

sler37

Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Modelagem de extremos baseada nas
 r -maiores estatísticas de ordem.**

Uma aplicação do cálculo do Valor em Risco em mercados
emergentes.

Ana Paula dos Santos Rubem

Rio de Janeiro

2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Ana Paula dos Santos Rubem

Modelagem de extremos baseada nas r -maiores estatísticas de ordem.

Uma aplicação do cálculo do Valor em Risco em mercados emergentes.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Estatística do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientadora:

Beatriz Vaz de Melo Mendes

Universidade Federal do Rio de Janeiro

março de 2006

Folha de exame

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Estatística do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Banca examinadora:

Beatriz Vaz de Melo Mendes
Instituto de Matemática - UFRJ

Francisco Cribari Neto
Departamento de Estatística - UFPE

André Luiz Carvalhal da Silva
COPPEAD - UFRJ

Resumo

A Teoria de Valores Extremos é um ramo da probabilidade que estuda o comportamento estocástico de extremos associados a uma distribuição F . Na prática, F é desconhecida, tornando os cálculos exatos impossíveis. No entanto, sob certas suposições, o comportamento assintótico do máximo ou, mais geralmente, das r maiores estatísticas de ordem é descrito por uma família de distribuições conhecida.

As abordagens existentes em finanças são geralmente baseadas nos máximos ou excessos além de um limiar alto. Nesta dissertação, iremos aplicar o modelo para as r -maiores estatísticas de ordem proposto por Smith (1986), para o caso Gumbel, a partir dos desenvolvimentos teóricos de Weissman (1978), e generalizado por Tawn (1988), para avaliar a influência da inclusão das r -maiores estatísticas de ordem no cálculo de medidas de risco.

Examinaremos os índices de cinco países pertencentes ao chamado mercado emergente, Argentina, Brasil, Chile, Índia e Cingapura, no período de 31 de dezembro de 1993 a 31 de dezembro de 2005. Os dados de 31 de dezembro de 1993 a 31 de janeiro de 2005 serão utilizados para a estimação e os dados restantes para verificação.

A análise se divide em três partes. Primeiro, iremos utilizar estimação por máxima verossimilhança e supor o vetor de parâmetros constante no tempo (modelo global). Num segundo momento, iremos supor ser o vetor de parâmetros uma função suave no tempo, mas não-paramétrica (modelo local), usando métodos de verossimilhança local como proposto por Butler *et al.* (2005). Depois, com base no modelo local ajustado, sugeriremos modelos com tendência temporal paramétrica no vetor de parâmetros.

Palavras chave: valores extremos, r -maiores, medidas de risco, mercado emergente, verossimilhança local.

Abstract

The Extreme Value Theory is a branch of probability that studies the stochastic behavior of extremes associated with a probability distribution function F . In practice, F is unknown, so that the exact calculations are impossible. Nevertheless, under special conditions, the asymptotic behavior of the maximum, or generally speaking, of the r -largest order statistics is described by a known family of distributions.

The common approaches in finance are usually based on the maxima or on the exceedances of a high threshold. In this work we will apply the r -largest model proposed by Smith (1986), for the Gumbel case, based on the theoretical developments of Weissman (1978), and generalized by Tawn (1988), to evaluate the improvement in risk estimation by using the r -largest order statistics.

We will examine the stock market indexes of five countries that belong to the so-called emerging markets: Argentina, Brazil, Chile, India and Singapore, from 31st December 1993 up to 31st December 2005. The data from 31st December 1993 up to 31st January 2005 will be used for estimation, and the remaining data will be applied to model checking.

The analysis is divided in three parts. First, we use maximum likelihood estimation assuming that the parameter vector is constant in time (global model). Second, we suppose the parameter vector as a smooth function of time (local model), but nonparametric, using local likelihood methods as proposed by Butler *et al* (2005). Afterwards, based upon the fitted local models, we suggest models with parametric temporal trends in the parameter vector.

Key words: extreme value, r -largest, risk estimation, emerging markets, local likelihood.

A meus pais, por terem me possibilitado chegar até aqui,
ao meu marido, Alex, e à minha filha, Júlia.

Agradecimentos

À minha orientadora, Professora Beatriz Vaz de Melo Mendes, pela orientação segura e competente, pelas palavras amigas, atenção e dedicação em todos os momentos, sem as quais este trabalho simplesmente não existiria.

Aos meus colegas de turma, pela convivência agradável ao longo deste tempo, em especial, às minhas queridas amigas Valmária, Carla e Carolina que sempre estiveram dispostas a me ajudar.

Aos meus chefes e ex-chefes, por terem autorizado a realização deste curso e pela compreensão e tolerância com as seguidas ausências que se fizeram necessárias.

Aos professores Kaizô Iwakami Beltrão e Waldir Lobão pela recomendação.

À minha família e a meus amigos pelo incentivo e carinho constantes.

Ao meu primo Cristian pela grande torcida.

Ao meu marido pela paciência e apoio recebidos durante todo o período de realização do curso e de elaboração desta dissertação.

Agradeço, ainda, aos demais professores do Instituto pela oportunidade de ampliar meus conhecimentos e minha formação.

Sumário

Introdução	1
1 Finanças	5
1.1 Introdução	5
1.2 Mercados emergentes	7
1.3 Retornos	8
1.3.1 Fatos estilizados sobre retornos	8
2 Teoria dos Valores Extremos e Modelos Clássicos	9
2.1 Modelos clássicos	9
2.1.1 Modelagem GEV para os máximos	9
2.1.2 A distribuição GEV	11
2.1.3 Modelos assintóticos para os mínimos	14
2.2 Inferência para a distribuição GEV	14
2.2.1 Considerações gerais	14
2.2.2 Estimação por máxima verossimilhança	16
2.2.3 Inferência para os níveis de retorno	17
2.2.4 Verificação do modelo	18
2.3 Generalização: modelagem das r -maiores esta-tísticas de ordem	20
2.3.1 Formulação do modelo	20
2.3.2 Modelando as r -maiores estatísticas de ordem	23
2.3.3 Qualidade do ajuste e seleção do modelo	24
3 Extremos de Seqüências Dependentes	26
3.1 Máximos de seqüências estacionárias	27
3.2 Modelando séries estacionárias	29
3.3 Conglomerados de extremos e o índice extremal	30
3.3.1 Estimação do índice extremal	31

4	Extremos de Seqüências Não Estacionárias	32
4.1	Abordagem paramétrica	32
4.2	Abordagem não-paramétrica: o modelo r -maiores local	34
4.2.1	Formulação do modelo	35
4.2.2	Estimação por verossimilhança local	36
4.2.3	Avaliando a incerteza	37
4.2.4	Escolha da largura da janela	38
4.2.5	Diagnóstico do modelo	39
5	Medidas de risco	41
5.1	Valor em Risco	42
5.2	<i>Backtesting</i>	43
5.2.1	Teste da proporção de falhas	44
5.2.2	Teste do tempo entre falhas	44
6	Análises	46
6.1	Descrição e análise exploratória dos dados	46
6.2	Ajuste do modelo r -maiores global por máxima verossimilhança	54
6.2.1	Estimação, seleção e diagnóstico	54
6.2.2	Análise das estimativas de VaR	66
6.2.3	<i>Backtests</i> para as estimativas de VaR	71
6.2.4	Incorporando o índice extremal às estimativas de VaR	73
6.3	Ajuste do modelo r -maiores local	76
6.3.1	Estimação, seleção e diagnóstico do modelo	76
6.3.2	<i>Backtests</i> das estimativas locais de VaR	84
	86	
6.4.1	Estimação, escolha e diagnóstico do modelo	87
6.4.2	<i>Backtests</i> das estimativas de VaR	93
6.5	Validação dos modelos	94
7	Conclusão	100
	Apêndice	104
	Bibliografia	108

Lista de Figuras

6.1	Log-retornos (em US\$) diários das séries dos cinco países no período de 31/12/1993 a 31/01/2005. (De cima para baixo: Argentina, Brasil, Chile, Índia e Cingapura.)	50
6.2	Autocorrelações estimadas para os retornos (esquerda) e para os quadrados dos retornos (direita).	52
6.3	10-maiores ganhos dos blocos de tamanho n das séries de retornos diários dos cinco países.	57
6.4	10-maiores perdas dos blocos de tamanho n das séries de retornos diários dos cinco países.	58
6.5	Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para ganhos bimestrais no mercado argentino.	59
6.6	Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para ganhos bimestrais no mercado brasileiro.	60
6.7	Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para ganhos trimestrais no mercado chileno.	60
6.8	Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para ganhos trimestrais no mercado indiano.	61
6.9	Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para ganhos quadrimestrais no mercado de Cingapura.	61
6.10	Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para perdas bimestrais no mercado argentino.	62
6.11	Gráficos de diagnóstico do ajuste 2-maiores global para perdas trimestrais no mercado brasileiro.	62
6.12	Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo GEV ($r = 1$) global para perdas bimestrais no mercado chileno.	63
6.13	Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo GEV ($r = 1$) global para perdas mensais no mercado indiano.	63

6.14	Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para perdas bimestrais no mercado de Cingapura.	64
6.15	Retornos diários de cada país, VaR empíricos e os VaR estimados a partir dos ajustes do modelo r -maiores global para os ganhos nos blocos de tamanho n	69
6.16	Retornos diários $\times (-1)$ de cada país, VaR empíricos e os VaR estimados a partir dos ajustes do modelo r -maiores global para as perdas nos blocos de tamanho n	70
6.17	Estimativas de μ , σ e ξ obtidas pelo ajuste r -maiores local na Argentina para $h = 4, 5$ e 7	77
6.18	Estimativas de μ , σ e ξ obtidas pelo ajuste r -maiores local para as cinco séries de ganhos dos blocos de tamanho n	79
6.19	Estimativas de μ , σ e ξ obtidas pelo ajuste r -maiores local para as cinco séries de perdas dos blocos de tamanho n	80
6.20	QQ plots despadronizados da k -ésima maior, $k = 1$, ajustada pelo modelo r -maiores local com largura da janela h para as séries de ganhos dos blocos de tamanho n de cada país.	81
6.21	QQ plots despadronizados da k -ésima maior, $k = 1$, ajustada pelo modelo r -maiores local com largura da janela h para as séries de ganhos dos blocos de tamanho n de cada país.	82
6.22	Faixas de variabilidade <i>bootstrap</i> com 95% de confiança para as estimativas dos parâmetros do modelo r -maiores local com largura da janela temporal $h = 5$ ajustado à série de ganhos dos blocos de tamanho $n = 44$ na Argentina.	83
6.23	Estimativas de μ (local <i>versus trend</i> linear) obtidas pelos ajustes r -maiores para as séries de ganhos e perdas dos blocos de tamanho n	90
6.24	QQ plots padronizados para os ajustes r -maiores com parametrização temporal para as séries de ganhos e perdas dos blocos de tamanho n	91
6.25	Estimativas de VaR (local <i>versus trend</i> parametrizada) obtidas pelos ajustes r -maiores para as séries de ganhos e perdas dos blocos de tamanho n	92

Lista de Tabelas

6.1	Estatísticas básicas dos retornos diários (x100) para o período de 31/12/1993 a 31/01/2005 (2.891 observações) e estatística do teste de Shapiro-Wilk (SW) para normalidade (p -valor entre parênteses).	49
6.2	Estatísticas dos testes Ljung-Box (LB), KPSS e R/S de Lo (RS), e respectivos p -valores entre parênteses, para as séries de retornos diários (2.891 observações).	53
6.3	Tamanho de bloco selecionado para cada série de extremos e número de observações extremas (em função de r) entre parênteses.	55
6.4	Ajustes do modelo r -maiores global aceitos pela análise de estabilidade das estimativas dos parâmetros (valores máximos de r).	56
6.5	Estimativas dos parâmetros (μ, σ, ξ) , respectivos erros-padrão (entre parênteses), estatísticas teste de Kolmogorov (D_n) e respectivos p -valores (entre parênteses) do modelo r -maiores global ajustado aos ganhos e perdas dos blocos de tamanho n dos retornos diários de cada país.	65
6.6	Estimativas de VaR_α empíricas e as obtidas a partir do ajuste do modelo r -maiores global para ganhos dos blocos de tamanho n (erros-padrão entre parênteses). . . .	67
6.7	Estimativas de VaR_α empíricas e as obtidas a partir do ajuste do modelo r -maiores global para perdas dos blocos de tamanho n (erros-padrão entre parênteses). . . .	68
6.8	Percentual de falhas efetivas de VaR_α para as séries de ganhos e perdas extremas dos blocos de tamanho n obtidas a partir do ajuste do modelo r -maiores global. . .	71
6.9	Resultados do <i>backtest</i> para a proporção de falhas das estimativas de VaR_α obtidas a partir dos ajustes do modelo r -maiores global para os blocos de tamanho n . . .	72
6.10	Resultados do <i>backtest</i> para o tempo entre falhas das estimativas de VaR_α obtidas nos ajustes do modelo r -maiores global para os blocos de tamanho n	73
6.11	Estimativas de θ para as caudas direita (θ_G) e esquerda (θ_P) da distribuição de retornos diários dos índices dos cinco países e estimativas para os $VaR_{5\%}$, $VaR_{1\%}$ e $VaR_{0,1\%}$ dos ganhos e perdas incorporando a informação dada por θ ao ajuste do modelo r -maiores global.	74

6.12	Resultados do <i>backtest</i> para a proporção de falhas das estimativas de VaR_α obtidas a partir dos ajustes do modelo r -maiores global para os blocos de tamanho n incorporando θ	74
6.13	Resultados do <i>backtest</i> para o tempo entre falhas das estimativas de VaR_α obtidas nos ajustes do modelo r -maiores global para os blocos de tamanho n incorporando θ	75
6.14	Largura da janela temporal h escolhida pelo critério AIC, para o ajuste r -maiores local das séries de ganhos e perdas nos blocos de tamanho n de cada país e estatísticas da razão de verossimilhanças (RV) associada ao teste que compara o modelo global contra o modelo local para o h escolhido e p -valor (entre parênteses).	78
6.15	Resultados do <i>backtest</i> para a proporção de falhas das estimativas de VaR_α obtidas a partir dos ajustes do modelo r -maiores local para os blocos de tamanho n	85
6.16	Resultados do <i>backtest</i> para o tempo entre falhas das estimativas de VaR_α obtidas nos ajustes do modelo r -maiores local para os blocos de tamanho n	86
6.17	Parametrizações para o modelo r -maiores conservadas, onde t é o índice de bloco que varia de 1 a m	88
6.18	Estimativas dos parâmetros e erros-padrão (entre parênteses) do modelo r -maiores ajustado às séries de ganhos e perdas dos cinco países. O modelo é parametrizado conforme a Tabela 6.17.	89
6.19	Resultados do <i>backtest</i> para a proporção de falhas das estimativas de VaR_α obtidas a partir dos ajustes do modelo r -maiores com estrutura temporal paramétrica para os blocos de tamanho n . O modelo é parametrizado conforme a Tabela 6.17.	94
6.20	Resultados do <i>backtest</i> para o tempo entre falhas das estimativas de VaR_α obtidas nos ajustes do modelo r -maiores local para os blocos de tamanho n	95
6.21	Resultados do <i>backtest</i> para a proporção de falhas das estimativas de $VaR_{0,1\%}$ obtidas a partir dos ajustes do modelo r -maiores global, global + θ , local e com parametrização temporal (<i>trend</i>).	96
6.22	Resultados do <i>backtest</i> para a proporção de tempo entre falhas das estimativas de $VaR_{0,1\%}$ obtidas a partir dos ajustes do modelo r -maiores global, global + θ , local e com parametrização temporal (<i>trend</i>).	97
6.23	Estimativas dos parâmetros (μ, σ, ξ) , do modelo r -maiores global ajustado aos ganhos e perdas dos blocos de tamanho n dos retornos diários de cada país no período 31/12/1993 a 31/12/2005 (dados atualizados).	98
6.24	Estimativas dos parâmetros do modelo r -maiores ajustado às séries de ganhos e perdas dos cinco países no período 31/12/1993 a 31/12/2005 (dados atualizados). O modelo é parametrizado conforme a Tabela 6.17.	99

Introdução

A Teoria dos Valores Extremos (TVE) é um ramo da probabilidade que estuda o comportamento estocástico de extremos associados a um conjunto de variáveis aleatórias (ou vetores aleatórios) com distribuição comum F . Dentro da denominação geral de extremos incluímos o máximo e o mínimo, estatísticas de ordem extremas e excessos acima (ou abaixo) de limiares altos (ou baixos). O importante é que as características e as propriedades das distribuições desses extremos aleatórios são determinadas pelas caudas extremas (inferior ou superior, no caso univariado) da distribuição subjacente F . Restringir a atenção às caudas de uma distribuição apresenta a vantagem de termos a nossa disposição diversos modelos estatísticos adequados para as mesmas. Esses modelos nos permitirão fazer inferências mais precisas sobre as caudas e parâmetros da distribuição subjacente F .

As origens da caracterização assintótica de máximo amostral remontam a Fisher e Tippet (1928), cujos argumentos foram completados e formalizados por Gnedenko (1943). A utilização do modelo dos máximos coletados em blocos para aplicações estatísticas mais sérias parece ter começado na década de 50. Gumbel (1958) foi essencial para promover a metodologia, sendo este livro ainda relevante nos dias de hoje. A parametrização da GEV foi proposta independentemente por von Mises (1954) e Jenkinson (1955).

Os aspectos da inferência de verossimilhança para o modelo GEV e, em particular, o cálculo da matriz de informação esperada foram considerados por Prescott e Walden (1980). Um algoritmo para estimar os parâmetros por máxima verossimilhança foi dado por Hosking (1985).

Há inúmeras aplicações publicadas do modelo GEV em várias disciplinas. Exemplos baseados nas r -maiores estatísticas de ordem são menos comuns. Como uma ferramenta

de modelagem, esta técnica foi primeiramente desenvolvida para o caso Gumbel ($\xi = 0$) por Smith (1986) a partir dos desenvolvimentos teóricos de Weissman (1978). O caso geral, com ξ qualquer, foi desenvolvido por Tawn (1988).

A questão a qual Smith (1986) se dedicou foi a seguinte: suponha que tenhamos não apenas os máximos anuais, mas digamos os dez maiores valores. Como podemos utilizar estes dados para obter estimativas melhores que as obtidas usando somente o máximo anual?

Esta mesma questão foi anteriormente levantada por Pirazzoli (1982, 1983) em estudos sobre o nível do mar em Veneza. Pirazzoli coletou os dez maiores níveis (com algumas exceções) em cada ano para o período de 1887-1981 e usou essas informações para estudar a distribuição de valores extremos do nível do mar em Veneza. Como é sabido, o nível do mar naquela cidade vem aumentando regularmente e uma parte importante do estudo de Pirazzoli consistia em levar em consideração essa tendência.

Adaptando o método de Weissman (1978), Smith (1986) pôde ajustar a distribuição de valores extremos para o caso Gumbel ($\xi = 0$), estimar a tendência baseada nas 10 maiores estatísticas de ordem de cada ano, comparando empiricamente com as estimativas que seriam obtidas para os máximos anuais. Além disso, forneceu alguns cálculos teóricos sobre a melhora da eficiência que se mostraram em concordância com os resultados empíricos.

As inovações na modelagem de dados econômico-financeiros aliadas ao risco inerente do mercado levaram as instituições a aumentarem seu foco no gerenciamento de risco. Uma ferramenta útil no gerenciamento de risco é o Valor em Risco (VaR - *Value at Risk*), que em síntese mede a perda que pode ocorrer com uma certa probabilidade pré-especificada e sob condições normais de mercado.

Até pouco tempo atrás, os modelos de VaR assumiam que os retornos de ações eram normalmente distribuídos, devido à fácil implementação desta premissa. Esta premissa está, entretanto, distante da realidade e uma variedade de estudos empíricos (veja Duffie e Pan (1997), Hull e White (1998)) demonstrou que ações financeiras têm caudas mais pesadas que as previstas pela distribuição normal. Muitas alternativas de distribuições vêm sendo propostas na literatura, contudo, qualquer reposição da premissa de normalidade

deve manter um pouco de sua fácil implementação. Devido a esta restrição, a modelagem de caudas pesadas dos retornos de ações em aplicações do VaR vêm sendo confinadas a misturas de distribuições normais, distribuições t-Student e modelos de volatilidade estocástica.

Mesmo utilizando distribuições com caudas mais pesadas para modelar retornos financeiros, sabe-se que as medidas de risco ficam subestimadas para probabilidades de ocorrência pequenas. Portanto, é necessário utilizar modelos que ajustem com precisão as caudas das distribuições onde os dados são, em geral, escassos. A TVE é capaz de fornecer uma forma paramétrica para as caudas da distribuição, permitindo assim extrapolações para além dos limites dos dados. Diferentemente de outros métodos para o cálculo do VaR, a TVE não assume premissas para a distribuição original dos dados.

As abordagens existentes em finanças são geralmente baseadas nos máximos ou excessos além de um limiar alto. Nesta dissertação, iremos aplicar o modelo para as r -maiores estatísticas de ordem proposto por Smith (1986), para o caso Gumbel, a partir dos desenvolvimentos teóricos de Weissman (1978), e generalizado por Tawn (1988), para avaliar a influência da inclusão das r -maiores estatísticas de ordem no cálculo do VaR.

Examinaremos os índices de cinco países que compõem o chamado mercado emergente, Argentina, Brasil, Chile, Índia e Cingapura, no período de 31 de dezembro de 1993 a 31 de dezembro de 2005. Os dados relativos ao período de 31 de dezembro de 1993 a 31 de janeiro de 2005 serão utilizados para a estimação e os dados restantes, para verificação.

A análise se divide em três partes. Primeiro, iremos utilizar estimação por máxima verossimilhança e supor o vetor de parâmetros constante no tempo (modelo global). Num segundo momento, iremos supor ser o vetor de parâmetros uma função suave no tempo, mas não-paramétrica (modelo local), usando métodos de verossimilhança local como proposto por Butler *et al.* (2005). Depois, com base no modelo local ajustado, sugeriremos modelos com tendência temporal paramétrica no vetor de parâmetros.

O uso de modelos de verossimilhança local para analisar tendências extremas em mercados financeiros ainda não está difundido, sendo mais comum em dados meteorológicos.

Quando uma distribuição de valores extremos é utilizada para modelar os dados, investigar tendências temporais na locação, na escala e na forma pode ser de grande

interesse. A abordagem tradicional para a modelagem de tendência é paramétrica, mas para análise exploratória e checagem do modelo existem vantagens na aplicação de procedimentos não-paramétricos, uma delas é que não há razão para supor que uma tendência em particular descreverá bem os dados.

Nesta dissertação, vamos utilizar uma abordagem adaptativa não-paramétrica para proceder à investigação de tendências temporais nos parâmetros. Ajustamos modelos que são estruturais em qualquer instante no tempo, mas cuja variação temporal ocorre de forma não estrutural. O procedimento utilizado para o ajuste do modelo é baseado em abordagem *kernel* para verossimilhança local. A técnica adaptativa não-paramétrica empregada deve ser vista como uma ferramenta exploratória, e não como um método para análise final; seu propósito é sugerir modelos paramétricos que possam vir a ser testados numa análise futura. A incerteza do ajuste local será avaliada por métodos de reamostragem.

Após a investigação da estrutura das tendências temporais nos parâmetros utilizando uma abordagem não-paramétrica, proporemos estruturas temporais paramétricas para o vetor de parâmetros.

Os capítulos estão organizados como descrito a seguir. O Capítulo 1 apresenta alguns tópicos sobre finanças e faz um breve histórico sobre a aplicação da Teoria de Valores Extremos nesta área. Traz também algumas informações sobre mercados emergentes e retornos financeiros. O Capítulo 2 descreve os modelos clássicos da Teoria de Valores Extremos. Também encontram-se descritas a estimação por máxima verossimilhança, bem como os métodos de seleção e de diagnóstico do modelo. O Capítulo 3 apresenta uma extensão dos modelos clássicos para o caso de sequências dependentes. O Capítulo 4 apresenta abordagens paramétricas e não-paramétricas para sequências não estacionárias, incluindo a estimação por verossimilhança local. As medidas de risco e os *backtests* são apresentados no Capítulo 5. A descrição e a análise estatística das séries utilizadas, assim como os resultados obtidos para a modelagem e para as medidas de risco, são apresentados no Capítulo 6. Finalmente, as conclusões e as possíveis extensões do estudo estão no último capítulo.

Capítulo 1

Finanças

1.1 Introdução

A administração de riscos financeiros envolve modelagem usando distribuições com caudas pesadas, com mudanças de regime, com interdependências complexas; tudo isto faz com que seja necessário o uso de metodologias mais sofisticadas baseadas em suposições mais realistas. Essas características de séries financeiras fazem com que não seja possível fazer uso de suposições simplificadoras ou apenas matematicamente convenientes, como, por exemplo, a de que os dados sejam provenientes de uma distribuição normal multivariada. Atenção especial é necessária com a modelagem das caudas dessas distribuições, já que o comportamento dos extremos, que ocorrem em tempos de crise, tem relação com a forma dessas caudas. A principal preocupação de administradores de risco é certamente com os eventos de baixa probabilidade que possam resultar em perdas catastróficas para suas instituições e seus clientes, o que incentiva a pesquisa nesta área. Por exemplo, o *crash* dos mercados financeiros em outubro de 1987 deu origem a inúmeras investigações científicas. Muitas delas concluíram que a grande perda verificada era passível de ser mensurada, por meio de probabilidade não nula, e que não teria relação com nenhuma circunstância anormal, tais como fatores institucionais, mas que teria sido esta queda simplesmente uma resposta normal a um choque em um mundo de mercados agregados. Isto significa que grandes quedas em mercados financeiros não estão necessariamente associadas a notícias ou acontecimentos de grande impacto.

Os métodos tradicionais de cálculo de medidas de risco ignoram os eventos extremos. Esses métodos baseiam-se em geral na distribuição normal, que, por ter caudas mais leves que as observadas em séries financeiras, subestimam as perdas. De acordo com Mendes (2004), é interessante notar que os métodos tradicionais baseados em suposições simplificadoras vão falhar quando mais se precisa deles - nos momentos de crise, quando se observam grandes movimentos de mercado. Sendo os eventos extremos os eventos atípicos, diferentes da grande maioria das outras observações, e ocorrendo com probabilidades mais baixas, a estimação das probabilidades associadas aos mesmos torna-se mais difícil devido à escassez de dados. A TVE compreende um conjunto de técnicas bem fundamentadas e destinadas a resolver bem esses problemas. Isto quer dizer que ela habilita o gerente de riscos a usar da melhor forma possível a pouca informação que se tem sobre movimentos extremos de mercado.

Vários autores têm estudado aplicações de TVE em finanças. Longin (1996) estimou as caudas da distribuição de um índice de ações americano. Danielsson e de Vries (1997) calcularam a medida de risco *Value-at-Risk* (VaR) a partir de estimativas para caudas de retornos financeiros. McNeil (1998) estudou a estimação do índice de cauda e calculou quantis usando máximos coletados em blocos. Smith (1999) fez uma revisão de técnicas estatísticas usadas em TVE fornecendo vários exemplos de suas utilidades. Embrechts (2000) discutiu algumas das virtudes e as limitações do uso do VaR como uma ferramenta na administração de riscos financeiros. Mendes (2000) combinou técnicas robustas e modelos da TVE no contexto de mercados emergentes para calcular medidas de risco financeiro, incluindo o VaR e a perda em excesso esperada. Abramovitz (2001) estudou a estimação de medidas de risco usando modelagem GARCH e modelos da TVE. Chavez-Demoulin *et al.* (2003) utilizaram a abordagem de processo pontual para excedências além de um limiar alto para estimar o VaR.

Dados de mercados emergentes contêm uma pequena proporção de retornos extremos, os quais resultam numa distribuição com caudas pesadas. Vários trabalhos, incluindo Susmel (1998), rejeitaram a hipótese de normalidade para retornos de mercados emergentes. O alto coeficiente de curtose geralmente encontrado na distribuição não condicional desses retornos motiva o uso de modelagens e processos de estimação alternativos.

Por exemplo, combinações de modelos do tipo GARCH (Bollerslev, 1986) e da TVE e procedimentos de estimação robustos podem ser usados. McNeil e Frey (2000) estimaram a cauda da distribuição condicional de índices financeiros aplicando a distribuição de Pareto generalizada (GPD - *Generalized Pareto Distribution*) nos resíduos de um ajuste GARCH. Mendes (2000) utilizou esta mesma técnica, estimando modelos GARCH de forma robusta e calculando medidas de risco robustas, para ações do mercado latino-americano. Ambos os trabalhos produziram estimativas mais precisas do que aquelas obtidas pela *Riskmetrics*, baseadas no GARCH integrado e na suposição de normalidade, que apresentam bons resultados para níveis de risco de 5%.

Embora a combinação de modelos GARCH para volatilidade e as técnicas de TVE aplicadas aos resíduos da análise GARCH funcione bem na prática, ela apresenta o inconveniente de ser um procedimento de dois estágios, de tal modo que a análise do modelo da TVE será sensível ao ajuste do modelo GARCH no primeiro estágio.

1.2 Mercados emergentes

Devido à crescente tendência de internacionalização, os investidores enfrentam o desafio de determinar em qual mercado estrangeiro entrar e as estratégias de mercado apropriadas para os países nos quais planejam investir.

Os mercados emergentes reúnem mais da metade da população mundial, respondem por uma grande parcela da produção mundial e possuem altas taxas de crescimento, o que significa enorme potencial de mercado. Essas economias podem ser distinguidas pelo recente progresso que tiveram a partir da liberalização econômica. Oportunidades promissoras de comércio estão surgindo, já que as suas necessidades por capital, maquinário, equipamentos de transmissão, transporte e produtos de alta tecnologia são substanciais e crescem muito rapidamente. O investimento nesses países tem grande potencial para gerar elevados retornos, mas também envolve muito mais risco do que os investimentos domésticos ou mesmo em mercados mais tradicionais.

Cavusgil (1997) decidiu mensurar o potencial dos mercados emergentes utilizando uma abordagem de indexação. O estudo mais recente, denominado *Market Potential Indica-*

tors, baseado nos indicadores de Cavusgil (1997), está disponível no *site* <http://globaledge.msu.edu/ibrd/marketpot.asp>, onde encontramos o *ranking* do potencial de mercado de 24 países identificados como mercados emergentes pelo *The Economist*. Devido à impossibilidade de analisarmos todos esses países, escolhemos cinco mercados emergentes que fazem parte desse *ranking*- Argentina, Brasil, Chile, Índia e Cingapura - para estudarmos nesta dissertação.

1.3 Retornos

Um dos objetivos da modelagem estatística em finanças é a avaliação de riscos de uma carteira de ativos financeiros. O risco é freqüentemente medido em termos de variações de preços dos ativos. Denotemos por P_t o preço de um ativo no tempo t , normalmente um dia de negócio.

Definimos o log-retorno como o logaritmo (na base e) da razão entre dois preços consecutivos, isto é,

$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \log(P_t) - \log(P_{t-1}).$$

Esta definição será aquela utilizada nesta dissertação e, muitas vezes, r_t será chamado simplesmente de retorno.

1.3.1 Fatos estilizados sobre retornos

Os retornos financeiros apresentam características peculiares, que muitas séries não apresentam. De fato, retornos raramente apresentam tendências ou sazonalidades, com exceção eventualmente de retornos intra-diários.

Os principais fatos estilizados relativos a retornos financeiros podem ser resumidos como a seguir:

1. dependência condicional no primeiro e no segundo momento;
2. agrupamentos de volatilidade ao longo do tempo; e
3. sua distribuição (não condicional) tem caudas mais pesadas que uma distribuição normal.

Capítulo 2

Teoria dos Valores Extremos e Modelos Clássicos

2.1 Modelos clássicos

2.1.1 Modelagem GEV para os máximos

Seja X_1, \dots, X_n uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição F e $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. Suponhamos que os X_i representam valores de um processo medido em uma escala de tempo regular - tais como temperatura média diária ou medidas do nível do mar a cada hora - de tal forma que M_n represente o máximo dentre as n unidades temporais de observação do processo. Se n é o número de observações no ano, então M_n corresponde ao máximo anual. A distribuição de M_n pode ser obtida exatamente para todos os valores de n :

$$\begin{aligned} Pr\{M_n \leq z\} &= Pr\{X_1 \leq z, \dots, X_n \leq z\} \\ &= Pr\{X_1 \leq z\} \times \dots \times Pr\{X_n \leq z\} \\ &= \{F(z)^n\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

No entanto, isso não ajuda muito na prática, já que a distribuição de F é desconhecida. Uma possibilidade é utilizar técnicas estatísticas tradicionais para estimar a distribuição F dos dados observados e, então, substituir essa estimativa em (2.1). Infelizmente, pe-

quenas discrepâncias na estimativa de F podem conduzir a discrepâncias substanciais em F^n . Uma abordagem alternativa é aceitar que F é desconhecido e procurar por famílias aproximadas de modelos para F^n , que podem ser estimadas baseando-se apenas nos dados de máximos. Isso é similar à prática usual de aproximar a distribuição das médias amostrais pela distribuição normal, como justificado pelo Teorema Central do Limite. Prossegue-se examinando o comportamento de F^n quando $n \rightarrow \infty$. Mas somente isso não é o bastante: para qualquer $z < z_+$, onde z_+ é o limite superior do suporte de F , isto é, z_+ é o menor valor tal que $F(z) = 1$, $F^n(z) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, de modo que a distribuição de M_n degenera para massa pontual em z_+ . Essa dificuldade é evitada pela normalização linear da variável M_n :

$$M_n^* = \frac{M_n - b_n}{a_n},$$

para sequências de constantes $a_n > 0$ e b_n . Escolhas apropriadas de a_n e b_n estabilizam a locação e a escala de M_n^* quando n cresce, evitando as dificuldades que aparecem com a variável M_n . Procura-se, portanto, distribuições limite para M_n^* , com escolhas apropriadas de a_n e b_n , ao invés de M_n .

Teorema 2.1.1 (*Fisher-Tippett (1928) e Gnedenko (1943)*) *Se existem seqüências de constantes $a_n > 0$ e b_n tais que*

$$Pr \left\{ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z \right\} \rightarrow G(z) \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

onde G é uma função de distribuição não-degenerada, então G pertence a uma das seguintes famílias:

$$I : G(z) = \exp \left\{ - \exp \left[- \left(\frac{z - b}{a} \right) \right] \right\}, \quad -\infty < z < \infty;$$

$$II : G(z) = \begin{cases} 0, & z \leq b, \\ \exp \left\{ - \left(\frac{z - b}{a} \right)^{-\alpha} \right\}, & z > b; \end{cases}$$

$$III : G(z) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[- \left(\frac{z - b}{a} \right)^\alpha \right] \right\}, & z < b \\ 1, & z > b; \end{cases}$$

para parâmetros $a > 0$, b , e no caso das famílias II e III, $\alpha > 0$.

Em outras palavras, o Teorema 2.1.1 diz que os máximos amostrais padronizados $(M_n - b_n)/a_n$ convergem em distribuição para uma variável com distribuição igual a uma das três famílias rotuladas como I, II e III. Coletivamente, essas três classes de distribuição são conhecidas como distribuição de valores extremos, tipo I, II e II, amplamente conhecidas como famílias Gumbel, Fréchet e Weibull, respectivamente. Cada família tem parâmetro de locação e escala, b e a , respectivamente; adicionalmente, as famílias Fréchet e Weibull têm parâmetro de forma α .

O Teorema 2.1.1 implica que, quando M_n puder ser estabilizado utilizando seqüências adequadas $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, a variável normalizada correspondente M_n^* tem como distribuição limite um dos três tipos de distribuição de valores extremos. Um aspecto notável desse resultado é que os três tipos de distribuição de valores extremos são os únicos limites possíveis para as distribuições de M_n^* . É nesse sentido que o teorema fornece um resultado para valores extremos análogo ao Teorema Central do Limite.

2.1.2 A distribuição GEV

Os três tipos de distribuição limite que aparecem no Teorema 2.1.1 correspondem a formas distintas de comportamento de cauda para a função de distribuição F dos X_i . Para ser mais preciso, considerando o comportamento da distribuição limite G no ponto z_+ , o limite superior do suporte da distribuição, para a distribuição Weibull, z_+ é finito, enquanto que para as distribuições Fréchet e Gumbel, $z_+ = \infty$. Entretanto, a densidade G decai exponencialmente para a distribuição Gumbel e polinomialmente para Fréchet, correspondendo a diferentes taxas de decaimento na cauda de F . Conseqüentemente, aplicações nas três famílias resultam em representações bastante diferentes do comportamento de valores extremos. Nas primeiras aplicações de valores extremos era usual adotar uma das três famílias, e só então estimar os parâmetros relevantes daquela distribuição. Contudo, há duas desvantagens nesse tipo de abordagem: primeiro, é necessário empregar uma técnica para escolher qual das três famílias é a mais apropriada para os dados que se têm à mão; segundo, assim que essa decisão é tomada, as inferências subseqüentes presumem que a escolha feita no passo anterior foi a correta, e não há margem para investigar as incertezas envolvidas na escolha, embora tais incertezas possam ser

substanciais. Uma melhor análise adveio com a reformulação dos modelos apresentados no Teorema 2.1.1. É simples verificar que as famílias Gumbel, Fréchet e Weibull podem ser combinadas numa única família de modelos com função de distribuição dada pela forma:

$$G(z) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}, \quad (2.2)$$

definida no conjunto $\{z : 1 + \xi(z - \mu)/\sigma > 0\}$, onde os parâmetros satisfazem $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ e $-\infty < \xi < \infty$. Esta é a distribuição generalizada de valores extremos (GEV). O modelo tem três parâmetros: um parâmetro de locação, μ ; um parâmetro de escala, σ ; e um parâmetro de forma, ξ . As distribuições tipo I e tipo II de valores extremos correspondem, respectivamente, aos casos $\xi > 0$ e $\xi < 0$ na nova parametrização. O caso $\xi = 0$ é interpretado como o limite de (2.2) quando $\xi \rightarrow 0$, conduzindo à família Gumbel com função de distribuição

$$G(z) = \exp \left\{ - \exp \left[- \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, \quad -\infty < z < \infty.$$

A unificação das três famílias originais de valores extremos simplifica bastante a implementação estatística. Através da inferência em ξ os dados por si só determinam o tipo mais apropriado de comportamento de cauda, e não há necessidade de se fazer julgamentos subjetivos *a priori* sobre qual tipo de família de valores extremos adotar. Além do mais, a incerteza associada ao valor estimado de ξ mede a falta de certeza quanto a qual dos três tipos originais é o mais apropriado para um determinado conjunto de dados. Por conveniência, vamos reformular o Teorema 2.1.1 para a forma generalizada.

Teorema 2.1.2 (*Von Mises (1954) e Jenkinson (1955)*) *Se existem seqüências de constantes $a_n > 0$ e b_n tais que*

$$Pr \left\{ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z \right\} \rightarrow G(z) \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

para uma função de distribuição G não-degenerada, então G é membro da família GEV:

$$G(z) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\},$$

definida em $\{z : 1 + \xi(z - \mu)/\sigma > 0\}$, onde $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$ e $-\infty < \xi < \infty$.

A interpretação da distribuição limite dada no Teorema 2.1.2 como uma aproximação para n suficientemente grande justifica o uso da família GEV como uma alternativa para a modelagem da distribuição de máximos de seqüências longas. A dificuldade aparente de que as constantes normalizadoras serão desconhecidas é facilmente resolvida na prática. Assumindo (2.3),

$$Pr\{(M_n - b_n)/a_n \leq z\} \approx G(z)$$

para n suficientemente grande. Equivalentemente,

$$\begin{aligned} Pr\{M_n \leq z\} &= G\{(z - b_n)/a_n\} \\ &= G^*(z), \end{aligned}$$

onde G^* é outro membro da família GEV. Em outras palavras, se o Teorema 2.1.2 possibilita a aproximação da distribuição de M_n^* por um membro da família GEV para n suficientemente grande, a distribuição de M_n , por sua vez, pode também ser aproximada por um membro diferente da mesma família. Como os parâmetros da distribuição têm que ser estimados de qualquer forma, é irrelevante na prática que os parâmetros da distribuição G sejam diferentes dos da G^* .

Esse argumento conduz à seguinte abordagem para modelagem de extremos de uma série de observações independentes X_1, X_2, \dots . Os dados são separados em blocos de seqüências de tamanho n , para algum valor de n suficientemente grande, gerando uma série de máximos de blocos, digamos, $M_{n,1}, \dots, M_{n,m}$, para a qual a distribuição GEV pode ser ajustada. Frequentemente, os blocos são escolhidos de modo a corresponder ao período de um ano, caso em que n é o número de observações anuais e a série de máximos corresponde aos máximos anuais. Estimativas dos quantis das distribuições de máximos anuais são obtidas pela inversão da equação (2.2):

$$z_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - \{-\log(1-p)\}^{-\xi}], & \text{para } \xi \neq 0, \\ \mu - \sigma \log\{-\log(1-p)\}, & \text{para } \xi = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $G(z_p) = 1 - p$. Na terminologia usual, z_p é o nível de retorno associado ao período $1/p$, visto que é esperado que o nível z_p seja excedido em média uma vez a cada $1/p$ períodos. Como os quantis possibilitam que os modelos sejam expressos na escala dos

dados, a relação do modelo GEV com seus parâmetros é mais facilmente interpretada em termos de expressões para os quantis (2.4). Em particular, definindo $y_p = -\log(1 - p)$, tal que

$$z_p = \begin{cases} \mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - y_p^{-\xi}], & \text{para } \xi \neq 0, \\ \mu - \sigma \log y_p, & \text{para } \xi = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

2.1.3 Modelos assintóticos para os mínimos

A distribuição GEV para mínimos pode ser aplicada diretamente. Uma alternativa muito empregada é explorar a dualidade entre as distribuições para máximos e mínimos. Dados z_1, \dots, z_m , que são as realizações da distribuição GEV para mínimos, com parâmetros $(\tilde{\mu}, \sigma, \xi)$, isto implica ajustar a distribuição GEV para máximos aos dados $-z_1, \dots, -z_m$. As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros desta distribuição correspondem exatamente aos da distribuição GEV para mínimos, exceto pela correção de sinal $\hat{\tilde{\mu}} = -\hat{\mu}$.

2.2 Inferência para a distribuição GEV

2.2.1 Considerações gerais

Com base no Teorema 2.1.2, a GEV propicia um modelo para a distribuição dos máximos dos blocos. Sua aplicação consiste em dividir os dados em blocos de igual comprimento, e ajustar a GEV para o conjunto de máximos dos blocos. Mas ao implementar este modelo para um conjunto de dados, a escolha do tamanho do bloco pode ser crítica. A escolha equivale a um *trade-off* entre vício e variância: blocos muito pequenos significam que a aproximação pelo modelo limite do Teorema 2.1.2 é provavelmente ruim, levando a vícios nas estimação e extrapolação; blocos muito grandes, por sua vez, geram poucos máximos, conduzindo a uma maior variabilidade das estimativas dos parâmetros.

Vamos simplificar a notação denotando os máximos dos blocos por Z_1, \dots, Z_m , assumindo que Z_i são variáveis aleatórias independentes de uma distribuição GEV cujos

parâmetros serão estimados. Se os X_i são independentes, então os Z_i também o são. Contudo, a independência dos Z_i é geralmente uma aproximação razoável, mesmo quando os X_i são dependentes. Mesmo nesse caso, que não está coberto pelo Teorema 2.1.2, a afirmação de que Z_i tem distribuição GEV pode ainda ser razoável, ao estendermos o modelo para seqüências estacionárias, como veremos mais adiante no Capítulo 3.

Muitas técnicas têm sido propostas para a estimação de parâmetros em modelos de valores extremos, dentre as quais estão incluídas técnicas baseadas em momentos, nas quais os momentos são equiparados aos seu equivalentes empíricos (Reiss e Thomas, 1997); método dos L-momentos (Hosking e Wallis, 1997); procedimentos nos quais os parâmetros são estimados como funções específicas de estatísticas de ordem (Jansen e de Vries, 1991); métodos baseados em verossimilhança (Embrechts, Klüppelberg e Mikosch, 1997); e métodos robustos baseados em estimadores B-robustos, e em funções de pesos usadas para validar as observações (Dupuis e Field, 1998). Cada técnica tem seus prós e contras, mas a utilidade geral e adaptabilidade para modelos de construção complexa das técnicas baseadas em verossimilhança torna esta abordagem particularmente atrativa.

Uma dificuldade potencial a respeito da utilização das técnicas de verossimilhança para a estimação dos parâmetros da GEV diz respeito às condições de regularidade necessárias para a validade das propriedades assintóticas usuais associadas ao estimador de máxima verossimilhança. Tais condições não são satisfeitas pelo modelo GEV, porque os limites dos suportes da distribuição são funções que dependem de parâmetros desconhecidos: $\mu - \sigma/\xi$ é o limite superior do suporte da distribuição, quando $\xi < 0$, e o limite inferior do suporte da distribuição, quando $\xi > 0$. Esta violação das condições de regularidade usuais significa que os resultados assintóticos padrão da teoria da verossimilhança não são automaticamente aplicáveis. Smith (1985) estudou este problema detalhadamente e obteve os seguintes resultados:

1. quando $\xi > -0,5$ os estimadores de máxima verossimilhança são regulares, isto é, possuem as propriedades assintóticas usuais;
2. quando $-1 < \xi < -0,5$ os estimadores de máxima verossimilhança podem ser obtidos, mas não possuem as propriedades assintóticas usuais; e

3. quando $\xi < -1$ é pouco provável que os estimadores de máxima verossimilhança possam ser obtidos, pois neste caso o processo iterativo para a resolução do sistema de equações não lineares obtido a partir da diferenciação da função de verossimilhança em relação a ξ, μ, σ , pode se tornar numericamente instável;

As situações 2 e 3 raramente são encontradas em aplicações de modelagem de valores extremos. Portanto, as limitações teóricas da abordagem de máxima verossimilhança geralmente não são um obstáculo na prática. Isto vale para as aplicações que faremos nesta dissertação, pois as distribuições de retornos financeiros geralmente possuem caudas pesadas, e isto faz com que $\xi > 0$. Sendo assim, optaremos pelo estimador de máxima verossimilhança, por ele ser invariante funcional, o que possibilitará o cálculo de intervalos de confiança para os Valores em Risco (VaR).

2.2.2 Estimação por máxima verossimilhança

Sob a hipótese de que Z_1, \dots, Z_m são variáveis aleatórias independentes com distribuição GEV, a log-verossimilhança para os parâmetros da GEV quando $\xi \neq 0$ é

$$l(\mu, \sigma, \xi) = -m \log \sigma - (1 + 1/\xi) \sum_{i=1}^m \log \left[1 + \xi \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{i=1}^m \left[1 + \xi \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi}, \quad (2.6)$$

contanto que

$$1 + \xi \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) > 0, \text{ para } i = 1, \dots, m. \quad (2.7)$$

Nas combinações de parâmetros para as quais (2.7) não é satisfeita, correspondendo a uma configuração para qual pelo menos um dos dados observados está situado além do suporte da distribuição, a verossimilhança é zero e a log-verossimilhança é igual a $-\infty$.

O caso em que $\xi = 0$ requer tratamento separado utilizando o limite Gumbel da distribuição GEV, o que leva à log-verossimilhança

$$l(\mu, \sigma) = -m \log \sigma - \sum_{i=1}^m \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^m \exp \left[- \left(\frac{z_i - \mu}{\sigma} \right) \right]. \quad (2.8)$$

A maximização do par de equações (2.6) e (2.8), com respeito ao vetor de parâmetros (μ, σ, ξ) , conduz à estimativa de máxima verossimilhança para toda a família GEV. Não

há solução analítica, mas para qualquer conjunto de dados a maximização é direta usando algoritmos numéricos padrões de otimização. Algum cuidado é necessário para assegurar que tais algoritmos não se movam para combinações de parâmetros que violem (2.7), e também que dificuldades numéricas que apareceriam da avaliação de (2.6) na vizinhança de $\xi = 0$ sejam evitadas. Este último problema é facilmente solucionado ao se utilizar (2.8) no lugar de (2.6) para valores de ξ pertencentes a uma vizinhança de zero.

Sujeita às limitações em ξ , discutidas na seção 2.2.1, a distribuição assintótica de $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})$ é normal multivariada com média (μ, σ, ξ) e matriz de variância e covariância igual à inversa da matriz de informação observada avaliada na estimativa de máxima verossimilhança. Embora esta matriz possa ser calculada analiticamente, é mais fácil utilizar técnicas de diferenciação numérica para avaliar as segundas derivadas e rotinas numéricas padrão para realizar a inversão. Intervalos de confiança e outras formas de inferência seguem imediatamente da normalidade assintótica do estimador.

2.2.3 Inferência para os níveis de retorno

Pela substituição das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros da GEV em (2.4), a estimativa de máxima verossimilhança de z_p para $0 < p < 1$, o nível de retorno para $1/p$ períodos, é obtido como

$$\hat{z}_p = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}}[1 - y_p^{-\hat{\xi}}], & \text{para } \hat{\xi} \neq 0 \\ \hat{\mu} - \hat{\sigma} \log y_p, & \text{para } \hat{\xi} = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

onde $y_p = -\log(1 - p)$. Além do mais, pelo método delta,

$$Var(\hat{z}_p) \approx \nabla z_p^T V \nabla z_p, \quad (2.10)$$

onde V é a matriz de variância-covariância de $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})$ e

$$\begin{aligned} \nabla z_p^T &= \left[\frac{\partial z_p}{\partial \mu}, \frac{\partial z_p}{\partial \sigma}, \frac{\partial z_p}{\partial \xi} \right] \\ &= [1, -\xi^{-1}(1 - y_p^{-\xi}), \sigma \xi^{-2}(1 - y_p^{-\xi}) - \sigma \xi^{-1} y_p^{-\xi} \log y_p] \end{aligned}$$

avaliada em $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})$.

É usual querermos estimar níveis de retorno associados a períodos longos, $t = 1/p$, que correspondem a quantis associados a pequenos valores de p , tais que $z_{(1/t)} = z_p$. Se

$\hat{\xi} \leq 0$, também é possível fazer inferência no limite superior do suporte da distribuição, que é efetivamente o período de retorno quando o valor observado é igual a infinito, correspondendo a z_p com $p = 0$. A estimativa de máxima verossimilhança é

$$\hat{z}_0 = \hat{\mu} - \hat{\sigma}/\hat{\xi},$$

e (2.10) ainda é válida com

$$\nabla z_0^T = [1, -\xi^{-1}, \sigma\xi^{-2}],$$

novamente avaliada em $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\xi})$. Quando $\hat{\xi} \geq 0$, a estimativa de máxima verossimilhança do limite superior do suporte da distribuição é ∞ .

É preciso atenção na interpretação das inferências de níveis de retorno, especialmente para as correspondentes a períodos longos. Primeiro, a aproximação normal para a distribuição do estimador de máxima verossimilhança pode ser ruim. Além do mais, as estimativas e suas respectivas medidas de precisão são baseadas na suposição de que o modelo esteja correto. Embora o modelo GEV seja respaldado por argumentos matemáticos, seu uso em extrapolações é baseado em suposições não verificáveis, e as medidas de incerteza nos níveis de retorno deveriam ser mais apropriadamente consideradas como limites inferiores, que podem vir a ser muito maiores, caso a incerteza associada à suposta correção do modelo seja levada em conta. Melhores aproximações são geralmente obtidas usando funções de verossimilhança perfiladas (para maiores detalhes, veja Coles (2001)).

2.2.4 Verificação do modelo

Embora seja impossível checar a validade da extrapolação baseada no modelo GEV, pode ser feita uma avaliação em relação aos dados observados. Isto não é o bastante para justificar a extrapolação, mas é um pré-requisito razoável. Nesta seção, discutiremos o uso de gráficos de probabilidades (*pp plots*) e gráficos de quantis (*qq plots*) para verificação do modelo e descreveremos mais duas formas gráficas de acessar a qualidade do ajuste. O *pp plot* é uma comparação das funções de distribuição empírica e ajustada. Com os dados de máximo dos blocos ordenados $Z_{(1)} \leq \dots \leq Z_{(m)}$, a função de distribuição empírica

avaliada em $Z_{(i)}$ é dada por

$$\hat{G}(z_{(i)}) = \exp \left\{ - \left[1 + \hat{\xi} \left(\frac{z_{(i)} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right]^{-1/\hat{\xi}} \right\}.$$

Se o modelo GEV for apropriado,

$$\hat{G}(z_{(i)}) \approx \tilde{G}(z_{(i)})$$

para cada i , então um *pp plot*, constituído pelos pontos

$$\left\{ \left(\hat{G}(z_{(i)}) \tilde{G}(z_{(i)}) \right), i = 1, \dots, m \right\},$$

deve estar perto da diagonal unitária. Quaisquer desvios de linearidade são indicativos de alguma falha no modelo GEV. Uma fraqueza dos *pp plots* para modelos de valores extremos é que ambos $\hat{G}(z_{(i)})$ e $\tilde{G}(z_{(i)})$ são limitados a se aproximar de 1 quando $z_{(i)}$ cresce, sendo usualmente a precisão do modelo para grandes valores de z da maior importância. Isto é, o *pp plot* fornece a menor informação na região de maior interesse. Esta deficiência é evitada pelo *qq plot*, que consiste dos pontos

$$\left\{ \left(\hat{G}^{-1}(i/(m+1)), z_{(i)} \right), i = 1, \dots, m \right\}, \quad (2.11)$$

onde, de (2.9),

$$\hat{G}^{-1} \left(\frac{i}{m+1} \right) = \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left[1 - \left\{ -\log \left(\frac{i}{m+1} \right) \right\}^{-\hat{\xi}} \right].$$

Desvios da linearidade no *qq plot* também indicam falha no modelo.

Se for construído um gráfico de z_p cuja equação é dada em (2.5) *versus* $y_p = -\log(1-p)$ em escala logarítmica - ou equivalentemente, z_p *versus* $\log y_p$, o gráfico será linear no caso em que $\xi = 0$. Se $\xi < 0$, o gráfico será côncavo, convergindo assintoticamente para $\mu - \sigma/\xi$, quando $p \rightarrow 0$; se $\xi > 0$, o gráfico é convexo e não tem limite finito. Esse gráfico é conhecido como gráfico do nível de retorno. Devido à simplicidade de interpretação e porque a escolha da escala logarítmica comprime a cauda da distribuição, de tal modo que o efeito da extrapolação é realçado, tais gráficos são particularmente convenientes tanto para apresentação, quanto para a validação de modelos de valores extremos.

Como um resumo do modelo ajustado, o gráfico do nível de retorno consiste dos pontos

$$\{(p, \hat{z}_p) : 0 < p < 1\}$$

onde \hat{z}_p é o estimador de máxima verossimilhança de z_p . Intervalos de confiança podem ser adicionados aos gráficos para agregar informação. Estimativas empíricas da função de nível de retorno, obtidas a partir dos pontos (2.11), também podem ser adicionadas, possibilitando a utilização do gráfico do nível de retorno como diagnóstico do modelo. Se o modelo GEV for adequado para os dados, a curva baseada no modelo e as estimativas empíricas devem parecer em razoável concordância. Qualquer discordância substancial ou sistemática, levando em consideração o erro amostral, sugere a inadequação do modelo GEV.

Um diagnóstico equivalente baseado na função de densidade consiste na comparação da função de densidade de probabilidade do modelo ajustado com o histograma do dados. Este procedimento é geralmente menos informativo que os anteriores, pois a forma do histograma pode variar substancialmente conforme a escolha dos intervalos.

2.3 Generalização: modelagem das r -maiores estatísticas de ordem

2.3.1 Formulação do modelo

Uma dificuldade implícita em qualquer análise de valores extremos é a quantidade limitada de dados para a estimação do modelo. Extremos são escassos, por definição, de modo que as estimativas do modelo, especialmente de níveis de retornos extremos, têm variância muito grande. Esta questão tem motivado a busca por caracterizações do comportamento de valores extremos que possibilitem a modelagem dos dados de outra forma que não seja apenas através dos máximos dos blocos. Há duas caracterizações gerais muito conhecidas. Uma baseada em excessos além de um limiar e a outra baseada no comportamento das r -maiores estatísticas de ordem dentro de um bloco, para valores pequenos de r . Ambas podem ser unificadas por meio da representação de processo

pontual, que não será discutida aqui. Vamos focar no modelo das r -maiores estatísticas de ordem.

Suponha que X_1, X_2, \dots seja uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. O objetivo é caracterizar o comportamento extremal dos X_i . Na Subseção 2.1.2, obtivemos que a distribuição limite quando $n \rightarrow \infty$ de M_n , adequadamente padronizada, é GEV. Primeiro, vamos estender este resultado para outras estatísticas de ordem extremas, definindo:

$$M_n^{(k)} = k\text{-ésima maior estatística de ordem de } \{X_1, \dots, X_n\},$$

e identificando o comportamento limite desta variável, para k fixo, quando $n \rightarrow \infty$. Os resultados a seguir generalizam o Teorema 2.1.1.

Teorema 2.3.1 *Se existem sequências de constantes $a_n > 0$ e b_n tais que*

$$Pr \left\{ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z \right\} \rightarrow G(z) \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

para alguma função de distribuição G não-degenerada, tal que G é função de distribuição GEV dada por (2.2), então, para k fixo,

$$Pr \left\{ \frac{M_n^{(k)} - b_n}{a_n} \leq z \right\} \rightarrow G_k(z)$$

em $\{z : 1 + \xi(z - \mu)/\sigma > 0\}$, onde

$$G_k(z) = \exp\{-\tau(z)\} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{\tau(z)^s}{s!}, \quad (2.12)$$

com

$$\tau(z) = \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi}.$$

O Teorema 2.3.1 implica que, se a k -ésima maior estatística de ordem em um bloco for normalizada exatamente da mesma forma que o máximo, então sua distribuição limite será da forma dada por (2.12), e seus parâmetros correspondem aos da distribuição limite da GEV para máximos dos blocos. Novamente, absorvendo as constantes normalizadoras

desconhecidas nos parâmetros de locação e escala do modelo, segue que, para valores grandes de n , a distribuição aproximada de M_n^k pertence à família (2.12).

Há, contudo, uma dificuldade na utilização de (2.12) como modelo. A situação com que nos defrontamos freqüentemente é possuir cada uma das r -maiores estatísticas de ordem dentro de cada um dos diversos blocos, para algum valor de r . Isto é, geralmente possuímos o vetor completo

$$\mathbf{M}_n^{(r)} = (M_n^{(1)}, \dots, M_n^{(r)})$$

para cada um dos diversos blocos. Embora o Teorema 2.3.1 forneça uma família para a distribuição aproximada de cada componente do vetor $\mathbf{M}_n^{(r)}$, ele não fornece a distribuição conjunta de $\mathbf{M}_n^{(r)}$. Além do mais, os componentes podem não ser independentes, de tal forma que cada componente influencia na distribuição do outro. Conseqüentemente, o resultado do Teorema 2.3.2 não conduz em si a um modelo para $\mathbf{M}_n^{(r)}$. Isto é, necessita-se de uma caracterização da distribuição limite conjunta do vetor $\mathbf{M}_n^{(r)}$. Isso pode ser alcançado, por meio de padronização apropriada, mas a distribuição conjunta limite encontrada é intratável. Entretanto, o teorema a seguir fornece a função de densidade conjunta da distribuição limite.

Teorema 2.3.2 *Se existem seqüências de constantes $a_n > 0$ e b_n tais que*

$$Pr \left\{ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z \right\} \rightarrow G(z) \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

para alguma função de distribuição G não-degenerada, então, para r fixo, a distribuição limite quando $n \rightarrow \infty$ de

$$\tilde{M}_n^{(r)} = \left(\frac{M_n^{(1)} - b_n}{a_n}, \dots, \frac{M_n^{(r)} - b_n}{a_n} \right)$$

pertence à família que tem função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(z^{(1)}, \dots, z^{(r)}) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z^{(r)} - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\} \times \prod_{k=1}^r \sigma^{-1} \left[1 + \xi \left(\frac{z^{(k)} - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi} - 1} \quad (2.13)$$

onde $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$ e $-\infty < \xi < \infty; z^{(r)} \leq z^{(r-1)} \leq \dots \leq z^{(1)}; e z^{(k)} : 1 + \xi(z^{(k)} - \mu)/\sigma > 0$ para $k = 1, \dots, r$.

As provas dos Teoremas 2.3.1 e 2.3.2 podem ser vistas em Coles (2001).

No caso $r = 1$, (2.13) fica reduzida à família GEV de funções de densidade. O caso $\xi = 0$ em (2.13) é interpretado como a forma limite quando $\xi \rightarrow 0$, conduzindo à família das funções de densidade

$$f(z^{(1)}, \dots, z^{(r)}) = \exp \left\{ - \exp \left[- \left(\frac{z^{(r)} - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\} \times \prod_{k=1}^r \sigma^{-1} \exp \left[- \left(\frac{z^{(k)} - \mu}{\sigma} \right) \right], \quad (2.14)$$

para qual o caso $r = 1$ fica reduzido à família da densidade Gumbel.

2.3.2 Modelando as r -maiores estatísticas de ordem

Começando com uma série de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, os dados são agrupados em m blocos. No bloco i as r_i maiores observações são registradas, levando à série $\mathbf{M}_i^{(r_i)} = (z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(r_i)})$, para $i = 1, \dots, m$. É usual fixar $r_1 = \dots = r_m = r$ para algum valor especificado de r , a não ser que menos dados estejam disponíveis em alguns blocos. Como no modelo GEV, a questão do tamanho do bloco equivale a um *trade-off* entre vício e variância, que é usualmente resolvido por uma escolha pragmática, tal como a opção por blocos anuais. O número de estatísticas de ordem em cada bloco também forma um *trade-off* entre vício e variância: pequenos valores de r geram poucos dados levando a uma variância alta; altos valores para r provavelmente violarão o suporte assintótico do modelo, conduzindo a vícios. Na prática, é usual selecionar r_i tão grande quanto possível, sujeito ao diagnóstico adequado do modelo. A verossimilhança para este modelo é obtida a partir de (2.13) e (2.14) assimilando os coeficientes normalizadores desconhecidos em parâmetros de locação e escala da forma usual, e pelo produto ao longo dos blocos, então quando $\xi \neq 0$,

$$L(\mu, \sigma, \xi) = \prod_{i=1}^m \left(\exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z_i^{(r_i)} - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\} \times \prod_{k=1}^{r_i} \sigma^{-1} \left[1 + \xi \left(\frac{z_i^{(k)} - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi} - 1} \right), \quad (2.15)$$

contanto que $1 + \xi(z^{(k)} - \mu)/\sigma > 0, k = 1, \dots, r_i, i = 1, \dots, m$; caso contrário a log-verossimilhança é zero. Quando $\xi = 0$,

$$L(\mu, \sigma, \xi) = \prod_{i=1}^m \left(\exp \left\{ - \exp \left[- \left(\frac{z_i^{(r_i)} - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\} \times \prod_{k=1}^{r_i} \sigma^{-1} \exp \left[- \left(\frac{z_i^{(k)} - \mu}{\sigma} \right) \right] \right). \quad (2.16)$$

As verossimilhanças (2.15) e (2.16) ou, mais comumente, as correspondentes log-verossimilhanças podem ser maximizadas numericamente para se obter as estimativas de máxima verossimilhança. A teoria padrão de verossimilhança assintótica também fornece erros-padrão aproximados e intervalos de confiança. No caso de $r_i = 1$ para cada i , as funções de verossimilhança ficam reduzidas às funções de verossimilhança para o modelo GEV para os máximos dos blocos. Mais genericamente, o modelo das r -maiores estatísticas de ordem fornece uma verossimilhança cujos parâmetros correspondem aos da distribuição GEV para os máximos dos blocos, mas que incorpora mais informação dos dados extremos. Então, em relação à análise padrão dos máximos dos blocos, a interpretação dos parâmetros permanece inalterada, mas a precisão deve melhorar devido à inclusão de informação extra.

2.3.3 Qualidade do ajuste e seleção do modelo

Como dito anteriormente na Subseção 2.2.1, nesta dissertação optamos por estimar os parâmetros do modelo por máxima verossimilhança, pois as estimativas possuem boas propriedades assintóticas, o que nos permite utilizar testes estatísticos bem conhecidos, bem como estimar os intervalos de confiança para as medidas de risco que iremos calcular.

Como as log-verossimilhanças dos ajustes r -maiores para diferentes tamanhos de r não podem ser comparadas, pois provêm de dados diferentes, a qualidade do ajuste será verificada por meio de gráficos de diagnóstico (*ppplots*, *qqplots*, etc), como visto na Subseção 2.2.4.

Outro método, mais formal, que será utilizado para acessar a qualidade do ajuste será o teste de Kolmogorov (Bickel e Doksum, 1977), cuja estatística teste é

$$D_i = \max_i \max \left\{ \frac{i}{n} - F_0(x_{(i)}), F_0(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right\},$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$, $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ são as observações ordenadas de X , n é o tamanho da amostra e F_0 é a distribuição de X sob a hipótese nula. Grandes valores para a estatística teste conduzem à rejeição da hipótese nula e, conseqüentemente, à conclusão de que X não é bem modelado por F_0 . Bickel e Doksum (1977) apresentam uma tabela contendo os valores críticos da estatística teste de Kolmogorov para diferentes tamanhos

de amostra n e níveis de significância α .

A análise da estabilidade das estimativas dos parâmetros também será decisiva para a seleção do modelo, pois se a aproximação assintótica é válida para um valor particular de r , então as estimativas dos parâmetros devem permanecer estáveis quando o modelo é ajustado utilizando-se um número menor de estatísticas de ordem.

Capítulo 3

Extremos de Seqüências

Dependentes

A caracterização geral de extremos de processos estacionários data da década de 1970. O trabalho de Leadbetter (1983) foi fundamental para unificar estes resultados e desenvolver uma caracterização amplamente aplicável, adotando apenas fracas suposições de regularidade.

Os modelos tratados no Capítulo 2 foram obtidos a partir de argumentos matemáticos que assumiam a existência de um processo subjacente que consistia de uma seqüência de variáveis aleatórias independentes. No entanto, para os tipos de dados aos quais os modelos de valores extremos são comumente aplicados, a independência temporal é uma suposição pouco realista. Condições extremas freqüentemente persistem durante algumas observações consecutivas, trazendo à tona o questionamento quanto à adequabilidade desses modelos. Uma investigação detalhada dessas questões requer um tratamento matemático num nível mais elevado. Contudo, a idéia básica não é difícil e o principal resultado obtido tem uma interpretação heurística bastante simples. Um detalhamento mais preciso é dado em Leadbetter *et al.* (1983).

A generalização mais natural de uma seqüência de variáveis aleatórias independentes é para séries estacionárias. Estacionariedade é uma suposição bem mais realista para vários processos, correspondendo a séries cujas variáveis podem ser mutuamente dependentes.

A dependência em séries estacionárias pode assumir diversas formas, sendo, portanto,

impossível desenvolver uma caracterização geral do comportamento de extremos, a menos que algumas restrições sejam impostas. É usual assumir a condição que restringe a extensão da dependência de longo prazo em níveis extremos, de tal forma que eventos $X_i > u$ e $X_j > u$ sejam aproximadamente independentes, para valores de u suficientemente grandes, e os instantes i e j estejam bastante distanciados no tempo. Em outras palavras, basta que eventos extremos ocorridos em tempos bastantes distanciados entre si sejam aproximadamente independentes. Muitas séries estacionárias satisfazem esta propriedade, mas o mais importante é que trata-se de uma propriedade freqüentemente plausível para processos físicos.

3.1 Máximos de seqüências estacionárias

A definição a seguir formula uma condição que torna precisa a noção de eventos extremos aproximadamente independentes, desde que suficientemente distanciados no tempo.

Definição 3.1.1 *Uma série estacionária X_1, X_2, \dots satisfaz a condição $D(u_n)$ se para todo $i_1 < \dots < i_p < j_1 < \dots < j_q$ com $j_1 - j_p > l$,*

$$\begin{aligned} & | P_r \{ X_{i_1} \leq u_n, \dots, X_{i_p} \leq u_n, X_{j_1} \leq u_n, \dots, X_{j_q} \leq u_n \} - \\ & P_r \{ X_{i_1} \leq u_n, \dots, X_{i_p} \leq u_n \} P_r \{ X_{j_1} \leq u_n, \dots, X_{j_q} \leq u_n \} | \\ & \leq \alpha(n, l), \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\alpha(n, l) \rightarrow 0$ para alguma seqüência l_n tal que $l_n/n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Para seqüências de variáveis independentes, a diferença expressa em (3.1) é exatamente zero para qualquer seqüência u_n . Em geral, basta que a condição $D(u_n)$ seja satisfeita apenas para seqüências específicas de limiares $u_n \uparrow$. Em tais casos a condição $D(u_n)$ assegura que para conjuntos de variáveis suficientemente distanciadas no tempo entre si, a diferença expressa em (3.1), embora não seja zero, é tão próxima de zero que não afeta as propriedades assintóticas. Isso está resumido no próximo teorema.

Teorema 3.1.1 *Seja X_1, X_2, \dots um processo estacionário e defina $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.*

Então, se existem seqüências de constantes $\{a_n > 0\}$ e $\{b_n\}$ tais que

$$Pr \left\{ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z \right\} \rightarrow G(z),$$

onde G é uma função de distribuição não-degenerada, e a condição $D(u_n)$ é satisfeita com $u_n = a_n z + b_n$ para todo z real, então G é membro da família GEV.

Teorema 3.1.2 *Seja X_1, X_2, \dots um processo estacionário e $X_1^*, X_2^* \dots$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição marginal. Defina $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ e $M_n^* = \max\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$. Sob certas condições de regularidade,*

$$Pr \left\{ \frac{M_n^* - b_n}{a_n} \leq z \right\} \rightarrow G_1(z)$$

quando $n \rightarrow \infty$ para seqüências normalizadoras $\{a_n > 0\}$ e $\{b_n\}$, onde G_1 é uma função de distribuição não-degenerada, se e somente se

$$Pr \left\{ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z \right\} \rightarrow G_2(z),$$

onde

$$G_2(z) = G_1^\theta(z) \tag{3.2}$$

para uma constante θ tal que $0 < \theta \leq 1$.

O Teorema 3.1.2 implica que se a seqüência de máximos de uma série estacionária converge - o que é assegurado pelo Teorema 3.1.1, desde que a condição $D(u_n)$ seja satisfeita - a distribuição limite está relacionada com a distribuição limite de uma seqüência independente, conforme (3.2). Este resultado é consistente com o do Teorema 3.1.1, pois se G_1 pertence à família GEV, o mesmo ocorre com G_1^θ . Mais precisamente, se G_1 tem distribuição GEV com parâmetros (μ, σ, ξ) e $\xi \neq 0$, então G_2 tem distribuição GEV com parâmetros (μ^*, σ^*, ξ) , onde

$$\mu^* = \mu - \frac{\sigma}{\xi}(1 - \theta^{-\xi})$$

e

$$\sigma^* = \sigma\theta^\xi.$$

3.2 Modelando séries estacionárias

Os Teoremas 3.1.1 e 3.1.2 são equivalentes às leis assintóticas para os máximos obtidas nos Capítulo 2. Para dados de máximos de blocos, se a dependência de longo prazo em níveis extremos for fraca, de modo que as observações possam ser consideradas como provenientes de um processo que satisfaz a condição $D(u_n)$, a distribuição dos máximos dos blocos recai na mesma família de distribuições que seria a apropriada, caso as séries fossem independentes. Os parâmetros em si são diferentes daqueles que seriam obtidos se as séries fossem independentes, mas como trabalhamos com as estimativas dos parâmetros, isto é irrelevante. A conclusão é que a dependência das observações pode ser ignorada, desde que seja fraca entre os máximos dos blocos. Este argumento fortalece substancialmente o uso da GEV e, por conseguinte, do modelo r -maiores, pois muitas das objeções usuais ao uso dos modelos assintóticos para análise de valores extremos são baseadas no argumento de que tais modelos não são aplicáveis aos processos físicos encontrados na natureza.

O relaxamento de séries independentes para séries estacionárias não consegue fazer frente a todas as críticas. Um aspecto ainda não resolvido diz respeito à validade dos resultados assintóticos como aproximação. Embora os resultados assintóticos sejam os mesmos para as séries estacionárias e para as séries independentes, a acurácia da família GEV como aproximação da distribuição dos máximos dos blocos diminui à medida que aumenta o nível de dependência na série, pois a convergência para a distribuição limite é mais lenta.

O modelo de probabilidade a partir do qual as log-verossimilhanças para os máximos e para as r -maiores estatísticas de ordem podem ser obtidas é um processo Poisson. Mesmo no caso estacionário, este modelo apresenta dois inconvenientes. Primeiro, o mesmo citado no parágrafo anterior de ser um modelo válido quando $n \rightarrow \infty$, quando na prática n é finito. Segundo, eventos extremos podem formar conglomerados (*clusters*) devido à dependência local de extremos, de tal forma que o processo limite de excedências não seja Poisson, embora o processo limite para conglomerados de excedências seja. Esta última dificuldade é comum em dados ambientais e pode ser contornada por meio da

identificação dos *clusters* de extremos, mas para isso é necessário criar um mecanismo que decida onde os *clusters* começam e terminam, o que é na prática bastante arbitrário. Um outro meio de lidar com estes conglomerados é descrito na próxima seção.

3.3 Conglomerados de extremos e o índice extremal

A quantidade θ definida no Teorema 2.1.2 é conhecida como índice extremal. Um detalhamento mais preciso sobre o índice extremal pode ser visto em Leadbetter *et al.* (1983).

Uma outra forma de interpretar o índice extremal de séries estacionárias é em termos da propensão do processo a formar conglomerados de extremos. Um resultado importante da TVE estabelece que a frequência e o tamanho dos conglomerados de valores extremos que ocorrem em uma série são características intrínsecas da mesma, que são capturadas pelo seu índice extremal. A informação fornecida pelo índice extremal pode ser incorporada à modelagem resultando em estimativas melhores para as caudas extremas e, conseqüentemente, para os quantis associados a probabilidades muito pequenas.

Como as séries financeiras em geral apresentam conglomerados de volatilidade, é preciso de alguma forma modelar este tipo de heteroscedasticidade. Esta tarefa pode ser desempenhada pelo índice extremal (veja, por exemplo, McNeil (1998)). Quanto maior a propensão de uma série para formar conglomerados de extremos maior será o número de vezes que um certo limiar será excedido em períodos de crise. O número de observações em um conglomerado depende de quão pesada é a cauda da distribuição subjacente F_X , que por sua vez tem relação com o valor do índice extremal θ . Ao calcular os quantis da distribuição subjacente, o índice extremal deve ser usado como fator de correção devido à existência de conglomerados de extremos. Isto é, segundo Leadbetter *et al.* (1983), temos que

$$x_\alpha = G_{\mu,\sigma,\xi}^{-1}((1 - \alpha)^{n^\theta}),$$

onde θ , tal que $0 \leq \theta \leq 1$, é o índice extremal. Quanto mais próximo de zero, mais pesada a cauda da distribuição F_X .

Ressaltamos que para séries independentes $\theta = 1$. A recíproca, entretanto, não é

verdadeira, pois há muitas séries estacionárias com $\theta = 1$ que não provêm de séries de observações independentes. Isto significa que se deve considerar com muita atenção a questão da dependência da série em níveis extremos e que muito cuidado é necessário ao empregar a teoria assintótica de valores extremos. Quando $\theta = 1$, a dependência é negligenciável em níveis assintoticamente altos, mas não necessariamente em níveis de extremos relevantes em uma aplicação particular.

3.3.1 Estimação do índice extremal

Na literatura existem algumas propostas para a estimação de θ . Um estimador simples para o índice extremal θ é a razão entre o número K_u de blocos onde o máximo excedeu um limiar específico u (que pode ser VaR_α) e o número de observações (retornos diários, no nosso caso) que excederam u durante todo o período sob análise, N_u ,

$$\hat{\theta} = \frac{K_u}{N_u}. \quad (3.3)$$

Além do estimador simples apresentado acima, um outro estimador com melhores propriedades estatísticas (Smith e Weissman (1994) e Embrechts, Klüppelberg e Mikosch (1997)) é

$$\hat{\theta} = \frac{1}{m} \frac{\log\left(1 - \frac{K_u}{m}\right)}{\log\left(1 - \frac{N_u}{N}\right)}, \quad (3.4)$$

onde K_u e N_u são definidos da mesma forma que no estimador anterior, N é o tamanho da amostra (de observações diárias, no nosso caso) e m o tamanho da amostra de máximos.

Em nossa aplicação do modelo r -maiores, utilizaremos o estimador proposto em (3.4) devido às suas melhores propriedades estatísticas.

Capítulo 4

Extremos de Seqüências Não Estacionárias

4.1 Abordagem paramétrica

Processos não estacionários possuem características que mudam sistematicamente ao longo do tempo. A não estacionariedade freqüentemente aparece devido a efeitos sazonais ou na forma de tendências. Tal como a dependência temporal, este distanciamento das suposições simplificadoras desafiam a utilidade dos modelos clássicos apresentados no Capítulo 2.

Não há uma teoria geral que possa ser estabelecida para processos não estacionários. Existem resultados disponíveis para algumas formas bastante específicas de não estacionariedade, mas tais resultados são muito restritivos para serem aplicados em processos reais. Ao invés disso, é usual adotar uma abordagem pragmática e usar os modelos de TVE como um molde básico que pode ser melhorado por meio de modelagem estatística.

Seja $G_{\mu,\sigma,\xi}$ a distribuição de valores extremos dada por (2.2). Um modelo adequado para Z_t , para $t = 1, \dots, m$, pode ser

$$Z_t \sim G_{\mu(t),\sigma(t),\xi(t)}.$$

As mudanças no padrão dos extremos podem ser modeladas usando formas paramétricas para μ , σ ou ξ . Por exemplo, a locação pode ser modelada por uma função linear,

$\mu(t) = \beta_0 + \beta_1 t$, ou quadrática, $\mu(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$, e a escala por uma função exponencial, $\sigma(t) = \exp(\beta_0 + \beta_1 t)$. A estimação dos parâmetros desses modelos também pode ser feita por máxima verossimilhança, já que uma das vantagens desse método de estimação é sua adequação a mudanças na estrutura do modelo. A log-verossimilhança é obtida de forma análoga à descrita no Capítulo 2 e as estimativas dos parâmetros podem ser obtidas por meio de técnicas numéricas para a maximização da log-verossimilhança. Os erros-padrão e os intervalos de confiança são obtidos de forma usual, a partir da matriz de informação observada, que também pode ser avaliada numericamente. Um estudo sobre a regularidade das propriedades do estimador de máxima verossimilhança no contexto de regressão para valores extremos foi feito por Smith (1989), generalizando o trabalho apresentado em Smith (1985). A extensão para a modelagem usando as r -maiores estatísticas de ordem também é derivada de forma análoga ao descrito no Capítulo 2.

Mais resultados sobre as propriedades teóricas de extremos de sequências não estacionárias podem ser encontrados em Leadbetter *et al.* (1983) e Hüsler (1986).

Com a possibilidade de modelar os parâmetros dos modelos da TVE como funções no tempo, selecionar o modelo mais apropriado, dentre as inúmeras possibilidades, é uma questão importante. O princípio básico é a parcimônia, isto é, optar pelo modelo mais simples que explique o máximo da variação amostral possível. A estimação por máxima verossimilhança de modelos encaixados conduz a um procedimento simples para testar um modelo contra o outro: o teste de razão de verossimilhanças. Este procedimento será detalhado na próxima seção.

Após estimar alguns modelos plausíveis e selecionar o mais adequado dentre eles, precisamos assegurar que o modelo final é efetivamente uma boa representação dos dados. Os procedimentos discutidos no Capítulo 2 são aplicáveis ao caso estacionário, mas para dados não estacionários algumas modificações são necessárias. Geralmente só é possível aplicar os diagnósticos a uma versão padronizada dos dados, condicionada aos valores ajustados dos parâmetros. Por exemplo, com base no modelo estimado

$$Z_t \sim G(\tilde{\mu}(t), \tilde{\sigma}(t), \tilde{\xi}(t)),$$

as variáveis padronizadas

$$\tilde{Z}_t = \frac{1}{\tilde{\xi}(t)} \log \left\{ 1 + \tilde{\xi}(t) \left(\frac{Z_t - \tilde{\mu}(t)}{\tilde{\sigma}(t)} \right) \right\}$$

têm distribuição Gumbel padrão, com função de distribuição de probabilidade dada por

$$P_r\{\tilde{Z}_t \leq z\} = \exp\{-e^{-z}\}, z \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Isto significa que os *probability plots* e os *quantile plots* dos valores observados de \tilde{Z}_t podem ser construídos em relação à distribuição dada em (4.1). Denotando os valores ordenados de \tilde{z}_t por $\tilde{z}_{(1)}, \dots, \tilde{z}_{(m)}$ o *probability plot* é composto pelos pares

$$\left\{ 1/(m+1), \exp(-\exp(-\tilde{z}_{(i)})) : i = 1, \dots, m \right\},$$

enquanto que o *quantile plot* é formado pelos pares

$$\left\{ (\tilde{z}_{(i)}, -\log(-\log(i/(m+1)))) : i = 1, \dots, m \right\}.$$

O *probability plot* é invariante à escolha da Gumbel como distribuição de referência, mas o *quantile plot* não. A escolha da Gumbel, no entanto, é a mais natural, devido a seu *status* dentro da família GEV.

4.2 Abordagem não-paramétrica: o modelo r -maiores local

Há muitas aplicações em que as variações das tendências, ou outras características do processo, não têm a forma de polinômios de baixa ordem. É comum nesses casos usar técnicas não-paramétricas ou semiparamétricas para suavizar os dados. Vários trabalhos recentes exploram essas técnicas no contexto de valores extremos. Butler *et al.* (2005), Davison e Ramesh (2000) e Hall e Tajvidi (2000) propõem o uso de técnicas de verossimilhança local.

Um dos motivos que levou à difusão dos métodos não-paramétricos é o fato de que geralmente não há razão para supor que uma tendência em particular descreverá bem

os dados. Cabe ressaltar que os métodos não-paramétricos para estimação de tendências são puramente descritivos e não podem ser utilizados em previsões, embora sejam úteis para sugerir uma classe apropriada de modelos paramétricos para análise posterior. Além disso, ajustes não-paramétricos provêm uma forma natural de se testar a adequabilidade de um modelo paramétrico (Bowman e Azzalini, 1997). É neste contexto que serão empregados nesta dissertação. O enfoque dado será a análise exploratória e a avaliação de possíveis desvios de tendências paramétricas.

4.2.1 Formulação do modelo

Suponha que temos dados disponíveis para m blocos de tamanho n em cada um dos d locais. Seja $x_{ij}^{(k)}$ a k -ésima maior observação dentro do bloco t_j na localidade s_i , onde i pertence a $\{1, \dots, d\}$ e j pertence a $\{1, \dots, m\}$ e assumamos que esta seja a realização de uma variável aleatória X_{ij} . Os argumentos assintóticos padrão em TVE sugerem que sob fracas suposições é razoável modelar $y_{ij} = (X_{ij}^{(1)}, \dots, X_{ij}^{(r)})$ usando o modelo r -maiores com função de densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x_{ij}; \theta_{ij}) = \exp \left\{ - \left(1 + \xi_{ij} y_{ij}^{(r)} \right)^{-1/\xi_{ij}} \right\} \prod_{k=1}^r \sigma_{ij}^{-1} \left(1 + \xi_{ij} y_{ij}^{(k)} \right)^{-1/\xi_{ij}-1}, \quad (4.2)$$

onde $y_{ij}^{(k)} = \frac{x_{ij}^{(k)} - \mu_{ij}}{\sigma_{ij}}$ e onde $\theta_{ij} = (\mu_{ij}, \sigma_{ij}, \xi_{ij})$ representa o vetor de parâmetros desconhecido (localização, escala e forma, respectivamente).

O modelo r -maiores local clássico é derivado sob a suposição de que as r -maiores estatísticas de ordem dentro de um determinado bloco provêm de processos independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.). Sabemos, contudo, que séries temporais são em geral altamente correlacionadas. Ao analisar dados ambientais, Tawn (1988) propôs um algoritmo sequencial de desclusterização para extrair os r -maiores locais dentro de blocos anuais, sujeito à restrição de que os máximos estivessem separados por pelo menos w horas; para valores suficientemente grandes de w , os valores gerados pelo algoritmo serão aproximadamente independentes.

Na aplicação que faremos nesta dissertação, vamos:

- usar o relaxamento da hipótese clássica de independência proposta no Capítulo 3

que supõe apenas a estacionariedade fraca da série e que a condição $D(u_n)$ dada por (3.1) seja satisfeita, isto é, que o processo não tenha memória longa em níveis extremos de x_{ij} ;

- tentar assegurar a independência entre os blocos escolhendo os tamanhos de bloco, de modo que a dependência entre eles seja fraca; e
- como Flather *et al.* (1998) ao analisarem dados desclusterizados de elevações de maré, inicialmente utilizaremos o modelo r -maiores em que os vetores de parâmetros são supostos constantes no tempo, tal que $\theta_{ij} = \theta_i$ para todo j . Vamos nos referir a este modelo como modelo r -maiores global, para distingui-lo do modelo r -maiores local, o qual introduziremos na próxima seção.

4.2.2 Estimação por verossimilhança local

O método de verossimilhança local é uma abordagem *kernel-based* para regressão não-paramétrica. Os métodos de verossimilhança local foram propostos por Tibshirani e Hastie (1987) e desenvolvidos no contexto de valores extremos por Davison e Ramesh (2000) e Hall e Tajvidi (2000).

Considere o modelo no qual o vetor de parâmetros é suposto ser localmente constante no tempo. O estimador de verossimilhança local para θ_{ij} , sob este modelo, é:

$$\hat{\theta}_{ij} = \arg \max \left\{ \sum_{J=1}^n K(t_J - t_j; h) \log f(x_{ij}; \theta_{ij}) \right\}, \quad (4.3)$$

onde K é uma função simétrica positiva cuja variabilidade é determinada apenas pela largura da janela temporal, h , tal que $h > 0$. O estimador é baseado na maximização de uma soma ponderada de contribuições de log-verossimilhança correspondentes a diferentes períodos no tempo e, deste modo, pode ser visto como uma generalização da idéia de média ponderada. Os pesos são determinados inteiramente pela separação temporal $t_j - t_J$, por intermédio da função núcleo (*kernel*) K . A escolha exata da função núcleo não é crítica. Há na literatura diversos estudos mostrando que os parâmetros ajustados dependem mais da janela h que da função núcleo (Cleveland e Devlin, 1988; Tibshirani e

Hastie, 1987; Hastie e Loader, 1993). Neste trabalho, adotamos K como sendo a função densidade de probabilidade de uma distribuição normal com média zero e desvio padrão igual a h (valor escolhido). O estimador (4.3) pode ser generalizado se permitirmos que os elementos do vetor de parâmetros sejam funções polinomiais no tempo. Segundo Butler *et al.* (2005), os estimadores polinomiais têm em geral performance melhor que os localmente constantes nos pontos próximos aos limites da janela temporal, mas fornecem estimativas similares para os pontos bem situados ao longo da janela temporal.

Hall e Tajvidi (2000) usam um modelo de regressão local que é localmente linear nos parâmetros de locação e escala, mas localmente constante para o parâmetro de forma. Nesta dissertação, vamos usar um modelo que é localmente constante nos três parâmetros.

4.2.3 Avaliando a incerteza

Um candidato natural para avaliar a incerteza na estimação por verossimilhança local é o *bootstrap*. A incerteza na estimação por verossimilhança local pode ser quantificada usando os métodos *bootstrap* semiparamétricos apresentados em Davison e Ramesh (2000). Se o número de amostras *bootstrap* for suficientemente grande, então, sob certas condições, a variabilidade empírica entre as estimativas *bootstrap* fornecerá uma boa aproximação para a incerteza do estimador de verossimilhança local (Davison e Hinkley, 1997). A construção de intervalos de confiança *bootstrap* é dificultada pela presença de vício nas estimativas. Existem na literatura métodos para a construção de intervalos de confiança que levam em consideração tais vícios (Diciccio e Romano, 1988), mas eles são, em geral, muito complicados e requerem um grande número de amostras *bootstrap* para a construção de intervalos razoáveis. Bowman e Azzalini (1997) sugerem que é direto e intuitivamente razoável construir faixas que capturem a variabilidade nas estimativas dos parâmetros sem correção para os vícios, mas estas faixas consistem em intervalos de confiança para $E(\hat{\theta}_{ij})$ ao invés de θ_{ij} e, portanto, requerem cautela na interpretação. Bowman e Azzalini (1997) usam erros-padrão *bootstrap* para construir faixas de variabilidade ao redor das estimativas de máxima verossimilhança local, sob hipótese de normalidade, mas esta abordagem não é adequada, quando a distribuição empírica das estimativas *bootstrap* é muito assimétrica.

Nesta dissertação, construiremos intervalos *bootstrap* semi-paramétricos com 95% de confiança simplesmente utilizando os quantis 2, 5% e 97, 5% das replicações *bootstrap*, sem impor nenhuma condição de simetria ou normalidade, seguindo o procedimento descrito a seguir:

1. Geramos os máximos associados aos blocos $t_j, j \in \{1, \dots, m\}$, das séries $s_i, i \in \{1, \dots, d\}$, utilizando $G_{\hat{\mu}_{ij}, \hat{\sigma}_{ij}, \hat{\xi}_{ij}}$, onde $\hat{\mu}_{ij}, \hat{\sigma}_{ij}$ e $\hat{\xi}_{ij}$ são as estimativas obtidas para os parâmetros por meio do ajuste do modelo local.
2. Substituímos os máximos observados $x_{ij}^{(1)}$ pelos máximos gerados, preservando a ordenação dos máximos observados, e repetimos as demais estatísticas de ordem, $x_{ij}^{(2)}, \dots, x_{ij}^{(r)}$, preservando a estrutura de ordem.
3. Reajustamos o modelo local para obter estimativas *bootstrap* para $\hat{\mu}_{ij}^*, \hat{\sigma}_{ij}^*$ e $\hat{\xi}_{ij}^*$.
4. Repetimos 1, 2 e 3 N vezes.

4.2.4 Escolha da largura da janela

A janela h determina a suavidade no modelo de regressão local, sendo, portanto, um elemento chave na metodologia de verossimilhança local. Butler *et al.* (2005) sugerem que em muitas situações é mais apropriado escolher a janela subjetivamente, baseando-se em:

- informação *a priori* sobre a escala em que espera-se que a tendência opere; ou
- verificação visual da validade de tendências ajustadas produzidas por diferentes janelas.

Existem na literatura diversos métodos automáticos de seleção de janelas, como por exemplo o de validação cruzada (*cross-validation*), discutido em Hall e Tajvidi (2000) e os métodos *plug-in*, baseados no erro quadrático médio assintótico. Estes métodos automáticos, também conhecidos como empíricos ou objetivos, podem ser úteis para determinar o grau de suavização mais apropriado aos dados, entretanto dependem bastante da escolha apropriada do critério de seleção. Em outras palavras, métodos automáticos

baseados em diferentes critérios, todos aparentemente plausíveis, podem produzir resultados completamente distintos quando aplicados a um determinado conjunto de dados.

O método de validação cruzada mostra-se computacionalmente muito dispendioso. Como alternativa, exploraremos, nesta dissertação, o uso do Critério de Informação de Akaike (Akaike, 1973) para seleção da janela, conforme proposto por Tibshirani (1984). O Critério de Informação de Akaike (AIC) é baseado em conceitos teóricos e pode ser entendido como um critério de seleção de modelos por parcimônia. Seja l_p a log-verossimilhança de um modelo com p parâmetros. O AIC escolhe o modelo que minimiza $-2l_p + 2p$. Tibshirani (1984) mostrou que este procedimento escolhe tamanhos de janelas razoáveis, produzindo estimativas não muito viciadas.

4.2.5 Diagnóstico do modelo

Independentemente de como a largura da janela é escolhida, é importante verificar se o modelo local ajustado fornece um ajuste razoável para os dados. Os *qq plots* são ferramentas tradicionais de diagnóstico para verificar a qualidade do ajuste, como visto na seção 2.2.4. Para o modelo r -maiores, *qq plots* distintos devem ser produzidos para cada estatística de ordem $k = 1, \dots, r$. Quando os dados são não estacionários na média (por exemplo, possuem tendência), a construção de *qq plots* torna-se mais complicada. A abordagem usual, nestes casos, é plotar o *qq plot* numa escala padronizada.

Um procedimento alternativo é utilizar o gráfico proposto por Butler *et al.* (2005), que plota $x_{ij}^{(k)}$ versus o quantil baseado no modelo dado por

$$F_k^{-1} \left(j^*/(n+1); \hat{\theta}_{ij} \right),$$

onde j^* é a posição de $F_k(x_{ij}^{(k)}; \hat{\theta}_{ij})$ na seqüência $F_k(x_{i1}^{(k)}; \hat{\theta}_{i1}), \dots, F_k(x_{in}^{(k)}; \hat{\theta}_{in})$. Este gráfico é chamado de *qq plot* despadronizado e equivale a uma transformação do *qq plot* padronizado de volta à escala original, preservada a ordenação.

Segundo Tibshirani (1984) a estimação por verossimilhança local pode ser vista como uma extensão da classe de modelos lineares generalizados. Baseando-se na deviância, que é uma ferramenta valiosa para verificar a importância relativa de diferentes fontes de variação, a teoria assintótica nos fornece a base para a inferência em modelos lineares

res generalizados. Modelos encaixados podem ser comparados usando as diferenças das deviâncias, o que corresponde ao teste de razão de verossimilhanças.

Para comparar o modelo local, no qual o vetor de parâmetros varia no tempo, com o global, no qual o vetor de parâmetros é suposto constante, vamos utilizar o teste de razão de verossimilhança.

Seja o modelo \mathcal{M}_0 com parâmetro $\theta^{(2)}$ um submodelo de \mathcal{M}_1 com parâmetro $\theta_0 = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)})$, sob a restrição de que o subvetor k -dimensional $\theta^{(1)} = 0$. Sejam $l_0(\mathcal{M}_0)$ e $l_1(\mathcal{M}_1)$ os valores maximizados das log-verossimilhanças dos modelos \mathcal{M}_0 e \mathcal{M}_1 , respectivamente. Um teste assintótico para validar o modelo \mathcal{M}_0 em relação a \mathcal{M}_1 ao nível de significância α consiste em rejeitar \mathcal{M}_0 em favor de \mathcal{M}_1 , se $D = 2\{l_1(\mathcal{M}_1) - l_0(\mathcal{M}_0)\} > c_\alpha$, onde c_α é o quantil $(1 - \alpha)$ da distribuição χ_k^2 .

Capítulo 5

Medidas de risco

Com o propósito de controlar seus riscos internos e quantificar o capital em reserva para cobrir movimentos adversos do mercado, a maioria das instituições financeiras calcula medidas de risco.

Uma ferramenta útil e amplamente utilizada no gerenciamento de risco é o Valor em Risco (VaR - *Value at Risk*), que ganhou popularidade a partir da decisão de reguladores de bancos centrais de usá-lo como base de cálculo para o capital em reserva requerido. A grande vantagem da utilização do VaR é o fato de representar uma medida de risco em apenas um número. O que não pode ser esquecido, contudo, é que se trata de uma medida probabilística. Notemos que o VaR não é capaz de inferir acerca da magnitude das perdas às quais se refere. Em decorrência disso, foram propostas na literatura medidas de risco alternativas tais como a Perda Média (*expected shortfall*) e a Perda Mediana (*median shortfall*), que nos dão uma idéia da magnitude da perda, dado que uma perda maior que o VaR_α tenha ocorrido.

Uma questão fundamental ao se aplicar a metodologia para estimação do VaR é decidir que quantil será considerado. É possível calcular o VaR condicional, que é o quantil da distribuição condicional do processo, dada a volatilidade passada, e o VaR não condicional, que é o quantil da distribuição marginal do processo. Ambos são relevantes para a aferição de risco.

O VaR condicional é o objeto de interesse, por exemplo, quando desejamos saber quão grande pode ser a perda no dia seguinte para uma certa probabilidade fixa, dadas

as informações disponíveis sobre a volatilidade corrente.

O VaR não condicional, por sua vez, provê informação diferente, porém complementar, sobre o risco inerente. O foco, neste caso, é obter uma visão de longo prazo e tentar indicar a magnitude de um evento adverso (raro) específico. Este tipo de informação pode ser de grande interesse para o administrador de risco que deseja desenvolver uma análise de cenários ou quantificar cenários de *stress*.

A maioria dos trabalhos em TVE sobre estimação VaR dizem respeito à estimação do VaR não condicional; veja por exemplo Danielsson e De Vries (1997). Outros tratam o problema de estimar os quantis condicionais por meio da combinação de modelos GARCH e técnicas de TVE; veja por exemplo Mendes (2000) e Abramovitz (2001).

Nesta dissertação iremos focar apenas no VaR não condicional.

5.1 Valor em Risco

O Valor em Risco não condicional é a perda (ou ganho) possível que poderia incorrer a uma carteira num horizonte de tempo determinado com probabilidade α pequena. Iremos denotar este valor em risco por VaR_α .

O cálculo do VaR_α não condicional reduz-se à estimação de um quantil de probabilidade muito pequena α da função de distribuição F da variável aleatória X . A variável X pode representar, por exemplo, os retornos diários de um ativo ou de uma carteira de investimentos.

Seja $G_{\mu,\sigma,\xi}$ a função distribuição limite não-degenerada para os máximos dada por (2.2). O VaR_α não condicional pode ser obtido a partir da seguinte relação:

$$\begin{aligned} G_{\mu,\sigma,\xi}(VaR_\alpha) &= (F_X(VaR_\alpha))^n = (1 - \alpha)^n = 1 - \frac{1}{t}, \\ VaR_\alpha &= G_{\mu,\sigma,\xi}^{-1}((1 - \alpha)^n) = G_{\mu,\sigma,\xi}^{-1}\left(1 - \frac{1}{t}\right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

De (5.1) podemos observar como o nível de retorno (ou evento) de t -períodos e o VaR_α não condicional estão relacionados.

5.2 *Backtesting*

Se vamos fazer uso prático das estimativas do VaR_α gostaríamos de saber se estas são suficientemente precisas a ponto de confiarmos nelas. Mas como avaliar a acurácia das estimativas do VaR_α ?

Para se avaliar as estimativas do VaR_α , em geral, utiliza-se um método denominado *backtesting*. Este método também é denominado por alguns autores como método dos testes retroativos ou das avaliações posteriores, mas nesta dissertação continuaremos chamando-os de *backtesting*.

Existe na literatura um grande número de trabalhos que usam *backtests* para avaliar a precisão de modelos que fazem previsões pontuais sobre uma determinada quantidade. Em geral, a acurácia destas previsões é avaliada a partir de alguma medida de distância entre as estimativas feitas e as realizações de uma variável. Assim, quanto menor a distância, melhor o modelo, sob o ponto de vista da precisão.

No caso de avaliação da precisão de uma estimativa de VaR_α temos dificuldades, pois a variável alvo não é observada no futuro e, portanto, não é possível nenhum tipo de comparação direta entre os valores realizados e previstos. Sabemos apenas que existe uma probabilidade α deste valor ser excedido.

Haas (2000) apresenta uma breve revisão dos vários métodos existentes para o *backtesting* do VaR_α . Além dos testes que utilizaremos nesta dissertação, ele menciona o método de Crnkovic e Drachman (1996), a função de magnitude da perda de Lopez (1998) e o método proposto por Berkowitz (1998).

Abramovitz (2001), por sua vez, apresenta um método para avaliar estimativas das perdas média e mediana, baseado no critério de Pitman (para maiores detalhes, veja Mendes e Merkle (2001)).

Nesta seção apresentaremos dois métodos baseados em critérios estatísticos que podem ser utilizados para avaliação do desempenho das estimativas de VaR_α . A referência básica para estes dois testes é Kupiec (1995).

A seguir explicaremos os métodos de *backtesting* que utilizaremos.

5.2.1 Teste da proporção de falhas

Kupiec (1995) propôs um teste estatístico baseado na frequência de extrapolação do VaR_α na amostra. Dizemos que o retorno excede o VaR_α se, quando negativo, ele é menor que o VaR_α . Sendo N o tamanho da amostra utilizada e K o número de vezes em que o retorno excede o VaR_α , esta frequência é igual a K/N . Pretendemos testar se K/N é significativamente diferente de α .

Chamando-se de sucesso o fato do retorno diário do índice em estudo exceder o VaR_α , temos que a variável aleatória representando o número de sucessos tem distribuição binomial com parâmetro N e probabilidade de sucesso α . Neste caso, tem-se um sucesso quando a perda absoluta ou o ganho observado é maior que a perda ou ganho dado pelo VaR_α . Desta forma, supondo independência entre dias, a probabilidade de haver K sucessos numa amostra de tamanho N é

$$C_K^N \alpha^K (1 - \alpha)^{N-K}.$$

Kupiec (1995) sugere um teste de razão de verossimilhanças para testar a hipótese nula H_0 : a verdadeira probabilidade de sucesso é igual a α . De acordo com o Lema de Neyman-Pearson, o teste de razão de verossimilhanças é uniformemente mais poderoso contra hipóteses alternativas simples. A estatística teste, RV_{PF} , é dada por:

$$RV_{PF} = -2 \log[\alpha^K (1 - \alpha)^{N-K}] + 2 \log[(K/N)^K (1 - K/N)^{N-K}].$$

Sob hipótese nula, RV_{PF} tem distribuição limite qui-quadrado com 1 grau de liberdade. Por exemplo, para uma amostra de 1.000 dias a hipótese nula de 5% é aceita, se a frequência de erro observada estiver entre 3,7% e 6,5%. De acordo com Kupiec (1995), este teste tem baixo poder, ou seja, tem uma alta probabilidade de aceitar a hipótese nula, quando ela é falsa, para amostras pequenas.

5.2.2 Teste do tempo entre falhas

Este teste descrito em Kupiec (1995) observa o tempo entre as violações do VaR_α . Ele parece ser um bom procedimento para verificar se o modelo utilizado lida com

as dependências das séries de retornos. Um tempo entre falhas pequeno pode indicar existência de *clusters* de volatilidade. Neste caso, o modelo utilizado deveria saber lidar com esta característica.

Este teste se apóia na idéia de que quanto mais cedo ocorrer a primeira falha, mais alta será a probabilidade de falha. O teste é aplicado cada vez que o VaR_α é excedido.

Do mesmo modo que no teste apresentado na subseção anterior, definimos como sucesso o fato do retorno diário do índice em estudo exceder o VaR_α . Sendo p a verdadeira probabilidade de sucesso e \tilde{T} uma variável aleatória que informa o número de dias antes do primeiro sucesso, a probabilidade P de ocorrência do primeiro sucesso em v dias tem distribuição geométrica com parâmetro p e $P(\tilde{T} = v) = p(1 - p)^{v-1}$.

Dada uma realização de T , Kupiec (1995) sugere o teste de razão de verossimilhança para testar a hipótese nula $p = \alpha$, pelo mesmo motivo apresentado na subseção anterior. A estatística teste é, então, dada por

$$RV_{TF} = -2 \log[\alpha(1 - \alpha)^{v-1}] + 2 \log[(1/v)(1 - 1/v)^{v-1}].$$

Sob a hipótese nula, RV_{TF} tem distribuição limite qui-quadrado com 1 grau de liberdade. O teste pode ser aplicado para o tempo decorrido entre quaisquer duas violações ou para o tempo até a primeira violação.

Assim como o teste anterior, o teste do tempo entre falhas tem baixo poder. Isto significa que a probabilidade de se cometer o erro tipo II (aceitar H_0 quando H_0 é falsa) é alta. Esta característica do teste torna-o pouco útil para avaliar a precisão de sistemas de riscos, pois é preciso uma grande discrepância entre a probabilidade esperada e a observada para que ocorra a rejeição do modelo. Em outras palavras, muitas vezes o modelo é aceito quando de fato ele subestima dramaticamente o risco.

Capítulo 6

Análises

6.1 Descrição e análise exploratória dos dados

Neste estudo serão utilizadas séries de log-retornos financeiros diários de índices de cinco mercados emergentes: Argentina, Brasil, Chile, Índia e Cingapura. Os índices escolhidos e suas abreviações são: ARGMERV (Índice do Mercado de Valores de Buenos Aires S.A), IBOVESPA (Índice Geral da Bolsa de Valores de São Paulo), IGPAGEN (Índice Geral de Preços das Ações da Bolsa de Valores de Santiago), IBOMBSE (*India BSE30 Share Sens*) e SNGPORI (*Singapore Straits Times Index*). Os log-retornos são calculados pela primeira diferença dos logaritmos naturais dos preços (em US dólares) de fechamento diário da bolsa de valores de cada país (multiplicada por 100) no período de 31 de dezembro de 1993 a 31 de dezembro de 2005.

Desse período, as primeiras 2.891 observações (de 31/12/1993 a 31/01/2005) serão usadas para estimação dos diversos modelos r -maiores e nos *backtests* para as estimativas de VaR. As observações restantes (de 01/02/2005 a 31/12/2005) serão usadas para verificação (*out of sample*) do modelo.

A seguir, daremos algumas informações sobre as séries utilizadas.

O Índice Merval Argentina (ARGMERV) foi desenvolvido pelo Mercado de Valores de Buenos Aires S.A. (Merval) e busca refletir o comportamento das empresas argentinas dentro do sistema bursátil, recuperando a essência histórica do antigo índice Merval.

As modificações introduzidas no Merval e que geraram o ARGMERV tiveram por objetivo criar um indicador para operações de empresas locais, sem perder a estrutura básica do índice existente (Merval), servindo a evolução deste último como base comum até 30/12/1999, período prévio à inclusão das empresas estrangeiras no mercado acionário local.

O novo índice (Merval Argentina - ARGMERV) é gerado a partir de uma amostra das operações de empresas locais para um período de seis meses anteriores a cada recomposição da carteira teórica. O critério utilizado para seleção é a ordem decrescente de participação das empresas no mercado de concorrência, excluindo-se todas aquelas que não tenham tido participação representativa. A carteira teórica é atualizada a cada três meses.

O Merval Argentina (ARGMERV) reflete a rentabilidade em ações das empresas argentinas e serve como indicador médio do comportamento das mesmas no mercado de concorrência, assegurando como máximo a cada empresa uma participação de 20% no total das operações.

O IBOVESPA é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Sua relevância advém do fato de retratar o comportamento dos principais papéis negociados na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) e também de sua tradição, pois o índice manteve a integridade de sua série histórica e não sofreu modificações metodológicas desde sua implementação em 1968.

Atualmente, a BOVESPA é o maior centro de negociação com ações da América Latina, destaque que culminou com um acordo histórico para a integração de todas as bolsas brasileiras em torno de um único mercado de valores - o da BOVESPA, que passou a concentrar toda a negociação com ações no mercado brasileiro.

Além de gerar o crescimento do mercado acionário como um todo, a integração foi fundamental para que o Brasil tivesse um centro único de liquidez e uma representatividade importante dentro do Mercado Global. Além disso, importantes ganhos de produtividade foram obtidos, uma vez que todas as Bolsas passaram a ter um único sistema de negociação, de telefonia, de liquidação e custódia.

A carteira teórica do IBOVESPA é integrada pelas ações que, em conjunto, representaram 80% do volume transacionado à vista nos doze meses anteriores à formação da carteira. Como critério adicional, exige-se que a ação apresente no mínimo 80% de presença nos pregões do período. A participação de cada ação na carteira tem relação direta com a representatividade desse título no mercado à vista - em termos de número de negócios e volume em moeda corrente - ajustado ao tamanho da amostra.

Para que a representatividade do índice se mantenha ao longo do tempo, quadrimestralmente é feita uma reavaliação do mercado sempre com base nos doze meses anteriores à participação relativa de cada ação. Feito isso, monta-se uma nova carteira, atribuindo-se a cada papel um novo peso, segundo a distribuição de mercado apurada pelo estudo de reavaliação.

O Índice Geral de Preços de Ações Chilenas (IGPAGEN), criado em 1958, e publicado pela Bolsa de Comércio de Santiago, é um indicador de caráter patrimonial, que mede as variações de preços da maioria das ações inscritas na Bolsa. Esta medição se efetua através do patrimônio bursátil, isto é o valor da bolsa das diferentes sociedades que o compõem.

Para que a representatividade do índice se mantenha ao longo do tempo, anualmente é realizado um procedimento de revisão que permite incorporar e eliminar algumas sociedades da carteira, mantendo-a atualizada.

A Bolsa de Valores de Mumbai (antes conhecida como Bombaim) é a maior da Índia, e possui uma das maiores taxas de negociação por hora do mundo. O IBOMBSE é um índice composto por 30 empresas que respondem por 1/5 das negociações da Bolsa de Valores de Mumbai (BSE - *Bombay Stock Exchange*).

O *Singapore Straits Times Index* (SNGPORI) substituiu o *Straits Times Industrials Index* (STII) em 31/08/1998, após uma reclassificação das empresas listadas pela Bolsa de Valores de Cingapura que praticamente aboliu a categoria industrial, o que por si só demandou a substituição do STII.

O SNGPORI é compilado e publicado pela *Singapore Press Holdings* e é o maior barômetro de negociações na Bolsa de Valores de Cingapura. O principal objetivo deste índice é refletir a atividade diária no mercado de ações do país. Na época de seu lançamento, as ações constituintes respondiam por 78% das negociações diárias em um período de 12 meses e por 61,2% da capitalização total do mercado local.

A Figura 6.1 mostra os gráficos de todas as cinco séries de retornos para o período de 31/12/1993 a 31/01/2005. Notamos claramente que a série do IGPA GEN, que representa o mercado chileno é a que apresenta a menor volatilidade.

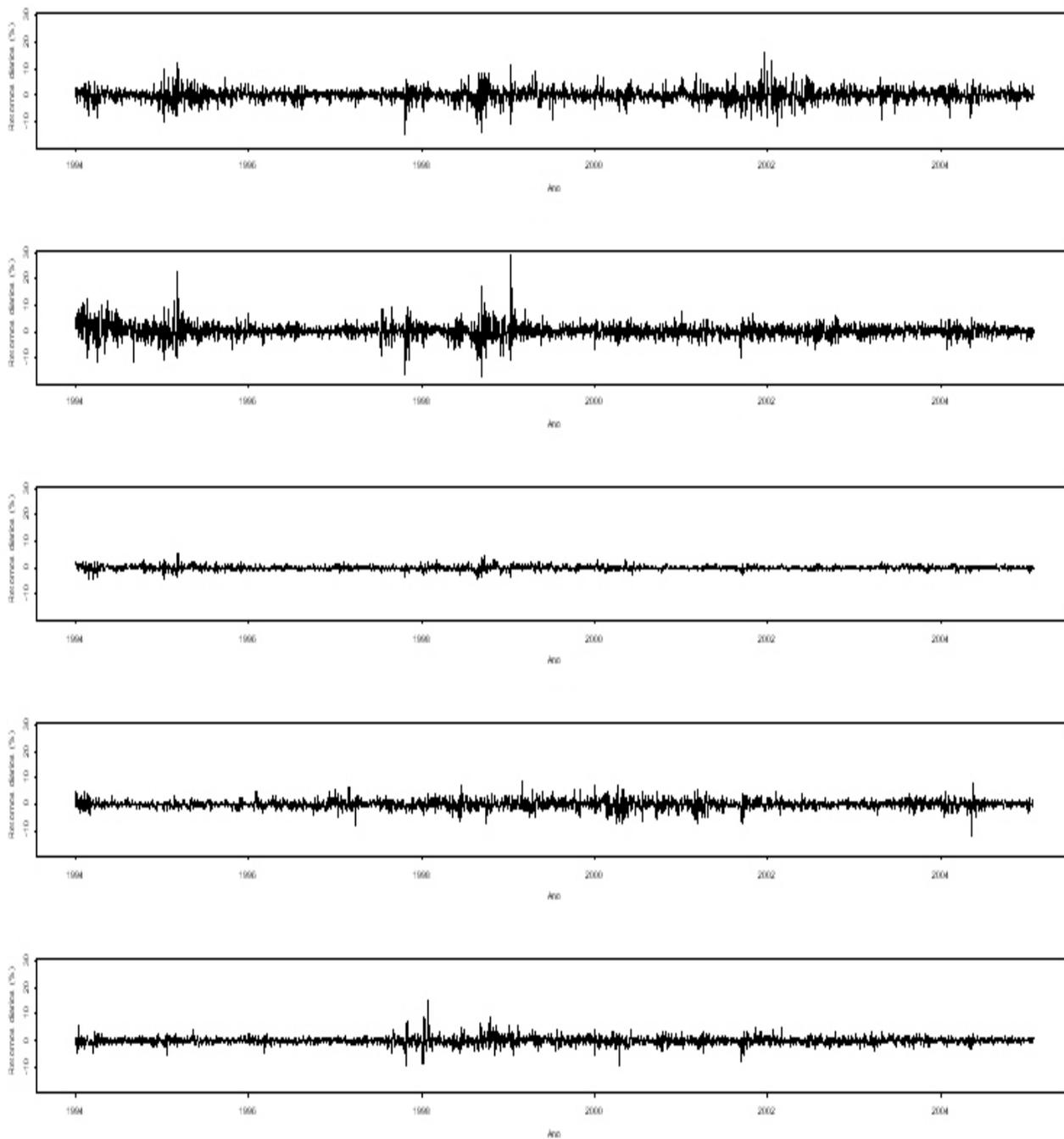
A seguir, descreveremos brevemente as séries utilizadas, apresentando estatísticas simples das séries para o período de 31/12/1993 a 31/01/2005, totalizando 2.891 observações diárias. Encontram-se listados também os valores para a estatística teste de Shapiro-Wilk (ver Apêndice), SW, com os p -valores entre parênteses. A hipótese de normalidade foi rejeitada para todas as séries, como era de se esperar.

A Tabela 6.1 mostra as mesmas estatísticas. Os valores para o primeiro momento indicam que as séries têm retorno esperado positivo. Os valores para o desvio-padrão indicam que o mercado brasileiro, seguido pelo argentino, são os de maior volatilidade. As estatísticas mostradas, em particular a alta curtose observada, estão de acordo com o fato hoje já bastante conhecido de que retornos financeiros não seguem uma distribuição normal.

Tabela 6.1: Estatísticas básicas dos retornos diários (x100) para o período de 31/12/1993 a 31/01/2005 (2.891 observações) e estatística do teste de Shapiro-Wilk (SW) para normalidade (p -valor entre parênteses).

	<i>media</i>	<i>dp</i>	<i>simetria</i>	<i>curtose</i>	<i>max</i>	<i>min</i>	<i>mediana</i>	<i>SW(p – valor)</i>
<i>Argentina</i>	0,03	2,36	-0,10	4,69	16,12	-14,77	0,00	0,937(0,00)
<i>Brasil</i>	0,14	2,62	0,59	10,67	28,82	-17,23	0,06	0,916(0,00)
<i>Chile</i>	0,03	0,74	0,08	5,01	5,17	-4,40	0,00	0,946(0,00)
<i>India</i>	0,03	1,57	-0,30	4,21	8,33	-11,94	0,00	0,951(0,00)
<i>Cingapura</i>	0,00	1,37	0,33	10,58	14,88	-9,67	0,00	0,914(0,00)

Figura 6.1: Log-retornos (em US\$) diários das séries dos cinco países no período de 31/12/1993 a 31/01/2005. (De cima para baixo: Argentina, Brasil, Chile, Índia e Cingapura.)



Como foi dito na Seção 1.3, as séries de retornos financeiros apresentam certas características chamadas de fatos estilizados, tais como dependência condicional no primeiro e segundo momentos. Portanto, é sempre de interesse verificar também se há autocorrelação nos retornos, o que pode ser feito através da análise gráfica das autocorrelações estimadas.

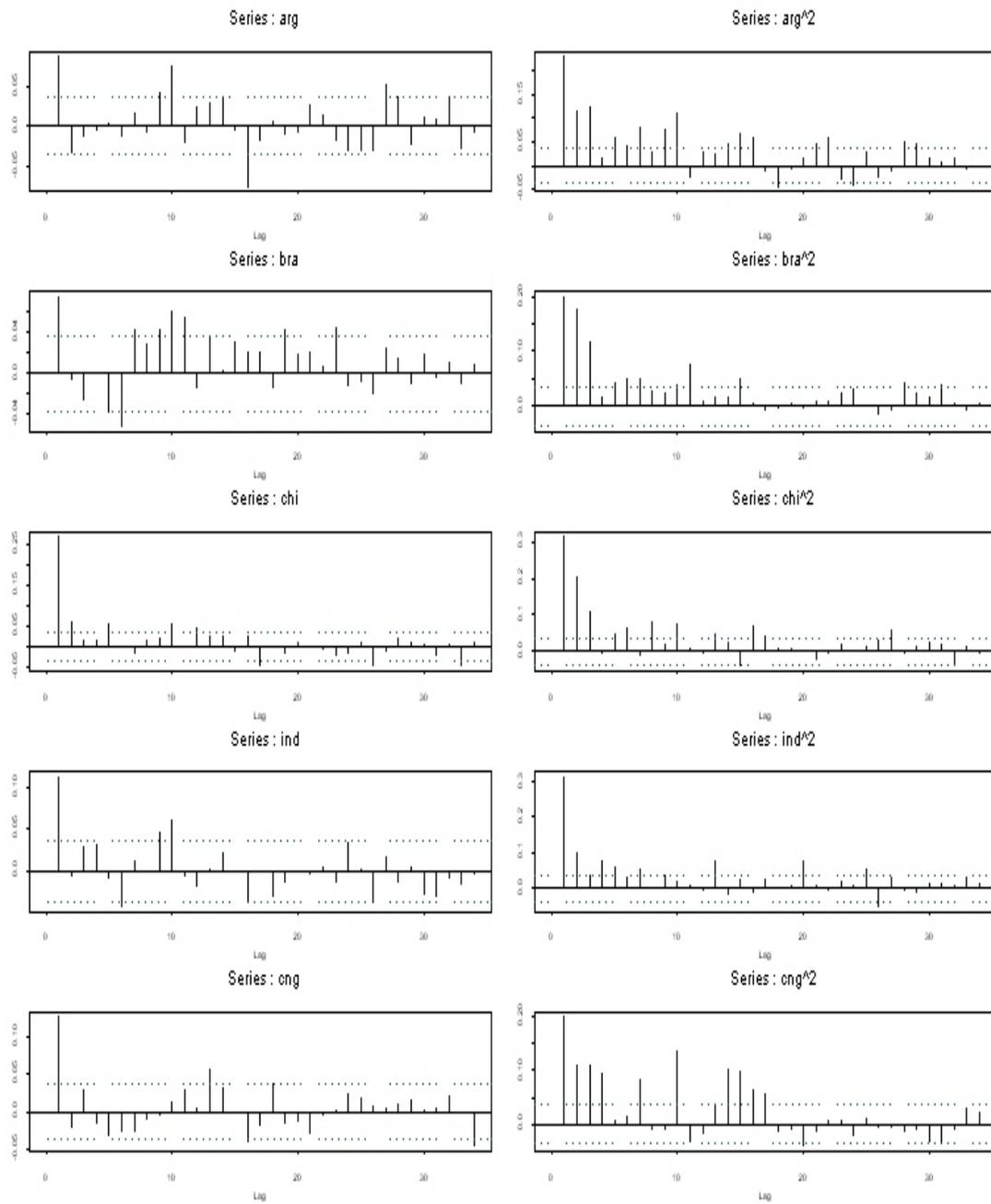
Observando a Figura 6.2, que apresenta as autocorrelações parciais estimadas de cada série, percebemos que há autocorrelação, isto é, há dependência temporal no primeiro e segundo momentos das séries de retornos diários de todos os mercados estudados.

O teste de Ljung-Box (ver Apêndice) para aleatoriedade, aplicado às cinco séries de retornos diários, rejeitou a hipótese de inexistência de autocorrelação nos retornos em todas as séries, em concordância com os gráficos para as autocorrelações estimadas. Os valores para a estatística teste de Ljung-Box, LB, encontram-se listados na Tabela 6.2 com os p -valores entre parênteses. O número de *lags* utilizado no cômputo da estatística teste foi $10 \log_{10} N$, onde N é o tamanho da amostra de observações diárias.

Lembremos que a suposição básica do modelo GEV e de sua generalização, o modelo r -maiores, é de que as observações sejam independentes e identicamente distribuídas, entretanto esta suposição pode ser relaxada para séries estacionárias que satisfaçam a condição $D(u_n)$, como visto no Capítulo 3.

A seguir, vamos verificar, por meio de testes estatísticos (que estão detalhados no Apêndice), se as séries de retornos diários em estudo podem ser consideradas como procedentes de processos estacionários, bem como tentar assegurar que tais processos satisfazem a condição $D(u_n)$, a fim de empregarmos os modelos para seqüências dependentes vistos no Capítulo 3.

Figura 6.2: Autocorrelações estimadas para os retornos (esquerda) e para os quadrados dos retornos (direita).



Pela simples observação do comportamento dos retornos no tempo representada na Figura 6.1, parece razoável admitirmos que a média e a variância de cada série tenham permanecido constantes ao longo do tempo.

No entanto, a fim de validar a suposição de estacionariedade de 2ª ordem (ou fraca) das séries de retornos diários, aplicamos o teste KPSS (Kwiatkowski *et al*, 1992) para a hipótese nula de estacionariedade na média. No cômputo da estatística teste, adotamos o ponto de referência T (veja Apêndice) como sendo igual a 20. Em todas as séries estudadas, a hipótese nula foi aceita a um nível de significância de 1%. Os valores para a estatística teste, KPSS, encontram-se listados na tabela 6.2 com os intervalos para os p -valores entre parênteses.

Aplicamos também o teste R/S de Lo (1991) para a hipótese nula de inexistência de memória longa nas cinco séries de retornos diários. Para o cálculo da estatística teste, adotamos $q = 9$ (veja Apêndice), valor este obtido a partir da fórmula $4 \left(\frac{N}{100}\right)^{1/4}$, onde N é o tamanho da amostra de observações diárias. A hipótese nula foi aceita para todas as séries a um nível de significância de 5%. Os valores para a estatística teste, RS, também encontram-se listados na Tabela 6.2 com os intervalos para os p -valores entre parênteses.

Pelos testes acima, verificamos que há evidência empírica de estacionariedade fraca da série e de inexistência de memória longa. Agora, nos resta a dependência de curto prazo que tentaremos enfraquecer ao extrairmos os extremos dos blocos de tamanho n .

Os testes utilizados encontram-se detalhados no Apêndice.

Tabela 6.2: Estatísticas dos testes Ljung-Box (LB), KPSS e R/S de Lo (RS), e respectivos p -valores entre parênteses, para as séries de retornos diários (2.891 observações).

	$LB(p - valor)$	$KPSS(p - valor)$	$RS(p - valor)$
<i>Argentina</i>	117,38(0,00)	0,21(> 0,05)	1,42(> 0,05)
<i>Brasil</i>	101,90(0,00)	0,72(> 0,01)	1,82(> 0,05)
<i>Chile</i>	372,18(0,00)	0,20(> 0,05)	1,78(> 0,05)
<i>India</i>	94,28(0,00)	0,14(> 0,05)	1,43(> 0,05)
<i>Cingapura</i>	108,17(0,00)	0,11(> 0,05)	1,46(> 0,05)

6.2 Ajuste do modelo r -maiores global por máxima verossimilhança

6.2.1 Estimação, seleção e diagnóstico

Para o cálculo das perdas extremas multiplicamos a série por (-1) e extraímos as r -maiores estatísticas de ordem dos blocos, as quais corresponderão às r -maiores perdas absolutas.

O cálculo do estimador de máxima verossimilhança para o modelo r -maiores presuppõe que os vetores aleatórios $M_i^{(r)} = (X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(r)})$, $i = 1, \dots, m$, do modelo sejam independentes e identicamente distribuídos.

Vamos admitir que os parâmetros μ , σ e ξ associados à distribuição dos $M_i^{(r)}$ permaneçam constantes no tempo. Sendo assim, a suposição de distribuição idêntica é garantida por (2.13). Quanto à independência, vamos tentar assegurá-la, escolhendo o tamanho do bloco de tal modo que a dependência entre blocos distintos seja fraca, embora $x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(r)}$ sejam dependentes dentro de cada bloco i . Para tanto, utilizamos o teste de Ljung-Box (1978) para testar a autocorrelação entre os máximos (perdas e ganhos) e conservamos o menor tamanho de bloco para o qual aceitamos a hipótese nula de inexistência de autocorrelação entre blocos ao nível de significância de 1%. Os tamanhos de bloco, n , testados foram 22, 44, 66 e 88, correspondendo a blocos mensais, bimestrais, trimestrais e quadrimestrais, respectivamente. O número de *lags* utilizado no cálculo da estatística teste foi $10 \log_{10} m$, onde m é o tamanho da amostra de extremos para os tamanhos de bloco testados e assume os valores 131, 65, 43 e 32, para blocos mensais, bimestrais, trimestrais e quadrimestrais, respectivamente.

O tamanho de bloco selecionado para cada série de ganhos e perdas extremos, bem como o tamanho da amostra de observações extremas (em função de r), constam da tabela 6.3. Para as séries de perdas e ganhos extremos no mercado argentino, trabalharemos com blocos bimestrais. No mercado brasileiro, trabalharemos com ganhos bimestrais e perdas trimestrais. Para o mercado chileno, utilizaremos blocos trimestrais para ganhos e bimestrais para perdas. Para as séries de retornos da Índia, usaremos blocos trimestrais

para ganhos e mensais para perdas. Já com as séries de Cingapura, trabalharemos com blocos quadrimestrais para ganhos e bimestrais para perdas.

Tabela 6.3: Tamanho de bloco selecionado para cada série de extremos e número de observações extremas (em função de r) entre parênteses.

	<i>Ganhos</i>	<i>Perdas</i>
<i>Argentina</i>	$n = 44(65r)$	$n = 44(65r)$
<i>Brasil</i>	$n = 44(65r)$	$n = 66(43r)$
<i>Chile</i>	$n = 66(43r)$	$n = 44(65r)$
<i>India</i>	$n = 66(43r)$	$n = 22(131r)$
<i>Cingapura</i>	$n = 88(32r)$	$n = 44(65r)$

Vamos prosseguir extraindo as 10-maiores estatísticas de ordem, para os dados de ganhos e perdas dos blocos de tamanho n selecionados conforme a Tabela 6.3.

Observando as Figuras 6.3 e 6.4 podemos perceber que em todas as séries há observações não tão extremas, isto acontece, pois, à medida que aumentamos o número de estatísticas de ordem computadas, maior é a probabilidade de incluirmos observações não extremas. Isto já é uma indicação de que 10 talvez seja um valor muito alto para r .

De qualquer modo, vamos prosseguir ajustando o modelo r -maiores global, $r = 1, \dots, 10$, para os ganhos e perdas dos blocos de tamanho n (n fixo conforme Tabela 6.3).

Apesar de em algumas séries (ganhos extremos na Argentina, no Chile, na Índia e em Cingapura, e perdas extremas na Argentina, no Brasil e em Cingapura) o intervalo de confiança para o parâmetro de forma ξ conter o valor zero, indicando que um ajuste fixando $\xi = 0$ poderia ser uma opção plausível, seguiremos a opção mais segura de aceitar que há incerteza sobre o valor do parâmetro de forma e preferir a inferência baseada nos ajustes com ξ livre. As incertezas associadas aos ajustes com ξ livre fornecem uma quantificação mais realista das incertezas envolvidas nas extrapolações do modelo.

A análise da estabilidade das estimativas obtidas para os parâmetros colocou em dúvida a validade do modelo r -maiores para valores de r superiores aos constantes da

tabela 6.4, pois em tais ajustes os intervalos de confiança para o parâmetro de locação não continham a estimativa obtida no caso $r = 1$, contrariando os resultados assintóticos.

Tabela 6.4: Ajustes do modelo r -maiores global aceitos pela análise de estabilidade das estimativas dos parâmetros (valores máximos de r).

<i>Séries</i>	<i>Argentina</i>	<i>Brasil</i>	<i>Chile</i>	<i>Índia</i>	<i>Cingapura</i>
<i>Ganhos</i>	$r = 2$	$r = 2$	$r = 2$	$r = 2$	$r = 2$
<i>Perdas</i>	$r = 2$	$r = 2$	$r = 1$	$r = 1$	$r = 2$

Para valores de r menores ou iguais aos contidos na Tabela 6.4, os gráficos de diagnóstico não evidenciam grave falta de ajuste, conforme pode ser visto nas figuras 6.5 a 6.14. Os resultados gráficos não nos dão fortes motivos para duvidar da validade dos modelos selecionados. Os gráficos do nível de retorno, especificamente, nos mostram que os modelos selecionados se comportam bem nas extrapolações a partir de certos períodos de retorno (t), isto é, as estimativas empíricas para o nível de retorno, $z_{1/t}$ pertencem ao intervalo de confiança de 95% de $z_{1/t}$, para extrapolações a partir de $t = 5$. Por exemplo, o gráfico do nível de retorno para o ajuste do modelo 2-maiores à série de ganhos bimestrais na Argentina mostra que o modelo funciona bem, no sentido descrito acima, para níveis de retorno a partir de 5 períodos de 44 dias, que equivale, neste caso, ao $VaR_{0,6\%}$. A equivalência entre o nível de retorno e o VaR_{α} é obtida a partir da relação dada em (5.1). Examinando os gráficos do nível de retorno das diversas séries, percebemos, ainda, que os níveis de retorno mais extremos são obtidos na série de ganhos no Brasil, que também registra os intervalos de confiança de maior amplitude para longos períodos de retorno. Os níveis de retorno menos extremos e com intervalos de confiança de menor amplitude para longos períodos de retorno são obtidos para as séries de ganhos e perdas no Chile.

O teste de Kolmogorov para qualidade do ajuste, descrito na Subseção 2.3.3, também aceita os ajustes relacionados na Tabela 6.4 a um nível de significância de 5%. Cabe ressaltar que o teste de Kolmogorov, em alguns casos, aceita, inclusive, valores de r superiores aos constantes na Tabela 6.4, demonstrando não ser sensível à instabilidade

Figura 6.3: 10-maiores ganhos dos blocos de tamanho n das séries de retornos diários dos cinco países.

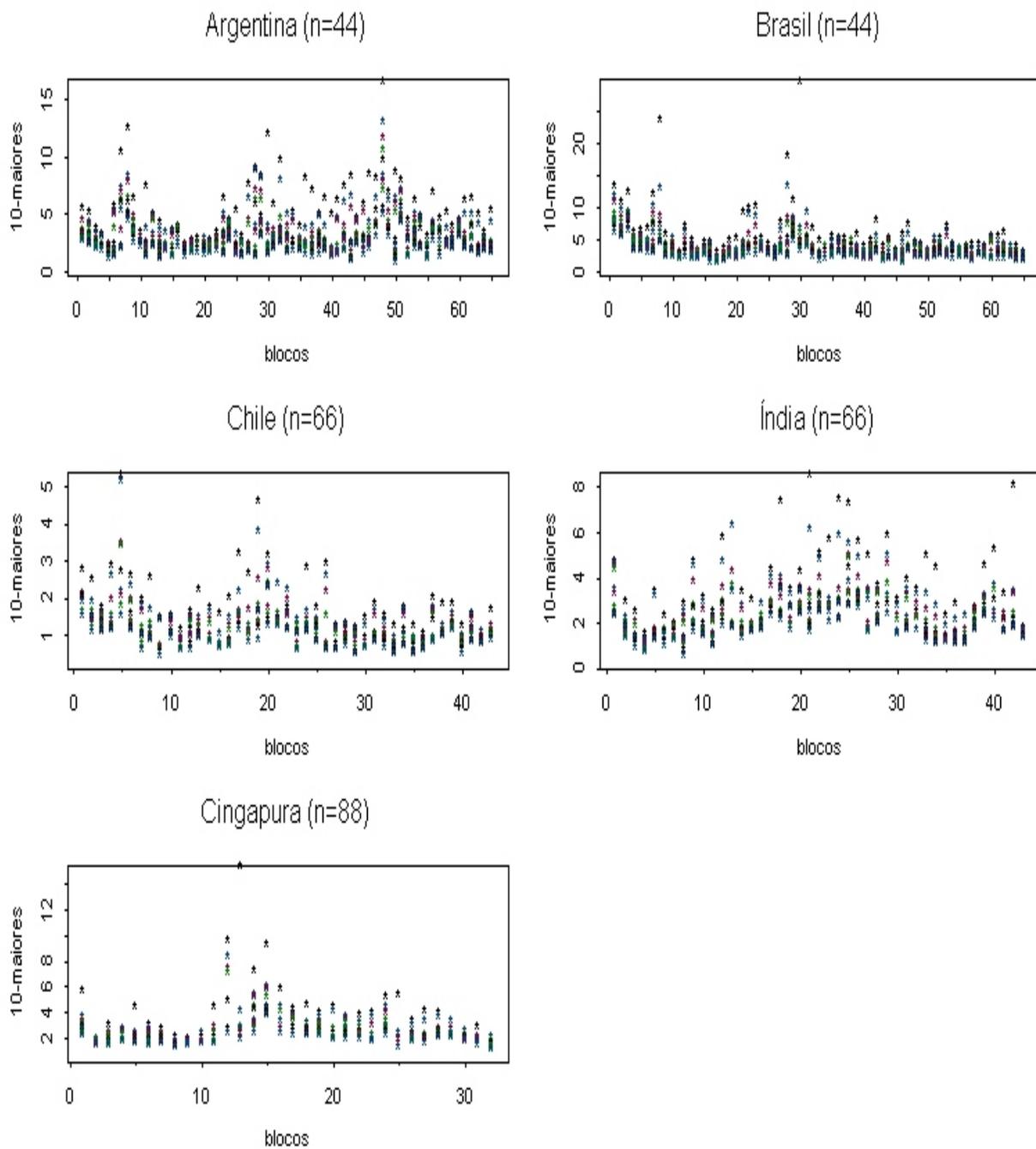
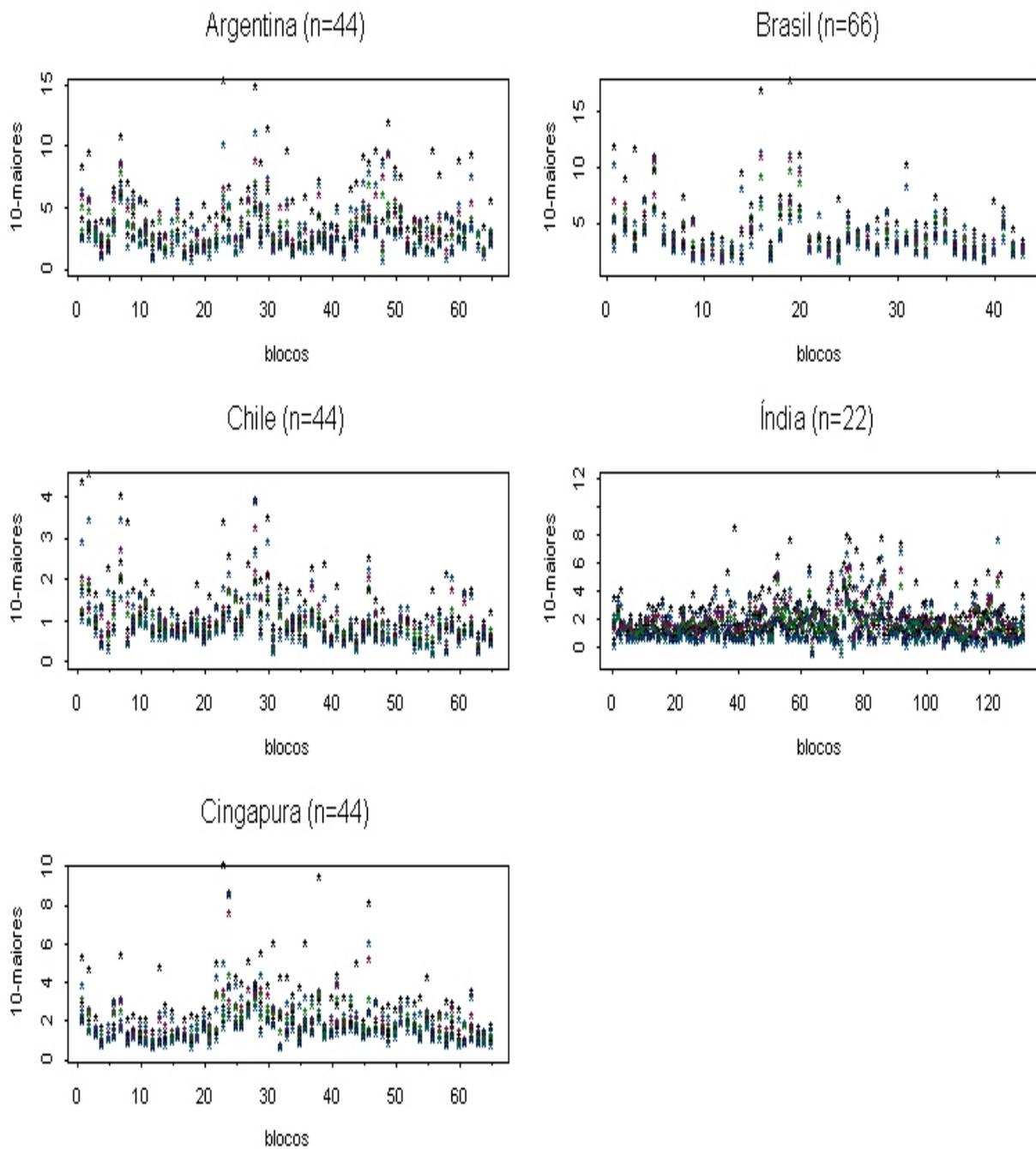


Figura 6.4: 10-maiores perdas dos blocos de tamanho n das séries de retornos diários dos cinco países.



das estimativas dos parâmetros de locação. Por exemplo, na Tabela 6.5 pode ser visto que o teste de Kolmogorov aceita o ajuste para os máximos usando o modelo 2-maiores global para a série de perdas extremas do IGPA GEN a um nível de significância de 5%, apesar das estimativas para μ demonstrarem instabilidade quando comparadas às obtidas para o caso $r = 1$.

As estimativas dos parâmetros obtidas por máxima verossimilhança e os respectivos erros-padrão encontram-se listados na tabela 6.5 para as inferências baseadas nos valores de $r = 1, 2$. Notamos que todas as estimativas obtidas para o parâmetro de forma ξ são positivas (Fréchet) e que a cauda mais pesada é a cauda direita da distribuição de retornos diários do IBOVESPA, para a qual os momentos de ordem superior a 2 não são finitos. Podemos observar também que há um ganho de precisão nas estimativas dos parâmetros quando saímos do ajuste GEV ($r = 1$) para o ajuste 2-maiores global. Contudo, a análise da estabilidade dos parâmetros de locação nos levou a rejeitar os ajustes 2-maiores, no caso global, para as séries de perdas extremas no mercado chileno e indiano, pois os intervalos de confiança para μ obtidos para o caso $r = 2$ nessas séries não continham a estimativa de μ obtida no ajuste GEV ($r = 1$).

Figura 6.5: Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para ganhos bimestrais no mercado argentino.

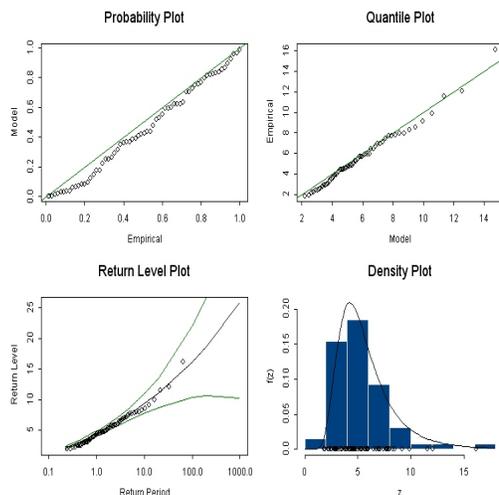


Figura 6.6: Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para ganhos bimestrais no mercado brasileiro.

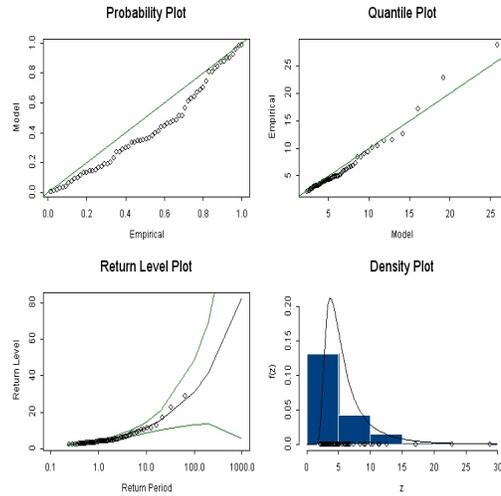


Figura 6.7: Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para ganhos trimestrais no mercado chileno.

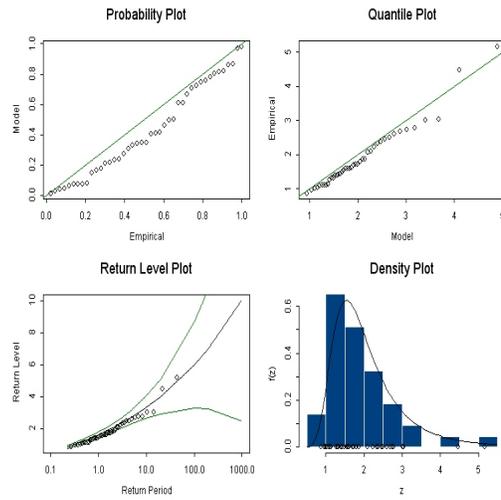


Figura 6.8: Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para ganhos trimestrais no mercado indiano.

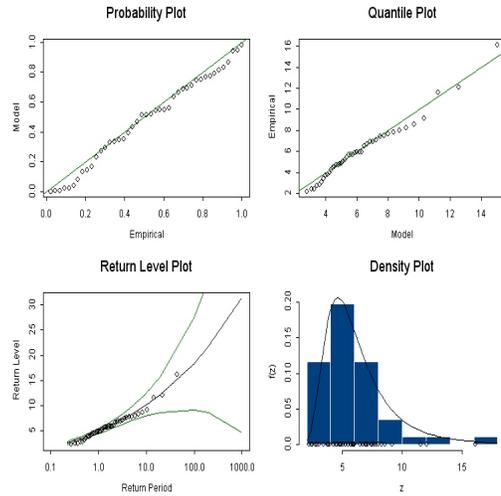


Figura 6.9: Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para ganhos quadrimestrais no mercado de Cingapura.

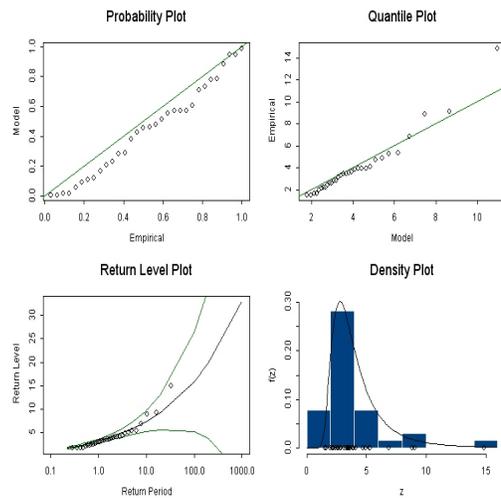


Figura 6.10: Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para perdas bimestrais no mercado argentino.

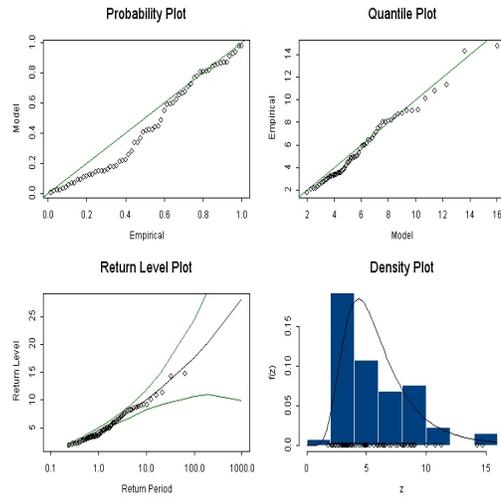


Figura 6.11: Gráficos de diagnóstico do ajuste 2-maiores global para perdas trimestrais no mercado brasileiro.

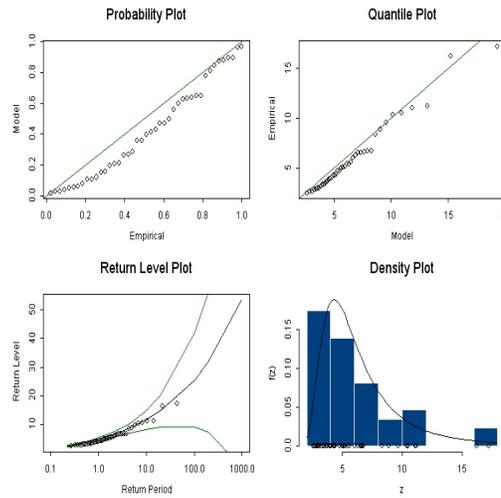


Figura 6.12: Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo GEV ($r = 1$) global para perdas bimestrais no mercado chileno.

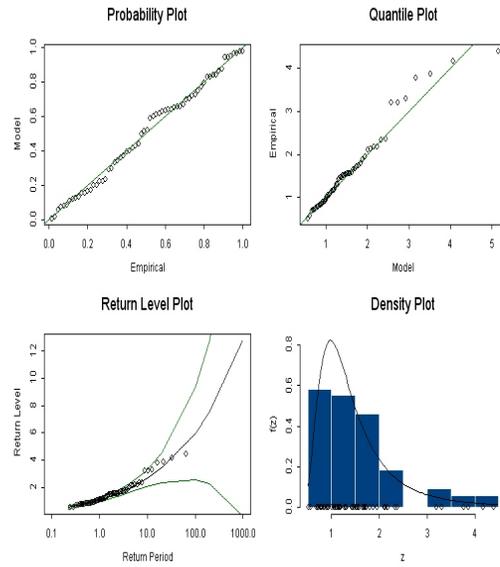


Figura 6.13: Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo GEV ($r = 1$) global para perdas mensais no mercado indiano.

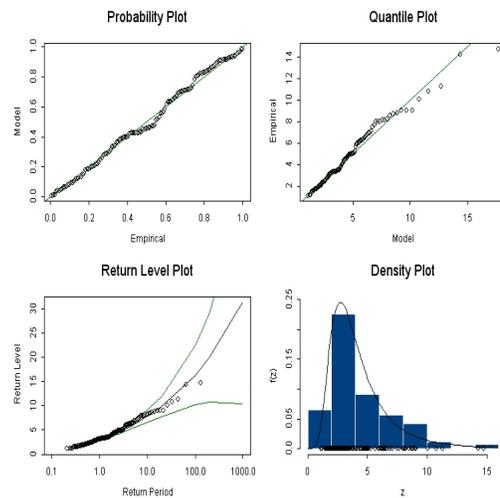


Figura 6.14: Gráficos de diagnóstico do ajuste do modelo 2-maiores global para perdas bimestrais no mercado de Cingapura.

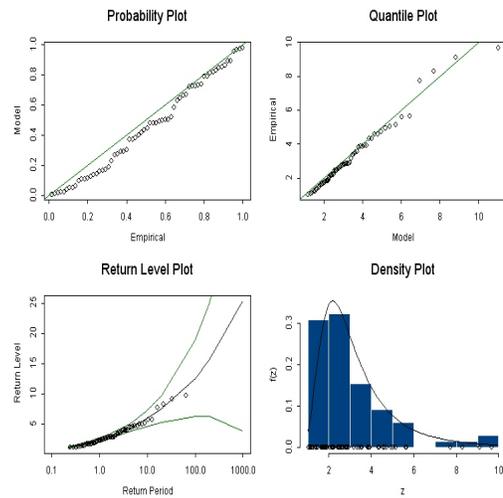


Tabela 6.5: Estimativas dos parâmetros (μ, σ, ξ) , respectivos erros-padrão (entre parênteses), estatísticas teste de Kolmogorov (D_n) e respectivos p -valores (entre parênteses) do modelo r -maiores global ajustado aos ganhos e perdas dos blocos de tamanho n dos retornos diários de cada país.

<i>Séries</i>	r	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\xi}$	D_n
Ganhos					
<i>Arg</i> ($n = 44$)	1	4,111 (0,26)	1,787 (0,20)	0,116 (0,11)	0,059 ($> 0,05$)
	2	4,481 (0,21)	1,778 (0,15)	0,148 (0,08)	0,121 ($> 0,05$)
<i>Bra</i> ($n = 44$)	1	3,880 (0,21)	1,484 (0,20)	0,494 (0,12)	0,063 ($> 0,05$)
	2	4,345 (0,22)	1,870 (0,21)	0,424 (0,09)	0,179 ($> 0,05$)
<i>Chi</i> ($n = 66$)	1	1,456 (0,09)	0,497 (0,07)	0,267 (0,16)	0,078 ($> 0,05$)
	2	1,640 (0,09)	0,597 (0,07)	0,186 (0,10)	0,164 ($> 0,05$)
<i>Ind</i> ($n = 66$)	1	3,113 (0,24)	1,339 (0,18)	0,053 (0,15)	0,08 ($> 0,05$)
	2	3,480 (0,11)	1,297 (0,12)	0,038 (0,10)	0,182 ($> 0,05$)
<i>Cng</i> ($n = 88$)	1	2,734 (0,25)	1,203 (0,22)	0,361 (0,19)	0,093 ($> 0,05$)
	2	3,106 (0,21)	1,276 (0,18)	0,303 (0,12)	0,146 ($> 0,05$)
Perdas					
<i>Arg</i> ($n = 44$)	1	4,016 (0,27)	1,820 (0,23)	0,239 (0,14)	0,064 ($> 0,05$)
	2	4,588 (0,24)	2,009 (0,17)	0,142 (0,09)	0,158 ($> 0,05$)
<i>Bra</i> ($n = 66$)	1	4,090 (0,30)	1,594 (0,28)	0,465 (0,20)	0,064 ($> 0,05$)
	2	4,828 (0,30)	2,037 (0,25)	0,307 (0,12)	0,158 ($> 0,05$)
<i>Chi</i> ($n = 44$)	1	1,096 (0,07)	0,467 (0,06)	0,317 (0,12)	0,082 ($> 0,05$)
	2	1,288 (0,07)	0,564 (0,05)	0,195 (0,08)	0,158 ($> 0,05$)
<i>Ind</i> ($n = 22$)	1	1,925 (0,10)	0,987 (0,08)	0,239 (0,08)	0,042 ($> 0,05$)
	2	2,271 (0,09)	1,092 (0,07)	0,197 (0,06)	0,158 ($< 0,05$)
<i>Cng</i> ($n = 44$)	1	2,198 (0,15)	1,012 (0,13)	0,302 (0,13)	0,057 ($> 0,05$)
	2	2,435 (0,13)	1,081 (0,11)	0,281 (0,10)	0,123 ($> 0,05$)

6.2.2 Análise das estimativas de VaR

Apresentamos nas Tabelas 6.6 e 6.7 os VaR empíricos e os obtidos pelo ajuste r -maiores global ($r = 1, 2$) de cada série. Apesar do ajuste 2-maiores global não ter sido aceito para as séries de perdas no Chile e em Cingapura, mantivemo-lo na tabela para fins ilustrativos.

Examinando as Tabelas 6.6 e 6.7, notamos que para $\alpha = 0,05$ o VaR empírico igualou as caudas esquerda e direita da índice SNGPORI, o que não parece razoável. Podemos verificar também que, para α fixo, o erro-padrão associado às estimativas do VaR_α diminui à medida que r cresce. Observamos, ainda, que para r fixo, o erro-padrão associado às estimativas do VaR_α cresce à medida que α diminui. Além disso, podemos notar que para probabilidades α muito pequenas, como 0,001, o mercado brasileiro é o que apresenta os ganhos e perdas mais extremos, quando comparado aos demais mercados emergentes em estudo, sendo as perdas, contudo, bem próximas das auferidas no mercado argentino. Entretanto, para probabilidades α maiores, tais como 0,05 ou 0,01, os mercados argentino e brasileiro apresentam ganhos bem próximos e, em se tratando de perdas, as associadas ao mercado brasileiro são ligeiramente menores que as do mercado argentino. O mercado chileno, por sua vez, é de longe o que apresenta ganhos e perdas menos extremos, ao passo que os ganhos e perdas nos mercados indiano e de Cingapura estão situados num patamar intermediário.

Pela análise das Figuras 6.15 e 6.16, percebemos que, quando retornamos à amostra de observações diárias, algumas estimativas de VaR_α obtidas a partir do ajuste r -maiores global ($r=1$ ou 2 , conforme o caso) são ultrapassadas (falham) mais vezes que as estimativas empíricas, como, por exemplo, no caso das estimativas para $VaR_{1\%}$ obtidas pelo ajuste GEV ($r = 1$) global para as perdas no Chile; outras falham menos vezes, como, por exemplo, no caso das estimativas para $VaR_{0,1\%}$ obtidas pelo ajuste 2-maiores global para os ganhos no Brasil; e algumas ficam bastante próximas, como, por exemplo, no caso das estimativas para $VaR_{1\%}$ obtidas pelo ajuste 2-maiores global para as perdas em Cingapura. A tabela 6.8 apresenta os percentuais de falhas efetivas das estimativas

de VaR obtidas a partir do modelo r -maiores global ajustado para as séries de ganhos e perdas extremas nos cinco países para três níveis de VaR.

Será que nossos ajustes por vezes subestimam e outras superestimam os riscos inerentes aos processos subjacentes? Uma maneira de testar a acurácia das estimativas do VaR_α obtidas a partir do ajuste r -maiores global é fazendo os *backtests* propostos no Capítulo 5.

Tabela 6.6: Estimativas de VaR_α empíricas e as obtidas a partir do ajuste do modelo r -maiores global para ganhos dos blocos de tamanho n (erros-padrão entre parênteses).

<i>Séries</i>	<i>Ajustes</i>	$VaR_{0,05}$	$VaR_{0,01}$	$VaR_{0,001}$
	empírico	3,70	6,64	11,62
<i>Arg</i> ($n = 44$)	$r = 1$	2,72(0,21)	5,64(0,35)	10,84(1,28)
	$r = 2$	3,12(0,15)	6,02(0,32)	11,54(1,36)
	empírico	3,94	7,60	13,13
<i>Bra</i> ($n = 44$)	$r = 1$	2,79(0,13)	5,27(0,39)	14,83(3,26)
	$r = 2$	3,06(0,12)	6,17(0,42)	16,52(3,04)
	empírico	1,18	2,08	3,75
<i>Chi</i> ($n = 66$)	$r = 1$	0,94(0,07)	1,67(0,11)	3,44(0,52)
	$r = 2$	0,99(0,05)	1,90(0,11)	3,75(0,47)
	empírico	2,49	4,27	7,12
<i>Ind</i> ($n = 66$)	$r = 1$	1,53(0,26)	3,67(0,28)	7,03(0,81)
	$r = 2$	1,94(0,14)	4,02(0,22)	7,20(0,74)
	empírico	2,01	3,70	7,96
<i>Cng</i> ($n = 88$)	$r = 1$	1,34(0,22)	2,88(0,27)	7,42(1,48)
	$r = 2$	1,56(0,11)	3,27(0,23)	7,68(1,29)

Tabela 6.7: Estimativas de VaR_α empíricas e as obtidas a partir do ajuste do modelo r -maiores global para perdas dos blocos de tamanho n (erros-padrão entre parênteses).

<i>Séries</i>	<i>Ajustes</i>	$VaR_{0,05}$	$VaR_{0,01}$	$VaR_{0,001}$
	empírico	3,75	6,94	10,85
<i>Arg</i> ($n = 44$)	$r = 1$	2,67(0,20)	5,66(0,40)	12,47(2,06)
	$r = 2$	3,04(0,17)	6,33(0,36)	12,48(1,57)
	empírico	3,85	6,67	11,10
<i>Bra</i> ($n = 66$)	$r = 1$	2,61(0,19)	4,81(0,39)	12,79(3,00)
	$r = 2$	2,76(0,15)	5,72(0,39)	13,48(2,34)
	empírico	1,05	1,94	3,78
<i>Chi</i> ($n = 44$)	$r = 1$	0,76(0,05)	1,53(0,11)	3,59(0,62)
	$r = 2$	0,86(0,04)	1,79(0,10)	3,71(0,47)
	empírico	2,41	4,64	7,31
<i>Ind</i> ($n = 22$)	$r = 1$	1,81(0,09)	3,72(0,23)	8,08(1,12)
	$r = 2$	2,14(0,09)	4,19(0,22)	8,48(0,98)
	empírico	2,03	3,52	8,16
<i>Cng</i> $n = 44$)	$r = 1$	1,47(0,10)	3,13(0,23)	7,45(1,32)
	$r = 2$	1,65(0,081)	3,43(0,22)	7,84(1,26)

Figura 6.15: Retornos diários de cada país, VaR empíricos e os VaR estimados a partir dos ajustes do modelo r -maiores global para os ganhos nos blocos de tamanho n .

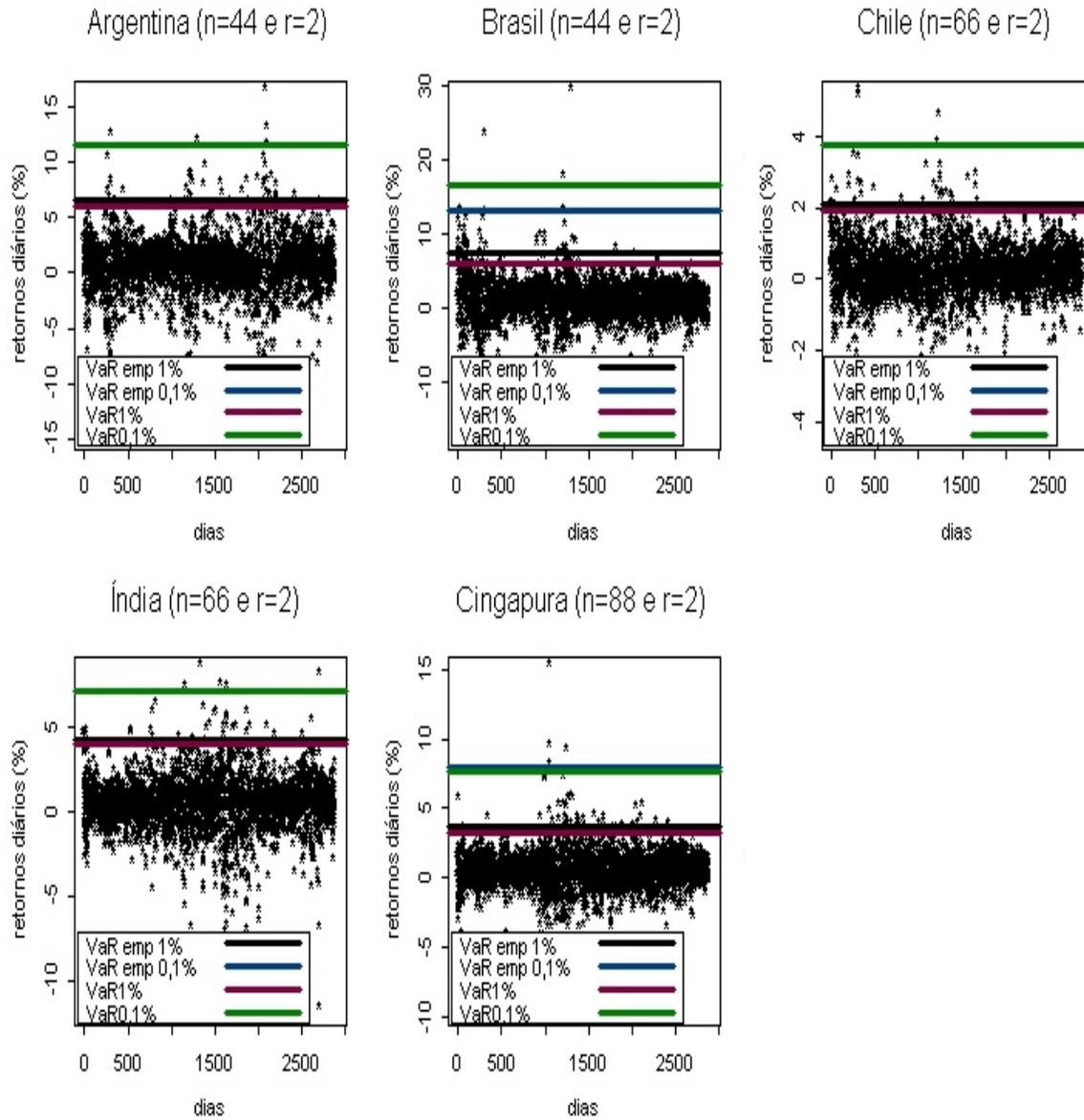


Figura 6.16: Retornos diários $\times (-1)$ de cada país, VaR empíricos e os VaR estimados a partir dos ajustes do modelo r -maiores global para as perdas nos blocos de tamanho n .

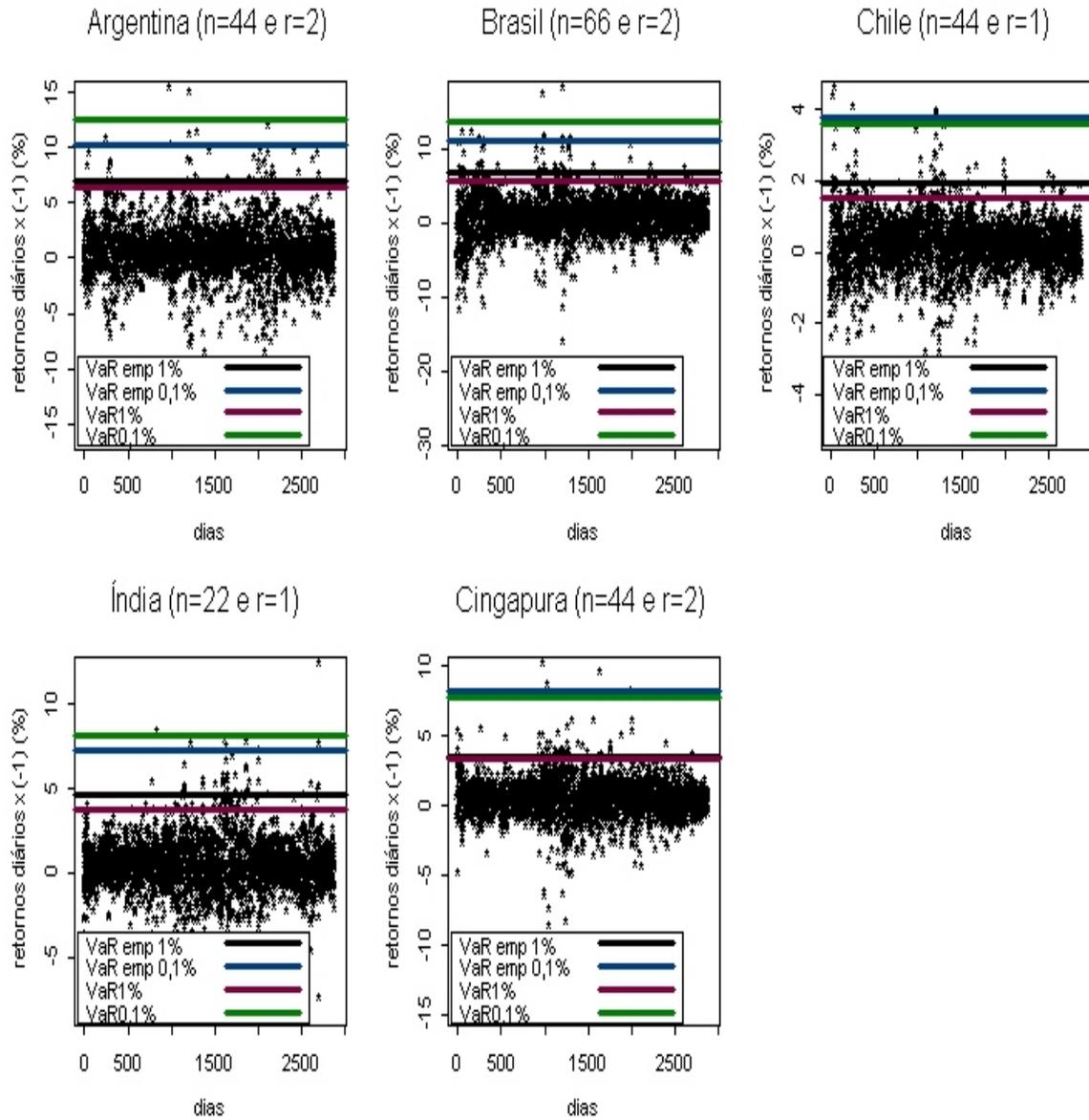


Tabela 6.8: Percentual de falhas efetivas de VaR_α para as séries de ganhos e perdas extremas dos blocos de tamanho n obtidas a partir do ajuste do modelo r -maiores global.

<i>Ganhos</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,01\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	6,81	1,31	0,14
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2$)	8,44	1,90	0,10
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2$)	7,96	1,31	0,10
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2$)	8,30	1,25	0,10
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2$)	8,54	1,52	0,14
<i>Perdas</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,01\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	7,54	1,38	0,07
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2$)	9,41	1,66	0,07
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1$)	9,75	2,25	0,17
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1$)	9,27	1,90	0,03
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2$)	7,85	1,25	0,14

6.2.3 *Backtests* para as estimativas de VaR

Uma forma de se testar a qualidade das estimativas obtidas para o VaR a partir do modelo r -maiores global e, assim, validar nosso modelo para estimação de VaR é fazer o *backtesting*. Vamos utilizar os testes da proporção de falhas e do tempo entre falhas, propostos por Kupiec (1995) e detalhados no Capítulo 5, para testar a hipótese nula de que a verdadeira proporção de excedência do VaR_α na distribuição de retornos diários em cada série seja α . Para todos os testes, um p -valor menor que 0,05 será tomado como evidência contra a hipótese nula. Testaremos três níveis diferentes de VaR_α : 5%, 1% e 0,1%.

A Tabela 6.9 mostra os resultados obtidos para o teste da proporção de falhas. Podemos observar que todas as estimativas obtidas para $VaR_{0,1\%}$ foram validadas, o que não ocorre para as estimativas de $VaR_{5\%}$ e $VaR_{1\%}$. Como nosso foco é aferir risco para eventos associados a cenários adversos de longo prazo, o fato das estimativas de $VaR_{5\%}$ e $VaR_{1\%}$ não terem sido validadas não parece muito preocupante, já que os eventos aos

quais estas medidas de risco estão associadas são aqueles que espera-se ocorrer uma vez a cada 20 dias e uma vez a cada 100 dias, respectivamente. O $VaR_{0,1\%}$, por sua vez, representa o evento que se espera que ocorra uma vez a cada 1.000 dias, o que equivale a aproximadamente 4 anos.

A Tabela 6.10 apresenta os resultados obtidos para o teste do tempo entre falhas. Notamos que o teste do tempo entre falhas rejeitou a hipótese nula para todas as estimativas de $VaR_{5\%}$ e $VaR_{1\%}$ das cinco séries de ganhos e perdas. Para as estimativas de $VaR_{0,1\%}$, o teste rejeitou a hipótese nula nos ajustes r -maiores global das séries de ganhos na Argentina e em Cingapura, bem como nas séries de perdas no Chile e em Cingapura. Como dito no parágrafo anterior, a não validação das estimativas de $VaR_{5\%}$ e $VaR_{1\%}$ não nos preocupa muito, o mesmo não pode ser dito em relação às estimativas de $VaR_{0,1\%}$ que são nosso objetivo maior. A não validação destas últimas pelo teste do tempo entre falhas sugere a existência de *clusters* de volatilidade nas séries cujas estimativas de VaR foram rejeitadas e que o nosso modelo não lida adequadamente com esta característica.

Tabela 6.9: Resultados do *backtest* para a proporção de falhas das estimativas de VaR_{α} obtidas a partir dos ajustes do modelo r -maiores global para os blocos de tamanho n .

<i>Ganhos</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,1\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Perdas</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,1\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>

Convenção utilizada: a: aceita-se H_0 , e r: rejeita-se H_0 .

Tabela 6.10: Resultados do *backtest* para o tempo entre falhas das estimativas de VaR_α obtidas nos ajustes do modelo r -maiores global para os blocos de tamanho n .

<i>Ganhos</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,1\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>
<i>Perdas</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,1\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>

Convenção utilizada: a: aceita-se H_0 , e r: rejeita-se H_0 .

6.2.4 Incorporando o índice extremal às estimativas de VaR

A seguir iremos incorporar à modelagem r -maiores global a suposição de que os dados apresentam conglomerados de valores extremos. Como visto na Subseção 3.3.1, a informação fornecida pelo índice extremal θ pode ser incorporada à modelagem resultando em estimativas melhores para as caudas extremas e, por conseguinte, para os quantis associados a probabilidades muito pequenas.

Vamos estimar θ usando o estimador apresentado em (3.4). Como sugerido em Mendes (2004), vamos especificar u a partir dos seguintes percentuais de observações na cauda da distribuição empírica de retornos diários: 5%, 4% e 3%. A estimativa final para θ é a média das estimativas obtidas ao se fixar u como sendo os quantis 95%, 96% e 97%.

Investigaremos agora o efeito do índice extremal no cálculo das estimativas de VaR. Na prática basta substituir n por $n\theta$ em (5.1). As estimativas para os VaR_α incorporando o índice extremal θ são dadas para as cinco séries para as caudas esquerda e direita da distribuição de retornos diários.

Tabela 6.11: Estimativas de θ para as caudas direita (θ_G) e esquerda (θ_P) da distribuição de retornos diários dos índices dos cinco países e estimativas para os $VaR_{5\%}$, $VaR_{1\%}$ e $VaR_{0,1\%}$ dos ganhos e perdas incorporando a informação dada por θ ao ajuste do modelo r -maiores global.

<i>Séries</i>			<i>Ganhos</i>			<i>Perdas</i>		
	$\hat{\theta}_G$	$\hat{\theta}_P$	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,1\%}$	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,1\%}$
<i>Arg</i>	0,405	0,366	4,64	7,96	14,27	4,98	8,76	15,82
<i>Bra</i>	0,232	0,575	4,65	9,43	27,84	3,60	7,11	16,32
<i>Chi</i>	0,778	0,327	1,03	1,81	3,70	1,24	2,34	5,27
<i>Ind</i>	0,713	0,091	2,36	4,47	7,69	3,83	6,70	13,26
<i>Cng</i>	0,225 ¹	0,367	3,09 ¹	5,76 ¹	12,71 ¹	2,64	5,00	10,85

1 Não foram obtidas estimativas válidas usando o estimador dado em (3.4), por isso utilizou-se (3.3).

Tabela 6.12: Resultados do *backtest* para a proporção de falhas das estimativas de VaR_α obtidas a partir dos ajustes do modelo r -maiores global para os blocos de tamanho n incorporando θ .

<i>Ganhos</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,1\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Perdas</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,1\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>

Convenção utilizada: a: aceita-se H_0 , e r: rejeita-se H_0 .

Tabela 6.13: Resultados do *backtest* para o tempo entre falhas das estimativas de VaR_α obtidas nos ajustes do modelo r -maiores global para os blocos de tamanho n incorporando θ .

<i>Ganhos</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,01\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Perdas</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,01\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>

Convenção utilizada: a: aceita-se H_0 , e r: rejeita-se H_0 .

A observação dos resultados apresentados na Tabela 6.11 nos revela que há evidências empíricas de que a cauda esquerda da distribuição de retornos diários dos índices argentino, chileno e de Cingapura são mais pesadas que a cauda direita. No caso da distribuição de retornos diários do índice brasileiro, ocorre o inverso.

Examinando as Tabelas 6.12 e 6.13 notamos que a incorporação de θ às estimativas de VaR obtidas a partir dos ajustes r -maiores globais possibilitou a obtenção de uma estimativa de $VaR_{0,1\%}$ para a série de ganhos na Argentina e em Cingapura validada por ambos *backtests*. Contudo, o problema permanece não resolvido nas séries de perdas no Chile e em Cingapura, pois, nestes casos, ou as estimativas obtidas para o $VaR_{0,1\%}$ pela simples incorporação de θ às estimativas do ajuste r -maiores global não foram validadas pelo *backtest* para a proporção de falhas. A utilização de θ também não resolve o problema para todos os $VaR_{5\%}$ e $VaR_{1\%}$, mas como dito na subseção anterior este fato não nos preocupa, pois tais níveis de risco não são nosso foco principal.

6.3 Ajuste do modelo r -maiores local

Agora aplicaremos a variante local do modelo r -maiores proposta no Capítulo 4, a fim de investigar se os retornos diários extremos nos cinco países em estudo permaneceram constantes no tempo durante o período de 31/12/1993 a 31/01/2005.

Vamos estimar o vetor de parâmetros para o modelo r -maiores local como uma função suave e não-paramétrica no tempo, usando métodos de verossimilhança local. Com isso, pretendemos identificar tendências mais complexas ou súbitas nos dados de extremos financeiros. Cabe ressaltar que métodos não-paramétricos para estimação de tendência são puramente descritivos e não podem ser utilizados para predição, embora sejam extremamente úteis para identificar uma classe apropriada de modelos paramétricos para uma análise posterior.

Vamos usar um modelo que é localmente constante nos três parâmetros e utilizar o estimador dado em (4.3), adotando K como sendo a função densidade de probabilidade de uma distribuição normal com média zero e desvio padrão igual a h (valor a ser escolhido).

Concluiremos com uma discussão que foca em como a eficiência das estimativas de VaR pode ser melhorada, a partir da incorporação da variante local no modelo r -maiores.

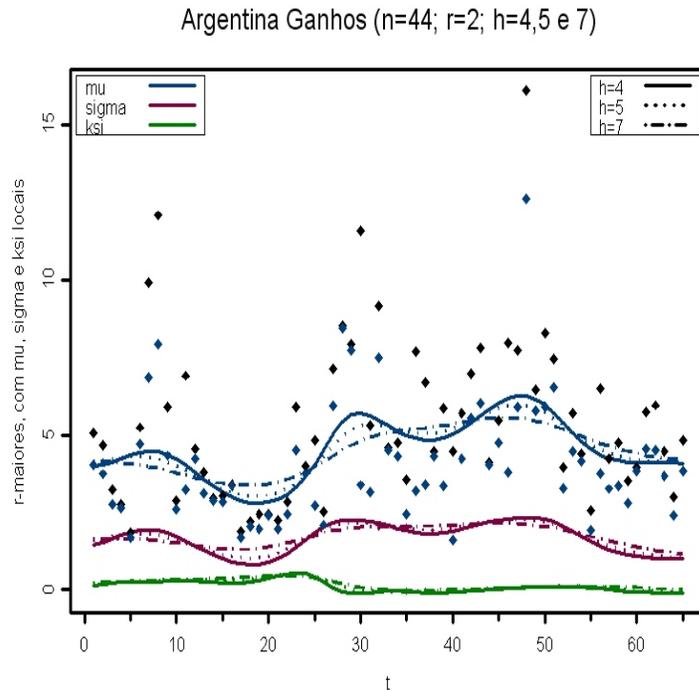
6.3.1 Estimação, seleção e diagnóstico do modelo

Sabemos que pequenos valores de h estimam curvas muito sinuosas, mas valores muito grandes suavizam demasiadamente a curva e fornecem um ajuste viesado; portanto, há o *trade-off* usual entre vício e variância. Faremos uso do critério AIC para escolha da largura da janela h .

A Figura 6.17 ilustra como o ajuste r -maiores local pode variar em função da escolha de h .

Foram testados ajustes com valores de h variando de 2 a 12 para cada uma das séries de ganhos e perdas extremas dos cinco países estudados. Os valores selecionados pelo critério AIC encontram-se relacionados na Tabela 6.14. Esta mesma tabela apresenta o resultado do teste de razão de verossimilhança para a hipótese nula de que os dados sigam o modelo global contra a hipótese alternativa de que sigam o modelo local (usando o h

Figura 6.17: Estimativas de μ , σ e ξ obtidas pelo ajuste r -maiores local na Argentina para $h = 4, 5$ e 7 .



escolhido). Notamos que o modelo global é rejeitado em detrimento do local em todos os casos em estudo.

As Figuras 6.18 e 6.19 mostram como ficaram os ajustes do modelo r -maiores local para as séries de ganhos e perdas dos cinco países para os valores de h relacionados na Tabela 6.14.

É importante verificar se o modelo local ajustado fornece um ajuste razoável para os dados. Vamos aqui utilizar o qq plot despadronizado (*de-standardized qq plot*) proposto em Butler *et al.* (2005), que equivale a uma transformação do qq plot padronizado de volta à escala original, preservada a ordenação. As Figuras 6.20 e 6.21 apresentam os qq plots despadronizados para a k -ésima maior, quando $k = 1$. Examinando estas figuras notamos que não há fortes evidências de que o ajuste não esteja bom.

A incerteza associada às estimativas locais pode ser avaliada por meio de faixas de variabilidade *bootstrap* construídas em conjunção com valores críticos obtidos a partir de

Tabela 6.14: Largura da janela temporal h escolhida pelo critério AIC, para o ajuste r -maiores local das séries de ganhos e perdas nos blocos de tamanho n de cada país e estatísticas da razão de verossimilhanças (RV) associada ao teste que compara o modelo global contra o modelo local para o h escolhido e p -valor (entre parênteses).

<i>Ganhos</i>	h	RV (p -valor)	<i>Perdas</i>	h	RV (p -valor)
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	5	42, 10 (0, 00)	<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	3	17, 91 (0, 00)
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2$)	3	45, 43 (0, 00)	<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2$)	4	38, 36 (0, 00)
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2$)	8	20, 63 (0, 00)	<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1$)	5	11, 11 (0, 00)
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2$)	6	33, 14 (0, 00)	<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1$)	11	48, 67 (0, 00)
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2$)	6	26, 29 (0, 00)	<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2$)	8	91, 34 (0, 00)

um esquema *bootstrap* em que se calcula as estimativas locais dos parâmetros em cada réplica desse esquema e utiliza as pseudo-estimativas locais dos parâmetros para estimar a variabilidade local. Vale ressaltar que neste procedimento não empregamos valores críticos assintóticos da distribuição normal padrão, mas sim valores críticos estimados em um esquema de reamostragem *bootstrap*.

A Figura 6.22 ilustra a construção de faixas de variabilidade de 95% de confiança para as estimativas dos parâmetros do modelo r -maiores local para a série de ganhos nos blocos de tamanho n na Argentina. Foram utilizadas 500 replicações *bootstrap*.

Figura 6.18: Estimativas de μ , σ e ξ obtidas pelo ajuste r -maiores local para as cinco séries de ganhos dos blocos de tamanho n .

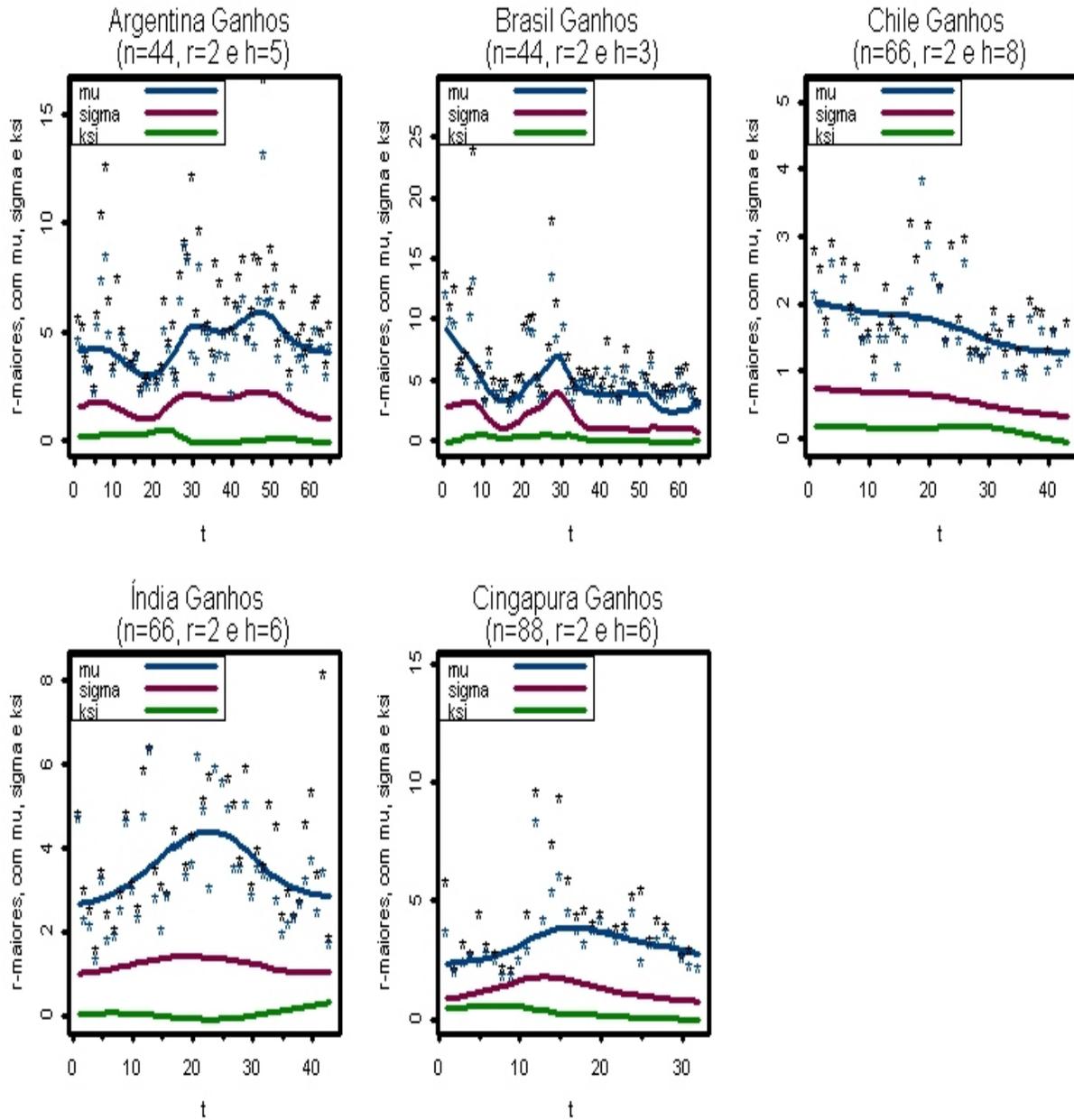


Figura 6.19: Estimativas de μ , σ e ξ obtidas pelo ajuste r -maiores local para as cinco séries de perdas dos blocos de tamanho n .

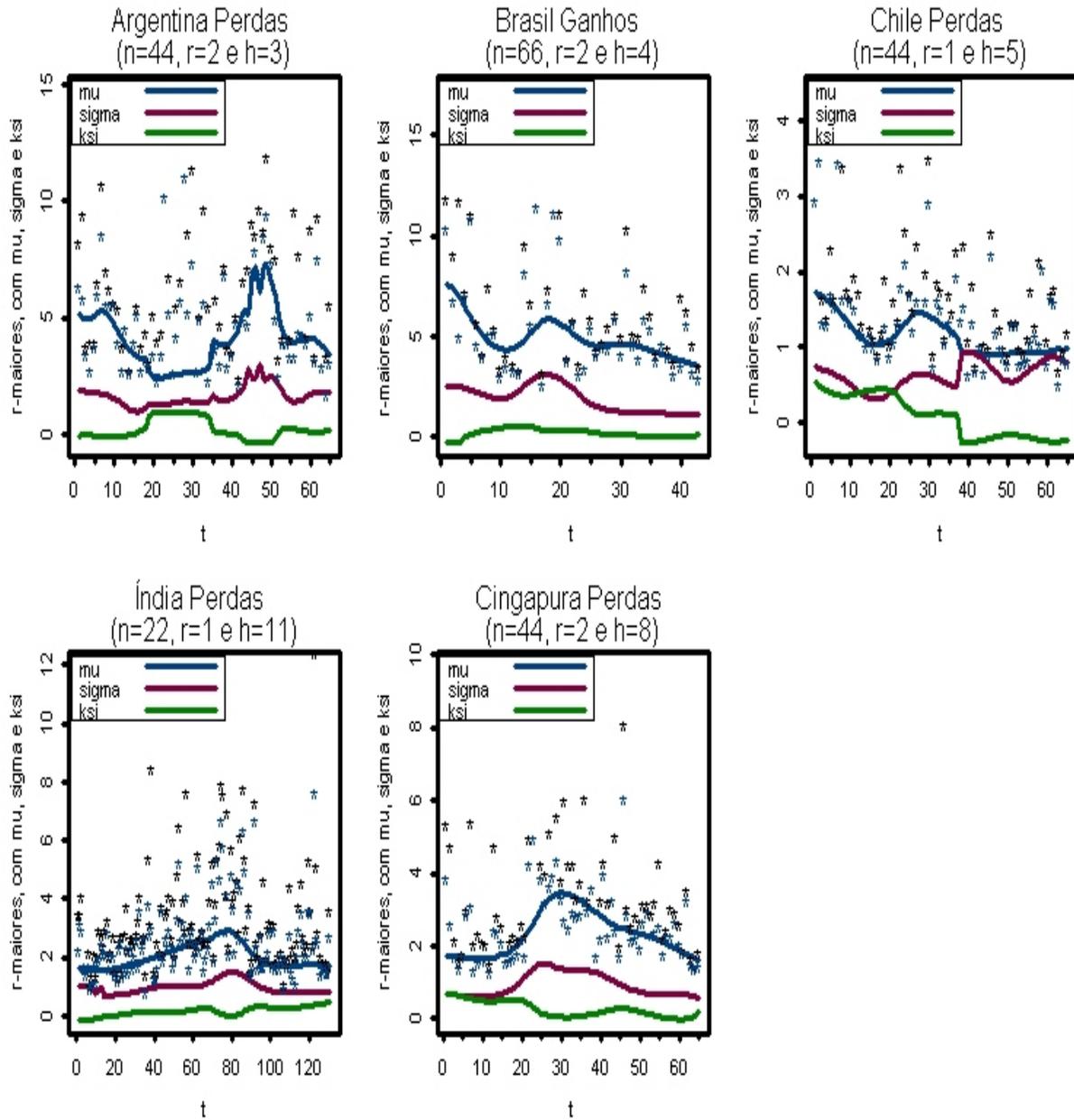


Figura 6.20: *QQ plots* despadrionizados da k -ésima maior, $k = 1$, ajustada pelo modelo r -maiores local com largura da janela h para as séries de ganhos dos blocos de tamanho n de cada país.

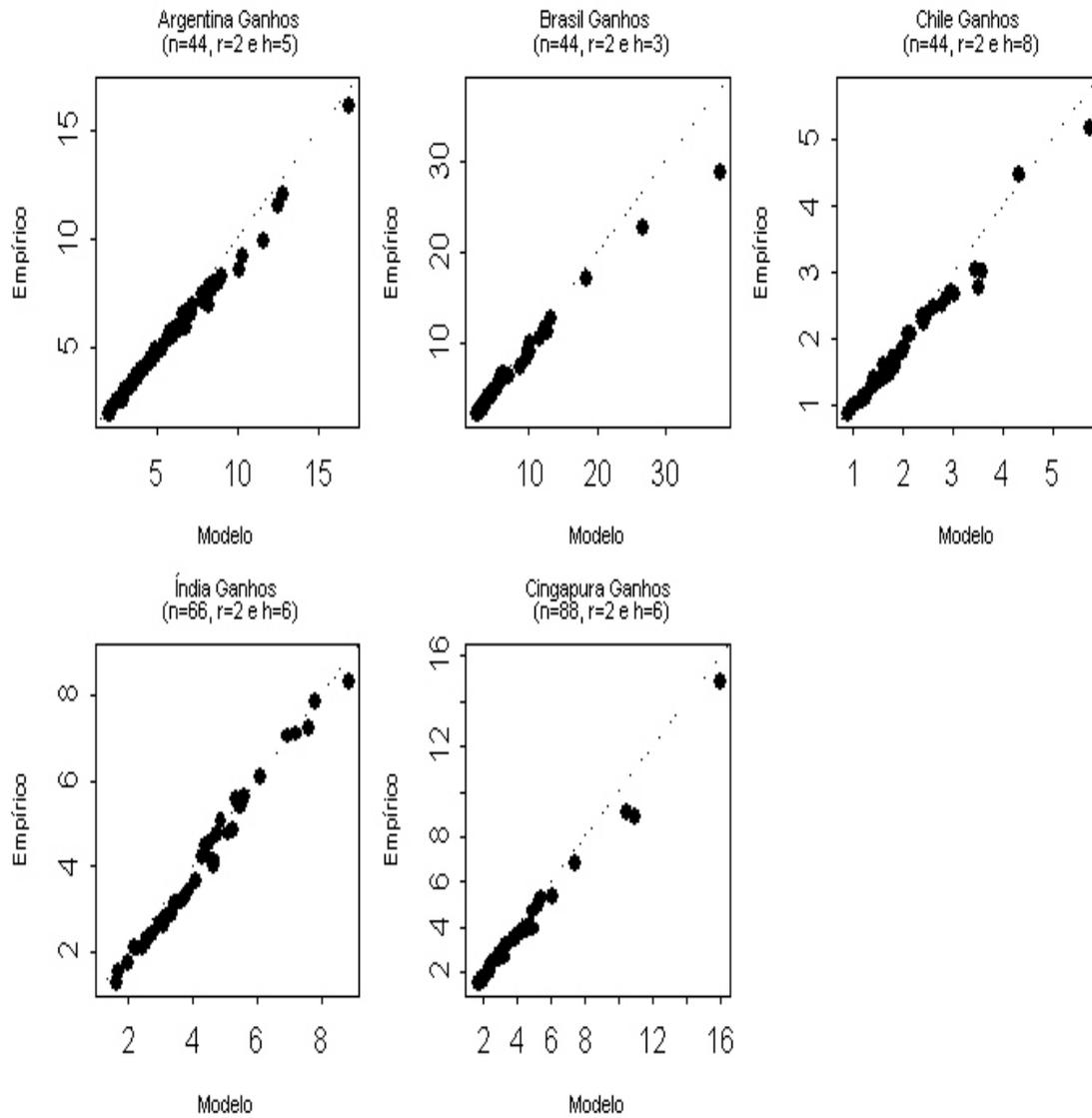


Figura 6.21: *QQ plots* despadronizados da k -ésima maior, $k = 1$, ajustada pelo modelo r -maiores local com largura da janela h para as séries de ganhos dos blocos de tamanho n de cada país.

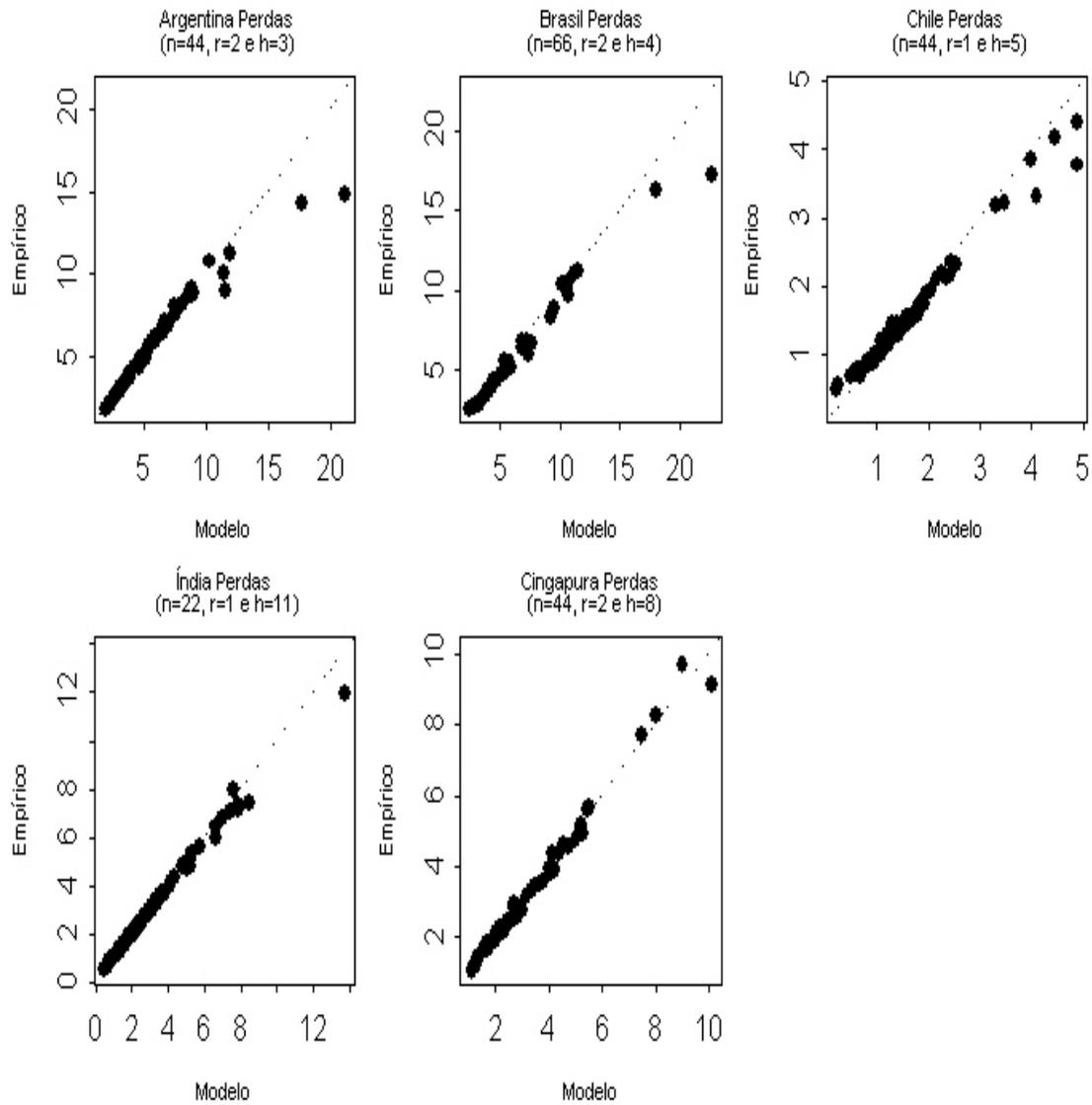
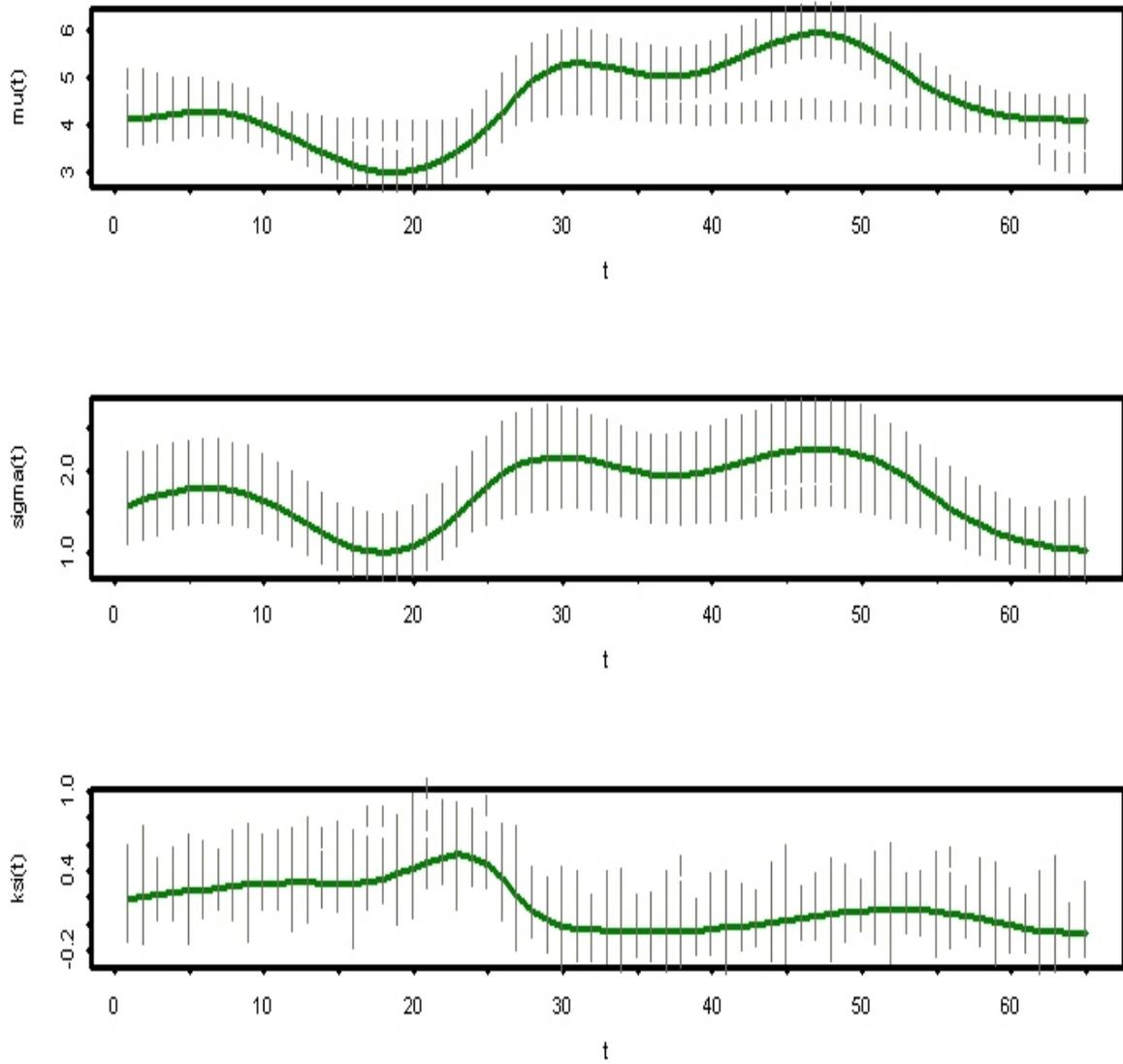


Figura 6.22: Faixas de variabilidade *bootstrap* com 95% de confiança para as estimativas dos parâmetros do modelo r -maiores local com largura da janela temporal $h = 5$ ajustado à série de ganhos dos blocos de tamanho $n = 44$ na Argentina.



6.3.2 *Backtests* das estimativas locais de VaR

Apesar do modelo local não se prestar a previsões e extrapolações, calculamos as estimativas de VaR obtidas a partir do ajuste local para os níveis de 5%, 1% e 0,1% e realizamos os *backtests* para a proporção de falhas e para o tempo entre falhas, a fim de verificar a qualidade das estimativas obtidas.

A Tabela 6.15 apresenta os resultados obtidos para o teste da proporção de falhas. Notamos que este teste rejeita a hipótese nula para as estimativas de $VaR_{5\%}$ das cinco séries de ganhos e perdas. Para as estimativas de $VaR_{1\%}$, o teste rejeita a hipótese nula para as estimativas locais obtidas para a série de perdas no Chile e aceita as estimativas locais de todas as demais séries para este nível de VaR. Já para as estimativas de $VaR_{0,1\%}$, o teste rejeita a hipótese nula apenas para as estimativas locais obtidas para as séries de perdas na Argentina e no Chile, aceitando todas as demais estimativas locais de $VaR_{0,1\%}$.

Examinando a Tabela 6.16, notamos que o teste do tempo entre falhas rejeitou a hipótese nula para todas as estimativas de $VaR_{5\%}$ e $VaR_{1\%}$ das cinco séries de ganhos e perdas. Para as estimativas de $VaR_{0,1\%}$, o teste aceitou a hipótese nula para todos os ajustes r -maiores das séries de ganhos e perdas nos cinco países.

Como dito na seção anterior, a não validação das estimativas de $VaR_{5\%}$ e $VaR_{1\%}$ não nos aflige muito, o mesmo não pode ser dito em relação às estimativas de $VaR_{0,1\%}$, que são nosso objetivo principal.

Os resultados acima mostram que o modelo r -maiores local parece conseguir lidar melhor com os *clusters* de volatilidade que o modelo global, mas, para tanto, torna-se muito conservador nas estimativas de $VaR_{0,1\%}$ para as séries de perdas nos mercados argentino e chileno, sendo estas estimativas rejeitadas no teste de proporção de falhas, pois o número de falhas a elas associado foi nulo quando o esperado seria aproximadamente 3.

Tabela 6.15: Resultados do *backtest* para a proporção de falhas das estimativas de VaR_α obtidas a partir dos ajustes do modelo r -maiores local para os blocos de tamanho n .

<i>Ganhos</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,1\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2, h = 5$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2, h = 3$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2, h = 8$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2, h = 6$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2, h = 6$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Perdas</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,1\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2, h = 3$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>r</i>
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2, h = 4$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1, h = 5$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1, h = 11$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2, h = 8$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>

Convenção utilizada: a: aceita-se H_0 , e r: rejeita-se H_0 .

Tabela 6.16: Resultados do *backtest* para o tempo entre falhas das estimativas de VaR_α obtidas nos ajustes do modelo r -maiores local para os blocos de tamanho n .

<i>Ganhos</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,01\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2, h = 5$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2, h = 3$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2, h = 8$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2, h = 6$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2, h = 6$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Perdas</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,01\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2, h = 3$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2, h = 4$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1, h = 5$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1, h = 11$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2, h = 8$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>

Convenção utilizada: a: aceita-se H_0 , e r: rejeita-se H_0 .

6.4 Ajuste do modelo r -maiores com estrutura paramétrica no tempo

Nesta seção vamos tentar identificar uma classe apropriada de modelos paramétricos que possa explicar as variações sistemáticas no tempo apontadas pelo modelo local.

Examinando as Figuras 6.18 e 6.19, notamos que, com relação à locação, parece haver uma tendência temporal crescente para a série de ganhos extremos na Argentina e uma tendência temporal decrescente nas séries de ganhos extremos do Brasil e do Chile. Para as séries de ganhos extremos na Índia e em Cingapura parece haver uma combinação de componentes linear e quadrática na locação. No caso de perdas extremas, para a série brasileira, por exemplo, há indícios de tendência temporal decrescente na locação e na escala.

A exemplo da abordagem dada na seção anterior, vamos utilizar modelos que incorporem parametrizações para a estrutura temporal entre blocos, mas que são localmente (dentro do blocos) constantes nos três parâmetros.

6.4.1 Estimação, escolha e diagnóstico do modelo

Começamos investigando, para cada série específica, algumas possibilidades de estrutura paramétrica no tempo, com base nas observações feitas a partir das Figuras 6.18 e 6.19. Analisamos, então, a significância de cada parâmetro estimado. Depois, comparamos, os modelos com estrutura propostos para cada série entre si, conservando ao final aquele apontado pelo critério AIC. Por último, comparamos o modelo com estrutura conservado e o modelo global, usando o teste da razão de verossimilhanças. A análise completa não será mostrada aqui. Daqui por diante, nos referiremos aos modelos com estrutura temporal aceitos no teste da razão de verossimilhanças, após passar pelas etapas descritas acima, como parametrizações temporais significativas.

A Tabela 6.17 apresenta as parametrizações do modelo r -maiores selecionadas para cada série. Observamos que para seis séries (mais especificamente, ganhos na Índia e em Cingapura, e perdas na Argentina, no Chile, na Índia e em Cingapura) o modelo conservado foi o modelo r -maiores global (vetor de parâmetros constante no tempo). Vale ressaltar, também, que em nenhuma das séries estudadas foi encontrada uma parametrização temporal significativa para o parâmetro de forma. Para a série de ganhos brasileiros o critério AIC apontou a função de ligação exponencial para a escala como sendo a melhor opção. Esta função de ligação garante que $\hat{\sigma}$ seja positivo para todos os valores de t .

As estimativas dos parâmetros e erros-padrão (entre parênteses) do modelo r -maiores parametrizado (conforme a Tabela 6.17) ajustado às séries de ganhos e perdas dos cinco países estão relacionados na Tabela 6.18.

A Figura 6.23 apresenta as estimativas do parâmetro de locação μ , obtidas pelos ajustes do modelo r -maiores com parametrização temporal, comparadas às r -maiores estatísticas de ordem e às estimativas obtidas pelo modelo r -maiores local.

Para verificar se o modelo parametrizado fornece um ajuste razoável para os dados, vamos utilizar o *qq plot* padronizado descrito na Seção 4.1. A Figura 6.24 apresenta os *qq plots* padronizados para a k -ésima maior, quando $k = 1$. Notamos que não há evidências de que o ajuste não esteja bom.

As estimativas de VaR_α para $\alpha = 5\%$, 1% e $0,01\%$, obtidas a partir do ajuste do

modelo r -maiores parametrizado no tempo, são mostradas na figura 6.25, em comparação às r -maiores estatísticas de ordem e às estimativas obtidas pelo ajuste do modelo local.

Tabela 6.17: Parametrizações para o modelo r -maiores conservadas, onde t é o índice de bloco que varia de 1 a m .

<i>Ganhos</i>	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\xi(t)$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2, m = 65$)	$\mu_0 + \mu_1 t$	σ_0	ξ_0
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2, m = 65$)	$\mu_0 + \mu_1 t$	$\exp(\sigma_0 + \sigma_1 t)$	ξ_0
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2, m = 43$)	$\mu_0 + \mu_1 t$	$\sigma_0 + \sigma_1 t$	ξ_0
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2, m = 43$)	μ_0	σ_0	ξ_0
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2, m = 32$)	μ_0	σ_0	ξ_0
<i>Perdas</i>	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\xi(t)$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2, m = 65$)	μ_0	σ_0	ξ_0
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2, m = 43$)	$\mu_0 + \mu_1 t$	σ_0	ξ_0
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1, m = 65$)	μ_0	σ_0	ξ_0
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1, m = 131$)	μ_0	σ_0	ξ_0
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2, m = 65$)	μ_0	σ_0	ξ_0

Tabela 6.18: Estimativas dos parâmetros e erros-padrão (entre parênteses) do modelo r -maiores ajustado às séries de ganhos e perdas dos cinco países. O modelo é parametrizado conforme a Tabela 6.17.

<i>Ganhos</i>	$\hat{\mu}_0$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\xi}_0$	$\hat{\xi}_1$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	4,048 (0,30)	0,013 (0,01)	1,748 (0,15)	– –	0,152 (0,08)	– –
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2$)	6,030 (0,48)	–0,046 (0,01)	1,345 (0,18)	–0,025 (0,00)	0,286 (0,09)	– –
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2$)	2,250 (0,19)	–0,026 (0,01)	0,844 (0,14)	–0,013 (0,00)	0,094 (0,10)	– –
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2$)	3,480 (0,19)	– –	1,297 (0,12)	– –	0,038 (0,10)	– –
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2$)	3,106 (0,21)	– –	1,276 (0,18)	– –	0,303 (0,12)	– –
<i>Perdas</i>	$\hat{\mu}_0$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\xi}_0$	$\hat{\xi}_1$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	4,588 (0,24)	– –	2,009 (0,17)	– –	0,142 (0,09)	– –
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2$)	6,726 (0,77)	–0,077 (0,02)	3,130 (0,54)	–0,051 (0,02)	0,196 (0,12)	– –
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 2$)	1,096 (0,07)	– –	0,467 (0,06)	– –	0,317 (0,12)	– –
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 2$)	1,925 (0,10)	– –	0,987 (0,08)	– –	0,239 (0,08)	– –
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2$)	2,435 (0,13)	– –	1,081 (0,11)	– –	0,281 (0,10)	– –

Figura 6.23: Estimativas de μ (local *versus* trend linear) obtidas pelos ajustes r -maiores para as séries de ganhos e perdas dos blocos de tamanho n .

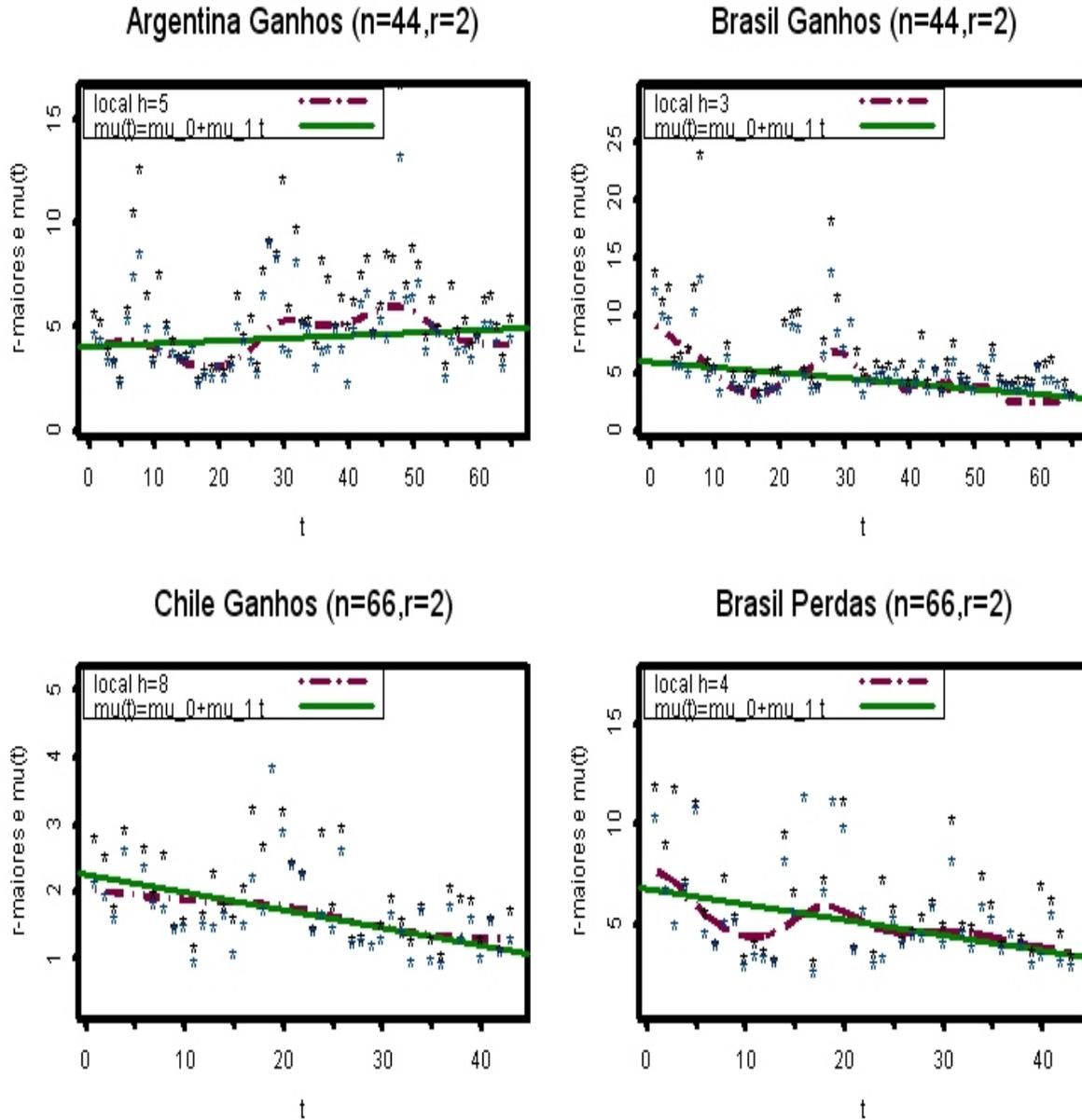


Figura 6.24: *QQ plots* padronizados para os ajustes r -maiores com parametrização temporal para as séries de ganhos e perdas dos blocos de tamanho n .

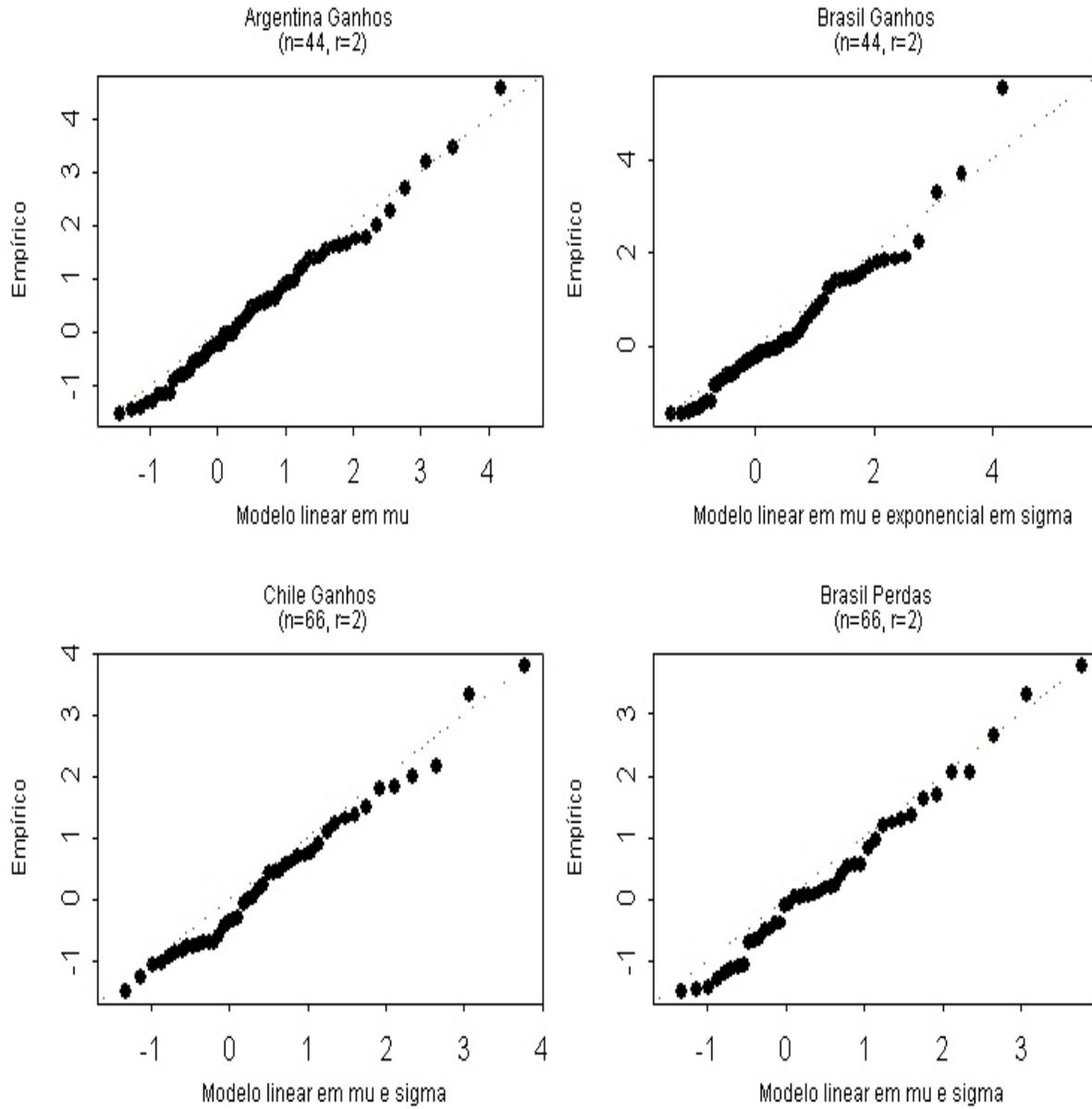
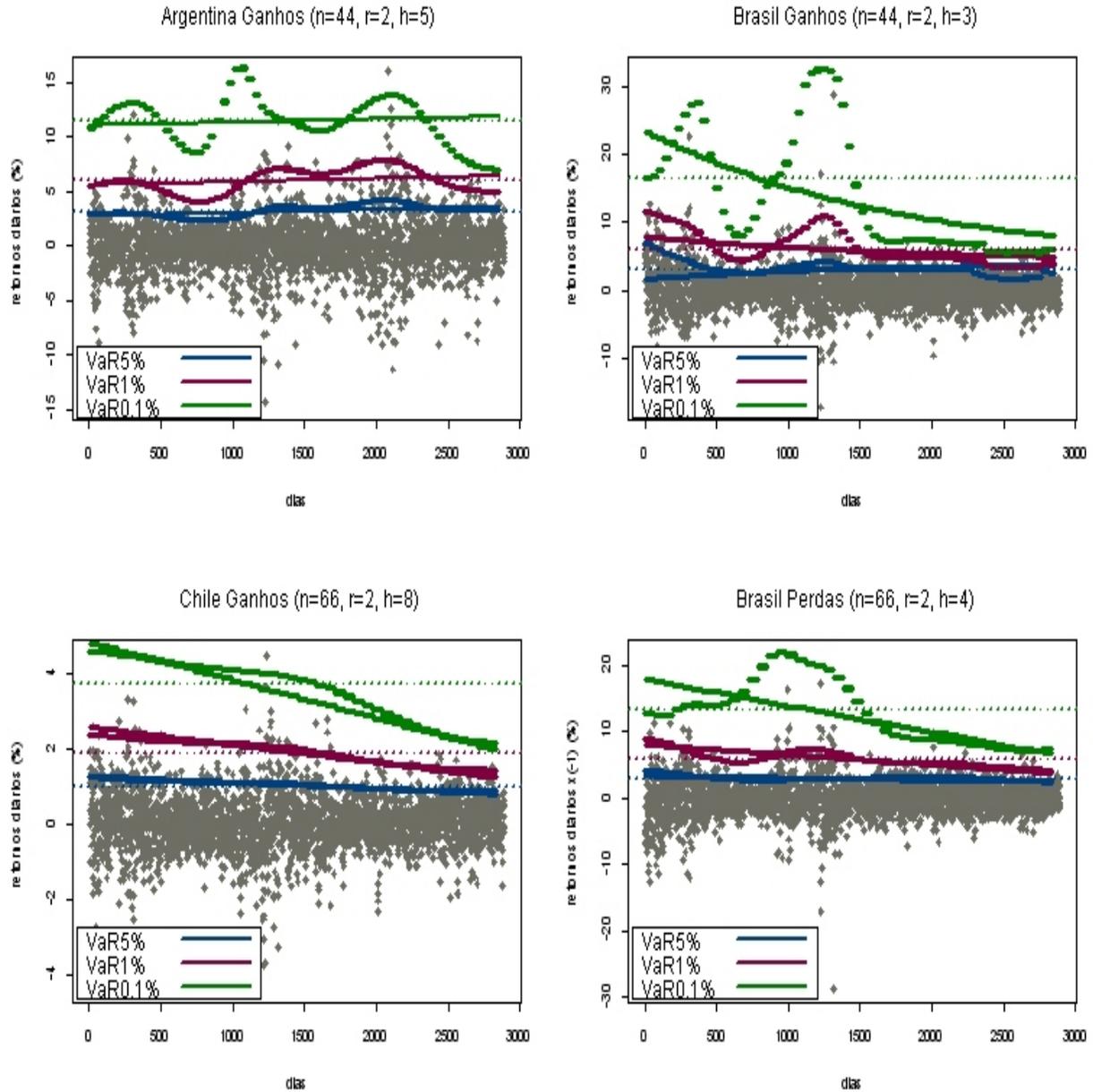


Figura 6.25: Estimativas de VaR (local *versus* trend parametrizada) obtidas pelos ajustes r -maiores para as séries de ganhos e perdas dos blocos de tamanho n .



6.4.2 *Backtests* das estimativas de VaR

Calculamos as estimativas de VaR obtidas a partir do ajuste r -maiores com estrutura temporal paramétrica para os níveis de 5%, 1% e 0,1% e realizamos os *backtests* para a proporção de falhas e para o tempo entre falhas, a fim de verificar a qualidade das estimativas obtidas. Cabe ressaltar que, para as séries de ganhos na Índia e Cingapura e de perdas na Argentina, Chile, Índia e Cingapura, as parametrizações temporais testadas não foram significativas, preferindo-se o modelo global.

A Tabela 6.19 apresenta os resultados obtidos para o teste da proporção de falhas. Notamos que este teste rejeita a hipótese nula para as estimativas de $VaR_{5\%}$ e $VaR_{1\%}$ das quatro séries. Já para as estimativas de $VaR_{0,1\%}$, o teste aceita a hipótese nula para as quatro estimativas obtidas.

Examinando a Tabela 6.20, notamos que o teste do tempo entre falhas rejeita a hipótese nula para todas as estimativas de $VaR_{5\%}$ e $VaR_{1\%}$ das quatro séries. Para as estimativas de $VaR_{0,1\%}$, o teste rejeitou a hipótese nula apenas para o ajuste r -maiores com parametrização temporal da série de ganhos no Chile.

Como dito nas seções anteriores, a não validação das estimativas de $VaR_{5\%}$ e $VaR_{1\%}$ não nos aflige muito, o mesmo não podendo ser dito em relação à estimativa de $VaR_{0,1\%}$. Contudo, no caso específico da série chilena de ganhos, a estimativa de $VaR_{0,1\%}$ obtida a partir do modelo r -maiores global foi validada em ambos *backtests*.

Os resultados das tabelas 6.19 e 6.20 mostram que o modelo r -maiores com parametrização temporal parece conseguir lidar melhor com os *clusters* de volatilidade da série argentina de ganhos, que o modelo global.

O problema de se obter estimativas de $VaR_{0,1\%}$ que sejam validadas em ambos os *backtests* permanece em aberto para as séries de ganhos em Cingapura e perdas no Chile e em Cingapura, pois não foram obtidas parametrizações temporais significativas. Além disso, as estimativas de $VaR_{0,1\%}$ obtidas para o ajuste r -maiores global e r -maiores global incorporando θ também não foram validadas.

Tabela 6.19: Resultados do *backtest* para a proporção de falhas das estimativas de VaR_α obtidas a partir dos ajustes do modelo r -maiores com estrutura temporal paramétrica para os blocos de tamanho n . O modelo é parametrizado conforme a Tabela 6.17.

<i>Ganhos</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,1\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2$)	—	—	—
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2$)	—	—	—
<i>Perdas</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,1\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	—	—	—
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1$)	—	—	—
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1$)	—	—	—
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2$)	—	—	—

Convenção utilizada: a: aceita-se H_0 ; e r: rejeita-se H_0 .

6.5 Validação dos modelos

As Tabelas 6.21 e 6.22 apresentam um resumo dos resultados dos *backtests* para as três abordagens do modelo r -maiores apresentadas nas seções anteriores. Notamos que a questão de se obter estimativas de $VaR_{0,1\%}$ que sejam aceitas em ambos os *backtests* permanece em aberto para as séries de perdas no Chile e em Cingapura, pois as estimativas obtidas a partir do ajuste r -maiores global e da incorporação de θ ao ajuste r -maiores global não foram validadas e, além disso, não foram encontradas parametrizações temporais significativas que pudessem ser testadas. Para as demais séries, obtivemos ao menos uma estimativa de $VaR_{0,1\%}$ validada em ambos *backtests*.

Para verificar se os modelos utilizados permaneceriam válidos com a atualização das séries utilizadas, incorporamos cerca de 230 observações relativas ao período de 01/02/2005 a 31/12/2005 e ajustamos novamente os mesmos modelos ajustados ao longo deste capítulo aos dados atualizados. As novas estimativas obtidas para os parâmetros

Tabela 6.20: Resultados do *backtest* para o tempo entre falhas das estimativas de VaR_α obtidas nos ajustes do modelo r -maiores local para os blocos de tamanho n .

<i>Ganhos</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,01\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>r</i>
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2$)	—	—	—
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2$)	—	—	—
<i>Perdas</i>	$VaR_{5\%}$	$VaR_{1\%}$	$VaR_{0,01\%}$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	—	—	—
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>r</i>	<i>r</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1$)	—	—	—
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1$)	—	—	—
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2$)	—	—	—

Convenção utilizada: a: aceita-se H_0 ; e r: rejeita-se H_0 .

do modelo global e para os modelos com parametrizações temporais são estáveis, no sentido de pertencer aos intervalos de confiança ao nível de 95% para as estimativas obtidas com os dados originais, demonstrando que nossos resultados permanecem válidos para a atualização feita. Os resultados obtidos para os ajustes dos dados atualizados são apresentados nas Tabelas 6.23 e 6.24.

Tabela 6.21: Resultados do *backtest* para a proporção de falhas das estimativas de $VaR_{0,1\%}$ obtidas a partir dos ajustes do modelo r -maiores global, global + θ , local e com parametrização temporal (*trend*).

<i>Ganhos</i>	<i>Global</i>	<i>Global + θ</i>	<i>Local</i>	<i>Trend</i>
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	—
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2$)	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	—
<i>Perdas</i>	<i>Global</i>	<i>Global + θ</i>	<i>Local</i>	<i>Trend</i>
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>a</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	—
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1$)	<i>a</i>	<i>r</i>	<i>r</i>	—
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1$)	<i>a</i>	<i>r</i>	<i>a</i>	—
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>a</i>	<i>r</i>	<i>a</i>	—

Convenção utilizada: a: aceita-se H_0 ; e r: rejeita-se H_0 .

Tabela 6.22: Resultados do *backtest* para a proporção de tempo entre falhas das estimativas de $VaR_{0,1\%}$ obtidas a partir dos ajustes do modelo r -maiores global, global + θ , local e com parametrização temporal (*trend*).

<i>Ganhos</i>	<i>Global</i>	<i>Global + θ</i>	<i>Local</i>	<i>Trend</i>
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>r</i>
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	—
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	—
<i>Perdas</i>	<i>Global</i>	<i>Global + θ</i>	<i>Local</i>	<i>Trend</i>
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	—
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2$)	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>a</i>
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	—
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	—
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2$)	<i>r</i>	<i>a</i>	<i>a</i>	—

Convenção utilizada: a: aceita-se H_0 ; e r: rejeita-se H_0 .

Tabela 6.23: Estimativas dos parâmetros (μ, σ, ξ) , do modelo r -maiores global ajustado aos ganhos e perdas dos blocos de tamanho n dos retornos diários de cada país no período 31/12/1993 a 31/12/2005 (dados atualizados).

<i>Séries</i>	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\xi}$
Ganhos			
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	4,365	1,717	0,166
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2$)	4,206	1,762	0,435
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2$)	1,614	0,570	0,185
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2$)	3,333	1,254	0,084
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2$)	2,971	1,296	0,274
Perdas			
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	4,416	1,937	0,175
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2$)	4,662	1,909	0,327
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 1$)	1,125	0,474	0,270
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 1$)	1,893	0,953	0,243
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2$)	2,368	1,085	0,248

Tabela 6.24: Estimativas dos parâmetros do modelo r -maiores ajustado às séries de ganhos e perdas dos cinco países no período 31/12/1993 a 31/12/2005 (dados atualizados). O modelo é parametrizado conforme a Tabela 6.17.

<i>Ganhos</i>	$\hat{\mu}_0$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\xi}_0$	$\hat{\xi}_1$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	4,113	0,007	1,705	–	0,173	–
<i>Bra</i> ($n = 44, r = 2$)	5,859	–0,042	1,309	–0,025	0,262	–
<i>Chi</i> ($n = 66, r = 2$)	2,125	–0,020	0,797	–0,011	0,078	–
<i>Ind</i> ($n = 66, r = 2$)	3,333	–	1,254	–	0,084	–
<i>Cng</i> ($n = 88, r = 2$)	2,971	–	1,296	–	0,274	–
<i>Perdas</i>	$\hat{\mu}_0$	$\hat{\mu}_1$	$\hat{\sigma}_0$	$\hat{\sigma}_1$	$\hat{\xi}_0$	$\hat{\xi}_1$
<i>Arg</i> ($n = 44, r = 2$)	4,416	–	1,937	–	0,175	–
<i>Bra</i> ($n = 66, r = 2$)	6,551	–0,069	3,058	–0,050	0,149	–
<i>Chi</i> ($n = 44, r = 2$)	1,125	–	0,474	–	0,270	–
<i>Ind</i> ($n = 22, r = 2$)	1,893	–	0,953	–	0,243	–
<i>Cng</i> ($n = 44, r = 2$)	2,368	–	1,085	–	0,248	–

Capítulo 7

Conclusão

A escolha do melhor modelo é uma aspecto chave na análise estatística. Em geral, a escolha do modelo é um processo iterativo baseado no conhecimento do assunto objeto de análise e em critérios finais de seleção. Em finanças, quando o objetivo é se prevenir contra grandes perdas ou auferir grandes ganhos futuros, a escolha do melhor modelo deve se basear na sua capacidade de estimar os quantis extremos da distribuição marginal do processo. Na prática, os administradores de risco usam um método denominado *backtest* para validar os modelos.

O objetivo desta dissertação foi avaliar como se comporta o modelo para as r -maiores estatísticas de ordem na estimação do ValoR em Risco (VaR) não condicional para as séries de ganhos e perdas extremos dos retornos diários da bolsa de valores de cinco países que são considerados mercados emergentes.

Os dois *backtests* utilizados para avaliar a qualidade das estimativas de VaR_α foram o teste da proporção de falhas e o teste do tempo entre falhas.

Adotamos três abordagens para o modelo r -maiores: a primeira supunha ser o vetor de parâmetros constante no tempo (modelo global); a segunda admitia o vetor de parâmetros como uma função suave, mas não-paramétrica no tempo (modelo local); e a terceira tentava obter formas paramétricas para a estrutura temporal dos parâmetros (modelo com parametrização temporal).

O método de estimação utilizado foi o da máxima verossimilhança devido a suas boas propriedades, que permitem o cálculo do erro-padrão associado às estimativas de VaR

obtidas a partir do modelo global e do modelo com parametrização temporal, bem como a realização do teste da razão de verossimilhanças para comparar modelos encaixados.

A aplicação do modelo r -maiores resultou em estimativas de VaR mais precisas que as obtidas quando se utiliza apenas os máximos, contudo, há que se ter cuidado com o número de estatísticas de ordem a ser inserido no modelo, pois se há evidência de instabilidade nas estimativas dos parâmetros a partir de um certo valor de r , isto põe em dúvida a validade do modelo, pelo menos, para valores superiores a este valor. Foi o que ocorreu nas séries de perdas extremas no Chile e em Cingapura, nas quais a instabilidade do parâmetro de locação impossibilitou a incorporação da segunda maior estatística de ordem ao modelo. Em todas as demais séries, utilizamos $r = 2$.

Os *backtests* utilizados não conseguiram apontar o melhor modelo geral. Nas três abordagens, observamos que nossos modelos, em geral, não se comportam bem para níveis de risco baixos ou moderados ($VaR_{5\%}$ ou $VaR_{1\%}$, por exemplo), mas apenas para estimação de medidas de risco associadas a níveis mais extremos, tal como o $VaR_{0,1\%}$, que, no nosso contexto, representa o evento que espera-se que ocorra em média uma vez a cada 1.000 dias, o que equivale a aproximadamente 4 anos.

Todas estimativas de $VaR_{0,1\%}$ obtidas pelo modelo global para as séries em estudo foram validadas pelo teste da proporção de falhas, mas o mesmo não ocorreu com o teste do tempo entre falhas. A rejeição da hipótese nula no teste do tempo entre falhas indicou haver *clusters* de volatilidade nas séries de ganhos da Argentina e de Cingapura e nas de perdas do Chile e de Cingapura e que nosso modelo não lida adequadamente com esta característica. Tentamos incorporar o índice extremal θ à estimativa de VaR, a fim de modelar a heteroscedasticidade. Obtivemos estimativas de $VaR_{0,1\%}$ aceitas no teste do tempo entre falhas em todas as séries, mas o teste da proporção de falhas passou a rejeitar as estimativas de $VaR_{0,1\%}$ obtidas para as séries de perdas da Argentina, do Chile, da Índia e de Cingapura. Ou seja, obteve-se uma estimativa de $VaR_{0,1\%}$ para a série de ganhos na Argentina validada por ambos *backtests*, mas o problema permaneceu não resolvido nas séries de perdas no Chile e de ganhos e perdas em Cingapura, pois, nestes casos, ou as estimativas não foram validadas pelo *backtest* para a proporção de falhas.

Apesar do modelo local ser puramente descritivo, não se prestando, portanto, a previsões ou extrapolações, calculamos as estimativas de VaR e realizamos os *backtests*. Para as estimativas de $VaR_{0,1\%}$, o teste da proporção de falhas rejeita a hipótese nula apenas para as estimativas locais obtidas para as séries de perdas na Argentina e no Chile, aceitando todas as demais estimativas. O teste do Tempo entre Falhas aceitou a hipótese nula para todas as estimativas de $VaR_{0,1\%}$. O resultado obtido mostra que o modelo r -maiores local parece conseguir lidar melhor com os *clusters* de volatilidade que o modelo global, mas, para tanto, torna-se muito conservador nas estimativas de $VaR_{0,1\%}$ obtidas para as séries de perdas nos mercados argentino e chileno; além disso, apresenta o inconveniente de não possibilitar previsões ou extrapolações.

Das parametrizações temporais testadas para cada uma das séries em estudo, os métodos utilizados para seleção do modelo indicaram que nas séries de ganhos na Índia e em Cingapura e perdas no Chile, na Índia e em Cingapura o modelo conservado deveria ser o com vetor de parâmetros constante no tempo, valendo portanto, nestes casos, os resultados para o modelo global. O teste da proporção de falhas aceitou a hipótese nula para todas as quatro estimativas de $VaR_{0,1\%}$ obtidas. O teste do tempo entre falhas, por sua vez, rejeitou a hipótese nula apenas para a estimativa de $VaR_{0,1\%}$ obtida para a série de ganhos no Chile. Os resultados mostram que o modelo r -maiores com parametrização temporal parece conseguir lidar com os *clusters* de volatilidade da série argentina de ganhos, a exemplo do ajuste do modelo global incorporando θ .

O problema de se obter estimativas de $VaR_{0,1\%}$ que sejam validadas em ambos os *backtests* permanece em aberto para as séries de perdas no Chile e em Cingapura, pois as estimativas obtidas a partir do ajuste r -maiores global e da incorporação de θ ao ajuste r -maiores global não foram validadas e, além disso, não foram encontradas parametrizações temporais significativas que pudessem ser testadas. Para as demais séries, obtivemos ao menos uma estimativa de $VaR_{0,1\%}$ validada em ambos *backtests*.

Para contornar o problema da dependência local, apontado no teste do tempo entre falhas, uma opção seria desclusterizar os dados, usando um algoritmo de desclusterização, e então aplicar o modelo r -maiores. A desclusterização é um mecanismo útil para lidar com as dependências locais, mas há desvantagens neste procedimento: a identificação de

clusters é frequentemente arbitrária; e informações extremas são descartadas.

Uma investigação mais detalhada sobre a estrutura temporal das séries de perdas no Chile e em Cingapura poderia apontar parametrizações temporais significativas. Cabe ressaltar, entretanto, que mudanças no tempo não necessariamente têm uma forma paramétrica específica e que a variabilidade natural dos extremos tende a mascarar as tendências ou outras formas de dependências temporais.

Uma sugestão para estudos futuros seria a utilização de verossimilhança penalizada no lugar da verossimilhança local, para a identificação de tendências. Desenvolvida no contexto de valores extremos por Chavez-Demoulin (1999) e Pauli e Coles (2001), a verossimilhança penalizada é uma metodologia mais flexível que permite admitir diferentes níveis de suavização para diferentes parâmetros.

Uma contribuição deste trabalho foi a incorporação das r -maiores estatísticas de ordem à estimação de VaR_α , que proporcionou um ganho de precisão nas estimativas obtidas, quando comparadas às obtidas usando apenas os máximos. Outra foi a adoção de métodos de verossimilhança local para a análise exploratória do comportamento dos extremos no tempo.

Vale ressaltar que os dados utilizados serviram apenas para uma investigação empírica sobre novas metodologias para o cálculo do VaR. Não era o objetivo deste trabalho fazer uma avaliação sobre os mercados emergentes. Um trabalho posterior poderia realizar uma análise compreensiva do risco nos mercados emergentes, ou das ações brasileiras, usando a metodologia proposta. Outra sugestão de aplicação seria o emprego da metodologia proposta no cálculo de outras medidas de risco, por exemplo, da perda (ou ganho) esperada dado que um certo VaR foi ultrapassado.

Apêndice

Testes Utilizados

Teste de Shapiro-Wilk (1965)

Para testar a normalidade das séries de retornos financeiros de cada país foi utilizado o teste Shapiro-Wilk.

A estatística teste é definida como

$$\frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

onde x_1, x_2, \dots, x_n são os valores das observações ordenadas. O vetor $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ é

$$a^T = \frac{m^T V^{-1}}{\sqrt{m^T V^{-1} V^{-1} m}},$$

onde m é o vetor dos valores esperados para as estatísticas de ordem da amostra de tamanho n de uma distribuição normal padrão. Aqui, V é a matriz de variância-covariância das estatísticas de ordem, T denota o operador de transposição e V^{-1} é a inversa de V . Então, a contém os valores esperados das estatísticas de ordem da normal padrão, ponderados pela matriz de variância-covariância e normalizados tais que $a^T a = 1$. Valores pequenos para o p -valor associado indicam que a hipótese nula de normalidade provavelmente não é verdadeira.

Teste KPSS (Kwiatkowski *et al.*,1992)

Para testar a estacionariedade das séries de retornos financeiros de cada país foi utilizado o teste KPSS. Há dois casos distintos, com ou sem tendência linear. O modelo de regressão com tendência linear tem a forma:

$$X_t = c + \mu t + k \sum_{i=1}^t \xi_i + \eta_t, \quad (1)$$

com η_t estacionário e ξ_t iid com média zero e variância 1. Neste caso, para $k \neq 0$ o processo é integrado e para $k = 0$ o processo apresenta uma tendência linear determinística (*trend-stationary*). A hipótese nula é $H_0 : k = 0$ e a hipótese alternativa é $H_1 : k \neq 0$.

Sob H_0 , a regressão (1) é ajustada pelo método dos mínimos quadrados, obtendo-se os resíduos $\hat{\eta}_t$. Usando esses resíduos, a soma parcial

$$S_t = \sum_{i=1}^t \hat{\eta}_i$$

é calculada.

A estatística teste é definida como

$$\frac{\sum_{t=1}^n S_t^2}{n^2 \hat{w}_T^2},$$

onde

$$\hat{w}_T^2 = \hat{\sigma}_\eta^2 + 2 \sum_{\tau=1}^T \left(1 - \frac{\tau}{T-1}\right) \hat{\gamma}_\tau$$

é o estimador da densidade espectral na frequência zero, quando $\hat{\sigma}_\eta^2$ é estimador da variância de η_t , e $\hat{\gamma}_\tau = \frac{1}{n} \sum_{t=\tau+1}^n \hat{\eta}_t \hat{\eta}_{t-\tau}$ é o estimador da covariância.

O problema deste teste consiste em determinar o ponto de referência T : para T muito pequeno, o teste é viciado, quando há autocorrelação, e, para T muito grande, o teste perde o poder.

Teste de Ljung-Box (1978)

Para verificar a existência de autocorrelação nas séries de retornos financeiros de cada país, foi utilizado o teste Ljung-Box.

O teste Ljung-Box é um teste assintótico para a autocorrelação da série baseado em um número fixo de *lags*. Em geral basta utilizar os 10 ou 15 primeiros *lags*.

O teste pode ser definido formalmente da seguinte maneira:

H_0 : os dados são não correlacionados, contra

H_1 : os dados são correlacionados.

A estatística teste é

$$n(n+2) \sum_{j=1}^h \frac{\hat{\rho}^2(j)}{n-j},$$

onde n é o tamanho da amostra, $\hat{\rho}(j)$ é a autocorrelação estimada no *lag* j e h é o número de *lags* testado.

A hipótese de inexistência de autocorrelação é rejeitada se a estatística teste calculada for maior que $\chi_{1-\alpha;h}^2$.

Teste modificado R/S de Lo (1991)

Para verificar a existência de memória longa nas séries de retornos financeiros de cada país, foi utilizado o teste modificado R/S de Lo. Existem inúmeros testes para detectar a existência de memória longa em séries temporais.

A hipótese nula é H_0 : não há memória longa e a hipótese alternativa é H_1 : há memória longa.

A estatística teste RS_T é a amplitude das somas parciais dos desvios da média rescalonados pelo desvio padrão.

$$\frac{1}{\sqrt{S_{N,q}^2}} \left[\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}_N) - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (X_j - \bar{X}_N) \right],$$

onde N representa o tamanho da amostra, \bar{X}_N a média amostral da variável X e $S_{N,q}^2$ é estimador HAC (*heterocedastic and autocorrelation consistent*) para a variância, $\sigma_X^2 = cov(X_j, X_0)$, dado por:

$$S_{N,q}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (X_j - \bar{X}_N)^2 + 2 \sum_{j=1}^q w_j(q) \gamma_j,$$

onde γ_j representa as autocovariâncias amostrais e $w_j(q) = \frac{1-j}{q+1}$ representa os pesos aplicados às autocovariâncias amostrais no *lag* j para responder a uma possível dependência de curta amplitude (*short range dependence*) até a q -ésima ordem. Lo (1991) mostrou que a estatística teste é consistente contra uma classe de processos estacionários de memória longa alternativos.

Referências Bibliográficas

- [1] Abramovitz, L. *Alguns Resultados sobre a Estimação de Medidas de Risco usando Modelagem GARCH e a Teoria dos Valores Extremos*, Dissertação de Mestrado, IM-UFRJ, 2001.
- [2] Akaike, H. *Information theory and an extension of the maximum likelihood principle*, In 2nd International Symposium on Information Theory (Edited by B.N.Petrov and F.Csáki), 267-281, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973.
- [3] Berkowitz, J. *Evaluating the Forecasts of Risk Models*, Federal Reserve Board, 1998.
- [4] Bickel, P.J., and Docksum, K.A. *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*, 1977.
- [5] Bollerslev, T. *Generalized autoregressive conditional heterocedasticity*, Journal of Econometrics,31, 307-327, 1986.
- [6] Bowman, A.W., and Azzalini, A. *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis: The Kernel Approach with S-Plus Illustrations*, Oxford University Press, Oxford, 1997
- [7] Butler, A., Flather, R.A., Heffernan, J.E. and Tawn, J.A. *Local estimation of extremal trends in North Sea surge elevations*, Lancaster University, UK, 2005.
- [8] Cavusgil, S.T. *Measuring The Potential of Emerging Markets : An Indexing Approach*. Business Horizons, Vol. 40, Number 1, 87-91, 1997.
- [9] Chavez-Demoulin, V. *Two Problems in Environmental Statistics: Capture-Recapture Analysis and Smooth Extremal Models*. PhD Thesis, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, Switzerland, 1999.

- [10] Chavez-Demoulin, V., Davison, A.C, and Mc Neil, A.J. *A point process approach to Value at Risk*. ETH Zentrion and Swiss Federal Institute of Technology, Switzerland, 2003.
- [11] Cleveland, W.S., and Devlin, S.J. *Locally weighted regression: an approach to regression analysis by local fitting.*, Journal of the American Statistical Association, 83, 596-610, 1988.
- [12] Coles, S.G., and Tawn, J.A. *Statistical methods for multivariate extremes: an application to structural design (with discussion)* Applied Sattistics, 43, 1-48, 1994.
- [13] Coles, S.G. *An Introduction to Statistical Modelling of Extreme Values*, Springer Series in Statistics, Springer, 2001.
- [14] Crnkovic, C. and Drachman, J. *Quality Control*, Risk 9, 139-143, 1996.
- [15] Danielsson,J., De Vries, C.G. *Value-at-Risk and Extreme Returns.*, Department of Economics, University of Iceland, 1997.
- [16] Dark, J. *Long Memory in Volatility of the Australian all Ordinaries Index and Share Prices Index Future*, Department of Econometrics and Business Statistics, Monash University, Australia, 2004.
- [17] Davison, A.C., and Hinkley, D.V. *Bootstrap Methods and Their Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [18] Davison, A.C., and Ramesh, N.I. *Local Likelihood smoothing of sample extremes*, Journal of the Royal Statistical Society Series B, 62, 191-208, 2000.
- [19] Diccio, T.J., and Romano, J.P. *A Review of Bootstrap Confidence Intervals*. Journal of the Royal Statistical Society Series B, 3, 338-354, 1988.
- [20] Duffie,D., and Pan, J. *An overview of Value at Risk*, The Journal of Derivatives, 4, 7-49, 1997.
- [21] Dupuis, D.J., and Field, C.A. *Robust Estimation of Extremes*, The Canadian Journal of Statistics, v.26, n.2, p.199-215, 1998.

- [22] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [23] Embrechts, P., *Extreme Value Theory: Potential and Limitations as an Integrated Risk Management Tool*, Department of Mathematik, ETH Zentrum, CH 8092, Zürich, 2000.
- [24] Flather, R.A., Smith, J.A., Richards, J.C., Bell, C., and Blackman, D.L., *Direct estimates of extreme storm surge elevations from a 40-year numerical model simulation and from observations*, The Global Atmosphere and Ocean System, 6, 165-176, 1998.
- [25] Fisher, R.A., and Tippett, L.H.C. *Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, n.24, p.180-190, 1928.
- [26] Gnedenko, B.V. *Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aléatoire*, Annals of Mathematics n.44,p.423-453, 1943.
- [27] Gomes, M.I. *An i -dimensional limiting distribution function of largest values and its relevance to statistical theory of extremes*, In Statistical Distributions in Scientific Work, n.6, p.389-410, 1981.
- [28] Gumbel, E.J. *Statistics of Extremes*, Columbia University Press, New York, 1958.
- [29] Hastie, T.J., and Loader, C. *Local regression: automatic kernel carpentry (with discussion)*, GStatistical Science, 8, 120-143, 1993.
- [30] Haas, M. *Backtesting - An Overview*, Group of Financial Engineering Research Center CAESAR, Bonn, 2000.
- [31] Hall, P., and Tajvidi, N. *Nonparametric Analysis of Temporal Trend When Fitting Parametric Models to Extreme-Value Data*, Statistical Science, 15, 153-167, 2000.
- [32] Hill, B.M. *A simple general approach to inference about the tail of the distribution*, Ann. Statist. 3 1163-1174, 1975.

- [33] Hosking, J.R.M., Wallis, J.R., and Wood, E.F. *Estimation of the generalized extreme value distribution by the method of probability weighted moments*. Technometrics, 27, 251-261, 1985.
- [34] Hosking, J.R.M., and Wallis, J.R. *Regional Frequency Analysis*. Cambridge University Press, 1997.
- [35] Hull, J. *Extreme values of non-stationary random sequences*, Journal of Applied Probability, 23, 937-950, 1987.
- [36] Hull, J., and White, A. *Value at Risk when daily changes in market variables are not normally distributed.*, The Journal of Derivatives, 5, 9-19, 1998.
- [37] Hüslér, J., and White, A. *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*, The Journal of Finance, 42, 281-300, 1986.
- [38] Jansen, D.W., and De Vries, C.G. *On the Frequency of Large Stock Returns: Putting Booms and Busts into Perspective*, The Review of Economics and Statistics, p.18-24, 1991.
- [39] Jenkinson, A.F. *The frequency distribution of the annual maximum (or minimum) values of meteorological events*, Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society 81, 158-172, 1955.
- [40] Kwiatkowski, D., Phillips, P.C.B., Schmidt, P., and Shin, Y. *Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root*, Journal of Econometrics, 54:159-178, 1992.
- [41] Kupiec, P. *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models*, Journal of Derivatives, 3, 73-84, 1995.
- [42] Leadbetter, M., Lindgren, G., and Rootzén, H. *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [43] Leadbetter, M. *Extremes and local dependence in stationary sequences*, Zeit, Wahrscheinl-theorie, 16, 291-396, 1983.

- [44] Lee, D., and Schmidt, P. *On the power of the KPSS test of stationarity against fractionally-integrated alternatives*, Journal of Econometrics, 73:285-302, 1996.
- [45] Ljung, G.M., and Box, G.E.P., *On a Measure of the Lack of Fit in Time Series Models*, Biometrika, 65, 297-303, 1978.
- [46] Lo, A., *Long term memory in stock market volatility*, Econometrica, 59, 1279-1313, 1991.
- [47] Longin, F.M., *The Asymptotic Distribution of Extreme Stock Market returns*, Journal of Business, n.63, p.383-408, 1996.
- [48] Longin, F.M. *From value at risk to stress testing: the extreme value approach*, Journal of Banking and Finances, n.24, p.1097-1130, 2000.
- [49] Lopez, J.A. *Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates*, Mimeo, Research and Market Analysis Group, Federal Reserve Bank of New York, 1998.
- [50] McNeil, A.J. *Estimating the Tails of Loss Severity Distributions Using Extreme Value Theory*, ASTIN Bulletin, 27, 1997: 117-137, 1997.
- [51] McNeil, A.J. *Calculating Quantile Risk Measures for Financial Return Series Using Extreme Value Theory*, Zurich: Department Mathematik, ETH Zentrum, 1998.
- [52] McNeil, A. J., and Frey, R. *Estimation of Tail-Related Risk Measures of Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach*, Journal of Empirical Finance, 7, 271-300, 2000.
- [53] Mendes, B.V.M. *Computing Robust Risk Measures in Emerging Equity Markets Using Extreme Value Theory*, Emerging Markets Quarterly, v.4, n.2, p.24-41, 2000.
- [54] Mendes, B.V.M., and Merkle, M. *Some remarks regarding Pitman closeness*, Relatório Técnico, n.142, IM-UFRJ, 2001.
- [55] Mendes, B.V.M. *Introdução à Análise de Eventos Extremos*, Rio de Janeiro: E-papers Serviços Editoriais Ltda., 2004.

- [56] Morettin, P.A., and Toloi, M.C. *Análise de Series Temporais*, ABE-Projeto Fisher, Ed. Edgard Blücher, São Paulo, 2004.
- [57] Pauli, F., and Coles, S.G. *Penalized Likelihood Inference in Extreme Value Analysis*, Journal of Applied Statistics, 28, 547-560, 2001.
- [58] Pickands, J. *The two-dimensional Poisson process and extreme processes*. J. Applied Probability, 745-756, 1971.
- [59] Pickands, *Statistical inference using extreme order statistics*, Ann. Statist., 3, 119-131, 1975.
- [60] Pirazzoli, P. *Maree estreme a Venezia (periodo 1972-1981)*, Acqua Aria, 10, 1023-1039, 1982.
- [61] Pirazzoli, P. *Flooding in Venice: a worsening problem* , In: E.C.F Bird and P. Fabri (Editors), Coastal Problems in Mediterranean Sea, Bologna, 1983.
- [62] Prescott, P., and Walden, A.T. *Maximum likelihood estimation of the parameters of the three-parameter generalized extreme value distribution from censored samples*, Journal of Statistical Computation and Simulation, 16, 241-250, 1980.
- [63] Reiss, R. D., and Thomas, M. *Statistical Analysis of Extreme Values*, Birkhäuser-Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1997.
- [64] Shapiro, S. S. and Wilk, M. B. *An analysis of variance test for normality (complete samples)*, Biometrika, 52, 3 and 4, pages 591-611, 1965.
- [65] Smith, R.L. *Maximum Likelihood Estimation in a Class of Nonregular Cases*, Biometrika, n.72, p.67-90, 1985.
- [66] Smith, R.L. *Extreme Value Theory based on the r largest annual events*, J. Hidrology, n.86, 27-43, 1986.
- [67] Smith, R.L. *Extreme value analysis of environmental times series: an example based on ozone data (with discussion)*, Statistical Science, n.4, 367-393, 1989.

- [68] Smith, R.L., Tawn, J. A., and Coles, S.G. *Markov chain models for threshold exceedances*, *Biometrika*, 84, 249-268, 1997.
- [69] Smith, R.L. *Measuring Risk with Extreme Value Theory*, Department of Statistics, University of North Carolina, Chapel Hill, 1999.
- [70] Smith, R.L. *Statistics of extremes, with applications in environment, insurance and finance*, Chapter 1 of *Extreme Values in Finance, Telecommunications and the Environment*, edited by B. Finkenstadt and H. Rootzen, Chapman and Hall/CRC Press, London, pp. 1-78, 2003.
- [71] Susmel, R. *Switching Volatility in Latin American Emerging Equity Markets*, *Emerging Market Quarterly*, v.2, n.1, p.44-56, 1998.
- [72] Tawn, J.A. *Bivariate extreme value theory: Model and estimation*, *Biometrika*, v.77, n.2, p.245-253, 1988.
- [73] Tibshirani, R.J. *Local Likelihood Estimation*, Ph.D Dissertation, Stanford University, 1984.
- [74] Tibshirani, R.J., and Hastie, T.J., *Local Likelihood Estimation*, *Journal of the American Statistical Association*, 82, 559-567, 1987.
- [75] Von Mises, R. *La distribution de la plus grande de n valeurs*, In *Selected Papers*, Volume II, p. 271-294, American Mathematical Society, 1954.
- [76] Weissman, I. *Estimation of parameters and large quantiles based on the k -largest observations*, *Journal of American Statistical Society*, v.73, 812-815, 1978.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)