6)$$

E apresentam o prêmio de *stop-loss* definido como

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))_+], \quad F_{S^c}^{-1+}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1), \qquad (3.7)$$

3.3 Limite Superior Melhorado (S^u)

Nesta seção assume-se que se tem uma informação adicional sobre o vetor $(X_1, X_2, ..., X_n)$, mais precisamente, suponha que exista uma variável aleatória Λ com função distribuição dada, tal que, se conhece a função distribuição acumulada de X_i condicional a $\Lambda = \lambda$, para todo o valor de λ.

Defini-se o limite superior melhorado por:

$$S^u = F_{X_1|\Lambda}^{-1}(U) + F_{X_2|\Lambda}^{-1}(U) + ... + F_{X_n|\Lambda}^{-1}(U) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i|\Lambda}^{-1}(U), \qquad (3.8)$$

onde $U \sim Unif[0,1]$ e $F_{X_i|\Lambda}^{-1}(U)$ é a notação para variável aleatória $f_i(U, \Lambda)$ com função f_i definida por $f_i(u, \lambda) = F_{X_i|\Lambda=\lambda}^{-1}(u)$.

Teorema 10 *Seja $U \sim Unif(0,1)$ e independente da variável aleatória Λ, tem-se que*

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \leq_{cx} F_{X_1|\Lambda}^{-1}(U) + F_{X_2|\Lambda}^{-1}(U) + ... + F_{X_n|\Lambda}^{-1}(U).$$

Prova. Comentou-se na subseção 3.1.2 que uma variável aleatória é menor que outra em ordem convexa se: $E[v(X)] \leq E[v(Y)]$ onde v representa uma função convexa. Logo, dado uma função convexa v, tem-se:

$$\begin{aligned} E[v(X_1 + ... + X_n)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[v(X_1 + ... + X_n)|\Lambda = \lambda] dF_\Lambda(\lambda) \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} E[v(f_1(U,\lambda) + ... + f_n(U,\lambda))] dF_\Lambda(\lambda) \\ &= E[v(f_1(U,\Lambda) + ... + f_n(U,\Lambda))] \end{aligned}$$

Como visto anteriormente, $F^{-1}_{X_i|\Lambda}(U)$ é a notação da variável aleatória $f_i(U,\Lambda)$, então

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \leq_{cx} F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) + F^{-1}_{X_2|\Lambda}(U) + ... + F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U) \Rightarrow S \leq_{cx} S^u$$

Portanto, pode-se definir S^u como limite superior de S. ■

Note que o vetor aleatório $(F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) + F^{-1}_{X_2|\Lambda}(U) + ... + F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U))$ tem marginais $F_{X_1}, F_{X_2}, ..., F_{X_n}$, pois

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} Pr[X_i \leq x|\Lambda = \lambda] dF_\Lambda(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} Pr[F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(U) \leq x] dF_\Lambda(\lambda) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} Pr[f_i(U,\lambda) \leq x] dF_\Lambda(\lambda) = Pr[f_i(U,\Lambda) \leq x]. \end{aligned}$$

Pelo teorema 9 tem-se que

$$F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) + F^{-1}_{X_2|\Lambda}(U) + ... + F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U) \leq F^{-1}_{X_1}(U) + F^{-1}_{X_2}(U) + ... + F^{-1}_{X_n}(U).$$

Esta é a razão do nome limite superior melhorado, pois fica entre S e S^c. Se Λ for independente de todos $X_1, X_2, ..., X_n$ então não se tem nenhuma informação extra, logo, o limite superior melhorado se reduz ao limite superior.

Em geral para se julgar a qualidade do limite superior melhorado, compara-se a sua variância com a variância de S. Como $Var[E(S^u|\Lambda)] = Var[E(S|\Lambda)]$, determina-se que $Var[S^u] = Var[S]$ se e somente se $E[Var(S^u|\Lambda)] = E[Var(S|\Lambda)]$. Esta condição ocorrerá se, para qualquer λ de Λ tenha-se $Var(S^u|\Lambda = \lambda) = Var(S|\Lambda = \lambda)$. Portanto, ao escolher a variável aleatória condicional Λ, tal que para qualquer λ de Λ tem-se que o vetor $(X_1, ..., X_n)$ condicionado a $\Lambda = \lambda$, seja comonotônico; tem-se que a função distribuição do limite superior melhorado coincide com a função distribuição de S.

No caso especial onde as funções de distribuições marginais $F_{X_i|\Lambda=\lambda}$ são estritamente crescentes e contínuas, a função de distribuição acumulada $F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)$ é única e determinada por:

$$\sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)) = x, \quad F^{-1+}_{S^u|\Lambda=\lambda}(0) < x < F^{-1}_{S^u|\Lambda=\lambda}(1). \tag{3.9}$$

Então a função distribuição acumulada de S^u tem a seguinte forma:

$$F_{S^u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x) dF_\Lambda(\lambda). \tag{3.10}$$

O prêmio de *stop-loss* do limite superior melhorado com retenção $d \in (F^{-1+}_{S^u|\Lambda=\lambda}(0), F^{-1}_{S^u|\Lambda=\lambda}(1))$, é dado por:

$$E[(S^u - d)_+|\Lambda = \lambda] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(F_{S^u|\Lambda=\lambda}(d)))_+|\Lambda = \lambda]. \tag{3.11}$$

3.4 Limite Inferior (S^l)

Nesta seção será exposto o limite inferior da soma $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ das variáveis aleatórias $X_1, X_2, ..., X_n$. Tem-se que $E[X|\Lambda] \leq X$, como se verifica no teorema seguinte.

Teorema 11 *Para qualquer vetor aleatório* $\mathbf{X}$ *e qualquer variável aleatória* Λ*, tem-se*

$$E[X_1|\Lambda] + E[X_2|\Lambda] + ... + E[X_n|\Lambda] \leq_{cx} X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

Prova. Pela desigualdade de Jensen, determina-se que para toda função convexa v, a seguinte desigualdade ocorrerá:

$$\begin{aligned} E[v(X_1 + X_2 + ... + X_n)] &= E_\Lambda E[v(X_1 + X_2 + ... + X_n)|\Lambda] \\ &\geq E_\Lambda[v(E[X_1 + X_2 + ... + X_n|\Lambda])] \\ &= E_\Lambda[v(E[X_1|\Lambda] + ... + E[X_n|\Lambda])]. \end{aligned}$$

■

Assuma novamente que exista uma variável aleatória Λ com função distribuição dada, tal que a distribuição condicional de X_i é conhecida, dado $\Lambda = \lambda$, para todos possíveis valores de λ. Defini-se o limite inferior por:

$$S^l = E[X_1|\Lambda] + E[X_2|\Lambda] + ... + E[X_n|\Lambda] = E[S|\Lambda]. \tag{3.12}$$

Assumindo que a variável aleatória Λ seja tal que, toda variável aleatória $E[X_i|\Lambda]$ seja não-decrescente e função continua de Λ, se tem que S^l será uma soma comonotônica. Quando a função distribuição acumulada da variável aleatória $E[X_i|\Lambda]$ são estritamente crescente e contínuas, então a função distribuição acumulada de S^l é estritamente crescente e contínua, e é determinada por:

$$\sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{E[X_i|\Lambda]}(F_{S^l}(x)) = x, \quad F^{-1+}_{E[S|\Lambda]}(0) < x < F^{-1}_{E[S|\Lambda]}(1). \tag{3.13}$$

O prêmio de *stop-loss* do limite inferior com retenção $d \in (F^{-1+}_{S^l}(0), F^{-1}_{S^l}(1))$, é dado por:

$$E[(S^l - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(E[X_i|\Lambda] - E[X_i|\Lambda = F^{-1+}_{\Lambda}(1 - F_{S^l}(d))])_+]. \tag{3.14}$$

Uma observação importante a ser feita é que se Λ e S são independentes, não se tem nenhuma informação a mais sobre S, com isso $E[S] \leq_{cx} S$. Por outro lado, se Λ for uma transformação de primeira ordem de S, o limite inferior será muito próximo do valor de S. Lembre que $E[E[X_i|\Lambda]] = E[X_i]$, mas $Var[E[X_i|\Lambda]] < Var[X_i]$ a menos que $E[Var[X_i|\Lambda]] = 0$. Isto implica que o vetor aleatório $(E[X_1|\Lambda], E[X_2|\Lambda], ..., E[X_n|\Lambda])$ em geral não terá a mesma distribuição do vetor $\mathbf{X}$, somente ocorrendo, quando o Λ escolhido fizer com que S^l seja uma soma comonotônica.

Para se julgar a qualidade do limite inferior S^l, pode-se verificar sua variância. Para que $Var[S|\Lambda = \lambda]$ seja muito próxima da $Var[S]$, precisa-se que, Λ e S sejam as mais similares possíveis. Quando isso ocorre tem-se o melhor limite inferior. O exemplo a seguir evidência este fato.

Exemplo 3.2 Sejam as variáveis aleatórias Y_1 e Y_2 independentes e identicamente distribuídas, com distribuição normal padrão. Sendo $S = Y_1 + Y_2$, tem-se que $S \sim$ N(0,2). Considera-se a variável aleatória condicional $\Lambda = Y_1 + aY_2$ para algum real a. A distribuição condicional de Y_1, dado $\Lambda = \lambda$, é $N\left(\frac{\lambda}{1+a^2}, \frac{a^2}{1+a^2}\right)$. Isto implica que:

$$E[Y_1|\Lambda] = \frac{\Lambda}{1+a^2} \quad e \quad F^{-1}_{Y_1|\Lambda}(U) = E[Y_1|\Lambda] + \frac{|a|\,\Phi^{-1}(U)}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$E[Y_2|\Lambda] = \frac{a\Lambda}{1+a^2} \quad e \quad F^{-1}_{Y_2|\Lambda}(U) = E[Y_2|\Lambda] + \frac{\Phi^{-1}(U)}{\sqrt{1+a^2}},$$

com $U \sim Unif(0,1)$, independente de Λ e $F^{-1}_{Y_1|\Lambda}(U)$, $F^{-1}_{Y_2|\Lambda}(U)$ tendo distribuição normal padrão.

Determina-se agora os limites de acordo com a teoria apresentada.

$$S = Y_1 + Y_2 \sim N(0,2),$$

$$S^l = E[Y_1 + Y_2|\Lambda] = \frac{1+a}{1+a^2}\Lambda \sim N\left(0, \frac{(1+a)^2}{1+a^2}\right),$$

$$S^u = \frac{1+a}{1+a^2}\Lambda + \frac{1+|a|}{\sqrt{1+a^2}}\Phi^{-1}(U) \sim N\left(0, \frac{(1+a)^2 + (1+|a|)^2}{1+a^2}\right),$$

$$S^c = 2Y_1 \sim N(0,4)$$

Para algumas escolhas especiais de a, tem-se as seguintes distribuições para o limite inferior e limite superior melhorado:

$$a = 0 \Rightarrow N(0,1) \leq_{cx} S \leq_{cx} N(0,2)$$

$$a = 1 \Rightarrow N(0,2) \leq_{cx} S \leq_{cx} N(0,4)$$

$$a = -1 \Rightarrow N(0,0) \leq_{cx} S \leq_{cx} N(0,2)$$

$$|a| \to \infty \Rightarrow N(0,1) \leq_{cx} S \leq_{cx} N(0,2)$$

Note que $S \sim N(0,2)$, então o melhor limite inferior ocorre quando $a = 1$ e o melhor limite superior melhorado ocorre quando $a \leq 0$ ou $a \to \infty$, ou seja, quando $S^l \overset{d}{=} S \overset{d}{=} S^u$.

A variância de S^l é máxima quando $a = 1$ e mínima quando a = -1, por outro lado a variância de S^u também é máxima em $a = 1$ e é mínima em $a \leq 0$ e $a \to \infty$. Logo o melhor limite inferior neste caso é atingido para $\Lambda = S$ e o pior para Λ independente de S. O melhor limite superior melhorado ocorre quando $\Lambda = Y_1$, $\Lambda = Y_2$ ou $a < 0$ com Λ e S independentes e o pior limite superior melhorado ocorre quando $\Lambda = S$.

Verifica-se, claramente, nas figuras 3.3 e 3.4 que as funções distrbuições acumuladas de S e S^u coincidem quando $a = 0$, e a função distribuição de S^l coincide com a função distribuição de S quando $a = 1$, bem como as funções de distribuições de S^c e S^u.

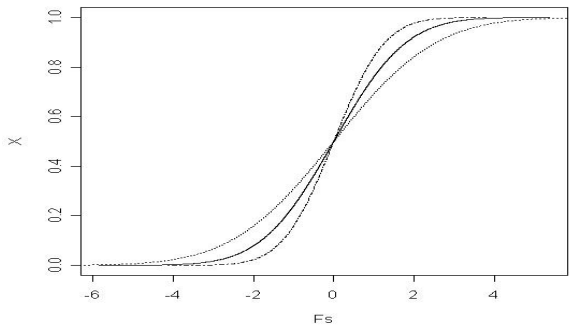


Figura 3.3: Função distribuição acumulada de S (linha), de S^l (tracejado), de S^c (pontilhado) e de S^u (linha) quando $a = 0$.

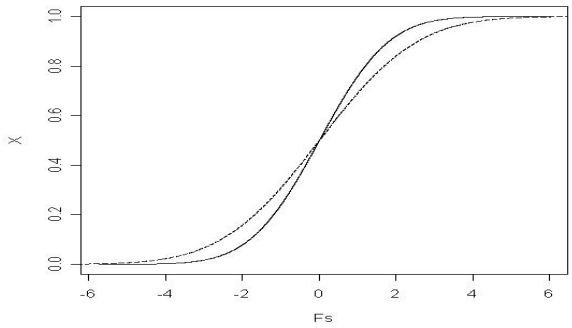


Figura 3.4: Função distribuição acumulada de S (linha), de S^l (linha), de S^c (tracejado) e de S^u (tracejado) quando $a = 1$.

De um modo geral a escolha ótima (a qual o limite superior melhorado se aproxima de S) para variável aleatória condicional Λ depende da correlação de Y_1 e Y_2. Se esta for igual a 1 (Y_1 e Y_2 comonotônicas), qualquer Λ resulta em $S \stackrel{d}{=} S^u \stackrel{d}{=} S^c$. Caso contrário Y_1 e Y_2 sendo independentes a escolha do Λ ótimo será $\Lambda \equiv Y_1$(corresponde $a = 0$) ou $\Lambda \equiv Y_2$(corresponde $a \to \infty$), isto assegura que S e S^u coincidem em distribuição.

Capítulo 4

Valor Presente de Fluxo de Pagamento

Neste capítulo serão aplicados os conceitos vistos nos capítulos anteriores, para determinar o valor presente de fluxo de pagamentos.

Considere uma série de pagamento determinístico $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, de sinais arbitrários, que são devidos nos tempos 1,2,...,n respectivamente. Deseja-se responder a seguinte questão:

"Qual a quantia de dinheiro requerida no tempo 0 (inicial) para honrar essas dívidas?"

Esta quantia requerida é denominada de provisão, reserva ou capital requerido. É claro, que estas provisões dependem fortemente de como estas quantias serão investidas.

Assuma que as provisões serão investidas tal que elas gerem um retorno estocástico Y_j no ano $j, j = 1, 2, ..., n$, i.e. uma quantia de 1 u.m. no tempo $j - 1$, renderá e^{Y_j} no tempo j. O fator de desconto durante o período $[0, i]$ é dado por $e^{-(Y_1+Y_2+...+Y_i)}$, pois esta quantia estocástica renderá exatamente a quantia de 1 u.m. no tempo i.

Utilizar-se-á a função de distribuição da variável aleatória $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-(Y_1+Y_2+...+Y_i)}$ de forma a determinar a provisão requerida. Portanto, $F_S^{-1}(0.99)$ significa que se tem 99% de probabilidade de se honrar a dívida.

O vetor de retorno $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ tem distribuição normal multivariada, logo, a variável aleatória S é então uma combinação linear de variáveis aleatórias lognormais dependentes,

definida da seguinte maneira:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i, \quad onde \;\; X_i = e^{-Y(i)} \;\; e \;\; Y(i) = (Y_1 + Y_2 + ... + Y_i) \tag{4.1}$$

Logo, é impossível determinar a função distribuição de S analíticamente. De forma que se utiliza a teoria dos limites da soma de variáveis aleatórias dependentes para determinar S, como será visto a seguir.

4.1 Limites para Soma (S)

Nesta seção defini-se o limite superior, o limite superior melhorado e o limite inferior, bem como as funções distribuições acumuladas e os prêmios de *stop-loss* dos limites de S (onde S foi definido em (4.1)).

4.1.1 Limite Superior (S^c)

Para o caso $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$, tem-se que a definição do limite superior para S, com base na seção 3.2 é dada por:

$$S^c = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{\alpha_i X_i}(U), \quad com\; U \sim Unif(0,1)$$

Logo, precisa-se determinar $F^{-1}_{\alpha_i X_i}$. Sabe-se que se X_i tem distribuição lognormal com parâmetros (μ_i, σ_i^2), sua função distribuição inversa é dada por:

$$F^{-1}_{X_i}(p) = e^{\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(p)}, \quad 0 < p < 1$$

com isso, a função distribuição inversa de $\alpha_i X_i$ será:

$$F^{-1}_{\alpha_i X_i}(p) = \alpha_i e^{-E[Y(i)]^{+}_{-} \alpha_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(p)}, \quad 0 < p < 1$$

e, portanto,

$$S^c = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)]^{+}_{-} \alpha_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(U)}. \tag{4.2}$$

Para determinar os quantis de S^c, utiliza-se

$$F^{-1}_{S^c}(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)]^{+}_{-} \alpha_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(p)}, \quad 0 < p < 1 \tag{4.3}$$

e para determinar a função distribuição acumulada F_{S^c}, basta resolver a seguinte equação:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)]\overset{+}{-}\alpha_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(F_{S^c}(x))} = x, \quad F_{S^c}^{-1+}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1) \tag{4.4}$$

Para $F_{S^c}^{-1+}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1)$, o prêmio de *stop-loss* com retenção d segue por (3.7):

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - e^{E[Y(i)]+\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(F_{S^c}(d))})_+]$$

usando (4.4) e (3.1), determina-se a seguinte expressão para o prêmio de *stop-loss*:

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \overset{+}{-} \alpha_i e^{-E[Y(i)]+\frac{\sigma_{Y(i)}^2}{2}} \Phi(\overset{+}{-} \alpha_i \sigma_{Y(i)} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(d))) - d(1 - F_{S^c}(d)) \tag{4.5}$$

4.1.2 Limite Superior Melhorado (S^u)

Considere a variável aleatória condicional Λ, definida da seguinte maneira: $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i$. Utilizando os conceitos da seção 3.3, para o caso $S = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$, determina-se o limite superior melhorado por:

$$S^u = \sum_{i=1}^{n} F_{\alpha_i X_i|\Lambda}^{-1}(U), \quad com\ U \sim Unif(0,1)$$

basta então determinar $F_{\alpha_i X_i|\Lambda}^{-1}$. Como foi visto na subseção anterior, se $X_i \sim LN(\mu_i, \sigma_i^2)$, então

$$F_{X_i}^{-1}(p) = e^{\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(p)}, \quad 0 < p < 1$$

logo,

$$F_{\alpha_i X_i|V}^{-1}(p) = \alpha_i e^{-E[Y(i)] - r_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(V) \overset{+}{-} \alpha_i \sqrt{1-r_i^2} \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(p)}, \quad p \in (0,1)$$

e, portanto,

$$S^u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)] - r_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(V) \overset{+}{-} \alpha_i \sqrt{1-r_i^2} \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(U)}. \tag{4.6}$$

E seus quantis podem ser determinados por:

$$F_{S^u|V}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)] - r_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(V) \overset{+}{-} \alpha_i \sqrt{1-r_i^2} \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(p)}, \quad p \in (0,1) \tag{4.7}$$

sendo U e $V \equiv \Phi(\frac{\lambda - E[\lambda]}{\sigma_\Lambda})$ variáveis aleatórias independentes e uniformes (0,1), Φ é a função de densidade acumulada da distribuição $N(0,1)$ e $r_i = r(Y(i), \Lambda) = \frac{cov[Y(i),\Lambda]}{\sigma_{Y(i)}\sigma_\Lambda}$

Para $F^{-1+}_{S^u|V=v}(0) < x < F^{-1}_{S^u|V=v}(1)$, a probabilidade condicional $F_{S^u}(x|V=v)$ segue por:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)]-r_i\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(v)\overset{+}{-}\alpha_i\sqrt{1-r_i^2}\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(F_{S^u}(x|V=v))} = x \tag{4.8}$$

e

$$F_{S^u}(x) = \int_0^1 F_{S^u}(x|V=v)dv. \tag{4.9}$$

Para a retenção $d\in (F^{-1+}_{S^u|V=v}(0), F^{-1}_{S^u|V=v}(1))$, determinamos o prêmio de *stop-loss* por

$$E[(S^u-d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)]+\frac{\sigma^2_{Y(i)}}{2}} \Phi(\overset{+}{-} \alpha_i\sqrt{1-r_i^2}\sigma_{Y(i)} - \Phi^{-1}(F_{S^u}(x|V=v))) - d(1-F_{S^u}(d)) \tag{4.10}$$

4.1.3 Limite Inferior (S^l)

Como no limite superior melhorado, considere que $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i$, foi visto na seção 3.4 a definição do limite inferior, ao aplicar a definição para o caso onde S é definido por (4.1), encontra-se o seguinte limite inferior:

$$S^l = E[S|\Lambda] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)]-r_i\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(V)+\frac{1}{2}(1-r_i^2)\sigma^2_{Y(i)}} \tag{4.11}$$

Se (Y,Λ)tem distribuição normal bivariada, então Y condicionado a $\Lambda = \lambda$, tem distribuição normal univariada com:

$$E[Y|\Lambda] = E[Y] + r(Y,\Lambda)\frac{\sigma_y}{\sigma_\Lambda}(\lambda - E[\Lambda])$$

$$Var[Y|\Lambda] = \sigma_Y^2(1 - r(Y,\Lambda)^2)$$

Logo, dado $\Lambda = \lambda$, a variável aleatória $-Y(i)$ é normalmente distribuida com:

$$\mu_i = -E[Y(i)] - r_i\frac{\sigma_{Y(i)}}{\sigma_\Lambda}(\lambda - E[\Lambda])$$

$$\sigma_i^2 = (1-r_i^2)\sigma^2_{Y(i)}$$

E condicionalmente, dado $\Lambda = \lambda$, a variável aleatória X_i tem distribuição lognormal com parâmetros μ_i e σ_i^2. Como $E[X_i|\Lambda = \lambda] = e^{\mu_i+\frac{1}{2}\sigma_i^2}$, determina-se que,

$$E[\alpha_i X_i|\Lambda] = \alpha_i e^{-EY[(i)]-r_i\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(V)+\frac{1}{2}(1-r_i^2)\sigma^2_{Y(i)}},$$

onde variável aleatória $V \equiv \Phi(\frac{\lambda - E[\lambda]}{\sigma_\Lambda})$ é uniforme (0,1), e $r_i = r(Y(i), \Lambda) = \frac{cov[Y(i),\Lambda]}{\sigma_{Y(i)}\sigma_\Lambda}$

Portanto, $S^l = \sum_{i=1}^{n} E[\alpha_i X_i | \Lambda]$ é dado por (4.11).

Por (3.13) podemos obter a distribuição de $F_{S^l}(x)$ para algum $x \in (0, \infty)$, definida como:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)] + r_i \sigma_{Y(i)} \Phi^{-1}(F_{S^l}(x)) + \frac{1}{2}(1 - r_i^2)\sigma_{Y(i)}^2} = x \tag{4.12}$$

Com isso, o prêmio de *stop-loss* com retenção $d \in (F_{S^l}^{-1+}(0), F_{S^l}^{-1}(1))$, é dado por:

$$E[(S^l - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-E[Y(i)] + \frac{\sigma_{Y(i)}^2}{2}} \Phi(r_i \sigma_{Y(i)} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(d))) - d(1 - F_{S^l}(d)) \tag{4.13}$$

4.2 Ilustração Numérica

Duas aplicações são ilustradas nesta seção. Na primeira supõe-se a taxa de juros com média e variância conhecida; e na segunda, a taxa de juros com média e variância estimadas.

Suponha que se deseja saber qual o "montante" necessário hoje para receber a quantia α, durante os próximos 20 anos. Portanto, como foi dito anteriormente, tem-se que $S = \sum_{i=1}^{20} \alpha_i e^{-Y(i)}$. Assuma que as variáveis aleatórias Y_i são i.i.d. e $N(\mu, \sigma^2)$. A variável aleatória condicional Λ é definida como antes: $\Lambda = \sum_{i=1}^{20} \beta_i Y_i$.

Neste caso, tem-se que:

$$E[Y(i)] = i\mu,$$

$$Var[Y(i)] = i\sigma^2,$$

$$Var[\Lambda] = \sigma^2 \sum_{k=1}^{20} \beta_k^2,$$

$$r_i = \frac{cov[Y(i), \Lambda]}{\sigma_{Y(i)\sigma_\Lambda}} = \frac{\sum_{k=1}^{i} \beta_k}{\sqrt{i \sum_{k=1}^{20} \beta_k^2}}$$

Como proposto em (Dhaene, Denuit, Goovaerst, Kaas, & Vyncke, 2002), a seguinte escolha para o parâmetro β_i é feita: $\beta_i = \sum_{j=i}^{20} \alpha_j e^{-j\mu}, \quad i = 1, ..., 20$. Ou seja, a variável aleatória condicional Λ, é obtida por uma expansão de Taylor em S.

Fazendo esta escolha para Λ tem-se uma aproximação de primeira ordem para S. Pode-se verificar que,

$$S = \sum_{j=1}^{20} \alpha_j e^{-j\mu - \sum_{i=1}^{j}(Y_i - \mu)} \approx \sum_{j=1}^{20} \alpha_j e^{-j\mu}[1 - \sum_{i=1}^{j}(Y_i - \mu)]$$

$$= C - \sum_{j=1}^{20} \alpha_j e^{-j\mu} \sum_{i=1}^{j} Y_i = C - \sum_{i=1}^{20} Y_i \sum_{j=i}^{20} \alpha_j e^{-j\mu},$$

onde C é uma constante apropriada.

Pelo exemplo 3.2, S^l terá a mesma distribuição de S e será uma boa aproximação, quando a variável aleatória condicional Λ, for uma aproximação de primeira ordem para S. Ou seja, se $(Y_i - \mu)$ ou σ forem suficientementes pequenos, tem-se que S^l é muito próximo de S. Por outro lado, com esta escolha para Λ, S^u apresenta a mesma distribuição de S^c, ou seja, o limite superior melhorado (S^u), não apresenta grandes melhoras em relação ao limite superior.

Com isso, será utilizado apenas o limite superior (S^c) e o limite inferior (S^l), nesta ilustração e $\alpha_k = 1$, k=1,...,20.

4.2.1 Taxa de juros com média e variância conhecida

Assuma que as taxas de juros $Y_i's$ apresentam média ($\mu = 0.07$) e desvio-padrão ($\sigma = 0.1$) como proposto em (Dhaene et al., 2002).

Logo, pode-se identificar as funções de distribuições acumuladas de S, S^l e S^c.

Obteve-se a função distribuição empírica de S, gerando uma amostra de 10.000 valores aleatórios. Na figura 4.1 e na figura 4.2, pode-se verificar que a função distribuição acumulada de S^l é muito próxima da função distribuição acumulada de S, como se esperava. A função distribuição acumulada de S^c também é uma boa aproximação para a função distribuição acumulada de S, isso deve ao fato que a estrutura de dependência do vetor $(X_1, X_2, ..., X_n)$ é localmente quase comonotônico. De fato, se i for próximo de j, então $r(Y(i), Y(j)) = \frac{min(i,j)}{\sqrt{ij}}$ será muito próximo de 1. (Dhaene et al., 2002) mostra que para i suficientemente próximo de j, tem-se que $r(X_i, X_j)$ é muito próximo $r(F_{X_i}^{-1}(U), F_{X_j}^{-1}(U))$. A tabela 4.1, nos ajuda a confirmar estas observações.

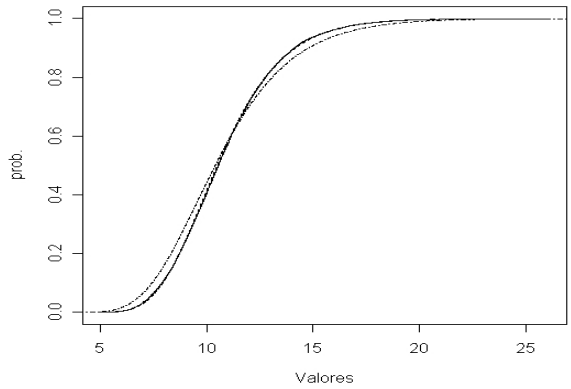


Figura 4.1: Funções distribuições acumuladas de S(pontilhado), S^l(pontilhado) e S^c (linha), com μ e σ^2 conhecido.

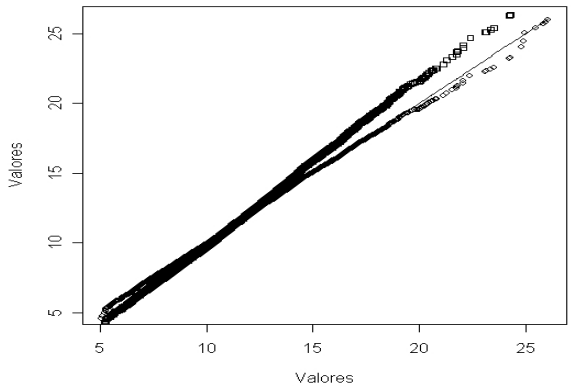


Figura 4.2: QQ-plot das distribuições de S^l (bola) e S^c (quadrado) em relação a S, com μ e σ^2 conhecido.

O prêmio de *stop-loss* para S^l, S^c e S são comparados na figura 4.3. Pode-se notar que o limite superior e o limite inferior são muito próximos, com isso, conclui-se que ambos são boas aproximações para S. A tabela 4.2, mostra o prêmio de *stop-loss* para algumas retenções d.

Note que algumas simulações para o prêmio de *stop-loss* não estão no intervalo $[E[(S^l - d)_+], E[(S^c - d)_+]]$. Isso não só demonstra a dificuldade de estimar o prêmio de

Probab.	$F_{S^l}^{-1}(p)$	$F_S^{-1}(p)$	$F_{S^c}^{-1}(p)$
0.95	15.46561	15.54809	16.39153
0.975	16.71083	16.76456	17.94324
0.99	18.30796	18.38734	19.95782
0.995	19.49658	19.65781	21.47385
0.999	22.23812	22.14394	25.02100

Tabela 4.1: Valores dos quantis de S,S^l e S^c, com μ e σ^2 conhecido.

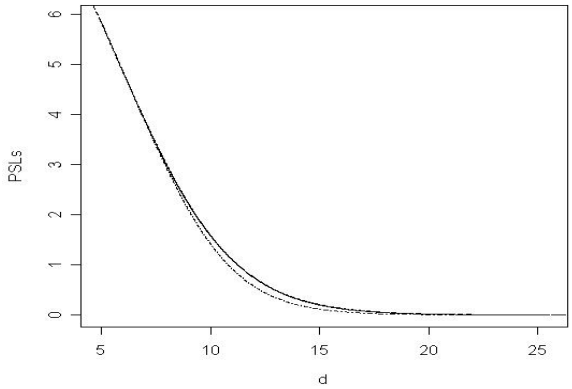


Figura 4.3: Os prêmios de *stop-loss* com retenção d, para S(pontilhado), S^l(pontilhado) e S^c(linha),com μ e σ^2 conhecido.

stop-loss por simulações, mas também indica a precisão dos limites.

4.2.2 Taxa de juros com média e variância estimadas

Nesta subseção assuma que as taxas de juros $Y_i's$ apresentam média $\mu = \hat{\mu}$ e variância $\sigma^2 = \hat{\sigma^2}$ onde $\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n}$ e $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\mu})^2$ são os estimadores de máxima verossimilhança de μ e σ^2.

Tem-se como amostra, as taxas de juros ocorridas entre os anos de 1996 a 2005, fornecidas por (Perrin, 2006), que serve como benchmark de vários fundos de pensões brasileiros.

Como realizado na taxa de juro com média e variância conhecida, será feito agora,

d	$E[(S^l - d)_+]$	$E[(S - d)_+]$	$E[(S^c - d)_+]$
0	10.8320	10.8320	10.8320
5	5.8321	5.8320	5.8326
10	1.4136	1.4779	1.5804
15	0.1148	0.1186	0.2067
20	0.0063	0.0057	0.0215
25	0.0003	0.0002	0.0022

Tabela 4.2: Valores dos prêmios de *stop-loss* de S, S^l e S^c, para diferentes "d", com μ e σ^2 conhecido.

1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
0,1599	0,137	0,055	0,1525	-0,0005	0,0202	-0,0776	0,1995	0,0487	0,1845

Tabela 4.3: Taxas de juros ocorridas no período de 1996 a 2005

mas para taxa de juro com média e variância estimadas.

Inicialmente, calcula-se $\hat{\mu}, \hat{\sigma^2}$, utilizando o estimador de máxima verossimilhança para os dados apresentados na tabela 4.3.

Através das figuras 4.4 e 4.5, pode-se identificar a função de distribuição acumulada de S, S^l e S^c, bem como o comportamento destas.

Verifica-se claramente que as funções de distribuições acumuladas de S^l e S^c continuam sendo boas aproximações para função distribuição acumulada de S. Novamente a função distribuição empírica de S, foi gerada por uma amostra de 10.000 valores aleatórios. Em relação a (4.2.1), tem-se uma diminuição nos valores, devido a média e variância estimadas serem de uma amostra real brasileira, portanto, diferente do valor hipotético utilizado acima. A tabela 4.4 propicia uma visão numérica dos quantis, que se comparada com a tabela 4.1, fica evidente a diminuição dos valores.

O prêmio de *stop-loss* permanece com os limites inferior e superior muito próximos, como pode ser observado na figura 4.6. Persiste também o problema da simulação, a tabela 4.5, evidência os valores para o prêmio de *stop-loss* de S com retenção d, que se

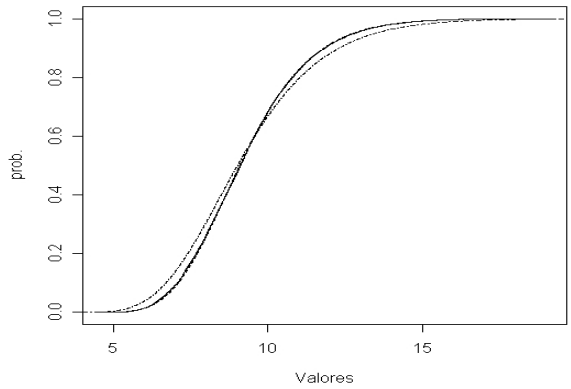


Figura 4.4: Funções distribuições acumuladas de S(linha), S^l(linha) e S^c (pontilhado), com μ e σ^2 estimado.

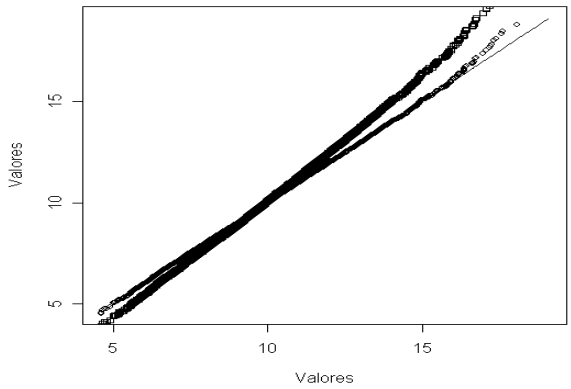


Figura 4.5: QQ-plot das distribuições de S^l (bola) e S^c (quadrado) em relação a S, com μ e σ^2 estimado.

encontra dentro e fora do intervalo $(E[(S^l - d)_+], E[(S^c - d)_+])$.

Probab.	$F_{S^l}^{-1}(p)$	$F_S^{-1}(p)$	$F_{S^c}^{-1}(p)$
0.95	12.75858	12.76951	13.47704
0.975	13.65208	13.68030	14.59704
0.99	14.78487	14.95931	16.03367
0.995	15.61911	15.74306	17.10303
0.999	17.51771	17.06862	19.57046

Tabela 4.4: Valores dos quantis de S, S^l e S^c, com μ e σ^2 estimado.

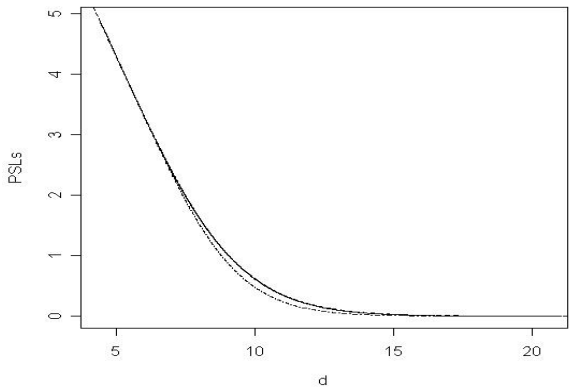


Figura 4.6: Os prêmios de *stop-loss* com retenção d, para S(pontilhado), S^l(pontilhado) e S^c(linha), com μ e σ^2 estimado.

d	$E[(S^l - d)_+]$	$E[(S - d)_+]$	$E[(S^c - d)_+]$
0	9.3067	9.3067	9.3067
5	4.3069	4.3072	4.3082
10	0.4799	0.5192	0.6196
15	0.0099	0.0129	0.0300
20	0.0001	0.0001	0.0011
25	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 4.5: Valores dos prêmios de *stop-loss* de S, S^l e S^c, para diferentes "d", com μ e σ^2 estimado.

Capítulo 5

Provisão de Sinistros Ocorridos mas não Avisados (IBNR)

Neste capítulo serão ilustrados os conceitos dos limites para soma de variáveis aleatórias dependentes, bem como os conceitos da estatística Bayesiana na resolução do problema de Provisão de Sinistros Ocoridos mas não Avisados (IBNR).

Sabe-se que provisões técnicas são montantes constituídos pela seguradora, de acordo com suas estimativas, para quitação dos seus compromissos financeiros futuros junto a seus segurados. Logo, provisões de sinistros ocorridos mas não avisados são estimativas que englobam obrigações que tenham sido assumidas pela seguradora durante a vigência passada da apólice.

Já de longa data, o mercado segurador mundial valoriza a constituição e acompanhamento da provisão de sinistros ocorridos mas não avisados (*IBNR - Incorred But Not Reported*), sendo seu contínuo acompanhamento um dos pilares básicos de avaliação da qualidade da carteira de negócios e da saúde financeira das seguradoras. Estas informações são utilizadas, inclusive, como parte integrante nas transações de controle acionário.

Este capítulo foi dividido da seguinte maneira: Na primeira seção aborda-se a organização dos dados, como prepará-los para a utilização (apresenta-se o "Triângulo de *Run-off*"). Na segunda seção defini-se o modelo estatístico a se utilizar, bem como na seção seguinte os métodos estatísticos. A última seção apresenta uma aplicação numérica.

5.1 Triângulo de *Run-off*

Para determinar os pagamentos futuros, se examina a taxa de crescimento dos sinistros no passado. Organizando os dados por data e por período do sinistro, produzindo uma comparação consistente do crescimento ao longo do tempo. Esse crescimento decorre entre o ano de origem (ano que foi contratado o seguro) até o ano da comunicação do sinistro.

Chama-se a esta organização das informações de "triângulo de *Run-off*", podendo o mesmo ser obtido a partir da utilização de diferentes tipos de informações: sinistros pagos e/ou avisados, número de sinistros liquidados e/ou avisados, sinistro médio, etc.

Para a construção dos triângulos de *Run-off*, são necessarios dados individualizados da história do sinistro, como por exemplo: Número do sinistro (de forma única), data de ocorrência do sinistro, data de atualização da provisão (aviso e alterações), valor da provisão constituída, data de pagamento do sinistro, valor do pagamento do sinistro, data de pagamento das despesas, valores das despesas, data do recebimento do salvado/ ressarcimento, valor do salvado/ ressarcimento.

Ano de	Período de Desenvolvimento						
Origem	1	2	...	j	...	$t-1$	t
1	Y_{11}	Y_{12}	...	Y_{1j}	...	$Y_{1,t-1}$	$Y_{1,t}$
2	Y_{21}	Y_{22}	...	Y_{2j}	...	$Y_{2,t-1}$	
$\vdots$	...	...	...	...	...		
i	$Y_{i,1}$	...	...	Y_{ij}			
$\vdots$	...	...	...				
t	$Y_{t,1}$						

Tabela 5.1: Triângulo de *Run-off* do montante de sinistros.

Denote por t o número de anos de origem e de atraso; e por Y_{ij}, $i = 1, ..., t; j = 1, ..., t - i + 1$, os montantes de sinistros para o i-ésimo ano de origem e o j-ésimo ano de atraso. O triângulo superior ($i = 1, ..., t$ e $j = 1, ..., t - i + 1$) é formado pelos dados observados e o triângulo inferior ($i = 2, ..., t$ e $j = t + 2 - i, ..., t$) corresponde as parcelas

a serem previstas.

Algumas quantidades importantes envolvendo os valores do triângulo inferior são:

- Provisão total de IBNR: $S = \sum_{i=2}^{t} \sum_{j=t+2-i}^{t} Y_{ij}$;
- Montante por ano de origem: $W_i = \sum_{j=t+2-i}^{t} Y_{ij}$;
- Gastos no ano corrente: $H_k = \sum_{i=k+1}^{t} Y_{i,t+k-i+1}$, onde $k = 1, ..., t-1$.

As quais devem ter suas distribuições preditivas determinadas.

A primeira delas, provisão total de IBNR (S), é a soma de todas as responsabilidades pendentes que a seguradora tem referentes às apólices que já tiveram seus períodos de vigência terminados, ou seja, é a soma do triângulo inferior. A segunda, montante por ano de origem (W), é realizada dentro de cada ano de origem, esta soma fornece o valor que falta ser gasto com sinistros referentes às apólices do ano i. Estes valores são necessários para uma correta tarifação dos prêmios. A terceira, gastos no ano corrente (H), são as somas das diagonais do triângulo inferior, cada diagonal se refere a um ano do calendário. Estas somas são necessárias para projetar os gastos da companhia nos próximos anos.

5.2 Modelo Estatístico

Nesta seção defini-se o modelo estatístico para o cálculo da provisão total de IBNR. Este modelo será interpretado de 3 maneiras diferentes. Primeiramente, será utilizado a teoria dos limites, vista no capítulo 3 para determinar os limites inferior e superior do valor da provisão. Posteriormente, será utilizado a estatística bayesiana, assumindo distribuições não informativas para as prioris. Por último, as distribuições das prioris deixam de ser não informativas e o modelo passa a apresentar, uma estrutura dinâmica.

Considere o seguinte modelo de regressão loglinear:

$$\mathbf{Z}_i = ln\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i\beta + \varepsilon_i, \quad \mathbf{Y}_i > 0, \tag{5.1}$$

onde

- $\mathbf{Y}_i$ é o i-ézimo elemento do vetor $\mathbf{Y}$, de dimensão $\frac{t(t+1)}{2}$;

- $\mathbf{X}$ é a matriz de regressão de dimensão $[\frac{t(t+1)}{2}] \times p$; a i-ézima fileira é denotada por $\mathbf{X_i}$, e o seu elemento é denotado por X_{ij};
- β é o vetor (de dimensão p) de parâmetros desconhecidos;
- ε_i são erros independentes normalmente distribuidos com média 0 e variância σ^2.

Em notação matricial este modelo linear pode ser representado como:

$$\mathbf{Z} = ln\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2\mathbf{I}). \tag{5.2}$$

As respostas Z_{ij} são verificadas pela decomposição (aditiva) entre uma componente determinística com média $(\mathbf{X}\beta)_{ij}$ e uma componente de erro aleatório distríbuido normalmente com média 0.

Para os parâmetros de regressão, será utilizado um modelo bem conhecido e amplamente usado, o modelo estocástico de Chain-Ladder,

$$Z_{ij} = lnY_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}, \tag{5.3}$$

(onde α_i é o parâmetro para cada ano de origem i e β_j é o parâmetro para cada ano de desenvolvimento j).

De modo a facilitar a compreensão, de agora em diante, ao ser mencionado modelo 1 entenda como a primeira interpretação dada ao modelo (5.1), de forma análoga o modelo 2 como a segunda interpretação e o modelo 3 a terceira interpretação deste modelo.

5.2.1 Modelo 1

Nesta subseção, tem-se que o modelo (5.1) é interpretado de maneira clássica, ou seja, determina-se os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros desconhecidos e para variância ($\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}$ e $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}(\mathbf{Z} - \mathbf{X}\hat{\beta})'(\mathbf{Z} - \mathbf{X}\hat{\beta})$).

A matriz regressão correspondendo ao triângulo inferior, de dimensão $[\frac{t(t-1)}{2}] \times p$, é definida igual a matriz regressão $\mathbf{X}$ e será denotada por $\mathbf{B}$.

Logo, pode-se determinar a provisão total de IBNR por:

$$IBNR = \sum_{i=2}^{t} \sum_{j=t+2-i}^{t} e^{(\mathbf{B}\hat{\beta})_{ij} + \varepsilon_{ij}}, \tag{5.4}$$

aqui $(\mathbf{B}\hat{\beta})_{\mathbf{ij}}$ e ε_{ij} são independentes e apresentam as seguintes distribuições:

$$(\mathbf{B}\hat{\beta})_{ij} \sim N((\mathbf{B}\beta)_{ij}, \sigma^2(\mathbf{B}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{B}')_{ij}) \quad e \quad \varepsilon_{ij} \sim i.i.d.N(0, \sigma^2).$$

Ao introduzir um processo de desconto, tem-se que o nível de provisão requerida dependerá de como será investida esta provisão. Assuma que as provisões serão investidas de forma que elas gerem um retorno estocástico γ_j no ano $j, j = 1, 2, ..., n$, pois uma quantia de 1 u.m. no tempo $j-1$, renderá e^{γ_j} no tempo j. O fator de desconto durante o período $[0, i]$ é dado por $e^{-(\gamma_1+\gamma_2+...+\gamma_i)}$, pois esta quantia estocástica renderá exatamente a quantia de 1 u.m. no tempo i.

O vetor de retorno $(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{t-1})$ é assumido ter distribuição normal multivariada, independente de ε. Então o valor presente dos pagamentos é uma combinação linear de variáveis aleatórias lognormais dependentes.

Denota-se a variável aleatória $\gamma(i)$ por $\gamma(i) = \gamma_1 + ... + \gamma_i$ podendo ser reescrita por $\gamma(i) = (\mu - \frac{\delta^2}{2})i + \delta B(i)$, onde $B(i)$ é o movimento Browniano padrão e μ é uma força constante de interesse.

Para obter o valor presente da provisão total de IBNR definida em (5.4), basta determinar o valor de S:

$$S = \sum_{i=2}^{t} \sum_{j=t+2-i}^{t} e^{(\mathbf{B}\hat{\beta})_{ij} - \gamma(i+j-t-1) + \varepsilon_{ij}} \tag{5.5}$$

$$= \sum_{i=2}^{t} \sum_{j=t+2-i}^{t} exp((\mathbf{B}\hat{\beta})_{ij} - (\mu + \delta^2/2)(i+j-t-1) - \delta B(i+j-t-1) + \varepsilon_{ij}). \tag{5.6}$$

5.2.2 Modelo 2

Pode-se encontrar em (Ntzoufras & Dellaportas, 2002), quatro modelos bayesianos para o problema do cálculo das provisões total de IBNR. Nesta subseção, será apresentado apenas o primeiro modelo proposto, uma vez que este é igual ao modelo estatístico mencionado acima. Na seção seguinte será visto que ao utilizar a estatística bayesiana, precisa-se utilizar uma distribuição a priori para o modelo, os autores assumiram distribuições não informativas para as prioris.

O primeiro modelo proposto por (Ntzoufras & Dellaportas, 2002), é dado por:

$$Z_{ij} = log(Y_{ij}) \quad com\ Z_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$$

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j \quad i, j = 1, ..., t.$$

$$\mu \sim N(0, \sigma_\mu^2)$$

$$\alpha_i \sim N(0, \sigma_a^2)$$

$$\beta_j \sim N(0, \sigma_b^2)$$

Sendo:

Y_{ij} os montantes de sinistros ajustados pelo logaritmo;

μ o valor esperado dos montantes de sinistros ajustados pelo logaritmo;

α_i o efeito do i-ésimo período;

β_j o efeito do j-ésimo período de atraso.

5.2.3 Modelo 3

Nesta subseção, será acrescentado uma estrutura dinâmica ao modelo 2 e novamente será interpretado sobre o ponto de vista da estatística bayesiana.

Pode-se encontrar em (H. Migon, Fonseca, & Lima, 2007), alguns modelos que utilizam a estrutura dinâmica e hierárquica. Estes além de levar em consideração o montante de sinistros também controlam o número de sinistros em relação ao tempo.

Neste trabalho será utilizado somente as informações referentes aos montantes dos sinistros, com isso, o modelo proposto apresenta-se da seguinte maneira:

$$log(Y_{ij}) = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad com\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_{ij} \quad i, j = 1, ..., t.$$

$$\mu \sim N(0, \sigma_\mu^2)$$

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + \nu_{\alpha_i}, \quad \nu_\alpha \sim N(0, \sigma_a^2)$$

$$\beta_{ij} = \beta_{i,j-1} + \nu_{\beta_j}, \quad \nu_\beta \sim N(0, \sigma_b^2)$$

onde $i = 2, ..., r$ e $j = 2, ..., r$ e com $\alpha_1 = 0$ e $\beta_{1,j} = 0$.

Este modelo trabalha com montante de sinistros em escala logarítmica e sugere que este montante é afetado tanto pelo período de origem (i), quanto pelo tempo de desenvolvimento (j).

Sendo novamente:

Y_{ij} os montantes de sinistros ajustados pelo logaritmo;

μ o valor esperado dos montantes de sinistros ajustados pelo logaritmo;

α_i o efeito do i-ésimo mês;

β_{ij} o efeito do j-ésimo período de atraso referente ao i-ésimo mês.

Na próxima seção será demonstrado como os métodos dos limites e o bayesiano, utilizam os modelos vistos acima, para determinar a provisão total de IBNR.

5.3 Métodos Estatísticos

Nesta seção serão apresentado dois métodos estatísticos para calcular a provisão total de IBNR, o primeiro baseado nos limites para somas de variáveis aleatórias dependentes e o segundo utilizando a estatística bayesiana.

5.3.1 Limites para Provisão Total de IBNR

Esta subseção utiliza-se dos conceitos dos limites inferiores e superiores, para calcular as proviões de sinistros ocorridos mas não avisados (IBNR), uma vez que estas, como citado, são somas de variáveis aleatórias dependentes e, portanto, não se consegue determinar a sua exata função distribuição.

Na subseção 5.2.1, definiu-se o valor presente da provisão total de IBNR por:

$$S = \sum_{i=2}^{t} \sum_{j=t+2-i}^{t} e^{(\mathbf{B}\hat{\beta})_{ij} - \gamma(i+j-t-1) + \varepsilon_{ij}}.$$

Utilizando as variáveis aleatórias V_{ij} e W_{ij} definidas por:

$$W_{ij} = (\mathbf{B}\hat{\beta})_{ij} - \gamma(i+j-t-1) + \varepsilon_{ij} \quad e \quad V_{ij} = e^{W_{ij}}.$$

E uma variável aleatória condicional, Λ, com distribuição normal definida por:

$$\Lambda = \sum_{i=2}^{t} \sum_{j=t+2-i}^{t} \nu_{ij}\gamma_{i+j-t-1}, \tag{5.7}$$

onde

$$\nu_{ij} = \sum_{k=i+1}^{t} \sum_{l=t+2-i}^{t} exp((\mathbf{B}\beta)_{kl} - (k+l-t-1)(\mu + \frac{\delta^2}{2})) + \sum_{l=j}^{t} exp((\mathbf{B}\beta)_{il} - (i+l-t-1)(\mu + \frac{\delta^2}{2})).$$

Esta variável aleatória Λ, como explicado em (Kaas, Dhaene, & Goovaerts, 2000) é uma transformação linear aproximada de primeira ordem de

$$\tilde{S} = \sum_{i=2}^{t} \sum_{j=t+2-i}^{t} exp((\mathbf{B}\beta)_{ij} - \gamma(i+j-t-1)).$$

Logo, (W_{ij}, Λ) tem uma distribuição bivariada normal. Condicionando W_{ij}, dado $\Lambda = \lambda$, obtem-se uma distribuição normal univariada com média e variância dadas por:

$$E[W_{ij}|\Lambda = \lambda] = E[W_{ij}] + \rho_{ij} \frac{\sigma_{W_{ij}}}{\sigma_\Lambda} (\lambda - E[\lambda])$$

e

$$Var[W_{ij}|\Lambda = \lambda] = \sigma^2_{W_{ij}}(1 - \rho^2_{ij}).$$

Com isso, pode-se definir os limites da seguinte forma:

- S o valor presente da provisão total de IBNR

$$S = \sum_{i=2}^{t} \sum_{j=t+2-i}^{t} exp(W_{ij} + \varepsilon_{ij}); \tag{5.8}$$

- S^l limite inferior do valor presente da provisão total de IBNR

$$S^l = \sum_{i=2}^{t} \sum_{j=t+2-i}^{t} exp(E[W_{ij}] + \rho_{ij}\sigma_{W_{ij}}\Phi^{-1}(U) + \frac{1}{2}(1 - \rho^2_{ij})\sigma^2_{W_{ij}} + \frac{1}{2}\sigma^2_{\varepsilon_{ij}}); \tag{5.9}$$

- S^u limite superior melhorado do valor presente da provisão total de IBNR

$$S^u = \sum_{i=2}^{t} \sum_{j=t+2-i}^{t} exp(E[W_{ij}] + \rho_{ij}\sigma_{W_{ij}}\Phi^{-1}(U) + \sqrt{1 - \rho^2_{ij}}\sigma_{W_{ij}}\Phi^{-1}(V) + \sigma_{\varepsilon_{ij}}\Phi^{-1}(W)); \tag{5.10}$$

- S^c limite superior do valor presente da provisão total de IBNR

$$S^c = \sum_{i=2}^{t} \sum_{j=t+2-i}^{t} exp(E[W_{ij}] + \sigma_{W_{ij}}\Phi^{-1}(U) + \sigma_{\varepsilon_{ij}}\Phi^{-1}(V)), \tag{5.11}$$

onde $U, V e W$ são variáveis aleatórias independentes com distribuição $Unif(0,1)$ e Φ é a função distribuição acumulada da normal padrão.

Para uma abordagem mais ampla ver (Hoedemakers, Beirlant, Goovaerst, & Dhaene, 2003).

5.3.2 Método Bayesiano

Antes do desenvolvimento da estatística bayesiana, existia o paradigma que não era admitida nenhuma forma de informação que não fosse observável.

Com o desenvolvimento da estatística bayesiana, criou-se um novo ponto de vista, onde toda informação que se tem sobre o problema é representada pelo parâmetro θ. O verdadeiro valor de θ é desconhecido e a idéia é tentar reduzir este desconhecimento. Segundo (DeGroot, 1986) a intensidade da incerteza a respeito de θ pode assumir diferentes graus. Neste contexto, é natural que diferentes pesquisadores possam ter diferentes graus de incerteza sobre θ, estes graus de incerteza são representados através de modelos probabilísticos para θ. Sendo assim, não existe nenhuma distinção entre quantidades observáveis e os parâmetros de um modelo estatístico, todos são considerados quantidades aleatórias.

Portanto, a estatística bayesiana surgiu como contraponto ao paradigma, haja vista postular ser possível e até recomendável que o conhecimento prévio a respeito do problema investigado deveria ser incorporado à análise. O mecanismo que propiciou o desenvolvimento desse procedimento foi o teorema de Bayes.

Assim como a estatística clássica, a estatística bayesiana trabalha na presença de observações $\mathbf{Y}$, cujos valores são descritos através de uma distribuição de probabilidade com densidade ou função de probabilidade $p(\mathbf{Y}|\theta)$. Para um valor fixo de $\mathbf{Y}$, tem-se que $p(\mathbf{Y}|\theta)$ fornece a plausibilidade ou a verossimilhança de cada um dos possíveis valores de θ. Logo, $p(\mathbf{Y}|\theta)$ é conhecida como função de verossimilhança.

Como já foi dito anteriormente, uma diferença em utilizar a estatística bayesiana se deve ao fato de levar em consideração as informações iniciais sobre o parâmetro θ de interesse. Estas informações iniciais sobre θ são chamada de distribuição a priori, $p(\theta)$.

Combinando as informações iniciais (distribuição a priori) com as observações (função de verossimilhança), obtém-se um novo conjunto de informações, esta denominada como distribuição a posteriori de θ.

Consegue-se, portanto, uma regra de atualização de probabilidades, começando com a priori $p(\theta)$ e terminando com a posteriori de $p(\theta|\mathbf{Y})$, que pode ser obtida via teorema

de Bayes da seguinte forma:

$$p(\theta|\mathbf{Y}) = \frac{p(\mathbf{Y}|\theta) * p(\theta)}{p(\mathbf{Y})}$$

Note que, $p(\mathbf{Y})$ não depende de θ e, portanto, pode ser considerada constante normalizadora de $p(\theta|\mathbf{Y})$. Desta maneira pode-se escrever o teorema de Bayes, em sua forma mais usual:

$$p(\theta|\mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y}|\theta) * p(\theta),$$

ou seja, distribuição posteriori é proporcional a função de verossimilhança vezes a distribuição a priori de θ.

Ao omitir o termo $p(\mathbf{Y})$, a igualdade do teorema de Bayes foi substituída por uma proporcionalidade. A constante normalizadora da posteriori pode ser facilmente recuperada pois,

$$p(\theta|\mathbf{Y}) = k * p(\mathbf{Y}|\theta) * p(\theta)$$

onde

$$k^{-1} = p(\mathbf{Y}) = \int_{\Theta} p(\mathbf{Y}|\theta) * p(\theta) d\theta = E_{\Theta}[p(\mathbf{Y}|\theta)],$$

é chamada de distribuição preditiva de $\mathbf{Y}$. Esta é a distribuição de probabilidade esperada para observação $\mathbf{Y}$ dado θ.

Se, após observar a amostra $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$, se esteja interessado na previsão de uma observação futura $\mathbf{X}$, também relacionada com θ e independente de $\mathbf{Y}$, descrita probabilísticamente por $p(\mathbf{X}|\theta)$, então segundo (H. S. Migon & Gamerman, 1999):

$$p(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \int_{\Theta} p(\mathbf{X}, \theta|\mathbf{Y}) d\theta = \int_{\Theta} p(\mathbf{X}|\theta, \mathbf{Y}) * p(\theta|\mathbf{Y}) d\theta = \int_{\Theta} p(\mathbf{X}|\theta) * p(\theta|\mathbf{Y}) d\theta = E_{\theta|\mathbf{Y}}[p(\mathbf{X}|\theta)]$$

Portanto, pode-se construir uma distribuição preditiva para uma observação futura $\mathbf{X}$ integrando sobre uma distribuição posteriori para quantidade desconhecida θ, denotada por $p(\theta|\mathbf{Y})$, em todos os possíveis valores de θ, pois a integral acima tem como domínio todo o espaço amostral Θ.

No caso da provisão total de IBNR, utiliza-se os dados Y_{ij} do triângulo superior ($i = 1, ..., t$ e $j = 1, ..., t - i + 1$), para prever os Y_{ij} do triângulo inferior ($i = 2, ..., t$ e $j = t + 2 - i, ..., t$).

Um dos motivos do desenvolvimento da estatística bayesiana ter ocorrido apenas recentemente, se deve a dificuldade em obter soluções para as integrais apresentadas acima. Apenas nos casos em que as distribuições fazem parte de uma família de distribuições conjugadas verificam-se resultados imediatos. Em grande parte das situações, as soluções são derivadas a partir de técnicas de simulação estocástica baseadas em Cadeias de Markov (MCMC).

A idéia central por trás do método de *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) é construir uma cadeia de Markov que seja fácil de simular e que tenha uma distribuição de equilíbrio dada pela distribuição de probabilidade de interesse.

Há diversas formas de gerar essas cadeias, uma delas é o método do Amostrador de *Gibbs*. Ele é um algoritmo iterativo de amostragem de uma cadeia de Markov cujo núcleo de transição é formado pelas distribuições condicionais completas, ou seja, esse algoritmo é baseado em sucessivas gerações de distribuições cuja posteriori condicional completa pertencem à mesma família de distribuição.

Um problema das aplicações de MCMC é asssegurar a convergência das cadeias de Markov. Para verificar a convergência será utilizado o software estatístico *Winbugs* (*Bayes Using Gibbs Sampler*), este possui técnicas para testar a convergência.

5.4 Ilustração Numérica

Nesta seção apresenta-se um ilustração do cálculo da provisão total de IBNR, aplicando os dois métodos vistos na seção 5.3. Primeiramente, ilustra-se o método dos limites no modelo 1, afim de determinar os limites inferior e superior para o total da provisão. Depois utiliza-se a estatística bayesiana nos modelos 2 e 3 para determinar o total da provisão. Por fim, será realizado uma comparação entre os modelos 2 e 3.

Utilizar-se-á o triângulo de *Run-off* proposto em (Hoedemakers et al., 2003) como base de dados nesta ilustração, ver tabela (5.2).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	363346	492947	322511	236555	249319	151228	138373	95703	71742	53788	35997
2	397798	543864	358855	263325	276817	167045	153095	106272	78515	58790	
3	806154	1096841	727977	530683	557870	336716	310022	213706	157504		
4	727102	995988	654059	476665	502405	303132	278280	192436			
5	659846	900386	591633	433425	457482	276056	253301				
6	541187	736205	487730	353255	373921	226091					
7	979636	1342832	882924	651920	682307						
8	890641	1219406	798007	582415							
9	486340	666405	442457								
10	445174	604206									
11	1084253										

Tabela 5.2: Triângulo de *Run-off* dos montantes de sinistros não acumulados.

5.4.1 Modelo 1 (Limites para Provisão de IBNR)

Como proposto em (Hoedemakers et al., 2003), assuma que as variáveis aleatórias (fatores de descontos) $\gamma_i \sim N(\mu + \frac{1}{2}\delta^2, \delta^2)$ com $\mu = 0,08$ e $\delta = 0,11$ sejam independentes e identicamente distribuídas. A variável aleatória condicional Λ é definida por (5.7).

Utilizando os dados do triângulo da tabela 5.2 e o estimador de máxima verossimilhança, estima-se os parâmetros do modelo, ver a tabela 5.3. Um parâmetro, por exemplo β_1, deve ser igual a zero, afim de obter uma matriz de regressão não singular.

Como realizado na seção 4.2, serão comparados os limites inferior (S^l) e superior (S^c) com a distribuição empírica de (S) gerada por 100.000 valores aleatórios.

Na figura 5.1 percebe-se que a função de distribuição acumulada de S^l é muito próxima da função de distribuição acumulada de S, o que já não ocorre com a função de distribuição acumulada de S^c. Isso deve ao fato da correlação entre as componentes da matrix $\mathbf{X}$ não serem muito próximas da correlação de suas funções de distribições inversas.

A figura 5.2 considera o qq-plot dos quantis dos limites inferior (S^l) e superior (S^c) em relação ao quantil de (S), o que confirma a afirmação anterior, que S^l esta muito próximo de S e que S^c não é uma boa aproximação. Na tabela 5.4 tem-se valores numéricos de

Parâmetro	Valor	Estimativa	Erro padrão
α_1	12,8	12,7976	0,0018
α_2	12,9	12,8968	0,0018
α_3	13,6	13,5994	0,0018
α_4	13,5	13,4957	0,0019
α_5	13,4	13,3996	0,0019
α_6	13,2	13,1997	0,0020
α_7	13,8	13,7999	0,0021
α_8	13,7	13,6983	0,0023
α_9	13,1	13,0999	0,0025
α_{10}	13,0	13,0035	0,0029
α_{11}	13,9	13,8964	0,0039
β_2	0,31	0,3109	0,0018
β_3	-0,11	-0,1060	0,0018
β_4	-0,42	-0,4198	0,0019
β_5	-0,37	-0,3677	0,0020
β_6	-0,87	-0,8717	0,0021
β_7	-0,96	-0,9579	0,0022
β_8	-1,33	-1,3267	0,0024
β_9	-1,63	-1,6249	0,0027
β_{10}	-1,92	-1,9100	0,0032
β_{11}	-2,31	-2,3064	0,0043
σ	0,004	0,0039	

Tabela 5.3: Especificações do modelo, estimador de máxima verossimilhança e erro padrão, ($\beta_1 = 0$).

alguns quantis.

Portanto, o limite inferior (S^l), como esperado (pela escolha de Λ) é uma boa aproximação de S, já para o limite superior (S^c) não se pode afirmar isso, uma vez que seus valores são um pouco distantes dos valores de S. Porém, os limites ajudam a determinar um intervalo para S. Pois, como se sabe:

$$S^l \leq_{cx} S \leq_{cx} S^c.$$

Nas subseções seguintes, serão previstos os valores da provisão total de IBNR (S), dos

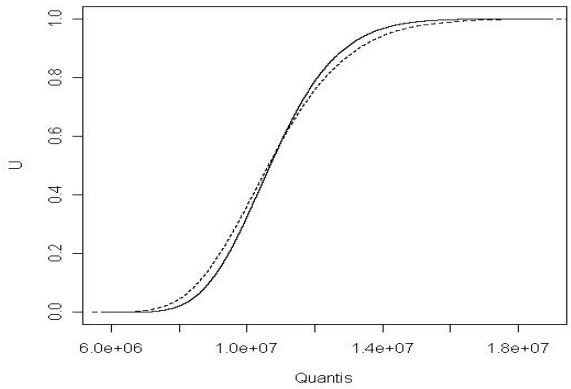


Figura 5.1: Funções distribuições acumuladas de S(linha), S^l(linha) e S^c (pontilhado)

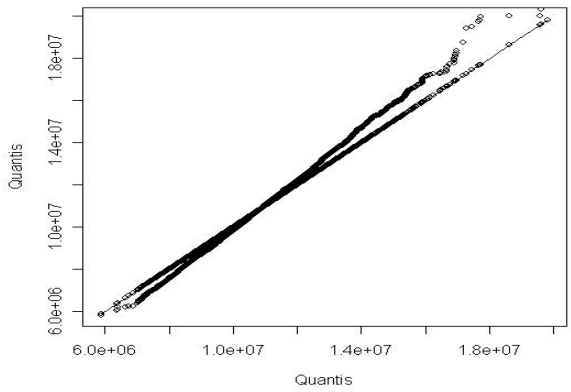


Figura 5.2: QQ-plot dos quantis de S^l (bola) e S^c (quadrado) em relação a S.

Probab.	$F_{S^l}^{-1}(p)$	$F_S^{-1}(p)$	$F_{S^c}^{-1}(p)$
0,95	13.639	13.796	14.263
0,975	14.303	14.437	15.077
0,99	15.122	15.171	16.182
0,995	15.709	15.730	16.963
0,999	17.003	17.009	18.585

Tabela 5.4: Valores dos quantis de S, S^l e S^c (deve-se multiplicar por 10^3).

montantes por ano de origem (W) e os gastos no ano corrente (H) utilizando a estatística bayesiana para os modelos 2 e 3.

5.4.2 Modelo 2 (Estatística Bayesiana)

Nesta subseção será ilustrado o modelo 2 proposto por (Ntzoufras & Dellaportas, 2002), para determinar a provisão total de IBNR. Para realizar esta ilustração, utilizou-se o software estatístico *Winbugs*, pois como mencionado anteriormente este possui ferramentas (técnicas) para testar a convergência das cadeias de Markov. As inferências são baseadas em um aquecimento de 20.000 iterações, seguido de um processo de 100.000 iterações.

Primeiramente, pode-se observar na tabela 5.5 que α e β tem em média os valores de [-0,5557; 0,543] e [-1,435; 1,182], respectivamente. É interessante notar que, como se trata das médias das distribuições para cada parâmetro, tem-se estimadores de bayes por perda quadrática. Caso deseja-se um estimador por perda absoluta, bastaria utilizar a mediana. A tabela 5.5 também fornece o desvio-padrão da estimativa (sd) e o erro para a média estimada via MCMC (MCerror). Os valores $2,5\%$ e $97,5\%$ nada mais são do que os limites inferiores e superiores para o intervalo de credibilidade de 95%.

As duas tabelas seguintes 5.6 e 5.7, apresentam estimativas das somas mencionadas na seção 5.1, W_i e H_k, ou seja, os montantes por ano de origem e os gastos nos anos correntes.

Na tabela 5.8, encontra-se os valores estimados para a provisão total de IBNR. Onde a convergência da cadeia de Markov pode ser verificada na figura 5.3, estes devem ser aleatórios, isto é, não devem ficar "preso"em nenhuma área ao longo das iterações. Na figura 5.4 é apresentado o histograma da provisão.

Na tabela 5.9 encontra-se previsões dos montantes de sinistros.

5.4.3 Modelo 3 (Estatística Bayesiana)

Nesta subseção mais uma vez utilizou-se o software estatístico *Winbugs*, para auxiliar no cálculo da provisão total de IBNR. Como mencionado antes, a principal diferença

variável	média	sd	MCerror	$2,5\%$	mediana	$97,5\%$
$\alpha[1]$	-0,5557	0,002755	1,48E-5	-0,5612	-0,5557	-0,5503
$\alpha[2]$	-0,4565	0,002748	1,266E-5	-0,462	-0,4565	-0,4511
$\alpha[3]$	0,2461	0,00281	1,121E-5	0,2406	0,2461	0,2516
$\alpha[4]$	0,1424	0,002909	1,017E-5	0,1366	0,1424	0,1481
$\alpha[5]$	0,04622	0,003045	9,932E-6	0,04022	0,04622	0,05218
$\alpha[6]$	-0,1537	0,003237	1,035E-5	-0,16	-0,1537	-0,1473
$\alpha[7]$	0,4466	0,003492	1,16E-5	0,4398	0,4466	0,4535
$\alpha[8]$	0,345	0,003869	1,281E-5	0,3374	0,345	0,3526
$\alpha[9]$	-0,2535	0,004408	1,545E-5	-0,2622	-0,2535	-0,2448
$\alpha[10]$	-0,3498	0,005364	2,287E-5	-0,3604	-0,3498	-0,3392
$\alpha[11]$	0,543	0,007542	3,364E-5	0,5281	0,543	0,5578
$\beta[1]$	0,8709	0,002745	1,421E-5	0,8655	0,8709	0,8763
$\beta[2]$	1,182	0,002751	1,285E-5	1,176	1,182	1,187
$\beta[3]$	0,7649	0,002805	1,147E-5	0,7594	0,7649	0,7704
$\beta[4]$	0,4511	0,002922	1,042E-5	0,4454	0,4511	0,4569
$\beta[5]$	0,5033	0,003053	1,059E-5	0,4972	0,5033	0,5093
$\beta[6]$	-7,878E-4	0,003244	1,04E-5	-0,007174	-7,91E-4	0,0056
$\beta[7]$	-0,08697	0,003499	1,095E-5	-0,09389	-0,08697	-0,08007
$\beta[8]$	-0,4558	0,003865	1,227E-5	-0,4634	-0,4558	-0,4482
$\beta[9]$	-0,754	0,004418	1,537E-5	-0,7627	-0,754	-0,7453
$\beta[10]$	-1,039	0,00539	2,162E-5	-1,05	-1,039	-1,028
$\beta[11]$	-1,435	0,007554	3,363E-5	-1,45	-1,436	-1,421
μ	19.39	0.001696	1.18E-5	19.39	19.39	19.39
σ^2	6,275E-5	1,393E-5	6,154E-8	4,124E-5	6,084E-5	9,56E-5

Tabela 5.5: Estimativas para os parâmetros α, β, μ e σ^2 do modelo 2.

entre os modelos 2 e 3, é que as distribuições das prioris deixam de ser não informativas e passam a ter uma estrutura dinâmica, fazendo com que as mesmas evoluam com o decorrer do tempo.

Novamente, as inferências são baseadas em um aquecimento de 20.000 iterações seguido de um processo de 100.000 iterações.

Nas tabelas 5.10 e 5.11, encontra-se os valores dos montantes em cada ano de origem e os gastos nos anos correntes, respectivamente. Já se percebe um aumento destes quando

variável	média	sd	MCerror	$2,5\%$	mediana	$97,5\%$
$W[2]$	39,75	0,4661	0,001832	38,85	39,75	40,68
$W[3]$	199,6	1,611	0,006987	196,4	199,6	202,8
$W[4]$	323,0	2,146	0,008935	318,7	323,0	327,2
$W[5]$	468,4	2,788	0,01108	462,9	468,4	473,9
$W[6]$	590,8	3,359	0,01316	584,2	590,8	597,4
$W[7]$	1489,0	8,285	0,03315	1472,0	1489,0	1505,0
$W[8]$	1961,0	11,21	0,04514	1939,0	1961,0	1983,0
$W[9]$	1399,0	8,45	0,03531	1382,0	1399,0	1416,0
$W[10]$	1670,0	11,36	0,05316	1647,0	1670,0	1692,0
$W[11]$	5557,0	49,85	0,2262	5460,0	5557,0	5657,0

Tabela 5.6: Estimativas do modelo 2 para cada ano de origem (deve-se multiplicar o valor estimado por 10^3).

variável	média	sd	MCerror	$2,5\%$	mediana	$97,5\%$
$H[1]$	3912,0	19,7	0,0845	3874,0	3912,0	3951,0
$H[2]$	2816,0	13,71	0,06192	2789,0	2816,0	2844,0
$H[3]$	2103,0	10,51	0,05052	2083,0	2103,0	2124,0
$H[4]$	1700,0	10,12	0,04816	1680,0	1700,0	1720,0
$H[5]$	1128,0	6,583	0,0342	1115,0	1128,0	1141,0
$H[6]$	860,0	5,761	0,02989	848,7	859,9	871,3
$H[7]$	536,2	3,987	0,02026	528,4	536,2	544,1
$H[8]$	328,0	2,889	0,0145	322,3	327,9	333,7
$H[9]$	204,8	2,178	0,01074	200,6	204,8	209,1
$H[10]$	108,0	1,534	0,00718	105,0	108,0	111,1

Tabela 5.7: Estimativas do modelo 2 para os gastos dos anos correntes (deve-se multiplicar o valor estimado por 10^3).

comparado as tabelas 5.6 e 5.7, principalmente, em relação ao intervalo de credibilidade de 95%.

A tabela 5.12 apresenta os valores estimados para provisão total de IBNR, sendo a convergência das cadeias de Markov verificada na figura 5.5 e sua densidade (aproximada) pode ser vista na figura 5.6.

variável	média	sd	MCerror	$2,5\%$	mediana	$97,5\%$
IBNR	13700,0	57,41	0,3207	13580,0	13700,0	13810,0

Tabela 5.8: Estimativas do modelo 2 para o IBNR (deve-se multiplicar o valor estimado por 10^3).

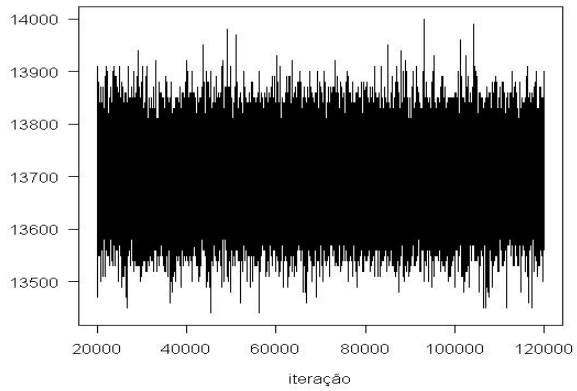


Figura 5.3: Gráfico entre o valor da provisão total de IBNR e o número de iterações (modelo 2).

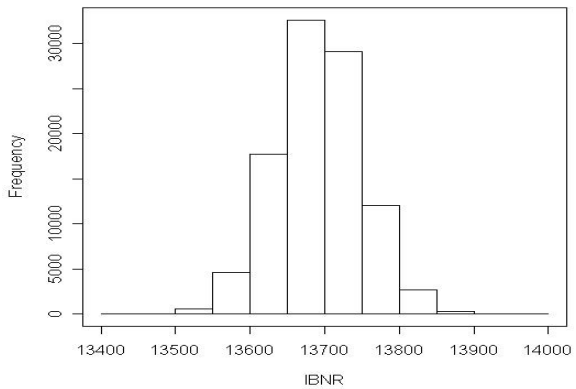


Figura 5.4: Histograma da provisão total de IBNR (modelo 2).

Por fim, tem-se na tabela 5.13 as previsões dos montantes de sinistros.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	361400	493100	325000	237500	250200	151100	138700	95890	71160	53510	36000
2	399000	544600	358900	262200	276300	166900	153100	105900	78580	59100	39750
3	805700	1099000	724600	529500	557800	337000	309100	213800	158700	119300	80260
4	726300	991200	653300	477300	502900	303800	278700	192700	143000	107600	72360
5	659700	900300	593400	433600	456800	275900	253100	175100	129900	97700	65720
6	540200	737200	485900	355000	374000	225900	207300	143300	106400	80000	53810
7	984600	1344000	885600	647100	681700	411800	377800	261300	193900	145800	98080
8	889500	1214000	800000	584500	615900	372000	341300	236000	175200	131700	88610
9	488900	667200	439700	321300	338500	204500	187600	129700	96280	72400	48700
10	444000	605900	399300	291800	307400	185700	170400	117800	87430	65750	44230
11	1084000	1480000	975200	712600	750700	453500	416000	287700	213500	160600	108000

Tabela 5.9: Montantes de sinistros previstos (modelo 2).

variável	média	sd	MCerror	$2,5\%$	mediana	$97,5\%$
$W[2]$	39.78	0.4978	0.002144	38.81	39.78	40.77
$W[3]$	199.6	1.714	0.00767	196.3	199.6	203.0
$W[4]$	323.0	2.31	0.01099	318.5	323.0	327.6
$W[5]$	468.5	3.028	0.01382	462.5	468.5	474.5
$W[6]$	590.9	3.663	0.01482	583.7	590.9	598.2
$W[7]$	1490.0	9.121	0.0383	1472.0	1490.0	1508.0
$W[8]$	1961.0	12.63	0.04935	1936.0	1961.0	1986.0
$W[9]$	1401.0	9.9	0.0327	1382.0	1401.0	1421.0
$W[10]$	1668.0	15.08	0.04873	1638.0	1668.0	1698.0
$W[11]$	5542.0	141.2	0.5194	5264.0	5541.0	5825.0

Tabela 5.10: Estimativas do modelo 3 para cada ano de origem (deve-se multiplicar o valor estimado por 10^3).

5.4.4 Comparando os Resultados

Observando a tabela 5.14, verifica-se os quantis obtidos dos três modelos, em relação as funções de distribuições dos limites inferior e superior. Na tabela 5.4 já havia sido apresentado esses quantis para os limites do modelo 1. Para se determinar os quantis referentes aos limites do modelo 2 e 3, utilizou-se a teoria vista no capítulo 4, para trazer

variável	média	sd	MCerror	$2,5\%$	mediana	$97,5\%$
$H[1]$	3909.0	41.36	0.1512	3828.0	3908.0	3991.0
$H[2]$	2814.0	28.01	0.09873	2759.0	2814.0	2870.0
$H[3]$	2102.0	20.93	0.07415	2061.0	2102.0	2144.0
$H[4]$	1698.0	21.22	0.07799	1657.0	1698.0	1740.0
$H[5]$	1127.0	13.23	0.04823	1102.0	1127.0	1154.0
$H[6]$	859.1	11.86	0.04318	835.9	859.0	882.8
$H[7]$	535.5	8.222	0.02976	519.5	535.4	552.0
$H[8]$	327.5	6.05	0.02218	315.7	327.4	339.6
$H[9]$	204.4	4.539	0.01669	195.5	204.3	213.4
$H[10]$	107.8	3.02	0.01095	101.9	107.7	113.8

Tabela 5.11: Estimativas do modelo 3 para os gastos dos anos correntes (deve-se multiplicar o valor estimado por 10^3).

variável	média	sd	MCerror	$2,5\%$	mediana	$97,5\%$
IBNR	13680.0	148.8	0.5451	13390.0	13680.0	13980.0

Tabela 5.12: Estimativas do modelo 3 para o IBNR (deve-se multiplicar o valor estimado por 10^3).

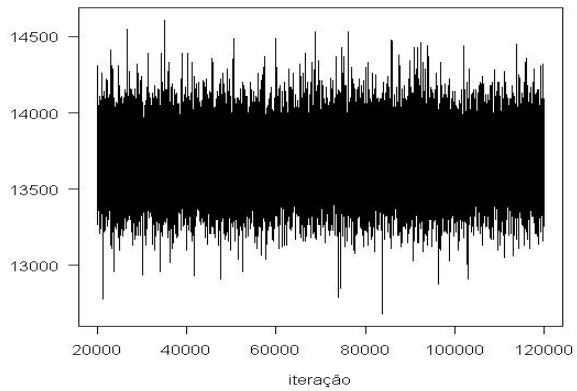


Figura 5.5: Gráfico entre o valor da provisão total de IBNR e o número de iterações (modelo 3).

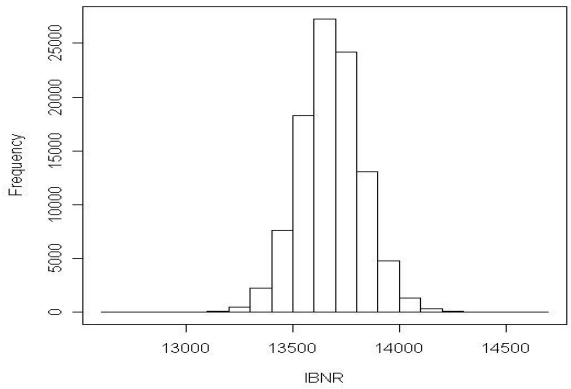


Figura 5.6: Histograma da provisão total de IBNR (modelo 3).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	362800	492800	324800	237300	250100	151100	138600	95850	71140	53500	36000
2	398600	544600	358900	262300	276300	166900	153200	105900	78610	59120	39780
3	806000	1099000	724400	529400	557700	337000	309100	213800	158700	119300	80300
4	726900	991000	653000	477200	502800	303800	278700	192700	143000	107600	72390
5	660200	900100	593200	433500	456700	275900	253200	175100	129900	97710	65750
6	540900	737000	485700	355000	374000	225900	207300	143300	106400	80000	53840
7	981100	1340000	886200	647600	682400	412200	378200	261500	194100	146000	98230
8	889300	1214000	79900	584600	615900	372100	341400	236100	175200	131800	88670
9	487400	668200	440400	321800	339000	204900	187900	130000	96450	72540	48810
10	444700	605100	398700	291400	307000	185500	170200	117700	87340	65680	44200
11	1084000	1475000	972300	710600	748600	452300	414900	287000	213000	160200	107800

Tabela 5.13: Montantes de sinistros previstos (modelo 3).

a valor presente os gastos dos anos correntes. Percebe-se que os três modelos apresentam valores próximos, sendo que o modelo 1 dispersa um pouco, a medida que os quantis vão aumentando. Isso se deve ao erro de estimação dos parâmetros.

De maneira a comparar os modelos 2 e 3 verifica-se nas figuras 5.7 e 5.8 os qq-plots desses modelos. Como somente foi obtido no modelo 1 os limites da distribuição do valor presente da provisão total do IBNR, ele não será comparado. Pelos gráficos os dois modelos são muito parecidos, ambos apresentam-se como boas escolhas para o cálculo da

Probabi-	modelo 1		modelo 2		modelo 3	
lidades	S^l	S^c	S^l	S^c	S^l	S^c
0,95	13.639	14.263	13.639	14.337	13.629	14.326
0,975	14.303	15.077	14.220	15.098	14.209	15.086
0,99	15.122	16.182	14.935	16.040	14.923	16.028
0,995	15.709	16.963	15.447	16.720	15.435	16.707
0,999	17.003	18.585	16.574	18.224	16.561	18.210

Tabela 5.14: Quantis dos limites inferior e superior dos modelos 1, 2 e 3 (deve-se multiplicar por 10^3).

provisão. Na tabela 5.15, apresenta-se os erros quadráticos médios dos dois modelos em cada ano origem e os seus totais. Logo, o modelo 3 foi o que apresentou melhor previsão.

Portanto, ao calcular a provisão total de IBNR, deve-se optar em utilizar o modelo 3 bem como a estatística Bayesiana, assim se tem aumento de informações (distribuição posteriori, distribuição preditiva, intervalo de credibilidade...) e uma diminuição de possíveis erros, podendo chegar muito próximo do valor real da provisão.

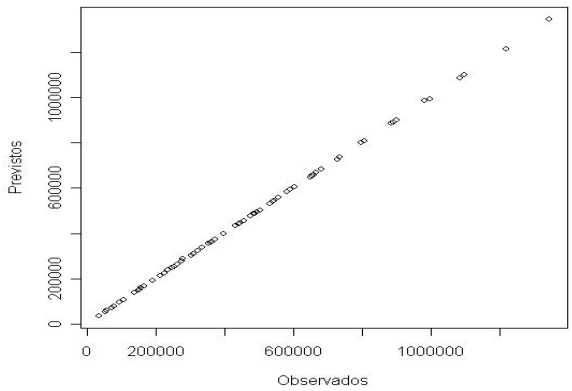


Figura 5.7: QQ-plot dos valores observados pelos previstos do modelo 2.

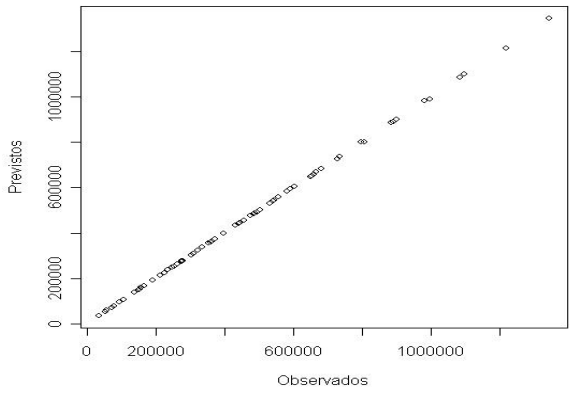


Figura 5.8: QQ-plot dos valores observados pelos previstos do modelo 3.

Ano de	EQM	
origem	modelo 2	modelo 3
1	185.590	109.987
2	57.291	42.321
3	303.726	899.590
4	1.727.952	411.773
5	56.235	50.216
6	127.285	120.046
7	860.111	549.193
8	588.576	596.679
9	224.041	129.953
10	64.362	15.514
11	970	970
Total	4.196.139	2.926.242

Tabela 5.15: Os erros quadráticos médios (EQM) dos modelos 2 e 3.

Capítulo 6

Considerações Finais

Nesta dissertação, se propôs demonstrar que ao utilizar os riscos financeiro e atuarial juntos, não se pode sempre assumir independência entre as variáveis aleatórias, como ainda é muito utilizado.

No Brasil, normalmente, utiliza-se o risco financeiro como sendo fixo, com isso, é até correto para uma grande parte das vezes, assumir a independência. Porém, desta maneira não se obtém a cobertura de todos os riscos envolvidos, apenas dos riscos bem comportados como foi visto.

Ao assumir ambos os riscos como sendo variáveis aleatórias, tem-se dependência entre as variáveis, principalmente as relacionadas aos riscos financeiros. O grande problema em utilizar esta hipótese, ocorre na determinação da distribuição conjunta dessas variáveis aleatórias dependentes. Em contrapartida, ao utilizá-la consegue-se cobrir todos os riscos envolvidos.

Dois métodos foram apresentados para solucionar o problema de determinar a distribuição conjunta de variáveis aleatórias dependentes, o primeiro utilizado por (Dhaene et al., 2002), onde se determina limites para o valor desejado e o segundo utilizando a estatíca bayesiana. Ressalta-se que existem outras abordagens para o método dos limites, como as propostas em (Frank, Nelsen, & Schweizer, 1987) e (Kreinovich & Ferson, 2007).

As maiores dificuldades para se utilizar o método dos limites proposta por (Dhaene et al., 2002), devem-se principalmente ao grande trabalho computacional, ao erro de estimação e o fato de que os limites podem apresentar um intervalo grande entre eles,

dificultando sua análise.

Quando se utiliza a estatística bayesiana, percebe-se facilmente a riqueza de informação alcançada. Primeiramente, não se tem estimativas pontuais e intervalo de confiança, mas sim a distribuição preditiva para a incerteza estudada. A facilidade computacional, utilizando *winbugs* confere-se facilmente a convergência da cadeia, dando assim, segurança ao resultado obtido.

Por fim, sugere-se que ao trabalhar com riscos financeiro e atuarial, assuma ambos estocásticos, tendo assim todos os riscos cobertos. E utilize da riqueza de informações e facilidades computacionais que a estatística bayesiana lhe oferece.

Como trabalhos futuros pode-se utilizar na aplicação da provisão total de IBNR, um modelo linear generalizado ou modelos que considerem o número de sinistros, tanto para o método dos limites quanto para a estatística Bayesiana.

Referências Bibliográficas

Alba, E. de. (2002). Bayesian estimation of outstanding claims reserves. *North American Actuarial Journal*(6(4)), 1-20.

Anjos, U. U., Ferreira, F. H., Kolev, N. V., & Mendes, B. V. M. (2004). *Modelando dependências via cópulas* (Tech. Rep.). XVI SINAPE, ABE-Asociação Brasileira de Estatística.

Bowers, N., Gerber, H., Hickman, J., Jones, D., & Nesbitt, C. (1997). *Actuarial mathematics.* Ed. The society of actuaries, United States of America.

DeGroot, H. (1986). *Probability and statistics.* Ed. Addison Wesley, Pittsburgh, Estados Unidos da América.

Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerst, M., Kaas, R., & Vyncke, D. (2002). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Aplications. *Insurance: Mathematics and Economics*(31(2)), 133-161.

Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerst, M., Kaas, R., & Vyncke, D. (2002). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Theory. *Insurance: Mathematics and Economics*(31(1)), 3-33.

Embrechts, P., Hoing, A., & Juri, A. (2003). Using copulae to bound the value-at-risk for functions of dependent risks. *Finance and Stochastics*(7), 146-167.

Embrechts, P., Klüppelberg, C., & Mikosch, T. (1997). *Modelling extremal events for insurance and finance.* Ed. Springer-Verlag, New York, Estados Unidos da América.

Embrechts, P., McNeil, A., & Strauman, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *In Risk Management: Value at Risk and Beyond*(ed. by M. Dempster and H.K. Moffatt), 176-223.

Embrechts, P., Resnick, S., & Samorodnitsky, G. (1998). Extreme value theory as a risk

management tool. *North American Actuarial Journal*(3(2)).

England, P., & Verrall, R. (2002). *Stochastic claims reserving in general insurance* (Tech. Rep.). Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries.

Ferreira, P. (2002). *Modelos de precificação e ruínas para seguros de curto prazo.* Ed. Funenseg-Fundação Escola Nacional de Seguros, Rio de Janeiro.

Frank, M., Nelsen, R., & Schweizer, B. (1987). Best-possible bounds for the distribution of a sum - a problem of kolmogorov. *Probability Theory and Related Fields*(74), 199-211.

Goovaerts, M. J., Dhaene, J., & Schepper, A. (1992). Stochastic upper bounds for present value functions. *Journal of Risk and Insurance Theory*(67(1)), 1-14.

Hoedemakers, T., Beirlant, J., Goovaerst, M., & Dhaene, J. (2003). Confidence bounds for discounted loss reserves. *Insurance: Mathematics and Economics*(33(2)), 297-316.

James, B. (2002). *Probabilidade:um curso em nível intermediário.* Ed. Projeto Euclides.

Kaas, R., Dhaene, J., & Goovaerts, M. (2000). Upper and lower bounds for sums of random variables. *Insurance: Mathematics and Economics*(27), 151-168.

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., & Denuit, M. (2001). *Modern actuarial risk theory.* Kluwer academic publishers, Dordrecht.

Kreinovich, V., & Ferson, S. (2007). *Computing best-possible bounds for the distribution of a sum of several variables is np-hard* (Tech. Rep.). University of Texas at El Paso, USA.

Lowe, J. (1994). *A practical guide to measuring reserve variability using: Bootstrapping, operational time and a distribution free approach* (Tech. Rep.). Proccedings of the 1994 General Insurance Convention, Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries.

Mendes, B. (2004). *Introdução à analise de eventos extremos.* E-papers Serviços Editoriais, Rio de Janeiro - Brasil.

Migon, H., Fonseca, T., & Lima, W. (2007). *Generalized dinamic basyean modelling of outstanding liabilities* (Tech. Rep.). IM-UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.

Migon, H. S., & Gamerman, D. (1999). *Statistical inference: an integrated approach.*

Arnold publishers.

Mikusinsky, P., Sherwood, H., & Taylor, M. (1992). The fréchet bounds revisited. *Real Analysis Exchange*(17), 759-764.

Nelsen, R. (1998). *An introdution to copulas.* Ed. Springer, New York, Estados Unidos da América.

Ntzoufras, L., & Dellaportas, P. (2002). Bayesian modelling of outstanding liabilities incorporating claim count uncertainty. *North American Actuarial Journal*(6(1)), 113-128.

Perrin, T. (2006). *Rentabilidade dos fundos de pensão* (Tech. Rep.). H R Services - Towers Perrin, Brasil.

R Development Core Team. (2005). *R: A language and environment for statistical computing.* Vienna, Austria. (ISBN 3-900051-07-0)

Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et marges. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*(8), 229-231.

Souza, R. M. (2003). *Cópulas: Algumas aplicações em finanças* (Tese de Mestre). IM-UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil.

Taylor, G. (2000). *Loss reserving: An actuarial perspective.* Kluwer academic publishers, Dordrecht.

Taylor, G., & Ashe, F. (1983). Second moments of estimates of outstanding claims. *Journal of Econometrics*(23), 37-61.

Verrall, R. J. (2004). A bayesian generalized linear model for the bornhuetter-ferguson method of claims reserving. *North American Actuarial Journal*(8(3)), 67-89.

Vyncke, D. (2003). *Comonotonicity: the perfect dependence* (Tese de Ph.D.). Katholieke Universitteit Leuven.

Wang, S., & Dhaene, J. (1998). Comonotonicity, correlation order and stop-loss premiums. *Insurance: Mathematics and Economics*(22), 235-243.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo