

**DINÂMICA DISSIPATIVA DA
TRANSIÇÃO DE DESCONFINAMENTO**

ANA JÚLIA SILVEIRA MIZHER

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

DINÂMICA DISSIPATIVA DA TRANSIÇÃO DE DESCONFINAMENTO

Ana Júlia Silveira Mizher

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Eduardo Souza Fraga

Rio de Janeiro
agosto de 2006

M685 Mizher, Ana Júlia Silveira

Dinâmica Dissipativa da Transição de Desconfinamento /
Ana Júlia Silveira Mizher. Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2006.

ix, 59f. il.;30cm.

Orientador: Eduardo Souza Fraga

Dissertação de Mestrado: Mestre em Ciências (Física) - UFRJ,
Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física, 2006.

Referências Bibliográficas: f. 75-79.

1.Loops de Polyakov. 2. Dinâmica de transições de fase. 3.
Transição de desconfinamento

I. Fraga, Eduardo Souza. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro,
Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física.

III. Dinâmica Dissipativa da Transição de Desconfinamento.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer ao Eduardo pela orientação, grande dedicação e principalmente pela amizade e confiança.

A todo o grupo QCD-QGP. Que tenhamos todos um futuro muito produtivo pela frente! Em especial quero agradecer àqueles que contribuíram de alguma forma com esta tese: André, Licínio, Cristian e Letícia.

Ao Gastão Krein pela colaboração e auxílio no desenvolvimento deste trabalho.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Ao Marcelo e ao Fernando pelo apoio técnico de sempre, desde o começo.

Aos amigos Dani, Alejo, Seba, Colo, Fernando, Jana e Guada, por fazer a vida ser tão divertida.

À minha família linda, Raquel, Amilcar e Nibs pelo carinho e apoio incondicional.

À companheira Mel por todas as discussões e conselhos sempre tão úteis.

E ao Rafael, por trilhar este caminho ao meu lado com tanto amor.

RESUMO**DINÂMICA DISSIPATIVA DA TRANSIÇÃO DE DESCONFINAMENTO**

Ana Júlia Silveira Mizher

Orientador: Eduardo Souza Fraga

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Resultados recentes de QCD na rede, apoiados por dados experimentais obtidos em experimentos no BNL-RHIC, indicam que a matéria fortemente interagente sob condições extremas de temperatura e pressão sofre uma transição de fase para um plasma desconfinado. Acredita-se que tais condições extremas possam ter ocorrido no universo primordial e possam estar presentes no interior de estrelas de nêutrons.

Modelos efetivos têm sido desenvolvidos com o intuito de estudar a natureza dessa transição de fase. Uma possibilidade explorada na construção destes modelos é escrever uma Lagrangeana efetiva como função do parâmetro de ordem da transição de desconfinoamento, o *loop* de Polyakov. Para teorias de puro gauge, este parâmetro de ordem é exato, enquanto que quando adicionamos férmions ele se torna um parâmetro de ordem aproximado.

Nosso objetivo, neste trabalho, é acompanhar a evolução temporal deste parâmetro de ordem levando em consideração o papel da dissipação e do ruído. Estes originam-se de flutuações térmicas e quânticas do campo, auto-interações do *loop* de Polyakov ou interação com outros campos.

Para descrever a evolução temporal, utilizamos uma equação do tipo Langevin extraída da teoria de campos microscópica fora do equilíbrio. Utilizamos dois diferentes modelos efetivos para escrever a Lagrangeana como função do parâmetro de ordem. Realizamos simulações numéricas em tempo real e mostramos que tais efeitos de dissipação e ruído têm um papel

bastante expressivo nas escalas de tempo da transição e devem ser levados em consideração . Focamos nosso interesse na variação da escala de tempo por ser um parâmetro possível de se comparar com dados experimentais obtidos em colisões de íons pesados ultra-relativísticos.

Palavras-chave: Loops de Polyakov, Dinâmica de Transição de Fase, Transição de Desconfinamento

Rio de Janeiro
agosto de 2006

ABSTRACT**DISSIPATIVE DYNAMICS OF THE DECONFINEMENT TRANSITION**

Ana Júlia Silveira Mizher

Orientador: Eduardo Souza Fraga

Abstract da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, Instituto de Física, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Recent results from lattice QCD , corroborated by experimental data from BNL-RHIC, indicate that strongly interacting matter under extreme conditions of temperature and pressure undergoes a phase transition to a deconfined plasma. Such extreme conditions are believed to have happened in the early universe, and might also be found in the core of neutron stars.

Effective models have been developed with the objective of studying the nature of this phase transition. One possibility explored by constructing this models is to write an effective Lagrangean as a function of the order parameter of the deconfinement transition, the Polyakov loop. For pure gauge theories this order parameter is exact while for theories including dynamical quarks it becomes an approximate order parameter.

Our goal in this work is to follow the temporal evolution of this order parameter considering effects of dissipation and noise. Such effects are originated from thermal and quantum fluctuations of the field, self-interaction of the Polyakov loop or interaction with other fields.

To describe the temporal evolution we use a Langevin equation extracted from microscopic nonequilibrium field theory. We use two different pure gauge effective models to obtain a potential as a function of the order parameter. We perform numerical simulations in real time and show that such effects of dissipation and noise play an important role in the determination of the relevant time scales of thermalization. We conclude that these effects are

essential in the analysis of the deconfinement transition and must be taken into account.

Key-words: Polyakov Loops, Phase Transition Dynamics, Deconfinement Transition

Rio de Janeiro
agosto de 2006

Conteúdo

1	Introdução	4
2	A transição de desconfinamento	7
2.1	Discussão sobre a fenomenologia	7
2.2	A geometria da invariância de gauge e o <i>loop</i> de Wilson	9
2.3	Simetrias $Z(N)$ em $SU(N)$ e o <i>loop</i> de Polyakov	16
3	Modelos efetivos para a transição de desconfinamento	21
3.1	Introdução	21
3.2	Autovalores do <i>loop</i> de Polyakov e o potencial efetivo	22
3.3	Plasma de glúons como um condensado de <i>loops</i> de Polyakov	28
4	Evolução do parâmetro de ordem	33
4.1	A equação de Langevin em mecânica estatística	34
4.2	Mecânica quântica fora do equilíbrio e a equação Langevin	38
4.3	Teoria de campos fora do equilíbrio e a equação de Langevin para o parâmetro de ordem	45
4.4	Contratermos de rede	52
5	Resultados para puro gauge	55
5.1	Sistema físico	55
5.2	Evolução em $SU(2)$ e $SU(3)$	57
5.3	Discussão dos resultados	62

6 Conclusão	65
A Métodos numéricos	68

Lista de Figuras

2.1	Caminho fechado formado por uma sequência de comparadores $U(x, y)$	15
2.2	Representação dos vácuos degenerados no plano complexo a temperaturas altas para $N = 3$	19
3.1	Potencial efetivo para $SU(2)$ para diferentes valores da temperatura.	26
3.2	Potencial efetivo para $SU(3)$ segundo o modelo de autovalores do <i>loop</i> de Polyakov como parâmetro de ordem.	28
3.3	Potencial efetivo para $SU(3)$ obtido a partir do modelo do traço do <i>loop</i> de Polyakov como parâmetro de ordem.	32
4.1	Contorno de Schwinger-Keldish.	40
4.2	Resultados da evolução temporal de um campo ϕ para diferentes valores do espaçamento a depois de adicionar contratermos adequados. Os resultados deixam de variar com a	53
4.3	Os diagramas a) <i>tadpole</i> e b) <i>sunset</i> , divergentes ultravioleta na teoria clássica a temperatura finita.	53
5.1	Evolução temporal do valor médio do parâmetro de ordem para o caso $SU(2)$	59
5.2	Evolução temporal do valor médio do parâmetro de ordem para o caso $SU(3)$, com potencial da Eq. 3.20	60
5.3	Evolução temporal do valor médio do parâmetro de ordem para o caso $SU(3)$ com potencial obtido seguindo o segundo modelo do Cap.3	61
5.4	Evolução temporal para o parâmetro de ordem no caso da transição quiral (E.S.Fraga e G.Krein - 2005)	63

Capítulo 1

Introdução

A física de partículas elementares tem aumentado consideravelmente suas possibilidades devido ao grande desenvolvimento experimental acontecido nos últimos anos. Aceleradores de partículas com alcance de energias cada vez maiores vêm sendo construídos e muito tem sido investido em experimentos visando a uma melhor caracterização da teoria que descreve a interação forte, a Cromodinâmica Quântica, ou QCD, especialmente em condições extremas de temperatura e pressão. Essa teoria tem sido bem sucedida e contém ingredientes peculiares da interação forte, como o confinamento de quarks e glúons em hádrons.

Os hádrons, estados ligados dos quarks, são observados na natureza somente em algumas das seguintes formas: bárions, que são formados por três quarks, e mésons, formados por um quark e um antiquark. São observados na rede estados ligados de glúons, que recebem o nome de *glueballs*, sem entretanto terem sido observados diretamente na natureza. Existem ainda algumas propostas sobre a existência de hádrons formados por um número maior de quarks. Estes recebem o nome de tetraquarks, pentaquarks, etc. [1], mas até hoje nenhum dado experimental comprovou inequivocamente sua existência. Um forte indício de que o confinamento deve ser realmente uma característica da teoria foi obtido ao demonstrar-se que o conceito de liberdade assintótica deve estar presente na QCD [2, 3, 4]. Segundo este conceito o acoplamento das interações fortes, α_s , teria um comportamento inverso ao do acoplamento da QED: a altas energias sua intensidade diminui, enquanto que a baixas energias toma valores cada vez maiores. Esta característica, que foi verificada experimentalmente [5], tem como consequência imediata que a altas energias torna-se possível o uso de teoria de

perturbação. Diminuindo-se a energia, entretanto, o acoplamento cresce muito rapidamente e o tratamento perturbativo se torna inviável. A caracterização do vácuo da QCD é, portanto, uma das maiores dificuldades desta teoria atualmente. Desta maneira, quando estão confinados em hádrons, o baixo valor de α_s faz com que os quarks se comportem como se estivessem quase livres. Quando se afastam, α_s assume valores altíssimos, sendo energeticamente favorável a criação de um novo par, tornando-se impossível os quarks escaparem e serem observados livres.

Recentemente, porém, surgiram evidências de que estas partículas elementares possam se apresentar na natureza em um estado diferente. Acredita-se que em condições extremas de temperatura ou pressão os quarks e glúons possam ser encontrados desconfinados, formando o chamado plasma de quarks e glúons, ou QGP [6]. Este plasma seria como um gás interagente com fortes efeitos coletivos da matéria que o compõe. Esse estado, dito desconfinado, não está em desacordo com o conceito de confinamento. Ao contrário disto, os efeitos coletivos fazem com que as partículas interajam fortemente umas com as outras, formando o equivalente a um grande hádron contendo todas elas. Evidências deste novo estado da matéria advêm de experimentos em aceleradores de partículas [7] e simulações na rede [8], além de observações astrofísicas e teorias cosmológicas do universo primordial apontando na mesma direção [9].

Surge, então, o interesse em investigar a transição da fase hadrônica para esta fase de plasma. Nesta tese, nosso objetivo é estudar os efeitos da dissipação e ruído nas escalas de tempo relevantes para a dinâmica em tempo real desta transição. Trabalharemos aqui, com um sistema simplificado, onde incluiremos apenas glúons. Este sistema possui uma simetria $Z(N)$ que é quebrada espontaneamente quando ele passa para a fase desconfinada. Assim, podemos acompanhar a evolução temporal do nosso sistema através de um parâmetro de ordem que assume diferentes valores a depender da simetria estar quebrada ou restaurada, ou seja, assume diferentes valores para cada uma das duas fases de interesse. Através de argumentos relacionados à sua classe de universalidade, mostra-se que o parâmetro de ordem neste caso é o mesmo que para sistemas de spin $Z(N)$, o *loop* de Polyakov. A partir deste parâmetro de ordem, vários modelos efetivos podem ser desenvolvidos, chegando-se a um potencial efetivo e a uma Lagrangeana efetiva em função deste parâmetro. Aqui utilizaremos dois modelos para a teoria de puro gauge $SU(N)$. O primeiro modelo, desenvolvido por Ogilvie *et al* [10, 11], faz uso de cálculos perturbativos para o potencial efetivo e acrescenta

de forma *ad hoc* uma escala através de um termo de massa. O segundo, desenvolvido por Pisarski e colaboradores [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18], através de argumentos relacionados à simetria $Z(N)$ do sistema chega a uma forma para o potencial, ajustando os coeficientes com dados obtidos de QCD na rede.

Para acompanhar a evolução temporal, incluindo efeitos de dissipação e ruído, utilizamos uma descrição de Langevin baseada em resultados microscópicos obtidos no formalismo de teoria de campos fora do equilíbrio [19, 20, 21]. A situação representada é a de um potencial com simetria $Z(N)$ restaurada sofrendo uma mudança brusca de temperatura e evoluindo para uma forma com simetria quebrada. Como consequência, o vácuo da teoria se move e o sistema procura ir para este novo vácuo. Realizamos simulações em tempo real [22, 23] de um sistema de puro gauge em uma rede de 64^3 sítios, partindo de seu antigo mínimo, agora um ponto metaestável, que, obedecendo à equação de Langevin, evolui para o novo mínimo. Comparamos simulações realizadas sem ruído e sem dissipação, sem ruído e com dissipação, e com ambos. Os resultados mostram efeitos consideráveis, tanto da dissipação quanto do ruído, nas escalas de tempos relevantes.

Esta tese está dividida da seguinte maneira. No Capítulo 2, apresentamos o parâmetro de ordem que será usado na construção dos modelos efetivos. Para isto, fazemos uma breve discussão de alguns aspectos das teorias de gauge, que fornecem as bases para a definição deste parâmetro de ordem. Através do estudo de algumas simetrias do sistema, mostramos quando este parâmetro de ordem é válido e que valores ele deve assumir em cada uma das fases. No terceiro Capítulo descrevemos os dois modelos mencionados acima com algum detalhe. No Capítulo 4, obtemos a equação de Langevin primeiramente em uma análise clássica. Em seguida, em mecânica quântica obtemos uma equação de Langevin generalizada através de um tratamento fora do equilíbrio. Finalmente, comentamos as diferenças para o caso da equação de Langevin obtida através de uma análise fora do equilíbrio em teoria quântica de campos e introduzimos os contratermos necessários para obtermos uma teoria sem divergências. O Capítulo 5 apresenta detalhes das simulações da evolução temporal do parâmetro de ordem e uma discussão de nossos resultados e suas implicações para a fenomenologia. Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos observações finais e conclusões que pudemos extrair deste trabalho. O Apêndice A descreve os métodos numéricos empregados nas simulações.

Capítulo 2

A transição de desconfinamento

2.1 Discussão sobre a fenomenologia

A teoria aceita atualmente para a descrição das interações fortes é conhecida como Cromodinâmica Quântica, ou QCD. Segundo esta, as interações fortes são descritas por uma teoria de gauge não-Abeliana de quarks e glúons, contendo carga de cor, confinados em estados ligados que são singletos de cor. Uma das características da QCD que a tornam uma teoria bem sucedida é a capacidade de reproduzir o comportamento quase não-interagente dos quarks a pequenas distâncias, comportamento este conhecido como liberdade assintótica. Resultados de QCD perturbativa a altas energias também apresentam boa concordância com resultados experimentais, o que tem aumentado a confiança na teoria. Além disso, a QCD também é consistente com resultados fenomenológicos das interações fortes até então observados, como confinamento de cor, simetria quiral aproximada, e o espectro de hádrons. Ferramentas comumente usadas para este estudo, além da teoria de perturbação, são aproximações semiclássicas e teorias de gauge na rede.

Tendo então uma teoria que tem-se mostrado satisfatória para as interações fortes, surge o interesse em estudá-la em condições não usuais. Em especial, temos interesse em estudá-la em condições extremas de temperatura e pressão, por acreditar-se que tais condições ocorram em determinadas situações na natureza, e tornem possível a existência de um novo estado da matéria, onde encontraríamos quarks e glúons desconfinados. Este estado é conhecido como

plasma de quarks e glúons. Um dos lugares onde seria possível a existência de tais condições é o interior das estrelas de nêutrons, onde acredita-se que possamos encontrar densidades significativamente maiores que a densidade nuclear [24]. Normalmente estas estrelas possuem densidade central da ordem de 4–5 vezes a densidade de saturação, chegando a ter 10–15 vezes no caso de quarks desconfiados estarem presentes. Outra possibilidade ocorre na colisão de íons pesados a altas energias, onde estados de altas temperaturas e densidades de energia podem ser produzidos. Tais colisões têm sido realizadas em experimentos do RHIC-BNL [7] e em breve serão realizadas também no LHC-CERN a energias ainda mais altas. Por último, temos ainda que modelos cosmológicos atuais indicam que frações de segundo depois do *Big Bang* o universo teria temperaturas comparáveis à energia de repouso de um nucleon [9]. Em todos esses casos, nosso interesse está focado na natureza da fase da matéria hadrônica. Se, conforme acredita-se, essas situações levam a matéria a um estado desconfiado de quarks e glúons, um ponto que merece atenção especial é a transição da fase hadrônica para a fase de plasma. Para tal tem-se dedicado esforços tanto teóricos quanto experimentais e numéricos, os últimos através de simulações de QCD na rede [8]. A simulação na rede tem sido uma ferramenta essencial no estudo da QCD como um todo, e em especial na transição de desconfiamento. Devido ao comportamento da constante de acoplamento da QCD, que assume valores altos a energias baixas, não é possível usar a teoria de perturbação nesta escala de energia, e a rede aparece como alternativa para cálculos exatos, fornecendo valores quantitativos para, por exemplo, temperaturas de transição, constantes de acoplamento, etc. Para cálculos em sistemas de puro gauge, os resultados são muito bons e consideravelmente confiáveis. Quando inclui-se férmions, os resultados já apresentam alguns problemas, mas ainda é possível extrair informações relevantes da rede. Quando trabalha-se com férmions com massas próximas aos valores físicos, entretanto, sérios problemas técnicos aparecem e vários esforços têm sido feitos com o objetivo de melhorar esta situação. Os resultados para puro gauge, porém, têm muito mais utilidade do que um simples exercício acadêmico devido a um curioso resultado, conhecido como independência de sabor. Quando fazemos um gráfico da pressão p normalizada pela pressão de gás ideal p_{SB} em função da temperatura T normalizada pela temperatura crítica T_c , encontramos uma curva praticamente universal para qualquer número de sabores de quarks presentes, $N_f = 0, 2, 3, 4, \dots$. Desta forma, o estudo de sistemas de puro gauge tem mostrado grande utilidade na compreensão de situações mais

complexas.

No estudo fenomenológico, um caminho possível para se investigar a dinâmica da transição de fase é através de parâmetros de ordem adequados. Este é o caminho que adotaremos neste trabalho. Neste capítulo, vamos primeiramente definir uma grandeza, conhecida como linha de Wilson, que surge naturalmente quando requeremos que uma teoria seja invariante sob transformações de gauge locais. Feito isto, partiremos para a análise das simetrias do nosso sistema e obteremos o parâmetro de ordem desejado para a transição de desconfinamento em função da linha de Wilson. De posse deste parâmetro de ordem, torna-se então possível a construção de teorias efetivas para o nosso sistema.

2.2 A geometria da invariância de gauge e o *loop* de Wilson

As simetrias e leis de conservação são pontos fundamentais na construção de uma teoria e nos fornecem importantes informações sobre a natureza do nosso sistema. Ao representarmos um sistema através de uma Lagrangeana, estas simetrias devem se manifestar na forma de uma invariância da ação sob determinadas transformações. Podemos dividir tais transformações em dois tipos: globais ou locais. Se a transformação é a mesma para qualquer ponto do sistema, ela recebe o nome de global. Se cada ponto do sistema obedece a uma diferente lei de transformação, ou seja, se a transformação é uma função do ponto onde a estamos aplicando, ela recebe o nome de local. Ao construir uma Lagrangeana invariante sob transformações locais torna-se necessário, para garantir a consistência das nossas expressões, introduzir novos campos. Estes campos são conhecidos como campos de gauge [25, 26, 27]. Historicamente a invariância de gauge, como é conhecida esta invariância sob transformações locais, era usada somente como uma maneira de garantir a consistência das teorias propostas. Entretanto, atualmente ela é a base para a construção das teorias das interação fundamentais. A propriedade de invariância de gauge é postulada inicialmente e toda a teoria é então construída condicionada a esta restrição.

Nesta seção, vamos mostrar como os campos de gauge emergem naturalmente quando construímos uma Lagrangeana invariante de gauge. Para a introdução desses campos de

gauge, é necessária a definição de uma grandeza que recebe o nome de comparador, que estará relacionada à linha de Wilson já mencionada anteriormente.

Começemos, então, com um exemplo simples. Consideremos a Lagrangeana de um campo de Dirac livre:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \quad (2.1)$$

Esta Lagrangeana é invariante sob transformações do tipo:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x). \quad (2.2)$$

Esta transformação representa uma rotação de um ângulo α fixo, ou seja, uma fase. Como todos os pontos do sistema obedecem à mesma lei de transformação, temos aqui uma transformação global. Generalizando agora: se, ao invés de ser um ângulo fixo, α for uma função de x , ficamos com a seguinte transformação:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad (2.3)$$

e a Lagrangeana não é mais invariante. O termo de massa continua sendo invariante, entretanto passamos a ter problemas em como definir a maneira com que o termo contendo a derivada se transforma. Partindo da definição de derivada de $\psi(x)$ na direção do vetor n^μ , temos:

$$n^\mu\partial_\mu\psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x + \epsilon n) - \psi(x)]. \quad (2.4)$$

Em uma teoria invariante local, $\psi(x + \epsilon n)$ e $\psi(x)$ transformam-se de maneira diferente e torna-se impossível definir uma lei de transformação. Para podermos realizar a subtração presente na definição acima, precisamos introduzir um fator que compense esta diferença de comportamento entre um ponto e seu vizinho. A maneira mais simples é definir uma quantidade escalar $U(y, x)$ que dependa dos dois pontos e tenha a seguinte lei de transformação:

$$U(y, x) \rightarrow e^{i\alpha(y)}U(y, x)e^{-i\alpha(x)}. \quad (2.5)$$

Requeremos, ainda, que quando a separação entre os pontos for zero tenhamos $U(y, y) = 1$. Em geral, podemos considerar o fator $U(y, x)$ como uma fase pura, $U(y, x) = \exp[i\phi(y, x)]$.

Assim, as grandezas $\psi(y)$ e $U(y, x)\psi(x)$ passam a obedecer à mesma lei de transformação e a nossa derivada passa a ser bem definida e possuir interpretação geométrica.

Utilizando o fator que acabamos de definir em uma nova definição da derivada, obtemos:

$$n^\mu D_\mu \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x + \epsilon n) - U(x + \epsilon n, x)\psi(x)]. \quad (2.6)$$

Esta derivada é conhecida como derivada covariante. Precisamos, agora, escrever uma expressão para o operador $U(y, x)$, que passaremos a chamar de comparador, em pontos separados por distâncias infinitesimais. Expandindo $U(y, x)$ em torno da unidade:

$$U(x + \epsilon n, x) = 1 - ie\epsilon n^\mu A_\mu(x) + O(\epsilon^2). \quad (2.7)$$

O coeficiente do deslocamento ϵn^μ é um novo campo vetorial $A_\mu(x)$. Este campo, representando o limite infinitesimal de um comparador de simetria local, é chamado de conexão.

Assim, a derivada covariante toma a seguinte forma:

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + ieA_\mu \psi(x). \quad (2.8)$$

Levando (2.7) em (2.5), vemos que A_μ transforma-se como:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (2.9)$$

Podemos verificar a consistência das expressões obtidas acima transformando a derivada covariante $D_\mu \psi(x)$ de acordo com as expressões (2.2) e (2.9):

$$\begin{aligned} D_\mu \psi(x) &\rightarrow \left[\partial_\mu + ie \left(A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \right) \right] e^{i\alpha(x)} \psi(x) \\ &= e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi(x) = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x), \end{aligned} \quad (2.10)$$

o que mostra que a derivada covariante transforma-se da mesma maneira que o campo de Dirac ψ . De posse desses resultados, podemos incluir na Lagrangeana termos contendo derivadas de qualquer ordem, sendo necessário apenas substituí-las por derivadas covariantes.

Todo o desenvolvimento acima foi possível porque postulamos invariância sob rotações com fase local. Em 1954, Yang e Mills propuseram que este procedimento poderia ser

generalizado para invariância sob qualquer grupo de simetria contínuo [28]. Com esse intuito, vamos considerar em seguida como nossa simetria local o grupo de cobertura de rotação tridimensional, $SU(2)$, e depois generalizar para o caso de uma simetria $SU(N)$ arbitrária.

Consideremos, então, um dubleto de campos de Dirac:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

onde os campos transformam-se um no outro sob rotações tridimensionais do tipo:

$$\psi \rightarrow \exp\left(i\alpha^j \frac{\sigma^j}{2}\right) \psi. \quad (2.12)$$

Aqui σ^i são as matrizes de Pauli, geradores de $SU(2)$.

Generalizamos agora a nossa simetria e fazemos com que o ângulo α seja uma função de x . Escrevemos esta transformação como:

$$\psi(x) \rightarrow V(x)\psi(x), \quad \text{onde } V(x) = \exp\left(i\alpha^j(x) \frac{\sigma^j}{2}\right). \quad (2.13)$$

A diferença do nosso caso atual para o caso anterior é que a simetria com a qual estamos trabalhando agora tem três direções perpendiculares possíveis de rotação que não comutam entre si. Tais teorias, onde temos matrizes não-comutantes, são conhecidas como teorias de gauge não-Abelianas.

Assim como no caso Abelianas, estamos interessados em construir uma derivada covariante que se transforme de uma maneira simples. Vamos, assim como antes, definir um comparador. Como agora nosso campo $\psi(x)$ é um objeto de duas componentes, nosso comparador $U(y, x)$ deve ser uma matriz 2×2 . Ficamos, então, com a seguinte lei de transformação:

$$U(y, x) \rightarrow V(y)U(y, x)V^\dagger(x) \quad (2.14)$$

onde $V(x)$ tem a forma de (2.13), e onde fazemos novamente $U(y, y) = \mathbf{1}$. Perto de $U = \mathbf{1}$ qualquer matriz pode ser expandida em termos dos geradores de $SU(2)$, obtendo-se para uma separação infinitesimal:

$$U(x + \epsilon n, x) = \mathbf{1} + i g \epsilon n^\mu A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} + O(\epsilon^2), \quad (2.15)$$

onde colocamos em evidência uma constante g por conveniência. Levando esta expressão na definição anterior da derivada covariante, (2.6), chegamos à seguinte expressão para a derivada covariante associada à simetria local $SU(2)$:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^j \frac{\sigma^j}{2}. \quad (2.16)$$

Esta derivada covariante exige três campos vetoriais, um para cada gerador do grupo de transformações.

Novamente, neste caso é possível verificar que a derivada covariante se transforma da mesma maneira que o campo $\psi(x)$:

$$D_\mu \psi \rightarrow \left(1 + i\alpha^i \frac{\sigma^i}{2}\right) D_\mu \psi \quad (2.17)$$

a menos de termos de ordens superiores.

O desenvolvimento acima pode ser generalizado do grupo $SU(2)$ para qualquer outro grupo de simetria contínuo $SU(N)$. Considerando um grupo representado por uma série de matrizes unitárias $N \times N$, teremos os campos $\psi(x)$ transformando-se como:

$$\psi(x) \rightarrow V(x)\psi(x). \quad (2.18)$$

Considerando distâncias infinitesimais podemos expandir $V(x)$ em torno da unidade, em função dos geradores do grupo de simetria, que serão representados por matrizes Hermitianas t^a :

$$V(x) = \mathbf{1} + i\alpha^a(x)t^a + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (2.19)$$

Repetimos, então, todo o tratamento realizado para $SU(2)$ substituindo as matrizes de Pauli pelos geradores do grupo em questão:

$$\frac{\sigma^i}{2} \rightarrow t^a \quad (2.20)$$

que satisfazem relações de comutação da seguinte forma:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c, \quad (2.21)$$

onde f^{abc} é o fator de estrutura. Seguindo o desenvolvimento chegamos à derivada covariante generalizada:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a. \quad (2.22)$$

Dessa forma, temos condições de incluir termos contendo derivadas de qualquer ordem na nossa Lagrangeana.

Concentrando agora nossa atenção no comparador $U(y, x)$, veremos que ele apresenta propriedades interessantes aplicáveis a teorias de gauge na rede. Para estudar essas propriedades, vamos então discutir alguns pontos de teorias na rede, com ênfase no papel do comparador.

Como dito anteriormente, a rede surge como uma alternativa viável em cálculos de QCD [29], já que não é possível realizar cálculos perturbativos a temperaturas razoavelmente próximas da temperatura crítica [30, 31]. Nosso próximo passo será mostrar como transferir uma teoria do contínuo para a rede, discretizando os pontos no espaço-tempo. Como temos em mente a QCD, o grupo de transformações em questão será o $SU(3)$.

A representação em integral de caminho do valor esperado de um operador quântico a temperatura finita é:

$$\langle \mathcal{O} \rangle \equiv \frac{\text{Tr} \mathcal{O} e^{-\beta H}}{\text{Tr} e^{-\beta H}} = \frac{\int \mathcal{D}A^\mu(\vec{x}, t) \mathcal{O}(A) \exp \left[- \int_0^\beta dt \int_V d^3x \mathcal{L}(A) \right]}{\int \mathcal{D}A^\mu(\vec{x}, t) \exp \left[- \int_0^\beta dt \int_V d^3x \mathcal{L}(A) \right]} \quad (2.23)$$

onde \mathcal{L} é a densidade da Lagrangeana, $\mathcal{O}(A)$ é o operador \mathcal{O} como um funcional dos campos de gauge A , β é o inverso da temperatura e V é o volume espacial. Os campos bosônicos são periódicos em β em tempo Euclideano com período β .

Para transferir essa teoria para a rede, colocamos os campos em sítios de uma rede espaço-temporal, com espaçamento a . O número de links na direção temporal é N_t e na direção espacial N_s . O inverso da temperatura é dado por $\beta = N_t a$ e o volume por $V = (N_s a)^3$.

Precisamos, agora, do comparador $U(y, x)$ para que os sítios da nossa rede se transformem da mesma maneira sob uma transformação de gauge $SU(N)$. Este comparador será chamado variável de link por estabelecer a conexão entre os sítios, e será definido por:

$$U^\mu(\vec{x}) \equiv e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{A}^\mu(\vec{x})}. \quad (2.24)$$

Aqui $U^\mu(\vec{x})$ representa um link saindo do sítio \vec{x} na direção $\hat{\mu}$, e $\vec{\tau}$ são os geradores do grupo $SU(N)$ na representação fundamental. Podemos escrever a Lagrangeana do sistema em função dessas variáveis de link, tal que ela seja invariante sob transformações do tipo:

$$U^\mu(\vec{x}) \rightarrow V(\vec{x} + a\hat{\mu})U^\mu(\vec{x})V^{-1}(\vec{x}). \quad (2.25)$$

Esta transformação é um elemento do grupo de gauge:

$$V(\vec{x}) = e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\Lambda}(\vec{x})}. \quad (2.26)$$

Substituímos então $\mathcal{D}A$ por $\mathcal{D}U$ na expressão (2.23) e temos a integral de caminho definida na rede onde é possível calculá-la.

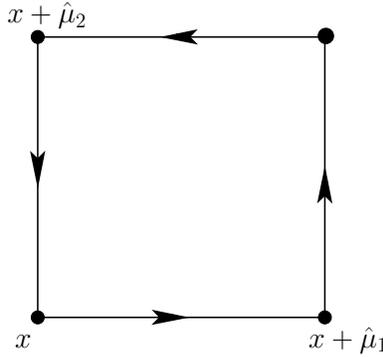


Figura 2.1: Caminho fechado formado por uma sequência de comparadores $U(x, y)$.

Para um caminho fechado C , conforme mostrado na Figura 1, teremos um produto de variáveis de link da seguinte forma:

$$W[C] = U^{\hat{\mu}_1}(\vec{x})U^{\hat{\mu}_2}(\vec{x} + \hat{\mu}_1)U^{\dagger\hat{\mu}_1}(\vec{x} + \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)U^{\dagger\hat{\mu}_2}(\vec{x} + \hat{\mu}_2), \quad (2.27)$$

ou escrevendo como um produtório:

$$W[C] = \prod_{\vec{x}, \hat{\mu} \in C} U^{\hat{\mu}}(\vec{x}). \quad (2.28)$$

Aqui o produtório é realizado ordenadamente em torno do caminho fechado C . Considerando agora caminhos que sejam paralelos ao eixo temporal, definimos a linha de Wilson como:

$$L(x) = \prod_{n=1}^{N_i} (U_{x+n\hat{i},0}). \quad (2.29)$$

Tomando o limite contínuo temos o *loop* de Polyakov [32]:

$$L(x) = T \exp \left[i \int_0^\beta dt \vec{\tau} \cdot \vec{A}^0(\vec{x}, t) \right]. \quad (2.30)$$

onde T denota ordenamento de caminho. Este operador entretanto não é invariante de gauge. Para torná-lo invariante tomamos o traço, ficando com:

$$l(\vec{x}) = \text{tr} L(\vec{x}) \quad (2.31)$$

Este operador contínuo fornecerá, como veremos adiante, o parâmetro de ordem da transição de desconfiamento no caso de puro gauge. Para chegar a este resultado vamos, em seguida, estudar algumas simetrias presentes na QCD.

2.3 Simetrias $Z(N)$ em $SU(N)$ e o *loop* de Polyakov

A ação da QCD incluindo quarks sem massa tem a forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{tr} G_{\mu\nu}^2 + \bar{q} i \gamma^\mu D_\mu q, \quad (2.32)$$

onde:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu, \quad e \quad G_{\mu\nu} = \frac{1}{-ig} [D_\mu, D_\nu] \quad (2.33)$$

e $A_\mu = A_\mu^a t^a$, com t^a sendo os geradores de $SU(N)$ normalizados como $\text{tr}(t^a t^b) = \delta^{ab}/2$. Esta Lagrangeana é invariante sob transformações de gauge locais $SU(N)$:

$$D_\mu \rightarrow \Omega^\dagger D_\mu \Omega, \quad q \rightarrow \Omega^\dagger q, \quad (2.34)$$

Sendo Ω um elemento de $SU(N)$ que deve satisfazer as condições:

$$\Omega^\dagger \Omega = \mathbf{1}, \quad \det \Omega = 1. \quad (2.35)$$

A transformação de gauge mais simples possível obedecendo tais condições é uma fase constante vezes a matriz identidade:

$$\Omega_c = e^{i\phi} \mathbf{1}. \quad (2.36)$$

Como Ω é elemento de $SU(N)$ deve ter o determinante unitário, o que exige

$$\phi = \frac{2\pi j}{N} \quad j = 0, 1, 2, \dots, (N-1). \quad (2.37)$$

Como j é inteiro, temos aqui um subgrupo de rotações discretas em $SU(N)$, com matrizes que comutam entre si. Os subgrupos com elementos comutantes pertencentes a grupos não-Abelianos são chamados centro do grupo e, no caso de $SU(N)$ o centro coincide com o grupo $Z(N)$.

A Lagrangeana da QCD é invariante sob rotações $Z(N)$, incluindo quarks ou não. Entretanto, quando incluímos quarks, $Z(N)$ deixa de ser uma simetria da teoria pois viola as condições de contorno exigidas, conforme mostraremos a seguir.

Trabalhando em um espaço-tempo Euclideano a temperatura T , a coordenada do tempo imaginário será periódica em $\tau : 0 \rightarrow \beta = 1/T$. Em tempo imaginário, os campos devem satisfazer determinadas condições de contorno derivadas da estatística quântica. Como bósons, os glúons devem ser periódicos em τ , e os quarks, sendo férmions, devem ser anti-periódicos:

$$A_\mu(\vec{x}, \beta) = +A_\mu(\vec{x}, 0) \quad , \quad q(\vec{x}, \beta) = -q(\vec{x}, 0). \quad (2.38)$$

Qualquer transformação de gauge que seja periódica em τ obedecerá a essas condições de contorno. Entretanto, como foi mostrado por 't Hooft [33], as transformações que satisfazem tais condições são mais gerais, podendo ser periódicas a menos de um elemento do centro do grupo:

$$\Omega(\vec{x}, \beta) = \Omega_c \quad , \quad \Omega(\vec{x}, 0) = 1 \quad (2.39)$$

onde Ω_c é um elemento de $Z(N)$ representado por:

$$\Omega_c = e^{2\pi i n/N} \mathbf{1} \quad (2.40)$$

com n inteiro e $\mathbf{1}$ a matriz unitária. Os campos de gauge, estando na representação adjunta, são invariantes sob estas transformações, enquanto que os quarks, estando na representação fundamental, não são:

$$A^\Omega(\vec{x}, \beta) = \Omega_c^\dagger A_\mu(\vec{x}, \beta) \Omega_c = +A_\mu(\vec{x}, 0), \quad (2.41)$$

$$q^\Omega(\vec{x}, \beta) = \Omega_c^\dagger q(\vec{x}, \beta) = e^{-i\phi} q(\vec{x}, \beta) \neq -q(\vec{x}, 0), \quad (2.42)$$

onde usamos o fato de que Ω_c , como uma constante de fase vezes a matriz unitária, comuta com qualquer matriz de $SU(N)$. A partir desse resultado, podemos ver que teorias de puro gauge $SU(N)$ possuem simetria $Z(N)$ que é quebrada com a adição de quarks.

Analisemos, agora, o comportamento do *loop* de Polyakov quanto às simetrias de uma teoria de puro gauge. Sabemos que ele é invariante sob transformações periódicas no tempo do tipo:

$$V(\vec{x}, \beta) = V(\vec{x}, 0). \quad (2.43)$$

Porém, como já foi ressaltado acima, basta que as transformações sejam periódicas sob elementos do centro do grupo de gauge:

$$V(\vec{x}, \beta) = V(\vec{x}, 0) \Omega_c, \quad (2.44)$$

onde Ω_c tem a forma da Equação (2.40)

Apesar de a Lagrangeana ser invariante sob estas transformações, o *loop* de Polyakov não é, transformando-se da seguinte forma:

$$(\vec{x}) \rightarrow e^{2\pi i n/N} l(\vec{x}). \quad (2.45)$$

Seu valor esperado $l_0 = \langle l(x) \rangle$, portanto, pode ser usado como um parâmetro de ordem para a simetria $Z(N)$, pois deve ser zero no caso da simetria estar restaurada, e ser diferente de zero se ela for quebrada.

A temperaturas muito altas a teoria é quase a de um gás ideal, com a constante de acoplamento $g \approx 0$. Ao invés de termos para o vácuo $\langle l \rangle \sim 1$ apenas, temos um vácuo N -degenerado:

$$\langle l \rangle = \exp\left(\frac{2\pi i n}{N}\right) l_0, \quad n = 0, 1, \dots, (N-1), \quad (2.46)$$

onde $l_0 \rightarrow 1$ quando $T \rightarrow \infty$. Assim, para altas temperaturas ficamos com um vácuo N -degenerado, com qualquer valor para n igualmente válido. Esta situação indica a quebra espontânea da simetria inicial, quando tínhamos apenas um mínimo. A Figura 2.2, indica os três mínimos no plano complexo, equidistantes do mínimo inicial localizado na origem para o caso $N = 3$.

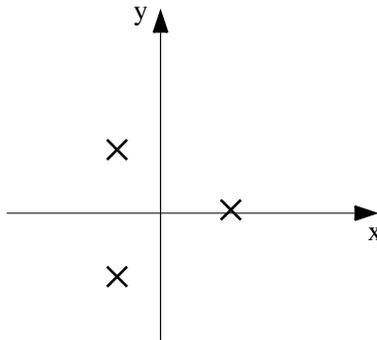


Figura 2.2: Representação dos vácuos degenerados no plano complexo a temperaturas altas para $N = 3$

Como já citado, ficamos com:

$$l_0 = 0 \quad , \quad T < T_c \quad ; \quad l_0 > 0 \quad , \quad T > T_c. \quad (2.47)$$

Como usual, se L_0 muda continuamente em T_c a transição de fase é de segunda ordem; se L_0 dá um salto descontínuo em T_c a transição será de primeira ordem. Se L_0 , além de mudar continuamente em T_c , tiver também derivada contínua a transição será um *cross-over*. Este caso é bem similar ao caso de spins $Z(N)$, com a peculiaridade que aqui a simetria é quebrada em *altas* temperaturas.

Podemos agora entender a quebra da simetria $Z(N)$ com a presença de quarks dinâmicos. No caso de uma teoria de puro gauge, temos N vácuos degenerados com pressões iguais. Adicionando quarks, o único vácuo estável passa a ser o que tem $\langle L \rangle$ real, ou seja, $j = 0$. Os outros vácuos, com $j \neq 0$, têm pressão menor que a do vácuo estável, sendo termodinamicamente instáveis. Para uma descrição mais elucidativa vide Ref.[13].

Usualmente o *loop* de Polyakov é associado à energia livre de um quark teste [34]. Esta

interpretação surge da relação

$$\langle L \rangle = \exp(-F_{teste}/T). \quad (2.48)$$

Assim, quando a energia livre é infinita, o valor esperado de L é zero, ou seja, uma energia infinita necessária para separar um par quark anti-quark implica em confinamento. Podemos também ver este objeto como um propagador. Se partimos da representação de Feynman para o propagador como uma soma sobre caminhos:

$$\int ds \left(\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + m \right) + ig \int ds A_\mu \frac{dx^\mu}{ds} \quad (2.49)$$

ao fazer a massa tender a infinito obtemos uma linha reta, e:

$$\exp \left(ig \int A_\mu \frac{dx^\mu}{ds} ds \right) \quad (2.50)$$

passa a ser a linha de Wilson, onde só consideramos $x^\mu = x^0$.

Uma interpretação alternativa é dada em [13]. Argumenta-se que a relação (2.48) não pode ser completamente verdadeira, uma vez que para $N = 2$ é possível termos o lado esquerdo da equação positivo ou negativo e em $N = 3$ ele deve ser complexo, e a energia livre deve ser sempre real, e conseqüentemente o lado direito deve ser positivo. O autor propõe então que o *loop* de Polyakov seja associado ao traço do propagador para um quark de teste. Discussões interessantes sobre a energia livre de um quark de teste estão em [34, 35]. Na Ref. [35] são apresentados resultados recentes de simulações na rede para o comportamento da energia livre de um quark teste e valor esperado do *loop* de Polyakov como função da temperatura.

Capítulo 3

Modelos efetivos para a transição de desconfinamento

3.1 Introdução

Como citado no capítulo anterior, a equação de estado do plasma de quarks e glúons é de grande interesse em várias áreas da física, tais como astrofísica, cosmologia e física de colisões de íon pesados ultra-relativísticos, onde alguns experimentos encontram-se em curso no RHIC-BNL e em breve no LHC-CERN. Um caso simplificado da QCD completa seria considerar um plasma somente de glúons, sem quarks dinâmicos, ou seja, uma teoria de puro gauge $SU(N)$. Esta simplificação nos leva a um modelo onde os parâmetros de ordem e vários outros observáveis da teoria podem ser caracterizados precisamente [32, 33, 34, 36, 37]. Apesar de a princípio incompleta, pois obviamente uma caracterização de situações reais deve incluir o efeito de quarks, este não é somente um exercício acadêmico. Resultados recentes de QCD na rede indicam uma curiosa propriedade que vem sendo chamada de independência de sabor: se fizermos o gráfico de p/p_{SB} por T/T_c , as curvas resultantes são quase insensíveis à presença de quarks, ou ao número de sabores presentes. Esta característica ainda não possui uma explicação satisfatória. Contudo, dá um significado mais profundo e prático ao estudo da teoria de puro gauge [38].

Para a obtenção da equação de estado para um plasma de glúons, no âmbito de uma

teoria efetiva, temos duas ferramentas disponíveis: cálculos perturbativos e simulações na rede. Apresentaremos a seguir o desenvolvimento dos dois métodos mais utilizados atualmente para a obtenção de um potencial efetivo em função do parâmetro de ordem para uma teoria de puro gauge com simetria $SU(N)$. O primeiro usa cálculos perturbativos e introduz de forma *ad hoc* uma escala de massa. O segundo utiliza argumentos de simetria e invariância de gauge para obter uma forma geral para o potencial, extraíndo os coeficientes de resultados para a pressão do tipo Landau-Ginzburg obtidos na rede. Ambos os modelos visam a caracterizar melhor o sistema na região próxima à temperatura crítica, pois outros tratamentos comumente utilizados, como o *bag model* ou o modelo de Potts não apresentam resultados muito compatíveis com o que é observado na rede nesta região.

Os dois modelos que consideraremos a seguir obtêm as propriedades termodinâmicas do sistema em função do *loop* de Polyakov, já descrito no capítulo anterior.

3.2 Autovalores do *loop* de Polyakov e o potencial efetivo

Neste modelo, desenvolvido por Ogilvie *et al* [10, 11], os graus de liberdade relevantes serão os autovalores do *loop* de Polyakov. Após uma diagonalização do *loop*, podemos denotar os autovalores na representação fundamental por:

$$P_{jk} = \exp(i\theta_j)\delta_{jk}. \quad (3.1)$$

Considera-se, em uma aproximação de campo médio, que os autovalores do *loop* de Polyakov sejam constantes no espaço. Considera-se, também, que a energia livre seja uma função destes autovalores.

Em seguida, descreveremos, resumidamente, o cálculo convencional para a obtenção da energia livre de glúons a um *loop*, em um *background* onde o *loop* de Polyakov é constante. Depois introduziremos as mudanças propostas pelos autores.

Começaremos, então, com um cálculo perturbativo. Devido à propriedade de liberdade assintótica da teoria a expressão perturbativa para a energia livre deve ser válida para altas

temperaturas. Um cálculo perturbativo nos dará uma energia livre da forma:

$$f_{pert} = T^4 F(P, g(T)), \quad (3.2)$$

onde podemos notar que a função F depende somente de quantidades adimensionais: o *loop* de Polyakov P e o acoplamento $g(T)$, que varia com a temperatura. Calculando em ordem zero, obtemos uma expressão independente de $g(T)$ e recuperamos o comportamento de corpo negro a altas temperaturas. A um *loop*, a energia livre dos glúons, com A_0 constante, será:

$$f_{pert}(\theta) = \ln[\det(-D_{adj}^2)], \quad (3.3)$$

onde D_{adj} é a derivada covariante agindo nos campos na representação adjunta. Esta expressão pode ser escrita de uma maneira não-regularizada como:

$$f_{pert}(\theta) = \sum_{n \in Z} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{tr}_A \ln \left[\left(\frac{2\pi n}{\beta} - A_0 \right)^2 + \vec{k}^2 \right], \quad (3.4)$$

onde o traço está na representação adjunta e $\beta = 1/T$. Podemos reescrever a expressão acima como a soma de uma contribuição a temperatura zero, que é divergente, e uma contribuição a temperatura finita [30]:

$$f_{pert}(\theta) = 2 \sum_{n \in Z} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{tr}_A \left\{ \frac{1}{2} \omega_k + \ln[1 - \exp(-\beta\omega_k - i\beta A_0)] \right\}, \quad (3.5)$$

onde $\omega_k \equiv |\vec{k}|$ e o fator 2 vem da soma sobre estados de polarização. Subtraindo a contribuição relativa ao termo de temperatura zero, a energia livre pode ser escrita como:

$$f_{pert}(\theta) = \frac{1}{\beta} \sum_{j, k=1}^N 2 \left(1 - \frac{1}{N} \delta_{jk} \right) \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln[1 - e^{-\beta\omega_k + i\Delta\theta_{jk}}], \quad (3.6)$$

onde o fator envolvendo o delta de Kronecker projeta o estado de singleto. Definimos, também, a diferença dos autovalores na representação fundamental como $\Delta\theta_{jk} \equiv \theta_j - \theta_k$. Expandindo o logarítmo, ficamos com:

$$f_{pert}(\theta) = -\frac{1}{\beta} \sum_{j, k=1}^N 2 \left(1 - \frac{1}{N} \delta_{jk} \right) \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\beta\omega_k + in\Delta\theta_{jk}}. \quad (3.7)$$

Aqui, cada fator de n é associado a diferentes caminhos que percorrem o espaço-tempo na direção temporal Euclideana.

A integral em k pode ser calculada, dando:

$$f_{pert}(\theta) = -\frac{2}{\pi^2\beta^4} \sum_{j, k=1}^N \left(1 - \frac{1}{N}\delta_{jk}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} e^{in\Delta\theta_{jk}}. \quad (3.8)$$

Podemos notar que f é real pois $\Delta\theta_{jk} = -\Delta\theta_{kj}$. A soma em n pode ser feita fornecendo:

$$f_{pert}(\theta) = \frac{2T^4}{\pi^2} \sum_{j, k=1}^N \left(1 - \frac{1}{N}\delta_{jk}\right) \left[\frac{\pi^4}{3} B_4(|\Delta\theta_{jk}|_{2\pi}/2\pi) \right], \quad (3.9)$$

onde $|\Delta\theta|_{2\pi} \equiv |\Delta\theta| \bmod 2\pi$ e $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$ é o *Quarto Polinômio de Bernoulli* [39]. Isto nos leva ao resultado final [40, 41, 42]:

$$f_{pert}(\theta) = -2T^4 \sum_{j, k=1}^N \left(1 - \frac{1}{N}\delta_{jk}\right) \left[\frac{\pi^2}{90} - \frac{1}{48\pi^2} \times |\Delta\theta_{jk}|_{2\pi}^2 (|\Delta\theta_{jk}|_{2\pi} - 2\pi)^2 \right]. \quad (3.10)$$

Esta expressão reduz-se à expressão de corpo negro no caso em que $A_0 = 0$.

Assim, a expressão a um *loop* para a energia livre dos glúons se propagando em um *background* com o *loop* de Polyakov constante descreve um gás de glúons sempre em uma fase desconfiada, não existindo indicações de que cálculos em ordens mais altas mudariam estes resultados.

Para levar em conta a transição de desconfinamento, temos que adicionar termos a f_{pert} que sejam dominados pelo comportamento proporcional a T^4 a altas temperaturas e introduzam uma escala de massa na energia livre. Essa escala irá determinar a temperatura de desconfinamento T_d . Faremos isso acrescentando um termo de massa à expressão perturbativa. A nova escala livre introduzida pode ser fixada pelo conhecimento do valor da temperatura crítica, T_d , obtida em simulações na rede. Trabalharemos, também, com a expansão a alta temperatura da energia livre resultante. Tínhamos, anteriormente, para a energia livre a Eq. (3.7):

$$f(\theta) = -\frac{1}{\beta} \sum_{j, k=1}^N 2 \left(1 - \frac{1}{N}\delta_{jk}\right) \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\beta\omega_k + in\Delta\theta_{jk}}. \quad (3.11)$$

Adicionando o termo de massa, teremos a nova relação de dispersão $\omega_k = \sqrt{k^2 + M^2}$. Os primeiros dois termos da expansão não apresentam muita dificuldade para serem calculados.

Termos de ordem mais alta, como TM^3 e $M^4 \ln(T/M)$, podem ser obtidos através de métodos mais sofisticados [43]. Ficamos com o resultado:

$$f(\theta) = - \sum_{j, k=1}^N \frac{1}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{N} \delta_{jk} \right) \left[-\frac{2\pi^4}{3\beta^4} B_4 \left(\frac{\Delta\theta_{jk}}{2\pi} \right) - \frac{M^2 \pi^2}{2\beta^2} B_2 \left(\frac{\Delta\theta_{jk}}{2\pi} \right) \right], \quad (3.12)$$

onde o *Segundo Polinômio de Bernoulli* [39] é dado por $B_2(x) = x^2 - x + 1/6$ no intervalo $(0,1)$. Em uma forma mais explícita, $f(\theta)$ é dado por:

$$f(\theta) = -T^4 \sum_{j, k=1}^N \left(1 - \frac{1}{N} \delta_{jk} \right) \left[\frac{\pi^2}{45} - \frac{1}{24\pi^2} |\Delta\theta_{jk}|_{2\pi}^2 \times (|\Delta\theta_{jk}|_{2\pi} - 2\pi)^2 \right] + T^2 M^2 \sum_{j, k=1}^N \left(1 - \frac{1}{N} \delta_{jk} \right) \times \left[\frac{1}{12} + \frac{1}{8\pi^2} |\Delta\theta_{jk}|_{2\pi} (|\Delta\theta_{jk}|_{2\pi} - 2\pi) \right]. \quad (3.13)$$

Como a energia livre, por construção, é uma função dos autovalores do *loop* de Polyakov, f é invariante sob transformações de gauge.

É conveniente fazer uma parametrização para os ângulos de $SU(N)$. Para N par representamos as matrizes diagonais como $diag[\exp(i\phi_{N/2}), \dots, i\phi_1, -i\phi_1, \dots, -i\phi_{N/2}]$ com os autovalores ordenados de tal modo que $\pi \geq \phi_{N/2} \geq \dots \geq \phi_1 \geq 0$. Para N ímpar representamos as matrizes diagonais como $diag[\exp(i\phi_{(N-1)/2}), \dots, i\phi_1, 0, -i\phi_1, \dots, -i\phi_{(N-1)/2}]$, com autovalores novamente ordenados na forma $\pi \geq \phi_{(N-1)/2} \geq \dots \geq \phi_1 \geq 0$.

No caso de $SU(2)$, temos somente $\phi_1 = \phi$ e $\phi_{-1} = -\phi$. A baixas temperaturas, para termos $L = 0$, $\phi = \pi/2$. A expressão para a energia livre será:

$$f = -\frac{\pi^2 T^4}{15} + \frac{4T^4}{3\pi^2} \phi^2 (\phi - \pi)^2 + \frac{M^2 T^2}{4} + \frac{M^2 T^2}{\pi^2} \phi (\phi - \pi). \quad (3.14)$$

Esta equação tem uma simetria sob a transformação $\phi \leftrightarrow \pi - \phi$ associada à invariância sob transformações $Z(2)$. Torna-se então conveniente definir uma nova variável, $\psi = \pi/2 - \phi$, para deixar mais evidente a simetria $Z(2)$. Fazendo esta transformação, a energia livre toma a forma:

$$f = -\frac{\pi^2 T^4}{15} + \frac{T^4}{12\pi^2} (\pi^2 - 4\psi^2)^2 + \frac{M^2 T^2}{4} - \frac{M^2 T^2}{4\pi^2} (\pi^2 - 4\psi^2), \quad (3.15)$$

onde $\psi = 0$ representa a fase confinada. A transição de fase é de segunda ordem, em concordância com o argumento de universalidade do modelo de Ising [44]. Este potencial

está representado na Figura 3.1 para várias temperaturas. Neste gráfico, usamos o valor para a temperatura crítica obtido da rede de $T_d = 302\text{MeV}$ [45].

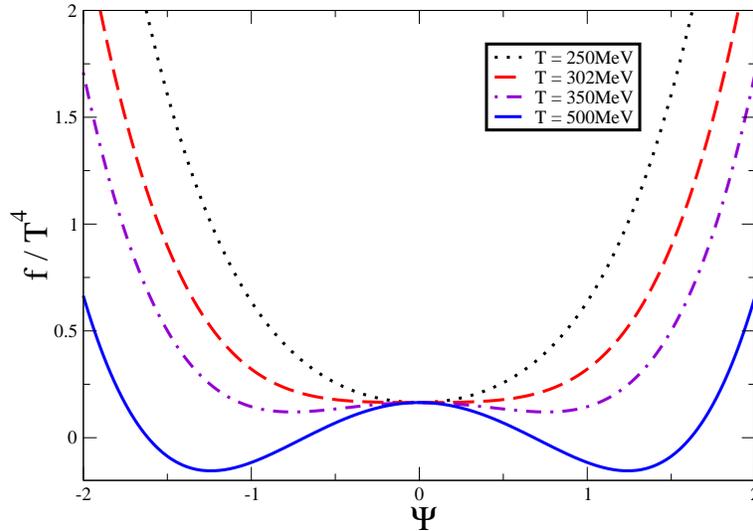


Figura 3.1: Potencial efetivo para $SU(2)$ para diferentes valores da temperatura.

O termo quadrático tem seu sinal invertido quando ocorre a transição de fase. Assim, seu coeficiente deve ser igual a zero na temperatura crítica e podemos relacionar a constante M com T_d , encontrando:

$$M = \pi(2/3)^{1/2}T_d \approx 2.5651T_d. \quad (3.16)$$

O mínimo $\psi_0(T)$ encontra-se em:

$$\psi_0(T) = \sqrt{\frac{2T^2\pi^2 - 3M^2}{8T^2}}. \quad (3.17)$$

Entretanto, quando calculamos a pressão a partir deste modelo, encontramos uma falha. A pressão, dada como $p = -f$, será:

$$p = \frac{1}{15}\pi^2T^4 - \frac{1}{4}M^2T^2 + \frac{3}{16\pi^2}M^4. \quad (3.18)$$

Podemos notar que a baixas temperaturas a pressão pode ser negativa e apresenta um comportamento não-monotônico. Para ser satisfatório, o modelo deveria ter pressão nula na fase

confinada, ou positiva e bem pequena se levarmos em conta efeitos de *glueballs* [40]. Este problema pode ser resolvido se acrescentarmos uma constante à energia livre que faça com que $p = 0$ em $T = T_d$. Isto custaria uma pequena mudança no gráfico da pressão para temperaturas pouco acima de T_d . Esta constante teria um papel similar ao da constante usada no *bag model*, mas com uma diferença importante: aqui, qualquer constante independente da temperatura será também independente dos autovalores do *loop* de Polyakov, dando a mesma contribuição tanto na fase confinada quanto na desconfiada.

Passando agora para o caso $SU(3)$, existem três autovalores do *loop* de Polyakov: $\phi_1 = \phi$, 0 e $\phi_{-1} = -\phi$. A baixas temperaturas temos $\phi = 2\pi/3$ nos dando $P = 0$. Seguindo os mesmos passos que no caso $SU(2)$, chegamos a uma energia livre da forma:

$$f = -T^4 \frac{8\pi^2}{45} + \frac{T^4}{6\pi^2} [8\phi^2(\phi - \pi)^2 + \phi^2(\phi - 2\pi)^2] + \frac{2T^2 M^2}{3} + \frac{T^2 M^2}{2\pi^2} [2\phi(\phi - \pi) + \phi(\phi - 2\pi)]. \quad (3.19)$$

Assim como em $SU(2)$, uma substituição de variáveis mostra-se útil. Aqui faremos $\psi = 2\pi/3 - \phi$, eliminando assim os termos lineares. Ficamos, então, com:

$$f = \frac{8\pi^2}{405} T^4 + \left(\frac{3}{2\pi^2} T^2 M^2 - \frac{2}{3} T^4 \right) \psi^2 - \frac{2}{3\pi} T^4 \psi^3 + \frac{3}{2\pi^2} T^4 \psi^4. \quad (3.20)$$

O gráfico para este potencial está representado na Figura 3.2. Usamos o valor para a temperatura crítica de $T_d = 263 MeV$ [46].

Notamos a presença de termos em ψ^3 , logo sabemos que a transição será de primeira ordem, conforme esperado. O mínimo global encontra-se em:

$$\psi_0 = \frac{\pi T + 3\sqrt{T^2 \pi^2 - 2M^2}}{6T}, \quad (3.21)$$

e podemos escrever o parâmetro M como uma função de T_d :

$$M = \frac{20\pi}{9} \frac{1}{\sqrt{10}} T_d \approx 2.2077 T_d. \quad (3.22)$$

Observando a Eq. (3.21), notamos que o ponto onde ψ passa a ter uma parte imaginária é o ponto espinodal, dado por $T_s = \sqrt{2}M/\pi$. Abaixo desta temperatura a fase desconfiada deixa de ser metaestável, pois a barreira desaparece.

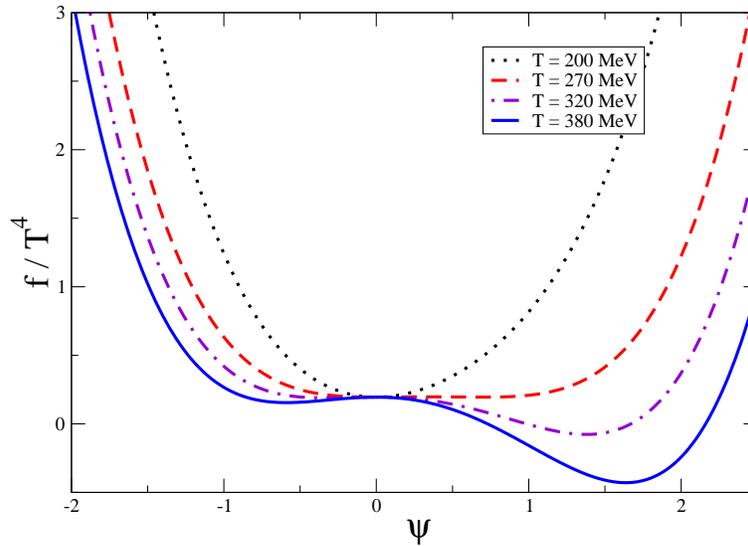


Figura 3.2: Potencial efetivo para $SU(3)$ segundo o modelo de autovalores do *loop* de Polyakov como parâmetro de ordem.

3.3 Plasma de glúons como um condensado de *loops* de Polyakov

Neste modelo efetivo, proposto por Pisarski e ampliado por Pisarski *et al* [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18], o potencial efetivo é obtido a partir de argumentos baseados na simetria $Z(3)$ do sistema. O parâmetro de ordem será o traço do *loop* e os coeficientes do potencial são obtidos fazendo comparações com resultados da rede para a pressão e a energia livre. O autor estuda diferentes representações para o *loop* de Polyakov e argumenta que termos contendo estas representações alternativas seriam correções em uma teoria mais completa.

Como já foi dito anteriormente, o *loop* de Polyakov usual sob transformações locais $Z(N)$ transforma-se como um campo com carga $Z(N)$ igual a 1, ou seja, o que resulta de uma transformação local $Z(N)$ aplicada ao campo será o campo multiplicado por um elemento do grupo $Z(N)$. Um campo com carga $Z(N)$ igual a 2 teria como resultado, após tal transformação, o próprio campo multiplicado por um elemento de $Z(N)$ ao quadrado. Com

carga 3 teríamos o campo multiplicado por um elemento do grupo ao cubo, e assim por diante. Estas cargas diferentes de um estão relacionadas com representações de ordem superior do *loop* de Polyakov. Construiremos, agora, esses *loops* de Polyakov com carga $Z(N)$ superior. Primeiramente, renomeamos $1/N \text{tr} L$, onde L é o *loop* com carga 1, como l_1 . Introduzimos a parte de \mathbf{L} com traço nulo:

$$\tilde{\mathbf{L}} \equiv \mathbf{L} - l_1 \mathbf{1}, \quad (3.23)$$

e definimos então o *loop* de Polyakov com carga 2 como:

$$l_2 \equiv \frac{1}{N} \text{tr} \tilde{\mathbf{L}}^2 = \frac{1}{N} \text{tr} \mathbf{L}^2 - \frac{1}{N^2} (\text{tr} \mathbf{L})^2 \quad (3.24)$$

onde

$$l_2 \rightarrow e^{2i\phi} l_2 \quad (3.25)$$

sendo que ϕ foi definido na eq (2.37). Existem dois operadores com carga 2, l_2 e l_1^2 . Podemos ainda definir operadores com cargas $Z(N)$ maiores, por exemplo carga 3:

$$l_3 = \frac{1}{N} \text{tr} \tilde{\mathbf{L}}^3, \quad (3.26)$$

mas neste modelo efetivo somente consideramos *loops* com carga até 2.

O procedimento para a obtenção de uma teoria efetiva neste caso é análoga ao procedimento adotado no modelo de Ising, pois ambos pertencem à mesma classe de universalidade. O *loop* de Wilson possui um valor em cada sítio, e um valor efetivo é obtido tomando-se a média em um domínio de tamanho pré-definido, resultando em uma variável contínua.

Consideremos a parte contendo termos de massa em uma Lagrangeana efetiva:

$$\mathcal{L}^{eff} = m_1^2 |l_1|^2 + m_2^2 |l_2|^2 + \dots \quad (3.27)$$

A possibilidade mais simples seria considerar que para $T > T_c$, onde a simetria é quebrada, o sistema é controlado por um termo de massa negativo envolvendo o *loop* de carga 1:

$$m_1^2 < 0 \quad , \quad T > T_c \quad , \quad m_1^2 > 0 \quad , \quad T < T_c, \quad (3.28)$$

conforme é feito habitualmente em uma descrição do tipo Landau-Ginzburg. As massas para os *loops* de ordens mais altas serão sempre positivas:

$$m_2^2 > 0 \quad , \quad m_3^2 > 0 \dots \quad (3.29)$$

Assim, o comportamento da transição seria controlado pelo *loop* de carga 1.

Alguns argumentos qualitativos podem ser dados para motivar esta consideração [12, 13]. Se, assim como consideramos, a massa do *loop* de carga um é negativa na fase desconfiada, então o vácuo será dado maximizando $|\text{tr}\mathbf{L}|^2$. Depois de uma rotação de gauge global, podemos escolher o valor esperado de \mathbf{L} como sendo uma matriz diagonal. Para maximizar $|\text{tr}\mathbf{L}|^2$, \mathbf{L} deve ser uma constante de fase vezes a matriz identidade. Como \mathbf{L} pertence a $SU(N)$, para seu valor esperado ser a matriz identidade ele deve ser um elemento do centro do grupo,

$$\langle \mathbf{L} \rangle = l_0 \exp(i\phi) \mathbf{1}. \quad (3.30)$$

onde ϕ é uma fase $Z(N)$.

Para este valor esperado em particular não acontece quebra espontânea da simetria $SU(N)$ pelo vácuo acima de T_c . Isto está de acordo com a expectativa de o vácuo a alta temperatura não ser uma fase de Higgs. A possibilidade de ter um valor esperado que não quebre a simetria $SU(N)$ é própria de um campo na representação adjunta.

Consideremos agora, por exemplo, o caso em que a massa do *loop* de carga dois fosse menor do que zero na fase desconfiada, ao invés da massa do *loop* de carga um. Neste caso, o vácuo seria dado maximizando-se $|\text{tr}\mathbf{L}^2|^2$ [13]. Isto significaria que o valor esperado de \mathbf{L}^2 é um elemento do centro. Mas, se isso fosse verdade, além do vácuo invariante sob $SU(N)$, teríamos também vácuo invariante somente sob $SU(N-1)$. Entretanto, até o momento não existem evidências de que o vácuo a altas temperaturas quebre a simetria $SU(N)$ em favor de uma simetria $SU(N-1)$.

Fazendo estas considerações sobre as massas, partimos agora para a construção de um potencial efetivo. Para três cores, consideraremos *loops* de cargas um e dois. Neste caso, ou no caso de mais cores, os *loops* de Polyakov assumem valores complexos. O potencial para *loops* de carga um será determinado pela simetria global $Z(3)$ [36]:

$$V_1 = m_1^2 |l_1|^2 + \kappa_1 (l_1^3 + (l_1^*)^3) + \lambda_1 (|l_1|^2)^2. \quad (3.31)$$

Podemos notar que aqui introduzimos um termo cúbico, necessário para uma transição de primeira ordem.

O *loop* de carga dois tem carga menos um sob transformações $Z(3)$, logo seu potencial será o mesmo que o de carga um, com valores diferentes para as massas e constantes de

acoplamento:

$$V_2 = m_2^2 |l_2|^2 + \kappa_2 (l_2^3 + (l_2^*)^3) + \lambda_2 (|l_2|^2)^2. \quad (3.32)$$

A mistura entre l_1 e l_2 pode estar presente em termos de diversas formas. O mais importante deles é aquele no qual a dimensão de massa é menor:

$$V_{mix} = \xi (l_1 l_2 + l_1^* l_2^*). \quad (3.33)$$

Em termos da linha de Wilson este termo será proporcional a $(tr \mathbf{L})(tr \mathbf{L}^2)$.

Se o campo de carga dois for pesado próximo a T_c , podemos integrá-lo. O potencial resultante terá forma idêntica ao potencial para o *loop* de carga um, mas com valores diferentes para a massa e a constante de acoplamento, a serem extraídos de dados da rede:

$$V = \left(\frac{-b_2}{2} |l|^2 - \frac{-b_3}{3} [l^3 + (l^*)^3] + \frac{1}{4} (|l|^2)^2 \right) b_4 T^4 \quad (3.34)$$

Como buscamos uma transição fracamente de primeira ordem, conforme observado na rede [8], o coeficiente do termo cúbico deve ser bem pequeno, aproximadamente zero, na teoria efetiva resultante.

Uma característica importante aqui é que, como o *loop* de Polyakov é o traço de um fator de fase, ele é um campo sem dimensões. A temperatura, então, será a única escala utilizada para termos as dimensões corretas. Os coeficientes b_2 , b_3 e b_4 , dos termos quadrático, cúbico e quártico, respectivamente, são então ajustados para chegar-se à mesma pressão e densidade de energia obtidas em simulações na rede para teoria de puro gauge a $T \geq T_c$. Apesar de a pressão em uma teoria de puro gauge ser diferente da pressão em QCD, devido à “insensibilidade ao sabor” a pressão dividida pela pressão de gás ideal como função da temperatura T_c é aproximadamente universal para qualquer número de sabores. Usa-se este fato na determinação do coeficiente do termo de massa b_2 , encontrando-o como função de $x = T/T_c$. Por outro lado, b_3 é obtido da teoria de puro gauge e b_4 é reescalado pela razão dos termos de gás ideal da QCD, com três sabores de quark, e os termos de gás ideal de teoria de puro gauge. A pressão na teoria de puro gauge, para $T > T_c$, é descrita pelos valores constantes $b_3 = 2$ e $b_4 \approx 0.6061$ [15]. Para b_2 temos a expressão:

$$b_2(T) = (1 - 1.11/x)(1 + 0.265/x)^2(1 + 0.300/x)^3 - 0.487. \quad (3.35)$$

O gráfico do potencial com os coeficientes citados está representado na Figura 3.3.

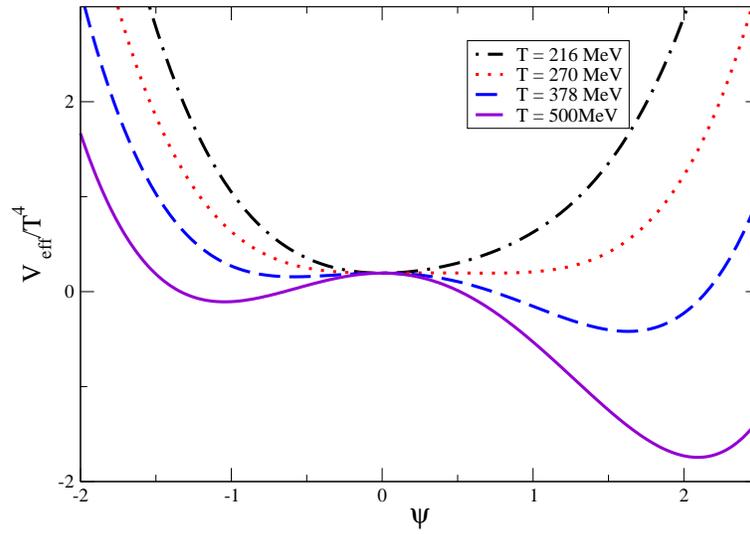


Figura 3.3: Potencial efetivo para $SU(3)$ obtido a partir do modelo do traço do *loop* de Polyakov como parâmetro de ordem.

Capítulo 4

Evolução do parâmetro de ordem

Agora que temos um parâmetro de ordem bem definido e um potencial obtido de uma teoria efetiva, precisamos de um tratamento que nos permita levar em consideração a dissipação e o ruído na evolução do nosso sistema. Usaremos, então, uma equação de Langevin para a descrição da dinâmica do sistema, contendo um termo de dissipação proporcional à derivada do campo e um termo de ruído branco. Neste capítulo, vamos primeiramente introduzir esta equação de um ponto de vista clássico e estudá-la obtendo informações sobre esses termos. Em seguida, vamos mostrar como um tratamento em tempo real de um sistema em mecânica quântica fora do equilíbrio pode nos gerar a equação de Langevin. Posteriormente, usando uma generalização deste procedimento aplicado à teoria de campos, chegaremos a uma equação de Langevin generalizada incluindo algumas correções. Este último procedimento será realizado para uma teoria $\lambda\phi^4$ com um objetivo didático, uma vez que a maioria dos trabalhos nesta linha foi feita para este modelo. Além disso, como o potencial no nosso modelo também é um potencial quártico, o procedimento e os resultados serão bastante similares. Os detalhes para o nosso caso serão discutidos no capítulo seguinte, onde apresentamos e discutimos nossos resultados originais. Finalmente, serão apresentados, também para o modelo $\lambda\phi^4$, os contratermos apropriados para evitar as divergências ultravioletas típicas de cálculos em rede quando fazemos o espaçamento entre os sítios tender a zero. Detalhes para a obtenção destes contratermos para o potencial efetivo que adotamos para a transição de desconfinamento serão apresentados no próximo capítulo.

4.1 A equação de Langevin em mecânica estatística

Consideremos, inicialmente, o movimento descrito por uma única partícula. Partindo da segunda lei de Newton:

$$m \frac{du}{dt} = F, \quad (4.1)$$

onde u é a velocidade e F a força total que age sobre a partícula. A força F pode ser dividida em duas partes. Uma parte está relacionada à fricção da partícula no meio, ou seja, à dissipação. Esta parte geralmente é proporcional à velocidade da partícula. Definindo o coeficiente de dissipação $m\lambda$, a força dissipativa será:

$$F_d = -m\lambda u. \quad (4.2)$$

A segunda parte da força é tomada como uma força aleatória independente do movimento da partícula. Podemos interpretá-la como vindo de flutuações oriundas de diferentes fontes, por exemplo flutuações térmicas. Chamando esta força aleatória de $\xi(t)$, nossa equação se torna:

$$m \frac{du}{dt} = -m\lambda u + \xi(t). \quad (4.3)$$

Esta é uma equação estocástica devido à presença do termo aleatório da força. Se temos, além disso, um campo externo, teremos mais um termo na equação, relacionado ao potencial deste campo:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda p + \xi(t), \quad (4.4)$$

onde

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \equiv u(t). \quad (4.5)$$

Equações deste tipo, contendo uma força aleatória e dissipação, são chamadas de equações de Langevin [47].

A força $\xi(t)$ é representada por um processo estocástico que evolui no tempo de maneira aleatória. A velocidade $u(t)$ e a posição $x(t)$, conseqüentemente, também evoluem aleatoriamente no tempo, já que são resultado da força estocástica $\xi(t)$. Resolver uma equação diferencial do tipo da equação (4.3) ou (4.4) significa determinar os processos estocásticos $u(t)$ e $x(t)$ conhecendo a força geradora $\xi(t)$.

Uma técnica frequentemente adotada na solução de equações diferenciais estocásticas é a análise harmônica, que faz uso da transformada de Fourier para expressar o movimento como uma superposição de funções oscilatórias. Este procedimento é eficiente somente no caso de sistemas lineares. Considerando o meio em uma condição estacionária, com condições constantes de temperatura e pressão, o movimento deve também ser estacionário se a partícula é deixada tempo suficiente no meio, ou seja, a probabilidade desta, estando em uma determinada posição x_1 em um determinado tempo t_1 , ir para a posição x_2 em um tempo t_2 deve permanecer a mesma se fizermos um deslocamento no tempo:

$$W_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = W_n(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \dots; x_n, t_n + \tau). \quad (4.6)$$

Podemos dizer, neste sentido, que os processos $\xi(t)$, $u(t)$ e $x(t)$ são estacionários.

Podemos desenvolver, agora, uma análise harmônica genérica para um processo estocástico qualquer evoluindo aleatoriamente no tempo. Consideremos $z(t)$ uma amostra de tal processo observada no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$. Esta função pode ser expandida em uma série de Fourier como:

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\omega_n t}, \quad (4.7)$$

onde as frequências são:

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.8)$$

A função $z(t)$ é considerada real tal que os coeficientes a_n devem ser números complexos:

$$a_n = c_n + id_n, \quad a_{-n} = a_n^* = c_n - id_n. \quad (4.9)$$

O processo completo $\mathbf{z}(t)$ também pode ser expandido da mesma forma:

$$\mathbf{z}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{a}_n e^{i\omega_n t}. \quad (4.10)$$

Os coeficientes a_n são uma amostra da variável aleatória \mathbf{a}_n definida por:

$$\mathbf{a}_n = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{z}(t) e^{-i\omega_n t} dt. \quad (4.11)$$

Através desta equação expressamos a variável $\mathbf{z}(t)$ como uma soma de infinitas variáveis aleatórias $\{\mathbf{a}_n\}$.

A média quadrática de um coeficiente a_n é dada como:

$$\langle |a_n|^2 \rangle = \langle |c|^2 \rangle + \langle |d|^2 \rangle. \quad (4.12)$$

Se estivermos interessados na intensidade de uma faixa específica de frequências $\Delta\omega$, os comprimentos destas componentes de Fourier são observáveis e a intensidade média é dada por:

$$I(\omega)\Delta\omega = \sum_{\omega_n \in \Delta\omega} \langle |a_n|^2 \rangle, \quad (4.13)$$

onde o lado direito desta expressão é uma soma sobre todas as frequências que estão no intervalo de frequências desejado. O número de modos contidos aqui será $T\Delta\omega/2\pi$. Se supusermos que $\langle a_n^2 \rangle$ é contínuo na frequência ω_n , podemos escrever a expressão acima como:

$$I(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} \langle |a_n|^2 \rangle \quad (4.14)$$

representando o espectro de intensidade do processo $\mathbf{z}(t)$ para uma frequência específica ω . Esta intensidade $I(\omega)$ também é conhecida como espectro de potências do processo $\mathbf{z}(t)$.

Este espectro de potência é obtido utilizando-se o teorema de *Wiener-Khintchine* [48]. Seja $\phi(t)$ a função de correlação do processo $\mathbf{z}(t)$:

$$\phi(t) = \langle z(t_0)z(t_0 + t) \rangle. \quad (4.15)$$

Esta função representa a correlação entre valores de $\mathbf{z}(t)$ observados em dois instantes t_0 e $t_0 + t$, e é independente de t_0 , já que $\mathbf{z}(t)$ é estacionário. O teorema de *Wiener-Khintchine* nos diz que:

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.16)$$

Podemos, também, escrever o inverso:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.17)$$

Podemos fazer esta análise de Fourier em um tempo infinito ao invés de em um intervalo de tempo finito. A função $\mathbf{z}(t)$ e os coeficientes $\mathbf{a}(\omega)$ podem então ser escritos como:

$$\mathbf{z}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(\omega) e^{i\omega t} dt \quad (4.18)$$

$$\mathbf{a}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{z}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.19)$$

Se $\mathbf{z}(t)$ é real, então $\mathbf{a}(-\omega) = \mathbf{a}^*(\omega)$ será o complexo conjugado de $\mathbf{a}(\omega)$. Além disso se $\mathbf{z}(t)$ é estacionário teremos

$$\langle a(\omega)a(\omega') \rangle = I(\omega)\delta(\omega + \omega') \quad (4.20)$$

ou

$$\langle a(\omega)a^*(\omega') \rangle = I(\omega)\delta(\omega - \omega'), \quad (4.21)$$

onde $I(\omega)$ é o espectro de potência dado por (4.14). Podemos calcular esta correlação via:

$$\begin{aligned} \langle a(\omega_1)a(\omega_2) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \phi(t_2 - t_1) \exp(-i\omega_1 t_1 - i\omega_2 t_2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \exp(-i\omega_1 t) dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\omega_1 + \omega_2)\tau] d\tau. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Aplicando a análise desenvolvida acima para equações estocásticas lineares como a equação (4.3), podemos expandir a força estocástica $\xi(t)$ como um processo estacionário:

$$\xi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_n e^{i\omega_n t}. \quad (4.23)$$

Expandimos também a velocidade $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_n e^{i\omega_n t}. \quad (4.24)$$

A equação (4.3) se converterá, então, na seguinte relação entre os coeficientes da transformada de Fourier:

$$\mathbf{u}_n = \frac{1}{i\omega_n + \lambda} \frac{\xi_n}{m}. \quad (4.25)$$

Se denotarmos os espectros de potência de $\xi(t)$ e de $\mathbf{u}(t)$ como I_ξ e I_u , respectivamente, obtemos, usando (4.14) e (4.25):

$$I_u(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + \lambda^2} \frac{I_\xi(\omega)}{m^2}. \quad (4.26)$$

Segundo o teorema de *Wiener-Khintchine*, se conhecemos o espectro de potências conhecemos também a função de correlação. Consideremos, então, a possibilidade mais simples,

a de I_R ser constante: $I_\xi(\omega) = I_\xi$ Neste caso, dizemos que o espectro é branco. Segue da equação (4.17) que a função de correlação de um processo que possui espectro branco será:

$$\phi_\xi(t_1 - t_2) \equiv \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = 2\pi I_\xi \delta(t_1 - t_2). \quad (4.27)$$

Podemos relacionar o espectro de potência I_u com I_ξ através da relação (4.26), e ficamos com:

$$\phi_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{\omega^2 + \lambda^2} \frac{I_\xi}{m^2}, \quad (4.28)$$

ou seja:

$$\langle u(t_1)u(t_2) \rangle = \frac{\pi I_\xi}{m^2 \lambda} e^{-\lambda|t_1 - t_2|}. \quad (4.29)$$

Em particular para $t_1 = t_2$, a expressão acima reduz-se a:

$$\langle u^2 \rangle = \frac{\pi I_\xi}{m^2 \lambda}. \quad (4.30)$$

Se a partícula for mantida tempo suficiente em um banho térmico a temperatura T , a lei de equipartição deve ser válida, ou seja,

$$m \langle u^2 \rangle = kT. \quad (4.31)$$

Para esta expressão ser consistente com a Eq. (4.30), devemos ter:

$$I_\xi = \frac{m\lambda kT}{\pi}, \quad (4.32)$$

e a função de correlação (4.27) torna-se:

$$\langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle = 2m\lambda kT \delta(t_1 - t_2). \quad (4.33)$$

4.2 Mecânica quântica fora do equilíbrio e a equação Langevin

Nesta seção, mostraremos como é possível obter a equação de Langevin discutida na seção anterior através de um formalismo de tempo real para um sistema em mecânica quântica. Posteriormente, o método utilizado aqui será generalizado para o caso de teoria de campos.

Consideremos, então, um sistema de uma partícula quântica em um banho térmico. A partícula é descrita pela coordenada $q(t)$ enquanto o banho, representado por infinitos osciladores harmônicos, é representado por coordenada $R_k(t)$. O Hamiltoniano do sistema será:

$$H = H_0 + H_R + H_{int}(t), \quad (4.34)$$

sendo

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{p^2}{2M} + V(q) \\ H_R &= \sum_k \frac{p_k^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_k^2 R_k^2, \\ H_{int}(t) &= \theta(t)q \sum_k c_k R_k, \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde a função degrau $\theta(t)$ garante que a interação entre a partícula e o banho se dará a partir do tempo $t = 0$. Isto pode representar, por exemplo, um *quench* no potencial, ou seja, uma mudança brusca motivada, por exemplo, por um banho térmico. Esta é a descrição tradicional dada originalmente por Caldeira e Leggett [49]. Admitindo que, inicialmente, a partícula está a uma temperatura $T = 0$, e o reservatório a $T = 1/\beta$, teremos para a matriz densidade:

$$\rho(t \leq 0) = (|0\rangle_q \langle 0|) \otimes e^{-\beta H_R}. \quad (4.36)$$

Utilizaremos aqui um tratamento em tempo real empregando para isso o contorno de Schwinger-Keldish [50, 51], uma vez que este contorno pode ser utilizado no estudo de casos mais complexos de sistemas de campos fora do equilíbrio, como será feito na próxima seção. Neste tratamento, as funções de Green são transportadas para o plano complexo com o objetivo de que possamos distinguir entre a evolução em tempos crescentes e em tempos decrescentes. Isto pode ser feito deslocando-se infinitesimalmente os ramos crescente e decrescente, acima e abaixo do eixo real, respectivamente, como mostra a Figura 4.1. Colocaremos um índice + para todas as grandezas relativas ao ramo crescente, um índice – para as grandezas relativas ao ramo decrescente e um índice β para as relativas ao trecho que vai de T a $T - i\beta\hbar$.

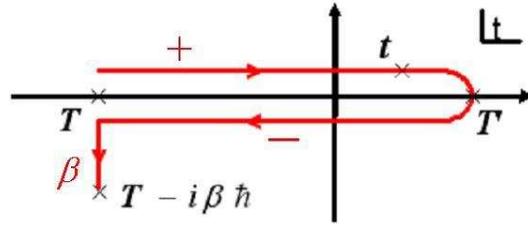


Figura 4.1: Contorno de Schwinger-Keldish.

O operador evolução será dado por:

$$U(t, t') \equiv \mathcal{T} \left[\exp - \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t dt' H(t') \right) \right]. \quad (4.37)$$

Definindo correntes associadas aos observáveis q^+ , q^- e q^β :

$$j(t) = \begin{cases} J^+, & t \in C^+ \\ J^-, & t \in C^- \\ J^\beta, & t \in C^\beta \end{cases}$$

podemos construir um funcional gerador da forma:

$$Z[j] = \text{Tr} \{ \mathcal{T}_c [U(C, j)] \}, \quad (4.38)$$

onde \mathcal{T}_c é o ordenamento temporal no contorno C . Reescrevendo $Z[j]$ em termos das correntes auxiliares $\{J_i, i = +, -, \beta\}$, obtemos:

$$\begin{aligned} Z[j] &= \text{Tr} [U(T - i\beta\hbar, T; J_\beta) U(T, T'; J_-) U(T', T; J_+)] = \\ &= \oint [Dq] \int [Dq_1] [Dq_2] \langle q | U(T - i\beta\hbar, ; J_\beta) | q_1 \rangle \times \\ &\quad \langle q_1 | U(T, T'; J_-) | q_2 \rangle \langle q_2 | U(T', T; J_+) | q \rangle, \end{aligned} \quad (4.39)$$

ou, escrevendo os elementos de matriz dos operadores evolução como integrais funcionais, teremos:

$$\begin{aligned} Z[j] &= \int [Dq] \int [Dq_1] [Dq_2] \int [Dq_+] [Dq_-] [Dq_\beta] \times \\ &\quad \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_C dt (L[q] + jq) \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Levando a Lagrangeana correspondente ao Hamiltoniano (4.34) na equação acima obtemos:

$$Z[J_+, J_-] = \prod_k \int [Dq_+] [Dq_-] [DR_k^+] [DR_k^-] \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt (L[q_+, J_+, R_k^+] - L[q_-, J_-, R_k^-]) \right\}, \quad (4.41)$$

onde

$$L[q, J; R] = \frac{M\dot{q}^2}{2} - V(q) + Jq + \sum_k \left\{ \frac{m\dot{R}_k^2}{2} - \frac{1}{2}m\omega_k^2 R_k^2 \right\} + \theta(t)q \sum_k c_k R_k. \quad (4.42)$$

Aqui levamos o contorno em $T \rightarrow T - i\hbar\beta$ referente a R_k para o infinito. Não temos, portanto, uma integral extra referente ao ramo β .

Como estamos interessados somente na evolução da partícula podemos integrar sobre as variáveis do banho R_k^\pm , definindo o funcional de influência de Feynman [52, 53, 54]:

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] \equiv \prod_k \int [DR_k^+] [DR_k^-] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \times [L_R[q_+, R_k^+] + L_I[q_+, R_k^+] - L_R[q_-, R_k^-] - L_I[q_-, R_k^-]] \right\}. \quad (4.43)$$

Integrando obtemos:

$$\mathcal{F}[q_+, q_-] = \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt dt' \sum_{k;a,b} J_k^a(t) G_k^{ab}(t-t') J_k^b(t') \right\}, \quad (4.44)$$

onde a e b representam os índices $+$ e $-$ para funções de Green G_k^{ab} , definidas por:

$$\begin{aligned} G_k^{++} &= G_k^>(t-t')\theta(t-t') + G_k^<(t-t')\theta(t'-t); \\ G_k^{+-} &= G_k^<(t-t'); \\ G_k^{-+} &= G_k^>(t-t'); \\ G_k^{--} &= G_k^>(t-t')\theta(t'-t) + G_k^<(t-t')\theta(t-t'). \end{aligned} \quad (4.45)$$

As funções $G^>$ e $G^<$ representam as funções de Green retardada e avançada, [31]:

$$\begin{aligned} G_k^>(t-t') &= \frac{i}{2m\omega_k} \frac{1}{1 - e^{-\beta\omega_k}} \left[e^{-i\omega_k(t-t')} + e^{-\beta\omega_k} e^{-i\omega_k(t-t')} \right] \\ G_k^<(t-t') &= -[G_k^>(t-t')]^*. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Decompondo $G_k^>(t-t')$ em uma parte real e uma imaginária:

$$G_k^>(t-t') = i[g_k^R - ig_k^I] = ig_k^R(t-t') + g_k^I(t-t') \quad (4.47)$$

onde

$$\begin{aligned} g_k^R(t-t') &= \frac{1}{2m\omega_k} \cos[\omega_k(t-t')] \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_k}{2}\right), \\ g_k^I(t-t') &= \frac{1}{2m\omega_k} \text{sen}[\omega_k(t-t')], \end{aligned} \quad (4.48)$$

e definindo:

$$\begin{aligned} \sum_k c_k^2 g_R(t-t') &\equiv a_R(t-t'), \\ \sum_k c_k^2 g_I(t-t') &\equiv a_I(t-t'), \end{aligned} \quad (4.49)$$

obtemos, após alguma manipulação algébrica [49]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[q_+, q_-] &= \exp\left\{ i \int_0^{+\infty} dt \int_0^t dt' \right. \\ &\quad \left[(q_+(t) - q_-(t)) a_I(t-t') (q_+(t') + q_-(t')) + \right. \\ &\quad \left. \left. (q_+(t) - q_-(t)) i a_R(t-t') (q_+(t') - q_-(t')) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Como estamos interessados na evolução de Langevin da partícula de posição q na presença de flutuações quânticas e térmicas, é mais conveniente reescrevermos q_+ e q_- em termos de variáveis que representem separadamente uma solução clássica e as flutuações quânticas. Isto é possível aplicando uma transformada de Wigner [52]:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}(q_+ + q_-), \\ r &= (q_+ - q_-). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Expandindo em r a diferença de potenciais $[V(q_+) - V(q_-)]$ e usando os resultados obtidos, o funcional gerador se torna:

$$Z = \int [DQ] \int [Dr] e^{iS_{eff}}, \quad (4.52)$$

onde a ação efetiva é dada por:

$$\begin{aligned}
 S_{eff} = & \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left[M\dot{r}\dot{Q} - \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1} \frac{V^{(2n+1)}(Q)}{(2n+1)!} \right] \\
 & + \int_0^{\infty} dt \int_0^t dt' r(t) a_I(t-t') 2Q(t') \\
 & + \frac{i}{2} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dt' r(t) a_R(t-t') r(t').
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

É possível reescrever o termo do funcional gerador relativo ao último termo da ação efetiva como [52]:

$$e^{-\frac{i}{2} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dt' r(t) a_R(t-t') r(t')} \equiv \int D\xi e^{-\frac{1}{2\hbar} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dt' \xi(t) K(t-t') \xi(t')} e^{-\frac{i}{\hbar} \int dt r(t) \xi(t)} \tag{4.54}$$

onde $K^{-1} \equiv a_R$, de tal maneira que:

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \hbar a_R(t-t') \tag{4.55}$$

e

$$\langle \xi(t) \rangle = 0. \tag{4.56}$$

Obtemos a equação de movimento através da expressão [54]:

$$\frac{\delta S_{eff}[r, Q, \xi]}{\delta r(t)} = 0 \tag{4.57}$$

Como consideramos as flutuações quânticas pequenas, podemos desprezar termos de ordens mais altas em r , o que, junto com a equação (4.57), nos fornece a equação de movimento:

$$M\ddot{Q} + V'(Q) - 2 \int_0^t dt' a_I(t-t') Q(t') = \xi(t). \tag{4.58}$$

Obtemos, assim, uma equação similar à de Langevin, mas com um termo de memória não-Markoviano e um ruído colorido com função de correlação a_R . A equação de Langevin usual pode ser obtida através de uma aproximação que leva a um caso particular de (4.58). Considerando que o banho térmico tem um número infinito de graus de liberdade, podendo transferir quantidades infinitesimais de energia, ele deve possuir um espectro contínuo de osciladores com densidade de frequências $\rho(\omega)$. Tomando o limite de alta temperatura $k_B T \gg \omega_k$, a

correlação do ruído será aproximadamente

$$\begin{aligned} a_R(t-t') &\simeq \sum_k \frac{c_k^2}{2m\omega_k} \cos[\omega_k(t-t')] \left\{ \frac{2k_B T}{\omega_k} + \mathcal{O}\left(\frac{\omega_k}{T}\right) \right\} \\ &\simeq \frac{k_B T}{m} \sum_k \frac{c_k^2}{\omega_k^2} \cos[\omega(t-t')] + \mathcal{O}\left(\frac{\omega_k}{k_B T}\right). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Agora estamos trabalhando com um espectro contínuo de frequências, logo o somatório torna-se uma integral em ω . Assim, a correlação toma a forma

$$\hbar a_R(t-t') \simeq \frac{k_B T}{m} \int_0^\infty d\omega \rho(\omega) \frac{c^2(\omega)}{\omega^2} \cos[\omega(t-t')], \quad (4.60)$$

e a_I :

$$a_I(t-t') = \int_0^\infty d\omega \rho(\omega) \frac{c^2(\omega)}{2m\omega} \text{sen}[\omega(t-t')]. \quad (4.61)$$

Colocando um corte em determinada frequência Ω e definindo [49, 54]:

$$\rho(\omega)c^2(\omega) = \begin{cases} \frac{2m\eta\omega^2}{\pi}, & \omega < \Omega \\ 0, & \omega > \Omega \end{cases} \quad (4.62)$$

ficamos com:

$$\hbar a_R(t-t') \simeq \frac{k_B T}{\pi} \eta \int_{-\Omega}^{\Omega} d\omega \cos[\omega(t-t')] \simeq 2k_B T \eta \delta(t-t'), \quad (4.63)$$

$$a_I(t-t') \simeq -\frac{1}{2} \frac{\eta}{\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \cos[\omega(t-t')] \simeq -\eta \frac{d}{dt} (\delta(t-t')). \quad (4.64)$$

Fisicamente, este corte significa um limite para as frequências nas quais a partícula interage com o banho. Assim o termo não-Markoviano presente na equação de movimento torna-se:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' a_I(t-t') Q(t') &\simeq +\eta \int_0^t dt' \frac{d}{dt'} (\delta(t-t')) Q(t') = \\ &-\eta \int_0^t dt' \delta(t-t') \frac{dQ(t')}{dt'} = -\frac{\eta}{2} \dot{Q}(t). \end{aligned} \quad (4.65)$$

e a equação de movimento simplifica-se para

$$M\ddot{Q} + V'(Q) + \eta\dot{Q} = \xi(t), \quad (4.66)$$

onde o ruído possui agora uma função de correlação da forma

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2k_B T \eta \delta(t-t'), \quad (4.67)$$

de modo que obtemos a equação de Langevin usual, com um termo de dissipação Markoviano e ruído branco.

4.3 Teoria de campos fora do equilíbrio e a equação de Langevin para o parâmetro de ordem

É possível generalizar a análise feita na seção anterior para sistemas mais complexos, ou seja, deduzir a equação Langevin através do estudo de uma teoria de campos fora do equilíbrio, tal como em sistemas em mecânica quântica como discutido anteriormente. Análises nesta linha foram feitas para sistemas com potencial do tipo $\lambda\phi^4$ nas referências [19, 20, 21]. Nesta seção, seguiremos os passos da Ref. [19] e obteremos uma equação do tipo Langevin usando um tratamento de tempo real, de teoria de campos a temperatura finita, indo até 2-loops e $O(\lambda^2)$. O resultado obtido é uma equação também similar à equação de Langevin usual, porém com termos extras relativos ao ruído e à dissipação. As principais modificações com relação ao ruído é que ele passa a ser colorido, ou seja, sua função de correlação depende do tempo de modo não-local e multiplicativo, acoplando-se linearmente ao campo. No limite de altas temperaturas recupera-se, o ruído branco. Com relação à dissipação, além do termo usual proporcional à derivada temporal do campo, chega-se a um termo que depende quadraticamente do campo.

Consideremos, por simplicidade, um modelo de campo escalar com densidade Lagrangeana:

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4. \quad (4.68)$$

Esta densidade Lagrangeana é bem conveniente para que possamos considerar mais tarde o caso particular dos potenciais que foram obtidos no capítulo 3, uma vez que ambos são quárticos.

O funcional gerador Z , em termos da fonte externa J , usando $\hbar = 1$, é dado por:

$$Z[J] = \int_C D\phi \exp\{iS[\phi, J]\} \quad (4.69)$$

onde a ação clássica é definida como:

$$S[\phi, J] = \int_c d^4x \{\mathcal{L}[\phi] + J(x)\phi(x)\}. \quad (4.70)$$

Como anteriormente, deve-se usar um contorno conveniente para cálculos em tempo real e escolhe-se o contorno fechado de Schwinger-Keldish [50, 51], onde o caminho C vai de $-\infty$

até $+\infty$ e então volta a $-\infty$, de acordo com a Figura 4.1. A integral funcional na Eq. (4.70) é sobre campos ao longo deste contorno temporal. Assim como na formulação de tempo Euclidiano o campo é periódico no tempo, agora da forma: $\phi(t, \vec{x}) = \phi(t - i\beta, \vec{x})$.

Define-se a ação efetiva $\Gamma[\varphi]$ em termos do funcional gerador de funções de Green conexas $W[J]$ como:

$$\Gamma[\varphi] = W[J] - \int_C d^4x J(x)\varphi(x), \quad (4.71)$$

com $\varphi(x)$ definido por:

$$\varphi(x) \equiv \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \quad (4.72)$$

e

$$W[J] = -i \ln \int_c D\phi \exp\{iS[\phi, J]\}. \quad (4.73)$$

A expansão perturbativa de $\Gamma[\varphi]$ é obtida escrevendo-se o campo escalar como $\phi = \phi_0 + \eta$, onde ϕ_0 é a configuração de campo que extremiza a ação clássica $S[\phi, J]$ e η é uma pequena perturbação sobre esta configuração. Usando-se as Eqs. (4.72) e (4.73), pode-se relacionar ϕ_0 a φ ($\phi_0 = \varphi - \eta$) e escrever a ação efetiva, para $J \rightarrow 0$, a 1-loop como:

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + \frac{i}{2} Tr \ln[\square + V''(\varphi)], \quad (4.74)$$

onde

$$\frac{i}{2} Tr \ln[\square + V''(\varphi)] = -i \ln \int_c D\eta \exp\left\{-\frac{i}{2}\eta[\square + V''(\varphi)]\eta\right\} \quad (4.75)$$

Desprezando contribuições em (4.74) que sejam independentes de φ , pode-se expandir o logaritmo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} Tr \ln[\square + V''(\varphi)] &= \frac{i}{2} Tr_c \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} G_\phi^m \left(\frac{\lambda}{2}\varphi^2\right)^m = \\ &= \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^m Tr \int d^4x_1 \dots d^4x_m \times \\ &G_\phi^{m_1, l_1}(x_1 - x_2) [\varphi^2(x_2)]_{l_1, n_2} G_\phi^{m_2, l_2}(x_2 - x_3) \dots \\ &\dots [\varphi^2(x_m)]_{l_{m-1}, n_m} G_\phi^{m_m, l_m}(x_m - x_1) [\varphi^2(x_1)]_{l_m, n_{m+1}}. \end{aligned} \quad (4.76)$$

A representação matricial na Eq. (4.76) é uma consequência do contorno temporal escolhido. Agora devemos identificar variáveis com argumentos nos ramos positivo e negativo

do caminho, os quais denotamos por $+$ e $-$, respectivamente. Como consequência desta duplicação de campos, o propagador livre em tempo real $G_\phi^{n,l}(x-x')$ neste contorno é dado por ($l, n = +, -$):

$$\begin{aligned} G_\phi^{++}(x-x') &= i\langle T_+\phi(x)\phi(x')\rangle, \\ G_\phi^{--}(x-x') &= i\langle T_-\phi(x)\phi(x')\rangle, \\ G_\phi^{+-}(x-x') &= i\langle \phi(x')\phi(x)\rangle, \\ G_\phi^{-+}(x-x') &= i\langle \phi(x)\phi(x')\rangle, \end{aligned} \quad (4.77)$$

onde T_+ e T_- indicam ordenamento cronológico e anticronológico, respectivamente. G_ϕ^{++} é o propagador físico causal usual. Os outros três propagadores aparecem como uma consequência do contorno temporal e são considerados como auxiliares, não-físicos. As expressões para cada um destes propagadores podem ser encontrada em [50, 55].

Vamos considerar agora as contribuições até 2-*loops* e ordem λ^2 à Eq. (4.74). Diagramaticamente:

$$\Gamma[\varphi] = S[\varphi] + \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} + \mathcal{O}(\lambda^3), \quad (4.78)$$

onde φ está nas pernas externas e os propagadores internos são dados por $G_\phi^{n,l}$. Podemos escrever cada um dos diagramas em termos das variáveis de campo φ_+ e φ_- e dos propagadores $G_\phi^{n,l}$. É conveniente reescrever as variáveis de campo φ_+ e φ_- em termos de novas variáveis de campo, φ_c e φ_Δ , definidas por:

$$\begin{aligned} \varphi_+ &= \frac{1}{2}\varphi_\Delta + \varphi_c, \\ \varphi_- &= \varphi_c - \frac{1}{2}\varphi_\Delta. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Uma sugestão do significado físico destas variáveis é dado na Ref. [56], sendo análogo às grandezas Q e r no caso de mecânica quântica. Associa-se φ_Δ com um campo de resposta enquanto φ_c é interpretado como o campo físico, que sente as flutuações do sistema. A mudança de variáveis (4.79) permite identificar na ação efetiva os termos responsáveis pelas

flutuações no sistema, que serão os termos imaginários. A associação de φ_c com os campos físicos nos impõe que tomemos $\varphi_\Delta = 0$ ($\varphi_+ = \varphi_-$) no fim do cálculo [57, 58]. Em termos das novas variáveis, encontra-se a seguinte expressão para a ação efetiva:

$$\begin{aligned}
 \Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] = & \int d^4x \left\{ \varphi_\Delta(x) \left[-\square - m^2 - \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[1 + 2n(\omega)]}{2\omega(\vec{k})} \right. \right. \\
 & + \frac{\lambda^2}{2} \int dt' \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \text{Im} [G_\phi^{++}(\vec{q}, t - t')]^2 \theta(t - t') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[1 + 2n(\omega)]}{2\omega(\vec{k})} \left. \right] \varphi_c(x) \\
 & - \frac{\lambda}{4!} (4\varphi_\Delta(x)\varphi_c^3(x) + \varphi_\Delta^3(x)\varphi_c(x)) \left. \right\} \\
 & + \int d^4x d^4x' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \left\{ -\frac{\lambda^2}{8} [\varphi_\Delta(x)\varphi_c(x)\varphi_\Delta^2(x') \right. \\
 & + 4\varphi_\Delta(x)\varphi_c(x)\varphi_c^2(x')] \int \frac{d^3q}{(2\pi)^2} \text{Im} [G_\phi^{++}(\vec{q}, t - t')G_\phi^{++}(\vec{q} - \vec{k}, t - t')] \theta(t - t') \\
 & - \frac{\lambda^2}{3} \varphi_\Delta(x)\varphi_c(x') \text{Im} \left[\prod_{j=1}^3 \int \frac{d^3q_j}{(2\pi)^3} G_\phi^{++}(\vec{q}_j, t - t') \right] \theta(t - t') \delta(\vec{k} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2 - \vec{q}_3) \\
 & + i\frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x)\varphi_c(x)\varphi_\Delta(x')\varphi_c(x') \text{Re} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} [G_\phi^{++}(\vec{q}, t - t')G_\phi^{++}(\vec{q} - \vec{k}, t - t')] + \\
 & \left. + i\frac{\lambda^2}{12} \varphi_\Delta(x)\varphi_\Delta(x') \text{Re} \left[\prod_{j=1}^3 \int \frac{d^3q_j}{(2\pi)^3} G_\phi^{++}(\vec{q}_j, t - t') \right] \delta(\vec{k} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2 - \vec{q}_3) \right\}. \quad (4.80)
 \end{aligned}$$

Os dois últimos termos em $\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c]$ dão as contribuições imaginárias para a ação efetiva, que podem ser associadas a integrações funcionais sobre campos de flutuações Gaussianas ξ_1 e ξ_2 [57]:

$$\begin{aligned}
 & \int D\xi_1 P[\xi_1] \int D\xi_2 P[\xi_2] \exp \left\{ i \int d^4x [\varphi_\Delta(x)\varphi_c(x)\xi_1(x) + \varphi_\Delta(x)\xi_2(x)] \right\} \\
 & = \exp \left\{ i \int d^4x d^4x' \left[i\frac{\lambda^2}{4} \varphi_\Delta(x)\varphi_c(x) \text{Re} [G_\phi^{++}]_{x,x'}^2 \varphi_\Delta(x')\varphi_c(x') + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + i\frac{\lambda^2}{12} \varphi_\Delta(x) \text{Re} [G_\phi^{++}]_{x,x'}^3 \varphi_\Delta(x') \right] \right\}, \quad (4.81)
 \end{aligned}$$

onde $P[\xi_1]$ e $P[\xi_2]$ são as distribuições de probabilidade para ξ_1 e ξ_2 . As formas explícitas destas probabilidades são dadas em [19]. Levando a Eq. (4.81) em (4.80), a última pode ser

escrita como:

$$\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] = \frac{1}{i} \ln \int D\xi_1 P[\xi_1] \int D\xi_2 P[\xi_2] \exp\{iS_{eff}[\varphi_\Delta, \varphi_c, \xi_1, \xi_2]\}, \quad (4.82)$$

onde

$$S_{eff}[\varphi_\Delta, \varphi_c, \xi_1, \xi_2] = Re\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c] + \int d^4x [\varphi_\Delta(x)\varphi_c(x)\xi_1(x) + \varphi_\Delta(x)\xi_2(x)], \quad (4.83)$$

e $Re\Gamma[\varphi_\Delta, \varphi_c]$ é a parte real da Eq. (4.80). Na Eq. (4.83) os campos ξ_1 e ξ_2 agem como fontes de flutuação para as configurações de campo escalar φ . ξ_1 se acopla tanto com o campo resposta φ_Δ quanto com o campo físico φ_c , permitindo um termo de ruído multiplicativo, $\varphi_c\xi_1$, na equação de movimento para φ_c , enquanto que ξ_2 dá origem a um termo de ruído aditivo tradicional [19].

Para chegar a uma equação de movimento, usamos então a relação:

$$\left. \frac{\delta S_{eff}[\varphi_\Delta, \varphi_c, \xi_1, \xi_2]}{\delta \varphi_\Delta} \right|_{\varphi_\Delta=0} = 0. \quad (4.84)$$

Usando (4.83) e (4.80) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left[\square + m^2 + \frac{\lambda}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1 + 2n(\omega)}{2(\omega(\vec{k}))} \left(1 - \lambda \int_{-\infty}^t dt' \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} Im [G_\phi^{++}(\vec{q}, t - t')]^2 \right) \right] \times \\ & \varphi_c(x) + \frac{\lambda}{3!} \varphi_c^3(x) + \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\vec{x}', t') Im [G_\phi^{++}]_{x,x'}^2 \times \\ & + \frac{\lambda^2}{3} \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c(\vec{x}', t') Im [G_\phi^{++}]_{x,x'}^3 = \varphi_c(x)\xi_1(x) + \xi_2(x), \end{aligned} \quad (4.85)$$

onde

$$\begin{aligned} [G_\phi^{++}]_{x,x'}^2 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp [i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] \times \\ & \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} G_\phi^{++}(\vec{q}, t - t') G_\phi^{++}(\vec{q} - \vec{k}, t - t') \end{aligned} \quad (4.86)$$

e

$$\begin{aligned} [G_\phi^{++}]_{x,x'}^3 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \exp [i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')] \times \\ & \left[\prod_{j=1}^3 \int \frac{d^3q_j}{(2\pi)^3} G_\phi^{++}(\vec{q}_j, t - t') \right] \delta(\vec{k} - \vec{q}_1 - \vec{q}_2 - \vec{q}_3). \end{aligned} \quad (4.87)$$

Com o objetivo de obter uma equação do tipo Langevin, uma série de aproximações devem ser feitas na equação de movimento (4.85). A equação de Langevin obtida poderá ser usada para descrever a dinâmica fora do equilíbrio de modos variando lentamente em situações próximas ao equilíbrio.

Calculando-se os termos relativos à dissipação na Eq. (4.85) usando os propagadores livres nus chega-se a um resultado nulo, devendo-se portanto usar propagadores vestidos no cálculo, considerando as contribuições da auto-energia até dois-*loops* e ordem $\mathcal{O}(\lambda^2)$. Reescreve-se, então, o propagador como:

$$\frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{q^2 - m^2 - \Sigma(q) + i\epsilon}, \quad (4.88)$$

onde $\Sigma(q)$ é a contribuição da auto-energia:

$$\Sigma(q) = \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\bigcirc\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \mathcal{O}(\lambda^3). \quad (4.89)$$

Pode-se mostrar [19] que o propagador vestido pode ser escrito como:

$$G_{\phi}^{++}(\vec{q}, t - t') \simeq \frac{e^{-\Gamma(\vec{q})|t-t'|}}{2\omega(\vec{q})} \left[(1 + 2n) \cos[\omega|t - t'|] - i \text{sen}[\omega|t - t'|] + 2\beta\Gamma(\vec{q})n(1 + n)\text{sen}[\omega|t - t'|] + \mathcal{O}\left(\frac{\Gamma^2}{T^2}\right) \right], \quad (4.90)$$

onde $\Gamma(\vec{q})$ é a “largura de decaimento” da partícula:

$$\Gamma(q) = -\frac{\text{Im}\Sigma(q)}{2\omega(q)}. \quad (4.91)$$

Em (4.90) foi usada a aproximação $\beta\Gamma \ll 1$. Além disso $\omega \equiv \omega(\vec{q})$ e $n = n(\omega)$ é dado em termos da massa efetiva a temperatura finita m_T :

$$m_T^2 = m^2 + \text{Re}\Sigma(m_T) \stackrel{T \gg m_T}{\simeq} m^2 + \lambda \frac{T^2}{24} - \frac{\lambda^2 T^3}{384\pi m_T} + \frac{\lambda^2 T^2}{192\pi^2} \ln\left(\frac{m_T^2}{T^2}\right) + \dots \quad (4.92)$$

Agora que temos o propagador vestido consideraremos o termo na equação de movimento (4.85) dependente de $[G_{\phi}^{++}]_{x,x'}^2$. Supondo que φ_c varia de modo suficientemente lento com o

tempo, expande-se este termo até primeira ordem em torno de t e integra-se em t' , obtendo-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^2}{2} \varphi_c(x) \int d^3x' \int_{-\infty}^t dt' \varphi_c^2(\vec{x}, t') \text{Im} [G_\phi^{++}]_{x,x'}^2 &\simeq \\
&\simeq \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c^2(\vec{x}, t) \dot{\varphi}_c(\vec{x}, t) \beta \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{n(1+n)}{\omega^2(\vec{q}) \Gamma(\vec{q})} - \\
&\quad - \frac{\lambda^2}{2} \varphi_c^3(\vec{x}, t) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega^2(\vec{q})} \times \\
&\quad \left[\frac{1+2n}{2\omega(\vec{q})} + \beta n(1+n) \right] + \mathcal{O} \left(\lambda^2 \frac{\Gamma}{\omega} \right). \tag{4.93}
\end{aligned}$$

O primeiro termo no lado direito da Eq. (4.93) fornece o termo dissipativo multiplicativo $\eta_1 \varphi_c^2 \dot{\varphi}_c$, com coeficiente de dissipação dado por:

$$\eta_1 = \frac{\lambda^2}{8} \beta \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{n(\omega)[1+n(\omega)]}{\omega^2(\vec{q}) \Gamma(\vec{q})} + \mathcal{O} \left(\lambda^2 \frac{\Gamma}{\omega} \right). \tag{4.94}$$

Analogamente, pode-se trabalhar com o termo da equação de movimento (4.85) proporcional a $[G_\phi^{++}]_{x,x'}^3$. Realizando um desenvolvimento similar, chega-se a uma expressão onde o primeiro termo é o termo de dissipação associado ao campo de flutuações ξ_2 . É possível mostrar [19] que este coeficiente de dissipação é, pelo menos, de ordem $\lambda^2 \Gamma(\vec{q}_j) \sim \mathcal{O}(\lambda^4)$ neste caso. Assim, em um modelo fracamente interagente, a contribuição dominante da dissipação na equação de movimento de φ_c vem do termo dissipativo associado com o campo de ruído multiplicativo ξ_2 .

Portanto, até 2-loops e $\mathcal{O}(\lambda^2)$ em uma aproximação adiabática, a equação de movimento é dada por:

$$[\square + m_T^2] \varphi_c(\vec{x}, t) + \frac{\lambda_T}{3!} \varphi_c^3(\vec{x}, t) + \eta_1 \varphi_c^2(\vec{x}, t) \dot{\varphi}_c(\vec{x}, t) = \varphi_c(\vec{x}, t) \xi_1(\vec{x}, t). \tag{4.95}$$

Fazendo o tratamento fora do equilíbrio descrito acima para teoria de campos nos departamentos com três diferenças principais entre a equação de Langevin obtida e a fenomenológica, usualmente usada em simulações numéricas de teoria de campos se aproximando do equilíbrio [19]. A primeira é que a contribuição dominante no ruído é multiplicativa, se acoplado ao campo, agindo como uma fonte de ruído no termo de massa da equação de movimento. A segunda diferença é que mesmo que o ruído ainda obedeça a uma distribuição Gaussiana, agora ele passa a ser colorido, uma vez que os tempos de correlação dependem da largura do decaimento das flutuações que geram o ruído. Somente no limite de altas temperaturas o ruído se

torna branco. A terceira está na forma como a dissipação aparece na equação de movimento. Ao invés do termo usual, $\Gamma(T)\dot{\phi}$ encontra-se que a dissipação depende quadraticamente da amplitude do campo, em uma forma $\Gamma(T)\phi^2\dot{\phi}$.

A equação descrita acima foi obtida para um sistema com auto-interação. Um tratamento ainda mais completo levando em conta interações com outros campos [19], leva a uma equação contendo, além dos termos aqui obtidos, também um termo dissipativo proporcional unicamente a derivada temporal do campo e ruído aditivo. A equação de Langevin com todas essas correções tem a seguinte forma:

$$\square\phi + [\Gamma_1 + \Gamma_2 \phi^2] \frac{\partial\phi}{\partial t} + V'(\phi) = \xi_1(\vec{x}, t) + \xi_2(\vec{x}, t) \phi. \quad (4.96)$$

4.4 Contratermos de rede

Quando implementa-se teorias de campos na rede é necessário discretizar-se tanto o espaço quanto o tempo. Fazendo isso, o sistema passa a ser representado por redes finitas com passos espaciais discretos. Isto automaticamente gera cortes na teoria tanto no infravermelho, através do tamanho da rede, quanto no ultravioleta, através do espaçamento da rede [59, 60, 61]. Apesar de o corte no ultravioleta resolver o problema da catástrofe ultravioleta, também traz o efeito de os resultados de simulações dependerem do espaçamento da rede. Isso ocorre por usar-se pesos estatísticos clássicos para os modos pesados [59, 61], e pode-se resolver este problema acrescentando-se contratermos apropriados. Em cálculos perturbativos, os termos divergentes podem ser identificados diagramaticamente. Subtrai-se, então, estes termos substituindo-os pelos termos corretos, calculados através dos mesmos diagramas levando em consideração a estatística quântica. A Figura 4.2 mostra como, quando acrescenta-se contratermos, os resultados deixam de depender do espaçamento da rede.

Para uma teoria de campos escalares com potencial do tipo $\lambda\phi^4$, com Lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + (D_\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (4.97)$$

podemos tornar a teoria finita acrescentando contratermos de massa à ação [60]:

$$\delta S = - \int d^3x (\delta m^2 \phi^\dagger\phi + \frac{1}{2}\delta m_D^2 A_0^a A_0^a), \quad (4.98)$$

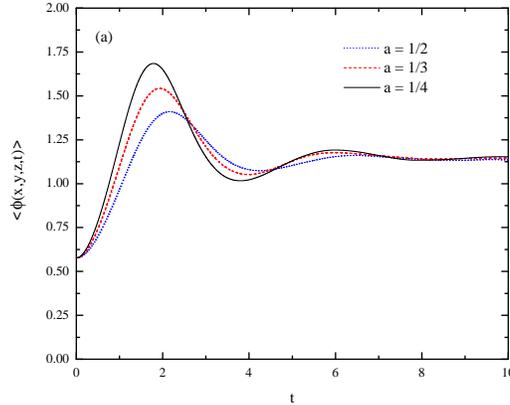


Figura 4.2: Resultados da evolução temporal de um campo ϕ para diferentes valores do espaçamento a depois de adicionar contratermos adequados. Os resultados deixam de variar com a .

onde

$$\delta m^2 = f_{1m}\Sigma + f_{2m}\Sigma_{log}, \quad \delta m_D^2 = f_{1D}\Sigma + f_{2D}\Sigma_{log} \quad (4.99)$$

e f_{1m} e f_{1D} são polinômios em primeira ordem na constante de acoplamento. Aqui só levamos em conta a primeira expressão para δm^2 pois só estamos trabalhando com campos escalares. As grandezas Σ e Σ_{log} são proporcionais aos diagramas *tadpole* e *sunset*, respectivamente, que estão representados na Figura 4.3.

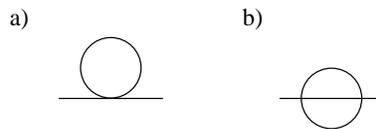


Figura 4.3: Os diagramas a) *tadpole* e b) *sunset*, divergentes ultravioleta na teoria clássica a temperatura finita.

Cálculos na rede [60] mostram que

$$\Sigma \sim \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2} = \left(\frac{0.252731}{a} \right) \quad (4.100)$$

e

$$\Sigma_{\log} \sim \frac{1}{16\pi^2} \left(\log \frac{6}{a\mu_3} + 0.09 \right) \quad (4.101)$$

onde as constantes finitas nesta expressão são definidas fazendo com que depois da renormalização o gráfico *sunset* tenha o mesmo valor para três diferentes esquemas de renormalização: na rede, regularização de momento e \overline{MS} . Os polinômios f_{1m} e f_{2m} são dados por [60]:

$$\begin{aligned} f_{1m} &= \frac{9}{4}g_3^2 + 6\lambda_3 \\ f_{2m} &= \frac{81}{16}g_3^4 + 9\lambda_3g_3^2 - 12\lambda_3^2 \end{aligned} \quad (4.102)$$

onde $g_3^2 = g^2T$ e $\lambda_3 = \lambda T$. Assim, para os campos escalares temos:

$$\begin{aligned} f_{1m} &= 6\lambda T \\ f_{2m} &= -12\lambda^2 T^2. \end{aligned} \quad (4.103)$$

O contratermo de massa pode então ser escrito como:

$$\delta m^2 = 6\lambda T \left(\frac{0.252731}{a} \right) - \frac{12\lambda^2 T^2}{16\pi^2} \left(\log \frac{6}{a\mu_3} + 0.09 \right). \quad (4.104)$$

Capítulo 5

Resultados para puro gauge

Neste capítulo descreveremos o procedimento para a realização da evolução temporal do parâmetro de ordem da transição de desconfinamento para o caso puro gauge detalhadamente. Utilizaremos a equação de Langevin com ruído aditivo descrita no capítulo 4, com o termo de dissipação proporcional à derivada primeira do campo no tempo e ruído branco, para o caso de $SU(2)$. Neste caso, adotaremos o potencial efetivo obtido a partir do primeiro modelo descrito no capítulo 3, onde usamos os autovalores do *loop* de Polyakov como parâmetro de ordem [10, 11]. Para $SU(3)$, levaremos em consideração somente a dissipação, também proporcional à derivada temporal do campo, sem o termo de ruído, e faremos a evolução no tempo usando tanto o potencial do primeiro modelo como o do segundo, que usa como parâmetro de ordem o valor esperado do traço do *loop* [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18].

5.1 Sistema físico

O sistema físico em questão é um sistema de campos de gauge sofrendo uma transição de desconfinamento. No capítulo 3, mostramos como é possível obter um potencial efetivo em função do parâmetro de ordem desta transição. Para os potenciais que obtivemos, temos inicialmente um único mínimo e nossa teoria obedece a uma simetria $Z(N)$, conforme mostrado nas Figuras 3.1, 3.2 e 3.3. À medida que a temperatura aumenta, surgem N novos mínimos no potencial, quebrando a simetria $Z(N)$ inicial. Na temperatura crítica, todos os mínimos se tornam degenerados e, finalmente, acima desta temperatura os novos mínimos passam a

ser os vácuos verdadeiros da teoria. Com o surgimento de novos vácuos, o sistema começa a decair e o processo através do qual este decaimento se dá dependerá da velocidade com que a temperatura é elevada. O caso de $SU(2)$ é simples, uma vez que o potencial não apresenta barreiras em nenhuma temperatura: logo que o vácuo da teoria muda, o antigo mínimo passa a ser um ponto metaestável, sendo suficiente qualquer pequena perturbação para o sistema decair. Em $SU(3)$, entretanto, logo acima da temperatura crítica surge uma barreira à qual o sistema só atravessará se isso for energeticamente favorável. Devido a flutuações térmicas e quânticas, surgirão pequenas bolhas candidatas à transição de fase em todo o sistema. O ganho energético ao decair para o novo mínimo é proporcional ao volume da bolha enquanto que a perda devido à tensão superficial será proporcional à sua superfície. Existe, assim, um raio crítico acima do qual o decaimento é favorável. A temperaturas suficientemente altas, esta barreira desaparece e caímos no caso simples em que o antigo mínimo se torna um ponto metaestável, sendo suficiente qualquer pequena flutuação para provocar o decaimento. O processo no qual é necessário um raio mínimo das bolhas geradas pelas flutuação para ocorrer a transição é chamado nucleação [62, 63, 64, 65], e o processo no qual o mínimo inicial se torna um ponto metaestável recebe o nome de decomposição espinodal, ou explosão espinodal, devido ao fato do decaimento ocorrer muito rapidamente [62, 63, 64, 65]. Em geral, acontece uma competição entre os dois processos. Entretanto, se a temperatura se eleva muito rapidamente, o sistema cai quase instantaneamente em um ponto metaestável, não tendo tempo de “perceber” o período em que a barreira esteve presente. A nucleação, neste caso, dá lugar completamente à decomposição espinodal.

O que acontece após uma colisão de íons pesados ultrarelativísticos a altas energias é similar à situação descrita acima. Experimentos realizados no CERN-SPS e no BNL-RHIC indicam que após a colisão os quarks e glúons se desconfinam formando o plasma e rapidamente este plasma se resfria voltando ao estado hadrônico. A primeira parte deste processo pode ser aproximada por um *quench* no potencial, e o decaimento se dá através do processo de decomposição espinodal. Neste caso, o ponto onde se localiza o mínimo inicial nos fornece a condição inicial do problema. Tratamos, então, da evolução temporal de um sistema em um potencial fixo com posição inicial bem definida.

5.2 Evolução em SU(2) e SU(3)

Consideremos um sistema caracterizado pela energia livre *coarse-grained* obtida seguindo a Ref. [66]:

$$F(\psi, T) = \int d^3x \left[\frac{B}{2} (\nabla\psi)^2 + V_{eff}(\psi, T) \right]. \quad (5.1)$$

O fator B , que desempenha o papel um papel de tensão superficial, aparece no desenvolvimento do cálculo perturbativo e varia dependendo da simetria do sistema. Analisemos primeiramente o caso $SU(2)$. Neste caso B assume o valor $B = \pi^2 T / g^2$ [66]. g é a constante de acoplamento obtida através de cálculos na rede [46] e aqui assume o valor $g = 4/3$.

Como dito anteriormente, usamos para a evolução temporal uma equação de Langevin levando em conta apenas um termo dissipativo, proporcional à primeira derivada temporal, e ruído branco, com a seguinte forma:

$$B \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi \right) + \Gamma \frac{\partial \psi}{\partial t} + V'_{eff}(\psi) = \xi. \quad (5.2)$$

Aqui Γ é um coeficiente de dissipação e o ruído branco ξ obedece às relações $\langle \xi(\vec{x}, t) \rangle = 0$ e $\langle \xi(\vec{x}, t) \xi(\vec{x}', t') \rangle = 2\Gamma \delta(\vec{x}, -\vec{x}') \delta(t - t')$.

De acordo com a discussão do capítulo 4, um tratamento mais completo levaria em consideração um termo dissipativo extra que dependeria quadraticamente da amplitude do campo na forma $\Gamma_1(T) \psi^2(\vec{x}, t) \dot{\psi}(\vec{x}, t)$, onde Γ_1 deve ser determinado pelos termos imaginários da ação efetiva e, conseqüentemente, também um termo a mais do ruído proporcional à amplitude do campo. Em uma descrição ainda mais geral, temos contribuições não-Markovianas. Entretanto aqui trabalharemos somente com os termos mais simples, que podem ser reobtidos tomando o limite de altas temperaturas.

O valor de Γ foi extraído da Ref. [67], que adota o seguinte procedimento: primeiramente realiza-se simulações de MonteCarlo na rede para puro gauge na linha seguida em [10, 11]. Fazendo atualizações das configurações dos campos de gauge em um banho térmico observa-se a decomposição espinodal. Determina-se, então, o valor de Γ comparando-se o crescimento exponencial a tempos curtos da função de correlação $\langle L(k, t) L(-k, t) \rangle$ prevista pelas simulações na rede e pela evolução Langevin. Fazendo isto, encontra-se que $\Gamma = 7.6 \times 10^3 T^3 / \mu$ para uma temperatura de $6.6T_c$, onde μ é uma escala de tempo relacionando o tempo de Monte

Carlo e o tempo real. Admitindo que tempos típicos de termalização são da ordem de alguns fm/c , obtém-se $\Gamma \sim 10^3 fm^{-2}$.

Em nossas simulações, resolvemos a Eq.(5.2) para uma rede cúbica de 64^3 sítios sob condições de contorno periódicas. Foram testados alguns métodos, tanto para a discretização temporal quanto para a espacial, e os que se mostraram mais eficientes e com menor custo computacional foram o método *leap-frog* para discretização temporal e o da colocação de Fourier para a parte temporal. Os métodos testados estão descritos detalhadamente no apêndice B.

Para a realização dos cálculos numéricos, é necessário que todos os termos da equação de Langevin sejam adimensionais. Como ψ é uma grandeza sem dimensão, a derivada segunda com relação ao tempo e o Laplaciano têm dimensão de 1 sobre comprimento ao quadrado, que é equivalente a energia ao quadrado. O valor de $\Gamma = 10^3 fm^{-2}$ determinado acima pode ser convertido para unidades de energia através da relação $1MeV \cdot fm \approx 1/197$ e passa a ser $\Gamma = 3.8 \times 10^8 MeV^2$. Assim garantimos a adimensionalidade necessária da equação.

Para encontrarmos os contratermos necessários quando incluímos o ruído, usamos o resultado obtido no Cap. 4 para δm^2 em um modelo $\lambda\phi^4$, adaptado ao potencial efetivo aqui utilizado. O potencial para $SU(2)$ também é quártico com a mesma forma que o potencial considerado no desenvolvimento. Assim, basta identificarmos no potencial efetivo quem são os coeficientes dos termos quadrático e quártico, $\frac{1}{2}m^2$ e λ respectivamente, e substituir no resultado. Fazemos a mudança de variáveis $\psi \rightarrow \frac{\pi}{2}\psi$ e chegamos nos seguintes valores para os contratermos:

$$m^2 = \frac{g^2}{3} T_d^2 \left[\left(\frac{T}{T_d} \right)^2 - 1 \right] \quad (5.3)$$

e

$$\lambda = \frac{g^2}{12} b \quad (5.4)$$

O contratermo de massa tem a forma:

$$\delta m^2 = -0.75 \frac{\lambda T}{a} + \frac{6\lambda^2 T^2}{16\pi^2} \log \left(\frac{6}{am} + 0.09 \right) \quad (5.5)$$

A temperatura crítica para um sistema $SU(2)$ assume o valor $T_c = 302 MeV$ [45]. Para este valor de T_c , a grandeza M no potencial assume o valor $M = 775 MeV$. Como dito

anteriormente, o valor de Γ foi calculado para uma temperatura de $6.6T_c$, e foi esta temperatura que usamos nas simulações. Acima de $2T_c$, o potencial praticamente não é sensível a mudanças na temperatura e tem o mesmo comportamento de $T \rightarrow \infty$. O *loop* de Polyakov deve, portanto, assumir o valor 1 ao completar a transição de fase, sem ser necessário fazer uma normalização. Para cada passo de tempo, fazemos uma média do valor do *loop* em cada sítio, na forma:

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{N^3} \sum_{ijk} \psi_{ijk}(t), \quad (5.6)$$

onde N é o número de sítios na rede em cada direção e $i, j, k = 1, 2, \dots, N$ são os sítios da rede. Na Figura 5.1 mostramos o gráfico de $\langle \psi \rangle$ em três situações: sem dissipação e sem ruído (linha pontilhada), com dissipação e sem ruído (linha tracejada) e com ambos (linha cheia).

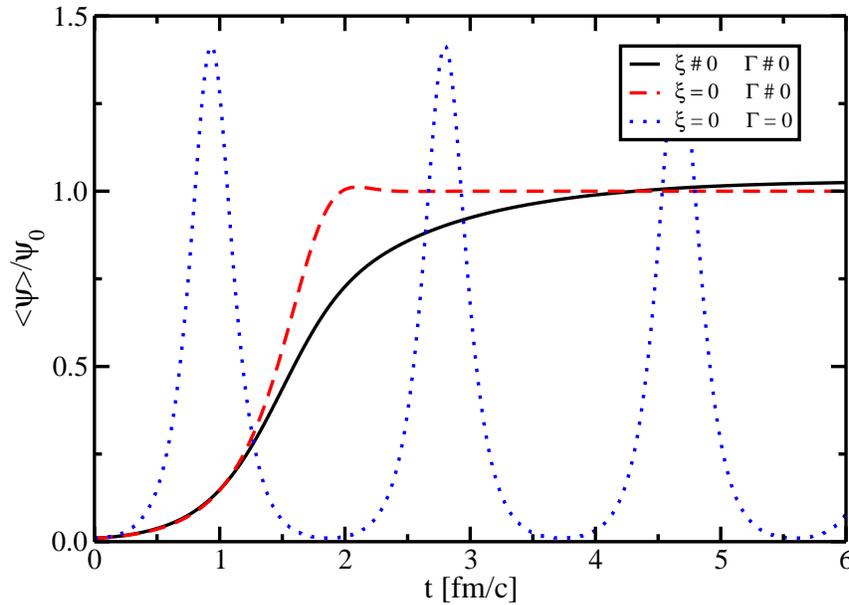


Figura 5.1: Evolução temporal do valor médio do parâmetro de ordem para o caso $SU(2)$.

Pode-se ver claramente na figura o grande efeito da dissipação, atrasando o rápido crescimento exponencial do parâmetro de ordem devido à decomposição espinodal. Comparando

os dois casos com dissipação, um com ruído e o outro sem, vemos que a termalização, que ocorre quando o parâmetro de ordem passa a ter valor constante um, é muito atrasada pelo efeito do ruído. Para o caso sem ruído encontramos um tempo de termalização de aproximadamente $2fm/c$, enquanto que quando incluímos o ruído este tempo dobra, indo para aproximadamente $4fm/c$.

Em $SU(3)$ o parâmetro B tem o valor $B = 4T/g^2$ [66], com constante de acoplamento $g^2 = 1.459$ [46]. A temperatura crítica neste caso será $T_c = 263 MeV$ [46] e obtemos M através da Eq. (3.22) com valor $M = 580 MeV$. O fator Γ utilizado foi o mesmo que para $SU(2)$ por não dispormos ainda de um valor para $SU(3)$. Os resultados, entretanto, dão uma boa indicação do que podemos esperar para um valor adequado de Γ , já que este deve estar na mesma ordem de grandeza que o valor obtido para $SU(2)$, e mudanças desta natureza não afetam drasticamente a forma da curva obtida e os valores para as escalas de tempo relevantes.

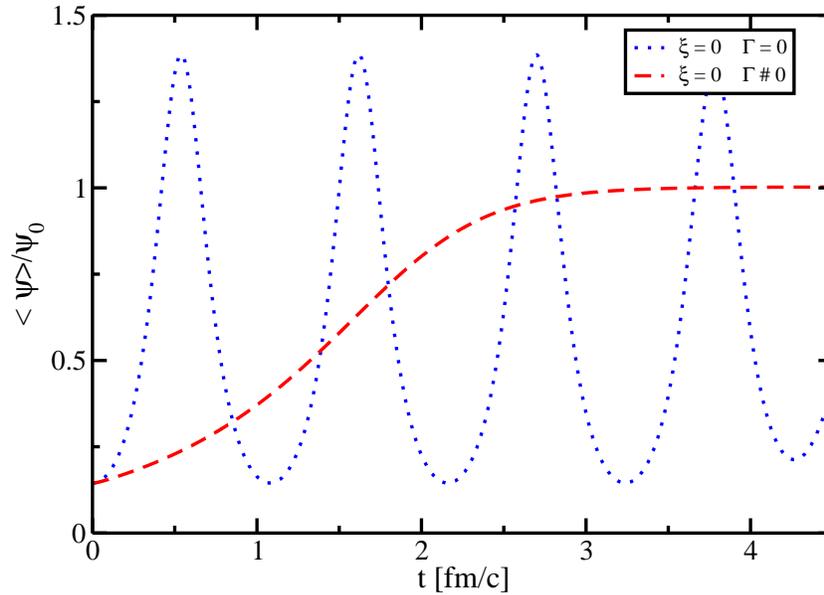


Figura 5.2: Evolução temporal do valor médio do parâmetro de ordem para o caso $SU(3)$, com potencial da Eq. 3.20

As simulações em $SU(3)$ foram feitas para a evolução temporal do parâmetro de ordem para os dois potenciais obtidos no capítulo 3. O sistema está representado por uma rede com mesmo número de sítios que anteriormente, 64^3 , com condições de contorno periódicas. Aqui comparamos apenas os casos sem dissipação e com dissipação, ambos sem ruído, por não possuirmos os contratermos adequados. O gráfico obtido para o primeiro modelo, usando os autovalores do *loop* de Polyakov como parâmetro de ordem, está representado na Figura (5.2).

Neste caso, vemos que o atraso devido à dissipação é ainda maior do que no caso de $SU(2)$. A termalização ocorre em $t = 3.5 fm/c$ sem levar em consideração o ruído que, conforme indica o caso $SU(2)$, deve ter também o efeito de retardar a termalização. Como comentado acima as mudanças não devem ser drásticas para o valor correto de Γ para $SU(3)$ e uma nova simulação deve ser feita assim que este valor estiver disponível [67].

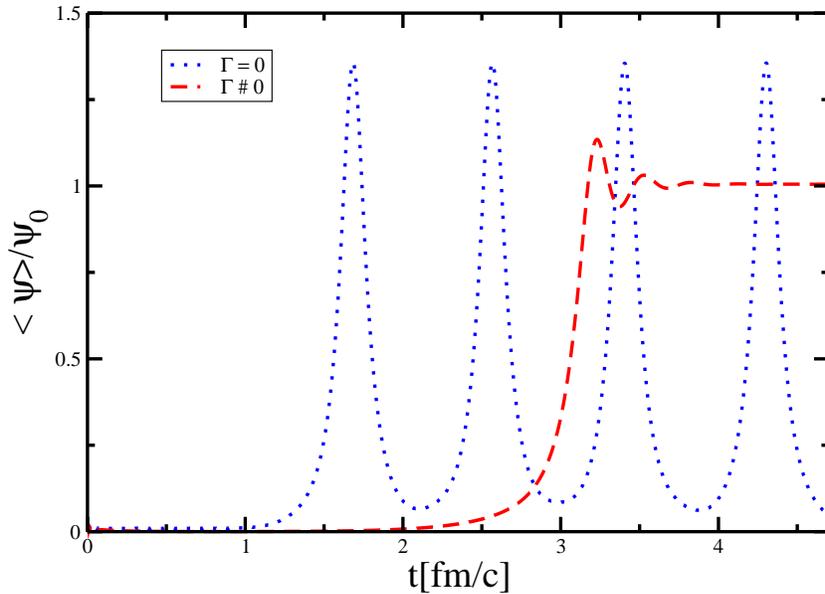


Figura 5.3: Evolução temporal do valor médio do parâmetro de ordem para o caso $SU(3)$ com potencial obtido seguindo o segundo modelo do Cap.3

Para o segundo modelo descrito no capítulo 3, onde o parâmetro de ordem é o valor esperado do traço do *loop*, obtivemos o gráfico da fig.(5.3), com o mesmo valor para o

parâmetro Γ que nos outros casos.

Para este modelo, o equilíbrio em uma situação onde só a dissipação é levada em conta, é atingido somente em torno de $t = 4fm/c$, ainda mais tarde do que no modelo anterior. E mais uma vez os resultados obtidos para $SU(2)$ indicam que o papel do ruído deve ser o de atrasar ainda mais a termalização.

5.3 Discussão dos resultados

A formação do plasma de quarks e glúons após uma colisão de íons pesados a altas energias, assim como sua hadronização, tem sido explicada de uma maneira bem-sucedida através de modelos hidrodinâmicos. A princípio, uma condição para que estes modelos possam ser aplicados a um problema físico, é que o sistema em questão esteja em equilíbrio, caso contrário as grandezas termodinâmicas não são bem definidas. Os dados experimentais disponíveis para tal processo nos fornecem uma idéia sobre o tempo total gasto, desde imediatamente após a colisão, até a hadronização. Entretanto, não nos fornecem informações sobre o que ocorre durante este período. O tempo total de vida do plasma é estimado entre $5 - 10fm/c$, mas não se sabe qual fração deste tempo é empregada exclusivamente na formação do plasma. Aparentemente os modelos hidrodinâmicos se mostram eficientes na descrição da evolução temporal destes sistemas desde pouquíssimo tempo após a colisão, o que indicaria que o equilíbrio é atingido de forma extremamente rápida, em menos de $t = 1fm/c$ [7]. Uma possibilidade que vem sendo discutida é de que não seja necessário o equilíbrio para que a hidrodinâmica possa ser aplicada, sendo suficiente que certas condições termodinâmicas sejam satisfeitas [74].

Nas simulações em puro gauge realizadas, vimos que a dissipação e o ruído têm um efeito considerável, atrasando a escala de tempo em que ocorre a termalização. Apesar de não dispormos ainda de um modelo efetivo definitivo para a transição de desconfinamento, para ambos os modelos estudados o efeito foi similar tanto qualitativamente quanto quantitativamente. Simulações análogas feitas para o caso da transição quiral foram realizadas [68], mostrando também um efeito considerável da dissipação e do ruído, conforme está representado na Figura 5.4. Em todos os casos estudados, os efeitos apontam sempre na mesma direção, no caso da transição de desconfinamento ainda mais intensamente do que na transição quiral.

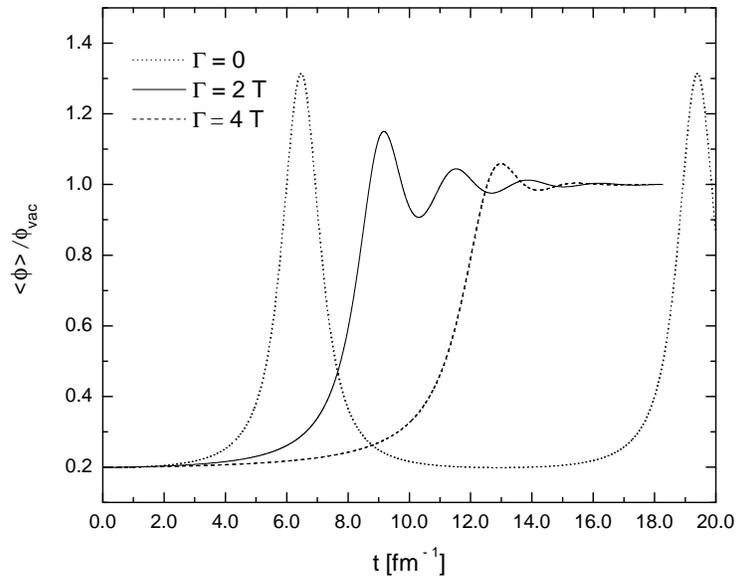


Figura 5.4: Evolução temporal para o parâmetro de ordem no caso da transição quiral (E.S.Fraga e G.Krein - 2005)

É natural, portanto, esperar que para um caso completo, incluindo tanto termos relativos ao condensado quiral, que faz o papel de parâmetro de ordem nesta transição, quanto termos relativos ao *loop* de Polyakov, e termos acoplando as duas grandezas, o efeito seja igualmente de retardar o equilíbrio [75].

Tais resultados em tempo real podem nos dar uma idéia do que está acontecendo dentro deste intervalo de tempo, entre a formação do plasma e a hadronização. Se, como tudo indica, um modelo mais realista, que inclua ambas as transições acopladas, e uma equação de Langevin mais completa, indicar também um atraso considerável na termalização, será um forte indício de que o equilíbrio não é atingido tão cedo como se acredita, em escalas de tempo inferiores a $1 \text{ fm}/c$. Os próximos passos portanto devem ser dados na direção de tornar o modelo mais realista, e uma continuação direta é incluir termos não-Markovianos na equação de Langevin. Outro ponto a ser considerado é que modelos efetivos mais sólidos para determinação do potencial na transição de desconfinamento vem sendo desenvolvidos,

como o modelo de matrizes [16, 18], que considera correções de ordens superiores advindas de representações superiores do *loop* de Polyakov.

Capítulo 6

Conclusão

Resultados experimentais recentes, assim como resultados de QCD na rede, fornecem fortes indicações de que sob condições extremas de temperatura e pressão a matéria hadrônica sofre uma transição de fase para um estado de plasma onde os quarks e glúons encontram-se desconfinados. Tais condições extremas podem ser atingidas em aceleradores de partículas de altíssimas energias, reproduzindo temperaturas e densidades ocorridas na natureza em situações como o *Big Bang* ou o interior de estrelas de nêutrons.

Até o momento não foi possível uma observação direta deste plasma, o que torna difícil a caracterização da sua dinâmica. Uma das ferramentas que tem se mostrado muito bem sucedida neste estudo é a hidrodinâmica, mas ainda existe muita discussão acerca do seu limite de validade [70, 71, 72, 73, 74]. Além disso teorias efetivas têm sido desenvolvidas com o objetivo de estudar esta transição, utilizando Lagrangeanas efetivas em função do parâmetro de ordem, o *loop* de Polyakov.

Nesta tese investigamos o efeito da dissipação e do ruído na evolução temporal do parâmetro de ordem que representa o sistema durante a transição de desconfinamento. Estes são oriundos de flutuações térmicas e quânticas vindas de auto-interação dos campos em questão ou de interação com outros campos, por exemplo campos quirais. Usamos um sistema simplificado, de puro gauge sem quarks dinâmicos, para o qual este parâmetro de ordem é exato. Conforme mostramos, a inclusão de tais quarks quebra a simetria do sistema, e o *loop* de Polyakov se torna um parâmetro de ordem aproximado. Tais sistemas puro gauge, apesar de serem simplificações, não são apenas exercícios acadêmicos, uma vez

que foi observada uma propriedade que vem sido conhecido como “insensibilidade ao sabor”: fazendo o gráfico de p/p_{SB} por T/T_c , encontra-se curvas aproximadamente insensíveis ao número de sabores presentes, e até mesmo à própria presença de quarks.

Para representar a dinâmica deste sistema de puro gauge, usamos dois diferentes modelos efetivos. O primeiro deles [10, 11], usado tanto na obtenção de potenciais efetivos para o caso $SU(2)$ quanto $SU(3)$, parte de um potencial calculado perturbativamente e acrescenta uma escala de massa para tornar possível a transição. O segundo modelo [12, 13] parte de argumentos apoiados na simetria $Z(N)$ do sistema, combinados com parâmetros fenomenológicos extraídos de QCD na rede, para a construção de um potencial efetivo. Este último foi usado apenas no estudo de $SU(3)$, uma vez que só se encontram disponíveis tais parâmetros extraídos da rede para este grupo de simetria.

Incorporamos os efeitos de dissipação e ruído à dinâmica do sistema fazendo uso de uma equação de Langevin. Mostramos como é possível obter uma equação de Langevin generalizada através de uma análise de teoria de campos fora do equilíbrio. Tal equação generalizada pode ser reduzida à equação fenomenológica usualmente adotada, se tomarmos o limite de altas temperaturas.

Realizamos, então, simulações numéricas evoluindo o parâmetro de ordem no tempo seguindo uma dinâmica de Langevin [22, 23]. Comparamos efeitos da dissipação isolada e associada ao ruído. Encontramos que o efeito de ambos foi o de retardar consideravelmente a escala de tempo que o sistema atinge o equilíbrio, sendo que no caso de $SU(3)$ o efeito foi ainda mais acentuado que em $SU(2)$. Comparando ainda com resultados obtidos para a transição quiral em um procedimento análogo ao realizado nesta tese, verificamos que os efeitos são ainda mais fortes no caso da transição de desconfinamento, o que pode levar a uma separação de escalas com possíveis consequências observacionais que exploraremos futuramente.

Várias melhorias podem ser feitas no modelo para torná-lo mais realista. Uma extensão direta é realizar esta análise para um sistema com o *loop* de Polyakov acoplado a campos quirais, incluindo assim férmions [75]. Outro ponto importante é o uso de uma equação de Langevin mais completa incluindo termos não-Markovianos, levando em conta a memória do sistema [76]. Como foi mostrado, isso implica no uso de ruído colorido e cálculo de um kernel de dissipação. Além disso, modelos efetivos mais sólidos vêm sendo desenvolvidos

para o caso da transição de desconfinamento, levando em consideração correções de ordens mais altas para o *loop* de Polyakov [16, 18]. Outros efeitos podem ainda ser incluídos como efeitos de expansão, tamanho finito e outros [77, 78, 79, 80].

De posse de um modelo mais completo, o tratamento em tempo real nos permite comparar a escala de tempo obtida nas simulações com dados obtidos em colisões de íons pesados. Tais resultados podem dar importantes indicações sobre o que ocorre no tempo entre a colisão e a hadronização, podendo inclusive nos dar informações sobre o uso da hidrodinâmica no estudo da dinâmica do plasma.

Apêndice A

Métodos numéricos

Existem vários métodos que podem ser usados na discretização de equações diferenciais, tanto para a discretização temporal como para a espacial. A seguir descreveremos alguns destes métodos através do exemplo da discretização da equação de Langevin utilizada nesta tese. Primeiramente, utilizaremos o *Fourier spectral method* para a discretização espacial e o “método explícito” para a discretização temporal. Em seguida, introduziremos o “método semi-implícito” de discretização através de uma pequena modificação no resultado obtido no primeiro desenvolvimento. Finalmente, faremos a discretização da equação utilizando o método *leap-frog* para a parte temporal e a dita “colocação de Fourier” para a parte espacial, métodos estes que mostraram uma maior estabilidade nas nossas simulações a tempos longos.

A equação Langevin utilizada neste trabalho tem a forma:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} - \nabla^2 l + \Gamma \frac{\partial l}{\partial t} + V'(l) = \xi, \quad (\text{A.1})$$

sendo

$$\begin{aligned} l &= l(\vec{x}, t) \\ \xi &= \xi(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

com

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle &= 0 \\ \langle \xi(\vec{x}, t) \xi(\vec{x}', t') \rangle &= 2\Gamma \delta(\vec{x}, -\vec{x}') \delta(t - t') \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

e $V'(l)$ é a derivada do potencial efetivo.

Uma maneira possível de se fazer a discretização temporal é o chamado método explícito, onde a derivada com relação ao tempo é definida como:

$$\frac{\partial l}{\partial t} \equiv \frac{l_{n+1} - l_n}{\Delta t}, \quad (\text{A.4})$$

onde n representa um determinado instante de tempo e $n + 1$ representa o instante seguinte. Seguindo esta definição, a derivada segunda será discretizada como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial l}{\partial t} \right) = \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{\partial l}{\partial t} \right)_{n+1} - \left(\frac{\partial l}{\partial t} \right)_n \right] \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{l_{n+1} - l_n}{\Delta t} \right) - \left(\frac{l_n - l_{n-1}}{\Delta t} \right) \right] \\ &= \frac{l_{n+1} - 2l_n + l_{n-1}}{\Delta t^2} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Analisando agora a parte espacial temos a nossa rede periódica de tamanho L , nas direções ortogonais x , y e z . Sejam N_x , N_y e N_z o número de sítios em cada direção. Temos, então, $\Delta x = L/N_x$ o espaçamento da rede na direção x . Da mesma forma, teremos $\Delta y = L/N_y$ e $\Delta z = L/N_z$. A posição \vec{x} de cada sítio será então dada por:

$$\vec{x} = (x, y, z) = \begin{cases} x = i\Delta x & i = 0, \dots, N_x \\ y = j\Delta y & j = 0, \dots, N_y \\ z = k\Delta z & z = 0, \dots, N_z \end{cases}$$

Fazendo a transformada de Fourier para o campo em um tempo específico n , ficamos com

$$l^n(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tilde{l}(\vec{k}), \quad (\text{A.6})$$

onde $\tilde{l}(\vec{k})$ é o campo $l(\vec{x})$ no espaço de momentos.

Se usarmos condições de contorno periódicas, devemos ter na direção x

$$l^n(x, y, z) = l^n(x + L, y, z). \quad (\text{A.7})$$

No espaço dos momentos, temos:

$$l^n(x, y, z) = \sum_{\vec{k}} e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z} \tilde{l}(\vec{k}) \quad (\text{A.8})$$

e

$$l^n(x + L, y, z) = \sum_{\vec{k}} e^{ik_x(x+L)+ik_y y+ik_z z} \tilde{l}(\vec{k}). \quad (\text{A.9})$$

Para que as duas expressões acima sejam iguais devemos ter:

$$e^{ik_x L} = 1, \quad (\text{A.10})$$

Deste modo podemos escrever k_x , k_y e k_z como:

$$k_x = \frac{2\pi}{L}r, \quad r = -\frac{N_x}{2}, \dots, +\frac{N_x}{2} \quad (\text{A.11})$$

da mesma forma:

$$k_y = \frac{2\pi}{L}s, \quad s = -\frac{N_y}{2}, \dots, +\frac{N_y}{2} \quad (\text{A.12})$$

$$k_z = \frac{2\pi}{L}p, \quad p = -\frac{N_z}{2}, \dots, +\frac{N_z}{2}. \quad (\text{A.13})$$

Assim, ficamos com:

$$l^n(x, y, z) = \sum_{r,s,p} e^{i(\frac{2\pi}{L}rx + \frac{2\pi}{L}sy + \frac{2\pi}{L}pz)} \tilde{l}_{rsp}. \quad (\text{A.14})$$

Em uma rede onde os espaçamentos $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$, teremos para a derivada com relação a x :

$$\frac{\partial l}{\partial x} = \frac{l(x + h, y, z) - l(x, y, z)}{h} \quad (\text{A.15})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial l}{\partial x} \right) = \frac{1}{h} \left[\left(\frac{\partial l}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial l}{\partial x} \right)_{x-h} \right] = \\ &= \frac{l(x + h, y, z) - 2l(x, y, z) + l(x - h, y, z)}{h^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Realizando o mesmo procedimento para as derivadas com relação a y e z o Laplaciano toma a forma:

$$\begin{aligned} \nabla^2 l^n &= \frac{l^n(x + h, y, z) - 2l^n(x, y, z) + l^n(x - h, y, z)}{h^2} \\ &+ \frac{l^n(x, y + h, z) - 2l^n(x, y, z) + l^n(x, y - h, z)}{h^2} \\ &+ \frac{l^n(x, y, z + h) - 2l^n(x, y, z) + l^n(x, y, z - h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Fazendo a transformada de Fourier do Laplaciano:

$$\begin{aligned} \nabla^2 l^n &= \sum_{rsp} \frac{1}{h^2} \left[e^{i\frac{2\pi}{L}(r(x+h)+sy+pz)} - 2e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+sy+pz)} + e^{i\frac{2\pi}{L}(r(x-h)+sy+pz)} \right. \\ &+ e^{i\frac{2\pi}{L}(r(x+s(y+h)+pz)} - 2e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+sy+pz)} + e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+s(y-h)+pz)} + \\ &\left. + e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+sy+p(z+h))} - 2e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+sy+pz)} + e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+sy+p(z-h))} \right] \tilde{l}_{rsp}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Colocando então em evidência o termo $e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+sy+pz)}$ obtemos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 l^n &= \sum_{rsp} \frac{1}{h^2} \left\{ -6 + 2 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{L}rh\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{L}sh\right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \cos\left(\frac{2\pi}{L}ph\right) \right] \right\} e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+sy+pz)} \tilde{l}_{rsp}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Definindo

$$\lambda_{rsp} = \left\{ -6 + 2 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{L}rh\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{L}sh\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{L}ph\right) \right] \right\} / h^2, \quad (\text{A.20})$$

podemos escrever:

$$\nabla^2 l^n = \sum_{rsp} \lambda_{rsp} e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+sy+pz)} \tilde{l}_{rsp} \quad (\text{A.21})$$

chegando a uma forma final para a transformada do Laplaciano. As transformadas da derivada do potencial e do ruído serão escritas como:

$$U'(l) = \sum_{rsp} e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+sy+pz)} \tilde{U}_{rsp} \quad (\text{A.22})$$

$$\xi = \sum_{rsp} e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+sy+pz)} \tilde{\xi}_{rsp} \quad (\text{A.23})$$

e devem ser realizadas por meio de rotinas numéricas. O termo de derivada segunda transformado toma a forma:

$$\frac{l^{n+1} - 2l^n + l^{n-1}}{(\Delta t)^2} = \sum_{rsp} \frac{1}{(\Delta h)^2} e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+sy+pz)} \left[\tilde{l}^{n+1} - 2\tilde{l}^n + \tilde{l}^{n-1} \right]. \quad (\text{A.24})$$

Nossa equação diferencial toma a forma:

$$\begin{aligned} \sum_{rsp} e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+sy+pz)} \left\{ \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[\tilde{l}_{rsp}^{n+1} - 2\tilde{l}_{rsp}^n + \tilde{l}_{rsp}^{n-1} \right] + \lambda_{rsp} \tilde{l}_{rsp}^n \right. \\ \left. + \frac{\Gamma}{\Delta t} \left(\tilde{l}_{rsp}^{n+1} - \tilde{l}_{rsp}^n \right) + b_{rsp} \right\} = \sum_{rsp} e^{i\frac{2\pi}{L}(rx+sy+pz)} \left\{ \tilde{\xi}_{rsp} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

ou seja:

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} \left[\tilde{l}_{rsp}^{n+1} - 2\tilde{l}_{rsp}^n + \tilde{l}_{rsp}^{n-1} \right] + \lambda_{rsp} \tilde{l}_{rsp}^n + \frac{\Gamma}{\Delta t} \left(\tilde{l}_{rsp}^{n+1} - \tilde{l}_{rsp}^n \right) + b_{rsp} = \tilde{\xi}_{rsp} \quad (\text{A.26})$$

Isolando os termos que estão no tempo $n + 1$ a esquerda e definindo:

$$X \equiv \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} + \frac{\Gamma}{\Delta t} \right) \quad (\text{A.27})$$

ficamos com:

$$\tilde{l}_{rsp}^n = \frac{1}{X} \left\{ \frac{2}{(\Delta t)^2} \tilde{l}_{rsp}^n - \frac{1}{(\Delta t)^2} \tilde{l}_{rsp}^{n-1} - \lambda \tilde{l}^n + \frac{\Gamma}{\Delta t} \tilde{l}^n - \tilde{b}_{rsp}^n + \tilde{\xi}_{rsp}^n \right\}. \quad (\text{A.28})$$

Esta é a expressão final discretizada que utilizamos para determinar o campo a cada passo de tempo da simulação . As derivadas do potencial e do ruído são realizadas utilizando as rotinas “Fast Fourier Transform” descritas em [81].

O método de discretização temporal semi-implícito é bastante similar ao método desenvolvido acima. A única diferença está na expressão final, onde o termo oriundo da transformada do Laplaciano é colocado no tempo $(n + 1)$ da seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{(\Delta t)^2} + \lambda_{rsp} + \frac{\Gamma}{\Delta t} \right) \tilde{l}_{rsp}^{n+1} = \frac{2}{(\Delta t)^2} \tilde{l}_{rsp}^n - \frac{1}{(\Delta t)^2} \tilde{l}_{rsp}^{n-1} + \frac{\Gamma}{\Delta t} \tilde{l}^n - \tilde{b}_{rsp}^n + \tilde{\xi}_{rsp}^n, \quad (\text{A.29})$$

E temos para o tempo $(n + 1)$:

$$X = \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} + \lambda_{rsp} + \frac{\Gamma}{\Delta t} \right) \quad (\text{A.30})$$

e

$$\tilde{l}_{rsp}^n = \frac{1}{X} \left\{ \frac{2}{(\Delta t)^2} \tilde{l}_{rsp}^n - \frac{1}{(\Delta t)^2} \tilde{l}_{rsp}^{n-1} + \frac{\Gamma}{\Delta t} \tilde{l}^n - \tilde{b}_{rsp}^n + \tilde{\xi}_{rsp}^n \right\}. \quad (\text{A.31})$$

A grande vantagem deste método é que no caso passado tínhamos um vínculo entre o passo de tempo e o espaçamento da rede da seguinte forma [82]:

$$\delta t \approx (\Delta x)^2. \quad (\text{A.32})$$

Utilizando o método semi-implícito, é possível utilizar um passo de tempo consideravelmente maior, em alguns casos até dez vezes maior, reduzindo muito o custo computacional das simulações [82].

Em seguida vamos realizar a discretização da mesma equação utilizando os métodos *leap-frog* para a parte temporal, e colocação de Fourier para a espacial.

No método *leap-frog*, definimos a derivada temporal como a derivada de uma média do campo nos tempos $(n + 1)$ e $(n - 1)$:

$$\frac{\partial l}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{l^{n+1} + l^{n-1}}{2} \right]. \quad (\text{A.33})$$

A derivada segunda é definida da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 l}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{l^{n+1} - l^{n-1}}{\Delta t} \right] \quad (\text{A.34})$$

Neste método escrevemos a equação em função da derivada do campo, o que reduz consideravelmente o custo computacional. A equação diferencial torna-se então:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{l^{n+1} - l^{n-1}}{\Delta t} \right] - \nabla^2 l^n + \Gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{l^{n+1} + l^{n-1}}{2} \right] + U^n = \xi^n. \quad (\text{A.35})$$

Agrupando os termos que estão no mesmo instante de tempo, a equação de Langevin toma a forma:

$$\left(1 + \frac{\Gamma}{2} \Delta t \right) \frac{\partial}{\partial t} l^{n+1} - \left(1 - \frac{\Gamma}{2} \Delta t \right) \frac{\partial}{\partial t} l^{n-1} + [U' - \xi] \Delta t - \Delta t \nabla^2 l^n = 0 \quad (\text{A.36})$$

A transformada de Fourier do Laplaciano, no método da colocação de Fourier é escrita como:

$$\nabla^2 l = \nabla^2 \sum_{rsp} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} \tilde{l}_{rsp} = \sum_{rsp} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x})} \left[-\vec{k}^2 \tilde{l}_{rsp} \right], \quad (\text{A.37})$$

onde $k_i = \frac{2\pi h}{L} l_i$ e $l_i = \{r, s, p\}$. Podemos notar que κ é uma aproximação em segunda ordem de λ_{rsp} usado no *Fourier spectral method* (vide Eq. (A.20))

$$\begin{aligned} \lambda_{rsp} &\approx \frac{1}{h^2} \left[-6 + 2 \left[1 - \left(\frac{2\pi r}{L} \right)^2 \frac{h^2}{2!} + 1 - \left(\frac{2\pi s}{L} \right)^2 \frac{h^2}{2!} + 1 - \left(\frac{2\pi p}{L} \right)^2 \frac{h^2}{2!} \right] \right] = \\ &= - \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (r^2 + s^2 + p^2) = \vec{k}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Fazendo a transformada de Fourier de toda a Eq. A.36 ficamos com

$$\left(1 + \frac{\Gamma}{2} \Delta t \right) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{l}_{rsp}^{n+1} - \left(1 - \frac{\Gamma}{2} \Delta t \right) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{l}_{rsp}^{n-1} + [\tilde{U}' - \tilde{\xi}] \Delta t - \vec{k}^2 \tilde{l}_{rsp}^n \Delta t = 0 \quad (\text{A.39})$$

Definindo:

$$X = \left(1 + \frac{\Gamma}{2}\Delta t\right), \quad (\text{A.40})$$

podemos encontrar a derivada de \tilde{l} no tempo $(n + 1)$ via:

$$\frac{\partial \tilde{l}_{rsp}^{n+1}}{\partial t} = \frac{1}{X} \left[\left(1 - \frac{\Gamma}{2}\Delta t\right) \frac{\partial \tilde{l}_{rsp}^{n-1}}{\partial t} - \Delta t \left(\vec{k}^2 \tilde{l}_{rsp}^n + b_{rsp}^n - \tilde{\xi}_{rsp}^n \right) \right] \quad (\text{A.41})$$

e o campo l no instante n pode ser determinado através da relação :

$$\tilde{l}_{rsp}^{n+1} = \tilde{l}_{rsp}^{n-1} + \Delta t \cdot \frac{\partial \tilde{l}_{rsp}^{n+1}}{\partial t} \quad (\text{A.42})$$

Este último método mostrou maior estabilidade em simulações a tempos longos.

Bibliografia

- [1] R. L. Jaffe, Phys. Rept. **409**, 1 (2005).
- [2] D. J. Gross e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [3] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [4] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **31**, 494 (1973).
- [5] S. Eidelman *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Phys. Lett. B **592**, 1 (2004).
- [6] M. Gyulassy and L. McLerran, Nucl. Phys. A **750**, 30 (2005).
- [7] Proceedings do Quark Matter 2004, J. Phys G **30**, S633 (2004)
- [8] E. Laermann and O. Philipsen, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **53**, 163 (2003).
- [9] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*. (Addison Wesley Publishing Company, 1990).
- [10] P. N. Meisinger, T. R. Miller, M. C. Ogilvie, Phys. Rev. D **65**, 034009 (2002).
- [11] T. R. Miller, M. Ogilvie, Phys. Lett. B, **488**, 313 (2000).
- [12] R. D. Pisarski, Phys.Rev. D, **62**, 111501 (2000).
- [13] R. D. Pisarski, Publicado em *Cargese 2001, QCD perspectives on hot and dense matter* 353-384.
- [14] A. Dumitru e R. D. Pisarki, Phys. Lett. B, **504**, 282 (2001).

- [15] O. Scavenius, A. Dumitru, J. T. Lenaghan, Phys. Rev. C, **66**, 034903 (2002).
- [16] A. Dumitru, Y. Hatta, J. Lenaghan, K. Orginos, e R. D. Pisarski, Phys. Rev D, **70**, 034511 (2004).
- [17] A. Dumitru, J. Lenaghan, e R. D. Pisarski, Phys. Rev D, **71**, 074004 (2005).
- [18] A. Dumitru, R. D. Pisarski, D. Zschiesche, Phys. Rev. D, **72**, 065008 (2005)
- [19] M. Gleiser e R. O. Ramos, Phys. Rev. D, **50**, 2441 (1994).
- [20] D. H. Rischke, Phys.Rev.C, **58**, 2331 (1998).
- [21] A. Berera, M. Gleiser, R. O. Ramos, Phys. Rev. D, **58**, 123508 (1998).
- [22] A. J. Mizher, E. S. Fraga e G. Krein,, hep-ph/0604123, a ser publicado nos proceedings da I Latin American Workshop on High Energy Physics (LAWHEP 2005), Porto Alegre, Brasil, 1-3Dez, 2005.
- [23] G. Ananos, E. S. Fraga, G. Krein e A. J. Mizher, em fase de redação.
- [24] N. K. Glendenning, *Compact Stars-Nuclear Physics, Particle Physics and General Relativity* (Springer, New York, 2000).
- [25] M. Peskin e D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1995).
- [26] S. Pokorski, *Gauge Field Theories* (Cambridge University Press, Cambridge 1989).
- [27] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).
- [28] C. N. Yang e R. L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [29] J. Smit, *Introduction to Quantum Fields on a Lattice*, (Cambridge University Press, 2002)
- [30] J. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, (Cambridge University Press, 1989).
- [31] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory* (Cambridge University Press, 1996).

- [32] A. M. Polyakov, Phys. Lett. B **72**, 477 (1978).
- [33] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **138**, 1 (1978).
- [34] L. McLerran e B. Svetitsky, Phys.Rev.D **24**, 450 (1981).
- [35] P. Petreczky e K. Petrov, Phys. Rev. D **70**, 054503 (2004)
- [36] B. Svetitsky e L. G. Yaffe, Nucl. Phys. B **210**, 423 (1982).
- [37] B. Svetitsky, Phys. Rep. **132**, 1 (1986).
- [38] Proceedings do Quark Matter 2001, Nucl.Phys.A **698** 199 (2002).
- [39] I. S. Gradshteyn, *Table of Integrals, Series and Products*, (Academic Press, New York, 1965).
- [40] D. Gross, R. D. Pisarski, e L. G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **53**, 43 (1981).
- [41] N. Weiss, Phys.Rev.D **24**, 475 (1981).
- [42] N. Weiss, Phys.Rev.D **25**, 2667 (1982).
- [43] L. Dolan e R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**, 3320 (1974).
- [44] B. Svetitsky e L. G. Yaffe, Phys. Rev. D **26**, 963 (1982).
- [45] J. Fingberg, U. M. Heller, F. Karsch, Nucl. Phys. B **392**, 493 (1993).
- [46] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Lutgemeier e B. Petersson, Nucl. Phys. B **469**, 419 (1996)
- [47] R. Kubo, M. Toda e N. Nashitsume, *Statistical Physics II, Nonequilibrium Statistical Mechanics* (Springer, Heidelberg, Germany 1998).
- [48] N. Wiener, Acta. Math. **55**, 117 (1930); A. I. Khintchine, Math. Ann. **109**, 604 (1934).
- [49] A. O. Caldeira e A. J. Leggett, Annals Phys. **149**, 374 (1983).

- [50] R. J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 1988).
- [51] J. Schwinger, Jour. Math. Phys. **2**, 407 (1961); L. V. Keldish, Zh. Eksp. Teor. Fiz **47**, 1515 (1964); A. Niemi e G. Semenoff, Ann. Phys. (NY) **152**, 105 (1984).
- [52] R. P. Feynman e A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, 1965).
- [53] R. P. Feynman and F. L. . Vernon, Annals Phys. **24**, 118 (1963) [Annals Phys. **281**, 547 (2000)].
- [54] U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, (World Scientific, 1999).
- [55] A. K. Das, *Finite Temperature Field Theory* (World Scientific, 1997).
- [56] P. C. Martin, E. D. Siggia e H. A. Rose, Phys. Rev. A **8**, 423 (1973).
- [57] M. Morikawa, Phys. Rev. D **29**, 2228 (1984).
- [58] K. Chou, Z. Su, B. Hao, e L. Yu, Phys. Rep. **118**, 1 (1985).
- [59] L. M. A. Bettencourt, K. Rajagopal e J. V. Steele, Nucl.Phys. A **693**, 825 (2001).
- [60] K. Farakos, K. Kajantie, K. Rummukainen e M. Shaposhnikov, Nuc. Phys. B, **425** 67 (1994).
- [61] C. J. Gagne e M. Gleiser, Phys. Rev. E, **61**, 3483 (2000).
- [62] J. D. Gunton, M. San Miguel e P. S. Sahni, *Phase Transition and Critical Phenomena* (Academic Press, Londres, 1983).
- [63] K. Binder, Rep. Prog. Phys. **50**, 783 (1987).
- [64] J. S. Langer in *Solids far from equilibrium* (Edited by C. Godrèche, Cambridge University Press, 1992).
- [65] A. J. Bray, Adv. Phys. **43**, 357 (1994).

- [66] T. Bhattacharya, A. Gocksch, C. Korthals Altes, R. D. Pisarski, Phys. Rev. Lett. **66**, 998 (1991); Nucl. Phys. B **383**, 497 (1992).
- [67] G. Krein, AIP Conf. Proc. **756**, 419 (2005).
- [68] E. S. Fraga, G. Krein, Phys. Lett. B **614**, 181 (2005).
- [69] G. Parisi, *Statistical Field Theory* (Addison-Wesley, New York, 1998).
- [70] K. Paech, H. Stoecker and A. Dumitru, Phys. Rev. C **68**, 044907 (2003).
- [71] P. Huovinen, Nucl. Phys. A **761**, 296 (2005).
- [72] Y. Hama, R. P. G. Andrade, F. Grassi, O. J. Socolowski, T. Kodama, B. Tavares and S. S. Padula, hep-ph/0510096.
- [73] P. Huovinen and P. V. Ruuskanen, nucl-th/0605008.
- [74] T. Kodama, T. Koide, G. S. Denicol and P. Mota, hep-ph/0606161.
- [75] A. J. Mizher e E. S. Fraga, trabalho em andamento
- [76] E. S. Fraga, T. Kodama, G. Krein, A. J. Mizher e L. F. Palhares, Nucl. Phys. A (no prelo).
- [77] C. Spieles, H. Stoecker and C. Greiner, Phys. Rev. C **57**, 908 (1998).
- [78] O. Scavenius, A. Dumitru, E. S. Fraga, J. T. Lenaghan and A. D. Jackson, Phys. Rev. D **63**, 116003 (2001).
- [79] E. S. Fraga and R. Venugopalan, Physica A **345**, 121 (2004).
- [80] O. Kiriyaama, T. Kodama and T. Koide, hep-ph/0602086.
- [81] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [82] J. Zhu, L. Q. Chen, J. Shen e V. Tikare, Phys. Rev E, **60**, 3564 (1999); L. Q. Chen e J. Shen, Comp. Phys. Comm. **108**, 147 (1998).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)