Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

K-Teoria, Periodicidade de Bott e Aplicações

por

Henrique de Barros Correia Vitório

sob orientação do

Prof. Pedro Antonio Ontaneda Portal

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Recife - PE
Fevereiro/2006

K-Teoria, Periodicidade de Bott e Aplicações

por Henrique de Barros Correia Vitório

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Membro da Banca

Prof. Membro da Banca

Prof. Pedro Antonio Ontaneda Portal
Orientador

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais pelo seu amor e amizade, e pela sua constante preocupação em me oferecer uma boa educação. Sem vocês do meu lado, este primeiro pedaço de meu sonho não teria se concretizado.

Agradeço a Pedro Ontaneda pela sugestão deste tema maravilhoso, pela sua constante disposição em tirar minhas dúvidas, e pelo seu modo destemido de encarar a matemática, modo este que tomo de inspiração na luta contra minha timidez. A Sérgio Santa Cruz, agradeço pela sua co-orientação, pela sua amizade, apoio constante, e por todas as coisas que com você aprendi nestes cinco anos de graduação e mestrado.

Aos professores Manoel Lemos, Aron, Fernado Cardoso, Hildeberto, Antônio Carlos, e os já mencionados Ontaneda e Sérgio, devo minha formação matemática. Suas maneiras apaixonadas de falar de matemática me servirão de inspiração. Agradeço a vocês por isto.

Agradeço à Viviane e aos meus amigos Flávio, Gersonilo, Fred, Adim, Pascal, Cristhyano, Kildare, Alexandre, Severo, Jalila, Eudes, Raphael, por tornarem minha vida prazerosa ao longo destes anos de estudo.

Agradeço também a Flávio e Oscar pelas inúmeras ajudas que me prestaram no processo de digitação desta dissertação, e à Tânia pela excelência do seu serviço prestado na secretaria de pós-graduação.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro prestado ao longo deste projeto.

Resumo

Esta dissertação tem como principal objetivo apresentar, de maneira auto-suficiente, a demonstração de M. Atiyah e R. Bott do Teorema de Periodicidade de Bott em K-Teoria. Para isto, somos levados a fazermos uma introdução à teoria de fibrados vetoriais e à K-teoria, discutindo os vários conceitos e resultados necessários. Ao final, como aplicação do que foi desenvolvido, apresentamos a singela demonstração de M. Atiyah do teorema de F. Adam sobre o invariante de Hopf, e como consequência deste resolvemos os problemas clássicos da paralelizabilidade das esferas e das álgebras de divisão.

Palavras-Chaves: *Fibrados vetoriais complexos, K-teoria, periodicidade de Bott, operações de Adams, o invariante de Hopf, paralelizabilidade de esferas, álgebras de divisão.*

Abstract

This dissertation has as the main purpose to show, in a self-contained way, the M. Atiyah and R. Bott's proof of the Bott Periodicity Theorem in K-Theory. For this, we are induced to do an introduction to the theory of vector bundles and K-theory, discussing about the various concepts and results witch are necessary. Finally, as application of what was developed we show the Atiyah's simple proof of the Adams's theorem about the Hopf invariant and as a consequence of this we solve the classical problems of the parallelizability of spheres and the division algebras.

Key-Words: *Complex vector bundles, K-theory, Bott's periodicity, Adams's operations, the Hopf invariant, parallelizability of spheres, division algebras.*

Conteúdo

Introdução

No final dos anos 50, M. Atiyah e F. Hirzebruch ([8]), inspirados em trabalho de A. Grothendieck ([16]), associaram a cada espaço compacto X um anel comutativo $K(X)$, o qual se baseia no conjunto das classes de isomorfismos de fibrados vetoriais sobre X. A partir daí, eles construíram ([2]) uma teoria de cohomologia generalizada, então batizada de *K-Teoria*.

Também nos anos 50, R. Bott ([15]) havia obtido uma série de resultados fundamentais em teoria de grupos de homotopia, os famosos *Teoremas de Periodicidade de Bott*. Estes resultados revelaram as periodicidades dos grupos de homotopia dos grupos clássicos. Para o caso particular do grupo unitário infinito $U(\infty)$, ou, equivalentemente, o grupo linear infinito $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)$ (já que $U(\infty)$ é retrato por deformação de $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)$), Bott mostrou que

$$\pi_n(\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se} \quad n \text{ é par} \end{cases}$$

Como consequência imediata dos resultados de Bott, Atiyah e Hirzebruch ([8]) obtiveram um resultado em K-teoria, ainda chamado de Periodicidade de Bott, o qual estabelece um isomorfismo de anéis

$$K(X \times S^2) \cong K(X) \otimes K(S^2).$$

Em trabalho conjunto com Bott ([3]), Atiyah obteve uma demonstração autosuficiente deste resultado, isto é, que não invocava os resultados de Bott, e que era elementar se comparada às destes últimos (as quais utilizavam técnicas de *teoria de Morse*).

Este *Teorema de Periodicidade de Bott em K-Teoria* revelou o caráter de uma *teoria de cohomologia periódica* da K-teoria, e tem se mostrado central nesta teoria, tendo sua importância refletida nas importantes aplicações da K-teoria por ele proporcionadas. Mencionamos, apenas de passagem, que a K-teoria desempenhou um papel chave em duas bastante ilustres situações: na formulação do famoso *Teorema do Índice de Atiyah-Singer*, e na resolução, por F. Adams, do difícil problema dos *Campos de Vetores na Esfera* ([11]), o qual estabelece o número máximo de campos de vetores linearmente independentes na esfera S^n.

Numa escala menor de dificuldade, mas nem por isso tão menos ilustres, temos os problemas clássicos da *paralelizabilidade das esferas*, e das *álgebras de divisão*. O primeiro deles pergunta se são S^1, S^3, e S^7 as únicas esferas que são paralelizáveis, e o segundo é o de decidir se não existem estruturas de álgebras de divisão em

$\mathbb{R}^n$ além das dimensões $n = 1, 2, 4$, e 8. Originalmente, estes problemas foram resolvidos afirmativamente por J. Milnor ([13]), M. Kervaire ([14]), e Adams ([10]), de maneiras independentes. A solução de Milnor se baseava num teorema de Bott sobre a divisibilidade das *classes características de Pontryagin* de ordem k de fibrados sobre S^{4k}, enquanto que a de Kervaire partia do isomorfismo $\pi_{2n}(U(n)) \cong \mathbb{Z}/n!\mathbb{Z}$, também estabelecido por Bott. Embora em [10] Adams não tenha tratado explicitamente estes problemas, o incluímos acima por ter sido ele o primeiro a conjecturar e provar que *o invariante de Hopf* de uma aplicação

$$f : S^{4n-1} \to S^{2n},$$

o qual é um número inteiro, nunca é igual a 1, se $n \neq 1, 2$, e 4, resultado este que tem como corolário os dois problemas originais. A demonstração original de Adams é bastante complicada, e utiliza as chamadas *operações secundárias* em cohomologia por ele criadas.

Em [12], Atiyah obteve uma demonstração K-teorética do teorema de Adams sobre o invariante de Hopf, e, consequentemente, dos problemas da paralelizabilidade das esferas e das álgebras de divisão. Esta demonstração era de uma simplicidade inesperada, e se baseava nas chamadas *operações de Adams.* Tais operações são certos homomorfismos

$$\psi^k : K(X) \to K(X), \ \ k = 1, 2, 3, ...,$$

definidos a partir da possibilidade de se tomar potências exteriores de fibrados vetoriais, e que primeiramente apareceram no trabalho de Adams [11].

O principal objetivo desta dissertação é apresentar, de maneira auto-suficiente, a demonstração de Atiyah e Bott do teorema de periodicidade. Evidentemente, não poderíamos alcançar nosso objetivo sem antes fazermos uma incursão aos vários conceitos e resultados necessários. Deste modo, esta dissertação acaba por ter como objetivo paralelo servir como uma introdução à teoria de fibrados vetoriais e à K-teoria. Alcançados estes objetivos, não poderíamos, é claro, deixar de expor a singela demonstração de Atiyah dos resultados clássicos mencionados acima.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1, fazemos um estudo auto-suficiente dos fibrados vetoriais complexos. No começo do capítulo 2, definimos o anel de K-teoria $K(X)$, o qual trata-se um funtor contra-variante, e passamos ao enunciado do teorema de periodicidade. O restante deste capítulo é dedicada à demonstração deste teorema, e neste ponto seguimos a exposição de [4]. No capítulo 3, definimos os funtores $\widetilde{K}^{-n}(X)$, $\widetilde{K}^{-n}(X, A)$, $n = 0, 1, 2, ...$, e falamos na sequência longa exata que os conecta. Neste contexto, interpretamos o teorema de periodicidade como sendo um isomorfismo $\widetilde{K}^{-n}(X) \cong \widetilde{K}^{-n-2}(X)$, de onde deriva a terminologia de *teoria de cohomologia periódica* ([2]). A partir daí, calculamos os anéis $\widetilde{K}(S^n)$ e $K(S^n)$, os quais são de fundamental importância para as aplicações do capítulo 5. Neste último capítulo, construímos as operações de Adams, definimos o invariante de Hopf, demonstramos o teorema de Adams sobre este, e resolvemos os problemas da paralelizabilidade das esferas e das álgebras de divisão. O capítulo 4 pode ser pensado como um capítulo extra, no qual mostramos como re-obter o resultado original de Bott sobre grupos de homotopia a partir do resultado homônimo em K-teoria.

Capítulo 1

Fibrados vetoriais

Ao longo desta dissertação, *todos os espaços topológicos que consideraremos serão de Hausdorff*. Quando falarmos "seja $f : X \to Y$ uma *aplicação* entre espaços topológicos", estará implícito aí a *continuidade* de f. Usaremos o símbolo $\mathbb{1}$ para representar a função identidade, ficando claro no contexto em que espaço ela atua, e denotaremos por I o intervalo fechado $[0, 1]$.

1.1 Definições e resultados gerais

1.1.1 Fibrados Vetoriais, Homomorfismos e Seções

Intuitivamente, um fibrado vetorial complexo sobre um espaço topológico X é uma família de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais (de dim $< \infty$) parametrizada por X, tal que, localmente, esta família comporta-se como se fosse um produto $U \times \mathbb{C}^n$.

Esta noção intuitiva pode ser formalizada como segue:

DEFINIÇÃO 1.1 *Um fibrado vetorial sobre um espaço topológico X é um espaço topológico E munido de uma aplicação $E \xrightarrow{p} X$, tal que, para cada $x \in X$, $p^{-1}(x)$ tem uma estrutura de $\mathbb{C}$-espaço vetorial, e é caracterizado por ser localmente trivial:*

> *Dado $x \in X$, existem vizinhança aberta U de x e homeomorfismo*
>
> $$\varphi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^n, \quad \textit{para algum } n \geq 0,$$
>
> *chamado de trivialização local, que leva $p^{-1}(y)$ linearmente sobre $\{y\} \times \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$, para todo $y \in U$.*

OBSERVAÇÃO 1.2 Da mesma forma, podemos falar em *fibrado vetorial real.* Como estamos interessados apenas nos fibrados vetoriais complexos, daqui em diante esqueceremos a palavra *complexo.*

Frequentemente, falaremos ... o fibrado vetorial E ..., ou simplesmente ... o fibrado E ..., ficando subentendido a existência de uma aplicação p.

O espaço X e a aplicação p são chamados de *espaço base* e *projeção*, respectivamente. Para cada x, $p^{-1}(x)$ é chamado de *a fibra sobre* x, e é denotada por E_x. Mais geralmente, se Y é um subespaço de X, $p^{-1}(Y) \xrightarrow{p} Y$ é claramente um fibrado vetorial sobre Y, chamado a restrição de E a Y e denotado por $E|_Y$.

Se todas as fibras de E tiverem a mesma dimensão n, diremos que E tem dimensão (ou posto) n. Observe que, devido a E ser localmente trivial, a função $x \mapsto \dim E_x$ é localmente constante, logo é constante nas componentes conexas de X. Em particular, se X for conexo, E terá uma dimensão.

Se E tem dimensão 1, dizemos que E é um *fibrado de linha*.

O fibrado vetorial

$$X \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\pi} X,$$

onde π é a projeção usual, é chamado *o fibrado trivial de dimensão* n sobre X. Em geral, denotaremos este por

$$\underline{\mathbb{C}}^n_X := X \times \mathbb{C}^n, \tag{1.1}$$

ou simplesmente por $\underline{\mathbb{C}}^n$, quando claro no contexto.

Exemplo 1.3 *O fibrado de linha tautológico H sobre $\mathbb{C}P^n$:* O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ é o espaço das retas ℓ de $\mathbb{C}^{n+1}$ que passam pela origem, munido da topologia quociente induzida pela aplicação $\mathbb{C}^n - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$, $v \mapsto \ell$, $v \in \ell$. Nele, temos canonicamente definido um fibrado de linha

$$H \xrightarrow{p} \mathbb{C}P^n, \tag{1.2}$$

onde H é o subespaço de $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ que consiste dos pares (ℓ, v) tais que $v \in \ell$, e p é a restrição a H da projeção $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}P^n$.

Para mostrar a trivialidade local de H, seja, para cada i, $\pi_i : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ a projeção na i-ésima coordenada, e formemos a cobertura aberta $\{U_i\}_{i=1,\ldots,n+1}$ de $\mathbb{C}P^n$, onde U_i consiste das retas ℓ tais que $\pi_i|_\ell$ é isomorfismo. Sobre cada U_i temos definida uma função

$$p^{-1}(U_i) \to \underline{\mathbb{C}}^1_{U_i} \qquad (\ell, v) \mapsto (\ell, \pi_i(v)),$$

que claramente é uma trivialização local.

Dados dois fibrados vetoriais E e F sobre um mesmo espaço base X, um *homomorfismo* entre eles é uma função contínua $f : E \to F$ tal que, para todo $x \in X$, a sua restrição à fibra E_x é uma transformação linear $E_x \to F_x$; às vezes, denotaremos por $f(x)$ a restrição de f à E_x. Dizemos que f é um *isomorfismo* se, além de ser um homomorfismo, f for um homeomorfismo (isto é, tiver uma inversa contínua). Um homomorfismo de E nele próprio é dito um *endomorfismo* de E, e, no caso particular de um isomorfismo, chamamos de *automorfismo* de E; denotamos por $\mathrm{End}(E)$ e $\mathrm{Aut}(E)$ o conjunto de tais objetos.

Dizemos que E é trivial se ele for um "produto", isto é, se existir isomorfismo $E \to \underline{\mathbb{C}}^n$, para algum $n \geq 0$. Observe que a noção de isomorfismo define uma relação de equivalência no conjunto dos fibrados vetoriais sobre X, sendo denotado por

$$\mathrm{Vect}(X)$$

o conjunto de tais classes de isomorfismos, e por

$$\mathrm{Vect}_n(X)$$

as classes dos que têm dimensão n; a classe de isomorfismo de um fibrado E será denotada indiferentemente por E.

Proposição 1.4 *Seja $f : E \to F$ um homomorfismo entre fibrados vetoriais sobre X. Então:*

(i) *f é isomorfismo se e somente se $f(x) : E_x \to F_x$ for isomorfismo linear, $\forall x \in X$.*

(ii) *O conjunto dos pontos x de X tais que $f(x) : E_x \to F_x$ é isomorfismo, é aberto.*

Demonstração: Como tratam-se de questões locais, e E, F são localmente triviais, podemos supor, sem perda de generalidade, que $E = \underline{\mathbb{C}}^n$ e $F = \underline{\mathbb{C}}^m$. Agora, observe que um homomorfismo $\underline{\mathbb{C}}^n \to \underline{\mathbb{C}}^m$ pode ser identificado com uma função contínua $X \to L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$, onde $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ é o espaço das transformações lineares $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.

(i) Uma das direções é clara. Suponha então que $f(x)$ é isomorfismo, $\forall x \in X$. Então, $m = n$, e f, vista como aplicação $X \to L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, toma valores no subconjunto dos isomorfismos lineares $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n)$; daí, como é contínua a função $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n) \xrightarrow{\iota} \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n)$, $\iota(A) = A^{-1}$, podemos compor f com ι para obtermos um homomorfismo inverso de f, mostrando que f é um isomorfismo.

(ii) Seja Λ tal conjunto. Se Λ não for vazio, então, como antes, $m = n$, e vendo f como aplicação $X \to L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, $\Lambda = f^{-1}(\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n))$, que é aberto, pois $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n)$ é aberto em $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$.

$\square$

Proposição 1.5 *Sejam E e F fibrados vetoriais sobre um espaço compacto X, $Z \subset X$ fechado, e $E|_Z \xrightarrow{f} F|_Z$ um isomorfismo. Então, existem vizinhança aberta U de Z e isomorfismo $E|_U \xrightarrow{\tilde{f}} F|_U$ que estende f.*

Demonstração: Sejam $U_1, ..., U_k$ abertos que cobrem X tais que $E|_{U_i}$ e $F|_{U_i}$ são triviais, para todo i, e $\{\eta_i\}_{i=1,...,k}$ uma partição da unidade associada, com $\mathrm{supp}(\eta_i) = X_i \subset U_i$. Se f_i denota a restrição de f a $E|_{X_i \cap Z}$, então, usando as trivializações, identificamos f_i com uma função $X_i \cap Z \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n) \subset L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, que pelo teorema de extensão de Tietze (ver apêndice B) estende a todo X. Segue que f_i se estende a uma aplicação $\widetilde{f}_i : X_i \to L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Definindo então $\widetilde{f} : E \to F$, por

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{k} \eta_i(x) \widetilde{f}_i(x),$$

temos que, para $x \in Z$,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(x) &= \sum_{i=1}^{k} \eta_i(x) \widetilde{f}_i(x) = \sum_{i=1}^{k} \eta_i(x) f(x) \\ &= f(x) \sum_{i=1}^{k} \eta_i(x) = f(x), \end{aligned}$$

isto é, $\widetilde{f}$ é uma extensão de f, e como f é um isomorfismo em $E|_Z$, pela proposição 1.4 $\widetilde{f}$ será um isomorfismo numa vizinhança aberta de Z. □

Uma *seção*, sobre $U \subset X$, de um fibrado vetorial $E \xrightarrow{p} X$, é uma função contínua

$$\sigma : U \to E|_U,$$

tal que, para cada $x \in U$, $\sigma(x) \in E_x$ (em outras palavras, $p \circ \sigma = \mathbb{1}$).

Proposição 1.6 *$E|_U$, de dimensão n, é trivial se e somente se possuir n seções $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ linearmente independentes, isto é, tais que $\sigma_1(x), \cdots, \sigma_n(x) \in E_x$ sejam l.i, $\forall x \in U$.*

Demonstração: Sejam $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ são n seções l.i, e $e_1, \cdots, e_n$ a base canônica de $\mathbb{C}^n$. Cada $v \in E|_U$ pode ser escrito unicamente como

$$v = a_1(v)\sigma_1(p(v)) + \cdots + a_n(v)\sigma_n(p(v)),$$

e da continuidade das σ_i's, tem-se a continuidade das $a_i : E|_U \to \mathbb{C}$. Logo, uma trivialização $\varphi : E|_U \to \underline{\mathbb{C}}^n_U$ pode ser definida por

$$\varphi(v) = (p(v), a_1(v)e_1 + \cdots + a_n(v)e_n).$$

Reciprocamente, se φ é uma trivialização, $\sigma_i(x) = \varphi^{-1}(x, e_i)$, $i = 1, \cdots, n$ são n seções l.i. □

1.1.2 Operações com fibrados vetoriais

As operações usuais de soma direta $\oplus$, produto tensorial $\otimes$, (r-ésima) potência exterior Λ^r, dual * e outras mais, entre espaços vetoriais, se generalizam naturalmente para fibrados vetoriais sobre um mesmo espaço base. Nesta seção, falaremos sobre as três primeiras, as quais faremos uso ao longo deste trabalho.

Dados fibrados vetoriais E_1 e E_2 sobre um espaço X,

$$E_1 \oplus E_2,\ E_1 \otimes E_2 \text{ e } \Lambda^r(E_1)$$

são definidos de maneira que suas fibras sobre $x \in X$ sejam $E_1|_x \oplus E_2|_x$, $E_1|_x \otimes E_2|_x$ e $\Lambda^r(E_1|_x)$, respectivamente. Isto é, como conjuntos,

$$E_1 \oplus E_2 = \bigcup_{x \in X} E_1|_x \oplus E_2|_x,\ \ E_1 \otimes E_2 = \bigcup_{x \in X} E_1|_x \otimes E_2|_x$$
$$\Lambda^r(E_1) = \bigcup_{x \in X} \Lambda^r(E_1|_x).$$

Daremos agora uma topologia a $E_1 \oplus E_2$. Por simplicidade, suponhamos que E_1 e E_2 tenham dimensões constantes n_1 e n_2, respectivamente.

Dada cobertura aberta $\{U_\alpha\}_\alpha$ de X tal que existem trivializações $\varphi^1_\alpha : E_1|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^{n_1}$, $\varphi^2_\alpha : E_2|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{C}^{n_2}$, sejam

$$\varphi^1_\alpha \oplus \varphi^2_\alpha : (E_1 \oplus E_2)|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times (\mathbb{C}^{n_1} \oplus \mathbb{C}^{n_2})$$

dadas por
$$(\varphi^1_\alpha \oplus \varphi^2_\alpha)(x) = \varphi^1_\alpha(x) \oplus \varphi^2_\alpha(x),\ \ \forall x \in X.$$

Dados α, β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, sejam

$$U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta,$$

$$g^i_{\alpha\beta} = \varphi^i_\alpha \circ \varphi^i_\beta|^{-1}_{U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^{n_i}},$$

$$g_{\alpha\beta} = (\varphi^1_\alpha \oplus \varphi^2_\alpha) \circ (\varphi^1_\beta \oplus \varphi^2_\beta)|^{-1}_{U_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^{n_1} \oplus \mathbb{C}^{n_2}},$$

onde $i = 1, 2$.

Vendo $g^1_{\alpha\beta}, g^2_{\alpha\beta}$ e $g_{\alpha\beta}$ como funções

$$U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n_1}), \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n_2}), \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n_1} \oplus \mathbb{C}^{n_2}),$$

respectivamente, temos que

$$g_{\alpha\beta}(x) = g^1_{\alpha\beta}(x) \oplus g^2_{\alpha\beta}(x),$$

logo, como $g^1_{\alpha\beta}, g^2_{\alpha\beta}$ são contínuas e

$$\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n_1}) \times \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n_2}) \xrightarrow{\oplus} \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n_1} \oplus \mathbb{C}^{n_2}), \quad (A, B) \mapsto A \oplus B, \tag{1.3}$$

é contínua, $g_{\alpha\beta}$ é contínua. Consequentemente,

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \times (\mathbb{C}^{n_1} \oplus \mathbb{C}^{n_2}) \to U_{\alpha\beta} \times (\mathbb{C}^{n_1} \oplus \mathbb{C}^{n_2})$$

é um homeomorfismo. Portanto, pelo lema abaixo, existe uma única topologia em $E_1 \oplus E_2$ tal que as funções $\varphi^1_\alpha \oplus \varphi^2_\alpha$ sejam homeomorfismos:

Lema 1.7 *Sejam W um conjunto, $\{W_\alpha\}_\alpha$ subconjuntos que cobrem W, $\{Z_\alpha\}_\alpha$ espaços topológicos, e $f_\alpha : W_\alpha \to Z_\alpha$ bijeções. Então, se para cada α, β com $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$, $f_\alpha \circ f_\beta|^{-1}_{f_\beta(W_\alpha \cap W_\beta)} : f_\beta(W_\alpha \cap W_\beta) \to f_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta)$ for um homeomorfismo e $f_\alpha(W_\alpha \cap W_\beta) \subset Z_\alpha$ for aberto, existe uma única topologia em W tal que os W_α's são abertos e as f_α's homeomorfismos.*

Demonstração: É direta. □

Esta topologia em $E_1 \oplus E_2$ não depende das escolhas dos abertos U_α's e das trivializações φ^1_α, φ^2_α, sendo isto consequência direta, como antes, da continuidade de 1.3. Agora, com esta topologia, $E_1 \oplus E_2$ é um fibrado vetorial, sendo as $\varphi^1_\alpha \oplus \varphi^2_\alpha$'s trivializações locais.

Topologias em $E_1 \otimes E_2$ e $\Lambda^r(E_1)$ podem ser dadas de maneira completamente análoga, uma vez que as operações correspondentes

$$\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n_1}) \times \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n_2}) \xrightarrow{\otimes} \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n_1} \otimes \mathbb{C}^{n_2}) \tag{1.4}$$

$$\mathrm{GL}(\mathbb{C}^{n_1}) \xrightarrow{\Lambda^r} \mathrm{GL}(\Lambda^r(\mathbb{C}^{n_1}))$$

são contínuas.

Se E_1, E_2 e E_3 são fibrados vetoriais sobre X, existem isomorfismos canônicos

$$E_1 \oplus (E_2 \oplus E_3) \cong (E_1 \oplus E_2) \oplus E_3,\ \ E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3) \cong (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \tag{1.5}$$

$$E_1 \oplus E_2 \cong E_2 \oplus E_1,\ \ E_1 \otimes E_2 \cong E_2 \otimes E_1 \tag{1.6}$$

$$E_1 \otimes (E_2 \oplus E_3) \cong (E_1 \otimes E_2) \oplus (E_1 \otimes E_3) \tag{1.7}$$

$$\Lambda^r(E_1 \oplus E_2) \cong \bigoplus_{a+b=r} \Lambda^a(E_1) \otimes \Lambda^b(E_2), \tag{1.8}$$

provenientes dos isomorfismos canônicos correspondentes para espaços vetoriais. Também, é claro que

$$E_1' \cong E_1,\ \text{e}\ E_2' \cong E_2\ \Rightarrow \begin{cases} E_1' \oplus E_2' \cong E_1 \oplus E_2 \\ E_1' \otimes E_2' \cong E_1 \otimes E_2 \\ \Lambda^r(E_1') \cong \Lambda^r(E_1) \end{cases}$$

Dados homomorfismos $f_1 : E_1 \to E_1'$ e $f_2 : E_2 \to E_2'$ entre fibrados vetoriais sobre X, eles induzem homomorfismos

$$f_1 \oplus f_2 : E_1 \oplus E_2 \to E_1' \oplus E_2', \quad f_1 \otimes f_2 : E_1 \otimes E_2 \to E_1' \otimes E_2'$$

$$\Lambda^r(f_1) : \Lambda^r(E_1) \to \Lambda^r(E_1'),$$

dados por $(f_1 \oplus f_2)(x) = f_1(x) \oplus f_2(x)$, $(f_1 \otimes f_2)(x) = f_1(x) \otimes f_2(x)$ e $\Lambda^r(f_1)(x) = \Lambda^r(f_1(x))$, $\forall x \in X$. A continuidade destas funções, sendo uma questão local, se reduz ao caso em que os fibrados em questão são triviais, e neste caso, é consequência direta da continuidade de f_1, f_2, 1.3, e 1.4.

1.1.3 Pull back's

Sejam X e Y espaços topológicos, $f : X \to Y$ uma aplicação, e $p : E \to Y$ um fibrado vetorial sobre Y. Formemos o seguinte sub-espaço $f^*(E)$ de $X \times E$

$$f^*(E) = \{(x, e) \in X \times E \ / \ p(e) = f(x)\},$$

e seja

$$\pi : f^*(E) \to X \tag{1.9}$$

a restrição a Y da projeção $X \times E \to X$. Para cada $x \in X$, $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times E_{f(x)}$, o qual identificamos com $E_{f(x)}$, e note que a restrição a $f^*(E)$ da projeção $X \times E \to E$ é uma aplicação

$$f' : f^*(E) \to E \tag{1.10}$$

que leva a fibra $\pi^{-1}(x)$ na fibra $p^{-1}(f(x))$ através de um isomorfismo linear (que de fato é a identidade, ao identificarmos estas fibras). Se φ é uma trivialização local de E sobre V, então $\varphi \circ f'$ é uma trivialização local de $f^*(E)$ sobre $f^{-1}(V)$, de modo que 1.9 é de fato um fibrado vetorial sobre X, dito o *pull-back* de E via f. Este fibrado está completamente caracterizado pela existência de 1.10:

Proposição 1.8 *Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação e E um fibrado vetorial sobre Y. Se F é um fibrado vetorial sobre X tal que existe aplicação $g : F \to E$ que, para todo $x \in X$, se restringe a isomorfismos lineares $F_x \to E_{f(x)}$, então existe um isomorfismo de fibrados $h : f^*(E) \to F$ tal que $f' = g \circ h$.*

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, "f'"] \arrow[ddr] & & \\
& F \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Demonstração: Defina, para cada $x \in X$, $h(x) : f^*(E)_x \to F_x$ por $h(x) = g(x)^{-1} \circ f'(x)$. Cada $h(x)$ é isomorfismo linear, e h assim obtida é claramente linear. Logo, pela proposição 1.4, h é isomorfismo de fibrados. □

Dizemos que um tal par F, g como na proposição acima é um *diagrama pull-back* relativamente a E e f.

Da unicidade expressa na proposição 1.8, segue que a classe de isomorfismo de $f^*(E)$ depende apenas da classe de isomorfismo de E (e de f, evidentemente), logo temos bem definida uma função

$$f^* : \mathrm{Vect}(Y) \to \mathrm{Vect}(X).$$

Exemplos 1.9 .

1. Sejam X um espaço topológico, A um sub-espaço de X, $\mathbb{1} : X \to X$ e $i : A \hookrightarrow X$ as aplicações identidade e inclusão, respectivamente, e E um fibrado sobre X. Então

$$\mathbb{1}^*(E) \cong E \qquad \text{e} \qquad i^*(E) \cong E|_A, \tag{1.11}$$

uma vez que as aplicações $\mathbb{1} : E \to E$ e $E|_A \hookrightarrow E$ são diagramas pull-backs para E, $\mathbb{1}$, e E, i, respectivamente.

2. Sejam X, Y espaços topológicos, $\pi : Y \times X \to Y$ a projeção, e $E \xrightarrow{p} Y$ um fibrado sobre Y. A aplicação

$$E \times X \to Y \times X, \ \ (e, x) \mapsto (p(e), x) \tag{1.12}$$

define em $E \times X$ uma estrutura de fibrado vetorial sobre $Y \times X$, a fibra deste sobre o ponto (y, x) sendo $E_y \times \{x\}$, a qual é canonicamente E_y. Com esta definição em mente, temos o seguinte

$$\pi^*(E) \cong E \times X, \tag{1.13}$$

pois a projeção $E \times X \to E$ é um diagrama pull-back para E, π.

Proposição 1.10 *Sejam $f : X \to Y$ e E, F fibrados sobre$Y$. Então:*

(i) $f^*(E \oplus F) \cong f^*(E) \oplus f^*(F)$.

(ii) $f^*(E \otimes F) \cong f^*(E) \otimes f^*(F)$.

(iii) $f^*(\Lambda^r E) \cong \Lambda^r(f^*(E))$.

Demonstração: Mostremos (i), as demais sendo análogas. Com efeito, de acordo com 1.10, sejam $f_1' : f^*(E) \to E$, $f_2' : f^*(F) \to F$. Então $f_1' \oplus f_2' : f^*(E) \oplus f^*(F) \to E \oplus F$, definida da maneira natural, é um diagrama pull-back para $E \oplus F$, f. O resultado segue, como antes, da proposição 1.8. □

Os próximos três resultados continuam valendo se substituirmos a condição de *compacidade* pela condição mais fraca de *paracompacidade* (ver [4]). Porém, para nós, a primeira condição será suficiente. Para a noção de homotopia, veja o apêndice B.

Proposição 1.11 (i) *Dados espaços X, Y e Z, e aplicações $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, temos que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

(ii) $\mathbb{1}_X^* = \mathbb{1}_{\mathrm{Vect}(X)}$.

(iii) *Se X é compacto e $f, g : X \to Y$ são homotópicas, então $f^* = g^*$.*

Demonstração: (i) e (ii) são triviais. Mostremos (iii).

Seja $h : X \times I \to Y$ uma tal homotopia, com $h_0 = f$ e $h_1 = g$, e seja E um fibrado vetorial sobre Y.

Fixado $t \in I$, temos que (identificando $X \times \{t\}$ com X)

$$h_t^*(E) \cong h^*(E)|_{X\times\{t\}}$$

pois, sendo $h' : h^*(E) \to E$ e $h'_t : h_t^*(E) \to E$ diagramas pull-backs, a restrição de h' a $h^*(E)|_{X\times\{t\}}$ é ainda um diagrama pull-back.

Ou seja, os fibrados vetoriais $h^*(E)$ e $h_t^*(E) \times I$, sobre $X \times I$, onde $h_t^*(E) \times I$ é como em 1.13, são isomorfos quando restritos ao sub-espaço fechado $X \times \{t\}$, logo, pela proposição 1.5 e pela compacidade de X, eles são isomorfos quando restritos a $X \times V_t$, onde V_t é uma certa vizinhança de t. Portanto,

$$h_t^*(E) \cong h^*(E)|_{X\times\{t'\}} \cong h_{t'}^*(E), \qquad \forall\ t' \in V_t$$

Logo, como isto vale $\forall\ t \in I$, e I é conexo, obtemos $h_0^*(E) \cong h_1^*(E)$.

□

Corolário 1.12 *Se X, Y são compactos e $f : X \to Y$ é equivalência de homotopia, então $f^* : \mathrm{Vect}(Y) \to \mathrm{Vect}(X)$ é uma bijeção.*

Em particular, se X é compacto e contrátil, então todo fibrado vetorial sobre X é trivial.

Demonstração: Se h é uma inversa homotópica de f, então, de $h \circ f \simeq \mathbb{1}$ e $f \circ h \simeq \mathbb{1}$, obtemos, pela proposição anterior, $f^* \circ h^* = \mathbb{1}$ e $h^* \circ f^* = \mathbb{1}$, isto é, h^* é inversa de f^*, donde f^* é bijeção.

□

O corolário a seguir será fundamental nos resultados do tipo “invariância por homotopia”:

Corolário 1.13 *Se X é compacto, e E é um fibrado vetorial sobre $X \times I$, então (identificando $X \times \{0\}$ e $X \times \{1\}$ com X)*

$$E|_{X\times\{0\}} \cong E|_{X\times\{1\}}.$$

Demonstração: Sendo i_t, $t \in I$, a inclusão de X em $X \times I$ como sendo o subespaço $X \times \{t\}$, sabemos, por 1.12, que $E|_{X\times\{t\}} \cong i_t^*(E)$, logo, como i_t, $t \in I$, é uma homotopia entre i_0 e i_1, por (iii) da proposição 1.11 obtemos $E|_{X\times\{0\}} \cong i_0^*(E) \cong i_1^*(E)$.

□

1.1.4 Métricas Hermitianas

Uma *métrica hermitiana* num fibrado vetorial E sobre X é uma função contínua

$$<,>: E \oplus E \to \mathbb{C}$$

que se restringe a um produto interno hermitiano $<,>_x$ em cada fibra $E_x \oplus E_x$.

LEMA 1.14 *Se X é paracompacto, então todo fibrado vetorial $E \xrightarrow{p} X$ possui uma métrica hermitiana.*

Demonstração: Seja $\{U_\alpha\}_\alpha$ uma cobertura aberta e localmente finita de X tal que existem trivializações $\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \to \underline{\mathbb{C}}^{n_\alpha}_{U_\alpha}$, e seja $\{\eta_\alpha\}_\alpha$ uma partição da unidade correspondente. Então, sendo $<,>_\alpha$ o produto hermitiano usual de $\mathbb{C}^{n_\alpha}$, uma métrica hermitiana em E pode ser dada por

$$< u, v >= \sum_\alpha \eta_\alpha(p(u)) < \pi_\alpha\varphi_\alpha(u), \pi_\alpha\varphi_\alpha(v) >_\alpha,$$

onde $(u, v) \in E \oplus E$ e $\pi_\alpha : \underline{\mathbb{C}}^{n_\alpha}_{U_\alpha} \to \mathbb{C}^{n_\alpha}$ é a projeção . □

Observe que o fibrado trivial $\underline{\mathbb{C}}^n$ possui uma métrica canônica induzida pelo produto hermitiano usual de $\mathbb{C}^n$.

Um homomorfismo $f : E \to E'$ entre fibrados vetoriais munidos de métricas hermitianas é dito *isométrico* se satisfaz

$$< u, v >_E =< f(u), f(v) >_{E'},$$

para todos $(u, v) \in E \oplus E$.

PROPOSIÇÃO 1.15 *Se $E \xrightarrow{p} X$ tem métrica hermitiana, e $E|_U$ é trivial, podemos tomar uma tal trivialização $E|_U \to \underline{\mathbb{C}}^n_U$ isométrica.*

Demonstração: Sejam, de acordo com a proposição 1.6, $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ n seções l.i de $E|_U$, $n = \dim E|_U$. Usando o processo de ortonormalização de Gram-Schimdt, que é um processo contínuo, podemos supor que $\sigma_1(x), \cdots, \sigma_n(x)$ é base ortonormal de E_x, $\forall x \in U$. Logo, sendo φ a trivialização construida na demonstração da proposição 1.6, φ manda a base ortonormal $\sigma_1(x), \cdots, \sigma_n(x)$ de E_x na base ortonormal $\{x\} \times e_1 = e_1, \cdots, \{x\} \times e_n = e_n$ de $\{x\} \times \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^n$, $\forall x \in U$, sendo portanto uma isometria. □

DEFINIÇÃO 1.16 *Um sub-fibrado vetorial de um fibrado vetorial $E \xrightarrow{p} X$ é um sub-espaço $E_0 \subset E$ que intersecta cada fibra de E num espaço vetorial e que, desta forma, a restrição $E_0 \xrightarrow{p} X$ é um fibrado vetorial, E_0 sendo considerado com a topologia induzida de E.*

LEMA 1.17 *Seja $E \xrightarrow{p} X$ um fibrado vetorial, com X paracompacto, e $E_0 \subset E$ um sub-fibrado. Então, existe um sub-fibrado $E' \subset E$ tal que $E_0 \oplus E' \cong E$.*

Demonstração: Pondo uma métrica hermitiana em E e denotando por $E_0^{\perp}$ o *complemento ortogonal* de E_0, isto é, $E_0^{\perp}$ é o sub-espaço $\bigcup_x (E_0 \cap E_x)^{\perp} \subset E$, não é difícil mostrar (ver [4]) que $E_0^{\perp}$ é um sub-fibrado de E. Para concluir, a função $E \oplus E_0^{\perp} \to E$, $(u, v) \mapsto u + v$, claramente contínua, é um isomorfismo fibra a fibra, logo, pela proposição 1.4, é um isomorfismo de fibrados. □

PROPOSIÇÃO 1.18 *Seja $E \xrightarrow{p} X$ um fibrado vetorial, com X compacto. Então, existe outro fibrado E' sobre X tal que $E \oplus E'$ é trivial.*

Demonstração: A idéia é mostrar que podemos mergulhar E num fibrado trivial $\underline{\mathbb{C}}_X^N$, para N suficientemente grande, e então usar o lema anterior.
Para cada $x \in X$ seja U_x uma vizinhança aberta de x tal que existe trivialização $\varphi_x : E|_{U_x} \to \underline{\mathbb{C}}_{U_x}^{n_x}$, e seja, pelo lema de Urysohn, $\eta_x : X \to [0, 1]$ contínua tal que $\eta_x(x) \neq 0$ e $\eta_x = 0$ fora de U_x. Como $\eta_x(x) \neq 0$, os abertos $\eta_x^{-1}(0, 1] \subset U_x$ formam uma cobertura de X, logo, por compacidade, sejam $x_1, \cdots, x_r$ correspondentes a uma subcobertura finita e ponhamos $U_i = U_{x_i}$, $\varphi_i = \varphi_{x_i}$, $\eta_i = \eta_{x_i}$ e $n_i = n_{x_i}$.
Para cada i, seja $f_i : E \to \mathbb{C}^{n_i}$ dada por

$$f_i(v) = \eta_i(p(v)) \cdot \pi_i(\varphi_i(v)),$$

onde $\pi_i : \underline{\mathbb{C}}_X^{n_i} \to \mathbb{C}^{n_i}$ é a projeção, e definamos

$$f : E \to X \times (\mathbb{C}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{n_r}) = \underline{\mathbb{C}}_X^{n_1 + \cdots + n_r}$$

por

$$f(v) = (p(v), f_1(v), \cdots, f_r(v)).$$

Temos que f é claramente um homomorfismo de fibrados, e é injetiva: dados $u, v \in E_x$ tais que $f(v) = f(u)$, seja i tal que $x \in U_i$; logo, como $f_i(u) = f_i(v)$ e $\eta_i(x) \neq 0$, obtemos $\pi_i(\varphi_i(u)) = \pi_i(\varphi_i(v))$, donde $u = v$.
Agora, $f(E)$ é sub-fibrado de $\underline{\mathbb{C}}_X^{n_1 + \cdots + n_r}$, pois temos trivializações

$$f(E)|_{\eta_i^{-1}(0,1]} \to \eta_i^{-1}(0, 1] \times \mathbb{C}^{n_i}, \quad f(v) \mapsto (p(v), f_i(v)),$$

e é isomorfo a E, sendo f um isomorfismo $E \to f(E)$. Logo, o resultado segue do lema anterior. □

1.2 Fibrados Vetoriais Obtidos Por Colagem

DEFINIÇÃO 1.19 *Sejam X_1 e X_2 subespaços compactos de um espaço compacto X tais que $X = X_1 \cup X_2$, e sejam $E_1 \xrightarrow{p_1} X_1$ e $E_2 \xrightarrow{p_2} X_2$ fibrados vetoriais. Então, dado (se existir) isomorfismo $E_1|_{X_1 \cap X_2} \xrightarrow{f} E_2|_{X_1 \cap X_2}$, denotamos por*

$$E_1 \cup_f E_2$$

o espaço quociente da união disjunta $E_1 \sqcup E_2$ *pela relação que identifica* $v \in E_1|_{X_1 \cap X_2}$ *com* $f(v)$.

Os isomorfismos $E_1|_{X_1\cap X_2} \xrightarrow{f} E_2|_{X_1\cap X_2}$ *chamaremos de funções de colagem.*

Observe que p_1 e p_2 induzem canonicamente uma projeção

$$E_1 \cup_f E_2 \xrightarrow{p} X \tag{1.14}$$

e, para cada x, $p^{-1}(x)$ tem uma estrutura de espaço vetorial: Para $x \in X_i \backslash X_1 \cap X_2$, $p^{-1}(x)$ nada mais é que $p_i^{-1}(x)$; para $x \in X_1 \cap X_2$, dados $u, v \in p^{-1}(x)$, existem únicos $u_1, v_1 \in p_1^{-1}(x)$ tais que $[u_1] = u$ e $[v_1] = v$, e definimos $\alpha u + \beta v = [\alpha u_1 + \beta v_1]$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$.

PROPOSIÇÃO 1.20 *1.14 é um fibrado vetorial. Mais ainda, existem isomorfismos canônicos*

$$(E_1 \cup_f E_2) \oplus (E_1' \cup_g E_2') \cong (E_1 \oplus E_1') \cup_{f\oplus g} (E_2 \oplus E_2'),$$

$$(E_1 \cup_f E_2) \otimes (E_1' \cup_g E_2') \cong (E_1 \otimes E_1') \cup_{f\otimes g} (E_2 \otimes E_2').$$

Demonstração: Basta mostrarmos a trivialidade de 1.14 em torno dos pontos $x \in Z = X_1 \cap X_2$, uma vez que

$$(E_1 \cup_f E_2)|_{X_i - Z} \cong E_i|_{X_i - Z}.$$

Seja então $x \in Z$ e U uma vizinhança aberta de x em X tal que $E_2|_{U\cap X_2}$ é trivial. Usando que X é compacto de Hausdorff, não é difícil concluir que existe vizinhança aberta V de x em X, com $\overline{V} \subset U$. Agora, dada trivialização $\varphi_2 : E_2|_{\overline{V}\cap Z} \to (\overline{V} \cap Z) \times \mathbb{C}^n$, obtemos trivialização de $E_1|_{\overline{V}\cap Z}$ compondo

$$E_1|_{\overline{V}\cap Z} \xrightarrow{f} E_2|_{\overline{V}\cap Z} \xrightarrow{\varphi_2} (\overline{V} \cap Z) \times \mathbb{C}^n.$$

Logo, como $\overline{V} \cap Z$ é fechado em X_1, pela proposição 1.5 tal trivialização se estende a uma trivialização

$$\varphi_1 : E_1|_{W\cap X_1} \to (W \cap X_1) \times \mathbb{C}^n,$$

onde W é aberto de X e $W \supset \overline{V} \cap Z$. Temos portanto isomorfismos

$$\varphi_i : E_i|_{(W\cap V)\cap X_i} \to (W \cap V) \cap X_i \times \mathbb{C}^n,$$

e como $\varphi_1 = \varphi_2 \circ f$ em $E_1|_{(W\cap V)\cap Z}$, eles definem (de maneira clara) uma aplicação

$$(E_1 \cup_f E_2)|_{W\cap V} \to (W \cap V) \times \mathbb{C}^n,$$

que é um isomorfismo fibra a fibra, e facilmente se demonstra ser um homeomorfismo.

Os demais isomorfismos são de demonstrações diretas. $\square$

DEFINIÇÃO 1.21 *Uma homotopia via funções de colagem, entre duas funções de colagem* $f, g : E_1|_{X_1 \cap X_2} \to E_2|_{X_1 \cap X_2}$, *é uma função contínua* $F : E_1|_{X_1 \cap X_2} \times I \to E_2|_{X_1 \cap X_2}$ *tal que cada* F_t *é uma função de colagem, e* $F_0 = f$, $F_1 = g$.

PROPOSIÇÃO 1.22 *Se* f_0 *é homotópica a* f_1 *via funções de colagem, então*

$$E_1 \cup_{f_0} E_2 \cong E_1 \cup_{f_1} E_2.$$

Demonstração: Uma tal homotopia $h : E_1|_Z \times I \to E_2|_Z$ entre f_0 e f_1, define uma função de colagem

$$F : (E_1 \times I)|_{Z \times I} = E_1|_Z \times I \to E_2|_Z \times I = (E_2 \times I)|_{Z \times I},$$

$F(v, t) = (h(v, t), t)$, de modo que podemos formar o fibrado vetorial

$$E = (E_1 \times I) \cup_F (E_2 \times I)$$

sobre $X \times I$. Logo, como existem isomorfismos canônicos

$$E|_{X \times \{0\}} \cong E_1 \cup_{f_0} E_2,$$

$$E|_{X \times \{1\}} \cong E_1 \cup_{f_1} E_2,$$

basta usarmos o corolário 1.13 para concluirmos que $E_1 \cup_{f_0} E_2 \cong E_1 \cup_{f_1} E_2$. □

DEFINIÇÃO 1.23 *Dados espaços topológicos* X *e* Y, *o conjunto das classes de homotopia de aplicações* $f : X \to Y$ *representamos por*

$$[X, Y]. \tag{1.15}$$

A classe de homotopia de uma $f : X \to Y$ será ainda denotada por f.

Denotemos por S^k a esfera de dimensão k, e por D^+ e D^- seus hemisférios norte e sul, com

$$D^+ \cap D^- = S^{k-1}.$$

Dada uma aplicação

$$f : S^{k-1} \to \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(n),$$

esta se identifica a um isomorfismo de fibrados

$$f : \underline{\mathbb{C}}^n_{S^{k-1}} \to \underline{\mathbb{C}}^n_{S^{k-1}},$$

o qual, conforme 1.14, podemos usar para formar o seguinte fibrado n-dimensional sobre S^k

$$(\mathbb{C}^n, f) := \underline{\mathbb{C}}^n_{D^+} \cup_f \underline{\mathbb{C}}^n_{D^-}. \tag{1.16}$$

De acordo com a proposição 1.22, a classe de isomorfismo deste fibrado depende apenas da classe de homotopia de f, logo temos bem definida uma função

$$[S^{k-1}, \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(n)] \to \mathrm{Vect}_n(S^k) \tag{1.17}$$

$$f \mapsto (\mathbb{C}^n, f).$$

Proposição 1.24 *1.17 define uma bijeção.*

Demonstração: Seja E um fibrado n-dimensional sobre S^k. Como D^+ e D^- são contráteis, $E|_{D^+}$ e $E|_{D^-}$ são triviais, logo existem trivializações

$$\varphi_+ : E|_{D^+} \to \underline{\mathbb{C}}^n_{D^+},$$

$$\varphi_- : E|_{D^-} \to \underline{\mathbb{C}}^n_{D^-}.$$

Então, sendo

$$f = \varphi_-|_{E|_{S^{k-1}}} \circ \varphi_+^{-1}|_{S^{k-1}\times\mathbb{C}^n},$$

e a identificando com uma aplicação $S^{k-1} \to \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(n)$, é imediato que E é isomorfo a $(\mathbb{C}^n, f)$. Basta então mostrarmos que a classe de homotopia de f não depende da escolha das trivializações φ_+ e φ_-, que teremos construído uma inversa $E \mapsto f$ para 1.17. Com efeito, se $\widetilde{\varphi_+}$ for uma outra trivialização, então, vista como aplicação $D^+ \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n)$, $\widetilde{\varphi_+} \circ \varphi_+^{-1}$ é homotópica a uma aplicação constante, uma vez que D^+ é contrátil. Mas, como $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n)$ é conexo por caminhos, toda tal aplicação constante é homotópica à aplicação constante igual a $\mathbb{1} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n)$, logo $\widetilde{\varphi_+} \simeq \varphi_+$ via trivializações. Da mesma forma teremos $\widetilde{\varphi_-} \simeq \varphi_-$, portanto $\widetilde{\varphi_-}|_{E|_{S^{k-1}}} \circ \widetilde{\varphi_+}^{-1}|_{S^{k-1}\times\mathbb{C}^n} \simeq \varphi_-|_{E|_{S^{k-1}}} \circ \varphi_+^{-1}|_{S^{k-1}\times\mathbb{C}^n}$. □

Corolário 1.25 *Todo fibrado vetorial complexo sobre S^1 é trivial*

Demonstração: De fato, estes estão classificados por $[S^0, \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(n)]$, e como $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(n)$ é conexo por caminhos, segue facilmente que $[S^0, \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(n)]$ possui apenas um elemento. □

Comentários 1.26 *Exceto pela proposição 1.24 e pelo corolário 1.25, os quais fazem uso essencial do fato de o grupo linear geral* $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(n)$ *ser conexo, todas as definições e resultados que temos desenvolvido até então continuam valendo se estivéssemos trabalhando com fibrados vetoriais reais; no caso real,* $\mathrm{Gl}_{\mathbb{R}}(n)$ *tem duas componentes conexas.*

1.3 Fibrados Vetoriais Sobre $X \times S^2$

O objetivo desta seção é descrever os fibrados vetoriais sobre um produto

$$X \times S^2,$$

onde X é um espaço topológico compacto, em termos dos fibrados vetoriais sobre X. Este é o primeiro passo rumo à demonstração do Teorema de Periodicidade.

Seja E um fibrado vetorial sobre X, e consideremos os fibrados vetoriais

$$\pi_{X,+}^*(E) = E \times D^+,$$

$$\pi_{X,-}^*(E) = E \times D^-,$$

sobre $X \times D^+$ e $X \times D^-$, respectivamente, onde $\pi_{X,\pm}$ são as projeções $X \times D^\pm \to X$ (ver 1.13). Para cada função de colagem

$$f : E \times S^1 = (E \times D^+)|_{X \times S^1} \to (E \times D^-)|_{X \times S^1} = E \times S^1, \tag{1.18}$$

formamos o seguinte fibrado vetorial sobre $X \times S^2$

$$(E, f) := E \times D^+ \cup_f E \times D^-. \tag{1.19}$$

Observe que 1.16 é um caso particular de 1.19, se identificarmos $\{\text{pt}\} \times S^2$ com S^2 e $\mathbb{C}^n$ com o fibrado de dimensão n sobre um ponto.

No contexto desta seção, as proposições 1.20 e 1.22 tornam-se:

Proposição 1.27 (i) $f \simeq g$ *por funções de colagem, implica* $(E, f) \cong (E, g)$.

(ii) $(E, f) \oplus (E', g) \cong (E \oplus E', f \oplus g)$

(iii) $(E, f) \otimes (E', g) \cong (E \otimes E', f \otimes g)$

Para que (ii) e (iii) da proposição acima façam sentido, estamos identificando $(E \oplus E') \times S^1$ e $(E \otimes E') \times S^1$ com $(E \times S^1) \oplus (E' \times S^1)$ e $(E \times S^1) \otimes (E' \times S^1)$, respectivamente.

Uma função de colagem como em 1.18 pode ser canonicamente identificada com uma aplicação

$$f : S^1 \to \mathrm{Aut}(E), \tag{1.20}$$

onde consideramos $\mathrm{Aut}(E)$ munido da topologia compacto-aberta.

Proposição 1.28 *Se $f, c : S^1 \to \mathrm{Aut}(E)$ são funções de colagem, com c constante, então*

$$(E, f \circ c) \cong (E, f).$$

Em particular,

$$\begin{aligned} (E, c) &\cong (E, \mathbb{1}) \\ &\cong \pi_X^*(E). \end{aligned}$$

Demonstração: Como c não depende do parâmetro de S^1, podemos estendê-la trivialmente a um isomorfismo

$$\widetilde{c} : E \times D^+ \to E \times D^+.$$

Logo, considerando a aplicação

$$\widetilde{c}^{-1} \sqcup \mathbb{1}_{E\times D^-} : E \times D^+ \sqcup E \times D^- \to E \times D^+ \sqcup E \times D^-,$$

é direto verificar que ela induz uma função contínua nos respectivos quocientes $(E, f) \to (E, f \circ c)$, que é um isomorfismo fibra a fibra, portanto, pela proposição 1.4, um isomorfismo de fibrados.
O isomorfismo $(E, \mathbb{1}) \cong \pi_X^*(E)$ não é difícil de ver, uma vez que $\pi_X^*(E) = E \times S^2$. □

Para a proposição a seguir, e para o restante desta dissertação, pensaremos em S^1 como sendo o conjunto dos números complexos de norma 1, de maneira que faz sentido $1 \in S^1$.

PROPOSIÇÃO 1.29 *Seja X compacto, F um fibrado vetorial sobre $X \times S^2$, e consideremos a inclusão de X em $X \times S^2$ como sendo $X \times \{1\}$. Então, denotando por E a restrição de F a X, existem isomorfismos*

$$\varphi_+ : F|_{X\times D^+} \to E \times D^+ \qquad e \qquad \varphi_- : F|_{X\times D^-} \to E \times D^-$$

normalizados, isto é, tais que $\varphi_\pm|_E : E \to (E \times D^\pm)|_{X\times\{1\}} = E$ são a identidade. Consequentemente,

$$F \cong (E, f),$$

onde $f = \varphi_- \circ \varphi_+|_{E\times S^1}^{-1}$. Para quaisquer outras escolhas de isomorfismos normalizados $\widetilde{\varphi_+}, \widetilde{\varphi_-}$, a função de colagem $\widetilde{f}$ correspondente será homotópica a f via funções de colagem.

Demonstração: Consideremos o seguinte diagrama de pull-back's

$$\begin{tikzcd}
\pi^*(i^*(F|_{X\times D^+})) \arrow[d] & i^*(F|_{X\times D^+}) \arrow[d] & F|_{X\times D^+} \arrow[d] \\
X \times D^+ \arrow[r, "\pi"'] & X \arrow[r, hook, "i"'] & X \times D^+
\end{tikzcd},$$

onde π é a projeção e i a inclusão. Por um lado, como X é retrato por deformação de $X \times D^+$, $i \circ \pi$ é homotópica à identidade $\mathbb{1}$, logo

$$\begin{aligned}
\pi^*(i^*(F|_{X\times D^+})) &\cong (i \circ \pi)^*(F|_{X\times D^+}) \\
&\cong \mathbb{1}^*(F|_{X\times D^+}) \quad \cong \quad F|_{X\times D^+}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$i^*(F|_{X\times D^+}) \cong E, \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \pi^*(i^*(F|_{X\times D^+})) &\cong \pi^*(E) \\ &= E \times D^+, \end{aligned}$$

donde $F|_{X\times D^+} \cong E \times D^+$ e, da mesma forma, $F|_{X\times D^-} \cong E \times D^-$. Logo, existem isomorfismos $\varphi_+ : F|_{X\times D^+} \to E \times D^+$, $\varphi_- : F|_{X\times D^-} \to E \times D^-$, e podemos tomá-los normalizados, se os compusermos com os isomorfismos

$$\varphi_+|_E^{-1} \times \mathbb{1}_{D^+} : E \times D^+ \to E \times D^+,$$

$$\varphi_-|_E^{-1} \times \mathbb{1}_{D^-} : E \times D^- \to E \times D^-,$$

respectivamente.
Agora, é imediato que $F \cong (E, f)$. Sejam $\widetilde{\varphi_+}, \widetilde{\varphi_-}$ outra escolha de isomorfismos normalizados. Identificando $\widetilde{\varphi_+} \circ \varphi_+^{-1}$ com uma aplicação $D^+ \to \mathrm{Aut}(E)$, como D^+ se deforma sobre $\{1\} \subset D^+$ e $\widetilde{\varphi_+} \circ \varphi_+^{-1}(1) = \mathbb{1} \in \mathrm{Aut}(E)$, obtemos que $\widetilde{\varphi_+} \circ \varphi_+^{-1}$ é homotópica à aplicação $D^+ \to \mathrm{Aut}(E)$ constante igual a $\mathbb{1}$, logo $\widetilde{\varphi_+} \simeq \varphi_+$ via isomorfismos $F|_{X \times D^+} \to E \times D^+$. Analogamente, $\widetilde{\varphi_-} \simeq \varphi_-$ via isomorfismos $F|_{X \times D^-} \to E \times D^-$, e portanto $\widetilde{f} \simeq f$ via funções de colagem. □

1.4 O Fibrado de Linha Tautológico sobre $\mathbb{C}P^1$

Em coordenadas homogêneas, todo ponto p de $\mathbb{C}P^1$ é da forma

$$p = [1 : z], \text{ ou } p = [0 : 1],$$

com z unicamente determinado por p. Então, via projeção estereográfica, podemos identificar S^2 com $\mathbb{C}P^1$, de modo que D^+ é identificado com

$$\{[1 : z];\ |z| \geq 1\} \cup \{[0 : 1]\},$$

D^- é identificado com

$$\{[1 : z];\ |z| \leq 1\},$$

e S^1 com $\{[1 : z];\ |z| = 1\}$, este último identificamos com os números complexos de norma 1.
Daqui em diante, pensaremos em S^2 com esta identificação.

Seja

$$H \xrightarrow{p} \mathbb{C}P^1 = S^2$$

o fibrado de linha tautológico, como definido no exemplo 1.3. Temos as seguintes trivializações

$$H|_{D^+} \xrightarrow{\varphi_+} D^+ \times \mathbb{C} \quad \text{e} \quad H|_{D^-} \xrightarrow{\varphi_-} D^- \times \mathbb{C},$$

dadas por

$$\varphi_+([1 : z], \lambda(z^{-1}, 1)) = ([1 : z], \lambda),$$
$$\varphi_+([0 : 1], \lambda(0, 1)) = ([0 : 1], \lambda(0, 1)),$$
$$\varphi_-([1 : z], \lambda(1, z)) = ([1 : z], \lambda),$$

de modo que H é obtido colando-se os fibrados triviais $\underline{\mathbb{C}}^1_{D^+}$ e $\underline{\mathbb{C}}^1_{D^-}$ pela aplicação de colagem

$$\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1} : S^1 \times \mathbb{C}^1 \to S^1 \times \mathbb{C}^1.$$

Agora,

$$\begin{aligned}(\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1})([1 : z], \lambda) &= \varphi_+([1 : z], \lambda(1, z)) \\ &= \varphi_+([1 : z], \lambda z(z^{-1}, 1)),\end{aligned}$$

logo $\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}$ age na fibra sobre z por multiplicação por z, de modo que podemos representar $\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}$ simplesmente por z. Portanto,

$$H \cong (\mathbb{C}^1, z).$$

PROPOSIÇÃO 1.30 *Existe isomorfismo*

$$(H \otimes H) \oplus \underline{\mathbb{C}}^1_{S^2} \cong H \oplus H.$$

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} H \oplus H &\cong (\mathbb{C}^1, z) \oplus (\mathbb{C}^1, z) \\ &\cong (\mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1, z \oplus z), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (H \otimes H) \oplus \underline{\mathbb{C}}^1_{S^2} &\cong \{(\mathbb{C}^1, z) \otimes (\mathbb{C}^1, z)\} \oplus (\mathbb{C}^1, \mathbb{1}) \\ &\cong (\mathbb{C}^1 \otimes \mathbb{C}^1, z \otimes z) \oplus (\mathbb{C}^1, \mathbb{1}), \end{aligned}$$

onde usamos o fato óbvio de que $\underline{\mathbb{C}}^1_{S^2} \cong (\mathbb{C}^1, \mathbb{1})$.
Mas, $\mathbb{C}^1 \otimes \mathbb{C}^1$ é canonicamente isomorfo a $\mathbb{C}^1$, e, via tal isomorfismo, $z \otimes z : \mathbb{C}^1 \otimes \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1 \otimes \mathbb{C}^1$ é multiplicação por z^2, daí

$$(H \otimes H) \oplus \underline{\mathbb{C}}^1_{S^2} \cong (\mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1, z^2 \oplus \mathbb{1}).$$

Podemos representar as funções de colagem $z \oplus z$ e $z^2 \oplus \mathbb{1}$ pelas matrizes

$$z \oplus z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

$$z^2 \oplus \mathbb{1} = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \tag{1.22}$$

onde a entrada ij de cada matriz representa um endomorfismo entre o i-ésimo e o j-ésimo somando de $\mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1$.
Agora, uma homotopia explícita entre 1.21 e 1.22 é dada por

$$h_t(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Para cada z e t, as matrizes em 1.23 são invertíveis, logo tal homotopia é de fato via funções de colagem, mostrando que

$$(\mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1, z \oplus z) \cong (\mathbb{C}^1 \oplus \mathbb{C}^1, z^2 \oplus \mathbb{1}).$$

□

Capítulo 2

K-Teoria e Periodicidade de Bott

2.1 O funtor $K(X)$

A cada espaço topológico compacto X temos associado o conjunto $\mathrm{Vect}(X)$ das classes de isomorfismos de fibrados vetoriais sobre X, o qual munido da operação de soma direta $\oplus$ torna-se um semi-grupo abeliano.
Existe uma construção geral, devida a A. Grothendieck, que associa um grupo abeliano, através de um processo de "adicionar inversos", a cada semi-grupo abeliano. Esta simples construção é essencialmente a mesma que utilizamos para construir o grupo aditivo dos números inteiros $(\mathbb{Z}, +)$ a partir do semi-grupo aditivo dos números naturais $(\mathbb{N}, +)$, se pensarmos nos primeiros como formados por *diferenças formais*

$$m - n$$

de números naturais.

Proposição 2.1 *Dado um semigrupo abeliano A podemos associar a este um grupo abeliano $K(A)$, dito o K-grupo de Grothendieck, e um homomorfismo $\psi : A \to K(A)$ satisfazendo a seguinte propriedade universal:*

Para todo grupo abeliano G e homomorfismo $A \to G$, existe um único homomorfismo $K(A) \to G$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & G \\ K(A) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Além disso, $K(A)$ e ψ são "únicos" com esta propriedade, querendo isto dizer que, se H e $\widetilde{\psi}$ também satisfazem essa propriedade, então existe um isomorfismo $K(A) \to H$ tal que o diagrama seguinte comuta:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\widetilde{\psi}"] & \\ K(A) \arrow[rr] & & H \end{tikzcd}$$

Demonstração: Para a unicidade, observe primeiramente que se H e $\widetilde{\psi}$ satisfazem esta propriedade universal, então a identidade $\mathbb{1}$ é o único homomorfismo $G \to G$ que comuta com $\widetilde{\psi}$.
Agora, aplicando duas vezes a propriedade universal, encontramos homomorfismos $K(A) \xrightarrow{f} G$, e $G \xrightarrow{g} K(A)$ tais que $f \circ \psi = \widetilde{\psi}$, e $g \circ \widetilde{\psi} = \psi$, logo $g \circ f : K(A) \to K(A)$ comuta com ψ e $f \circ g : G \to G$ comuta com $\widetilde{\psi}$, donde $g \circ f = \mathbb{1}$, e $f \circ g = \mathbb{1}$. Portanto, f é um isomorfismo tal que o diagrama acima comuta.
Vamos então à existência. Seja $\sim$ a relação de equivalência em $A \times A$ dada por

$$(a_1, a_2) \sim (a_1', a_2') \quad \leftrightarrow \quad \exists \ a, a' \quad \text{t.q.} \quad (a_1 + a, a_2 + a) = (a_1' + a', a_2' + a').$$

É fácil ver que trata-se de uma relação de equivalência.
Em $(A \times A)/\sim$ definimos uma soma $+$ pondo

$$[(a_1, a_2)] + [(b_1, b_2)] = [(a_1 + b_1, a_2 + b_2)],$$

e é direto mostrar que está bem definida.
Agora, denominando a classe da forma $[(a, a)]$ de elemento neutro, $(A \times A)/\sim$ torna-se um grupo abeliano, o inverso aditivo de $[(a_1, a_2)]$ sendo $[(a_2, a_1)]$, como facilmente se verifica.
Definindo então

$$K(A) = ((A \times A)/\sim, +)$$

e $\psi : A \to K(A)$ por

$$\psi(a) = [(a, 0)],$$

$(K(A), \psi)$ satisfaz a propriedade universal: De fato, se H é grupo abeliano e $f : A \to H$ é homomorfismo, então $\widetilde{f} : K(A) \to H$, definido por $\widetilde{f}([(a_1, a_2)]) = f(a_1) + f(a_2)$, é um homomorfismo tal que $\widetilde{f} \circ \psi = f$ e também é único com esta propriedade. □

Para o que segue, usaremos a construção de $K(A)$ fornecida na demonstração acima.

Definição 2.2 *Dado um espaço topológico compacto X, definimos o seu grupo de K-teoria $K(X)$ por*

$$K(X) := K((\mathrm{Vect}(X), \oplus)).$$

A imagem, via $\psi : \mathrm{Vect}(X) \to K(X)$, de um elemento $E \in \mathrm{Vect}(X)$ será denotada por $[E]$.

Observe que, pela construção que estamos usando, todo elemento de $K(X)$ pode ser expresso na forma

$$[E] - [F],$$

e a adição em $K(X)$ é dada por

$$([E] - [F]) + ([E'] - [F']) = [E \oplus E'] - [F \oplus F'].$$

Lema 2.3 (i) $[E] = [F]$ *se e somente se existir* n *tal que*

$$E \oplus \underline{\mathbb{C}}^n \cong F \oplus \underline{\mathbb{C}}^n. \tag{2.1}$$

(ii) *Todo elemento de* $K(X)$ *pode ser expresso como*

$$[E] - [\underline{\mathbb{C}}^n].$$

Demonstração: Para (i), temos que $[E] = [F]$ se e somente se $[(E, \underline{\mathbb{C}}^0)] = [(F, \underline{\mathbb{C}}^0)]$, que por sua vez vale se e somente se existir G tal que

$$[(E \oplus G, G)] = [(F \oplus G, G)],$$

isto é, tal que

$$E \oplus G \cong F \oplus G. \tag{2.2}$$

Mas, pela proposição 1.18, existe um complemento G' para G, isto é, existe G' tal que

$$G \oplus G' \cong \underline{\mathbb{C}}^n,$$

para algum n. Somando então G' a ambos os membros de 2.2, obtemos o desejado.

Mostremos agora (ii). Dado um elemento $[E] - [F] \in K(X)$, tomamos um F' tal que

$$F \oplus F' \cong \underline{\mathbb{C}}^n,$$

para algum n. Daí,

$$\begin{aligned} [E] - [F] &= [E] - [F] + ([F'] - [F']) \\ &= [E \oplus F'] - [F \oplus F'] \\ &= [E \oplus F'] - [\underline{\mathbb{C}}^n]. \end{aligned}$$

□

Comentários 2.4 *Dois fibrados* E *e* F *que satisfazem a uma equação do tipo 2.1 são, às vezes, ditos* fortemente estavelmente equivalentes. *Sob o ponto de vista do lema 2.3,* K*-teoria estuda as classes de equivalência fortemente estáveis de fibrados sobre uma mesma base, não distinguindo entre estes aqueles que não são isomorfos.*

Podemos usar o produto tensorial $\otimes$ de fibrados vetoriais para induzir uma operação $\cdot$ em $K(X)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} ([E_1] - [E_2]) \cdot ([E_1'] - [E_2']) \;:=\; & [(E_1 \otimes E_1') \oplus (E_2 \otimes E_2')] \\ & -[(E_1 \otimes E_2') \oplus (E_2 \otimes E_1')]. \end{aligned}$$

Não é difícil mostrar que esta operação está bem definida. Esta operação é comutativa, associativa e distributiva em relação à soma, além de possuir elemento identidade, a saber $[\underline{\mathbb{C}}^1]$. Munido desta operação *produto*, $K(X)$ torna-se um anel comutativo com identidade, chamado o *anel de* K*-teoria de* X.

Exemplo 2.5 Se X é contrátil, ou $X = S^1$, sabemos pelos corolários 1.12 e 1.25, respectivamente, que todo fibrado vetorial sobre X é trivial, logo todo elemento de $K(X)$ é da forma $[\underline{\mathbb{C}}^n] - [\underline{\mathbb{C}}^k]$. Mas,

$$\begin{aligned}[\underline{\mathbb{C}}^n] - [\underline{\mathbb{C}}^k] &= [\underline{\mathbb{C}}^{n-k}], \quad \text{se } n \geq k \\ &= -[\underline{\mathbb{C}}^{k-n}], \quad \text{se } n \leq k,\end{aligned}$$

daí todo elemento de $K(X)$ é da forma $\pm[\underline{\mathbb{C}}^n]$. Definindo então

$$K(X) \to \mathbb{Z} \quad , \quad \pm[\underline{\mathbb{C}}^n] \mapsto \pm n,$$

é direto mostrar que trata-se de um isomorfismo de anéis. Portanto, se X é contrátil, ou $X = S^1$, $K(X)$ é canonicamente isomorfo ao anel dos inteiros $\mathbb{Z}$.

Analisemos a funtorialidade de $K(-)$. Dada uma aplicação

$$f : X \to Y$$

entre espaços compactos, compondo a aplicação pull-back $f^* : \mathrm{Vect}(Y) \to \mathrm{Vect}(X)$ com o homomorfismo canônico $\psi : \mathrm{Vect}(X) \to K(X)$, obtemos uma aplicação

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(Y) &\longrightarrow K(X) \\ E &\mapsto [f^*(E)],\end{aligned} \tag{2.3}$$

que é um homomorfismo de semi-grupos, em virtude de (i) da proposição 1.10. Logo, pela propriedade universal de $K(Y)$, 2.3 estende a um homomorfismo de grupos

$$f^* : K(Y) \longrightarrow K(X) \tag{2.4}$$
$$f^*([E] - [F]) = [f^*(E)] - [f^*(F)].$$

Também, devido a (ii) da proposição 1.10, obtemos que 2.4 é de fato um homomorfismo de anéis.
Em geral, para nós, *homomorfismo* significará *homomorfismo de anéis*, exceto nos casos onde falaremos *homomorfismo de grupos (ou $\mathbb{Z}$-módulos).*

Proposição 2.6 (i) *Para aplicações $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, temos que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

(ii) $\mathbb{1}_X^* = \mathbb{1}_{K(X)}$.

(iii) *Para aplicações homotópicas $f, g : X \to Y$, $f^* = g^*$. Em particular, se f é equivalência de homotopia e h é inversa homotópica de f, então f^* é isomorfismo, tendo h^* como inversa.*

Demonstração: É consequência imediata da proposição 1.11. □

Esta proposição estabelece o caráter de *funtor homotópico contra-variante* de $K(-)$, entre as categorias dos espaços topológicos compactos e a dos anéis comutativos.

2.2 Produto Externo e Periodicidade de Bott

Comecemos com um fato algébrico geral. Dados anéis comutativos A e B, podemos dar ao produto tensorial $A \otimes B$ dos $\mathbb{Z}$-módulos subjacentes uma estrutura de anel (comutativo) definindo-se o produto por

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := (aa') \otimes (bb').$$

A boa definição de $\cdot$ segue da propriedade universal de $\otimes$, e as propriedades de associatividade, distributividade e comutatividade de $\cdot$ são imediatas.

Dados espaços topológicos compactos X e Y, sejam

$$\pi_X : X \times Y \to X,$$

$$\pi_Y : X \times Y \to Y$$

as respectivas projeções. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} K(X) \times K(Y) & \longrightarrow & K(X \times Y) \\ (a, b) & \mapsto & \pi_X^*(a)\pi_Y^*(b) \end{array}$$

é $\mathbb{Z}$-bilinear, logo, pela propriedade universal do produto tensorial, ela define um homomorfismo entre $\mathbb{Z}$-módulos

$$\begin{array}{rcl} \mu : K(X) \otimes K(Y) & \longrightarrow & K(X \times Y) \\ \mu(a \otimes b) & = & \pi_X^*(a)\pi_Y^*(b), \end{array}$$

que, de fato, é um homomorfismo de anéis, pois

$$\begin{array}{rcl} \mu((a \otimes b) \cdot (a' \otimes b')) & = & \mu(aa' \otimes bb') \\ & = & \pi_X^*(aa')\pi_Y^*(bb') \\ & = & (\pi_X^*(a)\pi_Y^*(b))(\pi_X^*(a')\pi_Y^*(b')) \\ & = & \mu(a \otimes b)\mu(a' \otimes b'). \end{array}$$

DEFINIÇÃO 2.7 *O homomorfismo $\mu : K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$ é chamado de produto externo.*

Podemos agora enunciar o Teorema de Periodicidade de Bott:

TEOREMA 2.8 $\mu : K(X) \otimes K(S^2) \to K(X \times S^2)$ *é um isomorfismo.*

Seja H o fibrado linha canônico sobre S^2. Sendo t uma variável, a associação

$$t \mapsto [H]$$

estende a uma aplicação

$$\mathbb{Z}[t] \to K(S^2), \tag{2.5}$$

que é claramente um homomorfismo, onde o primeiro membro de 2.5 é o anel dos polinômios sobre $\mathbb{Z}$ na variável t.
Como, devido à proposição 1.30, temos a seguinte igualdade em $K(S^2)$

$$([H] - [\underline{\mathbb{C}}^1_{S^2}])^2 = 0,$$

obtemos que 2.5 desce a um homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\mathbb{Z}[t]}{(t-1)^2} & \stackrel{\iota}{\longrightarrow} & K(S^2) \\ t & \mapsto & [H], \end{array} \tag{2.6}$$

o qual usamos para construir o seguinte homomorfismo

$$\mu' : K(X) \otimes \frac{\mathbb{Z}[t]}{(t-1)^2} \to K(X \times S^2) \tag{2.7}$$

dado pela composição

$$K(X) \otimes \frac{\mathbb{Z}[t]}{(t-1)^2} \xrightarrow{\mathbb{1}\otimes\iota} K(X) \otimes K(S^2) \xrightarrow{\mu} K(X \times S^2).$$

Note agora que o teorema 2.8 seguirá imediatamente do teorema abaixo e de seu corolário. A demonstração deste próximo teorema é o conteúdo do restante deste capítulo.

Teorema 2.8' *2.7 é um isomorfismo.*

Corolário 2.9 *2.6 é um isomorfismo.*

Demonstração: Façamos $X = \{\mathrm{pt}\}$ no teorema 2.8'. Temos então identificações canônicas $X \times S^2 = S^2$ e $K(X) = \mathbb{Z}$. Mediante estas identificações,

$$\mu : \mathbb{Z} \otimes K(S^2) \to K(S^2)$$

nada mais é que

$$n \otimes a \mapsto na,$$

sendo portanto um isomorfismo. Logo, como μ' é isomorfismo, $\mathbb{1} \otimes \iota$ também será, donde também ι.

□

2.3 Reduções sucessivas das Funções de Colagem

Ao longo desta seção, X representará um espaço topológico compacto.
Dados um fibrado vetorial E sobre X e uma métrica hermitiana $<,>$ em E, podemos definir uma norma no espaço vetorial $\mathrm{End}(E)$ da seguinte maneira:

Dado um endomorfismo f de E, sabemos que, para cada x em X,

$$||f(x)||_x = \mathrm{Sup}_{<v,v>_x=1}(< f(x) \cdot v, f(x) \cdot v >_x)^{\frac{1}{2}}$$

define uma norma em $\mathrm{End}(E_x)$. Da continuidade da associação

$$x \mapsto ||f(x)||_x,$$

e da compacidade de X, obtemos que é finito o número

$$\mathrm{Sup}_{x \in X} ||f(x)||_x,$$

donde podemos definir

$$||f|| = \mathrm{Sup}_{x \in X} ||f(x)||_x. \tag{2.8}$$

Como, para cada $x \in X$, $|| \cdot ||_x$ constitui uma norma em $\mathrm{End}(E_x)$, 2.8 define de fato uma norma em $\mathrm{End}(E)$.
Daqui em diante, pensaremos nos fibrados vetoriais sempre com uma métrica hermitiana fixada, de modo que consideraremos o espaço de seus endomorfismos munido da norma 2.8.

Definição 2.10 *Um endomorfismo $f : E \times S^1 \to E \times S^1$ é dito uma função de Laurent, se for da forma*

$$f(x, z) = a_n(x)z^n + ... + a_0(x) + a_1(x)z^{-1} + ... + a_{-m}(x)z^{-m},$$

onde os a_i's são endomorfismos de E.

Proposição 2.11 *O espaço das funções de Laurent $\ell : E \times S^1 \to E \times S^1$ é denso em* $\mathrm{End}(E \times S^1)$.

Esta proposição será uma simples consequência do seguinte resultado analítico geral, cuja demonstração encontra-se no apêndice A:

Lema 2.12 *Seja $C(X \times S^1)$ o espaço normado das funções contínuas*

$$f : X \times S^1 \to \mathbb{C},$$

onde a norma que consideramos é a do supremo.
Então, o subespaço das funções da forma

$$p(x, z) = \sum_{|i| \le N} a_i(x) z^i,$$

onde cada $a_i : X \to \mathbb{C}$ é contínua, é denso em $C(X \times S^1)$.

Demonstração da Proposição 2.11: Sejam $U_1, ..., U_r$ abertos que cobrem X tais que, para todo s, $E|_{U_s}$ é trivial (e logo $(E \times S^1)|_{U_s \times S^1} = E|_{U_s} \times S^1$ é trivial), e consideremos uma partição da unidade $\{\alpha_s\}_{s=1,\dots,r}$ subordinada a esta cobertura, com $X_s =$ suporte de α_s (observe que X_s é compacto).
Pela proposição 1.15, podemos escolher trivializações

$$\varphi_s : E|_{X_s} \times S^1 \to \underline{\mathbb{C}}^n_{X_s \times S^1}$$

que levam a norma $||\cdot||_s$ de $\mathrm{End}(E|_{X_s} \times S^1)$ na norma usual de $\mathrm{End}(\underline{\mathbb{C}}^n_{X_s \times S^1})$, a qual, por esta razão, também denotaremos por $||\cdot||_s$.
Seja então

$$f \in \mathrm{End}(E \times S^1),$$

e denotemos por f_s a restrição de f a $E|_{X_s} \times S^1$, e por $\widetilde{f_s} = \varphi_s \circ f_s \circ \varphi_s^{-1}$ o endomorfismo correspondente de $\underline{\mathbb{C}}^n_{X_s \times S^1}$. Podemos representar $\widetilde{f_s}$ por uma matriz

$$(f_s^{(ij)})_{1 \le i,j \le n},$$

onde cada $f_s^{(ij)}$ é um endomorfismo de $(X_s \times S^1) \times \mathbb{C}$, que por sua vez pode ser identificado a uma função contínua

$$f_s^{(ij)} : X_s \times S^1 \to \mathbb{C}.$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$, usando o lema anterior podemos aproximar uniformemente cada $f_s^{(ij)}$ por funções da forma

$$\tilde{\ell}_s^{(ij)}(x, z) = \sum_{|k| \le m} a_{sk}^{(ij)}(x) z^k,$$

de maneira a garantir que

$$||\tilde{\ell}_s - \tilde{f}_s||_s < \varepsilon / r,$$

onde $\widetilde{\ell_s}$ representa o endomorfismo $(\widetilde{\ell_s}^{(ij)})_{1 \le i,j \le n}$ de $\underline{\mathbb{C}}^n_{X_s \times S^1}$.
Veja que, $\widetilde{\ell_s}$ é uma função de Laurent de $\mathrm{End}(\underline{\mathbb{C}}^n_{X_s \times S^1})$, pois

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}_s(x, z) &= (\tilde{\ell}_s^{(ij)}(x, z))_{1 \le i,j \le n} \\ &= \sum_{|k| \le m} (a_{sk}^{(ij)}(x))_{1 \le i,j \le n} z^k, \end{aligned}$$

daí obtemos também que ℓ_s é uma função de Laurent de $\mathrm{End}(E|_{X_s} \times S^1)$.
Agora, usando a partição da unidade $\{\alpha_s\}_{s=1,\dots r}$, podemos formar a função de Laurent

$$\ell(x, z) = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s(x) \ell_s(x, z)$$

de $\mathrm{End}(E \times S^1)$ e temos

$$\begin{aligned}
||\ell - f|| &= ||\sum_{s=1}^{r} \alpha_s \ell_s - \sum_{s=1}^{r} \alpha_s f|| \\
&\leq \sum_{s=1}^{r} ||\alpha_s(\ell_s - f)|| \\
&= \sum_{s=1}^{r} ||\alpha_s(\ell_s - f_s)||_s \quad (\text{pois } \alpha_s = 0 \text{ fora de } X_s) \\
&\leq \sum_{s=1}^{r} ||\ell_s - f_s||_s \quad (\text{pois } \alpha_s \leq 1) \\
&\leq \sum_{s=1}^{r} \epsilon / r = \epsilon,
\end{aligned}$$

mostrando que as funções de Laurent são densas em $\mathrm{End}(E \times S^1)$. $\square$

LEMA 2.13 *Seja E um fibrado vetorial sobre X. Então,*

(i) $\mathrm{Aut}(E)$ *é aberto em* $\mathrm{End}(E)$. *Em particular, dada $f \in \mathrm{Aut}(E)$, existe $r > 0$ tal que se $||g - f|| < r$, então existe homotopia f_t entre f e g tal que $f_t \in \mathrm{Aut}(E)$ para todo $t \in I$.*

(ii) *Seja $\mathcal{C}$ um subconjunto convexo e denso de* $\mathrm{End}(E)$. *Então, dadas f_0 e f_1 em $\mathcal{C} \cap \mathrm{Aut}(E)$, se existir homotopia f_t entre f_0 e f_1 tal que $f_t \in \mathrm{Aut}(E)$ para todo $t \in I$, existirá homotopia $\widetilde{f_t}$, entre f_0 e f_1 tal que $\widetilde{f_t} \in \mathrm{Aut}(E) \cap \mathcal{C}$, para todo $t \in I$.*

Demonstração: (i) De fato, $\mathrm{Aut}(E)$ é a imagem inversa do aberto $\mathbb{R} - \{0\}$ pela função contínua

$$f \mapsto \mathrm{Inf}_{x \in X} |\mathrm{det} f(x)|,$$

logo é aberto.
Agora, dada $f \in \mathrm{Aut}(E)$, seja $r > 0$ tal que a bola de centro f e raio r, $B_r(f)$, está contida em $\mathrm{Aut}(E)$. Então, dada $g \in B_r(f)$, a convexidade de $B_r(f)$ nos garante que

$$tf + (1-t)g \in B_r(f) \subset \mathrm{Aut}(E)$$

para todo $t \in I$, dando portanto uma homotopia entre f e g através de automorfismos.

(ii) Seja

$$t \mapsto f_t \in \mathrm{Aut}(E)$$

uma homotopia entre f_0 e f_1. Afirmamos que existe $r > 0$ tal que

$$B_r(f_t) \subset \mathrm{Aut}(E),$$

para todo $t \in I$: Com efeito, como I é compacto e $t \mapsto f_t$ é contínua, $\{f_t\}_{t\in I}$ é subconjunto compacto de $\mathrm{Aut}(E)$, logo é positiva a distância r entre $\{f_t\}_{t\in I}$ e o complementar do aberto $\mathrm{Aut}(E)$; agora, é claro que este r satisfaz $B_r(f_t) \subset \mathrm{Aut}(E)$, para todo $t \in I$.
Da continuidade de $t \mapsto f_t$, existem

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = 1$$

tais que

$$||f_{t_i} - f_{t_{i+1}}|| < r/2, \quad i = 0, ..., n,$$

e da densidade de $\mathcal{C}$, existem

$$f_0 = \widetilde{f}_{t_0}, \widetilde{f}_{t_1}, ..., \widetilde{f}_{t_n}, \widetilde{f}_{t_{n+1}} = f_1$$

em $\mathcal{C}$ tais que $||\widetilde{f}_{t_i} - f_{t_i}|| < r/2$, $i = 0, ..., n+1$.
Daí, $\widetilde{f}_{t_i} \in B_r(f_{t_i})$, e como

$$\begin{aligned} ||\widetilde{f}_{t_{i+1}} - f_i|| &\leq ||\widetilde{f}_{t_{i+1}} - f_{t_{i+1}}|| + ||f_{t_{i+1}} - f_{t_i}|| \\ &< r/2 + r/2 = r, \end{aligned}$$

também temos $\widetilde{f}_{t_{i+1}} \in B_r(f_{t_i})$, donde, pela convexidade de $\mathcal{C} \cap B_r(f_{t_i})$,

$$t\widetilde{f}_{t_{i+1}} + (1-t)\widetilde{f}_{t_i} \in \mathcal{C} \cap B_r(f_{t_i}),$$

dando uma homotopia entre $\widetilde{f}_{t_i}$ e $\widetilde{f}_{t_{i+1}}$ por automorfismos em $\mathcal{C}$, para cada $i = 0, ..., n$. Colando estas homotopias, obtemos a homotopia desejada entre f_0 e f_1.□

Reunindo então as proposições 1.29, 2.11 e o lema 2.13, obtemos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 2.14 *Todo fibrado vetorial sobre $X \times S^2$ é da forma (E, ℓ), onde E é um fibrado vetorial sobre X, e*

$$\ell : E \times S^1 \to E \times S^1$$

é uma função de colagem de Laurent.
Além disso, duas funções de colagem de Laurent que são homotópicas através de funções de colagem quaisquer, são de fato homotópicas através de funções de colagem de Laurent.

Para o lema a seguir, sendo

$$H \cong (\mathbb{C}^1, z)$$

o fibrado de linha tautológico sobre S^2, podemos definir

$$H^{-1} := (\mathbb{C}^1, z^{-1}),$$

e tal notação se justifica por

$$H \otimes H^{-1} \cong H^{-1} \otimes H \cong \underline{\mathbb{C}}^1_{S^2}.$$

Dado um número inteiro m, definimos

$$\begin{aligned} H^m &= H \otimes \cdots \otimes H, \text{ se } m \geq 0 \\ &= H^{-1} \otimes \cdots \otimes H^{-1}, \text{ se } m < 0 \end{aligned}$$

LEMA 2.15 *Sejam E um fibrado vetorial sobre X, $f : E \times S^1 \to E \times S^1$ uma função de colagem, e m um inteiro qualquer. Então,*

$$(E, z^m f) \cong (E, f) \otimes \pi^*_{S^2}(H^m),$$

onde $\pi_{S^2} : X \times S^2 \to S^2$ é a projeção.

Demonstração: De (iii) da proposição 1.27 obtemos

$$(E, z^m f) \cong (E, f) \otimes (\underline{\mathbb{C}}^1_X, z^m). \tag{2.9}$$

Agora, como a função de colagem

$$z^m : \underline{\mathbb{C}}^1_X \times S^1 \to \underline{\mathbb{C}}^1_X \times S^1$$

independe da coordenada de X, não é difícil ver que

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbb{C}}^1_X, z^m) &\cong X \times (\mathbb{C}^1, z^m) \\ &\cong X \times H^m. \end{aligned}$$

O lema segue agora de 2.9 e de $X \times H^m = \pi^*_{S^2}(H^m)$. □

Escrevendo uma função de colagem de Laurent como

$$\ell = z^{-m} q, \quad m \geq 0,$$

onde

$$q : E \times S^1 \to E \times S^1$$

é uma função de colagem *polinomial*, isto é, não contém potências negativas de z, pelo lema anterior temos que

$$(E, \ell) \cong (E, q) \otimes \pi^*_{S^2}(H^{-m}), \tag{2.10}$$

o que já nos é bastante favorável para a demonstração do teorema 2.8', bastando concentrarmo-nos nos fibrados vetoriais sobre $X \times S^2$ que são do tipo

$$(E, q),$$

onde q é polinomial.

LEMA 2.16 *Para cada função de colagem polinomial* $q : E \times S^1 \to E \times S^1$ *e inteiro* $n \geq \mathrm{gr}(q)$*, podemos associar uma função de colagem linear*

$$L^n_E q : (n+1)E \times S^1 \to (n+1)E \times S^1$$

tal que

$$(E, q) \oplus (nE, \mathbb{1}) \cong ((n+1)E, L^n_E q).$$

Além disso, tal associação preserva soma direta, querendo isto dizer que

$$L^n_{E_1 \oplus E_2}(q_1 \oplus q_2) = L^n_{E_1} q_1 \oplus L^n_{E_2} q_2,$$

onde $n \geq \max\{\mathrm{gr}(q_1), \mathrm{gr}(q_2)\}$ *(observe que* $q_1 \oplus q_2$ *é também polinomial e de grau* $\leq n$*).*

Para a última afirmação do lema acima, estamos identificando $(n+1)(E_1 \oplus E_2)$ com $(n+1)E_1 \oplus (n+1)E_2$

Demonstração: Ponhamos

$$q(x, z) = a_n(x) z^n + \cdots + a_0(x).$$

Consideremos os endomorfismos de $(n+1)E \times S^1$ dados pelas matrizes

$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & -z & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbb{1} & -z \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q \end{pmatrix},$$

onde a entrada ij de cada matriz representa um endomorfismo entre o i-ésimo e o j-ésimo somando de

$$(n+1)E \times S^1 = (E \times S^1) \oplus \cdots \oplus (E \times S^1).$$

Observe que a matriz B representa a função de colagem

$$\mathbb{1} \oplus q : (nE \oplus E) \times S^1 \to (nE \oplus E) \times S^1.$$

Podemos passar de A para B através da seguinte sequência de operações elementares sobre linhas e colunas de A: fazemos z vezes a primeira coluna de A e somamos à segunda coluna, fazemos z vezes a segunda coluna e somamos à terceira, e assim sucessivamente; então, para cada $i \leq n$, subtraímos da última linha um múltiplo conveniente da i-ésima linha, para obtermos B. Isto mostra, em particular, que o endomorfismo representado por A é uma função de colagem (isto é, um isomorfismo), pois B o é.
Agora, A é linear em z, e é homotópica a B por funções de colagem, pois se

tivéssemos multiplicado por t cada fator multiplicativo utilizado na passagem de A para B, obteríamos uma tal homotopia entre A e B. Logo, definindo

$$L_E^n q := A,$$

temos que

$$\begin{aligned} ((n+1)E, L_E^n q) &\cong (nE \oplus E, \mathbb{1} \oplus q) \\ &\cong (nE, \mathbb{1}) \oplus (E, q). \end{aligned}$$

Que L preserva soma direta, sai direto da construção de L. □

Este lema, interpretado em $K(X \times S^2)$, nos diz que

$$\begin{aligned} [E, q] &= [(n+1)E, L_E^n q] - [nE, \mathbb{1}] \\ &= [(n+1)E, L_E^n q] - \pi_X^*([nE]), \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde, para a última igualdade, usamos a proposição 1.28. Aqui, para facilitar a notação, estamos usando $[F, g]$ para denotar a imagem de (F, g) em $K(X \times S^2)$.

PROPOSIÇÃO 2.17 *Para cada função de colagem linear $f = a(x)z + b(x)$, podemos associar uma decomposição $E = E_+^f \oplus E_-^f$, de modo que*

$$(E, a(x)z + b(x)) \cong (E_+^f, \mathbb{1}) \oplus (E_-^f, z), \tag{2.12}$$

e valem:

1. *Se $f_0 = a_0(x)z + b_0(x)$ e $f_1 = a_1(x)z + b_1(x)$ são homotópicas através de funções de colagem lineares $f_t = a_t(x)z + b_t(x)$, então $E_\pm^{f_0} \cong E_\pm^{f_1}$.*

2. *Se $E = E_1 \oplus E_2$ e $f = f_1 \oplus f_2$, então $E_\pm^f \cong (E_1)_\pm^{f_1} \oplus (E_2)_\pm^{f_2}$.*

Antes de demonstrarmos esta proposição, note que, pelo lema 2.15,

$$(E_-^f, z) \cong (E_-^f, \mathbb{1}) \otimes \pi_{S^2}^*(H).$$

Agora, pela proposição 1.28, $(E_\pm^f, \mathbb{1}) \cong \pi_X^*(E_\pm^f)$. Portanto, podemos reescrever 2.12 como

$$(E, a(x)z + b(x)) \cong \pi_X^*(E_+^f) \oplus \{\pi_X^*(E_-^f) \otimes \pi_{S^2}^*(H)\} \tag{2.13}$$

Demonstração: Dado $t_0 \in I$, temos uma homotopia

$$(a(x) + tb(x))z + ta(x) + b(x)$$

entre

$$a(x)z + b(x)$$

e

$$(a(x) + t_0 b(x))z + t_0 a(x) + b(x).$$

Se $t_0 < 1$, esta homotopia é por funções de colagem, uma vez que

$$(a(x) + tb(x))z + ta(x) + b(x) = (1 + tz)(a(x)\frac{z + t}{1 + tz} + b(x)),$$

e

$$\frac{z + t}{1 + tz} \in S^1, \ (\forall z \in S^1) \quad \text{se } t \neq 1.$$

Agora, a função contínua

$$\varphi(t) = \mathrm{Inf}_{x \in X} |\det(a(x) + tb(x))|,$$

é diferente de 0 para $t = 1$, logo $\varphi^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ contém um intervalo maximal $(\alpha, 1] \subset I$, o qual denotaremos por I^f. Então, dado $t_0 \in I^f$, $t_0 \neq 1$,

$$a(x) + t_0 b(x) : E \times S^1 \to E \times S^1$$

é isomorfismo (que não depende de $z \in S^1$), logo

$$(a(x) + t_0 b(x))z + t_0 a(x) + b(x)$$

$$= \{z + (t_0 a(x) + b(x)) \circ (a(x) + t_0 b(x))^{-1}\} \circ (a(x) + t_0 b(x)).$$

Definindo então

$$b^f_{t_0} := (t_0 a(x) + b(x)) \circ (a(x) + t_0 b(x))^{-1},$$

obtemos que $a(x)z + b(x)$ é homotópica, através de funções de colagem, a

$$(z + b^f_{t_0}) \circ (a(x) + t_0 b(x))^{-1},$$

pois $t_0 < 1$. Portanto

$$\begin{aligned} (E, a(x)z + b(x)) &\cong (E, (z + b^f_{t_0}) \circ (a(x) + t_0 b(x))^{-1}) \\ &\cong (E, z + b^f_{t_0}), \end{aligned}$$

o último isomorfismo sendo consequência da proposição 1.28, uma vez que $(a(x) + t_0 b(x))^{-1}$ independe de z.
Observe que, por não depender de z, $b^f_{t_0}$ pode ser visto como um endomorfismo de E, e por ser

$$z + b^f_{t_0} : E \times S^1 \to E \times S^1$$

um isomorfismo, $b^f_{t_0}$ não pode ter autovalor em S^1, isto é, a restrição de $b^f_{t_0}$ a cada uma das fibras de E não possui autovalor em S^1. Para esta situação, temos o seguinte lema fundamental:

Lema 2.18 *Seja $b : E \to E$ um endomorfismo que não possui autovalor em S^1. Então, existe uma única decomposição $E = E_+^b \oplus E_-^b$ satisfazendo* (i) *e* (ii) *a seguir:*

(i) $b(E_\pm^b) \subset E_\pm^b$.

(ii) *Os autovalores de $b|_{E_+^b}$ estão no exterior de S^1, e os de $b|_{E_-^b}$ estão no interior de S^1.*

Além disso, se $b_0 \simeq b_1$ por endomorfismos sem autovalor em S^1, então $E_\pm^{b_0} \cong E_\pm^{b_1}$.

Demonstração: Encontra-se após o término da demonstração da proposição atual.

Segue deste lema que existe (única) decomposição

$$E = E_+^{b_{t_0}^f} \oplus E_-^{b_{t_0}^f}$$

satisfazendo (i) e (ii). Sendo $(b_{t_0}^f)_\pm$ as restrições de $b_{t_0}^f$ a $E_\pm^{b_{t_0}^f}$, respectivamente, por (ii) temos que $z + (b_{t_0}^f)_+$ e $z + (b_{t_0}^f)_-$ são funções de colagem, e

$$(E, z + b_{t_0}^f) \cong (E_+^{b_{t_0}^f}, z + (b_{t_0}^f)_+) \oplus (E_-^{b_{t_0}^f}, z + (b_{t_0}^f)_-).$$

Mas, como os autovalores de $(b_{t_0}^f)_-$ estão no interior de S^1,

$$s \mapsto z + s(b_{t_0}^f)_-, \quad 0 \le s \le 1$$

é uma homotopia por funções de colagem entre z e $z + (b_{t_0}^f)_-$. Também, como os autovalores de $(b_{t_0}^f)_+$ estão no exterior de S^1,

$$s \mapsto sz + (b_{t_0}^f)_+, \quad 0 \le s \le 1,$$

é uma homotopia por funções de colagem entre $(b_{t_0}^f)_+$ e $z + (b_{t_0}^f)_+$. Portanto,

$$(E_-^{b_{t_0}^f}, z + (b_{t_0}^f)_-) \cong (E_-^{b_{t_0}^f}, z) \quad \text{e} \quad \begin{aligned} (E_+^{b_{t_0}^f}, z + (b_{t_0}^f)_+) &\cong (E_+^{b_{t_0}^f}, (b_{t_0}^f)_+) \\ &\cong (E_+^{b_{t_0}^f}, \mathbb{1}), \end{aligned}$$

e podemos então definir

$$E_\pm^f := E_\pm^{b_{t_0}^f}.$$

Para o que segue, é importante observar que, se tivéssemos escolhido um outro $t_0' \in I^f$, $t_0' \neq 1$, ao invés de t_0, e definido da mesma forma $b_{t_0'}^f$, então, como $st_0 + (1-s)t_0' \in I^f \setminus \{1\}$ $(0 \le s \le 1)$, estariam bem definidos os $b_{st_0+(1-s)t_0'}^f$ e dariam uma homotopia entre $b_{t_0'}^f$ e $b_{t_0}^f$ por endomorfismos sem autovalor em S^1. Portanto, teríamos

$$E_\pm^{b_{t_0'}^f} \cong E_\pm^{b_{t_0}^f}.$$

Mostremos 1. Para isso, veja que $\cap_s I^{f_s}$ contém um $t_0 \neq 1$; de fato, basta para isto considerarmos a função

$$t \mapsto \mathrm{Inf}_{(x,s)\in X\times I}|\det(a_s(x)+tb_s(x))|.$$

Então, estão definidos os $b_{t_0}^{f_s}$ $(0 \leq s \leq 1)$ e definem uma homotopia, por endomorfismos sem autovalor em S^1, entre $b_{t_0}^{f_0}$ e $b_{t_0}^{f_1}$, logo $E_\pm^{b_{t_0}^{f_1}} \cong E_\pm^{b_{t_0}^{f_0}}$. Mas, pela observação feita no parágrafo anterior,

$$E_\pm^{f_1} \cong E_\pm^{b_{t_0}^{f_1}}, \ \text{ e } \ E_\pm^{f_0} \cong E_\pm^{b_{t_0}^{f_0}},$$

logo 1. segue.
Passemos a mostrar 2. Para $f_1 = a_1(x)z + b_1(x)$ e $f_2 = a_2(x)z + b_2(x)$, temos que

$$f_1 \oplus f_2 = (a_1(x) \oplus a_2(x))z + b_1(x) \oplus b_2(x).$$

Dado $t_0 \in I^{f_1 \oplus f_2} \setminus \{1\}$, por definição temos que

$$a_1(x) \oplus a_2(x) + t_0(b_1(x) \oplus b_2(x)) = (a_1(x) + t_0 b_1(x)) \oplus (a_2(x) + t_0 b_2(x))$$

é invertível, daí segue que

$$a_1(x) + t_0 b_1(x) \ \text{ e } \ a_2(x) + t_0 b_2(x)$$

são invertíveis e que

$$t_0 \in I^{f_1} \cap I^{f_2}.$$

Assim, notando que

$$b_{t_0}^{f_1 \oplus f_2} = b_{t_0}^{f_1} \oplus b_{t_0}^{f_2},$$

o que temos de mostrar é que

$$(E_1 \oplus E_2)_\pm^{b_{t_0}^{f_1 \oplus f_2}} = (E_1)_\pm^{b_{t_0}^{f_1}} \oplus (E_2)_\pm^{b_{t_0}^{f_2}}.$$

Com efeito, ainda temos que

$$E_1 \oplus E_2 = ((E_1)_+^{b_{t_0}^{f_1}} \oplus (E_2)_+^{b_{t_0}^{f_2}}) \oplus ((E_1)_-^{b_{t_0}^{f_1}} \oplus (E_2)_-^{b_{t_0}^{f_2}}),$$

e tal decomposição satisfaz (i) e (ii) do lema 2.18 para $b_{t_0}^{f_1 \oplus f_2} = b_{t_0}^{f_1} \oplus b_{t_0}^{f_2}$, pois o mesmo é verdade para as decomposições $E_1 = (E_1)_+^{b_{t_0}^{f_1}} \oplus (E_1)_-^{b_{t_0}^{f_1}}$ e $E_2 = (E_2)_+^{b_{t_0}^{f_2}} \oplus (E_2)_-^{b_{t_0}^{f_2}}$. Portanto, 2. segue da unicidade de tal decomposição. □

Observação 2.19 Futuramente precisaremos dos dois fatos seguintes:

1. $E_+^z = 0$ e $E_-^z = E$. Com efeito, $b_{t_0}^z = t_0 \mathbb{1} \circ (\mathbb{1})^{-1} = t_0 \mathbb{1}$, donde vê-se que $0 < t_0 < 1$ é o único autovalor de $b_{t_0}^z$. Portanto, $E_-^z = E$ e $E_+^z = 0$.

2. $E_+^{\mathbb{1}} = E$ e $E_-^{\mathbb{1}} = 0$. Análogo ao anterior, usando agora que $b_{t_0}^{\mathbb{1}} = t_0^{-1}\mathbb{1}$, e $t_0^{-1} > 1$.

Demonstração do lema 2.18: Para cada x em X, denotemos por b_x a ação de b na fibra E_x e seja p_x o polinômio característico de b_x. Por hipótese, podemos fatorar p_x como

$$p_x = p_x^+ p_x^-,$$

onde p_x^+ tem suas raízes no exterior de S^1, e p_x^- tem suas raízes no interior de S^1.

Afirmação 2.20 *Temos decomposição b_x-invariante*

$$E_x = \mathrm{Im} p_x^+(b_x) \oplus \mathrm{Im} p_x^-(b_x),$$

com as restrições de b_x a $\mathrm{Im} p_x^+(b_x)$ e $\mathrm{Im} p_x^-(b_x)$ possuindo seus autovalores no interior e exterior, respectivamente, de S^1. Além disso, tal decomposição é única satisfazendo esta última propriedade.

Demonstração: Por simplicidade, omitiremos o sub-índice x (o qual está fixado). Como p é o polinômio característico de b, $p(b) = 0$, isto é, $p^+(b)p^-(b) = 0$, logo

$$\mathrm{Im} p^-(b) \subset \mathrm{Ker} p^+(b).$$

Da mesma forma

$$\mathrm{Im} p^+(b) \subset \mathrm{Ker} p^-(b).$$

Por outro lado, como p^+ e p^- são primos entre si, existem polinômios q_1 e q_2 tais que

$$p^+ q_1 + p^- q_2 = 1,$$

e logo

$$p^+(b)q_1(b) + p^-(b)q_2(b) = \mathbb{1}. \tag{2.14}$$

Dado v em $\mathrm{Ker} p^+(b)$, aplicando a v os dois membros de 2.14 obtemos

$$\begin{aligned} v &= p^-(b)q_2(b) \cdot v + q_1(b)p^+(b) \cdot v \\ &= p^-(b)q_2(b) \cdot v, \end{aligned}$$

mostrando que

$$\mathrm{Ker} p^+(b) \subset \mathrm{Im} p^-(b).$$

Da mesma forma,

$$\mathrm{Ker} p^-(b) \subset \mathrm{Im} p^+(b).$$

Portanto,

$$\mathrm{Im} p^+(b) = \mathrm{Ker} p^-(b), \quad \mathrm{Im} p^-(b) = \mathrm{Ker} p^+(b).$$

Ainda por 2.14, obtemos facilmente que

$$\mathrm{Im} p^+(b) + \mathrm{Im} p^-(b) = E_x,$$

e

$$\mathrm{Ker} p^-(b) \cap \mathrm{Ker} p^+(b) = \emptyset,$$

logo $E_x = \mathrm{Im}p^+(b) \oplus \mathrm{Im}p^-(b)$.
Agora, como b comuta com $p^{\pm}(b)$, os sub-espaços $\mathrm{Ker}p^{\pm}(b)$ são b-invariantes, e como $p^{\pm}$ anulam $b|_{\mathrm{Ker}p^{\pm}(b)}$, os autovalores dessas restrições são raízes de p^+ e p^-, respectivamente, logo $b|_{\mathrm{Ker}p^{\pm}(b)}$ têm seus autovalores no exterior e no interior, respectivamente, de S^1.
A unicidade segue a mesma linha do que foi feito antes. Isto demonstra a afirmação 2.20.

Então, definindo

$$E_+^b := \bigcup_{x\in X} \mathrm{Im}p_x^-(b_x)$$

e

$$E_-^b := \bigcup_{x\in X} \mathrm{Im}p_x^+(b_x),$$

basta mostrarmos que $E_{\pm}^b$ são sub-fibrados de E para concluirmos a demonstração da primeira parte do lema 2.18. Para isso, precisaremos do seguinte:

Afirmação 2.21 *Os polinômios $p_x^{\pm}$ variam continuamente com x, isto é, seus coeficientes são funções contínuas de x.*

Demonstração: Dado $x_0 \in X$, sejam

$$z_i^+, \quad i = 1, ..., s$$

$$z_j^-, \quad j = 1, ..., r$$

as raízes distintas de $p_{x_0}^+$ e $p_{x_0}^-$, respectivamente, com

$$m_i^+ = \text{ multiplicidade de } z_i^+,$$

$$m_j^- = \text{ multiplicidade de } z_j^-,$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar círculos pequenos C_i^+, $i = 1, ..., s$, com C_i^+ centrado em z_i^+, tais que todo polinômio de grau $m_1^+ + \cdots + m_s^+$ que possui, para cada i, m_i^+ raízes (contando multiplicidade) no interior de C_i^+, seja ε-próximo de $p_{x_0}^+$; analogamente, tomamos círculos C_j^-, $j = 1, ..., r$. Além disso, tomamos esses círculos tão pequenos de maneira que cada C_i^+ esteja no exterior de S^1, cada C_j^- esteja no interior de S^1 e

$$\mathrm{int}(C_i^+) \cap \mathrm{int}(C_j^+) = \mathrm{int}(C_i^-) \cap \mathrm{int}(C_j^-) = \emptyset.$$

Agora, pelo princípio do argumento,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i^+} \frac{p'_{x_0}(z)}{p_{x_0}(z)}dz = m_i^+ \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j^-} \frac{p'_{x_0}(z)}{p_{x_0}(z)}dz = m_j^-.$$

Logo, como a associação

$$x \mapsto p_x$$

é contínua (pois p_x é o polinômio característico de b_x), e também a associação

$$p \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{p'(z)}{p(z)}dz$$

é contínua a valores inteiros (logo, localmente constante), existe uma vizinhança U_{x_0} de x_0 tal que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i^+} \frac{p_x'(z)}{p_x(z)}dz = m_i^+ \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{C_j^-} \frac{p_x'(z)}{p_x(z)}dz = m_j^-$$

para todo $x \in U_{x_0}$.
Portanto, para $x \in U_{x_0}$, p_x^+ terá grau $m_1^+ + \cdots + m_s^+$ e terá, para cada i, m_i^+ raízes no interior de C_i^+, donde estará ε-próximo de $p_{x_0}^+$. Analogamente para p_x^-. Isto demonstra a afirmação 2.21.

Podemos agora mostrar que $E_\pm^b$ são localmente triviais. Como trata-se de uma questão local, podemos assumir que $E = \underline{\mathbb{C}}_X^n$.
Dado $x_0 \in X$, sejam

$$v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{C}^n$$

$$w_1, \cdots, w_l \in \mathbb{C}^n$$

tais que

$$p_{x_0}^+(b_{x_0}) \cdot v_1, \cdots, p_{x_0}^+(b_{x_0}) \cdot v_k$$

$$p_{x_0}^-(b_{x_0}) \cdot w_1, \cdots, p_{x_0}^-(b_{x_0}) \cdot w_l$$

sejam bases de $\mathrm{Im} p_{x_0}^+(b_{x_0})$ e $\mathrm{Im} p_{x_0}^-(b_{x_0})$, respectivamente. Então, pela afirmação 2.20,

$$p_{x_0}^+(b_{x_0}) \cdot v_1, \cdots, p_{x_0}^+(b_{x_0}) \cdot v_k, p_{x_0}^-(b_{x_0}) \cdot w_1, \cdots, p_{x_0}^-(b_{x_0}) \cdot w_l$$

é uma base de $\mathbb{C}^n$, daí, por continuidade (afirmação 2.21),

$$p_x^+(b_x) \cdot v_1, \cdots, p_x^+(b_x) \cdot v_k, p_x^-(b_x) \cdot w_1, \cdots, p_x^-(b_x) \cdot w_l$$

é ainda base de $\mathbb{C}^n$, para x numa vizinhança U de x_0.
Portanto, obtemos k-seções linearmente independentes

$$x \mapsto p_x^+(b_x) \cdot v_i, \quad i = 1, ..., k$$

de $E_-^b|_U$, e l-seções linearmente independentes

$$x \mapsto p_x^-(b_x) \cdot w_j, \quad j = 1, ..., l$$

de $E_+^b|_U$, mostrando as trivialidades locais de $E_\pm^b$.
Para finalizarmos a demonstração do lema 2.18, mostremos a invariância por homotopia. Podemos pensar numa homotopia entre b_0 e b_1 como um endomorfismo de fibrados

$$F : E \times I \to E \times I$$

e, por hipótese, F não possui autovalor em S^1. Logo, podemos considerar a decomposição

$$E \times I = (E \times I)^F_+ \oplus (E \times I)^F_-$$

dada pelo lema. Então, definindo

$$E^{(0)}_{\pm} := (E \times I)^F_{\pm}|_{X \times \{0\}}$$

e, de maneira análoga, $E^{(1)}_{\pm}$, é fácil ver que $E^{(0)}_{\pm}$ e $E^{(1)}_{\pm}$ satisfazem as mesmas propriedades que $E^{b_0}_{\pm}$ e $E^{b_1}_{\pm}$, respectivamente, logo, por unicidade, $E^{(0)}_{\pm} = E^{b_0}_{\pm}$, e $E^1_{\pm} = E^{b_1}_{\pm}$. Mas, pelo corolário 1.13,

$$(E \times I)^F_{\pm}|_{X \times \{0\}} \cong (E \times I)^F_{\pm}|_{X \times \{1\}},$$

portanto $E^{b_0}_{\pm} \cong E^{b_1}_{\pm}$. □

2.4 Demonstração do Teorema 2.8'

A demonstração do teorema 2.8' será em duas etapas: sobrejetividade e injetividade de μ'.

2.4.1 Sobrejetividade de μ'

Pela proposição 2.14, todo fibrado vetorial sobre $X \times S^2$ tem a forma $(E, z^{-m}q)$, onde q é uma função de colagem polinomial.
Fixado um inteiro $n \geq \text{gr}(q)$, de 2.10 e 2.11 temos sucessivamente

$$\begin{aligned}[E, z^{-m}q] &= [E, q] \cdot \pi_{S^2}^*([H^{-m}]) \\ &= \{[(n+1)E, L_E^n q] - \pi_X^*([nE])\} \cdot \pi_{S^2}^*([H^{-m}]).\end{aligned} \tag{2.15}$$

Também, devido a 2.13 podemos escrever

$$\begin{aligned}[(n+1)E, L_E^n q] &= \pi_X^*([\{(n+1)E\}_+^{L_E^n q}]) \\ &\quad + \pi_X^*([\{(n+1)E\}_-^{L_E^n q}]) \cdot \pi_{S^2}^*([H]).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Substituindo 2.16 em 2.15, e usando o fato de que $\pi_{S^2}^*$ distribui em relação ao produto, obtemos

$$\begin{aligned}[E, z^{-m}q] &= \pi_X^*([\{(n+1)E\}_+^{L_E^n q}]) \cdot \pi_{S^2}^*([H^{-m}]) \\ &\quad + \pi_X^*([\{(n+1)E\}_-^{L_E^n q}]) \cdot \pi_{S^2}^*([H]^{1-m}) \\ &\quad - \pi_X^*([nE]) \cdot \pi_{S^2}^*([H^{-m}]),\end{aligned}$$

que por sua vez é a imagem, via μ', de

$$[\{(n+1)E\}_+^{L_E^n q}] \otimes t^{-m} + [\{(n+1)E\}_-^{L_E^n q}] \otimes t^{1-m} - [nE] \otimes t^{-m}.$$

Portanto, como todo elemento de $K(X \times S^2)$ é da forma $[F] - [F']$, e μ' distribui em relação à soma, obtemos a sobrejetividade de μ'.

2.4.2 Injetividade de μ'

Construiremos uma inversa à esquerda ν para μ', que, consequentemente, será também inversa à direita. Para isso, primeiro definiremos ν no semi-grupo $\text{Vect}(X \times S^2)$, isto é, construiremos primeiro

$$\nu : \text{Vect}(X \times S^2) \to K(X) \otimes \frac{\mathbb{Z}[t]}{(t-1)^2}, \tag{2.17}$$

e então usaremos a propriedade universal de $K(X \times S^2)$ para estendermos 2.17 a $K(X \times S^2)$.

Passemos à definição de 2.17. Dado um fibrado vetorial F sobre $X \times S^2$, sejam E e f segundo a proposição 1.29. Então

$$F \cong (E, f).$$

Tomemos uma função de colagem de Laurent ℓ que seja homotópica a f via funções de colagem, e escrevamos ℓ como

$$\ell = z^{-m} q,$$

onde q é polinomial e $m \geq 0$. Observe que q e m *não* estão unicamente determinados por ℓ. Então, dado um inteiro $n \geq \mathrm{gr}(q)$ qualquer, definimos

$$\nu(E, f) = [\{(n+1)E\}_{-}^{L_E^n q}] \otimes (t-1) + [E] \otimes t^{-m}. \tag{2.18}$$

A demonstração estará concluída se mostrarmos o seguinte:

1. 2.18 está bem definida, isto é, independe das escolhas particulares de f, ℓ, m e n.

2. ν é aditiva. Logo, estende a um homomorfismo de grupos $\nu : K(X \times S^2) \to K(X) \otimes \mathbb{Z}[t]/(t-1)^2$.

3. $\nu \circ \mu' = \mathbb{1}$.

Afirmação 2.22 *2.18 não depende da particular escolha de n.*

Demonstração: Temos de mostrar que 2.18 não se altera se trocarmos n por $n+1$. Precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.23 *$L_E^{n+1} q \simeq \mathbb{1} \oplus L_E^n q$ via funções de colagem lineares. Consequentemente,*

$$((n+2)E, L_E^{n+1} q) \cong (E, \mathbb{1}) \oplus ((n+1)E, L_E^n q).$$

Demonstração: $L_E^{n+1} q$ e $\mathbb{1} \oplus L_E^n q$ têm representações matriciais

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & -z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & -z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & -z & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -z \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Uma homotopia entre $L_E^{n+1} q$ e $\mathbb{1} \oplus L_E^n q$, via funções de colagem lineares, pode ser então obtida multiplicando-se a primeira coluna da primeira matriz por tz e somando o resultado à segunda coluna. $\square$

Deste lema, de 1 e 2 da proposição 2.17 e da observação 2.19, temos sucessivamente

$$\begin{aligned}\{(n+2)E\}_-^{L_E^{n+1}q} &\cong \{E\oplus(n+1)E\}_-^{\mathbb{1}\oplus L_E^n q}\\ &\cong E_-^{\mathbb{1}}\oplus\{(n+1)E\}_-^{L_E^n q}\\ &= \{(n+1)E\}_-^{L_E^n q},\end{aligned}$$

mostrando que 2.18 independe da escolha de n. □

Afirmação 2.24 *2.18 não depende da particular escolha de m.*

Demonstração: Temos de mostrar que 2.18 independe de escrevermos ℓ como

$$z^{-m}q,$$

ou como

$$z^{-(m+1)}(zq).$$

Para tal, temos o seguinte lema cuja demonstração é análoga à do lema 2.23:

Lema 2.25 *$L_E^{n+1}(zq)\simeq z\oplus L_E^n q$ via funções de colagem lineares. Consequentemente,*

$$((n+2)E, L_E^{n+1}(zq))\cong(E,z)\oplus((n+1)E, L_E^n q).$$

Deste lema, de 1 e 2 da proposição 2.17 e da observação 2.19, obtemos que

$$\begin{aligned}\{(n+2)E\}_-^{L_E^{n+1}(zq)} &\cong E_-^z\oplus\{(n+1)E\}_-^{L_E^n q}\\ &= E\oplus\{(n+1)E\}_-^{L_E^n q},\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\nu(E,z^{-m-1}(zq)) &= [\{(n+1)E\}_-^{L_E^n q}]\otimes(t-1)+[E]\otimes(t-1)+[E]\otimes t^{-m-1}\\ &= [\{(n+1)E\}_-^{L_E^n q}]\otimes(t-1)+[E]\otimes(t^{-m}-t^{-m-1})+[E]\otimes t^{-m-1}\\ &= \nu(E,z^{-m}q),\end{aligned}$$

onde estamos usando que $(t-1)^2=0$ implica $t-1=t^{-m}-t^{-m-1}$, como facilmente se verifica. □

Afirmação 2.26 *2.18 não depende da particular escolha de ℓ.*

Demonstração: Se ℓ_0 e ℓ_1 são duas funções de colagem de Laurent homotópicas a f via funções de colagem, então elas são homotópicas entre si via funções de colagem. Pela proposição 2.14, tal homotopia pode ser tomada através de funções de laurent ℓ_t. Um simples argumento de compacidade mostra que existem $m,n\geq 0$ tais que, para todo t, podemos escrever

$$\ell_t = z^{-m}q_t,$$

com $\mathrm{gr}(q_t)\leq n$. Agora,

$$t\mapsto L_E^n q_t$$

é uma homotopia via funções de colagem lineares entre $L_E^n q_0$ e $L_E^n q_1$, logo,

$$\{(n+1)E\}_-^{L_E^n q_0}\cong\{(n+1)E\}_-^{L_E^n q_1},$$

e portanto $\nu(E,z^{-m}q_0)=\nu(E,z^{-m}q_1)$.

□

AFIRMAÇÃO 2.27 *2.18 não depende da particular escolha de f.*

Demonstração: Com efeito, pela proposição 1.29, uma outra tal $\widetilde{f}$ será homotópica a f, via funções de colagem. Logo, se ℓ e $\widetilde{\ell}$ são funções de colagem de Laurent homotópicas a f e $\widetilde{f}$, respectivamente, via funções de colagem, então elas são homotópicas entre si via funções de colagem, logo o resultado segue como na afirmação 2.26. □

AFIRMAÇÃO 2.28 *ν é aditiva.*

Demonstração: Dados fibrados vetoriais F_1 e F_2 sobre $X \times S^2$, sejam, na terminologia da proposição 1.29, $\varphi^1_\pm$, $\varphi^2_\pm$ isomorfismos normalizados correspondentes. Temos

$$(F_1 \oplus F_2)|_X = F_1|_X \oplus F_2|_X,$$

e note que

$$\varphi^1_\pm \oplus \varphi^2_\pm$$

são isomorfismos normalizados correspondentes a $F_1 \oplus F_2$. Logo, sendo f_1, f_2 e f as funções de colagem correspondentes a $\varphi^1_\pm$, $\varphi^2_\pm$ e $\varphi^1_\pm \oplus \varphi^2_\pm$, respectivamente, obtemos que

$$f = f_1 \oplus f_2.$$

Agora, se $\ell_1 = z^{-m}q_1$ e $\ell_2 = z^{-m}q_2$ são funções de colagem de Laurent homotópicas a f_1 e f_2, respectivamente, via funções de colagem, então $\ell = z^{-m}(q_1 \oplus q_2)$ é uma função de colagem de Laurent homotópica a $f_1 \oplus f_2$, via funções de colagem. Portanto, é só usarmos a aditividade de $q \mapsto L^n_E q$, e 2 da proposição 2.17, para concluirmos a aditividade de ν. □

AFIRMAÇÃO 2.29 $\nu \circ \mu' = \mathbb{1}$.

Demonstração: Dados $E \in \mathrm{vect}(X)$, e $m \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned} \mu'([E] \otimes t^{-m}) &= [\pi^*_X(E) \otimes \pi^*_{S^2}(H^{-m})] \\ &= [(E, \mathbb{1}) \otimes \pi^*_{S^2}(H^{-m})] \\ &= [E, z^{-m}], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nu[E, z^{-m}] &= [E^{\mathbb{1}}_-] \otimes (t-1) + [E] \otimes t^{-m} \\ &= [E] \otimes t^{-m}, \end{aligned}$$

logo

$$(\nu \circ \mu')([E] \otimes t^{-m}) = [E] \otimes t^{-m}.$$

Em particular, $\nu \circ \mu'$ é a identidade quando restrito aos elementos da forma $[E] \otimes 1$ e $[E] \otimes t$. Mas esses elementos geram (como grupo) $K(X) \otimes \mathbb{Z}[t]/(t-1)^2$, uma vez que os $[E]$ geram $K(X)$, e $\{1, t^{-1} = 2 - t\}$ gera $\mathbb{Z}[t]/(t-1)^2$. □

Capítulo 3

Propriedades Cohomológicas

3.1 Os funtores $\widetilde{K}(X)$ e $\widetilde{K}(X,A)$

DEFINIÇÃO 3.1 *Dado um espaço topológico compacto X com um ponto base x_0 fixado, definimos sua K-teoria* reduzida *por*

$$\widetilde{K}(X) := \mathrm{Ker}\{K(X) \xrightarrow{i^*} K(\{x_0\})\},$$

onde i é a inclusão do ponto base x_0. Mais geralmente, dado um par de espaços compactos (X,A), com $\emptyset \neq A \subset X$, definimos sua K-teoria relativa *por*

$$\widetilde{K}(X,A) := \widetilde{K}(X/A),$$

considerando X/A com ponto base A/A.

Em geral, falaremos em $\widetilde{K}(X)$ sem fazer menção ao ponto base, ficando subentendida a existência do mesmo.

EXEMPLOS 3.2 .

1. Se X é contrátil, ou $X = S^1$, então $\widetilde{K}(X) = 0$, sendo isto consequência direta da definição de $\widetilde{K}$ e de todo fibrado vetorial sobre X ser trivial.

2. Para $X = S^2$, pelo corolário 2.9 podemos identificar $K(S^2)$ com $\mathbb{Z}[t]/(t-1)^2$ através de $t \mapsto [H]$. Via esta identificação e a identificação $K(\{x_0\}) = \mathbb{Z}$, o homomorfismo $K(S^2) \to K(\{x_0\})$ é dado por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[t]/(t-1)^2 & \to & \mathbb{Z} \\ t & \mapsto & 1, \end{array}$$

cujo núcleo é o ideal $(t-1)/(t-1)^2$.

Portanto, como grupo $\widetilde{K}(S^2) \cong \mathbb{Z}$, sendo gerado por $[H] - [\underline{\mathbb{C}}^1]$, e como anel o produto em $\widetilde{K}(S^2)$ é identicamente nulo.

Observação 3.3 .

1. Pelo lema 2.3, todo elemento de $K(X)$ é da forma $[E] - [\underline{\mathbb{C}}^n]$. Logo, como $[E] - [\underline{\mathbb{C}}^n] \in \operatorname{Ker} i^*$ se e somente se $\dim E_{x_0} = n$, obtemos que

$$\widetilde{K}(X) = \{[E] - [\underline{\mathbb{C}}^n] \in K(X);\ \dim E_{x_0} = n\}. \tag{3.1}$$

Em particular, $\widetilde{K}(X)$ *não depende de* x_0, se X é conexo.

2. Pela definição de $\widetilde{K}(X)$, a sequência

$$0 \to \widetilde{K}(X) \hookrightarrow K(X) \xrightarrow{i^*} K(\{x_0\}) \to 0$$

é exata (para a definição de sequência exata, ver apêndice B). Agora, sendo r a aplicação $r : X \to \{x_0\}$, temos que $r \circ i = \mathbb{1}$, daí $i^* r^* = \mathbb{1}$. Logo, a sequência acima é exata split, com splitting (identificando $K(\{x_0\})$ com $\mathbb{Z}$)

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cong} & K(X) \\ (a,1) & \mapsto & a+1, \end{array} \tag{3.2}$$

onde o segundo 1 é o elemento identidade de $K(X)$.

Uma aplicação entre pares

$$f : (X,A) \to (Y,B)$$

é uma aplicação $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subset B$[1]. Uma tal aplicação induz uma aplicação nos quocientes

$$f : X/A \to Y/B,$$

com $f(A/A) = B/B$. Obtemos assim um diagrama comutativo de aplicações entre espaços e o diagrama induzido nas K-teorias:

$$\begin{tikzcd} X/A \arrow[r, "f"] & Y/B \\ A/A \arrow[u, "i"] \arrow[r] & B/B \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K(Y/B) \arrow[r, "f^*"] & K(X/A) \\ K(B/B) \arrow[u, "i^*"] \arrow[r] & K(A/A) \arrow[u, "i^*"'] \end{tikzcd}$$

Da comutatividade do segundo diagrama segue que $f^*(\widetilde{K}(Y/B)) \subset \widetilde{K}(X/A)$, donde f^* se restringe a um homomorfismo

$$f^* : \widetilde{K}(Y,B) \to \widetilde{K}(X,A).$$

Com esta definição de homomorfismo induzido, a associação $(X,A) \mapsto \widetilde{K}(X,A)$ é um funtor homotópico contra-variante, isto é,

[1] quando $A = x_0$ e $B = y_0$, estaremos falando em aplicação entre espaços com pontos base fixados.

1. Dadas $f : (X, A) \to (Y, B)$, e $g : (Y, B) \to (Z, C)$, então $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
2. $(\mathbb{1}_{(X,A)})^* = \mathbb{1}_{\widetilde{K}(X,A)}$.
3. Se $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ são homotópicas via aplicações entre pares $f_t : (X, A) \to (Y, B)$, então $f_0^* = f_1^*$.

Isto segue diretamente da proposição 2.6.

Comentários 3.4 *Dizemos que dois fibrados vetoriais E e F sobre um espaço X conexo são estavelmente equivalentes, e denotamos $E \sim F$, se existirem k e ℓ tais que*

$$E \oplus \underline{\mathbb{C}}^k \cong F \oplus \underline{\mathbb{C}}^\ell$$

(compare com o comentário 2.4). Trata-se de uma relação de equivalência em $\mathrm{Vect}(X)$*, a qual é preservada pela operação de soma direta.*

Do lema 2.3, obtemos que dois elementos $[E] - [\underline{\mathbb{C}}^{\dim E}]$, $[F] - [\underline{\mathbb{C}}^{\dim F}]$ de $\widetilde{K}(X)$ são iguais se e somente se $E \sim F$. Disto, segue que

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Vect}(X)/\sim & \longrightarrow & \widetilde{K}(X) \\ \text{classe de } E & \longmapsto & [E] - [\underline{\mathbb{C}}^{\dim E}] \end{array}$$

está bem definido e é um isomorfismo de semi-grupos. Em particular, $(\mathrm{Vect}(X)/\sim, \oplus)$ *é um grupo.*

3.2 Sequência Exata de um Par

Quando falarmos de um par (X, A), consideraremos ambos X e A munidos de um mesmo ponto base, de modo que a inclusão e a aplicação quociente

$$A \overset{i}{\hookrightarrow} X \overset{q}{\to} X/A$$

induzirão homomorfismos

$$\widetilde{K}(X, A) \overset{q^*}{\to} \widetilde{K}(X) \overset{i^*}{\to} \widetilde{K}(A).$$

Definiremos agora algumas operações geométricas entre espaços topológicos com pontos bases que serão essenciais para o que segue. Para as operações envolvendo a esfera S^n, pensaremos em S^n como sendo o espaço quociente $I^n/\partial I^n$, com ponto base $\partial I^n/\partial I^n$.

Sejam então (X, x_0) e (Y, y_0) espaços com pontos bases.

União por um ponto. É o sub-espaço

$$X \vee Y := X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$$

do produto cartesiano $X \times Y$. Equivalentemente, é o espaço obtido da união disjunta $X \sqcup Y$ identificando-se x_0 com y_0.

Produto Smash. É o quociente

$$X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$$

do produto cartesiano pela união por um ponto.

Suspensão Reduzida. É o produto smash

$$\Sigma X := S^1 \wedge X.$$

Denotamos por Σ^n o n-ésimo iterado de Σ:

$$\Sigma^n X := S^1 \wedge (S^1 \wedge (\cdots \wedge (S^1 \wedge X)) \cdots).$$

Sempre consideraremos os espaços $X \times Y$, $X \vee Y$, $X \wedge Y$ com os pontos bases (x_0, y_0), (x_0, y_0), $X \vee Y / X \vee Y$, respectivamente.

As operações acima possuem as seguintes propriedades (válidas pelo menos quando os espaços envolvidos forem compactos, que é o nosso caso), as quais são de verificações diretas:

(P1) $\Sigma(S^n) = S^{n+1}$.

(P2) $X \wedge (Y \wedge Z) = (X \wedge Y) \wedge Z$. Daí, por **(P1)**,

$$\Sigma^n X = S^n \wedge X$$

$$S^n \wedge S^m = S^{n+m}.$$

(P3) $\Sigma^n(X \vee Y) = \Sigma^n X \vee \Sigma^n Y$.

Note que dadas aplicações entre espaços com pontos bases $f : X \to Y$, $g : Z \to W$, elas induzem de maneira natural aplicações

$$f \vee g : X \vee Z \to Y \vee W$$

$$f \wedge g : X \wedge Z \to Y \wedge W$$

$$\Sigma^n f : \Sigma^n X \to \Sigma^n Y$$

que preservam pontos bases.

Definição 3.5 *Para $n \geq 0$, definimos*

$$\widetilde{K}^{-n}(X) := \widetilde{K}(\Sigma^n X)$$

$$\widetilde{K}^{-n}(X, A) = \widetilde{K}(\Sigma^n (X/A)),$$

com a convenção de que $\Sigma^0 X = X$.

Dado um par (X,A), as aplicações $A \overset{i}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{q} X/A$ induzem aplicações

$$\Sigma^n A \hookrightarrow \Sigma^n X \to \Sigma^n(X/A)$$

e portanto homomorfismos

$$\widetilde{K}^{-n}(X,A) \to \widetilde{K}^{-n}(X) \to \widetilde{K}^{-n}(A), \tag{3.3}$$

para cada $n \geq 0$.

Lema 3.6 *A sequência 3.3 é exata, isto é,* $\mathrm{Ker}\,(\Sigma^n i)^* = \mathrm{Im}\,(\Sigma^n q)^*$.

Demonstração: Ver [1]. □

Proposição 3.7 *Fixado um par (X,A), existem, para cada $n \geq 1$, homomorfismos $\delta_n : \widetilde{K}^{-n}(A) \to \widetilde{K}^{-(n-1)}(X,A)$, ditos de conexão, que tornam a sequência*

$$\begin{aligned} \cdots \to \widetilde{K}^{-2}(A) &\overset{\delta_2}{\to} \widetilde{K}^{-1}(X,A) \to \widetilde{K}^{-1}(X) \\ &\to \widetilde{K}^{-1}(A) \overset{\delta_1}{\to} \widetilde{K}^{0}(X,A) \to \widetilde{K}^{0}(X) \to \widetilde{K}^{0}(A) \end{aligned} \tag{3.4}$$

exata. Ainda, os δ_n's são naturais, isto é, dada aplicação $f : (X,A) \to (Y,B)$, o seguinte diagrama induzido comuta

$$\begin{tikzcd} \widetilde{K}^{-n}(A) \arrow[r, "\delta_n"] & \widetilde{K}^{-(n-1)}(X,A) \\ \widetilde{K}^{-n}(B) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[u] & \widetilde{K}^{-(n-1)}(Y,B) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Demonstração: Ver [1]. □

Corolário 3.8 *Temos isomorfismos*

$$(\Sigma^n i_X)^* \oplus (\Sigma^n i_Y)^* : \widetilde{K}^{-n}(X \vee Y) \to \widetilde{K}^{-n}(X) \oplus \widetilde{K}^{-n}(Y),$$

onde i_X e i_Y são as inclusões canônicas $X, Y \hookrightarrow X \vee Y$.

Demonstração: Primeiramente, via a identificação $\Sigma^n(X \vee Y) = \Sigma^n X \vee \Sigma^n Y$, as aplicações $\Sigma^n i_X$ e $\Sigma^n i_Y$ correspondem às inclusões $\Sigma^n X, \Sigma^n Y \hookrightarrow \Sigma^n X \vee \Sigma^n Y$, e as aplicações $\Sigma^n q_X$, $\Sigma^n q_Y$, onde q_X e q_Y são as aplicações quocientes $X \vee Y \to (X \vee Y)/X = Y$, $X \vee Y \to (X \vee Y)/Y = X$, correspondem às aplicações quocientes

$$\Sigma^n X \vee \Sigma^n Y \to (\Sigma^n X \vee \Sigma^n Y)/\Sigma^n X = \Sigma^n Y$$

$$\Sigma^n X \vee \Sigma^n Y \to (\Sigma^n X \vee \Sigma^n Y)/\Sigma^n Y = \Sigma^n X.$$

Agora, note que $\Sigma^n q_Y$ é uma inversa a esquerda para $\Sigma^n i_X$, logo $(\Sigma^n i_X)^* : \widetilde{K}^{-n}(X \vee Y) \to \widetilde{K}^{-n}(X)$ é sobrejetiva, tendo $(\Sigma^n q_Y)^*$ como uma inversa a direita. Usando esta informação na sequência exata 3.4 aplicada ao par $(X \vee Y, X)$, e usando a identificação $(X \vee Y)/X = Y$, obtemos uma sequência exata split

$$0 \to \widetilde{K}^{-n}(Y) \overset{(\Sigma^n q_X)^*}{\to} \widetilde{K}^{-n}(X \vee Y) \overset{(\Sigma^n i_X)^*}{\to} \widetilde{K}^{-n}(X) \to 0$$

com splitting $(\Sigma^n i_X)^* \oplus (\Sigma^n i_Y)^* : \widetilde{K}^{-n}(X \vee Y) \overset{\cong}{\to} \widetilde{K}^{-n}(X) \oplus \widetilde{K}^{-n}(Y)$.

□

COROLÁRIO 3.9 *A sequência a seguir é exata split*

$$0 \to \widetilde{K}(X \wedge Y) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}(X \times Y) \xrightarrow{i_X^* \oplus i_Y^*} \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \to 0 \tag{3.5}$$

com splitting

$$q^* + \pi_X^* + \pi_Y^* : \widetilde{K}(X \wedge Y) \oplus \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \xrightarrow{\cong} \widetilde{K}(X \times Y),$$

onde i_X, i_Y *são as inclusões de* X *e* Y *em* $X \times Y$ *como sendo os sub-espaços* $X \times \{y_0\}$ *e* $\{x_0\} \times Y$*, respectivamente,* π_X, π_Y *são as projeções* $X \times Y \to X, Y$*, e* $q : X \times Y \to X \wedge Y$ *é a aplicação quociente.*

Demonstração: Usando os splittings do corolário anterior, os cinco últimos termos da sequência exata do par $(X \times Y, X \vee Y)$ equivalem à sequência exata

$$\begin{aligned} \widetilde{K}^{-1}(X \times Y) \quad & \xrightarrow{(\Sigma i_X)^* \oplus (\Sigma i_Y)^*} \quad \widetilde{K}^{-1}(X) \oplus \widetilde{K}^{-1}(Y) \\ & \longrightarrow \quad \widetilde{K}^0(X \wedge Y) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}^0(X \times Y) \xrightarrow{i_X^* \oplus i_Y^*} \widetilde{K}^0(X) \oplus \widetilde{K}^0(Y). \end{aligned}$$

Logo, como $\pi_X^* + \pi_Y^* : \widetilde{K}^0(X) \oplus \widetilde{K}^0(Y) \to \widetilde{K}^0(X \times Y)$, e $(\Sigma \pi_X)^* + (\Sigma \pi_Y)^* : \widetilde{K}^{-1}(X) \oplus \widetilde{K}^{-1}(Y) \to \widetilde{K}^{-1}(X \times Y)$ são inversas à direita de $i_X^* \oplus i_Y^*$, e $(\Sigma i_X)^* \oplus (\Sigma i_Y)^*$, respectivamente, obtemos, assim como na demonstração do corolário anterior, uma sequência exata split $0 \to \widetilde{K}(X \wedge Y) \to \widetilde{K}(X \times Y) \to \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \to 0$, com o splitting dado no enunciado.

□

3.3 Produto Externo Reduzido e Periodicidade de Bott

Dados espaços compactos X, Y com pontos bases, não é difícil ver que o produto externo $\mu : K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$ se restringe a um homomorfismo

$$\mu' : \widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \times Y).$$

Veremos que este homomorfismo "é" de fato um homomorfismo

$$\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \wedge Y)$$

"equivalente" à μ.

Seja $q^* : \widetilde{K}(X \wedge Y) \to \widetilde{K}(X \times Y)$ a induzida da aplicação quociente.

LEMA 3.10 Im $\mu' \subset$ Im q^*.

Demonstração: Como a sequência 3.5 é exata, Im $q^* = \mathrm{Ker}\ (i_X^* \oplus i_Y^*)$, logo basta mostrarmos que $i_X^*\mu' = 0$, e $i_Y^*\mu' = 0$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} i_X^*\mu'(a \otimes b) &= i_X^*(\pi_X^*(a)\pi_Y^*(b)) \\ &= (\pi_X i_X)^*(a)(\pi_Y i_Y)^*(b) = 0, \end{aligned}$$

pois $\pi_Y i_X : X \hookrightarrow X \times Y \to Y$ se fatora em $X \hookrightarrow X \times Y \to \{y_0\} \hookrightarrow Y$, e $\widetilde{K}(\{y_0\}) = 0$. De maneira análoga, obtemos $i_Y^*\mu' = 0$. □

Agora, como a sequência 3.5 é exata, $q^* : \widetilde{K}(X \wedge Y) \to \mathrm{Im}\ q^* \subset \widetilde{K}(X \times Y)$ é isomorfismo, daí, pelo lema anterior, está bem definido o homomorfismo

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu} : \widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) &\to \widetilde{K}(X \wedge Y) \\ \widetilde{\mu} &:= (q^*)^{-1}\mu', \end{aligned} \tag{3.6}$$

o qual chamamos de *produto externo reduzido*. O lema a seguir estabelece a "equivalência" entre μ e $\widetilde{\mu}$.

Lema 3.11 $\widetilde{\mu} : \widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \wedge Y)$ *é isomorfismo se e somente se* $\mu : K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$ *o for.*

Demonstração: Aplicando duas vezes o isomorfismo 3.2, usando a distributividade do produto tensorial relativamente à soma direta, e a identificaçõ canônica $A \otimes \mathbb{Z} \cong A$, obtemos um isomorfismo

$$\begin{aligned} (\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y)) \oplus \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \oplus \mathbb{Z} &\xrightarrow{\cong} K(X) \otimes K(Y) \\ (a \otimes b, a, b, 1) &\longmapsto (a+1) \otimes (b+1). \end{aligned}$$

Também, compondo o isomorfismo $\widetilde{K}(X \times Y) \oplus \mathbb{Z} \to K(X \times Y)$ com o splitting $q^* + \pi_X^* + \pi_Y^*$ (corolário 3.9), obtemos um isomorfismo

$$\begin{aligned} \widetilde{K}(X \wedge Y) \oplus \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \oplus \mathbb{Z} &\xrightarrow{\cong} K(X \times Y) \\ (c, a, b, 1) &\longmapsto q^*(c) + \pi_X^*(a) + \pi_Y^*(b) + 1. \end{aligned}$$

Obtemos assim um diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} K(X) \otimes K(Y) & \xleftarrow{\cong} & (\tilde{K}(X) \otimes \tilde{K}(Y)) & \oplus & \tilde{K}(X) & \oplus & \tilde{K}(Y) & \oplus\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow & & \| & & \| & \| \\ K(X \times Y) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{K}(X \wedge Y) & \oplus & \tilde{K}(X) & \oplus & \tilde{K}(Y) & \oplus\mathbb{Z} \end{array}$$

que é claramente comutativo. Isto mostra que $\widetilde{\mu}$ é isomorfismo se e somente se μ o for. □

Este lema nos permite reescrever o isomorfismo de periodicidade (teorema 2.8) em termos da K-teoria reduzida:

TEOREMA 3.12 $\widetilde{\mu} : \widetilde{K}(S^2) \otimes \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(S^2 \wedge X) = \widetilde{K}^{-2}(X)$ *é isomorfismo.*

Lembremos, do exemplo 3.2, que, como grupo, $\widetilde{K}(S^2)$ é livre gerado por $[H] - [\underline{\mathbb{C}}^1]$. Assim, o teorema acima fica equivalente a

TEOREMA 3.13 *Temos isomorfismo de grupos*

$$\begin{array}{rcl} \beta : \widetilde{K}^0(X) & \longrightarrow & \widetilde{K}^{-2}(X) \\ \beta(a) & = & \widetilde{\mu}([H] - [\underline{\mathbb{C}}^1], a). \end{array}$$

β é dito o isomorfismo de periodicidade.

Observemos que os isomorfismos β são naturais, isto é, eles comutam com os homomorfismos induzidos por aplicações entre espaços [2]. Isto segue do mesmo ser verdade para o produto externo.

COROLÁRIO 3.14 *Para todo $k \geq 0$, os seguintes produtos externo e externo reduzido*

$$\widetilde{\mu} : \widetilde{K}(S^{2k}) \otimes \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(S^{2k} \wedge X)$$

$$\mu : K(S^{2k}) \otimes K(X) \to K(S^{2k} \times X)$$

são isomorfismos.

Demonstração: Via a identificação $S^m \wedge S^n = S^{m+n}$, não é difícil notar que $\widetilde{\mu} : \widetilde{K}(S^{2k}) \otimes \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(S^{2k} \wedge X)$ é obtido iterando-se k vezes o isomorfismo $\widetilde{\mu} : \widetilde{K}(S^2) \otimes \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(S^2 \wedge X)$, sendo portanto um isomorfismo. Agora, que μ é também isomorfismo, segue do lema 3.11. $\square$

COROLÁRIO 3.15 *Seja $k > 0$. Então:*

(i) $\widetilde{K}(S^{2k-1}) = 0$.

(ii) *Como grupo, $\widetilde{K}(S^{2k}) \cong \mathbb{Z}$, e como anel $\widetilde{K}(S^{2k})$ tem produto trivial (isto é, $ab = 0\ \forall a, b \in \widetilde{K}(S^{2k})$).*

(iii) $K(S^{2k}) \cong \mathbb{Z}[t]/(t^2)$.

[2] já usamos esta terminologia antes quando falamos dos homomorfismos de conexão (proposição 3.7).

Demonstração: (i) Como $\Sigma^2 S^1 = S^3$, $\Sigma^2 S^3 = S^5$, ... , o isomorfismo de periodicidade β nos dá $\widetilde{K}(S^1) \cong \widetilde{K}(S^3) \cong \cdots$. Mas, como visto no exemplo 3.2, $\widetilde{K}(S^1) = 0$.

(ii) Iterando-se k vezes o isomorfismo do teorema 3.12 obtemos isomorfismo

$$\widetilde{K}(S^{2k}) \cong \widetilde{K}(S^2) \otimes \cdots \otimes \widetilde{K}(S^2). \tag{3.7}$$

Agora, vimos no exemplo 3.2 que o produto em $\widetilde{K}(S^2)$ é trivial e, como grupo, $\widetilde{K}(S^2) \cong \mathbb{Z}$, daí o mesmo é verdade para o segundo membro de 3.7.

(iii) Seja α um gerador do grupo $\widetilde{K}(S^{2k}) \cong \mathbb{Z}$, e definamos o homomorfismo de anéis $\mathbb{Z}[t] \to K(S^{2k})$ tal que $t \mapsto \alpha$. Como $\alpha^2 = 0$, este homomorfismo desce a um homomorfismo

$$\iota : \mathbb{Z}[t]/(t^2) \to K(S^{2k})$$

o qual mostraremos ser um isomorfismo. Para a sobrejetividade, dado $[F] - [\underline{\mathbb{C}}^m]$ em $K(S^{2k})$, sendo ℓ a dimensão de F temos que $[F] - [\underline{\mathbb{C}}^\ell] \in \widetilde{K}(S^{2k})$ e

$$[F] - [\underline{\mathbb{C}}^m] = ([F] - [\underline{\mathbb{C}}^\ell]) \pm [\underline{\mathbb{C}}^{|\ell - m|}],$$

de modo que se r é tal que $[F] - [\underline{\mathbb{C}}^\ell] = r\alpha$, então $[F] - [\underline{\mathbb{C}}^m] = \iota(rt \pm |\ell - m|)$.

Para a injetividade de ι, sejam $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $\iota(rt+s) = 0$, isto é, $r\alpha + s[\underline{\mathbb{C}}^1] = 0$. Supondo, sem perda de generalidade, que $r \geq 0$ e $s \leq 0$, e sendo E tal que $\alpha = [E] - [\underline{\mathbb{C}}^n]$ (logo n é a dimensão de E), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= r([E] - [\underline{\mathbb{C}}^n]) + s[\underline{\mathbb{C}}^1] \\ &= [rE] - [\underline{\mathbb{C}}^{rn+|s|}], \end{aligned}$$

daí, pelo lema 2.3, dim $rE = rn + |s|$, e consequentemente $s = 0$. Logo, $r\alpha = 0$ e portanto $r = 0$.

□

Usaremos agora o isomorfismo de periodicidade β para transformar a sequência exata 3.4 de um par (X, A) numa *sequência exata cíclica.*

Com efeito, podemos conectar os extremos da sequência exata

$$\widetilde{K}^{-1}(X, A) \to \widetilde{K}^{-1}(X) \to \cdots \to \widetilde{K}^0(X) \to \widetilde{K}^0(A)$$

através do homomorfismo $\eta : \widetilde{K}^0(A) \to \widetilde{K}^{-1}(X, A)$ obtido compondo-se o isomorfismo $\beta : \widetilde{K}^0(A) \to \widetilde{K}^{-2}(A)$ com o homomorfismo de conexão $\delta : \widetilde{K}^{-2}(A) \to \widetilde{K}^{-1}(X, A)$. Obtemos assim uma sequência cíclica

$$\begin{tikzcd} \widetilde{K}^0(X,A) \arrow[r] & \widetilde{K}^0(X) \arrow[r] & \widetilde{K}^0(A) \arrow[d, "\eta"] \\ \widetilde{K}^{-1}(A) \arrow[u] & \widetilde{K}^{-1}(X) \arrow[l] & \widetilde{K}^{-1}(X,A) \arrow[l] \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

que é exata, exceto possivelmente em $\widetilde{K}^0(A)$ e $\widetilde{K}^{-1}(X,A)$. Para ver que ela é também exata em $\widetilde{K}^0(A)$ e $\widetilde{K}^{-1}(X,A)$, consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}^{-2}(X) \arrow[r] & \widetilde{K}^{-2}(A) \arrow[r, "\delta"] & \widetilde{K}^{-1}(X,A) \arrow[r] & \widetilde{K}^{-1}(X) \\
\widetilde{K}^0(X) \arrow[r] \arrow[u, "\beta_X"] & \widetilde{K}^0(A) \arrow[u, "\beta_A"] \arrow[ur, "\eta"] & &
\end{tikzcd}$$

Como β_A é isomorfismo, Ker $\eta = \beta_A^{-1}(\text{Ker }\delta)$, e como Ker $\delta = \text{Im }(\Sigma^2 i)^*$, obtemos Ker $\eta = \text{Im }(\beta_A^{-1} \circ (\Sigma^2 i)^*)$. Da comutatividade do diagrama acima, $\beta_A^{-1} \circ (\Sigma^2 i)^* = i^* \circ \beta_X^{-1}$, e como β_X^{-1} é isomorfismo, $\text{Im }(i^* \circ \beta_X^{-1}) = \text{Im }i^*$. Portanto, Ker $\eta = \text{Im }i^*$ e 3.8 é exata em $\widetilde{K}^0(A)$. Para a exatidão em $\widetilde{K}^{-1}(X,A)$, temos que Im $\eta = \text{Im }\delta$, uma vez que β_A é isomorfismo, e Im $\delta = \text{Ker }(\Sigma^1 q)^*$, portanto 3.8 é exata em $\widetilde{K}^{-1}(X,A)$.

Chamamos 3.8 de *a sequência exata cíclica do par* (X,A).

3.4 Produtos Relativos

Dados pares (X,A) e (Y,B), observe que temos uma identificação canônica

$$X/A \wedge Y/B = X \times Y/(A \times Y \cup X \times Y),$$

de modo que podemos escrever o produto externo $\widetilde{\mu} : \widetilde{K}(X/A) \otimes \widetilde{K}(Y/B) \to \widetilde{K}(X/A \wedge Y/B)$ na forma relativa

$$\widetilde{\mu} : \widetilde{K}(X,A) \otimes \widetilde{K}(Y,B) \to \widetilde{K}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B). \tag{3.9}$$

Se fizermos $Y = X$ em 3.9, e o compusermos com

$$\Delta^* : \widetilde{K}(X \times X, A \times X \cup X \times A) \to \widetilde{K}(X, A \cup B),$$

onde $\Delta : (X, A \cup B) \to (X \times X, A \times X \cup X \times B)$ é a aplicação diagonal $x \mapsto (x,x)$, obtemos um *produto relativo*

$$\widetilde{K}(X,A) \otimes \widetilde{K}(X,B) \to \widetilde{K}(X, A \cup B), \tag{3.10}$$

o qual ainda denotamos por $\widetilde{\mu}$.

Note que se fizermos $B = A$ em 3.10 estaremos re-obtendo o produto usual de $\widetilde{K}(X,A)$. Também, fazendo $B =$ ponto base de A, 3.10 assume a forma

$$\widetilde{K}(X,A) \otimes \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(X,A).$$

Exemplo 3.16 Façamos $X = S^k$, $A = D^+$, $B = D^-$ em 3.10, e consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}(S^k, D^+) \otimes \widetilde{K}(S^k, D^-) \arrow[r] \arrow[d, "q_+^* \otimes q_-^*"] & \widetilde{K}(S^k, D^+ \cup D^-) = 0 \arrow[d, "q^*"] \\
\widetilde{K}(S^k) \otimes \widetilde{K}(S^k) \arrow[r, "\cdot"] & \widetilde{K}(S^k)
\end{tikzcd}$$

onde q_+, q_- e q são as respectivas aplicações quocientes, e $\cdot$ é o produto usual de $\widetilde{K}(S^k)$. O canto superior direito é nulo pois $D^+ \cup D^- = S^k$. Pode-se mostrar que q_+ e q_- são equivalências de homotopia ([5]), daí $q_+^* \otimes q_-^*$ é isomorfismo e consequentemente o produto em $\widetilde{K}(S^k)$ é trivial (compare com o corolário 3.15).

Mais geralmente, se X é tal que se expressa como a união de dois sub-espaços contráteis A e B, aplicando o diagrama acima a X, A, e B, e usando o fato de que quocientar por um sub-espaço contrátil induz isomorfismo nos $\widetilde{K}$'s (ver [1]), obtemos que o produto em $\widetilde{K}(X)$ é trivial.

Capítulo 4

Relações com Grupos de Homotopia

Como mencionado na introdução desta dissertação, o teorema de periodicidade de Bott tem suas origens na teoria de grupos de homotopia, estabelecendo um resultado sobre a periodicidade dos grupos de homotopia dos grupos clássicos.

De fato, sob o ponto de vista da proposição 1.24 a teoria de fibrados vetoriais "é equivalente" à teoria de homotopia, logo a K-teoria deve possuir uma interpretação em termos desta última. Neste capítulo estabeleceremos tal interpretação, mostrando como obter o resultado original de Bott a partir do nosso conhecimento de $\widetilde{K}(S^k)$.

4.1 Preliminares sobre Grupos de Homotopia

Dado um espaço topológico X com ponto base x_0, definimos $\pi_n(X, x_0)$, ou simplesmente $\pi_n(X)$, como sendo o conjunto das classes de homotopia de aplicações

$$f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0),$$

onde as homotopias devem ser via aplicações entre pares.

Identificando $I^n/\partial I^n$ com S^n, podemos pensar em $\pi_n(X, x_0)$ como constituído pelas classes de homotopia de aplicações

$$f : (S^n, p_0) \to (X, x_0),$$

onde p_0 é um ponto fixado em S^n.

Dadas $f, g : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, definimos $f * g : (I^n, \partial T^n) \to (X, x_0)$ por

$$(f * g)(t_1, ..., t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, ..., t_n), & \text{se} \quad t_1 \in [0, 1/2] \\ g(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n), & \text{se} \quad t_1 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Pode-se mostrar ([5]) que esta operação está bem definida nas classes de homotopia, e que $\pi_n(X, x_0)$ munido desta operação é um grupo, dito o *n-ésimo grupo de homotopia de X, relativamente a x_0*. O elemento identidade é representado pela aplicação constantemente x_0, a qual denotamos por c_{x_0}. Também, a inversa de f é representada por $\overline{f}(t_1, ..., t_n) := f(1 - t_1, t_2, ..., t_n)$.

DEFINIÇÃO 4.1 *Um grupo topológico é um espaço topológico G munido de uma operação contínua $\cdot : G \times G \to G$ que o torna um grupo, e que, como tal, pedimos ainda a continuidade da operação de inversão $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$.*

Sempre consideraremos G com o elemento identidade e como ponto base.

EXEMPLO 4.2 O grupo linear geral $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(n)$, com a topologia herdada de $\mathbb{C}^{n^2}$.

A estrutura de grupo de um grupo topológico G induz naturalmente uma estrutura de grupo no conjunto $[S^n, G]$ das classes de homotopia livres de aplicações $S^n \to G$ (isto é, aplicações e homotopias que não necessariamente preservam pontos bases) definindo-se

$$(f \cdot g)(p) := f(p) \cdot g(p),$$

onde o segundo $\cdot$ é o produto em G. O elemento neutro de $([S^n, G], \cdot)$ é a aplicação c_e, e a inversa de f é $f^{-1}(p) := f(p)^{-1}$.

Esquecendo-se pontos bases, obtemos uma aplicação canônica

$$\pi_n(G, e) \to [S^n, G]. \tag{4.1}$$

PROPOSIÇÃO 4.3 *4.1 é um homomorfismo injetivo de grupos. Se G for conexo por caminhos, 4.1 será sobrejetiva, logo um isomorfismo de grupos.*

Demonstração: Mostremos primeiro que é homomorfismo, isto é, que dadas $f, g \in \pi_n(G)$, então $f * g$ é (livremente) homotópica a $f \cdot g$. Com efeito, de $f * c_e \simeq f$ e $c_e * g \simeq g$ obtemos $f \cdot g \simeq (f * c_e) \cdot (c_e * g)$. Agora, como

$$(f * c_e)(t_1, ..., t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, ..., t_n), & \text{se} \quad t_1 \in [0, 1/2] \\ e, & \text{se} \quad t_1 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$(c_e * g)(t_1, ..., t_n) = \begin{cases} e, & \text{se} \quad t_1 \in [0, 1/2] \\ g(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n), & \text{se} \quad t_1 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

e e é o elemento identidade de G, obtemos que

$$\begin{aligned} (f * c_e) \cdot (c_e * g)(t_1, ..., t_n) &= \begin{cases} f(2t_1, t_2, ..., t_n), & \text{se} \quad t_1 \in [0, 1/2] \\ g(2t_1 - 1, t_2, ..., t_n), & \text{se} \quad t_1 \in [1/2, 1] \end{cases} \\ &= f * g. \end{aligned}$$

Para a injetividade, seja $f \in \pi_n(G)$ tal que f é livremente homotópica a c_e, e mostremos que podemos tomar como homotopia uma que preserva pontos bases. Com efeito, se f_t é homotopia com $f_0 = f$ e $f_1 = c_e$, então f'_t definida por $f'_t(p) := f_t(p) \cdot f_t(p_0)^{-1}$ é ainda homotopia entre f e c_e, e $f'_t(p_0) = e$ para todo t.

Se G for conexo por caminhos, e $f \in [S^n, G]$, seja γ_t um caminho em G partindo de e e chegando a $f(p_0)^{-1}$, e definamos f_t por $f_t(p) := f(p) \cdot \gamma_t$. Então f_t é uma homotopia entre $f_0 = f$ e f_1, sendo que agora f_1 define uma classe em $\pi_n(G)$ pois $f_1(p_0) = f(p_0) \cdot \gamma_1 = f(p_0) \cdot f(p_0)^{-1} = e$. □

Estamos particulamente interessados em $G = \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)$, cuja definição será dada a seguir. A proposição acima tem a virtude de podermos usar a praticidade do produto de $[S^n, \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)]$ em $\pi_n(\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty))$ e de não nos preocuparmos com pontos bases.

4.2 Relação com $\widetilde{K}(S^n)$

Para cada ℓ e k, com $\ell > k$, a associação

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{(\ell-k)\times(\ell-k)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix}$$

define uma inclusão

$$\iota_\ell^k : \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(k) \hookrightarrow \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\ell).$$

Definimos então $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)$ como sendo a união da filtração

$$\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(1) \subset \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(2) \subset \cdots \subset \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(k) \subset \cdots$$

Como espaço topológico, $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)$ tem a topologia fraca da união, isto é, um sub-conjunto $F \subset \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)$ é fechado se e somente se $F \cap \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(k)$ for fechado para todo k; e como grupo, $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)$ é o limite direto dos grupos $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(k)$. Trata-se então de um grupo topológico conexo por caminhos, como diretamente se verifica.

Com estas considerações, passamos agora ao nosso principal objetivo, que é o de estabelecer um isomorfismo de grupos

$$\Theta : \pi_{n-1}(\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)) \to \widetilde{K}(S^n). \tag{4.2}$$

Para isso, seja $f : S^{n-1} \to \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)$. Como $f(S^{n-1})$ é compacto em $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)$, existe k suficientemente grande tal que $f(S^{n-1}) \subset \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(k)$, daí podemos formar o fibrado $(\mathbb{C}^k, f)$ de dimensão k sobre S^n (seção 1.2, capítulo 1). Definimos

$$\Theta(f) := [\mathbb{C}^k, f] - [\underline{\mathbb{C}}^k].$$

Teorema 4.4 *Θ está bem definida, e é um isomorfismo de grupos.*

Corolário 4.5

$$\pi_n(\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & se \quad n \text{ é ímpar} \\ 0, & se \quad n \text{ é par} \end{cases}$$

Demonstração do Teorema 4.4:
1. Se $\ell > k$, então $\Theta(\iota_\ell^k \circ f) = \Theta(f)$: De fato, da definição de ι_ℓ^k, e da proposição 1.20,

$$\begin{aligned} \Theta(\iota_\ell^k \circ f) &= [\mathbb{C}^{\ell-k} \oplus \mathbb{C}^k, \mathbb{1} \oplus f] - [\underline{\mathbb{C}}^\ell] \\ &= [\mathbb{C}^{\ell-k}, \mathbb{1}] + [\mathbb{C}^k, f] - [\underline{\mathbb{C}}^k] - [\underline{\mathbb{C}}^{\ell-k}] \\ &= [\mathbb{C}^k, f] - [\underline{\mathbb{C}}^k] \\ &= \Theta(f). \end{aligned}$$

2. Se $f, g : S^{n-1} \to \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)$ são homotópicas, então $\Theta(f) = \Theta(g)$: Sendo $h : S^{n-1} \times I \to \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)$ uma tal homotopia, como $h(S^{n-1} \times I) \subset \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)$ é compacto, existe r grande tal que $h(S^{n-1} \times I) \subset \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(r)$. Logo, a homotopia se passa em $\mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(r)$, e sabemos que $(\mathbb{C}^r, f) \cong (\mathbb{C}^r, g)$ se $f \simeq g$.

De 1 e 2 obtemos que Θ está bem definida.

3. $\Theta(f \cdot g) = \Theta(f) + \Theta(g)$: Seja k tal que $f(S^{n-1}), g(S^{n-1}) \subset \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(k)$, e consideremos

$$\iota^k_{2k} \circ f,\ \iota^k_{2k} \circ g : S^{n-1} \to \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(2k).$$

Por definição,

$$\iota^k_{2k} \circ f = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{k\times k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & f \end{pmatrix},$$

a qual é homotópica a

$$\begin{pmatrix} f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_{k\times k} \end{pmatrix}$$

através da homotopia

$$[0, \pi/2] \ni t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{k\times k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Logo, $(\iota^k_{2k} \circ f) \cdot (\iota^k_{2k} \circ g)$ é homotópica a

$$\begin{pmatrix} f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_{k\times k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{k\times k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & g \end{pmatrix}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \Theta(f \cdot g) &= \Theta((\iota^k_{2k} \circ f) \cdot (\iota^k_{2k} \circ g)) \\ &= [\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^k, f \oplus g] - [\underline{\mathbb{C}}^{2k}] \\ &= \Theta(f) + \Theta(g). \end{aligned}$$

4. Θ é injetiva: Seja $f : S^{n-1} \to \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(k) \subset \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(\infty)$ e suponha que $\Theta(f) = 0$, isto é, que $[\mathbb{C}^k, f] = [\underline{\mathbb{C}}^k]$. Então, de acordo com o lema 2.3, existe N tal que

$$(\mathbb{C}^k, f) \oplus \underline{\mathbb{C}}^N \cong \underline{\mathbb{C}}^k \oplus \underline{\mathbb{C}}^N,$$

ou, equivalentemente,

$$(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^k, \mathbb{1} \oplus f) \cong (\mathbb{C}^{N+k}, \mathbb{1}).$$

Mas agora, a proposição 1.24 implica $\iota^k_{N+k} \circ f = \mathbb{1} \oplus f$ ser homotópica a $\mathbb{1}_{(N+k)\times(N+k)}$.

5. Θ é sobrejetiva: É consequência imediata da proposição 1.24. □

Capítulo 5

Aplicações

5.1 Operações de Adams

Nesta seção, construiremos homomorfismos

$$\psi^k : K(X) \to K(X),\ \ k = 0, 1, 2, \cdots ,$$

ditos *operações de Adams*, os quais darão a $K(X)$ estrutura suficiente para provarmos, na próxima seção, o teorema de Adams sobre o invariante de Hopf. Para tal, faremos uso (sem demonstração) de um resultado não trivial, conhecido como o *"Splitting Principle"*[1].

TEOREMA 5.1 *Para cada espaço topológico compacto X, existem homomorfismos $\psi^k : K(X) \to K(X)$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, satisfazendo:*

(i) (*Naturalidade*) *Dada aplicação $f : X \to Y$, tem-se $\psi^k \circ f^* = f^* \circ \psi^k$.*

(ii) *Se L é um fibrado de linha, $\psi^k([L]) = [L]^k$.*

(iii) $\psi^k \circ \psi^\ell = \psi^{k\ell}$.

(iv) *Se p é primo, $\psi^p(\alpha) \equiv \alpha^p \pmod p$. Isto é, $\psi^p(\alpha) - \alpha^p = p\beta$, para algum $b \in K(X)$.*

Demonstração:

Começaremos definindo $\psi^k : \mathrm{Vect}(X) \to K(X)$ através das propriedades da potência exterior de fibrados vetoriais e do seguinte fato algébrico geral:

LEMA 5.2 *Todo polinômio simétrico em n variáveis, a coeficientes inteiros e grau k, pode ser expresso de maneira única como um polinômio, a coeficientes inteiros, nas funções simétricas elementares $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$, onde*

$$\sigma_\ell(t_1, \cdots, t_n) := \sum_{i_1 < \cdots < i_\ell} t_{i_1} \cdots t_{i_\ell}.$$

[1] Embora seja o teorema de periodicidade, o qual foi completamente demonstrado neste trabalho, o resultado realmente difícil necessário para as aplicações que pretendemos.

Demonstração: Ver, por exemplo, [7]. □

Observe que se já temos construído um tal ψ^k satisfazendo (ii), então, se E é uma soma de fibrados de linha $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$,

$$\psi^k(E) = [L_1]^k + \cdots + [L_n]^k. \tag{5.1}$$

Seja, pelo lema acima, $s_k \in \mathbb{Z}[t_1, \cdots, t_k]$ o único polinômio tal que

$$t_1^k + \cdots + t_n^k = s_k(\sigma_1, \cdots, \sigma_k).$$

Usando uma fórmula recursiva para os s_k's, não é difícil mostrar que s_k *não depende de* n. Podemos então reescrever 5.1 como

$$\begin{aligned} \psi^k(E) &= [L_1]^k + \cdots + [L_n]^k \\ &= s_k(\sigma_1([L_1], \cdots, [L_n]), \cdots, \sigma_k([L_1], \cdots, [L_n])), \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$. Agora, usando indutivamente o isomorfismo $\Lambda^\ell(E_1 \oplus E_2) \cong \bigoplus_i (\Lambda^i(E_1) \otimes \Lambda^{\ell-i}(E_2))$, obtemos, para $E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$,

$$\begin{aligned} [\Lambda^\ell(E)] &= [\bigoplus_{i_1 + \cdots + i_n = \ell} (\Lambda^{i_1}(L_1) \otimes \cdots \otimes \Lambda^{i_n}(L_n))] \\ &= [\bigoplus_{j_1 < \cdots < j_\ell} (L_{j_1} \otimes \cdots \otimes L_{j_\ell})] \\ &= \sigma_\ell([L_1], \cdots, [L_n]), \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde, para a segunda igualdade, estamos usando que $\Lambda^0(L_i) = \underline{\mathbb{C}}^1$, $\Lambda^1(L_i) = L_i$, e $\Lambda^r(L_i) = 0$, se $r > 1$.

Portanto, de 5.2 e 5.3, somos levados a definir $\psi^k : \mathrm{Vect}(X) \to K(X)$ por

$$\psi^k(E) = s_k(\Lambda^1(E), \cdots, \Lambda^k(E)), \tag{5.4}$$

e assim sendo, ψ^k satisfaz 5.1 se E se decompõe como uma soma de fibrados de linha. Observe que ψ^k satisfaz (i) do teorema 5.1, isto é, dada $f : X \to Y$, tem-se

$$\psi^k \circ f^* = f^* \circ \psi^k, \tag{5.5}$$

onde a f^* do primeiro membro é $f^* : \mathrm{Vect}(Y) \to \mathrm{Vect}(X)$ e a do segundo membro é $f^* : K(Y) \to K(X)$.

Agora, para mostrarmos que os ψ^k's se estendem a homomorfismos $K(X) \to K(X)$ satisfazendo (i) a (iv), invocaremos o *Splitting Principle*:

LEMA 5.3 *Dada uma quantidade finita $E_1, \cdots, E_r$ de fibrados vetoriais sobre um espaço topológico compacto X, existe um espaço compacto $F(E_1, \cdots, E_r)$ e uma aplicação $\pi : F(E_1, \cdots, E_r) \to X$, tal que, para cada i, $\pi^*(E_i)$ se decompõe como uma soma de fibrados de linha, e $\pi^* : K(X) \to K(F(E_1, \cdots, E_r))$ é injetiva.*

Demonstração: Ver [4].

□

1. ψ^k é aditiva: Dados E e $E' \in \mathrm{Vect}(X)$, consideremos $F = F(E, E')$ e $\pi : F \to X$ como no splitting principle, e sejam $L_1, \cdots, L_r$, $L'_1, \cdots, L'_s \in \mathrm{Vect}(F)$ fibrados de linha tais que

$$\pi^*(E) = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$$

$$\pi^*(E') = L'_1 \oplus \cdots \oplus L'_s.$$

Por 5.5, $\pi^*(\psi^k(E \oplus E')) = \psi^k(\pi^*(E \oplus E'))$, e como $\pi^*(E \oplus E') = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r \oplus L'_1 \oplus \cdots \oplus L'_s$, obtemos por 5.1 que

$$\begin{aligned} \pi^*(\psi^k(E \oplus E')) &= [L_1]^k + \cdots + [L_r]^k + [L'_1]^k + \cdots + [L'_s]^k \\ &= \psi^k(\pi^*(E)) + \psi^k(\pi^*(E')). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Aplicando novamente 5.5 à 5.6, e usando que π^* é aditiva, obtemos $\pi^*(\psi^k(E \oplus E')) = \pi^*(\psi^k(E) + \psi^k(E'))$, e portanto $\psi^k(E \oplus E') = \psi^k(E) + \psi^k(E')$, pois π^* é injetiva.

De 1 segue que ψ^k se estende a um homomorfismo de grupos

$$\psi^k : K(X) \to K(X),$$

o qual satisfaz (i) e (ii) (pois, em $\mathrm{Vect}(X)$ ela satisfaz 5.5 e 5.1).

2. ψ^k é um homomorfismo de anéis e satisfaz (iii): É uma verificação análoga à feita em 1, usando-se 5.1 e o splitting principle.

3. Se p é primo, $\psi^p(\alpha) \equiv \alpha^p \pmod p$: Note que o polinômio

$$f = (t_1 + \cdots + t_n)^p - (t_1^p + \cdots + t_n^p),$$

com p primo, é simétrico de grau p, e tem todos os coeficientes divisíveis por p, logo existe polinômio $g \in \mathbb{Z}[t_1, \cdots, t_n]$ tal que

$$f = p \cdot g(\sigma_1, \cdots, \sigma_p). \tag{5.7}$$

Agora, dado $[E] \in K(X)$, sejam F e π como no splitting principle, com $\pi^*(E) = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$. Como em 1, temos

$$\pi^*(\psi^p([E])) = [L_1]^p + \cdots + [L_n]^p,$$

e pela identidade 5.7,

$$\begin{aligned} [L_1]^p + \cdots + [L_n]^p &= ([L_1] + \cdots + [L_n])^p - p \cdot g(\sigma_1, \cdots, \sigma_p) \\ &= (\pi^*([E]))^p - p \cdot g(\sigma_1, \cdots, \sigma_p). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Mas, $\sigma_\ell([L_1], \cdots, [L_n]) = [\Lambda^\ell(E)]$, logo

$$\begin{aligned} \pi^*(\psi^p([E])) &= (\pi^*([E]))^p - p \cdot g([\Lambda^1(\pi^*(E))], \cdots, [\Lambda^p(\pi^*(E))]) \\ &= \pi^*\{[E]^p - p \cdot g([\Lambda^1(E)], \cdots, [\Lambda^p(E)])\}, \end{aligned}$$

e portanto $\psi^p([E]) = [E]^p - p \cdot g([\Lambda^1(E)], \cdots, [\Lambda^p(E)]) \equiv [E]^p \pmod p$.

□

Observe que, devido a (i), os homomorfismos ψ^k se restringem a homomorfismos

$$\psi^k : \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(X).$$

Lema 5.4 *ψ^k comuta com o produto externo reduzido $\widetilde{\mu} : \widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \wedge Y)$, isto é,*

$$\psi^k(\widetilde{\mu}(\alpha \otimes \beta)) = \widetilde{\mu}(\psi^k(\alpha) \otimes \psi^k(\beta)).$$

Demonstração: Lembremos que $\tilde{\mu} = (q^*)^{-1}\mu'$. Queremos então mostrar a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\psi^k \otimes \psi^k"'] & \widetilde{K}(X \times Y) \arrow[r, "(q^*)^{-1}"] \arrow[d, "\psi^k"'] & \widetilde{K}(X \wedge Y) \arrow[d, "\psi^k"'] \\
\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \arrow[r, "\mu'"] & \widetilde{K}(X \times Y) \arrow[r, "(q^*)^{-1}"] & \widetilde{K}(X \wedge Y)
\end{tikzcd}$$

A comutatividade do quadrado da direita segue direto da naturalidade de ψ^k. Também da naturalidade de ψ^k segue a comutatividade do quadrado da esquerda: $\psi^k(\mu'(\alpha \otimes \beta)) = \psi^k(\pi_X^*(\alpha)\pi_Y^*(\beta)) = \psi^k(\pi_X^*(\alpha))\psi^k(\pi_Y^*(\beta)) = \pi_X^*(\psi^k(\alpha))\pi_Y^*(\psi^k(\beta)) = \mu'(\psi^k(\alpha) \otimes \psi^k(\beta))$. □

Proposição 5.5 *$\psi^k : \widetilde{K}(S^{2n}) \to \widetilde{K}(S^{2n})$ é multiplicação por k^n.*

Demonstração: Para $n = 1$, sabemos que, como grupo, $\widetilde{K}(S^2)$ é gerado por $[H] - [\underline{\mathbb{C}}^1]$. Basta então mostrarmos que $\psi^k([H] - [\underline{\mathbb{C}}^1]) = k([H] - [\underline{\mathbb{C}}^1])$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\psi^k([H] - [\underline{\mathbb{C}}^1]) &= [H]^k - [\underline{\mathbb{C}}^1]^k, \qquad \text{por (ii)} \\
&= (([H] - [\underline{\mathbb{C}}^1]) + [\underline{\mathbb{C}}^1])^k - [\underline{\mathbb{C}}^1] \\
&= k([H] - [\underline{\mathbb{C}}^1]), \qquad \text{pois } ([H] - [\underline{\mathbb{C}}^1])^i = 0 \text{ se } i \geq 2
\end{aligned}$$

Para $n > 1$, basta usarmos o isomorfismo $\widetilde{\mu} : \widetilde{K}(S^2) \otimes \widetilde{K}(S^{2n-2}) \xrightarrow{\cong} \widetilde{K}(S^2 \wedge S^{2n-2}) = \widetilde{K}(S^{2n})$ e o lema anterior para obtermos o resultado por indução. □

5.2 O Invariante de Hopf

Nesta seção, para cada aplicação

$$f : S^{4n-1} \to S^{2n}$$

definiremos o seu *invariante de Hopf*, o qual trata-se de um número inteiro $H(f)$, e provaremos um teorema de Adams que diz que, se f tem invariante de Hopf ímpar, então $n = 1, 2$, ou 4.

Dada uma aplicação

$$f : S^{4n-1} \to S^{2n},$$

denotemos por C_f o espaço topológico

$$D^{4n} \cup_f S^{2n}$$

que é o espaço quociente da união disjunta $D^{4n} \sqcup S^{2n}$ pela relação que identifica $x \in S^{4n-1} = \partial D^{4n}$ com $f(x) \in S^{2n}$. Isto é, C_f é obtido "colando-se" um disco D^{4n} em S^{2n} através de f.

Observe que temos inclusão canônica $S^{2n} \hookrightarrow C_f$, e uma identificação canônica

$$C_f/S^{2n} = S^{4n}.$$

Logo, aplicando a sequência exata cíclica 3.8 ao par (C_f, S^{2n}), e lembrando que $\widetilde{K}^{-1}(S^{4n}) = \widetilde{K}^{-1}(S^{2n}) = 0$, obtemos uma sequência exata curta

$$0 \to \widetilde{K}(S^{4n}) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}(C_f) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(S^{2n}) \to 0 \tag{5.9}$$

Fixemos geradores γ_{4n} e γ_{2n} dos grupos $\widetilde{K}(S^{4n})$, e $\widetilde{K}(S^{2n})$, respectivamente, e seja

$$\alpha = q^*(\gamma_{4n}).$$

Como i^* é sobrejetiva, existe $\beta \in \widetilde{K}(C_f)$ tal que

$$i^*(\beta) = \gamma_{2n}.$$

Por outro lado, como o produto em $\widetilde{K}(S^{2n})$ é trivial, obtemos que $i^*(\beta^2) = 0$, logo, da exatidão de 5.9, existe um *único* $h \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\beta^2 = h\alpha. \tag{5.10}$$

LEMA 5.6 *h não depende da escolha de β.*

Demonstração: Seja β' tal que $i^*(\beta') = \gamma_{2n}$. De $i^*(\beta') = i^*(\beta)$, obtemos $\beta' - \beta \in \text{Ker } i^* = \text{Im } q^*$, e como a imagem de q^* é gerada (como grupo) por $q^*(\gamma_{4n}) = \alpha$, segue que existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta' = \beta + \ell\alpha$. Logo,

$$\begin{aligned} (\beta')^2 &= \beta^2 + 2\ell\alpha\beta + \ell^2\alpha^2 \\ &= h\alpha + 2\ell\alpha\beta, \end{aligned}$$

pois, como $\gamma_{4n}^2 = 0$, então $\alpha^2 = q^*(\gamma_{4n}^2) = 0$.

Mostremos então que $\alpha\beta = 0$. Como o produto em $\widetilde{K}(S^{2n})$ é trivial, $i^*(\alpha\beta) = 0$, logo existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha\beta = k\alpha$ $(*)$. Multiplicando $(*)$ por β, obtemos $0 = h\alpha^2 = \alpha\beta^2 = k\alpha\beta$, e substituindo em $(*)$, chegamos a $k^2\alpha = 0$. Mas isto implica $k = 0$, e portanto $\alpha\beta = 0$, pois, como γ_{4n} e γ_{2n} são bases aditivas de $\widetilde{K}(S^{4n})$ e $\widetilde{K}(S^{2n})$, respectivamente, e 5.9 é exata, $\{\alpha, \beta\}$ é base aditiva de $\widetilde{K}(C_f)$. $\square$

Definição 5.7 *Fixados geradores $\gamma_{2n} \in \widetilde{K}(S^{2n})$, e $\gamma_{4n} \in \widetilde{K}(S^{4n})$, definimos o invariante de Hopf de f por*

$$H(f) := h,$$

onde h é o inteiro em 5.10. De acordo com o lema 5.6, $H(f)$ está bem definido.

Podemos agora enunciar e provar o *teorema de Adams:*

Teorema 5.8 *Se $H(f) \equiv 1 \pmod 2$, então $n = 1, 2,$ ou 4.*

Demonstração: Suponhamos que $H(f) \equiv 1 \pmod 2$. Sejam α, β, como antes, e ψ^k's as operações de Adams. Lembremos que, como observado na demonstração do lema 5.6, α, β formam uma base aditiva de $\widetilde{K}(C_f)$.

Pela proposição 5.5,

$$\psi^k(\gamma_{4n}) = k^{2n}\gamma_{4n},$$

logo, usando a naturalidade de ψ^k, obtemos que $\psi^k(\alpha) = \psi^k(q^*(\gamma_{4n})) = q^*(k^{2n}\gamma_{4n}) = k^{2n}\alpha$, isto é,

$$\psi^k(\alpha) = k^{2n}\alpha.$$

Também, de $i^*(\psi^k(\beta)) = \psi^k(i^*(\beta)) = \psi^k(\gamma_{2n}) = k^n\gamma_{2n} = i^*(k^n\beta)$, obtemos $\psi^k(\beta) - k^n\beta \in \text{Ker } i^* = \text{Im } q^*$, logo existe $\mu_k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\psi^k(\beta) = k^n\beta + \mu_k\alpha. \tag{5.11}$$

Consequentemente,

$$\psi^k\psi^\ell(\beta) = \psi^k(\ell^n\beta + \mu_\ell\alpha) = k^n\ell^n\beta + (k^{2n}\mu_\ell + \ell^n\mu_k)\alpha. \tag{5.12}$$

Mas, por (iii) do teorema 5.1,

$$\psi^k \circ \psi^\ell = \psi^{k\ell} = \psi^\ell \circ \psi^k,$$

logo podemos trocar k por ℓ (e vice-versa) em 5.12, e assim obtermos a seguinte igualdade de números inteiros

$$k^{2n}\mu_\ell + \ell^n\mu_k = \ell^{2n}\mu_k + k^n\mu_\ell, \quad \text{isto é,} \quad k^n(k^n - 1)\mu_\ell = \ell^n(\ell^n - 1)\mu_k. \tag{5.13}$$

Fazendo $k = 2$ em 5.11, obtemos que

$$\psi^2(\beta) \equiv \mu_2\alpha \pmod 2.$$

Por outro lado, pela propriedade (iv) das operações de Adams, e pela definição de h,

$$\psi^2(\beta) \equiv H(f)\alpha \pmod 2.$$

Daí $\mu_2 \equiv H(f)$ (mod 2), e como estamos supondo $H(f)$ ímpar, obtemos que μ_2 é ímpar. Usando esta informação na igualdade

$$2^n(2^n - 1)\mu_3 = 3^n(3^n - 1)\mu_2,$$

obtida fazendo $k = 2$ e ,$\ell = 3$ em 5.13, concluímos que 2^n deve dividir $3^n - 1$.

O resultado estará então concluído se mostrarmos o seguinte lema de teoria dos números:

LEMA 5.9 *Se* 2^n *divide* $3^n - 1$ *então* $n = 1, 2$ *ou* 4.

Demonstração: Se n é ímpar, então, de $3 \equiv -1 \pmod 4$, obtemos

$$3^n \equiv (-1)^n = -1 \pmod 4,$$

isto é, $4 | 3^n + 1$, logo, como $\mathrm{mdc}(3^n - 1, 3^n + 1) = 2$, obtemos que 2 é a maior potência de 2 dividindo $3^n - 1$. Portanto, se n é ímpar, $n = 1$.

Seja n par e escrevamos $n = 2^k m$, onde m é ímpar e $k \geq 1$. Como a maior potência de 2 em $3^m - 1$ é 2, e a maior potência de 2 em $3^m + 1$ é 4 (pois $4|3^m + 1$ e, como m é ímpar, $3^m \equiv 3 \pmod 8$), obtemos que, para $k = 1$, a maior potência de 2 em

$$3^{2m} - 1 = (3^m - 1)(3^m + 1)$$

é $8 = 2^{1+2}$. Para $k \geq 1$, da igualdade

$$3^{2^k m} - 1 = (3^{2^{k-1}m} - 1)(3^{2^{k-1}m} + 1),$$

e do fato que

$$\mathrm{mdc}(3^{2^{k-1}m} - 1, 3^{2^{k-1}m} + 1) = 2,$$

segue, por indução em $k \geq 1$, que a maior potência de 2 em $3^{2^k m} - 1$ é 2^{k+2}. Portanto, queremos que $2^k m = n \leq k + 2$, logo $k \leq 2$ e $m = 1$. Reciprocamente, se $n = 2$ ou 4, então $2^n | 3^n - 1$.

$\square$

5.3 Álgebras de Divisão, Paralelizabilidade de Esferas, e H-Espaços

Como uma aplicação inusitada do teorema de Adams sobre o invariante de Hopf, apresentaremos a demonstração de dois belos resultados matemáticos.

- Uma estrutura de *álgebra de divisão* em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação bilinear

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

tal que, para cada $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$, as transformações lineares

$$x \mapsto ax \text{ , e } x \mapsto xa$$

são invertíveis. Observe que esta condição é equivalente a

$$x, y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0.$$

Também, para nossa definição, suporemos a existência de um elemento identidade bilateral $e \in \mathbb{R}^n$ (isto é, tal que $ex = xe = x$, $\forall x$), embora esta restrição não seja necessária ([4]).

Como exemplos, temos as seguintes estruturas de álgebra de divisão em $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4$, e $\mathbb{R}^8$, respectivamente:

$$\mathbb{R}: \textit{ números reais}$$

$$\mathbb{C}: \textit{ números complexos}$$

$$\mathbb{H}: \textit{ Quatérnions de Hamilton}$$

$$\mathbb{O}: \textit{ Números de Cayley, ou Octônions}$$

Mencionamos apenas de passagem que o produto em $\mathbb{H}$ não é comutativo, e o de $\mathbb{O}$ não é sequer associativo.

• Dizemos que uma esfera S^n é *paralelizável*, se existir nela n campos (contínuos) de vetores tangentes, tais que, em cada ponto, estes campos sejam linearmente independentes.

Por exemplo, as esferas S^1, S^3 e S^7 são paralelizáveis, sendo isto consequência das estruturas multiplicativas de $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, e $\mathbb{O}$, respectivamente.

Nosso objetivo será demonstrar o teorema a seguir. Sua demonstração encontra-se concluída na sub-seção adiante.

TEOREMA 5.10 *Se $\mathbb{R}^n$ for uma álgebra de divisão, ou se S^{n-1} for paralelizável, então $n = 1, 2, 4$ ou 8.*

5.3.1 H-Espaços

Uma estrutura de *espaço de Hopf*, ou H-*espaço*, num espaço topológico X, é uma função contínua

$$X \times X \to X$$

possuindo um elemento identidade bilateral $e \in X$ (isto é, tal que $(e, x) \mapsto x$, e $(x, e) \mapsto x$, $\forall x$).

LEMA 5.11 *Se $\mathbb{R}^n$ for uma álgebra de divisão, ou se S^{n-1} for paralelizável, então S^{n-1} é um* H-*espaço.*

Demonstração: Dada uma estrutura de álgebra de divisão em $\mathbb{R}^n$, com identidade e, uma estrutura de H-espaço em S^{n-1} pode ser dada por

$$(x, y) \mapsto xy/|xy|,$$

possuindo $e/|e|$ como identidade bilateral.

Suponhamos agora que S^{n-1} é paralelizável, e sejam $v_1, \cdots, v_{n-1}$, $n-1$ campos tangentes linearmente independentes. Aplicando o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, podemos supor que, para cada $x \in S^{n-1}$, $v_1(x), \cdots, v_{n-1}(x)$ são ortonormais. Fixemos um ponto qualquer $e \in S^{n-1}$. Então, denotando por α_x, para cada $x \in S^{n-1}$, a única transformação linear de $\mathbb{R}^n$ que manda, na ordem dada, a base $e, v_1(e), \cdots, v_{n-1}(e)$ na base $x, v_1(x), \cdots, v_{n-1}(x)$, temos que α_x é uma transformação ortogonal que depende continuamente de x, logo está bem definida e é contínua a função $S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, $(x, y) \mapsto \alpha_x(y)$. Agora, para esta função, e é uma identidade bilateral.

□

LEMA 5.12 *Se $n > 0$ é par, então S^n não é um* H*-espaço.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que exista estrutura de H-espaço

$$f : S^n \times S^n \to S^n$$

com identidade bilateral e. Sejam i_1 e i_2 as inclusões de S^n em $S^n \times S^n$ como sendo os subespaços $S^n \times \{e\}$ e $\{e\} \times S^n$, de modo que a condição de identidade bilateral de e equivale à

$$f \circ i_1 = \mathbb{1} \ , \ \text{e} \ \ f \circ i_2 = \mathbb{1},$$

e sejam π_1 e π_2 as projeções $S^n \times S^n \to S^n$ no primeiro e segundo fator, respectivamente.

Seja $\gamma \in \widetilde{K}(S^n)$ um gerador, de modo que (corolário 3.15)

$$K(S^n) = \mathbb{Z}[\gamma]/(\gamma^2).$$

Sendo $\alpha = \pi_1^*(\gamma)$, e $\beta = \pi_2^*(\gamma)$, do isomorfismo $\mu : K(S^n) \otimes K(S^n) \xrightarrow{\cong} K(S^n \times S^n)$ (corolário 3.14) obtemos que

$$K(S^n \times S^n) = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^2, \beta^2).$$

Observemos que $i_1^*(\alpha) = \gamma$, e $i_1^*(\beta) = 0$, pois $i_1^* \circ \pi_1^* = \mathbb{1}$, e $(i_1^* \circ \pi_2^*)|_{\widetilde{K}(S^n)}$ se fatora em $\widetilde{K}(S^n) \to \widetilde{K}(\{e\}) = 0 \to \widetilde{K}(S^n)$.

Olhemos então para

$$f^* : \mathbb{Z}[\gamma]/(\gamma^2) \to \mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^2, \beta^2).$$

Como $\{1, \alpha, \beta, \alpha\beta\}$ é base aditiva de $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]/(\alpha^2, \beta^2)$, podemos expressar $f^*(\gamma)$ unicamente como

$$f^*(\gamma) = m_0 + m_1\alpha + m_2\beta + m_3\alpha\beta.$$

Afirmamos que $m_0 = 0, m_1 = m_2 = 1$, e isto levará a um absurdo pois, como $\gamma^2 = \alpha^2 = \beta^2 = 0$, então $0 = f^*(\gamma^2) = (\alpha + \beta + m_3\alpha\beta)^2 = 2\alpha\beta \neq 0$.

Com efeito, como $i_1^* \circ f^* = \mathbb{1}$, $i_1^*(\alpha) = \gamma$, e $i_1^*(\beta) = 0$, obtemos $\gamma = i_1^*(f^*(\gamma)) = m_0 + m_1\gamma$, e portanto $m_0 = 0$ e $m_1 = 1$. Analogamente, $m_2 = 1$. □

Suponhamos então, rumo à demonstração do teorema 5.10, que n é par, digamos $n = 2k$.

Dada uma aplicação

$$f : S^{2k-1} \times S^{2k-1} \to S^{2k-1},$$

a ela associamos uma outra

$$\widehat{f} : S^{4k-1} \to S^{2k}$$

da seguinte maneira: Sejam D^{2k}_+ e D^{2k}_- os hemisférios norte e sul de S^{2k}, os quais identificamos com o disco D^{2k} centrado na origem em $\mathbb{R}^{2k}$. Também, identifiquemos S^{4k-1} com

$$\partial(D^{2k} \times D^{2k}) = \partial D^{2k} \times D^{2k} \cup D^{2k} \times \partial D^{2k}.$$

Definimos então $\widehat{f}$ por

$$\widehat{f}(x,y) = \begin{cases} |y|f(x, y/|y|) \in D^{2k}_+, & \text{se} \quad (x,y) \in \partial D^{2k} \times (D^{2k} \setminus \{0\}) \\ 0 \in D^{2k}_+, & \text{se} \quad (x,y) \in \partial D^{2k}_+ \times \{0\} \\ |x|f(x/|x|, y) \in D^{2k}_-, & \text{se} \quad (x,y) \in (D^{2k} \setminus \{0\}) \times \partial D^{2k} \\ 0 \in D^{2k}_-, & \text{se} \quad (x,y) \in \{0\} \times \partial D^{2k}. \end{cases}$$

Observemos que $\widehat{f}$ está bem definida, é contínua *e coincide com* f *em* $(\partial D^{2k} \times D^{2k}) \cap (D^{2k} \times \partial D^{2k}) = S^{2k-1} \times S^{2k-1}$.

Pelo teorema de Adams (teorema 5.8), a demonstração do teorema 4.10 estará concluída se mostrarmos o seguinte lema:

LEMA 5.13 *Se* $f : S^{2k-1} \times S^{2k-1} \to S^{2k-1}$ *for uma estrutura de* H-*espaço, então* $\widehat{f}$ *tem invariante de Hopf* $H(\widehat{f}) = \pm 1$.

Demonstração: Escrevamos $g = \widehat{f}$, e seja $e \in S^{2k-1} = \partial D^{2k}$ o elemento identidade de f.

Seja

$$\Phi : (D^{2k} \times D^{2k}, \partial(D^{2k} \times D^{2k})) \to (C_g, S^{2k})$$

a *aplicação característica* do disco $D^{4k} = D^{2k} \times D^{2k}$ de C_g, isto é, Φ é a composição $D^{2k} \times D^{2k} \hookrightarrow S^{2k} \sqcup (D^{2k} \times D^{2k}) \to C_g$.

Note que a restrição de Φ a $\partial(D^{2k} \times D^{2k})$ é igual a

$$g : \partial(D^{2k} \times D^{2k}) \to S^{2k} \subset C_g,$$

e que a restrição de Φ ao interior de $D^{2k} \times D^{2k}$ é um homeomorfismo sobre $C_g \setminus S^{2k}$.

Sejam $\alpha, \beta \in \widetilde{K}(C_g)$ como na definição de $H(g)$. Queremos mostrar que $\beta^2 = \pm\alpha$, isto é, que a imagem de $\beta \otimes \beta$ pelo produto usual

$$\widetilde{K}(C_g) \otimes \widetilde{K}(C_g) \to \widetilde{K}(C_g)$$

é $\pm\alpha$. Para isto, consideramos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}(C_g) \otimes \widetilde{K}(C_g) \arrow[rr] & & \widetilde{K}(C_g) \\
\widetilde{K}(C_g, D^{2k}_+) \otimes \widetilde{K}(C_g, D^{2k}_-) \arrow[u, "q_+^* \otimes q_-^*", "\cong"'] \arrow[rr] \arrow[d, "g^* \otimes g^*"'] & & \widetilde{K}(C_g, S^{2k}) \arrow[u, "q^*"'] \arrow[d, "\Phi^*"', "\cong"] \\
\widetilde{K}(D^{2k} \times \{e\}, \partial D^{2k} \times \{e\}) \otimes \widetilde{K}(\{e\} \times D^{2k}, \{e\} \times \partial D^{2k}) \arrow[rr, "\cong"] & & \widetilde{K}(D^{2k} \times D^{2k}, \partial(D^{2k} \times D^{2k}))
\end{tikzcd}$$

em que o homomorfismo horizontal do meio é o produto relativo 3.10, o homomorfismo horizontal de baixo é o produto externo na forma relativa 3.9, o qual, pelo corolário 3.14, é um isomorfismo. Também, $q_+^* \otimes q_-^*$ é isomorfismo pois q_+ e q_- são equivalências de homotopia ([5]), e Φ^* é isomorfismo devido a restrição de Φ ao interior de $D^{2k} \times D^{2k}$ ser um homeomorfismo sobre $C_g \setminus S^{2k}$.

Queremos mostrar que a imagem de $\beta \otimes \beta$ por

$$q^* \circ (\Phi^*)^{-1} \circ \tilde{\mu} \circ (g^* \otimes g^*) \circ (q_+^* \otimes q_-^*)^{-1}$$

é $\pm\alpha$. Para isto, pela definição de α, e por serem Φ^* e $\tilde{\mu}^*$ isomorfismos, o que temos de mostrar é que as imagens de β por $g^* \circ (q_+^*)^{-1}$, e por $g^* \circ (q_-^*)^{-1}$, são geradores de $\widetilde{K}(D^{2k} \times \{e\}, \partial D^{2k} \times \{e\})$, e $\widetilde{K}(\{e\} \times D^{2k}, \{e\} \times \partial D^{2k})$, respectivamente.

Com efeito, pelas definições de g e e, temos que

$$g : (\{e\} \times D^{2k}, \{e\} \times \partial D^{2k}) \to (C_g, D_-^{2k})$$

se fatora em

$$(\{e\} \times D^{2k}, \{e\} \times \partial D^{2k}) \xrightarrow{g} (D_+^{2k}, \partial D_+^{2k}) \hookrightarrow (C_g, D_-^{2k}),$$

e $g : \{e\} \times D^{2k} \to D_+^{2k}$ é a identificação canônica. Sendo $\overline{g} : \{e\} \times D^{2k}/\{e\} \times \partial D^{2k} \to D_+^{2k}/\partial D_+^{2k}$ o quociente de g, $\overline{g}$ é a identificação canônica, e temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
 & C_g/D_-^{2k} & C_g \arrow[l, "q_-"'] \\
\{e\} \times D^{2k}/\{e\} \times \partial D^{2k} \arrow[r, "\overline{g}"] & D_+^{2k}/\partial D_+^{2k} \arrow[u, hook] & S^{2k} \arrow[l, "q_-"'] \arrow[u, hook, "i"]
\end{tikzcd}$$

Pela definição de β, $i^*(\beta)$ é um gerador de $\widetilde{K}(S^{2k})$, daí, como q_-^* e $\overline{g}^*$ são isomorfismos, $\overline{g}^*((q_-^*)^{-1}(i^*(\beta)))$ é um gerador de $\widetilde{K}(\{e\} \times D^{2k}/\{e\} \times \partial D^{2k})$. Isto é, $g^*((q_-^*)^{-1}(\beta))$ é um gerador de $\widetilde{K}(\{e\} \times D^{2k}, \{e\} \times \partial D^{2k})$.

Analogamente, $g^*((q_+^*)^{-1}(\beta))$ é gerador de $\widetilde{K}(D^{2k} \times \{e\}, \partial D^{2k} \times \{e\})$.

□

Apêndice A

Demonstração do Lema 2.12

Dada uma função contínua $f : X \times S^1 \to \mathbb{C}$, definimos, para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,\theta)e^{-in\theta}d\theta, \tag{A.1}$$

onde estamos identificando S^1 com $[-\pi,\pi]/\{-\pi,\pi\}$ via $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

Como $f(x,\theta)e^{-in\theta}$ é uniformemente contínua no compacto $X \times S^1$, $a_n : X \to \mathbb{C}$ é contínua, e sendo M tal que $|f(x,\theta)| \leq M$, para todo $(x,\theta) \in X \times S^1$, obtemos que $|a_n(x)| \leq M$, para todos $x \in X$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Logo, definindo, para $0 \leq r < 1$ fixado,

$$\begin{aligned} u_r(x,\theta) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(x)r^{|n|}e^{in\theta} \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(x)r^{|n|}z^n, \end{aligned}$$

onde $z = e^{i\theta}$, temos que esta série converge absolutamente e uniformemente em (x,θ), pois $|a_n(x)r^{|n|}e^{in\theta}| \leq Mr^{|n|}$ e $\sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} < \infty$. Consequentemente, $u_r(x,\theta)$ é contínua em (x,θ).

Agora, se mostrarmos que, quando $r \to 1$, $u_r(x,\theta) \to f(x,\theta)$ uniformemente em (x,θ), obteremos aproximações de f por funções do tipo requerido tomando truncamentos da série (A.2) para r suficiente próximo de 1.

Antes de mostrarmos este fato, observe que, pela definição de $u_r(x,\theta)$ e $a_n(x)$,

$$\begin{aligned} u_r(x,\theta) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}f(x,t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in(\theta-t)}f(x,t)dt, \end{aligned}$$

sendo lícita a mudança na ordem de integração, uma vez que o último somatório acima converge uniformemente em (x,θ).

Logo, definindo o *núcleo de Poisson*

$$P(r,\phi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|}e^{in\phi} \tag{A.2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\phi+r^2}, \tag{A.3}$$

onde $0 \le r < 1$ e $\phi \in \mathbb{R}$, podemos reescrever (A.3) como

$$u_r(x,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} P(r,\theta-t)f(x,t)dt. \tag{A.4}$$

LEMA A.1 *Se $r \to 1$, então $u_r(x,\theta) \to f(x,\theta)$ uniformemente em (x,θ).*

Demonstração: Antes de tudo, como $f(x,-\pi) = f(x,\pi)$, $\forall x \in X$, podemos estender f a $X \times \mathbb{R}$ de modo a ser periódica de período 2π em θ.

Precisaremos dos seguintes fatos a respeito de $P(r,\phi)$:

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} P(r,\phi)d\phi = 1$. Isto segue integrando-se a série (A.4) termo a termo.

Logo, como, por (A.5), $P(r,\phi)$ é par e periódica de período 2π, $\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(r,\theta-\phi)d\phi = 1$, $\forall\theta$.

(ii) $P(r,\phi) > 0$, $\forall r,\phi$, e, fixado r, $P(r,\phi)$ é monótona decrescente em $[0,\pi]$. Isto segue de (A.5).

(iii) Fixado $\phi \in (0,2\pi)$, $P(r,\phi) \to 0$ quando $r \to 1$. Também, segue de (A.5).

Observe que, como $P(r,\theta-t)f(x,t)$ é periódica de período 2π em t, podemos reescrever (A.6) como $u_r(x,\theta) = \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(r,\theta-t)f(x,t)dt$.

Por *(i)* e *(ii)*, temos, sucessivamente,

$$\begin{aligned} |u_r(x,\theta) - f(x,\theta)| &= |\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(r,\theta-t)f(x,t)dt - \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(r,\theta-t)f(x,\theta)dt| \\ &\le \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(r,\theta-t)|f(x,t)-f(x,\theta)|dt. \end{aligned}$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$, por ser f uniformemente contínua, existe $0 < \delta < \pi$ tal que $|f(x,t) - f(x,\theta)| < \varepsilon/2$ sempre que $|\theta - t| < \delta$ e $x \in X$. Para este δ, podemos escrever (A.7) como

$$|u_r(x,\theta) - f(x,\theta)| \le I_1 + I_2, \tag{A.5}$$

onde I_1 e I_2 são a integral em (A.7) calculada ao longo de $|\theta-t| < \delta$ e $\delta \le |\theta-t| < \pi$, respectivamente. Pela definição de I_1 e δ, e por *(i)*,

$$I_1 \le \int_{|\theta-t|<\delta} P(r,\theta-t)\varepsilon dt \le \varepsilon/2\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(r,\theta-t)dt = \varepsilon/2. \tag{A.6}$$

Tamém, por *(ii)* e pela definição de I_2,

$$I_2 \le P(r,\delta)\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} |f(x,t) - f(x,\theta)|dt. \tag{A.7}$$

Mas, como f é limitada, por (iii) existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tal que o segundo membro de (A.10) é $< \varepsilon/2$, se $|t-1| < \eta$. Portanto, para $|t-1| < \eta$,

$$|u_r(x,\theta) - f(x,\theta)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \ \ \forall (x,\theta).$$

$\square$

Apêndice B

Algumas Definições e Fatos Básicos

DEFINIÇÃO B.1 (***Paracompacidade***) *Um espaço de Hausdorff X é dito paracompacto se para cada cobertura aberta $\{U_\alpha\}_\alpha$ de X existir uma partição da unidade $\{\eta_\beta\}_\beta$ subordinada a ela. Isto significa que as η_β's são funções contínuas $X \to I$ tais que cada η_β tem suporte em algum U_α, cada $x \in X$ tem uma vizinhança na qual apenas um número finito de η_β's é $\neq 0$, e $\sum_\beta \eta_\beta(x) = 1$ $\forall x \in X$.*

DEFINIÇÃO B.2 (***Homotopia***) *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma homotopia entre duas funções contínuas $f, g : X \to Y$ é uma função contínua $h : X \times I \to Y$ tal que $h_0 = f$ e $h_1 = g$, onde h_t denota a função $X \to Y$, $h_t(x) = h(x,t)$. Escrevemos $f \simeq g$ para dizer que f e g são homotópicas.*

Dizemos que uma função contínua $f : X \to Y$ é uma equivalência de homotopia se existir $g : Y \to X$, contínua, tal que $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ e $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$ (g é dita uma equivalência inversa de f). Se uma tal equivalência de homotopia existir, dizemos que X tem o mesmo tipo de homotopia que Y (isto define uma relação de equivalência). X é dito contrátil, se tiver o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

Um subespaço $A \subset X$ é um retrato por deformação de X, ou, X se deforma sobre A, se existir uma função contínua $r : X \to A$, com $r|_A = \mathbb{1}_A$, e uma homotopia $h : X \times I \to X$ entre $i \circ r$, onde $i : A \hookrightarrow X$ é a inclusão, e $\mathbb{1}_X$, tal que $h_t|_A = \mathbb{1}_A$, $\forall t \in I$.

DEFINIÇÃO B.3 (***Sequências Exatas***) *Uma seqüência exata de objetos algébricos de uma mesma categoria (grupos, anéis, ...) é uma seqüência de homomorfismos $\cdots \to G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \to \cdots$ tal que, para cada i, $\mathrm{Im} f_{i-1} = \mathrm{Ker} f_i$.*

Uma sequência exata curta é uma sequência exata do tipo $0 \to G_1 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G_2 \to 0$. Observe que isto implica i ser injetiva e j sobrejetiva.

PROPOSIÇÃO B.4 *Todo espaço compacto de Hausdorff é paracompacto.*

PROPOSIÇÃO B.5 (***Extensão de Tietze***) *Seja X um espaço normal, $A \subset X$ subespaço fechado, e $\mathbb{V}$ um espaço vetorial (real ou complexo) de dimensão finita* *com a topologia usual. Então, toda função contínua* $f : A \to \mathbb{V}$ *possui uma extensão contínua* $\tilde{f} : X \to \mathbb{V}$.

PROPOSIÇÃO B.6 (***Contratibilidade***) *Todo sub-conjunto convexo de um espaço vetorial normado se deforma sobre um ponto. Um espaço* X *é contrátil se e somente se toda função contínua* $f : X \to Y$, *para algum espaço* Y, *for homotópica à uma função constante.*

PROPOSIÇÃO B.7 (***Sequências Split***) *Seja* $0 \to G_1 \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G_2 \to 0$ *uma sequência exata curta de grupos abelianos. Então:*

(i) Se $p : G \to G_1$ *é um homomorfismo tal que* $p \circ i = \mathbb{1}$, *temos isomorfismo* $G \xrightarrow{\cong} G_1 \oplus G_2$, $a \mapsto (p(a), j(a))$.

(ii) Se $q : G_2 \to G$ *é um homomorfismo tal que* $j \circ q = \mathbb{1}$, *temos isomorfismo* $G_1 \oplus G_2 \xrightarrow{\cong} G$, $(a_1, a_2) \mapsto i(a_1) + q(a_2)$.

Se (i) ou (ii) é satisfeita, a sequência é dita exata split, *e um tal isomorfismo é um* splitting.

Demonstrações para os três primeiros resultados podem ser encontradas em livros que tratam de topologia geral, enquanto que o último resultado pode ser encontrado em quase todo texto de topologia algébrica (por exemplo, [5]).

Bibliografia

[1] Atiyah, M.F., *K-Theory*, W.A. Benjamin, Inc, 1967.

[2] Atiyah, M.F. e Hirzebruch, F. *Vector Bundles and Homogeneous Spaces*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 3:7 38, 1961.

[3] Atiyah, M.F. e Bott, R. *On The Periodicity Theorem for Complex Vector Bundles*, Acta Mathematica, 112 (1964), 229-47.

[4] Hatcher, A., *Vector Bundles and K-Theory*, versão on-line: http://www.math.cornell.edu/hatcher/VBKT . 2003.

[5] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, versão on-line: http://www.math.cornell.edu/hatcher/AT . 2003.

[6] Husemoller, D., *Fibre Bundles*, Springer-Verlag, 1975.

[7] Lang, S., *Algebra*, Springer-Verlag, 1984.

[8] Atiyah, M.F. e Hirzebruch, F. *Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds*, Bull. A.M.S., 65 (1959), 276-281.

[9] Seeley, R.T., *An Introduction to Fourier Series and Integrals*, W.A. Benjamin, Inc, 1966.

[10] Adams, J.F. *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math., 72 (1960), 20-104.

[11] Adams, J.F. *Vector fields on spheres*, Ann. of Math., 75 (1962) 603-632.

[12] Atiyah, M.F., Adams, J.F. *K-theory and the Hopf invariant*, Quart. J. Math. Oxford, 17 (1966) 31-38.

[13] Milnor, J. *Some consequences of a theorem of Bott*, Ann. of Math., 68 (1958), 444-449.

[14] Kervaire, M. *Non-parallelizability of the n-sphere for* $n > 7$, Proc. N.A.S., 44 (1958), 280-283.

[15] Bott, R. *The stable homotopy of the classical groups*, Ann. of Math., 70 (1959), 313-337.

[16] A. Borel, Serre, J.P. *Le theorem de Riemann-Roch (d'après Grothendieck)*, Bull. Soc. Math. France, 86 (1958), 97-136.