



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Adecarlos Costa Carvalho

DINÂMICA DE VÓRTICES PONTUAIS NA ESFERA  $S^2$  E NO ESPAÇO  
HIPERBÓLICO  $H^2$

Recife  
2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Adecarlos Costa Carvalho

DINÂMICA DE VÓRTICES PONTUAIS NA ESFERA  $S^2$  E NO ESPAÇO  
HIPERBÓLICO  $H^2$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Matemática da UFPE, como requisito parcial para a  
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hildeberto Eulalio Cabral

Recife  
2008

**Carvalho, Adecarlos Costa**

**Dinâmica de vórtices pontuais na esfera  $S^2$  e no espaço hiperbólico  $H^2$  / Adecarlos Costa Carvalho.**

**– Recife: O Autor, 2008.**

**55 folhas : il., fig.**

**Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2008.**

**Inclui bibliografia.**

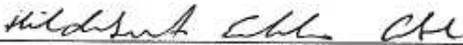
**1. Sistemas dinâmicos. Título.**

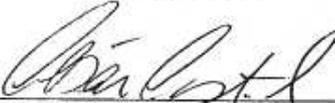
**531**

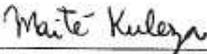
**CDD (22.ed.)**

**MEI2008-040**

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado:   
Hildeberto Eulálio Cabral, DMAT-UFPE  
**Orientador**

  
César Augusto Rodrigues Castilho, DMAT-UFPE

  
Maité Kulesza, DM-UFPE

**DINÂMICA DE VÓRTICES PONTUAIS NA  
ESFERA  $S^2$  E NO ESPAÇO HIPERBÓLICO  $H^2$**

*Por*  
*Adecarlos Costa Carvalho*

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410  
RECIFE – BRASIL

Fevereiro - 2008

*A minha família.*

## RESUMO

Apresentamos as equações de movimento para  $n$  vórtices pontuais sobre as seguintes superfícies de Riemann: A Esfera  $S^2$  e o Espaço Hiperbólico  $H^2$ . Apresentamos, também, a formulação Hamiltoniana para o movimento de vórtices sobre estas superfícies. Para isto, primeiramente, apresentamos a projeção estereográfica para  $S^2$  e  $H^2$ . Então construímos o operador de Laplace-Beltrami e suas funções de Green. O campo vorticidade e a função corrente são relacionados através do operador de Laplace-Beltrami de forma que, usando as funções de Green, expressamos a função corrente como uma forma integral. Como exemplo, consideramos o movimento de um par de vórtices e mostramos que ele descreve um geodésica como sua trajetória sobre  $S^2$  e  $H^2$ .

**Palavras-chave:** Superfície de Riemann; Dinâmica de Vórtices; Função de Green.

## ABSTRACT

We present the movement equations of  $n$  punctual vortices over the following Riemann surfaces: the sphere  $S^2$  and the hyperbolic space  $H^2$ . We also state the Hamiltonian formulation of the vortices motion over these surfaces. For this purpose, we primarily present the stereographic projection over  $S^2$  and over  $H^2$ . Then, we construct the Laplace-Beltrami operator and its Green functions. The vorticity field and the stream function are related through the Laplace-Beltrami operator in such way that we express the stream function as an integral form by using the Green functions. As an instance, we consider the movement of a pair of vortices and prove that its trajectory describes a geodesic over  $S^2$  and  $H^2$ .

**Key-words:** Riemann surfaces; Vortex Motion; Green function.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, a minha família, a meu orientador Hildeberto Eulalio Cabral, aos funcionários, professores e pós-graduandos do DMAT-UFPE e ao órgão financiador: CAPES.

*“Nunca nos tornaremos matemáticos,  
mesmo que nossa história domine todas  
as demonstrações feitas por outros, se o  
nosso espírito não for capaz de resolver  
todas as espécies de problemas”.*

*Descartes*

## SUMÁRIO

Lista de Figuras	9
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>2 CONCEITOS PRELIMINARES</b>	<b>11</b>
2.1 Funções Algébricas e Superfícies de Riemann . . . . .	11
2.2 Fluidos no Plano . . . . .	18
2.3 Fluidos em Superfícies . . . . .	23
2.4 Geometria Riemanniana . . . . .	28
<b>3 DINÂMICA DE VÓRTICES PONTUAIS</b>	<b>33</b>
3.1 Movimento de Vórtices Pontuais no Plano . . . . .	33
3.2 Movimento de Vórtices Pontuais em $S^2$ e $H^2$ . . . . .	35
3.2.1 Projeção Estereográfica para $S^2$ e $H^2$ . . . . .	35
3.2.2 As Distâncias Esférica e Hiperbólica . . . . .	36
3.2.3 Operador de Laplace-Beltrami em $S^2$ e $H^2$ . . . . .	39
3.2.4 Função Corrente . . . . .	44
3.2.5 Equações de Movimento para Vórtices Pontuais sobre $S^2$ e $H^2$ . . . . .	45
3.2.6 Movimento de um Par de Vórtices . . . . .	49
REFERÊNCIAS	54

## Lista de Figuras

2.1	Esferas com cortes transformados em pequenos tubos . . . . .	16
2.2	Superfície homeomorfa ao Toro . . . . .	16
2.3	Duas esferas unidas por quatro tubos . . . . .	16
2.4	Esfera com três alças . . . . .	17
2.5	Ponto de cruzamento de ordem 2 . . . . .	19
2.6	Fonte pontual . . . . .	21
2.7	Vórtice pontual . . . . .	21
2.8	Escoamento próximo a um polo de ordem 1 . . . . .	22
2.9	Escoamento próximo a um pólo de ordem 2 . . . . .	22
2.10	Mudança de cartas . . . . .	29
2.11	Projeção estereográfica para $S^2$ . . . . .	30
3.1	Projeção estereográfica para $H^2$ . . . . .	37
3.2	Dipolo de vórtices no equador . . . . .	51
3.3	Dipolo de vórtices: caso geral . . . . .	51

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo da dinâmica de vórtices pontuais, devido suas diversas aplicações, desperta o interesse de cientistas de diversas áreas de conhecimento tais como física, meteorologia, cosmologia, geofísica, matemática. Em particular, podemos citar J. J. Thomson [19, 20], o qual tentou utilizar a teoria de vórtices para formular a estrutura do átomo. A teoria de vórtices também tem sido estudada, com o intuito de descrever a dinâmica de furacões e tornados, assim como outros fenômenos naturais.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2 apresentamos alguns conceitos gerais que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Na primeira seção, como motivação, apresentamos a construção de superfícies de Riemann a partir de uma função algébrica e obtemos que uma Superfície de Riemann de uma função algébrica é topologicamente equivalente a uma esfera com alças. Em seguida, descrevemos o comportamento de um fluido no plano e definimos conceitos importantes tais como linhas de corrente, potencial velocidade, potencial complexo, circulação, entre outros. Então tratamos do comportamento de fluidos sobre uma superfície e demonstramos alguns resultados sobre aplicações conformes entre superfícies. A seguir tratamos de alguns conceitos intrínsecos à superfície.

O principal objetivo deste trabalho é obter as equações de movimento para dinâmica de  $n$  vórtices pontuais sobre as seguintes superfícies de Riemann com curvatura constante: A Esfera  $S^2$  e o Espaço Hiperbólico  $H^2$  e comparando com o caso no Plano Euclidiano  $E^2$ , as quais tem curvatura Gaussiana  $K = 1$ ,  $K = -1$  e  $K = 0$ , respectivamente. Para este fim, no capítulo 3, são obtidas as equações de movimento para a dinâmica de  $n$  vórtices pontuais sobre o plano  $E^2$ . Depois, baseado no artigo de Kimura [10], apresentamos a projeção estereográfica para  $S^2$  e  $H^2$ . E construímos o operador de Laplace-Beltrami  $\Delta$  para Esfera  $S^2$  e Espaço Hiperbólico  $H^2$  a partir de suas respectivas métricas riemannianas. Este relaciona a função corrente  $\psi$ , com o campo vorticidade  $\omega$ , através da equação de Poisson  $\Delta\psi = -\omega$ . Então, obtemos a função de Green para o operador de Laplace-Beltrami sobre  $S^2$  e  $H^2$  e, conseqüentemente, obtemos a função corrente  $\psi$  como uma forma integral. E, então, são obtidas as equações de movimento da dinâmica de  $n$  vórtices sobre tais superfícies. Como exemplo, consideramos o movimento de um par de vórtices e mostramos que ele descreve uma geodésica como sua trajetória.

## 2 CONCEITOS PREMILINARES

### 2.1 Funções Algébricas e Superfícies de Riemann

Começamos com o conceito de função algébrica. Dizemos que uma função complexa analítica  $\omega = \omega(z)$  é uma *função algébrica* se satisfaz uma equação funcional da forma

$$a_0(z)\omega^n + a_1(z)\omega^{n-1} + \dots + a_n(z) = 0, \quad a_0(z) \neq 0,$$

onde os  $a_i(z)$  são polinômios em  $z$  com números complexos como coeficientes. Desta equação em  $\omega$ , temos que cada valor de  $z$  determina  $n$  valores de  $\omega$ , de forma que  $\omega$  é uma função multivalente de  $z$ .

Uma função  $R = R(z, \omega)$  é dita uma *função racional* de  $z$  e  $\omega$  se pode ser escrita da forma

$$R(z, \omega) = \frac{b_0(z)\omega^m + b_1(z)\omega^{m-1} + \dots + b_m(z)}{c_0(z)\omega^k + c_1(z)\omega^{k-1} + \dots + c_k(z)},$$

onde os  $b_j$  e  $c_j$  são polinômios em  $z$  com coeficientes complexos constantes, e o denominador não é identicamente zero.

Agora, consideremos a função  $F(z)$  definida da seguinte forma: selecionamos um ramo de uma função algébrica  $\omega(z)$  em  $z_0$ , um caminho de  $z_0$  a  $z$ , e fazemos

$$F(z) = \int_{z_0}^z R(z, \omega(z)) dz,$$

onde o valor de  $\omega(z)$  é determinado por continuação analítica ao longo do caminho de integração do ramo fixado em  $z_0$ <sup>1</sup>. Em geral,  $F(z)$  também é uma função multivalente de  $z$ . Encontraremos um sistema de formas canônicas para estas integrais de forma que qualquer integral deste tipo poderá ser transformada em uma forma canônica e, com isso, consigamos compreender mais sobre a natureza dessas integrais.

As funções algébricas mais simples são definidas por equações da forma

$$a_0(z)\omega + a_1(z) = 0, \quad a_0 \neq 0,$$

onde  $a_0$  e  $a_1$  são polinômios em  $z$ . Neste caso,  $\omega = -\frac{a_1(z)}{a_0(z)}$  é uma função racional em  $z$  univalente. Estas funções são caracterizadas por serem holomorfas em todo o plano

---

<sup>1</sup>Podemos encontrar mais detalhes sobre continuação analítica em [1]

estendido (esfera) exceto por um número finito de pólos. Se os pólos ocorrem nos pontos  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , então  $\omega$  pode ser expandida em frações parciais:

$$\omega = p(z) + h_1(z) + \dots + h_n(z),$$

onde

$$h_k(z) = \frac{c_{1,k}}{z - b_k} + \frac{c_{2,k}}{(z - b_k)^2} + \dots + \frac{c_{m,k}}{(z - b_k)^m}$$

é a parte principal de  $\omega(z)$  no pólo  $b_k$  e  $p(z)$  é um polinômio em  $z$  o qual é a parte principal de  $\omega(z)$  no infinito. Toda função racional  $R(z, \omega)$  de  $z$  e  $\omega$  é também uma função racional univalente na variável  $z$  e tem uma expansão em frações parciais. Cada integral

$$F(z) = \int_{z_0}^z R(z, \omega) dz$$

pode ser calculada diretamente, apresentando termos da forma  $A \log(z - b)$  somados a uma função racional de  $z$ . Assim  $F(z)$  é uma função multivalente de  $z$  com seus valores variando em  $2\pi i A$  quando  $z$  dá uma volta completa em torno de uma pequena circunferência de centro  $b$ , onde  $b$  é um pólo de  $R(z, \omega)$  com resíduo  $A$  diferente de zero. Além disso, a variação no valor de  $F(z)$  em torno de qualquer caminho fechado simples é, pelo Teorema dos Resíduos,  $2\pi i$  vezes a soma dos resíduos de  $R(z, \omega)$  em pontos interiores a este caminho, de tal forma que os termos  $A \log(z - b)$  determinam completamente a multivalência de  $F(z)$ . Isto exhibe algumas das propriedades importantes de uma função algébrica definida por uma equação de grau 1 em  $\omega$ .

Consideremos, agora, funções algébricas definidas por uma equação de grau 2 em  $\omega$ , isto é,  $a_0(z)\omega^2 + a_1(z)\omega + a_2(z) = 0$ , onde os  $a_i = a_i(z)$  são polinômios em  $z$  e  $a_0 \neq 0$ . Fazendo a seguinte mudança de variáveis  $\zeta = 2a_0\omega + a_1$ , obtemos

$$\zeta^2 - p(z) = 0,$$

onde  $p(z) = a_1^2 - 4a_0a_2$  é um polinômio em  $z$ . Para cada  $z$  fixado,  $\zeta$  é uma função univalente de  $\omega$  e reciprocamente,  $\omega$  é uma função univalente de  $\zeta$ . Estudaremos  $\zeta(z)$  no lugar de  $\omega(z)$ . Para isso iniciaremos com  $p(z)$  de grau 1 em  $z$  e depois faremos o grau de  $p(z)$  aumentar.

A função algébrica definida por  $\omega^2 - z = 0$  não é univalente no plano estendido. Pois, usando coordenadas polares  $z = re^{i\theta}$ , temos  $\omega = \sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}$ . Começando em algum ponto  $r_0e^{i\theta}$ ,  $r_0 \neq 0$  e considerando  $\omega(z)$  ao longo de um caminho fechado que dê uma volta em torno da origem, então, quando  $\theta$  se aproxima de  $2\pi$ ,  $\omega(z)$  se aproxima

do valor  $\sqrt{r_0}e^{\frac{1}{2}i(\theta_0+2\pi)} = -\sqrt{r_0}e^{\frac{1}{2}i\theta_0}$ , o qual é exatamente o valor negativo do valor original. Continuando sobre este caminho após outra volta completa teremos o valor original. Se cortarmos o plano estendido ao longo do eixo real positivo e restringirmos  $\omega(z)$  de tal modo que não passe por este corte, teremos dois ramos univalentes de  $\omega(z)$ , a saber  $\omega = \sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , e  $\omega = \sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}$ ,  $2\pi \leq \theta < 4\pi$ . Para construção da superfície de Riemann para  $\omega(z)$ , tomamos duas réplicas do plano estendido com corte ao longo do eixo real positivo chamando-as Folha-I e Folha-II. O corte em cada folha tem duas extremidades, uma no primeiro e outra no quarto quadrante, as quais chamaremos (+) e (-), respectivamente. Depois, unimos a extremidade (-) da Folha-I a extremidade (+) da Folha-II. E, da mesma forma, unimos a extremidade (+) da Folha-I a extremidade (-) da Folha-II. Assim, sempre que passarmos pelo corte passaremos de uma folha para outra.

Agora as coordenadas de  $z$  determinam um ponto na Folha-I e outro na Folha-II. Associaremos ao ponto  $z$  na Folha-I o valor de  $\sqrt{z}$  dado por  $\sqrt{r}e^{\frac{1}{2}i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  e designaremos este ponto por  $(z, \sqrt{z})$ . Então, começando de  $\omega = \sqrt{z}$ , se prosseguirmos com a função  $\omega(z)$  definida por  $\omega^2 - z = 0$  sobre um caminho fechado simples em torno da origem, cruzamos o corte e passando para Folha-II, e quando atingirmos as coordenadas de  $z$  na Folha-II teremos  $-\sqrt{z}$  e designaremos este ponto por  $(z, -\sqrt{z})$  distinguindo-o de  $(z, \sqrt{z})$  da Folha-I. Deste modo, cada ponto na Superfície de Riemann pode ser considerado como um par ordenado  $(z, \omega)$ , onde  $\omega^2 - z = 0$ . E  $(z_1, \omega_1) = (z_2, \omega_2) \iff z_1 = z_2$  e  $\omega_1(z) = \omega_2(z)$ ,  $z = z_1$ . É claro que  $\omega$ , satisfazendo  $\omega^2 - z = 0$ , é univalente sobre a superfície e assume o valor  $\omega$  no ponto  $(z, \omega)$ . Neste caso existem dois valores de  $\omega$  para cada ponto base  $z$  exceto  $z = 0$  e  $z = \infty$ , que são pontos de ramificação de  $\omega = \sqrt{z}$  [1].

Esta superfície de Riemann é homeomorfa a uma esfera. De fato, consideremos a superfície com duas folhas sobre o plano- $z$  estendido, cada corte ao longo do eixo real positivo. Usando a projeção esteográfica podemos considerar as duas folhas com o corte sobre o meridiano do pólo sul ao pólo norte com a extremidade (+) de uma folha unida a extremidade (-) da outra folha. Agora, em cada folha, afastamos as extremidades do corte, (+) e (-), deformando estas folhas em hemisférios. Então, rotacionamos cada folha de forma que as aberturas dos hemisférios fiquem frente-a-frente e unimos a extremidade (+) de um hemisfério a extremidade (-) do outro hemisfério obtendo, assim, uma esfera. Esta aplicação é feita analiticamente tomando cada ponto  $(z, \sqrt{z})$  da superfície de Riemann e levando ao ponto  $t = \sqrt{z}$  do plano- $t$  estendido, isto é, a esfera- $t$ .

Considerando a integral  $F(z) = \int_{z_0}^z R(z, \sqrt{z})dz$  sobre a superfície e aplicando esta superfície sobre a esfera- $t$ , usando a aplicação  $t = \sqrt{z}$ , a integral se transforma em

$$F(z) = \int_{\sqrt{z_0}}^{\sqrt{z}} R(t^2, t)2tdt,$$

que é a integral de uma função racional de  $t$ . Com isso, recaímos no caso anterior onde a multivalência é devida aos resíduos de  $2tR(t^2, t)$ . Assim,  $F(z)$  é uma função multivalente na superfície de Riemann de  $\omega^2 - z = 0$  e a sua multivalência se origina das singularidades logarítmicas. Finalmente, no plano- $z$ ,  $F(z)$  tem a bivalência adicional devida a identificação das folhas.

A descrição para  $\omega^2 = a_0z + a_1$  é essencialmente a mesma que para  $\omega^2 - z = 0$ , fazendo o corte no plano desde  $z = -\frac{a_1}{a_0}$  até  $z = \infty$  em vez de desde 0 a  $\infty$  e agindo como antes. Consideremos, agora,

$$\omega^2 = a_0z^2 + a_1z + a_2, \quad \text{com} \quad a_1^2 - 4a_0a_2 \neq 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Fatorando, obtemos  $\omega^2 = a_0(z-r)(z-s)$ ,  $r \neq s$ . Os dois pontos  $z = r$  e  $z = s$  são pontos de ramificação desta função e obtemos dois ramos univalentes de  $\omega = \sqrt{a_0(z-r)(z-s)}$  cortando o plano complexo ao longo de uma curva unindo  $r$  a  $s$ . Unindo as duas cópias do plano- $z$  estendido ao longo destes cortes obtemos uma superfície de Riemann bi-folheada. Esta superfície também é homeomorfa a uma esfera. Para ver isto, primeiro usamos a transformação  $\tau = (z-r)/(z-s)$ , a qual transforma o plano- $z$  de maneira conforme no plano- $\tau$  com  $r \rightarrow 0$  e  $s \rightarrow \infty$ . Então, recaímos no caso anterior onde os pontos de ramificação são 0 e  $\infty$ , logo conseguimos um homeomorfismo no plano- $t$ , onde  $t = \sqrt{\tau}$ .

Agora, consideremos a integral

$$\int_{z_0}^z R\left(z, \sqrt{a_0z^2 + a_1z + a_2}\right) dz$$

de uma função racional de  $z$  e  $\omega$ , onde  $\omega^2 = a_0z^2 + a_1z + a_2$ . Usando a mudança de variáveis acima a qual aplica a superfície de Riemann da esfera- $z$  sobre a esfera- $t$ , temos  $t = \sqrt{(z-r)/(z-s)}$ , e

$$\int_{z_0}^z R(z, \omega)dz = \int_{(z_0-r)/(z_0-s)}^{(z-r)/(z-s)} R\left(\frac{\tau s - r}{\tau - 1}, \sqrt{a_0\tau} \frac{s - r}{\tau - 1}\right) \frac{r - s}{(\tau - 1)^2} d\tau,$$

ou

$$F(z) = \int_{\sqrt{(z_0-r)/(z_0-s)}}^{\sqrt{(z-r)/(z-s)}} R\left(\frac{t^2 s - r}{t^2 - 1}, \sqrt{a_0}t \frac{s - r}{t^2 - 1}\right) \frac{r - s}{(t^2 - 1)^2} 2tdt,$$

a qual é a integral de uma função racional de  $t$  na esfera- $t$ . Logo, sua multivalência é analisada como no caso anterior.

Consideremos, agora, um caso em que a descrição muda significativamente que é o caso da função algébrica definida por  $\omega^2 = a(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)$ , onde  $r_1, r_2, r_3$  são distintos. Novamente, para cada  $z$  correspondem dois valores de  $\omega$ , um o negativo do outro. Observemos que  $\omega = \sqrt{z - r_1}\sqrt{z - r_2}\sqrt{z - r_3}$  e o fator  $\sqrt{z - r_j}$  muda de sinal sempre que  $\arg(z - r_j)$  varia  $2\pi$ . Se cortamos o plano- $z$  de  $r_1$  a  $r_2$ , não podemos dar uma volta completa em torno de  $r_1$  ou em torno de  $r_2$  sem cruzar o corte, contudo, podemos escolher um caminho que contenha tanto  $r_1$  quanto  $r_2$  em seu interior. Neste caso, quando damos uma volta completa, ambos,  $\arg(z - r_1)$  e  $\arg(z - r_2)$  variam por  $2\pi$ , logo, ambos os fatores  $\sqrt{z - r_1}$  e  $\sqrt{z - r_2}$  mudam de sinal e, portanto, não há variação de  $\omega$ . Depois fazemos um corte de  $r_3$  a  $\infty$ , o qual previne o caso de tomar um caminho que contenha as três raízes  $r_1, r_2, r_3$  em seu interior. Assim, cada ramo de  $\omega$  é univalente no plano com os dois cortes. Agora, tomando duas cópias do plano, ambas com os dois cortes considerados, e conectando-as sobre os cortes de forma cruzada como fizemos nos casos anteriores, obtemos uma superfície de Riemann bi-folheada sobre a qual  $\omega^2 = a(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)$  é univalente. Novamente, os pontos desta superfície podem ser designados por  $(z, \omega(z))$ , onde a variável  $z$  determina um ponto que pode estar em cada uma das folhas e  $\omega(z)$  diz sobre qual folha o ponto se encontra.

Esta superfície de Riemann não é homeomorfa a uma esfera, mas vamos mostrar, agora, que ela é homeomorfa a um toro. Para isto, devemos unir os cortes entre  $r_1$  e  $r_2$  e entre  $r_3$  e  $\infty$  de uma esfera aos respectivos cortes da outra esfera. Cada extremidade (+) de um corte deve ser unido a extremidade (-) do corte correspondente sobre a outra esfera. Deformamos os cortes de maneira que fiquem como um buraco circular. Então rotacionamos as esferas deixando os buracos frente-a-frente, e puxamos as extremidades dos cortes fazendo pequenos tubos (figura 2.1). As extremidades (+) dos tubos sobre as esferas estão opostas às extremidades (-) dos tubos da outra esfera. Assim, podemos unir as extremidades e formar a superfície na figura 2.2, a qual, claramente, é homeomorfa a um toro.

Nos casos estudados anteriormente, uma integral

$$F(z) = \int_{z_0}^z R(z, \omega(z))dz,$$

onde  $R$  é uma função racional de  $z$  e  $\omega$ , tinha multivalência no plano- $z$  devido aos resíduos de  $R$  ou por causa da bivalência de  $\omega(z)$ . A integral

$$\int_{z_0}^z R(z, \omega(z))dz$$

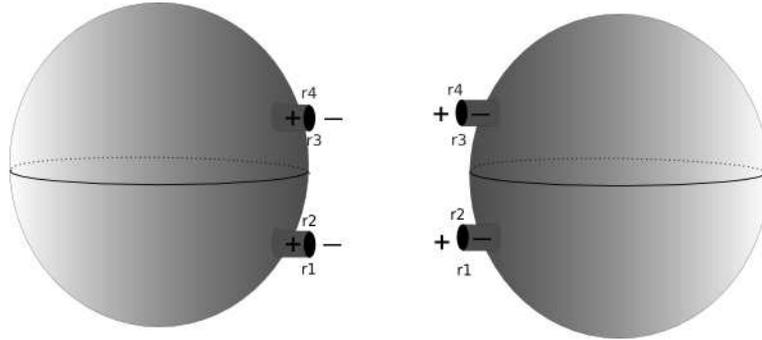


Figura 2.1: Esferas com cortes transformados em pequenos tubos

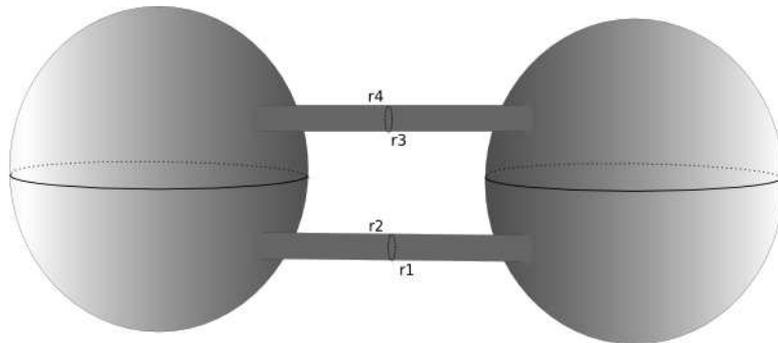


Figura 2.2: Superfície homeomorfa ao Toro

pode ser diferente de zero em torno de caminhos fechados como, por exemplo, sobre meridianos ou paralelos no toro, ainda que  $\omega(z)$  permaneça univalente sobre a curva e não exista resíduos de  $R$  no interior da curva. Esta integrais, com

$$\omega^2 = a(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3),$$

são chamadas *integrais elípticas*.

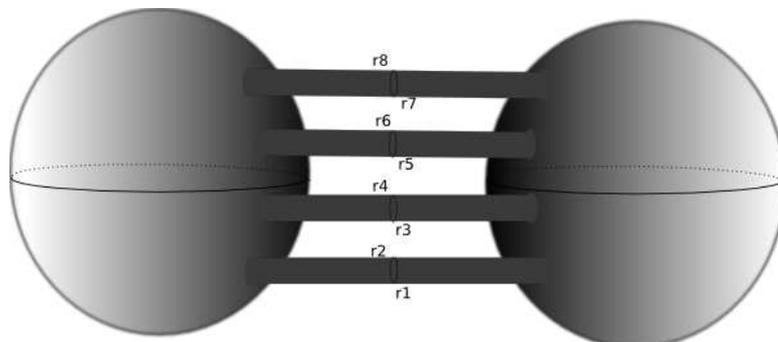


Figura 2.3: Duas esferas unidas por quatro tubos

Completamos a discussão para o caso especial  $\omega^2 - p(z) = 0$ , tomando a função  $\omega(z)$  definida por  $\omega^2 = a(z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n)$ , onde as raízes  $r_1, r_2, \dots, r_n$  são distintas. Para cada  $z$  corresponde dois valores de  $\omega$ , então conseguimos a superfície de

Riemann bi-folheada com pontos de ramificação em  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Como antes, ao considerarmos  $\omega$  ao longo de um caminho fechado em torno de um número ímpar das raízes, após uma volta completa teremos  $-\omega$ , enquanto que para um número par de raízes teremos o mesmo valor de  $\omega$  após uma volta completa. Assim, se separarmos os pontos de ramificação em pares, digamos  $(r_1, r_2), (r_3, r_4), \dots$ , e fizermos cortes unindo  $r_1$  a  $r_2$ ,  $r_3$  a  $r_4$ ,  $\dots$ , obtemos dois ramos de  $\omega(z)$ , cada um sendo univalente no plano com cortes. Se  $n$  for ímpar fazemos um corte de  $r_n$  a  $\infty$ . Isto nos dar  $n/2$  cortes se  $n$  for par e  $(n+1)/2$  cortes se  $n$  for ímpar. Se conectarmos duas esferas, cada uma com cortes entre pares de pontos de ramificação de  $\omega$ , como fizemos no caso  $n = 3$ , obtemos uma superfície que é homeomorfa a duas esferas conectadas por  $n/2$  tubos se  $n$  é par e por  $(n+1)/2$  tubos se  $n$  for ímpar. A figura 2.3 ilustra o caso  $n = 3$  ou  $n = 4$ .

Agora, considerando duas esferas conectadas por apenas um tubo, digamos unindo os cortes entre  $r_1$  e  $r_2$ , e fechando os cortes restantes, obtemos uma superfície que é homeomorfa a uma esfera. Agora, restauramos os  $g$  tubos restantes obtendo cada tubo parecendo com uma alça. Assim,  $g = (n/2) - 1$  se  $n$  for par e  $g = (n+1)/2 - 1$  se  $n$  for ímpar. Conseguimos, assim, como um modelo de superfície de Riemann, uma esfera com  $g$  alças. A figura 2.4 ilustra o caso  $n = 3$  ou  $n = 4$  que nos dá  $g = 3$ . O número  $g$  é chamado *gênero* da superfície. Portanto, cada função algébrica da forma  $a_0(z)\omega^2 + a_1(z)\omega + a_2(z) = 0$ ,  $a_0(z) \neq 0$ , tem uma superfície de Riemann a qual é topologicamente equivalente a uma esfera com  $g$  alças. Pode-se mostrar, ainda, que a superfície de Riemann para qualquer função algébrica é topologicamente uma esfera com  $g$  alças e que a função algébrica é univalente sobre esta superfície [18].



Figura 2.4: Esfera com três alças

## 2.2 Fluidos no Plano

Suponhamos que um fluido incompressível está se movimentando em um estado estacionário sobre o plano  $xy$  sendo que a sua velocidade em cada ponto é dada por  $\vec{v} = (P(x, y), Q(x, y))$  e, também, que nenhum fluido está sendo criado ou destruído. Considerando uma curva fechada simples em  $\mathbb{R}^2$ , a qual, denotamos por  $\lambda$ , com vetor normal unitário  $\vec{n}$ , temos que o fluxo total através de  $\lambda$ , dado por  $\int_{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$  deve ser zero. Observemos que

$$0 = \int_{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int \vec{v} \cdot (\dot{y}(t), -\dot{x}(t)) dt = \int -Q dx + P dy = \iint_A \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy,$$

onde utilizamos o Teorema de Green e  $\lambda = \partial A$ . Isto implica que  $\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y = 0$ , isto é, o fluido tem divergente zero. A *circulação* de fluido em torno de uma curva fechada  $\lambda$  é definida por  $\int_{\lambda} P dx + Q dy = \int_{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{t} ds$ , onde  $\vec{t}$  é o vetor unitário tangente à curva. Além disso, dizemos que o fluxo é *irrotacional* se sua circulação em torno de qualquer curva fechada for zero. Logo, se o fluxo é irrotacional,  $P dx + Q dy$  é uma diferencial exata e, portanto, existe uma função  $u(x, y)$  tal que  $P = \frac{\partial u}{\partial x}$  e  $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$ . O fluxo ter divergente zero implica agora que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

isto é, que  $u$  é uma função harmônica. A função  $u$  é chamada *potencial de velocidade* do fluxo.

As curvas  $u = \text{constante}$  são chamadas *curvas equipotenciais*. A reta tangente a uma curva equipotencial faz um ângulo  $\alpha$  com o eixo  $x$ , dado por  $\tan \alpha = -\frac{\partial u}{\partial x} / \frac{\partial u}{\partial y}$  quando  $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \neq 0$ . O vetor velocidade faz um ângulo  $\beta$  com o eixo  $x$ , dado por  $\tan \beta = Q/P = \frac{\partial u}{\partial y} / \frac{\partial u}{\partial x}$ , de onde concluímos que  $\alpha$  e  $\beta$  diferem por 90 graus e que o fluxo é perpendicular as curvas equipotenciais na direção em que  $u$  cresce. Se a função harmônica  $u$  é dada, a função harmônica conjugada  $v$  pode ser encontrada através das equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.1)$$

Então,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  é uma função analítica da variável  $z$ , chamada *potencial complexo* do fluxo. A reta tangente a curva  $v = \text{constante}$  faz um ângulo  $\gamma$  com o eixo  $x$ , dado por  $\gamma = -\frac{\partial v}{\partial x} / \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} / \frac{\partial u}{\partial x}$ . Assim  $\tan \beta = \tan \gamma$ , logo a direção do fluxo é a mesma das curvas  $v = \text{constante}$  e chamamos estas curvas de *linhas de corrente*. A condição  $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 \neq 0$  é equivalente a  $f'(z) \neq 0$  e as linhas de corrente são sempre ortogonais

às linhas equipotenciais, exceto nos pontos onde  $f'(z) = 0$ .

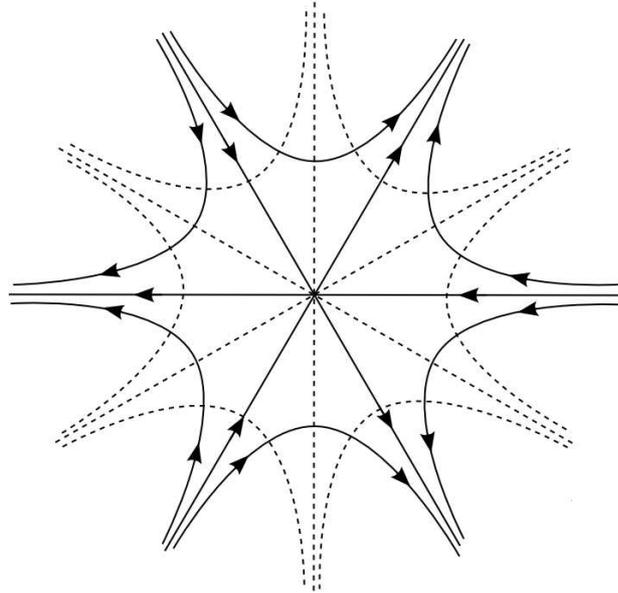


Figura 2.5: Ponto de cruzamento de ordem 2

Quando uma função complexa  $u + iv$  é analítica, o mesmo ocorre com  $v - iu$ , uma vez que  $v$  e  $-u$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Portanto, podemos tomar as curvas  $u = \text{constante}$  como linhas de corrente e as curvas  $v = \text{constante}$  como linhas equipotenciais correspondentes a um escoamento denominado conjugado do primeiro. Quando uma função analítica  $w = f(z)$  é tal que  $f'(z_0) = 0$ , as curvas  $u = \text{constante}$  e  $v = \text{constante}$  não intersectam-se ortogonalmente em  $z_0$ . Em particular, se  $f(z)$  é da forma

$$f(z) = a_0 + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots, \quad a_k \neq 0,$$

as curvas  $u = \text{constante}$  e  $v = \text{constante}$  intersectam-se formando um ângulo de  $\pi/2k$ . Neste caso,  $k$  curvas equipotenciais passam no ponto  $z_0$  com ângulos iguais entre elas, e os ângulos são bissectados por  $k$  linhas de corrente passando em  $z_0$ . Um tal ponto  $z_0$  é denominado *ponto estacionário* de ordem  $k - 1$ . A figura 2.5 ilustra o caso de ordem 2, onde as linhas contínuas representam as linhas de corrente, enquanto as linhas tracejadas representam as curvas equipotenciais.

Usando a projeção estereográfica, este escoamento pode ser descrito sobre a esfera em vez de sobre o plano. Para estudar o escoamento em  $z = \infty$ , expandimos a função  $F(\xi) = f(1/\xi)$  em torno da origem e dizemos que  $z = \infty$  é um ponto estacionário de ordem  $k - 1$  se obtemos como a expansão de  $F$  uma série de potências crescentes de  $\xi$

com  $a_k \xi^k$  como o primeiro termo não constante.

Agora, vamos considerar o fluxo na vizinhança de um ponto  $z_0$  no qual  $f(z_0)$  é infinito. Nos restringiremos a funções analíticas  $f(z)$  tais que  $f'(z)$  tenha somente pólos como singularidades. Assim, a parte principal da expansão de  $f(z)$  em torno de  $z_0$  é

$$A \log(z - z_0) + \frac{A_1}{z - z_0} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(z - z_0)^m}.$$

Temos a soma de uma singularidade logarítmica com coeficiente  $A$  e pólos de ordem  $k$  com coeficientes correspondentes iguais a  $A_k$ , onde  $k = 1, 2, \dots, m$  de forma que o fluxo resultante é obtido pela soma dos fluxos gerados por cada parcela separadamente.

Para analisarmos a singularidade logarítmica  $A \log(z - z_0)$ , consideramos os casos em que  $A$  é real ou imaginário puro, e obtemos o caso geral somando os resultados obtidos. Se  $A$  for real, fazemos  $z = re^{i\varphi}$ , então

$$u + iv = A \log(re^{i\varphi}) = A \log r + iA\varphi \quad \text{donde,} \quad u = A \log r \quad \text{e} \quad v = A\varphi.$$

As linhas equipotenciais são obtidas fazendo-se  $u = \text{constante}$ , isto é,  $A \log r = \text{constante}$  e, portanto, são círculos centrados em  $z_0$ . As linhas de correntes são dadas fazendo-se  $v = \text{constante}$ , isto é,  $A\varphi = \text{constante}$ , logo, elas são radiais saindo ou entrando em  $z_0$ , conforme  $A$  seja positivo ou negativo, respectivamente (ver figura 2.6). Dizemos que  $z_0$  é uma fonte no primeiro caso e um sorvedouro no segundo. A intensidade de uma fonte ou sorvedouro pontual, por definição, é medida da seguinte forma: consideramos uma curva fechada simples,  $\lambda$ , que contenha a fonte ou sorvedouro em seu interior e calculamos a quantidade de fluido que passa por essa curva. Esta quantidade é chamada a *intensidade* da fonte ou sorvedouro e é dada por  $\int_{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{n} ds$ , onde  $\vec{n}$  é o vetor unitário normal a curva.

Como estamos considerando uma região onde o potencial complexo é analítico, esta integral não depende do caminho considerado. Em particular, podemos considerar o caso em que  $\lambda$  é uma curva equipotencial, isto é, podemos considerar a curva dada por  $u = \text{constante}$ . Então,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  e  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , donde

$$u(x, y) = A \log(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{A}{2} \log(x^2 + y^2)$$

logo,

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Ax}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{Ay}{x^2 + y^2}.$$

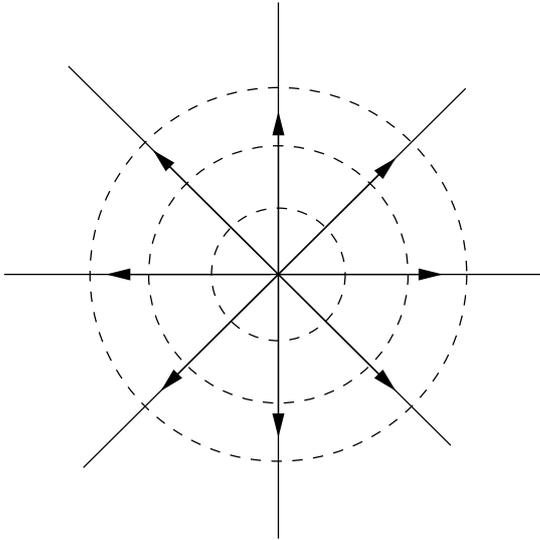


Figura 2.6: Fonte pontual

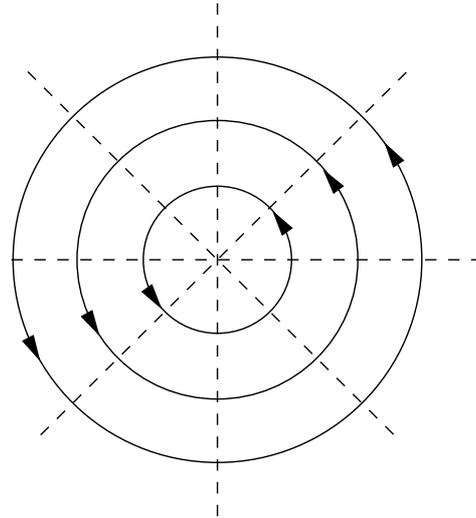


Figura 2.7: Vórtice pontual

Portanto, sendo  $\vec{v} = (P, Q)$  obtemos

$$\int_{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{n} ds = \int_0^{2\pi} \left( \frac{Ax}{r^2}, \frac{Ay}{r^2} \right) \cdot \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) r d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{A}{r^2} (x^2 + y^2) d\varphi = 2\pi A.$$

Agora, se  $A$  for imaginário puro façamos  $A = iB$ ,  $B \in \mathbb{R}$ , obtendo

$$u = -B\varphi, \quad v = B \log r,$$

que é exatamente o escoamento conjugado do anterior. Neste caso, as linhas de corrente são círculos centrados em  $z_0$  e as linhas equipotenciais são semi-retas com origem em  $z_0$  (ver figura 2.7). Dizemos que  $z_0$  é um vórtice, cujo escoamento em sua vizinhança gira no sentido horário ou anti-horário, conforme  $B$  seja positivo ou negativo, respectivamente. Para calcularmos a circulação, consideremos novamente  $\lambda$  como sendo uma curva equipotencial  $u = \text{constante}$ . Então  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  e  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $u(x, y) = -B \arctan(\frac{y}{x})$ , logo

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{By}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{Bx}{x^2 + y^2}.$$

Como  $\vec{v} = (P, Q)$ , obtemos

$$\int_{\lambda} \vec{v} \cdot \vec{t} ds = \int_0^{2\pi} \left( \frac{By}{r^2}, \frac{-Bx}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{r} (-y, x) r d\varphi = \int_0^{2\pi} -\frac{B}{r^2} (y^2 + x^2) = -2\pi B.$$

Analisemos, agora, um potencial complexo com um pólo de ordem 1, digamos da forma  $\frac{A_1}{z-z_0}$ . Para isto, façamos  $z - z_0 = re^{i\phi}$  e  $A_1 = \rho e^{i\psi}$ , de modo que  $\frac{A_1}{z-z_0} = (\rho/r)e^{i(\psi-\phi)}$ . A função potencial complexo do escoamento é

$$f(z) = u + iv = \frac{\rho}{r} e^{i(\psi-\phi)} = \frac{\rho}{r} \cos(\psi - \phi) + \frac{\rho}{r} i \sin(\psi - \phi),$$

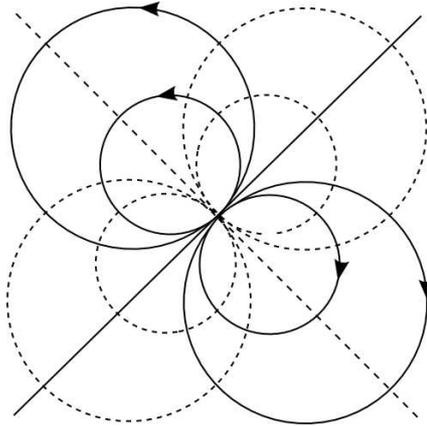


Figura 2.8: Escoamento próximo a um polo de ordem 1

então

$$u = \frac{\rho}{r} \cos(\psi - \phi), \quad v = \frac{\rho}{r} \operatorname{sen}(\psi - \phi).$$

As linhas de corrente, obtidas fazendo-se  $v = \text{constante}$ , formam uma família de círculos coaxiais tangentes à reta  $\phi = \psi$  em  $z = z_0$ , enquanto que as linhas equipotenciais constituem uma família ortogonal de círculos coaxiais tangentes à reta  $\phi = \psi + \frac{1}{2}\pi$  em  $z = z_0$  (ver figura (2.8)).

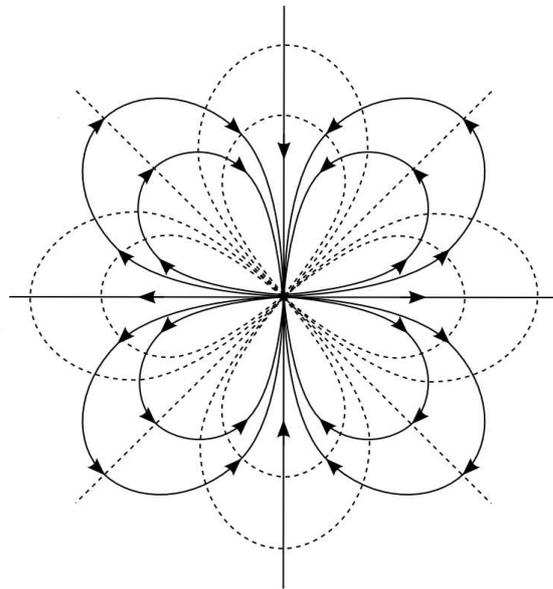


Figura 2.9: Escoamento próximo a um pólo de ordem 2

É possível obter um pólo de ordem 1 a partir da coalescência de duas singularidades logarítmicas. Para isto, consideremos uma fonte de intensidade  $1/h$  em  $z_0$  e um sorvedouro de intensidade  $-1/h$  em  $z_0 + h$ . O potencial complexo é dado por

$$\frac{1}{h} [\log(z - z_0) - \log(z - z_0 - h)].$$

Se fizermos a coalescência dessas singularidades, fazendo  $h \rightarrow 0$ , conseguimos no limite o potencial

$$\frac{d}{dz} \log(z - z_0) = \frac{1}{z - z_0},$$

o qual tem um pólo de ordem 1 em  $z = z_0$ .

O escoamento devido a um pólo de ordem  $m$  pode ser obtido de maneira análoga. Se o pólo é  $\frac{A_m}{(z-z_0)^m}$ , então façamos  $z - z_0 = re^{i\phi}$  e  $A_m = \rho e^{i\psi}$  e obtemos o seguinte potencial complexo

$$f(z) = u + iv = \frac{\rho}{r^m} e^{im(\frac{\psi}{m} - \phi)} = \frac{\rho}{r^m} \cos m \left( \frac{\psi}{m} - \phi \right) + \frac{\rho}{r^m} i \operatorname{sen} m \left( \frac{\psi}{m} - \phi \right),$$

e portanto

$$u = \frac{\rho}{r^m} \cos m \left( \frac{\psi}{m} - \phi \right); \quad v = \frac{\rho}{r^m} \operatorname{sen} m \left( \frac{\psi}{m} - \phi \right).$$

Neste caso, as linhas de corrente são curvas fechadas começando em  $z_0$  e tangentes às  $m$  retas que intersectam-se no ponto  $z_0$  em ângulos iguais (A figura 2.9 ilustra o caso  $m = 2$ ).

Do exposto acima e do fato de que as funções racionais são as únicas funções analíticas que possuem apenas pólos como singularidades no plano complexo estendido, concluimos que uma maneira geral de construir um escoamento sobre a esfera é através da superposição de pólos e singularidades logarítmicas, pois, neste caso a derivada da função potencial complexo possui apenas pólos como singularidades, isto é,  $f'(z)$  é uma função racional. Isto mostra que a cada função racional podemos associar um escoamento na esfera correspondente à função potencial obtida a partir de sua integral.

### 2.3 Fluidos em Superfícies

Vamos considerar o movimento de um fluido incompressível sobre uma superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  parametrizada por  $x(p, q) = (x_1(p, q), x_2(p, q), x_3(p, q))$ , onde  $(p, q)$  varia em um aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $\alpha$  uma curva sobre  $S$  parametrizada por  $\alpha(t) = x(p(t), q(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ . Então, o elemento de comprimento de arco ao longo de  $\alpha$  é dado por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt$$

e como  $\alpha' = x_p p' + x_q q'$ , obtemos

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\langle x_p, x_p \rangle p'^2 + 2 \langle x_p, x_q \rangle p' q' + \langle x_q, x_q \rangle q'^2} dt$$

logo, o elemento de comprimento de arco é dado por

$$ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2, \quad (2.2)$$

onde  $E = \langle x_p, x_p \rangle$ ,  $F = \langle x_p, x_q \rangle$  e  $G = \langle x_q, x_q \rangle$  são os coeficientes da primeira forma fundamental. Observando que  $ds^2$  é sempre positivo temos que  $EG - F^2 = N^2$  também é sempre positivo.

Dizemos que um sistema de coordenadas  $(u, v)$  é *isotérmico* se o elemento de comprimento de arco satisfaz

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2). \quad (2.3)$$

Um tal sistema de coordenadas pode ser construído na vizinhança de cada ponto sobre  $S$ . Para isto, procedemos da seguinte maneira: fatoramos (2.2) obtendo

$$ds^2 = \left( \sqrt{E} dp + \frac{F + iN}{\sqrt{E}} dq \right) \left( \sqrt{E} dp + \frac{F - iN}{\sqrt{E}} dq \right).$$

Se encontrarmos um fator integrante  $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$  tal que

$$\sigma \left( \sqrt{E} dp + \frac{F + iN}{\sqrt{E}} dq \right) = du + idv \quad (2.4)$$

então

$$\bar{\sigma} \left( \sqrt{E} dp + \frac{F - iN}{\sqrt{E}} dq \right) = du - idv$$

e finalmente

$$|\sigma|^2 ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Agora, fazendo  $|\sigma|^2 = 1/\lambda$ , obtemos as coordenadas isotérmicas  $(u, v)$  desejadas. Assim, para conseguirmos coordenadas isotérmicas devemos encontrar um fator integrante que transforme  $\sqrt{E} dp + \frac{F+iN}{\sqrt{E}} dq$  em uma diferencial exata. Vamos supor a existência de um tal fator integrante (ver [3] para mais detalhes). Então, como  $u, v$  são funções de  $p, q$  podemos usar a regra da cadeia e obter

$$du + idv = \left( \frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} \right) dp + \left( \frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} \right) dq$$

e comparando com (2.4) obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} = \sigma \sqrt{E}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} = \sigma \left( \frac{F + iN}{\sqrt{E}} \right).$$

Eliminando  $\sigma$  temos

$$E \left[ \frac{\partial u}{\partial q} + i \frac{\partial v}{\partial q} \right] = (F + iN) \left[ \frac{\partial u}{\partial p} + i \frac{\partial v}{\partial p} \right]$$

ou ainda

$$E \frac{\partial u}{\partial q} = F \frac{\partial u}{\partial p} - N \frac{\partial v}{\partial p}, \quad E \frac{\partial v}{\partial q} = F \frac{\partial v}{\partial p} + N \frac{\partial u}{\partial p}.$$

Agora, resolvendo em  $\frac{\partial v}{\partial p}$  e  $\frac{\partial v}{\partial q}$  obtemos

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{F \partial u / \partial p - E \partial u / \partial q}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial q} = \frac{G \partial u / \partial p - F \partial u / \partial q}{\sqrt{EG - F^2}} \quad (2.5)$$

e da mesma forma para  $\frac{\partial u}{\partial p}$  e  $\frac{\partial u}{\partial q}$  temos

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{E \partial v / \partial q - F \partial v / \partial p}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = \frac{F \partial v / \partial q - G \partial v / \partial p}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (2.6)$$

Assim, de (2.5), concluímos que  $u$  satisfaz a equação

$$\frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{F \partial u / \partial p - E \partial u / \partial q}{\sqrt{EG - F^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{F \partial u / \partial q - G \partial u / \partial p}{\sqrt{EG - F^2}} \right] = 0, \quad (2.7)$$

a qual é chamada *equação de Beltrami*. Agora, consideremos que  $(x, y)$  são outras coordenadas isotérmicas na vizinhança de um dado ponto, logo existe uma função  $\mu$  tal que  $ds^2 = \mu(dx^2 + dy^2)$  e  $E = G = \mu$ ,  $F = 0$ . Então, de (2.5) temos

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

que são exatamente as equações de Cauchy-Riemann, logo  $u$  e  $v$  são harmônicas conjugadas e  $f = u + iv$  é uma função analítica de  $z = x + iy$ . Por outro lado, a equação de Beltrami (2.7) se transforma na equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Assim, consideramos a equação (2.5) e a equação de Beltrami (2.7) como generalizações das equações de Cauchy-Riemann e de Laplace, respectivamente. Além disso, podemos dizer que uma função complexa  $f$  definida em  $S$ ,  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ , é um *potencial complexo* em  $S$  se suas partes real e imaginária satisfazem a equação (2.5).

Iremos tratar, agora, de ângulos entre curvas sobre uma superfície  $S$ . Para isto, consideremos duas curvas  $C_1 = x(p(s_1), q(s_1))$  e  $C_2 = x(p(s_2), q(s_2))$  sobre  $S$  que intersectam-se em um ponto  $p$  sobre  $S$ , onde  $C_1$  e  $C_2$  estão parametrizadas pelo comprimento de arco,  $s_1$  e  $s_2$ , respectivamente. Desse modo, temos que o vetor tangente unitário é dado por

$$\vec{a}_j = \vec{x}_p \frac{dp_j}{ds_j} + \vec{x}_q \frac{dq_j}{ds_j}, \quad j = 1, 2$$

e o ângulo  $\theta$ , no qual  $C_1$  e  $C_2$  intersectam-se, é dado pelas equações

$$\cos \theta = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = E \frac{dp_1}{ds_1} \frac{dp_2}{ds_2} + F \left( \frac{dp_1}{ds_1} \frac{dq_2}{ds_2} + \frac{dp_2}{ds_2} \frac{dq_1}{ds_1} \right) + G \frac{dq_1}{ds_1} \frac{dq_2}{ds_2},$$

$$\sin \theta = \sqrt{\langle (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2), (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \rangle} = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{EG - F^2} \left| \frac{dp_1}{ds_1} \frac{dq_2}{ds_2} - \frac{dp_2}{ds_2} \frac{dq_1}{ds_1} \right|.$$

As  $p$ -curvas obtidas fazendo  $q = \text{constante}$  e  $q$ -curvas obtidas fazendo  $p = \text{constante}$  são chamadas *curvas paramétricas* sobre  $S$ . Assim, ao longo das  $p$ -curvas,  $\frac{dq}{ds} = 0$ , enquanto ao longo das  $q$ -curvas,  $\frac{dp}{ds} = 0$ . Se tomarmos  $C_1$  como uma  $p$ -curva e  $C_2$  uma  $q$ -curva, ambas passando pelo ponto  $p \in S$ , o ângulo de intersecção entre  $C_1$  e  $C_2$  no ponto  $p$  é dado por

$$\cos \theta = F \frac{dp_1}{ds_1} \frac{dq_2}{ds_2} = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \text{sen } \theta = \sqrt{EG - F^2} \frac{dp_1}{ds_1} \frac{dq_2}{ds_2} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Assim, curvas paramétricas se intersectam ortogonalmente se e somente se  $F = 0$ , de forma que a família de  $p$ -curvas é ortogonal à família de  $q$ -curvas se, e somente se,  $F \equiv 0$ .

**Definição 2.1.** Dizemos que um difeomorfismo  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  é uma *aplicação conforme* se para todo  $p \in S$  e quaisquer  $w_1, w_2 \in T_p S$  temos

$$\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2(p) \langle w_1, w_2 \rangle_p,$$

onde  $\lambda^2 > 0$  é uma função diferenciável em  $S$ . As superfícies  $S$  e  $\bar{S}$ , neste caso, são ditas *conformes*. Uma aplicação  $\varphi : V \rightarrow \bar{S}$  de uma vizinhança  $V$  de  $p \in S$  em  $\bar{S}$  é uma *aplicação conforme local* em  $p$  se existe uma vizinhança  $\bar{V}$  de  $\varphi(p)$  tal que  $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$  é uma aplicação conforme. Se para cada  $p \in S$ , existe uma aplicação conforme local em  $p$ , a superfície  $S$  é *localmente conforme* a  $\bar{S}$ .

Geometricamente, a definição acima diz que uma aplicação conforme tem a propriedade de preservar ângulos. Com efeito, sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas curvas em  $S$  que se intersectam em um ponto  $p \in S$ . Uma aplicação conforme aplica estas curvas em curvas  $\varphi \circ C_1$  e  $\varphi \circ C_2$  em  $\bar{S}$ , que se intersectam em  $\bar{p} = \varphi(p)$ , então

$$\cos \bar{\theta} = \frac{\langle d\varphi(C'_1), d\varphi(C'_2) \rangle}{|d\varphi(C'_1)| |d\varphi(C'_2)|} = \frac{\lambda^2 \langle C'_1, C'_2 \rangle}{\lambda^2 |C'_1| |C'_2|} = \cos \theta,$$

isto é, o ângulo é preservado.

**Observação.** Se o difeomorfismo  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  é tal que

$$\langle d\varphi_p(w), d\varphi_p(w) \rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2(p) \langle w, w \rangle_p,$$

para todo  $w \in T_p S$ , então

$$\begin{aligned}
2\lambda^2 \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \lambda^2 \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle - \lambda^2 \langle w_1, w_1 \rangle_p - \lambda^2 \langle w_2, w_2 \rangle_p \\
&= \langle d\varphi_p(w_1 + w_2), d\varphi_p(w_1 + w_2) \rangle_{\varphi(p)} - \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_1) \rangle_{\varphi(p)} \\
&\quad - \langle d\varphi_p(w_2), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)} \\
&= 2 \langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)}.
\end{aligned}$$

E, portanto,

$$\langle d\varphi_p(w_1), d\varphi_p(w_2) \rangle_{\varphi(p)} = \lambda^2(p) \langle w_1, w_2 \rangle_p,$$

o que nos diz que  $\varphi$  é uma aplicação conforme.

**Proposição 2.2.** *Sejam  $x : U \rightarrow S$  e  $\bar{x} : U \rightarrow \bar{S}$  parametrizações tais que  $\bar{E} = \lambda^2 E$ ,  $\bar{F} = \lambda^2 F$ ,  $\bar{G} = \lambda^2 G$  em  $U$ , onde  $\lambda^2 > 0$  é uma aplicação diferenciável em  $U$ . Então a aplicação  $\varphi = \bar{x} \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \bar{S}$  é uma aplicação conforme local.*

*Reciprocamente, se  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  é uma aplicação conforme e  $x : U \rightarrow S$  uma parametrização em  $p \in S$  e  $\bar{x} = \varphi \circ x$  é uma parametrização de  $\bar{S}$  em  $\varphi(p)$ , então  $E = \lambda^2 \bar{E}$ ,  $F = \lambda^2 \bar{F}$ ,  $G = \lambda^2 \bar{G}$ .*

*Demonstração.* Seja  $p \in x(U)$  e  $T_p S$ . Então,  $w$  é tangente a uma curva  $x(\alpha(t))$ , digamos em  $t = 0$ , onde  $\alpha(t) = (p(t), q(t))$  é uma curva em  $U$ . Assim,  $w$  pode ser escrito, em  $t = 0$ , como

$$w = x_p p' + x_q q'.$$

Por definição, o vetor  $d\varphi_p(w)$  é o vetor tangente à curva  $\bar{x} \circ x^{-1} \circ x(\alpha(t))$ , isto é, à curva  $\bar{x}(\alpha(t))$  em  $t = 0$ . Logo,

$$d\varphi(w) = \bar{x}_p p' + \bar{x}_q q'.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle d\varphi(w), d\varphi(w) \rangle_p &= \bar{E}(p')^2 + 2\bar{F}p'q' + \bar{G}(q')^2 \\
&= \lambda^2 E(p')^2 + 2\lambda^2 Fp'q' + \lambda^2 G(q')^2 \\
&= \lambda^2 \langle w, w \rangle_p,
\end{aligned}$$

para todo  $p \in x(U)$  e todo  $w \in T_p S$  e, portanto, pela observação acima,  $\varphi$  é uma isometria local.

Para provar a recíproca, usamos a regra da cadeia para obter

$$\begin{aligned}
\bar{x}_p &= d\bar{x}(q)e_1 = d(\varphi \circ x)(q)e_1 = d\varphi(x(q))dx(q)e_1 = d\varphi(x(q))x_p \\
\bar{x}_q &= d\bar{x}(q)e_2 = d(\varphi \circ x)(q)e_2 = d\varphi(x(q))dx(q)e_2 = d\varphi(x(q))x_q,
\end{aligned}$$

onde  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ . Então

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \langle \bar{x}_p, \bar{x}_p \rangle = \langle d\varphi(x(q))x_p, d\varphi(x(q))x_p \rangle = \lambda^2 \langle x_p, x_p \rangle = \lambda^2 E \\ \bar{F} &= \langle \bar{x}_p, \bar{x}_q \rangle = \langle d\varphi(x(q))x_p, d\varphi(x(q))x_q \rangle = \lambda^2 \langle x_p, x_q \rangle = \lambda^2 F \\ \bar{G} &= \langle \bar{x}_q, \bar{x}_q \rangle = \langle d\varphi(x(q))x_q, d\varphi(x(q))x_q \rangle = \lambda^2 \langle x_q, x_q \rangle = \lambda^2 E,\end{aligned}$$

concluindo, assim, a demonstração.  $\square$

Quando temos  $\lambda^2 \equiv 1$  na definição (2.1), dizemos que  $\varphi$  é uma *isometria* e dizemos que as superfícies  $S$  e  $\bar{S}$  são isométricas. E, conseqüentemente, as propriedades apresentadas para aplicações conforme continuam valendo para isometrias. Mas,  $\varphi$  sendo uma isometria, ganha uma propriedade importante que é o fato de preservar a primeira forma fundamental.

Alguns conceitos serão necessários em um contexto mais geral. E é disto que trata a próxima seção.

## 2.4 Geometria Riemanniana

**Definição 2.3.** Uma *variedade diferenciável* de dimensão  $n$  é um par  $(S, \Phi)$ , onde  $S$  é um espaço de Hausdorff, e  $\Phi$  uma família de homeomorfismos  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  de abertos  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  em abertos  $V_\alpha \subset S$  tais que

1.  $\cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = S$ .
2. Para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , as aplicações  $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$  são diferenciáveis.
3. A família  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  é máxima em relação aos dois itens anteriores.

No caso em que  $n = 2$  e identificando  $\mathbb{R}^2$  com  $\mathbb{C}$  na definição (2.3) e, em vez de mudança de parâmetros,  $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ , diferenciáveis tivermos mudança de parâmetros analíticas (logo, conformes), teremos a definição de variedade analítica. De forma precisa temos

**Definição 2.4.** Uma *variedade analítica* ou *superfície de Riemann* é um par  $(S, \Phi)$ , onde  $S$  é um espaço de Hausdorff, e  $\Phi$  uma família de homeomorfismos  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  de abertos  $U_\alpha \subset \mathbb{C}$  em abertos  $V_\alpha \subset S$  tais que

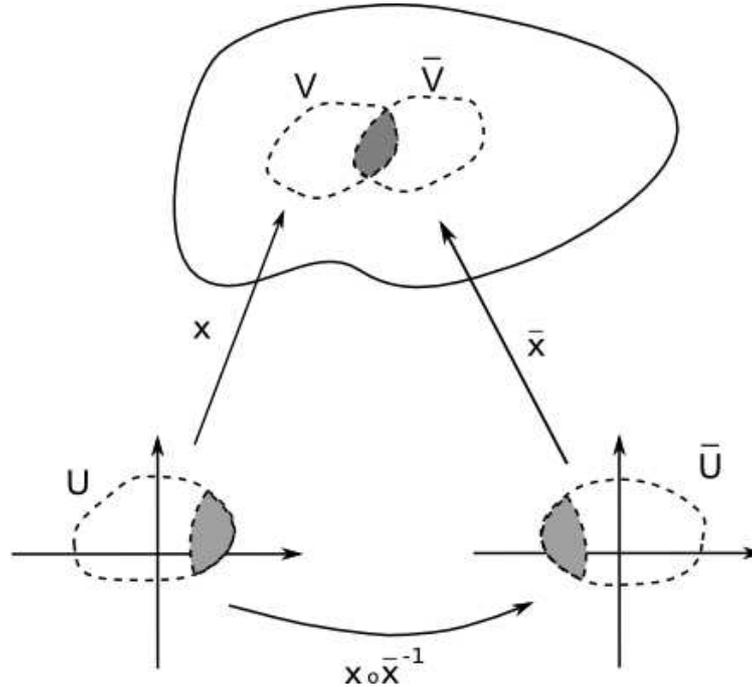


Figura 2.10: Mudança de cartas

1.  $\cup_{\alpha} x_{\alpha}(U_{\alpha}) = S$ .
2. Para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $x_{\alpha}(U_{\alpha}) \cap x_{\beta}(U_{\beta}) = W \neq \emptyset$ , as aplicações  $x_{\beta}^{-1} \circ x_{\alpha}$  são analíticas.
3. A família  $\{(U_{\alpha}, x_{\alpha})\}$  é máxima em relação aos dois itens anteriores.

Nas definições (2.3) e (2.4) o par  $(U_{\alpha}, x_{\alpha})$  com  $p \in x_{\alpha}(U_{\alpha})$  é chamado uma *parametrização* de  $S$  em  $p$  e  $x_{\alpha}(U_{\alpha})$  é chamada uma *vizinhança coordenada* em  $p$ . Uma família  $(U_{\alpha}, x_{\alpha})$  satisfazendo (1) e (2) em (2.3) ou (2.4) é chamada *estrutura diferenciável* ou *estrutura conforme* em  $S$ , respectivamente.

O plano complexo é um exemplo de superfície de Riemann. De fato, todos os discos unitários com a aplicação identidade definem uma estrutura analítica no plano. A esfera pode ser feita uma superfície de Riemann definindo coordenadas locais por meio da projeção estereográfica. Consideramos a esfera  $S^2$  dada por  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$  em  $\mathbb{R}^3$  e plano equatorial  $T$  fazendo  $\zeta = 0$ . Denotamos por  $V_1$  o conjunto consistindo de toda a esfera  $S^2$  com o pólo norte,  $N = (0, 0, 1)$ , removido, enquanto por  $V_2$  denotamos  $S^2$  com o pólo sul,  $S = (0, 0, -1)$ , removido. Então, qualquer ponto  $p = (\xi, \eta, \zeta)$  de  $S^2$  se encontra em  $V_1$  ou  $V_2$ . Em  $V_1$ , introduzimos as coordenadas

$$z_1 = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta},$$

enquanto em  $V_2$ , definimos as coordenadas locais

$$z_2 = \frac{\xi - i\eta}{1 + \zeta}.$$

A correspondência entre os pontos de  $V_1$  e  $V_2$  e o plano complexo  $T$  é obtida geometricamente notando que  $z_1$  é o ponto de intersecção de uma reta  $L_1$  passando pelo pólo norte e o ponto  $p = (\xi, \eta, \zeta)$  com o plano  $T$ , enquanto  $\bar{z}_2$  é a intersecção com o plano  $T$  da reta  $L_2$  passando pelo pólo sul e o ponto  $p$  (ver figura 2.11).

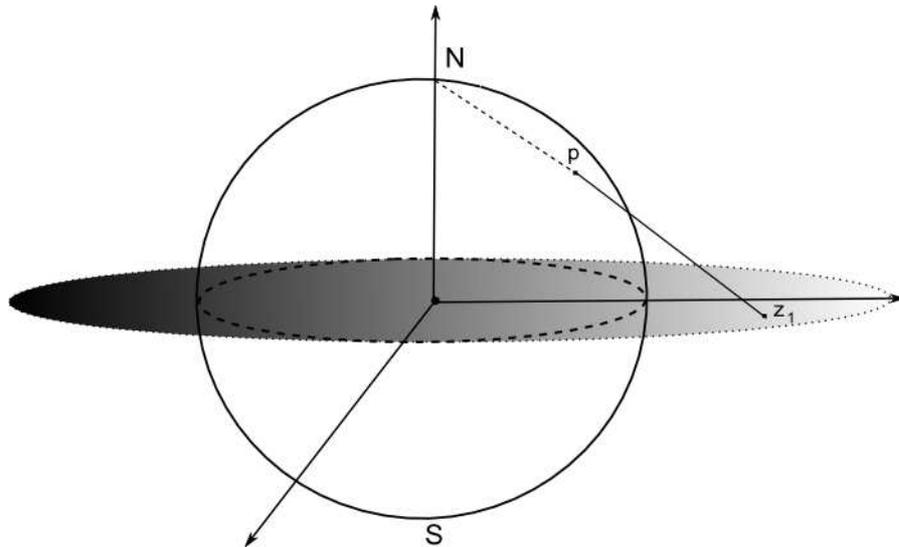


Figura 2.11: Projeção estereográfica para  $S^2$

Para qualquer ponto  $p$  em  $V_1 \cap V_2$ , as duas coordenadas estão relacionadas por

$$z_1 z_2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{1 - \zeta^2} = 1.$$

Se  $p \in V_1 \cap V_2$ , então  $p$  não é nem o pólo norte e nem o pólo sul, logo  $z_1 \neq 0$  e  $z_2 \neq 0$  e a aplicação  $z_2 = 1/z_1$  é conforme. Assim, concluímos que a esfera com estes parâmetros locais é uma superfície de Riemann.

Seja  $f$  uma função definida sobre uma superfície de Riemann  $S_1$  e tomando valores em outra superfície de Riemann  $S_2$ . Se  $p_0 \in S_1$  e  $f(p_0) = q_0$ , podemos tomar  $z = \Phi(p)$  como parâmetro local em torno de  $p_0$  e  $\omega = \Psi(q)$  como parâmetro local em torno de  $q_0$ . Duas superfícies de Riemann são ditas *conformalmente equivalentes* se existe uma aplicação bijetiva analítica,  $f$ , de  $S_1$  em  $S_2$ . Assim, qualquer função analítica sobre  $S_1$  com valores complexos é levada em uma função analítica,  $g \circ f^{-1}$ , sobre  $S_2$  com valores complexos e, reciprocamente, qualquer função analítica,  $h$ , sobre  $S_2$  com valores complexos é levada em uma função analítica,  $h \circ f$ , sobre  $S_1$  assumindo valores complexos.

**Observação.** As superfícies de Riemann construídas por continuação analítica na seção (2.1) são superfícies de Riemann no sentido abstrato que acabamos de definir. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [18].

**Definição 2.5.** Seja  $S$  uma variedade diferenciável. Uma *métrica Riemanniana* em  $S$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $S$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  no espaço tangente  $T_p S$ , que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se  $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow S$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_j}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável. Uma *variedade Riemanniana* é uma variedade diferenciável equipada com uma métrica Riemanniana.

Denotaremos por  $\chi(S)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $S$  e por  $\mathcal{D}(S)$  o anel das funções reais de classe  $C^\infty$  em  $S$ .

**Definição 2.6.** Seja  $S$  uma variedade diferenciável. Uma *conexão afim*  $\nabla$  em  $S$  é uma aplicação

$$\nabla : \chi(S) \times \chi(S) \rightarrow \chi(S)$$

que se denota por  $(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$  e que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ,
2.  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ,
3.  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ ,

onde  $X, Y, Z \in \chi(S)$  e  $f, g \in \mathcal{D}(S)$ .

**Definição 2.7.** Seja  $S$  uma variedade Riemanniana com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e uma conexão afim  $\nabla$ . A conexão é dita *compatível* com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , quando para toda curva diferenciável  $\alpha$  e quaisquer pares de campos de vetores paralelos  $P$  e  $P'$  ao longo de  $\alpha$ , tivermos  $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$ .

Uma conexão afim  $\nabla$  é dita uma *conexão Riemanniana* se:

1.  $\nabla$  é simétrica, isto é,  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = XY - YX$  para todo  $X, Y \in \chi(S)$ .

2.  $\nabla$  é compatível com a métrica Riemanniana.

O teorema de Levi-Civita diz que dada uma variedade Riemanniana existe uma única conexão Riemanniana <sup>2</sup>.

Sejam  $S$  uma variedade Riemanniana,  $f \in \mathcal{D}(S)$  e  $X \in \chi(S)$ . Definimos o *gradiente* de  $f$  como o campo vetorial  $\text{grad}f$  (ou  $\nabla f$ , quando isto não causar confusão) em  $S$  que satisfaz

$$\langle \text{grad}f(p), v \rangle = df_p(v), \quad p \in S, v \in T_pS,$$

o qual, em coordenadas locais, pode ser escrito como

$$\text{grad}f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (2.8)$$

onde os  $g^{ij}$  são os coeficientes da inversa da matriz  $(g_{ij})$ , isto é,  $\sum_j g_{ij}g^{jk} = \delta_{ik}$ . E definimos o *divergente* de  $X$  como a função  $\text{div}X : S \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $\text{div}X(p) = \text{traço}$  da aplicação linear  $X(p) \rightarrow \nabla_X Y(p)$ ,  $p \in S$ , que, em coordenadas locais, é dado por

$$\text{div}X = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{g} X_i), \quad (2.9)$$

onde  $g = \det(g_{ij})$  e  $X = \sum X_i \partial / \partial x_i$ .

Agora, podemos definir o operador de Laplace-Beltrami.

**Definição 2.8.** Seja  $S$  uma variedade Riemanniana. Definimos o *operador de Laplace-Beltrami* como o operador que associa a cada  $f \in \mathcal{D}(S)$  o divergente do gradiente  $f$ , isto é,

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{D}(S) &\rightarrow \mathcal{D}(S) \\ f &\mapsto \Delta f = \text{div grad}f. \end{aligned}$$

Em termos de coordenadas locais, temos

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_i g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right). \quad (2.10)$$

---

<sup>2</sup>A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [8]

### 3 DINÂMICA DE VÓRTICES PONTUAIS

Neste capítulo trataremos do movimento de vórtices pontuais na Esfera  $S^2$  e no Espaço Hiperbólico  $H^2$  comparando com o caso no Plano Euclidiano  $E^2$ . Usaremos o fato destas superfícies estarem mergulhadas em  $E^3$ . Denotaremos por  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  a base para o plano tangente, e  $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$  o vetor normal unitário. Estamos interessados no movimento de vorticidade de um fluido incompressível e sem viscosidade sobre uma superfície bidimensional  $S$ , o qual, segundo [12], é descrito pelas equações

$$\omega \vec{e}_3 = \nabla \times \vec{v}, \quad (3.1)$$

$$\vec{v} = (\nabla \psi) \times \vec{e}_3, \quad (3.2)$$

onde o campo velocidade  $\vec{v}$  é um campo tangente a superfície e o plano tangente tendo como base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ . A equação (3.1) define a *vorticidade escalar*  $\omega$  e (3.2) introduz a *função corrente*  $\psi$ . A função corrente deve satisfazer a equação de Poisson

$$\Delta \psi = -\omega, \quad (3.3)$$

onde  $\Delta$  denota o operador de Laplace-Beltrami dado por (2.10).

#### 3.1 Movimento de Vórtices Pontuais no Plano

Consideremos a distribuição de vorticidade no plano  $\omega(z) = \sum_{j=1}^n \Gamma_j \delta(z, z_j)$ , onde  $\Gamma_j$  é a intensidade e  $z_j$  é a posição do  $j$ -ésimo vórtice e  $\delta(z, z_j)$  é a função delta de Dirac. Considerando, ainda, que a função corrente é solução da equação de Poisson (3.3), podemos encontrá-la utilizando funções de Green para o Laplaciano no plano, a saber,  $G(z, z') = -\frac{1}{4\pi} \log(|z - z'|^2)$ . Logo, para encontrarmos a função corrente  $\psi$ , devemos resolver a equação integral  $\psi(z) = \int G(z, z') \omega(z') dz'$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \int \left[ -\frac{1}{4\pi} \log(|z' - z_j|^2) \right] \sum_{j=1}^n \Gamma_j \delta(z', z_j) dz' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \log(|z - z_j|^2). \end{aligned}$$

Podemos escrever  $\psi$  na forma

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \log [(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2],$$

onde fizemos a identificação usual  $z \leftrightarrow (x, y)$ .

Do fato que o campo velocidade  $\vec{v}(x, y)$  deve satisfazer a equação (3.2) no plano, obtemos

$$\vec{v}(x, y) = \nabla\psi(x, y) \times \vec{e}_3 = \frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + \frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{e}_1 - \frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{e}_2$$

logo,

$$\begin{aligned}\vec{v}_x &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \frac{y - y_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}, \\ \vec{v}_y &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \frac{x - x_j}{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}.\end{aligned}$$

Considerando que a velocidade de cada vórtice é induzida pelos demais e que no plano

$\vec{v}(x, y) = \frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\vec{e}_2$ , obtemos

$$\frac{dx_m}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq m} \Gamma_j \frac{y_m - y_j}{(x_m - x_j)^2 + (y_m - y_j)^2}, \quad (3.4)$$

$$\frac{dy_m}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq m} \Gamma_j \frac{x_m - x_j}{(x_m - x_j)^2 + (y_m - y_j)^2}. \quad (3.5)$$

As equações acima formam um sistema Hamiltoniano. De fato, consideramos a Hamiltoniana

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j \neq m} \Gamma_m \Gamma_j \log [(x_j - x_m)^2 + (y_j - y_m)^2].$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x_m} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq m} \Gamma_m \Gamma_j \frac{x_m - x_j}{(x_m - x_j)^2 + (y_m - y_j)^2}, \\ \frac{\partial H}{\partial y_m} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq m} \Gamma_m \Gamma_j \frac{y_m - y_j}{(x_m - x_j)^2 + (y_m - y_j)^2}.\end{aligned}$$

Logo, (3.4) e (3.5) satisfazem

$$\Gamma_m \frac{dx_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_m}, \quad \Gamma_m \frac{dy_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_m},$$

onde  $m = 1, \dots, n$ . Introduzindo as novas variáveis

$$p_k = \sqrt{|\Gamma_k|} x_k; \quad q_k = \sqrt{|\Gamma_k|} \text{sgn}(\Gamma_k) y_k,$$

onde  $\text{sgn}(\Gamma_k) = 1$  se  $\Gamma_k > 0$  e  $\text{sgn}(\Gamma_k) = -1$  nos outros casos, então, as equações do movimento na forma Hamiltoniana são

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad \frac{dq_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

### 3.2 Movimento de Vórtices Pontuais em $S^2$ e $H^2$

#### 3.2.1 Projeção Estereográfica para $S^2$ e $H^2$

Primeiramente, vamos considerar a projeção estereográfica para  $S^2$  (ver figura 2.11), no caso em que o pólo norte  $N$  é projetado na origem do plano complexo. Isto é, uma aplicação  $\pi : S^2 - \{S\} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\pi(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi - i\eta}{1 + \zeta} = z$$

e com inversa  $\pi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow S^2$  dada por

$$\pi^{-1}(x + iy) = \left( \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

Então, podemos observar que as coordenadas esféricas  $\xi, \eta, \zeta$  que satisfazem

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

e a coordenada estereográfica  $z = x + iy$  se relacionam da seguinte maneira:

$$\xi = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} = \text{sen } \theta \cos \phi, \quad (3.6)$$

$$\eta = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} = \text{sen } \theta \text{ sen } \phi, \quad (3.7)$$

$$\zeta = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2} = \cos \theta. \quad (3.8)$$

Temos, assim, que  $\xi, \eta, \zeta$  estão parametrizadas pelo ângulo polar  $\theta$ , o qual é medido a partir do pólo norte,  $N$ , e o ângulo azimutal  $\phi$ , o qual é medido a partir do eixo  $x$ .

Usando os ângulos  $\theta$  e  $\phi$ , nós temos que a métrica Riemanniana em  $S^2$  é dada por

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \text{sen}^2 \theta$$

ou, ainda

$$ds^2 = d\theta + \text{sen}^2 \theta d\phi, \quad (3.9)$$

com curvatura Gaussiana igual a 1. Usando as equações (3.6)-(3.8), esta métrica pode ser transformada em termos das coordenadas estereográficas em

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1 + |z|^2)^2}. \quad (3.10)$$

Para obter (3.9) a partir de (3.10), temos que escrever  $x$  e  $y$  em termos de  $\theta$  e  $\phi$  a partir de (3.6)-(3.8). Usando

$$z = \tan \frac{1}{2} \theta e^{i\phi} \quad (3.11)$$

em (3.10), conseguimos (3.9). A métrica Riemanniana para  $H^2$  é obtida mudando o sinal do denominador em (3.9):

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}. \quad (3.12)$$

Assim como em (3.10), substituindo

$$z = \tanh \frac{1}{2} \theta e^{i\phi} \quad (3.13)$$

em (3.12), obtemos equivalentemente a (3.9)

$$ds^2 = d\theta^2 + \sinh^2 \theta d\phi, \quad (3.14)$$

com curvatura Gaussiana igual -1.

As relações (3.12) e (3.14) sugerem como podemos construir a projeção estereográfica de  $H^2$  (ver figura 3.1). As coordenadas  $\xi, \eta, \zeta$  no hiperbolóide

$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = -1$$

podem ser parametrizadas como

$$\xi = \frac{2x}{1 - x^2 - y^2} = \sinh \theta \cos \phi, \quad (3.15)$$

$$\eta = \frac{2y}{1 - x^2 - y^2} = \sinh \theta \sin \phi, \quad (3.16)$$

$$\zeta = \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2} = \cosh \theta. \quad (3.17)$$

O parâmetro  $\theta$  para  $S^2$  e  $H^2$  é identificado como a distância esférica e hiperbólica de  $N$ , respectivamente, portanto, (3.11) e (3.13) nos dá a relação entre as distâncias esféricas e hiperbólicas e as coordenadas no plano complexo. Veremos que essas relações desempenham um importante papel na obtenção de soluções da equação de Laplace em  $S^2$  e  $H^2$ .

### 3.2.2 As Distâncias Esférica e Hiperbólica

Encontraremos, agora, as expressões para as distâncias esférica e hiperbólica entre  $z_1$  e  $z_2$  no plano complexo.

Uma aplicação  $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

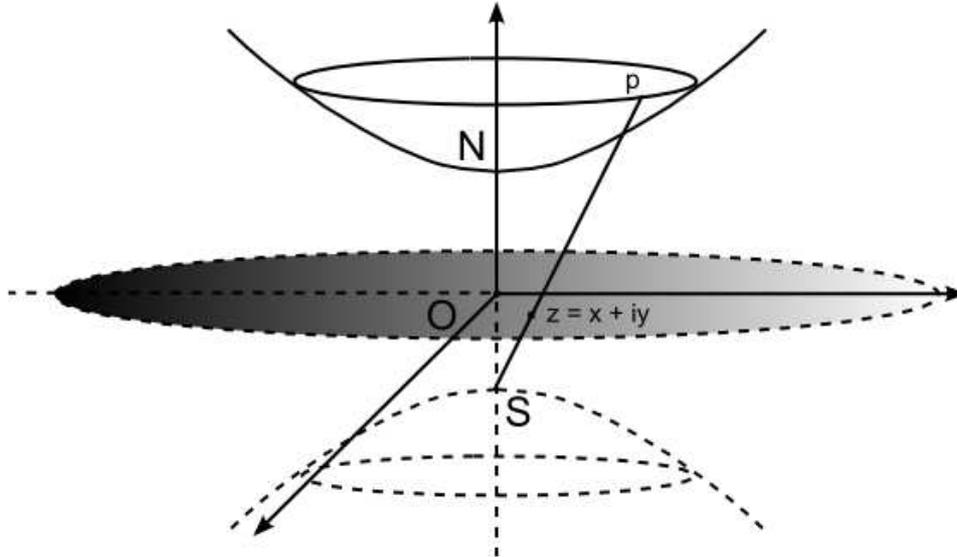


Figura 3.1: Projeção estereográfica para  $H^2$

com  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tais que  $ad - bc \neq 0$  é chamada uma *transformação de Möbius*. Estas aplicações são analíticas com

$$\phi'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}. \quad (3.18)$$

Agora, consideremos os casos particulares de transformações de Möbius dadas por

$$\phi_{z_0}(z) = \frac{z - z_0}{1 + \bar{z}_0 z}.$$

Iremos mostrar que  $\phi_{z_0}$  é uma isometria de  $\mathbb{C}$  com a métrica esférica dada por (3.10), isto é,

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1 + |z|^2)^2},$$

a qual denotaremos por  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ , enquanto denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  a métrica Euclidiana. Para isto, faremos a identificação de  $\mathbb{R}^2$  com  $\mathbb{C}$ , por  $(v_1, v_2) \leftrightarrow v_1 + iv_2$  de forma que, por meio da equações de Cauchy-Riemann (2.1), podemos identificar  $D\phi(z)u = \phi'(z)u$ , isto é, podemos considerar a derivação como um produto de números complexos. E, ainda,  $\langle u, v \rangle = \text{Re}(u\bar{v})$ , onde  $\text{Re}(z)$  é a parte real do número complexo  $z$ . Devemos mostrar que para todo  $u, v$  temos

$$\langle\langle D\phi_{z_0}(z)u, D\phi_{z_0}(z)v \rangle\rangle_{\phi_{z_0}(z)} = \langle\langle u, v \rangle\rangle_z.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle\langle D\phi(z)u, D\phi(z)v \rangle\rangle_{\phi(z)} &= \frac{4}{(1 + |\phi(z)|^2)^2} \langle D\phi(z)u, D\phi(z)v \rangle \\
&= \frac{4}{(1 + |\phi(z)|^2)^2} \langle \phi'(z)u, \phi'(z)v \rangle \\
&= \frac{4}{(1 + |\phi(z)|^2)^2} \operatorname{Re}(|\phi'(z)|^2 u\bar{v}) \\
&= \frac{4|\phi'(z)|^2}{(1 + |\phi(z)|^2)^2} \operatorname{Re}(u\bar{v}) \\
&= \frac{4|\phi'(z)|^2}{(1 + |\phi(z)|^2)^2} \langle u, v \rangle
\end{aligned}$$

de (3.18) temos que

$$|\phi'(z)| = \frac{1 + |z_0|^2}{|1 + \bar{z}_0 z|^2}$$

e, calculando, obtemos que

$$1 + |\phi(z)|^2 = \frac{(1 + |z_0|^2)(1 + |z|^2)}{|1 + \bar{z}_0 z|^2}.$$

Portanto,

$$\langle\langle D\phi_{z_0}(z)u, D\phi_{z_0}(z)v \rangle\rangle_{\phi_{z_0}(z)} = \langle\langle u, v \rangle\rangle_z,$$

ou seja,  $\phi$  é uma isometria.

Dado um ponto  $z_1 = \tan \frac{\theta_1}{2} e^{i\phi_1} \in \mathbb{C}$  temos que sua distância esférica à origem (pólo norte  $N$ ) é dada por

$$\rho(r) = \int_0^r \frac{2dt}{1 + t^2},$$

onde  $r = \tan \frac{\theta_1}{2} = |z_1|$ . Assim, obtemos

$$\rho = 2 \tan^{-1} r.$$

No caso geral, onde temos dois pontos distintos  $z_1$  e  $z_2$ , estando ou não algum deles na origem, calculamos a distância esférica entre eles utilizando a transformação de Möbius

$$\phi_{z_2}(z) = \frac{z - z_2}{1 + \bar{z}_2 z}$$

que é uma isometria e aplica  $z_2$  na origem recaindo, assim, no caso anterior. Logo, a distância esférica entre  $z_1$  e  $z_2$  é

$$\rho = 2 \tan^{-1} \left| \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 \bar{z}_2} \right|. \quad (3.19)$$

O caso hiperbólico é inteiramente análogo ao caso esférico. Definimos a transformação de Möbius  $\phi_{z_0} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$  por

$$\phi_{z_0}(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad |z_0| < 1,$$

onde  $\mathbb{D}$  denota o disco de Poincaré, isto é, o disco  $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$  com a métrica dada por

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Prova-se, usando o mesmo procedimento do caso esférico, que  $\phi_{z_0}$  é uma isometria de  $\mathbb{D}$ . Dado um ponto  $z_1 = \tanh \frac{\theta_1}{2} e^{i\phi_1} \in \mathbb{D}$  temos que sua distância hiperbólica à origem (pólo norte  $N$ ) é dada por

$$\rho(r) = \int_0^r \frac{2dt}{1 - t^2},$$

onde  $r = \tanh \frac{\theta_1}{2} = |z_1|$ . Assim, obtemos

$$\rho = -\log \left| \frac{r - 1}{r + 1} \right|.$$

Como  $r < 1$ , obtemos

$$\rho = \log \frac{1 + r}{1 - r}$$

assim

$$e^\rho = \frac{1 + r}{1 - r}$$

e

$$r = \frac{e^\rho - 1}{e^\rho + 1} = \tanh \frac{\rho}{2},$$

ou

$$\rho = 2 \tanh^{-1} r.$$

No caso geral, analogamente ao caso esférico, obtemos que a distância hiperbólica entre dois pontos distintos,  $z_1$  e  $z_2$ , é

$$\rho = 2 \tanh^{-1} \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - z_1 \bar{z}_2} \right|. \quad (3.20)$$

### 3.2.3 Operador de Laplace-Beltrami em $S^2$ e $H^2$

A partir das métricas Riemannianas (3.10) e (3.12), o operador de Laplace-Beltrami sobre  $S^2$  e  $H^2$  pode ser construído da seguinte maneira: fazendo  $z = re^{i\sigma}$ , ou seja,  $x = r \cos \sigma$  e  $y = r \sin \sigma$ , temos  $dx = dr \cos \sigma - r \sin \sigma d\sigma$ , e  $dy = dr \sin \sigma + r \cos \sigma d\sigma$  então,

$dx^2 = \cos^2 \sigma dr^2 - 2r \cos \sigma \sin \sigma + r^2 \sin^2 \sigma d\sigma^2$  e  $dy^2 = \sin^2 \sigma dr^2 + 2r \cos \sigma \sin \sigma + r^2 \cos^2 \sigma d\sigma^2$   
logo,

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\sigma^2,$$

então, concluímos que

$$ds^2 = \frac{4}{(1+r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\sigma^2), \text{ em } S^2$$

$$ds^2 = \frac{4}{(1-r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\sigma^2), \text{ em } H^2$$

o que nos dá

$$g_{11} = \frac{4}{(1+r^2)^2}, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} \text{ e } g = \frac{16r^2}{(1+r^2)^4}, \text{ em } S^2$$

$$g_{11} = \frac{4}{(1-r^2)^2}, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \text{ e } g = \frac{16r^2}{(1-r^2)^4}, \text{ em } H^2$$

Portanto, utilizando a fórmula para operador de Laplace-Beltrami dada por (2.10) obtemos

$$\Delta = \frac{1}{4}(1+r^2)^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right], \text{ em } S^2. \quad (3.21)$$

$$\Delta = \frac{1}{4}(1-r^2)^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right], \text{ em } H^2. \quad (3.22)$$

Por outro lado, usando as métricas (3.10) e (3.14), obtemos

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \sin^2 \theta, \text{ e } g = \sin^2 \theta, \text{ em } S^2$$

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \sinh^2 \theta, \text{ e } g = \sinh^2 \theta, \text{ em } H^2$$

logo, substituindo em (2.10)

$$\Delta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \text{ em } S^2,$$

$$\Delta = \frac{1}{\sinh \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sinh \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sinh^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \text{ em } H^2.$$

Se  $u$  é uma função que depende somente de  $r$ , isto é,  $u = u(r)$  e usando o fato que  $\frac{1}{4}(1+r^2)^2$  e  $\frac{1}{4}(1-r^2)^2$  são ambos diferentes de zero (no segundo caso temos que  $r < 1$ ), então as fórmulas (3.21) e (3.22) se transformam em ambos os casos em

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r.$$

Assim, obtemos que a função

$$u(r) = c \log r = c \log |z| \quad (3.23)$$

que claramente é solução da equação de Laplace,  $\Delta u(r) = 0$ , em  $S^2$  e em  $H^2$ . Substituindo (3.11) e (3.13) em (3.23) obtemos as soluções para equação de Laplace em termos de  $\theta$  para  $S^2$  e  $H^2$ , a saber,

$$u(\theta, \phi) = c \log(\tan \frac{1}{2}\theta), \quad \theta \in (0, \pi) \text{ em } S^2, \quad (3.24)$$

$$u(\theta, \phi) = c \log(\tanh \frac{1}{2}\theta), \quad \theta \in (0, \infty) \text{ em } H^2. \quad (3.25)$$

Precisamos da função de Green para equação de Poisson  $\Delta u(\theta, \phi) = -f(\theta, \phi)$ . Tal função deve ser regular em todo o domínio, exceto no ponto fonte. Como (3.24) tem uma singularidade em  $\theta = \pi$ , devemos encontrar uma função de Green no sentido generalizado, conforme [7], isto é, devemos obter uma função  $G$  tal que

$$\Delta G(\theta, \phi; \theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \quad \text{em } S^2,$$

a qual, tenha uma singularidade em  $(\theta, \phi) = (\theta', \phi')$ . Consideremos primeiramente o caso em que o ponto fonte é a origem (pólo norte  $N$ ). Para uma função  $u = u(r)$ ,  $r = \tan \frac{\theta}{2}$ , temos que a equação

$$\Delta u = -\frac{1}{4\pi}$$

se transforma em

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\frac{r}{\pi(1+r^2)^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2\pi(1+r^2)} \right)$$

assim

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2\pi(1+r^2)} + c_1$$

queremos que  $u_r$  tenha uma singularidade em  $r = 0$ , então fazemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2\pi}$$

de forma que  $c_1 = 0$  então

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\pi r(1+r^2)}.$$

Logo,

$$u = \frac{1}{2\pi} \int \left( \frac{1}{r} - \frac{r}{1+r^2} \right) dr = -\frac{1}{4\pi} \log \frac{r^2}{1+r^2} + c_2.$$

Como  $r = \tan \frac{\theta}{2}$ , obtemos

$$\frac{r^2}{1+r^2} = \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Assim,

$$u = -\frac{1}{2\pi} \log \left( \text{sen} \frac{\theta}{2} \right)$$

é a função procurada para o caso em que o ponto fonte está localizado na origem. No caso geral, no qual o ponto  $z_1 = \tan \frac{\theta_1}{2} e^{i\phi_1}$  não está necessariamente na origem, utilizamos a isometria dada por

$$\phi_{z_1}(z) = \frac{z - z_1}{1 + \bar{z}_1 z},$$

a qual aplica o ponto  $z_1$  na origem, nos levando ao caso anterior. Portanto, a função

$$G(\theta, \phi; \theta', \phi') = -\frac{1}{2\pi} \log(\operatorname{sen} \frac{\rho}{2})$$

é a função de Green no caso em que o ponto fonte é  $(\theta', \phi')$  e  $\rho$  é a distância esférica entre  $(\theta, \phi)$  e  $(\theta', \phi')$ . No caso hiperbólico, se considerarmos o ponto fonte na origem (pólo norte  $N$ ), (3.25) não tem singularidades em todo domínio, exceto no ponto fonte e satisfaz a equação de Laplace,  $\Delta u = 0$ . No caso geral, repetimos o argumento do caso esférico utilizando a isometria

$$\phi_{z_1}(z) = \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}.$$

Deste modo, temos que a função

$$G(\theta, \phi; \theta', \phi') = -\frac{1}{2\pi} \log(\tanh \frac{\rho}{2})$$

é a função de Green com ponto fonte em  $(\theta', \phi')$  e  $\rho$  é a distância hiperbólica entre  $(\theta, \phi)$  e  $(\theta', \phi')$ . No caso esférico, a função de Green no sentido generalizado resulta que

$$\int_{S^2} f(\theta, \phi) dS = 0,$$

como condição de ortogonalidade (ver detalhes em [7]).

Encontrar uma expressão para  $\cos \rho$  em  $S^2$  e  $H^2$  será muito útil. Começemos em  $S^2$ .

De (3.19) temos

$$\tan^2 \frac{\rho}{2} = \left| \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 \bar{z}_2} \right|^2$$

então,

$$\frac{1 - \cos \rho}{1 + \cos \rho} = \frac{|z_1 - z_2|^2}{|1 + z_1 \bar{z}_2|^2}$$

logo,

$$\cos \rho = \frac{|1 + z_1 \bar{z}_2|^2 - |z_1 - z_2|^2}{|1 + z_1 \bar{z}_2|^2 + |z_1 - z_2|^2} \quad (3.26)$$

Agora, usamos (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}
|z_1 \bar{z}_2 + 1|^2 &= \left( \tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} + 1 \right) \left( \tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} e^{i(\phi_2 - \phi_1)} + 1 \right) \\
&= \tan^2 \frac{\theta_1}{2} \tan^2 \frac{\theta_2}{2} + 2 \tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2) + 1, \\
|z_1 - z_2|^2 &= \left( \tan \frac{\theta_1}{2} e^{i\phi_1} - \tan \frac{\theta_2}{2} e^{i\phi_2} \right) \left( \tan \frac{\theta_1}{2} e^{-i\phi_1} - \tan \frac{\theta_2}{2} e^{-i\phi_2} \right) \\
&= \tan^2 \frac{\theta_1}{2} - 2 \tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2) + \tan^2 \frac{\theta_2}{2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\cos \rho = \frac{4 \tan \frac{\theta_1}{2} \tan \frac{\theta_2}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2) + \tan^2 \frac{\theta_1}{2} \tan^2 \frac{\theta_2}{2} - \tan^2 \frac{\theta_1}{2} - \tan^2 \frac{\theta_2}{2} + 1}{1/(\cos^2 \frac{\theta_1}{2} \cos^2 \frac{\theta_2}{2})}.$$

Agora, usando as identidades

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \quad \text{e} \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

obtemos que o  $\cos \rho$  em  $S^2$  satisfaz a seguinte relação:

$$\cos \rho = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2). \quad (3.27)$$

Em  $H^2$ , o  $\cosh \rho$  satisfaz uma relação similar à relação (3.27) e os cálculos para deduzir esta relação são inteiramente análogos, tomando os devidos cuidados em substituir as funções circulares pelas funções hiperbólicas quando necessário. A relação é a seguinte:

$$\cosh \rho = \cosh \theta_1 \cosh \theta_2 - \sinh \theta_1 \sinh \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2), \quad \text{em } H^2. \quad (3.28)$$

Agora, encontraremos uma expressão mais simples para as funções de Green em  $S^2$  e  $H^2$ .

Para  $S^2$ , precisamos do  $\sin \frac{\rho}{2}$ .

Utilizando (3.26) e a identidade

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

obtemos

$$2 \sin^2 \frac{\rho}{2} = 1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 \bar{z}_2} \right|^2,$$

e, assim,

$$\sin \frac{\rho}{2} = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{|1 + z_1 \bar{z}_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}}.$$

A função de Green para  $S^2$ , então, pode ser escrita da forma

$$G(z, \bar{z}; z', \bar{z}') = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{|z - z'|}{\sqrt{|1 + z\bar{z}'|^2 + |z - z'|^2}}$$

ou, ainda,

$$G(\theta_1, \phi_1; \theta_2, \phi_2) = -\frac{1}{4\pi} \log \frac{1 - \cos \rho}{2}. \quad (3.29)$$

No caso de  $H^2$ , utilizando as identidades

$$\tanh^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{\cosh 2\alpha + 1}, \quad \sinh \alpha = \frac{\cosh 2\alpha - 1}{2}, \quad \cosh \alpha = \frac{\cosh 2\alpha + 1}{2},$$

obtemos que a função de Green em  $H^2$  pode ser escrita da forma

$$G(z, \bar{z}; z', \bar{z}') = -\frac{1}{2\pi} \log \frac{|z - z'|}{|1 - z\bar{z}'|}$$

ou, ainda

$$G(\theta_1, \phi_1; \theta_2, \phi_2) = -\frac{1}{4\pi} \log \frac{\cosh \rho - 1}{\cosh \rho + 1}. \quad (3.30)$$

### 3.2.4 Função Corrente

Da discussão anterior, obtemos a solução de  $\Delta\psi(z, \bar{z}) = -\omega(z, \bar{z})$  pois a função corrente  $\psi(z, \bar{z})$  é obtida sobre o plano complexo como

$$\psi(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S^2} \omega(z', \bar{z}') \log \frac{|z - \bar{z}'|}{\sqrt{|z - \bar{z}'|^2 + |1 + z\bar{z}'|^2}} dS(z, \bar{z}') \text{ em } S^2,$$

$$\psi(z, \bar{z}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{H^2} \omega(z', \bar{z}') \log \frac{|z - \bar{z}'|}{|1 - z\bar{z}'|} dS(z, \bar{z}') \text{ em } H^2.$$

Usando (3.29) e (3.30) obtemos

$$\psi(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \iint \omega(\theta', \phi') \log \frac{1 - \cos \rho}{2} \sin \theta' d\theta' d\phi' \text{ em } S^2, \quad (3.31)$$

$$\psi(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \iint \omega(\theta', \phi') \log \frac{\cosh \rho - 1}{\cosh \rho + 1} \sinh \theta' d\theta' d\phi' \text{ em } H^2. \quad (3.32)$$

Em ambos os casos,  $S^2$  e  $H^2$ , temos  $g_{12} = 0$ , assim  $\nabla\psi$ , onde  $\nabla$  é o operador gradiente dado por (2.8), assume a forma

$$\nabla\psi = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{g_{ii}} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Fazendo

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial x_2},$$

obtemos uma base ortonormal  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  para o plano tangente, na qual  $\nabla\psi$  é dado por

$$\nabla\psi = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \vec{e}_i.$$

Logo, na base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , o campo velocidade  $v(z, \bar{z})$  ou  $v(\theta, \phi)$  é dado por  $J\nabla\psi$ , onde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, em ambos os casos  $S^2$  e  $H^2$ , temos

$$v_{x_1} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad v_{x_2} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \quad (3.33)$$

### 3.2.5 Equações de Movimento para Vórtices Pontuais sobre $S^2$ e $H^2$

Para um modelo de vórtices pontuais, suponhamos a seguinte distribuição de vorticidade:

$$\omega(\theta', \phi') = \sum_{j=1}^n \Gamma_j \delta(\theta', \phi'; \theta_j, \phi_j), \quad (3.34)$$

onde  $\Gamma_j$  é a intensidade e  $(\theta_j, \phi_j)$  é a posição do  $j$ -ésimo vórtice e  $\delta$  é a função delta de Dirac. Substituindo (3.34) em (3.31) obtemos

$$\psi(\theta, \phi) = - \iint_{S^2} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \delta(\theta', \phi'; \theta_j, \phi_j) \log \frac{1 - \cos \rho}{2} \sin \theta' d\theta' d\phi'$$

$$\psi(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \log \frac{1 - \cos \rho}{2} \text{ em } S^2.$$

De (3.9) temos que  $g_{11} = 1$  e  $g_{22} = \sin^2 \theta$  em  $S^2$ , então substituindo em (3.33) obtemos

$$v_\theta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi}, \quad \text{e} \quad v_\phi = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}.$$

De posse da relação (3.27), temos

$$v_\theta = -\frac{1}{4\pi \sin \theta} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \frac{2}{1 - \cos \rho} \left[ -\frac{1}{2} \sin \theta \sin \theta_j [-\sin(\phi - \phi_j)] \right]$$

$$v_\theta = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \frac{\sin \theta_j \sin(\phi - \phi_j)}{1 - \cos \rho}$$

e

$$v_\phi = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \frac{2}{1 - \cos \rho} \left[ -\frac{1}{2} [-\sin \theta \cos \theta_j + \cos \theta \sin \theta \cos(\phi - \phi_j)] \right]$$

$$v_\phi = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \frac{\cos \theta \sin \theta_j \cos(\phi - \phi_j) - \sin \theta \cos \theta_j}{1 - \cos \rho}.$$

Uma vez que cada vórtice tem sua velocidade induzida pelos demais em sua posição e que, na base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ,

$$v_{x_1} = \sqrt{g_{11}} \frac{dx_1}{dt}, \quad \text{e} \quad v_{x_2} = \sqrt{g_{22}} \frac{dx_2}{dt},$$

obtemos

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \frac{1}{4\pi} \sum_{j \neq m} \Gamma_j \frac{\text{sen } \theta_j \text{sen}(\phi_m - \phi_j)}{1 - \cos \rho_{jm}}, \quad (3.35)$$

$$\text{sen } \theta_m \frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j \neq m} \Gamma_j \frac{\cos \theta_m \text{sen } \theta_j \cos(\phi_m - \phi_j) - \text{sen } \theta_m \cos \theta_j}{1 - \cos \rho_{jm}}, \quad (3.36)$$

em  $S^2$ .

Agora, em  $H^2$ , substituímos (3.34) em (3.32) obtemos

$$\psi(\theta, \phi) = -\iint_{H^2} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \delta(\theta', \phi'; \theta_j, \phi_j) \log \frac{\cosh \rho - 1}{\cosh \rho + 1} \text{senh } \theta' d\theta' d\phi'$$

$$\psi(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \log \left( \frac{\cosh \rho - 1}{\cosh \rho + 1} \right).$$

E de (3.14), temos que, em  $H^2$ ,  $g_{11} = 1$  e  $g_{22} = \text{senh}^2 \theta$ . Assim substituindo em (3.33), obtemos que

$$v_\theta = \frac{1}{\text{senh } \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \quad \text{e} \quad v_\phi = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Logo, usando a relação (3.28)

$$v_\theta = -\frac{1}{4\pi \text{senh } \theta} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \left[ \frac{\cosh \rho_j + 1}{\cosh \rho_j - 1} \right] \left[ \frac{2 \text{senh } \theta \text{senh } \theta_j \text{sen}(\phi - \phi_j)}{(\cosh \rho_j + 1)^2} \right]$$

$$v_\theta = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \frac{\text{senh } \theta_j \text{sen}(\phi - \phi_j)}{\cosh^2 \rho_j - 1}$$

e

$$v_\phi = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \left[ \frac{\cosh \rho_j + 1}{\cosh \rho_j - 1} \right] \left[ 2 \frac{\text{senh } \theta \cosh \theta_j - \cosh \theta \text{senh } \theta_j \cos(\phi - \phi_j)}{(\cosh \rho_j + 1)^2} \right]$$

$$v_\phi = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma_j \frac{\cosh \theta \text{senh } \theta_j \cos(\phi - \phi_j) - \text{senh } \theta \cosh \theta_j}{\cosh^2 \rho_j - 1}.$$

Como cada vórtice tem sua velocidade induzida pelos demais em sua posição e que, na base  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ,

$$v_{x_1} = \sqrt{g_{11}} \frac{dx_1}{dt}, \quad \text{e} \quad v_{x_2} = \sqrt{g_{22}} \frac{dx_2}{dt},$$

obtemos

$$\frac{d\theta_m}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq m} \Gamma_j \frac{\sinh \theta_j \sin(\phi_m - \phi_j)}{\cosh^2 \rho_{jm} - 1} \quad (3.37)$$

$$\sinh \theta_m \frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=m} \Gamma_j \frac{\cosh \theta_m \sinh \theta_j \cos(\phi_m - \phi_j) - \sinh \theta_m \cosh \theta_j}{\cosh^2 \rho_{jm} - 1}, \quad (3.38)$$

em  $H^2$ . O  $\rho_{jm}$  representa a distância esférica (respectivamente, hiperbólica) entre  $(\theta_j, \phi_j)$  e  $(\theta_m, \phi_m)$  em  $S^2$  (respectivamente,  $H^2$ ) e que é dado por (3.19) (respectivamente, (3.20)). Assim como no plano, podemos construir a dinâmica Hamiltoniana para o movimento de vórtices pontuais sobre  $S^2$  e  $H^2$ . As Hamiltonianas são

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j \neq i} \Gamma_j \Gamma_i \log(1 - \cos \rho_{ji}), \quad \text{em } S^2, \quad (3.39)$$

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j \neq i} \Gamma_j \Gamma_i \log \frac{\cosh \rho_{ji} - 1}{\cosh \rho_{ji} + 1}, \quad \text{em } H^2. \quad (3.40)$$

Definamos o colchete de Poisson como

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\Gamma_k} \left[ \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right], \quad (3.41)$$

onde  $p_k$  e  $q_k$  são variáveis conônicas definidas sobre  $S^2$  e  $H^2$ , respectivamente, por

$$p_k = \phi_k \quad q_k = \cos \theta_k, \quad \text{em } S^2, \quad (3.42)$$

$$p_k = \phi_k \quad q_k = -\cosh \theta_k, \quad \text{em } H^2. \quad (3.43)$$

Então, as equações de movimento (3.35), (3.36) e (3.37), (3.38) podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_j &= \{\theta_j, H\} \\ \dot{\phi}_j &= \{\phi_j, H\}, \end{aligned}$$

para ambos os casos. Associado com a Hamiltoniana (3.39) e (3.40) e o colchete de Poisson (3.41), podemos encontrar integrais primeiras  $F_i$  usando a definição de  $\{F_i, H\} = 0$ . Consequentemente, temos as seguintes integrais primeiras  $c_1, c_2, c_3$  em  $S^2$  e  $d_1, d_2, d_3$  em

$H^2$ :

$$c_1 = \sum_{j=1}^n \Gamma_j \operatorname{sen} \theta_j \cos \phi_j, \quad (3.44)$$

$$c_2 = \sum_{j=1}^n \Gamma_j \operatorname{sen} \theta_j \operatorname{sen} \phi_j, \quad (3.45)$$

$$c_3 = \sum_{j=1}^n \Gamma_j \cos \theta_j, \quad (3.46)$$

e

$$d_1 = \sum_{j=1}^n \Gamma_j \operatorname{senh} \theta_j \cos \phi_j, \quad (3.47)$$

$$d_2 = \sum_{j=1}^n \Gamma_j \operatorname{senh} \theta_j \operatorname{sen} \phi_j, \quad (3.48)$$

$$d_3 = \sum_{j=1}^n \Gamma_j \cosh \theta_j. \quad (3.49)$$

Observemos que  $\{c_1, c_2\} = c_3$ . De fato,

$$\{c_1, c_2\} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\Gamma_k} \left[ \frac{\partial c_1}{\partial q_k} \frac{\partial c_2}{\partial(\cos \theta_k)} - \frac{\partial c_1}{\partial(\cos \theta_k)} \frac{\partial c_2}{\partial q_k} \right]$$

sendo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial(\cos \theta_k)} &= \frac{\partial \left( \sum_{j=1}^n \Gamma_j \operatorname{sen} \theta_j \cos \phi_j \right)}{\partial(\cos \theta_k)} = \frac{\partial (\Gamma_k \operatorname{sen} \theta_k \cos \phi_k)}{\partial(\cos \theta_k)} \\ &= \Gamma_k \cos \phi_k \frac{\partial \left[ (1 - \cos^2 \theta_k)^{\frac{1}{2}} \right]}{\partial(\cos \theta_k)} = \Gamma_k \cos \phi_k \frac{-\cos \theta_k}{\operatorname{sen} \theta_k} \\ &= -\Gamma_k \frac{\cos \theta_k \cos \phi_k}{\operatorname{sen} \theta_k} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_2}{\partial(\cos \theta_k)} &= \frac{\partial \left( \sum_{j=1}^n \Gamma_j \operatorname{sen} \theta_j \operatorname{sen} \phi_j \right)}{\partial(\cos \theta_k)} = \frac{\partial (\Gamma_k \operatorname{sen} \theta_k \operatorname{sen} \phi_k)}{\partial(\cos \theta_k)} \\ &= \Gamma_k \operatorname{sen} \phi_k \frac{\partial \left[ (1 - \cos^2 \theta_k)^{\frac{1}{2}} \right]}{\partial(\cos \theta_k)} = \Gamma_k \operatorname{sen} \phi_k \frac{-\cos \theta_k}{\operatorname{sen} \theta_k} \\ &= -\Gamma_k \frac{\cos \theta_k \operatorname{sen} \phi_k}{\operatorname{sen} \theta_k}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_1}{\partial q_k} \frac{\partial c_2}{\partial(\cos \theta_k)} &= \Gamma_k \operatorname{sen} \theta_k \operatorname{sen} \phi_k \left( -\Gamma_k \frac{\cos \theta_k \operatorname{sen} \phi_k}{\operatorname{sen} \theta_k} \right) \\ &= -\Gamma_k^2 \cos \theta_k \operatorname{sen}^2 \phi_k\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_1}{\partial(\cos \theta_k)} \frac{\partial c_2}{\partial q_k} &= \left( -\Gamma_k \frac{\cos \theta_k \cos \phi_k}{\operatorname{sen} \theta_k} \right) \Gamma_k \operatorname{sen} \theta_k \cos \phi_k \\ &= -\Gamma_k^2 \cos \theta_k \cos^2 \phi_k.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\{c_1, c_2\} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\Gamma_k} \left[ \frac{\partial c_1}{\partial q_k} \frac{\partial c_2}{\partial(\cos \theta_k)} - \frac{\partial c_1}{\partial(\cos \theta_k)} \frac{\partial c_2}{\partial q_k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \Gamma_k [\cos \theta_k \operatorname{sen}^2 \phi_k + \cos \theta_k \cos^2 \phi_k] \\ &= \sum_{k=1}^n \Gamma_k \cos \theta_k = c_3.\end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga ao feito acima, deduzimos que em termos do colchete de Poisson (3.41) com as variáveis (3.42) e (3.43),  $c_1, c_2, c_3$  e  $d_1, d_2, d_3$  satisfazem:

$$\begin{aligned}\{c_1, c_2\} &= c_3, & \{c_2, c_3\} &= c_1, & \{c_3, c_1\} &= c_2, \\ \{d_1, d_2\} &= d_3, & \{d_2, d_3\} &= -d_1, & \{d_3, d_1\} &= -d_2.\end{aligned}$$

### 3.2.6 Movimento de um Par de Vórtices

Como solução particular para o movimento de vórtices pontuais sobre  $S^2$  e  $H^2$ , vamos considerar o movimento de um par de vórtices, no qual, cada vórtice tem intensidade  $\Gamma$ , mas rotações opostas. Vamos supor que  $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 4\pi\Gamma > 0$  para ambos,  $S^2$  e  $H^2$ .

Começemos com o caso esférico. As relações abaixo serão úteis para facilitar os cálculos:

$$\begin{aligned}\alpha &= \operatorname{sen} \theta_2 \cos \phi_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \cos \phi_1 \\ \beta &= \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \phi_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \phi_1 \\ \gamma &= \cos \theta_2 - \cos \theta_1.\end{aligned}$$

Observemos que

$$\alpha = -\frac{c_1}{4\pi\Gamma}, \quad \beta = -\frac{c_2}{4\pi\Gamma}, \quad \gamma = -\frac{c_3}{4\pi\Gamma}.$$

Agora, podemos transformar as equações de movimento (3.35) e (3.36) em uma forma mais simples. Para (3.35) temos

$$\begin{aligned}
\text{sen } \theta_2 \text{sen}(\phi_2 - \phi_1) &= \text{sen } \theta_2(\text{sen } \phi_2 \cos \phi_1 - \text{sen } \phi_1 \cos \phi_2) \\
&= \text{sen } \theta_2(\text{sen } \phi_2 \cos \phi_1 - \text{sen } \phi_1 \cos \phi_2) - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \phi_1 \cos \phi_1 \\
&\quad + \text{sen } \theta_1 \text{sen } \phi_1 \cos \phi_1 \\
&= (\text{sen } \theta_2 \text{sen } \phi_2 - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \phi_1) \cos \phi_1 \\
&\quad - (\text{sen } \theta_2 \cos \phi_2 - \text{sen } \theta_1 \cos \phi_1) \text{sen } \phi_1 \\
&= \beta \cos \phi_1 - \alpha \text{sen } \phi_1.
\end{aligned}$$

Agora, usando (3.27)

$$\begin{aligned}
\cos \rho_{12} - 1 &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) - \text{sen}^2 \theta_1 (\cos^2 \phi_1 + \text{sen}^2 \phi_1) - \cos^2 \theta_1 \\
&= \text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \text{sen } \phi_1 \text{sen } \phi_2) - \text{sen}^2 \theta_1 \cos^2 \phi_1 - \text{sen}^2 \theta_1 \text{sen}^2 \phi_1 \\
&\quad + \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos^2 \theta_1 \\
&= (\text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2)(\cos \theta_1 \cos \phi_1) - \text{sen}^2 \theta_1 \cos^2 \phi_1 + (\text{sen } \theta_1 \text{sen } \theta_2)(\text{sen } \phi_1 \text{sen } \phi_2) \\
&\quad - \text{sen}^2 \theta_1 \text{sen}^2 \phi_1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos^2 \theta_1 \\
&= (\text{sen } \theta_2 \cos \phi_2 - \text{sen } \theta_1 \cos \phi_1) \text{sen } \theta_1 \cos \phi_1 \\
&\quad + (\text{sen } \theta_2 \text{sen } \phi_2 - \text{sen } \theta_1 \text{sen } \phi_1) \text{sen } \theta_1 \text{sen } \phi_1 + (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \cos \theta_1 \\
&= \alpha \text{sen } \theta_1 \cos \phi_1 + \beta \text{sen } \theta_1 \text{sen } \phi_1 + \gamma \cos \theta_1.
\end{aligned}$$

E, de maneira análoga, fazemos para (3.36). Assim, fazendo-se a reparametrização  $\tau = \Gamma t$ , as equações de movimento (3.35) e (3.36) podem ser escritas da forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_1}{d\tau} &= \frac{\beta \cos \phi_1 - \alpha \text{sen } \phi_1}{\alpha \text{sen } \theta_1 \cos \phi_1 + \beta \text{sen } \theta_1 \text{sen } \phi_1 + \gamma \cos \theta_1} \\
\text{sen } \theta_1 \frac{d\phi_1}{d\tau} &= \frac{\gamma \text{sen } \theta_1 - \alpha \cos \theta_1 \cos \phi_1 - \beta \cos \theta_1 \text{sen } \phi_1}{\alpha \text{sen } \theta_1 \cos \phi_1 + \beta \text{sen } \theta_1 \text{sen } \phi_1 + \gamma \cos \theta_1}.
\end{aligned}$$

Supondo  $\alpha = \beta = 0$ , que corresponde à situação em que um par de vórtices está localizado simetricamente em relação ao equador, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_1}{d\tau} &= 0 \\
\frac{d\phi_1}{d\tau} &= \frac{1}{\cos \theta_1}
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \theta_1(0), \\
\phi_1 &= \frac{1}{\cos \theta_1(0)} \tau + \phi(0).
\end{aligned}$$

Assim, obtemos que o par de vórtices se move ao longo do equador e com velocidade constante. Para situações mais gerais, temos o seguinte teorema:

**Teorema 3.1.** *Um par de vórtices sobre  $S^2$  se move ao longo da geodésica que bissecta e é perpendicular a curva que conecta os dois vórtices.*

*Demonstração.* Considerando a isometria sobre  $S^2$ ,

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 + \bar{z}_0 z},$$

onde  $z_0$  é a posição no plano complexo do vetor normal do plano bissectando o par de vórtices (ver figura 3.3).  $T(z)$  transforma  $z_0$  no pólo norte  $N$ , e depois rotaciona o sistema em torno do eixo  $NS$  por um ângulo  $\theta$ , conseguindo a mesma situação mostrada na figura 3.2. Como  $T(z)$  é uma isometria sobre  $S^2$  e a Hamiltoniana é invariante por isometrias, segue o resultado.  $\square$

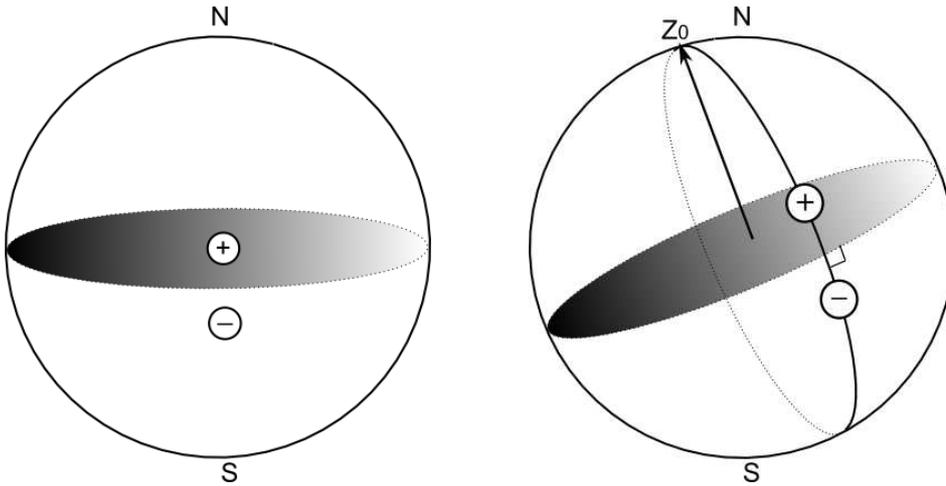


Figura 3.2: Dipolo de vórtices no equador      Figura 3.3: Dipolo de vórtices: caso geral

O movimento de uma par de vórtices sobre  $H^2$  pode ser analisado da mesma maneira feita sobre  $S^2$ , a saber removendo  $\theta_2$  e  $\phi_2$  das equações para  $\theta_1$  e  $\phi_1$  usando as integrais primeiras (3.47)-(3.49).

Usando (3.15)-(3.17) temos as seguintes relações

$$\alpha = \sinh \theta_2 \cos \phi_2 - \sinh \theta_1 \cos \phi_1 = \frac{2x_2}{1 - x_2^2 - y_2^2} - \frac{2x_1}{1 - x_1^2 - y_1^2}$$

$$\beta = \sinh \theta_2 \sin \phi_2 - \sinh \theta_1 \sin \phi_1 = \frac{2y_2}{1 - x_2^2 - y_2^2} - \frac{2y_1}{1 - x_1^2 - y_1^2}$$

$$\gamma = \cosh \theta_2 - \cosh \theta_1 = \frac{1 + x_2^2 + y_2^2}{1 - x_2^2 - y_2^2} - \frac{1 + x_1^2 + y_1^2}{1 - x_1^2 - y_1^2},$$

onde fizemos uma reparametrização para o tempo dada por  $\tau = 2\pi\Gamma t$ . E observamos que

$$\alpha = -\frac{d_1}{4\pi\Gamma}, \quad \beta = -\frac{d_2}{4\pi\Gamma}, \quad \gamma = \frac{d_3}{4\pi\Gamma}.$$

Agora, de maneira análoga ao feito no caso  $S^2$ , obtemos que as equações de movimento (3.37) e (3.38) sobre  $H^2$ , podem ser escritas na forma

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{d\tau} &= \\ &= \frac{\beta \cos \phi_1 - \alpha \operatorname{sen} \phi_1}{\{2 + \gamma \cosh \theta_1 - \alpha \operatorname{senh} \theta_1 \cos \phi_1 - \beta \operatorname{senh} \theta_1 \operatorname{sen} \phi_1\} \{\gamma \cosh \theta_1 \operatorname{senh} \theta_1 \cos \phi_1 - \beta \operatorname{senh} \theta_1 \operatorname{sen} \phi_1\}}, \\ \operatorname{senh} \theta_1 \frac{d\phi_1}{d\tau} &= \\ &= \frac{\gamma \operatorname{senh} \theta_1 - \alpha \cosh \theta_1 \cos \phi_1 - \beta \cosh \theta_1 \operatorname{sen} \phi_1}{\{2 + \gamma \cosh \theta_1 - \alpha \operatorname{senh} \theta_1 \cos \phi_1 - \beta \operatorname{senh} \theta_1 \operatorname{sen} \phi_1\} \{\gamma \cosh \theta_1 \operatorname{senh} \theta_1 \cos \phi_1 - \beta \operatorname{senh} \theta_1 \operatorname{sen} \phi_1\}}. \end{aligned}$$

Para ver a trajetória de  $\theta_1$  e  $\phi_1$  sobre o disco de Poincaré, escrevemos as equações acima em termos de  $x_1$  e  $x_2$ , usando (3.15)-(3.17):

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{-\Gamma(1 - |z_1|^2)^2 \{\beta(1 - x_1^2 + y_1^2) + 2\alpha x_1 y_1 - 2\gamma y_1\}}{\{\gamma(1 + |z_1|^2) - 2\alpha x_1 - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1\} \{2(1 - |z_1|^2) + \gamma(1 + |z_1|^2) - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1\}}, \quad (3.50)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{-\Gamma(1 - |z_1|^2)^2 \{\alpha(1 + x_1^2 - y_1^2) + 2\beta x_1 y_1 - 2\gamma x_1\}}{\{\gamma(1 + |z_1|^2) - 2\alpha x_1 - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1\} \{2(1 - |z_1|^2) + \gamma(1 + |z_1|^2) - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1\}}. \quad (3.51)$$

Para obtermos uma solução particular, tomamos dois vórtices em  $(x_1, y_1) = (-\delta, 0)$  e  $(x_2, y_2) = (\delta, 0)$ , o que faz  $\alpha = 4\delta/(1 - \delta^2)$  e  $\beta = \gamma = 0$ . Então (3.50) e (3.51) são simplificadas a

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\Gamma y_1 (1 - x_1^2 - y_1^2)}{2\{1 - (\alpha x_1 / (1 - x_1^2 - y_1^2))\}} \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\Gamma(1 + x_1^2 - y_1^2)(1 - x_1^2 - y_1^2)}{-4x_1\{1 - (\alpha x_1 / (1 - x_1^2 - y_1^2))\}}. \end{aligned}$$

Então, fazemos ambos,  $\delta$  e  $\Gamma$ , tenderem a zero enquanto deixamos  $\Gamma/\delta \equiv \varepsilon > 0$  constante.

Assim, obtemos que as equações de movimento assintótico para o par de vórtices (dipolo de vórtices) em  $(x, y)$ , com seu eixo ao longo do eixo  $y$  inicialmente localizados na origem, são

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad (3.52)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}\varepsilon(1 - y^2)^2. \quad (3.53)$$

Calculando a solução de (3.53) obtemos

$$\frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{2y}{(1-y^2)} + \log \frac{1+y}{1-y} \right] = t,$$

e, portanto, obtemos que o dipolo de vórtices se move sobre o eixo  $y$  se aproximando, mas não cruzando a fronteira. Além disso, do ponto de vista de sistemas dinâmicos, vemos que  $y = 1$  é um ponto fixo semi-estável, isto é, atraindo para  $y < 1$  e repelindo para  $y > 1$ . Para condições iniciais gerais, temos o seguinte o teorema:

**Teorema 3.2.** *Sobre o disco de Poincaré, um dipolo de vórtices se move sobre a geodésica que passa pela condição inicial do dipolo.*

*Demonstração.* Consideramos a isometria sobre  $H^2$  dada por

$$T(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

a qual, leva geodésica em outra geodésica e transforma  $z_0$  na origem. Fazendo  $z_0$  como a nova posição inicial sobre o disco de Poincaré, e usando

$$T^{-1}(z) = \frac{ze^{-i\theta} + z_0}{1 + \bar{z}_0 ze^{-i\theta}},$$

a qual, transforma a origem em  $z_0$  sobre o disco de Poincaré. Sendo  $T$  uma isometria,  $T^{-1}$  também é. E como a Hamiltoniana é invariante por isometrias, segue o resultado.  $\square$

Tratamos do movimento de vórtices sobre as superfícies de Riemann com curvatura constante  $S^2$ ,  $E^2$  e  $H^2$ , as quais tem como métrica Riemanniana

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1 + a|z|^2)^2},$$

onde  $a = 1$ ,  $a = 0$  e  $a = -1$  para  $S^2$ ,  $E^2$  e  $H^2$ , respectivamente. Em [10] é levantada a seguinte questão: quais propriedades de  $E^2$  são importadas de espaços curvos ( $a \neq 0$ ) e que novas propriedades intrínsecas em  $E^2$  são geradas quando fazemos  $a$  variar continuamente entre  $-1$  e  $1$ . Estas questões são de interesse para continuidade deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- [1] AHLFORS, Lars V. **Complex Analysis**: An Introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [2] AREF, H. **Motion of Three Vortices**. Phys. Fluids **22**, pp. 393-400 (1979).
- [3] BERS, Lipman. **Riemann Surfaces**. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1957.
- [4] BOGOMOLOV, V. A. **Dynamics of Vorticity at a Sphere**. Fluid Dynamics. vol. 6. pp. 863-870 (1977).
- [5] CHORIN, Alexandre J. **Vorticity and Turbulence**. New York: Springer-Verlag, 1994. (Applied Mathematical Sciences v. 103)
- [6] CHORIN, Alexandre J; MARSDEN, Jerrold E. **A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics**. 3.ed. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [7] COURANT, H; HILBERT, D. **Methods of Mathematical Physics**. New York: Interscience, 1966.
- [8] DO CARMO, Manfredo P. **Geometria Riemanniana**. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Projeto Euclides)
- [9] HELGASON, S. **Differential Geometry and Symmetric Spaces**. New York; London: Academic Press, 1962. (Pure and applied mathematics; 12)
- [10] KIMURA, Y. **Vortex Motion on Surfaces With Constant Curvature**. Proc. R. Soc. Lond. **A** (1999) 455, 245-259.
- [11] KIMURA, Y. **Similarity Solution of Two-Dimensional Point Vortices**. Journal of the Physical Society of Japan vol. 56, No. 6, pp. 2024-2030 (1987).
- [12] KIMURA, Y; OKAMOTO, H. **Vortex Motion on a Sphere**. Journal of the Physical Society of Japan. Vol. 56, No. 12, (1987), 4203-4206.

- [13] KLEIN, F. **On Riemann's Theory of Algebraic Functions and Their Integrals**. New York: Dover, 1963.
- [14] KOZLOV, V. V. **Dynamical Systems X: General Theory of Vortices**. London: Springer, 2003. (Série: Encyclopaedia of Mathematical Sciences vol. 67)
- [15] MORSE, P. M; FESHBACH, H. **Methods of Theoretical Physics**. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [16] NEWTON, P. K. **The N-Vortex Problem: Analytical Techniques**. New York: Springer, 2001. (Applied Mathematical Sciences v. 145)
- [17] SINGER, I. M; THORPE, J. A. **Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry**. New York: Springer-Verlag, 1967. (Undergraduate texts in mathematics)
- [18] SPRINGER, G. **Introduction to Riemann Surfaces**. Massachusetts: Addison-Wesley, 1957.
- [19] THOMSON, J. J. **An Treatise on the Motion of Vortex Rings**. Macmillan: London, 1883, p 94-108.
- [20] THOMSON, J. J. **On the Structure of Atom: An Investigation of the Stability and Periods of Oscillation of a Number of Corpuscles Arranged at Equal Intervals Around the Circunference of a Circle; With Application of the Result to Theory of Atomic Struture**. Philosophical Magazine, 1904. 6, v. 7, p 237-265.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)