

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO

PUC/SP

CARLA DOS SANTOS MORENO BATTAGLIOLI

**SISTEMAS LINEARES NA SEGUNDA SÉRIE DO ENSINO
MÉDIO: UM OLHAR SOBRE OS LIVROS DIDÁTICOS**

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

CARLA DOS SANTOS MORENO BATTAGLIOLI

SISTEMAS LINEARES NA SEGUNDA SÉRIE DO ENSINO
MÉDIO: UM OLHAR SOBRE OS LIVROS DIDÁTICOS

*Dissertação apresentada à Banca
Examinadora da Pontifícia Universidade
Católica de São Paulo, como exigência parcial
para obtenção do título de **MESTRE EM
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação
do(a) Prof(a). Dr(a). Barbara Lutaif Bianchini*

São Paulo

2008

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____ **Local e Data:** _____

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais Sidney (*in memoriam*) e Guiomar, que sempre incentivaram meus estudos; ao meu esposo Rene, pelo amoroso e incondicional apoio, principalmente nos momentos de desânimo; e aos meus filhos Bruna e Marco, que muitas vezes privaram-se de minha presença para que eu pudesse trabalhar nesta pesquisa. Sem vocês eu não teria realizado este sonho. Obrigada por existirem em minha vida.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por permitir que eu chegasse até aqui.

À Professora Doutora Barbara Lutaif Bianchini pelo trabalho de orientação desenvolvido com competência, paciência, dedicação, empenho e amizade.

Às Professoras Doutoras Ana Chiummo e Celina Aparecida Almeida Pereira Abar pelas valiosas críticas e sugestões que tanto enriqueceram este trabalho.

Aos professores do Programa de Ensino de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, por todo incentivo durante o curso.

Aos amigos do Mestrado Profissional, principalmente aos que fazem parte do grupo GPEA, pelo companheirismo e pelas sugestões durante todo o curso.

Agradeço também aos meus familiares que torceram por mim durante todo o percurso, e principalmente ao meu esposo e filhos, que em todos os momentos me incentivaram, demonstrando compreensão, carinho e respeito pelo meu trabalho.

A CAPES, pela bolsa de estudos que permitiu que eu desenvolvesse este trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo fazer uma análise qualitativa sobre a abordagem de “Sistemas Lineares” apresentada por três livros didáticos do Ensino Médio, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM). A nossa pesquisa fundamenta-se no referencial teórico dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2003), pois acreditamos na importância da conversão de registros para a construção do conhecimento pelo aluno. A nossa proposta é verificar, nestes livros didáticos, em quais registros de representações semióticas os sistemas lineares são apresentados e quais as conversões de registros propostas em seus exercícios. Escolhemos analisar livros didáticos, pois acreditamos que são os instrumentos mais utilizados pelo professor para preparar e ministrar suas aulas. Assim sendo, os livros didáticos podem determinar conteúdos e estratégias a serem trabalhadas em sala de aula. Esta pesquisa nos levou também a investigar quais são as orientações de alguns documentos oficiais - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+), (BRASIL, 2002), Orientações Curriculares para professores do Ensino Médio (BRASIL, 2006), e as Recomendações do PNLEM (BRASIL, 2007) - para a abordagem desse tema e a fazermos uma comparação do método do escalonamento nos registros gráfico e algébrico. Os resultados obtidos mostram que o registro gráfico e o registro de representação semiótica da língua natural estão presentes em dois dos três livros analisados, porém o registro gráfico está presente apenas em textos explicativos, sendo muito pouco explorado nos exercícios resolvidos ou propostos. Observamos ainda que o registro algébrico continua prevalecendo na abordagem de sistemas lineares nestes livros didáticos e que os algoritmos para a resolução de sistemas continuam sendo tratados em primeiro plano, enquanto a análise dos resultados obtidos na resolução ou na classificação de um sistema linear ainda é explorada timidamente.

Palavras-chave: Livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, Sistemas de Equações Lineares, Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

This task has as a goal to make a qualitative analysis about the “linear system” approach presented in three didactic books of the high school program that were approved by the “Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio” (PNLEM). The research is based in the theoretical reference of the Registers of the Semiotics Representation by Raymond Duval (2003), because we believe in the importance of the register’s conversion in order to build the student’s knowledge. Our proposal is to check in these didactic books in which registers of the semiotics representation the linear systems are presented and which register’s conversion are proposed in their exercises. We chose to analyse didactic books because we believe they are the instruments used the most by the teachers to prepare and to give classes. This way, the didactic books can determine the content and strategies to be worked in class. This research lead us also to investigate which are the orientations in some official documents: Complementary Educacional Orientations to the Nationals Curriculares Parameters (PCN+) (BRASIL, 2002); Curriculares Orientations to High school teachers (BRASIL, 2006) and the PNLEM recommendations (BRASIL, 2007). From these documents we will do a comparison between the method of the stagger in the graphical and algebraical registers. The results obtained show that the graphical register and the register of semiotic representation of the natural language are presented in two of the three books analysed, however the graphic register is presented only in explanation texts, being few explored in the solved exercises or in the proposed exercises. We also observed that the algebraical register is still prevailing in the linear system approach and that the algorithm to the resolution of systems has still been treated in first view, while the analyse of the results obtained in the resolution or classification of a linear system is still explored timidly.

Keywords: Didactic books of Mathematics of High school, System of linear equations, Registers of the Semiotics Representation.

SUMÁRIO

Introdução.....	1
1. Problemática e Objetivo.....	4
1.1. Procedimentos metodológicos.....	10
2. Referências Teóricas.....	12
2.1 Os registros de representação semiótica.....	13
2.2 A aprendizagem significativa.....	18
3. Os Sistemas Lineares.....	20
3.1 Um pouco de história.....	21
3.2 A Regra de Cramer.....	22
3.3 O método de Gauss ou método do escalonamento.....	26
4. Os Sistemas Lineares nos Livros Didáticos do Ensino Médio.....	32
4.1 Os sistemas lineares nos livros didáticos analisados.....	34
5. Os sistemas lineares e os documentos oficiais.....	37
5.1 A retomada dos Sistemas Lineares com duas equações e duas Incógnitas nos livros didáticos.....	38
5.2 A abordagem histórica dos Sistemas Lineares nos livros didáticos analisados.....	42
5.3 Os livros didáticos e as atividades que empregam o uso do computador.....	43
5.4 O tratamento do registro algébrico nos livros didáticos.....	47
6. Os sistemas lineares e os registros de representação semiótica.....	52
6.1 Os sistemas lineares e o registro de representação da língua natural nos livros didáticos.....	53
6.2 Os sistemas lineares e o registro gráfico nos livros didáticos.....	60
6.3 Os sistemas lineares e as conversões de registro propostas nos exercícios dos livros didáticos.....	66
7. Os livros didáticos e a classificação de sistemas lineares com mais de duas incógnitas.....	75
8. Comparação entre o escalonamento de um sistema linear nos registros de representação algébrico e gráfico.....	81
Considerações Finais.....	94
Referências.....	99

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Terceira questão do teste diagnóstico apresentado no trabalho de Freitas	8
Figura 2	Foto de Raymond Duval	12
Figura 3	Foto de David Ausubel	12
Figura 4	Retomada da resolução (algébrica e geométrica) de um sistema com duas equações e duas incógnitas, com a conversão de registro: da linguagem natural para o registro algébrico e para o gráfico.....	40
Figura 5	Retomada da resolução de um sistema com duas equações e duas incógnitas, no registro algébrico e no registro gráfico.....	41
Figura 6	Atividade que introduz à programação linear no ensino médio.....	45
Figura 7	Exercício resolvido envolvendo a programação linear.....	46
Figura 8	Comentários finais sobre os processos de resolução de sistemas.....	50
Figura 9	de sistema extraído do livro Nove Capítulos Sobre a Arte Matemática, de Chuí-ChangSuan-Shu.....	54
Figura 10	Sistema com 2 equações e 2 incógnitas no registro de representação semiótica da língua natural.....	55
Figura 11	Sistema com m equações e n incógnitas no registro algébrico.....	55
Figura 12	Sistema com 3 equações e 3 incógnitas no registro algébrico.....	56
Figura 13	de situação-problema que relaciona os sistemas com a química.....	57
Figura 14	Primeiro sistema com mais de duas incógnitas do L_2	58
Figura 15	Primeiro sistema com mais de duas incógnitas do L_3	59
Figura 16	Três dos oito possíveis casos de classificação de sistemas lineares com três equações e três incógnitas no registro algébrico com conversão para o registro gráfico.....	62
Figura 17	Três dos oito possíveis casos de classificação de sistemas lineares com três equações e três incógnitas no registro algébrico com conversão para o registro gráfico.....	63
Figura 18	Dois últimos possíveis casos de classificação de sistemas lineares com três equações e três incógnitas no registro algébrico com conversão para o registro gráfico.....	64
Figura 19	Representação no registro gráfico de sistemas com três equações e três incógnitas.....	65
Figura 20	Um dos três exercícios resolvidos cujo registro de partida é o algébrico e o de chegada é o gráfico.....	67
Figura 21	Exercício proposto cujo registro de partida é o algébrico e o de chegada é o gráfico.....	67
Figura 22	Exercício que propõe o registro gráfico de um sistema de inequações com duas incógnitas.....	68
Figura 23	Exercício que propõe a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico.....	68

Figura 24	Exercício que propõe a representação gráfica de um sistema linear com três incógnitas.....	69
Figura 25	Exercício que propõe a conversão do registro algébrico para a língua natural.....	69
Figura 26	Exercício proposto cujo registro de partida é o algébrico, e o de chegada é o gráfico.....	70
Figura 27	Exercício que propõe a conversão do registro de representação na língua natural para o registro algébrico de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.....	70
Figura 28	Exercício que propõe a conversão do registro de representação da língua natural para o registro algébrico.....	70
Figura 29	Exercício que propõe a conversão do registro de representação da língua natural para o registro algébrico de um sistema linear com três equações e três incógnitas.....	72
Figura 30	Atividade da seção “Invente Você” que privilegia a reflexão e a criatividade do aluno.....	72
Figura 31	Atividade da seção “Invente Você” que pode levar o aluno a refletir sobre quais as características de um sistema possível e indeterminado.....	73
Figura 32	Representação gráfica do sistema S_1	76
Figura 33	Dois dos seis sistemas lineares já escalonados, que deverão ser resolvidos e classificados pelo aluno.....	77
Figura 34	Discussão de sistemas lineares $n \times n$ que associam determinante ao escalonamento.....	78
Figura 35	Discussão de um sistema linear (caso particular de sistemas $n \times n$) que associa o determinante ao escalonamento ou a outro processo... ..	79
Figura 36	Discussão de um sistema linear apresentado no L_3	80
Figura 37	Representação de S_1 no registro gráfico.....	82
Figura 38	Representação de L_4 no registro gráfico.....	83
Figura 39	Representação de L_4 no registro gráfico.....	84
Figura 40	Representação de L_4 e L_5 no registro gráfico.....	84
Figura 41	Representação de L_1 , L_2 , L_3 , L_4 e L_5 no registro gráfico.....	85
Figura 42	Representação de L_7 no registro gráfico.....	86
Figura 43	Representação de L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 e L_7 no registro gráfico.....	86
Figura 44	Representação de L_7 , L_8 e L_9 no registro gráfico.....	87
Figura 45	Representação de L_3 , L_5 e L_7 no registro gráfico.....	88
Figura 46	Representação de S_4 no registro gráfico.....	89
Figura 47	Representação de S_5 no registro gráfico.....	90
Figura 48	Representação de S_7 no registro gráfico.....	91
Figura 49	Representação da segunda equação de S_8 no registro gráfico.....	92
Figura 50	Representação das equações de S_7 e S_8 no registro gráfico.....	92

Figura 51	Discussão de um sistema linear no registro gráfico, utilizando o <i>software Winplot</i>	98
------------------	--	----

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	Livros didáticos de matemática analisados nesta pesquisa.....	11
Quadro 2	Exemplos dos registros de representação semiótica que serão analisados neste trabalho.....	14
Quadro 3	Exemplos de conversões congruentes e não-congruentes.....	17
Quadro 4	Dados referentes ao L_1 sobre o tratamento do registro algébrico dos sistemas lineares.....	49
Quadro 5	Dados referentes ao L_2 sobre o tratamento do registro algébrico dos sistemas lineares.....	49
Quadro 6	Dados referentes ao L_3 . sobre o tratamento do registro algébrico dos sistemas lineares.....	51
Quadro 7	Exemplos de sistemas lineares com duas equações que poderiam ser classificados mediante análise de suas equações.....	71
Quadro 8	Exemplos de sistemas lineares com três equações que poderiam ser classificados mediante análise de suas equações.....	73
Quadro 9	Sugestões de exercícios feitas pela pesquisadora para contemplar o registro gráfico dos sistemas lineares.....	97

INTRODUÇÃO

Meu interesse pelo tema “sistemas lineares” surgiu do fato de trabalhar “Álgebra” com alunos do Ensino Médio em conceituadas escolas da rede particular de ensino, situadas em São Bernardo do Campo. Nessa minha trajetória profissional, abordava este tema de maneira mecânica. Certamente, meus alunos adquiriam as técnicas para resolver os sistemas lineares, mas, provavelmente, não interpretavam os resultados obtidos. Esse fato me causava uma grande insatisfação e, por isso, decidi investigar este tema neste meu trabalho.

Com o objetivo de melhorar minha prática docente e de me aproximar da educação superior, ingressei no curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, do Programa de Estudos Pós-Graduados da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Em fevereiro de 2007, comecei a freqüentar o Grupo de Pesquisa para Educação Algébrica (GPEA), que tem como projeto central o tema: *“Qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de Matemática?”*. A este tema central estão interligados alguns ramos, entre eles, o projeto *“Álgebra Linear”*, no qual se insere este trabalho, cujas pesquisas visam investigar o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear, buscando elementos de análise em livros didáticos, documentos oficiais, discurso de professores, observação em sala de aula, desempenho de alunos em experimentos, entre outros.

Levando em conta os objetivos deste projeto, as discussões com professores do ensino superior, que vivenciamos neste grupo de pesquisa sobre as dificuldades que os alunos apresentam para resolver sistemas lineares nas aulas de Álgebra Linear, e por acreditarmos na hipótese de que estas dificuldades poderiam estar relacionadas com a forma mecânica que o tema estaria sendo trabalhado no ensino médio atualmente, decidimos investigar, sob a orientação da Prof^a. Dr^a. Barbara L. Bianchini, o tema sistemas lineares na educação básica, tema este que é considerado pelos professores do ensino superior um conhecimento prévio necessário para o

estudo da disciplina Álgebra Linear nos cursos de Licenciatura em Matemática, Engenharias, Ciências da Computação e outros.

Convencidas da importância do tema e amparadas na teoria de aprendizagem de Raymond Duval (2003), selecionamos três coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM/2007)¹ e decidimos investigar sob quais registros de representação semiótica² estão sendo abordados os sistemas lineares e quais as conversões de registros³ propostas. Consideramos também relevante analisar, quanto ao registro algébrico, quais os tratamentos que estão sendo abordados nestes livros didáticos. Os Registros que privilegiaremos em nossas análises são: a língua natural, os registros algébrico e gráfico, pois acreditamos que estes estão diretamente ligados ao tema e que podem contribuir para que o aluno entenda melhor o que é *resolver* um sistema linear, não somente aplicando regras prontas, mas principalmente, *interpretando* o seu conjunto solução.

A escolha desta proposta nos levou também a analisar recentes documentos oficiais norteadores da Educação Nacional: Parâmetros Curriculares Mais - PCN+ (BRASIL, 2002) e Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006).

Este trabalho está organizado em nove capítulos, descritos da seguinte forma:

No primeiro capítulo, apresentamos a problemática, o objetivo e os procedimentos metodológicos por nós utilizados.

No segundo capítulo, temos a fundamentação teórica do nosso trabalho, que se baseia nas teorias dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na Aprendizagem Significativa de David Ausubel.

No terceiro capítulo, um panorama histórico dos sistemas lineares e a demonstração dos dois algoritmos mais utilizados para resolver sistemas

¹ O PNLEM é um programa do governo federal que foi implantado em 2004, voltado para a distribuição gratuita de livros didáticos aos alunos do Ensino Médio da rede pública de ensino, e é mantido pelo FNDE com recursos financeiros do Orçamento Geral da União. (Fonte: portal do MEC: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/port_1818.pdf)

² Registros de representações semióticas são os diferentes signos utilizados para representar objetos matemáticos como: figuras, gráficos, escritas simbólicas, registro numérico, língua natural, entre outros.

³ Uma conversão de registros é a transformação de uma representação mudando de um registro para outro. Um tratamento é uma transformação efetuada dentro do mesmo registro.

lineares com mais de duas incógnitas: A Regra de Cramer e o Método do Escalonamento (ou Método de Gauss).

No quarto capítulo, os livros didáticos selecionados para serem analisados neste trabalho.

No quinto capítulo, algumas orientações didáticas sugeridas pelos documentos oficiais para o ensino de sistemas lineares.

No sexto capítulo, analisamos em quais registros os sistemas lineares estão sendo abordados nos livros por nós selecionados e quais as conversões de registros propostas em seus exercícios.

No sétimo capítulo, analisamos, ainda, como os livros didáticos classificam Sistemas Lineares com mais de duas incógnitas.

No oitavo, apresentamos uma comparação entre escalonamento de um sistema no registro algébrico e no registro gráfico.

Encerramos o nosso trabalho apresentando as considerações finais.

1. PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

A Álgebra tem mais destaque que a Geometria nos currículos de Matemática atualmente, porém para muitos alunos ela ainda é considerada “difícilima, abstrata”. Em muitas aulas de álgebra, alunos continuam apenas armazenando informações e manipulando algoritmos, reproduzindo modelos, provavelmente sem compreender realmente os conceitos algébricos e possivelmente sem conseguir usar seus conhecimentos em situações do dia-a-dia.

Lellis e Imenes (2001, pp. 42-43) afirmam que em muitas escolas o ensino da matemática é tratado como um conjunto de técnicas, de aplicações de fórmulas, com uma grande quantidade de exercícios que se resumem em “calcular”, “obter”, “efetuar”, em contextos exclusivamente matemáticos, com o objetivo de buscar resultados. O que importa é “como” fazer, sem se preocupar com “porque fazer assim” ou “para que fazê-lo”.

Muitas aulas de álgebra ainda são baseadas em definição-exemplos-reprodução, como se ensinar fosse transmitir um conteúdo e aprender fosse reproduzir esse conteúdo de maneira mecânica. Nesse modelo de ensino não existem trocas, discussões, experimentos, conjecturas. Assim, o aluno pode se tornar desinteressado, sem ter a possibilidade de opinar, criticar, de ser criativo.

Lins e Gimenez (2001, pp.105 - 106) afirmam que quase a totalidade dos livros didáticos brasileiros disponíveis se baseia na seqüência: técnica (algoritmo)/ prática (exercícios), sem desenvolver a investigação e a reflexão e que os professores, ou por despreparo ou por não conhecerem outra alternativa, acabam adotando esta prática. Segundo esses autores, estudos feitos em todo o mundo, inclusive no Brasil, mostram que esta prática pode ser prejudicial à educação.

Para atender aos objetivos do ensino de Matemática no Ensino Médio, um livro didático deveria abranger uma grande variedade de conteúdos nos diversos campos da Matemática e quando possível, abordar esses conteúdos de maneira diversificada, com diferentes linguagens: materna, símbolos

matemáticos, gráficos, tabelas, etc. Espera-se também que ele aborde aspectos da História da Matemática de maneira contextualizada e que ele contribua para que o aluno compreenda realmente os conceitos matemáticos através da construção dos conhecimentos, sem precisar decorá-los. Consideramos importante que ele apresente situações-problema que levem o aluno a refletir, a generalizar, a conjecturar, a argumentar e a criar e discutir hipóteses.

O livro didático deveria ser uma ferramenta a mais (como o computador, o material concreto) para completar e enriquecer diariamente a aula do professor, contribuindo para a aprendizagem efetiva do aluno. Porém, acreditamos que na nossa realidade, muitas vezes ele funciona como o único norteador para muitos professores, que planejam suas aulas unicamente baseados nos conteúdos dos livros didáticos.

[...] o livro didático vem assumindo, há algum tempo, o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, gerando, muitas vezes, a concepção de que “o mais importante no ensino da matemática na escola é trabalhar o livro de capa a capa”. [...] É importante, pois, que o livro didático de Matemática seja visto não como um substituto de orientações curriculares, mas como um recurso a mais. (BRASIL, 2006, p. 86).

Lajolo (*apud* Oliveira, 2006, p.16) afirma que no Brasil o livro didático determina conteúdos e estratégias de ensino, marcando de forma decisiva o que se ensina e como se aprende. Oliveira (2006) considera que o livro didático é muito importante, pois influencia o ensino de Matemática.

[...] Considero que o livro didático exerce grande influência no processo de ensino, pois, além de determinar o currículo a ser desenvolvido em sala de aula, constitui-se como importante instrumento pedagógico para o professor, já que lhe sugere conteúdo, metodologia e atividade. (p. 16).

Araújo (2002) analisou em seu trabalho três livros didáticos, com o objetivo de encontrar textos metamatemáticos passíveis de se tornarem

alavancas meta⁴ para alunos de um primeiro curso de Álgebra Linear, e, ao analisar o prefácio desses três livros adotados em universidades de São Paulo, a autora verificou que todos eles afirmavam que o estudo dos sistemas lineares é essencial, pois será uma ferramenta para a compreensão dos demais assuntos tratados na disciplina.

Karrer (2006) afirma que a dificuldade no estudo de conteúdos de Álgebra Linear não é um problema especificamente brasileiro. A autora cita em seu trabalho pesquisas como a de Dias (1998) e a de Pavlopoulou (1993) que evidenciam que os livros de Álgebra Linear privilegiam o registro simbólico (ou algébrico) e que as dificuldades dos alunos nesta disciplina estão relacionadas à deficiência na coordenação dos diversos registros de representação semiótica.

As pesquisas de Pavlopoulou (1993) [...] estabeleceram a relação entre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos de álgebra Linear e a deficiência na coordenação satisfatória dos diversos registros de representação semiótica. (Karrer, 2006, p. 59).

Machado (1996) afirma que uma das causas das dificuldades que os alunos enfrentam na disciplina Álgebra Linear é a falta de conhecimento de vários pré-requisitos essenciais. Segundo a autora, uma das dificuldades dos alunos é a passagem do registro algébrico para o gráfico e vice-versa. Ela enfatiza a necessidade de se abordar essas conversões de registros antes do ensino superior, caso contrário, os alunos continuarão resolvendo sistemas sem dar sentido algum a eles.

Pesquisas como estas enfatizam a relevância de analisarmos em quais registros de representação semiótica os sistemas lineares estão sendo abordados nos livros didáticos do ensino médio e quais as conversões de registros apresentadas em seus exercícios resolvidos e propostos.

⁴ Os 'recursos-meta' são recursos sobre o conhecimento matemático que têm por objetivo auxiliar o aprendizado do objeto matemático em estudo e quando atingem seu objetivo são chamados de 'alavancas-meta', termo introduzido por Aline Robert. (Nomura, J.I. e Bianchini, B.L., 2007)

Freitas (1999, p.10) afirma que o grande problema para o aluno não é resolver um sistema, desde que ele esteja familiarizado com algum método de resolução (a autora cita substituição, comparação e escalonamento). Para a autora, o problema está na interpretação da solução encontrada e ela conjectura que a dificuldade de interpretação poderia estar relacionada ao fato de que os alunos decoram as técnicas de resolução dos sistemas sem compreender o significado das respostas, isto é, realizam o algoritmo de maneira mecânica e não interpretam a resposta encontrada. A autora afirma em seu trabalho:

Observo que as razões das dificuldades dos alunos na interpretação dos resultados obtidos após a aplicação de um método de resolução a um sistema linear podem estar ligadas ao fato de que, métodos de resolução se reduzem a um algoritmo, enquanto que a interpretação dos resultados obtidos exige articulação entre diversos conceitos, que podem envolver diferentes quadros e registros de representação. Assim, as soluções de um sistema linear podem ser relacionadas, por exemplo, a pontos, retas e planos, o que permite se passar de uma manipulação algébrica a uma ilustração gráfica em dimensão 2 ou 3. (Freitas, 1999, p. 24).

Freitas analisa também em seu trabalho se o aluno relaciona a representação gráfica com o conjunto solução de um sistema linear ao propor a seguinte questão no seu teste diagnóstico:

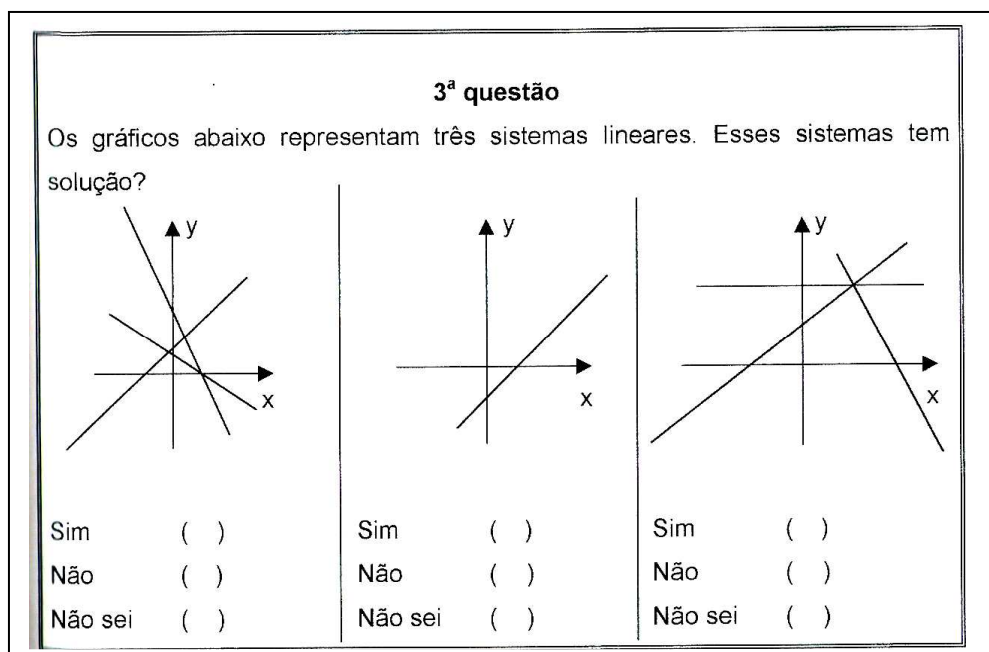


Figura 1- Terceira questão do teste diagnóstico apresentado no trabalho de Freitas.

Fonte: Freitas, 1999, p. 65.

Como apenas 14% dos alunos escolheram corretamente as alternativas apresentadas nos três gráficos, a autora conclui que em geral os alunos não relacionam a solução de um sistema linear com os pontos comuns entre as retas que o representam. Freitas adverte que este fato pode estar relacionado ao enfoque algébrico com que os livros do Ensino Médio abordam o tema. Os três livros didáticos do Ensino Médio analisados pela autora não abordavam a representação gráfica dos sistemas lineares.

Amparadas nos resultados desta análise, consideramos relevante analisar se os livros atuais também abordam os sistemas lineares apenas no registro algébrico. Concordamos com Freitas quando ela afirma que é possível trabalhar a conversão do registro algébrico para o gráfico e vice-versa nos Ensinos Fundamental e Médio e que esta estratégia poderá favorecer a compreensão e a interpretação dos resultados. Porém, a autora adverte que no segundo ano do ensino médio, quando têm contato com os sistemas de três equações e três incógnitas, os alunos provavelmente ainda não conhecem um sistema de coordenadas a três dimensões. Segundo a autora, esse problema pode ser solucionado com o uso de *softwares* que construam gráficos em três dimensões.

Novamente concordamos com a autora e ressaltamos que já existem programas gratuitos, como o *Winplot*, que permitem que o aluno construa gráficos em três dimensões. Acreditamos que estes gráficos possibilitem a interpretação das soluções dos sistemas obtidas algebricamente e diminua a dificuldade que o aluno possui na coordenação satisfatória do registro algébrico para o registro gráfico.

Já Almouloud e Bianchini (1996) apresentam em seu trabalho uma análise dos erros mais freqüentes na resolução de sistemas e apontam que aparecem erro de cálculos aritméticos e algébricos, de método de resolução, de representação gráfica, etc. Os autores afirmam que o aluno ignora que a solução de um sistema deve satisfazer todas as suas equações.

Acreditamos que o resultado desta pesquisa esteja confirmando a afirmação de Freitas (1999) já citada anteriormente: que os alunos decoram as técnicas de resolução dos sistemas sem compreender o significado das respostas, isto é, realizam o algoritmo de maneira mecânica e não interpretam a resposta encontrada. Esta dificuldade em interpretar o conjunto solução de um sistema poderia ser minimizada se o aluno soubesse converter um sistema linear do registro algébrico para o gráfico.

Com base nas pesquisas realizadas até então, preocupadas com o ensino dos sistemas lineares e cientes da carência de trabalhos acadêmicos desenvolvidos nesta área, consideramos importante voltarmos nossos olhares para os livros didáticos do ensino médio no que diz respeito ao tema: sistemas lineares no Ensino Médio, pois acreditamos que estes livros possam nos dar “pistas” de como esse tema está sendo abordado nas salas de aula. Assim sendo, amparadas na hipótese de que os sistemas lineares geralmente são trabalhados apenas no registro algébrico nos livros didáticos, e conseqüentemente, nas salas de aula, procuraremos responder, em nosso trabalho, à seguinte questão: *“Em quais registros de representação semiótica estão sendo abordados os sistemas lineares nos livros didáticos do Ensino Médio e quais as conversões de registros apresentadas nos exercícios resolvidos e nos exercícios propostos destes livros?”*.

Além de investigarmos os registros de representação semiótica nos livros didáticos, consideramos importante estudar também alguns documentos

oficiais como PCN+ (2002) e Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), entre outros, para conhecer melhor as suas orientações sobre o tema sistemas lineares no Ensino Médio. As recomendações desses documentos que iremos analisar nos livros didáticos são:

- A retomada dos sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas antes da abordagem dos sistemas com três equações e três incógnitas nos livros didáticos;
- A abordagem histórica dos sistemas lineares nos livros didáticos;
- As atividades que empregam o uso do computador nos livros didáticos;
- O tratamento do registro algébrico nos livros didáticos.

• 1.1 Procedimentos metodológicos

Este trabalho possui características de pesquisa qualitativa de caráter documental.

Uma *pesquisa qualitativa*, segundo Bogdan e Biklen (*apud* Lüdke e André, 1986, pp. 13-15) supõe o contato direto do pesquisador com a situação estudada. Neste tipo de pesquisa, os dados coletados são predominantemente descritivos, a observação é o principal método de investigação e o pesquisador se preocupa mais com o processo do que com o produto final.

Uma *pesquisa documental* é aquela que busca identificar informações nos documentos contemporâneos ou retrospectivos a partir das questões do pesquisador. Segundo Guba e Lincoln (*apud* Lüdke e André, 1986, p. 39), os documentos constituem uma fonte estável e rica, persistem ao longo do tempo e podem transmitir informações contextualizadas.

Escolhemos o livro didático como fonte primária de dados para nossa investigação.

Decidimos analisar três dos oito livros didáticos que estão na lista dos recomendados pelo PNLEM-2007, livros estes que são distribuídos gratuitamente pelo Ministério da Educação (MEC) aos alunos do Ensino Médio, e, por isso, possivelmente são os mais adotados pelos professores das escolas públicas. Porém, como a pesquisadora atua somente na rede particular de ensino, não tivemos acesso a estes livros. Resolvemos, então, analisar três

livros de autores indicados pelo PNLEM-2007, mas que são também vendidos para a rede particular de ensino, o que consideramos estar mais ligado à prática docente da pesquisadora.

A escolha destes três livros se deu por várias razões, entre elas, por seus autores serem considerados, por nós, autores conceituados. Já o terceiro livro foi escolhido porque a pesquisadora adota outro livro destes mesmos autores na escola particular em que atua. Contatamos as editoras destes livros e uma delas (Editora Saraiva) nos informou que os livros distribuídos no programa PNLEM são os mesmos que os vendidos para a rede particular, sem nenhuma alteração. Já as outras duas editoras (FTD e Saraiva) informaram que os livros distribuídos para a rede pública sofrem **pequenas** alterações em relação aos livros disponíveis nas livrarias, alterações estas que estão ligadas ao número de exercícios e de testes de vestibular. Acreditamos que tal fato não afetará os resultados de nossas análises.

Os três livros escolhidos para realizarmos nossa pesquisa foram:

Designação	Título / Série / Autor / Editora / Ano
L-1	• Matemática, Contexto e Aplicações - vol.2 – E.M. • Luiz Roberto Dante • Ática - 2007
L-2	• Matemática - Ensino Médio - vol. 2 • Kátia C.S. Smole, Maria Ignez Diniz • Saraiva - 2003
L-3	• Matemática Completa - vol. único • José R. Giovanni, José R. Bonjorno e José R. Giovanni Jr. • FTD - 2002

Quadro 1 - Livros didáticos de matemática analisados nesta pesquisa.

2. REFERÊNCIAS TEÓRICAS

Este trabalho está fundamentado na teoria dos *Registros de Representação Semiótica* de Raymond Duval, que estuda o funcionamento cognitivo na aprendizagem de conceitos matemáticos e na *Teoria de Aprendizagem Significativa* de David Ausubel, que afirma que a aprendizagem significativa ocorre quando uma nova informação ancora-se em conhecimentos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Para ilustrar nossa pesquisa, apresentamos a seguir a foto desses dois pesquisadores:



Filósofo e psicólogo francês estudou a Psicologia Cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática, na França. Em suas pesquisas, Duval aborda, principalmente, o funcionamento cognitivo implicado na atividade matemática. (Machado, 2003)

Figura 2 - Foto de **Raymond Duval**.

Fonte: <http://www.kaputcenter.umassd.edu/associates/people/duvalr/> (acesso em 10/06/08).



Ausubel nasceu na cidade de Nova York, em 1918, médico de formação, dedicou seus estudos à Psicologia Educacional e desenvolveu a Teoria da Aprendizagem Significativa e suas implicações no ensino e na aprendizagem em sala de aula. (Moreira, 1982)

Figura 3 - Foto de **David Ausubel**.

Fonte: http://www.hi.is/~joner/eaps/je_my01.jpg (acesso em 10/06/08).

• 2.1 Os registros de representação semiótica

Para entender as dificuldades que muitos alunos têm em compreender Matemática é necessário estudar o complexo funcionamento cognitivo que possibilita a aprendizagem desses alunos. Faz-se necessário analisar quais sistemas cognitivos são exigidos para efetuar tratamentos matemáticos e se estes sistemas são mobilizados exclusivamente para os conhecimentos matemáticos. (Duval, *apud* Machado, 2003, pp. 11 - 12).

A Matemática trabalha com conceitos abstratos: propriedades, estruturas, relações, etc., que não são diretamente acessíveis à percepção e, portanto necessitam de uma representação simbólica. Esses diferentes tipos de representação são estudados por Raymond Duval, no seu livro *Sémiosis et pensée humaine* e são designados por ele como “registros de representação semiótica”, que representam os diferentes signos utilizados em Matemática, tais como figuras, gráficos, escritas simbólicas, língua natural, registro numérico.

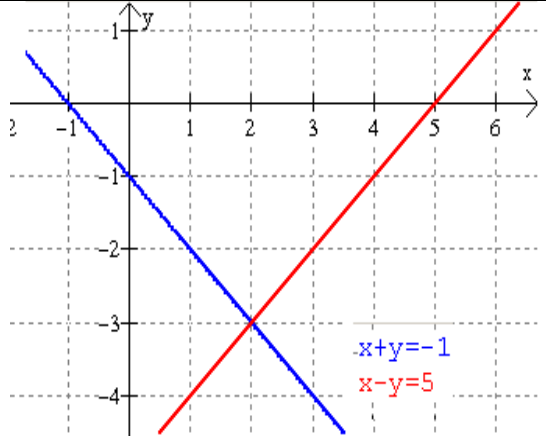
As representações semióticas são constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significados e de funcionamento.

[...] As representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento. (Duval, *apud* Damm, *et al*, 2002, p. 143).

Para Duval (*apud* Colombo e Moretti, 2007) aprender Matemática requer uma atividade cognitiva diferente daquela utilizada em outros domínios do conhecimento, assim as diferentes representações semióticas utilizadas em Matemática são muito importantes.

[...] essas representações cumprem várias funções primordiais, como a *comunicação*, para tornar visíveis e acessíveis as representações mentais; o *desenvolvimento das representações mentais*, que dependem da interiorização das representações semióticas; na realização de diferentes funções cognitivas, como *objetivação* (expressão interna, que se presta ao entendimento particular) e *tratamento*; a *produção de conhecimento*, já que há uma grande variedade de representações semióticas existentes, de um mesmo objeto matemático. (Colombo e Moretti, 2007, p.4).

Neste trabalho, analisaremos os seguintes registros de representação semiótica: a língua natural, o registro algébrico e as representações gráficas (Quadro 2), além das conversões entre estes registros, pois acreditamos que o registro gráfico e o registro na língua natural (e a conversão entre eles) possam levar o aluno a uma melhor interpretação da solução de um sistema linear. Partimos da hipótese de que o registro algébrico predomina na abordagem dos sistemas lineares no Ensino Médio.

Língua natural	Registro algébrico	Representação gráfica
Determine dois números reais cuja soma é -1 e cuja diferença entre o maior e o menor é 5.	$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 5 \end{cases}$	

Quadro 2 - Exemplos dos registros de representação semiótica que serão analisados neste trabalho.

Existem dois tipos de transformações dos registros de representação semiótica: os *tratamentos* e as *conversões*.

Uma *conversão* é uma transformação de uma representação mudando de um registro para outro. Por exemplo, ao utilizarmos um gráfico cartesiano para representar um sistema linear estamos realizando uma conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

O *tratamento* é uma operação efetuada dentro de um mesmo registro de representação. Por exemplo, quando multiplicamos uma equação do sistema linear por um número real diferente de zero, para escaloná-lo estamos realizando um *tratamento* desse registro algébrico. Veja o exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2x - 2y = 10 \end{array} \right. \xrightarrow{+ \cdot (2)} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 4x - 0y = 12 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x = 3 \end{array} \right.$$

Acreditamos que os tratamentos mais utilizados ocorram no registro algébrico (cálculo algébrico) e no numérico (cálculo numérico), porém segundo Bolda (1997, *apud* Damm *et al*, 2002, p. 145) existe também um tipo de tratamento particular para o registro figural (figuras geométricas): a reconfiguração, que consiste em decompor e recompor as figuras.

Segundo Duval (*apud* Machado, 2003, p. 16) o tratamento de registro é o que mais chama atenção, pois se acredita que a conversão ocorra somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem utilizados são mais econômicos. Mas, do ponto de vista matemático, a conversão é a “atividade que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão”.

Neste trabalho, voltaremos nossos olhares apenas para o tratamento do registro algébrico dos sistemas lineares.

Duval afirma que “a originalidade da atividade de Matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação e na possibilidade de trocar de registro de representação” (Machado, 2003, p. 14) e sustenta também, que para que um saber matemático possa ser colocado em funcionamento, é necessário aprendê-lo em pelo menos dois registros de representação e saber coordenar esses registros. As pesquisas de Duval indicam que *a compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro*⁵.

A conversão de registros se faz necessária, pois cada um deles apresenta uma limitação. Por exemplo: acreditamos que ao trabalharmos os sistemas lineares apenas no registro algébrico, pode acontecer do aluno dominar uma técnica e resolver este sistema, porém, pode não estar claro para ele que esta solução encontrada representa a *n-upla* que verifica todas as equações deste sistema, simultaneamente. Esta dificuldade, quando se trabalha no registro algébrico, poderá ser minimizada ao fazer a conversão para o registro gráfico. Outra limitação do registro algébrico é a falta de

⁵ Notas de aula do professor Vincenzo Bongiovanni, PUC-SP, 1º semestre de 2007 – disciplina: Tópicos de Geometria do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.

contextualização. Podemos ilustrar esta situação com este exemplo: o

exercício resolva o sistema:
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

pode não ter significado para o aluno. Mas, se apresentarmos uma situação-problema, no registro da língua natural (ver Quadro 2), para o aluno poderá fazer mais sentido. Assim sendo, acreditamos que o professor deva trabalhar, sempre que possível, com vários registros de representação semiótica de um mesmo objeto matemático.

A complementaridade entre registros é fundamental no sentido da sua parcialidade em relação ao objeto que pretendemos representar, sendo que a possibilidade de conversão entre os registros possibilita ao sujeito perceber outros aspectos da situação representada. (Damm *et al*, 2002, p. 150).

Gostaríamos de ressaltar que a coordenação entre os registros de representação semiótica pode representar uma operação difícil para os alunos em diferentes níveis de ensino, mas ela se faz necessária para a melhor apreensão dos conteúdos matemáticos.

Para Duval, é na *conversão* dos diversos registros de representação que se encontra a chave para a aprendizagem em Matemática. Mas, o autor adverte que as atividades devem tratar a conversão de registros nos dois sentidos da conversão.

Acreditamos que os livros didáticos priorizem o *tratamento*, mas que a *conversão* desempenha um papel essencial na aquisição de conceitos matemáticos.

Segundo Duval, para analisar uma atividade de conversão de registros devemos analisar o registro de partida e o de chegada. Quando a representação de chegada transparece na representação de partida dizemos que há uma *congruência*. Mas se a representação no registro de chegada não está claramente associada ao registro de partida, dizemos que há uma *não-congruência*. Duval (*apud* Karrer, 2006) afirma que é um grande equívoco imaginar que se um estudante estabelece uma conversão em um sentido, automaticamente terá condições de estabelecê-la no sentido oposto. O autor

afirma, ainda, que existem conversões que são congruentes em um sentido e não-congruentes no sentido oposto.

Acreditamos que, no estudo de sistema linear algumas conversões são congruentes e outras são não-congruentes e que a dificuldade na conversão de registros para alguns alunos possa estar relacionada a não-congruência destas. Apresentamos abaixo dois exemplos de conversões de registros relacionadas ao tema Sistemas Lineares.

Conversão Congruente	A soma entre dois números inteiros é seis e a diferença entre eles é 4.	$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$
Conversão Não- Congruente		$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$

Quadro 3 - Exemplos de conversões congruentes e não-congruentes.

À luz da teoria de aprendizagem de Duval, analisaremos nos livros didáticos do Ensino Médio em quais registros de representação semiótica estão sendo abordados os sistemas lineares e quais as conversões de registros apresentadas nos exercícios resolvidos e nos exercícios propostos destes livros. A congruência e a não-congruência das conversões de registros não serão abordadas neste trabalho.

• 2.2 A aprendizagem significativa

A Teoria de Aprendizagem de David Ausubel, segundo Moreira (1999), focaliza principalmente a Aprendizagem Cognitiva e o que é considerado mais importante nessa teoria é o que o aluno já sabe.

Ausubel afirma que para que ocorra a aprendizagem significativa, conceitos relevantes e inclusivos devem estar claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo para interagirem com as novas informações que chegam. Esses conceitos pré-existentes (chamados de subsunçores) vão funcionar como ponto de ancoragem. A aprendizagem significativa ocorre quando uma nova informação ancora-se em conceitos ou proposições preexistentes na estrutura cognitiva do indivíduo, ambos se modificam e o novo conceito passará a ser incorporado integrando-se à estrutura cognitiva com maior facilidade do que se fosse armazenado separadamente.

[...] o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe; descubra isso e ensine-o de acordo. (Ausubel, *apud* Moreira, 1999, p.163).

Para que ocorra uma aprendizagem significativa, Ausubel recomenda o uso de organizadores prévios que servirão de elo entre os subsunçores (o que o aluno já sabe) com o novo conceito a ser assimilado.

À luz da teoria de Ausubel, pretendemos analisar se os livros didáticos analisados apresentam, na segunda série do ensino médio, uma retomada dos sistemas lineares com 2 equações e 2 incógnitas (subsunçores), não como ferramenta mas sim como objeto de estudo, antes de abordar os sistemas com mais de duas incógnitas. Acreditamos que esta retomada de conteúdo estaria fazendo o papel de organizador prévio, servindo de ponte de ligação entre os conhecimentos prévios pré-existent no cognitivo do aluno com o novo conhecimento.

Gostaríamos de lembrar que os sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas são utilizados como ferramenta em vários exercícios resolvidos abordando diferentes temas do ensino médio. Podemos citar como exemplos os seguintes temas:

- Igualdade entre Coordenadas Cartesianas, Função do Primeiro Grau e Progressões Aritméticas, na primeira série do Ensino Médio;
- Geometria Analítica (ponto de encontro entre duas retas, equação de retas), igualdade de polinômios, igualdade de números complexos na forma algébrica e equações polinomiais, na terceira série do Ensino Médio.

3. OS SISTEMAS LINEARES

Uma equação linear é uma equação do primeiro grau com uma ou mais incógnitas.

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares.

Segundo Paiva (1995, p.114), de modo geral, um sistema linear de m equações e n incógnitas pode ser escrito na forma

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

onde

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as incógnitas;
- a_{ij} são os coeficientes;
- b_i são os termos independentes.

Resolver um sistema linear significa encontrar uma solução que satisfaça a todas as suas equações simultaneamente. Uma solução do sistema acima é uma n -upla $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ de números reais que é solução de cada uma de suas equações.

Os sistemas estão presentes no currículo da disciplina Matemática, desde as séries finais do Ensino Fundamental II, nos quais geralmente se trabalham os métodos da adição e da substituição para resolver sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas. No segundo ano do Ensino Médio, o tema é abordado novamente, só que os sistemas apresentam um maior número de equações e/ou de incógnitas.

O objetivo desse trabalho é analisar em quais registros de representação semiótica os sistemas lineares são abordados nos livros didáticos do Ensino Médio e quais as conversões de registros são propostas nos exercícios destes livros. Porém, gostaríamos de enfatizar que, além da importância dos registros de representação, consideramos extremamente importante também que o professor explore a definição de um sistema com os alunos, principalmente o fato de conjunto solução ter de satisfazer todas as equações do sistema, visto que pesquisas realizadas anteriormente (Freitas, 1999; Almouloud e Bianchini,

1996) demonstram que o aluno tem dificuldade para compreender o conjunto solução.

• 3.1 Um pouco de história

Segundo Iezzi (2006, pp. 202 e 203), pouco se sabe sobre a Matemática ocidental antiga, quanto às aparições de sistemas de equações lineares. Pelo que parece, os chineses foram os primeiros a resolver um sistema linear de forma sistemática, de forma semelhante ao método da adição e ao método da eliminação de Gauss (escalonamento) hoje conhecidos. Exemplos desse procedimento encontram-se na importante obra chinesa *A Arte da Matemática em Nove Capítulos*, de Chuí-Chang Suan-Shu que data provavelmente do século III a.C.

Segundo Boyer (1974) o segundo capítulo dessa obra apresenta muitos problemas que levam a sistemas de duas equações e duas incógnitas. O autor afirma também que se trata de um livro muito significativo, pois apresenta problemas que recaem em equações lineares com soluções positivas e negativas.

Boyer também afirma que os sistemas lineares também aparecem no papiro de Rhind (egípcio) e que os chineses também conheciam um método de resolução de sistemas lineares que se assemelham ao método do escalonamento utilizado atualmente.

Na época de Diofante, segundo Freitas (1999, p.29), o método da substituição já era utilizado. Na sua famosa obra “Aritmética”, os sistemas já aparecem, porém, somente as soluções racionais e positivas são consideradas.

Mas foi só em 1683, num manuscrito do japonês Kowa, que a idéia de determinante veio à luz. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, usou os determinantes para resolver sistemas lineares.

Dez anos mais tarde o uso de determinantes aparece no Ocidente num trabalho de Leibniz (1546-1716), ligado também a sistemas lineares. Leibniz usou o determinante e fez a discussão de um sistema com três equações e duas incógnitas e mostrou que se o sistema é compatível (possível), então o

determinante 3×3 formado pelas colunas de seus coeficientes e a coluna de seus termos independentes é igual a zero.

Segundo Boyer (1974, p. 297) a conhecida regra de Cramer utilizada para resolver sistemas de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, foi descoberta pelo escocês Colin Maclaurin (1698-1746), datando provavelmente de 1729, tendo sido publicada dois anos após sua morte, em 1748, no seu *Treatise of algebra*. Mas, o suíço Gabriel Cramer (1704-1752) também chegou à regra (independentemente), e a publicou em 1750. Boyer ressalta que eram evitados os casos em que o determinante era nulo. “Mas, até esse momento, ainda faltava uma teoria geral sobre a resolução de sistemas lineares” (Freitas, 1999, p. 33).

Em 1800 surge o método de eliminação de Gauss, também conhecido como regra do escalonamento. A partir de 1860 os sistemas lineares com o número de equações diferentes do número de incógnitas e os de determinantes nulos passam a ser estudados. Em 1864 o matemático cujo pseudônimo era Lewis Carrol apresenta um estudo sobre a resolução de sistemas com m equações e n incógnitas. Em 1880, o matemático francês Rouché publica um artigo intitulado Notas Sobre Equações e Lineares, no qual resume os casos de resolução de sistemas lineares.

Segundo Smole e Diniz (2003, p.167), o método de Gauss foi inicialmente desenvolvido pelo matemático alemão Carl F. Gauss no século XVIII e aperfeiçoado no século XX pelo matemático francês Camille Jordan

• 3.2 A Regra de Cramer

A Regra de Cramer é um algoritmo que permite resolver sistemas lineares por meio dos determinantes das matrizes a ele associado. Trata-se de um método pouco indicado pelos estudiosos da Educação Matemática, visto que ele envolve um número muito grande de cálculos e só pode ser aplicado quando o sistema possui o número de equações igual ao número de incógnitas e é determinado, isto é, possui uma única solução (neste caso, o determinante da matriz dos coeficientes, abaixo explicada, é diferente de zero).

Apresentamos a seguir uma demonstração da Regra de Cramer, para o caso particular de um sistema linear de três equações e três incógnitas. A justificativa para o caso geral de n equações e n incógnitas se faz de maneira análoga. Esta demonstração foi adaptada de Paiva (1995, pp. 130 – 131) pela autora, visto que o citado autor apresenta a demonstração da Regra de Cramer para os sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas, mas consideremos adequado fazê-la para o caso de três equações e três incógnitas, tema este que é abordado no Ensino Médio e é um de nossos objetos de estudo neste trabalho.

Consideramos importante apresentar aqui esta demonstração, pois acreditamos que muitos professores não tenham tido a oportunidade de conhecê-la e aceitam a regra como um algoritmo pronto, sem entendê-lo realmente, “sem saber por que ele funciona”.

Considere o sistema linear com três equações e três incógnitas:

$$M: \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Considere também as matrizes a ele associadas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(Matriz dos coeficientes de M, sendo o determinante da matriz A não nulo, isto é, $\det A \neq 0$).

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{matriz coluna das incógnitas de M}).$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (\text{matriz coluna dos termos independentes de M}).$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

($\bar{A}$, chamada Matriz adjunta de M, é a matriz transposta dos cofatores de M).

E considere ainda os determinantes:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad e$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Escrevendo o sistema M sob a forma de equação matricial temos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Multiplicando ambos os termos dessa igualdade por $\bar{A}$ (à esquerda de cada termo) temos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}}_{\bar{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}}_{\bar{A}} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Pela propriedade: se A é uma matriz quadrada de ordem n e $\bar{A}$ a sua adjunta, então $A\bar{A} = \bar{A}A = (\det A)I_n$, temos que:

$$(\det A) \cdot I_3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}}_{\bar{A}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow (\det A) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}}_{\bar{A}} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

E sabendo que $\det A$, b_1 , b_2 e b_3 são números reais, vem que

$$\begin{pmatrix} (\det A) \cdot x \\ (\det A) \cdot y \\ (\det A) \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (\det A) \cdot x = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ (\det A) \cdot y = A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ (\det A) \cdot z = A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{cases}$$

Logo

$$(\det A) \cdot x = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \Rightarrow x = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3}{\det(A)}$$

E como já foi mostrado anteriormente na página 24 desse trabalho, temos que

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad A_{31} = + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \text{ então}$$

$$x = \frac{b_1 a_{22} a_{33} - b_1 a_{23} a_{32} - b_2 a_{12} a_{33} + b_2 a_{13} a_{32} + b_3 a_{12} a_{23} - b_3 a_{13} a_{22}}{\det(A)} \Rightarrow$$

$$x = \frac{(b_1 a_{22} a_{33} + b_2 a_{13} a_{32} + b_3 a_{12} a_{23}) - (b_1 a_{23} a_{32} + b_2 a_{12} a_{33} + b_3 a_{13} a_{22})}{\det(A)} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{(\det A)} \Rightarrow x = \frac{D_x}{D}$$

Assim, de maneira análoga, podemos verificar que:

$$(\det A). y = A_{12} b_1 + A_{22} b_2 + A_{32} b_3 \Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{(\det A)} \Rightarrow y = \frac{D_y}{D}$$

$$(\det A). z = A_{13} b_1 + A_{23} b_2 + A_{33} b_3 \Rightarrow z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{(\det A)} \Rightarrow z = \frac{D_z}{D}$$

Desta forma, demonstramos a Regra de Cramer e acreditamos que esta demonstração poderá auxiliar a muitos professores na compreensão desse algoritmo.

• 3.3 O método de Gauss ou método do escalonamento

Outro algoritmo indicado no Ensino Médio para resolver os sistemas lineares é o método de Gauss (ou escalonamento). Trata-se de um algoritmo que permite a resolução e a classificação de qualquer sistema linear, por isso e por exigir um número reduzido de operações, ele se torna um processo mais indicado pelos pesquisadores de educação matemática do que a Regra de Cramer.

Vale ressaltar aqui que documentos oficiais como as Orientações Curriculares para o Ensino Médio afirmam que a Regra de Cramer deve ser abandonada, por se tratar de um procedimento custoso e limitado aos sistemas com três equações e três incógnitas.

[...] A resolução de sistemas 2X3 ou 3X3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equações 3X3, a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco

significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. (BRASIL, 2006, pp. 77-78).

Dado um sistema linear, sempre é possível escrevê-lo na forma matricial.

Considere o sistema linear com três equações e três incógnitas:

$$S: \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Podemos obter, a partir de S, uma matriz incompleta A (também chamada matriz dos coeficientes), uma matriz ampliada B (cuja primeira coluna é formada pelos coeficientes da variável x, a segunda pelos coeficientes de variável y; a terceira pelos coeficientes de z e a quarta coluna é formada pelos termos independentes) e uma equação matricial:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

matriz dos coeficientes matriz ampliada equação matricial
ou matriz completa

Smole e Diniz (2003) afirmam que o método proposto por Gauss consiste em efetuar algumas operações elementares com as linhas da matriz ampliada do sistema dado, transformando-o num sistema na forma escalonada, que é mais simples de ser resolvido e é equivalente⁶ ao primeiro.

Segundo Dante (2007), um sistema com m equações e n incógnitas é dito escalonado quando a sua matriz dos coeficientes tiver em cada linha o primeiro elemento não nulo situado à esquerda do primeiro elemento não nulo da linha seguinte e que se houver linha com todos os elementos nulos ela deve estar abaixo de todas as outras linhas.

Exemplos de um sistema na forma escalonada:

⁶ Sistemas equivalentes são aqueles que possuem o mesmo conjunto solução.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ 0x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ 0x + 0y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a_{11}x + 0y + 0z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + 0z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Trata-se de um sistema que possui a primeira (ou a última linha) com apenas uma incógnita, assim, pode ser resolvido facilmente, pois basta encontrar o valor dessa incógnita e substituí-lo na equação anterior (ou na posterior), encontrando o valor da próxima incógnita, e assim sucessivamente.

Smole e Diniz (2003) afirmam também que

[...] para escalonar um sistema, começamos eliminando a primeira incógnita, zerando seu coeficiente em todas as equações, a partir da segunda; depois, eliminamos a segunda incógnita em todas as equações, a partir da terceira, e assim por diante. (p. 167).

As operações elementares entre as linhas da matriz ampliada, citadas anteriormente, consistem em:

- I. Permutar linhas de lugar entre si;
- II. Multiplicar ou dividir uma linha por um número real não nulo;
- III. Somar a uma linha, outra linha da matriz, previamente multiplicada por um número real não nulo.

Apresentaremos a seguir uma justificativa para a regra do escalonamento, que foi adaptada de Callioli, Domingues e Costa (1990, pp. 4–5) pela pesquisadora, pois consideramos muito importante para o professor conhecer as propriedades matemáticas que garantem a existência desse algoritmo, visto que provavelmente ele irá trabalhá-lo com seus alunos.

Mostraremos que se um sistema linear S_1 for obtido de um sistema linear S , através de um número finito dessas operações elementares, então S_1 é equivalente a S (indica-se por $S_1 \sim S$).

Considere o sistema com m equações e n incógnitas S_1 :

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

É evidente que se S_1 for obtido permutando-se as equações de S (que na matriz ampliada, corresponde a trocar duas linhas entre si), então toda solução de S é também solução de S_1 (operação elementar I).

Consideremos agora o sistema S_1 , obtido multiplicando-se uma das equações de S pelo número real k , não nulo (que na matriz ampliada, corresponde a multiplicar uma linha pelo número). Devido à primeira operação elementar que acabamos de mostrar, podemos supor que a equação multiplicada seja a primeira.

$$S_1: \begin{cases} k a_{11}x_1 + k a_{12}x_2 + k a_{13}x_3 + \dots + k a_{1n}x_n = k b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ é uma solução de S , então, substituindo esta n -upla na primeira equação de S temos:

$$a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \dots + a_{1n}\beta_n = b_1 \quad (1)$$

E multiplicando esta igualdade (1) por k obtemos a igualdade abaixo (2) :

$$(ka_{11})\beta_1 + (ka_{12})\beta_2 + \dots + (ka_{1n})\beta_n = ka_{11}\beta_1 + ka_{12}\beta_2 + \dots + ka_{1n}\beta_n = kb_1$$

O que mostra que $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ é também solução da primeira equação de S_1 .

Por outro lado, se $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ é solução de S_1 , então a igualdade (2) é verdadeira. Dividindo (2) por k obtemos (1). Portanto $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ pertence ao conjunto solução de S (operação elementar II).

Para justificar a operação elementar (III), consideremos o sistema S_2 com duas equações e três incógnitas:

$$S_2 : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação pela soma das duas, temos o novo sistema S_3 :

$$S_3 : \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ (a_{21} + a_{11})x + (a_{22} + a_{12})y + (a_{23} + a_{13})z = b_2 \end{cases}$$

Se a terna ordenada $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ é solução de S_2 , temos:

$$S_2 : \begin{cases} a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + a_{13}\beta_3 = b_1 \\ a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + a_{23}\beta_3 = b_2 \end{cases}$$

Então $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ é também solução de S_3 , pois:

$$(a_{21} + a_{11})\beta_1 + (a_{22} + a_{12})\beta_2 + (a_{23} + a_{13})\beta_3 = a_{21}\beta_1 + a_{11}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + a_{12}\beta_2 + a_{23}\beta_3 + a_{13}\beta_3 = (a_{11}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + a_{13}\beta_3) + a_{21}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + a_{23}\beta_3 = b_1 + b_2$$

Reciprocamente, se $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ é uma solução de S_3 , então é uma solução de S_2 , pois a primeira equação de S_2 é a mesma e a segunda equação de S_2 pode ser obtida de S_3 multiplicando-se a primeira linha por (-1) e somando à segunda equação de S_3 .

A partir das duas últimas transformações aqui apresentadas, podemos concluir que é possível somar a uma equação, outra equação do sistema previamente multiplicada por um número real não nulo (que na matriz ampliada corresponde a somar a uma linha um múltiplo de outra linha).

Lima (1998) afirma que o método do escalonamento se baseia no fato de que todo sistema é equivalente a um sistema escalonado.

Desta forma, demonstramos a Regra de Gauss, e acreditamos que esta demonstração poderá auxiliar a muitos professores no entendimento desse algoritmo.

No *CD* anexo (final do trabalho) analisaremos a relação entre o tratamento do registro algébrico ao resolvermos um sistema linear pelo método de Gauss e as transformações que ocorrem no registro gráfico desse sistema.

4. APRESENTAÇÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

O primeiro livro analisado, doravante denominado L_1 , é o volume 2 da coleção *Matemática, Contexto e Aplicações*, cujo autor é Luiz Roberto Dante, está na 4ª edição, foi editado em 2007 pela editora Ática, e indicado pelo PNLEM-2007. Na abertura de cada capítulo, o autor apresenta informações gerais sobre o tema que será abordado com o objetivo de despertar a curiosidade do aluno. Além do texto, dos exercícios resolvidos e propostos, cada capítulo é complementado com as seções “*Atividades Adicionais*” e “*Questões de vestibular*” que, segundo o autor, são destinadas a revisar, fixar e aprofundar os conteúdos estudados.

No prefácio, o autor afirma que o seu objetivo é criar condições para que o aluno possa compreender as idéias básicas da Matemática desse nível de ensino, além de atribuir sentido a elas e aplicá-las corretamente na resolução de problemas do mundo real. Dante também pretende preparar os alunos para os processos seletivos de ingresso nos cursos de Educação Superior.

O autor afirma também que explorou todos os conceitos de maneira intuitiva e compreensível, evitou as “receitas” prontas e o formalismo, mas manteve o rigor coerente com este nível de ensino.

No final do prefácio o autor afirma que espera poder contribuir com o trabalho do professor em sala de aula e com o processo de aprendizagem dos alunos, consolidando e aprofundando o que eles aprenderam no Ensino Fundamental.

O segundo livro analisado, doravante denominado L_2 , é o volume 2 da coleção *Matemática Ensino Médio*, cujas autoras são Kátia S. Smole e Maria Inez Diniz, editado em 2003 pela editora Saraiva, está na 3ª edição e também foi indicado pelo PNLEM-2007. Além do texto, dos exercícios resolvidos e dos propostos, o livro também apresenta seções diferenciadas como “*Flash Matemático*” que tem como objetivo ampliar o conhecimento do aluno; “*Saia dessa*” que propõe exercícios que levam o aluno a refletir sobre importantes temas da Matemática; “*Elo*” que relaciona a Matemática com outras disciplinas e com o dia-a-dia do aluno, “*Para Recordar*” que propõe exercícios cujo

objetivo é retomar conteúdos estudados anteriormente e “*Invente você*” que além de estimular a criatividade do aluno, algumas vezes propõe que este realize conversão de registro como por exemplo, quando fornece a equação $x + y + z = 15$ (registro algébrico) e sugere que o aluno elabore um problema (língua natural) que envolva a equação dada (Smole e Diniz, 2003, pp. 125 e 126).

No prefácio, as autoras afirmam que têm como objetivo, além de contemplar os conteúdos matemáticos pertinentes a esse nível de ensino, avançar para que a Matemática seja entendida sob dois aspectos: primeiramente, como linguagem das ciências a serviço das demais disciplinas e, em segundo lugar, aprofundar o olhar da Matemática como ciência, com sua forma de organizar conceitos e técnicas e de propor e resolver situações-problema. As autoras afirmam também que esperam que esta coleção reformulada possa mostrar a Matemática em todas as suas dimensões e proporcionar aos alunos aprendizagens valiosas e transformadoras.

O terceiro livro analisado, doravante denominado L_3 , é *Matemática Completa - Vol. Único*, cujos autores são José R. Giovanni, José R. Bonjorno e José R. Giovanni Jr., editado em 2002 pela editora FTD, e indicado pelo PNLEM-2007. Além do texto, dos exercícios resolvidos e propostos, o livro encerra cada capítulo com as seções “*Exercícios de Revisão*” e “*Testes*”. O livro está dividido em seis unidades denominadas: Álgebra, Porcentagem, Trigonometria, Geometria, Geometria Analítica e Noções de Estatística. Para iniciar cada uma delas, os autores apresentam uma pequena biografia de um matemático relacionado ao tema da unidade e um pouco da história desse tema.

Os autores afirmam que esta obra contém o que há de fundamental nos programas de Matemática para o Ensino Médio, que a abordagem dos assuntos é feita de maneira simples, que a leitura é acessível, porém, sem fugir do rigor matemático e que os exercícios obedecem a uma graduação de dificuldades.

No final do prefácio, os autores afirmam que acreditam que com este livro o aluno poderá desenvolver um curso relativamente abrangente no Ensino Médio.

• 4.1 Os sistemas lineares nos livros didáticos analisados

Numa primeira análise, pudemos observar que os três livros didáticos apresentam propostas de trabalho distintas: enquanto os livros L_1 e L_3 apresentam o conteúdo de sistemas num único capítulo intitulado Sistemas lineares (organização linear de conteúdos), o L_2 aborda esse conteúdo em espiral: no capítulo intitulado sistemas lineares, encontramos uma revisão da resolução gráfica e algébrica dos sistemas com duas equações e duas incógnitas, a apresentação e a resolução (método da adição) dos sistemas com três equações e três incógnitas, bem como a sua representação geométrica. Posteriormente, os sistemas são abordados no estudo das matrizes (método do escalonamento) e no estudo dos determinantes (Regra de Cramer).

Consideramos mais adequado que os conteúdos sejam trabalhados em espiral, isto é, um conteúdo é apresentado num dado momento e é retomado e aprofundado posteriormente. Acreditamos que desta forma estamos reforçando a aprendizagem do aluno e tornando os seus conhecimentos mais sólidos.

Para nós, essa maneira inovadora de organizar os temas mostra que é possível trabalhar os conteúdos matemáticos de forma mais integrada e menos mecânica.

Segundo Pires (2000), a partir da década de 80, muitas reformas ocorreram na Educação do Brasil, e no que diz respeito ao currículo da Matemática, estas reformas, além de se preocuparem com a excessiva mecanização de algoritmos, com a priorização dos temas algébricos e redução dos geométricos e com o excessivo nível de abstração, enfatizam também a necessidade dos conteúdos serem apresentados em diferentes níveis de abordagem, de se trabalhar os temas em espiral. Defendem a retomada de um conteúdo em diferentes ocasiões, permitindo uma progressiva formalização e sistematização desses temas, pois para dominar um conteúdo e aplicá-lo eficientemente é preciso compreendê-lo com aprofundamento. A autora afirma que em 1985 teve início o processo de elaboração da chamada Proposta Curricular para o ensino de 1º grau e que esta proposta já enfatizava a importância do trabalho dos conteúdos em espiral.

Outra sugestão explicitada era a de apresentar o conteúdo, em diferentes níveis de abordagem, em que se procura respeitar a integração dos temas a serem trabalhados, bem como seu desenvolvimento "em espiral", conforme preconizava Jerome Bruner (1972). Esse modelo apoiava-se no pressuposto de que qualquer matéria oferece elementos interessantes para a educação da criança, de forma que algo pode ser ensinado a ela, honradamente, em qualquer momento e que, portanto, um plano de estudos deve ser elaborado em torno de grandes questões, princípios e valores que uma sociedade estima, dignos do interesse contínuo de seus membros. Defendia-se a idéia de que dominar as idéias básicas e usá-las eficientemente exige constante aprofundamento da compreensão que delas se tem, o que se pode conseguir aprendendo-se a utilizá-las em formas progressivamente mais complexas. (Pires, 2007, p.16).

Pires (2000) afirma, também, que essas novas propostas não romperam com a linearidade dos nossos currículos, que ainda apresentam conteúdos listados por série, de forma bastante tradicional. Esta afirmação vem confirmar um dos fatos observados em nossa pesquisa, pois, dentre os três livros analisados, apenas um apresenta uma proposta de trabalho de conteúdos em espiral.

Documentos oficiais como os PCN do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) também discutem a organização dos conteúdos e enfatizam que a organização linear - dominada pela idéia de que cada conteúdo é um conhecimento prévio para o próximo, - embora seja a tradicionalmente mais usada no Brasil, é uma forma excessivamente hierárquica, em que geralmente os conteúdos são tratados isoladamente, extensivamente e num único momento, sem se levar em conta que para que o aluno se aproprie de um conhecimento é aconselhável que ele o encontre em mais de um registro de representação e em diferentes momentos. (Colombo e Moretti, 2007, p.5).

Quanto à organização dos conteúdos, de modo geral observa-se uma forma excessivamente hierarquizada de fazê-la. É uma organização dominada pela idéia de pré-requisito, cujo único critério é a estrutura lógica da Matemática. Nessa visão, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem na forma de uma corrente, cada conteúdo sendo um pré-requisito para o que vai sucedê-lo.

[...] O que também se observa em termos escolares é que muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente e são apresentados e exauridos num único momento.

Quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. (BRASIL, 1998, pp. 22).

O documento também afirma que na organização linear dos conteúdos não se leva em conta que para que o aluno se aproprie de um novo conhecimento é recomendável encontrar este conhecimento em diferentes momentos.

[...] De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos. (BRASIL, 1998, pp. 22 e 23).

Na organização em espiral, um conteúdo é abordado numa determinada série e é retomado em momentos posteriores para ser aprofundado.

5. OS SISTEMAS LINEARES E OS DOCUMENTOS OFICIAIS

O objetivo deste trabalho é analisar em quais registros os Sistemas Lineares são apresentados nos livros didáticos analisados e quais as conversões de registros propostas, conversões estas que estão propostas nos documentos oficiais como as Orientações curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) e o Guia do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (BRASIL, 2005).

No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. (BRASIL, 2006, p. 77).

Porém, verificamos que, além da conversão de registros, os documentos oficiais destacam também a necessidade de se abordar os aspectos históricos dos temas a serem trabalhados, de se retomar os conhecimentos anteriores do aluno e de se propor atividades com o uso do computador.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio enfatizam a importância da abordagem histórica dos sistemas lineares:

A utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos. (BRASIL, 2006, p. 86).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) alertam para a importância de se retomar os conhecimentos anteriores ao abordar os sistemas com três equações e três incógnitas:

Com relação à álgebra, há ainda o estudo de **equações polinomiais** e de **sistemas lineares**. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo grau e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3 [...] (BRASIL, 2002, p. 122).

Quanto ao tratamento do registro algébrico, os documentos afirmam que a regra do escalonamento deve ter prioridade em relação à regra de Cramer.

[...] Quanto à resolução de sistemas de equações 3×3 , a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. (BRASIL, 2006, pp. 77-78).

Consideramos importante verificar se ao abordar o tema Sistemas Lineares os livros didáticos contemplam estas indicações, mas gostaríamos de ressaltar que a ordem dos temas abordados não está relacionada com a importância de cada um deles, pois acreditamos que todos eles tenham a sua grande relevância dentro da Educação Matemática.

• 5.1 A retomada dos sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas antes da abordagem dos sistemas com três equações e três incógnitas nos livros didáticos

Segundo Moreira e Masini (1982) na Teoria de Aprendizagem de David Ausubel, a aprendizagem se diz significativa quando uma nova informação ancora-se em conhecimentos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz (subsunções), ou seja, quando o novo conhecimento interage com outro já existente na sua estrutura cognitiva e ambos sofrem adaptações.

Concordamos com Ausubel quando ele afirma que, para que ocorra a aprendizagem significativa, os conceitos preexistentes (subsunções) devem estar claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo, e, para que isto ocorra, o professor deve utilizar-se de organizadores prévios⁷.

Em nosso trabalho, objetivamos analisar os registros de representação semióticas dos sistemas lineares nos livros didáticos do Ensino Médio, mas não podemos nos esquecer que os alunos já deveriam ter tido um contato com os sistemas lineares (com duas equações e duas incógnitas) anteriormente, pois, segundo as recomendações dos PCN (1998), este tema deveria ser abordado nas séries finais do Ensino Fundamental, tanto no quadro algébrico

⁷ Informações introdutórias, que devem ser apresentadas antes do novo conteúdo, uma vez que têm a função de servir de ponte entre o que o aluno já sabe e o novo conceito que ele deve saber para que ocorra uma aprendizagem significativa.

quanto no geométrico, como vemos nos conteúdos propostos pelo referido documento para o quarto ciclo.

Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo, inclusive o da representação das equações no plano cartesiano, discutindo o significado das raízes encontradas em confronto com a situação proposta. (BRASIL, 1998, P. 88).

Amparadas na Teoria de Aprendizagem de David Ausubel, acreditamos que uma retomada do tema sistema lineares com 2 equações e 2 incógnitas, estaria fazendo a ponte entre o que o aluno já conhece e o novo conhecimento. Assim, consideramos relevante verificar se os livros didáticos apresentam essa retomada.

Dois dos três livros didáticos (L_1 e L_2) retomam a resolução de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas algebricamente (método da adição) antes de abordar os sistemas com mais incógnitas. Estes livros apresentam três exercícios resolvidos, sendo o *primeiro* deles um sistema possível e determinado (possui uma única solução), o *segundo* um sistema impossível (não possui nenhuma solução) e o *último* exercício resolvido é um sistema possível e indeterminado (possui infinitas soluções). Porém, a diferença entre eles está no fato do L_2 partir de uma situação-problema na língua natural (Figura 4) e o L_1 já propor o sistema no registro algébrico para ser resolvido (Figura 5). Logo a seguir, os autores dos dois livros (L_1 e L_2) se preocupam também em apresentar a interpretação geométrica desses três sistemas já resolvidos algebricamente.

Os autores de L_1 e L_2 chamam a atenção dos alunos para o fato de que os sistemas com duas equações e duas incógnitas podem possuir uma única resposta e que, neste caso, são representados graficamente por duas retas coplanares concorrentes, ou infinitas respostas e, neste caso, são representados por duas retas coincidentes ou ainda não possuir nenhuma resposta, sendo representado neste caso por duas retas coplanares paralelas e distintas.

b) A soma de dois números é 100 e sua média aritmética é 50. Quais são esses números?

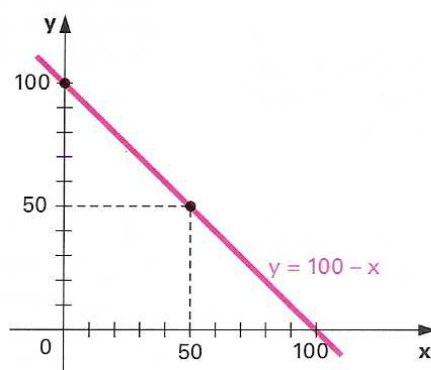
Resolvendo o sistema $\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{x + y}{2} = 50 \end{cases}$ encontramos a solução do problema. Para isso,

vamos multiplicar os dois membros da 1ª equação por -1 e os dois membros da segunda por 2. Em seguida, somamos as equações obtidas:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{x + y}{2} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \oplus \begin{cases} -x - y = -100 \\ x + y = 100 \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Nesse caso, existe uma infinidade de números que satisfazem a igualdade. A solução do sistema são todas as duplas de números do tipo $(x, 100 - x)$. Assim, esse sistema é **possível**, porém **indeterminado**, ou **compatível e indeterminado**.

Graficamente, temos:



As retas são coincidentes porque as duas equações do sistema têm mesmo coeficiente angular e mesmo coeficiente linear. Portanto, existe uma infinidade de pares que verificam simultaneamente as duas equações. A solução do sistema é dada por $S = \{(x, 100 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Figura 4 - Retomada da resolução (algébrica e geométrica) de um sistema com duas equações e duas incógnitas, com a conversão de registro: da língua natural para o registro algébrico e para o gráfico.

Fonte: L₂, p. 129.

Resolução pelo método da adição

Resolver um sistema linear significa descobrir o seu conjunto solução S , formado por todas as soluções do sistema.

A resolução dos sistemas lineares 2×2 , em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, já foi vista no ensino fundamental por meio de alguns métodos como *adição*, *substituição*, *comparação* e outros.

Vamos retomar, com exemplos, a resolução pelo *método da adição*:

$$2^{\circ}) \begin{cases} x - 2y = 5 \cdot (-2) \\ 2x - 4y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4y = -10 \\ 2x - 4y = 2 \\ \hline 0y = -8 \end{cases}$$

Se em $0y = -8$ não existe valor real para y , então não existe par de números reais que seja solução do sistema. Dizemos que o sistema tem $S = \emptyset$ e que ele é um *sistema impossível* (não tem nenhuma solução, ou seja, o conjunto solução é vazio).

As retas paralelas e distintas indicam que não existe par que seja solução do sistema (sistema impossível).

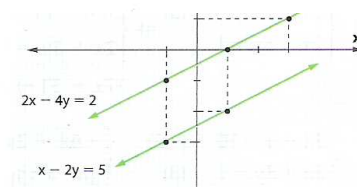


Figura 5 - Retomada da resolução de um sistema com duas equações e duas incógnitas, no registro algébrico e no registro gráfico.

Fonte: L₁, pp. 181-182.

Os livros L₁ e L₂ propõem também exercícios de sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas para serem resolvidos algebricamente, geometricamente e classificados quanto ao número de soluções que eles apresentam.

Já o L₃ não retoma a resolução de sistemas com duas equações e duas incógnitas. Esta situação reforça a afirmação dos PCN do Ensino Fundamental, que afirma que os livros didáticos desconsideram a importância do conhecimento prévio do aluno na construção do conhecimento. (1998, p. 23)

Podemos concluir, então, que apenas dois dos livros analisados apresentam uma retomada de conteúdo (que, segundo a Teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel assume o papel de organizador prévio) do tema sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas (que, na mesma teoria, assume o papel de subsunçor) antes de apresentar os sistemas com três incógnitas.

• 5.2 A abordagem histórica dos sistemas lineares nos livros didáticos analisados

Acreditamos que a História da Matemática possa ser utilizada em sala de aula para dar significado aos conceitos matemáticos, para que o aluno compreenda em que situação surgiu o tema, quais as necessidades da época e como aquele conteúdo contribuiu para resolver algum problema que estava sem solução.

Documentos oficiais também defendem o estudo da História da Matemática.

Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos ou certezas definitivas. (BRASIL, 2002, p. 117).

Porém, é importante ressaltar que o estudo da História da Matemática não deva se resumir à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos. Acreditamos na importância do professor enfatizar para o aluno que a História da Matemática não se construiu num curto período de tempo, que o processo não foi fácil, cheio de idas e vindas e que cada um contribuiu um pouco para que chegássemos nessa Matemática organizada e complexa que hoje conhecemos.

[...] A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático. (BRASIL, 2006, p. 86).

Por acreditarmos que o livro didático deva apresentar os fatos históricos relacionados aos temas estudados e utilizá-los como um instrumento para

auxiliar a construção do conhecimento do aluno, consideramos relevante verificar se os livros didáticos apresentam a história dos sistemas lineares.

O autor do L1 inicia o Capítulo 8, Sistemas Lineares, com um texto informativo que explica a origem da palavra sistema: do grego, *systema* (significa junto) e que, em Matemática, sistema é o conjunto de equações que devem ser resolvidas juntas, isto é, os resultados devem satisfazer todas as equações. O texto segue explicando que basta que haja mais do que uma variável num problema para que ele seja representado por um sistema de equações. O referido texto traz também algumas informações históricas como o fato do inglês Arthur Cayley (1821-1895) ter sido o primeiro matemático a representar em forma de matrizes os dados extraídos de um sistema de equações e que os sistemas já apareceram no livro chinês Nove Capítulos Sobre a Arte Matemática, de Chuí-Chang Suan-Shu, de 250 a.C.

Já o L₂ apresenta, na seção Flash Matemático (p. 166), algumas curiosidades da vida do matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855), porém, nenhuma dessas curiosidades está relacionada com o tema sistemas lineares. Na página 167 o autor afirma que Gauss desenvolveu o método do escalonamento no século XVIII.

O terceiro livro analisado também apresenta - no início da Unidade A, intitulada Álgebra - a biografia de Gauss, porém não faz nenhuma citação da relação desse matemático com a resolução dos sistemas lineares.

Acreditamos que as referências históricas sobre os sistemas lineares presentes nos três livros analisados deveriam ser mais completas, mais abrangentes e mais enriquecedoras, assim, poderiam contribuir efetivamente para facilitar a construção do conhecimento do aluno e valorizar o aprendizado deste tema.

• 5.3 Os livros didáticos e as atividades que empregam o uso do computador

Os documentos oficiais recomendam que os livros didáticos estimulem o uso do computador em sala de aula.

Um outro elemento tecnológico de importância inegável é o computador. Num livro didático podem ser propostas atividades que empreguem o computador como meio auxiliar na aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos, bem como atividades que auxiliem a formação do aluno para o mundo do trabalho. (BRASIL, 2005, p. 78).

Acreditamos que o uso do computador na educação, não só poderá aumentar as possibilidades de trabalho do indivíduo, como também poderá tornar as nossas aulas mais dinâmicas, mais atraentes, já que os alunos estarão motivados a investigar, fazer descobertas, o que poderá facilitar a construção de conhecimentos. Porém pudemos observar que nenhum dos livros analisados apresenta alguma atividade com o uso de computador envolvendo os sistemas lineares.

O L₁ apresenta, no final do capítulo, uma atividade muito interessante que introduz a programação linear no Ensino Médio (Figuras 6 e 7). Trata-se de uma atividade bem contextualizada com a qual o aluno pode aplicar noções de Matemática em problemas atuais.

Acreditamos que esta poderia ficar ainda muito mais atraente se fosse utilizada a informática para auxiliar a construção dos gráficos.

Talvez pela carência de computadores nas escolas, podemos observar que os livros didáticos ainda estimulam pouquíssimo o uso do computador nas atividades de matemática. Porém, nós acreditamos que esse recurso poderia enriquecer muito a aula, possibilitar atividades mais dinâmicas, auxiliar na compreensão de vários conteúdos matemáticos, na formulação de conjecturas e validação de hipóteses e na observação de padrões.

Introdução à programação linear

As equações e inequações lineares, bem como os sistemas de equações e inequações simultâneas, são bastante úteis em muitos problemas de economia, transporte, dietas, etc. Nesses problemas é comum se perguntar pelos valores máximo ou mínimo de uma função cujas variáveis estão sujeitas a certas desigualdades. Em muitos desses problemas a função que se quer otimizar (ou seja, da qual se quer encontrar seu máximo ou mínimo) é uma função linear e as desigualdades a que estão sujeitas suas variáveis também são lineares. Quando isso ocorre, dizemos então que estamos diante de um problema de *programação linear*.

Programação linear – o método gráfico

Consideremos a seguinte situação-problema:

Dois produtos **P** e **Q** contêm as vitaminas **A**, **B** e **C** nas quantidades indicadas no quadro ao lado. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com o mínimo custo?

	P	Q	
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
	3	2	

Diante de um problema de programação linear, consideramos a seguinte orientação para resolvê-lo:

1. Estabelecemos a *função objetivo*, isto é, a função que queremos maximizar ou minimizar.
2. Transformamos as restrições impostas no problema num sistema de inequações lineares.
3. Traçamos o gráfico do polígono convexo correspondente a essas restrições determinando as coordenadas dos seus vértices.
4. Calculamos os valores da função objetivo em cada um dos vértices.
5. O maior desses valores é o máximo e o menor é o mínimo da função objetivo.
6. Voltamos ao problema e damos a sua solução.

Figura 6 - Atividade que introduz à programação linear no ensino médio.

Fonte: L₁ p. 202.

Problema de economia

Um comerciante vende dois tipos de artigos, **A** e **B**. Na venda do artigo **A** tem um lucro de 20 por unidade e na venda do artigo **B**, um lucro de 30. Em seu depósito só cabem 100 artigos e sabe-se que por compromissos já assumidos ele venderá pelo menos 15 artigos do tipo **A** e 25 do tipo **B**. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos do tipo **A** e 50 artigos do tipo **B**. Quantos artigos de cada tipo deverá o comerciante encomendar ao distribuidor para que, supondo que venda todos, obtenha o lucro máximo?

Resolução:

Seja x o número de artigos do tipo **A** e y o número de artigos do tipo **B** que devem ser encomendados.

1. Função objetivo:

Se para cada artigo do tipo **A** que vende tem um lucro de 20 e para cada artigo do tipo **B** tem um lucro de 30, o lucro total é dado pela função objetivo $L = 20x + 30y$.

2. Restrições:

a) cabem no máximo 100 artigos:

$$x + y \leq 100$$

b) serão vendidos pelo menos 15 artigos **A**:

$$x \geq 15$$

c) serão vendidos pelo menos 25 artigos **B**:

$$y \geq 25$$

d) o distribuidor entregará no máximo 60 artigos **A**:

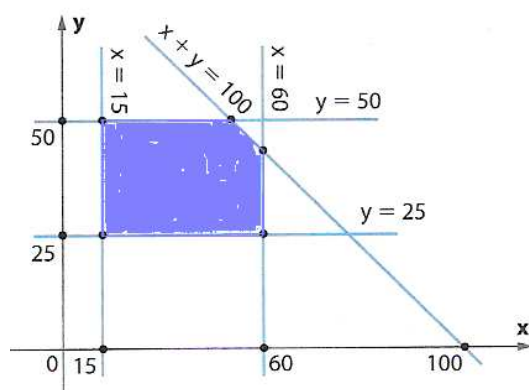
$$x \leq 60$$

e) o distribuidor entregará no máximo 50 artigos **B**:

$$y \leq 50$$

3. Gráfico:

As restrições dão origem ao polígono convexo limitado pelas retas $x + y = 100$, $x = 15$, $y = 25$, $x = 60$ e $y = 50$.



As coordenadas dos vértices do polígono resultante se encontram facilmente resolvendo os pares de equações que correspondem aos lados que determinam o vértice. As coordenadas são (15, 25), (15, 85), (50, 50), (60, 40), (60, 25).

4. Valor da função objetivo nos vértices:

Vértice	Valor de $L = 20x + 30y$
(15, 25)	$20 \cdot 15 + 30 \cdot 25 = 1\,050 \leftarrow$ mínimo
(15, 85)	$20 \cdot 15 + 30 \cdot 85 = 2\,550$
(50, 50)	$20 \cdot 50 + 30 \cdot 50 = 2\,500 \leftarrow$ máximo
(60, 40)	$20 \cdot 60 + 30 \cdot 40 = 2\,400$
(60, 25)	$20 \cdot 60 + 30 \cdot 25 = 1\,950$

5. Concluímos que a solução ótima, que corresponde ao valor máximo de lucro L , é (50, 50) e o lucro máximo é 2 500.

6. Resposta do problema:

O comerciante, para obter o lucro máximo nas condições do problema, deverá encomendar 50 artigos do tipo **A** e 50 artigos do tipo **B**. Com isso, vendendo todos, terá um lucro de 2 500.

Figura 7- Exercício resolvido envolvendo a programação linear.

Fonte: L_1 p. 203.

Gostaríamos de deixar como sugestão que os computadores fossem utilizados para que o aluno pesquise sobre a história dos sistemas lineares e de outros temas da Matemática.

Acreditamos também que as planilhas eletrônicas possam facilitar os processos de resolução de sistemas (Cramer ou Escalonamento).

As planilhas eletrônicas são programas de computador que servem para manipular tabelas cujas células podem ser relacionadas por expressões matemáticas. Para operar com uma planilha, em um nível básico, é preciso conhecimento matemático similar àquele necessário ao uso da calculadora, mas com maiores exigências quanto à notação de trabalho, já que as operações e as funções são definidas sobre as células de uma tabela em que se faz uso de notação para matrizes.

Assim, é importante conhecer bem a notação matemática usada para expressar diferentes conceitos, em particular o conceito de função. Além disso, a elaboração de planilhas mais complexas requer raciocínio típico dos problemas que exigem um processo de solução em diferentes etapas. (BRASIL, 2006, pp. 87 e 88).

[...] As planilhas eletrônicas, mesmo sendo ferramentas que não foram pensadas para propósitos educativos, também podem ser utilizadas como recursos tecnológicos úteis à aprendizagem matemática. Planilhas oferecem um ambiente adequado para experimentar seqüências numéricas e explorar algumas de suas propriedades. (BRASIL, 2006, p. 89).

Podemos concluir então que, os livros didáticos analisados, no que diz respeito ao uso da informática para resolução de sistemas lineares, ainda estão deixando a desejar e ainda não estão atendendo plenamente as recomendações dos documentos oficiais.

• 5.4 O tratamento do registro algébrico nos livros didáticos

Segundo o Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio

A abordagem dos sistemas de equações lineares tem um papel importante não só para a formação matemática como na modelização algébrica de muitas situações das ciências e da tecnologia. (BRASIL, 2005, p. 73).

O documento evidencia também que a resolução dos sistemas por escalonamento (Método de Gauss) deve ter prioridade em relação ao uso da Regra de Cramer visto que este primeiro permite aos professores e alunos abordá-lo ou por meio das operações elementares com suas linhas ou recorrerem ao auxílio do computador.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio também afirmam que os sistemas lineares no Ensino Médio devam ser resolvidos pelo escalonamento e que a Regra de Cramer deve ser abolida do Ensino Médio.

[...] A resolução de sistemas 2×3 ou 3×3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equações 3×3 , a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. (BRASIL, 2006, pp. 77-78).

Apoiadas nos fatos acima citados consideramos importante averiguar quais os processos abordados pelos livros didáticos do Ensino Médio para a resolução de sistemas lineares com mais de duas incógnitas, isto é, qual o tratamento que é dado no registro algébrico ao se abordar os sistemas lineares no Ensino Médio.

O L_1 apresenta dois métodos para a resolução de sistemas com três equações e três incógnitas: o método do escalonamento (método de Gauss) e a regra de Cramer.

Já o L_2 , além dos métodos já citados, apresenta também a resolução desses sistemas através do método da adição e pelo método da substituição, métodos esses que já são conhecidos pelos alunos desde as séries finais do Ensino Fundamental.

Os dois livros abordam também a resolução de sistemas cujo número de equações é diferente do número de incógnitas, conforme os dados apresentados nos Quadros 4 e 5, a seguir.

	Nº. de exemplos resolvidos de resolução de sistemas de ordem $m \times n$	Nº. de exercícios propostos para a resolução de sistemas de ordem $m \times n$	Nº. de exemplos resolvidos de resolução de sistemas de ordem 3×3	Nº. de exercícios propostos para a resolução de sistemas de ordem 3×3
Método do escalonamento (Gauss)	6	5	3	7
Regra de Cramer	0	0	1	3

Quadro 4 - Dados referentes ao L_1 sobre o tratamento do registro algébrico dos sistemas lineares.

O L_1 apresenta também um exemplo resolvido e três exercícios propostos envolvendo a resolução de sistemas de ordem 4×4 .

	Nº. de exemplos resolvidos de resolução de sistemas de ordem $m \times n$	Nº. de exercícios propostos para a resolução de sistemas de ordem $m \times n$	Nº. de exemplos resolvidos de resolução de sistemas de ordem 3×3	Nº. de exercícios propostos para a resolução de sistemas de ordem 3×3
Método da adição ou da substituição	2	3	3	8
Método do escalonamento (Gauss)	1	2	1	1
Regra de Cramer	0	0	2	2

Quadro 5 - Dados referentes ao L_2 sobre o tratamento do registro algébrico dos sistemas lineares.

O L_2 apresenta para “fechar” o assunto sistemas lineares, um texto, que resume as principais características do método de Gauss e da Regra de Cramer.

Gostaríamos de observar que, no referido texto, o segundo item que explana sobre o método do escalonamento, no qual lemos os zeros da matriz

podem estar acima da diagonal principal, podemos ler também abaixo da diagonal principal.



Flash Matemático

Cramer e Laplace ou escalonamento ou...

Com o que foi estudado até aqui sobre resolução de sistemas lineares é importante elaborarmos uma pequena síntese dos métodos de resolução e suas limitações para que, frente a um sistema linear, possamos optar pela melhor forma de buscar suas soluções.

Regra de Cramer

- Aplica-se apenas a sistemas lineares $n \times n$ com matriz incompleta **A** quadrada.
- Se $\det A \neq 0$, sabemos que o sistema é possível com solução única e o valor de cada incógnita pode ser calculado como quociente de dois determinantes usando-se a regra de Cramer.
- Essa resolução depende da facilidade ou não do cálculo do determinante de **A** e, no caso de matrizes de ordem 4×4 ou maiores, o recurso para o cálculo de $\det A$ é aplicar o teorema de Laplace.
- Se $\det A = 0$, sabemos, sem precisar resolvê-lo, que o sistema é possível e indeterminado ou impossível, mas a decisão terá de ser tomada usando-se outro método de resolução.

Método de eliminação de Gauss ou escalonamento

- Aplica-se a qualquer sistema linear e consiste em escalonar a matriz completa do sistema.
- O escalonamento transforma a matriz completa em outra equivalente com zeros abaixo da diagonal principal.
- Para escalonar uma matriz, são permitidas as seguintes operações ou uma combinação delas:
 - trocar de lugar duas linhas da matriz;
 - multiplicar ou dividir uma linha da matriz por um número não-nulo;
 - adicionar duas linhas da matriz, termo a termo, substituindo uma dessas linhas pela soma obtida.

Figura 8 - Comentários finais sobre os processos de resolução de sistemas.

Fonte: L₂ pp. 186 – 187.

O L₃ aborda apenas a regra de Cramer para resolver sistemas (quadro 6). Os autores apresentam um único exercício proposto que envolve um sistema com quatro equações e quatro incógnitas, porém não apresentam nenhum exemplo de resolução ou de classificação de sistemas com o número de equações diferente do número de incógnitas.

	Nº. de exemplos resolvidos de resolução de sistemas de ordem $m \times n$	Nº. de exercícios propostos para a resolução de sistemas de ordem $m \times n$	Nº. de exemplos resolvidos de resolução de sistemas de ordem 3×3	Nº. de exercícios propostos para a resolução de sistemas de ordem 3×3
Regra de Cramer	0	0	1	4

Quadro 6 - Dados referentes ao L_3 sobre o tratamento do registro algébrico dos sistemas lineares.

Como pudemos observar, os livros didáticos têm como objetivo principal resolver, classificar e discutir os sistemas lineares com três equações e três incógnitas, mas apresentam também alguns sistemas cujo número de equações não é igual ao número de incógnitas. Já os sistemas de ordem 4×4 são pouco explorados. Não encontramos nenhum sistema com mais de quatro incógnitas nos livros do Ensino Médio que analisamos. Os dados contidos nos Quadros 4,5,e 6 contêm informações referentes aos exercícios resolvidos e propostos, não são considerados neste momento as questões de vestibular e nem os exercícios adicionais ou optativos.

É importante notar também que, apesar dos documentos oficiais defenderem apenas o uso do escalonamento para resolver sistemas lineares, os livros didáticos abordam também a Regra de Cramer, na maioria das vezes sem dizer qual é o algoritmo mais eficiente ou o mais rápido e levando o aluno a uma possível resolução mecânica, sem refletir sobre os benefícios de um ou de outro método, visto que, os exercícios, geralmente, indicam qual o processo que o aprendiz deve utilizar - Cramer ou escalonamento - sem que ele possa refletir e optar pelo método mais prático e que envolve o menor número de cálculos.

6. OS SISTEMAS LINEARES E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Segundo Raymond Duval (*apud* Machado, 2003, pp.14-15), a Matemática apresenta uma grande variedade de representações semióticas (aqui chamadas registros): sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas, representações gráficas, entre outros, e a compreensão dos conteúdos da Matemática está relacionada à capacidade de mudar esses registros. Para que um conhecimento ou um saber matemático possa ser colocado em funcionamento, é necessário que o aprendiz o apreenda não somente com um registro, mas com pelo menos dois registros de representação semiótica e que saiba coordenar esses registros, pois a conversão possibilita ao sujeito perceber outros aspectos do objeto representado.

[...] Porque passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. Vemos então, que dois registros diferentes não têm de forma alguma o mesmo conteúdo.

[...] Vê-se, então, porque a compreensão matemática está intimamente ligada ao fato de dispor de ao menos dois registros de representação. (DUVAL, *apud* Machado, 2003, p.22).

Documentos oficiais também evidenciam a importância de abordar um mesmo conteúdo matemático de maneira diversificada, isto é, com diferentes registros de representação.

Podem ser utilizadas diferentes linguagens para representar os conteúdos símbolos: matemáticos, língua natural, desenhos, gráficos, ícones, etc. Esse tratamento diversificado é apontado, atualmente, como um fator muito importante para a compreensão dos conceitos e dos procedimentos matemáticos. (BRASIL, 2005, p. 75).

Diante dos fatos aqui relatados, e para respondermos à nossa questão de pesquisa, analisaremos aqui, à luz da teoria de Duval, em quais registros de representação semiótica os sistemas lineares são abordados nos livros

didáticos e quais as conversões propostas tanto em seus exercícios resolvidos quanto nos exercícios propostos. Voltaremos nossos olhares especificamente para três registros de representação semiótica que consideramos fundamentais ao abordamos os Sistemas Lineares: língua natural, registro gráfico e registro algébrico.

6.1 Os sistemas lineares e o registro de representação da língua natural nos livros didáticos

Uma situação-problema apresenta-se no registro de representação da língua natural e para resolvê-lo o aluno deve realizar uma conversão ou para o registro algébrico ou para o gráfico.

[...] Os sistemas lineares devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2002, p. 122).

Documentos oficiais como o PCN+ (2002) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) defendem que a aprendizagem de um novo conceito matemático deveria ocorrer a partir da apresentação de uma situação-problema ao aluno, que, partindo de seus conhecimentos já existentes, buscaria uma resolução para o problema, construindo assim sua aprendizagem e, na etapa final do processo, caberia ao professor formalizar esse novo conceito.

A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica [...] (BRASIL, 2002, p. 112).

Analisaremos aqui se os livros didáticos apresentam os sistemas lineares com três equações e três incógnitas, que é um *tema novo* para os alunos do Ensino Médio, tendo o registro de representação da língua natural como registro de partida.

No livro didático L_1 o autor inicia o capítulo 8, intitulado Sistemas Lineares, afirmando que os problemas que envolvem as equações lineares e os sistemas existem há muito tempo, e apresenta um exemplo de sistema com três equações e três incógnitas no registro algébrico que, segundo ele, foi extraído de uma obra que data de 250 a.C, aproximadamente (Figura 9).

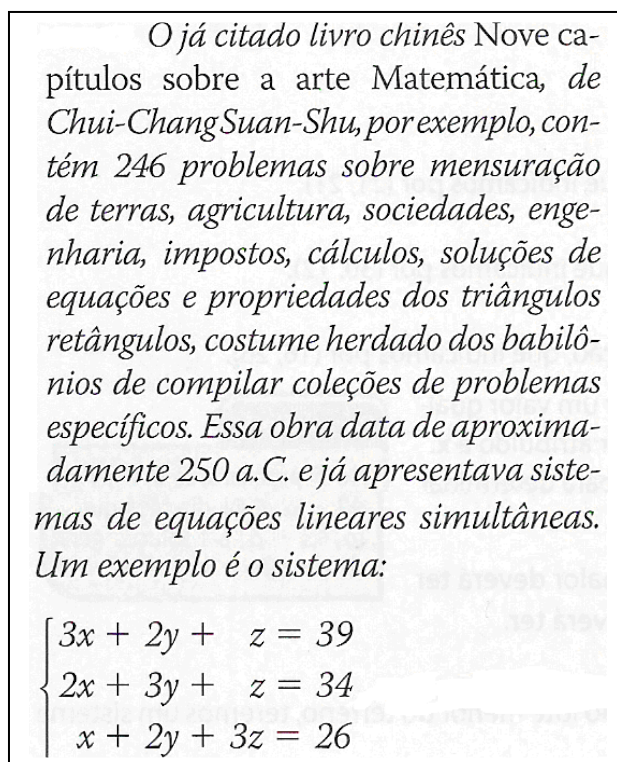


Figura 9 - Exemplo de sistema extraído do livro Nove Capítulos Sobre a Arte Matemática, de Chuí-ChangSuan-Shu.

Fonte: L_1 , p.177.

Após esta introdução, o autor apresenta um sistema linear com duas equações e duas incógnitas a partir de uma situação-problema (registro da língua natural) (Figura 10).

Ao abordar os sistemas lineares com três equações e três incógnitas, o autor também apresenta sistema linear no registro algébrico e já o relaciona com sua representação no registro gráfico. Esta definição está associada à notação de vetores, como nos mostra a Figura 12.

Acreditamos que, apesar do tema “vetores” já ter sido abordado pelo autor na seção “Assunto Optativo”, no capítulo 7, intitulado “Determinantes”, esta forma de apresentação é ainda um pouco prematura para um aluno que está iniciando o estudo de sistemas lineares com mais de duas incógnitas.

6

Sistemas lineares 3 × 3

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

de três equações com três incógnitas. Geometricamente, cada uma das equações, nessa ordem, define os planos π_1 , π_2 e π_3 , respectivamente. O terno (x, y, z) é solução desse sistema quando o ponto $P(x, y, z)$ pertence à intersecção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$, ou seja, quando P está simultaneamente nos três planos.

Associadas a esse sistema há duas matrizes: a incompleta ① e a completa ②.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{①} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}_{3 \times 4} \quad \text{②}$$

Os vetores linha da matriz incompleta são $\ell_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\ell_2 = (a_2, b_2, c_2)$ e $\ell_3 = (a_3, b_3, c_3)$, e os vetores linha da matriz completa são $L_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $L_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ e $L_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)$, todos não-nulos.

Para refletir

Nos sistemas de duas equações com duas incógnitas tínhamos duas retas no plano. Agora, temos três planos no espaço.

Figura 12 - Sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas no registro algébrico.

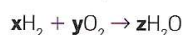
Fonte: L₁, p. 186.

Após apresentar dois métodos de resolução algébrica para estes sistemas lineares (Escalonamento e Regra de Cramer), o autor resolve duas interessantes situações-problema que relacionam este tema a outra disciplina: a Química, e propõe a resolução de problemas contextualizados, relacionados com o dia-a-dia do aluno (Figura 13).

Aplicações

Exercícios resolvidos

14. Quando se escreve uma equação química, é importante verificar sempre se o número de átomos de cada elemento é o mesmo em ambos os lados da equação, ou seja, se ela está balanceada. Para realizar o balanceamento, temos de colocar um número (denominado coeficiente estequiométrico) antes dos símbolos. Esses coeficientes usados no balanceamento de uma equação química devem ser sempre os menores números inteiros possíveis, pois não dá para imaginar $\frac{1}{2}$ molécula de algum elemento químico. Veja como exemplo o balanceamento da equação da água. A equação $\text{H}_2 + \text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O}$ não está balanceada; note que a quantidade de oxigênio em ambos os lados não é a mesma. Se os coeficientes estequiométricos forem respectivamente x , y e z , temos que:

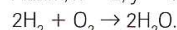


ou seja:

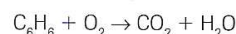
$$\begin{cases} 2x = 2z & (\text{hidrogênio}) \\ 2y = z & (\text{oxigênio}) \end{cases}$$

O sistema é SPI e admite mais de uma solução (x, y, z) , porém nos interessa a menor solução inteira. A solução genérica desse sistema é $(2\alpha, \alpha, 2\alpha)$, portanto temos a menor solução inteira para $\alpha = 1$.

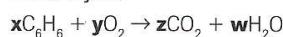
Assim, $x = 2$, $y = 1$ e $z = 2$, e a equação balanceada é:



Obtenha os quatro coeficientes estequiométricos para o balanceamento da equação abaixo:



Resolução:



$$\begin{cases} 6x = z \\ 6x = 2w \\ 2y = 2z + w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x & -z & = 0 \\ 6x & & -2w = 0 \rightarrow \text{SPI} \rightarrow \\ & 2y - 2z - w = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{escalonamento} \rightarrow S = \left\{ \left(\frac{\alpha}{3}, \frac{5\alpha}{2}, 2\alpha, \alpha \right) \right\}; \text{ então}$$

a menor solução inteira precisa de $\alpha = 6$:

$$S = \{(2, 15, 12, 6)\}$$

Portanto, a equação balanceada é

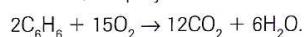


Figura 13 - Exemplo de situação-problema que relaciona os sistemas lineares com a química.

Fonte: L₁, p. 199 e 200.

Já o livro L₂, após apresentar os sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas, propõe ao aluno a resolução de uma situação-problema contextualizada, no registro da língua natural, que recai num sistema linear com três equações e três incógnitas (Figura 14), e, a partir desse problema, apresenta o primeiro processo de resolução desses sistemas lineares.

3. Sistema linear 3 x 3

Numa outra liquidação, João, Ana e Luiz resolveram comprar livros, CDs e fitas de vídeo.

João gastou R\$ 70,00 e comprou 1 livro, 3 CDs e 1 fita de vídeo. Ana gastou R\$ 80,00 e comprou 2 livros, 2 CDs e 2 fitas. Luiz gastou R\$ 75,00 comprando 3 livros, 1 CD e 1 fita de vídeo. Qual o preço de cada item, sabendo que todos os CDs têm o mesmo preço, assim como todos os livros e fitas de vídeo?

Para resolver o problema acima, chamamos de x o preço de cada livro, de y o preço de cada CD e de z o preço de cada fita de vídeo e obtemos três equações que representam os gastos de João, Ana e Luiz, respectivamente: $x + 3y + z = 70$, $2x + 2y + 2z = 80$ e $3x + y + z = 75$. Essas equações podem ser escritas como um sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 70 \\ 2x + 2y + 2z = 80 \\ 3x + y + z = 75 \end{cases}$$

Os valores de x , y e z que tornam as três igualdades verdadeiras formam a solução desse sistema de equações.

Figura 14 - Primeiro sistema com mais de duas incógnitas do L_2 .

Fonte: L_2 , p. 131.

O livro L_3 também não apresenta os sistemas lineares através de situações-problema. O primeiro sistema linear que aparece no livro foi definido pelo autor de uma maneira que consideramos literal, pouco contextualizada e que pode não ser entendida por um aluno que está iniciando seus estudos sobre o tema (Figura 15). Depois da definição, o autor apresenta um exemplo de sistema linear homogêneo com três equações e três incógnitas, que também não está relacionado com nenhuma situação-problema.

3. Expressão matricial de um sistema de equações lineares

Dentre suas variadas aplicações, as matrizes são utilizadas na resolução de um sistema de equações lineares.

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_n \end{cases}$$

Utilizando matrizes, podemos representar este sistema da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

↑
matriz constituída pelos
coeficientes das incógnitas
↑
matriz coluna
constituída
pelas incógnitas
↑
matriz coluna
dos termos
independentes

Figura 15 - Primeiro sistema com mais de duas incógnitas do L₃.

Fonte: L₃, p. 198.

Podemos afirmar, então, que, apesar de somente o livro L₂ apresentar o sistema de equações lineares com mais de duas incógnitas a partir de uma situação-problema, tanto o L₁ quanto o L₂ se preocuparam em apresentar situações-problema desafiadoras, contextualizadas e que permitem ao aluno analisar dados, tomar decisões e buscar “caminhos” para a sua resolução. Concordamos com este tipo atividade, pois acreditamos que ela coloca o aluno num papel ativo na construção do seu próprio conhecimento.

Já o L₃ não apresenta nenhuma situação-problema relacionada a sistemas lineares no decorrer de todo capítulo. Observamos que seus exercícios poderiam ser menos tecnicistas, deveriam valorizar mais a construção do conhecimento do aluno e dar menor importância às técnicas de resolução mecânicas.

Em resumo, dois (L_1 e L_2) dos três livros analisados tratam os sistemas lineares com três equações e três incógnitas utilizando-se do registro de representação da língua natural.

6.2 Os sistemas lineares e o registro gráfico nos livros didáticos

O estudo dos sistemas lineares no Ensino Médio é apresentado com maior frequência no registro algébrico. Por este motivo, o seu aprendizado requer uma abstração para a qual o aluno talvez não tenha muita habilidade. Acreditamos que, sem relacionar o estudo algébrico com a representação gráfica, este pode tornar-se um estudo com pouco significado, apenas um roteiro de regras a serem seguidas e resoluções mecânicas, sem nenhuma interpretação.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) propõem, de maneira muito clara, que os sistemas sejam trabalhados algebricamente e geometricamente.

No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. (2006, p. 77).

Duval (*apud* Machado, 2003) afirma que para analisar as dificuldades de aprendizagem é necessário analisar a conversão de registros. O autor afirma também que, passar de uma equação para um gráfico, exige uma articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas de cada registro (p. 17).

Na realidade, a conversão entre gráficos e equações supõe que se consiga levar em conta, de um lado, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, intersecção com os eixos, etc.) e, de outro, os valores escalares das equações [...] (DUVAL, *apud* Machado, 2003, p. 17).

Analisaremos aqui se os livros didáticos selecionados abordam os sistemas lineares no registro gráfico.

Os livros L_1 e L_2 apresentam a interpretação gráfica dos sistemas lineares com três equações e três incógnitas (três planos no espaço), mas

estas abordagens são feitas de maneiras distintas. Enquanto o L_1 faz uma apresentação bem detalhada dos oito casos possíveis explicando detalhadamente cada um deles e relacionando-os com exemplos algébricos, que serão apresentados a seguir (Figuras 16, 17 e 18), o L_2 apresenta uma explicação mais geral, mais condensada, abordando apenas seis possíveis casos - não cita o caso com dois planos coincidentes e um terceiro plano que intercepta estes dois segundo uma reta e caso de dois planos coincidentes e um terceiro plano paralelo e distinto dos anteriores - e não relaciona cada registro de representação gráfico com exemplos no registro de representação algébrico, isto é, não propõe a conversão do registro algébrico para o registro gráfico (Figura 19).

4ª possibilidade: os planos são paralelos dois a dois

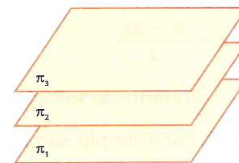
Neste caso, o sistema não possui solução; é impossível (SI). Pode-se provar que isso ocorre quando cada um dos vetores, ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 é múltiplo do outro, mas os vetores L_1 , L_2 e L_3 não são múltiplos um do outro, dois a dois.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \rightarrow L_1 = (1, 1, -1) \text{ e } \ell_1 = (1, 1, -1) \\ 2x + 2y - 2z = 3 \rightarrow L_2 = (2, 2, -2) \text{ e } \ell_2 = (2, 2, -2) \\ 4x + 4y - 4z = 7 \rightarrow L_3 = (4, 4, -4) \text{ e } \ell_3 = (4, 4, -4) \end{cases}$$

Temos nesse exemplo que ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 são múltiplos um do outro, mas L_1 , L_2 e L_3 não são múltiplos um do outro, dois a dois.

Logo, esse sistema não tem solução; é impossível.



5ª possibilidade: dois planos são paralelos e o outro os intersecta segundo retas paralelas r e s

π_1 e π_2 são paralelos. Logo, $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$. Isso acarreta que $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \emptyset$. Portanto, o sistema não possui solução; é impossível (SI).

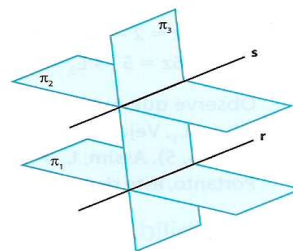
Pode-se provar que isso acontece quando $\ell_2 = k\ell_1$, mas L_2 não é múltiplo de L_1 , pois $\pi_1 \parallel \pi_2$. Além disso, ℓ_3 não é múltiplo de ℓ_1 , pois $\pi_3 \not\parallel \pi_1$.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \rightarrow L_1 = (1, 1, -1) \text{ e } \ell_1 = (1, 1, -1) \\ 2x + 2y - 2z = 3 \rightarrow L_2 = (2, 2, -2) \text{ e } \ell_2 = (2, 2, -2) \\ 4x + 4y - z = 4 \rightarrow L_3 = (4, 4, -1) \text{ e } \ell_3 = (4, 4, -1) \end{cases}$$

Observe que $\ell_2 = 2\ell_1$, porém L_2 não é múltiplo de L_1 . Observe também que ℓ_3 não é múltiplo de ℓ_1 .

Logo, o sistema é impossível.



6ª possibilidade: os três planos são distintos e têm uma reta em comum

Neste caso, *todos* os pontos $P(x, y, z)$ da reta r são soluções. Há, portanto, infinitas soluções.

O sistema é possível e indeterminado (SPI). Pode-se provar que isso ocorre quando nenhum dos vetores ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 é múltiplo do outro e L_3 pode ser escrito como combinação linear de L_1 e L_2 , isto é, $L_3 = kL_1 + mL_2$.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \rightarrow L_1 = (1, 1, 1) \text{ e } \ell_1 = (1, 1, 1) \\ 2x - y + z = 5 \rightarrow L_2 = (2, -1, 1) \text{ e } \ell_2 = (2, -1, 1) \\ 4x + y + 3z = 7 \rightarrow L_3 = (4, 1, 3) \text{ e } \ell_3 = (4, 1, 3) \end{cases}$$

Observe que nenhum dos vetores ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 é múltiplo do outro. E, também, que $L_3 = 2L_1 + L_2$:

$$2L_1 \rightarrow 2x + 2y + 2z = 2$$

$$L_2 \rightarrow \underline{2x - y + z = 5} \\ 4x + y + 3z = 7 \rightarrow L_3$$

Logo, o sistema é indeterminado.

$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$. Esta reta é formada pelos pontos $P(x, y, z)$, cujas coordenadas são as soluções dos sistemas:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 4x + y + 3z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + 3y - 3z = -15 \\ 4x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow$$

$$z = \frac{6-3x}{2} \qquad \qquad \qquad y = \frac{-4+x}{2}$$

Portanto, as soluções do sistema são todos os pontos da forma $\left(x, \frac{-4+x}{2}, \frac{6-3x}{2}\right)$ para qualquer valor real de x . Por exemplo, são soluções do sistema: $(0, -2, 3)$, $(2, -1, 0)$, $(-2, -3, 6)$, etc.

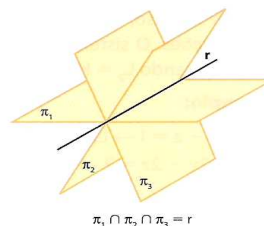


Figura 17 - Três dos oito possíveis casos de classificação de sistemas lineares com três equações e três incógnitas no registro algébrico com conversão para o registro gráfico.

Fonte: L_1 , pp. 187 – 188.

7ª possibilidade: os três planos se intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras

Neste caso, o sistema é impossível (SI).

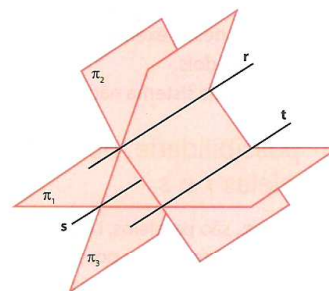
Os vetores ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 não são múltiplos um do outro, pois não há paralelismo nem coincidência entre nenhum dos planos. Além disso, é possível provar que $\ell_3 = k\ell_1 + m\ell_2$ e $L_3 \neq kL_1 + mL_2$.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \rightarrow L_1 = (1, 1, -3, 1) \text{ e } \ell_1 = (1, 1, -3) \\ 5x + 2y + z = 2 \rightarrow L_2 = (5, 2, 1, 2) \text{ e } \ell_2 = (5, 2, 1) \\ 9x + 3y + 5z = 5 \rightarrow L_3 = (9, 3, 5, 5) \text{ e } \ell_3 = (9, 3, 5) \end{cases}$$

Observe que os vetores ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 não são múltiplos um do outro. Note também que $\ell_3 = 2\ell_2 - \ell_1$, mas $L_3 \neq 2L_2 - L_1$. Vejamos: $L_3 = (9, 3, 5, 5)$; $2L_2 = (10, 4, 2, 4)$; $-L_1 = (-1, -1, 3, -1)$; logo, $2L_2 - L_1 = (9, 3, 5, 3)$ e $L_3 = (9, 3, 5, 5)$. Assim, $L_3 \neq 2L_2 - L_1$.

Portanto, este sistema é impossível.



8ª possibilidade: os três planos têm um único ponto em comum

Neste caso, o sistema é possível e determinado (SPD).

É possível provar que o sistema tem uma única solução se, e somente se, os vetores ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 são linearmente independentes.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \rightarrow \ell_1 = (1, 2, -3) \\ 2x + 3y + 4z = 5 \rightarrow \ell_2 = (2, 3, 4) \\ 4x + 7y - z = 13 \rightarrow \ell_3 = (4, 7, -1) \end{cases}$$

Lembramos que uma maneira de saber se os vetores $(1, 2, -3)$,

$(2, 3, 4)$ e $(4, 7, -1)$ são LI é verificar se o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & -1 \end{vmatrix}$ é

diferente de zero.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, os vetores são LI. Portanto, este sistema é possível e determinado (SPD).

Nos próximos itens você aprenderá como determinar a solução de um sistema como este.

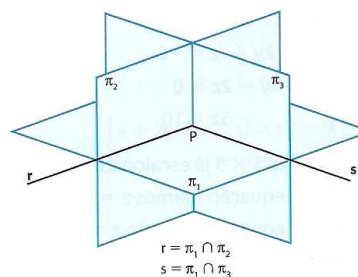
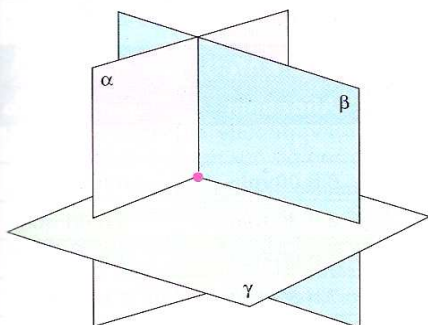


Figura 18 - Dois últimos possíveis casos de classificação de sistemas lineares com três equações e três incógnitas no registro algébrico com conversão para o registro gráfico.

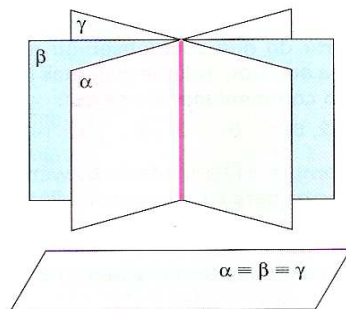
Fonte: L_1 , pp. 188 – 189.

Sistemas lineares 3×3 e Geometria

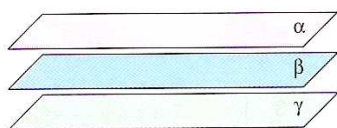
Os planos podem se encontrar em um único ponto. Nesse caso, o sistema linear é possível e determinado e tem solução única.



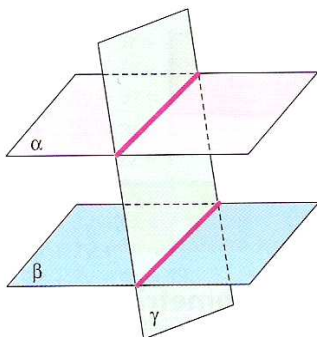
Os três planos podem também possuir uma reta comum a eles ou ser coincidentes. Nessa situação, o sistema linear é possível e indeterminado, ou seja, apresenta infinitas soluções.



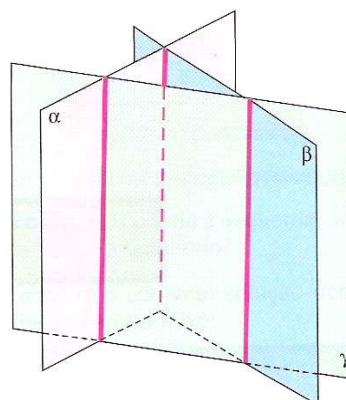
Os três planos podem ainda ser paralelos entre si.



Pode também ocorrer de dois deles serem paralelos e o terceiro não.



Por fim, os planos podem se encontrar, mas apenas dois a dois, não havendo ponto comum que pertença aos três.



Nesses três últimos casos, o sistema linear é impossível, isto é, sem solução.

Figura 19 - Representação no registro gráfico de sistemas lineares com três equações e três incógnitas.

Fonte: L₂, pp. 137 e 138.

Observamos que o tema: posições relativas entre planos no espaço (Geometria de Posição), que consideramos um conhecimento prévio para o estudo dos sistemas lineares com três equações e três incógnitas no registro gráfico, é discutido em capítulo posterior ao que apresenta o registro gráfico dos sistemas, no L_1 e no L_2 . Acreditamos que esse fato enfatize a importância do professor preparar suas aulas antecipadamente e ter autonomia para selecionar a ordem dos conteúdos a serem trabalhados, sem precisar seguir estritamente a sequência que é apresentada nos livros didáticos.

Já o livro L_3 não aborda o registro de representação gráfica dos sistemas lineares, aborda o tema somente no registro algébrico.

Podemos concluir, então, que apenas dois dos livros analisados (L_1 e L_2) apresentam os sistemas lineares com três equações e três incógnitas no registro de representação gráfica, e que ambos abordam este tema em textos explicativos.

6.3 Os sistemas lineares e as conversões de registro propostas nos exercícios dos livros didáticos

O primeiro livro analisado, ao retomar os sistemas com duas equações e duas incógnitas, apresenta três exercícios resolvidos que partem do registro algébrico e chegam ao registro gráfico (Figura 20). Consideramos muito importante que, neste exercício, o autor explora o fato de existirem infinitos pares ordenados que verificam cada uma das equações, que estes infinitos pares ordenados (representados graficamente por pontos) originam cada uma das duas retas e que a intersecção destas retas é a solução do sistema.

Interpretação geométrica dos sistemas lineares 2×2

Os pares de números reais que são soluções de uma equação linear com duas incógnitas determinam, no gráfico, uma reta. A intersecção das duas retas das equações do sistema determina sua solução, se existir.

Veja a representação gráfica dos três sistemas resolvidos por adição:

$$1^{\circ}) \begin{cases} 3x - y = 10 \rightarrow (4, 2), (2, -4), \dots \\ 2x + 5y = 1 \rightarrow (-2, 1), (3, -1), \dots \end{cases}$$

As retas concorrentes indicam que existe um único par que é solução do sistema (sistema possível e determinado).

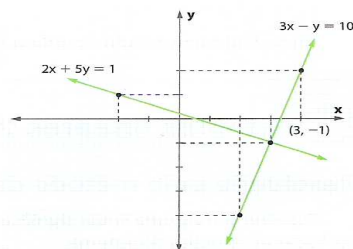


Figura 20 - Um dos três exercícios resolvidos cujo registro de partida é o algébrico e o de chegada é o gráfico.

Fonte: L₁, p. 182.

O autor também apresenta um exercício cuja proposta é que o aluno empregue o registro gráfico (Figura 21) e propõe como exercício optativo, que o aluno represente graficamente um sistema de inequações com duas incógnitas (Figura 22).

Exercício proposto

7. Resolva cada sistema linear 2×2 usando o método da adição; classifique-os quanto ao número de soluções e faça sua representação gráfica.

$$a) \begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - 2y = -12 \\ 5x + 6y = 8 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 5x - 10y = 15 \\ 2x - 4y = 6 \end{cases}$$

Figura 21 - Exercício proposto cujo registro de partida é o algébrico e o de chegada é o gráfico. **Fonte:** L₁, p. 182

Exercícios optativos

1. Faça o gráfico dos seguintes sistemas de inequações simultâneas:

$$a) \begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ x + y \geq -1 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \geq 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \\ 2x + y \leq 3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4x + 3y \leq 12 \\ x - 2y \leq 2 \\ y - 3x \leq 3 \end{cases}$$

Figura 22 - Exercício que propõe o registro gráfico de um sistema de inequações com duas incógnitas.

Fonte: L₁, p. 204.

Outra proposta do autor é uma situação-problema que possui como registro de partida a língua natural e que levará o aluno a utilizar o registro algébrico para resolver um sistema 2x2 (Figura 23).

(Uerj-adaptado) João contou os coelhos, os patos e os bois que havia em sua fazenda, obtendo um total de 340 animais. A seguir, verificou que o número de coelhos era o triplo do de patos e que o número de bois excedia em 20 unidades o total de coelhos e patos. Determine o número de patos que há na fazenda.

Figura 23 - Exercício que propõe a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico.

Fonte: L₁, p. 206.

Ao abordar os sistemas com três equações e três incógnitas, o registro gráfico está presente no texto expositivo do autor, mas existe um único exercício proposto, na seção “Questões de Vestibular” que leva o aluno a interpretar graficamente a solução de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas (Figura 24).

(PUC-RJ) Ache todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

Interprete sua resposta geometricamente. Verifique se o sistema tem uma solução do tipo $x = a + 1$, $y = 2a$ e $z = a$.

Figura 24- Exercício que propõe a representação gráfica de um sistema linear com três incógnitas.

Fonte: L₁, p. 206.

O autor propõe exercícios que partem do registro de representação da língua natural e que para serem resolvidos, precisam ser convertidos para o registro algébrico. Existe um único exercício que propõe a conversão no sentido contrário, isto é, o autor fornece um sistema no registro algébrico e a sua solução, e pede que o aluno “invente” um enunciado criando uma situação que possa ser representada pelo sistema dado (Figura 25). Neste caso, dizemos que existiu a conversão de registros de representação, pois ela precisa ocorrer nos dois sentidos.

47. O sistema linear $\begin{cases} x + 2y + z = 12 \\ 5x + 12y + 5z = 66 \\ x - y + 12z = 47 \end{cases}$ é determinado e sua solução é $\{(2, 3, 4)\}$. Invente um enunciado, criando uma situação que possa ser representada por ele.

Figura 25 - Exercício que propõe a conversão do registro algébrico para o da língua natural.

Fonte: L₁, p. 201.

O segundo livro analisado, ao retomar os sistemas lineares 2x2, apresenta três exercícios que partem de uma situação-problema (registro de representação da língua natural) e são resolvidos algebricamente (registro algébrico) e graficamente (registro gráfico); um desses exercícios pode ser visto na Figura 4 (p. 40 deste trabalho). Em seguida, na seção “*Problemas e Exercícios*” o autor propõe que o aluno resolva sistemas lineares graficamente, em que o registro de partida é o algébrico e o de chegada é o gráfico (Figura

26) e também exercícios cujo registro de partida é o da língua natural, que para serem resolvidos precisam ser convertidos para registro algébrico, como o problema apresentado na sessão “Problemas e Exercícios” (Figura 27).

Resolva graficamente cada um dos sistemas e, para cada caso, indique se há uma solução, nenhuma solução ou uma infinidade de soluções:

a) $\begin{cases} y = 5 + 2x \\ 4x - 10 = 2y \end{cases}$	c) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2\left(\frac{x}{2} - y\right) = 7 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 3x + y = -16 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$	d) $\begin{cases} y = \frac{x}{2} - 3 \\ x = \frac{y}{2} + 3 \end{cases}$

Figura 26 - Exercício proposto cujo registro de partida é o algébrico, e o de chegada é o gráfico.

Fonte: L₂, p. 130.

A soma das medidas dos raios de duas circunferências é 12 e a circunferência menor dá três voltas completas ao redor da maior até voltar à posição inicial **A**. Qual é o raio de cada uma delas?

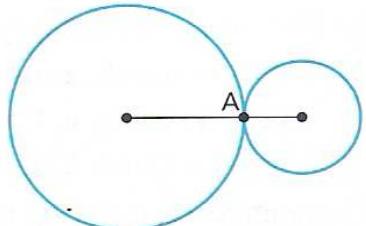


Figura 27 - Exercício que propõe a conversão do registro de representação na língua natural para o registro algébrico de um sistema linear com duas equações e duas incógnitas.

Fonte: L₂, p. 131.

Na seção “*Invente Você*” encontramos uma proposta diferente das convencionais, que consideramos muito interessante. O autor apresenta um sistema linear com alguns termos desconhecidos em uma de suas equações e impõe condições para a solução deste sistema linear. O objetivo é que o aluno complete corretamente as lacunas desta equação do sistema linear 2x2 dado, obedecendo a estas restrições (Figura 28).

5. Copie e complete o sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + \dots ? \dots = \dots ? \dots \end{cases}$ de modo que ele seja:

a) impossível b) indeterminado c) possível e determinado

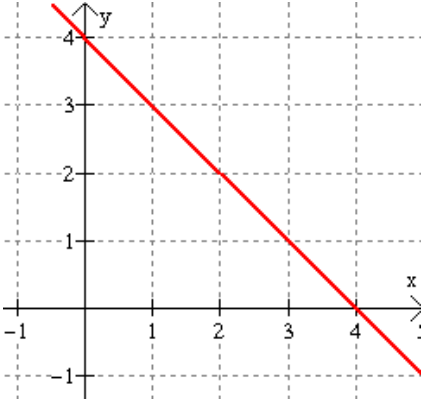
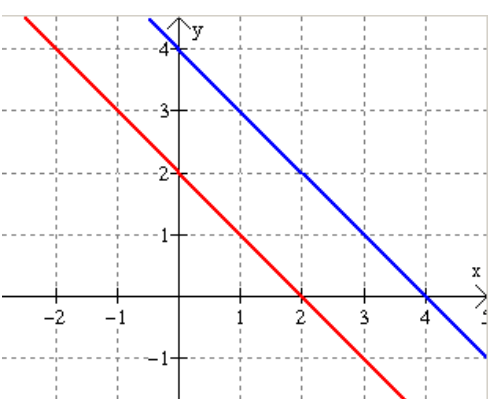
Figura 28 - Exercício que propõe a conversão do registro de representação da língua natural para o registro algébrico.

Fonte: L₂, p. 190.

Trata-se de uma proposta inovadora, que leva o aluno a refletir e conjecturar sobre quais as condições as equações de um sistema precisam obedecer para que este seja possível, indeterminado ou impossível.

Acreditamos que após resolver alguns exercícios como este, o aluno poderá concluir que em alguns casos é possível analisar as equações do sistema e classificá-lo, sem resolvê-lo algébrica ou geometricamente.

Por exemplo, quando um sistema possui todas as suas equações proporcionais, isto é, cada equação é obtida multiplicando outra equação por um número real não nulo, temos um sistema possível e indeterminado, com infinitas soluções. Mas, se as equações não forem proporcionais, apenas porque um termo de uma delas não obedece à razão de proporcionalidade, então o sistema é impossível (Quadro 7).

Sistema Indeterminado: suas equações são proporcionais.	Sistema Impossível: apenas um termo de uma de suas equações não é proporcional (no exemplo, o termo independente de x e de y)
$\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x + 5y = 20 \end{cases}$ 	$\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x + 5y = 10 \end{cases}$ 

Quadro 7 - Exemplos de sistemas lineares com duas equações que poderiam ser classificados mediante análise de suas equações.

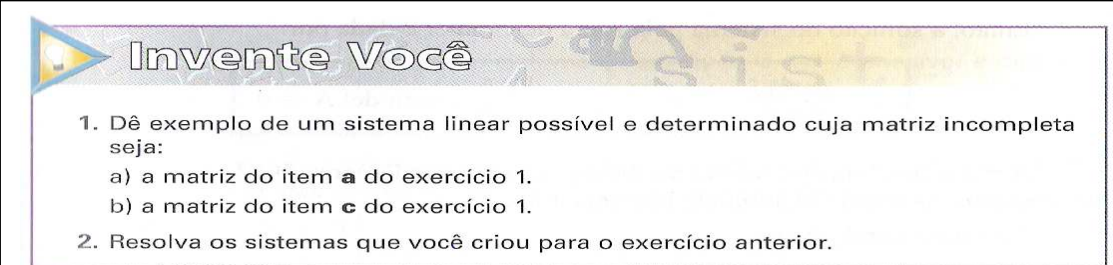
Ainda sobre o L_2 , observamos que ao abordar os sistemas com três equações e três incógnitas, o registro gráfico está presente apenas na seção “Flash Matemático” num texto expositivo das autoras. Não existe nenhum exercício resolvido ou proposto envolvendo a representação gráfica desses sistemas, isto é, não foi proposto em nenhum momento que o aluno trabalhe com o registro gráfico nem como registro de partida nem como de chegada. Já a conversão do registro de representação da língua natural para o registro algébrico foi contemplada pelas autoras, tanto nos exercícios resolvidos (ver Figura 14, p. 61 deste trabalho) como nos exercícios propostos (Figura 29).

(UFJF-MG) Em uma vídeo locadora, o acervo de filmes foi dividido, quanto ao preço, em três categorias: Série Ouro (SO), Série Prata (SP) e Série Bronze (SB). Marcelo estava fazendo sua ficha de inscrição, quando viu Paulo alugar dois filmes SO, dois filmes SP e um filme SB e pagar R\$13,50 pela locação dos filmes. Viu também Marcos alugar quatro filmes SO, dois filmes SP e um filme SB e pagar R\$20,50 pela locação. Marcelo alugou três filmes SO, um filme SP e dois filmes SB e pagou R\$16,00 pela locação dos filmes. Então, nessa locadora, qual o preço da locação de três filmes, um de cada categoria?

Figura 29 - Exercício que propõe a conversão do registro de representação da língua natural para o registro algébrico de um sistema linear com três equações e três incógnitas.

Fonte: L_2 , p. 190.

A seção “Invente você” do L_2 também apresenta situações bem interessantes para que o aluno trabalhe com os sistemas lineares 3×3 de uma forma diferente da convencional, deixando os algoritmos de lado e privilegiando a reflexão sobre a solução dos sistemas lineares (Figuras 30 e 31).



Invente Você

1. Dê exemplo de um sistema linear possível e determinado cuja matriz incompleta seja:
 - a) a matriz do item **a** do exercício 1.
 - b) a matriz do item **c** do exercício 1.
2. Resolva os sistemas que você criou para o exercício anterior.

Figura 30 - Atividade da seção “Invente Você” que privilegia a reflexão e a criatividade do aluno.

Fonte: L_2 , p. 177.

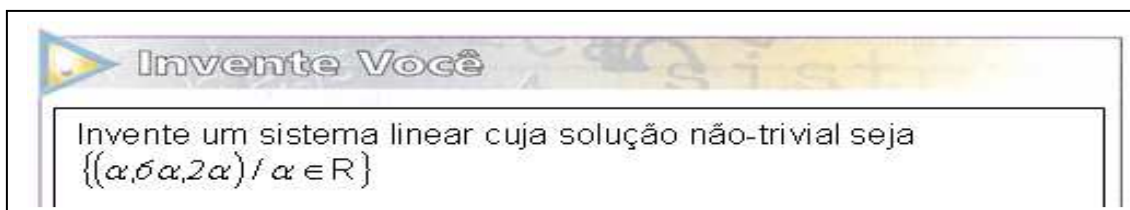
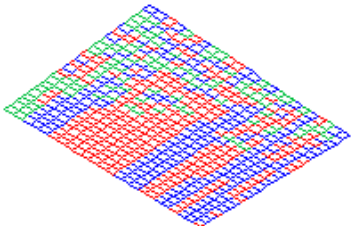


Figura 31 - Atividade da seção “Invente Você” que pode levar o aluno a refletir sobre quais as características de um sistema possível e indeterminado.

Fonte: L₂, p. 184.

Acreditamos que após resolver alguns exercícios como este, o aluno poderá concluir que, assim como num sistema linear 2x2, quando o sistema linear possui três equações e três incógnitas, em alguns casos é possível analisar as suas equações e classificá-lo, sem resolvê-lo algébrica ou geometricamente (Quadro 8).

Sistema Possível e Indeterminado: suas equações são proporcionais.	Sistema Impossível: apenas um termo de cada uma de suas equações não é proporcional (o termo independente de x, de y e de z).
$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 2x + 2y - 2z = -2 \\ 3x + 3y - 3z = -3 \end{cases}$  (O registro gráfico correspondente é a de três planos coincidentes no espaço)	$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x + y - z = -2 \\ x + y - z = -3 \end{cases}$  (O registro gráfico correspondente é o de três planos paralelos distintos no espaço)

Quadro 8 - Exemplos de sistemas lineares com três equações que poderiam ser classificados mediante análise de suas equações.

O terceiro livro analisado aborda os sistemas lineares apenas no registro de representação algébrico e não propõe nenhuma conversão de registro de representação semiótica.

Podemos afirmar então que as conversões de registros foram apresentadas nos exercícios resolvidos e propostos de apenas dois dos três livros analisados (L_1 e L_2), porém de forma tímida, predominando a conversão *da língua natural para o algébrico* (Figura 29). Encontramos apenas um exercício que propunha a conversão no sentido contrário (do registro algébrico para o da língua natural, (Figura 25) e, gostaríamos de lembrar que, segundo Duval (2003), a conversão deveria acontecer nos dois sentidos.

Encontramos apenas um exercício que apresentava o *registro gráfico* de um sistema linear com três equações e três incógnitas como *registro de chegada* (Figura 24) e nenhum exercício que tenha o *registro gráfico* como *registro de partida*.

7. OS LIVROS DIDÁTICOS E A CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES COM MAIS DE DUAS INCÓGNITAS

Durante o nosso trabalho, ao analisarmos o registro gráfico dos sistemas lineares, deparamo-nos com a questão da classificação dos sistemas lineares com mais de duas incógnitas. Verificamos o quanto esse registro de representação semiótica é importante para a classificação desses sistemas lineares, inclusive como a falta desse registro pode levar à classificação equivocada de um sistema linear.

Autores como Lima (1993, p.8-18) e Ferreira e Gomes (1996, pp. 9-16), entre outros, advertem que a regra de Cramer só pode ser utilizada para resolver sistemas lineares no caso em que o determinante da matriz dos coeficientes do sistema não é nulo, isto é, ($D \neq 0$), neste caso os três planos se interceptam num único ponto e o sistema tem solução única, isto é, trata-se de um sistema possível e determinado (S.P.D.).

Eles afirmam também que quando $D=0$, só podemos concluir que o sistema linear não é determinado, ou seja, podemos afirmar apenas ou que ele é indeterminado (S.P.I.) ou que é impossível (S.I.). Entretanto, alguns livros didáticos afirmam, de maneira equivocada, que se um sistema possui todos os determinantes da regra de Cramer iguais a zero ($D=0$, $D_x=0$, $D_y=0$ e $D_z=0$), então ele é indeterminado (S.P.I.), isto é, os três planos que os representam possuem infinitos pontos em comum e se $D=0$ e um dos seus determinantes (ou o D_x , ou o D_y , ou o D_z) for diferente de zero, então o sistema é impossível, isto é, os planos que os representam não possuem pontos em comum (planos paralelos).

Abaixo, apresentamos um contra-exemplo para esta afirmação. Neste caso, a conversão do registro algébrico para o geométrico dos sistemas lineares possibilita perceber claramente que esta afirmação não é verdadeira.

Considere o sistema S_1 abaixo:

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 8 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Observe que os determinantes obtidos a partir de S_1 são todos iguais a zero:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De acordo com o conteúdo apresentado em muitos livros didáticos, trata-se de um sistema possível e indeterminado (SPI), cujo registro gráfico é representado por três planos que possuem infinitos pontos em comum. Porém, utilizando o *software Winplot*, podemos observar (Figura 32) que estes três planos não possuem nenhum ponto em comum, logo, trata-se de um sistema impossível (SI) e não de um sistema possível e indeterminado (SPI).

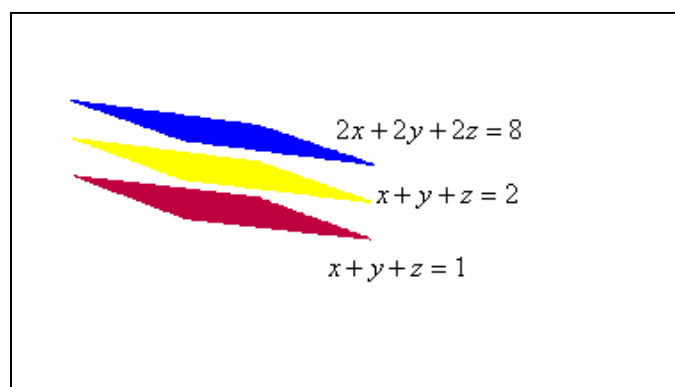


Figura 32 - Representação gráfica do sistema S_1 .

Também podemos aplicar a regra do escalonamento (Regra de Gauss) no sistema S_1 e obtermos um sistema linear, equivalente ao primeiro e que é impossível, vejamos:

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = 1 & (-2) \\ 2x + 2y + 2z = 8 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} x + y + z = 1 & (-1) \\ 0x + 0y + 0z = 6 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 6 \\ 0x + 0y + 0z = -1 \end{cases}$$

Em virtude dos fatos que acabamos de relatar, consideramos relevante verificar como os livros didáticos abordam o tema: classificação dos sistemas lineares com três equações e três incógnitas.

Os livros L_1 e L_2 apresentam a classificação dos sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas no momento em que revisam esse tema. Quanto à classificação dos demais sistemas lineares, ambos apresentam inicialmente a classificação dos sistemas lineares com três equações e três incógnitas fazendo uma explanação dos possíveis casos nos registros algébricos e gráficos (ver Figuras 16, 17, 18 e 19).

O L_1 apresenta a classificação e a resolução dos demais sistemas lineares utilizando o processo do escalonamento. A obra apresenta quatro sistemas lineares já escalonados, a resolução (registro algébrico) e a classificação de cada um deles. Dentre estes quatro sistemas lineares, podemos observar que o primeiro e o segundo possuem o número de equações igual ao número de incógnitas (três no primeiro exemplo e quatro no segundo), e o terceiro e o quarto exemplos apresentam apenas duas equações sendo três incógnitas no exemplo três e quatro incógnitas no quarto exemplo.

Em seguida, o autor propõe um exercício com seis sistemas lineares já escalonados, para serem classificados e resolvidos (Figura 33). A obra apresenta também uma forma muito interessante para discutir os sistemas lineares empregando o cálculo do determinante da matriz dos coeficientes aliado ao escalonamento do sistema, sem recair no erro anteriormente mencionado. Porém, consideramos este método muito restrito visto que ele é indicado apenas aos sistemas lineares que possuem o número de equações igual ao número de incógnitas (Figura 34).

Exercício proposto

14. Classifique e resolva os sistemas lineares escalonados.

a)
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 2y - z = 1 \\ 2z = -6 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Figura 33 - Dois dos seis sistemas lineares já escalonados, que deverão ser resolvidos e classificados pelo aluno.

Fonte: L_1 , p. 191.

Para discutir um sistema qualquer $n \times n$, é conveniente utilizar o cálculo do determinante da matriz dos coeficientes aliado ao escalonamento.

Primeiramente calcula-se o determinante de modo que seu valor não seja nulo, obtendo então as condições dos parâmetros para que o sistema seja SPD.

Depois, com o mesmo determinante, impõe-se que seu valor seja nulo para então substituímos no sistema os valores obtidos a partir dessa condição (se houver mais de um valor para o mesmo parâmetro, teremos mais de um sistema a ser considerado).

Em seguida, escalona(m)-se o(s) sistema(s) obtido(s) até a última linha e, a partir dela, pode ser concluída a discussão do sistema de acordo com as classificações possíveis dos sistemas lineares escalonados.

Exercícios Propostos

5. Discuta o sistema $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases}$.

Resolução:

$$D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 2$$

Se $D \neq 0 \Rightarrow a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$, teremos SPD.

Para $D = 0 \Rightarrow a = 2$, é preciso escalonar ou, então, como esse sistema é 2×2 , observar as duas equações.

Substituindo $a = 2$, temos $\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x + y = b \end{cases}$

Note que os coeficientes da primeira equação são o dobro dos da segunda equação. Então, para termos

equações equivalentes, $b = \frac{1}{2}$. Para serem incompatíveis, $b \neq \frac{1}{2}$.

Portanto:

- $a \neq 2 \rightarrow \text{SPD}$
- $a = 2$ e $b = \frac{1}{2} \rightarrow \text{SPI}$
- $a = 2$ e $b \neq \frac{1}{2} \rightarrow \text{SI}$

6. Discuta o sistema $\begin{cases} x - 2y + az = 1 \\ x - y - z = 2 \\ -x + 2y - 2z = b \end{cases}$ em função dos

parâmetros **a** e **b**.

Resolução:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = a - 2. \text{ Para } D \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a \neq 2$ (SPD).

Com $a = 2$, temos $D = 0$.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ x - y - z = 2 \rightarrow \text{escalonando} \rightarrow \\ -x + 2y - 2z = b \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ y - 3z = 1 \\ 0 = b + 1 \end{cases}$$

Observando a última linha, teremos uma igualdade verdadeira se $b + 1 = 0$, portanto, $b = -1$ (SPI).

A igualdade será falsa para $b + 1 \neq 0$ ou $b \neq -1$ (SI).

Portanto:

- $a \neq 2 \rightarrow \text{SPD}$
- $a = 2$ e $b = -1 \rightarrow \text{SPI}$
- $a = 2$ e $b \neq -1 \rightarrow \text{SI}$

Figura 34 - Discussão de sistemas lineares $n \times n$ que associam determinante ao escalonamento.

Fonte: L₁, p. 195

O L₂, também utiliza inicialmente o método do escalonamento para classificar sistemas lineares e, após abordar a Regra de Cramer para resolver um sistema linear com três equações e três incógnitas, relaciona, de maneira correta, a discussão dos sistemas lineares com o cálculo do determinante da matriz dos coeficientes (Figura 35).

Determinantes e análise de sistemas

Os determinantes podem ser utilizados para se discutir um sistema $n \times n$, ou seja, classificá-lo em possível (determinado ou indeterminado) ou impossível.

Para se discutir um sistema linear S , formado por n equações com n incógnitas, utilizando determinantes, calculamos o determinante D da matriz incompleta.

Nesse caso, duas coisas podem ocorrer:

Se $D \neq 0$, então S é determinado.

Se $D = 0$, então S é indeterminado ou impossível.

Quando $D \neq 0$, podemos resolver o sistema valendo-nos da regra de Cramer.

Se $D = 0$ sabemos que o sistema não tem solução única, mas para decidir se ele é indeterminado ou impossível devemos utilizar outro processo, como, por exemplo, o de **escalonamento**.

Figura 35 - Discussão de um sistema linear (caso particular de sistemas $n \times n$) que associa o determinante ao escalonamento ou a outro processo.

Fonte: L_2 , p. 180.

O terceiro livro analisado apresenta as possíveis classificações dos sistemas lineares num texto informativo e em seguida apresenta uma única maneira de classificar e de discutir os sistemas lineares: utilizando a Regra de Cramer, da maneira equivocada citada por Lima (1993) (Figura 36).

6. Discussão de um sistema linear

Seja o sistema linear de n equações a n incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Discutir o sistema é saber se ele é **possível**, **impossível** ou **indeterminado**.

Utilizando a regra de Cramer, temos:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

possível e determinado	$\Rightarrow$	$\det A \neq 0$
possível e indeterminado	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \det A = 0 \\ \text{e} \\ \det A_1 = \det A_2 = \dots = \det A_n = 0 \end{cases}$
impossível	$\Rightarrow$	$\begin{cases} \det A = 0 \\ \text{e} \\ \text{pelo menos um } \det A_n \neq 0 \end{cases}$

Figura 36 - Discussão de um sistema linear apresentado no L₃.

Fonte: L₃, pp. 203 e 204.

Podemos observar então que apenas os livros L₁ e L₂ não utilizam a Regra de Cramer nem para classificar e nem para discutir os sistemas lineares. Eles enfatizam a praticidade do método do escalonamento para estes fins e apresentam exemplos de discussão e classificação de sistemas com o número de equações diferentes do número de incógnitas, mas apresentam também um método - para o caso particular de um sistema linear $n \times n$ - que associa o determinante não nulo da matriz dos coeficientes ao escalonamento. Porém, o terceiro livro analisado apresenta a classificação dos sistemas lineares utilizando apenas a Regra de Cramer, maneira esta que pode levar o aluno a classificar incorretamente um sistema linear.

8. COMPARAÇÃO ENTRE O ESCALONAMENTO DE UM SISTEMA LINEAR NOS REGISTROS ALGÉBRICO E GRÁFICO

No dia da qualificação deste trabalho, a *Prof^a. Dr^a. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar*, membro da banca examinadora, apresentou a seguinte pergunta:

- Ao aplicarmos o método do escalonamento num sistema linear com três equações e três incógnitas estamos realizando um tratamento no registro algébrico. Ao efetuar este tratamento, quais as mudanças que ocorrem no registro gráfico?

Por considerarmos muito interessante esta questão, pedimos a autorização à professora e ela permitiu que, partindo da sua idéia, pesquisássemos este assunto e escrevêssemos os resultados observados.

Para dar andamento à nossa investigação decidimos utilizar o *software Winplot*, pois ele apresenta algumas características importantes:

- É de fácil manuseio;
- É um *software* gratuito e ocupa pouca memória no computador, assim sendo, não é necessário ter uma máquina de última geração para poder baixá-lo;
- Permite a construção de gráficos em três dimensões, o que é essencial para nossa pesquisa, visto que vamos investigar a representação gráfica de sistemas lineares com três equações e três incógnitas, que são planos no espaço.

O referido *software* encontra-se disponível em vários sites, entre eles:

- <http://baixaki.ig.com.br/download/WinPlot.htm> (acesso em 02/07/08);
- <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html> (acesso em 02/07/08);
- <http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/home/frames/download.htm> (acesso em 02/07/08).

Para que o leitor possa visualizar as figuras em três dimensões, movimentá-las e melhor compreender as nossas observações, decidimos

produzir um CD que contém todas as figuras deste capítulo e anexá-lo no final deste trabalho. Coloque o CD no computador e abra o arquivo intitulado “Instruções”.

Para iniciar nossa investigação, decidimos analisar um sistema linear possível e determinado. O sistema linear escolhido foi S_1 :

$$s_1: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 5y - 3z = 7 \\ 2x + 4y + 5z = 13 \end{cases}$$

Chamaremos de L_1 , L_2 e L_3 , as equações deste sistema.

$$s_1: \begin{cases} x + y - z = 1 \longrightarrow L_1 \\ 2x + 5y - 3z = 7 \longrightarrow L_2 \\ 2x + 4y + 5z = 13 \longrightarrow L_3 \end{cases}$$

Com o auxílio do *software Winplot*, obtemos a sua representação no registro gráfico. Trabalhamos com a equação explícita, isto é, isolando a incógnita z em cada equação, pois esta é a maneira que consideramos mais simples de trabalhar com este *software* em três dimensões.

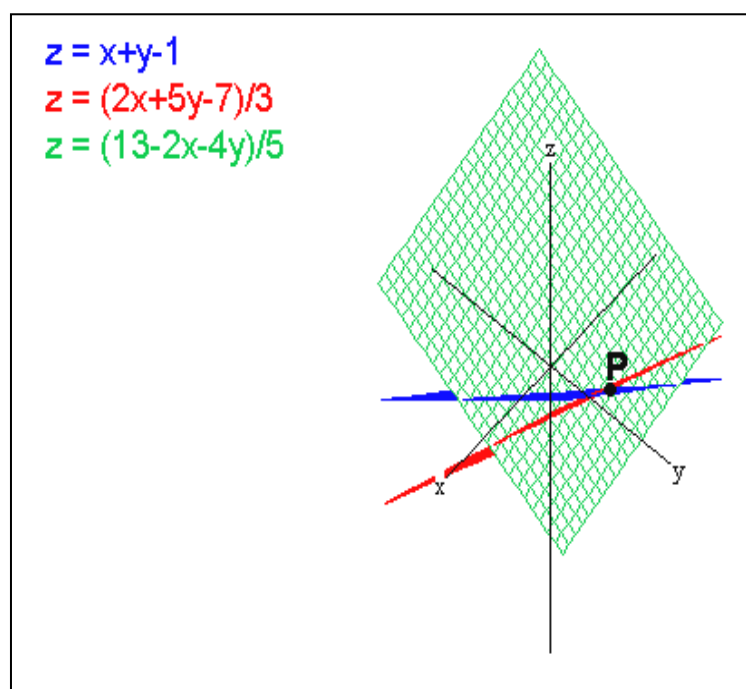


Figura 37 - Representação de S_1 no registro gráfico.

Observando a figura acima podemos verificar que cada equação do sistema corresponde a um plano no espaço, e que os três planos se encontram num ponto, o ponto P, que é a solução deste sistema linear. Para encontrarmos algebricamente esta solução, vamos utilizar o método do escalonamento.

Iniciamos o tratamento no registro de representação algébrico multiplicando L_1 por (-2) e adicionando em L_2 , obtendo L_4 . Em seguida multiplicamos L_1 por (-2) e adicionamos em L_3 , obtendo L_5 , obtendo assim o sistema linear S_2 , que possui duas novas equações: L_4 e L_5 . Podemos observar que estas duas novas equações não possuem a variável x , isto é, são independentes de x .

$$s_1: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 5y - 3z = 7 \\ 2x + 4y + 5z = 13 \end{cases} \xRightarrow{\substack{(-2) \cdot L_1 + L_2 \rightarrow L_4 \\ (-2) \cdot L_1 + L_3 \rightarrow L_5}} s_2: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x + 3y - z = 5 \rightarrow L_4 \\ 0x + 2y + 7z = 11 \rightarrow L_5 \end{cases}$$

Com o auxílio do *software Winplot*, obtemos a representação no registro gráfico destas duas novas equações.

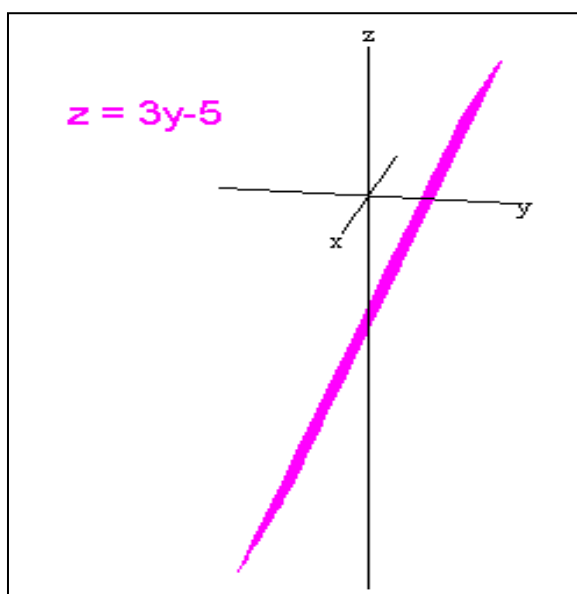


Figura 38 - Representação de L_4 no registro gráfico.

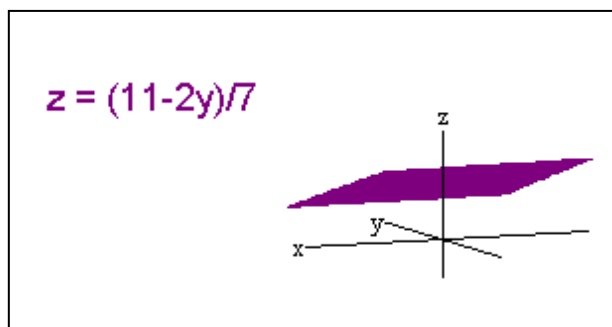


Figura 39 - Representação de L_4 no registro gráfico.

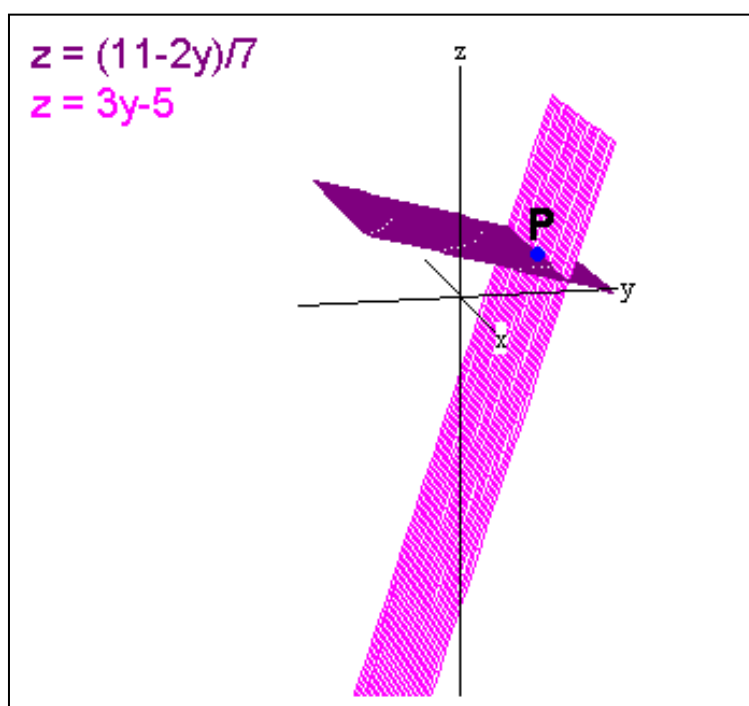


Figura 40 - Representação de L_4 e L_5 no registro gráfico.

Observamos que as duas novas equações do novo sistema linear S_2 têm como registro gráfico dois planos paralelos ao eixo x , o que era esperado, visto que suas equações são independentes desta incógnita. Outro fato que gostaríamos de ressaltar é que apesar destes dois planos serem ambos paralelos ao eixo x , eles não são paralelos entre si. Observamos que os dois planos possuem infinitos pontos em comum, entre eles o ponto P .

É possível obter também a representação gráfica das cinco equações envolvidas na nossa investigação até este momento, isto é, os cinco planos no espaço.

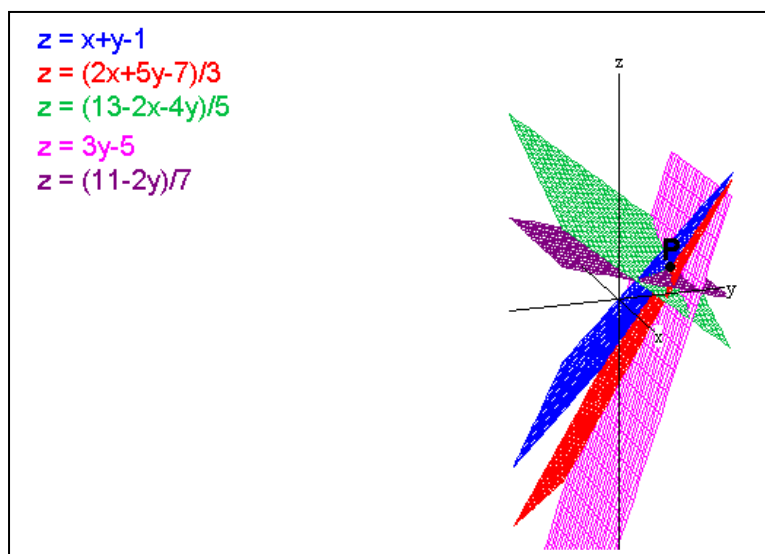


Figura 41 - Representação de L_1 , L_2 , L_3 , L_4 e L_5 no registro gráfico.

Pudemos observar que o ponto P pertence aos cinco planos. Ele é o ponto de encontros desses cinco planos.

Para concluir o escalonamento do sistema linear voltamos para o tratamento do registro algébrico. Multiplicamos L_4 por $(-\frac{2}{3})$ e adicionamos em L_5 , obtendo um novo sistema linear S_3 que possui uma nova equação: L_6 , a sexta equação envolvida neste processo. Observe que L_6 é uma equação que só possui a variável z , ou seja, ela é independente de x e de y e que se aplicarmos um tratamento em L_6 podemos observar que esta equação também poderá ser escrita como $z=1$, que doravante será denominada de L_7 .

$$S_2: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x + 3y - z = 5 \rightarrow L_4 \\ 0x + 2y + 7z = 11 \rightarrow L_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x + 3y - z = 5 \cdot (-2/3) \\ 0x + 2y + 7z = 11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_3: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 0x + 3y - z = 5 \\ 0x + 0y + \frac{23}{3}z = \frac{23}{3} \rightarrow L_6 \Rightarrow z = 1 \end{cases}$$

Com o auxílio do *software Winplot*, obtemos a representação no registro gráfico desta nova equação.

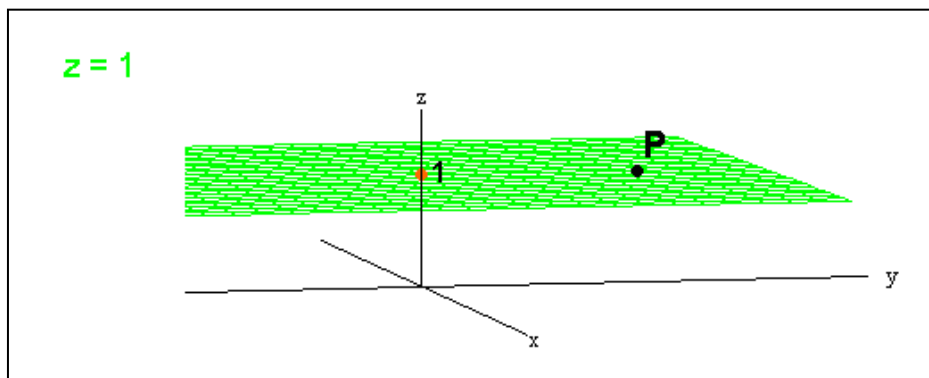


Figura 42 - Representação de L_7 no registro gráfico.

Observamos que a representação gráfica de L_6 é um plano paralelo simultaneamente ao eixo x e ao eixo y , o que era esperado, visto que esta equação não depende dessas variáveis. Também podemos observar que este plano passa pelo ponto P e “corta” o eixo z no ponto $(0,0,1)$, o que vem reforçar o resultado obtido no registro algébrico, ou seja, que $z=1$, é parte da solução do sistema linear.

É possível obter também a representação gráfica desses seis planos no espaço. Podemos observar que todos eles passam pelo ponto P .

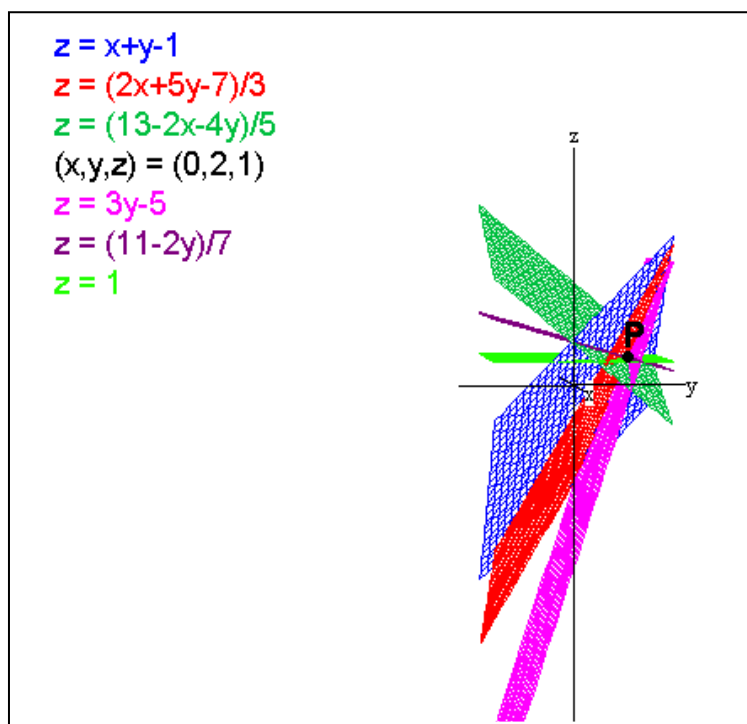


Figura 43 - Representação de L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_5 e L_7 no registro gráfico.

Voltamos para o tratamento no registro algébrico. Substituindo $z=1$ em L_4 , encontramos $y=2$ que chamaremos de L_8 , cuja representação no registro gráfico é um plano paralelo aos eixos x e z e corta o eixo y em $y=2$.

Substituindo esses valores em L_1 encontramos $x=0$ que denominaremos L_9 e cuja representação no registro gráfico é um plano paralelo aos eixos y e z e corta o eixo x em $x=0$.

Podemos concluir, então, que o conjunto solução do sistema linear é a terna ordenada $(0,2,1)$, cuja representação gráfica é o ponto P , que é o ponto de encontro de todos os planos de S_1 , S_2 e de S_3 .

Utilizando o *software Winplot* é possível obter L_7 , L_8 e L_9 no registro gráfico. Gostaríamos de ressaltar que não trabalhamos na forma explícita das equações (isolando a incógnita z), pois estas equações são independentes de z , assim sendo, decidimos trabalhar com a equação do plano na sua forma geral ($ax+by+cz=0$).

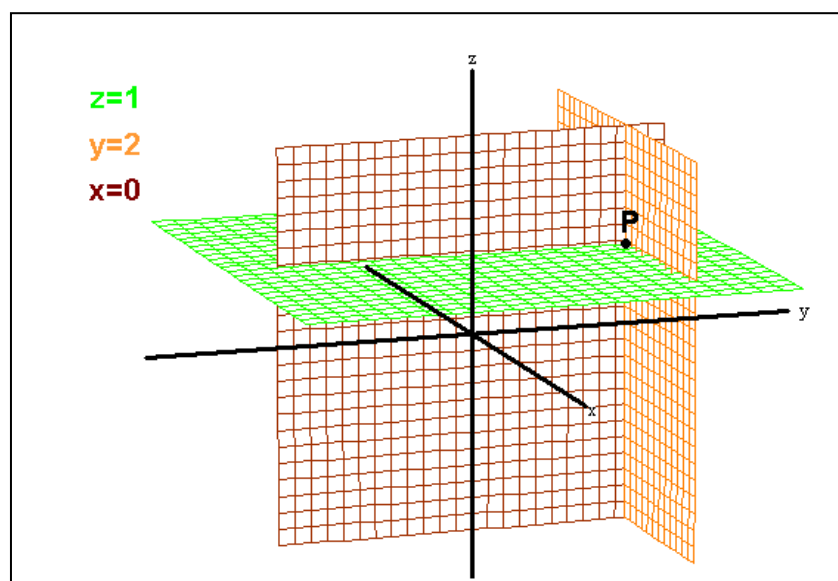


Figura 44 - Representação de L_7 , L_8 e L_9 no registro gráfico.

Para melhor compreender as análises feitas anteriormente, podemos observar uma das equações de S_1 , acompanhando quais os tratamentos que ela recebeu no registro algébrico e analisar suas respectivas representações no registro gráfico. Escolhemos L_3 para fazer esta análise.

A equação $2x+4y+5z=13$ (L_3 em S_1) é representada no registro gráfico por um plano que passa pelo ponto P (solução do sistema) e não é paralelo a nenhum dos eixos (plano na cor verde claro da figura abaixo). Após receber um tratamento algébrico passou a ser representada por $2y+7z=11$ (L_6 em S_2) que é representada no registro gráfico por um plano que passa pelo ponto P (solução do sistema) e é paralelo ao eixo x (plano na cor roxa da figura abaixo). Finalmente, após outro tratamento algébrico, esta equação passou a ser representada por $z=1$, cuja representação gráfica é um plano que também passa pelo mesmo ponto P, que é paralelo aos eixos x e y , é perpendicular ao eixo z e “toca” este eixo em $z=1$, fato este que vem confirmar o valor de z no conjunto solução encontrado no registro algébrico.

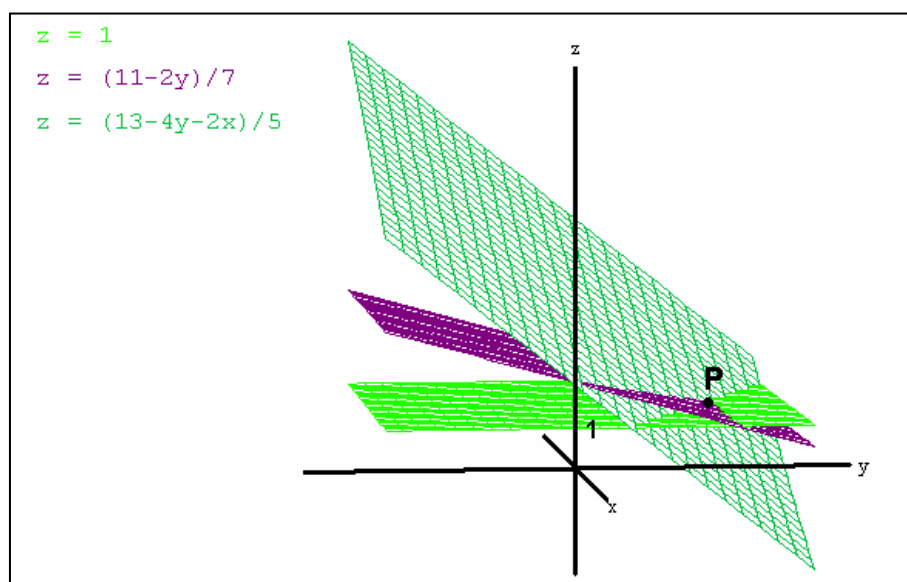


Figura 45 - Representação de L_3 , L_5 e L_7 no registro gráfico.

Podemos inferir que para resolvermos um sistema possível e determinado, ao aplicar o método do escalonamento, buscamos, no registro algébrico, equações que sejam dependentes de apenas uma variável, e, no registro gráfico, buscamos planos que passam pelo ponto de intersecção dos três planos iniciais de S_1 e que por possuírem apenas uma variável, são paralelos a dois eixos (das variáveis que são independentes) e perpendiculares

ao terceiro (da única variável que possui). Assim, o ponto onde o plano toca o eixo perpendicular é o valor dessa variável na solução algébrica do sistema.

Decidimos prosseguir nossas investigações com outros sistemas. O

sistema escolhido então foi $S_4 : \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ -2x + y + z = 1 \\ 2x + 5y + 5z = 17 \end{cases}$, pois se trata de um

sistema possível e indeterminado. Podemos observar que, na sua representação no registro gráfico (Figura 44) existem três planos que se encontram segundo uma reta, isto é, esses três planos possuem infinitos pontos em comum.

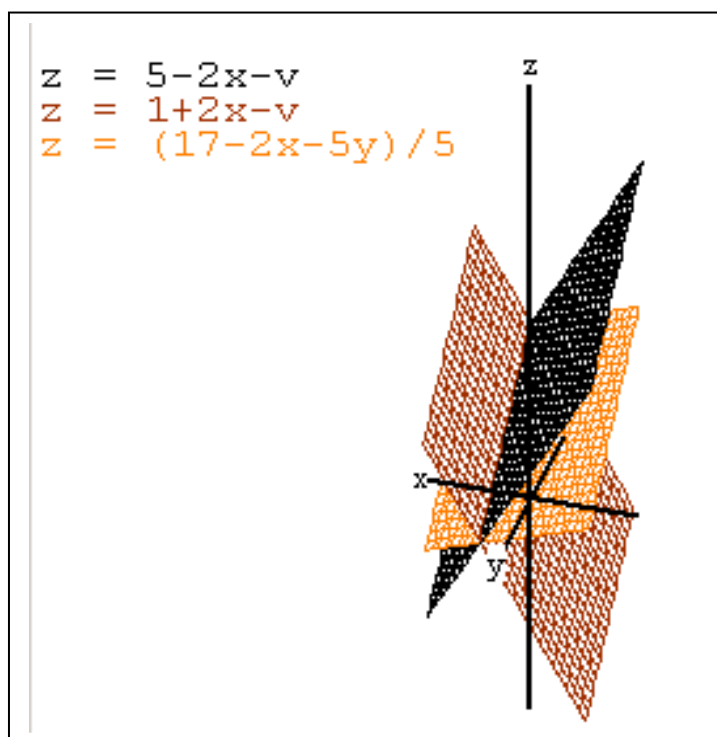


Figura 46 - Representação de S_4 no registro gráfico.

Aplicando o tratamento nas equações de S_4 para escaloná-lo obtemos:

$$S_4: \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ -2x + y + z = 1 \\ 2x + 5y + 5z = 17 \end{cases} \Rightarrow S_5: \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 0x + 2y + 2z = 6 \\ 0x + 4y + 4z = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_6: \begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 0x + 2y + 2z = 6 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Observamos que a terceira equação de S_5 é igual à segunda multiplicada por 2, logo, no registro gráfico elas são representadas por dois planos coincidentes (mesmo plano), que são paralelos ao eixo x (pois são independentes da variável x) e que contêm a reta que é a intersecção dos três planos de S_4 (Figura 45).

Também é fácil notar que ao aplicar o tratamento nas equações de S_5 obtemos um novo sistema (S_6) cuja última equação possui infinitas ternas ordenadas (x, y, z) como solução, o que nos leva a classificar o sistema como possível e indeterminado (S.P.I.). Esse resultado no registro algébrico vem confirmar o que já havíamos observado no registro gráfico.

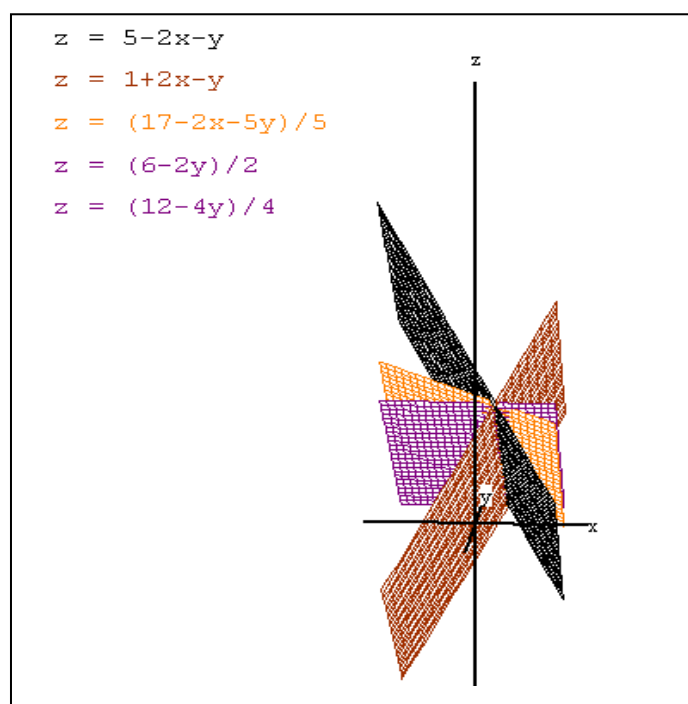


Figura 47 - Representação de S_5 no registro gráfico.

Finalmente, escolhemos o sistema $S_7 : \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, pois se trata

de um sistema impossível. Podemos observar que, na representação no registro gráfico desse sistema (Figura 46) existem três planos que não possuem nenhum ponto em comum.

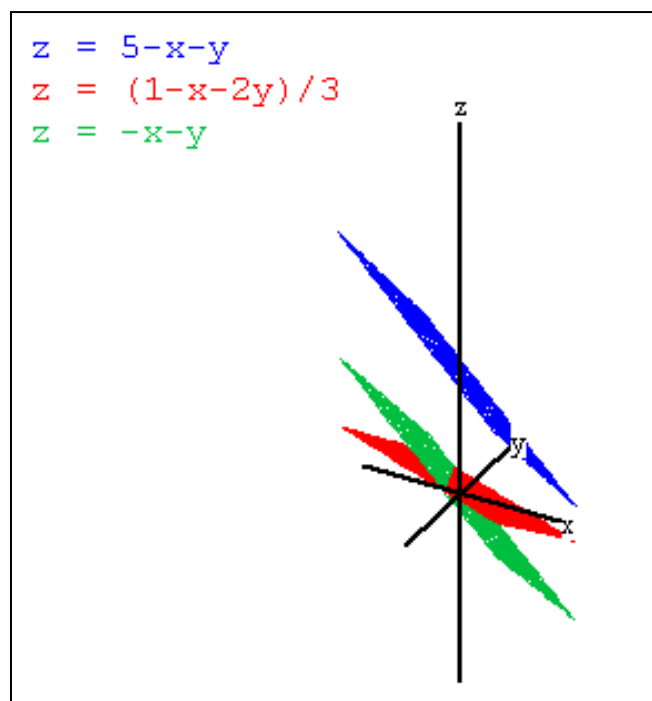


Figura 48 - Representação de S_7 no registro gráfico.

Aplicando o tratamento nas equações de S_7 para escaloná-lo obtemos um novo sistema S_8 . A representação gráfica da segunda linha desse sistema (S_8) é um plano paralelo ao eixo x (Figura 47). Podemos observar também que a última equação desse sistema nos mostra que não existe uma terna ordenada (x, y, z) que seja solução desta equação. Logo, o conjunto solução desse sistema é o conjunto vazio.

$$S_7 : \begin{cases} x + y + z = 5 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}} S_8 : \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 0x + 1y + 2z = -4 \\ 0x + 0y + 0z = -5 \end{cases}$$

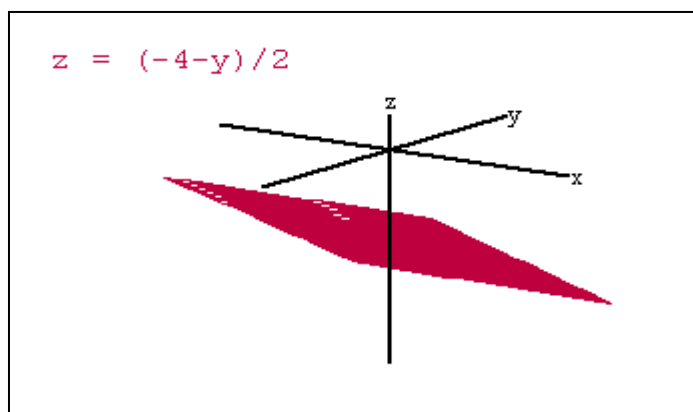


Figura 49 - Representação da segunda equação de S_8 no registro gráfico.

No registro gráfico, as quatro equações envolvidas nesse escalonamento são quatro planos no espaço (Figura 48). Podemos observar que não existe nenhum ponto comum aos quatro planos, assim sendo, podemos afirmar que se trata de um sistema impossível (S.I.). Esse resultado confirma o que já havíamos observado no registro algébrico.

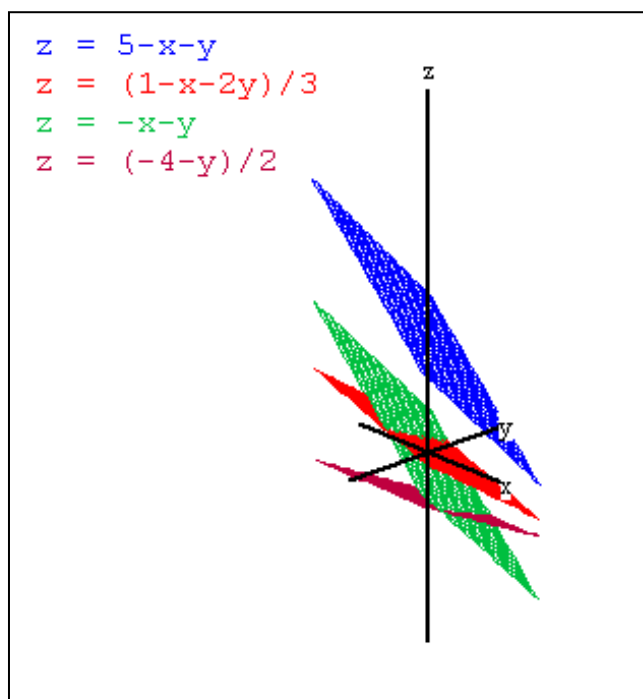


Figura 50 - Representação das equações de S_7 e S_8 no registro gráfico.

Encerramos aqui a nossa investigação sobre a relação existente entre o tratamento aplicado ao registro algébrico de um sistema linear com três equações e três incógnitas para escaloná-lo com a representação no registro gráfico das equações envolvidas nesse processo. Acreditamos que esta investigação possa ser esclarecedora para muitos professores de Matemática que nunca debruçaram seus olhares para essa relação e que contribua para tornar suas práticas docentes mais diversificadas e mais completas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Motivadas pela experiência docente no Ensino Médio, e partindo da hipótese de que os sistemas lineares são trabalhados com maior enfoque no registro algébrico, tivemos o interesse de investigar em que registros de representação semiótica os livros didáticos da segunda série do Ensino Médio, por nós selecionados, abordam os sistemas lineares com três equações e três incógnitas e quais as conversões de registros são tratadas nos seus exercícios resolvidos e propostos.

Analizamos algumas pesquisas já existentes, entre elas Karrer (2006), Machado (1996) e Freitas (1999). Elas enfatizam que os sistemas lineares são considerados um conhecimento prévio para a disciplina Álgebra Linear no Ensino Superior e que as dificuldades que os alunos encontram nesta disciplina poderiam estar relacionadas ao fato de que os livros didáticos privilegiam o registro algébrico (ou simbólico) gerando uma deficiência na coordenação dos diversos registros de representação semiótica. Machado (1996) enfatiza a necessidade de se abordar as conversões de registro de representação semiótica antes do Ensino Superior, caso contrário, os alunos continuarão resolvendo sistemas sem dar sentido algum a eles.

Partindo das evidências apontadas nestas pesquisas e à luz da teoria dos registros de representação semióticas de Raymond Duval (2003) decidimos analisar três livros didáticos do Ensino Médio e investigar em quais registros os sistemas lineares com três equações e três incógnitas são abordados e quais as conversões de registros tratadas nos seus exercícios resolvidos e propostos. Os registros que privilegiamos em nossas análises foram: o da língua natural, o registro algébrico e o registro gráfico.

Inicialmente, observamos que o registro predominante nos três livros didáticos, tanto na abordagem do conteúdo quanto nos exercícios resolvidos e propostos, é o registro algébrico, fato este que vem confirmar a nossa hipótese de pesquisa.

O registro gráfico está presente no texto explicativo de dois dos livros analisados (L_1 e L_2), porém, apenas como mais uma informação para o aluno.

Observamos que os sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas são tratados no registro gráfico com mais frequência que os sistemas lineares com três equações e três incógnitas. Em apenas um dos livros analisados (L_1) encontramos um exercício proposto que utiliza o registro gráfico para interpretar o conjunto solução de um sistema linear com três incógnitas (figura 24).

O registro de representação semiótica da língua natural também está presente em dois dos livros analisados (L_1 e L_2).

O terceiro livro analisado, tanto para resolver, quanto para classificar ou mesmo para discutir os sistemas lineares com três equações e três incógnitas, utiliza apenas no registro algébrico.

Quanto às conversões de registros apresentadas nos exercícios resolvidos e propostos, elas ainda são propostas de forma tímida, predominando a conversão do registro *da língua natural para o algébrico* (Figura 29). Encontramos apenas um exercício que propõe a conversão no sentido contrário (do registro algébrico para o da língua natural, Figura 25).

Encontramos apenas um exercício que tenha o *registro gráfico* de um sistema com três equações e três incógnitas como *registro de chegada* (Figura 24) e nenhum exercício que tenha o *registro gráfico* como *registro de partida*. Acreditamos que este fato ocorra devido à dificuldade que o aluno tem nesta fase da aprendizagem para trabalhar em três dimensões. Voltamos a afirmar que existem excelentes *softwares* gratuitos que trabalham em três dimensões e que representam muito bem a posição de três planos no espaço. Acreditamos que atividades com estes *softwares* possam solucionar esta lacuna dos livros didáticos.

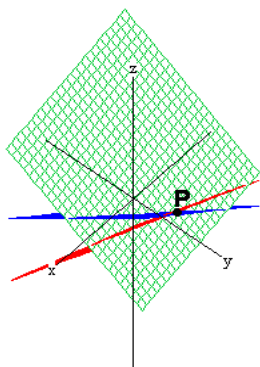
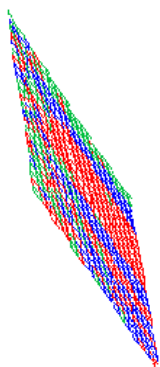
Cabe, portanto, ao professor buscar atividades que contemplem esta carência dos livros didáticos, pois acreditamos que o registro gráfico deveria ser mais explorado, visto que ele poderia contribuir para que os alunos tenham maior facilidade não só para entender o conjunto solução de um sistema linear, mas também para classificá-lo e discuti-lo quando necessário.

Gostaríamos de lembrar também que, nos livros didáticos analisados, o tema: posições Relativas entre Planos no Espaço (Geometria de Posição), que consideramos um conhecimento prévio para o estudo dos sistemas lineares

com três equações e três incógnitas no registro geométrico, é discutido em capítulo posterior ao que apresenta o registro gráfico dos sistemas lineares. Acreditamos que esse fato enfatize a importância do professor preparar suas aulas antecipadamente e ter autonomia para selecionar a ordem dos conteúdos a serem trabalhados, sem precisar seguir estritamente a seqüência que é apresentada nos livros didáticos.

Podemos concluir, então, que a conversão predominante nos exercícios resolvidos e propostos dos livros didáticos analisados é a da língua natural para o registro algébrico, e que foi encontrado apenas um exercício no sentido contrário dessa conversão. Observamos a carência de exercícios resolvidos ou propostos que propõem as seguintes conversões: do registro gráfico para o algébrico, do algébrico para o da língua natural e do gráfico para o da língua natural.

Acreditamos que o registro gráfico deveria ser mais explorado, pois ele poderia contribuir para que os alunos tivessem maior facilidade não só para entender o conjunto solução de um sistema linear, mas também para classificá-lo e discuti-lo quando necessário. Assim sendo, a abordagem desse tema não ficaria apenas no desenvolvimento dos algoritmos, mas o aluno poderia analisar e melhor compreender os resultados obtidos. Deixamos aqui algumas sugestões de exercícios que contemplam o registro gráfico dos sistemas lineares:

Partida: registro gráfico Chegada: língua natural	Partida: registro gráfico Chegada: registro algébrico	Partida: registro algébrico Chegada: registro gráfico
Elabore uma situação-problema para o sistema abaixo, sabendo que $P(0,2,1)$. 	Crie um sistema linear com três equações e três incógnitas que possua a seguinte representação gráfica (três planos coincidentes no espaço): 	Representar graficamente o sistema linear abaixo e classificá-lo como possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível: $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ -2x + y + z = 1 \\ 2x + 5y + 5z = 17 \end{cases}$

Quadro 9 - Sugestões de exercícios feitas pela pesquisadora para contemplar o registro gráfico dos sistemas lineares.

Essa pesquisa alterou, de maneira positiva, nossa prática docente. Além de encontrar resultados, incentivamos os nossos alunos a refletir sobre eles. Sempre que possível, recorremos ao registro gráfico para validar, discutir e melhor compreender os resultados obtidos no registro algébrico. Um exemplo disso é que após discutir um sistema, algebricamente, vamos para o laboratório de informática para que o aluno possa compreender melhor os resultados obtidos. Tomemos como exemplo o exercício resolvido apresentado na Figura 34 (exercício 6) deste trabalho. Depois de discuti-lo no registro algébrico, partimos para a interpretação no registro gráfico. E encontramos com a ajuda do *software Winplot*, as representações gráficas a seguir (Figura 51).

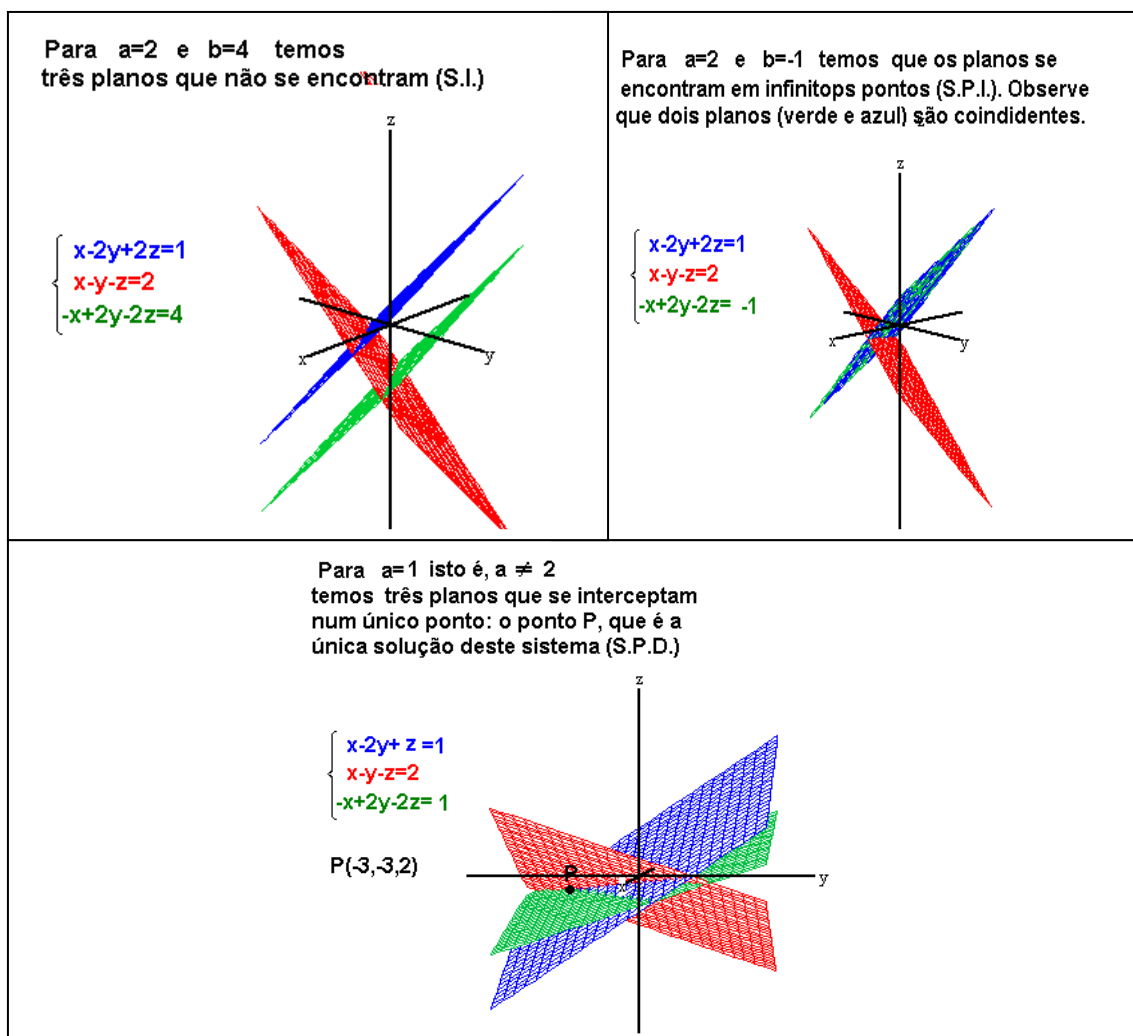


Figura 51 - Discussão de um sistema linear no registro gráfico, utilizando o *software Winplot*

Como professoras de Matemática, buscamos constantemente novas alternativas de atividades que levam os alunos a realmente interpretar resultados e construir novos conhecimentos. Acreditamos que atividades diversificadas possam contribuir para uma aprendizagem mais significativa dos sistemas lineares.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S.A., BIANCHINI, B.L. O Erro Ligado ao Ensino/Aprendizagem de Sistemas Lineares *in* Anais do IV EPEM – pp. 216 - 223. São Paulo: SBEM, 1996.

ARAÚJO, C.C. B. Dissertação de Mestrado: A Metamatemática no Livro Didático de Álgebra Linear. PUC-SP: 2002.

BOYER, C.B. História da Matemática. Tradução: Elza Gomide – São Paulo, Editora Edgard Blucher: 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais+ (PCN+) – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

_____. Secretaria de Educação Básica. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. – (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2 . Brasília: MEC, 2006.

_____. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

_____. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio - Matemática (PNLEM). Brasília: MEC, 2005. Disponível em ftp://ftp.fnde.gov.br/web/livro_didatico/guia_livro_didatico_pnlem_2006_mg.pdf acesso em 23/12/2007.

CALLIOLI, C.A., DOMINGUES, H.H. e COSTA, C.F.R. Álgebra Linear e Aplicações. 6º edição. São Paulo: Atual, 1990.

COLOMBO, J.A.A. e MORETTI, M. T. Registros de Representação Semiótica e Parâmetros Curriculares Nacionais: Interfaces Presentes e Possíveis *in* Anais do IX ENEM. Belo Horizonte, 2007. Disponível em http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC86989073934T.doc -acesso em 08/03/2008.

DAMM, R. F., *et al* – Educação Matemática : uma introdução. Pp. 135-153. São Paulo: EDUC, 2002.

DANTE, L.R. Matemática, Contexto & Aplicações. Vol. 2. São Paulo: Ática, 2007.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática *in*: MACHADO, S. D. A. (org.) Aprendizagem de Matemática, Registros de Representações Semióticas. Campinas: Papirus, 2003 (Coleção Papirus Educação) pp. 11 - 33.

FERREIRA, M.C.C. e GOMES, M.L.M. Sobre o Ensino de Sistemas Lineares. In: RPM, nº. 32. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1996.

FREITAS, I. M. Dissertação de Mestrado: Resolução de Sistemas Lineares Parametrizados e seu Significado para o Aluno. PUC-SP: 1999.

GIOVANNI, J.R., BONJORNO, J.R. e JR J.R.G. Matemática Completa: ensino médio – vol. Único. São Paulo: FTD, 2002.

IEZZI, G. *et al.* Matemática: ciência e aplicações – vol. 2. 4ª ed. São Paulo: Atual, 2006.

KARRER, M. Tese de Doutorado: Articulação entre álgebra Linear e Geometria – Um Estudo sobre as Transformações Lineares na Perspectiva dos Registros de Representação Semiótica. PUC-SP: 2006

LELLIS, M. e IMENES, L. M. A Matemática e o Novo Ensino Médio. In Educação Matemática em Revista, nº. 9, pp. 40-47. RS: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2001.

LIMA, E. L.. *et. al*, A Matemática do Ensino Médio – vol. 3. RJ: SBM, 1998.

_____. Sobre o Ensino de Sistemas Lineares. In RPM, nº. 23. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1993.

LINS, R. e GIMENEZ, J. Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI. Campinas, SP: Papirus, 2001.

LÜDKE, M. e ANDRÉ, M.E.D. A Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas. São Paulo: E.P.U, 1986

MACHADO, S. D. A. (org.) Aprendizagem de Matemática, Registros de Representações Semióticas. Campinas: Papirus, 2003.

_____. O Universitário principiante x Significado dos Sistemas de Equações *in* Anais do IV EPEM – pp. 241 - 248. São Paulo: SBEM, 1996.

MOREIRA, M. A. e MASINI, E. A. F. S. Aprendizagem Significativa: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 1982.

MOREIRA, M.A. Teorias de Aprendizagem, São Paulo: E.P.U.,1999.

NOMURA, J.I. e BIANCHINI, B.L. Álgebra Linear: relações entre os ciclos básico e profissionalizante na engenharia elétrica *in* Anais do IX ENEM. Belo Horizonte: SBEM, 2007.

OLIVEIRA, S.B. Dissertação de Mestrado: As Equações Diofantinas Lineares e o Livro Didático de Matemática para o Ensino Médio. PUC-SP: 2006.

PAIVA, M.R. Matemática. Vol.2. São Paulo: Editora Moderna, 1995.

PIRES, C.M.C. Currículos em Matemática: da organização linear à idéia de rede. São Paulo: FTD, 2000.

_____ Implementação de inovações curriculares em matemática e embates com concepções, crenças e saberes de professores: breve retrospectiva histórica de um problema a ser enfrentado *in* Revista Iberoamericana de educação matemático-Dezembro de 2007 - número 12 – páginas 5- 26.

SILVA, U.A. Dissertação de Mestrado: Análise da abordagem de Função adotada em Livros Didáticos de Matemática da Educação Básica. PUC-SP: 2007.

SMOLLE, K.S. e DINIZ, M.I. Matemática: Ensino Médio. Vol. 2. São Paulo: Saraiva, 2003.

Sites visitados:

http://www.fnde.gov.br/home/index.jsp?arquivo=livro_didatico.html#pnld (acesso em 29/10/2007).

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/port_1818.pdf (acesso em 29/10/2007).

http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC86989073934T.doc (acesso em 08/03/2008).

<http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/vga/ga1.pdf> (acesso em 14/03/2008).

<http://baixaki.ig.com.br/download/WinPlot.htm> (acesso em 02/07/08).

<http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html> (acesso em 02/07/08).

<http://www.rc.unesp.br/igce/pgem/home/frames/download.htm> (acesso em 02/07/08).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)