UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O TEOREMA DA CONVEXIDADE DO MAPA DO MOMENTO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ALLYSON DOS SANTOS OLIVEIRA

Sob orientação do professor Dr. César A. R. Castilho

Recife, 2007.

À Nuna, Conceição, Rosse e Jô

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais Anísio Calazans (Nuna) e Maria da Conceição (Bêu) por tudo que eu sou e por tudo que serei.

A minhas irmãs Rosse e Josse pelo apoio incondicional.

A meus irmãos paternos Adilson, Anilton, Júnior (Guerreiro), Evânia, Ivonei, Ivonete e Eliana.

A minha avó Maria e meu primo Flavio, representando todos meus familiares, pelo carinho para comigo.

A meu orientador César Castilho pela amizade, disponibilidade e paciência.

À Chi pelo carinho.

Aos professores Eduardo Leandro e Vicente Francisco de S. Neto por participarem da minha banca.

À professora Ana Tereza pelo primeiro incentivo à pesquisa.

Aos professores Claudiano Goulart e Maria Hildete Magalhães França, representando todos da UEFS, pelo estímulo.

A todos professores e funcionários do Dmat - UFPE.

À Capes pelo apoio financeiro.

Aos amigos Joilson (Profeta) e Marcelo (Johnny) pela parceria em Feira e em Recife.

Aos amigos Fábio (Cidão), Éder (Buzugo) e Marta (Buzuga) pela união da família.

A Ani, Hand e Déa por serem tão especiais.

Aos amigos da UEFS e UFPE pelo companheirismo.

Aos amigos Marcelo Maiden, Érika, Bruno e Bruna.

Aos amigos do Dmat Humberto, Débora, Anete, Paulo Rabelo, Zaqueu (Cacaroto), Tarciana (Tarci), Wilberclay (Wilber), Júlio (Ju), Laudelino (Lau), André (Bebê), Luíz, Manassés, Hélio (Lito), Rodrigo Godin, Ricardo (Beleza), Adecarlos (Wolverine), Renata (Rê), Eudes (Óides), João Paulo (Jesus), Adriano Regis, Cláudio Cristino (Bicho) e Ademakson (Dema) por diferentes motivos.

RESUMO

Nesta dissertação apresentamos o teorema da convexidade de Atiyah-Guillemin-Sternberg sobre a imagem do mapa do momento de uma ação Hamiltoniana de um toro sobre uma variedade simplética compacta e conexa. Este resultado fornece, em certo sentido, uma generalização para o teorema de Schur sobre a relação entre os autovalores e os elementos da diagonal das matrizes Hermitianas. Com essa finalidade, discutimos a estrutura simplética sobre variedades, o conceito de Grupos de Lie e as ações destes grupos sobre tais variedades.

ABSTRACT

In this dissertation we presented the Atiyah-Guillemin-Sternberg convexity theorem about the image of the moment map in the case of Hamiltonian torus action on compact connected symplectic manifold. This result gives, in certain sense, a generalization to Schur theorem about relationship between eigenvalues and diagonal entries of Hermitian matrix. With this goal, we discussed the symplectic structure on manifolds, the Lie groups concept and actions of these groups on such manifolds.

Sumário

Introdução

O principal objetivo desse trabalho é apresentar um teorema devido a *Atiyah* [2], *Guillemin* e *Sternberg* [6], conhecido por Teorema da Convexidade do Mapa do Momento. Este é um resultado clássico e belo sobre ações de grupo de toros sobre variedades simpléticas, ou seja, variedades equipadas com uma 2-forma fechada e não-degenerada. As hipóteses sobre esta 2-forma implicam que uma variedade simplética tem sempre dimensão par e é sempre orientável. A Geometria Simplética é a área da Matemática cujo interesse é estudar tais variedades.

Faremos uma exposição sobre os conceitos mais relevantes de maneira sucinta no primeiro capítulo, dando ênfase às variedades e transformações simpléticas e reservando uma seção para mostrarmos como é possível construir uma estrutura simplética sobre fibrados cotangentes. Apresentaremos também o teorema de Darboux, que afirma que todas variedades simpléticas são localmente indistinguíveis.

No capítulo 2 abordaremos o conceito das chamadas estruturas quase complexas, que fornece uma ligação entre a geometria simplética e a geometria complexa das variedades. Embora tal construção apresente muitas aplicações, nos limitaremos apenas aos resultados mais importantes, como o fato de um subespaço invariante sob a estrutura complexa de uma variedade simplética ser também um subespaço simplético.

Uma variedade suave que possui uma estrutura de grupo compatível com sua estrutura diferenciável, no sentido que as operações que a tornam um grupo são suaves, é chamada Grupo de Lie. Uma ação de um grupo G sobre uma variedade M é um homomorfismo entre G e o grupo de difeomorfismos de M, denotado por $Diff(M)$. O espaço tangente ao elemento neutro de um grupo de Lie possui uma estrutura de álgebra de Lie e a cada elemento desta álgebra está associado um importante campo de vetores chamado gerador infinitesimal. Abordaremos estes conceitos, exemplificando-os no capítulo 3.

Quando um grupo de Lie age sobre uma variedade simplética, satisfazendo certas condições, induz-se uma aplicação que, em cada ponto da variedade atribui um funcional linear sobre a álgebra de Lie do grupo, denominado *mapa do momento* da ação. No capítulo 4 apresentaremos formalmente este conceito, bem como algumas de suas propriedades e ilustraremos sua construção com exemplos potencialmente significativos.

Finalmente, no último capítulo será apresentado o teorema da convexidade de Atiyah-Guillemin-Sternberg. Discutiremos, de forma elementar, o conceito de função de Morse-Bott, onde se encontra parte indispensável da demonstração do teorema. Essa classe de funções generaliza a conhecida teoria de Morse e foi introduzida por *Bott* [4]. Encerraremos seguindo *Atiyah* [2], mostrando que um famoso teorema devido a *Schur* [10] sobre os elementos da diagonal e os autovalores de uma matriz hermitiana pode ser visto como corolário do teorema da convexidade.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos os principais conceitos utilizados no decorrer do trabalho, como a estrutura simplética sobre variedades tornando os fibrados tangente e cotangente isomorfos de maneira natural. Neste contexto um difeomorfismo entre duas variedades simpléticas que preserva as estruturas simpléticas é dito um simplectomorfismo e as variedade são ditas simplectomorfas. Da mesma forma que na geometria diferencial com os difeomorfismos e na geometria Riemaniana com as isometrias, uma das principais preocupações da geometria simplética é classificar as variedades a menos de simplectomorfismos.

Por fim falaremos de maneira básica sobre sistemas hamiltonianos e em seguida, construiremos com um certo nível de detalhes a estrutura simplética canônica sobre os fibrados cotangente das variedades suaves.

1.1 Variedades Simpléticas

1.1.1 Definição e Exemplos

Primeiramente definiremos a estrutura simplética sobre espaços vetoriais. Logo em seguida, este conceito será estendido para variedades suaves. A menos que seja expresso o contrário, consideraremos nas próximas seções espaços vetoriais reais de dimensão finita. Da mesma forma, as variedades aqui serão sempre suaves e de dimensão finita.

Definição 1.1.1 *Seja V um espaço vetorial e $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear. ω é dita anti-simétrica se $\omega(u,v) = -\omega(v,u), \forall u, v \in V$.*

Definição 1.1.2 *Seja V um espaço vetorial e $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear em V. Dizemos que ω é não-degenerada se a condição $\omega(u,v) = 0$ para todo $v \in V$ implica em $u = 0$.*

Um forma bilinear ω em V induz uma aplicação linear de V em seu dual V^* definida por

$$\omega^\flat : V \to V^*$$
$$\omega^\flat(v)(w) = \omega(v,w)$$

A forma ω ser não-degenerada é equivalente a aplicação linear $\omega^\flat$ ser injetiva, ou seja, $\omega^\flat(v) = 0$ implica em $v = 0$.

Definição 1.1.3 *Uma **forma simplética** ω sobre um espaço vetorial V é uma forma bilinear anti-simétrica e não-degenerada sobre V. O par (V,ω) é chamado **espaço vetorial simplético.***

Um espaço vetorial simplético (V,ω) possui uma base $e_1, e_2, ..., e_n, f_1, f_2, ..., f_n$ que satisfaz

$$\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$$

chamada **base simplética** de (V,ω). Nesta base tem-se

$$\omega(u,v) = [u]^t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix} [v].$$

Exemplo: Em $\mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas (x,y), definimos a 2-forma

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j.$$

Seja $\zeta = (\xi, \eta)$ e $\zeta' = (\xi', \eta')$, com $\xi, \eta, \xi', \eta' \in \mathbb{R}^n$. Temos que

$$\omega_0(\zeta, \zeta') = \sum_{j=1}^{n} (\xi_j \eta'_j - \xi'_j \eta_j) = < \zeta, J_0 \zeta' > = \zeta^T J_0 \zeta'$$

onde $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix}$.

$\square$

Definição 1.1.4 *Uma variedade simplética é um par* (M, ω) *composto por uma variedade suave* M *e uma 2-forma fechada e não-degenerada* $\omega \in \Omega^2(M)$ *sobre* M.

A 2-forma ω sobre M é dita não-degenerada se $\forall p \in M$, o espaço tangente (T_pM, ω_p) é um espaço vetorial simplético, ou seja, $\forall\ v \in T_pM$ tem-se

$$\omega_p(v, w) = 0,\ \forall\ w \in T_pM \ \Rightarrow\ v = 0.$$

A condição de ω ser não-degenerada implica que existe um isomorfismo canônico entre os fibrados tangente e cotangente da variedade M, dado por

$$TM \to T^*M; \quad X \mapsto \iota(X)\omega := \omega(X, .).$$

Exemplos:

a) O cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ com coordenadas (θ, p) é uma variedade simplética com $\omega = d\theta \wedge dp$;

b) O toro $\mathbb{T}^2$ com coordenadas periódicas (θ, ϕ) é uma variedade simplética com $\omega = d\theta \wedge d\phi$;

c) O fibrado cotangente T^*M de uma variedade M é sempre uma variedade simplética (ver seção 1.1.6);

d) Considere $M = \mathbb{C}^n$ com coordenadas $(z_1, ..., z_n)$. A forma

$$\omega_0 = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$$

é simplética, desde que esta se iguala a forma canônica $\sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$ em $\mathbb{R}^{2n}$ na identificação $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, $z_k = x_k + iy_k$;

e) O produto de duas variedades simpléticas $(M_1, \omega_1) \times (M_2, \omega_2)$ é uma variedade simplética com a forma simplética $\omega_1 \oplus \omega_2$.

1.1.2 Derivada de Lie

Continuando com a apresentação dos pré-requisitos, citaremos os conceitos da derivada de Lie de uma forma ao longo de um campo de vetores, bem como, o colchete de Lie e alguns resultados importantes como a fórmula mágica de Cartan.

Definição 1.1.5 *Seja α uma k-forma e seja X um campo de vetores com fluxo φ_t.* ***A derivada de Lie de α ao longo de X*** *é dada por*

$$\pounds_X \alpha = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\varphi_t^* \alpha - \alpha\right] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t^* \alpha.$$

Os resultado abaixo sobre a derivada de Lie de uma forma serão de grande importância no desenvolvimento desse trabalho.

A fórmula Mágica de Cartan

$$\pounds_X \alpha = d\iota(X)\alpha + \iota(X)d\alpha. \tag{1.1}$$

Teorema 1.1.1 (Teorema da Derivada de Lie)

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^* \alpha = \varphi_t^* \pounds_X \alpha. \tag{1.2}$$

Um resultado mais geral é dado na proposição abaixo.

Proposição 1.1.1 *Para uma família suave α_t de k-formas temos*

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^* \alpha_t = \varphi_t^* \left(\pounds_X \alpha_t + \frac{d}{dt}\alpha_t\right). \tag{1.3}$$

Demonstração: Segue diretamente da regra da cadeia e de (1.2). Já que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\varphi_t^* \alpha_t &= \left.\frac{d}{dx}\varphi_x^* \alpha_t\right|_{x=t} + \left.\frac{d}{dy}\varphi_t^* \alpha_y\right|_{y=t} \\
&= \varphi_t^* \pounds_X \alpha_t + \varphi_t^* \frac{d}{dt}\alpha_t \\
&= \varphi_t^* \left(\pounds_X \alpha_t + \frac{d}{dt}\alpha_t\right).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Se f é uma função real definida em uma variedade M e X é um campo de vetores sobre M, **a derivada de Lie de f ao longo de X** é a derivada direcional

$$\pounds_X f = X[f] := \mathbf{d}f.X.$$

Definição 1.1.6 *Seja M uma variedade suave e sejam X, Y campos de vetores sobre M. O campo de vetores $[X,\ Y]$ determinado pela derivação*

$$f \mapsto X[Y[f]] - Y[X[f]]$$

*é denominado **colchete de Lie de Y ao longo X**, ou seja,*

$$[X,\ Y] = XY - YX.$$

Localmente, verifica-se que

$$[X,\ Y] = \mathbf{D}Y.X - \mathbf{D}X.Y. \tag{1.4}$$

Definição 1.1.7 *Sejam X, Y campos de vetores sobre a variedade M. a derivada de Lie de X na direção de Y é dada por*

$$\pounds_Y X = [X, Y] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi_t^* X,$$

onde $\psi_t : M \to M$ é o fluxo de Y definido por

$$\frac{d}{dt}\psi_t = Y \circ \psi_t, \quad \psi_0 = Id.$$

1.1.3 Transformações Simpléticas

O conceito de transformações simpléticas neste contexto equivale ao de isometrias em geometria Riemaniana, ou de aplicações contínuas em topologia, ou seja, são aquelas que conservam as estruturas simpléticas das variedades.

Definição 1.1.8 *Sejam* (M_1, ω_1) *e* (M_2, ω_2) *variedades simpléticas. Uma aplicação* C^∞

$$\varphi : M_1 \to M_2$$

é chamada ***simplética*** *(ou canônica) se*

$$\varphi^* \omega_2 = \omega_1$$

isto é, para todo $z \in M_1$ *e* $\forall\ v, w \in T_z M_1$ *tem-se*

$$\omega_1(z)(v, w) = \omega_2(\varphi(z))(T_z\varphi.v, T_z\varphi.w).$$

Se φ *é também um difeomorfismo, dizemos que é um* ***simplectomorfismo****. Neste caso,* (M_1, ω_1) *e* (M_2, ω_2) *são ditas simplectomorfas. Denotaremos o grupo de simplectomorfismos de* M *por* $Simp(M, \omega)$*,* $Simp(M)$*. ou* $Sp(M)$

O interesse em classificar as variedades simpléticas a menos de simplectomorfismos é evidente. Nosso objetivo agora é apresentar um teorema devido a Darboux que fornece tal classificação local afirmando que toda variedade simplética (M^{2n}, ω) é localmente simplectomorfa a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Para isso, usaremos o argumento devido a Moser [9], denominado método homotópico, como descrito a seguir.

Se $\omega_t \in \Omega^2(M)$ é uma família de formas simpléticas em M com derivadas exatas

$$\frac{d}{dt}\omega_t = d\sigma_t,$$

então existe uma família de difeomorfismos $\psi_t \in Diff(M)$ tal que

$$\psi_t^* \omega_t = \omega_0. \tag{1.5}$$

A idéia para justificar este fato é descrever os difeomorfismos ψ_t como o fluxo de uma família de campo de vetores X_t sobre M. Assim, supomos que

$$\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t \text{ e } \psi_0 = Id.$$

Os campos de vetores X_t devem ser de tal forma que a equação (1.5) seja satisfeita. Diferenciando e usando (1.3) temos

$$0 = \frac{d}{dt}\psi_t^* \omega_t$$

$$
\begin{aligned}
&= \psi_t^* \left(\frac{d}{dt}\omega_t + \pounds_{X_t}\omega_t \right) \\
&= \psi_t^* \left(d\sigma_t + \iota(X_t)d\omega_t + d\iota(X_t)\omega_t \right) \\
&= \psi_t^*(d\sigma_t + d\iota(X_t)\omega_t).
\end{aligned}
$$

Portanto é suficiente que $\sigma_t + \iota(X_t)\omega_t = 0$. Usaremos este argumento pra provar o lema seguinte.

Lema 1.1.1 (Moser) *Seja M uma variedade de dimensão $2n$ e $Q \subset M$ uma subvariedade compacta. Suponha que $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^2(M)$ são 2-formas fechadas tais que em cada ponto q de Q, ω_0 e ω_1 são iguais e não-degeneradas em T_qM. Então existem vizinhanças abertas $\mathcal{N}_\mathbf{0}$ e $\mathcal{N}_\mathbf{1}$ de Q e um difeomorfismo $\varphi : \mathcal{N}_\mathbf{0} \to \mathcal{N}_\mathbf{1}$ tal que*

$$
\varphi|_Q = id \quad e \quad \varphi^*\omega_1 = \omega_0.
$$

Demonstração: É suficiente provar a existência de uma 1-forma $\sigma \in \Omega^1(\mathcal{N}_\mathbf{0})$ tal que

$$
\sigma|_{T_QM} = 0 \quad e \quad d\sigma = \omega_1 - \omega_0. \tag{1.6}
$$

De fato, considere a família de formas fechadas

$$
\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0) = \omega_0 + td\sigma
$$

sobre $\mathcal{N}_\mathbf{0}$. Reduzindo $\mathcal{N}_\mathbf{0}$, se necessário, assumimos que ω_t é não-degenerada em $\mathcal{N}_\mathbf{0}, \forall\ t$. Como $\frac{d}{dt}\omega_t = d\sigma$, pelo argumento de Moser, visto acima, resolvendo a equação

$$
\sigma + \iota(X_t)\omega_t = 0
$$

encontramos uma família de campos X_t que se anulam em Q. Reduzindo novamente $\mathcal{N}_\mathbf{0}$, caso seja necessário, obtemos em $\mathcal{N}_\mathbf{0}$ as soluções da equação

$$
\varphi_t^*\omega_t = \omega_0
$$

Como $X_t|_Q = 0$, então $\varphi_t|_Q = id$. Fazemos então, $\varphi = \varphi_1$ e $\mathcal{N}_\mathbf{1} = \varphi_1(\mathcal{N}_\mathbf{0})$.

Para mostrar (1.6) denotaremos

$$
exp : TQ^\perp \to M
$$

a restrição da aplicação exponencial ao fibrado normal $TQ^\perp$ da subvariedade Q com respeito a alguma métrica Riemanniana sobre M.

Seja
$$U_\varepsilon = \{(q,v) \in TM|\ q \in Q, v \in T_qQ^\perp, |v| < \varepsilon\}.$$
A restrição da exponencial a U_ε é um difeomorfismo sobre $\mathcal{N}_\mathbf{0} = exp(U_\varepsilon)$ para ε suficientemente pequeno.

Defina para $0 \leq t \leq 1$ as aplicações $\phi_t : \mathcal{N}_\mathbf{0} \to \mathcal{N}_\mathbf{0}$, dadas por
$$\phi_t(exp(q,v)) = exp(q,tv).$$
Observe que ϕ_t é um difeomorfismo para $t > 0$, $\phi_0(\mathcal{N}_\mathbf{0}) \subset Q$, $\phi_1 = id$ e $\phi_t|_Q = id$.

Seja $\tau = \omega_1 - \omega_0$. $\phi_0^* = 0$ pois $\omega_1 = \omega_0$ em Q e $\phi_0(\mathcal{N}_\mathbf{0}) \subset Q$. Temos que
$$\phi_1^*\tau = \tau.$$

Para $t > 0$ definimos o campo
$$X_t = \left(\frac{d}{dt}\phi_t\right) \circ \phi_0^{-1}.$$
Temos que
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi_t^*\tau &= \phi_t^*(d\iota(X_t)\tau + \iota(X_t)d\tau)\\ &= \phi_t^*(d\iota(X_t)\tau)\\ &= d(\phi_t^*\iota(X_t)\tau)\\ &= d\sigma_t.\end{aligned}$$
onde
$$\begin{aligned}\sigma_t(q)(v) &= \phi_t^*\iota(X_t)\tau(q)(v)\\ &= \iota(X_t)\tau(\phi_t(q))(T_q\phi_t v)\\ &= \tau(\phi_t(q))(X_t(\phi_t(q)), T_q\phi_t v)\\ &= \tau(\phi_t(q))(\frac{d}{dt}\phi_t(q), T_q\phi_t v).\end{aligned}$$

Observe que σ_t se anula em Q, pois $\phi_t|_Q = id$ e $\tau|_Q = 0$. Daí
$$\tau = \phi_1^*\tau - \phi_0^*\tau = \int_0^1 \frac{d}{dt}\phi_t^*\tau dt = d\sigma, \quad \sigma = \int_0^1 \sigma_t dt.$$

∎

Teorema 1.1.2 (Darboux) *Seja (M,ω) uma variedade simplética de dimensão $2n$ e $p \in M$. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de p e coordenadas locais $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$, tal que, em $\mathcal{U}$*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

Demonstração: Desde que T_pM é uma espaço vetorial simplético utilizamos uma base simplética para construir coordenadas $(x'_1, ..., x'_n, y'_1, ..., y'_n)$ em uma vizinhança $\mathcal{U}'$ de p tal que

$$\omega(p) = \sum dx'_i \wedge dy'_i \Big|_p .$$

Pelo lema de Moser (1.1.1) aplicado a $Q = \{p\}$ com as formas $\omega_0 = \omega$ e $\omega_1 = \sum dx'_i \wedge dy'_i$, existem vizinhanças $\mathcal{N}_\mathbf{0}$ e $\mathcal{N}_\mathbf{1}$ de p e um difeomorfismo $\varphi : \mathcal{N}_\mathbf{0} \to \mathcal{N}_\mathbf{1}$ tal que

$$\varphi(p) = p \quad e \quad \varphi^* \left(\sum dx'_i \wedge dy'_i \right) = \omega.$$

Entretanto, pelo fato de $\varphi^* \left(\sum dx'_i \wedge dy'_i \right) = \sum d(x'_i \circ \varphi) \wedge d(y'_i \circ \varphi)$ basta tomar novas coordenadas $x_i = x'_i \circ \varphi$ e $y_i = y'_i \circ \varphi$.

■

1.1.4 Sistemas Hamiltonianos

Seja (M,ω) uma variedade simplética e $H : M \to \mathbb{R}$ uma função real. Pelo fato da 2-forma ω ser não-degenerada, existe um único campo de vetores X_H sobre M tal que $\iota(X_H)\omega = dH$, ou seja, para todo $z \in M$

$$\omega_z(X_H(z), v) = dH(z).v, \ \forall \ v \in T_zM.$$

Definição 1.1.9 *O campo X_H definido acima é dito **campo de vetores Hamiltoniano** com função hamiltoniana H.*

Se X_H é um campo completo[1] então seu fluxo $\varphi_t : M \to M$ define uma família a 1-parâmetro de difeomorfismos satisfazendo

$$\begin{cases} \varphi_0 & = & id_M; \\ \frac{d}{dt}\varphi_t & = & X_H \circ \varphi_t; \end{cases}$$

Cada difeomorfismo φ_t preserva a forma ω, ou seja, $\varphi_t^*\omega = \omega, \ \forall \ t$. De fato, pelo teorema da derivada de Lie 1.2 e pela fórmula mágica de Cartan 1.1 temos,

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\omega = \varphi_t^* \pounds_{X_H}\omega = \varphi_t^*(d\iota(X_H)\omega + \iota(X_H)d\omega) = 0,$$

já que $\iota(X_H)\omega = dH$ e $d\omega = 0$. Assim $\varphi_t^*\omega$ independe de t e, como $\varphi_0^*\omega = \omega$, segue que $\varphi_t^*\omega = \omega, \ \forall \ t$, ou seja, o fluxo Hamiltoniano é um simplectomorfismo.

Exemplo: Seja $(M, \omega) = (S^2, d\theta \wedge dh)$ e H a função altura, $H(\theta, h) = h$. O campo $X_H = x_\theta \frac{d}{d\theta} + x_h \frac{d}{dh}$ satisfaz

$$\begin{array}{rcl} \iota(X_H)(d\theta \wedge dh) & = & dh \Leftrightarrow \\ d\theta \wedge dh(X_H, .) & = & dh \Leftrightarrow \\ x_\theta dh - x_h d\theta & = & dh \Leftrightarrow \\ X_H & = & \dfrac{d}{d\theta} \end{array}$$

O fluxo de $X_H = \frac{d}{d\theta}$ é dado por $\varphi_t(\theta, h) = (\theta + t, h)$ o qual é a rotação em torno do eixo vertical. A função altura H é preservada por esse movimento.

1.1.5 Estrutura de Poisson sobre Variedades Simpléticas

Definição 1.1.10 *Seja (M, ω) uma variedade simplética. O colchete de Poisson de duas funções $F, H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ é dado por*

$$\{F, H\} := \omega(X_f, X_H) = dF.X_H$$

Este colchete define uma estrutura de Poisson sobre M, ou seja, satisfaz as condições:

[1]Um campo de vetores é dito completo quando o seu fluxo $\varphi_t : M \to M$ pode ser definido para todo $t \in \mathbb{R}$

1. $\{\ ,\}$ é bilinear e anti-simétrico;

2. $\{\ ,\}$ satisfaz a identidade de Jacobi, {F,{G,H}}+{H,{F,G}}+{G,{H,F}}=0;

3. $\{\ ,\}$ é uma derivação em cada fator,

$$\{FG, H\} = \{F, H\}G + F\{G, H\}.$$

Proposição 1.1.2 *Seja (M, ω) uma variedade simplética.*

(i) *Se $H : M \to \mathbb{R}$ é uma função Hamiltoniana e $\psi \in Simp(M, \omega)$ um simplectomorfismo, então $X_{H\circ\psi} = \psi^* X_H$.*

(ii) *O colchete de Lie de dois campos de vetores Hamiltonianos X_F e X_G é $[X_F, X_G] = X_{\{F,G\}}$.*

Demonstração: A afirmação (i) segue da identidade

$$\begin{aligned}
\iota(X_{H\circ\psi})\omega &= d(H \circ \psi) \\
&= \psi^* dH \\
&= \psi^* \iota(X_H)\omega \\
&= \iota(\psi^* X_H)\psi^*\omega \\
&= \iota(\psi^* X_H)\omega.
\end{aligned}$$

Para provarmos (ii) lembre que os fluxos Hamiltonianos ϕ_G^t e ϕ_G^t são simplectomorfismo, daí, pelo item (i)

$$[X_F, X_G] = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\phi_G^t)^* X_F = -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\phi_F^t)^* X_G = -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} X_{G\circ\phi_F^t}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\iota([X_F, X_G])\omega &= -\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} d(G \circ \phi_F^t) \\
&= -d\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} G \circ \phi_F^t \\
&= -d(dG(X_F)) \\
&= -d\{G, F\} \\
&= d\{F, G\}.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [X_F, X_G] = X_{\{F,G\}}.$$

■

Em geral, os fluxos ϕ_G^t, ϕ_F^t de dois campos de vetores G e F não comutam. Uma condição necessária e suficiente para que eles comutem é dada na proposição abaixo.

Proposição 1.1.3 *Sejam X e Y campos vetoriais sobre M e ϕ_X^t, ϕ_Y^t seus respectivos fluxos. ϕ_X^t e ϕ_Y^t comutam se, e somente se, $[X, Y] = 0$.*

Demonstração: Ver [1].

■

1.1.6 Fibrados Cotangentes

Fibrados cotangentes formam uma importante classe de variedades simpléticas. Em mecânica clássica, eles são os espaços de fase com coordenadas q e p correspondendo a posição e momento. Nesta seção apresentaremos a estrutura simplética desses espaços.

Seja $x : U \to \mathbb{R}^n$ uma carta local sobre uma variedade M com coordenadas $x_1, x_2, ..., x_n$. Então para $q \in U$, as aplicações lineares $dx_j : T_qM \to \mathbb{R}$ formam uma base do espaço dual T_q^*M e assim, qualquer vetor $v^* \in T_q^*M$ pode ser escrito na forma

$$v^* = \sum_{j=1}^{n} y_j dx_j.$$

As coordenadas y_j são unicamente determinadas por q e v^* e fornecem funções coordenadas $T^*U \to \mathbb{R}^n : (q, v^*) \mapsto y(q, v^*)$. Temos assim, uma carta $T^*U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (q, v^*) \mapsto (x(q), y(q, v^*))$. Nessas coordenadas definimos a 1-forma canônica dada por

$$\lambda_{can} = \sum_{j=1}^{n} y_j dx_j.$$

Podemos dar uma definição livre de coordenadas para λ_{can} da seguinte maneira: Considere a projeção

$$\pi : T^*M \to M, \quad (q, v^*) \mapsto q.$$

A diferencial de π é a aplicação linear

$$T_{(q,v^*)}\pi : T_{(q,v^*)}(T^*M) \to T_qM.$$

O valor da 1-forma canônica no ponto (q, v^*) é definido pela composição

$$\lambda_{can}(q, v^*) = v^* \circ T_{(q,v^*)}\pi : T_{(q,v^*)}(T^*M) \to \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Usaremos a notação abaixo pra indicar tal aplicação,

$$\lambda_{can}(q, v^*)(\xi, \eta) = \left\langle v^*, T_{(q,v^*)}\pi(\xi, \eta) \right\rangle.$$

Esta definição coincide com a anterior pois, em coordenadas locais (x, y) sobre T^*M, a aplicação $T_{(q,v^*)}\pi$ é dada por $(\xi, \eta) \mapsto \xi$ e assim, $v^* \circ T_{(q,v^*)}\pi(\xi, \eta) =< y, \xi >$, o qual pode ser escrito como $\sum_j y_j dx_j$.

Definição 1.1.11 *A forma simplética canônica em T^*M é dada por*

$$\omega_{can} = -d\lambda_{can}.$$

Em coordenadas (x, y) tem-se,

$$\lambda_{can} = ydx, \qquad\qquad \omega_{can} = dx \wedge dy.$$

Qualquer difeomorfismo $\psi : M \to L$ pode ser suspenso à um difeomorfismo Ψ : $T^*M \to T^*L$ dado por

$$\Psi(q, v^*) = (\psi(q), T^*\psi^{-1}v^*) \tag{1.8}$$

onde $T^*\psi^{-1}$ está denotando a aplicação dual da diferencial de ψ^{-1} no ponto $\psi(q)$. Esta definição pode ser visualizada pelo diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} T^*M \arrow[r, "T^*\psi^{-1}"] \arrow[d, "\pi_M"'] & T^*L \arrow[d, "\pi_L"] \\ M \arrow[r, "\psi"] & L \end{tikzcd}$$

Aqui π_M e π_L representam as projeções canônicas dos respectivos fibrados cotangentes.

Proposição 1.1.4 *O difeomorfismo $\Psi : T^*M \to T^*L$ dado em (1.8) preserva as 2-formas canônicas ω_M e ω_L sobre T^*M e T^*L, respectivamente. Isto é, $\Psi^*\omega_L = \omega_M$.*

Demonstração: É suficiente mostrar que $\Psi^*\lambda_L = \lambda_M$. Temos que

$$\begin{aligned}
\Psi^*\lambda_L(q, v^*) &= \lambda_L(\Psi(q, v^*)) \circ T\Psi \\
&= \left\langle T^*\psi^{-1}v^*, T_{\Psi(q,v^*)}\pi_L \circ T\Psi \right\rangle \\
&= \left\langle v^*, T\psi^{-1} \circ T_{\Psi(q,v^*)}\pi_L \circ T\Psi \right\rangle \\
&= \left\langle v^*, T_{(q,v^*)}(\psi^{-1} \circ \pi_L \circ \Psi) \right\rangle \\
&= \left\langle v^*, T_{(q,v^*)}\pi_M \right\rangle \\
&= \lambda_M(q, v^*)
\end{aligned}$$

■

Proposição 1.1.5 *Sejam $\psi : M \to M$ um difeomorfismo e $\Psi : T^*M \to T^*M$ sua suspensão ao fibrado cotangente como em (1.8). Então*

(i) *Ψ é um simplectomorfismo de T^*M.*

(ii) *Se $Y : M \to TM$ é um campo de vetores sobre M que gera um grupo de difeomorfismos ψ_t de M e $X : T^*M \to T(T^*M)$ é o campo gerador do correspondente grupo de simplectomorfismos Ψ_t de (T^*M, ω_{can}), temos que $X = X_H$ é o campo de vetores hamiltonianos da função $H : T^*M \to \mathbb{R}$ dada por*

$$H(q, v^*) = \langle v^*, Y(q) \rangle .$$

Demonstração: O item (i) segue diretamente da proposição anterior.

$$\begin{tikzcd}
T^*M \arrow[r, "X"] \arrow[d, "\pi"'] & T(T^*M) \arrow[d, "T\pi"] \\
M \arrow[r, "Y"] & TM
\end{tikzcd}$$

Pelo item (i) temos que $\mathfrak{L}_X\lambda_{can} = 0$, daí, pela fórmula de Cartan

$$-\iota(X)d\lambda_{can} = d(\iota(X)\lambda_{can}) \ \Rightarrow$$

$$\iota(X)\omega_{can} = d(\iota(X)\lambda_{can}).$$

Mas

$$\begin{aligned}
\iota(X)\lambda_{can}(q, v^*) &= \lambda_{can}(q, v^*)X(q, v^*) \\
&= \left\langle v^*, T_{(q,v^*)}\pi(X(q, v^*))\right\rangle \\
&= \langle v^*, Y(\pi(q, v^*))\rangle \\
&= H(q, v^*).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Capítulo 2

Estrutura Quase Complexa

A geometria simplética possui uma estreita relação com a geometria complexa pelo fato de toda variedade simplética poder ser munida de uma estrutura complexa como veremos neste capítulo. Embora haja vários tópicos interessantes sobre estruturas complexas, nos resumiremos apenas a alguns fatos necessários a seqüência do trabalho.

2.1 Estrutura Complexa sobre Espaços Vetoriais

Definição 2.1.1 *Seja V um espaço vetorial. Uma* ***estrutura complexa sobre*** *V é um automorfismo linear*

$$J : V \to V \text{ com } J^2 = -Id.$$

Uma estrutura complexa J é equivalente a uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ se identificarmos a aplicação J com a multiplicação por $i = \sqrt{-1}$. Em particular, o espaço V tem dimensão necessariamente par sobre os reais.

Definição 2.1.2 *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético. Uma estrutura complexa J sobre V é dita* ***compatível*** *com ω se*

$$\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v) \quad e \quad \omega(u, Ju) > 0, \ \forall u \neq 0.$$

Em outras palavras, uma estrutura complexa compatível J define um produto interno sobre V dado por

$$g_J(u, v) := \omega(u, Jv).$$

No caso de J ser compatível temos também a relação

$$\omega(u, Jv) = \omega(Ju, J(Jv)) = -\omega(Ju, v).$$

Denotaremos o espaço das estruturas complexas compatíveis de (V, ω) por $\mathfrak{J}(V, \omega)$.

Exemplo 2.1.1 *Seja* $(V, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. *Considere a base* $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial y_n}$ *e defina*

$$J_0\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j} \text{ e } J_0\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}$$

Com relação a essa base

$$J_0(v) = \left(\begin{array}{cc} 0 & -I \\ I & 0 \end{array}\right)[v].$$

Observe que $\omega_0(u, J_0(v)) =< u, v >= \sum_{j=1}^{2n} u_j v_j$.

A proposição abaixo garante a existência de uma estrutura complexa compatível para qualquer espaço vetorial simplético.

Proposição 2.1.1 *Seja* (V, ω) *um espaço vetorial simplético. Então existe uma estrutura complexa* J *compatível com* ω *sobre* V.

Demonstração: Escolha um produto interno G sobre V. As aplicações

$$\begin{array}{ccc} u & \mapsto & \omega(u, .) \\ v & \mapsto & G(v, .) \end{array}$$

são isomorfismos entre V e V^* desde que G e ω são não-degenerados. Daí existe uma aplicação linear $A : V \to V$ tal que $\omega(u, v) = G(Au, v)$. A aplicação A é anti-simétrica pois,

$$\begin{array}{rcl} G(A^*u, v) & = & G(u, Av) \\ & = & G(Av, u) \\ & = & \omega(v, u) \\ & = & -\omega(u, v) \\ & = & G(-Au, v) \end{array}$$

$$\Rightarrow A^* = -A.$$

AA^* é simétrico e portanto diagonalizável sobre $\mathbb{R}$. Além disso, para $u \neq 0$, $G(AA^*u, u) = G(A^*u, A^*u) > 0$ então AA^* é positivo. Logo seus autovalores λ_i são todos números reais positivos. Seja B uma matriz cujas colunas sejam os autovetores de AA^*. Então

$$\begin{aligned} AA^* &= B.diag\{\lambda_1, ..., \lambda_{2n}\}.B^{-1} \Rightarrow \\ \sqrt{AA^*} &= B.diag\{\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_{2n}}\}.B^{-1}. \end{aligned}$$

Assim, $\sqrt{AA^*}$ é simétrico e definido-positivo. Seja

$$J = \left(\sqrt{AA^*}\right)^{-1}.A. \tag{2.1}$$

J comuta com $\sqrt{AA^*}$ desde que A comuta com $\sqrt{AA^*}$. Além disso, J é ortogonal, $JJ^* = Id$ e também $J^* = -J$. Logo J define uma estrutura complexa sobre V.

$$J^2 = -JJ^* = -Id.$$

Esta estrutura é compatível pois

$$\begin{aligned} \omega(Ju, Jv) &= G(AJu, Jv) \\ &= G(JAu, Jv) \\ &= G(Au, v) \\ &= \omega(u, v) \end{aligned}$$

e para todo $u \neq 0$,

$$\begin{aligned} \omega(u, Ju) &= G(Au, Ju) \\ &= G(-JAu, u) \\ &= G(\sqrt{AA^*}u, u) > 0. \end{aligned}$$

■

A fatoração dada na equação 2.1 é chamada decomposição polar de A. Essa construção é canônica depois que escolhemos G. De fato, $\sqrt{AA^*}$ não depende da escolha de B nem da ordem dos autovalores em $diag\{\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_{2n}}\}$ mas apenas de seu efeito sobre os autoespaços. $\sqrt{AA^*}$ é definida apenas como a multiplicação por $\sqrt{\lambda_k}$ no autoespaço correspondente ao autovalor λ_k.

Proposição 2.1.2 *Seja* $\mathfrak{Met}(V)$ *o espaço dos produtos internos sobre* V *e* $Sp(V,\omega)$ *o espaço dos simplectomorfismos sobre* (V,ω)*. Existe uma aplicação contínua* $r:\mathfrak{Met}(V)\to\mathfrak{I}(V,\omega)$ *tal que*

$$r(g_J)=J,\qquad r(\phi^*g)=\phi^*r(g)$$

para todos $J\in\mathfrak{I}(V,\omega), g\in\mathfrak{Met}(V), \phi\in Sp(V,\omega)$.

Demonstração: Seja $g\in\mathfrak{Met}(V)$. Defina o automorfismo $A:V\to V$ por

$$\omega(v,w)=g(Av,w).$$

Desde que $\omega(v,w)=-\omega(w,v)$, então A é g-anti-adjunta, ou seja, $g(Av,w)=-g(v,Aw)$. Seja A^* a aplicação g-adjunta de A e $P=A^*A=-A^2$. Segue que P é g-positiva definida e daí, existe um único automorfismo $Q:V\to V$ tal que Q é g-auto-adjunta, g-definida positiva e

$$Q^2=P=-A^2.$$

O automorfismo

$$J_g=Q^{-1}A$$

fornece uma estrutura complexa compatível com ω. Defina $r(g)=J$.

A aplicação r satisfaz as condições da proposição. De fato, se começarmos com uma métrica da forma $g=g_J$, então $A=J$ e $Q=Id$, daí $r(g_J)=J$. Além disso, se tivéssemos no lugar de g a métrica $\phi^*g(v,w)=g(\phi v,\phi w)$, então A seria substituído por $\phi^{-1}A\phi$ e então $J_{\phi^*g}=\phi^{-1}J_g\phi$.

■

Observação: A existência da função r dada nesta proposição implica que o espaço $\mathfrak{I}(V,\omega)$ é contrátil. Para ver isto, definimos as aplicações $f_t:\mathfrak{I}(V,\omega)\to\mathfrak{I}(V,\omega)$ por

$$f_t(J)=r((1-t)g_{J_0}+tg_J),\quad 0\le t\le 1.$$

fornecendo uma conexão homotópica entre a aplicação constante $f_0(J)=J_0$ e a identidade $f_1(J)=J$.

2.2 Estrutura Complexa sobre Variedades

De forma mais geral, podemos estender o conceito de estrutura complexa para variedades suaves. Existe um estreita relação entre as chamadas variedades quase complexas e as variedades simpléticas, como veremos nesta seção.

Definição 2.2.1 *Uma **estrutura quase complexa** sobre uma variedade M é um campo suave de estruturas complexas sobre os espaços tangentes:*

$$x \mapsto J_x : T_xM \to T_xM; \quad J_x^2 = -I.$$

*O par (M, J) é chamado **variedade quase complexa**.*

Definição 2.2.2 *Seja (M, ω) uma variedade simplética. Uma estrutura quase complexa J sobre M é dita compatível com ω ou simplesmente, **compatível** se*

$$g_x(u, v) := \omega(u, J_x(v))$$

define uma métrica Riemanniana sobre M.

Proposição 2.2.1 *Seja (M, ω) uma variedade simplética e g uma métrica Riemanniana sobre M. Então existe uma estrutura quase complexa J sobre M compatível com g, no sentido que $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$.*

Demonstração: Segue apenas do fato da decomposição polar dada na equação 2.1 ser canônica. Assim, a estrutura J da proposição 2.1.1 define uma estrutura quase complexa sobre M compatível com g.

$\blacksquare$

Definição 2.2.3 *Uma subvariedade X de uma variedade quase complexa (M, J) é uma **subvariedade quase complexa** se $J(TX) \subseteq TX$, ou seja, para todo $x \in X$ e $v \in T_xX$ temos que $J_xv \in T_xX$.*

A proposição abaixo tem um caráter simples em oposição a sua grande utilidade, podendo ser vista como um dos principais resultados desta seção. Ela será utilizada em caráter estratégico na demonstração do teorema da convexidade (capítulo 5).

Proposição 2.2.2 *Seja (M, ω) uma variedade simplética com uma estrutura quase complexa compatível J. Então toda subvariedade quase complexa X de (M, J) é uma subvariedade simplética de (M, ω).*

Demonstração: Seja $\iota : X \to M$ a inclusão. Então $\iota^*\omega$ é uma 2-forma fechada sobre X. Como

$$\omega_x(u, v) = g(J_x u, v), \ \forall x \in X, \forall u, v \in T_x X$$

e $g_x |_{T_x X}$ é não degenerada então, $\iota^*\omega$ é não-degenerada e, portanto, simplética.

■

Capítulo 3

Grupos de Lie

Um Grupo de Lie é uma variedade que possui uma estrutura de grupo compatível com sua estrutura diferenciável, no sentido que as operações de grupo são suaves. Neste capítulo abordaremos alguns tópicos importantes sobre tais grupos, como as ações sobre variedades. Apresentaremos também alguns dos grupos de Lie clássicos e suas respectivas álgebras de Lie.

3.1 Definição

Definição 3.1.1 *Um grupo de Lie é uma variedade G que tem uma estrutura de grupo na qual a multiplicação do grupo*

$$\mu : G \times G \to G$$

$$(g, h) \mapsto gh$$

é uma aplicação C^∞

Para $g \in G$ definimos as translações à esquerda e à direita por $L_g : G \to G; h \mapsto gh$ e $R_g : G \to G; h \mapsto hg$ respectivamente. Desde que

$$L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2} \text{ e } R_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2 g_1},$$

então $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ e $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$ e daí, as translações são difeomorfismos para todo $g \in G$. Observe também, que elas comutam, ou seja, $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$.

A aplicação inversão $I : G \to G; g \mapsto g^{-1}$ é C^∞. De fato, a equação

$$\mu(g,h) = e$$

tem g^{-1} como solução para h em função de g. Mas sua derivada parcial em relação a h é o isomorfismo $T_h L_g$. Logo, pelo teorema da função implícita, I é uma aplicação C^∞.

Exemplos:

1. Todo espaço vetorial V é um grupo de Lie abeliano, chamado *grupo vetorial* com as operações

$$\begin{aligned} \mu : V \times V \to V, &\qquad \mu(x,y) = x + y \\ I : V \to V, &\qquad I(x) = -x. \end{aligned}$$

□

2. $GL(n,\mathbb{R}) = \{\phi |\ \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ isomorfismo linear}\}$ é um grupo de Lie de dimensão n^2, chamado *Grupo Linear Geral*. $GL(n,\mathbb{R})$ é a imagem inversa de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ pela aplicação contínua $A \mapsto detA$ de $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ em $\mathbb{R}$, logo um subconjunto aberto de $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, o espaço vetorial das aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. A operação de grupo em $GL(n,\mathbb{R})$ é dada pela composição

$$\mu : GL(n,\mathbb{R}) \times GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$$

$$(A,B) \mapsto A \circ B.$$

A aplicação inversão é dada por

$$I : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$$

$$I(A) = A^{-1}.$$

A multiplicação e a inversão são restrições a $GL(n,\mathbb{R})$ de operações C^∞ em $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, logo são C^∞. Assim, $GL(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

Fixando uma base em $\mathbb{R}^n$ podemos representar um elemento $A \in GL(n,\mathbb{R})$ por uma matriz $n \times n$ invertível. A operação do grupo é dado então, pela multiplicação de matrizes $\mu(A,B) = AB$ e $I(A) = A^{-1}$ é a inversão de matrizes.

□

Usando translações à esquerda ou à direita podemos construir um atlas a partir de uma carta local sobre um grupo de Lie G. Por exemplo, se (U, φ) é uma carta sobre $e \in G$ e $\varphi : U \to V$, então definimos uma carta (U_g, φ_g) sobre $g \in G$ fazendo

$$U_g = L_g(U) = \{L_g h \mid h \in U\}$$

e definindo

$$\begin{aligned} \varphi_g = \varphi \circ L_{g^{-1}} : U_g &\to V \\ h &\mapsto \varphi(g^{-1}h). \end{aligned}$$

Definição 3.1.2 *Um campo de vetores X sobre G é chamado* **invariante à esquerda** *se* $\forall\ g \in G$,

$$(T_h L_g) X(h) = X(gh)$$

para todo $h \in G$. Isto é, se o diagrama abaixo comuta,

$$\begin{tikzcd} TG \arrow[r, "TL_g"] & TG \\ G \arrow[u, "X"] \arrow[r, "L_g"'] & G \arrow[u, "X"'] \end{tikzcd}$$

O conjunto dos campos de vetores invariantes à esquerda sobre G será denotado por $\mathfrak{X}_L(G)$. Se $X, Y \in \mathfrak{X}_L(G)$, então $[X, Y] \in \mathfrak{X}_L(G)$. De fato,

$$\begin{aligned} T_h L_g([X,Y](h)) &= T_h L_g(X(h)Y - Y(h)X) = \\ &= T_h L_g(X(h))Y - T_h L_g(Y(h))X = \\ &= X(gh)Y - Y(gh)X = \\ &= [X,Y](gh). \end{aligned}$$

Dado $\xi \in T_e G$ definimos um campo de vetores invariante à esquerda X_ξ sobre G por

$$X_\xi(g) = T_e L_g(\xi).$$

De fato X_ξ é invariante à esquerda desde que

$$\begin{aligned} X_\xi(gh) &= T_e L_{gh}(\xi) = T_e(L_g \circ L_h)(\xi) \\ &= T_h L_g(T_e L_h(\xi)) = T_h L_g(X_\xi(h)). \end{aligned}$$

Proposição 3.1.1 *$\mathfrak{X}_L(G)$ e T_eG são isomorfos como espaços vetoriais.*

Demonstração: As aplicações lineares

$$\zeta_1 : \mathfrak{X}_L(G) \to T_eG, X \mapsto X(e)$$

e

$$\zeta_2 : T_eG \to \mathfrak{X}_L(G), \xi \mapsto X_\xi$$

satisfazem $\zeta_1 \circ \zeta_2 = id_{T_eG}$ e $\zeta_2 \circ \zeta_1 = id_{\mathfrak{X}_L(G)}$.

■

3.2 A Álgebra de Lie de um Grupo de Lie

O isomorfismo dado na proposição 3.1.1 e o fato do colchete de Lie de campos de vetores invariantes à esquerda ainda ser invariante à esquerda nos permite definir uma estrutura de álgebra de Lie em T_eG.

Definição 3.2.1 *O Colchete de Lie em T_eG é dado por*

$$[\xi, \eta] := [X_\xi, X_\eta](e),$$

*onde $\xi, \eta \in T_eG$ e $[X_\xi, X_\eta]$ é o colchete de Lie de campos de vetores visto na definição 1.1.6. O espaço vetorial T_eG com este colchete é chamado **álgebra de Lie de** G e denotado por $\mathfrak{g}$.*

Exemplos:

1. Se V é um grupo vetorial então $T_eV \cong V$ e para $u \in T_eV$, tem-se $X_u(v) = T_0L_v(u) = u, \forall\ v \in V$. Daí, a álgebra de Lie de V é o próprio V com o colchete trivial $[v, w] = 0, \forall\ v, w \in V$. Dizemos, neste caso, que a álgebra de Lie é **abeliana.**

□

2. A álgebra de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$ é $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ com o colchete comutador

$$[A,B] = AB - BA.$$

De fato, $GL(n,\mathbb{R})$ é aberto em $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ e assim, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = T_I(GL(n,\mathbb{R})) = T_I(L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)) = L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Para todo $B \in GL(n,\mathbb{R})$ a aplicação

$$L_B : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}), L_B A = BA$$

é uma aplicação linear, daí

$$X_\xi(L_B A) = BA\xi = T_A(L_B X_\xi(A)).$$

Pela forma local (1.4) temos

$$[\xi,\eta] = [X_\xi, X_\eta](I) = \mathbf{D}X_\eta(I).X_\xi(I) - \mathbf{D}X_\xi(I).X_\eta(I).$$

Mas $\mathbf{D}X_\eta(I).B = B\eta$ pois $X_\eta(A) = A\eta$ é linear em A. Daí $\mathbf{D}X_\eta(I).X_\xi(I) = \xi\eta$ e, portanto

$$[\xi,\eta] = \xi\eta - \eta\xi.$$

□

3.2.1 A Aplicação Exponencial

Se X_ξ é o campo de vetores invariante à esquerda correspondente a $\xi \in \mathfrak{g}$, então, pelo teorema de Picard de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais, existe uma única curva integral $\gamma_\xi : \mathbb{R} \to G$ de X_ξ começando em e, ou seja, $\gamma_\xi(0) = e$ e $\gamma_\xi'(t) = X_\xi(\gamma_\xi(t))$. Utilizando esse fato temos a seguinte definição:

Definição 3.2.2 *A **aplicação exponencial** $exp : \mathfrak{g} \to G$ é definida por*

$$exp(\xi) = \gamma_\xi(1).$$

Para $s \in \mathbb{R}$ tem-se

$$exp(s\xi) = \gamma_\xi(s).$$

De fato, fixando $s \in \mathbb{R}$, a curva $t \mapsto \gamma_\xi(ts)$ passa por e em $t = 0$ e satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}\gamma_\xi(ts) = sX_\xi(\gamma_\xi(ts)) = X_{s\xi}(\gamma_\xi(ts)).$$

Como $\gamma_{s\xi}(t)$ satisfaz a mesma equação diferencial e também passa por e em $t = 0$, segue, por unicidade, que $\gamma_{s\xi}(t) = \gamma_\xi(ts)$. Fazendo $t = 1$ temos, $exp(s\xi) = \gamma_\xi(s)$.

Exemplos:

1. Se $G = V$ um grupo vetorial então $\mathfrak{g} = V$ e daí, $exp : V \to V$ é a aplicação identidade $exp(v) = v$.

$\square$

2. Seja $G = GL(n, \mathbb{R})$. Assim $\mathfrak{g} = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dado $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, a aplicação

$$\gamma_A : \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R}), t \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i$$

satisfaz

$$\begin{aligned} \gamma_A(0) &= I \\ \gamma_A^{'}(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} A^i = \gamma_A(t) A. \end{aligned}$$

Logo a aplicação exponencial é dada por

$$\begin{aligned} exp : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) &\to GL(n, \mathbb{R}) \\ A &\to \gamma_A(1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} = e^A. \end{aligned}$$

$\square$

3.3 Grupos de Lie Clássicos

3.3.1 O Grupo Linear Geral Real, $GL(n, \mathbb{R})$

A função determinante

$$det : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

é suave e $GL(n,\mathbb{R}) = det^{-1}\{\mathbb{R}-\{0\}\}$. Logo $GL(n,\mathbb{R})$ é aberto em $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ e, portanto, $GL(n,\mathbb{R})$ não é compacto. Recordando que sua álgebra de Lie é $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ com o colchete comutador

$$[A,B] = AB - BA.$$

$GL(n,\mathbb{R})$ é composta por duas componentes conexas

$$GL^+(n,\mathbb{R}) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid detA > 0\}$$

e

$$GL^-(n,\mathbb{R}) := \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid detA < 0\}.$$

Agruparemos esses resultados na proposição seguinte:

Proposição 3.3.1 *O grupo $GL(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie de dimensão n^2 desconexo e não-compacto cuja álgebra de Lie, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, é composta por todas matrizes reais $n\times n$ com o colchete*

$$[A,B] = AB - BA.$$

3.3.2 O Grupo Linear Especial Real, $SL(n,\mathbb{R})$

Primeiramente observemos que a função determinante $det : GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é suave com derivada dada por

$$(T_A det)B = (detA).traço(A^{-1}B).$$

De fato, desde que

$$\begin{aligned} det(A+\lambda B) &= det(A.(I+\lambda A^{-1}B)) \\ &= det(A).det(I+\lambda A^{-1}B), \end{aligned}$$

é suficiente provarmos que

$$\frac{d}{d\lambda} det(I+\lambda C)\bigg|_{\lambda=0} = traço(C).$$

Mas isso segue diretamente da expressão do polinômio característico

$$det(I+\lambda C) = 1 + \lambda traço(C) + ... + \lambda^n det(C).$$

Definimos o grupo linear especial real $SL(n,\mathbb{R})$ por

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid det(A) = 1\}.$$

Desta forma $SL(n,\mathbb{R})$ é um subgrupo fechado de $GL(n,\mathbb{R})$.

O espaço tangente a $SL(n,\mathbb{R})$ em $A \in SL(n,\mathbb{R})$ é dado por $T_A SL(n,\mathbb{R}) = ker(T_A det) = \{B \in GL(n,\mathbb{R}) | traço(A^{-1}B) = 0\}$. Daí a álgebra de Lie de $SL(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$, consiste das matrizes com traço zero. O colchete em $SL(n,\mathbb{R})$ é o mesmo de $GL(n,\mathbb{R})$, $[A,B] = AB - BA$.

3.3.3 O Grupo Ortogonal, $O(n)$

O grupo ortogonal $O(n)$ é composto pelas matrizes $n \times n$ ortogonais

$$O(n) = \{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \mid A \text{ é ortogonal}\}.$$

Uma matriz ou aplicação linear A é dita ortogonal se $\langle Ax, Ay \rangle =< x, y >$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$

Equivalentemente, em termos da norma $\|x\| =< x, x >^{\frac{1}{2}}$, A é ortogonal se, e somente se, $\|Ax\| = \|x\|, \forall\ x \in \mathbb{R}^n$. Podemos ainda formular outra definição equivalente considerando a matriz transposta A^T, definida por

$$\langle Ax, y \rangle = \left\langle x, A^T y \right\rangle.$$

Assim, A é ortogonal se, e somente se, $AA^T = I$.

O grupo ortogonal $O(n)$ será dado pela imagem inversa da identidade I pela aplicação

$$\psi : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), A \mapsto AA^T.$$

Utilizando esta definição, a álgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$ de $O(n)$ é definida por $\mathfrak{o}(n) = ker\{T_I \psi\} = \{A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \mid A = -A^T\}$, o espaço das matrizes $n \times n$ anti-simétricas com o colchete comutador

$$[A, B] = AB - BA.$$

3.3.4 O Grupo Ortogonal Especial, $SO(n)$

Uma matriz A é ortogonal se, e somente se, $AA^T = I$, logo $A \in O(n) \Rightarrow det(A) = \pm 1$. Definimos o Grupo Ortogonal Especial $SO(n)$ por

$$\begin{aligned} SO(n) &= O(n) \cap SL(n,\mathbb{R}) \\ &= \{A \in O(n) \mid det(A) = 1\}. \end{aligned}$$

Note que $SO(n)$ é a componente conexa de $O(n)$ que contém a identidade I, daí, $SO(n)$ possui a mesma álgebra de Lie de $O(n)$.

A álgebra de Lie de $SO(3)$

Um caso particular muito interessante de grupo ortogonal especial é o $SO(3)$, pelo fato da sua álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ poder ser identificada com $(\mathbb{R}^3, \times)$, onde $\times$ é o produto vetorial usual. Detalharemos aqui, como podemos fazer essa identificação.

Lembrando que a álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ é composta pelas matrizes anti-simétricas de ordem 3, podemos obter um isomorfismo de álgebras entre $(\mathfrak{so}(3), [\ ,\ ])$ e $(\mathbb{R}^3, \times)$ dado pela aplicação (*hat map*)

$$\hat{}: (\mathfrak{so}(3), [,]) \to (\mathbb{R}^3, \times), A \mapsto \hat{A}$$

onde $A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\hat{A} = (a_1, a_2, a_3)$. Assim,

$$\widehat{[A, B]} = \hat{A} \times \hat{B}$$

De fato, se $A = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}(3)$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}(3)$ então,

$$\begin{aligned} [A, B] &= AB - BA \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_2b_1 - a_1b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ -a_2b_1 + a_1b_2 & 0 & a_3b_2 - a_2b_3 \\ -a_3b_1 + a_1b_3 & -a_3b_2 + a_2b_3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \widehat{[A, B]} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) \\ &= \hat{A} \times \hat{B}. \end{aligned}$$

3.4 Ação de um Grupo de Lie

Definição 3.4.1 *Seja G um grupo de Lie e M uma variedade. Uma* ***ação (à esquerda)*** *de G em M é uma aplicação suave $\Phi : G \times M \to M$ tal que*

i) $\Phi(e, x) = x, \forall\ x \in M\ e$

ii) $\Phi(g_1, \Phi(g_2, x)) = \Phi(g_1 g_2, x),\ \forall\ g_1, g_2 \in G\ e\ x \in M.$

Para cada $g \in G$, seja $\Phi_g : M \to M$ dado por $\Phi_g(x) = \Phi(g, x)$. Então as condições i e ii da definição acima se tornam, $\Phi_g = Id_M$ e $\Phi_{g_1} \circ \Phi_{g_2} = \Phi_{g_1 g_2}$, respectivamente. Uma ação $g \mapsto \Phi_g$. é um homomorfismo de grupo entre G e $Diff(M)$, o grupo de difeomorfismos de M. É comum utilizar-se da notação $g.x$ para indicar $\Phi(g, x)$.

Exemplos

a) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ é um grupo abeliano com respeito à multiplicação

$$\begin{aligned} \mu : S^1 \times S^1 &\to S^1 \\ (x, y) &\mapsto x.y \end{aligned}$$

A álgebra de Lie de S^1 é identificada com $\mathbb{R}$ e a aplicação exponencial é dada por

$$exp : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}.$$

Podemos definir uma ação de S^1 sobre $\mathbb{C}^2$ por

$$\Phi : S^1 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, (e^{i\theta}, (z_1, z_2)) \mapsto (e^{i\theta} z_1, e^{-i\theta} z_2).$$

$\square$

b) $GL(n, \mathbb{R})$ age sobre $\mathbb{R}^n$ de maneira natural por $(A, x) \mapsto Ax$. É muito simples verificar que esta aplicação é, de fato, uma ação.

No caso particular da ação de $SO(3)$ em $\mathbb{R}^3$, observamos que esta aplicação deixa invariante a 2-esfera S^2. Desta forma, temos também, uma ação de $SO(3)$ em S^2.

$\square$

c) Um campo de vetores X sobre uma variedade M é dito completo quando seu fluxo φ_t está definido para todo $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, φ_t define uma ação de $\mathbb{R}$ em M dada por

$$\Gamma : \mathbb{R} \times M \to M, (t, m) \mapsto \varphi_t(m).$$

De fato,

$$\Gamma(0, m) = \varphi_0(m) = m$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma(t_1, \Gamma(t_2, m)) &= \Gamma(t_1, \varphi_{t_2}(m)) \\ &= (\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2})(m) \\ &= \varphi_{t_1+t_2}(m) \\ &= \Gamma(t_1 + t_2, m), \end{aligned}$$

$\forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $m \in M$.

$\square$

Nas definições seguintes considere um grupo de Lie G agindo sobre uma variedade M através de uma aplicação Φ.

Definição 3.4.2 *A **órbita**[1] de $x \in M$ é definida por*

$$Orb(x) = \{\Phi_g(x) \mid g \in G\} \subset M.$$

Definição 3.4.3 *O grupo de **isotropia (estabilizador)** de Φ em $x \in M$ é dado por*

$$G_x = \{g \in G \mid \Phi_g(x) = x\} \subset G.$$

Desde que a aplicação $\Phi_x : G \to M$ definida por $\Phi_x(g) = \Phi(g, x)$ é contínua, $G_x = \Phi_x^{-1}(x)$ é um subgrupo fechado e daí, um subgrupo de Lie de G.

Uma ação é dita:

1. **Transitiva**, se existe apenas uma órbita, ou seja, $\forall\, x, y \in M$ existe um $g \in G$ tal que $g.x = y$;
2. **Efetiva**, se $\Phi_g = Id_M$ implica em $g = e$, isto é, $g \mapsto \Phi_g$ e injetiva;
3. **Livre**, se $G_x = \{e\}$ para todo $x \in M$, ou seja, $\Phi_g(x) = x$ implica $g = e$. Note que toda ação livre é efetiva.

Exemplos

[1] Em dimensão finita pode-se mostrar que $Orb(x)$ é uma subvariedade imersa de M.

a) A translação à esquerda $L_g : G \to G;\ h \mapsto gh$, define uma ação livre e transitiva de G nele mesmo.

$\square$

b) A conjugação $g \mapsto I_g = R_{g^{-1}} \circ L_g$ define uma ação de G sobre G. A aplicação $I_g : G \to G;\ h \mapsto ghg^{-1}$ é denominada **automorfismo linear** associado à g. As órbitas dessa ação são chamadas **classes de conjugação.**

$\square$

Definição 3.4.4 (A ação Adjunta) *Diferenciando o automorfismo linear I_g no elemento identidade e, obtemos a* ***representação adjunta*** *de G sobre $\mathfrak{g}$:*

$$Ad_g := T_e I_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}.$$

A ***ação adjunta*** *é a ação de G em $\mathfrak{g}$ dada por*

$$\begin{aligned} &Ad : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; \\ &(g, \xi) \to Ad_g(\xi). \end{aligned}$$

Em certas ocasiões utilizaremos a notação: $Ad_g(\xi) = g\xi g^{-1}$.

Definição 3.4.5 (A Ação Coadjunta) *Seja $\mathfrak{g}^*$ o dual da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G e seja $Ad_g^* : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ a aplicação dual de Ad_g, definida por*

$$\left\langle Ad_g^* \alpha, \xi \right\rangle = \langle \alpha, Ad_g \xi \rangle$$

para $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ e $\xi \in \mathfrak{g}$.

A ***ação coadjunta*** *é a ação de G sobre $\mathfrak{g}^*$ definida por*

$$\begin{aligned} &\Phi : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*; \\ &(g, \alpha) \mapsto Ad_{g^{-1}}^* \alpha. \end{aligned}$$

Definição 3.4.6 (Gerador Infinitesimal) *Seja $\Phi : G \times M \to M$ uma ação. Dado $\xi \in \mathfrak{g}$, a aplicação $\Phi^\xi : \mathbb{R} \times M \to M$, definida por $\Phi^\xi(t, x) = \Phi(expt\xi, x)$ é uma $\mathbb{R}$-ação sobre M. Então $\Phi_{expt\xi} : M \to M$ é um fluxo em M. Definimos o* ***gerador infinitesimal*** *da ação correspondendo à ξ como o campo de vetores sobre M dado por*

$$X_\xi(x) := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi_{expt\xi}(x).$$

Proposição 3.4.1 *O espaço tangente a uma órbita $Orb(x_0)$ em um ponto x é dado por*

$$T_x Orb(x_0) = \{X_\xi(x) \mid \xi \in \mathfrak{g}\}.$$

Demonstração: Seja $\sigma_\xi(t)$ uma curva suave em G tangente a ξ em $t = 0$.

Definimos a curva $\Phi_x^\xi(t) = \Phi_{\sigma_\xi(t)}(x)$. $\Phi_x^\xi(t)$ é suave e satisfaz $\Phi_x^\xi(0) = \Phi_e(x) = x$. Daí

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi_x^\xi(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi_{\sigma_\xi(t)}(x) = X_\xi(x)$$

é um vetor tangente a $Orb(x_0)$ em x. Como um vetor tangente a $Orb(x)$ é dado por uma classe de equivalência de curvas como essa, então segue-se a afirmação.

■

Proposição 3.4.2 *Seja $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ a representação adjunta de G. Defina $\varphi^\eta(g) = Ad_g\eta$. Então $T_e\varphi^\eta\xi = [\xi, \eta]$.*

Demonstração: Seja $\phi_t(g) = g.\exp t\xi = R_{\exp t\xi}g$ o fluxo de X_ξ. Então

$$\begin{aligned}
[\xi, \eta] &= [X_\xi, X_\eta](e) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_t^* X_\eta(e) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T_{\phi_t(e)}\phi_t^{-1}.X_\eta(\phi_t(e)) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T_{\exp t\xi} R_{\exp(-t\xi)}.X_\eta(\exp t\xi) \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T_{\exp t\xi} R_{\exp(-t\xi)} T_e L_{\exp t\xi}\eta \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} T_e \left(L_{\exp t\xi} \circ R_{\exp(-t\xi)}\right)\eta \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Ad_{\exp t\xi}\eta
\end{aligned}$$

■

Exemplo 3.4.1 Seja $Ad^* : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*,\ (g, \eta) \mapsto Ad^*_{g^{-1}}\eta$ a ação coadjunta de um grupo de Lie G sobre o dual de sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}^*$. Calculemos o gerador infinitesimal X_ξ desta ação.

Seja $\xi \in \mathfrak{g}$. Dados $\alpha, \eta \in \mathfrak{g}^*$ temos

$$\begin{aligned}
\langle X_\xi(\alpha), \eta \rangle &= \left\langle \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Ad^*_{exp(-t\xi)}\alpha, \eta \right\rangle \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left\langle Ad^*_{exp(-t\xi)}\alpha, \eta \right\rangle \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left\langle \alpha, Ad_{exp(-t\xi)}\eta \right\rangle \\
&= \left\langle \alpha, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Ad_{exp(-t\xi)}\eta \right\rangle \\
&= \langle \alpha, -[\xi, \eta] \rangle = - \langle \alpha, ad_\xi \eta \rangle = - \left\langle ad^*_\xi \alpha, \eta \right\rangle
\end{aligned}$$

Logo

$$X_\xi(\alpha) = -ad^*_\xi \alpha,$$

onde ad_ξ é a aplicação linear $ad_\xi(\xi') = [\xi, \xi']$.

$\square$

Capítulo 4

O Mapa do Momento

Seja G um grupo de Lie e (M, ω) uma variedade simplética. Suponha que G age sobre (M, ω) por simplectomorfismos, isto é, existe um homomorfismo de grupos $G \to Simp(M, \omega) : g \mapsto \varphi_g$.

Dado $\xi \in \mathfrak{g}$, o gerador infinitesimal correspondente é dado pelo campo de vetores

$$X_\xi(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_{\exp t\xi} x = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp t\xi.x.$$

Segue do fato que φ_g é um simplectomorfismo para todo $g \in G$ que o campo X_ξ é simplético, ou seja, a 1-forma $\iota(X_\xi)\omega := \omega(X_\xi, \cdot)$ é fechada para todo $\xi \in \mathfrak{g}$.

Definição 4.0.7 *Uma ação de G sobre (M, ω) é dita **fracamente Hamiltoniana** se X_ξ é um campo de vetores Hamiltoniano para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, ou seja, a 1-forma $\iota(X_\xi)\omega$ é exata $\forall \xi \in \mathfrak{g}$,*

$$\omega(X_\xi, \cdot) = dH_\xi.$$

Definição 4.0.8 *Uma ação de G sobre (M, ω) é dita **Hamiltoniana** se a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g} & \to & C^\infty(M) \\ \xi & \mapsto & H_\xi \end{array}$$

define um homomorfismo de álgebra de Lie com respeito à estrutura de álgebra de Lie sobre $\mathfrak{g}$ e à estrutura de Poisson sobre $C^\infty(M)$, isto é,

$$H_{[\xi,\eta]} = \{H_\xi, H_\eta\}.$$

Lema 4.0.1 *Seja G um grupo de Lie conexo e (M,ω) uma variedade simplética. Suponha que G age sobre (M,ω) por uma ação Hamiltoniana $g \mapsto \psi_g$ e $X_\xi = X_{H_\xi}, \forall \xi \in \mathfrak{g}$. Então*

$$H_{g^{-1}\xi g} = H_\xi \circ \psi_g$$

para $g \in G$ e $\xi \in \mathfrak{g}$. Onde $g^{-1}\xi g = Ad_{g^{-1}}\xi$.

Demonstração: Desde que

$$X_{g^{-1}\xi g} = \psi_g^* X_\xi,$$

então

$$\begin{aligned} dH_{g^{-1}\xi g} &= \omega(X_{g^{-1}\xi g}, \cdot) \\ &= \omega(\psi_g^* X_\xi, \cdot) \\ &= d(H_\xi \circ \psi_g). \end{aligned}$$

Logo a diferença das funções $H_\xi \circ \psi_g$ e $H_{g^{-1}\xi g}$ é constante e isto implica

$$\begin{aligned} H_{g^{-1}[\xi,\eta]g} &= \{H_{g^{-1}\xi g}, H_{g^{-1}\eta g}\} \\ &= \{H_\xi \circ \psi_g, H_\eta \circ \psi_g\} \\ &= \{H_\xi, H_\eta\} \circ \psi_g \\ &= H_{[\xi,\eta]} \circ \psi_g. \end{aligned}$$

Seja $\tilde{g} : [0,1] \to G$ um caminho contínuo tal que $\tilde{g}(0) = e$ e $\tilde{g}(1) = g$. Denote $\tilde{\eta} = \frac{d}{dt}\tilde{g}(t)\tilde{g}(t)^{-1} \in \mathfrak{g}$. Então

$$\frac{d}{dt}\psi_{\tilde{g}} = X_{\tilde{\eta}} \circ \psi_{\tilde{g}}, \quad \frac{d}{dt}\tilde{g}^{-1}\xi\tilde{g} = \tilde{g}^{-1}[\xi,\tilde{\eta}]\tilde{g}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H_\xi \circ \psi_{\tilde{g}} - H_{\tilde{g}^{-1}\xi\tilde{g}}) &= d(H_\xi \circ \psi_{\tilde{g}})\psi_{\tilde{g}}^* X_{\tilde{\eta}} - H_{\tilde{g}^{-1}[\xi,\tilde{\eta}]\tilde{g}} \\ &= \omega(X_{H_\xi \circ \psi_{\tilde{g}}}, \psi_{\tilde{g}}^* X_{\tilde{\eta}}) - H_{[\xi,\tilde{\eta}]} \circ \psi_{\tilde{g}} \\ &= \omega(X_{H_\xi \circ \psi_{\tilde{g}}}, X_{H_{\tilde{\eta}} \circ \psi_{\tilde{g}}}) - \{H_{\tilde{\eta}}, H_{\tilde{\eta}}\} \circ \psi_{\tilde{g}} \\ &= \{H_\xi \circ \psi_{\tilde{g}}, H_{\tilde{\eta}} \circ \psi_{\tilde{g}}\} - \{H_{\tilde{\eta}}, H_{\tilde{\eta}}\} \circ \psi_{\tilde{g}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $\tilde{g}(0) = e$, então $H_\xi \circ \psi_{\tilde{g}} = H_{\tilde{g}^{-1}\xi\tilde{g}}$. Avaliando $\tilde{g}(t)$ em $t = 1$ concluímos a demonstração.

■

Observe que o lema continua válido mesmo se G não é conexo, desde que consideremos pontos g pertencentes a mesma componente conexa da identidade $e \in G$.

Definição 4.0.9 *Assuma que a ação de G sobre M é Hamiltoniana. Seja $\xi \in \mathfrak{g}$ e $x \in M$. O **Mapa do Momento** da ação de G em M é a aplicação $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ dada por*

$$H_\xi(x) = \langle \mu(x), \xi \rangle$$

de forma a definir um homomorfismo de álgebra de Lie $\xi \to H_\xi$ como no lema 4.0.1.

Lema 4.0.2 *O mapa do momento é equivariante com respeito a ação de um grupo conexo G sobre M e a ação coadjunta Ad_g^* de G sobre $\mathfrak{g}^*$:*

$$\mu \circ \psi_g = Ad^*_{g^{-1}} \circ \mu =: g^{-1}\mu(x)g.$$

Ou seja, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g}^* \arrow[r, "Ad^*_{g^{-1}}"] & \mathfrak{g}^* \\
M \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, "\psi_g"'] & M \arrow[u, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

Demonstração: Segue diretamente do lema 4.0.1 já que

$$\begin{aligned}
\langle \mu(\psi_g(x)), \xi \rangle &= H_\xi(\psi_g(x)) \\
&= H_{g^{-1}\xi g}(x) \\
&= \langle \mu(x), Ad_{g-1}\xi \rangle \\
&= \left\langle Ad^*_{g-1}\mu(x), \xi \right\rangle.
\end{aligned}$$

■

No lema anterior, se considerarmos g pertencente a mesma componente conexa da identidade $e \in G$, a hipótese de conexidade do grupo G pode ser retirada.

Exemplo 4.0.2 Calculemos o mapa do momento para a ação de $SO(3)$ em $T^*(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \Phi : SO(3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ (A, (q,p)) & \mapsto & (Aq, Ap) \end{array}$$

Primeiramente encontraremos o gerador infinitesimal correspondente a um elemento $\hat{A}$ da álgebra de Lie de $SO(3)$

$$\xi_{T^*\mathbb{R}^3}(z) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (exp(\hat{A}t)).z$$

onde $\hat{A} \in \mathfrak{so}(3)$ e $z = (q,p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Lembrando que $exp(\hat{A}t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \hat{A}^i$, temos que

$$\xi_{T^*\mathbb{R}^3}(q,p) = (\hat{A}q, \hat{A}p).$$

$J_{\hat{A}}$ é, por definição, o Hamiltoniano do gerador infinitesimal, ou seja

$$\omega(\xi_{T^*\mathbb{R}^3}, .)(q,p) = \mathbf{d}J_{\hat{A}}(q,p)$$

onde

$$\begin{array}{rcl} w & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} dq_i \wedge dp^i \\ & = & dq_x \wedge dp_x + dq_y \wedge dp_y + dq_z \wedge dp_z \end{array}$$

Obtemos assim

$$(dq_x \wedge dp_x + dq_y \wedge dp_y + dq_z \wedge dp_z)(\hat{q}_1 \frac{\partial}{\partial q_x} + \hat{q}_2 \frac{\partial}{\partial q_y} + \hat{q}_3 \frac{\partial}{\partial q_z} + \hat{p}_1 \frac{\partial}{\partial p_x} + \hat{p}_2 \frac{\partial}{\partial p_y} + \hat{p}_3 \frac{\partial}{\partial p_z}) =$$

$$\begin{array}{rl} = & (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3)(dp_x, dp_y, dp_z) - (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)(dq_x, dq_y, dq_z) \\ = & \hat{A}q.dp - \hat{A}p.dq \end{array}$$

Daí

$$\begin{array}{rcl} \hat{A}q.dp - \hat{A}p.dq & = & \mathbf{d}J_{\hat{A}} \\ & = & \dfrac{\partial J_{\hat{A}}}{\partial q}.dq + \dfrac{\partial J_{\hat{A}}}{\partial p}.dp \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial J_{\hat{A}}}{\partial q} & = & -\hat{A}.p & = & -A \times p \\ \frac{\partial J_{\hat{A}}}{\partial p} & = & -\hat{A}.q & = & -A \times q \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad J_{\hat{A}}(q,p) &= (A \times q).p \\ &= -(A \times p).q \end{aligned}$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} < \mathbf{J}(q,p), \hat{A} > &= J_{\hat{A}}(q,p) \\ &= (A \times q).p \\ &= (q \times p).A \\ &= < q \times p, \hat{A} > \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{J}(q,p) = q \times p.$$

□

Exemplo 4.0.3 Seja G um grupo de Lie compacto e conexo e seja $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ uma órbita coadjunta, ou seja, uma órbita sob a ação coadjunta de G.

Existe uma estrutura simplética natural sobre $\mathcal{O}$. Primeiramente, pela proposição 3.4.1 e pelo exemplo 3.4.1, o espaço tangente a $\mathcal{O}$ em η é dado por

$$T_\eta \mathcal{O} = \{ad(\xi)^* \eta \ |\xi \in \mathfrak{g}\}.$$

Definimos a forma simplética sobre $\mathcal{O}$ por

$$\omega_\eta(ad(\xi)^*\eta, ad(\xi')^*\eta) = \langle \eta, [\xi, \xi'] \rangle$$

para $\xi, \xi' \in \mathfrak{g}$.

G age sobre $\mathcal{O}$ através da ação coadjunta

$$\psi_g(\eta) = Ad^*_{g^{-1}}\eta.$$

Como visto no exemplo 3.4.1, o gerador infinitesimal é dado por

$$X_\xi(\eta) = -ad(\xi)^*\eta.$$

A função $H_\xi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$,

$$H_\xi(\eta) = \langle \eta, \xi \rangle$$

satisfaz

$$\begin{aligned} dH_\xi(\eta)ad(\xi')^*\eta &= \langle ad(\xi')^*\eta, \xi \rangle \\ &= \langle \eta, ad(\xi')\xi \rangle \\ &= \langle \eta, -ad(\xi)\xi' \rangle \\ &= \langle \eta, [\xi, \xi'] \rangle \\ &= \omega_\eta(ad(\xi)^*\eta, ad(\xi')^*\eta). \end{aligned}$$

e é, portanto, a função Hamiltoniana correspondente a X_ξ.

Desta forma, o mapa do momento $\mu : \mathcal{O} \to \mathfrak{g}^*$ é dado pela inclusão

$$\mu(\eta) = \eta.$$

□

Exemplo 4.0.4 Considere a ação de um grupo de Lie G sobre seu fibrado cotangente T^*G induzido pela translação à direita $R_{g^{-1}}$. Como na proposição (1.1.5) a ação simplética é dada por

$$\psi_g : T^*G \to T^*G,$$
$$\psi_g(h, v^*) = (hg^{-1}, (T_{hg^{-1}}R_g)^*v^*)$$

onde $g, h \in G$ e $v^* \in T_h^*G$

Dado $\xi \in \mathfrak{g}$, o campo de vetores sobre G,

$$G \to TG : h \mapsto -T_eL_h\xi$$

gera o grupo a 1-parâmetro $t \mapsto R_{exp(-t\xi)}$.

Como $\psi_{exp(t\xi)}$ é a suspensão à T^*G de $R_{exp(-t\xi)}$, então pela proposição (1.1.5) o fluxo $t \mapsto \psi_{exp(t\xi)}$ é gerado pela função Hamiltoniana

$$H_\xi(h, v^*) = -< v^*, T_eL_h\xi >= -< T_e^*L_hv^*, \xi >$$

Logo o mapa do momento $\mu : T^*G \to \mathfrak{g}^*$ é dado por

$$\mu(h, v^*) = -T_e^* L_h v^*$$

Este resultado fica ainda mais simples quando identificamos T_h^*G com $\mathfrak{g}^*$ através do difeomorfismo

$$f : T^*G \to G \times \mathfrak{g}^* : (h, v^*) \mapsto (h, T_e^* L_h v^*)$$

A ação de G sobre $G \times \mathfrak{g}^*$ será dada por

$$\begin{aligned}
\phi_g(h, \eta) &= f \circ \psi \circ f^{-1}(h, \eta) \\
&= f(\psi(h, T_h^* L_{h^{-1}} \eta)) \\
&= f(hg^{-1}, T_{hg^{-1}}^* R_g (T_h^* L_h^{-1} \eta)) \\
&= f(hg^{-1}, T_{hg^{-1}}^* (L_h^{-1} R_g) \eta) \\
&= (hg^{-1}, T_e^* L_{hg^{-1}} (T_{hg^{-1}}^* (L_h^{-1} R_g) \eta) \\
&= (hg^{-1}, T_e^* (L_{h^{-1}} R_g L_{gh^{-1}}) \eta) \\
&= (hg^{-1}, Ad_{g^{-1}}^* \eta)
\end{aligned}$$

Dado $\xi \in \mathfrak{g}$, a função Hamiltoniana H_ξ é dada por

$$H_\xi : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R} : (h, \eta) \mapsto < -\eta, \xi >$$

Daí o mapa do momento $\mu : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ é apenas menos a projeção sobre a segunda componente.

$$\mu(h, \eta) = -\eta.$$

$\square$

Capítulo 5

O Teorema da Convexidade

Nesta seção estaremos interessados no teorema da convexidade de Atiyah-Guillemin-Sternberg [2] [6]. Esse é um resultado clássico que afirma em sua essência a convexidade da imagem do mapa do momento $\mu : M \to \mathbb{R}^m$ de uma ação hamiltoniana do m-toro $\mathbb{T}^m$ sobre uma variedade simplética compacta e conexa (M, ω). Neste caso, identificamos a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m$ de $\mathbb{T}^m$ com seu dual $\mathfrak{g}^* = \mathbb{R}^m$ através do produto interno canônico.

Para ilustrar esse teorema mostraremos um resultado interessante devido a Schur [10] sobre os autovalores de uma matriz hermitiana e seus elementos diagonais. Atiyah [2] notou que tal resultado poderia ser visto como um corolário do teorema da convexidade.

5.1 Funções de Morse-Bott

Uma generalização do conceito de função de Morse foi dada por Bott [4] considerando os casos onde os pontos críticos de uma função não formam apenas um conjunto discreto mas subvariedades suaves (possivelmente de dimensões diferentes). Na demonstração do teorema da convexidade do mapa do momento nos baseamos na conexidade dos conjuntos de níveis $H_\theta^{-1}(\eta)$ da função hamiltoniana $H_\theta = \langle \theta, \mu \rangle$ que gera a ação do toro. Esse fato é conseqüência de H_θ ser uma função de Morse-Bott, como veremos a seguir.

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave cujo conjunto crítico $Crit(f)$ contém uma subvariedade C de dimensão positiva. Usando alguma métrica Riemaniana sobre M decompomos os espaços tangentes como

$$T_xM = T_xC \oplus T_xC^\perp$$

para todo $x \in C$.

Denotaremos por $\nabla^2 f(x) : T_xM \to T_xM$ o operador linear induzido pela Hessiana $d^2f(x) : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ de f através da métrica Riemaniana, ou seja, $g(\nabla^2 f(x).\xi, \eta) = d^2f(x)(\xi, \eta)$. Por definição, esse operador é auto-adjunto com respeito ao produto interno proveniente da métrica Riemaniana e daí, diagonalizável sobre $\mathbb{R}$.

Dados quaisquer $V \in T_xC$ e $W \in T_xM$ temos que

$$d^2f(x)(V, W) = V_x(\tilde{W}.f) = 0,$$

onde $\tilde{W}$ é uma extensão de W. Isto segue do fato que $V \in T_xC$ e qualquer extensão de W satisfaz $df(\tilde{W})|_C = 0$. Daí a Hessiana de f induz uma forma bilinear simétrica sobre $T_xC^{\perp}$.

Observe que a Hessiana ser não-degenerada sobre $T_xC^{\perp}$ é equivalente a

$$T_xCrit(f) = Ker\nabla^2 f(x).$$

Definição 5.1.1 *Uma função suave $f : M \to \mathbb{R}$ sobre uma variedade M é chamada **função de Morse-Bott** se seu conjunto crítico $Crit(f)$ é uma união disjunta de subvariedades conexas e para cada subvariedade crítica $C \subset Crit(f)$, a Hessiana de f é não-degenerada sobre $T_xC^{\perp}, \forall x \in C$.*

Dizemos que a Hessiana de uma função de Morse-Bott é não-degenerada na direção normal de suas subvariedades críticas.

Exemplo 5.1.1 *Toda função de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse-Bott com subvariedades críticas de dimensão zero.*

□

Exemplo 5.1.2 *A função $f : S^n \to \mathbb{R}, f(x_1, ..., x_{n+1}) = x_{n+1}^2$ é uma função de Morse-Bott. O pólo norte N, o pólo sul S e o equador $E = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in S^n | \ x_{n+1} = 0\}$ são os pontos críticos de f. Observe que as variedades críticas são de dimensões diferentes, N e S de dimensão zero e E de dimensão $n - 1$.*

□

O campo de vetores gradiente ∇f de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ suave sobre uma variedade Riemaniana (M, g) é definido por

$$g(\nabla f, V) = df(V)$$

para todo campo de vetores V sobre M.

Seja $\phi_t : M \to M$ o fluxo gradiente negativo definido por

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = -\nabla f \circ \phi_t, \quad \phi_0 = Id.$$

A linha de fluxo gradiente $\gamma_x : [0, 1] \to M$ é a curva integral dada por

$$\gamma_x(t) = \phi_t(x).$$

Proposição 5.1.1 *Toda função suave $f : M \to \mathbb{R}$ sobre uma variedade Riemaniana de dimensão finita (M, g) não cresce ao longo das linhas de fluxo gradiente.*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f(\gamma_x(t)) &= \frac{d}{dt}(f \circ \phi_t(x)) \\
&= df_{\phi_t(x)} \circ \frac{d}{dt}\phi_t(x) \\
&= df_{\phi_t(x)}(-(\nabla f)(\phi_t(x))) \\
&= -g((\nabla f)(\phi_t(x)), (\nabla f)(\phi_t(x))) \leq 0.
\end{aligned}$$

■

Definição 5.1.2 *Seja C uma subvariedade crítica (conexa) de uma função de Morse-Bott $f : M \to \mathbb{R}$. **A variedade estável** de C é definida por*

$$W^s(C) = \{x \in M | \lim_{t \to \infty} \phi_t(x) = p \in C\}$$

*e a **variedade instável** por*

$$W^u(C) = \{x \in M | \lim_{t \to -\infty} \phi_t(x) = p \in C\}.$$

*O **índice** de C é dado por*

$$n^-(C) = dimW^u(C) - dimC = codimW^s(C)$$

*e o **coíndice** por*

$$n^+(C) = dimW^s(C) - dimC = codimW^u(C).$$

O índice de uma subvariedade crítica C coincide com a dimensão do autoespaço negativo da Hessiana da função f sobre $TC^\perp$ e o coíndice coincide com a dimensão do autoespaço positivo correspondente.

Assim como as funções de Morse, dado um ponto $x \in M$, uma função de Morse-Bott f decresce ao longo da linha de fluxo gradiente, como visto na proposição 5.1.1, e segue que, se M é compacta, a trajetória $\phi_t(x)$ deve convergir para alguma variedade crítica quando $t \to \infty$ e quando $t \to -\infty$. Assim,

$$M = \bigcup_C W^s(C) = \bigcup_C W^u(C).$$

O lema abaixo é o principal resultado sobre teoria de Morse-Bott que usaremos na demonstração do teorema da convexidade. Faremos uso do seguinte argumento de transversalidade:

Suponha que a subvariedade compacta X em M intercepta outra subvariedade Z e que $dimX + dimZ < dimM$. Então podemos fazer uma deformação arbitrariamente pequena em X de forma que não intercepte Z.

Mais detalhes sobre tal argumento podem ser encontrados em [5].

Lema 5.1.1 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função de Morse-Bott sobre uma variedade compacta M. Suponha que as variedades críticas de f possuem índices e coíndices $n^\pm(C) \neq 1$. Então o conjunto de nível $f^{-1}(c)$ é conexo para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Primeiramente provaremos que existe exatamente uma variedade crítica conexa de índice zero. Seja C_0 a união de todas as variedades críticas de índice zero. Como $M = \bigcup_C W^s(C)$ então o complemento de $W^s(C_0)$ é a união das variedade estáveis de todas as outras subvariedades críticas e, por hipótese, cada uma dessas variedades estáveis tem codimensão pelo menos 2. Segue pelo argumento citado acima que qualquer caminho ligando dois pontos de $W^s(C_0) \subset M$ pode ser tomado disjunto de $M - W^s(C_0)$. Assim, $W^s(C_0)$ é conexo e, portanto, C_0 também é conexo. Da mesma maneira, prova-se que existe exatamente uma variedade crítica de coíndice zero.

Sejam

$$c_0 < c_1 < ... < c_N$$

os níveis críticos de f. Desta forma a variedade crítica de índice zero é

$$C_0 = f^{-1}(c_0)$$

e a variedade crítica de coíndice zero é

$$C_N = f^{-1}(c_N).$$

Provaremos que o conjunto de nível $f^{-1}(c)$ é conexo sempre que $c_0 < c < c_1$. Isto segue do fato de podermos unir quaisquer dois pontos $x_0, x_1 \in f^{-1}(c)$ por linhas de fluxo com pontos em C_0 e estes podem ser unidos por um caminho em C_0. Desde que $codimC_0 = n^+(C_0) \geq 2$ o caminho resultante pode ser tomado disjunto de C_0 por nosso argumento de transversalidade e depois movido para o nível c usando o fluxo gradiente.

Faremos agora um processo indutivo pra provar que os conjuntos de nível $f^{-1}(c)$ são conexos para qualquer valor regular c de f. Suponha que $f^{-1}(c)$ é conexo para $c < c_j$, com $j < N$. Sejam $x_0, x_1 \in f^{-1}(c_j + \varepsilon)$. Conecte cada um desses pontos a outros em $W^s(C_0)$ por um caminho em $f^{-1}(c_j + \varepsilon)$ e mova-os, usando o fluxo gradiente, ao nível $c_j - \varepsilon$. Teremos então, dois pontos x_0' e x_1' que, por hipótese de indução, podem ser conectados por um caminho $\gamma' : [0,1] \to f^{-1}(c_j - \varepsilon)$. Desde que o complemento de $W^u(C_N)$ em M tem codimensão maior ou igual a 2, podemos tomar o caminho resultante contido em $W^u(C_N)$. Assim, usamos o fluxo para movê-lo para o nível $c_j + \varepsilon$ e obteremos o caminho requerido $\gamma : [0,1] \to f^{-1}(c_j + \varepsilon)$ conectando x_0 e x_1. Ou seja, $f^{-1}(c_j + \varepsilon)$ é conexo, completando o argumento indutivo.

Para finalizarmos a demonstração, provaremos, por continuidade de f, que os conjuntos de nível são conexos. Suponha que $f^{-1}(c_j)$ é desconexo para algum j. Então existem conjuntos abertos $U, V \subset M$ com fechos disjuntos tais que $f^{-1}(c_j) \cap U \neq \emptyset$ e $f^{-1}(c_j) \cap V \neq \emptyset$. Como o conjunto dos valores regulares de f é denso em $\mathbb{R}$, então $f^{-1}(c) \cap U \neq \emptyset$ e $f^{-1}(c) \cap V \neq \emptyset$ para valores regulares c arbitrariamente próximos de c_j. Isso contradiz o fato que os conjuntos de nível regulares são conexos, como tínhamos provado anteriormente, finalizando a demonstração.

$\blacksquare$

5.2 O Teorema da Convexidade

Considere uma ação Hamiltoniana de um toro $\mathbb{T}^m$ sobre uma variedade simplética compacta e conexa. O teorema da convexidade afirma que a imagem do mapa do momento neste caso forma um conjunto convexo de $\mathbb{R}^m$. Antes de enunciarmos formalmente este resultado, apresentaremos os lemas necessários à sua demonstração.

Lema 5.2.1 *Existe uma estrutura quase complexa J sobre M compatível com ω e invariante sob a ação do toro, ou seja $\psi_\theta^* J = J$ para todo $\theta \in \mathbb{R}^m$.*

Demonstração: Seja g_0 uma métrica Riemaniana sobre M. Defina

$$g = \int_{\mathbb{T}^m} \psi_\theta^* g_0 \; d\theta.$$

A métrica g é evidentemente invariante sob a ação do toro e tomando sua imagem pela aplicação $r : \mathfrak{Met}(V) \to \mathfrak{I}(V, \omega)$ da proposição 2.1.2 obtemos uma estrutura complexa invariante e compatível com ω.

■

Observe que este argumento poderia ser utilizado para qualquer ação simplética de qualquer grupo de Lie compacto.

Lema 5.2.2 *Seja $G \subset \mathbb{T}^m$ um subgrupo de $\mathbb{T}^m$. Então o conjunto dos pontos fixos de G*

$$Fix(G) = \bigcap_{\theta \in G} Fix(\psi_\theta)$$

é uma subvariedade simplética de M.

Demonstração: Seja $x \in Fix(G)$. Para $\theta \in G$ denote a derivada de ψ_θ em x por

$$\Psi_\theta = T_x\psi_\theta : T_xM \to T_xM$$

Essas aplicações determinam uma ação de G sobre o espaço vetorial simplético complexo (T_xM, ω_x, J_x).

Considere a aplicação exponencial $exp_x : T_xM \to M$ com respeito a métrica invariante $g(v, w) = \omega(v, Jw)$.

Se $\gamma : \mathbb{R} \to M, \gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = \xi \in T_xM$ é uma geodésica o mesmo vale para $\psi_\theta \circ \gamma$. Temos que $\psi_\theta(\gamma(0)) = \psi_\theta(x) = x$ e

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi_\theta \circ \gamma(t) = \Psi_\theta.\xi$$

Logo

$$exp_x(\Psi_\theta \xi) = \Psi_\theta(\gamma(1)) = \Psi_\theta(exp_x(\xi))$$

Em conseqüência disso os pontos fixos de ψ_θ numa vizinhança de x correspondem a pontos fixos de Ψ_θ no espaço tangente T_xM já que

$$\psi_\theta(exp_x(\xi)) = exp_x(\xi) \Rightarrow \Psi_\theta \xi = \xi.$$

Desta forma

$$T_xFix(G) = \bigcap_{\theta \in G} ker(I - \Psi_\theta).$$

Pelo lema (5.2.1) as aplicações lineares Ψ_θ são transformações unitárias de T_xM desde que $\forall\ \xi, \eta \in T_xM$,

$$\begin{aligned} g(\Psi_\theta \xi, \Psi_\theta \eta) &= \omega(\Psi_\theta \xi, J\Psi_\theta \eta) \\ &= \omega(\Psi_\theta \xi, J\eta) \\ &= -\omega(J\Psi_\theta \xi, \eta) \\ &= -\omega(J\xi, \eta) \\ &= \omega(\xi, J\eta) \\ &= g(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Segue daí e do lema (5.2.1) que

$$\Psi_\theta J_x = J_x \Psi_\theta,$$

pois

$$\begin{aligned} g(\Psi_\theta J_x - J_x\Psi_\theta, \Psi_\theta J_x - J_x\Psi_\theta) &= g(\Psi_\theta J_x, \Psi_\theta J_x) - 2g(\Psi_\theta J_x, J_x\Psi_\theta) + g(J_x\Psi_\theta, J_x\Psi_\theta) \\ &= g(J_x, J_x) - 2g(J_x, J_x) + g(J_x, J_x) = 0. \end{aligned}$$

Dado $\xi \in Ker(I - \Psi_\theta)$ a igualdade $\Psi_\theta J_x = J_x\Psi_\theta$ implica que

$$\Psi_\theta J_x \xi = J_x \Psi_\theta \xi = J_x \xi.$$

Logo $J_x\xi \in Ker(I - \Psi_\theta)$, ou seja, o autoespaço com autovalor 1 de Ψ_θ é invariante por J_x e daí um subespaço complexo e, por conseqüência da proposição 2.2.2, um subespaço simplético.

$\blacksquare$

Lema 5.2.3 *Para todo $\theta \in \mathbb{R}^m$ a função $H_\theta = \langle \mu, \theta \rangle : M \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse-Bott com variedade críticas de dimensão e índice pares. Além disso, o conjunto crítico*

$$Crit(H_\theta) = \bigcap_{\tau \in T_\theta} Fix(\psi_\tau)$$

é uma subvariedade simplética, onde $T_\theta = \overline{(\{t\theta + k|\ t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^m\}/\mathbb{Z}^m)}$ é o sub-toro fechado gerado por θ.

Demonstração: Suponha que θ possui componentes linearmente independentes sobre os racionais de forma que o conjunto $\{t\theta + k|\ t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}^m\}$ é denso em $\mathbb{R}^m$.

Desde que $dH_\theta X_H = \omega(X_H, X_H) = 0$ então $H_\theta(\psi_{t\theta}(x)) = H(x)$. Isto implica que os pontos críticos de $H = H_\theta$ são os pontos fixos de $\psi_{t\theta}$, que, pela independência linear de θ, são os pontos fixos do toro inteiro. Assim,

$$Crit(H) = \bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^m} Fix(\psi_\tau).$$

Pelo lema (5.2.2) esse conjunto forma uma subvariedade simplética de M. Considere a Hessiana de H em um ponto $x \in Crit(H)$ com respeito a métrica Riemaniana $g(u, v) = \omega(u, Jv)$ e considere o operador linear induzido

$$\nabla^2 H(x) : T_xM \to T_xM.$$

Para $\xi \in T_xM$ tem-se

$$\begin{aligned}
\omega(-J_x \nabla H(x), \xi) &= g(\nabla H(x), \xi) \\
&= dH(x)\xi \\
&= \omega(X_H(x), \xi).
\end{aligned}$$

Logo

$$X_H(x) = -J_x \nabla H(x)$$

e

$$T_x X_H = -J_x d\nabla H(x) = -J_x \nabla^2 H(x).$$

Assim $T_x X_H = -J_x \nabla^2 H(x)$ define um campo de vetores linear sobre $T_x M$. Desde que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi_{t\theta} &= T_x\left(\frac{d}{dt}\psi_{t\theta}\right) \\ &= T_x(X_H(\psi_{t\theta})) \\ &= T_x X_H(\Psi_{t\theta}), \end{aligned}$$

então $\Psi_{t\theta}$ é o fluxo de $T_x X_H$. Logo $\Psi_{t\theta} = exp(-tJ_x \nabla^2 H(x))$ e assim, o núcleo de $\nabla^2 H(x)$ corresponde aos pontos fixos das matrizes $\Psi_{t\theta}$. Desde que θ tem componentes independentes sobre os racionais esses são os pontos fixos de Ψ_τ para todo $\tau \in \mathbb{T}^m$. Daí

$$T_x Crit(H) = \bigcap_{\tau \in \mathbb{T}^m} ker(I - \Psi_\tau) = ker \nabla^2 H(x).$$

Como visto no lema anterior, Ψ_τ é uma transformação unitária e da mesma forma, J_x comuta com $\nabla^2 H(x)$. Assim, os auto-espaços de $\nabla^2 H(x)$ são invariantes sob J_x o que os tornam subespaços complexos e conseqüentemente, de dimensão par.

Desta forma, provamos que a variedade de pontos críticos de H tem índice par e $T_x Crit(H) = Ker \nabla^2 H(x)$ é um subespaço complexo e portanto, subespaço simplético de $T_x M$. Isto prova o lema no caso das coordenadas de θ serem linearmente independentes sobre os racionais. O caso geral segue restringindo a ação ao subtoro fechado $T_\theta \subset \mathbb{T}^m$.

■

Definição 5.2.1 *Denotaremos as componentes do mapa do momento $\mu : M \to \mathbb{R}^m$ por*

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m).$$

*Diremos que μ é **irredutível** se as 1-formas $d\mu_1, ..., d\mu_m$ são linearmente independentes e **redutível** caso contrário.*

No caso onde μ é redutível, a função

$$H_\theta = \langle \mu, \theta \rangle = \sum_{j=1}^{m} \theta_j \mu_j$$

é constante para algum vetor não-nulo $\theta \in \mathbb{R}^m$. Neste caso a componente com $\theta_j \neq 0$ pode ser negligenciada reduzindo a ação para uma de $\mathbb{T}^{m-1}$. Mais precisamente, existe uma ação $\mathbb{T}^{m-1} \hookrightarrow (M, \omega), \tau \mapsto \psi'_\tau$ com mapa do momento $\mu' : M \to \mathbb{R}^{m-1}$ e uma matriz injetiva $A \in \mathbb{Z}^{(m-1)\times m}$ tal que

$$\psi_\theta = \psi'_{A\theta}, \qquad \mu(x) = A^T \mu'(x)$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}^m$ e $x \in M$.

Observe que no caso da ação ser redutível a convexidade de $\mu'(M)$ implica na convexidade de $\mu(M)$ pois, se $\mu(x), \mu(y) \in \mu(M)$, então

$$(1-t)\mu(x) + t\mu(y) = A^T[(1-t)\mu'(x) + t\mu'(y)] \in \mu(M).$$

Usaremos esse fato na demonstração do teorema da convexidade, já que o faremos por indução sobre a dimensão do toro, como veremos a seguir.

Teorema 5.2.1 (Atiyah-Guillemin-Sternberg) *Seja (M, ω) uma variedade simplética compacta e conexa. Considere uma ação hamiltoniana de $\mathbb{T}^m$ sobre (M, ω) dada por $\theta \to \psi_\theta$ com mapa do momento $\mu : M \to \mathbb{R}^m$. Então os pontos fixos da ação formam uma união finita de subvariedades simpléticas conexas $C_1, ..., C_N$:*

$$\bigcap_{\theta \in \mathbb{T}^m} Fix(\psi_\theta) = \bigcup_{j=1}^{N} C_j.$$

O mapa do momento é constante sobre cada um desses conjuntos

$$\mu(C_j) = \eta_j \in \mathbb{R}^m$$

e a imagem de μ é o fecho convexo dos pontos η_j, ou seja,

$$\mu(M) = \left\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \eta_j \mid \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \right\}.$$

Demonstração:

Primeiramente provaremos que $\mu^{-1}(\eta)$ é conexo para qualquer valor regular $\eta \in \mathbb{R}^n$ de μ. Para isso usaremos indução sobre a dimensão m do toro.

Se $m = 1$ os pontos críticos de μ são os mesmos de $H_\theta =< \mu, \theta >, \theta \neq 0$, daí, pelo lema 5.2.3, a função $\mu : M \to \mathbb{R}$ satisfaz as hipóteses do lema (5.1.1) e portanto $\mu^{-1}(\eta)$ é conexo.

Suponha que $\mu^{-1}(\eta)$ é conexo para ações de $\mathbb{T}^{m-1}$. Se a ação de $\mathbb{T}^m$ é redutível nada temos a fazer pois $d\mu_1, d\mu_2, ..., d\mu_m$ são linearmente dependes, logo $\mu^{-1}(\eta) = \emptyset$ para qualquer valor regular η de μ.

Suponhamos que nossa ação é irredutível. Neste caso, a função $H_\theta = \langle \mu, \theta \rangle$ é não-constante para qualquer $0 \neq \theta \in \mathbb{R}^m$.

Seja
$$Z = \bigcup_{\theta \neq 0} Crit(H_\theta).$$
Pelo lema (5.2.3) os pontos críticos de H_θ são os pontos fixos da ação do subtoro fechado $T_\theta \subset \mathbb{T}^m$ e formam subvariedades próprias de dimensão par de M. Esta união é enumerável desde que o conjunto dos pontos fixos diminui quando o toro aumenta, então é suficiente considerarmos subtoros unidimensionais ou seja, vetores inteiros θ. Como M é compacto e de Hausdorff, pelo teorema da categoria de Baire, Z tem interior vazio, logo $M - Z$ é denso em M. $M - Z$ é aberto já que $x \in M - Z$ se, e somente se os funcionais lineares $d\mu_1(x), ..., d\mu_m(x)$ são linearmente independentes.

O conjunto de valores regulares de μ é denso em $\mu(M)$. De fato, aproximando $\eta = \mu(x) \in \mu(M)$ por uma seqüência $x_j \in M - Z$, então a imagem $\mu(M)$ contém uma vizinhança de $\mu(x_j)$. Pelo teorema de Sard, existe um valor regular $\eta_j \in \mathbb{R}^m$ de μ o qual está arbitrariamente próximo a $\mu(x_j)$ e então $\mu^{-1}(\eta_j) \neq \emptyset$. Da mesma forma, prova-se que o conjunto dos pontos $\eta \in \mu(M)$ tais que $(\eta_1, ..., \eta_{m-1})$ é valor regular do mapa do momento reduzido $(\mu_1, ..., \mu_{m-1})$ é denso em $\mu(M)$.

Provaremos que μ^{-1} é conexo sempre que $(\eta_1, ..., \eta_{m-1})$ é valor regular do mapa do momento reduzido $(\mu_1, ..., \mu_{m-1})$. Seja
$$Q = \bigcap_{j=1}^{m-1} \mu_j^{-1}(\eta_j).$$

Por definição Q é a imagem inversa de um valor regular logo uma variedade. Além disso, pela hipótese de indução, Q é conexa.

Considere a função
$$\mu_m : Q \to \mathbb{R}.$$

Um ponto $x \in Q$ é ponto crítico de $\mu|_Q$ se, e somente se existem [1] $\theta_1, ..., \theta_{m-1} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{m-1} \theta_j d\mu_j(x) + d\mu_m(x) = 0.$$

Daí x é ponto crítico de $H_\theta = \langle \mu, \theta \rangle : M \to \mathbb{R}, \theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1}, 1)$.

Pelo lema (5.2.3), H_θ é uma função de Morse-Bott com variedades críticas de dimensão e índice pares. Seja $C \subset M$ a variedade crítica de H_θ que contém o ponto x. Provemos que C intercepta Q transversalmente, ou seja

$$T_x M = T_x C + T_x Q.$$

Isso é equivalente aos funcionais lineares $d\mu_1, ..., d\mu_{m-1} : T_x M \to \mathbb{R}$ permanecerem linearmente independentes quando restritos ao subespaço $T_x C$. Primeiramente, observe que, pelo lema (5.2.3) C é uma subvariedade simplética de M.

Sejam ψ_t e $\Psi_{t\theta}$ os fluxos hamiltonianos de μ_j e H_θ, respectivamente. Pelo lema 4.0.2, $\mu(\Psi_{t\theta}) = Ad^*_{-t\theta}\mu$. Mas $\mathbb{T}^m$ é um grupo comutativo, logo a transformação coadjunta é a identidade e $\mu(\Psi_{t\theta}) = \mu$. Então

$$\{\mu_j, H_\theta\} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mu_j(\Psi_{t\theta}) = 0.$$

Logo, pela proposição 1.1.3, ψ_t comuta com $\Psi_{t\theta}$. Derivando

$$\psi_t(\Psi_{s\theta}(x)) = \Psi_{s\theta}(\psi_t(x))$$

com relação a s em $s = 0$, tem-se

$$T_x \psi_t X_{H_\theta}(x) = X_{H_\theta}(\psi_t(x)).$$

Daí, se $x \in C$, então $X_{H_\theta}(x) = 0$ e, conseqüentemente $X_{H_\theta}(\psi_t(x)) = 0$ e $\psi_t(x) \in C$. Ou seja, o fluxo ψ_t preserva a variedade crítica C. Desta forma os vetores linearmente independentes $X_j = X_{\mu_j} : M \to TM$ são tais que

$$X_1(x), ..., X_{m-1}(x) \in T_x C.$$

[1] Multiplicadores de Lagrange

Como T_xC é um subespaço simplético de T_xM, então para todo $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$ não-nulo, existe um vetor não-nulo $\xi \in T_xC$ tal que

$$0 \neq \omega\left(\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j X_j(x), \xi\right) = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j d\mu_j(x)\xi,$$

o que mostra que os funcionais $d\mu_j(x) : T_xC \to \mathbb{R}$ são linearmente independentes e a intercessão de C e M é transversal.

Isso implica que $T_xQ \supset T_xC^\perp$ e assim, $T_xQ \cap T_xC^\perp$ é o complemento de T_xC em T_xM. Então a Hessiana de H_θ é não degenerada sobre $T_xQ \cap T_xC^\perp$ com índice e co-índice pares.

A igualdade

$$T_xQ = T_x(Q \cap C) \oplus T_xQ \cap T_xC^\perp$$

mostra que $C \cap Q$ é uma variedade crítica de $H_\theta|_Q$ com índice e co-índice pares. O mesmo ocorre com $\mu_m|_Q$ pois essas funções diferem apenas da constante $\sum_{j=1}^{m-1} \eta_j\theta_j$. Desta forma, $\mu_m|_Q$ possui somente variedades críticas de índice e co-índice pares o que implica, pelo lema (5.1.1), que os conjuntos de nível

$$\mu^{-1}(\eta) = Q \cap \mu_m^{-1}(\eta_m)$$

são conexos para todo η_m. Assim, provamos que o conjunto $\mu^{-1}(\eta)$ é conexo sempre que $(\eta_1, ..., \eta_{m-1})$ é valor regular de $(\mu_1, ..., \mu_{m-1})$. Desde que o conjunto desses pontos é denso em $\mu(M)$ segue por continuidade que $\mu^{-1}(\eta)$ é conexo para qualquer valor regular η.

Provaremos agora a convexidade do conjunto $\mu(M)$ por indução sobre a dimensão m do toro. No caso $m = 1$, a convexidade de $\mu(M)$ é conseqüência de sua conexidade, já que em $\mathbb{R}$ esses conceitos são equivalentes.

Suponha que $\mu(M)$ é convexo para ações Hamiltonianas de $\mathbb{T}^{m-1}$. Se a ação for redutível a convexidade de $\mu(M)$ segue diretamente da hipótese de indução. Suponhamos que nossa ação de $\mathbb{T}^m$ é irredutível. Vimos que nessas condições o conjunto dos valores regulares de μ é denso em $\mu(M)$. Seja $A \in \mathbb{Z}^{m\times(m-1)}$ uma matriz inteira injetiva e considere a ação

$$\mathbb{T}^{m-1} \hookrightarrow (M, \omega)$$

$$\theta \mapsto \psi_{A\theta}$$

com mapa do momento

$$\mu_A = A^T\mu : M \to \mathbb{R}^{m-1}.$$

Esta ação também é irredutível pois se $A = [a_{ij}]$, então

$$(\mu_A)_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\mu_j \Rightarrow d(\mu_A)_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} d\mu_j.$$

Portanto, se $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ é tal que $\sum_{i=1}^{m-1} \theta_i d(\mu_A)_i = 0$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m} \theta_i a_{ji} d\mu_j &= 0 \Rightarrow \\
\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m-1} \theta_i a_{ji}\right) d\mu_j &= 0 \Rightarrow \\
\sum_{i=1}^{m-1} \theta_j a_{ji} &= 0,\ j = 1, ..., m \Rightarrow \\
A.\theta &= 0 \Rightarrow \theta = 0,
\end{aligned}$$

já que A é uma matriz injetiva.

Assim, o conjunto dos valores regulares de μ_A é denso em $\mu_A(M)$ e pela primeira parte da demonstração, $\mu_A^{-1}(\eta)$ é conexo para qualquer valor regular $\eta \in \mathbb{R}^{m-1}$ de μ_A. Dado qualquer $x_0 \in \mu_A^{-1}(\eta)$,

$$x \in \mu_A^{-1}(\eta) \Leftrightarrow A^T\mu(x) = \eta = A^T\mu(x_0).$$

Portanto, podemos escrever

$$\mu_A^{-1}(\eta) = \{x \in M |\ \mu(x) - \mu(x_0) \in KerA^T\}.$$

Conectando x_1 e x_0 por um caminho $\gamma(t)$ em $\mu_A^{-1}(\eta)$, obteremos um caminho $\mu(\gamma(t)) - \mu(x_0)$ em $KerA^T$. Desde que A é injetiva, então A^T é sobrejetiva e conseqüentemente, $KerA^T$ é unidimensional. Assim, o caminho $\mu(\gamma(t)) - \mu(x_0)$ é de fato, o segmento de reta ligando o vetor 0 com o vetor $\mu(x_1) - \mu(x_0)$. Ou seja,

$$\mu(\gamma(t)) - \mu(x_0) = t(\mu(x_1) - \mu(x_0)),\ 0 \leq t \leq 1.$$

Daí,

$$(1-t)\mu(x_0) + t\mu(x_1) = \mu(\gamma(t)) \in \mu(M),\ 0 \leq t \leq 1.$$

Dados $x_0, x_1 \in M$ podemos aproximá-los arbitrariamente por pontos x_0' e x_1' com $\mu(x_0') - \mu(x_1') \in KerA^T$ para alguma matriz injetiva $A \in \mathbb{Z}^{m\times(m-1)}$. Tomando os limites $x_0' \to x_0$ e $x_1' \to x_1$ segue que $\mu(M)$ é convexo.

Pelo lema (5.2.3) o conjunto dos pontos fixos C da ação decompõe-se em um número finito de subvariedades críticas $C_1, C_2, ..., C_N$. Como cada C_j esta contido em $Crit(H_\theta), \forall\, \theta \in \mathbb{R}^m$ então o mapa do momento μ é constante em cada um desses conjuntos, $\mu(C_j) = \eta_j \in \mathbb{R}^m$. Mostraremos que $\mu(M)$ é o fecho convexo dos pontos η_j.

Provamos anteriormente que $\mu(M)$ é convexo, logo o fecho convexo dos pontos η_j esta contido na imagem de μ. Para a inclusão contrária considere $\eta \in \mathbb{R}^m$ fora do fecho convexo de $\{\eta_j\}$. Tomemos um ponto $\theta \in \mathbb{R}^m$ com coordenada linearmente independentes sobre os racionais de forma que

$$\langle \eta_j, \theta \rangle < \langle \eta, \theta \rangle, \forall j.$$

Vimos na prova do lema (5.2.3) que os pontos críticos de H_θ são os pontos fixos da ação de $\mathbb{T}^m$. Daí, H_θ atinge seu máximo em um dos conjuntos C_j e

$$\sup_{p \in M} \langle \mu(p), \theta \rangle < \langle \eta_j, \theta \rangle < \langle \eta, \theta \rangle.$$

Desta forma $\eta \notin \mu(M)$ e

$$\mu(M) = \left\{ \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \eta_j \mid \sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \right\}$$

como queríamos demonstrar.

■

Como notado por *Atiyah* [2] o teorema abaixo devido a *Schur* [10] pode ser visto como um corolário do teorema da convexidade.

Teorema 5.2.2 (Schur) *Seja $A = A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz hermitiana, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ seus autovalores. Então o vetor $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ formado pelos elementos da diagonal de A pertence ao fecho convexo dos pontos*

$$\sigma_* \lambda = (\lambda_{\sigma(1)}, ..., \lambda_{\sigma(n)})$$

sobre todas as permutações $\sigma \in S_n$.

Demonstração: Seja $G = U(n)$ o grupo unitário e $\mathbb{T} \subset U(n)$ o subgrupo de matrizes diagonais. Observe que $\mathbb{T}$ pode ser identificado com o n-toro. Denotando por $\mathfrak{t}$ a álgebra de Lie de $\mathbb{T}$, vemos que esta é formada pelas matrizes diagonais em $\mathfrak{g}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{u}(\mathfrak{n}) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid A = -A^*\}$, a álgebra de Lie de G.

G age sobre $\mathfrak{g}$ através da ação adjunta

$$Ad_g\xi = T_eI_g\xi = g\xi g^{-1}, \quad \lambda \in \mathfrak{g}$$

Seja $\lambda \in \mathfrak{t}$ uma matriz diagonal com todas os elementos da sua diagonal distintos. Podemos definir naturalmente um difeomorfismo entre a órbita adjunta de $\lambda, Orb(\lambda)$ e o espaço quociente $M = G/\mathbb{T}$, simplesmente identificando $g\mathbb{T}$ e $g\lambda g^{-1}$. Verifica-se que esta operação está bem definida observando que o estabilizador de $\lambda, G_\lambda = \{g \in G | \; Ad_g\lambda = \lambda\}$ é o próprio $\mathbb{T}$.

A estrutura simplética de $Orb(\lambda)$ é dada pela 2-forma

$$\omega_\lambda(\xi, \xi^{'}) =< \lambda, [\xi, \xi^{'}] >$$

onde $< \xi, \eta >=$ traço$(\xi^*\eta)$. Este produto interno canônico identifica a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ com seu dual e assim, a ação de G sobre M, induzida pela ação adjunta sobre $Orb(\lambda)$, pode ser vista como a ação de G sobre uma órbita coadjunta. Utilizamos então, o resultado do exemplo 4.0.3 para obter o mapa do momento da ação de G sobre (M, ω_λ). Este é dado por

$$\mu_G : G/\mathbb{T} \to \mathfrak{g}, \;\; \mu_G(g\mathbb{T}) = g\lambda g^{-1}$$

Para determinarmos o mapa do momento da ação no n-toro $\mathbb{T} \subset G$ sobre M fazemos a composição de μ_G com a projeção ortogonal $\mathfrak{g} \to \mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$ sobre o subespaço $\mathfrak{t}$ de suas matrizes diagonais. Daí, tomamos as entradas da diagonal da matriz anti-hermitiana $A = g\lambda g^{-1} \in \mathfrak{u}(\mathfrak{n})$, obtendo

$$\mu_{\mathbb{T}} = diag(g\lambda g^{-1}).$$

Com a identificação de $Orb(\lambda)$ e M, tem-se que os pontos fixos da ação de $\mathbb{T}$ sobre M são as matrizes diagonais em $Orb(\lambda)$, ou seja, as matrizes obtidas permutando-se os elementos da diagonal de λ. A imagem de μ_λ nesses pontos são justamente os vetores $\sigma_*\lambda \in \mathbb{R}^n$ e, pelo teorema de Atiyah-Guillemin-Sternberg, o conjunto $\mu_{\mathbb{T}}(G/\mathbb{T})$ é o fecho convexo desses vetores. Substituindo a matriz $A = g\lambda g^{-1}$ pela matriz hermitiana iA segue-se a afirmação do teorema.

■

Referências Bibliográficas

[1] ARNOLD, V. I. *Mathematical methods of classical mechamics.* New York: Springer-Verlag, 1978.

[2] ATIYAH, M.F. *Convexity and commuting Hamiltonians.* Bulletin of the London Mathematical Society, 14, 1-15. 1982.

[3] BANYAGA, A. and HURTUBISE, D.*Lectures on Morse Homology.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 2004.

[4] BOTT, R. *Lectures on Morse theory, old and new.* Bulletin of the American Mathematical Society, 7, 331-58. 1972.

[5] GUILLEMIN, V. and POLLACK, V. *Differential topology.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1974.

[6] GUILLEMIN, V. and STERNBERG, S. *Convexity properties of the moment map.* Inventiones Mathematicae, 67, 515-38. 1982.

[7] MARSDEN, J. E. and RATIU, T. S. *Introduction to Mechanics and Symmetry.* New York: Springer, 1994.

[8] McDUFF, D. and SALAMON, D. *Introduction to Symplectic Topology.* Oxford University Press, 1998.

[9] MOSER, J.K. *On the volume elements on manifolds.* Transactions of the American Mathematical Society, 120, 280-96. 1965.

[10] SCHUR, L. *Uber eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwendun- gen auf die Determinantentheorie.* Sitzungsberichte der Berliner Mathema- tischen Gesellschaft, 22, 9-20. 1923.