PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Sergio Antonio Wielewski

Pensamento instrumental e pensamento relacional na Educação Matemática

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC-SP

Sergio Antonio Wielewski

Pensamento instrumental e pensamento relacional na Educação Matemática

Tese apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação do Prof. Dr. Michael Friedrich Otte.

PUC

São Paulo

2008

Banca Examinadora

Prof. Dr. Michael F. Otte - Orientador
Pesquisador UFMT/Universitat der Bielefeld - Alemanha

Prof[a] Dr[a] Sonia Barbosa Camargo Igliori (PUC/SP) –
Co-orientadora

Prof[a] Dr[a] Circe Mary Silva da Silva Dynnikov (UFES)

Prof[a] Dr[a] Maria Cristina S. de A. Maranhão (PUC/SP))

Prof.Dr. Benedito Antonio da Silva (PUC/SP)

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial dessa Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________ **Local e Data:** ________________

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Orientador Dr. Michael F. Otte, pelos incontáveis momentos de orientações necessárias ao desenvolvimento dessa Tese de Doutorado, pela paciência, disponibilidade e, principalmente, pela oportunidade de crescimento intelectual e profissional.

Agradeço à professora Co-orientadora Drª Sonia Barbosa Camargo Igliori, da mesma forma, pelos incontáveis momentos de orientações, sua experiência profissional, apoio irrestrito e pelas inúmeras sugestões e orientações no desenvolvimento dessa Tese de Doutorado. E também pela oportunidade de realizar esse Doutorado na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, viabilizado pelo Convênio do Programa de Qualificação Institucional (PQI) da CAPES sob a Coordenação na Instituição Cooperante da Drª Sonia.

Agradeço aos membros da Banca Examinadora dessa Tese de Doutorado, que contribuíram de forma muito especial e qualitativa para o aprimoramento da mesma.

Agradeço à amiga e Profª Drª. Marta M Pontin Darsie, pelo enorme suporte dado à realização desse Doutorado, enquanto Coordenadora do Programa PQI na Instituição Cooperada, além do incentivo permanente, exemplo de garra e principalmente profissionalismo.

Agradeço a todos os professores da PUC–SP, pelos inúmeros conhecimentos, experiências e oportunidades de crescimento intelectual e profissional.

Agradeço às amizades estabelecidas nesse Curso de Doutorado que foi fundamental como apoio pessoal e intelectual.

Agradeço aos quatorzes Discentes e Professores que participaram da pesquisa exploratória, pela disponibilidade de tempo, paciência e grande contribuição, com informações que foram valiosas e muito interessantes para o desenvolvimento dessa Tese.

Agradeço a minha maravilhosa esposa Neiva, pela compreensão, paciência pelo suporte emocional, afetivo, a graça de me ter concedido dois filhos maravilhosos, Sergio e Ítalo, razão para continuar.

Agradeço a minha irmã Gladys, pelo suporte emocional e técnico, sobretudo, na organização e formatação final dessa Tese.

Agradeço a meus pais pelo apoio, dedicação e compreensão nos diversos momentos dessa trajetória, construída no decorrer do Curso de Doutorado.

Agradeço a todos os professores da UFMT, pelos inúmeros incentivos, compreensão, apoio moral e suporte profissional.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE QUADROS

RESUMO

Palavras–Chave: Epistemologia, História da Matemática, representação matemática, pensamento instrumental e relacional, complementaridade.

Nesta tese estão apresentados resultados de investigação teórica e empíricos. O alvo da pesquisa é identificação de características e análise das reflexões relativas a dualidades inerentes ao pensamento matemático. Tomou-se como pressuposto que o conhecimento de dualidades do pensamento matemático, e o como se utilizar desse conhecimento, se num sentido de complementaridade, seja relevante para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. A referência inicial do estudo foi a obra de Ernst Cassirer, *Substance and Function* (1910). Nessa obra é apresentado o desenvolvimento histórico da teoria do conceito de Aristóteles ao século XIX, isto é, desenvolvimento esse que vai das propriedades de substância à noção de função. Cassirer,como neo-kantiano, dá forte ênfase aos aspectos operativos e instrumentais do conceito. Na continuidade do estudo é destacado a fundamental importância de um conceito teórico ser compreendido nos termos de uma dualidade, em seus aspectos operativos e referencial. O trabalho didático de Richard Skemp é outro que explora dualidade semelhante. Trata-se da dualidade de aprender e de compreender, que Skemp chama de compreensão instrumental e relacional. Nossa investigação centra-se então na busca de conexão entre as concepções de Cassirer e Skemp. Para tal levamos em conta aspectos educacionais, reflexões filosóficas e pedagógicas, postura profissional do educador, exemplos de situações a-didáticas e didáticas. Esses aspectos, reflexões e exemplos nortearam a exploração empírica desta tese. Esta exploração teve o caráter de uma pesquisa qualitativa, tendo sido desenvolvidas atividades didáticas. O objetivo dessas atividades era avaliar a utilização pelos sujeitos do pensamente relacional e do pensamento instrumental.

ABSTRACT

Key Words: Epistemology, Mathematic History, mathematical thinking, problem solving and mathematical representation.

This doctoral thesis contains theoretical discussions as well as results of an empirical study. The general starting point has been the thesis that our mathematical thinking is largely ruled by certain dualities or complementarities of which that between the representational and instrumental aspects of concepts is best known. Ernst Cassirer, presents in his famous book “Substanzbegriff und Funktionsbegriff” (Substance and Function) of 1910 the general thesis that the historical development of science could be described as a transition from merely referential Aristotelian concepts to operative concepts or functions. The very same duality has been discussed widely in mathematics education starting from the work of Richard Skemp. Our first goal has consequently been to find connections between Cassirer and Skemp. The discussion of these connections and differences leads then in a second part of the thesis to a presentation of the results of an empirical case study with fourteen participants. These had been confronted with a number of problem situations and their problem solving activities have afterwards been analyzed in terms of the aforementioned complementarity between relational and operative thinking.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Tenta-se sempre imaginar como é de fato o trabalho de um matemático, qual seu perfil pessoal, profissional, qual seria sua aparência, sua estética, sua imagem idealizada. Um médico, 'enxergamos' todo de branco, com um estetoscópio ao pescoço... Conseguiría-se, de maneira análoga, idealizar essa imagem, sem vislumbrar o matemático como alguém atuando com uma régua e compasso nas mãos? No Brasil, nem é tão possível assim, pois o matemático Euclides, um dos mais conhecidos e respeitados geômetra da Grécia antiga e a quem se relaciona o intensivo uso desses instrumentos, não mais é dado o devido reconhecimento e referência como outrora.

Observa-se ainda que esse matemático a ser idealizado provavelmente não possuiria um laboratório como tem um físico ou químico, não faria vistorias um canteiro de obras como faz o engenheiro civil, não faria excursões exploratórias como um geólogo ou antropólogo etc. É comum, no entanto, associá-lo a um ser recluso, muitas vezes rotulado como um 'demonstrador de teoremas' que só se utiliza de razões lógicas, vive absorto e compenetrado, exilado numa escrevaninha, pensando em coisas abstratas e difíceis e, fundamentalmente alheio ao que passou, ao que se passa e ao que virá. Normalmente, os próprios matemáticos não fazem muita questão de desmistificar essa aparência. Reforçam essa idéia quando afirmam, sem justificar, que trabalham eventualmente com objetos que não existem no real, objetos que só existem nas idéias. Eles até afirmam que o pensamento matemático seja ‘a-modal’, ou seja, independente de qualquer modalidade de representar as idéias matemáticas e que as idéias matemáticas não deveriam de modo algum serem confundidas com suas representações simbólicas. Mas Euclides, é para nós um matemático exemplar, porque ele consegue deixar em evidência, que um dos papéis da Matemática consiste, essencialmente em construir representações diagramáticas e desenvolver experimentos com diagramas de qualquer espécie.

Por isso a complementaridade é tão essencial para conceber essa atividade Matemática. A complementaridade é também concebida em termos das noções duais de extensão e intensão de significados dos símbolos matemáticos. As extensões são os ‘objetos ideais’, mas o que tem mais importância na própria atividade Matemática são as intensões, ou seja, as características dos objetos matemáticos que aparecem em forma de diagramas. Em vários momentos representa-se a intensão (usando conteúdos matemáticos ou não) de conceitos de maneira visual por meio de matrizes, diagramas ou tabelas, esquemas etc, buscando compreender como ocorrem essas relações, sejam elas internamente ou de forma extensional (num contexto mais amplo). As intensões das expressões matemáticas se evidenciam nas deduções formais e nas operações envolvendo cálculos algébricos. As extensões dos termos matemáticos, por sua vez, são as interpretações e modelos das expressões matemáticas.

Essa complementaridade começava a ser melhor percebida com o desenvolvimento do pensamento relacional. Antes do século XIX, uma função matemática sempre foi identificada e interpretada como uma fórmula, ou seja, o aspecto intensional dominava. Com o problema da função contínua, percebeu-se que uma função é muito mais uma lei ou uma relação do que uma fórmula. Fórmulas são casos muito especiais de funções contínuas.

Dessa forma, pretende-se, por meio desta pesquisa, buscar fundamentações e entendimentos, principalmente nos aspectos teóricos, com o propósito de levantar questões que referem-se aos estilos de pensamento ou formas de compreensão, analisar algumas das dualidades existentes no ensino, principalmente da Matemática e suas relações com os pensamentos, buscar a importância, a necessidade de entender, explorar e aplicar o conceito de Complementaridade como um agente unificador da ação pedagógica e das posturas nas questões não só educacionais. Crê-se que considerar esses aspectos seja essencial para auxiliar o entendimento do desenvolvimento cognitivo e epistemológico e que, ao mesmo tempo, fornece uma base estrutural para compreender, históricamente e culturalmente os conceitos científicos.

As dualidades, provavelmente são tão antigas quanto o próprio homem e deve ser uma faculdade específica e primordial de seres pensantes. Não deve ser isso que nos garante a prerrogativa do livre-arbítrio? ou seja, capacidade de não deixar a vida condicionada ao instinto puro?

Crê-se que uma das primeiras dualidades identificadas refere-se à forma como o homem percebe o mundo. Otte (2007), comenta a respeito da visão que se tem de dois mundos distintos: o mundo contínuo e o mundo discreto. O mundo fenomenológico, da forma como ele se apresenta diante de nossos sentidos, é um mundo contínuo, em que tudo é relacional e relativo: não existe coisa pesada, amarga, doce, quente, no sentido estrito da palavra, mas tudo isso, só existe relativamente. Não existe distância grande, depende do contexto, por exemplo: 1000 km na superfície do planeta é uma distância grande, já no contexto do Sistema Solar ou da Via-Láctea não representa nada. Um sabor ou uma cor ou uma distância não são coisas estanques, todas são continuas; existem inúmeras intensidades de amargo — muito amargo, pouco amargo; muito doce, pouco doce, sem doce inclusive; para as cores se tem as nuances. São questões representadas pela Ciência Moderna por meio de relações, que por sua vez são dadas em termos numéricos, como será visto a seguir.

Então na área da Matemática Pura o pensamento relacional levou as tentativas de Bolzano, Dedekind e outros a aritmetizar o contínuo. A Geometria Analítica de Descartes foi o primeiro passo nessa direção.

Falando da Geometria: Comparando todos os círculos entre sí, ou mesmos todos os quadrados ou triângulos etc, na natureza ou mesmo na Matemática, têm a mesma forma e por isso são chamados semelhantes, se distinguem uns dos outros só gradualmente. Na época clássica, preocupava-se em detectar as semelhanças entre os objetos ou as coisas em sí, pois são elas que constituem as substâncias ou espécies, que por sua vez são os objetos da Ciência. Por isso a idéia de organização, comparação, catalogação foi muito forte e perdurou até a idade moderna, quando surgiram outras formas de indicar relações. Mas a Geometria de Euclides já ficou fora desse modelo, conhecido como aristotélico, porque o único lugar onde Euclides pensa, na Geometria, como uma Ciência aristotélica de relações e qualidades, é no livro V, que trata das proporções, quando ele usa, aí sim, uma estrutura com características do pensamento relacional.

Aristóteles, tendo em conta suas preferências pelas Ciências Naturais e Humanas, usava a Biologia e a Medicina como Ciências exemplares para estabelecer suas referências, e os organismos como objetos paradigmáticos, e não a Mecânica e as grandezas Físicas, como Descartes ou Newton. Só a partir da Revolução Científica é que se elevou o status da mecânica, para uma posição equivalente a de uma disciplina filosófica, com estruturação de observância de preceitos e normas. Isso não havia antes, na época da Ciência de Aristóteles.

> Otte (2007) comenta que, diferenças só existem e são percebíveis diretamente entre grandezas ou espécies diferentes, mas não entre objetos ou indivíduos da mesma espécie. Toda Ciência clássica no sentido de Aristóteles, se preocupava em classificar e organizar. Foi uma Ciência de espécies ou substâncias, e não de objetos individuais. Isso poderia valer até hoje. Mas a Ciência aristotélica sendo basicamente um resumo da experiência e do saber comum,

> não desenvolveu profundamente seus experimentos e que por isso, o problema de indução, ou seja, a questão da generalização, do particular para o geral, não existia até o século XVII, conforme indicado por Dear (2001).

Na Matemática, as variáveis foram consideradas objetos gerais e não lugares vazios —ex. letras— para coisas específicas —ex. números— (como são considerados desde a época de Frege).

Nessa época clássica da Ciência de Aristóteles, os números, usados como instrumentos de comparações, por sua vez, foram considerados em conjunto com as grandezas, que também foram caracterizadas somente em geral, como coisas que poderiam ser aumentadas ou diminuídas, como definia Euler em Otte (2007).

O mundo atual parece ser um mundo discreto, ou seja: a realidade está concebida com um conjunto de objetos distintos e isso daria aos números naturais um papel privilegiado. Como Dedekind sempre indicava que temos os números para distinguir mais nitidamente as coisas, então, as diferenças entre coisas existentes ou individuais são percebidas ou consideradas pela medição ou contagem, ou seja, pelo mundo distinto dos números.

Mas a própria área dos números é da mesma forma dividida; os números da medição representam relações: A=x.U em que A é uma grandeza U, a unidade da mesma espécie, e x um número que representa a relação entre A e U, ou seja, os objetos representados pelos números são relações, e não objetos. E os números são signos que representam essas relações.

Se se concentra no mundo discreto dos símbolos numéricos, pode-se facilmente esquecer o pensamento relacional, pois a medição como contagem de objetos distintos usa uma unidade 'natural'. Se quer saber quantas mangas há numa cesta, uma manga representa a unidade natural de 'medir' (ou seja, contar) essa quantidade.

Mas o fato de se conceber os números como representantes de relações, pergunta-se então: como identificar as relações? Na Matemática não existe uma coisa sem que se possa identificar. É preciso saber então quando duas relações A/B e C/D são iguais e por isso usa-se números novamente, números naturais evidenciando que essas proporções são iguais se para qualquer par de números (x,y) tiver simultaneamente que xA é maior, menor ou igual a yB e que xC é maior, menor ou igual a yD.

Toda proporção define um corte de Dedekind nos racionais porque, para todos esses números, temos que verificar se xB é menor ou igual a yA, ou não. Isso significa que os números naturais são dados pela contagem direta ou medição de conjuntos distintos e, os demais números poderiam ser construídos com essa base. A diferença entre a concepção de Eudoxus e Dedekind é só baseada no fato que Eudoxus assumiu a existência das proporções, ou seja, os números reais; enquanto Dedekind garantia a sua existência por meio da construção.

A redução dos números a somente meras marcas de contagem e o processo de construção dos demais números, ocorreu desde a época de Descartes. As semelhanças e distinções clássicas não tiveram mais validade. Mas, Otte (2007) destaca que esse ponto de vista de Descartes (e que prevaleceu até o fim do século XVIII), marcava, na mesma época, um progresso e simultaneamente, também um retrocesso;

O progresso se caracterizava pelo aspecto construtivo e operativo (ou dinâmico). Ele prevaleceu sobre o aspecto das semelhanças superficiais. Por exemplo a catenária, foi considerada, por Galileu, uma parábola — ambas figuras são bem semelhantes, de ponto de vista fenomenológico — até à época de Leibniz mostrou-se que elas possuiam fórmulas diferentes. Mas a diferença só é aparente do ponto de vista dinâmico (levando em conta a relação entre forças) e não de um ponto de vista cinemático.

Em vez de olhar somente na forma como se apresenta um determinado fenômeno, desde a época de Descartes e Leibniz se buscavam as leis que produziam tal fenômeno. O principio de continuidade foi para Descartes e Leibniz, uma maneira de produzir todos os fatores e elementos que obedecem à mesma lei, ou seja, que são produzidos da mesma maneira. A geração de algo, agora tinha importância, e não somente a sua aparência.

No final, os matemáticos chegaram à convicção de que só existe o que foi produzido pelo próprio matemático. Kant falava da construção dos conceitos matemáticos na intuição (Kant, 1787, B 742). Mas depois de Kant, o que foi de fato construído na Matemática foram os instrumentos cognitivos para as práticas da matemática. E podemos considerar que os instrumentos mais importantes para estabelecer distinções e desenvolver essa prática foram os números porque *são os conceitos que possibilitam a mais nítida definição das coisas*, como disse Dedekind.

Na perspectiva do retrocesso, Otte (2007) comenta o fato de que até o final do século XVIII, os números foram considerados representantes de grandezas, em vez de relações entre grandezas. A Geometria Analítica de Descartes considerava os números como marcadores de coisas ou pontos, em vez de representações de relações, e isto significa, como já se observou, um retrocesso, em comparação com a teoria de relações de Eudoxus, pois o empirismo permitiu que os números negativos, e ainda mais, os números irracionais e imaginários ficassem sem referência. Nas concepções modernas desde Bolzano e Frege, números, são considerados como características de conceitos e não de objetos. “O número não é abstraído das coisas do mesmo modo que o são a cor, o peso ou a dureza, ou seja, não é, no mesmo sentido em que essas são, uma propriedade das coisas” (Frege, 1903; 74); pois aquilo que representa um número, deveria ser algo sem outras características e, ainda se tem que entender qual o significado de zero ou o de 1, por exemplo.

Não existe objeto não-existente, mas temos conceitos vazios. Podemos afirmar que não existe unicórnio. Isso quer dizer que o número de objetos que pertence a extensão do conceito ‘unicórnio’ é zero (0). Mas ainda assim pode-se desenhá-lo. Então a condição de existência tem semelhanças com o número. Podemos, dessa forma dizer que a afirmação de existência nada mais é do que a negação do número zero. Nesse sentido, existência ou número são chamados conceitos de segunda ordem, ou seja, conceitos de conceitos.

Dessa forma, o pensamento relacional já existente voltou-se à Lógica e à Matemática, pois até então, era mais facilmente perceptível e presente nas outras Ciências.

Outro problema vivenciado no século XVIII, foi que estudiosos como Euler, não conseguiram definir a noção de função contínua, pois identificavam sempre as funções com fórmulas, instrumentalmente, ou seja: tomaram as funções exclusivamente em termos intensionais. A continuidade foi definida por Bolzano ou Cauchy em termos aritméticos, em termos de distâncias ou relações entre distâncias. Esse conceito só se aplica as extensões e não aos símbolos.

Uma função, considerada extensionalmente, ou seja, em termos da teoria de conjuntos, é uma classe de equivalência de fórmulas, e o axioma de extensionalidade serve como base da constituição de classe,

ou seja, ? ? ? se ? ? ??????? ????.

Mas os matemáticos não vêem utilidades para funções em sí, mas sim para as caracteristicas das funções, como por exemplo, a continuidade. Ou seja, encontramos de novo a complementaridade entre extensão e intensão.

Desde o início do século XIX, só o que era realmente definido tinha valor — Muitos professores ainda advertem seus alunos para usarem só as características dos conceitos que foram explicitamente incluídas na definição de um conceito; e não as que se referem às intuições ou experiências que tenham ou venham a ter.

Retorna-se então à distinção de Aristóteles, em que uma explicação teórica não reduz o novo ao já conhecido. Pode-se ter muitas idéias sobre continuidade. O que importa é a definição. Só conceitos podem ser definidos, objetos não, pois eles são caracterizados. Um conceito definido existe somente no âmbito de uma teoria e somente como parte dessa teoria. Os conceitos matemáticos de uma teoria formam uma rede ou estrutura. A função não é considerada um objeto isolado, mas sim como parte de uma teoria.

Assim, a Matemática se transforma numa Ciência de conceitos, ou numa Ciência conceitual. Por exemplo, para definir o que é uma função matemática, é preciso especificar e explicar quais são as condições para identificá-la. Karl Menger (1994), chamava uma definição desse estilo de uma *definição de definição*. Apresentam-se as características gerais de uma definição, sem classificar os objetos a que pertencem; um outro exemplo: tudo aquilo que obedece aos axiomas de Peano, deveria ser chamado de número natural, etc.

Mas a questão é que os matemáticos da época, tinham que usar suas intuições e experiências, mesmo sendo obrigados a eliminá-las posteriormente. Por exemplo: o teorema do valor médio é óbvio e convincente, mas para querer transformá-lo numa verdade teórica matemática, deveria ser apresentado uma prova que tornasse possível incluir esse teorema, numa teoria analítica, baseada nas definições Aritméticas. É o que o matemático pretende quando tenta construir uma prova (e a representação ou definição certa) para fazer essa inclusão. Incluir tudo numa teoria, essa era a tarefa.

A transição do mundo contínuo de Aristóteles ao mundo dos números de Descartes é identificado por M. Foucault (1995) no seu livro 'As Palavras e as Coisas', como uma transição do mundo da Interpretação ao mundo de Representação. Esse mundo da Interpretação girou em torno da similitude ou da semelhança: "Até o fim do século XVI, a semelhança desempenhou um papel de construtor do saber da cultura ocidental" (FOUCAULT, 1995, 33).

A função continua foi, sem dúvida, o instrumento matemático mais importante do século XIX, (ou pelo menos para a primeira metade desse século). Cauchy definiu a continuidade em termos da medição dos números e ele rejeitava o principio da continuidade aristotélico, como era entendido pelos estudiosos como Poncelet, Grassmann e Peirce. Em vez de se ater a formas gerais, o que importava eram de fato, os objetos distintos. Mas, muitas vezes precisava-se utilizar no processo de generalização, a continuidade das funções ou fórmulas envolvidas.

Outra linha de raciocínio, consiste em assumir que uma característica que se aplica a uma série convergente, de certos objetos matemáticos como funções, por exemplo, também se aplica ao limite dessa série. A idéia geral, e que se tem, ocorre da mesma forma na Matemática. É que ela procura se aproximar das coisas reais, de maneira semelhante, bem como procura representar, de forma aproximada, a realidade concreta. Em vez de um conhecimento absolutamente exato de uma realidade ideal, busca-se um conhecimento aproximadamente exato do mundo empírico real. Na verdade, co-existem na Matemática ambas atitudes, desde o século XIX, indica Otte (2007).

Uma dualidade apresentada por Kant (1994): são duas as fontes do nosso conhecimento: conceitos (atividades) e intuições (receptividade). A intuição tem o papel de fornecer objetos; o conceito, de construir relações entre objetos, mas a receptividade fica toda contida no relacional, e as ações necessitam ser desenvolvidas com objetos. Se sempre precisa-se de objetos, tudo isso passaria a ser discreto?

Mas temos um outro aspecto do relacional, é a própria relação com o mundo sensível, o contínuo do espaço, do tempo, dos fenômenos, de todas as formas de sensibilidades. Esses aspectos foram sempre enfatizados por Aristóteles. E na Geometria, como por exemplo, na Geometria Analítica, no sentido de Descartes, bem como em Euclides, tudo é desenvolvimento, tendo como suporte a atividade, a construção.

Em oposição, no caso da Geometria Projetiva em que tudo é transformação, continuidade. Temos que, ao realizar o manuseio do Cabri

Géomètre, com a possibilidade que ele oferece para manipular as figura e imediatamente perceber se a estrutura da figura se altera ou não, realiza-se de imediato, instantaneamente, essa verificação.

Outras dualidades são encontradas frequentes, principalmente no meio educacional. A álgebra é muitas vezes estigmatizada como a 'verdadeira Matemática' ou retratada como Matemática Pura, devido às simbologias e ao vocabulário. É julgada difícil e abstrata por muitos e aparece, em diversos casos, como a vilã do ensino da Matemática, provocando o desprazer da aprendizagem da mesma.

Desde o momento em que a Álgebra passou a fazer parte do currículo nacional, até a década de 1960, prevaleceu um ensino de caráter reprodutivo, sem clareza quanto às finalidades e necessidades, sendo tudo considerado essencial e que haveria utilidade, em algum momento da vida do indivíduo. A Matemática escolar apresentava-se dividida em compartimentos estanques aparecendo aí várias 'Matemáticas'. Primeiro estudava-se a Aritmética, depois a Álgebra, e em seguida, a Geometria. Nesse período, a Álgebra apresentava um caráter mais instrumental, importante para resolver equações e problemas, o que conduzia a uma aprendizagem mecânica.

Com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna, na década de 1960, cujo objetivo era a unificação dos três campos fundamentais da Matemática (Geometria, Aritmética e Álgebra) e a unificação da linguagem Matemática, a Álgebra passa a ocupar lugar de destaque no currículo. Seu ensino assume uma acentuada preocupação com os aspectos lógico-estruturais dos conteúdos e a precisão da linguagem. Em conseqüência, a Álgebra perde seu caráter pragmático, própria para resolver problemas. Porém, na década de 1970, o Movimento da Matemática Moderna entrou em declínio em todo o mundo, vindo a Álgebra a retornar ao seu papel de antes, ou seja: de um estudo introdutório à resolução de problemas. Tenta-se nessa época recuperar seu valor instrumental, mantendo seu caráter fundamentalista. Atualmente, a Álgebra ocupa boa parte dos livros didáticos, mas não tem recebido a devida atenção. Segundo Miorim, Miguel e Fiorentini (1993), a maioria dos professores ainda trabalha a Álgebra de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões. Na escola ela nem ao menos é percebida como a generalização das operações numéricas elementares, o que ajudaria muito os alunos na aprendizagem da Álgebra e na compreensão da estrutura lógica da própria Matemática.

A Matemática é diferente da maioria das outras Ciências como, por exemplo, a Biologia, a Física, a Química etc, no que se refere aos seus objetos de estudo. Na Matemática, não é possível identificar, de forma real e concreta, os objetos matemáticos, nem independentemente das atividades matemáticas do sujeito e de suas representações. Por isso os problemas matemáticos dependem tanto da perspectiva ou da maneira como são representados, quanto do assunto em si.

Não existe objeto matemático a menos que ele seja representado. Tem-se de um lado o sujeito, no aspecto psicológico, e do outro lado, o conhecimento matemático. A relação entre o sujeito e o conhecimento se dá por meio da representação. Pretende-se estudar como são construídas essas relações entre as formas de representação e estilos cognitivos/estilos de Matemática.

Deveria ser consenso o fato de que professores, sejam considerados, quase unanimemente, como elementos-chave do processo de ensino-aprendizagem Ponte, (1995) e eles, em geral têm três níveis de preocupações distintas, nesta mesma ordem de importância: com o conteúdo, com os alunos a que se destinam e com a forma como eles aprendem Matemática (NCTM, 1994, 29). Nesse universo, pela importância e pelas preocupações, e também levando em conta as dimensões que essas indagações assumem, serão tratadas apenas as questões relativas ao aprendizado. Surge, portanto, indagações sobre quais as crenças que os professores possuem acerca do conhecimento matemático, como foi que ele aprendeu e daí, como ensinar?

Na maioria das vezes quando o conhecimento é compreendido de forma relacional, consegue-se representá-lo de várias maneiras diferentes, usando-se para isso estruturas lógica, conceituais, algébricas, geométricas etc. Em cada uma delas, considerando suas particularidades e ferramentas disponíveis, tem-se a possibilidade de atingir situações de ensino com muita riqueza epistemológica. Porém, no decorrer do ensino formal, as experiências relacionais não são ainda suficientemente exploradas pelos alunos durante a realização de suas atividades de ensino.

As questões relativas com as formas de aprendizagem, surgiram a partir do momento em que a Psicologia começou a atuar de uma maneira mais significativa, em conjunto com a Matemática. Um dos pioneiros em Educação Matemática a fazer esse espécie de integração foi Richard R. Skemp (1989), que fez a distinção entre a compreensão 'instrumental' da compreensão 'relacional' em termos de Matemática, tendo em consideração a característica de conhecimento que cada uma reflete. Para ele, 'o conhecimento instrumental da Matemática' é constituído por um conjunto de indicações determinadas e bem definidas, numa sequência de passos a serem seguidos, que possibilitem a realização das tarefas matemáticas propostas. O 'conhecimento relacional da Matemática' caracteriza-se pela posse de um conjunto de estruturas conceituais que garante aos seus detentores a elaboração de vários planos com vista à realização das tarefas matemáticas. Nesta perspectiva, o aluno adquire conhecimentos que lhe possibilitarão adequar e resolver uma grande variedade de tarefas.

Porém, em relação à atitude do professor: se na condução do processo de ensino, ela for extremada em apenas uma única vertente de compreensão e ainda, se for desenvolvida de maneira deficiente, seja quanto ao próprio conteúdo, como objetivos e estratégias, será claramente fator de problemas quanto à aprendizagem em Matemática, podendo torná-la um corpo de conhecimento não muito popular junto aos alunos.

Nas salas de aulas, sob diversos contextos em que a educação formal é desenvolvida, poucos professores se preocupam ou mesmo foram preparados para compreender como a aquisição do conhecimento é processada e vivenciada pelos seus alunos. Uma boa parcela desses professores, tem a crença que, volume de informações, a reprodução de definições, modelos prontos, são suficientes para garantir um aprendizado efetivo. Uma das consequências é a tendência de sobrecarregar o aluno com quantidades de conteúdos, sem oferecer ao mesmo, processos diferenciados e ricos, metas claras que possibilitem de fato a compreensão do mesmo.

Para isso, uma fundamentação teórica consistente é imprescindível, destacar quais os personagens mais importantes da história antiga e recente, que contribuições realizaram e como interconectar esses conhecimentos e contribuições.

Além disso, considera-se muito importante identificar, adequar produzir e relatar atividades propostas que, obtidas por meio de investigações, procure explicar os seus condicionamentos (sejam eles técnicos, históricos, sociais, lógicos, matemáticos, ou lingüísticos), procure descobrir como sistematizar essas relações que envolvam o 'Instrumental' e o 'Relacional' nessas diversas concepções, esclarecer quais seus vínculos e/ou diferenças, identificar e propor situações, bem como avaliar resultados em que contextos matemáticos ou não sejam trabalhados nessas perspectivas. Desse modo, essa investigação tem como propósito responder a seguinte questão:

Como o uso dos pensamentos instrumental e relacional podem ser melhor compreendidos, se for evidenciada a interdependência, a dualidade e a complementaridade entre essas diferentes formas de pensamento e como essa complementaridade poderia ser importante e acessível ao processo educacional?

A metodologia do trabalho iniciou-se por buscar referências bibliográfica que clarificasse as noções e concepções de conceitos. Para isso principiou-se por investigar Aristóteles e alguns pensadores antigos, fundamentando-se em Kant na transição para os modernos e recorrendo a Cassirer, que procurou estabelecer uma base sólida para a idéia de conceitos.

Nesse levantamento histórico da noção de conceito, buscou-se resgatar inúmeras outras contribuições fornecidas por pensadores, filósofos e pesquisadores com a finalidade de estabelecer um fio condutor relativo a esse aspecto do conhecimento.

Considerando também que a expectativa desse trabalho estava impícito uma relação direta com Educação Matemática, ficou evidente a necessidade de investigar como conceitos pode apreendidos e compreendidos, conduzindo assim a pesquisa para o aspecto educacional. Desta feita as fontes apontavam para um dos pioneiros da relação entre psicologia e matemática, Richard Skemp. Inúmeros outros pesquisadores como Poincaré, Dieudonné, Otte, auxiliaram no estabelecimento desse outro fio condutor.

Em ambas linhas de investigação e estudo, identificou-se a presença de dualidades, que foram aparentes e continuam em muitos casos presentes e evidentes tanto no aspecto histórico como no aspecto educacional. No decorrer dos estudos percebemos que essas dualidades nem sempre se configuram rupturas, conflitos ou radicalismo de posturas, são quase sempre correntes de pensamento. Porém, se admitida sua existência, analisadas, utilizadas, defendidas e/ou baseadas somente num único aspecto, ou seja, se assumir ou tomar partido de um dos lados apenas, não permite grandes avanços na compreensão tanto nos aspectos educacionais ou evolução histórica do conhecimento. A riqueza se dá quando estabelecemos uma complementaridade entre essas dualidades, que inclusive nos garante mais fundamentos se houver necessidade de estabelecer uma interdependência entre elas.

A compreensão dsse fator facilitou a identificação da linha de conduta a ser considerada nas pesquisas, escolhas e adaptações das atividades a serem estruturadas para o desenvolvimento da pesquisa empírica

Para tanto, a metodologia aplicada na investigação empírica foi desenvolvida por meio da identificação e apresentação de contextos matemáticos, em uma pesquisa empírica, de caráter exploratória qualitativa, por meio de estudo de casos, analisando um conjunto de situações matematizadas organizadas, propostas e aplicadas para alunos universitários concluintes do Curso Graduação em Matemática, Alunos de Pós-Graduação em Matemática, Professores de Matemática do Ensino Básico e Professores de Matemática do Ensino Superior, esperando com isso obter uma análise sobre a facilidade de compreensão, num nível de expectativa tanto de aprendiz como o de um futuro professor.

Esse material de aplicação que, organizado e identificado como 'situações matematizadas', foram estruturadas de forma que possam resgatar um entendimento passível de justificação, permeando uma possível tranposição entre a forma de pensar relacionalmente, que pode ser inicialmente desencadeada partindo ou culminando de/em um pensamento instrumental. Essa atitude poderá conduzir ao estabelecimento de novas relações, produzindo novos instrumentos e assim por diante, numa concepção evolutiva.

A amostra de participantes da pesquisa não tem a pretensão de ser representativa, mas informativa. Por isso, foi considerado o interesse em participar das atividades propostas e estar disposto a interagir com o pesquisador, possibilitando assim a externalização, para fins de registro e análise, de seus processos de compreensão.

Neste trabalho, que faz parte de uma pesquisa inserida num contexto de Doutoramento em Educação Matemática pela PUC-São Paulo, pretende-se iniciar uma série de abordagens, tanto para questões atuais como visando pesquisas futuras, que aprofundem discussões e ampliem as percepções de como ocorre o pensamento numa atividade humana, seja ela num contexto educacional ou não.

No primeiro capítulo desse trabalho, duas questões são imediatamente abordadas: como se alcança o conhecimento objetivo? em que Cassirer (1953), propõe discutir as relações entre intuição e conceito. A segunda questão, como se alcança o sentido, a compreensão? Esse é o foco de preocupação de Skemp (1989). As questões mais relativas à aquisição do conceito são exploradas num subtópico denominado Cassirer e a idéia de conceito, em que sua principal fonte de apoio e influência fundamenta-se na comparação da idéias de Aristóteles e Kant (1997), contando também com a colaboração e experiência de Otte (1988, 1993).

A seguir é analisada parte da obra de Skemp (1989) em que ela torna-se referencial, principalmente na Inglaterra, usada para discutir sobre a formação de educadores, da forma como surge e procura analisar a dualidade entre compreensão instrumental e compreensão relacional. No último subtítulo desse capítulo foram analisadas as relações observadas entre Cassirer e Skemp e como essas duas visões preparam o campo para discutir aspectos da teoria da complementaridade a ser estudada e explorada principalmente no âmbito da Educação Matemática.

No decorrer do trabalho, percebe-se que existem dois meios de pensar relacionalmente, por isso tem-se que considerar verdadeiramente o relacional e o instrumental como uma complementaridade, e essa complementaridade não é a mesma apresentada com essa outra compreensão e aplicação indicada isoladamente por Skemp. Então, quando ao analisar o trabalho de Skemp (1989), irá se encontrar uma mistura de duas dualidades, bem como de duas complementaridades.

No segundo capítulo, tem-se como ponto de partida analisar questões referente ao sistema de ensino, dificuldades encontradas e quais dualidades interferem ou colaboram para a formação de um educador, que tem a pretensão de desenvolver suas atividades de ensino considerando essas premissa de pensamento, atitudes e posturas e preparar um caminho para analisar, discutir e buscar a complementaridade como estratégia de atuação profissional.

No terceiro capítulo, foi pretensão proporcionar uma coletânea de situações baseadas no cotidiano, com características não ‘educacionais’ ainda. Outras já foram adaptadas para um desenvolvimento didático-pedagógico e passíveis de serem propostas em atividades de ensino. Nos dois estilos de situações, procurou-se descrever, indicar e propor quando possível tanto atitudes instrumentais, relacionais e momentos de complemento entre elas.

O quarto e último capítulo apresentam os procedimentos metodológicos que nortearam a elaboração da pesquisa empírica, que foi realizada com discentes da Universidade Federal de Mato Grosso–UFMT e Professores da Rede de Ensino Pública do Estado de Mato Grosso, tendo ela um caráter exploratório e qualitativo. Inicialmente realiza a descrição dos participantes e o resultado obtido com o questionário de caracterização do perfil profissional dos mesmos. É apresentado também o roteiro com as situações matematizadas aplicadas e seus resultados incorporados com comentários, e sempre que possível, relacionando-os com a teoria apresentada nos capítulos iniciais. Por fim, as considerações finais retomaram as questões da nossa pesquisa e, ao respondê-las, apresentaram-se as conclusões da Tese. Indicou-se também ao final da mesma, algumas sugestões e indicações com a finalidade de estimular o desenvolvimento de futuras pesquisas.

.

CAPÍTULO 1

1.1. Duas perguntas e duas complementaridades: Buscando relações para o pensamento relacional

Algumas questões contextuais devem primeiramente ser apresentadas, com a intenção de melhor situar a idéia e o sentido do uso dos termos **pensamento relacional** e **pensamento instrumental**, como indicado no título desse trabalho.

As poucas noções que normalmente encontram-se sobre o que se pode entender por pensamento instrumental, têm sua raiz mais consolidada com o avanço histórico da modernidade e sobretudo com o desenvolvimento da ciência e da técnica, tornado possível pelas perspectivas metafísicas e metodológicas instituídas e fundamentadas no século XVII, principalmente pelos trabalhos de Galileu, Bacon e Descartes. Essa forma de pensamento - instrumental - sugere normalmente um conhecimento pronto e acabado, formado por regras práticas, mecânicas, fórmulas estanques, uma técnica propriamente dita, um aprendizado desenvolvido linearmente, um instrumento para uma finalidade específica, enfim, pronto para uso.

De maneira análoga, buscando indicativos para o significado de pensamento relacional em nossa literatura, encontra-se uma citação, ainda que um tanto complexa, nesse momento:

> o pensamento relacional refere-se a uma certa atitude de ultrapassagem, de enxergar aquilo que se encontra além do concreto pré-estabelecido, dessa forma, estabelecendo uma outra perspectiva e até mesmo uma nova postura crítica frente a realidade, que é relacional. É, acima de tudo, o rompimento com o pré-construído do senso comum. O resultado do pensamento relacional é a possibilidade de uma compreensão mais nítida das escolhas e recortes metodológicos, da formulação de conceitos constituintes do objeto de pesquisa, da seleção das questões a serem estudadas, além das demais construções simbólicas. (SOUZA e ALVARENGA NETO 2003; p. 1-2)

Outra citação encontrada, foi publicada em MEC (2001). O termo foi caracterizado como objetivo do trabalho sobre conteúdos matemáticos: o desenvolvimento do pensamento relacional. Ele foi definido como "a capacidade de estabelecer relações entre os conceitos básicos da Matemática e os de outras áreas do conhecimento". (MEC 2001, p. 25).

As ações a serem previstas nesse documento estavam assim descritas:

> esperamos que possam interpretar e analisar as informações quantitativas transmitidas por meio de representações numéricas e geométricas, bem como aquelas que se utilizam de gráficos e tabelas; que desenvolvam a capacidade de antecipar mentalmente processos, levantar hipóteses e testá-las, interpretar e resolver problemas, validando e estimando os resultados, além de construir uma linguagem matemática elementar. (MEC, 2001; p. 25).

O que se pretende destacar a partir de agora, é uma outra visão sobre pensamento relacional, que difere das apresentadas anteriormente até aqui. As raizes mais profundas dessa concepção de pensamento que serão abordadas no decorrer deste trabalho, como muitas delas, reportam a Aristóteles. Sabendo-se que ele foi um médico, biólogo, por isso, em contraste a Platão, ele queria dar ênfase ao mundo sensível, mas nesse mundo tudo é relativo e relacional.

Esse mesmo mundo também é, no entanto, contínuo, pois como por exemplo, em comparando-se cores: não existe unicamente o vermelho. Existe o vermelho em várias nuances. Da mesma maneira que não existe somente uma intensidade de amargo. Ao se comer um pedaço de chocolate e logo após ingerir, por exemplo, um gole de cerveja, que é amarga, esse 'amargo' se intensificará. Por outro lado, se comer algo salgado ou mesmo um pedaço de carne antes de ingerir o gole de cerveja, a cerveja irá se tornar bastante doce. Por incrível que pareça, tudo isso se relaciona. Nossos sentidos só percebem relações; contínuidade, nuances, contrastes, semelhanças etc.

Esta é uma das diversas dualidades que serão apresentadas e que fazem parte do mundo do conhecimento, particularmente da educação. Ela serviu como ponto de partida para o surgimento de questões bem mais complexas.

A partir de então, duas perguntas são feitas e que têm a ver com a linha de embasamento teórico a ser apresentada no decorrer do trabalho:

A primeira questão a ser levantada é: ***'como se alcança o conhecimento objetivo?'.*** Para responder a isso serão analisadas as idéias de Cassirer (1953) que, fundamentando-se em Kant (1787), procura indicar que é por meio do desenvolvimento de atividades que se obtém a resposta, **pois a natureza não irá 'contar' seus segredos**.

Para Kant (1787), o mundo sensível de Aristóteles é passivo e ambíguo: não conta segredos! Isto significa que toda continuidade é subjetiva e daqui surgem todas as dificuldades: ninguém pode esperar que um aluno, não tendo ele confiança, para agir num mundo que seja relacional e sensível, seria ele capaz, por outro lado, de conseguir construir relações teóricas? Ou dito de outro modo: quem não consegue perceber as relações numa determinada realidade, ainda assim, conseguiria teorizar? Não basta só descrever um fenômeno ou interpretá-lo em termos funcionais!

Dessa forma, tem-se que fazer experimentos, desenvolver ações, construções matemáticas, para entender o conceito de pensamento relacional em termos do construtivismo, pois Piaget sempre enfatizou que cada ação deve ser estruturada e de forma construtiva. Essa linha de raciocínio nos conduz a uma concepção de complementaridade, seja ela entre função e fórmula, entre intensão e extensão, relacional e instrumental, contínuo e discreto, etc.

Kant (1994), por sua vez, apresenta uma dualidade em dois pontos, ou seja, expontaneidade ou ação e sensibilidade ou receptividade. De acordo com ele, nossos conhecimentos 'emana de duas fontes': **conceitos** (atividades) e **intuições** (receptividade). Mas para ele, esses dois lados, têm o papel de fornecer objetos (intuição) e construir relações entre objetos (conceito), ou seja, a receptividade fica por conta das relações a serem feitas, mas quando se pensa, age-se e busca-se referências dessa ação, normalmente conectadas a certos objetos —que pode ser como medir, classificar— sempre precisa-se de objetos, ou seja, coisas distintas.

Então, do ponto de vista da ação, tudo passa a ser discreto; um conjunto de objetos, um ao lado do outro, sem relação alguma. Mesmo quando Piaget coloca que a Matemática deve ser baseada na abstração reflexiva, é exatamente porque ele indica que o mundo discreto não tem como estabelecer muitas relações, enquanto, por outro lado, pode-se conectar uma ação com outra, juntando-as e isso resultar numa terceira, elas podem ser movidas, transladadas. Mas as coisas em si não são ligadas umas com as outras. Por isso tem-se que ater à essa idéia de Kant. Piaget é um kantiano, como

Cassirer, ambos pensavam só nesse lado operativo, quando usavam o lado do pensamento relacional, porque a relação que existe é entre as atividades e não entre as coisas.

A segunda questão é: ***'como se alcança o sentido, a compreensão?'*** Se as relações são passíveis de serem construídas, como elas podem ser objetivamente mais reveladoras, mais aparentes, mais percebíveis? Como migrar de uma ação ou aplicação desenvolvida, para um estágio de compreensão efetiva? Essa é uma questão que preocupa e ocupa Skemp (1989). Qual a profundidade da relação entre o ato de compreender e o pensamento relacional? Por trás disso, tem-se o problema relativo não aos objetos do conhecimento, identificado como os 'o quê', mas com as explicações, que são denominadas os 'porquês', sendo as causas e motivos de divergências entre o pensamento de Aristóteles —que busca justificação para conhecimento do passado (o conhecido)— e os filósofos do mundo moderno —que conduzem a compreensão para a busca de aplicações do presente e do futuro. Assim, uma outra forma de concepção de complementaridade será necessário desenvolver: entre compreensão e aplicação.

As duas formas de complementaridades indicadas nas duas questões acima, serão posteriormente analisadas, em um tópico específico, na comparação das duas linhas de pensamento: entre Cassirer e Skemp. Porém, antes disso, será necessário conhecer, analisar e discutir primeiro individualmente essas duas vertentes de pensamento.

1.2. Ernst Cassirer e a idéia de Conceito

Desde o final do século XIX e inicio do século XX havia uma certa preocupação quanto a definição dos princípios básicos da estrutura de conceitos e como eles se comportam nas diversas áreas do conhecimento. É também nesse contexto, durante a revolução industrial, que ‘cientista’ se transforma numa profissão para um grande número de pessoas. Paralelamente, a educação de massa começa a depender de conhecimento científico. O conhecimento sobre a origem e o princípio do saber, assim como as metodologias, foram cada vez mais importantes na tentativa da consolidação do pensamento científico.

O que estava em constante ebulição e o que faltava definir ainda, eram as maneiras como tornar possível garantir as estruturas da lógica tradicional e responder até que ponto ela conseguia atender os preceitos que conduzem e aprofundam a teoria dos fundamentos da Matemática.

As Ciências estavam expandindo-se, rompendo os casulos de uma entidade mais global e geral; cada uma buscando criar suas raízes e estruturas em função de suas especificidades. Categorizando-se como Ciências Físicas, Biológicas, Matemáticas, Filosóficas, Econômicas, Políticas etc, inclusive abrindo-se para processos educacionais, psicológicos etc, pois com as mudanças nas relações de trabalho, de produções, de economia e principalmente pela aceleração e avanço da tecnologia, invenções, enfim, exigiam-se processos de formalização, consolidação de regras, normatizações que garantissem e dessem credibilidade, bem como legitimidade a esses novos processos.

Nesse contexto, alguns estudiosos da época preocuparam-se em desenvolver investigações tendo como ponto de partida e sendo impulsionados por estudos consagrados à Filosofia da Matemática, com uma imensa infuência principalmente na cultura filosófica alemã; tal influência se propaga entre os pensadores como Husserl, Hartmann e, em parte, mesmo a Heidegger que dão vida à linha de pensamentos inovadores. Mas é no trabalho de Ernst Cassirer que, ao estabelecer a ligação e avançar suas concepções com a formulação neocriticista, essa tendência tornou-se mais forte.

Cassirer, exponente do neokantismo, de origem judaica, nasceu em 18 de julho de 1874 em Breslau (hoje Wroclaw, Polônia). Doze anos após, sua familia mudou-se para Berlin e alí, ele começou seus estudos em legislação na Universidade de Berlin, em 1892, por influência paterna. Porém, ele logo optou pelo estudo de literatura alemã, aprofundando-se em história e mais propriamente história da arte, antes de finalmente se envolver com a filosofia. Isso fez com que mudasse de uma universidade para outra: de Berlin para Leipzig, passsando para Heidelberg e finalmente retornar a Berlin, quando ao participar nas conferências sobre Kant, organizadas por George Simmel, conheceu o trabalho de Herman Cohen, tornando-se, dessa forma, um dos seus alunos mais brilhantes, na Universidade de Marburg. Nessa mesma Universidade, Cassirer também estudou Matemática, Física e Biologia, sendo que seu conhecimento nessas áreas, basicamente foi o que mais contribuiu para o seu trabalho, no decorrer de sua vida.

Recebeu o título de Doutor em 1899, logo tornou-se Mestre de Conferências na Universidade de Berlin em 1906. Seu trabalho intitulado 'Das Erkenntnisproblem', ganhou de Kuno Fischer, a medalha de ouro da Heidelberg Academy, em 1914. Seu primeiro volume foi apresentado como a Habilitação para o cargo (*Privatdozentur*). Como atividade complementar para sua aceitação, foi requerido de Cassirer, como era habitual, realizar uma conferência pública. Embora a escolha inicial de Cassirer para que a mesma ocorresse em Berlin, tendo em vista o desejo de permanecer perto da sua família e amigos, essa não foi a melhor decisão.

Considerando sua origem judaica e pelo fato de ser conhecido como um dos melhores estudantes de Herman Cohen que também foi um renomado filósofo e estudioso da filosofia judaica, havia, nesse contexto, um grande antagonismo entre certos professores importantes na Universidade de Berlin. Entre esses antagonismos, havia o caso de Stumpf e Riehl contra Cohen, que consequentemente envolveria Cassirer. Dessa forma, eles, implacavelmente e dogmaticamente atacaram Cassirer e a sua 'concepção de Marburgian', usando para isso, uma terminologia conhecida como '*objeto em sí*' *(*Ding au sich), apelidando-a. Se não tivesse ocorrido a intervenção de Wilhelm

Dilthey, famoso historiador alemão, que tinha comparecido à conferência, Cassirer não teria recebido a aprovação necessária para se tornar um Privatdozentur. Dilthey argumentou durante a discussão dizendo: "Eu não gostaria de ser um homem de quem a posteridade dirá que rejeitou Cassirer" (GAWRONSKY, 1910; 17).

A relação entre a filosofia de Dilthey e de Cassirer não recebeu a atenção que merecia. Está claro que suas concepções de Ciências Humanas (*Geisteswissenschaften)* e os seus métodos de história estão relacionadas, mesmo existindo diferenças importantes entre os dois.

Posteriormente Cassirer tornou-se professor titular na Universidade de Hamburg em 1919. Durante o governo de Hitler, antes de ser demitido, atuou dois anos como cidadão alemão, na Universidade de Oxford, na Inglaterra. Teve que deixar a Alemanha devido sua ascendência judaica, tornando-se cidadão sueco e professor na Universidade de Göteborg. Em 1941, mudou-se para os Estados Unidos, atuando como professor na Universidade de Yale, permanecendo por dois anos, sem conseguir estender seu contrato por mais um ano. Em 1944, foi convidado para a Universidade de Columbia e no ano seguinte, estava programada a sua ida para a Universidade de Los Angeles, na Califórnia, porém, ocorreu seu falecimento, em 13 de abril de 1945.

Desde o início, o centro de interesse de Cassirer fica nitidamente dividido entre o conjunto das Ciências Matemática, Naturais e Humanas e o conjunto das Ciências Sociais e Culturais (Literatura, História e Artes). Ele considerou todas as formas de atividade intelectual criativa, destacando o ser humano como um animal símbolo-criador. O ser humano é o produto da nova mutação da vida. Ciências, linguagem, arte, religião, mitologia etc, são todos mundos sintéticos que neles se pode expressar a criatividade do espírito ou da própria mente.

Com isso se chega ao ponto cuja biografia de Cassirer interessa a esse trabalho: a conferência pública anteriormente citada tinha como tema o tópico '*Substanzbegriff und Funktionsbegriff* '[1]. Quatro anos após, em 1910, ele publica uma monografia completa envolvendo essa mesma temática. '**Substância e Função: elementos para uma teoria de conceito**' é o primeiro trabalho claramente sistemático de Cassirer e é o centro de toda compreensão de sua filosofia. É essa a obra aqui usada como referência, '**Substance and Function & Einstein's Theory of Relativity**', uma publicação traduzida do alemão para o inglês por Willian Curtis Swabey and Marie Collins Swabey, editada em 1953.

O corpo dessa publicação é constituída por 460 páginas, sendo mantido o prefácio, escrito pelo próprio Cassirer. Seus respectivos capítulos estão estruturados em dois grandes blocos, sendo o primeiro nomeado como 'CONCEITO DE OBJETO E CONCEITO DE RELAÇÃO'. Ele é formado pelos quatro primeiros capítulos, sendo o Capítulo 1: A teoria da conceitualização; Capítulo 2: Os conceitos relativos aos números; Capítulo 3: O conceito de espaço e a Geometria e Capítulo 4: A conceitualização nas Ciências e a natureza. Particularmente o capítulo 1 é a maior referência para esse trabalho.

O segundo bloco, é nomeado como 'O SISTEMA DE CONCEITOS DE RELAÇÃO E O PROBLEMA DA REALIDADE'. Ele contém os quatro últimos capítulos assim descritos: Capítulo 5: O problema da indução; Capítulo 6: O conceito de realidade; Capítulo 7: Subjetividade e objetividade dos conceitos de relação e por fim, Capítulo 8: Perspectiva para uma psicologia das relações.

O princípio apresentado em **Substance and Function & Einstein's Theory of Relativity** é a crítica a ser desenvolvida por Cassirer (1953), tendo por base a comparação e discussão sobre como Kant e Aristóteles tiveram noção de conceitos diferentes.

Inicialmente, Cassirer (1953) comenta a lógica aristotélica, considerando seus princípios gerais,

[1] conceito-substância e conceito-função.

> a lógica aristotélica, em seus princípios gerais, é uma expressão e um espelho verdadeiro da sua própria metafísica. Só com a conexão com as crenças que fundamentam essa metafísica é que ela pode ser compreendida em seus motivos particulares. CASSIRER (1953; p. 4).

É importante lembrar que, com essa lógica, conceitos servem somente para ajudar a classificar objetos, até então, levando em conta o fato de que Aristóteles tinha uma afinidade maior para com os assuntos relacionados com a Medicina e a Biologia de um modo em geral. Dessa forma, a maior parte de sua concepção tendia para esse primeiro aspecto, ou seja: o mundo dos seres vivos (para ele) era mais importante que o mundo da Matemática e da Física mecânica.

Assim, as primeiras abordagens ao conceito, ou seja, o fato de ter referência inicial aos objetos concretos ou às experiência empíricas, tinha essa peculiaridade ou premissa. Isso persistiu basicamente até o século XVII, quando ocorreu o fortalecimento da Física e da Matemática, já no início da era moderna, principalmente com Galileu, Leibniz dentre outros, possibilitando novas formas de pensamento.

Porém, ainda até o século XVIII, alguns biólogos e naturalistas como Lineé, Lamarck e Buffon aperfeiçoaram as formas de classificação das plantas, usando basicamente esse ‘conceito’ de conceito de Aristóteles, adotando para isso a ordenação e reagrupamento de algumas de suas características, como por exemplo, mamíferos, aves etc. Parece, no entanto, que essa idéia, esse conceito de substância ou conceito abstrativo é assunto de um passado muito remoto, e ainda ficou claro que com esse estilo de pensamento não foi possível desenvolver satisfatoriamente a Matemática. Para isso foi necessário o uso de outro modelo de lógica ou uma outra forma de abordagem de conceito, pois a aristotélica serve muito bem para um caráter descritivo somente.

Então, quando Cassirer (1953) enfatiza o que se coloca como a noção da natureza e das divisões no ser predeterminam o conceito das formas fundamentais do pensamento. Ele cita:

> no desenvolvimento progressivo da lógica, as conexões com a ontologia de Aristóteles se liberaram, mas as conexões com as doutrinas básicas, elas persistem e reaparecem a qualquer virada da evolução histórica. De fato, a importância que é atribuída à teoria de conceito na estrutura da lógica indica essa conexão. CASSIRER (1953; p. 4).

Com isso, as várias tentativas modernas de tentar reformar a lógica procuraram inverter a ordem tradicional dos problemas, ou seja: “colocando a teoria do julgamento antes da teoria do conceito” Cassirer (1953; p.4), mas ainda que esse ponto de vista tenha revelado ser vantajoso, porém, não se manteve puramente, retornando sistematicamente a tender para o sistema antigo. A tendência intelectual que dá forma a essas novas tentativas, revelaram que essas características avançaram lentamente na própria teoria do julgamento, que ela poderia somente ser compreendida e justificada por meio da teoria tradicional do conceito genérico (Gattungsbegriff). A prioridade do conceito, que procuraram colocar de lado, era reconhecida mais implicitamente. O atual centro de gravidade do sistema não havia sido mudado mas somente o arranjo externo de seus elementos. Toda tentativa de transformar a lógica deve se concentrar sobretudo num ponto: todo o criticismo da lógica formal é compreendido no criticismo da doutrina geral da construção dos conceitos (Begriffsbildung).

Cassirer (1953) em detalhando mais a sua teoria, coloca que as características principais dessa doutrina de conhecimento geral não necessitam de detalhamento profundo. Seus pressupostos são simples e claros e concordam com a maior parte das concepções fundamentais, ou seja, aquelas que são usadas e aceitas pela prática usual do mundo e parecem não se fazer necessário realizar nenhuma revisão crítica tendo em conta essa objetividade. Nada é pressuposto, exceto a existência das coisas em sua multiplicidade inesgotável, com a capacidade e o poder da mente em selecionar dessas riquezas de existências particulares, aquelas características que são comuns a diversas delas. Ele estrutura assim o procedimento:

> Quando nós coletamos assim os objetos caracterizados pela identificação de alguma propriedade comum e os separamos em classes, e quando nós repetimos este mesmo processo, analisando agora grupos de classes, e reorganizando-os em níveis mais elevados, estrutura-se gradualmente uma ordem e uma divisão sempre mais firme de ser, de acordo com as séries de semelhança obtidas das coisas particulares. CASSIRER (1953; p. 4-5).

Com isso, as funções essenciais do pensamento, nessa espécie de conexão, são meramente aquelas usadas para comparar e diferenciar uma sensível quantidade de dados múltiplos. Reflexão, que passa pra cá e pra lá entre os objetos particulares a fim determinar as características essenciais em acorde, essas ligações identificam-se como abstrações.

Cassirer (1953) indica ainda que as configurações da abstração elevam e aumentam a percepção eliminando, essas caracterísitcas relacionadas — puras, por sí mesmo, livre de toda mistura de elementos diferentes. Assim o mérito particular dessa interpretação é que nunca destrói ou expõe a unidade da ordinária visão do mundo. Então o conceito não aparece como algo estranho ou estrangeiro à realidade sensível, mas dá forma a uma parte dessa realidade; é uma seleção do que é imediatamente contido nele. Dessa forma, "os conceitos das Ciências Matemáticas exatas estão no mesmo plano que os conceitos das Ciências descritivas, como a Biologia, por exemplo, que são obtidas meramente com o ato de requisitar e por meio de uma classificação superficial do que é dado." CASSIRER (1953; p. 5).

Como ilustração ele cita os exemplos fornecidos por DROBISCH, (1887) e UEBERWEG, (1857), destacando não só o aspecto da realidade empírica como comparando com a situação na Matemática, na qual seus objetos não são tão óbvios assim:

> Da mesma maneira que formamos o conceito de árvore destacando da pluralidade dos carvalhos, bétulas, faias, etc,

> um conjunto dos indicadores comuns, na Matemática formamos o conceito de quadriláteros planos isolando uma configuração que se encontra no quadrado e no retângulo, no losango e no rombóide, no trapézio e no trapezóide, simétricos tanto quanto assimétricos, e que é facilmente entendido intuitivamente. [DROBISCH, (1887, § 16 sq.) e UEBERWEG, (1857, 5 51) apud CASSIRER (1953; p. 5)].

Pela experiência e vivência que se tem, qualquer que seja o estilo de um enunciado que se encontra e que tem relação com a teoria do conceito, ele se apresenta com um mesmo formato: cada série de objetos comparáveis tem um conceito genérico supremo, que compreende interiormente, todas as determinações em que esses objetos concordem, enquanto, por outro lado, nesse gênero supremo, as sub-espécies, em vários níveis, estariam definidas pelas propriedades que só pertençam a uma parte dos elementos. Da mesma forma que se ascendeu das espécies ao gênero mais elevado, abandona-se assim uma certa característica, extraindo desse modo, uma gama maior de objetos assim no círculo. Dessa forma, por um processo inverso, a especificação do gênero acontece pela adição progressiva de novos elementos ao conteúdo.

Ele ainda ressalta que, se denominar o conjunto de quantidades de **características**, esse conjunto aumenta enquanto se descende dos conceitos mais gerais para os mais particulares, diminuindo assim o número de espécies subordinadas ao conceito em questão; por outro lado ascende-os ao genero mais elevado, então esse conjunto diminuirá, assim como aumenta o número das espécies. A extensão crescente do conceito corresponde a uma redução decrescente do conteúdo. Dessa forma, explica Cassirer (1953), a ‘pirâmide conceitual’ que foi construida por meio de certos procedimentos abertos, como os citados anteriormente, sobre a representação abstrata de ‘alguma coisa’, representação essa que, percebe uma existência completamente englobada que lhe possibilite reivindicar todas as variáveis possíveis de se desenvolver no pensamento.

Até esse momento, toda discussão forçava a condução para a doutrina tradicional de conceito, em que Cassirer (1953) começa a questionar sua pretensão com mais ênfase e sua aplicabilidade sem exceção. Se uma meta pretendida por uma conceituação cai no vazio, é **o caminho todo** que deve ser revisto. Tal situação ficaria incompreensível se em cada uma de suas etapas de ação fosse esperar que se conseguisse colocar toda conceituação numa estrutura fecunda e verdadeiramente científica. “Deseja-se de fato um conceito científico e espera-se que ele substitua a indeterminação originária e o caráter polivalente do conteúdo representativo por uma representação rigorosa e inequívoca” CASSIRER (1953; p. 6). Porém, o que acontece é o contrário: as delimitações rigorosas parecem se reduzir à medida que o processo lógico se desenrola.

No seu interior, a lógica formal sugere um novo problema: se toda conceituação consiste em não manter grande quantidade de objetos que nos indica quais são as características comuns, desprezando assim todas as outras características, está claro que com essa redução, um único componente vai ser substituído daquele grupo que era estabelecido antes pela intuição. Ele reforça ainda que o conceito perderia todos os valores se ele pretendesse simplesmente significar a eliminação dos casos particulares, dos quais somente parte, e de certo modo, acarretaria a destruição de sua individualidade CASSIRER (1953; p. 6). O ato da negação de uma determinada característica, ao contrário, significa ser parte de um processo completamente positivo; o que resta, não é ser simplesmente uma parte arbitrariamente escolhida, mas um momento “essencial” por qual o todo é determinado. O conceito mais elevado é fazer o mais baixo intendível partindo de uma base de abstração do seu formato especial. Mas o que a tradição prescreve para a formação do conceito genérico não contém em si nenhuma garantia que nos leve a pensar que alguém alcança verdadeiramente essa meta. De fato, reforça Cassirer (1953), nada nos garante que as propriedades comuns que se extrai de um conjunto de objetos, quaisquer que sejam eles, contenha os traços característicos típicos e que determinam a estrutura global dos membros do conjunto.

Cassirer (1953) cita ainda um exemplo apresentado por Lotze, H. (1880), cujo modelo, de maneira assemelhada, foi muito explorado didaticamente quando do surgimento do Movimento da Matemática Moderna, informou verbalmente Otte (2007). Nesse exemplo Lotze (1880) expõe que foram colocadas cerejas e pedaços de carne de gado (que possuem nuance avermelhada) embaixo de um conjunto de objetos cujas características deveria ser vermelhas, suculentas, comestíveis, dentre outras. Por meio desse procedimento não se chegou a um conceito logicamente válido, mas somente a uma combinação verbal desprovida de significação e que não o apreender os casos particulares, pois não são interconectados. Parece então que o estabelecimento de regras gerais descritas para a formalização são inoperantes, são reduzidas a elas somente e que, cada vez existe a necessidade de se completar, e é levado a se referir implicitamente a um outro critério intelectual.

Esse é ainda um dos problemas principais para a Educação Matemática atualmente: estar atrelada ao empirismo, pois o empirismo é baseado no aristotelismo, no conceito de conceito da substância. Por isso encontra-se muita dificuldade em fazer relações ou trabalhar com o pensamento relacional, seja operar com funções, equações, e principalmente com números, em oposição à Geometria que se pode ter ‘objetos’ geométricos que possibilitem uma observação e análise diretamente. Nos números não seria tão fácil, pois nesse pensamento, os números aparecem como atributos de grandezas, em vez de relações entre grandezas, e dessa forma, necessitam de analogias. A Geometria Analítica de Descartes considerava os números como marcadores de coisas ou pontos, em vez de representações de relações. E essa é uma visão que traz problemas para entender tanto números negativos, números irracionais bem como números imaginários, pois esse empirismo deixou os números sem referências. Esses últimos — os imaginários — só foram entendidos quando Gauss, em 1825, escreveu um texto sobre o plano complexo que tinha por base a perspectiva do pensamento relacional: com isso ele apresentou uma idéia geral de coisas em que cada uma tem relações somente com mais duas é representável por pontos numa única reta. Se um ponto mantém relações com mais de dois pontos diferentes, uma representação possível seria a colocação de pontos num plano, que seria coberto por retas e cada ponto teria uma relação com três outros pontos. Essa representação geométrica dos números imaginários é um fruto do pensamento relacional.

De outra forma, em geral, tudo foi reduzido ao mundo discreto e se é levado a aprender a trabalhar com identificações de conjuntos, classificações e técnicas de contagem, de forma unicamente mecanicista.

Para tentar superar essa dificuldade principalmente quanto ao empirismo, torna-se necessário buscar referências em Kant (1997) que, por sua vez, apresentou uma tentativa original de superar essas duas correntes filosóficas fundamentais da modernidade: o racionalismo e o empirismo. Em sua obra, Kant (1997) não se limita apenas em desenvolver uma síntese, mas é nela que convergem todas as discussões mais importantes da época moderna do século XVIII.

Nacido em 1724, em Königsberg, posteriormente rebatizada para Kaliningrado)[2], Kant foi profundamente religioso, e isso se reflete na sua obra, adepto de costumes sóbrios e vida metódica, encarnando as virtudes de uma vida dedicada ao estudo e ao ensino, sempre voltado para os ideais da representação. Revelou uma simpatia profunda aos ideais da Independência Americana e da Revolução Francesa. Foi pacifista convicto, antimilitarista e solidário a todo forma de patriotismo.

Suas obras foram estruturadas em função de três períodos que se denominam **pré-crítico**, que corresponde a sua filosofia dogmática, a sua aceitação da metafísica racionalista tendo como referência as obras de Leibniz e Wolff; no segundo período denominado **crítico** é que apareceram suas obras

[2] É a capital da província de Kaliningrado, enclave russo entre a Polônia e a Lituânia, na beira do Mar Báltico.

mais conhecidas e influentes como ‘A Crítica da Razão Pura’ e ‘Crítica da Razão Prática’ e ‘A Crítica do Juízo’. No último período denominado pós-crítico, ele procura fazer uma síntese das três críticas apresentadas anteriormente, além de uma série de textos e notas identificadas por ‘opus postumun’.

Em sua doutrina sobre o conhecimento, Kant (1953; p. B 74) se baseia na distinção fundamental entre duas faculdades ou fontes do espírito, das quais a primeira consiste em receber as representações (a receptividade das impressões) e a segunda é a capacidade de conhecer um objeto mediante essas representações (espontaneidade dos conceitos); Ele indica que pela primeira é nos ***dado*** um objeto; pela segunda é ***pensado*** em relação com aquela representação. Intuição e conceito constituem, pois os elementos de todo o nosso conhecimento, de tal modo que não é possível conceito sem intuição que de qualquer modo lhes corresponda, nem uma intuição sem conceito podem resultar em um conhecimento. Ambos esses elementos são puros ou empíricos. *Empíricos*, quando a sensação (que pressupõe a presença real do objeto) está nele contida; *puros*, quando nenhuma sensação se mistura à representação. A sensação pode chamar-se matéria do conhecimento sensível. Daí que a intuição pura contenha unicamente a forma sob a qual algo é intuído e o conceito puro somente a forma do pensamento de um objeto em geral. Apenas as intuições ou os conceitos puros são possíveis a *priori,* os empíricos só a *posteriori*: Dessa forma, essas duas fontes, também designadas por **sensibilidade** e **entendimento,** possuem características distintas, porém, opostas entre sí. A sensibilidade ele a caracteriza como passiva e se limita a receber expressões provenientes do exterior. Já o entendimento é ativo e tal atividade consiste primordialmente no fato de que ele constrói de forma expontânea certos conceitos e idéias sem basear-se na experiência, como por exemplo causa, necessidade, existência, substância etc.

Vale a pena frisar antecipadamente, que essas duas fontes têm diretamente a ver com a idéia de complementaridade do pensamento relacional e instrumental que será discutida e aprofundada posteriormente ainda nesse capítulo.

Essa distinção entre sensibilidade e entendimento é utilizada para fundamentar filosofias, que em sua essência, são distintas, como por exemplo uma delas é a do racionalismo, uma vez que o entendimento produz certos conceitos sem que sejam derivados da experiência. Alguém pode conhecer a realidade sem recorrer aos dados da experiência. Por outro lado, tendo em vista a influência de Hume, Kant (1997) chegou a conclusão de que nosso conhecimento não pode pretender ir além da existência.

O que ocorre então com os conceitos que não procedem dos sentidos ou quando o entendimento se produz espontaneamente? Kant (1997) argumenta que é certo que existem no processo de entendimento conceitos que não procedem da experiência no âmbito dos dados sensoriais, por exemplo, o conceito de substâncias, até porque por meio dos sentidos só se percebe figuras, observa-se que todo mundo fala de ‘cheiro’, admira, deseja sentir o aroma... Por isso, para Kant (1997) substância é um conceito que o entendimento possui e utiliza para unificar os dados sensíveis.

Em função da influência de Hume, Kant (1997) estudou e obteve algumas conclusões acêrca dos objetos não oriundos da experiência. Uma dessas conclusões é que o entendimento os utiliza para conhecer os objetos obtidos pelos sentidos com a finalidade de ordená-los e unificá-los. Outra é que não podem ser legitimamente utilizados para referir-se a algo de que não se tem experiência sensível. Por exemplo: pode-se perfeitamente descrever um onicórnio sem, no entanto, nunca ter visto um.

Já na introdução da sua obra, KANT (1997; p. 40) se revela interessado pelo problema da possibilidade da metafísica, em decidir se é possível um conhecimento científico acerca de Deus, da liberdade, da imortalidade da alma etc. Essa pretensão dele é perfeitamente compreensível levando em conta a evolução de seu pensamento. Ele foi primeiramente racionalista e estava convencido que o entendimento pode ultrapassar as fronteiras da experiência, podendo então alcançar seu conhecimento autêntico sobre realidades que estão acima dela, tais como Deus, alma etc. Mas devido a influência de Hume, fez com que a fé kantiana a respeito da possibilidade da metafísica se abalasse.

Kant (1997) distingue o *conhecimento a priori* do *conhecimento a posteriori*, e o *conhecimento analítico* do *conhecimento sintético*. O conhecimento *a priori* é o conhecimento universal, necessário e intemporal, que se fundamenta na razão e é independente da experiência. Pelo contrário, o conhecimento *a posteriori*, ou empírico, consiste em proposições fundamentadas na experiência, isto é, nas observações do mundo físico. Por sua vez, o conhecimento analítico é o conhecimento explicativo. Em particular, o conhecimento *a priori* analítico é o que se sabe ser verdadeiro por análise lógica, pelo próprio significado dos termos usados. Um exemplo do conhecimento *a priori* analítico é a afirmação 'os solteiros não são casados'. Diferentemente, o conhecimento sintético é aquele que acrescenta algo de novo ao conhecimento que já se possui. Afirmar que 'um segmento de reta é a distância mais curta entre dois pontos', constitui, para Kant, um exemplo de conhecimento sintético *a priori*.

A grande questão filosófica de Kant (1997) é saber como é possível o conhecimento sintético *a priori* e, em particular, como é possível a existência de conhecimento matemático. A resposta que dá a essa questão é a de que o nosso espírito dispõe de formas puras de espaço e de tempo, e que a isso Kant denomina de intuições, sendo que por meio das quais percebe, organiza e compreende a experiência. Assim, Kant (1997) embora glorificando a razão a que atribui a tarefa de explorar as formas do espírito humano, não nega o valor da experiência e dos dados provenientes da observação. Esses dados contribuem para estimular o poder organizador do espírito.

Nesse prisma, a Matemática representa, para Kant (1997), a prova suprema da existência de conhecimento *a priori*. A argumentação que propõe é a de que uma vez que a intuição do espaço tem a sua origem no espírito, esse reconhece de imediato algumas propriedades desse espaço. Essas propriedades são sistematizadas na Geometria, tendo como referência a Geometria Euclidiana, já que é a única que Kant conhecia. Simultaneamente, considera que como os números inteiros derivam da intuição do tempo, o conhecimento do tempo é sistematizado na Aritmética. Logo, para Kant (1997), as proposições matemáticas são objetivas, necessárias, universalmente válidas, independentes da experiência, e para nós, impõem-se pela maneira como a nossa mente funciona.

Sintetizando, a filosofia de Kant (1997) propicia destacar que esse filósofo, ao colocar a fonte da Matemática no poder organizador do espírito, concedeu a essa Ciência um estatuto especial, um carácter de necessidade e uma marca de certeza atemporal e incontestável, que se manteve durante bem até ao século XX. As escolas fundacionistas que no início do século XX tentaram encontrar fundamentos seguros para a Matemática, no fundo, todas ambicionavam manter a Matemática na posição especial que Kant lhe havia concedido. Atualmente, tanto o questionamento da natureza *a priori* do conhecimento matemático, quanto os argumentos a favor de bases empíricas para esse conhecimento estão de novo sendo explorados. Não se trata, contudo, de um retorno ao empiricismo de Stuart Mill. Trata-se, antes, de uma aproximação da Matemática às Ciências Naturais que admite, tal como acontece nessas ciências, o carácter *a posteriori* e falível do conhecimento. Novas abordagens utilizam uma perspectiva *quasi-empírica* sobre a Matemática, que questiona ser essa ciência um corpo de saber imutável e infalível.

Já no início do século XX, Cassirer usava uma concepção para descrever o crescimento das ciência modernas, essa primeiramente expressa por Kant (1997), que indicava uma transição entre o pensar nas substâncias para o pensar nas relações, como fica subentendido nos comentários: “A lógica do conceito genérico regido e controlado, como nós vimos, pelo conceito de substância, se opõe doravante a lógica do conceito matemático de função”. CASSIRER (1953; p. 21).

Dessa forma, para Cassirer, o significado dessa nova compreensão do conceito teórico consiste em perceber que a retenção das determinações dos casos especiais encontra-se perdida se os conceitos são concebidos como abstrações. A citação a seguir descreve claramente a posição de Lambert, matemático do século XVIII, amigo de Kant e que ajuda a entender idéia principal dessa obra de Cassirer, ou seja: o que se quer entender por substância e função: Ele disse:

> ...na sua crítica à lógica da escola de Wolff, Lambert indicava que era função específica dos “conceitos gerais” da matemática nãom para suprimir a determinação dos casos especiais, mas fazer todo o possível para mantê-los. Se o matemático generaliza suas fórmulas, isso não só significa manter todos os casos especiais, mas também de ser capaz de deduzí-los de uma fórmula universal. CASSIRER (1953; p. 19).

Tentando dizer de outra maneira, qualquer um poderia ter acesso ao conceito ou a uma situação da realidade em que, por exemplo, tivesse a necessidade ou envolvesse a questão $x^2 + y^2 = 1$, que é a equação de uma circunferência. Porém, para um matemático, sobre essa mesma questão, haveria um conceito que é muito mais geral, como no caso de $\frac{?}{?^?} ? \frac{?}{?^?} ?$, que é a equação da elipse, em que para uma situação particular da forma a=b o conceito mais geral recai para o conceito da circunferência que é particularizado, porém, a amplitude, a riqueza e as possibilidades que essa segunda perspectiva indica é muito maior.

Ora, essa possibilidade de dedução não se encontra no caso das concepções escolásticas, pois esses são formados ignorando o particular e por isso a reprodução dos aspectos particulares do conceito aparecem excluídas. Então essa abstração é muito mais fácil para o “filósofo” fazer a determinação do particular. tomando por base o universal é muito mais difícil pois o processo de abstração deixa para traz todas as particularidades de uma maneira que que não mais seja possível recuperá-las. Essa simples observação contém de fato o cerne de uma distinção de grandes consequências.

O ideal de um conceito científico nesse sentido, aparece em oposição à representação genérica e esquemática que é representada por uma mera palavra. O conceito verdadeiro não ignora as particularidades que ele contém, mas ao contrário, mantém em sí e tenta demonstar a ecessidade deles e suas conexões. Isso que nos propõe, é uma regra universal que nos deixe compor e combinar pessoalmente o elemento particular. É como Cassirer (1953) exemplifica:

> nessa maneira podemos proceder: a partir de uma fórmula matemática geral – referindo-se a fórmula das curvas de segundo grau – nós podemos redescobrir as fórmulas geométricas particulares como a do círculo, da elipse, etc nos concentrando em certos parâmetros que podem ser variados por uma série contínua de valores.(CASSIRER,1953; p. 19).

O conceito geral, diz ele, se revela assim, ao mesmo tempo, pois é mais rico em conteúdo; é então possível derivar todas as relações matemáticas implicadas pelo problema particular que se coloca, sem, no entanto, reduzir esse problema a ele mesmo, e em apreendendo-o pelo contrário em continuidade e em conjunção com outros, ou seja, no seu significado mais profundo e mais sistemático.

"Os casos particulares não são desconsiderados, eles se vêem pelo contrário, a conceder o estatuto de fases inteiramente determinadas, no seio do processo geral de mudança" CASSIRER (1953; p. 20). O que é uma outra maneira de dizer que o conceito é caracterizado, não 'pela generalidade' de uma imagem representativa, mas pela validade geral de um princípio serial. Em vez retirar das partes quaisquer sobre a multiplicidade que nos é colocada, gera-se, para os elementos que o compõem, uma relação unívoca definida pela fecundidade de uma lei.

Assim, para tomar um exemplo, particularmente impressionante, a intuição do espaço euclidiano tridimensional só consegue ter uma clara compreensão quando, com a Geometria moderna, se utiliza das formas espaciais mais complexas, para que desse modo, a total estrutura axiomática seja primeiro revelada por uma completa distinção.

Nos recentes desenvolvimentos, houve uma oposição entre a universalidade abstrata do conceito e a universalidade concreta da fórmula matemática. A universalidade abstrata pertence a um gênero que se internaliza para si mesmo e também negligencia todas as diferenças específicas; em oposiçãoa universalidade concreta pertence a um gênero todo sistemático (Gesamtbegriff) que conduz para si mesmo as peculiaridades de todas as espécies e as desenvolve de acordo com uma regra. Cassirer (1953) apresenta então uma situação indicada por Drobisch (1887):

> Tendo, por exemplo, que encontrar dois números inteiros cuja soma seja igual a 25, e que um seja divisível por 2, o outro divisível por 3, a álgebra resolveria o problema dando ao segundo número a fórmula 6z + 3, onde z assume os valores 0, 1, 2, 3, donde segue imediatamente, para o primeiro número, a fórmula 22 - 6z; temos então a relação das formas que apresentam uma universalidade concreta. Eles são de fato universais, porque representam a lei geradora comum a todos os números procurados; são ao mesmo tempo concretos, pois, dando a *z* sucessivamente os quatro valores indicados, os números procurados decorrem dessas fórmulas das quais eles surgem como tantos da mesma forma. O mesmo princípio vale, em regra geral, para todas as funções matemáticas de uma ou mais variáveis. Porque cada função representa uma lei universal que, graças aos valores suscetíveis de ser assumidos pela variável, subentende todos os casos particulares pelos quais ela vale. DROBISCH, (1887; p. 22) apud CASSIRER (1953; p. 20-21).

Nesse sentido, comenta Otte (1998), significa que um conceito teórico não pode apenas ser definido em termos de referência; nomeado pela extensão, isto é, contando todos os objetos que lhe pertençam. O significado de um conceito não é só aquele a qual ele se refere. Mas o conceito exprime uma visão construtiva e ativa de conhecimento e uma intencionalidade que exige que o conceito seja definido, “não mostrando que isso pertence a ele, mas em termos puramente intencionais dando uma função proposicional especial” CASSIRER (1954; Vol. III, p. 352) apud OTTE, (1998; p. 417).

O ponto principal a ser discutido é que a noção da noção do conceito de Aristóteles, que se dá pela abstração, ou seja, chega-se ao conceito de homem, por exemplo, abstraindo todas as características específicas do proprio ser observado, como peso, tamanho, formato do crânio, estrutura óssea etc. Lambert, por outro lado, coloca que nesse sentido, o conceito pode tornar-se pobre quando se busca essa forma de abstração. Vai se abstraindo cada vez mais características, retirando aspectos até chegar a um conceito muito geral. Por exemplo: se se chega a um conceito semelhante a: ‘necessita de água para sobreviver’. É um conceito bem geral. A maioria dos seres vivos possuem essa característica. Mas para que serve esse conceito bem geral? Em que de fato ele ajuda?

A noção de conhecimento de Aristóteles foi determinada pela ‘receptividade’. No mesmo sentido, para Kant sua visão do mundo foi qualitativa e dominada pelas semelhanças e analogias, Foucault (1995), como a visão Euclidiana. O mundo ‘moderno’ desde Descartes foi determinado pela atividade humana. A própria Crítica da Razão Pura de Kant, concebeu o conhecimento e o conhecimento matemático em especial, como construção. A metafísica, por outro lado, foi determinada pelas ciências empíricas, ou seja, para ele a coisa mais importante é a classificação (isto é um homem, isto é um cavalo; isto é um camelo etc), a sua base foi a Biologia como estrutura de observação direta. Para a Matemática a situação é diferente. Se quer construir coisas, criar prognósticos, tentar prever como situações podem ocorrer. O que se pode querer com as Leis de Newton: prever como os fenômenos podem se comportar; descobrir como as relações podem ser desenvolvidas: se ‘*a*’ acontece assim, então posso provar que ‘*b*’ será assado. Kant, no entanto é que ficou analisando e extraindo da obra de Newton esses aspectos essenciais, transformando-os numa filosofia de conceito ou epistemologia. Para Kant, um conceito é realmente uma função ou uma fórmula e não um predicado. A fórmula funciona tal qual uma máquina, ou seja, para cada valor inserido para a variável 'x', ela fornece um único valor para a variável 'y'. Para cada '*input*', se tem um único '*output*'. Essa é uma idéia operativa, totalmente operativa. Isso é o que significa em linhas gerais o título do livro de Cassirer. Em vez de descrever as características gerais das substâncias, o conceito descreve as operações que se usa para obter novos conhecimentos.

Dessa forma, procurando ampliar um pouco mais a discussão, a maneira como uma referência é dada, é importante. Até certo ponto, os objetos a que um conceito pode ser aplicado não são determinados todos de uma vez e a todo momento. Os conceitos a serem buscados não são obtidos por contar todos os elementos percebidos de seu objeto indicado. Essas indicações do objeto são dadas somente de forma aproximada, no sentido de uma apresentação metafórica dos representantes típicos e casos exemplares. O significado e a referência combinadas, dão a função do conceito. Os conceitos são universais — o atributo 'vermelho', por exemplo, se aplica em muitas coisas diferentes. Conceito é também método e conhecimento. Ambos os aspectos do conceito mencionado aqui não devem ser caracterizados juntos, como se unificado, mas como a representação de uma irrevogável complementaridade[3].

Essa compreensão muda igualmente a relação entre o conceito e o objeto. O conceito inicialmente abstrato pede, como condição prévia, que os objetos tenham objetivos iniciais e seus dados fixados. O objeto deve primeiramente ser fixado como absolutamente único e completo em relação de igualdade e/ou diferença, antes de ser atribuida a ele propriedades ou ser concebida relações. Se, em contraste, o conceito é dado como uma função

[3] O sentido da palavra, neste caso basta para compreender. Porém o conceito de complementaridade será posteriormente aprofundado e sendo alicerçado com base na teoria do conhecimento.

caracterização ou uma função proposicional, então, na relativa independência dos objetos,

> as determinações, que nós podemos atribuir à 'questão' do conhecimento, pertence-lhe somente o relativo a alguma possível ordem e a um conceito de série formal… A questão é analisada somente em relação a forma, enquanto forma. CASSIRER (1953: p. 310-311) apud OTTE (1998; p. 418).

O ser humano procura quase sempre ser objetivo, assim, o "pensamento é resolvido inteiramente em seu objeto, sendo determinado e guiado por ele. ... Assim existe uma profunda e mais íntima relação mútua entre o objeto e a operação do pensamento do que há entre - *o vinho e a ação de beber do vinho.*" CASSIRER (1953; p. 313-314) apud OTTE (1998; p. 418).

Todavia, tanto em Cassirer como em outros pensadores que dão ênfase ao caráter construtivo do conhecimento, a prioridade é dada ao conceito ao invés de aos objetos; as relações determinam aquelas que serão relacionadas com os objetos. Os objetos aparecem como 'significado objetivo' e a validade de certas relações lógicas e formas conceituais são estabelecidas como a condição necessária e ponto central da noção de objeto. Cassirer (1954) escreve que: "Não é a propriedade de um objeto como uma coisa em sí mesmo que é investigada, mas a possibilidade de uma relação para com o objeto" CASSIRER (1954; Vol. III, p. 369) apud OTTE (1998; p. 418). Ele também cita Kant: "Se nós estudamos qual a referência que uma propriedade nova tem para com nossas idéias, e que benefícios obtém por isso, nós descobrimos dessa forma, que não se faz nenhuma ligação simultânea da idéia necessária e com isso, sujeitar ela a uma lei" (KANT: Crítica da razão pura, A, p. 242) apud OTTE (1998; p. 418)]. Isto é, o objeto só tem uma função, ou seja, a função de materializar as idéias e as atividades.

Até o ponto que a atividade do sujeito representa a dele ou sua função de vida constitutiva, o significado de conceito não pode consistir em envocar o perceptivo, mental ou imagens intuitivas, mas é uma forma de atividade na realidade objetiva. É precisamente esses aspectos do objeto que são relevantes para a atividade e define a atividade objetiva que são incluídas na definição de conceitos matemáticos. Por exemplo, na atividade de contagem, a cor dos objetos que estão sendo contados, ou o seu peso, sua temperatura, e assim por diante, são informações insignificantes. Além disso, no objeto conceitual formado por uma 'definição implícita' no sentido dos fundamentos da Matemática de Hilbert, aparecem somente aqueles aspectos que são relevantes para a dedução matemática.

> Quando os conceitos são usados nos sistemas de pensamento envolvendo negociação, sómente uma de suas propriedades, das que são efetivamente necessárias, são usadas para garantir seus julgamentos específicos (por exemplo, os termos básicos da Geometria, os axiomas). Para a estrita ciência de procedimento de conclusão em conclusão, tem-se que o conceito é na realidade um fato nada mais pelo qual o julgamento específico possa ser proposto. Ele é também consequentemente definido por isso. SCHLICK (1925, p. 51) apud OTTE (1998; p. 418).

A única crítica é a feita pelo positivismo lógico[4], da qual Schlick era um dos fundadores, que indicava uma compreensão muito restrita e limitada acerca da atividade epistemológica e dessa forma, sustenta concepções, métodos e meios de investigações científicas que são também muito restritas. Por exemplo, Schlick não considerou que a intuição no sentido de Husserl era conhecimento ou um meio seguro de adquirir conhecimento SCHLICK (1979; p. 119 – 140 apud OTTE, (1998; p. 419).

Até esse ponto, aceita-se que os humanos só têm acesso ao conhecimento por meio de suas atividades e isso parece óbvio, que o sujeito

[4] Movimento doutrinário do chamado Círculo de Viena, fundado em 1924 por Moritz Schlick (1882-1936), filósofo alemão, e que reuniu os filósofos alemães Philipp Franck (1884-1956), Otto Neurath (1882-1945), Rudolf Carnap (1891-1970), Hans Reichenbach (1891-1935), os filósofos austríacos Friedrich Waismann (1896-1959), Ludwig Wittgenstein (v. *wittgensteiniano*), Hans Hahn (1880-1934), e outros, que, na tradição de Gottlob Frege (v. *fregiano*) e de B. Russell (v. *russelliano*), desenvolvem a análise lógica da linguagem científica associando o enfoque empirístico do positivismo ao formalismo lógico-matemático. Também foi um movimento doutrinário de pensadores de língua inglesa, entre outros, dos filósofos ingleses Alfred Jules Ayer (1910-1989), George Edward Moore (1873-1958) e Gilbert Ryle (1900-1976) e do matemático e filósofo norte-americano Willard van Orman Quine (1908), caracterizado principalmente pelo fisicismo, pela crítica da linguagem e pela adoção do método axiomático

utiliza o objeto de cognição como parece determinado de acordo com a atividade, e que se é consequentemente capaz de intuir o próprio objeto, sua essência e não somente alguma imagem subjetiva dele. Outro ser humano observa outra coisa e dessa maneira a essência de um fenômeno fica dissolvida em um processo infinito de apresentação.

Uma função matemática, por exemplo, nem será identificada por qualquer representação simbólica por meio de fórmulas nem pode ser concebida como existindo além de todas sua representações possíveis, como uma mera idéia platônica ou algo assim. No entanto, funções, predicados, conjuntos etc são determinados por meio de axiomas de extensão e não de uma maneira construtivista somente, escrevendo suas propriedades. Existe uma certa dualidade nos métodos construtivista e não-construtivista nas ciências formais, que refletem, acima de tudo o caráter social do conhecimento. Essa dualidade indica, na realidade, a diferença entre o ponto de vista do ser infinito (seja ele membro da sociedade em geral ou ser transcendental de idealismo filosófico) e a do ser humano indivíduo finito.

Deve-se levar em conta que na moderna sociedade tecnológica nós somos simultaneamente matéria ou criadores e também somos afetados pela criação. Em particular, as pessoas possuem parte do conhecimento do sistema que esse conhecimento representa. Na alta divisão da sociedade tecnológica o sujeito não é só a fonte de conhecimento mas igualmente é objeto ou tarefa. Esses fatores são responsáveis pelo fato de que para outros humanos e ao mesmo tempo para Laplace, tanto significado e referência quanto evidência e operação são igualmente relevantes. O positivismo lógico, em contraste com esse experimento mantém a pura objetividade, desconsiderando toda a referência ao objeto conhecido. O ponto que Schlick se esqueceu é que para além da avaliação da lógica essa mudança na compreensão do conceito, porém se faz necessário redefinir a compreensão da subjetividade.

O sentido que querem chamar a atenção é para o fato de que o conhecimento em vez de estar voltado para o mundo de objetos isolados e estáticos, de classificar e de descrevê-los, de forma mais bem concreta, preocupa-se com as relações que podem existir: quais as causas e efeitos que se pode obter, quais as leis da natureza envolvidas e, para isso, necessita-se de outro modelo de conceito de conceitos.

O que falta em Cassirer e Kant é uma melhor descrição do referencial. Por exemplo, Cassirer identifica função como fórmula, ou seja, trata ambas da mesma maneira. Mas nem toda função é dada por uma fórmula. Um polinômio pode ser dado por uma fórmula, mas tem outras funções como por exemplo, as funções compostas, que apenas podem ser descritas como combinação de duas os mais funções condicionadas. Existem outras que podem ser mais gerais nas quais se pode descrever suas relações. Nem sempre se pode fazer isso numa fórmula. Mesmo quando se está provando um teorema, simplesmente se indicam as leis para as quais justifiquem as provas, porém, não se descreve como elas se comportam, por exemplo: ‘se essa função f é continua... então...’, ‘se ela é integrável... então ...’, mas ela não dá o objeto em termos de fórmulas.

Até o fim do século XVIII com Cauchy, brilhante matemático, se pensava assim: **fórmula = função**, pois nesse período do desenvolvimento do Cálculo só se falava em polinômios ou séries de Taylor não usando outras funções. Por isso houve uma grande discussão quando Fourier afirmou que toda função arbitrária pode ser representada por uma fórmula de Fourier. Dentre vários, Lambert e Lagrange por exemplo, não acreditavam, pois é possível para qualquer modelo de curva conseguir determinar uma fórmula que a represente e que consiga descrevê-la? Havia sempre uma divergência: Leibniz acreditava que sim, Euler já não acreditava, mas realmente, até o fim do século XVIII, as funções que os matemáticos ficaram considerando foram realmente fórmulas. No próprio livro de Geometria Analítica de Comte e a classificação das funções, havia o conceito de função, mas ele não definia função em termos como se está acostumado a ver, em termos de que existe uma relação entre x e y. Para ele existe a função soma, função diferença, função produto, função quociente, função trigonométrica e todas as demais e que podem ser combinadas entre si, ou seja, ele enuncia explicitamente, sempre citando as funções básicas e elementares, como por exemplo y = x+a; y = ${}^{?}?\,\overline{?}$, e afirmava que toda função é uma combinação dessas funções básicas referenciais. O próprio Kant tinha essa concepção. Ele não pensava em relações ou funções gerais, pois essa discussão ainda não havia sido desencadeada, o que ocorreu posteriormente.

É estranho que Cassirer, não tenha considerado esse aspecto, pois era do seu conhecimento que a noção da função havia se desenvolvido bastante, durante o século XIX. Essa identificação de função por meio de fórmula tem uma coincidência infeliz, em que apenas se destacava o seu aspecto operativo ou intencional em detrimento da referência. Dessa forma, para Cassirer, há um contraste entre substância e função. Um dos grandes problemas dessa obra e do pensamento de Cassirer, dá-se pelo fato dele não conseguir estabelecer uma clara distinção entre fórmula e função. Mas o grande avanço que houve no século XIX foi a busca por essa distinção.

Para tanto, tem-se a impressão de que a idéia de fórmula é mais estática, algo pronto e acabado, parece um objeto com um conceito ‘terminal’, ‘pronto’ para ser manuseada, ainda que muitas vezes sem uma ‘bula’ clara que melhor especifique sua utilização, necessitando então de um intermediário, com dominio científico, para detalhar esse seu uso quando aplicado a um determinado contexto real.

Para função isso não ocorre. O sentido da palavra função não sugere um objeto mas sim algum objeto que se interrelaciona com outro ou então que uma coisa depende da outra. Para Otte (1993), quando abre essa pauta de discussão sobre o que é uma função, primeiro ele indica que para quando se deseja conhecer algum conceito, a profundidade para esse conhecimento depende dos fundamentos que se dispõe para tal explicação. Na

Matemática atual, a idéia intuitiva de função refere-se ao estabelecimento de uma forma especial de correspondência entre duas classes de objetos, que associa a cada elemento de uma dessas classes exatamente a um elemento da outra. Essa correspondência também pode ser descrita numa linguagem simbólica e mais matematizada, presente e caracterizada na quase totalidade dos livros de Matemática e inclusive nos didáticos, quando essas estão elaboradas no formato envolvendo a noção e terminologia de conjuntos. Sem contar que passou a ser parte integrande desse rol de conteúdos e não mais um título independente, como relembra Otte (1993) que no *Mathematisches Wörterbuch* de Georg Simon Klügel, publicado em 1805, o conceito de função ocupa 36 páginas. Lá é citada uma explicação feita por Leonhard Euler, considerado o maior matemático do século XVIII. Euler descreve que "Função de uma grandeza variável é a expressão analítica da composição de uma grandeza em termos dessa grandeza variável e de uma ou várias constantes" OTTE (1993; p. 228).

Otte explica que o conceito de função tem duas formas de interpretação: na primeira aparece associado ao conceito de uma lei, de forma particular, junto com o conceito de lei natural, em que surge implicitamente uma noção de funcionalidade, do conceito operacional aritmético-algébrico, do conceito de algorítmo e das concepções gerais de máquina. Para esse aspecto não teria nenhuma importância quais operações seriam utilizadas e nem se essa 'máquina' seriam ou não concretas, se teriam algum formato especial (retangular, redondo etc), mas o enfoque estaria precisamente na função que por ela seria desenvolvida, ou seja: dado ou entra um '*input*', resulta ou sai um '*output*'. Essa função é obtida num processo de definição por abstração, das classes de operadores, das máquinas, das correspondências etc, ou seja, por meio de funcionalidades equivalentes. Muitas outras situações que envolvem funções altamente complexas, como a de modernos programas de computadores, a validade de determinadas funções só podem ser consideradas por meio de verificações experimentais, e ainda assim sujeitas a 'erros funcionais' inesperados, como por exemplo o controle, a alteração e gerenciamento das datas utilizadas quando da proximidade da virada do século e milênio.

Tendo a clareza de que seria impossível encontrar funções que possibilitem ter o controle total de uma realidade, devido sua complexidade, então sempre haverá a necessidade de conceber e analisar de forma mais objetiva essa realidade e estruturá-la constantemente na tentativa de controlar seus esboços e suas atividades, pois essa dificuldade de relacionar mutuamente os dois enfoques: estrutural e funcional, foi percebida durante todo o desenvolvimento histórico do conceito matemático de função.

Como salienta Otte (1993), foi somente no final do século XIX, que houve o desvinculamento do conceito de função das modalidades concretas, ou seja, que a caracteriza como uma operação ou máquina, mas que se tem, por isso, uma série de dificuldades cognitivas, pois não se pensa na máquina a conexão entre operação e lei, e sim nos objetivos a serem alcançados com ela. Se por um lado uma máquina foi construida para preencher determinada função ou tarefa, e para isso, tem que ‘garantir uma vantagem’, mas ela não explica nada como essa tarefa é realizada. O que de fato se tem é que “um algoritmo resolve problemas, mas não descreve realidade alguma, enquanto, sob certas circunstâncias, seria desapropriado perguntar, inversamente, pelas vantagens oferecidas pela leis de Newton, ou pelos problemas que uma certa teoria pode solucionar.” OTTE (1993; p. 229).

A segunda concepção do conceito de função é descritiva e considera uma função como uma lei de dependência entre uma grandeza variável e outras quaisquer, como por exemplo: distância está sempre em função do tempo; massa está sempre em função da força e da aceleração. Até o início do século XVIII os matemáticos ocupavam-se em resolver equações. Não se preocupavam muito com o contexto ou a realidade. A grande questão era encontrar um número ou resultados quando determinados dados ou equações relativas a esse número eram fornecidos. Estava aí a concepção operativa das funções.

O novo no conceito matemático das funções, que entrou em jogo pela evidência da problemática da lei natural, consistia em ver a função como um objeto matemático único e unitário, não mais como uma correspondência entre os valores do domínio e os valores da imagem. Essa foi a concepção de função que se tornou um dos fundamentos da revolução científica ocorrida nas ciências naturais no século XVIII, mas ela só se expandiu no início do século XIX, ao longo da chamada segunda crise dos fundamentos da Matemática.

A partir daí, essa nova concepção, agora matematicamente abstrata, do conceito de função, como Otte (1993) comenta, ligou-se de forma indissolúvel ao 'princípio da continuidade', principalmente explorada por Leibnz e amplamente usada por Cassirer (1953). Esse princípio acrescenta várias hipóteses descritivas na relação funcional. Define-se que uma relação funcional é contínua quando pequenas variações no *input* produzem uma correspondente variação limitada no *output*. O estabelecimento dessa ligação estreita entre o conceito de função contínua ao conceito de lei das Ciências Naturais adequou-se muito bem à filosofia do determinismo, que tem como um dos preceitos o de constituir o princípio da ciência experimental que fundamenta a possibilidade de busca de relações constantes entre os fenômenos.

Otte (1993) enfatiza que "o papel do princípio da continuidade na formação do conceito de função revela-se, sobretudo, no fato de que somente uma concepção geral e suficientemente abstrata das funções matemáticas possibilitou a ação recíproca dos aspectos complementares da função como operação ou regra e da função como uma conexão regular preexistente" OTTE, (1993; p. 230). Ele comenta ainda que Euler, em 1748, no seu *Introductio in Analysin Infinitorum* ainda definia uma função como sendo uma expressão analítica qualquer, formada por grandezas variáveis e [...] constantes, ou seja, a função é definida por algumas de suas 'propriedades', isto é, com sua existência simbólica e não na totalidade da realidade, porém, para Euler, funções contínuas são exatamente aquelas que se deixam representar por meio de uma expressão analítica.

Houve muitas dificuldades e imprecisões, principalmente para aqueles, pertencentes ao realismo conceitual, ao estabelecer identificação entre conceito e símbolo que fazia da característica fundamental da continuidade uma propriedade da forma de representação simbólica da função, principalmente porque uma mesma função poderia ser caracterizada como contínua, mas poderia garantir também 'representações descontínuas', como por exemplo no caso das funções compostas por duas ou mais outras, em que a continuidade estaria garantida somente até sua(s) intersecção(ões). Otte (1993) indica ainda que Cauchy se ocupou com esse modelo de problema nos primeiros decênios do século XIX e que o conceito de função contínua, concebida por ele, perdura até então. Ele ainda frisa que "certas propriedades fundamentais, como a da continuidade, só poderiam ser conseguidas numa conceituação abstrata de correspondência funcional, numa conceituação que tinha que surgir das classes de equivalência das representações simbólicas" OTTE (1993; p. 231), fazendo alguma referência e descrição sobre a realidade ou parte dela.

Ao mesmo tempo, essas propriedades foram igualmente importantes e fundamentais para a formação do conceito abstrato de função. Essa concepção de relação funcional como uma relação simples de *input-output* ou como uma cadeia de causa-efeito, sem propriedade alguma atribuida a eles, já era perseguida desde o começo do século XIX, porém, se essa concepção poderia ou não fornecer algum resultado, era imprevisível.

Com isso, a que o conceito de função deveria ser conectado? À sua representação simbólica ou a uma descrição estrutural? Era uma necessidade que na própria Matemática urgia avançar e resolver qual caminho a ser adotado pela comunidade. Se por um lado em 1834, Lobatschewski usa de uma heterogeneidade e pluralidade oriunda da enumeração de diferentes modalidades, pelas quais uma correspondência funcional poderia ser dada e que fundamentam a formação de conceito abstrato-teórico de função pelo processo de definição por abstração, dessa forma, ele descreve uma função como:

> A definição geral exige que uma função de x seja um número para cada x dado, e que ele varie progressivamente com o x. O valor de uma função pode ser dado por uma expressão analítica, ou por uma condição que forneça um meio de verificar todos os números e escolher um entre eles; finalmente, pode existir a dependência, mas permanecendo todavia desconhecida. GRATTAN-GUINNESS, (1970; p. 50) apud OTTE, (1993; p. 231)].

Dirichlet por sua vez, indica como o conceito pode ser caracterizado apenas por uma relação *input-output* , ou seja, "se para cada valor de x num intervalo é associado, por qualquer meio, um certo valor de y, então y deve ser chamado uma função de x". OTTE; (1993; p. 232). Isso trouxe muitas dificuldades e dissabores na Matemática ao longo de todo século XIX, principalmente pelo fato de muitos concordarem que essa definição é insuficiente para as necessidades da Análise, pois funções desse modo não possuem propriedades gerais e assim são suprimidadas todas as relações de valores funcionais para diferentes valores do argumento. Essa concepção conceitualmente abstrata de função transforma de inicio o próprio conceito num objeto completamente desconhecido, pois não se tem como antecipar o comportamento futuro de uma tal função, pois não se tem idéia se os *inputs* se comportaria da mesma maneira em áreas de diferentes aplicações.

Hankel, conforme citado em Otte (1993), informou que com essas motivações é que a nova concepção de função ligou-se indissoluvelmente ao 'princípio da continuidade'. Na definição de funções contínuas, apresentando-se assim, uma certa circularidade ou auto-referencialidade[5]. Ele ainda comenta que:

---

[5] Em vez de se referirem a um evento ou a um fato ocorrido no mundo, como por exemplo, os filmes, a propaganda e até mesmo a imprensa etc, eles referem-se a si mesmos.

> O conceito especial de continuidade ou de função contínua não é definível sem o pressuposto de uma concepção bem geral da conexão funcional; por sua vez, estas concepções gerais não são matematicamente desenvolvíveis sem a concretização de propriedades específicas, como a da continuidade. Dessa forma surge uma circularidade que revela que significados conceituais são processos que se desdobram na atividade epistemológica. Isto é particularmente indicado no conceito de complementaridade. (OTTE, 1993, 233).

Essas exigências continuam a ocorrer, quando se observa que o conceito moderno de função contínua está indissoluvelmente ligado à concepção moderna do contínuo dos números reais. Nesse aspecto, novamente surge a complementaridade do conceito de função, ou agora do sistema dos números reais como interação entre concepções holísticas e contínua por um lado e conceitos discretos e operativos por outro lado, principalmente por causa das dificuldades lógicas para construir esse contínuo a partir dos números inteiros, pois nesse conceito ocorrem definições não-predicativas.

De uma forma resumida, conclui Otte (1993), o conceito de função tem uma dupla raiz e engloba ao mesmo tempo a tese de que ele só poderia, efetivamente ser desenvolvido numa complementaridade entre aspectos operativos e concretos. De outra forma, se pode dizer que “as alterações de estado e de natureza das coisas reais no tempo, ao lado das conexões causa-efeito, constituem experiência essenciais para a segunda raiz do conceito de função” WEYL H. (1917; p. 34 apud OTTE (1993; p. 229), é o seu lado descritivo.

Todo esse fundamento conceitual indica para a necessidade que, o ser humano, no processo de reflexão e de aprendizado constante que lhe é característico enquanto ser pensante, leva a todo instante a sedimentar esse modo de pensar, construindo instrumentos seja em termos de objetos concretos como de idéias. Esses instrumentos são aperfeiçoados, generalizados, abstraídos, armazenados e obviamente repassados para as gerações vindouras. Na vida real, para reutilizar esses instrumentos, normalmente é necessário buscar relações entre esses instrumentos e a nova situação de aplicação ou pelo menos readaptar. E quando isso recai no sistema educacional, no processo ensino-aprendizagem? Como os educadores pensam? Como a Psicologia trata isso?

Apesar da existência de inúmeras crenças sobre a Matemática e suas formas de abordagem no processo educacional e na visão dos educadores, Thompson (1992), na sua revisão da literatura sobre concepções e crenças dos professores acerca da Matemática, destaca quatro classificações possíveis sobre o tema, a saber, por ordem cronológica de aparecimento, as de R. Skemp surgida em 1978, as de L. Copes em 1979, S. Lerman em 1983 e P. Ernest em 1988.

Apenas para efeito de situar-se, serão citados rapidamente o objeto de referência de cada um dos autores mencionados:

Skemp (1989) distingue a Matemática 'instrumental' da Matemática 'relacional' tendo em consideração a forma de conhecimento que cada uma reflete.

Copes (1979), propõe quatro modelos de concepções acêrca da Matemática: a absolutista, a multiplista, a relativista e a dinâmica. Ele identifica cada uma dessas concepções com o conhecimento matemático predominante em diferentes épocas históricas.

A concepção absolutista da Matemática prevaleceu desde o tempo dos Egípcios e dos Babilónicos até meados do século XIX. A Matemática é, nessa perspectiva, vista como uma coleção de fatos cuja veracidade é passível de ser verificada no mundo dos objetos físicos.

Para Copes (1979), a concepção multiplista da Matemática teve o seu nascimento coincidente com o advento das Geometrias não-euclidianas. Nessa perspectiva, os conteúdos matemáticos já não precisam ser observáveis em fenômenos físicos. A concepção multiplista da Matemática admite a coexistência de sistemas matemáticos diferentes que podem contradizer-se entre si.

A concepção relativista da Matemática surge quando deixou de se tentar provar a consistência lógica dos diferentes sistemas não-euclidianos e se passou a aceitar a sua coexistência como sendo todos igualmente válidos.

A concepção dinâmica da Matemática caracteriza-se pela adesão a um sistema ou a uma abordagem particulares definidos no âmbito da concepção relativista da Matemática.

Lerman (1983), adianta duas concepções acerca da Matemática: a absolutista e a falibilista. Para esse investigador, essas duas concepções correspondem a duas escolas de pensamento: a euclidiana e a quasi-empírica[6].

Do ponto de vista da concepção absolutista, "toda a Matemática se baseia em universais e absolutas fundações, baseando-se no paradigma do conhecimento: a certeza, o absoluto, valor-livre e abstração com suas conecções ligadas ao real possibilitando mundo de uma natureza platônica " THOMPSON (1992; p. 132).

Do ponto de vista da concepção falibilista, "a Matemática desenvolve-se por meio de conjecturas, de provas e de refutações, e a incerteza é aceita como inerente à disciplina". THOMPSON, (1992; p. 132).

[6] O quasi-empirismo, como abordagem filosófica, destaca que a Matemática constitui uma atividade humana, simultaneamente individual e social, que decorre de um diálogo entre pessoas que tentam resolver problemas. Os produtos matemáticos podem necessitar de renegociação à medida que mudam os padrões de rigor ou que emergem novos desafios e significados. É pela partilha e discussão crítica de idéias relativas aos objetos matemáticos que se torna possível o reconhecimento de saberes matemáticos novos, o alargamento, correção e rejeição de teorias.
O quasi-empirismo não dá resposta a todos os problemas relativos à filosofia da Matemática. No entanto, mais importante que isso, permite levantar questões fundamentais: Como são criados os objetos matemáticos? Como explicar o sucesso das aplicações da Matemática na compreensão do mundo físico e de outras ciências?

P. Ernest (1989), por sua vez, considera três concepções acerca da Matemática: a concepção baseada na resolução de problemas; a concepção platônica; e, a concepção instrumentalista.

A primeira concepção, baseada na resolução de problemas, vê a Matemática como um campo humano de conhecimentos em continuada expansão e invenção e como um processo a que acrescenta um conjunto de conhecimentos. A Matemática não é concebida como um produto acabado.

A segunda concepção, a concepção platônica da Matemática, vê essa área do conhecimento como um corpo de conhecimentos estático. A Matemática, nessa perspectiva, é vista como um produto imutável. A Matemática é descoberta, não é criação.

A terceira e última concepção acerca da Matemática adiantada por esse autor, considera-a como uma caixa de ferramentas, em que se acumulam fatos, regras e habilidades que serão usados pelos ‘artesãos capacitados’ na procura de alguma justificação que lhes é externa. A Matemática é vista como "um conjunto de regras e de fatos não relacionados, mas úteis" THOMPSON (1992; p. 132).

A visão que será abordada nesse trabalho, refere-se ao primeiro dos quatro autores acima citado, Richard Skemp, que foi um dos primeiros a juntar aspectos da psicologia com a educação, sendo, nesse caso, importante esse passo para discutir, de maneira epistemológica a questão: a relação entre pensamentos.

1.3. Richard R. Skemp: O pensamento instrumental e o pensamento relacional

O propósito dese assunto agora é buscar definições, descrições e problematizações que justifiquem a idéia inicial de Pensamento Relacional e como ele pode ser importante para a Educação, principalmente para a Educação Matemática, na visão de um psicólogo.

Qual a profundidade da relação entre o ato de compreender e o pensamento relacional? Quem melhor pode fornecer esse ponto de partida, visando a refletir sobre como ocorre o próprio pensamento humano é Richard R. Skemp, considerado o principal pioneiro em Educação Matemática a integrar as disciplinas de Matemática, Educação e Psicologia. Ele nasceu em Bristol no ano de 1919, o filho de Professor A. R. Skemp da Universidade de Bristol, foi estudante da Fundação na Wellington College, Berkshire (1932–1937), com uma Bolsa de estudos na Universidade Aberta de Hertford, em Oxford, (1937–1939, 1945–1947). Depois de completar a graduação na Faculdade de Hertford, ele tornou-se um professor de Matemática, durante dois anos na Oundle School e dois anos na Ray St. Antony, Oxford. O interesse dele em como as crianças aprendem, foi tão forte que o levou a voltar novamente a Faculdade de Hertford em 1952, com a idade de 33 anos, para cursar um segundo bacharelado, agora em psicologia. Completou o Ph.D. em Psicologia na Universidade de Manchester em 1959, tornando-se um Conferencista em Psicologia (1955–1962) e subseqüentemente tornou-se um Conferencista Sênior (1962–1973), dirigindo a Unidade de Estudo de Criança. Em 1973, com 54 anos, tornou-se Professor de Teoria Educacional na Universidade de Warwick, permanecendo até sua aposentadoria em 1986. Foi também Presidente do Grupo Internacional para a Psicologia de Educação de Matemática em 1980 e, em sua memória, criou-se o Fundo Memorial Skemp para prover apoio para as participações nas conferências de PME.

Para Skemp, as suas preocupações com questões educacionais teve uma forte influência com a maneira de como se desenvolveu seu próprio processo educativo, as preocupações, o estilo de vida, sua completa dedicação com o estudo e pesquisa, reforçando a idéia que ensinar ou ser um educador não é simplesmente alguém que ‘divulga’ informações. Dessa forma, o cerne do processo educacional não é o conteúdo simplesmente, mas sim a forma como ele se relaciona com o indivíduo e o contexto.

Seu livro The Psychology of Learning Mathematics, publicado em 1971, foi traduzido em holandês, húngaro, espanhol, japonês, chinês, e grego. Seu outro livro, Intelligence, Learning, and Action, publicado em 1979, apresenta um modo novo de pensar sobre inteligência humana, sua relação com o educando e a educação. Esses dois livros serviram de base para um projeto que durou oito anos, fundado pela Nuffield Foundation and the Leverhume Trust, iniciado em 1978 intitulado como Primary Mathematics Project for the Intelligent Teaching of Mathematics (PMP). De 1980-1982 ele foi Presidente do Grupo Internacional Psychology Mathematics of Education (PME). Para as Matemáticas desenvolvidas nas escolas primária foi produzido um material referencial denominado 'Atividades Estruturadas para Matemática Primária', que foi publicado como um recurso para professor da Inglaterra em 1989 acompanhado por 'texto teórico' para professores, Mathematics in the Primary School. Esse mesmo material foi republicado em forma expandida em 1993 e 1994.

Até sua morte em 1995, Richard Skemp foi conferencista e publicou amplamente no campo de aprendizagem humana e Educação Matemática. Embora ele fosse teórico educacional de renome internacional, ele teve um contínuo e amplo interesse no envolvimento com crianças escolares, seus respectivos professores e os problemas especiais, associados com aprender Matemática na escola. Isto produziu uma base teórica sobre aprendizagem inteligente, para o desenvolvimento de um programa de Matemática primoroso durante os anos de escola primária.

Então para Skemp (1989), se um aluno sabe resolver um problema ou alguém sabe jogar um jogo qualquer ou um mecânico sabe consertar um motor, não significa necessariamente que ele entende totalmente seu funcionamento. Por exemplo no caso do mecânico, ele pode saber a sequência de procedimentos para corrigir defeitos ou realizar desmontagem ou montagem. Porém, até onde vai o limite do entendimento? Com que intensidade pode-se afirmar que alguém entendeu algo ou entendeu por completo? Para Michael Otte pode significar que, de alguma forma ele entende, senão nada aconteceria e o motor não poderia ser consertado. E ainda não se pode subestimar o avanço do fato de que algum conhecimento implícito foi tranformado em conhecimento explícito, que para Platão ou Sócrates, todo avanço intelectual ocorreu dessa maneira (Diálogo com Ménon — sobre a virtude). O uso da idéia de *falsos amigos* ou igualmente conhecida como *falsos cognatos* apresentadas por Skemp (1989), é uma forma de apresentar uma situação ou contexto em que ele destaca aquilo que ‘pareceria’ óbvio, mas que na realidade, não é o que aparenta ou o que deixa ‘transparecer’.

Richard Skemp (1989) apresentou e discutiu duas visões de pensamento (pensamento relacional e pensamento instrumental) em dezembro de 1976, num artigo publicado *no the journal of the Association of Teachers of Mathematics*, Great Britain integrando-as na linguagem da Educação Matemática que posteriormente transformou-se em prólogo de sua obra, ‘Mathematics in the primary school’, (1989), publicada por Routledge, London. Essa obra será nossa referência principal sobre o pensamento de Skemp.

Estruturada com 225 páginas, sua obra é constituída por esse prólogo já referido e seus capítulos aglutinados em dois blocos, sendo o primeiro deles com características teóricas e o segundo referindo-se a atividades e discussões envolvendo aspectos de prática pedagógica. O bloco teórico é formado pelos seguintes capítulos e suas descrições mencionadas com maior detalhes, considerando serem elas importantes para essa fundamentação teórica:

Capítulo 1: “Por que a Matemática é ainda um assunto problemático para tantos?” Skemp (1989) relata, nesse capítulo, as inúmeras dificuldades encontradas e destaca que, apesar de muitos anos de esforços para melhorar a Educação Matemática, o nível de melhoria parece ter sido muito pequeno. O problema tem sido difundido na comunidade. Ele destaca que "a menos que se possa identificar pelo menos algumas das razões sobre o porque Matemática ainda é um assunto problemático para muitos, não será possível supor que esforços do futuro terão mais êxito que os do passado". SKEMP (1989; p. 22, 23)

Ele destaca ainda, que o problema não será resolvido de um ponto de vista limitado somente na Matemática, isto é, confiar só nas mudanças de conteúdo. Torna-se necessário uma perspectiva mais ampla.

Em resumo, na perspectiva do autor, Matemática pode ser vista como um particularmente poderoso e forte exemplo do funcionamento da inteligência humana. Também como uma poderosa e adaptável ferramenta mental, e amplificador da inteligência humana. Se essa visão é aceita, conseqüentemente os estudantes de qualquer idade não terão sucesso com a Matemática a menos que eles sejam ensinados de modo que possibilite a criar ou induzir a sua própria inteligência, ao invés de participarem de uma rotina de aprendizagem, no âmbito do uso do conhecimento da Matemática. Para fazer isto é preciso entender mais profundamente como a inteligência funciona. Somente medidas de inteligência não informam isso.

Ele indica ainda que se precisa ensinar Matemática de maneira que haja continuidade entre a escola e o mundo externo. Esse já é o caso com o ensino da leitura e da gramática, mas com Matemática há um falso contraste entre a Matemática escolar e a Matemática do mundo adulto. E a Matemática usada lá fora não é a mesma ensinada na escola.

No Capítulo 2, com o título: 'Inteligência e compreensão', Skemp (1989) ao fazer uma comparação entre o que ele define como **aprender por hábito** – pensamento instrumental (memorizando fórmulas e regras) e o aprender por meio do **uso da inteligência** — pensamento relacional, ele indica que "a inteligência já foi descrita como um *agrupamento de informações e conhecimentos relacionados e estruturados* que juntos são muito importantes. Dentre essas, a habilidade para aprender, que de certo modo é qualitativamente diferente da aprendizagem desenvolvida por meio do hábito". SKEMP (1989; p. 32)

Ele pretende, ainda nesse subcapítulo, discutir uma visão de que, uma aprendizagem inteligente, muitas vezes colocada como entendimento relacional, consiste não em memorizar uma coleção de regras, mas no edifício erigido por meio de estruturas de conhecimento, das quais uma grande variedade de planos de ação pode ser derivado, como e quando exigido. Construir esses planos de conhecimentos existentes é uma função da inteligência.

Essas referências feitas às estruturas de conhecimento mencionadas por Skemp (1989; p. 36), e, da mesma forma, referida no parágrafo anterior, destacam de novo a importância do explícito, porque só o que fica explícito pode ser transformado em objetos de reflexão.

Skemp (1989; p. 37-39) indica que essa é uma forma muito mais 'econômica' de aprender, pois o número de planos que podem ser derivados da mesma estrutura de conhecimento é enormemente maior que o número de regras que podem ser memorizadas separadamente. Da mesma forma, o entendimento relacional ou aprendizagem inteligente é mais adaptável, visto que planos podem ser construídos para adequar circunstâncias para as quais uma regra não tenha sido inventada e também apresenta-se de maneira mais sólida e mais poderosa, visto que planos são feitos individualmente para ajustar a uma determinada situação, e é assim provável que será mais efetivo.

Skemp afirma que a aprendizagem da maioria dos assuntos requer uma combinação de aprendizagem inteligente e aprendizagem por meio de hábito, até por que, se o que ele define como aprendizagem inteligente se configura posteriormente como uma teoria, como já foi mencionado anteriormente em Cassirer, em uma teoria nunca se aplica ela mesma. Muitas teorias produzem, sintetizam, generalizam, instrumentos, para que, principalmente, possam ser utilizadas em novas teorias. Não faz sentido criar uma única espécie de chave (ferramenta) para cada um dos modelos de motor ou máquina a ser construída e idealizada. Por isso é necessário o pensamento instrumental. Skemp (1989; p. 35) indica que "a proporção dessa combinação varia de acordo com os assuntos. indica que para Matemática, ela pode ser calculada como 95 % de aprendizagem inteligente e 5% de aprendizagem por meio do hábito." SKEMP (1989; p. 37). O termo geral 'Esquema' definido e utilizado por ele, engloba conhecimento ou saber estruturado, sínteses, diagramas esquematizados, além de mapas cognitivos e modelos mentais.

Na atual teoria de inteligência referenciada por Skemp (1989; p. 41-42), entendimento ou compreensão é concebido como **relacionando novas experiências ou idéias a um esquema já existente**. Até que essa estratégia seja disseminada e alcançada, nós — reporta Skemp (1989), ficou-se impossibilitado de planejar como alcançar as metas em qualquer situação que envolva essas formas de experiências ou idéias. Por falta de referenciais, se sentirá perdido e incapaz de conseguir superar as dificuldades. Ao se trabalhar com a compreensão como forma de pensamento relacional, isso estende e amplia nossos poderes de adaptação a uma nova situação: Assim, se acredita estar correto no sentimento intuitivo de que compreensão é importante, indica ele.

Continuando a analisar sua idéia, ele coloca que "aprender por meio do hábito desenvolve a dependência de um estudante em um professor para continuar a prover regras para cada novo modelo de situação." SKEMP (1989; p. 43-44) Em oposição, ele argumenta que a aprendizagem inteligente desenvolve a confiança de um estudante nas suas próprias habilidades para lidar com dificuldades em situações novas, e percebe seu professor como alguém que pode lhe ajudar a ampliar sua própria compreensão.

Infelizmente, não são tantas as experiências propostas e desenvolvidas na formação desse modelo de ação, atuando com alunos, preocupados em "criar maneiras mais expontâneas" esses esquemas idealizados por Skemp (1989; p. 44). Esse modelo de estratégia, não resolve o problema do ensino da Matemática e nem serve de referencial.

Ele indica que teorias são modelos mentais e que são mais abstratas e gerais do que o ‘senso comum’. Elas aumentam nosso poder para compreender as causas invisíveis por trás dos eventos visíveis. Ele continua, “Se, como professores, nós intervirmos nos processos mentais de uma criança em desenvolvimento, sem uma teoria apropriada estaremos causando mais danos do que benefícios.” SKEMP (1989; p. 45-46).

No Capítulo 3 se tem: “ A formação de conceitos matemáticos”, em que Skemp (1989) inicia esse capítulo com uma citação de Poincaré em seu artigo ‘Mathematical Creation’ (1908)

> Um primeiro fato deveria surpreender-nos, ou de preferência surpreender-nos-ia se nós não fôssemos acostumados com isso. Como pode acontecer que existam povos que não compreendem a Matemática? SKEMP (1989; p. 49).

Ele destaca que a Matemática no nível escolar não requer aptidões especiais em estudantes, assim como a exemplos de outras disciplinas. Porém, é apresentada de maneira muito mais abstrata e hierárquizada que a maioria dos outros assuntos que as crianças aprendem com a mesma idade, e isto necessita de especiais esforços de professores, incluindo os professores que atuam de forma presencial enquanto outros que preparam livros e outros materiais pedagógicos.

Ele apresenta a definição de abstração como um processo pelo qual se dá conta ou se conscientiza das regularidades na experiência, e que se pode reconhecer em futuras ocasiões. Ela está, desse modo, no como se pode fazer uso da experiência passada para nos guiar no presente. Conceitos são incorporações mentais dessas regularidades. Skemp (1989; p. 52–60) caracteriza conceitos primários como sendo aqueles que são obtidos de experiência sensória; Conceitos secundários são obtidos de outros conceitos que podem ser conceitos primários ou outros conceitos secundários. Quanto mais tempo esse processo é repetido, quanto mais abstrato e remoto de experiência sensória os conceitos se tornam. ‘Alta-ordem’ e ‘baixa-ordem’ referem-se a maiores e menores graus de abstração.

Ele salienta que novos conceitos não podem ser comunicados diretamente. Cada estudante tem que os construir para si mesmo, na sua própria mente. Mas um professor pode ajudar imensamente os estudantes a fazer isto, se ele souber como. Ajudando desse modo possivelmente pode, por conveniência, ser chamado de 'comunicando um conceito', contanto que se lembre da natureza indireta desse processo.

> Indica-se, neste sentido, que existem dois modos de comunicar um novo conceito. Se o novo conceito é da mesma ordem ou de uma ordem mais baixa, usa-se o esquema disponível ou o método da explicação é satisfatório. Porém, se o novo conceito é de uma ordem mais alta que esses, nos estudantes que usam um esquema disponível, o método de dar exemplos cuidadosamente escolhidos deve ser usado. Isso é particularmente freqüente ao aprender Matemática. SKEMP (1989; p. 62).

Visto que em Matemática esses exemplos são eles mesmos conceitos, é essencial ter certeza que esses estão disponíveis na própria mente do estudante. Para planejar isto, Skemp (1989, 68) segere que fazer uma análise conceitual do assunto é essencial. Os resultados de uma tal análise podem ser representados convenientemente em um mapa conceitual. É importante a conscientização dos professores da clareza da construção desses mapas, pois será util para auxiliar os alunos a entender seus próprios mapas.

No Capítulo 4 ele discute "A construção do conhecimento matemático. Para ele, o conhecimento estruturado (esquema), teria que ser construído por todo estudante, individualmente, na sua própria mente. Ninguém pode fazer isto diretamente para eles. Mas um bom ensino pode ajudar muito, e o mais abstrato e hierárquico é o conhecimento estruturado (esquema) que será construído, o quanto mais puder ajudar mais é necessário.

A melhor ajuda não seria a tentativa de substituir o esquema que o próprio estudante constrói numa atividade em que ele tem que pensar, depois fazer um desenho no quadro, usando o mundo físico, mas entendendo como ele se dedica sobre sua tarefa, fornecendo situações de aprendizagem que são favoráveis a construção de esquemas.

A seguir, meios de construir e testar. Pode-se distinguir três modos de construir, e três modos correspondentes de testar: Veja na figura 1 a seguir:

CONSTRUINDO		TESTANDO
De nossos próprios encontros com o mundo físico: **Experiência**	Modo 1	Contra expectativa de eventos no mundo físico: **experimento**, **predição**
Do esquemas de outros: **Comunicação**	Modo 2	Comparação entre esquemas de outros: **discussão**
Do interior, por formação ou conceitos de alta-ordem: por meio de extrapolação, imaginação, intuição: **Criatividade**	Modo 3	Comparação entre o próprio conhecimento existente da pessoa e convicções: **consistência interna**

FIGURA 1: ESQUEMA CONSTRUINDO E TESTANDO DE SKEMP

Skemp (1989; p. 74) indica que esses modos de estruturar são mais poderosos quando usados em combinação, situações de aprendizagem tão boas são as que fornecem oportunidades para usar todos esses, entretanto, não necessariamente na mesma atividade.

Situações de aprendizagem desse estilo incluem:

(i) atividades práticas estruturadas;

(ii) aprendizagem cooperativa em pequenos grupos de crianças;

(iii) aquelas que usam a criatividade natural de crianças.

Ele comenta que, quando várias partes estiverem conectadas, o todo resultante pode ter propriedades importantes que teriam sido difícil de predizer o conhecimento dos componentes se separados. Para acontecer, essa estrutura é essencial algumas das propriedades de esquemas bem-estruturado, são assim sugeridos por Skemp (1989; p. 81).

(i) Eles tornam possível a compreensão, e são relacionado à adaptabilidade;

(ii) Eles fornecem uma fonte rica de planos de ação e técnicas;

(iii) Esquemas compartilhados facilitam a cooperação;

(iv) Aprender é mais fácil;

(v) Retenção na memória é melhor;

(vi) É mais fácil para futuras aprendizagens;

(vii) Aprendizagem inteligente é intrinsecamente prazerosa para a maioria das crianças, e não depende de recompensas externas ou punições.

Sua proposta ressalta que, por causa da importância do esquema para aprendizagem das crianças a longo prazo, é preciso tentar assegurar isso em todos os estágios, os novos conceitos podem ser aprendidos para serem assimilados ao esquema disponível das crianças. Isso requer cuidadoso planejamento a longo prazo.

> Às vezes nós encontramos idéias que não podem ser assimiladas a um esquema disponível, e a re-construção do esquema é requerida antes disto poder acontecer. Isto é freqüentemente mal recebido e difícil. Por essa razão, e para minimizar a necessidade por reconstrução em futuras ocasiões, é preciso de um cuidado particular com os fundamentos dos conceitos nos quais um esquema será construído. SKEMP (1989; p. 83)

Se as condições acima descritas, tanto no parágrafo anterior como na própria citação de Skemp (1989), não são conhecidas, e levadas a termo, então o aprender com compreensão pode ser comprometido, e então só restaria aprender por meio da memorização e da rotina de repetição, é o que ele setencia. Para a Matemática isto é tão ineficiente, que conseguir um progresso adicional de qualquer forma seria improvável, e os alunos desistem facilmente, complementa Skemp (1989; p. 86).

No Capítulo 5: "Compreendendo o simbolismo matemático", Skemp (1989; p. 90) enfatiza que o poder da Matemática está nas idéias; mas o acesso para essas idéias e a habilidade para os comunicar, depende de simbolismo matemático. Ele também indica que é pelo uso de símbolos que se alcança livremente, e de forma racional, o controle do próprio pensamento.

Para tanto, um sistema de símbolo consiste de:

um conjunto de símbolos	**→ Corresponde →**	**a um conjunto de conceitos**
	Juntamente com	
um conjunto de relações entre os símbolos	**→ Corresponde →**	**a um conjunto de relações entre conceitos**

FIGURA 2: SISTEMA DE RELAÇÕES ENTRE SÍMBOLOS E CONCEITOS, DE SKEMP

Sistemas de símbolos são estruturas superfíciais em nossas mentes; já estruturas conceituais são estruturas profundas. Então para Skemp (1989, 94-97), fazer Matemática, envolve ambos os níveis: a manipulação de profundos conceitos matemáticos, usando símbolos como tratamento combinado e rótulos. Mas para muitas crianças (bem como adultos) esses conceitos não estão ali visíveis. Assim eles aprendem manipular símbolos vazios, tratamentos sem ligações, rótulos sem conteúdos, pois são ensinados dessa maneira, sem relações conscientes.

A curto prazo, comenta Skemp (1989; p. 94-97), as estruturas superficiais podem ser construídas mais facilmente, desde que comunicações simbólicas estejam disponíveis. Se as estruturas conceituais forem fracas ou não existentes, as estruturas superficiais continuam se constituindo num gasto inútil, a ponto de que nenhum retorno pode ser obtido para o qual essa informação não teria nenhuma chance de ser assimilada a uma estrutura conceitual.

Aprendendo num nível superficial, pode ser mais fácil a curto prazo, mas fica impossivelmente difícil a longo prazo por causa de sua falta de consistência interna. Em contraste, as estruturas conceituais da Matemática são particularmente coerentes e interiormente consistente, portanto, a longo prazo elas são muito mais fáceis de aprender e reter.

A dificuldade que muitos têm com símbolos matemáticos surge em parte da forma reduzida, condensada, e freqüentemente da natureza implícita dos símbolos; mas amplamente também da ausência ou falha do profundo esquema matemático que dá para os símbolos seu significado. Como a dor sentida, o local da dificuldade não está no local onde é experienciada. O remédio engana igualmente indicando principalmente em outro lugar, isto é no edifício superior das estruturas conceituais.

Assim, indica Skemp (1989), é importante para nós como professores, usar métodos que ajudam as crianças para construir as suas estruturas conceituais, direcionando no princípio, e continuamente depois disso. Esses modos incluem:

(a) sequenciando novos materiais esquematicamente;

(b) usando atividades práticas estruturadas;

(c) começando com uma abordagem fazer-e-explicar, acompanhada de trabalho escrito quando as ligações entre pensamentos e símbolos verbais são bem estabelecidas.

Quanto ao segundo bloco, referente a atividades práticas, se tem no Capítulo 6, entitulado “Fazendo um começo”, em que Skemp (1989; p. 109) apresenta como a teoria, até então apresentada, pode trazer vantagens pedagógicas para o desenvolvimento da aprendizagem matemática. Esse material apresentado tem a função de fazer com que as crianças deixem de lado o material físico para desenvolver um sistema de idéias. Pretende-se que as aplicações práticas alí sugeridas, orientem as crianças a desenvolver o lema: '*observe e escute; reflita e discuta*'. As atividades ainda apresentam, na sua maioria a seguinte estrutura: materia; regra do 'jogo'; discussão da atividade; descrição do conceito, discussão das habilidades e discussão dos conceitos. Nesse capítulo ainda, Skemp (1989; p. 111-112) relembra vários aspectos importantes destacados nos capítulo anteriores, principalmente os dois anteriores.

No Capítulo 7, "Os conteúdos e estrutura da Matemática Primária" Skemp (1989; p. 157) discute e exemplifica o currículo no processo de ensino da Matemática Primária por meio de atividades que desencadeiam ações a serem desenvolvidas pelas crianças, tais como projetos, trabalhos estruturados, interdependência entre processo e conteúdo, uso de tecnologias etc.

No Capítulo 8, em "Administração para aprendizagem inteligente", Skemp (1989; p. 178) comenta sobre a autoridade em dois níveis: Autoridade de posição (hierarquia) e autoridade de conhecimento e como isso deve ser compartilhado entre alunos e professores

Para Skemp (1989; p. 185), aprendizagem inteligente requer uma aprendizagem de cooperação e em vez de buscar respostas para *como os professores podem motivar as crianças para aprender Matemática?* essa questão possa ser substituída por: *de que modo podem organizar os professores aquela aprendizagem matemática de modo que ela se torne para as crianças capaz de satisfazer alguns dos desejos naturais delas?*

No Capítulo 9, ele aborda "Influências emocionais em aprender". Nesse capítulo Skemp (1989; p. 189) identifica atividades que procuram desencadear e fluir emoções durante o ato de aprendizagem, procurando formas de promover confiança e segurança e como melhor canalizá-las. Outros conselhos e exemplos de situações que previnem ou diminuem o desgaste emocional presente em situações de aprendizagem são apresentados e discutidos por ele

No Capítulo 10 e último, em "Continuando o desenvolvimento profissional", Skemp propõe conselhos e sugestões para que professores continuem a desenvolver novas situações visando aprimorar junto a seus alunos a aprendizagem em matemática. Ele cita uma frase marcante descrita num prato de metal, que resume claramente sua expectativa quanto à educação:

> Os que aprendem de alguém que ainda está aprendendo, bebe de uma fonte de fluxo corrente;
>
> Os que aprendem de alguém que deixou de aprender, bebe de uma lagoa estagnada. SKEMP (1989; p. 211).

Agora, será analisado o seu artigo principal e que norteou seu trabalho como uma proposta de ensino e que posteriormente, tornou-se prólogo dessa mesma obra até então descrita. Esse prólogo não apresenta uma estrutura geral clara. São apresentados pontos isolados colocados muitas vezes de forma aleatória, fazendo ora defesas ora contrapontos envolvendo muitas vezes exemplos que não são muito condizentes com a efetiva realidade. Às vezes essa realidade aparece um tanto estereotipada.

Ao analisar o artigo, ele indica o termo 'compreensão' sendo que por si só significa compreensão relacional e ao mesmo tempo corresponde a uma aprendizagem inteligente, já a compreensão Instrumental indicada, Skemp (1989) a caracteriza como aprendizagem por meio do hábito.

Sua fundamentação inicial surge com a discussão do significado do termo francês Faux Amis (Falsos Amigos) que é usado para descrever palavras que são parecidas, ou muito semelhantes, ao ser comparado com o Inglês, mas cujos significados são diferentes. Dessa forma, ele indica que a palavra 'histoire' em francês seja um desses exemplos, pois corresponde no inglês story (e não history), mas cujos significados são diferentes. Pode ser discutido que os dois conceitos são pontos diferentes no mesmo espectro entre fato e ficção, history pode depender de quem você ouve isto, e story pode estar relacionado a contexto histórico, pois pode ser um relato verdadeiro, uma reportagem. Ainda esses conceitos são separáveis, History nas escolas é ensinado separadamente da story (Literatura inglesa).

Skemp (1989) cita duas palavras que se apresentam como *Faux Amis*. Essas confusões seja de significado ou quanto à forma de interpretação é o que ele apresenta como uma das raízes das dificuldades que existe em Educação Matemática.

Um das palavras é 'compreensão.' Já Stieg Mellin-Olsen, da Universidade de Bergen, há alguns anos atrás indicava usar dois significados dessa palavra. Distinguindo-as 'compreensão relacional' de 'compreensão instrumental'. Skemp (1989), sempre entendeu que compreensão 'é saber ao mesmo tempo ***'o que'*** e ***'porque'***. Dessa forma, ele nem considerava compreensão instrumental como uma forma de entendimento ou de saber, sendo simplesmente no passado descrita como mera informação ou 'regras sem razões'.

Tendo como referência de apoio teórico, usa-se o trabalho de John A. Fossa (2001), atualmente professor na UEPA, em que, analisando também a obra de Skemp (1989), realiza vários comentários fundamentando esse trabalho. Dessa forma, a respeito do prólogo da obra de Skemp (1989), destaca-se que:

> geralmente contrastamos dois modos de conhecimento: o saber e a compreensão. O primeiro é somente o conhecimento 'do que' de algo, enquanto o segundo adiciona o 'porque' ao 'do que'. Assim, o saber é geralmente considerado mais superficial, preso a fatos concretos e, portanto, limitado às situações originárias desse saber. Em contraste, a compreensão é mais profunda, mais abstrata e, portanto,

> proporciona ao sujeito uma capacidade de agir criativamente em situações novas. FOSSA (2001; p. 83)

Já Aristóteles apresentava a distinção num formato integrado, em que ele pensava que a sabedoria (conjunto de saberes, ciência) consiste no conhecimento das causas e dos 'primeiros princípios' (conhecimento dos porquês).

Semelhantemente, Otte (2007), comenta verbalmente, sobre as distinções entre os 'o que' e os 'porques' utilizando-se de exemplos: "Se quero apenas saber **que** o valor do cálculo de 2 + 2 é 4, posso aceitar por inúmeras razões, inclusive de forma apodíctica que isso seja verdadeiro, — isso é saber instrumental— mas se eu quero saber **porque** 2 + 2 = 4, ora então devemos provar tendo por base os Axiomas de Peano" — isso só consigo utilizando a teoria, ou seja, pensamento relacional— E, dessa forma, esse 'porque' presente na distinção de Aristóteles e, da mesma forma, indicado por Fossa (2001), tem a ver com o 'porque' de Peano? Não é pela teoria que surgem os axiomas? Dessa feita os axiomas não são transformados em meros instrumentos para melhor explicar a teoria? É preciso avançar um pouco mais sobre o trabalho de Skemp (1989) para buscar alguma conclusão.

Skemp (1989) não percebia, no entanto, que para muitos alunos e seus professores a posse de uma tal regra, e a habilidade para usá-la, é o que eles querem dizer por 'compreensão'. Isso fica evidente quando ele cita o exemplo da formula do cálculo da área do retângulo, em que, para uma classe de alunos, a simples apresentação e o ensino da regra de como aplicá-la, ao produzir respostas corretas pode transparecer, para esses alunos, que eles têm algum entendimento sobre o assunto (seria verídico se o objetivo desse ensino fosse apenas o exercício de expandir fórmulas e não de resolver problemas). Porém, se o professor questionar essa entendimento, informando que ela está fundada apenas no 'o que' sem que eles saibam justificar 'o porquê', eles não concordariam que de fato não compreenderam efetivamente.

Skemp (1989) indica vários outros exemplos de outros mecanismos instrumentais que são apresentados sem o devido esclarecimento do ‘porquê’ tais como regras de sinais, regras para multiplicar frações, dentre outros que são evidentes tanto nos trabalhos nas salas de aulas como nas literaturas didáticas usadas pelas escolas e desafia o leitor do referido artigo a identificar, como forma de exercício, exemplos dessas explicações essencialmente instrumentais, indicando que isso traria pelo menos três prováveis benefícios pessoais: (i) perceber como é difundida a abordagem instrumental; (ii) consolidar o contraste entre os dois conceitos e (iii) bom exercício para formular essa diferença em termos gerais.

Ele levanta a seguir, duas perguntas relativas ao uso de compreensão Relacional e Instrumental: (1) Esse assunto é importante? (2) Um modelo de compreensão é melhor que outro? comenta também que:

> ...durante anos tenho admitido como certo as respostas para ambas questões: rapidamente, ‘Sim; Relacional’. Mas a existência de um grande grupo de professores experientes e de um número grande de textos que pertencem para o campo oposto me forçou a pensar mais profundamente por que eu mantenho esta visão. No processo de mudar o julgamento de um intuitivo para um reflexivo, penso que tenho descoberto algo bastante útil. As duas questões não são completamente separadas... (SKEMP, 1989; p. 4).

No tocante à segunda questão, independente do ponto de vista de quem possa estar certo/errado ou então sobre qual delas seja melhor, em se tratando a qualquer um dos modos de compreensão, percebe-se nitidamente que ele procura enfatizar, dando uma ‘ligeira exagerada’ tendenciando para a compreensão relacional. Isso foi percebido igualmente por Fossa (2001) quando comenta: “o primeiro (Instrumental), é subentendido que o saber é algo de ruim e/ou escravizante em si mesmo, enquanto compreensão (Relacional) é boa e libertadora”. FOSSA, (2001; 83).

Skemp (1989) tenta apresentar uma certa incompatibilidade entre ambas compreensões, usando para isso um exemplo relativo a um esporte denominado futebol, num contexto semelhante ao do Reino Unido ou EUA, em que surgem dois modos de de jogar futebol: ‘Football Association’ (joga-se usandos os pés) e ‘rúgby’ (joga-se usando predominantemente as mãos). Se duas Escolas A e B fossem enfrentar-se, porém, cada escola jogasse um estilo de futebol diferente da outra, cada lado acharia que estaria usando as suas regras corretamente e por outro lado, que seu adversário estaria completamente errado e cometendo faltas constantemente.

A confusão seria total, a menos que houvesse uma conversa prévia sobre qual o estilo de futebol estaria sendo jogado naquele momento. Essa situação dificilmente poderia ocorrer em se tratando de um jogo num contexto real, porém, situações análogas envolvendo incompatibilidades podem surgir em muitas lições de Matemática, só que os alunos não têm como se recusar a participar, pois ‘faz parte do sistema educacional durante a maior parte da sua formação’, diferentemente do caso dos jogadores de football, cuja situação descrita com certeza, não se concretizaria, pois não seria um espetáculo digno de agradar as torcidas.

Skemp (1989) salienta que essa incompatibilidade matemática pode acontecer de dois modos: no primeiro, alunos cuja meta é compreender instrumentalmente, sendo ensinados por professores que querem que eles compreendam relacionalmente; no segundo modo, o caminho inverso. Ele indica ainda que o primeiro deles causará menos problemas a curto prazo para os alunos, entretanto será frustrante para o professor, pois para muitos alunos, o que eles querem são regras para eles memorizarem e com isso resolver algumas formas de exames e concursos que priorizam esse estilo de situação, não se importando em saber os ‘porquês’ e nem as justificativas/demonstrações detalhadas preparadas cuidadosamente pelos professores.

Com isso os alunos incorrem frequentemente nos erros tipicamente citados por Skemp (1989) como o caso das unidades de medidas diferenciadas, em que boa parte deles informam uma certa unidade em função principalmente do 'hábito' de se trabalhar somente com exercícios padrões vivenciados pela experiëncia e não pela reflexão de possibilidades ou não. Isso fatalmente pode gerar respostas equivocadas e assemelhadas tais como: 'Por que área **é sempre** em centímetros quadrados'. Para prevenir isso, os alunos precisam de outras regras sejam acrescentadas a essa ou que haja, naturalmente, uma compreensão relacional, de que 'ambas as dimensões devem estar na mesma unidade'.

Infelizmente a preocupação da maioria dos alunos, em função da forma como foram acostumados, de acordo com Skemp (1989), é de que se bom é o suficiente, por que deveria querer o melhor, pois isso dá muito mais trabalho...

No segundo modo, Skemp (1989) indica a outra incompatibilidade (na qual os alunos estão tentando compreender relacionalmente, mas o ensino torna isso impossível), observa-se que o exemplo reforça, porém, não convence muito, pois naquele momento o aluno estava numa situação de aprendizagem coletiva e ao ser ensinado relacionalmente, (e isso deu a entender que foi numa situação de ensino individualizado...), as chances de compreensão se ampliam e os resultados seriam bem mais previsíveis.

Quando ele comenta sobre a postura dos professores, esses equívocos ou incompatililidades, como ele descreve, são atitudes previsíveis, uma vez que depende basicamente da sua formação ou o idealismo que ele tenha condicionado no decorrer da sua experiência ou carreira docente. E é fato facilmente percebido que para muitos, o conceito de ensinar é o mesmo que reproduzir identicamente ou simplesmente é mais cômodo isso.

Nesse contexto ainda, ele discute com relação aos conteúdos ensinados, que os professores usam a denominação de 'Matemática Moderna' ou qualquer outro rótulo pedagógico vigente no movimento educacional e procuram se adequar ou se inserir no 'discurso progressista', porém, o que está sendo ensinado e aprendido continua da mesma forma 'só instrumental' como constava nos planos de ensino que foram substituídos. Isto é previsível porque além das dificuldades de acomodação/reestruturação de novas idéias aos esquemas já existentes, essas propostas são impostas e não se é conquistado/persuadido a desenvolvê-las adequadamente.

Skemp (1989) declara que essas 'inovações' e ou posturas, provavelmente têm feito mais mal do que bem, sedimentando uma incompatibilidade entre o professor e os objetivos implícitos no novo conteúdo/proposta. Ele comenta que:

> se os alunos ainda estão sendo ensinados instrumentalmente, então um 'tradicional' plano de ensino os beneficiará provavelmente bem mais. Eles adquirirão proficiência em inúmeras técnicas matemáticas que servirão para eles em outros assuntos... SKEMP, (1989; p. 8).

Um outro exemplo de atitude que pode também gerar equívocos e frequentemente comprometer todo um processo educacional, mesmo que a 'intenção' tenha sido boa, Otte (2007) verbalmente exemplifica:

> O diretor de uma certa escola, identificou um aluno que tinha sérias dificuldades de aprendizagem e, com isso, baixo rendimento escolar. Além disso, para esse aluno, o estudo não o motivava, até porque não tinha muitas aspirações profissionais e com isso problemas, para continuar seus estudos. O diretor pediu então, ajuda aos colegas professores e fez uma proposta para ajudar esses alunos a melhorarem seus estudos: cada professor 'adotava' um aluno e o auxiliava em horários extras (horário de almoço, após as aulas etc). Um pesquisador, conhecendo a intenção da proposta, questionou os professores se essa ação estaria produzindo efeitos positivos. Ele conseguiu provar que esses alunos, no entanto, pioraram, com a ajuda dos professores, pois a sobrecarga de atividades extras geradas, na realidade, deixou os alunos mais chateados e desmotivados ainda. Então, Otte continua e enfatiza: antes de fazer uma

> proposta é fundamental ter certeza de que eles querem ou não ser ajudados. Nesse caso, o diretor e os professores presumiram baseados apenas em suas intuições de que essa proposta iria de fato ajudar. Dessa forma, eles só pensaram em como ajudar esses alunos, ao invés de porque ajudá-los. OTTE (2007: verbalmente).

O segundo *Faux Amis* apresentado por Skemp (1989) é a própria palavra 'Matemática'. Ele ressalta que não é o mesmo modelo de Matemática que normalmente se fala quando se propõe em melhorar ou criticar quando está se ensinando mal. Não se refere ao mesmo nível ou estilo de conteúdo em sí, mas sim das diferenciadas formas, maneiras de abordagem, estratégias de desenvolvimento/aplicação, expectativas, objetividades, intencionalidade, mesmos os descasos, desconsiderações e despresos além de outros adjetivos que tanto qualifiquem positivamente ou não o tratamento dado a essa Matemática em questão. Em suma, esses vários tratamentos diferenciados que são aplicados às mesmas questões matemáticas é que causam distorções quanto a qualidade do conhecimento a ser adquirido, pois ainda que esteja implícito o objetivo do conhecimento a ser alcançado, a estratégia para a sua consecussão e a intencionalidade para atingí-lo faz a diferença. Não é apenas uma simples questão de mérito, se encontrar caso de que alguns professores conseguem ensinar melhor que outros o mesmo assunto de Matemática, como pensava inicialmente Skemp (1989). O caso citado sobre a atividade musical desenvolvida por dois grupos diferenciado de crianças exemplifica essa situação.

Dessa maneira, ele aproveita bem o momento para se posicionar a favor da matemática relacional colocando-se para isso numa condição de 'Advogado do Diabo', permitindo-se por meio dessa estratégia enfatizar com mais vêemencia suas convicções primeiras. Dentre elas, ele chama a atenção para o fato da existência de tantos professores ensinarem instrumentalmente. Será que não existiriam vantagens ao assumir essa posição? A seguir ele menciona as seguintes razões quanto a matemática instrumental:

> 1 - No seu próprio contexto, matemática instrumental é normalmente mais fácil de compreender; às vezes é muito mais fácil. Alguns tópicos, como multiplicar dois números negativos, ou dividir por um número fracionário, é difícil de compreender relacionalmente. ‘Menos vezes menos igual a mais’, e ‘para dividir por uma fração você a multiplica pela sua inversa’ são regras facilmente lembradas. Se o que se procura são páginas de respostas certas, matemáticas instrumentais podem fornecer isto mais rápido e facilmente.
>
> 2 - Assim as recompensas são mais imediatas, e mais evidentes. É agradável conseguir muitas respostas certas, e nós devemos considerar a importância do sentimento de sucesso que os alunos obtêm disto, principalmente em se tratando de provas e concursos
>
> 3 - Justamente porque menos conhecimento é envolvido, pode-se conseguir a resposta certa mais rapidamente e com mais confiança ao se utilizar a compreensão instrumental do que a relacional. SKEMP (1989; p. 9)

Fossa, (2001), analisa e complementa essa visão dizendo que:

> a estrutura simples e auto-contida dos esquemas associados com a compreensão instrumental torna relativamente fácil a aquisição de novos conhecimentos ao nível instrumental. Isso permite ao sujeito epistemológico o desenvolvimento de um estoque grande de ‘fatos’ — ou seja, conhecimentos isolados com um teor reduzido de teoria— com os quais ele pode ensaiar alguns primeiros passos sobre assuntos novos. A estrutura poderá ser altamente seqüênciada e profundamente internalizada sem perder seu caráter instrumental. Tais atividades como andar de bicicleta parecem ser deste tipo e, quando são internalizadas ao ponto de ser automatizadas, permitem a realização de atividades rotineiras sem que o agente necessite empenhar grandes esforços atencionais e, portanto, sobra, por assim dizer, atenção que ele pode alocar em empreendimentos simultâneos (FOSSA, 2001; p. 84).

Fica indicado que Fossa (2001), no entanto, com esse comentário, não está fazendo nenhuma defesa do uso individualizado e exlusivo da compreensão instrumental como estratégia, porém, ele ressalta uma ótima observação que é o uso e das fases explícitas vs externalização como base de preparação de atividades instrumentais significativas.

Para o caso da matemática relacional Skemp (1989) cita quatro vantagens que estão assim condensadas.

É mais adaptável às novas tarefas. Na compreensão relacional não somente sabe-se que o método funciona mas sabe-se também porque ele funciona, sendo ainda eles facilmente adaptáveis à novas situações-problemas. Já a matemática instrumental necessita memorizar quais problemas um determinado método é trabalhado e quais não, e também aprender um método diferente para cada nova classe de problemas.

Ela é mais fácil de lembrar. Há um aparente paradoxo aqui, porque ela é certamente mais difícil de aprender. Para os alunos é mais fácil que eles aprendam **que** 'área de um triângulo = $\frac{1}{2}$ base X altura' do que aprender o **por quê** essa regra é assim. Por outro lado, eles têm que aprender regras separadas para triângulos, retângulos, paralelogramos, trapézios; Enquanto que compreensão relacional consiste em ver cada uma dessa partes olhando todos em relação à área de um retângulo. Skemp comenta que ainda assim é desejável conhecer as regras separadamente; Não seria viável ter que sempre derivar pela definição a cada nova situação. Mas se souber como estão inter-relacionados, permite às pessoas se lembrarem deles como as partes de um todo estão conectados, que é mais fácil. Ao se trabalhar com o relacional há mais para aprender - as conexões estão também ligadas às regras separadas - mas o resultado, uma vez aprendido, é mais duradouro e os mesmos princípios básicos podem e conseguem ser aplicados a uma gama maior de outras situações, seja por analogia, por experiência ou mesmo só pelo fato de saber que isso é possível pois a compreensão relacional libera mais o aluno para a possibilidade de experimentação. Assim há menos revisão de aprendizagem para fazer, e a longo prazo, o tempo inicialmente gasto tornaria o tempo destinado para análise e conclusões bem menor.

Conhecimento relacional pode ser mais efetivo como uma meta em si mesmo. Este é um fato empírico, baseado em evidência de experimento controlado usando material não-matemático. A necessidade de utilizar recompensas e castigos externos é muito reduzida, fazendo com que o lado 'motivacional' do trabalho de um professor torne-se muito mais fácil.

Esquemas relacionais são indispensáveis para garantir a qualidade da aprendizagem pois eles auxiliam os alunos a

> encontrar suas respostas. Com isso eles atuam como agentes do seu próprio crescimento. SKEMP (1989; p. 9-11).

Novamente Skemp (1989), indica no inicio da citação acima, o termo ‘porque’ na frase ‘porque ele funciona’. Fica confuso o uso dessa explicação, pois na compreensão relacional indicada, esse ‘porque’ está sendo colocado no sentido aristotélico. Se eu já conheço a solução e a causa do seu funcionamento, isto já não é mais uma teoria no sentido relacional, tem a conotação de um conhecimento pré-existente e consolidado, já caracterizado como saber produzido, portanto, esse ‘sei porque funciona’, refere-se ao saber instrumental, com isso não está se fazendo uma nova relação. Será que para ele, o ‘porque’ tem o sentido de generalização?

Fossa (2001), comenta sobre a pouca eficiência da compreensão instrumental quando usada na reprodução e comparação de conhecimentos e não ajuda muito para casos de memorização ou escolhas entre diversas alternativas. Dessa forma, devido às poucas ligações e fragilidade de esquemas que a compreensão instrumental permeia, o aluno torna-se dependente de regras especiais e de poucas relações entre elas, tornando-as condicionadas a situações específicas, como por exemplo, *...para problemas do tipo..., usa-se a regra/fórmula tal...* ou então, cria situações como no caso da criança que ao recitar uma prece ou poema, no meio dele esquece uma palavra e, consequentemente tem que recomeçar tudo do início.

Ele relata ainda que, em relação aos esquemas associados à compreensão relacional ao ser contrastado com a instrumental, são ricos em ligações externas e internas, facilitando o reconhecimento de situações relacionadas entre sí ou em questões análogas. Com alunos podem conseguir a redução de numerosas regras específicas, usando para isso processos de abstração ou generalização, para a formalização de princípios gerais, facilitando com isso a retenção e ampliando a experiência pelos manuseio mais amplo do elenco de conhecimento, ampliando a criatividade e o pensamento crítico. Da mesma forma, esse pensar esquemático e sistêmico ao estabelecer princípios gerais, facilita e garante uma melhor organização e visualização do processo como um todo, dinamizando com isso, da mesma forma, a memória. Isso também possibilita que o sujeito torne-se mais maleável e adaptável a situações novas e menos dependente de situações modelos vivenciadas.

Fossa, (2001) indica ainda que “as vantagens da compreensão instrumental são as facilidades de apreensão e de automatização, e que devemos juntar a armazenagem da materia prima para o desenvolvimento da compreensão relacional” FOSSA, (2001; p. 85). Ressalva, porém, que “o fato de fiar-se exclusivamente na compreensão instrumental é uma falta de criatividade, uma falta de agudeza no pensamento crítico e, até uma capacidade reduzida na performace de atividades automatizadas” FOSSA, (2001; p. 85).

Skemp (1989) sintetiza um comentário: “vemos, portanto, que a um curto prazo e em um contexto limitado, a matemática instrumental pode ser justificada, não pode estar, a longo prazo e em todo o processo educativo do aluno”. SKEMP (1989; p.12) apud GODINO (2002; p.14). É importante ressaltar que aqui nesse comentário Godino faz menção a matemática instrumental, quando o sentido colocado na sua tradução, é de compreensão, conforme ele cita ao encerrar sua seção: “Essas argumentações apresentadas por Skemp (1989) nos anos setenta ao analisar as relações entre compreensão instrumental e relacional nos parecem igualmente válidas para as relações entre competência e compreensão entendidas como temos proposto nessa primeira seção.” GODINO (2002; p. 14)

Skemp (1989), indica argumentos e contra-argumentos para caso de professores justificarem o ensino instrumental baseando-se principalmente nos fatores como:

- tempo muito longo para se ensinar relacionalmente, pois muitas vezes o que os alunos precisam é só de uma técnica;

- Compreender relacionalmente um tópico particular é muito difícil, porém, os alunos precisam aprender esse tópico, por causa dos exames e concursos;
- Uma determinada técnica é necessária para outro assunto e não dá tempo de aprender relacionalmente;
- Que ele é professor iniciante e os demais professores só ensinam instrumentalmente.

Diante disso ele ainda cita fatores situacionais tais como: os exames e concursos cobram basicamente matemática instrumental; os Planos de Ensino estão sobrecarregados de conteúdos e essas informações estão inclusas de forma densa e/ou concentrada; Os sistemas de avaliações não estão preparados para avaliar relacionalmente, isso requer praticamente um processo individualizado para se perceber como o aluno pensa, porém, numa classe com mais de trinta alunos, fica difícil; e, por fim, a grande dificuldades para os professores acomodarem ou remodelarem seus esquemas antigos, ao tentar se adequar nessa nova perspectiva.

Para fechar essa série de justificas e argumentos, Skemp (1989) faz a citação abaixo referente à prática, o intelectual e valor cultural da Educação Matemática:

> Assim para meu glorioso tributo à matemática tenho omitido um ponto vital: a rejeição da matemática por tantos, uma rejeição em que não em poucos casos, transforma-se em um medo terrível.
>
> A atitude negativa para a matemática, infelizmente tão comum, até mesmo entre diferentes pessoas com ensino superior é seguramente, a maior medida de nosso fracasso e um perigo real para nossa sociedade.
>
> Esta é talvez a indicação mais clara que algo está errado, e certamente muito errado com essa situação. Não é difícil culpar a educação por pelo menos uma parte da responsabilidade; é mais difícil definir quem é o culpado, e mais difícil ainda sugerir novos remédios. Sir HERMANN BONDI apud SKEMP (1989; p. 13).

Como estratégia de melhoria do Ensino de Matemática, Skemp (1989) indica que em primeira instância, um bom diagnóstico seja um dos passos e o desenvolvimento de uma proposta pedagógica coerente ou uma ‘boa teoria’ como ele denomina.

Ele comenta que “todos os bons professores constroem seus próprios depósitos de conhecimentos empíricos, e resumidos alguns desses princípios gerais nos quais eles confiam para sua orientação. Mas enquanto seus conhecimentos permanecem nessa forma, que amplamente ainda está ao nível intuitivo interiormente nos indivíduos, não podem ser comunicados, ambos por essa razão e porque não há nenhuma estrutura conceitual compartilhada (esquema) em termos de como podem ser formulados.” SKEMP (1989; p. 14). Ele ressalta que isso deveria existir e estar a disposição de professores iniciantes, mas, no entanto, cada um tem que aprender com os próprios erros.

Para ele, durante muito tempo, a diferença entre esses dois modos de aprender (instrumentalmente e relacionalmente) ficava somente ao nível intuitivo, porém, foi percebendo que essa diferença era de grande importâcia, tanto que necessitava a estruturação de uma teoria que fundamentasse como tratar essa diferença adequadamente

O exemplo que ilustra essa proposta de atuação procura denotar ou descrever uma postura pessoal frente a uma atividade, que ele espera ser análoga a uma situação de aprendizagem, que possa ter equivalente numa situação escolar. Chegando a uma cidade qualquer, ele relata uma aprendizagem inicial de rotas particulares, ensinada por um colega, com característica de aprendizagem instrumental, principalmente quando ele faz referência a “um número limitado de rotas pelos quais eu poderia ir de um particular local inicial a particulares locais de chegada” SKEMP (1989; p.15). A seguir, seu próximo passo foi explorar a cidade (por iniciativa própria), para formar um mapa cognitivo da mesma, com isso, fazendo uma relação entre as várias rotas ampliando seu conhecimento sobre a cidade.

O que diferencia os dois processos na visão de Skemp (1989) é o condicionante indicado pela meta: uma apenas locomoção, outra além da locomoção, a expectativa e o querer ampliar o seu conhecimento. Ele defende, ainda usando esse mesmo exemplo, que alguém com essa meta mais ampliada, estando embasada na construção de uma estrutura conceitual (esquemas), teria muito mais opções e condições de atingir o objetivo proposto do que alguém que tivesse apenas a descrição de rotas pré-fixadas, e consequentemente, não teria a visão global do contexto, apenas a seqüência dos passos a serem realizados.

Skemp (1989) por fim, indica quatro pontos em que a aprendizagem relacional se diferencia da instrumental:

> 1 Os métodos tornam-se independentes dos fins particulares a serem alcançado dessa forma.
>
> 2 A construção de um esquema dentro de uma determinada área de conhecimento torna-se inerente, que satisfaz o objetivo em si mesmo.
>
> 3 O mais completo esquema de um aluno, é o maior sentimento de confiança dele na própria habilidade de encontrar novos caminhos de 'chegando lá' sem a ajuda externa.
>
> 4 Mas um esquema nunca está completo. Como aumentam nosso esquemas, assim nossa conscientização de possibilidades é também aumentada. Assim o processo se torna freqüentemente auto-contínuo, e (em virtude do item 3 acima) auto-recompensador. SKEMP (1989; p.16).

Skemp (1989) propõe a seguir, uma distinção entre compreensão relacional/instrumental e matemática relacional/instrumental. No caso da primeira, em se tratando do exemplo sobre conhecer uma cidade, seriam dois modos diferentes de saber sobre a mesma cidade, ou seja, duas condutas diferenciadas sobre o mesmo contexto; No segundo caso, ele indica que tanto se tem conhecimentos e atividades instrumentais em Matemática (regras, fórmulas etc) como atividades relacionais (situações-problemas, estudo de casos, modelagens etc) e que isso não pode ser colocado como matemáticas ou estilos diferentes de Matemática, e dê preferência a somente uma delas. Se isso ocorrer, Matemática seria um *faux amis*.

Em síntese, Skemp (1989) deixa evidente que no sistema educacional está sendo ensinado na realidade, estilos de matemáticas e muitas vezes estilos diferentes de Matemática e com maior ênfase na matemática instrumental, quando o que deveria ser desenvolvidos seriam atitudes e posturas dos educadores na tentativa de promover modos de compreensão que, nesse caso, é muito mais amplo o conceito, e ainda, esses dois estilos de compreensão, instrumental e relacional, não são antagônico, são dualidades sim, mas quando integrados promovem situações de aprendizagem que na realidade são complementares.

É dessa forma que Fossa (2001) faz a separação entre matéria (conteúdo a ser aprendido) e as formas de compreensão e quando ele cita o cuidado que o educador deve ter ao trabalhar com essa distinção:

> Será razoável supor que o professor deve estruturar suas aulas de tal modo que todo assunto novo seja apresentado primeiro ao nível instrumental, somente progredindo para o nível relacional na medida que a matéria é dominado instrumentalmente. FOSSA (2001; p. 86).

Essa sequência talvez deva ser válida para situações de alunos novos aprendendo matéria nova que não têm ainda 'bagagem' necessária para estabelecer 'sózinhos', ligações em termos de compreensão relacional.

Assim, indica Fossa (2001),

> a tarefa do professor é apresentar a matéria nova ao aluno em um nível de compreensão relacional que é compatível com o esquema que o mesmo, embora seja bastante jovem, já o tem desenvolvido. Quando a atividade tem que ser automatizada, esta pode ser feita depois. FOSSA (2001; p. 86).

Completando a análise referente ao prólogo de Skemp (1989), Fossa (2001) ainda destaca, usando as próprias referências feitas por Skemp:

> o desenvolvimento de esquemas complexos com numerosas ligações internas e externas é uma atividade inerentemente agradável. Assim a compreensão relacional poderá se tornar uma meta em sí mesmo, o que transformará o aluno em um agente ativo e autônono na busca de conhecimentos novos. FOSSA (2001; p. 86).

Vale ressaltar que o texto de Skemp (1989) foi escrito com a finalidade de apresentar uma proposta num formato mais acessível, ou como dizem 'vender a idéia de uma forma mais popular' para uma clientela destinada a capacitação em serviço de professores do ensino mais fundamental. Por isso ele tornou-se um prólogo. Ao observar os demais capítulo do livro, ele aborda outros temas e de forma mais profunda.

Diante disso, convém buscar entendimentos que amplie, basicamente no que se refere a como estabelecer relacionamentos interiormente no processo educativo. Num contexto mais amplo, uma situação de compreensão ou pensamento relacional pode apresentar dois sentidos diferentes: O primeiro deles poderia ser: a quem se direciona esse atributo relacional. Direciona ao fato de que pessoas diferentes têm perspectivas diferentes ou opiniões diferentes sobre o mesmo assunto. Nesse caso, relação significa relação entre perspectivas sobre alguma coisa.

Na Geometria é assim. Se duas pessoas diferentes, observando, de ângulos diferentes o mesmo objeto, perceberão coisas diferentes (Ex. Um círculo, dependendo do ângulo de visão pode parecer uma elipse), ou seja, na Geometria uma perspectiva é um sistema de coordenadas e se pode relacionar que a origem dessas coordenadas fica entre nossos olhos e a partir daí se buscam referências à esquerda, direita, abaixo, acima, profundidade etc.

Então relacionar perspectivas, um processo (geométrico) com o outro (visual) significa a cada momento, fazer uma transformação de coordenadas, usando para isso, conceitos de álgebra linear, por meio de uma matriz, pois uma matriz representa relações entre objetos: Se tenho dois objetos geométricos, dois triângulos, por exemplo, e quero saber como eles estão relacionados, então deve-se buscar uma matriz de uma transformação que transporta uma coordenada.

Exemplos mais simples podem ser encontrados na Geometria Euclidiana e que ao se relacionar com essa perspectiva acima citada, esse transporte significa translação, rotação, etc, eles podem ser representados por uma matriz.

Dessa forma, se está relacionando por um lado perspectivas, por outro lado, relações entre objetos, esses dois sentidos são equivalentes, na Geometria Analítica.

O outro sentido é considerar que na Psicologia pode ser diferente e essa é uma situação a ser explorada, pois tem-se que considerar aspectos fundamentais como:

i. compreender é equivalente a transformar uma representação de algo numa outra representação;

ii. perceber uma analogia como uma igualdade de estruturas;

iii. Identificar as relações entre um objeto e outros

É a partir desses níveis de dualidade, que se estará buscando uma interação que objetive o desenvolvimento de idéias relacionadas com a complementaridade.

No processo educacional, é muito constante e muito preemente a necessidade de ‘dar explicações’ e não raramente essas explicações são fornecidas de maneira distorcida, errôneamente ou transferidas para um qualquer sistema de regras ou leis a serem estudadas num futuro incerto.

Otte verbalmente, comenta que Félix Kline sempre fazia alusão ao fato de que pesquisadores da Idade Média, sempre tinham explicações sobre tudo, mesmo não existindo nenhuma lei que justificasse o fato/fenômeno. Por exemplo, se indagados o porque a cocaina faz a gente dormir? Eles respondiam, por exemplo porque ela tem a **capacidade** de fazer a gente dormir. Ora se voce não tem fatos, voce pode inventar propriedades, argumentos e relações. Isto chama-se abstração hipostática isto é, uma ficção ou uma abstração falsamente considerada como real, pois você está vendo um efeito ou processo (faz dormir) e simplesmente cria um conceito que nada mais é do que a duplicação dessas informação num formato sempre axiomático. Como nos livros, você tem essa vinculação: a) definição criando um conceito; b) uma explicação porque e, c) constatação de um fato. Isso também já era introduduzido e apresentado por Aristóteles.

Analogamente, se tem a relação entre o conhecimento de um fato e o conhecimento cientifico. Na experiência do dia-a-dia, muita gente sabe muita coisa sem explicar porque isso é verdade. É um perigo porque, cada mudança de circustância ou de contexto, já não sabe se teria o mesmo efeito, o mesmo impacto ou se o mesmo fato se repete. Por isso é necessário uma teoria sobre o relacional.

Nas tradições e atividades culturais não se pode mudar as regras ou a ordem delas. É preciso obedecê-las nitidamente. Muitas vezes pode não fazer sentido. Mas, sem um conhecimento teórico, você não sabe quais são os aspectos dessa realidade e quais podem ser mudados, quais são os variaveis. Otte, verbalmente, cita um exemplo comum que ocorre no Pantanal Matogrossense: várias pessoas apertam demais as correias dos arreios, principalmente nas localizadas na barriga dos cavalos. Por isso os cavalos não aguentam grandes esforços e distâncias. Ao serem questionadas elas argumentam que seus pais já faziam assim, por isso eles continuam. Porém, o sistema de arreios já mudou de lá pra cá. Dessa forma, o correto é apertá-los mais na altura do peito deles.

Já prova é uma situação diferente. Uma prova não pode demonstrar só que alguma coisa é verdade mas tem que indicar o lugar dessa verdade no sistema formal, ou seja, como esses fatos que estão sendo provados agora, estão relacionados com os fatos básicos de uma área do conhecimento e de uma certa teoria. Isso é um sistema, como é uma teoria de um conhecimento cientifico de acordo com Aristoteles. E é exatamente um sistema de axiomas, num entendimento de Aristóteles, Euclides e outros. Foram assim estruturadas na antiguidade as verdades profundas, básicas que tem ser usadas para construir e justificar qualquer outro conhecimento. Esse é o mote central do conhecimento relacional, ou seja, um conhecimento que não só verifica fatos, não só usa de técnicas ou só é instrumental, mas exibe e indica os fundamentos de qualquer conhecimento. Esse foi o núcleo de relacionalidade que creio contribuiu para que a convicção de Skemp (1989) e de Mellin-Olsen de que compreensão relacional é superior a compreensão instrumental. Um dos argumentos clássicos é que: para ter conhecimento, é necessário ter conciência dele, ou seja, você tem que saber que você sabe. Isto significa que você precisa de um meta-conhecimento. Isso garante ele ter essa qualidade: uma prova ou o uso de argumentos matemáticos que é mais do que a verificação de alguma coisa de fato seja verdadeiro. Mas tem que indicar porque que é verdadeiro em todos os termos além de relacionar esse fato aos fundamentos da teoria em questão.

1.4. Quais as relações entre Cassirer e Skemp?

Como fazer a ligação entre Cassirer e Skemp? Os dois sistemas de Skemp — O instrumental e relacional — são modificações desses dois lados do conceito: cada conceito tem referência e tem um sentido, ou seja, um lado operativo. Só nos conceitos empíricos as referências são objetos; cadeira, peixe, cavalo etc. Quais são as referências dos conceitos matemáticos? São relações, pois como já foi indicado anteriormente, em Matemática os objetos não existem (não existe ponto, reta, triângulo, círculo etc), ou seja, ela não se preocupa com as características desses objetos; ela só se preocupa com as relações entre eles.

Mesmo olhando os números, por exemplo, se se diz que ‘x é um número ímpar’, isso parece semelhante a uma função proposicional, como diria Cassirer. Se, de outro modo for dito que ‘x é vermelho’, a forma sintática é idêntica. Só que temos um problema: O que significa isso? Ora, no primeiro caso, qualquer número que for dividido por 2 e resultar numa operação não exata, ou seja, ‘sobrar restos’ dessa divisão, indica que esse número será impar ou então se puder escrever esse número como sendo o dobro de um número acrescido de uma unidade (x = 2n+1) ele também será considerado como ímpar. Dessa maneira, essas características não são estáticas, são sempre descritas por meio de um julgamento: ‘se eu faço isso... então aquilo...’ Se numa outra situação for dito que x é uma função contínua, isso significa que se os argumentos se aproximam de um determinado valor... então os valores para y igualmente se aproximam... Observem que a todo momento denota-se relações evidentes e elas são pronunciadas nesse encadeamento ‘se..., então...’ e todo argumento matemático se apresenta dessa forma.

Ao olhar para a outra proposição ‘x é vermelho’ , o x não pode significar outra coisa a não ser um objeto, por exemplo, a cadeira é vermelha..., o vaso é vermelho..., a rosa é vermelha..., independente da atividade que está se desenvolvendo. Não é necessário descrever nenhuma manipulação para compreender o que significa o fato de que tal objeto x seja vermelho.

Mesmo nas ciências empíricas quando afirma-se que ‘diamante é mais duro que vidro’ essa afirmação traz embutida uma operação que indica que ‘o diamante consegue riscar ou cortar o vidro’. Isto são características relacionais: ‘mais duro’, ‘maior’, ‘mais pesado’. É nesse sentido que Cassirer e Kant querem chamar a atenção para o fato de que o conhecimento em vez de se preocupar com o mundo de objetos isolados e estáticos, se preocupa em classificar, descrever de uma maneira bem concreta, tem-se agora que se preocupar e desenvolver interesses em estabelecer relações em responder questões que envolvem questões relativas a causa-efeito.

Uma coisa óbvia é que o conceito de função é um conceito relacional, nesse sentido fica evidente essa analogia. Mas quando Skemp (1989) usa o termo compreensão, apresenta dificuldades para caracterizar e fornecer elementos consistentes. Esses conceitos sobre explicação, fazem uso da aplicação da distinção de Aristóteles, entre o fato **(‘que’)** e o fato justificado **(‘porque’)**, que, no caso da sentença 2 + 2 = 4, usa-se os axiomas aritméticos para satisfazerem o ‘porque’. Porém, para a maioria das pessoas, os teoremas são menos concretos, menos seguros e mais abstratos do que o fato a ser explicado. É menos complexo conviver com a dúvida da pergunta do que se convencer com os argumentos da respostas. Então não se pode dizer, com segurança, que essas explicações para o fato são melhores, ou mais facilmente compreendidas.

Esse modo de explicação faz sentido se o valor de um esclarecimento teórico está no futuro, ou seja, nas futuras aplicações e nas previsões que uma teoria propicia. Uma explicação teórica não reduz o novo ao já conhecido e por isso nem sempre ajuda nas intenções pedagógicas. Poderia ser bom, mas não deixa o aluno mais à vontade.

Aristóteles discute a diferença entre conhecimento do fato e conhecimento da razão do fato por meio do seguinte exemplo: “Seja C para ‘planetas’, B para ‘não cintilar’, e A para o ‘estar próximo’. Ora, é verdadeiro afirmar B de C... Mas, porém, é verdadeiro afirmar A de B... Assim, esse silogismo não é do *por quê*, mas sim do *que*, pois não é por não cintilar que estão próximos, mas, antes, é por estarem próximos que não cintilam. ARISTOTLE, (*Post analytic*, Book I, chapter 13, p. 78a-b) apud OTTE (2007, p. 82).

A noção de Ciência de Aristóteles como uma explicação tornou-se gradualmente desvalorizada pelo crescente interesse no registro dos fatos e pelo método hipotético-dedutivo da axiomática moderna, que não é usado somente na Matemática. Isso reduz explicações matemáticas a meras deduções.

Para Aristóteles, as causas que servem para justificar os fatos e o volume de conhecimento que se tem que ter para conhecer 'cientificamente' são mais conhecidos em geral, enquanto os fatos são mais conhecidos pelo indivíduo.

E ainda, o que é explicado é mais abstrato e distante do conhecimento do que o que é usado na explicação. Então a explicação no sentido de Aristóteles é uma redução ao já conhecido, enquanto isso não é verdadeiro na Matemática científica atual. Aristóteles chama de processo de aprendizagem a passagem compreendida a partir do exemplo concreto até o princípio ou lei geral de 'epagoge', que atualmente é traduzido como **indução** ou **abdução**. Esse processo depende do princípio da continuidade, ou seja, do fato que o conceito universal nada mais é do que o contínuo dos casos concretos. Ou seja, para Aristóteles, 'o homem' não existe — diferentemente, para Platão — independentemente de todos os homens concretos, na visão de Aristóteles, tem-es que colocar à frente da imaginação todos os homens para conseguir capturar o conceito universal de 'homem'.

Isso, Cassirer (1953) chamava de conceitos substanciais (*Substanzbegriffe).* Dessa feita, pode-se elencar como pontos de conclusão que o ensino e a explicação servem para introduzir o aluno ao conhecimento da sociedade já estabilizada. Se considerar esse sentido, poderia ser a compreensão por hábito, ou seja, conhecimento instrumental a meta final do processo educacional e não o desenvolvimento da criatividade existente e necessária que permeia o pensamento relacional.

Isso fica evidente quando Otte, (2007) reafirma:

> O 'pensamento relacional', por exemplo, é uma das noções pelas quais a Matemática e a Ciência se tornaram caracterizadas, desde o famoso livro de Enst Cassirer *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (Substância e Função) de 1910. Relações ou funções, no entanto, são comumente identificadas com esquemas operativos pelos neo-kantianos ou idealistas, como Cassirer, ou são consideradas como

> regularidades meramente empíricas por positivistas, como Comte ou Mach, por exemplo. Na escola, essas duas faces da função matemática permanecem pouco conectadas uma com a outra. O pensamento relacional é o maior obstáculo do conhecimento cotidiano e da atitude natural da assim chamada gente da rua, que tende, ao contrário e positivamente, a identificar o conhecimento com a realidade ou com um mero instrumento. OTTE, (2007; p. 95)

No texto de Skemp (1989) foi interpretado o uso o ‘o que’ e ‘porque’ da mesma forma como os pedagogos e os didáticos usam a palavra compreensão, se misturam ora com o aspecto relacional ora com a forma que se entende melhor, no sentido de Aristóteles, pois se conhece os fatos mas não conhece as justificações sobre ele. Só que aparece, geralmente, uma dificuldade: o ‘porque’ na Matemática Moderna não é definido e não é chamado ou identificado como compreensão, porque não? Porque os axiomas são mais inseguros e menos compreensíveis do que o argumento de que 2 + 2 = 4. Isso é mais concreto e mais facilmente aceito. E é certo também, que a Ciência Moderna por sua vez, quer garantir conhecimentos bem fundados científicamente, numa estrutura que possa facilmente ser comunicada e aceita. Na Matemática Moderna isso não ocorre: conhecimento científico teórico significa alguma coisa que serve para fazer previsões, interagir no futuro e não no passado, não na explicação e sim na aplicação. Para que servem então os axiomas, se eles não explicam nada? Porque na realidade eles são instrumentos como já foi dito, para previsões, construções de novas teorias, construção de novas tecnologias. Nesse sentido o conhecimento teórico é um pensamento que pode ser associado com o pensamento instrumental., se colocado dessa forma. Isso não é colocado como contradição entre pensamento instrumental e pensamento relacional.

Pode-se, da mesma forma, analisar que isso, ao mesmo tempo é ambíguo. Por isso, fica complexo a maneira como quando Skemp coloca o pensamento relacional como compreensão. Se se considera, como exemplo, a situação de alguém ‘perdido’ num labirinto: o que mostra um labirinto? que normalmente a teoria não é um instrumento para resolver problemas, ou seja: não há como descrever ou imaginar um labirinto teoricamente. Não dá para garantir que se possa ‘conhecer sua estrutura de construção’, pois a sua lógica é totalmente outra: a de não garantir teoricamente sua estrutura. Então, para sair dele, é necessário definir uma estratégia específica, uma técnica, que possa garantir a solução do problema. Ou seja, a teoria não é uma teoria de sua própria explicação. Por isso, é preciso do pensamento instrumental, coisas que servem para aplicar na resolução de problemas. Não seria lógico tentar conhecer, diagramar, entender todo o labirinto para só então definir uma saída (criar uma outra teoria sobre a teoria). Uma estratégia simples de acompanhar as paredes seguindo somente pela direita, por exemplo, seria uma solução instrumental rápida, simples e eficiente para resolver o problema.

Então essa ambiguidade que coloca o pensamento relacional como pensamento superior em termos da cultura, da psicologia, pode ser em vários aspectos, não pode ser uma verdade absoluta e definitiva, pois deve haver algum motivo pelo fato do Aristotelismo não ter sido expulso da escola, ou seja, continuar a ser utilizado no meio educacional. Sempre existe o Empirismo, o Aristotelismo, as idéias da explicação como redução ao concreto em vez construir a explicação por meio do uso de teorias mais abstratas como teorias axiomáticas. O próprio Russell tem ressalvas aos teoremas de Peano, pois não responde as perguntas sobre o que é o número dois?, o que é o número quatro? O que é um número? Ele não responde... Ele assume uma postura totalmente analítica.

Dessa forma, o que se percebe de forma evidente é que Cassirer ressalta a diferença entre Ciência aristotélica e a Ciência moderna pelo exemplo da noção do conceito. A contradição apresentada por Skemp, revela que a pedagogia está muito impregnada no Aristotelismo, preocupando-se em desenvolver a explicação basicamente reduzindo-a ao já conhecido, ao contrário das demais atividades humanas que se preocupam com a evolução das aplicações do conhecimento.

Mas qual é então a solução para isso? A complementaridade: Esse é um ponto de muita importância, pois realmente caracteriza o pensamento teórico e que Skemp não conseguiu se aperceber disso. E por outro lado, recordando o texto já abordado sobre Cassirer, ele por sua vez, não destacou ou não percebe a distinção entre fórmula e função, porque ao concordar com Kant e, para Kant, todo conhecimento matemático é, por essência e por aplicação, todo instrumental. Para alguém ligado a Filosofia da Ciência poderia ser dito: “Nós podemos explicar o comprimento da sombra por meio do comprimento do mastro, e não vice-versa” NEWTON-SMITH (2000, p. 129), apud OTTE (2007; p. 14). Parece natural perguntar, ao perceber uma sombra, de onde ela surge. Porém, ninguém consideraria a sombra como sendo a causa do mastro. Mas, e a Matemática? É preciso retornar à Kant.

Uma ‘nova luz’, disse Kant, deve ter brilhado na mente de pessoas como Thales, quando ele percebeu que a relação entre o comprimento de um mastro e o comprimento de sua sombra nos possebilite calcular a altura da pirâmide, dado comprimento de sua sombra. “Então ele achou que não era suficiente meditar na figura como ela se apresentava diante de seus olhos,... e então se empenhou em adquirir conhecimento de suas propriedades, mas seria necessário produzir essas propriedades, como elas eram por uma construção positiva *a priori*” KANT, (Crítica da Razão Pura, prefácio da segunda edição; 1787). E certamente, o mastro em si não tem nenhuma relação positiva com a pirâmide como tal.

Agora, pode-se dizer que a Matemática não tem a ver com mastros, pirâmides e coisas do gênero. Mas essa forma de discussão não ajuda muito, como tem-se testemunhado desde a aritmetização da Geometria de Descartes, uma destruição gradual da harmonia pré-estabelecida entre método e objeto de investigação matemática que Bolzano queria manter BOUTROUX 1920; p. 193). A História da Matemática deve ser vista como uma história da matematização, incluindo a matematização da própria Matemática (LENHARD e OTTE, 2005). Portanto, a Matemática é caracterizada, antes de tudo pela maneira como ela generaliza. Os Matemáticos, geralmente, não vêem as coisas dessa maneira. Eles ou são Platonistas ou intuicionitas, e repugnam a abordagem semiótica da Matemática (Hermann WEYL é uma de exceção notável disto: veja: WERKE. vol. IV. p. 334).

Aqui, a Matemática que Kant escreve é dominada pela idéia da aplicação. Aplicação aqui é tudo: é critério da simplicidade, da objetividade, é valor de todo conhecimento, Matemática Pura só vale enquanto tecnologia para Matemática Aplicada, então ela assume uma concepção totalmente instrumental. Por isso que Kant não se preocupou com essa distinção entre função e fórmula, e da mesma forma Cassirer também não considerou, pois na função e na fórmula, tem incorporado essa complementaridade, pois estabelece a todo momento uma relação ao mesmo tempo que faz a função de *input/output*, tem-se a situação em que um engenheiro não quer saber o que representa, ele só quer saber que funciona. Mas tem um outro problema a ser observado, que tem a ver com a confusão de Skemp (1989): Como saber como se dá o *insight* ou a compreensão e na realidade eles não analisam essa relação entre pensamento relacional e pensamento instrumental e nem promovem a complementaridade entre ambos. Eles criam e enfatizam a distinção entre um conhecimento que dá a compreensão e o outro que só dá instrumentos para resolver problemas.

Ao avaliar a comparação entre Cassirer e Skemp então, tem-se que salientar dois pontos importantes:

- <u>Primeiro</u>: a teoria da complementaridade é importante para entender a relação entre pensamento instrumental e relacional. Nem Cassirer nem Skemp destacaram que não são só contrastes entre os dois pensamentos. Até mesmo entre a complementaridade pode-se encontrar uma dualidade: por um lado entre compreensão e ação e a outra entre os pensamentos relacionais e instrumentais. São dois pensamentos que não se encaixam completamente. Skemp acha que são paralelos, ou seja, compreensão só significa pensamento relacional. Nada justifica isso, porque toda aplicação da teoria dá igualmente um *insight*, uma compreensão. O contrário, pode-se dizer: para entender alguma coisa tem-se que aplicá-la; para entender um conceito, tem-se que usar esse conceito. Só receber e memorizar não adianta. Porque na aula de Matemática existe a insistência do professor em que o aluno resolva os exercício: para que ele aprenda a aplicar a teoria dos conceitos nesses exercícios.

- Segundo, tem-se que descobrir que, no ponto de vista educacional, se preocupa Skemp, com uma outra contradição: entre compreensão e atividade ou aplicação

Mas tem o outro aspecto do relacional: é o seu mundo sensível, o contínuo do espaço, do tempo, dos fenômenos, de todas as sensibilidades. Esses aspectos foram sempre enfatizados por Aristóteles e pelos analíticos de um modo geral. E na Geometria, se você tem Geometria Analítica no sentido de Descartes, tudo é desenvolvido tendo como suporte a atividade, a construção. Em Euclides também se percebe isso.

Por outro lado, se tem uma Geometria Projetiva, tudo é transformação, continuidade, como ocorre no manuseio do Cabri Geometre. Nele se pode movimentar e manipular as figuras e observar os invariantes que ocorrem envolvendo essas transformações.

Então existem esses dois meios de pensar relacionalmente, por isso tem-se que considerar verdadeiramente a interação entre o relacional e o instrumental como uma complementaridade e essa complementaridade não é a mesma apresentada com essa outra compreensão e aplicação. Então, em Skemp há uma mistura de duas dualidades, de duas complementaridade. Volta-se a frizar que por trás da idéia de compreensão e do pensamento relacional tem-se o problema principal relativo não aos objetos do conhecimento, identificados como os ‘o quê’, mas como as explicações, que são denominadas os ‘porquês’, as causas e motivos de divergências entre o pensamento de Aristóteles e os filósofos do mundo moderno.

Um exemplo destacando uma passagem importante e intrigante:

> Costuma-se lembrar do entusiasmo com que recebeu-se a primeira edição do *Lineare Álgebra* (Álgebra Linear) de Werner Gracuh, publicada em 1958, e seu tratamento invariante (sem coordenadas), após estarmos acostumados com os cálculos tediosos e desajeitados em termos de coordenadas e matrizes dos velhos livros. Mas os estudantes mais fracos e conservadores, e aqueles que vieram da Física, não acompanharam logo a axiomática de Graeub e sua apresentação estrutural. Não é tão óbvio o que causou as principais dificuldades. Parece ser, no entanto, que aqueles estudantes não acreditavam realmente na objetividade dos argumentos conceituais ou das demonstrações abstratas, como indica OTTE (2007) verbalmente.

Ele comenta que aqueles estudantes queriam um cálculo direto e provas elementares, ou seja, provas que fossem fechadas e auto-suficientes ao máximo. Tais provas poderiam revelar a validade de um teorema pelo sentido dos próprios termos envolvidos. Construções conceituais, experiências sistemáticas ou hipóteses intuitivas adicionais não deveriam ser exigidas. Isso é o que Richard Skemp chamou esse estilo de pensamento de ‘pensamento instrumental, que ele, por sua vez contrastou, com o que chamou de ‘pensamento relacional’, Skemp (1989).

Agora, entre os estudantes devotados à compreensão instrumental, aqueles que vieram da Física fizeram muito melhor do que os outros, porque eles tinham, por meio de sua prática e experiência, já estabelecido uma intuição e orientação global da situação. Uma orientação dessa é necessária, mas os cálculos parecem ‘cegos’ nesse sentido, continua comentando Otte (2007).

Em todo caso, destaca Otte (2007), o que se precisa é de uma prática e uma atividade, seja ela conceitual ou experimental, para refletir a respeito, porque a ontologia matemática é constituída pela prática, e não o contrário, ou, como já foi estabelecido, a ‘realidade’ não significa mais algo dado estaticamente, seja ‘lá fora’, ou num ‘céu’ platônico, mas a realidade em questão consiste agora do sistema da atividade (cognitiva) humana e da própria prática.

A Educação Matemática então não pode se abster de uma reflexão histórica e epistemológica, mas deveria ter cuidado para não cair novamente na auto-suficiência e em formas obscuras de reducionismo e psicologismo. Ao tentar educar as novas gerações com as tecnologias atuais da 'sociedade do conhecimento', parece valer a pena relembrar que o conhecimento cumpre dois papéis principais na sociedade humana: um prático e um filosófico. A Educação deve ser baseada no conhecimento científico especialmente porque

> [...] parece que a Ciência surgiu com a exigência de dar uma coerência entre as competências práticas e as crenças cosmológicas, a *techne* e a *episteme.* E apesar de todas as mudanças que a Ciência sofreu ao longo do tempo, ainda permanece o papel que ela desempenha na cultura humana e que a distingue de outros produtos da atividade intelectual humana AMSTERDAMSKI, (1975; p. 43/44) apud OTTE (2007).

Esse diagnóstico de Amsterdamski infelizmente parece ser não mais do que um ideal que se pode raramente alcançar, mas que de forma alguma devería-se abandonar.

Assim, essa 'cegueira' entre Cassirer e Skemp, tem relação direta com o problema da Ciência aristotélica, que ainda não se conseguiu derrubar totalmente, principalmente no meio educacional.

Por que então, no mundo teórico, tem-se tanta dificuldade em conceber que os conceitos deveriam ser entendido como representações de relações em vez de representações de objetos e coisas. De um modo geral, a Matemática se exclui desse mundo Aristotélico, muitos comentam que os Elementos de Geometria de Euclides é um paradigma da Ciência aristotélica, mas nessa obra, predominantemente uma atitude construtiva e o pensamento relacional só é destacado no Livro V, quando fala sobre proporções. Todo o resto da obra só discute sobre construção, medidas e medições, contagens, ex. o teorema primeiro: '***como se contrói o triângulo equilátero****: dado um segmento...'* Ora, esse é um aspecto construtivo ou instrumental, e que na verdade, se expande muito com o trabalho de Descartes até Kant. Cassirer atribui ao período desde Leibnz até Kant, em que se desenvolve o pensamento relacional em termos de funções, mas Cassirer nunca fez a distinção entre fórmula e função. Só quem fez essa distinção foram os matemáticos do Século XIX, Riemann, Galois e muitos outros que queriam 'fugir' do cálculo mecanicista, pois ele fica cada vez mais complexo, extenso e cansativo. Dessa forma, chegou-se a idéia de usar o pensamento relacional, para exatamente pensar em termo de conceitos e não em fórmulas. Por isso Riemann foi considerado o maior matemático além de Gauss, até o século XIX, ainda que nesse mesmo período estivessem em evidência matemáticos como Weierstrass, Bolzano, e o processo da aritmetização, ou seja, é a presença do pensamento instrumental novamente em destaque. Por exemplo, na teoria das funções de Weierstrass, uma função é uma série, Série de Taylor, ou seja, comporta-se como uma fórmula. Essas idéias construtivistas, que usavam argumentos fantásticos para justificar processos de cálculo, eram desenvolvidas por alguns brilhantes calculistas, que apesar de tão perto do nosso sentido, essa atitude relacional na Matemática foi e é desenvolvida por um grupo minoritário de pensadores (Leibniz, Riemann etc).

Não foi, porém, o caso de Descartes, ele preocupava-se em construir instrumentos, tais como compasso de Descartes, para construir curvas, e para isso ele focou na teoria algébrica, usando para isso polinômios, séries, curvas construídas através de fórmulas e equações. Por isso ele acha muito limitado a atitude de Euclides em se utilizar apenas de régua e compasso. Para ele é fundamental construir outros modelos de compasso ou instrumentos e com isso, garantir uma maior segurança quanto ao uso da Matemática. O que nos dá realmente a pista são esses dois fatos:

- de que o pensamento relacional fica tão perto de nossa percepção, da nossa fenomenologia do mundo e ao mesmo tempo fica tão longe na matemática escolar ou na matemática elementar;
- na História da Matemática só alguns matemáticos tentaram desenvolver de fato uma concepção relacional, fato diferenciado nas outras Ciências.

Provavelmente isso deve-se a nossa própria condição humana, que de um lado é preciso recorrer às técnicas, de desenvolver a parte construtiva, de outro lado, é preciso recorrer às orientações. Dessa forma, pelo fato da Matemática não trabalhar com objetos próprios diretamente como nas outras Ciências, essas orientações também ficam distantes. Com isso, a Matemática trabalha, muitas vezes 'cegamente', fazendo uma calculogia sem objetivos claramente definidos. O ser humano não funciona e não pode imitar um computador, principalmente na escola. A Matemática quando destinada para profissionais como engenheiros, por exemplo, um manual de fórmulas é suficiente, pois, para ele, se uma determinada fórmula ou regra funciona é o que importa. Não há tempo nem interesse em saber como e porque funciona.

Então, porque tem-se que ensinar Matemática na escola? Porque acredita-se que a Matemática pode contribuir para nosso entendimento do mundo e melhorar nossa condição humana. Então é impossível reduzir a Matemática num processo 'cego' de calculogia, como se fosse um computador. Por isso a idéia de espaço e o envolvimento da Geometria, parece um campo natural para melhor se estabelecer relacões e desenvolver mais ricamente o pensamento relacional na Matemática. A Aritmética começa com ações de contagem, que são atos distintos, discretos. Pode-se ter como referência o experimento realizado por Piaget, que solicitava aos alunos construir, paralelamente, dois muros com 'tijolos' azuis e vermelhos distintamente, e ele perguntava se, ao final do dia, qual muro seria mais comprido. No nível empírico, em termo de objetos, a criança responde não sei... vamos ver...

Porém, num nível de abstração reflexiva, quando para ele não importa os objetos, mas consegue prever as ações, sua resposta será: ... o comprimento será sempre o mesmo! pois, para ele, faz-se sempre a mesma coisa. Mas essa idéia que a Matemática faz, na abstração reflexiva, claramente é o contrário do pensamento relacional, pois afasta a Matemática do mundo perceptivo e empírico.

Esse é o grande problema da Matemática: como ela pode conseguir se relacionar com o mundo concreto, com o mundo sensível? Essa foi a grande questão surgida no século XIX. Até então, a Matemática desencadeada até essa época e principalmente a iniciada no século XVII era bastante simples, pois as máquinas eram simples, era o início da mecânica, que tinha um *status* de filosofia, que Aristóteles negava pelo fato dele ser um biólogo. Diferentemente de Newton. No século XIX começaram a surgir outros fenômenos como a termodinâmica, com a Revolução Industrial e o aparecimento da máquina de vapor, que passou a exigir conceitos mais complexos, que estão além desse mundo mecânico de construções e máquinas simples. Dessa forma, não foi por acaso que os matemáticos começaram a pensar de novo na parte geométrica no século XIX. Bourbaki mesmo indicava o século XIX como a época áurea da Geometria. Pode parecer estranho, porque sempre reportava-se ao período grego essa ênfase, mas na realidade funcionou como um ciclo, e nesse caso a Geometria voltou a ser destaque e a ter novas estruturações, como no caso da Geometria Projetiva, o princípio da continuidade e o pensamento relacional tornaram-se importantíssimo, da mesma a idéia da Geometria não-euclidiana, a idéia dos espaços das dimensões arbitrárias etc.

Nessa mesma época, germinou, da mesma forma, a idéia do espaço como uma idéia metodológica, como por exemplo o aparecimento de espaços de funções, espaços topológicos, criação de grupos, grupos topológicos, grupos de Lie... Esses espaços são artifícios metodológicos e foram usados em inúmeros campos da Matemática. Nesse sentido evidenciou-se o pensamento relacional, e ele reinava nesse nível da meta matemática, das idéias, da Filosofia da Matemática, da metodologia. Mas quase nunca nos meandros do ensino básico. Lá imperava sempre a calculogia, números, por isso na matemática escolar, usava-se muito pouco do reflexivo. Então a Álgebra, a Aritmética, principalmente os números são o cerne da matemática escolar, enfatizando muito as habilidades de calcular e não refletir sobre a Matemática. É isso que se percebe muito fortemente na proposta apresentada por Skemp.

Mas em alguns momentos comentou-se sobre complentaridade e, por isso, é importante salientar mais alguns aspectos essenciais. Atualmente, isso torna-se cada vez mais importante entender, novas formas de relacionamentos, principalmente pelo fato de que alguns paradigmas serão com certeza quebrados ou no mínimo, melhor compreendidos, pois mudou-se as formas de analisar o comportamento, principalmente de funções. Existem outros meios de resolução e análise, com o surgimento e expansão dos computadores; os comportamentos e problemas de aplicações não são mais pontuais, envolvem uma massificação, desequilibrios ambientais, previsões metereolólicas, superpopulação etc. Esse modo pensar que, a Matemática deve conseguir generalizar, dar coerência e consistência formal em todos os pontos de referência absoluta do conhecimento em que ela tramita, deve ser abandonada, pois não mais garante tanto a segurança como a guarda desse conhecimento.

Para exemplificar o conceito de complementaridade, Otte (2003) apresenta usando de situações em que se utiliza dos termos linguísticos para verificar como alguém pode se comportar referencialmente por meio do nome, por exemplo, e ao mesmo tempo atributivamente, que irá recair no sistema de Skemp (1989), porque a atributividade dá as características, por isso chama-se signos icônicos enquanto intensidade que ele se refere ao instrumental só apresenta os aspectos operativos. A complementaridade é exatamente o que falta no trabalho de Cassirer e é o que por sua vez faz a ligação com Cassirer (1953) e Skemp (1989).

Uma das situações citadas por ele refere-se ao trabalho desenvolvido por Jakobson (1956), que investigando distúrbios linguísticos em crianças, ele identificou dois níveis de distúrbios: o primeiro, devido a falta de referência, ou seja, por exemplo, essa pessoa não consegue pronunciar a palavra ‘faca’. Ela só vai fazer referência ao uso da finalidade que o objeto vai exercer naquela atividade específica: em vez de ‘faca’ ela vai pedir o ‘cortador de pão’, ou para o caso de uma fruta, quero o ‘cortador de abacaxi’. Ela fala, utilizando-se de frases completas, gramaticamente corretas, mas ela não consegue formar o conceito abstrato, na perspectiva de Aristóteles. O que está em evidência para ela é a ação a ser realizada e não o objeto que realiza a função. No segunto modo de distúrbio, a situação é oposta: Ela não consegue formalizar frases em composições completas, gramaticalmente corretas. Em vez de falar ‘dê-me a faca’, ela simplesmente pede ‘faca’, ‘gelo’, ‘caixa’, ou seja, ela pronuncia somente os substantivos sem fazer uso dos verbos. Ela só dá o aspecto referencial da linguagem, que permanece intacto, mas o aspecto operativo ela não fornece. Dessa maneira, os objetos ficam sem a expressão verbal do contexto, devendo dessa forma, as pessoas procurar interpretar tomando como base outras formas de linguagens apresentadas por ele, tais como gestos, expressões etc.

Uma outra situação proposta por Otte (2003), descreve uma situação hipotética, em que, supondo estar com um grupo de turistas ingleses, em visita à Amazônia ou ao Pantanal Matogrossense, observassem um animal, relativamente grande, na beira de um rio ou de uma lagoa, e perguntam ao guia: ‘— que tipo de animal é esse?’ o guia informa: ‘—Isso é uma *Capivara!’* Como os turistas não sabem falar português e muito menos sabem sobre a origem do termo que é indígena, então eles apenas conseguem identificar a referência nominal utilizada: ‘—Isso é uma *Capivara!’* Porém, eles ficam perdidos com relação ao significado, até que um guia tente explicar num formato 'britânico' o que pode significar: '—É um 'water hog'!' (ou seja um proco-d'água).Agora os turistas têm uma explicação em termos de palavras que eles conhecem e eles poderiam imaginar terem entendido seu verdadeiro significado, mas não é verdade, porque Capivara, é um roedor e não um porco, e água, não representa nenhuma informação adicional qualitativa ao termo. Dessa maneira, essa descrição tem a desvantagem criar uma idéia errada do animal, porque como já foi dito, a capivara não é um porco, mas um roedor que se alimenta de capim. No contexto dos indígenas da Amazônia e Pantanal, a situação é o oposto, pois o termo Capivara, para eles, significa 'comedor de capim', enquanto 'porco d'água' não significa nada para eles.

Normalmente o uso do referencial serviu como ponto de partida para observações seguidas de alguma curiosidade. Depois de algum tempo, os turistas começam a observar algumas características e hábitos da Capivara e podem informar que 'a Capivara é um bom nadador...', 'é um bom mergulhador', 'seu dente incisivo é grande', ou seja, gradualmente, o uso do termo muda e é transformado numa descrição. Teoria, quando em estado latente, quando começa a ser formada, é usada referencialmente. Posteriormente, quando alcançado o ápice, essa teoria passa a ser usada de forma atributiva.

Em síntese, ao desenvolver esse capítulo procurou-se tratar de registrar e analisar algumas características e discussões relativas a certas dualidades inerentes ao pensamento matemático. Tem-se como claro que o conhecimento dessas dualidades tem a pretensão de ser útil em situações didáticas.

Para fundamentar e entender a idéia de pensamento relacional principalmente levando em conta o contexto educacional, duas perguntas emergiram: A primeira das questões foi:

como se alcança o conhecimento objetivo?	⇨	*Referenciado por* Cassirer (1953) que fundamentou-se em Kant (1787)	⇨	*Consegue-se por meio do desenvolvimento de atividades*

Mas,

Para Kant, conhecimento provém de duas fontes:

a)-conceitos (atividades) e

b)-intuições (receptividade).

têm o papel de fornecer objetos

constrói relações entre objetos

ou seja, a receptividade fica por conta das relações a serem feitas, mas as referências dessa ação (as atividades), são normalmente relacionadas a objetos.
O caminho é a **complementaridade** entre intuições e conceitos.

A segunda questão é:

como se alcança o sentido, a compreensão?"

Referenciado por Skemp (1989).

Consegue-se ao tentar explicar os "porquês" ao invés de somente conhecer os "o quês"

Que apresenta dualidade entre:

Aristóteles e os Filósofos modernos

que busca justificação para conhecimento do passado (o conhecido);

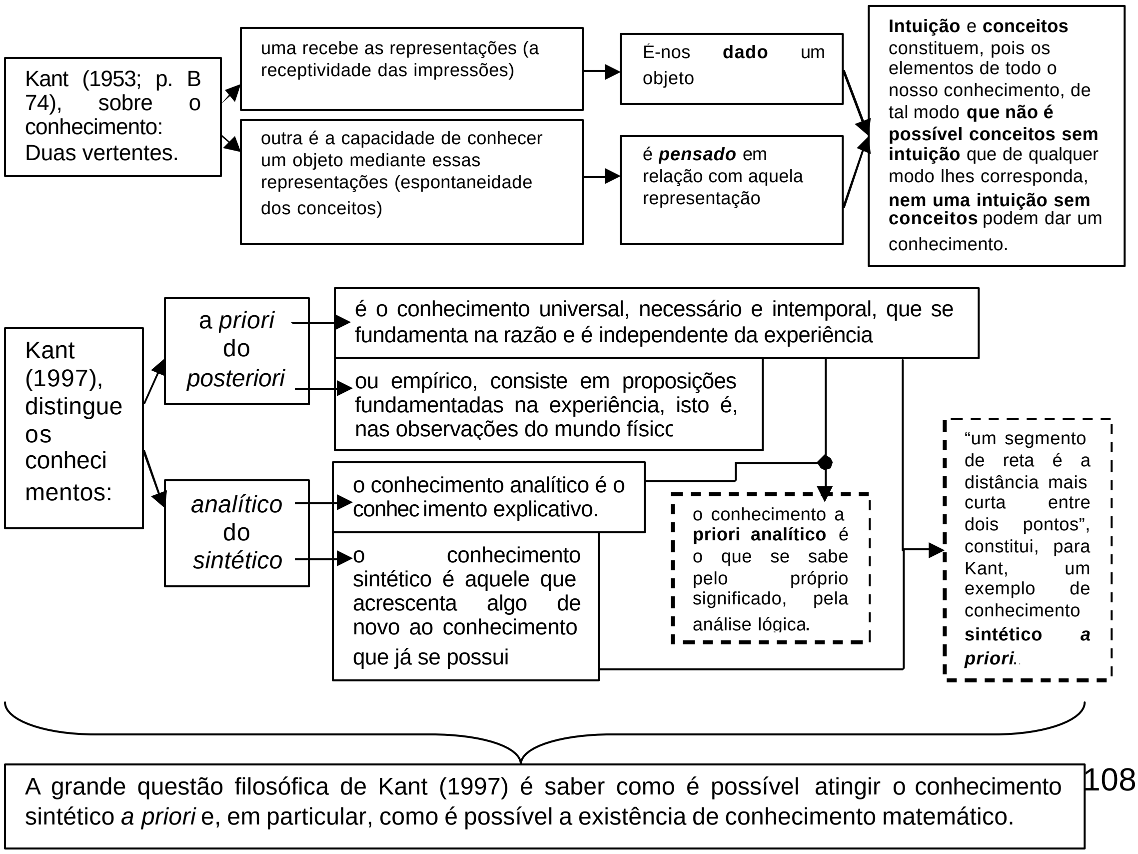
que conduzem a compreensão para a busca de aplicações do presente e do futuro.

uma outra forma de concepção de **complementaridade** será necessário desenvolver: entre compreensão e aplicação.

Num contexto entre o século XIX e XX, em que estabelecer de forma consistente o significado e o sentido de conceito era primordial pois, para as muitas novas teorias que emergiam, esse significado era base de sustentação. Nosso estudo começou com uma análise do trabalho de Cassirer (1953) Substance and Function & Einstein's Theory of Relativity, que explora, num aspecto histórico, a idéia de conceito, tendo por base a comparação e discussão sobre a forma como Kant (1787) e Aristóteles abordaram e desenvolveram o assunto.

Dessa maneira, a evolução da idéia de conceito foi sendo apresentada, fazendo contraponto com algumas correntes filosóficas, principalmente as alemãs, tendo também como marco pensadores como Husserl, Hartmann e mesmo a Heidegger, mas principalmente fundado na concepção kantiana, discutindo algumas dualidades e implicações surgidas desde as concepções aristotélicas em que conceitos serviam apenas para classificar, trazendo com isso uma carga de identificação e caracterização por meio de experimentações empíricas com caráter descritivo. Isso perdurou até atingir a modernidade, basicamente no século XVII, com o fortalecimento da Matemática e da Física, indicada por Galileo e Leibniz, que se assumiu e que necessitavam de um caráter mais lógico para estabelecer uma base teórica.

Cassirer, então nessa obra passa a discutir as idéias básicas de conceito, tendo como referência a base filosófica de Kant (1787), usando para isso pressupostos simples, apresentando exemplos de DROBISCH, (1887) e UEBERWEG, (1857) em que a construção de conceitos vai se estruturando passando de conceitos mais genéricos e gerais obtidos de uma série de objetos, e por oposição, obtendo-se conceitos mais específicos por meio da especificação do gênero que acontece pela adição progressiva de outras ou novas características próprias ao objeto. Nessa forma de encaminhamento, Cassirer (1953) conduz sua discussão a respeito da idéia de 'pirâmide conceitual', fundamentando-se ainda mais em Kant.



Assim, já no início do século XX, Cassirer indicava uma transição entre o pensar nas substâncias para o pensar nas relações, e quando a lógica do conceito genérico regido e controlado pelo conceito de substância, ele se opõe à lógica do conceito matemático de função. Isso conduzia o significado dessa nova compreensão de um conceito teórico, que consiste em perceber que a retenção das determinações dos casos especiais encontram-se perdidas e se os conceitos são concebidos como abstrações. Então Cassirer começa a desvelar o que se quer entender por substância e função, auxiliado também pelas idéias de Lambert, matemático do século XVIII, amigo de Kant.

Esses conceitos teóricos procuram avançar no desenvolvimento das formas de estabelecer relações, o que dificulta na consolidação de funções. O que falta em Cassirer e Kant é uma melhor descrição do referencial. Por exemplo, Cassirer identifica função como fórmula, ou seja, trata ambas da mesma maneira. Isso era comum até o fim do século XVIII. Após esse período as concepções evoluiram:

Fórmula → é mais estática, algo pronto e acabado, parece um objeto com um conceito "terminal", "pronto" para ser manuseada.

Função → não sugere um objeto mas sim algum objeto que se interrelaciona com outro ou então que uma coisa depende da outra.

Que apresenta duas formas de interpretação:

na primeira aparece associado ao conceito de uma lei, de forma particular, junto com o conceito de lei natural, e que surge implicitamente uma noção de funcionalidade, do conceito operacional aritmético-algébrico, do conceito de algorítmo e das concepções gerais de máquina.	A segunda é descritiva e considera uma função como uma lei de dependência entre uma grandeza variável e outras quaisquer, como por exemplo: distância está sempre em função do tempo; massa está sempre em função com a força e a aceleração.

O desenvolvimento do conceito de função contribuiu para sedimentar as idéias de continuidade, de movimento, circularidade, que é peculiar ao pensamento relacional, pois relações não são percebidas ou estabelecidas estaticamente ou não são entendidas sob forma de receita e sim compreendidas por meio de atividades que evidenciem essas relações e ainda, se possível complementadas com o conhecimento inerentes ao contexto.

No contexto educacional, a forma de abordagem dada à Matemática foi exemplificada em quatro correntes, em ordem cronológica:

Pensador	Concepções	Características
Skemp, surgida em 1978	Matemática Instrumental	Forma de conhecimento que cada uma reflete
	Matemática Relacional	
Copes, surgida em 1979	a absolutista	Ele identifica cada uma dessas concepções com o conhecimento matemático predominante em diferentes épocas históricas.
	a multiplista	
	a relativista	
	a dinâmica.	
Lerman, surgida em 1983	a absolutista	escolas de pensamento: a euclidiana
	a falibilista	escolas de pensamento: quasi-empírica
P. Ernest surgida em1989	baseada na resolução de problemas	vê a Matemática como um campo humano de conhecimentos em continuada expansão e invenção e como um processo a que acrescenta um conjunto de conhecimentos. A Matemática não é concebida como um produto acabado
	na concepção platônica	vê essa área do conhecimento como um corpo de conhecimentos estático. A Matemática, nessa perspectiva, é vista como um produto imutável. A Matemática é descoberta, não é criação.
	na concepção instrumentalista.	considera-a como uma caixa de ferramentas, em que se acumulam fatos, regras e habilidades que serão usados pelos 'artesãos capacitados' na procura de alguma justificação que lhes é externa. A Matemática é vista como 'um conjunto de regras e de fatos não relacionados, mas úteis'

Dessa forma, considerando inicialmente, por ser um dos precursores nessa relação entre a psicologia e a educação, o outro trabalho onde se buscou fundamentos, foi na obra de Skemp (1989), **Mathematics in the primary school**, em que, didaticamente, ele evidencia a dualidade entre saber e compreender abordada sob a forma de compreensão instrumental e compreensão relacional. Assim a compreensão de conceito toma outra dimensão: a educacional. Isso, de certo modo, conduz para uma nova dualidade: agora entre as concepções de Cassirer e Skemp, em que se procura estabelecer similaridades e contrapontos. Por esse motivo, contribuições de autores tais como Otte, Fossa, além de outros citados como referência histórica foram acrescentados, para indicar caminhos em que a integração entre as formas de pensamento possa ser viável.

A comparação entre Cassirer e Skemp gerou dois pontos importantes:

- Primeiro: a teoria da complementaridade é importante para entender a relação entre pensamento instrumental e relacional. Nem Cassirer nem Skemp destacaram que não são só contrastes entre os dois pensamentos. Até mesmo entre a complementaridade pode-se encontrar uma dualidade: por um lado entre compreensão e ação e a outra entre os pensamentos relacionais e instrumentais.

- Segundo, tem-se que descobrir que, no ponto de vista educacional, se preocupa Skemp, com uma outra contradição: entre compreensão e atividade ou aplicação

Também foram tratadas algumas questões primeira que conduziam para o inicio do estabelecimento da noção de complementaridade, fundamentada principalmente por Otte e que voltará a ser abordada também no capítulo vindouro. É importante destacar ainda, que as obras de Cassirer e Skemp são pontos chaves dessa interpretação, pois elas fazem o contraponto, sendo uma pelo lado histórico outro pelo educacional.

Visando analisar essa temática no sistema educacional, esse capítulo apresentou algumas situações que além de fundamentar, teve o papel de ilustrar, por meio de exemplos referenciados, abordando tanto as questões relativas aos conceitos como as formas de pensamentos. O propósito agora é usar essas reflexões, canalizando-as para o ensino. Outras dualidades irão ocorrer com características semelhantes à do instrumental e do relacional ou não, mas que nos remete a buscar maneiras de entender e relacionar com o ensino, principalmente de Matemática. Essa discussão será apresentada no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2

2.1. O Ensino e a possibilidade do uso do pensamento relacional

No sistema educacional, o uso de conceitos de referencial, o estabelecimento de relações e o desenvolvimento de processos de abstrações de um modo em geral, podem acarretar dificuldades, mesmo entre os educadores. Uma reportagem no jornal ‘O Estado de São Paulo’, sobre o resultado de uma pesquisa realizada por uma doutoranda da Faculdade de Educação da USP, pode ser considerada como exemplo desse fato. O contexto era de proximidade a um evento astronômico (um eclipse lunar), e a notícia que veiculada foi:

> o universo concebido pelos professores de Ciências de São Paulo é pequeno e muito estranho. Nele, que se limita ao sistema solar, o Sol e seus planetas são planos e se localizam

> numa fileira, um atrás do outro, como nas ilustrações dos livros didáticos. Essa é uma visão bidimensional e equivocada do universo. E.S. (2004; p. A-15).

Foram colocados, à disposição dos professores pesquisados, material como barbantes, móveis pendurados numa sala e uma estante com objetos assemelhados a elementos astronômicos, foi-lhes solicitado que fizessem uma representação do universo com aqueles materiais. Mesmo assim, segundo essa pesquisadora, os resultados não foram animadores:

> em geral, os modelos construídos continham o Sol, estrelas, planetas e luas. mas o sistema solar constituía a maior parte ou, em alguns casos, o próprio universo. Os astros citados estariam no céu ou num universo que, para muitos, se restringe ao espaço acima da Terra. E.S. (2004; p. A-15).

Ela ainda ressalta:

> para 76% dos pesquisados, o Sol é plano, assim como a Terra. Mesmo conhecendo o modelo teórico que diz que nosso planeta é esférico, eles não conseguiam explicar como isso é possível. Eles não concebiam um universo tridimensional e sabiam como se posicionar nele. Como conseqüência, eles têm dificuldades de explicar a seus alunos fenômenos como as estações do ano, as fases da Lua e os eclipses. E.S. (2004; p. A-15).

A dificuldade identificada por uma parcela considerável de professores, em perceber e representar um ente tridimensional, dificulta tanto a percepção como o estabelecimento de relações nas mais diferentes áreas do conhecimento. O mesmo ocorre com a Matemática, em que o 'casamento' entre o aritmético/algébrico e o geométrico é muito importante para desenvolver a compreensão, e facilitar o processo de abstração e generalização. E portanto pode-se perguntar: Como ensinar algo a alguém quando o próprio professor (que tem que ensinar) não tem esse esse conhecimento consolidado?

Inúmeras outras situações análogas podem também ser identificadas, destacadas e fundamentadas quando se lida com esse modo de percepção ou formas de estabelecer o pensamento relacional. É essa a idéia que liga a teoria de Kant (1997), Aristóteles e Cassirer (1977) por um lado, ao sistema desenvolvido por Skemp (1980), em seu livro *Psicologia del aprendizaje de las Matemáticas.* Skemp (1980) assinala que a imaginação mental das pessoas pode ser classificadas em duas categorias: visual e verbal, de maneira que a representação dos conceitos matemáticos são esboçados mediante um sistema de símbolos denominados visuais e verbais, respectivamente. Dessa forma, os símbolos verbais são representação da palavra oral e escrita, e os símbolos visuais são constituídos por diferentes classes de diagramas ou esquemas.

Na Matemática, a linguagem algébrica tem muito mais similaridade com a simbolização verbal do que com a simbolização visual, mesmo levando em conta a importância que o componente gráfico possui sobre qualquer forma de raciocínio lógico-matemático que se realize. Porém, considera-se que a Matemática se utiliza com muita freqüência da combinação de ambas formas de simbologia. Isso ficou patente na combinação realizada por Descartes com a criação de sua Geometria Analítica.

Skemp (1980; p.117), caracterizou o sistema de simbologia da seguinte maneira:

VISUAL	VERBAL-ALGÉBRICO
• Abstrai propriedades espaciais tais como forma, posição;	• Abstrai propriedades que são independentes da configuração espacial, tais como número;
• Mais difícil de comunicar;	• Mais fácil de comunicar;
• Pode representar pensamento mais individual;	• Pode representar pensamento mais socializado;
• Integrador - indica estrutura;	• Analítico - indica detalhes;
• Simultâneo;	• Seqüencial;
• Intuitivo.	• Lógico.

FIGURA 3: RELAÇÃO ENTRE A REPRESENTAÇÃO VISUAL E REPRESENTAÇÃO VISUAL-ALGÉBRICO DE SKEMP.

Muitas dessas propriedades são na realidade complementares, pois além de caracterizar, estabelecem ao mesmo tempo uma comparação de ambas as classes de simbologias. É facilmente observável que as características socializantes do sistema verbal-algébrico explicam, de alguma maneira, sua hegemonia em relação ao visual, tanto que, sua facilidade de comunicação contrasta com sua dificuldade. Isso é exemplificado pela expressão popularizada de que 'uma imagem vale por mil palavras'.

No setor educacional, tem-se a visão de Robayna et all (1996), expressa em:

> o aspecto algébrico que possui a matemática da escola fundamental e média nos indica que permanece dentro da classificação indicada por Skemp (1980; p.117) ou seja, da simbologia verbal-algébrica, porém a experiência e a história têm mostrado a importância da visualização como uma 'ferramenta' fundamental para a compreensão de muitos argumentos e fórmulas algébricas. Esse caráter algébrico das matemáticas escolares é devido ao fato de que não se é consciente do potencial que possui o sistema gráfico visual e de poucos modelos que se utilizem de ambos os sistemas. Convém observar que em nenhum momento as generalizações teóricos-algébricas aparecem automaticamente da visualização, porém ela complementa o entendimento de tais generalizações. ROBAYNA, et all (1996; p.142).

Otte (1986), por sua vez argumenta dizendo que as fórmulas algébricas possuem um aspecto lógico-linear e outro visual-ideográfico, aspectos que se relacionam, respectivamente, com o verbal numérico e geométrico gráfico, intrínsecos ao conceito de variáveis surgido nos séculos XVI e XVII.

Pode-se assim estabelecer uma série de conexões entre a imaginação mental, os sistemas simbólicos e as fórmulas algébricas que possibilitam conseguir realizar diferentes atividades apoiadas pelo esquema a seguir descrito na figura 4.

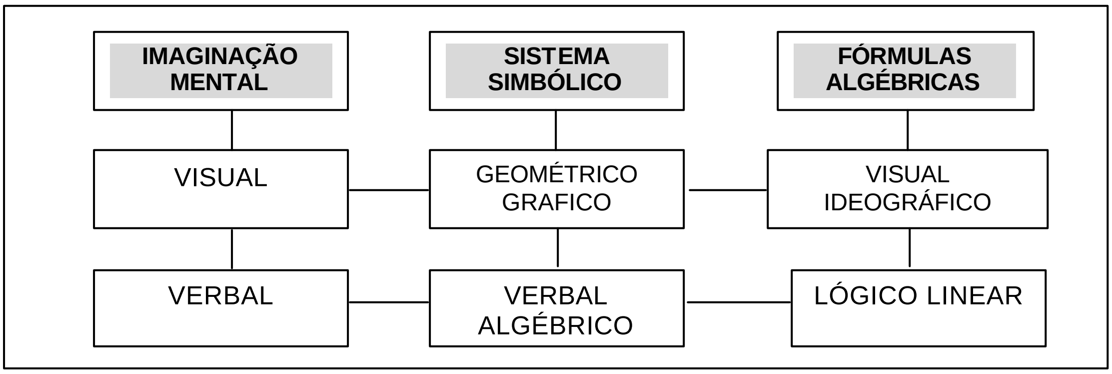


FIGURA 4: ESQUEMA DE RELAÇÕES ENTRE IMAGINAÇÃO MENTAL, SISTEMA SIMBÓLICO E FÓRMULAS ALGÉBRICAS.

Por exemplo: considera-se importante o fato de combinar essas duas formas de representações das fórmulas algébricas (visual ideográfico e lógico linear) pois pode proporcionar um caminho ao processo de generalização. Antigamente, essas representações eram baseadas nos esquemas geométricos gregos, - para quem não existia, naquela época, uma álgebra já estruturada- , para as apresentações e demonstrações se utilizavam muito do aspecto visual-ideográfico, ou seja por meio de sinais que reproduzem objetos concretos. OTTE (1986) apud ROBAYNA, et all (1996; p.142).

E, por essa razão preferi comprovar determinadas propriedades usando exemplos numéricos antes de utilizar argumentos geométricos rigorosos não é a forma mais adequada adequada para o ensino. Como exemplo citamos a justificativa da propriedade distributiva do produto em relação à soma, usando argumentos 'aritméticos' ou 'numéricos' [4 e 5 são números naturais que admitem que 4 x (4 + 5) = 4 x 4 + 4 x 5]. Pode-se utilizar o argumento visual dos Elementos de Euclides, conforme figura 5.

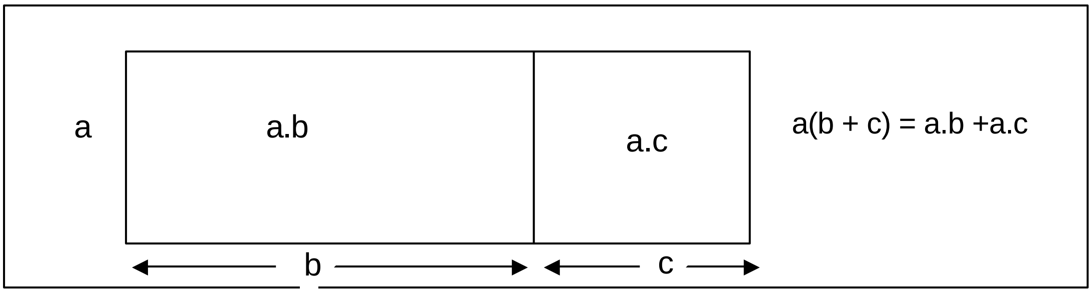


FIGURA 5: ARGUMENTO VISUAL DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

A utilização da aritmética faz com que um argumento, como a generalização de uma propriedade, perca seu real significado. Isso porque destaca-se uma pequena e simples comprovação, a qual limita a extensão real da propriedade, que pode se tronar uma concepção que o aluno pode alcançar do que seja uma demonstração matemática. Embora, claramente, o argumento geométrico tenha suas limitações (nesse caso a>0 e b>0), ele ajuda a compreender a justificativa da propriedade, pois abarca um número infinito de casos que, posteriormente, poderá ser generalizado para qualquer número real.

A linguagem visual pode ser utilizada como recurso didático de apoio tanto na linguagem aritmética como algébrica. Muitas das atividades matemáticas podem ser desenvolvidas tendo como referência o esquema estruturado a seguir na figura 6. Nele se considera a linguagem visual e uma esquematização dela mesma —visualização simplificada— como um passo intermediário no desenvolvimento de cada atividade algébrica intermediada pela linguagem algébrica ora contribuindo para a compreensão desses estágios de representação ora melhorando/gerando nova linguagem algébrica.

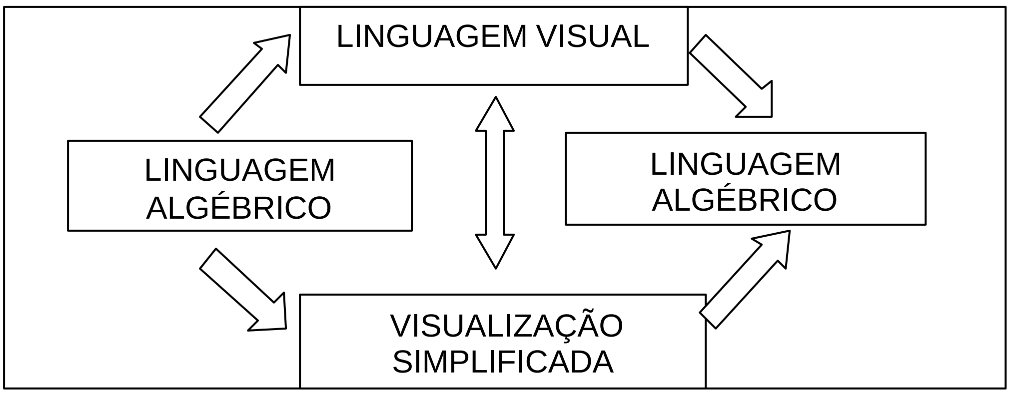


FIGURA 6: ESQUEMA DA LINGUAGEM VISUAL PARA ATIVIDADES MATEMÁTICAS

2.2. Por onde caminham ou evoluem as dualidades na Educação Matemática?

Além dos aspectos visuais e verbais, outras dicotomias ou dualidades são evidentes no processo educacional e no seu sistema evolutivo. No próprio campo do processo de criação matemática, ou então naquilo que comumente chama-se de ‘fazer matemática’, as dicotomias já causavam preocupações a vários matemáticos. Elas já estavam presentes mesmo antes de se propagar a discussão entre pensamento relacional e instrumental.

O entendimento do ‘fazer matemática’ era tão importante para os matemáticos da época que os editores *Fehr* e *Laisant* da revista *L’Enseignement Mathématique* enviaram um questionário para mais de cem matemáticos com o intuito de determinar como ele ocorre. Kline (1904). Nesse material os editores procuravam descobrir como surgiu o interesse pela Matemática, quais os hábitos de trabalho, como e quando surgiam as inspirações e de que forma ocorria a descoberta, dentre outras questões. Essa pesquisa, para Poincaré (1995) confirmava suas conclusões sobre o que era essencial. Já Hadamard (1954) questionava o fato de que só se incluíam descobrimentos concluídos com êxito e não se fazia referência aos fracassos.

Dessa feita, Hadamard (1954) vai então realizar, a partir de 1945, um estudo próprio, ainda que, ele o tenha considerado como de caráter informal, no qual interrogou alguns matemáticos tais como George Birkhoff, Norbert Wiener, George Pólya e, ainda Albert Einstein. Esse trabalho que resultou na publicação do livro, “An essay on the psychology of invention in the mathematical field”, em 1954, por Hadamard, e que embora incompleta antecipa um corpo de pesquisas posteriores sobre o pensamento matemático. Segundo informações de Kilpatrick, Hadamard (1954) considerou que a falta de atenção behaviorista ao pensamento e à consciência era uma atitude anticientífica e que inibia o estudo do pensamento matemático.

A preocupação bourbakista era uma preocupação com os meios matemáticos. Isso era presente nas informações de Kilpatrick que também indicou essas preocupações no famoso livro de Godfrey H. Hardy, sendo matemático inglês, ficou conhecido principalmente por suas façanhas na área da teoria dos números e análise matemática. Sua mais importante obra foi o livro "A mathematician's Apology" (Em defesa de uma Matemática). Nele, Hardy defende o valor da Matemática Pura e a dimensão estética da Matemática. Essa temática foi a mesma desenvolvida por Kilpatrick e o grupo Bourbaki: matemáticos e a criação matemática, do momento histórico da retomada da Matemática francesa do século XX, num contexto pós-guerra em que alguns importantes matemáticos se detinham sobre as questões da preocupação dos meios matemáticos e da própria produção em Matemática.

Pertencente ao grupo Bourbaki, Dieudonné (1990) aborda e discute várias dessas questões nessa sua obra sobre matemáticos, sobre o trabalho que os matemáticos desenvolvem, sobre atividade matemática, criação matemática. Ele ainda aborda discussões mais gerais, e apresenta uma caracterização da comunidade matemática e da comunidade científica em geral.

Um dos matemáticos que ele faz referência algumas vezes é a Jules-Henri Poincaré, que fez doutorado em Ciências Matemáticas, atuou como professor lecionando as disciplinas de Física, Matemática, Cálculo das Probabilidades, Astronomia, Mecânica Celeste e Eletricidade. Pesquisador muito versátil e inquieto, publicou perto de 500 trabalhos, envolvendo principalmente Mecânica Celeste, Física, Eletricidade além de ter pesquisado e escrito em todas as áreas da Matemática, tanto Pura como Aplicada. Escreveu vários livros, dentre eles *La valeur de la science*, publicado pela primeira vez em 1905, tendo como referência uma coletânea de alguns de seus artigos.

Outra referência importante para Dieudonné (1990) foi o próprio Hardy. Dieudonné (1990) nos oferece parte do pensamento bourbakista sobre esses temas, como por exemplo, o próprio entendimento sobre o significado de alguém ser ‘matemático’, que se pode entender como um professor de Matemática, um utilizador da Matemática, ou um matemático criador. No entanto, em seu livro, ele destaca principalmente o último. Desta feita, para ele “um matemático, no presente texto, será, portanto, definido como alguém que publicou pelo menos a demonstração de um teorema não trivial” DIEUDONNÉ, (1990; p. 21), e ele completa: “entenda-se por trivial, que se limita a tirar algumas conseqüências fáceis de princípios bem conhecidos” DIEUDONNÉ (1990; p. 26).

É importante destacar ainda que, de uma maneira geral, Dieudonné (1990) nessa obra, pretende construir um panorama sobre a Matemática contemporânea e, para isso, possuir uma idéia da sua história para ele torna-se imprescindível. Ele comenta ainda: “Creio que não é possível compreender as matemáticas de hoje se não se tiver pelo menos uma idéia sumária de sua história” DIEUDONNÉ (1990; p. 27). Faz ainda uma curta incursão na História da Matemática procurando caracterizar os objetos e os métodos das matemáticas clássicas (desde o surgimento da idéia de demonstração até o surgimento do cálculo infinitesimal) além de listar os principais matemáticos relacionando-os com suas principais contribuições. No capítulo V, ele procura caracterizar, de forma objetiva e clara, os ‘novos objetos’ e ‘novos métodos’ matemáticos.

Surgem e começam a sobressair a partir desse contexto histórico do século XIX, também dicotomias: agora entre professor docente e pesquisador que publica. Belhoste (1998) explica que para a população, em geral, a Matemática é primeiramente, uma disciplina de ensino, mas para os matemáticos é a atividade de pesquisa que define sua identidade profissional e não a matéria em si. Isso demonstra que nessa visão, ensinar Matemática não é suficiente para ser um matemático, é necessário e fundamental produzir resultados matemáticos (sendo para Dieudonné, não-triviais) e de alguma forma, contribuir para o progresso da Matemática. Da mesma forma, destaca ainda Dieudonné (1990), que ser bacharel em Matemática não necessariamente significa ser matemático, e somente alguns doutores em Matemática são matemáticos. Belhoste (1998), da mesma forma, declara que ser matemático não é considerado como um ‘status’ oriundo de uma categoria de caráter a-histórica, mas advém de uma construção social, sendo, portanto, histórica. Dessa forma, nada autoriza a definir Descartes como um matemático, pois a relevância e contribuição do seu trabalho acontecem no âmbito da Filosofia, sem desmerecer suas produções realizadas na Matemática.

Em função da expansão das instituições educacionais é, principalmente, por meio do ensino que a atividade matemática se profissionaliza na Europa, dando corpo à figura moderna do matemático. Também acontece por contribuição das atividades didáticas o avanço no desenvolvimento e na difusão das práticas matemáticas por elas mesmas. Podem-se colocar como exemplo as situações envolvendo Pitágoras e novamente Descartes: Sabe-se que os gregos já conheciam e se utilizavam do Teorema atribuído a Pitágoras, bem como do Sistema de Coordenadas utilizado por Descartes. Foi somente após a Revolução Francesa, no início do século XIX, que seus nomes foram acoplados aos respectivos produtos matemáticos. Descartes utilizou o sistema em seu método e Pitágoras foi responsável pela ampla divulgação dos produtos que se imagina originado dos gregos.

É evidente que, na história surgem tanto as figuras de docentes, importante para disseminação e vulgarização do conhecimento, bem como a de matemáticos, responsáveis pela criação e produção do conhecimento. É notório que, na visão de Dieudonné (1990), ele não divise um equilíbrio, no que refere ao nível de importância quanto a esses dois estilos de figuras. Ele valoriza evidentemente o segundo perfil.

Ainda que, aparentemente em função mais especificamente por causa dos indivíduos, exista uma dicotomia entre pesquisa e ensino, no processo geral essa separação não ocorre, pois pesquisa e ensino comunica-se entre si, seja institucionalmente ou não, inexistindo fronteiras definidas.

Devido a suas características próprias de divulgação e sob o ponto de vista histórico e até pelo fato de que as pesquisas criadas, escritas e publicadas acabam mais evidenciadas que os produtos que são simplesmente disseminados por meio do ensino.

Essa dificuldade de inter-relação entre pesquisador e professor docente encontra-se presente em maior escala nas universidades, pois nos demais níveis de ensino praticamente são desencadeadas, em sua maioria, atividades de ensino. Nas universidades, essa separação também se evidencia, pois são distintos os grupos que se dedicam ao ensino e os grupos que se dedicam à pesquisa, sendo esses últimos, geralmente rotulados tipicamente como 'aqueles encerrados em sua torre de marfim'. Tais declarações são denominadas em função de que os pesquisadores são vistos normalmente como gênios e que estão em constante processo de pensamento profundo, absorto em idéias, montando esquemas etc. Dieudonné (1990), relata fatos ocorrido com outros matemáticos: Poincaré, quando indagado de como ele construía suas descobertas, ele respondia: 'pensando sempre'; Kummer precisou de oito anos para inventar a teoria dos números ideais e Gauss, que reconheceu ter procurado em vão uma expressão algébrica durante muitos anos.

Essa seria a idéia do pesquisador em sua 'redoma' e que Dieudonné (1990), reafirma e reforça a idéia de que, se tais gênios necessitam de uma concentração tão elevada de seus espíritos, fica difícil imaginar que pesquisadores menos dotados possam realizar um trabalho frutuoso sem consagrar todo seu tempo, o qual possam dispor, para a pesquisa. Ele afirma ainda que não conhece exemplo de matemático que tenha se colocado numa pesquisa difícil e paralelamente se envolvido numa atividade exterior que exija o seu tempo e sua reflexão. Tanto para ele como para muitos outros pesquisadores, docência e pesquisa são tarefas mutuamente exclusivas como aponta o Professor Renato Mezan, professor da PUC-SP que se coloca concordante em termos com as proposições de

Dieudonné, em que ele cita num artigo no jornal Folha de São Paulo, denominado 'O escândalo dos doutores':

> outro equívoco que precisa ser dissipado diz respeito ao 'binômio ensino e pesquisa'. Sem querer desqualificar a atividade de pesquisador, deveríamos reconhecer que muitos professores, titulados ou não, não possuem vocação para produzir conhecimento novo, que é o que significa no sentido acadêmico a palavra 'pesquisa'. Seu talento é transmitir o conhecimento já existente, algo tão necessário quanto pesquisar, especialmente nos cursos de graduação, nos quais se trata de equipar o aluno com o saber já acumulado naquela área de estudo. MEZAN, (2005, Folha de São Paulo, Caderno Mais, p.3).

Um contraponto: que lugar caberia a aqueles que detêm um título de doutor, com uma tese que, embora seja considerada original pertença ao conjunto das triviais? Dieudonné diz sobre eles:

> a sua importância é todavia indubitável: para além do papel social que desempenham na educação de toda a elite científica de um país, são eles que, nos primeiros anos da universidade, podem distinguir os estudantes particularmente dotados que serão os matemáticos da geração seguinte; se souberem manter-se ao corrente do movimento da Ciência e com ele enriquecer o seu ensino, despertarão vocações hesitantes e poderão orientá-los para os colegas encarregados de guiar os primeiros passos dos futuros investigadores. DIEUDONNÉ, (1990; p. 27).

Se por um lado, Dieudonné afirma a importância social da docência, por outro lado ele afirma a importância da atualização docente, para esse fim, o de preparar a elite científica. O que não é pouco.

Por outro lado, é evidente que existem inúmeros docentes que são altamente competentes na difícil tarefa de ensinar, e cabe a eles inclusive, a função de despertar nos alunos, uma provável paixão para tornarem-se futuros pesquisadores. Isto se torna cíclico, como também aponta Mezan, quase que contrapondo a Dieudonné: 'Por vezes, podem coincidir na mesma pessoa um ótimo pesquisador e um excelente professor; mas isto é raro, e é injusto exigir que seja sempre assim'. MEZAN, (2005; p. 3)

No Brasil, esse exemplo é igualmente muito raro. A forma como as universidades brasileiras foram estruturadas promoveu e sedimentou essa separação, não proporcionando condições para o estabelecimento de uma verdadeira complementaridade entre ensino e pesquisa.

Até o século XX, sabia-se muito pouco sobre modos, estilos e práticas de pesquisa e de investigação feita pelos matemáticos. No decorrer da história, não foram muitos os matemáticos que se referiram a como ele desenvolveu seu 'modus operandi' em sua atividade investigativa, uns por não perceberem a necessidade de estabelecer uma dignidade científica e epistemológica a essa reflexão, outros porque simplesmente não pensavam muito no assunto. Na antiguidade, Arquimedes foi uma exceção ao revelar que apoiava as suas intuições geométricas em experiências – conceituais – de natureza 'mecânica', ou seja, sem muita reflexão, ela surgia automaticamente. Já no século XX, Poincaré ressaltou o papel do inconsciente na invenção matemática; Hadamard (1954), por meio da sua pesquisa a outros matemáticos, propiciou que se conhecessem melhor os estilos investigativos deles; as biografias de alguns matemáticos (Halmos, 1985; Hardy, 1985; Hilbert, 1986; Weil, 1992;...) também revelam, às vezes de modo mais implícito do que explícito, aspectos de como desenvolviam sua prática matemática.

Considerando o fato de que essa prática exercida pelos matemáticos, além de ter sido relativamente misteriosa (e ainda o é...), ao contrário do que sucedeu e sucede nas Ciências experimentais, ela contribuiu para se criar uma espécie de divinização do conhecimento matemático, dessa forma, não fica evidente o caminho percorrido no decorrer de todo o processo investigativo com os obtidos nos produtos finais, que se revelam totalmente depurados. Geralmente nos demais procedimentos experimentais das outras

Ciências, cada experiência é cuidadosamente descrita em relatórios próprios, detalhados passo-a-passo.

Esse desconhecimento da prática dos matemáticos é uma das razões pelas quais a Epistemologia da Matemática tem tido um teor *prescritivo,* ou seja, diz como **deve ser** a Matemática por analogia com os produtos matemáticos conhecidos e não *descritivo* como **é** a Matemática real feita pelos matemáticos.

Atualmente, é maior a preocupação em melhor conhecer como se desenvolve a prática matemática. Ela tem motivado uma revitalização da Epistemologia da Matemática, no sentido em que a problematização e a teorização epistemológicas estão num nível superior ao da Matemática simplesmente feita, e dessa forma, passam a valorizar a prática ou praxis matemática. Essa revitalização epistemológica tem como 'pano de fundo' a idéia de que, o que está feito se relaciona, sem sombra de dúvidas, com o modo como foi feito.

O trabalho investigativo dos matemáticos está muito longe da linearidade e transcendência que lhes são geralmente atribuídos pelos não-matemáticos. Por exemplo, a citação que segue indica:

> quando o matemático trabalha faz conjecturas vagas, visualiza generalizações grosseiras, e salta para conclusões injustificadas. Ele arranja e re-arranja as suas idéias e torna-se convencido da sua verdade muito antes de poder escrever uma demonstração lógica. Não é provável que a convicção aconteça muito cedo –usualmente acontece depois de muitas tentativas, muitos equívocos, muito desânimo, muitas falsas partidas (...) é necessário trabalho experimental (...) experiências conceituais *[thought experiments].* Quando um matemático pretende demonstrar um teorema acerca de um espaço de Hilbert de dimensão infinita, examina o seu análogo de dimensão finita, vê em detalhe os casos primeiro em duas e três dimensões, freqüentemente tenta um caso particular numérico, e, deste modo, espera ganhar um *insight*, que a pura

> prestidigitação com a definição não produz. HALMOS, apud VILLIERS, (1999; p. 21)

Das considerações determinadas por Halmos *apud* Villiers (1999) pode-se concluir que a análise de casos particulares, o estudo de analogias, o trabalho experimental, o pensamento vago e grosseiro que muitas vezes inclui as idéias ilógicas e pré-lógicas, o estabelecimento de conjecturas, as tentativas, os *insights* e ainda muita incerteza, agravados pelos aspectos emocionais inerentes aos processos investigativos, tais como desânimo em razão de constantes fracassos e recuos, e a correspondente necessidade de perseverança e demais situações análogas, fazem parte intrínseca da práxis do matemático, geralmente, tudo isso antes que ele atinja o estabelecimento formal de conhecimento.

Os tão sofridos *insights,* freqüentemente, resultam de pensamento inconsciente que o matemático não necessariamente ativa, como num clique liga-desliga e nem controla e pelo qual não é diretamente responsável. Poincaré já dizia que sem trabalho árduo consciente não é possível conseguir ter esses *insights* disparados pelo inconsciente. A estimulação dos *insights* pode ser feita por uma combinação, por exemplo, de trabalho experimental e estudo de analogias, ou análise de casos particulares e tentativas etc. Muitos matemáticos reconhecem “que se podem usar analogias ‘quase-intuitivas’ para ter *insight* em matemática (...) [e que] matemáticos honestos reconhecerão também o seu papel na descoberta”. BAILEY e BORWEIN (2001) apud OLIVEIRA, (2002; p.147)

É comum alguns matemáticos, usarem métodos quase-empíricos, no sentido lakatoseano, com a finalidade de descobrir verdades ou verdades com explicações inicialmente ‘sobrenaturais’, que depois procuram demonstrar rigorosamente. Para alcançar resultados fazem uso de um sistema organizador de novos axiomas, a análise de contra-exemplos críticos, a reformulação de definições, o enfraquecimento de hipóteses e o fortalecimento de teses, a identificação de pressupostos implícitos, são aspectos correntes da dinâmica quase-empírica das demonstrações e refutações.

Sobre a identificação de idéias matemáticas usadas implicitamente em demonstrações, definições etc, HERSH (1986) apud OLIVEIRA (2002; p.147) afirma:

> sabemos que um conjunto de axiomas e definições são uma tentativa para descrever as principais propriedades de uma idéia matemática. Mas, pode sempre restar um aspecto da idéia que usamos implicitamente, que não formalizamos porque ainda não vimos o contra-exemplo que nos tornaria conscientes da possibilidade de duvidar dela. HERSH (1986) apud OLIVEIRA (2002; p. 147)

Essa pode ser uma das razões indicadas por muitos, em que, pelos quais, os matemáticos têm necessidade de recorrer incansávelmente e incessantemente às teorias passadas e se fadigam com a estranha atividade de proporcionar novas demonstrações de velhos teoremas. Ainda que em muitos teoremas os resultados que enunciam sejam consideravelmente estáveis, as suas demonstrações não o são. Poincaré já dizia que os axiomas não garantem que as idéias matemáticas são imutáveis. Pelo que os teoremas são e representam, da mesma forma, suas demonstrações serão sempre reafirmadas, reinventadas, reinauguradas pelos matemáticos e pelas futuras gerações de matemáticos.

Hersh (1986) destaca outro aspecto da práxis matemática, no que se refere a uma intuição mais aguçada identificada normalmente num matemático. Ele relata uma situação hipotética sobre essa atividade para exemplificar: Numa fase inicial de seu trabalho, um matemático descobriu teoremas importantes numa certa área usando da sua intuição. Até então seus métodos eram ainda incompreensíveis, mesmo para colegas dessa mesma área. Porém, tempos depois, outros matemáticos conseguiram descobrir demonstrações dos seus resultados, usando argumentos que podiam ser compreendidos e seguidos por todos os que trabalhavam nessa área. Dessa forma, com o passar do tempo e a socialização das informações e conhecimentos; com a simplificação das ferramentas conceituais matemáticas; por meio da eliminação do que é desnecessário e complexo na compreensão dos argumentos; pela criação de modelos matemáticos que concretizam; tornam necessárias e dão sentido às idéias iniciais primeiras e finalmente pela associação dessas idéias com outras idéias com as respectivas ligações com teorias já consagradas, é o que culmina como prática corrente do trabalho matemático.

Assim, a formalização das idéias matemáticas é gradativa e surge em consolidação com o momento de maior maturação dessas mesmas idéias, confirmando o que se antevia enquanto imaginado pelas intuições e do significado matemático das idéias face à sua formalização, Félix Klein apud Villiers (1999) afirma:

> de fato, o matemático não se apóia em demonstrações rigorosas no grau que normalmente se supõe. As suas criações têm um significado para ele que precede qualquer formalização, e este significado dá às criações uma existência ou realidade *ipso facto*. (...) Grandes matemáticos sabem, antes de uma demonstração lógica ser alguma vez construída, que um teorema tem que ser verdadeiro. KLEIN apud VILLIERS, (1999; p.21)

Poincaré (1995) coloca de forma objetiva que a práxis investigativa dos matemáticos, na sua essência, envolve a procura de invariantes nas relações formais entre objetos, ou classes de objetos, visto que *os matemáticos não estudam objetos, mas relações entre objetos*. Por isso, alguns pensadores têm defendido uma Matemática modal, ou seja, de característica relacional, em que se considera que a Matemática não tem objetos de estudo específicos, próprios, e que consiste no estudo das modalidades (possível, impossível, provável, improvável, plausível, implausível,...) de objetos comuns, em contraponto com a atual Matemática existencial. A práxis do matemático, nesse contexto, incluiria a criação e demonstração de teoremas acerca de qualquer coisa que se deseje, como por exemplo, dias chuvosos, marcas em papel, ou gráficos, ou linhas, ou esferas. Mas o matemático, nessa perspectiva, não faz nenhuma espécie de proposições existenciais. O que ele afirma com segurança é que certas coisas são possíveis e certas coisas são impossíveis, principalmente na Matemática.

Os matemáticos, habitualmente, desprezam a atividade filosófica, ou essas lhe são indiferentes, mesmo quando é parte fundamental da sua área de trabalho. Hersh (1986), ao contrário, reivindica para o matemático a prerrogativa da discussão filosófica como parte da sua práxis. Nas suas próprias palavras:

> existem estilos comuns de excelência que usamos como critérios para avaliar o nosso trabalho. Tornar estes critérios explícitos, trazê-los, abertamente, à discussão, contestação e controvérsia, deveria ser uma importante atividade filosófica dos matemáticos. (...) O estilo dominante de exposição em periódicos matemáticos, e mesmo em textos e tratados, tem sido uma insistência nos detalhes precisos de definições e demonstrações, mas excluir ou minimizar a discussão sobre porque um problema é interessante, ou porque um método particular de demonstração é usado. HERSH (1986; p. 12).

Os matemáticos, como comunidade, estão numa excelente posição para refletir e discutir acerca da avaliação, da validação, da valorização, da relevância e da exposição do conhecimento matemático produzido. É evidente que, para tomar posições filosóficas sobre essas e outras problemáticas, exige também que o matemático, como a exemplo dos grandes pensadores, cientistas e estudiosos generalistas, em todas as épocas, tenha conhecimentos de Matemática e sobre Matemática, sobre outras áreas disciplinares (incluindo as Ciências Humanas), que faça introspecções sobre o seu próprio trabalho e que esteja disponível para considerar o trabalho dos seus pares.

Ao tentar compreender um pouco uma possível relação entre a investigação ou pesquisa com a questão relativa ao ensino e o porquê desse nível de dicotomia, será importante destacar algumas questões e posições epistemológicas das principais escolas fundacionistas, quando os epistemólogos, durante a primeira metade do século XX, procuraram fazer uma reconstrução racional dos processos de pensamento científico. Sendo uma reconstrução, obviamente, era feita a *posteriori*, ou seja, procuravam descrever os processos de pensamento dos investigadores quando da comunicação e defesa das suas descobertas. Oliveira (2002) comenta que:

> as epistemologias do contexto de justificação em matemática também se designam como fundacionistas, uma vez que o seu propósito essencial é estabelecer fundamentos inabaláveis que garantam a certeza, a verdade e o carácter absoluto de todo o conhecimento matemático acumulado. O crescimento do conhecimento matemático, nas várias escolas fundacionistas, é visto numa perspectiva internalista, portanto, imune a influências históricas, sociais e culturais. OLIVEIRA (2002; p. 90)

Essas correntes demarcam essa nossa discussão sobre dualidades. Há porém, um pequeno núcleo de matemáticos que não aceitam as teses formalistas e se remetem a outras correntes de pensamento que se manifestaram ao redor da grande discussão dos fundamentos no início do século. Sabe-se que esta época viu florescer tais escolas, o logicismo e o intuicionismo.

Para o lógico alemão Gottlob Frege, a Matemática não pode ser fundamentada em alicerces psicológicos, não se relaciona com as ciências empíricas porque não se baseia em percepções sensitivas Pelo contrário, a Matemática envolve objetos de pensamento que se vislumbram à mente de uma maneira clara e distinta. Para muitos, Frege é tido como um dos lógicos mais importantes desde Aristóteles. Entre as suas contribuições para a reedificação da lógica aristotélica, encontra-se a teoria da quantificação, alguns rudimentos da teoria dos tipos e da teoria de conjuntos. Ora, segundo Frege, essa reedificação da lógica aristotélica possibilitaria fundar, em bases inquestionáveis, tanto a Aritmética como a Análise. Quer dizer, os conceitos da Aritmética e da Análise poderiam ser expressos em termos lógicos e os respectivos teoremas poderiam ser deduzidos de uns quantos princípios da lógica. O fundamento da Geometria, por outro lado, seria a intuição primitiva do espaço euclideano, à maneira de Kant.

> Frege com isso pretende, pois, apresentar 'uma prova irrefutável de que as verdades da aritmética têm um carácter analítico; a qual confirmaria a crença epistemológica na natureza eterna, universal e necessária das proposições da Aritmética' LOYES, (1993, p. 218 apud OLIVEIRA, (2002, 91).

De maneira bem suscinta e em caráter definitivo, Frege expõe o seu programa de fundamentação da Aritmética nas seguintes palavras:

> a maneira mais confiável de levar a cabo uma demonstração é seguir a lógica pura, uma maneira que (...) depende apenas das leis sobre as quais todo o conhecimento se funda. Desse modo, dividimos todas as verdades que requerem justificação em dois tipos: aquelas para as quais a demonstração pode ser levada a cabo puramente por meios da lógica e aquelas que têm que ser apoiadas por fatos da experiência. (...) Quando considerei a questão sobre a qual destes dois tipos pertencem os julgamentos da Aritmética, primeiro tive que me certificar sobre até onde se poderia proceder meramente por meio de inferências, com o único apoio das leis do pensamento que transcendem todos os particulares. (...) O seu primeiro propósito [deste livro], então, é proporcionar-nos o mais confiável teste de validade de uma cadeia de inferências e assinalar todas as suposições que se infiltrem sem darmos conta, de modo a que a sua origem possa ser investigada. (FREGE, apud OLIVEIRA, (2002; p. 91).

Essa sua pretensão em fundamentar a aritmética na lógica pura, com vista a deduzir afirmações sobre números apenas da lógica, Frege afasta-se de concepções empíricas e intuitivas de número. Por isso, ele afirma:

> o número não é abstraído das coisas do mesmo modo que o são a cor, o peso ou a dureza, ou seja, não é no mesmo sentido em que estas coisas o são, uma propriedade das coisas. (...) O número não é algo físico nem, tão-pouco, subjetivo; ele não consiste de todo numa representação. (...) O número não se forma através do acrescentar de uma coisa a coisas anteriores; e não é o fato de se atribuir uma nova denominação às coisas após cada acréscimo que vem modificar o que quer que seja a este respeito. (FREGE, 1884/1992, p. 74 apud OLIVEIRA, (2002; p. 91).)

A definição de número proposta por Frege não é generativa, ou seja, não cria nada que já não exista previamente. Ao usar os números como ponto de partida, Frege pretende, acima de tudo, tornar a sua compreensão mais precisa, clarificar algo que existe independentemente de nós. Quando Frege concluía os preparativos para a publicação do segundo volume da sua obra '*Grundgesetze der aritmetik'*, recebe uma carta de Russell em que esse expõe uma dificuldade crucial do seu trabalho fundacional, que posteriormente tornou-se conhecido como o 'Paradoxo de Russell':

> há apenas um ponto em que encontrei uma dificuldade. (...) Seja *w* o predicado: ser um predicado que não pode predicar-se a si próprio. Pode w predicar-se a si próprio? A partir de cada resposta possível segue-se a sua contrária. Então, temos que concluir que *w* não é um predicado. Analogamente, não existe a classe (como uma totalidade) das classes, cada uma tomada como uma totalidade, que não pertencem a si mesmas. Daqui concluo que, sob certas circunstâncias, uma coleção definível não forma uma totalidade. (RUSSELL, citado em FLEGG, 1987, p. 29, apud OLIVEIRA 2002, 91)

Esse paradoxo criou problemas à própria definição de número de Frege, conturbando todo o seu programa logicista. O princípio segundo o qual toda a propriedade determina um conjunto de objetos que a satisfazem, é contraditório, ao legitimar o conjunto de todos os conjuntos. Mas, negar que o 'conjunto' de todos os conjuntos é um conjunto, levanta questões conflitantes:

se existem coleções (classes) que não são conjuntos e inferências inválidas relativas a conjuntos, como se caracterizam umas e outras?

Apesar dos problemas detectados no logicismo, Russell não apenas não desiste do programa de Frege como procura ampliá-lo. O esforço que Frege havia desenvolvido para proporcionar uma fundamentação à Aritmética, será retomado por Russell indicando que toda Matemática Pura lida, exclusivamente, com conceitos definíveis usando basicamente poucos conceitos lógicos fundamentais e, dessa forma, todas as suas proposições são dedutíveis a partir também de um número muito pequeno de princípios lógicos fundamentais, sendo, portanto, capaz de demonstrar isso com toda certeza e precisão que se consegue usando as demonstrações matemáticas.

Almejando o desenvolvimento de um programa renovado de fundamentação lógica da Matemática Pura, Russell, em colaboração com Whitehead, desenvolveu pesquisas baseando-se numa substituição da lógica fregeana por uma teoria dos tipos bastante elaborada. Esse programa foi intitulado e publicado como '*Principia Mathematica*' e, nesse trabalho, ele conseguiu resolver problemas críticos que o sistema de Frege havia criado, particularmente, alguns paradoxos. Porém, essa obra foi considerada por muitos especialistas, um sistema excessivamente pesado, do ponto de vista formal, e que, por sua vez, trazia demasiadas dificuldades. Fazendo uma auto-análise dessa obra, pois ele pretendia que ela fosse claramente uma fundamentação da Matemática numa perspectiva de um logicismo renovado. Dessa forma, Russel afirma, desoladamente:

> lembrava-me continuamente da fábula do elefante e da tartaruga. Tendo construído um elefante sobre o qual o mundo matemático se podia apoiar, descobri que o elefante cambaleava, e construí uma tartaruga que impedisse o elefante de cair. Mas a tartaruga não era mais segura que o elefante, e após uns vinte anos de labuta muito dura, cheguei à conclusão de que nada mais podia fazer no sentido de tornar o conhecimento matemático indubitável. RUSSELL, apud HERSH (1986; p. 15-16).

Em relação ao logicismo Dieudonné (1990), pouco tem a dizer, pois não se lembra de um matemático que tenha redigido em conformidade com os princípios dessa escola. Ainda, que nenhum matemático compreenda o entusiasmo dos lógicos por seu sistema, deve-se muito mais certamente ao prestígio que seu autor principal, Russell, na realidade adquiriu enquanto filósofo e não enquanto lógico. Por isso, afirma Dieudonné (1990), ele não discutirá o problema, mas não implica, no entanto, que ele, de forma abusiva, considere-se também um matemático. Essa justificativa de Dieudonné (1990) baseia-se no fato de que para ele, Russel jamais demonstrou um teorema novo, emprestou sim suas idéias sobre a lógica matemática dos trabalhos pioneiros de Frege e Peano, e só soube combinar erroneamente essas idéias em incrível estilo confuso e insípido em sua teoria dos tipos, que nem mesmo tem o mérito de ser totalmente formalizada. A visão de Dieudonné (1990) sobre Russell é péssima. Ele desabafa ainda:

> É também a Russell que se deve a asneira, incansavelmente repetida depois, que queria fazer da matemática 'uma parte da lógica'; mesmo tendo em conta o fato que na época a teoria dos conjuntos era considerada como uma parte da lógica; para ele, uma tal afirmação é tão absurda quanto considerar as obras de Shakespeare ou de Goethe fazendo parte da gramática. DIEUDONNÉ (1990; p. 31).

O logicismo de forma global, independente da concepção de Dieudonné, como sistema de fundamentação da Matemática, baseia-se em pressupostos que têm sido extremamente criticados. Algumas dessas críticas citadas em OLIVEIRA (2002; p. 94-95):

- a não aceitação da univocidade e universalidade da lógica aristotélica ou da sua versão renovada por Frege. A existência de sistemas lógicos não aristotélicos (teoria dos tipos, teoria dos conjuntos, lógica infinitária, lógicas multivalentes, lógica intuicionista, lógica modal, lógica *fuzzy* etc), levanta questões que não admitem dúvidas, relativamente às pretensões de fundamentação da Matemática. Admitindo que a Matemática é redutível à lógica, qual é o sistema lógico mais adequado para essa fundação? Porquê? Existirá uma lógica absoluta que englobe as outras como variantes ou casos especiais?

- a recusa da dicotomia do conhecimento, ou seja, a perspectiva segundo a qual todo o conhecimento seja empírico ou não empírico. Ora, a lógica a que o logicismo afirma que toda a Matemática é redutível, pressupõe a dicotomia fundamental de que todo o conhecimento é empírico ou não empírico ou, como se tornou costumeiro dizer depois do tempo de Kant, *a posteriori* ou *a priori*. Essa dicotomia é aceita por filósofos que pertencem a uma velha e larga tradição incluindo Platão, Aristóteles, Leibniz, Hume, Kant, Frege e Russell. É rejeitada por Hegel, por idealistas absolutos modernos como Bradley e Bosanquet, e pragmatistas de várias orientações.

- o logicismo pressupõe que a Matemática e a lógica, no fundo, constituem <u>uma</u> única Ciência *a priori*. Körner (1986) apud Oliveira (2002) salienta que o insucesso do logicismo na redução da Matemática à lógica pode significar que a Matemática e a lógica são <u>duas</u> Ciências *a priori* separadas, e, nesse caso, nenhuma delas seria redutível à outra;

- para fundamentar a Matemática na lógica tornou-se necessário recorrer a determinados axiomas que não se podem descrever como verdades da lógica (tradicional) em nenhum sentido razoável do termo. Um desses axiomas é habitualmente conhecido como o axioma do infinito ou da infinidade. Sem a introdução desse axioma não há garantia nenhuma de que os números naturais não terminem num número (eventualmente muito grande). Russell incluiu o axioma do infinito na teoria dos tipos (‘existe um tipo com um número infinito de exemplos’),

> contudo, faz a seguinte ressalva: pode-se concluir que alguns dos mundos possíveis são finitos e alguns outros infinitos. Porém, não se tem como descobrir qual deles pertence o nosso mundo real. Esse axioma da infinidade será verdadeiro em alguns dos mundos possíveis e em outros falsos. Não se tem como afirmar qual deles é verdadeiro.

As tendências que se agruparam ao redor do intuicionismo devem ser levadas muito mais a sério, apesar de poucos adeptos, mas os melhores da sua época. Kronecker foi sem dúvida, o primeiro deles; depois Poincaré e alguns de seus colegas franceses como Borel, Baire e Lebesgue. Os problemas levantados pelas antinomias da teoria de conjuntos, levaram Poincaré a adotar uma posição relativamente prudente quanto às soluções a serem desenvolvidas. A prudência de Poincaré foi radicalizada pelo holandês Brouwer que, na primeira década do século XX, iniciou uma crítica bastante profunda ao *status quo* da investigação matemática da época. Essas tendências permaneceram durante 50 anos na pessoa de Brouwer, que a fez de fato uma verdadeira doutrina; mais recentemente, elas foram reprisadas com diversas variantes pelo matemático americano E. Bishop e ainda pelos matemáticos alemães e soviéticos, sob o nome de construtivismo.

Qualquer objeto matemático é considerado um produto da construção de uma mente e, portanto, a existência de um objeto é equivalente à possibilidade de sua construção. Isso contrasta com a abordagem clássica, que afirma que a existência de uma entidade pode ser provada por meio da refutação da sua não-existência. Para os intuicionistas, isto é inválido; a refutação da não existência não significa que é possível achar uma prova *construtiva* da existência. Como tal, intuicionismo é uma variedade de construtivismo matemático, mas não a única. Dessa forma, o intuicionismo faz considerar a validade de um enunciado matemático ser equivalente ao fato de ele ter sido provado. Que outros critérios podem existir para a verdade (um intuicionista argumentaria) se os objetos matemáticos são meramente construções mentais?

Isto significa que um intuicionista pode não achar que um enunciado matemático tenha o mesmo significado que um matemático clássico atribuiria. Por exemplo, dizer A ou B, para um intuicionista, equivale a dizer que ou A ou B pode ser provado. Em particular, a lei do terceiro excluído[7], A ou não-A, é rejeitada, pois não se pode assumir que é sempre possível provar ou o enunciado A ou sua negação

Brouwer, ao contrário de Frege e de Hilbert, não é um fundacionista, uma vez que destaca a 'insuficiência das estruturas formais' sejam elas linguísticas ou lógicas na experiência matemática, e afirma que a "matemática é uma criação livre, independente da experiência, que se desenvolve a partir de uma única intuição primordial *a priori*" (BROUWER, citado em LOYES, (1993; p.251 apud OLIVEIRA (2002; p. 96).

Recuperando uma das teses de Kant (1997) — em que toda Matemática se baseia na intuição de espaço e de tempo— para a Filosofia da Matemática, Brouwer defendia que existe uma intuição primitiva dos números naturais, que está associada a uma intuição prévia na experiência humana: a transcorrência do tempo. Ele considera que a intuição dos inteiros e das frações resulta da compreensão das transcorrências dos momentos na vida, e da possibilidade dessas transcorrências continuarem indefinidamente. Essa 'intuição primordial *a priori*' é o ponto de partida de toda a Matemática. A partir dela geram-se as construções dos objectos matemáticos no intelecto humano. "A matemática intuicionista de Brouwer não é mais do que uma tentativa de provar a suficiência dessa intuição básica para a construção de toda a matemática" LOYES, (1993; p. 250) apud OLIVEIRA (2002; p. 96).

---

[7] A **lei do terceiro excluído** (em latim resumida na expressão *tertium non datur*) é um princípio segundo o qual, para qualquer frase F, ou F ou *não*-F são verdadeiras. É representada da seguinte maneira : $P \vee \neg P$.
Exemplo: ou hoje chove ou hoje não chove. Popularmente pode ser enunciado da seguinte maneira: "O que é é, o que não é não é e não há uma terceira opção."

Oliveira (2002) comenta que Brouwer em seu intuicionismo, separa inteiramente a Matemática da linguagem matemática, ou seja, na sua perspeciva, "a matemática intuicionista é uma atividade da mente, essencialmente sem linguagem, tendo a sua origem na percepção de uma transcorrência do tempo" OLIVEIRA (2002; p. 96). Dessa forma, conceber a Matemática como uma atividade a-linguística implica, para Brouwer, recusar a função de estruturação do pensamento matemático tradicionalmente atribuída à linguagem, reduzindo-a a uma função – precária – de mediação: "nunca ninguém foi capaz de comunicar a sua alma por meio da linguagem" BROUWER, citado em LOYES, (1993; p. 255) apud OLIVEIRA (2002; p. 97). As palavras e relações verbais constituem uma estrutura 'imperfeita' para comunicar as idéias matemáticas que são criadas pela atividade do espírito. Quer dizer, o papel da linguagem no trabalho matemático esgota-se na comunicação – deficiente – das construções matemáticas criadas ou intuídas pelo matemático.

De um modo geral com o intuicionismo sobressaiu a idéia de que a Matemática é uma ciência que tem a sua origem no espírito e aí se exerce: a Matemática não possui nenhuma existência fora do espírito humano, ou seja, é uma concepção do pensamento humano, não existem fatos nem fenômenos que sejam essencialmente matemático. Diferentemente das outras áreas do conhecimento, se pode facilmente identificar:

- um fenômeno físico — *um raio*;
- um fenômeno químico — *oxidação de um metal;*
- fato histórico — *Revolução Francesa*;
- fato social — *a decadência do regime socialista*;
- etc...

Os intuicionistas, em virtude dos princípios de raciocínio que admitiam, rejeitaram muitos dos teoremas da Matemática clássica. Por exemplo, Brouwer gerou muita polêmica, quando apresentou um número real em que se é incapaz de demonstrar construtivamente se esse número é positivo, negativo ou nulo. Isso indica que essa proposição é falsa, pois não atende a nenhuma solução dessa tricotomia.

A exemplo do Logicismo, o programa intuicionista não foi bem sucedido na sua tentativa de encontrar fundamentos consistentes para aquela Matemática. Além disso, os matemáticos intuicionistas estabeleceram resultados considerados falsos, por matemáticos que não eram intuicionista e apresentaram provas para certos teoremas, que foram classificadas como longas e menos elegantes do que outras elaboradas por métodos não construtivistas.

De forma incisiva Dieudonné (1990), não poupa também os intuicionistas, afirmando que se é muito difícil garantir com precisão os princípios sobre os quais esses matemáticos estão de acordo. Ele coloca no entanto, um comportamento semelhante na maioria deles: é a veemência e mesmo a arrogância com que eles expõem suas convicções, procurando ‘impor’ seus pontos de vista tal qual um profeta de uma religião revelada quando procuram converter os infiéis, ao invés de se colocarem na postura dos filósofos pensantes na sua serenidade o pró e o contra das doutrinas científicas.

Em função do argumento usado pelos intuicionistas quando afirmam que, isoladamente, a “matemática carece de sentido”, Dieudonné (1990) informa que isso não passa de uma grande mistificação. O argumento sobre o qual eles evidenciam muito é o que as matemáticas devem ter ‘um sentido’; quando lhes é solicitado a explicar o que eles entendem, chega-se mais ou menos ao que era o programa inicial de Kronecker: as únicas matemáticas válidas são as que descrevem ou predizem os resultados de certas operações no conjunto das totalidades, efetuáveis num número não finito, embora hipotético. Dieudonné (1990) se revolta, pois para ele, pretender ter esse gênero de conhecimento no conjunto de todos os inteiros e de suas propriedades fundamentais, só pode ser uma falta de postura, psicologicamente absurda e que o intuicionismo só pode ter uma acepção comum, como a define o *Petit Larousse*: 'conhecimento claro, direto, imediato da verdade sem ajuda de raciocínio'.

Essa revolta de Dieudonné (1990) tem como argumento a forma densa, minuciosa e completa, comentada por Halmos (1963), sobre a maneira com que o grupo Bourbaki se utiliza para estabelecer sua definição do número 1. Halmos (1963) diz que eles dedicam quase duzentas páginas fazendo a preparação antes de indicar a respectiva definição. Aí definem o número 1 em termos de símbolos extraordinariamente abreviados e condensados, detalhando sempre nas notas de rodapé. Ele elogia o grupo e afirma ainda que os lógicos matemáticos modernos têm conhecimento, já há algum tempo, que conceitos como por exemplo, o do número 1, não são tão elementares como parecem.

Dieudonné (1990) comenta ainda que principalmente em função da forma arrogante, a soberba e o dogmatismo intolerante dos intuicionistas eles foram levados a cometer diversas 'gafes', da mesma forma como Russell (que não era intuicionista) cometera, como já foi citado anteriormente, (isso na visão de Dieudonné). Refere-se também à Matemática dos formalistas, que se utiliza do princípio do terceiro excluído não tem 'valor' nem 'sentido', como diz Bishop, que esse princípio se converta num jogo envolvendo a teoria dos conjuntos, apesar de ser um bonito jogo, com regras admiravelmente precisas. Esse jogo torna-se a sua própria justificativa, e é fato de que não representa uma versão altamente idealizada da existência matemática, e isso é universalmente negligenciado.

Em resposta, Dieudonné (1990) estebelece como referência a produção matemática desencadeada no período de 1895-1930, que coincide exatamente com a 'crise dos fundamentos'. O princípio do terceiro excluído é utilizado sem reserva seja na Geometria Algébrica 'italiana', na integral de Lebesgue, na topologia algébrica tanto de Poincaré, Lefschetz, Hopf como do próprio Brouwer, das aproximações e equações diofantinas de Thue, Siegel e. Weil, da estrutura dos grupos de Lie e de suas representações por Cartan e Weyl, além de outras situações.

Com a falência do programa logicista de fundamentação da Matemática, levou alguns investigadores a procurar vias alternativas de alicerçar a Matemática em bases mais sólidas e indubitáveis. Um desses investigadores, ao fundamentar a escola formalista, criada por volta de 1910, o matemático alemão David Hilbert, afirma inequivocamente as suas pretenções, "o objetivo da minha teoria é estabelecer, de uma vez por todas, a certeza dos métodos matemáticos..." HILBERT(1944) apud HERSH, (1986; p. 16).

Os matemáticos formalistas se interessam pelos 'objetos' que são os'elementos' de certos 'conjuntos' e entre eles certas 'relações'. Eles não fazem questão de definir as palavras, escreve Dieudonné, mas simplesmente considerar que essas são as interpretações, cômodas para o espírito, de um sistema de signos submissos a uma sintaxe rigorosa independente de toda interpretação que se queira lhes dar.

O objetivo da teoria de Hilbert (1993) era estabelecer, de uma vez por todas, a certeza dos métodos matemáticos. O surgimento dos inúmeros paradoxos estava tornando a situação intolerável, comentava Hilbert (1993). Pensar que as definições e métodos dedutivos que se aprende, ensina e usa em Matemática, o protótipo da verdade e da certeza, geralmente conduzem a absurdos! Se o pensamento matemático é defeituoso, onde se encontra a verdade e a certeza? Eram essas algumas de suas indagações. Hilbert procurava construir um sistema de demonstração matemática que tivesse a consistência da Matemática clássica, utilizando argumentos puramente finitários que Brouwer não pudesse rejeitar. Com esse objetivo ele conseguiu:

- introduzir uma linguagem formal e regras formais de inferência em número suficiente para que toda a 'demonstração correta’ de um teorema clássico pudesse ser representado por uma dedução formal com cada passo mecanicamente verificável;

- desenvolver uma teoria das propriedades combinatórias dessa linguagem formal;

- se propor a demonstrar que nesse sistema não podiam deduzir-se contradições.

Desse modo, Hilbert (1993) pretendeu estabelecer o que designava por demonstrações objetivas, ou seja, um encadeamento de fórmulas deduzidas por meio de implicações a partir de símbolos, axiomas ou conclusões previamente estabelecidas. Com o formalismo a Matemática torna-se um sistema formal que partindo dos axiomas e dos termos iniciais, se desenvolve numa cadeia ordenada de fórmulas, mediadas por teoremas, sem nunca sair de si mesma. Torna-se uma espécie de ‘jogo linguístico’ fundado exclusivamente nas próprias regras do jogo, semelhantemente como acontece com o jogo do xadrez.

Mesmo antes da descoberta do famoso paradoxo de Russell, Hilbert polemizou com Frege (1903) a respeito de um critério de verdade e da existência em Matemática. Ele defendia um estatuto dos axiomas na linha da tradição grega, contendo verdades evidentes e inquestionáveis. Escrevendo para Frege (1903), em dezembro de 1899, ele expõe uma posição contrária a essa:

> Da verdade dos axiomas segue-se que não se contradizem uns aos outros. Achei muito interessante a leitura desta sentença na sua carta, pois no que tenho pensado, escrito e ensinado acerca dessas coisas, disse sempre exatamente o contrário: se os axiomas arbitrariamente dados não se contradizem uns aos outros, com todas as suas consequências, então são verdadeiros e as coisas definidas pelos axiomas existem. Este é para mim o critério de verdade e de existência. HILBERT (1944) apud OLIVEIRA (2002; p. 102)

Para Hilbert (1944), essa discussão sobre a natureza dos axiomas não era uma questão meramente filosófica, pois ele intencionava estruturar o conhecimento matemático usando a axiomática. Suas primeiras tentativas datam de 1904. Após 1920, quando o seu discípulo, Hermann Weyl, tornou-se intuicionista, Hilbert (1944) passou a se dedicar mais ao assunto. O seu propósito principal era exprimir a Matemática clássica num sistema axiomático formal e provar sua consistência e de que o mesmo é não contraditório. Até então ele já havia desenvolvido demonstrações de consistência relativa. Por exemplo, demonstrou-se que a consistência da Geometria Euclidiana implicava a consistência da Geometria não-euclidiana; a consistência da teoria dos números reais era dedutível da consistência da teoria dos números naturais com a teoria de conjuntos etc. O programa de Hilbert (1944) era, no entanto, muito mais ambicioso, ou seja, demonstrar a consistência absoluta da Matemática.

Para conseguir cumprir esse programa, ele desenvolveu a teoria da demonstração, também designada por metamatemática. A metamatemática é uma espécie de Matemática da Matemática, em que os objetos básicos de investigação utilizados são as deduções. Nessa metamatemática, Hilbert (1944) admite apenas métodos finitários, por considerar que são os únicos que conseguem ser convincentes pelo uso da intuitição. De maneira análoga a Kant, que tinha invocado uma intuição *a priori* de tempo e espaço, e semelhante a Brouwer, com a sua intuição da transcorrência do tempo, Hilbert (1944) invocou uma espécie de intuição *a priori* de estruturas finitárias, uma intuição de sinais, como experiência prévia a todo o pensamento matemático.

Hilbert (1993) sintetiza então, num artigo publicado em 1927, os pressupostos do seu programa da metamatemática, sendo eles apresentados em quatro pontos:

(i) todas as proposições matemáticas são formalizáveis;

(ii) os axiomas são as fórmulas que fundamentam a Matemática; as definições têm carácter de axiomas;

(iii) uma demonstração é uma sucessão finita de fórmulas; essas fórmulas são axiomas, ou teoremas, ou foram deduzidas a partir desses por inferências válidas;

(iv) uma fórmula é demonstrável se existir uma demonstração em que ela seja o último passo.

Hilbert (1993) tinha a pretensão de demonstrar tanto a consistência absoluta da Matemática e, ao mesmo tempo, a sua completude, ou seja: que qualquer afirmação matemática pode ser demonstrada ou refutada. Se cumprido esse propósito, "as vagas noções de verdade e significado podiam ser eliminadas e substituídas pelo conceito de demonstrabilidade formal" TASIC (2001; p. 72) apud OLIVEIRA (2002; p. 103). Na ótica de Hilbert (1993), o que é relevante não é o significado matemático dos entes e das suas propriedades mas as relações estruturais formais entre significantes. "A relação entre o significante e o significado é arbitrária" (TASIC, 2001; p. 68) apud OLIVEIRA (2002; p.103).

Nesse contexto, fazer Matemática consiste em manipular símbolos sem significado de acordo com regras sintáticas explícitas. Em 1930, Gödel enunciou o teorema da incompletude, evidenciando que nunca se poderia encontrar em Matemática uma certeza completa por meio de qualquer método baseado na lógica tradicional, uma vez que *qualquer sistema formal consistente suficientemente forte para conter a* Aritmética *elementar seria incapaz de demonstrar a sua própria consistência*. Isso ao demonstrar que nenhum sistema formal suficientemente 'potente' para descrever a Aritmética de Peano pode ser simultaneamente consistente e completo. Mais exatamente, se os axiomas da Aritmética de Peano são verdadeiros então existem verdades que não são teoremas. Por conseguinte, na presunção da consistência da Aritmética de Peano, de que Hilbert obviamente não prescinderia, prova-se a sua incompletude. Assim os resultados alcançados por Gödel revelaram que o projeto de Hilbert era irrealizável. Assim, o programa formalista, igualmente não conseguiu provar a certeza dos métodos matemáticos.

O formalismo faz ainda uma distinção entre a Geometria como uma estrutura dedutiva e a Geometria como uma ciência descritiva. Somente a primeira é considerada Matemática. A utilização de figuras, diagramas, ou mesmo de imagens mentais, tudo é considerado não-matemático. Em princípio deveriam ser desnecessários. Conseqüentemente, considera-os inadequados num texto matemático, e talvez, por muitos, também numa aula de Matemática. Do ponto de vista formalista não se começa realmente a fazer matemática antes de enunciar algumas hipóteses e começar uma demonstração. Após ter chegado às conclusões, a matemática acabou. O exemplo mais influente do formalismo como estilo de exposição matemática foi a obra do grupo Bourbaki. Nela foi produzida uma série de textos básicos, em nível de pós-graduação, sobre a Teoria de Conjuntos, a Álgebra e a Análise que tiveram uma enorme influência em todo o mundo nas décadas de 50 e 60. O estilo formalista penetrou gradualmente no ensino da Matemática em níveis mais elementares e, finalmente, sob o nome de *Matemática Moderna* invadiu até o jardim de infância com textos de teoria de conjuntos para a idade pré-escolar.

De fato, todo esse sistema, explicitado na obra de Bourbaki, informa Dieudonné (1990), permanece totalmente implícito por quase a totalidade dos matemáticos atuais. Não se pode dizer que os matemáticos atuais sejam verdadeiramente formalistas, eles estão apenas repetindo a atitude '*ingênua*' dos matemáticos pré-cantorianos. Eles não se sujeitam a redigir na linguagem formal estrita; eles se contentam em usar um estilo bem expressivo para ser legível para seus colegas competentes, mas bem grosseiro para dar a esses últimos e a eles mesmos a impressão que a tradução das demonstrações em linguagem formal seria quase mecânica. Isso dificulta sobremaneira o processo de aprendizagem por parte dos alunos, e esse mecanicismo acompanhado por expressões com as características; 'como é óbvio perceber...', '...sendo essa demonstração trivial...', etc isso pode conduzir a uma certa possibilidade de erro ou incompreensão, ainda que na prática, muitos considerem que isto seja mínimo. A lógica clássica lhes seria suficiente para exprimir suas descobertas.

Por tudo isto, a comunidade matemática considerou, quase universalmente, o programa intuicionista pouco razoável e algo fanático. O programa formalista pode, em particular, ser visto como uma tentativa de defender a Matemática do que Hilbert (1944) considerava mutilações e deformações provocadas pelo intuicionismo.

Ao analisar mais profundamente o processo pelo qual o logicismo, o intuicionismo e o formalismo visavam garantir a certeza, constata-se que esse processo continha em si mesmo elementos que poderiam causar dificuldades nas suas pretensões. De fato, essas escolas aceitaram sem demonstração um conjunto de afirmações básicas a partir das quais deduziram logicamente os seus resultados. Se esse conjunto de afirmações básicas não pode ser eliminado de uma teoria matemática de outra forma, a lógica dedutiva não introduz verdade nos raciocínios e afirmações. Quando muito poderia transmiti-la. A partir do momento em que as três escolas aceitam princípios não demonstrados, esses princípios ficam abertos ao desafio, à dúvida e muitas vezes ao erro. Assim, “a pesquisa da certeza em matemática conduz, inevitavelmente, a um círculo vicioso. Todo o sistema matemático depende de um conjunto de afirmações, e tentar estabelecer a sua certeza demonstrando-as conduz a uma regressão infinita”, salienta ERNEST (1989; p. 21). Dessa maneira, o problema de assegurar a certeza em Matemática parece ser insolúvel.

Atualmente não se está mais perto de fundamentos seguros para a Matemática do que se estava há um século atrás. No entanto, as controvérsias sobre os fundamentos já não têm o impacto de outrora. Conduzem a círculos que parecem cada vez mais distantes das preocupações matemáticas e filosóficas dos nossos dias. É nessa conjuntura que se acentua, cada vez mais, a importância de olhar a Matemática sem a preocupação dominante da pesquisa de fundamentos, procurando-se novas direções na Filosofia da Matemática.

Toda estrutura de conhecimente almeja sua utopia, ou seja, estabelecer sua unidade. Na Matemática, como a exemplo de outras Ciências, da mesma forma, tem essa dificuldade. O grupo Bourbaki diz que não há possibilidade, nesse momento, de uma idéia do conjunto da Matemática, se encontra sempre num empreendimento que parece oferecer dificuldades quase insuperáveis, em razão da extensão e variação de temas que a todo momento surgem. Já atualmente, o número de publicações em Matemática é consideravelmente grande, tendo esses diferentes valores e diferentes temas, novos campos, novas e preementes necessidades. Acredita-se que depois de um período de decantação das mesmas, possam essas novas matemáticas enriquecer algumas delas, se diversificando e se ramificando constantemente em teorias modificadas, refundidas e combinadas entre si, descobrindo novas aplicações. Uma melhor visão dos avanços da Matemática, segundo Bourbaki, encontra certo obstáculo à medida que os matemáticos se isolam em relação ao tema de seu trabalho e ignoram quase tudo, o que não é relativo ao mesmo e muitas vezes, sequer compreendem a linguagem e a terminologia de outros matemáticos que trabalham em outros temas. Por mais, que tenham uma cultura muito vasta, é muito provável que esses matemáticos se sintam estrangeiros em certos temas da Matemática. O que está em jogo é se essa proliferação de trabalhos significa uma coesão e unidade ou uma dispersão cada vez mais avançada.

Como indica Otte (1993), as intenções da comunidade matemática eram distinguir, tão nitidamente quanto possível, a Matemática das outas áreas de cognição e experiência, e separá-la claramente dessas áreas, de acôrdo com um crescente processo de especialização e divisão de trabalho que ocorreu no curso da Revolução Industrial. Por essa razão, o paradoxo de Bernal: “Foi quando a Ciência deveria ter estado mais obviamente conectada com o desenvolvimento da era mecânica que surgiu a idéia da Ciência pura” BERNAL (1963; p. 20) apud OTTE (1991; p. 306) A Psicologia e a Epistemologia da Matemática foram separadas, do mesmo modo como foi feito entre a teoria e a prática e com as ciência empíricas e formais. A Matemática

Aplicada tem que ser baseada na metafísica, indica Cantor, e a Matemática Pura, pelo contrário, deve ser pensada como uma construção, completamente livre da mente humana.

Sobre essa dualidade entre Matemática Pura e Matemática Aplicada, Dieudonné (1990), afirma que ao invés dessa forma de designação, seria melhor referir-se simplesmente como *Matemática* e *aplicações da Matemática*, uma vez que são dois procedimentos do espírito muito diferentes. Ele comenta que

> Foi nos meios próximos de d'Alembert, com Buffon e sobretudo, Diderot, que a contestação às matemáticas terá ido longe demais, fazendo das aplicações às outras ciências a única finalidade que os matemáticos deviam visar. Para Diderot, as matemáticas tinham tido a sua época: nada acrescentavam à experiência e apenas conseguiam 'interpor um véu entre a natureza e o povo' em vez de 'tornar a filosofia popular'; vê- se que os princípios da 'revolução cultural' não datam de ontem! No entanto, Diderot, contrariamente a Voltaire, tinha uma certa propensão para as matemáticas, mas deu conta que nunca faria nelas uma obra original. Será a isso que deveremos atribuir os seus ataques? Como Fontenelle já tinha escrito em 1699: 'Chamam-se geralmente inúteis as coisas que não se compreendem'. É uma espécie de vingança e como em geral a Matemática e a Física não são compreendidas, são declaradas inúteis. DIEUDONNÉ (1990; p. 37)

Dieudonné (1990), defendendo Diderot e seus seguidores contrários aos utilitaristas à Matemática, argumenta que é necessário reconhecer que até o início do século XX, a Mecânica e a Física teórica influênciavam muito pouco as invenções tecnológicas úteis, eram mais resultados de atividades hobbistas e de *bricolages* do que de teorias, como aconteceu no desenvolvimento da aviação e mesmo com o motor de explosão. Somente a partir desse momento é que a Matemática se torna imprescindível. Por outro lado, os utilitaristas referem-se às Matemáticas puras com uma certa raiva: Existem exemplos de muitas outras disciplinas como a arqueologia ou a cosmologia etc, que não têm certamente nenhuma utilidade, não recebem o mesmo ataque, ao contrário, são apoiadas pela opinião pública.

Muitos pesquisadores separam, de forma bem definida, a atividade matemática da sua utilidade. Em muitos casos a utilidade é somente uma conseqüência. Dieudonné (1990), também adepto, da mesma forma, não aceita de modo algum, discursos que apontam que, mesmo uma parte considerável da Matemática atual, que não tem visivelmente nenhuma aplicação poderia ser útil um dia. É crença sua que não passa senão de um dogma, tão impossível de refutar quanto de provar. Para ele nada justifica atrelar utilidade à atividade matemática, mesmo que o argumento mais forte seja a aplicação por Kepler da teoria das cônicas de Apolônio, com o objetivo de explicar o movimento dos planetas, dentre outros exemplos.

Dieudonné (1990) tem razão ao situar certa contestação à Matemática nos meios próximos de d'Alembert e Diderot, fazendo das aplicações às outras Ciências a única finalidade que os matemáticos deviam visar. Entre o fim do século XVIII e início do século XIX, a Matemática sofre uma mutação essencial, sua natureza muda. O surgimento de um movimento denominado 'jornalismo matemático', desencadeou-se com a criação das primeiras revistas consagradas unicamente para Matemática, que se faz justamente nesse período, tais como *Annales de Mathémathiques de Gergonne* (1810-1831), *Journal do Crelle* (1826) e o *Journal de Liouville* (1836). O curioso é que todos esses veículos de circulação têm evidenciados no título 'Matemática Pura e Aplicada'. Isso para muitos foi considerado uma desvantagem, pois mascara a evolução interna da própria Matemática, dando uma modificação radical de sentido para a palavra *pura* durante esse período.

Históricamente, segundo Frieldemeyer (1995), aparece a distinção entre Matemática Pura - Matemática mista, no início do séc. XVII, quando Francis Bacon a utiliza no seu livro *"De dignitate et* augumentis *scientiarum".*

É divulgada no início do século XVIII, quando Christianan Wolff, num artigo de 1716, *Mathematica* em *Mathematische Lexikon*, distingue: *Mathematica seu mathesis*, Ciência da medida das grandezas; *Mathesis impura sive mixta*, aplicada aos objetos físicos, aquela que não é nem Aritmética, nem Geometria, nem Álgebra; *Mathesis practica* ou Matemática prática dos engenheiros, agrimensores etc; *Mathesis pura sive simplex*, de fato a Aritmética, a Geometria, a Álgebra e a Trigonometria; *Mathesis theoretica seu especulative*, puramente teórica e enfim a *Mathesis Universalis*, que é a arte do Cálculo literal.

Otte (1993) comenta também, referindo-se ao seu nascimento histórico e ao aspecto funcional da Matemática Pura que “ela é determinada muito mais pelo seu estilo e pelo método do que pelo seu objetivo. Exatamente algo desse padrão, forma o pano de fundo da comparação entre Matemática e Arte” OTTE (1993; p.192). Da mesma forma, continua ele, em relação à Matemática Aplicada: “Ela, por outro lado, é definida de forma mais saliente pelo momento do significado. Significado aqui não é simplesmente a importância subjetiva, mas inclui aspectos como modelação da realidade e efetividade, ou viabilidade de custos, pontos de vista que precisamente nos dias atuais, possuem um peso enorme” OTTE (1993; p. 192-193).

W. Scharlau (1979) apud Otte (1993) indica, que para o nascimento da Matemática Pura por volta de 1800, ele vê como decisivo “que pela primeira vez na História da Matemática foi descoberto um grande número de conexões entre áreas de problemas e resultados aparentemente bem dissociados.” SCHARLAU (1979) apud OTTE (1993; p. 193). Otte (1993) comenta ainda que a produção de conexões, a descoberta de coerências e inconsistência são funcionalidades que atualmente ainda muitos creditam à Matemática Pura em relação à Matemática Aplicada. Uma outra função denotada à pura, tendo em função às funcionalidades acima descrita, repousa no momento antecipatório do pensamento, na preparação, na possibilidade de ver o inesperado, o anormal ou o inicialmente paradoxal. Uma das mais utilizadas é a de que para a Matemática Pura a aplicabilidade imediata não se faz necessária ou mesmo estar presente. Ela, como Matemática teórica, produz conhecimento para aplicações futuras que são totalmente inesperadas, pois garante para muitos a unidade, coerência e generalidade. São funções que a Matemática Pura trata como extrememente importantes

Friedelmeyer (1995) indica a apreciação pessimista que os próprios matemáticos tinham da sua Ciência no início do século XIX, ele exemplifica o caso de Cauchy, entre outros, que em 1811, com 22 anos, tenta predizer que a pesquisa matemática está terminada, sem futuro, restando somente as úteis aplicações. Friedelmeyer (1995) diz que, já anteriormente, no século XVIII, a visão que se tinha da Matemática é a de Ciência útil, priorizando suas aplicações e relegando a um segundo plano seus métodos e processos. Mas no fim do século XVIII e início do século XIX, Matemática Mista — que era formada pela Mecânica, Óptica, Astronomia, Arquitetura Militar, Hidráulica, Navegação, entre outras — dá lugar ao título de Matemática Aplicada e, provavelmente é aí que se opera a grande fronteira da distinção entre Matemática Mista e Matemática Pura, que dessa forma, traduzia uma espécie de separação estática entre o concreto e o abstrato para a distinção entre Matemática Pura. Já para a Matemática Aplicada vai refletir uma visão dinâmica de uma Ciência da Natureza, ela mesma abstrata que se constrói em torno de conceitos, tais como gravitação, organismo *etc* e aos quais a Matemática serve de forma e linguagem.

Mas, ainda para Friedelmeyer (1995), a *Crítica da Razão Pura* de Kant desempenhou um papel importante na evolução semântica da expressão Matemática Pura e encontra na Alemanha um ambiente propício daquilo que se conhece como *Aritmetização da Análise* para imprimir dois aspectos: de uma Matemática Pura, em que todo recurso à intuição sensível é banida, porque se apóia somente sobre o conceito de número; e o da construção dos conceitos matemáticos em que esta aritmetização encontra seu resultado na construção dos reais, único quadro teórico que possibilita realizar o corte absoluto da análise com a intuição sensível.

Por meio do *Journal do Crelle*, Augustus Leopold Crelle, mesmo sem ser um matemático de grande importância, consegue divulgar as mudanças mais significativas do século XIX no que concerne à Matemática. A exemplo de outras revistas, ele estabeleceu uma certa profissionalização na carreira de matemático e, em oposição a elas, ele registra o rompimento ao recurso da intuição geométrica e complementa o conceito de uma Matemática Pura como conhecimento totalmente *a priori*. Ele defendia uma concepção de Matemática cuja fonte de seu desenvolvimento se encontra em seus próprios questionamentos.

Belhoste (1998) afirma que a oposição entre as 'duas Matemáticas', nos séculos XIX e XX foi provocada parcialmente pelo ensino. Iniciou-se no fim do século XVIII, na *École Polytechnique*, onde os ensinamentos de Matemática são divididos em uma parte pura (Análise e Geometria Descritiva) e uma parte aplicada (Geometria Analítica e Mecânica Racional para Análise e Desenho de engenharia para a Geometria Descritiva). Essas aplicações ensinadas na Escola Politécnica, fazem referência às diversas especialidades dos engenheiros e militares e aparecem na forma de cursos como resistência dos materiais, lançamento de projéteis, desenho de fortificações *etc*. Dessa maneira, se percebe nitidamente a Escola Politécnica francesa como colaboradora parcial dessa mudança.

Será que é em função dessa distinção e outras anteriormente indicadas e colocadas historicamente que, no no dia-a-dia se tem dificuldades em estabelecer relações, ou seja, pensar relacionalmente? Será que no ensino, essas inúmeras dualidades não são devidamente estudadas, analisadas, discutivas, vivenciadas? Provavelmente, apenas uma das versões são apresentadas ou 'impostas', de cada uma dessas dualidades, de acôrdo com as tendências ou preferências individualmente. Esse estilo de atitude, em que normalmente se '**apresentam**' situações, dualidades, conteúdos *etc*, fica evidente que o agente nesse caso é o ‘apresentador’ e não os alunos. Isso é problema para o ensino. O papel do educador deveria ser sim, o de ‘**propor**’, ‘**desenvolver**’ ações, situações, atividades, discussões *etc* para que o agente do processo de aprendizagem seja, de fato, o aluno.

É preciso ainda considerar a metodologia ou mais profundamente a epistemologia, mas em que perspectiva? Quais são as perguntas fundamentais?

- O que é o conhecimento?

- Como o homem chegou ao conhecimento?

- Como se desenvolve o conhecimento?

Otte, comentando verbalmente:

> existem no mundo inteiro hoje dois paradigmas totalmente opostos: Em primeiro, um deles descreve que é pensamento, e mais particularmente o pensamento matemático, que é uma atividade; Em segundo, o outro descreve a Matemática como um sistema de teorias. Por sua vez, uma teoria é um sistema de sentenças, nesse caso, esse paradigma é totalmente lingüístico. No caso do primeiro paradigma ele é estruturado em termos de produção, de construção da atividade ..., exemplifica OTTE, (2007).

Esses dois paradigmas denotam claramente uma postura totalmente diferente sobre a questão: Quais são as tarefas da teoria? Onde estão os limites da teoria? Quando e onde começa uma atitude pragmática, por exemplo, da aplicação de uma teoria.? Faz-se realmente uma teoria sobre a aplicação de teoria? Se alguém faz isso, faz uma teoria sobre teorias.Teorias, dessa forma, podem então serem conduzidas para o infinito, como um *loop* recursivo. Cria-se então novos paradoxos? Em alguns pontos existem limites da possibilidade de se teorizar sobre as outras teorias.

Outra pergunta deveria ser feita: como o pensamento relacional tem a ver com teorias, será devido a isso que encontramos grandes dificuldades para sua consolidação? será porque o pensamento relacional tem limites? Pode ser que se tenha uma afirmação como resposta, porque, senão esse processo de utilizar-se do pensamento relacional seria mais comum e mais difundido.

No dia-a-dia busca-se quase sempre características ou tarefas absolutas que não dá um real ou exato sentido (a criança é grande ou pequena.... a caixa é pesada... o riacho é longe — longe é em centímetros, metros, quilômetros, anos-luz...) e, para situações tidas como ‘corriqueiras’, em que não se é exigido uma resposta mais formal e exata, essas grandezas ditas vagamente como ‘grande’, ‘pesada’, ‘longe’ *etc*, bastam normalmente para garantir um certo entendimento e até mesmo uma compreensão.

Isso indica que só se tem conceitos relacionais na teoria. Mas no dia-a-dia pensa-se diferente, pois enxerga-se o mundo como se fosse um conjunto de objetos e não uma estrutura de relações ou de desenvolvimento. O pensamento relacional pode ter limites porque, como já foi visto, a teoria tem limites. A teoria deve ser aplicável. Que significa aplicação? É a relação de uma teoria com alguma coisa que não é teoria, por exemplo, uma realidade (no sentido mais amplo) uma coisa que não é conceitualizada, que não se encaixa ainda na teoria.

Na crítica de Russel aos Axiomas de Peano é que se encontram exemplificados momentos que se destacam muito claramente essa situação. Sendo o pensamento axiomático totalmente relacional, Russel critica isso pelo fato de que, dessa forma, não se sabe como aplicá-lo à teoria dos números.

Observadas algumas dessas dualidades até então descritas, além de inúmeras outras que podem ser detectadas, temos que ter ciência e consciência de sua existência, principalmente no âmbito da educação. Elas, se tratadas isoladamente, atuam como barreiras para o progresso[8] e dificultam a evolução da compreensão por parte dos alunos. Ciente disso, nesse momento

[8] Gaston Bachelard, indicaria esse termo como “obstáculo epistemológico ou obstáculo ao conhecimento.

do trabalho, se estará buscando uma interação que objetive o transpor essas dualidades, que são geralmente antagônicas, partindo para o desenvolvimento de idéias relacionadas com o sentido de complementaridade, em situações de ensino-aprendizagem.

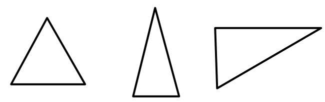
2.3. Indicações e reflexões para que um professor repense suas formas de pensamento e busque a complementaridade como processo de ensino.

Uma das estratégias que surte efeitos motivadores para o aprendizado, quando desenvolvidos numa atividade de ensino, é a resolução de problemas. Krutetskii, pesquisador soviético, realizou nas décadas de 1960-1970, uma investigação experimental envolvendo 201 estudantes russos do Ensino Fundamental, com diferentes habilidades matemáticas. A esses estudantes foram propostas diversas séries de problemas matemáticos, em que foram observadas suas habilidades matemáticas durante o processo de resolução. KRUTETSKII (1976, p.197-198) indica um problema que envolve coelhos e galinhas e é formulado em termos de definir quantidades de cada espécie, partindo do conhecimento de número de pés e cabeças. Ele relata que inúmeras crianças têm dificuldades de resolver esse estilo de problema, por não dissociarem as estruturas das representações concretas, pois quando pensa em repartir os pés, implica, interiormente, num conceito real de terem de cortar e distribuir pernas e pés. Quando ele propôs o mesmo estilo de problemas, que não mais envolvia seres vivos, mas sim um hotel com quartos com duas camas e quartos com 4 camas, essa mudança foi suficiente para eles conseguirem resolver o problema. Fica indicado que, na maioria das vezes, não basta somente reproduzir um problema ou conteúdo.

Da mesma forma, na atuação dos professores em processo de ensino, para que haja melhoria na apreensão de um conceito, não basta que ele seja apresentado como uma mera informação, uma ferramenta, uma fórmula, de maneira puramente instrumental, como destacado por Skemp

(1989). Uma mudança de atitude e o cuidado de um professor em adequar um determinado contexto, propondo uma situação, tornando-a mais próxima do aluno, sua realidade ou vivência, possibilita ou no mínimo, facilita a compreensão.

De uma maneira em geral, os professores sabem, ou pelo menos deveria saber que o modo como se deve representar conceitos é de fundamental importância para a aprendizagem dos alunos, pois dependendo da representação escolhida, esse conceito pode ou não ser aprendido. Isso pode ser exemplificado usando a idéia de triângulo que pode ser 'transmitida' por meio de diferentes representações:

1. Apresentar visualmente as figuras 
2. Um polígono de três lados;
3. Três pontos não colineares ligados por segmentos de retas;
4. A região do plano delimitada por três retas, duas a duas não paralelas;

É fundamental separar os objetos de suas representações, ou seja, os desenhos, e as propriedades que descrevem o objeto não são o triângulo e sim apenas algumas das várias maneira que podem ser usadas para representar esse objeto e que tem a finalidade de auxiliar ao aluno a obter a idéia de triângulo. Mesmo quando se restringe o conceito que se tem de triângulo, por exemplo um triângulo retângulo. Pode-se representá-lo de várias maneiras, mesmo desenhá-lo de diversas formas. É muito comum encontrar alunos que, ao observar um mesmo triângulo retângulo, porém, em posição diferenciada ou simplesmente pelo fato de ter 'girado' o ângulo reto desse triângulo, eles geralmente não conseguem identificar e manter a classificação e a igualdade de características e assim identificam como um triângulo 'diferente'.

Inversamente, um aluno que tenha chegado a esse objeto ‘triângulo retângulo’, conseguirá identificar a sua representação qualquer que seja sua posição, percebendo o que é essencial e, dessa forma, reconhece-o como um único exemplo. Dessa forma, como indica Krutetskii (1976), bons alunos ou alunos considerados capazes, conseguem generalizar a partir de um único exemplo, pois separam as características essenciais das secundárias e, dessa forma, quando eles analisam um fenômeno, podem até não perceber imediatamente qual é a característica geral, mas vêem o que é essencial.

Tem-se que considerar também, como indicado na teoria de Felix Klein, que um objeto geométrico é um invariante de um grupo de transformações. Pode-se indicar situações em que um mesmo objeto concreto pode representar vários objetos geométricos, dependendo do grupo considerado. Como referência, no contexto da Geometria Projetiva, um triângulo equilátero, ou retângulo ou qualquer triângulo geral, representa o mesmo objeto geométrico. Já na visão da Geometria Euclidiana, são representações de objetos diferentes. Dessa forma, em se tratando de objetos geométricos, pode-se construí-los a partir de grupos, usando para isso modos algébricos para representá-los, ou pode-se construí-los pelas suas características, por meio de modos geométricos. Assim, é fundamental ter claro o que significa generalizar, até porque esse conceito é uma das metas da ciência e particularmente da Matemática. No modo algébrico, generalizar significa aumentar o grupo de objetos; no outro caso, significa aumentar o campo dos objetos, abstraindo algumas características.

É fundamental para o professor, ao verificar, no decorrer da História da Matemática e da própria evolução do conhecimento matemático, identificar as inúmeras maneiras diferentes de pensar e de representar usando a Matemática. Contextos diferenciados, diferenças de culturas, regiões e o próprio conhecimento disponível promovem diferenças no modo de pensar. Durante a nossa História, por exemplo, percebe-se claramente que, em determinados momentos, quem muitas vezes direcionava as construções teóricas da Matemática ora era a Geometria, ora a Álgebra.

Muitos estudiosos abordaram o pensamento matemático tomando como referência a História da Matemática e um dos que mais se preocupou com as formas do pensar matemático foi Poincaré (1995).

No capítulo I de sua obra, denominado "A Intuição e a Lógica na Matemática", Poincaré (1995) descreveu duas formas distintas de pensamento que os matemáticos geralmente incorporam, e que é possível perceber e identificar isso ao analisar obras publicadas em Matemática.

É possível identificar a tendência do autor, em que ele destaca que são, em número de duas, as tendências. E elas ou são opostas ou então são dois espíritos inteiramente diferentes, em que uns são guiados pela lógica e outros pela intuição.

O próprio Poincaré (1988b) pedia maior atenção para o uso da intuição tanto quanto aquela que era dedicada à lógica no ensino da Matemática: "é mediante a lógica que se prova, mas é mediante a intuição que se inventa". POINCARÉ (1988b; p. 7-16). Uma discussão acerca do contraste entre intuição e lógica no pensamento matemático havia sido proposta desde o início do século XIX. Para Poincaré (1995), a intuição era indispensável para criar novas generalizações, produzir hipóteses férteis, enquanto que a lógica e a prova rigorosa serviam para justificar e estabelecer fundamentos sólidos do conhecimento matemático. É por esse motivo que até recentemente, tanto na Filosofia como na Matemática dominava o interesse pelo rigor e pelos fundamentos lógicos da Matemática.

Isso trouxe grande desvantagem para a Educação Matemática e para todas as teorias que centravam a atenção em como o pensamento matemático se desenvolve no ser humano. Poincaré (1995) afirma que era a própria natureza de seu espírito que tornavam os matemáticos como lógicos ou intuitivos, e que não era o assunto que os matemáticos estudavam, que determinava uma ou outra tendência de pensamento. Eles faziam uso desse espírito quando estudavam algo novo. Poincaré chamou os lógicos de analistas e os intuitivos de geômetras e afirmou que uns podiam permanecer analistas mesmo quando abordavam a geometria, e outros podiam permanecer geômetras mesmo estudando “análise pura”. POINCARÉ, (1995; p. 13).

Poincaré (1995) afirmou que não era a educação que influenciava as tendências, porque “o indivíduo nasce matemático, não se torna matemático, e parece também que nasce geômetra ou nasce analista” POINCARÉ (1995; p. 13). Como exemplo, Poincaré (1995) comparou dois personagens da ciência francesa, Bertrand e Hermite. Os dois foram estudantes da mesma escola na mesma época, tiveram a mesma educação, as mesmas influências e, no entanto, eram completamente diferentes, tanto nas obras escritas como no ensino e no modo de falar. Bertrand enquanto falava estava sempre em ação, via e procurava representar as figuras que estudava, desenhando-as por meio do gesto, agindo de forma intuitiva. Já Hermite agia como se seus olhos parecessem “fugir ao contato do mundo; não é fora, é dentro que procura a visão da verdade” POINCARÉ (1905; p. 14).

Outro exemplo para explicitar as duas tendências no pensamento, Poincaré (1905) indicou a postura de dois matemáticos eminentes: Félix Klein e Méray. Méray, que tinha uma tendência analista, queria demonstrar que se pode sempre subdividir um ângulo. Poincaré indagou: “Quem duvidará que um ângulo pode sempre ser dividido em um número qualquer de partes iguais?” Poincaré (1995; p. 13-14). Com base na intuição direta acredita-se que isso seja verdadeiro. Entretanto, Méray não acreditava nessa intuição. Para ele, essa proposição não era evidente e a sua demonstração deveria ocupava muitas páginas, para que fosse fundamentada na lógica.

Félix Klein, ao contrário, estava estudando uma das equações mais abstratas da teoria das funções e desejava saber se numa determinada superfície de Riemann sempre existia uma função, que admitia singularidades dadas. Para desenvolver esse estudo, ele substituiu a superfície de Riemann por uma superfície metálica, na qual a condutibilidade elétrica variava de acordo com certas leis. Colocou dois de seus pontos ligados com os dois pólos de uma pilha. Sua hipótese era: a corrente deveria passar e a forma como essa corrente se distribuísse na superfície definiria uma função, cujas singularidades seriam aquelas que foram previstas pelo enunciado. Dessa forma, Klein desenvolveu seu estudo de forma intuitiva. Mesmo não fornecendo uma demonstração rigorosa, ele se deu por satisfeito, mesmo sendo uma certeza moral.

Poincaré (1995) mencionou ainda os caminhos seguidos pelos matemáticos alemães Weierstrass e Riemann que estabeleceram a teoria geral das funções por dois processos distintos:

- Weierstrass reduziu a Análise Matemática a um prolongamento da Aritmética, sem usar nenhuma figura em suas obras.
- Riemann fez uso da Geometria, e "cada uma de suas concepções é uma imagem que, uma vez compreendido seu sentido, ninguém pode esquecer". POINCARÉ (1995; p. 15).

Essa diferença entre tendências pode-se perceber até mesmo entre os estudantes nas escolas. Alguns gostam de resolver os problemas recorrendo à Geometria, cansando-se algumas vezes ou evitando muitas vezes os longos cálculos. Outros se utilizam da Análise, necessitando ou não de uma visualização geométrica. Apesar de diferentes, Poincaré (1995) confirmou a indicação de que, ambas as categorias de pensamento eram igualmente importantes para o progresso da Ciência. Tanto a análise quanto a síntese tinham um papel legítimo.

Ele constatou algo surpreendente: "Observamos que, na leitura de obras matemáticas antigas, temos a impressão que todos autores foram intuitivos, contudo, a natureza é sempre a mesma" POINCARÉ (1995; p. 15).

Como explicar essa impressão? Ele afirmou que, com o passar do tempo mudanças ocorreram, porém, não foram os espíritos que mudaram, e sim a própria intuição. Ele ressaltou que para evitar as ilusões da intuição, uma evolução foi criada, começando com o rigor sendo inserido nas definições. Isso ocorreu porque durante um longo tempo, muitos dos objetos estudados pelos matemáticos eram mal definidos, de forma que, constantementes eles eram reescritos, exigindo grandes esforços dos lógicos. Poincaré (1995) referiu-se a um exemplo para explicar a mudança da intuição: foi o da continuidade. Ele comentou que atualmente sabe-se que existem funções contínuas desprovidas de derivadas. Nossos antepassados, com base na intuição, diriam: “É evidente que toda função contínua tem uma derivada, já que toda curva tem uma tangente” [...] “Como pode a intuição nos enganar a tal ponto?” POINCARÉ (1995; p. 16).

Ele usou como argumento e explicou que:

> quando imaginamos uma curva, não podemos representá-la sem espessura; assim como quando representamos uma reta, admitimos certa largura. Entretanto, essas linhas não têm espessura, e ao imaginá-las cada vez mais finas, aproximam-se do limite. No entanto, esse limite jamais será atingido. Podemos sempre representar essas duas faixas estreitas – uma retilínea e outra curvilínea – numa posição que as duas se invadam ligeiramente, sem se cruzarem. POINCARÉ (1995; p. 16).

Poincaré (1995) alertou que, sem o auxílio de uma análise rigorosa pode-se concluir que uma curva sempre tem uma tangente. Isso conduz à necessidade de ir além da intuição, estabelecendo-se um maior rigor na Matemática.

Poincaré destacou que até 1995, a Análise se restringiu à abordagem dos números inteiros, ou sistemas finitos ou infinitos de números inteiros, conectados entre si por um conjunto de relações de igualdade e desigualdade. Assim, a Matemática foi, de fato aritmetizada, e a única intuição matemática que permanece é a intuição dos números. Dessa forma, ele coloca que a intuição é necessária, porém, não pode ser aquela baseada nos sentidos, tendo em vista que “os sentidos logo se tornariam impotentes” Poincaré (1995; p. 18).

Poncelet, que concebeu o princípio de continuidade como sendo:

> o que é verdadeiro para uma quantidade real (...) deve sê-lo para uma quantidade imaginária; da mesma forma o que é verdadeiro para a hipérbole, cujas assíntotas são reais, é portanto verdadeiro para a elipse, cujas assíntotas são imaginárias POINCARÉ (1995; p. 18).

Poincaré (1995), considerou Poncelet como um dos espíritos mais intuitivos do século XX, entretanto, ressaltou que Poncelet não estabeleceu esse princípio respaldado no testemunho dos sentidos.

Diante disso, Poincaré (1995) afirmou que existem várias categorias de intuição:

a) o apelo aos sentidos e à imaginação;

b) a generalização por indução, baseada nos procedimentos das ciências experimentais;

c) a intuição do número puro, que consiste no raciocínio por recorrência, e que, na sua opinião, “pode engendrar o verdadeiro raciocínio matemático” POINCARÉ (1995; p. 19).

Ele assinalou que as duas primeiras intuições não podem dar a certeza desejada, somente a terceira, por acreditar que ninguém duvidará da Aritmética.

Poincaré (1988) em “*A Ciência e a hipótese”*, livro publicado primeiramente em 1902, se propõe a discutir a natureza do raciocínio matemático. Ele explicou porque atribui tanta importância ao raciocínio por recorrência, pois esse raciocínio possibilita resumir, em uma única fórmula, uma infinidade de silogismos. Para esclarecer, serão listados alguns silogismos, que podem ser hipotéticos:

- O teorema é verdadeiro para o número 1.
- Ora, se é verdadeiro para 1, é verdadeiro para 2.
- Logo, é verdadeiro para 2.
- Ora, se é verdadeiro para 2, é verdadeiro para 3.
- Logo, é verdadeiro para 3, e assim por diante (POINCARÉ, 1988, p. 26-27).

Ele comenta que a conclusão de cada silogismo serve de premissa maior para o próximo. Essa seqüência de silogismos, que não teria fim, pode ser reduzida, isto é, as premissas maiores de todos os silogismos podem ser expressas por uma única fórmula: **se o teorema é verdadeiro para n – 1, o é para n.** Pode-se ainda, dessa forma, verificar se o teorema é verdadeiro considerando alguns números. Por exemplo: para mostrar que é verdadeiro para o número 6, basta estabelecer os 5 primeiros silogismos. O número pode ser bem maior e ainda seria possível atingí-lo analiticamente. No entanto, por mais que se tente verificar a veracidade de um teorema com casos particulares, jamais se chegará ao teorema geral, aplicável a todos os números, já que para isso, “seria necessário transpor um abismo, que a paciência do analista (...) não conseguiria nunca transpor” POINCARÉ (1988; p. 27). Dessa forma, o raciocínio por recorrência é o único instrumento que possibilita uma passagem do finito para o infinito, pois dispensa verificações extensas e monótonas, que se tornariam impraticáveis. Deve-se acrescentar que o princípio da recorrência não é um princípio lógico, pois na lógica de primeira ordem, o número de premissas precisa ser finito (princípio da compacidade da lógica clássica).

Outro ponto discutido por Poincaré (1995) se refere à realidade em que todos buscam conhecê-la. Ele perguntou: E o que é a realidade? Para responder a essa indagação ele direcionou sua reflexão na demonstração, levantando outras perguntas:

1. Na Matemática, quando um lógico desenvolve uma demonstração por meio de uma série de operações elementares e alguém examina cada passo e conclui que todos estão corretos, isso garante a verdadeira compreensão da demonstração?

2. O fato de conseguir, pela memória, reproduzir uma demonstração na seqüência correta é sinônimo de compreensão?

Ele respondeu que isso não garante o conhecimento da realidade por completo. Afirmou que, “a Análise Pura fornece uma quantidade de procedimentos diferentes e confiáveis (...)” POINCARÉ, (1995; p. 22),no entanto, indagou, “qual deles é o melhor? Quem nos dirá qual deles escolher? (...) ”POINCARÉ, (1995; p. 22). Ele relatou que “(...)é a intuição que pode nos guiar, sendo que ela é necessária ao explorador para que possa escolher sua rota”. E concluiu que “a lógica e a intuição têm cada uma seu papel necessário. Ambas são indispensáveis” POINCARÉ, (1995; p. 22-23). Ele sintetiza e reafirma uma citação já indicada anteriormente em outra obra e também nesse mesmo capítulo, ao dizer que a lógica é o instrumento da demonstração e a intuição é o instrumento da invenção. Dessa forma, para Poincaré (1995), os analistas são também inventores, mas que não utilizam a intuição baseada nos sentidos e na imaginação e sim, na intuição de número puro e das formas lógicas, alegando que é essa intuição que possibilita não só demonstrar, mas, além disso, inventar. Ele alega que o matemático não deve deixar de ser intuitivo, contudo, deve saber usar essa intuição.

De acordo com o processo predominante no pensamento matemático, Poincaré (1995) foi o primeiro a distinguir, desse ponto de vista, duas categorias de matemático: os que denotam um estilo intuitivo e os que possuem um estilo geométrico. No entanto, não está correto considerar como sinônimos esses dois estilos como ele fez, ainda que com reservas. Ele mesmo reafirma que os antigos parecem ser intuitivos, mas na realidade foram analistas.

Para ele, intuição se apresenta de modos diferentes. Como um processo quase inconsciente, de captação imediata de conexões essenciais e relações, e como um processo relacionado a componentes pictóricos para conceitos espaciais. Esses dois esquemas poderiam ter sido bem separados.

Retomando-se o primeiro capítulo de Poincaré (1995), verifica-se uma contradição, pois num primeiro momento, ele afirmou que era a própria natureza do espírito que tornava os matemáticos lógicos ou intuitivos e, num segundo momento, ele mesmo se surpreendeu declarando que ao se ler as obras dos antigos tende-se a classificá-los como intuitivos, embora muitos dos geômetras foram analistas. Como exemplo desse fato, ele citou Euclides, que desenvolveu uma estrutura científica e que por muito tempo foi considerada perfeita. Euclides axiomatizou a Geometria e, por isso, foi considerado um lógico.

Na Antiguidade, a Matemática era reduzida essencialmente à Geometria, ou seja, a Matemática se referia às teorias geométricas. Até o Renascimento a Aritmética era uma arte prática. Somente a Geometria era realmente uma arte filosófica.

Ao rever a referência feita a Poncelet, POINCARÉ (1995; p. 18), classificou-o como “um dos espíritos mais intuitivos deste século”. Nessa afirmação ele não quis indicar que alguns usam de intuição e outros não. Poncelet foi um matemático moderno, que proporcionou grandes contribuições no campo da Geometria Projetiva. Não tratava da aritmetização da Geometria, ao contrário, quis criar uma Geometria anti-cartesiana. Grassmann também tinha essa pretensão. Eles, explicitamente, afirmaram que o que Descartes fez, substituindo objetos geométricos por fórmulas aritméticas ou algébricas, foi esconder o caráter do pensamento geométrico, destruindo a relação entre o método e o objeto na área da Geometria, ou seja, Descartes produziu na realidade, uma grande quantidade de instrumentos para a Geometria e para a Matemática.

Poncelet foi engenheiro e, em virtude da profissão, fazia uso de aplicações da Matemática. Se for considerar que a intuição está relacionada com a aplicação, e que a resolução de problemas é uma forma de aplicação, nesse caso, Poincaré tinha razão ao considerar Poncelet um intuitivo. Poncelet admitia que precisa-se da intuição, porém, de uma intuição das relações e não a intuição referente aos objetos, como era considerado na Antiguidade.

Na Geometria de Poncelet não existiam objetos, somente estruturas relacionais. Por isso sua teoria foi a primeira fonte para a axiomática moderna e objetivava a construção de teorias. Na axiomática antiga, tinham-se os objetos e depois as características, e as relações entre os objetos eram descritas por meio dos axiomas.

Na axiomática moderna, tem-se a estrutura das relações. Por isso pode-se constatar que pessoas como Poncelet, Grassmann e Hilbert são considerados matemáticos modernos, por destacar a importância do pensamento relacional e das estruturas axiomáticas, enquanto pessoas como Poincaré e outros, que se dedicaram à Aritmética, trabalham da mesma forma como os antigos, apenas mudaram de campo de ação, ou seja, da Geometria para a Aritmética.

Como Poincaré resolveu essa contradição? Ele mantinha a posição de que a natureza era sempre a mesma, ser um matemático lógico ou intuitivo é inerente ao sujeito. Quanto ao fato das obras matemáticas antigas nos induzirem a pensar que todos parecem intuitivos, quando na verdade foram analistas, isto sugere, na verdade, que as obras e a interpretação do leitor são, de fato, as responsáveis por tal contradição.

Em seu livro, Otte (1993; p. 304), de certa forma, se contrapôs a Poincaré (1995) quando discutiu, num capítulo denominado "intuição e lógica em matemática" a obra de Poincaré (1995), principalmente quanto à questão da natureza da formação do matemático. Otte (1993) mencionou que os matemáticos não são formados só pela natureza, e sim, pela história cultural e social, pelo desenvolvimento da Matemática, pelas experiências com a atividade matemática e pelo conteúdo envolvido. Como o pensamento não muda nem um pouco, quando o conteúdo muda? Como imaginar um pensamento sem conteúdo? É difícil imaginar que não existe uma conexão direta entre pensamento e conteúdo, tendo em vista que, qualquer mudança no conteúdo implica conseqüentemente, numa mudança na maneira de pensar. O próprio Poincaré (1995), ao citar o exemplo da continuidade, deixou evidente que, até um determinado momento, se acreditava que toda função contínua tinha uma derivada, porque toda curva tem uma tangente. A Análise provocou uma mudança na intuição e na forma de conceber o conteúdo matemático e, com isso, influenciou o pensamento, pois se descobriu que a intuição não dava conta de explicar esse fato matemático.

A história é produzida pelo homem, dessa forma, o desenvolvimento influencia o pensamento dos sujeitos. O estilo e as obras das pessoas contribuem para o desenvolvimento da Ciência e, conseqüentemente, da Matemática e, nesse sentido, são objetivamente importantes.

Otte (1993) procurando justificar essa idéia, comentou que na filosofia marxista afirma-se que "os grandes homens, que formaram os núcleos históricos para profundas mudanças sociais ou invenções, são, num certo sentido, irrelevantes para as modificações que desencadearam" OTTE (1993; p. 76), pois acredita-se que alguém deve tomar a iniciativa, não importando quem.

Contrapondo-se, Otte (1993) garantiu que, na verdade, importa quem começa uma tendência, e para exemplificar citou os cientistas Wallace e Darwin, escrevendo que:

> se tivesse sido Wallace em vez de Darwin, teríamos hoje uma teoria da evolução bem diferente. Todo o movimento da cibernética poderia ter ocorrido cem anos mais cedo, em virtude da comparação de Wallace entre a máquina a vapor como regulador e o processo da seleção natural. OTTE (1993; p. 76).

Com esses argumentos pode-se exemplificar o fato de que estilos cognitivos e formas de representação não são apenas características psicológicas de pessoas, mas influenciam a evolução histórica da Ciência e do conhecimento. Pode-se ainda, explicar o fato do porquê atualmente, a maioria das pessoas é analista, enquanto que antigamente tinha-se a maioria como intuicionista.

Muitas pessoas tiveram acesso à escola e isso pode influenciar na forma de pensar, tendo maior predominância nesse caso, o processo analítico. As próprias tendências pedagógicas influenciam a formação do indivíduo. A realidade da Matemática é a atividade práxis e os estilos cognitivos são aspectos ou etapas dessa atividade.

Poincaré (1995) mencionou que a Matemática foi aritmetizada. Mas por que surgiu a aritmetização? Ele informou que, como a intuição não era suficiente para o desenvolvimento da Matemática, estabeleceu-se um rigor, e isso deu origem à aritmetização da Matemática.

Tem-se, dessa forma, dois movimentos marcantes na História da Matemática, a **aritmetização** que se utiliza dos objetos —que são os números estabelecidos por relações e propriedades— e a **axiomatização**, que por sua vez, se baseia em premissas —proposições que se admitem como verdadeiras, geralmente não formalizadas logicamente, no entanto, utilizadas para se deduzir uma teoria ou um sistema lógico ou matemático— dessa forma, as duas acabam criando um contraste.

Pode-se então caracterizar os estilos, em estilo axiomático e estilo aritmético? Mas o que isso significa? No axiomático, pensa-se de forma lógica '**se Þ então'**, seguindo-se um método. E no aritmético, utiliza-se o pensamento numérico, a intuição ou experimentação.

Para Otte (1993) a aritmetização envolve dois aspectos:

1. a atitude de transformar uma propriedade intuída ou observada de um objeto numa definição daquele objeto;
2. somente aquelas definições que tinham significado real poderiam, em última instância, ser manipuladas em termos aritméticos. OTTE (1993; p. 306-307).

A primeira axiomatização foi feita por Euclides cerca de 300 a.C. e a segunda por Peano, na segunda metade do século XIX. Existia ainda muita controvérsia, no que se refere à axiomatização.

Por exemplo, as análises de Hilbert foram estimuladas exatamente porque a lógica apresentada na axiomática de Euclides, não parecia mais consistente. Os axiomas são os fundamentos para a Matemática e os teoremas são derivados dos axiomas. Isso era uma verdade para Euclides, pois ele diferenciava axioma de teorema. Já Hilbert não fazia tal distinção. Porém, isso não pode ser interpretado como se Euclides só aceitasse coisas intuitivamente ou que atualmente, as coisas só deveriam ser aceitas ou desenvolvidas pela análise.

Em 1879, Peano estabeleceu os axiomas, admitindo três conceitos primitivos: número natural, zero e sucessor, relacionados entre si por cinco axiomas. Otte (2001) explicitou os 5 axiomas de Peano como sendo:

(1) 0 é um número.

(2) O sucessor de qualquer número é um número.

(3) Dois números não têm o mesmo sucessor.

(4) 0 não é sucessor de nenhum número.

(5) Qualquer propriedade que pertence a 0, e também ao sucessor de todo número que possui a propriedade, pertence a todos os números OTTE (2001; p. 18,).

A estrutura dos axiomas dá uma teoria acerca dos números. Os axiomas fornecem relações por meio de propriedades. Porém, a crítica que normalmente se faz é que, *os axiomas não são suficientes para explicar o que é exatamente um número*.

Quando se deseja construir uma teoria, busca-se um teorema considerado mais importante e pertinente, aí levantam-se as premissas. Assim são escolhidos os axiomas atualmente, os que servem para deduzir todos os teoremas de uma teoria. É no sentido do instrumentalismo ou do pensamento instrumental.

Poincaré (1995), no entanto, não é o único que se posiciona contra a análise e a identifica com o método axiomático. Russell tem opinião semelhante, na medida em que alega que a teoria axiomática sozinha não oferece descrições completas no campo dos objetos. Ambos consideram o pensamento axiomático ou o pensamento relacional insuficiente para caracterizar os números, porque os axiomas não dizem o que é um número. Na opinião deles, número é uma coisa absoluta e não relacional.

Na axiomática, se há apenas as estruturas das relações, não se tem uma escala absoluta. Como medir uma mesa? É em termos de centímetros, polegadas e outras medidas? A estrutura será a mesma, apenas a unidade de medida se diferenciará. Nesse caso, o valor que representa a mesa será diferente.

Russell (1954) apud Otte (2001), coloca para sua reflexão crítica, tomando como exemplo os axiomas de Peano, sugeriu que em vez de estabelecer ‘0’, ‘número’ e ‘sucessor’ como termos dos quais se conhece o significado, mesmo não podendo defini-los, pode-se deixá-los representar quaisquer três termos que verifica os cinco axiomas de Peano. Assim, eles seriam variáveis.

A abordagem axiomática expressa a Aritmética, não sobre coisas e objetos existentes, no sentido concreto, mas sim sobre relações gerais ou objetos ideais. Russell (1954) apud Otte (2001) criticou que isso não possibilita que se saiba como aplicar o sistema formal. Sua explicação baseou-se em dois motivos:

- Primeiro, não propicia saber se há alguns conjuntos de termos que verificam os axiomas de Peano;
- Segundo, deseja-se que os números sejam utilizados para contar objetos comuns, e isso exige que os números tenham um significado definido e não somente certas propriedades formais.

Russell (1954) apud Otte (2001) concordou com a definição de número dada por Frege (1903), em que:

> (...) termos primitivos são substituídos por estruturas lógicas, em que é necessário provar que eles satisfazem as cinco proposições primitivas de Peano. Esse processo é essencial para relacionar aritmética com lógica pura (...) (OTTE, 2001, 19).

A Lógica é interpretada de um modo totalmente realístico. Essas declarações sugerem que tanto Poincaré (1995) como Russell (1948) se preocupavam com aplicações da Matemática e esse fato pode ser associado com a atitude de matemáticos que se interessam por resolução de problemas. A diferença entre eles baseia-se em uma mudança de intuição. Russell (1948) considerava a intuição da estrutura e Poincaré (1995) a intuição do número puro.

O assunto realmente não é mais se é intuição ou não, e sim, se é pensamento relacional ou não. Pensamento relacional se refere às **relações entre os objetos**, já o pensamento instrumental ao **o que posso fazer**, ou como aplicar. Resolver um problema tem um sentido instrumental porque há uma preocupação com a aplicação de conhecimentos, de métodos etc. Na modernidade, tem-se um novo entendimento da axiomática. A Matemática foi aritmetizada.

Quando Poincaré (1905) apresentou e discutiu as três intuições diferentes ele alegou que somente a terceira garante a certeza. No entanto, deve-se ressaltar que ela também não garante a certeza, como revelou a Aritmética *não-standard* de Skolem, na qual ele investigou o que aconteceria se o 5º axioma de Peano fosse desconsiderado. Verificou que nesse caso obtém-se um outro resultado, chegando a uma outra categoria de número.

A análise *não-standard* introduziu os números infinitos, aumentando a quantidade dos números naturais, ou seja, os números naturais acrescidos de funções, como se verifica abaixo:

1, 2, 3, 4, ..., w, w + 1, w + 2,...

Skolem evidenciou que existem estruturas aritméticas diferentes.

O 5º axioma de Peano é semelhante ao axioma das paralelas de Euclides, pois se tem implícita a questão dos infinitos.

Assim, existe um paralelismo entre a Geometria e a Aritmética, tendo em vista que na Geometria ocorreu situação semelhante à da Aritmética. A mudança na interpretação do axioma das paralelas de Euclides conduziu a uma concepção diferente da Geometria, dando origem às Geometrias não-euclidianas.

Os axiomas, na verdade, também não garantem essa certeza tão desejada, pois eles podem ser interpretados de diferentes maneiras, resultando em teorias diferentes. Esse paralelismo depõe contra a opinião de Poincaré

(1984), que acreditava que a intuição pudesse auxiliar na busca da certeza. Ele afirmou que houve mudança na intuição e não no espírito humano. No entanto, o que mudou foi o fundamento da Matemática.

Antigamente, a Matemática era concebida como um conhecimento que vinha do exterior, pelas relações observadas diretamente na natureza. Por isso a Geometria foi, durante muito tempo, considerada como o método mais apropriado, porque ela abordava o espaço físico, sendo o reflexo de aspectos do mundo externo. No entanto, isso pode nos enganar, pois nem sempre pode-se perceber tudo do mundo. Além disso, as pessoas têm percepções diferentes do mesmo aspecto exterior.

A Matemática é concebida como a expressão do pensamento do homem, um conhecimento interno, um reflexo das estruturas mentais. Então, o que importa são os números e a aritmética, de onde as teorias derivam e para onde as aplicações conduzem, e que para Poincaré (1984) o fundamental é a intuição do número puro.

Em síntese, Poincaré (1905), quando elucidou dois pensamentos matemáticos distintos, oscilou entre associá-los à natureza das pessoas e às épocas da História da Matemática (mudança da intuição). Parece que ele admitia que o pensamento matemático não se restringia apenas a um aspecto.

Seria fundamental e bem mais vantajoso pensar no ensino de Matemática por meio de atividades pedagógicas, que essas fossem contempladas por ações relacionais de resgates históricos, contextuais e situacionais. Que pudesse, da mesma maneira, conceber os objetos dessa atividade como representação das idéias matemáticas, como um conjunto de teorias e de proposições encadeadas umas nas outras, inicialmente por meio de processos intuitivos, como ponto de partida e de reflexão inicial e posteriormente, por processos dedutívos e provas formais. Dessa forma, está se estabelecendo uma forte relação entre idéias matemáticas, suas representações e seus campos de aplicações, encadeamente vital para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Tem-se então que a atitude proposicional coloca a Matemática em termos de proposição sobre a realidade objetiva (teorização). Por outro lado, para a atividade matemática, o que importa sãos os aspectos instrumentais do conhecimento (prática). Como em geral, na Matemática tradicional, essas dualidades estão dissociadas, então essa Matemática é insuficiente para suprir uma base concreta de conhecimento, saberes e atitudes frente a inúmeras situações problemas que podem surgir aos nossos alunos, como por exemplo, a desenvolvida anteriormente por Krutetskii (1976).

Para Moraes (2003), a 'Abordagem Relacional' fundamenta ações pedagógicas baseadas no estudo das relações, para a criação de condições que contribua para a construção de um conhecimento integrado do mundo, considerando a complexa rede de conexões dos seus componentes físico-químicos, biológicos e humanos. No entanto, é preciso muito da 'Abordagem Instrumental', pois isso, significa, de muitas maneiras generalizações, abstrações, processos já estruturados e adequados para um fim específico ou adaptável. Não se pode, principalmente em nome do ensino, para cada aluno individualmente, construir sempre os conceitos a 'partir do nada', como se nunca tivessem sido construído, para só então, chegar a conhecimentos 'novos', como numa perspectiva apenas linear, não há esse tempo e nem como assegurar essa motivação nos alunos. Tem-se que pensar numa evolução em que o aprendizado se dê, como numa espiral... um conceito anterior sirva de referência e até mesmo de instrumento para um novo conhecimento, que por sua vez, busque relações com outro conhecimento, com outra ferramenta... ampliando e complementando dessa forma, essas vivências e experiências e o próprio rol de conhecimento e atitudes.

As interfaces entre a Matemática e a realidade podem surgir essencialmente de três formas ao longo do processo de ensino-aprendizagem:

(a) como ponto de partida para a formulação de novos conceitos ou idéias matemáticas;

(b) como exemplos de aplicação de conceitos e idéias matemáticas a problemas concretos e,

(c) como situações de modelagem, em que se procura fazer o estudo de uma dada situação, recorrendo se necessário, a ferramentas matemáticas diversificadas.

Todas essas três formas são necessárias e devem ser vistas como complementares. A introdução de novos conceitos e idéias a partir de situações reais, devidamente estruturadas, pode constituir uma importante base concreta para desenvolver os conceitos e idéias pretendidos. Pode igualmente ter um significativo papel motivador, especialmente se as situações forem de natureza problemática e do interesse dos alunos.

Para o professor, no seu ambiente de trabalho, comenta Otte (1993), uma das maneira de desenvolver um bom trabalho é, por um lado, considerar o contexto em que está atuando e vivenciando. Mas como seria esse atuar? É óbvio que todo mundo tem seu próprio estilo, mas tem-se algumas regras fundamentais e alguns pontos importantes: Que técnica usar? Como desenvolver? Não é conveniente simplesmente ficar horas e horas em frente de uma equação ou problema, não vale a pena, tem-se que desenvolver maneiras de superar os obstáculos que irá enfrentar e encontrar sempre.

Fazer um bom balanço ou equilibrio entre trabalho receptivo e produtivo, por exemplo: quando se quer estudar um artigo ou um livro; escolhe-se um livro, porém, não é necessário ler o livro inteiro imediatamente; começa-se talvez, estudando primeiramente a estrutura do livro; olhar o índice e pensar como os capítulos são relacionados uns com os outros; quais são os capítulos centrais; quais os menos importantes; como começar a ler e quais conceitos chaves... Pode-se começar a ler de fato, a partir da primeira página, seguindo talvez por 10 ou 12 páginas, ou um capítulo no máximo de leitura contínua. É importante escrever um resumo ou uma espécie de resenha que contenha algo que considera essencial até esse ponto lido.

São duas ações diferenciadas: Um resumo é bem diferente desse exemplo de resenha, porque no resumo, o leitor deve ser sincero com os objetivos do autor e porque o autor do texto poder ter outros objetivos, diferentes do leitor. Por outro lado, na resenha, pensa-se na perspectiva do leitor, ou seja, o leitor vai se perguntar: 'eu li esse capítulo agora, quais são os aspectos que importam para meu trabalho?'. Ele pode achar outros aspectos importantes. Se apenas for feito um resumo, o leitor nunca vai ligar seus conhecimentos com suas atividades, com seus objetivos, vai ter sempre uma coisa abstrata.

Por outro lado, se sempre olhar os textos só do ponto de vista do leitor, o conhecimento irá ficar sem expansão, nunca irá avançar, ampliar, permanecerá sempre no mesmo nível. Provavelmente, o leitor pode não perceber que esse assunto pode ser abordado de uma maneira bem diferente do que se pensava até então. Fazer um equilíbrio entre trabalho receptivo e trabalho construtivo é fundamental, senão fica difícil conseguir muito progresso.

É preciso desenvolver ainda algumas capacidades fundamentais: escrever e ler rápido. Escrever e ler também significa saber idiomas. Em algumas universidades, os idiomas que predominam são geralmente em função da Escola Didática que tendenciam. Algumas fala-se muito do francês, mas atualmente, é fundamental ler fluentemente o inglês, porque a maior parte das fontes de suas informações e pesquisas vai ser via *Internet* e na *Internet* o inglês predomina. Para usar a *Internet* tem-se que saber quais são os conceitos chaves para poder pesquisar e isso é uma atitude relacional.

2.4. Caminhando para a Complementaridade no Ensino

O conceito de 'complementaridade' é um conceito que tanto em seu conteúdo como metodologicamente, é fundamental para qualquer didática da matemática. Otte (1993) comenta: "O conteúdo dessa idéia, a sua aplicação à Matemática, será abordado posteriormente. Por hora me interessa mais esclarecer minha metodologia e o princípio básico que fundamenta todos os meus textos em didática". OTTE (1993; p. 219).

Esse conceito de complementariedade foi introduzido na Física quântica por Niels Bohr, para dar conta do fato de que nela, a interação entre os aparelhos de medição e os objetos constituem urna parte essencial do fenômeno físico. Trata-se também de poder descrever numa linguagem mais acessível os fenômenos físico-quânticos. O próprio Bohr estava convencido de que o princípio físico da complementaridade representava apenas um caso especial de um conceito de extrema importância epistemológica e cognitiva.

Otte (1993) diz que, para explicar a idéia do conceito de complementaridade mais diretamente, podem-se simular uma auto-experiência bem simples: É preciso tentar entender um objeto novo e ainda desconhecido. A nossa primeira provável iniciativa é deixar o objeto atuar por si só (passividade e espontaneidade do pensamento). Por outro lado, é preciso relacionar cada nova informação, cada novo objeto e cada nova concepção com os próprios conhecimentos que já se dispõem em nosso espírito. Trata-se assim de integrar cada fato novo ao próprio sistema de conhecimentos e experiências (atividade e operatividade do pensamento).

Nessa linha de raciocínio, tentar aprender um novo conceito, é explicá-lo ou introduzi-lo no conhecimento por meio de uma definição. Por um lado, isso significa encontrar uma definição para o conceito que o defina por si próprio e não por outros conceitos. Se não agir assim, não se tem condições de aprender o novo e adaptar-se ao desconhecido, porque resta apenas um único padrão de medida: saber se os novos conceitos e idéias deixam-se ou não se reduzir aos antigos. Por outro lado, algo que não possua relação alguma com os fatos conhecidos, não pode igualmente ser entendido. Algo que só existe absolutamente fechado em si próprio, e para o qual não se tem acesso, não existe para nós. Esses fatos simples e fundamentais foram reunidos no começo do século XIX no conceito de '*círculo hermenêutico da compreensão de texto*'.

Para melhor fundamentar a questão da complementaridade, é importante retomar Kant (1997), quando ele descreve a seguinte experiência:

> nosso conhecimento surge de duas fontes básicas da mente; a primeira recebe as concepções (receptividade das impressões), e a segunda é a capacidade de reconhecer um objeto por meio dessas concepções (espontaneidade dos conceitos); a primeira nos dá um objeto, a segunda nos permite pensá-lo cm relação àquela concepção. Intuição e conceitos são assim os elementos de todo o nosso conhecimento, de modo que nem conceitos sem as correspondentes intuições, nem intuições sem conceitos podem produzir conhecimento. [...] A nossa natureza impõe que a intuição jamais seja algo diferente do sensorial, isto é, ela contém apenas a maneira como somos impregnados pelos objetos. A capacidade de pensar o objeto da intuição sensorial, ao contrário, é a razão. Nenhuma dessas propriedades é mais importante que a outra. Sem o sensorial, nenhum objeto se daria para nós e, sem a razão, nenhum poderia ser pensado. Idéias sem conteúdo são vazias, intuições sem conceitos são cegas. KANT (1997; p. 88).

Dessa forma, para Kant (1997), os termos ‘conteúdo’ (objeto) e ‘conceito’ teriam de ser considerados mais próximos um do outro. No decorrer da história, são várias as concepções desses conceitos: Ele concebia a Matemática ainda como conhecimento factual, relativo a uma realidade vista como unitária e inseparável; conseqüentemente, ele via o objeto da Matemática nas ‘quantidades’. Não se pode esquecer que o pensamento moderno é caracterizado por uma diferenciação teórico-tipológica básica entre conceito e objeto do conceito. Foi de Kant (1997) as primeiras reflexões acêrca do significado dessa diferenciação. Ele fundamenta sua diferenciação entre ciência discursiva e ciência intuitiva pelo processo complementar do pensamento. Nas ciências discursivas, ele inclui a filosofia e a lógica e se baseia no conhecimento do conceito; a Matemática seria para ele uma ciência intuitiva e se baseia na intuição do objeto conceitual. Em razão disso, "o conhecimento matemático considera o geral no particular, e o filosófico, ao contrário, o particular no geral", de acordo com Kant (1997; p. 90).

Otte (1993) aponta que essa diferenciação foi bastante criticada no século XIX, tanto pelo lado filosófico (Hegel/Schelling) quanto pelo lado matemático (Bolzano/Grassmann). Schelling observa que os dois processos diferenciados por Kant se verificam:

> nos dois ramos da matemática (Aritmética e Geometria), uma vez que a Aritmética expressa o particular (relação entre grandezas isoladas) no geral, e a geometria o geral (o conceito de uma figura) no particular. Torna-se claro, dessa forma, que na matemática desaparecem todas as oposições concebidas com base na antítese entre o geral e o particular [...] SCHELLING (1802; p. 206) apud OTTE (1993; p. 221).

Uma das formas mais simples de tentar entender o conceito de complementaridade pode resumir-se em perseguir e explicar um fenômeno universal ou geral em suas manifestações particulares, é possível conceber a polaridade ou dualidade interna entre Aritmética e Geometria como uma primeira visualização da idéia de complementaridade na Matemática. O fato de que tanto a Filosofia quanto a Matemática "serem Ciências no sentido mais rigoroso da palavra [...] implica que seus métodos têm de possuir algo em comum, que é o que exatamente as fazem ser científicas" GRASSMANN (1844, 30) apud OTTE (1993, 222).

Procurando atingir o entendimento restrito que Kant (1977) oferece para o conceito de objeto, não fazendo a subordinação do objetual ao ‘intuitivo’ na filosofia kantiana. Critica-se em Kant (1977) a existência implícita de um certo empirismo e psicologismo. Para ele, nem o conhecimento filosófico nem o matemático baseiam-se simplesmente num plano unitário de objetos preexistentes. Na medida em que também nas ciências sucedem cada vez mais especialização, divisão de trabalho e cooperação, cada matemático encontra em sua prática generalizações, as quais ele utiliza e aplica. Meios (conceitos) e objetos devem ser completamente diferenciados em cada momento da atividade cognitiva individual, mas eles desempenham no desenvolvimento global do conhecimento um papel totalmente simétrico. Essas simetrias (diferença e conexão) entre objeto e meio fundamentam o nascimento e a dinâmica da Matemática Pura no século XIX e elas implicam que, tanto o conceito quanto o objeto, possuem um caráter complementar.

Essa complementaridade, descrita acima por Kant, surge puramente como parte constitutiva de uma fenomenologia ou psicologia da atividade cognitiva em si, de certa forma sem levar em conta a possibilidade de que também o objeto do conhecimento poderia desempenhar um papel ativo. Sob o ponto de vista da atividade individual, o objeto aparece apenas como a concepção ou a intuição que se possui de uma certa coisa. Tudo o que ultrapassa esses limites desaparece na famosa e incognoscível 'coisa em si' kantiana. O objeto do conhecimento é para ser visto assim, no sentido literal, como uma objeção ao conhecimento, ou seja, como resistência a uma realidade que seria independente do sujeito. É nessa forma de resistência que o espírito humano 'desperta' a curiosidade para com o objeto, chama a sua atenção para ele, 'salienta' suas características. De certa forma, se pode chegar ao entendimento que as suas concepções de uma coisa nem sempre coincidem com a natureza dessa coisa, pois depende muito do ponto de vista que foi analisado.

Otte (1993) diz que para Kant (1977), a Matemática era conhecimento intuitivo. No século XIX se tentou fazer da lógica um meio de garantia da objetividade do conhecimento matemático. Daí a famosa "revolução do rigor aritmético" que foi proposta por Felix Klein. Ela resultava então, numa relativização da diferenciação básica entre ciência discursiva e ciência intuitiva, que, por sua vez, fundamenta a filosofia de Kant. Como a lógica não afirma nada acerca do mundo, aceitava-se então um elemento fundamental da filosofia kantiana, ou seja, a concepção de que a Matemática se distinguia da lógica pelos frutos que ela trazia para o conhecimento, como Kant (1977) afirma. "A matemática, na nova concepção, era concebida ela própria como um sistema tautológico." HAHN , (1988) apud OTTE (1993; p. 223).

O conhecimento possui uma dinâmica que consiste no fato de que novos objetos são trazidos para o pensamento com isso, novos conhecimentos são produzidos, em relação a esses objetos. Porém, os objetos de que a Matemática e as demais ciências teóricas se ocupam não são objetos reais e nem simplesmente encontrados em algum lugar, mas contudo, conseguem ser transmitidos pela praxis social-histórica global do homem. Sob o ponto de vista de uma teoria axiomatizada isolada, os objetos dessa teoria são idênticos à caracterização imposta pelos respectivos axiomas. Sob uma outra perspectiva teórica, diga-se, por meio de um novo conjunto de axiomas para a mesma teoria, o conteúdo de seus objetos teóricos aparece agora completamente diferente da sua descrição axiomática. Dessa forma, o objeto teórico surge, ao final, como invariante de todas as possíveis e diferentes descrições e acessos metódicos. Essa forma de compreensão se afirmou no século XIX inicialmente no conceito fundamental de função matemática. Otte (1993) comenta:

> A meu ver, isto representa o verdadeiro núcleo da famosa 'revolução do rigor', introduzida em 1821 pelo *Cours d'Analyse*, de Cauchy. Tentava-se reduzir o conceito de função ao discreto, à aritmética dos números naturais, e assim eliminar a continuidade. A tentativa falhou. OTTE (1993; p. 223).

A verdadeira ambição desse trabalho de doutoramento é conseguir compreender como transpor as barreiras das dualidades, polaridades ou mesmo contradições, como ainda ocorre em Kant (1997), para uma genuína complementaridade entre elas. Tem-se que considerar a situação pela qual cada um dos elementos polares tanto diferencia-se do outro como também um abrange o outro. Quem deve ser então esse elo de junção ou de relacionamento entre eles? É, igualmente visão do próprio Otte (1993), preciso, colocar a <u>atividade</u> *(grifo meu)* como eixo e como a essência da relação sujeito-objeto, procurar descrever a dinâmica dessa atividade como uma entidade independente, que se diferencia tanto da consciência quanto da realidade objetiva. Essa dinâmica fundamenta-se exatamente na complementaridade entre os meios e os objetos do conhecimento. Ele complementa:

> Agora pode-se ter efetivamente a idéia de uma verdadeira complementaridade, e não de uma mera dualidade, porque nenhum dos dois elementos, meio e objeto, pode ser determinado sem o outro, apesar de eles desempenharem, num determinado momento de um certo ato epistemológico individual, um papel complementar-mente assimétrico. OTTE (1993, 224).

Pela expressão 'meio do conhecimento' se designa qualquer coisa que produz uma intermediação entre o sujeito e o objeto do conhecimento. De fato, aquilo que se entende normalmente por meio, como meios lingüísticos e as ferramentas e instrumentos experimentais, só se tornam efetivamente um meio quando eles produzem relações do sujeito para um objeto. Se isso não ocorre, pense-se por exemplo numa língua que não se domina, então, o que ocorre é mais uma barreira ou resistência. Um meio sem objeto constitui-se para o sujeito apenas num horizonte limitado. Os meios do conhecimento são de fato para serem diferenciados dos objetos do conhecimento, mas não para serem definidos sem o seu concurso.

De maneira inversa, cada relação é transmitida a um objeto, e isso jamais de forma direta e absoluta. E um objeto para o qual não se pode produzir uma relação com algum meio qualquer, não existe para nós como objeto do conhecimento. Por isso é que também o objeto do conhecimento não é definível sem os meios. Contudo, o objeto do conhecimento não é totalmente subordinado aos meios, pois se isso fosse verdadeiro, as teorias seriam idênticas às suas linguagens, e um objeto empírico, como um elétron ou um átomo, seria idêntico àquilo que uma certa teoria afirmaria sobre ele. Dessa forma, no momento em que a teoria progredisse, o objeto mudaria. Ou, se uma outra teoria afirma algo bem diferente sobre o objeto, então ele perderia completamente sua identidade.

Essa relação entre objeto e meio pode ser assim representada pontualmente, indica Otte (1993):

- Como em qualquer outra forma de conhecimento, na atividade matemática o objeto e o meio estão conectados. A Matemática não pode progredir numa orientação dirigida exclusivamente aos métodos universais e formais. Isto conduziria, ao final, à mecanização e à formalização da própria atividade matemática. Também a Matemática constrói conceitos específicos.

- Objeto e meio não apenas se conectam, mas mantêm-se em oposição. Os objetos são, como a própria palavra indica, resistências ao conhecimento, e os problemas não produzem por si sós os meios de sua solução. A Matemática Moderna ganha inclusive a sua dinâmica, e numa proporção não-desprezível, pela aplicação de teoremas e métodos que à primeira vista nada têm a ver com o problema abordado.

Cada saber encontra-se sob a dupla influência do sujeito e do objeto do conhecimento. E isto torna-se tanto mais claro quanto mais múltiplo e diferenciado tornar-se o saber. Com a Revolução Industrial multiplicaram-se as especializações, e a divisão do trabalho acontecia em larga escala, tornando-se claro para nós que a realidade em sua multiplicidade aparece duplamente no saber. Primeiro, como multiplicidade dos aspectos que podem ser abstraídos dele cada parte da realidade. Então cada objeto pode ser considerado e definido sob vários pontos de vista. De outra forma, a variedade aparece como multiplicidade dos interesses subjetivos e das funções e aplicações subentendidas do saber.

Dessa forma, é forçada uma relativa independência do saber, como se revela em seu caráter teórico. O saber nem pode ser identificado com experiências e intuições individuais, nem pode ser completamente reduzido a significados conteudísticos isolados, isto é, ser concebido como reflexo direto de um objeto. A teorização do saber é assim caracterizada por um duplo distanciamento - tanto do sujeito como do objeto – e, dessa forma, surge no primeiro plano a complementaridade entre objetos e meios como o processo real da dinâmica do saber.

Para Otte (1993), perguntar por uma Ciência, significa normalmente, indagar qual o seu objeto. No caso da Matemática, a pergunta pelo seu objeto identifica o caráter especial dessa Ciência, uma vez que o objeto da Matemática ou o conteúdo da atividade matemática de forma alguma pode ser definido absolutamente, pois faz parte da idéia, não sendo, portanto, um objeto real. Também é independente dos meios da atividade matemática. Isto faz com que os matemáticos formulem todas as questões de sua ciência como questões de método ou de metodologia. Mas é a Matemática uma metodologia, isto é, uma atividade dirigida ao processo de aquisição do saber? Ou ela é uma Ciência que persegue ela própria a aquisição do saber? Podería-se responder que ela é certamente uma Ciência, mas que preenche funções metodológicas. Ela se sobressai das outras áreas da atividade humana pelo aguçamento particular das regularidades epistemológicas de validade geral.

A ligação estreita entre objeto e meios, particularmente os meios simbólicos, tem levado com freqüência à caracterização da Matemática como atividade simbólica. Mas a Matemática não é a lógica. Na Matemática revela-se como produtivo o jogo simultâneo com metáforas, analogias e procedimentos lógicos ou algorítmicos e atualmente mais que nunca, análise de dualidades. Mesmo que a perspectiva matemática transforme a essência de todos os objetos em formas ou procedimentos, permanece ainda como essencial para a generalização matemática, a diferenciação entre significado e definição, numa ocorrência simultânea dos dois. Na Matemática as metáforas pressupõem urna diferenciação entre estrutura e sua realização. E as mais fortes são efetivas metáforas ou analogias. Na Matemática elas ocorrem graças ao jogo simultâneo entre os meios e a problemática da aplicação.

Ao se constatar de que a crescente metodologização das ciências desde a virada do século XIX para XX, teve suas origens num contexto em que o processo de abstração estava num estágio de crescimento e na transformação da ciência numa profissão de massa, então torna-se compreensível que os dois aspectos citados - meios e aplicações - desempenhem de fato um papel extraordinário numa perspectiva metodológica. Ainda que, de uma maneira não totalmente clara, os matemáticos vêem seu pensamento, primeiro, como uma interação estreita entre idéia (conceito) e símbolo (representação)[9]. Em segundo, eles vêem o fato matemático independente da roupagem lógica ou simbólica na qual ele aparece.

> Na realidade, a idéia é bem mais rica e mais profunda que todas as definições que possamos dar a ela, que as fórmulas ou combinações de símbolos e teoremas que a possam exprimir. BOUTROUX (1927, 182) apud OTTE (1993; p. 227).

Otte (1993) reafirma que pela perspectiva da dinâmica do processo de pesquisa, não parece, em certo sentido, ser relevante a relação entre teoria matemática e suas linguagens, urna vez que essa relação é extremamente estreita, rígida e impenetrável. Pela perspectiva interna, ou seja, pela perspectiva do construtor da teoria, os objetos da teoria aparecem sempre idênticos à forma com a qual eles se apresentam ou, com que são introduzidos na teoria.

Em função da problemática que ainda permeia, consequentemente causada ainda pela presença da dualidade entre Matemática Pura e Aplicada e normalmente, acrescida provavelmente de mais um componente, de fato está contribuindo para estatizar uma 'trialidade' (e não

[9] E daí afirmarem que é a forma que, de fato, representa o individual e o inusitado, enquanto a origem das idéias é obscura e impossível de recuperar

mais uma dualidade). Com a 'exclusão' ou 'auto-exclusão' da 'Educação Matemática' do ramo da Matemática Aplicada, ela tornou-se mais um componente que está procurando sedimentar suas premissas. Com isso não resolvido, é ainda nos estudantes, sempre inculcada a idéia de que eles têm de se ater precisamente às definições dos conceitos matemáticos, e que não devem misturar ou confundir concepções intuitivas com os próprios significados dos conceitos. Por outro lado, a objetivação do conhecimento matemático, o seu *status* como conhecimento objetivo e verdadeiro, só é assegurado quando baseado no universo de 'todos' os meios pensáveis e todas as possíveis representações. O conceito não é idêntico à sua definição. O conceito representa uma complementaridade entre objeto e meio, ou entre conhecimento e método. Éssa é, com certeza, uma posição defendida pelo terceiro componente da 'tríalidade', ou seja, a Educação Matemática.

Dessa forma, quais fundamentos teóricos ou que teoria caberia melhor para o desenvolvimento de um trabalho relacional? Tem-se atualmente como convicção, que a orientação fundamental que mais se adapta é a da complementaridade, exatamente por causa dos limites de teorias. Como exemplificar 'ao pé-da-letra' o que significa teoria da complementaridade? Será apresentada uma dualidade discutida por Otte (1993; p. 234-235):

Ele comenta que situações devem ser entendidas tanto ao pé da letra como metaforicamente, para isso ele cita um exemplo de Freudental (1977, p. 1, apud Otte (1993, p. 234-235):

Num galpão de ferro velho, Baastian selecionou restos de chapas perfuradas, como no exemplo indicado na Figura 1, e pediu ao seu pai que dobrasse esse pedaço ao meio, para fazer um cachorrinho. O resultado ficou como visto na figuras 7 a seguir.

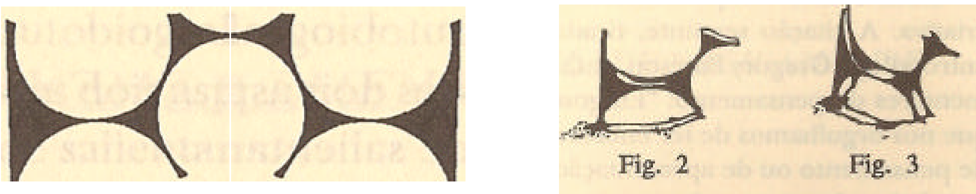


FIGURA 7: UM CACHORRINHO ESTILIZADO

Quatro passos podem ser destacados:

A - Ação puramente operativa do aproveitamento ‘ao pé da letra’ do material existente: Baastian apanhou restos das chapas perfuradas. O achado foi casual. É preciso que já exista o furo na chapa para que o sistema ativo seja acionado.

B - Pensamento livre e interpretação metafórica: dois cachorrinhos ligados pelos focinhos (Figura 1).

C - Outro entendimento ‘ao pé da letra’ do novo significado ‘cachorro’ com o conseqüente direcionamento da ação: a rigor um cachorro possui quatro patas. Além disso, a ação de dobrar exige um tratamento ‘ao pé da letra’ do material onde se encontra o ‘cachorro’.

D - O objeto se assemelha como um cachorro (Figuras 2 e 3), e pode-se vê-lo quase a balançar a cauda.

O entendimento metafórico, (B) e (D), baseia-se em semelhanças e analogias e exige uma grande participação de nossa consciência. Os passos (A) e (C), ao contrário, são de naturezas completamente diferentes. Eles nos chegam de forma muito semelhante a um estalo de *insight* da forma de ‘ahá’, como se eles viessem das profundezas do inconsciente, mas nos dão ao mesmo tempo a oportunidade de conceber a possibilidade de uma ação. Quando essa possibilidade é aproveitada, então o final da ação dispara um novo passo metafórico.

Nos passos (B) e (D), pode-se perceber uma ‘forma’. O passo relacional (B) abre a porta para o passo operacional (C). O passo relacional (D) representa o fim do processo. A forma definitiva está pronta. Ela poderia provocar um outro passo operacional, mas isto pode ser deixado de lado.

É da natureza do homem, em cada ação efetiva, ver em algo real de formas, algo ilusório (uso da imaginação para isso). Ambos os aspectos, no entanto, são complementares e ocorrem em cada atividade criativa. Otte (1993) indica a citação seguinte, extraída da autobiografia do grande antropólogo Gregory Bateson que enfatiza esses dois aspectos complementares do pensamento:

> eu gostaria de salientar que toda vez que nos orgulhamos de ter encontrado uma nova forma rigorosa de pensamento ou de apresentação, ou toda vez que começamos a enfatizar bastante o \`operacionalismo', a lógica simbólica ou qualquer outro desses irrecusáveis sistemas de direcionamento, perdemos um pouco da capacidade de pensar novos pensamentos. E, naturalmente, toda vez que nos armamos contra o rigorismo estéril do pensamento e apresentações formais e deixamos nossos pensamentos correrem livres, perdemos igualmente. No meu ponto de vista, os progressos do pensamento científico nascem da ligação de um pensamento rigoroso com um pensamento livre, e esta combinação é a ferramenta mais valiosa da Ciência. OTTE (1993; p. 236).

Outro exemplo, proposto por Otte (1993), é a discussão do conceito de número. Um determinado número qualquer surge do conceito de duas atividades distintas ou oriundas de duas perguntas completamente diferentes: um ligado com a atividade de contar 1, 2, 3, ..., também distinguido como cardinalidade, ou seja, o que designa quantidade absoluta e é constantemente resposta à perguntas do formato, quantos livros têm na estante?, quantos alunos há na sala? etc; o outro é o 1º, 2º, 3º, ... distinguido como o aspecto ordinal de um número. A cardinalidade sempre explorada pela axiomática, para a descrição axiomática, axiomas de Peano etc, e a ordinalidade explorada pela teoria dos conjuntos. O interessante é que surgiu então mais uma dualidade, originada de uma discussão entre Peano e Russel, sobre esse problema porque, para Peano, a descrição axiomática e o aspecto ordinal foi fundamental e para Russel, o aspecto cardinal e a teoria dos conjuntos foi a mais fundamental.

Tem-se que considerar que a própria teoria dos conceitos tem dualidades, por exemplo, A percepção da importância de recontextualizar a Matemática levou Régine Douady (1991) à criação do conceito de dualidade *ferramenta-objeto*: os conceitos matemáticos são primeiro uma ferramenta para a resolução de situações-problema bem especificadas, contextualizadas. Uma vez atingido esse *status* de ferramenta, são explicados pelo professor aos alunos, e se tornam descontextualizados, adquirem o *status* de saber matemático, podendo ser aplicados em outras situações, o que paradoxalmente lhe dá uma grande aplicabilidade e versatilidade.

Mais uma situação que merece comentários: Conforme já anteriormente e rápidamente citado, na visão de Otte (1993), conceitos fundamentais da Matemática são equações e funções. Considerado historicamente, o conceito de função tem uma dupla raiz, primeiro ele se desenvolve ao lado do conceito de lei, particularmente junto ao conceito de lei natural, ele surge do conceito da operação aritmética, do conceito do algoritmo e das concepções gerais de máquina. Adicionar o número 5 por exemplo, representa uma função do total dos números que associa 2 a 7, 4 a 9, então ao se escrever + 5 como função, pode-se representar assim, $x \rightarrow x + 5$, mas esse é um aspecto da função[10].

O outro aspecto é a lei natural, por exemplo, grandezas como velocidade, força etc, todas são representadas por meio de equações: segundo a Lei de Newton *Força = massa x aceleração*. Na própria *Geometria* pode-se, por exemplo, chamar a área do retângulo de forma análoga como foi representado na Lei de Newton, ou seja: *Area = comprimento x largura*. Otte (1993) comenta ainda que esses dois aspectos pertencem ao conceito de

[10] o número x vai ser transformado pelo número x + 5 com essa função $2 \rightarrow 7$ e dizemos se aplicarmos 2, resulta em 7; $4 \rightarrow 9$, se aplicarmos 4, resulta em 9 etc.

função e demorou quase duzentos anos, do século XVII ao XIX, para os matemáticos entenderem mais ou menos bem essa complementaridade do conceito de função.

É possível identificar inúmeros outros exemplos que têm uma dualidade importante e é fundamental isso ser discutido no processo educacional: a Ciência quer descobrir a verdade, a Ciência não é uma atividade artística que desenvolve ficções ou cria novelas para 'representar a realidade'. Ela quer construir teorias, com a afirmação de que essas teorias são verdadeiras. Mas qual o significado da palavra verdade? A verdade tem dois aspectos totalmente diferentes, O primeiro deles, é descrito pela palavra coerência ou consistência: não pode ser verdade que um livro fique na mesa e no chão simultâneamente, porque é inconsistente. Então esse aspecto de coerência e consistência para a Matemática em particular é fundamental porque na Matemática Pura continua usando-se das provas. Uma prova só funciona quando se faz uso da lei da contradição, da consistência muitas vezes. Em todas as provas que não são construtivas, são afirmações de existência de alguma coisa normalmente para alguém. Pode-se destacar um exemplo, de uma maneira muito simples: tem-se três pares de sapatos e seis gavetas. Então pode-se afirmar, sem precisar fazer nenhuma tentativa para resolver concretamente, que se o objetivo for colocar sapatos na gaveta, sendo que pelo menos uma gaveta teria que ter mais do que um sapato, então esse problema não teria solução. Essa teoria de verdade é baseada na coerência e consistência.

O segundo, é bem diferente: se chama teoria da verdade por meio do conceito de correspondência, ou seja: quando alguém afirma que a neve é realmente branca, estará correto se de fato, ao observar, verificar que a neve esteja ali, com a cor branca. Isso se chama correspondência, porque é uma correspondência entre afirmações e os fatos. Porém, na Matemática, às vezes é difícil dizer quais são fatos matemáticos, tudo na Matemática, num certo sentido é construído, mesmo assim há fatos ou tornam-se fatos. Otte (2003) comenta uma situação-exemplo: se quizer construir um paralelogramo e já se possui determinado, três pontos desse paralelogramo, então é um fato de que o quarto ponto já é implicitamente determinado, não pode mais escolher livremente. Nesse sentido, existem fatos.

Às vezes, é difícil na Matemática realmente distinguir entre coerência e correspondência, esses são os maiores problemas do dia-a-dia da teoria, mas mesmo assim, ambas orientações são importantes, mesmo na Matemática, porque a Matemática também precisa ser adaptada para determinar afirmações verdadeiras. Esses são alguns exemplos dessas dualidades.

Voltando a reforçar a idéia sobre qual a diferença entre uma dualidade e uma complementaridade. Na complementaridade tem-se que ter alguma ligação, uma interação, uma influência mútua um sobre o outro, entre aspectos que se enfrentam. Na dualidade não necessariamente. Otte (2003) indica que não se pode simplesmente integrar esse terceiro aspecto, ou seja, tendo uma dualidade, tem-se já dois aspectos, que podem ser antagônicos, e como numa somatória, agregar mais um componente, no caso a complementaridadem que corre o risco de se tornar contraditório. No exemplo de Douady, com o conceito ferramenta-objeto, não se pode fazer uma teoria de conceito mais ampla integrando esse terceiro aspecto, ou seja, a interação entre o lado instrumental do conceito e o lado objetivo do conceito, também faz um triângulo de conceitos, Otte (2003) comenta que:

> eu acho que não, porque não? Porque a teoria tem limites, ou seja, essa complementaridade não é uma coisa estável, fixa, determinada de uma vez para sempre, mas ao longo do processo do conhecimento e da atividade mental, essas coisas vão interagir, como os seus pés quando vão caminhando, eu também não posso fixar os seus pés, senão não vai caminhar mais. Ou como o entendimento metafórico leva às vezes a essas maneiras: esse é mais importante; às vezes outro é mais importante, sempre dependendo da situação e de desenvolvimento, por isso dependendo do processo real da

> cognição. Essa é uma coisa fundamental epistemológica: a teoria sempre deve ser distinguida pela realidade que ela descreve, por exemplo, o mapa não é a terra, a planta da cidade não é a cidade, o conceito mesa não é a mesa. OTTE (2003: p. 5)

Mas como proceder então no processo educacional? A orientação indicada por Otte (1993) é o perfil do professor como intelectual exemplar, ou seja, considerar que a Didática da Matemática é a Ciência profissional dos professores, assim como a Medicina é a Ciência profissional dos médicos. Mas é óbvio que a Medicina não prescreve como o médico deve agir quando ele faz um diagnóstico ou uma consulta, ou seja, a teoria da Didática da Matemática não pode determinar tudo sobre o que acontece na sala de aula. É importante formar professores que são capazes de tomar decisões próprias que são adaptadas às situações concretas e nos espaços em que eles atuam. Não se pode determinar e controlar tudo teoricamente.

As práticas de ensino de Matemática mais usuais estruturam-se na forma de '**apresentação'** dos conteúdos, seguida de exemplos e resolução de exercícios similares àqueles já apresentados pelo professor. Há alguns anos, a produção acadêmica no campo da Educação Matemática sugere a necessidade de uma ruptura com essas práticas. Muitas propostas baseiam-se ou pelo menos 'pregam' uma organização do processo de ensino-aprendizagem de Matemática na qual valorizam-se os conhecimentos prévios e o papel ativo do aluno e adota-se uma perspectiva de avaliação diagnóstica. A resolução de problemas assume uma função central na atribuição de significados e consideram-se os erros como constituintes do processo de aprendizagem. A seleção e elaboração de problemas e a análise das produções dos alunos, inclusive seus erros, tornam-se elementos fundamentais da prática do professor.

Porém, isso muitas vezes aparece apenas como um 'discurso' e um jogo de palavras sem, de fato, compreender com clareza o 'como' desenvolver esse processo na prática. Tem-se que estar continuamente atento aos problemas inerentes à Didática da Matemática: saber claramente e conscientemente o que significa Didática da Matemática? E ainda, o que significa fazer pesquisa em Didática da Matemática? Descobrir se é a francesa ou americana, canadense, oriental, ocidental etc, não vem ao caso qual, mas é fundamental saber da sua existência e quais são suas premissas.

E uma dessas premissas a ser considerada e que merece ser discutida é a da Didática da Matemática caracterizada como a Ciência profissional do professor. Diante disso, tem-se um fato fundamental a considerar: o sucesso do aprendizado do aluno não decorre em função da ação exercida pelo professor, suas ordens, palavras isoladas, mas pelo que ele é, pelo espírito e credibilidade que ele irradia. Seus alunos só serão motivados e eficazmente orientados quando aquilo que o prefessor ensina é uma motivação para ele próprio, quando ele acredita e está convencido do significado e da importância para sí mesmo do conhecimento que proporciona. Dessa forma, esse professor é um intelectual exemplar para a sociedade, afirma Otte (1993).

São muitos os educadores que defendem que a Didática da Matemática deva ser revista, levando em consideração as transformações por que passa o mundo, o ritmo alucinante da evolução, e isto solicita outra didática, outra mentalidade, outras e inúmeras metodologia...

> o reflexo disso se faz sentir na Matemática (...) a natureza da Matemática está mudando: há muitos indícios disso. Cada dia mais pessoas questionam o modelo matemático infalível, absoluto, longe da intuição empírica e da realidade terrena, que dominou até agora ... Cada vez se percebe melhor a íntima relação entre as matemáticas e a sociedade. Cada vez tem-se mais espaço para um novo paradigma sobre a natureza das matemáticas, um paradigma empírico e construtivista, um paradigma que recorre à intuição sensorial, um paradigma que integre no seu seio as influências sociais e culturais, que recorre à História das Matemáticas e das Ciências como inspiração, não só para anedotas, senão para estabelecer a

> lógica que sustenta a prática educativa de uma forma mais acertada. ZUÑIGA (1991).

Ubiratan D'Ambrósio igualmente comenta e contribui:

> A Matemática modernizou-se, mas seu ensino não acompanhou esta evolução. Por sua vez, a educação matemática – como prática escolar – teve um grande impulso no início do século, mais precisamente em 1908, com Felix Klein e a fundação da Comissão Internacional de Instrução Matemática, dele participando Eugênio Raja Gabaglia, o que influiu na evolução da educação matemática em nosso país. Apesar disso, no Brasil e no resto do mundo, a referida disciplina foi encarada apenas como ensinar bem (isto é, ter boa didática) aquilo que constava dos programas (ou seja, conhecer bem conteúdos) e verificar se o aluno aprendeu bem tais conteúdos (o que significa aplicar exames rigorosos). Lamentavelmente, essa percepção ainda encontra adeptos no Brasil e no resto do mundo (D'AMBROSIO, 1999).

É no ambiente escolar que ocorre a maior parte das relações individuais com o conhecimento formal, com seu valor e com a sua essência; é implementado um certo hábito que pode ser levado tão longe, que ele parece não mais depender dos conteúdos, dos 'o quês', como caracteriza Skemp (1989) o pensamento ou compreensão instrumental, mas depender apenas do estilo, do 'como', atualmente, mais denominado de 'estratégia pedagógica'. Isso, apesar de estar muito presente, não deve ser apressadamente rejeitado, pois um conhecimento para ter efeito educacional precisa ser sobretudo significativo, e isso implica que não se trata apenas do conhecimento em si, mas também da meneira de relacionar-se com o conhecimento e conseguir responder e compreender 'os porquês'. Estabelecer dessa forma, a complementaridade entre 'os quês' e os 'porquês' é que se pode caracterizar como pensamento relacional. Partindo do princípio de Skemp (1989).

Antigamente, a Matemática é caracterizada como a ciência do número e da forma. Depois, é encarada como a ciência das estruturas.

Atualmente, é vista por muitos como a ciência dos padrões e das regularidades. A sua evolução é permanente.

Ainda na linha da evolução histórica, para os egípcios e os babilónicos, a Matemática teve uma característica sobretudo utilitária, tal como atualmente ainda acontece para muitos grupos sociais como os artesãos, os pescadores e os vendedores ambulantes. Para os gregos, ela assumiu o papel de um jogo intelectual, conduzindo-se como o grande paradigma de uma argumentação bem conduzida. Após a Idade Média, e iniciada com o Renascimento, para os matemáticos europeus dos séculos XVIII e XIX, ela constitui uma linguagem indispensável para descrever os fenómenos naturais e o próprio mundo físico Bem mais recentemente, com o desenvolvimento das geometrias abstratas e os números transfinitos, começa-se a compreender que a Matemática lida com conceitos criados pelo próprio homem.

A Matemática sempre esteve e está ligada aos grandes problemas da Ciência e da técnica de cada época, e que como uma espiral, que estimula o desenvolvimento de novos conceitos e novas teorias. Isso verificou-se mesmo durante o período de mais intenso predomínio da escola formalista. Na verdade, o próprio David Hilbert, a grande figura dessa escola, dedicou-se a diversos ramos da Matemática com aplicação a problemas físicos, como a teoria dos operadores e a teoria das equações, às derivadas parciais.

Por causa das preocupações da sociedade com os papéis práticos e sociais da Matemática, as escolas raramente dão ênfase aos seus aspectos históricos e culturais. Como todas as disciplinas, a Matemática é desumanizada quando é divorciada das suas contribuições culturais e da sua história. Na medida em que esses aspectos não são discutidos, os alunos tendem a ficar com a impressão que a Matemática é estática e ultrapassada ou mesmo uma 'ciência morta'.

Embora seja comum as crianças em idade escolar estarem familiarizadas com conceitos modernos nas ciências tais como o DNA e a energia atómica, raramente elas chegam a contactar com aspectos da Matemática (tais como estatística, fractais ou topologia) descobertos há menos de um século. As crianças dificilmente aprendem ou entendem que a Matemática é uma disciplina dinâmica e em crescimento e apenas raramente vêem a beleza e o fascínio da Matemática.

O conhecimento matemático tem, assim, um carácter histórico e contingente, como qualquer outro domínio do conhecimento humano. O seu corpo de práticas e de realizações conceituais está sempre ligado a contextos sociais e históricos concretos, sublinhando a importância da sua dimensão cultural. A Matemática quando só é '**apresentada'** como uma teoria axiomática e dedutiva, sem história e sem qualquer relação com a realidade, não é mais do que uma opção cultural, entre outras formas tanto ou mais legítimas de encarar essa Ciência. Novamente percebe-se a importância de estabelecer a complementaridade entre a descoberta das relações existentes com novas relações a serem desencadeadas, ciente e consciente do saber e dos instrumentos já desenvolvidos.

Levando em conta a amplitude do conhecimento no qual se tem à disposição, principalmente considerando o barateamento do acesso às informações e ao conhecimento em geral, manusea-se esse conhecimento como um repertório de técnicas práticas ou mesmo metáforas mágicas, da mesma forma que a sociedade de consumo manuseia suas demais mercadorias como mercadorias mesmo. O conhecimento atual, é adquirido para ser vendido ou tornar-se vendável. E para o seu aproveitamento, como comenta Otte (1993), ele é consumido ou torna-se consumível numa nova produção: em ambos os casos para ser trocado. O ensino da Matemática pode valorizar uma abordagem mais ou menos formalista, mais ou menos geométrica, mais ou menos rica em aplicações e em referências históricas e mais ou menos próxima das práticas matemáticas informais em curso na sociedade. Por isso, no que que diz respeito às dimensões culturais, um currículo para a Educação Matemática envolve sempre diversas grandes opções no modo como valoriza (ou não) a perspectiva histórica, as aplicações dessa ciência e a formação da consciência, levando os alunos a compreender o seu papel na sociedade, e como relaciona (ou não) a abordagem própria de cada país (e de cada comunidade) com a Matemática universalizada em permanente desenvolvimento pela comunidade de investigação. A filosofia pós-moderna equivocou-se quando pensou que poderia ter a ciência como uma forma de se atingir a consciência geral e que poderia, *a priori* tomar consciência de seu desenvolvimento histórico e colocar esse desenvolvimento em conceitos e daí expressar sua total liberdade, ou modelar sua história, como um processo organizatório. Mas o domínio da realidade como um sonho impossível conduz, sob certas circunstâncias, à fetichização da realidade como algo inalcançável e mágico. Isso pode conduzir a intelectualidade a uma outra dualidade: a uma visão de Ciência como esclarecimento versus a Ciência como mito. Otte (1993) indica ainda que, a questão da consciência consiste em que ela significa, por um lado, uma conscientização diante da própria atividade, mas por outro lado, sempre se encontrará um fosso intransponível entre a atividade e a concepção que se tem dessa atividade.

Ele cita ainda a seguir, contrapondo os papeis sociais da escola e do professor como intelectual exemplar:

> essas questões são inseparáveis da questão da consciência e que, por conta do caráter básico do problema, as questões de ensino e de educação escolar, elas só podem ser tratadas históricamente e nunca ‘resolvidas’ de forma definitiva. Nesse sentido, a categoria de ‘intelectual exemplar’ e a questão da posse dessa função social pelo professor, assumem uma posição central dentro da didática. O enfoque histórico evita assim que determinadas oposições, como entre orientação científica e orientação pragmática da aula de matemática, sejam apresentadas simplesmente de uma forma dicotômica, porque uma das partes a trata economicamente e a outra, pedagógica-psicologicamente. OTTE (1993; p. 137)

O conhecimento matemático forma-se socialmente, por meio de relações de interação e comunicação entre as pessoas e é exteriorizado publicamente (pelo menos em grande parte). É indiscutível o papel da Matemática como uma linguagem essencial do desenvolvimento científico e tecnológico mas, atualmente, surge em todas as esferas de atividade da sociedade, constituindo o que alguns autores chamam uma 'cultura invisível'.

Oliveira (2002), indica que a Matemática tem um forte potencial que viabiliza mais argumentos para comunicar, interpretar, prever e conjecturar e cabe ao professor procurar meios de desenvolver isso com seus alunos. A Matemática tem também o poder de incorporar uma simples informação objetiva e transformá-la em conhecimento fundamentado. A sociologia do conhecimento estabelece que as representações matemáticas, como de resto todas as representações científicas, são construções sociais. A perspectiva da construção social sedimenta o conhecimento, a cognição e as representações nos campos sociais da sua produção, distribuição e utilização. O conhecimento científico é inerente ao contexto social devido ao fato que a Ciência está socialmente orientada e os objetivos da ciência estão sustentados socialmente (...).

Rico (1996) comenta que o conhecimento matemático, como todas as formas de conhecimento, representa as experiências materiais das pessoas que interagem em contextos particulares, em certas culturas e períodos históricos. Tendo em conta essa dimensão social, o sistema educativo — e em particular o sistema escolar — estabelece uma variedade de interações com a comunidade matemática, já que se ocupa que as novas gerações sejam introduzidas aos recursos matemáticos utilizados socialmente e na rede de significados (ou visão do mundo) em que se encontram situados; isto é, organiza um modo de prática matemática.

Há de ressaltar ainda que juntamente com as finalidades de natureza social atribuídas ao ensino da Matemática, é fundamental não esquecer que também incluem a qualificação profissional de mão de obra indispensável para atender às necessidades do mercado de trabalho, bem como às necessidades de funcionamento da sociedade atual.

Outra finalidade importante de natureza social a ser desencadeada pelo professor é proporcionar ao cidadão comum as ferramentas matemáticas básicas para o seu desempenho social, oportunizando que o aluno possa ter acesso a três estilos de domínios de qualificação importantes para a nossa sociedade como destaca Oliveira (2002): qualificação vocacional, que tem a finalidade de ajudar os alunos a preparar-se para uma variedade de carreiras profissionais e científicas. É ela que proporciona a formação de especialistas competentes que usam ferramentas matemáticas, muitas vezes sofisticadas, produzindo conhecimento organizado, e que têm muitas vezes práticas profissionais distintas dos matemáticos. A qualificação prática visa ajudar os alunos a tornarem-se pessoas competentes na resolução de muitos problemas do dia-a-dia. Envolve não só um bom domínio da Aritmética básica e da Geometria, bem como a capacidade de analisar dados e situações complexas e de lidar com problemas da vida real.

Finalmente, tem-se a qualificação cívica que possibilita ou tem a pretensão de tornar os alunos cidadãos capazes de participar com sentido crítico numa sociedade cada vez mais matematizada. Ela inclui o conhecimento matemático necessário para que cada indivíduo possa desenvolver-se na sociedade, para comunicar e receber informação em geral, interpretar essa informação e tomar decisões corretas com base na sua interpretação. Em muitas ocasiões, as finalidades sociais da Educação Matemática são condicionadas pelos aspectos de ordem vocacional, relegando para segundo plano os aspectos prático e cívico. A vertente mais utilitária do conhecimento matemático tende a ser sobrevalorizada por muitos grupos profissionais, que por vezes constituem *lobbies* poderosos. No entanto, muito embora a visão utilitária deva estar contemplada entre as finalidades sociais do ensino da Matemática, ela está longe de ser a única importante, ressalta Oliveira (2002)..

É papel do sistema educacional procurar contemplar a satisfação adequada das necessidades individuais dos educandos, incluindo a busca para o desenvolvimento integral dos indivíduos. Todo setor educacional utiliza-se de um jargão semelhante a esse:

> Por meio da educação, pretende-se que todos os jovens desenvolvam uma adequada compreensão da Matemática e do modo como ela pode ser usada nos mais diversos contextos. Isto implica a aquisição tanto de conhecimentos e destrezas como — o que é extremamente importante — o desenvolvimento de diversas capacidades, atitudes e valores....MEC, (1988).

O ensino da Matemática em seu início tinha uma função meramente instrutiva, em que se privilegiava a memorização de fatos e a exercitação de procedimentos e técnicas de cálculo. Viria depois, em determinados países e em algumas instituições com intenções mais sérias, a assumir uma função formativa mais ampla, considerando o conhecimento matemático estreitamente ligado ao mundo da cultura e aos interesses, preferências e inclinações dos indivíduos. Desse modo, passou a existir uma forte preocupação em fomentar a criatividade, a intuição e o pensamento divergente dos alunos e em promover valores e atitudes positivas em relação à Matemática.

Os valores formativos dessa disciplina envolvem aspectos cognitivos, metacognitivos e afetivos. Incluem as capacidades de raciocinar matematicamente, relacionar conceitos, usar definições, fazer demonstrações e resolver problemas, mas também construir e aperfeiçoar modelos matemáticos e discutir a aplicação dessa Ciência a situações de outras Ciências ou da vida quotidiana. Incluem, igualmente, a capacidade de comunicar e interpretar idéias matemáticas, expressas oralmente e por escrito. Incluem ainda o desenvolvimento no aluno do seu próprio autocontrole e autoconceito, como pessoa capaz de usar com desenvoltura e desembaraço as ferramentas e idéias matemáticas, estabelecendo uma relação positiva com essa disciplina.

Considerando a Matemática como elemento dinâmico da cultura da nossa sociedade, deixa-se de a conceber como objeto já construído que é preciso apreender e passa-se a considerá-la como uma forma de pensamento aberto, cujo domínio deve ser desenvolvido em todos os alunos, respeitando a sua autonomia e o seu ritmo próprio de aprendizagem. Encontra-se no NCTM (1991) num documento intitulado '*Normas para o currículo e avaliação da matemática escolar'* a seguinte conceituação sobre a função da Matemática:

> O poder matemático... refere-se às capacidades de um indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como à sua aptidão para usar uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros. Esta noção é baseada no reconhecimento que a Matemática é muito mais do que uma coleção de conceitos e capacidades a adquirir; ela inclui métodos de investigação e de raciocínio, meios de comunicação e noções de contexto. Além disso, para cada indivíduo, o poder matemático inclui o desenvolvimento da autoconfiança pessoal. NCTM (1991).

Em função dessa finalidade e poder, a Matemática tem, na sociedade atual, um papel bem visível de instrumento de seleção em inúmeros aspectos, tanto externo a ela, como interno. Além disso, tem outros papéis, talvez menos visíveis, de transmissão indireta de determinados valores e atitudes. O ensino da Matemática, conforme o modo como for conduzido, pode contribuir para a democratização e a promoção de valores sociais de cultura, tolerância e solidariedade ou servir para reforçar mecanismos de competitividade, de seleção social ou consolidação de *status* de um governo.

O desempenho em Matemática tem constituído um critério decisivo para selecionar os alunos nas escolas e os profissionais na vida cotidiana, especialmente no que se refere ao acesso às profissões de natureza técnica e científica. Aqueles que não têm bons resultados nessa disciplina desencorajam-se de optar por uma carreira de Engenharia ou um curso ligado as Ciências principalmente as exatas. Ainda que de forma implícita, a

Matemática ‘direciona’ muitos alunos na definição de suas carreiras profissionais. Mas esse ensino pode ser orientado para promover a difusão de valores democráticos e de integração social, como a capacidade de cooperação, criticismo e comunicatividade. Ainda que atualmente, a nossa sociedade trate isso como uma utopia, essas questões devem ser consideradas na elaboração do currículo de uma escola. Uma escola orientada para a consecução de valores democráticos ao lado dos valores formativos de cunho individual deve dar ênfase ao conhecimento crítico de todo o sistema matemático e das suas relações com a cultura e a sociedade. Essa orientação crítica deve fazer parte das finalidades gerais do currículo da Matemática escolar, pois a promoção de valores éticos e democráticos constitui um aspecto essencial da sua dimensão política.

A rotina de ensino numa escola deve ser desenvolvida, tendo como base a realização de atividades permeadas de ações e atitudes que envolvam tanto conjuntamente como isoladamente pesquisas, debates, argumentações e refutações, comunicações e debates, situações de aplicações etc, todas elas bem definidas, em que os alunos possam usar os conhecimentos já aprendidos para evoluir em novas situações.

Esses estilos de atividades são fundamentalmente necessários e devem ser propostos freqüentemente — tanto para um melhor esclarecimento de determinados conceitos, como para que os alunos ganhem sensibilidade para esses modelos de estruturas e técnicas matemáticas que se utilizam numa variedade de situações. Por exemplo, o estudo global de uma situação, percorrendo todo o ciclo do processo de modelação ou modelagem matemática, é fundamental para que os alunos se apercebam da interligação entre os vários domínios da Matemática e do poder e limitações de cada um deles, seja ao utilizar-se de abordagens geométricas, algébricas, algorítmicas, numéricas, lógicas etc. Essa concepção de modelagem como uma estratégia de ação ou de ensino, tem como função a de estabelecer um forte elo de ligação ou complementaridade entre a teoria ou fundamentos teóricos —

pensamento relacional — em relação aos procedimentos, regras, técnicas e algorítmos —pensamento instrumental.

Otte (1993) destaca o trabalho do filósofo soviético E. Judin que representou essa relação por meio do seguinte diagrama da atividade cognitiva humana, na figura 8 a seguir:

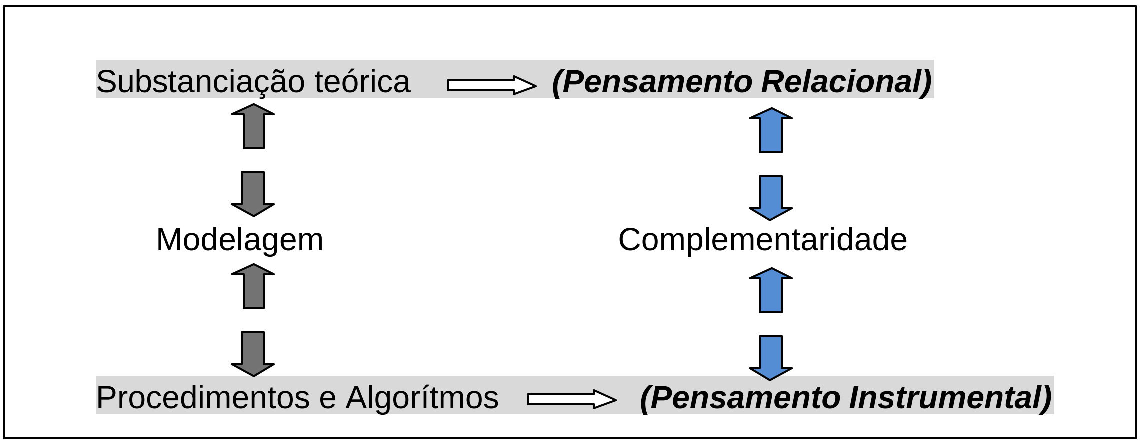


FIGURA 8: DIAGRAMA DA ATIVIDADE COGNITIVA HUMANA

O próprio Judin inferiu três conclusões para o diagrama:

> primeiro, a ênfase está no conteúdo objetivo da atividade científica, e não em suas características externas que são conectadas com o processo de realização da atividade, como por exemplo *insight*, textos, checagem, etc; Segundo, este diagrama de atividade, sem dúvida, requer um sujeito humano como seu portador […]; Terceiro, o diagrama permite o estabelecimento de certa tipologia de atos da atividade criativa. Apud OTTE (1993; p. 291-292)

Otte (1993) comenta ainda que o ponto vital do diagrama anterior não é a hierarquia, mas a correlações indicadas pelas setas. Isso está subentendido na segunda conclusão indicada por Judin, ao também complementar o comentário: ‘Se introduzirmos a conexão entre modelos e fundamentações teóricas, mostraremos como a teoria funciona para o sujeito agente'. JUDIN, (1978) apud OTTE (1993; p. 292).

Otte (1993) continua indicando que a visão cognitiva geralmente cede ao princípio de que qualquer forma de atividade cognitiva requer um modelo ou uma representação do 'território' na qual ela opera. Esses modelos são funcionais para uma complementaridade essencial da cognição humana. Essa complementaridade tem muitas expressões e modelos que realizam funções mediadoras com relação a um grande número dessas expressões. Elas auxiliam na mediação entre o universal e o particular, ou entre a descrição e a construção da realidade objetiva. Os modelos devem, primeiramente, ser considerados numa perspectiva funcional, se se estiver interessado na prática do conhecimento.

Para concretizar as considerações empiricamente, deve-se estudar o conhecimento e o comportamento cognitivo de especialistas. Uma descoberta particular das pesquisas relacionadas à questão do papel que o modelo desempenha é o que Kline tem chamado de "o estabelecimento de *'equações-design'* " como uma ligação entre a teoria da engenharia e o fazer prático (cf. KLINE, apud OTTE (1993; p. 292). Nesse sentido, uma 'experiência mental' é uma outra forma de modelo. Com o uso desse modelo de atividade desenvolve-se e aprimora-se a sensibilidade para os aspectos mais globais do processo de modelagem, ficando cada vez mais claro e evidente o estabelecimento da concepção geral, da avaliação, da análise crítica e possível validade/viabilidade dos modelos utilizados ou em disponibilidade.

Outra consideração importante: quase sempre ser competente em Matemática, quer seja quanto ao cálculo, ou quanto a resolução de problemas, não implica necessariamente ser competente na sua utilização em situações concretas, pois as primeiras referem-se mais propriamente, ou com maior ênfase, ao pensamento instrumental, ou seja, uso de ferramentas, técnicas, métodos, situações assemelhadas etc. Já o caso do uso em situações concretas revela-se mais intimamente ligado com o desenvolvimento do pensamento relacional, pois torna-se necessária a análise da situação, muito frequentemente da intuição, do estabelecimento de relações etc. Trata-se de competências diferentes, que têm de ser igualmente levadas em consideração e procurar desenvolver de forma integrada ou complementarmente o currículo dessa disciplina.

O currículo de Matemática não deve se restringir ao nível programático dos objetivos, metodologias, conteúdos e recomendações para avaliação. Ele inclui igualmente o planejamento quanto ao uso dos materiais educativos. No Brasil, sobressai quase que unicamente, o livro didático, porém, esse 'quase único' instrumento pedagógico deveria servir de apoio para o ensino e nunca ser uma exclusiva fonte de consulta e aplicação, como é comum se detectar. Qualquer manual ou livro-didático constitui sempre uma interpretação do currículo oficial. Outro nível de interpretação do currículo é dado pelas tarefas e materiais elaborados pelos professores.

Desse modo, a elaboração de um currículo envolve tanto a seleção de temas, elaboração de atividades que tenham como preceito a construção de experiências de aprendizagem para os alunos. Tem-se ainda inúmeras situações em que a perspectiva tradicional de currículo está estreitamente associada às idéias de 'documento oficial', porém, a perspectiva moderna dá cada vez mais importância ao professor como um ator, um mediador, um dinamizador essencial, na interpretação, elaboração e reformulação do currículo, adaptando-o às situações concretas.

O maior desafio do futuro próximo será, muito possivelmente, o de encontrar formas eficazes de articular a criatividade dos professores na construção de situações e materiais adequados aos seus alunos. Formas com os imperativos sociais de uma formação de base sólida para todos os que frequentam o ensino de maneira geral.

Sintetizando, pretendeu-se analisar neste Capítulo, algumas características e discussões relativas a certas dualidades inerentes ao pensamento matemático, em termos teóricos e experimentais, podendo servir de referencial básico aos professores, no que se refere a estilos de atitudes e posturas frente aos processos de ensino, ao desenvolvimento de idéias matemáticas e ao delineamento de contextos de aprendizagem.

Um dos vários problemas-exemplo de ensino-aprendizagem enfrentado pelos professores!

dificuldade	**importância**	**dilema**
Não saber perceber e representar o tridimensional dificulta tanto a percepção como o estabelecimento de relações nas mais diferentes áreas do conhecimento	Influencia na Matemática, pois o 'casamento' entre o aritmético/algébrico com o geométrico é muito importante para desenvolver o poder de compreensão e, dessa maneira, poder facilitar o processo de abstração e generalização.	Como ensinar algo a alguém quando o próprio professor (que tem que ensinar) não tem consolidado esse conhecimento?

Assim,

Essa forma de percepção que conduz ao pensamento relacional é a idéia que liga a teoria de Kant (1997), Aristóteles e Cassirer (1977) → ao sistema desenvolvido por Skemp (1980) que assinala duas categorias de imaginação mental:

→ Visual → são constituídos por diferentes classes de diagramas ou esquemas

→ Verbal → são representação da palavra oral e escrita

Porém, é no verbal que a Matemática mais se utiliza e tem similaridade, ainda que encontre na categoria visual o ambiente mais rico para estabecimento de relações. A combinação entre as duas consolida estruturas fantásticas, como é o exemplo da Geometria Analítica criada por Descartes. Isso aponta para a importância da complementaridade entre os sistemas simbólicos pois, o aspecto algébrico da Matemática do Ensino Fundamental e Média nos indica que ainda permanece a classificação verbal-algébrica indicada por Skemp porém, a experiência e a história têm mostrado a importância da visualização como uma 'ferramenta' fundamental para a compreensão de muitos argumentos e fórmulas algébricas. Nesse sentido essa combinação é fundamental, pois permite que a linguagem visual possa ser utilizada como recurso didático de apoio tanto na linguagem aritmética como algébrica.

Ainda, na visão do ensino, outras dualidades que contribuíram para desenvolver o processo educacional e a relação entre o saber e o compreender foram destacadas, tendo como referência Dieoudonné, Hadamard, Frege, Poincaré. E, novamente Otte, que forneceu elementos para esclarecer a relação da teoria da complementaridade com os pensamentos instrumentais e relacionais. Isso auxiliou a compreensão da natureza da Matemática e indicou bases sólidas para identificar, estruturar, adequar modelos de atividades pedagógicas ou não, percebendo nelas essas formas de pensamento, suas inter-relações, dualidades e complementaridades.

Alguns pontos referentes a essas dualidades serviram para reafirmar e consolidar suas existências, ainda que indicadas historicamente, a maioria delas ainda estão presentes e perpetuadas, porém, não devidamente exploradas e discutidas no contexto educacional, ficando assim 'camufladas'. Dessa maneira a possibilidade de complementaridade entre as visões tornam-se menos evidentes e plausíveis. É fundamental que o educador retome e proponha essas questões, um professor repense suas formas de pensamento e busque a complementaridade como processo de ensino.

Foi considerado importante a reflexão feita sobre trabalhos de Poincaré, pois foi um dos que mais se preocupou com as formas do pensar matemático. O encadeamento de relatos, situações, posturas e atitudes foram colocadas para melhor entender esse contexto educacional, que sempre teve como premissa também o referencial e o encadeamento histórico.

A questão toda foi conduzida não para refletir se o ponto de chegada da discussão educacional seria o de se considerar ou não a escolha entre intuição ou o formalismo, mas sim se o ponto de chegada é relativo ao pensamento relacional ou não. Como já foi colocado anteriormente, pensamento relacional se refere às **relações entre os objetos**, já o pensamento instrumental ao **o que posso fazer**, ou como aplicar. Resolver um problema tem um sentido instrumental porque há uma preocupação com a aplicação de conhecimentos, de métodos etc. Reconhecer e estruturar e problematizar um contexto é o que na realidade colocamos como pensamento relacional. Dessa forma como já foi indicado, seria fundamental e bem mais vantajoso pensar no ensino de Matemática proposto por meio de atividades pedagógicas, que essas fossem contempladas por ações relacionais de resgates históricos, contextuais e situacionais. Que pudesse, da mesma maneira, conceber os objetos dessa atividade como representação das idéias matemáticas, como um conjunto de teorias e de proposições encadeadas umas nas outras, inicialmente por meio de processos intuitivos, como ponto de partida e de reflexão inicial e posteriormente, por processos dedutívos e provas formais.

É evidente que isso torna o processo muito mais complexo de ser realizado, pois nosso próprio processo de formação, enquanto educadores, não foi assim desenvolvido, então temos que romper questões e concepções internas já formalizadas, por isso é mais difícil. Porém é crença particular de que, se nossa atuação for desenvolvida dessa forma, acredita-se que se consegue estabelecer uma forte relação entre idéias matemáticas, suas representações e seus campos de aplicações, encadeamento vital para o desenvolvimento do pensamento matemático.

O problema não resolvido das forças de poder decorrente da dualidade entre Matemática Pura e Aplicada e normalmente, acrescida da 'Educação Matemática' que se excluiu do ramo da Matemática Aplicada, consolidando então uma tríade, conturba o processo. É ainda, sempre inculcada entre os estudantes a idéia de que eles têm de se ater precisamente às definições dos conceitos matemáticos, e que não devem misturar ou confundir concepções intuitivas com os próprios significados dos conceitos. Por outro lado, a objetivação do conhecimento matemático, o seu *status* como conhecimento objetivo e verdadeiro, só é assegurado quando baseado no universo de 'todos' os meios pensáveis e todas as possíveis representações. O conceito não é idêntico à sua definição. O conceito representa uma complementaridade entre objeto e meio, ou entre conhecimento e método. Éssa é, com certeza, uma posição defendida pelo terceiro componente da 'tríalidade', ou seja, a Educação Matemática. Dessa forma, quais fundamentos teóricos ou que teoria caberia melhor para o desenvolvimento de um trabalho relacional? Tem-se atualmente como convicção, que a orientação fundamental que mais se adapta é a da complementaridade, exatamente por causa dos limites de teorias.

A melhor maneira para conduzir o processo educacional é ter como premissa que venha a ser considerada e que mereça ser discutida é a do uso da Didática da Matemática caracterizada como a Ciência profissional do professor. Como já foi colocado anteriormente, o sucesso do aprendizado tem maior relação com a atitude positiva do professor do que de 'receitas prontas' presente em materiais didáticos sendo 'apresentadas simplesmente por alguém.

Dessa forma, para auxiliar tanto a diferenciação como a obtenção da complementaridade entre o pensamento instrumental e o pensamento relacional, procurou-se, no próximo capítulo, criar, detectar, resgatar situações contextualizadas que evidenciem o uso desses pensamentos, utilizando para isso a organização em forma de temas como as exemplificadas, passíveis de serem analisadas e propostas como atividades de ensino, no meio educacional.

CAPÍTULO 3

Neste capítulo apresentamos sugestões que auxiliem a identificação de diferentes formas de ‘olhares’ e abordagens de situações-problema extraídas tanto de contextos históricos, atualidades do cotidiano, além de situações que foram transformadas em atividades didático-pedagógico. O objetivo é discutir e subsidiar novos aspectos de pesquisa, além de fomentar questões de cunho educacional e processos de ensino-aprendizagem uni e multidisciplinares.

Os professores são considerados, quase unanimemente, como elementos-chave do processo de ensino-aprendizagem como indica Ponte (1995). Em suas atividades de ensino, há em geral três níveis de preocupações distintas:

- com o *conteúdo;*
- com os *alunos* a que se destinam e,
- com a *forma como eles aprendem* Matemática (NCTM, 1994, 29).

Nessa perspectiva, também de maneira geral, a definição da densidade e da quantidade do conteúdo a ser ministrado, faz parte de uma discussão inerente a uma política educacional. A identificação dos alunos como a quem se destina esses conteúdos, depende diretamente do contexto a ser vivenciado. Nesse universo, quer seja pela importância ou pelas preocupações e, levando em conta as dimensões que essas indagações assumem, trataremos neste trabalho apenas das questões relativas ao aprendizado, que não são poucas. Surgem e perduram, portanto, indagações sobre quais as crenças que os professores possuem acêrca do conhecimento matemático; como foi que ele (professor) aprendeu e daí, como ele de fato ensina?

Essas são algumas questões que surgiram a partir do momento em que a Psicologia começou a se envolver de uma maneira mais significativa em conjunto com a Educação Matemática. Fazemos novamente menção ao trabalho de Skemp (1989), ao fazer a distinção entre 'compreensão instrumental' e 'compreensão relacional' em termos de Matemática, tendo em consideração o formato de conhecimento que cada uma reflete.

Revendo algumas premissas, o 'conhecimento instrumental da Matemática' referendado por Skemp (1989), é constituído por um conjunto de indicações determinadas e bem definidas, idéias, regras, generalizações sacramentadas, fórmulas já consagradas que, se realizadas envolvendo uma seqüência de passos previamente indicados, possibilitam a realização das tarefas matemáticas propostas.

Já o 'conhecimento relacional da Matemática' caracteriza-se pela posse de um conjunto de estruturas conceituais que, ao serem adaptadas, adequadas, redimensionadas a um determinado contexto, propiciam aos seus detentores a elaboração de vários planos, com vista à realização das tarefas matemáticas. Nessa perspectiva, o aluno adquire conhecimentos que lhe possibilitarão adequar e resolver uma grande variedade de tarefas.

Descobre como sistematizar essas relações que envolvem o ‘Instrumental’ e o ‘Relacional’ nas diversas concepções, procurando esclarecer quais seus vínculos e/ou diferenças, identificar e propor situações, bem como avaliar resultados em que contextos matemáticos ou não, sejam trabalhados nessas perspectivas: (*o Relacional levando a redescobrir/produzir novos instrumentos que possibilite a descobrir novas relações, gerando outros instrumentos...).*

Revendo ainda Oliveira (2002), sobre o potencial que a Matemática tem na formação de habilidades comunicativas e reflexivas, a Matemática tem também o poder de incorporar uma simples informação objetiva e transformá-la em conhecimento fundamentado. A sociologia do conhecimento estabelece que as representações matemáticas, como de resto todas as representações científicas, são construções sociais.

Desse modo, deve-se pensar na possibilidade de elaboração de um currículo que envolva tanto a seleção de temas, elaboração de atividades que tenham como preceito a construção de experiências de aprendizagem para os alunos, porém, numa mesma perspectiva moderna.

Temos que considerar ainda a velocidade das mudanças que ocorrem em inúmeros aspectos, sejam sociais, culturais, tecnológicos, etc e como estão se desencadeando. É necessário então, que se dê cada vez mais importância ao professor como um ator, um mediador, um dinamizador essencial, na interpretação, elaboração e reformulação do currículo e este adaptando-o às situações concretas. Assim, que o maior desafio do futuro próximo deva ser o de encontrar formas eficazes de articular a criatividade dos professores na construção de situações e materiais adequados aos seus alunos, levando em conta os imperativos sociais, de uma formação de base sólida para todos os que frequentam o ensino de maneira em geral.

Assim o que se pretende, após o acesso à base teórica até então apresentada e ainda em análise, é retomar a linha de investigação para refletir sobre a indagação que motivou essa pesquisa:

Como o uso dos pensamentos instrumental e relacional pode ser melhor compreendido, se for evidenciada a interdependência, a dualidade e a complementaridade entre essas diferentes formas de pensamento e como essa complementaridade poderia ser útil ao processo educacional?

Alguns exemplos que a seguir serão disponibilizado para que proporcione aos educadores e interessados, pontos de relações com a base teórica até então discutida.

3.1. Exemplos de situações do cotidiano que envolvam o uso do Pensamento Relacional

Nesse primeiro momento, o propósito é relatar situações que envolvam questões ligadas ao cotidiano, bem como algumas descobertas realizadas pelo homem, ou então outras formas inusitadas de abordar ou ‘perceber’ um contexto etc. Normalmente nessas situações, se observam relações e associações convencionais e não-convencionais, nem sempre oriundas de exemplos pré-estabelecidos, mas que são resolvidas e destacadas necessariamente por essa diferença, fato que a torna referencial.

Com isso, nem sempre essas situações se apresentam num formato mais didático, pois originalmente não surgiram e nem foram estruturadas para serem utilizadas diretamente no meio educacional. Para que isso ocorra, elas deverão ser adaptadas para essa finalidade. Dessa forma, no seu contexto original, essas situações apresentam variáveis que são, normalmente mais complexas, de difícil análise e compreensão, geralmente polêmicas, além de outros fatores complicadores. Por isso mesmo que as tentativas de modelagens quando aplicadas a um determinado contexto, não são facilmente desenvolvidas mesmo que sejam por equipes de especialistas, quanto mais se essas tentativas forem transpostas para as atividades educacionais. Porém, não deixa de ser um grande desafio!

O propósito dessa exposição de casos não é simplesmente para cada situação relatar o fato isoladamente, destacando apenas sua parte relacional e/ou instrumental, mas discutí-lo num determinado contexto, com riqueza de dados, informações, detalhes, aspectos. Isso, para que, de alguma forma possa subsidiar e proporcionar para os leitores e educadores, elementos para uma análise e servir de referencial, exemplo ou analogias nas mais diversas atividades, como educação, cursos, capacitações etc.

3.1.1. Economia: um campo farto para o uso do pensamento relacional

Aspectos históricos e contextuais da Economia:

Economia, comércio, sistema de trocas, atividade tão própria do ser humano e também tão antiga quanto se tem registro por meio da escrita. Esse comportamento no homem, trocar, negociar, vender, comprar, sempre cativou muito, tanto que povos, nações ou civilizações inteiras se especializaram nessa arte, criando assim estratégias, técnicas, estilos, da mesma forma que criava-se personalidades muitas vezes antagônicas tais como, honesto, esperto, astuto, ardiloso — desonesto, burro, trouxa, lerdo etc... que denotava claramente o perfil do negociante, bem como, muitas vezes, do freguês.

Essa profissão, tida como meio de vida de um indivíduo ou até pelo fato de conseguir denotar características marcantes de um povo, foi se aperfeiçoando com o passar do tempo. A partir do Renascimento, com a evolução dos processos algébricos e de cálculo, tornou-se um campo fértil para o desenvolvimento de pesquisas e criações de teorias específicas que tentasse entender, prever, controlar esse comportamento social. Da arte de negociar nasceu então a Economia, principalmente como ciência de uma observação muito aguda da psicologia humana e dos atos produzidos por ela. Foi o escocês Adam Smith, considerado o pai da economia moderna, autor da tese de que um impulso psicológico individual poderia ter efeito sobre a prosperidade ou a ruína de um país. Ele relata em sua obra "Uma Investigação sobre a Natureza e as Causas da Riqueza das Nações", publicada em 1776, que as pessoas são individualistas e tendem a buscar sempre o que é melhor para elas. Com essa atitude, 'lubrificam' a economia e fazem um bem a toda a comunidade. O livro destaca ainda uma explicação clássica, por meio de um dito, que tornou-se popular: "O padeiro não acorda de madrugada para colocar a massa no forno por amor ao estômago de seus clientes — mas sim pelo dinheiro que receberá deles" Smith (2003).

Smith (2003) conjecturava simetricamente com inúmeros outros pensadores tanto da época quando da atualidade quando na medida em que a psicologia só lhe interessa quando produzia uma ação. Outra tirada clássica dele: "tanto faz se um miserável sonha em ser rei e em andar de carruagem puxada por seis cavalos. O que interessa para a economia é onde ele vai gastar suas poucas moedinhas". Smith (2003) sempre foi, e é considerado por muitos, como uma pessoa de muitos recursos. Ao realizar a leitura de suas obras, tem-se ainda a nítida impressão de que ele ainda está bem à frente da pesquisa que é realizada atualmente. Depois de séculos de pureza econométrica, a visão humana de Smith sobre os fenômenos da vida volta a ocupar lugar central na Ciência Econômica. Ele comenta que existe uma percepção psicológica na base da economia clássica que é muito mais perspicaz do que a encontrada em outras Ciência Sociais, como a sociologia e a antropologia. Com o passar do tempo, a economia ampliou sua abrangência, com novas ferramentas matemáticas e novas teorias e tecnologias, procurando relacionar-se com as mais diferentes situações do cotidiano, científico, social e cultural.

Conjecturas relacionais no comportamento social que envolve também o aspecto econômico

O zoólogo e jornalista inglês Ridley (2005 apud Teixeira e Marthe, 2005, p. 78) comenta sobre a existência de uma proximidade entre da Biologia darwinista e a Economia liberal, ou seja, entre eles existe uma conexão relacional. De fato, a versatilidade do pensamento econômico tem raízes profundas na natureza de homens e mulheres. Será difícil encontrar um comportamento humano que não tenha uma relação com alguma dimensão econômica, mesmo quem o dinheiro não esteja envolvido diretamente. As pessoas estão constantemente fazendo avaliações de custo e benefício, respondendo a incentivos e evitando punições no esforço de maximizar seu bem-estar.

Condição assemelhada pode ser encontrada até em situações envolvendo comportamento sexuais. No seu livro *Sex and Reason*, o jurista americano Posner (2005 apud Teixeira e Marthe 2005, p. 78-80), que é considerado uma autoridade na aplicação da Ciência Econômica à análise de problemas legais, utiliza uma lógica de mercado para explicar traços comportamentais envolvendo também a questão sexual. Ele comenta que o sexo afinal, tem seus custos, considerando diversos aspectos, como principalmente na forma do risco de gravidez ou então de aquisição e transmissão de doenças, além do risco dos desentendimentos e brigas causadas muitas vezes por ‘traições’. Ele ainda faz indagações sobre como pode ser explicada a crescente liberação sexual do século XX por meio de mecanismos simples: os métodos contraceptivos mais eficientes tornaram o sexo mais ‘barato’.

Por uma lógica análoga, poderia ser explicado o fato de que certas cidades —como San Francisco, nos EUA— se convertem em ‘*capitais gay's*’: Ele explica que, para minorias sexuais, faz mais sentido viver em comunidades, pois a proximidade dos parceiros potenciais e o uso dos mesmos signos e símbolos na comunicação tornam o sexo mais acessível e, portanto, mais ‘barato’. O custo cresce à medida que se torna mais difícil para uma pessoa encontrar quem compartilhe suas preferências na cama. O desejo de baixar os custos da procura explica a concentração de homossexuais nas cidades e mais ainda, o surgimento de eventos em que eles se reúnem, justificando a expansão das paradas *gay*. É o que comenta Posner em entrevista a Teixeira e Marthe (2005, p. 81): “ao criar um mercado para a atividade homossexual, a urbanização afeta a distribuição geográfica e também a freqüência dessa atividade”.

Em outro exemplo, os jornalistas Teixeira e Marthe (2005, p. 82) comentam como Levitt (2005), em sua inquietude intelectual, igualmente trata das questões ligadas à economia de forma diferente e como essa forma de relacionar ampliou seu campo de ação. Ele coloca que “…estamos falando de uma ciência cujas ferramentas lógicas e estatísticas podem ser empregadas em quase todos os aspectos da vida moderna”. Teixeira e Marthe (2005, p. 82).

Um dos trabalhos que mais repercutiu, principalmente pela ousadia, foi a sua análise da queda da criminalidade nos Estados Unidos nos anos 90. Ele descobriu um fator determinante dessa queda, que até então passara despercebido, ou seja: a legalização do aborto nos anos 70. Em função disso, no início da década de 80, chegou a ser realizado 1,6 milhões de abortos por ano.

Dessa maneira, impediu-se o nascimento de uma legião de crianças pobres e indesejadas, geralmente filhas de mães solteiras — crianças que, pela fragilidade de sua situação familiar e social, teria maior probabilidade de enveredar pelo crime na vida adulta. Em outras palavras, o crime diminuiu porque muitos criminosos não nasceram. Dessa forma, a queda da criminalidade foi, no jargão dos economistas, um benefício acidental da legalização do aborto.

Essa tese apontada por Levitt (2005) foi muito combatida por todos os segmentos, principalmente o religioso. Ele foi acusado de ser propagandista do aborto. A esquerda o acusou de propor medidas racistas e eugenista. Na verdade ele não estava propondo coisa alguma: estava apenas analisando as evidências, de forma objetiva e sem preconceitos. Foi por essa sua capacidade de relacionar fatos inusitados, de usar de fato o pensamento relacional que tornou Levitt respeitado por seus pares, conquistando premios e medalhas antes de tornar-se um best-seler. A verdadeira lição de complementaridade que poderia se obter de situações semelhantes é a clareza que esses modelos de análises possibilitam tomadas de decisões futuras, como exemplo: o melhor caminho é incentivar o aborto como forma de redução de criminalidade? Deve-se encontrar meios de fortalecer a estrutura familia e social como estratégias?

Outros usos relacionais polêmicos:

Os jornalistas Teixeira & Marthe (2005, p. 76) relatam algumas outras pesquisas levantadas pelo escritor norte-americano Steven Levitt, autor *best-seller* no Brasil e nos EUA que tornou-se uma figura única em sua especialidade: um economista *pop*, indicando como a economia pode resolver mistérios em todos os campos da vida.

Isso tornou-se o segredo do seu sucesso, o modo provocativo como ele levanta as mais inusitadas perguntas sobre a vida cotidiana e na maneira como busca as respostas, usando o pensamento simples (buscando novas relações), mas sempre amparado em dados (instrumentos e teorias consolidadas).

Levitt, enquanto professor da Universidade de Chicago, ao apresentar sua obra, intitulada *Freakonomics*, convida o leitor a pensar livremente sobre os fatos do cotidiano e ao mesmo tempo, desafia as explicações que o senso comum consagrou. Um dos exemplos citados pode ser: O que é mais perigoso para uma criança: uma arma de fogo ou uma piscina em casa?

Esse preconceito nos induz a considerar a arma de fogo. Ao contrário do que se imagina, nos Estados Unidos há mais probabilidade de uma criança morrer afogada em uma piscina do que em um acidente com uma arma. Da mesma forma, de acordo com os dados da ONG Criança Segura, no Brasil, em 2003, os afogamentos responderam por 25% das mortes acidentais de crianças, contra 1% por acidentes com arma. Esse ‘engano’ é geralmente causado quando fatores de emoção básica e preemente estão envolvidos, como nesse caso — o medo. A arma é um objeto que levanta muitas reações emocionais, ao passo que poucos teriam reações morais contra uma piscina. No entanto, de acordo com os dados apontados por Levitt (2005), o perigo objetivo da piscina para uma criança é cerca de 100 vezes maior que o da arma de fogo. Os pais, comenta Levitt (2005), passam tempo demais temendo as coisas erradas.

Novamente comentando Posner (2005 apud Teixeira e Marthe 2005, p.80), que é um Juiz Federal nos Estados Unidos, ele acredita que o pensamento econômico pode ser muito útil nas decisões jurídicas, inclusive envolvendo tópicos controversos como o aborto e o casamento de homossexuais. A economia ajudaria a pesar os custos e os benefícios envolvidos em qualquer decisão jurídica, facilitando a aprovação de leis mais eficientes. Posner (2005) comenta que um bom exemplo é a política de adoção: as pessoas que querem adotar uma criança são proibidas por lei de pagar à mãe biológica que deseja entregar seu filho para adoção. Essa é uma medida de controle de preços. Claro que muita gente acaba pagando por uma criança, ‘por baixo do pano’, para acelerar o processo. Mas isso aumenta o custo da transação e inibe o processo de adoção em prejuízo dos futuros pais e dos bebês sem lar.

Do ponto de vista econômico, o controle de preço é sempre ineficiente. Essa idéia pode parecer repulsiva para muita gente porque evoca comparações com os antigos mercados de escravos. Nas sociedades atuais, contudo, só a guarda seria comprada: as crianças têm seus direitos e sua dignidade protegidos pela legislação. Essa medida, segundo Posner (2005), tornaria mais eficiente o processo de adoção, diminuiria as filas nos orfanatos e coibiria o surgimento de um mercado negro. Posner e Levitt são ambos pais de crianças adotadas e concordam que o mais racional seria deixar de lado certos ‘pudores’ e tornar esses processos de adoção e suas leis mais ágeis, ainda que legitimem o ato de pagar por uma criança. Ainda que seja uma medida controvertida e que muitos argumentem que pagar por uma criança não seja moralmente aceitável, Posner (2005 apud Teixeira e Marthe 2005, p. 80) discorda: “Eficiência e moralidade quase sempre andam de mãos dadas” e ele interpreta que na verdade, os pais adotivos não estariam ‘comprando’ uma criança: eles estariam apenas pagando pelos direitos parentais, de forma semelhante como era antigamente comum — estipulavam-se o dote da noiva — sem que isso fosse uma aberração social ou moral. Posner (2005) encerra a questão citando: “Na adoção, como em tantas outras áreas, o mercado é melhor do que a tutela governamental”. Posner (2005 apud Teixeira e Marthe 2005, p. 79).

Outra área polêmica que a questão moral está fortemente envolvida relacionalmente com a questão econômica é a doação de órgãos, isso na opinião de Levitt (2005). Muitas pessoas pensam que não se deve pagar ao doador pelos órgãos. Mas ele acha que não faz muito sentido. Desde que o doador — vivo ou morto — concorde em vender seu rim e entenda os riscos, ele concorda com o negócio. Muitas pessoas morrem na hemodiálise por falta de rins e uma das maneiras de ajudar a resolver esse problema seria pagar pelos órgão. Em oposição a isso, prolifera e incentiva sim o mercado negro e outras formas de obtenção de órgãos para transplante.

Levitt (2005), de maneira semelhante ao pensamento de Cassirer, Peirce e mesmo Kant, indica que não basta apenas a existência de uma atividade em si para desencadear uma ação. As pessoas tendem a agir de maneira que lhes seja mais conveniente Dubner e Levitt (2005; p. 22) escreve “O que move é o que nós, economistas, chamamos de incentivo ou na psicologia de motivação”. Levitt (2005) reforça o comentário de que não está falando apenas em dinheiro. Os incentivos sociais — as formas como as pessoas vêem umas às outras — às vezes são até mais poderosas.

> temos provas de que as pessoas agem de maneira muito diferente quando estão sendo observadas. Isso vale também para o caso do voto. Como exemplo, temos o caso dos suíços, que adoram votações, fazem isso o tempo todo. Quando em uma reforma eleitoral foi permitido que eles preenchessem suas cédulas em casa e as mandassem pelo correio, o número de votos caiu vertiginosamente. Podemos concluir que aparecer nas filas das seções eleitorais era um incentivo social importante para que as pessoas participassem das eleições. Os incentivos ou motivações são as respostas para quase todas as questões sobre o comportamento humano e dessa forma, o melhor caminho para prever o que as pessoas farão (LEVITT, 2005 apud Teixeira e Marthe 2005, p. 79).

Existe uma grande relação a ser considerada quando envolve aspectos econômicos: os cálculos e viabilidades de custo e benefício. Dessa forma, os governos, com todas as suas pesadas máquinas administrativas, no entanto, não revelam muita sensatez na avaliação de riscos em geral. Deveriam ser coerente o Estado estar preparado para grandes catástrofes como por exemplo terremotos, furacões, inundações, epidemias, ataques terroristas, inclusive asteróides vindo do espaço etc. No meio dessa vasta gama de possibilidades, estabelecer prioridades é uma tarefa difícil pois recai no problema da racionalização econômica na prevenção de desastres: é viável reter recursos por algo que não se tem certeza da ocorrência? Esse recurso poderia ser relocado para outra área carente? Posner (2005 apud Teixeira e Marthe 2005, p. 82) fez uma análise quanto a ação desastrosa do governo americano no socorro às áreas atingidas pelo furacão Katrina, especialmente Nova Orleans.

Na opinião de Posner (2004), há três fatores econômicos básicos a considerar na avaliação de uma catástrofe potencial: a) a probabilidade de que ela aconteça; b) o custo de sua prevenção e, c) o prejuízo que ela pode causar. Um estudo realizado em Nova Orleans em 1998, estimava o custo de medidas de recuperação de ecossistemas da costa que poderiam diminuir o risco de enchente. Esse custo foi orçado em 14 bilhões de dólares. É claro que esse montante nunca foi investido — e na avaliação de Posner (2004), nem deveria ter sido, pois era uma soma muito elevada para uma diminuição pequena na possibilidade de inundação.

No entanto, as agências governamentais falharam e muito, ao não preverem planos de emergência para socorrer a cidade em caso de catástrofe. Essa negligência em parte se explica pelo gigantismo vagaroso dessas agências. Mas há também uma limitação natural envolvida: a mente humana, que não está acostumada a lidar com a probabilidade. Se um evento como a inundação da cidade nunca ocorreu, por que se preocupar com ele?

O pensamento econômico é com certeza um pensamento relacional e ao mesmo tempo ele fornece inúmeras ferramentas inerentes ao pensamento instrumental, que na sua essência, são fundamentais para considerar, diagnosticar, prever, estimar, avaliar situações do cotidiano, porém, muitas vezes ele oferece apenas uma resposta parcial. As outras Ciências têm contribuições importantes a oferecer, tanto que se identifica cada vez mais economistas trabalhando na intersecção com disciplinas inesperadas, como a Neurociência, a Biologia evolucionista além de outras. Porém, não basta apenas perceber as relações ou apenas utilizar-se dos instrumentos. É fundamental avançar, dar um significado e um sentido à percepção obtida. É a contribuição da complementaridade. O que economistas como Levitt (2005) faz é pegar temas nos quais a economia nunca foi aplicada e entendê-los sob esse prisma, com o propósito de ajudas as pessoas a encontrar partes substanciais das respostas procuradas e ao mesmo tempo desmistificar aquilo colocado como sabedoria convencional, quando é tachada que isso funciona assim ou assado, sem questionar realmente.

O mais importante é a maneira com que Levitt (2005) e seus pares, que partilham da mesma concepção, tratam a questão, prestam ao mesmo tempo um serviço para a comunidade em geral: eles retiram as ferramentas econômicas dos especialistas com a finalidade de torná-la acessíveis a mais gente.

Existem muitos outros trabalhos que procuram relacionar as aplicações da economia com o cotidiano, tendo como propósito desvendar seu lado oculto. O ganhador do Premio Nóbel de Economia de 1992, Gary Becker é um exemplo dessa proeza. Desde os anos 50, Becker usa o instrumental econômico para explicar o mecanismo de questões que vão do preconceito racial à estabilidade do casamento. Outro exemplo similar, envolvendo ganhadores de Nóbel de 2005, Thomas Schelling e Robert Aumann, também são economistas da vida diária. Schelling usa instrumentos matemáticos como a Teoria dos Jogos para analisar o comportamento da corrida armamentista ou então, como analisar o uso de capacetes no jogo de hóquei.

Isso não é considerado falta do que fazer ou apenas capricho desses brilhantes pesquisadores. É o uso da capacidade de buscar e estabelecer relações, mesmo que, para muitos, entre coisas mais ‘sem nexo’ ou esdrúxula que possam parecer. O sentido, para eles, necessáriamente não conta muito e sim, a possibilidade de estabelecer relações. A partir das noções de complementaridade possibilitam a extrapolação e ampliação dos conceitos e a proposição de novas teorias, não apenas o relacionamento entre elas ou simplesmente a instrumentação das mesmas.

3.1.2. Taxionomia: um instrumental para o estabelecimento de uma hierarquia relacional

O surgimento da taxionomia

Nomear, principalmente os animais, é uma das primeiras manifestações do relacionamento homem-natureza e essa pode ser uma das primeiras proezas de reconhecimento de uma atividade relacional praticada pelo *homo* quando garantiu o seu *status* de *sapiens*.

Como indicador dessa atividade, tem-se por referência, o exemplo de um dos primeiros animais a inicialmente prover, posteriormente conviver e finalmente, ser domesticado pelo homem. Esse é o caso dos descendentes da espécie da família dos lobos. Numa primeira instância, pode-se perceber uma confusão generalizada, inicialmente causada pelo fator diversidade de línguas produzida pela divisão dos povos, pois o nosso cachorro ou cão (em português), é conhecido como perro (espanhol), dog (inglês), chien (francês), hund (alemão), cane (italiano), pes (tcheco), sem contar com outras denominações encontradas por mais de uma centena de línguas ou dialetos. Como conviver com essa verdadeira Torre de Babel de denominações existentes nessas multiplicidade de culturas? Para a comunidade científica esse problema está resolvido: Em qualquer parte do planeta esse animal em particular é designado como *Canis lupus familiaris*.

De maneira análoga, nas primeiras civilizações humanas, as plantas eram observadas unicamente do ponto de vista da sua utilidade, realizando-se estudos mais profundos referentes apenas ao seu uso medicinal. Mas ao examiná-las cuidadosamente, os primeiros ‘botânicos’ interessaram-se por essas formas de vida e verificaram a existência de semelhanças entre os seus modos de funcionamento e os dos animais.

Compreender e relacionar o nome principalmente nos reinos dos animais e dos vegetais, investigar sua origem, descobrir como essa relação foi construída, a partir de sua observação empírica até sua efetiva definição nos moldes científicos é, com certeza, navegar transdisciplinarmente pelos campos da Biologia, Ecologia, Geografia, História e principalmente Cultura, aliada ao uso de estratégias de classificação, ordenação, seqüênciação, lógica etc. Vale ressaltar ainda que nomear é uma tarefa própria do ser humano, ou seja é o único animal que se conhece com essa capacidade. Essa atribuição já é registrada pelos cristãos e judeus desde a época da criação do mundo, conforme citação da Bíblia: “O Senhor Deus modelou no solo todo animal dos campos e todo pássaro do céu, que levou ao homem para ver como os designaria”, (Gênesis, 2, 18-19).

Na antiga Grécia a preocupação em tentar entender como a natureza viva e inanimada se relaciona aparece, em referências iniciais, com Empedócles de Akragas, um dos mais ilustres representantes da escola de Filosofia de Pitágoras. Esse filósofo explicava que o mundo era composto por quatro elementos eternos – Água; Fogo; Terra; Ar – e que os corpos vivos ou inanimados existiam como resultado da simples atração e/ou repulsão entre esses elementos. Empedócles pensava que as plantas, assim como os animais, possuíam alma, razão e senso comum. Os ramos e as folhas que se 'dirigem' para o Sol, pareciam confirmar essa teoria. Nas suas conjecturas teóricas, as plantas não eram consideradas organismos íntegros, mas sim compostas por organismos distintos e independentes.

Cerca de um século e meio depois, Aristóteles realizou uma extensa obra sobre o reino animal, que influenciou toda a percepção sobre o tema nos séculos seguintes. No entanto, apesar de nela fazer referência a diversas plantas, o seu trabalho sobre esse reino é pouco conhecido. De qualquer forma, esse filósofo tornou possível a classificação da natureza. Aristóteles considerava a existência de uma contínua transição entre seres vivos e seres inanimados, sendo que as plantas ocupavam uma categoria intermediária. Nessa altura, a palavra 'alma', como propriedade dos seres vivos, que podia transitar entre diferentes formas, dominava os textos que se escreviam (no período do Renascimento, a 'alma' passa a ser substituída por 'vida'). Aristóteles distingue os seres vivos dos inanimados pelas capacidades de pensar, sentir, crescer e de movimentar. Para ele as plantas não tinham qualquer interesse para além da possibilidade de darem frutos e de se propagarem. No entanto, os seus estudos levaram-no a tirar algumas conclusões interessantes, por exemplo que, ao contrário dos animais, nas plantas a fêmea não estava separada do macho, ambos constituindo um único ser.

Theophrastus, depois de ter estudado com Platão, tornou-se o pupilo favorito de Aristóteles e teve a oportunidade de continuar o seu trabalho.

Ele foi o mais importante botânico da Antiguidade, e é mesmo conhecido como o fundador da Botânica. Liderou a academia de Filosofia durante 35 anos, enquanto era responsável pelo primeiro Jardim Botânico que se conhece. Das 227 obras que chegaram aos nossos dias, duas delas são sobre Botânica:

- A História Natural das Plantas (*De historia plantarum*), composta por 9 livros;

- Sobre as Razões do Crescimento das Plantas (*De causis plantarum*) composta por 6 livros.

Essas obras foram trazidas à luz da cultura ocidental pelo Papa Nicolau V, que ordenou a sua tradução para latim, tendo sido publicadas primeiro em 1483 (com demasiados erros de tradução) e depois em 1497, numa versão retificada. Esses livros passaram a ser os guias indispensáveis para a compreensão e o ensino da Botânica.

Mas esses livros eram muito gerais – as espécies eram referidas apenas ocasionalmente, e em alguns dos casos nem se percebia de que espécie se tratava. No entanto, isso não lhes retira a sua importância, já que dispõem de dados muito interessantes. Por exemplo, além das espécies gregas, são referidas espécies de outras regiões, o que foi proporcionado pelas campanhas de Alexandre o Grande à Índia, Pérsia, Síria, Egipto e Líbia. De qualquer forma, essa obra tem referências de cerca de 500-550 espécies e variedades de plantas e foram esses conceitos básicos de morfologia, classificação e história natural das plantas que foram aceitas, sem serem questionados, durante muitos séculos.

Na Ciência, visando sempre facilitar a identificação e o próprio avanço da pesquisa, e nas tentativas de categorizar e classificar, houve uma incansável procura de uma padronização ou de uma nomenclatura de cunho universal. Essa só veio a começar a concretizar-se por volta do ano de 1740, quando publicado um primeiro livro ocidental de Zoologia, em que o americano Mark Catesby, visando padronizar o nome do tordo, também conhecido como sabiá americano, batizou-o com essa denominação científica: *Turdus minor cinéreo-albus non maculatus,* ou tordo pequeno branco-acinzentado sem manchas.

Como percursor desse sistema de identificação dos seres vivos por nomes científicos, surge o médico e botânico sueco Carl von Linné, que apresentou no livro *Systema Naturae*, pela primeira vez em 1758 um sistema para nomear, hierarquizar e classificar os seres vivos, sendo, portanto, considerado o pai da taxionomia.

As regras para classificar...

As regras para esse sistema de nomenclatura é assim caracterizado: o nome científico geralmente é em latim — a língua dos intelectuais daquela época — ou numa 'latinização' do grego, de outras línguas vernaculares ou de nomes de pessoas homenageadas. Quase sempre vem escrito em itálico, mas pode vir num estilo de letra diferente do restante do texto.

Semelhante a nós humanos, os bichos também são identificados pela familia de origem (o nosso sobrenome) e pelo nome específico. Numa ordem inversa da usada nos nomes dos humanos, o primeiro nome, com a inicial maiúscula, representa o gênero (que traduz o parentesco); o segundo, com a inicial minúscula, a espécie (o nome específico). Por exemplo: *Canis lupus* é o nome científico do lobo, que é do gênero *Canis* com o nome específico *lupus*. Um terceiro nome geralmente indica uma subespécie, como *Canis lupus signatus*, uma subespécie de lobo que vive na Península Ibérica. Na seqüência, os cientistas acrescentam o nome de quem descreveu a espécie e o ano da descrição. Em alguns casos, é usada a abreviação *sp* (species) após o nome do gênero, indicando que apenas o gênero é conhecido e a espécie não está definida por algum motivo. O plural de species é spp e significa referência a mais de uma espécie dentro de um gênero, por exemplo, *Bufo spp* (sapos-cururus), *Salminus spp* (dourados e tabaranas), *Loxosxce-les spp* (aranhas-marrons), *Chaetodon spp* (peixes-borboleta). Assim como toda língua tem uma gramática, a atribuição de nomes científicos segue o Código Internacional de Nomenclatura Biológica, Zoológica, ou Botânica. Qualquer pessoa munida do conhecimento adequado pode descrever e dar nome a uma nova espécie, desde que percorra o longo caminho da confirmação do seu ineditismo.

Lembrando ainda que a ação de classificar, organizar e estruturar informações observadas, são atitudes inerentes ao pensamento lógico-matemático. A maioria dos nomes científicos indicam atributos do ser nomeado ou das circunstâncias que o cercam. Com isso, nós humanos criamos uma regra universal, que garante uma compreensão e uma forma de comunicação reconhecida em qualquer parte do planeta.

Portanto, a estruturação dessa regra podemos consider inerente a um **pensamento instrumental**. Conhecedor da regra, partindo de observações, identificando características gerais e denotando as específicas, faz-se uso das diversas relações possíveis e permissíveis, como *habitat*, hábitos, características físicas, descobridor, homenageados etc, ações inerentes ao **pensamento relacional**. Ao juntar esses dois pensamentos e a partir daí procurar entender e estabelecer conexões mais amplas entre as familias, gêneros e espécies, combinando ainda estudos comparativos sobre evoluções, extinções, impactos e interferências detectados entre as espécies, com o meio ambiente etc, estamos, com certeza, utilizando todo o potencial que a **teoria da complementaridade** possibilita.

Apesar de toda teoria já construída sobre esse procedimento de identificação e classificação por meio de uma estrutura científica, muitos erros, enganos, ou posições individuais e pessoais são imputadas nesse formato de ação, causando algumas imprecisões. Novos procedimentos estão surgindo, como por exemplo o que se utilizam da identificação pelo código do DNA, melhorando com isso a confiabilidade.

3.1.3. O relógio analógico é um instrumento: mas sua correta utilização necessita de uma compreensão relacional

A conceituação de tempo e o surgimento do relógio

O entendimento sobre o funcionamento do mecanismo do tempo foi, e ainda é, com certeza, para o ser humano um enigma, um desafio constante para sua compreensão e, por que não dizer, uma ‘utopia’ que ele sempre almejou querer compreender, prever e ‘controlar’ o tempo em todas as suas nuancias.

Mas como apareceu essa ‘contagem’ do tempo? Inicialmente de caráter empírico, ao observar o movimento do Sol e das constelações ao longo dos dias e anos. Por fim, o homem concluiu que a Terra se move solta no espaço (essa constatação é muito complexa, principalmente pela dificuldade que se tem de abandonar a postura empírica). Galileu foi condenado por fazer pública essa idéia, contrariando todos os conceitos anteriores, de que a Terra era tida como imóvel, no centro do universo. Nesse mesmo referencial do planeta, para medir a duração desses eventos, criou-se o conceito de tempo. Em primeiro lugar foi criada a hora, dividindo o dia. Com a criação do primeiro gnomon ao usar as observações da movimentação da sombra produzida pela luz do sol numa vara fincada no solo, nasceu o primórdio do relógio e do calendário. O trajeto da sombra da ponta desse primitivo relógio de Sol foi dividido em 12 partes, não necessariamente iguais, possibilitando a primeira medição. Assim puderam estimar quanto tempo havia decorrido desde o nascer do Sol, quando estavam no meio do dia, ou quanto faltava para anoitecer. Da mesma maneira, como as curvas produzidas nas diversas marcações realizadas no decorrer do ano eram diferenciadas, foi possível relacionar com as diferentes estações.

Quando se percebeu e ficou definido que a noite praticamente durava o mesmo tempo (dependendo da época do ano e da região do planeta), resolveram dobrar a duração do dia, assim um dia, ou melhor nictêmero, estabelecendo o intervalo entre duas passagens do Sol consecutivas. Isso ficou valendo 24 horas. Essa hora foi chamada de hora solar, já que era baseada no movimento do Sol.

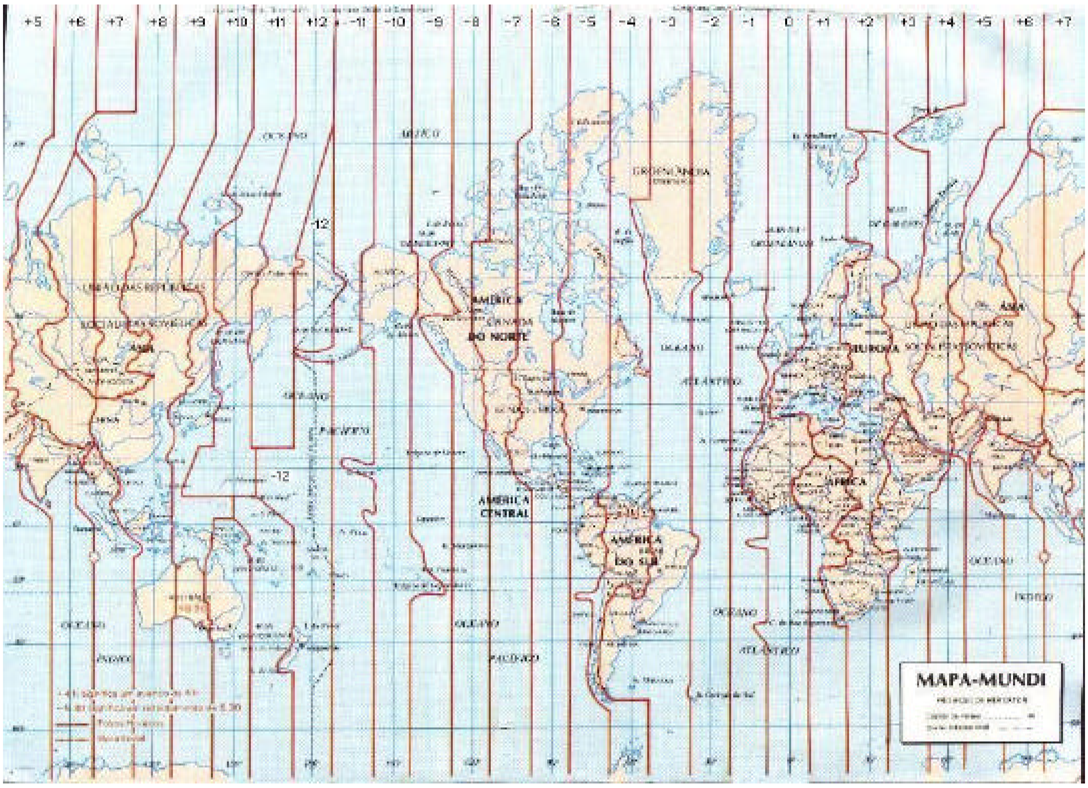


FIGURA 9: MAPA MUNDI E OS FUSOS HORÁRIOS

Inicialmente, nos primórdios da humanidade ou na Idade Antiga, quando alguém se deslocava de uma cidade para outra, a demora no deslocamento era tão grande, que não se notava diferenças de tempo entre as localidades.

Com o aperfeiçoamento dos mecanismos de medição, como as ampulhetas (relógios de areia), e as clepsidras (relógios de água), aliado ao desenvolvimento dos meios de transporte, as diferenças foram aparecendo. Assim surgiu a necessidade de definir o conceito de tempo local, ou hora local.

Com o desenvolvimento dos relógios mecânicos, eletrônicos e atômicos, tem-se a informação de que o dia solar não é constante e torna-se necessário corrigir para o Tempo solar médio[11]. Definiu-se um meridiano para a contagem de tempo (e o que foi designado é o meridiano de Greenwich), e o chamaram de Tempo Universal, e a partir dele, calculou-se a hora local para as outras longitudes. O meridiano localizado a 180º de Greenwich ficou estabelecido como a linha internacional de mudança de datas, que passa pelo meio do oceano Pacífico. Por ser uma área de pouca densidade habitacional, os poblemas causados foram minimizados, pois um cruzamento para o outro lado dessa linha implica necessariamente na mudança de data (dia seguinte/anterior).

Relógio Analógico: Um instrumento que necessita de relações

Analisando a situação do relógio e do tempo para o campo do pensamento relacional, tem-se que o relógio do modelo analógico- em dias de hoje, quase em desuso pela maioria da população— revela, no entanto, uma necessidade de estabelecer constantemente esse modo de pensamento para a sua correta interpretação, até que, em função do hábito, se torne parte do pensamento instrumental de cada um. Mesmo conhecendo a descrição de um relógio analógico, poucos sabem, no entanto, que é um instrumento que se utiliza da numeração baseada no sistema sexagesimal para a marcação dos minutos e segundos. Já as horas, normalmente, em duas voltas de 12 unidades, para representar um dia completo.

Como ilustra o exemplo a seguir, percebe-se numa das figuras, uma indicação direta, que registra um horário de 10 horas e vinte e cinco

[11] Tempo solar médio, que é medido pela passagem do Sol pelo meridiano local, considerando as variações da Terra

minutos ou ainda pode significar 22 horas e vinte e cinco minutos, que nesse caso, o usuário teria que relacionar essa indicação com o período diurno ou noturno quando eles são facilmente percebíveis. Pode-se ainda ser o caso dessa relação ter que considerar ainda a localização geográfica que ele se encontra (proximidade com o equador ou com os pólos).

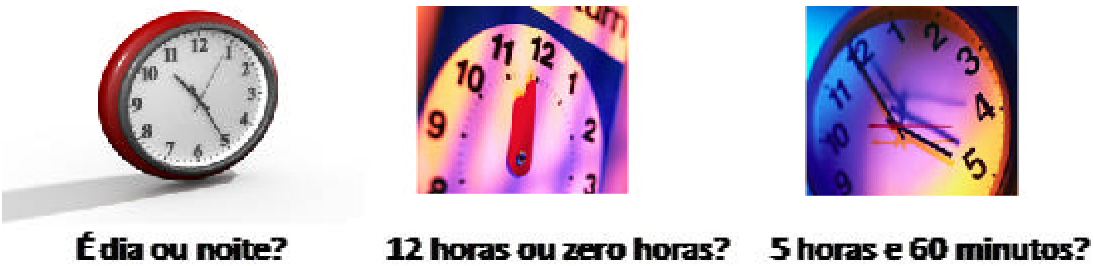


FIGURA 10: PERGUNTAS QUE SÓ O INSTRUMENTO NÃO REVELA

Outra relação a ser estabelecida refere-se ao momento de divisão apresentado no mostrador do relógio em que os ponteiros do relógio são coincidentes em 12, que corresponde à diferença de indicação entre (12) doze horas e (0) zero hora. Isso ocorre quando o sol geralmente encontra-se a ‘pico’ (no zênite), seja no local (meio-dia) e simultaneamente no local oposto do planeta (meia noite/zero hora) ou vice-versa.

Uma terceira relação pode ainda ser destacada na ‘hora completa’, ou seja, se estabelece a relação entre os ponteiros de horas (pequeno) e o de minutos (maior). Na figura acima se tem a informação visual de 5 horas ou 17 horas. Porém, essa já é a informação mecânica que está incorporada de maneira ‘inconsciente’. Mas para uma criança em fase de aprendizado da leitura do relógio analógico, poderia inicialmente ser uma dificuldade, pois, mesmo sabendo que entre cada número tem-se uma seqüência de cinco unidades e que os ponteiros, ambos percorrem, com velocidades diferenciadas, ela poderia, nesse exemplo, concluir que seriam 5 horas e 60 minutos (5 horas + 12 vezes 5 minutos) ao invés de 5 horas exatas, que seria na realidade a transformação de 4 horas + 60 minutos.

Os relógios até então instigava o uso do pensamento relacional, pois indicam e reforçam que não basta apenas um aprendizado mecânico para se aprender definitivamente. Não é somente uma marcação visual. É fundamental que se tenha uma constante reflexão para se garantir um verdadeiro estabelecimento de relações. Porém, o uso e a prática desse estilo de exercício é que nos garante maior rapidez e confiança num determinado processo instrumental. É a constante comparação entre o que indica o instrumento com a coerência observada na realidade que garante a certeza da verdadeira compreensão.

Essas características podem, no entanto, deixar de serem observadas e aprendidas. O relógio está tornando-se apenas um instrumento de observação direta, principalmente quando se faz uso de relógios digitais ou os apresentados em celulares, pois se ele já não estiver programado para indicar o sistema de 24 horas, basta apenas saber se é dia ou noite, pois a criança só fará a leitura direta do instrumento.

3.1.4. Dos lobos aos cães: uma relação de evolução estimulada e ‘moldada’ pelo homem

Fiéis companheiros: Suas relações com os humanos

Os cães evoluíram perto dos seres humanos e não são capazes de existir sem eles - mesmo aqueles sem dono, que sobrevivem remexendo o lixo. Os antigos consideravam os cães mensageiros dos vivos aos mortos. Atualmente, porém, eles são usados em experiências que poderiam ameaçar a vida humana.

Uma múmia de um cão jovem foi deixada como oferenda numa tumba egípcia durante a época romana. Os egípcios não consideravam os cães sagrados, mas acreditavam que o primo selvagem da espécie, o chacal, sob a forma do deus Anúbis, guiava a alma dos mortos até a vida no além.

Em 1957, a cadela Laika tornou-se a primeira criatura a viajar na órbita da Terra, no satélite Sputnik 2. Mais tarde os soviéticos enviaram cães a 80 km de altura, com trajes especiais para as diferentes pressões. Foi um teste para a viagem inaugural dos seres humanos, em 1961.

Quando a Sony projetou um robô de estimação, chamado de Aibo, escolheu a forma de um cachorro — assim poderia atingir o mercado mais amplo possível. “Nós o consideramos um mascote”, diz o porta-voz da empresa, Jon Piazza.

Lou Hawthorne, coordenador de um projeto de clonagem de cães, posa com Missy, uma cadela *collie-husky*. Seu proprietário doou 3,7 milhões de dólares para uma empresa tentar copiar sua cadelinha. Quando os pesquisadores realizarem essa proeza, milhares de pessoas estarão dispostas a pagar 20 mil dólares para clonar um animal.

Há 12 mil anos, numa região que hoje é parte de Israel, um grupo de caçadores depositou um corpo numa sepultura. Tinha nas mãos um filhote de animal. Se era cão ou lobo, não se pode saber, mas essa sepultura é uma das primeiras evidências fósseis da domesticação canina.

Os cientistas sabem que esse processo ocorreu há 14 mil anos passados, mas não há consenso quanto à razão. Para alguns, o homem começou a adotar filhotes de lobo e a seleção natural favoreceu os que eram menos agressivos e mais aptos a implorar comida. Para outros, os cães domesticaram-se sozinhos, vivendo do lixo deixado pelo homem. Canídeos comedores de matéria morta sobreviveram nesse nicho alimentar e as gerações seguintes acabaram adaptando-se cada vez mais.

"A única característica escolhida pela seleção natural foi a capacidade de comer próximo do ser humano", diz o biólogo COPPINGER, Raymon e Lorna COPPINGER. (2001). No plano molecular não houve mudança: a constituição do DNA do lobo e a do cão é quase idêntica. Considerando como referência inicial, a foto ao lado, figura 11, mostra o esqueleto de um lobo.

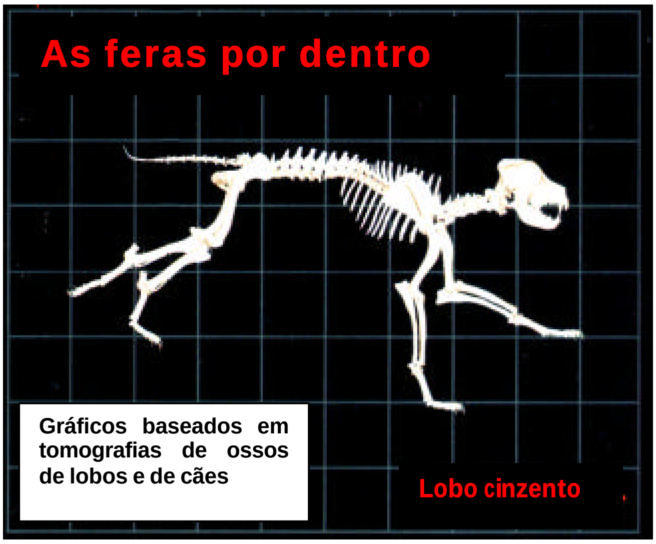


FIGURA 11: ESQUELETO DE UM LOBO

Nenhuma outra espécie apresenta tanta diversidade como o cão. Todas as raças caninas, porém, compartilham certas características, provindas de uma origem comum. Quando os canídeos se adaptaram aos assentamentos humanos, desenvolveu um temperamento manso e uma série de qualidades geneticamente vinculadas a capacidade de ser treinado, de abanar a cauda e de ter várias cores de pêlo.

Seu crânio e seus dentes ficaram menores do que os dos lobos, pois não precisavam mais atacar grandes animais. Ao abdicar de carne para comer lixo humano, seu cérebro ficou menor. O produto final foi um animal que se poderia reconhecer como o vira-lata atual. Desde então, as primeiras raças surgiram com um mínimo de intervenção humana.

As pessoas começaram a escolher e criar os cães para determinadas habilidades, como caçar ou servir de guarda. O ambiente também formou as primeiras raças. Nos climas frios, os cachorros maiores, de pelagem mais densa, eram mais aptos a sobreviver. Ao longo dos séculos o ser humano começou a cruzar animais com características desejáveis, produzindo espécies híbridas. Criou assim uma variação maior de formas do que poderiam aparecer na natureza. Os gráficos a seguir mostram como o esqueleto do lobo foi manipulado pela evolução sem perder nem um único osso.

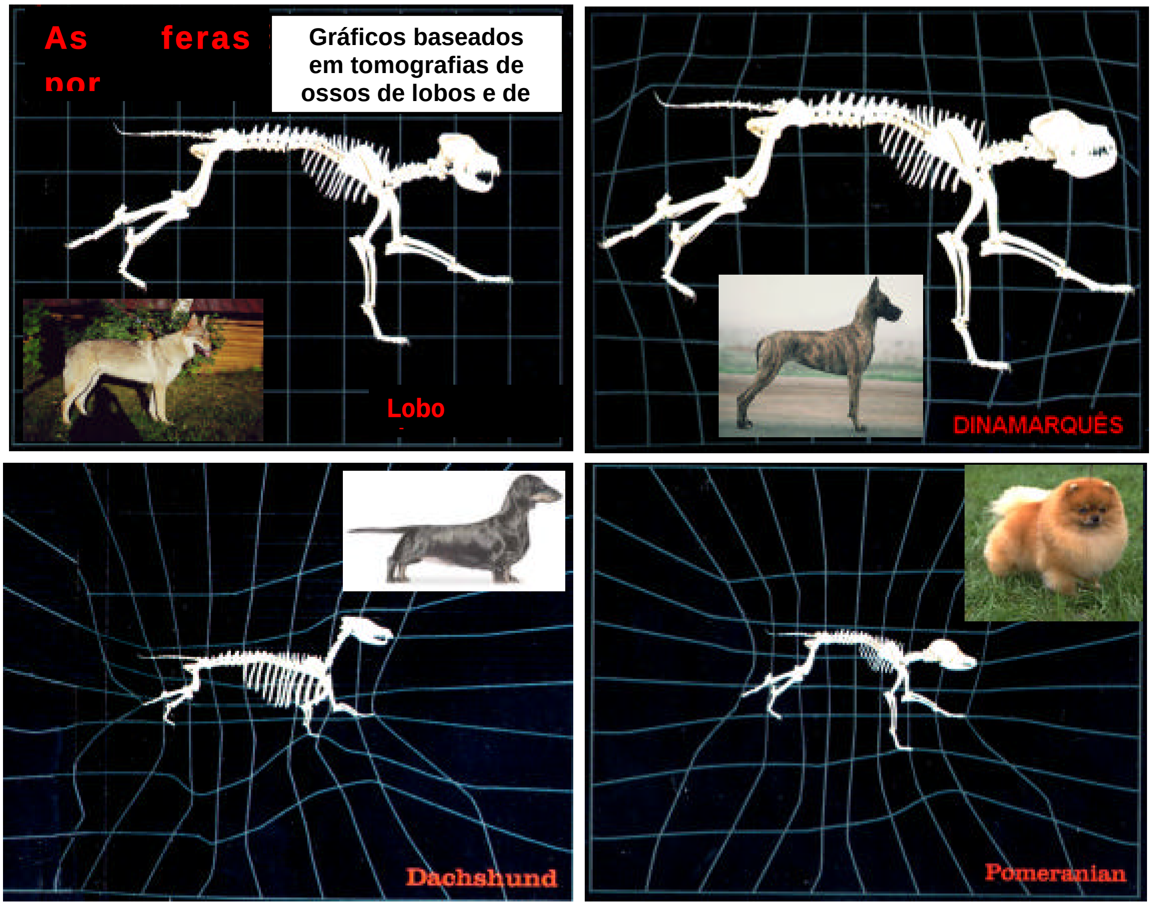


FIGURA 12: COMPARAÇÃO DO ESQUELETO DO LOBO COM O ESQUELETO DE VÁRIAS RAÇAS CANINAS

Até então, descrevia-se apenas uma situação voltada para o contexto social e referenciando-se comumente à Biologia como área de estudo para esse caso. Ampliando-se os referenciais, ferramentais e usando largamente a capacidade de novas relações entre conhecimentos, chega-se à Matemática. Pode-se, por exemplo, fazer uso de um sistema de coordenadas como ferramenta para comparar as evidentes relações e transformações percebidas e ocorridas. Percebendo visualmente as várias fotos colocadas lado a lado, na figura 12 acima, tendo como referência a primeira delas, que é a do ancestral dos cães: o lobo. Os demais esqueletos estão dispostos identicamente, respeitando as mesmas posições das pernas, patas, colunas, crânios, todos representados pelas mesmas coordenadas de referência. Dessa forma, são perceptíveis as distorções entre cada componente a ser comparado. Analisando a altura do joelho, da pata traseira esticada, por exemplo, percebem-se como, em cada um dos exemplares, as linhas de referências são alongadas, encurtadas ou distorcidas em relação ao referencial lobo.

Cada um desses exemplos denota as finalidades ou funções diferenciadas que possam exercer o joelho do cão, em atividades como caçar, correr velozmente, nadar, lutar, pular, e que tenham relações também diferenciadas — com a altura do joelho ou mesmo com toda a sua estrutura óssea e muscular, por exemplo — dentro de uma mesma família, cujas características são muito próximas.

A variação dos cães foi possibilitada principalmente pelos genes que afetam o ritmo de seu desenvolvimento como feto e filhote. Ao contrário do que acontece com os gatos, a cabeça do filhote não é apenas menor, mas tem proporções diferentes da cabeça do cão adulto. Por exemplo: o crânio de um buldogue, que tem a cara afundada em cima e o maxilar projetado para frente, é resultado de um processo de crescimento do focinho que começa tarde e e se processa de modo vagaroso. O restante do crânio forma-se de maneira a adaptar-se a esse focinho curto. Em contraste, o borzoi tem um focinho longo e fino, que começa a crescer ainda no útero. A fundação dos clubes de cães no século XIX acelerou a seleção artificial e incentivou a criação de novas raças. A maioria das raças criadas desde 1900 teve como prioridade a aparência.

A origem dessa forma de pensamento, buscando relações mais amplas, principalmente da Matemática com as outras Ciências, começa a se consolidar nos meados do século XIX. Em comentário verbal, Michael Otte (2007) identifica que nessa época, Bernhard Riemann, um dos mais importantes matemáticos desse século e filosoficamente, o mais sublime de todos, escreveu uma vez um pequeno artigo intitulado “Mecanismo da orelha” [12], em resposta a uma publicação de Hermann Helmholtz de 1863, e o fez

[12] Mechanik des Ohres, Riemann`s Gesammelte Werke, Reprint Dover 1953, p. 338-352

assim por razões essencialmente metodológicas. O ponto principal de seu estudo é o esclarecimento sobre o método analítico.

Ele começa seu artigo com as seguintes palavras:

> A psicologia de um órgão do sentido requer — com exceção das leis de natureza gerais — duas bases particulares; uma **psicofísica**, isto é, a verificação empírica das realizações do órgão, e uma **anatômica**, isto é, a investigação de sua construção... Dessa forma, há duas maneiras possíveis de obter o conhecimento sobre as funções do órgão. Podemos procurar entender como ele é construído ou formado… Ou podemos começar a entender o que o órgão realiza e então tentamos e explicamos estas realizações RIEMANN (1953, p. 338).

Riemann (1953) identifica o primeiro caminho como sintético e o segundo como analítico e ele prefere o caminho analítico, ao contrário de Helmholtz. O primeiro origina-se das causas aos efeitos, enquanto o segundo procura causas de determinados efeitos ou condições para atingir os objetivos.

Dessa forma, o procedimento analítico é decomposto, de acordo com Riemann, em três partes:

1. Procure uma hipótese que seja suficiente para explicar o que o órgão realiza;
2. A investigação da necessidade dessa hipótese;
3. A comparação com experiência a fim de verificar ou corrigir essa hipótese. RIEMANN (1953, p. 339).

Riemann prefere uma abordagem analítica somente porque com ela se toma, sempre, cuidado para descobrir e expor as premissas necessárias de uma explicação ou uma prova matemática.

O capítulo essencial de *Habilitationsschrift* famoso de Riemann, por exemplo, começa com a indicação clássica: "*Primeiramente então, o que nós compreendemos pelo dx do ?f(x)dx?*" [13]

[13] RIEMANN B., 1876, Gesammelte mathematische Werke, p. 239.

Riemann ao perguntar o que o símbolo *?(x)dx* significa, procura por condições necessárias de integrabilidade, melhor que algumas mais ou menos suficientes propriedades arbitrárias das funções integrandas, como a continuidade, como Cauchy fez e, desse modo, permitiram generalizar a noção da integral. Riemann procurou sempre analiticamente por circunstâncias necessárias, para excluir primeiramente a arbitrariedade das hipóteses. As explanações na Matemática ou na Ciência natural devem ser baseadas em circunstâncias necessárias e, nesse sentido, o método analítico procurará por causas de efeitos dados.

Nunca se deve, de acordo com Riemann, evitar raciocínio teleológico[14] e analógico, mas ter cuidados com a noção de Aristóteles de causas finais. Deve-se considerar:

> o que o órgão realiza como sua finalidade e deve compreender sua criação como significado a essa finalidade. Entretanto, essa finalidade não é presumida, mas é dada com a experiência e, aparte da produção do órgão própria, a noção de causas finais (em alemão *Endursachen)* pode completamente ser deixada fora do jogo. RIEMANN (1953, p. 339).

A questão essencial é como se lida com as idéias hipotéticas, porque "em contraste com o que o Newton quer, nós não podemos evitar completamente o uso de analogias" GIBSON (1983). A conexão entre o Pensar relacionalmente e o método analítico tem exatamente a finalidade de eliminar o arbitrário e as suposições desnecessárias, procurando realizar uma abordagem mais direta possível.

É bem provável que muitas dessas relações já eram percebidas e ou cogitadas, porém, com o avanço e aperfeiçoamento das ferramentas de registro e análise, como por exemplo, o próprio uso do raio-X para comparar esqueletos de diferentes raças caninas, possibilita novas perspectivas para

[14] **Argumento Teleológico** é o tipo de argumento que se baseia em uma finalidade, uma causa final, um fim. Analisa-se aqui se os objetivos estão sendo cumpridos ou desviados.

entender esse processo evolutivo. Essa é a função e o papel da complementaridade.

3.2. Exemplos de situações de contexto didático-pedagógicas que envolvem o uso do Pensamento Relacional

Skemp (1989) alerta sobre a ambiguidade que pode causar, no meio educacional, quando se faz com os alunos, apenas a interpretação mecanicista de um conceito, uma idéia, um fato ou mesmo uma informação, tendo o perigo de 'sedimentar' idéias vagas, interpretações errôneas e descontextualizadas.

Ele ainda deixa transparecer, que um os fatores de diferenciação entre o pensamento instrumental e o pensamento relacional na escola, é estabelecida principalmente pela forma de abordagem, atuação e postura frente ao conhecimento e ao processo de ensino/aprendizagem pelos professores/alunos.

Percebe-se em várias escolas, o surgimento de uma prática do menor esforço. De um modo geral tanto para professores como para alunos, trabalhar com o conhecimento pronto e acabado é muito mais fácil do que estruturar e desenvolver uma atividade que envolva ações efetivas de desencadear uma construção, reconstrução, reelaboração de conceitos para chegar num determinado conhecimento.

Normalmente inúmeras 'desculpas' são dadas em função de situações como concursos, seleções, vestibulares e outras formas de ascensões, que sobrecarregem as variáveis 'tempo' e 'volume' de conteúdos. Essas questões são, geralmente determinantes para 'bater o martelo' contra propostas que visem atuar diferentemente.

Provavelmente uma das causas seja a dificuldade de gerenciar o volume de conhecimentos existentes, de elencar quais os necessários e imprescindíveis num sistema educacional, para a formação de alunos. Justifica-se então uma apresentação mais instrumental, que geralmente é mais compacta, mais ‘simples’, na forma ‘regras sem razões’, mencionada por Skemp?

Na relação do conhecimento na sua forma de apresentação mais comum, uma analogia poderia ser feita comparando pontualmente os conhecimentos em textos didáticos com produtos dispostos num supermercado. Percebe-se cada vez mais o distanciamento entre o produto pronto e o saber produzir o produto ou novos produtos, criando um dependência pelo ‘pronto’, ‘rápido’ e ‘mais fácil’.

Talvez seja por isso que esse distanciamento não choca a sociedade. E as torna dependentes do instrumental (informação). Ao passo quem se utiliza do conhecimento buscando essas relações ou estabelecendo novas relações, sobressai-se apresentando ‘produtos novos’, novas abordagens sobre idéias velhas etc. Vale exemplificar que uma enciclopédia é necessariamente relacional, embora nela se apresente o escrito linearmente, como um romance...

Ainda, as formas de ensino estão sendo camufladas. Vê-se muita pele nova sob conteúdo antigo. Isso com certeza traz muitos danos. Não existe de fato uma preocupação em conhecer profundamente teorias e aí aplicá-las conscientemente. Ainda permeia o ‘modismo’, os jargões pedagógicos e a manutenção de aparências.

Mas como começar a busca para compreender a trabalhar com o pensamento relacional? O que é fazer relações? Como elas devem ser feitas? Quantos e quais órgãos dos sentidos devem ser acionados para que isso ocorra? Depois, relacionar o que? Com que? Com quem? Inicia-se empiricamente?

Primeiro, se aceitar como verdade aquilo que a crença comum afirma, “que o universo natural é governado por leis matemáticas”, nessa ótica pode-se então compreender que esse universo e tudo o que nele está contido estão se matematizando desde os primórdios da sua criação e perdurará eternamente, seja regendo os movimentos dos corpos, seja controlando infinitos sistemas de presa-predadores, seja organizando infinitos caos tais como o da meteorologia, seja quando uma semente produz pétalas com simetrias perfeitas, seja quando abelhas conseguem estabelecer seu plano de vôo através da orientação por coordenadas polares, tendo por base referenciais. De maneira assemelhada, quando nós, seres humanos, no uso da conhecida ***matemática ‘inconsciente’***, que ocorre, por exemplo, quando se tem que tomar uma decisão de atravessar uma rua com tráfego intenso, e, consegue-se, matematizando sem pensamento ou esforço consciente, resolvendo com isso problemas mecânico-probabilísticos da mais alta complexidade. Essas situações são inevitáveis, pois elas existem e prosseguem independentemente de nós, são naturais, automáticas, não podem ser desligadas, são intuitivas.

Segundo, a maneira de se chegar a esse pensamento, indica que o caminho para essa compreensão passa pelo exercício da linguagem, da forma como se expressar para estabelecer uma estrutura de pensamento sólida e coerente e até mesmo lógica. Esse é de fato o grande problema da maioria dos seres humanos, pois a Matemática é uma linguagem que possui uma estruturação lógica e formal. Porém, a linguagem usual, apesar dela poder ser também estruturada dessa forma, não o é. Seja por razões históricas, culturais, sociais etc, mas, enfim, o que se percebe é que ela não é um elemento facilitador para a compreensão de conceitos e idéias matemáticas. Infelizmente, somente aqueles indivíduos que conseguem, na sua maioria por méritos próprios, romper esses obstáculos epistemológicos é que conseguem dar um salto nas capacidades de visualizações e de pensar relacionalmente. Essa maneira de pensar envolve desenvolver o que se conhece como processo da substantivação, que quer dizer, na linguagem e no pensamento,

converter verbos em substantivos ou ainda, **transformar processos em objetos**.

Quem manuseia um volume maior de conhecimentos? quem recebe pronto um mapa qualquer ou quem construiu esse mapa? Esse questionamento pode conduzir alguns professores a recordar, no contexto brasileiro da década de 60 ou 70, conhecidos ainda como tempos de ginásio, —em que era comum tanto em atividades em sala ou como tarefa, principalmente nas disciplinas de Ciências, Geografia, bem como de História— o desenho de experimentos e de mapas em geral (mapas políticos, históricos, geográficos, econômicos, sociais, climáticos etc). Às vezes era considerado uma tarefa 'chata', o fato de ter que reproduzir, ampliar, reduzir esses mapas. Normalmente, essas técnicas eram desenvolvidas pelo professor de Matemática (e, geralmente, na época, ainda havia tempo para desenvolver esses conteúdos), de 'quadricular', 'triangular', garantir as proporções dos lados das figuras a serem reproduzidas para os mapas garantindo que eles não ficassem distorcidos, mais gordos ou altos que os originais. Porém, o interessante é que enquanto se traçava, pintava, representando o relevo, de alguma forma, geralmente também deixava a imaginação 'viajando' pelo mapa, imaginando-se no local, indagando qual seria a altura das montanhas, as extensões e largura dos rios, descobrindo distancias entre lugares, imaginando os personagens típicos da região ou da época histórica em questão. Na maioria das vezes despertava uma curiosidade de conhecer um pouco mais.

De alguma forma todos estavam sedimentando, ampliando, comparando as informações obtidas em sala de aula através do professor ou do livro. Essa experiência foi real. Ela repercutiu de forma significativa em mim, pois até então, tenho como passatempo aprender aspectos históricos e geográficos e uma certa facilidade para representar situações.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Brasil (MEC-SEF, 1998) afirmam que esses conceitos de proporcionalidade, quando desenvolvidos na disciplina de Matemática, estão presentes, de maneira mais sólida, na resolução de problemas multiplicativos, no trabalho com percentagem e semelhança de figuras, na Matemática Financeira e na análise de tabelas, gráficos e funções. Referem à importância do raciocínio proporcional na interpretação de fenômenos do mundo real, evidenciando o fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam ou resolvem-se com o uso das leis da proporcionalidade.

Por outro lado, em entrevista oral realizada com orientadores pedagógicos da SEDUC-MT[15], foi relatado que, se for acompanhada a forma como essas disciplinas de Ciências, Geografia, História e Educação Artistica são trabalhadas ainda nas escolas, se descobrirá que é lastimável, pois em muitos casos elas estão restritas à discussão (monólogo) do conteúdo (muitas vezes apenas através da leitura pura e simples ou então o professor passa um resumo no quadro com apenas os pontos principais de forma esquemática). Como atividade subsequente, os alunos passam a responder um questionário e buscar estratégias para decorar essas questões, pois delas é que sairão as perguntas para as provas. Fica a pergunta: E os mapas? E os esquemas? E os diagramas, e os quadros sintéticos? São raros os professores que conseguem lê-los, interpretá-los, utilizá-los enfim como um recurso didático. No caso dos mapas - comentam os orientadores da SEDUC-MT - "Quadricular, reduzir, ampliar? Em nossas visitas pedagógicas às escolas, observamos que poucos conhecem ou aplicam essas técnicas. Já o professor de Matemática, nem sempre colabora com essas atividades, pois não tem tempo a perder com essas 'bobagens' porque geralmente está com o conteúdo atrasado" (informação verbal, 2007).

No entanto — comentam ainda os orientadores da SEDUC-MT— como a escola está 'procurando se adequar' aos PCN's, promovendo momentos e situações que representem uma determinada realidade (escola, bairro, localidades etc), muitas dessas atividades, quando temáticas, envolvem

[15] Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso – **CEF**-Coordenadoria do Ensino Fundamental (2007)

a construção de maquetes, e que são posteriormente, apresentadas em eventos tais como feira de ciências, exposições, reuniões de pais e mestres etc. Dessa forma, identifica-se poucos trabalhos que apresentem as escalas de construção num padrão aceitável de rigor matemático e/ou arquitetônico. Em geral são construídas levando em conta um caráter mais 'artístico' que 'científico'. Essa característica percebe-se tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, salvo em escolas que atuam com cursos tecnológicos.

A competência do professor depende muito da clareza que o mesmo tem quanto ao processo ensino-aprendizagem. Ele precisa ter consciência do que ele quer para seus alunos e ao mesmo tempo perceber o que esses alunos realmente precisam. Skemp reafirmou ainda a importância da substantivação, pois ficou patente que no caso do pensamento relacional, a forma de compreensão busca as concepções mais gerais e mais abrangentes para que a compreensão sobre o particular seja mais definitiva. Também ficou evidente que o instrumental visa a uma postura inversa. Cabe, portanto, ao professor essa decisão e clareza sobre qual temática desenvolver, quando desenvolver, como propor, a quem deve ser proposta essas atividadesr e ter evidente qual a meta que se pretende atingir com cada um dos modos de pensamentos e ainda, como se efetiva a complementaridade entre os dois pensamentos.

3.2.1. O problema da divisão de um cubo como atividade instrumental e relacional.

O ato e a capacidade de visualizar uma situação e matematizá-la é normalmente muito difícil de aprender e por conseqüência muito mais ainda difícil de ser ensinado, principalmente por meio de regras e procedimentos. É fundamental possibilitar momentos em que a intuição possa ser um elemento desencadeador. É importante que o aprendiz possa sentir, e que tenha claro a forma como essas definições colaboram para isso, que visualizar indica igualmente uma percepção, uma compreensão, um entendimento, uma ação da inteligência, uma consolidação do conhecer e, portanto, uma comprovação de saber (*eu vi, eu entendi, então eu sei... pois aprendi!).*

Dessa forma, fica evidente que essa noção de visualização não é apenas uma ação mecânica dos olhos, não é um ato de fixar os olhos e ver uma imagem pura e simplesmente, da mesma forma como um filme é visto, uma paisagem é olhada, de forma contemplativa. Visualizar não é um ato de 'olhar' intuitivamente assim como não é algo puramente empírico, é mais profundo, que engloba isso e muito mais. Para se chegar ao estágio que se consiga, com toda convicção, dizer a expressão: '*eu visualizei! ',* perceber-se-á que nesse processo todo foi envolvido muito raciocínio, experiência vivenciada, experiência acumulada historicamente e uma capacidade muito grande de estabelecer relações (pensamento relacional)

Observando uma situação apresentada por Otte (1994, 254), "é dado um cubo relativamente grande, cujo propósito é dividi-lo em 27 outros cubos menores". Pode-se utilizar como um dos processos para isso, fazendo ao todo 6 cortes no grande cubo, sendo dois cortes em cada um dos planos xy, xz e yz, de acordo com a Figura 13 a seguir:

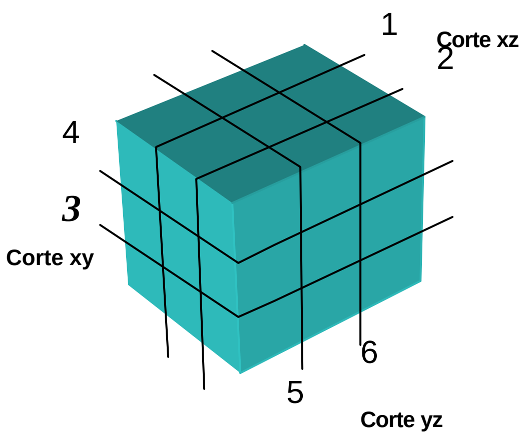


FIGURA 13: DIVISÃO DE UM CUBO EM 27 OUTROS MENORES

Uma pergunta poderia ser feita: —" É possível conseguir os mesmos 27 cubos menores efetuando um menor número de cortes?

Inúmeros processos poderiam ser desenvolvidos, como por exemplo:

- Fazer um 1º corte como o corte 1 anteriormente indicado na Figura 13.
- Pegar a parte menor, reagrupar junto a parte maior para efetuar o 2º corte, que também cortará a parte menor (situação que não aconteceu no processo mostrado na Figura 13, pois o 2º corte dividia apenas o restante do cubo).
- Juntar novamente …

Com essa idéia poder-se-ia dar continuidade: bastando sempre reagrupar e dar novos cortes, envolvendo todos os materiais, conforme indica a figura 14 a seguir, ilustrando o procedimento passo a passo:

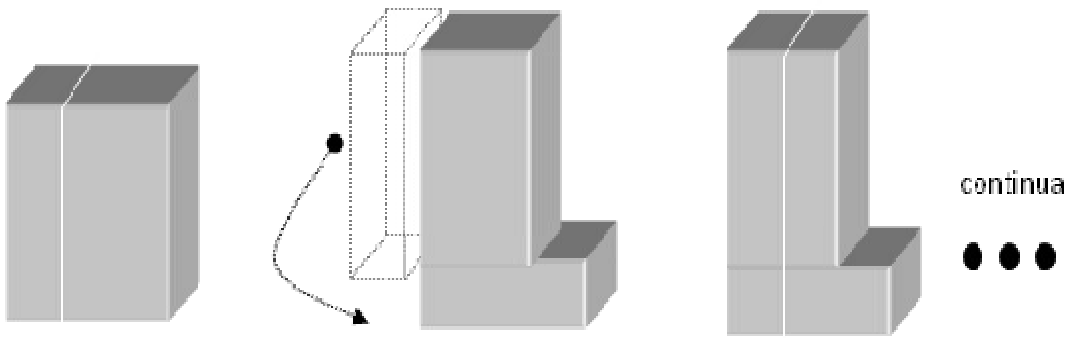


FIGURA 14: INDICAÇÃO DE UMA OPÇÃO DE CORTE DE UM CUBO EM 27 OUTROS CUBOS MENORES

Cortar, juntar, contar 1; juntar, cortar, contar 2; ... → **método da exaustão**

Pensamento Instrumental: Necessidade do uso de material concreto, manipulação, algorítmo.

Buscar relações entre as propriedades do cubo grande com a dos pequenos, em função da sua disposição no cubo grande...

Pensamento Relacional: Os conceitos matemáticos denotam relações entre objetos.

Mas até aqui não é possível ter nenhuma certeza de conseguir o intento. Para essa certeza o processo tem que ser completado ou então se poderia começar a estabelecer relações, como por exemplo: começar imaginando um dos cubos pequenos que se localiza num dos vértices do cubo grande. Para extraí-lo do cubo grande bastaria dar 3 cortes apenas, pois nele já são visíveis as outras 3 faces *(por exemplo frente, superior, lateral)*. Torna-se necessário fazer uma pergunta: —"Esse tipo de tentativa de redução de cortes poderia ser estendido a todos os 27 cubos?" Ao buscar essa relação com as quantidades de cubos que expusesse alguma(s) face(s) visível(is) chegar-se-ia à conclusão de que é possível reduzir alguns cortes a quase todos os cubos pequenos, com exceção de um —*precisamente o cubo pequeno que se encontrasse exatamente no centro do cubo grande, sendo esse o único que não apresenta face visível, não importando o quanto se gire o cubo grande*— Dessa forma, para esse único e solitário cubo, ter-se-ia que efetuar os 6 cortes para se obter as 6 faces. Então a relação do número de faces de um cubo, sua localização no cubo grande e a existência ou não de faces visíveis é que possibilita afirmar que não será possível dividir um grande cubo em 27 pequenos cubos com menos de 6 cortes.

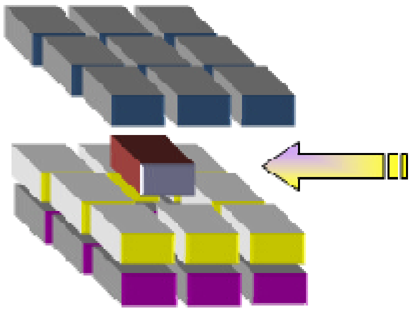


FIGURA 15: RESOLUÇÃO VISUAL DO PROBLEMA DO CUBO

Isso exemplifica a necessidade de 'enxergar' soluções de situações através da percepção global do processo, sendo necessário, para tanto, o estabelecimento de relações entre um dos cubos com o cubo maior e ter sempre em evidência o objetivo que o problema propõe. Se continuasse a desenvolver, por tentativa, o processo anteriormente iniciado, estaria ainda tentando, talvez pelo método da 'exaustão', buscar a solução, preocupando-se apenas com o grande processo de 'tentar dividir'.

Tem-se que o maior obstáculo epistemológico que se encontra para a verdadeira compreensão do conhecimento, ou seja, para que se possa atingir a ‘abstração’ é a interiorização do conceito de espaço. Primeiro porque é nela que essa ‘*abstração*’ é montada e consolidada, e segundo porque essa é a relação que, no *‘imaginário*’ se faz com o real, ou seja, começa-se a ver, ‘*internamente*’, aquilo que se está vendo, ‘*externamente*’, em relação ao real. Vale ressaltar que *ver internamente* é muito mais complexo e mais difícil que o ato de ver com os olhos. Vide figura 15 acima.

3.2.2. Como soluções diferenciadas e soluções complementares podem auxiliar na Resolução de Problemas.

Dentre as inúmeras situações que podem servir de estímulo para o desenvolvimento da Matemática, além de estudos contextualizados, estudos de casos, aplicações em outras Ciências, interpretação de fatos históricos etc, pode-se destacar as atividades envolvendo Recreações Matemáticas ou também chamadas de Resolução de Problemas. Essas atividades além de serem muito aceitas por parte dos alunos em geral, inegavelmente constituem um campo muito fértil para desenvolver o pensamento humano, pois sem perder seu potencial criativo e investigativo, possibilitam a sensação de ‘fugir’ ou ‘desobrigar’ um pouco do formalismo acadêmico que, principalmente as escolas, muitas vezes teimam em se evidenciar e perpetuar.

Com elas, tem-se a possibilidade de sentir-se desafiado, possibilitar que sentimentos como a intuição, a imaginação e a criatividade sejam pontos de partida para desenvolvimento de atividades matemáticas. Históricamente, a teoria das equações, probabilidades, cálculo infinitesimal, teoria dos conjuntos, topologia etc, são estruturas matemáticas surgidas a partir de situações recreativas.

Durante o desenvolvimento da humanidade, quebra-cabeças, adivinhações e paradoxos sempre foram muito populares e eram atividades comumente exercidas por Kepler, Pascal, Fermat, Leibnitz, Euler, Lagrange, Hamilton, Cayley, Coway dentre outros e ainda como indicado por Kasner & Newman (1968):

> as pesquisas em Matemática recreativa surgiram do mesmo desejo de saber, foram guiadas pelos mesmos princípios e exigiram o empenho das mesmas faculdades que as pesquisas que produziram as descobertas mais profundas em Matemática e na Física Moderna. KASNER e NEWMAN (1968, p. 155).

A 'liberdade' de poder deixar o pensamento fluir, sentir a criatividade querer 'saltar' das mentes, a inquietação em tentar dar uma solução, de querer entender os mecanismos, os 'truques' são algumas das características de atividades recreativas matemáticas, ainda que muitas vezes não seja fácil interpretar precisamente determinados problemas. Ao tentar buscar as soluções, é natural se utilizar do método das tentativas e erros feito pela maioria das pessoas ao invés de uma abordagem matemática direta, até pelo fato de que geralmente, o primeiro método seja mais fácil que o segundo ou então de considerar o fato de que inicialmente um 'método empírico' exigiria menor esforço para tanto.

Porém, em muitos casos, se alguém com características de solucionador de problemas detem experiências, seja com problemas análogos ou então domina uma boa gama de ferramentais matemáticos e ainda tem uma boa capacidade de análise, pode facilmente chegar a sistematizar equações algébricas formidáveis que muitas vezes são mais fáceis de resolver que o ato de ter que transformar problemas em seqüências de palavras organizadas, para posteriormente serem traduzidos para símbolos e esses, por sua vez, serem colocados em equações próprias para que, aquele problema específico, possa ser resolvido.

Para pensar de forma relacional, nas situações a serem estudadas, considera-se fundamental se preocupar em filtrar e desprezar todos os elementos considerados não-essenciais do problema, procurando com isso perceber uma possível estrutura lógico-matemática, que não necessariamente, tenha que ser expressa em números, ângulos, linhas, medidas, mas como de fato acontece, determinando a relação interna essencial entre os elementos componentes do problema.

A seguir será apresentada a discussão de dois problemas que têm um fio condutor comum: suas concepções geométricas, aritméticas e algébricas, sendo possível perceber as interações em função das dualidades, bem como elas contribuem entre si, denotando com isso também uma complementaridade. Dessa forma, é visível a possibilidade dessas três abordagens em cada um dos problemas, com as seguintes particularidades: no primeiro caso cada abordagem proporciona uma forma de solução para o problema, porém, cada vez que as discussões são aprofundadas o nível de resolução torna-se mais engenhoso e matematizado; no segundo caso, cada estilo de abordagem melhoraria as chances de solucionar o problema, sem fornecer a resposta definitiva, porém, contribuindo para nela chegar. O conjunto das várias abordagens dá a segurança necessária para fornecer a solução pretendida.

Caso 1: Problema das mesas de um Serviço de *Buffet*:

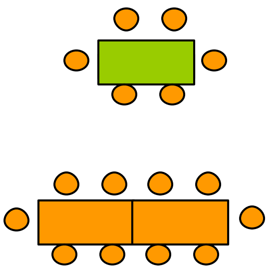


FIGURA 16: ARRANJO PARA UMA E DUAS MESAS

Um *buffet* organiza festas tendo como parâmetro mesas e números de lugares de acordo com a seguinte disposição e condição indicada na figura 16 ao lado:

- Uma mesa comporta 06 lugares de acordo com o esquema:
- Em se utilizar mais de uma mesa, essas devem se conectar pelas extremidades mais curtas. Então duas mesas comportam 10 lugares, e assim por diante;

Pergunta-se: *Quantas mesas seriam necessárias para atender uma festa com 40 convidados?*

Podendo persistir com o mesmo raciocínio e continuar a montar o esquema acima proposto, dando uma resolução geométrica (esquemática) como a da figua 17 abaixo

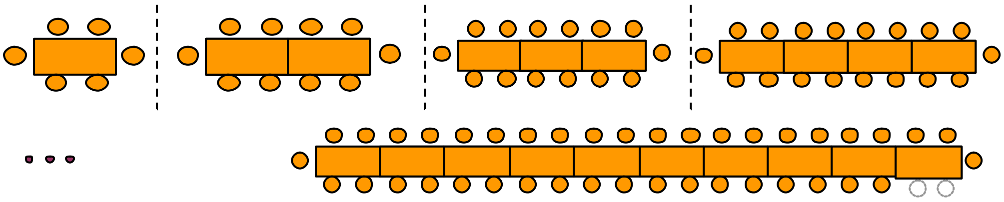
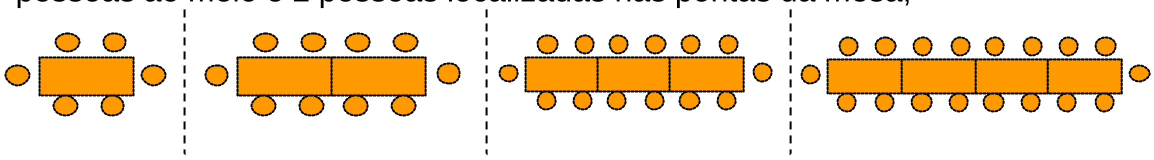


FIGURA 17: GENERALIZAÇÃO GEOMÉTRICA PARA 10 MESAS

Tem-se então como resultado a quantidade de 10 mesas, sendo que uma delas não estaria sendo utilizada completamente. Essa resolução é bastante intuitiva e empírica, conduz rapidamente à resposta.

Olhando para o problema de outra maneira, pode-se utilizar do esquema e estruturar uma análise em termos das quantidades e como elas se 'comportam'. Então, observando as figuras, percebe-se que em cada mesa, as pessoas se posicionam de duas maneiras: ora ocupam as 'pontas', ora ocupam as laterais maiores, que, nesse caso, pode-se apelidar de 'meios'.

Na primeira configuração indicada na figura 18, identifica-se 4 pessoas ao meio e 2 pessoas localizadas nas pontas da mesa;



4 + 2 = 6   8 + 2 = 10   12 + 2 = 14   16 + 2 = 18

FIGURA 18: GENERALIZANDO UMA SOLUÇÃO ARITMÉTICA

A cada nova mesa tem-se sempre múltiplos de 4 para os meios acrescidos de duas pessoas da ponta. Dessa forma, seria fácil obter uma solução aritmética para o problema, estruturando uma tabela de situações. (vide Tabela 1 ao lado).

Mesas	**Organização das pessoas**	**Total de pessoas**
1	4 x 1 + 2	6
2	4 x 2 + 2	10
3	4 x 3 + 2	14
4	4 x 4 + 2	18
: :	: :	: :
9	4 x 9 + 2	38
10	4 x 10 + 2	42

TABELA 1: TABELA DE SITUAÇÕES ARITMÉTICAS

Quanto aos resultados, nota-se que, a partir de 6 pessoas, cada nova mesa implica sempre um acréscimo de 4 pessoas. Dessa forma, ao fazer as respectivas contagens, fica claro que 10 mesas são suficientes para atender o problema, **aritmeticamente** falando.

variável	relação	produção
1	4 x 1 + 2	6
2	4 x 2 + 2	10
3	4 x 3 + 2	14
:	:	:
m	4 · m + 2	p

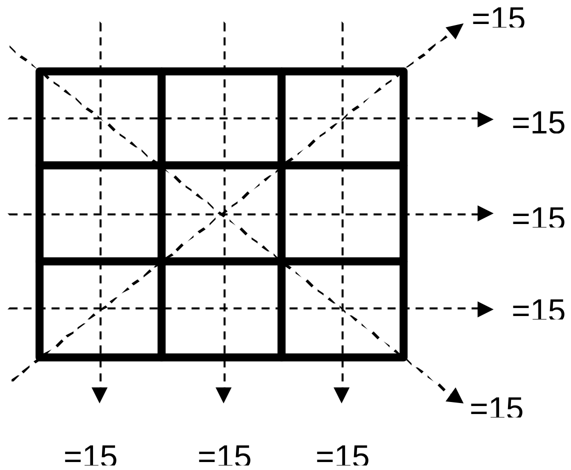
TABELA 2: TABELA DE GENERALIZAÇÃO ALGÉBRICA

Olhando mais ainda para essa resolução, principalmente na coluna central, observa-se valores que se repetem em qualquer configuração e valores que variam a cada situação e dessa forma, a analogia é rapidamente feita quando se relacionam essas variáveis com o número de mesas utilizadas, possibilitando facilmente uma generalização algébrica para o problema que relaciona pessoas **(p)** com quantidade de mesas **(m),** levando em conta algumas regras para estabelecer a configuração.

Como resultado dessa generalização, pode-se concluir que a seguinte equação representaria muito bem o problema proposto: **4 m + 2 = p**, sendo que, para esse caso, já se conhece o total de pessoas (p) que participarão do evento. Ao resolver essa equação, para p = 40, ‘matematicamente’ encontrar-se-á a solução m = 9,5 sendo necessário o cuidado ao analisar a coerência desse resultado, pois numa situação real só interessaria o fato de que, quantidades de mesas deveriam sempre ser valores inteiros, pois não se poderia ‘montar’ ½ mesa. Dessa forma, se m for 9, duas pessoas ficariam sem acomodação. A melhor solução de fato seria m = 10, que estaria atendendo a proposição.

Vale a pena observar ainda que a forma generalizada possibilita a solução não só desse estilo de problema, mas ela de fato pode representar por completo uma situação. Ela poderia servir também para indicar o número total de pessoas ao se utilizar uma quantidade conhecida de mesas. Dessa forma, essa **representação algébrica**, ajuda a modelar e/ou controlar um determinado contexto.

Caso 2: Problema do Quadrado Mágico de 9 casas:



1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9

FIGURA 19: FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DO QUADRADO MÁGICO DE 9 CASAS

Montar um quadrado mágico de 09 casas cujas somas das horizontais, verticais e diagonais resultam sempre 15, usando para isso números de 1 a 9 sem repetição.

Poder-se-ia pensar em dois níveis de expectativas quanto à sua resolução se o problema fosse apresentado a um grupo qualquer:

1) Num primeiro nível, o que mais comumente ocorre é uma resolução de forma empírica, buscando a solução por tentativas entre erros e acertos; atribuindo valores, de forma aleatória e testando os resultados nas diversas direções. Isso foi verificado em vários momentos em que esse problema foi proposto, principalmente em cursos de capacitação e formação de professores no Estado de Mato Grosso. Com isso nem todos os participantes se motivavam a dar uma solução, quando o

procedimento tornava-se longo e cansativo. A maioria colocava-se num patamar de expectativas, aguardando aqueles que estavam num processo mais empolgado e num estágio conclusivo para então se colocar como 'partícipe' da solução.

2) Num segundo nível, passível de utilizar alguns instrumentos matemáticos (regras já conhecidas universalmente), bem como basear-se no pensamento relacional para estabelecer pistas (relações) que conduzam à resolução, uma vez que não se descobriu uma 'fórmula geral' ou uma 'equação' que desse uma resposta direta.

Assim como na própria evolução histórica ou mesmo do próprio conhecimento humano, seria coerente buscar apoio numa referência mais próxima do concreto, da representação visual, esquemática, que pode ser obtida numa disposição geométrica e, ao 'olhar' para o quadrado mágico, ainda que vazio, pode-se buscar algumas características ou particularidades geométricas tais como 'esquinas' (cantos), quadrado central, linhas centrais (horizontal ou vertical), diagonais etc. Veja figura 20 a seguir:

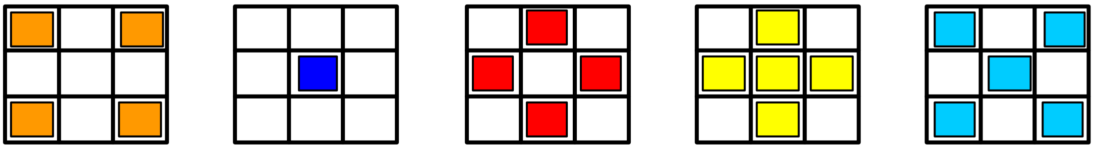


FIGURA 20: POSSIBILIDADE DE DISPOSIÇÃO GEOMÉTRICA NO QUADRADO MÁGICO

Usando esses referenciais, pode-se criar várias hipóteses para, no desenvolver da resolução, comprová-las ou não. Pode existir e qual deve ser a relação com os números a serem dispostos nos cantos? Diagonais? Colunas centrais? E quanto ao quadrado central do quadrado mágico?

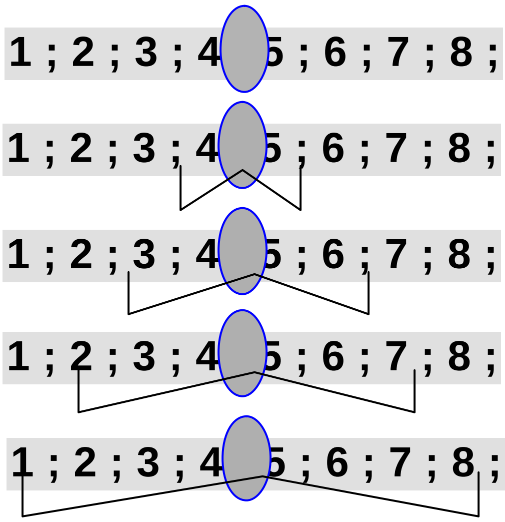


FIGURA 21: NÚMEROS EQÜIDISTANTES

Com base na Aritmética apresenta-nos como dada uma seqüência de 1 até 9 conforme o esquema ao lado. Tem-se o 5 como número central e que se somado com os números dispostos eqüidistantes a partir do 'centro', obter-se-ia sempre 15, observando ainda que esses números eqüidistantes ora sejam pares, ora ímpares. Compare na figura 21 ao lado.

Tem-se até então pistas que já ajudariam a resolver melhor o problema, porém, ainda que valiosas essas pistas, não garantem uma posição real para a disposição dos números, no entanto, melhoram sensivelmente o processo de tentativas.

A Aritmética possibilita indicativos sobre a natureza com que os números podem ser organizados (algo a ver com pares e ímpares). Em qualquer disposição dos algarismos, que formato de resultados pretende-se? e qual a natureza dele? Ora, pretende-se como resultado o 15, que é um resultado ímpar. Qual é a tarefa solicitada para obter esse resultado? Em qualquer circunstância tem-se que somar três algarismos para obter 15. Com o auxílio de relações **algébricas**, é viável estabelecer uma idéia geral que represente essas possibilidades. Sendo **p** uma indicação para números pares e **i** uma indicação para ímpares.

Então as possibilidades podem ser assim descritas e questionadas:

(1) $p + p + p = i$ (verdadeiro ou falso?);

(2) $i + i + i = i$ (verdadeiro ou falso?)

(3) $p + i + p = i$ (verdadeiro ou falso?);

(4) i + p + i = i (verdadeiro ou falso?)

É evidente que, para esse problema, as proposições (1) e (4) são falsas, não tendo como proporcionar o resultado 15, ou seja, ímpar. Com isso, estão se reduzindo as possibilidades para 50% das chances de erro ou de ‘trabalho em sí’. A preocupação será então, em dispor os números sendo eles todos ímpares ou no formato dois pares e um ímpar. Se retomar a justificativa observada quando abordado na Aritmética os números eqüidistantes juntamente com o número central, de fato será verificada essas duas possibilidades, ou seja, três números ímpares [(1 + 5 + 9) e (3 + 5 + 7)] ou então dois pares, no extremo, e um ímpar no centro [(2 + 5 + 8) e (4 + 5 + 6)].

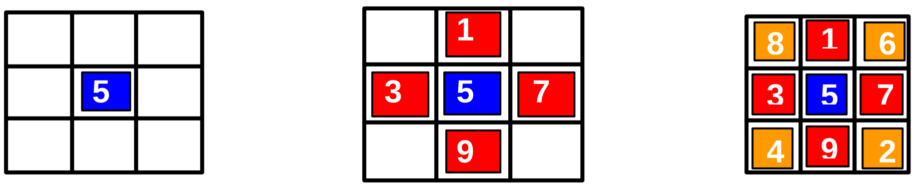


FIGURA 22: CENTRO, "MEIOS" E CANTOS DO QUADRADO MÁGICO

Ao se montar então os argumentos nos esquemas geométricos, parte-se da observação que o número central indicado é o 5. Testando-se a colocação das possibilidades envolvendo os três números ímpares, pode-se ter a seguinte configuração indicada na Figura 22 .

Faltando apenas as ‘esquinas’ ou ‘cantos’ do quadrado mágico pode-se basear as definições das opções restantes combinando as diagonais para completar os números pares faltantes e tem-se então o produto final indicado na Figura 22.

Uma simples atividade, praticamente de caráter lúdico como montar um quadrado mágico de 09 casas, cuja somas das horizontais, verticais e diagonais resultassem 15, usando para isso números de 1 à 9 sem repetição, poderia resultar dois níveis de expectativas se essa atividade fosse apresentada a um grupo qualquer:

1) Se o grupo agisse de forma essencialmente instrumental, provavelmente buscaria a solução por tentativas de erros e acertos, ou seja, valeria-se do método da exaustão;

2) Se relacional, poderia buscar um apoio inicial nas disposições e condições seguintes:

(a) **geométrica** (relação que poderia existir com os números, se dispostos nos cantos, colunas dos meios e quadrado central do quadrado mágico);

(b) Aritmética**,** observando que na sequência disposta de 1 até 9, com o 5 como número central, somado-se com os números dispostos equidistantes desse número central, encontraria sempre 15 como resultado;

(c) com auxílio da **álgebra**, estabelecendo quais as possibilidades de se somar 3 algarismos entre pares e ímpares e obter ímpar (15) como resultado. Em cada caso, haveria uma justificativa passível de ser defendida com fundamentos e facilitar o entendimento da Matemática não como a Ciência do certo e do errado, mas sim como a que possibilita diversos caminhos para responder uma mesma questão.

3.2.3. Matrizes e reticulados: Pensamento Relacional entre dois processos de análise de situações em contextos formais

Essa atividade tem por finalidade exemplificar como uma mesma situação-problema pode ser abordada usando processos diferenciados e formatos de soluções também diferenciados, sendo possível perceber as interações em função das dualidades, além de como essas contribuem entre si, denotando com isso uma complementaridade.

A atividade-problema é uma pequena descrição de um contexto simplificado e na sua proposta de solução e análise usou-se o processo de reorganização de uma matriz por meio da permutação entre linhas e colunas, processo esse descrito por Roberto Gimeno (1979). Em seguida, o mesmo problema foi resolvido numa estrutura de Reticulados e Análise Formal de Conceitos, apresentado por Rudolf Wille (1994). Ao comparar os dois processos, torna-se mais fácil perceber as relações e as correlações existente entre eles .

A proposição do problema: O Estudo sobre um banhado

Contexto: Essa atividade foi aqui simulada e descrita como se acontecida. Isso porque pode-se crer que ela realmente possa ser desenvolvida por meio da observação direta realizada num pequeno terreno que contenha um banhado e com isso estabelecer situações análogas.

Objetivo da atividade: Observar os seres vivos existentes e presentes no banhado e descobrir suas possíveis relações e inter-relações.

Definição dos objetos e características: Durante a observação, foram escolhidos 08 seres vivos e 09 características. Essa escolha *de objetos* e *propriedades (características)* surgiria da comparação entre as anotações a serem realizadas pelos alunos e, em função das indicações e votações, serem definidas as de maiores ocorrências.

Vale ressaltar que esse exercício de comparar e expor as observações realizadas é importante para a consolidação do pensamento. O debate para chegar a isso, possibilita, de uma maneira agradável, um ato contínuo de revisão de conceitos, defesa de opiniões, ampliação do conhecimento, assumindo o papel de ‘recuperação contínua’ ou mesmo uma atualização conceitual, no próprio processo de ensino-aprendizagem. Uma das melhores maneiras de organizar informações coletadas é estruturar os dados em forma de matriz também conhecida como tabela simples ou de dupla-entrada.

Construção da matriz: Os nomes dos seres vivos selecionados (objetos*)* podem ser colocados no topo da matriz, horizontalmente (sentido do eixo x*),* e as propriedades (*características*) indicadas, colocadas numa das laterais da matriz, verticalmente (no sentido do eixo y). É importante, para fins de melhor visualizar o processo de permutação de linhas e de colunas, se o procedimento for semelhante ao utilizado no jogo educativo denominado batalha naval, ou seja: aos objetos forem atribuídos números seqüenciais e às características forem atribuídas letras ordenadas alfabeticamente. A tabela abaixo exemplifica o procedimento.

A Vida num Banhado	1- Sangues suga	2- Pacu	3- Rã	4- Cachorro	5- Aguapé	6- Junco d'agua	7- Feijão	8- Milho
a-Usa água para Sobreviver								
b- Vive na água								
c- Vive na Terra								
d-Precisa de clorofila								
e-Dicotiledônea (duas gêmulas)								
f-Monocotiledônea (uma gêmula)								
g- Se locomove								
h-Possui membros								
i-São mamíferos								

FIGURA 23: MONTAGEM DA TABELA DE DUPLA ENTRADA DO CONTEXTO DE UM BANHADO

O próximo passo é preencher a matriz, hachuriando as intersecções (*cruzamentos entre linha e coluna)* no caso em se verifique quais dos objetos pesquisados possuem determinada propriedade, ou vice-versa. O resultado do preenchimento pode ser o apresentado abaixo.

A Vida num Banhado	1- Sangues suga	2- Pacu	3- Rã	4- Cachorro	5- Aguapé	6- Junco d'agua	7- Feijão	8- Milho
a-Usa água para Sobreviver	■	■	■	■	■	■	■	■
b- Vive na água	■	■	■		■	■		
c- Vive na Terra			■	■		■	■	■
d-Precisa de clorofila					■	■	■	■
e-Dicotiledônea (duas gêmulas)							■	
f-Monocotiledônea (uma gêmula)					■	■		■
g- Se locomove	■	■	■	■				
h-Possui membros		■	■	■				
i-São mamíferos				■				

FIGURA 24: PREENCHIMENTO DAS CARACTERÍSTICAS DOS OBJETOS NO CONTEXTO DE UM BANHADO

A reorganização da matriz por meio da permutação entre linhas e colunas

Uma primeira análise e reformulação das características: É necessário analisar se, num determinado contexto, um objeto possui ou não tal característica e se faz sentido ou não sua existência. Ex.: Se os objetos forem seres vivos, não faria sentido uma característica pertencente a seres inanimados. Ou ainda, *manter na matriz características extremamente gerais não seria redundante? por exemplo, a característica ‘**a’ - usam água para sobreviver** ou outras como **são seres vivos** ou **precisam de oxigênio para viver** ou então **são originárias do planeta Terra***, não contribuiria para melhor estabelecer conceitos, pois são muito amplas. Dessa forma, a exclusão da característica ‘**a**’ da matriz para fins de sua manipulação, não irá alterar o sentido sobre a compreensão da matriz.

A Vida num Banhado	1- Sangues suga	2- Pacu	3- Rã	4- Cachorro	5- Aguapé	6- Junco d'agua	7- Feijão	8- Milho
b- Vive na água	■	■	■		■	■		
c- Vive na Terra			■	■		■	■	■
d-Precisa de clorofila					■	■	■	■
e-Dicotiledônea (duas gêmulas)							■	
f-Monocotiledônea (uma gêmula)					■	■		■
g- Se locomove	■	■	■	■				
h-Possui membros		■	■	■				
i-São mamíferos				■				

FIGURA 25: EXCLUSÃO DE CARACTERÍSTICAS EXTREMAMENTE GERAIS, COMUNS A PRATICAMENTE TODOS OS OBJETOS

Permutação de linhas: Colocando no topo a característica **e**, devido ao fato de ser um vegetal e estar relacionada a um único objeto.

Como a ação anterior deixou indicado um objeto pertencente a um estilo de ambiente (terrestre), uma provável ação seria manter aglutinados os que se referem mais diretamente ao Reino Vegetal, procurando estabelecer uma seqüência ordenada de objetos envolvidos, do maior número de características para o menor As características serão ordenadas na forma: **c**®**d**®**f.**

Observa-se também que, coincidentemente, a seqüência de características que restou, refere-se exclusivamente ao Reino Animal e a seqüência continua sendo ordenada com características presente num maior número de objetos para menor número, ou seja, **b→g**®**h**®**i.**

A Vida num Banhado	*1- Sanguessuga*	*2- Pacu*	*3- Rã*	*4- Cachorro*	*5- Aguapé*	*6- Junco d'agua*	*7- Feijão*	*8- Milho*
e-Dicotiledônea (duas gêmulas)							■	
c- Vive na Terra			■	■		■	■	■
d-Precisa de clorofila					■	■	■	■
f-Monocotiledônea (uma gêmula)					■	■		■
b- Vive na água	■	■	■		■	■		
g- Se locomove	■	■	■	■				
h-Possui membros		■	■	■				
i-São mamíferos				■				

FIGURA 26: PERMUTAÇÃO DE LINHAS NA TABELA DE DUPLA ENTRADA (MATRIZ) NO CONTEXTO DE UM BANHADO

Permutação de colunas: Como já ficou aparente a presença de dois dos Reinos, os objetos podem ser organizados tomando-se esse referencial como parâmetro, ordenando-os conforme sua posição em relação ao topo da matriz, ou seja: **7** ®**8** ®**6**® **5.**

Após essa permutação, os elementos do Reino Animal já se encontram ordenados: **1** ® **2** ® **3** ® **4,** e todos os dados ficaram ordenados em torno da diagonal principal da matriz, dessa forma, muito mais fácil de perceber as inter-relações além de mais fácil de memorizar as informações, após esse arranjo.

Uma ressalva: essa permutação entre linhas e colunas foi realizada buscando, como referência, uma análise na relação a ser estabelecida entre objetos e suas características. Vale citar que essa estratégia não é absolutamente necessária, pois esse formato de atividade de ordenação não depende diretamente da necessidade de observar e se referendar nos objetos e características para fazer as permutações. É possível chegar à mesma conclusão organizando somente os 'quadrinhos' preenchidos e vazios, sabendo-se que uma boa ordenação é obtida ao conseguir aglutinar as informações em torno da diagonal principal sem a necessidade de conhecer o contexto ou basear-se exclusivamente nele. É um procedimento exclusivamente lógico-matemático. Com certeza esse fato é garantia da possibilidade de estabelecer algoritmos computacionais para sua resolução.

A Vida num Banhado	7- Feijão	8- Milho	6- Junco d'agua	5- Aguapé	1- Sangues suga	2- Pacu	3- Rã	4- Cachorro
e-Dicotiledônea (duas gêmulas)								
c- Vive na Terra								
d-Precisa de clorofila								
f-Monocotiledônea (uma gêmula)								
b- Vive na água								
g- Se locomove								
h-Possui membros								
i- São mamíferos								

FIGURA 27: PERMUTAÇÃO DAS COLUNAS DA MATRIZ NO CONTEXTO DE UM BANHADO

A representação da matriz por meio de reticulados

Partindo da matriz estruturada inicialmente na Figura 28 e usando a teoria dos reticulados, necessita-se das ferramentas que a teoria dos conjuntos oferece, para desenvolver a Análise Formal de Conceitos, que possibilitará ao final, a construção esquemática de um reticulado representando esse contexto.

A Vida num Banhado	1- Sanguessuga	2- Pacu	3- Rã	4- Cachorro	5- Aguapé	6- Junco d'agua	7- Feijão	8- Milho
a-Usa água para Sobreviver	■	■	■	■	■	■	■	■
b- Vive na água	■	■	■		■	■		
c- Vive na Terra			■	■		■	■	■
d-Precisa de clorofila					■	■	■	■
e-Dicotiledônea (duas gêmulas)							■	
f-Monocotiledônea (uma gêmula)					■	■		■
g- Se locomove	■	■	■	■				
h-Possui membros		■	■	■				
i-São mamíferos				■				

FIGURA 28: PREENCHIMENTO DAS CARACTERÍSTICAS DOS OBJETOS NO CONTEXTO DE UM BANHADO

Ao referir-se aos objetos, que aqui foi representado pelo conjunto O={1,2,3,4,5,6,7,8} e as características desses objetos, representadas por P={a,b,c,d,e,f,g,h,i}, pode-se determinar, quais os subconjuntos formados pelas partes dos conjuntos oriundos da relação binária OxP. Vide fig 29 abaixo

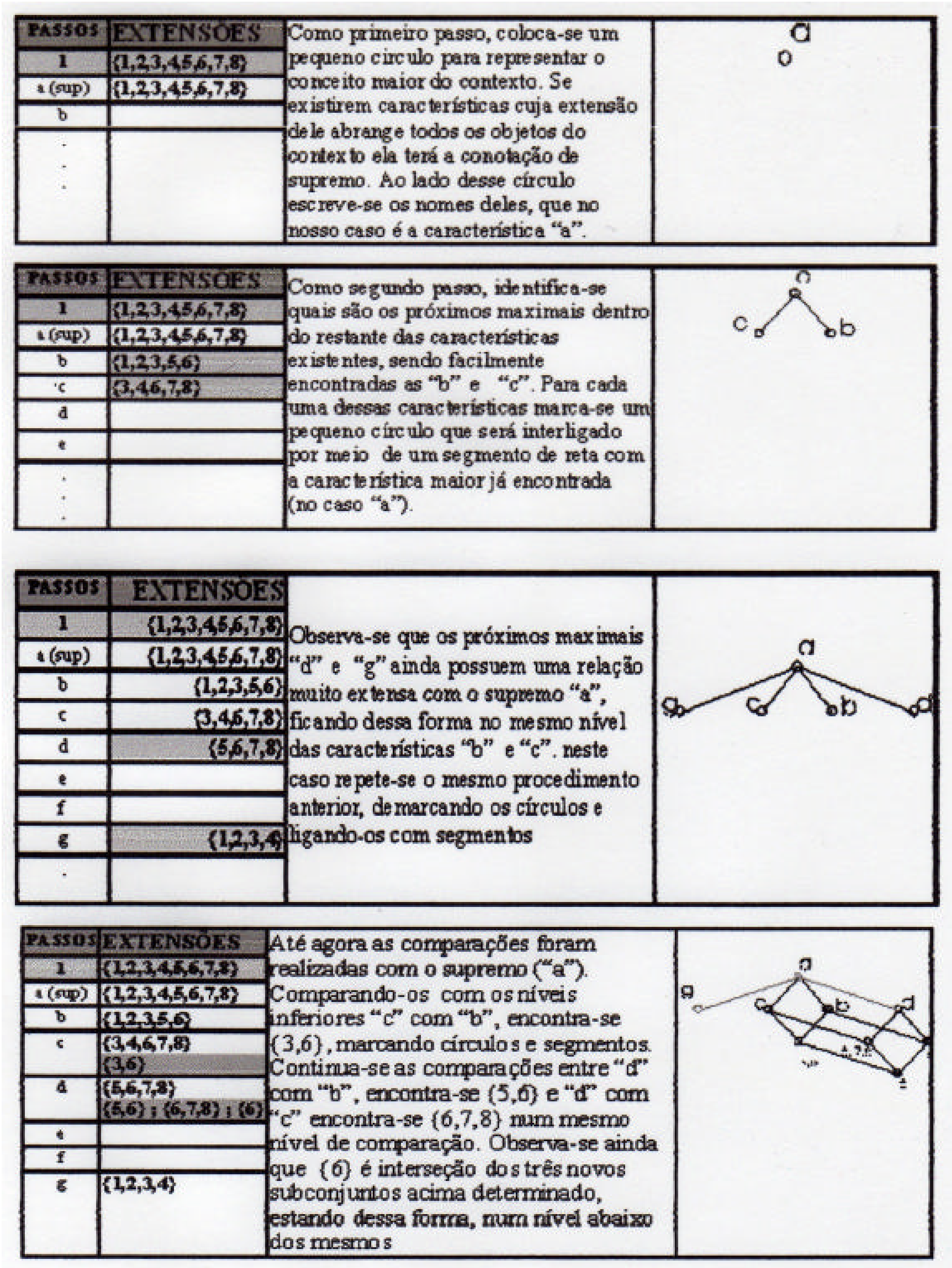
passo	extensão
1	{1,.... 8}
a	
b	{1,2,3,5,6}
c	{3,4,6,7,8}
	{3,6}
d	{5,6,7,8}
	{5,6}
	{6,7,8}
	{6}
e	{7}
	Ø

passo	extensão
f	{5,6,8}
	{6,8}
g	{1,2,3,4}
	{1,2,3}
	{3,4}
	{3}
h	{2,3,4}
	{2,3}
i	{4}

FIGURA 29: LISTAS DAS EXTENSÕES COM OS RESPECTIVOS PASSOS.

<u>**Primeiro passo**</u>: A extensão **O** (*objetos*) é registrada na Lista ao lado, no passo 1. Depois para cada **p** Î **P** (*propriedades*) faz-se: <u>**passo p:**</u> Com a intersecção **A** Ç **p'** para cada conjunto **A** que faz parte da lista. Registra-se essa intersecção na lista quando ela ainda não existir na mesma. Percebe-se facilmente que ao fim dessa lista constarão exatamente os conjuntos que são intersecções desses conjuntos de características com os conjuntos de características de conceitos. Para cada intersecção **A** pode-se definir a compreensão **A'.** Dessa maneira acham-se todos os conceitos **(A, A')** do contexto.

A determinação dos conceitos dessa maneira é conseguida de modo mais fácil quando normalmente, monta-se a tabela e ao mesmo tempo constrói-se um diagrama de linha dos conceitos usando a teoria dos reticulados. Com esse efeito, será refeito o exemplo do seres vivos no banhado. Todos os passos são apresentados no esquema a seguir.



PASSOS	EXTENSÕES
1	{1,2,3,4,5,6,7,8}
a (sup)	{1,2,3,4,5,6,7,8}
b	
. . .	

Como primeiro passo, coloca-se um pequeno circulo para representar o conceito maior do contexto. Se existirem características cuja extensão dele abrange todos os objetos do contexto ela terá a conotação de supremo. Ao lado desse círculo escreve-se os nomes deles, que no nosso caso é a característica "a".

PASSOS	EXTENSÕES
1	{1,2,3,4,5,6,7,8}
a (sup)	{1,2,3,4,5,6,7,8}
b	{1,2,3,5,6}
c	{3,4,6,7,8}
d	
e	
. . .	

Como segundo passo, identifica-se quais são os próximos maximais dentro do restante das características existentes, sendo facilmente encontradas as "b" e "c". Para cada uma dessas características marca-se um pequeno círculo que será interligado por meio de um segmento de reta com a característica maior já encontrada (no caso "a").

PASSOS	EXTENSÕES
1	{1,2,3,4,5,6,7,8}
a (sup)	{1,2,3,4,5,6,7,8}
b	{1,2,3,5,6}
c	{3,4,6,7,8}
d	{5,6,7,8}
e	
f	
g	{1,2,3,4}
.	

Observa-se que os próximos maximais "d" e "g" ainda possuem uma relação muito extensa com o supremo "a", ficando dessa forma no mesmo nível das características "b" e "c". neste caso repete-se o mesmo procedimento anterior, demarcando os círculos e ligando-os com segmentos

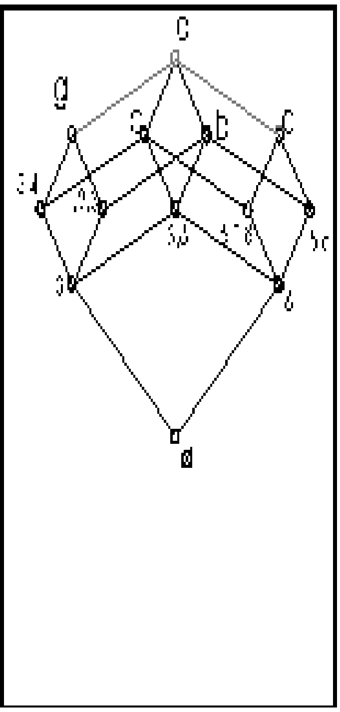
PASSOS	EXTENSÕES
1	{1,2,3,4,5,6,7,8}
a (sup)	{1,2,3,4,5,6,7,8}
b	{1,2,3,5,6}
c	{3,4,6,7,8} {3,6}
d	{5,6,7,8} {5,6} ; {6,7,8} ; {6}
e	
f	
g	{1,2,3,4}

Até agora as comparações foram realizadas com o supremo ("a"). Comparando-os com os níveis inferiores "c" com "b", encontra-se {3,6}, marcando círculos e segmentos. Continua-se as comparações entre "d" com "b", encontra-se {5,6} e "d" com "c" encontra-se {6,7,8} num mesmo nível de comparação. Observa-se ainda que {6} é interseção dos três novos subconjuntos acima determinado, estando dessa forma, num nível abaixo dos mesmos

FIGURA 30 A: SEQÜÊNCIA DE PROCEDIMENTO PARA MONTAGEM DO RETICULADO

PASSOS	EXTENSÕES
1	{1,2,3,4,5,6,7,8}
a (sup)	{1,2,3,4,5,6,7,8}
b	{1,2,3,5,6}
c	{3,4,6,7,8} {3,6}
d	{5,6,7,8} ; {5,6} {6,7,8} ; {6}
e	
f	
g	{1,2,3,4} {1,2,3} {3,4} {3}
h	

De forma análoga, compara-se "g" com "b", depois com "c", encontra-se, ao mesmo nível de {3,6} os pontos simétricos aos encontrados na etapa anterior, que são os {1,2,3} e {3,4}. Ainda de forma semelhante e simétrica à determinação de {6}, encontra-se {3} intersecções aos subconjuntos {3,6}, {1,2,3} e {3,4}. Observe ainda que já encontra-se, até esse momento, dois subconjuntos com elementos unitários ({3} e {6}) e a intersecção entre ambos é inevitavelmente ∅, ou seja, determina-se o ínfimo do reticulado. Traçando então os círculos e respectivos segmentos, tem-se a figura ao lado.



PASSOS	EXTENSÕES
1	{1,2,3,4,5,6,7,8}
a (sup)	{1,2,3,4,5,6,7,8}
b	{1,2,3,5,6}
c	{3,4,6,7,8} ; {3,6}
d	{5,6,7,8} ; {5,6} {6,7,8} ; {6}
e	{7} ; Ø
f	{5,6,8} {6,8}
g	{1,2,3,4} ; {1,2,3} {3,4} ; {3}
h	{2,3,4} {2,3}
i	{4}

Novamente procuramos os maximais dentre os sub-conjuntos não relacionados ainda e encontramos "f" e "h" que neste caso irão formar níveis intermediários aos já encontrados "d" e "{5,6}" bem como "g" e "{3,4} respectivamente. Outro nível intermediário irá criar {6,8} e {2,3}, ligando-se "f" e "{6,7,8}" bem como "h" e "{1,2,3} quando das comparações entre "f" e "h" com os demais subconjuntos. Os últimos maximais a serem determinados referem-se aos conjuntos unitários "e" e "i" que interligados a {6,7,8} e {3,4} respectivamente, considerando as intersecções, completam o reticulado.

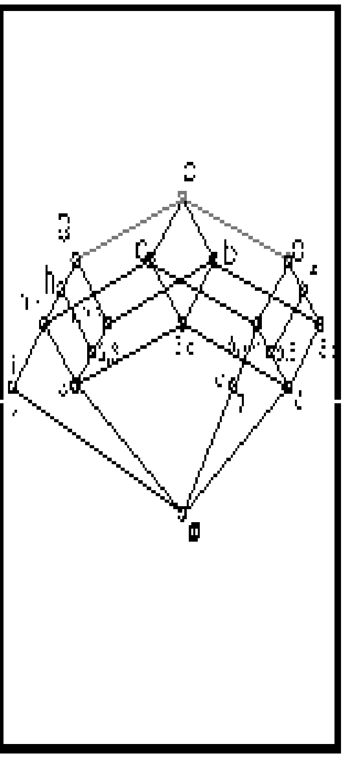


FIGURA 30B: SEQÜÊNCIA DE PROCEDIMENTO PARA MONTAGEM DO RETICULADO (CONTINUAÇÃO)

Esse algoritmo aqui descrito, torna-se tedioso e cansativo para o caso de desenvolver trabalhos envolvendo contextos maiores porque, durante cada passo, precisa-se verificar de novo na lista, comparando cada novo subconjunto com os já listados. Para isso, existem alguns algoritmos computacionais que tornam essa estruturação mais rápida. Nesse caso, a única coisa do contexto que é empregada são **operadores de fechamento** usados para montar a relação entre imagens do conjunto A $\rightarrow$ A'' por isso, esse algoritmo é um algoritmo para produzir todos os fechamentos desse modelo de operador.

Nesse ponto, obtém-se o reticulado abaixo. Nessa primeira comparação, é apresentada a relação entre características (*letras*) e objetos (*números*) em cada nó do Reticulado Completo, sendo que no mesmo é representado o supremo (*a=12345678*) e o ínfimo (*abcdefghi* = *Æ*).

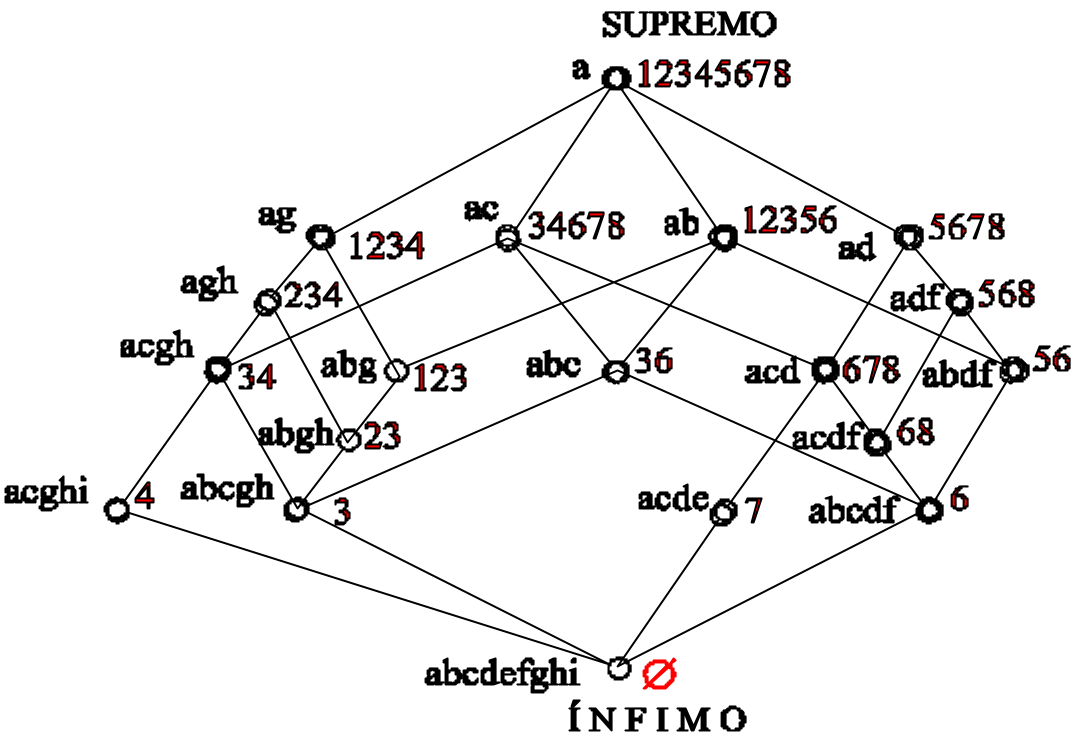


FIGURA 31: IDENTIFICAÇÃO DOS NÓS DO RETICULADO APONTANDO AS RELAÇÕES ENTRE CARACTERÍSTICAS (LETRAS) E OBJETOS (NÚMEROS) NO CONTEXTO DE UM BANHADO

A análise e comparação dos dois resultados obtidos

Cada um dos processos produziu soluções que, se observadas empiricamente, não evidencia muito a relação diretamente entre ambos, porém, a partir de agora será analisado o que cada caso produziu e quais são as inter-relações e complementariedades.

A análise da matriz ordenada: Observando a ordenação obtida na matriz (Figura 31 e também na Figura 36) fica evidente que essa ordenação estabeleceu de fato duas reais subdivisões em relação aos objetos dos dois reinos identificados (*vegetal e animal,* vide Figura 36*).* Em cada um dos reinos identificaram-se objetos em três estilos de ambientes (*terrestre, misto e aquático).* Cada um dos reinos pode sugerir a evolução dos seres vivos partindo do estilo de ambiente, conforme indicado na figura a seguir:

Mais recente	→	intermediário	→	mais antigo	→	intermediário	→	mais recente
Terrestre	→	Misto	→	Aquático	→	Misto	→	Terrestre

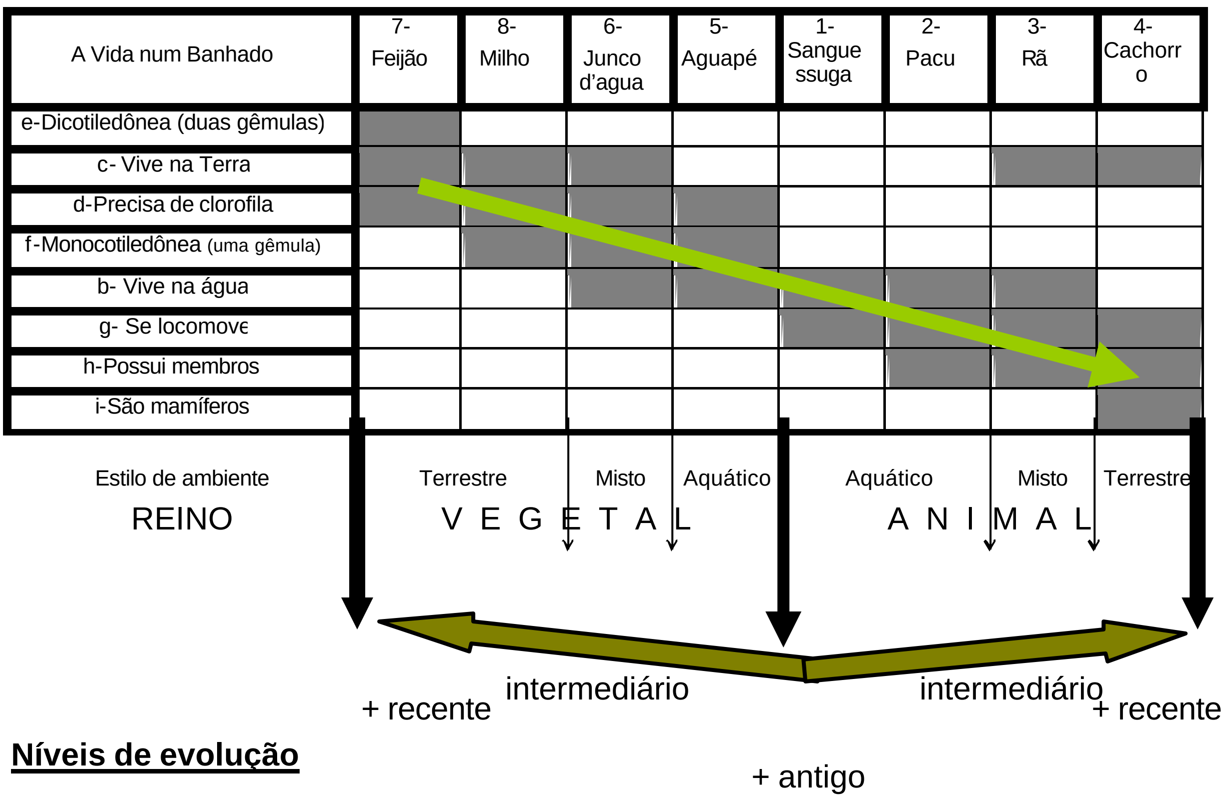


FIGURA 32: ANÁLISE DA MATRIZ ORDENADA NO CONTEXTO DE UM BANHADO

Até então, essas novas observações, só se tornaram possíveis graças à possibilidade de reorganização da matriz original. Porém, vale lembrar que essa reorganização não é um processo fácil de construir, principalmente quando se tem matrizes maiores.

Da mesma forma, será analisado o reticulado, já estruturado e o que ele pode oferecer.

Agora, para cada nó do Reticulado, busca-se uma identificação, seja pelas **características** que se concentram, na horizontal, basicamente a partir da metade do reticulado para cima, em direção ao supremo. Já a maioria dos **objetos** encontra-se em situação oposta, ou seja, da metade do reticulado para baixo, na direção do ínfimo. Então, num reticulado completo, existe uma tendência de 'separação', no sentido horizontal, entre características e objetos.

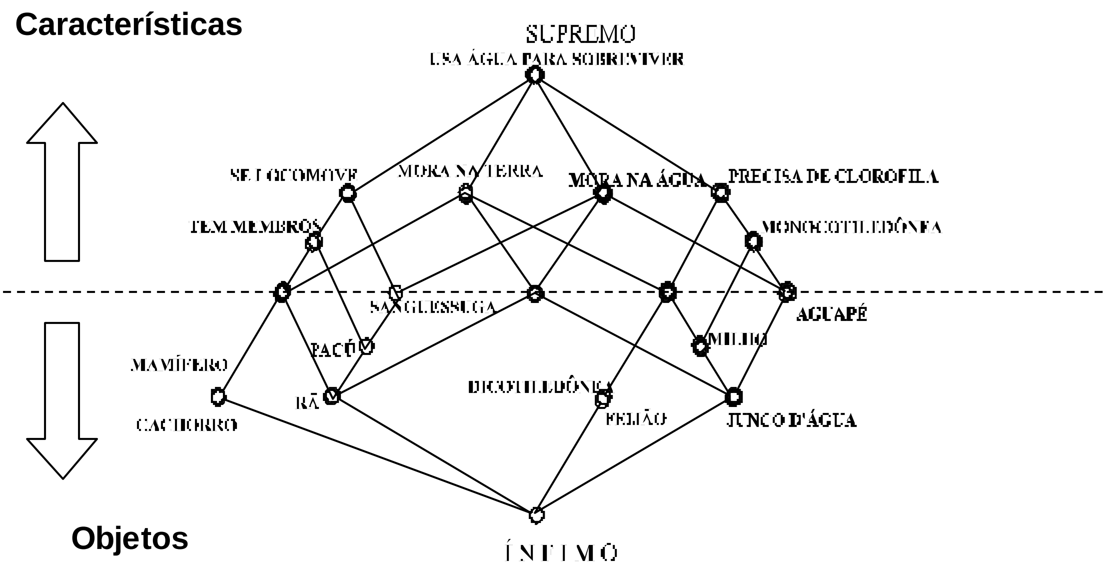
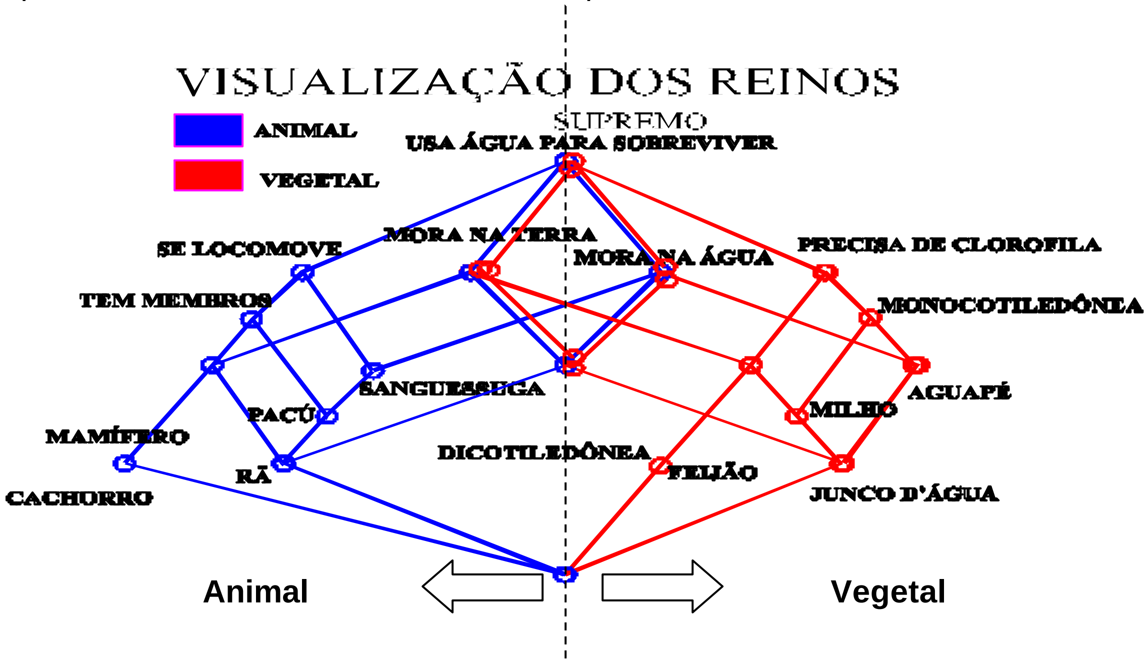


FIGURA 33: SUBSTITUIÇÃO DAS LETRAS E NÚMEROS PELOS RESPECTIVOS NOMES DOS OBJETOS E DAS CARACTERÍSTICAS NO CONTEXTO DE UM BANHADO

O acompanhamento, a partir do supremo, das características relativas a um dos reinos, passando pelos animais relativos a esse reino, até atingir o ínfimo, pode ser elaborado como o indicado na Figura 38. Observa-se que o reticulado 'ficou agora dividido' simetricamente em duas partes (esquerdo-direita), relativo aos dois reinos. Pode-se comparar com a matriz anteriormente descrita na Figura 36. Chega-se à mesma solução com dois processos diferenciados e demarcados por cores diferenciadas.



Mais recente Intermediário Mais antigo

FIGURA 34: VISUALIZAÇÃO DOS REINOS NO CONTEXTO DE UM BANHADO

O mesmo pode ser comparado em relação ao estilo de ambiente. Parte-se de um dos ambientes, saindo do supremo identificando as características, por exemplo; Terrestre, e 'desce' pelo reticulado, passando pelas características e aí pelos objetos até atingir o ínfimo. Procede-se de forma idêntica para os outros estilos de ambientes. Para melhor visualizar foi pintado cada ambiente com cores diferentes. Acompanhando ainda o reticulado, observa-se que o sentido da evolução dá-se da direita para a esquerda Ex. Reino Vegetal: feijão ← milho ← junco ← aguapé. Reino Animal: cachorro ← rã ← pacú ←sanguessuga. A evolução também ocorre com as características: Ex . animais: usa água ← mora na terra ← se locomove ← tem membros ← mamíferos.

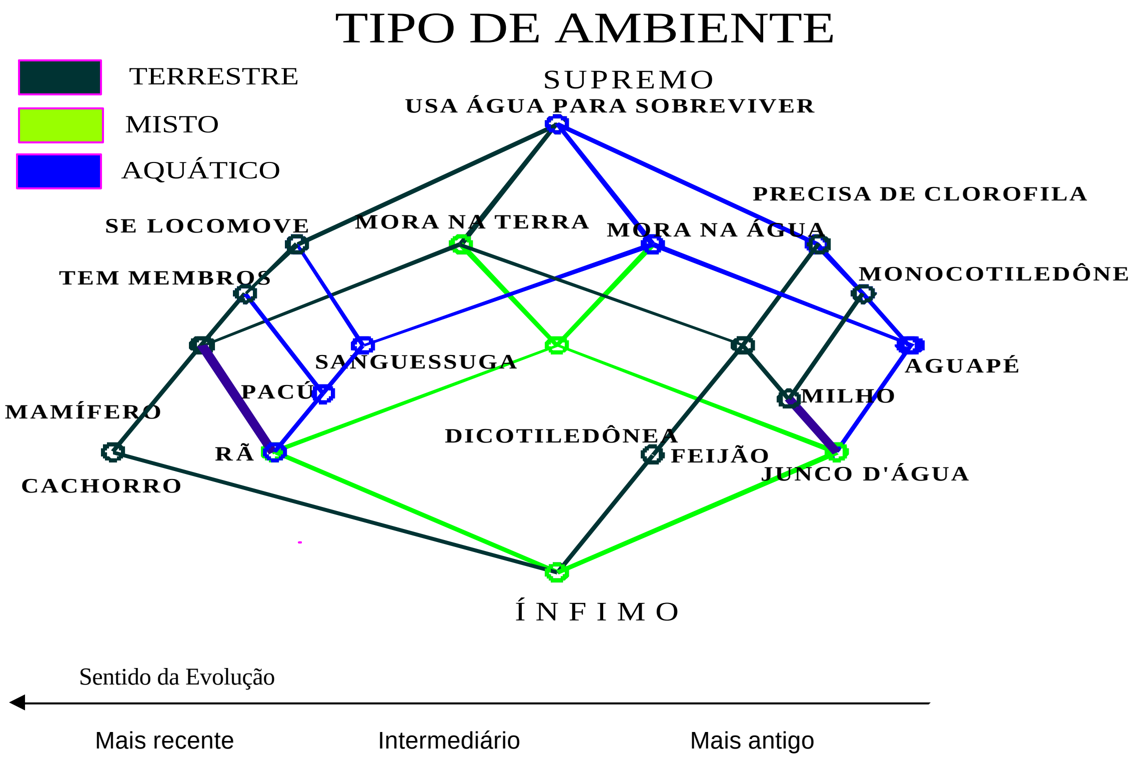


FIGURA 35 VISUALIZAÇÃO DOS ESTILOS DE AMBIENTE DE UM BANHADO

Lembrar que os reticulados são estruturados em função da ordenação dos subconjuntos, independente de se visualizar ou não os objetos e suas propriedades. Isso significa dizer que o processo é passível de ser sistematizado por meio de rotinas computadorizadas, ressaltando novamente que se faz pelo uso da Teoria dos Reticulados apresentada por Wille (1994). Pode-se conseguir 'pistas' para facilitar a montagem do processo das ordenações de matrizes que é o trabalho de Bertin (1981), fundamental para compreensão e estruturação de conceitos em todos os patamares do conhecimentos.

Conclusão dessa atividade:

Disso tudo, pode-se tecer algumas considerações importantes oriundas dessa atividade que teve um início empírico, mas que houve a necessidade de se utilizar vários conhecimentos matemáticos consolidados (*instrumentalmente*) para estruturar, organizar e analisar esse contexto, bem como descobrir e estabelecer relações entre os objetos e propriedades estudados e daí perceber os novos conceitos adquiridos.

Instrumentalmente foi necessário o uso da permutação entre linhas e colunas, compreensão da interdependência, de se basear nos objetos e características para ordenar uma matriz em função da diagonal principal, conceitos da teoria de conjuntos, partes de conjunto, Teoria dos Reticulados, Análise Formal de Conceitos, construções gráficas etc.

Inicialmente, partiu-se de relações que só existiam entre o objeto e suas características, analisadas individualmente e considerando a forma como foram coletadas. Após sua organização e ordenação, agora são passíveis de uma melhor compreensão e generalização, ou seja, houve "*...a transição de um pensamento empírico, que é um pensamento em termos de objetos concretos, para um pensamento em termos das relações entre esses objetos*", Otte (1994a), indicada como parte da tese 1 do referido artigo. Como por exemplo, na sua nova disposição seja na matriz ordenada, seja no reticulado, é evidente a relação de proximidade entre os objetos ou mesmo entre as características. Transparecem e evidenciam um certo 'grau de parentesco', uma correspondência 'familiar' entre esses objetos tendo em vista a similaridade de suas características, caracterizando enfim, outra estrutura conceitual a ser percebida.

Novos conceitos e relações surgiram em função dessa organização de objetos e características, evidenciando seus respectivos reinos, estilos de ambientes a que pertencem, sentido da organização evolutiva, tanto dos objetos como das características, formas de inter-relação entre os estilos de ambientes etc. Dificilmente seria possível essas formas de percepções se apenas fosse analisada a matriz inicial, obtida empiricamente. Isso nos remete à tese 2 indicada por Otte (1994a), do mesmo artigo:

> ...as relações devem ser representadas porque não são acessíveis diretamente. Então a matemática opera com representações (intensões, mas quer ganhar verdades objetivas sobre as relações (sobre as denotações de símbolos ou modelos usados como representações). Por isso, a ação recíproca entre os conceitos matemáticos e suas representações, ou entre extensão (denotação) e intensão (sentido) dos conceitos é muito importante. Essa ação recíproca poderá ser desenvolvida só quando entendermos que os conceitos matemáticos (os conceitos teóricos em geral), denotam relações entre objetos (ou entre outras relações já construídas). OTTE (1994 a; p. 71).

Poderiam surgir perguntas tais como: Por que então —numa situação de ensino com estudantes— não trabalhar a construção de conhecimentos envolvendo dois ou mais procedimentos para um mesmo contexto? Ou contrapondo, não seria perda de tempo em se tratando de ensino?

Se a pergunta fosse dirigida a mim, particularmente, minha opção seria pela primeira, pois a possibilidade de estabelecer relações, de inúmeras formas, em processos diferentes, porém, associados a um mesmo contexto, é muito maior e mais consistente. Teria que ser essa a postura que os alunos deveriam esperar de seus mestres.

Mesmo abordando cada um independentemente, é evidente que a apresentação da matriz ordenada ela é muito mais didática e surte um bom efeito visual pela facilidade que se obtém quanto à percepção, porém sua resolução manual de permutação entre linhas e colunas é muito mais trabalhosa e depende de um bom ‘treino’ e muita intuição e experiência para obter resultados satisfatórios, isto considerando se a matriz for pequena. Se for maior...

No caso de se usar a Análise Formal de Conceitos, ainda que um ‘tanto trabalhosa’, a técnica de construção do reticulado é desenvolvida, levando em conta toda uma teoria de seleção, ordenação e estruturação para a montagem passo a passo do reticulado, como um algoritmo lógico-matemático. Embora sua forma de apresentação final não seja tão evidente visualmente quanto a forma da matriz ordenada, que é mais simplista e direta (sem, contudo desmerecer toda a beleza gráfica e simétrica que a estrutura de um reticulado pode evidenciar).

Um pulo para a complementaridade! Pode-se fazer uso desse algoritmo da Análise Formal de Conceitos para poder proporcionar, com maior rapidez e uma série de indicativos que possibilita conseguir também, uma bela ordenação da matriz, pois pode-se observar no reticulado, de forma mais eficiente, as proximidades obtidas entre os objetos e características, identificar os eixos de simetrias horizontais e verticais, sentidos 'evolutivos' etc. Transpondo essas informações de um processo para outro, pode-se construir e melhorar a apresentação visual do contexto, na forma matricial. Essa interação entre processos pode e deve ser interpretada como complementaridade. Essa riqueza de processo só é possível quando nem o tempo e nem a vontade de conhecer é fator limitante, seja para aluno seja para professor.

3.2.4. O uso de diagramas e o estudo de uma pista de Fórmula 1

Essa é uma atividade bem dinâmica e com fortes características visuais e relacionais, além de ficar evidente a possibilidade de uso de diversos instrumentos matemáticos. Tem-se aí o contexto de uma pista de corrida de Fórmula 1 qualquer. Nesse contexto, tem-se indicado o GP da Bélgica. Desse objeto visual extraído de um jornal ou revista qualquer, é possível realizar estudos relacionais de diversas categorias, como será apresentado a seguir:

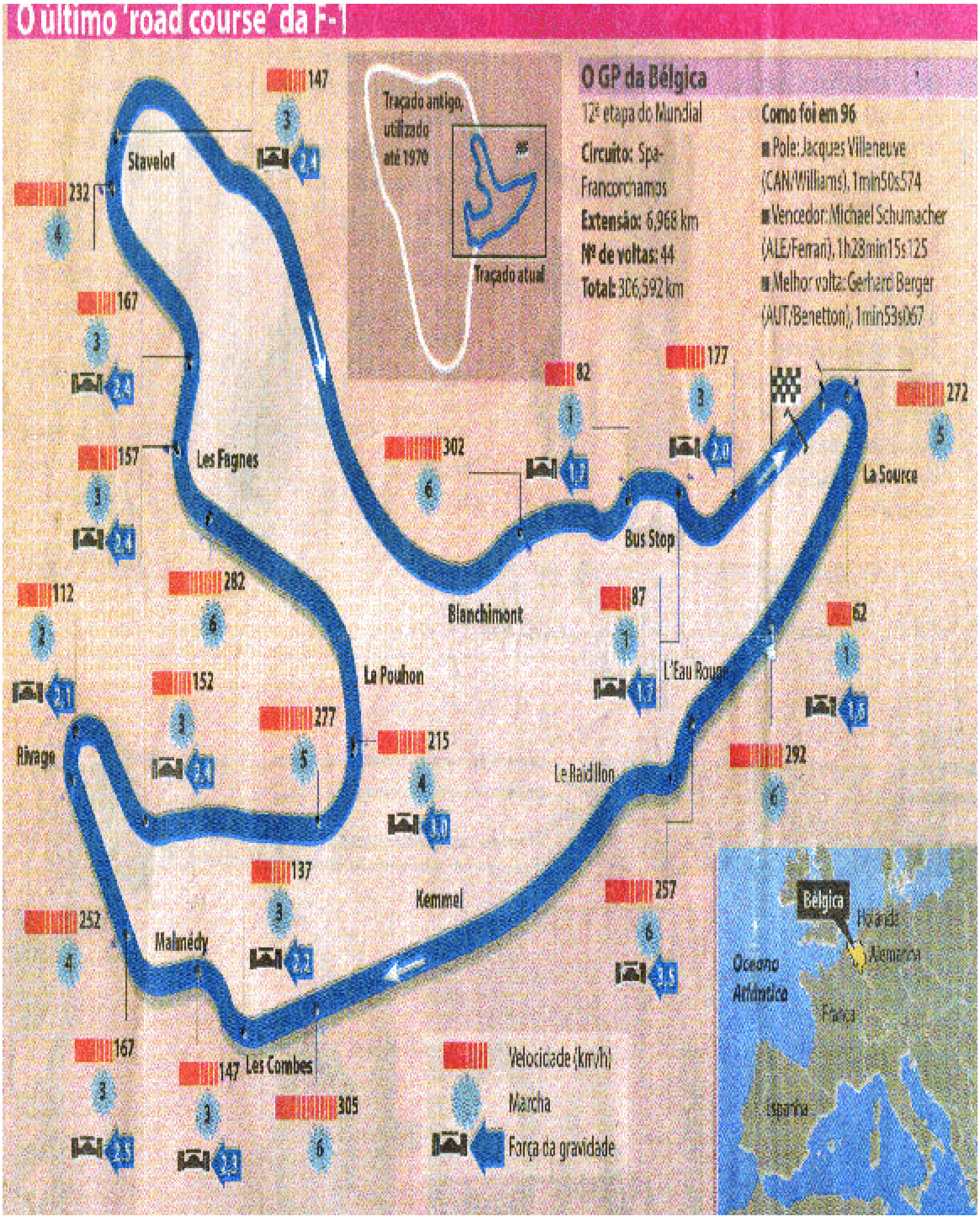
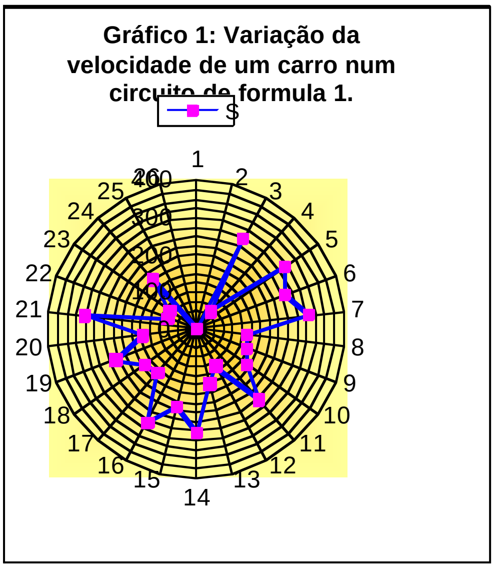
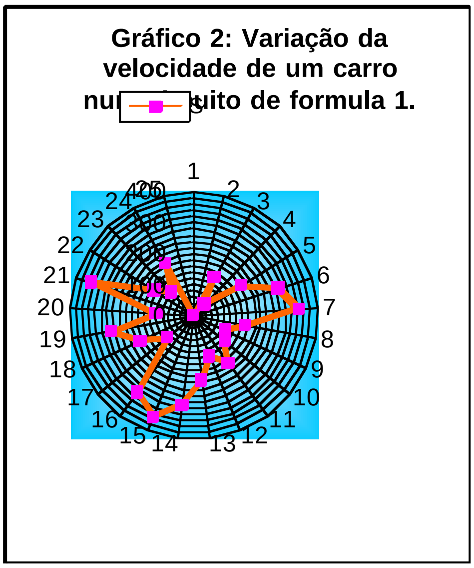
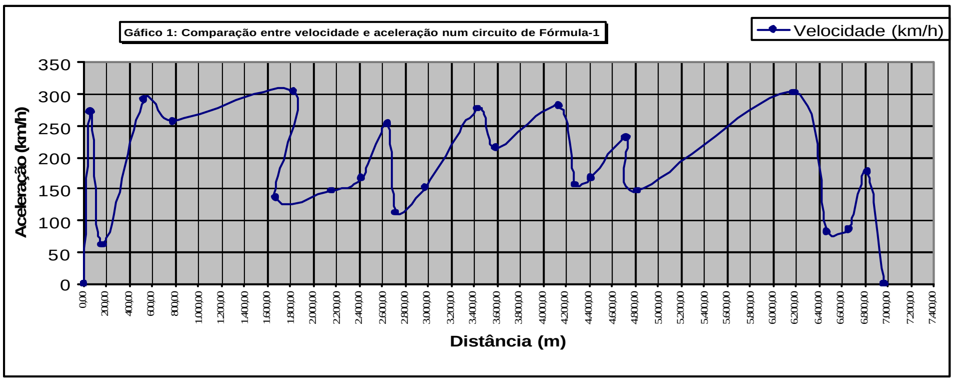


FIGURA 36: ESQUEMA GRÁFICO DE UMA PISTA DE FÓRMULA 1

Em cada um dos dois conjuntos de gráficos diferentes, um deles corresponde ao circuito de Fórmula 1 apresentado na página anterior. Identifique-o justificando, ponto a ponto, cada detalhe percebido e o que difere do outro, em cada uma das situações.







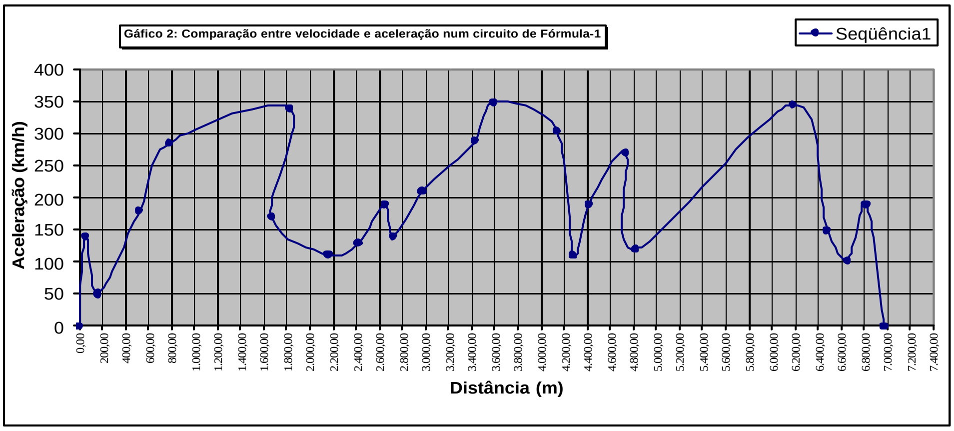


FIGURA 37: ESTILOS DE ATIVIDADES COM GRÁFICOS GERADOS A PARTIR DA PISTA DE FÓRMULA 1

Depois de realizada essa comparação, algumas questões poderiam ser indagadas, que possibilitariam agora uma análise mais profunda da situação contextualizada.

- Qual a velocidade máxima apresentada no circuito? Identifique no circuito.
- Qual a velocidade mínima apresentada no circuito? Identifique no circuito.
- Como identificar a velocidade média? Qual o(s) ponto(s) do circuito que mais se aproxima (m) dessa velocidade em média?
- Se o circuito possui 6968 metros de extensão, em qual dos gráficos o piloto gastou menos tempo?

Esse estilo de atividade é muito importante para os alunos de um modo em geral, pois exemplificam a possibilidade de modelar, representar, esquematizar uma determinada realidade ou contexto. Essas formas de representação, também conhecida como diagramas, nos ajudam a esboçar uma idéia, uma situação, seja ela essencialmente matemática ou não. Um dos exemplos de diagramas são os chamados grafos ou gráficos que representam funções. Nessas ferramentas, bem como no caso dos diagramas em geral, a correspondência entre o modelo representado e a situação original não é aparentemente evidente ou facilmente identificada como um efeito natural, que por outro lado é muito presente nas analogias[16]. O modelo representado por meio de um gráfico ou grafo é uma correspondência conceitual construída, que

---

[16] **Analogia**: [Do gr. *analogia*, pelo lat. *analogia*.] Substantivo feminino. 1. Ponto de semelhança entre coisas diferentes. 2. Semelhança, similitude, parecença. 3. Filos. Identidade de relações entre os termos de dois ou mais pares. 4. Filos. Semelhança entre figuras que só diferem quanto à escala.
5. Filos. Semelhança de função entre dois elementos, dentro de suas respectivas totalidades. [Cf., nas acepç. 3 a 5, *generalização* (5).] 6.Fís. Relação entre dois fenômenos físicos distintos que podem ser descritos por um formalismo matemático idêntico, a qual pode existir entre um fenômeno elétrico e outro mecânico, entre um acústico e um elétrico, etc. 8.E. Ling. Modificação ou criação de uma forma lingüística por influência de outra(s) já existente(s). **NOVO DICIONÁRIO ELETRÔNICO AURÉLIO VERSÃO 5.0**

traduz, usando de convenções estritamente definidas, algumas propriedades do original descritas em termos de uma representação figurada.

Se alguém consegue compreender que o gráfico que representa a relação entre tempo e espaço, ilustrando o caso de um corpo em queda livre, perceberá que essa relação não é direta, porém, existe uma sensível similaridade entre o fenômeno de cair e a forma do gráfico. O gráfico representa particularmente a função (*a estrutura conceitual*) indicada um a um ou ponto a ponto, o constante relacionamento $s = s_0 - \frac{1}{2}gt^2$. Não é possível a interpretação do gráfico de forma direta (*em termos do fenômeno real*) sem a compreensão da estrutura conceitual inerente (*a função matemática*). Embora um grafo seja um diagrama[17], de acordo com a definição — *como um modelo gráfico conceitual construído* — também podem ser considerados grafos as funções representadas que são fatos relatados nas classes de analogias, citadas na interpretação de Polya, (1986, pág. 29). Na realidade, a analogia a qual se está referindo não está entre o fenômeno original e o grafo, mas particularmente entre a expressão numérica do respectivo fenômeno e sua representação gráfica (ou seja, *o fato espacial*). Os sistemas geométrico e numérico de entidades não são governados por convenções arbitrárias. Com uma base de axiomas adequados, o mundo dos números e o mundo das figuras comporta-se com absoluta coerência e consistência. Embora reciprocamente independentes, os dois sistemas revelam-se ao mesmo tempo isomórficos[18]. Os dois sistemas, o numérico e o figural representam uma analogia ideal, provavelmente o melhor que se conhece em ciências. Porém, não há nenhum meio de considerar a relação existente entre o fenômeno original e o gráfico que representa essa função como uma analogia. O gráfico

[17] Grafo: Diagrama composto de pontos, alguns dos quais são ligados entre si por linhas, e que é ger. us. para representar graficamente conjuntos de elementos inter-relacionados. [Os pontos, ditos *nós* [v. *nó* (12)], representam os elementos individuais, e as linhas, ditas *arestas* [v. *aresta* (6)], representam a relação entre pares de elementos.] **NOVO DICIONÁRIO ELETRÔNICO AURÉLIO VERSÃO 5.0**

[18] isomorfismo: [De *isomorfo* + *-ismo*.] Substantivo masculino. 1.Álg. Mod. Correspondência biunívoca entre os elementos de dois grupos que preserva as operações de ambos. 2. **NOVO DICIONÁRIO ELETRÔNICO AURÉLIO VERSÃO 5.0**

é um diagrama que usa a analogia entre o sistema numérico e o sistema de propriedades geométricas.

Na realidade, isto soa bastante estranho e se apresenta de maneira complexa, provavelmente para estudantes sem experiência. Um gráfico com suas propriedades figurais tem freqüentemente as propriedades de um Gestalt[19], isto é, ele se impõe ao estudante como uma *figura* (no sentido de Gestalt), ou seja, como uma estrutura diretamente interpretada na realidade. Por essa razão deveria representar um dispositivo intuitivo excelente. Na realidade, um gráfico não é por si só, um dispositivo intuitivo. Como outras formas de diagramas, o gráfico não é, nem um exemplo nem uma analogia a respeito do fenômeno a ser representado. A relação entre o gráfico e o real é indireta, acontece por uma estrutura conceitual interveniente. Um gráfico só pode se tornar um dispositivo intuitivo depois que o sistema de convenções que relacionam a realidade original, o sistema conceitual interveniente (*a função*) e a representação gráfica tenha sido interiorizada e automatizada.

Considere o exemplo muito simples como o indicado ao lado, de um gráfico que representa o deslocamento de um corpo que se move com aceleração constante. O gráfico é parte de uma parábola. A tendência natural de um estudante novato seria confundir a forma da curva com a trajetória do movimento. O gráfico é uma 'forma boa' em terminologia Gestalt, tão real, tão diretamente interpretável que é realmente difícil escapar dos diretos constrangimentos intuitivos, entender e captar sua mensagem indireta (*o crescimento constante de velocidade*). Mas depois que o sistema de convenções for interiorizado e automatizado, a imagem realmente

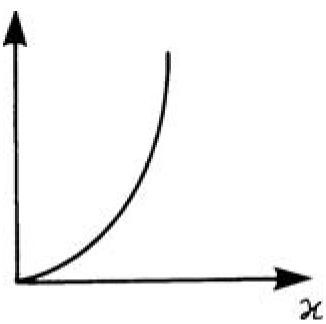


FIGURA 38: GRÁFICO DE DESLOCAMENTO X ACELERAÇÃO CONSTANTE

[19] A palavra Gestalt (plural *Gestalten*) é um termo intraduzível do idioma alemão para o português. O Dicionário Eletrônico Michaelis apresenta como possibilidades as *palavras figura, forma, feição, aparência, porte; estatura, conformação; vulto,* às quais ainda se pode acrescentar *estrutura* e *configuração*.

pode ajudar a adquirir uma visão intuitiva de como essa posição muda com tempo e em um movimento acelerado.

Considerando agora um novo gráfico ao lado, que representa o movimento de um corpo com velocidade constante. Nesse gráfico — a linha reta — representa a proporcionalidade direta entre espaço e tempo. Como dobra o tempo, o espaço também dobra. Em intervalos iguais de tempo o corpo movimenta distâncias iguais. O que a parábola significa, no gráfico anterior (Figura 38), no caso de movimento constantemente acelerado, é que o deslocamento *não* é proporcional ao tempo e que *durante* sucessivos segmentos iguais de tempo esses deslocamentos não aumentam constantemente (Figura 39).

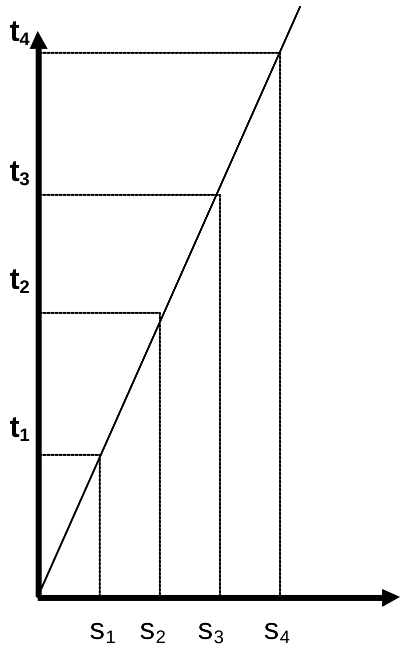


FIGURA 39: GRÁFICO DE MOVIMENTO CONSTANTEMENTE ACELERADO

Os elementos que são usados na linguagem dos gráficos podem realmente ajudar a obter uma visão intuitiva de um fenômeno. Por outro lado, as propriedades intuitivas intrínsecas de um gráfico podem representar uma fonte de má-interpretação, porque o gráfico constitui um sistema figural, auto-suficiente de atração natural, sem um significado extrínseco. Sem estabelecer comparações, o impacto do gráfico como um ‘auto-consistente Gestalt’[20] é como um vento muito forte que não entrega a mensagem na qual pretendia se expressar, levando-a para longe.

[20] Instrumento tão auto-suficiente em informações e conhecimentos (complexo) que para muitos tem dificuldades para interpretá-los.

FIGURA 40: GRÁFICO DE RELAÇÃO ENTRE VELOCIDADE E DISTÂNCIA

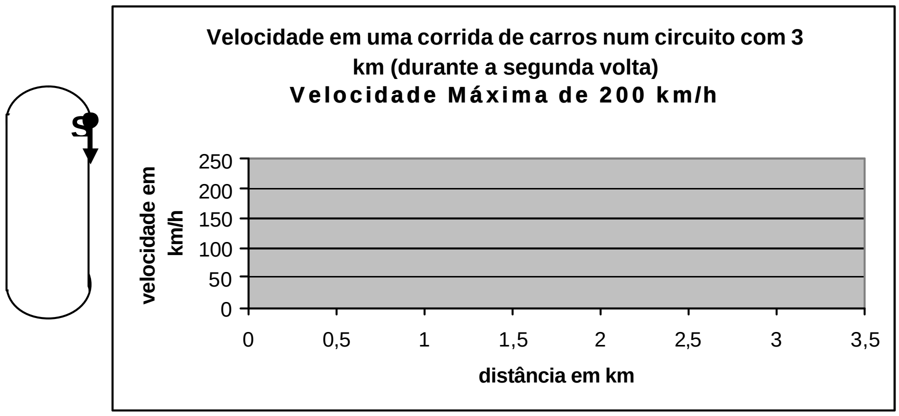
Com o propósito de estimular o estabelecimento de relações entre o pensamento matemático durante atividades de análise gráfico-visuais, serão consideradas algumas situações-exemplo indicadas no trabalho de Claude Janvier (1978), igualmente citadas por Biehler (1985), referente a exemplos envolvendo um circuito de corrida. Essa atividade a seguir é análoga à apresentada anteriormente, nas figuras 36 e 37, relativa à pista de Fórmula 1.

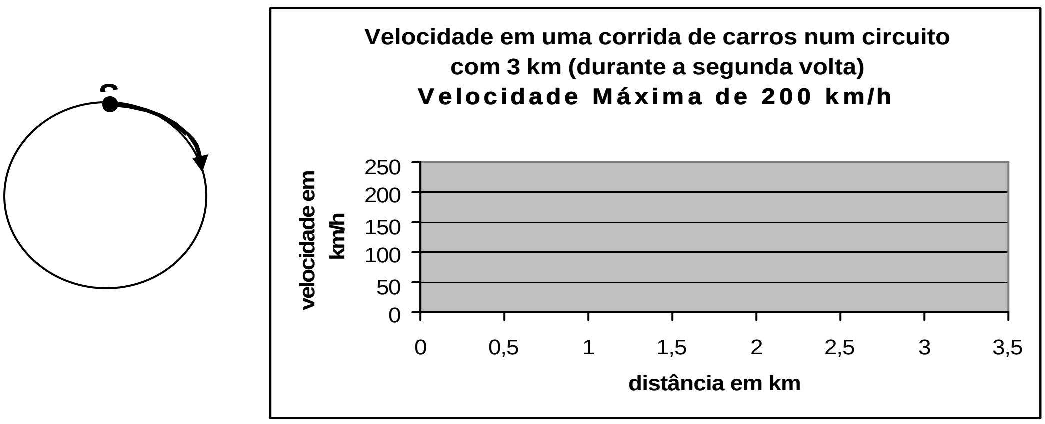
Vale lembrar que essas atividades não evocam situações reais, justamente pelo fato do real envolver dificuldades e variáveis muito mais complexas do que as que serão apresentadas. O uso de muitas variáveis poderia dificultar, nesse momento, a compreensão e o exercício ao pensamento. Em outros momentos, já com uma experiência vivenciada, torna-se possível buscar analogias com exemplos que modelem, com maior precisão, uma determinada realidade, ou seja: possibilidades de transpor essa análise para um circuito de corrida não-fictício. A temática é apresentada por meio do gráfico acima. Esse gráfico ilustra como a velocidade de um carro de corrida varia ao longo dos 3 km do trajeto, contando a partir da sua segunda volta.

A observação a ser realizada no gráfico acima pode originar diversas perguntas, que com certeza tornam-se mais interessante quando solicitado suas justificações e argumentações, tais como: Quantas curvas existem ao longo do circuito por onde percorre o carro? Quais são os indicadores e como interpretá-los? Qual é a pior curva? Qual a mais fácil? Qual a ‘segunda pior’ ? Qual é a velocidade máxima? Qual a velocidade mais lenta? Qual é a velocidade quando o carro está a 1 km do ponto de largada? E a 2,5 km?

É interessante verificar que, para cada pergunta, existe uma necessidade de re-analisar o diagrama, comparar dados e sem contar uma constante ‘comparação’ e reflexão entre a situação representada com uma provável imaginação do circuito real, para garantir uma certa referência e coerência.

Uma outra atividade, seria solicitar que o aluno esboçe para cada circuito que aparece do lado esquerdo de cada gráfico apresentado nas figuras abaixo, um gráfico de velocidade semelhante ao apresentado na situação anterior, sabendo que todos circuitos têm a mesma extensão de 3 km e a velocidade máxima atingida é de 200 km/h.





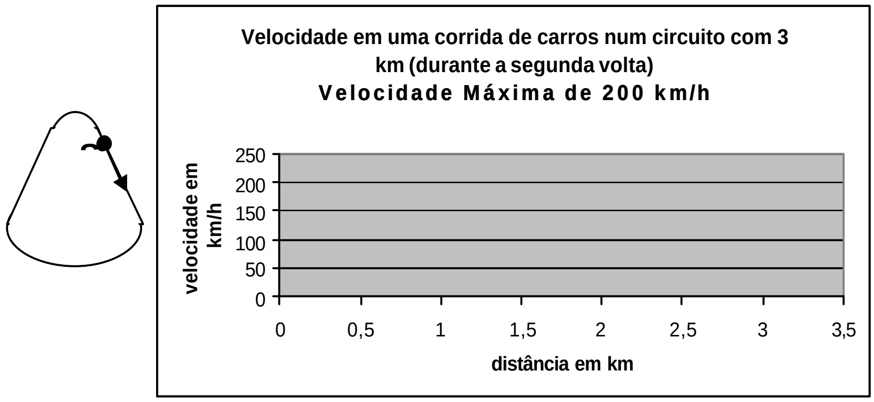


FIGURA 41: ATIVIDADES PARA TRAÇAR O PERCURSO DAS PISTAS DE CORRIDA

Outra maneira de promover o exercício ao pensamento relacional: Identificar dentre os vários circuitos (A, B, C, D, E, F e G) esquematizados a seguir, qual deles equivale ao representado no gráfico também abaixo? É interessante solicitar, quais os indicadores visuais (relações) que ajudaram a fundamentar sua decisão.

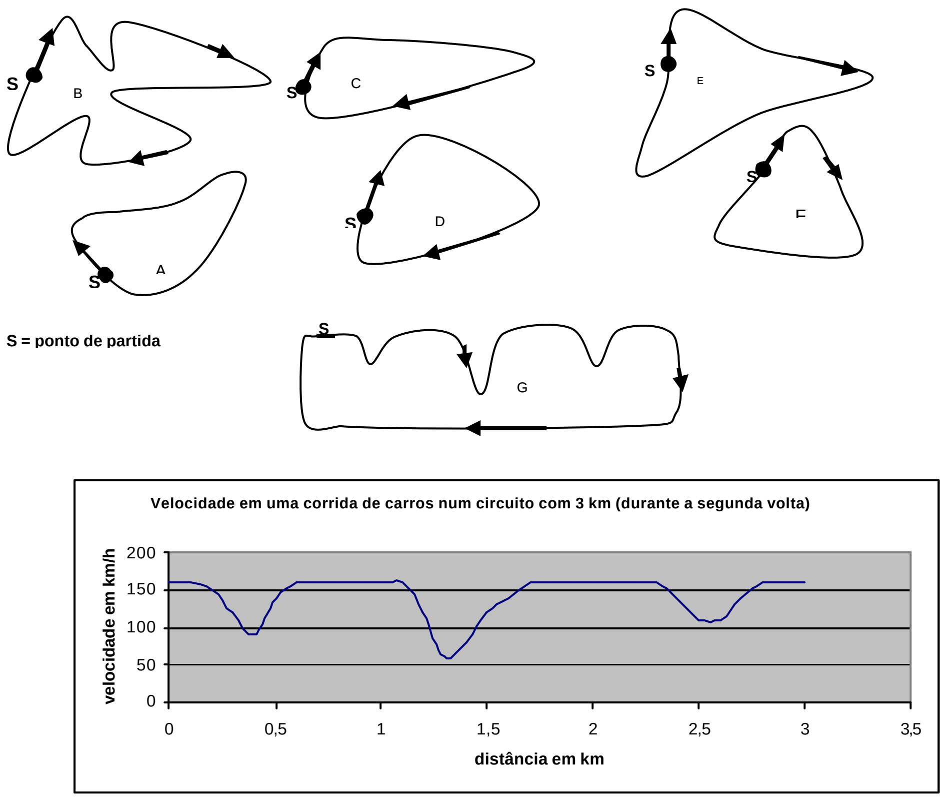


FIGURA 42: ATIVIDADE PARA IDENTIFICAR UMA PISTA DE CORRIDA ESPECÍFICA

Uma fonte sempre profícua para estruturar atividades é a dos Jornais e Revistas, sejam eles de renome nacional e internacional, pois pode-se ter mais garantia —pelo menos espera-se— da veracidade das informações. Eles procuram sempre inovar a forma como apresentam suas informações e fatos. Essa evolução pode ser percebida, ao analisar esses instrumentos de comunicação no decorrer das décadas. A reportagem e os gráficos a seguir podem ilustrar essa evolução:

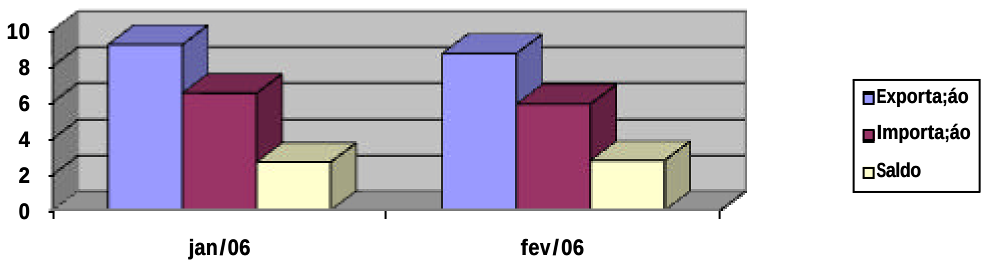
COMÉRCIO EXTERIOR

Saldo é recorde, mas já preocupa

Em Fevereiro, superávit comercial foi de US$ 2,8 bilhões, o maior para o mês, e no ano, somou US$ 5,6 bilhões

A balança comercial de fevereiro registrou superávit recorde para o mês, de US$ 2,822 bilhões, e desempenho exportador igualmente inédito. Os embarques de produtos brasileiros ao exterior alcançaram US$ 8,750 bilhões no mês e somaram US$ 18,021 bilhões no primeiro bimestre do ano.

Uma apresentação gráfico-visual de décadas anteriores, ilustrando a reportagem:



Uma apresentação gráfico-visual recente, ilustrando a mesma reportagem:

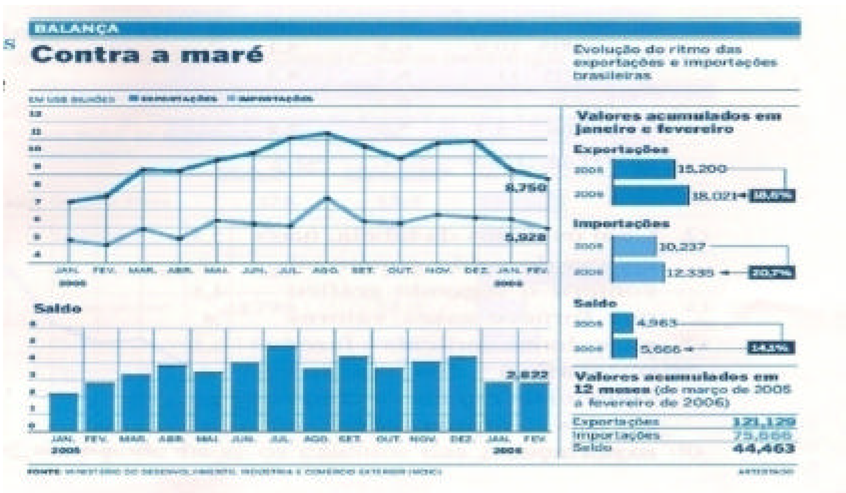


FIGURA 43: ATIVIDADE ENVOLVENDO GRÁFICOS RELACIONAIS

Algumas indagações poderiam ser desencadeadas a partir daí, tais como: O que você teria a comentar referente a essas duas apresentações visuais relativas à mesma reportagem? Que houve uma evolução, é evidente. Porém, em que aspectos você identificaria essa evolução? Tendo como referência o segundo conjunto de gráficos (atualmente), que outras relações poderiam ser estabelecidas e comentadas, que o texto da reportagem não abordou, mas que é percebível nesse bloco de informações?

Além disso, ao planejar e desenvolver com os alunos esses modelos de atividades, recomenda-se que o fundamental é desenvolver algumas análises e reflexões (a serem instigadas pelo professor), para que além de possíveis indagações que porventura apareçam, fique claro quais as posturas a serem assumidas durante as estapas de planejamento, aplicação como avaliação etc. Seriam questões relativas aos pontos positivos a serem percebidos nessas atividades; quais conceitos e conteúdos seriam identificados ou o que essas atividades estimulariam nos alunos; da mesma forma, antever e relacionar quais as dificuldades e/ou confusões que os alunos teriam ao resolvê-las.

3.2.5. Problemas de Combinatória

Ao estudar indução matemática, os alunos são levados a provar fórmulas fechadas das somas dos *n* primeiros termos das seqüências de números inteiros positivos, dos quadrados dos números inteiros positivos, dos inteiros positivos ímpares e dos cubos dos inteiros positivos. Porém, além da indução, pode-se provar essas situações e inúmeras outras visualmente.

Soma dos n primeiros inteiros positivos:

Usam-se dois arranjos congruentes de quadrados unitários para obter o resultado de 1 + 2 + ...+ n = $\frac{n(n+1)}{2}$ por decomposição de área.

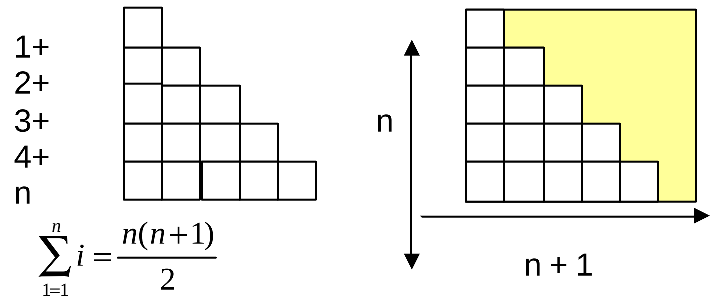


FIGURA 44: REPRESENTAÇÃO DA SOMA DOS N PRIMEIROS NÚMEROS INTEIROS POSITIVOS

Soma dos quadrados dos primeiros n inteiros positivos. Nesse caso, os quadrados são representados por cubos unitários. Um arranjo adequado de três conjuntos congruentes formados por esses cubos fornece um paralelepípedo retângulo obtendo-se o resultado $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2 = \frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$ por decomposição de volume.

Pode-se iniciar com a primeira parte da unidade, ou seja, representar $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2$ usando as faces dos cubos formadas pela soma dos quadrados perfeitos:

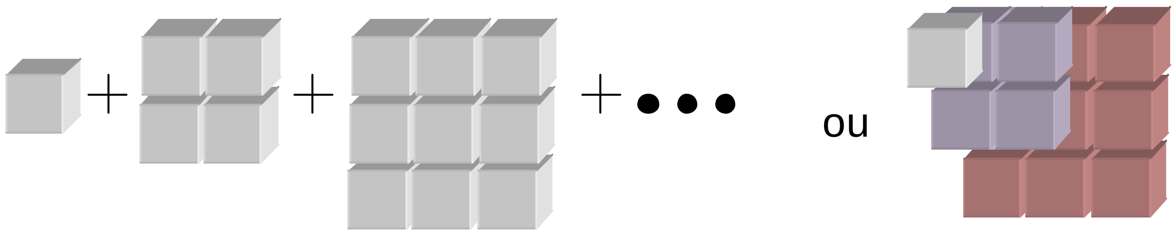
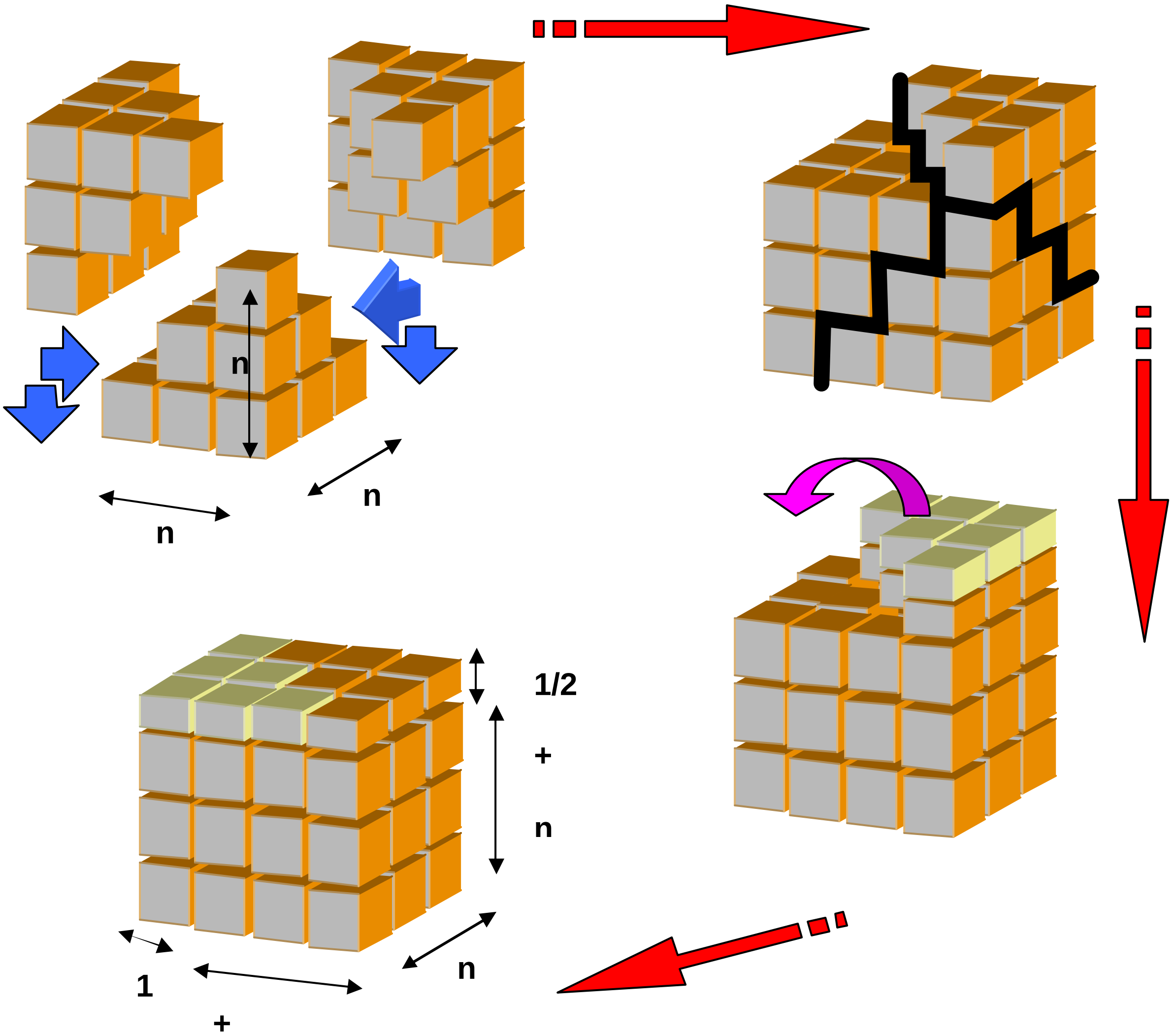


FIGURA 45: SOMA DOS N QUADRADOS PERFEITOS

sobrepondo-os em forma de pilha, e montando o paralelepípedo,



$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

FIGURA 46: MONTAGEM DO CUBO

Soma de quadrados:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = (2n+1)(1 + 2 + 3 + ...+ n)$$

No retângulo maior, observa-se que ele é formado pela área indicada composta pelo produto dos lados (2n+1)x(1+2+3+...+n) e corresponde ao lado direito da igualdade proposta. No seu interior, a figura tem uma separação em 3 setores, com a mesma quantidade de quadrados cada. O setor central e colorido, é indicado pelas quantidades correspondentes da mesma cor que compõe as potências quadradas indicadas na parte representada à esquerda Nos dois outros setores, tem-se o correspondente a duas vezes a quantidade de quadradinhos relativos às potências quadradas, perfazendo a correspondência indicada na expressão à esquerda da igualdade. Dessa forma, identificamos também o lado esquerdo da igualdade **$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)$.**

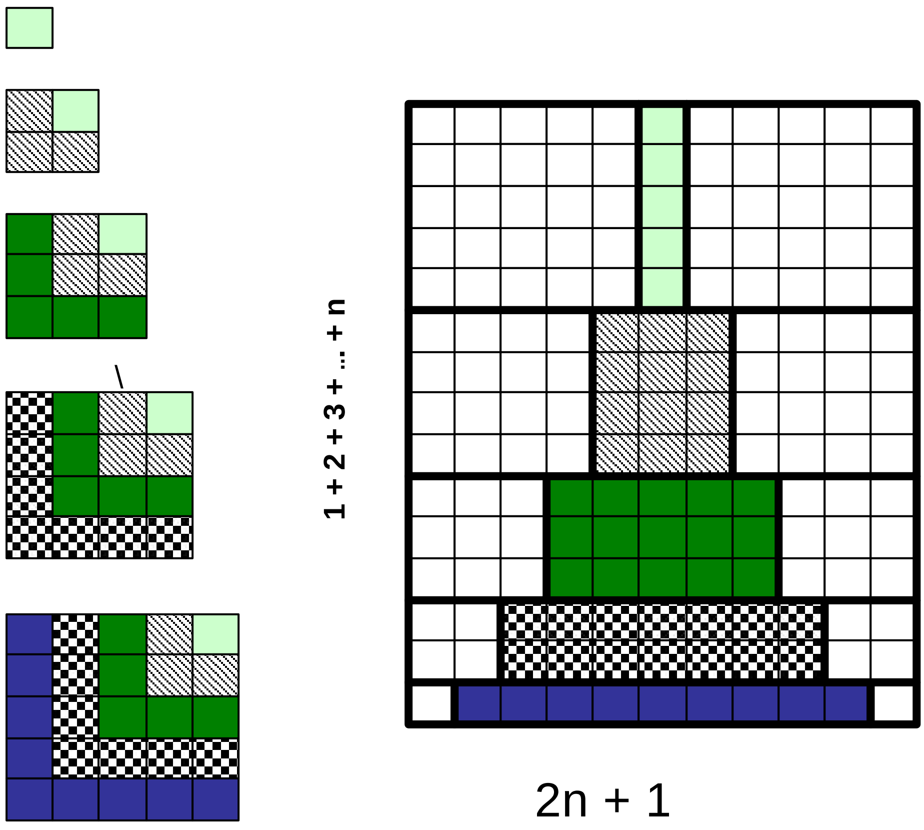


FIGURA 47: SOMA DE QUADRADOS: $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = (2n+1)(1 + 2 + 3 + ... + n)$

Dessa maneira os ‘dois olhares’ diferenciados para uma mesma situação representada ‘graficamente’, conseguem satisfazer e justificar a igualdade apresentada literalmente.

3.2.6. Problemas de cunho didático que parecem 'ilógicos' mas evocam o uso do pensamento relacional:

O problema da cor do urso

POLYA, (1986) indica um problema interessante, em que a necessidade de conhecimentos um pouco mais próprios de geodésia, investido de um senso de lógica bastante perspicaz, faz-nos maravilhar seja em função da complexidade com que o problema se apresenta e ao mesmo tempo da simplicidade evidenciada na sua solução. O problema foi remodelado por mim, da seguinte maneira: "considere as diversas raças existentes de ursos e seus distintos *habitat* descritos na tabela a seguir:"

Espécie de Urso	Característica/Habitat
Urso Pardo	América do Norte, Europa e Ásia. Encontra-se presente na península Ibérica, precisamente nos Pirineus e na cordilheira Cantábrica. Na Espanha, está em perigo de extinção.
Urso Cinzento	Também denominado 'grizzly', habita as Montanhas Rochosas (EUA).
Urso Beiçudo	O Urso Beiçudo recebe esse nome porque seu focinho é longo e os lábios, muito móveis, são empregados para capturar os cupins dos quais se alimenta. De cor escura, habita as florestas tropicais da Índia e do Sri Lanka.
Urso Malaio	O Urso Malaio tem o pêlo de cor negra, com uma mancha sobre o peito, de forma irregular, branca ou amarela, e se estende desde a China até a Indochina
Urso-de-Óculos	Também chamado de Urso Andino, Cara Rajada, Umari ou Uyutchine. Ele vive na América do Sul e caracteriza-se pela presença de manchas faciais que costumam rodear os olhos, como se usasse óculos, formando um anel, completo ou não.
Urso Negro Americano	Este urso é muito abundante na América do Norte, desde o Alasca até o México e a Flórida. Apresenta uma grande variabilidade na cor de sua pelagem que vai do preto ao cinza-avermelhado, e no peito costuma ter uma mancha branca em forma de estrela.
Urso Tibetano	Também conhecido por Urso Negro Asiático, espécie de urso distribuída pela Ásia, desde o Japão até o Paquistão. A pelagem do corpo é preta e bastante longa no pescoço e nos ombros e apresenta uma mancha branca sobre o peito.
Urso-Polar ,	Também conhecido como urso-branco, típico e nativo do Ártico e atualmente é o maior carnívoro terrestre conhecido
Panda-Vermelho	Previamente classificada na família Procyonidae (guaxinim). Esta espécie é nativa dos Himalaias e sul da China.
Panda	É um mamífero da família dos ursídeos, endêmico da República Popular da China. O focinho curto lembrando um urso de pelúcia (peluche), a pelagem preta e branca característica.

FIGURA 48: COMPARAÇÃO DA ESPÉCIE DE URSO COM SEU HABITAT

Tendo como referência esses vários *habitat* e seus respectivos ursos distribuídos pelo planeta, considere a seguinte condição:

Um urso (qualquer) encontra-se numa posição (também qualquer) do planeta, a qual designaremos por 'ponto A'. Num determinado instante, ele caminha uma distância de 10 km tomando a direção N→S, e chega ao que chamaremos de ‘ponto B’; Após, ele caminha mais 10 km na direção O→L, atingindo um local designado por ‘ponto C’; Enfim ele caminha mais 10 km na direção S→N e retorna a origem, isto é o ‘ponto A’.

Com esses referenciais, pergunta-se em primeiro lugar: Qual a cor do Urso? Quais conceitos matemáticos ou não-matemáticos podemos listar e que são necessários para dar uma solução para o referido problema? Como encontrar argumentos para justificar a pergunta relativa a cor do Urso?

O gato e o anel

Considere o contexto a seguir: Tendo como informação que fosse possível efetuar uma volta completa em nosso Planeta, caminhando pela linha do Equador, alguém estaria andando cêrca de 40.000 km de distância.

Se um anel de arame pudesse ser atarraxado nesse percurso (da Linha do Equador), ele teria, claro, esse mesmo comprimento.

Se alguém pegar outro arame, agora com 40.001 km de comprimento, e com ele confeccionar também um anel colocando-o, circuncentricamente, sobre o primeiro (como mostra o esquema ao lado), será facilmente percebido uma relativa distância entre ambos anéis.

Como estratégia de estimativa, pode-se estimular os alunos em primeiramente identificar quais conceitos gerais e específicos, a primeira vista, são percebíveis nesse contexto matematizado?

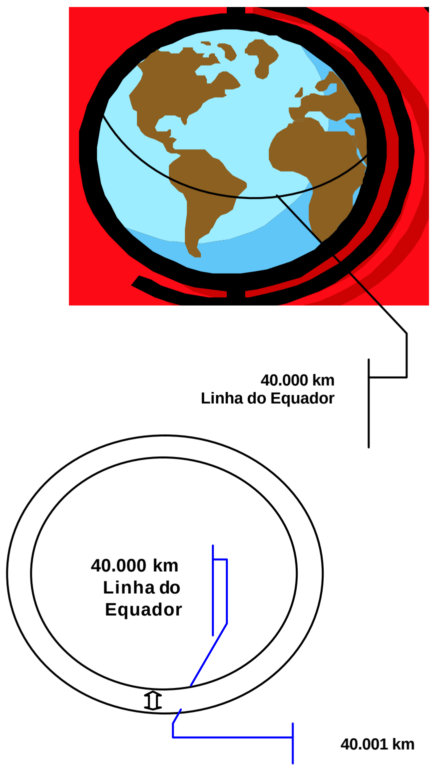


FIGURA 49: REPRESENTAÇÃO DOS ANÉIS NO GLOBO TERRESTRE

A questão principal seria essa indagação: Seria possível um gato, com aproximadamente 20 centímetros de altura, passar por entre os dois anéis? Como justificar sua resposta?

Como descrever a relação existente entre o aumento/diminuição do comprimento de uma circunferência X o aumento/diminuição do seu raio?

O uso verdadeiro e ‘correto’ do instrumento Barômetro

Esse é um texto anônimo, que há muito tempo circulou pela *internet* e foi amplamente usado em vários cursos de capacitação de professores pelo Brasil. Nele é relatada a experiência vivida por um professor como avaliador. O texto começa assim:

“Há algum tempo recebi um convite de um colega para servir de árbitro na revisão de uma prova. Tratava-se de avaliar uma questão de Física, que recebera nota ‘zero’. O estudante contestava tal conceito, alegando que merecia nota máxima pela resposta, a não ser que houvesse uma ‘conspiração do sistema’ contra ele. Professor e estudante concordaram em submeter o problema a um juiz imparcial, e eu fui o escolhido”.

Chegando à sala de meu colega, li a questão da prova, que dizia:

Mostrar como se pode determinar a altura de um edifício bem alto com o auxílio de um barômetro.

A resposta do estudante foi a seguinte:

"Leve o barômetro ao alto do edifício e amarre uma corda nele; baixe o barômetro até a calçada e em seguida levante, medindo o comprimento da corda; este comprimento será igual à altura do edifício."

Sem dúvida era uma resposta interessante, e de alguma forma correta, pois satisfazia o enunciado. Por instantes vacilei quanto ao veredito. Recompondo-me rapidamente, disse ao estudante que ele tinha forte razão para ter nota máxima, já que havia respondido a questão de forma completa e corretamente. Entretanto, se ele tirasse nota máxima, estaria caracterizada uma aprovação em um curso de Física, mas a resposta não confirmava isso. Sugeri então que fizesse uma outra tentativa para responder a questão. Não me surpreendi quando meu colega concordou, mas sim quando o estudante resolveu encarar aquilo que eu imaginei seria um bom desafio. Segundo o acordo, ele teria seis minutos para responder a questão, isto após ter sido prevenido de que sua resposta deveria revelar, necessariamente, algum conhecimento de Física.

Passados cinco minutos ele não havia escrito nada, apenas olhava pensativamente para o forro da sala. Perguntei-lhe então se desejava desistir, pois eu tinha um compromisso logo em seguida, e não tinha tempo a perder. Mais surpreso ainda fiquei quando o estudante anunciou que não havia desistido. Na realidade tinha muitas respostas, e estava justamente escolhendo a melhor. Desculpei-me pela interrupção e solicitei que continuasse.

No momento seguinte ele escreveu essa resposta:

"Vá ao alto do edíficio, incline-se numa ponta do telhado e solte o barômetro, medindo o tempo t de queda desde a largada até o toque com o solo. Depois, empregando a fórmula

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

calcule a altura do edifício."

Perguntei então ao meu colega se ele estava satisfeito com a nova resposta, e se concordava com a minha disposição em conferir praticamente a nota máxima à prova. Concordou, embora sentisse nele uma expressão de descontentamento, talvez inconformismo.

Ao sair da sala lembrei-me que o estudante havia dito ter outras respostas para o problema. Embora já sem tempo, não resisti à curiosidade e perguntei-lhe quais eram essas respostas.

"Ah!, sim," - disse ele - "há muitas maneiras de se achar a altura de um edifício com a ajuda de um barômetro."

Perante a minha curiosidade e a já perplexidade de meu colega, o estudante desfilou as seguintes explicações.

"Por exemplo, num belo dia de sol pode-se medir a altura do barômetro e o comprimento de sua sombra projetada no solo, bem como a do edifício. Depois, usando uma simples regra de três, determina-se a altura do edifício. Um outro método básico de medida, aliás bastante simples e direto, é subir as escadas do edifício fazendo marcas na parede, espaçadas da altura do barômetro. Contando o número de marcas tem-se a altura do edifício em unidades barométricas. Um método mais complexo seria amarrar o barômetro na ponta de uma corda e balançá-lo como um pêndulo, o que possibilita a determinação da aceleração da gravidade *g*. Repetindo a operação ao nível da rua e no topo do edifício, tem-se dois *g*'s, e a altura do edifício pode, a princípio, ser calculada com base nessa diferença". Finalmente, concluiu: "se não for cobrada uma solução por meio da Física para o problema, existem outras respostas. Por exemplo, pode-se ir até o edifício e bater à porta do síndico. Quando ele aparecer; diz-se: 'Caro Sr. síndico, trago aqui um ótimo barômetro; se o Sr. me disser a altura deste edifício, eu lhe darei o barômetro de presente' ".

A essa altura, perguntei ao estudante se ele não sabia qual era a resposta 'esperada' para o problema. Ele admitiu que sabia, "mas estava tão farto com as tentativas dos professores de controlar o seu raciocínio e cobrar respostas prontas com base em informações mecanicamente arroladas, que ele resolveu contestar aquilo que considerava, principalmente, uma farsa"

Autor Desconhecido

Sintetizando: Considerando a complexidade com que algumas situações, quando extraídas ou analisadas mais próximamente do contexto real se desenvolvem ou são percebidas e que, cuja rede de conceitos interrelacionados torna-se bastante intrínseca, dependentes e entrelaçadas com suas inúmeras variáveis, torna-se, muitas vezes, complexo transpô-las diretamente numa situação de ensino-aprendizagem. Em alguns casos consegue-se reduzir algumas variáveis, analisá-las sob determinada ótica, focar aspectos específicos para então desenvolver de forma mais condizente com o grupo de pessoas que se está atuando.

Desta feita, algumas situações foram inseridas neste trabalho com a finalidade de ilustrar o uso do pensamento relacional aliado ao do pensamento instrumental e determinados momentos em que a complementaridade se faz presente. Esses exemplos fazem parte do seção 3.1 Somente alguns dos exemplos apresentados na seção 3.2 é que foram utilizados na pesquisa exploratória, a ser apresentada no próximo capítulo, considerando suas características específicas, o fato das temáticas terem relação direta com os níveis de ensino que os professores pesquisado atuam, além do fato das atividades já estarem num formato inerente ao próprio contexto educacional.

Tendo como referência esses modelos de situações, o nosso próximo passo é analisar e discutir as informações obtidas quando da realização de pesquisa empírica a seguir apresentada. Foram selecionadas algumas situações que, adaptadas para realização da referida pesquisa, foram aplicadas a um grupo de professores e futuros professores e assim, por meio desse trabalho, o objetivo é procurar perceber como esses sujeitos resolvem essas situações que exigem uma necessidade maior de estabelecimento de relações do que o uso de regras pré-fixadas, memorizadas e determinadas para certas situações-problema.

CAPÍTULO 4

4. PESQUISA EXPLORATÓRIA

Neste capítulo descreveremos onde e como foi realizada a investigação empírica, tendo como referência o estudo bibliográfico fundamentado nas bases históricas e educacionais realizadas nos capítulos anteriores.

Nessa investigação foram proposta atividades experimentais envolvendo estilos de pensamento, estruturada por situações matematizadas a serem desenvolvidas por participantes voluntários, tendo como propósito identificar se existe predominância por um dos estilos de pensamento e se estabelecem ou não uma complementaridade entre eles.

4.1. Procedimentos Metodológicos

O volume de pesquisas de cunho qualitativo e o número de autores que defendem essa modalidade é cada vez maior. Isso porque se percebeu que o quantitativo nem sempre consegue espelhar a realidade e que as comprovações de hipóteses baseadas apenas nos números, não conseguem convencer ou responder com satisfação as questões inicialmente elaboradas. Ou seja, a pesquisa qualitativa é especialmente apropriada para trabalhos exploratórios que devem gerar novas hipóteses.

Dentre esses autores menciona-se Triviños (1987) que, em seu livro denominado "Introdução à pesquisa em Ciências Sociais: a pesquisa qualitativa em educação" destacou algumas metodologias de pesquisa empregadas na área de Ciências Sociais. Essas pesquisas partem do princípio de que elas podem se desenvolver segundo uma abordagem quantitativa ou qualitativa, destacando-se o seguinte diferencial: na pesquisa quantitativa, as variáveis devem ser medidas e na qualitativa, elas devem ser descritas.

Triviños (1987) ressaltou que toda pesquisa tem a possibilidade de ser, ao mesmo tempo, quantitativa e qualitativa, pois esses dois aspectos não são mutuamente excludentes. Ainda chamou a atenção para o fato de que, na pesquisa qualitativa, não se tem, a princípio, o estabelecimento de hipóteses que devem ser testadas empiricamente e de esquemas levantados *a priori*. Isso garante uma flexibilidade para formular e reformular hipóteses, à medida que se realiza a pesquisa qualitativa.

Os autores Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1999), em seu livro, "O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa" comentaram que as pesquisas qualitativas possibilitam a utilização de uma grande variedade de procedimentos e instrumentos de coleta de dados, designados assim como multi-metodológicas. As formas de procedimentos mais utilizados são a *observação* (participante ou não), *a* *entrevista* (livre, estruturada, semi-estruturada ou mista) e a *análise de documentos*.

A existência ou não de interferências numa pesquisa e o quanto podem contribuir ou prejudicar a análise dos resultados. Levando-se esse fato em conta numa pesquisa qualitativa deve-se notar a importância da observação a qual denota uma série de vantagens:

a) independe do nível de conhecimento ou da capacidade verbal dos participantes;

b) possibilita ‘checar’, na prática, a sinceridade de certas respostas que, às vezes, são dadas somente para ‘causar boa impressão’;

c) propicia identificar comportamentos não-intencionais ou inconscientes e explorar tópicos que os informantes não se sentem à vontade para discutir, e

d) possibilita ter uma idéia do registro do comportamento com seu contexto temporal-espacial.

Uma das formas de realizar a observação é por meio de entrevistas. E quando elas são de cunho qualitativo, não são estruturadas, não se tem um roteiro e uma ordem de frases rigidamente e previamente estabelecidas.

No modelo deste trabalho optou-se por uma pesquisa livre que valorizasse a presença do investigador, bem como oferecesse todas as possibilidades para que o participante da pesquisa alcançasse a liberdade e a espontaneidade necessárias, enriquecendo a investigação. Na opinião de Triviños (1987), para certas pesquisas qualitativas, a entrevista ou atividades semi-estruturada é um dos melhores caminhos que o pesquisador tem para viabilizar a coleta de dados.

Tem-se ainda como ferramenta a pesquisa exploratória, que é uma das modalidades da pesquisa qualitativa e que tem como uma das principais metas esclarecer e ilustrar os aspectos teóricos utilizados em um trabalho científico. A pesquisa exploratória, de acordo com Mattar (1994), propicia ao pesquisador um maior conhecimento sobre o tema ou problema de pesquisa em perspectiva. O planejamento da pesquisa exploratória é bem flexível, porém, normalmente ele adquire ou a forma de pesquisa bibliográfica ou de estudo de caso. O estudo de caso é caracterizado pelo estudo profundo e exaustivo de um ou de poucos objetos, de forma que possibilite a investigação de seu amplo e detalhado conhecimento.

4.2. Características e estrutura da Pesquisa Exploratória

A pesquisa empírica realizada nesse trabalho, foi desenvolvida no formato de uma pesquisa exploratória qualitativa, desenvolvendo estudo de casos, projetados em moldes de atividades contextualizadas e aplicações práticas, que façam referência ou relação a uma determinada realidade ou ramos da própria Matemática. Muitas das situações propostas são fragmentos da realidade e não a realidade em si, que por sua vez, é muito complexa para se estudar — em se tratando de Ensino Fundamental e Médio — se for considerada todas ou muitas variáreis inter-relacionadas.

Inicialmente 22 pessoas inicaram a participação de forma voluntária, isto é respondendo a convite. Desses, 14 concluíram a atividade solicitada. Esses participantes eram estudantes finalistas[21] do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da UFMT, estudantes de Cursos de Pós-Graduação da UFMT, Professores de Matemática que atuam da Rede de Ensino de Cuiabá em atividade de sala de aula e Professores de Matemática

[21] São caracterizados alunos finalistas, de acordo com os critérios do MEC os alunos que já cumpriram 80% da carga horária e disciplinas do respectivo Curso de Graduação.

que atuam em Curso Superior, ficando assim distribuídas, conforme a tabela 3 a seguir:

	Estudantes Finalistas em Matemática (DCM)	Estudantes Pós-Graduação (DPG)	Professores Ensino Básico (PEB)	Professores Ensino Superior (PES)	Total
Quantidade	04	04	04	02	**14**

.

TABELA 3: PARTICIPANTES PESQUISADOS E SUAS ORIGENS

A indicação dos estudantes finalistas foi feita a partir de uma lista estruturada pelos professores de Cálculo III, Álgebra Linear I e II, Álgebra I e II, Análise Matemática, Prática de Ensino II, III e IV e Coordenação do Curso de Graduação em Matemática da UFMT. A partir daí foi feita consulta sobre o desejo de participar a 12 estudantes dessa lista. Os professores consultados e convidados que foram os que regularmente participam dos eventos de Matemática e Educação Matemática tanto na UFMT como na Rede de Ensino do Estado de Mato Grosso. Em ambos os casos, foram considerados, dos indicados, 10 professores que se dispuseram a participar de forma voluntária. Inicialmente os participantes foram informados sobre **a não necessidade** de identificação do nome deles no instrumento. Foi fornecido para cada um deles um documento indicando o compromisso do pesquisador em não identificar e divulgar o nome dos participantes.

4.3. Como perceber o uso do Pensamento Relacional em atividades de ensino?

O objetivo da pesquisa exploratória é o de investigar como se desenvolve o pensamento matemático dos participantes pesquisados em situações não convencionais, que dependam ou não necessariamente de conhecimentos instrumentais, aqui descritos como fórmulas prontas, algoritmos, esquemas clássicos e já conhecidos, regras de resolução etc. Procurar-se-á perceber se os pesquisados irão estabelecer relações entre os conhecimentos previamente fornecidos e/ou conhecidos, e como isso ocorre. E também se o mesmo essas relaçãoes são externalizadas durante o processo de resolução das atividades matemáticas propostas. Outra possibilidade a ser observada é, se os participantes conseguem identificar o uso dos dois estilos de pensamento no desenvolvimento da atividade proposta, e se eles se utilizam não só de forma excludente um ou outro, mas conseguem interagir e se valerem dessas duas formas de pensamento, numa mesma situação, num sentido complementar.

Tendo como pressuposto de que a Matemática é uma atividade e que o aprendizado da mesma só ocorre, de fato, quando o aprendiz participa de atividades propostas, a investigação foi realizada considerando o caráter exploratório e envolvendo atividades de resolução de problemas. Acredita-se que ela poderá ser um auxílio na revelação de aspectos estratégicos, tanto no uso de conhecimentos empíricos e formais de Matemática como de Epistemologia, tendo dessa forma, como propósito, perceber do participante, essências de posturas relacionais ou instrumentais para as análises e resoluções das situações propostas.

As atividades são apresentadas num conjunto intitulado ***situações matematizadas,*** contendo 05 grupos de atividades contextualizadas matematicamente, envolvendo questões de abordagem teórica e de sensibilização, seguidas de exemplos. E por fim, de atividades propostas e, quando conveniente, questões de posicionamento relativas à reflexão didático-pedagógica, também relacionadas à atividade indicada.

O esquema a seguir ilustra a seqüência de aplicação:

QUADRO 1: ESQUEMA DA SEQÜÊNCIA DA APLICAÇÃO DA PESQUISA EXPLORATÓRIA

Seleção/indicação dos participantes ➡ Conversa Individual e em grupo sobre a proposta ➡ Situações Contextualizadas ➡ Análise dos Resultados

Durante a realização das atividades programadas, previu-se inicialmente a permanência do pesquisador junto com o pesquisado. Essa permanência teve por finalidade o estabelecimento de diálogo entre pesquisador e pesquisado e também para observação das facilidades/dificuldades quanto à resolução do instrumento. Com isso seria tentado dimensionar/avaliar o desempenho do pesquisado sem, contudo, intervir apresentando soluções no seu desenvolvimento. Porém, na realidade foi impossível garantir horários conjugados e comuns, considerando a não disponibilidade de tempo de praticamente a totalidade dos participantes. Dessa forma, houve a necessidade de ampliar o volume de informações, inclusive de cunho teórico, para melhor subsidiar os pesquisados, procurando obter um material com a característica de auto-instrucional.

Diante disso, optou-se por orientações, porém, breve e de caráter individual, com o propósito único de antever, esclarecer e responder possíveis perguntas referentes às informações dadas pelos problemas e, quando necessário, discutir suas resoluções procurando não induzir em nenhuma cisrcunstância.

Assim, foi proposto um questionário inicial, que tinha a intenção de elaborar um breve perfil pessoal/profissional do participante. Com esse questionário pretendia-se estabelecer algumas características pessoais e profissionais, tais como, sexo, se é estudante ou não, o semestre em que se encontra, se leciona ou já lecionou Matemática e, em caso afirmativo, por quanto tempo, etc, porém, sem a pretensão de estabelecer uma identificação ou correlacionar nomes quaisquer, até mesmo para não influenciar a análise dos dados.

Para elaborar o roteiro com as atividades nas **situações matematizadas**, levou-se em consideração os seguintes critérios:

- Não serem problemas muito especializados ou muito complexos;
- Terem a possibilidade de diferentes resoluções;
- Que propiciassem a construção de idéias gerais;
- Que envolvessem linguagens diferentes, para que o pesquisado pudesse expressar espontaneamente seu pensamento, suas habilidades, suas formas de representação e conceitos matemáticos utilizados;
- Que fossem interligados de alguma forma com a teoria proposta para que pudessem proporcionar a aprendizagem de algo novo.

Com base nesses critérios foram elaboradas situações contextualizadas permeadas com exemplos e aplicação de problemas matemáticos, além de algumas reflexões, quando o caso possibilitava. Ao final de cada situação, foi proposta a resolução de atividades, envolvendo, quando possível, conceitos já abordados/sugeridos.

Algumas atividades propostas nas situações apresentam a possibilidade de diferentes processos de resolução e de estabelecimento de relações com conhecimentos de diversas áreas. Outras envolvem poucos processos e poucas relações. As demais propiciavam a elaboração/identificação e utilização de idéias de cunho mais geral.

4.4. A realização da Pesquisa Exploratória

A pesquisa exploratória teve início no dia 04/04/2007 e a coleta dos dados durou até o dia 25/05/2007. Os encontros com os pesquisados foram em número de dois na média, sempre em atendimento individual e o pesquisador se deslocando até o pesquisado, seja na residência ou no serviço. A necessidade variava, dependendo do nível de dúvidas que foram surgindo. Muitas delas eram solucionadas via telefone, *E-mail* ou *Messenger*, sempre procurando respeitar o tempo disponível de cada um.

Considerando o fato que o pesquisador não estaria participando diretamente, quando da resposta ao questionário e às sessões de atividades, julgou-se conveniente que fossem feitas todas as orientações verbalmente e por meio de uma lauda reforçando por escrito as sugestões e recomendações julgadas importantes. Dentre elas sugeriu-se e informou-se que:

O material não necessita de identificação. A pesquisa não está medindo conhecimento, portanto, não é obrigatório e não será ‘cobrado’ do pesquisado, conteúdo ou volume de conhecimento. Nem mesmo a resposta correta é tão fundamental. O propósito é identificar ‘formas’, ‘técnicas’, ‘caminhos’, ‘saídas’ encontradas para resolver as atividades propostas. O que se pretende registrar, de forma detalhada, são essas ‘formas’ de resolução e não o produto final (respostas);

Portanto, como o pesquisador não estará a todo o momento acompanhando essa resolução feita, foi solicitado que as respostas fossem bem detalhadas, e que fossem explicados cada passo tomado e o porquê da decisão. Foi alertado que também são importantes registrar as dúvidas encontradas, pois servirá de parâmetro para a análise do material e contribuirá com o aperfeiçoamento do mesmo.

A seguir apresento trechos da comunicação feita aos participantes, com o objetivo de esclarecer quanto ao conteúdo como quanto ao uso do respectivo material:

> O material contém cinco sessões de atividades;
>
> Presume-se que cada sessão de atividade possa durar em torno de 1 hora, envolvendo a leitura do texto referencial e a resolução das atividades;
>
> Reserve essa média de tempo para a resolução de cada sessão de atividade, sendo recomendado que ao iniciar cada sessão de atividade, complete-a, registrando o horário de início e o de término, no campo reservado próximo ao título da sessão;
>
> Não é necessário responder as atividades estruturadas de uma única vez. As atividades foram pensadas, procurando estabelecer uma seqüência de dificuldades e certo nível de evolução. Portanto, permite-se um lapso de tempo entre as resoluções (porém, não muito longo). Espera-se também, dessa forma, uma melhor acomodação ou ‘amadurecimento’ das idéias, crendo que com isso, possa haver uma melhoria no fator ‘criatividade’;
>
> Procure responder as sessões, respeitando a seqüência e evolução proposta;
>
> Existe somente um questionário inicial para estabelecer o perfil pessoal/profissional da cada um, sem a preocupação de correlacionar com a identificação nominal.

4.4.1. O perfil dos sujeitos da Pesquisa Exploratória

Uma das primeiras questões a ser esclarecida refere-se à caracterização dos participantes voluntários: Por que dscentes finalistas do Curso de Licenciatura Plena em Matemática da UFMT, estudantes de Pós-Graduação na UFMT, Professores de Matemática da Rede de Ensino Básico de Cuiabá em atividade de sala de aula e Professores que atuam no Ensino Superior?

Em primeira análise, embora haja uma separação evidente entre **estudantes**, —que ainda estão vinculados à vida acadêmica— e **professores** —que já estão atuando na vida profissional— essa diferenciação é salutar e viável. Considerando o estágio (educacional/profissional) em que se encontram, muito provavelmente, seus pensamentos e experiências são proximais, até porque parte dos estudantes finalistas da Graduação ou em Pós-Graduação atuam ou atuaram em escolas, mesmo que seja no Estágio Supervisionado.

Em segunda análise, pode existir uma maior maturação em ambos os grupos, em função de uma vivência já em fase de construção e maior conhecimento em relação ao pensamento matemático, se comparados aos nossos alunos do Ensino Fundamental, Médio ou mesmo os alunos no início do Curso de Graduação. Essas características, aliadas às suas experiências com a atividade matemática em serviço, espera-se que proporcionem diferentes visões e resoluções para os problemas propostos e, conseqüentemente, que tenham mais subsídios para responder às questões de cunho didático inseridas no decorrer do material envolvendo as *situações contextualizadas*.

Com a coleta de dados realizada por meio das atividades estruturadas, o próximo passo definido foi estudar os resultados e as análises observadas na pesquisa exploratória, com os estudantes e professores pesquisados. Espera-se que as soluções apontadas por eles no roteiro das situações das atividades matemáticas, possam servir para ilustrar algumas das situações elencadas na parte teórica do trabalho e ao mesmo tempo, que se possa perceber e aferir alguma qualidade quando se propõe ações que conduzem ao desenvolvimento do pensamento relacional. A nossa pesquisa exploratória pretende com isso documentar e identificar algumas características do pensamento matemático surgido e alguns dos diversos parâmetros que o influenciam, bem como perceber se os próprios problemas e as experiências com a resolução dos mesmos também influenciaram esse pensamento matemático.

Conforme apresentado na tabela 6 a seguir, as 14 atividadess estruturadas ficaram assim distribuídas, em função das pessoas pesquisadas: 08 discentes, sendo 04 da Graduação em Matemática e 04 da Pós-Graduação na UFMT; 06 docentes, sendo 04 atuantes na Rede de Educação Básica[22] e 02 atuantes no Ensino Superior.

	Discentes Finalistas em Matemática (DCM)		**Discentes Pós-Graduação (DPG)**		**Professores Ensino Básico (PEB)**		**Professores Ensino Superior (PES)**	**Total**	
Sexo	F 02	M 02	F 02	M 02	F 01	M 03	M 02	**F 05**	**M 09**
Quantidade	04		04		04		02	**14**	
Situação acadêmica /funcional	8º Semestre 02		PG em Ed./Mat. 03		Professores Escola Particular 03		Professor Universidade Pública 01		
	6º Semestre 02		PG em Física Matem 01		Professor Escola Pública 01		Professor Universidade Particular 01		
Anos de Experiência magistério	nenhuma experiência		de nenhuma experiência a 18 anos		7 a 19 anos		Acima de 12 anos		

TABELA 4: PERFIL PESSOAL /PROFISSIONAL DOS PESQUISADOS

Dos discentes em Graduação em Matemática, houve equilíbrio tanto em relação ao sexo quanto a respectiva localização no semestre que cursam, nenhum deles tem experiência profissional no magistério, salvo as vivenciadas durante a realização do Estágio Supervisionado e das disciplinas de Prática de Ensino.

[22] Correspondendo ao Ensino Fundamental de 5ª a 8ª séries e ao Ensino Médio.

Quanto aos discentes de Pós-Graduação, houve equilíbrio quanto ao sexo, a maioria cursa o Mestrado em Educação/Educação Matemática, e um deles cursa o Mestrado em Física Matemática, todos na UFMT. Em relação à experiência no magistério esse grupo ficou bastante heterogêneo, pois havia (01 discente) sem experiência, alguns com experiência mediana — entre 5 a 10 anos: (02 discentes) e (01 discente) com longa experiência — acima de 15 anos.

Em relação ao grupo de professores houve dificuldades para garantir a homogeneidade numérica entre as categorias: atuantes no Ensino Básico e Ensino Superior, no fator sexo, Escola Pública e Particular, em função da não devolução de todos os materiais que compunham o instrumento de pesquisa. Em se tratando da experiência no magistério desse grupo, ela varia entre a média e a longa experiência.

Com o propósito de garantir o anonimato dos participantes pesquisados os **Discentes Finalistas em Matemática** foram designados pela seqüência código **DCM_1** a **DCM_4**; os **Discentes em Pós-Graduação** foram designados pela seqüência de código **DPG_1** a **DPG_4**; os **Professores do Ensino Básico** pela seqüência de código **PEB_1** a **PEB_4** e finalmente os **Professores de Ensino Superior** pela seqüência de código **PES_1** e **PES_2**.

4.4.2. Resultados da Pesquisa Exploratória

4.4.2.1. Pensamentos matemáticos na resolução de situações matematizadas extraídos da Pesquisa Exploratória

Esta pesquisa pretende identificar, registrar e evidenciar a criatividade, o raciocínio lógico, a imaginação e as estratégias, tanto para formalizar como para generalizar processos matemáticos. As situações matematizadas foram estruturadas tendo como base algumas prerrogativas, expostas a seguir.

Primeiro: as sessões foram identificadas seqüencialmente por Sessão A até Sessão E. Nessas Sessões procurou-se envolver, sempre que possível, argumentos e/ou situações relacionais.

Segundo: Cada Sessão foi precedida de um preâmbulo sob a forma de teoria, ou um artigo, ou um texto reflexivo, ou uma discussão metodológica, cuja intenção é fornecer informações, dados, instrumentos matemáticos ou não, servindo dessa forma, para introduzir, sensibilizar e fundamentar as atividades ou contextualizar situações vindouras a serem propostas.

Terceiro: Conhecendo, por vivência e experiência, que é certo relutar, por parte dos profissionais da área de exatas, em realizar leituras, discussões teóricas e didático-pedagógicas, uma das funções desse material é o de se apoiar nesse contexto, e quando possível, propor questões e opiniões sobre teorias e posturas relacionadas ao ensinar e aprender. Além disso, que também sirva de auxílio para a estratégia de resolução de problemas, bem como para perceber e desenvolver atividades relacionais.

As temáticas das Situações Matematizadas foram assim estruturadas:

Sessão A:	Problemas de Cálculo são Relacionais ou só Instrumentais?
Sessão B:	Diagramas Relacionais;
Sessão C:	Pitágoras e o teorema relacional;
Sessão D:	As Relações entre as linguagens visuais e algébricas;
Sessão E:	O Relacional entre a abstração e atividade contextualizada.

Ao final de cada Sessão, foram propostas atividades para serem analisadas e resolvidas pelos pesquisados, com o objetivo de perceber como elas estão sendo compreendidas e de que maneira será(ão) dada(s) solução(ões) para as mesmas. Todas as atividades exigem apenas um conhecimento mínimo de Matemática básica.

Após as atividades propostas em cada Sessão, indicou-se a referência bibliográfica relativa à produção da referida Sessão, para caso de haver interesse, por parte de cada pesquisado, em conhecer a fonte de cada contexto proposto.

4.4.2.2. – Ponto de vista dos pesquisados na Análise das Situações Matematizadas denominadas Sessão A: "Problemas de Cálculo são Relacionais ou só Instrumentais?"

Nessa sessão, foi proposta uma discussão e uma pequena análise sobre problemas e suas relações gerais: como o problema é descrito, como pode ser matematizado, representado e o que significa a resolução. Utilizou-se e comentou-se alguns exemplos. Com uma tendência mais forte para a parte do cálculo aritmético, também algumas técnicas foram apresentadas e algumas 'saídas' que podem surgir quando se usa de relações externamente e internamente, possibilitando acelerar o cálculo ou mesmo eliminando processos de tentativas e métodos de 'exaustão'. Em todas as oportunidades possíveis de contato, seja pessoal ou em grupo, solicitou-se que os participantes procurassem fornecer soluções diferenciadas às situações propostas.

Atividade 1-A: <u>Proposição:</u> Trabalhe somente com quatro quatros e usando as quatro operações fundamentais se necessário (+, -, × e ÷), encontre os resultados para: 0 = 44 – 44; 1 = 44 ÷ 44; 2=___; 3=___; **...**; 9=___; 10=____.

A seguir, os resultados dessa atividade são analisados e organizados no quadro abaixo.

QUADRO 2: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-A PELOS PARTICIPANTES

Resultados	**DCM$_1$**	**DCM$_2$**	**DCM$_3$**	**DCM$_4$**
2	(4 ÷ 4) + (4 ÷ 4) = 1+1 = 2	(4 ÷ 4) + (4 ÷ 4)	4 - (4 + 4) ÷ 4	4 - (4 + 4)/4
3	(4 + 4 + 4) ÷ 4 = 3	(4 x 4 - 4) ÷ 4	(4 x 4 - 4) ÷ 4 = 3	(4 x 4 - 4) ÷ 4
4	(4 ÷ 4) . 4 (não usou os 4 quatros)	[(4 - 4) x 4] + 4	[(4 - 4) ÷ 4] + 4	(4 + (4 - 4)/4) = 4
5	[(4 . 4) + 4] ÷ 4	[(4 x 4) + 4] ÷ 4	[(4 . 4) + 4] ÷ 4	[(4 x 4) + 4] ÷ 4
6	[(4 + 4) ÷ 4] + 4 = 6	(4 + 4) ÷ 4 + 4	4 + (4 + 4) ÷ 4	(4 + (4 + 4)/4)
7	(4 + 4) - (4 ÷ 4) = 7	(44 ÷ 4) - 4	(44 ÷ 4) - 4	4 + 4 - (4/4)
8	(4 . 4) - (4 + 4) = 8	4 + 4 + 4 - 4	[(4 x 4) ÷ 4] + 4	(4 x 4)/4 + 4
9	4 ÷ 4 + 4 + 4 = 1 + 8 = 9	4 + 4 + 4 ÷ 4	4 + 4 + 4 ÷ 4	4 + 4 + 4 ÷ 4
10	(44 - 4) ÷ 4 = 10	(44 - 4) ÷ 4	(44 - 4) ÷ 4	(44 - 4) ÷ 4
Resultados	**DPG$_1$**	**DPG$_2$**	**DPG$_3$**	**DPG$_4$**
2	(4 . 4) ÷ (4 + 4)	(4 ÷ 4) + (4 ÷ 4)	(4 . 4) ÷ (4 + 4)	(4 ÷ 4) + (4 ÷ 4) ou (4 x 4) ÷ (4 + 4)
3	(4 + 4 + 4) ÷ 4	(4 + 4 + 4) ÷ 4	(4 . 4 - 4) ÷ 4	(4 + 4 + 4) ÷ 4 ou (4 x 4 - 4) ÷ 4
4	4 - (4 - 4) ÷ 4	(4 - 4) . 4 + 4	(4 - 4) ÷ 4 + 4	(4 - 4) ÷ 4 + 4
5	(4 . 4 + 4) ÷ 4	[(4 . 4) + 4] ÷ 4	(4 + 4 . 4) ÷ 4 = 5	(4 + 4 x 4) ÷ 4
6	(4 + 4) ÷ 4 + 4	[(4 + 4) ÷ 4] + 4	[(4 + 4) ÷ 4] + 4	(4 + 4) ÷ 4 + 4
7	(4 + 4) - (4 ÷ 4)	(4 + 4) - (4 ÷ 4)	(44 ÷ 4) – 4	(44 ÷ 4) - 4
8	(4 ÷ 4) . (4 + 4)	(4 . 4) - (4 + 4)	[(4 + 4) . 4] ÷ 4	(4 + 4) x 4 ÷ 4
9	4 + 4 + 4 ÷ 4	(4 + 4) + (4 ÷ 4)	4 + 4 + 4 ÷ 4	(4 + 4) + (4 ÷ 4)
10	(44 - 4) ÷ 4 = 10	Não respondeu	(44 - 4) ÷ 4	(44 - 4) ÷ 4
Resultados	**PEB$_1$**	**PEB$_2$**	**PEB$_3$**	**PEB$_4$**
2	(4 ÷ 4) + (4 ÷ 4)	(4 ÷ 4) + (4 ÷ 4)	(4 . 4) ÷ (4 + 4)	4 ÷ 4 + 4 ÷ 4
3	(4 + 4 + 4) ÷ 4	(4 + 4 + 4) ÷ 4	(4 + 4 + 4) ÷ 4	(4 + 4 + 4) ÷ 4
4	(4 - 4) . 4 + 4	4 + [4 ÷ (4 - 4)] (não observou o denominador sendo zero)	4 . (4 - 4) + 4	(4 - 4) ÷ 4 + 4
5	(4 . 4 + 4) ÷ 4	[(4 x 4) + 4] ÷ 4	(4 + 4 . 4) ÷ 4	(4 . 4 + 4) ÷ 4
6	(4 + 4) ÷ 4 + 4	[4 + (4 + 4)/4]	4 + (4 + 4) ÷ 4	(4 + 4) ÷ 4 + 4
7	(4 - 4 ÷ 4) + 4	(44 ÷ 4) - 4	(44 ÷ 4) - 4	44 ÷ 4 - 4
8	(4 + 4) + (4 - 4)	(4 x 4) - (4 + 4)	(4 - 4) + (4 + 4)	4 . 4 - 4 - 4
9	(4 + 4) + (4 ÷ 4)	(4 ÷ 4) + 4 + 4	(4 + 4 ÷ 4 + 4)	4 + 4 ÷ 4 + 4
10	(44 - 4) ÷ 4	(44 - 4) ÷ 4	(44 - 4) ÷ 4	(44 - 4) ÷ 4

Resultados	**PES$_1$**	**PES$_2$**
2	4 ÷ 4 + 4 ÷ 4	4/4 + 4/4 = 4 – (4 + 4)/4
3	(4 + 4 + 4) ÷ 4	(4 + 4 + 4)/4 = (4 . 4 - 4)/4
4	4 + (4 - 4). 4	(4 – 4)/4 + 4
5	(4 . 4 + 4) ÷ 4	(4 . 4 + 4)/4
6	(4 + 4) ÷ 4 + 4	(4 + 4)/4 + 4
7	44 ÷ 4 – 4	44/4 – 4
8	(4 . 4) - (4 + 4)	$4^{(4/4)}$ + 4 (não usou apenas as quatro operações básicas)
9	(4 + 4) + 4 ÷ 4	4/4 + 4 + 4
10	(44 - 4) ÷ 4	(44 – 4)/4

QUADRO 3: PROCESSOS DE CÁLCULOS UTILIZADOS PELOS PARTICIPANTES

Resultados	Processos de cálculo	Total
2	(4 ÷ 4) + (4 ÷ 4); 4 - (4 + 4) ÷ 4; (4 . 4) ÷ (4 + 4)	3
3	(4 + 4 + 4) ÷ 4; (4 x 4 - 4) ÷ 4	2
4	[(4 - 4) x 4] + 4; [(4 - 4) ÷ 4] + 4; 4 - (4 - 4) ÷ 4	3
5	[(4 . 4) + 4] ÷ 4	1
6	(4 + 4) ÷ 4 + 4	1
7	(4 + 4) - (4 ÷ 4); (44 ÷ 4) – 4; (4 - 4 ÷ 4) + 4	3
8	(4 . 4) - (4 + 4); 4 + 4 + 4 – 4; [(4 x 4) ÷ 4] + 4; (4 ÷ 4) . (4 + 4); [(4 + 4) . 4] ÷ 4	5
9	(4 + 4) + 4 ÷ 4	1
10	(44 - 4) ÷ 4	1

Todos os participantes resolveram a atividade 1-A na íntegra, exceto o participante DPG_2 que não forneceu a solução para o item 10. O quadro três evidencia, de maneira geral, que dentre os participantes pesquisados não houve variedade na forma de escrever os cálculos pensando nos resultados 5, 6, 9 e 10 indicando uma limitação nas possibilidades de se obter esses resultados a partir das condições estabelecidas pela atividade. No entanto, houve diversidade nos cálculos dos demais resultados, sobressaindo o número 8 com cinco processos diferentes. Essa atividade exige, **aparentemente**, apenas a matemática instrumental, ou seja, pensar nos cálculos que resultem nos números solicitados envolvendo quatro quatros e as quatro operações básicas.

Porém, não se pode esquecer quando alguns conceitos matemáticos envolvem indeterminações, como por exemplo, a divisão com o denominador zero que surgiu nessa pesquisa 4 = 4 + [4 ÷ (4 - 4)] apresentado por PEB_2. Nessa atividade, a exploração sugerida foi determinar resultados somente até 10, o que exige muito pouco dessas operações elementares. No entanto, fica evidente que não é uma situação meramente instrumental, pois, como, por exemplo, a reversibilidade no processo de cálculo. Nessa atividade

1-A, é proposta ao participante pesquisado não uma determinada situação, mas várias possibilidades de: *dado um número qualquer, quais as possíveis combinações que se consegue construir com quatro quatros e as quatro operações básicas para obter esse número?* Faz-se necessário partir de um resultado numérico e relacionar números e diferentes operações que dêem esse resultado. Essa atividade se diferencia dos exercícios convencionais de cálculo em que já são dados números e operações para simplesmente calcular e obter o resultado. Exige o pensamento instrumental na medida em que os cálculos já são conhecimentos adquiridos, porém, o pensamento relacional se faz presente no momento de combinar números e operações que não estão evidentes no enunciado da atividade.

Uma questão que poderia ser unicamente ‘fechada’ torna-se ‘aberta’ para uma ou mais opções de análise de possibilidades. De acordo com a visão de Skemp (1989), a primeira forma de proposição fortaleceria a condição do saber, enquanto a segunda a do compreender. No entanto, elas não diferem qualitativamente, mas quantitativamente e necessariamente, uma não sobrepõe a outra. Não são duas espécies de coisas diferentes, mas dois estágios do mesmo processo de conhecimento, no qual não se deve excluir ou optar entre um ou outro. É a complementaridade entre ambos que deve ser proposta.

Atividade nesse formato foi muito popular a partir do século XII e fazia parte de um conjunto de situações em que a comunidade em geral era desafiada a encontrar soluções. Inclusive havia eventos específicos para propor, divulgar e apresentar soluções. No caso dos quatro quatros, tentativas de encontrar soluções para resultados até 1000 foram amplamente exploradas, sendo que nesse caso foram admitidas outras operações e alguns artifícios eram aceitos ou não por comissões específicas de avaliações. Alguns resultados até hoje não tem solução.

Outra observação que vale ressaltar é sobre a vantagem de se utilizar essa atividade em aulas de Matemática como forma de se obter uma variedade nos processos de cálculos, que está associada com o conhecimento matemático e experiência, bem como com a percepção de cada um. Além dessa vantagem pode-se contar com uma grande possibilidade de desenvolver a socialização e comunicação de idéias matemáticas entre os alunos, conforme enfatizado por Oliveira (2002).

Ainda que tenha sido solicitada e reforçada verbalmente a possibilidade de indicar mais de uma possível solução para cada item/caso, muito poucos os itens foram contemplados com mais de uma solução pelo mesmo participante. Não foi identificado o motivo, embora, por hipótese, poderiam ser indicados vários motivos: falta de tempo, desatenção, esquecimento, condicionamento a ‘parar’ quando a primeira resposta for obtida etc.

Nessa pesquisa, o objetivo inicial dessa atividade específica foi o de, além da proposição em si, também ‘aquecer’ os participantes, partindo de uma atividade que buscasse apenas uma variedade de situação específica, sem que esse resultado fosse fruto de interpretações e julgamento de proposições, como é o caso da próxima atividade.

Atividade 2-A: Proposição: Utilizando todos os cinco primeiros números primos 2, 3, 5, 7 e 11, desenvolva o que se pede: Use cada um deles uma só vez (sem repeti-los), em qualquer ordem, atendendo o que se pede para cada uma das proposições abaixo, respeitando a seguinte condição: coloque os sinais de operação +, —, x, ÷ e os separadores gráficos (parênteses, colchetes e chaves) quando necessário.

QUADRO 4: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2-A PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Itens	DCM$_1$	DCM$_2$	DCM$_3$	DCM$_4$
2- Escreva o menor número natural ímpar.	1=(7+11)÷2-(5+3)	1=(3x7)÷[(2x5)+1 1]	[(11-1)x2]÷5]-3] **1**	(11-1)x2÷5-3 **1**
3 - Escreva o menor número natural primo.	2=[(3+5+7)-11]:2	2=7-[(11-5)-(3-2)]	{[(11+3)÷2]-5} **2**	(-5)+(11+3)÷2 **2**
4 - Escreva o menor número natural composto.[23]	4 = 2.2 e 6 = 2.3	4=11-[(7-3)+(5-2)]	11-7+2-5+3	11-7+2-5+3 **4**
5 - Qual é o maior número natural composto que você consegue escrever?	[(3x5x7x11)+2] = 1155+2=1157 = 13x 89	2x3x5x7x11 = 2310	(11x7x5x3x2) **2310**	(11x7x5x3x2) **2310**
6 - Qual é o maior número natural ímpar que você consegue escrever?	[2+(3x5x7x11)] = 2 + 1155 = 1157	(3-2)x5x7x11=385	(11x7x5x2)-3 **767**	(11x7x5x2)-3 **767**
7 - Escreva o menor número natural que você consegue achar, usando uma só vez cada urna das operações.	1=(7+11)÷2-(5x3) APAGOU	11-[(2+3)÷5]x7=4	[11-(7+3)]÷(5x2)] **1/10**	{11-(7+3)}÷(5x2) **1/10**
8 - Determine e escreva o maior número natural par possível, usando uma só vez cada uma das operações.	[(11.7)+(5-3)÷2] =77+2:2 = 78	7x11-[(2+3)÷5] =76	[11x(7+5)÷(3-2)] **132**	[11x(7+5)÷(3-2)] **132**
9 - Escreva um número natural usando apenas subtrações.	[(11-2)-(7-5)-2] = [(9-2)-2]= 7-2 = 5	11-[(7-5)-(3-2)] **8**	11-(7-5)-(3-2) **8**	11-(7-5)-(3-2) **8**
10 - Determine e escreva o maior número primo possível obedecendo as instruções.	[(3x5x7x11)-2] = 1155 - 2 = 1153.[24]	NÃO RESPONDEU	(11x7x5x3)-2 **1153**	(11x7x5x3)-2 **1153**
Itens	**DPG$_1$**	**DPG$_2$**	**DPG$_3$**	**DPG$_4$**
2- Escreva o menor número natural ímpar.	1 = 11+7-5.3-2	(11+7)÷2-(5+3) 1	1=[(2x7)-(5-3)]-11	Resposta dever ser 1. Partir de um número ÷ por ele mesmo ou (x+1) – (x) (11+3)÷(2+5+7)
3 - Escreva o menor número natural primo.	2 = 7+5+3-2-11	5-[(7+11)÷(3.2)] 2	2 = 5 - [(2 + 11) - (7 + 3)]	Resposta deve ser 2. Partir de 2n÷n ou (n+2) – n. (3+7)-(11+5)÷2
4 - Escreva o menor número natural composto.	4 = 11-7+5-3-2	4 é um número compôsto (11-7)+[5-(2+3)]	4=5-(11x2-3x7)	Resposta deve ser 4=2x2, (11+5)-(7+3+2) (16) – (12)
5 - Qual é o maior número natural composto que você consegue escrever?	11.7.5.3.2 = 2310	(11.7.5).(3.2) 2310	2310 = 2.3.5.7.11	Multiplicar todos: 2x3x5x7x11= 2310
6 - Qual é o maior número natural ímpar que você consegue escrever?	11.7.5.2+3 = 773	(11.7.5).3= 1155 (não utilizou o número 2)	1157 = 3.5.7.11+2	Multiplicar todos, com exceção do menor número para subtrair. 2x5x7x11-3 = 770-3=767, 3x5x7x11-2= 1155-2= 1153
7 - Escreva o menor número natural que você consegue achar, usando uma só vez cada urna das operações.	2.[(11+7)÷3-5]=2	[(5+11÷4-3].2=2	[11+5.2]÷7-3 = 0	Multiplicar no início os menores possíveis. Dividir ao final (se possível) pelo maior. 7-[11÷(2x3+5)]= 6 ou (5x7-2)÷11+3=6
8 - Determine e escreva o maior número natural par possível, usando uma só vez cada uma das operações.	[(5+7)÷3-2].11 = 22 (não tenho certeza)	[(5+7)÷2+3].11 99	11x[7+5÷(3 -2)] = 132	Para ser par ou multiplicar por 2 ou subtrair ao final, dividir pelo menor (5+7)x11÷(3-2)= 132
9 - Escreva um número natural usando apenas subtrações.	11-(7-5)-(3-2) 8	(11-7) - (5-3-2) 4	3-{2-[5-(11-7)]}=2	11-(3-2)-(7-5)=8
10 - Determine e escreva o maior número primo possível obedecendo as instruções.	11.(7+5+2)+3 = 157 não tenho certeza	(5.7.3.2) – 11 199	3.5.7.11-2 = 1153	3x5x7x11-2= 1155-2 = 1153

[23] Dizemos que um número natural é composto quando pode ser escrito como produto de dois números naturais maiores que 1. Assim, por exemplo, 91 é composto porque podemos escrever 91 = 7 × 13.

[24] Depois de resolver esse item o sujeito DCM$_1$ escreveu o seguinte: "Para saber se esse número é primo é preciso verificar se 1153 não é divisível por nenhum número primo menor que sua raiz ou o número mais próximo da raiz, isto é: 1153 não é divisível por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 31. Se não é divisível por nenhum desses números primos, logo 1153 é primo".

QUADRO 5: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2-A PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS – (CONTINUAÇÃO)

Itens	**PEB$_1$**	**PEB$_2$**	**PEB$_3$**	**PEB$_4$**
2- Escreva o menor número natural ímpar.	1=(7-2+3)-11-5	1=[(2x7) - (5-3)] - 11	[15-(4+3).2] ÷1 = 1	[(2x7)-(5-3)]-11 **1**
3 - Escreva o menor número natural primo.	2=(7+5)-(11+2)+3	2=[(11-7):(5-3)] (apagou a operação e não utilizou todos os 5 números)	{[(5+4)÷3]-2}+1=2	[(11+7)÷3-5]x2 **2**
4 - Escreva o menor número natural composto.	4 = (11+5)÷2-7+3	NÃO RESPONDEU	{[(11+5÷2]-7}+3=4	2375
5 - Qual é omaior número natural composto que você consegue escrever?	2310=11.7.5.3.2	Partindo do pressuposto que os números naturais são infinitos, não consigo imaginar.	30.030, pois 2.3.5.7.11.13, mas não há limites	2x3x5x7x11 = 2310
6 - Qual é o maior número natural ímpar que você consegue escrever?	1153 = 11.7.5.3-2	Idem a 5.	30.029, pois (2.3.5.7.11.13) - 1	(2+3)x11x5x7= 1925
7 - Escreva o menor número natural que você consegue achar, usando uma só vez cada urna das operações.	2=[(11.2)-(3+5)]÷7	1 = (2/2) = 3 - 2 = 1 x 1 = 1 + 0	{[(5+4)÷3]-2}.1 = 1	[11-(7x3)]÷2+5 **0**
8 - Determine e escreva o maior número natural par possível, usando uma só vez cada uma das operações.	35=(11.7+3)÷2-5	NÃO RESPONDEU	{[(15.18)+33] ÷3} -1 = 100	[(7+5).11]÷(3-2) **132**
9 - Escreva um núm ero natural usando apenas subtrações.	8=11-(7-5)-(3-2)	4-2	37-(12-5)-(7-2)=25	7-2-[1-(4-5)][25]
10 - Determine e escreva o maior número primo possível obedecendo as instruções.	41 = (11.5+2)-3+7	NÃO RESPONDEU	{[(15.18)+27] ÷3}-2 = 97	7523

Itens	**PES$_1$**	**PES$_2$**
2- Escreva o menor número natural ímpar.	1 = (7x3)-(2+11+7)	[(11-2)÷3]-(7-5) = 1
3 - Escreva o menor número natural primo.	2 = (2 + 5) x 2 - (11+7)	[(5-2)-(11-3-7)] = 2
4 - Escreva o menor número natural composto	6 = (2).(3)	[(11-2)÷3]x(7-5) = 6
5 - Qual é o maior número natural composto que você consegue escrever?	77 = (7).(11)	(2.3.5).(7.11) = 2310
6 - Qual é o maior número natural ímpar que você consegue escrever?	35 = (5).(7)	(3.5.7.11)+2 = 1157
7 - Escreva o menor número natural que você consegue achar, usando uma só vez cada urna das operações.	0 = 2(3) + 5 - 11	{[(3.5)-11]÷2}+7 = 9
8 - Determine e escreva o maior número natural par possível, usando uma só vez cada uma das operações.	{{[(11)(7)]-2}÷5}+3 = 18	[5÷(3-2)+7]x11 = 132
9 - Escreva um núm ero natural usando apenas subtrações.	7-2-[1-(11-5)] **10**	(11-7)-(5-3-2) = 4
10 - Determine e escreva o maior número primo possível obedecendo as instruções.	NÃO RESOLVEU	(3.5.7.11)-2 = 1153

Essa atividade tem uma estrutura semelhante a da atividade anterior (1-A). Quanto à forma de resolução solicitada, são quase idênticas, "*como ser ele o resultado de quantas e quais possíveis combinações a serem*

[25] Ao registrar essa operação ele não usou o número 11 e sim o 1. Como não escreveu o resultado acreditamos que ele tenha utilizado o 1 para obter um número natural, pois se fosse o 11 no lugar do 1 encontraríamos -7, que não é um número natural.

feitas com tais e tais valores, sem repeti-los, utilizando-se das regras definidas de operação e separadores gráficos desse ou daquele jeito”. O diferencial está na maneira como os itens são pedidos, em cada caso. Foram solicitados em termos de proposições, e são 10 ao todo (sendo apenas a primeira fornecida como exemplo). Assim torna-se necessário, antes de tentar resolver o item proposto, que os participantes leiam, interpretem e avaliem a proposição, para ter uma noção se a resposta a que irão procurar satisfazer é coerente com a solicitação feita em cada caso. Essa ação não é muito simples, pelo fato de não ser um número uma resposta direta, como no caso anterior, mas que necessita do conhecimento prévio de conceitos e definições matemáticas para só então, iniciar o processo de combinação entre números (sem repetição) com os operadores e separadores gráficos indicados.

Nessa atividade 2-A constatou-se a riqueza na variedade de alguns cálculos aritméticos como, por exemplo, nos itens 2 e 3 em que foram informadas três formas diferentes de se calcular o número um e o número dois combinando os cinco primeiros números ímpares. No item 9, obteve-se três respostas distintas. No entanto, percebeu-se certa dificuldade na resolução de alguns itens, que são comentados em dois níveis a seguir.

De forma mais individual, salientou-se alguns aspectos:

- O participante DPG_4, diferentemente dos demais participantes, resolveu a atividade 2B descrevendo como pensou cada item indicando que primeiro pensava no número envolvendo o conceito, por exemplo, “o menor número natural primo” para depois efetuar os cálculos usando os cinco primeiros números ímpares;
- o participante PEB_2 resolveu o item 3 a lápis e depois apagou (porém, conseguiu-se recuperar sua resolução pela marca deixada no papel e constatou-se que não havia utilizado a definição de número composto), errou os itens 7 e 9 e não respondeu os itens 4, 5, 6, 8 e 10; também o participante PEB_3 ao resolver os itens dessa atividade não se ateve ao enunciado da mesma, ou seja, “utilizar os cinco primeiros números primos”,

pois ele inseriu também os números 15, 4, 12, 13, 18, 27, 33 etc, errando assim todos os itens dessa atividade;

- Os participantes dos PEB, nos itens 2 e 3 obtiveram o mesmo resultado recorrendo a cálculos diferentes (sendo que PEB_2 resolveu o item 2 da mesma forma que PEB_4); no item 3 o participante PES_1 obteve como resposta o número (– 4) que não é o menor número natural ímpar;
- nos itens 5, 6, 7 e 9 o participante PES_1 errou porque não utilizou todos os números possíveis conforme o enunciado da atividade, sendo que no item 9 usou o número um em vez do três. No item 8 o participante PES_1 obteve como resposta o número 18 em vez de 132 e não respondeu o item 10. Em contrapartida PES_2 acertou os itens 5, 8, 9 e 10, errando os itens 6 e 7, embora tenha utilizado as instruções corretamente não obteve as respostas certas.

De forma mais coletiva, destaca-se:

No item 4 vários participantes erraram, pois não usaram a definição de número composto. O participante DCM_1 até escreveu como produto, porém, não utilizou todos os cinco primeiros números ímpares; outros participantes obtiveram a resposta certa (4), porém, nenhum deles utilizou a definição de número composto fornecida no enunciado da atividade, embora o participante DPG_4 tenha inicialmente indicado que a resposta seria 4 como produto de 2x2, ao escrever as operações não considerou esse produto. Tanto DPG_4 como DPG_3 fizeram (a-b) em que a e b foram obtidos por meio dos cinco primeiros números ímpares. PES_2 utilizou todos os números, mas não obteve o menor número natural composto;

No item 5 a maioria dos participantes apresentou a resposta correta 2310 utilizando o mesmo cálculo, sendo que apenas quatro não acertaram.

No item 6 não houve unanimidade nas repostas. Entre os oito discentes surgiram oito resultados diferentes (35, 385, 767, 773, 1153, 1155, 1157, e 30029) e nenhum deles apresentou a resposta correta que é 1925, talvez por não analisarem as diferentes combinações dos cinco primeiros números ímpares. Tem-se a impressão de que fizeram apenas uma única tentativa para combinar os cinco primeiros números ímpares;

No item 7 também houve três resultados distintos (1, 4 e 1/10) e nenhum respondeu o correto que é zero. O participante DCM_1 que resolveu as atividades a lápis obteve a resposta 1 e depois apagou, porém, foi possível recuperar seu processo de resolução. Já os participantes DCM_3 e DCM_4 obtiveram o resultado 1/10, tudo indica que fizeram o cálculo pensando em obter 'o menor número' em vez 'do menor número natural'. Apenas dois acertaram obtendo o resultado zero;

No item 8 também constatou-se 7 respostas diferentes (vide quadro resumo a seguir), sendo que seis chegaram à mesma resposta que é o maior número 132, não havendo unanimidade ao se obter o maior número natural par possível utilizando apenas os cinco primeiros números primos. Os participantes PEB_1 e DPG_2 não perceberam que a resposta não satisfazia a solicitação do item, ou seja, 'maior número natural par'. Os Professores do Ensino Superior chegaram a resultados diferentes por processos diferentes e apenas PES_2 acertou a resposta;

O item 9 que poderia originar resultados distintos ao combinar os cinco primeiros números primos, usando apenas a operação de subtração para obter um número natural, constatou-se que dos quatro participantes que obtiveram o resultado 8, três o fizeram por meio de dois processos de cálculos diferentes.

O item 10 foi resolvido por 11 participantes, mas seis deles obtiveram a resposta certa (1153). Convém comentar que PEB_4 nesse item registrou apenas os resultados sem indicar como os conseguiu.

Analisando de forma geral o desempenho dos participantes, com exceção do participante PEB_3 que resolveu a atividade de forma incorreta por não utilizar a condição fornecida no enunciado e daqueles que não responderam alguns itens, pode-se tecer alguns comentários interessantes sintetizando essas observações e estabelecendo as devidas correlações:

- no item 2 todos os treze participantes obtiveram como reposta o número um, no entanto, houve grande variedade na forma de se calcular esse número utilizando apenas os cinco primeiros números ímpares, em resumo identificou-se nove processos de cálculos diferentes;
- no item 3 a variedade foi maior, pois dos onze que conseguiram resolvê-lo dez utilizaram processos diferentes;
- no item 9, que poderia originar diferentes respostas, dentre os onze participantes que resolveram conforme as instruções da atividade, identificou-se cinco resultados diferentes: 2, 4 (dois participantes), 5, 8 (seis participantes) e 10, em que quase metade dos participantes obteve o valor 8;
- nos itens 4, 5, 6, 7, 8 e 10 constatou-se diferentes respostas como ilustra o quadro 07 a seguir, em que apenas alguns conseguiram obter a resposta correta.

QUADRO 6: SÍNTESE DOS RESULTADOS DE ALGUNS ITENS DA ATIVIDADE 2-A

ITENS	ACERTOS	ERROS	NÃO RESOLVEU
4	0	13 (8 participantes obtiveram o número 4 como resposta, mas não utilizaram a definição de número composto e outros não usaram os cinco números)	1
5	10 (resposta 2310)	3 (respostas: 77, 1157 e 30030)	1
6	1 (resposta 1925)	12 (respostas: 35, 385, 767, 773, 1153, 1155, 1157, e 30029)	1
7	2 (resposta 0 por dois processos diferentes)	12 (respostas: 1/10, 1, 2, 4, 6, 0 (um participante obteve 0, porém, usando apenas 4 números ímpares))	0
8	6 (resposta 132, valor obtido por quatro processos diferentes)	7 (respostas: 18, 22, 76, 78, 100, 35 e 99, os dois últimos resultados não são números pares)	1
10	6 (resposta 1153)	5 (cada um obteve uma resposta diferente: 41, 97, 199, 157 e 7523)	3

A atividade 2A, diferentemente da 1A, já requer inicialmente o uso do pensamento relacional na medida em que, além de pensar nos cálculos instrumentais usando os cinco primeiros números ímpares é preciso ‘pensar’ nos vários conceitos envolvidos para os resultados que se pretende, como, por exemplo, nas frases ‘menor número natural ímpar’, ‘menor número natural primo’, ‘maior número natural composto’, isso nos reporta a uma linguagem de cunho teórico, com terminologia específica da Matemática, com características axiomáticas, em que o sentido e significado são mais ‘densos’.

Isto só não ocorreria para uma pessoa que estivesse num estágio de capacitação muito superior ou tivesse uma experiência e vivência com a teoria matemática maior que os demais (que são poucos, considerando a população proporcional e o contexto atual), sendo que, para ela, esse ‘pensar nos vários conceitos’ já seria um processo instantâneo e automatizado, ou seja, se tornando para ela, um pensamento instrumental, como considera SKEMP (1989).

Isso nos sugere que, pensar numa operação envolvendo certos números estabelecidos, e simultaneamente relacionar com conceitos matemáticos, parece ser mais difícil. Provavelmente essa seja a causa de se ter alguns itens sem respostas e de ocorrer resoluções erradas, como ilustrou o quadro resumo anterior (quadro 6).

Referendando-se a Otte (2007) que, comentando verbalmente as idéias de Skemp (1989), o instrumental fornece e acelera condições para estabelecer novas relações. Por isso ele também é muito importante. Ainda, Fossa (2001) deixa transparecer que o ‘o quê’ ajuda a compreender melhor o ‘porque’. Não é pela teoria que surgem os axiomas? Dessa forma, os axiomas não são transformados em meros instrumentos para melhor explicar a teoria?

Essa atividade ficou marcada, principalmente porque os participantes tentaram **resolver** usando muito a intuição, para uma situação que solicitava de muita **interpretação,** que é essencialmente analítica. Não se encontrou nas atividades aplicadas, esboços de tentativas de processos mais lógicos e/ou estruturados, como reflexão sobre a natureza das operações e dos resultados (par operando com par, ou vice-versa, primo operando com primo ou com outro composto, uma conjectura acerca dos resultados requeridos, será de que natureza? Par, impar, primo, composto etc).

Atividade 3-A: Proposição: Sem utilizar-se de uma calculadora ou computador para obter o resultado direto, procure argumentos para justificar qual dos dois números abaixo representado é o de maior valor:

$$\alpha = (1 + 0{,}000001)^{1.000.000} \quad \text{ou} \quad 2?$$

Essa atividade propõe uma questão um tanto mais trabalhosa, que envolve uma série de conceitos que não são aparentes e nem estão claramente enunciados na proposição. Outro ponto a considerar, que também é raramente explorado, é o convite que se faz para encontrar argumentos que justifiquem determinada situação. Imediatamente, evidencia uma articulação para desenvolver a habilidade de estruturar uma linha de raciocínio e, tem-se o problema e o que se pede. Esse é o enunciado. Logo após, o aluno buscar as referências já existentes (conceitos sobre números primos, compostos, decomposição...) para isso, sendo capaz de comunicar idéias matemáticas indagadas e compreendidas, novamente indicadas por Oliveira (2002), mas que só conhecer não justifica nem garante a resolução, há a necessidade de relacionar esses conceitos com as possibilidades de resolução, realizando aí a transição do saber para auxiliar o compreender, indicada por Fossa (2001). Dessa forma tem-se referendada a posição de Skemp (1989) com um grau de complementaridade indicada por Otte (1993).

QUADRO 7: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 3-A PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

<table>
<tr><th>DCM_1</th><th colspan="2">DCM_2</th><th>DCM_3</th><th>DCM_4</th></tr>
<tr><td>α = (1 + 0, 000001)^{1000000} > 2, pois 1 + 0,000001=1,000001 (1,000001)^{1000000} > 2, pois se fosse 1^{1000000} = 1 mas como é (1,000001)^{1000000} $\cong$ 2,718</td><td colspan="2">Pensando em binômio acredito que α=(1+0,000001)^{1000000} seja maior que 2, uma vez que o número de parcelas será maior, o expoente é (1000000) e será feita a adição das parcelas.</td><td>ln α = 1000000 (ln (1, 000001)); ln 2 = ;
ln α > ln 2
ln α - ln 2 > 0
ln(α/2) = (1000000 ln(1,000001))/2 = 500.000 ln (1,000001), como ln (1,000001) > 0 (propriedade logarítmica) α > 2.</td><td>ln α = 1.000.000 (ln (1, 000001)) ou ln 2; supor ln α > ln 2
ln (a/2) > 0 = 500000 ln (1,000001), como ln (1,000001) > 0
ln a > ln 2 -> α > 2.</td></tr>
<tr><th>DPG_1</th><th colspan="2">DPG_2</th><th>DPG_3</th><th>DPG_4</th></tr>
<tr><td>α=(1+1/1000000)^{1000000} é maior, mas um argumento plausível sem cálculos não consegui formular claramente. O cálculo é necessário, pois ajuda a perceber os possíveis equívocos provocados pela intuição.</td><td colspan="2">O maior será 2. Suponhamos (1+0,000001)^{1000000} =
?? ? ??? ? ????????? =
???? ???????????
=?? ? ?G?? ? ? ???????????
? ??? ?????????
? ??????????????????????
? ???? ????????????????????????
sempre + 2.10^{-6} + cada vez menor
1 (2x10^{-6}) > 1 ?
(2.x.10^{-6}) > 1 → ? ? ?/?G???
? ? ????/? ? ? ? ???????/?
? ? ??????</td><td>α é maior que 2, $\alpha \cong$ e, (1 + 1/1)^1 = 2;
(1 + 1/2)^2 = 2,25;
(1 + 1/3)^3 =2,36...,
(1+ 1/1000000)^{1000000} > 2,36 > 2.</td><td>(1+0,000001)^{1000000}
? ???
? ???????????????????
=(1^2 + 0,000002 + 10^{-12})^{500000}</td></tr>
<tr><th>PEB_1</th><th>PEB_2</th><th>PEB_3</th><th colspan="2">PEB_4</th></tr>
<tr><td>α = (1+0,000001)^{1000000}
Usando o Binômio de Newton temos:
α = ???? ? G??? ?
???? ? G?????????????? +...
+???? ? G???
α = 1 + 1 + n, com n>0, logo
α = 2 + n > 2.</td><td>NÃO RESPONDEU</td><td>α = (1+0,000001)^{1000000}
= ?? ? ????????
Através do desenvolvimento newtoniano:
? ? ???? ? G??? ?
???? ? G???????????????+
???? ? G????????????????+...+
???? ? G??????????
1.1 + 10^6.10^{-6} e a última parcela podemos chamar de g sendo g>0.
Logo α = 1 + 1 + g
α = 2 + g, portanto, α > 2.</td><td colspan="2">α = (1+0,000001)^{1000000}
α = (1,000001)^{1000000}
α = (2 - 0,999999)^{1000000}
α = (4 - 2,999999)^{1000000}
$\alpha \cong$ (4 - 3)^{1000000}
$\alpha \cong$ (1)^{1000000} -> $\alpha \cong$ 1. Porém, a idéia de cima supõe que 2,999999 está tendendo a 3. Levando em consideração que 0,000001 ou 2,999999, são números relevantes (casas decimais importantes), como na área da Física ou da Química, a idéia é outra. Podemos pensar, se (1+0,1)^{10} é maior ou menor que 2. Vamos encontrar a raiz quadrada de ambas. Raiz quadrada de 2 é $\cong$ 1,4, (1+0,1)^{10} = (1,1)^{10} -> raiz quadrada de (1,1)^{10} = (1,1)$^{10/2}$ = (1,1)^5, utilizando as duas decimais $\cong$ 1,6. Portanto, (1,1)^{10} = (1+0,1)^{10} > 2, por indução (1+0,000001)^{1000000} > 2.</td></tr>
<tr><th colspan="3">PES_1</th><th colspan="2">PES_2</th></tr>
<tr><td colspan="3">NÃO RESOLVEU</td><td colspan="2">1,000001^{1000000}; é uma exponencial crescente
Pois a base é maior que 1, assim 1,000001^{1000000} tende a ser maior que 2</td></tr>
</table>

Todos os participantes que de certa forma responderam a esse item concluíram que α = (1+1/1000000)^{1000000} é maior que 2, porém, recorrendo a conceitos, ou matemática instrumental, diferentes. O participante DCM_1 comparou 1^{1000000} = 1 com (1,000001)^{1000000}. Já o participante DCM_2 pensou no

Binômio de Newton (sem escrevê-lo) para afirmar que haverá a adição de muitas parcelas, pois o expoente é 1.000.000. E os participantes DCM_3 e DCM_4 resolveram da mesma maneira utilizando logaritmos (matemática instrumental).

O participante PEB_4 utilizou um pensamento relacional na medida em que estabeleceu relações entre diferentes subtrações de dois números como forma de se reescrever o número 1,000001, inclusive propriedade da potenciação, raiz quadrada, limite e indução matemática (sem desenvolvê-la).

PES_2 desenvolveu, considerando a expressão como uma exponencial crescente de base b > 1, ele reconheceu o que já lhe era familiar, ou seja, a matemática instrumental.

Alguns participantes foram unânimes ao afirmar que $\alpha > 2$, no entanto, o participante DPG_1 não conseguiu explicar porque é maior e os outros três participantes utilizaram propriedades da potenciação, porém, DPG_2 e DPG_4 não chegaram ao resultado esperado.

Três dos quatro participantes pertencentes a esse grupo resolveram essa atividade, em que dois deles recorreram ao Binômio de Newton (matemática instrumental). O participante PES_1 não resolveu.

A tabela 9 a seguir, indica que entre os participantes pesquisados houve uma variedade no uso de conceitos matemáticos ao tentar justificar que $\alpha > 2$, em que se pode constatar que fizeram o uso de Matemática instrumental os participantes que recorreram ao Binômio de Newton, ao logaritmo e à propriedade da exponencial, pois os que procuraram estabelecer comparações entre os expoentes foram mais pelo processo de 'tentativa e erro'.

	PROCEDIMENTOS				
	Binômio de Newton	**Logaritmos**	**Comparação de expoentes / propriedade exponencial**	**Respondeu e não justificou**	**Não respondeu**
Número de Participantes	3	2	5	3	1

TABELA 5: SÍNTESE DAS RESOLUÇÕES DA ATIVIDADE 3-A APRESENTADAS PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Atividade 4-A: <u>Proposição:</u> Em sua opinião, em que aspecto esse formato ou modelo de atividade contribui para que o aluno aprimore sua forma de resolver problemas?

QUADRO 8: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 4-A PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

DCM_1	DCM_2	DCM_3	DCM_4
Contribui para que o aluno desenvolva o raciocínio lógico, sabendo que os números podem ser agrupados de diferentes maneiras, usando as quatro operações pode-se chegar a um mesmo resultado e também a resultados totalmente diferentes.	Esse tipo de atividade exige que o aluno entenda o que está sendo proposto antes de iniciar a resolução. O que não é a prática que vem sendo aplicada no ensino hoje.	NÃO RESPONDEU	Em nada, aqui são apenas definições, e seguir definições não é pensar.
DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
Creio que estas atividades ajudam melhorar a procura de estratégias diferentes para resolução do mesmo problema. E pode mostrar que os problemas matemáticos não estão prontos e acabados.	São atividades de tentativa e erro. Não existe um modelo. Você pensa um caminho e testa. Com o desenvolver da atividade vai-se percebendo e ligando alguns aspectos do seu conhecimento prévio e voltando e redirecionando as estratégias que tomou. Acredito que a atividade promova a autonomia e autoconfiança. Devo ressaltar que esse tipo de atividade quando muito das 'possibilidades' do aluno tem exatamente o efeito contrário, e que não valem muito se o aluno não puder expor e ouvir as 'estratégias' utilizadas, o que pode sempre enriquecer e legitimar estratégias.	Essas atividades estimulam o raciocínio, e como pode haver diversas formas de resolução, então o aluno não poderá obter a resposta diretamente com o professor. Ele deverá superar seus limites até encontrar uma resposta mais próxima da verdadeira, se existir, é claro.	No sentido de que necessita de concentração e raciocínio, envolvendo conceitos básicos de Matemática e sem prender a formulas.
PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
Além de levá-lo ao raciocínio indutivo, pois não absolutamente necessário desenvolver por completo o binômio, mostra-se interessante no que se refere ao Número 'A', base do logaritmo natural, uma vez que esse somatório resultará em algo próximo de 2,7182...	As atividades contribuem para assimilação dos conceitos de números: primos, compostos, naturais... Indica alguns caminhos que devem ser respeitados que ao resolver situações problemas tem que haver uma seqüência de raciocínio para chegar à resposta, neste sentido, podemos dizer que as atividades contribuem para que o aluno aprimore sua forma de resolver problemas.	No momento em que o aluno dispõe e usa as ferramentas possíveis, entendendo e conscientemente buscando o melhor caminho, ele está aprimorando.	Como desafio, terapia, passatempo, a atividade é justificada para quem 'gosta' de Matemática. Mas no enunciado dá para perceber que é um exercício sem contexto. Por que não posso utilizar calculadora ou computador? Qual razão me leva a trabalhar com 10^6 e 10^{-6} juntos. Para quem se interessa por Matemática, a idéia de levar à vários caminhos, é sensacional, é fantástica, para alguém que está com vontade de viver, filosofar, $(1 + 0{,}000001)^{1000000}$ é um lixo, nem vale a lembrança.

PES_1	PES_2
Aprimora no sentido de restabelecer objetivos claros de resoluções. Defesa do que se sabe e melhoramento no aspecto lógico matemático.	Na oportunidade de domínio das operações básicas e os muitos algoritmos que ele pode construir nessas operações.

Os participantes que responderam essa questão indicaram aspectos diferentes tais como: a atividade contribui para reconhecer a importância de se interpretar o enunciado de uma atividade antes de resolvê-la; contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico e para a variedade de processos ao efetuar operações envolvendo certos números; desenvolvimento do raciocínio indutivo; do raciocínio lógico; a assimilação dos conceitos de números (primos, compostos, naturais...); além de se caracterizar como desafio, terapia, passatempo, para quem 'gosta' de Matemática. Também contribui para que o aluno aprimore sua forma de resolver problemas além de esclarecer os objetivos de resoluções de problemas e com isso melhorar a busca de estratégias diferentes para resolver um mesmo problema; que possibilita perceber e ligar o conhecimento prévio servindo para redirecionar as estratégias que tomou, além de promover a autonomia e autoconfiança do aluno; que elas estimulam a concentração e o raciocínio, desenvolvimento do raciocínio lógico matemático; melhoria no domínio das operações básicas e na construção de algoritmos envolvendo essas operações. Muitas dessas contribuições são exemplos de recomendações também indicadas por Skemp (1989).

Fossa (2001) reforça que, quando as atividades são bem estruturadas e objetivadas, possibilitam que o aluno tenha seu ponto de partida nas indagações do 'o que' e proporcione meios para que ele avance e encontre soluções para responder o 'porque', isso evidencia que está ocorrendo a transição e evolução entre o ato de saber e o ato de compreender.

O participante DCM_4 afirmou que a atividade não contribui para nada, pois requer apenas o uso de definições. DCM_1 indicou duas respostas antagônicas tendo em vista que uma aponta para uma atividade aberta em termos da possibilidade de se efetuar diferentes operações que podem conduzir a um mesmo resultado ou a resultados diferentes, e outra para a atividade fechada no sentido de que não exige nada além de definições e que isso não é pensar.

Tendo como referência as opiniões dos 13 participantes pesquisados que responderam à atividade 4-A constatou-se que a atividade A:

- proporciona o conhecimento de diferentes processos ao efetuar operações envolvendo certos números, bem como desperta o interesse pela busca de estratégias diferentes para resolver um mesmo problema;
- possibilita a assimilação dos conceitos de números (primos, compostos, naturais...) e de algoritmos;
- envolve a aplicação de definições e de conhecimentos prévios;
- evidencia a necessidade de se interpretar o enunciado de uma atividade antes de resolvê-la;
- desenvolve no aluno a autonomia, a autoconfiança, a concentração, o raciocínio lógico e o indutivo;
- para quem 'gosta' de Matemática constitui como desafio, terapia e passatempo.

De um modo geral, o fato da Sessão A ter destacado mais atividades envolvendo conceitos aritméticos, conduz o pensar matemático mais nas suas estruturas e relações internas. Dessa forma, tem-se a impressão que o pensamento instrumental é muito mais evidente e presente, porque o conjunto de propriedades, definições, regras são mais aparentes e normalmente conhecidas, Porém, acredita-se que o grande problema está em proporcionar situações, atividades, para que essas propriedades, definições e regras possam ser articuladas e utilizadas relacionalmente, possibilitando que a compreensão se dê no âmbito da generalização, da teoria, e não simplesmente por um conjunto fragmentado de informações.

Em síntese, os participantes apresentaram a percepção de como essas poucas atividades requerem uma quantidade de conceitos e ferramentas para seu desenvolvimento e que não apresentam a necessidade do estabelecimento da linearidade de conteúdos no qual estão habituados a trabalhar com seus alunos. Normalmente as melhores relações são estabelecidas em situações não-convencionais. **Otte (1993**), quando exemplifica na condição de um intelectual exemplar, aponta para o caso em que numa situação proposta por um professor, se ela é bem estruturada e possui uma aplicação implícita, ela consegue obter do aluno um máximo de rendimento, não somente no desenvolvimento de algumas poucas habilidades ou atitudes, mas no estabelecimento de relações muito mais profundas em termos de contextos tanto histórico, cultural, social, etc.

A situação pode fornecer elementos para discutir e entender muitas das dualidades existentes a respeito da construção e do desenvolvimento do conhecimento, na medida em que o aluno se torne agente no processo, e não somente espectador. E para que isso aconteça, o pensar não pode ser 'acorrentado' a uma estrutura seqüencial e estática de conhecimento.

4.4.2.3. – Ponto de vista dos pesquisados na Análise das Situações Matematizadas denominadas Sessão B: "Diagramas Relacionais"

Nessa sessão, o ponto de partida foi uma breve discussão sobre grafos, diagramas e gráficos, além de uma analogia com as funções, em que normalmente nos materiais didáticos disponibilizados nas escolas, surgem em geral, como uma associação obrigatória. Gráficos, diagramas, esquemas são, em geral, ferramentas para auxiliar a obtenção de uma visão intuitiva de um problema ou contexto, na mesma intensidade que pode ser conduzida para a direção de uma má-interpretação ou uma distorção **dele,** pela facilidade de conotações que se pode a ele atribuir. Dessa forma, grafos, diagramas e gráficos são ferramentas instrumentais amplamente relacionais.

Com o propósito de estimular o reconhecimento de relações entre o pensamento matemático durante as atividades de análise gráfico-visuais, considerou-se algumas situações-exemplo indicadas no trabalho de Claude Janvier (1978), também citadas por Biehler (1985), associadas a exemplos envolvendo um circuito de corrida. Também foi utilizado outro exemplo envolvendo uma análise ‘histórica’ temporal de apresentação de uma situação contextualizada graficamente.

Essas atividades não evocam situações reais, justamente pelo fato do real envolver dificuldades e variáveis muito mais complexas do que as que serão apresentadas. O uso de muitas variáveis poderia dificultar, nesse momento, a compreensão e o exercício ao pensamento. Em outros momentos, já com uma experiência vivenciada, torna-se possível buscar analogias com exemplos que modelem, com maior precisão, uma determinada realidade, ou seja, possibilidades de transpor essa análise para um circuito de corrida não-fictício.

Atividade 1-B: Proposição: Esse gráfico a seguir, ‘mostra’ como a velocidade de um carro de corrida varia ao longo dos 3km do trajeto, contando a partir da sua segunda volta.

Nessa atividade, a quantidade de perguntas também teve como finalidade ilustrar, para os participantes pesquisados, as diversas possibilidades que se pode utilizar para explorar ou reforçar os conceitos, não somente matemáticos.

FIGURA 50: GRÁFICO DA VELOCIDADE DE UM CARRO NUM CIRCUITO DE CORRIDA

QUADRO 9: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-B-ITEM 1 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

1 - Quantas curvas existem ao longo do circuito por onde percorre o carro? - Quais são os indicadores e como interpretá-los?				
Discentes Finalistas em Matemática	**DCM1**	**DCM2**	**DCM3**	**DCM4**
	3. 0,5; 1,3; 2,6, Cito esses indicadores porque é no momento das curvas que a velocidade é reduzida.	Três. As oscilações na velocidade (desaceleração e aceleração).	10. Os indicadores são: (I) a velocidade que diminui em certos pontos da pista	?. Não sei ao certo. Visualmente são 10 curvas, mas matematicamente não sei. Indicadores são os pontos de inflexão (visualmente).
Discentes em Pós-Graduação	**DPG1**	**DPG2**	**DPG3**	**DPG4**
	3. A redução brusca da velocidade sugere a presença da curva, mas não garante, pois a redução da velocidade pode indicar um 'acidente'. Além do mais qual é o conceito de curva considerado?	3. A queda da velocidade nos indica que o condutor reduziu para fazer a curva e logo em seguida retoma a velocidade.	3. Houve 3 momentos em que a velocidade foi reduzida drasticamente indicando a presença de curvas, em seguida, ela aumenta (é o que acontece quando se está no fim da curva) até atingir um máximo.	03. Os indicadores são as quedas das velocidades e pressupõe-se que não houve outro impedimento, o único motivo para se diminuir a velocidade seriam as curvas
Professores de Ensino Básico	**PEB1**	**PEB2**	**PEB3**	**PEB4**
	Três. Por ser necessário reduzir a velocidade ao 'realizar' uma curva, é visível no gráfico que essas reduções ocorrem por voltas dos 400m. 1200m e 2600m do percurso	3. As quedas nas velocidades.	Três. As reduções de velocidade nas distâncias aproximadas de 400m, 1300m e 2500m.	3. Diminuição da velocidade de forma relevante (1)? 150km/h para abaixo de 100km/h; (2)? 150km/h para? 50km/h; (3)? 150km/h para? 100km/h.
Professores de Ensino Superior	**PES1**		**PES2**	
	3. Quando o carro diminui a sua velocidade em determinado espaço.		3. A diminuição da velocidade, indicada no gráfico em curto espaço de tempo	

Nesse primeiro item, a maioria (12 dos 14) dos pesquisados indicou que o circuito possui 3 curvas, os outros dois discentes finalistas em Matemática (DCM) indicaram 10 curvas, evidenciando que relacionaram o conceito de curva, no gráfico, com cada mudança de direção sofrida pela linha do gráfico. Também a grande maioria (13 deles), relacionou a redução, decréscimo da velocidade, como indicadores dessas curvas, porém, três discentes, sendo um finalista em Matemática e dois outros em Pós-Graduação, conceituaram essas curvas como indicadores não só de redução de velocidade, mas como desaceleração e aceleração da velocidade /redução e aumento. Um dos discentes finalistas em Matemática citou os pontos de inflexão como indicadores das curvas e 03 dos Professores do Ensino Básico

(PEB) consideraram a relação de cada curva com a posição relativa ao circuito (distância).

Os próximos itens (2, 3 e 4), referem-se a identificação e o julgamento quanto ao grau de dificuldade na análise das curvas apresentadas no gráfico em questão.

QUADRO 10: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-B-ITEM 2 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Itens	DCM1	DCM2	DCM3	DCM4
2 - Qual é a pior curva? Justifique	Segunda curva (1,3). Porque a velocidade do carro estava entre 150-170 km/h aproximadamente e foi reduzida a quase 50km/h	km 1-1,5, a segunda. A velocidade diminui 'drasticamente', enquanto que volta a aumentar 'lentamente'. Nessa curva o carro atinge a menor velocidade.	é a do Km [1; 1,5], pois é o ponto em que há menor velocidade.	Como assim pior? Mais visível? É a do intervalo [1; 1,5].
	DPG$_1$	**DPG$_2$**	**DPG$_3$**	**DPG$_4$**
	Segunda. Nesse ponto a diminuição da velocidade é mais rápida.	A segunda. Pois foi o momento de maior redução na velocidade.	Segunda. A velocidade é reduzida mais drasticamente.	Segunda. Se pior refere-se à curva mais acentuada é a que requer maior desaceleração
	PEB$_1$	**PEB$_2$**	**PEB$_3$**	**PEB$_4$**
	A 2ª curva, Porque houve uma redução de aprox. 100 km/h em sua velocidade	Segunda. Em que houve uma maior queda na velocidade.	Segunda. Foi o local em que a redução foi maior.	Curva 2. A velocidade cai bruscamente acima de 150 Km/h para próximo de 50 Km/h.
	PES$_1$		**PES$_2$**	
	Curva 2. Devido a amplitude ser maior e sua velocidade em Km/h diminuir drasticamente.		Segunda. Pois a velocidade vai de 160 km/h a 60 km/h em 200 metros	

Foi unânime a eleição da segunda curva como a 'pior' curva, cuja justificativa recai na redução brusca da velocidade, sendo que quatro dos participantes cotaram essa variação da velocidade. Acredita-se que ficou implícito na maioria das observações, que o uso dos termos 'drasticamente', 'cai bruscamente', 'redução foi maior' denota uma comparação entre a velocidade e o deslocamento.

Buscando agora uma oposição de julgamento, a terceira curva foi a indicação de 12 dos participantes, sendo que um dos discentes finalistas em

Matemática indicou um intervalo em que não sugeriria uma curva e sim um local em que se desloca com alta e constante velocidade. Outro discente finalista simplesmente se absteve de responder.

As justificativas destacadas foram: ‘pouca redução da velocidade’; ‘pouca variação da velocidade’; ‘curva pouco aberta’; ‘curva pequena’ e os mesmos participantes que usaram as cotas de velocidades como argumentos de justificação na pior curva, o fizeram também para a curva mais fácil, indicando certa continuidade do raciocínio.

QUADRO 11: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-B-ITEM 3 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Itens	**DCM_1**	**DCM_2**	**DCM_3**	**DCM_4**
3 - Qual a mais fácil? Justifique:	Terceira curva (2,6). Porque não foi preciso reduzir muito a velocidade, que estava entre 150-170km/h e reduziu a 110km/h.	Próximo km 2,5 (terceira). Se trata de uma curva pequena e a mais ‘aberta’. (A velocidade diminui e aumenta ‘lentamente’).	do km [0,5; 1], pois a velocidade permanece quase constante.	Abstenção.
	DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
	Terceira. Nesse ponto a velocidade não foi reduzida tão rapidamente.	A última. Menor redução e retomada da velocidade.	Terceira. Houve pouca redução de velocidade.	Terceira. É a que exige maior desaceleração
	PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
	A 3ª curva, A redução foi a menor das três. De aprox. 50km/h	Terceira. A queda da velocidade foi menor.	Terceira. Foi onde a redução foi menor.	Curva 3. A mesma idéia da velocidade. Velocidade reduzida de mais de 150km/h para acima de 100km/h.
	PES1		**PES2**	
	Curva 3. A amplitude é mais tranqüila e a velocidade em km/h não diminui tanto.		Terceira. A variação só os de 160km/h para 110km/h	

Ainda que essa pergunta possa parecer redundante, pelo fato do gráfico apresentar somente 3 curvas, um dos propósitos dela é verificar se houve uma certa coerência entre os participantes nas respostas anteriores. Com exceção de uma abstenção, todos indicaram a primeira curva como sendo a ‘segunda mais difícil’.

As justificativas feitas a essa questão, de maneira semelhante aos dois itens anteriores, estavam na redução da velocidade. O interessante foi a identificação, por três dos participantes como sendo essa curva a intermediária entre a pior e a mais fácil, ou mesmo quando a redução for mediana quando comparada com as outras duas curvas.

O uso de indicadores numéricos como argumento de justificação continuaram a ser utilizados pelos mesmos quatro participantes.

QUADRO 12: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-B-ITEM 4 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

<table>
<tr><th>Itens</th><th>DCM$_1$</th><th>DCM$_2$</th><th>DCM$_3$</th><th>DCM$_4$</th></tr>
<tr><td rowspan="8">4 - Qual a ‘segunda mais difícil’ ? Justifique:</td><td>Primeira curva (0,5). Porque esta a aproximadamente 150-160km/h e teve a velocidade reduzida a 90km/h.</td><td>Próximo km 0,5 (primeira). Diminui a velocidade não tão lentamente como na terceira.</td><td>km [0; 0,5], pois é a segunda velocidade mais baixa do percurso.</td><td>Abstenção.</td></tr>
<tr><td>DPG$_1$</td><td>DPG$_2$</td><td>DPG$_3$</td><td>DPG$_4$</td></tr>
<tr><td>Primeira. Nesse ponto a velocidade foi reduzida de forma relativamente rápida.</td><td>A primeira curva.</td><td>Primeira. A velocidade mínima nessa curva exibe um valor intermediário em relação ao valor mínimo nas outras duas curvas.</td><td>Primeira. É a segunda que mais exige desaceleração</td></tr>
<tr><td>PEB$_1$</td><td>PEB$_2$</td><td>PEB$_3$</td><td>PEB$_4$</td></tr>
<tr><td>A 1ª curva, onde a redução na velocidade foi de aprox. 70km/h</td><td>A primeira, por ser a segunda a ter uma maior queda na velocidade.</td><td>Primeira. Foi onde a redução foi mediana, em relação às duas outras.</td><td>Curva 1. Velocidade acima de 150km.h, reduzida para abaixo de 100 Km/h.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PES1</td><td colspan="2">PES2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Curva 1. Tem uma velocidade mediana em relação às outras duas.</td><td colspan="2">Primeira. Pois a variação é de160km/h 90km/h</td></tr>
</table>

As duas próximas questões referem-se a indicação de velocidades e as duas últimas referem-se a relação com velocidade e distâncias determinadas no gráfico. Nessas questões, utilizou-se de conceitos básicos de outras ciências, como aplicações da Matemática, que por sua vez, também são de difícil interpretação e compreensão por parte dos alunos do Ensino Básico.

QUADRO 13: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-B-ITENS 5 E 6, PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Itens	DCM_1	DCM_2	DCM_3	DCM_4
5 - Qual é a velocidade máxima?	160km/h	Próximo 160km/h.	aproximadamente 151	Pouco acima de 150km/h
6 - Qual a velocidade mínima?	60km/h	Próximo 60km/h.	aproximadamente 51	Pouco acima de 50km/h
Itens	**DPG_1**	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
5 - Qual é a velocidade máxima?	162,5km/h	aproximadamente 150km/h	aproximadamente 162km/h	aproximadamente 160km/h
6 - Qual a velocidade mínima?	62,5km/h	aproximadamente 50km/h	aproximadamente 60km/h	aproximadamente 60km/h
Itens	**PEB_1**	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
5 - Qual é a velocidade máxima?	aprox. 160km/h	Aproximadamente 160km/h	Mais ou menos 160km/h	Acima de 150km/h
6 - Qual a velocidade mínima?	aprox 60km/h	A proximadamente 160km/h	Mais ou menos 60km/h	Qual volta?
Itens	**PES_1**		**PES_2**	
5 - Qual é a velocidade máxima?	150km/h		Aproximadamente 160km/h	
6 - Qual a velocidade mínima?	51km/h		60km/h	

A intenção dessas duas perguntas é o estabelecimento da leitura de um dado específico, referente à velocidade. As leituras do gráfico feitas pelos participantes foram praticamente idênticas, havendo uma pequena variação mais percebível na identificação da velocidade mínima. A intenção não era obter uma resposta exata, e sim tentar prever o equilíbrio ou não das estimativas. Apenas um PEB não se ateve na informação contida no gráfico, que essa situação referia-se a segunda volta.

QUADRO 14: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-B-ITENS 7 E 8 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Itens	DCM_1	DCM_2	DCM_3	DCM_4
7 - Qual é a velocidade quando o carro está a 1km do ponto de largada?	160km/h	próximo de 160km/h.	aproximadamente 151	aproximadamente 150km/h
8 - E a 2,5km?	110km/h	próximo de 110km/h.	aproximadamente 102	aproximadamente 100km/h
Itens	**DPG_1**	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
7 - Qual é a velocidade quando o carro está a 1km do ponto de largada?	162,5km/h	pouco mais de 150km/h	aproximadamente 160km/h	aproximadamente 160km/h
8 - E a 2,5km?	112,5km/h	aproximadamente 100km/h	aproximadamente 160km/h	entre 110 à 115km/h aproximadamente
Itens	**PEB_1**	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
7 - Qual é a velocidade quando o carro está a 1km do ponto de largada?	em torno de 160km/h	aproximadamente 160km/h	mais ou menos 160km/h	Qual volta? Na primeira sem idéia; na segunda acima de 150km/h
8 - E a 2,5km?	algo por volta dos 110km]h	aproximadamente 90km/h	mais ou menos 120km/h	na primeira volta sem idéia, na segunda entre 100 e 150km/h
Itens	**PES_1**		**PES_2**	
7 - Qual é a velocidade quando o carro está a 1km do ponto de largada?	150km/h		160km/h	
8 - E a 2,5km?	100km/h		110km/h	

De forma semelhante, a intenção das duas últimas perguntas é o estabelecimento da leitura de um dado relacionado com outro, referente às velocidade e distâncias indicadas no circuito. Analogamente com as leituras do gráfico. A pretensão não era obter uma resposta exata, e sim tentar prever o equilíbrio, ou não, das estimativas. O mesmo professor do Ensino Básico (PEB_4), voltou a não se ater na informação contida no gráfico, ou seja que a situação referia-se a segunda volta.

A relação conceitual envolvida nessa atividade não é apenas instrumental, visual, de observação direta. É sim de **análise** do comportamento do próprio objeto na representação. Para Skemp (1980; p. 117), é fundamental separar, passo a passo, o comportamento das características e propriedades desse objeto em cada estágio. Ao relacionar o visual com as propriedades ou possibilidades de comportamento do objeto, evidencia-se uma constante correspondência entre o visual e o verbal-algébrico, que durante a análise da atividade proposta, o aluno necessita constantemente de se utilizar das propriedades do sistema de simbologia proposto por Skemp (1980; p. 117). Ao observar parte do gráfico, imaginando o carro em determinada posição, entra nesse momento o componente verbal-algébrico comparando sua velocidade, proximidade de uma possível curva, distância já percorrida etc, retomando novamente o visual..., imaginando novo posicionamento...

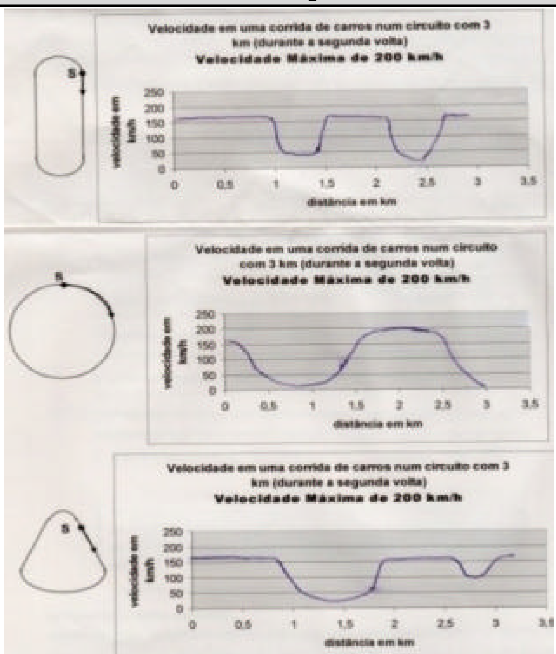
Essa dinâmica propicia ao aluno o desenvolvimento da imaginação mental, que reforça o seu sistema simbólico e proporciona condições para correlacionar as estruturas aritméticas presentes em generalizações, ou seja, estruturas algébricas, abstraídas a partir de um sistema visual.

Atividade 2-B: Proposição: Esboçar para cada circuito que aparece do lado esquerdo de cada gráfico apresentado nas figuras a seguir, um gráfico de velocidade semelhante ao apresentado na situação anterior, sabendo que todos os circuitos têm a mesma extensão de 3km e a velocidade máxima atingida é de 200km/h.

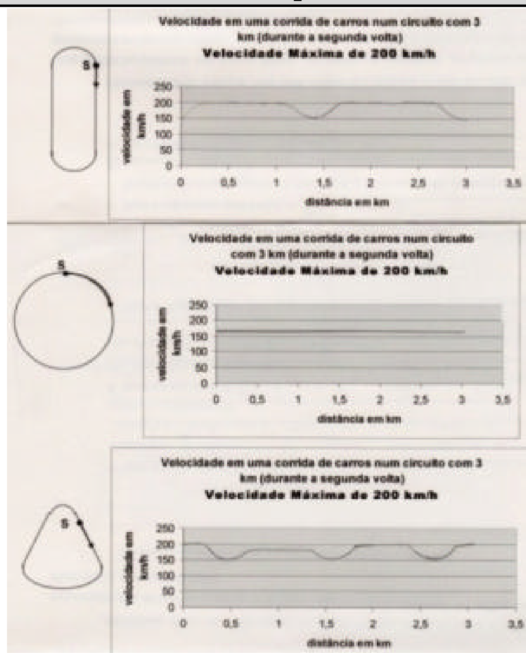
Para melhor comparar as marcações feitas, decidiu-se por escanear as resoluções, agrupando as três questões respondidas e fazendo a análise das soluções de cada um dos participantes pesquisados.

QUADRO 15A: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2-B-ITENS 1, 2 E 3 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

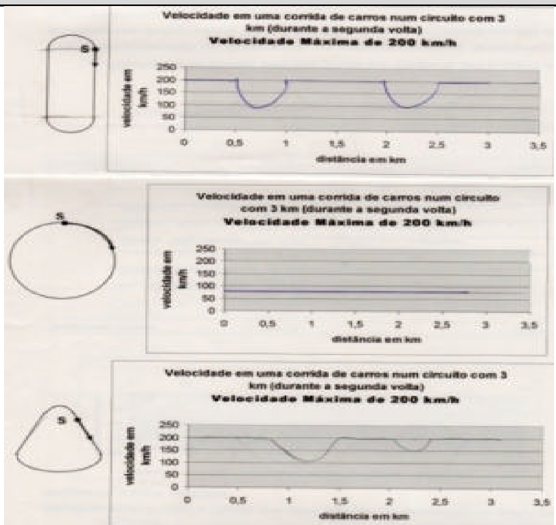
DCM1



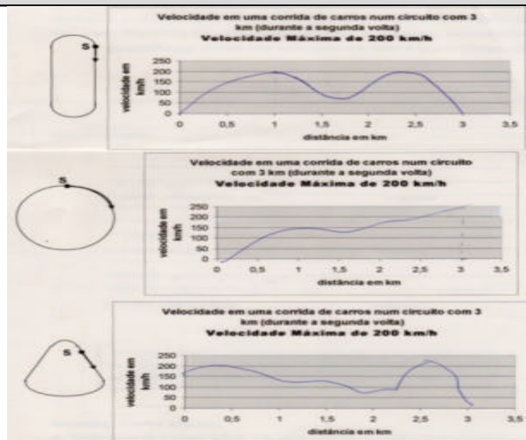
DCM2



DCM3

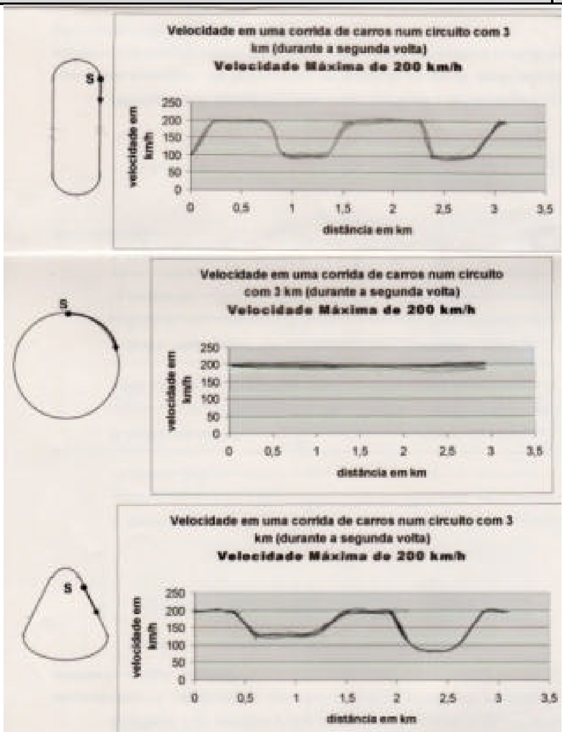


DCM4

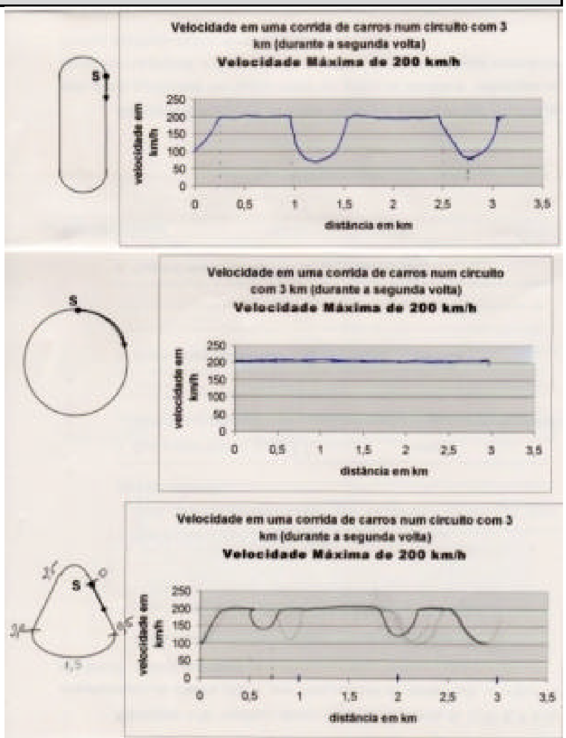


QUADRO 15B: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2-B-ITENS 1, 2 E 3 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

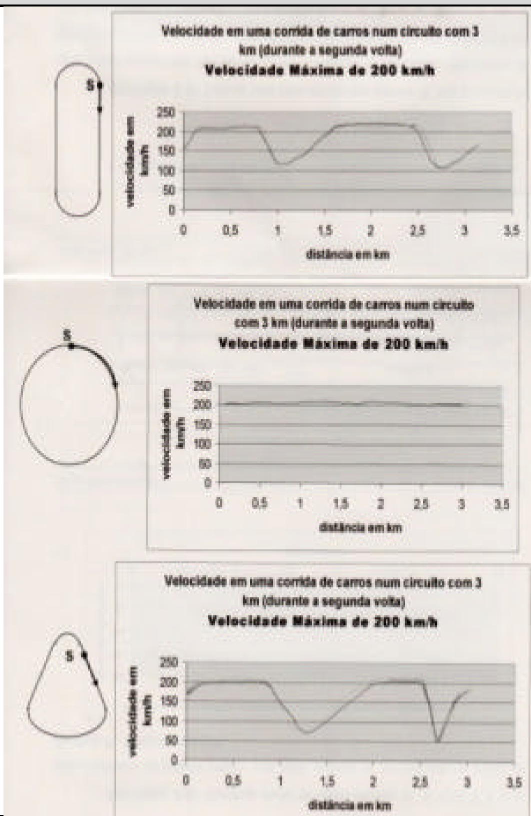
DPG$_1$



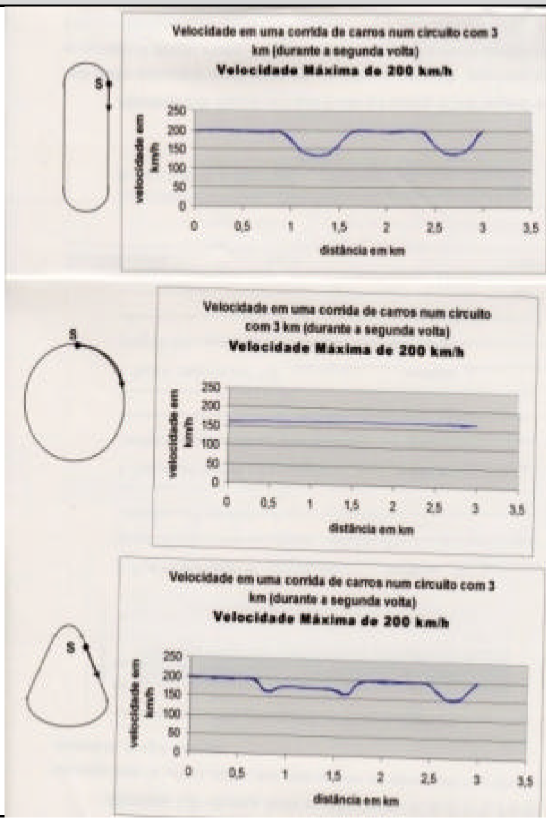
DPG$_2$



DPG$_3$

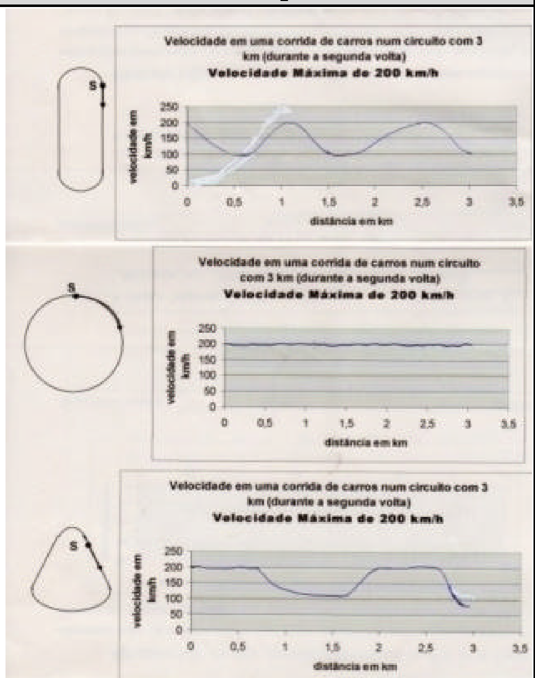


DPG$_4$

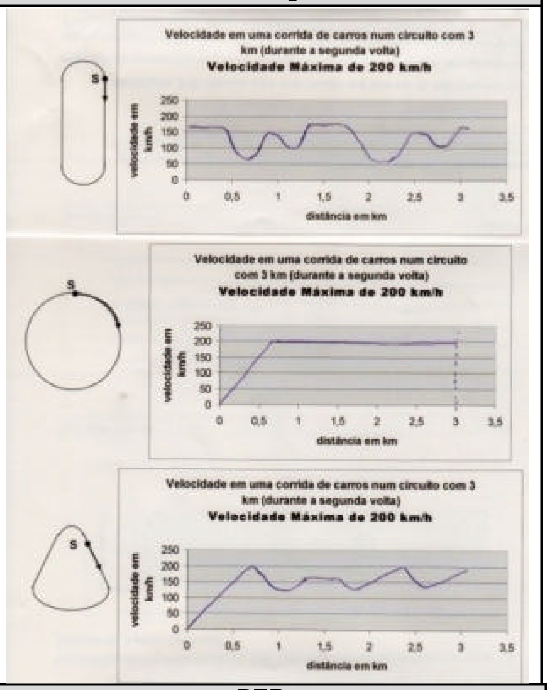


QUADRO 15C RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2-B-ITENS 1, 2 E 3 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

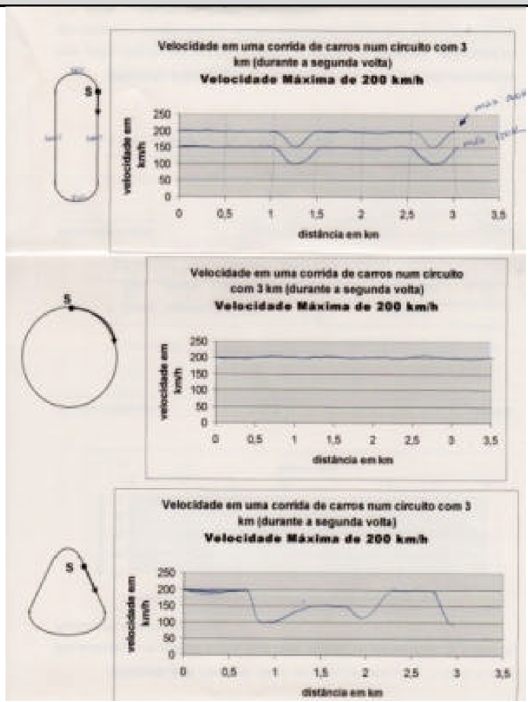
PEB1



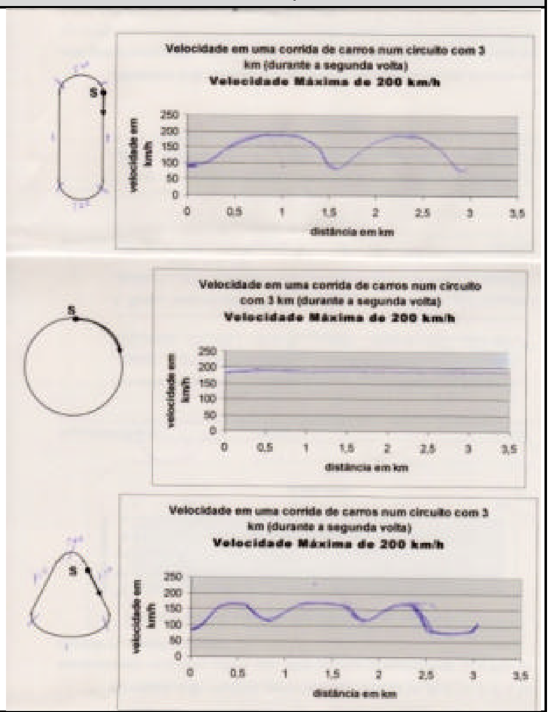
PEB 2



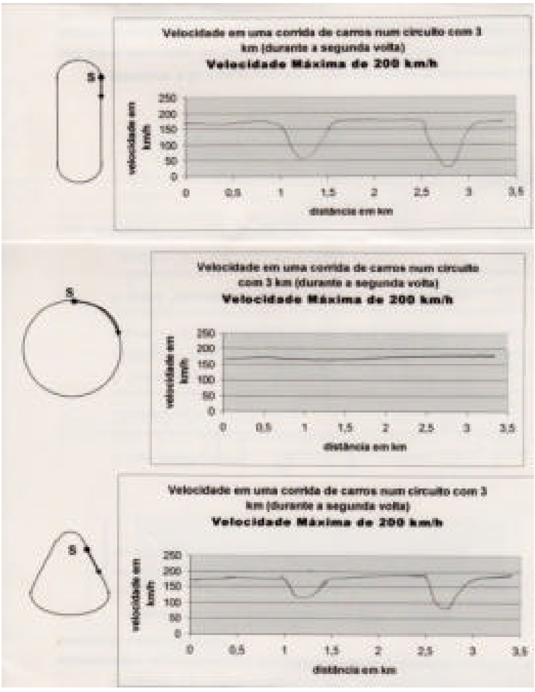
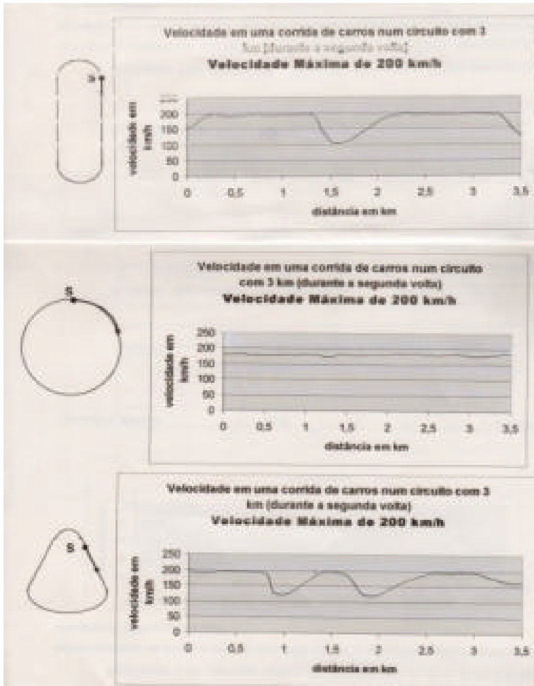
PEB3



PEB4



QUADRO 15D: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2-B-ITENS 1, 2 E 3 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

PES_1	PES_2
	

Vale destacar que a **Atividade 2-B** é uma atividade em que foi proposta uma ação de transposição de representação entre um sistema simbólico-esquemático para um sistema gráfico envolvendo duas variáveis: distância e velocidade. Analisando as representações feitas pelos participantes foram detectadas algumas situações pontuais:

- tanto o DCM_4 como o PEB_4 diferiram completamente das marcações dos demais, sendo que nos dois primeiros circuitos, eles não consideraram o veículo em movimento a partir da segunda volta, iniciando a contagem da volta saindo da inércia. Também houve casos de não coincidência início/fim;
- O primeiro circuito foi o de representação mais heterogênea, principalmente no grupo dos Professores do Ensino Básico, em que cada um construiu diferentemente as soluções. Houve, no

entanto, certa semelhança em seis participantes. Também ocorreu cerca de 50% de coincidência início/fim nos diagramas desse primeiro circuito, ou seja, relacionaram as coordenadas 0km-3km;

- Cerca de 75% dos participantes representaram o segundo gráfico como uma função constante. Embora tenha ficado mais evidente a idéia de velocidade constante, dois deles partiram da inércia e não consideraram a representação a partir da segunda volta;

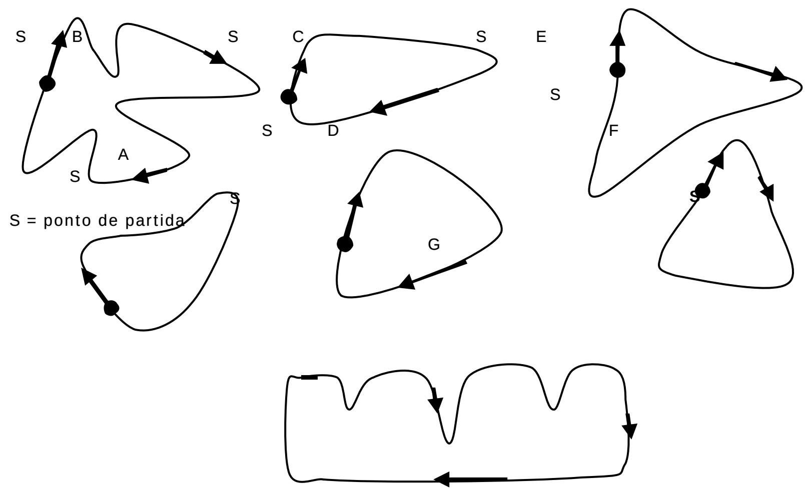
No terceiro diagrama a ser representado, nem todos perceberam que o fato de que todos os diagramas representam circuitos com 3km de comprimento, deveria haver uma coincidência de posição, em cada um deles, entre as distâncias 0km e 3km no gráfico. Seis participantes identificaram as três curvas representadas no diagrama, pelo fato do circuito ter formato triangular. Na maioria dos casos não houve a mesma relação com o ponto de partida → ponto de início de representação a partir da 2ª volta. O PEB_1 representou uma ‘curva não completa’, no sentido cíclico (onde o início coincide com seu término) . Alguns ainda partiram da inércia.

A **Atividade 2-B**, por não oferecer elementos de comprovação direta, baseia-se em informações meramente estimadas. Vários participantes fizeram uso de uma representação mais intuitiva do que lógico-racional, de modo que se estabeleça a correspondência entre o observado e o representado. O uso da intuição inicial, somente, provavelmente acarrete num esboço com tendência a ser impreciso.

A atividade exigia ainda outra capacidade, que nem todos os participantes consideraram: o fato do ponto de partida estar designado no sistema simbólico (circuito), ao fazer a transposição para o sistema gráfico, o início da marcação seria também o identificado no gráfico. Tanto no primeiro como no terceiro circuito simbolizado, o início da marcação ocorre após uma curva, no início de uma reta. Dessa forma, as representações deveriam ser mais homogêneas.

Para melhor representar a situação matemática solicitada, os participantes poderiam usar relações entre o esboço do circuito e a escala do gráfico, associado com instrumentos de proporções, baseando-se nas escalas, e assim garantir uma melhor fidelidade à situação proposta. O primeiro circuito foi o mais diferentemente representado dentre eles. O circuito circular por sua vez foi o que proporcionou mais acertos, e foi representado com 3 curvas pela metade dos participantes pesquisados.

Atividade 3-B: <u>Proposição</u>: Identificar, dentre os vários circuitos (A, B, C, D, E, F e G) esquematizados a seguir, qual deles equivale ao representado no gráfico da atividade 01, apresentado a seguir?



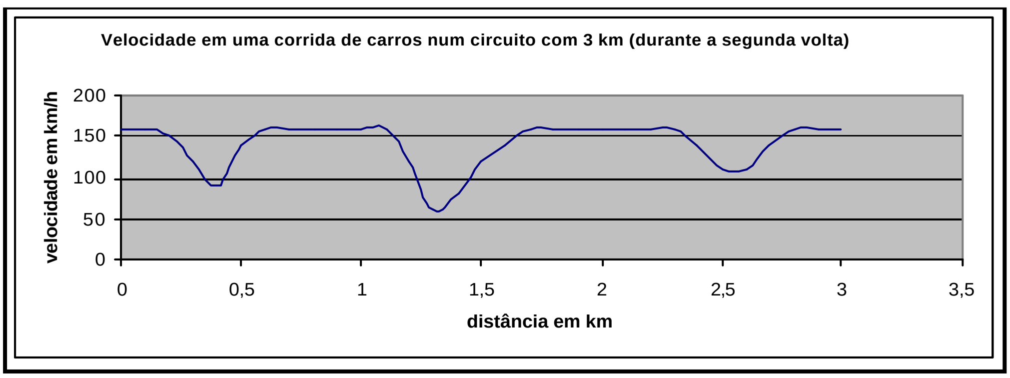
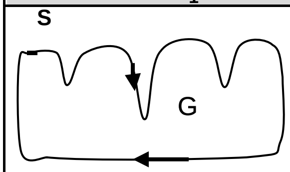
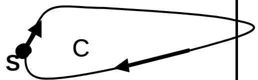
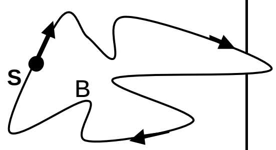
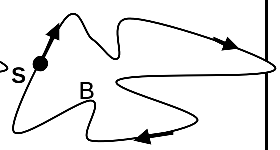
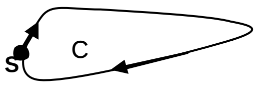
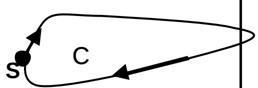
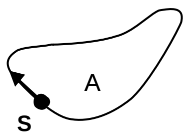
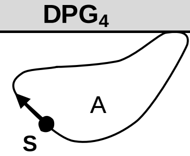
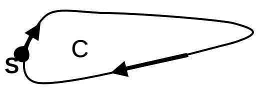
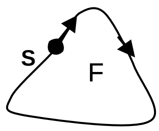
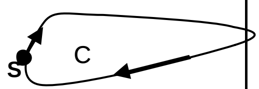
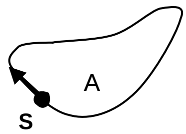
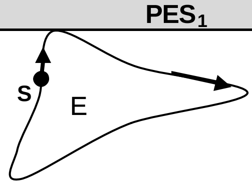
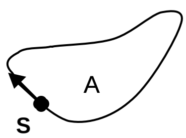


FIGURA 51: ATIVIDADE DE COMPARAÇÃO ENTRE O GRÁFICO E CIRCUITOS

QUADRO 16: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 3-B PELOS PARTICIPANTES DA PESQUISA

DCM_1	DCM_2	DCM_3	DCM_4
			
G. A trajetória, pois no gráfico a partir do ponto de partida há três curvas onde será preciso reduzir a velocidade e o circuito G mostra isso.	C. A quantidade de curvas; o tipo de curvas (+ abertas ou + fechadas; a distância 'em linha reta' entre as curvas.	B. O número de curvas.	B. Pelo número de curvas
DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
			
C. A redução da velocidade com a forma da curva (não tenho certeza desta resposta). É uma atividade muito interessante.	Circuito C. 3 curvas, a segunda mais difícil e a terceira mais suave que a primeira, como percebido pelas quedas da velocidade.	A. O fato de apresentar 3 curvas. A partir do ponto de partida atingi-se uma curva um pouco mais acentuada, depois uma outra mais acentuada, e no final da volta uma curva levemente acentuada. E a distância entre as curvas foi importante para conclusão.	Circuito A. A primeira curva é moderada, a segunda curva é acentuada e a terceira e última curva é a mais suave
PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
			
C. A quantidade de curvas; o tipo de curvas (se mais ou menos acentuadas e os traços retilíneos que permitem retomada do veículo	F. A velocidade constante em alguns intervalos no gráfico.	Circuito C. Quantidades de curvas e trechos uniformes (retos).	A - A curva da reta de chegada não é muito sinuosa, mostrando ser a curva de alta velocidade em relação às outras duas; A 2a. Curva é a pior; existem 3 curvas de redução de velocidade; na curva 3 podemos acelerar antes de acabá-la.
PES_1		**PES_2**	
			
E. Devido às características das curvas sendo continuamente como segue o exemplo na variação das velocidades para concretizar as curvas.		A - Três. Curvas, sendo a segunda a mais brusca e a terceira mais leve	

As opiniões foram bem diversificadas, porém, as mais cotadas foram as alternativas C (35%) e a alternativa A (28%).

Alternativas	C	A	B	E	F	G
Resultado	5	4	2	1	1	1

TABELA 6: COTAÇÃO DAS ALTERNATIVAS DA ATIVIDADE 3-B

Percebeu-se que as maiores divergências de opiniões, proporcionalmente ocorreram no grupo dos Discentes Finalistas em Matemática. DCM_1 associou diretamente a semelhança aparente do gráfico com o circuito G. Os dois últimos discentes equivocaram-se quanto ao número de curvas, continuando com a mesma visão identificada ainda na Atividade 1-B. Dois Discentes em Pós-Graduação, um Professor de Ensino Básico e um Professor de Ensino Superior optaram pelo diagrama A, porém, não consideraram uma pequena redução de velocidade no que seria o trecho com maior distância entre a primeira curva e a curva mais acentuada. Com certeza essa curva bastante suave também deveria ser notada no gráfico. Os que escolheram as curvas E e F não atentaram que as distâncias entre as curvas são praticamente equivalentes assim como as próprias curvas também são equivalentes.

Ficou evidente que essa atividade, diferentemente das outras duas, propõe exatamente que se estabeleça a correspondência entre as duas formas de representação. Em termos de objetivo compara-se em alguns aspectos aos exemplos apresentados no Capítulo 3 desta Tese, o caso das tabelas e do reticulado no contexto do banhado, em que se destaca o uso de duas formas de abordagens para uma mesma situação. Outra situação correlata é o exemplo dos três estilos de abordagens (geométrico, aritmético e algébrico), para o caso das mesas de um *Buffet* e o problema do quadrado mágico.

Analogamente, nessas três atividades aplicadas, se teve, na realidade, um mesmo e único contexto, em que foram propostas ações em três níveis, buscando desenvolver habilidades relacionais de **análise, representação** e de **correspondência**. Porém, nenhuma das habilidades foi desenvolvida e destacada individualmente, houve sempre uma necessidade de ser complementada por aspectos das outras. Como por exemplo: impossível representar a posição do carro no gráfico sem analisar a correspondência entre a distância e a velocidade, naquele determinado momento.

Outro fator identificado pelos participantes é a dificuldade de transposição de um sistema para outro. Isso se observa em vários níveis, seja de uma língua para outra, da representação visual para a escrita, do geométrico para o algébrico, do cíclico para o linear etc. Como não se consegue uma 'receita' específica, pois não é um procedimento, nem um algoritmo que se usa para desenvolver essa habilidade, é somente por meio de atividades de cunho relacional que busquem estabelecer a complementaridade entre os pensamentos é que possibilita o aperfeiçoamento dessa habilidade.

As atividades a seguir foram colocadas para documentar quais foram as expectativas dos participantes após a resolução das atividades anteriores do Bloco B, envolvendo a relação entre diagramas e gráficos e a respectiva análise comparativa.

Atividade 4-B: <u>Proposição:</u> Você, enquanto professor atuante na Rede de Ensino:

QUADRO 17: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 4-B-ITEM 1 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

$4B_1$: Quais seriam os pontos positivos que você percebeu nessas 3 atividades anteriores?			
DCM_1	**DCM_2**	**DCM_3**	**DCM_4**
É que as três atividades têm pontos em comum, pois na primeira, o aluno faz a interpretação do gráfico já tracejado, na segunda ele faz a representação do circuito e na terceira ele faz a identificação do gráfico através do circuito. Então o ponto positivo é que as três atividades faz em com que o aluno tenha um raciocínio e use do seu conhecimento de mundo para resolvê-las.	NÃO RESPONDEU	Mostrar a aplicação dos gráficos. E entender como são produzidos.	Interpretação gráfica
DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
Melhoria no desenvolvimento do aspecto visual e intuitivo na resolução de atividades. Proporciona uma discussão sobre a possível ou as possíveis respostas das questões propostas.	A seqüência se completa, a primeira atividade nos leva a refletir sobre os aspectos e indicadores da curva no gráfico; em seguida, trabalha-se com essas relações do gráfico para o circuito e vice-versa. A seqüência como apresentada nos faz refletir os conceitos e trabalhar estes conceitos conforme a representação.	A ordem com que foram colocadas as atividades é interessante, porque se pode confrontar aquilo que foi respondido na atividade 1 com as outras atividades. Ou seja, interpretando as atividades 2 e 3 podemos verificar um possível erro na atividade 1, pois deve existir uma coerência entre os resultados mesmo que a resposta encontrada seja falsa.	Interpretar situações reais que envolvem raciocínio, sem a utilização de fórmulas
$4B_1$: Quais seriam os pontos positivos que você percebeu nessas 3 atividades anteriores?			
PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
Devo confessar jamais ter ‘visto’o conceito e aplicação de um gráfico de maneira tão direta. Com toda certeza, visto desta forma, um gráfico parecerá ao aluno mais interessante, Sem mencionar o caso de que o tema do gráfico está ao alcance da imaginação do nosso aluno, sem muito esforço	A comparação, atenção.	A fácil percepção por parte do aluno, uma vez que sendo tratada da forma que foi ficou a meu ver muito mais interessante.	Raciocínio, criatividade, elaboração e justificação das idéias, exercício/atividade desafiadora, relacionando com um processo diário (velocidade e automóvel).

PES1	**PES2**
Observação, atenção, concentração, desenvolvimento para estabelecer o paralelo entre o real e o imaginário.	Interpretação gráfica com efeitos físicos.

Três dos discentes finalistas responderam a essa questão e dois deles identificaram a interpretação gráfica e a aplicação dos gráficos como ponto positivo. Um deles salientou que as três atividades têm um ponto em comum, porém, o que ele quis mencionar é, na realidade, o encadeamento da atividade entre interpretação→representação→identificação e o ponto positivo seria o estímulo ao raciocínio que a atividade propõe.

Entre os discentes de Pós-Graduação, dois deles citaram como positivo a seqüência das atividades propostas, sendo que possibilita a realimentação dos conceitos entre as atividades, confrontação de resultados. Outros aspectos elencados como positivos foram a reflexão exigida para determinar os indicadores dos gráficos e esquemas, as diferentes possibilidades de representação e possibilidades de soluções. Foi ressaltado ainda que esse modelo de atividade possibilita melhorias no desenvolvimento do aspecto visual e intuitivo.

Os professores do Ensino Básico e Superior comentaram que a atividade exige muitas habilidades e atitudes tais como: comparação, atenção, concentração, raciocínio, criatividade, elaboração e justificação das idéias, estabelecimento de um paralelo entre uma situação real e imaginária, fácil relacionamento com situação diária usando a interpretação gráfica.

Em geral, todos os pesquisados identificaram e qualificaram positivamente essas três atividades, julgando importante para facilitar a compreensão dos alunos.

Com relação à próxima questão, relativa a quais conceitos/conteúdos eles identificariam, de um modo geral foram citados conceitos específicos matemáticos como funções, interpretação gráfica, diagramas, comparação entre grandezas, plano cartesiano, lógica matemática, relações entre diagrama e gráfico, linhas, sentido horário e anti-horário.

Na relação entre Matemática e Física, são utilizados conceitos como espaço, velocidade, aceleração, tempo, interpretação gráfica, mecânica, atrito, força.

Um discente finalista não apresentou resposta. A justificativa para o fato é que o mesmo não atua em sala de aula e no momento achou que não dispunha de subsídios para responder essas três questões de cunho pedagógico.

QUADRO 18: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 4-B-ITEM 2 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

$4B_2$: Que conceitos/conteúdos você identificaria que essas atividades estimulariam nos alunos ?			
DCM_1	**DCM_2**	**DCM_3**	**DCM_4**
na Física, seria cargas elétricas, circuito aberto e fechado, na Matemática funções etc.	NÃO RESP ONDE U	Espaço, velocidade e aceleração.	Espaço, velocidade (aceleração ...) interpretação gráfica.
DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
* Comparação entre grandezas. * Gráficos e diagramas.	A compreensão das relações do diagrama para o gráfico e vice-versa.	Noção de gráficos, compreensão e interpretação de gráficos, classificação e aplicações. Relação entre a Matemática e a Física.	Plano cartesiano; gráficos; diferenciais conceitos entre espaço, velocidade e aceleração
PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
Uma observação cuidadosa no gráfico, pois percebe-se que as variações no comportamento do 'carro' reflete diretamente no comportamento gráfico	Linhas retas, curvas, quebradas. Sentido horário e anti-horário. Área de figuras não regulares.	Uma maior e mais detalhada observação dos gráficos.	Par ordenado, plano cartesiano, função, relação, lógica matemática, fração, divisão, medidas de comprimento, construção de gráficos, casas decimais , números racionais, geometria.
PES1		**PES2**	
Através da observação, conceito de espaço, tempo.		Funções, gráficos, mecânica, atrito e força	

Foram antecipadas dificuldades e possíveis confusões que os alunos pudessem ter ao tentar resolver esse estilo de atividade, as quais estão relatadas no Quadro 19:

Três participantes indicaram a dificuldade de transpor a idéia do circuito (diagrama) para o gráfico cartesiano;

Cinco deles mencionaram a dificuldade de relacionar a quantidade de curvas no gráfico com a apresentada nos diagramas;

Três deles destacaram a dificuldade de associar curva com redução de velocidade;

Dois participantes consideraram a dificuldade com a relação tempo-espaço;

Um dos professores do Ensino Básico identificou erroneamente, usando o comentário: “como calcular áreas de figuras não regulares e decompô-las para fazer”.

QUADRO 19: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 4-B-ITEM 3 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

$4B_3$: Tente antever quais as dificuldades e/ou confusões que os alunos teriam ao resolvê-las.			
DCM_1	**DCM_2**	**DCM_3**	**DCM_4**
Uma das dificuldades que iriam encontrar seria na representação do circuito no gráfico, assim como eu tive.	NÃO RESPONDEU	Perceber que cada curva do circuito é igual a um declive no gráfico não para representar somente a curva, mas para representar a diminuição da marcha durante a curva.	Conhecimento matemático do tema.
DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
Eu tive dificuldades de relacionar um modelo de gráfico (cartesiano) com outras formas ou diagramas de uma mesma situação. Creio que a transferência de modelos será uma dificuldade que surgirá nessas atividades.	Confundir a curva do gráfico com a curva do trajeto e não com a necessidade de se diminuir a velocidade no momento da curva.	A maior dificuldade seria em relacionar os dados do exercício com o número de curvas e o tamanho dessas curvas.	Quantidades de curvas no gráfico e no circuito → será que é a mesma coisa?
PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
Assim como eu, o primeiro gráfico dará todas as diretrizes para, com calma entender a situação como a relação entre distância percorrida e a velocidade durante esse percurso. Erros serão cometidos nesse gráfico com toda certeza, de forma absolutamente necessária para a interpretação correta.	Como calcular áreas de figuras não regulares e decompô-las para fazer.	Interpretação dos dados, relação curva x redução de velocidade, se bem que aos alunos com mais percepção, isso não seria problema, pois nos treinos ou corridas (ex.) de carro (F1) constantemente aparece essa situação.	Curva do gráfico é a curva do circuito. Não perceber a desaceleração. As idéias relacionadas com a distância.
PES_1		**PES_2**	
Problemas de visualizações entre tempo e espaço, identificação gráfica.		Acreditar que as variações indiquem atividades.	

Não se percebeu e por isso não se destacou, nessas análises de cunho pedagógico, aos participantes, a necessidade de garantir o aspecto cíclico dos diagramas com a sua representação gráfica. Isso é, no gráfico, a indicação da velocidade no ponto de início teria que coincidir com o ponto final, ou seja, a velocidade nos pontos 0km e 3km teria que ser a mesma.

Julgou-se que essas três questões propostas, referentes ao bloco 4B, tenham proporcionado aos pesquisados, uma reflexão importante, seja sobre sua própria ação participando da resolução das atividades seja como futuro aplicador.

Atividade 5-B: Proposição: Jornais e Revistas de renome nacional e internacional procuram sempre inovar a forma como apresentam suas informações e fatos. Essa evolução pode ser percebida ao serem analisados esses instrumentos de comunicação no decorrer das décadas. A reportagem e os gráficos a seguir podem ilustrar essa evolução:

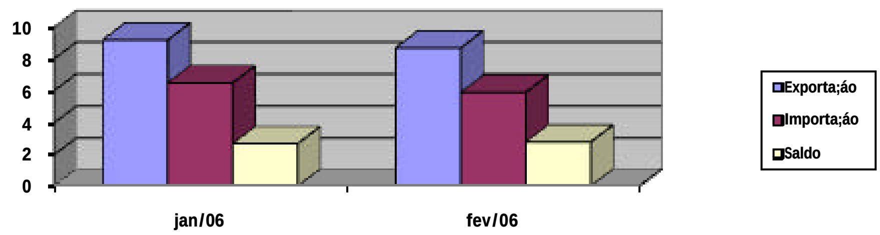
COMÉRCIO EXTERIOR

Saldo é recorde, mas já preocupa

Em Fevereiro, superávit comercial foi de US$ 2,8 bilhões, o maior para o mês, e no ano, somou US$ 5,6 bilhões

A balança comercial de fevereiro registrou superávit recorde para o mês, de US$ 2,822 bilhões, e desempenho exportador igualmente inédito. Os embarques de produtos brasileiros ao exterior alcançaram US$ 8,750 bilhões no mês e somaram US$ 18,021 bilhões no primeiro bimestre do ano.

Uma provável apresentação visual de décadas anteriores, ilustrando a reportagem:



Uma provável apresentação visual hoje em dia, ilustrando a reportagem:

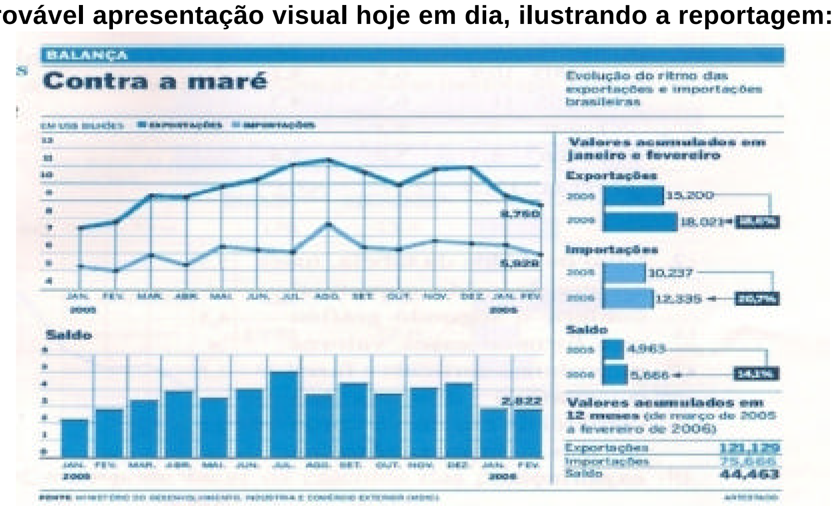


FIGURA 52: ATIVIDADE APRESENTANDO GRÁFICOS COM DIFERENTES NÍVEIS DE INFORMAÇÕES

Pergunta-se:

QUADRO 20: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 5-B-ITEM 1 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

5B$_1$: O que você teria a comentar referente a essas duas apresentações visuais relativas à mesma reportagem? Que houve uma evolução, é evidente. Porém, em que aspectos você identificaria essa evolução?			
DCM$_1$	**DCM $_2$**	**DCM$_3$**	**DCM$_4$**
Na apresentação visual de décadas anteriores além do gráfico é preciso escrever um texto explicando o que acontece, ou seja, fazendo a interpretação do mesmo. Já na provável apresentação visual de hoje em dia, os dados são colocados claramente e faz-se a comparação no mesmo, sem a necessidade de texto para interpretá-lo. No gráfico atual qualquer leitor seria capaz de identificar do que se trata.	NÃO RESPONDEU	No primeiro gráfico era feita uma representação bimestral diferentemente do segundo gráfico e é uma comparação anual, portanto, muito mais precisão na conclusão e uma melhor representação destes resultados.	No primeiro gráfico foi feita uma representação mensal do ritmo de exportações e importações no Brasil. O segundo mostra exatamente o saldo extra das exportações e importações.
DPG$_1$	**DPG$_2$**	**DPG$_3$**	**DPG$_4$**
A apresentação visual atual é mais detalhada, possibilitando um acompanhamento passo a passo da relação exportação-importação.	As informações se apresentam mais claras. Existe uma condição mais específica para comparações.	Vemos no segundo caso um volume de informações muito maior que no primeiro. Além disso, nesse último caso fica fácil visualizar a evolução mensal de cada item (importação, exportação, saldo) e estabelecer as devidas conclusões.	Representação de todos os meses do ano em questão e o anterior; Por mais que estejam no mesmo gráfico, estão visivelmente separados os dois tipos de dados; Há a informação de porcentagem; Cálculo do total anual para as três informações.
PEB$_1$	**PEB$_2$**	**PEB$_3$**	**PEB$_4$**
1º) O 'volume' de informação apresentada de modo a ampliar o número de conclusões que os leitores podem fazer. 2º) É necessário um conhecimento maior para entender todas as informações da ilustração, o que pressupõe uma evolução intelectual do leitor.	Nos detalhes das legendas e os detalhes contidos também nos gráficos.	a) quantidade 'dimensão' de informações, facilitando as conclusões; b) habilidade na interpretação e conhecimento.	O segundo conjunto de gráficos apresenta visualmente mais dados, portanto caracteriza mais informações. Como exemplo, podemos citar a fonte. A evolução é evidente, na apresentação, ou no uso de vários tipos de gráficos, barra horizontal e vertical, gráfico de linha, valores bem supostos, título coerente. É uma apresentação rica de conteúdo, diferente da anterior que deixa margem a dúvidas; contraditório para a noção de gráficos, que é traduzir/exemplificar um conteúdo apresentado.
PES$_1$		**PES$_2$**	
(Identificamos) nos aspectos compra e venda note que no decorrer da situação apresentada observamos que a venda aumentou e conjuntamente compramos mais e conseguimos ficar com saldo de ganhos.		A nova apresentação gráfica indica maior quantidade de detalhes, e é mais informativa mesmo que a pessoa não leia o texto	

Entre os discentes a resposta é que no gráfico referente ao 'atual' existe uma gama maior de informações, o gráfico não depende exclusivamente do texto como no primeiro caso. Além de informações adicionais, esse gráfico apresenta os dados numa seqüência temporal maior que o primeiro. As informações visuais são mais claras.

Para o grupo de professores, também a idéia básica que diferencia um gráfico de outro é a quantidade de informações, que possibilita ampliar também as análises e conclusões, legendas com maiores detalhes, bem como informações adicionais seja no próprio gráfico além de melhoria na própria apresentação e uso de mais recursos diferenciados.

O fato de se fazer uso de uma variedade de gráficos, indica uma necessidade de maior quantidade de conhecimentos e habilidades para poder interpretar esse segundo gráfico.

QUADRO 21: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 5-B, ITEM 2, PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

$5B_2$: Tendo como referência o segundo conjunto de gráficos (atualmente), que outras relações poderíamos estabelecer e comentar, que o texto da reportagem não abordou, mas que é percebível nesse bloco de informações			
DCM_1	**DCM_2**	**DCM_3**	**DCM_4**
Poderíamos estar fazendo uma comparação entre todos os meses do ano, não somente janeiro e fevereiro, e também como é a evolução da exportação e importação.	NÃO RESPONDEU	NÃO RESPONDEU	NÃO RESPONDEU
DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
Estudar a relação exportação-importação bimestralmente ou semestralmente no ano de 2005. Verificar os motivos que provocaram as variações no saldo.	O comportamento das exportações, importações e superávit, a comparação do mês de fevereiro com os outros meses anteriores.	Comportamentos durante todo o ano das importações, exportações e saldos são facilmente verificados. É fácil notar o período em que houve aumento ou queda, por exemplo, das exportações e de que maneira essas exportações evoluíram com o passar dos anos. A questão de se usar porcentagem para indicar tal evolução também é usada no segundo caso.	Que o maior saldo foi em julho. Que a menor quantia de importação foi em fevereiro. Que as maiores exportações ocorreram em julho.
PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
Os aumentos percentuais nas exportações, importações e saldos os valores acumulados nos últimos 12 meses; e as variações mês a mês,seja no comparativo 'Exp. X Imp.'ou no 'Saldo'.	Os valores, a fonte, os meses de 1 a 12, a porcentagem.	Aumentos visíveis (%); Acompanhamento variável mês a mês de janeiro a fevereiro; Superávit observado nos 12 meses.	Idéia do título; apresentação da fonte; trabalho com porcentagem; discriminação mensal e anual; valores acumulados; apresentação visível de saldo; transparência na evolução das exportações e importações; valores absolutos e relativos; diferentes métodos de abordagem, procurando explicar, traduzir, explicitar melhor a interpretação.
PES_1		**PES_2**	
Problemas de evasão estudantil; capital x humanidade; Por quê as guerras; problemas de violência; Aumento da tarifa do transporte coletivo.		Comparação mês a mês das importações e exportações.	

Nessa questão $5B_2$, constatamos que 3 discentes finalistas em Matemática não responderam, e 01 professor do Ensino Superior não analisou o gráfico, mas apresentou outras possibilidades de problemas a serem explorados, provavelmente de forma análoga.

Comentando as situações não descritas na formulação da atividade do segundo gráfico, os demais foram unânimes em citar a possibilidade de comparação em vários aspectos (mês-a-mês, bimestralmente etc), o volume de exportação/importação, *superávit,* picos entre aumentos e quedas, valores acumulados, valores absolutos e relativos.

Reportando-se novamente a Skemp (1989) vale reforçar a afirmação feita por ele de que no sistema educacional estão sendo ensinados, na realidade, estilos de Matemáticas e muitas vezes estilos diferentes de Matemática e com maior ênfase na Matemática instrumental. Na verdade, deveriam ser desenvolvidas atitudes e posturas dos educadores na tentativa de promover formas de compreensão e, nesse caso, o conceito é muito mais amplo. E ainda, essas duas formas de compreensão, instrumental e relacional, não são antagônicas, são dualidades sim, mas quando integradas promovem situações de aprendizagem que são complementares.

Para completar essa idéia, referencia-se na citação de Fossa (2001) :

> o desenvolvimento de esquemas complexos com numerosas ligações internas e externas é uma atividade inerentemente agradável. Assim a compreensão relacional poderá se tornar uma meta em si mesma, o que transformará o aluno em um agente ativo e autônomo na busca de conhecimentos novos FOSSA (2001; p. 86).

Acredita-se estar implícito que esse estilo de atividade apresenta uma diferenciação entre a quantidade de relações e a qualidade que se pode ter, observar e proporcionar numa atividade de ensino. A maior riqueza de relações é o que denota a vantagem de que, situações relacionais são mais consistentes e importantes de serem propostas, para melhor afinar as percepções, habilidades e capacidades de análises e conjecturas por parte dos alunos.

4.4.2.4. – Ponto de vista dos pesquisados na Análise das Situações Matematizadas denominadas Sessão C: "Pitágoras e o Teorema Relacional"

Na Sessão C, o texto de referência foi um breve relato sobre o Teorema de Pitágoras, destacando sua parte histórica, sua descoberta anterior ao próprio Pitágoras e o porquê da referência dele ao teorema. O ponto de maior interesse é o quanto esse teorema é explorado e o quanto ele auxilia para o entendimento de prova de proposições, pois é um dos teoremas que possui o maior número de diferentes provas e demonstrações possíveis.

O texto, nessa vertente, evidencia e discute algumas provas desse teorema, seja concretamente, algebricamente e geometricamente, procurando dessa forma estimular os pesquisados na resolução da atividade a seguir.

Atividade 1-C: <u>Proposição:</u> Observe que em cada uma das representações algébricas, ao se resolver e/ou simplificar as sentenças, elas recairão na conhecida relação $a^2 = b^2 + c^2$.

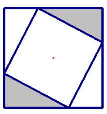
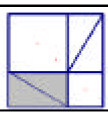
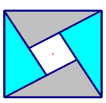
Representação Geométrica		Representação Algébrica	
A		**X**	$(b+c)^2 = 2bc + c^2 + b^2$
B		**Y**	$a^2 = (b-c)^2 + 2bc$
C		**Z**	$(b+c)^2 = a^2 + 2ab$

FIGURA 53: REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA E REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA DO TEOREMA DE PITÁGORAS

QUADRO 22: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-C-ITEM 1, PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Itens	DCM_1	DCM_2	DCM_3	DCM_4
1) Identifique qual representação Geométrica (A,B,C) corresponde com a Algébrica (X,Y,Z), justificando quais as relações observadas.	A.	C -> Y; B -> X; Para que A -> Z é necessário que seja $(b + c)^2 = a^2 + 2bc$, aí sim, desenvolvendo as contas teríamos a 'fórmula' conhecida como o Teorema de Pitágoras. Nos casos B -> X e C -> Y encontramos essas relações analisando as figuras e as expressões algébricas.	A = Z, C = Y e B = X. (a) $(A + C)^2 = [(a.c).4]/2 + b^2 = 2ac + b^2$; (b) $(A + B)^2 = b^2 + a^2 + 2ab$; (c) $a^2=4\{[(b+c)/2]. (c - b)\} + (b - c)^2$ $a^2=2(bc - b^2+c^2- cb) + (b - c)^2$ $a^2 = (c - b)^2 - 2bc$. Obs: basta calcular as áreas das figuras que compõem o quadrado.	A = Z, C = Y e B = X. (A) $(a + c)^2 = [(a.c).4]/2 + b^2 = 2ac + b^2$; (B) $(a + b)^2 = b^2 + a^2 + 2ab$; (C) $a^2 = 4[(b+c)/2].(c-b) + (b-c)^2$.
	DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
	C corresponde a Y, A corresponde a Z e B corresponde a X.	1) A e Z 'b' e 'c' formam juntos o lado do quadrado maior. 'a' é a medida do lado do quadrado interno e 2'a''b' é a soma das áreas dos 4 triângulos (4.a.b/2). 2) B e X 'b' e 'c' são as medidas dos lados dos dois quadrados internos, segmentos que formam o lado da figura maior. A área (b + c)2 é a área total que é igual à soma das áreas das figuras internas. 3) Sobra C e Y (área 4 vezes o triângulo de catetos b e c = (2bc) + (área quadrado de lado b-c = (b - c)2) = área do quadrado de lado a = a2.	A -> Z, B -> X e C -> Y	NÃO RESPONDEU
	PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
	'A' corresponde a 'Z', considerando o quadrado 'A' de lado medindo b+c, onde 'b' e 'c' são os catetos dos triângulos retângulos que, juntamente com um quadrado de lado igual à hipotenusa destes, formam o quadrado 'A'. 'B' corresponde a 'X' e'C' corresponde a 'Y'	B.	A <-> Z, B <-> X e C <-> Y	A corresponde a Z; B corresponde a X; e C corresponde a Y; (1) A -> Z, pois a área do quadrado maior é uma soma de parcelas no caso b e c, e ainda a área total analisando pelas partes envolve um quadrado + 4 retângulos. (2) B corresponde a X, primeiro por exclusão, sendo que A-> Z e C -> Y, e ainda, analisando pela soma das áreas das partes internas 4 retângulos + 2 quadrados. (3) C corresponde a Y, primeira idéia é muito semelhante ao exemplo anteriormente dado, e ainda, a área 'externa' é formada apenas por um lado do triângulo e não uma soma. (b - c) é fácil deduzir, uma vez que (c) está contido em (b).
	PES_1		**PES_2**	
	A <-> X, B <-> Z e C <-> Y		C Y ----> O quadrado interno tem lados b - c e mais dois retângulos de lado b e c. B X ----->O quadrado interno maior mais o quadrado menor corresponde aos triângulos. A Z ----> Uma superposição das figuras menores nas maiores.	

O item 1 dessa atividade foi resolvido com alguma justificativa por sete dos quatorze participantes. DCM_1 e PEB_2 apenas iniciaram, mas não desenvolveram praticamente nada do item. DPG_4 não respondeu e os outros quatro participantes deram igualmente como resposta a associação entre a representação geométrica e a algébrica registrando: A → Z, B → X e C → Y. DCM_3 e DCM_4 justificaram cada afirmação por meio da álgebra e relacionaram com as áreas das figuras geométricas envolvidas, e DCM_2 apenas indicou a relação algébrica para A → Z sem desenvolver os cálculos, como os dois anteriores. O participante PES_1 fez somente a correspondência entre a representação geométrica e algébrica, errando duas delas. PEB_1 fez a correspondência entre as duas representações e justificou somente uma das três.

DPG_2 justificou sua associação utilizando as relações observadas na forma geométrica. O participante PEB_4 resolveu o item por completo, estabelecendo as associações solicitadas e justificou todas. Por último o participante PES_2 associou as duas formas de representação justificando os três itens sem recorrer à álgebra, ou seja, explicou textualmente.

	NÃO RESPON-DEU	**RESPONDEU E NÃO JUSTIFICOU**	**RESPONDEU E JUSTIFICOU PARCIALMENTE**	**RESPONDEU E JUSTIFICOU TODAS**
NÚMERO DE PARTICIPAN-TES	3	4 (um errou as correspondências)	2	5

TABELA 7: SÍNTESE DO ITEM 1 DA ATIVIDADE 1-C DOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Como síntese desse item, constatou-se que dez participantes fizeram a mesma correspondência entre a representação geométrica e a algébrica (A→Z, B→X e C→Y), um errou e três não resolveram.

A Tabela 7 nos indica que apenas cinco dos onze participantes estabeleceram a correspondência solicitada, conseguiram justificar porque a construíram da forma apresentada, sendo que três foram mais detalhistas na justificativa sendo que dois recorreram exclusivamente à representação algébrica e um utilizou pouca álgebra e uma descrição textual.

Diante disso, percebe-se que o ato de transpor idéias concretamente representadas, representação gráfica ou visual, para um sistema de argumentos simbólico-verbal não é muito facilmente desenvolvido, mesmo considerando que nossos participantes pesquisados não sejam tão sem experiência com o conteúdo matemático, lembando-se que eles são alunos finalistas, alunos de Pós-Graduação ou professores da Educação Básica e Superior.

As configurações tomadas como referência na atividade proposta, com certeza não são bem divulgadas, portanto, daí resulta grande parte da dificuldade, pois, para muitos, Teorema de Pitágoras só é reconhecido na sua configuração básica ($a^2 = b^2 + c^2$). As outras tantas possibilidades de relações, indicadas no material de aplicação, surpreendeu vários deles.

Dessa forma, buscar novos processos de visualização, conhecer caminhos para transpor do concreto para o abstrato, buscar elementos para entender procedimentos de justificação, demonstração e prova, são situação que o trabalho de Poincaré (1984, 1988a e1995) daria uma grande contribuição.

QUADRO 23: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-C-ITEM 2 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Itens	DCM_1	DCM_2	DCM_3	DCM_4
2) Julgue e justifique em qual das 3 situações foi mais óbvio a percepção da relação entre o Geométrico e o Algébrico.	A, pois fazendo a superposição conseguimos cobrir o outro quadrado.	A relação B e X. Pois é a representação geométrica mais conhecida e para chegarmos no resultado basta somar as áreas das figuras planas que a compõem, percebendo assim, a relação com a expressão X.	Na figura A, pois é a figura mais simples, pode-se assim fazer uma relação fácil com a forma algébrica.	Na figura A (é a figura mais simples)
	DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
	C corresponde a Y, pois é similar a prova de Bhaskara. A corresponde a Z e B corresponde a X é imediato e evidente devido a igualdade de áreas.	Foi a relação B - X, pois é mais imediata, a área total $(b + c)^2$ já aparece como soma das áreas das partes.	Analisando somente os resultados não sei dizer qual é o mais óbvio.	Em A e B, pois é muito claro que nos dois quadrados maiores temos os mesmos 4 triângulos e os outros espaços são preenchidos pelo quadrado de lado a, e o outro por dois quadrados: um de lado b e outro de lado c
	PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
	Veja: I. $(b + c)^2$ indica um quadrado de lado b + c II. $(b + c)^2 = a^2+2ab$ indica que esse quadrado de lado b + c é composto de um quadrado de lado 'a' dois retângulos (ou 4 triângulos retângulos) de lados 'a' e 'b'	Os três tiveram o mesmo nível de percepção. Depois da resolução algébrica é que fica notória a relação do teorema com a figura.	Em $(b + c)^2$ --> (desenho do quadrado de lado b + c). Quando $(b+c)^2 = a^2 + 2ab$ quer dizer que temos um quadrado de lado a e dois retângulos de lados a e b.	Representação geométrica; exemplo dado, muito semelhante; lado do quadrado maior é apenas suposto uma medida e não a soma de dois lados de um retângulo.
	PES_1		**PES_2**	
	A primeira representação algébrica é mais tranqüila, pois no momento em que trabalhamos com três triângulos retângulos facilmente identificados nos cabe dar nomes aos catetos e desenvolvê-los.		A segunda (B), pois há comparação das áreas.	

Três participantes consideraram que a percepção da relação entre a representação geométrica e a algébrica foi mais evidente na correspondência A→Z, por ser mais simples e que bastava fazer a sobreposição para as figuras geométricas.

Cinco participantes apontaram a correspondência B→X, por considerar a representação geométrica mais conhecida, na qual o resultado é obtido somando as áreas das figuras planas que compõem a figura B. O participante PES_1 mencionou ser mais fácil por causa da primeira representação algébrica $(b + c)^2 = a^2 + 2ab$, pois ao se trabalhar com três triângulos retângulos facilmente visualizados resta identificar os catetos e desenvolvê-los. O participante PES_2 escolheu essa relação com base na comparação de áreas.

DPG_4 considerou duas relações a A→Z e B→X. Os dois participantes PEB (1 E 3) escolheram as relações A→Z e B→X, explicando que ambas têm em comum um quadrado de lado (b + c).

Um dos participantes relatou que para ele as três situações tiveram o mesmo nível de percepção, o que sugere que uma vez identificada essa relação passa a ser mecânica, ou como ele mesmo escreveu "Depois da resolução algébrica é que fica notória a relação do teorema com a figura". E finalmente DPG_3 escreveu que tendo por base somente os resultados algébricos não conseguia indicar qual a relação mais óbvia.

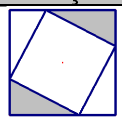
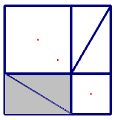
Um único participante, DPG_1, indicou a relação C→Y e um participante não especificou a relação.

	CORRESPONDÊNCIA ENTRE AS REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICA E ALGÉBRICA			NÃO RESPONDEU
	A → Z	B → X	C → Y	
NÚMERO DE PARTICIPANTES	6	8	1	1

TABELA 8: SÍNTESE DO ITEM 2 DA ATIVIDADE 1-C DOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Sintetizando o item 2 constatou-se quase uma unanimidade nas respostas A→Z e B→X, que se refere à obviedade na relação entre as representações geométrica e algébrica. A possível explicação para essa equiparação foi fornecida pelos participantes DPG_4, PEB_1 e PEB_4 que escolheram exatamente essas duas correspondências por serem semelhantes ao terem o lado do quadrado externo sendo (b + c), conforme indicado no Quadro 24. Um participante afirmou que as três situações eram óbvias, principalmente depois da resolução algébrica. Percebe-se que mesmo sendo uma questão de característica teórica, a medida que as atividades vão sendo propostas melhoram também as formas de estabelecer relações.

QUADRO 24: CORRESPONDÊNCIA ENTRE AS REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS A E B E ALGÉBRICAS Z E X

Representação Geométrica		Representação Algébrica	
A		Z	$(b+c)^2 = a^2 + 2ab$
B		X	$(b+c)^2 = 2bc + c^2 + b^2$

QUADRO 25: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-C COM O ITEM 3 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Itens	DCM_1	DCM_2	DCM_3	DCM_4
3) Haveria alguma finalidade/utilidade se fosse aplicada uma representação aritmética a cada uma das situações? Qual?	Sim	Sim, dependendo o nível de que 'lê' a demonstração seria a forma de concluí-la, não deixando 'nenhuma' dúvida na mesma.	Não.	Não.
	DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
	Creio que sim, pois essas aplicações aritméticas ajudariam a sugerir na fase inicial desse estudo a idéia do Teorema de Pitágoras.	Não creio. O aluno poderia se sentir mais confortável por trabalhar com números, mas acho que perderia o objetivo da atividade. O que poderia facilitar talvez fosse a indicação de qual segmento vale a, b e c.	A representação aritmética seria interessante para a comprovação da veracidade das relações.	Não, pois a geométrica já é muito clara e a algébrica já é genérica para apresentar
	PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
	Apenas de se verificar a veracidade das igualdades, sem, entretanto usá-las como prova	Sim, no estudo de perímetro de figuras.	Verificação da igualdade, busca de outros caminhos.	Justificaria para o entendimento, e melhor apresentação de uma explicação; facilitando o entendimento.
	PES_1		**PES_2**	
	NÃO RESPONDEU		Aprimoramento algébricc	

	SIM	NÃO	NÃO RESPONDEU
NÚMERO DE PARTICIPANTES	9	4	1

TABELA 9: SÍNTESE DO ITEM 3 DA ATIVIDADE 1-C DOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Dos participantes que o responderam o item 3, mais da metade afirmou que a representação aritmética seria útil se fosse aplicada a cada uma das situações da atividade 1-C e os motivos foram: o participante DCM2 escreveu que dependendo do nível dos alunos, facilitaria o estabelecimento de conclusões, no sentido de afirmar que são válidas as igualdades. Em contraposição, tem-se o participante DPG1, que acredita que tornaria mais fácil, na fase inicial, para estudar e justificar a validade do Teorema de Pitágoras.

Os outros participantes, que responderam afirmativamente, justificaram sua opinião, alegando que seria interessante como comprovação da veracidade das relações de igualdade, bem como no estudo de perímetro de figuras e para o aprimoramento algébrico, sem, no entanto, indicar qual o melhor momento para propor a representação/comprovação aritmética.

Dos participantes que responderam, e que sua opinião era que a representação aritmética não teria finalidade, em cada uma das situações da atividade 1-C, alegaram que: embora para os alunos fosse trabalhar melhor com números e operações, isso comprometeria o objetivo da atividade. Ajudaria sim se, indicasse os segmentos pelas variáveis a, b, c.

Outro participante respondeu que a representação geométrica já é evidente por si só e a algébrica já é genérica o suficiente, não havendo a necessidade de analisar a situação por meio de números.

Pode-se dizer que em qualquer situação, a necessidade de justificação ou comprovação pela aritmética, possibilita ao aluno, um ‘porto seguro, inicialmente’, para obter confiança nos seus argumentos, ao mesmo tempo em que estabelece mais familiaridade com a transição para uma linguagem algébrica.

QUADRO 26: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-C-ITEM 4 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

<table>
<tr><th colspan="4">4) Recordando-se da informação inicial sobre o Teorema de Pitágoras, de que existem mais de 370 maneiras diferentes de ‘escrevê-lo’ e representá-lo, existiria algum benefício didático, dentro da estrutura convencional do ensino, a exploração com os alunos, de algumas ou várias dessas demonstrações e/ou provas? Qual seria esse benefício?</th></tr>
<tr><th>DCM$_1$</th><th>DCM$_2$</th><th>DCM$_3$</th><th>DCM$_4$</th></tr>
<tr><td>Seria a de conhecer as diferentes maneiras de demonstrar um mesmo teorema. Para fazer qualquer uma das demonstrações iria usar o mesmo conhecimento, com alguns artifícios.</td><td>Sim. Os alunos, na maioria das vezes, não estão acostumados com demonstrações então, seria bastante interessante se lhes fossem apresentados mais de uma das demonstrações desse Teorema. Acredito que isso facilitaria a compreensão da demonstração.</td><td>Sim, pois além de revisar conceitos já possuídos pelos alunos como: área, soma dos quadrados, demonstraremos o Teorema de Pitágoras para um melhor entendimento.</td><td>Sim, toda demonstração melhora a visão dos conteúdos para com os alunos.</td></tr>
<tr><th>DPG$_1$</th><th>DPG$_2$</th><th>DPG$_3$</th><th>DPG$_4$</th></tr>
<tr><td>A apresentação de algumas possibilidades da demonstração do Teorema de Pitágoras faz-se necessário desde que seja devidamente contextualizado. Partindo do aritmético-geométrico para o analítico e vice-versa.</td><td>Sim, é uma oportunidade de observar uma mesma afirmação representada de várias formas diferentes.</td><td>Na minha opinião algumas demonstrações devem ser realizadas sempre que possível, pois elas reforçam as afirmações destacadas pelo professor. Além disso, o aluno tomando conhecimento de tais demonstrações pode realizar outras em novos assuntos. Se você nunca der de frente com uma prova de que algo é verdadeiro como você pode aceitá-la sem justificativa?</td><td>Sim, pois em diversas situações em que for preciso utilizar esse conceito, pode ocorrer alguma particularidade que facilite a compreensão por um determinado método em específico; Quanto maior a abordagem e a exemplificação, melhor o entendimento</td></tr>
<tr><th>PEB$_1$</th><th>PEB$_2$</th><th>PEB$_3$</th><th>PEB$_4$</th></tr>
<tr><td>1º - Mostrar que o teorema é válido em outras situações; 2º - Desmistificar a Matemática sempre é útil, pois a grande maioria de nossos alunos acredita ou fez acreditar que na ciência mãe faz-se ‘Pir-lim-pim-pim’ e pronto, surge uma ‘fórmula’ para atemorizá-los.</td><td>Levando em consideração a percepção dos alunos, o grau de conhecimento, a turma e a relação que o professor tem com a turma é de grande importância que apresente várias formas de demonstração do teorema, pois trabalharia as relações algébricas e geométricas, coordenação motora, senso estético, raciocínio lógico, a história da Matemática, o uso do teorema nas construções civis.</td><td>Mostrar o Teorema de Pitágoras em outras situações.</td><td>Sim. Estimula a criatividade, o raciocínio, promove discussões, visualizações bem mais profundas do que um simples $a^2 = b^2+c^2$, promove o desafio a curiosidade, trabalha com o intuitivo, trabalha com as idéias de forma, área, o assunto torna-se integrante.</td></tr>
<tr><th colspan="2">PES$_1$</th><th colspan="2">PES$_2$</th></tr>
<tr><td colspan="2">Sim, houve um benefício didático em algumas provas, pois o benefício seria explorar a criatividade prática de cada um, se trabalharmos com o cotidiano do plantio serviria para percebermos onde maximizar ou minimizar gastos.</td><td colspan="2">O conhecimento histórico da Matemática indicaria uma motivação nas aulas de Geometria.</td></tr>
</table>

O item 4 analisa a existência ou não de algum benefício didático na estrutura convencional do ensino, ao explorar com os alunos algumas ou várias demonstrações do Teorema de Pitágoras. Houve unanimidade entre os participantes pesquisados de que há benefícios, e listaram os seguintes:

A importância do aluno conhecer diferentes maneiras de demonstrar um mesmo teorema pois elas contribuem para a compreensão da própria demonstração, e dos conceitos envolvidos, dos novos como dos já conhecidos;

A possibilidade de desenvolver atividades partindo do aritmético-geométrico para o analítico e vice-versa e estabelecer relações entre as diferentes representações matemáticas;

O fato de realizar demonstrações com os alunos contribui para que os mesmos possam aplicar o pensamento demonstrativo em novos assuntos, além de mostrar que o teorema é válido em outras situações;

A oportunidade de estimular a criatividade, a curiosidade, o raciocínio, o pensamento intuitivo, a visualização geométrica, de promover discussões, relacionar com outros conceitos como forma e área de figuras geométricas, com isso o assunto torna-se integrante;

A possibilidade de discutir tópicos da História da Matemática.

Os aspectos do pensamento instrumental presentes nessa atividade destacam a necessidade de uma extensa interação entre os objetos matemáticos, idealizados pelas fórmulas e representações estáticas de determinada situação matematizada com toda a teoria indicada pela forma relacional de analisar, experimentar, comparar, obter generalizações etc. Assim é fundamental possibilitar ao aluno oportunidades para o desenvolvimento de esquemas não só simples, mas também complexos com numerosas ligações internas e externas e procurar tornar essa atividade agradável.

> os métodos relacionais tornam-se independentes dos fins particulares a serem alcançados. A construção de um esquema, seja em qualquer área, torna-se inerente, satisfaz o objetivo em si mesmo. O esquema é do aluno e esse é o seu

> troféu, ainda que um esquema nunca esteja completo, a medida que eles aumentam, aumenta também nossa concientização de possibilidades. Ele torna-se uma atividade auto-recompensadora. SKEMP (1989; p. 16).

É dessa forma que Fossa (2001) faz a separação entre matéria (conteúdo a ser aprendido) e as formas de compreensão. E quando ele cita o cuidado que o educador deve ter com essa distinção: “Será razoável supor que o professor deve estruturar suas aulas de tal modo que todo assunto novo seja apresentado primeiro ao nível instrumental, somente progredindo para o nível relacional na medida que a matéria é dominada instrumentalmente.” FOSSA (2001; p. 86).

Essa sequência talvez deva ser válida para situações de alunos novos aprendendo matéria nova que não têm ainda ‘bagagem’ necessária para estabelecer ‘sozinhos’, ligações em termos de compreensão relacional.

Assim, indica Fossa (2001),

> “a tarefa do professor é apresentar a matéria nova ao aluno em um nível de compreensão relacional que é compatível com o esquema que o mesmo, embora seja bastante jovem, já o tem desenvolvido. Quando a atividade tem que ser automatizada, esta pode ser feita depois.” FOSSA (2001; p. 86).

4.4.2.5. – Ponto de vista dos pesquisados na Análise das Situações Matematizadas denominadas Sessão D: “As Relações entre as linguagens visual e algébrica”

O texto de apoio e motivador apresenta uma relação entre o visual e o algébrico, ou como Skemp classifica entre o visual e o verbal-algébrico. Nesse texto discute-se e compara-se os dois processos e a importância de considerá-los como base para o desenvolvimento de atividades matemáticas, denotando a importância do uso da linguagem visual como recurso didático de apoio tanto para a linguagem aritmética como algébrica, facilitando assim a obtenção de abstrações e generalizações.

As atividades 1-D e 2-D são, na realidade, preâmbulos para resolução da atividade 3-D, tanto que as ações propostas de resolução contribuem para consolidar, de forma dirigida, a atingir certa generalização do processo. De qualquer forma, verificou-se que os resultados obtidos nessas duas primeiras atividades ficaram muito próximos, não apresentando diferenças significativas que justifiquem uma análise comparada mais detalhada. Para tanto, em ambos os casos apresenta-se apenas uma solução de um dos grupos, a título de exemplo de registro, juntamente com o comentário dos mesmos.

Atividade 1-D: Considerando a seqüência visual a seguir apresentada em formato de escadas formadas pelos n números naturais:

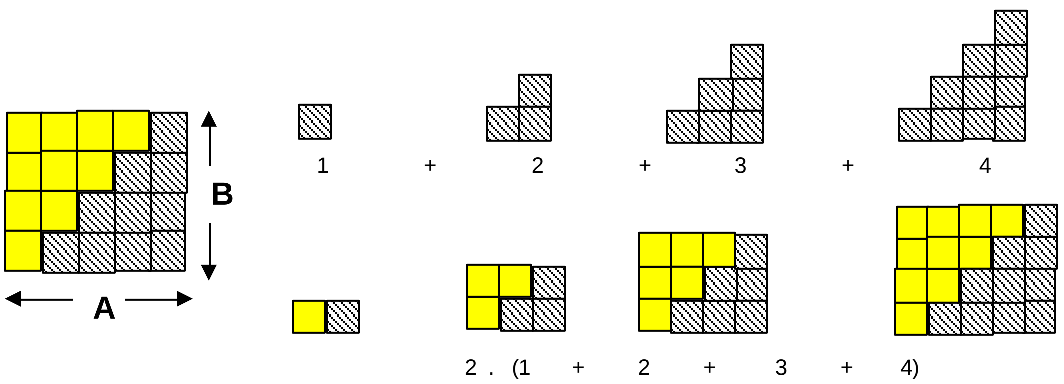


FIGURA 54: RELAÇÃO ESCADA NA SEQÜÊNCIA DE NÚMEROS NATURAIS

Para o caso de quatro degraus na escada, tem-se a seguinte relação: AxB, pode ser escrito como duas escadas de 4 degraus, ou seja:

AxB = 2(1 + 2 + 3 + 4)

Se o lado B tem uma ‘altura’ de 4 quadrados, ou seja, tem-se como dimensão B = 4, a dimensão A, por sua vez possui um quadrado a mais no seu ‘comprimento’, ou seja, A = 4 + 1.

Se ao invés de somente 4 degraus, mas outras quantidades de degraus, como ficaria a tabela a seguir? Complete a seqüência, dando continuidade a linha de raciocínio sugerida:

A resolução dos itens da atividade 1-D foi praticamente idêntica entre os participantes pesquisados, por isso, optou-se por apresentar os registros realizados por dois participantes do grupo de discentes finalistas em Matemática (DCM).

QUADRO 27: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-D PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Item (1)	**DCM_1**			**DCM_2**		
Soma dos quadrados dos números	Área do retângulo	Dimensão A	Dimensão B	Área do retângulo	Dimensão A	Dimensão B
1 + 2	2(1 + 2)	2 + 1	2	2(1 + 2)	2 + 1	2
1 + 2 + 3	2 (1 + 2 + 3)	3 + 1	3	2 (1 + 2 + 3)	3 + 1	3
1 + 2 + 3 + 4	**2 (1 + 2 + 3 + 4)**	**4 + 1**	**4**	**2 (1 + 2 + 3 + 4)**	**4 + 1**	**4**
1 + 2 + 3 + 4 + 5	2 (1+2+3+4+5)	5 + 1	5	2 (1+2+3+4+5)	5 + 1	5
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	2 (1+2+3+4+5+6)	6 + 1	6	2 (1+2+3+4+5+6)	6 + 1	6
1 + 2 + 3 + 4 + … + n	2 (1+2+3+4+ ... +n)	n + 1	n	2 (1+2+3+4+ ... +n)	n + 1	n

Item (2)	**DCM_1**	**DCM_2**
Para determinarmos o caso geral em que somamos os n primeiros números naturais, observa-se que: 2.(1+ 2+3 +…+ n)=A x B [1] e também A = n + 1; B = n, por que?	Sempre que fizermos (n = 1) . n, teremos a dimensão A x a dimensão B	NÃO RESPONDEU
Item (3)	**DCM_1**	**DCM_2**
Ora, se substituirmos A e B em [1], então quanto vale 1 + 2 + 3 + … + *n?* Então complete: 1 + 2 + 3 + … + *n* =	(n + 1) . n = A x B	$(n^2 + n)/2$
Item (4)	**DCM_1**	**DCM_2**
Verifique e comprove se esta 'fórmula' é válida para os valores de *n* = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	Para n = 1 temos (1 + 1) . 1 = 2. Para n = 2 temos (2 + 1) . 2 = 6. Para n = 3 temos (3 + 1) . 3 = 12. Para n = 4 temos (4 + 1) . 4 = 20. Para n = 5 temos (5 + 1) . 5 = 30. Para n = 6 temos (6 + 1) . 6 = 42. Para n = 7 temos (7 + 1) . 7 = 56.	$n = 1 \rightarrow (1^2 + 1)/2 = 1$; $n = 2 \rightarrow (2^2 + 2)/2 = 3 = 1 + 2$; $n = 3 \rightarrow (3^2 + 3)/2 = 6 = 1 + 2 +$; $n = 4 \rightarrow (4^2 + 4)/2 = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$; $n = 5 \rightarrow (5^2 + 5)/2 = 15 = 1+2+3+4+5$; $n = 6 \rightarrow (6^2 + 6)/2 = 21 = 1+2+3+4+5+6$; $n=7 \rightarrow (7^2+7)/2 =28 =1+2+3+4+5+6+7$

No item (1), todos completaram a tabela perfeitamente. O que se pôde perceber com essa atividade é que, de uma maneira geral, existe uma 'pressa' em passar pela atividade. Essa combinação de um texto com características auto-instrutivas evidenciou que muitos participantes se revelaram desatentos, ora não respondendo algumas partes, ora respondendo de forma incompleta ou não deixando claros seus argumentos. Isso ficou evidente quando apenas três participantes (DCM_1, PEB_4 e PES_1) procuraram justificar o item (2) dessa atividade. Os demais não responderam. O mesmo ocorreu com o item (3).

Com relação à verificação do item (4), dos quatorze participantes que resolveram somente seis o fizeram corretamente, tendo em vista que a generalização da fórmula ocorria no item (3), o qual poucos responderam ou responderam corretamente (somente 04 participantes).

Atividade 2-D: <u>Proposição:</u> Considerando que é possível disponibilizar diferentemente e convenientemente os quadrados que representam a soma dos quadrados dos números naturais, então as configurações a seguir são visualmente equivalentes:

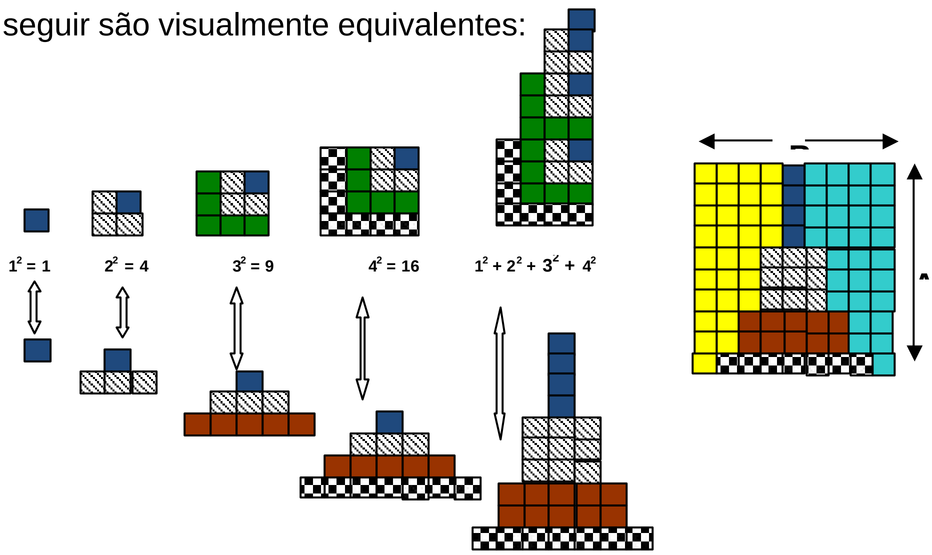


FIGURA 55: COMPARAÇÃO DE ÁREAS EQUIVALENTES

Verificada a equivalência, observe que o retângulo à direita, com dimensões AxB pode ser estruturado e representado dessa forma.

O que se pode observar que ocorreu na relação visual representada por AxB também conhecida por área do retângulo AB? Complete: AxB = ________________________

Como foi destacado no exemplo acima, foi desenvolvida a seqüência até quatro, dessa forma, no retângulo anterior foi possível obter uma expressão para a dimensão A = 1 + 2 + 3 + 4 e para a dimensão B = 2.4 + 1

Complete a tabela a seguir, generalizando até *n*.

Como houve homogeneidade na resolução dos itens que compõem essa atividade, considerou-se, a título de ilustração, as resoluções apresentadas por dois participantes do grupo de discentes de Pós-Graduação (DPG).

QUADRO 28: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2-D PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Item (1)	**DPG_3**			**DPG_4**		
Soma dos quadrados dos números	Área do retângulo	Dimensão A	Dimen-são B	Área do retângulo	Dimensão A	Dimensão B
$1^2 + 2^2$	(1+2).(2.2+1) = 15	1 + 2	2.2+1	$3\ (1^2 + 2^2)$	1 +2	2.2+1
$1^2 + 2^2 + 3^2$	6.(2.3+1) = 42	1 + 2 + 3	2.3+1	$3\ (1^2 + 2^2 + 3^2)$	1 +2 +3	2.3+1
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$	10.(2.4+1) = 90	1+2+3+4	2x4+1	$3(1^2+2^2+3^2+4^2)$	1+2+3+4	2x4+1
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$	15.(2.5+1) = 165	1+2+3+4+5	2.5+1	$3(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)$	1+2+3+4+5	2.5+1
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$	[n.(n+1)/2].(2n+1)	1+2+3+4+...+n	2.n+1	$3(1^2+2^2+3^2+4^2...+n^2$	$1+2+3+4+ ...+n^2$	2.n+1

Item (2)	**DPG_3**	**DPG_4**
Ainda para buscar um entendimento visando a generalização, temos que para o caso de n, observar que: $A \times B = 3 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$ Obtivemos também na atividade 1-D que A=1+2+3+…+n=[n(n+1)]/2. Por que?	NÃO RESPONDEU	NÃO RESPONDEU
Item (3)	**DPG_3**	**DPG_4**
Ora, se novamente substituirmos A e B, qual a expressão equivalente a soma dos quadrados nos n números naturais? $1^2+2^2+3^2+ \ldots + n^2 =$	(n/6).(n+1).(2n+1)	NÃO RESPONDEU
Item (4)	**DPG_3**	**DPG_4**

Verifique e comprove se esta 'fórmula' é válida para os valores de
n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
	$n=2 \rightarrow 1^2+2^2= 5 \rightarrow (2/6)(2+1)(2.2+1) = (2/6). 3.5 = 5;$
	$n = 3$
	$\rightarrow 1^2+2^2+3^2=14 \rightarrow (3/6)(3+1)(2.3+1)=(3/6).4.7=14;$
	$n=4 \rightarrow 1^2+2^2+3^2+4^2=30 \rightarrow (4/6)(4+1)(2.4+1)=(4/6)5.$
	$9=30$
	$n = 5 \rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55 \rightarrow$
	$(5/6)(5+1)(2.5+1) = (5/6) . 6 . 11 = 55$
	$n = 6 \rightarrow 1^2+ 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91 \rightarrow$
	$(6/6)(6+1)(2.6+1) = 91;$
	$n = 7 \rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140 \rightarrow$
	$(7/6)(7+1)(2.7+1) = 140.$
		$1^2+2^2+3^2+...+n^2=(1+2+3+...n).(2n+1)/3$
		para n 2;
		(1.2).(2..2+1)/3=3.5/3=5
		para n=6;
		(1+2+3+4+5+6).(2.6+1)/3=21.13/3=9
		1
		para n=7;
		(1+2+3+4+5+6+7).(2.7+1)/3=28.15/3
		=140

O item (1) foi completado corretamente por todos, porém, nenhum dos participantes respondeu ou justificou o item (2), como exemplificado na amostra acima. Cinco deles não responderam ao item (3), no entanto, sete responderam corretamente o item (4), sendo que apenas um o fez sem ter respondido o item (3). Vale ressaltar que a atividade foi considerada por muitos dos participantes como cansativa e a maioria, em depoimento verbal, informou que não tinha muita motivação para esse formato de atividade.

Atividade 3-D: Descreva e apresente argumentos que indiquem e justifiquem como a representação de identidade algébrica abaixo se relaciona com a representação geométrica a seguir.

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (2n+1)(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

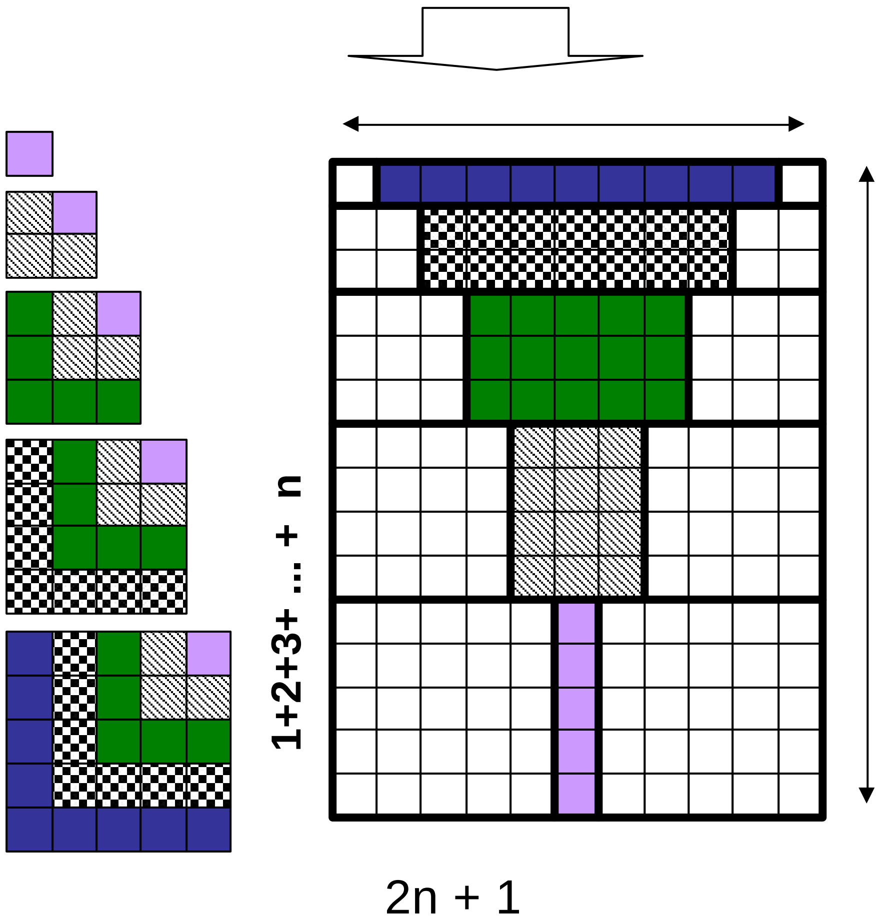


FIGURA 56: COMPARAÇÃO DE IDENTIDADES ALGÉBRICAS COM REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS

QUADRO 29: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 3-D PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

DCM_1	DCM_2	DCM_3	DCM_4
NÃO RESPONDEU	NÃO RESPONDEU	A representação é por meio de quadrados de modo: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$, mas se contarmos apenas os quadradinhos menores obteremos um lado do tamanho de $1 + 2 + 3 + ... + n = A$, por sua vez o outro lado possui dois quadrados de lado 'n' mais cada quadrado com 'n' quadradinhos, logo, como temos dois quadrados de 'n' quadradinhos temos 2n quadradinhos mais um quadradinho da figura do meio que é equivalente às figuras não pintadas. Logo, para calcular a área de um retângulo composto pela soma de três partes onde cada parte equivale a seguinte soma dos quadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ temos: $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = (2n + 1) (1 + 2 + 3 + ... + n^2)$.	NÃO RESPONDEU
DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
O retângulo $(2n + 1) \times (1+2+3+...+n)$ é formado por 3 partes sendo que cada parte é igual a $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2$, isto é visível na comparação da quantidade dos quadradinhos.	NÃO RESPONDEU	Analisando a área do retângulo; Área = A.B = (1+2+3+4+5+...+n).(2n+1) (I); Se somarmos todas as áreas internas teremos também a área do retângulo, portanto: Área = 2 (Somatório) A (retângulos brancos) + A colorida, onde A colorida = (Somatório) A (retângulos brancos). Sendo assim: Área = 3 (Somatório) A (retângulos brancos) = 3 (Somatório de i = 1 até n de i^2 = $3(1^2+2^2+3^2+ \dots + n^2)$ (II). Igualando (I) e (II) temos: $3(1^2+2^2+3^2+ \dots + n^2)) = (2n+1).(1+2+3+ ... +n)$.	NÃO RESPONDEU
PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
O retângulo acima é formado por duas 'colunas brancas', nas laterais, que visualmente podemos perceber que se tratam das somas $1^2+2^2+3^2+...+n^2$, isto é, temos aí $2.(1^2+2^2+3^2+...+n^2,)$. Já a parte central, apesar de não ter a mesma 'forma' das outras duas partes, é equivalente à uma terceira seqüência do tipo $1^2+2^2+3^2+...+n^2$,. Assim teremos: $3.(1^2+2^2+3^2+...+n^2,)$ =(área do retângulo de base 2n+1 e altura 1+2+3+...+n, ou n.(n+1)/2.	Ao completar os lados opostos da figura colorida observa-se que um é o oposto do outro, ou seja, simétrico. Os quadrados que o completa é 2n + 1 (horizontal).	O retângulo de lados A e B é formado lateralmente por seqüências somativas, já no centro, enxergamos outra seqüência somativa, veja: $A_{retângulo}$ = base x altura = (2n+1) . (1+2+3+...+n), A = (2n+1)[n(n+1)/2].	Uma vez que área do retângulo = largura x comprimento = (1 + 2 + 3 + ... + n) . (2n + 1). Que a área do retângulo = 3 quadrados de lado 1 + 3 quadrados de lado 2 + 3 quadrados de lado 3 + 3 quadrados de lado 4 + 3 quadrados de lado 5 + 3 quadrados de lado n ... temos que $3 . 1^2 + 3 . 2^2 + ... + 3 . n^2 =$ $= 3 . (1^2 + 2^2 + ... + n^2) =$ $= (1 + 2 + 3 + ... + n).(2n + 1)$ Levando em consideração que o retângulo é formado por 2 empilhamentos de quadrados de lado 1 até lado n + 1 empilhamento de retângulos formados pelos quadrados de área = 2n - 1, de 1 até n. Sendo que esse último empilhamento = 1 quadrado lado 1 + 1 quadrado de lado 2 + 1 quadrado de lado n ... Não esquecendo que a largura do retângulo é igual a largura do empilhamento de quadrados de lado 1 até lado n, portanto largura do retângulo = 1+2+3+...+n. E ainda, que o comprimento do retângulo é igual a largura dos dois empilhamentos de quadrados de lado 1 até lado n + a largura dos retângulos formados pelos quadrados de área 2n - 1. Portanto, comprimento = 2n - 1 + 1 + 1 = 2n - 1, ou comprimento = n + n + 1 = 2n + 1.

PES_1	PES_2
A área do retângulo é base vezes altura então temos (2n + 1) (1+2+3+...+n) como está dividido em quadrados.	NÃO RESPONDEU

Somente um discente finalista em Matemática procurou justificar a identidade com a representação visual, porém, tentou basicamente descrever o que 'viu' e não estabelecer relações com partes da identidade e as formas de visualizar a representação geométrica. Já 50% dos discentes da Pós-Graduação responderam a questão comparando a estrutura do retângulo (Base X Altura) representando-o pelas medidas correspondentes (2n+1)x(1+2+3+...+n), confrontando-o com a sua maneira de representar o interior da figura, ou seja, 3 grupos de ($1^2+2^2+3^2+4^2+.. + n^2$).

Todos os professores do Ensino Básico responderam a questão, sendo que dois deles utilizaram o mesmo procedimento que a metade dos discentes da Pós-Graduação. Dos dois últimos professores, um deles não conseguiu justificar e o outro não usou claramente os argumentos.

Dos professores do Ensino Superior, um deles não respondeu e o outro começou a justificar, fazendo apenas referência a uma parte do proposto.

Desta feita, como análise geral, tem-se que apenas quatro participantes conseguiram justificar completamente a questão, estabelecendo corretamente as relações, três deles não usaram todos os argumentos suficientes para convencer, um deles não conseguiu justificar e seis se abstiveram, não respondendo a questão. Uma observação que possa servir de argumento para ilustrar que relações não são facilmente obtidas, tem-se como referência nesse exemplo, que apesar de ter pretendido uma sensibilização por meio de duas atividades anteriores em que, de alguma forma apresentava implicitamente e diretamente algumas das relações usadas nessa 3ª atividade, isto não ajudou muito, conforme o observado em função da quantidade de justificativas coerentes surgidas.

Para os 50% dos participantes que não conseguiram apresentar justificativa também não valeram os instrumentos já conhecidos e com certeza, que faz parte do domínio deles, tais como, a fórmula do retângulo, o gerador de números ímpares (2n+1), os somatórios (1+2+3+...+n); ($1^2+2^2+3^2+...+n^2$), as somas de números ímpares gerando quadrados perfeitos (1+3+5+...+n) = n² etc.

Apesar da maioria dos participantes indicar certa vivência e experiência com o ensino, nenhuma das três atividades apresentadas era conhecida por eles. Os participantes conheciam a parte instrumental em separado, mas não faziam relações geométricas com ou entre as atividades. Dessa forma, faz sentido a dificuldade que a maioria deles encontrou para a construção de relações. Isso significa que situações assemelhadas devem ser disponibilizadas para os nossos alunos, nos diversos níveis de ensino.

Nessa série de situações matematizadas, o envolvimento visual geométrico estabelecendo relações com o aritmético-algébrico, reporta muito a importância que Skemp (1989) dá ao uso de atividades que se utilizem de esquemas, gráficos, diagramas etc, que orientem o aluno para a descoberta de padrões, estruturas, comportamentos e demais formas de percepção e relação.

É fundamental destacar que a Matemática não é descoberta com base em dados, pois, dessa forma, justificaria o ensino somente expositivo, mas ela também não é realizada apenas por meio da lógica. Fazendo analogias aos pensamentos de Kant (1997) e Skemp (1989), pode-se concluir que o conhecimento **dado** relaciona-se com o **saber** (Kant → Skemp), o **pensado** relaciona-se diretamente com o **compreender** (Kant → Skemp). Mesmo antes da proliferação da informática, os matemáticos sempre fizeram experiências. Essas experiências forneciam não apenas a conjectura, mas também alguma pista ou indicação sobre como uma demonstração poderia ser desenvolvida, ou a descoberta de alguma estrutura que, mais tarde, readaptada poderia constituir uma demonstração. De modo semelhante tem-se o outro caminho em que a procura lógica de uma demonstração sugere muitas vezes novas experiências. Para adquirir a compreensão da Matemática tal como é feita, os alunos devem ter a possibilidade de experimentar diferentes modalidades de atividade, em ambos os sentidos, e ver como se interagem.

Uma possível estratégia é ajudar os alunos a ver como podem traduzir uma experiência visual em palavras, de modo a construir uma demonstração. A outra via seria traduzir ou converter uma demonstração para um exemplo geometrizado ou esquemático. Dessa forma, dá-se um estímulo à demonstração e sobre as suas partes constituintes (por exemplo: construir, e não apenas utilizar, definições) que devem fazer parte da vivência do aluno, ou seja, fazer parte do currículo de Matemática e ser sistematicamente desenvolvido.

Novamente, confronta-se com uma verdade exposta por Kant (1997), que ele discorre o como a Aritmética expressa o particular (relação entre grandezas isoladas) e a Geometria o geral (o conceito de uma figura). Nesses modelos de atividades fica fácil perceber esse fato, pois os dois conceitos se confrontam: tem-se de um lado a representação geométrica, que nos convence visualmente, do outro lado, o correspondente aritmético ou algébrico, que também é facilmente justificado. Em função da compartimentalização do ensino, esse estilo de atividade não é muito comum para a maioria dos estudantes, pois ela, a Matemática, relaciona-se diretamente e internamente entre suas áreas, por meio de uma prova geométrica que possibilita uma justificação por meio da álgebra. Confirmações aritméticas usadas para comprovar a veracidade tanto do geométrico como do algébrico também são válidas. Essa forma de análise necessita de uso muito grande da intuição para estabelecer as relações possíveis e necessárias. Dessa maneira, as leituras tanto de Poincaré, em suas várias obras, em geral, procurando interpretar as várias categorias de intuição ali discutidas e principalmente Poncelet, que por ser engenheiro, buscava aplicações e explorava muito as estruturas relacionais, particularmente voltadas para situações geométricas. São obras importantes para auxiliar o resgate e a compreensão dos modernos processos de axiomatização.

Então, esse reconstruir o caminho, tanto da geometrização, desde Euclides, como da aritmetização e da algebrização, tendo como referencial relações geométricas e visuais, seria uma boa estratégia para aplicação no Ensino de Matemática. Essas ações possibilitam que o estudante, em geral, amplie seu potencial e garanta mais argumentos para comunicar, interpretar, prever, conjecturar, como indica Oliveira (2002), ao mesmo tempo que o professor procure meios de desenvolver não só habilidades, mas também atitudes e posturas de comunicador, ator, agente, com o propósito de desenvolver ações, educativas ou não, como indica Moraes (2003).

Uma série de argumentos entre linguagem visual e linguagem algébrica foi disponibilizada por meio de um texto que discutia algumas idéias, principalmente relacionadas com Skemp. Porém, em depoimento verbal feito pelos participantes dessa pesquisa exploratória, verificou-se que nem todos fizeram uma leitura mais detalhada. Poucos compreenderam o texto na íntegra porque se referia também a períodos históricos, e vários declararam que conheciam poucos escritos relativos a época moderna ou contemporânea da Matemática.

4. 4.2.6. – Ponto de vista dos pesquisados na Análise das Situações Matematizadas denominadas Sessão E: "O Relacional entre a abstração e a atividade contextualizada"

O texto de apoio sobre o tema acima mencionado relata sobre as dificuldades de relacionar o pensamento geométrico e algébrico com situações que possam ser contextualizadas, sejam por meio de situações-problema, atividades que ajudem a compreender o funcionamento de propriedades e conceitos matemáticos, ou não. Importante ainda é o uso dessas propriedades como ferramentas para compreender novas propriedades e novas situações que vão encadeando-se. É a *Geometria* auxiliando a compreender a Álgebra e vice-versa, são argumentos que ajudam a caminhar em busca de generalizações. Dessa forma, essas experiências fornecem bases para sair da dependência do concreto para iniciar a busca das experiências de aplicações e generalizações.

Atividade 01-E: <u>Proposição:</u> PÓLYA, (1986) indica um problema interessante, no qual a necessidade de conhecimentos um pouco mais próprios de geodésia investido de um senso de lógica bastante perspicaz, desperta a curiosidade em função da complexidade com que o problema se apresenta, e ao mesmo tempo da simplicidade evidenciada na sua solução. O problema foi remodelado pelo pesquisador desta Tese, da seguinte maneira: "considerando as diversas raças existentes de ursos e seus distintos *habitat* descritos na tabela a seguir:"

QUADRO 30: DESCRIÇÃO DA ESPÉCIE DE URSO COM SEU HABITAT

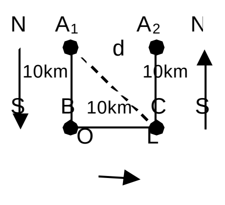
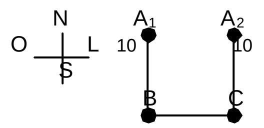
Espécie de Urso	Característica/Habitat
Urso Pardo	América do Norte, Europa e Ásia. Encontra-se presente na península Ibérica, precisamente nos Pirineus e na cordilheira Cantábrica. Na Espanha, está em perigo de extinção.
Urso Cinzento	Também denominado 'grizzly', habita as Montanhas Rochosas (EUA).
Urso Beiçudo	O Urso Beiçudo recebe esse nome porque seu focinho é longo e os lábios, muito móveis, são empregados para capturar os cupins dos quais se alimenta. De cor escura, habita as florestas tropicais da Índia e do Sri Lanka.
Urso Malaio	O Urso Malaio tem o pêlo de cor negra, com uma mancha sobre o peito, de forma irregular, branca ou amarela, e se estende desde a China até a Indochina
Urso-de-Óculos	Também chamado de Urso Andino, Cara Rajada, Umari ou Uyutchine. Ele vive na América do Sul e caracteriza-se pela presença de manchas faciais que costumam rodear os olhos, como se usasse óculos, formando um anel, completo ou não.
Urso Negro Americano	Esse urso é muito abundante na América do Norte, desde o Alasca até o México e a Flórida. Apresenta uma grande variabilidade na cor de sua pelagem que vai do preto ao cinza-avermelhado, e no peito costuma ter uma mancha branca em forma de estrela.
Urso Tibetano	Também conhecido por Urso Negro Asiático, espécie de urso distribuída pela Ásia, desde o Japão até o Paquistão. A pelagem do corpo é preta e bastante longa no pescoço e nos ombros e apresenta uma mancha branca sobre o peito.
Urso-Polar,	Também conhecido como urso-branco, típico e nativo do Ártico e atualmente é o maior carnívoro terrestre conhecido
Panda-Vermelho	Previamente classificada na família Procyonidae (guaxinim). Essa espécie é nativa dos Himalaias e sul da China.
Panda	É um mamífero da família dos ursídeos, endêmico da República Popular da China. O focinho curto lembrando um urso de pelúcia (peluche), a pelagem preta e branca característica.

Tendo como referência esses vários *habitat* e os ursos distribuídos pelo planeta, considere a seguinte condição:

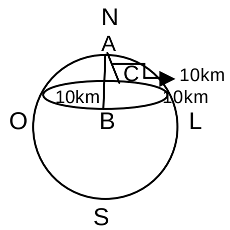
Um urso (qualquer) encontra-se numa posição (também qualquer) do planeta a qual designaremos por 'ponto A'. Num determinado instante, ele caminha uma distância de 10km tomando a direção N→S, e o final do percurso chamaremos de 'ponto B'. Após, ele caminha mais 10km na direção O→L, atingindo um local designado por 'ponto C'. Enfim ele caminha mais 10km na direção S→N e retorna a origem, isto é ao 'ponto A'.

QUADRO 31A: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-E ITEM 1 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

Itens	DCM$_1$	DCM$_2$	DCM$_3$	DCM$_4$
1) Pergunta-se então: Qual a cor do Urso?	Branco (escreveu e apagou)	NÃO RESPONDEU	Laranja marrom	Tanto faz
	DPG$_1$	**DPG$_2$**	**DPG$_3$**	**DPG$_4$**
	Urso pardo ou urso cinzento	Branco	Urso-branco (Pólo Norte)	Qualquer urso
	PEB$_1$	**PEB$_2$**	**PEB$_3$**	**PEB$_4$**
	Branco	NÃO RESPONDEU	Nenhuma (n.p.a)	Depende da região/habitat já que é um urso qualquer
	PES$_1$		**PES$_2$**	
	Pode ser qualquer cor específica do ...		Brancc	

2) Quais conceitos matemáticos ou não-matemáticos podemos listar e que são necessários para dar uma solução para o referido problema?	DCM$_1$	DCM$_2$	DCM$_3$	DCM$_4$
	Matemáticos: vetores e geometria; Não matemáticos: localização geográfica.	NÃO RESPONDEU	E impossível que o urso tenha retornado ao local de onde partiu, pois: é impossível que a distância AC = 10km, sendo AB e BC também 10 km. Podemos usar conceitos sobre coordenadas cartesianas (plano cartesiano) e também o estudo de figuras planas, tais como o retângulo.	É impossível que o urso retorne ao ponto de partida de acordo com as dimensões dadas. Assim, usamos (ou mostramos) que isso é impossível.
	DPG$_1$	**DPG$_2$**	**DPG$_3$**	**DPG$_4$**
	Leitura e interpretação; Os pontos cardeais; Direção e sentido; Creio que essa situação pode ser resolvida apenas pela lógica, ou seja, não depende de conhecimento de geodésia.	Na introdução faz-se referência à geodésica, fazendo um diagrama percebe-se que mesmo N → S, O → L e S → N ele retorna ao ponto A. isso só seria possível no Pólo.	A forma esférica da terra deve ser analisada cuidadosamente; noção de espaço; ângulos; conhecimento dos pólos; tempo.	Saber o que é norte, sul, leste e oeste. Conhecer a posição dos países no mapa.
	PEB$_1$	**PEB$_2$**	**PEB$_3$**	**PEB$_4$**
	 Se seguirmos o roteiro teríamos o seguinte: 1º (A_1 ocupa posição diferente de A_2; 2º) Mesmo que supostamente o urso caminhasse de C a A_1, teríamos uma distância d= $10.(2)^{1/2} \cong 14$km	Leitura de tabela; espécie, característica e habitat de um animal, espaço, distância, lógica.	 1°) O 'urso' não voltou a origem; 2°) Se 'ele' tivesse voltado a origem não seria de 10 km a distância e sim de $10.2^{1/2}$km, já que do ponto C ao ponto A teríamos a distância igual a diagonal de um quadrado de lado 10km.	Matemáticos: lógica, noção de espaço/ comprimento, localização, unidades de medidas. Não-matemáticos: seres vivos, habitat, cores continente.
	PES$_1$		**PES$_2$**	
	Lógica, espaço métrico, localização, tempo, área entre outros, unidades de medidas.		Geometria não Euclidiana, topologia, geografia, zoologia.	

QUADRO 31B: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1-E ITEM 1 PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

3) Como justificar a pergunta relativa a cor do Urso?	**DCM_1**	**DCM_2**	**DCM_3**	**DCM_4**
	NÃO RESPONDEU	NÃO RESPONDEU	Porque a pergunta não faz sentido algum, da mesma forma que os dados fornecidos por ela. Então, poderíamos perguntar qualquer coisa, inclusive o nome do urso.	A pergunta não faz sentido, pois da mesma forma que a pergunta é inútil, pois os dados fornecidos também são. Então poderíamos dizer (ou perguntar) qualquer coisa.
	DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
	A questão é que a cada região do planeta está associada a uma cor para o urso desse habitat, portanto, é necessário aliar a cor com a sua origem.	O único branco é o urso polar. Não sei como justificar por que perguntar a cor do urso e não qual espécie de urso.	A primeira vista você imagina que o problema não tem solução argumentando que o urso não voltaria ao ponto de partida. Então, é preciso analisar pontos estratégicos no globo terrestre. Nosso problema foi observado que se o ponto estivesse localizado no Pólo Norte teríamos (conforme o desenho reproduzido): Sabendo que o urso se localiza no Pólo Norte olhamos na tabela a sua cor. 	A partir das posições dos planetas que possuem ursos, analisar considerando a distância percorrida e ao parar em algum outro lugar, levar em conta a distância e direção percorrida e distância entre locais que possuem urso. No caso acima, dei a resposta a partir de três observações: 1ª) de acordo com as distâncias e coordenadas do ponto de origem, no mesmo lugar; 2ª) se considerarmos a expressão: 'retornar ao ponto de origem, pode ser qualquer urso; 3ª) se a distância é real, 10 km não é suficiente para mudar de área.
	PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
	Recurso usado para 'distanciar' o leitor em relação ao real problema, o da distância.	Pelo retorno do urso ao ponto A.	Artifício usado para desviar o foco 'distância'.	Por um lado, uma pergunta é uma pergunta, independente do exercício ou do enunciado apresentado. Por outro lado, o conjunto formado pela 'complexidade' do enunciado apresentado é a lógica envolvida, por si só, justifica a pergunta relativa a cor do urso.
	PES_1		**PES_2**	
	A justificativa vem da área caminhada pelo urso, este andou apenas no seu habitat, então poderia ser qualquer cor.		Somente nos pólos há a possibilidade da tal movimentação espacial no globo terrestre, e animal que vale nos pólos é o urso polar.	

Dos discentes finalistas em Matemática, um não forneceu nenhuma resposta às três questões. Dois dos dscentes de Pós-Graduação responderam corretamente a cor do urso, os conceitos a serem usados e um deles fundamentou bem sua justificativa, e o outro não percebeu que sua justificativa estava respondida na questão anterior e só faltava fazer a relação Pólo Norte = Urso Polar = Branco. Dentre os professores do Ensino Básico, houve uma resposta correta, porém, a justificativa não apóia a solução escolhida. Entre os professores do Ensino Superior, apenas um deles analisou corretamente as três questões propostas

Dois responderam erroneamente, justificando que os dados e as perguntas não fazem sentido e o primeiro deles, apesar de ter respondido corretamente a cor branca e ter apagado a resposta, indicou ainda alguns conceitos que poderiam ter auxiliado na solução, porém, não justificou a pergunta e o uso dos conceitos citados. Os dois outros discentes não levaram em conta a possibilidade de um triângulo esférico localizado nos pólos, coincidindo com os encontros dos meridianos, seria possível satisfazer a proposição. Se considerar ainda que no Polo Sul não há ursos e sim pingüins, focas e leões marinhos, dessa forma, então resta apenas o Pólo Norte.

Dois professores tentaram indicar o conteúdo, no entanto, a visão apresentada não satisfaz a condição requerida —a de retornar ao ponto A, de origem. Outros dois professores indicaram conteúdos, porém, intuitivamente, creio, sem ter relação com as respostas anteriormente emitidas. Com relação à 3ª. Questão, as respostas indicavam que a pergunta não fazia sentido para eles. Um deles citou o retorno do urso ao ponto A, porém, sem nenhum elemento que fundamentasse o porquê. Outro professor apesar de intuir os conteúdos e na justificativa citar alguns argumentos, ele apenas indicou o ‘o quê’, mas não explicou ‘o porquê’.

Essa atividade, inicialmente idealizada por Pólya (1986), faz uso ou necessita que se estabeleça relações, em pontos que muitos pensam não existir ou não ter correlação e que não são evidentes ou aparentes. Somente baseando-se no empirismo não é suficiente. Não houve ainda oportunidade de discutir com os pesquisados essas questões que envolvam o uso do pensamento relacional, mas creio ser importante, pois cerca de quase 80% dos pesquisados não acharam coerente a questão proposta.

Essa é uma questão que exige correlação entre as habilidades da intuição e do analítico, muito denotada por Poincaré (1995). Nesse caso só a representação feita fielmente não é suficiente para garantir todas as premissas, pois seguir as regras integralmente, sem levar em conta o sistema de coordenadas a ser utilizado, não possibilita a última parte da instrução "... retornou ao ponto de origem". O forte da relação ainda leva a identificar o possível local onde poderia ocorrer o fenômeno, ou seja os Pólos, mais especificamente o Pólo Norte, onde de acordo com o problema, existem ursos. Novamente o papel da análise.

Atividade 02-E: Proposição: Considere o contexto a seguir: Tendo como informação que se alguém pudesse efetuar uma volta completa no nosso Planeta, caminhando pela linha do Equador, estaria andando cerca de 40.000 km de distância.

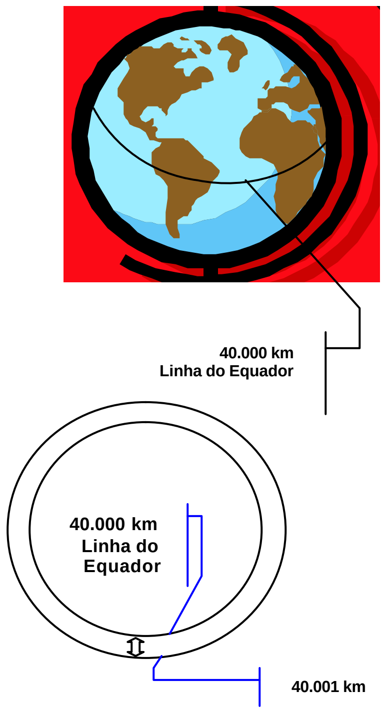


FIGURA 57: ANÉIS NO PLANETA

Se um anel de arame pudesse ser atarraxado nesse percurso (da Linha do Equador), ele teria, claro, esse mesmo comprimento.

Se pegarmos outro arame, agora com 40.001 km de comprimento, com ele confeccionar também um anel colocando-o, circuncentricamente, sob o primeiro (como ilustra o esquema ao lado), perceberemos uma relativa distância entre ambos os anéis.

Pergunta-se:

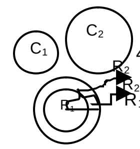
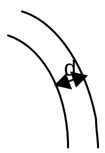
QUADRO 32A: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2-E PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

<table>
<tr><th>Itens</th><th>DCM_1</th><th>DCM_2</th><th>DCM_3</th><th>DCM_4</th></tr>
<tr><td rowspan="7">1) Que conceitos gerais e específicos, a primeira vista, são percebíveis nesse contexto matematizado?</td><td>Subtração, multiplicação, divisão, comprimento da circunferência, raio da circunferência.</td><td>Podemos elencar: Distância; figura geométrica, especificamente circunferência; semelhança entre figuras geométricas.</td><td>O estudo de circunferências (e seus componentes).</td><td>O estudo de circunferência e seus componentes.</td></tr>
<tr><td>DPG_1</td><td>DPG_2</td><td>DPG_3</td><td>DPG_4</td></tr>
<tr><td>Comprimento de circunferência; Comparação entre comprimento de circunferência.</td><td>Que existe uma relação entre o comprimento e o raio da circunferência, se o comprimento em volta é maior, a distância ao centro deve ser maior.</td><td>Área;
Volume;
Comprimento da circunferência.</td><td>$2\pi R = 40000$;
$R = 6366{,}19$ m;
$2\pi R=40001$;
$R= 6366{,}35$ m; $2\pi DR =1$;
$DR \cong 16$ cm;
Se a circunferência é maior, o raio também é maior.
O aumento da circunferência independe do tamanho da circunferência original.</td></tr>
<tr><td>PEB_1</td><td>PEB_2</td><td>PEB_3</td><td>PEB_4</td></tr>
<tr><td>Conceito de distância (aumento ou diminuição);
Comprimento de circunferência; A influência do raio no cumprimento de uma circunferência</td><td>Área, diâmetro, circunferência circunscrita.</td><td>Distância, comprimento da circunferência, aumento ou redução do comprimento em função do raio.</td><td>Comprimento de uma circunferência, círculos circunscritos, componentes de uma circunferência, comprimento/distância, círculo e circunferência, área e comprimento, álgebra no sentido da distância entre as circunferências, ou seja, a e a + 1, comparação (maior e menor), esfera, área e volume, componentes como raio/diâmetro/centro, figuras planas/sólidas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PES_1</td><td colspan="2">PES_2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Circunferência circunscrita e inscrita, distância relativa mantida, comprimento da circunferência depende do raio das duas.</td><td colspan="2">Circunferência, coroa circular, círculo, perímetro.</td></tr>
</table>

Todos os participantes deram palpites sobre a identificação do conteúdo estar correlato com a atividade, ou relataram o evidente e alguns poucos tentaram referenciar como uma forma de aplicação, porém a maioria apenas indicou como rol de conteúdos.

Um caráter interessante que esse modelo de atividade permite vivenciar, e que passou despercebida pelos participantes voluntários da pesquisa, é quanto ao desenvolvimento da habilidade de previsão de resultados, bem como o da verificação de coerência daquilo que é pedido como na dos resultados obtidos. Houve, na maioria das resoluções acompanhadas, uma pressa em calcular, sem antes verificar que formas de relações entre grandezas estavam em jogo, a pequena ou grande variação de uma implicaria o que no comportamento da outra etc. Eis aí exemplificado a pressa para o instrumental que Skemp (1989) sempre indica, lembrando ainda, que a postura do relacional não está presente nas atitudes dos profissionais da Educação.

QUADRO 32B: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2-E PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

2) Seria possível um gato, com aproximadamente 20 centímetros de altura, passar entre os dois anéis? Justifique sua resposta	**DCM_1**	**DCM_2**	**DCM_3**	**DCM_4**
	 $C_1 = 2\pi R$ $40.000 = 2\pi R$ $20.000 = \pi R$ $R_1 = 40.000/2\pi$; $C_2 = 2\pi P$ $40.001 = 2\pi R$ $R_2 = 40.001/2\pi$; $R_2 - R_1 = 40.001/2\pi - 40.000/2\pi$ $R_2 - R_1 = 1/2\pi = 1/6,2831853 =$ $= 0,159155$ km $R_2 - R_1 = 159,155$m. Sim, encontrando o raio da circunferência cujo comprimento é 40.000 km depois encontrando o raio da circunferência e 40.001 km depois fazendo a diferença entre o raio da maior com a da menor teríamos a altura máxima entre os arames.	Sim, pois calculando os 'perímetros' dos dois anéis encontramos a distância entre eles que é, com certeza, maior que 20 cm. Dessa forma, um gato com 20 cm de altura pode passar entre os dois anéis formados pelas cordas.	Não, pois esse aumento de 1 metro acarretaria um aumento de apenas, aproximadamente, 16 cm entre os raios dos arames.	Não, pois o aumento de 1 m acarretaria um aumento de apenas, aproximadamente, 16 cm entre os raios dos arames.
	DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
	$C_1 = 2\pi R$, $C_2 = 2\pi R1 + 1$, $2\pi R + 1 = 2\pi R_1$ $2\pi R - 2\pi R_1 = -1$ $2\pi(R - R_1) = -1$ $(R - R_1) = -1/2\pi$ $(R_1 - R) = 1/2\pi \cong 1/6,28 \cong 0,16$. O gato passa entre os dois anéis.	$C = 2\pi r$ (1) $40000 = 2\pi r$ (2) $40001 = 2\pi (r+x)$, (1 em 2) $40001 = 40000+2\pi x$, $1=2\pi x$, 1km=1000m, $x = 1000m/2\pi$ $x \cong 1000 / 2.3,14$ $\pi \cong 3,1 \rightarrow 1000/6,2$ e $\pi \cong 3,2 \rightarrow 1000/6,4$; $1000/6,2<x<1000/6,4$ 161m < x < 156m. Sim, é possível a distância entre os arcos é maior que 156m.	$C = 2\pi r$ (círculo menor) $40.000 = 2.3,14r$ $r = 40.000/6,28$; $C = 2\pi R$ (círculo maior) $40.001 = 2.3,14R$ $R = 40.001/6,28$; $x = R - r =$ $=(40.001/6,28) - (40.000/6,28) =$ 1km/6,28 =1000m/6,28 = =100 000cm/6,28. Como o gato só tem 20 cm de altura seria possível.	Não, pois a distância entre os dois anéis é de apenas 16 centímetros
	PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
	Sim, veja: C_1=40000 km $2\pi R_1$= 40000 R_1=40000/2π R_1= 20000/πkm; C_2=40001km $2\pi.R_2$=40001 = 40001/2π; $d \cong R_2 - R_1 \cong 40001/(2.314) - 20000/3,4 \cong$ 6366,36 - 6366,2; $d \cong$ 0,16km $\cong$ 160m; Distância esta que mesmo com um erro de 20m para mais ou para menos permite a passagem do 'gato'. 	Sim, levando em consideração a flexibilidade do corpo do gato, ele passaria.	$C_1 = 2\pi r_1$ $40.000 = 2\pi r_1$ $r_1 = 40.000/2\pi \cong$ 6366,20; $C_2 = 2\pi r_2$ -> 40.001 = $2\pi r_2$ $r_2 = 40.001/2\pi \cong$ 6366,36; $C_2 - C_1$ -> $r_2 - r_1 \cong$ 6366,36 - 6366,20 $\cong$ 0,16km $\cong$ 160m, mesmo considerando um erro absurdo de 100 m para mais ou para menos, ainda assim, o gato passaria.	$C_1 = 2\pi R_1$ $0.000 = 2\pi R_1$ R_1= 40.000/2πkm = 20.000/πkm; (2) $C_2 = 2\pi R_2$ $40.001 = 2\pi R_2$ $R_2 = 40.001/2\pi = 20000,5/\pi$, $R_2 - R_1 = 0,5/\pi$ km = 500/π m = mais de 100 m de diferença. Se estiver num plano ou analisando por altura, sim, o gato com aproximadamente 20 cm de altura pode passar entre os anéis é fácil analisar também com: $40000 = 2\pi R_1$, $40000+1=2\pi R_1+1$ $40001 = 2\pi R_1 + 1$ ($2\pi R_2 = 2\pi R_1 + 1$), $R_2 = (2\pi R_1 + 1)/2\pi$ $R_2 = R_1 + 0,5/\pi$.
	PES_1	**PES_2**		
	Sim claro, pois o raio permite isso.	R_1=40000.1000.100/2π = =636619772,4cm R_2=40001.1000.100/2π = = 636635687,9cm Diferença = 15915,462cm Sim, a distância entre os dois anéis é de 160 aproximadamente.		

QUADRO 32C: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 2-E PELOS PARTICIPANTES PESQUISADOS

3) Como descrever a relação existente entre o aumento/diminuição do comprimento de uma circunferência X o aumento/diminuição do seu raio?	**DCM_1**	**DCM_2**	**DCM_3**	**DCM_4**
	Há uma relação de proporcionalidade, ou seja, quanto maior for o comprimento maior será o seu raio e quanto menor for o comprimento menor será o raio, $C = 2\pi r$, onde C = comprimento da circunferência; r = raio da circunferência e π = constante.	NÃO RESPONDEU	$C = 2\pi R$ -> sempre que o raio aumenta, o comprimento também aumenta (e vice-versa).	$C = 2\pi R$ -> sempre que o raio aumenta, o comprimento também aumenta (e vice-versa).
	DPG_1	**DPG_2**	**DPG_3**	**DPG_4**
	A relação é constante de $1/2\pi$ unidade de comprimento.	Se aumenta o comprimento do arame vai haver folga. Se ajustarmos essa folga da mesma forma em torno da circunferência original, teremos outra circunferência de raio maior. Também podemos mostrar através da fórmula, pois se o C aumentou é porque algum elemento de $2\pi r$ aumentou também. Esse elemento só pode ser o raio.	$C = 2\pi r$, se $x > 0$ é a diferença entre o raio atual (r) e o raio novo (R) temos: $x = \lvert R - r \rvert$. Como $C=2\pi R$ (nova circunferência) temos: $x = \lvert (C/2\pi) - (c/2\pi) \rvert$ $2\pi x = \lvert C-c \rvert$, portanto, $\Delta c=2\pi x$.	Δ raio = Δ circunferência/2π
	PEB_1	**PEB_2**	**PEB_3**	**PEB_4**
	O comprimento de uma circunferência é dada por $C=2\pi r$. Assim,esse comprimento depende da medida do raio, ou seja, o cumprimento da circunferência essa em função do raio, sendo diretamente proporcional a ele.	$d = 2r$; $c = 2\pi r$ -> $r = (C/2\pi)$; $d = 2 (C/2r)$ -> $d = C/r$ -> $r = C/d$, o raio é diretamente proporcional ao tamanho da circunferência.	Aumentando o raio aumenta-se o comprimento, diminuindo o raio diminui-se o comprimento.	O comprimento da circunferência é diretamente proporcional ao seu raio; a medida que aumenta o raio, aumenta o comprimento da circunferência.
	PES_1		**PES_2**	
	$2\pi r = C$ Se raio aumenta logo o comprimento aumenta se raio diminui então o comprimento diminui, já que π = 3,14...		A cada 1km a mais, o raio aumento 159,15m.	

Dos quatro discentes finalistas em Matemática, apenas um deles (DCM_1) respondeu corretamente as 3 questões propostas, sendo que a última existe sim a proporcionalidade, porém, o pouco que se aumenta no comprimento representa um grande aumento no raio. Apesar de todos responderem com acerto a primeira questão, constata-se que os mesmos não refletiram sobre sua efetiva aplicação para solucionar o problema. Os três responderam sem usar nenhum referencial teórico para justificar suas respostas, ainda que (DCM_3) tenha respondido afirmativamente, os três basearam-se apenas numa falsa intuição ou impressão. Vale observar ainda que as respostas dos dois últimos participantes são completamente idênticas.

Entre os discentes de Pós-Graduação, três dos quatro participantes responderam com coerência as questões propostas. A última, no entanto, 'perdeu-se' nas conversões das medidas. Na terceira questão, as respostas sobre as relações não convenceram.

Dos professores do Ensino Básico, todos acertaram a questão sobre o gato, porém, somente três com argumentos efetivos para garantir a veracidade da resposta. O participante PEB_2 não ofereceu justificativa plausível, apesar de respondido positivamente. Dessa forma, podemos considerar que tivemos o mesmo resultado do grupo anterior. A primeira pergunta é facilmente relacionável, nenhum deles tive problemas. Com relação à terceira pergunta, foram indicadas a existência de proporcionalidade, não denotando o pequeno aumento/diminuição no comprimento da circunferência com o maior aumento/diminuição do raio, garantindo as proporcionalidades.

Entre os professores do Ensino Superior houve as duas respostas positivas, porém, somente uma dela apresentou justificativa aceitável e correta. A primeira questão não resultou em problemas e com relação à terceira as justificativas também estavam condizentes.

De modo geral, essa segunda atividade apresentou um índice maior de sucesso que a atividade anterior, com quase 60% de acerto na questão principal da atividade. Como essa atividade apresentava uma maior possibilidade de efetuar comparações e cálculos, oferecia, desta feita uma maior 'segurança' para o resolvedor, ainda que, num primeiro momento, a tendência de deixar um pré-conceito predominar a intuição seja bastante forte.

A primeira impressão que pode causar o fato de apenas 1 km de arame fornecer 160 m aproximadamente entre os dois anéis não parece plausível. Esse é um dos grandes poderes que a Matemática pode proporcionar. O poder da justificação e da comprovação.

Esse estilo de atividade poderia ser relacionado historicamente a corrente utilitarista, conforme indicado e comentado por Dieudonné (1990), na qual se faz o contraponto entre Matemática pura e Matemática aplicada. Otte (1993), também faz referência ao aspecto funcional da Matemática pura, quando ela é determinada muito mais pelo seu estilo e pelo método do que pelo seu objetivo. Quanto em relação à Matemática aplicada leva em conta o momento do significado, que aí inclui aspectos como modelação da realidade, efetividade ou viabilidade de custos, etc. Dessa maneira foi possível, tanto à pura como à aplicada, descobrir um grande número de conexão entre áreas de problemas e resultados aparentemente bem dissociadas. Essas experiências são especialmente importantes de serem modeladas, remodeladas e redescobertas por meio de atividades de ensino propostas.

CAPÍTULO 5

5.1. CONSIDERAÇÕES FINAIS.

Neste capítulo, apresentaremos algumas reflexões oriundas dos fundamentos históricos e educacionais, servindo de referência para a análise da nossa prática docente bem como quanto à perspectiva de responder às questões desta investigação. Da mesma forma, apresentaremos nosso ponto de vista sobre a necessidade de evolução dessa pesquisa quanto de outras que podem ser oriundas desse tema.

No século XIX há o surgimento da axiomatização da Aritmética porque se constatou que na Matemática o que existe de fato como entes matemáticos são os números, que podem ser representados como idéias. Os demais componentes, mesmo a própria Geometria, a Probabilidade, a Mecânica ou as Medidas, são questionáveis, pois não há como garantir uma exatidão ou verdade absoluta ou mesmo poder para controlar totalmente. Já na Antiguidade, Eudóxio tentou fazer uma separação entre a Geometria e a Aritmética. A irracionalidade dos números, antes de ser uma dificuldade, abriu o campo para esse pensamento relacional, pois houve a necessidade de estabelecer e representar quantidades por meio de relações entre objetos, medidas. Eudóxio desenvolveu esse cálculo das relações, que muitos acham ser a parte mais preciosa de todos os Elementos de Euclides. Mas, na realidade, os Elementos se apresenta com características de uma álgebra geométrica.

O desenvolvimento da axiomática geométrica estruturada por Euclides, que sobreviveu como a das mais antigas formalizações matemáticas e que somente após os mais de dois mil anos subseqüentes é que a Aritmética é axiomatizada, possibilitou que as outras áreas do conhecimento matemático também conseguissem seus graus de estruturação e formalização, além do surgimento de inúmeras outras áreas de conhecimento, seja teórico ou aplicado. De alguma forma, tem-se inúmeros grupos de educadores buscando contribuir para quebrar o estigma de 'disciplina difícil' e de 'não é para todo mundo' etc, que a Matemática sempre carregou e ainda carrega.

Dessa forma, com mais aberturas metodológicas, atualmente se tem mais 'liberdade' para se conseguir e serem aceitas soluções diferenciadas para determinadas situações-problema.

Nesta Tese de Doutorado, o pensamento matemático foi considerado sob dimensões teóricas e experimentais. Na dimensão teórica, duas perguntas são elencadas: a) Como se alcança o conhecimento objetivo? As respostas foram discutidas nas teorias de Kant e de Cassirrer, que abordam essa questão tendo como base um referencial histórico; b) como se alcança o sentido ou a compreensão? Tem-se como referência o estudo de Skemp sobre o tema, que por sua vez fez uma abordagem didática. Em ambos os casos, o caminho é o desenvolvimento de duas complementaridades, que são distintas: Para se alcançar o conhecimento objetivo o caminho é a construção de complementaridades entre contínuo-discreto, extensão-intensão, função-fórmula, relacional-instrumental etc. Para alcançar o sentido ou a compreensão, se faz necessário recorrer à complementaridade entre a ação e a aplicação.

Nas dimensões teóricas explicitaram-se idéias de Ernest Cassirer que, fundamenta -se nas concepções de Kant, que faz a distinção entre o pensamento analítico e o sintético. Isso é interessante, pois é o que foi utilizado para caracterizar a Matemática desde a Antiguidade. No entanto, dificilmente se pode fornecer uma interpretação final e unânime dessa oposição entre o analítico e o sintético. Cassirer buscou em Kant elementos para estabelecer uma teoria de conceitos. Com a intuição, que é peculiar dos humanos, juntamente com conceitos que constituem os elementos de todo o conhecimento, de tal forma que não existe conceito sem intuição, e nem por outro lado, intuição sem conceito pode gerar conhecimento. Duas fontes, designadas por sensibilidade e entendimento fundamentam as intuições e o conceito. A sensibilidade passiva se limita a receber expressões provenientes do exterior. O entendimento é ativo e constrói, de forma espontânea, certos conceitos e idéias sem a ajuda da experiência. A distinção entre ambos é a base para fundamentar filosofias.

Cassirer, por influência de Kant, apontava uma transição entre o pensar nas substâncias para pensar nas relações, contrariamente a noção de Aristóteles, que é norteada pela abstração. Pensava-se no objeto, retiravam-se as características até conseguir uma que fosse geral, que era considerada como conceito desse objeto. Pode acontecer, porém, desse conceito tornar-se identificável demais pelo fato da sua definição ser muito geral, como por exemplo: ‘usa água para sobreviver’.

Em resumo, para Aristóteles, sua maneira de conceituar baseava-se na classificação. Para Kant, o conhecimento, e principalmente o conhecimento matemático, era concebido como construção. Quer-se com a Matemática construir teorias, desenvolver operações, prever, prognosticar, aplicar seus conhecimentos. É o que significa, em linhas gerais, o livro de Cassirer. Em vez de descrever as características gerais das substâncias (visão de Aristóteles) o conceito descreve as operações que se usam para obter novos conhecimentos.

Na dimensão experimental a questão é: Como o uso dos pensamentos instrumental e relacional podem ser melhor compreendidos, se for evidenciada a interdependência, a dualidade e a complementaridade entre essas diferentes formas de pensamento e como essa complementaridade poderia ser importante e acessível ao processo educacional?

Nessa dimensão, destacam-se análises referentes ao pensamento matemático, obtidas por meio de vivências, pesquisas bibliográficas e históricas de revisão literária e uma pesquisa exploratória, com participantes voluntários, realizada para a presente Tese.

Psicólogos, talvez, identifiquem pensamentos matemáticos com estilos pessoais de compreensão que relacionadas a diferentes áreas do conhecimento e proporcionem dualidades (Matemática Pura versus Matemática Aplicada, por exemplo).

Os filósofos da Ciência, talvez, os atribuam a diferentes estágios que permeiam os trabalhos dos matemáticos (o contexto da descoberta versus o contexto de justificação e prova, por exemplo).

Os historiadores, talvez, caracterizem os pensamentos matemáticos como aspectos de diferentes períodos culturais na História da Matemática, ou os associem aos vários meios culturais da representação, pode-se citar como exemplo, a Geometria Cartesiana, que é chamada ‘Analítica’ em nossas salas de aula, pois utiliza métodos algébricos.

Porém, Boutroux (1920) tentava nos convencer que na realidade o pensamento é sintético ao trabalhar com os próprios objetos matemáticos em vez das descrições axiomáticas, que são analíticas.

Poincaré (1995) ao discutir diferentes pensamentos matemáticos, não fez uma afirmação categórica. Ele oscilou entre considerar o pensamento matemático ora vinculado às pessoas (natureza), ora às épocas que desencadearam mudanças no desenvolvimento da Matemática.

Isso evidencia que não se pode falar sobre a Matemática em si, assim como sobre o pensamento ou talento matemático em si, e sim sobre aspectos do pensamento matemático, como ao exemplificar a Matemática como teoria ou como instrumento para resolver problemas, e várias representações presentes na Álgebra, Geometria, Cálculo, Combinatória etc.

Por exemplo, Otte (1986) acentuou a influência que os livros didáticos de Matemática exercem no desenvolvimento do pensamento, sobretudo, no que se refere à representação utilizada na Matemática. Ele apontou a necessidade de se complementar os livros didáticos com atividades matemáticas, para que ocorra uma experiência mais significativa para os estudantes.

Acredita-se que o objeto principal de uma pesquisa sobre o pensamento matemático é a própria atividade. Tomando a perspectiva da atividade cognitiva na pesquisa sobre o pensamento matemático, surge a necessidade de considerar tanto as características psicológicas pessoais como os aspectos epistemológicos, culturais, sociais, históricos e semióticos.

Na atividade há um participante, com suas habilidades e um objeto (que pode ser um problema ou situação matemática, por exemplo), com suas exigências, desafios e estímulos. E é na interação entre o participante e o objeto que as habilidades e as características de uma pessoa são reveladas.

Em outras palavras, na atividade é que são reveladas as características do objeto, do participante, do ambiente social, bem como da disponibilidade, ou não, de alguns instrumentos como computadores, livros etc.

Como educadores, não se está interessado em realizar pesquisas psicológicas em si, mas, no entanto, preocupa-se sim em maneiras de organizar atividades Matemáticas, bem como em construir meios e ambientes apropriados para estimular e orientar essas atividades. Em muitos casos, tem-se um ensino em que se realiza a atividade pela atividade.

Algumas considerações importantes oriundas das atividades podem ser discutidas. Sempre é fundamental estabelecer um ponto de partida para o rompimento do empirismo, que é um dos principais obstáculos que se tem para se pensar nas atividades e pensar cientificamente. Na História da Matemática, isso tem sido caracterizada como "a transição de um pensamento empírico, que é um pensamento em termos de objetos concretos, para um pensamento em termos das relações entre esses objetos". OTTE (1994; p.71).

Esse aspecto foi indicado como parte de uma primeira tese apresentada por Otte, nesse artigo, "e propiciou uma melhor organização das idéias aprimorando sua compreensão e conduzindo para uma generalização". OTTE (1994; p.71). Então, ele ainda comenta que os objetos teóricos agora não são nomes de objetos ou de qualidade de objetos, mas denotam relações entre objetos.

Uma segunda tese também indicada por Otte (1994) no mesmo artigo: "as relações devem ser representadas porque não são acessíveis diretamente. Então a Matemática opera com representações (intensões), mas quer ganhar verdades objetivas sobre as relações (sobre as denotações de símbolos ou modelos usados como representações)". OTTE (1994; p. 71).

Por isso, a ação recíproca entre os conceitos matemáticos e suas representações, ou entre extensão (denotação) e intensão (sentido) dos conceitos é muito importante. Essa ação recíproca poderá ser desenvolvida só quando entendermos que os conceitos matemáticos (os conceitos teóricos, em geral) denotam relações entre objetos (ou entre outras relações já construídas).

Nas próprias atividades, quando desenvolvidas relacionalmente pelos alunos, normalmente 'falam por si só', pois "exigem" do aluno algo mais do que uma resposta direta, provoca-o para justificar relações. O quanto de fato se 'perde' quando ao aluno é apresentado, expositivamente, apenas uma única (e nem sempre interessante ou motivante) solução? Essa 'perda' não seria questionada no tocante ao tempo ganho/gasto para seu desenvolvimento, mas, sim em relação à qualidade do conhecimento a ser adquirido.

A pesquisa exploratória, realizada para essa Tese de Doutorado, evidenciou distintos pensamentos matemáticos, manifestados mais nas atividades propostas. Esperava-se que ficassem tembém mais evidente na resolução das situações - problema e em outras situações matematizadas que poderiam surgir a partir daí. Em geral, os participantes voluntários apresentaram uma certa "pressa" em chegar as resoluções, com uma tendência de valer-se em com maior intensidade do pensamento instrumental que do pensamento relacional. Isso contribuiu para revelar que certos problemas podem ou não gerar diferentes pensamentos e, conseqüentemente, distintos processos de resolução.

Poucas tentativas foram percebidas de, numa mesma atividade, tentar juntar os dois tipos de pensamentos numa forma de complementaridade. Um dos fatores, pode ser identificados como hipótese, seria devido a resolução individual e isolada das atividades propostas pelos participantes.

A representação não é única, pois está vinculada à característica da Matemática, na qual cada fato matemático pode ser expresso ou representado de infinitas maneiras. E se há certa predominância na forma de representar esses fatos, isso pode caracterizar um modo específico de pensar e de lidar com a Matemática.

A resolução das situações matematizadas de nossa pesquisa revelou que, para muitos estudantes, a representação foi crucial para a compreensão do problema, para desencadear o processo de resolução e estabelecer relações. E ainda, uma representação adequada, às vezes, surgia após algumas tentativas sem sucessos. De forma geral, têm-se algumas posturas extraídas e percebidas quando do desenvolvimento das sessões matematizadas:

Na Sessão A, intitulada “Problemas de cálculo são relacionais ou só instrumentais”, fez-se propositadamente a inversão da abordagem que é mais comum: “dados determinados valores e operações específicas, pede-se: qual resultado obtém-se?” Essa atividade sugere única resposta: basta resolver a sentença.

Porém, as atividades propostas, nessa inversão de proposição, mudaram a forma de abordagem ao problema que abria possibilidades de obter vários caminhos para responder a mesma indagação, ao invés de oferecer solução única. De questão fechada, passou a ser aberta e, dessa forma, a própria maneira e objetivo de resolução também ganhou outra conotação. A cada nova atividade, ampliou-se a exigência, o envolvimento de mais conceitos e a necessidade de usar relações entre esses conceitos com as possibilidades de operações. De certa maneira, esse estilo de atividade teve características de uma diversão matemática, pois tinham que fazer uso da criatividade e muito mesmo de tentativa. Os participantes, usando muito ainda da intuição, tiveram dificuldades de interpretação e de resolução desses problemas e ainda uma forte tendência de não buscar outras soluções alternativas, para o mesmo problema. Poucos propuseram mais de uma solução para os casos solicitados.

Porém, a maioria dos pesquisados indicaram várias vantagens com a avaliação sobre esse estilo de atividades, tais como: proporciona o conhecimento de diferentes processos de efetuar operações; possibilita a assimilação dos conceitos dos números; envolve a aplicação e a interpretação; desenvolve a autonomia, autoconfiança e o gosto pela Matemática, dentre outras qualidades.

A Sessão B: “Diagramas Relacionais” destinou-se a analisar comportamento do próprio objeto nas formas de representação. Ela foi avaliada como das mais interessantes formas de abordagem de um sistema visual gráfico relacional. Os pesquisados indicaram, na sua maioria, como muito interessante para desenvolver com seus alunos em sala de aula. As informações nas descrições da análise da atividade indicam isso.

A evolução proposta entre as atividades envolvendo as habilidades de reconhecimento do comportamento do gráfico, representação, comparação e identificação e ainda, como observada na ultima atividade dessa sessão, quando foi necessário o uso de julgamento para decidir e justificar as comparações, exemplificou como, numa mesma espécie de situação, uma gama interessante de conceitos relacionais podem ser exploradas num mesmo contexto.

Por isso, a visualização é um instrumento valioso para apoiar os tipos de experiências mentais que orientam os alunos nas investigações matemáticas e os ajudam a construir conexões lógicas e demonstrações. As destrezas que apoiam a visualização têm um preço: o seu desenvolvimento deve constituir uma parte explícita da aprendizagem do estudante.

Na Sessão C: “Pitágoras e o Teorema Relacional”, o propósito foi o uso não só do aspecto histórico do tema, mas de uma possível transição entre o pensamento geométrico para o pensamento algébrico. Com várias possibilidades de uso dos dois pensamentos (o instrumental, presente nas fórmulas) e o relacional (nos diagramas), além das habilidades de identificar e comparar situações, o propósito é abrir caminho para a generalização.

Essa atividade também foi bem aceita pela maioria dos pesquisados, provavelmente pelo pré-conhecimento do tema e do pouco conhecimento das variedades e possibilidades de relações entre o visual e o algébrico que essa sessão disponibilizava.

Na Sessão D: “As Relações entre as linguagens visual e algébrica” apesar do forte apelo visual, as atividades propostas não foram bem aceitas pelos pesquisados, foram consideradas um tanto cansativas, de difícil estabelecimento de relações, repetitivas e longas. Porém, o desconhecimento pelo modo de relação possível chamou a atenção de vários deles pela forma como se consegue relacionar uma série, uma sentença, uma fórmula, com uma representação que dispensa o uso de palavras para exprimi-las. Embora seja um tanto difícil de perceber ou de ‘ler’, mas as relações com o aritmético/algébrico com o geométrico estão ali presentes.

A Sessão E: “O Relacional entre a abstração e a atividade contextualizada”, são situações com características de aplicação matemática, porém, numa primeira visão, nem sempre o contexto apresentou-se com clareza ou indicava uma certa lógica, pois em ambas atividades nem todas as informações foram ‘elucidadas’ na proposição. São informações já inerentes aos fatos ou objetos, porém, não são observáveis, como, por exemplo, ter que considerar que o urso caminhou, na realidade, “sob um triângulo esférico” e não triângulo plano, saber que no Pólo Sul não vivem ursos de qualquer espécie, etc conhecimento da relação “pequeno aumento na circunferência, representa um relativo aumento no raio” etc. Esses modelos de situações são, no entanto, muito curiosos e dinamisadores, tornando o assunto matemático interessante para os estudantes.

Chegou-se à conclusão, com esse estudo teórico e experimental que nem a Matemática nem o Pensamento Matemático são coisas do mundo Platônico, das idéias puras e também não podem ser abordados diretamente. Por isso, para construirmos uma idéia sobre o que é pensamento matemático faz-se necessário considerar o pensamento sob várias perspectivas, interdependentes, são duais, são complementares, e em diferentes contextos.

Acredita-se que o estudo referente à capacidade de pensar matematicamente pode contribuir para a Educação Matemática, oferecendo subsídios teóricos e práticos, numa perspectiva de não só ensinar, mas de desenvolver pesquisas educacionais nas escolas.

É importante salientar ainda que os participantes, em momento algum foram ‘preparados’ teoricamente para responder e desenvolver essa pesquisa, no que tange aos aspectos ou conceitos do pensamento matemático aqui abordados. O convite foi feito unicamente com a proposta de responder as situações matematizadas visando perceber resoluções diferenciadas. O único subsídio teórico fornecido foi o disponibilizado no início de cada sessão, como uma ‘conversa’ introdutória ao tema. Ainda assim, percebeu-se o quanto que o formato das atividades, de uma maneira geral, os guiou numa perspectiva de resolver as atividades diferenciadamente, ainda que com limites e ressalvas de reflexões.

Portanto, é crença particular, que o investimento nesse estilo de postura e formas de proposição de situações de ensino, não só motiva, mas também muda a relação com a forma de aprender Matemática.

Esses foram alguns aspectos do pensamento matemático discutidos nessa Tese de Doutorado. No entanto, esse assunto não se esgotou, por isso indicamos algumas outras questões e perspectivas para futuras pesquisas.

Uma pré-condição de qualquer aprendizagem é conduzir uma pessoa a perceber a si mesma mais objetivamente, reconhecer suas próprias capacidades, suas dificuldades, suas maneiras de se desenvolver, de ganhar novas capacidades e de inventar novas estratégias. Creio que o exercício dessas atividades propostas possibilitou a vários participantes que se enquadrassem nessa categoria de auto-percepção.

Se existem modos de pensar diferenciados sobre uma mesma situação, o professor não deve se restringir a um único processo de resolução, e sim explorar as várias possibilidades, aproveitando o potencial criativo dos estudantes e promovendo a troca de conhecimentos. Esse estudo auxilia o trabalho do professor em sala de aula, pois o mesmo poderá, com mais facilidade, tratar um problema matemático sob várias perspectivas, de forma que o estudante possa tomar decisões e escolher os processos de resolução que achar mais conveniente.

Embora muitos prefiram pensar de forma mais analítica, pois essa postura é considerada mais segura e confiável do que a intuição, ao desenvolver essas atividades, que de algum modo ‘mexem’ com vários participantes, eles começam a perceber que não precisam, num primeiro momento, dominar todo conhecimento que existe. Mas se exercitarem o seu poder intuitivo perceberão que a intuição é muito importante na resolução de problemas. Esse lado analítico e intuitivo foi indicado por Poincaré (1995), no Capítulo 2, desta Tese, ele é impressindível para a fundamentação do matemático e do educador.

Na Educação Matemática o que deve ser formada é a personalidade, ou seja, formar um estudante mais completo, mais maduro, mais receptível, mais atento às emoções etc. O ato de buscar experiências em resolver os problemas matemáticos a serem propostos, tem a pretensão de despertar nos estudantes a necessidade de interpretar um determinado problema e de desafiá-lo a tentar buscar distintos processos de resolução, que podem ser desencadeados pelas diferentes representações escolhidas.

A importância da dedicação, concentração, de um conhecimento prévio e da experiência com a atividade matemática, sobretudo para atuar com a resolução de problemas também deve ser considerado. Essa importância foi reconhecida pelos pesquisados.

Existe, no entanto, um grande conjunto de capacidades, relacionadas com essas formas de pensamento, e que não são enfatizadas ou então são pouco trabalhadas em nossas escolas. As formas de visualização que os alunos precisam, tanto em contextos matemáticos como não-matemáticos, todos relacionam-se à capacidade de: criar, manipular e ‘ler’ imagens mentais de aspectos comuns da realidade; visualizar informação espacial e quantitativa, e interpretar visualmente informação que lhe seja apresentada; rever e analisar passos anteriormente dados com objetos que podiam tocar e desenhar; e interpretar ou fazer aparecer, como ‘por magia’, imagens de objetos ou idéias que nunca foram vistas (que tem uma função muito importante para ajudar a desenvolver o poder de abstração Matemática).

Dessa forma, até então identificou-se nesse estudo, que o pensamento matemático é influenciado por diversos fatores, alguns deles foram aqui destacados: interdependência, dualidades e complementaridades. A clareza quanto ao uso do saber para compreender, com essas premissas, nos dá a real dimensão não só do 'porquê', do 'o quê', mas do 'para quê'.

5.2. REFLEXÕES FINAIS E CONTRIBUIÇÕES

Como contribuição, o desenvolvimento e evolução desse 'para quê' nos remete a um nível da concientização sobre o uso e finalidade do conhecimento em questão. Para que isso possa ocorrer, é necessário realizar formas de divulgação, discussões, capacitações em que esses aspectos do pensamento matemático e suas relações com o ensino possam ser promovidas no meio educacional. Porém, outros pontos podem ser indicados como forma de avanço:

- Incentivar pesquisas e produções de estudos relativos ao tema, seja nas graduações e pós-graduações;
- Identificar, resgatar, reestruturar, criar situações matematizadas e disponibilizá-las em formato de atividades didáticas para serem propostas para alunos dos vários níveis de ensino, de maneira assemelhada com Skemp (1989) fez relativo ao ensino primário;
- Avançar e aprofundar estudos teóricos referente a Cassirer, Skemp, Otte, além de novos autores não explorados aqui, como Auzubel, dentre outros, com o propósito de entender,

esclarecer outros aspectos não abordados referente ao pensamento matemático e suas formas de representação e compreensão.

Referências

AIGNER, Martin; ZIEGLER, Günter M. **Proofs from the Book.** Berlin, New York: Springer, 1998.

AVERBACH, Bonnie; CHEIN, Orin. Following the Clues. In.: **Problem solving through recreational mathematics**. New York: Dover Publications, 2000.

BACCA, Juan David Garcia. **Elementos de Geometria –** Obras completas de EuclidesMéxico: Universidade Nacional Autonoma de México. 1944.

BARBOSA, Ruy M. **Descobrindo padrões pitagóricos:** geométrico e numéricos. São Paulo: Atual, 1993.

BECKMANN, Peter. **A History of** p**.** New York: The Golem Press, 1971.

BEDNARZ, Nadine; KIERAN, Carolyn; LEE, Lesley. **Approaches to Algebra:** Perspectives for Research and Teaching – (Chapter 2) . Mathematicas Education Library, v. 18, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.

BELHOSTE, Bruno. **Pour une réévaluation du role de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques**. Revue d'histoire des mathématiques, 1998, 4. p. 289- 304.

BERTIN. Jacques. **Graphics and Graphic Information-Processing**. Berlin: Walter de Gruyter, 1981.

BETH, Evert W.; PIAGET, Jean. **Épistémologie mathématique et psychologie**. Paris: Presses Universitaires de France, 1961.

BIEHLER, Rolf. **Graphische Darstellungen**. Bielefeld-Alemanha: Institut für Didaktik der Mathematik (IDM), 1985.

BOURDIEU, P. Introdução a uma sociologia reflexiva. In: ______. **O poder simbólico.** 2 ed. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1998. p.17-58.

BOUTROUX, Pierre. **L'idéal scientifique des mathématiciens**. Paris: Librairie Félix Alcan, 1920.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 5. ed., São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1985.

BLAIR, Byron E. **Time and Frequency:** Theory and Fundamentals. monograph 140, Dept. of Commerce, National Bureau of Standards, May 1974.

CARPENTER, Thomas P.; et al. Results and implications of the second NAEP Mathematics Assessments: Elementary School. **Arithmetic Teacher**, 1980 , p. 44-47.

CASSIRER, Ernst. **Substance and Function & Einstein's Theory of Relativity**. translated by William Curtis Swabey and Marie Collins Swabey, New York: Dover Publications, 1953.

______ **Substance et Fonction: éléments pour une théorie du concept.** Traduit de l'allemand par Pierre Caussat. Paris-França: Les Éditions de minuit, 1977.

CONWAY, John H. **On Numbers and Games**. New York: Academic Press, 1976.

CONWAY, John H.; GUY, Richard K. **The Book of Numbers**. New York: Springer, 1996.

COPES, L. **The Perry developmentscheme and teaching of Mathematics**. Papers presented at the journal meeting of the International Group for the Psicology of Mathematics Education. England: Warwick, 1979.

COPPINGER, Raymon e COPPINGER Lorna. **Dogs: A New Understanding of Canine Origin, Behavior and Evolution**. The University of Chicago Press, USA. ISBN: 0-226-11563-1 (Paperback) (2001).

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?** Tradução: Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

CUNHA, Maria Helena. **Saberes Profissionais de Professores de Matemática:** Dilemas e Dificuldades na Realização de Tarefas de Investigação, 1998. p. 09-12, Revisão de Literatura da Tese de Mestrado, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. http://www.ipv.pt/millenium/17_ect5.htm#NOTA#NOTA (acessado em 12/11/2006).

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática em Revista**. SBEM, Ano 6. N. 7, JUL.1999. Entrevista, 1999.

DANTZIG, Tobias. **Número:** a linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DAVEY, Brian A.; PRIESTLEY, Hilary A. **Introduction to Lattices and Order**. Cambridge: Cambridge Mathematical Textbooks, 1990.

DEAR, Peter. ***Revolutionizing the Sciences:*** *European Knowledge and Its Ambitions, 1500-1700. Basingstoke: Palgrave, Princeton University Press, 2001.*

DIEUDONNÉ, Jean. **A formação da Matemática Contemporânea.** Tradução de J. H. von Hafe Peres. Lisboa-Portugal: Publicações Dom Quixote, 1990.

DUHEM, Pierre. **La théorie physique:** son objet, sa structure. Paris: Marcel Rivière & Cie., 1914.

DUBNER, Stephen J.; LEVITT, Steven. **Freakonomics:** O lado oculto e inesperado de tudo que nos afeta. Trad. Regina Lyra, Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

E.S. "**Ignorância infinita como o universo**", Jornal "*O Estado de São Paulo*", São Paulo-SP, 27 de outubro de 2004, Caderno VIDA&, 2004, p. A15.

EBBINGHAUS, Heinz-Dieter; HERMES, Hans; et al. **Numbers**. New York: Springer, 1991.

ECO, Umberto. **Como se faz uma tese.** São Paulo: Perspectiva S.A.,1991.

ERNEST, Paul. **The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics.** In: Ernest, P. (ed.) Mathematics teaching: the state of the art. London: Falmer Press, 1989.

____________. **The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher**: a model. Journal of Education for Teaching 15. London: 1989.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: UNICAMP, 1995.

FEY, James T. Quantity**.** In: L. Steen (ed.). **On the shoulders of giants:** New approaches to numeracy**.** Washington: National Academy Press, 1990.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria A.; Miguel, Antonio. (. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar, In: **Pro-Posições**, Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação – Unicamp. Vol. 4, nº 1 [10]. Campinas: Cortez, 1993. p. 78-91.

FISCHBEIN, Efraim. **Intuition in Science and Mathematics:** An Educational Approach**.** Mathematics Education Library, Dodrecht: D. Reidel, 1987.

FOSSA, John A. **Ensaios sobre a Educação Matemática,** EDUEPA, Belém – PA, ISBN 85-88375-02-8. 2001.

FOUCAULT, Michel. **arqueologia do saber**. (Trad. Luiz Felipe Baeta Neves). 4. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1997.

___________ **As Palavras e as Coisas**. São Paulo: Martins Fontes, 1995.

FREGE, Gottlob. **Grundgesetze der Arithmetik** (`*Leis Básicas da Aritmética*'), Band I (1893), Band II, (1903), Jena: Verlag Hermann Pohle, 1903.

FRIEDELMEYER, Jean-Pierre. La creation des premières revues de Mathématiques et la distinction Mathématiques pures, Mathématiques apliquées**.** In: **Actes de la 6e université d'été**. (juillet 1995), Ed. IREM de Besançon, 1996. p. 215-237.

GANTER, Bernhard; WILLE, Rudolf. **Formale Begriffsanalyse, Mathematische Grundlagen.** Berlin-Heidelberg: Springer, 1995.

GAWRONSKY, Dimitry. **Das Urteil der Realität und seine mathematischen Voraussetzungen** (Diss.), Marburg-Alemanha. 1910.

GIBSON, Andrew, **Emily Dickinson and the Poetry of Hypothesis Essays in Criticism** XXXIII(3): 220-237; doi:10.1093/ eic/XXXIII.3.220. Oxford University Press.1983.

GIMENO, Roberto. **Apprendre à l'école par la graphique.** Centre d'Étude et de Promotion de la Lecture. Paris: Retz, 1979.

GODINO, Juan D. **Competencia y comprensión Matemática**: ¿qué son y cómo se consiguen? em Uno. Revista de didáctica de las Matemáticas. Núm. 29. Enero-febrero-marzo, 2002. p. 9-19.

GOWERS, W. Timothy. The Two Cultures of Mathematics. In: **Mathematics**: Frontiers and Perspectives, edited by V. Arnold et al.,. Providence: American Mathematical Society, 2000.

GUIGUES, Jean-Louis; DUQUENNE, Vicent. **Familles minimales d'impliocations informative resultant d'un tableau des donnés binaires**, Paris: Math. Sci. Humanies, 1989.

HÄGERSTRAND, Torsten. Reflexiones sobre "que hay acerca de las personas en la ciencia regional? In: **série Geográfica**, nº 1199b, Alcalá de Henares: Universidad de Alcalá de Henares, 1989.

HADAMARD Jacques. **The Psychology of Invention in the Mathematical** Field; Dover, ISBN 0-486-20107-4. 1954.

HALMOS, Paul R. **Bourbaki, The Mathematician Who doesn'n Exist.** Mathematical Association of America, USA, 1963

HEIDEGGER, Marin. **Que é uma coisa?** Lisboa: Edições 70, 1992.

HERSH, Reuben. Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. In: T. Tymoczko (Ed.). **New Directions in the Philosophy of Mathematics**. Boston: Birkhäuser, 1986. p. 9-28.

______ **Proving is convincing and explaining**. Educational Studies in Mathematics, Springer Netherlands 24, 1993, p. 389-399.

HILBERT, David. **Los Fundamentos de La Geometria por David Hilbert** . Traduzido por Juan David Garcia Bacca. México: Universidade Nacional Autonoma de México, 1944.

______ **Fundamentos de las Matemáticas.** Mathema, México, 1993. http://galeon.com/casanchi/casanchi_2000/henri01.htm. (acessado em 16/01/2007).

JAKOBSON, Roman. **Two Aspects of Language and Two Types of Aphasic Disturbances.** In: Roman Jakobson /Halle, Morris (edd.): Fundamentals of Language, The Hague, 1956, p. 67-96.

JANVIER, Claude. **The Interpretation of Complex Cartesian Graphs Representing Situations:** Studies and Teaching Experiments. Diss. DE: Univ. Nottingham, 1978.

KANT, Imannuel. **Crítica da Razão Pura**. Tradução de Manuela P. dos Santos e Alexandre F. Morujão, 4. Ed. Lisboa: Fundação Calousten Gulbenkian, 1997.

______ **Crítica da razão pura.** 1. ed. 1781 (A) e 2. ed. 1787 (B). Traduzido a partir da edição crítica de Raymund Schimidt (1956). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1997.

______ **Crítica da razão pura**. Trad. M.P. Santos e A. F. Morujão. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1994.

KASNER, Edward; NEWMAN, James. **Matemática e Imaginação**. Rio de Janeiro: Zahar, 1968.

KILPATRICK, Jeremy. A History of Research in Mathematics Education. In: GROWS, D.A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York:. MacMillan, 1992. p. 3-64.

KITCHENER, Richard F. **Piaget's Theory of Knowledge Genetic Epistemology & Scientific Reason**. New Haven and London: Yale University Press, 1971.

KLEIN Felix. **"100 Jahre mathematischer Unterricht an den deutschen höheren Schulen"**, F.Klein/Riecke: Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts. 63-77. Leipzig 1904.

KNOPP, Konrad. **Infinite Sequences**. New York: Dover, 1956.

KNUTH, Donald E. **Surreal Numbers**. New York: Addison-Wesley, 1974.

KRAUSE, Décio. **Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência.** São Paulo: EPU, 2002.

KRUTETSKII, Vadim A. **The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren**. Translated from the Russian by Joan Teller. Edited by Jeremy Kilpatrick and Izaak Wirszup. USA: The University of Chicago, 1976.

LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de A. **Fundamentos de Metodologia Científica.** 3. ed., Revisada e ampliada. São Paulo: Atlas, 1991.

LANGE, Karen E. **Do Lobo ao Totó: A evolução dos cães**. National Geographic Brasil, Ano 2, n^0. 21 janeiro 2002, 2002. p. 28-38.

LERMAN, Stephen. **Problem-solving or knowledge-centred;** the influence of philosophy of mathematics teaching. International Journal of Mathematics Education for Science and Technology, 1983. p. 59-66.

LEVITT, S. Freakonomics, Harpercollins Usa, I.S.B.N.: 0061234001. 2005,

LOFTS, Steve. G. **The International Ernst Cassirer Society**, **The "Odyssey" of the Life and Work of Ernst Cassirer**. 2002. (nicht erreichbar am: 14.10.2002) www.ernstcassirer.uni-hamburg.de/intro/Lofts.html. (acessado em 12/01/2008).

______ **Ernst Cassirer**. New York: Albany, 2000.

LOTZE, Hermann. **Logik. Drei Bücher vom Denken, vomUntersuchen und vom Erkennen**. 2. ed., Leipzig: S. Hirzel, 1880.

MARTINET, Jeane . **As Chaves para a Semiologia**. Lisboa-Portugal: Publicações Dom Quixote, 1983.

MENGER K. **Reminiscences of the Vienna Circle and the Mathematical Colloquium**. Dortmund. 1994.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA (MEC-SEF) **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries). Brasília. 1998.**

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA (MEC). **Guia do Educador n^0. 3:** Viver e Aprender. Educação de Jovens e Adultos, Brasilia-DF: MEC –, 2001.

MEIRA, Luciano. **Atividade algébrica e produção de significados em Matemática:** Um estudo de caso. M.G. Dias e A. Spinillo (eds.). Tópicos Em Psicologia Cognitiva. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1996.

MEZAN, Renato. **O escândalo dos doutores**. Folha de São Paulo, em 20 março 2005, Caderno Mais, 2005, p. 3.

MILHAN, Willis Isbister. **Time and Timekeepers**. New York: Macmillan, 1974.

MOLES, Abraham A. **Theories des objets**. Paris: Editions Universitaires, 1972.

MORAES, Edmundo C. **Abordagem Relacional:** uma estratégia pedagógica para a educação científica na construção de um conhecimento integrado. ANAIS, IV ENPEC, 2003.

NAHIN, Paul J. **The Story of** $\sqrt{-1}$. Princeton: Princeton University Press, 1998.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). **Normas Profissionais para o Ensino da Matemática**. Trabalho original publicado em 1991. Tradução da Associação de Professores de Matemática. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional, 1994.

NELSEN, Roger B. **Proofs Without Words**. Washington: The Mathematical Association of America, USA, 1993.

OBSERVATÓRIO NACIONAL. **História do Relógio**. 2007. http://pcdsh01.on.br, acessado em 23/05/2007.

OBSERVATÓRIO PHOENIX. Artigo **Tempo.** 2007. http://paginas.terra.com.br/arte/observatoriophoenix/e_teoria/24_E02.htm, acessado em 21/05/2007

OLIVEIRA, Paulo. **A investigação do professor, do matemático e do aluno:** Uma discussão epistemológica. 2002. Dissertação de Mestrado - Universidade de Lisboa, Lisboa-Portugal, 2002.

OTTE, Michael. What is a Text? In.: **Perspectives on Mathematics Education**. Org. Christiansen, B, Howson, A. G D. - Reidel Publishing Company, 1986. p. 173-203.

______ **O Formal, o Social e o Subjetivo:** Uma Introdução à Filosofia e à Didática da Matemática**.** Tradução: Raul Fernando Neto. São Paulo-SP: Unesp, 1993.

______ **Das Formale das Soziale und das Subjective:** Eine Einführung in Die Philosophie und Didaktik der Mathematiksuhrkamp. Frankfurt: Taschenbuch Wissenschaft, 1994.

______ **Limits Of Constructivism**. DORDRECHT: Science And Education, v. 7, n. 5, 1998. p. 425-450.

______ **Complementarity, Sets and Numbers**. Educational Studies in Mathematics, 53, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2003. p. 203-228.

______ **Certainty, Explanation and Creativity in Mathematics**. Proceedings of the International Group for the Mathematics Education, v. 31, 2007. p. 45-64.

______ **B. RUSSELL'S INTRODUCTION TO MATHEMATICAL PHILOSOPHY**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo: Educ, v. 03, n. 1, 2001. p. 11-55.

______ **O Pensamento Relacional:** Equações,- Bolema., ano 9, especial 3, Rio Claro – SP: UNESP, 1994. p. 71 a 79.

______ A Controversy on the Axiomatization of Arithmetic in Its Philosophical Context. In: ***Conference on the History of Mathematics. Papers from the Conference Cetrar****. Italy, September 1988,* hg. v. Massimo Galuzzi, Rende: Elettronica, 1991. *p. 8–12.*

PASCH Moritz. **Vorlesungen Über Neuere Geometrie**. Druck und Verlag Von B. G. Teubner, Germani: Leipzig und Berlin. 1912.

PIAGET, JEAN; INHELDER, Barbel. **La represéntation de l'espace chez l'enfant**. Paris: PUF, 1972.

PIMENTA, Dimas de Melo. O **Relógio...Sua História**. São Paulo: Dimep, 1976.

POINCARÉ, Henri. **Mathematical discovery**. Translated from French. Yur'ev, 1909.

______ **L'invention mathématique**. Revue du Móis, 1908.

______ ***Que és La creación Matemática?***. Seleccionnes de Scientific American (versão española). Editorial Lume, 1974, p.14-17, cópia em pdf obtida no site: http://

www.galeon.com/casanchi/casanchi_2000/03_henri01.pdf, (acessado em 23/11/2007).

_______ Sobre a natureza do raciocínio matemático. In.: **A ciência e a hipótese**. 2. ed., Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1988a.

_______ **Intuição e lógica em Matemática**. Em APM (Ed.), Cadernos de Educação e Matemática — A natureza da Matemática (Lisboa: APM, 1988b, p. 7-16.

_____ A Intuição e a Lógica na Matemática. In.: **O valor da Ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

_______ **A Ciência e a Hipótese.** Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1984.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, João Pedro. **O Professor de Matemática.** O Currículo de Matemática. Cap. 4, 1995, p. 192. Texto não publicado.

POSNER, R. **Catastrophe: Risk and Response**, Oxford University Press. 2004.

RADERMACHER, Franz-Josef. **Zur Thematik des begrifflichen Wissens - Einordungsfragen in übergeordnete Kontexte**. Alemanha: Springer, 1995.

RIEMANN, Bernhard, **Mechanik des Ohres**, Riemann`s Gesammelte Werke, Reprint Dover DAA. 1953.

Revista do Professor de Matemática (RPM). São Paulo: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. Nº 61, 3º Quadrimestre de 2006.

RICO, Luiz Romero. **Reflexión sobre los fines de la educación Matemática**. Lisboa Pt: Quadrante, 1996.

RIVAL, Ivan. **Order: a theory with a view**, in Klassifikation und Ordnung. Frankfurt: INDEKS Velag, 1989.

ROBAYANA, S. M. M.; et al. **Iniciação à álgebra**. Coleccion Matemática: Cultura y Aprendizaje, Madrid: Editorial Sintesis, 1996.

RUBINSTEIN, Moshe F. **Tools for Thinking and Problem Solving.** New Jersey, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1986.

RUSSEL, Bertrand. **Los Principios de La Matemática.** Traduccion del Inglês por Juan Carlos Grimberg. Buenos Áires –Argentina: Espasa – Calpe Argentina S.A., 1948.

______ **Introdução à Filosofia da Matemática**. 2. ed., Trad. Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Zahar, 1966.

SANTAELA, Lúcia - (1983) **O que é Semiótica** - Ed. Brasiliense - São Paulo

______ **A Teoria Geral dos Signos** - Semiose e Autogeração. São Paulo: Ática, 1995.

SCHLICK, Moritz, **Allgemeine Erkenntnislehre**, 2d ed., Berlin: Springer, 1925 (Transl. by Albert Blumberg as *General Theory of Knowledge*, Wien: Springer 1974.

______ ***Philosophical Papers***. Ed. by H. Mulder & B. van de Velde-Schlick, Dordrecht: Reidel, 2 vols., 1979.

SEVERINO, Antonio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 20. ed. revisada e ampliada. São Paulo: Cortez, 1995.

SIBINELLI, Valdemar. **Nomina animaliun:** o nome dos bichos. Revista Terra da Gente, Ano 1, n. 6, São Paulo, 2004. p. 58-66.

SILVA, Circe Mary S. **A Matemática Positivista e sua difusão no Brasil**. Vitória: EDUFES, 1999.

SKEMP, Richard R. **The Psychology of Learning Mathematics**. Great Britain: Penguin Books, 1971.

______ **Mathematics in the primary school**. London: Routledge, 1989.

______ **Psicologia del Aprendizagje de las Matemáticas**. Madrid: Morata, 1980.

SMITH, Adam, **A Riquesa das Nações,** Vol 1, Martins Fontes, Lisboa. 2003,

SOCAS, Martin M.; et al. **Iniciacion al álgebra**. nº 23, Madrid-Espanha: Editorial Síntese, 1996.

SOIFER, Alexander. **Mathematics as Problem Solving**. Center for Excellence in Mathematical Educational, Colorado: Springs, 1987.

SOUZA, Renato Rocha e ALVARENGA NETO, Rivadávia C. Drummond. **A construção do conceito de gestão do conhecimento: práticas organizacionais, garantias literárias e o fenômeno social**. KM BRASIL 2003. Encontro da Sociedade Brasileira de Gestão do Conhecimento, São Paulo, Anais do KM Brasil. 2003,

STEGLITZ, Martin R. **The Global Positioning System**. Microwave Journal, April/1986.

TAHAN, Malba. **A Lógica na Matemática**. São Paulo: Saraiva, 1966.

TEIXEIRA, Jerônimo; MARTHE, Marcelo. **O brilho do lado oculto das coisas**. Revista VEJA, Edição 1931, ano 38, n^{o}. 46, 16 de novembro de 2005, São Paulo: Abril S/A, 2005.

THOMPSON, Alba G. Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In. D. A. Grows (Ed.). **Handbook of research in mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992. p.127-146.

TOMEI, Carlos. **Euclides –** A conquista do espaço. São Paulo: Odysseus, 2003.

TRIVIÑOS, Augusto N. Silva. **Introdução à pesquisa em Ciências Sociais:** a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.

VILLIERS, Michael D. de. **Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad**. Berkeley, California: Key Curriculum Press, 1999.

WIELEWSKI, Gladys D. **Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas:** uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Matemática, Física e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

WIELEWSKI, Sergio A. **Pensamento Relacional e Métodos de Visualização**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação) – Instituto de Educação, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 1998.

WILLE, Rudolf; LEHMANN, Fritz. **A Triadic Approach to Formal Concept Analysis**. Alemanha: Technische Hochschule Darmstadt, 1994.

WILLE, Rudolf. **The Basic Theorem of Triadic Concept Analysis**. Alemanha: Technische Hochschule Darmstadt, 1994.

ZUÑIGA, Angel Ruiz. **Las Matemáticas Modernas em las Américas**: filosofia de una reforma. In: **VIII CIAEM**, Miami-USA, 1991.

APÊNDICES

Situações Matematizadas:

Apresentação:

Caro entrevistado: A seguir será apresentado um quadro com algumas informações, onde serão abordadas 05 seções de situações matematizadas, envolvendo sempre que possível argumentos e/ou situações relacionais. Cada seção será precedida de um preâmbulo, cujo propósito será fornecer informações, dados ou contextualizar situações vindouras, servindo, dessa forma, para introduzir e fundamentar as atividades em questão, seja com o uso de instrumentos e ferramentas matemáticas ou não. Além disso, neste contexto também podem surgir questões de opiniões sobre teorias e posturas relacionadas ao ensinar e aprender e que também sirvam de auxilio para atuar com resolução de problemas.

As Situações estão assim estruturadas:

- Problemas de Cálculo são Relacionais ou só Instrumentais?
- Diagramas Relacionais
- O Relacional entre a abstração e atividade contextualizada;
- Pitágoras e o teorema relacional;
- As Relações entre as linguagens visual e algébrica;

Ao final de cada situação, são propostas atividades para serem analisadas e resolvidas por vocês, com o objetivo de perceber como elas estão sendo compreendidas e de que maneira que vocês darão solução para as mesmas. Todas as atividades exigem apenas um conhecimento mínimo de matemática básica.

Com essa pesquisa pretendemos resgatar e evidenciar a criatividade, o raciocínio lógico, a imaginação e as estratégias, tanto para formalizar como para generalizar processos matemáticos.

Agradecemos desde já a oportunidade e esperamos também contribuir para a divulgação, vivência e ampliação dos horizontes matemáticos.

Grato,

Sergio Antonio Wielewski

Questionário:

Perfil pessoal/profissional do Entrevistado:	Sexo: ( ) Masc. ( ) Fem.	Data inicio Questionário:___/___/2007 Inicio:______________________hs Término:____________________hs

Se atualmente for aluno em Graduação/Pós-Graduação

Se o Curso for: ( ) Graduação

Em: ( ) Matemática ( ) Outra:

Qual?_________________________________Instituição:___________

Semestre que se encontra cursando:____

Se o Curso for: ( ) Pós Graduação

Em: ( )Educação Matemática ( ) Outra:

Qual?__________________________Instituição:___________

Semestre que se encontra cursando:____

Atua como professor? ( ) Sim ( ) Não

Atua no(s) Nível(is): ( ) Fundamental ( ) Médio ( ) Superior

Categoria de Escola: ( ) Pública ( ) Particular ( ) Ambas

Tempo de atuação como professor:

____

Se for Professor Graduado e atuante no Magistério:

Atua no(s) Nível(is): ( ) Fundamental ( ) Médio ( ) Superior

Categoria de Escola: ( ) Pública ( ) Particular ( ) Ambas

Tempo de atuação como professor:

____

Inicio:_________hs Término: hs

Seção A:

Problemas de Cálculo são Relacionais ou só Instrumentais?

Um pouco sobre problemas...

Um dos estágios mais difíceis, seja para quem ensina ou para quem aprende, é o de formalizar. A questão não é o ato de formalizar em si, porém existem questões próprias que ainda antecede a esse ato. É semelhante também dentro do processo da interpretação e gramática de uma língua. É muito difícil distinguir a linha limítrofe (que com certeza é pontilhada, pois não é visível) entre situação problemática, representação do problema/pergunta e problema matemático quando se busca uma formalização padrão da Matemática. Não podemos expressar a distinção entre situação problemática, representação do problema ou pergunta e problema matemático. A pergunta deveria ser formulada de forma que possibilitasse a mediação entre a situação problemática e um problema viável[1].

Afinal o que podemos entender por problema matemático? Quando um professor propõe um problema matemático a seus alunos, ele ainda não é um problema para esses alunos, mas é uma situação problemática porque, às vezes, eles não conseguiram entender o que lhes foi apresentado. Por via de regra eles apenas sabem que têm que resolver algo e de alguma forma, porque é sempre isso que os professores querem que eles façam. A mesma correlação acontece com um texto, que para entendê-lo precisamos de uma interpretação, e para isso temos que analisar esse texto. Não se configura ainda um problema, e sim, uma situação problemática. Um problema (ou mais de um) será conseqüência da interpretação dada ao texto.

Dessa maneira, diferentes pessoas podem analisar distintamente a situação problemática e conseguir perspectivas ou representação melhores ou não, dependendo da intenção da pessoa, de seu interesse, de sua experiência, de seu conhecimento, de sua intuição, do seu talento e dos instrumentos disponíveis.

Bons problemas também dependem de boas perguntas. Na escola nos ensinam a perguntar? Como saber, entretanto, se essas perguntas fazem algum sentido? Como saber se elas podem ser transformadas em bons problemas e como fazer isso? Hilbert (1900) justificou seu programa original de meta-matemática afirmando que qualquer pergunta matemática, claramente formulada, deve ter uma resposta. Entretanto, isso não é verdade. Muitas vezes podemos formular um problema matemático sem resolução. Por exemplo, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução no campo dos números reais. Historicamente, sua solução somente se tornou possível depois da invenção dos números imaginários (ou complexos) pelo matemático

[1] Essa distinção é exposta por Otte (1973) no artigo intitulado ***Mathematik an der allgemeinbildenden Schule, Probleme im Mathematikunterricht***.

Gauss, no século XVIII. A resolução para essa equação, e muitas outras, foi viabilizada com a ampliação dos conjuntos numéricos.

Sobre problemas e sua importância, ainda afirma Poincaré (1900), num trecho extraído de sua Conferência na abertura do Congresso Internacional dos Matemáticos realizada em 1900:

> “Há muito tempo que ninguém sonha em ultrapassar a experiência ou construir o mundo, com todas as suas peças, sobre algumas hipóteses apressadas. De todas as construções pelas quais os homens ingenuamente se congratulavam, um século atrás, não restam hoje mais do que ruínas.
>
> Todas as leis são retiradas da experiência, mas para enuncia-las torna-se necessária uma língua especial: a linguagem comum é demasiado pobre, além de vaga, para exprimir relações tão delicadas, ricas e precisas [...]
>
> Mas como generalizar? Toda verdade particular pode, evidentemente, ser expandida de uma infinidade de maneiras. Entre esses mil caminhos que se abrem à nossa frente, deve-se fazer uma escolha, ainda que provisória: em tal escolha, quem nos guiará?
>
> Não pode ser outra coisa senão analogia. [...] Quem nos ensinou a conhecer analogias verdadeiras, profundas, aquelas que os olhos não vêem, mas a razão adivinha?
>
> Foi o espírito matemático, que desdenha da matéria para captar a forma pura. “Foi ele quem nos ensinou a designar com o mesmo nome objetos que diferem somente pela matéria...” - Henri Poincaré.

Da mesma maneira devemos generalizar o tempo todo e a generalização exige o que Piaget denominou de abstração reflexiva, que é a abstração da atividade matemática, em vez de objetos pré-determinados (BETH & PIAGET, 1961).

No entanto, a atividade matemática deve iniciar e ganhar dinâmica e orientação de alguma forma. Kant (1994), baseado em sua epistemologia critica, afirmou que para ganharmos experiência por meio da atividade, algo mais é exigido além do que meramente experimentar passivamente uma situação problemática. Havendo interesse no momento com a resolução de problemas, nos sentimos induzidos pelas considerações anteriores, ao introduzir uma distinção conceitual entre situação problemática, pergunta e problema.

A relação entre situação problemática experimentada e o problema trabalhado é o que determina principalmente a dinâmica da atividade de quem resolve o problema.

Essa relação pode ser sintetizada na forma de uma tríade, conforme Figura abaixo.

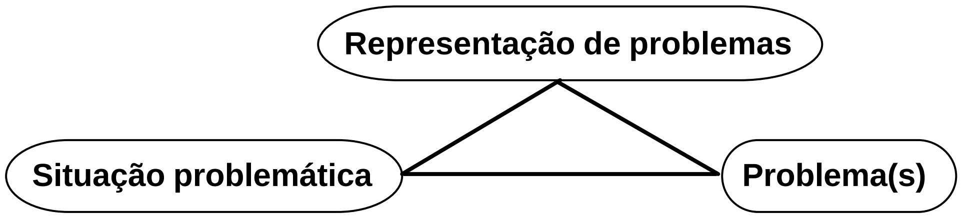


Figura 01 – Relação entre situação problemática, problema e representação

Desta forma, a pergunta formulada por quem resolve o problema pode ser uma representação mais ou menos adequada da situação problemática. A situação problemática é algo complexo e indefinido e ela pode gerar problemas e estimular a resoluções dos mesmos, que, à primeira vista, há pouco a fazer com a pergunta formulada ou a situação problemática, como foi percebida e talvez ela seja respondida de modo meramente indireto e muito complexo.

Temos, portanto, como ponto forte o problema da representação. Otte (1973) ressaltou que a representação é caracterizada como mediadora entre a situação problemática e o(s) problema(s) formulado(s). Os elementos de uma mediação dessa forma podem ser vários, dentre eles, o conhecimento (como as teorias matemáticas) e os sistemas simbólicos. A representação é mais do que uma língua, ou um simbolismo, é também uma semântica, uma forma de enxergar as coisas.

Muitas vezes é preciso construir uma representação que possa traduzir uma situação problemática em um objeto matemático ou um teorema. Tudo o que faz a mediação entre situação problemática e problema chamamos de representação da situação problemática, que aí sim é transformada em um problema.

Wielewski, G.(2005) indica em seu trabalho dois exemplos, mostrados a seguir, que podem ilustrar a distinção entre situação problemática, problema e representação.

> "**Problema da mosca**: Dois ciclistas andam em direção oposta. Depois de 5 horas eles se encontram. Junto com o primeiro ciclista parte uma mosca, que está localizada em seu nariz. Porém, ela voa mais rápido do que os ciclistas. A mosca sai do nariz do primeiro ciclista e toca no nariz do segundo e, em seguida, retorna para o nariz do primeiro. Ela faz essa viagem várias vezes. Quantos quilômetros a mosca percorre até os ciclistas se encontrarem no meio do caminho?
>
> Se tentarmos resolver esse problema simulando as idas e vindas da mosca, isto é, se olharmos apenas para o fenômeno, teremos um raciocínio infinito, porque a distância inicial entre os ciclistas não foi delimitada. É preciso, então, formular um problema: Qual a velocidade do homem e da mosca?
>
> Considerando que o homem se movimenta a uma velocidade de 10 km/h e a mosca a 15 km/h podemos, então, contar. Supondo que a distância inicial entre os ciclistas é de 100 km, depois de 5 horas eles se encontram e a mosca não terá mais tempo para voar. Isso significa que ela ficará voando durante as 5 horas. Assim, ela percorrerá 5 h x 15 km = 75 km/h.
>
> Ao estabelecermos as velocidades do homem e da mosca ficou mais fácil escolher a representação, por meio de cálculo aritmético, para obter uma resposta.
>
> **Problema do café e do leite**: Uma pessoa coloca todo o café em seu copo e outra coloca todo o leite em outro copo. Em seguida, mudam de idéia. A primeira pessoa quer um pouco de leite e a segunda quer um pouco de café. Como não há um terceiro copo, alguém tem que começar a misturar os dois líquidos. Assim, a segunda pessoa mistura um pouco de café em seu copo e devolve parte dessa mistura para a primeira pessoa. A primeira volta a devolver mais um pouco da última mistura. No início e no fim, ambas têm a mesma quantidade de líquido nos copos. Pergunta: Há mais leite no café? Ou mais café no leite? Ou são iguais? Se são iguais, por quê?

> Um estudante normalmente explicaria: em um copo havia leite puro. Quando se acrescenta o café e a pessoa devolve, já é uma mistura. No segundo copo tem mais leite do que café. Esse é o raciocínio comum.
>
> As diversas misturas realizadas alterariam a quantidade de moléculas dos líquidos? Não devemos pensar nas misturas de forma isolada. É necessário abstrair e passar a pensar que se as quantidades eram iguais no início, depois da troca, cada molécula que foi tirada de um copo foi substituída pela molécula do outro, caso contrário, não poderiam ser iguais. Então devem ser iguais, mesmo tendo leite puro em um copo e leite misturado no outro".

Os exemplos acima não mostram muita matemática, daquelas que estamos acostumados a "ver como matemática", entretanto, revelam um aspecto muito geral e importante. Porém, ilustram que matematizar significa transformar um fenômeno complexo, um processo ou um acontecimento em uma estrutura estática.

Dessa maneira, matematizar é buscar fundamentos que transformem o mundo real (no qual há fenômenos que sempre se movimentam, se modificam) em um mundo estático da Matemática, para que possamos aí enxergá-lo com o uso das noções, fundamentos e ferramentas matemáticas.

Esse processo é denominado de substantivação. A substantivação é a caracterização mais profunda e importante da Matemática Moderna, que é inerente ao século XX, mas que teve sua origem em Platão.

Essa matematização é caracterizada por dois aspectos:

1. Transformar um processo ou uma atividade em um objeto estático (substantivação);
2. Representar esse objeto em uma maneira inesperada, às vezes. Para que também possamos enxergá-la sob outros prismas, procurando perceber possibilidades de novas e variadas intervenções.

Além desses dois aspectos, não podemos esquecer da necessidade do conhecimento da área específica, já que é preciso saber prever, calcular, equacionar (são instrumentos matemáticos). Uma correlação entre resolver problema e matematizar pode ser lícita, porque temos implícitas essas características.

A forma de enxergar uma situação problema e os conteúdos matemáticos aparentes da própria atividade podem ser diferentes, principalmente se as pessoas não são muito conscientes do que estão analisando e tendem a desenvolver um pensamento intuitivo e implícito, considerando, dessa forma, o problema como um objeto da atividade matemática. Mesmo que ela tenha a experiência e a maturidade do pensamento, que pode ser muito útil, porém, nem sempre ela consegue representar explicitamente essas experiências e intuições.

A representação tem uma função de simplificar, extraindo da situação problemática, alguns aspectos ou formas que possibilitam realizar uma atividade matemática. A complexidade pode proibir que o pensamento se refira diretamente à realidade; por esse motivo são importantes os processos de abstração, de simplificação, de modelagem, etc.

Wielewski, G (2005) indica a necessidade de destacamos a importância de se complementar os livros didáticos com a atividades matemáticas, pois os livros também não se referem diretamente à realidade, ou seja, eles não contêm a realidade como um todo. Nesse caso, a atividade é que pode fornecer o significado de um texto, possibilitando que ele exerça suas funções cognitivas, dentre elas a de divulgar conhecimentos e suas representações.

Dentre as várias categorias de problemas matemáticos, alguns problemas podem ser resolvidos de maneiras diferentes. Nesse caso, o lado subjetivo se revela de forma mais evidente, pois distintas perspectivas podem ser consideradas na situação problemática, originada pelos problemas propostos.

Outros problemas referem-se a resolução e construção de idéias gerais. Esse é um assunto muito importante porque já na Antiguidade havia distinção entre Geometria e Álgebra, em termos de resolução de problemas.

A Geometria não dispunha de métodos gerais para resolver os problemas ou para desenvolver provas geométricas. Cada caso era um caso particular e o processo de demonstração poderia ser bem distinto em cada um deles. Os modernos, dentre eles Descartes, argumentavam que os matemáticos da Antiguidade tinham muita engenhosidade, porém, todas as resoluções, particularmente as da geometria, eram tão específicas que pareciam truques, não havendo como generalizar.

A idéia da modernidade, sobretudo da álgebra, foi fornecer um método geral, uma máquina para resolver problemas. Hoje é possível equacionar problemas de diversas áreas de conhecimento.

Historicamente havia pessoas que gostavam mais de problemas que pudessem ser generalizados, que produzissem métodos para ser utilizados na resolução de outros problemas. Enquanto outras pessoas não tinham esse propósito tão acentuado, a preocupação era resolver problemas, mesmo que fossem casos particulares.

Isso nos remete à distinção das duas culturas na Matemática, exposta por Gowers (2000), e que ainda se faz presente nos dias atuais, pois ele mesmo apontou que no coração da Matemática Pura também temos essa distinção. Ou seja, temos áreas como Combinatórios, que possuem poucos teoremas universais; a maioria deles são problemas singulares, como era na Geometria da Antiguidade.

A seguir, expomos alguns problemas matemáticos que envolvem situações de relações entre o esquema gráfico e a representação aritmética, problemas de avaliação e seus possíveis processos de resolução.

A técnica da multiplicação direta:

Existem inúmeras maneiras de abreviar processos de cálculos, porém, elas hoje em dia não são mais tão utilizadas ou necessárias porque podemos nos valer de programas computacionais que, não necessariamente resumem o algoritmo, mas efetuam as operações de maneira tão rápida que a abreviação do algoritmo não faria sentido.

Mas para quem ainda depende do cálculo realizado na ponta do lápis, sabe que se houver processo para abreviar etapas, ele com certeza será sempre bem-vindo.

Tomemos por exemplo no caso do algoritmo da multiplicação convencional no qual efetuaremos o produto de 56 por 14. Aprendemos que o "correto" e, geralmente, a única forma de resolver, seria registrar na próxima linha abaixo, o produto de 4 por 56 que dá o resultado 224. Após registrar na linha imediatamente inferior o produto de 1 por 56, que é 56, tomando o cuidado de "pular uma casa" da direita para esquerda, bastando somar, como mostra o modelo ao lado, e encontramos como resultado o valor de 784.

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times\ 14 \\ \hline 224 \\ +\ 56 \\ \hline 784 \end{array}$$

Esse processo pode ser confuso, por não ser facilmente e diretamente justificável, a não ser se desenvolvido por um longo processo de atividades correlatas, geridas por pessoas que, com grande competência, vão erigindo, juntamente com os alunos, os conceitos e fatos fundamentais até chegar ao fim do processo que é a construção do algoritmo.

Outro processo pode ser também confiável, principalmente se os alunos tiverem uma forma de comprovarem seu funcionamento. Essa comprovação pode ser feita com um algoritmo tradicional como o anteriormente mencionado ou ainda por meio de uma calculadora, que aliás também fornece o resultado (resposta) direto.

O resultado da operação acima pode ser obtido em apenas uma única linha, ou seja por meio de uma resposta direta, somando mentalmente os resultados de cada uma das etapas do procedimento, da seguinte maneira:

1º

$$\begin{array}{rr} 5 & 6 \\ \times\ 1 & 4 \\ \hline & \mathbf{4} \end{array} \quad (6x4)= \mathbf{24} \quad \text{(vão 2)}$$

2º

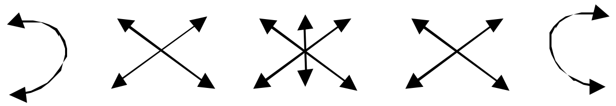
$$\begin{array}{rr} 5 & 6 \\ \times\ 1 & 4 \\ \hline \mathbf{8} & 4 \end{array} \quad 2 + (4x5) + (1x6) = 28 \quad \text{(vão 2)}$$

3º

$$\begin{array}{rrr} & 5 & 6 \\ & 1 & 4 \\ \hline \mathbf{7} & 8 & 4 \end{array} \quad 2 +(1x5)=7$$

Sintetizando, seguindo a seqüência de setas, realizando as respectivas somas indicadas por suas pontas em cada passo e não esquecendo-se de somar os (vai 1, vão 2, etc), chegamos ao produto em uma única linha, fazendo uma relação entre processo (operação) e seqüência visual gráfica (setas indicativas).

Para outro exemplo envolvendo 3 algarismos em cada um dos fatores, temos a seguinte seqüência gráfica:



1º 2º 3º 4º 5º

Essa mesma lógica de seqüência gráfica das setas vale para quaisquer outras quantidades iguais de algarismos nos fatores (4, 5, etc.). Para quantidades diferentes, visando facilitar a seqüência visual, basta "completarmos com zeros" o fator com menor quantidade de algarismo, tornando assim, ambos com a "mesma quantidade".

1º) (6x4)= **2 4**	**2º)** 2+(4x5)+(1x6)= **2 8**
1 5 6 **X** 3 1 4	1 5 6 **X** 3 1 4
4 (vão 2)	**8** 4 (vão 2)
3º) 2+(4x1)+(1x5)+(3x6) = **2 9**	**4º)** 2+(1x1)+(3x5) = **1 8**
1 5 6 **X** 3 1 4	1 5 6 **X** 3 1 4
9 8 4 (vão 2)	**8** 9 8 4 (vão 1)
5º) 1+ (3x1) = **4**	
1 5 6 **X** 3 1 4	
4 8 9 8 4	

Uma técnica para cálculos aparentemente "grande" em algumas situações específicas:

Imaginem uma situação em que nos apresentasse algo semelhante a: Como efetuar o cálculo de $(253728)^2 – (253727)^2$?

Sem o auxilio de uma calculadora seria complicado, aliás, numa primeira análise até mesmo com ela teríamos já algumas dificuldades dentre elas, a limitação da quantidade de dígitos para registrar no visor da mesma. Teríamos que ter conhecimentos sobre como ela apresenta números em notação científica e como operar com eles!

Por outro lado, buscando nossa experiência em casos de produtos notáveis, podemos tentar transformá-lo em bases iguais o quanto pudermos, então podemos fazer a seguinte redução:

$(253728)^2 – (253727)^2 = (253727 + 1)^2 – (253727)^2$

Resolvendo o binômio $= (253727 + 1)^2$ encontraremos,

$(253728)^2 – (253727)^2 = (253727)^2 + 2.253727.1 + (1)^2 – (253727)^2$

que após cancelar os simétricos,

$(253728)^2 – (253727)^2 = (253727)^2 + \cancel{2.253727}.1 + (1)^2 – \cancel{(253727)^2}$

resta-nos somente a operação,

$(253728)^2 – (253727)^2 = 2.253727.1 + (1)^2$, ou seja:

$(253728)^2 – (253727)^2$ **= 507455**

Uma outra variação do mesmo exemplo seria considerar que da relação algébrica sabemos que: $a^2 – b^2 = (a + b)(a – b)$.

$(253728)^2 – (253727)^2 = (253728 + 253727)(253728 – 253727)$

$(253728)^2 – (253727)^2 = 507455 . 1$

$(253728)^2 – (253727)^2$ = **507455**

Atividades do Tipo “A”

Atividade 1-A: **<u>Proposição:</u>** Utilizando somente quatro quatros e usando as quatro operações fundamentais se necessário (+, -, × e ÷) , encontre os resultados para:

0 = 44 – 44

1 = 44 ÷ 44

2 = ______________________________

3 = ______________________________

4 = ______________________________

5 = ______________________________

6 = ______________________________

7 = ______________________________

8 = ______________________________

9 = ______________________________

10 = ______________________________

OBS.: Para as resoluções, rascunhos e justificativa que julgar necessário, utilize-se do material disponível após as atividades do Tipo A

Atividade 2-A: **<u>Proposição:</u>** Utilizando todos os cinco primeiros números primos 2, 3, 5, 7 e 11. Use cada um deles uma só vez (sem repeti-los), em qualquer ordem, atendendo o que se pede para cada um dos itens abaixo, respeitando a seguinte condição:

Coloque os sinais de operação +, —, x, ÷ e os separadores gráficos (parênteses. colchetes e chaves) quando necessário.

1. Escreva (seguindo as instruções) o menor primo ímpar.

   Exemplo-sugestão: 3 = [(2 x 5) + (7 – 3)] – 11

2- Escreva o menor número natural ímpar.
3 - Escreva o menor número natural primo.

4 - Escreva o menor número natural composto Dizemos que um número natural é composto quando pode ser escrito como produto de dois números naturais maiores que 1. Assim, por exemplo, 91 é composto porque podemos escrever $91 = 7 \cdot 13$
5 - Qual é o maior número natural composto que você consegue escrever?
6 - Qual é o maior número natural ímpar que você consegue escrever?
7 - Escreva o menor número natural que você consegue achar, usando uma só vez cada urna das operações.
8 - Determine e escreva o maior número natural par possível, usando uma só vez cada uma das operações.
9 - Escreva um número natural usando apenas subtrações.
10 - Determine e escreva o maior número primo possível obedecendo as instruções.

OBS.: Para as resoluções, rascunhos e justificativa que julgar necessário, utilize-se do material disponível após as atividades do Tipo A

Atividade 3-A: **Proposição:** Sem utilizar-se de uma calculadora ou computador para obter o resultado direto, procure argumentos para justificar qual dos dois números abaixo representado é o de maior valor:

$\alpha = (1 + 0{,}000001)^{1.000.000}$ ou 2 ?

OBS.: Para as resoluções, rascunhos e justificativa, utilize-se do material disponível após as atividades do Tipo A

Atividade 4-A: Na sua opinião, em que aspecto esse formato ou modelo de atividade contribui para que o aluno aprimore sua forma de resolver problemas?

Referências:

BETH E.W. & PIAGET, J. (1961). **Epistémologie mathématique et psychologie**. Paris: Presses Universitaires de France.

GOWERS, W. T. **The Two Cultures of Mathematics.** In: Mathematics: Frontiers and Perspectives, edited by V. Arnold et al., AMS, 2000.

KANT, I. (1994). **Crítica da razão pura**. *Trad. M.P. Santos e A.F.Morujão. Lisboa:* Fundação Calouste Gulbenkian,.

PIAGET J. & BETH, E. W. **Epistémologie mathématique et psychologie. Essai sur les relations entre la logique formelle et la pensée réelle**. Paris: P.U.F., 1961 (EEG, XIV).

RPM – Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. Nº 61, 3º Quadrimestre de 2006. ISSN 0102-4981

WIELEWSKI, G. (2005). **Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas: uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii**. Tese de Doutoramento no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUC-SP, São Paulo – Brasil.

Os diagramas nos ajudam a representar uma idéia, seja ela essencialmente matemática ou não. Um dos exemplos de diagramas são os chamados grafos ou gráficos que representam funções. Nessas ferramentas, bem como no caso dos diagramas em geral, a correspondência entre o modelo representado e a situação original não é aparentemente evidente ou facilmente identificada como um efeito natural, que por outro lado é muito presente nas analogias[2]. O modelo representado por meio de um gráfico ou grafo é uma correspondência conceitual construída, que traduz, usando de convenções estritamente definidas, algumas propriedades do original descritas em termos de uma representação figurada.

Se alguém consegue compreender que o gráfico que representa a relação entre tempo e espaço, em que apresenta o caso de um corpo em queda livre, perceberá que essa relação não é direta, porém, existe uma sensível similaridade entre o fenômeno de cair e a forma do gráfico. O gráfico representa particularmente a função (*a estrutura conceitual*) indicada um a um ou ponto a ponto, o constante relacionamento $s = s_0 - \frac{1}{2}gt^2$. Não é possível a interpretação do gráfico de forma direta (*em termos do fenômeno real*) sem a compreensão da estrutura conceitual inerente (*a função matemática*). Embora um grafo seja um diagrama[3], de acordo com a definição — *como um modelo gráfico conceitual construído* — também podem ser considerados grafos as funções representadas que são fatos relatados nas classes de analogias, citadas na interpretação de Polya, (1986, pág. 29). Na realidade a analogia a qual estamos nos referindo não está entre o fenômeno original e o grafo, mas particularmente entre a expressão numérica do respectivo fenômeno e sua representação gráfica (ou seja, *o fato espacial*). Os sistemas geométrico e numérico de entidades não são governados por convenções arbitrárias. Com uma base de axiomas adequados o mundo dos números e no mundo das figuras comporta-se com absoluta coerência e de maneira interiormente consistente. Embora reciprocamente independentes, os dois

---

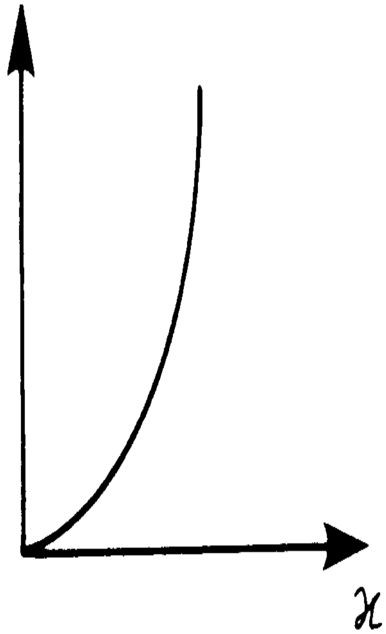
[2] Analogia: [Do gr. *analogía*, pelo lat. *analogia*.] Substantivo feminino. 1.Ponto de semelhança entre coisas diferentes. 2.Semelhança, similitude, parecença. 3.Filos. Identidade de relações entre os termos de dois ou mais pares. 4.Filos. Semelhança entre figuras que só diferem quanto à escala. 5.Filos. Semelhança de função entre dois elementos, dentro de suas respectivas totalidades. [Cf., nas acepç. 3 a 5, *generalização* (5).] 6Fís. Relação entre dois fenômenos físicos distintos que podem ser descritos por um formalismo matemático idêntico, a qual pode existir entre um fenômeno elétrico e outro mecânico, entre um acústico e um elétrico, etc. 8.E. Ling. Modificação ou criação de uma forma lingüística por influência de outra(s) já existente(s). **Novo Dicionário Eletrônico Aurélio versão 5.0**

[3] Grafo: Diagrama composto de pontos, alguns dos quais são ligados entre si por linhas, e que é ger. us. para representar graficamente conjuntos de elementos inter-relacionados. [Os pontos, ditos *nós* [v. *nó* (12)], representam os elementos individuais, e as linhas, ditas *arestas* [v. *aresta* (6)], representam a relação entre pares de elementos.] **Novo Dicionário Eletrônico Aurélio versão 5.0**

sistemas mostram-se ao mesmo tempo isomórficos[4]. Os dois sistemas, o numérico e o figural representam uma analogia ideal, provavelmente o melhor que se conhece em ciências. Porém, não há nenhum meio de considerar a relação existente entre o fenômeno original e o gráfico que representa essa função como uma analogia. O gráfico é um diagrama que usa a analogia entre o sistema numérico e o sistema de propriedades geométricas.

Na realidade, isto soa bastante estranho e se apresenta de maneira complexa, provavelmente a estudantes sem experiência. Um gráfico com suas propriedades figurais tem freqüentemente as propriedades de um Gestalt[5], isto é, ele se impõe ao estudante como uma *figura* (no sentido de Gestalt), ou seja, como uma estrutura diretamente interpretada na realidade. Por essa razão deveria representar um dispositivo intuitivo excelente. Na realidade, um gráfico não é, por si só, geralmente um dispositivo intuitivo. Como outras formas de diagramas, o gráfico não é, nem um exemplo nem uma analogia a respeito do fenômeno a ser representado. Como já foi mencionado, a relação entre o gráfico e o real é indireta, acontece por uma estrutura conceitual interveniente. Um gráfico só pode se tornar um dispositivo intuitivo depois que o sistema de convenções que relacionam a realidade original, o sistema conceitual interveniente (*a função*) e a representação gráfica tenha sido interiorizada e automatizada.

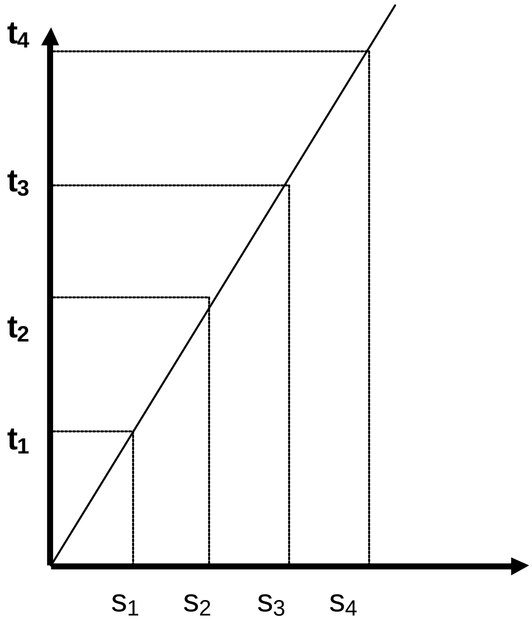
Considere o exemplo muito simples como o indicado ao lado, de um gráfico que representa o deslocamento de um corpo que se move com aceleração constante. O gráfico é parte de uma parábola. A tendência natural de um estudante novato seria confundir a forma da curva com a trajetória do movimento. O gráfico é uma "forma boa" em terminologia Gestalt, tão real, tão diretamente interpretável que é realmente difícil escapar dos diretos constrangimentos intuitivos, entender e captar sua mensagem indireta (o crescimento constante de velocidade). Mas depois que o sistema de convenções for interiorizado e automatizado, a imagem realmente pode ajudar a adquirir uma visão intuitiva de como essa posição muda com tempo e em um movimento acelerado.



4 isomorfismo: [De *isomorfo* + *-ismo*.] Substantivo masculino. 1.Álg. Mod. Correspondência biunívoca entre os elementos de dois grupos que preserva as operações de ambos. 2.Quím. Fenômeno apresentado por substâncias diferentes que cristalizam no mesmo sistema com a mesma disposição e orientação dos átomos, das moléculas ou dos íons. 3.Zool. Condição em que indivíduos de espécies ou raças diferentes têm forma e aparência similar. **Novo Dicionário Eletrônico Aurélio versão 5.0**

5 A palavra Gestalt (plural *Gestalten*) é um termo intraduzível do idioma alemão para o português. O Dicionário Eletrônico Michaelis apresenta como possibilidades as *palavras figura, forma, feição, aparência, porte; estatura, conformação; vulto,* às quais ainda se pode acrescentar *estrutura* e *configuração*

Considerando agora um novo gráfico abaixo, que representa o movimento de um corpo com velocidade constante. Nesse gráfico — a linha reta — representa a proporcionalidade direta entre espaço e tempo. Como dobra o tempo, o espaço também dobra. Em intervalos iguais de tempo o corpo movimenta distâncias iguais. O que a parábola significa, no caso de movimento constantemente acelerado, é que o deslocamento não é proporcional ao tempo e que durante sucessivos segmentos iguais de tempo esses deslocamentos não aumentam constantemente.



Os elementos que são usados na linguagem dos gráficos podem realmente ajudar a obter uma visão intuitiva de um fenômeno. Por outro lado, as propriedades intuitivas intrínsecas de um gráfico também podem representar uma fonte de má-interpretação porque o gráfico constitui um sistema figural, auto-suficiente de atração natural, sem um significado extrínseco. Sem estabelecer comparações, o impacto do gráfico como um "auto-consistente Gestalt"[6] é como um vento muito forte que não entrega a mensagem na qual pretendia se expressar, levando-a para longe.

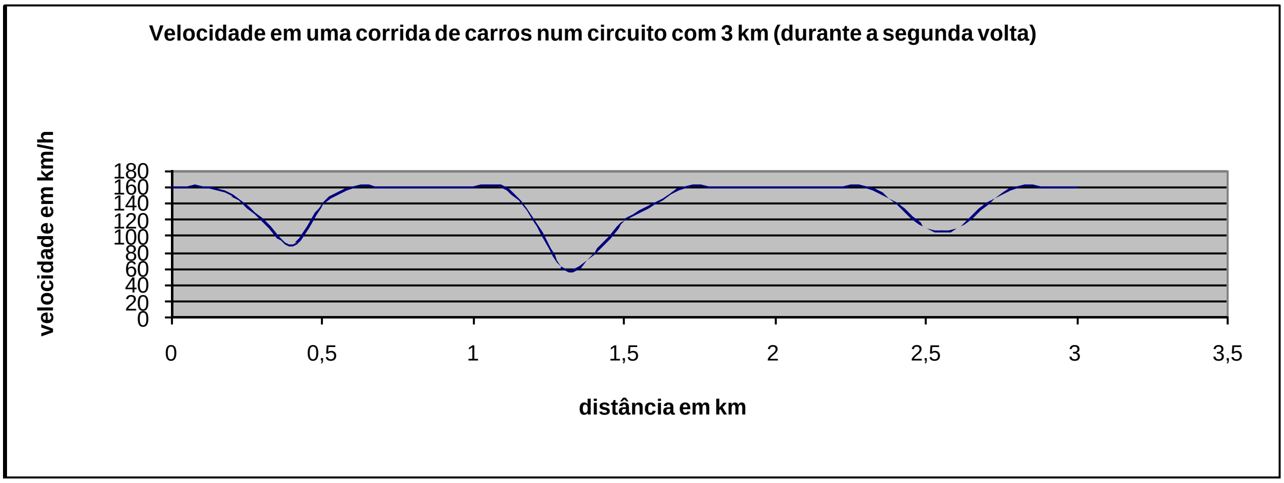
[6] Instrumento tão auto-suficiente em informações e conhecimentos (complexo) que para muitos tem dificuldades para interpretá-los.

Atividades do Tipo “B”:

Atividade 1-B: **Proposição:** Com o propósito de estimular o estabelecimento de relações entre o pensamento matemático durante atividades de análise gráfico-visuais, vamos considerar algumas situações-exemplo indicadas no trabalho de Claude Janvier (1978), também citadas por Biehler (1985), referente a exemplos envolvendo um circuito de corrida.

Essas atividades não evocam situações reais, justamente pelo fato do real envolver dificuldades e variáveis muito mais complexas do que as que serão apresentadas. O uso de muitas variáveis poderia dificultar, nesse momento, a compreensão e o exercício ao pensamento. Em outros momentos, já com uma experiência vivenciada, torna-se possível buscar analogias com exemplos que modelem, com maior precisão, uma determinada realidade, ou seja: possibilidades de transpor essa análise para um circuito de corrida não-fictício.

A temática é apresentada por meio do gráfico a seguir. Esse gráfico "mostra" como a velocidade de um carro de corrida varia ao longo dos 3 km do trajeto, contando a partir da sua segunda volta.



Pergunta-se:

1. Quantas curvas existem ao longo do circuito por onde percorre o carro? R:___________ Quais são os indicadores e como interpretá-los?____

____

____

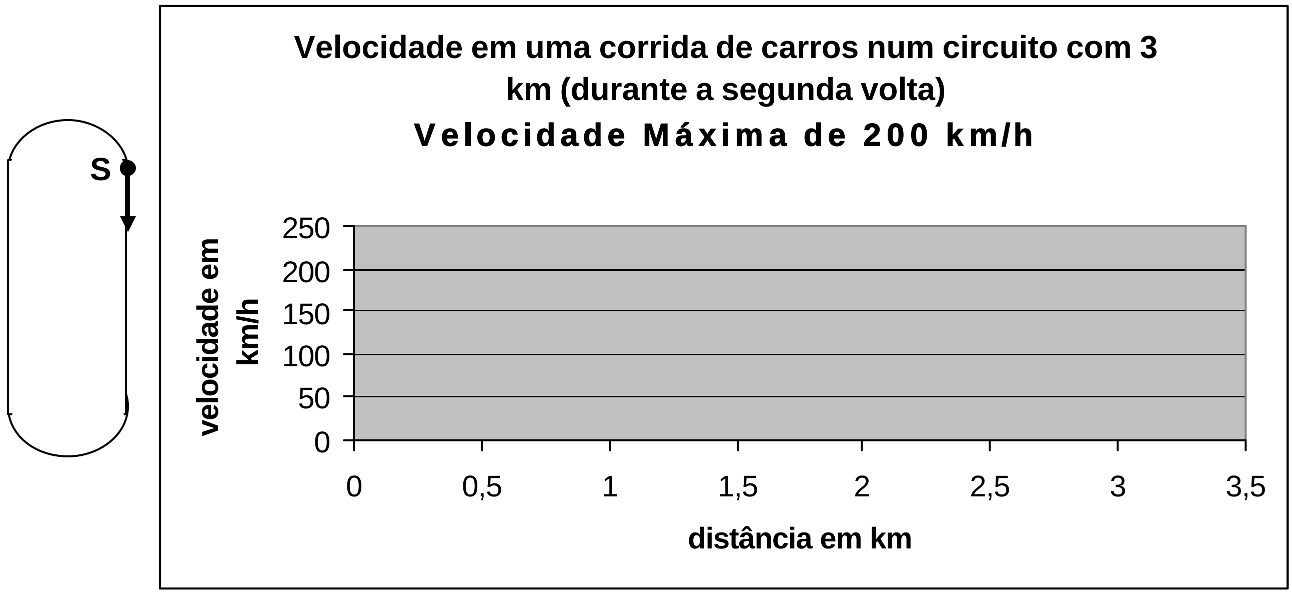
2. Qual é a pior curva? R: ____________________Justifique:________________

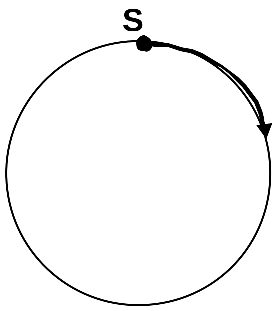
3. Qual a mais fácil? R: _______________________Justifique:_____________

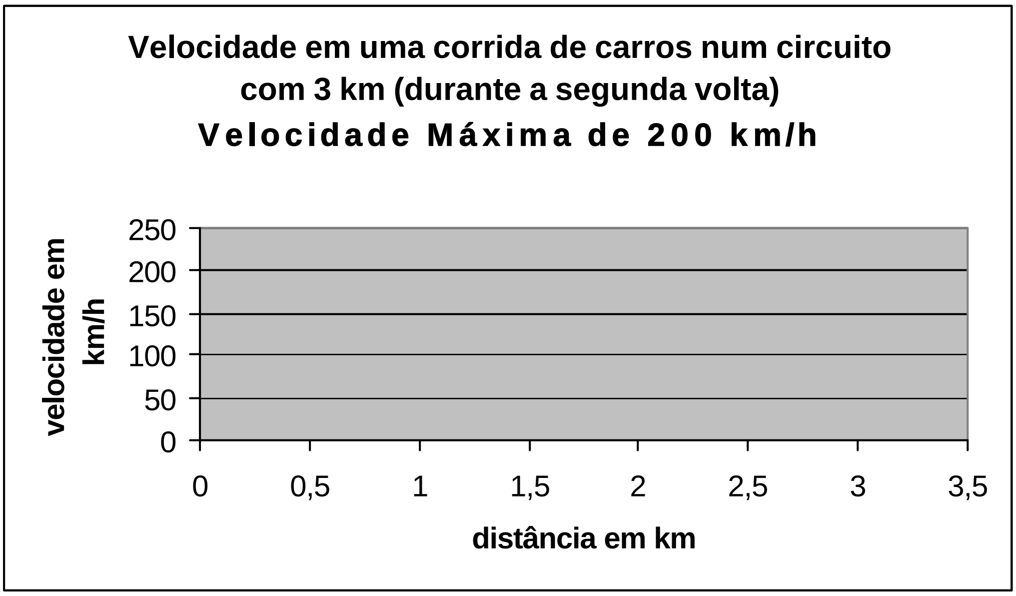
4. Qual a "segunda pior" ? R: ___________________Justifique:_____________

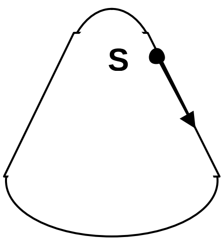
5. Qual é a velocidade máxima? R: ___________________________________
6. Qual a velocidade mais lenta? R: ___________________________________
7. Qual é a velocidade quando o carro está a 1 km do ponto de largada? R:
____
8. E a 2,5 km? R: ____

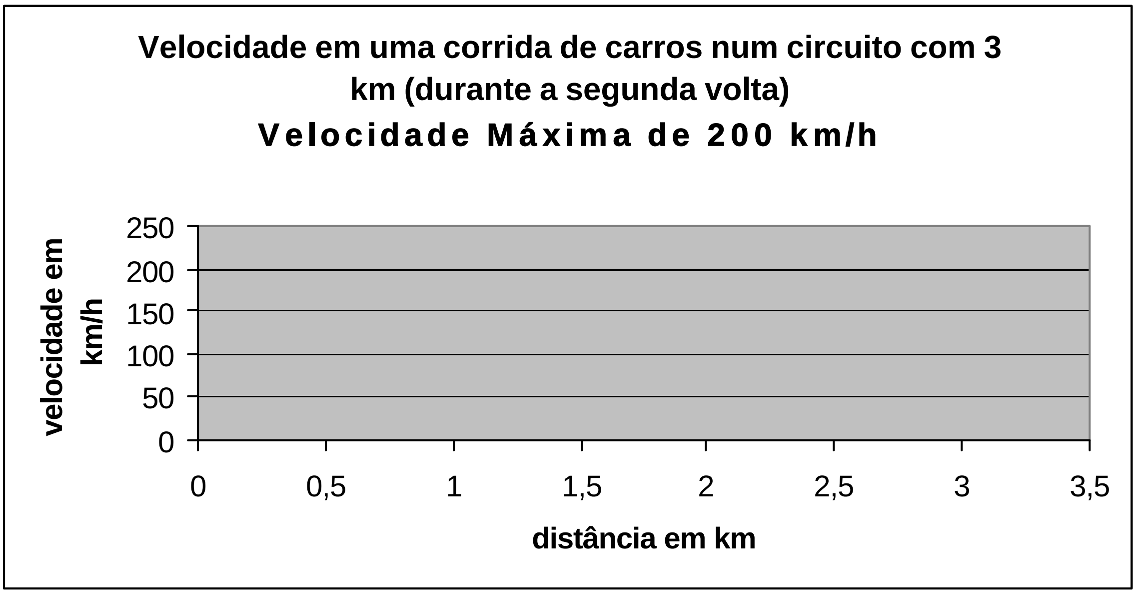
Atividade 2-B: **Proposição:** Esboçar para cada circuito que aparece do lado esquerdo de cada gráfico apresentado nas figuras abaixo, um gráfico de velocidade semelhante ao apresentado na situação anterior, sabendo que todos circuitos tem a mesma extensão de 3 km e a velocidade máxima atingida é de 200 km/h.



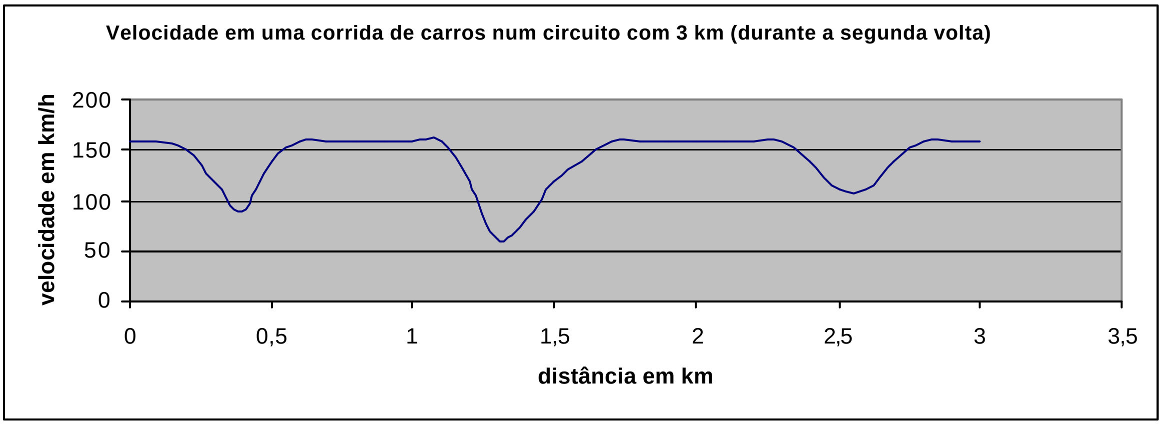


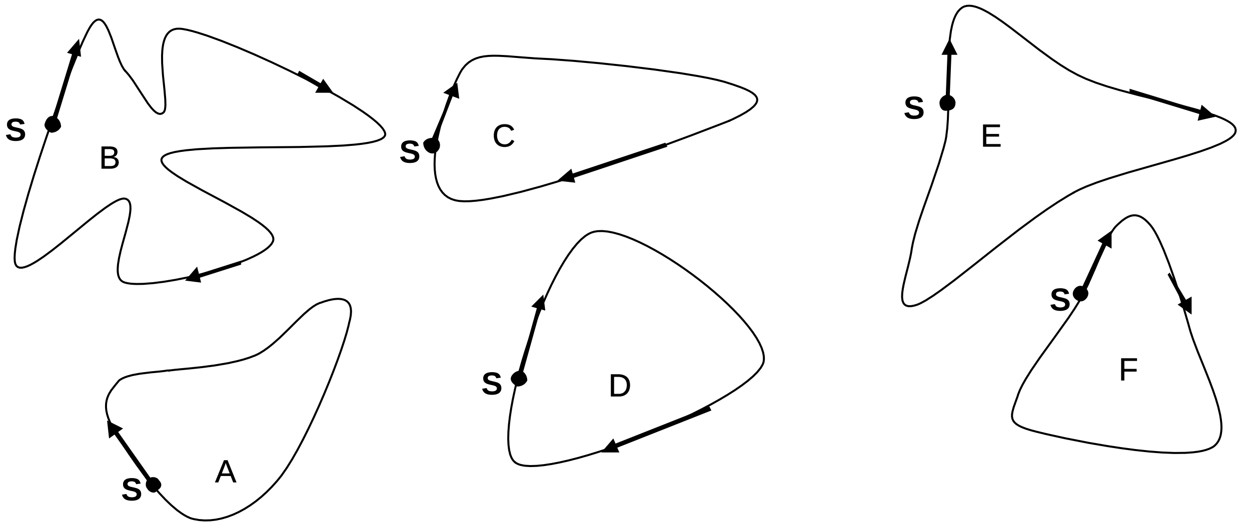




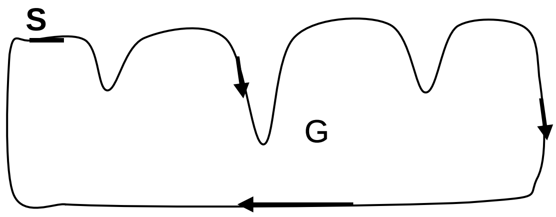


Atividade 3-B: Identificar dentre os vários circuitos (A, B, C, D, E, F e G) esquematizados na próxima página, qual deles equivale ao representado no gráfico da atividade 01, a seguir mostrado?





S = ponto de



Resposta: ____

Quais os indicadores visuais que auxiliaram na sua tomada de decisão? Justifique sua resposta:____

____

____

____

____

Atividade 4-B: **<u>Proposição:</u>** Você, enquanto professor atuante na rede de ensino:

1. Quais seriam os pontos positivos que você percebeu nessas 3 atividades anteriores? R: ____

____

____

____

____

____

____

2. Que conceitos/conteúdos você identificaria que essas atividades estimularia nos alunos ? R: ____

____

____

____

3. Tente antever quais as dificuldades e/ou confusões que os alunos teriam ao resolvê-las. R: ____

____

____

____

____

____

____

____

Atividade 5-B: <u>Proposição:</u> Jornais e Revistas de renome nacional e internacional, procuram sempre inovar a forma como apresentam suas informações e fatos. Essa evolução podemos percebe-la ao analisarmos esses instrumentos de comunicação no decorrer das décadas. A reportagem e os gráficos abaixo pode ilustrar essa evolução:

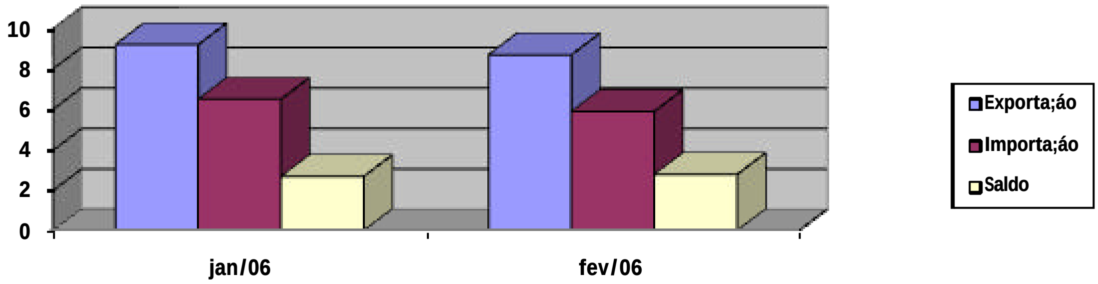
COMÉRCIO EXTERIOR

Saldo é recorde, mas já preocupa

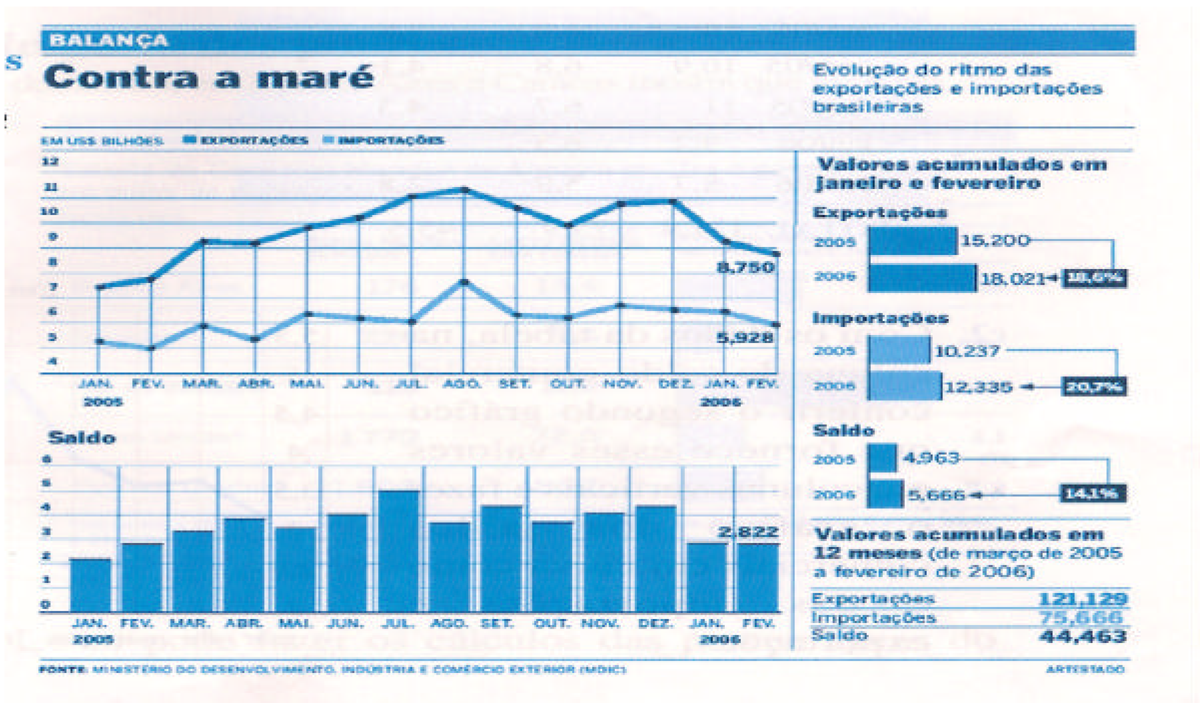
Em Fevereiro, superávit comercial foi de US$ 2,8 bilhões, o maior para o mês, e no ano, somou US$ 5,6 bilhões

A balança comercial de fevereiro registrou superávit recorde para o mês, de US$ 2,822 bilhões, e desempenho exportador igualmente inédito. Os embarques de produtos brasileiros ao exterior alcançaram US$ 8,750 bilhões no mês e somaram US$ 18,021 bilhões no primeiro bimestre do ano.

Uma provável apresentação visual de décadas anteriores, ilustrando a reportagem:



Uma provável apresentação visual hoje em dia, ilustrando a reportagem:



Pergunta-se: 1). O que você teria a comentar referente a essas duas apresentações visuais relativas à mesma reportagem? Que houve uma evolução, é evidente. Porém, em que aspectos você identificaria essa evolução?.

Pergunta-se: 2). Tendo como referência o segundo conjunto de gráficos (atualmente), que outras relações poderíamos estabelecer e comentar, que o texto da reportagem não abordou, mas que é percebível nesse bloco de informações?

Referências:

BIEHLER, Rolf. (1985). **Graphische Darstellungen**. IDM Bielefeld - Alemanha.

FISCHBEIN, Efraim. (1987). **Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach**. Mathematics Education Library, Dodrecht: D. Reidel

JANVIER, C. (1978). **The Interpretation of Complex Cartesian Graphs Representing Situations: Studies and Teaching Experiments.** Diss. Univ. Nottingham. DE.

POLYA, G. (1978). **A arte de Resolver Problemas**: trad. De Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, Interciência,

RPM – **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. Nº 61, 3º Quadrimestre de 2006. ISSN 0102-4981

Inicio:_________hs Término:________ hs

Seção C: Pitágoras e o teorema relacional

Uma das relações mais antiga e explorada é essa que vamos agora abordar. Existem registrados mais de 370 maneiras diferentes de “escrever” e representar o Teorema de Pitágoras.

Conforme Barbosa (1995, pág. 2), a proposição das áreas dos quadrados é atribuída a Pitágoras, recebendo o seu nome: *teorema de Pitágoras*. Entretanto a proposição era conhecida dos chineses porém, sem prova demonstrada.

Entre os trabalhos chineses mais antigos vem o K'iu-cbang Suan-Shu conhecido como *"Aritmética em nove secções"* (entre o terceiro e o segundo século a.C), que análogo ao trabalho de Euclides, coletava os escritos e conhecimentos antigos.

Esta obra passou a ser um manual utilitário por séculos e foi reeditada várias vezes. A nona parte, "Kou-ku", trata de triângulos retângulos, sendo ku o cateto maior, kou o menor e shian a hipotenusa; nela é dito claramente que adicionando os quadrados de kou e ku a raiz quadrada da soma é igual a shian.

Então porque é atribuído a Pitágoras? Consta que ele foi um filósofo, grego (séc. VI a.C), natural da ilha de Samos, no mar Egeu. Como na época os registros eram poucos e os conhecimentos eram transmitidos “boca a boca”, criou-se muitas lendas fantasiosas, e com isso infelizmente, deixam dúvidas a respeito de sua vida. Assim, segundo uma delas, foi um jovem inteligente e de rara beleza, enviado a Mileto para estudar com Tales, o primeiro grego com interesses científicos em matemática e o maior sábio da época. Quando aluno desse mestre obteve talvez a prova da proposição, tendo em pouco tempo Tales percebido que nada mais tinha a ensinar-lhe. Pitágoras então emigrou para a Sicília e depois, no continente, se estabeleceu em Crotona (sudeste da Itália), situada na região chamada pêlos ítalo-gregos de Magna Grécia. Lá fundou não uma simples escola, mas uma comunidade religiosa, filosófica e política. A influência dessa associação ou "irmandade" se fez presente também em outras regiões do mundo, com ardorosos admiradores e seguidores.

Os membros dessa comunidade, os chamados pitagóricos, consideravam quatro graus de sabedoria: aritmética, música, geometria e esférica (astronomia). Ele ou eles (os pitagóricos) conheciam a pavimentação do plano por triângulos eqüiláteros, quadrados e hexágonos regulares, a soma dos ângulos de um triângulo, etc.

Pitágoras possivelmente (se de fato existiu) foi exilado de Crotona, tendo morrido em Tarento.

O valor e finalidade da prova de uma proposição:

A história possui muitos registros de situações em que uma proposição para ser considerada verdadeira e assim ter status de generalização e ser identificada como teorema não bastaria que fossem aceitas apenas algumas verificações particulares. No caso da proposição de Pitágoras é apenas plausível aceitarmos a proposição como verdadeira, pois a verificação da validade em casos particulares só a tornou credível. Poderíamos construir outros triângulos retângulos que facilitassem as medidas, por exemplo, com catetos 5 u (unidades), 12 u, e medirmos a hipotenusa obtendo 13 u. Então a confirmaríamos, pois $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$, que é 13^2, porém, seria apenas mais uma constatação. Mais casos particulares aumentariam a sua credibilidade. Poderíamos realizar até muitas constatações; no entanto, uma só verificação em contrário, mesmo em particular, bastaria para afirmarmos a não validade da proposição. Ao longo desse trabalho iremos perceber que não existe uma prova essencialmente aritmética, pois não há como generalizar. A generalização só é possível por meio da geometria (pictórico) e da álgebra (simbólico).

A matemática possui muitos exemplos dessa natureza, como foi o caso da fórmula proposta para encontrar números primos, $p = n^2 + n + 11$, que para n = O, l, 2, 3, ... até 9 fornece *p* primo, mas falha se fizermos n = 10, quando encontramos 121, que é múltiplo do próprio 11. Ou a fórmula também para primos, $p=n^2 + n + 41$, que é correta para o espantoso número de 40 casos particulares, com n = O, l, 2, ... até 39, mas falha para n = 40, que fornece 1681, que é 41 • 41. Uma proposição sobre fatoração da expressão da forma $x^n - 1$ era "*Os fatores podem ser polinômios em que os coeficientes são todos unitários*", da qual são bastante conhecidas as fatorações para $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ e $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, nos quais se constata que os coeficientes das potências de x são sempre unitários. Experimente mais algumas fatorações, por exemplo, de $x^4 — 1$, de $x^5 — 1$, e terá a proposição verificada. Em 1938 o matemático soviético Chebotarëv exortou os matemáticos a verificarem esta proposição, já constatada para muitos valores de n. Só em 1941 o russo Ivanov encontrou um contra-exemplo para n = 105. Por incrível que pareça, um dos fatores que possui 33 termos possui o termo $(-2x^{41})$.

Somente a prova sancionará uma proposição. Esse é um aspecto essencial da matemática e que a distingue de outras ciências. A estatística, por exemplo, apenas dá às suas proposições intervalos de confiança.

Para a nossa proposição a prova deve independer do particular triângulo utilizado, necessitando ser obtida para um triângulo retângulo qualquer. Nesta situação teremos então um teorema.

O teorema de Pitágoras suscitou o interesse de muitos estudiosos e matemáticos. No decorrer dos séculos, centenas de provas têm sido desenvolvidas, tendo o próprio Leonardo da Vinci (1452-1519), o célebre pintor e escultor italiano (e um dos maiores génios da humanidade), nos honrado com uma prova do teorema.

Alguns exemplos de prova do teorema de Pitágoras:

a) UMA PROVA EXPERIMENTAL

Material:

Corte em uma folha de cartolina (ou papel-cartão) as seguintes figuras:

— 4 triângulos retângulos congruentes quaisquer (l)

— l quadrado de lado congruente a um dos catetos (2)

— l quadrado de lado congruente ao outro cateto (3)

— l quadrado de lado congruente à hipotenusa (4)

— 2 quadrados de lado igual à soma dos catetos (5)

Fase preliminar

Verifique por superposição que os 4 triângulos são congruentes. Verifique por justaposição (encostando) as medidas das figuras, observando quais são iguais.

Fase I

Por superposição cubra, porém, sem deixar espaços vazios, um dos quadrados (5) com os quadrados (2) e (3) e os triângulos (l), sem que haja remonte ou sobra (fig. 4).

Fase 2

Por superposição cubra o outro quadrado (5) com o quadrado (4) e os triângulos (l), sem remonte ou sobra (fig. 5).

Fase 3

Como conclusão, poderíamos obter o seguinte:

(área do quadrado 2) + (área do quadrado 3) = (área do quadrado 4)

ou o padrão pitagórico:

(soma das áreas dos quadrados dos catetos) = (área do quadrado da hipotenusa)

Fig. 4

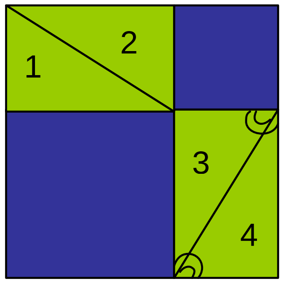
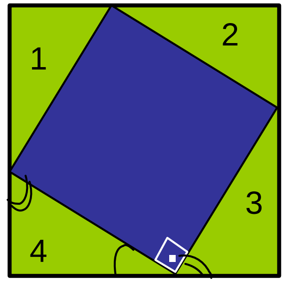


Fig. 5



É claro que a verificação experimental nos induz a chegarmos nesta conclusão, mas a possível imperfeição das figuras recortadas poderia levar-nos a aceitarmos o aproximado pelo exato.

Entretanto, o ajuste das figuras é perfeito e não aproximado. Assim, na primeira figura[7] basta observarmos que os catetos dos triângulos se justapõem aos lados dos quadrados e os triângulos formam dois a dois um retângulo, pois os seus ângulos são

[7] *(*) Também pode ser visto pela área:* $(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 = b^2 + 4\frac{bc}{2} + c^2$, *que é a soma das áreas dos quadrados e dos quatro triângulos*.

complementares e a soma de um cateto com um lado de quadrado é o lado do quadrado base (de baixo).

Na outra figura a disposição dos 4 triângulos nos cantos é perfeita, e a soma de seus lados é o lado do quadrado base. Sobra no centro um quadrilátero que é quadrado, pois seus ângulos são retos, como suplementos da soma de dois complementares; e ainda seus lados são congruentes à hipotenusa dos triângulos que são congruentes.

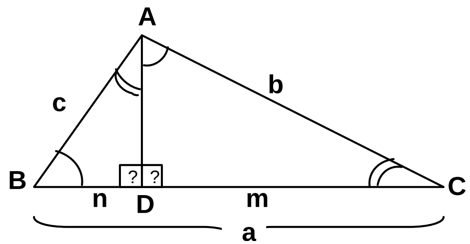


Fig. 6

b) A PROVA TRADICIONAL

Em Muitos livros e cursos de cunho mais conteudista, sem muita preocupação educacional, são desenvolvidas a prova por semelhança.

No triângulo BAC retângulo em A (*vide fig. 6*) a altura AD (*perpendicular a BC*) relativa à hipotenusa forma dois triângulos semelhantes ao próprio triângulo, em vista da congruência dos ângulos ($B\hat{A}D = \hat{C}$, complemento de $\hat{B}$, $C\hat{A}D = \hat{B}$, complemento de $\hat{C}$). Portanto, temos proporcionalidade entre os lados homólogos, uma para cada triângulo parcial com o total:

$\frac{c}{a} = \frac{n}{c}$ e $\frac{b}{a} = \frac{m}{b}$, que fornecem c^2 = a.n e b^2 = a.m, conhecidas como relações métricas de Euclides.

Adicionando os primeiros e segundos termos das relações, obtemos:

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= a.m + a.n \\ &= a.(m + n) \\ &= a . a \\ &= a^2. \end{aligned}$$

4. A PROVA DE BHASKARA

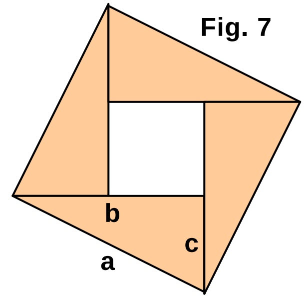


Fig. 7

Essa demonstração se utiliza de uma figura muito parecida com a de Chou-pei, que é considerado o mais antigo trabalho chinês, datado de provavelmente 1000 a.C.

Trabalhando de uma maneira mais geral, iremos construir triângulos retângulos com hipotenusa *a* e catetos *b* e *c,* conforme indicado na figura 7 ao lado.

Observamos que com essa disposição, formamos um quadrado, ao centro, que tenha como dimensão *b – c*, e isso é fácil de comprovar visualmente. Desta forma, temos por área:

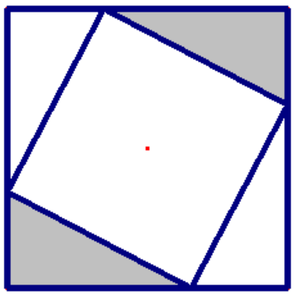
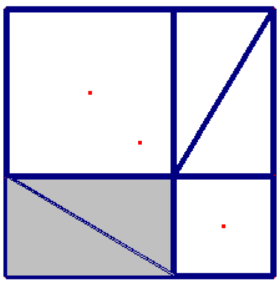
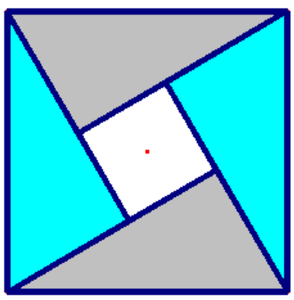
$$a^2 = (b - c)^2 + 4.\frac{bc}{2} \quad \text{ou}$$

$$a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc \quad \text{ou ainda}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Atividades do Tipo “C”:

Atividade 1-C: **<u>Proposição:</u>**Observe que em cada uma das representações algébricas, ao se resolver e/ou simplificar as sentenças, elas recairão na conhecida relação $a^2 = b^2 + c^2$.

Representação Geométrica		Representação Algébrica	
A		X	$(b+c)^2 = 2bc + c^2 + b^2$
B		Y	$a^2 = (b-c)^2 + 2bc$
C		Z	$(b+c)^2 = a^2 + 2ab$

1) Identifique qual representação Geométrica (A,B,C) corresponde com a Algébrica (X,Y,Z), justificando quais as relações observadas.

OBS.:Se necessitar de material para esboçar, terá disponível no final dessa seqüência de atividades.

2) Julgue e justifique em qual das 3 situações foi mais óbvio a percepção da relação entre o Geométrico e o Algébrico.

3) Haveria alguma finalidade/utilidade se fosse aplicada uma representação aritmética a cada uma das situações? Qual?

4) Recordando-se da informação inicial sobre o Teorema de Pitágoras, de que existem mais de 370 maneiras diferentes de "escrevê-lo" e representá-lo, existiria algum benefício didático, dentro da estrutura convencional do ensino, a exploração com os alunos, de algumas ou várias dessas demonstrações e/ou provas? Qual seria esse benefício?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Referências:

BARBOSA, Ruy M. (1993) **Descobrindo padrões pitagóricos: geométrico e numéricos**, Atual Editora, São Paulo.

POLYA, G. (1978). **A arte de Resolver Problemas**: trad. De Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, Interciência.

Inicio:_________hs Término: hs

Seção D:

Atividade Relacional entre a linguagem visual e a linguagem algébrica

Muitos autores, por questões de fisiologia, defendem que cada um dos hemisférios (esquerdo e direito) são responsáveis por processos mentais diferentes: eles defendem que o hemisfério esquerdo fornece suporte para o pensamento abstrato, analítico e lógico, mais relacionado às funções linguísticas; já o direito seria responsável pelo suporte ao pensamento concreto, global e intuitivo, inerente aos processos espaciais, portanto, ligado ao visual.

Essa teoria possibilita facilmente identificar, no tocante à forma que se tem para comunicar conhecimentos matemáticos, se dependem ou não das concepções próprias que os estudantes tem em relação à matemática. Experiências didáticas apontam que alguns alunos progridem quando trabalham com atividades visual/espacial ao passo que outros têm dificuldades e necessitam de um tratamento mais analítico, portanto, menos intuitivo.

Sob essa ótica, o ensino de matemática, durante as últimas décadas tem enfatizado os conteúdos que desenvolvem mais os aspectos próprios do hemisfério esquerdo em detrimento de atividades que enfoquem os processos característicos do pensamento espacial.

Carpenter. T. P. *et all* (1980a, 1980b) apud Socas, Martin M. *et all* (1996) indica a existência de três etapas principais próprias para a resolução de problemas matemáticos:

1. Fazer um esquema ou desenho da situação planejada;
2. Aplicar os mecanismos próprios do método de resolução escolhido;
3. Refletir sobre o sentido e coerência da solução encontrada.

Os passos 1 e 3 são constituídos essencialmente por processos próprios do hemisfério direito e são omitidos pela maioria dos alunos que resolve erroneamente esses problemas, pois ao invés de planejar a resolução do problema, eles tendem a procurar qual equação eles irão "despejar o x", em vez de refletir sobre a tentativa de encontrar uma estratégia mais simples para resolvê-lo. Geralmente a primeira tentativa é buscar um método, um modelo, um mecanismo ou mesmo uma fórmula para essa resolução.

Já Skemp (1980), em seu livro *Psicologia del aprendizaje de las Matemáticas*, assinala que a imaginação mental das pessoas podem ser classificadas em duas categorias: visual e verbal, de forma que a representação dos conceitos matemáticos são esboçados mediante um sistema de símbolos denominados visuais e verbais, respectivamente. Dessa forma, os símbolos verbais são a representação da palavra oral e escrita e os símbolos visuais são constituídos por diferentes classes de diagramas ou esquemas.

Na matemática, em se tratando da linguagem algébrica, ela tem muito mais similaridade com a simbolização verbal que com a visual, ainda que além se tem em conta da importância que o componente gráfico possui sobre qualquer forma de raciocínio lógico-matemático que se realize. Dessa maneira, temos que considerar que a matemática se utiliza com muita freqüência da combinação de ambas formas de simbologia. Isso ficou patente nessa combinação realizada por Descartes com a criação de sua Geometria Analítica.

Skemp (1980, pág 117), caracterizou esse sistema de simbologia da seguinte maneira:

VISUAL	VERBAL-ALGÉBRICO
• Abstrai propriedades espaciais tais como forma, posição;	• Abstrai propriedades que são idependentes da configuração espacial, tais como número;
• Mais difícil de Comunicar;	• Mais fácil de comunicar;
• Pode representar pensamento mais individual;	• Pode representar pensamento mais socializado;
• Integrador, mostra estrutura;	• Analítico, mostra detalhes;
• Simultâneo;	• Seqüencial;
• Intuitivo.	• Lógico.

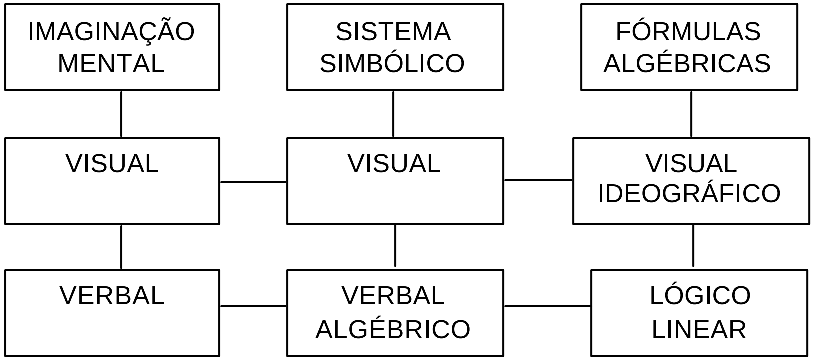
Muitas dessas propriedades são na realidade complementares, pois além de caracterizar, ao mesmo tempo estabelecem uma comparação de ambas as classes de simbologias. É facilmente observável que as características socializantes do sistema verbal-algébrico explicam de alguma maneira sua hegemonia em relação ao visual, tanto que sua facilidade de comunicação contrasta com sua dificuldade. Isso é exemplificado pela expressão “uma imagem vale por mil palavras”.

Robayna, et all (1996, pág. 142) comentam que “o aspecto algébrico que possui a matemática da escola fundamental e média nos indica que permanece dentro da classificação indicada por Skemp (1980 pág. 117) ou seja, da simbologia verbal-algébrica, porém a experiência e a história têm mostrado a importância da visualização como uma ‘ferramenta’ fundamental para a compreensão de muitos argumentos e fórmulas algébricas. Esse caráter algébrico das matemáticas escolares é devido ao fato de que não se é consciente do potencial que possue o sistema gráfico visual e de poucos modelos que se utilizem de ambos os sistemas. Convém observar que em nenhum momento as generalizações teóricos-algébricas aparecem automaticamente da visualização, porém ela complementa o entendimento de tais generalizações.”

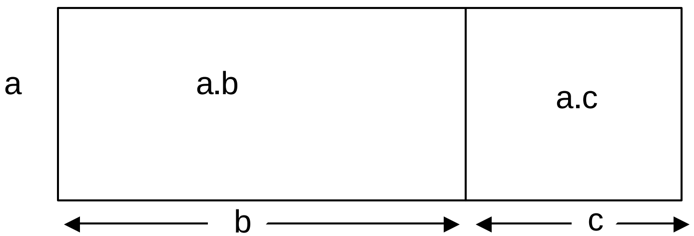
Na opinião de Otte, M (1986) apud ROBAYNA, et all (1996 pág. 142):

> “as fórmulas algébricas possuem um aspecto lógico-linear e outro visual-ideográfico, aspectos que se relacionam, respectivamente, com o verbal numérico e geométrico gráfico intrínsecos ao conceito de variáveis surgido nos séculos XVI e XVII.
>
> Podemos estabelecer assim uma série de conexões entre a imaginação mental, os sistemas simbólicos e as fórmulas algébricas que permitirá conseguir realizar diferentes atividades apoiadas pelo esquema abaixo descrito.

Consideramos com isto a importância de combinar essas duas formas de representações das fórmulas algébricas baseadas nos esquemas geométricos gregos, para quem não existia a álgebra, sendo que tudo se traduzia no aspecto visual-ideográfico já indicado.”



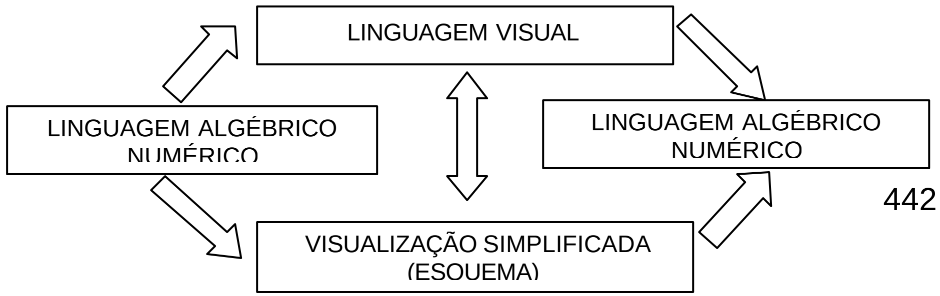
No entanto, existem professores que preferem comprovar determinadas propriedades usando exemplos numéricos antes de utilizar argumentos geométricos rigorosos. Assim, para justificar a propriedade distributiva do produto em função da soma, eles o fazem usando argumentos “aritméticos” ou “numéricos” [4 e 5 são números naturais que admitem que 4 x (4 + 5) = 4 x 4 + 4 x 5]. Para mostrar isso, podendo utilizar o argumento visual dos *Elementos* de Euclides, conforme figura a seguir.



a(b + c) = a.b +a.c

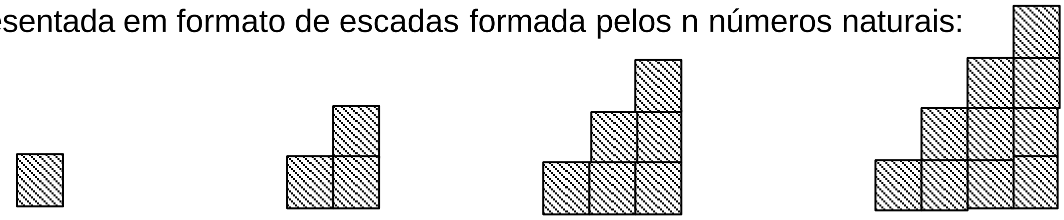
Demonstrando aritmeticamente um argumento como o anterior, a generalização de uma propriedade perde seu real significado, uma vez que destacou uma pequena e simples comprovação que limita a extensão real do descobrimento que revela pouco a pouco a concepção que o aluno pode alcançar do que seja uma demonstração matemática. Embora claramente o argumento geométrico tem suas limitações (neste caso a>0 e b>0), ajuda a compreender a justificativa da propriedade, pois abarca um número de casos infinito que posteriormente poderá ser generalizado para qualquer número real.

A linguagem visual pode ser utilizada como recurso didático de apoio tanto na linguagem aritmética como algébrica. Muitas das atividades matemáticas podem ser desenvolvidas tendo como referência o esquema apresentado a seguir. Nele se considera a linguagem visual e uma esquematização dela mesma —*visualização simplificada*— como um passo intermediário no desenvolvimento de cada atividade algébrica. Dito de outra maneira, dada uma expressão algébrica ou numérica, o passo anterior a sua transformação virá apoiado por uma tradução à linguagem visual em um primeiro momento, sintetizado num esquema no passo seguinte, que reflita uma nova dimensão do mesmo, para concluir o processo com a transformação da expressão algébrica.

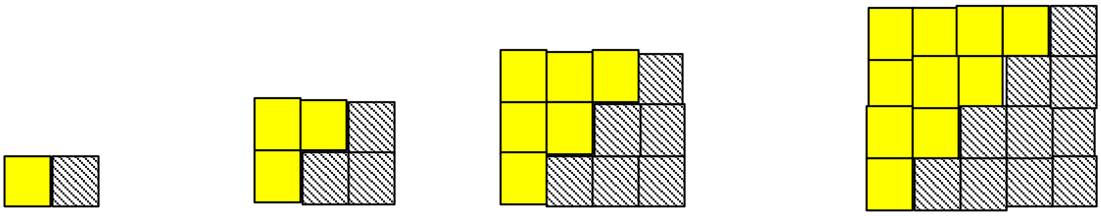


Atividades do Tipo “D”:

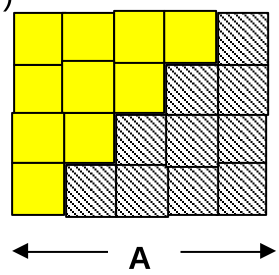
Atividade 1-D: **<u>Proposição:</u>** Considerando a seqüência visual abaixo apresentada em formato de escadas formada pelos n números naturais:



1 + 2 + 3 + 4



2 . (1 + 2 + 3 + 4)



Para o caso de usarmos quatro degraus na escada, temos a seguinte relação: AxB, pode ser escrito como duas escadas de 4 degraus, ou seja:

AxB = 2(1 + 2 + 3 + 4),

Se no lado B forma uma “altura” de 4 quadrados, ou seja, temos como dimensão B = 4.

A dimensão A, por sua vez possui um quadrado a mais no seu “comprimento” ou seja, A = 4 + 1.

Se ao invés de somente 4 degraus, tivéssemos outras quantidades de degraus, como ficaria a tabela abaixo? Complete-a:

Soma dos quadrados dos números	**Área do retângulo**	**Dimensão A**	**Dimensão B**
1 + 2			
1 + 2 + 3			
1 + 2 + 3 + 4	2 (1 + 2 + 3 + 4)	4 + 1	4
1 + 2 + 3 + 4 + 5			
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6			
1 + 2 + 3 + 4 + … + n			

Para determinarmos o caso geral em que somamos os *n* primeiros números naturais, observa-se que:

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = A \times B \qquad [1]$$

e também,

$$A = n + 1$$

$$B = n$$

por que?

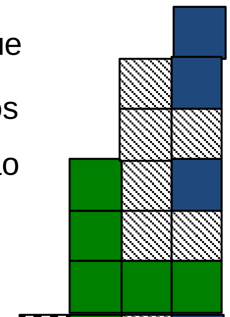
Ora, se substituirmos A e B em [1], então quanto vale $1 + 2 + 3 + \ldots + n$?

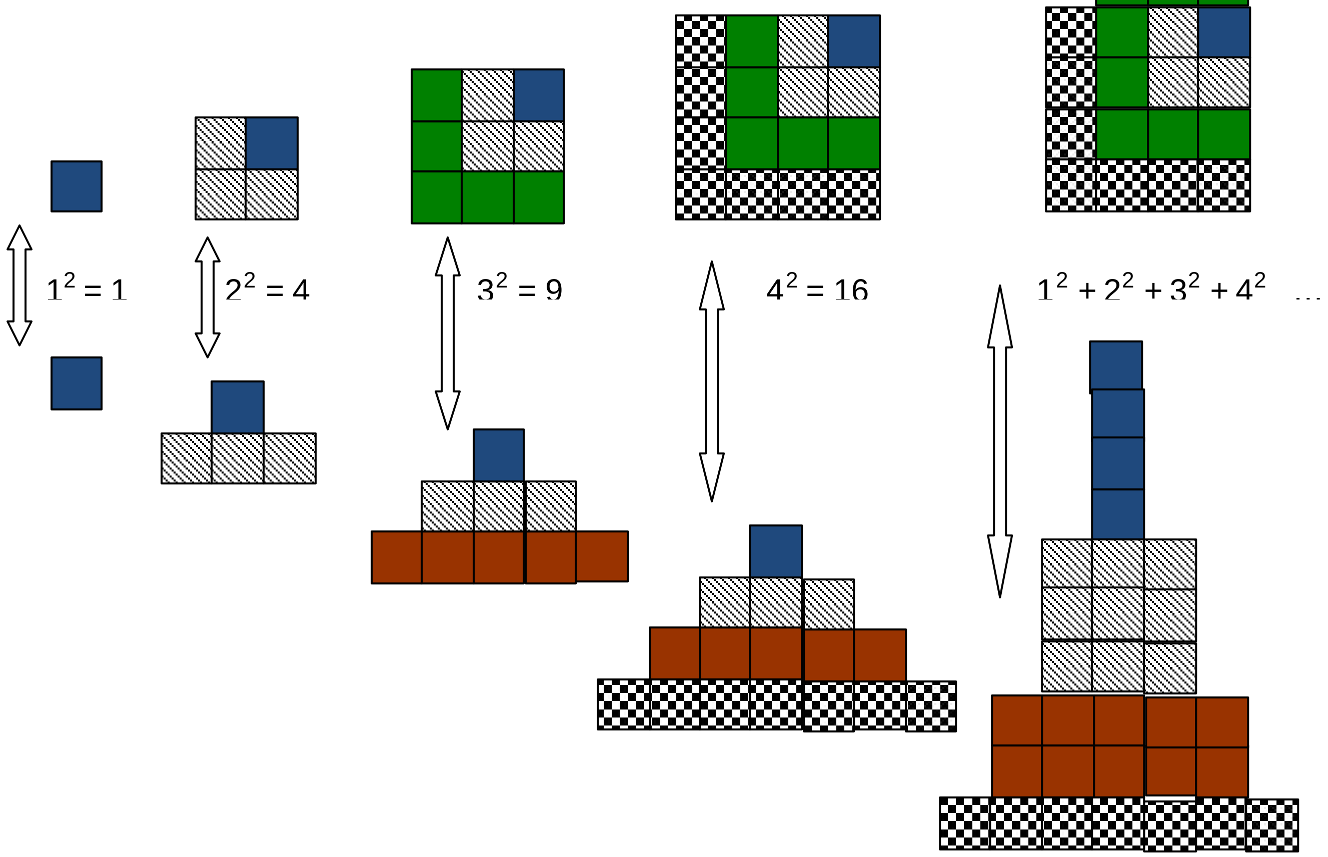
Então complete: $1 + 2 + 3 + \ldots + n =$ ....

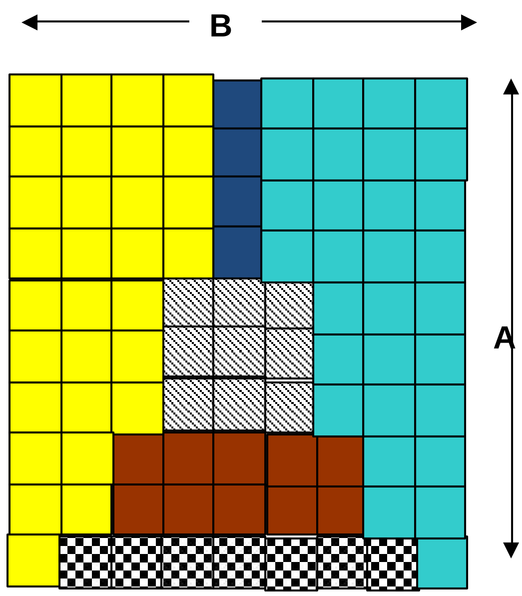
Verifique e comprove se esta "fórmula" é válida para os valores de

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

Atividade 2-D: **<u>Proposição:</u>** Considerando que posso disponibilizar diferentemente e convenientemente os quadrados que representam a soma dos quadrados dos números naturais, então as configurações abaixo são visualmente equivalentes:







Verificada a equivalência, observe que o retângulo à esquerda, com dimensões AxB pode ser estruturado da seguinte maneira:

O que poderíamos observar que ocorreu na relação visual representada por AxB também conhecida por área do retângulo AB?

Complete: AxB = ________________________________

Como no exemplo acima se desenvolveu a seqüência até quatro, dessa forma, no retângulo anterior foi possível obter uma expressão para a dimensão A = 1 + 2 + 3 + 4 e para a dimensão B = 2.4 + 1

Complete a tabela abaixo, generalizando até *n*.

Soma dos quadrados dos números	Área do retângulo	Dimensão A	Dimensão B
$1^2 + 2^2$			
$1^2 + 2^2 + 3^2$			
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$		1 + 2 + 3 + 4	2.4 + 1
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$			
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$			
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$			

Ainda para buscar um entendimento visando a generalização, temos que para o caso de *n* , observar que:

A x B = $3 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$

Obtivemos também na atividade 1-D que A = $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ e nesta atividade temos que B = $2n + 1$.

Por que?

Ora, se novamente substituirmos A e B, qual a expressão equivalente a soma dos quadrados nos n números naturais? $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$?

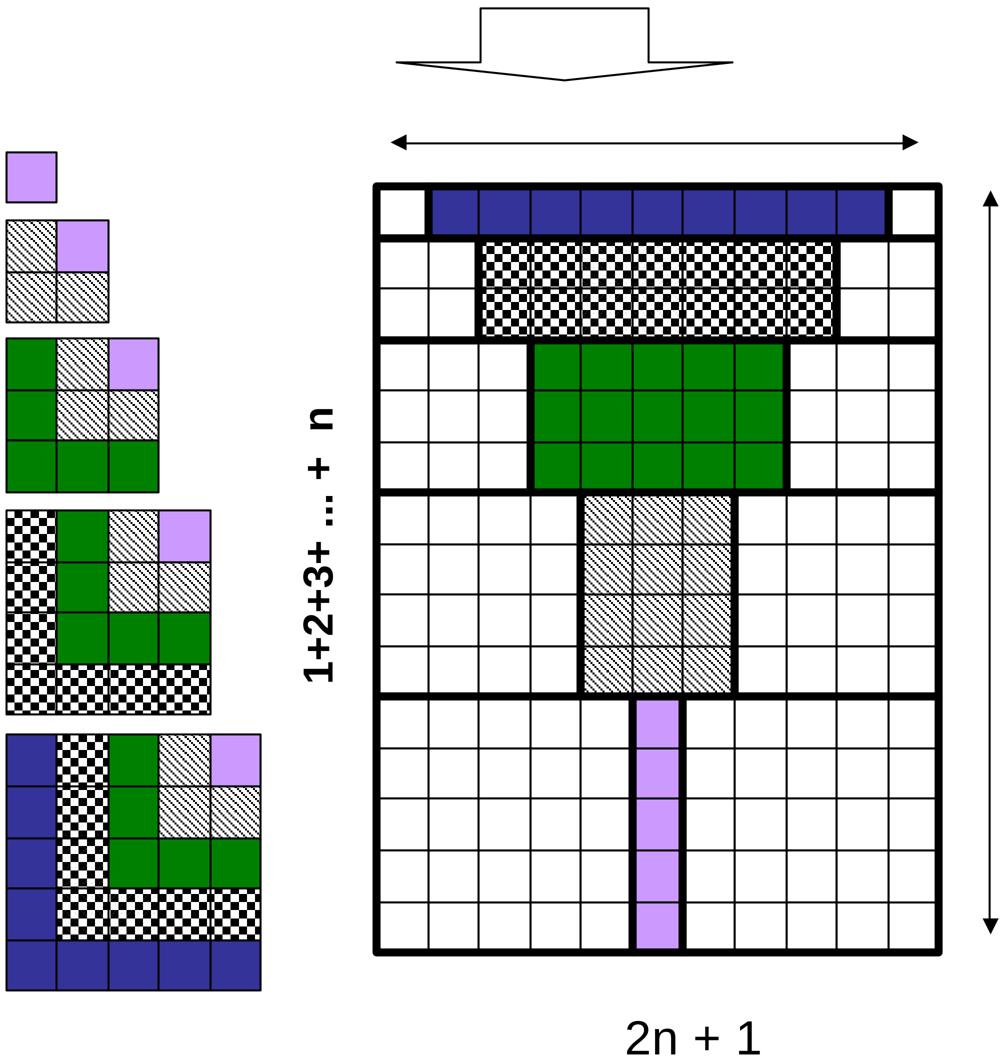
Complete: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ = ...

Verifique e comprove se esta "fórmula" é válida para os valores de

n = 2, 3, 4, 5, 6, 7

Atividade 3-D: **<u>Proposição:</u>** Descreva e apresente argumentos que indiquem e justifique como a representação de identidade algébrica abaixo se relaciona com a representação geométrica a seguir .

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = (2n+1)(1 + 2 + 3 + ...+ n)$$



Referências:

CARPENTER, T.P., et al (1980a) ***Results and implications of the second NAEP Mathematics Assessments: Elementary School***, Arithmetic Teacher, 27(8) pag. 44-47.

CARPENTER, T.P., et al (1980b) ***Results and implications of the second NAEP Mathematics Assessments: Secundary School***, Mathematicstic Teacher, 73(5) pag. 329-338.

NELSEN, Roger B. (1993). ***Proofs Without Words***, The Mathematical Association of America, Washington D.C.

OTTE, Michael, (1986), ***What is a text?.*** Perspectives on Mathematics Education, Re€idel Dordrecht

SOCAS, Martin M. *et al*.(1996), ***Iniciacion al álgebra, nº 23***, Editorial Síntese, Madrid, Espanha, 1996.

SKEMP, Richard, (1980), ***Psicologia del Aprendizagje de las matemáticas***, Morata Madrid.

ROBAYANA, (1996). S.M.M. et al, **Iniciação à álgebra**, Coleccion Matemática: Cultura y Aprendizaje, Madrid, Editorial Sintesis.

Inicio:_________hs Término: hs

Seção E:

O Relacional entre a abstração e atividade contextualizada

Muitos professores defendem que o caminho para atingir a abstração passa necessariamente pelo concreto, isto é, imaginam que a criança deva ser ensinada propondo que ela realize ações práticas para só depois pensar em termos de símbolos algébricos ou realize generalizações. Apesar de ser uma excelente estratégia em muitos contextos, este entendimento pode trazer sérias dificuldades para o ensino da Matemática. Um dos problemas criados por esta separação é que, muitas vezes, o ensino toma o "abstrato" como se fosse independente do "concreto" e enfatiza o exercício de regras e algoritmos em que a relação que existia ou deveria existir e estar em evidência simplesmente desaparece, não é mais presente.

Isto significaria então que não se produz significados nessa maneira de ensinar ou em qualquer situação de aprendizagem? Ora, se "produzir significados" implica estabelecer relações entre os **conceitos.** As **ferramentas** que utilizamos para construí-los (seja por meio de registros escritos, tabelas, gráficos, calculadoras, computadores, etc) e as **atividades** nas quais os conceitos emergiram, como por exemplo, durante um estudo de caso ou uma resolução de problemas, então não seria mais útil para o ensino da álgebra procurar descobrir que relações são construídas nesse processo?

O pesquisador americano James Fey (1990) apud Meira, L. (1996, pág. 70), comenta sobre as dificuldades que alunos e professores enfrentam no ensino e aprendizagem de Álgebra: "Na Matemática escolar atual os estudantes empregam um tempo enorme em tarefas envolvendo variáveis, enquanto nomes literais para números desconhecidos, e com equações e inequações, que impõem condições nestes números. O ensino de Álgebra enfatiza demais os procedimentos formais de transformação de expressões simbólicas e resolução de equações que buscam determinar o valor desconhecido de variáveis".

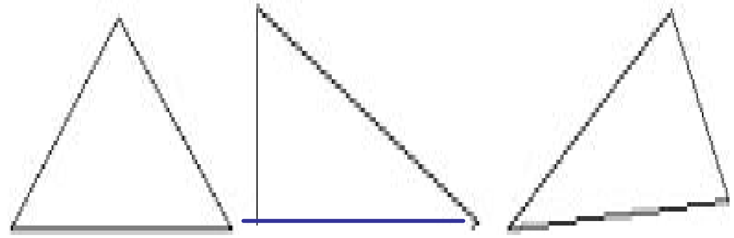
Parece evidente que a ênfase a um ensino que privilegie mais o aspecto instrumental (fórmulas, regras, procedimentos) seja uma das razões das dificuldades que os alunos tem na aprendizagem da Álgebra, ou seja, dificuldades de abstrair. Dessa forma, não estaríamos limitando sua capacidade de compreender os conceitos, as formas de representação, ou seja, sua capacidade relacional que são importantes neste domínio do conhecimento? Uma coisa é fácil de perceber: o fato de caminhar numa mão única, dificulta a compreensão sobre como os alunos produzem significados, como eles de fato produzem generalizações; como de fato ocorre sua "atividade algébrica"?

Quando MEIRA, L. (1996) comenta sobre atividade algébrica ele se refere a ações que envolvem, necessariamente, mas não exclusivamente, uma intenção (ou motivação) do aluno (ou professor) em usar conhecimentos algébricos para resolver problemas e/ou comunicar resultados matemáticos. Na medida em que um aluno usa a linguagem da Álgebra para resolver problemas, ele está montando **relações** entre suas ações e a linguagem falada na sala de aula de Matemática, o uso de certas palavras para fins matemáticos, a linguagem dos textos matemáticos, e a linguagem dos sistemas simbólicos escritos.

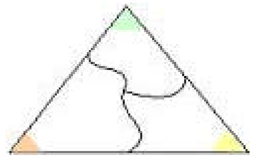
Para exemplificar isso vamos apresentar a idéia de atividades usando o ponto de partida de contextos matematizados que conduzam a algumas abstrações algébricas e no campo da exploração de figuras geométricas (sejam elas planas ou espaciais), geralmente uma forma mais efetiva de expressar relações que se evidenciam é conseguida com o uso da Álgebra:

Temos formalmente já estruturadas, em forma de conteúdos matemáticos, aquilo que chamamos de A LEI ANGULAR DE TALES – que é a propriedade que possui qualquer triângulo de que a soma de seus três ângulos internos é sempre igual a 180º, tem como forma mais efetiva e conhecida de representação a equação a + b + c = 180º, onde a, b e c representam as medidas dos ângulos em graus.

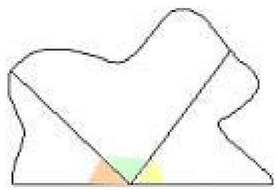
Uma atividade simples que propicia verificar a existência desta propriedade pode ser proposta em classes de 4ª , 5ª ou 6ª série do ensino fundamental. Basta para isso que cada aluno desenhe num papel e recorte um triângulo qualquer que ele escolhe e, em seguida, faça a seguinte experiência:



1º – partir o triângulo preservando os "cantos", como ilustra o desenho;



2º – justapor os três pedaços, juntando os três vértices



Como um grande número de diferentes triângulos está sendo submetido à mesma experiência, será de grande impacto verificar que para todos independentes de forma ou tamanho, se obtém "um desenho" semelhante, no caso, um segmento de reta que vai caracterizar um giro ou um ângulo de 180º, ou meia volta, ou dois ângulos retos.

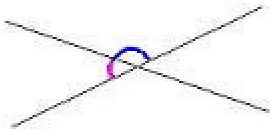
É importante fazer duas observações:

1ª) a propriedade não está sendo demonstrada por meio desta manipulação; uma demonstração rigorosa desta propriedade só é possível um pouco mais adiante, geralmente a partir da última série do Ensino Fundamental;

2ª) enquanto a equação a + b + c = 180º serve para representar qualquer triângulo, um desenho consegue representar apenas os triângulos congruentes ao desenhado.

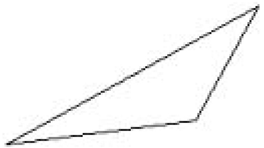
Temos outros exemplos de situações de cunho geométrico que podem ser transformados em atividades relacionais que resultam em generalizações algébricas tais como:

- A relação entre ÂNGULOS NÃO CONGRUENTES FORMADOS POR DUAS RETAS SECANTES que pode ser expressa por:



y = 180º - x, onde x e y representam as medidas dos ângulos em graus.

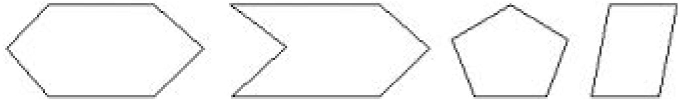
- A relação existente entre os comprimentos dos três lados de qualquer triângulo, definida como CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DO TRIÂNGULO, também denominada desigualdade triangular, pode ser representada pelas desigualdades:



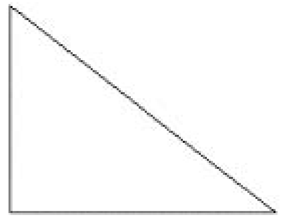
$m < t + p$; $t < m + p$; $p < t + m$

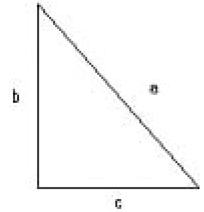
onde m, t e p representam os comprimentos dos lados.

- A IGUALDADE ENTRE O NÚMERO DE VÉRTICES E O NÚMERO DE LADOS de um polígono qualquer: v = n



- O TEOREMA DE PITÁGORAS: $a^2 = b^2 + c^2$; onde a, b e c são medidas dos lados de um triângulo retângulo, sendo a a medida do lado oposto ao ângulo reto.





Para estes exemplos de relações existe um grande número de demonstrações e a exploração destas demonstrações utiliza-se da abordagem de vários conceitos da Álgebra e da Geometria, tais como: área, números irracionais, semelhança de triângulos, operações com expressões algébricas. Esses processos de demonstrações e provas são facilmente encontrados nos diversos livros textos didáticos.

Já no campo das medidas temos várias situações que geram expressões algébricas, identidades e operações com expressões algébricas, como em determinados modelos de figuras geométricas há medidas que são funções de outras medidas da mesma figura. Ou dizendo de outra maneira: fórmulas, normalmente, são expressões algébricas que representam essas funções. A Álgebra cria situações para aprendizagem da Geometria da mesma forma que podemos ter também o caminho inverso, ou seja, a partir de situações algébricas tais como o estudo de expressões, funções e equações, usarmos, para uma melhor compreensão, o esboço ou a construção geométrica.

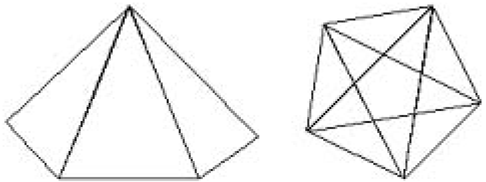
- CÁLCULO DO NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO A PARTIR DO NÚMERO DE LADOS DESSE POLÍGONO

Número de diagonais:

a) que partem de um vértice: **n-3**

b) total: **[n (n -3)] : 2**

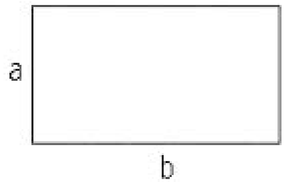
sendo **n** o número de lados do polígono. Justifica-se com poucos exemplos.



- PERÍMETRO DO RETÂNGULO EM FUNÇÃO DOS COMPRIMENTOS DOS LADOS:

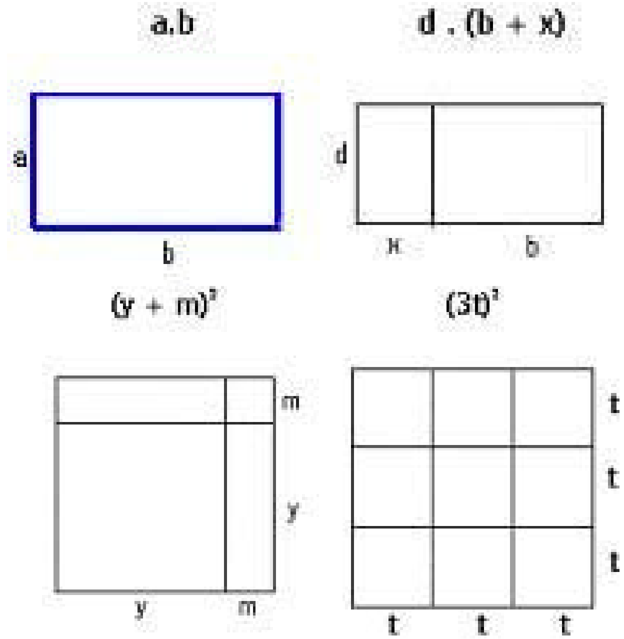
Esta tarefa simples de expressar o perímetro de um retângulo a partir dos comprimentos dos lados deve ser aproveitada para propiciar significativa atividade algébrica.

Quando se propõe que os alunos expressem o perímetro do retângulo desenhado ao lado, sabendo que a e b são os comprimentos dos lados, geralmente se obtêm deles diferentes expressões matematicamente corretas ou não, como por exemplo na tabela a seguir:



a + b + a + b	b + a + b +a
a + a + b + b	2x (a + b)
2a + 2b	2 x a + 2 x b
2x a + b.	

Podemos explorar novas questões a partir da verificação se cada expressão apresentada serve ou não, tais como: operações com expressões algébricas, identidades algébricas, uso da seqüência de operações, de símbolos de ordenação (parênteses, colchetes...), convenções para simplificar a representação de operações, etc.



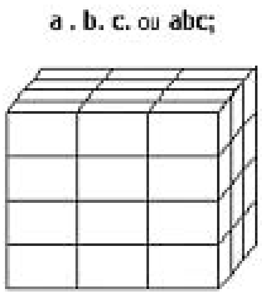
Independente de quem seja a ou b, teremos sempre expressões como as expostas a seguir, sendo elas caracterizadas como identidades, para qualquer valor de a e b elas sempre se verificam.

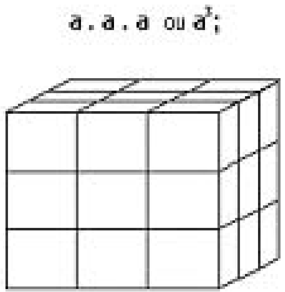
a + b + a + b = 2 x a + 2 x b	a + b + a + b = 2x (a + b)
2x (a + b) = 2 x a + 2 x b	2a + 2b = 2x (a + b)

- ÁREA DO RETÂNGULO EM FUNÇÃO DAS MEDIDAS DOS LADOS:

Após a exploração do conceito de área, mediante comparações e medições usando diversas unidades de medida, chega-se a formas indiretas de obtenção dessa medida para certas figuras especiais. No caso do retângulo, verifica-se que a área pode ser calculada multiplicando-se os comprimentos de dois lados perpendiculares.

- VOLUME DE PARALELEPÍPEDOS EM FUNÇÃO DAS MEDIDAS DAS ARESTAS:





Temos ainda inúmeras situações de aplicações contextualizadas matematicamente que nos mostram essas formas de relacionamento entre os conceitos, sejam eles internamente na matemática ou com relação a outros ramos do conhecimento.

Exemplos clássicos são relatados em problemas de determinação de distâncias e alturas inacessíveis, determinação de grandes/pequenas distâncias, medir campos de formas variadas em agrimensura e nivelamento, considerando sua topologia, altitudes, curvas de níveis, presença de obstáculos, etc., problemas relacionados a determinação de tempos convencionais ou não, volumes simples e complexos, problemas de localização tanto no plano como no espaço, dentre outros.

Atividades do Tipo “E”:

Atividade 01-E: **Proposição:** POLYA, (1986) indica um problema interessante, onde a necessidade de conhecimentos um pouco mais próprios de geodésia, investido de um senso de lógica bastante perspicaz, faz-nos maravilhar seja em função da complexidade com que o problema se apresenta e ao mesmo tempo da simplicidade evidenciada na sua solução. O problema foi remodelado por mim, da seguinte maneira: “considerando as diversas raças existentes de ursos e seus distintos habitat descritos na tabela a seguir:”

Espécie de Urso	Característica/Habitat
Urso Pardo	América do Norte, Europa e Ásia. Encontra-se presente na península Ibérica, precisamente nos Pirineus e na cordilheira Cantábrica. Na Espanha, está em perigo de extinção.
Urso Cinzento	Também denominado "grizzly", habita as Montanhas Rochosas (EUA).
Urso Beiçudo	O Urso Beiçudo recebe esse nome porque seu focinho é longo e os lábios, muito móveis, são empregados para capturar os cupins dos quais se alimenta. De cor escura, habita as florestas tropicais da Índia e do Sri Lanka.
Urso Malaio	O Urso Malaio tem o pêlo de cor negra, com uma mancha sobre o peito, de forma irregular, branca ou amarela, e se estende desde a China até a Indochina
Urso-de-Óculos	Também chamado de Urso Andino, Cara Rajada, Umari ou Uyutchine. Ele vive na América do Sul e caracteriza-se pela presença de manchas faciais que costumam rodear os olhos, como se usasse óculos, formando um anel, completo ou não.
Urso Negro Americano	Este urso é muito abundante na América do Norte, desde o Alasca até o México e a Flórida. Apresenta uma grande variabilidade na cor de sua pelagem que vai do preto ao cinza-avermelhado, e no peito costuma ter uma mancha branca em forma de estrela.
Urso Tibetano	Também conhecido por Urso Negro Asiático, espécie de urso distribuída pela Ásia, desde o Japão até o Paquistão. A pelagem do corpo é preta e bastante longa no pescoço e nos ombros e apresenta uma mancha branca sobre o peito.
Urso-Polar ,	Também conhecido como urso-branco, típico e nativo do Ártico e atualmente é o maior carnívoro terrestre conhecido
Panda-Vermelho	Previamente classificada na família Procyonidae (guaxinim). Esta espécie é nativa dos Himalaias e sul da China.
Panda	É um mamífero da família dos ursídeos, endêmico da República Popular da China. O focinho curto lembrando um urso de pelúcia (peluche), a pelagem preta e branca característica.

Tendo como referência esses vários habitat e seus respectivos ursos distribuídos pelo planeta, considere a seguinte condição:

Um urso (qualquer) encontra-se numa posição (também qualquer) do planeta, a qual designaremos por “ponto A”. Num determinado instante, ele caminha uma distância de 10 km tomando a direção N→S, que chamaremos de “ponto B”; Após, ele caminha mais 10 km na direção O→L, atingindo um local designado por "ponto C"; Enfim ele caminha mais 10 km na direção S→N e retorna a origem, isto é o "ponto A".

Pergunta-se então: Qual a cor do Urso?" R:________________________________

Quais conceitos matemáticos ou não-matemáticos podemos listar e que são necessários para dar uma solução para o referido problema?

____

____

____

____

____

____

____

Como justificar a pergunta relativa a cor do Urso?

____

____

____

____

____

____

____

____

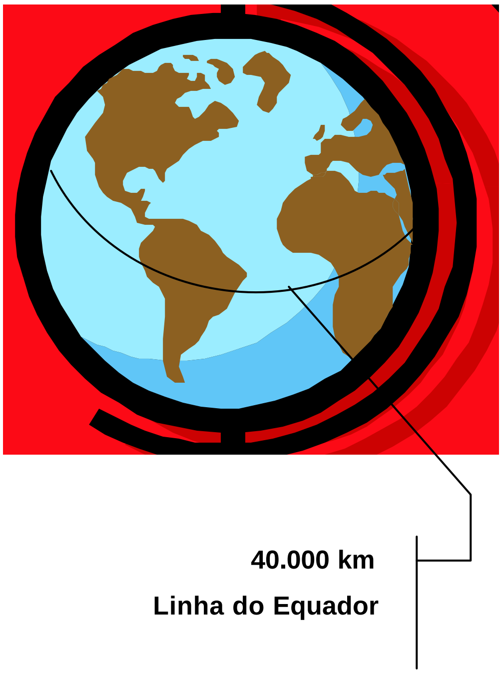
____

____

Atividade 02-E:

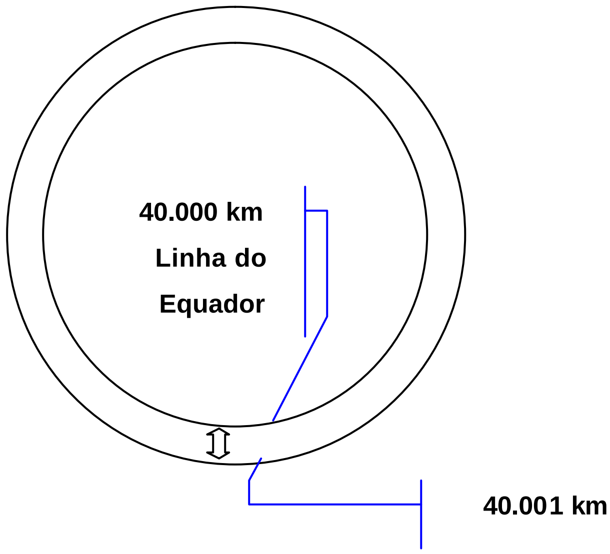
Proposição:

Considere o contexto a seguir: Tendo como informação que se pudéssemos efetuar uma volta completa no nosso Planeta, caminhando pela linha do Equador, estaríamos andando cerca de 40.000 km de distância.



Se um anel de arame pudesse ser atarraxado nesse percurso (da Linha do Equador), ele teria, claro, esse mesmo comprimento.

Se pegarmos outro arame, agora com 40.001 km de comprimento, com ele confeccionar também um anel colocando-o, circuncentricamente, sob o primeiro (como mostra o esquema ao lado), perceberemos uma relativa distância entre ambos anéis.



Que conceitos gerais e específicos, a primeira vista, são percebíveis nesse contexto matematizado?

Seria possível um gato, com aproximadamente 20 centímetros de altura, passar entre os dois anéis? Justifique sua resposta.

Como descrever a relação existente entre o aumento/diminuição do comprimento de uma circunferência X o aumento/diminuição do seu raio?

Referências:

FEY, J. (1990). Quantity. Em L. Steen (ed.). On the shoulders of giants: New approaches to numeracy. Washington: National Academy Press.

MEIRA, L. (1996). Atividade algébrica e produção de significados em matemática: Um estudo de caso. M.G. Dias e A. Spinillo (eds.). Tópicos Em Psicologia Cognitiva. Recife: Editora Universitária da UFPE.

POLYA, G. *A arte de Resolver Problemas*: trad. De Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, Interciência, 1978.