

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS EM DIFERENTES REGIMES
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

por

Gustavo Bono

Tese para obtenção do Título de
Doutor em Engenharia

Porto Alegre, Abril de 2008

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS EM DIFERENTES REGIMES

UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

por

Gustavo Bono

Mestre em Engenharia

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de

Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Fenômenos de Transporte

Orientador: Prof. Dr. Armando Miguel Awruch

Aprovada por:

Prof. Dr. Nide G. C. R. Fico Júnior

Prof. Dr. Argimiro R. Secchi

Prof. Dr. Sérgio L. Frey

Prof. Dr. Flavio J. Lorini
Coordenador do PROMEC

Porto Alegre, 9 de Abril de 2008.

*Si hay victoria en vencer al enemigo,
la hay mayor cuando el hombre se vence a sí mismo.*

General José de San Martín

Dedico este trabajo a mi mujer Giuliana, a mi hijita
Camila, a mis padres Eduardo y Mirta, a mis
hermanas Alejandra, Cecilia y Andrea.

AGRADECIMENTOS

Ao Brasil, pelo caloroso acolhimento do seu povo e por me oferecer muito mais do que uma carreira científica e acadêmica.

À CAPES, pela concessão da bolsa de estudos, possibilitando a minha total dedicação a este trabalho.

Ao professor Armando Miguel Awruch, pela dedicação, apoio e, sobretudo, pelos valiosos conhecimentos transmitidos.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFRGS.

Aos professores João R. Masuero (UFRGS) e Paulo R.F. Teixeira (FURG) agradeço pela valiosa ajuda recebida durante o desenvolvimento do presente trabalho e em especial ao professor Tales L. Popiolek (FURG) por ceder o código de refinamento adaptativo de malhas.

A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

À minha mãe e minhas três irmãs, pela dedicação em todos os momentos de minha vida, sempre me apoiando, dando segurança e incentivo para conquistar meus sonhos.

De forma especial, a minha mulher Giuliana pelo apoio, companheirismo e amor, e por fazer-me a pessoa mais feliz do mundo com a chegada de Camila, um anjinho que transformou minha vida.

RESUMO

Simulação Numérica de Escoamentos em Diferentes Regimes Utilizando o Método dos Elementos Finitos

Esta tese tem como objetivo o desenvolvimento e aplicação de algoritmos numéricos para a análise de problemas de Dinâmica de Fluidos, especialmente no campo da aerodinâmica computacional em diversos regimes (dentro de uma ampla faixa de número de Mach) e, em particular, conclui-se o trabalho com a simulação numérica de um escoamento compressível supersônico ao redor de uma configuração asa-canard-fuselagem, que se aproxime a uma situação real.

As equações de Euler e Navier-Stokes são resolvidas empregando o método dos elementos finitos (MEF), usando uma série de Taylor e o clássico método de Bubnov-Galerkin para a discretização do tempo e do espaço, respectivamente. Para a resolução do método de Taylor-Galerkin são usados dois esquemas explícitos numéricos diferentes, sendo o primeiro iterativo de um passo e o segundo de dois passos sem iterações. Devido à complexidade geométrica que apresentam as configurações aerodinâmicas, foram implementados o elemento hexaédrico trilinear e o elemento tetraédrico linear, com a finalidade de ter maior flexibilidade na geração da malha. A simulação dos escoamentos incompressíveis é apresentada neste trabalho, considerando a hipótese de pseudo-compressibilidade nas equações de Navier-Stokes. No âmbito de escoamentos compressíveis não-viscosos foi implementada uma matriz de pré-condicionamento que possibilita a simulação de escoamentos a baixo número de Mach (inferiores ou iguais a 0,4). No contexto da malha não-estruturada se implementa uma técnica de refinamento adaptativa. Como a restrição no passo de tempo dos esquemas explícitos torna-se crítica quando é feita a subdivisão dos elementos na etapa de refinamento, emprega-se uma técnica de avanço no tempo em subciclos (utilizando intervalos de tempo diferentes para os elementos da malha) com o objetivo de aprimorar a eficiência do código computacional.

Finalmente, no capítulo das aplicações dos algoritmos, em uma primeira etapa são apresentados resultados numéricos em duas e três dimensões para escoamentos difusivos e não difusivos em uma ampla faixa de número de Mach, validando os algoritmos desenvolvidos. Na etapa seguinte, investiga-se o escoamento compressível supersônico ao redor das configurações asa-fuselagem e asa-canard-fuselagem, procurando futuras aplicações a casos reais.

ABSTRACT

Numerical Simulation of Flows with Different Regimes Using the Finite Element Method

Development and applications of numerical algorithms to analyses fluid dynamic problems, mainly in the field of computational aerodynamics, for different regimes (within a wide range of Mach numbers) is the main objective of this thesis. Particularly, the numerical simulation of a supersonic flow around a wing-canard-body configuration, similar to a real fighter, is also a goal of this work.

The Euler and Navier-Stokes equations are solved using the finite element method, employing a Taylor series and the classical Bubnov-Galerkin methods for time and space discretization, respectively. Two classes of explicit time integration are investigated to solve inviscid/viscous flow problems, a one-step and a two-step Taylor-Galerkin explicit schemes. In this work, incompressible viscous flows are analyzed using the pseudo-compressibility assumption in the Navier-Stokes equations. A preconditioning matrix is employed for the numerical solution of inviscid flows with low Mach numbers (less or equal to 0.4). The fluid is discretized using linear tetrahedral elements and the eight-node hexahedral elements. An automatic adaptive scheme for unstructured meshes with linear tetrahedral elements is used interactively with the numerical solution to improve the quality of the solution and a multi-time-step integration technique with subcycles is implemented to reduce the CPU time.

Finally, in the first part of the chapter, where applications of the algorithm are shown, some numerical results in two and three-dimensional incompressible/compressible viscous/inviscid flows are presented, in order to validate the algorithms. In the last part, compressible supersonic flows over a wing-body and wing-canard-body configurations are investigated, looking for more realistic applications in future works.

ÍNDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Considerações iniciais.....	1
1.2 Níveis de aproximação	5
1.3 Malha estruturada ou não-estruturada	6
1.4 Os métodos adaptativos	8
1.5 Motivação e objetivos da pesquisa.....	10
2. FORMULAÇÃO TEÓRICA	12
2.1 Generalidades.....	12
2.2 Equações para um escoamento compressível	13
2.3 Adimensionalização das equações para escoamentos compressíveis	15
2.4 Forma vetorial compacta das equações de conservação.....	17
2.5 Equações para um escoamento incompressível	19
3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS E INCOMPRESSÍVEIS	21
3.1 Discretização temporal das equações para escoamentos compressíveis viscosos	21
3.1.1 Esquema de um passo.....	21
3.1.2 Esquema de dois passos.....	23
3.2 Discretização espacial das equações para escoamentos compressíveis viscosos	25
3.2.1 Esquema de um passo.....	26
3.2.1.1 Modelo numérico para escoamentos difusivos.....	28
3.2.2 Esquema de dois passos.....	33
3.3 Estabilidade numérica e viscosidade artificial.....	34
3.4 Discretização das equações para escoamentos incompressíveis não-viscosos	37
3.5 Discretização das equações para escoamentos incompressíveis viscosos	38
3.6 Características gerais dos códigos	39
3.6.1 Convergência do processo iterativo	39
3.6.2 Resíduo e estado estacionário	40
3.6.3 Condições de contorno sólido	40

4	ESQUEMA DE ADAPTAÇÃO TEMPORAL (POR SUBCICLOS) E ESPACIAL (COM REFINAMENTO H)	43
4.1	Técnica de subciclos	43
4.1.1	Implementação da técnica de subciclos	44
4.2	Refinamento adaptativo de malhas	48
4.2.1	Indicadores de erro	49
4.2.2	Critério de adaptação de malhas	50
4.2.3	Refinamento de elementos tetraédricos	52
5.	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO.....	55
5.1	Reflexão de um choque oblíquo.....	56
5.2	Escoamento em torno de um aerofólio com $M = 0,8$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$	63
5.3	Escoamento sobre uma superfície com curvatura para $M = 0,10$	68
5.4	Escoamento ao redor de um cilindro com $Re = 40$ e 100	70
5.5	Escoamento sobre um aerofólio com $M = 0,10$	76
5.6	Escoamento ao redor de uma esfera com $Re = 100$	81
5.7	Escoamento transônico sobre uma asa delta	82
5.8	Escoamento ao redor de um conjunto esfera-cilindro-cone.....	94
5.9	Escoamento hipersônico sobre uma placa plana com rampa	97
5.10	Escoamento ao redor de uma configuração asa-fuselagem	111
5.11	Escoamento ao redor de uma configuração asa-canard-fuselagem	135
6.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS	160
6.1	Conclusões	160
6.2	Sugestões para continuidade da pesquisa	163
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	165
	ANEXO A: EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	175
	ANEXO B: MATRIZES PARA O ELEMENTO TETRAÉDRICO	177

Lista de Símbolos

Letras Romanas Maiúsculas

A_i	Matriz do jacobiano convectivo
CAF	Coefficiente de amortecimento fictício
CD	Coefficiente de arrasto $CD = 2 F_{arrasto} / \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S$
C_f	Coefficiente de fricção $C_f = 2 \tau / \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S$
CFL	Número de Courant-Friedrichs-Lewy
CL	Coefficiente de sustentação $CD = 2 F_{sustentação} / \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S$
C_p	Coefficiente de pressão $C_p = 2(p - p_{\infty}) / \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S$
CMz	Coefficiente de momento $CMz = 2 Mz / \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S b$
CS	Coefficiente de segurança do incremento de tempo crítico
D	Vetor de amortecimento numérico
D_{ij}	Matrizes de difusão – Equação de Quantidade de Movimento Linear
E_i	Matrizes de difusão – Equação de Energia
E_i^*	Matrizes de difusão adicionais – Termos iterativos
F_i	Vetor de variáveis de fluxo advectivo e de pressão
G_i	Vetor de termos difusivos e de condutibilidade térmica
I	Contador de número de iterações
K	Traço da matriz de coeficientes de condutibilidade térmica
K_{ij}	Componentes da matriz de coeficientes de condutibilidade térmica
K	Matriz de condutibilidade térmica
L_{∞}	Comprimento de referência
M	Número de Mach
M_{∞}	Número de Mach de referência
M	Matriz de massa
M_L	Matriz de massa discreta

N_p	Função de forma
\mathbf{N}	Vetor de funções de forma
$\mathbf{N}_{,i}$	Derivada das funções de forma $\mathbf{N}_{,i} = \partial\mathbf{N}/\partial x_i$
$\hat{\mathbf{N}}$	Vetor de funções de forma avaliado no contorno
Pr	Número de Prandtl
Q	Fonte ou sumidouro – Equação de energia
\mathbf{R}_Ω	Resíduo no método de Galerkin
Re_∞	Número de Reynolds de referência
S	Constante da lei Sutherland para a viscosidade ou superfície da asa
S_K	Constante da lei Sutherland para a condutibilidade térmica
T	Temperatura
\mathbf{U}	Vetor de variáveis de campo ou de conservação
\mathbf{V}	Vetor de velocidade
V_∞	Velocidade de referência
W^p	Função de peso no método de Galerkin

Letras Romanas Minúsculas

a_∞	Velocidade do som na corrente-livre não perturbada
b	Envergadura da asa
c_p	Calor específico a pressão constante
c_v	Calor específico a volume constante
e	Energia total específica
b_j	Componentes da resultante das forças de volume
$\{\mathbf{f}_j\}$	Vetor equivalente às ações superficiais devidas à difusão
\mathbf{g}	Vetor equivalente às ações superficiais devidas à condução
n	Componente da direção normal
$nele$	número de elementos da malha
nno	número de nós da malha
p	Pressão ou ordem de precisão do esquema numérico
\hat{q}	Fluxo de calor
$\{\mathbf{q}\}$	Vetor equivalente às ações superficiais devidas à difusão

s_1, s_2	Variável do esquema de integração temporal
t	Tempo
i	Energia interna específica
v_i	Componentes de velocidade
x_i	Coordenadas espaciais

Letras Gregas Maiúsculas

Δt	Incremento de tempo
Γ	Domínio superficial – contorno
$\mathbf{\Gamma}$	Matriz de pré-condicionamento
Ω	Domínio volumétrico

Letras Gregas Minúsculas

α	Ângulo de ataque
δ_{ij}	Delta de Kronecker - Componentes do tensor de Kronecker
ϕ	Valor nodal da variável escalar no indicador de erro
φ	Ângulo do vetor velocidade no indicador de erro
γ	Relação entre os calores específicos - Constante do gás
λ	Coefficiente de viscosidade volumétrica
μ	Coefficiente de viscosidade absoluta
θ	Indicador de erro
ρ	Massa específica
σ_{ij}	Componentes do tensor de tensões de Cauchy
τ_{ij}	Componentes do tensor de tensões viscosas ou desviadoras
ω	Parâmetro de controle para refinamento

Índice de Figuras

Figura	TÍTULO	Pág.
2.1	Classificação geral dos escoamentos	12
3.1	Componentes de velocidade nos contornos sólidos	41
4.1	Diagrama da técnica de subciclos para exemplo unidimensional	46
4.2	Diagrama de atualização dos elementos e nós na técnica de subciclos para um exemplo unidimensional	47
4.3	Distribuição gaussiana dos indicadores de erro	52
4.4	Elemento original e tipos de refinamentos utilizados no presente trabalho	53
5.1	Domínio e condições de contorno para o problema de reflexão de um choque oblíquo	56
5.2	Malhas de hexaedros e tetraedros empregadas para o problema de reflexão de um choque oblíquo	57
5.3	Distribuição de pressão para a malha M4 com elemento hexaédrico (H) e tetraédrico (T), com esquemas de um passo e dois passos (P2)	58
5.4	Distribuição da massa específica para $y = 0,25$ com a malha M1 e M2 com elemento hexaédrico (H) e tetraédrico (T), com esquemas de um passo e dois passos (P2)	59
5.5	Distribuição da massa específica para $y = 0,25$ com a malha M3 e M4 com elemento hexaédrico (H) e tetraédrico (T), com esquemas de um passo e dois passos (P2)	59
5.6	Estudo de convergência para os diferentes elementos e esquemas de solução no problema de reflexão de um choque oblíquo	60
5.7	Malhas M5, M6 e M7 para o problema de reflexão de um choque oblíquo	62
5.8	Distribuição do número de Mach para a malha M7 com esquemas de um passo e dois passos (P2)	63
5.9	Geometria e condições de contorno sobre o aerofólio	64
5.10	Distribuição da pressão sobre o aerofólio com $M = 0,80$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$	65
5.11	Distribuição do número de Mach sobre o aerofólio com $M = 0,80$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$	65
5.12	Distribuição do coeficiente de pressão e de fricção para o aerofólio com $M = 0,80$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$ na malha M3	66

5.13	Variações dos coeficientes de arrasto (C_d) e sustentação (C_l) com a densidade da malha para o aerofólio com $M = 0,80$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$	66
5.14	Histórico dos coeficientes de arrasto (C_d) e sustentação (C_l) para o aerofólio com $M = 0,80$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$ nas malhas M1 e M3	67
5.15a	Geometria e condições de contorno sobre uma superfície contendo uma curvatura de 5 % com $M = 0,10$	68
5.15b	Malha empregada para o problema da superfície contendo uma curvatura de 5 %	69
5.16	Distribuição do número de Mach sobre uma superfície contendo uma curvatura de 5 % com $M = 0,1$	69
5.17	Distribuição do coeficiente de pressão sobre uma superfície contendo uma curvatura de 5 % com $M = 0,1$	69
5.18	Geometria e condições de contorno sobre o cilindro	71
5.19	Malhas empregadas no problema do escoamento sobre o cilindro	71
5.20	Distribuição de velocidade para o cilindro com $Re = 40$ e malhas M1 e M2	72
5.21	Distribuição do coeficiente de pressão para o cilindro com $Re = 40$	72
5.22	Distribuição da pressão e linhas de corrente para o cilindro com $Re = 40$	74
5.23	Distribuição da pressão para os tempos adimensionais: $t = 109$; $109,75$; $110,5$ e $111,25$ com $Re = 100$	75
5.24	Distribuição da velocidade para os tempos adimensionais: $t = 109$; $109,75$; $110,5$ e $111,25$ com $Re = 100$	75
5.25	Histórico do coeficiente de sustentação para o cilindro com $Re = 100$	76
5.26	Malhas empregadas no problema não-viscoso (esquerda) e viscoso (direita) sobre o aerofólio NACA 0012	77
5.27	Distribuição do número de Mach e do coeficiente de pressão para o escoamento não-viscoso sobre o aerofólio com $M = 0,10$	78
5.28	Distribuição da velocidade e do coeficiente de pressão para o escoamento viscoso sobre o aerofólio com $M = 0,10$ e $Re = 100$	78
5.29	Distribuição da velocidade sobre o aerofólio para $M = 0,1$, com $Re = 100$ e 1000 e diferentes ângulos de ataque	79
5.30	Linhas de corrente sobre o aerofólio com $Re = 100$ e 1000 e $\alpha = 10^\circ$ e 15°	80
5.31	Distribuição da pressão e linhas de corrente para a esfera com $Re = 100$	81
5.32	Distribuição da velocidade para a esfera com $Re = 100$	82
5.33	Principais fenômenos ao redor de um aerofólio em regime transônico	83

5.34	Geometria da asa delta	84
5.35	Geometria empregada para o problema da asa delta	85
5.36	Distribuição da massa específica para a malha inicial M1 (superior) e final M1R2 (inferior)	86
5.37	Distribuição do coeficiente de pressão para a malha inicial M1 e final M1R2	87
5.38	Distribuição do número de Mach e superfície sônica ($M=1,0$) para a malha inicial M1 e final M1R2	88
5.39	Distribuição da massa específica para a malha inicial M2 e final M2R1	89
5.40	Distribuição do coeficiente de pressão para a malha inicial M2 e final M2R1	90
5.41	Malhas e distribuições do coeficiente de pressão para as malhas iniciais (M1 e M2) e finais (M1R2 e M2R1)	90
5.42	Distribuição dos incrementos de tempo (Δt) na técnica de subciclos para as malhas M1R2 (superior) e M2R1 (inferior)	92
5.43	Distribuição do coeficiente de pressão para as malhas M1R2 e M2R1 calculadas sem e com a técnica de subciclos	93
5.44	Distribuição do coeficiente de pressão para as malhas M1R2 calculadas sem e com a técnica de subciclos	93
5.45	Variação da massa específica para os esquemas de um passo e dois passos (P2) e malha empregada na configuração esfera-cilindro-cone	95
5.46	Distribuição da pressão sobre o corpo esfera-cilindro-cone com o esquema de dois passos	95
5.47	Distribuição da relação de pressão para o corpo esfera-cilindro-cone com $M = 2,95$ e $\alpha = 10^\circ$	96
5.48	Representação da interação CLLOC e da distribuição do coeficiente de pressão ..	98
5.49a	Geometria e condições de contorno para a placa plana com rampa	99
5.49b	Malhas empregadas no problema da placa plana com rampa	102
5.50	Distribuição do número de Mach para as malhas M1H, M2H e M3H	102
5.51	Distribuição dos coeficientes de pressão e fricção para as malhas M1H, M2H, M3H e M3aH	103
5.52	Distribuição dos coeficientes de pressão e fricção para as malhas M2H, M2Hp2 e M2aHp2	103
5.53	Distribuições do número de Mach e da massa específica nas malhas M2T, M2TR1 e M2TR2	104

5.54	Distribuição dos coeficientes de pressão e fricção para as malhas M2T, M2TR1 e M2TR2	105
5.55	Distribuição dos coeficientes de pressão e fricção para as malhas M2TR2 e M2Tp2R2	106
5.56	Distribuição dos incrementos de tempo na técnica de subciclos para a malha M2TR2	107
5.57	Distribuição dos coeficientes de pressão e fricção para as malhas M2H e M2TR2 com a técnica de subciclos	108
5.58	Distribuição dos coeficientes de pressão e fricção para diferentes tempos adimensionais nas malhas M2T, M2TR1 e M2TR2	108
5.59	Distribuição da componente de velocidade v_1 sobre a malha M2TR2	109
5.60	Distribuição da componente de velocidade v_2 sobre a malha M2TR2	110
5.61	Distribuição da pressão sobre a malha M2TR2	111
5.62	Distribuição da massa específica sobre a malha M2TR2	111
5.63	Geometria e dimensões da configuração asa-fuselagem	112
5.64	Representação esquemática dos principais fenômenos bidimensionais sobre o aerofólio e a fuselagem	113
5.65	Representação esquemática dos principais fenômenos sobre a seção da fuselagem e asa delta	114
5.66	Domínio empregado para a configuração WB	116
5.67	Distribuição da massa específica para as malhas WBeu1 e Wbeu1R2	118
5.68	Distribuição do número de Mach para $x_b/L = 0,80$ nas malhas WBeu1 e Wbeu1R2	118
5.69	Distribuição do coef. de pressão para a malha WBeu1R2 ($M = 2,30$ e $\alpha = 11,1^\circ$)	119
5.70	Distribuição do coeficiente de pressão para a malha WBeu2 ($M = 4,63$ e $\alpha = 6,2^\circ$)	120
5.71	Distribuição de massa específica para a malha WBeu1R2 (superior) e WBeu2 (inferior)	121
5.72	Distribuição do número de Mach ao redor da configuração WB para $M = 2,30$	122
5.73	Distribuição do número de Mach ao redor da configuração WB para $M = 4,63$	123
5.74	Distribuição do coeficiente de pressão para a configuração WB com $Re = 1 \cdot 10^5$	124
5.75	Distribuição do coeficiente de pressão para a configuração WB vista superior	126
5.76	Distribuição do coeficiente de pressão para a configuração WB vista inferior	127

5.77	Malhas e linhas de número de Mach ao redor da configuração WB	128
5.78	Distribuição de massa específica ao redor da configuração WB	129
5.79a	Dinâmica dos vórtices ao redor da configuração WB para $\alpha = 11,1^\circ$ e $M = 2,30$ e $4,63$	130
5.79b	Dinâmica dos vórtices ao redor da configuração WB para $\alpha = 11,1^\circ$ e $M = 2,30$ e $4,63$	132
5.80	Distribuição do coeficiente de pressão obtida com a técnica de subciclos para a malha WBeu1R1	134
5.81	Distribuição do coeficiente de pressão obtida com a técnica de subciclo para as malhas WBns2 e WBns4	134
5.82	Geometria e dimensões da configuração asa-canard-fuselagem WCB	136
5.83	Domínio empregado para o problema da configuração WCB	137
5.84	Detalhes da malha inicial e refinada para a configuração WCB	140
5.85	Malhas e distribuição do coeficiente de pressão sobre a configuração WCB para $M = 1,50$	141
5.86	Distribuição do coeficiente de pressão sobre a configuração WCBns32R1	141
5.87	Distribuição do número de Mach sobre a configuração WCB para $\alpha = 0^\circ$ e $M_\infty = 1,50, 2,30$ e $4,63$	143
5.88	Distribuição do número de Mach sobre a configuração WCB para $\alpha = 6,2^\circ$ e $M_\infty = 1,50, 2,30$ e $4,63$	144
5.89	Distribuição do número de Mach sobre a configuração WCB para $\alpha = 11,1^\circ$ e $M_\infty = 1,50, 2,30$ e $4,63$	145
5.90	Distribuição do coeficiente de pressão sobre a configuração WCB para $x_b/L=cte.$, com $\alpha = 11,1^\circ$ e $M = 1,50, 2,30$ e $4,63$	146
5.91	Distribuição do coeficiente de pressão sobre a configuração WCB para $2z/b=cte.$, com $\alpha = 11,1^\circ$ e $M = 1,50, 2,30$ e $4,63$	147
5.92	Vista superior da distribuição do coeficiente de pressão sobre a configuração WCB	148
5.93	Vista inferior da distribuição do coeficiente de pressão sobre a configuração WCB	149
5.94	Distribuição da massa específica sobre a configuração WCB para $2z/b=cte.$ para $M = 1,50$ e $4,63$	151

5.95a	Distribuição do número de Mach para $x_b/L = 0,30$ e $0,50$ sobre a configuração WCB para $\alpha = 11,1^\circ$ com $M = 1,50$ e $4,63$	153
5.95b	Distribuição do número de Mach para $x_b/L = 0,60$ e $0,70$ sobre a configuração WCB para $\alpha = 11,1^\circ$ com $M = 1,50$ e $4,63$	154
5.95c	Distribuição do número de Mach para $x_b/L = 0,80$ e $0,90$ sobre a configuração WCB para $\alpha = 11,1^\circ$ com $M = 1,50$ e $4,63$	155
5.96	Distribuição dos coeficientes CD , CL , CM_z e da relação CL/CD para a configuração WCB	156
5.97	Curvas de $CD-CL$ e $\alpha-CM_z$ para as configurações WB e WCB	157
5.98	Distribuição dos incrementos de tempo sobre a configuração WCB para $\alpha = 0^\circ$ e $M = 1,50$	158
5.99	Distribuição do coeficiente de pressão obtida sem e com a técnica de subciclos sobre a configuração WCB para $\alpha = 6,2^\circ$ e $M = 4,63$	159
A.1	Coordenadas de volume para o elemento tetraédrico linear	177
A.2	Área da face do elemento tetraédrico	186

Índice de Tabelas

Tabela	TÍTULO	Pág.
5.1	Dados das malhas para o problema de reflexão de um choque oblíquo	57
5.2	Erro para as diferentes combinações malha/tipo de elemento/esquema no problema de reflexão de um choque oblíquo	60
5.3	Ordem de convergência da malha avaliada com as normas L_1 e L_2 para o problema de reflexão de um choque oblíquo	61
5.4	Erro para as malhas M5, M6 e M7 no problema de reflexão de um choque oblíquo	62
5.5	Discretização empregada para o problema do aerofólio com $M = 0,80$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$	64
5.6	Parâmetros principais das malhas empregadas para o escoamento ao redor de um cilindro	71
5.7	Comparações de alguns parâmetros do escoamento sobre o cilindro para $Re = 40$	73
5.8	Parâmetros principais das malhas empregadas sobre o aerofólio com $M = 0,10$	77
5.9	Dados das malhas e principais parâmetros para o problema da asa delta	85
5.10	Porcentagem de elementos, <i>speed-up</i> teórico ($S-U_{teo}$) e real ($S-U$) para os exemplos M1R1, M1R2 e M2R1 resolvidos com a técnica de subciclos	91
5.11	Dados das malhas e principais parâmetros para o problema da placa plana-rampa	100
5.12	Porcentagem de elementos, <i>speed-up</i> teórico ($S-U_{teo}$) e real ($S-U$) para as malhas M2H e M2TR2 resolvidos com a técnica de subciclos	106
5.13	Identificação de cada simulação segundo o número de Mach e ângulo de ataque para o problema da configuração asa-fuselagem	115
5.14a	Dados das malhas e principais parâmetros para o problema da configuração WB	117
5.14b	Coeficientes aerodinâmicos para o problema da configuração WB	117
5.15	Porcentagem de elementos, <i>speed-up</i> teórico ($S-U_{teo}$) e real ($S-U$) para algumas das malhas refinadas no problema WB	133
5.16	Identificação de cada simulação segundo o número de Mach e ângulo de ataque para o problema da configuração asa-canard-fuselagem	135
5.17a	Dados das malhas e principais parâmetros para o problema da configuração WCB	138

5.17b	Coeficientes aerodinâmicos para o problema da configuração WCB	139
5.18	Porcentagem de elementos, <i>speed-up</i> teórico ($S-U_{teo}$) e real ($S-U$) para algumas das malhas refinadas no problema WCB	157

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, discutem-se aspectos gerais da modelagem dos escoamentos incompressíveis e compressíveis através do método dos elementos finitos. Mostra-se, também a necessidade do desenvolvimento de técnicas, tais como: o método de adaptação de malha e a técnica de subciclos que forneçam uma maior robustez, eficiência e precisão aos algoritmos numéricos. Estas considerações serviram como uma motivação a mais para o desenvolvimento desta tese.

1.1 Considerações iniciais

Nos últimos trinta e cinco anos, a Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) começou a destacar-se como uma importante ferramenta para a fase de projeto nos diferentes campos da engenharia e em particular na área de engenharia aeronáutica e aeroespacial. Atualmente, nos projetos aerodinâmicos podem-se prever resultados com boa precisão sobre geometrias complexas numa ampla região do espectro de vôo, embora existam algumas limitações em regiões com grande separação da camada limite [van Dam, 2002].

Desde os primeiros vôos propulsados dos irmãos Wright em 1903 e de Santos Dumont em 1906, passando pelo primeiro vôo com propulsor a jato em 1939 e os primeiros vôos supersônico e hipersônico em 1947 e 1963, respectivamente, as ferramentas para o desenvolvimento do projeto aerodinâmico estão em constante aperfeiçoamento. Nas diferentes fases do processo de projeto (conceitual, preliminar e final), empregam-se diferentes ferramentas entre as quais podem-se mencionar métodos com a utilização de manuais “handbooks”, métodos paramétricos e aproximados, métodos experimentais e a simulação numérica. Devido a sua boa relação custo-benefício, flexibilidade, rapidez na comparação de diferentes configurações, possibilidade do estudo de fenômenos localizados e predição de fenômenos difíceis de simular experimentalmente [Longo, 2003], a simulação numérica tornou-se uma das principais ferramentas na fase de projeto.

Inicialmente, as primeiras análises aerodinâmicas foram desenvolvidas com métodos analíticos e baseadas na teoria de escoamento potencial incompressível (equação de Laplace). Com o advento dos primeiros computadores, os diferentes modelos desenvolvidos permitiram

seu tratamento numérico e por tanto a análise de geometrias realísticas. O método dos painéis, apresentado por Hess e Smith [1966], foi muito importante uma vez que resolvia as equações para um escoamento potencial linear incompressível sobre configurações tridimensionais (3D) complexas. Já para o regime supersônico, os primeiros resultados foram obtidos por Woodward [1968]. O conceito de camada limite proposto por Prandtl, em 1904, foi fundamental para acoplar os efeitos viscosos no método dos painéis, sendo uma das primeiras aplicações no estudo e projeto de aerofólios.

O crescente interesse pelos vãos transônicos e os fenômenos característicos deste regime tais como buffeting, drag rise, wave drag, flutter e divergência levaram ao desenvolvimento de novos esquemas baseados na solução das equações potenciais completas compressíveis. No contexto do método das diferenças finitas um dos primeiros trabalhos foram realizados por Murman e Cole [1971]. O método dos volumes finitos foi exitosamente empregado por Jameson e Caughey [1977] para a resolução de um escoamento transônico sobre uma asa. A formulação de elementos finitos era empregada em menor grau na Dinâmica de Fluidos Computacional (DFC) embora apresentasse ótimos resultados como os mostrados na análise da configuração completa do jato executivo Falcon 50 [Bristeau et al., 1985].

As limitações do escoamento potencial (irrotacional e não-viscoso) fizeram com que no final da década de 1970 a maioria das pesquisas fosse voltada para as equações de Euler e de Navier-Stokes. Na DFC, a aproximação discreta pelo método dos elementos finitos (MEF) passou a ter uma maior utilização na solução de problemas de escoamentos compressíveis e incompressíveis. No caso de fluidos a alta velocidade (advectivos-dominantes), isto aconteceu devido à extensão do método de alta ordem do tipo Lax-Wendroff, aplicado em diferenças finitas. A partir desta extensão, foi proposto por Donea [1984] o método de *Taylor-Galerkin*, sendo exitosamente empregado por Oden et al. [1986] e Zienkiewicz e Taylor [2000], entre outros. Outras classes de formulações são o método de *Galerkin com linhas características* [Löhner et al., 1984; Zienkiewicz e Codina, 1995] e o método *SUPG* (do inglês, *Streamline Upwind Petrov-Galerkin*), introduzido por Brooks e Hughes [1982] e aplicado pela primeira vez no contexto de escoamento compressível por Hughes e Tezduyar [1984]. Este último método levou naturalmente à introdução da formulação de *GLS* (do inglês, *Galerkin Least Squares*), no qual os termos de estabilização resultam de um processo de minimização por mínimos quadrados [Hughes et al., 1989; Jiang e Povinelli, 1989].

Geralmente, o MEF é obtido após a aplicação do método dos resíduos ponderados de *Galerkin* ou da forma variacional fraca das equações governantes. Esta formulação é equivalente ao Princípio dos Trabalhos Virtuais na mecânica dos sólidos e sua solução equivale à da forma

forte [Hughes, 1987a]. A aplicação da técnica de *Galerkin* standard, também chamada de *Bubnov-Galerkin*, gera aproximações centrais para os operadores diferenciais (equivalente às diferenças centrais em diferenças finitas). Quando os termos advectivos são dominantes em relação aos termos difusivos ou viscosos, os esquemas do tipo diferenças centrais são afetados por oscilações espúrias, as quais, por serem esquemas não dissipativos, geram instabilidades em regiões de grandes gradientes [Maliska, 2004].

Para eliminar as oscilações espúrias das componentes de velocidade, começaram a serem empregados os esquemas de tipo *upwind* aplicados aos termos advectivos, onde a informação que está a montante é tratada de forma preferencial em relação à informação que está a jusante do ponto considerado. Ou seja, um elemento a montante de outro elemento é ponderado mais fortemente do que um elemento a jusante desse elemento [Brooks e Hughes, 1982]. Inicialmente, dentro destes esquemas foi introduzido o esquema conhecido como formulação de *Petrov-Galerkin*; no mesmo usa-se uma ponderação diferente do método de *Galerkin* standard [Hughes, 1987b; Almeida e Galeão, 1996].

O método estabilizado de elementos finitos mais conhecido é o método *SUPG*, onde um termo de difusão artificial que atua apenas na direção da linha de corrente é adicionado para aumentar o controle sobre o termo advectivo-difusivo das equações de Navier-Stokes [Hughes et al., 1986]. A utilização de variáveis apropriadas permite simetrizar as matrizes jacobianas da forma quasi-linear e as oscilações espúrias perto das singularidades são evitadas com um operador de captura de choques/descontinuidades (*shock capturing*).

Finalmente, o método de *Taylor-Galerkin* é uma extensão do método de Lax-Wendroff e consiste em uma expansão em séries de *Taylor* no tempo e, posteriormente, aplica-se uma discretização através do método de *Galerkin* standard sobre o domínio espacial. O esquema resultante é de segunda ordem no espaço e no tempo e experimenta oscilações espúrias perto da onda de choque, as quais são amortizadas com a adição de viscosidade artificial [Löhner et al., 1985]. A formulação tem-se mostrado satisfatória na simulação de escoamentos altamente compressíveis, mas os resultados decaem na sua qualidade à medida que o grau de compressibilidade diminui.

No âmbito do Centro de Mecânica Aplicada e Computacional (CEMACOM) e dos Programas de Pós-Graduação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, PROMEC/UFRGS e PPGEC/UFRGS, se tem uma ampla experiência na solução de escoamentos de fluidos com a aproximação de elementos finitos, o que favorece a sua escolha para esta tese. Algumas das principais contribuições na solução de escoamentos compressíveis foram feitas por: Burbridge [1999], Teixeira [2001], Kessler [2002] e Bono [2004], entre outros. No contexto da solução de

problemas de escoamentos incompressíveis podem-se citar Petry [2002], Popiolek [2005], Zinani [2006] e Braun [2007], entre outros.

A integração temporal das equações de Navier-Stokes e de Euler pode ser feita via algoritmos implícito e/ou explícito. Para a resolução de um escoamento transiente ou estacionário deve-se adotar um algoritmo simples, robusto, que apresente boas propriedades de dissipação e baixa dispersão.

O algoritmo implícito tem um melhor desempenho em problemas estacionários por não apresentar restrições de estabilidade, possibilitando adotar um elevado passo de tempo o qual fica limitado apenas pela precisão desejada. Apesar de ser condicionalmente estável, o esquema explícito tem como vantagens sua simplicidade, programação fácil e direta para o processamento em paralelo, mínima demanda de memória e boas características em problemas transientes. A restrição na estabilidade dos esquemas explícitos pode ser minimizada em parte com a utilização de uma técnica de integração em subciclos. Esta técnica reduz o tempo de processamento já que utiliza os máximos passos de tempo permitidos em cada grupo de elementos e de nós da malha.

Neste trabalho, foi utilizado o esquema explícito conjuntamente com a técnica de subciclos. Ainda que o estudo não considere a análise de problemas aeroelásticos, os algoritmos implementados no contexto de programação escalar foram elaborados para permitir que o acoplamento fluido-estrutura seja rápido e simples. Implementou-se dois esquemas de integração, o primeiro explícito iterativo de um passo e o segundo explícito de dois passos. O esquema de um passo foi proposto por Donea [1984] e utilizado por Bono e Awruch [2006], entre outros. O modelo de dois passos foi introduzido por Kawahara e Hirano [1983] e empregado recentemente por Bono e Awruch [2007] para a resolução de escoamentos compressíveis. Com o esquema de integração de um passo, consegue-se uma redução no tempo de processamento, porém o esquema de dois passos apresenta um menor consumo de memória.

O crescente aumento nas capacidades computacionais (memória e velocidade de processamento) somado à eficiência das diferentes arquiteturas de processamento (escalar, vetorial, paralela, etc.) tornou possível a resolução das equações de Navier-Stokes sobre configurações tridimensionais. Esta evolução foi acompanhada pelo desenvolvimento de novos modelos de turbulência [Kral, 1998] para o fechamento das equações médias espaciais e temporais de Navier-Stokes denominadas *RANS* (do inglês, *Reynolds Average Navier-Stokes*). Ainda que os efeitos de turbulência não possam ser desprezados no projeto e análise de veículos aéreos e aeroespaciais, o estudo destes fenômenos não é um objetivo do presente trabalho.

Embora inviáveis para configurações tridimensionais complexas devido às atuais

limitações computacionais, a metodologia de Simulação de Grandes Escalas *LES* (do inglês, *Large Eddy Simulation*) e a Simulação Numérica Direta *DNS* (do inglês, *Direct Numerical Simulation*) representam os futuros desafios na simulação de escoamentos turbulentos. Para prever o coeficiente de arrasto dentro de 1 “count” (1 count = 0.0001) de precisão em uma configuração completa de um avião, Baker [2005] estima que aproximadamente 20×10^6 nós são necessários para um escoamento não-viscoso. Entretanto, para resolver as equações *RANS* com um Reynolds variando entre $10^6 < Re < 10^7$, o número de nós deveria duplicar. O cálculo da camada limite turbulenta por *LES* implicaria aumentar o tamanho da malha em duas ordens de magnitude, ou seja, um total de aproximadamente 5×10^9 nós, e a simulação por *DNS* demandaria em torno de 5×10^{11} nós. Como se pode apreciar, estes valores demandam uma capacidade computacional que se encontra além das possibilidades atuais.

Algumas das principais contribuições e tendências da DFC na indústria aeronáutica e aeroespacial podem ser encontradas em Chapman [1979], Vos et al. [2002], Jameson [2003], Resende [2004], Shang [2004] e Johnson et al. [2005], entre outros.

1.2 Níveis de aproximação

As equações de Navier-Stokes para fluidos newtonianos são as equações mais gerais para a descrição de um escoamento. A consideração de diferentes hipóteses permite obter equações mais simples, as quais são boas aproximações dentro das limitações impostas.

Nos escoamentos incompressíveis, a variável termodinâmica *pressão* é função somente do campo de velocidade. No caso dos escoamentos compressíveis, a *pressão* se determina pelos valores locais e instantâneos da massa específica e energia interna através da equação de estado. Por este motivo, geralmente as variáveis primitivas são empregadas nas equações para escoamentos incompressíveis, e as variáveis conservativas nas equações para escoamentos compressíveis. Na maioria dos problemas o acoplamento das equações de conservação para escoamentos compressíveis deixa de existir nas equações para escoamentos incompressíveis uma vez que se perde a derivada temporal na equação de conservação da massa e a pressão somente aparece na equação de conservação da quantidade de movimento.

Tradicionalmente, as principais formulações empregadas na resolução de escoamentos incompressíveis estão baseadas no método de correção de pressão (*pressure-correction*) ou no conceito de compressibilidade artificial (*artificial compressibility*) [Kwak et

al., 2005]. A primeira formulação é baseada na satisfação direta da condição de incompressibilidade, ou seja, verifica-se que o divergente do campo de velocidade seja nulo. Se esta condição não se satisfaz, então são recalculados os termos de pressão até que a equação de continuidade seja satisfeita. No método de compressibilidade artificial, adiciona-se a equação de conservação da massa à derivada temporal da pressão e acoplam-se as equações de conservação da massa e de quantidade de movimento por meio da massa específica, de forma que se possa empregar o mesmo esquema de resolução tanto para escoamentos compressíveis como incompressíveis.

Os algoritmos empregados para a resolução de escoamentos compressíveis tendem a reduzir sua precisão e convergência quando o número de Mach diminui, portanto sua aplicação a escoamentos incompressíveis torna-se restrita [Turkel et al., 1997]. As limitações devem-se à grande disparidade que existe entre os termos acústicos e convectivos [Turkel, 1999]. Baseado no conceito de viscosidade artificial, pode-se introduzir uma matriz que pré-multiplica as derivadas temporais a fim de melhorar a disparidade dos autovalores.

A idéia de empregar uma única formulação para a resolução de escoamentos incompressíveis e compressíveis vem sendo desenvolvida extensamente nos últimos anos através da adoção de diferentes formulações e variáveis. Algumas das principais propostas foram apresentadas por Choi e Merkle [1985], Hauke e Hughes [1994], Zienkiewicz e Codina [1995], Nigro et al. [1998], Mittal e Tezduyar [1998], Turkel [1999], Sampaio e Moreira [2000], Briley et al. [2003], Costa et al. [2005] e Park e Munz [2005], entre outros.

Neste trabalho, com o intuito de aproveitar os mesmos esquemas de resolução empregados para os escoamentos compressíveis, considera-se a hipótese de compressibilidade artificial introduzida por Chorin [1967] para a solução de escoamentos incompressíveis viscosos. Entretanto, para a solução de escoamentos incompressíveis não-viscosos optou-se pela matriz de pré-condicionamento proposta por Choi e Merkle [1985].

1.3 Malha estruturada ou não-estruturada

A escolha do tipo de malha computacional (estruturada e/ou não-estruturada) a ser empregada na análise numérica é tão importante quanto o algoritmo de solução. A malha normalmente tem um importante papel na precisão da solução, tempo de processamento e consumo de memória. Na fase de projeto, a geração da malha consome uma grande porcentagem do tempo total do ciclo de análise [Halpern, 1997]. Portanto, a malha deve ter uma boa qualidade

com mínimo custo computacional e reduzido esforço humano.

Inicialmente, os primeiros desenvolvimentos no campo da DFC foram feitos majoritariamente com malhas estruturadas (quadrilátero ou hexaedro), onde o ordenamento natural destas malhas torna possível o desenvolvimento de algoritmos numéricos muito eficientes no tempo de processamento e uso de recursos computacionais. Embora estes algoritmos sejam eficientes, possuem a inerente dificuldade das malhas estruturadas ao utilizar geometrias complexas. Algumas das principais estratégias e métodos propostos para controlar o tamanho e qualidade das malhas estruturadas em geometrias complicadas são dadas por Baker [2005]:

- 1) A estratégia multibloco (*multiblock*), a qual divide o domínio em pequenos blocos e então se geram as malhas separadamente;
- 2) O método *overset* ou *chimera*, no qual empregam-se diferentes blocos para cada corpo e não existe continuidade entre as malhas dos blocos vizinhos;
- 3) A estratégia *patched multiblock*, onde se empregam diferentes blocos para cada corpo e em alguns pontos da malha existe continuidade entre as malhas dos blocos vizinhos.

Estas técnicas demandam um grande esforço humano na geração da malha, devido ao fato que não são totalmente automáticas. Por outro lado, o elemento não estruturado (triângulo ou tetraedro) tem a vantagem de ser muito flexível na geração de malhas sobre geometrias complexas, além da capacidade de permitir adotar com facilidade um esquema de adaptação de malha. Vale salientar que para uma configuração complexa, a geração de uma malha estruturada pode demandar semanas e em contraposição uma malha não estruturada necessitaria algumas horas ou dias [Longo, 2003; Shang, 2004].

Atualmente, os algoritmos para malhas não estruturadas demandam um maior tempo de processamento e consumo de memória com relação aos cálculos em malhas estruturadas, devido a que nos primeiros não existe uma relação intrínseca de vizinhança entre os nós da malha. A princípio, a topologia da malha estruturada é mais apropriada para regiões viscosas em contornos com grandes curvaturas, embora diferentes estratégias de geração de malhas não-estruturadas permitam obter uma malha com boa qualidade e quantidade de elementos na região próxima ao corpo (predomínio dos efeitos viscosos) [Löhner e Parikh, 1988; Pirzadeh, 1996]. A malha não-estruturada, conjuntamente com o refinamento adaptativo de malhas, resulta conveniente para o tratamento de geometrias complexas.

Aftosmis et al. [1995] mostrou que em problemas simples existe pouca diferença na

precisão entre malhas estruturadas equivalentes de elementos retangulares e triangulares. Quando a malha é distorcida a máxima degradação na ordem de precisão acontece na malha de elementos retangulares. Segundo Berger et al. [1996], obteve-se uma melhor precisão e eficiência na solução da equação advectiva escalar com uma malha estruturada em relação a uma não-estruturada. Dos resultados do segundo workshop de predição do arrasto (DWP2, *Second Drag Prediction Workshop*) sobre a configuração asa-fuselagem DLR-F4/F6 analisados por Baker [2005], pode-se concluir que a malha multibloco de hexaedros apresentou uma melhor precisão com relação à malha não estruturada de tetraedros, embora estudos mais detalhados devam ser realizados, a fim de avaliar todos os parâmetros envolvidos (qualidade dos elementos, refinamento, etc.).

Uma solução que apresenta as vantagens da malha estruturada e não-estruturada é dada pela malha híbrida. Esta pode ter numa mesma malha o elemento tetraédrico, prisma, pirâmide e hexaedro. O método de discretização deve ser robusto e estável a fim de permitir a existência de diferentes tipos de elementos. Detalhes podem ser encontrados em Parthasarathy e Kallinderis [1996] e Haselbacher e Blazer [2000], entre outros.

Pelas diversas razões expostas acima, escolheu-se a utilização de malhas estruturadas de hexaedros e malhas não-estruturadas de tetraedros para o desenvolvimento deste trabalho.

1.4 Os métodos adaptativos

Os métodos de adaptação de malha nas diversas áreas da engenharia têm importante aplicabilidade em problemas físicos onde se desenvolvem em determinadas regiões localizadas alguns fenômenos (onda de choque, camada limite, etc.) com maior intensidade. A investigação numérica destes problemas pode levar à necessidade de utilização de malhas razoavelmente refinadas. A complexidade na solução deste tipo de problema está no fato que na maioria das vezes se desconhece a localização destas regiões.

Na DFC, os métodos adaptativos são geralmente baseados em uma idéia simples: quando o erro na solução é muito grande, normalmente o tamanho do elemento e/ou a localização dos nós e/ou a ordem da aproximação devem ser mudados com a finalidade de diminuir o erro. A idéia de tentar reduzir o erro implica que este é conhecido ou pode-se estimar de alguma maneira, portanto, o primeiro passo em adaptação de malhas é gerar uma medida da qualidade da solução numérica. Esta medida pode variar desde a análise *ad hoc* dos indicadores de erro definidos em função das principais variáveis, até uma estimativa rigorosa do erro *a*

posteriori.

A partir do momento que se tem à estimativa do erro, necessita-se determinar como fazer para reduzir sistematicamente este erro até o nível desejado. Em geral, podem-se adotar diferentes estratégias, das quais as principais são [Löhner, 2001]:

- 1) Refinar/desrefinar o tamanho da malha (método h): esta estratégia envolve a subdivisão de elementos através da adição de novos nós em regiões onde certos indicadores de erro são maiores. O processo de desrefinamento caracteriza-se pela inversão do processo de refinamento. Geralmente as malhas não-estruturadas oferecem maior flexibilidade para este método, como em Kallinderis e Vijayan [1993], Speares e Berzins [1997], Mavriplis [2000], Popiolek e Awruch [2006], entre outros. Aplicações com malhas estruturadas são apresentadas em Aftosmis [1997], Tchon et al. [2004] e Kovalev [2005], entre outros;
- 2) Realocação de nós (método r): neste método se realoca continuamente e automaticamente os nós dos elementos no domínio espaço-tempo, de maneira a ter uma densidade da malha maior nas regiões de grande valor dos indicadores de erro. Enquanto a malha mantém a estrutura regular, tornando o processo computacional mais simples. Podem-se originar distorções nos elementos devido à quantidade de nós permanecer constante. Detalhes podem ser encontrados em Palmeiro [1994], McRae [2000] e Bono e Awruch [2005];
- 3) Incrementar a ordem da aproximação (método p): este método incrementa a ordem de aproximação nos elementos com maior erro, mantendo o tamanho da malha. Alguns dos primeiros trabalhos na DFC foram desenvolvidos por Demkowicz et al. [1985];
- 4) Métodos híbridos: geralmente, técnicas mais eficientes envolvem uma combinação de estratégias h e r [Tam et al., 2000, Jens et al., 2003] ou h e p [Oden et al., 1990, Patra e Oden, 1997]. No entanto, a manipulação da estrutura de dados torna-se bastante complexa.

O método de adaptação de malhas tem como principal objetivo alcançar uma solução numérica de alta precisão para um problema com o menor custo computacional. Neste trabalho, empregou-se a estratégia de refinamento de malhas no contexto de malhas tridimensionais não estruturadas.

1.5 Motivação e objetivos da pesquisa

No desenvolvimento de projetos aeronáuticos e aeroespaciais é fundamental poder determinar eficientemente o comportamento do escoamento em um amplo espectro de vôo. Este varia, dependendo do projeto desde o regime subsônico até hipersônico. Neste sentido, o desenvolvimento de soluções computacionais para a análise de problemas de interesse prático no campo da aerodinâmica é a motivação do presente trabalho.

Sendo assim, o objetivo desta tese foi a implementação de esquemas numéricos para a resolução das equações de Euler e de Navier-Stokes para escoamentos transientes tridimensionais em regime subsônico, transônico, supersônico e hipersônico. E desta maneira, com algumas ferramentas computacionais implementadas, analisar o escoamento tridimensional ao redor de diferentes configurações entre elas: asa-fuselagem e asa-canard-fuselagem. E assim, contribuir para o entendimento dos principais fenômenos que acontecem para diferentes números de Mach e ângulos de ataque sobre estas geometrias. Como as soluções computacionais utilizadas são bastante abrangentes, a implementação computacional e comparação entre resultados numéricos e experimentais para diferentes configurações e regimes foi uma tarefa desafiadora.

As equações de Euler e Navier-Stokes são resolvidas empregando o método dos elementos finitos (MEF), usando uma série de Taylor e o clássico método de *Bubnov-Galerkin* para a discretização do tempo e do espaço, respectivamente. Para a resolução do método de *Taylor-Galerkin* são usados dois esquemas numéricos diferentes, sendo o primeiro explícito iterativo (um passo) e o segundo explícito de dois passos. Devido à complexidade geométrica que apresentam as configurações aerodinâmicas, foram implementados o elemento hexaédrico trilinear e o elemento tetraédrico linear, com a finalidade de ter maior flexibilidade na geração da malha. Para o elemento hexaédrico, utiliza-se integração analítica reduzida das matrizes em nível de elemento.

A simulação dos escoamentos incompressíveis é apresentada neste trabalho, considerando a hipótese de pseudo-compressibilidade nas equações de Navier-Stokes para escoamento compressível. No âmbito de escoamentos compressíveis não-viscosos foi implementada uma matriz de pré-condicionamento que possibilita a simulação de escoamentos a baixo número de Mach. Ambas as implementações verificam a viabilidade do uso das equações de escoamentos compressíveis no regime de número de Mach baixos.

No contexto da malha não-estruturada foi implementada uma técnica de refinamento adaptativa desenvolvida por Popiolek (2005). A restrição no passo de tempo dos esquemas

explícitos torna-se crítica quando se faz a subdivisão dos elementos na etapa de refinamento, portanto, emprega-se uma técnica de avanço no tempo em subciclos com o objetivo de aprimorar a eficiência do código computacional.

Os procedimentos numéricos são implementados na linguagem FORTRAN e otimizados para serem executados eficientemente em computadores escalares, já que as aplicações no campo da aerodinâmica conduzem a problemas com um grande número de incógnitas.

O texto está desenvolvido em seis capítulos: O Capítulo 1 é constituído pela presente introdução. No Capítulo 2 são apresentadas as equações para os escoamentos compressíveis e incompressíveis de fluidos. No Capítulo 3, descreve-se o modelo numérico de *Taylor-Galerkin* para escoamentos compressíveis e incompressíveis. No Capítulo 4, descrevem-se, detalhadamente, as características da técnica de subciclos e a estratégia de adaptação de malhas não-estruturadas. No Capítulo 5, mostram-se alguns exemplos e aplicações para a validação dos modelos numéricos. Por fim, no Capítulo 6, apresentam-se as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2. FORMULAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentam-se as principais características dos escoamentos e as formulações teóricas empregadas para a modelagem dos escoamentos compressíveis e incompressíveis.

2.1 Generalidades

As equações da continuidade, de quantidade de movimento e da energia (equações de Navier-Stokes) são as equações mais gerais para a descrição de um escoamento em um meio contínuo, viscoso e em regime transiente. A consideração de diferentes hipóteses permite obter equações mais simples, as quais são boas aproximações dentro das limitações impostas.

Na Figura 2.1, mostra-se esquematicamente uma classificação do escoamento segundo algumas das principais hipóteses adotadas no desenvolvimento deste trabalho. Da combinação das diferentes hipóteses obtém-se um tipo de escoamento, o qual fica definido pelas regiões enumeradas na Figura 2.1. As aproximações mais realísticas (região 1 e 2) não diminuem a utilidade prática das aproximações com algumas hipóteses simplificativas devido às vantagens computacionais que estas oferecem.

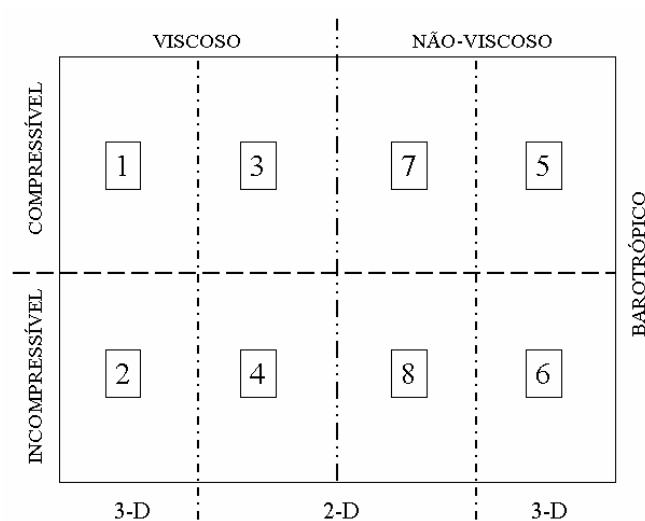


Figura 2.1: Classificação geral dos escoamentos.

Neste trabalho, a fim de resolver eficientemente problemas em uma ampla faixa de

velocidade, foram implementadas duas técnicas baseadas no conceito de compressibilidade artificial. Para simular escoamentos incompressíveis viscosos, representados pelas regiões 2 e 4 da Fig. 2.1, adota-se a hipótese de quase-incompressibilidade [Kawahara e Hirano, 1983] nas equações de Navier-Stokes, representadas pelas regiões 1 e 3. As regiões não-viscosas (região 5 até 8) obtêm-se eliminando nas equações de Navier-Stokes os termos viscosos e de condução de calor. Finalmente, o problema de escoamentos subsônicos não-viscosos (região 6 e 8) resolve-se empregando a matriz de pré-condicionamento proposta por Choi e Merkle [1985].

Embora seja considerada na Figura 2.1 a hipótese bidimensional, os códigos desenvolvidos são tridimensionais. Porém, os exemplos bidimensionais podem ser analisados considerando um elemento ou alguns poucos elementos na espessura.

2.2 Equações para um escoamento compressível

As equações para um escoamento transiente compressível viscoso numa descrição euleriana em coordenadas cartesianas são apresentadas em forma conservativa e dadas pelas seguintes expressões, segundo Schlichting [1979]:

Equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

Equação da quantidade de movimento linear

$$\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - b_j = 0 \quad (2.2)$$

Equação da energia

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e v_i)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j \sigma_{ij}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - Q = 0 \quad (2.3)$$

todas elas válidas no domínio Ω com contorno Γ , e sendo em todos os casos $i, j = 1, 2, 3$. No Anexo A, apresentam-se as equações gerais de Navier-Stokes escritas em forma conservativa e não conservativas.

Nestas expressões, v_i são as componentes do vetor de velocidade \mathbf{V} segundo o eixo x_i , ρ é a massa específica do fluido, e é a energia total específica, b_j é a componente da resultante de forças de volume segundo o eixo x_j , Q é uma fonte ou sumidouro de energia, σ_{ij} são as componentes do tensor de tensões e t é o tempo. Para o fluxo de calor considera-se a lei de Fourier da condução de calor sendo T a temperatura e K_{ij} as componentes do tensor de condutibilidade térmica.

A equação constitutiva representa o comportamento do material em termos das tensões e deformações, ou seja, relaciona as componentes do tensor de tensões com as pressões e os gradientes dos componentes de velocidade e pode-se escrever segundo Aris [1989] como:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

no qual, p é a pressão termodinâmica função da massa específica e da temperatura $p = p(\rho, T)$, o tensor de tensões viscosas ou desviador τ_{ij} é definido para cada tipo de fluido e δ_{ij} é o delta de Kronecker. O primeiro termo no lado direito da equação representa a parte isotrópica e τ_{ij} é a parte não isotrópica do tensor σ_{ij} .

No caso da água e de quase todos os gases é válida a aproximação de fluido newtoniano, ou seja, as componentes do tensor viscoso dependem linearmente das taxas de deformação, sendo dados por:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.5)$$

onde, μ é o coeficiente de viscosidade absoluta e λ é o coeficiente de viscosidade volumétrica (adota-se a hipótese de Stokes com $\lambda = -2\mu/3$).

Substituindo a equação constitutiva (2.4) nas Eqs. (2.2) e (2.3), obtêm-se as equações de Navier-Stokes que modelam o comportamento dos escoamentos viscosos de fluidos newtonianos. Desprezando nestas equações os termos de tensões viscosas e de condução de calor obtêm-se as equações de Euler. Estas considerações produzem uma modificação importante no conjunto de equações em comparação com as equações de Navier-Stokes, onde o sistema de segunda ordem se transforma em um sistema de primeira ordem, modificando as aproximações físicas, numéricas e as condições de contorno.

Como equações complementares, emprega-se a equação de estado, que no caso de gases perfeitos, é dada por:

$$p = (\gamma - 1) \rho i \quad (2.6)$$

onde, i é a energia interna específica e $\gamma = c_p / c_v$ é a relação entre os coeficientes de calor específico a pressão constante e a volume constante. Convém também expressar as seguintes relações:

$$i = c_v T = e - \frac{1}{2} v_j v_j \quad (2.7)$$

onde, $(v_j v_j / 2)$ é a energia cinética específica.

2.3 Adimensionalização das equações para escoamentos compressíveis

A partir deste item, utilizam-se as equações adimensionalizadas, de forma que os valores das variáveis sempre fiquem definidos dentro de um intervalo relativamente pequeno. Propõem-se as seguintes adimensionalizações:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= \frac{x_i}{L_\infty} & \tilde{v}_i &= \frac{v_i}{a_\infty} & \tilde{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_\infty} & \tilde{e}_i &= \frac{e_i}{a_\infty^2} \\ \tilde{p} &= \frac{p}{\rho_\infty a_\infty^2} & \tilde{i} &= \frac{c_v T}{a_\infty^2} & \tilde{t} &= \frac{t}{L_\infty / a_\infty} \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde, L é um comprimento característico, a é a velocidade do som, ρ é a massa específica e o subíndice ∞ indica o estado da corrente não perturbada. As equações de conservação adimensionalizadas, desprezando as forças de volume e as fontes ou sumidouros, ficam definidas da seguinte forma:

Equação da continuidade

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{v}_i)}{\partial \tilde{x}_i} = 0 \quad (2.9)$$

Equação da quantidade de movimento linear

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{v}_j)}{\partial\tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{v}_j\tilde{v}_i)}{\partial\tilde{x}_i} - \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_i} \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial\tilde{x}_j} + \frac{\partial\tilde{v}_j}{\partial\tilde{x}_i} \right) + \tilde{\lambda} \frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial\tilde{x}_k} \delta_{ij} \right] + \frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}_i} \delta_{ij} = 0 \quad (2.10)$$

Equação da energia

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{e})}{\partial\tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{e}\tilde{v}_i)}{\partial\tilde{x}_i} - \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_i} \left\{ \tilde{v}_j \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial\tilde{x}_j} + \frac{\partial\tilde{v}_j}{\partial\tilde{x}_i} \right) + \tilde{\lambda} \frac{\partial\tilde{v}_k}{\partial\tilde{x}_k} \delta_{ij} \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial(\tilde{p}\tilde{v}_j)}{\partial\tilde{x}_i} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_i} \left(\tilde{K} \frac{\partial\tilde{t}}{\partial\tilde{x}_i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Em escoamentos com altos gradientes de temperatura, como é o caso dos escoamentos compressíveis, a viscosidade e a condutividade térmica não podem ser consideradas constantes, e sim uma função da temperatura. Existem algumas leis empíricas para representar a dependência da viscosidade e condutibilidade térmica com a temperatura T , entre as quais a lei de Sutherland [White, 1974] para a viscosidade, que vem dada por:

$$\tilde{\mu} = \frac{M_\infty}{Re_\infty} \left(\frac{\bar{S} + \tilde{i}_\infty}{\bar{S} + \tilde{i}} \right) \left(\frac{\tilde{i}}{\tilde{i}_\infty} \right)^{3/2} \quad (2.12)$$

com,

$$\bar{S} = \frac{c_v S}{a_\infty^2} \quad \text{e} \quad \tilde{\lambda} = -\frac{2}{3} \tilde{\mu} \quad (2.13)$$

$$Re_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty L_\infty}{\mu_\infty} \quad \text{e} \quad M_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty} \quad (2.14)$$

onde, M_∞ e Re_∞ são os números de Mach e de Reynolds, respectivamente, da corrente não perturbada. A lei de Sutherland adimensionalizada para o coeficiente de condutividade térmico vem dada por:

$$\tilde{K} = \frac{M_\infty}{Re_\infty} \frac{\gamma}{Pr} \left(\frac{\bar{S}_K + \tilde{i}_\infty}{\bar{S}_K + \tilde{i}} \right) \left(\frac{\tilde{i}}{\tilde{i}_\infty} \right)^{3/2} \quad (2.15)$$

onde,

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}; \quad Pr = \frac{c_p \mu_\infty}{K}; \quad K = \frac{K_{11} + K_{22} + K_{33}}{3}; \quad \bar{S}_K = \frac{c_v S_K}{a_\infty^2} \quad (2.16)$$

sendo, Pr o número de Prandtl definido a partir do traço do tensor K_{ij} . Considera-se neste trabalho que $K_{ij} = 0$ para $i \neq j$. As constantes S e S_K são propriedades do gás e para o ar têm os seguintes valores 110,5 K e 194,4 K, respectivamente.

As equações adimensionalizadas para fluidos não-viscosos obtêm-se simplesmente eliminando das equações de conservação de quantidade de movimento linear e da energia os termos viscosos e de condutividade térmica.

2.4 Forma vetorial compacta das equações de conservação

Neste item continuam sendo utilizadas as equações adimensionalizadas, embora o traço utilizado na seção anterior não apareça para facilitar a notação. Desprezando as forças de volume e a fonte/sumidouro de energia, as equações de conservação escritas em forma compacta ficam da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \text{ em } \Omega \quad (2.17)$$

onde,

\mathbf{U} é o vetor de variáveis de campo ou de conservação;

\mathbf{F}_i é o vetor de fluxo advectivo e de pressão;

\mathbf{G}_i é o vetor de termos viscosos e de condutibilidade térmica.

sendo:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho e \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \rho v_i \\ \rho v_1 v_i + p \delta_{i1} \\ \rho v_2 v_i + p \delta_{i2} \\ \rho v_3 v_i + p \delta_{i3} \\ v_i (\rho e + p) \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{G}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{i1} \\ -\tau_{i2} \\ -\tau_{i3} \\ -\tau_{ij} v_i - K \frac{\partial i}{\partial x_i} \end{Bmatrix} \quad \text{com} \quad (2.18)$$

$i, j = 1, 2, 3$

Entretanto, fazendo $\mathbf{G}_i = 0$ para a Eq. (2.17) obtêm-se as equações para um escoamento não difusivo (equações de Euler). Para definir totalmente o problema, devem-se adicionar ao sistema de equações, dado pela expressão (2.17), as condições iniciais e de contorno para as variáveis. As condições iniciais, em $t = t_0$, vêm dadas por:

$$v_j = v_0; \quad \rho_j = \rho_0; \quad i_j = i_0 \quad (2.19)$$

As condições de contorno essenciais ou forçadas (também chamadas condições de contorno de Dirichlet) são as seguintes:

$$\begin{aligned} v_j = \bar{v}_j & \quad \text{em} \quad \Gamma_v \\ \rho = \bar{\rho} & \quad \text{em} \quad \Gamma_\rho \\ i = \bar{i} & \quad \text{em} \quad \Gamma_i \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde, \bar{v}_j , $\bar{\rho}$ e \bar{i} são os valores prescritos das variáveis v_j , ρ e i nas partes Γ_v , Γ_ρ e Γ_i do contorno Γ . As condições de contorno naturais (ou condições de contorno de Neumann) vêm dadas por:

$$\begin{aligned} (-p \delta_{ij} + \tau_{ij}) n_j = \hat{t}_i & \quad \text{em} \quad \Gamma_\sigma \\ K \frac{\partial i}{\partial x_k} n_k = \hat{q} & \quad \text{em} \quad \Gamma_q \end{aligned} \quad (2.21)$$

sendo, n_j os cossenos diretores da normal num ponto de Γ_σ com o eixo x_j , \hat{t}_i é a componente de uma força de superfície na direção do eixo x_i , atuando na parte Γ_σ do contorno, n_k é a

componente da direção normal do contorno Γ_q , segundo a direção do eixo x_k e \hat{q} é o fluxo de calor que entra ou sai do volume Ω através da superfície Γ_q . Eventualmente, poderão existir no contorno perdas de temperatura por radiação e convecção, porém estas perdas não serão incluídas no presente trabalho.

2.5 Equações para um escoamento incompressível

As equações de conservação que modelam o escoamento transiente incompressível viscoso numa descrição euleriana em coordenadas cartesianas podem ser escritas considerando a hipótese de quase-incompressibilidade [Kawahara e Hirano, 1983]. Esta hipótese modifica a equação de conservação de massa possibilitando escrevê-la em função da derivada temporal da pressão. Esta abordagem é semelhante à hipótese de compressibilidade artificial introduzida por Chorin [1967], consistindo em admitir que as variações de massa específica são desprezíveis e a velocidade de propagação do som tem um valor finito.

A velocidade de propagação do som para um escoamento isentrópico é dada por:

$$a^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (2.22)$$

Então, considerando um escoamento isotérmico, $p = p(\rho)$, tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.23)$$

substituindo a Eq. (2.23) em (2.1), obtém-se a equação de conservação de massa para um escoamento levemente compressível:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + a^2 \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2,3) \text{ em } \Omega \quad (2.24)$$

Adota-se a seguinte adimensionalização para a solução de escoamentos incompressíveis:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= \frac{x_i}{L_\infty} & \tilde{v}_i &= \frac{v_i}{v_\infty} & \tilde{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_\infty} & \tilde{e}_i &= \frac{e_i}{v_\infty^2} \\ \tilde{p} &= \frac{p}{\rho_\infty v_\infty^2} & \tilde{i} &= \frac{c_v T}{v_\infty^2} & \tilde{t} &= \frac{t}{L_\infty/v_\infty} \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde, L é um comprimento característico, v é a velocidade, ρ é a massa específica e o subíndice ∞ indica o estado da corrente não perturbada.

Finalmente, a equação adimensionalizada de conservação de massa para escoamentos levemente compressíveis pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{M_\infty^2} \frac{\partial(\tilde{\rho} \tilde{v}_i)}{\partial \tilde{x}_i} = 0 \quad (i=1,2,3) \text{ em } \Omega \quad (2.26)$$

Considerando as adimensionalizações propostas as equações de conservação de quantidade de movimento linear e de conservação da energia ficam definidas como:

Equação da quantidade de movimento linear

$$\frac{\partial(\tilde{\rho} \tilde{v}_j)}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{\rho} \tilde{v}_j \tilde{v}_i)}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right) + \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial \tilde{x}_k} \delta_{ij} \right] + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} \delta_{ij} = 0 \quad (2.27)$$

Equação da energia

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\tilde{\rho} \tilde{e})}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{\rho} \tilde{e} \tilde{v}_i)}{\partial \tilde{x}_i} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left\{ \tilde{v}_j \left[\tilde{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right) + \tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial \tilde{x}_k} \delta_{ij} \right] \right\} + \\ & + \frac{\partial(\tilde{p} \tilde{v}_j)}{\partial \tilde{x}_i} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left(\tilde{K} \frac{\partial \tilde{i}}{\partial \tilde{x}_i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde,

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{Re_\infty}; \quad \tilde{\lambda} = -\frac{2}{3} \tilde{\mu}; \quad \tilde{K} = \frac{1}{Re_\infty} \frac{\gamma}{Pr} \quad (2.29)$$

Para facilitar a notação, os traços utilizados nas variáveis adimensionais do problema serão omitidos.

3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA PARA ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS E INCOMPRESSÍVEIS

Neste capítulo, inicialmente são apresentados os dois esquemas de avanço no tempo que foram implementados para a discretização temporal das equações para escoamentos compressíveis. Também, descreve-se o método dos resíduos ponderados de Galerkin no contexto do método dos elementos finitos para a discretização espacial das equações e o esquema de viscosidade artificial. Em seguida, mostram-se a discretização das equações para escoamentos incompressíveis não-viscosos e viscosos, e suas implementação no programa. E, finalmente, apresentam-se algumas características gerais dos códigos desenvolvidos.

3.1 Discretização temporal das equações para escoamentos compressíveis viscosos

Neste trabalho, foram implementados dois tipos de integração temporal para a resolução das equações de Euler e de Navier-Stokes, sendo o primeiro um esquema explícito iterativo de um passo desenvolvido a partir do trabalho de Burbridge [1999], e o segundo um esquema explícito de dois passos.

Com o esquema de integração de um passo, consegue-se uma redução no tempo de processamento, porém o esquema de dois passos apresenta um menor consumo de memória. Mais detalhes são dados em Bono e Awruch [2006].

3.1.1 Esquema de UM PASSO

O método de *Taylor-Galerkin* de um passo introduzido por Donea [1984] é aplicado sobre as equações que modelam o escoamento compressível de um fluido newtoniano. Em um primeiro momento, as variáveis de campo são expandidas no tempo segundo uma série de Taylor. Isto permite obter os valores das variáveis em um determinado passo de tempo $(n+1)\Delta t$, a partir do passo de tempo anterior $n\Delta t$. Posteriormente, o método de *Galerkin* standard (ou *Bubnov-Galerkin*) é aplicado para obter-se a aproximação espacial.

Desenvolvendo as variáveis de campo das equações de conservação por uma

expansão no tempo, segundo uma série de Taylor [Yoon et al., 1998] incluindo primeira e segunda derivada, obtém-se:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^{n+s_1} + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \right)^{n+s_2} + O(\Delta t^3) \quad (3.1)$$

onde, os sobrescrito n e $n+1$ indicam as posições no domínio do tempo t e $t+\Delta t$, respectivamente, sendo Δt o incremento de tempo. As variáveis s_1 e s_2 definem a forma de avanço através de esquemas implícito, semi-implícito e explícito de acordo com os valores adotados. Além disso, define-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}^{n+s_1}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + s_1 \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t} \quad \text{com} \quad 0 \leq s_1 \leq 1 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{U}^{n+s_2}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial t^2} + s_2 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t^2} \quad \text{com} \quad 0 \leq s_2 \leq 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

No presente trabalho, adota-se $s_1 = s_2 = 1/2$; substituindo a Eq. (3.2) em (3.1), resulta:

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{U}^{n+1}}{\partial t^2} \right) \quad (3.3)$$

sendo, $\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$. A equação (3.3) é a expressão que define o esquema de avanço no tempo. Substituindo nesta expressão as derivadas primeira e segunda de \mathbf{U}^n e $\Delta \mathbf{U}^{n+1}$ com relação ao tempo por expressões obtidas a partir das equações de conservação, obtém-se a seguinte equação para os incrementos das variáveis:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}^{n+1} &= \Delta t \left[-\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} \right) \right]^n + \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \left[-\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_k \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_i}{\partial x_i} \right) \right]^{n+1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde, $\mathbf{A}_i = \partial \mathbf{F}_i / \partial \mathbf{U}$ é o jacobiano convectivo [Hughes e Tezduyar, 1984].

Na equação (3.4), os incrementos das variáveis de campo $\Delta \mathbf{U}$ devem ser obtidos através de um processo iterativo, uma vez que estão definidos para o mesmo tempo que os incrementos do segundo termo do lado direito da equação. Portanto, adicionando um contador de número de iterações I , o esquema de avanço no tempo para escoamentos viscosos de fluidos fica representado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_{I+1}^{n+1} = \Delta t & \left[-\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} \right) \right]^n + \\ & + \frac{\Delta t}{2} \left[-\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{iI}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta \mathbf{G}_{iI}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_k \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{iI}}{\partial x_i} \right) \right]^{n+1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Deve-se observar que o esquema de avanço no tempo da Eq. (3.5) é em princípio um esquema semi-implícito, uma vez que o vetor de incógnita no tempo $n+1$ é obtido a partir dos vetores \mathbf{F}_i e \mathbf{G}_i , avaliados no tempo n , e dos vetores incrementos $\Delta \mathbf{G}_i$ e $\Delta \mathbf{F}_i$, avaliados no tempo $n+1$. No entanto, este esquema foi resolvido em forma explícita, o qual será mostrado posteriormente.

3.1.2 Esquema de DOIS PASSOS

Para o método de *Taylor-Galerkin* de dois passos, adota-se o esquema de avanço no tempo proposto por Kawahara e Hirano [1983], inicialmente empregado para problemas incompressíveis com a hipótese de pseudo-compressibilidade. Dada a solução num certo passo de tempo t^n , o objetivo é calcular a solução para um novo passo de tempo, $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, avançando dois passos de tempo na solução.

No primeiro passo, as variáveis de campo das equações de conservação podem ser expandidas no tempo segundo uma série de Taylor para o tempo $t^{n+1/2} = t^n + \Delta t/2$. Considerando até a segunda derivada, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{n+1/2} &= \mathbf{U}^n + \left(\frac{\Delta t}{2}\right) \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + \frac{(\Delta t/2)^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \\ \Delta \mathbf{U}^{n+1/2} &= \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{U} + \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^n + O(\Delta t^3)\end{aligned}\quad (3.6)$$

com, $\Delta \mathbf{U}^{n+1/2} = \mathbf{U}^{n+1/2} - \mathbf{U}^n$ e os sobrescritos n e $n+1/2$ indicando os tempos t e $t+\Delta t/2$, respectivamente, sendo Δt o incremento de tempo. Substituindo a equação de conservação (2.17) e sua derivada com relação ao tempo e eliminando os termos de ordem superior, obtém-se para o primeiro passo:

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1/2} = \frac{\Delta t}{2} \left[-\frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i^n}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{A}_i^n \frac{\partial \mathbf{F}_j^n}{\partial x_j} \right) \right] \quad (3.7)$$

No segundo passo, calculam-se as variáveis de campo no instante de tempo $t + \Delta t$ utilizando as variáveis em $t + \Delta t/2$ determinadas no primeiro passo através da Eq. (3.7). Para obter os valores das variáveis \mathbf{U} em $n+1$, pode-se aplicar uma expansão em séries de Taylor da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \\ \mathbf{U}^{n+1} &= \mathbf{U}^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{U} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^n + O(\Delta t^3)\end{aligned}\quad (3.8)$$

Substituindo na Eq. (3.8) a equação de conservação (2.17) e sua derivada com relação ao tempo avaliadas no tempo $t + \Delta t/2$, obtém-se:

$$\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \Delta t \left[-\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial x_j} \right) \right]^{n+1/2} \quad (3.9)$$

com, $\Delta \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n+1/2}$, \mathbf{A}_i é o jacobiano convectivo [Hughes e Tezduyar, 1984] e os

sobrescritos $n+1$ e $n+1/2$ indicam os tempos $t + \Delta t$ e $t + \Delta t/2$, respectivamente.

3.2 Discretização espacial das equações para escoamentos compressíveis viscosos

Para discretizar no espaço o domínio contínuo se utiliza o método dos elementos finitos (MEF), o qual consiste em dividir o domínio em elementos não superpostos e aproximar as variáveis de campo nos elementos através de polinômios que interpolam os valores das variáveis a partir dos valores destas nos nós dos elementos. Neste trabalho, para ter uma maior flexibilidade no tratamento das configurações geométricas, utilizam-se dois tipos de elementos, o tetraedro linear e o hexaedro trilinear.

As variáveis obtidas por interpolação ficam representadas pelas expressões:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &\approx \mathbf{U}^h = \mathbf{N} \bar{\mathbf{U}} = \sum_p N_p \bar{\mathbf{U}}_p & \text{com } i=1,2,3 \text{ e } p=1,\dots,nno \\ \mathbf{F}_i &\approx \mathbf{F}_i^h = \mathbf{N} \bar{\mathbf{F}}_i = \sum_p N_p \bar{\mathbf{F}}_{ip} \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde, \mathbf{U}^h e \mathbf{F}_i^h são os vetores na aproximação por elementos finitos, $\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_{nno}]$ é um vetor que contém as funções de forma de suporte compacto, $\bar{\mathbf{U}}$ e $\bar{\mathbf{F}}_i$ são os vetores que contém os valores das variáveis \mathbf{U} e \mathbf{F}_i nos nós do elemento, N_p é uma função de forma (ou interpolação) no nó global p , com $nno = 4$ para o elemento tetraédrico e $nno = 8$ para o elemento hexaédrico.

Deve-se salientar que os vetores \mathbf{U} e \mathbf{F}_i contêm as variáveis aproximadas formadas pelos produtos das funções de interpolação constituídas por polinômios conhecidos [Zienkiewicz e Taylor, 2000], com os valores nodais das variáveis que são as incógnitas do problema a serem determinadas. Entretanto, o vetor \mathbf{G}_i não aparece aqui, um vez que este termo precisa de um tratamento especial.

Uma vez aplicado o MEF, torna-se necessário adotar um método que permita estabelecer equações para determinar os valores nodais das variáveis, de forma que a diferença entre os valores das variáveis aproximadas por interpolação e os valores reais das variáveis que eram as incógnitas originais no modelo matemático contínuo seja minimizada. No contexto do MEF, o método dos resíduos ponderados consiste em tomar as funções aproximadas num elemento, as quais introduzidas na Eq. (3.5) não são satisfeitas. Nestas equações surge um resíduo uma vez que as funções aproximadas não são soluções exatas daquelas equações. No

caso do esquema de um passo, o resíduo \mathbf{R}_Ω fica definido por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\Omega = \Delta \mathbf{U}_{l+1}^{n+1} - \Delta t \left[-\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_k \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} \right) \right]^n - \\ - \frac{\Delta t}{2} \left[-\frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{il}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta \mathbf{G}_{il}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_k \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{il}}{\partial x_i} \right) \right]^{n+1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Este resíduo é minimizado conforme método dos resíduos ponderados, ou seja:

$$\int_{\Omega_e} \delta \mathbf{U} \mathbf{R}_\Omega d\Omega = 0 \Rightarrow \{\delta \mathbf{U}\}^T \int_{\Omega_e} W^p \mathbf{R}_\Omega d\Omega = \{\mathbf{0}\} \quad (3.12a)$$

portanto,

$$\int_{\Omega_e} W^p \mathbf{R}_\Omega d\Omega = \{\mathbf{0}\} \quad (3.12b)$$

onde, Ω_e é o domínio do elemento e , W^p é a função de peso ou ponderação com $p = 1, 2, \dots, nno$, e que considera diferentes formas dependendo do método de ponderação escolhido. Neste trabalho foi empregado o método de resíduos ponderados de Galerkin ($W^p = N_p$), ou seja, pondera-se o resíduo com relação às variações das variáveis do problema, exigindo que o produto interno entre ambos seja nulo.

Desta forma, resolvendo a Eq. (3.12b) para os valores nodais das variáveis de campo, obtém-se a solução do problema discretizado no esquema de um passo, uma vez que estes valores são precisamente aqueles que minimizam o resíduo. Para obter o modelo discreto do esquema de dois passos (item 3.1.2) se aplica o mesmo procedimento descrito acima.

3.2.1 Esquema de UM PASSO

No esquema de um passo, a forma discreta da equação de avanço no tempo depois de aplicar o método de *Galerkin* no contexto do MEF, e deixando os fluxos difusivos para um tratamento posterior, pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{U}_{I+1}^{n+1} d\Omega = \Delta t \left[- \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_k^n \frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} \right) d\Omega \right] + \\
+ \frac{\Delta t}{2} \left[- \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{iI}^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mathbf{A}_k^n \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{iI}^{n+1}}{\partial x_i} \right) d\Omega \right]
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Para reduzir as exigências de continuidade aplica-se o teorema de Gauss-Green no último termo de cada colchete, ou seja, integram-se por parte os termos com derivadas de segundo ordem, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{U}_{I+1}^{n+1} d\Omega = \Delta t \left[- \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} d\Omega - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_k} \mathbf{A}_k^n \frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} d\Omega + \right. \\
\left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_e} \hat{\mathbf{N}}^T \left(\mathbf{A}_k^n \frac{\partial \mathbf{F}_i^n}{\partial x_i} \right) n_k d\Gamma \right] + \\
+ \frac{\Delta t}{2} \left[- \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{iI}^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega - \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_k} \mathbf{A}_k^n \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{iI}^{n+1}}{\partial x_i} d\Omega + \right. \\
\left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_e} \hat{\mathbf{N}}^T \left(\mathbf{A}_k^n \frac{\partial \Delta \mathbf{F}_{iI}^{n+1}}{\partial x_i} \right) n_k d\Gamma \right]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

onde, o vetor $\hat{\mathbf{N}}$ contém as funções de interpolação avaliadas no contorno do elemento e n_k são as componentes do vetor normal ao contorno, e por convenção apontando para fora do domínio. Desprezando o termo de contorno contendo o incremento $\Delta \mathbf{F}_{iI}$ (último termo no segundo colchete) e aproximando as variáveis por (3.10), tem-se:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \right) \Delta \bar{\mathbf{U}}_{I+1}^{n+1} = \\
= \Delta t \left[- \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_{,i} d\Omega \right) \bar{\mathbf{F}}_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{,k}^T \mathbf{A}_k^n \mathbf{N}_{,i} d\Omega \right) \bar{\mathbf{F}}_i^n + \right. \\
\left. + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Gamma_e} \hat{\mathbf{N}}^T \mathbf{A}_k^n n_k (\mathbf{N}_{,i} \bar{\mathbf{F}}_i^n) d\Gamma \right] + \\
+ \frac{\Delta t}{2} \left[- \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_{,i} d\Omega \right) \Delta \bar{\mathbf{F}}_{iI}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{,k}^T \mathbf{A}_k^n \mathbf{N}_{,i} d\Omega \right) \Delta \bar{\mathbf{F}}_{iI}^{n+1} \right]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

onde, $\mathbf{N}_{,i} = \partial \mathbf{N} / \partial x_i$. Considerando:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \\
 \mathbf{B}_i &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{N}_{,i} d\Omega \\
 \mathbf{C}_i &= \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{,k}^T \mathbf{A}_k^n \mathbf{N}_{,i} d\Omega \\
 \mathbf{g}^n &= \int_{\Gamma_e} \hat{\mathbf{N}}^T \mathbf{A}_k^n n_k (\mathbf{N}_{,i} \bar{\mathbf{F}}_i^n) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

obtém-se o esquema de *Taylor-Galerkin* de um passo para escoamentos não-viscosos em forma matricial:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} \Delta \bar{\mathbf{U}}_{l+1}^{n+1} &= \Delta t \left[-\mathbf{B}_i \bar{\mathbf{F}}_i - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_i \bar{\mathbf{F}}_i + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{g} \right]^n + \\
 &+ \frac{\Delta t}{2} \left[-\mathbf{B}_i \Delta \bar{\mathbf{F}}_{il} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_i \Delta \bar{\mathbf{F}}_{il} \right]^{n+1}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

No Anexo B, são apresentadas todas as matrizes e vetores do modelo numérico de *Taylor-Galerkin* de um passo.

3.2.1.1 Modelo numérico para escoamentos difusivos

Os termos de fluxo difusivo contidos no vetor \mathbf{G}_i não podem ser interpolados de forma direta, já que isto implicaria dispor dos valores nodais do vetor \mathbf{G}_i . Os termos difusivos e de condutibilidade térmica contêm derivadas das variáveis de campo e esses valores nodais não podem ser obtidos quando o elemento utilizado é linear. Lembrando, o vetor de fluxo difusivo é dado por:

$$\mathbf{G}_i = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\tau_{ij} \\ -\tau_{ij} v_i - K \frac{\partial u}{\partial x_i} \end{array} \right\} \quad \text{com } i, j = 1, 2, 3 \tag{3.18}$$

Assim, para relaxar a condição de continuidade imposta às funções de interpolação quando é aplicado o método de *Galerkin*, convém trabalhar com a forma fraca da equação integral. Empregando o teorema de Gauss-Green para integrar por partes o termo de fluxo difusivo tem-se:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{G}_i^n}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Gamma_e} \hat{\mathbf{N}}^T \mathbf{G}_i^n n_i d\Gamma - \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{G}_i^n d\Omega \quad (3.19)$$

Pode-se observar que do lado direito desta última expressão ficam integrais contendo apenas derivadas primeiras das variáveis de campo. A primeira integral de lado direito da Eq. (3.19) corresponde aos termos de contorno. Como estes termos já foram desenvolvidos, não serão tratados aqui. Expandindo o vetor \mathbf{G}_i^n na última expressão tem-se:

Equação da quantidade de movimento linear:

$$-\int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{G}_i^n d\Omega = -\int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} (-\tau_{ij}^n) d\Omega = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \tau_{ij}^n d\Omega \quad (3.20)$$

Equação da energia:

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \mathbf{G}_i^n d\Omega &= -\int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} (-\tau_{ij}^n v_j^n) d\Omega - \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \left(-K \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) d\Omega \\ &= \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \tau_{ij}^n v_j^n d\Omega + \int_{\Omega_e} K \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned} \quad (3.21)$$

Expande-se a integral correspondente à equação da quantidade de movimento linear, introduzindo a Eq. (2.5) em (3.20), obtendo:

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \tau_{ij}^n d\Omega = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] d\Omega \quad (3.22)$$

Então, substituem-se as variáveis aproximadas v_i^n pelas suas correspondentes expressões interpoladas, como mostrado abaixo:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{,i}^T \tau_{ij}^n d\Omega = \left(\int_{\Omega_e} \mu \mathbf{N}_{,i}^T \mathbf{N}_{,j} d\Omega \right) \bar{v}_i^n + \left(\int_{\Omega_e} \mu \mathbf{N}_{,i}^T \mathbf{N}_{,i} d\Omega \right) \bar{v}_j^n + \left(\int_{\Omega_e} \lambda \mathbf{N}_{,j}^T \mathbf{N}_{,k} d\Omega \right) \bar{v}_k^n \quad (3.23)$$

com,

$$v_i \approx v_i^h = \mathbf{N} \bar{v}_i = \sum_p N_p \bar{v}_{ip} \quad \text{onde, } i=1,2,3 \text{ e } p=1,\dots,nnn \quad (3.24)$$

Esta expressão poderia ser utilizada diretamente, mas ainda pode-se efetuar uma transformação que permite reduzir a quantidade de termos necessários [Burbridge, 1999]. Se a expressão anterior é expandida para os subíndices $i, j, k = 1, 2, 3$, obtêm-se três equações contendo nove termos cada uma. Se sobre estas equações é efetuado um agrupamento dos termos, extraindo as componentes de velocidade como fator comum, e em seguida levam-se as equações novamente à forma compacta, pode-se mostrar que a Eq. (3.23) é equivalente à seguinte expressão:

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{,i}^T \tau_{ij}^n d\Omega = \mathbf{D}_{ij} \bar{v}_i^n \quad (3.25)$$

onde,

$$\mathbf{D}_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_e} \mu \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \mathbf{N}_{,(i)}^T \mathbf{N}_{,(i)} d\Omega + \int_{\Omega_e} \mu \mathbf{N}_{,k}^T \mathbf{N}_{,k} d\Omega \\ \text{se } i = j, \left\{ \begin{array}{l} i = 1 \rightarrow k = 2, 3 \\ i = 2 \rightarrow k = 1, 3 \\ i = 3 \rightarrow k = 1, 2 \end{array} \right. \\ \\ \int_{\Omega_e} \mu \mathbf{N}_{,i}^T \mathbf{N}_{,j} d\Omega + \int_{\Omega_e} \lambda \mathbf{N}_{,j}^T \mathbf{N}_{,i} d\Omega \\ \text{se } i \neq j \end{array} \right. \quad (3.26)$$

O parêntese no subíndice i indica que não é aplicada a convenção de soma, mesmo que os índices estejam repetidos. Para os termos iterativos do fluxo difusivo da Eq. (3.5) as

matrizes são as mesmas, isto é:

$$-\int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \Delta \mathbf{G}_i^{n+1} d\Omega = -\int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} (-\Delta \tau_{ij}^{n+1}) d\Omega = \int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \Delta \tau_{ij}^{n+1} d\Omega \quad (3.27)$$

sendo,

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x_i} \Delta \tau_{ij}^{n+1} d\Omega = \mathbf{D}_{ij} \Delta \bar{v}_i^{n+1} \quad (3.28)$$

Um processo similar ao efetuado acima deve ser realizado para expandir os termos difusivos correspondentes à equação de conservação de energia. Porém, deve-se observar que os termos difusivos da equação de conservação de energia contêm um produto de funções, isto é, o produto $\tau_{ij}^n v_i^n$ que aparece na expressão (3.21). Isto conduz à aparição de matrizes adicionais unicamente para os termos iterativos, já que o incremento temporal $\Delta(\tau_{ij} v_i)^{n+1}$ tem que ser desenvolvido através da regra da derivada de um produto, ou seja:

$$\Delta(\tau_{ij} \bar{v}_i)^{n+1} = \bar{v}_i^n \Delta \tau_{ij}^{n+1} + \tau_{ij}^n \Delta \bar{v}_i^{n+1} \quad (3.29)$$

Estas matrizes adicionais são representadas por \mathbf{E}_i^* . Adicionando os termos viscosos na Eq. (3.17) e considerando que a formulação foi definida para um elemento genérico, para resolver as equações é preciso primeiramente efetuar a montagem das equações de elemento para obter o sistema completo. Se isto fosse feito utilizando a matriz \mathbf{M} , como foi definido, o resultado seria um sistema de equações acopladas (esquema semi-implícito) que não poderiam ser resolvidas explicitamente. No entanto, definindo a matriz de massa diagonal ou discreta \mathbf{M}_L no lugar da matriz de massa consistente \mathbf{M} [Löhner, 2001], obtém-se um sistema de equações explícito desacoplado, que representa o modelo numérico de *Taylor-Galerkin* de um passo para escoamentos compressíveis viscosos. Para o elemento hexaédrico, utiliza-se integração analítica reduzida das matrizes ao nível de elemento [Bono, 2004] com o objetivo de reduzir o tempo de processamento.

Emprega-se a seguinte notação para simplificar:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_i^\rho &= \bar{\rho} \bar{v}_i \\
\bar{F}_{ij}^{\rho\nu} &= \bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j + \bar{p} \delta_{ij} \quad \text{com } i, j = 1, 2, 3 \\
\bar{F}_i^{\rho e} &= (\bar{\rho} \bar{e} + \bar{p}) \bar{v}_i
\end{aligned} \tag{3.30}$$

As equações matriciais vêm então dadas por:

Equação da continuidade:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_L \{ \Delta \bar{\rho} \}_{I+1}^{n+1} &= \Delta t \left[-\mathbf{B}_i \{ \bar{F}_i^\rho \} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_i \{ \bar{F}_i^\rho \} + \frac{\Delta t}{2} \{ \mathbf{g}^\rho \} \right]^n + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} \left[-\mathbf{B}_i \{ \Delta \bar{F}_i^\rho \}_I - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_i \{ \Delta \bar{F}_i^\rho \}_I \right]^{n+1}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Equação da quantidade de movimento linear:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_L \{ \Delta \bar{\rho} \bar{v}_j \}_{I+1}^{n+1} &= \Delta t \left[-\mathbf{B}_i \{ \bar{F}_{ij}^{\rho\nu} \} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_i \{ \bar{F}_{ij}^{\rho\nu} \} - \mathbf{D}_{ij} \{ \bar{v}_i \} + \right. \\
&+ \{ \mathbf{f}_i \} + \left. \frac{\Delta t}{2} \{ \mathbf{g}_j^{\rho\nu} \} \right]^n + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} \left[-\mathbf{B}_i \{ \Delta \bar{F}_{ij}^{\rho\nu} \}_I - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_i \{ \Delta \bar{F}_{ij}^{\rho\nu} \}_I - \mathbf{D}_{ij} \{ \Delta \bar{v}_i \}_I \right]^{n+1}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Equação da energia:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_L \{ \Delta \bar{\rho} \bar{e} \}_{I+1}^{n+1} &= \Delta t \left[-\mathbf{B}_i \{ \bar{F}_i^{\rho e} \} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_i \{ \bar{F}_i^{\rho e} \} - \mathbf{E}_i \{ \bar{v}_i \} - \right. \\
&- \mathbf{K} \{ \bar{u} \} + \{ \mathbf{q} \} + \left. \frac{\Delta t}{2} \{ \mathbf{g}^{\rho e} \} \right]^n + \\
&+ \frac{\Delta t}{2} \left[-\mathbf{B}_i \{ \Delta \bar{F}_i^{\rho e} \}_I - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_i \{ \Delta \bar{F}_i^{\rho e} \}_I - \right. \\
&- \mathbf{E}_i^* \{ \Delta \bar{v}_i \}_I - \left. \mathbf{K} \{ \Delta \bar{u} \}_I \right]^{n+1}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Nestas equações, as matrizes \mathbf{B}_i , \mathbf{C}_i , \mathbf{D}_{ij} e o vetor \mathbf{g} já foram definidos nas expressões (3.16) e (3.26), respectivamente. Entretanto, as novas matrizes e vetores de elemento ficam definidos da seguinte maneira:

$$\mathbf{E}_i = \int_{\Omega_e} \left[\mu (\mathbf{N} \bar{\mathbf{v}}_i^n) \mathbf{N}_{,k}^T \mathbf{N}_{,k} + \mu (\mathbf{N} \bar{\mathbf{v}}_k^n) \mathbf{N}_{,i}^T \mathbf{N}_{,k} + \lambda (\mathbf{N} \bar{\mathbf{v}}_k^n) \mathbf{N}_{,k}^T \mathbf{N}_{,i} \right] d\Omega \quad (3.34)$$

$$\mathbf{E}_i^* = \mathbf{E}_i + \int_{\Omega_e} \left[\mu (\mathbf{N}_{,i} \bar{\mathbf{v}}_j^n + \mathbf{N}_{,j} \bar{\mathbf{v}}_i^n) \mathbf{N}_{,j}^T \mathbf{N} + \lambda (\mathbf{N}_{,k} \bar{\mathbf{v}}_k^n) \mathbf{N}_{,i}^T \mathbf{N} \right] d\Omega \quad (3.35)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega_e} K \mathbf{N}_{,i}^T \mathbf{N}_{,i} d\Omega \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{q}\}^n &= \int_{\Gamma_e} \hat{\mathbf{N}}^T (\mathbf{N} \bar{\mathbf{v}}_j^n) \left[\mu (\mathbf{N}_{,i} \bar{\mathbf{v}}_j^n + \mathbf{N}_{,j} \bar{\mathbf{v}}_i^n) + \lambda (\mathbf{N}_{,k} \bar{\mathbf{v}}_k^n) \delta_{ij} \right] n_i d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_e} \hat{\mathbf{N}}^T K (\mathbf{N}_{,i} \{u\}^n) n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\{\mathbf{f}_i\}^n = \int_{\Gamma_e} \hat{\mathbf{N}}^T \left[\mu (\mathbf{N}_{,j} \bar{\mathbf{v}}_i^n + \mathbf{N}_{,i} \bar{\mathbf{v}}_j^n) + \lambda (\mathbf{N}_{,k} \bar{\mathbf{v}}_k^n) \delta_{ij} \right] n_j d\Gamma \quad (3.38)$$

No Anexo B, são apresentadas todas as matrizes e vetores do modelo numérico de *Taylor-Galerkin* de um passo.

3.2.2 Esquema de DOIS PASSOS

Aplicando o método de *Galerkin* no contexto do MEF no esquema de avanço no tempo dado pelas equações (3.7) e (3.9), da mesma maneira que no item 3.2.1, obtém-se o modelo numérico de *Taylor-Galerkin* de dois passos:

$$\mathbf{M}_L \Delta \bar{\mathbf{U}}^{n+1/2} = \frac{\Delta t}{2} \left[-\mathbf{B}_i \bar{\mathbf{F}}_i - \frac{\Delta t}{4} \mathbf{C}_i \bar{\mathbf{F}}_i + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{g} + \text{termos difusivos} \right]^n \quad (3.39)$$

e,

$$\mathbf{M}_L \Delta \bar{\mathbf{U}}^{n+1} = \Delta t \left[-\mathbf{B}_i \bar{\mathbf{F}}_i - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}_i \bar{\mathbf{F}}_i + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{g} + \text{termos difusivos} \right]^{n+1/2} \quad (3.40)$$

Nas equações (3.39) e (3.40), as matrizes e vetores que tem origem nos efeitos viscosos e de condutividade térmica são designados por “termos difusivos”, sendo os mesmos \mathbf{D}_{ij} , \mathbf{E}_i , \mathbf{K} , $\{q\}$ e $\{f_i\}$. Estas matrizes e vetores já foram definidos nas expressões (3.26), (3.34), (3.36), (3.37) e (3.38). Como no caso do esquema de um passo, adota-se a matriz de massa diagonal \mathbf{M}_L a fim de desacoplar o sistema de equações, possibilitando resolver o sistema de equações em forma explícita. Para o elemento hexaédrico as correspondentes matrizes do elemento são obtidas analiticamente empregando a integração numérica reduzida, segundo Bono [2004]. No Anexo B, são apresentadas todas as matrizes e vetores do modelo numérico de *Taylor-Galerkin* de dois passos.

Finalmente, o esquema fica representado pelo seguinte algoritmo:

- 1- Calcular $\Delta \mathbf{U}^{n+1/2}$ com \mathbf{U}^n através da Eq. (3.39);
- 2- Calcular $\mathbf{U}^{n+1/2} = \Delta \mathbf{U}^{n+1/2} + \mathbf{U}^n$;
- 3 - Aplicar as condições de contorno em $\mathbf{U}^{n+1/2}$;
- 4- Calcular $\Delta \mathbf{U}^{n+1}$ com $\mathbf{U}^{n+1/2}$ através da Eq. (3.40);
- 5- Calcular $\mathbf{U}^{n+1} = \Delta \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^{n+1/2}$;
- 6- Aplicar as condições de contorno em \mathbf{U}^{n+1} .

3.3 Estabilidade numérica e viscosidade artificial

Uma vez montadas as equações matriciais que estão ao nível de elemento, o sistema resultante é um sistema que será resolvido em forma explícita. Os esquemas explícitos são *condicionalmente estáveis*, o que significa dizer que devem cumprir alguma condição de estabilidade que limite o valor do incremento de tempo utilizado. No caso do esquema explícito de *Taylor-Galerkin* para escoamentos compressíveis, a condição de estabilidade é a condição de CFL (Courant-Friedrichs-Lewy), que pode ser expressa da seguinte forma:

$$\Delta t_e = CS \frac{L_e}{a + (v_i v_i)^{1/2}} \quad (3.41)$$

onde, Δt_e é o incremento de tempo crítico do elemento e , CS é um coeficiente de segurança (neste trabalho foi adotado 0,1 e 0,3), L_e é um comprimento característico do elemento e (menor aresta) e a é a velocidade do som. Em forma adimensionalizada, a expressão (3.41) resulta:

$$\Delta t_e = \text{CS} \frac{L_e / L_\infty}{a / a_\infty + M} \quad (3.42)$$

onde, M é o número de Mach local e o subíndice ∞ indica o estado da corrente não perturbada. Finalmente, o incremento de tempo crítico adotado é o menor incremento escolhido dentre todos os elementos. Detalhes com relação ao cálculo do comprimento característico do elemento tetraédrico e hexaédrico são dados no Anexo B.

Em problemas envolvendo escoamentos compressíveis podem aparecer regiões com fortes gradientes na forma de ondas de choque. A solução direta através do esquema de *Taylor-Galerkin* para este tipo de problema conduz à aparição de oscilações de alta frequência nas proximidades dos choques, motivo pelo qual é necessária a adoção de algum método que permita capturar e suavizar tais efeitos locais [Nithiarasu et al., 1998]. No presente trabalho, emprega-se o método de difusividade artificial, descrito por Argyris et al. [1990], no qual é adicionada explicitamente à solução não amortecida uma viscosidade artificial de segunda ordem. Uma vez obtidos os incrementos $\Delta \mathbf{U}^{n+1}$, os valores das variáveis de campo para o tempo $(n+1)\Delta t$ tornam-se:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta \mathbf{U}^{n+1} \quad (3.43)$$

O método de viscosidade artificial consiste em adicionar termos dissipativos os quais são ativados na região das ondas de choque e se baseiam na derivada segunda da pressão [Nithiarasu et al., 1998]. Os termos dissipativos simulam a ação da viscosidade nas proximidades das discontinuidades, e os valores suavizados são determinados por:

$$\mathbf{U}_s^{n+1} = \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{D}^n \quad (3.44)$$

sendo, \mathbf{U}_s o vetor de variáveis de campo suavizados e \mathbf{D} o vetor de amortecimento numérico que fica definido da seguinte forma:

$$D^n = \sum_e \{ \text{CFL CAF } S_e (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L)_e \mathbf{U}_e^n \} \quad (3.45)$$

Deve-se observar que os vetores e matrizes das expressões (3.43) e (3.44) que não levam o subíndice e são vetores globais, ou seja, foi efetuada a montagem das equações do elemento. Por sua vez, na expressão (3.45) todas as magnitudes são do elemento e levam o subíndice e . Nesta última equação, o símbolo de somatório indica o processo de montagem do produto no interior da chave, CAF é um coeficiente de amortecimento fictício definido pelo usuário, \mathbf{M} é a matriz de massa consistente, \mathbf{M}_L é a matriz de massa diagonal e CFL é o número de Courant-Friedrichs-Lewy local que vem dado pela seguinte expressão:

$$\text{CFL} = \frac{\Delta t}{\Delta t_e} \quad (3.46)$$

sendo, Δt o intervalo de tempo e Δt_e é o passo de tempo do elemento e . O coeficiente de distribuição de pressão do elemento S_e é dado por:

$$S_e = \frac{1}{nele} \sum_{N=1}^{nele} S_N \quad (3.47)$$

onde, $nele$ é o número de elementos que compartilham um determinado nó e os S_N são os valores do sensor de pressões em cada um dos nós do elemento extraídos a partir do vetor global S_N :

$$S_N = \frac{\sum_e \left| (\mathbf{M} - \mathbf{M}_L)_e \{p\}_e^n \right|}{\sum_e \left(\left| \mathbf{M} - \mathbf{M}_L \right|_e \{p\}_e^n \right)} \quad (3.48)$$

Nesta expressão, p é a pressão e as barras indicam que deve ser calculado o valor absoluto dos elementos das matrizes ou vetores contidos entre elas. O valor do coeficiente CAF deve ser ajustado para cada exemplo e para cada modelo numérico empregado, já que um excesso de viscosidade artificial interfere na viscosidade física. Neste trabalho foi adotado valores entre

$$0,4 \leq \text{CAF} \leq 1,1.$$

3.4 Discretização das equações para escoamentos incompressíveis não-viscosos

A resolução de escoamentos não-viscoso com a forma conservativa das equações de Euler torna-se deficiente quando o número de Mach se reduz. Para evitar que os autovalores das equações do escoamento compressível tendam a limites muito diferentes quando o número de Mach tende a zero, multiplica-se a derivada temporal do vetor das variáveis de campo (\mathbf{U}) pela matriz de pré-condicionamento, $\mathbf{\Gamma}$, proposta por Choi e Merkle [1985]. As equações de conservação escritas em forma compacta ficam:

$$\mathbf{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.49)$$

onde,

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v_i v_i}{2} (1 - M^{-2}) & v_1 (1 - M^{-2}) & v_2 (1 - M^{-2}) & v_3 (1 - M^{-2}) & M^{-2} \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

sendo, v_i as componentes do vetor de velocidade segundo o eixo x_i e M é o número de Mach local. Para evitar singularidades quando o número de Mach aproxima-se de zero, por exemplo no ponto de estagnação, Choi e Merkle [1993] propuseram substituir o termo M por Mr , onde este último é definido da seguinte maneira:

$$Mr = \begin{cases} M_{\min} & M < M_{\min} \\ M & M_{\min} \leq M \leq 1 \\ 1 & M > 1 \end{cases} \quad (3.51)$$

Neste trabalho adotou-se $M_{\min} = 10^{-4}$.

Este pré-condicionador preserva a forma tradicional das equações de conservação de

massa e de quantidade de movimento, mas modifica a equação da energia adicionando termos extras que são derivadas temporais de ρ e ρv_i .

Neste trabalho, emprega-se o elemento hexaédrico e o esquema de um passo (item 3.2.1) para a discretização espacial e temporal da Eq. (3.49). O pré-condicionamento também foi aplicado aos termos de dissipação artificial.

3.5 Discretização das equações para escoamentos incompressíveis viscosos

Para a discretização temporal e espacial das equações de escoamentos incompressíveis viscosos adota-se os esquemas de um passo (item 3.2.1) e de dois passos (item 3.2.2) empregados nos escoamentos compressíveis, mas com a hipótese de quase-incompressibilidade (item 2.5) e as adimensionalizações propostas nas Eqs. (2.25). Os elementos hexaédricos e tetraédricos foram implementados a fim de ter uma maior flexibilidade na geração da malha.

Nos escoamentos compressíveis todas as equações de conservação estão acopladas, porém para escoamentos incompressíveis, nos quais $a \rightarrow \infty$, a equação da energia pode ser resolvida de forma independente após o campo de velocidade ter sido determinado.

Para o problema incompressível adota-se um coeficiente de amortecimento fictício igual a $CAF = 0,01$, uma vez que não é necessário adicionar viscosidade artificial.

O algoritmo numérico de solução do esquema de um passo pode ser resumido nos seguintes passos:

- 1- Calcular iterativamente $\Delta \mathbf{U}^{n+1}$ através das Eqs. (3.31), (3.32) e (3.33);
- 2- Calcular $\mathbf{U}^{n+1} = \Delta \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n$;
- 3- Determinar a pressão com $p^{n+1/2} = p^n + \Delta p^{n+1/2}$;
- 4- Determinar a massa específica com $\rho^{n+1/2} = \gamma M^2 p^{n+1/2}$;
- 5 - Aplicar as condições de contorno em \mathbf{U}^{n+1} .

Enquanto que o esquema de dois passos fica representado pelo seguinte algoritmo de solução:

- 1- Calcular $\Delta \mathbf{U}^{n+1/2}$ com \mathbf{U}^n através da Eq. (3.39);
- 2- Calcular $\mathbf{U}^{n+1/2} = \Delta \mathbf{U}^{n+1/2} + \mathbf{U}^n$;
 - 2.1- Determinar a pressão com $p^{n+1/2} = p^n + \Delta p^{n+1/2}$;
 - 2.2- Determinar a massa específica com $\rho^{n+1/2} = \gamma M^2 p^{n+1/2}$;
- 3 - Aplicar as condições de contorno em $\mathbf{U}^{n+1/2}$;
- 4- Calcular $\Delta \mathbf{U}^{n+1}$ com $\mathbf{U}^{n+1/2}$ através da Eq. (3.40);
- 5- Calcular $\mathbf{U}^{n+1} = \Delta \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^{n+1/2}$;
 - 5.1- Determinar a pressão com $p^{n+1} = p^{n+1/2} + \Delta p^{n+1}$;
 - 5.2- Determinar a massa específica com $\rho^{n+1} = \gamma M^2 p^{n+1}$;
- 6- Aplicar as condições de contorno em \mathbf{U}^{n+1} .

3.6 Características gerais dos códigos

Neste item serão apresentadas algumas das principais considerações adotadas nos códigos computacionais desenvolvidos neste trabalho.

3.6.1 Convergência do processo iterativo

A análise de convergência do processo iterativo no esquema de um passo é realizado considerando-se a convergência das variáveis de campo \mathbf{U} através das seguintes expressões:

$$r_{1+1}^{\rho} = \frac{\sqrt{\sum_{nno} |\rho_{1+1} - \rho_1|^2}}{\sqrt{\sum_{nno} \rho_1^2}} \quad (3.52)$$

$$r_{1+1}^{\rho v} = \frac{\sqrt{\sum_{nno} |\rho v_{i+1} - \rho v_{i1}| |\rho v_{i+1} - \rho v_{i1}|}}{\sqrt{\sum_{nno} \rho v_{i1} \rho v_{i1}}} \quad \text{com } i = 1, 2, 3 \quad (3.53)$$

$$r_{I+1}^{\rho e} = \frac{\sqrt{\sum_{nno} |\rho e_{I+1} - \rho e_I|^2}}{\sqrt{\sum_{nno} \rho e_I^2}} \quad (3.54)$$

onde, os subíndices I e $I+1$ indicam o passo iterativo anterior e atual e nno é o número total de nós da malha. O processo iterativo atinge a convergência quando satisfaz-se as condições $r_{I+1}^p \leq TOL$, $r_{I+1}^{pv} \leq TOL$ e $r_{I+1}^{\rho e} \leq TOL$, sendo TOL uma certa tolerância definida pelo usuário, tomando-se neste trabalho o valor $TOL = 10^{-6}$.

3.6.2 Resíduo e estado estacionário

O encerramento do processo de solução para ambos esquemas ocorre quando o tempo atinge um limite máximo previamente estabelecido pelo usuário, ou quando o escoamento atinge o estado estacionário antes de ser alcançado aquele tempo máximo. Considera-se que o estado estacionário é atingido quando o resíduo temporal médio, definido segundo a expressão:

$$R^{n+1} = \sqrt{\sum_{nno} |\rho^{n+1} - \rho^n|^2} \quad (3.55)$$

permanece abaixo de uma certa tolerância definida pelo usuário (neste trabalho adotou-se 10^{-8}), ou atinge um número de passos de tempo também definido pelo usuário.

3.6.3 Condições de contorno sólido

Em escoamentos não-viscosos, a condição de não deslizamento nos contornos sólidos é desconsiderada, o que significa que nestes contornos a velocidade não é necessariamente nula. Somente a componente normal ao contorno é nula. Portanto, nos nós de contorno sólido a velocidade é calculada da mesma forma que no resto do domínio. Posteriormente, decompõe-se o vetor velocidade numa componente tangente ao contorno, e outra componente normal ao mesmo. Finalmente, impõe-se que esta última seja nula.

Supondo conhecidos os vetores normais aos contornos sólidos, em cada um dos nós destes contornos tem-se, conforme a Figura 3.1, o vetor \mathbf{V} que é o vetor velocidade antes de aplicar as condições de contorno no nó N de contorno sólido, sendo π o plano tangente ao contorno no nó N ; \mathbf{V}_n é a componente normal da velocidade, \mathbf{V}_τ é a componente tangencial

localizada no plano π e \mathbf{n} é o vetor normal ao contorno no nó N .

Então, uma vez calculada a velocidade \mathbf{V} , deve-se forçar a seguinte condição nos nós de contorno sólido:

$$\mathbf{V}_n = \mathbf{0} \quad e \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_\tau \quad (3.56)$$

A componente \mathbf{V}_τ pode ser calculada definindo os vetores $\boldsymbol{\tau}_1$ e $\boldsymbol{\tau}_2$ através do seguinte produto vetorial:

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{V} \times \mathbf{n} \quad (3.57)$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}_1 \quad (3.58)$$

sendo estes vetores mostrados na Figura 3.1.

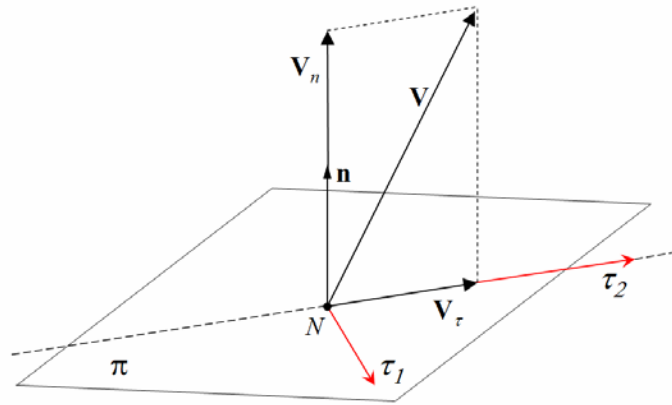


Figura 3.1: Componentes de velocidade nos contornos sólidos.

Assim, sendo \mathbf{V}_τ a projeção tangencial do vetor \mathbf{V} sobre $\boldsymbol{\tau}_2$, resulta:

$$\mathbf{V}_\tau = \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_2}{\boldsymbol{\tau}_2 \cdot \boldsymbol{\tau}_2} \boldsymbol{\tau}_2 \quad (3.59)$$

onde, o símbolo (\cdot) indica um produto escalar. Então, as condições de contorno (3.56) são aplicadas substituindo o vetor \mathbf{V} por sua componente tangencial.

Em escoamentos viscosos, considera-se que as partículas de fluido em contato com os contornos sólidos são solidárias aos mesmos, sendo esta condição conhecida na terminologia em inglês pelo nome de *non slip condition*. Em problemas nos quais os contornos sólidos não se movimentam, esta condição resume-se na seguinte expressão:

$$\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (3.60)$$

usada nos nós de contorno sólido.

4. ESQUEMAS DE ADAPTAÇÃO TEMPORAL (POR SUBCICLOS) E ESPACIAL (COM REFINAMENTO H)

Neste capítulo, apresenta-se inicialmente, uma breve revisão bibliográfica da técnica de subciclos. Também, explica-se detalhadamente esta técnica e sua implementação no programa computacional. Em seguida, apresenta-se o refinamento adaptativo de malhas, os indicadores de erro e o critério de adaptação empregado. Finalmente, explica-se como é feita a subdivisão dos elementos tetraédricos.

4.1 Técnica de Subciclos

Os esquemas explícitos são simples de implementar e fáceis de paralelizar, mas apresentam restrições na estabilidade, devendo o incremento de tempo crítico do elemento satisfazer a condição de CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).

A adoção de um único passo de tempo para todo o domínio, sendo este o menor incremento de tempo crítico, limita a eficiência computacional do esquema explícito, já que em uma malha existem elementos que podem ser integrados com um incremento de tempo maior. Geralmente, as malhas empregadas na Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) possuem elementos com uma relação de tamanho muito diferente; por exemplo, as regiões perto do corpo ou determinadas regiões localizadas requerem elementos pequenos a fim de capturar eficientemente os principais fenômenos do escoamento, porém, nas regiões onde se aplicam as condições de contorno, estando estas afastadas do corpo, os elementos podem ter ordens de grandeza maior. Também, deve-se levar em conta que quando se emprega o refinamento adaptativo de malha, a relação entre o maior e menor incremento de tempo dos elementos aumenta com os sucessivos refinamentos.

Os métodos de integração mista no tempo, inicialmente desenvolvidos no campo da dinâmica estrutural [Hughes e Liu, 1978; Belytschko et al., 1979], são eficientes já que permitem que o esquema de integração seja empregado com diferentes passos de tempo para cada elemento ou grupo de elementos. Dentro do campo da DFC e no contexto do método dos elementos finitos os primeiros trabalhos foram desenvolvidos por Löhner et al. [1984]. Neste trabalho, se obteve uma redução no tempo de CPU da ordem de 2 a 4 para problemas não-viscosos bidimensionais com um método do tipo explícito-implícito (também chamado como

multi-time stepping ou *subcycling*). Chang et al. [1993] propôs um método implícito-explicito para a resolução de problemas viscosos e não-viscosos bidimensionais, conseguindo reduções no tempo de CPU da ordem de 1,1 a 7,1. Os métodos implícitos-explicitos acoplam os esquemas implícitos e explícitos, permitindo que determinadas regiões do domínio possam ser resolvidas com o esquema explícito ou implícito. Maurits et al. [1998] estudou a estabilidade e precisão da equação de convecção-difusão unidimensional usando um método de subciclos. Neste trabalho determinou-se a condição de estabilidade local para vários esquemas de integração.

No contexto do método dos volumes finitos, alguns dos principais trabalhos com técnica de avanço no tempo em subciclos foram desenvolvidos por Hokker et al. [1992], van der Ven et al. [1997] e Wackers e Koren [2003], entre outros.

Baseados no método de avanço em subciclos proposto por Belytschko e Gilbertsen [1992] para problemas de dinâmica estrutural, Teixeira e Awruch [2001] implementaram essa técnica para problemas de escoamentos compressíveis não-viscosos para elementos tetraédricos. No presente trabalho, implementou-se a mesma técnica no contexto da arquitetura de processamento escalar para problemas tridimensionais viscosos e não-viscosos com elementos tetraédricos e hexaédricos. O ganho no tempo de processamento, obtido por Teixeira e Awruch [2001] com um computador vetorial foi entre 1,6 e 10,2 para o problema de um escoamento não-viscoso ao redor de uma esfera. Vale salientar que o máximo ganho foi atingido com uma certa perda na precisão dos resultados.

No trabalho de Teixeira e Awruch [2001], foram empregados os mesmo indicadores de erro utilizados nesta tese, os quais são utilizados no refinamento adaptativo de malhas. A adoção dos indicadores de erro na técnica de subciclos no trabalho de Teixeira e Awruch [2001] permitiu reduzir o incremento de tempo em elementos nos quais certos fenômenos localizados acontecem. E assim diminuiu o erro associado à interpolação linear. Nesta tese não foi adotado este recurso porque antes de empregar-se a técnica de subciclos a malha sempre é refinada. Porém, nada impede que a técnica de subciclos implementada neste trabalho possa ser empregada com a malha inicial.

4.1.1 Implementação da Técnica de Subciclos

A técnica de subciclos é implementada para considerar o passo de tempo crítico de cada elemento da malha; entretanto, para facilitar a integração, os elementos são divididos em grupos em função dos tempos críticos. Assim, cada grupo de elementos pode ser integrado com

passos de tempos diferentes, onde os mesmos estão sujeitos às seguintes restrições:

- o maior passo de tempo dos grupos devem ser um inteiro múltiplo de todos os passos;
- se algum nó estiver conectado a elementos de grupos diferentes, os passos de tempo dos grupos deverão ser múltiplos um do outro.

A primeira restrição foi modificada fazendo com que todos os passos de tempo sejam múltiplos inteiros uns de outro. Esta restrição adicional permite que os elementos sejam armazenados em grupos de acordo com seus passos de tempo críticos e não pela sua proximidade física.

Os passos de tempo dos grupos de nós (Δt_N) e dos grupos de elementos (Δt_G) são determinados no início da solução. O passo de tempo de controle corresponde ao maior dos passos de tempo dos grupos de elementos e indica o passo de um ciclo (master time), estando todas as variáveis e fluxos no mesmo tempo físico do problema.

A técnica de subciclos pode ser resumida nos seguintes passos:

- 1- Calcular os passos de tempo crítico de cada elemento i (Δt_{Ei}) segundo a Eq.(3.42) e determinar os inteiros múltiplos (n_{Ei}) do menor passo de tempo da malha (Δt_{Emin}), mediante a relação:

$$n_{Ei} = \text{int} \left(\frac{\Delta t_{Ei}}{\Delta t_{Emin}} \right) \quad \text{com } i = 1, \dots, \text{nele} \quad (4.1)$$

- 2- Separar os elementos em grupos conforme seus passos de tempo e calcular o passo de tempo de cada nó (Δt_N), considerando o menor passo de tempo de todos os elementos e conectados ao nó N , conforme a expressão:

$$\Delta t_N = \min_e \left(n_E^e \Delta t_{Emin} \right) \quad (4.2)$$

Neste trabalho, adota-se a mesma divisão de grupos proposta por Löhner et al. [1985] e também empregada por Teixeira e Awruch [2001]. Cada grupo de elementos g avança com um passo de tempo constante e igual a $\Delta t = 2^{(g-1)} \Delta t_{Emin}$, ou seja, no grupo 1 estão os elementos i que possuem $\Delta t_{Emin} \leq \Delta t_i < 2 \Delta t_{Emin}$ e aos quais atribui-se um passo de tempo Δt_{Emin} , no grupo 2 temos todos os elementos com $2 \Delta t_{Emin} \leq \Delta t_i < 4 \Delta t_{Emin}$ e aos quais atribui-se um passo de tempo $2 \Delta t_{Emin}$, e assim sucessivamente.

3- Finalmente, recalcula-se o passo de tempo dos elementos (Δt_G), considerando que cada elemento tem um passo igual ao menor dos passos de todos os nós do elemento.

O esquema de subciclos implementado apresenta três contadores de tempo: o primeiro para o tempo global e os outros dois contadores registram o tempo para os nós e os elementos. Os grupos de elementos e nós são atualizados no tempo sempre que os contadores de tempos dos mesmos sejam inferiores ou iguais ao tempo corrente no ciclo.

A fim de esclarecer este procedimento, analisa-se um exemplo representado num sistema de coordenadas unidimensionais vs. tempo. Considera-se uma malha com cinco elementos unidimensionais lineares, como mostrado na Figura 4.1. Esta malha têm três grupos de elementos ($g = 1, 2, 3$) com os seguintes valores iniciais de incrementos de tempo: $1\Delta t$, $2\Delta t$, $2\Delta t$, $4\Delta t$ e $4\Delta t$. Depois de aplicar os passos 1, 2 e 3 chega-se aos seguintes incrementos de tempo para os grupos de nós e elementos, $\Delta t_N = \{1, 1, 2, 2, 4, 4\}$ e $\Delta t_G = \{1, 1, 2, 2, 4\}$, respectivamente, como se indica na Figura 4.1. Vale salientar que para esta situação o passo de tempo do ciclo é $t_c = 4\Delta t$.

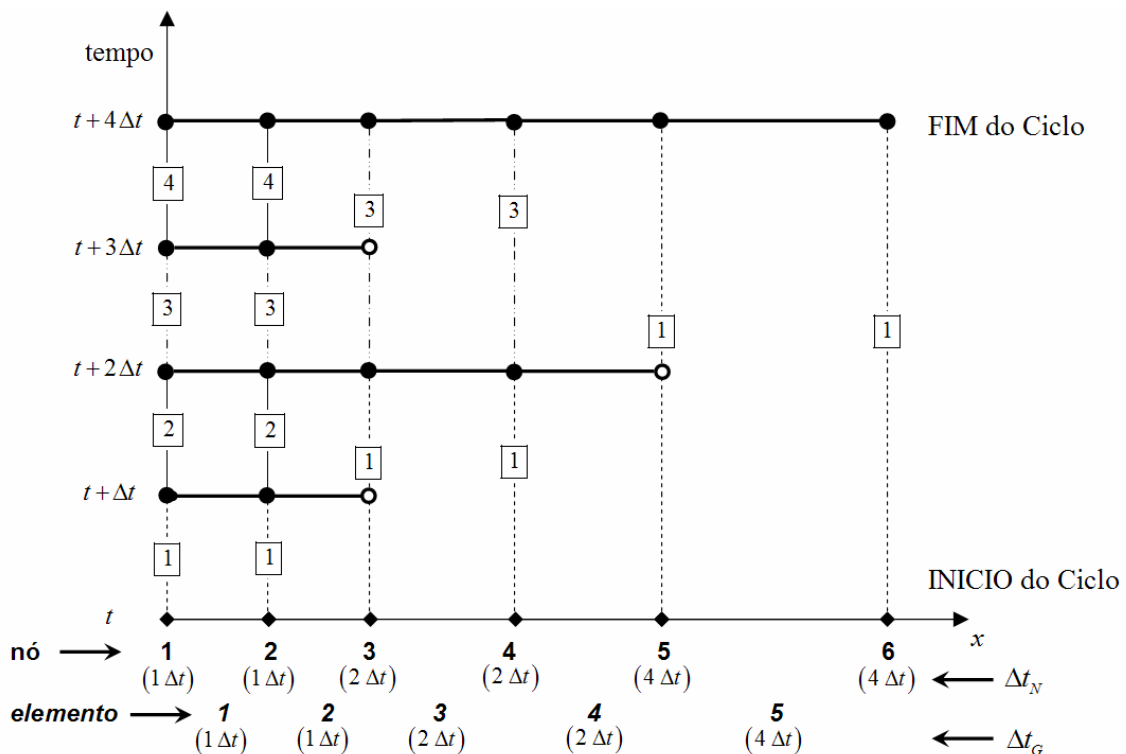


Figura 4.1: Diagrama da técnica de subciclos para exemplo unidimensional.

No primeiro passo de integração $\boxed{1}$, o tempo corrente no subciclo t_c é t , então todos

os grupos de nós e elementos são atualizados. Na Figura 4.1, os pontos de cor preta (\bullet) representam que as variáveis nos nós são atualizadas, os pontos de cor branca (\odot) representam um tempo no qual as variáveis nos nós são interpoladas linearmente entre dois tempos conhecidos. Os nós 1 e 2 são atualizados para $t + \Delta t$, os nós 3 e 4 para $t + 2\Delta t$ e os nós 5 e 6 para $t + 4\Delta t$. Os elementos 1 e 2 são atualizados para o tempo $t + \Delta t$, os elementos 3 e 4 para $t + 2\Delta t$ e o elemento 5 para $t + 4\Delta t$. Observe-se que tanto o elemento 5 quanto os nós 5 e 6 precisam somente de um ciclo de atualização para finalizar o ciclo, ou seja, estes nós e elementos são integrados com o máximo incremento de tempo da malha. No segundo passo de integração $\boxed{2}$, o tempo corrente no subciclo é $t + \Delta t$, por conseguinte apenas os grupos de nós e elementos com passos Δt são atualizados, ou seja, os nós 1 e 2 e os elementos 1 e 2. Para atualizar o elemento 2 é necessário o valor interpolado no nó 3. No terceiro subciclo $\boxed{3}$, o tempo corrente é $t + 2\Delta t$, logo são atualizados os nós 1, 2, 3 e 4 e os elementos 1, 2, 3 e 4. Finalmente, no quarto e último passo de integração unicamente os nós e elementos que pertencem ao primeiro grupo são atualizados.

A atualização dos diferentes grupos de nós e elementos ao longo de um ciclo está esquematicamente ilustrada na Figura 4.2. Neste exemplo, quando o tempo corrente $tc = t$, os grupos de 1 a 3 são atualizados. No próximo incremento de tempo, o tempo corrente vale $tc = t + \Delta t$, portanto, somente o grupo 1 é atualizado e assim se procede até completar o ciclo no tempo corrente $tc = 4\Delta t$. Observe-se que o subciclo 5 corresponde ao início de um novo ciclo.

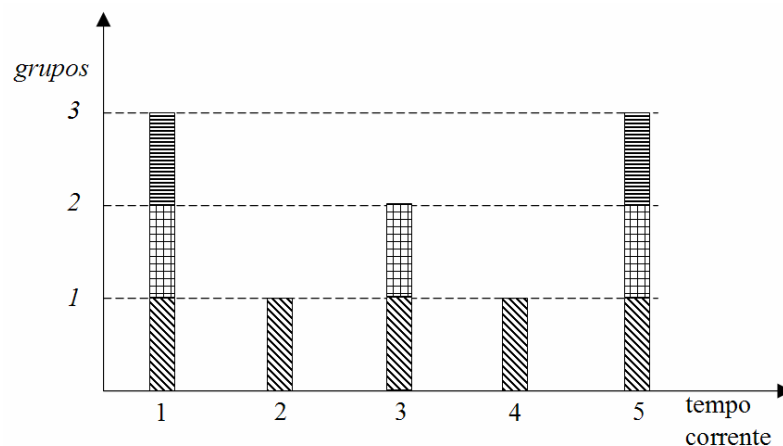


Figura 4.2: Diagrama de atualização dos elementos e nós na técnica de subciclos para um exemplo unidimensional.

O máximo ganho teórico de tempo de processamento (*speed-up*) que poderia ser

obtido pela técnica de subciclos, segundo apresentado por Belytschko e Gilbertsen [1992], e posteriormente usado por Teixeira e Awruch [2001] é dado por:

$$speed-up = \frac{t^{ssc}}{t^{sc}} = \frac{NSC}{\sum_{k=1}^{NSC} PESC_k / 100} \quad (4.3)$$

onde, t^{ssc} e t^{sc} são os tempos requeridos para resolver o problema, empregando um passo de tempo uniforme e a técnica de subciclos, respectivamente. O número de subciclos é NSC e $PESC_k$ é a porcentagem de elementos atualizados no ciclo k . Neste caso, o número de subciclos é $NSC = 4$ e as porcentagens de elementos para os grupos (1, 2 e 3) são 40%, 40% e 20%. Portanto, o máximo ganho teórico de tempo de processamento é 1.54.

Observa-se que segundo a Equação (4.3), o máximo ganho teórico de tempo de processamento aumentará à medida que cresça a porcentagem de elementos nos grupos com incremento de tempo maior.

Sendo assim, com o intuito de reduzir o tempo de processamento, foi implementada a técnica de subciclos para o esquema de um passo com elementos hexaédricos e tetraédricos.

4.2 Refinamento Adaptativo de Malhas

A precisão de um esquema numérico pode aumentar notavelmente quando os elementos da malha são refinados na região onde acontecem fortes gradientes na solução. Também, outra vantagem que pode ocorrer é o aumento da eficiência computacional quando se compara a solução da malha adaptada com uma malha refinada sem uma estratégia de adaptação automática de malhas.

O objetivo final do processo de adaptação de malhas é prever as características da malha *ótima*. Esta pode ser definida como a malha na qual o número de graus de liberdade requeridos para atingir um nível específico de erro é mínimo. Portanto, a escolha do indicador de erro é muito importante devido a que este tem que indicar as regiões onde se deve fazer a adaptação da malha, ou seja, que desta escolha dependerá a maior ou menor eficiência do método.

Os fenômenos físicos locais do escoamento são determinados com os indicadores de erro. Neste trabalho, os simples indicadores de erro levam em consideração as baixas

velocidades, a mudança de direção de velocidade, os gradientes de velocidade, os gradientes de pressão e os gradientes de temperatura. Estes indicadores são semelhantes aos apresentados por Argyris et al. [1990] e empregados por Popiolek e Awruch [2006] para a resolução de problemas de escoamentos incompressíveis. Os indicadores de erro podem ser usados individualmente ou simultaneamente para detectar regiões onde a malha se deve adaptar. O critério de adaptação empregado neste trabalho está fundamentado estatisticamente no desvio padrão de distribuições normais, conforme Kallinderis e Vijayan [1993] e Popiolek [2005].

Popiolek e Awruch [2006] empregaram o esquema para a resolução de problemas de escoamentos incompressíveis. Entretanto, neste trabalho, o esquema foi empregado extensamente para a análise de problemas tridimensionais no caso de escoamentos compressíveis.

4.2.1 Indicadores de erro

Os indicadores de erro servem de base para mapear globalmente o comportamento das soluções num determinado instante e seus valores permitem identificar as regiões do domínio computacional onde o processo de adaptação é necessário para obter uma solução de melhor qualidade.

Os indicadores de erro são calculados em função das variáveis primitivas (velocidade, massa específica, pressão e temperatura). Empregam-se os indicadores de erro de baixas velocidades, de mudança de direção de velocidade, de gradientes de velocidade, de pressão, de massa específica e de temperatura. Estes são os principais fenômenos físicos que se consideram nas simulações numéricas apresentadas neste trabalho.

O indicador de erro, que identifica a variação da intensidade dos vetores de velocidades no elemento, é definido pela seguinte expressão:

$$\theta_j = \left(\sum_{i=1}^4 |v_i| \right)^{-n} \quad \text{com } j = 1, 2, \dots, \text{nele} \quad (4.4)$$

onde, $|v_i|$ é o valor absoluto da velocidade nodal do j -ésimo elemento da malha, *nele* é o número total de elementos na malha e n é um parâmetro arbitrário. Neste trabalho foi adotado $n = 1, 0$.

A expressão que quantifica a mudança de direção da velocidade no interior do

elemento é dada por:

$$\theta_j = \sum_{i=1}^3 \varphi_i \quad \text{com } j = 1, 2, \dots, \text{ nele} \quad (4.5)$$

onde, φ_i é o ângulo que o vetor de velocidade resultante do vértice local I forma com cada um dos vetores resultantes dos demais vértices do tetraedro.

O indicador de erro baseado nos gradientes de velocidade é calculado pela expressão:

$$\theta_j = \left(\left| \frac{\partial v_l}{\partial l} \right| + \left| \frac{\partial v_t}{\partial l} \right| \right) h_j^2 \quad \text{com } j = 1, 2, \dots, \text{ nele} \quad (4.6)$$

onde, l é a direção do vetor gradiente de velocidade, v_l e v_t são as componentes de velocidade média ao longo de l e da normal t , respectivamente, e h_j é o comprimento característico do j -ésimo elemento.

Finalmente, o indicador de erro calculado em função dos gradientes de escalares no interior do elemento (gradientes de pressão, de massa específica e de temperatura) é definido por:

$$\theta_j = \left(\sum_{k=1}^4 \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \right)^{1/2} h_j \quad \text{com } j = 1, 2, \dots, \text{ nele} \quad (4.7)$$

onde, ϕ_k representa os valores nodais da variável escalar no k -ésimo nó, x_i representa as direções cartesianas de cada componente do vetor gradiente e h_j é o comprimento característico do j -ésimo elemento da malha.

Nas aplicações numéricas, um ou mais indicadores de erro podem ser considerados para definir as regiões onde a adaptação de malha deve ser necessária.

4.2.2 Critério de adaptação de malhas

Vários critérios de adaptação de malha têm sido propostos e entre eles podem ser

mencionados os apresentados por Oden et al. [1986], Devloo et al. [1987] e Ramakrishnan et al. [1990], entre outros. Normalmente, para a maioria dos critérios é calculado um valor máximo, ou um valor médio, ou uma norma dos dados gerados pelo indicador de erro. Elementos com um indicador de erro θ_j maior que o valor determinado pelo critério de adaptação devem ser submetidos ao processo adaptativo.

O critério apresentado por Kallinderis e Vijayan [1993] e Popiolek [2005] foi adotado neste trabalho. De acordo com este critério, devem ser refinados os elementos que satisfazem a seguinte condição:

$$\theta_j > (\bar{\theta} + \omega \theta_{sd}) \quad \text{com } j = 1, 2, \dots, nele \quad (4.8)$$

onde, $\bar{\theta}$ é a média aritmética, o parâmetro arbitrário ω é usado para controlar qualitativa e quantitativamente os refinamentos e θ_{sd} é o desvio padrão do conjunto de dados obtido via indicador de erro, conforme a seguinte expressão:

$$\theta_{sd} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nele} (\theta_i - \bar{\theta})^2}{nele}} \quad (4.9)$$

Considerando que os indicadores de erro podem ser representados por distribuições Gaussianas (ou normais), três grupos de elementos podem ser identificados, como se indica na Figura 4.3. O primeiro grupo é formado pelos elementos cujos indicadores de erro $\theta_j < (\bar{\theta} - \omega \theta_{sd})$ são considerados de alta qualidade. No segundo grupo estão os elementos de boa qualidade e se encontram na região central da curva, ou seja, $(\bar{\theta} - \omega \theta_{sd}) \leq \theta_j \leq (\bar{\theta} + \omega \theta_{sd})$. O terceiro grupo de elementos é formado pelos elementos de má qualidade por apresentarem indicadores de erro $\theta_j > (\bar{\theta} + \omega \theta_{sd})$ e devem ser submetidos a um processo de refinamento. Deve-se notar que a medida que ω aumenta, menor é o número de elementos que deverão ser refinados pois, teoricamente, os elementos a serem refinados encontram-se à direita de $\bar{\theta} + \omega \theta_{sd}$.

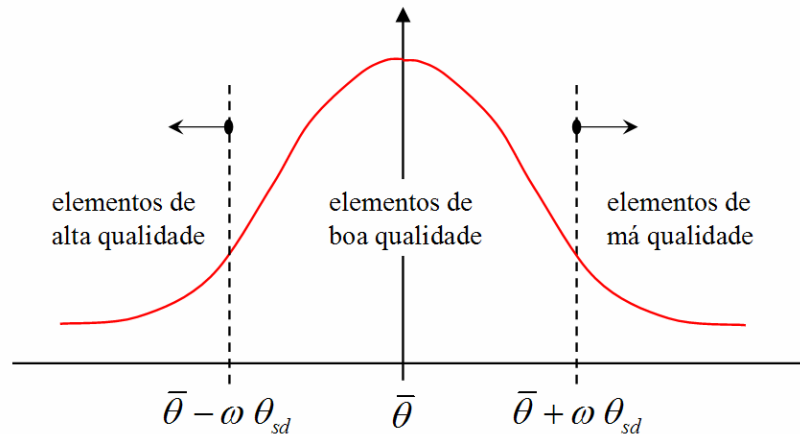


Figura 4.3: Distribuição gaussiana dos indicadores de erro.

4.2.3 Refinamento de elementos tetraédricos

Uma das principais fases da estratégia de adaptação de malhas é a subdivisão dos elementos. Cuidados especiais devem ser tomados para propiciar a construção de uma malha consistente e cujos elementos apresentem boa qualidade geométrica.

Os elementos tetraédricos, identificados para serem refinados pela análise estatística do indicador de erro, são subdivididos em oito novos elementos. Esta subdivisão é chamada de refinamento regular do tipo 1:8. O elemento a ser refinado é chamado de *pai* e os elementos resultantes da subdivisão são chamados de *filhos*.

O refinamento regular é realizado, conforme mostrado na Figura 4.4, através dos seguintes passos:

- 1) primeiramente, as seis arestas do elemento *pai* são subdivididas pelo ponto médio, gerando seis novos nós;
- 2) em seguida, com cada um dos nós dos vértices do elemento *pai* e três nós (recém criados) pertinentes às três arestas que compartilham cada um dos vértices, gera-se um elemento e assim são criados os quatro primeiros elementos filhos;
- 3) do octaedro restante determinam-se os dois nós que geram a menor diagonal;
- 4) determinada a menor diagonal que define uma nova aresta, os outros quatro elementos filhos ficam definidos geometricamente pelo arranjo dos nós do octaedro.

Executados os procedimentos de refinamentos regulares, restam somente os elementos que possuem no máximo três arestas subdivididas. Nestes elementos são efetuados

refinamentos denominados de irregulares, realizados sem a criação de nós. Os refinamentos irregulares são utilizados para o fechamento do esquema de refinamento, propiciando construir uma malha consistente e, ao mesmo tempo, suavizando a transição entre elementos refinados e não refinados.

Assim, se um elemento tem uma única aresta subdividida, então ele é refinado em dois novos elementos, denominado de refinamento irregular do tipo 1:2. Um exemplo deste tipo de refinamento é representado na Figura 4.4. Por outro lado, quando o elemento possui duas arestas subdivididas, duas situações podem ocorrer, as quais estão exemplificadas na Figura 4.4. Na primeira situação, se as duas arestas subdivididas pertencem a uma mesma face, é realizado o refinamento irregular de tipo 1:3. A segunda situação é quando as arestas subdivididas são opostas. Neste caso, o refinamento irregular é do tipo 1:4, conforme Figura 4.4 especificado por 1:4a. Finalmente, quando um elemento possui três arestas subdivididas, o refinamento irregular é do tipo 1:4. Três exemplos deste tipo de refinamento estão mostrados na parte inferior da Figura 4.4: (a) quando as três arestas subdivididas pertencem a uma mesma face; (b) quando as três arestas subdivididas possuem um nó comum e (c) para as demais situações.

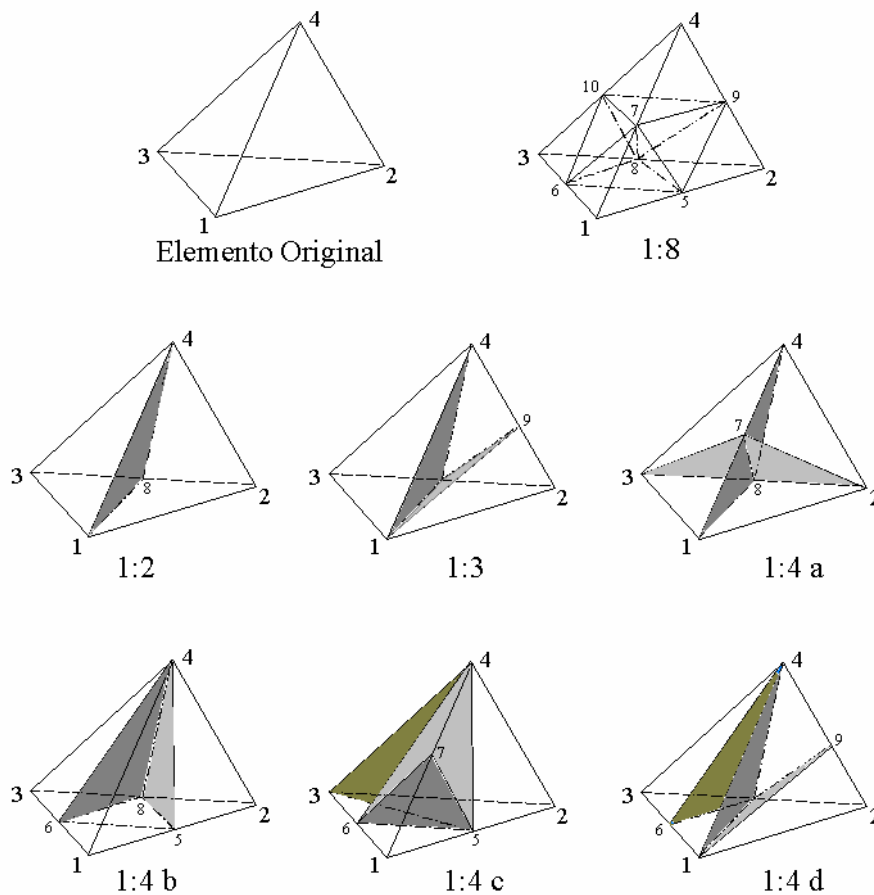


Figura 4.4: Elemento original e tipos de refinamentos utilizados no presente trabalho.

È fundamental que a fidelidade geométrica dos contornos sólidos seja mantida durante o processo de refinamento, portanto, neste trabalho todos os novos nós gerados neste processo são projetados à geometria original.

5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Com o objetivo de validar e demonstrar a capacidade de predição dos diferentes algoritmos implementados foram simulados vários problemas típicos da dinâmica dos fluidos computacional, abrangendo desde o regime subsônico até o hipersônico. Os exemplos aqui estudados são divididos em quatro seções principais, como segue:

Inicialmente, são feitos estudos comparativos entre os diferentes esquemas implementados e o tipo de malha (estruturada e não-estruturada) empregada. Os principais objetivos neste item são: verificar a estabilidade, determinar a ordem de precisão e medir o erro através de duas normas (L_1 e L_2) dos diferentes códigos computacionais implementados. Como também, validar os códigos para escoamentos bidimensionais não-viscosos (reflexão de um choque oblíquo) e viscosos laminares (aerofólio).

A segunda seção analisa os problemas de escoamentos incompressíveis viscosos e não-viscosos. Nesta seção, apresentam-se a validação dos esquemas implementados para escoamentos incompressíveis viscosos bidimensionais (cilindro, aerofólio), não-viscosos (superfície com curvatura e aerofólio) e viscosos tridimensionais (esfera).

A terceira seção apresenta a validação dos códigos computacionais desenvolvidos para escoamentos compressíveis em regime transônico, supersônico e hipersônico. Os exemplos analisados foram: uma asa delta, um conjunto esfera-cilindro-cone e a placa plana com rampa. O esquema de adaptação de malhas e a técnica de subciclos foram empregados e validados para o primeiro e terceiro exemplo.

Na última seção, apresentam-se os resultados obtidos para um escoamento não-viscoso e viscoso ao redor de uma configuração asa-fuselagem e para um escoamento viscoso sobre uma configuração asa-canard-fuselagem. Em ambos exemplos, empregaram-se o esquema de adaptação de malha e a técnica de subciclos.

Todos os exemplos estudados foram discretizados tridimensionalmente, porém, nos problemas bidimensionais (2-D) tem-se um elemento na direção z e aplicam-se condições de contorno as quais permitem modelar um escoamento bidimensional.

Finalmente, assume-se que o escoamento tem uma relação de calor específico e número de Prandtl igual a 1,40 e 0,72, respectivamente.

5.1 Reflexão de um choque oblíquo

Este problema consiste na reflexão de um choque oblíquo sobre uma placa plana num escoamento bidimensional não-viscoso em regime supersônico. A existência da solução analítica possibilita um estudo rigoroso das principais características dos algoritmos implementados e dos tipos de malhas empregadas. Verificam-se a precisão espacial e a precisão da simulação numérica medida por diferentes normas.

No domínio retangular $\{0 \leq x \leq 4,10; 0 \leq y \leq 1,0\}$ são impostas as condições de contorno indicadas na Figura 5.1. Por outro lado na aresta AD tem-se $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$ e no plano de saída CD as condições de contorno são livres. A solução exata é dada por um choque com 29° de ângulo de incidência, o ângulo de reflexão é $23,28^\circ$ e a solução atrás da segunda onda de choque é $\rho = 2,687$, $p = 2,934$, $M = 1,942$, $v_1 = 2,401$ e $v_2 = v_3 = 0$. Empregam-se para a resolução do problema os esquemas de um passo e de dois passos (P2) com um coeficiente de amortecimento fictício igual a $CAF = 1,0$. Numa primeira etapa, empregam-se quatro malhas diferentes (M1, M2, M3 e M4) discretizadas com elementos hexaédricos (H) e tetraédricos (T), mantendo constante a razão de refinamento ($r = \Delta y / \Delta x = cte.$) entre elas, como sugerido por Salas [2006]. Na Figura 5.2, mostram-se as malhas empregadas, sendo que as malhas de tetraedros são obtidas subdividindo cada elemento hexaédrico em cinco elementos tetraédricos. Na Tabela 5.1, estão apresentadas as características das malhas, o mínimo passo de tempo (Δt) adotado e a identificação de cada exemplo.

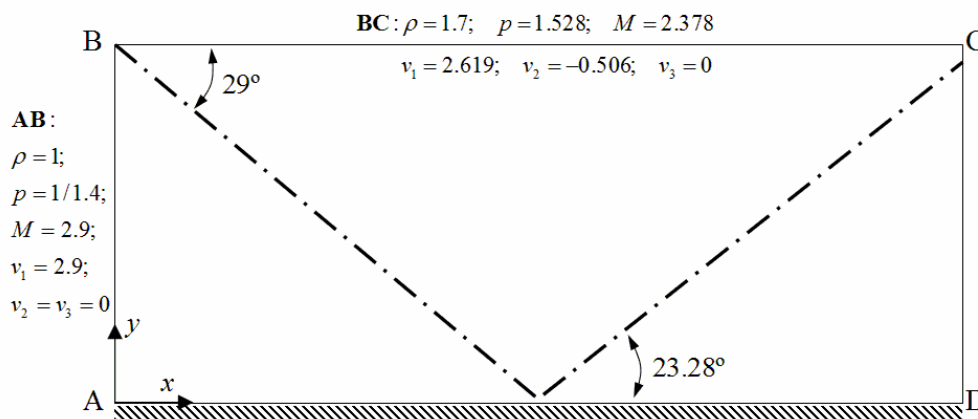


Figura 5.1: Domínio e condições de contorno para o problema de reflexão de um choque oblíquo.

malha	nós	elementos		Δt		tipo de esquema			
		hexa (H)	tetra (T)	hexa (H)	tetra (T)	hexa (H)		tetra (T)	
		um passo	dois passos	um passo	dois passos				
M1	21 x 11 x 2	200	1000	0.002	0.001	M1H	M1HP2	M1T	M1TP2
M2	41 x 21 x 2	800	4000	0.001	0.001	M2H	M2HP2	M2T	M2TP2
M3	61 x 31 x 2	1800	9000	0.0008	0.0007	M3H	M3HP2	M3T	M3TP2
M4	81 x 41 x 2	3200	16000	0.0006	0.0005	M4H	M4HP2	M4T	M4TP2
M5	3828	--	14580	--	0.0003	--	--	M5T	M5TP2
M6	6356	--	27595	--	0.0001	--	--	M6T	M6TP2
M7	41 x 21 x 2	800	--	0.0005	--	M7H	M7HP2	--	--

Tabela 5.1: Dados das malhas para o problema de reflexão de um choque oblíquo.

Compara-se na Figura 5.3, as distribuições de pressão para a malha M4 com os dois tipos de elementos e esquemas implementados. Nota-se que as malhas de hexaedros (M4H e M4HP2) apresentam um melhor desempenho com relação às malhas de tetraedros, tanto na distribuição de pressão como na suavidade das linhas de pressão constante. Estas mesmas tendências também foram observadas com as malhas M1, M2 e M3 [Bono e Awruch, 2007].

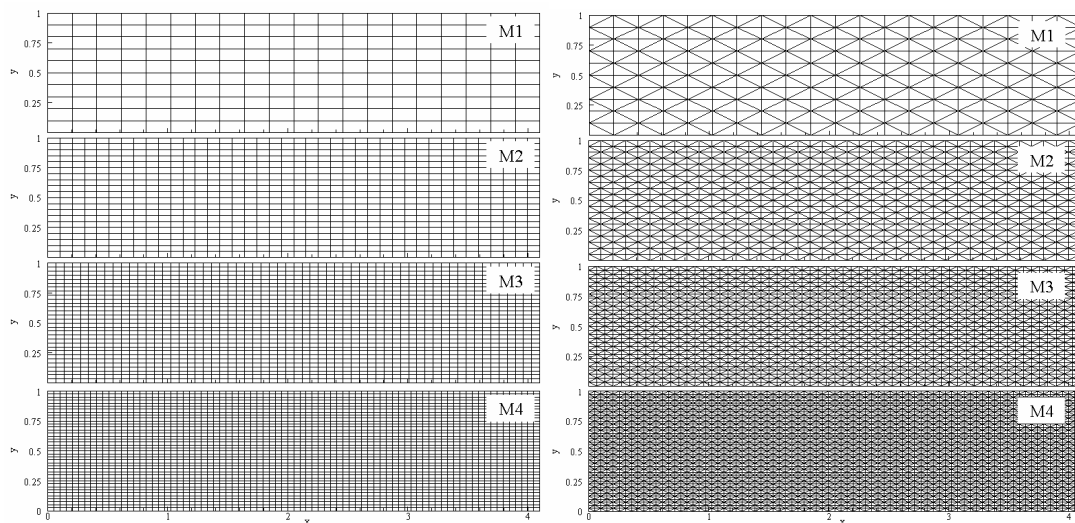


Figura 5.2: Malhas de hexaedros e tetraedros empregadas para o problema de reflexão de um choque oblíquo.

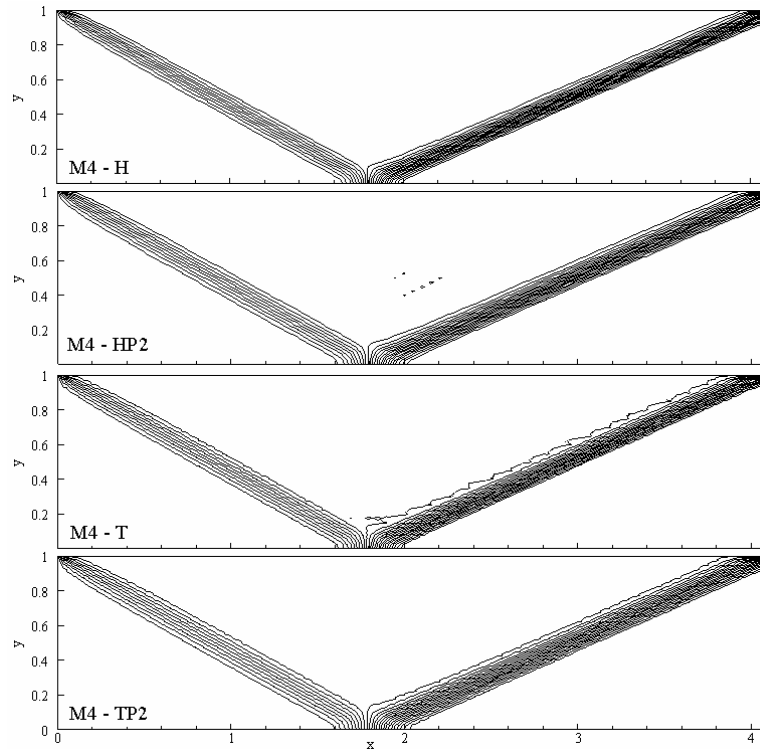


Figura 5.3: Distribuição de pressão para a malha M4 com elemento hexaédrico (H) e tetraédrico (T), com esquemas de um passo e dois passos (P2).

Nas Figuras 5.4 e 5.5, podem-se ver a distribuição da massa específica para $y = 0,25$ nas malhas M1, M2, M3 e M4 de hexaedros e tetraedros, obtidas com os esquemas de um passo e dois passos, respectivamente. Vale salientar que a medida que se aumenta o número de elementos, a solução numérica tende a aproximar-se da solução exata.

Pode-se ver que a solução com elemento hexaédrico sempre apresenta uma resposta suave e com ótima concordância com a solução exata, independentemente do tipo de malha empregada. Já, as soluções com elementos tetraédricos mostram algumas oscilações, principalmente atrás da segunda onda de choque. Estas oscilações se reduzem conforme o número de elementos aumenta, embora os valores das variáveis no plano de saída tenham um erro de aproximadamente 12 % para as três malhas iniciais (M1, M2 e M3) de tetraedros. No caso da malha mais refinada (M4), somente o esquema de um passo com tetraedro (T) ainda apresenta um erro nos valores das variáveis no plano de saída (aresta CD) de 7 % aproximadamente.

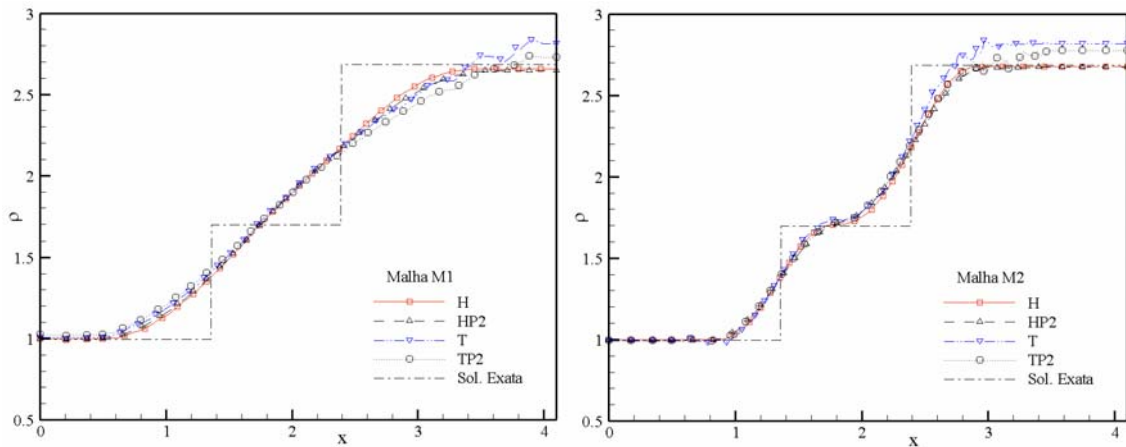


Figura 5.4: Distribuição da massa específica para $y = 0,25$ com a malha M1 e M2 com elemento hexaédrico (H) e tetraédrico (T), com esquemas de um passo e dois passos (P2).

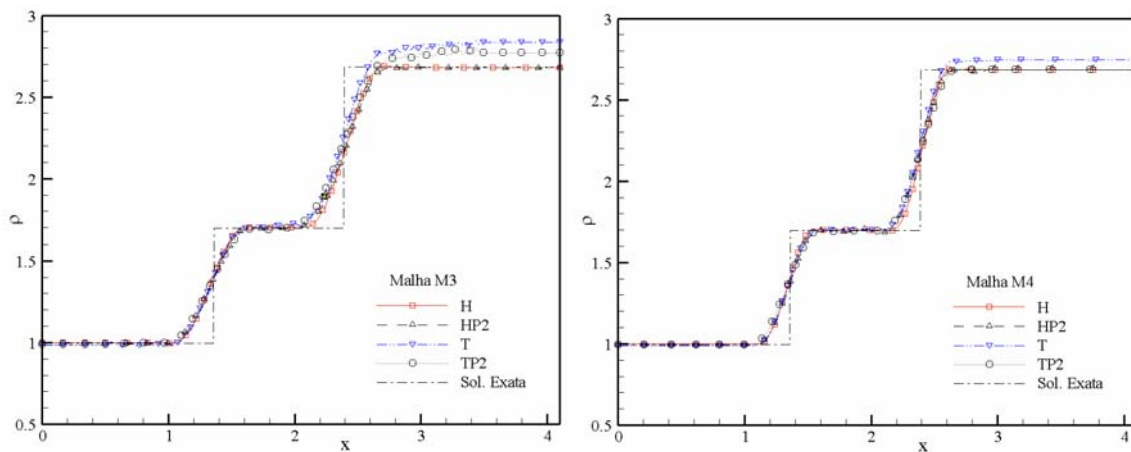


Figura 5.5: Distribuição da massa específica para $y = 0,25$ com a malha M3 e M4 com elemento hexaédrico (H) e tetraédrico (T), com esquemas de um passo e dois passos (P2).

Para cada uma das combinações malha/tipo de elemento/esquema de resolução (M-TE-E), conforme Tabela 5.1, foram calculadas as normas do erro L_1 e L_2 . Para a massa específica as normas podem ser escritas como:

$$L_1 = \frac{1}{nno} \sum_{i=1}^{nno} \left| \frac{\rho_i - \rho_i^e}{\rho_i^e} \right| \quad \text{e} \quad L_2 = \sqrt{\frac{1}{nno} \sum_{i=1}^{nno} \left(\frac{\rho_i - \rho_i^e}{\rho_i^e} \right)^2} \quad (5.1)$$

onde, ρ^e é a solução exata da massa específica do problema e nno é o número de nós da malha.

Uma comparação das normas do erro entre as diferentes combinações malha/tipo de elemento/esquema (M-TE-E), apresenta-se na Tabela 5.2. Observa-se que a malha de hexaedros apresenta um melhor desempenho em comparação com a malha de tetraedros independentemente

do esquema adotado. Para o caso de cada elemento, pode-se ver que o elemento hexaédrico (H) sempre apresenta um menor valor de erro com o esquema de um passo, porém o elemento tetraédrico (T) tem melhor desempenho com o esquema de dois passos.

As curvas de convergência geradas a partir da Tabela 5.2 são apresentadas na Figura 5.6, considerando as normas do erro L_1 e L_2 da massa específica. Com a finalidade de poder comparar as malhas de hexaedros e tetraedros, adota-se como medida do comprimento característico da malha a relação $h = (1/nno)^{1/3}$, proposta por Baker [2005]. Todos os esquemas mostram monotonicidade, reduzindo o erro na medida que se diminui o tamanho do elemento. O erro com a norma L_1 (erro médio) resulta maior que o erro associado à norma L_2 , devido aos altos gradientes localizados no problema [Roache, 1997].

malha	erro Log(L1)				erro Log(L2)			
	hexa (H)		tetra (T)		hexa (H)		tetra (T)	
	um passo	dois passos	um passo	dois passos	um passo	dois passos	um passo	dois passos
M1	0.117	0.132	0.150	0.159	0.00894	0.00959	0.01011	0.01070
M2	0.0665	0.0758	0.1134	0.0992	0.00327	0.00352	0.00415	0.00375
M3	0.0426	0.0497	0.0865	0.0748	0.00171	0.00184	0.00225	0.00208
M4	0.0329	0.0397	0.0627	0.0523	0.00112	0.00121	0.00139	0.00131

Tabela 5.2: Erro para as diferentes combinações malha/tipo de elemento/esquema no problema de reflexão de um choque oblíquo.

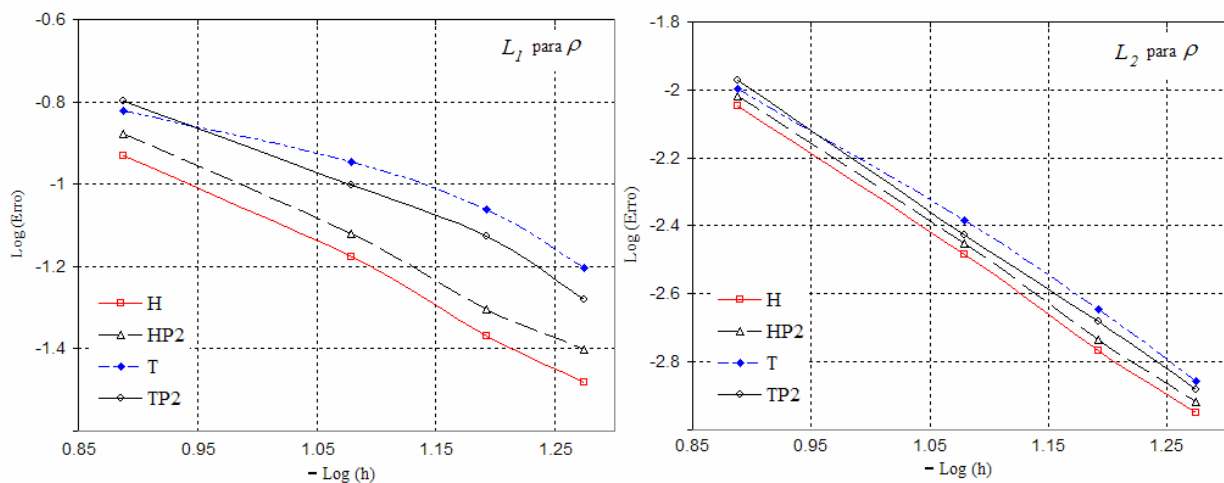


Figura 5.6: Estudo de convergência para os diferentes elementos e esquemas de solução no problema de reflexão de um choque oblíquo.

O esquema de um passo com elementos tetraédricos (T) apresenta um comportamento diferente para a primeira malha (M1) devido à quantidade de elementos não ser suficientes.

A ordem de precisão p do esquema pode ser obtida graficamente na Fig. 5.6, ou através da seguinte expressão proposta por Roache [1994]:

$$p = \frac{\ln(F_2/F_1)}{\ln(h_2/h_1)} \quad (5.2)$$

onde, F é a norma do erro, h é o comprimento característico da malha [Baker, 2005] e 1 e 2 denotam diferentes malhas sucessivas. Na Tabela 5.3, mostra-se a ordem de convergência obtida com a Eq. (5.2), considerando as duas últimas malhas (M3 e M4) para as diferentes combinações tipo de elemento/esquema (TE-E).

TE-E	ordem p	
	L1	L2
H	1.378	2.257
HP2	1.213	2.241
T	1.715	2.588
TP2	1.907	2.470

Tabela 5.3: Ordem de precisão da malha avaliada com as normas L_1 e L_2 para o problema de reflexão de um choque oblíquo.

A ordem de convergência dada pela norma L_1 mostra-se inferior ao valor teórico de segunda ordem do esquema, porém com a norma L_2 obtém-se um valor ligeiramente superior. Deve-se observar que sempre o elemento tetraédrico apresenta um maior valor da ordem de precisão em comparação com os esquemas que usam o hexaedro. Uma das possíveis causas pela qual se obtém um valor inferior a dois com a norma L_1 pode ser devido ao fato do problema analisado não apresentar uma solução suave (existem fortes descontinuidades associadas à onda de choque) [Slater et al., 2000].

Na próxima etapa avalia-se o comportamento dos esquemas propostos usando malhas de tetraedros não estruturadas e uma malha de hexaedro distorcida. Na Figura 5.7, mostram-se as três malhas analisadas: na primeira malha de tetraedro tem-se uma distribuição de elementos relativamente uniforme, na segunda malha foram refinadas as regiões de maiores gradientes e, finalmente, a terceira malha (igual à malha M2 em número e distribuição de elementos hexaédricos) foi distorcida em todo o domínio.

As distribuições do número de Mach para a malha de hexaedros M7 é apresentada na Figura 5.8. No caso da malha M6 fica evidente que uma maior concentração de elementos na

região de altos gradientes reduz o valor do erro com a norma L_2 , conforme Tabela 5.4.

malha	erro Log(L1)				erro Log(L2)			
	hexa (H)		tetra (T)		hexa (H)		tetra (T)	
	um passo	dois passos	um passo	dois passos	um passo	dois passos	um passo	dois passos
M5	--	--	0.221	0.218	--	--	0.00664	0.00658
M6	--	--	0.299	0.288	--	--	0.00524	0.00501
M7	0.0771	0.0879	--	--	0.00358	0.00386	--	--

Tabela 5.4: Erro para as malhas M5, M6 e M7 no problema de reflexão de um choque oblíquo.

A distorção da malha de hexaedros (M7) modifica a distribuição do número do Mach no domínio, como pode ser observado na Figura 5.8. Isto mostra que uma baixa qualidade da malha de hexaedros interfere na solução, apesar do esquema de resolução ser robusto.

Na Tabela 5.4, observa-se que sempre as malhas não-estruturadas de tetraedros (M5 e M6) apresentam um erro maior que as malhas estruturadas M1, M2, M3 e M4 (Tabela 5.2) com tetraedros regulares, portanto fica evidente que o tamanho e ordenamento dos elementos são importantes no objetivo de obter uma solução com boa precisão. Comparando o erro associado às malhas M2 (não distorcida) e M7 (com distorção), pode-se concluir que a distorção da malha introduz um erro consideravelmente importante.

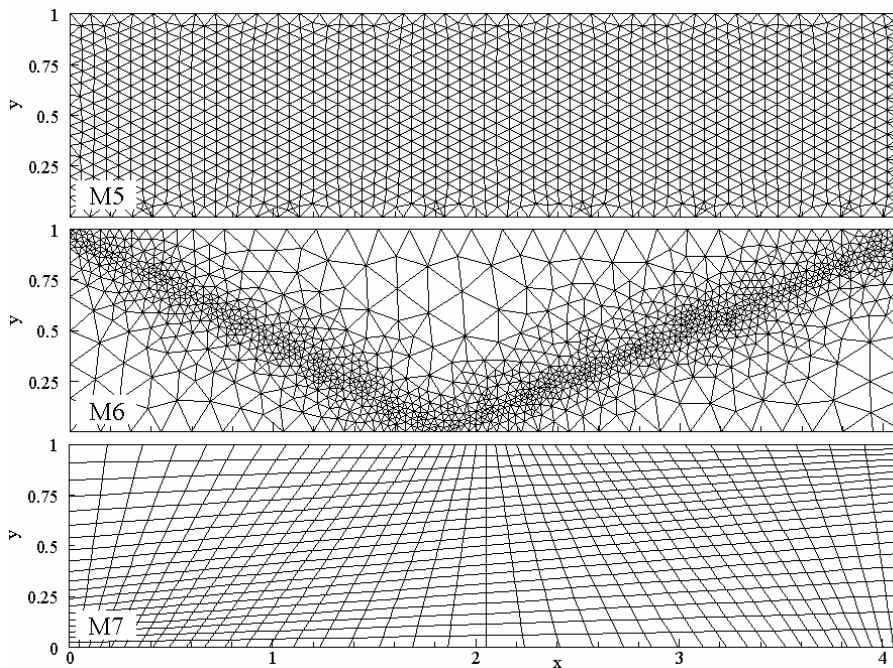


Figura 5.7: Malhas M5, M6 e M7 para o problema de reflexão de um choque oblíquo.

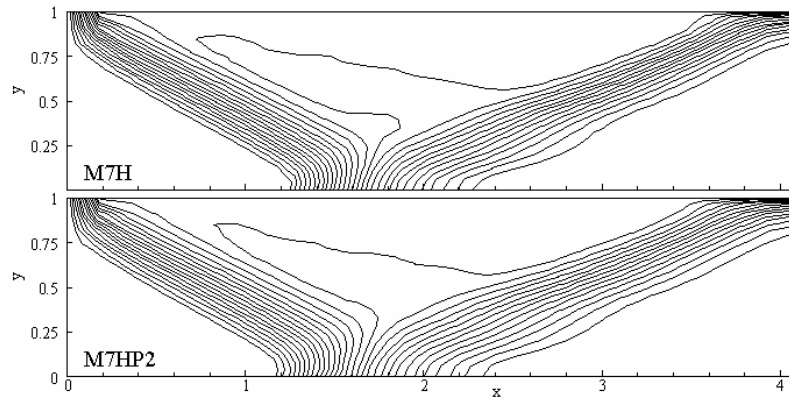


Figura 5.8: Distribuição do número de Mach para a malha M7 com esquemas de um passo e dois passos (P2).

Os resultados apresentados na Figura 5.6 mostram que os menores valores de erro estão associados às malhas de hexaedros, sendo que o esquema de um passo apresenta melhor precisão em comparação com o esquema de dois passos. As malhas de tetraedros apresentam um erro levemente maior quando comparadas com as malhas de hexaedros, porém o menor erro das malhas de tetraedros obtém-se com o esquema de dois passos. As malhas de hexaedros e tetraedros apresentaram ordens de precisão inferiores à ordem teórica esperada quando as mesmas foram determinadas com a norma L_1 . Entretanto, com a norma L_2 apresentaram um valor levemente superior à ordem teórica. Todos os resultados obtidos com os diferentes esquemas e elementos mostraram-se estáveis e livres de oscilações nas proximidades das ondas de choque.

5.2 Escoamento em torno de um aerofólio com $M = 0,8$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$

Este problema trata da passagem de um escoamento transônico difusivo ($M = 0,80$, $Re = 500$) sobre um aerofólio NACA 0012 de corda unitária com o ângulo de ataque da corrente-livre igual a $\alpha = 10^\circ$, como é mostrado esquematicamente na Figura 5.9. O domínio tem como dimensões $L_1 = 20,61$, $L_2 = 25$, $H = 20$ e $0,1$ na direção perpendicular, sendo que o bordo de ataque do aerofólio tem como coordenadas $(0,0; 0,0)$. As condições da corrente-livre são $V_\infty = (0,7878; 0,1389; 0,0)$, $\rho_\infty = 1,0$, $e_\infty = 2,1057$ e foram aplicadas nas arestas AB, CD e AD. Na aresta BC as condições de contorno (CC) são livres com exceção da pressão que tem um valor prescrito de $p_\infty = 0,71428$. A superfície do aerofólio é adiabática e prescreve-se a condição de não deslizamento para a velocidade. Os valores da corrente-livre foram

considerados como condições iniciais e aplicados em todos o nós do domínio.

Para a resolução do problema, empregam-se três malhas (M1, M2 e M3) com elementos hexaédricos e tetraédricos com os dois esquemas implementados; na Tabela 5.5 tem-se mais informação com relação aos exemplos estudados. O coeficiente de amortecimento fictício (CAF) vale 0,9 para o esquema de um passo e 0,8 no esquema de dois passos. Na coluna *nós Aerof.* da Tabela 5.5, indica-se a quantidade de nós sobre o aerofólio no caso bidimensional.

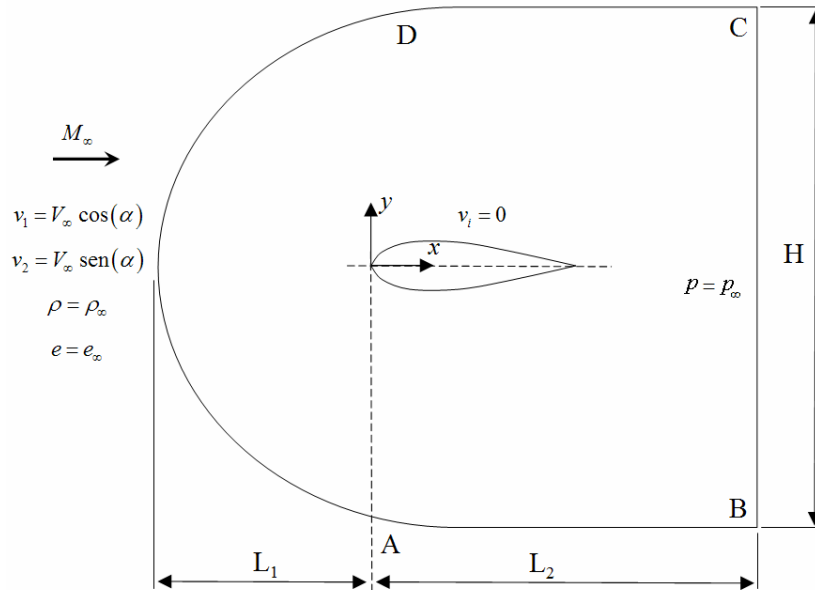


Figura 5.9: Geometria e condições de contorno sobre o aerofólio.

malha	nós	nós Aerof.	elemento		Δt		tipo de de elemento			
			hexa (H)	tetra (T)	hexa (H)	tetra (T)	hexa (H)		tetra (T)	
			um passo	dois passos	um passo	dois passos				
M1	19680	160	9600	48000	0.0002	0.0001	M1H	M1HP2	M1T	M1TP2
M2	27860	240	13600	68000	0.0002	0.0001	M2H	M2HP2	M2T	M2TP2
M3	40450	320	19800	99000	0.0001	9E-05	M3H	M3HP2	M3T	M3TP2

Tabela 5.5: Discretização empregada para o problema do aerofólio com $M = 0,80$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$.

A distribuição de pressão e do número de Mach para a malha M1 com elementos hexaédricos usando os dois esquemas explícitos são comparados nas Figuras 5.10 e 5.11, respectivamente. Nota-se que praticamente não existe diferença entre os mesmos. Embora não tenham sido mostrados, há uma boa concordância com os resultados apresentados por Tang e Hafez [2001].

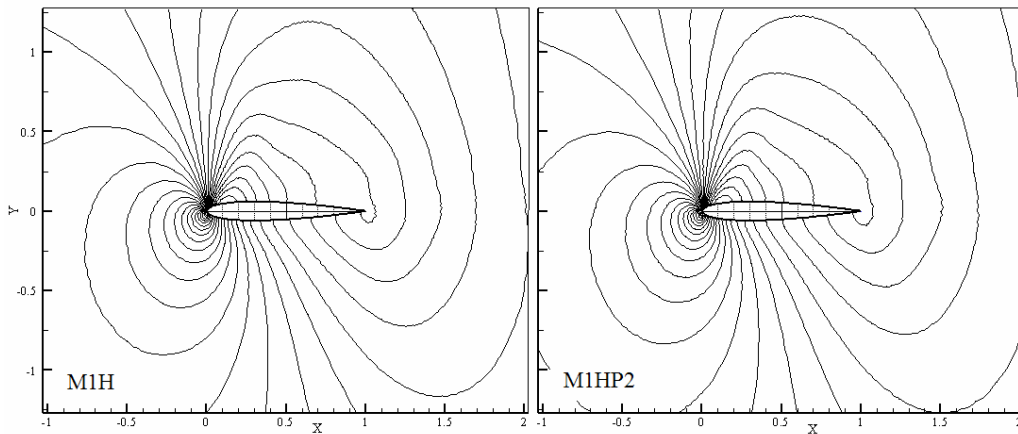


Figura 5.10: Distribuição da pressão sobre o aerofólio com $M = 0,80$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$.

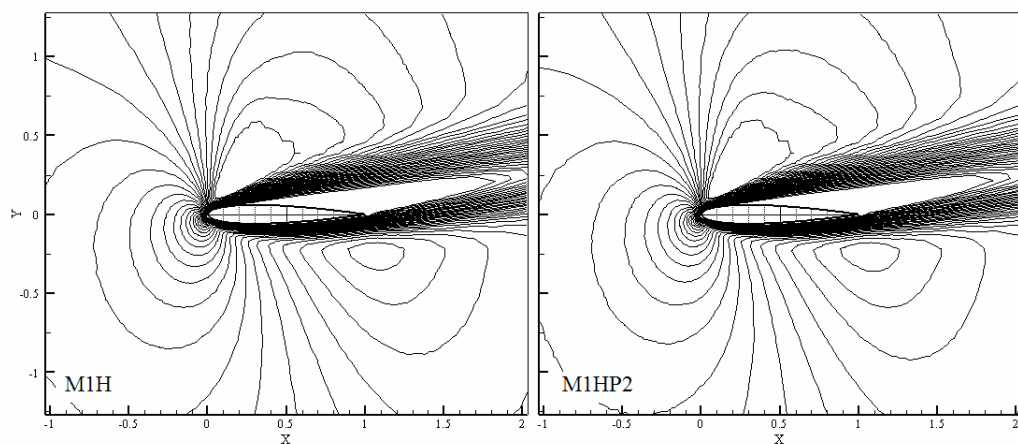


Figura 5.11: Distribuição do número de Mach sobre o aerofólio com $M = 0,80$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$.

A distribuição do coeficiente de pressão e do coeficiente de fricção obtida com o esquema de um passo e a malha M3 conjuntamente com os dados apresentados por Hafez e Wahba [2007] são dados na Figura 5.12.

Observa-se que existe uma boa concordância na distribuição do coeficiente de pressão obtida pelo presente método e os resultados de Hafez e Wahba [2007]. O coeficiente de fricção obtido com o esquema de um passo e ambos elementos (H e T) apresenta uma boa concordância com os resultados de Hafez e Wahba [2007] em uma ampla região do aerofólio. Nas regiões do bordo de ataque e de fuga existe uma discrepância devido a que a malha M3 não é suficientemente refinada nestas regiões; além do mais a formulação empregada por Hafez e Wahba [2007] está baseada num método não-viscoco/viscoso. Os valores negativos no C_f indicam que existe uma ampla região com escoamento separado no extradorso do aerofólio, veja-se a Figura 5.11.

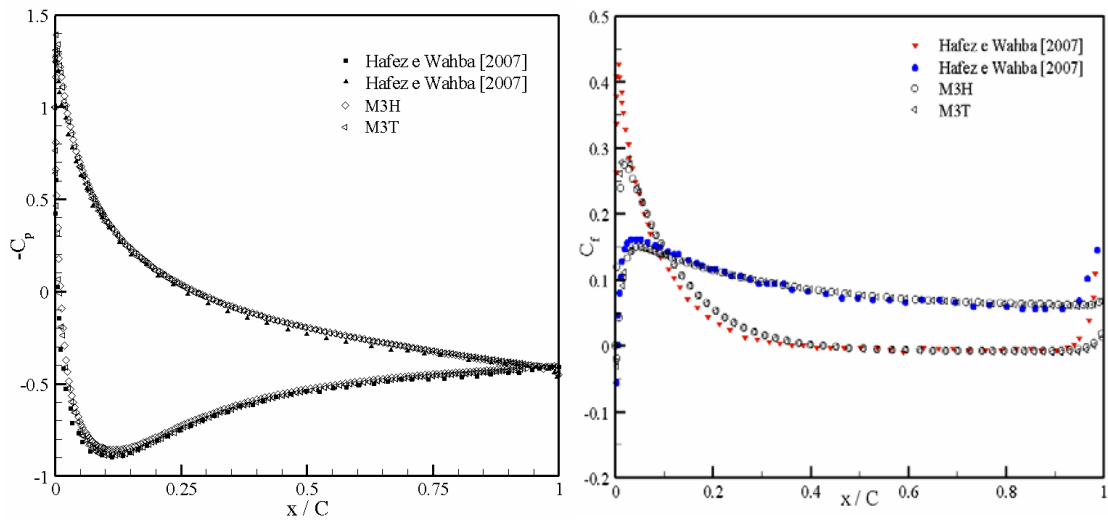
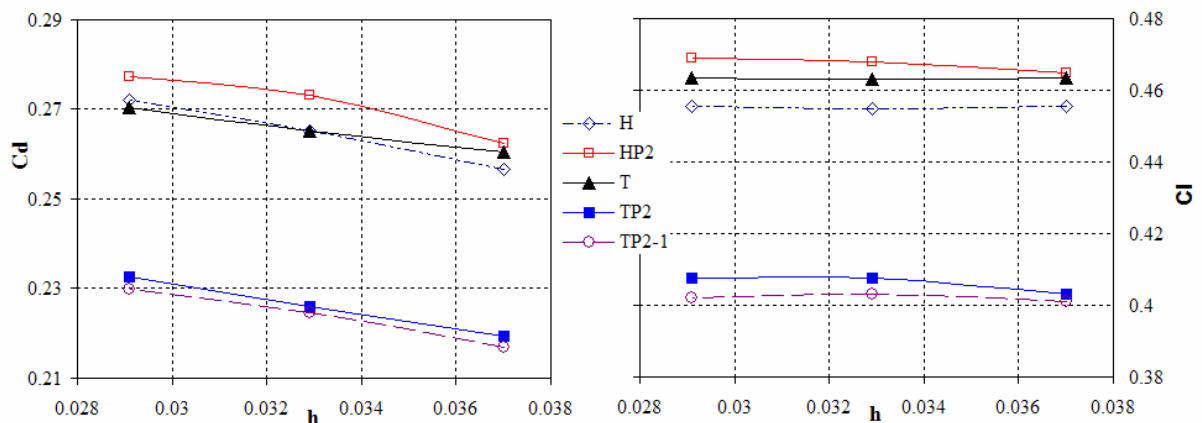


Figura 5.12: Distribuição do coeficiente de pressão e de fricção para o aerofólio com $M = 0,80$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$ na malha M3.

A variação do coeficiente de arrasto (C_d) e do coeficiente de sustentação (C_l) em função da densidade da malha são apresentadas na Figura 5.13 para os diferentes esquemas e elementos implementados. Como se pode observar ainda não foi lograda a independência da malha para o coeficiente de arrasto, entretanto, o coeficiente de sustentação mostra pouca variação entre as malhas M2 e M3.



Malha	C_d					C_l				
	H	HP2	T	TP2	TP2-1	H	HP2	T	TP2	TP2-1
M1	0,2565	0,2625	0,2605	0,2193	0,2168	0,4554	0,4647	0,4635	0,4032	0,4009
M2	0,2653	0,2732	0,2653	0,2261	0,2246	0,4549	0,4678	0,4632	0,4075	0,4032
M3	0,272	0,2772	0,2704	0,2325	0,2298	0,4555	0,469	0,4635	0,4076	0,4021

Figura 5.13: Variações dos coeficientes de arrasto (C_d) e sustentação (C_l) com a densidade da malha para o aerofólio com $M = 0,80$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$.

Os valores dos coeficientes de arrasto e sustentação apresentados por Forsyth e Jiang [1997] ficam dentro do intervalo, $0.2430 < C_d < 0.2868$ e $0.4145 < C_l < 0.5170$; nota-se que somente a combinação tetraedro e esquema de dois passos (TP2) apresenta valores inferiores aos definidos no intervalo. Inicialmente pensou-se que a discrepância associada à malha/esquema TP2 era causada pela viscosidade artificial, portanto, foi reduzido o valor da mesma de 0,80 para 0,40. Os valores obtidos (TP2-1) reduzem ainda mais os coeficientes de arrasto e sustentação como se pode ver na Figura 5.13.

Os históricos das variações do coeficiente de sustentação e do coeficiente de arrasto para as malhas M1 e M3 até o tempo adimensional $t = 26$ são dados na Figura 5.14. Pode-se ver que o coeficiente de sustentação praticamente não varia com o refinamento da malha, ao contrário, o C_d sofre uma variação importante, devido a que uma maior quantidade de elementos sobre o aerofólio e na região da camada limite permite determinar com melhor precisão as forças viscosas. O coeficiente de sustentação mostra uma leve oscilação quando se emprega o esquema de dois passos.

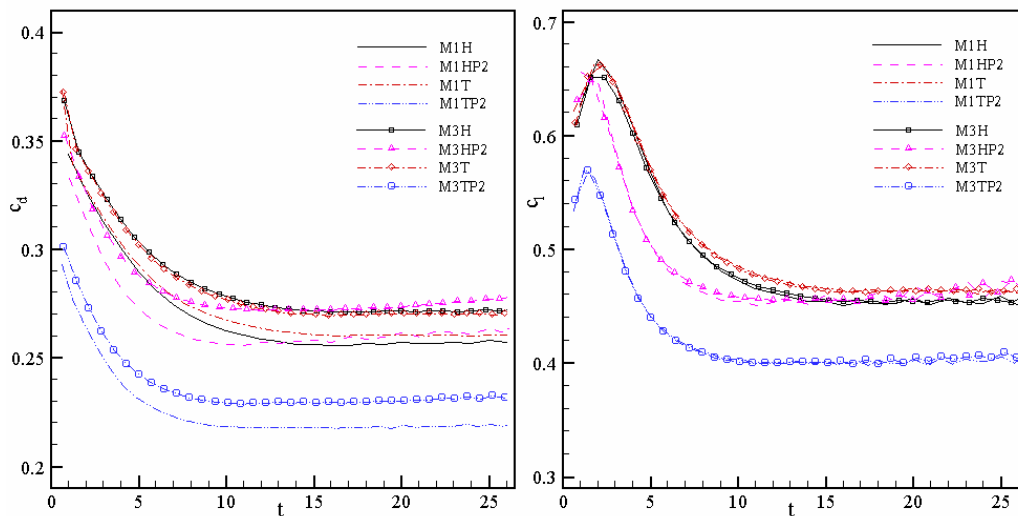


Figura 5.14: Histórico dos coeficientes de arrasto (C_d) e sustentação (C_l) para o aerofólio com $M = 0,80$, $Re = 500$ e $\alpha = 10^\circ$ nas malhas M1 e M3.

Os coeficientes de arrasto e de sustentação obtidos com as malhas de hexaedros (esquema de um passo e de dois passos) e malha de tetraedros com o esquema de um passo ficam dentro do intervalo de valores válidos apresentados por Forsyth e Jiang [1997]. Entretanto, os coeficientes determinados com a combinação dada pela malha de tetraedros e o esquema de dois passos são inferiores aos coeficientes de intervalo de valores válidos.

5.3 Escoamento sobre uma superfície com curvatura para $M = 0,10$

O primeiro exemplo a ser estudado com um escoamento incompressível consiste de uma superfície contendo uma curvatura de 5 % num escoamento não-viscoso. O domínio e as condições de contorno são mostrados esquematicamente na Figura 5.15a, sendo as dimensões $L_1 = L_2 = 20$, $H = 20$ e $0,1$ na direção perpendicular. As condições da corrente-livre são $V_\infty = (0,1;0,0;0,0)$, $\rho_\infty = 1,0$, $e_\infty = 1,7907$ e $p_\infty = 0,71428$, sendo elas aplicadas nas arestas AD, BC e CD. Finalmente, prescreve-se a condição de velocidade normal nula ($\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$) na aresta AB.

Para analisar este problema emprega-se o modelo numérico descrito no item (3.4) com uma malha de 8400 hexaedros e 17202 nós, concentrando os elementos na região da curvatura e perto da aresta AB, como se observa na Figura 5.15b. O incremento de tempo adimensional máximo foi 8×10^{-4} e considerou-se um coeficiente de amortecimento fictício igual a 5,0.

As distribuições do número de Mach e do coeficiente de pressão sobre a aresta AB conjuntamente com os dados obtidos por Nigro et al. [1997] são mostrados nas Figuras 5.16 e 5.17, respectivamente. Existe uma boa concordância entre os resultados obtidos pelo presente modelo e os apresentados por Nigro et al. [1997]. Como se pode ver, tanto a distribuição do número de Mach como a distribuição de pressão são simétricas com relação ao eixo y e isentas de oscilações.

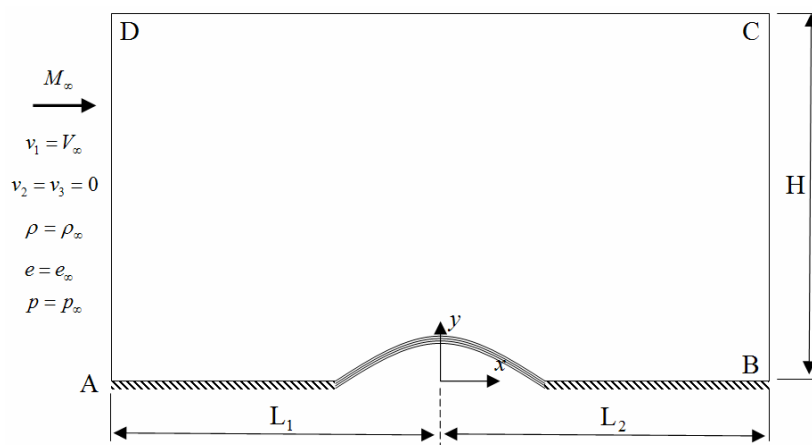


Figura 5.15a: Geometria e condições de contorno sobre uma superfície contendo uma curvatura de 5 % com $M = 0,10$.

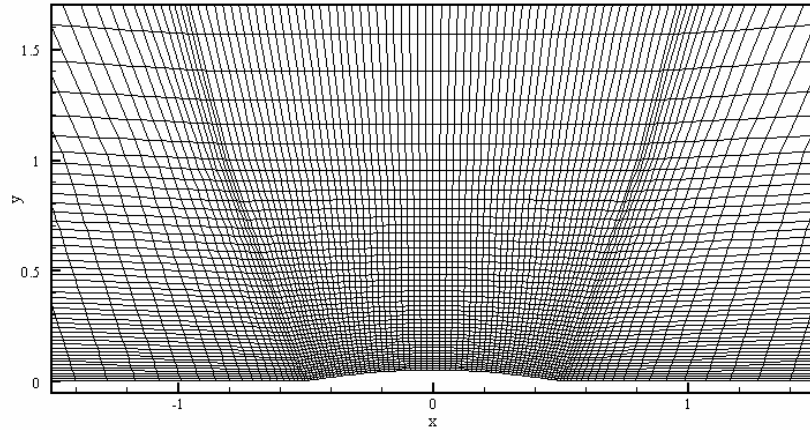


Figura 5.15b: Malha empregada para o problema da superfície contendo uma curvatura de 5 %.

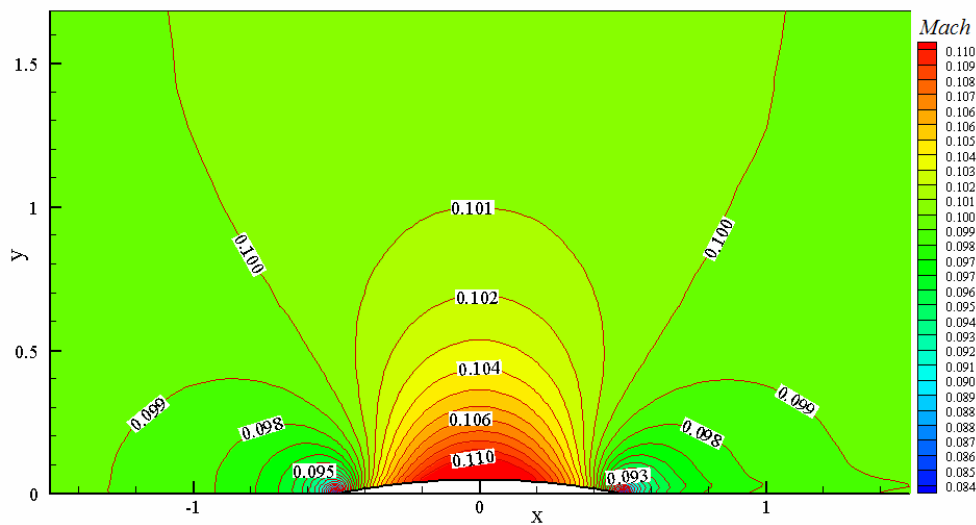


Figura 5.16: Distribuição do número de Mach sobre uma superfície contendo uma curvatura de 5 % com $M = 0,1$.

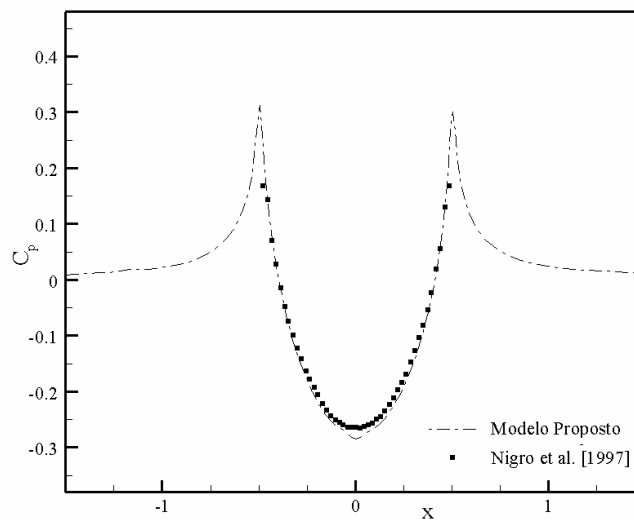


Figura 5.17: Distribuição do coeficiente de pressão sobre uma superfície contendo uma curvatura de 5 % com $M = 0,1$.

Os resultados numéricos obtidos para escoamento incompressível não-viscoso sobre uma superfície com curvatura demonstram que o emprego de pré-condicionamento pode ser adotado para obter soluções com boa precisão.

5.4 Escoamento ao redor de um cilindro com $Re = 40$ e 100

Estuda-se o escoamento sobre um cilindro de seção reta considerando $Re = 40$ e 100 com $M = 0,1$. Este clássico problema apresenta dois tipos de regime bem definidos. Para números de Reynolds aproximadamente $Re < 60$, formam-se dois pares de vórtices estacionários à jusante do cilindro. Quando o número de Reynolds varia entre $60 < Re < 5000$, os vórtices começam a oscilar e desprendem-se do cilindro com uma frequência definida. Este desprendimento alternado dos vórtices é conhecido como esteira de Kármán.

A geometria e as condições de contorno para este problema são mostradas esquematicamente na Figura 5.18. O domínio tem como dimensões $L_1 = 50$, $L_2 = 50$, $H = 100$ e $0,1$ na direção perpendicular, sendo que o centro do cilindro de diâmetro unitário tem como coordenadas $(0,0; 0,0)$. As condições da corrente-livre são $V_\infty = (1,0; 0,0; 0,0)$, $\rho_\infty = 1,0$, $e_\infty = 1,7907$ e foram aplicadas nas arestas AB, CD e AD. Na aresta BC as condições de contorno são livres com exceção da pressão que tem um valor prescrito de $p_\infty = 71,428$. A superfície do cilindro é adiabática e prescreve-se a condição de não deslizamento para a velocidade. Os valores da corrente-livre foram considerados como condições iniciais e aplicados em todos o nós do domínio.

Para a resolução do problema, emprega-se o modelo numérico descrito no item (3.5) com duas malhas (M1 e M2), como observado na Figura 5.19, com elementos hexaédricos e o esquema de dois passos. Na Tabela 5.6, mostra-se mais informações com relação às malhas e os incrementos de tempo adotados. A coluna *nós Cilind.* indica o número de nós sobre a superfície do cilindro no caso bidimensional.

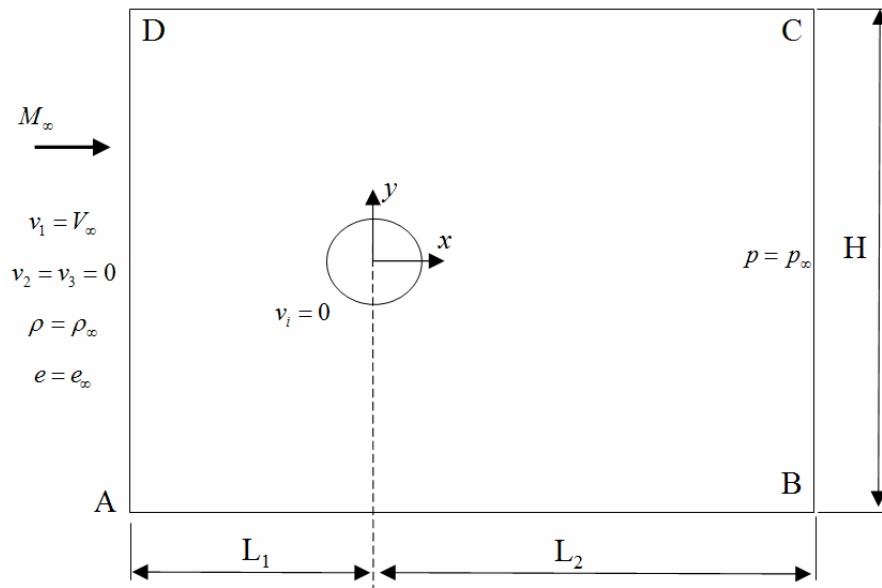


Figura 5.18: Geometria e condições de contorno sobre o cilindro.

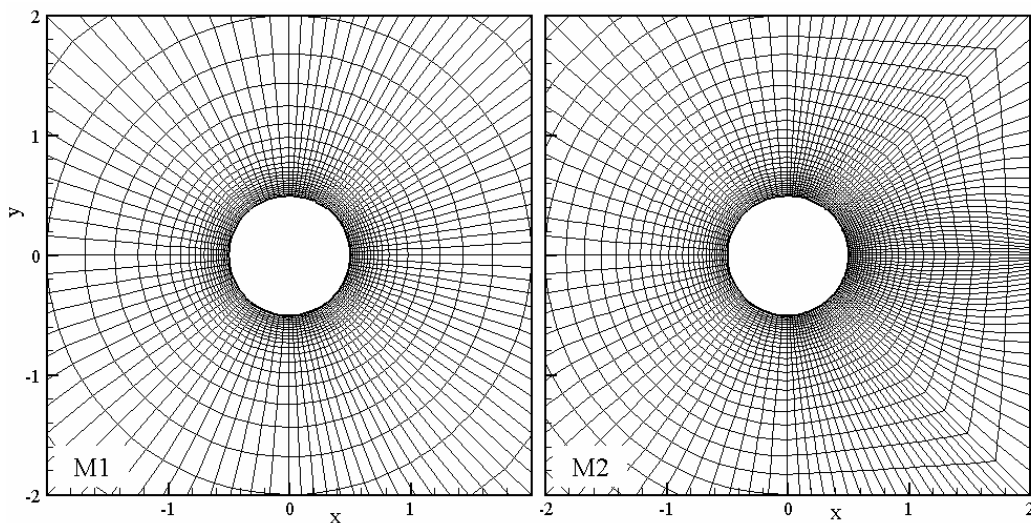


Figura 5.19: Malhas empregadas no problema do escoamento sobre o cilindro.

Re	malha	nno	nele	nós Cilind.	Δt
40	M1	8200	4000	100	0.0001
40 - 100	M2	15450	7550	130	0.0001

Tabela 5.6: Parâmetros principais das malhas empregadas para o escoamento ao redor de um cilindro.

Uma comparação da distribuição de velocidade sobre o cilindro para $Re = 40$ com as malhas M1 e M2, é mostrada na Figura 5.20. Existe uma boa concordância entre as mesmas com

uma melhor definição do escoamento ao redor do cilindro com a malha refinada (M2). Os resultados também são coincidentes com os apresentados por Choi e Merkle [1993].

A distribuição do coeficiente de pressão é dada na Figura 5.21, conjuntamente com resultados experimentais apresentados por Tritton [1959] e resultados numéricos de Wanderley e Levi [2005]. Existe uma boa concordância principalmente entre os resultados obtidos com a malha M1 e os resultados numéricos. No entanto, a malha refinada M2 mostra uma melhor coincidência com os resultados experimentais.

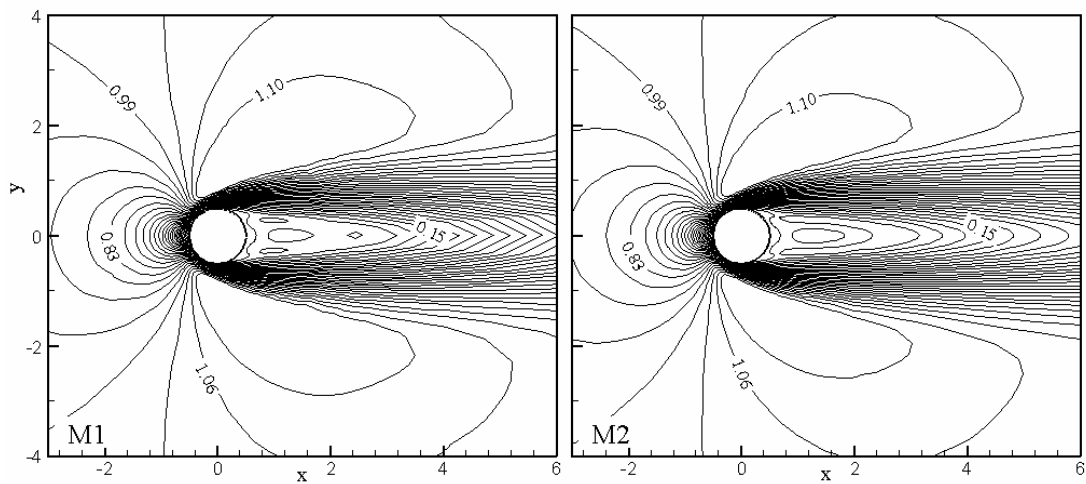


Figura 5.20: Distribuição de velocidade ao redor das malhas M1 e M2 para o cilindro com $Re = 40$.

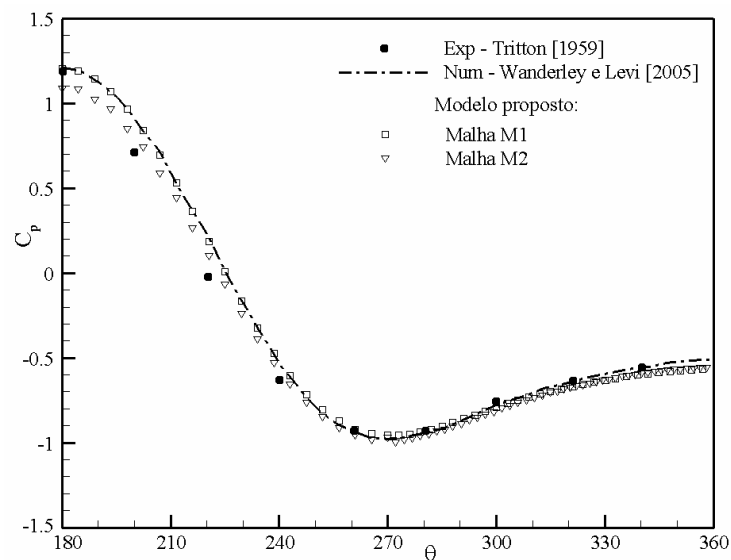
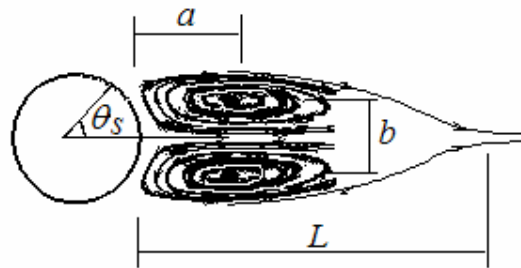


Figura 5.21: Distribuição do coeficiente de pressão para o cilindro com $Re = 40$.

Alguns dos principais comprimentos característicos do escoamento para $Re = 40$

obtidos com o modelo proposto são comparados com resultados experimentais [Tritton, 1959] e numéricos [Rengel e Sphaier, 1999, Wanderley e Levi, 2002] na Tabela 5.7.



	modelo proposto		Tritton [1959]	Wanderley e Levi [2002]	Rengel e Sphaier [1999]
	M1	M2			
Cd	2.53	1.52	1.57	1.59	1.61
L/d	2.21	2.37	--	2.1	2.23
a/d	0.73	0.76	--	0.69	0.72
b/d	0.59	0.6	--	0.58	0.58
θ_s [°]	54	54	--	53.2	54.06

Tabela 5.7: Comparações de alguns parâmetros do escoamento sobre o cilindro para $Re = 40$.

A discrepância no coeficiente de arrasto (C_d) é devido ao baixo número de nós empregado sobre a superfície do cilindro. Wanderley e Levi [2002] usam 200 nós e Rengel e Sphaier [1999] 180 nós. O comprimento característico L/d mostra-se ligeiramente superior aos valores apresentados por Wanderley e Levi [2002] e Rengel e Sphaier [1999], possivelmente devido à difusividade gerada pelo modelo de dois passos. O restante dos comprimentos tem uma boa concordância.

Os dois vórtices estacionários sobre o campo de distribuição de pressão para o caso de $Re = 40$ podem ser vistos na Figura 5.22 através das linhas de corrente nas duas malhas empregadas.

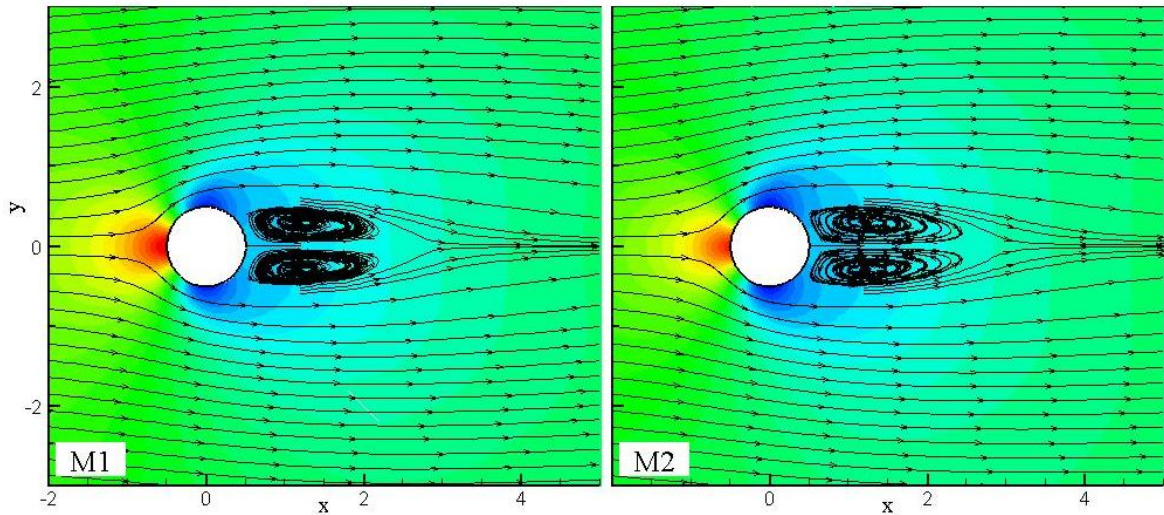


Figura 5.22: Distribuição da pressão e linhas de corrente para o cilindro com $Re = 40$.

O escoamento é não permanente para $Re = 100$. Inicialmente estacionários para baixo número de Reynolds ($Re < 60$) os vórtices, começam a desprender-se periodicamente. Na Figura 5.23, mostra-se a distribuição da pressão perto do cilindro para uma seqüência de quatro instantes de tempos adimensionais iguais a $t = 109; 109,75; 110,5$ e $111,25$, respectivamente. Fica evidente o caráter não estacionário do escoamento para $Re = 100$. Nota-se que os vórtices desprendidos vão dissipando sua energia a medida que se afastam do cilindro por efeito da viscosidade.

A distribuição de velocidade, as linhas de corrente e o processo de formação e desprendimento dos vórtices alternados podem ser vistos na Figura 5.24, apresentando a seguinte seqüência de tempos adimensionais: $t = 109; 109,75; 110,5$ e $111,25$. A alternância nos desprendimentos dos vórtices gera uma oscilação no coeficiente de sustentação, como se mostra na Figura 5.25. Esta periodicidade pode ser caracterizada através do número de Strouhal, sendo determinado no presente estudo um valor de aproximadamente $St = 0,23$. Este valor apresenta-se alto em comparação com outros resultados numéricos apresentados por Wanderley e Levi [2002], $St = 0,163$, e Rengel e Sphaier [1999], $St = 0,173$, devido à malha não ser suficientemente refinada.

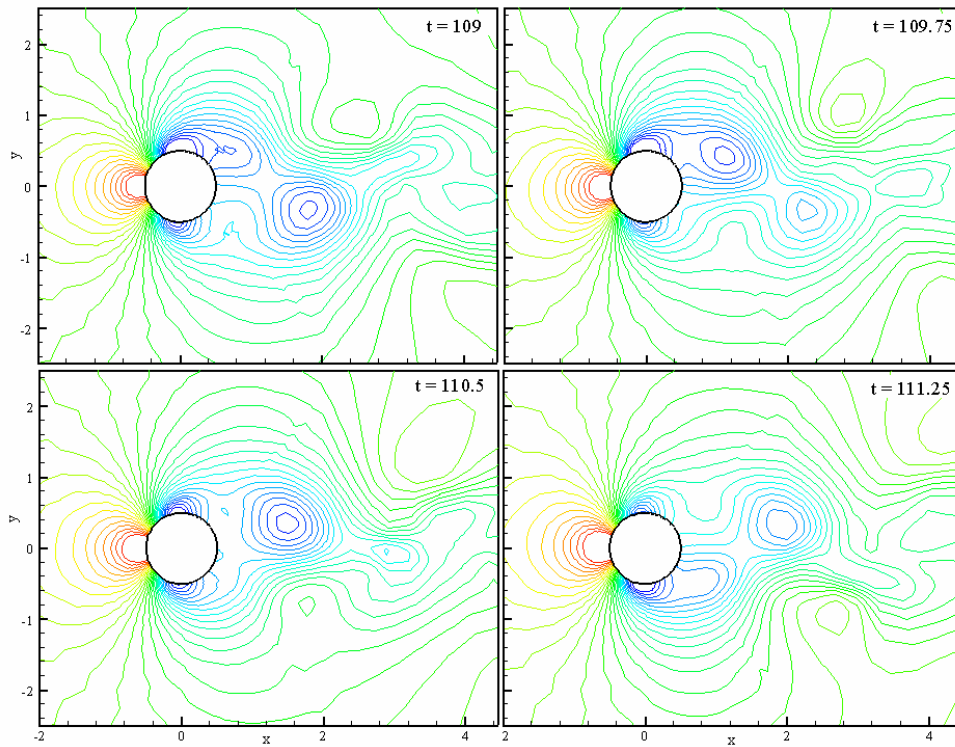


Figura 5.23: Distribuição da pressão para os tempos adimensionais: $t = 109$; $109,75$; $110,5$ e $111,25$ com $Re = 100$.

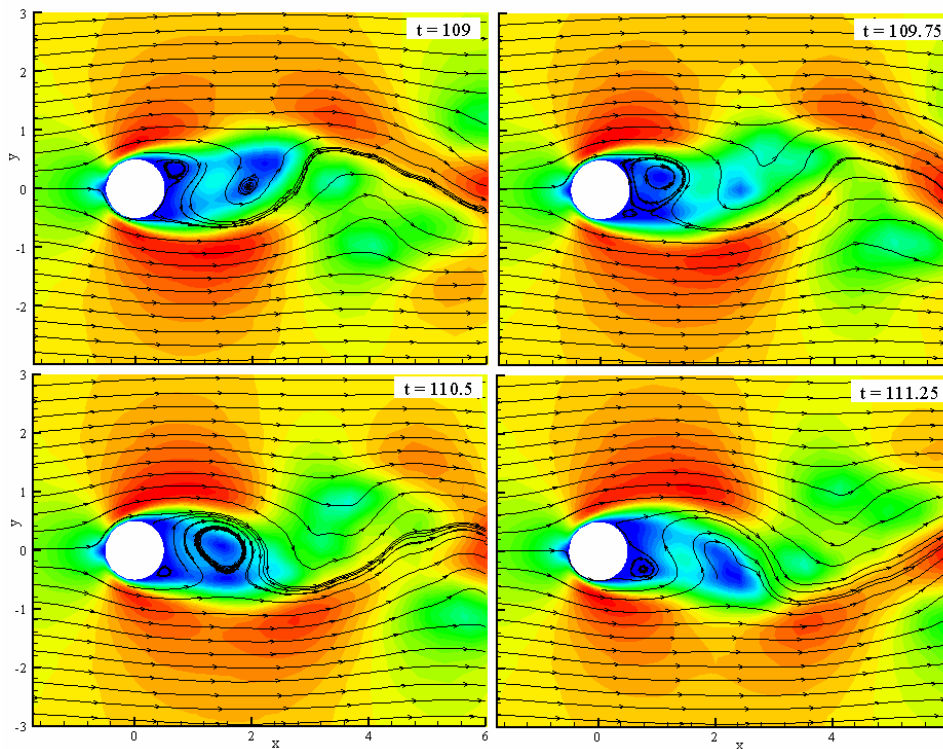


Figura 5.24: Distribuição da velocidade para os tempos adimensionais: $t = 109$; $109,75$; $110,5$ e $111,25$ com $Re = 100$.

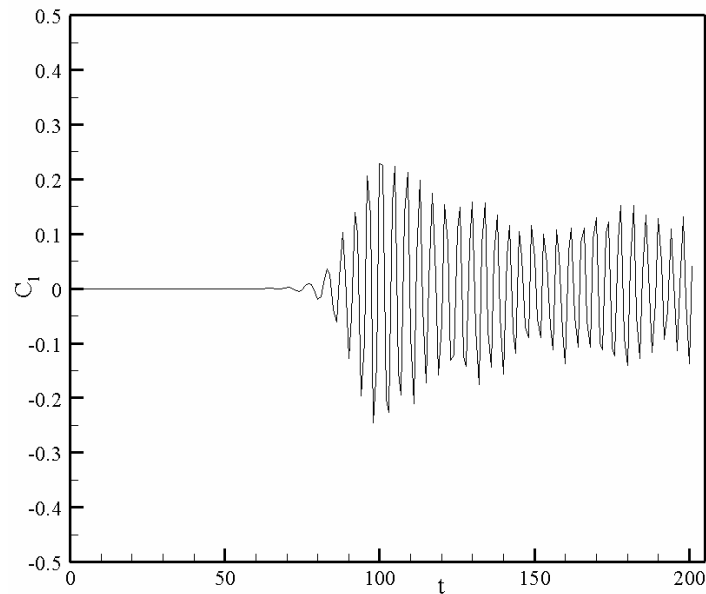


Figura 5.25: Histórico do coeficiente de sustentação para o cilindro com $Re = 100$.

Pode-se concluir que os resultados numéricos obtidos no presente trabalho para o caso do escoamento ao redor de um cilindro com $Re = 40$ têm uma ótima concordância quando comparados com resultados obtidos por outros pesquisadores. Porém, para o caso do escoamento com $Re = 100$ observam-se leves diferenças.

5.5 Escoamento sobre um aerofólio com $M = 0,10$

O crescente interesse no desenvolvimento de veículos que voam a número de Reynolds ultrabaixos tem motivado pesquisas em diferentes áreas, entre elas a aerodinâmica. Sendo assim neste item, apresentam-se os estudos de escoamentos incompressíveis não-viscoso e viscoso sobre um aerofólio NACA 0012 em regime subsônico, $M = 0,1$, com o ângulo de ataque variando entre 0° e 15° . Foram usados elementos hexaédricos nos dois casos, com a formulação do item (3.4) para o escoamento não-viscoso e o esquema apresentado no item (3.5) para o escoamento viscoso, e considerando $Re = 100$ e 1000 .

As dimensões do domínio empregado são as mesmas que foram utilizadas no item (5.2). As condições de contorno, conforme a Figura 5.9 para o caso do exemplo não-viscoso, são: condições da corrente-livre iguais a $V_\infty = (0,1; 0,0; 0,0)$, $\rho_\infty = 1,0$, $e_\infty = 1,7907$ e $p_\infty = 0,71428$, sendo aplicadas nas arestas AB, BC, CD e AD. Na superfície do aerofólio

prescreve-se a condição de velocidade normal nula ($\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$). Para o problema viscoso prescreve-se nas arestas AB, CD e AD as condições da corrente-livre $V_\infty = (1, 0; 0, 0; 0, 0)$, $\rho_\infty = 1,0$ e $e_\infty = 1,7907$. Na aresta BC é prescrita a pressão com um valor de $p_\infty = 71,428$. A superfície do aerofólio é adiabática e prescreve-se a condição de não deslizamento para a velocidade.

Na Tabela 5.8, apresentam-se os principais dados das malhas e o mínimo incremento de tempo adimensional. Os elementos foram concentrados perto do aerofólio no caso do exemplo viscoso a fim de ter uma boa resolução na região da camada limite, como observado na Figura 5.26.

exemplo	nno	nele	nós Aerof.	Δt
Euler	21180	10350	160	0.0003
N-S	21320	10400	180	2E-05

Tabela 5.8: Parâmetros principais das malhas empregadas sobre o aerofólio com $M = 0,10$.

As distribuições do número de Mach e do coeficiente de pressão sobre o aerofólio no caso do problema não-viscoso são dadas na Figura 5.27. Existe uma boa concordância entre os resultados do presente trabalho e a solução teórica obtida da resolução do problema potencial através do método dos painéis com singularidade de vórtices constantes [Katz e Plotkin, 1991].

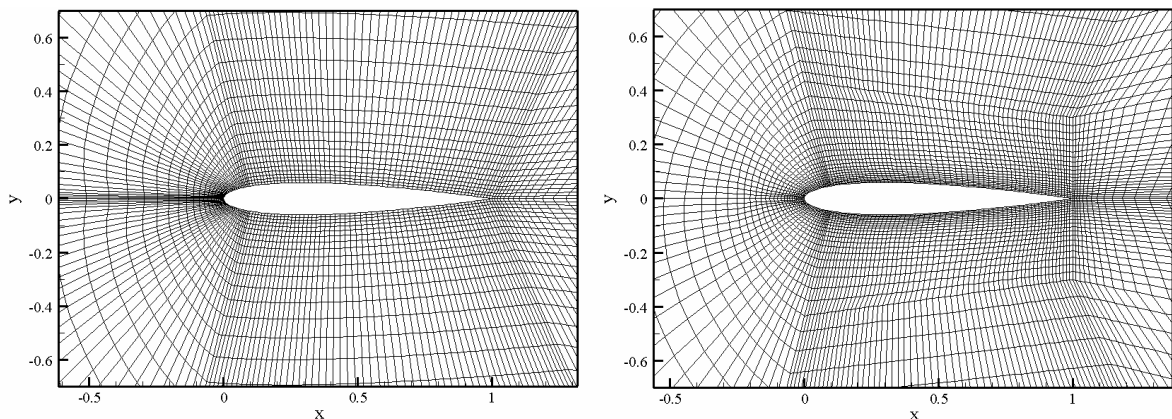


Figura 5.26: Malhas empregadas no problema não-viscoso (esquerda) e viscoso (direita) sobre o aerofólio NACA 0012.

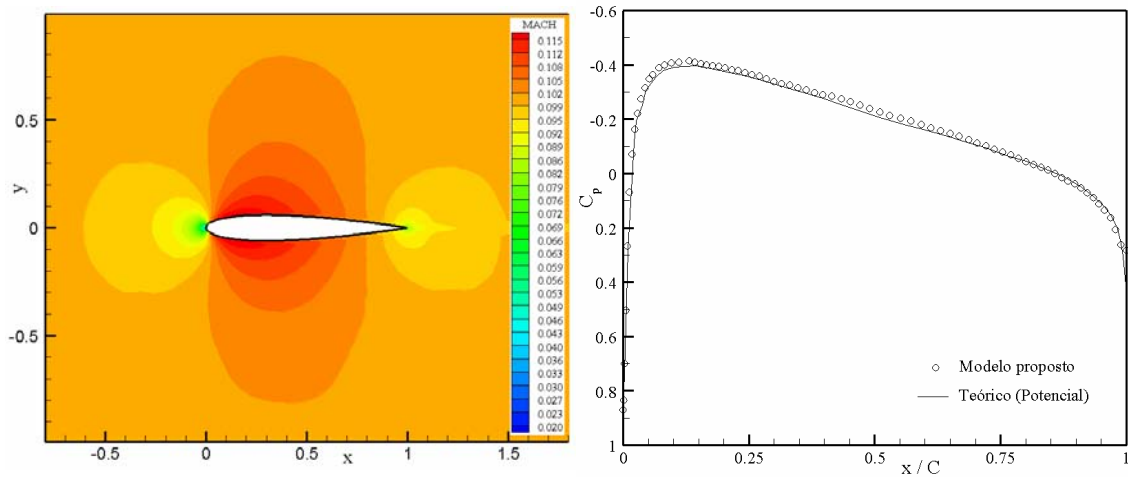


Figura 5.27: Distribuição do número de Mach e do coeficiente de pressão para o escoamento não-viscoso sobre o aerofólio com $M = 0,10$.

Na Figura 5.28, mostram-se as distribuições de velocidade e do coeficiente de pressão (C_p) sobre o aerofólio para o caso do escoamento viscoso com $Re = 100$. Observa-se que devido aos efeitos viscosos associados ao baixo número de Reynolds, o gradiente de pressão adverso é menor em comparação com o obtido considerando o escoamento não-viscoso. A distribuição de velocidades obtida no presente trabalho tem uma boa concordância com os resultados apresentados por Choi e Merkle [1993].

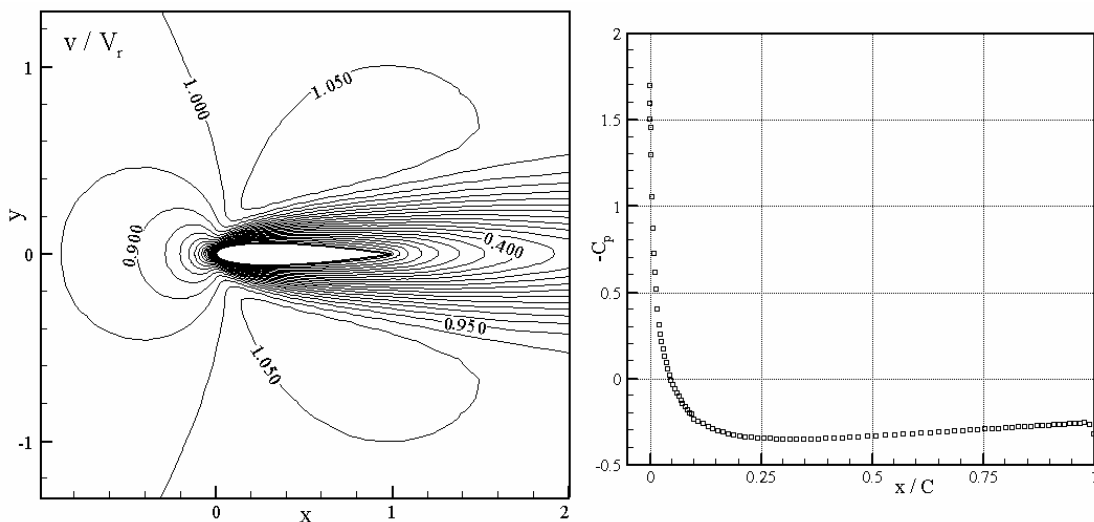


Figura 5.28: Distribuição da velocidade e do coeficiente de pressão para o escoamento viscoso sobre o aerofólio com $M = 0,10$ e $Re = 100$.

Na Figura 5.29, comparam-se as distribuições de velocidade para $Re = 100$ e 1000 com diferentes ângulos de ataque (0° , 5° , 10° e 15°). O conceito de camada limite fica difícil de

aplicar a medida que o número de Reynolds se reduz, observa-se na Figura 5.29, que a relação entre as espessuras da camada limite no bordo de ataque para $Re = 100$ e 1000 é aproximadamente 2,3 para o ângulo de ataque nulo. Quando se incrementa o ângulo de ataque para 5° , a velocidade no bordo de ataque aumenta, produzindo um pico de sucção o qual resulta menor para $Re = 100$ devido aos efeitos viscosos. Nota-se que para $Re = 100$, as linhas de velocidade constante variam muito pouco na região do intradorso do aerofólio.

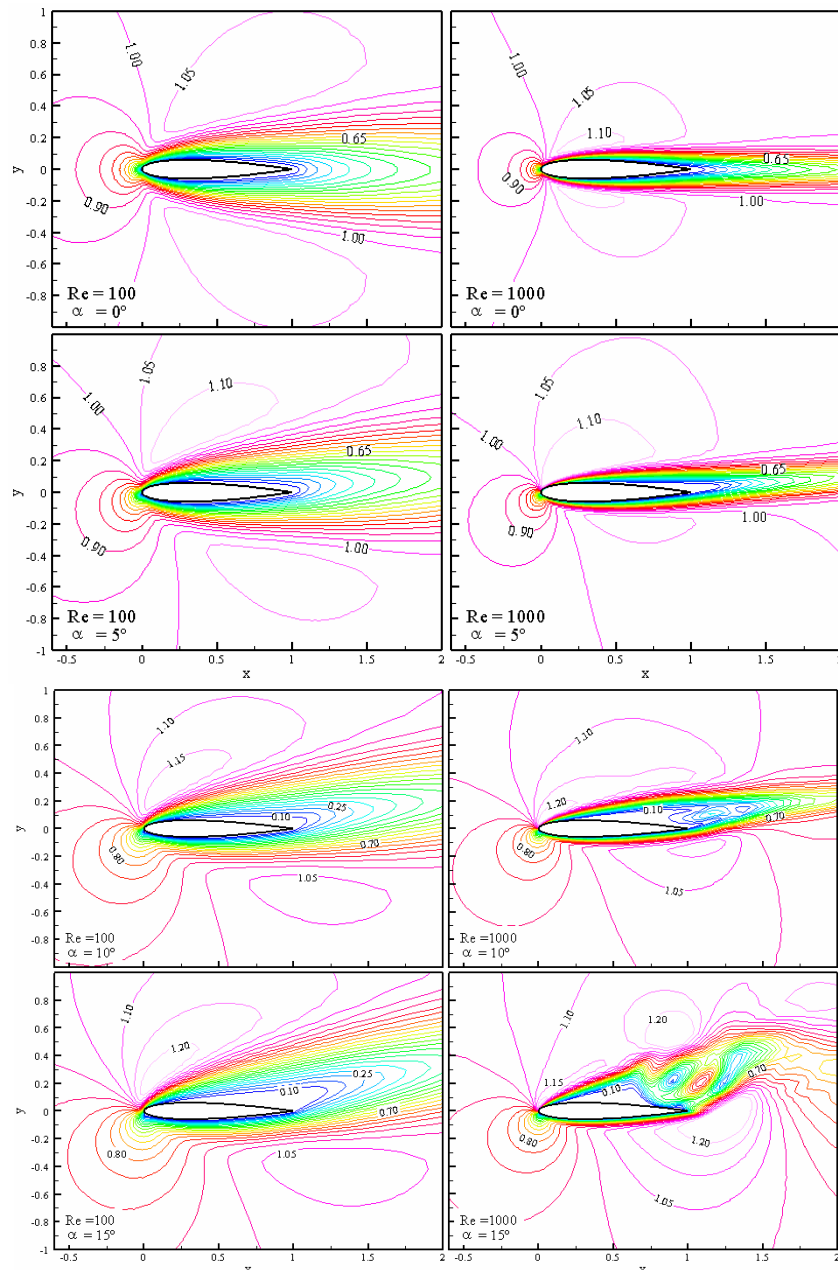


Figura 5.29: Distribuição da velocidade sobre o aerofólio para $M = 0,1$, com $Re = 100$ e 1000 e diferentes ângulos de ataque.

Para um ângulo de ataque igual a 10° , o escoamento torna-se não estacionário para $Re = 1000$, despreendendo pequenos vórtices, os quais aumentam de tamanho para $\alpha = 15^\circ$. O

escoamento para $Re = 100$ permanece estacionário, uma vez que os efeitos viscosos dificultam a separação da camada limite. Entretanto, para $\alpha = 15^\circ$ existe uma bolha de separação na região do bordo de fuga.

Na Figura 5.30, mostram-se as linhas de corrente para os ângulos de ataque 10° e 15° , e com os números de Reynolds iguais a 100 e 1000. Pode-se observar a separação da camada limite (em aproximadamente $x/C=0,3$) no extradorso do aerofólio para o ângulo de ataque 10° e $Re = 1000$. Entretanto, para $Re = 100$ não existe separação da camada limite, já que os efeitos viscosos são predominantes. Devido ao forte gradiente de pressão adverso a separação ocorre no bordo de ataque para $\alpha = 15^\circ$ e $Re = 1000$. No caso de $Re = 100$ existe uma bolha de separação com o deslocamento (em aproximadamente $x/C=0,71$) e posterior recolamento (em aproximadamente $x/C=0,92$) da camada limite no extradorso do aerofólio.

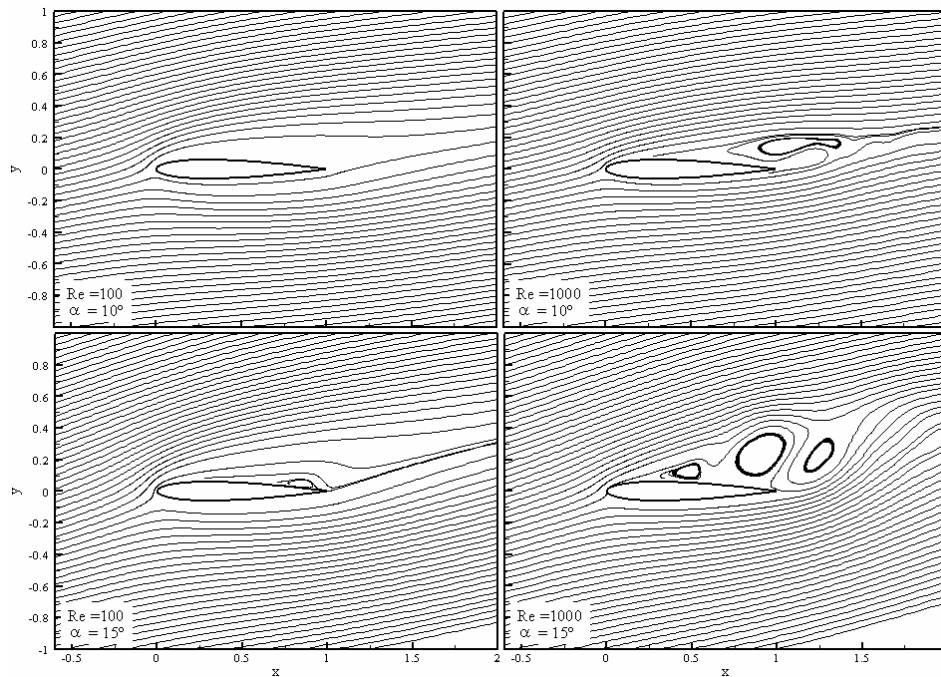


Figura 5.30: Linhas de corrente sobre o aerofólio com $Re = 100$ e 1000 e $\alpha = 10^\circ$ e 15° .

Os resultados apresentados mostram que a física do problema é perfeitamente capturada no caso do escoamento não-viscoso quanto para o escoamento viscoso com diferentes ângulos de ataque.

5.6 Escoamento ao redor de uma esfera com $Re = 100$

Nesta aplicação, estuda-se um escoamento incompressível viscoso sobre uma esfera com $M = 0,1$ e $Re = 100$. Devido à simetria do problema, considera-se um quarto do domínio computacional. Como observado na Figura 5.18, o centro da esfera de diâmetro unitário está na posição com coordenadas $(10,0,0)$, as dimensões são: $L_1 = 10$, $L_2 = 20$, $H = 10$ e 10 na direção perpendicular. As condições da corrente-livre são $V_\infty = (1,0;0,0;0,0)$, $\rho_\infty = 1,0$, $e_\infty = 1,7907$ foram aplicadas nos planos definidos pelas arestas CD e AD. Na aresta BC as condições de contorno são livres com exceção da pressão que tem um valor prescrito de $p_\infty = 71,428$. A superfície da esfera é adiabática e prescreve-se a condição de não deslizamento para a velocidade. Nos planos de simetria a componente de velocidade normal ao plano é nula.

Emprega-se o modelo numérico descrito no item (3.5) com uma malha não estruturada de tetraedros com 23280 elementos e 5092 nós. O incremento de tempo adimensional resultou igual a 7×10^{-5} .

A distribuição da pressão e as linhas de corrente no plano de simetria $x-y$ são mostradas na Figura 5.31. Observa-se que o vórtice à jusante não está bem definido e as linhas de pressão apresentam oscilações. Este fato ocorreu porque a discretização empregada perto da esfera não deve ter sido suficiente.

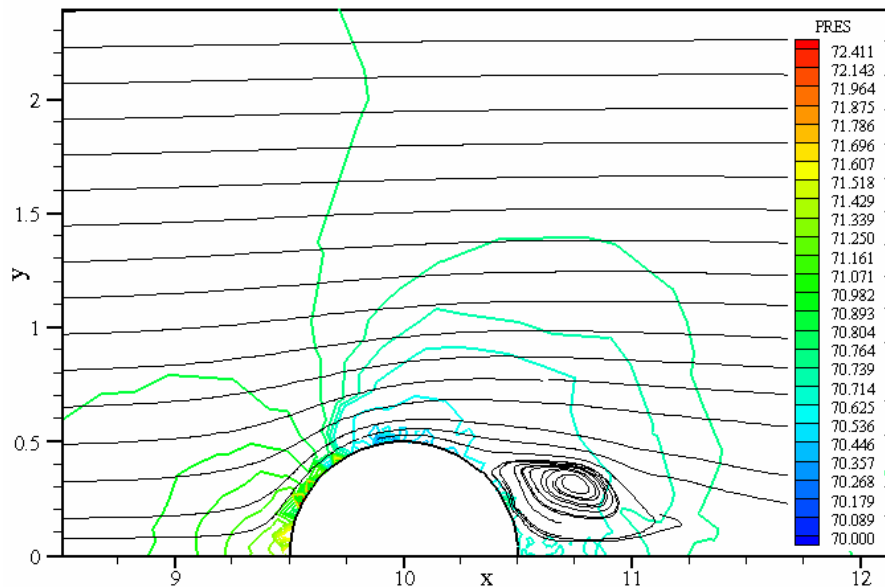


Figura 5.31: Distribuição da pressão e linhas de corrente para a esfera com $Re = 100$.

O comprimento de recirculação do vórtice é de aproximadamente 0,84, entretanto, Gülçat e Aslan [1997] e, Popiolek e Awruch [2006] apresentam os valores 0,93 e 0,90,

respectivamente. O ponto de separação do escoamento na superfície da esfera, medido em função do ângulo com relação ao eixo da abscissa (no sentido anti-horário), tem um ângulo igual a $50,7^\circ$. Gülçat e Aslan [1997] e, Popiolek e Awruch [2006] obtiveram $55,0^\circ$ e $54,2^\circ$, respectivamente. A diferença obtida entre os presentes resultados e os obtidos por outros pesquisadores ocorreu devido à discretização. Uma melhor aproximação seria obtida com o uso do esquema de adaptação de malhas.

Finalmente, na Figura 5.32 pode-se visualizar a distribuição de velocidade ao redor da esfera, sendo observado a malha empregada e a região de baixa velocidade à jusante da esfera.

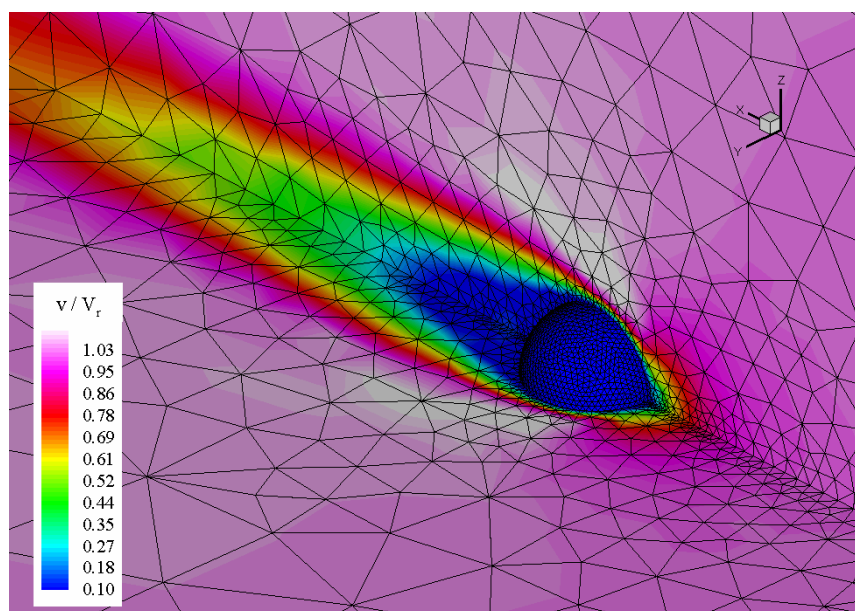


Figura 5.32: Distribuição da velocidade para a esfera com $Re = 100$.

5.7 Escoamento transônico sobre uma asa delta

Para validar o esquema numérico de um passo, o esquema de refinamento adaptativo e a técnica de integração com subciclos no regime transônico, analisa-se o problema de um escoamento sobre uma asa delta.

A resolução de um escoamento sobre um aerofólio ou asa no regime transônico, torna-se complexa devido à existência de regiões subsônicas e supersônicas no domínio computacional. Na Figura 5.33, mostra-se esquematicamente os principais fenômenos físicos e regiões existentes sobre um aerofólio com ângulo de incidência nula no regime transônico.

Quando o número de Mach é levemente inferior a 1,0 (Figura 5.33a), nas regiões próximas à máxima curvatura do aerofólio originam-se duas regiões com escoamento supersônico. A expansão do escoamento origina a formação de uma onda de choque na parte posterior do aerofólio, sendo que a linha sônica LS ($M = 1,0$) delimita as regiões com escoamento subsônico e supersônico. Um aumento no número de Mach e/ou no ângulo de ataque origina um incremento na intensidade das ondas de choque além de mudar a posição das mesmas.

Na Figura 5.33b pode-se observar esquematicamente a posição das ondas de choque sobre o aerofólio para um número de Mach levemente superior a 1,0. Neste caso, as ondas de choque formam-se na parte frontal e no bordo de fuga do aerofólio, estando a linha sônica localizada na região do bordo de ataque. Porém dependendo do número de Mach e da espessura do aerofólio, pode-se ter a onda de choque colada no bordo de ataque.

O emprego da Dinâmica dos Fluidos Computacional torna-se fundamental já que pequenas variações no número de Mach e/ou ângulo de ataque na região próxima ao número de Mach unitário produzem mudanças significativas no escoamento e, portanto, nos coeficientes aerodinâmicos.

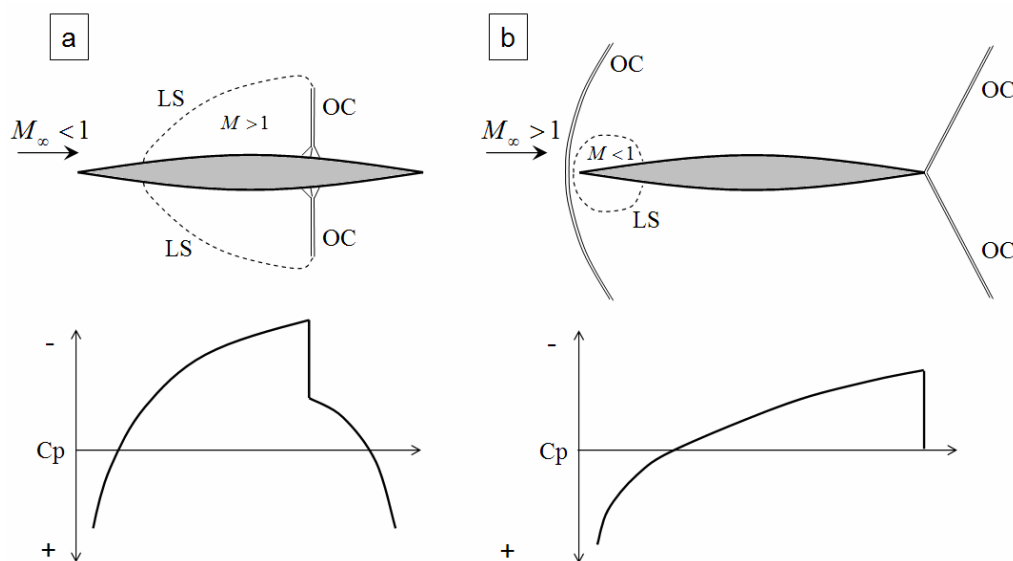


Figura 5.33: Principais fenômenos ao redor de um aerofólio em regime transônico.

(OC = onda de choque, LS = linha sônica)

A asa analisada neste item está baseada numa simplificação de uma asa projetada para um transporte supersônico. A geometria da mesma é trapezoidal, sem fecho no bordo de fuga, sem torção e com a linha média nula. O ângulo do bordo de ataque é $50,4^\circ$ e o aerofólio é uma seção de arco de círculo de espessura $t/C = 0,06$. Na Figura 5.34, pode-se verificar a geometria da asa modelada neste trabalho.

Bennett e Walker [1999] estudaram experimentalmente a asa mostrada acima, apresentando os valores de pressão para o caso da asa estática e dinâmica (movimento oscilatório da asa e das superfícies de controle). Neste trabalho, foram modelados os casos estáticos definidos por Bennett e Walker [1999] como 9E11 e 9E15. O primeiro caso analisado (9E15) é um escoamento com um número de Mach igual a $M_\infty = 0,901$ e $\alpha = 4,24^\circ$, no segundo caso tem-se $M_\infty = 1,12$ e $\alpha = 0,99^\circ$. Vale salientar que os dois exemplos foram selecionados com um número de Mach próximo de 1,0, a fim de avaliar a capacidade do programa em capturar os principais fenômenos que neste regime acontecem.

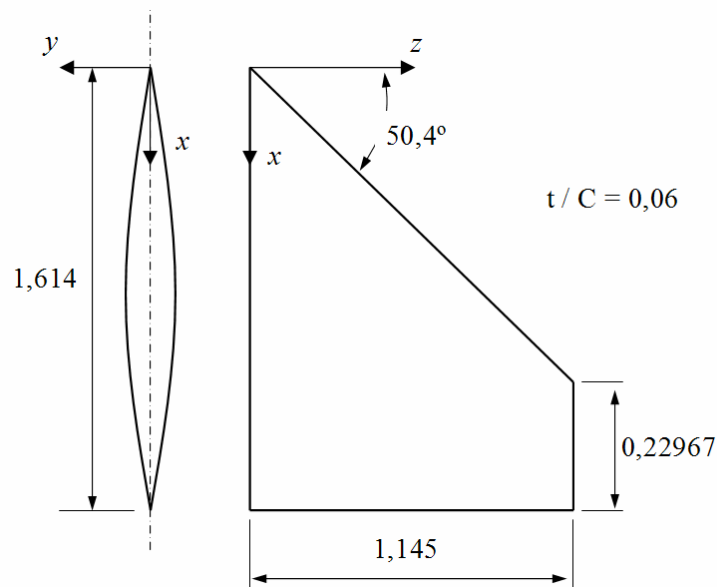


Figura 5.34: Geometria da asa delta.

O domínio para estes exemplos está mostrado na Figura 5.35, sendo as dimensões $L = 30$, $L_1 = 10$ e $R = 10$. Devido à simetria do escoamento, define-se o domínio somente para a metade da geometria, reduzindo o esforço computacional. As asas foram modeladas considerando um escoamento não-viscoso e, as condições de contorno para o caso 9E11 ($M_\infty = 1,12$ e $\alpha = 0,99^\circ$) são: condição da corrente-livre $V_\infty = (M_\infty \cos \alpha; M_\infty \sin \alpha; 0)$, $\rho_\infty = 1,0$, $e_\infty = 2,4129$ e $p_\infty = 0,71428$, aplicadas nos planos definidos pelas arestas AB e $BDEF$. No plano $ACEF$ colocam-se condições de simetria para a velocidade e sobre a superfície da asa prescreve-se a condição de velocidade normal nula ($\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$). Finalmente, no plano CD as condições de contorno são livres. No caso 9E15 ($M_\infty = 0,901$ e $\alpha = 4,24^\circ$), são aplicadas as seguintes condições de contorno: condição da corrente-livre $V_\infty = (M_\infty \cos \alpha; M_\infty \sin \alpha; 0)$,

$\rho_\infty = 1,0$ e $e_\infty = 2,1916$ nos planos definidos pelas arestas AB e $BDEF$. No plano CD as condições de contorno são livres com exceção da pressão que tem um valor prescrito de $p_\infty = 0,71428$. Os valores da corrente-livre foram considerados como condições iniciais e aplicados em todos os nós do domínio.

Para a resolução dos problemas, emprega-se o esquema de um passo (item 3.2.1) no contexto de malhas não estruturadas de tetraedros e a técnica de subciclos. O coeficiente de amortecimento fictício usado foi igual a $CAF = 1,0$ na expressão (3.45) e o coeficiente de segurança de $CS = 0,1$ na equação (3.42). Na Tabela 5.9 estão apresentadas a identificação de cada exemplo, as características das malhas e o mínimo passo de tempo (Δt) adotado.

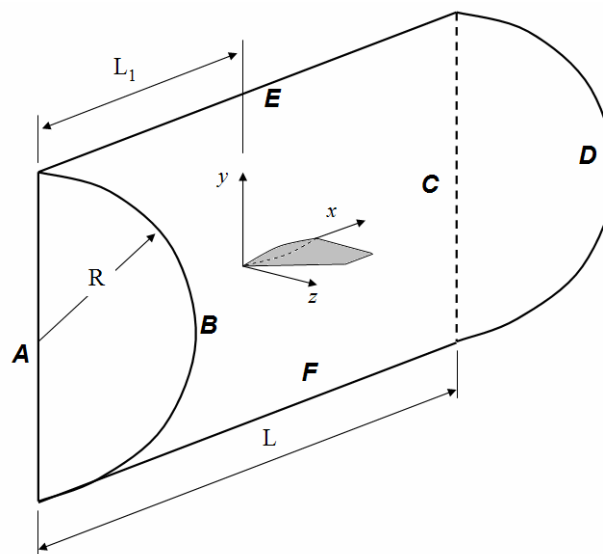


Figura 5.35: Geometria empregada para o problema da asa delta.

Caso	Malha	nno	nele	nnoCS	L_{\max}	L_{\min}	Δt
9E15	M1	15322	76523	3979	4,51	$1,59 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$
	M1R1	51269	273689	7782	3,48	$7,98 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$
	M1R2	110725	613017	9701	3,48	$3,99 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$
9E11	M2	15322	76523	3979	4,51	$1,59 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$
	M2R1	35331	188781	4792	3,48	$1,59 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$

Tabela 5.9: Dados das malhas e principais parâmetros para o problema da asa delta.

(nno = núm. de nós, nele = num. de elementos, nnoCS = num. de nós do contorno sólido, L_{\max}/L_{\min} = máximo e mínimo comprimento da aresta e Δt = incremento de tempo)

Para os dois casos estudados, emprega-se o esquema de refinamento adaptativo de malhas. O primeiro caso (9E15) foi submetido a dois níveis de refinamento e o segundo (9E11) a

um nível de refinamento. A malha inicial (sem refinamento) foi a mesma para os dois problemas $M1=M2$. Utilizou-se em todos os casos os seguintes critérios para a adaptação da malha: gradientes de velocidade, de pressão e de massa específica com $\omega = 0,70$ na equação do critério de adaptação (Eq. 4.8).

Numa primeira etapa, apresentam-se os resultados sem empregar a técnica de subciclos, ou seja, todos os elementos da malha empregam o mínimo incremento de tempo. Na parte final deste item são apresentados os resultados obtidos com a técnica de subciclos.

As distribuições da massa específica para o caso 9E15 ($M_\infty = 0,901$ e $\alpha = 4,24^\circ$) com a malha inicial M1 e malha final M1R2 são apresentadas na Figura 5.36. Pode-se observar que os dois níveis de refinamento melhoram os resultados principalmente na região onde a onda choque esta localizada (parte superior da asa) e no bordo de ataque e de fuga. Fica evidente que os indicadores empregados no esquema de adaptação de malhas são capazes de capturar eficientemente o gradiente da onda de choque.

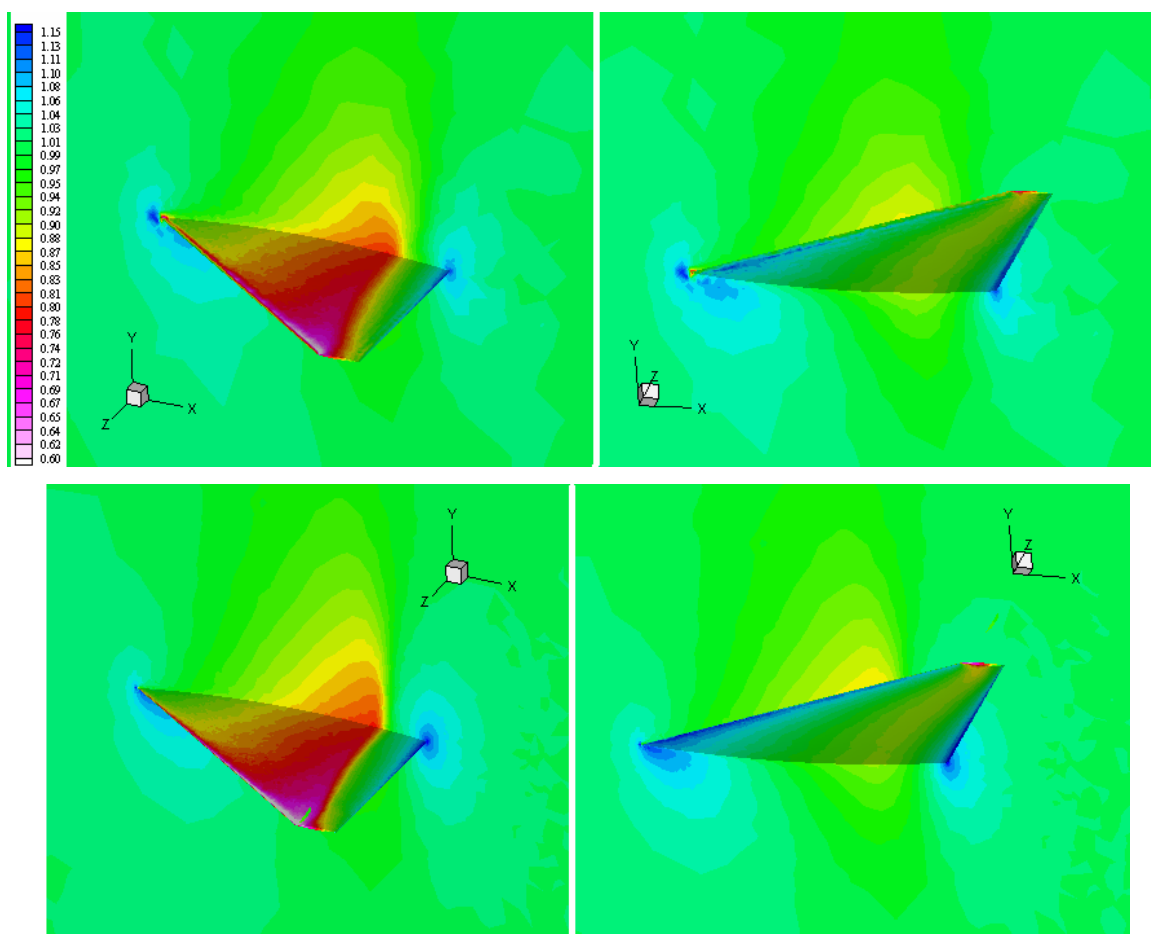


Figura 5.36: Distribuição da massa específica para a malha inicial M1 (superior) e final M1R2 (inferior).

Na Figura 5.37, mostra-se a distribuição do coeficiente de pressão para a malha inicial e final e sua comparação com os resultados experimentais [Bennett e Walker, 1999]. Com exceção da região do bordo de ataque na parte superior da asa, a malha refinada M1R2 mostra uma boa concordância entre os resultados experimentais e numéricos. A discrepância existente no bordo de ataque é devido a que os indicadores adotados são incapazes de detectar eficientemente a expansão do escoamento nesta região, portanto, o refinamento não foi suficiente.

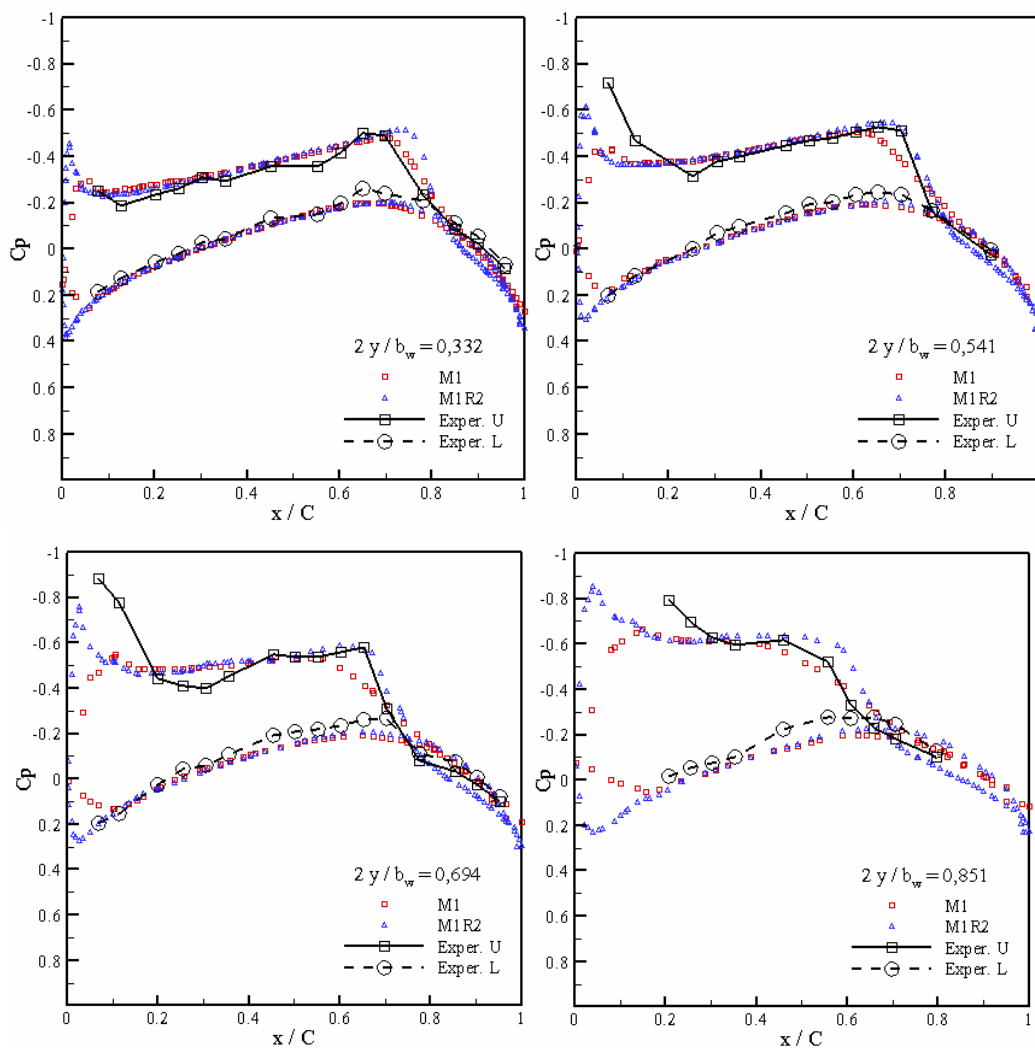


Figura 5.37: Distribuição do coeficiente de pressão para a malha inicial M1 e final M1R2.

Na Figura 5.38, a superfície sônica ($M=1,0$) apresenta-se para a malha inicial M1 e final M1R2. A superfície sônica da mesma maneira que a linha sônica divide as regiões com um número de Mach maior o menor a 1,0. Observa-se que por causa dos dois níveis de refinamento, a região com escoamento supersônico tanto na parte inferior quanto superior da asa aumentam, ocorrendo na última um crescimento considerável.

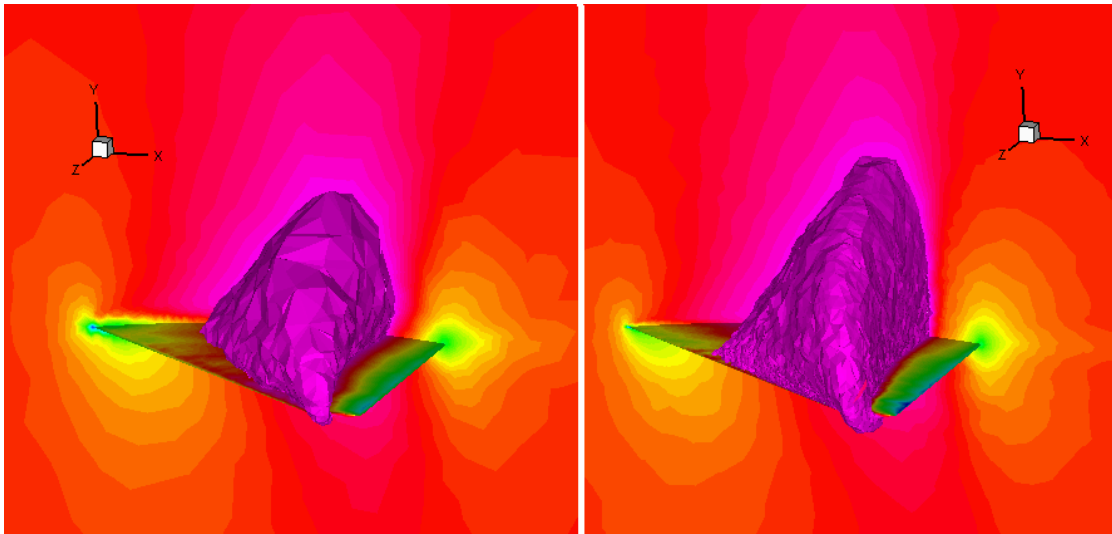


Figura 5.38: Distribuição do número de Mach e superfície sônica ($M=1,0$) para a malha inicial M1 e final M1R2.

No segundo caso estudado, 9E11 ($M_\infty = 1,12$ e $\alpha = 0,99^\circ$), o número de Mach do escoamento é ligeiramente superior a $M = 1,0$. Na Figura 5.39, são mostradas as distribuições da massa específica para a malha inicial M2 e final M2R1, nota-se que tal como havia sido mostrado esquematicamente na Figura 5.33, existem duas ondas de choque bem definidas na asa, uma mais débil na parte frontal e outra mais intensa no bordo de fuga. A massa específica se reduz conforme o escoamento se acelera sobre a superfície inferior e superior da asa, sendo que o mínimo valor localiza-se na região da ponta da asa devido aos efeitos tridimensionais. Com a malha refinada, se consegue melhorar a resolução da onda de choque frontal e a região na qual se produz a expansão do escoamento. Observa-se que a espessura das ondas de choque se reduz e aumentam as regiões com valores de massa específica baixa.

Na Figura 5.40, mostram-se as distribuições do coeficiente de pressão para as malhas M2 e M2R1 conjuntamente com os resultados experimentais apresentados por Bennett e Walker [1999]. Tal como havia acontecido no primeiro caso 9E15, a maior discrepância acontece na parte superior da asa na região do bordo de ataque. Sendo que sobre o resto da seção a concordância com os resultados experimentais é boa. Um segundo refinamento não foi realizado porque os critérios de adaptação adotados refinariam a malha na região do bordo de fuga da asa, ou seja, na onda de choque com gradientes mais intensos. Observa-se que os resultados numéricos apresentam um comportamento mais suave em comparação com os resultados experimentais.

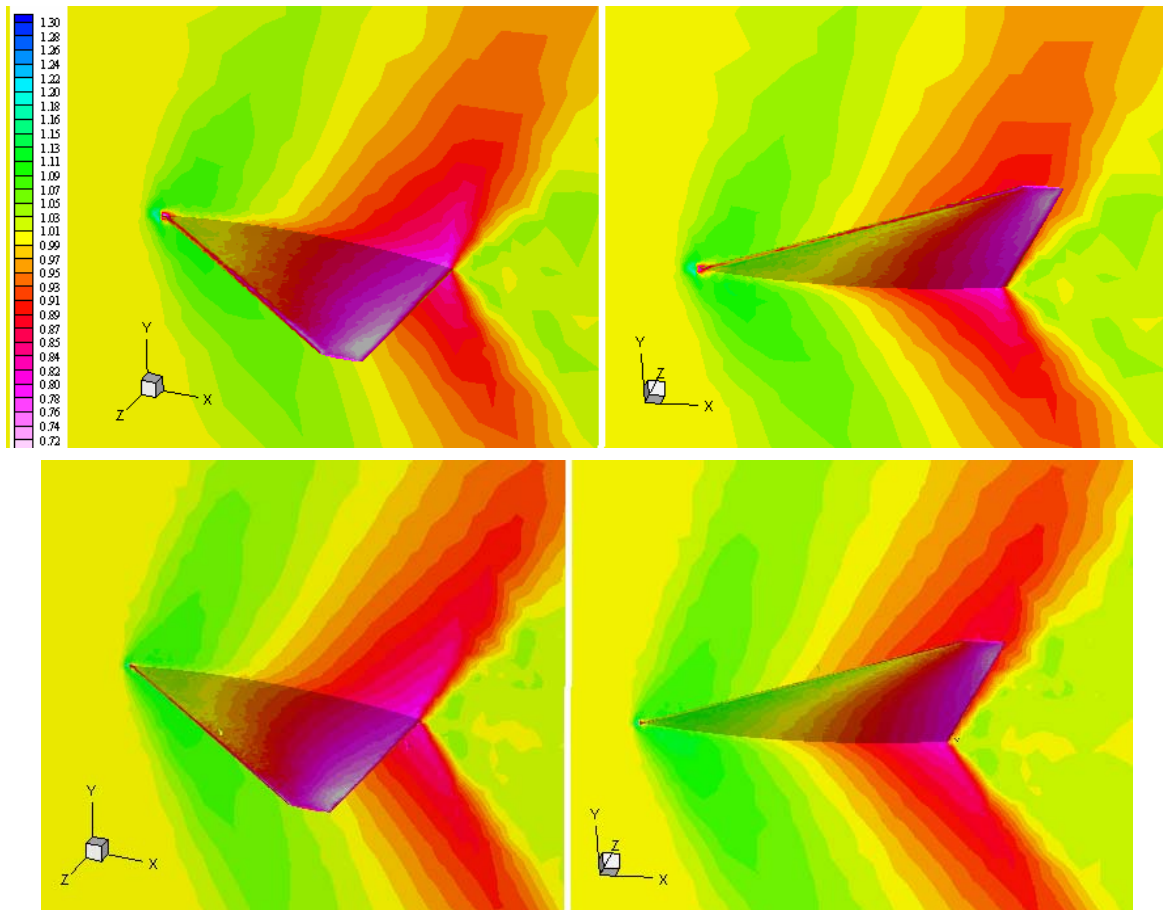


Figura 5.39: Distribuição da massa específica para a malha inicial M2 e final M2R1.

Como se pode verificar na Figura 5.41, a variação do tamanho dos elementos nas malhas refinadas é importante, portanto, se adotou a técnica de subciclos com o intuito de reduzir o tempo de processamento. Observa-se que as malhas iniciais (M1 e M2) tem os menores elementos ao redor da asa, entretanto, depois de aplicar os refinamentos, os menores elementos encontram-se localizados nos bordos de ataque e de fuga e na parte superior da asa.

A porcentagem de elementos para os diferentes grupos de incrementos de tempo e os máximos ganhos de tempo de processamento teórico ($S-U_{teo}$) e real ($S-U$) da técnica de subciclos são dados na Tabela 5.10 para as malhas M1R1, M1R2 e M2R1. O máximo ganho teórico de tempo de processamento não pôde ser atingido já que no processo de integração sempre deve-se controlar os diferentes grupos de elementos e nós, a fim de fazer as respectivas atualizações e interpolações. Dos três casos analisados, o máximo ganho de tempo de processamento foi obtido com a malha M1R2, e isto ocorre devido à malha apresentar poucos elementos nos grupos de incrementos de tempos pequenos. Aproximadamente 26 % dos elementos tem um tempo crítico entre $1\Delta t$ e $4\Delta t$, entretanto, nas malhas M1R1 e M2R1 estas porcentagens são da ordem de 61 % e 67 %, respectivamente.

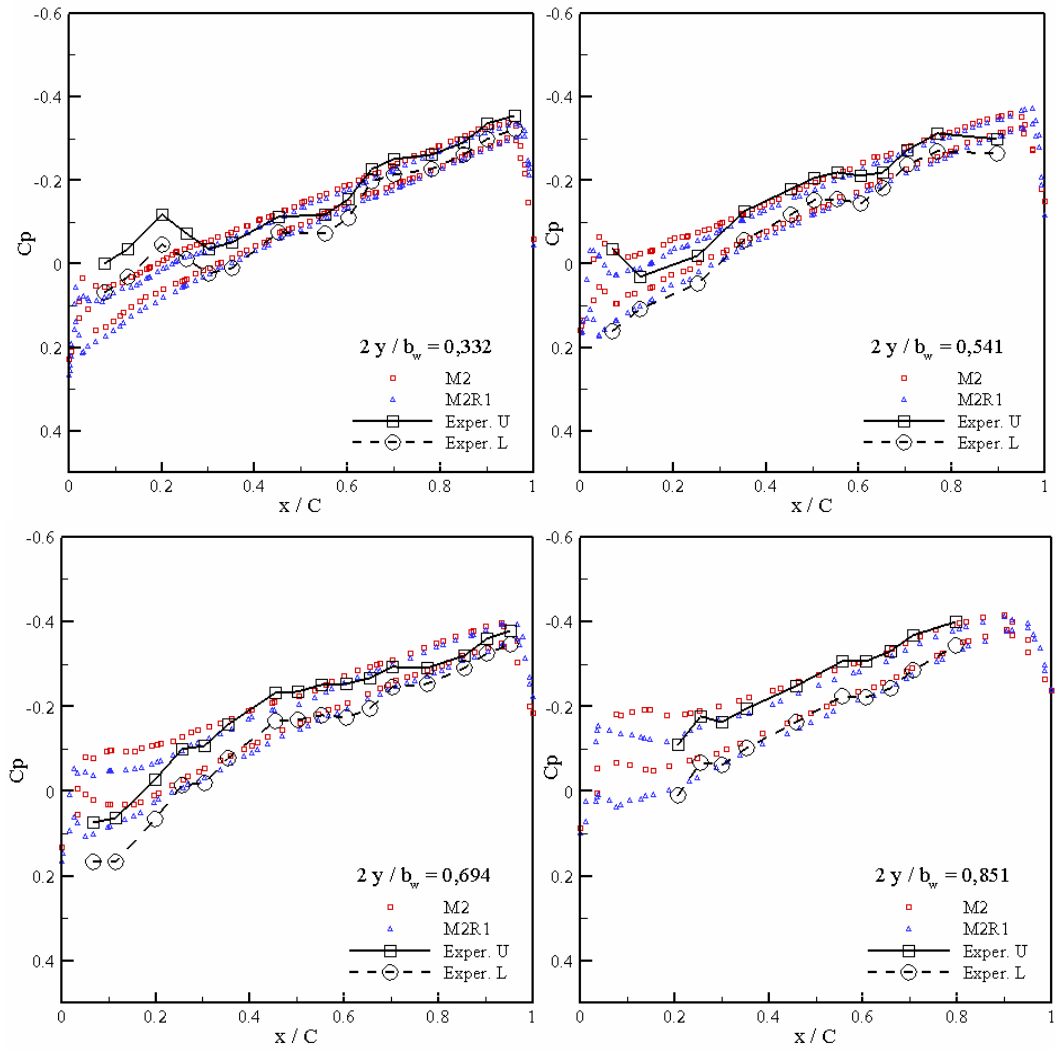


Figura 5.40: Distribuição do coeficiente de pressão para a malha inicial M2 e final M2R1.

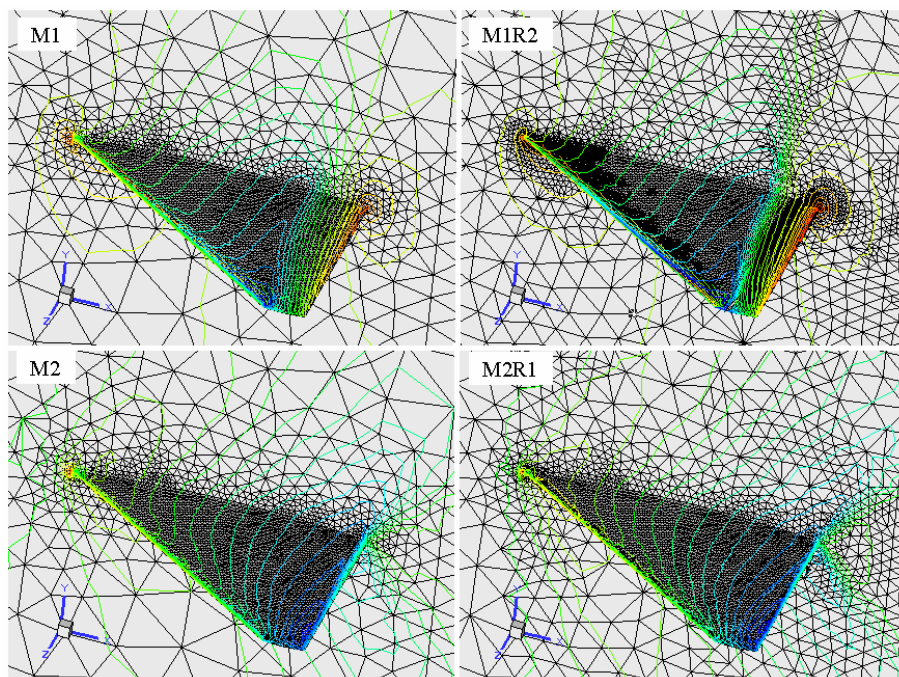


Figura 5.41: Malhas e distribuições do coeficiente de pressão para as malhas iniciais (M1 e M2) e finais (M1R2 e M2R1).

<i>Grupo</i>	M1R1	M1R2	M2R1
1 Δt	0,318	0,146	5,098
2 Δt	11,659	2,585	36,343
4 Δt	48,948	23,426	25,367
8 Δt	17,919	30,401	18,133
16 Δt	10,031	17,344	5,418
32 Δt	3,866	11,590	1,442
64 Δt	1,027	4,224	2,591
128 Δt	6,231	10,283	5,607
<i>S-U_{teo}</i>	4,66	7,88	3,091
<i>S-U</i>	1,68	2,39	1,30

Tabela 5.10: Porcentagem de elementos, *speed-up* teórico ($S-U_{teo}$) e real ($S-U$) para os exemplos M1R1, M1R2 e M2R1 resolvidos com a técnica de subciclos.

As distribuições dos incrementos de tempo nos elementos para as malhas M1R2 e M2R1 são dadas na Figura 5.42. Nota-se que os menores incrementos de tempo ($1\Delta t$ e $2\Delta t$) estão localizados principalmente nas regiões dos bordos de ataque e fuga da asa. Entretanto, os incrementos de tempo que estão sobre e ao redor da asa para o caso 9E15 (M1R2) e 9E11 (M2R1) são: $\{4\Delta t, 8\Delta t, 16\Delta t\}$ e $\{4\Delta t, 8\Delta t\}$, respectivamente. Esta diferença ocorre porque os níveis de refinamento nas duas malhas são diferentes. Observa-se que a transição até o máximo incremento de tempo ($128 \Delta t$) é sempre em forma concêntrica com a asa, porém não tão gradual devido à malha inicial não apresentar uma transição suave.

Na Figura 5.43, mostram-se as distribuições do coeficiente de pressão ao redor da asa para as malhas M1R2 e M2R1 calculadas com e sem a técnica de subciclos. Da comparação dos resultados pode-se concluir que existe uma boa concordância entre os resultados obtidos com e sem a técnica de subciclos, embora na região do bordo de ataque, as linhas de pressão constante para os resultados obtidos com a técnica de subciclos apresentem leves oscilações devido à interpolação empregada no processo de integração. Apresentam uma boa concordância as distribuições de pressão nas duas estações da asa obtidas sem e com a técnica de subciclo na malha M1R2 (ver Figura 5.44). Porém, na estação perto da ponta da asa ($2y/b_w = 0,851$) existe uma leve diferença na parte superior da asa. A discrepância entre os resultados deve-se a alguns fatores tais como: a interpolação linear usada na técnica de subciclos e aos fortes efeitos tridimensionais nesta região.

Os resultados apresentados nas Figuras 5.37 e 5.40 mostram uma boa concordância

com relação aos resultados experimentais obtidos por Bennett e Walker [1999]. Deve-se salientar que os bons resultados foram obtidos devido ao uso do esquema de refinamento de malhas. Com a técnica de subciclos, consegue-se um máximo ganho de tempo de processamento que varia entre 1,30 e 2,39 (Tabela 5.10) Sendo que como observado na Figuras 5.43 e 5.44, os resultados apresentam pouca variação com relação aos obtidos sem o uso da técnica de subciclos.

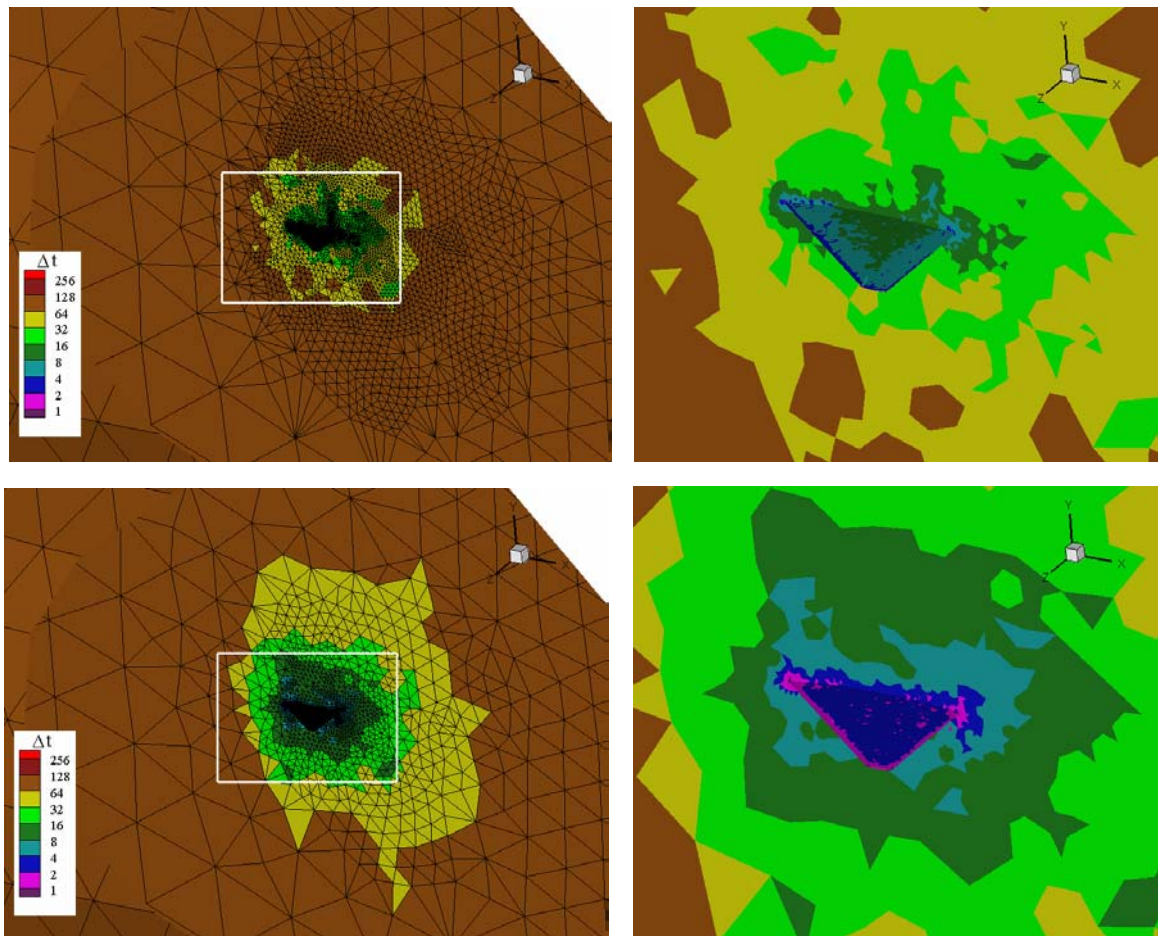


Figura 5.42: Distribuição dos incrementos de tempo (Δt) na técnica de subciclos para as malhas M1R2 (superior) e M2R1 (inferior).

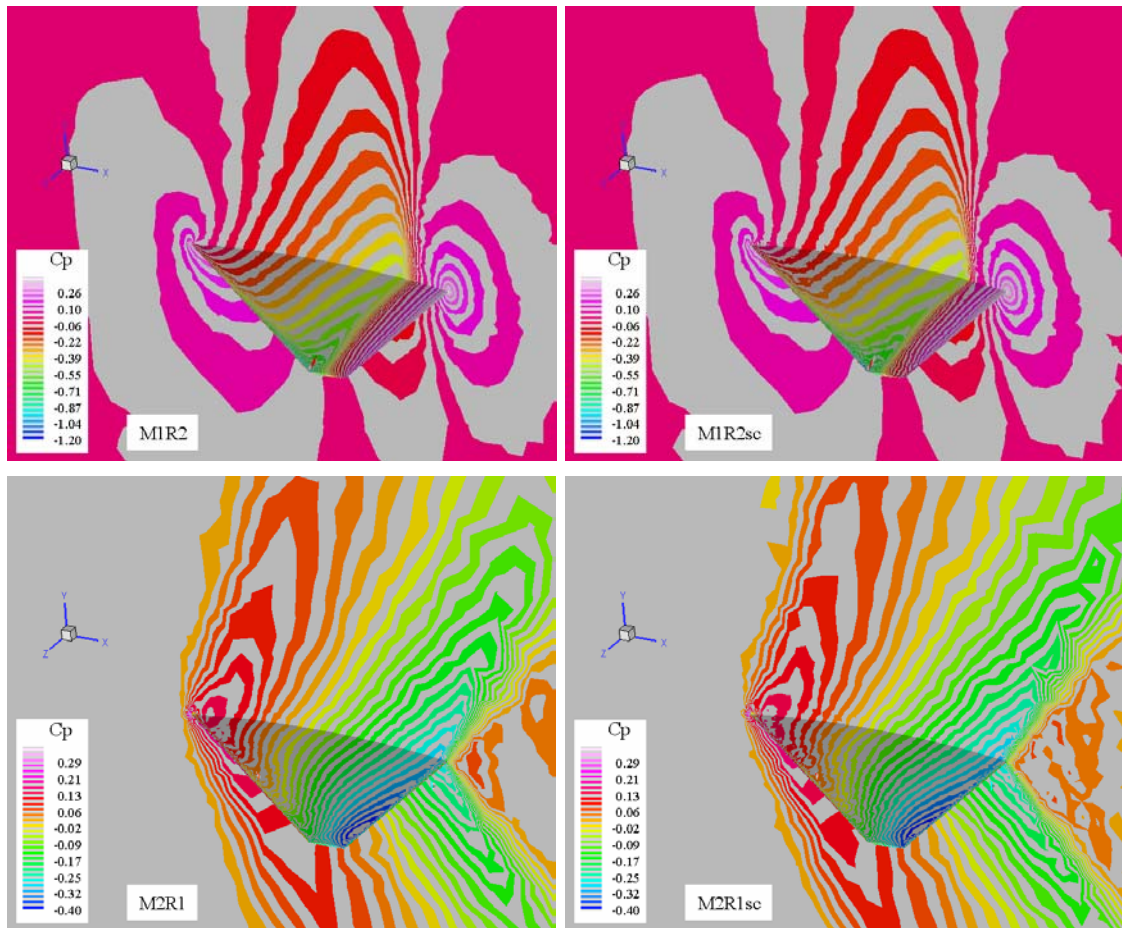


Figura 5.43: Distribuição do coeficiente de pressão para as malhas M1R2 e M2R1 calculadas sem e com a técnica de subciclos.

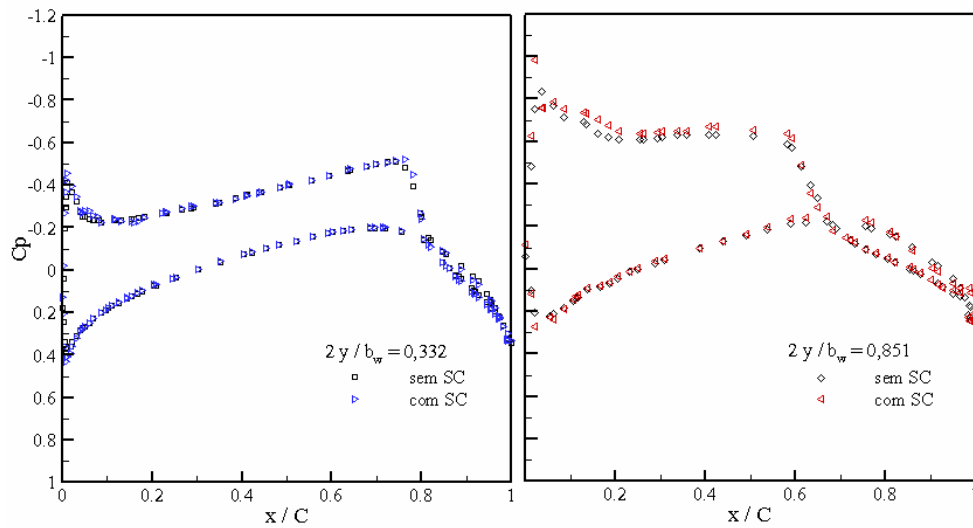


Figura 5.44: Distribuição do coeficiente de pressão para as malhas M1R2 calculadas sem e com a técnica de subciclos.

5.8 Escoamento ao redor de um conjunto esfera-cilindro-cone

Neste item, considera-se o escoamento não-viscoso ao redor de um corpo com uma geometria similar à representada por um veículo espacial arbitrário com um número de Mach igual a $M_\infty = 2,95$ e um ângulo de ataque de 10° . Este corpo foi estudado experimental e numericamente por Houtman et al. [1995] para vários números de Mach e ângulos de ataque. O objetivo deste exemplo é verificar a capacidade dos esquemas de um passo e dois passos de simular escoamentos não-viscosos em regime supersônico.

As condições de contorno aplicadas no domínio são iguais às impostas no caso 9E11 do exemplo da asa delta (item 5.7), com a diferença que a velocidade da corrente-livre vale $V_\infty = (2,9051; 0,5122; 0,0)$. Sobre a superfície do corpo prescreve-se a condição de velocidade normal nula ($\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$). Emprega-se uma malha com 187101 elementos tetraédricos e 35986 nós, sendo que 7586 nós estão sobre a superfície do veículo. O incremento de tempo adimensional máximo usado foi 2×10^{-5} com um coeficiente de amortecimento fictício (CAF) igual a 1,1 para o esquema de um passo (T) e de 0,9 para o esquema de dois passos (TP2).

Na Figura 5.45, mostra-se a malha empregada e compara-se a distribuição de massa específica sobre o plano de simetria x - y para o esquema de um passo e de dois passos. Na parte frontal do corpo, forma-se uma onda de choque forte que aumenta a massa específica e a pressão, conforme Figura 5.46, na região perto do ponto de estagnação. Na parte superior da região de interseção esfera-cilindro o escoamento expande-se, reduzindo a massa específica. Após esta região, forma-se uma onda de choque fraca que desacelera o escoamento na parte superior da região de interseção cilindro-cone, entretanto na parte inferior a onda de choque é forte. Finalmente, na região de interseção cone-cilindro, podem-se ver dois leques de expansão, sendo que na região inferior a expansão é mais intensa.

Da Figura 5.45, pode-se dizer que a diferença entre os resultados apresentados pelos dois esquemas é desprezível. A distribuição da pressão para o programa de dois passos é apresentada na Figura 5.46. Destas figuras, pode-se dizer que os principais fenômenos do escoamento são eficientemente capturados com a malha empregada. Apesar de que empregando o método de adaptação, os resultados melhorariam notavelmente.

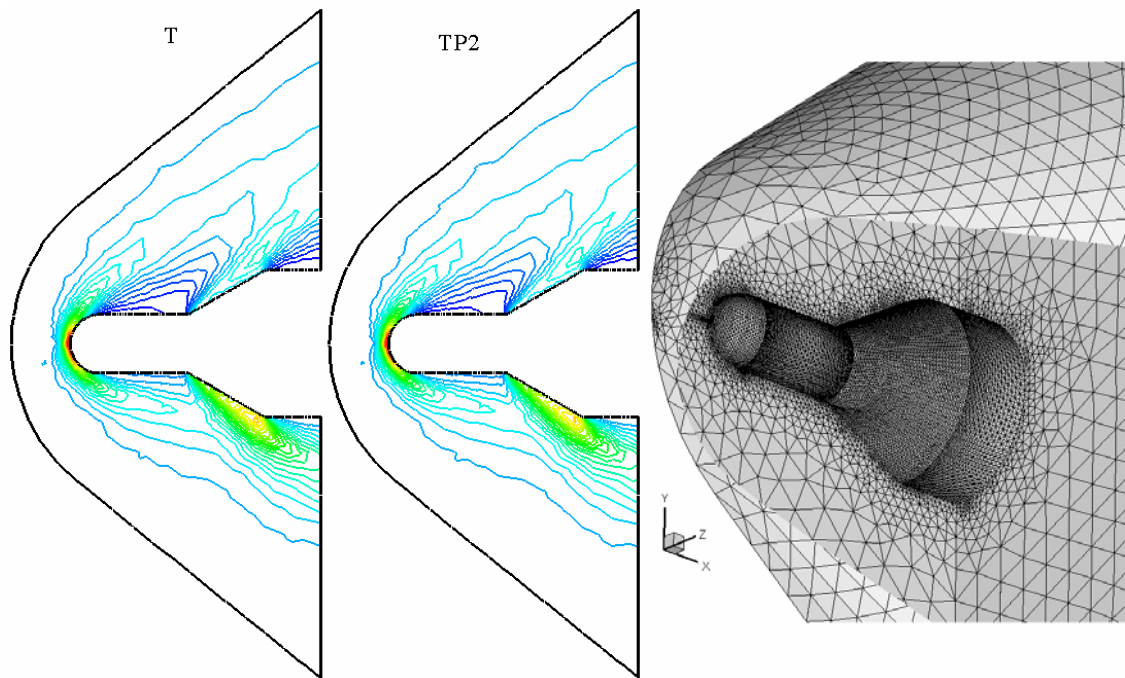


Figura 5.45: Variação da massa específica para os esquemas de um passo (T) e dois passos (TP2) e malha empregada na configuração esfera-cilindro-cone.

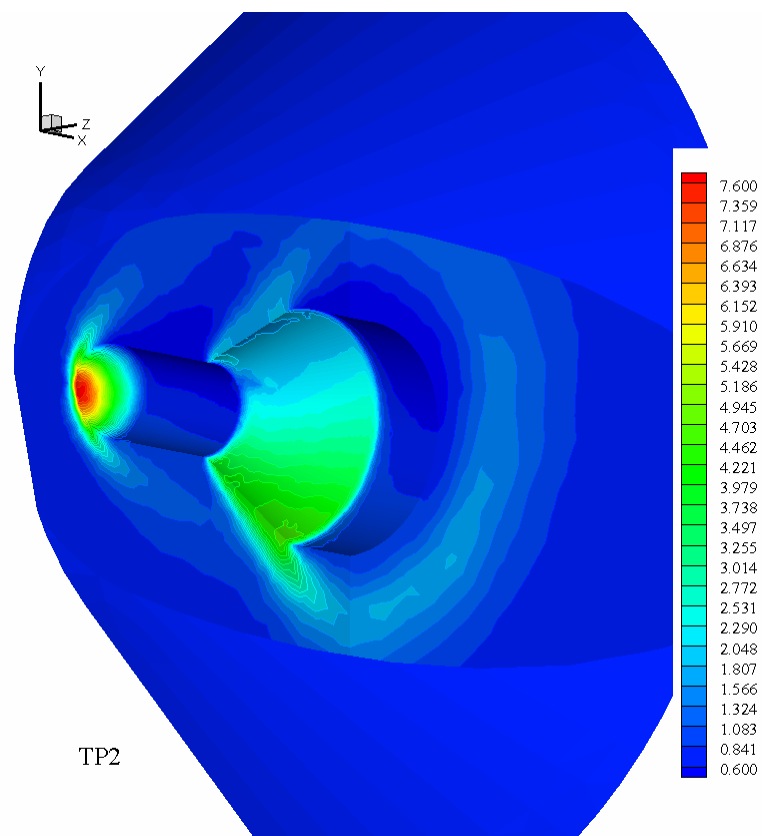


Figura 5.46: Distribuição da pressão sobre o corpo esfera-cilindro-cone com o esquema de dois passos.

Uma comparação da variação das relações de pressão p/p_∞ sobre o corpo no plano

de simetria x - y entre os resultados experimentais [Houtman et al., 1995] e os obtidos numericamente com o esquema de dois passos TP2 são apresentados na Figura 5.47. Pode-se observar que existe uma boa concordância para a região inferior (inf) do corpo, tanto nas localizações das ondas como em sua intensidade. Na região superior (sup) existe uma leve discrepância entre os resultados experimentais e os resultados numéricos na interseção cilindro-cone ($x/L \approx 0.5$), devido aos fortes efeitos viscosos existentes na região, os quais não podem ser capturados utilizando as equações de Euler. Os resultados numéricos no escoamento não-viscoso mostram a existência de uma onda de choque a qual é inexistente nos resultados experimentais devido à separação da camada limite nesta região. Os resultados numéricos obtidos por Houtman et al. [1995] com uma malha de $64 \times 48 \times 32$ hexaedros também apresentam o mesmo comportamento que os resultados obtidos no presente trabalho.

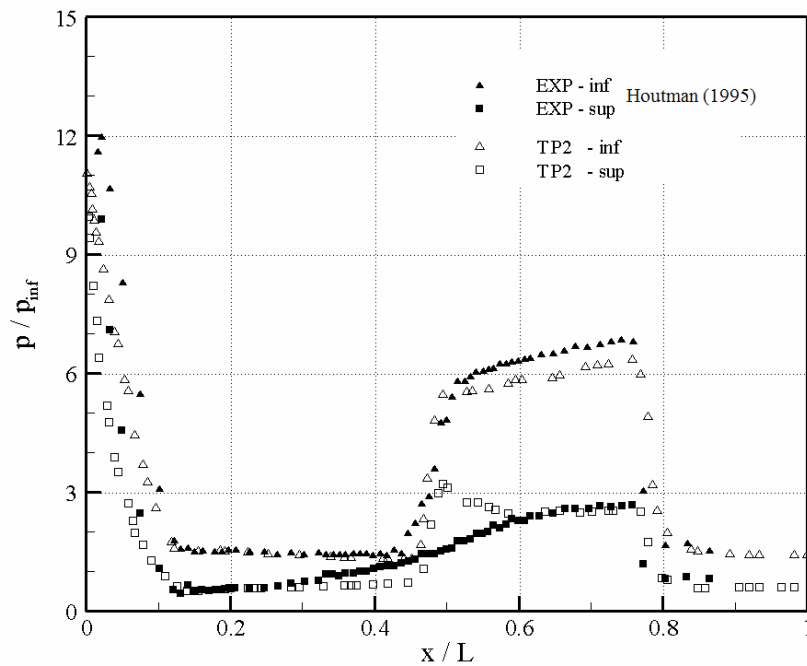


Figura 5.47: Distribuição da relação de pressão para o corpo esfera-cilindro-cone com $M = 2,95$ e $\alpha = 10^\circ$.

Pode-se concluir que os resultados obtidos com os esquemas de um passo e dois passos têm pouca diferença para o problema do escoamento não-viscoso ao redor de um veículo espacial arbitrário em regime supersônico, apresentando boa concordância com relação aos resultados experimentais obtidos por Houtman et al. [1995].

5.9 Escoamento hipersônico sobre uma placa plana com rampa

O problema da interação camada limite/onda de choque (CLOC) em escoamentos supersônicos e hipersônicos vem sendo estudado durante décadas [Grasso e Marini, 1996; Dolling, 2001] devido a sua direta aplicação em diversas configurações tais como veículos espaciais (superfície de controle, interseção asa-fuselagem, etc.), mísseis e projéteis, entre outros. Nestas configurações, a interação CLOC tem uma forte influência nos seguintes itens: os níveis de aquecimento, o tamanho da região de recirculação, as cargas de pressão transiente, a perda de eficiência das superfícies de controle, etc.

A configuração formada pela placa plana e uma rampa é um típico exemplo no estudo da interação CLOC. Embora a geometria seja simples, os fenômenos físicos presentes no problema são muitos complexos, sendo estes: a separação da camada limite induzida pela interação camada limite/onda de choque e os fortes gradientes gerados na região de recompressão. Os principais parâmetros que influenciam a interação CLOC, segundo Bertin [1994] são o número de Mach, o número de Reynolds, a temperatura da superfície, o tipo de escoamento (laminar e/ou turbulento), o ângulo de deflexão da rampa e o estado químico do gás.

Uma representação esquemática da interação camada limite laminar/onda de choque (CLLOC) e da distribuição do coeficiente de pressão podem ser observadas na Figura 5.48.

Inicialmente, no bordo de ataque da placa plana forma-se uma onda de choque relativamente débil e na região de interseção da placa plana-rampa forma-se uma onda de choque induzida pela rampa. Esta última interage com a camada limite e, devido à propagação da perturbação da pressão através da parte subsônica da camada limite, pode acontecer a separação do escoamento. A bolha de separação causa a formação de ondas de descolamento e recolamento que interagem gerando uma onda de choque refletida, uma camada de cisalhamento e, dependendo do número de Mach, uma onda de choque ou leque de expansão que interage com a camada limite na rampa.

Pode-se observar na distribuição do coeficiente de pressão que no bordo de ataque existe um importante pico de pressão originado pela forte interação viscosa. Sendo que a taxa de crescimento da espessura de deslocamento da camada limite é grande nesta região. Após esta região, o crescimento da camada limite é moderado e a pressão fica praticamente constante até a região de recirculação. A região da separação laminar é tipicamente caracterizada por um patamar de pressão constante e seguido por uma recuperação de pressão antes do ponto de recolamento. Os coeficientes de pressão, fricção e de transferência de calor aumentam depois do ponto de recolamento devido à recompressão do escoamento e apresentam um pico após o ponto

de recolamento. Sendo que nesta região a espessura da camada limite é mínima. Após o pico de pressão máximo ($C_{p_{max}}$), existe um patamar de pressão constante no qual tem-se um valor de pressão próximo ao obtido no caso de um problema não-viscoso ($C_{p_{nao-visc}}$).

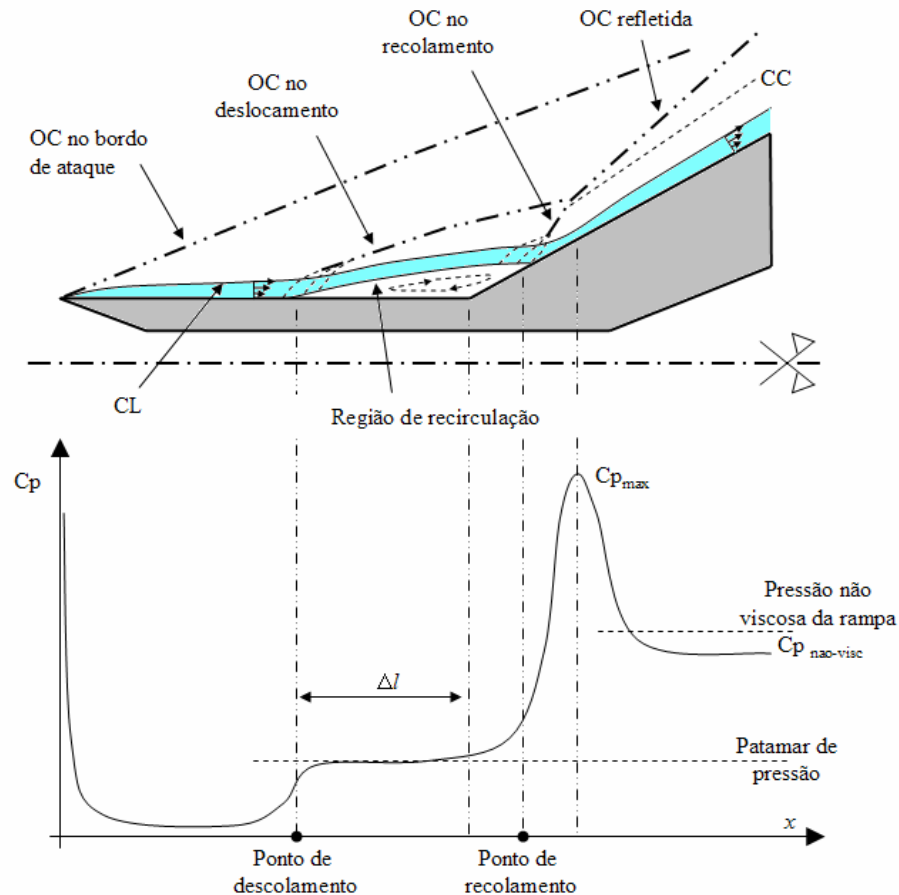


Figura 5.48: Representação da interação CLLOC e da distribuição do coeficiente de pressão, sendo: CC = camada de cisalhamento, CL = camada limite e OC = onda de choque.

Os primeiros estudos experimentais e numéricos conduzidos por Chantz et al. (1998) foram sobre um corpo axissimétrico a fim de evitar efeitos tridimensionais. Neste trabalho foram realizadas numerosas comparações entre diversos métodos de resolução (códigos de N-S e Simulação Direta de Monte Carlo). Os estudos mostraram que a região de separação é altamente sensível à seleção da malha e foram encontradas discrepâncias entre as pressões medidas e as determinadas numericamente na região de interação.

Devido ao grande interesse na determinação das regiões de recirculação e fortes gradientes nos problemas hipersônicos, no *Working Group 10* da *NATO Research Technology Organization* (RTO-TR-AVT-007-V3) em 2006, foram propostos alguns exemplos de validação, os quais permitem uma análise minuciosa da influência dos diferentes esquemas de resolução e malhas. A geometria é similar à mostrada na Figura 5.48 e levemente modificada com relação à

empregada por Chantz et al. [1998] para possibilitar que na simulação numérica prescrevam-se adequadamente as condições de contorno na região de saída. Os experimentos foram realizados para números de Mach variando entre 10,16 e 12,49 e com números de Reynolds suficientemente baixos, com o objetivo de assegurar um escoamento totalmente laminar. A temperatura local não excede valores elevados a ponto de iniciar efeitos químicos e de não-equilíbrio térmico.

Neste exemplo foi considerado o caso 14 estudado experimental e numericamente por Holden et al. [2006]. As propriedades do escoamento são dadas por $M = 10,30$ e com número de Reynolds baseado nos valores da corrente-livre e no comprimento da placa plana (L) igual a $Re_{\infty} = 24624,6$. Com este exemplo, pretende-se validar os diferentes esquemas implementados, o método de refinamento adaptativo e a técnica de integração com subciclos no regime hipersônico, além de contribuir no entendimento das características físicas do problema de interação camada limite laminar/onda de choque.

O domínio e as condições de contorno para o problema da placa plana com uma rampa com 30° de inclinação são mostrados na Figura 5.49a, sendo as dimensões $AB = 0,5$, $BC = L = 4,004$, $BD = 8,661$, $AF = 0,5$, $DE = 5,0$ e $0,01$ na direção perpendicular ao plano x - y . As condições da corrente-livre para o caso 14 são: $V_{\infty} = (10,30; 0,0; 0,0)$, $\rho_{\infty} = 1,0$, $e_{\infty} = 54,83075$ e $p_{\infty} = 0,71428$, e foram aplicadas nos planos definidos pelas arestas AF e FE . Em AB colocam-se condições de simetria e em BCG prescreve-se a condição de não deslizamento para a velocidade. Finalmente, em GE as condições de contorno são livres. Os valores da corrente-livre foram tomados como condições iniciais e aplicados em todos os nós do domínio com exceção dos nós do contorno sólido.

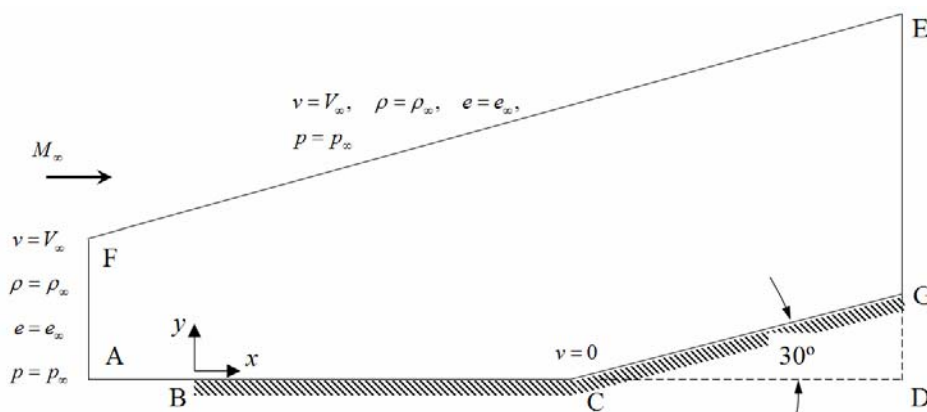


Figura 5.49a: Geometria e condições de contorno para a placa plana com rampa.

Empregam-se para a resolução do problema os esquemas de um passo e dois passos

(p2) com malhas de hexaedros (H) e tetraedros (T). Todas as malhas empregadas concentram elementos nas regiões de início da placa (ponto B) e próximas ao contorno sólido, a fim de capturar os efeitos da camada limite. As malhas de tetraedros são obtidas subdividindo cada elemento hexaédrico em cinco elementos tetraédricos. Na identificação dos exemplos, empregam-se as letras: “a” quando se modifica o coeficiente de amortecimento fictício e “sc” indica o emprego da técnica de subciclos. O exemplo foi modelado como um problema bidimensional, portanto em todas as malhas iniciais tem-se apenas um elemento na direção z . Na Tabela 5.11, mostram-se para cada exemplo sua identificação, o número de nós (nno), o número de elementos ($nele$), o número de nós sobre o contorno sólido ($nnoCS$), o comprimento de recirculação (Δl), o coeficiente de pressão máximo (Cp_{max}), o mínimo passo de tempo e o coeficiente de amortecimento fictício (CAF). O coeficiente de segurança vale $CS = 0,1$ para todos os exemplos estudados.

Caso	Malha	nno	nele	nnoCS	Δl	Cp_{max}	Δt	CAF
Caso 14 – $M = 10,30$ e $Re = 24624,6$	M1H	31232	15300	482	0,551	0,967	4.10^{-5}	0,7
	M2H	48422	23800	642	0,677	1,051	4.10^{-5}	0,7
	M3H	68202	33600	782	0,706	1,058	3.10^{-5}	0,7
	M3aH	68202	33600	782	0,743	1,123	3.10^{-5}	0,4
	M2Hsc	48422	23800	642	0,722	1,139	4.10^{-5}	0,7
	M2Hp2	48422	23800	642	0,741	1,055	4.10^{-5}	0,7
	M2aHp2	48422	23800	642	0,764	1,128	4.10^{-5}	0,4
	M2T	26112	63750	482	0,349	0,834	3.10^{-5}	0,7
	M2TR1	66860	220131	1443	0,509	0,875	1.10^{-5}	0,7
	M2TR2	246882	1067740	4805	0,542	0,998	6.10^{-6}	0,7
	M2TR2sc	246882	1067740	4805	0,542	1,015	6.10^{-6}	0,7
	M2Tp2	26112	63750	482	0,269	0,786	3.10^{-5}	0,7
	M2Tp2R1	66860	220131	1443	0,480	0,845	1.10^{-5}	0,7
M2Tp2R2	246882	1067740	4805	0,554	0,953	6.10^{-6}	0,7	

Tabela 5.11: Dados das malhas e principais parâmetros para o problema da placa plana-rampa.

(nno = núm. de nós, $nele$ = num. de elementos, $nnoCS$ = num. de nós do contorno sólido, Δl = comprimento de recirculação, Cp_{max} = máximo coef. de pressão, Δt = incremento de tempo e CAF = coef. de amortecimento fictício)

Para as malhas de tetraedros, emprega-se o esquema de adaptação de malhas com os seguintes indicadores: de baixa velocidade, de mudança de direção da velocidade, de gradientes

de velocidade, de pressão e de energia interna. Para todos os indicadores empregou-se $\omega = 0,7$ na equação do critério de adaptação. O primeiro e segundo nível de refinamento são identificados como R1 e R2, respectivamente. Na Figura 5.49b, são mostradas as malhas empregadas na região de interseção da placa plana com a rampa para os diferentes elementos.

As distribuições do número de Mach são mostradas na Figura 5.50 para as malhas de hexaedros M1H, M2H e M3H com o esquema de um passo. Nota-se que os principais fenômenos do problema são capturados e ficam mais bem definidos para a malha M3H, sendo que a região de recirculação aumentou com os sucessivos refinamentos da malha.

Na Figura 5.51 são apresentadas a distribuição do coeficiente de pressão, C_p , e a distribuição do coeficiente de fricção, C_f , para as malhas M1H, M2H, M3H e M3aH. Sendo que nesta última, o CAF foi reduzido de 0,70 para 0,40. A distribuição do coeficiente de pressão é comparada com os resultados experimentais obtidos por Holden et al. [2006], percebendo-se algumas diferenças nas regiões de recirculação, do pico de pressão e no patamar de pressão, porém na região de recompressão mostra-se uma boa concordância. A malha inicial M1H apresenta uma boa concordância com os resultados experimentais na região de recirculação, porém com os posteriores refinamentos da malha afasta-se dos resultados experimentais. As malhas M2H e M3H mostram uma região de recirculação e pico de pressões maiores que os apresentados por Holden et al. [2006], ou seja, os resultados obtidos são representativos de um problema com número de Reynolds mais elevado.

A causa das diferenças entre os resultados experimentais e numéricos não pode ser atribuída ao refinamento da malha já que as distribuições do C_p e C_f para as malhas M2H e M3H são muito próximas. Portanto, pode-se considerar que os resultados são praticamente independentes da malha.

O coeficiente de amortecimento fictício foi reduzido de 0,7 para 0,4 na malha mais refinada com o intuito de avaliar a influência da viscosidade artificial nos resultados. Como se pode observar na Figura 5.51, a redução do CAF (malha M3aH) aumentou levemente o pico de pressão e a região de recirculação em comparação com os resultados anteriores, ou seja, afastam-se dos resultados experimentais e numéricos obtidos com $CAF = 0,7$.

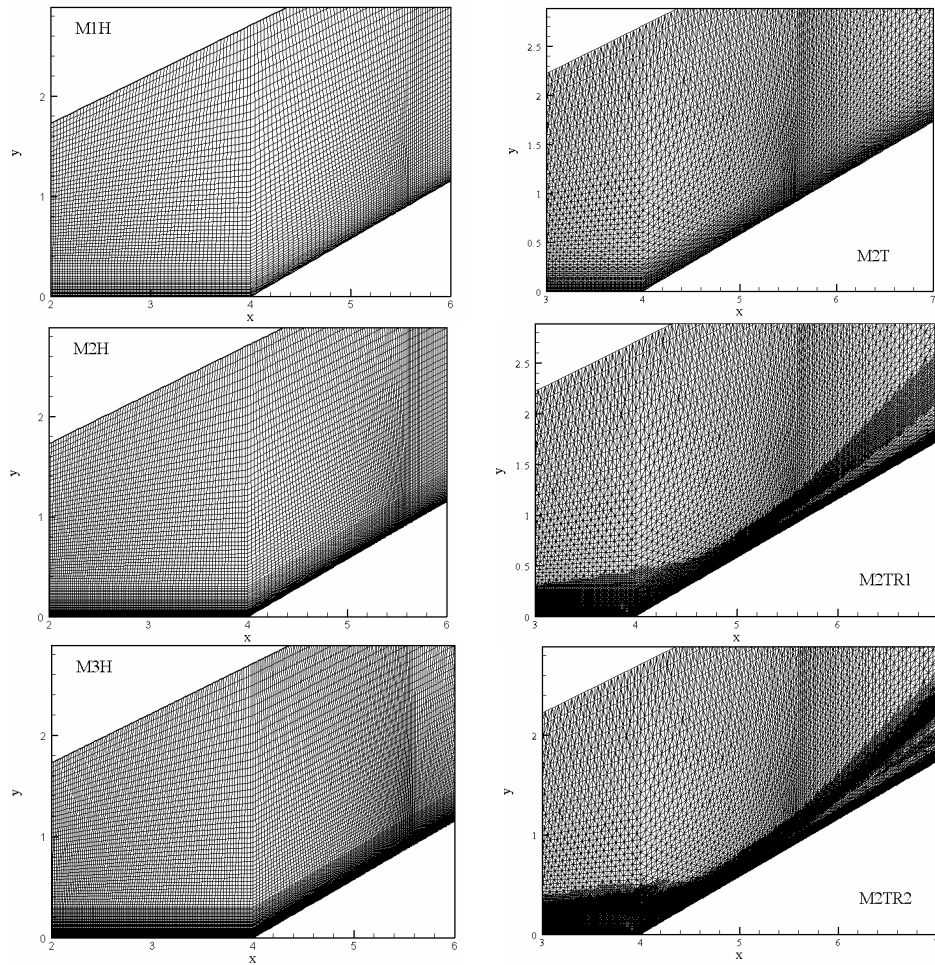


Figura 5.49b: Malhas empregadas no problema da placa plana com rampa na região de interseção placa plana / rampa.

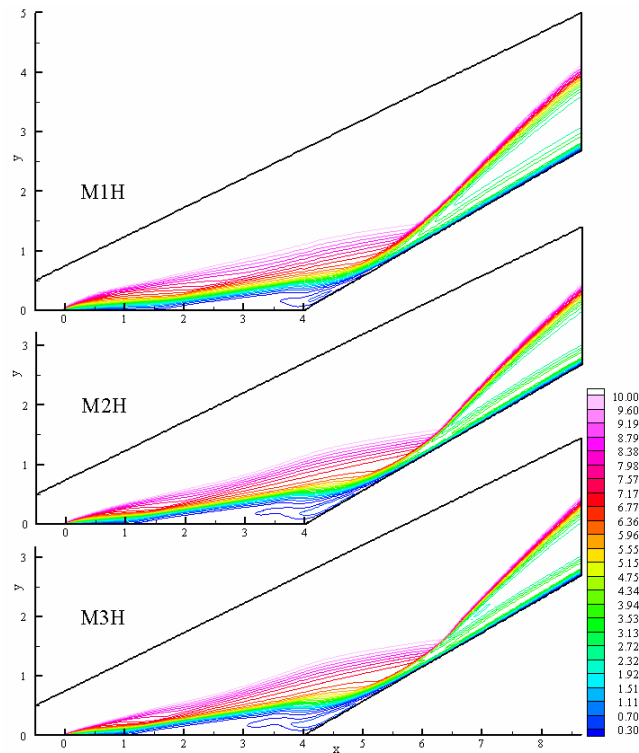


Figura 5.50: Distribuição do número de Mach para as malhas M1H, M2H e M3H.

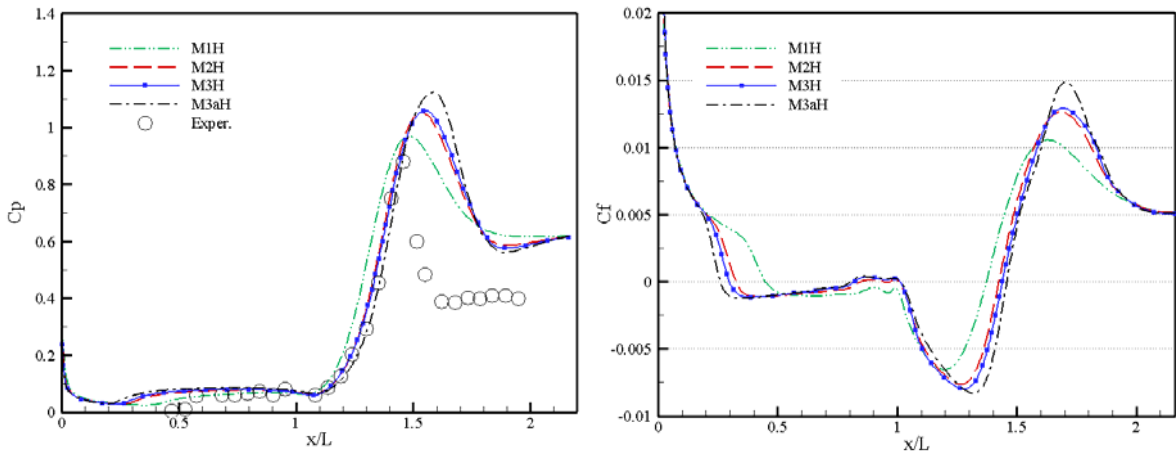


Figura 5.51: Distribuição dos coeficientes de pressão e fricção para as malhas M1H, M2H, M3H e M3aH.

Na Figura 5.52, mostram-se as distribuições dos coeficientes de pressão e de fricção para as malhas de hexaedros M2 com o esquema de dois passos. Os resultados obtidos apresentam algumas diferenças com relação aos resultados experimentais de Holden et al. [2006]. Tal como havia acontecido com o esquema de um passo, os valores da recirculação e do pico de pressão são maiores. Também, observa-se que os resultados determinados com o esquema de dois passos afastam-se dos resultados experimentais e numéricos obtidos com o esquema de um passo. Como se pode observar na Figura 5.52, para valores iguais do coeficiente de amortecimento fictício ($CAF = 0,7$), o esquema de dois passos (M2Hp2) é mais difusivo que o esquema de um passo (M2H). Reduzindo o valor de CAF para 0,4, não se obtém uma melhora nos resultados, ver M2aHp2. O comportamento é o mesmo que foi obtido com o esquema de um passo, ou seja, ocorre um aumento na região de recirculação e no pico de pressão.

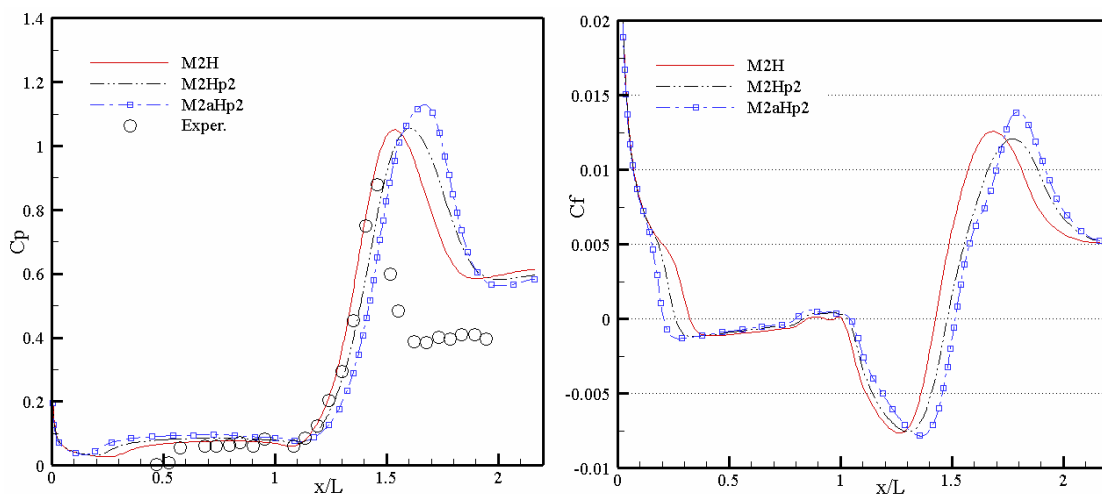


Figura 5.52: Distribuição dos coeficientes de pressão e fricção para as malhas M2H, M2Hp2 e M2aHp2.

As discrepâncias obtidas com as malhas de hexaedros, possivelmente tenham sua origem na discretização empregada, já que o refinamento e a redução do coeficiente de amortecimento não melhoram os resultados das simulações. Com uma concentração maior de elementos nas regiões de início da placa e de interseção placa plana-rampa, provavelmente a separação da camada limite seja melhor capturada.

As distribuições do número de Mach e da massa específica são dadas na Figura 5.53 para as malhas de tetraedros M2T, M2TR1 e M2TR2 com o esquema de um passo e a técnica de adaptação de malhas. Observa-se que com o esquema de adaptação de malhas consegue-se capturar eficientemente as regiões de recirculação e de recompressão e a onda de choque refletida.

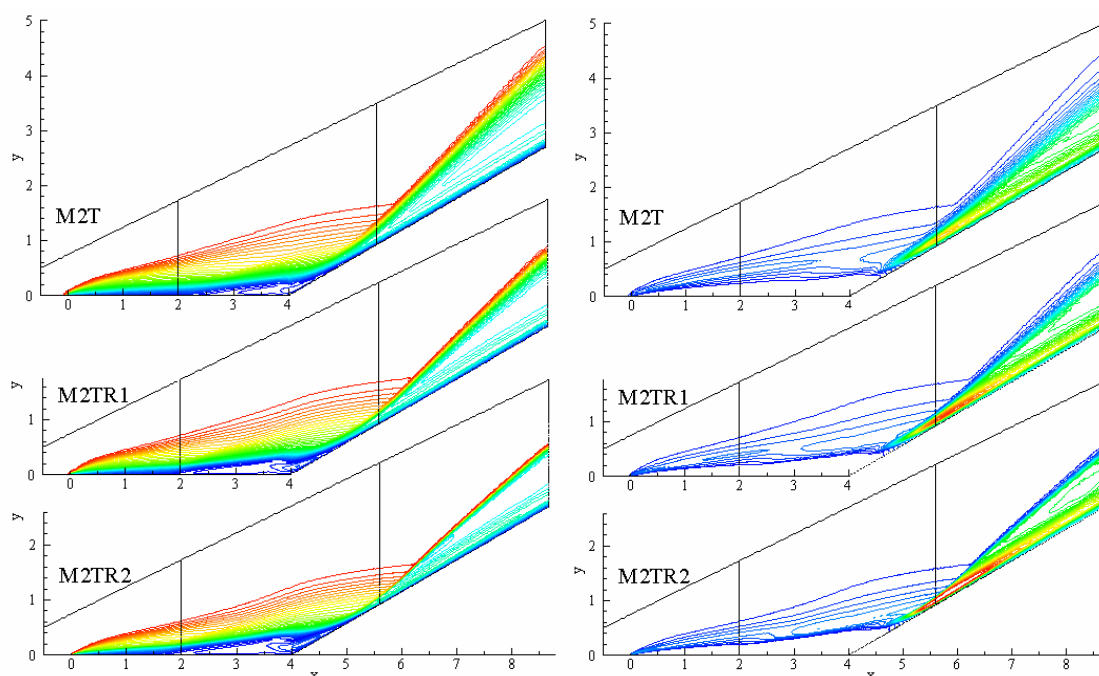


Figura 5.53: Distribuições do número de Mach e da massa específica nas malhas M2T, M2TR1 e M2TR2.

Da análise das distribuições das variáveis e dos coeficientes de C_p e C_f , conforme Figura 5.54, pode-se concluir que o esquema de adaptação de malhas melhora notavelmente os resultados. A malha com os dois níveis de refinamento (M2TR2) apresenta uma boa concordância com relação aos resultados experimentais apresentados por Holden et al. [2006], principalmente na região de recirculação e na posição e valor de pico de pressão. Observa-se que os resultados determinados com as malhas de hexaedros na região de recompressão (Figura 5.51) são levemente melhores comparados aos obtidos com malhas de tetraedros, porém com os

sucessivos refinamentos os resultados determinados nas malhas M2T aproximam-se dos valores experimentais. Na região do patamar de pressão constante, obtém-se um valor de 0,61 para todas as malhas M2T, sendo este valor praticamente coincidente com o valor do coeficiente de pressão obtido no caso de um problema não-viscoso ($C_{p_{\text{nao-visc}}} = 0,628$). As diferenças nesta região são aproximadamente as mesmas que aparecem nas malhas de hexaedros.

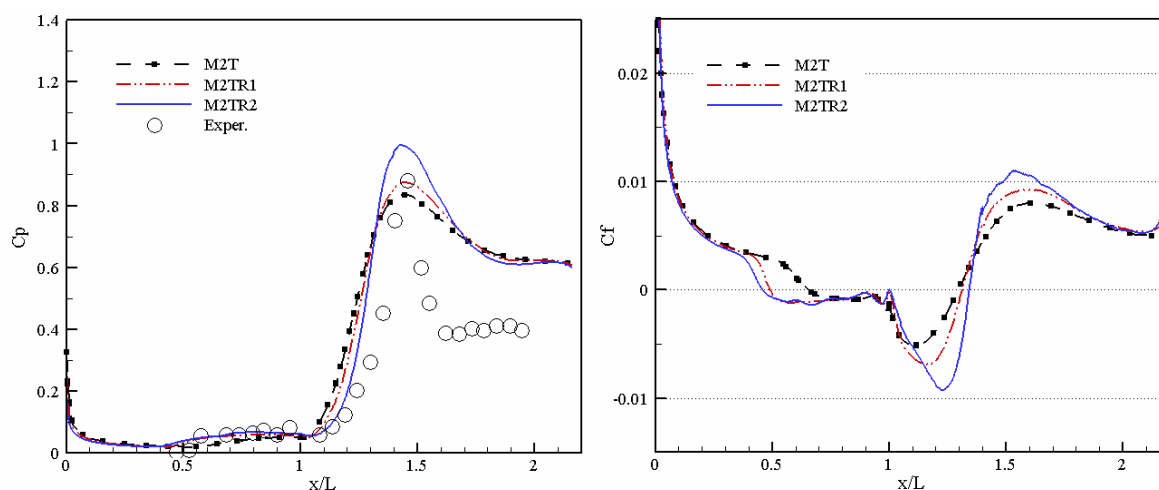


Figura 5.54: Distribuição dos coeficientes de pressão e fricção para as malhas M2T, M2TR1 e M2TR2.

Na Figura 5.55, mostram-se a distribuição do coeficiente de pressão e de fricção para as malhas de tetraedros M2TR2 (esquema de um passo) e M2Tp2R2 (esquema de dois passos), conjuntamente com os resultados experimentais e numéricos (Numer. 1 = Gnoffo, Numer. 2 = Tannehill) apresentados por Holden et al. [2006]. Da comparação dos resultados obtidos com as malhas M2TR2 e M2Tp2R2 e os valores experimentais, pode-se concluir que a concordância é boa nas regiões de recirculação e do pico de pressão, entretanto afastam-se na região do patamar de pressão constante. Com relação aos resultados numéricos apresentados por Gnoffo (Numer. 1) e Tannehill (Numer. 2) em Holden et al. [2006], pode-se concluir que os resultados obtidos com as malhas M2TR2 e M2Tp2R2 têm uma melhor concordância na região de recirculação. Na região de recompressão os resultados são praticamente coincidentes com os valores obtidos no presente trabalho. Os resultados de Gnoffo e Tannehill se aproximam melhor na região do pico de pressão e os valores do patamar de pressão são ligeiramente menores. Apesar do pico de pressão ser mais estreito nos resultados de Gnoffo e Tannehill, o máximo valor está levemente deslocado com relação aos resultados experimentais e aos resultados do presente trabalho. No trabalho de Holden et al. [2006] não se especificam as malhas empregadas por Gnoffo e Tannehill, mas possivelmente os mesmos empregam uma malha bem refinada nas proximidades

do ponto de recolamento da camada limite, portanto, conseguindo estreitar a região do pico de pressão.

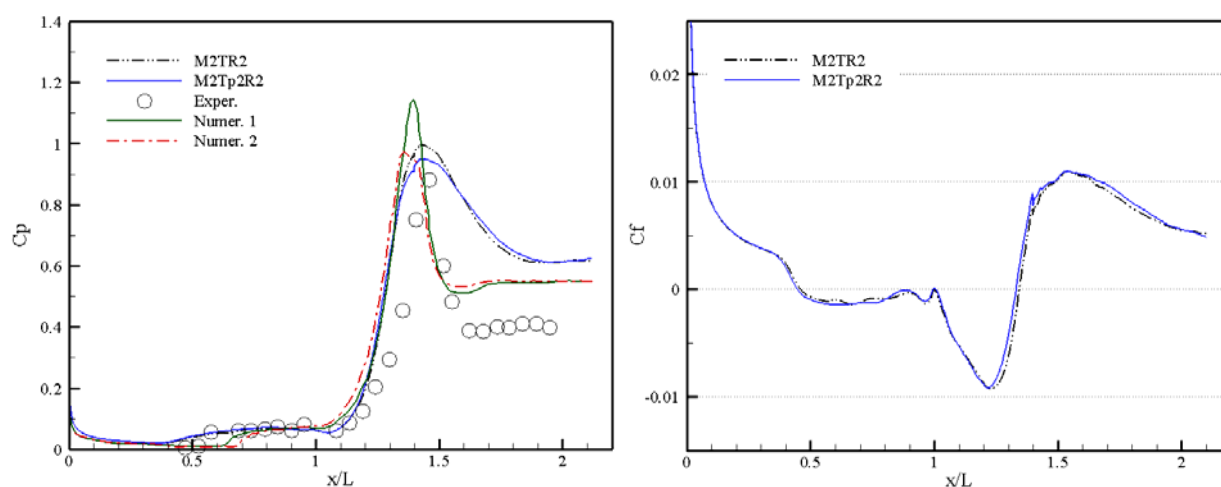


Figura 5.55: Distribuição dos coeficientes de pressão e fricção para as malhas M2TR2 e M2Tp2R2.

A percentagem de elementos para os diferentes grupos de incremento de tempo e os máximos ganhos de tempo de processamento teórico ($S-U_{teo}$) e real ($S-U$) da técnica de subciclos são dados na Tabela 5.12 para as malhas M2H e M2TR2. O máximo ganho teórico de tempo de processamento é baixo e praticamente o mesmo para os dois exemplos. Este valor não pode ser atingido já que no processo de integração sempre é necessário controlar os diferentes grupos de elementos e nós, a fim de realizar as respectivas atualizações e interpolações. Uma vez que a quantidade de elementos e nós são menores para o caso M2H, o máximo ganho de tempo de processamento real fica mais próximo do valor teórico.

Grupo	M2H	M2TR2
1 Δt	25,14	32,80
2 Δt	74,86	59,77
4 Δt	-	4,18
8 Δt	-	3,25
$S-U_{teo}$	1,59	1,56
$S-U$	1,49	1,28

Tabela 5.12: Percentagem de elementos, *speed-up* teórico ($S-U_{teo}$) e real ($S-U$) para as malhas M2H e M2TR2 resolvidos com a técnica de subciclos.

Na Figura 5.56, mostra-se a distribuição dos incrementos de tempo de cada elemento

para a malha M2TR2. Nota-se que os menores incrementos de tempo ($1\Delta t$) estão localizados vizinhos ao contorno sólido, ou seja, na região da camada limite. Os incrementos de tempo variando entre $2\Delta t$ e $4\Delta t$ estão localizados na regiões da recirculação e da onda de choque refletida. Finalmente, os elementos com o máximo incremento de tempo ($8\Delta t$) se localizam nas regiões onde os gradientes e efeitos viscosos são mínimos.

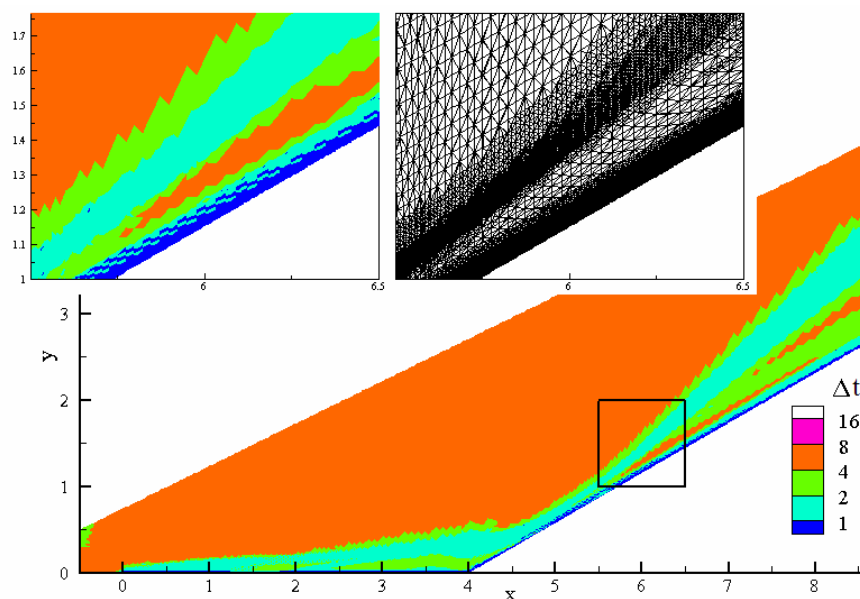


Figura 5.56: Distribuição dos incrementos de tempo na técnica de subciclos para a malha M2TR2.

O erro associado com a técnica de subciclos pode ser verificado nas distribuições dos coeficientes de pressão e de fricção da Figura 5.57 para as malhas M2H e M2TR2. As diferenças obtidas na malha M2H com e sem a técnica de subciclos ocorrem porque a malha empregada não é suficientemente refinada, portanto, o erro associado à interpolação linear é importante. Observa-se que as maiores diferenças estão localizadas nas regiões onde as variáveis sofrem alterações importantes (separação da camada limite e pico de pressão). No caso da malha de tetraedros, a concordância dos resultados com e sem o uso da técnica de subciclos é muito boa, já que os menores elementos estão localizados nas regiões com fortes gradientes e, por consequência, o erro associado à interpolação é menor.

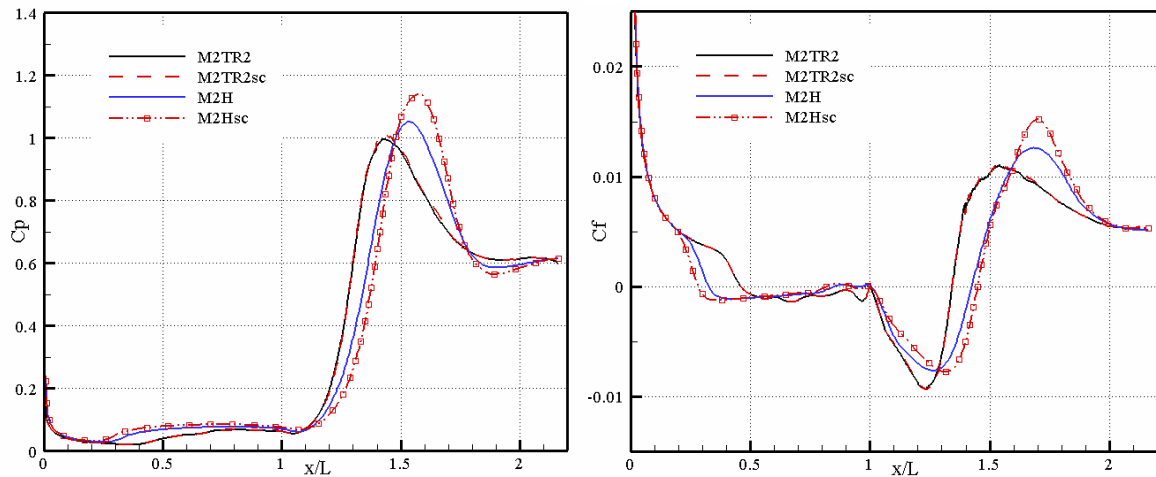


Figura 5.57: Distribuição dos coeficientes de pressão e fricção para as malhas M2H e M2TR2 com a técnica de subciclos.

Finalmente, com o objetivo de analisar o mecanismo de interação camada limite laminar/onda de choque, mostram-se na Figura 5.58 as distribuições do coeficiente de pressão e de fricção para uma seqüência de diferentes tempos adimensionais para as malhas M2T, M2TR1 e M2TR2. Nos primeiros instantes de tempo ($t = 0,21$), forma-se uma pequena recirculação (valor negativo do C_f) na região de interseção entre a placa plana e a rampa ($x/L = 1,0$). Após este ponto, a pressão tem um leve pico devido à existência da onda de recolamento na parte superior da bolha de recirculação. Depois da região de recompressão, a pressão recupera o valor de $C_p \cong 0,60$, sendo que em um problema não-viscoso o valor da pressão atrás da onda de choque é $0,628$.

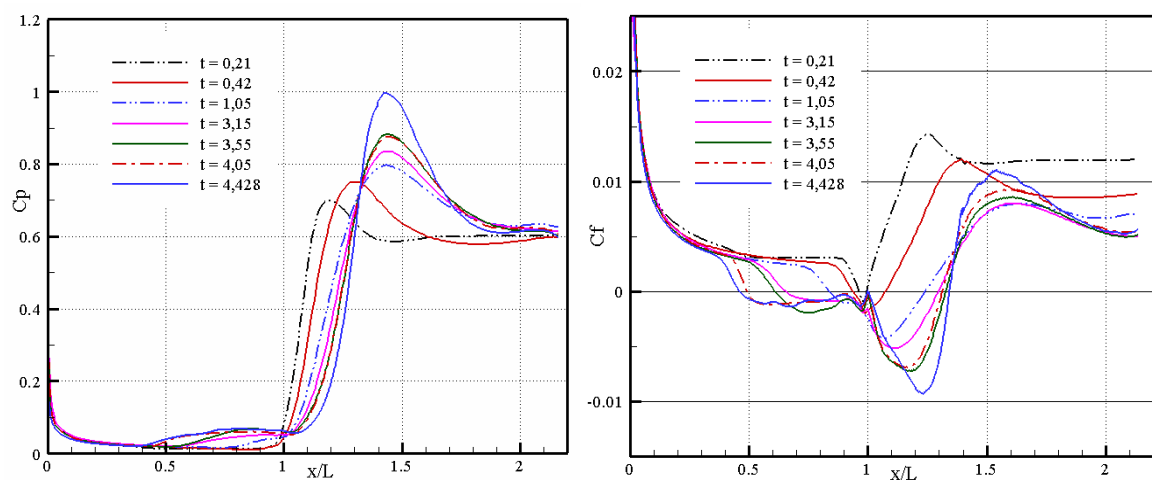


Figura 5.58: Distribuição dos coeficientes de pressão e fricção para diferentes tempos adimensionais nas malhas M2T, M2TR1 e M2TR2.

A medida que o tempo avança, a recirculação aumenta de tamanho, sendo o crescimento principalmente nos primeiros momentos de tempo sobre a rampa e depois sobre a placa plana. Pode-se observar que depois de atingir aproximadamente o tempo $t = 3,15$, o ponto de recolamento permanece praticamente sem deslocar, entretanto o ponto de deslocamento se move continuamente até atingir $t = 4,428$. Nos dois últimos instantes de tempo computado ($t = 4,05$ e $4,428$), observa-se que a região da recirculação cresce pouco em comparação com o crescimento do pico de pressão.

As distribuições das componentes de velocidade v_1 e v_2 em diferentes posições x/L do conjunto placa plana-rampa para o tempo $t = 4,428$ são mostradas nas Figuras 5.59 e 5.60 para a malha M2TR2. A abscissa é adimensionalizada com relação ao comprimento da placa plana (L), portanto, os valores de abscissa $x/L > 1,0$ estão sobre a rampa. A fim de facilitar a interpretação dos resultados na região da rampa, considera-se a origem da ordenada (y_R) sobre a mesma.

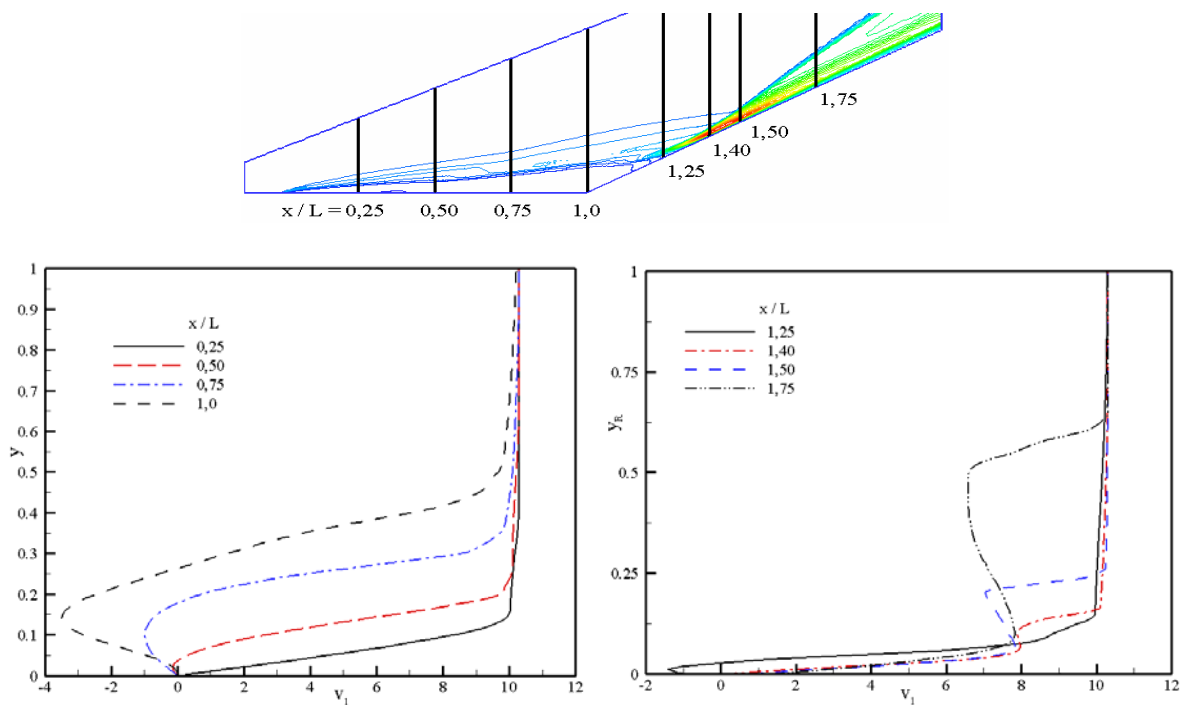


Figura 5.59: Distribuição da componente de velocidade v_1 sobre a malha M2TR2.

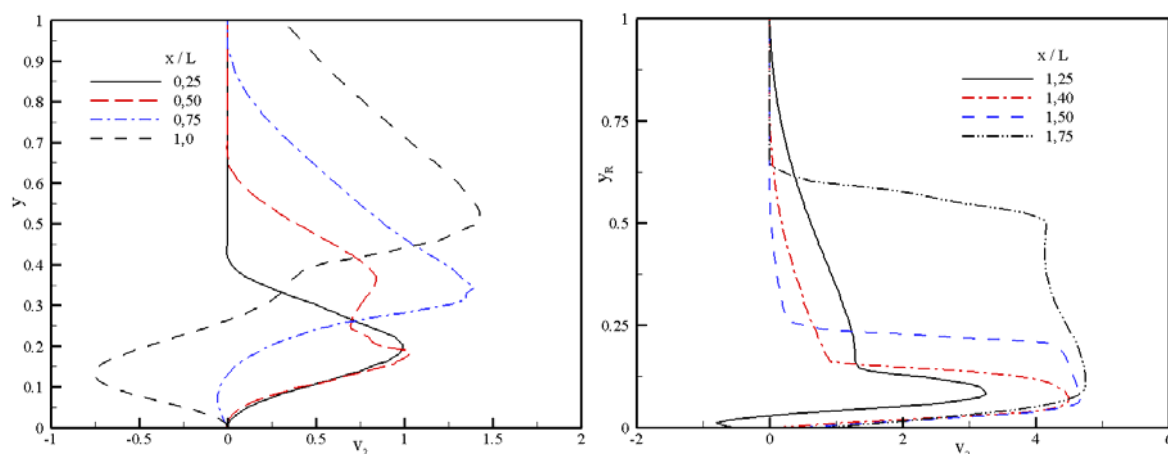


Figura 5.60: Distribuição da componente de velocidade v_2 sobre a malha M2TR2.

Através das componentes de velocidade, pode-se verificar que a inversão do escoamento se produz aproximadamente entre $x/L = 0,25$ e $0,50$ (pelo coeficiente de fricção $0,458$). Entretanto, o ponto de recolamento fica localizado entre $x/L = 1,25$ e $1,40$. Após o ponto de recolamento, observa-se que os gradientes do perfil de velocidades ($\partial v_1 / \partial y_R$ e $\partial v_2 / \partial y_R$) são maior em $x/L = 1,40$ e $1,50$ em comparação com $1,75$, produzindo nesta região um aumento no coeficiente de fricção (Figura 5.58). Pode-se observar que os perfis de velocidade são fortemente alterados na região da rampa devido à formação da onda refletida.

Nas Figuras 5.61 e 5.62 são dadas as distribuições de pressão e de massa específica em diferentes posições x/L do conjunto placa plana-rampa. Pode-se verificar, através do perfil das distribuições de pressão e massa específica sobre a placa plana, como o crescimento da camada limite modifica esta região. Entretanto, na região da rampa e perto do ponto de recolamento se produzem as máximas variações nas distribuições da pressão e massa específica. Na estação $x/L = 1,40$ as relações entre os valores locais máximos e da corrente não perturbada são aproximadamente 75 vezes maior na pressão e 12,5 na massa específica.

Como aconteceu com as componentes de velocidade, os perfis da pressão e da massa específica sofrem alterações devido à presença da onda de choque refletida.

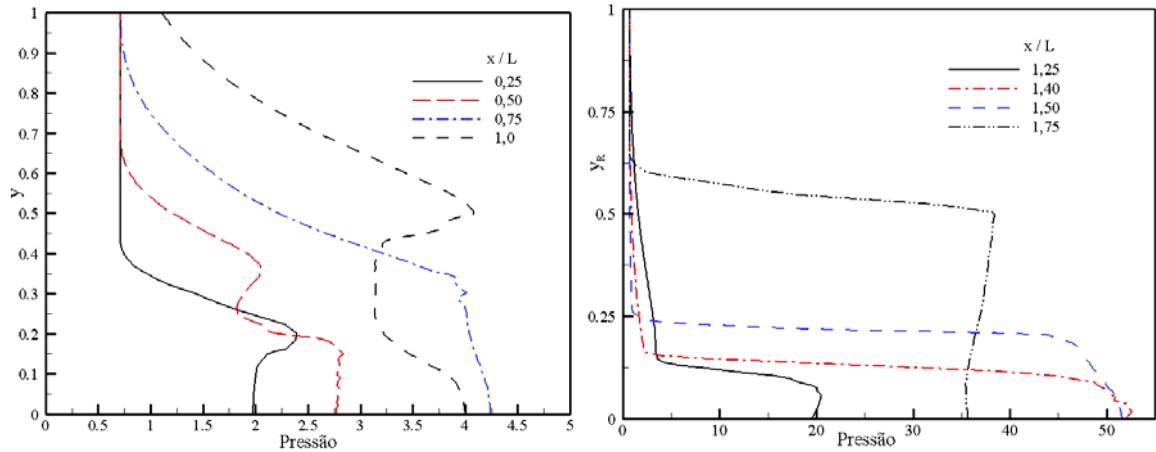


Figura 5.61: Distribuição da pressão sobre a malha M2TR2.

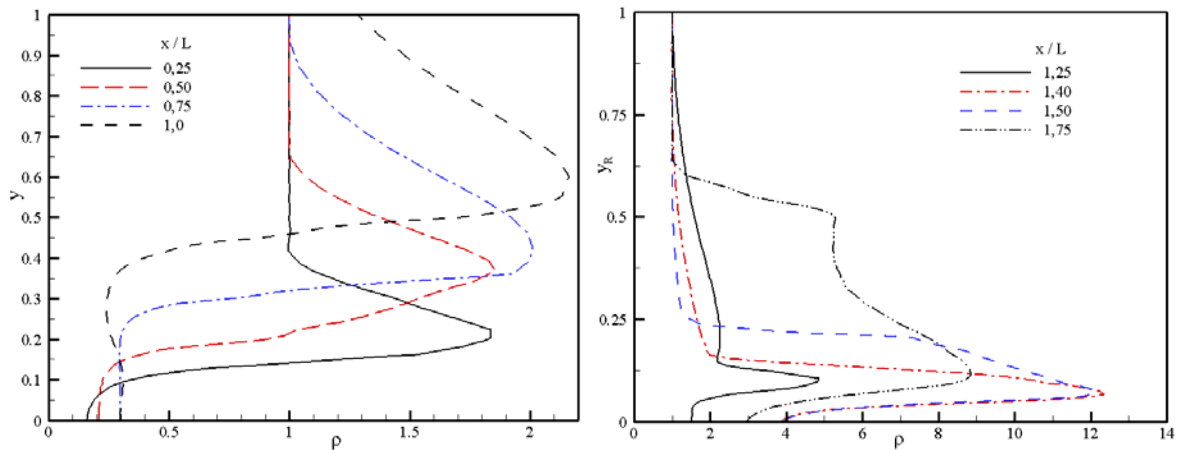


Figura 5.62: Distribuição da massa específica sobre a malha M2TR2.

A combinação da malha de tetraedros e o esquema de adaptação de malhas possibilitaram obter resultados que apresentam uma boa concordância com os resultados experimentais. Entretanto, as malhas de hexaedros apresentaram discrepâncias com relação aos resultados experimentais. A técnica de subciclos mostrou-se potencialmente útil, apesar do ganho no tempo de processamento ser baixo devido ao tamanho dos elementos não apresentarem uma variação importante.

5.10 escoamento ao redor de uma configuração asa-fuselagem

Uma configuração asa-fuselagem é analisada em um escoamento não-viscoso e viscoso para $M_\infty = 2,3$ e $4,63$ e ângulos de ataque de $6,2^\circ$ e $11,1^\circ$. A configuração asa-fuselagem (WB-Wing-Body) analisada poderia representar um avião supersônico, um veículo de

ascensão e reentrada [Bertin, 1994; Monti e Paterna, 2006] ou um veículo de combate não-tripulado (UCAV, Unmanned Combat Air Vehicle). O escoamento tridimensional resultante sobre o corpo é complexo e contém uma variedade de interações viscosas. O exemplo permite validar o código em um escoamento não-viscoso e viscoso com uma geometria simples, porém que se aproxima de uma configuração real. São empregados conjuntamente o esquema de adaptação de malhas e a técnica de subciclos.

A parte dianteira da fuselagem foi gerada de acordo com os critérios de Haack [Jernell, 1971], a fim de minimizar o arrasto de onda. No restante da fuselagem emprega-se uma seção cilíndrica. A asa é do tipo asa delta com ângulos de 65° no bordo de ataque e 0° no bordo de fuga e um aerofólio simétrico com seção de rombóide e 6% de espessura. Na Figura 5.63, mostra-se esquematicamente a geometria e dimensões do modelo.

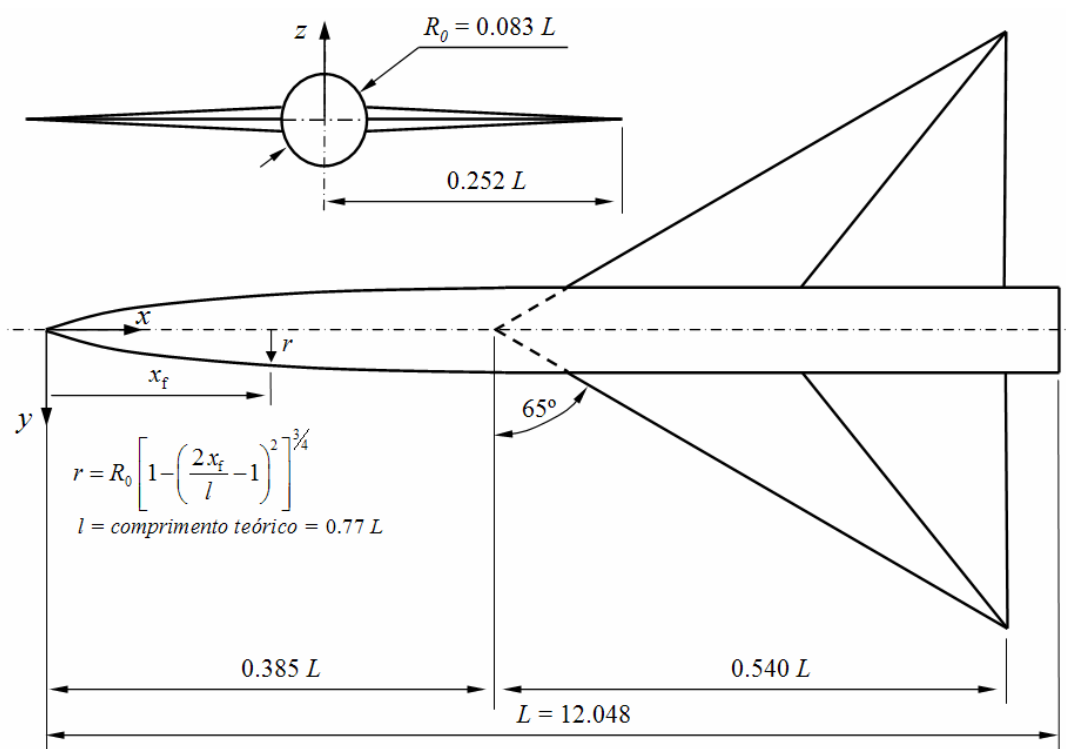


Figura 5.63: Geometria e dimensões da configuração asa-fuselagem.

Na Figura 5.64 apresentam-se esquematicamente alguns dos principais fenômenos que existem na fuselagem assimétrica e no aerofólio da asa. Considera-se o escoamento supersônico sobre um aerofólio com seção rombóide e incidência nula. Para esta condição, formam-se duas ondas de choque (OC) no bordo de ataque que comprimem o escoamento, aumentando a pressão na parte dianteira superior e inferior do aerofólio. Depois, devido à mudança abrupta da geometria originam-se dois leques de expansão (LE) que aceleram o

escoamento, reduzindo a pressão na região posterior superior e inferior do aerofólio. Finalmente, no bordo de fuga a região de recompressão é formada por duas ondas de choque.

Dependendo do ângulo de ataque, nos bordos de ataque e fuga pode-se gerar um leque de expansão no lugar da onda de choque. A intensidade da OC e LE depende do número de Mach e da espessura do aerofólio. Maiores informações podem ser encontradas em Liepmann e Roshko [1960] e Becker [1968], entre outros.

No caso da fuselagem, além das ondas de choque e leques de expansão existem várias interações de origem viscosas e não-viscosas que modificam o escoamento ao redor do corpo. Na região posterior da fuselagem se produz uma região de recirculação devido à separação da camada limite (CL). O escoamento se acelera através do leque de expansão, gerando uma onda de choque e uma camada cisalhante.

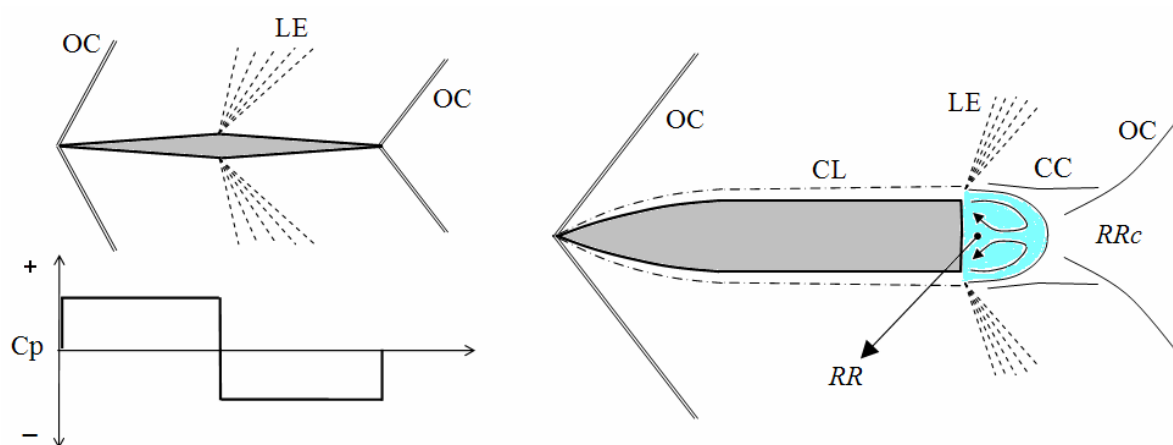


Figura 5.64: Representação esquemática dos principais fenômenos bidimensionais sobre o aerofólio e a fuselagem. (Fonte: Bertin [1994])

(CL = camada limite, CC = camada de cisalhamento, LE = leque de expansão, OC = onda de choque, RR = região de recirculação, RRc = região de recompressão)

Uma representação esquemática do escoamento sobre a seção da fuselagem e ao redor da asa delta com um ângulo de ataque diferente de zero podem ser observados na Figura 5.65. Quando um escoamento passa em uma asa delta com um ângulo de ataque diferente de zero, o escoamento separa-se do bordo de ataque formando um par de vórtices contrarotativos sobre a superfície superior da asa. No caso de asa delta com bordo de ataque “sharp”, a linha de separação primária LSP é fixa no bordo de ataque. A partir desta linha, a camada vorticosa enrola-se formando o vórtice primário VP , o qual cresce em tamanho e intensidade a partir do vértice da asa. O vórtice primário induz um pico de pressão na parte superior da asa, o qual gera um forte gradiente de pressão adverso. A camada limite pode separar-se devido ao gradiente de pressão adverso, gerando um novo vórtice denominado vórtice secundário VS , o qual gira no

sentido contrário ao vórtice primário. Em alguns casos o vórtice secundário pode ainda induzir a um gradiente de pressão adverso e gerar um vórtice terciário. O vórtice secundário é menos intenso que o VP e sua origem é predominantemente viscosa. Portanto, não pode ser detectado empregando as equações de Euler. Ao contrário do que acontece com a linha de separação primária, a linha de separação secundária LSS não é fixa e depende do tipo de camada limite e do número de Reynolds. Na Figura 5.65, também mostra-se uma representação esquemática da seção da asa delta com as linhas de corrente indicando os pontos de recolamento primário \underline{PRP} e secundário \underline{PRS} . Obviamente, estes pontos são equivalentes às linhas de recolamento primário \underline{LRP} e secundário \underline{LRS} no desenho tridimensional.

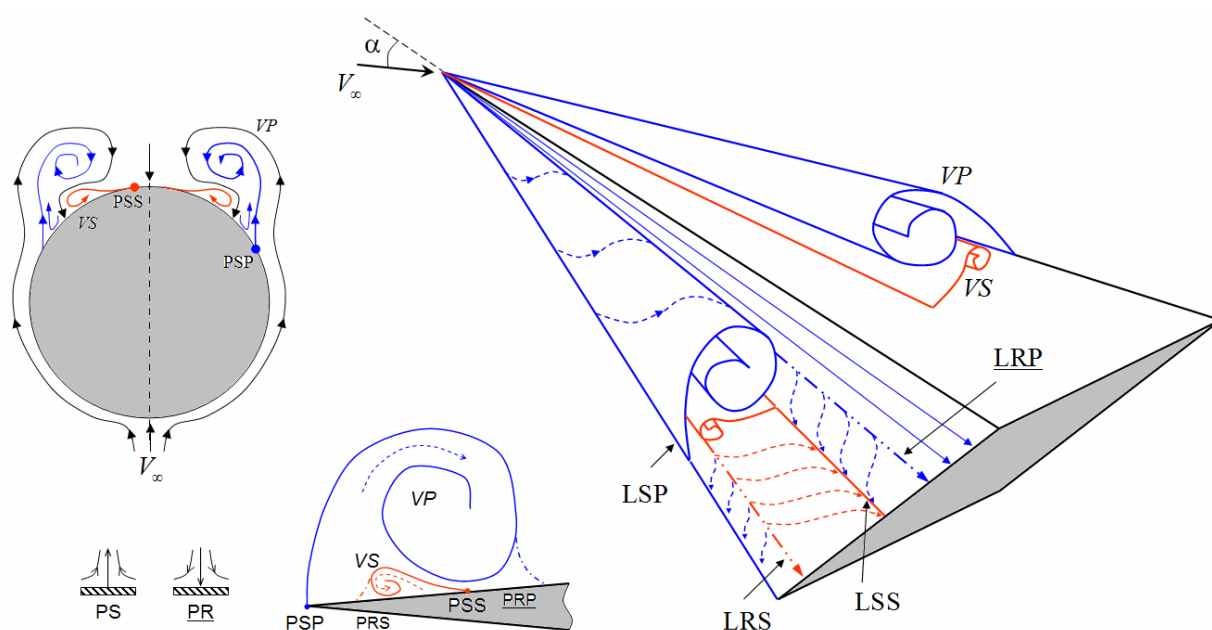


Figura 5.65: Representação esquemática dos principais fenômenos sobre a seção da fuselagem e asa delta. (Fonte: adaptação de Pirzadeh [2003])

(LSP/S = linha de separação primária/secundária, $\underline{LRP/S}$ = linha de recolamento primário/secundário, PSP/S = ponto de separação primário/secundário, $\underline{PRP/S}$ = ponto de recolamento primário/secundário, VP/S = vórtice primário/secundário)

Na seção da fuselagem (Figura 5.65), também se tem uma topologia do escoamento similar à mostrada para a asa delta, entretanto, o ponto de separação primário PSP não é fixo. Tanto o ponto de separação primário PSP quanto o secundário PSS são fortemente afetados pelo tipo de camada limite, mais especificamente pelo número de Reynolds.

Os resultados experimentais de Jernell [1971] apresentam a distribuição de pressão sobre a configuração asa-fuselagem para números de Mach variando entre 2,30 e 4,63 e ângulos de ataque até $11,1^\circ$. Neste trabalho, foram modelados os casos no qual o escoamento tem um

número de Mach igual a $M_\infty = 2,30$ e $4,63$ e ângulo de ataque de $6,2^\circ$ e $11,1^\circ$. Vale salientar que, apesar dos exemplos serem supersônicos, o número de Mach para o segundo caso é o dobro do primeiro, ficando perto do limite entre um escoamento supersônico e hipersônico. Na Tabela 5.13, apresentam-se a identificação de cada exemplo segundo o número de Mach e ângulo de ataque. Vale ressaltar que os exemplos resolvidos com as equações de Euler identificam-se com “eu” e “ns” significa que foram resolvidos com as equações de Navier-Stokes.

	$\alpha = 6,2^\circ$	$\alpha = 11,1^\circ$
$M = 2,30$	WBns3 WBns1	WBeu1 WBns1
$M = 4,63$	WBeu2 WBns2	WBns4

Tabela 5.13: Identificação de cada simulação segundo o número de Mach e ângulo de ataque para o problema da configuração asa-fuselagem.

Para a análise do problema, considera-se a metade da geometria, devido ao escoamento ser simétrico. Mostra-se na Figura 5.66, o domínio empregado para todos os exemplos, sendo as dimensões $L = 55$, $L_1 = 15.5$ e $R = R_1 = 30$. Os casos analisados foram modelados considerando um escoamento não-viscoso e viscoso, sendo que neste último caso adota-se um número de Reynolds igual a $Re = 1 \cdot 10^5$. As condições de contorno são dadas por: condição da corrente-livre $V_\infty = (M_\infty \cos \alpha; M_\infty \sin \alpha; 0)$, $\rho_\infty = 1,0$, $e_\infty = 4,4307$ ($M_\infty = 2,3$) ou $12,5041$ ($M_\infty = 4,63$) e $p_\infty = 0,71428$ e foram aplicados nos planos definidos pelas arestas AB e $BDEF$. No plano $ACEF$ colocam-se condições de simetria e no plano CD as condições de contorno são livres. Finalmente, sobre a superfície da configuração asa-fuselagem no caso do escoamento não-viscoso, prescreve-se a condição de velocidade normal nula ($\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$), entretanto, no caso viscoso prescreve-se a condição de não deslizamento ($\mathbf{V} = 0$). Como condições iniciais, adotam-se os valores da corrente-livre e aplicam-se em todos os nós do domínio com exceção dos nós do contorno sólido.

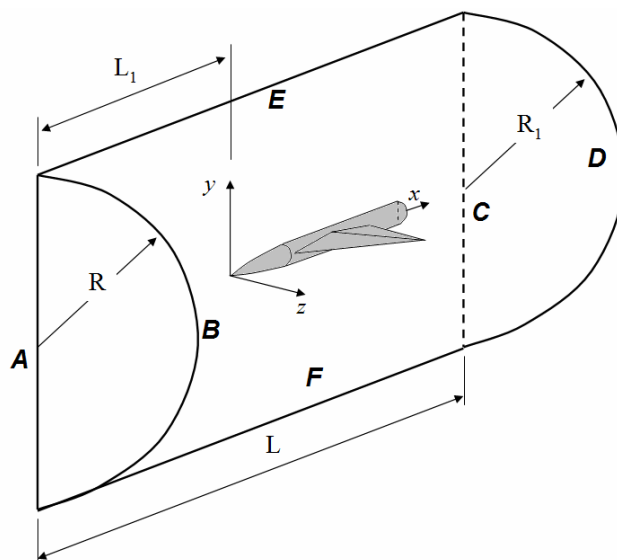


Figura 5.66: Domínio empregado para a configuração WB.

Para a resolução dos problemas, emprega-se o esquema de um passo no contexto de malhas não estruturadas de tetraedros conjuntamente com o esquema de adaptação de malhas e a técnica de subciclos. A malha inicial sempre é a mesma para todos os exemplos. Os valores empregados para os coeficientes de amortecimento fictício (CAF) no caso não-viscoso e viscoso foram 1,0 e 0,7, respectivamente. O valor do coeficiente de segurança usado foi $CS = 0,1$.

A identificação de cada exemplo, as características das malhas, o mínimo passo de tempo (Δt) adotado e os coeficientes aerodinâmicos são apresentados nas Tabelas 5.14a e 5.14b. Para os coeficientes aerodinâmicos, adotam-se como valores de referência: a superfície e a envergadura da asa. O coeficiente de momento foi tomado com relação à coordenada (1,0; 0,0; 0,0).

Em uma primeira etapa, estuda-se a configuração para um escoamento não-viscoso e validam-se os resultados obtidos com os valores experimentais apresentados por Jernell [1971]. Posteriormente, com o objetivo de proporcionar uma melhor compreensão dos fenômenos físicos existentes sobre a configuração asa-fuselagem, analisa-se para diferentes número de Mach e ângulo de ataque (Tabela 5.13) um escoamento viscoso com um número de Reynolds igual a $Re = 1 \cdot 10^5$.

Na Figura 5.67, mostram-se as distribuições de massa específica para a malha inicial (WBeu1) e a malha final (WBeu1R2) obtida depois de dois níveis de refinamento no caso de $M = 2,30$ e $\alpha = 11,1^\circ$. Pode-se observar que a diferença de resultados entre as malhas é apreciável. Na malha refinada os principais fenômenos do escoamento (ondas de choque e leques de

expansão) são eficientemente capturados com os dois níveis de refinamento.

<i>Caso</i>	Malha	nno	nele	nnoCS	L_{\max}	L_{\min}	Δt
M=2,30 $\alpha = 6,2^\circ$	WBns3	37061	194501	6877	8,08	$7,47 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$
	WBns3R1	217212	1193165	27124	8,03	$3,73 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
M=2,30 $\alpha = 11,1^\circ$	WBeu1	37061	194501	6877	8,08	$7,47 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$
	WBeu1R1	118082	659121	10422	8,08	$3,73 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
	WBeu1R2	364996	2093370	14635	8,08	$1,87 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$
	WBns1	37061	194501	6877	8,08	$7,47 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$
	WBns1R1	214427	1177222	27124	8,08	$3,73 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
M=4,63 $\alpha = 6,2^\circ$	WBeu2	37061	194501	6877	8,08	$7,47 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
	WBns2	37061	194501	6877	8,08	$7,47 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
	WBns2R1	187406	1055245	13647	8,03	$4,69 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$
M=4,63 $\alpha = 11,1^\circ$	WBns4	37061	194501	6877	8,08	$7,47 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
	WBns4R1	185123	1044230	12864	8,03	$4,69 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$

Tabela 5.14a: Dados das malhas e principais parâmetros para o problema da configuração WB. (nno = núm. de nós, nele = num. de elementos, nnoCS = num. de nós do contorno sólido, L_{\max}/L_{\min} = máximo e mínimo comprimento da aresta e Δt = incremento de tempo)

<i>Caso</i>	Malha	CD	CL	CMz
M=2,30 $\alpha = 6,2^\circ$	WBns3	0,0677	0,293	0,293
	WBns3R1	0,0597	0,316	0,313
M=2,30 $\alpha = 11,1^\circ$	WBeu1	0,1368	0,563	0,497
	WBeu1R1	0,1492	0,621	0,540
	WBeu1R2	0,1624	0,684	0,566
	WBns1	0,1385	0,516	0,505
	WBns1R1	0,1347	0,549	0,537
M=4,63 $\alpha = 6,2^\circ$	WBeu2	0,0262	0,170	0,150
	WBns2	0,0463	0,178	0,156
	WBns2R1	0,0591	0,290	0,274
M=4,63 $\alpha = 11,1^\circ$	WBns4	0,0955	0,336	0,294
	WBns4R1	0,1362	0,528	0,487

Tabela 5.14b: Coeficientes aerodinâmicos para o problema da configuração WB. (CD = coef. de arrasto, CL = coef. de sustentação e CMz = coef. de momento com relação ao eixo z)

A expansão no bordo de ataque acelera o escoamento na parte superior da asa,

originando uma onda de choque a qual pode ser observada na Figura 5.68. Observa-se que a malha inicial é incapaz de captar as ondas de choque que se formam na parte superior e inferior da asa. Além disso, não detecta eficientemente a expansão do escoamento no bordo de ataque e as ondas de choque cônicas geradas pela asa e fuselagem.

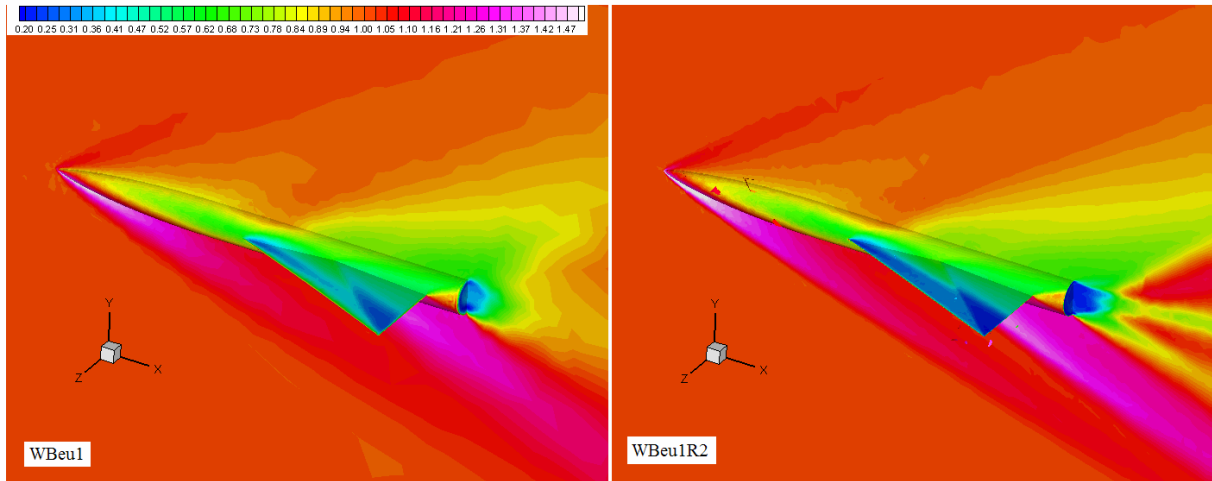


Figura 5.67: Distribuição da massa específica para as malhas WBeu1 e Wbeu1R2.

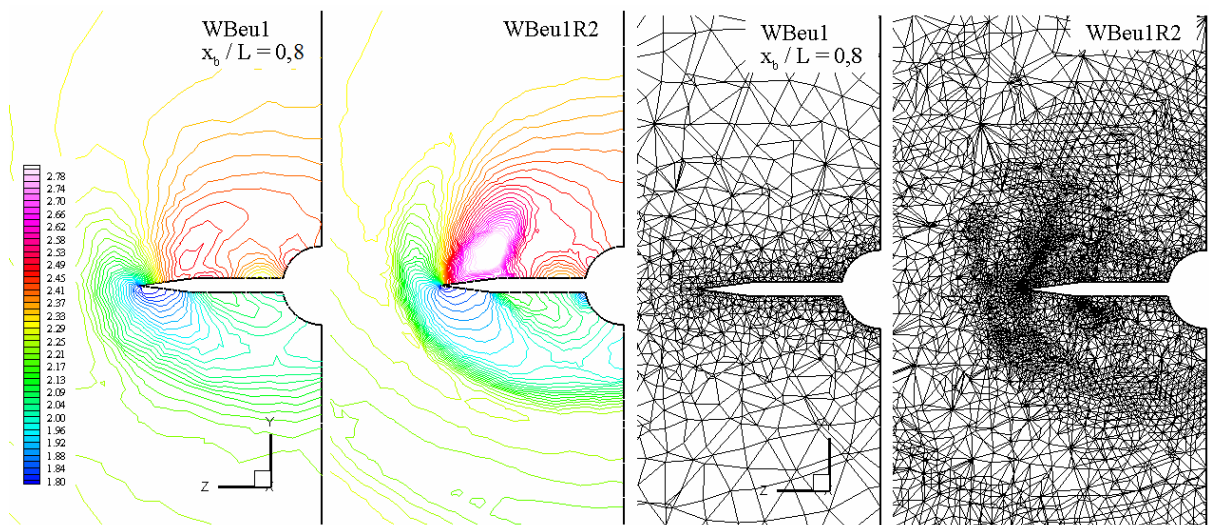


Figura 5.68: Distribuição do número de Mach para $x_b/L = 0,80$ nas malhas WBeu1 e Wbeu1R2.

A distribuição do coeficiente de pressão sobre a asa para a malha WBeu1R2 e sua comparação com os dados experimentais [Jernell, 1971] são apresentadas para diferentes estações ($2y/b$) na Figura 5.69. A concordância entre os resultados experimentais e numéricos com dois níveis de refinamento é muito boa sobre toda a asa, sendo possível capturar eficientemente as expansões do escoamento na região inferior da asa.

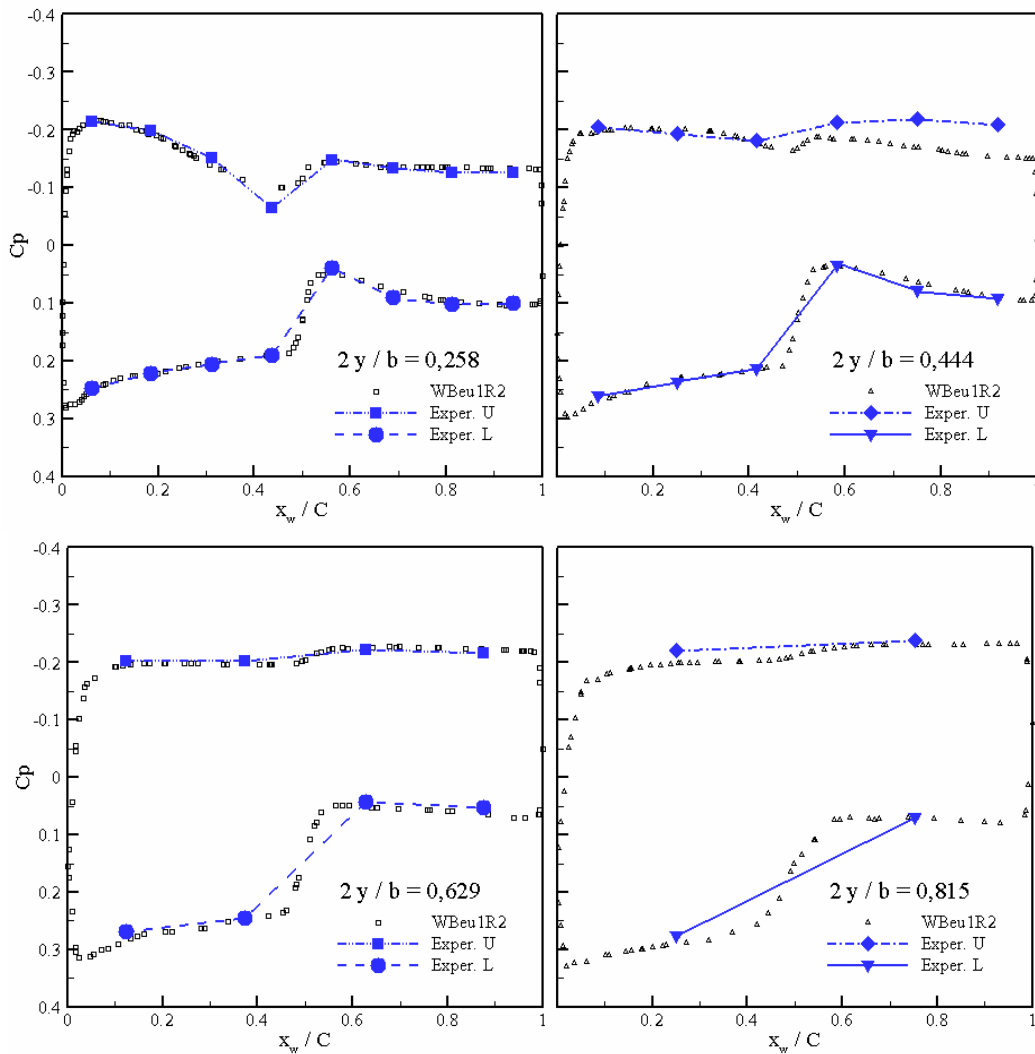


Figura 5.69: Distribuição do coef. de pressão para a malha WBeu1R2 ($M = 2,30$ e $\alpha = 11,1^\circ$).

Na Figura 5.70, mostra-se a distribuição do coeficiente de pressão no caso de $M = 4,63$ e $\alpha = 6,2^\circ$. Pelo fato de não haver sido refinada a malha, existem algumas diferenças com relação aos resultados experimentais obtidos por Jernell [1971], principalmente na região do bordo de ataque. Os resultados numéricos apresentam um comportamento semelhante aos resultados experimentais.

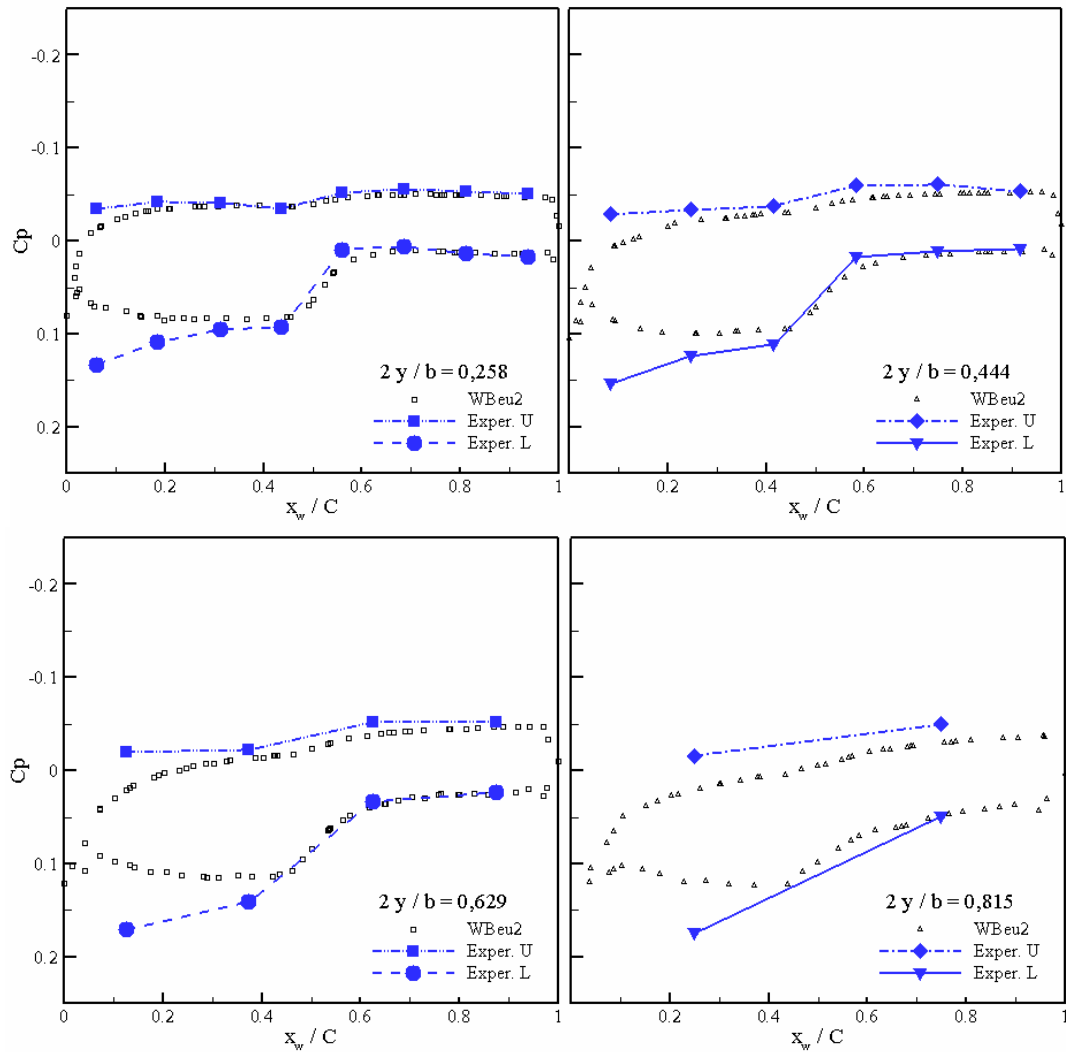


Figura 5.70: Distribuição do coeficiente de pressão para a malha WBeu2 ($M = 4,63$ e $\alpha = 6,2^\circ$).

As distribuições da massa específica sobre as três vistas da configuração asa-fuselagem WBeu1R2 ($M = 2,30$ e $\alpha = 11,1^\circ$) e WBeu2 ($M = 4,63$ e $\alpha = 6,2^\circ$) são mostradas na Figura 5.71. As letras U e L indicam as vistas superior e inferior, respectivamente. As regiões de compressão e expansão sobre a asa e a fuselagem são perfeitamente identificáveis em ambos exemplos, sendo no caso de $M = 4,63$ mais intensas. Na parte superior da asa, o escoamento é fortemente expandido reduzindo o valor da massa específica. Observa-se que a distribuição de massa específica na parte superior da interseção asa-fuselagem é influenciada por este fato. Na parte inferior da asa, pode-se ver que a massa específica inicialmente é comprimida (ocorre um aumento da massa específica) na parte frontal da asa devido à existência de uma onda de choque no bordo de ataque. Depois o escoamento sofre uma expansão na região posterior da asa ocasionada pelo leque de expansão no ponto de máxima espessura. A forte compressão do escoamento na parte frontal da fuselagem é consequência da onda de choque que se forma nesta

região, como pode ser observado na Figura 5.67.

Embora ambos exemplos não tenham os mesmos números de Mach e ângulo de ataque, pode-se observa que a região associada com o menor valor da massa específica para o caso WBeu1R2 ($\alpha = 11,1^\circ$) esta localizado perto do bordo de ataque da asa. Entretanto, para WBeu2 ($\alpha = 6,2^\circ$) tem-se a região de mínimo valor de massa específica distante do bordo de ataque e seu centro aproximadamente localizado em $(2z/b = 0,40)$.

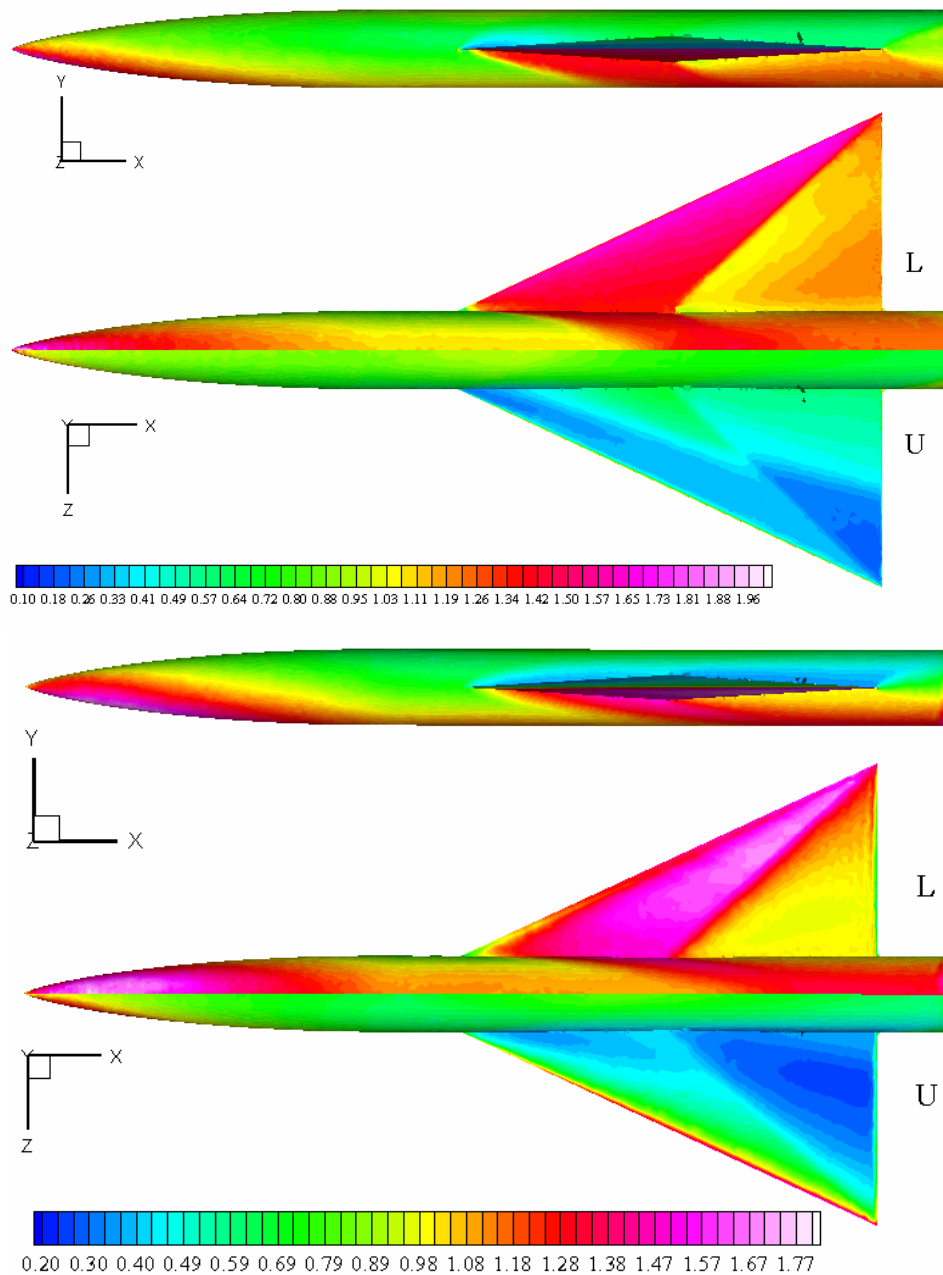


Figura 5.71: Distribuição de massa específica para a malha WBeu1R2 (superior) e WBeu2 (inferior).

Finalmente, analisa-se a configuração asa-fuselagem para diferentes número de

Mach e ângulos de ataque (ver Tabela 5.13) em um escoamento viscoso com $Re = 1 \cdot 10^5$. Todos os resultados apresentados a seguir são para as malhas adaptadas com um nível de refinamento.

A distribuição do número de Mach em diferentes estações ($x_b/L = 0,1$ até $1,2$ com passos de $0,1$) para as quatro combinações de número de M_∞ e α sobre a configuração WB são apresentadas nas Figuras 5.72 e 5.73. Pode-se observar que a medida que o ângulo de ataque aumenta, as regiões de baixa velocidade sobre a asa e a fuselagem crescem independentemente do número de Mach. Observa-se que para $M_\infty = 4,63$ a região superior da fuselagem é mais fortemente influenciada.

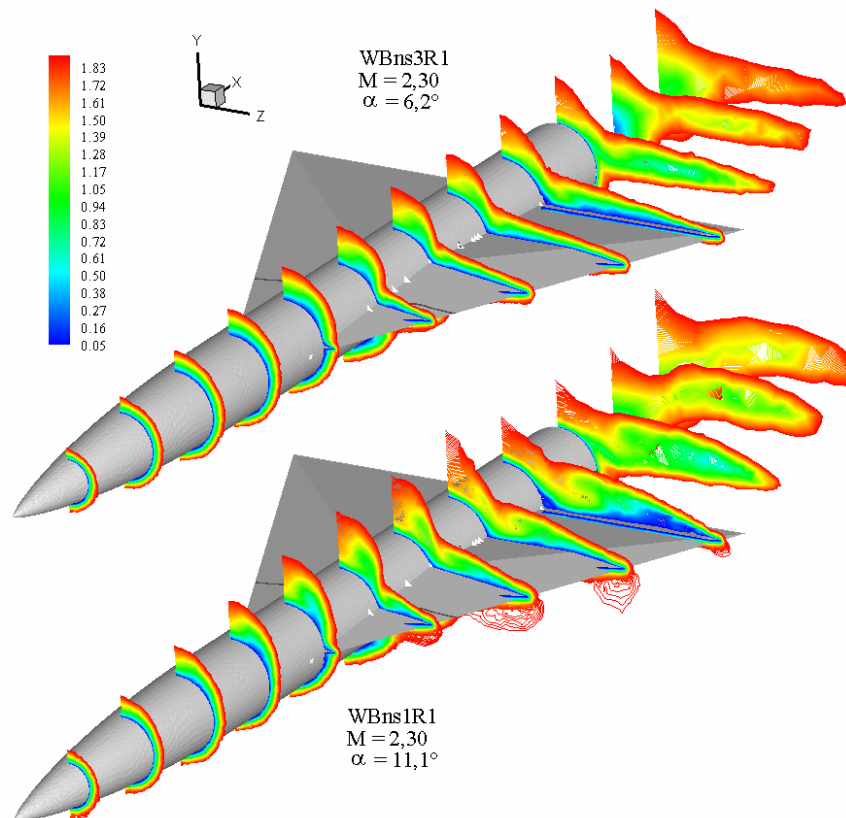


Figura 5.72: Distribuição do número de Mach ao redor da configuração WB para $M = 2,30$.

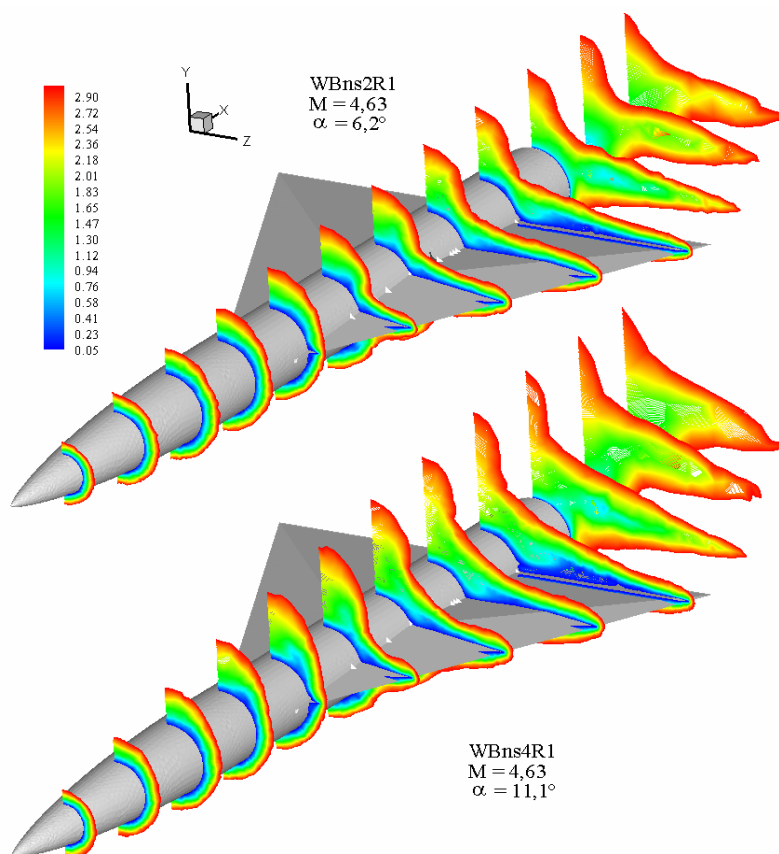


Figura 5.73: Distribuição do número de Mach ao redor da configuração WB para $M = 4,63$.

Na Figura 5.74 é dada a distribuição do coeficiente de pressão sobre a asa para diferentes estações (x/C_r) com diferentes combinações de número de Mach e ângulo de ataque sobre a configuração asa-fuselagem. A coordenada x é adimensionalizada com relação à corda raiz (C_r) e a origem esta localizada no bordo de ataque da corda raiz da asa.

Como era esperado, a distribuição do coeficiente de pressão aumenta com o ângulo de ataque, sendo que o crescimento é maior na parte inferior da asa. O aumento da pressão na região inferior da asa é decorrente do fato de que para $\alpha = 11,1^\circ$ tem-se uma onda de choque no bordo de ataque mais intensa e portanto, a relação de compressão do escoamento aumenta. Na parte posterior ($x/C_r = 0,90$) e inferior da asa tem-se uma redução no coeficiente de pressão devido a que o escoamento é acelerado pelo leque de expansão localizado na região de máxima espessura da asa. O pico de pressão na ponta da asa ocorre pela forte compressão do escoamento na parte inferior da asa.

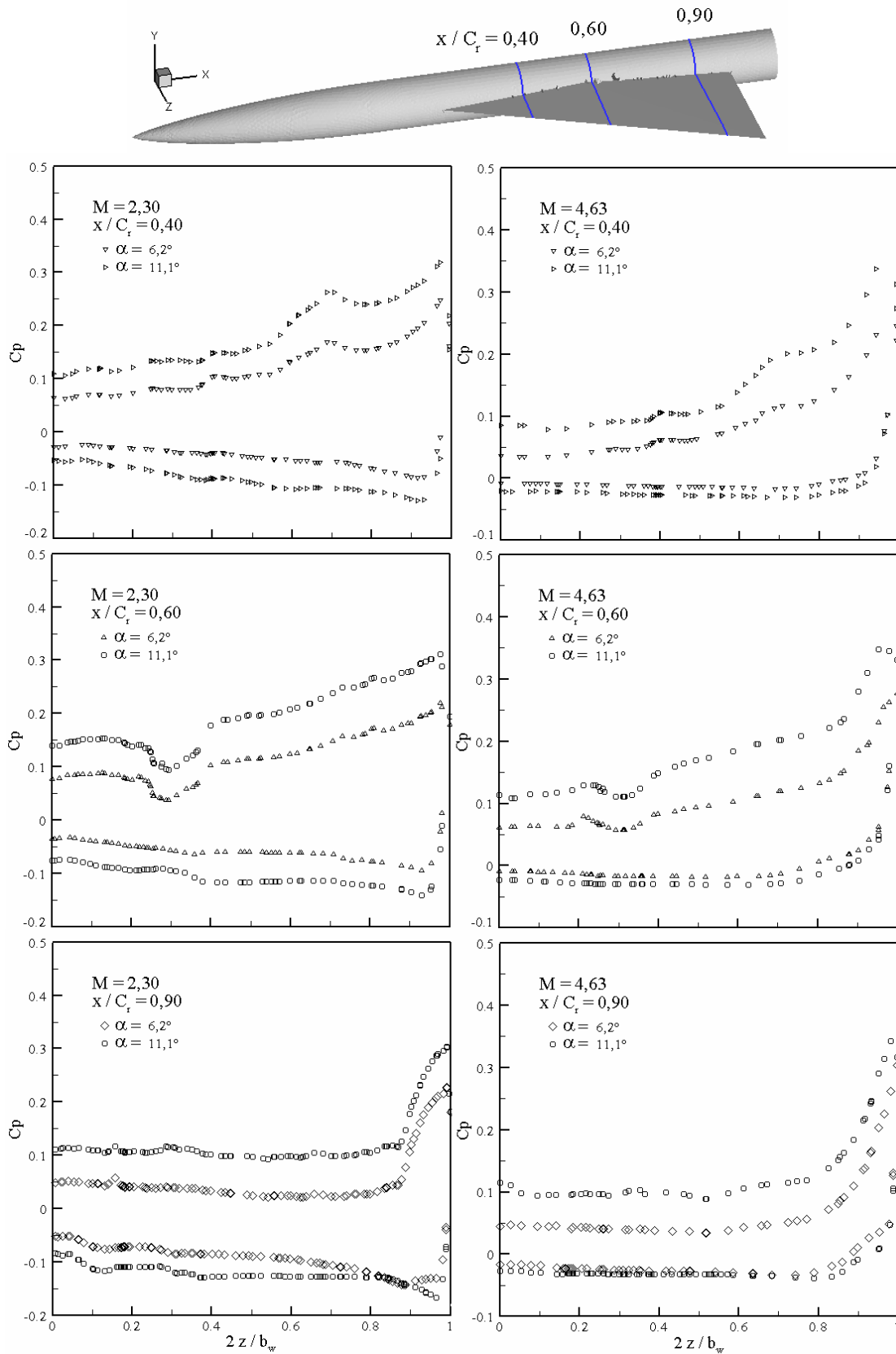


Figura 5.74: Distribuição do coeficiente de pressão para a configuração WB com $Re = 1 \cdot 10^5$.

Observa-se que para as mesmas estações e ângulos de ataque a distribuição do coeficiente de pressão sempre resulta menor para os casos com o maior número de Mach $M =$

4,63. A redução do C_p com o aumento do número de Mach é em essência explicado pelo princípio de independência do número de Mach [Anderson, 1989], o qual estabelece que certas quantidades aerodinâmicas como os coeficientes de pressão, de sustentação, de resistência de onda e estruturas do escoamento (ondas de choque e ondas de Mach) ficam independentes para números de Mach elevados. Os coeficientes reduzem seu valor a medida que se aumenta o número de Mach, apresentando um comportamento assintótico para valores elevados de Mach.

Vale ressaltar que a maior contribuição na sustentação da asa se deve à superfície inferior da asa. Sendo que para $M = 4,63$, a contribuição da superfície superior é praticamente inexistente, uma vez que o coeficiente de pressão varia entre aproximadamente $-0,015$ e $-0,035$.

As distribuições do coeficiente de pressão nas vistas superior e inferior da configuração WB são mostradas nas Figuras 5.75 e 5.76. Observa-se que as alterações na distribuição de pressão na vista superior (Figura 5.75) devido ao ângulo de incidência são maiores para o número de Mach igual a 2,30. Tal como havia sido mostrado na Figura 5.74, a distribuição de pressão na parte superior da configuração asa-fuselagem praticamente não sofre alterações para $M_\infty = 4,63$.

Na vista inferior da configuração WB, Figura 5.76, nota-se que na parte frontal da asa o escoamento é comprimido e posteriormente devido ao leque de expansão o escoamento reduz o valor da pressão. A presença da asa influencia fortemente a distribuição de pressão na fuselagem, principalmente na parte inferior. Na região de interseção asa-fuselagem, a distribuição do coeficiente de pressão apresenta algumas alterações no bordo de ataque da asa. Estas alterações também são visualizadas na Figura 5.74. Observa-se que as alterações são importantes na parte inferior da asa pelo fato de ser mais intensa a interação entre a camada limite da fuselagem e a onda de choque da asa.

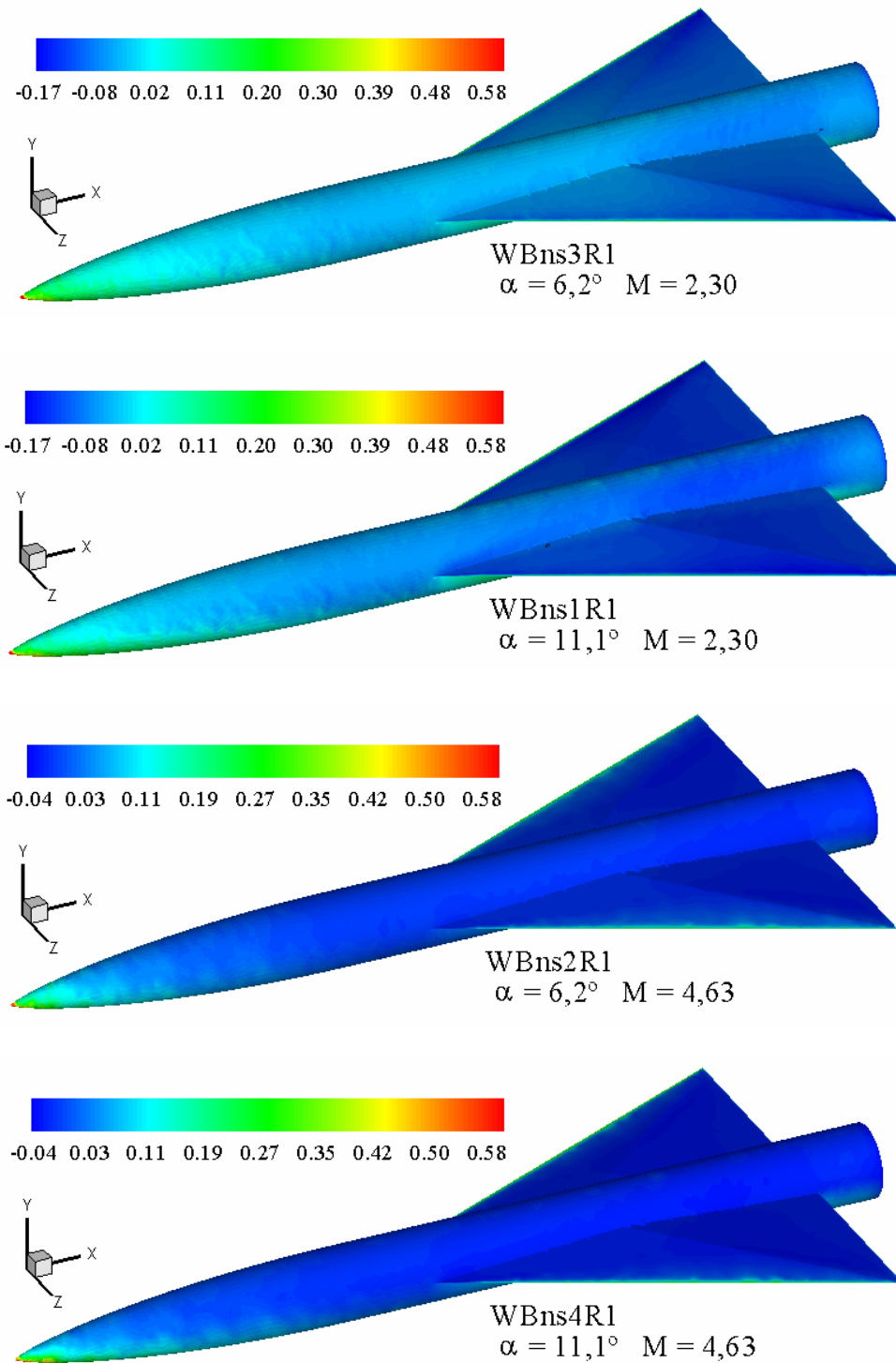


Figura 5.75: Distribuição do coeficiente de pressão para a configuração WB vista superior.

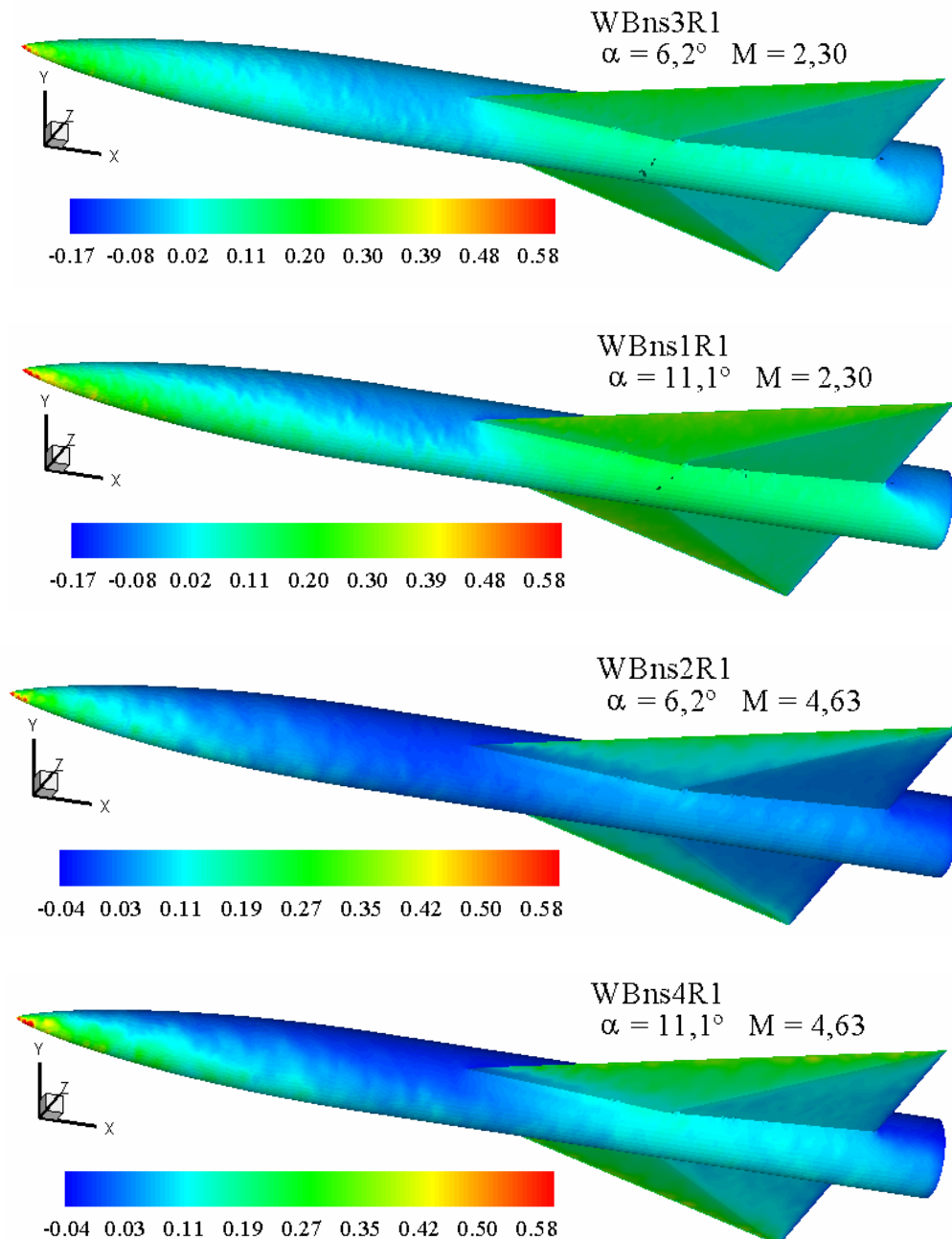


Figura 5.76: Distribuição do coeficiente de pressão para a configuração WB vista inferior.

Na Figura 5.77, as malhas e as linhas de número de Mach constante são mostradas no plano de simetria x - y para as diferentes combinações de M_∞ e α na configuração asa-fuselagem. Observa-se que os elementos têm uma boa qualidade e são concentrados nas regiões onde os fenômenos físicos apresentam gradientes elevados. Devido à malha inicial não apresentar uma boa transição no tamanho dos elementos na região posterior da configuração WB, a esteira não apresenta uma resolução tão boa.

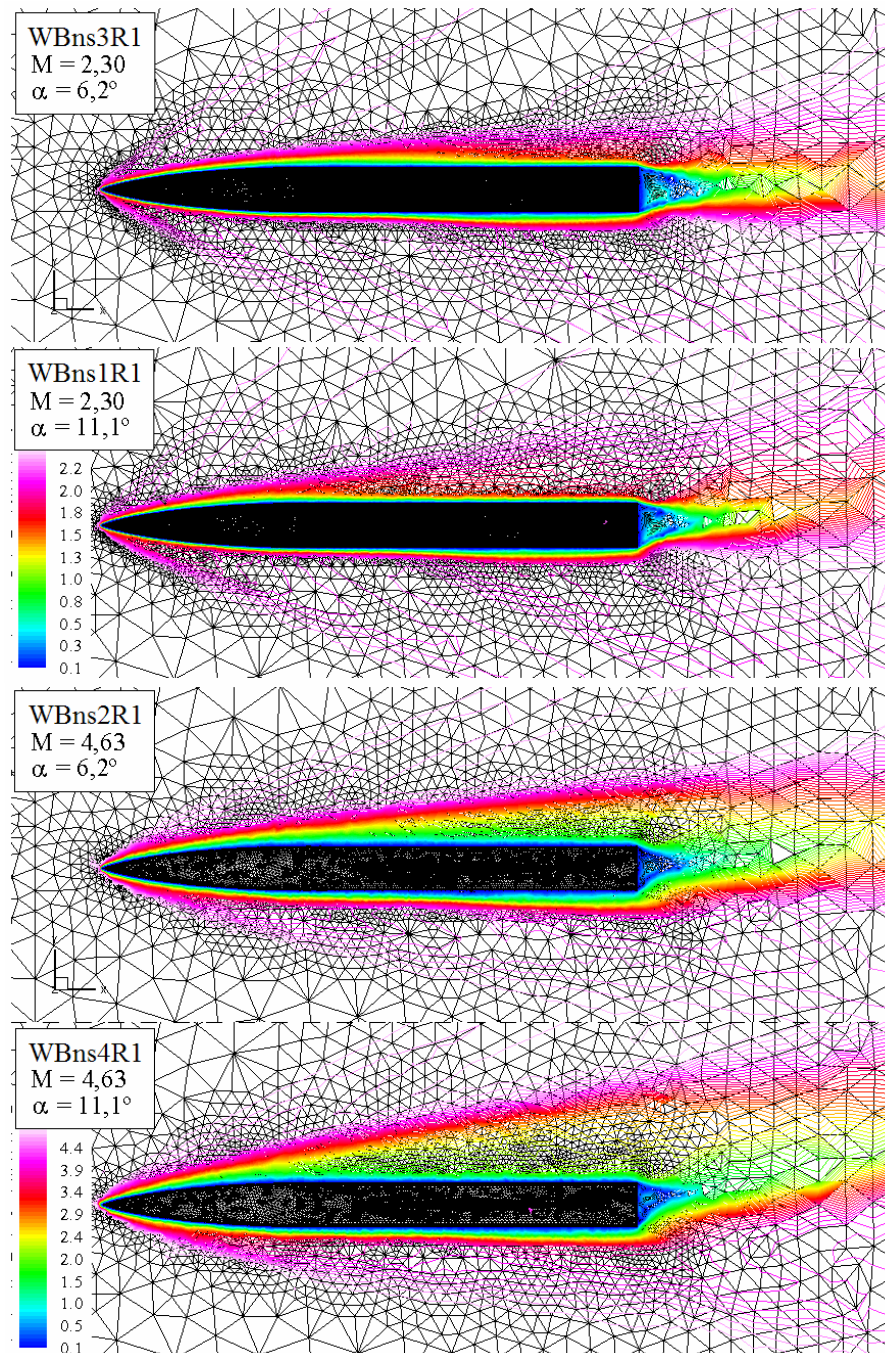


Figura 5.77: Malhas e linhas de número de Mach ao redor da configuração WB.

A Figura 5.78 mostra a distribuição de massa específica sobre a configuração WB e no plano de simetria x - y para as diferentes combinações de número de Mach e ângulo de ataque. As ondas de choque na parte frontal da fuselagem e na parte inferior da asa são eficientemente capturadas como também os leques de expansão na parte superior da asa e na região posterior da fuselagem. Observa-se que devido ao emprego do esquema de adaptação de malhas é possível capturar eficientemente a localização e intensidade dos fenômenos que se desenvolvem ao redor do corpo.

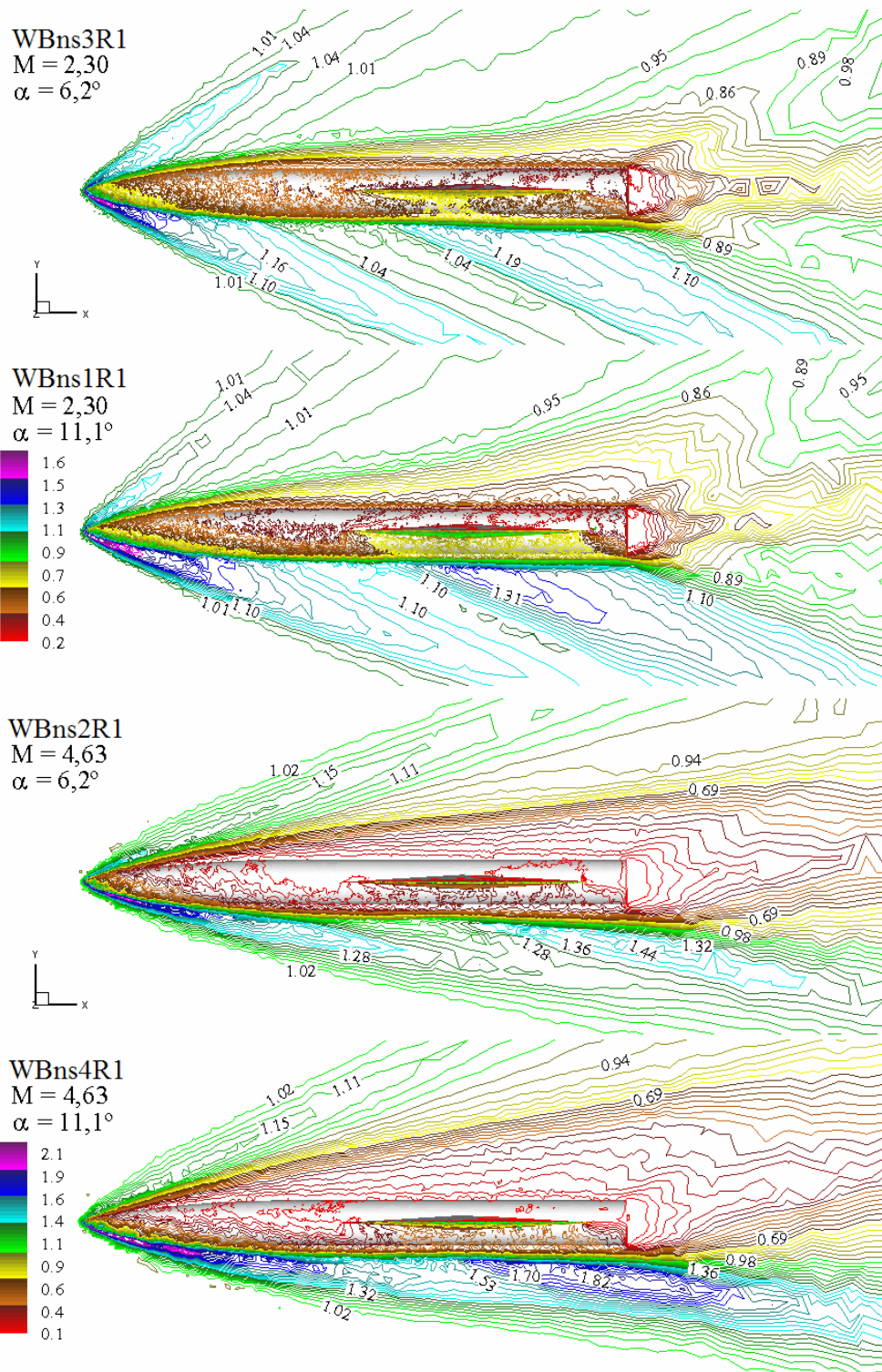


Figura 5.78: Distribuição de massa específica ao redor da configuração WB.

A formação e dinâmica dos vórtices e a distribuição do número de Mach ao redor da configuração WB pode ser observada nas Figuras 5.79a e 5.79b para algumas estações (x_b/L) nos casos com ângulo de ataque $\alpha = 11,1^\circ$ e número de Mach igual a $M_\infty = 2,30$ e $4,63$. Na estação

$x_b/L = 0,50$, observa-se que para ambos números de Mach têm-se dois pequenos vórtices na parte superior e inferior da asa e um vórtice maior e mais intenso na parte superior da fuselagem. A onda de choque está afastada da seção da fuselagem e a região de baixas e médias velocidades na parte superior da fuselagem apresenta-se bem maior no caso de $M = 4,63$.

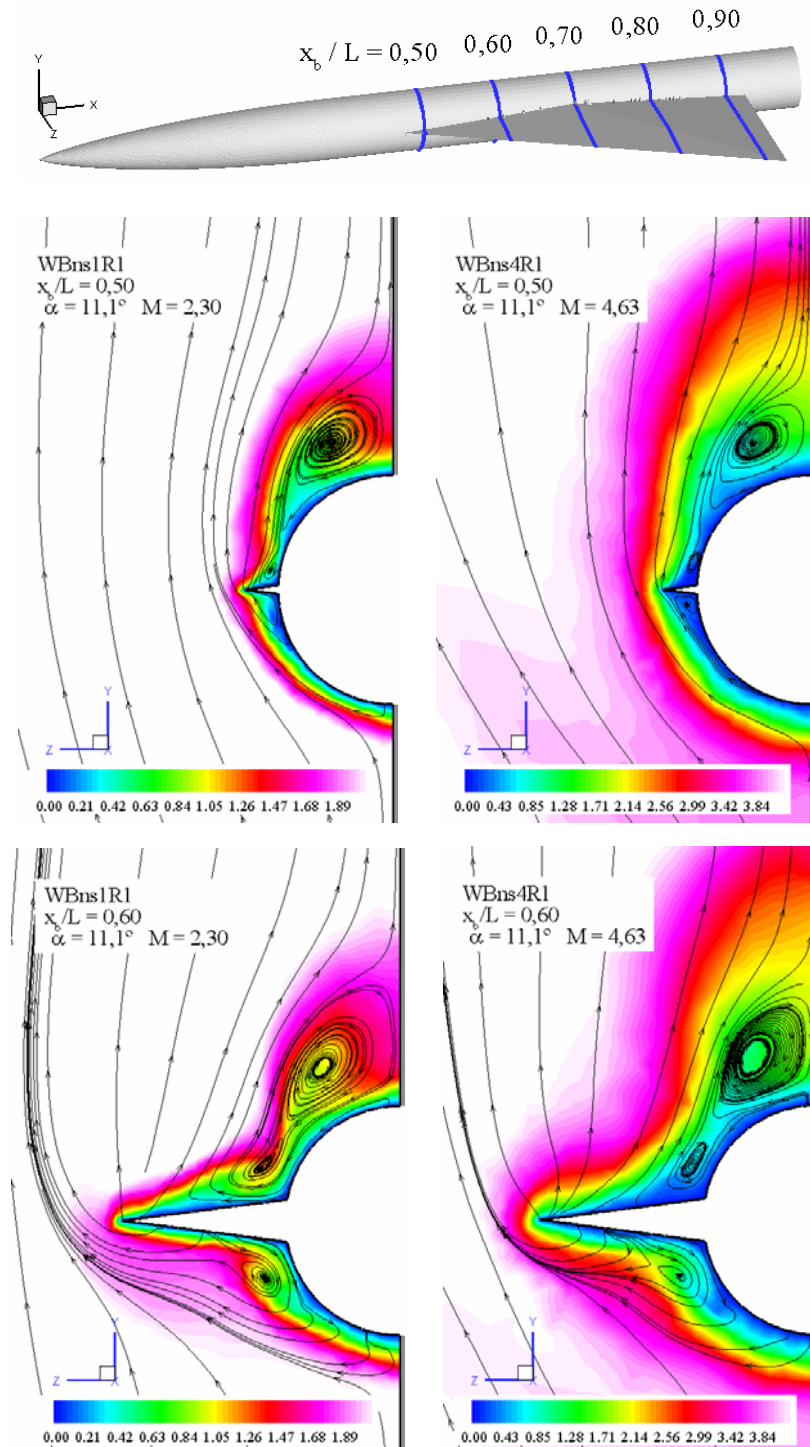


Figura 5.79a: Dinâmica dos vórtices e distribuição do número de Mach ao redor da configuração WB para $\alpha = 11,1^\circ$ e $M = 2,30$ e $4,63$.

Os vórtices crescem de tamanho a medida que se deslocam para valores maiores de x_b/L , veja-se a seqüências $x_b/L = 0,60, 0,70$ e $0,80$. Nota-se que para $x_b/L = 0,80$ os vórtices na parte superior e inferior da asa aumentaram consideravelmente. Observa-se que para $M = 2,30$ os vórtices da parte superior da asa e da fuselagem tendem a se unir formando um vórtice. Entretanto, para $M = 4,63$ têm-se dois vórtices bem definidos.

Na última estação $x_b/L = 0,90$, observa-se que somente existe um vórtice na parte superior da asa para $M = 2,30$, enquanto para $M = 4,63$ mantêm-se os dois vórtices. O tamanho do vórtice na parte superior da asa para todas as estações analisadas sempre foi maior para o caso de Mach igual a $2,30$, sendo consequência do escoamento nesta região sofrer uma menor expansão em comparação com aquela sofrida para $M = 4,63$.

Os vórtices na parte inferior da asa praticamente não variam de tamanho para as duas últimas estações mostradas. Sendo que o centro do vórtice para o caso de $M = 4,63$ está levemente afastado em comparação com $M = 2,30$.

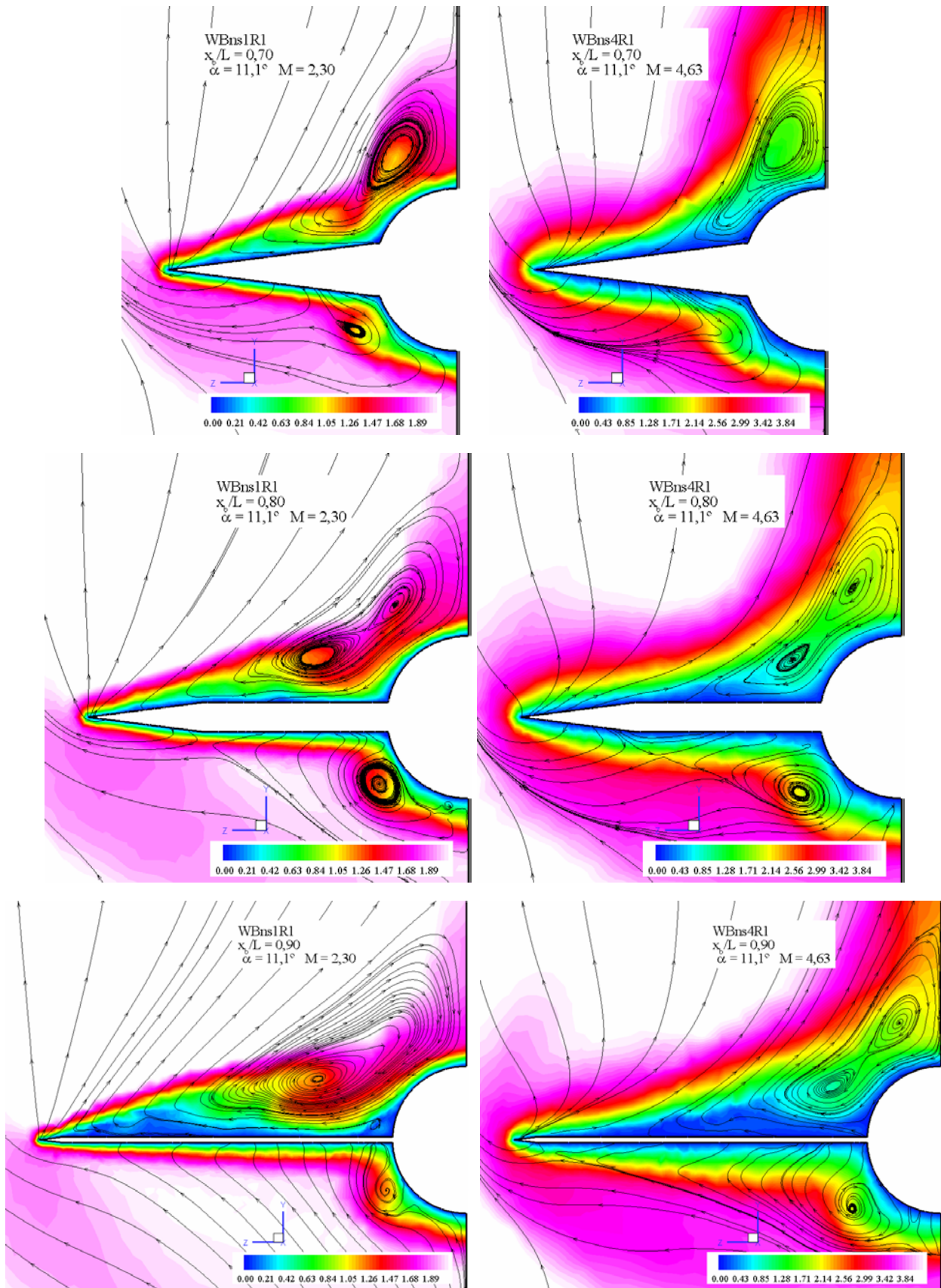


Figura 5.79b: Dinâmica dos vórtices e a distribuição do número de Mach ao redor da configuração WB para $\alpha = 11,1^\circ$ e $M = 2,30$ e $4,63$.

Finalmente, mostram-se os resultados obtidos com a técnica de subciclos nas malhas

WBeu1, WBns2 e WBns4. Na Tabela 5.15, são dadas as porcentagens de elementos para cada grupo de Δt e os máximos ganhos de tempo de processamento teórico ($S-U_{teo}$) e real ($S-U$) para a técnica de subciclos.

<i>Grupo</i>	WBeu1R1	WBns2R1	WBns4R1
1 Δt	8,89	29,21	28,07
2 Δt	30,37	45,86	45,41
4 Δt	31,24	11,57	12,44
8 Δt	13,65	5,88	6,38
16 Δt	9,39	3,43	3,72
32 Δt	5,09	1,56	1,51
64 Δt	1,37	2,49	2,47
$S-U_{teo}$	2,91	1,78	1,81
$S-U$	1,10	1,15	1,14

Tabela 5.15: Porcentagem de elementos, *speed-up* teórico ($S-U_{teo}$) e real ($S-U$) para algumas das malhas refinadas no problema WB.

O máximo ganho teórico de tempo de processamento obtido para este exemplo foi baixo uma vez que as malhas analisadas, além de apresentarem poucas variações no tamanho dos elementos, concentram os mesmos nos grupos com incrementos de tempos menores (1 Δt , 2 Δt e 4 Δt). Pelo fato da técnica de subciclos ter que atualizar e interpolar os valores das variáveis durante o processo de integração, o ganho real de tempo de processamento resulta inferior ao teórico.

Nas Figuras 5.80 e 5.81, mostram-se as distribuições de pressão obtidas sem e com a técnica de subciclos nas estações $x_b / L = 0,60$ e $0,90$ para as malhas WBeu1R1, WBns2R1 e WBns4R1. Comparando os resultados determinados sem e com a técnica de subciclos, pode-se concluir que a concordância é boa tanto para os problemas resolvidos com as equações de Euler quanto para os solucionados empregando as equações de Navier-Stokes.

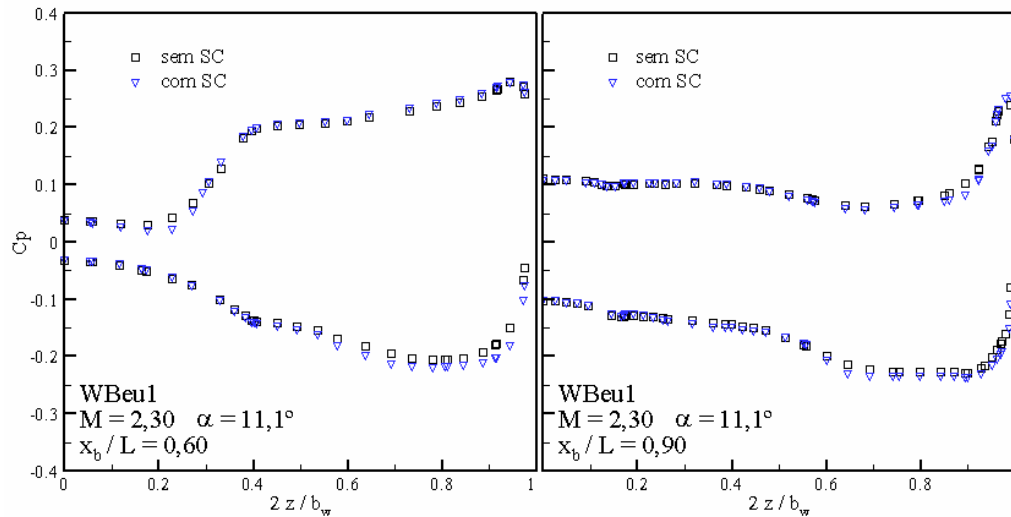


Figura 5.80: Distribuição do coeficiente de pressão obtida com a técnica de subciclos para a malha WBeu1R1.

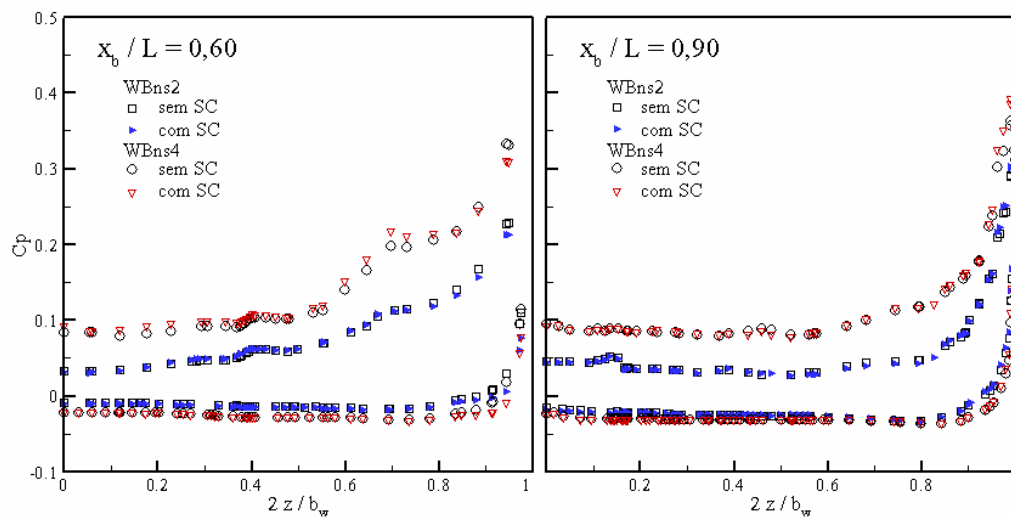


Figura 5.81: Distribuição do coeficiente de pressão obtida com a técnica de subciclo para as malhas WBns2 e WBns4.

Como observado anteriormente, obteve-se uma boa concordância entre os resultados experimentais e numéricos para os exemplos estudados no caso de um escoamento não-viscoso ao redor da configuração asa-fuselagem. No caso do escoamento viscoso, mostrou-se o comportamento do escoamento e a formação e dinâmica dos vórtices para diferentes números de Mach e ângulos de ataque.

5.11 Escoamento ao redor de uma configuração asa-canard-fuselagem

Existem numerosos estudos com relação à qual configuração é a melhor para um veículo que voa no regime supersônico e hipersônico. O conhecimento detalhado dos fenômenos físicos que acontecem sobre o corpo é fundamental a fim de poder desenvolver um veículo com adequadas características aerodinâmicas, de estabilidade e de controle. As diversas interferências de origem viscosas e não-viscosas que acontecem no regime supersônico e hipersônico podem degradar notavelmente as performances do veículo. Neste item, estuda-se numericamente uma configuração asa-canard-fuselagem (WCB) que pode ser assimilada a um avião supersônico que voa a grande altitude ou um veículo reutilizável do tipo SSTO (*Single Stage to Orbit*), entre outros.

O objetivo desta análise é contribuir através da pesquisa numérica ao entendimento das características físicas dos principais fenômenos e interferências que acontecem na configuração tridimensional proposta. Em particular, estuda-se a influência do número de Mach e do ângulo de ataque num escoamento viscoso laminar.

A configuração foi analisada em um escoamento com $M_\infty = 1,0; 1,50; 2,30; 2,50; 3,0; 3,50$ e $4,63$, ângulos de ataque de $0^\circ, 6,2^\circ$ e $11,1^\circ$ e número de Reynolds igual $Re = 1 \cdot 10^5$. Na tabela 5.16, mostra-se a matriz de ensaios computacionais e a identificação empregada para cada exemplo. Os diferentes números de Mach e ângulos de ataque possibilitam realizar um estudo detalhado dos principais fenômenos e interações que acontecem neste espectro de voo.

	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 6,2^\circ$	$\alpha = 11,1^\circ$
M = 1,50	WCBns11	WCBns12	WCBns13
M = 2,30	WCBns21	WCBns22	WCBns23
M = 4,63	WCBns31	WCBns32	WCBns33
M = 1,0	WCBns41	WCBns42	WCBns43
M = 2,50	WCBns51	WCBns52	WCBns53
M = 3,0	WCBns61	WCBns62	WCBns63
M = 3,50	WCBns71	WCBns72	WCBns73

Tabela 5.16: Identificação de cada simulação segundo o número de Mach e ângulo de ataque para o problema da configuração asa-canard-fuselagem.

A configuração é baseada naquela apresentada no item 5.10, mas com a adição do canard e do estabilizador vertical. O aerofólio no canard e no estabilizador vertical tem uma

secção de tipo rombóide. A relação entre as cordas na ponta e na raiz do estabilizador vertical é a mesma que foi empregada por Erickson [2007], $\lambda_{ev} = 0,461$. Na Figura 5.82, mostra-se a geometria e as principais dimensões do modelo estudado. Considera-se a metade da geometria, devido ao escoamento ser simétrico. O domínio empregado para todos os exemplos é mostrado esquematicamente na Figura 5.83, sendo as dimensões $L = 55$, $L_1 = 15$, $R = 20$ e $R_1 = 30$. As condições de contorno e condições iniciais são as mesmas que foram adotadas no item 5.10 para os casos viscosos.

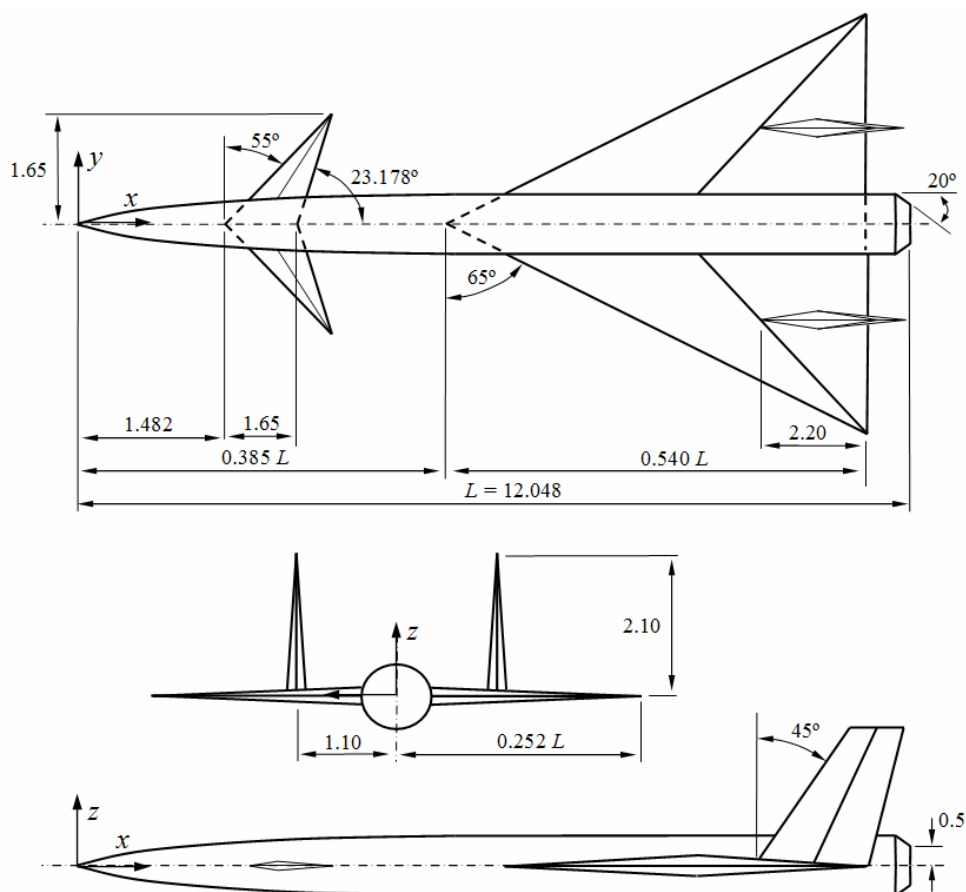


Figura 5.82: Geometria e dimensões da configuração asa-canard-fuselagem WCB.

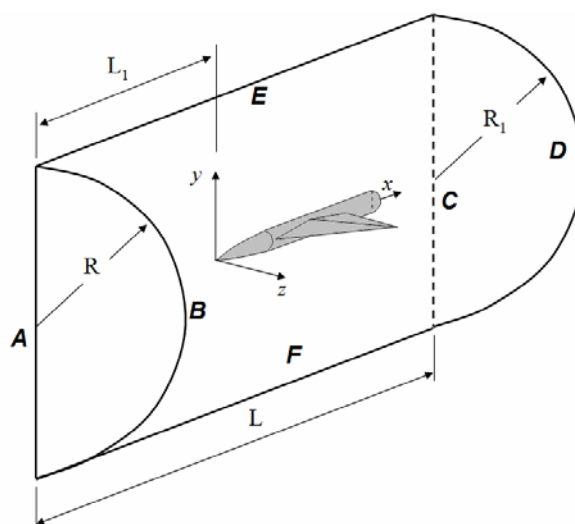


Figura 5.83: Domínio empregado para o problema da configuração WCB.

Para a resolução dos problemas, emprega-se o esquema de um passo no contexto de malhas não estruturadas de tetraedros conjuntamente com o esquema de adaptação de malhas e a técnica de subciclos. Os valores empregados para os coeficientes de amortecimento fictício e de segurança são 0,7 e 0,1, respectivamente.

As características das malhas, o mínimo passo de tempo (Δt) adotado e os coeficientes aerodinâmicos para cada exemplo são dados nas Tabelas 5.17a e 5.17b. A malha inicial sempre foi a mesma para todos os exemplos estudados, entretanto existem duas malhas identificadas como WCBns, sendo que a diferença nas mesmas é unicamente o valor do incremento de tempo devido aos critérios de estabilidade. Todos os exemplos analisados foram submetidos a um nível de refinamento (acrescenta-se R1 no final da identificação) com $\omega = 0,7$ na equação do critério de adaptação. Empregaram-se diferentes critérios de adaptação nos casos analisados, a fim de poder avaliar a qualidade dos resultados obtidos. Para os casos com $M = 1,0$; 1,50; 2,50; 3,0 e 3,50, utilizaram-se os indicadores de baixa velocidade (BV), mudança de direção da velocidade (MD), gradientes de velocidade (GV), de pressão (GP) e de energia interna (GE). Para os casos com $M = 2,30$, empregou-se o indicador de GP e para os casos com $M = 4,63$ os indicadores foram: GV, GP e GE.

	Malha	nno	Nele	nnoCS	L_{\max}	L_{\min}	Δt
M = 1,50 / 2,30	WCBns	45823	242979	8502	7,86	$4,03 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
	WCBns11R1	217812	1177373	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$
	WCBns12R1	220544	1194613	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$
	WCBns13R1	218974	1186172	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-5}$
	WCBns21R1	87854	484059	8748	6,74	$4,03 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
	WCBns22R1	89877	496276	8731	6,74	$4,03 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
	WCBns23R1	88496	488306	8734	6,74	$4,03 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
M = 4,63	WCBns	45823	242979	8502	7,86	$4,03 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-5}$
	WCBns31R1	212472	1172187	25188	6,74	$3,11 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$
	WCBns32R1	262428	1445062	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-5}$
	WCBns33R1	201266	1109381	22049	6,74	$3,11 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$
M = 1,0	WCBns41R1	194015	1035980	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
	WCBns42R1	196277	1050075	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
	WCBns43R1	201746	1083803	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
M = 2,50	WCBns51R1	254363	1395301	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$
	WCBns52R1	259349	1426038	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$
	WCBns53R1	253445	1391719	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$
M = 3,0	WCBns61R1	256407	1407723	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$
	WCBns62R1	262084	1442580	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$
	WCBns63R1	271842	1501912	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$
M = 3,50	WCBns71R1	255881	1404835	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-5}$
	WCBns72R1	263814	1453446	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-5}$
	WCBns73R1	277708	1417352	33580	6,74	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-5}$

Tabela 5.17a: Dados das malhas e principais parâmetros para o problema da configuração WCB. (nno = núm. de nós, nele = num. de elementos, nnoCS = num. de nós do contorno sólido, L_{\max}/L_{\min} = máximo e mínimo comprimento da aresta e Δt = incremento de tempo)

	Malha	CD	CL	CMz
M = 1,50	WCBns11R1	0,0356	-0,115	-0,330
	WCBns12R1	0,0681	0,324	0,706
	WCBns13R1	0,1664	0,679	1,569
M = 2,30	WCBns21R1	0,0450	-0,083	-0,258
	WCBns22R1	0,0790	0,293	0,641
	WCBns23R1	0,1593	0,566	1,302
M = 4,63	WCBns31R1	0,0297	-0,049	-0,147
	WCBns32R1	0,0448	0,161	0,345
	WCBns33R1	0,0955	0,344	0,778
M = 1,0	WCBns41R1	0,0261	-0,191	-0,532
	WCBns42R1	0,0528	0,295	0,590
	WCBns43R1	0,1639	0,721	1,611
M = 2,50	WCBns51R1	0,3210	-0,063	-0,189
	WCBns52R1	0,0572	0,245	0,536
	WCBns53R1	0,1251	0,483	1,106
M = 3,0	WCBns61R1	0,0310	-0,052	-0,159
	WCBns62R1	0,0533	0,218	0,477
	WCBns63R1	0,1141	0,432	0,984
M = 3,50	WCBns71R1	0,0300	-0,048	-0,147
	WCBns72R1	0,0498	0,194	0,421
	WCBns73R1	0,1059	0,393	0,893

Tabela 5.17b: Coeficientes aerodinâmicos para o problema da configuração WCB. (CD = coef. de arrasto, CL = coef. de sustentação e CMz = coef. de momento com relação ao eixo z)

Todos os resultados apresentados a seguir foram obtidos com as malhas refinadas devido a que a malha inicial não detecta eficientemente todos os fenômenos existentes no escoamento. Na Figura 5.84, apresenta-se a malha inicial e final com um nível de refinamento para o caso WCBns32. Observa-se uma boa qualidade e quantidade de elementos gerados no processo de refinamento, porém em alguns pontos localizados se tem elementos que apresentam um tamanho relativo maior em comparação com seus vizinhos. Entretanto, vale salientar que a precisão da solução numérica não foi prejudicada.

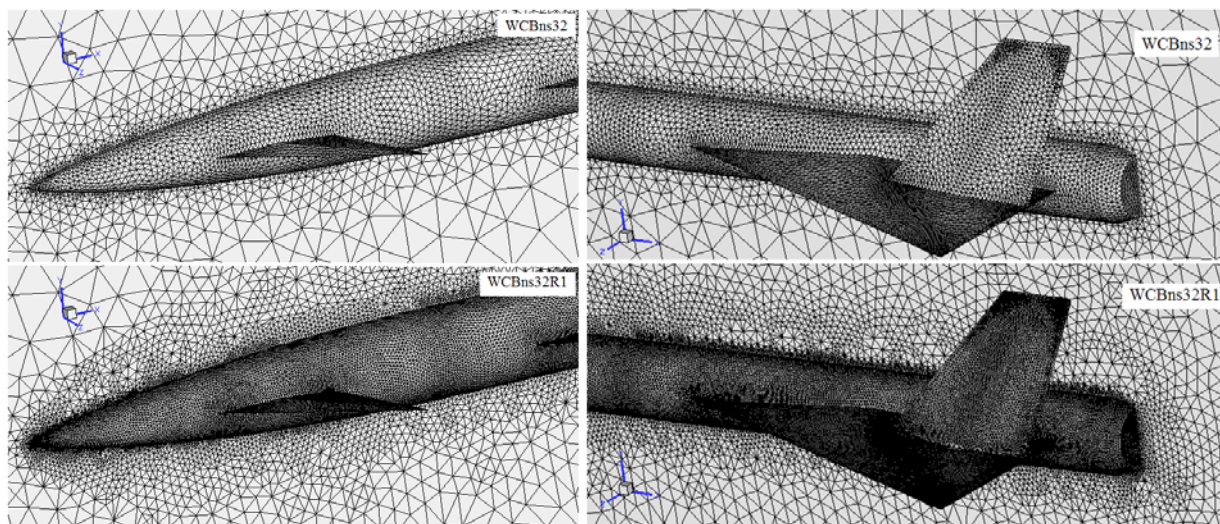


Figura 5.84: Detalhes da malha inicial e refinada para a configuração WCB32.

As malhas e as distribuições do coeficiente de pressão ao redor da configuração WCB são mostradas na Figura 5.85 para o caso de $M = 1,50$. Pode-se ver que os indicadores empregados no processo de refinamento são capazes de capturar eficientemente os principais fenômenos físicos do escoamento. Na medida que aumenta o ângulo de ataque muda a posição e intensidade dos principais fenômenos físicos ao redor da configuração WCB. Com o incremento do ângulo de incidência, observa-se um aumento significativo da intensidade da compressão do escoamento nas regiões inferior da asa e frontal da fuselagem. Na região superior do canard e da asa, pode-se verificar que para $\alpha = 0^\circ$ o escoamento sofre uma compressão na parte frontal do canard/asa e depois uma expansão que acelera o escoamento e reduz a pressão na região do bordo de fuga. Entretanto, para $\alpha = 11,1^\circ$ observa-se uma forte expansão do escoamento na região superior frontal do canard/asa e depois outra expansão mais suave que reduz ainda mais o coeficiente de pressão. Este fato também acontece no caso WCBns32 (ver Figura 5.86). A estabilidade e controle da configuração WCB podem ser fortemente afetadas já que a expansão do escoamento na parte superior da asa modifica notavelmente a distribuição de pressão no estabilizador vertical.

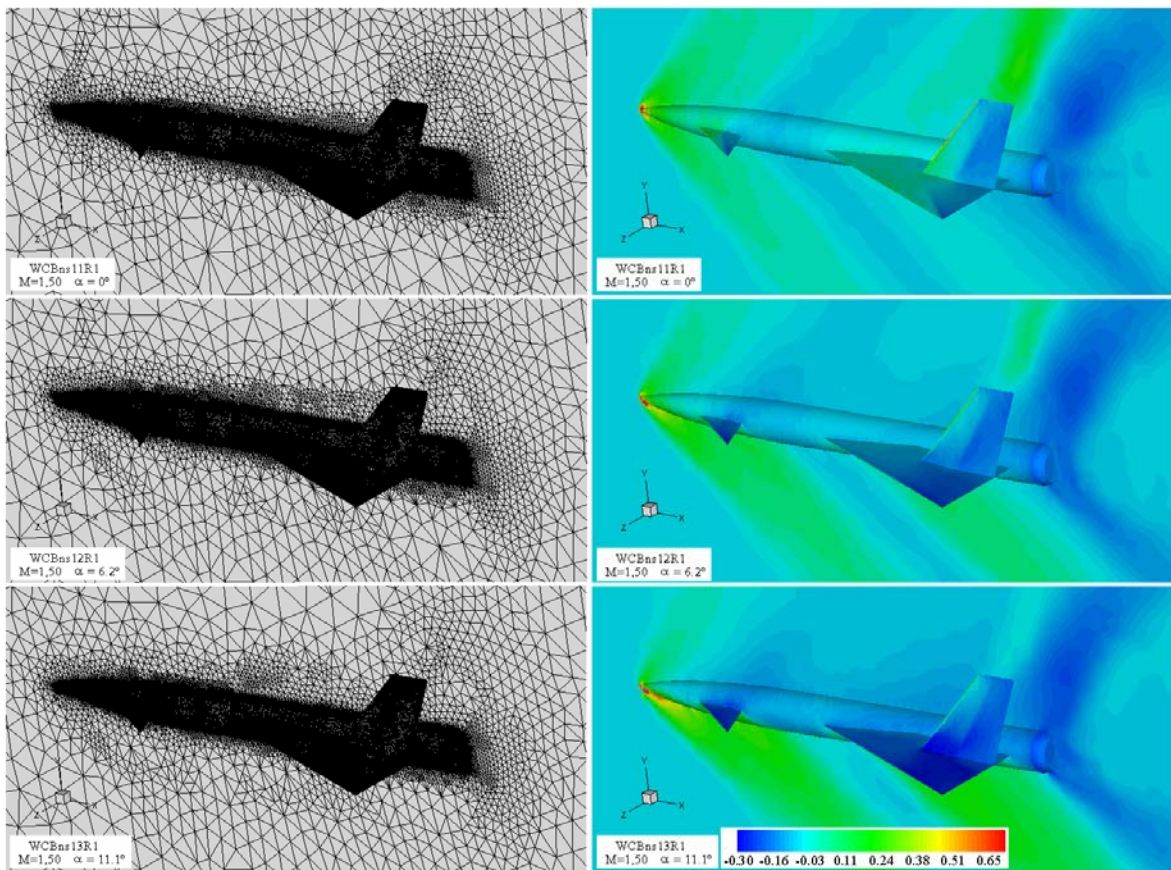


Figura 5.85: Malhas e distribuição do coeficiente de pressão sobre a configuração WCB para $M = 1,50$.

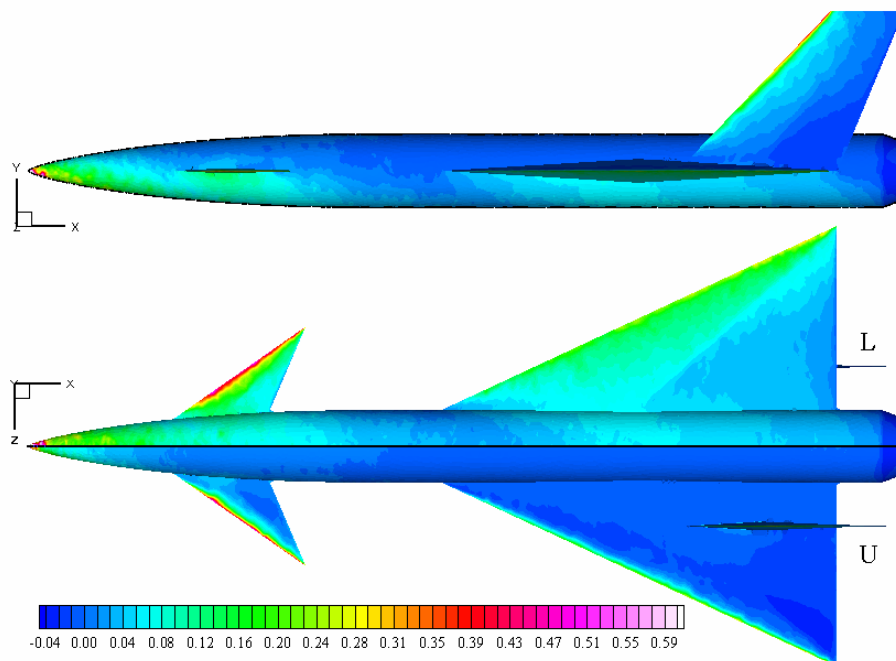


Figura 5.86: Distribuição do coeficiente de pressão sobre a configuração WCBns32R1.

Com o objetivo de comparar a topologia do escoamento sobre a configuração WCB

para diferentes números de Mach e o mesmo ângulo de ataque, mostram-se nas Figuras 5.87, 5.88 e 5.89 as distribuições do número de Mach em diferentes estações (x_b/L) e a malha no plano de simetria após um nível de refinamento. Pelo fato de que para $M_\infty = 2,30$ somente foi empregado um indicador (GP) na etapa de refinamento, os resultados não apresentam a mesma qualidade que nos caso de $M_\infty = 1,50$ e $4,63$.

Observa-se que quando o ângulo de ataque é nulo existe pouca variação nas linhas de Mach constante para os diferentes números de Mach. A esteira do canard intercepta a região frontal da asa com um escoamento de baixa energia, como pode ser observado na Figura 5.87.

Na Figura 5.88, pode-se verificar a formação de vórtices na região superior da asa e da fuselagem para um ângulo de ataque moderado ($\alpha = 6,2^\circ$). As regiões de baixas e médias velocidades na parte superior da fuselagem aumentam com o número de Mach. A esteira do canard influencia a parte superior da asa modificando levemente o campo de movimento. Entretanto, na região do estabilizador vertical as alterações são mínimas porque os efeitos viscosos dissipam a esteira.

Para o máximo ângulo de ataque ($\alpha = 11,1^\circ$) analisado, obtém-se uma topologia do escoamento similar à mostrada para $\alpha = 6,20^\circ$, ou seja, vórtices na parte superior da asa e da fuselagem. Entretanto, vale salientar que os vórtices obtidos nestes casos são maiores e mais intensos.

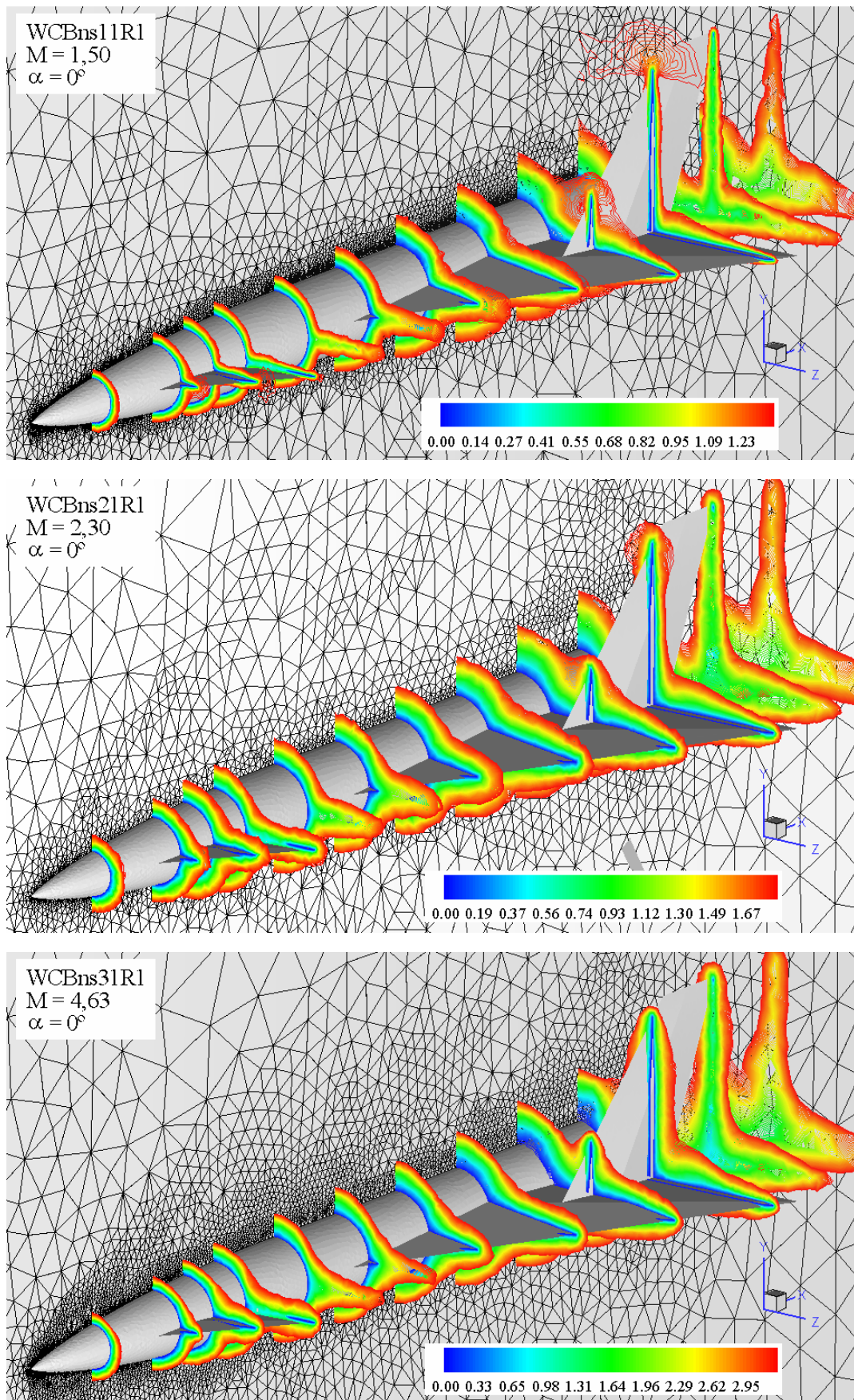


Figura 5.87: Distribuição do número de Mach sobre a configuração WCB para $\alpha = 0^\circ$ e $M_\infty = 1,50, 2,30$ e $4,63$.

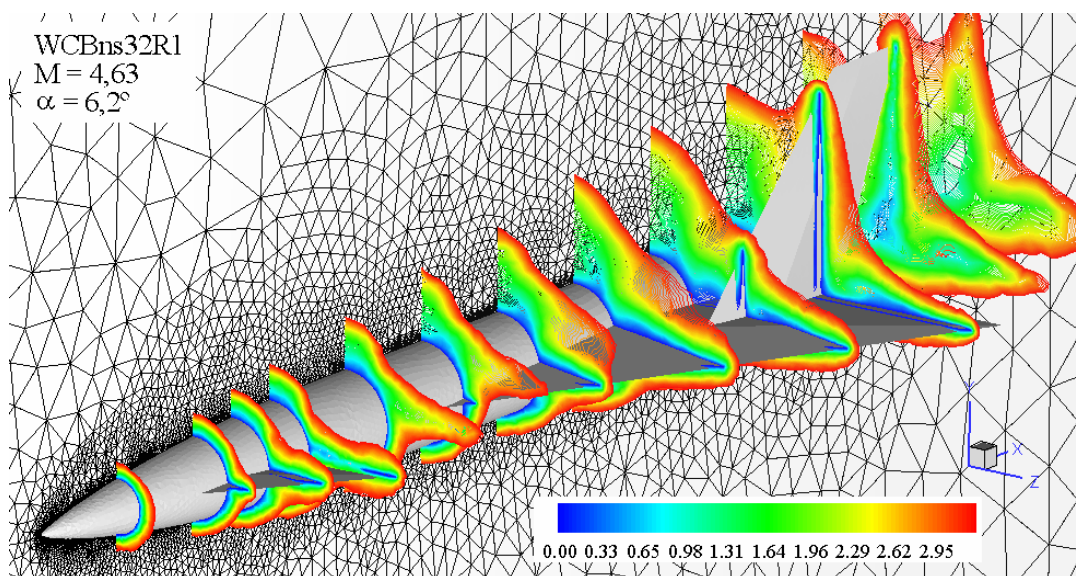
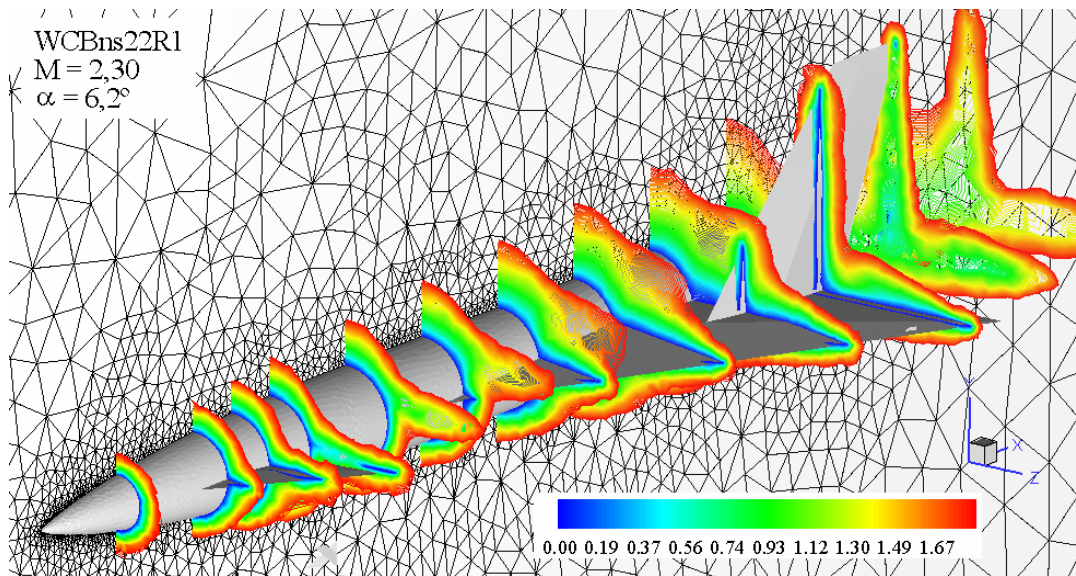
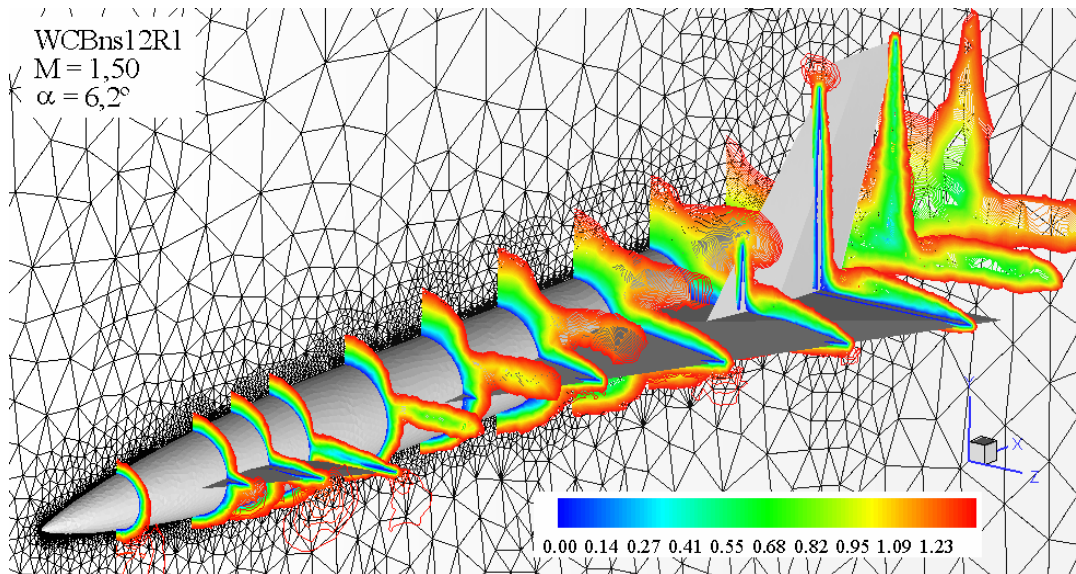


Figura 5.88: Distribuição do número de Mach sobre a configuração WCB para $\alpha = 6,2^\circ$ e $M_\infty = 1,50, 2,30$ e $4,63$.

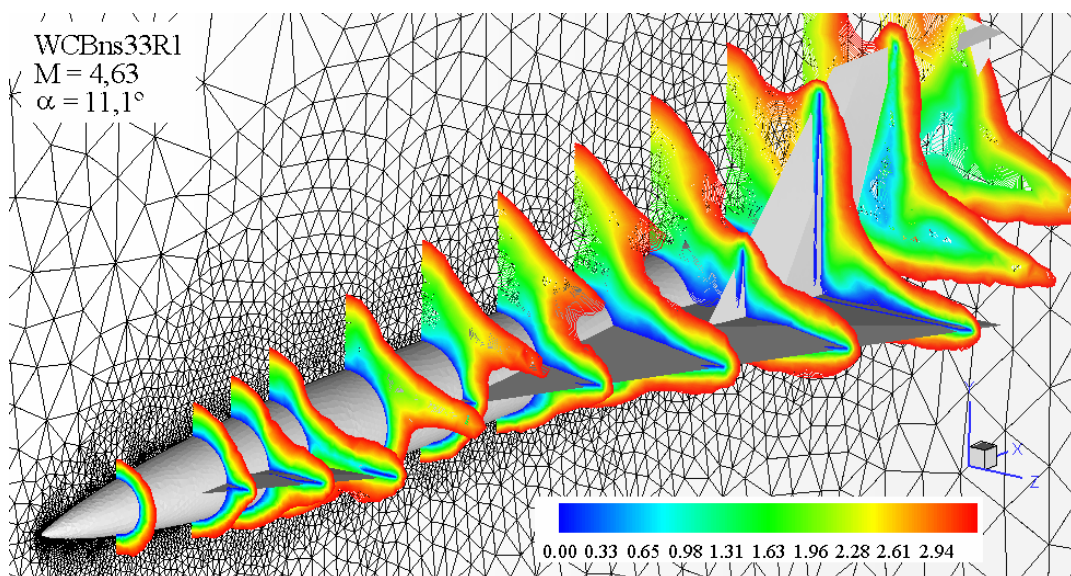
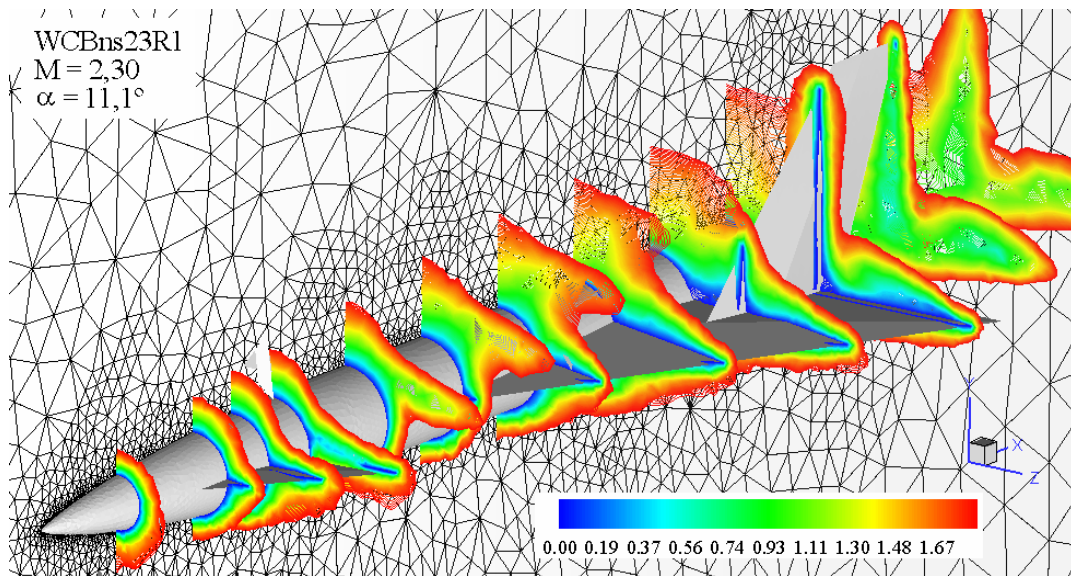
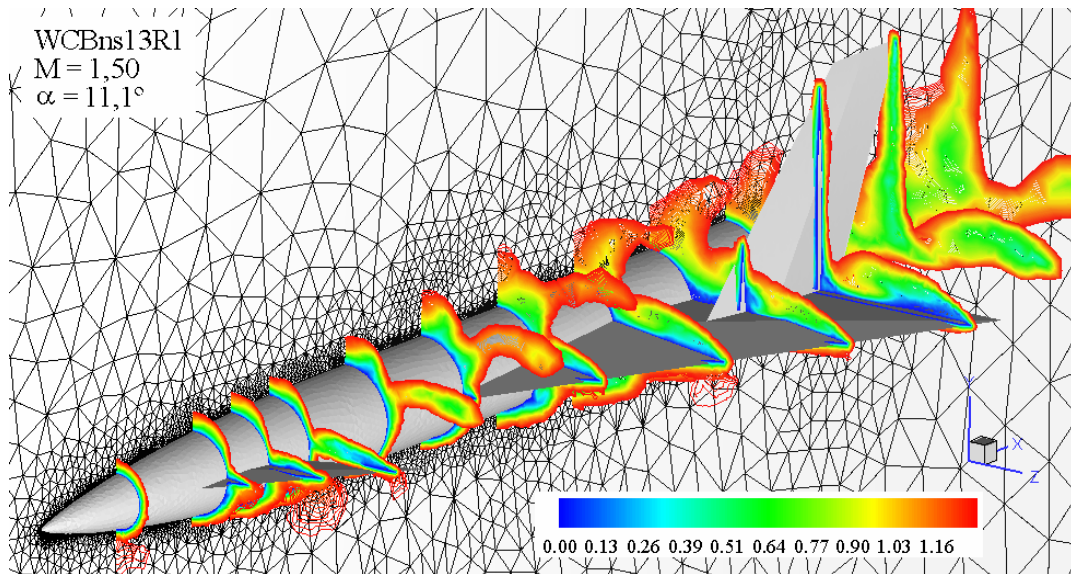


Figura 5.89: Distribuição do número de Mach sobre a configuração WCB para $\alpha = 11,1^\circ$ e $M_\infty = 1,50, 2,30$ e $4,63$.

As distribuições do coeficiente de pressão sobre a configuração WCB para diferentes estações (x_b/L) com $\alpha = 11,1^\circ$ e $M_\infty = 1,50, 2,30$ e $4,63$ são apresentadas na Figura 5.90. A coordenada z é adimensionalizada pela envergadura local da asa e tem sua origem no plano de simetria x - y . Identifica-se com as siglas B e C/W o ponto de interseção entre a fuselagem e o canard/asa e com uma linha contínua a posição do estabilizador vertical.

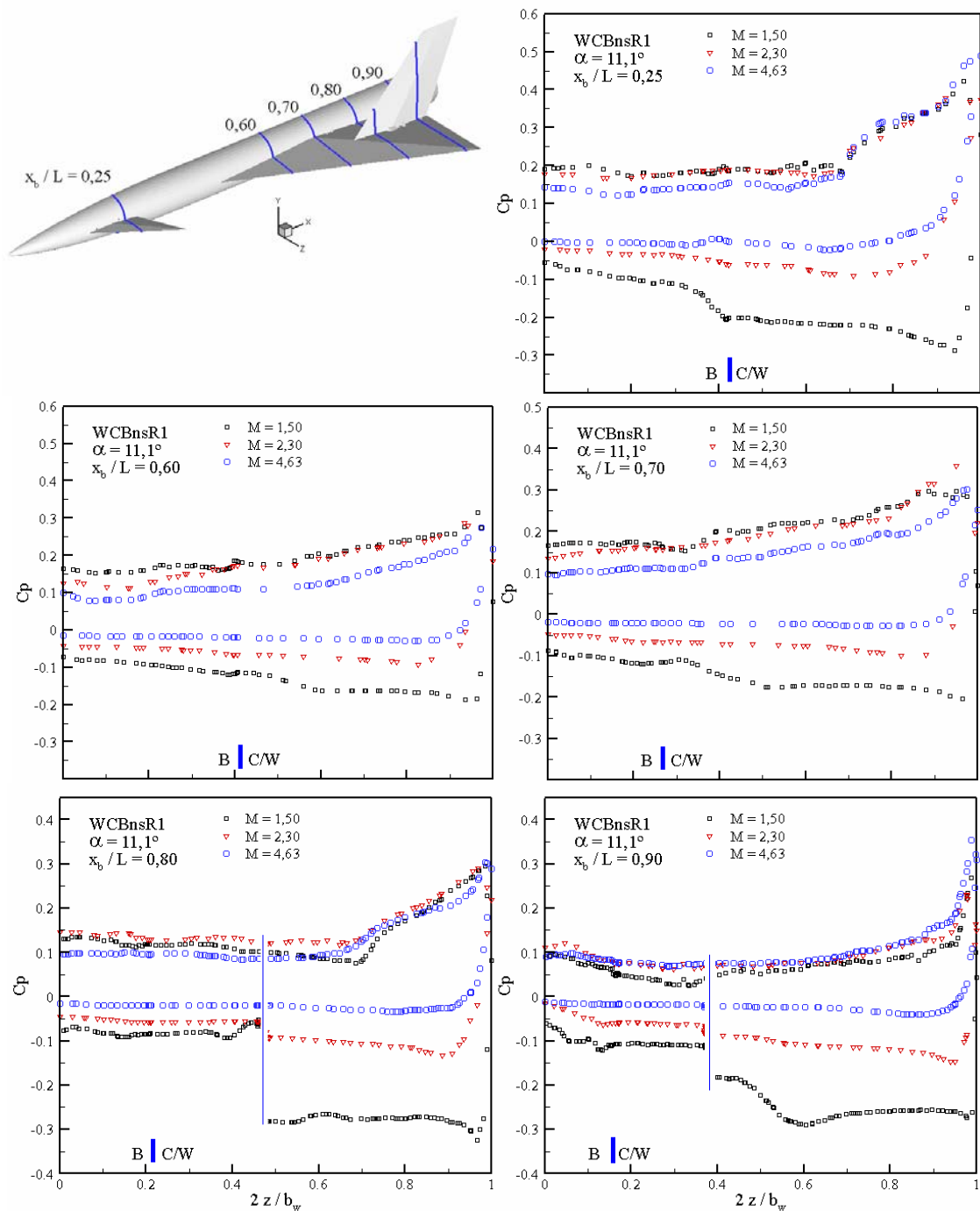


Figura 5.90: Distribuição do coeficiente de pressão sobre a configuração WCB para $x_b/L = cte.$, com $\alpha = 11,1^\circ$ e $M = 1,50, 2,30$ e $4,63$.

A distribuição de pressão apresenta basicamente as mesmas características que foram mostradas na Figura 5.74 do item 5.10, entretanto o estabilizar vertical tem uma forte influência na parte superior da asa. O escoamento é fortemente expandido na região vizinha ao estabilizador vertical para o menor número de Mach. Este efeito se reduz a medida que o número de Mach aumenta, sendo para $M_\infty = 4,63$ praticamente imperceptível.

Na Figura 5.91, mostra-se a distribuição do coeficiente de pressão sobre a configuração WCB em diferentes estações ($2z/b$) para $\alpha = 11,1^\circ$ e $M_\infty = 1,50, 2,30$ e $4,63$. A coordenada z é adimensionalizada pela envergadura da asa e tem sua origem no plano de simetria x - y . Os principais fenômenos na seção do canard e da asa são perfeitamente identificáveis, sendo que para a seção $2z/b = 0,20$ existem fortes efeitos de interação com a fuselagem.

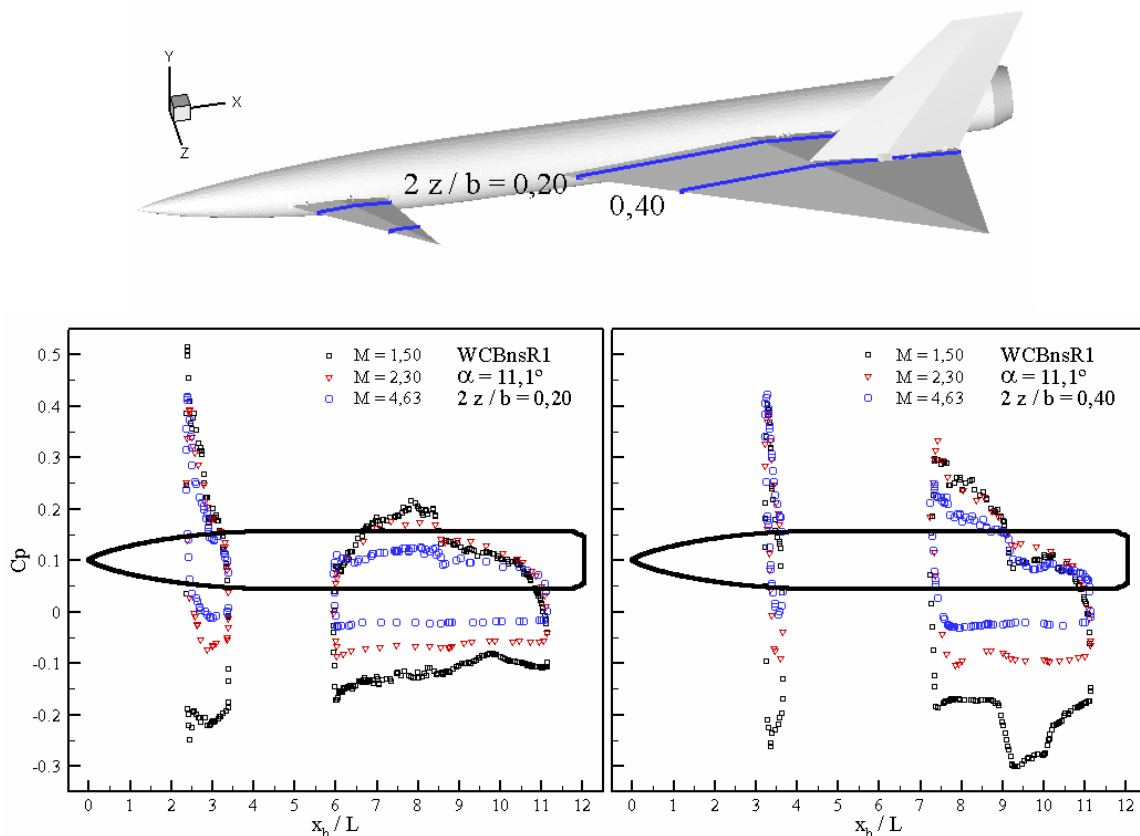


Figura 5.91: Distribuição do coeficiente de pressão sobre a configuração WCB para $2z/b=cte.$, com $\alpha = 11,1^\circ$ e $M = 1,50, 2,30$ e $4,63$.

A distribuição do coeficiente de pressão nas partes superior e inferior da configuração asa-canard-fuselagem são apresentadas nas Figuras 5.92 e 5.93. As figuras permitem visualizar como o escoamento muda para as diferentes combinações de número de Mach e ângulo de ataque.

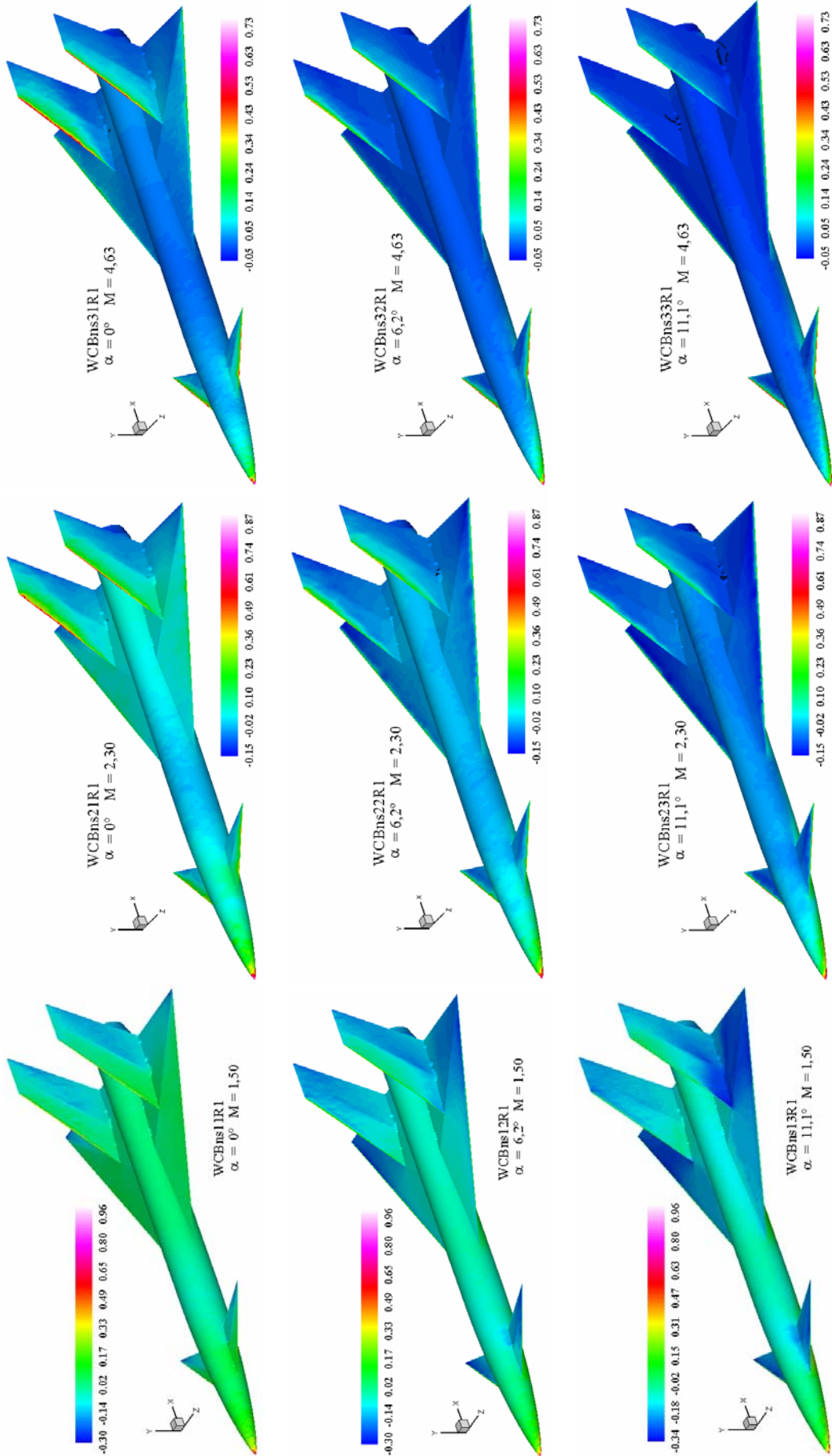


Figura 5.92: Vista superior da distribuição do coeficiente de pressão sobre a configuração WCB.

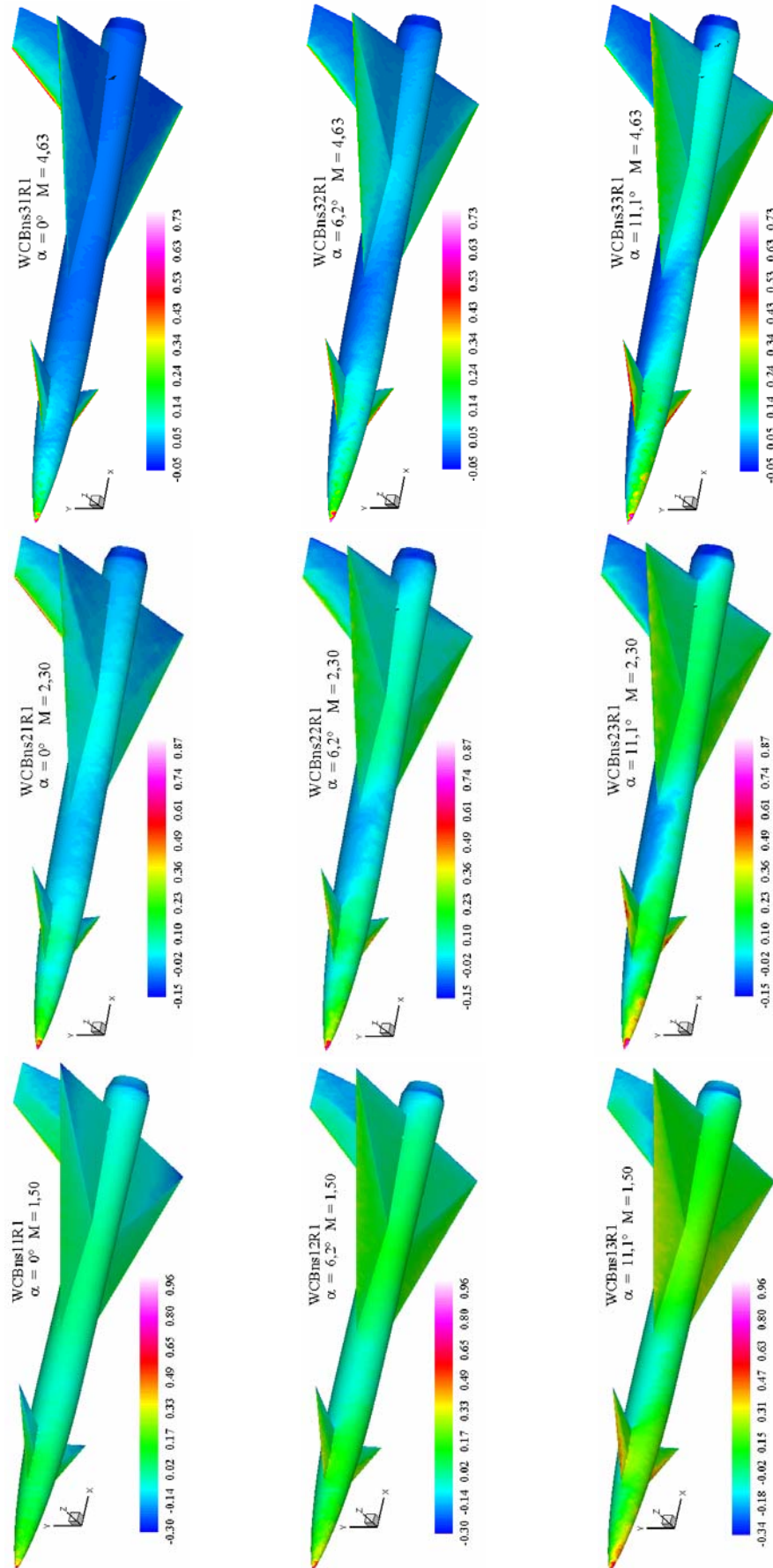


Figura 5.93: Vista inferior da distribuição do coeficiente de pressão sobre a configuração WCB.

Para o ângulo de ataque nulo, observa-se que o escoamento inicialmente é comprimido nas regiões frontais superior e inferior do canard e da asa, e posteriormente se tem uma redução do coeficiente de pressão devido à expansão do escoamento. Os principais fenômenos desenvolvidos sobre o canard e a asa são os mesmo que foram representados esquematicamente na Figura 5.64.

Para o ângulo de ataque moderado $\alpha = 6,2^\circ$, observa-se que na parte inferior do canard e da asa as regiões com escoamento comprimido (parte frontal da asa) e expandido (parte posterior da asa) aumentaram em comparação com o ângulo $\alpha = 0^\circ$. Na parte superior do canard e da asa, o escoamento expande-se continuamente. Os mesmos fenômenos que aconteciam para $\alpha = 6,2^\circ$ estão presentes para o máximo ângulo de ataque estudado neste trabalho. Entretanto, sua intensidade é maior para $\alpha = 11,1^\circ$.

Observa-se que a distribuição de pressão na região de interseção asa-estabilizador vertical sofre grandes variações para as difentes combinações de número de Mach e ângulo de ataque. Portanto, a eficiência das superfícies de controle do veículo será fortemente influenciada pelo estabilizador vertical.

As distribuições de massa específica sobre a configuração WCB em diferentes estações ($2z/b$) para $M_\infty = 1,50$ e $4,63$ são mostradas na Figura 5.94. A distribuição de massa específica é fortemente influenciada pelo ângulo de incidência, sendo que a compressão do escoamento na parte inferior da asa e na região frontal da fuselagem aumenta consideravelmente. Observa-se que a esteira do canard intercepta o bordo de ataque da asa para $\alpha = 0^\circ$ e modifica esta região quando $\alpha = 6,2^\circ$ e $11,1^\circ$.

A influência sobre o escoamento da onda de choque formada no estabilizador vertical tende a se reduzir a medida que aumenta o ângulo de ataque. Isto ocorre devido à expansão do escoamento na parte superior da asa.

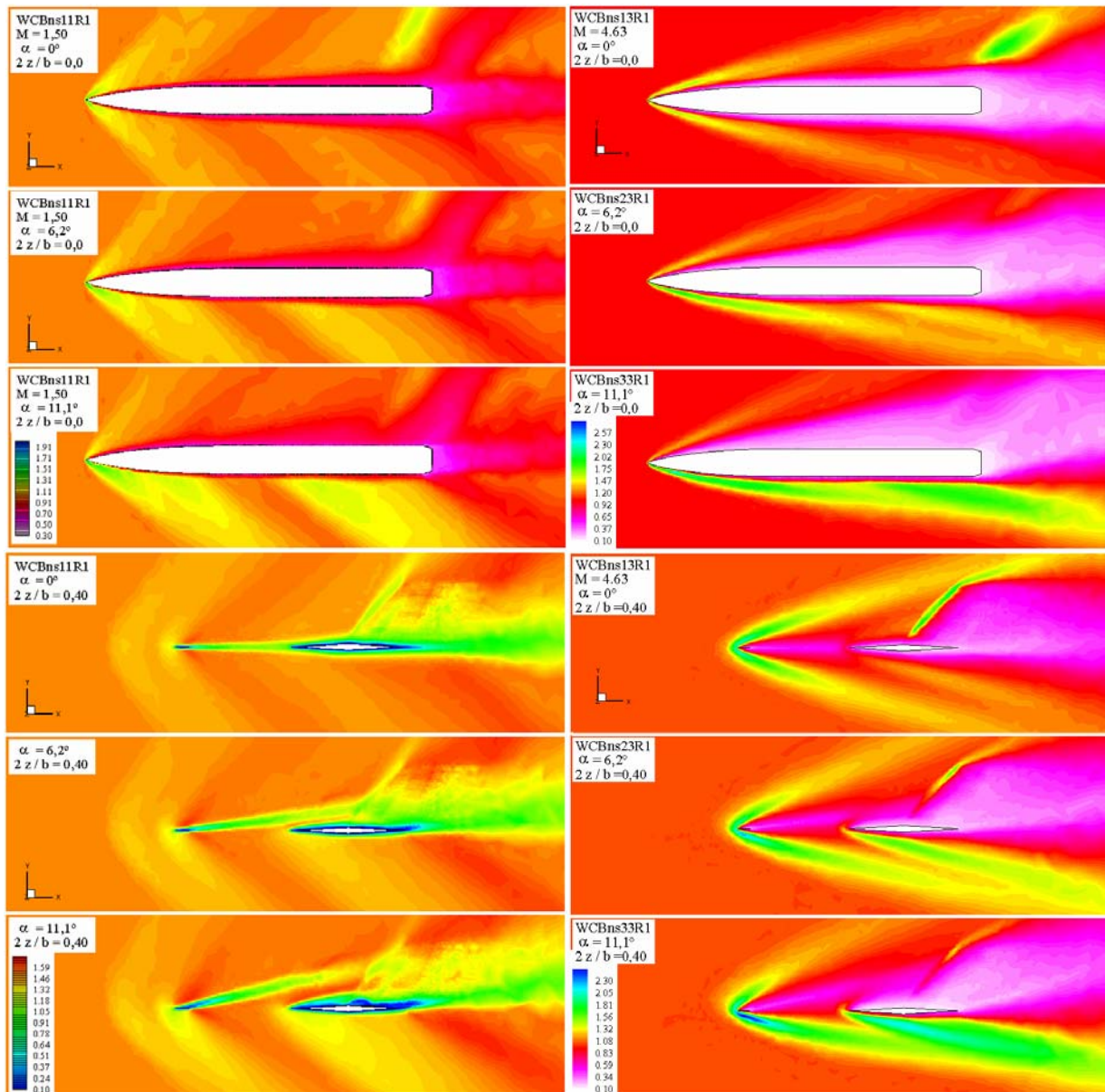


Figura 5.94: Distribuição da massa específica sobre a configuração WCB para $2z/b = cte.$ para $M = 1,50$ e $4,63$.

Com o objetivo de interpretar e analisar as características do escoamento sobre a configuração WCB são comparadas nas Figuras 5.95a, 5.95b e 5.95c as distribuições do número de Mach e as linhas de corrente em diferentes estações (x_b/L) para $\alpha = 11,1^\circ$ nos casos com $M_\infty = 1,50$ e $4,63$.

Na primeira estação ($x_b/L = 0,30$), pode-se verificar que as linhas de corrente na parte superior da fuselagem sofrem alterações, indicando a formação de um vórtice. Observa-se que a esteira do canard e a região de baixa velocidade na parte superior da fuselagem são maiores no caso de $M_\infty = 4,63$.

A presença da asa na estação $x_b/L = 0,50$ induz no escoamento dois pares de vórtices

na parte superior e inferior da asa. Sendo que para $M_\infty = 4,63$ não são eficientemente capturados devido ao refinamento nesta região ser insuficiente. Observa-se que o vórtice na parte superior da fuselagem já está bem desenvolvido.

O estabilizador vertical além de restringir o movimento dos vórtices na parte superior da asa e da fuselagem gera novos vórtices na região de interseção asa-estabilizador vertical. O tamanho e intensidade dos mesmos são pequenos em comparação com os vórtices gerados pela asa e a fuselagem, tendendo a serem sugados pelos vórtices maiores (Figura 5.95c). Na região de interseção asa-fuselagem também se formam vórtices nas partes superior e inferior da asa, sendo que o vórtice na parte inferior não sofre interferências de outros vórtices.

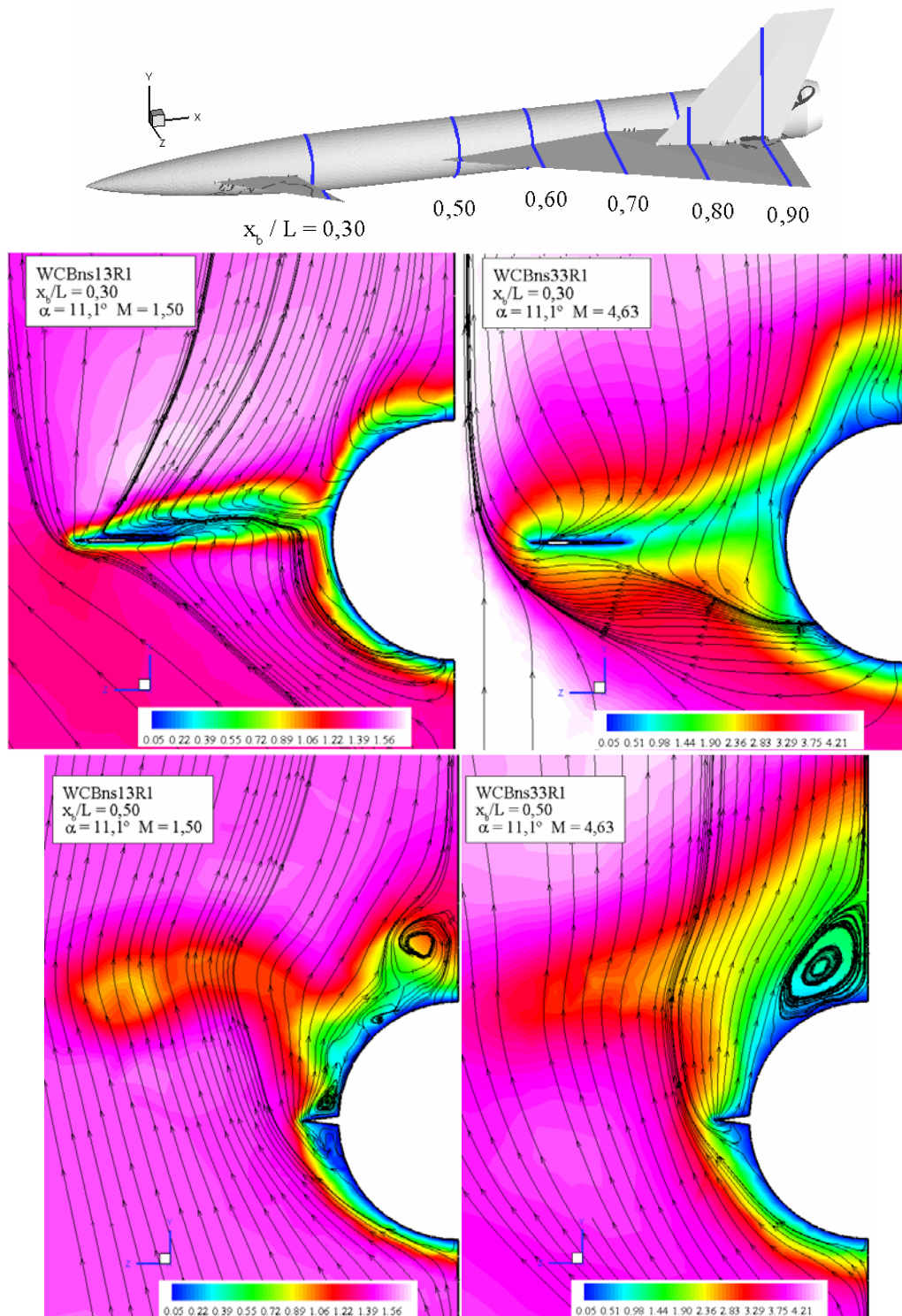


Figura 5.95a: Distribuição do número de Mach para $x_b/L = 0,30$ e $0,50$ sobre a configuração WCB para $\alpha = 11,1^\circ$ com $M = 1,50$ e $4,63$.

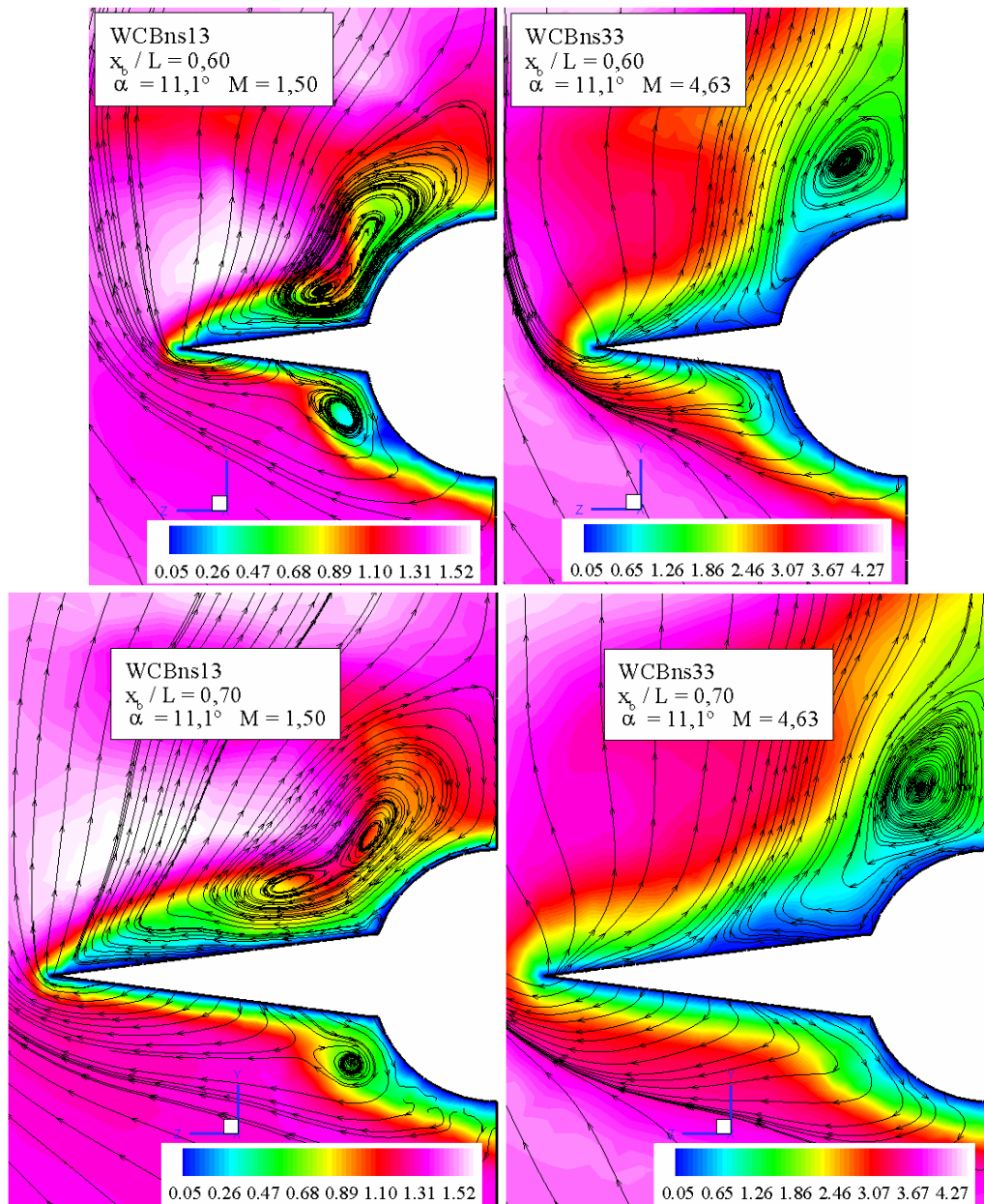


Figura 5.95b: Distribuição do número de Mach para $x_b/L = 0,60$ e $0,70$ sobre a configuração WCB para $\alpha = 11,1^\circ$ com $M = 1,50$ e $4,63$.

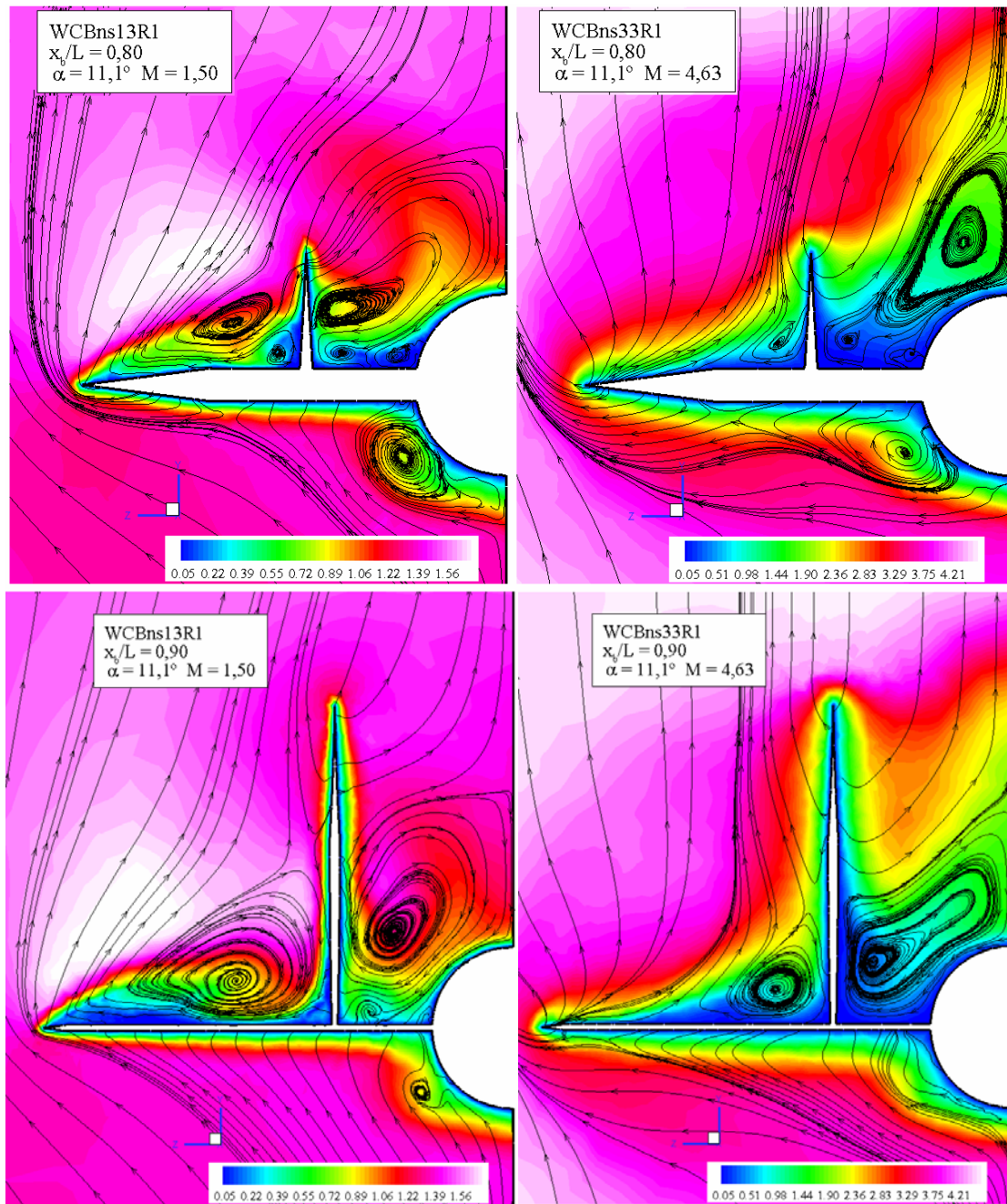


Figura 5.95c: Distribuição do número de Mach para $x_b/L = 0,80$ e $0,90$ sobre a configuração WCB para $\alpha = 11,1^\circ$ com $M = 1,50$ e $4,63$.

As distribuições dos coeficientes de arrasto (C_D), de sustentação (C_L), de momento (CM_z) e a relação L/D são dadas na Figura 5.96 para as diferentes combinações de número de Mach e ângulo de ataque. Os coeficientes obtidos para $M = 2,30$ não foram empregados devido à malha não ter sido suficientemente refinada. Para os coeficientes aerodinâmicos, adotam-se como valores de referência: a superfície e a envergadura da asa. O coeficiente de momento foi tomado com relação à coordenada $(1,0; 0,0; 0,0)$.

Observa-se que a configuração WCBns41 ($M = 1,0$ e $\alpha = 11,1^\circ$) apresenta os

máximos valores dos coeficientes de arrasto ($CD_{max} = 0,1639$), de sustentação ($CL_{max} = 0,721$) e de momento ($CMz_{max} = 1,611$), entretanto a máxima relação L/D obtém-se para a configuração WCBns42 ($M = 1,0$ e $\alpha = 6,2^\circ$), sendo o valor igual a 5,58. Mantendo o ângulo de ataque constante, observa-se que os valores de praticamente todos os coeficientes se reduzem a medida que se aumenta o número de Mach, porém a relação entre a sustentação e o arrasto apresenta um comportamento diferente devido ao máximo valor estar localizado para $\alpha = 6,2^\circ$.

O coeficiente de momento é negativo para ângulos de ataque baixos, porém muda de sinal quando se aumenta o ângulo de ataque. Esta alteração no coeficiente de momento deve ser levada em conta quando se desenham os sistemas de controle do veículo, já que para baixos ângulos de incidência, o nariz do veículo tende a subir e depois tende a baixar quando o ângulo de ataque aumenta.

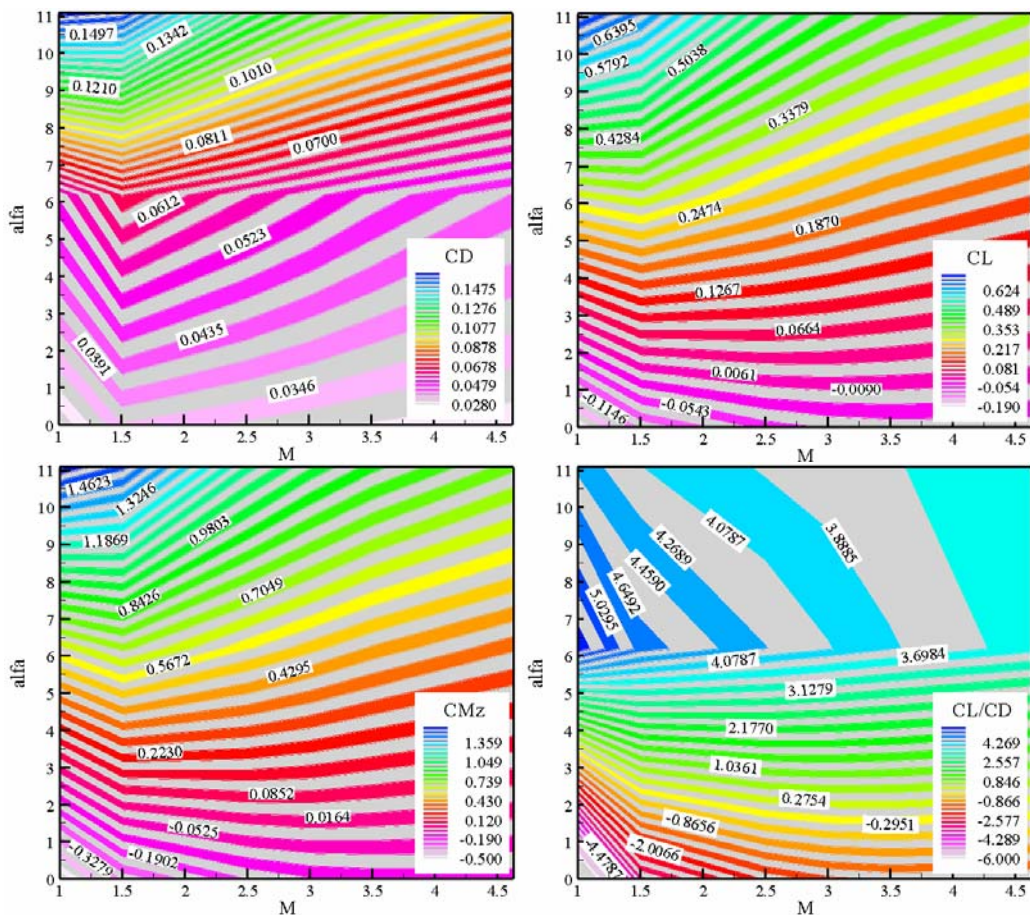


Figura 5.96: Distribuição dos coeficientes CD , CL , CMz e da relação CL/CD para a configuração WCB.

Na Figura 5.97, apresentam-se as curvas de $CD-CL$ e de $\alpha-CMz$ para as configurações asa-fuselagem e asa-canard-fuselagem para diferentes números de Mach.

Observa-se da comparação entre as configurações WB e WCB que a presença do canard e do estabilizador vertical afetam principalmente os coeficientes de arrasto e sustentação para ângulos de ataque elevados. Entretanto, a estabilidade do veículo sofre alterações importantes devido à existência do canard e do estabilizador vertical.

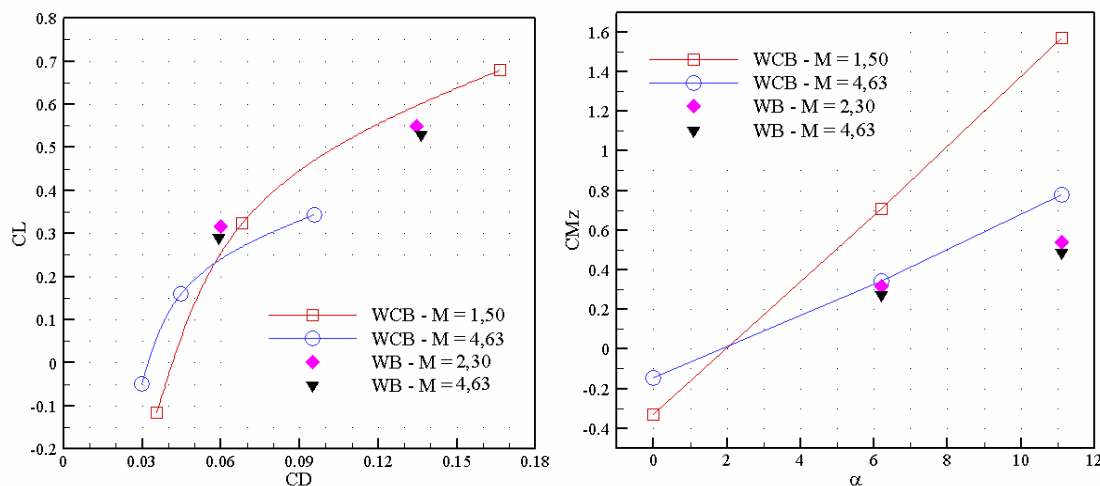


Figura 5.97: Curvas de CD-CL e α -CMz para as configurações WB e WCB.

Finalmente, emprega-se a técnica de subciclos para alguns dos casos estudados acima. Na Tabela 5.18, são dadas as porcentagens de elementos para os diferentes grupos de Δt e os máximos ganhos de tempo de processamento teórico ($S-U_{teo}$) e real ($S-U$) da técnica de subciclos.

Grupo	WCBns11	WCBns12	WCBns21	WCBns31	WCBns32
1 Δt	0,63	0,62	0,28	2,63	0,50
2 Δt	22,27	23,03	14,48	46,98	20,15
4 Δt	57,40	57,18	50,67	33,59	53,35
8 Δt	9,67	8,92	15,42	8,65	15,36
16 Δt	3,47	3,69	8,07	3,35	5,20
32 Δt	2,86	2,80	6,06	2,25	2,23
64 Δt	1,85	1,94	1,33	0,84	1,52
128 Δt	1,85	1,82	3,69	1,71	1,69
$S-U_{teo}$	3,61	3,58	4,37	2,78	3,80
$S-U$	1,57	2,10	1,25	1,77	2,09

Tabela 5.18: Porcentagem de elementos, *speed-up* teórico ($S-U_{teo}$) e real ($S-U$) para algumas das malhas refinadas no problema WCB.

O máximo ganho teórico de tempo de processamento não pôde ser atingido devido às atualizações e interpolações que são feitas para os diferentes grupos de elementos e nós. Já que as malhas foram refinadas apartir da mesma malha inicial, as porcentagens de elementos não variam muito. Observa-se que a maioria dos elementos concentram-se nos grupos com incrementos de tempo $2\Delta t$, $4\Delta t$ e $8\Delta t$.

Na Figura 5.98, mostra-se a distribuição dos incrementos de tempo ao redor da configuração WCB para o caso analisado com $M_\infty = 1,50$ e $\alpha = 0^\circ$. Os incrementos de tempo menores ($1\Delta t$ e $2\Delta t$) estão localizados principalmente nas regiões com partes geométricas em ponta, ou seja, nos bordos de ataque e de fuga do canard, da asa e do estabilizador vertical. Sobre e ao redor da configuração WCB, os incrementos de tempo variam entre $4\Delta t$ e $8\Delta t$. Observa-se na Tabela 5.18 que para este caso a maioria dos elementos da malha (57,4 %) estão concentrados no grupo com incrementos de tempo iguais a $4\Delta t$. Os incrementos de tempo de $16\Delta t$ até $128\Delta t$ estão localizados concentricamente ao redor da configuração asa-canard-fuselagem e a transição entre os mesmos acontece a curta distância.

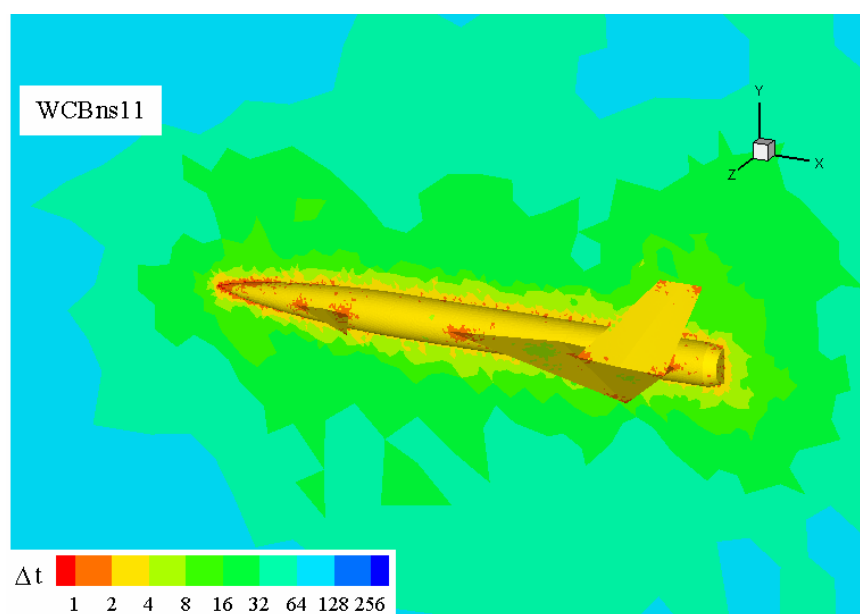


Figura 5.98: Distribuição dos incrementos de tempo sobre a configuração WCB para $\alpha = 0^\circ$ e $M_\infty = 1,50$.

Na Figura 5.99, apresenta-se a comparação das distribuições de pressão obtidas sem e com a técnica de subciclos para a configuração WCBns32R1. Os resultados obtidos mostram uma boa concordância, porém na parte inferior da asa (região de compressão do escoamento) existe uma leve diferença a qual está associada à interpolação linear empregada no processo de integração.

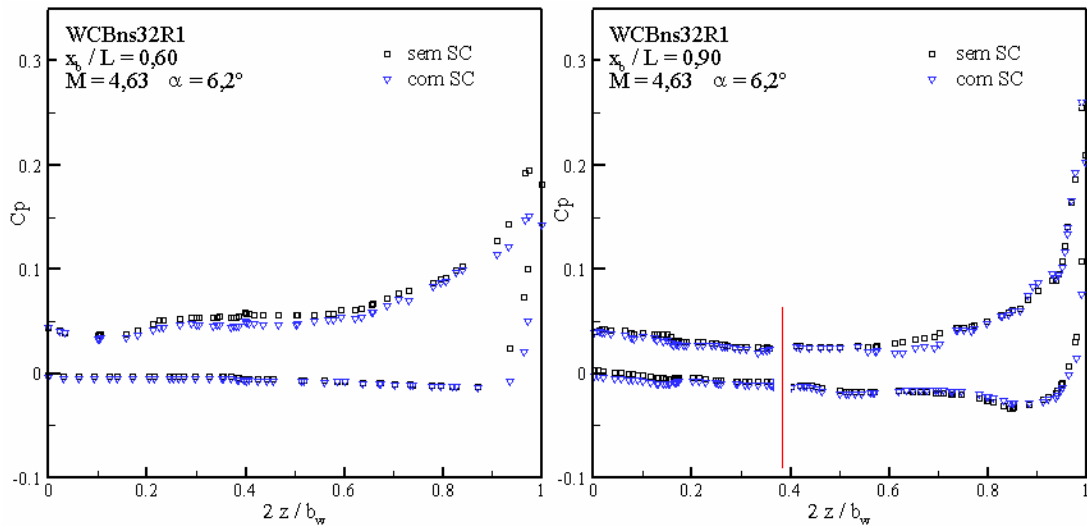


Figura 5.99: Distribuição do coeficiente de pressão obtida sem e com a técnica de subciclos sobre a configuração WCB para $\alpha = 6,2^\circ$ e $M = 4,63$.

Através dos resultados apresentados acima, pode-se verificar o comportamento do escoamento e a formação e dinâmica dos vórtices para diferentes números de Mach e ângulos de ataque ao redor da configuração asa-canard-fuselagem.

6. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

6.1 CONCLUSÕES

Apresentou-se, no presente trabalho, o desenvolvimento e implementação de soluções numéricas para a análise de escoamentos tridimensionais de fluidos incompressíveis e compressíveis, viscosos (laminar) e não-viscosos, adequadas para o estudo de problemas de interesse prático no campo da aerodinâmica.

As equações de Euler e de Navier-Stokes são resolvidas empregando o método dos elementos finitos (MEF), usando uma série de Taylor e o clássico método de *Bubnov-Galerkin* para a discretização do tempo e do espaço, respectivamente. As limitações atuais da Dinâmica dos Fluidos Computacional são dadas pelas limitações de memória e velocidade de processamento. Portanto, estes parâmetros conjuntamente com a robustez e precisão definem o sucesso ou não de um esquema computacional. Para a resolução do método de *Taylor-Galerkin* são usados dois esquemas numéricos diferentes, sendo o primeiro explícito iterativo (um passo) e o segundo explícito de dois passos. Através dos diferentes exemplos analisados, pode-se concluir que os dois esquemas conseguem reproduzir com bom nível de precisão os resultados experimentais e numéricos apresentados na literatura. Verificou-se que o esquema de *Taylor-Galerkin* de um passo consegue uma redução no tempo de processamento em comparação com o esquema de dois passos, porém o esquema de *Taylor-Galerkin* de dois passos apresenta um menor consumo de memória. Em termos gerais, o esquema de *Taylor-Galerkin* de um passo apresenta um melhor desempenho pelo fato de ter um bom tempo de processamento com uma aceitável ocupação de memória.

Devido à complexidade geométrica que apresentam as configurações tridimensionais aerodinâmicas, foram implementados o elemento hexaédrico trilinear e o elemento tetraédrico linear, com a finalidade de ter maior flexibilidade na geração da malha. Para o elemento hexaédrico, utiliza-se integração analítica das matrizes em nível de elemento.

Para verificação da estabilidade, determinação da ordem de precisão e medição do erro através de duas normas (L_1 e L_2) dos diferentes códigos computacionais implementados e do tipo de malha (estruturada e não-estruturada) empregada, foram estudados os seguintes casos: a reflexão de um choque oblíquo em um escoamento supersônico e o escoamento transônico sobre um aerofólio NACA 0012. As soluções para estes casos foram comparadas com soluções analíticas e numéricas apresentadas na literatura.

Observou-se para o caso da reflexão do choque oblíquo que os menores valores de erro estão associados às malhas de hexaedros. Sendo que o esquema de um passo apresenta melhor precisão em comparação com o esquema de dois passos. As malhas de tetraedros apresentam um erro levemente maior quando comparadas com as malhas de hexaedros, porém o menor erro das malhas de tetraedros obtém-se com o esquema de dois passos. As malhas de hexaedros e tetraedros apresentaram ordens de precisão inferiores à ordem teórica esperada quando as mesmas foram determinadas com a norma L_1 . Entretanto, com a norma L_2 apresentaram um valor levemente superior à ordem teórica. Todos os resultados obtidos com os diferentes esquemas e elementos mostraram-se estáveis e livres de oscilações nas proximidades das ondas de choque.

Para a segunda análise, problema do aerofólio NACA 0012, obteve-se uma boa concordância nos valores dos coeficientes de arrasto e de sustentação obtidos com as malhas de hexaedros (esquema de um passo e de dois passos) e a malha de tetraedros com o esquema de um passo. Entretanto, obteve-se diferença com a combinação dada pela malha de tetraedros e o esquema de dois passos.

A simulação dos escoamentos incompressíveis é apresentada neste trabalho, considerando a hipótese de pseudo-compressibilidade nas equações de Navier-Stokes para escoamento compressível. No âmbito de escoamentos compressíveis não-viscosos foi implementada uma matriz de pré-condicionamento que possibilita a simulação de escoamentos a baixo número de Mach. Os resultados obtidos com ambas implementações mostraram boa concordância quando comparados com os resultados experimentais e numéricos apresentados na literatura, verificando a viabilidade do uso das equações de escoamentos compressíveis no regime para baixos números de Mach. Mesmo tendo sido observados resultados satisfatórios, sugere-se dar continuidade a este estudo, realizando uma análise mais aprofundada.

No contexto da malha não-estruturada foi implementado um esquema de refinamento adaptativo de malhas que é governado por indicadores de erro que utilizam a solução obtida com a malha inicial para determinar quais são as regiões a serem refinadas. Observou-se que o emprego do esquema de adaptação espacial melhora consideravelmente a qualidade da solução dos problemas compressíveis viscosos e não-viscosos em regime transônico, supersônico e hipersônico. Os principais fenômenos físicos são capturados com os diferentes indicadores de erro empregados, apresentando uma boa concordância com resultados experimentais apresentados na literatura.

A restrição no passo de tempo dos esquemas explícitos torna-se crítica quando se faz a subdivisão dos elementos na etapa de refinamento. Portanto, emprega-se uma técnica de

avanço no tempo em subciclos para o esquema de *Taylor-Galerkin* de um passo com elementos hexaédricos e tetraédricos com o objetivo de aprimorar a eficiência do código computacional. Observa-se que para os problemas não-viscosos e viscosos estudados em regime transônico, supersônico e hipersônico o máximo ganho no tempo de processamento real varia entre 1,10 e 2,39. Sendo que os valores médios obtidos para os problemas resolvidos com as equações de Euler e de Navier-Stokes são aproximadamente 1,62 e 1,54, respectivamente. As comparações dos resultados obtidos sem e com a técnica de subciclos mostram uma boa concordância.

Os resultados obtidos para um escoamento não-viscoso e viscoso ao redor de uma configuração asa-fuselagem serviram de base para o estudo sobre uma configuração asa-canard-fuselagem. O entendimento dos principais fenômenos físicos ao redor destas configurações é fundamental, já que as fortes interferências que acontecem no escoamento podem modificar substancialmente as características aerodinâmicas, a estabilidade e o controle do avião ou veículo de reentrada. Sendo assim, empregaram-se algumas ferramentas implementadas na tese para contribuir ao entendimento dos principais fenômenos que acontecem para diferentes números de Mach e ângulos de ataque sobre estas geometrias.

Os procedimentos numéricos foram implementados na linguagem FORTRAN e otimizados para serem executados eficientemente em computadores escalares, já que as aplicações no campo da aerodinâmica conduzem a problemas com um grande número de incógnitas. O consumo aproximado de memória por nó e por elemento para o esquema de um passo com elementos tetraédricos é 1,6 KB/nós e 0,3 KB/elementos, respectivamente. Entretanto, o consumo médio de memória por nó e por elemento para o esquema de um passo com elementos hexaedros é 1,05 KB/nós e 1,1 KB/elementos, respectivamente. Nos esquemas de dois passos, o consumo de memória reduz-se aproximadamente entre 10 % e 30 %.

Finalmente, pode-se concluir que as ferramentas computacionais implementadas mostraram-se robustas e eficiente para sua utilização na simulação de escoamentos viscosos e não-viscosos em regime subsônico, transônico, supersônico e hipersônico.

6.2 SUGESTÕES PARA CONTINUIDADE DA PESQUISA

Embora no presente trabalho trabalhe-se com geometria relativamente simples, as mesmas demandam tempo para sua geração em sistemas de CAD, a fim de reproduzir exatamente as configurações a serem estudadas. A geração da malha também foi um fator crítico pelo fato de ter um importante papel na precisão dos resultados, tempo de processamento e consumo de memória. Seria importante a utilização de sistemas de CAD e de geração de malhas específicos para problemas da Dinâmica dos Fluidos Computacional para ter sucesso na obtenção de resultados com boa precisão. Uma malha de elementos finitos que apresenta uma transição suave e gradual entre os elementos de máximo e mínimo tamanho, reduziriam as leves diferenças encontradas nas soluções numéricas obtidas sem ou com a técnica de subciclos, além de gerar elementos de tamanho mais regulares no processo de adaptação de malhas.

A fim de tornar o esquema de adaptação de malhas mais eficiente, poderia ser incluído um processo de realocação nodal. Também, o modelamento paramétrico das geometrias facilitaria a projeção dos novos nós gerados no processo de adaptação de malhas sobre a geometria original.

Embora os procedimentos numéricos foram otimizados para serem executados eficientemente em computadores escalares, o tempo de processamento foi o fator principal que impediu que as configurações asa-fuselagem e asa-canard-fuselagem fossem refinadas uma segunda vez. A programação em paralelo e a execução em *cluster* de processadores escalares possibilitariam uma redução importante no tempo de processamento e, portanto permitiria a simulação de problemas reais de engenharia com um grande nível de detalhamento das geometrias. Também o máximo ganho de tempo de processamento real para a técnica de subciclos aumentaria, já que uma menor quantidade de elementos e nós seriam processados por computador. A adoção de um procedimento multigrid também seria muito vantajosa já que permitiria reduzir o tempo de processamento, acelerando a convergência dos esquemas para soluções de estado estacionário.

A consideração da excitação vibracional das moléculas e das reações químicas para escoamentos hipersônicos no contexto de malhas não-estruturadas permitiria a resolução de problemas reais nos quais os efeitos químicos e de não-equilíbrio térmico não podem ser desprezados.

Os casos abordados neste trabalho foram não-viscosos e viscosos laminares.

Entretanto, na maioria dos problemas aerodinâmicos o escoamento é fundamentalmente turbulento. Portanto, as ferramentas implementadas poderiam incorporar algum tratamento do problema de turbulência através de um modelo de fechamento que permita o estudo de problema com escoamentos turbulentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aftosmis, M.J., 1997. "Solution Adaptive Cartesian Grid Methods for Aerodynamic Flows with Complex Geometries", Lecture Series 1997-02, 28th Computational Dynamics Lectures Series, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Belgium.

Aftosmis, M., Gaitonde, D., Tavares, T.S., 1995. "Behavior of Linear Reconstruction Techniques on Unstructured Meshes", **AIAA Journal**, vol. 33 (11), pp. 2038-2049.

Almeida, R.C., Galeão, A.C., 1996. "An Adaptive Petrov-Galerkin Formulation for the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations", **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 129, pp. 157-176.

Anderson, J.D. Jr., 1989. "**Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics**", McGraw-Hill Inc., New York, USA.

Argyris, J., Doltsinis, I.S, Friz, H., 1990. "Studies on Computational Reentry Aerodynamics", **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 81, pp. 257-289.

Aris, R., 1989. "**Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics**", Dover, New York, USA.

Baker, T.J., 2005. "Mesh Generation: Art or Science", **Prog. Aerosp. Scien.**, vol. 41, pp. 29-63.

Becker, E., 1968. "**Gas Dynamics**", Academic Press Inc., USA.

Belytschko, T., Gilbertsen, N.D., 1992. "Implementation of Mixed Time Integration Techniques on a Vectorized Computer with Shared Memory", **Int. J. Num. Meth. Eng.**, vol. 35, pp. 1803-1828.

Belytschko, T., Yen, H.J., Mullen, R., 1979. "Mixed Method for Time Integration", **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 17/18, pp. 259-275.

Bennett, R.M., Walker, C.E., 1999. "Computational Test Cases for a Clipped Delta Wing With Pitching and Trailing-Edge Control Surface Oscillations", TM-209104, NASA, USA.

Berger, M., Aftosmis, M.J., Melton, J., 1996. "Accuracy, Adaptive Methods and Complex Geometries", Proc. 1st AFOSR Conference on Dynamics Motion CFD, Rutgers University, L. Sakell and D. Knight editors, USA.

- Bertin, J.J., 1994. "**Hypersonic Aerothermodynamics**", AIAA Education Series, USA.
- Bono, G., 2004. "**Adaptação Via Movimento de Malhas em Escoamentos Compressíveis**", Dissertação de Mestrado, PROMEC, UFRGS, Brasil.
- Bono, G., Awruch, A.M., 2005. "A Mesh Adaptation Method by Node Re-allocation using an Edge-based Error Measure", **Rev. de Eng. Term. - RETERM**, vol. 4 (2), pp. 145-152.
- Bono, G., Awruch, A.M., 2006. "Comparación Entre Dos Esquemas Explícitos para la Solución de las Ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes", *Mecánica Computacional*, vol. XXV, eds. Cardona, A., Nigro, N., Sonzogni, V., Storti, M., pp. 2395-2413, Argentina.
- Bono, G., Awruch, A.M., 2007. "Comparative Study of Structured and Unstructured Meshes for Compressible Flows", *Proceedings of COBEM 2007*, Brasil.
- Braun, A.L., 2007. "**Simulação Numérica na Engenharia do Vento Incluindo Efeitos de Interação Fluido-Estrutura**", Tese de Doutorado, PPGECC, UFRGS, Brasil.
- Briley, W.R., Taylor, L.K., Whitfield, D.L., 2003. "High-resolution Viscous Flow Simulations at Arbitrary Mach Number", **J. Comput. Physics**, vol. 184, pp. 79-105.
- Bristeau, M., Glowinski, R., Periaux, J., Perrie, P., Pirenneau, O. e Poirier, C., 1985. "On the Numerical Solution of Nonlinear Problems in Fluid Dynamics by Least Squares and Finite Element Methods (II), Application to Transonic Flow Simulations", **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 51, pp. 363-394.
- Brooks, A.N., Hughes, T.J.R., 1982. "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations", **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 32, pp. 199-259.
- Burbridge, H.P., 1999. "**O Esquema Explícito de Taylor-Galerkin na Simulação Numérica de Escoamentos Compressíveis Tridimensionais Utilizando Elementos Finitos Hexaédricos de Oito Nós**", Dissertação de Mestrado, PPGECC, UFRGS, Brasil.
- Chanetz, B., Benay, R., Bousquest, J.M., Bur, R., Pot, T., Grasso, F., Moss, J., 1998. "Experimental and Numerical Study of the Laminar Separation in Hypersonic Flow", **Aerosp. Scien. and Technology**, vol. 3, pp. 205-218.
- Chang, H.J., Bass, J.M., Tworzydło, W., Oden, J.T., 1993. "H-P Adaptive Methods for Finite Element Analysis of Aerothermal Loads in High-speed Flows", Contract Report CR-189739, NASA, USA.

Chapman, D.R., 1979. "Computational Aerodynamic Development and Outlook", **AIAA Journal**, vol. 17 (12), pp. 1293-1313.

Choi, D., Merkle, C.L., 1985. "Application of Time-iterative Scheme to Incompressible Flow", **AIAA Journal**, vol. 23 (10), pp. 1518-1524.

Choi, Y.H., Merkle, C.L., 1993. "The Application of Preconditioning in Viscous Flows", **J. Comput. Physics**, vol. 105, pp. 207-223.

Chorin, A.J., 1967. "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems", **J. Comput. Physics**, vol. 2, pp. 12-26.

Costa, G.K., Lyra, P.R.M., Lira, C.A.B.O., 2005. "Numerical Simulation of Two Dimensional Compressible and Incompressible Flows", **J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.**, vol. 27 (4), pp. 372-380.

Demkowicz, L., Oden, J.T., Strouboulis, T., Devloo, P., 1985. "An Adaptive p -version Finite Element Method for Transient Flow Problem with Moving Boundaries", **Finite Elements in Fluids VI**, ed. Gallagher, R.H., Carey, G.F., Oden, J.T., Zienkiewicz, O.C., John Wiley, Chichester, pp. 291-305.

Devloo, P., Oden, L.T., Strouboulis, T., 1987. "Implementation of an Adaptive Refinement Technique for the SPUG Algorithm", **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 61, pp. 339-358.

Dolling, D.S., 2001. "Fifty Years of Shock-Wave/Boundary-Layer Interaction Research: What Next?", **AIAA Journal**, vol. 39 (8), pp. 1517-1531.

Donea, J., 1984. "A Taylor-Galerkin Method for Conservative Transport Problems", **Int. J. Num. Meth. Eng.**, vol. 20, pp. 101-120.

Erickson, G.E., 2007. "Wind Tunnel Investigation of the Effects of Surface Porosity and Vertical Tail Placement on Slender Wing Vortex Flow Aerodynamic at Supersonic Speeds", NASA TM-2007-215082, USA.

Forsyth, P.A., Jiang, H., 1997. "Nonlinear Iteration Methods for High Speed Laminar Compressible Navier-Stokes Equations", **Comput. & Fluids**, vol. 26 (3), pp. 249-268.

Grasso, F., Marini, M., 1996. "Analysis of Hypersonic Shock-wave Laminar Boundary-layer Interaction Phenomena", **Comput. & Fluids**, vol. 25, pp. 561-581.

Gülçat, Ü., Aslan, A.R., 1997. “Accurate 3D Viscous Incompressible Flow Calculations with the FEM”, **Int. J. Num. Meth. Fluids**, vol. 25, pp. 985-1001.

Hafez, M., Wahba, E., 2007. “Simulations of Viscous Transonic Flows Over Lifting Airfoils and Wings”, **Comput. & Fluids**, vol. 36, pp. 39-52.

Halpern, M., 1997. “Industrial Requirements and Practices in Finite Element Meshing: A Survey of Trends”, CAE: Ready for the Next Leap Forward: A Survey of Trends, D.H. Brown Associates, USA.

Haselbacher, A., Blazek, J., 2000. “Accurate and Efficient Discretization of Navier-Stokes Equations on Mixed Grids”, **AIAA Journal**, vol. 38 (11), pp. 2094-2120.

Hauke, G., Hughes, T.J.R., 1994. “A Unified Approach to Compressible and Incompressible Flows”, **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 113, pp. 389-395.

Hess J.L., Smith, A.M., 1966. “Calculation of Potential Flow About Arbitrary Body”, **Prog. Aeronautical Scien.**, vol. 8, Pergamon, New York.

Hooker, J.R., Batina, J.T., Williams, M.H., 1992. “Spatial and temporal adaptive procedures for the unsteady aerodynamic analysis of airfoils using unstructured meshes”, Technical Memorandum TM-107635, NASA, USA.

Holden, M.S., Waldhams, T.P., Harvey, J.K e Candler, G.V., 2006. “Comparison between Measurements in Regions of Laminar Shock Wave Boundary Layer Interaction in Hypersonic Flows with Navier-Stokes and DSMC Solutions”, OTAN RTO-TR-AVT-007-V3.

Houtman, E.M., Bannink, W.J., Timmerman, B.H., 1995. “Experimental and Computational Study of a Blunt-cylinder-flare model in High-supersonic Flow”, Report LR-796, Delft University of Technology, The Netherlands.

Hughes, T.J.R., 1987a. “**The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**”, Prentice Hall, New York.

Hughes, T.J.R., 1987b. “Recent Progress in the Development and Understanding of SUPG Methods with Special Reference to the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations”, **Int. J. Num. Meth. Fluids**, vol. 7 (11), pp. 1261-1275.

Hughes, T.J.R., Liu, W.K., 1978. “Implicit-explicit Finite Element in Transient Analysis: Stability Theory”, **Journal Appl. Mech.**, vol. 45, pp. 371-374.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Hulbert, A., 1989. "A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VIII. The Galerkin/Least-Squares Method for Advective-diffusive Equations", **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 73, pp. 173-189.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Mallet, M., 1986. "A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: I. Symmetric Forms of the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations and the Second Law of Thermodynamics", **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 54, pp. 223-234.

Hughes, T.J.R., Tezduyar, T.E., 1984. "Finite Element Methods for First-order Systems with Particular Emphasis on the Compressible Euler Equations", **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 45, pp. 217-284.

Jameson, A., Caughey, D.A., 1977. "A Finite Volume Method for Transonic Potential Flow Calculations", AIAA Paper 77-0635, Proc. Third AIAA Computational Fluid Dynamics Conf., Albuquerque, USA.

Jameson, A., 2003. "The Role of CFD in Preliminary Aerospace Design", FEDSM2003-45812, Proc. FEDSM03, 4th ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, Hawaii, USA.

Jens, L., Cao, W., Huang, W., Rusell, R.D., 2003. "A Two-dimensional Moving Finite Element Method with Local Refinement based on a Posteriori Error Estimates", **Applied Numerical Mathematics**, vol. 46, pp. 75-94.

Jernell, L.S., 1971. "Comparison of Theoretical and Experimental Pressure Distributions over a Wing-body Model at High Supersonic Speeds", NASA TN D-6480, USA.

Jiang, B.N., Povinelli, L.A., 1989. "Least Squares Finite Element Method for Fluid Dynamics", NASA TM 102352-ICOM-89-23, USA.

Johnson, F.T., Tinoco, E.N., Yu, N.J., 2005. "Thirty Years Development and Application of CFD at Boeing Commercial Airplanes, Seattle", **Comput. & Fluids**, vol. 34, pp. 1115-1151.

Kallinderis, Y., Vijayan, P., 1993. "Adaptive Refinement-coarsening Scheme for Three-dimensional Unstructured Meshes", **AIAA Journal**, vol. 31 (8), pp. 1440-1447.

Katz, J. Plotkin, A., 1991. "**Low-speed Aerodynamics: From Wing Theory to Panel Methods**", McGraw-Hill Book Co., New York.

Kawahara, M., Hirano, H., 1983. "A Finite Element Method for High Reynolds Number

Viscous Fluid Flow Using Two Step Explicit Scheme”, **Int. J. Num. Meth. Fluids**, vol. 3, pp. 137-163.

Kessler, M.P., 2002. “**Simulação Numérica de Escoamentos Hipersônicos em Não-equilíbrio Termo-químico Através do Método dos Elementos Finitos**”, Tese de Doutorado, PROMEC, UFRGS, Brasil.

Kovalev, K., 2005. “**Unstructured Hexahedral Non-conformal Mesh Generation**”, PhD thesis, Vrije Universiteit Brussel, Belgium.

Kral, L.D., 1998. “Recent Experience with Different Turbulence Models Applied to the Calculation of Flow over Aircraft Components”, **Prog. Aerosp. Scien.**, vol. 34, pp. 481-541.

Kwak, D., Kiris, C., Kim, C.S., 2005. “Computational Challenges of Viscous Incompressible Flows”, **Comput. & Fluids**, vol. 34, pp. 283-299.

Liepmann, H.W., Roshko, A., 1960. “**Elements of Gasdynamics**”, Galcit Aeronautical Series, USA.

Löhner, R., 2001. “**Applied CFD Techniques: An Introduction based on Finite Element Methods**”, John Wiley & Sons, England.

Löhner, R., Morgan, K., Zienkiewicz, O.C., 1984. “The Solution of Non-linear Hyperbolic Equation Systems by the Finite Element Method”, **Int. J. Num. Meth. Fluids**, vol. 4, pp. 1043-1063.

Löhner, R., Morgan, K., Zienkiewicz, O.C., 1985. “Adaptive Finite Element Procedure for High Speed Flows”, **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 51, pp. 441-465.

Löhner, R., Parikh, P., 1988. “Three-dimensional Grid Generation by the Advancing Front Method”, **Int. J. Num. Meth. Fluids**, vol. 8, pp. 1135-1149.

Longo, J.M.A, 2003. “Aerothermodynamics – A Critical Review at DLR”, **Aerosp. Scien. and Technology**, vol. 7, pp. 429-438.

Maliska, C.R., 2004. “**Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**”, Livros Técnicos e Científicos, Brasil.

Maurits, N.M., van der Ven, H., Veldman, A.E.P., 1998. “Explicit multi-time stepping for convection-dominated flow problems”, **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 157, pp. 133-150.

Mavriplis, D.J., 2000. “Adaptive Meshing Technique for Viscous Flow Calculations on

Mixed Element Unstructured Meshes”, **Int. J. Num. Meth. Fluids**, vol. 34, pp. 93-111.

McRae, D.S., 2000. “r-Refinement Grid Adaptation Algorithms and Issues”, **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 189, pp. 1161-1182.

Mittal, S., Tezduyar, T., 1998. “A Unified Finite Element Formulation for Compressible and Incompressible Flows Using Augmented Conservation Variables”, **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 161, pp. 229-243.

Monti, R., Paterna, D.M., 2006. “A Low Risk Reentry: Looking Backward to Step Forward”, **Aerosp. Scien. and Technology**, vol. 10, pp. 156-167.

Murman, E., Cole, J.D., 1971. “Calculation of Plane Steady Transonic Flows”, **AIAA Journal**, vol. 9(1), pp. 114-121.

Nigro, N., Storti, M., Idelsohn, S., 1997. “GMRES Physics-based Preconditioner for all Reynolds and Mach Numbers: Numerical Examples”, **Int. J. Num. Meth. Fluids**, vol. 25 (12), pp. 1347-1371.

Nigro, N., Storti, M., Idelsohn, S., Tezduyar, T., 1998. “Physics based GMRES Preconditioner for Compressible and Incompressible Navier-Stokes Equations”, **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 154, pp. 203-228.

Nithiarasu, P., Zienkiewicz, O.C., Satya Sai, B.V.K., Morgan, K., Codina, R., Vázquez, M., 1998. “Shock Capturing Viscosities for the General Fluid Mechanics Algorithm”, **Int. J. Num. Meth. Fluids**, vol. 28, pp. 1325-1353.

Oden, J.T., Demkowicz, L., Liszka, T., Rachowicz, W., 1990. “*h-p* Adaptive Finite Element Methods for Compressible and Incompressible Flows”, **Comput. Systems in Eng.**, vol. 1 (2-4), pp. 523-534.

Oden, J.T., Strouboulis, T., Devloo, P., 1986. “Adaptive Finite Element Methods for the Analysis of Inviscid Compressible Flow: Part I. Fast Refinement/unrefinement and Moving Mesh Methods for Unstructured Meshes”, **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 59, pp. 327-362.

Palmeiro, B., 1994. “An Attraction–repulsion Mesh Adaption Model for Flow Solution on Unstructured Grids”, **Comput. & Fluids**, vol. 23, pp. 487-506.

Park, J.H., Munz, C.D., 2005. “Multiple Pressure Variables Methods for Fluid Flow at all Mach Numbers”, **Int. J. Num. Meth. Fluids**, vol. 49, pp. 905-931.

Parthasarathy, V., Kallinderis, Y., 1996. "Adaptive Prismatic-tetrahedral Grid Refinement and Redistribution for Viscous Flows", **AIAA Journal**, vol. 34 (4), pp. 707-716.

Patra, A., Oden, J.T., 1997. "Computational Techniques for Adaptive *hp* Finite Element Methods", **Finite Elements in Analysis and Design**, vol. 24, pp. 27-39.

Pirzadeh, S., 1996. "Three-dimensional Unstructured Viscous Grid by the Advancing Layers Method", **AIAA Journal**, vol. 36 (1), pp. 43-49.

Pirzadeh, S., 2003. "Vortical Flow Prediction Using an Adaptive Unstructured Grid Method", (SYA)13-1, Symposium on Advanced Flow Management, RTO-MP-69(I), France.

Popiolek, T.L., 2005. "**Análise de escoamentos incompressíveis utilizando simulação de grandes escalas e adaptação de malhas**", Tese de Doutorado, PPGEC, UFRGS, Brasil.

Popiolek, T.L., Awruch, A.M., 2006. "Numerical Simulation of Incompressible Flows using Adaptive Unstructured Meshes and the Pseudo-compressibility Hypothesis", **Advances in Eng. Soft.**, vol. 37, pp. 260-274.

Petry, A.P., 2002. "**Análise Numérica de escoamentos turbulentos tridimensionais empregando o método de elementos finitos e simulação de grandes escalas**", Tese de Doutorado, PROMEC, UFRGS, Brasil.

Ramakrishnan, R., Bey, K.S., Thornton, E., 1990. "Adaptive Quadrilateral and Triangular Finite Element Scheme for Compressible Flows", **AIAA Journal**, vol. 28, pp. 51-59.

Rengel, J.E., Sphaier, S.H., 1999. "A Projection Method for Unsteady Navier-Stokes Equation with Finite Volume Method and Collocated Grid", **Hybrid Methods in Heat and Mass Transfer**, vol. 1(4), pp. 339-364.

Resende, O.C., 2004. "The Evolution of the Aerodynamic Design Tools and Transport Aircraft Wings at Embraer", **J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.**, vol. XXVI (4), pp. 379-390.

Roache, P.J., 1994. "Perspective: A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies", **J. of Fluids Engineering**, vol. 116, pp. 405-413.

Roache, P.J., 1997. "Quantification of Uncertainty in Computational Fluid Dynamics", **Annu. Rev. Fluid Mech.**, vol. 29, pp. 123-160.

Sampaio, P.A.B., Moreira, M.L.A., 2000. "A New Finite Element Formulation for both

Compressible and Nearly Incompressible Fluid Dynamics”, **Int. J. Num. Meth. Fluids**, vol. 32 (1), pp. 51-78.

Salas, M.D., 2006. “Some Observations on Grids Convergence”, **Comput. & Fluids**, vol. 35, pp. 688-692.

Schlichting, H., 1979. “**Boundary-layer Theory**”, McGraw-Hill, New York.

Shang, J.S., 2004. “Three Decades of Accomplishments in Computational Fluid Dynamics”, **Prog. in Aerosp. Scien.**, vol. 40, pp. 173-197.

Slater, J.W., Dudek, J.C., Tatum, K.E., 2000. “The NPARC Alliance Verification and Validation Archive”, NASA/TM-2000-209946, USA.

Speares, W., Berzins, M., 1997. “A 3D Unstructured Mesh Adaptation Algorithm for Time-dependent Shock-dominated Problems”, **Int. J. Num. Meth. Fluids**, vol. 25, pp. 81-104.

Tam, A., Ait-Ali-Yahia, D., Robichaud, M.P., Moore, M., Kozel, V., Habashi, W.G., 2000. “Anisotropic Mesh Adaptation for 3D Flows on Structured and Unstructured Grids”, **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 189, pp. 1205-1230.

Tang, C., Hafez, M., 2001. “Numerical Simulation of Steady Compressible Flows Using a Zonal Formulation. Part II: Viscous Flows”, **Comput. & Fluids**, vol. 30, pp. 1003-1016.

Tchon, K., Dompierre, J., Camarero, R., 2004. “Automated Refinement of Conformal Quadrilateral and Hexahedral Meshes”, **Int. J. Num. Meth. Eng.**, vol. 59, pp. 1539-1562.

Teixeira, P.R.F., 2001. “**Simulação Numérica da Interação de Escoamentos Tridimensionais de Fluidos Compressíveis e Incompressíveis e Estruturas Deformáveis Usando o Método de Elementos Finitos**”, Tese de Doutorado, PPGEC, UFRGS, Brasil.

Teixeira, P.R.F., Awruch, A.M., 2001. “Three-dimensional Simulation of High Compressible Flows using a Multi-time-step Integration Technique with Subcycles”, **Appl. Math. Modelling**, vol. 25, pp. 613-627.

Tritton, D.J., 1959. “Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds number”, **Journal of Fluid Mechanics**, vol. 6, pp. 547-567.

Turkel, E., Radespiel, R., Kroll, N., 1997. “Assesment of Preconditionig Methods for Multidimensional Aerodynamics”, **Comput. & Fluids**, vol. 26 (6), pp. 613-634.

Turkel, E., 1999. “Preconditioning Techniques in Computational Fluid Dynamics”, **Annu. Rev. Fluid Mech.**, vol. 31, pp. 385-416.

van Dam, C.P., 2002. “The Aerodynamic Design of Multi-element High-lift Systems for Transport Airplane”, **Prog. in Aerosp. Scien.**, vol. 38, pp. 101-144.

van der Ven, H., Niemann-Tuitman, B.E. e Veldman, A.E.P., 1997. “An explicit multi-time-stepping algorithm for aerodynamic flows”, **J. Comp. Appl. Mathematics.**, vol. 82, pp. 423-431.

Vos, J.B., Rizzi, A., Darracq, D., Hirschel, E.H., 2002. “Navier-Stokes Solvers in European Aircraft Design”, **Prog. Aerosp. Scien.**, vol. 38, pp. 601-697.

Wackers, J., Koren, B., 2003. “A simple and efficient space-time adaptive grid technique for unsteady compressible flows”, Proceedings 16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA-paper 2003-3825, USA.

Wanderley, J.B.V., Levi, C.A., 2002. “Validation of a Finite Element Method for the Simulation of Vortex-induced Vibrations on a Circular Cylinder”, **Ocean Engineering**, vol. 29, pp. 445-460.

White, F.W., 1974. “**Viscous Fluid Flow**”, McGraw-Hill, New York, U.S.A.

Woodward, F.A., 1968. “Analysis and Design of Wing-Body Combinations at Subsonic and Supersonic Speeds”, **Journal of Aircraft**, vol. 5 (6), pp. 528-534.

Yoon, K.T., Moon, S.Y., Garcia, S.A., Heard, G.W., Chung, T.J., 1998. “Flowfield-dependent Mixed Explicit-implicit (FDMEI) Methods for High and Low Speed and Compressible and Incompressible Flows”, **Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.**, vol. 151 (1-2), pp. 75-104.

Zienkiewicz, O.C., Codina, R., 1995. “A General Algorithm for Compressible and Incompressible Flow. Part I: The Split, Characteristic Based Scheme”, **Int. J. Num. Meth. Fluids**, vol. 20, pp. 869-885.

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., 2000. “**The Finite Element Method – Vol. 3: Fluid Dynamics**”, Butterworth-Heinemann, Oxford.

Zinani, F.S.F., 2006. “**Desenvolvimento e Implementação Computacional de Formulações Galerkin Mínimos-quadrados para escoamentos não Newtonianos Sensíveis à Cinemática**”, Tese de Doutorado, PROMEC, UFRGS, Brasil.

ANEXO A: EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

A.1 Generalidades

As equações básicas que descrevem o escoamento de um fluido considerado como meio contínuo, viscoso e em regime transiente são: a equação da continuidade, as equações da quantidade de movimento linear e a equação da energia.

- A forma conservativa da equação da continuidade é dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde ρ é a massa específica ($\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$), \mathbf{V} é o vetor de velocidade ($\mathbf{V} = (v_1(\mathbf{x}, t), v_2(\mathbf{x}, t), v_3(\mathbf{x}, t))$) e t é o tempo. A forma não conservativa é dada por:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{V} \quad (\text{A.2})$$

onde D/Dt é a derivada material ou substantiva $D(\)/Dt = \partial(\)/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla(\)$.

- A equação da quantidade de movimento linear é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot [\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} - \boldsymbol{\sigma}] = \rho \mathbf{F}_e \quad (\text{A.3})$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões e \mathbf{F}_e é a força externa no escoamento. O tensor de tensões pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (\text{A.4})$$

onde \mathbf{I} é o tensor identidade, $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor de tensões viscosas e a pressão p é função da massa específica e da temperatura ($p = p(\rho, T)$). O tensor de tensões viscosas é definido para o tipo de fluido. No caso de fluido newtoniano o mesmo é dado:

$$\tau_{ij} = 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \delta_{ij} \right) \quad (\text{A.5})$$

sendo,

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A.6})$$

onde, μ é o coeficiente de viscosidade absoluta e v_i são as componentes do vetor de velocidade \mathbf{V} segundo o eixo x_i . O tensor de tensões de um fluido newtoniano pode ser expresso como:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \delta_{ij} \right) \quad (\text{A.7})$$

Substituindo a equação (A.7) na equação (A.3), obtém-se as equações de Navier-Stokes para um fluido newtoniano:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \rho (f_e)_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{V} \delta_{ij} \right) \right] \quad (\text{A.8})$$

A forma não conservativa da equação da quantidade de movimento linear é dada por:

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -p \mathbf{I} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{F}_e \quad (\text{A.9})$$

- A equação da energia é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \nabla \cdot [\rho H \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau} - k \nabla T] = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{F}_e + q \quad (\text{A.10})$$

onde k é a condutibilidade térmica, q é a fonte de calor, e é a energia total e H é a entalpia total:

$$e = i + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \quad (\text{A.11})$$

$$H = \frac{p}{\rho} + i + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 = \frac{p}{\rho} + e$$

onde i é a energia interna. A equação (A.10) escrita em forma não conservativa é dada por:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p(\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla \cdot (k \nabla T) + q \quad (\text{A.12})$$

ANEXO B: MATRIZES PARA O ELEMENTO TETRAÉDRICO

B.1 Generalidades

As funções de forma do elemento tetraédrico linear podem ser expressas em função das coordenadas de volume L . Cada coordenada L_p define-se como a relação entre o volume do tetraedro Ω_p e o volume do tetraedro Ω^e , ou seja:

$$L_p = \frac{\Omega_p}{\Omega^e} \quad \text{com } p = 1,2,3,4 \quad (\text{B.1})$$

O volume Ω_p é definido por um ponto (PP) interior no elemento e pela face oposta ao nó p , como mostrado na Figura B.1

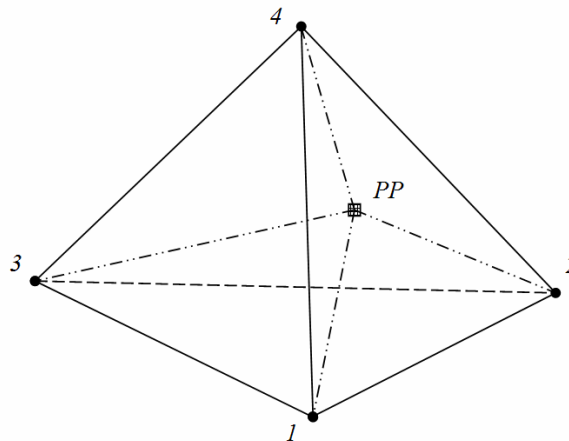


Figura B.1: Coordenadas de volume para o elemento tetraédrico linear.

Para o volume total do tetraedro tem-se:

$$\Omega^e = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 \quad (\text{B.2})$$

Vale salientar que para as coordenadas de volume se cumpre a seguinte relação:

$$1 = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \quad (\text{B.3})$$

A partir das coordenadas de volume se pode escrever uma interpolação paramétrica linear da geometria do elemento como:

$$\mathbf{x} = \sum_{p=1}^4 L_p \mathbf{x}_p, \quad \mathbf{y} = \sum_{p=1}^4 L_p \mathbf{y}_p, \quad \mathbf{z} = \sum_{p=1}^4 L_p \mathbf{z}_p \quad (\text{B.4})$$

As coordenadas L_p podem ser escritas em função das coordenadas cartesianas a partir das Eqs. (B.3) e (B.4), obtendo-se:

$$L_p = \frac{1}{\Omega^e} (a_p + b_p \mathbf{x} + c_p \mathbf{y} + d_p \mathbf{z}) = N_p \quad (\text{B.5})$$

sendo que o volume do elemento é dado por:

$$\Omega^e = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (\text{B.6})$$

onde, o símbolo $|\mathbf{A}|$ é o determinante da matriz \mathbf{A} . Os coeficientes da Eq. (B.5) são os co-fatores do determinante da Eq. (B.6) e obtém-se mediante a permutação cíclica dos subíndices p, q, r, s para os valores de $p = 1, 2, 3, 4$ nas seguintes expressões:

$$a_p = \begin{vmatrix} x_q & y_q & z_q \\ x_r & y_r & z_r \\ x_s & y_s & z_s \end{vmatrix}, \quad b_p = - \begin{vmatrix} 1 & y_q & z_q \\ 1 & y_r & z_r \\ 1 & y_s & z_s \end{vmatrix}, \quad (\text{B.7})$$

$$c_p = \begin{vmatrix} x_q & 1 & z_q \\ x_r & 1 & z_r \\ x_s & 1 & z_s \end{vmatrix}, \quad d_p = - \begin{vmatrix} x_q & y_q & 1 \\ x_r & y_r & 1 \\ x_s & y_s & 1 \end{vmatrix}$$

As derivadas das coordenadas de volume em relação às coordenadas cartesianas são obtidas a partir da Eq. (B.5) e dadas por:

$$\frac{\partial L_p}{\partial \mathbf{x}} = \frac{b_p}{\Omega^e}, \quad \frac{\partial L_p}{\partial \mathbf{y}} = \frac{c_p}{\Omega^e}, \quad \frac{\partial L_p}{\partial \mathbf{z}} = \frac{d_p}{\Omega^e} \quad (\text{B.8})$$

Por fim, as integrais no elemento tetraédrico em coordenadas de volume para um termo polinomial são dadas por:

$$\int_{\Omega^e} L_1^k L_2^l L_3^m L_4^n d\Omega = 6 \Omega^e \frac{k!l!m!n!}{(k+l+m+n+3)!} \quad (\text{B.9})$$

sendo os índices k, l, m, n constantes arbitrárias.

B.2 Matrizes e vetores para os esquemas de integração

Todas as matrizes e vetores dos esquemas de um passo (item 3.1.1) e dois passos (item 3.1.2) para o elemento tetraédrico com $i, j, k = 1, 2, 3$ e $P, Q = 1, 2, 3, 4$ são dados a nível de elemento e mostrados a seguir. Detalhes das matrizes e vetores para o elemento hexaédrico são apresentados em Bono [2004].

- Matrizes \mathbf{M} e \mathbf{M}_D

$$\mathbf{M}_{PQ} = \int_{\Omega^e} N_P N_Q d\Omega \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{M} = \frac{\Omega^e}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{M}_D = \frac{\Omega^e}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

- Matriz \mathbf{B}_i

$$\mathbf{B}_{iPQ} = \int_{\Omega^e} N_P \frac{\partial N_Q}{\partial x_i} d\Omega \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$$

- Matriz \mathbf{C}_i

$$\mathbf{C}_{iPQ} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_P}{\partial x_j} A_j \frac{\partial N_Q}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Omega^e} (A_1 \mathbf{C}'_{iPQ} + A_2 \mathbf{C}''_{iPQ} + A_3 \mathbf{C}'''_{iPQ}) d\Omega \quad (\text{B.15})$$

onde, A_j é o jacobiano convectivo [Hughes e Tezduyar, 1984] e para as matrizes \mathbf{C}'_i , \mathbf{C}''_i e \mathbf{C}'''_i tem-se:

$$\mathbf{C}'_{iPQ} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_P}{\partial x_1} \frac{\partial N_Q}{\partial x_i} d\Omega, \quad \mathbf{C}''_{iPQ} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_P}{\partial x_2} \frac{\partial N_Q}{\partial x_i} d\Omega, \quad \mathbf{C}'''_{iPQ} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_P}{\partial x_3} \frac{\partial N_Q}{\partial x_i} d\Omega \quad (\text{B.16})$$

Finalmente, em forma matricial tem-se,

$$\mathbf{C}_i = \frac{1}{36\Omega^e} (A_1 \mathbf{C}'_i + A_2 \mathbf{C}''_i + A_3 \mathbf{C}'''_i) \quad (\text{B.17})$$

com

$$\mathbf{C}'_1 = \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 & b_1 b_4 \\ b_2 b_1 & b_2^2 & b_2 b_3 & b_2 b_4 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3^2 & b_3 b_4 \\ b_4 b_1 & b_4 b_2 & b_4 b_3 & b_4^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}''_1 = \begin{bmatrix} c_1 b_1 & c_1 b_2 & c_1 b_3 & c_1 b_4 \\ c_2 b_1 & c_2 b_2 & c_2 b_3 & c_2 b_4 \\ c_3 b_1 & c_3 b_2 & c_3 b_3 & c_3 b_4 \\ c_4 b_1 & c_4 b_2 & c_4 b_3 & c_4 b_4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}'''_1 = \begin{bmatrix} d_1 b_1 & d_1 b_2 & d_1 b_3 & d_1 b_4 \\ d_2 b_1 & d_2 b_2 & d_2 b_3 & d_2 b_4 \\ d_3 b_1 & d_3 b_2 & d_3 b_3 & d_3 b_4 \\ d_4 b_1 & d_4 b_2 & d_4 b_3 & d_4 b_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}''_2 = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 & c_1 c_4 \\ c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 & c_2 c_4 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 & c_3 c_4 \\ c_4 c_1 & c_4 c_2 & c_4 c_3 & c_4^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{C}'''_2 = \begin{bmatrix} d_1 c_1 & d_1 c_2 & d_1 c_3 & d_1 c_4 \\ d_2 c_1 & d_2 c_2 & d_2 c_3 & d_2 c_4 \\ d_3 c_1 & d_3 c_2 & d_3 c_3 & d_3 c_4 \\ d_4 c_1 & d_4 c_2 & d_4 c_3 & d_4 c_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}'''_3 = \begin{bmatrix} d_1^2 & d_1 d_2 & d_1 d_3 & d_1 d_4 \\ d_2 d_1 & d_2^2 & d_2 d_3 & d_2 d_4 \\ d_3 d_1 & d_3 d_2 & d_3^2 & d_3 d_4 \\ d_4 d_1 & d_4 d_2 & d_4 d_3 & d_4^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}'_2 = \mathbf{C}'_1{}^T, \quad \mathbf{C}'_3 = \mathbf{C}'_1{}^T, \quad \mathbf{C}''_3 = \mathbf{C}''_2{}^T$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} & 0 \\ \frac{1}{2}\delta_{j1}\bar{\gamma}v^2 - v_jv_1 & \delta_{j1}v_1 - \delta_{j1}\bar{\gamma}v_1 + v_j & \delta_{j2}v_1 - \delta_{j1}\bar{\gamma}v_2 & \delta_{j3}v_1 - \delta_{j1}\bar{\gamma}v_3 & \delta_{j1}\bar{\gamma} \\ \frac{1}{2}\delta_{j2}\bar{\gamma}v^2 - v_jv_2 & \delta_{j1}v_2 - \delta_{j1}\bar{\gamma}v_1 + v_j & \delta_{j2}v_2 - \delta_{j2}\bar{\gamma}v_2 + v_j & \delta_{j3}v_2 - \delta_{j2}\bar{\gamma}v_3 & \delta_{j2}\bar{\gamma} \\ \frac{1}{2}\delta_{j3}\bar{\gamma}v^2 - v_jv_3 & \delta_{j1}v_3 - \delta_{j1}\bar{\gamma}v_1 & \delta_{j2}v_3 - \delta_{j3}\bar{\gamma}v_2 + v_j & \delta_{j3}v_3 - \delta_{j3}\bar{\gamma}v_3 + v_j & \delta_{j3}\bar{\gamma} \\ (\bar{\gamma}v^2 - \gamma e)v_j & \delta_{j1}\bar{\varepsilon} - \bar{\gamma}v_jv_1 & \delta_{j2}\bar{\varepsilon} - \bar{\gamma}v_jv_2 & \delta_{j3}\bar{\varepsilon} - \bar{\gamma}v_jv_3 & \gamma v_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

onde $\bar{\gamma} = \gamma - 1$, $\bar{\varepsilon} = \gamma e - \gamma v^2 / 2$

- Vetor para as integrais de contorno \mathbf{g}

$$\mathbf{g}_P = \int_{\Gamma^e} \hat{N}_P A_j n_j \frac{\partial N_P}{\partial x_i} \bar{F}_i d\Gamma \quad (\text{B.20})$$

onde, \hat{N} contém as funções de interpolação avaliadas no contorno do elemento. Em forma matricial pode-se escrever:

$$\mathbf{g} = \frac{A_\Gamma}{18\Omega^e} \left[b_i(\bar{F}_1)_i + c_i(\bar{F}_2)_i + d_i(\bar{F}_3)_i \right] \mathbf{An} \quad (\text{B.21})$$

sendo, A_Γ a área da face de contorno do elemento com integrais de contorno e \mathbf{An} é a matriz obtida a partir da matriz do jacobiano convectivo A_j (Hughes e Tezduyar, 1984) e dos co-senos diretores da normal ao nó P .

Para o esquema difusivo, devem-se acrescentar as seguintes matrizes e vetores no nível de elemento:

- Matriz \mathbf{D}_{ij}

$$\mathbf{D}_{ijPQ} = \begin{cases} \int_{\Omega^e} \mu \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \frac{\partial N_P}{\partial x_{(i)}} \frac{\partial N_Q}{\partial x_{(i)}} d\Omega + \int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial N_P}{\partial x_k} \frac{\partial N_Q}{\partial x_k} d\Omega \\ \qquad \qquad \qquad \text{se } i = j, \begin{cases} i = 1 \rightarrow k = 2, 3 \\ i = 2 \rightarrow k = 1, 3 \\ i = 3 \rightarrow k = 1, 2 \end{cases} \\ \\ \int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial N_P}{\partial x_i} \frac{\partial N_Q}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega^e} \lambda \frac{\partial N_P}{\partial x_j} \frac{\partial N_Q}{\partial x_i} d\Omega \\ \qquad \qquad \qquad \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{11} &= \frac{1}{36\Omega^e} \left[(2\mu + \lambda) C'_1 + \mu (C''_2 + C'''_3) \right], \\ \mathbf{D}_{22} &= \frac{1}{36\Omega^e} \left[(2\mu + \lambda) C''_2 + \mu (C'_1 + C'''_3) \right], \\ \mathbf{D}_{33} &= \frac{1}{36\Omega^e} \left[(2\mu + \lambda) C'''_3 + \mu (C'_1 + C''_2) \right], \\ \mathbf{D}_{12} &= \frac{1}{36\Omega^e} \left[\mu C'_2 + \lambda C''_1 \right], & \mathbf{D}_{13} &= \frac{1}{36\Omega^e} \left[\mu C'_3 + \lambda C''_1 \right], \\ \mathbf{D}_{21} &= \frac{1}{36\Omega^e} \left[\mu C''_1 + \lambda C'_2 \right], & \mathbf{D}_{23} &= \frac{1}{36\Omega^e} \left[\mu C''_3 + \lambda C'_2 \right], \\ \mathbf{D}_{31} &= \frac{1}{36\Omega^e} \left[\mu C''_1 + \lambda C'_3 \right], & \mathbf{D}_{32} &= \frac{1}{36\Omega^e} \left[\mu C''_2 + \lambda C'_3 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Levando em consideração a simetria da matriz \mathbf{D}_{ij} , considera-se:

$$\mathbf{D}_{21} = \mathbf{D}_{12}^T, \quad \mathbf{D}_{31} = \mathbf{D}_{13}^T, \quad \mathbf{D}_{32} = \mathbf{D}_{23}^T \quad (\text{B.24})$$

- Matriz \mathbf{E}_i

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{iPQ} &= \int_{\Omega^e} \mu (N_P \bar{v}_{iP}) \frac{\partial N_P}{\partial x_j} \frac{\partial N_Q}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega^e} \mu (N_P \bar{v}_{jP}) \frac{\partial N_P}{\partial x_i} \frac{\partial N_Q}{\partial x_j} d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega^e} \lambda (N_P \bar{v}_{jP}) \frac{\partial N_P}{\partial x_j} \frac{\partial N_Q}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \frac{\mu}{36\Omega^e} \left[v_{1m} (C_2'' + C_3''') + v_{2m} C_2' + v_{3m} C_3' \right] + \frac{\lambda}{36\Omega^e} \left[v_{2m} C_2'^T + v_{3m} C_3'^T \right], \\
\mathbf{E}_2 &= \frac{\mu}{36\Omega^e} \left[v_{1m} C_1'' + v_{2m} (C_1' + C_3''') + v_{3m} C_3'' \right] + \frac{\lambda}{36\Omega^e} \left[v_{1m} C_1''^T + v_{3m} C_3''^T \right], \\
\mathbf{E}_3 &= \frac{\mu}{36\Omega^e} \left[v_{1m} C_1''' + v_{2m} C_2''' + v_{3m} (C_1' + C_2'') \right] + \frac{\lambda}{36\Omega^e} \left[v_{1m} C_1'''^T + v_{2m} C_2'''^T \right]
\end{aligned} \tag{B.26}$$

onde a velocidade média no elemento é dada por:

$$v_{im} = \frac{1}{4} \sum_{P=1}^4 v_{iP} \tag{B.27}$$

- Matriz \mathbf{E}_i^*

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{iPQ}^* &= \mathbf{E}_{iPQ} + \int_{\Omega^e} \mu \left(\frac{\partial N_Q}{\partial x_i} \bar{v}_{jQ} + \frac{\partial N_Q}{\partial x_j} \bar{v}_{iQ} \right) \frac{\partial N_P}{\partial x_j} N_Q d\Omega + \\
&+ \int_{\Omega^e} \lambda \left(\frac{\partial N_Q}{\partial x_i} \bar{v}_{kQ} \right) \frac{\partial N_P}{\partial x_j} N_Q d\Omega
\end{aligned} \tag{B.28}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1^* &= \mathbf{E}_1 + \mu \left[(2 v_{1x}) \mathbf{B}_1^T + (v_{2x} + v_{1y}) \mathbf{B}_2^T + (v_{3x} + v_{1z}) \mathbf{B}_3^T \right] + \lambda \left[(v_{1x} + v_{1y} + v_{1z}) \mathbf{B}_1^T \right], \\
\mathbf{E}_2^* &= \mathbf{E}_2 + \mu \left[(v_{1y} + v_{2x}) \mathbf{B}_1^T + (2 v_{2y}) \mathbf{B}_2^T + (v_{3y} + v_{2z}) \mathbf{B}_3^T \right] + \lambda \left[(v_{2x} + v_{2y} + v_{2z}) \mathbf{B}_2^T \right], \\
\mathbf{E}_3^* &= \mathbf{E}_3 + \mu \left[(v_{1z} + v_{3x}) \mathbf{B}_1^T + (v_{2z} + v_{3y}) \mathbf{B}_2^T + (2 v_{3z}) \mathbf{B}_3^T \right] + \lambda \left[(v_{3x} + v_{3y} + v_{3z}) \mathbf{B}_3^T \right]
\end{aligned} \tag{B.29}$$

com

$$v_{ix} = \frac{1}{6\Omega^e} \sum_{P=1}^4 b_P v_{iP}, \quad v_{iy} = \frac{1}{6\Omega^e} \sum_{P=1}^4 c_P v_{iP}, \quad v_{iz} = \frac{1}{6\Omega^e} \sum_{P=1}^4 d_P v_{iP} \tag{B.30}$$

- Matriz \mathbf{K}

$$K_{PQ} = \int_{\Omega^e} K \frac{\partial N_P}{\partial x_i} \frac{\partial N_Q}{\partial x_i} d\Omega \tag{B.31}$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{36\Omega^e} (k_1 C_1' + k_2 C_2'' + k_3 C_3''') = \frac{k}{36\Omega^e} (C_1' + C_2'' + C_3''') \tag{B.32}$$

Neste trabalho foi considerado $k = k_1 = k_2 = k_3$ para o coeficiente de condutividade térmica.

- Vetor com integrais de contorno \mathbf{f}_i

$$\mathbf{f}_{iP} = \int_{\Gamma^e} \hat{N}_P \left[\mu \left(\frac{\partial N_P}{\partial x_j} \bar{v}_{iP} + \frac{\partial N_P}{\partial x_i} \bar{v}_{jP} \right) + \lambda \left(\frac{\partial N_P}{\partial x_i} \bar{v}_{kP} \right) \delta_{ij} \right] n_j d\Gamma \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \frac{A_\Gamma}{3} (T_{11} n_1 + T_{12} n_2 + T_{13} n_3), \\ \mathbf{f}_2 &= \frac{A_\Gamma}{3} (T_{12} n_1 + T_{22} n_2 + T_{23} n_3), \\ \mathbf{f}_3 &= \frac{A_\Gamma}{3} (T_{31} n_1 + T_{32} n_2 + T_{33} n_3) \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

sendo, A_Γ a área da face de contorno do elemento com integrais de contorno, n_i os co-senos diretores da normal ao nó P e os T_{ij} definidos como:

$$\begin{aligned} T_{11} &= 2\mu v_{1x} + \lambda(v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}), & T_{12} &= \mu(v_{1y} + v_{2x}), \\ T_{22} &= 2\mu v_{2y} + \lambda(v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}), & T_{13} &= \mu(v_{1z} + v_{3x}), \\ T_{33} &= 2\mu v_{3z} + \lambda(v_{1x} + v_{2y} + v_{3z}), & T_{23} &= \mu(v_{2z} + v_{3y}) \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

- Vetor com integrais de contorno \mathbf{q}

$$\begin{aligned} q_P &= \int_{\Gamma^e} \hat{N}_P (N_P \bar{v}_{jP}) \left[\mu \left(\frac{\partial N_P}{\partial x_i} \bar{v}_{jP} + \frac{\partial N_P}{\partial x_j} \bar{v}_{iP} \right) + \lambda \left(\frac{\partial N_P}{\partial x_k} \bar{v}_{kP} \right) \delta_{ij} \right] n_i d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma^e} \hat{N}_P k \left(\frac{\partial N_P}{\partial x_i} \bar{u}_P \right) n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Em forma matricial,

$$\mathbf{q} = \frac{A_\Gamma}{3} (\mathbf{Tn} + \mathbf{Qn}) \quad (\text{B.37})$$

com

$$\begin{aligned}
\mathbf{Tn} = & v_{1\Gamma} (T_{11} n_1 + T_{12} n_2 + T_{13} n_3) + \\
& + v_{2\Gamma} (T_{12} n_1 + T_{22} n_2 + T_{23} n_3) + \\
& + v_{3\Gamma} (T_{13} n_1 + T_{23} n_2 + T_{33} n_3)
\end{aligned} \tag{B.38}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Qn} = & \frac{1}{6\Omega^e} \sum_{P=1}^4 [k_1 b_P(u)_P n_1 + k_2 c_P(u)_P n_2 + k_3 d_P(u)_P n_3] = \\
= & \frac{k}{6\Omega^e} \sum_{P=1}^4 [b_P(u)_P n_1 + c_P(u)_P n_2 + d_P(u)_P n_3]
\end{aligned} \tag{B.39}$$

sendo u a energia interna específica no nó P e $k = k_1 = k_2 = k_3$.

B.3 Comprimento característico do elemento

Para o cálculo da condição de estabilidade, equação (3.42), é necessário a determinação do comprimento característico do elemento. Para o elemento tetraédrico, o comprimento característico é considerado levando em consideração a menor altura definida como a distância entre o nó P e a face oposta ao mesmo.

O comprimento característico é calculado como segue:

$$L_e = \min \left(\frac{3\Omega^e}{A_{\Gamma p}} \right) \tag{B.40}$$

onde Ω^e é o volume do tetraedro e $A_{\Gamma p}$ é a área da face oposta ao nó p . A área é determinada pelo produto vetorial dos vetores \vec{B} e \vec{C} que definem duas arestas da face do tetraedro (ver Figura B.2), ou seja:

$$A_{\Gamma p} = \frac{1}{2} |\vec{B} \times \vec{C}| \tag{B.41}$$

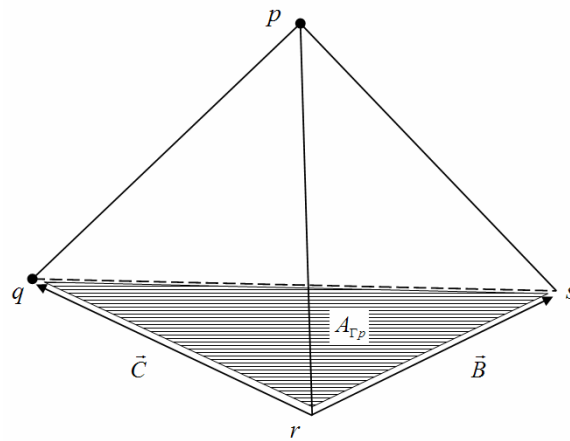


Figura B.2: Área da face do elemento tetraédrico.

Finalmente, o comprimento característico do elemento hexaédrico é obtido considerando o mínimo comprimento de todas as arestas do elemento.