Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Derpartamento de Matemática

Pós-graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Distribuição de Pesos de Bases de uma Matróide

Karla Ferreira Sousa de Arruda

Recife, 10 de março de 2008.

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Derpartamento de Matemática

Karla Ferreira Sousa de Arruda

Distribuição de Pesos de Bases de uma Matróide

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: *Manoel José Machado Soares Lemos*

Recife, 10 de março de 2008.

Arruda, Karla Ferreira Sousa de
Distribuição de pesos de bases de uma matróide / Karla Ferreira Sousa de Arruda. – Recife: O Autor, 2008.
60 folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2008.

Inclui bibliografia.

1. Análise combinatória. Título.

511.6 CDD (22.ed.) MEI2008-042

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: ____

Manoel José Machado Soares Lemos, DMAT-UFPE

Orientador

____

Sóstenes Luiz Soares Lins, DMAT-UFPE

____

Silvio de Barros Melo, CIN-UFPE

DISTRIBUIÇÃO DE PESOS DE BASES DE UMA MATRÓIDE

Por

Karla Ferreira de Sousa Arruda

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Março - 2008

Agradecimentos

Começo por agradecer a Deus e a Virgem Maria pela força de espírito a mim concedida para esta batalha intelectual.

Ao meu pai, Ernane Cabral, a minha mãe, Acyoman Ferreira e à minha irmã Kátia Cabral, pelo apoio e amparo nos momentos mais difíceis.

Ao meu noivo Tiago Duque pelo incentivo e companherismo em todo mestrado e a todo momento. À minha sogra, Iguacy Duque e ao meu sogro Milton Marques.

Aos colegas de graduação, Eudes, Raphael, Lucas, Tarciana, Claudilene, Giovana, Antonio Macarrão, Hugo, Gabriel, Anete e Ricardo, foi muito divertido estudar com vocês.

À minha turma de mestrado, Adecarlos, Marcelo, Joilson, Renata, Zaqueu e Lucas (de novo). Grandes guerreiros!

À todos que conheci no departamento de matemática, Rodrigo, André, Laudelino, Renato, Bruno, Isis, Luis, Manassés, Eder, Hélio, João Paulo, Adriano, Ademarkson, Humberto e Débora.

Ao professor orientador Manoel Lemos pelo exemplo de competência e paciência. Aos professores Hildeberto Cabral, Sérgio Santa Cruz, Antonio Carlos, Sóstenes Lins, Silvio Melo e Aron Simis por terem me ensinado ao longo da minha formação.

Aos amigos do CEFET, Jullyane, Jeane, João Paulo, José Renê, Paulinho, Leandro, Pietro, foi com vocês que descobrir o prazer de estudar matemática. Um agradecimento especial ao professor Tetsuo Usui, meu primeiro orientador.

Por fim agradeço a CAPES pelo incentivo financeiro e ao Departamento de Matemática pela formação acadêmica.

A fé e a razão são duas asas que nos levam para o céu. Deus sempre abençoa o esforço da busca, crer nada mais é pensar querendo, pensar crendo e pensando crer.

João Paulo II

Resumo

Muitas situações no dia-dia podem ser descritas por meio de um diagrama que consiste de um conjunto de pontos e linhas que unem certos pares desses pontos. Por exemplo, podemos pensar nos pontos como terminais rodoviários e nas linhas como sendo as estradas. Uma abstração matemática para esse tipo de situação aparece no conceito de grafos. Em 1992, Mayr e Plaxton provaram uma conjectura, proposta por Kano, envolvendo árvores geradoras de grafos com peso. Em 2006, Lemos em seu trabalho intitulado *Weight Distribution of the Bases of a Matroid*, estende este resultado para matróides. Lemos também prova que as quatro conjecturas devidas a Kano valem para matróides fornecendo uma partição das bases da matróide pela distribuição dos pesos de seus elementos em vez do seu peso. Este trabalho de dissertação tem como objetivo desenvolver os resultados obtidos por Lemos bem como sua conjectura.

Palavras-chave: Ordem-lex, Matróide com peso, Conjecturas de Kano.

Abstract

Many day-to-day situations can be described with a diagram formed by a set of points and a set of lines linking some of these points. For instance, we can consider the points as bus stations and the lines as roads. Graph Theory is a mathematical abstraction for this kind of situation. In 1992, Mayr and Plaxton proved a conjecture, which was proposed by Kano, related to spanning trees of weighted graphs. In 2006, Lemos in his article *Weight Distribution of the Bases of a Matroid* extends this result to matroids. Lemos also proved that the four Kano´s conjectures hold to matroids, providing a partition of the bases of the matroid in the distributions of the weights of their elements instead of their own weight. This dissertation develops these Lemos' results as well as his conjecture.

Keywords: Order-lex, Weight Matroid, Kano's conjectures.

Sumário

Introdução

Em 1992, Mayr e Plaxton provaram uma conjectura, proposta por Kano, envolvendo árvores geradoras de grafos com peso. Em 2006, Lemos em seu trabalho intitulado "Weight Distribution of the Bases of a Matroid", estende este resultado para matróides. Lemos também prova que as quatro conjecturas devidas a Kano valem para matróides fornecendo uma partição das bases da matróide pela distribuição dos pesos de seus elementos em vez do seu peso. Este trabalho de dissertação tem como objetivo desenvolver os resultados obtidos por Lemos bem como sua conjectura.

No primeiro capítulo desenvolveremos as noções básicas sobre matróides. Estas são os pré-requisitos para o teorema principal apresentado no capítulo 4. Uma boa parte dos resultado do presente capítulo foram desenvolvidos e alguns dos que foram omitidos, para os leitores interessados, poderão ser encontrados na referência [6]. Na seção 1.6 está apresentado um problema clássico de otimização para grafos, o algortimo de Kruskal ou algortimo guloso.

No segundo capítulo, está apresentado as quatro conjecturas devidas a Kano, o teorema de Kano e a conjectura de Mayr e Plaxton. Uma generalização em matróides do teorema de Kano será feita e veremos que as conjecturas mencionadas acima seguem, em geral para matróides, da conjectura dada por Lemos. Na seção 2.2 definiremos uma matróide com peso e ordem de uma base.

No terceiro capítulo, está desenvolvido o teorema que é uma modificação da conjectura de Mayr e Plaxton. Este teorema torna válido o teorema principal do presente trabalho. Neste mesmo capítulo, uma nova e importante ordem para as bases de uma matróide com peso é definida, a saber a ordem-lex.

No quarto capítulo, está demonstrado o teorema principal. Lemos, trabalhando com a ordem-lex, prova que todas as quatro conjecturas de Kano se tornam válidas. Ótima leitura!

Capítulo 1

Noções básicas sobre Matróides

1.1 Definições básicas

Matróides podem ser definidas de várias maneiras que são todas equivalentes. Utilizaremos um sistema de axiomas proposto por Whitney no artigo cujo termo matróide foi introduzido.

Uma *matróide* M é um par ordenado $(E, \mathcal{I})$, onde E é um conjunto finito e $\mathcal{I}$ é uma família de subconjuntos de E que satisfaz as seguintes condições:

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$;

(I2) Se $I \in \mathcal{I}$ e $J \subseteq I$, então $J \in \mathcal{I}$;

(I3) Se I e J estão em $\mathcal{I}$ e $|I| < |J|$, então existe um elemento e de $J - I$ tal que $I \cup e \in \mathcal{I}$.

Diremos que M é uma matróide sobre o conjunto E e escrevemos, quando necessário, $E = E(M)$ para indicar os elementos da matróide M. Os elementos de $\mathcal{I}$ são os conjuntos *independentes* de M. Um subconjunto de E que não está em $\mathcal{I}$ é chamado conjunto *dependente*.

Exemplo 1.1.1 *Sejam r e n números inteiros tais que $0 \leq r \leq n$ e $1 \leq n$. Considere o conjunto $E = \{1, 2, ..., n\}$. Tome $\mathcal{I}$ como a família formada pelos subconjuntos de E com no máximo r elementos. Observe que as condições* **(I1)**, **(I2)** *e* **(I3)** *são satisfeitas pelos elementos de $\mathcal{I}$. Assim o par $(E, \mathcal{I})$ é uma matróide denotada por $U_{r,n}$ e chamada, matróide uniforme.*

Exemplo 1.1.2 *Seja B uma matriz $m \times n$ com entradas em um corpo k. As n colunas de B são vetores em k^m. Sejam $E = \{1, 2, ..., n\}$ o conjunto dos rótulos das colunas e $\mathcal{I}$ a família formada pelos subconjuntos $I \subseteq E$ cujas colunas com rótulo em I são linearmente independentes em k^n. O par $(E, \mathcal{I})$ é uma matróide. De fato, as condições* **(I1)** *e* **(I2)** *seguem facilmente. Para provar* **(I3)** *sejam I e J subconjuntos independentes de E tais que $|I| < |J|$. Seja W o subspaço de k^n gerado pelas colunas rotulas por $I \cup J$. Note que a dimensão de W é pelo menos $|J|$. Suponha que $I \cup f$ é um dependente para todo $f \in J - I$, isto é, as colunas com rótulo em $I \cup f$ são linearmente dependentes para todo $f \in J - I$. Sendo assim, W está contido no espaço gerado pelas colunas com rótulo em I. Mas $|J| \leq dim\ W \leq |I| < |J|$; um absurdo. Concluimos que $J - I$ contém um elemento f tal que $I \cup f \in \mathcal{I}$, isto é,* **(I3)** *vale e o par $(E, \mathcal{I})$ é uma matróide chamada, matróide vetorial sobre k de B. Denotamos esta matróide por $M[B]$.*

O último exemplo justifica o nome matróide, dado a esta estrutura combinatória, que significa falsa matriz e que foi introduzido por Whitney [1].

1.2 Circuitos

Na seção anterior vimos que um subconjunto de E é dependente em M quando não pertence a $\mathcal{I}$. Os dependentes minimais com relação a ordem de inclusão são chamados de *circuitos* de M. Denotemos por $\mathcal{C}$, ou $\mathcal{C}(M)$, o conjunto dos circuitos de uma matróide. Diremos que um elemento e é um *laço* de uma matróide M, se $\{e\}$ é um circuito de M.

Exemplo 1.2.1 *Considere a matróide vetorial sobre $\mathbb{Z}_2$ cuja matriz B é dada abaixo:*

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

O conjunto dos circuito da matróide $M[B]$ é dado por $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 5\}, \{2, 3, 7\}, \{1, 3, 6\}, \{4\}\}$. Note que o único laço da matróide é $\{4\}$.

A família $\mathcal{I}$ dos independentes pode ser determinada pela família dos circuitos $\mathcal{C}$. De fato, os independentes são os subconjuntos de E que não contém circuitos da matróide. Veremos algumas propriedades dos circuitos no próximo resultado.

Lema 1.2.1 *O conjunto $\mathcal{C}$ de circuitos de uma matróide possui as seguintes propriedades:*

(C1) *O conjunto vazio não pertence a $\mathcal{C}$;*

(C2) *Se C_1 e C_2 são elementos de $\mathcal{C}$ e $C_1 \subseteq C_2$, então $C_1 = C_2$;*

(C3) *Se C_1 e C_2 são elementos distintos de $\mathcal{C}$ e $f \in C_1 \cap C_2$, então existe um elemento C_3 de $\mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - f$.* □

No teorema seguinte, caracterizamos os circuitos de uma matróide através das propriedades **(C1)**, **(C2)** e **(C3)** e veremos que é possível conhecer uma matróide a partir de sua família de circuitos.

Teorema 1.2.1 *Seja E um conjunto finito. Se $\mathcal{C}$ é uma família de subconjuntos de E que satisfaz as propriedades* **(C1)**, **(C2)** *e* **(C3)** *e $\mathcal{I}$ é a família dos subconjuntos de E que não contém elementos de $\mathcal{C}$, então o par $(E, \mathcal{I})$ é uma matróide tendo $\mathcal{C}$ como sua família de circuitos.* □

Corolário 1.2.1 *Seja $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de E. Então $\mathcal{C}$ é uma família de circuitos de uma matróide sobre E se e somonte se $\mathcal{C}$ satisfaz as seguintes condições:*

(C1) *O conjunto vazio não pertence a $\mathcal{C}$;*

(C2) *Se C_1 e C_2 são elementos de $\mathcal{C}$ e $C_1 \subseteq C_2$, então $C_1 = C_2$*

(C3) *Se C_1 e C_2 são elementos distintos de $\mathcal{C}$ e $f \in C_1 \cap C_2$, então existe um elemento C_3 de $\mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - f$.* □

Poderíamos ter escolhido o conjunto de propriedades acima como os axiomas para a definição de matróide através de sua família de circuitos.

Proposição 1.2.1 *Seja I um independente da matróide M e f um elemento de E tal que $I \cup f$ é um dependente. Então existe um único circuito C de M tal que $C \subseteq I \cup f$ e C contém f.*

Demonstração. Observe que $I \cup f$ contém um circuito C pois é um conjunto dependente. Além disso, todo circuito contido em $I \cup f$ contém f, pois, do contrário, o independente I conteria um circuito e isto não pode. Suponha que existe um circuito C', distinto de C, contido em $I \cup f$, então por **(C3)**, $(C \cup C') - f$ contém um circuito, mas $(C \cup C') - f \subseteq I$ e chegamos a uma contradição. Logo C é o único circuito contido em $I \cup f$ e que contém f. □

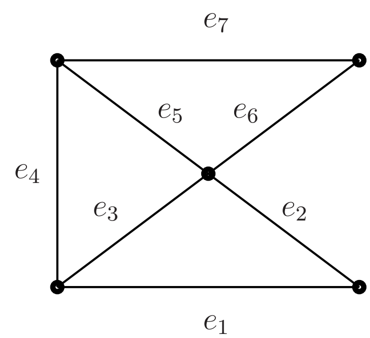
Uma classe de matróides que Whitney [1] considera em seu trabalho, são as matróides originadas de grafos. Diremos que um *ciclo* de um grafo é um caminho fechado que não repete vértice exceto os terminais.

Proposição 1.2.2 *Sejam E o conjunto das arestas de um grafo G e $\mathcal{C}$ a famílias dos conjuntos das arestas dos ciclos de G. Então $\mathcal{C}$ é a família dos circuitos de uma matróide sobre E.*

Demonstração. Observe que $\mathcal{C}$ satisfaz **(C1)** e **(C2)**. Vamos provar que satisfaz **(C3)**. Sejam C_1 e C_2 os conjuntos das arestas de dois ciclos distintos de G que possuem e como uma aresta em comum. Sejam u e v os vértices da aresta e. Vamos agora construir um ciclo de G cujas arestas estão contidas em $(C_1 \cup C_2) - e$. Para $i = 1, 2$, seja P_i um caminho de u a v em G cujas arestas estão em $C_i - e$. Começando em u, percorrendo P_1 em direção de v, seja w o primeiro primeiro vértice cuja próxima aresta de P_1 não pertence a P_2. Continuando a percorrrer P_1, de w em direção a v, encontraremos um vértice x distinto de w que também está em P_2. Como P_1 e P_2 terminam em v, tal vértice existe. Unindo o subcaminho de P_1 que vai de w a x ao subcaminho de P_2 qua vai de x até w, encontramos um ciclo cujas arestas estam contido em $(C_1 \cup C_2) - e$. Portanto, $\mathcal{C}$ satisfaz a propriedade **(C3)**. Logo $\mathcal{C}$ é a família dos circuitos de uma matróide sobre E. □

A matróide originada do grafo G acima é chamada matróide *gráfica*. Denotamos esta matróide por $M(G)$. Podemos concluir, pela proposição acima, que um subconjunto X das arestas de G é um independente em $M(G)$, se e somente se, X não contém um conjunto de arestas de um ciclo, ou, equivalentemente, o subgrafo induzido, $G[X]$, pelas arestas de X é uma floresta. No próximo exemplo acharemos todos os circuitos de uma matróide gráfica.

Exemplo 1.2.2 *Seja G o grafo dado pela figura abaixo e M=$M(G)$.*



G

Então $E(M) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ *e o conjunto dos circuitos da matróide gráfica é dado pela família* $\mathcal{C} = \{\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_3, e_4, e_5\}, \{e_5, e_6, e_7\}, \{e_3, e_4, e_6, e_7\}, \{e_1, e_2, e_4, e_5\}, \{e_1, e_2, e_4, e_6, e_7\}\}$.

1.3 Bases

Seja $M = (E, \mathcal{I})$ uma matróide. Os elementos maximais da família $\mathcal{I}$ com relação a ordem de inclusão são chamados de *bases* da matróide M. Veremos abaixo que todas as bases de M possuem a mesma cardinalidade, a esta cardinalidade comum daremos o nome de *posto* de M e denotamos por $r(M)$, e que é possível conhecer uma matróide a partir de suas bases.

Lema 1.3.1 *Se B_1 e B_2 são bases de uma matróide M, então $|B_1| = |B_2|$.*

Demonstração. Suponha que $|B_1| \neq |B_2|$, digamos $|B_1| < |B_2|$. Como B_1 e B_2 são ambos independentes da matróide M, a propriedade **(I3)** nos diz que existe um elemento e de $B_2 - B_1$ tal que $B_1 \cup e \in \mathcal{I}$. Mas isto contradiz a maximalidade de B_1. Logo $|B_1| = |B_2|$. □

Se M é uma matróide e $\mathcal{B}$ é a coleção de bases de M, o próximo resultado descreve algumas propriedades das bases $\mathcal{B}$ da matróide M. Ás vezes denotamos por $\mathcal{B}(M)$ a coleção de bases de M.

Lema 1.3.2 *$\mathcal{B}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(B1) *$\mathcal{B}$ é não vazio.*

(B2) *Se B_1 e B_2 são membros de $\mathcal{B}$ e $f \in B_1 - B_2$, então existe $h \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - f) \cup h \in \mathcal{B}$.*

Demonstração. A propriedade **(B1)** segue diretamente da propriedade **(I1)**. Para a propriedade **(B2)** observe que $B_1 - f$ e B_2 são conjuntos independentes tais que $|B_1 - f| < |B_2|$, pois pelo lema anterior $|B_1| = |B_2|$. Assim por **(I3)**, existe elemento $h \in B_2 - (B_1 - f)$ tal que $(B_1 - f) \cup h \in \mathcal{I}$. Evidentemente $h \in B_2 - B_1$. Como $(B_1 - f) \cup h$ é independente, necessariamente está contido em um independente maximal B_1'. Mas novamente pelo lema anterior $|B_1'| = |B_1|$, donde $|B_1| = |(B_1 - f) \cup h|$. Logo $(B_1 - f) \cup h = B_1'$, isto é,$(B_1 - f) \cup h$ é uma base de M e a propriedade **(B2)** segue. $\square$

Na Seção 1.1 definimos matróide através da família dos conjuntos independentes. No próximo resultado veremos que podemos definir matróide através da família de bases e apresentaremos uma caracterização das bases de uma matróide através das propriedades **(B1)** e **(B2)**.

Teorema 1.3.1 *Seja E um conjunto finito e $\mathcal{B}$ uma coleção de subconjuntos de E que satisfazem as propriedades* **(B1)** *e* **(B2)***. Seja $\mathcal{I} = \{I \subseteq E; I \subseteq B$, para algum $B \in \mathcal{B}\}$. Então $(E, \mathcal{I})$ é uma matróide e $\mathcal{B}$ é sua família de bases.*

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que $(E, \mathcal{I})$ é uma matróide. Como a família $\mathcal{B}$ é não vazia, segue facilmente que $\mathcal{I}$ satisfaz a propriedade **(I1)**. Além disso se $I \in \mathcal{I}$, então existe um elemento B de $\mathcal{B}$, tal que $I \subseteq B$. Assim se $I' \subseteq I$, então $I' \subseteq B$, $I' \in \mathcal{I}$ e portanto **(I2)** segue. Antes de mostrar que $\mathcal{I}$ satisfaz **(I3)** vamos provar a seguinte afirmação:

Os membros de $\mathcal{B}$ são equicardinais

De fato, suponha que B_1 e B_2 são membros distintos de $\mathcal{B}$ tais que $|B_1| > |B_2|$ e além disso, $|B_1 - B_2|$ seja mínima. Claramente $B_1 - B_2 \neq \emptyset$. Assim escolha $f \in B_1 - B_2$, pela propriedade **(B2)**, existe $h \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - f) \cup h \in \mathcal{B}$. Mas como $|(B_1 - f) \cup h| = |B_1| > |B_2|$ e $|((B_1 - f) \cup h) - B_2| < |B_1 - B_2|$, obtemos uma contradição pela escolha de B_1 e B_2 e a afirmação está provada.

Suponha que **(I3)** não vale para $\mathcal{I}$. Então existem I_1 e I_2 membros de $\mathcal{I}$ tais que, $|I_1| < |I_2|$ e, para todo $e \in I_2 - I_1$, o conjunto $I_1 \cup e$ não pertence a

$\mathcal{I}$. Por definição, existem elementos B_1 e B_2 de $\mathcal{B}$ tais que $I_1 \subseteq B_1$ e $I_2 \subseteq B_2$. Suponha que o conjunto B_2 é escolhido de forma que $|B_2 - (I_2 \cup B_1)|$ seja mínima. Note que, pela escolha de I_1 e I_2,

$$I_2 - B_1 = I_2 - I_1.$$

De fato a inclusão $I_2 - B_1 \subseteq I_2 - I_1$ é óbvia e se existe $x \in (I_2 - I_1) \cap B_1$ então $I_1 \cup x \subseteq B_1$ e assim $I_1 \cup x \in \mathcal{I}$, isso contadiz a escolha de I_1 e I_2. Agora suponha que $B_2 - (I_2 \cup B_1)$ é não vazio e escolha um elemento f neste conjunto. Por **(B2)** existe um elemento $h \in B_1 - B_2$ tal que $(B_2 - f) \cup h \in \mathcal{B}$. Mas $|((B_2 - f) \cup h) - (I_2 \cup B_1)| < |B_2 - (I_2 \cup B_1)|$ e isto contradiz a escolha de B_2. Logo temos que $B_2 - (I_2 \cup B_1)$ é vazia e assim $B_2 - B_1 = I_2 - B_1$. Como $I_2 - B_1 = I_2 - I_1$ temos que

$$B_2 - B_1 = I_2 - I_1. \tag{1.1}$$

Vamos mostrar que $B_1 - (I_1 \cup B_2)$ é vazia. Se não, então existe elemento f neste conjunto e um elemento h em $B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - f) \cup h \in \mathcal{B}$. Agora $I_1 \cup h \subseteq (B_1 - f) \cup h$ e portanto $I_1 \cup h \in \mathcal{I}$. Como $B_2 - B_1 = I_2 - I_1$, temos que $h \in I_2 - I_1$ e chegamos a uma contradição com a hipótese que **(I3)** é falsa. Concluimos que $B_1 - (I_1 \cup B_2)$ é vazia e disto temos que $B_1 - B_2 = I_1 - B_2$. Note que o conjunto $I_1 - B_2$ está contido em $I_1 - I_2$ e da última igualdade segue que

$$B_1 - B_2 \subseteq I_1 - I_2. \tag{1.2}$$

Sabemos que $|B_1| = |B_2|$, disto temos que $|B_1 - B_2| = |B_2 - B_1|$. Portanto, por (1.1) e (1.2), $|I_1 - I_2| \geq |I_2 - I_1|$, assim $|I_1| \geq |I_2|$. Chegamos a uma contradição. Concluimos que $(E, \mathcal{I})$ é uma matróide e por construção a família $\mathcal{B}$ é conjunto de bases desta matróide. □

Corolário 1.3.1 *Seja $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de E. Então $\mathcal{B}$ é a coleção de bases de uma matróide sobre E se e somente se satisfaz:*

(B1) *$\mathcal{B}$ é não vazio.*

(B2) *Se B_1 e B_2 são membros de $\mathcal{B}$ e $f \in B_1 - B_2$, então existe $h \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - f) \cup h \in \mathcal{B}$.* □

Corolário 1.3.2 *Seja B uma base da matróide M. Se $f \in E - B$, então $B \cup f$ contém um único circuito, C(f,B). Além disso, $f \in C(f, B)$.*

Demonstração. O resultado segue diretamente da proposição 1.2.1. □

O circuito $C(f,B)$ é conhecido como *circuito fundamental de f* com respeito a base B. Observe que todo circuito em uma matróide é o circuito fundamental de algum elemento com respeito a alguma base. De fato, seja C um circuito e $f \in C$, como o circuito é um dependente minimal, $C - f$ é um independente, logo existe uma base B tal que $C - f \subseteq B$, note que f não está em B, pois se estivesse o circuito C estaria contido em B. Portanto $C \subseteq B \cup f$ e concluimos que $C = C(f,B)$.

Exemplo 1.3.1 *No exemplo 1.1.1 conhecemos a matróide uniforme $U_{r,n}$, onde r e n são inteiros e $r \leq n$. Seja $\mathcal{B}$ a família dos subconjuntos de E com exatamente r elementos. Então $\mathcal{B}$ é a família de bases da matróide uniforme.*

1.4 Posto

Seja $M = (E, \mathcal{I})$ uma matróide. Definimos o *posto* de $X \subseteq E$ de M como sendo a cardinalidade de um elemento de $\mathcal{I}$ contido em X e maximal com relação a ordem de inclusão. Denotamos o posto de X por $r_M(X)$. Denote por 2^E o conjunto das parte de E. A função r definida como

$$\begin{aligned} r \ : \ \ & 2^E \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \\ & X \longmapsto r_M(X) \end{aligned}$$

é chamada de *função posto* e deixamos para o leitor concluir que r está bem definida. No próximo lema apresentaremos algumas propriedades da função posto. A última propriedade é muito especial e é conhecida como *submodularidade*.

Lema 1.4.1 *A função posto r de uma matróide M sobre um conjunto E possui as seguintes propriedades:*

(P1) *Se $X \subseteq E$, então $0 \leq r(X) \leq |X|$.*

(P2) *Se $X \subseteq Y \subseteq E$, então $r(X) \leq r(Y)$.*

(P3) *Se X e Y são subconjuntos de E, então*

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y).$$ □

O seguinte teorema nos fornece uma caracterização da função posto pelas propriedades **(P1)**, **(P2)** e **(P3)**. Este mesmo teorema nos permite definir matróide através da função posto.

Teorema 1.4.1 *Seja E um conjunto finito e $r : 2^E \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ uma função que satisfaz* **(P1)**, **(P2)** *e* **(P3)**. *Seja $\mathcal{I}$ a família dos subconjuntos X de E tal que $r(X) = |X|$. Então $(E, \mathcal{I})$ é uma matróide e r é sua função posto.* $\square$

Corolário 1.4.1 *Seja E um conjunto finito. Uma função $r : 2^E \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ é a função posto de uma matróide sobre E se e somente se r satisfaz as seguintes propriedades:*

(P1) *Se $X \subseteq E$, então $0 \leq r(X) \leq |X|$.*

(P2) *Se $X \subseteq Y \subseteq E$, então $r(X) \leq r(Y)$.*

(P3) *Se X e Y são subconjuntos de E, então*

$$r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y). \qquad \square$$

Os conjuntos independentes, as bases e os circuitos são caracterizados em termos da função posto na seguinte proposição.

Proposição 1.4.1 *Seja M uma matróide com função posto r e considere $X \subseteq E$. Então as seguintes afirmações são válidas:*

(i) *X é independente se e somente se $|X| = r(X)$;*

(ii) *X é uma base se e somente se $|X| = r(X) = r(M)$;*

(iii) *X é um circuito se e somente se X é não vazio e, para todo $x \in X$, $r(X - x) = |X| - 1 = r(X)$.* $\square$

1.5 Fecho

Seja $M = (E, \mathcal{I})$ uma matróide qualquer e r a função posto. Considere a função $cl : 2^E \to 2^E$ definida para todo $X \subseteq E$, como

$$cl(X) = \{x \in E : r(X \cup x) = r(X)\}.$$

Esta função é chamada *função fecho* de M. No próximo lema apresentaremos propriedades da função fecho.

Lema 1.5.1 *A função fecho de uma matróide sobre o conjunto E tem as seguintes propriedades:*

(CL1) *Se $X \subseteq E$, então $X \subseteq cl(X)$.*

(CL2) *Se $X \subseteq Y \subseteq E$, então $cl(X) \subseteq cl(Y)$.*

(CL3) *Se $X \subseteq E$, então $cl(cl(X)) = cl(X)$.*

(CL4) *Se $X \subseteq E$, $x \in E$ e $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$, então $x \in cl(X \cup y)$.* $\square$

Dada uma função φ que satisfaz as condições **(CL1)-(CL4)**, o seguinte teorema nos diz que φ é a função fecho de uma matróide.

Teorema 1.5.1 *Seja E uma conjunto finito e $\varphi : 2^E \to 2^E$ uma função satisfazendo as condições* **(CL1)-(CL4)**. *Seja*

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq E : x \notin cl(X - x) \text{ para todo } x \in X\}$$

Então $(E, \mathcal{I})$ é uma matróide e φ é sua função fecho. $\square$

O próximo corolário, que é consequência do lema 1.5.1 e do teorema 1.5.1, nos fornece uma caracterização para a função fecho de uma matróide. Observe que por este resultado pode-se definir matróide através da função fecho.

Corolário 1.5.1 *Seja E um conjunto finito. Uma função $\varphi : 2^E \to 2^E$ é a função fecho de uma matróide sobre E se e somente se satisfaz as seguintes condições:*

(CL1) *Se $X \subseteq E$, então $X \subseteq \varphi(X)$.*

(CL2) *Se $X \subseteq Y \subseteq E$, então $\varphi(X) \subseteq \varphi(Y)$.*

(CL3) *Se $X \subseteq E$, então $\varphi(\varphi(X)) = \varphi(X)$.*

(CL4) *Se $X \subseteq E$, $x \in E$ e $y \in \varphi(X \cup x) - \varphi(X)$, então $x \in \varphi(X \cup y)$.* $\square$

Se M é uma matróide e $X \subseteq E$, diremos que $cl(X)$ é o *fecho* de X em M. Um subconjunto X de E é um *conjunto gerador* de M se $cl(X) = E$ e X *gera* um subconjunto $Y \subseteq E$ se $Y \subseteq cl(X)$. Se $X = cl(X)$, então X é dito ser um conjunto *fechado* de M. Um *hiperplano* de M é um conjunto fechado de posto $r(M) - 1$.

Proposição 1.5.1 *Seja $M = (E, \mathcal{I})$ uma matróide e X um subconjunto de E. Então:*

$$cl(X) = X \cup \{x : \textit{existe um circuito } C \textit{ de } M \textit{ tal que } x \in C \subseteq X \cup x\}$$

Demonstração. Suponha que $x \in cl(X) - X$, então $r(X \cup x) = r(X)$. Seja B é um independente maximal em X, então $B \cup x$ é dependente. Pela proposição 1.2.1, existe um circuito C tal que $x \in C \subseteq B \cup x$ e portanto $C \subseteq X \cup x$. Por outro lado, se existe tal circuito C, tal que $x \in C \subseteq X \cup x$, então $C - x \subseteq X$ e pela propriedade **(CL2)**, $cl(C - x) \subseteq cl(X)$, mas $r(C) = r(C - x)$ e por definição $x \in cl(C - x)$, logo obtemos que $x \in cl(X)$ e o resultado segue. □

Proposição 1.5.2 *As seguintes afirmações são equivalentes para um elemento f de uma matróide M:*

- **(a)** *f está em toda base.*
- **(b)** *f não está em circuito algum.*
- **(c)** *Se $X \subseteq E(M)$ e $f \in cl(X)$, então $f \in X$.*
- **(d)** *r(E(M)-f)=r(E(M))-1.*
- **(e)** *E(M)-f é fechado.*
- **(f)** *E(M)-f é um hiperplano.*
- **(g)** *Se I é um conjunto independente, então $I \cup f$ também é independente.*

Demonstração. Vamos mostrar que (**a**) $\Rightarrow$ (**b**):
Suponha que existe um circuito C, tal que $f \in C$. Então o conjunto $C - f$ é independente, logo existe uma base B que contém $C - f$, mas B também contém f por hipótese, desta forma o circuito C está contido na base B; absurdo e o tal circuito C não existe.
(**b**) $\Rightarrow$ (**c**):
Suponha que $f \notin X$. Como $f \in cl(X)$ pela proposição anterior, existe um circuito C tal que $f \in C \subseteq X \cup f$, mas isto é um absurdo, pois supomos que f não pertence a circuito algum, logo $f \in X$.
(**c**) $\Rightarrow$ (**d**):
Suponha que existe uma base B tal que $f \notin B$, então pela proposição 1.2.1, existe um circuito C tal que $f \in C \subseteq B \cup f$ e pela proposição anterior $f \in cl(B)$, temos com isso um absurdo com a hipótese, pois $f \notin B$. Então f está em toda base da matróide M, assim $r(E(M) - f) = r(E(M)) - 1$.

(d) $\Rightarrow$ **(e)**:
Pelas propriedades do fecho, sabemos que $E(M) - f \subseteq cl(E(M) - f)$. Suponha que $f \in cl(E(M) - f)$. Então existe um circuito C tal que $f \in C$, mas sendo $C - f$ um independente existe uma base B tal que $C - f \subseteq B$ e neste caso B não contém f. Assim, $r(E(M) - f) = r(E(M))$; um absurdo pela hipótese e $f \notin cl(E(M) - f)$, deste modo $cl(E(M) - f) = E(M) - f$ e $E(M) - f$ é um conjunto fechado.
(e) $\Rightarrow$ **(f)**:
Vamos mostrar que $r(E(M) - f) = r(E(M)) - 1$. Suponha que existe uma base B, tal que $f \notin B$. Observe que $B \subseteq E(M) - f$, logo $cl(B) \subseteq E(M) - f$, mas $cl(B) = E(M)$ e assim $cl(E(M) - f) = E(M)$, absurdo pois supomos $E(M) - f$ fechado e tal base B não existe. Como f está contido em todas as bases, segue que $r(E(M) - f) = r(E(M)) - 1$. Desta forma concluimos que $E(M) - f$ é um hiperplano.
(f) $\Rightarrow$ **(g)**:
Suponha que existe um conjunto independente I, tal que $I \cup f$ seja um dependente. Neste caso, $I \cup f$ contém um circuito C, donde $f \in C$ e $C - f \subseteq I \subseteq B$ para alguma base B. Então existe uma base que não possui f como elemento, assim $r(E(M) - f) = r(E(M))$, absurdo com a hipótese e o resultado segue.
(g) $\Rightarrow$ **(a)**:
Pela hipótese, seja B uma base qualque de M. Como B é um independente, tem-se que $B \cup f$ também é independente e como a base B é um independente maximal segue que $f \in B$. $\square$

1.6 Algoritmo guloso

Vamos iniciar esta seção com um problema clássico de otimização para grafos. Sejam G um grafo conexo e $w : E(G) \to \mathbb{R}^+$ uma função sobre o conjunto das arestas de G, denotado por $E(G)$. Para todo $X \subseteq E(G)$, definimos o peso $w(X)$ de X como sendo $\sum_{x \in X} w(x)$. O problema consiste em encontrar uma árvore geradora de G que possui peso mínimo.

Para resolver este problema o algoritmo de Kruskal [7], ou algoritmo guloso, usando como entrada as arestas $E(G)$ do grafo, funciona da seguinte forma:

(a) Faça $T := \emptyset$ e $E := \emptyset$;

(b) Se $E = E(G)$, então pare;

(c) Senão escolha uma aresta $e \in E(G) - E$ com peso mínimo e faça $E := E \cup e$;

(d) Se $T \cup e$ não possui ciclo como subgrafo, então faça $T := T \cup e$;

(e) Volte para a etapa **(b)**.

A saída será o conjunto T das arestas de uma árvore geradora de G de peso mínimo.

O problema da árvore geradora de peso mínimo é um caso especial de um problema de otimização proposto por Bixby [8]. Seja $\mathcal{I}$ uma família de subconjuntos de um conjunto E e suponha que $\mathcal{I}$ satisfaz (I1) e (I2). Seja $w : E \to \mathbb{R}$ uma função de E em $\mathbb{R}$ chamada de função peso. Definimos o peso $w(X)$ de $X \subseteq E$ não vazio como $\sum_{x \in X} w(x)$ e $w(\emptyset) = 0$. O problema de otimização para o par $(\mathcal{I}, w)$ consiste em encontrar um elemento maximal B de $\mathcal{I}$ de peso máximo. Observe que se trocarmos a função peso w por $-w$ e resolvermos o problema para o par $(\mathcal{I}, -w)$, encontraremos um membro maximal B' de $\mathcal{I}$ tal que $w(B')$ seja mínimo.

Em geral, o algoritmo guloso, utilizando como entrada uma família $\mathcal{I}$ de subconjuntos de um conjunto finito E satisfazendo (I1) e (I2) e função peso $w : E \to \mathbb{R}^+$, para o par $(\mathcal{I}, w)$ procede da seguinte forma:

(a) *Faça $B := \emptyset$ e $D := \emptyset$;*

(b) *Se D=E, então pare;*

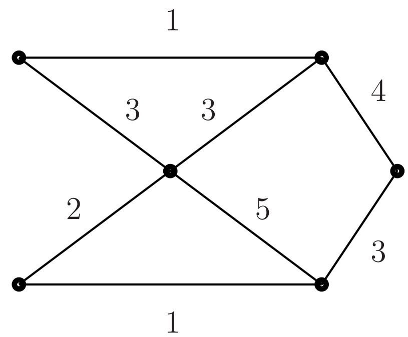
(c) *Senão escolha elemento $e \in E - D$ com peso máximo e faça $D := D \cup e$;*

(d) *Se $B \cup e$ pertence a $\mathcal{I}$, faça $B := B \cup e$;*

(e) *Volte para etapa* **(b)**.

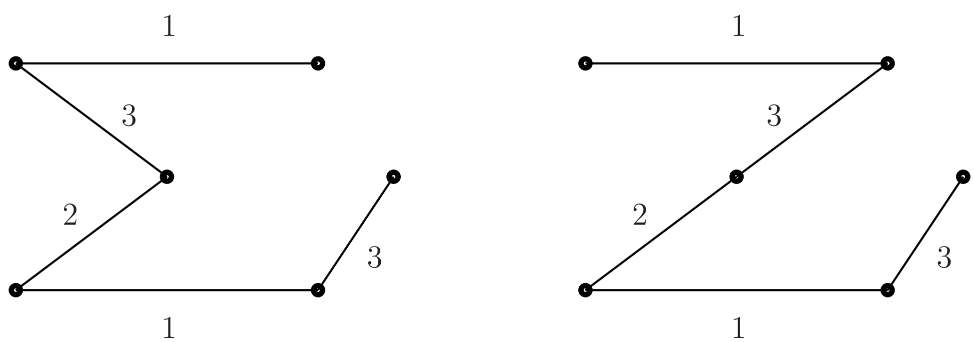
A saída é um elemento maximal B de $\mathcal{I}$ com peso máximo, desde que $\mathcal{I}$ seja a família de independentes de uma matróide.

Exemplo 1.6.1 *Seja G o grafo dado pela figura abaixo.*



G

Não é difícil checar que o algoritmo guloso produz como saída uma das seguintes árvores geradoras de peso mínimo de G:



O próximo teorema caracteriza matróide por meio do algoritmo guloso.

Teorema 1.6.1 *Seja E um conjunto finito e $\mathcal{I}$ uma família de subconjuntos de E. Então M=(E,$\mathcal{I}$) é uma matróide se e somente se $\mathcal{I}$ satisfaz:*

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$;

(I2) *Se $I \in \mathcal{I}$ e $J \subseteq I$, então $J \in \mathcal{I}$;*

(I3)' *Para qualquer função peso $w : E \to \mathbb{R}^+$, a saída do algoritmo guloso é um elemento maximal de $\mathcal{I}$ de peso máximo.*

Demonstração. Se $(E, \mathcal{I})$ é uma matróide, então (I1) e (I2) seguem pela definição. Seja $\widetilde{B}$ uma saída do algoritmo guloso. Se $r(M) = r$ então $\widetilde{B} = \{e_1, e_2, ..., e_r\}$ e disto segue que $\widetilde{B}$ é uma base. Podemos assumir que $e_1, e_2, ..., e_r$ foram escolhidos nesta ordem pelo algoritmo guloso. Se $B = \{f_1, f_2, ..., f_r\}$ é outra base de M, onde $w(f_1) \geq w(f_2) \geq ... \geq w(f_r)$, devemos mostrar que $w(\widetilde{B}) \geq w(B)$. Vamos concluir isto a partir da seguinte afirmação:

Se $1 \leq j \leq r$, então $w(e_j) \geq w(f_j)$.

Para provar a afirmação suponha o contrário e seja k o menor inteiro tal que $w(e_k) < w(f_k)$. Assim $I_1 = \{e_1, e_2, ..., e_{k-1}\}$ e $I_2 = \{f_1, f_2, ..., f_k\}$ são independentes onde $|I_1| < |I_2|$. Por (I3) existe $f_n \in I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup f_n \in \mathcal{I}$. Mas $w(f_n) \geq w(f_k) > w(e_k)$ e chegamos a uma contadição pois o algoritmo guloso deveria escolher f_n e não e_k. Logo a afirmação segue e da afirmação $w(\widetilde{B}) \geq w(B)$. Concluimos com isto que a propriedade (I3)' vale.

Reciprocamente suponha que $\mathcal{I}$ satisfaz (I1), (I2) e (I3)'. Devemos mostrar que $\mathcal{I}$ satisfaz (I3). Assuma o contrário, isto é, suponha que existem I_1 e I_2 elementos de $\mathcal{I}$ com $|I_1| < |I_2|$ tal que $I_1 \cup e$ não pertence a $\mathcal{I}$ para todo $e \in I_2 - I_1$. Assim $I_1 - I_2$ é não vazio e $|I_1 - I_2| < |I_2 - I_1|$. Escolha um número real positivo ϵ tal que

$$0 < (1 + \epsilon)|I_1 - I_2| < |I_2 - I_1|.$$

Considere a função peso $w : E \to \mathbb{R}^+$ dada por:

$$w(e) = \begin{cases} 2, & \text{se } e \in I_1 \cap I_2; \\ 1/|I_1 - I_2|, & \text{se } e \in I_1 - I_2; \\ (1+\epsilon)/|I_2 - I_1|, & \text{se } e \in I_2 - I_1; \\ 0, & \text{se } e \in E - (I_1 \cup I_2). \end{cases}$$

Pela definição da função peso acima o algoritmo guloso escolherá primeiro os elementos de $I_1 \cap I_2$ e depois os elementos de $I_1 - I_2$. Note que o algoritmo não escolhe nenhum elemento de $I_2 - I_1$, pois assumimos que $I_1 \cup e$ não pertence a $\mathcal{I}$. Assim os demais elementos de $\widetilde{B}$ estarão em $E - (I_1 \cup I_2)$. Portanto,

$$w(\widetilde{B}) = 2|I_1 \cap I_2| + |I_1 - I_2|(1/|I_1 - I_2|) = 2|I_1 \cap I_2| + 1.$$

Mas por (I2), I_2 entá contido em um membro maximal I_2' de $\mathcal{I}$ e

$$w(I_2') \geq w(I_2) = 2|I_1 \cap I_2| + |I_2 - I_1|[(1+\epsilon)/|I_1 - I_2|] = 2|I_1 \cap I_2| + 1 + \epsilon.$$

Disto deduzimos que $w(I_2') > w(\widetilde{B})$, isto é, o algoritmo guloso falha para esta função peso. Contradição e o teorema segue. □

1.7 Dualidade

Nesta seção vamos definir a dual de uma matróide e mostrar que esta dual é também uma matróide.

Lema 1.7.1 *A família $\mathcal{B}$ de bases de uma matróide M satisfaz a seguinte propriedade:*

$(B2)^*$ *Se B_1 e B_2 estão em $\mathcal{B}$ e $x \in B_2 - B_1$, então existe um elemento y de $B_1 - B_2$ tal que $(B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}$.*

Demonstração. Sabemos que $B_1 \cup x$ contém um único circuito, $C(x, B_1)$. Note que $C(x, B_1) - B_2$ é não vazio, pois $C(x, B_1)$ é dependente e B_2 é independente. Seja y um elemento deste conjunto. Evidentemente, $y \in B_1 - B_2$. Além disso, $(B_1 - y) \cup x$ é um independente pois não contém o circuito $C(x, B_1)$ e nenhum outro. Como $(B_1 - y) \cup x$ possui a mesma cardinalidade de B_1 concluimos que este independente é uma base. □

Teorema 1.7.1 *Sejam M uma matróide e $\mathcal{B}^*(M)$ o conjunto $\{E(M) - B : B \in \mathcal{B}(M)\}$. Então $\mathcal{B}^*(M)$ é a família de bases de uma matróide sobre $E(M)$.*

Demonstração. Como $\mathcal{B}(M)$ é não vazio, segue que $\mathcal{B}^*(M)$ também é não vazio e assim $\mathcal{B}^*(M)$ satisfaz **(B1)**. Suponha agora que B_1^* e B_2^* são membros de $\mathcal{B}^*(M)$ e $x \in B_1^* - B_2^*$. Para $i = 1, 2$, tome $B_i = E(M) - B_i^*$. Então $B_i \in \mathcal{B}(M)$ e $B_1^* - B_2^* = B_2 - B_1$. Como $x \in B_2 - B_1$, por $(\mathbf{B2})^*$, existe um elemento $y \in B_1 - B_2$ tal que $(B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}(M)$. Disto segue que $y \in B_2^* - B_1^*$ e que $E(M) - ((B_1 - y) \cup x) \in \mathcal{B}^*(M)$. Mas

$$E(M) - ((B_1 - y) \cup x) = ((E(M) - B_1) - x) \cup y = (B_1^* - x) \cup y.$$

Com isto concluimos que $\mathcal{B}^*(M)$ satisfaz **(B2)**. Então $\mathcal{B}^*(M)$ é de fato o conjunto de bases de uma matróide sobre $E(M)$. $\square$

A matróide do teorema acima, com $E(M)$ como conjunto de elementos e cuja família de bases é $\mathcal{B}^*(M)$, é chamada a *dual* de M e é denotana por M^*. Assim $\mathcal{B}(M^*) = \mathcal{B}^*(M)$. Observe que $(M^*)^* = M$.

Exemplo 1.7.1 *Considere a matróide uniforme $U_{m,n}$. As bases desta matróide são todos subconjuntos com m elementos do conjunto E que possui n elementos. Assim $\mathcal{B}^*(U_{m,n})$ consiste de todos os subconjuntos de E com n-m elementos e então*

$$U_{m,n}^* = U_{n-m,n}.$$

As bases de M^* são chamadas *cobases* de M. Os circuitos, laços, independetes e dependentes de M^*, são chamados de *cocircuitos, colaços, coindependentes e codependentes* de M, respectivamente. A função posto de M^* é denotada por r^* e a seguinte igualdade relaciona posto de M e M^*:

$$r(M) + r^*(M^*) = |E(M)|. \tag{1.3}$$

Lema 1.7.2 *Sejam I e I^* subconjuntos disjuntos de $E(M)$ tais que I é independente e I^* é coindenpendente. Então M possui uma base B e uma cobase B^* tais que $I \subseteq B$, $I^* \subseteq B^*$, e B e B^* são disjuntos.* $\square$

A próxima proposição generaliza a equação (1.3) fornecendo uma fórmula para r^*, a *função coposto* de M.

Proposição 1.7.1 *Seja M uma matróide sobre o conjunto E. Então para todo subconjunto X de E,*

$$r^*(X) = |X| - r(M) + r(E - X).$$

Demonstração. Seja B_X^* uma base para X em M^* e B_{E-X} uma base para $E - X$ em M. Então $r^*(X) = |B_X^*|$ e $r(E - X) = |B_{E-X}|$. Como B_{E-X} é independente e B_X^* é coindependente e $B_{E-X} \cap B_X^* = \emptyset$, pelo lema anterior existe uma base B e uma cobase B^* de M tais que B contém B_{E-X}, B^* contém B_X^* e $B \cap B^* = \emptyset$. Observe que $B \cap (E - X) = B_{E-X}$, pois B_{E-X}

é uma base de $M|(E-X)$. Analogamente, $B^* \cap X = B^*_X$. Portanto, $B = B_{E-X} \cup (B \cap X)$(união disjunta), então $|B \cap X| = |B| - |B_{E-X}|$. Disto temos que

$$\begin{aligned} |X| &= |X \cap B| + |X \cap B^*| \\ &= |B| - |B_{E-X}| + |B^*_X| \\ &= r(M) - r(E-X) + r^*(X). \end{aligned}$$

E o resultado segue. □

Proposição 1.7.2 *Seja M uma matróide e X um subconjunto de $E(M)$. Então*

(a) X é um conjunto gerador se e somente se $r(X) = r(M)$;

(b) X é uma base se e só se é um conjunto gerador minimal;

(c) X é um hiperplano se e só se é um conjunto não-gerador maximal. □

Lema 1.7.3 *Seja M uma matróide. Então, C^* é um cocircuito de M se e somente se $E(M) - C^*$ é um hiperplano de M.*

Demonstração. Note que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) C^* é um dependente de M.

(b) C^* não está contido em nenhuma base de M^*.

(c) $E(M) - C^*$ não contém nenhuma base de M.

(d) $E(M) - C^*$ não gera M.

Portanto, C^* é dependente minimal de M^*, isto é um circuito de M^*, se e somente se $E(M) - C^*$ é um não-gerador maximal de M. Mas os conjuntos não-geradores maximais de M são os hiperplanos de M. □

Proposição 1.7.3 *Se C é um circuito e C^* é um cocircuito da matróide M, então $|C \cap C^*| \neq 1$.*

Demonstração. Soponha que $|C \cap C^*| = 1$. Sejam $C \cap C^* = \{x\}$ e $E(M) - C^* = H$. Sabemos que H é um hiperplano de M, então $cl(H) = H$. Mas $x \in C \subseteq H \cup x$ e pela proposição 1.5.1 $x \in cl(H) - H$;uma contradição. □

1.8 Menores

Seja $M = (E, \mathcal{I})$ uma matróide e considere o subconjunto $X \subseteq E$. Seja $\mathcal{I}|X$ o conjunto $\{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}\}$. Observe que o par $(X, \mathcal{I}|X)$ é uma matróide. Esta matróide é chamada a *restrição* de M a X e denotada $M|X$ ou a *deleção* de $E - X$ em M e denotada por $M \backslash (E - X)$. As bases desta matróide serão os conjuntos independentes maximas contido em X, com relação a ordem de inclusão, e chamamos tais conjuntos como *bases* de X. Nesta seção vamos estudar a operação de deleção e sua dual. É bastante importante considerarmos uma sequência destas operações sobre uma matróide.

Se M é uma matróide sobre E e $T \subseteq E$, a *contração* de T em M é dada por:

$$M/T = (M^* \backslash T)^*.$$

No próximo resultado, precisamos recordar a proposição 1.7.1 que diz que a função posto r^* da dual M^* de M é dada por:

$$r^*(X) = |X| - r(E) + r(E - X). \tag{1.4}$$

Observe que se $T \subseteq E$, então a função posto de $M \backslash T$ é a restrição de r_M à família de subconjuntos de $E - T$, isto é, para todo $X \subseteq E - T$,

$$r_{M \backslash T}(X) = r_M(X). \tag{1.5}$$

Proposição 1.8.1 *Se $T \subseteq E$, então, para todo $X \subseteq E - T$, temos que:*

$$r_{M/T}(X) = r_M(X \cup T) - r_M(T).$$

Demonstração. Por definição sabemos que, $r_{M/T}(X) = r_{(M^* \backslash T)^*}(X)$. Assim,

$$\begin{aligned} r_{M/T}(X) &= |X| + r_{M^* \backslash T}(E - T - X) - r_{M^* \backslash T}(E - T), \text{ por } (1.4), \\ &= |X| + r^*(E - (T \cup X)) - r^*(E - T), \text{ por } (1.5), \\ &= |X| + \{|E - (T \cup X)| + r_M(T \cup X) - r_M(E)\} \\ &\quad -\{|E - T| + r_M(T) - r_M(E)\}, \text{ por } (1.4). \end{aligned}$$

Assim, como $X \subseteq E - T$, temos que $r_{M/T}(X) = r_M(X \cup T) - r_M(T)$. □

Vamos determinar nos próximos resultados os conjuntos independentes, bases e circuitos de M/T em termo dos conjuntos correspondentes de M.

Proposição 1.8.2 *Suponha que B_T seja uma base para $M|T$. Então*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(M/T) &= \{I \subseteq E-T : I \cup B_T \in \mathcal{I}(M)\}.\\ &= \{I \subseteq E-T : M|T \textit{ possui uma base } B \textit{ tal que } B \cup I \in \mathcal{I}(M)\}.\end{aligned}$$

Demonstração. Vemos facilmente que $\{I \subseteq E-T : I \cup B_T \in \mathcal{I}(M)\}$ está contido em $\{I \subseteq E-T : M|T$ possui uma base B tal que $B \cup I \in \mathcal{I}(M)\}$. Suponha agora que $B \cup I \in \mathcal{I}(M)$ para alguma base B de $M|T$. Vamos mostrar que $I \in \mathcal{I}(M/T)$. Observe que $I \cup B$ é uma base de $I \cup T$, então $r_M(I \cup B) = r_M(I \cup T)$, portanto, como $r_{M/T}(I) = r_M(I \cup T) - r_M(T)$, segue que

$$r_{M/T}(I) = r_M(I \cup B) - r_M(T) = |I \cup B| - |B|,$$

mas $|I \cup B| = |I| + |B|$, disto temos que $r_{M/T}(I) = |I|$, isto é, $I \in \mathcal{I}(M/T)$. Acabamos de concluir que:

$$\{I \subseteq E-T : M|T \text{ possui uma base } B \text{ tal que } B \cup I \in \mathcal{I}(M)\} \subseteq \mathcal{I}(M/T)$$

Para concluir a demonstração, basta mostrar que $\mathcal{I}(M/T) \subseteq \{I \subseteq E-T : I \cup B_T \in \mathcal{I}(M)\}$. Considere $X \in \mathcal{I}(M/T)$. Então

$$|X| = r_{M/T}(X) = r_M(X \cup T) - r_M(T) = r_M(X \cup B_T) - |B_T|,$$

onde B_T é uma base de $M|T$. Assim $r_M(X \cup B_T) = |X| + |B_T| = |X \cup B_T|$, então $X \cup B_T \in \mathcal{I}(M)$ e a proposição segue. $\square$

Corolário 1.8.1 *Seja B_T uma base de $M|T$. Então*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(M/T) &= \{\widetilde{B} \subseteq E-T : \widetilde{B} \cup B_T \in \mathcal{B}(M)\}.\\ &= \{\widetilde{B} \subseteq E-T : M|T \textit{ possui uma base } B \textit{ tal que } \widetilde{B} \cup B \in \mathcal{B}(M)\}.\square\end{aligned}$$

Exemplo 1.8.1 *Seja T um subconjunto de $E = E(U_{m,n})$ com t elementos. Então, pela proposição 1.8.2:*

$$U_{m,n}/T = U_{0,n-t}, \textit{ se } m \leq t \leq n \textit{ e } U_{m,n}/T = U_{m-t,n-t}, \textit{ se } t < m.$$

Vamos enunciar um lema, cuja demonstração é trivial, que será usado na demonstração da próxima proposição.

Lema 1.8.1 *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ uma coleção se subconjuntos de um conjunto finito E tal que todo elemento de $\mathcal{X}$ contém em elemento de $\mathcal{Y}$ e todo elemento de $\mathcal{Y}$ contém um elemento de $\mathcal{X}$. Nestas condições, os elementos minimais de $\mathcal{X}$ são precisamente os elementos minimais de $\mathcal{Y}$.* □

Proposição 1.8.3 *Os circuitos de M/T são os elementos minimais da família:*

$$\mathcal{C} = \{C - T : C \in \mathcal{C}(M) \text{ e } C \subsetneq T\}.$$

Demonstração. Suponha que $T \neq \emptyset$. Suponha que $C_1 \in \mathcal{C}(M/T)$. Então, se B_T é uma base de $M|T$, devemos ter que $C_1 \cup B_T \notin \mathcal{I}(M)$, mas $(C_1 - e) \cup B_T \in \mathcal{I}(M)$, para todo $e \in C_1$. Como $C_1 \cup B_T$ é dependente em M, existe um circuito D de M tal que $D \subseteq C_1 \cup B_T$. Como $(C_1 - e) \cup B_T \in \mathcal{I}(M)$ para todo $e \in C_1$, devemos ter $C_1 \subseteq D$. Deste modo, $C_1 = D - T$ para $D \in \mathcal{C}(M)$.

Suponha que $C_2 - T$ é um elemento minimal e não-vazio de $\mathcal{C}$. Então $C_2 \cap T \subsetneq C_2$. Assim $C_2 \cap T \in \mathcal{I}(M|T)$ e portanto $C_2 \cap T$ está contida em uma base B_T de $M|T$. Como $C_2 \subseteq C_2 \cup B_T$, o conjunto $C_2 \cup B_T$ é um dependente de M. Portanto, $C_2 - T \notin \mathcal{I}(M/T)$. Se $C_2 - T \notin \mathcal{C}(M/T)$, então existe algum circuito $C_3 \in \mathcal{C}(M/T)$ tal que $C_3 \subsetneq C_2 - T$, mas pelo que vimos anteriormente, $C_3 = D - T$ para algum circuito D de M e isto é uma contradição com a minimalidade de $C_2 - T$. Concluimos que $\mathcal{C}(M/T)$ contém o conjunto $\mathcal{R}$ dos elementos minimais de $\mathcal{C}$. Segue pelo lema 1.8.1 que $\mathcal{C}(M/T)$ é igual a $\mathcal{R}$. □

A seguinte proposição fornece as famílias de independentes, circuitos e bases de uma matróide obtida por deleção.

Proposição 1.8.4 *Sejam (M,E) uma matróide e $T \subseteq E$, então:*

(i) $\mathcal{I}(M\backslash T) = \{I \subseteq E - T : I \in \mathcal{I}(M)\}$.

(ii) $\mathcal{C}(M\backslash T) = \{C \subseteq E - T : C \in \mathcal{C}(M)\}$.

(iii) $\mathcal{B}(M\backslash T)$ *é o conjunto dos membros maximais de* $\{B - T : B \in \mathcal{B}(M)\}$.

□

Na próxima proposição veremos que as operações de deleção e contração comutam entre si e uma com a outra.

Proposição 1.8.5 *Sejam T_1 e T_2 subconjuntos disjuntos de $E(M)$. Então*

(i) $(M\backslash T_1)\backslash T_2 = M\backslash(T_1 \cup T_2) = (M\backslash T_2)\backslash T_1$.

(ii) $(M/T_1)/T_2 = M/(T_1 \cup T_2) = (M/T_2)/T_1$.

(iii) $(M\backslash T)/T_2 = (M/T_2)\backslash T_1$. □

Portanto, se X e Y são subconjuntos disjuntos de $E(M)$, a ordem em que os elementos de X são deletados e os de Y são contaidos não importa, depois disso a matróide obtida, denotada por $M\backslash X/Y$, é chamada um *menor* de M. Tais menores foram introduzidos por Tutte [9] e muitos resultados importantes para matróides fazem referência a estas subestruturas.

Vamos finalizar esta seção com uma propriedade básica para menores.

Proposição 1.8.6 *A matróide N é um menor da matróide M se e somente se N^* é um menor de M^*.*

Demonstração. Sejam X e Y conjuntos disjuntos de E tais que $N = M\backslash X/Y$. Então $N^* = (M\backslash X/Y)^* = (M\backslash X)^*\backslash Y = M^*/X\backslash Y$, portanto $N^* = M^*/X\backslash Y$ é um menor. Reciprocamente, se N^* é um menor do mesmo modo conclui-se que N também é um menor. □

Capítulo 2

Generalização em matróides

Neste capítulo vamos apresentar as conjecturas de Kano, Mayr e Plaxton para árvores geradoras e a de Lemos para bases de matróides em geral. Veremos que as conjecturas de Kano seguem da conjectura dada por Lemos e uma generalização do teorema de Kano para Matróides.

2.1 Conjecturas de Kano, Mayr e Plaxton

Seja G um grafo conexo com o conjunto de arestas $E(G)$, G pode conter arestas múltiplas mas não possui laços. Digamos que $A(G)$ é o conjunto de todas as árvores geradoras de G. Definimos o *grafo das árvores de* G, denotado por $\Gamma(G)$, como sendo um grafo tal que os vértices, $V(\Gamma(G))$, são as árvores geradoras de G e $TT' \in E(\Gamma(G))$ se e somente se $\{T, T'\} \subseteq V(\Gamma(G))$, $T \neq T'$ e $|T - T'| = 1$.

A *distância d(T,T')*, entre duas árvores geradoras T e T' de G é definida como sendo

$$d(T, T') = |T - T'|,$$

onde $|T - T'|$ denota a cardinalidade do conjunto $T - T'$, que é formado pelas arestas de T que não pertencem a T'. Note que $d(T, T')$ coincide com a distância dos vértices T e T' no grafo $\Gamma(G)$. Como a cardinalidade das árvores geradoras de um grafo conexo G é a mesma, observe que $d(T, T') = d(T', T)$, para T, $T' \in A(G)$.

Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $T \in A(G)$. O subconjunto dos vértices de $\Gamma(G)$ dado por

$$B_k(T) = \{T' \in V(\Gamma(G)) : d(T, T') \leq k\}$$

é conhecido como sendo uma *bola* de raio k centrada em T no grafo das árvores $\Gamma(G)$.

O número real *w(e)* é o *peso da aresta* $e \in E(G)$. Definimos o *peso* $w(T)$ de uma árvore geradora T de G como sendo

$$w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e)$$

Seja,

$$w_1 < w_2 < ... < w_n$$

a sequência dos pesos de todas as árvores geradoras de G. Note também que esta é a sequência dos pesos dos vértices do grafo $\Gamma(G)$. Uma árvore geradora com peso w_r é chamada de *r-ésima árvore geradora de peso mínimo* de G. Quando $r = 1$ a primeira árvore geradora de peso mínimo é chamada simplesmente de *árvore geradora de peso mínimo.*

Considere o subconjunto $S \subseteq A(G)$ e seja

$$w'_1 < w'_2 < ... < w'_s$$

a sequência dos pesos de todas as árvores geradoras de G que estão em S. Uma árvore geradora em S com peso w'_r é chamada de *r-ésima árvore geradora de peso mínimo em S*. Note que $B_k(T)$ é um subconjunto de $A(G)$.

Em 1983, Kano [2] em seu trabalho, propôs a seguinte conjectura:

Conjectura (Kano) *Seja G um grafo conexo com peso, então as seguintes afirmações são válidas para todo $1 \leq k \leq n$:*

(i) Sejam T uma árvore geradora de peso mínimo do grafo G e $B_k(T)$ uma bola em $\Gamma(G)$. Então, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, existe uma i-ésima árvore geradora de peso mínimo T' pertencente a $B_k(T)$.

(ii) Sejam T uma k-ésima árvore geradora de peso mínimo de G e $B_k(T)$ uma bola em $\Gamma(G)$. Então, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$, existe uma i-ésima árvore geradoda de peso mínimo T' pertencente a $B_k(T)$.

(iii) Seja $B_k(T)$ uma bola em $\Gamma(G)$. Se T é uma k-ésima árvore geradora de peso mínimo em $B_k(T)$, então T é uma k-ésima árvore geradora de peso mínimo de G.

(iv) *Seja* $\Gamma_k(G)$ *o grafo tal que os vétices são as k-ésimas árvores geradoras de peso mínimo de* G *e o par* (T, R) *dados pelos vértices* T *e* R *é uma aresta se e somente se* $|T - R| \leq k$*. Então* $\Gamma_k(G)$ *é conexo.*

Em 1992 Mayr e Plaxton [3] resolveram a conjectura (i) e propuseram uma nova conjectura que implica as outras três de Kano (para mais informações veja as referências [2] e [3]). Lemos [4], considerando estas conjecturas para matróides, estabeleceu que a conjectura (i) de Kano é válida e, além disso, obteve resultados que aproximam a solução das outras três conjecturas de Kano e a conjectura de Mayr e Plaxton para matróides em geral. A conjectura de Mayr e Plaxton é a seguinte (veja [3]):

Conjectura (Mayr e Plaxton) *Seja* T *uma j-ésima árvore geradora de peso mínimo de* G*. Então, para cada* $i \in \{j+1, j+2, ..., n\}$ *a bola* $B_{i-1}(T)$ *de* $\Gamma(G)$ *contém uma i-ésima árvore geradora de peso mínimo* T'.

2.2 Resultado de Lemos para matróides

Seja $M = (E, \mathcal{I})$ uma matróide e $w : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função. Diremos que o par (M, w) é uma *matróide com peso*. Para uma matróide com peso (M, w), definimos o *peso* de uma base B de M com sendo

$$w(B) = \sum_{e \in B} w(e)$$

Para $X \subseteq E(M)$, seja $w_1 < w_2 < ... < w_n$ uma sequência de números reais tais que $\{w(B) : X \subseteq B, B \in \mathcal{B}(M)\} = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$. Para uma base B de M tal que $X \subseteq B$ e $w(B) = w_i$, definimos sua *ordem* com respeito a X como

$$ord_{X,M}(B) = i.$$

Quando $X = \emptyset$, denotamos $ord_{\emptyset,M}(B)$ por $ord_M(B)$. Diremos que um inteiro i é *admissível* com respeito a (M, w) quando existe uma base B de M tal que $ord_M(B) = i$.

Observe que,

$$\text{quando } Y \subseteq X \subseteq B, \text{ então } ord_{X,M}(B) \leq ord_{Y,M}(B). \tag{2.1}$$

De fato, suponha que existe uma base B de M, com $X \subseteq B$ e $ord_{Y,M}(B) < ord_{X,M}(B)$ e suponha que $w(B)$ seja mínimo, então existe uma base B' tal que $X \subseteq B'$ e $ord_{X,M}(B') = ord_{Y,M}(B)$. Assim $w(B') < w(B)$ e pela escolha de B segue que $ord_{X,M}(B') \leq ord_{Y,M}(B')$ donde $ord_{Y,M}(B) \leq ord_{Y,M}(B')$ e disto temos que $w(B) \leq w(B')$, absurdo.

O grafo $\Gamma_{k,\gamma}(M)$, é um grafo tal que $V(\Gamma_{k,\gamma}(M)) = \{B \in \mathcal{B}(M) : ord_M(B) = k\}$ e $BB' \in E(\Gamma_{k,\gamma}(M))$ se e somente se $\{B, B'\} \subseteq V(\Gamma_{k,\gamma}(M))$, $B \neq B'$ e $|B - B'| \leq \gamma k$, onde γ é um inteiro.

Em 2006, Lemos [4] em seu trabalho propôs o seguinte teorema que passa ser conjectura para alguns valores de λ e γ.

Teorema 2.2.1 *Seja (M, w) uma matróide com peso. Se k é um inteiro admissível com respeito a (M, w) e $\gamma \geq 2$ um inteiro, então existe um inteiro positivo $\lambda \leq 2$ tal que:*

(a) Se B é uma base de M tal que $ord_M(B) = 1$, então, para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ existe uma base B' de M tal que $|B' - B| \leq \lambda(k-1)$ e $ord_M(B') = i$.

(b) Se B é uma base de M tal que $ord_M(B) = k$, então para cada $i \in \{1, 2, ..., k\}$ existe uma base B' de M tal que $|B' - B| \leq \lambda(k-1)$ e $ord_M(B') = i$.

(c) Seja B uma base de M e sejam r e s inteiros tais que

$$\{w(B') : B' \in \mathcal{B}(M) \text{ e } |B' - B| \leq \gamma r\} = \{p_1, p_2, ..., p_s\},$$

onde $p_1 < p_2 < ... < p_s$ são números reais. Se $w(B) = p_r$ então $ord_M(B) = r$.

(d) O grafo $\Gamma_{k,\gamma}(M)$ é conexo.

No teorema 2.2.1, Lemos prova que (c) e (d) valem para $\gamma = 2$ e que o valor de λ pode ser igual a 1 em (a) e 2 em (b) para matróides em geral, Mayr e Plaxton provaram (a) para matróides gráficas com $\lambda = 1$. Kano conjecturou que, quando M é uma matróide gráfica, λ pode ser igual a 1 em (a) e (b), e que (c) e (d) valem para γ igual a 1. Para matróides, Lemos conjecturou que em geral λ pode ser igual a 1 também em (b) e que (c) e (d) valem para $\gamma = 1$. Portanto, concluimos que a conjectura de Kano segue da conjectura de Lemos e a demonstração do teorema 2.2.1 será dada mais adiante.

2.3 Teorema de Kano

Como na seção 2.1, seja G um grafo conexo com o conjunto de arestas $E(G)$, G pode conter arestas múltiplas mas não possui laços. Para as árvores geradoras P e Q de G, o conjunto $P - Q$ é formado pelas arestas de P que não pertencem a Q. Sendo assim, Kano em 1983 obteve o seguinte resultado.

Teorema 2.3.1 (Kano) *Seja T uma árvore geradora de peso máximo e P uma árvore geradora arbitrária de um grafo conexo G com peso $w : E(G) \to \mathbb{R}^+$. Então existe uma bijeção $\pi : T - P \to P - T$ que satisfaz a seguinte condição para toda aresta $a \in T - P$:*

$Q = (P - \pi(a)) \cup a$ *é uma árvore geradora de G e $w(Q) \geq w(P)$.* □

Se $C(P \cup a)$ é o único circuito contido em $P \cup a$, note que a condição acima é equivalente a:

$$\pi(a) \in C(P \cup a) \text{ e } w(\pi(a)) \leq w(a).$$

Kano utiliza este resulado para provar que suas conjecturas valem para alguns $k's$, mais precisamente ele prova que (i) vale para $k \in \{3, 4\}$, (iii) e (iv) valem se $k = 3$, e (ii) se $k = 4$. Em 1978, Kawamoto, Kajitani e Shidona (para mais detalhes ver [5]) mostraram que se $k = 2$, (i), (iii) e (iv) são válidas, e (ii) vale se $k = 3$, mas suas demontrações são complicadas e longas. Kano, utilizando o teorema acima, apresenta uma demonstração mais simples.

Antes de finalizar esta seção vamos recordar o teorema de Hall para grafos bipartidos.

Teorema 2.3.2 (Teorema de Hall) *Seja G um grafo bipartido com bipartição (X, Y). Se, para $S \subseteq X$, $N(S)$ denota o conjunto de vétices que são vizinhos de algum vértice em S, então, para todo $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$ se e somente se G contém um emparelhamento que satura todos os vértices em X.* □

Usaremos o teorema de Hall na demonstração do teorema 2.4.1 da próxima seção.

2.4 Generalizando o teorema de Kano para matróides

Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ vetores de $\mathbb{R}^m$, diremos que $x < y$ na *ordem lexicográfica* quando existe $k \in \{1, 2, ..., m\}$ tal que

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_{k-1} = y_{k-1} \text{ e } x_k > y_k.$$

Seja (M, w) uma matróide com peso. Considere a sequência de números positivos $z_1 < z_2 < ... < z_m$ tal que

$$\{w(e) : e \in E\} = \{z_1, z_2, ..., z_m\}.$$

Para uma base B de M, definimos o *vetor peso* de B como

$$v(B) = (v_1(B), v_2(B), ..., v_m(B)),$$

onde $v_i(B) = |\{e \in B : w(e) = z_i\}|$, para $i \in \{1, 2, ..., m\}$.

O próximo resultado obtido por Lemos estende o teorema de Kano, enunciado na seção anterior, para matróides.

Teorema 2.4.1 *Suponha que (M, w) seja uma matróide com peso. Sejam B e B' bases de M. Se não existe base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$, $|B'' - B| = 1$ e $w(B'') < w(B)$, então*

(i) $w(B) \leq w(B')$;

(ii) $v(B) \leq v(B')$; *e*

(iii) existe uma permutação $\pi : B' - B \to B - B'$ *tal que* $w(f) \geq w(\pi(f))$, *para todo* $f \in B' - B$.

Além disso, se $w(B) = w(B')$ então

(iv) $v(B) = v(B')$;

(v) existe base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$, $|B'' - B| = 1$ e $w(B'') = w(B)$.

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que

$$w(e) \leq w(f) \tag{2.2}$$

quando $f \in B' - B$ e $e \in C(f, B) - B'$.

Sabemos que $B'' = (B - e) \cup f$ é uma base de M. Note que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$ e $|B'' - B| = 1$. Para não contradizer a hipótese do teorema, tem-se que

$$w(B) \leq w(B'') = [w(B) - w(e)] + w(f) = w(B) + [w(f) - w(e)]$$

Donde obtemos que $w(e) \leq w(f)$ e (2.2) segue. Vamos provar agora que:

$$\{C(f, B) - B' : f \in B' - B\} \tag{2.3}$$

satisfaz a condição de Hall.

Seja $X \subseteq B' - B$ um subconjunto qualquer e

$$Y = \bigcup_{f \in X} (C(f, B) - B') \subseteq B - B'$$

(Note que $Y = N(X)$, isto é, um elemento $e \in B - B'$ é um vizinho de X se e pertence a algum $C(f, B) - B'$,$f \in X$.)

Então $Y \cup$ $[B \cap B']$ gera X, pois tomando $f \in X$, $f \in C(f, B) \subseteq Y \cup (B \cap B') \cup f$. Assim, $X \cup Y \cup (B \cap B') \subseteq cl(Y \cup (B \cap B'))$ e disto temos que $r(X \cup Y \cup (B \cap B')) = r(Y \cup (B \cap B'))$. Portanto,

$$\begin{aligned} |X \cup (B \cap B')| = r(X \cup (B \cap B')) &\leq r(X \cup Y \cup (B \cap B')) \\ &= r(Y \cup (B \cap B')) = |Y \cup (B \cap B')| \end{aligned}$$

A desigualdade acima nos diz que $|X \cup (B \cap B')| \leq |Y \cup (B \cap B')|$, donde $|X| + |B \cap B'| \leq |Y| + |B \cap B'|$, portanto $|X| \leq |Y|$ e (2.3) segue.

Pelo teorema de Hall existe emparelhamento que satura os elementos de $B' - B$, isto é, existe uma função injetiva $\pi : B' - B \to B - B'$ tal que $\pi(f) \in C(f, B) - B'$, para todo $f \in B' - B$. Como $|B' - B| = |B - B'|$, resulta que π é uma bijeção. Por (2.2), $w(f) \geq w(\pi(f))$ para todo $f \in B' - B$ e assim obtemos (iii).

Agora suponha que (ii) não é verdade. Isto é, $v(B) > v(B')$. Logo existe k tal que

$$v_1(B) = v_1(B'), ..., v_{k-1}(B) = v_{k-1}(B') \text{ e } v_k(B) < v_k(B').$$

Se $X_k(B) = \{e \in B : w(e) \leq z_k\}$ e $X_k(B') = \{e \in B' : w(e) \leq z_k\}$, então

$$|X_k(B)| = \sum_{i=1}^{k} v_i(B) < \sum_{i=1}^{k} v_i(B') = |X_k(B')|.$$

Note que $X_k(B') \cap B \subseteq X_k(B)$ e que $\pi(X_k(B') - B) \subseteq X_k(B)$. Portanto,

$$\begin{aligned} |X_k(B)| &\geq |\pi(X_k(B') - B)| + |X_k(B') \cap B| \\ &= |X_k(B') - B| + |X_k(B') \cap B| = |X_k(B')|. \end{aligned}$$

Isto é, $|X_k(B)| \geq |X_k(B')|$; um absurdo. Logo (ii) segue.

Além disso,

$$\sum_{f \in B'-B} w(f) \geq \sum_{f \in B'-B} w(\pi(f)) = \sum_{e \in B-B'} w(e)$$

Assim,

$$\sum_{e \in B-B'} w(e) \leq \sum_{f \in B'-B} w(f)$$

donde,

$$\sum_{e \in B-B'} w(e) + \sum_{e \in B \cap B'} w(e) \leq \sum_{f \in B'-B} w(f) + \sum_{f \in B \cap B'} w(f),$$

logo temos que $w(B) \leq w(B')$ e obtemos (i).

Se $w(B) = w(B')$, então $w(f) = w(\pi(f))$, para todo $f \in B' - B$. Portanto, (iv) segue. Escolhendo $f \in B' - B$, sabemos que $B'' = (B - \pi(f)) \cup f$ é uma base de M tal que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$ e $|B'' - B| = 1$ e além disso $w(B'') = w(B)$ e o resultado (v) segue. □

Corolário 2.4.1 *Suponha que (M,w) seja uma matróide com peso. Sejam B e B' bases de M. Se $ord_{B \cap B',M}(B) > 1$, então existe uma base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B''$, $|B'' - B| = 1$ e $ord_{B \cap B',M}(B'') < ord_{B \cap B',M}(B)$.*

Demonstração. Seja B_{min} base de M, tal que $B \cap B' \subseteq B_{min}$ e

$$1 = ord_{B \cap B',M}(B_{min}) < ord_{B \cap B',M}(B).$$

Assim, $w(B_{min}) < w(B)$ e aplicando o teorema 2.4.1 para as bases B_{min} e B, existe uma base B'' de M, tal que $B \cap B_{min} \subseteq B'' \subseteq B \cup B_{min}$, $|B'' - B| = 1$ e $w(B'') < w(B)$. Como $B \cap B' \subseteq B_{min} \cap B \subseteq B''$, então, $ord_{B \cap B',M}(B'') < ord_{B \cap B',M}(B)$. □

2.5 Demonstração do resultado de Lemos

Nesta seção vamos demostrar o teorema 2.2.1, mas para isso precisaremos de alguns resultados.

Lema 2.5.1 *Suponha que (M,w) seja uma matróide com peso. Se* $X \subseteq E$ *e* B *é uma base de* M *tal que* $X \subseteq B$ *e* $ord_{X,M}(B) = 1$, *então:*

(i) Se $f \in E - B$ *e* $w(f) > w(g)$, *para todo* $g \in B - X$, *então não existe base* B' *de* M *tal que* $f \in B'$, $X \subseteq B'$ *e* $ord_{X,M}(B') = 1$; *e*

(ii) Se $f \in E - B$ *e* $g \in C(f, B) - (f \cup X)$ *que satisfaz:*

$$w(g) = max\{w(e) : e \in C(f, B) - (f \cup X)\}$$

então, $ord_{X\cup f,M}((B \cup f) - g) = 1$

Demonstração. Note que B' é base de M tal que $X \subseteq B'$ e $ord_{X,M}(B') = 1$ se e somente se $B' - X$ é uma base de peso mínimo de M/X. Assim $B - X$ é uma base de peso mínimo em M/X.

(i) Como $w(f) > w(g)$, para todo $g \in B - X$, $B - X$ base de peso mínimo de M/X, pelo algoritmo de Kruskal, f não pertence a nenhuma base de peso mínimo de M/X. Assim não existe base B' de M tal que $f \in B'$, $X \subseteq B'$ e $ord_{X,M}(B') = 1$.

(ii) Temos que $B-X$ é uma base de peso mínimo em M/X, mas $B-X$ não é uma base de $M/(X\cup f)$, para obtermos uma base de peso mínimo em $M/(X\cup f)$ deve-se eliminar um elemento de $C(f, B)-(X\cup f)$ de maior peso, como g possui o peso máximo, pelo algoritmo de Kruskal, g deve ser escolhido para ser eliminado em $C(f, B)-(X\cup f)$, assim $B-(X\cup g)$ tem peso mínimo em $M/(X \cup f)$, portanto $ord_{X\cup f,M}((B - g) \cup f) = 1$ e o resultado segue. □

Teorema 2.5.1 *Seja (M,w) uma matróide com peso. Sejam* B *e* B' *bases de* M. *Se não existe base* B'' *de* M *tal que* $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$, $B'' \neq B'$ *e* $w(B'') = w(B')$, *então*

$$|B' - B| \leq ord_{B\cap B',M}(B) + ord_{B\cap B',M}(B') - 2.$$

Demonstração. Suponha que o resultado não é verdadeiro e escolha um contra-exemplo (M, B, B') tal que $|E(M)| + |B \cup B'|$ seja mínimo. Vamos mostrar primeiro que $E(M) = B \cup B'$. Suponha que existe $e \in E(M) - (B \cup B')$, pela escolha de (M, B, B'), o resultado vale para $(M \backslash e, B, B')$, pois $|E(M \backslash e)| + |B \cup B'| = |E(M)| + |B \cup B'| - 1 < |E(M)| + |B \cup B'|$, isto é

$$|B' - B| \leq ord_{B \cap B', M \backslash e}(B) + ord_{B \cap B', M \backslash e}(B') - 2.$$

Afirmo que $ord_{B \cap B', M \backslash e}(B'') \leq ord_{B \cap B', M}(B'')$ para toda base B'' de $M \backslash e$. De fato, suponha que não, então existe uma base B'' de $M \backslash e$, com $w(B'')$ mínimo, tal que $B \cap B' \subseteq B''$ e $ord_{B \cap B', M \backslash e}(B'') > ord_{B \cap B', M}(B'')$, sendo assim existe uma base B^* de $M \backslash e$, $B \cap B' \subseteq B^*$ tal que $ord_{B \cap B', M \backslash e}(B^*) = ord_{B \cap B', M}(B'')$, mas $w(B^*) < w(B'')$ e pela escolha de B'' temos que

$$ord_{B \cap B', M}(B^*) \geq ord_{B \cap B', M \backslash e}(B^*) = ord_{B \cap B', M}(B'').$$

Assim, $w(B^*) \geq w(B'')$; absudo e obtemos a afirmação. Pela afirmação,

$$\begin{aligned} |B' - B| &\leq ord_{B \cap B', M \backslash e}(B) + ord_{B \cap B', M \backslash e}(B') - 2 \\ &\leq ord_{B \cap B', M}(B) + ord_{B \cap B', M}(B') - 2. \end{aligned}$$

Absurdo, logo $E(M) = B \cup B'$. Agora vamos provar que $ord_{B \cap B', M}(B) = 1$. Suponha que $ord_{B \cap B', M}(B) > 1$. Pelo corolário 2.4.1, existe base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B''$, $|B'' - B| = 1$ e $w(B'') < w(B)$. Pela escolha de (M, B, B') o resultado segue para (M, B'', B'), pois $1 = |B'' - B| = |B - B''|$ então existe $g \in B - B''$, como $B \cap B' \subseteq B''$ temos que g não pertence a B', logo g não pertence a $B' \cup B''$ portanto $|B' \cup B''| < |E(M)| = |B \cup B'|$ e $|E(M)| + |B' \cup B''| < |E(M)| + |B \cup B'|$. Então,

$$|B' - B''| \leq ord_{B' \cap B'', M}(B') + ord_{B' \cap B'', M}(B'') - 2.$$

Como $|B'' - B| = 1$ e $E(M) = B \cup B'$ segue que

$$|B' - B| = |B' - B''| + 1$$

donde

$$|B' - B| \leq [ord_{B' \cap B'', M}(B') + ord_{B' \cap B'', M}(B'') - 2] + 1,$$

Assim,

$$|B' - B| \leq ord_{B' \cap B'', M}(B') + ord_{B' \cap B'', M}(B'') - 1,$$

Pela escolha de (B, B'), temos que

$$\begin{aligned}
ord_{B\cap B',M}(B') + ord_{B\cap B',M}(B) - 2 &< ord_{B'\cap B'',M}(B') + ord_{B'\cap B'',M}(B'') - 1,\\
ord_{B\cap B',M}(B') + ord_{B\cap B',M}(B) &< ord_{B'\cap B'',M}(B') + ord_{B'\cap B'',M}(B'') + 1,\\
ord_{B\cap B',M}(B') + ord_{B\cap B',M}(B) &\leq ord_{B'\cap B'',M}(B') + ord_{B'\cap B'',M}(B''),
\end{aligned}$$

Como $B \cap B' \subseteq B'' \cap B'$ temos que, $ord_{B''\cap B',M}(B') \leq ord_{B\cap B',M}(B')$ donde

$$\begin{aligned}
ord_{B\cap B',M}(B') + ord_{B\cap B',M}(B'') &< ord_{B'\cap B'',M}(B') + ord_{B'\cap B'',M}(B''),\\
ord_{B\cap B',M}(B') + ord_{B\cap B',M}(B'') &< ord_{B\cap B',M}(B') + ord_{B'\cap B'',M}(B''),
\end{aligned}$$

Portanto, $ord_{B\cap B',M}(B'') < ord_{B'\cap B'',M}(B'')$.

Absurdo pois $ord_{B'\cap B'',M}(B'') \leq ord_{B\cap B',M}(B'')$. Logo $ord_{B\cap B',M}(B) = 1$, isto é, B é uma base de peso mínimo contendo $B \cap B'$.

Escolha $e \in B$, tal que $w(e) = max\{w(g) : g \in B - B'\}$. Existe $f \in B' - B$, tal que $(B-e)\cup f$ e $(B'-f)\cup e$ são bases de M. Como B é uma base de peso mínimo de M, contendo $B\cap B'$, $w(B) \leq w((B-e)\cup f) = w(B)-w(e)+w(f)$, segue disso que $w(e) \leq w(f)$. Note que $w(e) < w(f)$, porque $B \cap B' \subseteq (B' - f) \cup e$, $(B' - f) \cup e \neq B'$, e por hipótese do teorema B' não pode ter o mesmo peso de $(B' - f) \cup e$. Pelo lema 2.5.1 (i) f não pertence a nenhuma base contendo $B \cap B'$ com peso mínimo. Assim

$$ord_{(B\cap B')\cup f}(B') < ord_{B\cap B',M}(B') \tag{2.4}$$

Seja $g \in C(f, B) - (B' \cup f)$ de peso máximo, pelo lema 2.5.1 (ii),

$$ord_{(B\cap B')\cup f,M}((B - g) \cup f) = 1.$$

Como $|(B - g) \cup f \cup B'| < |B \cup B'|$, pela escolha de (M, B, B'), o resultado vale para $(M, (B - g) \cup f, B')$, isto é,

$$ord_{(B\cap B')\cup f,M}(B') + ord_{(B\cap B')\cup f,M}((B - g) \cup f) - 2 \geq |B' - ((B - g) \cup f)|.$$

Como $|B' - ((B - g) \cup f)| = |B' - B| - 1$, temos que:

$$ord_{(B\cap B')\cup f,M}(B') + ord_{(B\cap B')\cup f,M}((B - g) \cup f) - 2 \geq |B' - B| - 1,$$

isto é,

$$|B' - B| \leq ord_{(B \cap B') \cup f, M}(B') + ord_{(B \cap B') \cup f, M}((B - g) \cup f) - 1$$

donde, $|B' - B| \leq ord_{(B \cap B') \cup f, M}(B')$. Mas

$$|B' - B| \geq ord_{B \cap B', M}(B) + ord_{B \cap B', M}(B') - 1 = ord_{B \cap B', M}(B').$$

Então $ord_{B \cap B', M}(B') \leq ord_{(B \cap B') \cup f, M}(B')$, contradição com (2.4). E o teorema segue. □

O próximo corolário é uma consequência imediata do teorema 2.5.1 e de (2.1)

Corolário 2.5.1 *Suponha que (M,w) é uma matróide com peso. Sejam k e k' inteiros admissíveis com respeito a (M,w). Se B é uma base de M tal que $ord_M(B) = k$, então existe uma base B' de M tal que $ord_M(B') = k'$ e $|B' - B| \leq f(k, k') = k + k' - 2$.*

Demonstração. Seja B' uma base de M tal que $ord_M(B') = k'$ e $|B \cup B'|$ seja mínima. Suponha, por absurdo, que existe uma base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$, $B'' \neq B'$ e $w(B') = w(B'')$, ou seja, $ord_M(B'') = k'$. Como $B'' \neq B'$, existe um elemento $f \in B' - B''$. Note que $f \notin B$, caso contrário $f \in B \cap B'$; absurdo, pois $B \cap B' \subseteq B''$. Logo, segue que $f \in B \cup B' - (B \cup B'')$. Assim, $|B \cup B''| < |B \cup B'|$ e temos um absurdo pela escolha de B'. Com isto, a hipótese do teorema 2.5.1 é satisfeita. Portanto, pelo teorema 2.5.1 e por (2.1), temos

$$\begin{aligned} |B' - B| &\leq ord_{B \cap B', M}(B) + ord_{B \cap B', M}(B') - 2 \\ &\leq ord_M(B) + ord_M(B') - 2. \end{aligned}$$

Isto é $|B' - B| \leq k + k' - 2$ e o corolário segue. □

Demonstração do teorema 2.2.1.

(a) Seja B' uma base de M tal que $ord_M(B') = i$ e $|B' - B|$ seja mínimo. Pela escolha de B', não existe base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$, $B'' \neq B'$ e $ord_M(B') = ord_M(B'')$, pois se existe B'' tem-se $|B'' - B| < |B' - B|$. Pelo teorema 2.5.1, $|B' - B| \leq ord_{B \cap B', M}(B') + ord_{B \cap B', M}(B) - 2 \leq ord_M(B') + ord_M(B) - 2$, portanto, $|B' - B| \leq i - 1 \leq k - 1$ e o resultado segue para $\lambda = 1$.

(b) Seja B' uma base de M tal que $ord_M(B') = i$ e $|B' - B|$ seja mínimo. Pela escolha de B',não existe base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$, $B'' \neq B'$ e $ord_M(B') = ord_M(B'')$, pois se existe B'' tem-se $|B'' - B| < |B' - B|$. Pelo teorema 2.5.1, $|B' - B| \leq ord_{B\cap B',M}(B') + ord_{B\cap B',M}(B) - 2 \leq ord_M(B') + ord_M(B) - 2 = i + k - 2 \leq 2k - 2 = 2(k-1)$ e o resultado segue para $\lambda = 2$.

(c) Pelo corolário 2.4.1, existe uma sequência $B = B_1, B_2, B_3, ..., B_t$ de bases de M tal que $ord_M(B_t) = 1$, $|B_i - B_{i-1}| = 1$ e $ord_M(B_i) < ord_M(B_{i-1})$. De fato, fixe B' base de M cujo $w(B')$ seja mínimo, isto é, $ord_M(B') = 1$. Se $ord_M(B) > 1$, existe base B_2 tal que $B \cap B' \subseteq B_2$, $|B_2 - B| = 1$ e $ord_{B\cap B',M}(B_2) < ord_{B\cap B',M}(B)$, $w(B_2) < w(B)$ isto é $ord_M(B_2) < ord_M(B)$. Se $ord_{B_2\cap B',M}(B_2) > 1$ então existe base B_3 tal que $B_2 \cap B' \subseteq B_3$ $|B_3 - B_2| = 1$ e $ord_{B_2\cap B',M}(B_3) < ord_{B_2\cap B',M}(B_2)$, assim $w(B_3) < w(B_2)$ portanta $ord_M(B_3) < ord_M(B_2)$. Continuando o processo, paramos em uma base B_t tal que $ord_{B_t\cap B',M}(B_t) = 1$, como B' tem peso mínimo então $ord_{B_t\cap B',M}(B') = 1$, portanto $w(B_t) = w(B')$ isto é, $ord_M(B_t) = ord_M(B') = 1$.
Da sequência construida, $ord_M(B) > ord_M(B_2) > ord_M(B_3) > ... > ord_M(B_t)$ concluimos que $ord_M(B) \geq t$ e da sequência $p_1 < p_2 < p_3 < ... < p_s$, temos que $t \leq r$. Observe que $|B_t - B| \leq t - 1$. Como $ord_M(B_t) = 1$, por (a) para cada $j \in \{1, 2, ..., r\}$ existe base B'_j de M tal que $ord_M(B'_j) = j$ e $|B'_j - B_t| \leq r - 1$, donde

$$|B'_j - B| \leq |B'_j - B_t| + |B_t - B| \leq (r-1) + (t-1) \leq 2(r-1).$$

Para $\gamma = 2$, a família $\{B'_j\}_{j=1}^r$ satisfaz a condição $|B' - B| \leq 2r$, assim o peso de cada B'_j aparece na sequência $p_1 < p_2 < ... < p_s$ e como $ord_M(B'_j) = j$ temos que $w(B'_j) = p_j$ para cada $j \in \{1, 2, ..., r\}$, portanto $w(B'_r) = p_r = w(B)$ e assim $ord_M(B) = ord_M(B'_r) = r$, e o resultado segue.

(d) Suponha que $\Gamma_{k,1}(M)$ não seja conexo. Sejam B e B' vértices de $\Gamma_{k,1}(M)$ que estão em componentes conexas distintas tal que $|B' - B|$ seja mínimo. Assim, $|B - B'| > 2k$. (Em particular $k > 1$). Pela escolha de B e B', não existe base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$, $B'' \notin \{B, B'\}$ e $w(B'') = w_k$. Suponha que exista esta tal base B'' de M, se B'' não estiver na componente conexa de B' chegamos a uma contradição, pois $B'' - B' \subsetneq B - B'$ donde $|B'' - B'| < |B - B'|$; e se B'' não estiver na componente conexa de B igualmente temos uma contradição, pois $B'' - B \subsetneq B' - B \Rightarrow |B'' - B| < |B' - B|$. Como $w(B) = w(B')$, pelo teorema 2.4.1, existe base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$,

$|B''-B|=1$ e $ord_M(B'')<ord_M(B)=k$. Observe que não existe base B^* de M tal que $B'\cap B''\subseteq B^*\subseteq B'\cup B''$,$B^*\neq B'$ e $w(B^*)=w(B')$, pois se existisse esta tal base B^*, note que $B\cap B'\subseteq B^*\subseteq B\cup B'$ e pelo que concluimos anteriormente $B^*=B$, logo $B'\cap B''\subseteq B$, mas $|B''-B|=1$ tome $e\in B''-B$, como $B''\subseteq B\cup B'$ temos que $e\in B'$ portanto $B'\cap B''\subseteq B$ não acontece e chegamos a uma contradição. Pelo teorema 2.5.1 ,

$$\begin{aligned}|B'-B''| &\leq ord_{B'\cap B'',M}(B')+ord_{B'\cap B'',M}(B'')-2\\ &\leq ord_M(B')+ord_M(B'')-2\\ &< k+k-2=2(k-1).\end{aligned}$$

Assim, $|B'-B|\leq|B'-B''|+|B''-B|\leq[2(k-1)-1]+1=2(k-1)$, contradição. E o grafo $\Gamma_{k,1}(M)$ é um grafo conexo. $\square$

Capítulo 3

Modificando a conjectura

Neste capítulo vamos demonstrar um resultado importante que torna válido o teorema principal da dissertação: a versão das quatro conjecturas de Kano discutidas no capítulo 2, usando uma outra ordem para as bases de uma matróide com peso. Mais adiante veremos que, utilizando esta nova ordem, as cinco conjecturas se tornam válidas.

3.1 Outra ordem para as bases

Nesta seção, fixaremos uma matróide M com peso $w : E(M) \to \mathbb{R}^+$. Seja $v(B)$ o vetor peso para a base B de M. Se

$$\{v(B) : B \in \mathcal{B}\} = \{v_1, v_2, ..., v_l\},$$

onde $v_1 < v_2 < ... < v_l$ na ordem lexicográfica, então, para uma base B de M tal que $v(B) = v_i$, definimos a *ordem-lex* de B em M como

$$lord_M(B) = i.$$

Pelo algoritmo de Kruskal, para uma base B de M, tem-se que

$$lord_M(B) = 1 \text{ se e somente se } ord_M(B) = 1.$$

Considere agora a seguinte propriedade: quando B e B' são bases de M tais que $|B - B'| = 1$, então

$$\begin{aligned}
ord_M(B) < ord_M(B') &\text{ se e somente se } lord_M(B) < lord_M(B'), \\
ord_M(B) = ord_M(B') &\text{ se e somente se } lord_M(B) = lord_M(B'), \\
ord_M(B) > ord_M(B') &\text{ se e somente se } lord_M(B) > lord_M(B').
\end{aligned}$$

Diremos que um inteiro i é *lex-admissível* com respeito a (M, w) quando existir uma base B de M tal que $lord_M(B) = i$.

Sejam (M, w) uma matróide com peso e $z_1 < z_2 < ... < z_m$ uma sequência de números reais positivos tais que

$$\{w(e) : e \in E(M)\} = \{z_1, z_2, ..., z_m\}.$$

Para uma base B de M, associamos um digrafo $G_{(M,w)}(B)$ com conjunto de vértices $\{1, 2, ..., m\}$, onde (i, j) é uma aresta se e somente se $\{i, j\} \subseteq \{1, 2, ..., m\}$ e existem $e \in E(M) - B$ e $f \in B$ tais que $w(e) = z_i$ e $w(f) = z_j$ e $f \in C(B, e)$. Neste caso, diremos que o subconjunto $\{e, f\}$ é um *representante* para a aresta (i, j). Note que uma aresta de $G_{(M,w)}(B)$ pode possuir mais de um representante. Para cada aresta x de $G_{(M,w)}(B)$, escolha um representante e denote por rep(x). Para um subconjunto $X \subseteq E(G_{(M,w)}(B))$ definimos,

$$rep(X) = \bigcup_{x \in X} rep(x).$$

Agora, provaremos o seguinte lema:

Lema 3.1.1 *Sejam i e j inteiros lex-admissíveis com respeito a uma matróide com peso (M,w) e seja B uma base de M. Suponha que*

$$k{=}min\{|E(\lambda)| : \lambda \text{ é um ij-caminho de } G_{(M,w)}(B) \text{ e } E(\lambda) \neq \emptyset\} < \infty.$$

Se λ é um ij-caminho de $G_{(M,w)}(B)$ tal que $|E(\lambda)| = k$, então, a diferença simétrica, $B \triangle rep(E(\lambda))$ é uma base de M. Além disso,

$$\begin{aligned} w(B) - w(B \triangle rep(E(\lambda))) &= z_j - z_i \\ v(B) - v(B \triangle rep(E(\lambda))) &= e_j - e_i, \end{aligned}$$

onde e_i é o i-ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^m$.

Demonstração. Suponha que $\lambda = i_0 i_1 i_2 ... i_k$ onde $i_0 = i$ e $i_k = j$. Escolha $\{a_1, a_2, ..., a_k\} \subseteq E(M) - B$ e $\{b_1, b_2, ..., b_k\} \subseteq B$ tal que, para cada $j \in \{1, ..., k\}$, $\{a_j, b_j\}$ seja um representante de (i_{j-1}, i_j).

Como $|E(\lambda)| = k$, ou seja, k é o comprimento mínimo que um ij-caminho pode possuir, tem-se que, se (i_r, i_s) é uma aresta de $G_{(M,w)}(B)$ para $\{r, s\} \subseteq \{1, ..., k\}$, então $s - r \leq 1$. Portanto, para cada $j \in \{1, 2, ..., k\}$,

$$b_j \in C(a_j, B) \cap \{b_1, b_2, ..., b_k\} \subseteq \{b_1, b_2, ..., b_j\}. \tag{3.1}$$

Pois, se $b_s \in C(a_j, B) \cap \{b_1, b_2, ..., b_k\}$ com $s > j$, o caminho $\alpha = i_0 i_1 ... i_j i_s i_{s+1}..$ $..i_k$ seria um ij-caminho de comprimento menor do que k, isto não pode acontecer, logo $s \leq j$ e a inclusão (3.1) vale.

Provaremos por indução sobre j que:

$$B_j = (B - \{b_k, b_{k-1}, ..., b_{k-j}\}) \cup \{a_k, a_{k-1}, ..., a_{k-j}\} \text{ é uma base de } M. \quad (3.2)$$

Observe que (3.2) é verdade para $j = 0$. Vamos assumir que $j > 0$ e que (3.2) seja válida para $j-1$, isto é, B_{j-1} é uma base de M. Note que $C(a_{k-j}, B_{j-1}) = C(a_{k-j}, B)$, pois

$$C(a_{k-j}, B_{j-1}) \subseteq (B \cup \{a_{k-j}\}) - \{b_k, b_{k-1}, ..., b_{k-j+1}\}) \cup \{a_k, ..., a_{k-j+1}\}.$$

Mas, por (3.1)

$$C(a_{k-j}, B) \subseteq (B \cup \{a_{k-j}\}) - \{b_k, b_{k-1}, ..., b_{k-j+1}\}) \cup \{a_k, ..., a_{k-j+1}\}.$$

Como $C(a_{k-j}, B_{j-1})$ é o único circuito contido em $B_{j-1} \cup a_{k-j}$ temos que $C(a_{k-j}, B_{j-1}) = C(a_{k-j}, B)$. Disto segue que $(B_{j-1} - b_{k-j}) \cup a_{k-j} = B_j$ e (3.2) segue por indução. Fazendo $j = k - 1$ em (3.2) obtemos a primeira parte deste lema. Para a segunda parte do lema, sabemos que:

$$\begin{aligned} w(B \triangle rep(E(\lambda))) &= w((B - \{b_1, b_2, ..., b_k\}) \cup \{a_1, a_2, ..., a_k\}) \\ &= w(B) - \sum_{i=1}^{k} b_i + \sum_{i=1}^{k} a_i \\ &= w(B) - w(b_k) + w(a_1), \end{aligned}$$

pois $w(b_i) = w(a_{i+1})$ para $i \in \{1, ..., k-1\}$ e portanto,

$$w(B) - w(B \triangle rep(E(\lambda))) = z_j - z_i.$$

Da mesma forma,

$$v(B \triangle rep(E(\lambda))) = (v_1(B \triangle rep(E(\lambda))), ..., v_m(B \triangle rep(E(\lambda)))).$$

Denotemos por $v_i(\{c_1, c_2, ..., c_k\})$ como sendo $|\{c_j : w(c_j) = z_i\}|$, para $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Neste caso,

$$\begin{aligned} v(B \triangle rep(E(\lambda))) &= (v_1(B) - v_1(\{b_1, b_2, ..., b_k\}) + v_1(\{a_1, a_2, ..., a_k\}), ..., \\ &\quad v_m(B) - v_m(\{b_1, b_2, ..., b_k\}) + v_m(\{a_1, a_2, ..., a_k\})) \\ &= (v_1(B), ..., v_m(B)) + (-v_1(\{b_1, b_2, ..., b_k\}) + v_1(\{a_1, a_2, \\ &\quad ..., a_k\}), ..., -v_m(\{b_1, b_2, ..., b_k\}) + v_m(\{a_1, a_2, ..., a_k\}). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} v(B) - v(B \triangle rep(E(\lambda))) &= (v_1(\{b_1, b_2, ..., b_k\}) - v_1(\{a_1, a_2, ..., a_k\}), ..., \\ &\quad v_m(\{b_1, b_2, ..., b_k\}) - v_m(\{a_1, a_2, ..., a_k\}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Note que as únicas entradas não nulas do vetor (3.3) são: a i-ésima entrada com valor 1 e a j-ésima entrada possuindo valor -1. Assim,

$$v(B) - v(B \triangle rep(E(\lambda))) = e_i - e_j.$$

E o lema está demonstrado. □

3.2 A nova ordem-lex na conjectura de Mayr e Plaxton

Nesta seção demonstraremos um resultado importante que torna válida a conjectura de Mayr e Plaxton, vista na seção 2.1, usando a *ordem-lex* em lugar da *ordem* para dividir as bases de uma matróide com peso em classes.

O resultado é o seguinte:

Teorema 3.2.1 *Seja (M,w) uma matróide com peso. Sejam B e B' bases de M. Se não existe base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$, $B'' \neq B'$ e $v(B') = v(B'')$, então*

$$|B' - B| \leq max\{lord_M(B), lord_M(B')\} - 1.$$

Demonstração. Suponha que o resultado não seja válido e escolha um contra-exemplo (M, B, B') tal que $|E(M)| + |B \cup B'|$ seja mínima. Vamos mostrar que $\{B, B'\}$ é uma partição de $E(M)$. Se $e \in E(M) - (B \cup B')$, então pela escolha de (M, B, B'), o resultado vale para $(M \backslash e, B, B')$, pois $|E(M \backslash e)| + |B \cup B'| = |E(M)| + |B \cup B'| - 1 < |E(M)| + |B \cup B'|$, então

$$|B' - B| \leq max\{lord_{M \backslash e}(B), lord_{M \backslash e}(B')\} - 1;$$

Observe que $lord_{M \backslash e}(B'') \leq lord_M(B'')$, para toda base B'' de M que não contém e. Com isso obtemos uma contradição, pois

$$max\{lord_{M \backslash e}(B), lord_{M \backslash e}(B')\} \leq \{lord_M(B), lord_M(B')\}$$

donde, $|B' - B| \leq max\{lord_M(B), lord_M(B')\} - 1$, isto é, o resultado valeria para o contra-exemplo. Então e não existe e $E(M) = B \cup B'$.
Se $f \in B \cap B'$, então pela escolha de (M, B, B'), o resultado vale para $(M/f, B - f, B' - f)$. Portanto,

$$|B' - B| = |(B' - f) - (B - f)| \leq max\{lord_{M/f}(B - f), lord_{M/f}(B' - f)\} - 1;$$

uma contradição porque $lord_{M/f}(B'' - f) \leq lord_M(B'')$, para toda base B'' de M que contém f. Assim f não existe e então $\{B, B'\}$ é uma partição de $E(M)$. Vamos mostrar agora que,

$$v(B') > v(B). \tag{3.4}$$

Suponha que $v(B') \leq v(B)$, note que por hipótese $v(B) \neq v(B')$, pois se $v(B) = v(B')$ tome $B'' = B$ e o contra-exemplo (M, B, B') não valeria. Sendo assim, $v(B') < v(B)$. Pelo teorema 2.4.1 (ii), existe uma base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$, $|B'' - B| = 1$ e $w(B'') < w(B)$. Assim, $lord_M(B'') < lord_M(B)$ pois $ord_M(B'') < ord_M(B)$. Vamos mostrar que $|B' \cup B''| < |B \cup B'|$. Sabemos que $|B - B''| = |B'' - B| = 1$, seja $f \in B - B''$. Se $f \in B'$, teríamos que $f \in B \cap B' \subseteq B''$, absurdo, então $f \in B \cup B'$ e $f \notin B' \cup B''$ isto é, $B' \cup B'' \subsetneq B \cup B'$. Com isto mostramos que $|B' \cup B''| < |B \cup B'|$. Esta desigualdade nos diz que $|E(M)| + |B' \cup B''| < |E(M)| + |B \cup B'|$ ou seja, que o resultado segue para (M, B'', B') e então

$$|B' - B| - 1 = |B' - B''| \leq max\{lord_M(B''), lord_M(B')\} - 1 < lord_M(B) - 1;$$

ou seja, $|B' - B| \leq lord_M(B) - 1 \leq max\{lord_M(B), lord_M(B')\} - 1$, uma contradição e concluimos que (3.4) segue.
Para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$, definimos

$$Z_i = \{e \in E(M) : w(e) = z_i\}.$$

Vamos provar que

$$Z_i \cap B' \text{ é um conjunto de laços de } M|(B' \cup Z_i). \tag{3.5}$$

é um conjunto de laços de $M|(B' \cup Z_i)$. Observe que (3.5) é equivalente a:

$$C(e, B') - e \subseteq B' - Z_i, \text{ para todo } e \in Z_i - B'.$$

Suponha que a afirmação acima não é válida, isto é, existe $e \in Z_i - B'$ e $f \in Z_i \cap B'$ tal que $f \in C(e, B')$. Sabemos que $B'' = (B' - f) \cup e$ é uma base de M. Note que $v(B'') = v(B')$ e além disso, como $f \notin B$, pois $\{B, B'\}$ é uma partição, temos que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$, isto é, o contra-exemplo não satisfaz a hipótese do teorema, contradição. Assim (3.5) segue.

Em particular, Z_i é um conjunto independente de M. Se Z_i é dependente, então existe um circuito C de M tal que $C \subseteq Z_i$. De fato, seja $f \in C$ e $f \in Z_i \cap B'$, então f é um colaço e disto temos que $|\{f\} \cap C| = 1$, o que não

pode acontecer, logo $C \subseteq Z_i - B' \subseteq B$ e a base B conteria um circuito o que é um absurdo. Logo Z_i é um conjunto independente de M.
Vamos mostrar que o digrafo

$$G_{(M,w)}(B') \text{ não possui ciclos.} \tag{3.6}$$

Assuma que $G_{(M,w)}(B')$ possui um ciclo. Seja C um ciclo de $G_{(M,w)}(B')$ de menor comprimento. Escolha $i \in V(C)$. Podemos pensar em C como um $ii-$ caminho. Como C é um ciclo de $G_{(M,w)}(B')$ de menor comprimento, segue que

$$|E(C)| = \min\{|E(\lambda) : \lambda \text{ é um } ii- \text{ caminho de } G_{(M,w)}(B') \text{ e } E(\lambda) \neq \emptyset\}.$$

Pelo lema 3.1.1, $B'' = B' \triangle rep(E(C))$ é uma base de M tal que

$$v(B') - v(B'') = e_i - e_i = 0;$$

deste modo, $v(B') = v(B'')$ e isto nos dá uma contradição com a hipótese. Assim (3.6) segue. Considere o seguinte conjunto:

$$Z_- = \{i \in V(G_{(M,w)}(B')) : d^-_{G_{(M,w)}(B')}(i) = 0\}.$$

Por (3.6) $Z_- \neq \emptyset$. De fato, suponha que para todo vértice i de $G_{(M,w)}(B')$, $d^-_{G_{(M,w)}(B')}(i) \neq 0$, isto é, existe um arco que possui i como vértice de entrada. Seja λ um caminho de maior comprimento em $G_{(M,w)}(B')$, digamos que λ liga o vértice i ao j. Como $d^-_{G_{(M,w)}(B')}(i) \neq 0$, existe um arco c_i que possui i como vértice de entrada, mas como λ é um caminho de comprimento máximo, o arco c_i deve possui como vértice de saída algum vétice do caminho λ, obtendo assim um ciclo no digarfo $G_{(M,w)}(B')$ o que é um absurdo. Com isso, $Z_- \neq \emptyset$.

Note que M não possui colaços, pois se g é um colaço de M então $E(M) - g$ é um hiperplano, isto é, g está em todas as bases de M, absurdo pois $\{B, B'\}$ é uma partição de M. Observe também que, $Z_i \subseteq B$, quando $i \in Z_-$. Vamos provar agora um lema auxiliar:

Lema 3.2.1 *Se k=min$\{i : i \in Z_-\}$, então $|Z_k| = 1$, $v_i(B) = v_i(B')$, para todo $i < k$ e $Z_- = \{k\}$. Além disso, se $(i,k) \in E(G_{(M,w)}(B))$, então $k < i$.*

Demonstração. Seja $h = \max\{i : i \in Z_-\}$. Seja (i,h) uma aresta de $G_{(M,w)}(B)$ e $\{e,f\}$ uma representação de (i,h), isto é, $e \in B'$ e $f \in C(e,B)-e$ tais que $w(e) = i$ e $w(f) = h$. Deste modo, $(B - f) \cup e$ é uma base de M. Pela escolha de (M, B, B'), o resultado vale para $(M/e\backslash f, B - f, B' - e)$ e portanto

$$\begin{aligned}|B' - B| - 1 &= |(B' - e) - (B - f)| \\ &\leq max\{lord_{M/e\backslash f}(B - f), lord_{M/e\backslash f}(B' - e)\} - 1. \quad (3.7)\end{aligned}$$

Observe que não existe base B'' de $M\backslash f$ tal que $v(B'') = v(B)$ porque $v_h(B) = |Z_h|$ (lembre que $Z_h \subseteq B$) e $v_h(B'') \leq |Z_h - f| < |Z_h|$. Portanto

$$\{v(\widetilde{B}) : \widetilde{B} \in \mathcal{B}(M/e\backslash f)\} \subseteq \{v(\widehat{B}) - e_i : Z_i \cap \widehat{B} \neq \emptyset, \widehat{B} \in \mathcal{B}(M), v(\widehat{B}) \neq v(B)\}. \quad (3.8)$$

De fato, seja $\widetilde{B}$ uma base de $M/e\backslash f$, então $\widehat{B} = \widetilde{B} \cup e$ é uma base de M que não possui o elemento f, isto é, $\widehat{B} \in \mathcal{B}(M\backslash f)$ e por isso $v(\widehat{B}) \neq v(B)$. Note também que $Z_i \cap \widehat{B} \neq \emptyset$ e $v(\widehat{B}) - e_i = v(\widetilde{B} \cup e) - e_i = v(\widetilde{B})$ e portanto a inclusão (3.8) segue.

Então, por (3.4) e (3.8) temos que, $lord_{M/e\backslash f}(B' - e) < lord_M(B')$. Por (3.7) e pela escolha de (M, B, B'), chegaremos a uma contradição a menos que $lord_{M/e\backslash f}(B' - e) < lord_M(B - f)$, pois se $lord_{M/e\backslash f}(B' - e) \geq lord_M(B - f)$ teríamos por (3.7) que

$$|B' - B| \leq \max\{lord_{M/e\backslash f}(B - f), lord_{M/e\backslash f}(B' - e)\} = lord_{M/e\backslash f}(B' - e)$$

E portanto $|B' - B| < lord_M(B')$. Isto é uma contradição com a escolha de (M, B, B'). Como $lord_{M/e\backslash f}(B' - e) < lord_M(B - f)$, temos que $v(B' - e) < v(B - f)$, isto é

$$v(B') - e_i < v(B) - e_h. \quad (3.9)$$

Sabemos que $v(B') > v(B)$, isto é, existe $s \leq m$ tal que

$$v_1(B') = v_1(B),\ v_2(B') = v_2(B), ...,\ v_{s-1}(B') = v_{s-1}(B) \text{ e}$$
$$v_s(B') < v_s(B).$$

Queremos mostrar que $v_j(B') = v_j(B)$, para todo $j < h$. Suponha que existe $j < h$ tal que $v_j(B') \neq v_j(B)$, tome j o menor possível.

CASO 1: Suponha que $v_j(B') < v_j(B)$, então:

$$v_1(B') = v_1(B), v_2(B') = v_2(B), ..., v_{j-1}(B') = v_{j-1}(B), v_j(B') < v_j(B). \quad (3.10)$$

SUBCASO 1: Se $i \leq j$, temos que $v_i(B') \leq v_i(B)$, ou seja, $v_i(B') - 1 < v_i(B)$, o que é uma contradição com $v(B') - e_i < v(B) - e_h$.

SUBCASO 2: Se $i > j$. Neste subcaso, mais uma vez chegamos a um absurdo com a desigualdade $v(B') - e_i < v(B) - e_h$ observando (3.10). Então o caso 1 não acontece.

CASO 2: Suponha que $v_j(B') > v_j(B)$, então:

$$v_1(B') = v_1(B), v_2(B') = v_2(B), ..., v_{j-1}(B') = v_{j-1}(B) \text{ e}$$
$$v_j(B') > v_j(B).$$

Este caso também não pode acontecer, uma vez que $v(B') > v(B)$. Concluimos que para todo $j < h$ temos que $v_j(B') = v_j(B)$.

Suponha agora que $k < h$, então $v_k(B') = v_k(B)$, mas $v_k(B) = |Z_k| \neq 0$. Como $Z_k \subseteq B$ segue que $v_k(B') = 0$ e desta forma não poderíamos ter a igualdade $v_k(B') = v_k(B)$. Então $k = h$ e $Z_- = \{k\}$.

Vamos mostrar que se (i, k) é uma aresta do digrafo, então $i > k$. Suponha que $i < k$, então $v_i(B') = v_i(B) \neq \emptyset$, portanto $v_i(B') - 1 < v_i(B)$, como $v_j(B') = v_j(B)$ para $j < i$, obtemos uma contradição com $v(B') - e_i < v(B) - e_h$, com isto segue que $i > k$.

Vamos mostrar que $v_k(B) = 1$, suponha que $v_k(B) > 1$, assim $v_k(B) - 1 > 0 = v_k(B')$ isto é, $v(B') - e_i > v(B) - e_k$, contradição. Segue então que $|Z_k| = v_k(B) = 1$ e o lema está demonstrado. □

Nesta próxima etapa, vamos mostrar que

$$k = min\{i : i \in Z_-\} = 1 \tag{3.11}$$

Suponha que $k > 1$, pelo lema 3.2.1, $v_1(B) = v_1(B') \neq 0$ e $|Z_k| = 1$, digamos que $Z_k = \{f'\}$. Seja e' um elemento de B' tal que $f' \in C(e', B)$. Escolha $e \in B' \cap Z_1$. Por (3.5), $B' \cap Z_1$ é um conjunto de colaços de $M|(B' \cup Z_1)$ e assim $C(e, B) \nsubseteq B' \cup Z_1$. De fato, como $C(e, B)$ é um circuito da matróide, então também é um circuito da restrição $M|(B' \cup Z_1)$. Se $C(e, B) \subseteq B' \cup Z_1$ tem-se que $C(e, B) - e \subseteq Z_1$ é um independente de $M|(B' \cup Z_1)$, logo existe uma base B'' de $M|(B' \cup Z_1)$ tal que $C(e, B) - e \subseteq B''$, mas e é um colaço, então $e \in B''$ e $C(e, B) \subseteq B''$, absurdo. Disto, podemos dizer que existe $f \in C(e, B) - Z_1$. Pela segunda parte do lema 3.2.1, $(1, k)$ não é aresta, assim não existe $g \in C(e, B)$ tal que $w(g) = k$, isto é, $C(e, B) \cap Z_k = \emptyset$. Portanto, $f \in Z_j$, para algum $j \neq k$. Como $f' \in C(e', B)$ e $w(f') = z_k$, segue que $e' \in Z_h$ para algum $h > k$, pois se $h < k$ o par (h, k) seria uma aresta, contradizendo assim a segunda parte do lema 3.2.1. Observe que $C(e, B) = C(e, (B - f') \cup e')$. De fato, $f' \notin C(e, B)$, pois $C(e, B) \cap Z_k = \emptyset$, desta maneira

$$C(e, B) \subseteq (B - f') \cup e \subseteq (B - f') \cup \{e', e\},$$

como $C(e, (B - f') \cup e') \subseteq (B - f') \cup \{e', e\}$ e este circuito é único, segue que $C(e, B) = C(e, (B - f') \cup e')$. Portanto, temos que $B'' = (B - \{f, f'\}) \cup \{e, e'\}$ é uma base de M. Como

$$v(B'') = v(B) + e_1 + e_h - e_k - e_j,$$

segue que $v_1(B'') = v_1(B) + 1 = v_1(B') + 1$. Isto nos diz que $v_1(B'') > v_1(B')$ e como $e \in B'' \cap B'$, tem-se que $v_1(B'') - 1 > v_1(B') - 1$ e portanto $v_{M/e\backslash f}(B'' - e) < v_{M/e\backslash f}(B' - e)$. Desta maneira

$$lord_{M/e\backslash f}(B'' - e) < lord_{M/e\backslash f}(B' - e) \tag{3.12}$$

Pela escolha de (M, B, B'), o resultado segue para $(M/e\backslash f, B'' - e, B' - e)$ e assim

$$\begin{aligned} |B' - B| - 2 &= |(B' - e) - (B'' - e)| \\ &\leq max\{lord_{M/e\backslash f}(B'' - e), lord_{M/e\backslash f}(B' - e)\} - 1. \end{aligned}$$

Substituindo (3.12) na inequação acima, obtemos:

$$|B' - B| \leq lord_{M/e\backslash f}(B' - e) + 1. \tag{3.13}$$

Observe que

$$lord_{M/e\backslash f}(B' - e) \geq lord_M(B') - 1. \tag{3.14}$$

Caso $lord_{M/e\backslash f}(B' - e) < lord_M(B') - 1$, temos que $|B' - B| < lord_M(B')$, ou seja, $|B' - B| \leq lord_M(B') - 1$, contardição com a escolha de (M, B, B'). Como $v_k(B) = v_k((B - f) \cup e) = 1$ e $Z_k \cap E(M/e\backslash f') = \emptyset$, lembre -se que $Z_k = \{f'\}$, disto segue que $\{v(B''') : B''' \in \mathcal{B}(M/e\backslash f')\}$ está contido em

$$\{v(B''') - e_1 : B''' \cap Z_1 \neq \emptyset, B''' \in \mathcal{B}(M), v(B''') \notin \{v(B), v((B - f) \cup e)\}\} \tag{3.15}$$

De fato, seja $\overline{B} \in \mathcal{B}(M/e\backslash f)$, assim $\overline{B} \cup e \in \mathcal{B}(M)$ e $v(\overline{B} \cup e) = v(\overline{B}) + e_1$. Considerando $B''' = \overline{B} \cup e$, temos que $v(\overline{B}) = v(B''') - e_1$. Note que $B''' \cap Z_1 \neq \emptyset$. Como $Z_k \cap \overline{B} = \emptyset$, tem-se que $v_k(\overline{B}) = 0$, por outro lado sabendo que $v_k(B) = v_k((B - f) \cup e) = 1$, temos que $v(B''') \notin \{v(B), v((B - f) \cup e)\}$.

Portanto, por (3.15) chegamos a uma contradição com (3.14), visto que $v(B) < v(B')$, $v((B-f)\cup e) < v(B')$ e $v(B) \neq v((B-f)\cup e)$. Então, (3.11) segue. Vamos agora provar um outro lema auxiliar:

Lema 3.2.2 *Se $e \in B' - cl_M(Z_1)$, então existe uma base B'' de M tal que $e \in B''$ e $lord_M(B'') = 1$.*

Demonstração. Como $e \notin cl(Z_1)$, então, para todo circuito C da matróide M que contém e, tem-se que $C \nsubseteq Z_1 \cup e$. Em particular o $C(e,B) \nsubseteq Z_1 \cup e$. Note que $Z_1 \subseteq B$, neste caso, existe $f \in C(e,B) - Z_1$. Portanto $B'' = (B-f)\cup e$ é uma base de M. Sabemos pelo lema 3.2.1 e por (3.11) que $|Z_1| = 1$ e como $Z_1 \subseteq B'' - B'$, segue que $v_1(B'') > v_1(B')$, logo $v(B'') < v(B')$.Novamente, pela escolha de (M, B, B'), o resultado vale para $(M/e, B-f, B'-e)$, desta forma

$|B'-B|-1 = |(B'-e)-(B-f)| \leq \max\{lord_{M/e}(B-f), lord_{M/e}(B'-e)\}-1$. Como $v(B'') < v(B')$ e $e \in B'' \cap B'$, com isto segue que $lord_{M/e}(B''-e) < lord_{M/e}(B'-e)$, isto é, $lord_{M/e}(B-f) < lord_{M/e}(B'-e)$. Assim

$$|B'-B| \leq lord_{M/e}(B'-e). \tag{3.16}$$

Observe que e deve pertencer a uma base de M que possui ordem-lex 1, caso contrário

$$lord_{M/e}(B'-e) < lord_M(B');$$

pois a ordem-lex de $B'-e$ em M/e é no máximo a ordem-lex de B' em M menos 1; obtemos assim uma contradição com (3.16) e o lema segue. $\square$

Pelo lema 3.2.1, $m > 1$ e $Z_i \cap B' \neq \emptyset$, para todo $i \in \{2,3,...,m\}$, visto que $k = 1$ por (3.11). Como $Z_m \cap B'$ é um conjunto de colaços de $M|(B' \cup Z_m)$, por (3.5), segue que

$$B' - Z_m \text{ gera } Z_m - B',$$

isto é, $Z_m - B' \subseteq cl(B' - Z_m)$. De fato, seja $f \in Z_m - B'$, considerando o circuito fundamental de f com respeito a base B', $C(f,B')$, queremos mostrar que $C(f,B') \subseteq (B'-Z_m)\cup f$. Suponha que existe um elemento g diferente de f, tal que $g \in C(f,B') \cap Z_m$, assim $g \in B' \cap Z_m$ é um colaço da restrição de M a $B' \cup Z_m$, observe que $C(f,B')$ é um circuito da restrição pois é um circuito da matróide, mas g não pode está em circuitos pela proposição 1.5.2 e pelo lema 1.7.3, absurdo.
Sendo assim, temos que $E(M) - Z_m$ gera $Z_m - B'$, pois

$$Z_m - B' \subseteq cl(B' - Z_m) \subseteq cl(E(M) - Z_m)$$

pela propriedade **(CL2)**, já que $B' - Z_m \subseteq E(M) - Z_m$. Então, $E(M) - Z_m$ gera B, porque

$$B \subseteq [E(M) - Z_m] \cup [Z_m - B'] \subseteq cl(E(M) - Z_m.$$

Deste modo, $E(M) - Z_m$ contém uma base de peso mínimo de M, pelo algoritmo guloso, logo a m-ésima entrada do vetor peso desta base é zero. Como o vetor peso é invariante para base de peso mínimo de M, segue que nenhum elemento de Z_m pertence a uma base de peso mínimo de M. Agora note que

$$Z_1 \text{ gera } Z_m \cap B'.$$

De fato, suponha que existe $f \in (Z_m \cap B') - cl(Z_1)$, pelo lema 3.2.2 existe uma base B'' de M tal que $f \in B''$ e $lord_M(B'') = 1$, ou seja, B'' é uma base de peso mínimo que contém um elemento de Z_m, absurdo pelo que vimos anteriormente.
Como $|Z_1| = 1$, pelo lema 3.2.1 e (3.11), e $Z_m \cap B'$ é um independente, temos que $|Z_m \cap B'| = 1$. Suponha que $|Z_m \cap B'| > 1$ e sejam h e g dois elementos distintos contidos em $Z_m \cap B'$. Observe que estes elementos não podem ser laços. Suponha também que $Z_1 = \{e\}$. Então, $C_1 = \{h, e\}$ e $C_2 = \{g, e\}$ são dois circuitos e como $C_1 \cap C_2 = \{e\}$, pela propriedade **(C3)**, existe um circuito $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$, isto é, $C_3 = \{h, g\} \subseteq Z_m \cap B'$, absurdo. Em particular,

$$Z_1 \cup (Z_m \cap B') \text{ é um circuito de 2 elementos da matróide } M. \tag{3.17}$$

Se $m = 2$, então $|E(M)| = 2$, mas isto é uma contradição, de fato, digamos que $B = \{e\}$ e $B' = \{f\}$, donde $lord_M(B) = 1$ e $lord_M(B') = 2$, assim, pela escolha de (M, B', B) temos que

$$1 = |B' - B| > \{lord_M(B'), lord_M(B)\} - 1 = 2 - 1 = 1,$$

que é um absurdo. Logo $m \geq 3$. Agora vamos provar que

$$Z_m \cap B \neq \emptyset. \tag{3.18}$$

Assuma que $Z_m \subseteq B'$. Por (3.5), tem-se que $B' - Z_{m-1}$ gera $Z_{m-1} - B'$. Como Z_1 gera $Z_m \cap B'$ segue que

$$[B' - (Z_{m-1} \cup Z_m)] \cup Z_1 \text{ gera } Z_{m-1} - B'.$$

Assim, $E(M) - (Z_{m-1} \cup Z_m)$ gera $Z_{m-1} - B'$ pois

$$Z_{m-1} - B' \subseteq cl([B' - (Z_{m-1} \cup Z_m)] \cup Z_1) \subseteq cl(E(M) - (Z_{m-1} \cup Z_m)),$$

mais uma vez pela propriedade **(CL2)**, já que $[B' - (Z_{m-1} \cup Z_m)] \cup Z_1 \subseteq E(M) - (Z_{m-1} \cup Z_m)$. Além disso, temos que $E(M) - (Z_{m-1} \cup Z_m)$ também gera B pois

$$B \subseteq [E(M) - (Z_{m-1} \cup Z_m)] \cup (Z_{m-1} - B') \subseteq cl(E(M) - (Z_{m-1} \cup Z_m)),$$

uma vez que $B \cap Z_m = \emptyset$. Então, pelo algoritmo guloso, concluimos que $E(M) - (Z_{m-1} \cup Z_m)$ contém uma base de peso mínimo de M, sendo assim, as $(m-1)$-ésima e m-ésima entradas do vetor peso desta base é nula. Como $Z_{m-1} \cap B' \neq \emptyset$, pelo lema 3.2.1 e por (3.11), e pelo lema 3.2.2 concluimos que

$$Z_1 \text{ gera } Z_{m-1} \cap B'.$$

Sendo assim Z_1 gera $(Z_m \cup Z_{m-1}) \cap B'$ e observe que $|(Z_m \cup Z_{m-1}) \cap B'| = |Z_m \cap B'| + |Z_{m-1} \cap B'| \geq 2$. Deste modo temos uma contradição, pois $|Z_1| = 1$ e $(Z_m \cup Z_{m-1}) \cap B'$ é um conjunto independente. Portanto, (3.18) segue.

Por (3.17) e (3.18), podemos escolher $f \in B' - Z_m$ tal que $C(f, B) \cap Z_m \neq \emptyset$, digamos $e \in C(f, B) \cap Z_m$. Considere a base $B'' = (B - e) \cup f$ de M. Note que

$$lord_{M \backslash e}(B'') < lord_{M \backslash e}(B'). \tag{3.19}$$

De fato, digamos que $w(f) = z_s$, para $s < m$, desta forma $v_1(B'') = v_1(B), ..., v_{s-1}(B'') = v_{s-1}(B)$ e $v_s(B'') > v_s(B)$. Assim, $lord_M(B'') < lord_M(B) < lord_M(B')$ e portanto $lord_{M \backslash e}(B'') < lord_{M \backslash e}(B')$.
Se B''' é uma base de $M \backslash e$ tal que $v_1(B''') = 1$, então $v_m(B''') < |Z_m| - 1$ porque $e \in Z_m$ e $Z_1 \cup (Z_m \cap B')$ é um circuito de 2-elementos de M. Portanto, não existe base B''' de $M \backslash e$ tal que $v(B''') = v(B)$, já que $v_m(B) - |Z_m| - 1$. Assim, por (3.4),

$$lord_{M \backslash e}(B') < lord_M(B'), \tag{3.20}$$

pois a ordem-lex de B' em $M \backslash e$ é no máximo $lord_M(B') - 1$.
Pela escolha de (M, B, B'), o resultado segue para $(M \backslash e, B'', B')$ e então

$$|B' - B| - 1 = |B' - B''| \leq \min\{lord_{M \backslash e}(B''), lord_{M \backslash e}(B')\} - 1,$$

ou seja, $|B' - B| \leq \min\{lord_{M \backslash e}(B''), lord_{M \backslash e}(B')\}$, mas como $lord_{M \backslash e}(B'') < lord_{M \backslash e}(B')$, por (3.19), temos que

$$|B' - B| \leq lord_{M \backslash e}(B')$$

e como $lord_{M \backslash e}(B') < lord_M(B')$, por (3.20) segue que $|B' - B| < lord_M(B')$, isto é, $|B' - B| \leq lord_M(B') - 1$, contradição e o teorema está provado. $\square$

Capítulo 4

Teorema de Lemos

Neste curto e último capítulo iremos provar o teorema principal da dissertação. Usando o teorema 3.2.1 , provaremos que todas as quatro conjectura de Kano valem se trabalharmos com a *ordem-lex* ao invés da *ordem* para dividir as bases em classes de uma matróide com peso. Observe como o enunciado do próximo teorema é bastante parecido com o enunciado do teorema 2.2.1 que envolve a *ordem*. A demonstração também é bastante parecida, por isso, para evitar repetições, na demonstração do teorema principal não iremos detalhar o que já foi detalhado no teorema 2.2.1.

Teorema 4.0.2 (Lemos) *Suponha que (M,w) seja uma matróide com peso. Se k é um inteiro lex-adimissível com respeito a (M,w), então:*

(i) Seja B uma base de M tal que $lord_M(B) = 1$. *Então, para cada* $i \in \{1, 2, ..., k\}$, *existe uma base* B' *de M tal que* $|B' - B| \leq k - 1$ *e* $lord_M(B') = i$.

(ii) Seja B uma base de M tal que $lord_M(B) = k$. *Então, para cada* $i \in \{1, 2, ..., k\}$, *existe uma base* B' *de M tal que* $|B' - B| \leq k - 1$ *e* $lord_M(B') = i$.

(iii) Seja B uma base de M e sejam r e s inteiros tais que

$$\{w(B') : B' \in \mathcal{B}(M) \text{ e } |B' - B| \leq r\} = \{p_1, p_2, ..., p_s\},$$

para números reais $p_1 < p_2 < ... < p_s$. *Se* $w(B) = p_r$ *então* $lord_M(B) = r$.

(iv) Se $\Gamma_k(M)$ *é um grafo tal que* $V(\Gamma_k(M)) = \{B \in \mathcal{B}(M) : lord_M(B) = k\}$ *e* $BB' \in E(\Gamma_k(M))$ *se e somente se* $\{B, B'\} \subseteq V(\Gamma_k(M))$, $B \neq B'$ *e* $|B - B'| \leq k$. *Então* $\Gamma_k(M)$ *é conexo.*

Demonstração.

(i) Seja B' uma base de M tal que $lord_M(B') = i$ e $|B' - B|$ é mínima. Pela escolha de B' não existe base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$ e $lord_M(B') = lord_M(B'')$ e $B' \neq B''$. Assim, pelo teorema 3.2.1,

$$|B' - B| \leq \max\{lord_M(B), lord_M(B')\} - 1 = i - 1 \leq k - 1.$$

E o item *(i)* segue.

(ii) Seja B' uma base de M tal que $lord_M(B') = i$ e $|B' - B|$ é mínina. Analogamente ao item *(i)*, pelo teorema 3.2.1, temos que

$$|B' - B| \leq \max\{lord_M(B), lord_M(B')\} - 1 = k - 1.$$

(iii) Pelo corolário 2.4.1, existe uma sequência $B_1, B_2, ..., B_t$ de bases de M tal que $|B_i - B_{i-1}| = 1$, $lord_M(B_i) < lord_M(B_{i-1})$, para cada $i \in \{2, 3, ..., t\}$, onde $B_1 = B$ e $lord_M(B_t) = 1$. Assim $t \leq r$, pois $|B_i - B| \leq i - 1$, para todo $i \in \{1, 2, ..., t\}$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., t\}$, definimos

$$n_i = lord_M(B_i) + i - 1 - r.$$

Como $lord_M(B_1) \geq r$, segue que

$$n_1 \geq 0.$$

Se $n_1 = 0$, então (iii) segue, pois teríamos que $lord_M(B_1) = r$. Assumiremos que $n_1 > 0$, isto é, $lord_M(B_1) > r$. Note que

$$n_t = lord(B_t) + t - 1 - r = t - r \leq 0,$$

isto é, $n_t \leq 0$. Seja j o primeiro inteiro tal que $n_j \leq 0$. Assim

$$lord_M(B_j) \leq 1 + r - j \text{ e } 3 + r - j \leq lord_M(B_{j-1}).$$

Pelo teorema 3.2.1, existem bases $B'_1, B'_2, ..., B'_{2+r-j}$ de M tais que, para todo $i \in \{1, 2, ..., 2 + r - j\}$,

$$lord_M(B'_i) = i \text{ e } |B'_i - B_j| \leq 1 + r - j.$$

Considere o conjunto de bases de M:

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..., B_{j-1}, B'_1, B'_2, ..., B'_{2+r-j}\}.$$

Note que

$$|\{lord_M(B') : B' \in \mathcal{B}\}| = [j-1] + [2+r-j] = r+1. \tag{4.1}$$

Para concluirmos o item (iii) provaremos a seguinte afirmação:

$$|B' - B| \leq r, \text{ para todo } B' \in \mathcal{B}. \tag{4.2}$$

Temos agora dois casos a tratar. Se $B' = B_i$, para $1 \leq i \leq j-1$, então $|B' - B| \leq i - 1 \leq t - 1 < r$ e então (4.2) segue para este caso. Se $B' = B'_i$, para $1 \leq i \leq 2 + r - j$, então

$$|B' - B| = |B'_i - B_1| \leq |B'_i - B_j| + |B_j - B_1| \leq [1 + r - j] + [j - 1] = r$$

e assim (4.2) segue também para este caso. Observe que a parti da afirmação (4.2) concluimos que os pesos da bases que estão em $\mathcal{B}$ aparecem na sequência $p_1 < p_2 < ... < p_s$. Mas como

$$ord_M(B'_1) < ... < ord_M(B'_{2+r-j}) < ord_M(B_{j-1}) < ... < ord_M(B_1),$$

uma vez que $lord_M(B'_1) < ... < lord_M(B'_{2+r-j}) < lord_M(B_{j-1}) < ... < lord_M(B_1)$, concluimos que o peso de cada base em $\mathcal{B}$ é menor do que p_r e isto é uma contradição com a quantidade que encontramos em (4.1).

(iv) Suponha que $\Gamma_k(M)$ não seja conexo. Sejam B e B' vértices de $\Gamma_k(M)$ que estão em componentes conexas distintas tais que $|B' - B|$ seja mínima. Assim $|B' - B| > k$. Em particular, $k > 1$. Pela escolha de B e B', não existe uma base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$, $B'' \notin \{B, B'\}$ e $lord_M(B'') = k$. Pelo teorema 2.4.1, existe uma base B'' de M tal que $B \cap B' \subseteq B'' \subseteq B \cup B'$, $|B'' - B| = 1$ e $lord_M(B'') < lord_M(B) = k$. Assim, pelo teoema 3.2.1,

$$|B' - B''| \leq \max\ \{lord_M(B'), lord_M(B'')\} - 1 = k - 1.$$

Portanto, $|B' - B| \leq |B' - B''| + |B'' - B| \leq k$; uma contradição. E o item *(iv)* segue, concluindo assim o teorema. $\square$

A mesma prova dada acima pode ser usada para mostrar que a versão da conjectura de Mayr e Plaxton para matróides também implica em todas as quatro versões das conjecturas de Kano para matróides.

Referências Bibliográficas

[1] Whitney, H.: On the abstract properties of linear dependence. *American journal mathematic.* **57**, 509-533 (1935).

[2] Kano, M.: Maximum and kth maximal spanning trees of a weighted graph. *Combinatorica* **7**, 205-214 (1987).

[3] Mayr, E.W., Plaxton, C.G.: On the spanning trees of weighted graphs. *Combinatorica* **12**, 433-447 (1992).

[4] Lemos, M.: Weight distribution of the bases of a matroid. *Graphs and Combinatorics* **22**, 69-82 (2006).

[5] Kawamoto, T., Kajitani, Y., Shinoda, S.: On the second maximal spanning trees of a weighted graph. *Trans. IECE of Japan* **61A**, 988-995 (1978).

[6] Oxley, J.G.: *Matroid theory.* Oxford University Press, New York, 1992.

[7] Kruskal, J. B.: On the shortest spanning tree of a graph and the traveling salesman problem. *Proc. Amer. Math. Soc.* **7**, 48-50 (1956).

[8] Bixby, R. E.: *Matroids and operations research.* In Advanced techniques in practice of operations research, New York, 333-458 (1981).

[9] Tutte, W. T.: A homotopy theorem for matroids, I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **88**, 144-174 (1958).