



UFRJ

SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA APLICADA EM PLANO DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA

Jorge Washington Silva Bhering

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Estatística da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências Estatísticas.

Orientador: Hélio dos Santos Migon, Ph.D.

Rio de Janeiro

Janeiro de 2005

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA APLICADA EM PLANO DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA

Jorge Washington Silva Bhering

Orientador: Hélio dos Santos Migon, Ph.D.

Dissertação de Mestrado, submetida ao Programa de Pós-graduação em Estatística, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências Estatísticas.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Hélio dos Santos Migon Ph.D.

Prof. Dani Gamerman Ph.D.

Prof. Carlos Alberto de Bragança Pereira Ph.D.

Rio de Janeiro

Janeiro de 2005

FICHA CATALOGRÁFICA

Bhering, Jorge Washington Silva

Simulação Estocástica em Plano de Contribuição Definida/ Jorge Washington Silva Bhering. – Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2005.

x,73f.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Hélio dos Santos Migon

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ IM/ Programa de Pós-Graduação em Estatística, 2005

Referências Bibliográficas: f. 84-87

1. Modelos Estocásticos. 2. Programação Dinâmica. 3. Simulação.

I. Migon, Hélio dos Santos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Métodos Estatísticos. III. Título

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Hélio dos Santos Migon – cujas conversas extrapolaram muitas vezes o tempo disponível – pela amizade, confiança depositada e firme orientação.

Aos Professores Dani Gamerman e Carlos Alberto de Bragança Pereira, por se disporem, prontamente, a participar da banca examinadora.

Ao Serpros - Fundo Multipatrocinado, por ter proporcionado a oportunidade de realizar este curso, com votos de que continue investindo no capital intelectual, contribuindo, desta sorte, para o aprimoramento de seus processos.

Aos companheiros Oswaldo Gomes de Souza Júnior e Ursula Faustino Nesci pelos comentários, incentivo e suporte nas aplicações computacionais.

Aos meus filhos, à minha mãe e aos familiares que, embora protestando contra minha ausência nas reuniões, pelo incentivo recebido.

Finalmente, à Ana Cláudia, minha esposa e companheira, pelo estímulo nos momentos difíceis e pela compreensão naqueles em que os estudos exigiam total dedicação, subtraindo-lhe, por vezes, a devida atenção.

RESUMO

SIMULAÇÃO ESTOCÁSTICA APLICADA EM PLANO

DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA

Jorge Washington Silva Bhering

Orientador: Hélio dos Santos Migon, Ph.D.

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Estatística, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências Estatísticas.

Planos de Contribuição Definida geram benefícios de aposentadoria, em regime individual, que dependem do montante obtido na aplicação das contribuições vertidas por seus participantes. A técnica usualmente adotada para a projeção das rendas de aposentadoria consiste na aplicação de modelos determinísticos. Após a concessão do benefício, a responsabilidade das entidades é dimensionada exclusivamente em função do valor esperado do fluxo de pagamentos. A presente dissertação visa à aplicação de modelos estocásticos no contexto de planos de contribuição definida em duas etapas: a) acumulação de recursos; e b) pagamento de benefícios. A primeira etapa apresenta um modelo de acumulação estocástico, orientado por uma política de macro alocação atrelada à meta sob o princípio de otimalidade de Bellman; a segunda apresenta a simulação da distribuição dos compromissos da instituição baseada na distribuição do compromisso individual relativo a cada um dos participantes aposentados.

Palavras-chave: plano de contribuição definida, modelos estocásticos, simulação, programação dinâmica, otimalidade de Bellman.

Rio de Janeiro

Janeiro de 2005

ABSTRACT

APPLIED STOCHASTIC SIMULATION TO DEFINED CONTRIBUTION PLAN

Jorge Washington Silva Bhering

Orientador: Hélio dos Santos Migon, Ph.D.

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Estatística, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências Estatísticas.

Defined contribution plans generate retirement benefits, in individual regime, that depend on the balance obtained by application of the contribution made by its participants. The technique often adopted to forecast retirement benefits consists in application of deterministic models. After the benefit concession the institution responsibility is dimensioned solely in function of the payment flow expected value. This dissertation aims the application of stochastic models in defined contribution plan context in two phases: a) resources accumulation; and b) benefit payments. The first phase presents a stochastic model oriented by a macro allocation policy with target under the Bellman's optimality principle; the second one presents the simulation of the institution compromise distribution based on the individual compromise distribution relative to each one of the retired participants.

Key-words: defined contribution plan, stochastic models, simulation, dynamic programming, Bellman's optimality.

Rio de Janeiro

Janeiro de 2005

SUMÁRIO

| | | |
|-----|--|----|
| 1 | INTRODUÇÃO | 11 |
| 2 | DECISÃO E PREVISÃO | 13 |
| 2.1 | DECISÃO..... | 13 |
| 2.2 | PREVISÃO | 23 |
| 3 | PLANOS DE APOSENTADORIA | 30 |
| 3.1 | PLANOS DE BENEFÍCIO DEFINIDO..... | 30 |
| 3.2 | PLANOS DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA | 31 |
| 3.3 | FINANCIAMENTO DE APOSENTADORIAS | 32 |
| 3.4 | A FASE DE PAGAMENTO DE BENEFÍCIOS..... | 34 |
| 3.5 | HIPÓTESES UTILIZADAS NAS PROJEÇÕES | 35 |
| 4 | MODELOS EM PLANOS DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA..... | 36 |
| 4.1 | MODELO DETERMINÍSTICO | 36 |
| 4.2 | MODELO ESTOCÁSTICO..... | 44 |
| 4.3 | SIMULAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DA RESERVA COLETIVA..... | 54 |
| 5 | APLICAÇÃO..... | 60 |
| 5.1 | FASE DE ACUMULAÇÃO | 60 |
| 5.2 | FASE DE DISTRIBUIÇÃO..... | 75 |
| 6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS..... | 82 |
| 6.1 | FASE DE ACUMULAÇÃO | 82 |
| 6.2 | FASE DE DISTRIBUIÇÃO..... | 82 |
| 6.3 | OPORTUNIDADES DE MELHORIAS | 83 |
| | REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA..... | 84 |
| | ANEXOS..... | 88 |
| | ANEXO I..... | 88 |
| | ANEXO II | 91 |
| | ANEXO III..... | 94 |

| | |
|------------------|-----|
| ANEXO IV | 97 |
| ANEXO V | 100 |
| ANEXO VI..... | 102 |
| ANEXO VII..... | 106 |
| ANEXO VIII | 108 |
| ANEXO IX..... | 110 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 - Fluxo de Prestações e Montante – Regime Postecipado..... | 37 |
| Figura 2 - Fluxo de Prestações e Montante – Regime Antecipado | 38 |
| Figura 3 - Modelo Estocástico de Acumulação em Plano C.D | 45 |
| Figura 4 - Função de Perda - L_t | 49 |
| Figura 5 – Árvore de Decisão..... | 50 |
| Figura 6 - Problema de Alocação | 50 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Parâmetros para Projeção de Retornos | 62 |
| Tabela 2 – Taxa de Retorno Uniforme (r)..... | 63 |
| Tabela 3 – Anuidade para Cálculo da Renda de Aposentadoria | 63 |
| Tabela 4 – Projeção do Benefício Inicial..... | 65 |
| Tabela 5 Simulação do Benefício Inicial de Aposentadoria..... | 66 |
| Tabela 6 – Simulação do Benefício Inicial de Aposentadoria..... | 69 |
| Tabela 7 – Benefícios Projetados | 71 |
| Tabela 8 – Simulação do Benefício Inicial de Aposentadoria..... | 73 |
| Tabela 9 – Impacto no Valor Inicial do Benefício – AT-49..... | 78 |
| Tabela 10 - Impacto no Valor Inicial do Benefício – AT-83 | 78 |
| Tabela 11 -Valor Esperado da Reserva Matemática - V | 79 |
| Tabela 12 – Desvio Padrão da Reserva Matemática - V | 79 |
| Tabela 13 – Simulação da Reserva Coletiva | 80 |
| Tabela 14 – Coeficiente de Carregamento de Segurança - λ | 81 |

1 INTRODUÇÃO

A presente dissertação tem por objetivo a apresentação e a aplicação de modelos estocásticos em planos de aposentadoria estruturados na modalidade contribuição definida, englobando as fases de acumulação e distribuição dos recursos. Para tanto, o roteiro da apresentação foi organizada na forma que se segue:

CAPÍTULO 1 - Introdução

Contempla o objetivo e a forma como a dissertação foi organizada.

CAPÍTULO 2 – Decisão e Previsão

É feita uma breve revisão de conceitos atinentes: problema de decisão, programação dinâmica, e previsão via modelos dinâmicos.

CAPÍTULO 3 - Planos de Aposentadoria

Dispõe sobre o conceito, características e fundamentos do financiamento de planos de aposentadoria elaborados no contexto de benefício definido e contribuição definida.

CAPÍTULO 4 – Modelos em Planos de contribuição Definida: Determinístico e Estocástico

O capítulo foi dividido em três seções: a primeira consiste na formulação de modelo determinístico centrado no conceito de montante financeiro e de anuidade atuarial como base para o cálculo da renda vitalícia de aposentadoria; na segunda introduz-se modelo, onde são consideradas a dinâmica de alocação, sob o ponto de vista de meta durante a fase de acumulação, a probabilidade de atendimento da meta e a distribuição da renda de aposentadoria; na última seção é avaliado o compromisso da entidade perante seus participantes mediante a simulação da distribuição da reserva matemática coletiva.

CAPÍTULO 5 - Aplicação

Contempla a aplicação dos modelos discutidos no capítulo anterior relativamente às fases de acumulação e distribuição em planos do tipo contribuição definida. Na primeira fase é dada

ênfase no modelo individual de acumulação, enquanto na segunda o enfoque é coletivo, onde se avalia a situação de uma carteira de aposentadorias da entidade de previdência complementar EXEMPLO.

CAPÍTULO 6 – Considerações Finais

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANEXOS

2 DECISÃO E PREVISÃO

O objeto do presente capítulo consiste na introdução de conceitos atinentes à decisão e previsão utilizados na presente dissertação, destacando-se a programação dinâmica na solução de problemas em estágios múltiplos, o princípio de otimalidade de Bellman e modelos lineares dinâmicos. Assim, é recomendável a leitura por aqueles não familiarizados com os conceitos ora mencionados.

2.1 DECISÃO

Decidir é uma atividade rotineira desempenhada pela razão humana decorrente das possibilidades de ação em face de situações vivenciadas no cotidiano, compreendendo problemas complexos onde permeiam a incerteza, seqüenciamento, objetivos e alternativas múltiplas.

Se os resultados ou conseqüências de cada curso de ação podem ser previstos com certeza, a solução do problema de decisão dependerá exclusivamente das preferências do decisor. Ocorre que em muitas situações os resultados são contingentes por força do ambiente como, por exemplo, demanda de mercado, condições do tempo e normas legais.

A preferência relativa de quem decide é ponto crucial na análise de problemas de decisão seja sob certeza ou incerteza. Sob a hipótese de incerteza, além de especificar as preferências, necessário se faz necessário também especificar os julgamentos acerca de eventos, sob os quais as conseqüências de suas ações são contingentes.

A representação numérica de preferências do decisor é feita, de modo geral, sob forma de funções que expressem a utilidade ou perda associada. Nesse contexto, um comportamento racional consiste em selecionar a decisão que maximize a utilidade esperada ou minimize a perda esperada, conforme seja o caso, onde a esperança refere-se à distribuição de probabilidades intrínseca aos possíveis estados da natureza.

O fundamento do processo de seleção da decisão em termos da utilidade esperada ou, alternativamente, da minimização da perda esperada, deriva do teorema de Neumann-

Morgenstern (1957), que estabelece a comparação de ações em termos da comparação dos valores esperados das utilidades das conseqüências.

A modelagem de problemas de decisão sob risco dá-se pela identificação de seus elementos constituintes estabelecendo-se, a seguir, o relacionamento entre tais elementos. Árvores de decisão e diagramas de influência são ferramentas usuais para a estruturação e solução de problemas de decisão.

2.1.1 PROBLEMA DE DECISÃO

Segundo Migon e Gamerman (1999), um problema de decisão é especificado pela tripla (A, Θ, L) , onde A é o espaço das ações, Θ é o conjunto dos estados da natureza e $L(\theta, a)$ representa a perda sofrida pela escolha da ação $a \in A$, quando ocorre $\theta \in \Theta$, isto é, $L : \Theta \times A \rightarrow R$. O risco ou perda esperada de uma ação $a \in A$ é dado por:

$$r(\pi, a) = \int L(\theta, a)\pi(\theta)d\theta, \quad (2-1)$$

onde $\pi(\theta)$ é uma função de densidade sobre Θ .

O procedimento ótimo será aquele definido pela ação que minimiza o valor esperado da perda, comumente conhecida como ação de Bayes com respeito à π . Assim, a ação $a_b \in A$ é denominada ação de Bayes com respeito a $\pi(\theta)$ se:

$$a_b = \arg \min_a \int L(\theta, a)\pi(\theta)d(\theta) = \arg \min_a r(\pi, a) \quad (2-2)$$

com $r(\pi, a)$ comumente denominada perda esperada a priori e o seu valor mínimo, $r(\pi, a_b)$, o risco de Bayes associado.

O delineamento de funções de perda está associado à natureza do problema:

- em estimação, $A = \Theta$, sendo comum o uso de funções pertencentes à classe $L(\theta, a) = |\theta - a|^\alpha$;

- na literatura de Atuaria, aparece com frequência a função de perda de Esscher, $L(\theta, a) = \exp(\gamma\theta)(\theta - a)^2$, onde $a \in A$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^+$ e $\gamma > 0$, é denominado coeficiente de aversão ao risco;

- em finanças, a função de perda $L(\theta, a) = \exp(\alpha\Psi) - 1$ é proposta em problemas de diversificação de risco.

De forma equivalente pode-se definir a função de utilidade a partir de funções de perda e vice-versa: $U(\theta, a) = -L(\theta, a)$.

2.1.2 MAXIMIZAÇÃO DA UTILIDADE ESPERADA

Sob o prisma da maximização da utilidade esperada, utilizando-se a nomenclatura usual, há de se estabelecer: i) o espaço de decisão D onde será efetuada a maximização; ii) o modelo $p_d(y|\theta)$, que pode depender do parâmetro de decisão d , representando a distribuição do vetor y de observações condicionadas a um vetor de parâmetros desconhecido θ ; iii) um modelo para a priori, $p(\theta)$, para caracterizar a incerteza sobre θ ; e iv) a utilidade definida pela função $u(d, \theta, y)$. Nestes termos, a decisão ótima será aquela que maximize a utilidade esperada, ou seja, determinar a decisão ótima d^*

$$d^* = \arg \max_{d \in D} U(d), \quad (2-3)$$

onde $U(d) = \int u(d, x, \theta, y) p_d(\theta, y | x) d\theta dy$

2.1.3 DETERMINAÇÃO DA SOLUÇÃO ÓTIMA

A escolha do modelo e da verossimilhança nem sempre permite o tratamento analítico da utilidade esperada $U(d)$, o que impõe métodos numéricos para a sua solução. Nesses casos, dentre as alternativas disponíveis, são propostas soluções baseadas em simulação de Monte Carlo e modelo de probabilidade aumentada: a primeira toma por base a simulação de amostras (θ_i, y_i) geradas a partir de $p(\theta)$ e $p_d(y, \theta_i)$; a segunda parte de um modelo artificial de probabilidade para a quadra (d, x, θ, y) , cuja simulação é equivalente à solução do problema de decisão ótima.

2.1.3.1 SIMULAÇÃO POR MONTE CARLO

A idéia central do método Monte Carlo consiste em escrever a integral de interesse como o valor esperado de uma função objetivo relativamente a uma distribuição de probabilidade, cujo valor é estimado a partir de amostras geradas dessa distribuição.

Sendo $I = \int g(\theta)d\theta$ a integral de interesse, a partir da seleção de uma densidade $p(\theta)$, definida em Ω , reescreve-se o integrando de forma a obter a expressão que caracterize o valor esperado da função objetivo:

$$I = \int g(\theta)d\theta = \int \frac{g(\theta)}{p(\theta)}p(\theta)d\theta = \int h(\theta)p(\theta)d\theta \quad (2-4)$$

Pelo método dos momentos o estimador de I é

$$\hat{I} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h(\theta_i), \quad (2-5)$$

onde $h(\theta_i) = g(\theta_i)/p(\theta_i)$ para $i=1, \dots, M$.

Portanto, a estimativa desejada resulta da média aritmética dos M valores assumidos por $h(\theta)$, valores estes obtidos pela simulação de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$, a partir da distribuição da priori, $\theta \sim p(\theta)$.

Escolhidos a densidade $p(\theta)$ da priori e o tamanho M da amostra, a estrutura lógica que se segue pode ser utilizada para obter uma estimativa de I:

ALGORITMO-1

1. Gerar $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$ a partir de $\theta \sim p(\theta)$;
2. Calcular $h(\theta_1), \dots, h(\theta_M)$;
3. Determinar a média da amostra induzida por θ , $\hat{I} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M h(\theta_i)$

Neste contexto a solução via Monte Carlo exige o cálculo da integral representativa da utilidade esperada correspondente a cada decisão e, a seguir, a seleção da decisão correspondente à utilidade de maior valor.

A utilidade esperada relativa a uma decisão d segue o processo geral da média de Monte Carlo onde a função objetivo é $u(d, \theta, y)$ e a distribuição de probabilidade de (θ, y) é tal que $p_d(\theta, y) = p(\theta) p_d(y|\theta)$. Assim para cada par (θ_i, y_i) gerado a partir de $p(\theta)$ e $p(y|\theta)$ calcula-se o valor de $u(d, \theta_i, y_i)$ obtendo-se, ao final, a utilidade esperada associada à decisão d , isto é,

$$\hat{U}(d) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u(d, \theta_i, y_i) \quad (2-6)$$

ALGORITMO-2

1. Para cada decisão d pertinente ao espaço de decisão D ,

Gerar $(\theta_i, y_i) \sim p_d(\theta, y) = p(\theta) p_d(y|\theta)$;

Para cada (θ_i, y_i) calcular $u(d, \theta_i, y_i)$;

Determinar $\hat{U}(d) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u(d, \theta_i, y_i)$

2. Selecionar $d^* = \arg \max_{d \in D} \hat{U}(d)$.

A técnica de Monte Carlo suscita alguns questionamentos que segundo Migon e Gamerman (1.999) devem ser respondidos antes de sua aplicação: a) qual deve ser o tamanho da amostra a ser considerado?; b) quando a técnica de simulação de Monte Carlo deve ser preferível à integração numérica?

A disponibilidade de dados $x \sim p(x|\theta)$, no momento da decisão, implica no condicionamento da decisão à informação x . Conseqüentemente, os pares (θ_i, y_i) devem ser gerados não mais pela priori (θ, y) , mas sim pela posteriori $(\theta, y/x) \sim p(\theta/x) p(y/\theta, x)$ ou $p(y/\theta)$ supondo x e y independentes sob θ .

Ocorre que nem sempre a distribuição de θ/x tem forma analítica tratável, o que sugere a simulação dessa densidade através de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC). Uma vez simulados θ_i/x , $i=1, \dots, M$, segue de imediato a aplicação do algoritmo anterior para a obtenção da decisão ótima.

2.1.3.2 SUAVIZAÇÃO DAS SUPERFÍCIES

No plano da maximização de decisões ótimas onde a utilidade esperada $U(d)$ pode ser considerada contínua, o uso de MC falha por não explorar tal continuidade. Müller e Parmegiani (1995) propõem esquema numérico bayesiano de decisão ótima que explora o problema da continuidade.

O esquema consiste na substituição da integração relativa a $U(d)$, pelo valor de uma curva/superfície suave $\hat{U}(d)$ ajustada aos pontos (d_i, u_i) , $u_i = u(d_i, \theta_i, y_i)$, onde (d_i, y_i) são simulados a partir de $p_{d_i}(\theta, y)$ para cada decisão d_i em uma amostra (d_1, \dots, d_M) em D . Os autores demonstram que a moda de $\hat{U}(d)$ é estimador consistente para a decisão ótima.

O algoritmo a seguir sintetiza os procedimentos necessários á obtenção da solução ótima mediante o ajuste de uma curva suave:

ALGORITMO-3

1. Selecionar algumas decisões d_i pertencente a D ;
2. Simular $(\theta_i, y_i) \sim p_{d_i}(\theta, y)$, um para cada decisão selecionada;
3. Calcular u_i , isto é, $u(d_i, \theta_i, y_i)$;
4. Ajustar uma curva suave aos pares (d_i, u_i) ;
5. Determinar a moda da curva $\hat{U}(d)$.

2.1.3.3 SIMULAÇÃO DA PROBABILIDADE AUMENTADA

A solução de decisão ótima como um problema de simulação probabilístico mediante o uso sistemático de métodos de simulação de Monte Carlo via Cadeias de Markov foi proposto por Clyde, Muller e Parmegiani (1995).

O método pressupõe uma distribuição artificial no espaço de alternativas e estados. A distribuição é definida de tal sorte que sua marginal no espaço de alternativas seja proporcional à utilidade esperada da alternativa e por consequência a alternativa ótima coincide com a moda da marginal.

A estratégia básica do método consiste em: a) obter uma amostra da distribuição artificial; b) tomar a marginal correspondente ao espaço de alternativas; e c) encontrar a moda dessa marginal como aproximação da alternativa ótima. Para tanto são explorados algoritmos de Monte Carlo via Cadeias de Markov.

Descrição do Problema

Formalmente, deseja-se determinar d^* :

$$d^* = \arg \max_{d \in D} U(d), \text{ onde } U(d) = \int u(d, x, \theta, y) p_d(\theta, y | x) d\theta dy \quad (2-7)$$

A transformação do problema de decisão em um problema de simulação decorre da ampliação da medida de probabilidade $p_d(\theta, y/x)$ para um modelo probabilístico em (d, θ, y) . Para tanto, supõem-se D limitado, $u(d, x, \theta, y) > 0$ e limitada, definindo-se uma distribuição artificial:

$$h(d, \theta, y) \propto u(d, x, \theta, y) p_d(\theta, y/x) \quad (2-8)$$

Conseqüentemente, a distribuição marginal $h(d)$ é tal que

$$h(d) \propto \int u(d, x, \theta, y) p_d(\theta, y | x) d\theta dy = U(d) \quad (2-9)$$

Segue de imediato que a moda de $h(d)$ corresponde à decisão ótima d^* .

A racionalidade do método está na simulação de uma cadeia de Markov em (d, θ, y) cuja distribuição assintótica seja $h(d, \theta, y)$. Diferentemente dos métodos descritos anteriormente a simulação é definida no modelo de probabilidade aumentada $h(d, \theta, y)$ e não em $p_d(\theta, y)$.

Portanto a questão chave reside na definição de uma cadeia de Markov que tenha $h(d, \theta, y)$ por distribuição limite.

O algoritmo apresentado neste método proporciona simulações de amostras aproximadas de $h(d, \theta, y)$, e por extensão, amostras das marginais associadas. No presente caso $h(d)$ é a distribuição de interesse. Assim, decorre de imediato que a moda de $h(d)$, obtida por simulação, é uma aproximação da solução ótima.

Quando o espaço de alternativa D é discreto a determinação da moda resume-se na identificação da decisão de maior frequência.

Sob a hipótese de continuidade de D , a utilização de instrumentos gráficos de análise exploratória de dados fica restrita, no máximo, a decisões bidimensionais. Para dimensões mais elevadas, a determinação da moda é tratada como um problema de análise de conglomerado. Posto que a moda de $h(d)$ corresponde à região com a mais alta densidade, a busca da solução ótima se inicia a partir do cômputo da árvore hierárquica de classificação, que deverá ser cortada a uma certa altura, de forma a obter os correspondentes conglomerados. A seguir localiza-se o maior conglomerado o que indica a área de melhor alternativa.

2.1.4 PROBLEMA DE DECISÃO MULTIESTÁGIO

Segundo Migon e Lopes (2002) problemas de decisão em múltiplos estágios ou seqüenciais caracterizam-se pela possibilidade de serem separados em um certo número de passos seqüenciais ou estágios, onde cada estágio se conclui com uma decisão. Em geral, o tempo é usado para ordenar a seqüência de problemas decisórios. Nesse contexto, uma solução do problema recebe a denominação de política e consistirá numa seqüência de decisões.

Uma classe de problema de otimização de interesse consiste no processo de decisão multi-estágio, cuja programação matemática é definida por:

$$\begin{array}{ll} \text{otimizar} & f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \\ \text{sujeito a} & x_1 + \dots + x_n \leq b \\ \text{com} & x_i > 0 \text{ e } x_i \text{ inteiros} \end{array} \quad (2-10)$$

onde $f_i(x_i), i = 1, \dots, n$, são funções conhecidas de uma única variável (lineares ou não lineares), $b > 0$ é uma quantidade conhecida e n é o número de estágios.

2.1.5 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

A técnica de solução de problemas de decisão em estágios múltiplos é denominada programação dinâmica ou indução para trás (*backward*), onde o termo dinâmico indica que os estágios se relacionam dinamicamente ou, para simplificar, temporalmente. A decisão no estágio presente é de pouca utilidade, pois o ótimo presente envolve o ótimo futuro. Esta relação está bem estabelecida em artigo publicado, onde Lindley (1961) evidencia a necessidade de se trabalhar de trás para adiante.

Os problemas multi-estágio podem ser convencionalmente formulados como um único estágio, pagando-se o preço da complexidade ou dimensionalidade. Como mencionado por Bellman (1957), se temos N estágios e M decisões possíveis em cada estágio, então teremos um problema de NM -dimensional com um único estágio.

2.1.6 ALGORITMO DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

Consideremos o problema de decisão com um número finito de estágios, T , onde se deseja determinar, de forma ótima, uma seqüência de ações $A = \{a_1, \dots, a_T\}$ que minimize o custo esperado total, condicionalmente ao estado inicial do sistema.

Sejam,

A_t , o espaço das ações disponíveis no t-ésimo estágio;

Θ_t , o espaço de estados da natureza, em cada estágio;

$G : \Theta_{t-1} \times A_t \rightarrow \Theta_t$, função de evolução dos estados de natureza Markoviana, que induz a distribuição de probabilidade sobre Θ_t , denotada por $p(\theta_t | a_t, \theta_{t-1})$;

$C_t : \Theta_t \times A_t \rightarrow R$, a função que descreve o custo da ação $a_t \in A_t$ quando ocorre $\theta_t \in \Theta_t$.

Nestes termos, pretende-se determinar

$$A^* = \arg \min_A \{ E [C_1 + \dots + C_T | D_t] \}, \quad (2-11)$$

onde D_t representa a informação disponível até o instante t, isto é,

$$D_t = \{ a_1, \dots, a_t, \theta_1, \dots, \theta_t \} \in \{ A_1 \times \dots \times A_t, \Theta_1 \times \dots \times \Theta_t \}.$$

2.1.7 PRINCÍPIO DE OTIMALIDADE DE BELLMAN

O preceito básico utilizado na solução de problemas de programação dinâmica é que em qualquer tempo t só precisamos considerar a minimização do custo esperado futuro, posto que a escolha das decisões presentes e futuras não deve influir no passado. Tal preceito constitui-se no denominado Princípio de Otimalidade de Bellman:

“Uma política ótima tem a propriedade de que, qualquer que sejam o estado e a decisão iniciais, as decisões remanescentes constituem uma política ótima com respeito aos estados remanescentes”.

Assim, é possível construir a solução mediante processo indutivo de frente para trás:

1. Defina $f(\theta_t) = \min_{\{a_t, \dots, a_T\}} \{ E [C_t + \dots + C_T | \theta_t] \}$, isto é, o valor mínimo do custo esperado futuro no estágio t , $t \leq T$. Temos então
2. $f(\theta_T) = \min_{a_T} \{ C_T \}$

$$3. \quad f(\theta_{T-1}) = \min_{\{a_{T-1}, a_T\}} \{E[(C_{T-1} + C_T) | \theta_{T-1}]\} = \min_{\{a_{T-1}\}} \{C_{T-1} + E[f(\theta_T) | \theta_{T-1}, a_T]\} \dots$$

Generalizando, podemos escrever

$f(\theta_t) = \min_{\{a_t\}} \{C_t + E[f(\theta_{t+1}) | \theta_t, a_{t+1}]\}$, que é a expressão de recorrência entre estados, que aplicada de forma retroativa conduzirá à solução o problema.

2.2 PREVISÃO

Na descrição dos problemas de decisão observa-se a componente relativa ao conjunto dos estados possíveis da natureza, o que remete à previsão desses estados no futuro. A previsão é uma hipótese, conjectura ou especulação sobre algo no futuro.

O processo de previsão contempla a seleção do horizonte de projeção, seguindo-se da avaliação das informações, tempo e recursos disponíveis, de modo a orientar a escolha do método e a especificação do modelo a ser adotado.

Modelos são esquemas de descrição e explicação que organizam a informação e experiências de modo a proporcionar meios de aprendizagem e previsão. Permitem inferir sobre o futuro, porém não representam a realidade. Devem atender ao princípio da parcimônia e prover um processo eficiente de aprendizado proporcionando a compreensão e, por consequência, decisões consistentes.

A estruturação do modelo é ponto crítico para a sua performance. West e Harrison (1997) destacam que uma boa estrutura deverá prover modelos cujas propriedades compreendam a descrição, controle e robustez: descrição almeja dar significado e explicação de forma aceitável e comunicativa; controle refere-se aos fatores que influenciam o comportamento do sistema que está sendo modelado; e robustez implica em estruturar de forma que somente em casos excepcionais seja necessário intervir no modelo. Para tanto propõem a estruturação de modelos através da tripla (C, F, Q) : C descreve a base conceitual, pode expressar, por exemplo, leis científicas ou sócio-econômicas, características de comportamento; F , a forma qualitativa do

modelo, representa o conceito em termos descritivos, selecionando as variáveis apropriadas e definindo os relacionamentos; e Q a forma quantitativa.

Makridakis et al. (1998), considerando a natureza dos dados, classificam os métodos de previsão em qualitativos e quantitativos. Entre os métodos qualitativos destacam-se o Método dos Cenários, onde são estabelecidas hipóteses que servirão de base para a análise de possibilidades de ocorrência futuras, e o Método Delphi, que se apóia no consenso de grupo de especialistas obtido a partir de questionários individuais. Os métodos quantitativos fundamentam-se em modelos matemáticos formais onde se pressupõe a quantificação de informações sob a forma numérica, admitindo-se hipótese de continuidade, isto é, que certos padrões observados no passado se verifiquem no horizonte futuro de projeção.

Dentre os modelos quantitativos destacamos os modelos de séries temporais baseados na classe de modelos lineares dinâmicos, onde o termo dinâmico refere-se à evolução do processo em relação ao tempo. Harrison e Stevens (1976) introduziram os modelos lineares dinâmicos em que se considera a variação dos parâmetros no tempo, estendendo, deste modo, os modelos de regressão e de séries temporais com descrição paramétrica estática.

No contexto bayesiano, modelos dinâmicos e métodos de previsão são amplamente discutidos por West e Harrison (1997), enquanto Pole et al (1994) apresentam uma série de aplicações.

A dinâmica temporal sugere a definição de um modelo seqüencial que permita o aprendizado constante mediante a incorporação de novas informações ao sistema, o que remete aos princípios adotados pela inferência bayesiana que atualiza o modelo na medida em que novas informações são disponibilizadas.

Assim, se denotarmos por D_0 o conjunto que descreve a informação inicialmente disponível, Y_t a quantidade observável de interesse, o problema central de previsão consiste na obtenção da distribuição $Y_t|D_0$, $t > 0$, ou de forma mais geral em obter $Y_{t+k}|D_t$, $k > 0$, onde $D_t = \{D_{t-1}, Y_t\}$.

A solução do problema relativo a um modelo paramétrico, digamos obter a distribuição da preditiva $Y_t|D_{t-1}$, dá-se a partir da distribuição $p(Y_t|\theta_t, D_{t-1})$ considerando-se a distribuição da *priori* para θ_t , qual seja, $\theta_t|D_{t-1}$:

$$P(Y_t | D_{t-1}) = \int p(Y_t, \theta_t | D_{t-1}) d\theta_t = \int p(Y_t | \theta_t, D_{t-1}) p(\theta_t | D_{t-1}) d\theta_t \quad (2-12)$$

2.2.1 CARACTERIZAÇÃO DO MODELO GERAL

Modelos lineares dinâmicos normais para um vetor de observações Y_t são caracterizados pela quádrupla $\{F, G, V, W\}_t = \{F_t, G_t, V_t, W_t\}$ para todo tempo t , que define um modelo que relaciona Y_t ao parâmetro θ_t , no tempo t , e a seqüência θ_t ao longo do tempo, pelas equações

$$\begin{cases} Y_t = F_t' \theta_t + v_t & v_t \sim N[0, V_t] \\ \theta_t = G_t \theta_{t-1} + \omega_t & \omega_t \sim N[0, W_t] \end{cases} \quad (2-13)$$

onde os erros v_t e ω_t são independentes e mutuamente independentes.

A primeira equação é a equação de observações para o modelo onde se define a distribuição para Y_t , condicional em θ_t . Sob θ_t , Y_t é condicionalmente independente dos valores passados da série. Essa equação relaciona a observação a θ_t via regressão linear dinâmica associada a uma estrutura normal multivariada de erros v_t , com matriz de variância conhecida e possivelmente variável no tempo. A matriz F_t desempenha o papel da matriz de regressão dos valores conhecidos das variáveis independentes e θ_t é o vetor dinâmico dos parâmetros de regressão, este último referenciado como vetor de estado do modelo.

A segunda equação define a evolução do vetor de estados θ_t , sendo denominada por equação de evolução de estados ou do sistema. A componente determinística de transição do estado θ_t para $G_t \theta_t$ corresponde a uma transformação linear com matriz de transição de estados G_t . A transição fica completa adicionando-se o erro de evolução ω_t , normalmente distribuído com matriz de variância W_t .

2.2.2 MODELO POLINOMIAL DE 1ª ORDEM

Um caso particular do modelo geral apresentado é o modelo polinomial de primeira ordem assim definido por West e Harrison (1997):

$$\begin{aligned} \text{Equação de observação:} \quad & Y_t = \mu_t + v_t \quad v_t \sim N[0, V_t], V_t \text{ conhecida} \\ \text{Sistema de equações:} \quad & \mu_t = \mu_{t-1} + \omega_t \quad \omega_t \sim N[0, W_t] \\ \text{Informação inicial:} \quad & (\mu_0 | D_0) \sim N[m_0, C_0]. \end{aligned} \tag{2-14}$$

A informação inicial corresponde à representação probabilística das crenças do decisor e informações existentes no instante $t=0$.

2.2.2.1 CONTROLE, PROJEÇÃO E ATUALIZAÇÃO

O controle, o aprendizado e a projeção são realizados a partir das distribuições subjacentes ao modelo, baseadas na atualização seqüencial das equações que definem a evolução da informação sobre o modelo e a série no tempo. O ciclo de atualização das distribuições necessárias à projeção a cada nova informação no instante t segue o esquema a seguir:

a) admite-se por hipótese que a distribuição da posteriori μ , em $t-1$, sob D_{t-1} é normal,

$$(\mu_{t-1} | D_{t-1}) \sim N[m_{t-1}, C_{t-1}] \tag{2-15}$$

b) a aplicação da equação de evolução de estados leva à distribuição à priori para μ_t no instante t , sob D_{t-1} ,

$$(\mu_t | D_{t-1}) \sim N[m_{t-1}, R_t], R_t = C_{t-1} + W_t \tag{2-16}$$

c) a previsão um passo a frente, é combinação linear das variáveis normalmente distribuídas e portanto também é normal,

$$(Y_t | D_{t-1}) \sim N[f_t, Q_t], f_t = m_{t-1} \text{ e } Q_t = R_t + V_t \tag{2-17}$$

d) conhecido y_t , a informação é incorporada no modelo combinando-a com a priori, atualizando a posteriori para μ no instante t , agora sob D_t ,

$$(\mu_t | D_t) \sim N[m_t, C_t], m_t = m_{t-1} + A_t e_t, C_t = A_t V_t, \text{ onde } A_t = R_t / Q_t \text{ e } e_t = Y_t - f_t \quad (2-18)$$

Os autores em referência destacam uma variante do modelo descrito em (2-14) ao considerar a hipótese de que as variâncias V_i são constantes, porém desconhecidas:

$$\begin{aligned} \text{Equação de observação:} \quad Y_t &= \mu_t + v_t \quad v_t \sim N[0, V], V \text{ desconhecida} \\ \text{Sistema de equações:} \quad \mu_t &= \mu_{t-1} + \omega_t \quad \omega_t \sim T_{n_{t-1}}[0, W_t] \\ \text{Informação inicial:} \quad (\mu_0 | D_0) &\sim T_{n_0}[m_0, C_0] \\ &(\phi | D_0) \sim G(n_0 / 2, d_0 / 2), \phi = 1/V \end{aligned} \quad (2-19)$$

Nesse modelo o ciclo de atualização opera segundo o esquema a seguir:

a) informação em $t-1$

$$(\mu_{t-1} | D_{t-1}) \sim T_{n_{t-1}}[m_{t-1}, C_{t-1}]$$

$$(\mu_t | D_{t-1}) \sim T_{n_{t-1}}[m_{t-1}, R_t]$$

$$(\phi | D_{t-1}) \sim G(n_{t-1} / 2, d_{t-1} / 2)$$

onde $R_t = C_{t-1} + W_t$, $W_t = \frac{(1-\delta)}{\delta} C_{t-1}$ e δ é o fator de desconto

b) projeção um passo a frente

$$(Y_t | D_{t-1}) \sim T_{n_{t-1}}(f_t, Q_t)$$

onde $f_t = m_{t-1}$, $Q_t = R_t + S_{t-1}$ e $S_{t-1} = d_{t-1} / n_{t-1}$

c) atualização

$$(\mu_t | D_t) \sim T_{n_t} [m_t, C_t]$$

$$(\phi | D_t) \sim G(n_t / 2, d_t / 2)$$

onde $n_t = n_{t-1} + 1$, $d_t = d_{t-1} + S_{t-1}(Y_t - f_t)^2 / Q_t$, $S_t = d_t / n_t$,

$$m_t = m_{t-1} + A_t(Y_t - f_t), A_t = R_t / Q_t \text{ e } C_t = R_t \frac{S_t}{Q_t}$$

2.2.3 FATOR DE DESCONTO

No contexto de modelos lineares dinâmicos, o fator de desconto é o parâmetro básico que controla o grau de envelhecimento do conteúdo informativo de um parâmetro θ_t : Podemos fixar, por exemplo, que o envelhecimento da informação sobre o parâmetro θ_t como um aumento de 10% na sua variância a priori, isto é:

$$\text{Var}(\theta_t / D_{t-1}) = (1 + \delta) \text{Var}(\theta_{t-1} / D_{t-1}), \delta = 10\% \quad (2-20)$$

Usualmente a descrição desse fator é feita em termos da precisão:

$$[\text{Var}(\theta_t / D_{t-1})]^{-1} = (1 + \delta)^{-1} [\text{Var}(\theta_{t-1} / D_{t-1})]^{-1} \quad (2-21)$$

Assim, $\lambda = (1 + \delta)^{-1}$ recebe a denominação de fator de desconto e varia entre 0 e 1.

Portanto, quando $\lambda = 1$, não existe alteração nos componentes do modelo ao longo do tempo, enquanto, de forma contrária, quanto menor for λ maior será a alteração destes componentes no tempo, e maior será a perda de informação contidas no passado.

A premissa de que o conteúdo informativo de uma observação decai com o tempo é bem intuitiva, utilizada por Brown (1962) em técnica de regressão exponencialmente ponderada

restrita a um único fator de desconto. Harrison e Johnston (1984) e Ameen e Harrison (1985) estenderam a idéia de Brown permitindo fatores de desconto para cada componente.

Os fatores de desconto podem ser especificados de forma subjetiva ou estimados. No primeiro caso, Harrison e Johnston (1984) propõem especificar o fator de desconto como

$$\lambda = (3n-1)/(3n+1) \quad (2-22)$$

onde n é o número de períodos necessários para que se perca a metade da informação. A estimação poderá seguir o método clássico estimando-se θ condicional no valor de λ que maximiza $\int p(y|\theta, \lambda)g(\theta)d\theta$ (verossimilhança para os fatores de desconto);

quando considerados como hiperparâmetros necessário se faz a especificação da priori de λ obtendo $f(\theta/y) = \int \frac{p(y|\theta, \lambda)g(\theta)}{\int p(y|\theta, \lambda)g(\theta)d\theta} n(\lambda|y)d\lambda$, integração que poderá ser efetuada através de

amostragem e reamostragem por importância (SIR)

Outra alternativa seria tratar o problema imaginando Y_t seguindo um modelo Multiprocesso Classe I, isto é, supor que para todo t , $M_t(\gamma)$ seja válido para algum $\gamma \in A$, onde A é o espaço de possíveis valores para o fator de desconto.

3 PLANOS DE APOSENTADORIA

A preocupação com a longevidade reside no sentimento de que as pessoas podem viver além da idade que lhes possibilita obter recursos suficientes para cobrir os custos de sua manutenção e de seus dependentes. Esse *animus* fomentou o desenvolvimento de planos de aposentadoria na seguridade básica, em regime compulsório, e complementar, de caráter facultativo. Referências históricas sobre risco podem ser obtidas em Ferreira (1985) e Bernstein (1997). Uma visão axiomática de planos de benefícios pode ser encontrada em Nogueira (1981). Fundamentos de planos de aposentadoria privados constam de literatura extensa dentre as quais citamos Allen et al (1994). Sistemas de aposentadoria básica na América Latina são discutidos em Mesa-Lago (1997) e Uthoff (1997).

Neste capítulo, são apresentados as características e os fundamentos do financiamento de planos de aposentadoria. A classificação adotada, não obstante a existência de planos híbridos, tem por fundamento o tipo de benefício oferecido: plano de benefício definido (BD) e plano de contribuição definida (CD).

3.1 PLANOS DE BENEFÍCIO DEFINIDO

A principal característica dos planos (BD) é o conhecimento a priori do benefício a ser concedido, tais como um valor fixo ou um percentual aplicável a uma função do salário. O benefício é concedido ao participante a partir da idade em que sejam cumpridas as condições regulamentares de concessão. Neste tipo de plano o benefício b é considerado variável independente, enquanto a contribuição c variável dependente, i.é, $c=f(b)$.

A especificação à priori do benefício dá ao participante à idéia concreta do que deverá ser concedido no futuro. Por outro lado, não se pode dizer o mesmo quanto a evolução das taxas contributivas necessárias ao custeio do benefício prometido. Durante a fase do financiamento, diversos fatores podem influenciar as taxas de custeio dos planos de benefício definido tais como:

- a) o retorno dos investimentos em ritmo inferior à taxa de juro exigida para capitalização dos ativos garantidores dos compromissos futuros;

- b) inflação pré-aposentadoria;
- c) a progressão salarial dos participantes em planos em que o benefício é função dos últimos salários de atividade;
- d) a entrada e saída de participantes no plano;
- e) a mortalidade observada;
- f) mudanças na legislação.

Diante dos riscos que se afiguram, planos de benefícios definidos implicam em planos de custeio que poderão ser voláteis, em maior ou menor escala, de acordo com as hipóteses admitidas, isto é, planos de contribuições indefinidas.

3.2 PLANOS DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA

Diferentemente dos planos BD os planos CD caracterizam-se pela norma contributiva, que é estipulada à *priori* em valor ou percentual do salário, em caráter individual, resultando em contribuições que deverão ser investidas até a idade regulamentar prevista para a transformação do montante obtido em um benefício que poderá ser vitalício ou temporário. Assim, em planos CD a contribuição é a variável independente e o benefício variável dependente, ou seja, $b=f(c)$.

A questão central que envolve os planos CD é o valor do benefício, que depende do valor das contribuições e da capitalização destas na fase pré-aposentadoria. A capitalização dos recursos investidos quando inferior à meta estipulada pelo participante vinculado a esse tipo de plano não gera obrigação para patrocinadores e gestores do referido plano, observados os princípios básicos que norteiam a gestão de ativos.

Planos de contribuição definida impõem aos seus participantes uma série de riscos na fase pré-aposentadoria:

- a) contribuições inadequadas (doença, desemprego e escolha da taxa de contribuição dentre outros);

- b) retorno dos ativos em nível inferior ao projetado para a capitalização;
- c) queda dos preços dos ativos à época da aposentadoria - reduz o montante objeto da conversão em benefício e, por conseqüência, impõe ao participante redução do benefício em caráter vitalício;
- d) a progressão salarial - implica em benefício aquém do status atingido pelo participante;
- e) mudanças na legislação

Os riscos inerentes aos planos de contribuição definida implicam em benefícios que poderão ser voláteis, em maior ou menor escala, de acordo com as hipóteses admitidas, isto é, planos de benefícios indefinidos.

3.3 FINANCIAMENTO DE APOSENTADORIAS

A sustentação dos benefícios previstos em um plano de aposentadoria dá-se a partir de contribuições previstas no respectivo plano de custeio. Segundo Nogueira (1994) o plano de custeio de uma entidade previdencial constitui-se no conjunto de normas quantificadoras das receitas que deverão ser investidas com a finalidade de gerar os recursos necessários e suficientes à concessão e manutenção dos benefícios, o que poderá ser feito de infinitas maneiras, com a restrição de que sejam atendidos dois princípios assim enunciados:

PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA FINANCEIRA

“O valor atual da renda constituída pelas receitas (R) deve igualar o valor atual da renda constituída pelas despesas (D) de benefícios.”

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta t} dR_t = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dD_t, \delta \text{ é a força de juro} \quad (3-1)$$

PRINCÍPIO DA SOLVÊNCIA

“O montante das receitas previstas para um lapso qualquer, contado a partir da avaliação, não pode ser inferior ao montante das despesas previstas para esse mesmo lapso.”

$$\int_0^t e^{\delta(t-j)} dR_j = \int_0^t e^{\delta(t-j)} dD_j \quad (3-2)$$

As integrais indicadas nos dois princípios são no sentido de Stieltjes.

3.3.1 REGIME FINANCEIRO

O critério de formulação das normas quantificadoras das receitas previstas para garantir a cobertura do benefício considerado no plano recebe a denominação de regime financeiro. Usualmente classifica-se tal regime na forma a seguir:

REPARTIÇÃO SIMPLES

A norma contributiva é estabelecida para cada exercício de sorte a produzir receita equivalente à despesa provável com o pagamento do benefício definido relativamente ao exercício considerado;

REPARTIÇÃO DE CAPITAIS DE COBERTURA

Neste regime a norma contributiva é estabelecida para cada exercício de forma a produzir receita equivalente ao total provável dos fundos garantidores das rendas do benefício considerado, iniciáveis no mesmo exercício;

CAPITALIZAÇÃO

O regime de capitalização caracteriza-se pela norma contributiva que é fixada de modo tal que o valor atual da renda formada pelas receitas iguale-se ao valor atual da renda formada pelos totais prováveis dos fundos garantidores das rendas do benefício definido, iniciáveis nos exercícios considerados.

Nesse contexto, entende-se por fundo garantidor de rendas de um benefício ao valor atual provável das despesas com o pagamento desse benefício. Contudo, em planos de contribuição definida o fundo garantidor de aposentadoria identifica-se ao montante formado pela capitalização financeira das contribuições vertidas durante a fase laborativa do participante.

3.3.2 MÉTODOS DE FINANCIAMENTO

A classificação dos métodos de financiamento de aposentadorias se apresenta de forma variada, inexistindo consenso na literatura disponível:

- I. individual ou agregado;
- II. grupo fechado ou aberto;
- III. índice marginal de capitalização;
- IV. em ordem crescente do fundo garantidor, ou decrescente das contribuições.

Considerações sobre métodos de financiamentos de aposentadorias podem ser encontradas em Trowbridge e Farr (1976), Coppini (1979), Nogueira (1995), Bowers et al (1997) e Iyer (2002).

3.4 A FASE DE PAGAMENTO DE BENEFÍCIOS

A acumulação dos recursos necessários ao pagamento dos benefícios em planos BD ou a conversão do montante em benefícios CD não elimina os riscos associados ao pagamento de benefícios. A entidade estará sujeita aos riscos de realocação dos investimentos, de compatibilidade no fluxo de caixa e de mortalidade dos participantes e eventuais beneficiários, inferior à experiência adotada (tábua de mortalidade). Para o participante os riscos dependem do tipo de benefício contratado: se o benefício é vitalício e atrelado a um indexador o risco de perda do valor real do benefício; se atrelado a valor de quota patrimonial o risco de flutuações no valor do benefício. Além desses riscos, existe o risco de mudança na regulamentação geral que permeia a previdência social.

3.5 HIPÓTESES UTILIZADAS NAS PROJEÇÕES

As projeções de despesas com pagamento de aposentadorias e receitas de contribuição consideram hipóteses de natureza volátil ensejando variabilidade significativa dos resultados, como por exemplo: a mortalidade, o comportamento dos salários e a rentabilidade patrimonial.

O estabelecimento de hipóteses que guardem aderência com o comportamento futuro dos fatores relevantes ao dimensionamento de benefícios e contribuições é fundamental para a elaboração de plano de custeio consistente, evitando, deste modo, os efeitos nefastos relacionados ao aumento dos custos do plano de aposentadoria. Ocorre que o financiamento de aposentadorias dá-se em prazos que atingem 35 anos ou mais o que dificulta a tarefa de estimar os fluxos financeiros envolvidos e, por conseqüência, taxas de custeio estáveis. A revisão periódica das hipóteses é imperativa na busca da melhor conformidade às futuras observações.

No delineamento dos modelos apresentados no capítulo 4, são discutidas hipóteses usualmente utilizadas em planos de contribuição definida.

4 MODELOS EM PLANOS DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA

A dinâmica de planos de aposentadoria tem sido objeto de artigos e teses alicerçados em modelos estocásticos: em *Pensionmetrics* Blake, Cairns e Dowd (2001) estimam valor em risco (VaR) na fase de acumulação de planos de contribuição definida (CD), examinando vários modelos de retorno de ativos e estratégias de alocação; Milevski e Young (2002) avaliam a opção de postergar a data de compra de aposentadoria; alocação dinâmica ótima de ativos é tratada em Haberman e Sung (1994), Dert (1995), Blake, Cairns e Dowd (2000), Haberman e Vigna (2002); modelagem estocástica para ativos é também abordada por Wilkie (1986), Lenk e Young (1997), Yakoubov, Teeler e Duval (1999).

O presente capítulo foi dividido em três seções: a primeira consiste na formulação de modelo determinístico centrado no conceito de montante financeiro e de anuidade atuarial como base para o cálculo da renda vitalícia de aposentadoria; na segunda introduz-se modelo, onde são consideradas a dinâmica de alocação, sob o ponto de vista de meta durante a fase de acumulação, a probabilidade de atendimento da meta e a distribuição da renda de aposentadoria; e na última seção é avaliado o compromisso da entidade perante seus participantes mediante a simulação da distribuição da reserva matemática coletiva.

Na modelagem apresentada conceituamos o plano de contribuição definida como um plano de previdência de característica individual, cujo benefício de aposentadoria resulte da conversão do montante, fruto da capitalização anual das contribuições vertidas para o plano, em uma renda vitalícia a ser paga ao participante desse plano a partir de uma idade preestabelecida.

4.1 MODELO DETERMINÍSTICO

Modelos determinísticos em planos CD apóiam-se em processos de capitalização, durante a fase de acumulação, e conversão da poupança acumulada em renda vitalícia. Referências sobre capitalização podem ser encontradas em Faro (1978), Coppini (1979), Vilanova (1980). O cálculo de rendas de aposentadoria está fartamente apresentado em Galé (1951), Neil (1977), Jordan (1982), Bowers et al (1997).

Conforme mencionado em 3.2, os planos CD caracterizam-se pela concessão de benefício vitalício a partir do montante obtido pela capitalização das contribuições estabelecidas pelo participante.

Assim, por ocasião da adesão ao plano, o participante deverá estabelecer o patamar contributivo futuro, o que de modo geral é feito a partir da disponibilidade financeira do participante ou com base em meta de benefício. Em ambos os casos, necessário se faz projetar o retorno dos investimentos e nível inflacionário.

4.1.1 ACUMULAÇÃO DE RECURSOS

O montante M_t ao final do período t , de uma série de prestações de valor c , pagas de forma postecipada, à taxa de juro variável j_t , é a solução da equação:

$$M_t = M_{t-1}(1 + j_{t-1}) + c \quad (4-1)$$

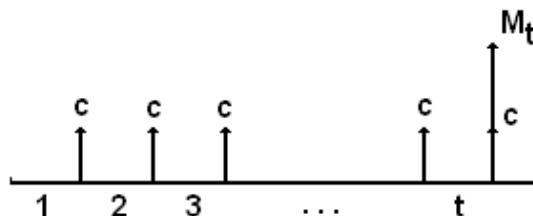
Assim, partindo da condição inicial $M_1 = c$,

$$M_t = c \left[\prod_{k=1}^{t-1} (1 + j_k) + \prod_{k=2}^{t-1} (1 + j_k) + \dots + 1 \right] \quad (4-2)$$

Admitindo rendimento uniforme no prazo de capitalização, isto é, $j_t = r$, $r > -1$ e $r \neq 0$, segue:

$$M_t = c \sum_{k=1}^t (1 + r)^{k-1} = c \frac{(1 + r)^t - 1}{r} \quad (4-3)$$

Figura 1 - Fluxo de Prestações e Montante – Regime Postecipado



Supondo que a série de prestações de valor c seja feita de forma antecipada, o montante M_t ao final do período t resulta da equação

$$M_t^a = (M_{t-1}^a + c)(1 + j_{t-1}) \quad (4-4)$$

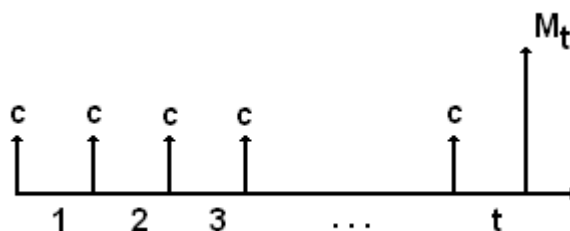
Logo, para a condição inicial $M_1^a = c(1 + j_1)$ obtém-se por solução

$$M_t^a = c \left[\prod_{k=1}^t (1 + j_k) + \prod_{k=2}^t (1 + j_k) + \dots + (1 + j_t) \right] \quad (4-5)$$

Sob a condição de rendimento uniforme, segue de imediato a expressão para o montante:

$$M_t^a = c \sum_{k=1}^t (1 + r)^k = c(1 + r) \frac{(1 + r)^t - 1}{r} \quad (4-6)$$

Figura 2 - Fluxo de Prestações e Montante – Regime Antecipado



Assim, decorre a relação entre os montantes relativos às prestações antecipadas e postecipadas ao final do tempo t :

$$M_t^a = (1 + r) M_t \quad (4-7)$$

Seja no caso antecipado ou postecipado, quando $r = 0$, o montante ao final do t -ésimo período é o produto da prestação pelo número de períodos em tais prestações são realizadas, isto é, $M_t = ct$.

4.1.2 RENDA DE APOSENTADORIA

O dimensionamento do encargo referente ao pagamento de rendas de aposentadoria exige a definição de aspectos importantes, a saber: o tipo de renda, o prazo em que a renda se refere, o valor das parcelas a serem pagas e a frequência de pagamento da renda. As rendas são usualmente classificadas em financeiras (ou certas) ou aleatórias, estas últimas condicionadas, de modo geral, à sobrevivência do beneficiário da renda. O prazo de pagamento da renda é caracterizado por seu caráter temporário ou vitalício enquanto o valor desses pagamentos poderá ser variável ou constante. Os pagamentos podem ser feitos com periodicidade uniforme ou não no início ou fim de cada período.

Nestes termos, as expressões que se seguem referem-se aos encargos relativos às rendas de aposentadoria de caráter vitalício, pagas em valor constante em intervalos uniformes de tempo.

O valor atual provável de uma renda vitalícia de valor unitário paga de forma antecipada a um participante de idade y , à taxa de juro i , denotado por \ddot{a}_y , é segundo Bowers et al (1997)

$$\ddot{a}_y = \sum_{t=0}^{\infty} v^t p_y, \quad (4-8)$$

onde, v é o fator de desconto financeiro, isto é, $v = \frac{1}{1+i}$, e ${}_t p_y$ é a probabilidade de um indivíduo com idade y sobreviver até a idade $y+t$ segundo uma determinada experiência de mortalidade.

Se os pagamentos são feitos de forma postecipada, o valor atual provável da renda anual vitalícia definida anteriormente tem por expressão

$$a_y = \sum_{t=1}^{\infty} v^t p_y, \quad (4-9)$$

Segue, de imediato, a expressão que relaciona o valor atual provável das rendas pagas de forma antecipada e aquele pago em regime postecipado:

$$\ddot{a}_y = 1 + a_y \quad (4-10)$$

Sob regime de pagamento da renda em m sub períodos do ano, de forma antecipada, o valor atual da renda é obtido pela expansão de Woolhouse, qual seja:

$$\ddot{a}_y^{(m)} \cong \ddot{a}_y - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\mu_y + \delta) \quad (4-11)$$

Na prática utiliza-se a aproximação

$$\ddot{a}_y^{(m)} \cong \ddot{a}_y - \frac{m-1}{2m} \quad (4-12)$$

que no caso de pagamentos mensais assume a forma

$$\ddot{a}_y^{(12)} \cong \ddot{a}_y - \frac{11}{24} \quad (4-13)$$

4.1.3 MODELOS PARA CÁLCULO DE BENEFÍCIO DE RENDA

A partir dos conceitos de montante e renda de aposentadoria propomos 4 (quatro) modelos para o cálculo de benefícios de renda, acrescentando-se de forma gradual os efeitos da inflação e da vinculação salarial.

Para tanto, definimos: x a idade em que o participante ingressa em um plano de contribuição definida; y a idade prevista nesse plano para dar início ao pagamento de um benefício vitalício de valor b ; r o retorno real anual estimado para os investimentos; e c o patamar de contribuição escolhido.

Assumindo que o benefício a ser pago anualmente, de forma antecipada, resulte do montante formado a partir das contribuições anuais vertidas, também em forma antecipada, durante a fase de acumulação do plano, o modelo decorre da equação de equilíbrio financeiro entre o montante e o valor atual provável com o pagamento dos benefícios ao fim do período de capitalização financeira:

$$c(1+r)[1 + (1+r) + \dots + (1+r)^{y-x-1}] = b\ddot{a}_y \quad (4-14)$$

Assim, o benefício projetado b a partir do montante estimado tem por expressão:

$$b = \begin{cases} c(1+r) \frac{(1+r)^{(y-x)} - 1}{r \cdot \ddot{a}_y}, & r \neq 0 \\ c \frac{y-x}{\ddot{a}_y}, & r = 0 \end{cases} \quad (4-15)$$

Por outro lado, fixado o patamar de benefício desejado a equação de equilíbrio conduz de imediato à contribuição c :

$$c = \begin{cases} b \frac{r \cdot \ddot{a}_y}{(1+r)[(1+r)^{(y-x)} - 1]}, & r \neq 0 \\ b \frac{\ddot{a}_y}{y-x}, & r = 0 \end{cases} \quad (4-16)$$

EFEITO INFLACIONÁRIO

O reajuste anual das contribuições compassada com a inflação observada proporcionará a manutenção do valor real do capital a ser investido. Portanto, admitindo que o retorno dos investimentos atinja a rentabilidade anual r , não haverá deterioração do valor inicial da renda de aposentadoria.

VINCULAÇÃO SALARIAL

O enfoque dado deriva essencialmente da disponibilidade contributiva do participante. Entretanto, é bastante comum vincular contribuições e expectativas relativas aos benefícios de aposentadoria em termos de percentual de salário. Neste contexto, a perspectiva de crescimento salarial é fator relevante no dimensionamento das contribuições.

Suponha S_x o salário de um participante com idade x e τ o percentual de contribuição aplicável ao salário. Admitindo-se que os salários sejam recompostos anualmente pela inflação observada e que os mesmos tenham crescimento anual real de $s\%$, $s > 0$ então, a equação de equilíbrio financeiro assume a forma

$$\tau S_x (1+r) [(1+s)^{y-x-1} + (1+s)^{y-x-2} (1+r) + \dots + (1+r)^{y-x-1}] = b \ddot{a}_y \quad (4-17)$$

Assim, considerando fixada a taxa de contribuição τ e admitidas como hipóteses o crescimento anual de salários à taxa s e que os investimentos proporcionem uma taxa de retorno anual das aplicações em $r\%$, segue, de imediato, o valor do benefício b :

$$b = \begin{cases} \tau S_x (1+r) \frac{(1+r)^{y-x} - (1+s)^{y-x}}{\ddot{a}_y (r-s)}, & r \neq s \\ \tau S_x \frac{(y-x)(1+r)^{y-x}}{\ddot{a}_y}, & r = s \end{cases} \quad (4-18)$$

De forma análoga, fixada a meta de benefício b determina-se o percentual de contribuição τ .

FLUXO DE PAGAMENTOS

Os modelos descritos pelas equações (4-15) e (4-18) partem do pressuposto de que o fluxo de pagamentos de benefícios e contribuições seja anual. A modificação no ritmo desse fluxo implica na adaptação dos modelos descritos. Para tanto vamos admitir que a frequência desses pagamentos seja mensal.

Sob condição inflacionária a ausência de ajustes nas contribuições importa na redução da capacidade acumulativa, implicando em montantes menores e, por conseqüência, benefícios reduzidos. Supondo que a taxa mensal de inflação $\mu > 0$ seja uniforme no período de capitalização, que as contribuições sejam atualizadas a cada 12 meses a partir da 1ª contribuição e, que r_m seja a rentabilidade mensal equivalente à rentabilidade anual r , o valor do benefício será:

$$b = \begin{cases} \tau S_x (1+r_m) \frac{\left[\frac{(1+r)(1+\mu)^{12} - 1}{(1+r_m)(1+\mu)^{12} - (1+\mu)^{12}} \right] \left[\frac{(1+r)^{y-x} - 1}{r} \right]}{12 \ddot{a}_y^{(12)}}, & r_m \neq 0 \text{ e } (1+r_m)(1+\mu) \neq 1 \\ \tau S_x (1+r) \frac{(1+r)^{y-x} - 1}{\ddot{a}_y^{(12)}}, & r_m \neq 0 \text{ e } (1+r_m)(1+\mu) = 1 \\ \tau S_x (y-x) \frac{(1+\mu)^{12} - 1}{12 \ddot{a}_y^{(12)} \mu (1+\mu)^{11}}, & r_m = 0 \end{cases} \quad (4-19)$$

Depreende-se que a inflação em maior grau contribui de forma perversa para a constituição do benefício, assim como baixas rentabilidades e o ingresso tardio no plano de benefícios. Já a postergação na data de concessão do benefício contribui de forma positiva para a melhoria do benefício.

Supondo que os salários sejam recompostos anualmente pela inflação observada e que os mesmos tenham crescimento anual real de $s\%$, $s > 0$, decorre da equação de equilíbrio o benefício b :

- se $(1+\mu)(1+r_m) \neq 1$

$$b = \begin{cases} \tau S_x (1+r_m) \frac{\left[\frac{(1+r)(1+\mu)^{12} - 1}{(1+r_m)(1+\mu)^{12} - (1+\mu)^{11}} \right] \left[\frac{(1+r)^{y-x} - (1+s)^{y-x}}{r-s} \right]}{12\ddot{a}_y^{(12)}}, & r \neq s \\ \tau S_x (y-x)(1+r_m)(1+r)^{y-x-1} \frac{\left[\frac{(1+r)(1+\mu)^{12} - 1}{(1+r_m)(1+\mu)^{12} - (1+\mu)^{11}} \right]}{12\ddot{a}_y^{(12)}}, & r = s \end{cases}$$

- se $(1+\mu)(1+r_m) = 1$

$$b = \begin{cases} \tau S_x (1+r) \frac{\left[\frac{(1+r)^{y-x} - (1+s)^{y-x}}{r-s} \right]}{\ddot{a}_y^{(12)}}, & r \neq s \\ \tau S_x \frac{(y-x)(1+r)^{y-x}}{\ddot{a}_y^{(12)}}, & r = s \end{cases} \quad (4-20)$$

Maiores detalhes sobre o desenvolvimento dos modelos descritos em (4-19) e (4-20) constam do no anexo I.

É oportuno citar que é usual definir como meta de benefício inicial um percentual, denotado por β , que expressa a fração salário que seria atribuído ao participante à época de concessão

desse benefício. Assim, ao calcular o valor do benefício b pelos modelos com vinculação salarial, segue de imediato o valor de β a partir da razão entre b e o salário projetado $s_x(1+s)^{y-x}$.

4.2 MODELO ESTOCÁSTICO

Como dissemos no capítulo 3, o benefício de aposentadoria a ser concedido em planos CD é indefinido, posto que durante a fase de acumulação diversos fatores podem influenciar o seu valor final.

O uso de modelos de simulação estocástica possibilita a condução de experimentos “what if” e testes de “stress” pela mudança nas hipóteses fundamentais, permitindo a identificação das forças que direcionam os resultados e a análise de sensibilidade destes frente a uma particular hipótese.

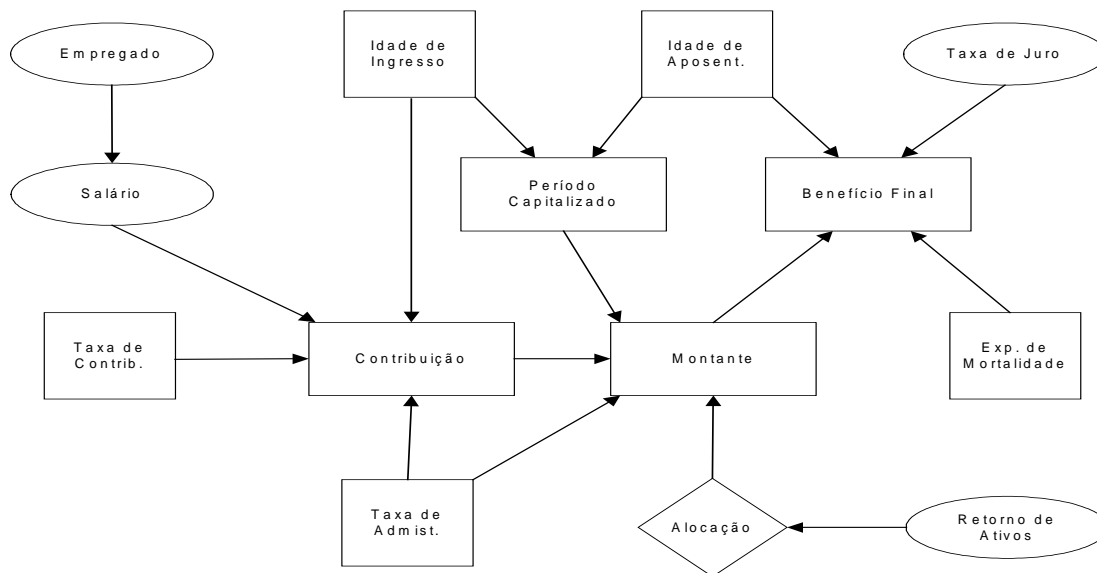
A simulação decorre da geração, baseada em distribuições de probabilidade, de um conjunto de resultados, condicional em hipóteses. No contexto de planos CD, o objetivo central é a constituição do fundo destinado à concessão do benefício de aposentadoria, condicionado às hipóteses de contribuições, retorno de ativos, crescimento salarial e mortalidade entre outros.

A operacionalização de planos CD é naturalmente segmentada em duas fases:

- I. fase de acumulação – onde os participantes do plano estão expostos aos riscos relacionados ao retorno de ativos, crescimento salarial, taxa de juro e desemprego;
- II. fase de concessão de benefícios – a entidade que assume a responsabilidade pelos pagamentos dos benefícios fica sujeita aos riscos de reinvestir o fundo acumulado à taxa de juro estipulada por ocasião do cálculo do benefício inicial, o risco de compatibilidade do fluxo de caixa e o risco de mortalidade inferior à experiência adotada. Já os participantes enfrentam o risco de redução no poder de compra de seus benefícios além do risco de conversão do fundo acumulado durante a fase ativa em benefício.

Uma descrição gráfica aproximada das relações que influenciam os planos CD, no contexto aqui referenciado está representada na figura abaixo.

Figura 3 - Modelo Estocástico de Acumulação em Plano C.D



Na figura as elipses expressam o conjunto de eventos incertos, o losango concentra todos os resultados possíveis para cada decisão e eventos incertos, os retângulos menores as variáveis que devem ser estabelecidas pelo participante ou pela entidade e os retângulos representam valores que se desconhecem no momento da decisão mas se resolvem de modo determinístico uma vez conhecidos os valores incertos.

Com a finalidade de estabelecer um modelo que descreva os fundos de aposentadoria na fase de acumulação são feitas hipóteses sobre os fatores de risco e variáveis de controle:

FATORES DE RISCO

- I. Retorno de Ativos – está diretamente relacionado com os tipos de ativos que a entidade irá investir.

- II. Taxa de Juros – compõe a anuidade que dará origem ao benefício de aposentadoria, considerando o montante alcançado na data da referida aposentadoria. É necessário formular um modelo de longo prazo consistente com o modelo de retorno de ativos.
- III. Crescimento Salarial (ou de Renda) – a acumulação depende do comportamento da renda do participante durante a fase de acumulação. Assim, o crescimento da renda e a distribuição desse crescimento são elementos a serem considerados no modelo global.
- IV. Empregabilidade – afeta a capacidade do participante manter suas contribuições.

VARIÁVEIS DE CONTROLE

Representam as variáveis que devem ser estabelecidas pelos participantes ou pela entidade:

- a) Taxa de contribuição – expressa em percentual do salário;
- b) Taxa de administração - expressa em percentual da contribuição ou do fundo acumulado;
- c) Idade de aposentadoria – idade em que o participante poderá converter o montante alcançado em benefício de aposentadoria;
- d) Idade de Ingresso - idade em que o participante ingressa no plano de aposentadoria;
- e) Alocação dos ativos financeiros – refere-se à composição da carteira de ativos, isto é, a estratégia de como deverão ser investidos os recursos destinados à aposentadoria.

4.2.1 MODELO DE ACUMULAÇÃO

O caráter contínuo do tempo sugere o uso de equações diferenciais estocásticas para descrever a evolução do fundo que dará origem ao benefício de aposentadoria. Tal foi o enfoque adotado por Blake, Cairns e Dowd (2000). Alternativamente, a modelagem dá-se de forma discreta, como em Haberman e Sung (1994) em planos BD e Haberman e Vigna (2002) em planos CD.

Seguindo o caminho discreto, uma representação do comportamento do fundo gerado pela capitalização das contribuições, objeto de conversão em renda vitalícia de aposentadoria, consta do modelo proposto a seguir:

$$f_{t+1} = [f_t + \tau(1 - c_2) S_0 e^{\kappa_t + v_t}] \left(\sum_{i=1}^n a_{i,t} e^{r_{i,t}} \right) (1 - c_1), \quad \sum_{i=1}^n a_{i,t} = 1 \quad \forall t \quad (4-21)$$

onde f_t é o valor correspondente ao fundo destinado à aposentadoria no instante t , τ é a taxa de contribuição incidente sobre o salário, c_1 é taxa de administração incidente sobre o fundo de aposentadoria, c_2 é taxa de administração incidente sobre as contribuições, S_0 representa o salário anual inicial do participante na idade x , κ_t é força de crescimento real dos salários durante o ano $[t, t+1]$, v_t é força de desemprego durante o ano $[t, t+1]$, $a_{i,t}$ corresponde à proporção dos recursos a serem alocados na classe de ativo i durante o ano $[t, t+1]$, e $r_{i,t}$ o retorno real relativo à classe de ativo i durante o ano $[t, t+1]$.

O modelo descrito sob forma geral de recorrência expõe o caráter dinâmico inerente ao comportamento do fundo: o valor do fundo no instante $t+1$ resulta da capitalização correspondente à soma do valor alcançado pelo fundo no instante t com a contribuição anual devida em t . A capitalização é líquida das despesas administrativas, assim como as contribuições anualmente previstas. Tais contribuições estão sujeitas à condição de emprego e variação de valor em razão de crescimento salarial.

A completa especificação do modelo de acumulação ora apresentado exige a definição de modelos auxiliares representativos do retorno de ativos, do grau de desemprego e do crescimento salarial, além da estratégia de alocação em ativos.

Supondo $v_t = \kappa_t = 0$, isto é, nulas as forças de desemprego e do crescimento real de salários no horizonte de acumulação, desconsiderando-se as taxas de administração e segmentando-se a alocação do ativo em duas classes, quais sejam, de alto risco (sub índice 1) e baixo risco (sub índice 2), o modelo anterior assume uma forma descrita por Haberman e Vigna (2002):

$$f_{t+1} = (f_t + \tau S_0) (a_{1,t} e^{r_{1,t}} + a_{2,t} e^{r_{2,t}}), \quad a_{1,t} + a_{2,t} = 1 \quad \forall t \quad (4-22)$$

RETORNO DOS ATIVOS

Os modelos utilizados para descrever o comportamento dinâmico do retorno de ativos são variados, como por exemplo, o de momentos estacionários, dinâmicos, volatilidade estocástica, valor extremo. Blake, Cairns e Dowd (2001) apresentam exemplos de aplicação utilizando-se de alguns modelos para descrever o retorno de ativos.

Entre os vários modelos de retorno de ativos, a classe dos modelos de momentos estacionários assume que os momentos não condicionais de primeira e segunda ordem do retorno são invariantes e independentes no tempo, o que é irreal em face da dinâmica observada no mercado financeiro interno e externo. Curioso observar que a despeito da falsidade dessa premissa seja encontrado um número apreciável de artigos onde a referida hipótese se faz presente.

ESTRATÉGIA DE ALOCAÇÃO

A decisão de alocação no longo prazo é fundamental em planos CD, já que o montante que dará origem à renda de aposentadoria resultará do retorno obtido, que, por sua vez, dependerá da estratégia de alocação escolhida. Portanto, a decisão de alocar está diretamente relacionada com o grau de aversão ao risco do gestor.

Assim, a estratégia de alocação varia de acordo com os objetivos traçados pelo gestor, por exemplo, minimizar a probabilidade de se obter uma renda de aposentadoria inferior a um valor referencial ou minimizar o risco de uma carteira para um dado retorno esperado.

No presente caso, a estratégia de alocação proposta consiste na alocação anual do montante em carteiras de ativos selecionadas de forma a minimizar o custo futuro resultante de desvios em relação à meta estabelecida pelo gestor. Tal meta será representada mediante valores referenciais para o fundo de aposentadoria em cada instante no período de acumulação.

A expressão que descreve a meta estabelecida para o fundo no instante t , F_t , foi definida de forma recorrente seguindo o modelo de evolução preconizado para f_t :

$$F_{t+1} = (F_t + \tau S_0)e^{r_t} \quad (4-23)$$

onde r_t é o retorno tomado como parâmetro para a evolução da meta estabelecida em cada instante t .

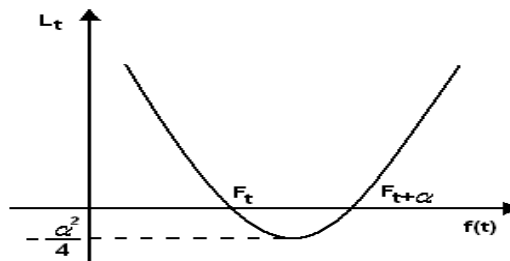
Tal retorno deverá estar calcado em bases racionais que tenham, por exemplo, correlação com o benefício pretendido ou com o retorno médio esperado das carteiras de ativos selecionadas.

Haberman e Vigna (2002) definem o custo no instante t a partir de uma função de perda do tipo $L(x)=x^2+\alpha x$, qual seja:

$$L_t = \begin{cases} (F_t - f_t)^2 + \alpha(F_t - f_t) & , t = 1, \dots, T-1 \\ \theta(F_t - f_t)^2 + \alpha(F_t - f_t), & t = T \end{cases} \quad (4-24)$$

Desta sorte, o custo é penalizado quando o fundo situa-se abaixo da meta estabelecida e acima de certo nível, qual seja, a meta mais α . A diferenciação de custo observada no instante T objetiva dar maior importância à meta final, aumentando a penalização ao se fixar $\theta > 1$.

Figura 4 - Função de Perda - L_t



O parâmetro α reflete o grau de aversão ao risco do gestor posto que o custo foi descrito através de uma função de perda cujo coeficiente de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt é $r_A(x) = L''(x)/L'(x) = 2/(2x + \alpha)$, que depende de α .

Nestes termos, o custo total futuro no instante t identifica-se a

$$G_t = \sum_{k=t}^T \delta^{k-t} L_k \quad (4-25)$$

onde $\delta = 1/(1+j)$ é um fator subjetivo de desconto anual.

A estratégia ótima de alocação será aquela que minimiza o custo esperado futuro, o que corresponde ao problema de determinar

$$\pi_t^* = \arg \min_{\pi_t} E[G_t | D_t] \quad (4-26)$$

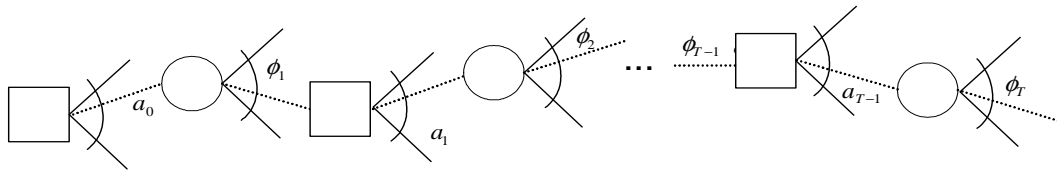
onde $D_t = \{a_{1,0}, \dots, a_{1,t-1}, f_0, \dots, f_t\} \in \{A_0 \times \dots \times A_{t-1}, \Phi_1 \times \dots \times \Phi_t\}$, A_k é o espaço das ações disponíveis no k-ésimo estágio, Φ_k corresponde ao espaço de estados da natureza em cada estágio e $\pi_t = \{\{a_{1,k}\}_{k=t,t+1,\dots,T-1}, 0 \leq a_{1,k} \leq 1\}$ onde.

Definindo $J(D_t) = \min_{\pi_t} E[G_t | D_t]$ $t=0,\dots,T-1$, e considerando o princípio de otimalidade de Bellman resulta a equação de recorrência fundamental:

$$J(D_t) = \min_{a_{1,t}} \{L_t + \delta E[J(D_{t+1}) | D_t]\} \quad (4-27)$$

Assim, o problema de alocação é um problema de decisão intertemporal em que a decisão num dado estágio depende da ação da ação tomada no estágio anterior:

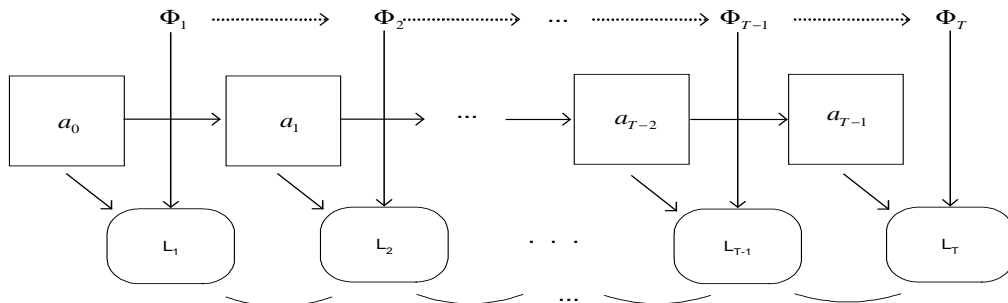
Figura 5 – Árvore de Decisão



Nestes termos, a estratégia ótima de alocação identifica-se à solução da equação de Bellman.

A solução deste problema de programação dinâmica (PPD) é obtida de forma retrospectiva a partir do último estágio T , procedendo-se de maneira recursiva até o estágio inicial:

Figura 6 - Problema de Alocação



Haberman e Vigna (2002) consideram espaços de estados independentes. O que propomos é justamente considerar a dependência intertemporal entre os estados:

Proposição:

Seja $f_{t+1} = (f_t + \tau S_0)(a_{1,t}e^{r_{1,t}} + a_{2,t}e^{r_{2,t}})$, $a_{1,t} + a_{2,t} = 1 \forall t$, $t=0, \dots, T-1$, modelo que descreve o comportamento de um fundo de aposentadoria de valor inicial f_0 , onde as seqüências $\{r_{1,t}\}$ e $\{r_{2,t}\}$ são descritas por um modelo dinâmico polinomial de primeira ordem, onde $D_{t+1} = \{a_{1,t}, r_{1,t}, r_{2,t}, D_t\}$.

Considere F_t a meta para esse fundo em cada instante t . Então:

(1) sob a condição inicial $J(D_T) = \theta [(F_T - f_T)^2 + \alpha(F_T - f_T)]$, a estratégia ótima relativa ao problema de programação dinâmica $J(D_t) = \min_{a_{1,t}} \{L_t + \delta E[J(D_{t+1}) | D_t]\}$ é dada por

$$a_{1,t}^* = \frac{g_{\mu_{2,t}}(2) - g_{\mu_{1,t}, \mu_{2,t}}}{g_{1,t}} + \frac{B_t(g_{\mu_{1,t}}(1) - g_{\mu_{2,t}}(1))}{A_t(f_t + \tau)g_{1,t}}, \text{ e} \quad (4-28)$$

$$(2) J(D_t) = A_t f_t^2 - 2B_t f_t + C_t \quad (4-29)$$

onde, $A_{t-1} = 1 + \delta \frac{g_{2,t-1}}{g_{1,t-1}} A_t$,

$$B_{t-1} = (F_{t-1} + \alpha/2) - \frac{\delta}{g_{1,t-1}} (\tau g_{2,t-1} A_t - g_{3,t-1} B_t),$$

$$C_{t-1} = F_{t-1}^2 - \alpha F_{t-1} + \frac{\delta}{g_{1,t-1}} \tau^2 g_{2,t-1} A_t - 2 \frac{\delta}{g_{1,t-1}} \tau \{g_{3,t-1} + \frac{[g_{\mu_{1,t-1}}(1) - g_{\mu_{2,t-1}}(1)]^2}{\tau A_t}\} B_t + \delta C_t,$$

$$g_{1,t-1} = g_{\mu_{2,t-1}}(2) + g_{\mu_{1,t-1}}(2) - 2g_{\mu_{1,t-1}, \mu_{2,t-1}}(1,1) > 0,$$

$$g_{2,t-1} = g_{\mu_{2,t-1}}(2)g_{\mu_{1,t-1}}(2) - [g_{\mu_{1,t-1}, \mu_{2,t-1}}(1,1)]^2 > 0,$$

$$g_{3,t-1} = g_{\mu_{2,t-1}}(1)g_{\mu_{1,t-1}}(2) + g_{\mu_{2,t-1}}(2)g_{\mu_{1,t-1}}(1) - g_{\mu_{1,t-1}, \mu_{2,t-1}}(1,1)(g_{\mu_{2,t-1}}(1) + g_{\mu_{1,t-1}}(1)) > 0,$$

$$g_{\mu_i,t}(j) = E[e^{j r_{i,t}} | D_t], i,j=1,2 \text{ e } g_{\mu_1,\mu_2,t}(j,l) = E[e^{j r_{1,t} + l r_{2,t}} | D_t], j=l=1$$

A prova da proposição encontra-se no anexo II.

Corolário

Se admitirmos que em cada uma das classes de ativo as seqüências de retorno anual, digamos, $\{r_{1,t}\}$ e $\{r_{2,t}\}$, são independentes e identicamente distribuídas, $r_{i,t} \sim (\mu_i, \sigma_i^2)$, para $i=1,2$ então:

(1) a estratégia ótima relativa ao PPD é dada por

$$a_{1,t}^* = \frac{g_{\mu_2}(2) - g_{\mu_1,\mu_2}}{g_1} + \frac{B_t(g_{\mu_1}(1) - g_{\mu_2}(1))}{A_t(f_t + \tau)g_1} \quad (4-30)$$

(2) $J(f_t) = A_t f_t^2 - 2B_t f_t + C_t$, onde A_t , B_t e C_t guardam a mesma expressão de recorrência apontada na proposição anterior, com os valores esperados (g 's) que não mais dependem do tempo.

Sob a hipótese considerada $f_{t+1} | D_t \sim f_{t+1} | f_t \Rightarrow \{f_t\}$ é markoviano $\Rightarrow G_t | D_t \sim G_t | f_t$.

Assim, podemos redefinir a função de valor J no instante t em função exclusiva de f_t ,

$$J(f_t) = \min_{\pi_t} E[G_t | f_t] \quad t=0,\dots,T-1 \quad (4-31)$$

conduzindo, deste modo, à equação fundamental

$$J(f_t) = \min_{a_{1,t}} \{L_t + \delta E[J(f_{t+1}) | f_t]\} \quad (4-32)$$

cujas solução segue o mesmo esquema adotado na prova da proposição em destaque.

Definida a estratégia de alocação será então possível, mediante a simulação dos retornos dos ativos, avaliar entre outras possibilidades o comportamento dos percentuais de alocação, a distribuição do montante e da renda de aposentadoria, e a probabilidade de não atendimento à meta.

O desconhecimento *a priori* do valor dos retornos durante o período de acumulação importa em realizar previsões que irão alimentar o modelo de alocação. Para tanto, há de se especificar a distribuição de probabilidades subjacente ao modelo de retorno. Assim, sob o modelo polinomial referenciado em (2-19), dois critérios se apresentam:

- a) simular as trajetórias dos retornos durante o período de acumulação mediante a simulação da distribuição conjunta desses retornos, condicionada à informação disponível à época de previsão, isto é, simular $(r_{t_0+1}, \dots, r_{t_0+T} | D_{t_0})$; a distribuição conjunta é simulada a partir das distribuições preditivas a um passo à frente, sorteando-se um valor dessa preditiva que será utilizado como nova informação destinada a alimentar o ciclo de atualização durante o período de acumulação: sortear $r_{t_0+1}^*$ de $(r_{t_0+1} | D_{t_0})$; a seguir sortear $r_{t_0+2}^*$ de $(r_{t_0+2} | r_{t_0+1} = r_{t_0+1}^*, D_{t_0})$; manter o procedimento até obter $r_{t_0+T}^*$, completando deste modo trajetória possível de retorno no período de acumulação;
- b) estabelecer previsões a partir da distribuição preditiva k passos à frente.

A diferença entre as unidades temporais em que se encontram os dados disponíveis e aquela utilizada no modelo de retorno implica em um problema de agregação no tempo. Por exemplo, os dados existentes refletem o comportamento mensal e o modelo considera a perspectiva anual.

Se os retornos estiverem representados de forma logarítmica e a alternativa de projeção é o da simulação da trajetória desses retornos, a agregação se dá pela simples soma dos valores sorteados em grupos consecutivos de k elementos, $k > 1$, correspondentes à unidade de projeção.

De outra forma é necessário estabelecer a distribuição preditiva correspondente à soma de k retornos, diferida de múltiplos de k , isto é, diferida de $z = kl$, $l = 0, 1, 2, \dots$, condicionada à informação disponível no momento da previsão.

Considerando o modelo polinomial de primeira ordem segue de imediato que:

$$r_{t_0+k} = \mu_{t_0} + \sum_{j=1}^k \omega_{t_0+k} + v_{t_0+k}, e \quad (4-33)$$

$$X_{t_0}(k) = \sum_{j=1}^k r_{t_0+j} = k\mu_{t_0} + \sum_{j=1}^k j\omega_{t_0+k+1-j} + \sum_{j=1}^k v_{t_0+j} \quad (4-34)$$

Assim, sob D_{t_0} decorrem as preditivas:

$$r_{t_0+k} | D_{t_0} \sim T_{n_{t_0}}(m_{t_0}, C_{t_0} + \sum_{j=1}^k W_{t_0+k} + S_{t_0}), e \quad (4-35)$$

$$X_{t_0}(k) | D_{t_0} \sim T_{n_{t_0}}(km_{t_0}, k^2 C_{t_0} + \sum_{j=1}^k j^2 W_{t_0+k+1-j} + kS_{t_0}) \quad (4-36)$$

Se definirmos ${}_z / X_{t_0}(k)$ como sendo a soma de k retornos consecutivos diferidos de $z = kl$

grupos de retornos, isto é, ${}_z / X_{t_0}(k) = \sum_{j=1}^k r_{t_0+z+j}$, então:

$${}_z / X_{t_0}(k) = k\mu_{t_0} + k \sum_{j=1}^z \omega_{t_0+j} + \sum_{j=1}^k j\omega_{t_0+z+k+1-j} + \sum_{j=1}^k v_{t_0+z+j}, e \quad (4-37)$$

$${}_z / X_{t_0}(k) | D_{t_0} \sim T_{n_{t_0}}(km_{t_0}, k^2 C_{t_0} + k^2 \sum_{j=1}^z W_{t_0+j} + \sum_{j=1}^k j^2 W_{t_0+z+k+1-j} + kS_{t_0}) \quad (4-38)$$

Portanto, sob o modelo polinomial, estão caracterizadas as distribuições de probabilidades necessárias à previsão dos retornos que servirão de base para o modelo de alocação proposto.

4.3 SIMULAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DA RESERVA COLETIVA

Atendidas as condições para a conversão do montante acumulado no período laborativo em renda vitalícia, a entidade estará sujeita aos riscos de realocação dos investimentos, mortalidade inferior à experiência adotada e compatibilidade do fluxo de caixa.

Vamos focar os dois primeiros riscos, a partir da simulação da distribuição de probabilidade da reserva coletiva no tocante às rendas de aposentadoria concedidas.

Referências básicas sobre a distribuição reservas individuais e coletivas encontram-se em Beard et al (1984), Panjer e Willmot (1992) e Bowers et al (1997). Enfoques estocásticos relativos a anuidades atuariais são discutidos em Dufresne (1990 e 1991) e Soininen (1991), limites estocásticos para o valor presente de fluxo de caixa e somas de variáveis aleatórias onde se observa dependência estocástica são tratados em Denuit et al (1999), Goovaerts et al (2000), e Dahene et al (2001).

Preliminarmente à simulação da distribuição da reserva coletiva há de se caracterizar a distribuição da reserva individual atribuível a cada participante.

4.3.1 DISTRIBUIÇÃO DA RESERVA INDIVIDUAL

Considere que seja paga ao participante aposentado de idade x uma unidade de capital no início de cada ano em que ele sobreviva.

Defina I_{x+t} é a variável aleatória indicadora da sobrevivência do indivíduo de idade x à idade $x+t$.

$$I_{x+t} = \begin{cases} 1, & \text{em caso de sobrevivência à idade } x+t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4-39)$$

Assim, a distribuição de probabilidade de I_{x+t} é Bernoulli, com parâmetro ${}_t p_x$, onde ${}_t p_x = l_{x+t} / l_x$ e l_x é o número de sobreviventes à idade x segundo a função de sobrevivência derivada da experiência de mortalidade escolhida.

Conseqüentemente, o compromisso da entidade em relação ao participante aposentado de idade x , denotado por V_x , é também uma variável aleatória:

$$V_x = 1 + \sum_{t=1}^{w-x-1} v^t I_{x+t}, \quad (4-40)$$

onde i é a taxa de juro anual, supostamente não estocástica, $v = \frac{1}{1+i}$ é o desconto financeiro e w é a idade limite da tábua, isto é, a idade em que não existem mais sobreviventes ($l_w=0$).

A variável aleatória V_x assume os valores $1, 1+v, 1+v+v^2, \dots, \frac{1-v^{w-x}}{1-v}$, segundo a distribuição de probabilidades a seguir:

$$P(V_x = 1) = P(I_x = 0, I_{x+1}=0, \dots, I_{w-1}=0) = P(I_x = 0) = 1 - p_x = q_x$$

$$P(V_x = 1+v) = P(I_x = 1, I_{x+1}=0, \dots, I_{w-1}=0) = P(I_x=1) P(I_{x+1} = 0 / I_x=1) = p_x q_{x+1}$$

...

Generalizando, obtemos:

$$P(V_x = 1+v+v^2+ \dots +v^k) = P(I_x = 1, I_{x+1}=1, \dots, I_{x+k}=1, I_{x+k+1}=0, \dots, I_{w-1}=0) =$$

$$= P(I_x=1) P(I_{x+1}= 1 / I_x=1) \dots P(I_{x+k} = 1 / I_{x+k-1}=1) P(I_{x+k+1} = 0 / I_{x+k}=1) =$$

$$= p_x p_{x+1} \dots p_{x+k} q_{x+k+1} = k p_x q_{x+k} = \frac{l_{x+k} - l_{x+k+1}}{l_x}, k = 0, \dots, w-x-1 \quad (4-41)$$

ESPERANÇA E VARIÂNCIA DE V_x

A esperança de V_x é obtida a partir da propriedade da esperança da combinação linear de variáveis aleatórias:

$$E[V_x] = E\left[1 + \sum_{k=1}^{w-x-1} v^k I_{x+k}\right] = 1 + \sum_{k=1}^{w-x-1} v^k \cdot E[I_{x+k}] = \sum_{k=0}^{w-x-1} v^k p_x = \ddot{a}_x \quad (4-42)$$

o que corresponde à anuidade atuarial relativa ao pagamento de uma renda vitalícia anual antecipada no modelo determinístico.

Analogamente, obtemos a expressão para a variância de V_x :

$$\text{Var}[V_x] = V \left[1 + \sum_{k=1}^{w-x-l} v^k I_{x+k} \right] = \sum_{m=1}^{w-x-l} \sum_{n=1}^{w-x-l} \text{cov}[v^m I_{x+m}, v^n I_{x+n}] = \sum_{m=1}^{w-x-l} \sum_{n=1}^{w-x-l} v^{m+n} \text{cov}[I_{x+m}, I_{x+n}]$$

$$\text{cov}[I_{x+m}, I_{x+n}] = E[I_{x+m} I_{x+n}] - E[I_{x+m}] \cdot E[I_{x+n}]$$

$$E[I_{x+m} I_{x+n}] = P(I_{x+m} = 1, I_{x+n} = 1) = P(I_{x+\max\{m,n\}} = 1) = \max\{m,n\} p_x$$

$$\text{Daí, } \text{cov}[I_{x+m}, I_{x+n}] = \max\{m,n\} p_x - m p_x \cdot n p_x$$

Portanto,

$$\text{Var}[V_x] = \sum_{m=1}^{w-x-l} \sum_{n=1}^{w-x-l} v^{m+n} [\max\{m,n\} p_x - m p_x \cdot n p_x] \quad (4-43)$$

4.3.2 RESERVAS MATEMÁTICAS COLETIVAS

Supondo que existam N aposentados, a reserva matemática coletiva é a soma das N reservas matemáticas individuais:

$$V = \sum_{k=1}^N V_{x_k}, \text{ onde } x_k \text{ é a idade do } k\text{-ésimo indivíduo.}$$

Admitindo-se que a experiência de mortalidade entre indivíduos dá-se de forma independente, a distribuição de V corresponde à distribuição da soma de N variáveis aleatórias independentes.

A obtenção da distribuição exata de V pode ser determinada mediante técnicas tais como convoluções e funções geratrizes. Ocorre que para fins práticos o tamanho de N inviabiliza a adoção dessas técnicas, o que pode ser contornado mediante a simulação de V .

4.3.3 CARREGAMENTOS DE SEGURANÇA

A fase de distribuição inicia-se com a conversão do montante alcançado em uma renda vitalícia, cujo valor inicial deriva da equação de equilíbrio geral $M = b \ddot{a}_y$, onde M é o montante alcançado na idade y , b o benefício inicial de aposentadoria e \ddot{a}_y o valor esperado de

uma renda vitalícia unitária paga anualmente, de forma antecipada, ao participante que se aposentar com a idade y .

Nestes termos, estima-se o benefício a partir do valor esperado da renda sem que se expresse a margem de segurança envolvida na aplicação do modelo, adotando-se o mesmo procedimento para estimativas de valor da reserva coletiva.

A questão relevante no processo de conversão e também de estimação do valor da reserva coletiva é saber qual o coeficiente de carregamento de segurança λ a ser aplicado sobre o valor esperado da renda (ou da reserva coletiva) para que se tenha uma probabilidade maior ou igual a $(1 - \alpha)\%$ de que a reserva matemática não venha a superar este valor carregado.

Entre as soluções possíveis à questão destacamos os métodos da distribuição acumulada, da aproximação pela distribuição normal e a utilização de desigualdades.

O método da distribuição acumulada toma por base o conhecimento da distribuição de probabilidade da variável aleatória de interesse ou de sua simulação. Seja X tal variável aleatória. Uma vez fixado o nível de certeza, bastará identificar pela distribuição acumulada F_X o valor p^* tal que $F_X(p^*) \geq 1 - \alpha$, isto é $p^* = F_X^{-1}(1 - \alpha)$. Assim, o carregamento de segurança aplicável ao valor esperado de X é simplesmente

$$\lambda = p^*/E[X] - 1 \quad (4-44)$$

A convergência da distribuição de somas de variáveis aleatórias independentes com momentos de segunda ordem finitos é assegurada pela Lei dos Grandes Números. Portanto, considerando que a distribuição da reserva coletiva V foi representada como a soma de variáveis independentes com variância finita, desde que se tenha um grande número de parcelas, pode-se dizer que $V \approx \text{Normal}(E[V], \text{Var}[V])$. Assim, o coeficiente de carregamento λ decorre da relação $P(V \geq (1 + \lambda) E(V)) \geq 1 - \alpha$, isto é,

$$\lambda = E[V] + z_{1-\alpha} (\text{Var}[V])^{1/2} \quad (4-45)$$

Desigualdades como a de Tchebycheff (a) e Cantelli (b) definem valor limite para a probabilidade de eventos aleatórios utilizando-se apenas o conhecimento de algumas medidas

associadas à distribuição de probabilidade subjacente X como, por exemplo, o valor esperado e a variância:

$$(a) P(|X - E[X]| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{(\text{Var}[X])^2}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0 \quad (4-46)$$

$$(b) P(X - E[X] \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{(\text{Var}[X])^2}{(\text{Var}[X])^2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon \geq 0 \quad (4-47)$$

No caso em tela, são conhecidos o valor esperado e a variância das distribuições das reservas matemáticas individual e coletiva o que permitirá o cálculo do carregamento de segurança a partir da desigualdade de Cantelli posto que a de Tchebycheff superestima o valor limite para a probabilidade de eventos de interesse.

Logo, o carregamento de segurança surge da relação:

$$P(V - E[V] \leq \lambda E[V]) \geq 1 - \frac{(\text{Var}[V])^2}{(\text{Var}[V])^2 + (\lambda E[V])^2} \geq 1 - \alpha, \quad \varepsilon \geq 0$$

ou seja,

$$\lambda = \left(\frac{(1 - \alpha)\text{Var}[V]}{\alpha(E[V])^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) |q| \quad (4-48)$$

onde q é o coeficiente de variação da variável aleatória V . Curioso observar que para o nível de confiança de 50%, o carregamento de segurança identifica-se ao coeficiente de variação.

5 APLICAÇÃO

Seguindo a dicotomia sugerida no capítulo 3 para a avaliação de planos de contribuição definida, o presente capítulo contempla a aplicação de modelos discutidos no capítulo anterior relativamente às fases de acumulação e distribuição em planos CD. Na primeira fase é dada ênfase no modelo individual de acumulação, enquanto na segunda o enfoque é coletivo, onde se avalia a situação de uma carteira de aposentadorias da entidade de previdência complementar EXEMPLO.

5.1 FASE DE ACUMULAÇÃO

Preliminarmente a aplicação concentra-se na fase acumulação de um plano de aposentadoria, estruturado na modalidade CD, oferecido pela entidade EXEMPLO. A perspectiva do benefício inicial de aposentadoria é avaliada a partir dos modelos determinístico e estocástico, expressos pelas equações (4-15) e (4-22), este último condicionado a uma política ótima de alocação de ativos (4-26). Para tanto, foram selecionados 2 perfis etários de ingresso em planos CD correspondentes às idades de 25 e 35 anos.

O plano de benefícios oferecido pela entidade estabelece que a renda anual vitalícia aposentadoria será calculada com base no montante individual alcançado aos 60 anos de idade e paga de forma antecipada a partir desta idade.

5.1.1 PREMISSAS

As premissas consideradas no desenvolvimento da aplicação foram as seguintes:

- a) taxa de contribuição, τ , fixada em 0,108, correspondente à diferença entre a alíquota máxima brasileira para dedução da base de cálculo do Imposto de Renda com contribuições para entidades de previdência complementar, estabelecida em 12%, e a taxa de administração, arbitrada em 10%;
- b) experiência de mortalidade geral, segregada por sexo, baseada na AT-83 (TSA, Vol XXXIII, pp.674-735);

c) fundo inicial considerado nulo, isto é, não se consideram os efeitos da portabilidade de direitos ou poupança individual ao ingressar na entidade;

d) salário anual inicial igual a 1 u.m. (unidade monetária);

5.1.1.1 MACRO ALOCAÇÃO DE ATIVOS

As oportunidades de alocação foram segmentadas de maneira macro em duas carteiras: ativos de renda variável, cujos retornos estão sujeitos à flutuação significativa de mercado, e ativos de renda fixa, onde a variabilidade dos retornos dá-se em menor escala.

O modelo de simulação de retorno utilizado pressupõe que em cada uma das classes de ativo as seqüências de retorno anual, $\{r_{1,t}\}$ e $\{r_{2,t}\}$, sejam independentes e identicamente distribuídas, de sorte que $r_{i,t} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, para $i=1,2$, com $\mu_1 \geq \mu_2$ e $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 > 0$, onde $r_{1,t}$ e $r_{2,t}$ são correlacionados, com coeficiente de correlação $\rho_{12}=\rho$.

Os parâmetros das distribuições e o coeficiente de correlação utilizados na projeção dos retornos foram definidos em função de 3 cenários para o futuro:

CENÁRIO-1

Os analistas de risco da entidade EXEMPLO definem os índices BOVESPA e SELIC como referenciais para o retorno das carteiras de renda variável e fixa, ambos deflacionados pelo Índice Geral de Preços no conceito de disponibilidade interna (IGP-DI), divulgado pela Fundação Getúlio Vargas (FGV);

O índice BOVESPA – Ibovespa é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro, que não sofreu modificações metodológicas desde a sua implementação em 02/01/1968, enquanto a taxa SELIC é o resultado da média diária das negociações dos títulos públicos federais, ou seja, é o preço do dinheiro;

CENÁRIO-2

Neste cenário, admite-se no futuro de longo prazo que o retorno das carteiras de renda fixa e variável acompanhe os índices de mercado do Reino Unido referentes à bolsa de valores

(*equities*) e de títulos do governo (*UK-Bonds*). Os parâmetros referentes às distribuições de interesse foram estimados como a média, o desvio padrão e o coeficiente de correlação dos retornos reais históricos observados no período de 1900 a 2001, conforme consta do relatório “*Rates of return for FSA prescribed projections*” divulgado em junho de 2003 pela *The Financial Services Authority* (FSA). A FSA é um órgão não governamental do Reino Unido, independente, com poderes estatutários conferidos pelo “*Financial Services and Markets Act 2000*”.

CENÁRIO-3

Este último cenário considera o retorno das carteiras em referência compassado com os índices de mercado de ações (*stocks*) e de títulos do governo (*US-Bonds*) dos Estados Unidos. O período de observação e as estimativas seguem o critério descrito no cenário de número 2 e dados obtidos no referenciado relatório da FSA.

Os parâmetros concernentes às distribuições dos retornos nos três cenários constam da tabela que se segue:

Tabela 1 – Parâmetros para Projeção de Retornos

| CENÁRIO | MÉDIA (μ) | | DESVIO PADRÃO (σ) | | CORELAÇÃO(ρ) |
|---------|-----------------|----------|----------------------------|----------|---------------------|
| | Ações | Tit. Gov | Ações | Tit. Gov | Ações X Tit. Gov. |
| 1 | 0,0950 | 0,0510 | 0,1660 | 0,0420 | 0,7500 |
| 2 | 0,0542 | 0,0127 | 0,1919 | 0,1370 | 0,5600 |
| 3 | 0,0631 | 0,0161 | 0,1965 | 0,0956 | 0,4200 |

Em todos os cenários os retornos foram calculados de forma geométrica evitando, deste modo, o comportamento anormal dos índices sob a hipótese de normalidade, conforme descrito por Jorion (1997).

A taxa de juro utilizada no cálculo da anuidade correspondente à renda de aposentadoria foi fixada em função do cenário relativo à macro alocação de ativos, considerando-se 6% no cenário-1, que é o limite máximo permitido na legislação brasileira em vigor (Resolução CGPC Nº 11 de 21/08/2002), e 3% nos demais cenários conforme previsto nas projeções da FSA, implicando em fatores de desconto subjetivos de 0,943396 e 0,970874 respectivamente.

A meta estabelecida para o fundo individual no instante t foi fixada inicialmente em termos de uma taxa de retorno uniforme, r , no período previsto de capitalização, de forma que o valor futuro das contribuições se iguale ao valor atual dos encargos com o pagamento de uma renda anual, antecipada, de caráter vitalício, equivalente a 100% da renda anual que percebia o participante em atividade. Os valores utilizados constam da tabela abaixo.

Tabela 2 – Taxa de Retorno Uniforme (r)

| Sexo | Prazo (em anos) | | Prazo (em anos) | |
|-----------|-------------------|-------|-----------------|-------|
| | Cenário 1 | | Cenários 2 e 3 | |
| | 25 | 35 | 25 | 35 |
| Masculino | 0,098 | 0,056 | 0,114 | 0,068 |
| Feminino | 0,103 | 0,060 | 0,120 | 0,073 |

Alternativamente a meta para o fundo individual foi estabelecida em termos da média das taxas de retorno de ações e títulos do governo, conforme o cenário adotado, no que passamos a denominar meta em função das taxas de mercado.

A penalidade imposta ao custo na meta terminal, expressa pelo parâmetro θ , foi de duas unidades 2, enquanto o parâmetro α , que reflete o grau de aversão ao risco, teve seu valor foi especificado em zero, denotando total aversão ao risco.

A avaliação do risco foi conduzida a partir da probabilidade do não atendimento da meta terminal, mensurada pela razão entre o número de falhas no atendimento à meta terminal, N_f , e o número de simulações realizadas, N , isto é $P = N_f/N$.

Os encargos com aposentadoria foram calculados com base na anuidade antecipada \ddot{a}_x , considerando-se a idade de 60 anos, a experiência de mortalidade indicada (AT-83), segregada por sexo, e a taxa de juros associada a cada cenário:

Tabela 3 – Anuidade para Cálculo da Renda de Aposentadoria

| Sexo | \ddot{a}_{60} | |
|-----------|-----------------|-----------|
| | Juro | |
| | 3% | 6% |
| Masculino | 16,234105 | 12,236279 |
| Feminino | 18,119698 | 13,277799 |

MODELO DE RETORNO REAVALIADO

O histórico dos principais indicadores do Brasil revela, de forma inequívoca, extrema volatilidade em seus índices representativos.

Aduza-se que com a globalização dos mercados eleva-se a quantidade de fatores que influenciam o comportamento desses índices, que em última instância tem o seu poder de explicação reduzida na medida em que o tempo passa.

Nesse ambiente, extremamente dinâmico, afigura-se, com maior propriedade, um modelo seqüencial de sorte a permitir o constante aprendizado em face da incorporação de novas informações.

Assim, o problema de alocação ótima sob o conceito de meta foi revisto onde se considera retorno de forma dinâmica e dados históricos brasileiros de índices representativos de renda fixa e variável já citados.

O modelo de retorno de momentos estacionários foi substituído pelo modelo polinomial de primeira ordem, com variância constante e desconhecida V descrito em (2-19):

A previsão dos retornos foi feita a partir de dados históricos mensais das taxas selic e do índice mensal do ibovespa no período de 01/1995 a 02/2004. Em ambos os casos foram utilizados o índice nacional de preços ao consumidor INPC/FIBGE como deflator e retornos tratados em termos logarítmicos.

Os fatores de desconto utilizados nos modelos de retorno (selic e ibovespa) foram fixados de forma subjetiva, seguindo a sugestão da literatura que aponta como valor típico $\delta = 0,98$.

Preliminarmente as séries de retornos foram trabalhadas de forma independente, e posteriormente correlacionadas utilizando-se a decomposição de Choleski relativamente à matriz de correlação, considerada estática. Foram consideradas 5 hipóteses de correlação entre as séries, a saber: -1, -1/2, 0, 1/2 e 1.

A partir de cada preditiva a um passo foi sorteado um retorno mensal e utilizado como informação destinada a realimentar o ciclo de atualização durante o período de acumulação.

Desta forma, para cada série considerada foram feitas 3.000 simulações independentes de trajetórias de retorno, compreendendo o ciclo de acumulação.

Os retornos anuais foram obtidos somando-se a cada doze meses os correspondentes retornos mensais, resultando desta forma em 3.000 amostras da distribuição de retornos anuais, para cada ano na fase de acumulação. Deste modo, em cada ano do período de acumulação a distribuição dos retornos anuais foi aproximada pela normal com média e variância, parâmetros estes obtidos a partir dos dados amostrais obtidos por simulação.

O modelo de acumulação utilizado seguiu a forma definida em (4-22), e a alocação ótima o disposto na proposição, considerando $\alpha=0$ e $\theta=2$, enquanto o perfil etário de ingresso considerado foi de 25 anos de idade (35 anos de acumulação), sexo masculino.

5.1.2 RESULTADOS

5.1.2.1 MODELO DETERMINÍSTICO

A projeção do benefício inicial de aposentadoria mediante a aplicação do modelo determinístico (4-15), considerando-se os perfis etários de ingresso e as taxas médias de retorno (r) nos cenários definidos, está sintetizada na tabela a seguir:

Tabela 4 – Projeção do Benefício Inicial

| CENÁRIOS | RETORNO (%a.a.) | | r | BENEFÍCIO INICIAL PROJETADO | | | |
|----------|-----------------|--------------------|------|-----------------------------|------|---------------|------|
| | AÇÕES | TÍTULOS DO GOVERNO | | IDADE 25 ANOS | | IDADE 35 ANOS | |
| | | | | MASC. | FEM. | MASC. | FEM. |
| 1 | 9,50 | 5,1 | 7,30 | 1,49 | 1,37 | 0,65 | 0,60 |
| 2 | 5,42 | 1,27 | 3,35 | 0,45 | 0,40 | 0,26 | 0,24 |
| 3 | 6,31 | 1,61 | 3,96 | 0,51 | 0,46 | 0,29 | 0,26 |

Avaliando os resultados obtidos, verifica-se que o benefício projetado para os participantes que aderem ao plano de aposentadoria aos 25 anos supera o benefício daqueles que ingressam com a idade de 35 anos. Tal fato ocorre em virtude das contribuições serem de igual valor em prazos distintos de capitalização relacionados a uma data focal única para a conversão do montante em renda de aposentadoria.

Outro aspecto observado refere-se ao benefício projetado para os participantes do sexo feminino que se mostra inferior àqueles indicados para o sexo masculino. A diferença entre as projeções resulta da longevidade feminina que supera a correspondente masculina, implicando em maiores custos com a aposentadoria de mulheres.

Os benefícios projetados no cenário 1 são maiores que os projetados no cenário 3 que, por sua vez, superam aqueles apontados no cenário 2, como consequência das taxas de retorno intrínsecas a cada cenário.

De forma global, os benefícios projetados são inferiores a 68% da remuneração do participante, excetuando-se a condição de ingresso aos 25 anos de idade sob o cenário 1.

5.1.2.2 MODELO ESTOCÁSTICO

Os resultados ora apresentados foram obtidos a partir de 3.000 simulações realizadas para cada perfil etário de ingresso, segregado por sexo, em cada cenário avaliado, nos conceitos de meta. Os programas de cálculo e simulação relativos ao fundo, meta, alocação e montante, foram desenvolvidos no ambiente s-plus.

META EM FUNÇÃO DO BENEFÍCIO

Observadas as premissas estabelecidas para esta aplicação, o resultado da aplicação do modelo de simulação indicado encontra-se sumarizado na tabela a seguir, onde se apresentam, para cada cenário e perfil etário de ingresso, as estatísticas relativas à simulação do benefício inicial e a probabilidade de não atendimento à meta.

Tabela 5 Simulação do Benefício Inicial de Aposentadoria

| ESTATÍSTICAS | CENÁRIO 1 | | | | CENÁRIO 2 | | | | CENÁRIO 3 | | | |
|-------------------------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|
| | 25 anos masculino | 35 anos masculino | 25 anos feminino | 35 anos feminino | 25 anos masculino | 35 anos masculino | 25 anos feminino | 35 anos feminino | 25 anos masculino | 35 anos masculino | 25 anos feminino | 35 anos feminino |
| Média | 1,007 | 0,691 | 0,980 | 0,649 | 0,554 | 0,323 | 0,509 | 0,290 | 0,605 | 0,346 | 0,559 | 0,310 |
| Desvio padrão | 0,152 | 0,191 | 0,150 | 0,193 | 0,292 | 0,170 | 0,279 | 0,154 | 0,250 | 0,155 | 0,247 | 0,141 |
| Percentis | | | | | | | | | | | | |
| 0,050 | 0,777 | 0,391 | 0,717 | 0,360 | 0,203 | 0,135 | 0,183 | 0,121 | 0,258 | 0,161 | 0,231 | 0,144 |
| 0,250 | 0,922 | 0,541 | 0,906 | 0,499 | 0,341 | 0,208 | 0,307 | 0,187 | 0,412 | 0,238 | 0,370 | 0,213 |
| 0,500 | 0,997 | 0,685 | 0,977 | 0,629 | 0,491 | 0,282 | 0,445 | 0,253 | 0,568 | 0,312 | 0,513 | 0,280 |
| 0,750 | 1,090 | 0,847 | 1,063 | 0,797 | 0,711 | 0,391 | 0,652 | 0,351 | 0,779 | 0,415 | 0,718 | 0,372 |
| 0,950 | 1,265 | 0,985 | 1,220 | 0,972 | 1,087 | 0,647 | 1,029 | 0,578 | 1,047 | 0,654 | 1,010 | 0,586 |
| Probabilidade de não atingir a meta | 0,474 | 0,965 | 0,578 | 0,978 | 0,919 | 0,994 | 0,944 | 0,997 | 0,924 | 0,997 | 0,948 | 0,999 |

Meta definida em função do benefício

Comparativamente às taxas de retorno dos ativos, a meta fixada em termos do benefício final de aposentadoria importou em altas taxas referenciais de retorno anual à exceção daquelas estabelecidas para o perfil de ingresso aos 25 anos de idade no cenário 1.

Os gráficos referentes aos percentis de alocação ótima e percentis do montante frente à meta estabelecida constam do anexo III.

Diante dos resultados obtidos, em que se consideram contribuições estáticas de 10,8% sobre o salário, observa-se em cada cenário avaliado, que a distribuição do benefício inicial relativa aos participantes que ingressarem aos 25 anos de idade domina àquela relativa aos que ingressam ao 35 anos, isto é, para um dado nível de benefício apresenta maior probabilidade de se obter valores maiores ou iguais a esse benefício, gerando, deste modo, melhores benefícios com menor possibilidade de não atendimento à meta.

A mesma dominância também é verificada quando se avalia a distribuição do benefício inicial referente aos sexos masculino e feminino. Comparativamente aos homens, as mulheres apresentam, para um dado nível de benefício, probabilidade menor de obter valores iguais ou superiores a esse nível, conduzindo, desta forma, a menores benefícios e possibilidade de atendimento da meta estabelecida.

De modo geral, as distribuições de benefício no cenário 1 apresentam dominância em relação aos cenários 2 e 3, gerando melhores benefícios e maior probabilidade de alcançar a meta firmada. Mais discretamente, as distribuições do cenário 3 dominam, no sentido ora considerado, àquelas relativas ao cenário 2.

A probabilidade de não atendimento à meta é elevada, superando a 91% em quase todos os casos, à exceção do observado no cenário 1, perfil de ingresso 25 anos, que é de 47,4% para o sexo masculino e 57,8% para o feminino.

A distribuição dos benefícios depende diretamente da distribuição do montante, cujo comportamento está atrelado às distribuições de retorno dos ativos financeiros considerados e do percentual de alocação atribuído a cada um deles.

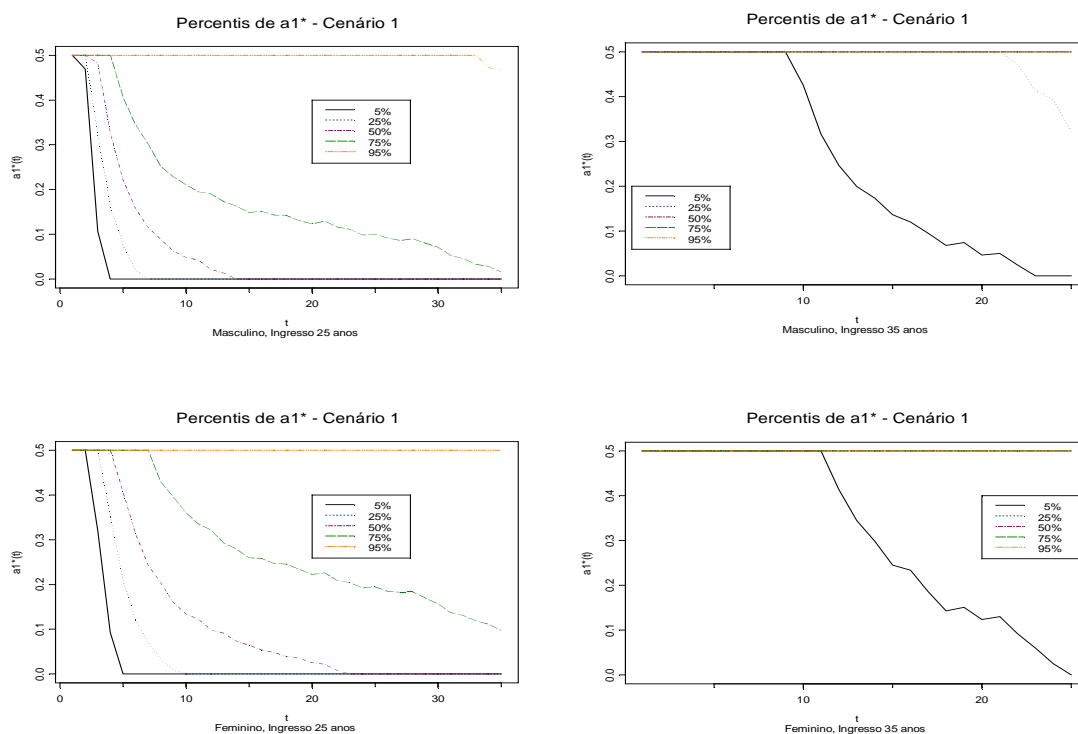
Considerando o perfil etário de ingresso aos 25 anos, sexo masculino, cenário 1, e tomando a mediana da distribuição do percentual de alocação em renda variável como base, o modelo de alocação indica participação decrescente no segmento de renda variável até o limite de 0% no 14º ano, permanecendo nesse patamar durante o prazo remanescente; para o sexo feminino a participação segue o padrão masculino, com a participação em renda variável estendida até o 22º ano .

Sob o mesmo perfil etário de ingresso, considerando os cenários 2 e 3, o modelo sugere alocar o máximo permitido em ações durante todo o período de acumulação, considerando com grau de confiança de 75%. No perfil etário de ingresso aos 35 anos a estratégia ótima aponta para o percentual máximo de alocação em ações.

Sintetizando, a estratégia ótima de alocação imputou maior participação em renda variável quanto maior foi a meta estabelecida.

Os gráficos a seguir mostram os percentis da distribuição do percentual ótimo de alocação em renda variável, durante o período de acumulação, relativos ao cenário 1. A expressão gráfica dos demais cenários encontra-se no anexo III.

Gráficos 5-1



META EM FUNÇÃO DAS TAXAS DE RETORNO DE MERCADO

Considerando a nova meta, novas simulações foram efetuadas, cujos resultados encontram-se compilados na tabela que se segue e gráficos constantes do anexo IV.

Tabela 6 – Simulação do Benefício Inicial de Aposentadoria

| ESTATÍSTICAS | CENÁRIO 1 | | | | CENÁRIO 2 | | | | CENÁRIO 3 | | | |
|-------------------------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|
| | 25 anos masculino | 35 anos masculino | 25 anos feminino | 35 anos feminino | 25 anos masculino | 35 anos masculino | 25 anos feminino | 35 anos feminino | 25 anos masculino | 35 anos masculino | 25 anos feminino | 35 anos feminino |
| Média | 1,292 | 0,580 | 1,190 | 0,535 | 0,418 | 0,250 | 0,374 | 0,224 | 0,456 | 0,263 | 0,408 | 0,236 |
| Desvio padrão | 0,253 | 0,095 | 0,233 | 0,088 | 0,195 | 0,105 | 0,175 | 0,094 | 0,140 | 0,071 | 0,125 | 0,064 |
| Percentis | | | | | | | | | | | | |
| 0,050 | 0,785 | 0,393 | 0,723 | 0,362 | 0,186 | 0,125 | 0,166 | 0,112 | 0,242 | 0,153 | 0,217 | 0,137 |
| 0,250 | 1,163 | 0,534 | 1,072 | 0,492 | 0,288 | 0,184 | 0,258 | 0,164 | 0,363 | 0,216 | 0,325 | 0,193 |
| 0,500 | 1,342 | 0,596 | 1,237 | 0,549 | 0,384 | 0,234 | 0,344 | 0,210 | 0,450 | 0,260 | 0,403 | 0,233 |
| 0,750 | 1,458 | 0,642 | 1,343 | 0,591 | 0,497 | 0,295 | 0,445 | 0,264 | 0,529 | 0,304 | 0,474 | 0,272 |
| 0,950 | 1,625 | 0,710 | 1,497 | 0,655 | 0,769 | 0,429 | 0,689 | 0,385 | 0,706 | 0,389 | 0,633 | 0,349 |
| Probabilidade de não atingir a meta | 0,807 | 0,795 | 0,807 | 0,795 | 0,668 | 0,649 | 0,668 | 0,649 | 0,704 | 0,683 | 0,704 | 0,683 |

Meta definida em função da média de mercado

No que se refere ao perfil etário de ingresso e sexo, os resultados obtidos sob a nova meta, são análogos aos obtidos com a meta anterior, onde a distribuição do benefício inicial referente ao perfil de ingresso aos 25 anos domina a correspondente ao ingresso aos 35 anos de idade, assim como a distribuição do benefício inicial dos participantes do sexo masculino domina a correspondente ao sexo feminino.

Também as distribuições de benefício no cenário 1 apresentam dominância em relação aos cenários 2 e 3. De modo geral, as distribuições do cenário 3 apresentam dominância parcial relativamente àquelas observadas no cenário 2.

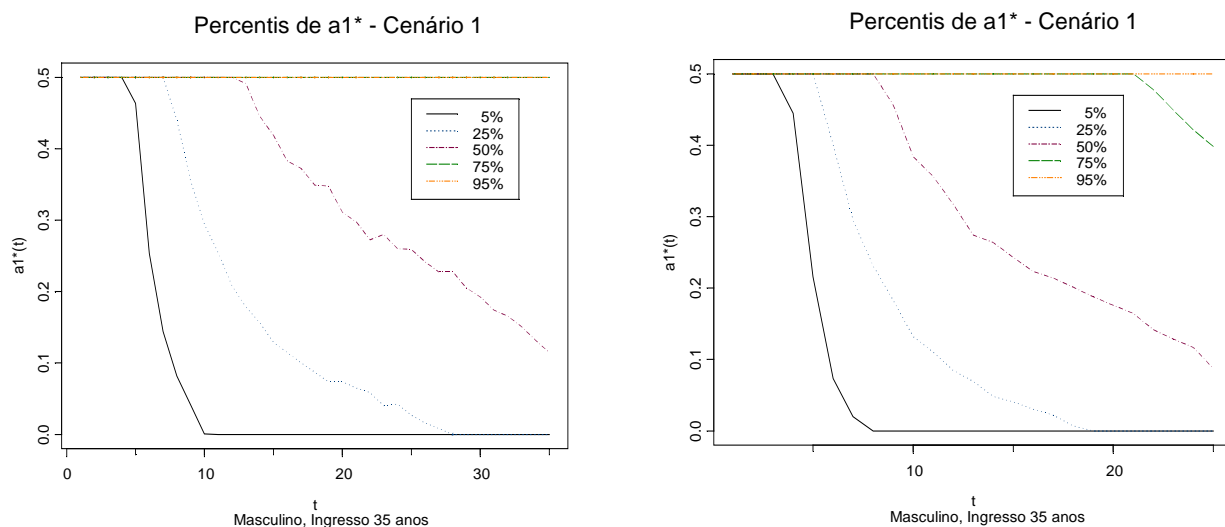
A probabilidade de não atendimento varia de 64,9% a 70,4% nos cenários 2 e 3, enquanto no cenário 1 é próxima a 80%.

Fixados o perfil etário e o cenário, a probabilidade de não atendimento à meta é a mesma para os sexos masculino e feminino.

A estratégia ótima de alocação indicada pela mediana, imputou menor participação em ações, à exceção do perfil etário de ingresso aos 25 anos no cenário 1. Nesse cenário, os gráficos 5-2

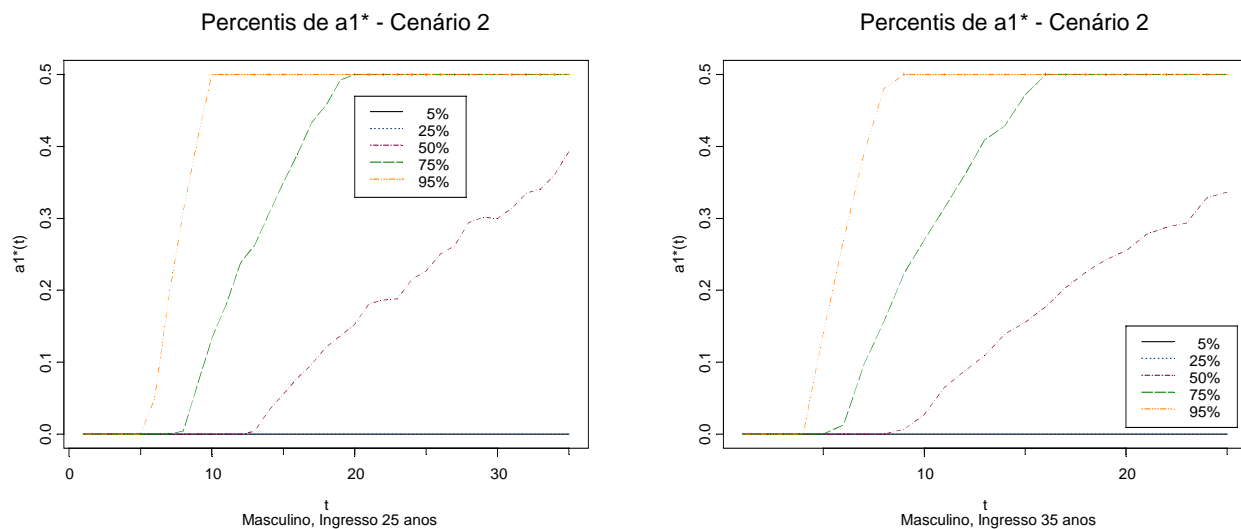
mostram que segundo a mediana, a alocação em ações decresce do limite máximo de participação (50%) até 11% ou 9% sob os perfis de ingresso aos 25 anos ou 35 respectivamente.

Gráficos 5-2



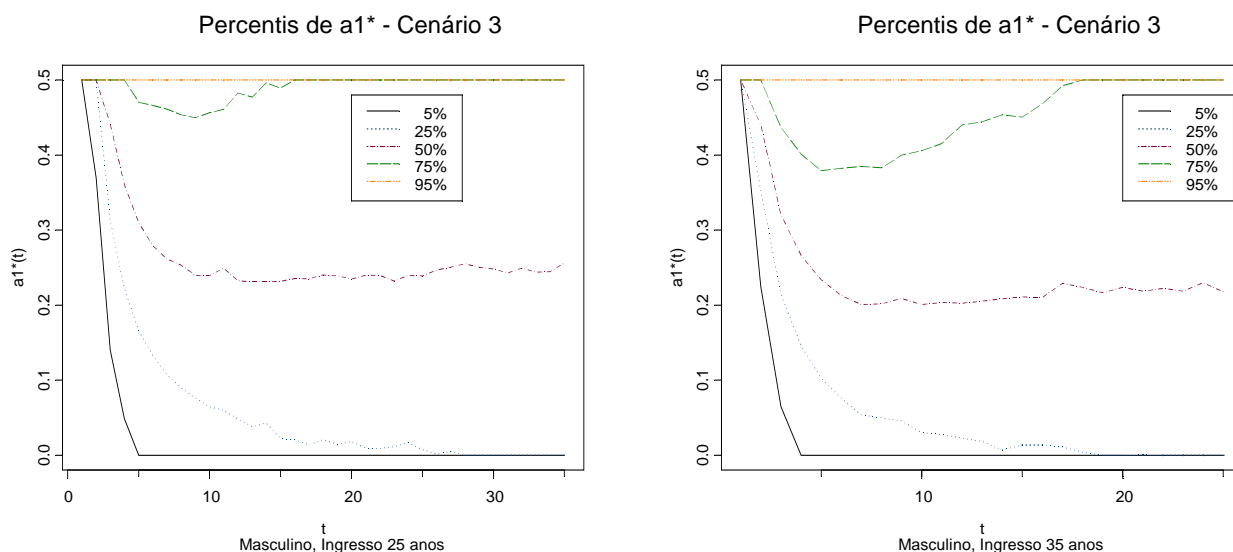
No cenário 2, considerando os perfil etário de ingresso aos 25 anos a estratégia ótima ditada pela mediana sugere aplicar em ações somente a partir do 14^o ano, de forma crescente, até um valor máximo de 38%; no outro, a indicação é análoga, iniciando-se a participação naquela modalidade de investimento no 9^o ano, crescendo essa participação até o valor de 34%.

Gráficos 5-3



Apontada pela mediana, a participação ótima no segmento acionário dá-se de forma decrescente no cenário 3, com valor inicial de 50%, estabilizando-se em torno dos 24%, considerando o perfil etário de ingresso aos 25 anos, enquanto no outro a estabilização situa-se próxima aos 21%.

Gráficos 5-4



A projeção dos benefícios com base nos modelos determinístico e estocástico consta da tabela a seguir:

Tabela 7 – Benefícios Projetados

| Cenários | Idade 25 anos | | | | | | Idade 35 anos | | | | | |
|----------|---------------|------|------|----------|------|------|---------------|------|------|----------|------|------|
| | Masculino | | | Feminino | | | Masculino | | | Feminino | | |
| | D | M1 | M2 | D | M1 | M2 | D | M1 | M2 | D | M1 | M2 |
| 1 | 1,49 | 1,00 | 1,34 | 1,37 | 0,98 | 1,24 | 0,65 | 0,69 | 0,60 | 0,60 | 0,63 | 0,55 |
| 2 | 0,45 | 0,49 | 0,38 | 0,40 | 0,45 | 0,34 | 0,26 | 0,28 | 0,23 | 0,24 | 0,25 | 0,21 |
| 3 | 0,51 | 0,57 | 0,45 | 0,46 | 0,51 | 0,40 | 0,29 | 0,31 | 0,26 | 0,26 | 0,28 | 0,23 |

Onde, D é o benefício projetado pelo modelo determinístico, M1 é a mediana da distribuição de benefícios sob a meta de benefícios e M2 é a mediana da distribuição sob meta de retorno de mercado.

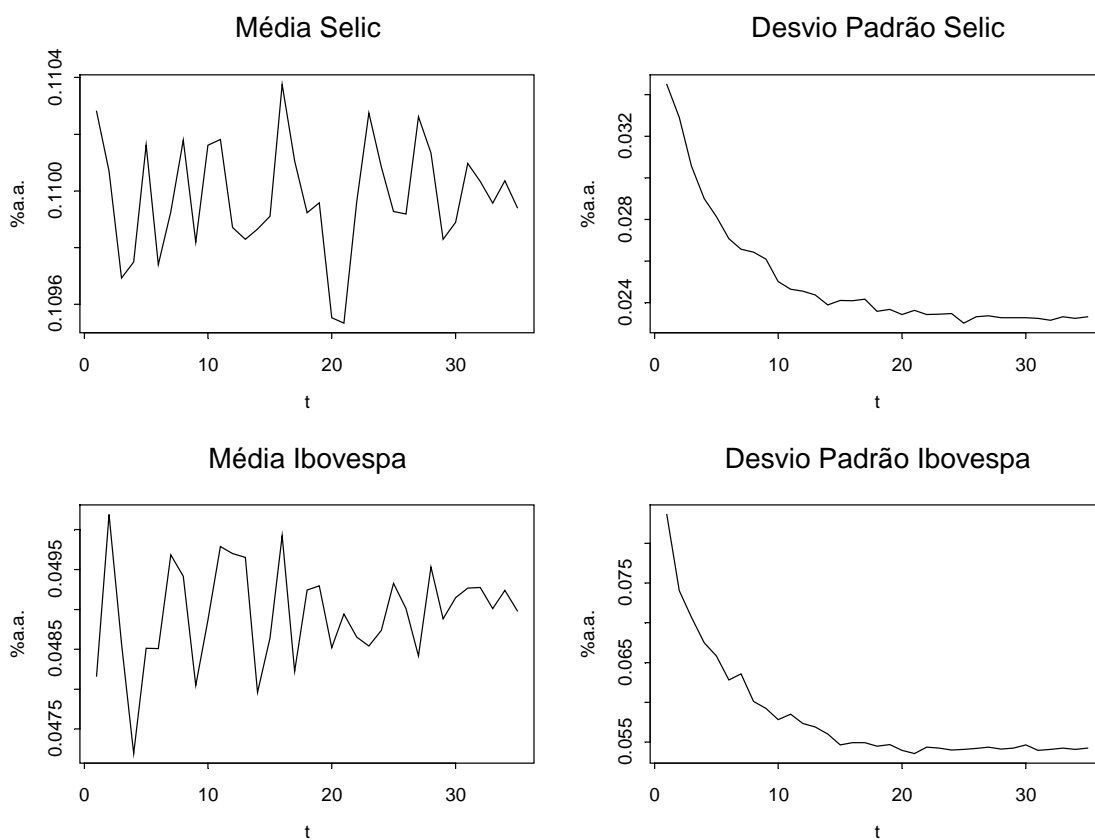
Exceção feita ao perfil de ingresso aos 25 anos no cenário 1, os benefícios projetados pelo modelo determinístico são inferiores àqueles estimados pela mediana, sob meta fixada em termos de benefício.

Benefícios estimados pela mediana no conceito de meta de benefício superam os correspondentes sob meta de retorno de mercado, a exceção do perfil de ingresso aos 25 anos no cenário 1.

MODELO DE RETORNO REAVALIADO

A média e o desvio padrão das distribuições anuais de retorno obtidas a partir dos retornos mensais simulados pelo modelo descrito em (2-19), supondo nula a correlação entre os ativos considerados, constam dos gráficos a seguir:

Gráficos 5-5



No caso Selic, as médias das distribuições anuais situam-se no intervalo (0,109 ; 0,110), enquanto os desvios padrão apresentam-se de forma decrescente, partindo de um valor aproximado de 0,035 e estabilizando-se próximo de 0,023.

Considerando o Ibovespa, as médias das distribuições anuais de retorno concentram-se no intervalo (0,047 ; 0,050). Também se apresentam de forma decrescente no tempo, com valor inicial próximo a 0,084 e estabilização próximo de 0,054 ao final do período de acumulação.

O anexo VIII contempla os gráficos de evolução temporal de médias e desvios padrão das distribuições de retorno anual onde se faz presente a correlação.

A aplicação do modelo de alocação, considerando a dinâmica das médias e desvios obtidos pelo modelo de retorno referenciado, revelou expressiva variabilidade na distribuição simulada do benefício inicial, conforme o grau de correlação entre os ativos selecionados:

Tabela 8 – Simulação do Benefício Inicial de Aposentadoria

| ESTATÍSTICAS | Correlação | | | | |
|-------------------------------------|-------------|---------------|------------|--------------|------------|
| | $\rho = -1$ | $\rho = -0,5$ | $\rho = 0$ | $\rho = 0,5$ | $\rho = 1$ |
| Média | 2,084 | 1,101 | 2,532 | 4,578 | 3,011 |
| Desvio padrão | 0,508 | 0,463 | 1,621 | 3,388 | 2,829 |
| Percentis | | | | | |
| 0,050 | 1,761 | 0,809 | 1,564 | 1,668 | 1,500 |
| 0,250 | 1,763 | 0,827 | 1,729 | 2,804 | 1,692 |
| 0,500 | 1,798 | 0,897 | 1,833 | 3,460 | 1,850 |
| 0,750 | 2,250 | 1,206 | 2,753 | 5,231 | 3,214 |
| 0,950 | 3,171 | 2,008 | 5,501 | 10,906 | 7,860 |
| Probabilidade de não atingir a meta | 0,001 | 0,368 | 0,354 | 0,371 | 0,406 |

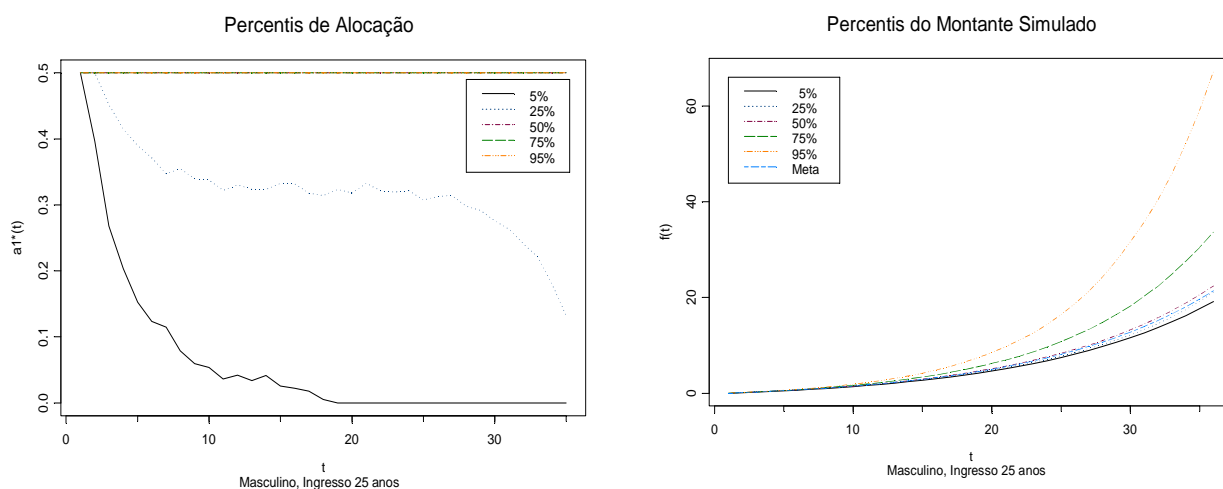
Meta definida em função da média das taxas previstas de mercado

Sob correlação positiva o valor dos benefícios pela mediana apresenta-se superior àqueles sujeitos à correlação negativa, embora os primeiros apresentem maior variabilidade.

As probabilidades de não atendimento à meta são inferiores a 41%, sendo praticamente nula em presença de correlação negativa perfeita.

A estratégia de alocação ótima apontada pela mediana quando $\rho = 0$ é de que em todo o período de acumulação 50% dos recursos sejam investidos em ações, exceto na hipótese em que o índice de correlação entre os retornos é $\frac{1}{2}$. Nessa hipótese, a estratégia indicada pela mediana da distribuição é a de aplicar 50% dos recursos durante os 21 primeiros anos de acumulação, reduzindo-se essa participação até o limite de 33% nos 14 anos restantes. Os gráficos 5-6 ilustram os percentis da distribuição alocação ótima no tempo e do montante comparativamente à meta estabelecida.

Gráficos 5-6



Constam do anexo IX os demais gráficos ilustrativos das distribuições de alocação e montante sob as correlações indicadas na presente aplicação.

5.2 FASE DE DISTRIBUIÇÃO

Nessa fase, a aplicação consiste em avaliar a situação da carteira de aposentadoria da entidade de previdência complementar EXEMPLO no que concerne aos compromissos dessa entidade perante seus participantes, isto é, relativamente ao pagamento das rendas futuras de aposentadoria.

A metodologia adotada consiste na simulação da reserva coletiva (4-36) a partir das reservas individuais (4-32), analisando-se a necessidade de aplicar carregamento de segurança sobre o valor esperado da reserva coletiva, de modo que se tenha pelo menos 50% de certeza de que o compromisso total com o pagamento de aposentadorias não exceda o valor carregado.

A entidade EXEMPLO opera uma carteira de aposentadoria segmentada em grupos de participantes que se aposentaram em situação de válido (aposentadoria programada) e como inválidos (aposentadoria por invalidez), cujo perfil encontra-se sumarizado nas tabelas constantes do anexo V.

5.2.1 PREMISSAS

Para avaliar a carteira foram estabelecidas como premissas:

- a) as aposentadorias são pagas aos participantes dessa entidade sob a forma de renda anual vitalícia antecipada;
- b) mortalidade de geral, segregada por sexo, segundo a experiência AT-83 (TSA XXXIII, pp 675-735) ;
- c) mortalidade de inválidos, segregada por sexo, expressa pela tábua AT-49 (TSA Vol I pp 368-393)
- d) os recursos garantidores das obrigações da entidade EXEMPLO com a carteira de aposentadorias, avaliados em 31.12.2004, totalizam R\$400.000.000,00;
- e) a aplicação dos recursos garantidores assegura um retorno real e certo de 6% ao ano.

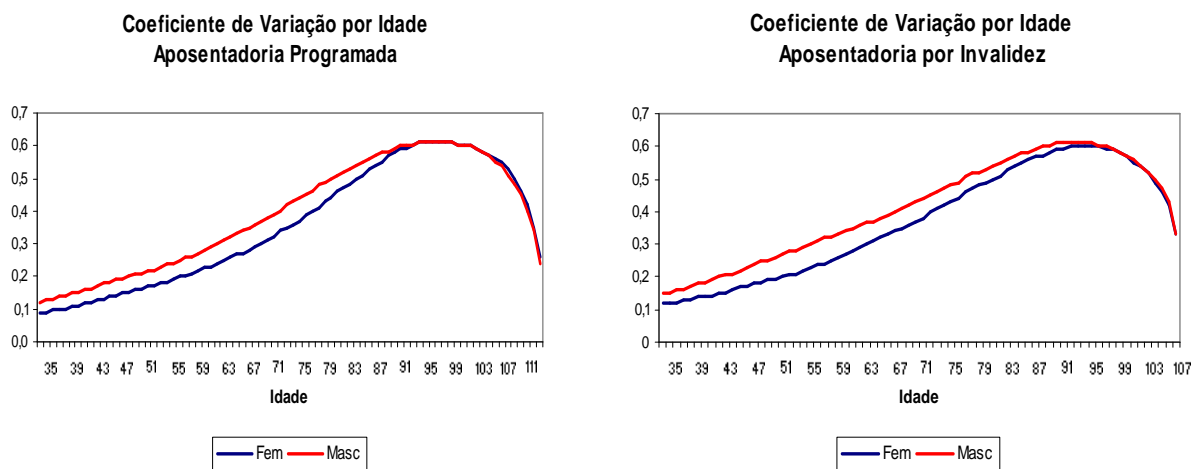
5.2.2 RESULTADOS

Com base nestas premissas foram geradas as distribuições de probabilidade da reserva matemática individual, para cada idade, considerando um benefício anual de R\$1,00. Constam do anexo VI exemplos de distribuições da reserva individual relativas às idades de 50, 60, 70 e 80 anos, sexos masculino e feminino em ambas experiências de mortalidade.

Medidas associadas a essas distribuições de probabilidades, tais como, média, variância, moda, coeficiente de variação e p^* (ponto a partir do qual a reserva matemática tem probabilidade menor ou igual a 50% de assumir valores superiores a ele) encontram-se sumarizadas no anexo VII.

O coeficiente de variação das reservas individuais, conforme se observa nos gráficos 5-7, cresce com a idade, revertendo-se tal tendência com a proximidade do limite etário da tábua de mortalidade tomada como referência. Nestes gráficos observa-se, também, que os coeficientes relativos ao sexo masculino superam o feminino durante a fase de seu crescimento, passando a ter comportamento similar próximo ao extremo superior das idades.

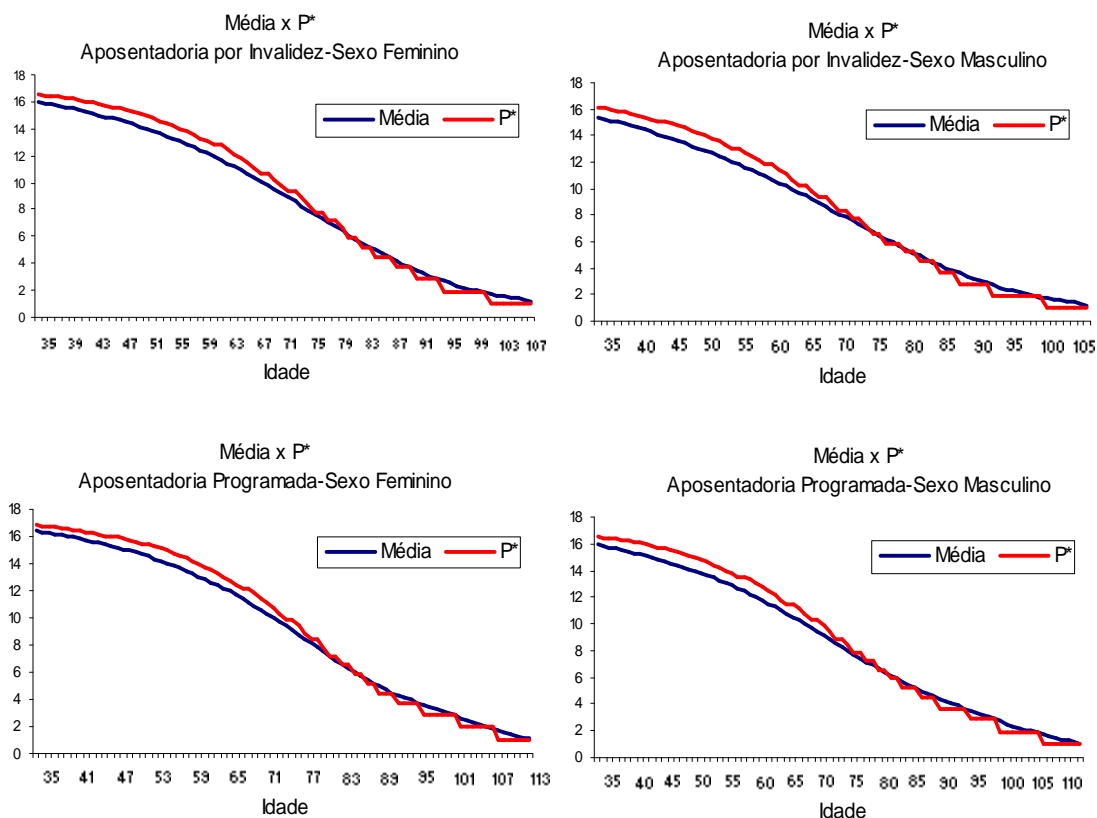
Gráficos 5-7



Os gráficos 5-8 indicam que comparativamente ao valor p^* a média referente às distribuições da reserva individual se apresenta inferior, revertendo-se tal tendência nas idades mais avançadas. Assim, nas idades iniciais de aposentadoria a probabilidade de se efetuar pagamentos futuros superiores ao valor esperado da reserva matemática é superior a 50%.

Tal fato sugere a adoção de carregamentos de segurança sobre o valor esperado da reserva matemática individual de sorte que a conversão do montante em renda de aposentadoria corresponda a uma probabilidade menor ou igual a 50% de que o pagamento de benefícios futuros supere o referido montante.

Gráficos 5-8



A significância do carregamento aplicável à reserva matemática individual depende da idade em que ocorra a conversão do montante em renda de aposentadoria, reduzindo sobremaneira o valor inicial do benefício de aposentadoria.

O impacto no valor inicial do benefício em idades típicas de aposentadoria, considerando o carregamento calculado com base na medida p^* está apresentado nas tabelas 5-9 e 5-10 apresentadas a seguir:

Tabela 9 – Impacto no Valor Inicial do Benefício – AT-49

| Idade | Média | | P* | | Carregamento | | Redução | |
|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|---------|---------|---------|
| | Fem | Masc | Fem | Masc | Fem | Masc | Fem | Masc |
| 35 | 15,98 | 15,38 | 16,52 | 16,14 | 0,03407 | 0,04929 | 0,03294 | 0,04697 |
| 36 | 15,89 | 15,26 | 16,46 | 16,05 | 0,03561 | 0,05153 | 0,03438 | 0,04900 |
| 37 | 15,80 | 15,14 | 16,46 | 15,95 | 0,04151 | 0,05344 | 0,03985 | 0,05073 |
| 38 | 15,71 | 15,01 | 16,38 | 15,85 | 0,04285 | 0,05570 | 0,04109 | 0,05276 |
| 39 | 15,61 | 14,88 | 16,31 | 15,74 | 0,04460 | 0,05758 | 0,04269 | 0,05444 |
| 40 | 15,50 | 14,74 | 16,22 | 15,62 | 0,04674 | 0,05977 | 0,04466 | 0,05640 |
| 41 | 15,39 | 14,59 | 16,14 | 15,50 | 0,04860 | 0,06225 | 0,04635 | 0,05860 |
| 42 | 15,28 | 14,44 | 16,05 | 15,37 | 0,05015 | 0,06428 | 0,04776 | 0,06039 |
| 43 | 15,16 | 14,28 | 15,95 | 15,23 | 0,05205 | 0,06654 | 0,04947 | 0,06239 |
| 44 | 15,03 | 14,12 | 15,85 | 15,08 | 0,05429 | 0,06828 | 0,05150 | 0,06391 |
| 45 | 14,90 | 13,95 | 15,74 | 15,08 | 0,05616 | 0,08129 | 0,05317 | 0,07518 |
| 46 | 14,77 | 13,78 | 15,62 | 14,93 | 0,05762 | 0,08339 | 0,05448 | 0,07697 |
| 47 | 14,63 | 13,60 | 15,50 | 14,76 | 0,05935 | 0,08565 | 0,05602 | 0,07889 |
| 48 | 14,48 | 13,42 | 15,37 | 14,59 | 0,06134 | 0,08724 | 0,05779 | 0,08024 |
| 49 | 14,33 | 13,24 | 15,23 | 14,41 | 0,06282 | 0,08808 | 0,05911 | 0,08095 |
| 50 | 14,17 | 13,05 | 15,08 | 14,21 | 0,06451 | 0,08893 | 0,06060 | 0,08167 |
| 51 | 14,00 | 12,85 | 14,93 | 14,00 | 0,06636 | 0,08974 | 0,06223 | 0,08235 |
| 52 | 13,82 | 12,66 | 14,76 | 13,78 | 0,06837 | 0,08873 | 0,06399 | 0,08150 |
| 53 | 13,64 | 12,46 | 14,59 | 13,55 | 0,06970 | 0,08751 | 0,06516 | 0,08047 |
| 54 | 13,46 | 12,25 | 14,41 | 13,30 | 0,07029 | 0,08599 | 0,06568 | 0,07918 |
| 55 | 13,26 | 12,05 | 14,21 | 13,04 | 0,07168 | 0,08229 | 0,06689 | 0,07603 |

* Experiência de Mortalidade: AT-49

Tabela 10 - Impacto no Valor Inicial do Benefício – AT-83

| Idade | Média | | P* | | Carregamento | | Redução | |
|-------|-------|-------|-------|-------|--------------|---------|---------|---------|
| | Fem | Masc | Fem | Masc | Fem | Masc | Fem | Masc |
| 50 | 14,93 | 14,09 | 15,74 | 15,08 | 0,05404 | 0,07055 | 0,05127 | 0,06590 |
| 51 | 14,80 | 13,93 | 15,62 | 14,93 | 0,05547 | 0,07172 | 0,05256 | 0,06692 |
| 52 | 14,65 | 13,77 | 15,50 | 14,76 | 0,05790 | 0,07225 | 0,05473 | 0,06738 |
| 53 | 14,51 | 13,60 | 15,37 | 14,59 | 0,05914 | 0,07285 | 0,05584 | 0,06790 |
| 54 | 14,35 | 13,43 | 15,23 | 14,41 | 0,06134 | 0,07269 | 0,05779 | 0,06776 |
| 55 | 14,19 | 13,25 | 15,08 | 14,21 | 0,06301 | 0,07249 | 0,05927 | 0,06759 |
| 56 | 14,02 | 13,06 | 14,93 | 14,00 | 0,06484 | 0,07222 | 0,06089 | 0,06735 |
| 57 | 13,85 | 12,86 | 14,76 | 13,78 | 0,06605 | 0,07180 | 0,06196 | 0,06699 |
| 58 | 13,66 | 12,66 | 14,59 | 13,55 | 0,06813 | 0,07033 | 0,06379 | 0,06571 |
| 59 | 13,48 | 12,45 | 14,41 | 13,55 | 0,06871 | 0,08838 | 0,06429 | 0,08121 |
| 60 | 13,28 | 12,24 | 14,21 | 13,30 | 0,07007 | 0,08688 | 0,06548 | 0,07993 |
| 61 | 13,07 | 12,01 | 14,00 | 13,04 | 0,07140 | 0,08589 | 0,06664 | 0,07910 |
| 62 | 12,86 | 11,78 | 13,78 | 12,76 | 0,07180 | 0,08354 | 0,06699 | 0,07710 |
| 63 | 12,64 | 11,54 | 13,55 | 12,47 | 0,07202 | 0,08058 | 0,06718 | 0,07457 |
| 64 | 12,41 | 11,29 | 13,30 | 12,16 | 0,07199 | 0,07689 | 0,06715 | 0,07140 |
| 65 | 12,18 | 11,03 | 13,04 | 11,83 | 0,07074 | 0,07231 | 0,06606 | 0,06744 |
| 66 | 11,94 | 10,77 | 12,76 | 11,48 | 0,06902 | 0,06567 | 0,06456 | 0,06162 |
| 67 | 11,69 | 10,51 | 12,47 | 11,48 | 0,06672 | 0,09203 | 0,06254 | 0,08428 |
| 68 | 11,43 | 10,24 | 12,16 | 11,11 | 0,06370 | 0,08456 | 0,05989 | 0,07797 |
| 69 | 11,17 | 9,97 | 12,16 | 10,71 | 0,08846 | 0,07445 | 0,08127 | 0,06929 |
| 70 | 10,89 | 9,70 | 11,83 | 10,29 | 0,08610 | 0,06134 | 0,07927 | 0,05779 |

* Experiência de Mortalidade: AT-83

O valor esperado da reserva matemática atribuível ao grupo de participantes da entidade EXEMPLO foi calculado como a soma dos valores esperados da reserva matemática de cada um dos componentes do referido grupo, totalizando R\$ 418.875.143,97, assim composto:

Tabela 11 -Valor Esperado da Reserva Matemática - V

| APOSENTADORIA | SEXO | | TOTAL |
|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | Masculino | Feminino | |
| Programada | 207.900.222,96 | 157.025.685,00 | 364.925.907,96 |
| Invalidez | 29.637.644,13 | 24.311.591,88 | 53.949.236,01 |
| TOTAL | 237.537.867,09 | 181.337.276,88 | 418.875.143,97 |

Analogamente, considerando a independência das reservas individuais, foi calculada a variância da reserva coletiva, cuja composição, expressa em termos do desvio padrão, encontra-se detalhada na forma abaixo:

Tabela 12 – Desvio Padrão da Reserva Matemática - V

| APOSENTADORIA | SEXO | | TOTAL |
|---------------|--------------|--------------|---------------------|
| | Masculino | Feminino | |
| Programada | 2.534.113,00 | 1.463.894,00 | 2.926.553,00 |
| Invalidez | 937.157,00 | 437.806,40 | 1.034.378,00 |
| TOTAL | - | - | 3.103.973,00 |

A partir da distribuição de cada reserva individual foram realizadas 3.000 simulações representativas de determinações da reserva matemática coletiva de cada carteira, segregada por sexo.

O algoritmo utilizado para a simulação da reserva coletiva tomou por base o método da transformação inversa definido em Ross (1990) para gerar a determinação de cada reserva matemática individual existente em cada simulação. Para tanto foi necessário primeiramente obter a distribuição das referidas reservas individuais.

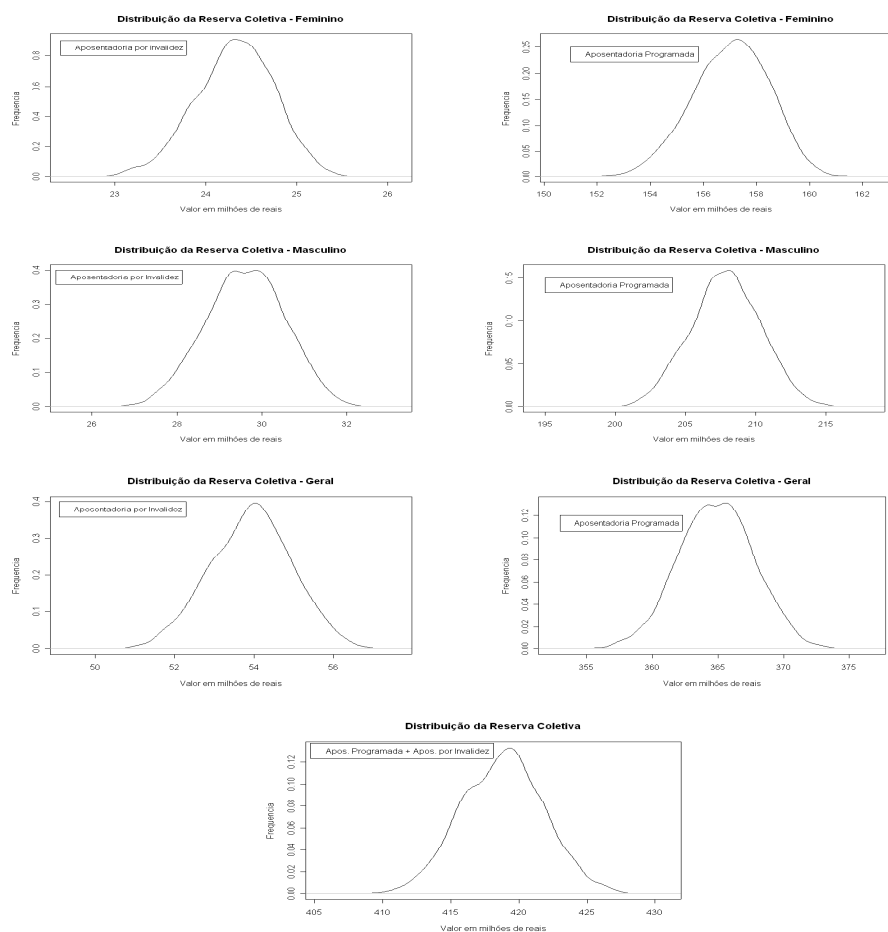
Os resultados da simulação estão sumarizados na tabela a seguir:

Tabela 13 – Simulação da Reserva Coletiva

| Estatísticas | Encargo Total | Aposentadorias Programadas | | | Aposentadorias por Invalidez | | |
|---------------|----------------|----------------------------|----------------|----------------|------------------------------|---------------|---------------|
| | | Masculino | Feminino | Total | Masculino | Feminino | Total |
| Média | 418.794.786,11 | 207.843.548,98 | 157.028.997,78 | 364.872.546,76 | 29.605.246,34 | 24.316.993,02 | 53.922.239,36 |
| Erro padrão | 56.001,33 | 46.067,69 | 26.828,39 | 52.999,75 | 17.198,54 | 7.999,39 | 19.059,06 |
| Mediana | 418.889.766,09 | 207.883.424,98 | 157.107.311,03 | 364.908.265,90 | 29.629.017,17 | 24.334.519,79 | 53.957.647,84 |
| Desvio padrão | 3.067.318,97 | 2.523.231,31 | 1.469.451,31 | 2.902.915,65 | 942.002,69 | 438.144,70 | 1.043.907,59 |
| Curtose | 0,01 | 0,04 | 0,01 | 0,02 | (0,10) | 0,02 | (0,09) |
| Assimetria | (0,03) | (0,06) | (0,22) | (0,05) | (0,11) | (0,22) | (0,12) |
| Amplitude | 22.160.430,23 | 21.062.472,30 | 11.002.019,15 | 21.270.442,81 | 6.848.383,80 | 3.198.753,63 | 7.285.119,52 |
| Mínimo | 407.046.231,38 | 195.784.658,52 | 151.165.315,65 | 353.930.129,33 | 25.849.777,44 | 22.677.044,72 | 49.780.180,56 |
| Máximo | 429.206.661,61 | 216.847.130,82 | 162.167.334,80 | 375.200.572,14 | 32.698.161,25 | 25.875.798,35 | 57.065.300,08 |
| Contagem | 3.000 | 3.000 | 3.000 | 3.000 | 3.000 | 3.000 | 3.000 |

As densidades ajustadas em face das simulações realizadas constam dos gráficos 5-9:

Gráficos 5-9



A distribuição simulada permite-nos inferir como praticamente nula a probabilidade de que os recursos financeiros disponíveis sejam suficientes para o pagamento das aposentadorias, isto é, um déficit de R\$18,9 mi (4,5% da mediana) importa na ruína quase certa do plano.

A simulação da distribuição de probabilidade da reserva matemática coletiva da carteira de aposentadorias permite-nos concluir que o carregamento de segurança aplicável ao valor esperado dessa reserva é pouco expressivo para a garantir, com probabilidade de pelo menos 50%, a ocorrência de encargos superiores a esta média carregada.

A tabela 5-14 apresenta carregamentos baseados na aproximação normal e desigualdade de Cantelli comparativamente àqueles produzidos a partir da distribuição simulada.

Tabela 14 – Coeficiente de Carregamento de Segurança - λ

| MÉTODO | APOS. PROGRAMADA | | | APOS. INVALIDEZ | | | GLOBAL |
|--------------------------|------------------|----------|-----------|-----------------|----------|----------|----------|
| | Masc | Fem | Total | Masc | Fem | Total | |
| Simulação | -0,000081 | 0,000520 | -0,000048 | -0,000291 | 0,000943 | 0,000156 | 0,000035 |
| Aproximação pela Normal | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 | 0,000000 |
| Desigualdade de Cantelli | 0,012189 | 0,009323 | 0,008020 | 0,031620 | 0,018008 | 0,019173 | 0,007410 |

Grau de Confiança $(1-\alpha)=50\%$

Como era de se esperar, os carregamentos derivados da desigualdade de Cantelli são superiores aos demais gerados pelos demais métodos.

A aplicação dos métodos indicados demonstrou que o carregamento aplicável ao valor esperado da reserva coletiva é de pequena monta e significativamente inferior àqueles considerados no enfoque individual.

No que concerne à simulação, observa-se que a mediana está bem próxima da média, o que explica a baixa significância do carregamento para o grau de confiança indicado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

6.1 FASE DE ACUMULAÇÃO

As projeções obtidas a partir do modelo determinístico são orientadas pela premissa *coeteris paribus* em que se consideram taxas de retorno constantes no período de acumulação. Como conseqüência não se avalia o risco intrínseco à variabilidade destes retornos, suprimindo-se, desta forma, elemento de importância fundamental na tomada de decisão durante a fase de acumulação de recursos.

No que se refere à fase de acumulação do plano de benefícios avaliado, a aplicação do modelo estocástico de simulação atrelado a uma estratégia ótima de alocação fundamentada em metas e orientada pelo princípio de otimalidade de Bellman permite, durante a fase acumulação, avaliar a perspectiva das alocações, montante e benefícios nos cenários considerados.

O modelo de alocação ótima foi estendido para a classe dos modelos dinâmicos, onde o controle, o aprendizado e as projeções dos retornos de ativos são executados a partir das distribuições subjacentes ao modelo, fundamentado na atualização sequencial das equações que definem a evolução da informação sobre o modelo e a série no tempo.

6.2 FASE DE DISTRIBUIÇÃO

O método de simulação aplicado durante a fase de distribuição permitiu avaliar o risco da entidade efetuar pagamentos superiores aos recursos disponíveis para a cobertura dos benefícios futuros e, também, estabelecer, para um nível de confiança estipulado, o carregamento de segurança aplicável ao valor esperado da reserva matemática, sem os inconvenientes da penalidade imposta pela adoção desigualdades ou aproximação pela normal.

O enfoque coletivo praticamente anulou a necessidade da aplicação de carregamentos de segurança apontados no modelo individual, posto o nível de segurança indicado.

Nestes termos, cremos que os modelos aqui apresentados contribuem para a melhoria da gestão atuarial de planos de contribuição definida.

6.3 OPORTUNIDADES DE MELHORIAS

A consideração do juro e da mortalidade sob o prisma estocástico constitui-se em oportunidade de extensão viável na modelagem das relações que regem a dinâmica dos planos de contribuição definida, assim como os efeitos do desemprego e crescimento salarial na acumulação de recursos e, por consequência, no benefício de aposentadoria.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ALLEN, E. T. Jr, MELONE, J. J., ROSENBLUM J. S. e VANDERHEI J. L. Planos de Aposentadoria. São Paulo. Instituto Cultural de Seguridade Social,1994

AMEEN, J. R. M. E HARRISON P. J. Normal discount Bayesian models. In Bayesian Statistics 2, J. M. Bernardo, M. H. DeGroot, D. V. Lindley and A. F. M. Smith (eds.). North Holland, Amsterdam, and Valencia University Press, 1985

BEARD R. E., PENTIKÄINEN, T. e PESONEN, E. Risk Theory. London. Chapman & Hall, 1984

BELLMAN, R. Dynamic Programming. Princenton University Press, Princenton NJ, 1957

BERNSTEIN, P. L. Desafio aos Deuses: a fascinante história do risco. Trad. de Ivo Korilowski. 4^a ed. Rio de Janeiro. Editora Campus Ltda,1997

BLAKE D., CAIRNS A. J. G.,DOWD. Optimal Dynamic Asset Allocation for Defined-Contribution Pension Plans. London. The Pensions Institute, Discussion Paper, PI-0003, 2000

BLAKE D., CAIRNS A. J. G.,DOWD. Pensionmetrics: stochastic pension plan design and value-at-risk during the accumulation phase. London. The Pensions Institute, Discussion Paper, PI-0102, 2001

BOWERS, N. L. et al. Actuarial Mathematics. 2nd ed. Schaumburg. Illinois.Society of Actuaries, 1997

BROWN, R. G. Smoothing, Forecasting and Prediction of Discrete Time Series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.

CLYDE, MULLER e PARMEGIANI. Exploring expected utility surfaces Markov chains. Discussion paper 95-39, Institute of Statistic and Decision Science,1995

COPPINI, M. A. Lezioni di técnica delle assicurazioni sociali. Roma . Veschi, 1979

- DENUIT, M., GENEST, C. e MARCEAU E. Stochastic bounds on sums of dependent risks. Insurance: Mathematics and Economics 25, p 85-104, 1999
- DELT C. L. A Dynamic Model for Asset Liability Management for the Defined Benefit Pension Funds. em: Mulvey, J. & Ziemba, W. (.org). World wide asset and liability modeling, 1995
- DHAENE, J. DENUIT M., GOOVAERTS M. J. , KAAS R. e VYNCKE, D. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory. Insurance: Mathematics and Economics, 2001
- DUFRESNE, D. The distribution of a perpetuity with applications to risk theory and pension funding. Skandinavian Actuarial Journal. p. 39-79, 1990
- DUFRESNE, D. Stochastic life contingencies with solvency considerations. Transactions of the Society of Actuaries, 52, p.131-145, 1991
- FARO C. Matemática Financeira. Rio de Janeiro. APEC, 1978
- FERREIRA W. J. Coleção Introdução à Ciência Atuarial. Rio de Janeiro. IRB, 1985
- GALÉ J.G. Elementos de Cálculo Atuarial. Buenos Aires. Librería El Ateneo Editorial, 1951
- GOOVAERTS, M., DHAENE, J. e DE SCHEPPER, A. Stochastic upper bounds for present value functions. Journal of Risk and Insurance 67, 1-14, 2000
- HABERMAN S. e SUNG J. Dynamic approaches to pension funding. Insurance: Mathematics and Economics 15, june p.151-162, 1994
- HABERMAN S. e VIGNA E. Optimal Investment Strategies and Risk Measures in Defined Contribution Pension Schemes. Working Paper no. 10, February 2002. International Centre for Economic Research, 2002
- HARRISON, P. J. e STEVENS, C. F. Bayesian Forecasting. Journal of the Royal Statistical Society, sec B, vol 38, pb205-247, 1976

- HARRISON, P. J. e JOHNSTON, F. R. Discount Weighted Regression. *Journal of Operational Research Society*, v.35, n.10, p.923-932, 1984
- IYER, S. *Matemática Atuarial de Sistemas de Previdência Social*. Trad.. Brasília. Ministério da Previdência e Assistência Social, 2002
- JORDAN, C. W. Jr. *Life Contingencies*. The Society of Actuaries, 1982
- JORION, P. *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*. McGraw-Hill, 1997
- LENK P. J. e YOUNG M. R. Hierarchical Bayes Methods for Estimation and portfolio Selection. *Management Science* 44(11, part 2), S111-S124, 1998
- LINDLEY, D. Dynamic programming and decision. *Applied Statistics* 10, 39-51, 1961
- MAKRIDAKIS, S., WHEELWRIGHT, S. C. e HINDMAN, R. J. *Forecasting: methods and applications*. 3nd ed. New York. John Wiley & Sons, 1998
- MESA-LAGO C. Análise Comparativa da Reforma Estrutural do Sistema Previdenciário Realizada em Oito Países Latino-Americanos. *Conjuntura Social* V.8, Nº 4, out/nov/dez, 1997
- MIGON H. S. e GAMERMAN, D. *Statistical Inference: an integrated approach*. London Arnold, 1999
- MIGON H. S. e LOPÉS H. Análise bayesiana de decisões. In: *Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática*, 2002
- MILEVSKY M. A. e YOUNG R. Y. *Optimal Asset Allocation and the Real Option to Delay Annuity*. The Pensions Institute: Discussion Paper, 2002
- MÜLLER, P. e PARMEGIANI G. Optimal design via curve fitting of Monte Carlo experiments. *Journal of the American Statistical Association* 90, 1322-1330, 1995
- NEIL, A. *Life Contingencies*. London. Heinemann, 1977

- NOGUEIRA R. As opções da previdência privada sob o ângulo da empresa usuária; aspectos regulamentares e operacionais. Goiânia. Ed. da Universidade Federal de Goiás, 1981
- NOGUEIRA R. MÉTODOS ATUARIAIS: variações sobre um modelo simples. I Congresso Brasileiro de Atuaria, 1994
- PANJER, H. H. e WILLMOT, G. E. Insurance Risk Models. Schaumburg. Illinois. Society of Actuaries, 1992
- POLE, A., WEST, M. e HARRISON, P. J. Applied Bayesian Forecasting and Time Series Analysis. New York. Chapman & Hall, 1994
- ROSS S. M. Simulation. Academic Press, 1996
- SOININEN P. Stochastic Variations of Interest and Mortality. In: 5th AFIR INTERNATIONAL COLLOQUIUM, 1991
- UTHOFF A. Reforma dos Sistemas de Benefícios na América Latina. Conjuntura Social V.8, Nº 4, out/nov/dez, 1997
- VIGNA E. e HABERMAN. Optimal investment strategy for defined contribution pension schemes. Insurance: Mathematics and Economics 28 (2001), p.233-262, 2000
- VILANOVA, W. Álgebra Financeira. São Paulo. Livraria Pioneira Editora, 1980
- VON NEUMANN, J. e MORGENSTERN O. (1957). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton Press, 1957
- WEST, M. e HARRISON, P. J. Bayesian Forecasting and Dynamic Models . New York: Springer-Verlag, 1997
- WILKIE A. D. A stochastic investment model for actuarial use. Transactions of the Faculty of Actuaries 39, p.341-373, 1986
- YAKOUBOV Y. , TEEGER M. e DUVAL D. B. A stochastic investment model for asset and liability management. In: 9th AFIR INTERNATIONAL COLLOQUIUM, Tokio, 1999

ANEXOS

ANEXO I

MODELO DETERMINÍSTICO EM PLANO CD

1 – Características Gerais do Plano de Contribuição Definida (CD)

Plano de aposentadoria, de característica individual, cujo benefício resulta da conversão do montante, fruto da capitalização das contribuições mensais vertidas para o plano durante a fase de acumulação, em uma renda mensal vitalícia a ser paga ao participante desse plano a partir de uma idade preestabelecida.

2 – Premissas

- a) O salário inicial do participante com idade x , S_x , além de ser corrigido anualmente pela inflação observada, cresce anualmente a uma taxa real de $s\%$.
- b) A taxa de contribuição mensal é fixa em $\tau\%$ e aplicável ao salário em vigor.
- c) A inflação pré-aposentadoria é de $\mu\%$ ao mês.
- d) A taxa de retorno pela aplicação dos recursos durante a fase de capitalização é de $r\%$ ao ano.
- e) A renda mensal vitalícia consiste no pagamento de um benefício mensal de valor b , de forma antecipada, a partir da idade em que o participante completar y anos.

2 - Cálculo do Benefício / Taxa de Contribuição

O cálculo do benefício ou da taxa de contribuição decorre da equação de equilíbrio

$$\tau S_x M = 12 b \ddot{a}_y^{(12)},$$

onde M corresponde ao montante das contribuições unitárias efetuadas na fase de acumulação, sob regime de inflação e crescimento real de salário, e $\ddot{a}_y^{(12)}$ é o valor atual provável de uma renda anual vitalícia de valor unitário, paga de forma antecipada a um participante de idade y , à taxa de juro i .

3 – Montante

Sob o regime de inflação, as contribuições são desvalorizadas mensalmente, recuperando o seu valor a cada 12 meses, quando também ocorre o crescimento real do salário e, por consequência das contribuições.

Assim, o montante das contribuições decorre do esquema de capitalização a seguir:

$$\begin{aligned}
 M = & \left[\frac{1+r_m}{(1+\mu)^{11}} (1+s)^{y-x-1} + \frac{(1+r_m)^2}{(1+\mu)^{10}} (1+s)^{y-x-1} + \dots + (1+r_m)^{12} (1+s)^{y-x-1} \right] + \\
 & + \left[\frac{(1+r_m)^{13}}{(1+\mu)^{11}} (1+s)^{y-x-2} + \frac{(1+r_m)^{14}}{(1+\mu)^{10}} (1+s)^{y-x-2} + \dots + (1+r_m)^{24} (1+s)^{y-x-2} \right] + \\
 & + \dots + \\
 & + \left[\frac{(1+r_m)^{12(y-x)-11}}{(1+\mu)^{11}} + \frac{(1+r_m)^{12(y-x)-10}}{(1+\mu)^{10}} + \dots + (1+r_m)^{12(y-x)} \right] = (1+r_m)A.B
 \end{aligned}$$

onde

$$A = \frac{1}{(1+\mu)^{11}} + \frac{1+r_m}{(1+\mu)^{10}} + \dots + (1+r_m)^{11} \text{ e}$$

$$B = (1+s)^{y-x-1} + (1+r_m)^{12} (1+s)^{y-x-2} + \dots + (1+r_m)^{12(y-x-1)}$$

Assim, o montante correspondente à capitalização das contribuições previstas $\tau S_x M$ têm por expressão,

- se $(1+\mu)(1+r_m) \neq 1$

$$\begin{cases} \tau S_x (1+r_m) \left[\frac{(1+r)(1+\mu)^{12} - 1}{(1+r_m)(1+\mu)^{12} - (1+\mu)^{11}} \right] \left[\frac{(1+r)^{y-x} - (1+s)^{y-x}}{r-s} \right], r \neq s \\ \tau S_x (y-x)(1+r_m)(1+r)^{y-x-1} \left[\frac{(1+r)(1+\mu)^{12} - 1}{(1+r_m)(1+\mu)^{12} - (1+\mu)^{11}} \right], r = s \end{cases}$$

- se $(1+\mu)(1+r_m) = 1$

$$\begin{cases} 12 \tau S_x (1+r) \left[\frac{(1+r)^{y-x} - (1+s)^{y-x}}{r-s} \right], r \neq s \\ 12 \tau S_x (y-x)(1+r)^{y-x}, r = s \end{cases}$$

onde $(1+r) = (1+r_m)^{12}$.

Assim, a partir da equação de equilíbrio obtém-se a expressão para b ou τ conforme se queira.

Fixando-se o crescimento real de salários em zero, segue de imediato as expressões do benefício ou taxa de contribuição no modelo de contribuições mensais sob regime exclusivo de inflação.

ANEXO II

PROVA DA PROPOSIÇÃO

Utilizando a equação recursiva de Bellman para a realização da indução *backward*, temos:

- último estágio (T),

$$\begin{aligned} J(D_T) &= \theta[(F_T - f_T)^2 + \alpha(F_T - f_T)] = \theta f_T^2 - 2(\theta F_T + \alpha/2)f_T + \theta F_T^2 + \alpha F_T = \\ &= A_T f_T^2 - 2B_T f_T + C_T; \end{aligned}$$

- penúltimo estágio ($T-1$)

$$\begin{aligned} J(D_{T-1}) &= \min_{a_{1,T-1}} \{(F_{T-1} - f_{T-1})^2 + \alpha(F_{T-1} - f_{T-1}) + \delta E[J(D_T) | D_{T-1}]\} = \\ &= \min_{a_{1,T-1}} \{(F_{T-1} - f_{T-1})^2 + \alpha(F_{T-1} - f_{T-1}) + \delta E[A_T f_T^2 - 2B_T f_T + C_T | D_{T-1}]\} = \\ &= \min_{a_{1,T-1}} \{(F_{T-1} - f_{T-1})^2 + \alpha(F_{T-1} - f_{T-1}) + \delta [A_T E[f_T^2 | D_{T-1}] - 2B_T E[f_T | D_{T-1}] + C_T]\} \end{aligned}$$

(I)

Mas,

$$\begin{aligned} E[f_T | D_{T-1}] &= E\{(f_{T-1} + \tau S_x)[a_{1,T-1}e^{r_{1,T-1}} + (1 - a_{1,T-1})e^{r_{2,T-1}}] | D_{T-1}\} = \\ &= (f_{T-1} + \tau S_x)\{a_{1,T-1}[g_{\mu_{1,T-1}}(1) - g_{\mu_{2,T-1}}(1)] + g_{\mu_{2,T-1}}(1)\} \end{aligned} \quad (II)$$

e

$$\begin{aligned} E[f_T^2 | D_{T-1}] &= E\{(f_{T-1} + \tau S_x)^2 [a_{1,T-1}e^{r_{1,T-1}} + (1 - a_{1,T-1})e^{r_{2,T-1}}]^2 | D_{T-1}\} = \\ &= (f_{T-1} + \tau S_x)^2 \{a_{1,T-1}^2 [g_{\mu_{1,T-1}}(2) + g_{\mu_{2,T-1}}(2) - 2g_{\mu_{1,T-1},\mu_{2,T-1}}(1,1)] - \\ &- 2a_{1,T-1} [g_{\mu_{2,T-1}}(2) - g_{\mu_{1,T-1},\mu_{2,T-1}}(1,1)] + g_{\mu_{2,T-1}}(2)\} \end{aligned} \quad (III)$$

onde $g_{\mu_{i,t}}(j) = E[e^{j r_{i,t}} | D_t]$, $i,j=1,2$ e $g_{\mu_{i,t},\mu_{l,t}}(j,l) = E[e^{j r_{i,t} + l r_{l,t}} | D_t]$, $j,l=1 \forall t$

Levando (II) e (III) em (I) e escrevendo $J(D_{T-1})$ com função de $a_{1,T-1}$ obtemos

$$J(D_{T-1}) = \min_{a_{1,T-1}} \{z_1 a_{1,T-1}^2 + z_2 a_{1,T-1} + z_3\}$$

onde

$$\begin{aligned} z_1 &= \delta A_T (f_{T-1} + \tau S_x)^2 [g_{\mu_{1,T-1}}(2) + g_{\mu_{2,T-1}}(2) - 2g_{\mu_{1,T-1},\mu_{2,T-1}}(1,1)] \\ z_2 &= -2\delta \{A_T (f_{T-1} + \tau S_x)^2 [g_{\mu_{2,T-1}}(2) - g_{\mu_{1,T-1},\mu_{2,T-1}}(1,1)] + B_T (f_{T-1} + \tau S_x) [g_{\mu_{1,T-1}}(1) - g_{\mu_{2,T-1}}(1)]\} \\ z_3 &= \delta [A_T (f_{T-1} + \tau S_x)^2 g_{\mu_{2,T-1}}(2) - 2B_T (f_{T-1} + \tau S_x) g_{\mu_{2,T-1}}(1) + C_T] + (F_{T-1} - f_{T-1})^2 + \alpha (F_{T-1} - f_{T-1}) \end{aligned}$$

Para que a função $z_1 a_{1,T-1}^2 + z_2 a_{1,T-1} + z_3$ tenha ponto de mínimo é suficiente que $z_1 > 0$, isto é, $g_{\mu_{1,T-1}}(2) + g_{\mu_{2,T-1}}(2) - 2g_{\mu_{1,T-1},\mu_{2,T-1}}(1,1) > 0$

Sob tal condição, o valor de $a_{1,T-1}$ que minimiza a função será $a_{1,T-1} = -\frac{z_2}{2z_1}$, ou seja,

$$a_{1,T-1}^* = \frac{g_{\mu_{2,T-1}}(2) - g_{\mu_{1,T-1},\mu_{2,T-1}} + \frac{B_T (g_{\mu_{1,T-1}}(1) - g_{\mu_{2,T-1}}(1))}{A_T (f_{T-1} + \tau) g_{1,T-1}}}{g_{1,T-1}}$$

Conseqüentemente, $J(D_{T-1}) = z_3 - \frac{z_2^2}{4z_1}$, ou seja, $J(D_{T-1}) = A_{T-1} f_{T-1}^2 - 2B_{T-1} f_{T-1} + C_{T-1}$

onde

$$A_{T-1} = 1 + \delta \frac{g_{2,T-1}}{g_{1,T-1}} A_T,$$

$$B_{T-1} = (F_{T-1} + \alpha/2) - \frac{\delta}{g_{1,T-1}} (\tau g_{2,T-1} A_T - g_{3,T-1} B_T),$$

$$C_{T-1} = F_{T-1}^2 - \alpha F_{T-1} + \frac{\delta}{g_{1,T-1}} \tau^2 g_{2,T-1} A_T - 2 \frac{\delta}{g_{1,T-1}} \tau \{g_{3,T-1} + \frac{[g_{\mu_{1,T-1}}(1) - g_{\mu_{2,T-1}}(1)]^2}{\tau A_T}\} B_T + \delta C_T,$$

desde que,

$$g_{1,T-1} = g_{\mu_{2,T-1}}(2) + g_{\mu_{1,T-1}}(2) - 2g_{\mu_{1,T-1},\mu_{2,T-1}}(1,1) > 0,$$

$$g_{2,T-1} = g_{\mu_{2,T-1}}(2)g_{\mu_{1,T-1}}(2) - [g_{\mu_{1,T-1},\mu_{2,T-1}}(1,1)]^2 > 0,$$

$$g_{3,T-1} = g_{\mu_{2,T-1}}(1)g_{\mu_{1,T-1}}(2) + g_{\mu_{2,T-1}}(2)g_{\mu_{1,T-1}}(1) - g_{\mu_{1,T-1},\mu_{2,T-1}}(1,1)(g_{\mu_{2,T-1}}(1) + g_{\mu_{1,T-1}}(1)) > 0$$

Assim por argumentos de indução finita, conclui-se que:

(1) A estratégia ótima relativa ao PPD é dada por

$$a_{1,t}^* = \frac{g_{\mu_{2,t}}(2) - g_{\mu_{1,t},\mu_{2,t}}}{g_{1,t}} + \frac{B_t(g_{\mu_{1,t}}(1) - g_{\mu_{2,t}}(1))}{A_t(f_t + \tau)g_{1,t}} \quad e$$

$$(2) J(D_t) = A_t f_t^2 - 2B_t f_t + C_t,$$

onde

$$A_{t-1} = 1 + \delta \frac{g_{2,t-1}}{g_{1,t-1}} A_t,$$

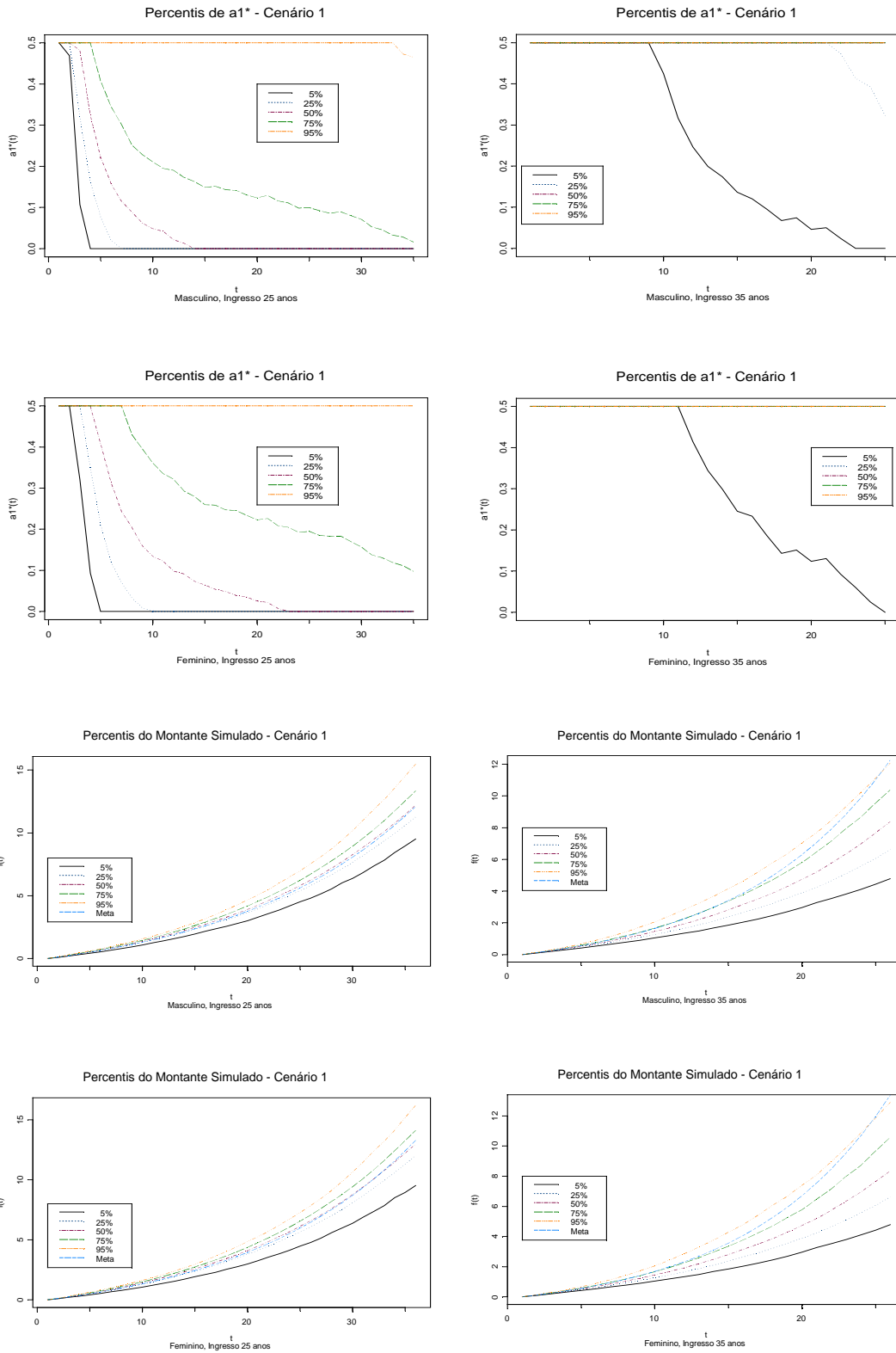
$$B_{t-1} = (F_{t-1} + \alpha/2) - \frac{\delta}{g_{1,t-1}} (\tau g_{2,t-1} A_t - g_{3,t-1} B_t),$$

$$C_{t-1} = F_{t-1}^2 - \alpha F_{t-1} + \frac{\delta}{g_{1,t-1}} \tau^2 g_{2,T-1} A_t - 2 \frac{\delta}{g_{1,t-1}} \tau \{g_{3,t-1} + \frac{[g_{\mu_{1,t-1}}(1) - g_{\mu_{2,t-1}}(1)]^2}{\tau A_t}\} B_t + \delta C_t$$

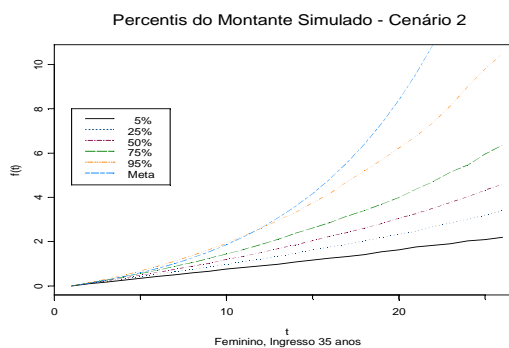
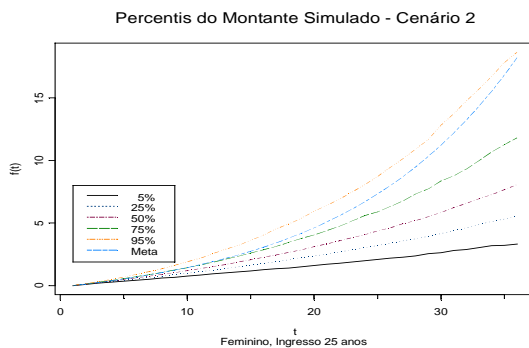
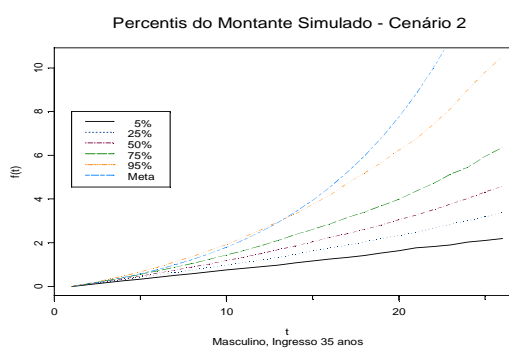
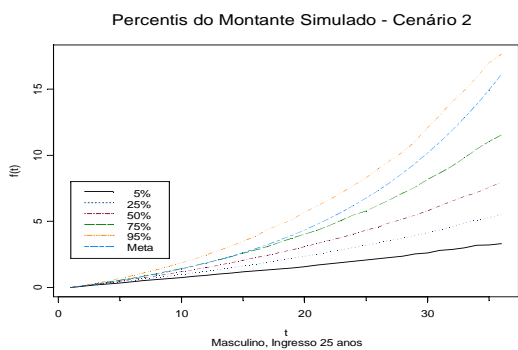
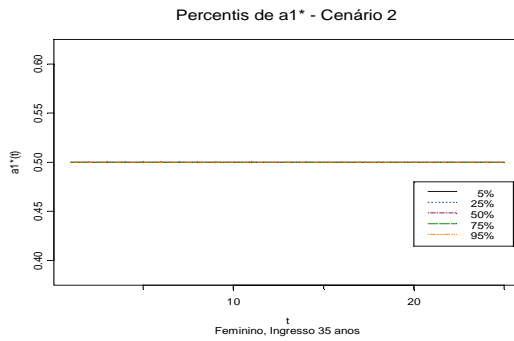
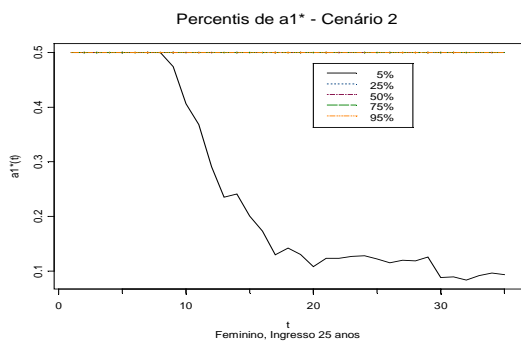
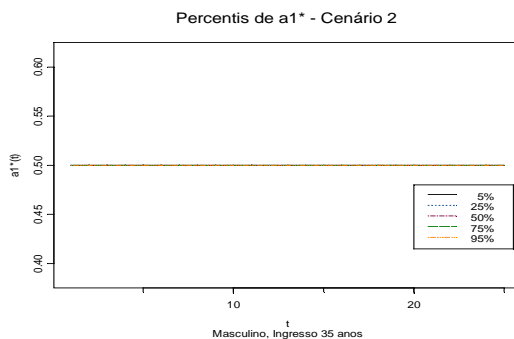
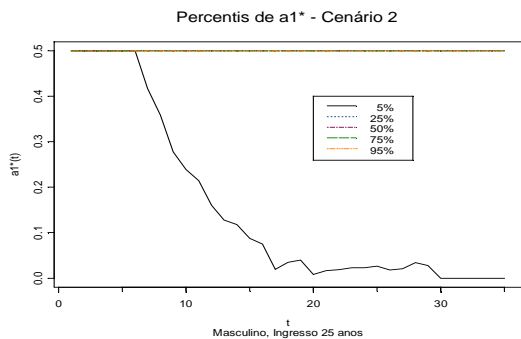
c.q.d.

ANEXO III

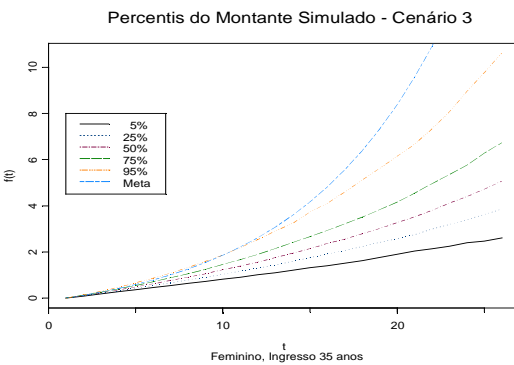
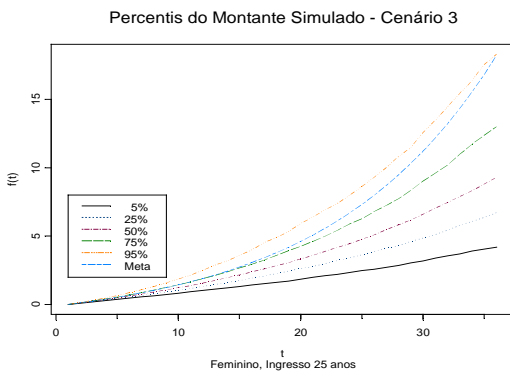
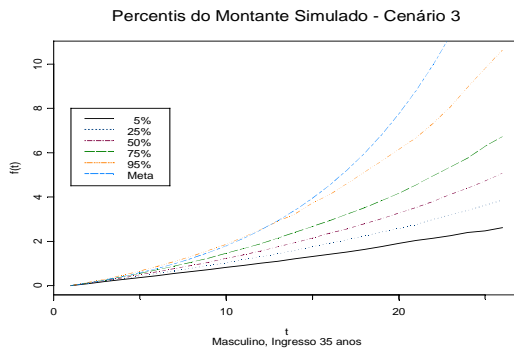
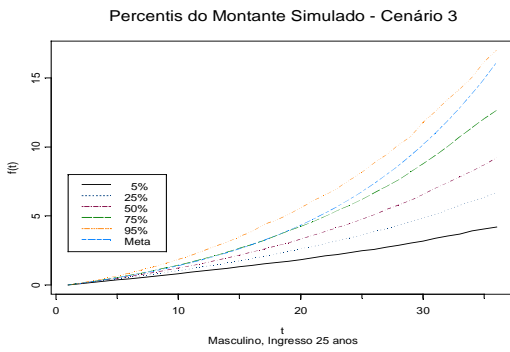
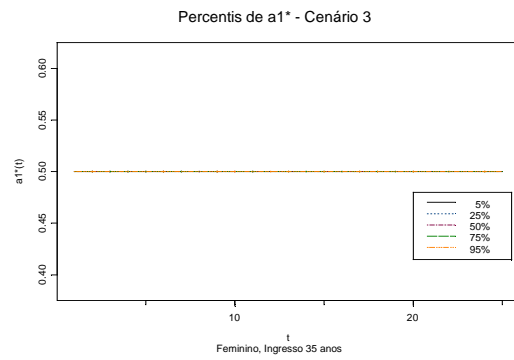
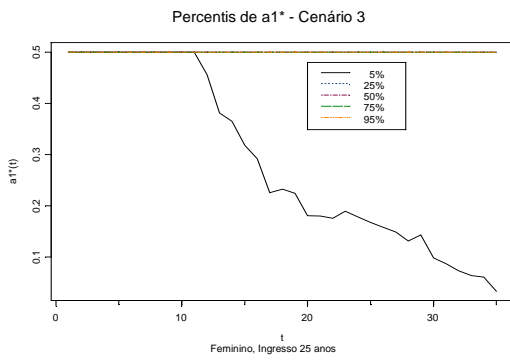
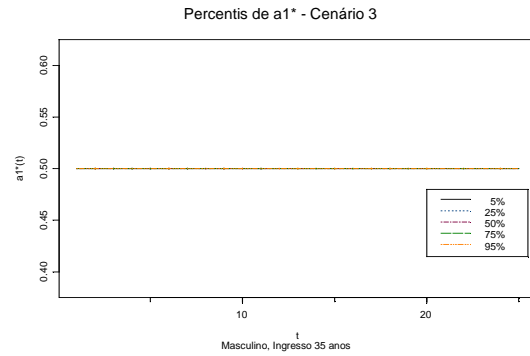
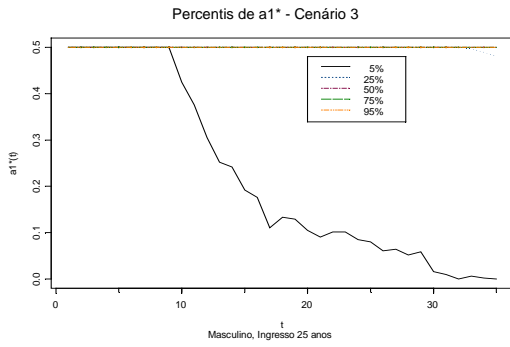
Gráficos x- Meta em Função do Benefício



Gráficos xi – Meta em Função do Benefício

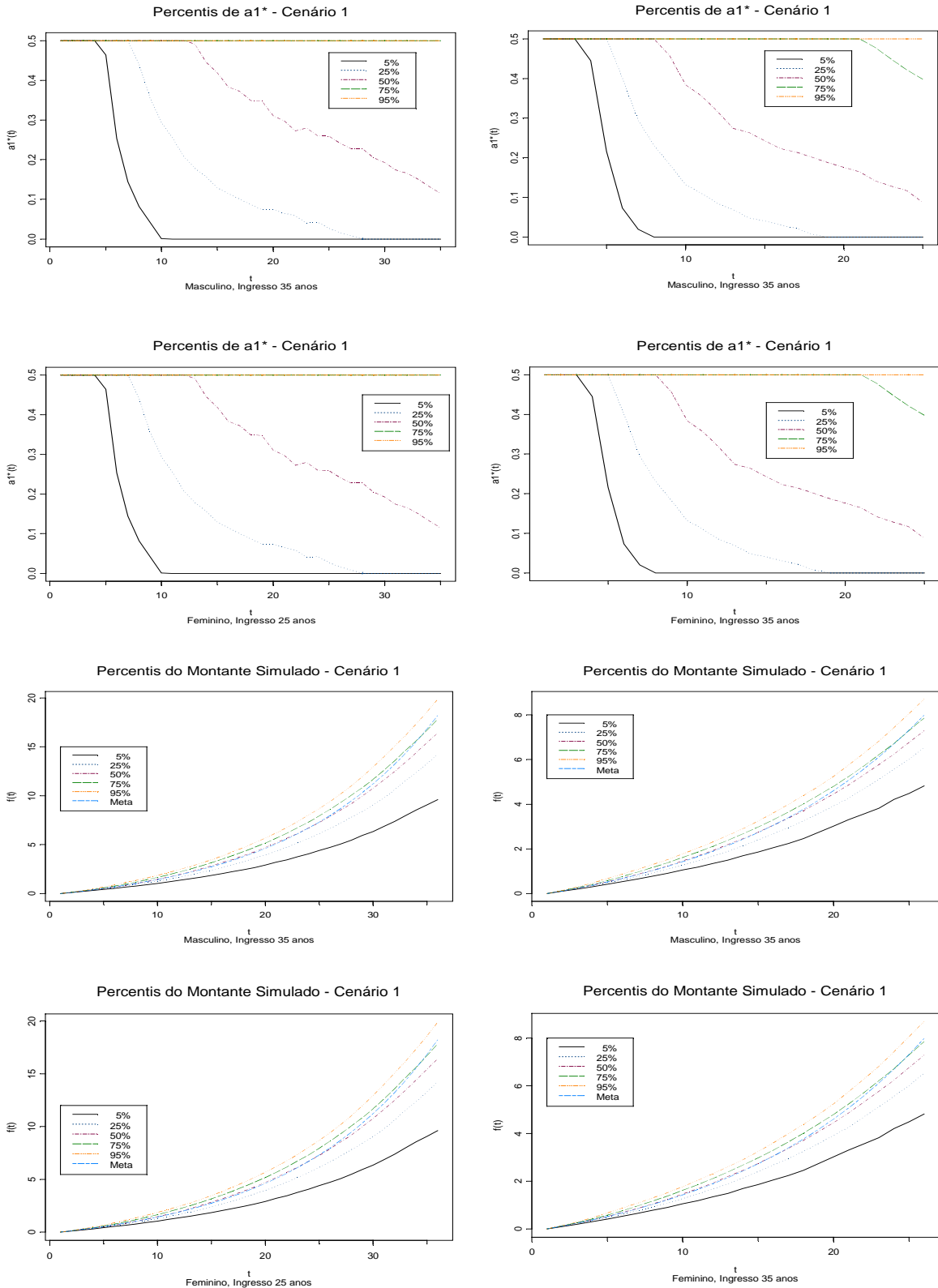


Gráficos xii - Meta em Função do Benefício

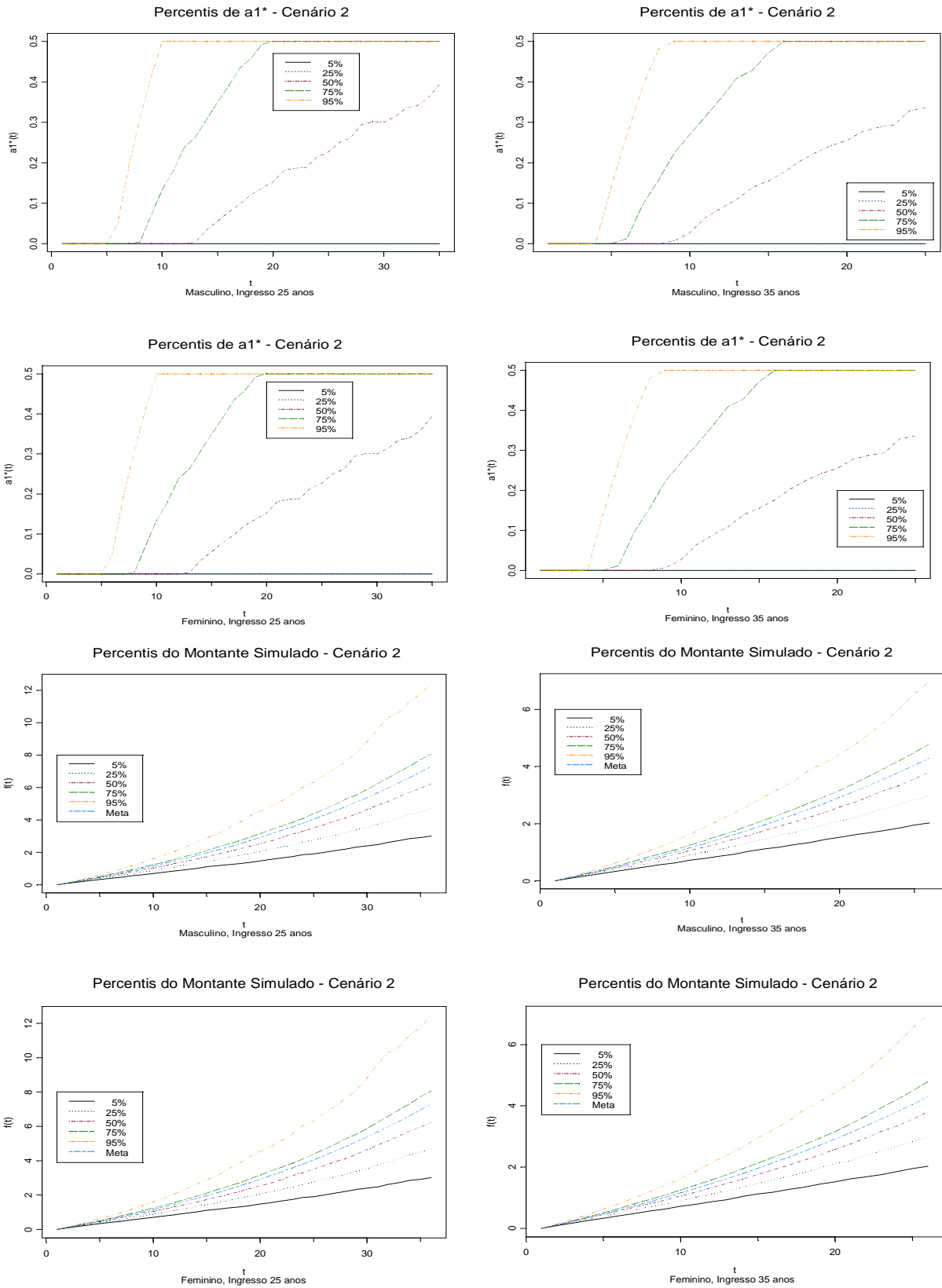


ANEXO IV

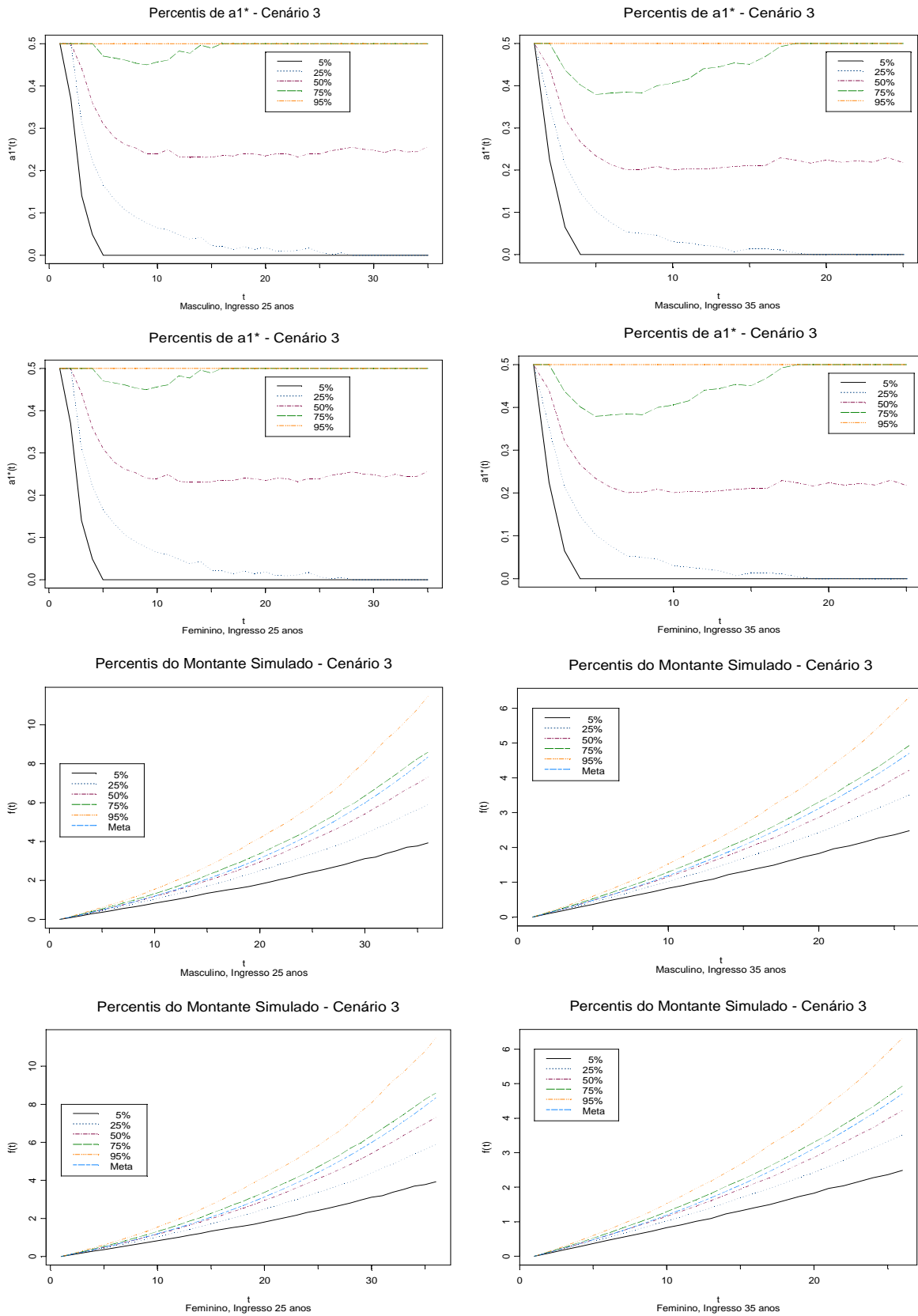
Gráficos xiii - Meta em Função do Retorno de Mercado



Gráficos xiv - Meta em Função do Retorno de Mercado



Gráficos xv - Meta em Função do Retorno de Mercado



ANEXO V

Tabela i

CARTEIRA DE APOSENTADORIA PROGRAMADA

| Idade | Frequencia | | | Renda Anual Média (R\$) | | |
|--------------|------------|------------|-------------|-------------------------|------------------|------------------|
| | Masc | Fem | Total | Masc | Fem | Total |
| 45 | 1 | 0 | 1 | 15.543,58 | - | 15.543,58 |
| 46 | 1 | 2 | 3 | 16.004,43 | 15.894,45 | 15.931,11 |
| 47 | 5 | 0 | 5 | 15.803,32 | - | 15.803,32 |
| 48 | 25 | 2 | 27 | 15.786,15 | 15.385,57 | 15.756,48 |
| 49 | 22 | 3 | 25 | 16.496,08 | 15.962,48 | 16.432,05 |
| 50 | 43 | 9 | 52 | 15.697,86 | 15.485,70 | 15.661,14 |
| 51 | 68 | 8 | 76 | 16.113,61 | 15.275,72 | 16.025,41 |
| 52 | 75 | 21 | 96 | 16.347,56 | 16.696,23 | 16.423,83 |
| 53 | 66 | 21 | 87 | 15.601,06 | 16.928,45 | 15.921,46 |
| 54 | 80 | 41 | 121 | 16.141,10 | 16.762,25 | 16.351,57 |
| 55 | 74 | 59 | 133 | 16.778,90 | 17.162,73 | 16.949,17 |
| 56 | 61 | 49 | 110 | 16.929,38 | 16.969,86 | 16.947,41 |
| 57 | 58 | 55 | 113 | 17.578,43 | 17.841,19 | 17.706,32 |
| 58 | 45 | 57 | 102 | 17.723,02 | 16.819,99 | 17.218,38 |
| 59 | 43 | 63 | 106 | 18.187,61 | 18.098,03 | 18.134,37 |
| 60 | 46 | 47 | 93 | 17.374,36 | 17.756,78 | 17.567,62 |
| 61 | 31 | 42 | 73 | 17.137,76 | 17.463,74 | 17.325,31 |
| 62 | 19 | 39 | 58 | 18.642,62 | 19.217,30 | 19.029,04 |
| 63 | 20 | 34 | 54 | 16.690,38 | 17.999,74 | 17.514,79 |
| 64 | 20 | 27 | 47 | 17.309,84 | 17.385,74 | 17.353,44 |
| 65 | 14 | 18 | 32 | 15.551,97 | 18.381,60 | 17.143,63 |
| 66 | 11 | 16 | 27 | 17.201,64 | 16.084,10 | 16.539,39 |
| 67 | 11 | 16 | 27 | 16.261,65 | 17.708,92 | 17.119,29 |
| 68 | 7 | 13 | 20 | 15.396,53 | 17.991,40 | 17.083,20 |
| 69 | 7 | 10 | 17 | 13.370,89 | 18.149,30 | 16.181,72 |
| 70 | 10 | 4 | 14 | 16.000,09 | 19.271,01 | 16.934,64 |
| 71 | 4 | 10 | 14 | 12.267,65 | 16.976,83 | 15.631,35 |
| 72 | 2 | 6 | 8 | 13.637,20 | 19.263,81 | 17.857,16 |
| 73 | 2 | 4 | 6 | 19.804,14 | 23.047,93 | 21.966,66 |
| 74 | 1 | 3 | 4 | 13.735,54 | 18.649,24 | 17.420,81 |
| 75 | 1 | 5 | 6 | 6.420,44 | 22.939,75 | 20.186,53 |
| 76 | 1 | 3 | 4 | 12.458,68 | 22.252,75 | 19.804,23 |
| 77 | 1 | 1 | 2 | 12.113,79 | 17.323,02 | 14.718,41 |
| 78 | 0 | 2 | 2 | - | 21.949,20 | 21.949,20 |
| 79 | 0 | 6 | 6 | - | 22.298,71 | 22.298,71 |
| 80 | 1 | 1 | 2 | 16.906,11 | 17.455,10 | 17.180,61 |
| 81 | 1 | 1 | 2 | 14.852,63 | 10.781,81 | 12.817,22 |
| 82 | 1 | 3 | 4 | 15.740,92 | 14.404,09 | 14.738,30 |
| 83 | 0 | 1 | 1 | - | 8.186,23 | 8.186,23 |
| 84 | 1 | 1 | 2 | 15.377,05 | 16.478,15 | 15.927,60 |
| 85 | 0 | 1 | 1 | - | 9.976,46 | 9.976,46 |
| 86 | 0 | 1 | 1 | - | 21.426,86 | 21.426,86 |
| Total | 879 | 705 | 1584 | 16.603,90 | 17.574,65 | 17.035,96 |

* Base 12/2003

Tabela ii

CARTEIRA DE APOSENTADORIA POR INVALIDEZ

| Idade | Frequencia | | | Renda Anual Média (R\$) | | |
|--------------|------------|------------|------------|-------------------------|------------------|------------------|
| | Masc | Fem | Total | Masc | Fem | Total |
| 35 | 0 | 1 | 1 | - | 22.859,07 | 22.859,07 |
| 36 | 1 | 1 | 2 | 16.349,45 | 18.377,06 | 17.363,26 |
| 37 | 0 | 2 | 2 | - | 12.951,71 | 12.951,71 |
| 38 | 2 | 3 | 5 | 10.988,51 | 14.049,88 | 12.825,33 |
| 39 | 1 | 3 | 4 | 12.201,41 | 14.900,34 | 14.225,61 |
| 40 | 1 | 6 | 7 | 21.599,37 | 16.518,80 | 17.244,59 |
| 41 | 5 | 10 | 15 | 16.975,50 | 15.513,19 | 16.000,63 |
| 42 | 8 | 14 | 22 | 12.734,07 | 15.735,02 | 14.643,77 |
| 43 | 6 | 17 | 23 | 16.681,84 | 14.529,46 | 15.090,95 |
| 44 | 8 | 15 | 23 | 16.219,94 | 15.005,50 | 15.427,91 |
| 45 | 4 | 16 | 20 | 16.717,71 | 16.572,56 | 16.601,59 |
| 46 | 9 | 25 | 34 | 14.003,57 | 14.145,38 | 14.107,84 |
| 47 | 9 | 21 | 30 | 18.391,03 | 14.543,60 | 15.697,83 |
| 48 | 8 | 19 | 27 | 10.375,82 | 14.684,16 | 13.407,62 |
| 49 | 8 | 22 | 30 | 16.385,14 | 14.969,06 | 15.346,68 |
| 50 | 12 | 16 | 28 | 13.779,18 | 14.325,29 | 14.091,24 |
| 51 | 9 | 22 | 31 | 13.249,98 | 14.845,68 | 14.382,41 |
| 52 | 11 | 10 | 21 | 19.009,55 | 16.501,13 | 17.815,06 |
| 53 | 9 | 13 | 22 | 11.033,24 | 13.846,59 | 12.695,68 |
| 54 | 10 | 6 | 16 | 13.544,90 | 13.437,04 | 13.504,45 |
| 55 | 10 | 7 | 17 | 15.920,66 | 16.187,32 | 16.030,46 |
| 56 | 5 | 6 | 11 | 17.659,90 | 12.857,13 | 15.040,21 |
| 57 | 8 | 3 | 11 | 13.071,65 | 11.438,01 | 12.626,11 |
| 58 | 4 | 11 | 15 | 14.992,93 | 6.991,78 | 9.125,42 |
| 59 | 2 | 4 | 6 | 19.145,04 | 11.154,65 | 13.818,11 |
| 60 | 6 | 2 | 8 | 14.885,95 | 13.491,40 | 14.537,32 |
| 61 | 3 | 6 | 9 | 20.581,90 | 14.850,05 | 16.760,67 |
| 62 | 6 | 2 | 8 | 13.440,74 | 12.229,88 | 13.138,03 |
| 63 | 3 | 3 | 6 | 12.508,82 | 9.009,65 | 10.759,23 |
| 64 | 1 | 3 | 4 | 16.384,03 | 16.234,44 | 16.271,84 |
| 65 | 1 | 3 | 4 | 18.531,63 | 13.293,19 | 14.602,80 |
| 66 | 0 | 2 | 2 | - | 15.503,93 | 15.503,93 |
| 67 | 0 | 4 | 4 | - | 3.386,86 | 3.386,86 |
| 68 | 0 | 4 | 4 | - | 14.460,10 | 14.460,10 |
| 69 | 0 | 1 | 1 | - | 19.574,88 | 19.574,88 |
| 70 | 1 | 1 | 2 | 16.057,21 | 3.814,07 | 9.935,64 |
| 71 | 0 | 0 | 0 | - | - | - |
| 72 | 0 | 1 | 1 | - | 9.986,47 | 9.986,47 |
| 73 | 1 | 0 | 1 | 15.182,57 | - | 15.182,57 |
| 74 | 0 | 0 | 0 | - | - | - |
| 75 | 0 | 1 | 1 | - | 3.814,07 | 3.814,07 |
| 76 | 0 | 0 | 0 | - | - | - |
| 77 | 1 | 0 | 1 | 4.861,22 | - | 4.861,22 |
| 78 | 2 | 1 | 3 | 7.134,34 | 5.030,61 | 6.433,09 |
| 79 | 0 | 0 | 0 | - | - | - |
| 80 | 1 | 0 | 1 | 15.165,80 | - | 15.165,80 |
| 81 | 0 | 0 | 0 | - | - | - |
| 82 | 1 | 0 | 1 | 11.266,06 | - | 11.266,06 |
| Total | 177 | 307 | 484 | 14.807,80 | 14.207,34 | 14.426,93 |

* Base 12/2003

ANEXO VI

Tabela iii
DISTRIBUIÇÃO DA RESERVA MATEMÁTICA - V_x (Feminino AT-49)

| i | V_i | x = 50 | | x = 60 | | x = 70 | | x = 80 | |
|----|-------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| | | $P(V_x = v_i)$ | $F_{V_x}(v)$ | $P(V_x = v_i)$ | $F_{V_x}(v)$ | $P(V_x = v_i)$ | $F_{V_x}(v)$ | $P(V_x = v_i)$ | $F_{V_x}(v)$ |
| 0 | 1,00 | 0,003109 | 0,003109 | 0,007504 | 0,007504 | 0,020964 | 0,020964 | 0,061415 | 0,061415 |
| 1 | 1,94 | 0,003351 | 0,006460 | 0,008216 | 0,015720 | 0,022832 | 0,043796 | 0,064183 | 0,125598 |
| 2 | 2,83 | 0,003618 | 0,010078 | 0,009000 | 0,024720 | 0,024817 | 0,068613 | 0,066560 | 0,192159 |
| 3 | 3,67 | 0,003917 | 0,013995 | 0,009862 | 0,034582 | 0,026910 | 0,095523 | 0,068430 | 0,260588 |
| 4 | 4,47 | 0,004250 | 0,018245 | 0,010808 | 0,045390 | 0,029098 | 0,124621 | 0,069670 | 0,330259 |
| 5 | 5,21 | 0,004619 | 0,022864 | 0,011843 | 0,057233 | 0,031364 | 0,155985 | 0,070162 | 0,400421 |
| 6 | 5,92 | 0,005028 | 0,027892 | 0,012972 | 0,070204 | 0,033682 | 0,189667 | 0,069796 | 0,470217 |
| 7 | 6,58 | 0,005483 | 0,033375 | 0,014200 | 0,084404 | 0,036020 | 0,225687 | 0,068485 | 0,538702 |
| 8 | 7,21 | 0,005986 | 0,039361 | 0,015531 | 0,099936 | 0,038339 | 0,264026 | 0,066171 | 0,604873 |
| 9 | 7,80 | 0,006544 | 0,045905 | 0,016969 | 0,116904 | 0,040587 | 0,304612 | 0,062841 | 0,667714 |
| 10 | 8,36 | 0,007160 | 0,053065 | 0,018513 | 0,135418 | 0,042707 | 0,347320 | 0,058536 | 0,726250 |
| 11 | 8,89 | 0,007839 | 0,060903 | 0,020163 | 0,155581 | 0,044632 | 0,391952 | 0,053357 | 0,779607 |
| 12 | 9,38 | 0,008587 | 0,069491 | 0,021916 | 0,177497 | 0,046285 | 0,438237 | 0,047472 | 0,830280 |
| 13 | 9,85 | 0,009409 | 0,078900 | 0,023764 | 0,201260 | 0,047585 | 0,485822 | 0,041106 | 0,888185 |
| 14 | 10,29 | 0,010312 | 0,089212 | 0,025696 | 0,226957 | 0,048448 | 0,534270 | 0,034528 | 0,902713 |
| 15 | 10,71 | 0,011299 | 0,100511 | 0,027697 | 0,254654 | 0,048790 | 0,583060 | 0,028033 | 0,930747 |
| 16 | 11,11 | 0,012376 | 0,112887 | 0,029745 | 0,284399 | 0,048536 | 0,631596 | 0,021911 | 0,952658 |
| 17 | 11,48 | 0,013548 | 0,126435 | 0,031809 | 0,316208 | 0,047624 | 0,679219 | 0,016412 | 0,969070 |
| 18 | 11,83 | 0,014818 | 0,141253 | 0,033857 | 0,350064 | 0,046014 | 0,725234 | 0,011722 | 0,980792 |
| 19 | 12,16 | 0,016190 | 0,157443 | 0,035842 | 0,385906 | 0,043699 | 0,768933 | 0,007938 | 0,988730 |
| 20 | 12,47 | 0,017663 | 0,175106 | 0,037715 | 0,423621 | 0,040705 | 0,809638 | 0,005065 | 0,993795 |
| 21 | 12,76 | 0,019237 | 0,194344 | 0,039415 | 0,463035 | 0,037104 | 0,846742 | 0,003023 | 0,996818 |
| 22 | 13,04 | 0,020910 | 0,215254 | 0,040874 | 0,503910 | 0,033012 | 0,879753 | 0,001675 | 0,998493 |
| 23 | 13,30 | 0,022673 | 0,237927 | 0,042022 | 0,545932 | 0,028584 | 0,908338 | 0,000854 | 0,999347 |
| 24 | 13,55 | 0,024517 | 0,262443 | 0,042784 | 0,588716 | 0,024010 | 0,932348 | 0,000397 | 0,999744 |
| 25 | 13,78 | 0,026426 | 0,288869 | 0,043086 | 0,631802 | 0,019494 | 0,951842 | 0,000166 | 0,999910 |
| 26 | 14,00 | 0,028379 | 0,317248 | 0,042862 | 0,674664 | 0,015237 | 0,967079 | 0,000062 | 0,999972 |
| 27 | 14,21 | 0,030349 | 0,347597 | 0,042056 | 0,716720 | 0,011413 | 0,978492 | 0,000020 | 0,999993 |
| 28 | 14,41 | 0,032302 | 0,379900 | 0,040635 | 0,757355 | 0,008151 | 0,986643 | 0,000006 | 0,999998 |
| 29 | 14,59 | 0,034197 | 0,414096 | 0,038590 | 0,795945 | 0,005520 | 0,992163 | 0,000002 | 1,000000 |
| 30 | 14,76 | 0,035983 | 0,450080 | 0,035946 | 0,831892 | 0,003522 | 0,995685 | 0,000000 | 1,000000 |
| 31 | 14,93 | 0,037605 | 0,487685 | 0,032766 | 0,864658 | 0,002102 | 0,997787 | 0,000000 | 1,000000 |
| 32 | 15,08 | 0,038998 | 0,526683 | 0,029152 | 0,893811 | 0,001165 | 0,998952 | 0,000000 | 1,000000 |
| 33 | 15,23 | 0,040093 | 0,566776 | 0,025243 | 0,919053 | 0,000594 | 0,999546 | 0,000000 | 1,000000 |
| 34 | 15,37 | 0,040820 | 0,607596 | 0,021203 | 0,940257 | 0,000276 | 0,999822 | 0,000000 | 1,000000 |
| 35 | 15,50 | 0,041108 | 0,648704 | 0,017215 | 0,957472 | 0,000116 | 0,999938 | 0,000000 | 1,000000 |
| 36 | 15,62 | 0,040894 | 0,689598 | 0,013455 | 0,970927 | 0,000043 | 0,999981 | 0,000000 | 1,000000 |
| 37 | 15,74 | 0,040126 | 0,729724 | 0,010079 | 0,981006 | 0,000014 | 0,999995 | 0,000000 | 1,000000 |
| 38 | 15,85 | 0,038770 | 0,768494 | 0,007198 | 0,988205 | 0,000004 | 0,999999 | 0,000000 | 1,000000 |
| 39 | 15,95 | 0,036819 | 0,805313 | 0,004875 | 0,993079 | 0,000001 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 40 | 16,05 | 0,034296 | 0,839609 | 0,003110 | 0,996189 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 41 | 16,14 | 0,031262 | 0,870871 | 0,001857 | 0,998046 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 42 | 16,22 | 0,027814 | 0,898685 | 0,001029 | 0,999075 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 43 | 16,31 | 0,024084 | 0,922769 | 0,000525 | 0,999599 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 44 | 16,38 | 0,020230 | 0,942999 | 0,000244 | 0,999843 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 45 | 16,46 | 0,016425 | 0,959424 | 0,000102 | 0,999945 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 46 | 16,52 | 0,012838 | 0,972262 | 0,000038 | 0,999983 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 47 | 16,59 | 0,009616 | 0,981878 | 0,000012 | 0,999995 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 48 | 16,65 | 0,006868 | 0,988746 | 0,000004 | 0,999999 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 49 | 16,71 | 0,004651 | 0,993397 | 0,000001 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 50 | 16,76 | 0,002967 | 0,996364 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 51 | 16,81 | 0,001771 | 0,998136 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 52 | 16,86 | 0,000982 | 0,999117 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 53 | 16,91 | 0,000500 | 0,999618 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 54 | 16,95 | 0,000232 | 0,999850 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 55 | 16,99 | 0,000097 | 0,999947 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 56 | 17,03 | 0,000036 | 0,999984 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 57 | 17,06 | 0,000012 | 0,999996 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 58 | 17,10 | 0,000003 | 0,999999 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 59 | 17,13 | 0,000001 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 60 | 17,16 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |

Tabela iv

DISTRIBUIÇÃO DA RESERVA MATEMÁTICA - V_x (Masculino AT-49)

| i | Vi | x = 50 | | x = 60 | | x = 70 | | x = 80 | |
|----|-------|------------------|---------------|------------------|---------------|------------------|---------------|------------------|---------------|
| | | P($V_x = v_i$) | F $_{V_x}(v)$ | P($V_x = v_i$) | F $_{V_x}(v)$ | P($V_x = v_i$) | F $_{V_x}(v)$ | P($V_x = v_i$) | F $_{V_x}(v)$ |
| 0 | 1,00 | 0,006557 | 0,006557 | 0,015662 | 0,015662 | 0,035092 | 0,035092 | 0,085503 | 0,085503 |
| 1 | 1,94 | 0,007229 | 0,013786 | 0,016605 | 0,032267 | 0,036929 | 0,072021 | 0,085591 | 0,171094 |
| 2 | 2,83 | 0,007927 | 0,021713 | 0,017612 | 0,049879 | 0,038763 | 0,110784 | 0,084916 | 0,256009 |
| 3 | 3,67 | 0,008648 | 0,030362 | 0,018685 | 0,068564 | 0,040566 | 0,151350 | 0,083411 | 0,339420 |
| 4 | 4,47 | 0,009388 | 0,039750 | 0,019824 | 0,088387 | 0,042307 | 0,193657 | 0,081033 | 0,420453 |
| 5 | 5,21 | 0,010145 | 0,049895 | 0,021027 | 0,109415 | 0,043947 | 0,237603 | 0,077762 | 0,498215 |
| 6 | 5,92 | 0,010918 | 0,060812 | 0,022291 | 0,131706 | 0,045446 | 0,283049 | 0,073616 | 0,571832 |
| 7 | 6,58 | 0,011702 | 0,072515 | 0,023612 | 0,155318 | 0,046757 | 0,329805 | 0,068650 | 0,640481 |
| 8 | 7,21 | 0,012499 | 0,085013 | 0,024983 | 0,180301 | 0,047830 | 0,377636 | 0,062960 | 0,703442 |
| 9 | 7,80 | 0,013306 | 0,098319 | 0,026396 | 0,206697 | 0,048615 | 0,426251 | 0,056687 | 0,760129 |
| 10 | 8,36 | 0,014122 | 0,112441 | 0,027839 | 0,234535 | 0,049057 | 0,475308 | 0,050010 | 0,810139 |
| 11 | 8,89 | 0,014972 | 0,127413 | 0,029296 | 0,263831 | 0,049108 | 0,524415 | 0,043135 | 0,853274 |
| 12 | 9,38 | 0,015880 | 0,143294 | 0,030751 | 0,294582 | 0,048720 | 0,573136 | 0,036290 | 0,889564 |
| 13 | 9,85 | 0,016848 | 0,160142 | 0,032181 | 0,326763 | 0,047857 | 0,620993 | 0,029703 | 0,919267 |
| 14 | 10,29 | 0,017875 | 0,178016 | 0,033562 | 0,360325 | 0,046492 | 0,667485 | 0,023584 | 0,942850 |
| 15 | 10,71 | 0,018960 | 0,196976 | 0,034863 | 0,395188 | 0,044616 | 0,712101 | 0,018107 | 0,960957 |
| 16 | 11,11 | 0,020100 | 0,217076 | 0,036052 | 0,431240 | 0,042237 | 0,754339 | 0,013396 | 0,974354 |
| 17 | 11,48 | 0,021290 | 0,238366 | 0,037092 | 0,468332 | 0,039388 | 0,793726 | 0,009514 | 0,983868 |
| 18 | 11,83 | 0,022527 | 0,260893 | 0,037944 | 0,506277 | 0,036123 | 0,829850 | 0,006459 | 0,990326 |
| 19 | 12,16 | 0,023801 | 0,284694 | 0,038566 | 0,544843 | 0,032524 | 0,862374 | 0,004171 | 0,994498 |
| 20 | 12,47 | 0,025102 | 0,309795 | 0,038917 | 0,583760 | 0,028693 | 0,891067 | 0,002550 | 0,997048 |
| 21 | 12,76 | 0,026416 | 0,336211 | 0,038957 | 0,622717 | 0,024749 | 0,915816 | 0,001467 | 0,998515 |
| 22 | 13,04 | 0,027727 | 0,363938 | 0,038650 | 0,661367 | 0,020821 | 0,936637 | 0,000789 | 0,999304 |
| 23 | 13,30 | 0,029017 | 0,392955 | 0,037965 | 0,699332 | 0,017042 | 0,953679 | 0,000395 | 0,999698 |
| 24 | 13,55 | 0,030262 | 0,423217 | 0,036883 | 0,736215 | 0,013531 | 0,967210 | 0,000182 | 0,999880 |
| 25 | 13,78 | 0,031435 | 0,454653 | 0,035394 | 0,771609 | 0,010389 | 0,977599 | 0,000077 | 0,999957 |
| 26 | 14,00 | 0,032508 | 0,487160 | 0,033507 | 0,805116 | 0,007686 | 0,985285 | 0,000029 | 0,999986 |
| 27 | 14,21 | 0,033445 | 0,520606 | 0,031246 | 0,836362 | 0,005459 | 0,990744 | 0,000010 | 0,999996 |
| 28 | 14,41 | 0,034213 | 0,554819 | 0,028657 | 0,865019 | 0,003706 | 0,994450 | 0,000003 | 0,999999 |
| 29 | 14,59 | 0,034774 | 0,589593 | 0,025802 | 0,890821 | 0,002393 | 0,996843 | 0,000001 | 1,000000 |
| 30 | 14,76 | 0,035091 | 0,624684 | 0,022762 | 0,913583 | 0,001463 | 0,998306 | 0,000000 | 1,000000 |
| 31 | 14,93 | 0,035127 | 0,659811 | 0,019633 | 0,933216 | 0,000842 | 0,999148 | 0,000000 | 1,000000 |
| 32 | 15,08 | 0,034850 | 0,694661 | 0,016518 | 0,949734 | 0,000453 | 0,999601 | 0,000000 | 1,000000 |
| 33 | 15,23 | 0,034232 | 0,728894 | 0,013520 | 0,963254 | 0,000226 | 0,999827 | 0,000000 | 1,000000 |
| 34 | 15,37 | 0,033256 | 0,762150 | 0,010734 | 0,973988 | 0,000104 | 0,999931 | 0,000000 | 1,000000 |
| 35 | 15,50 | 0,031914 | 0,794064 | 0,008242 | 0,982229 | 0,000044 | 0,999975 | 0,000000 | 1,000000 |
| 36 | 15,62 | 0,030213 | 0,824277 | 0,006097 | 0,988327 | 0,000017 | 0,999992 | 0,000000 | 1,000000 |
| 37 | 15,74 | 0,028174 | 0,852451 | 0,004330 | 0,992657 | 0,000006 | 0,999998 | 0,000000 | 1,000000 |
| 38 | 15,85 | 0,025839 | 0,878290 | 0,002940 | 0,995597 | 0,000002 | 0,999999 | 0,000000 | 1,000000 |
| 39 | 15,95 | 0,023265 | 0,901555 | 0,001899 | 0,997496 | 0,000001 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 40 | 16,05 | 0,020524 | 0,922080 | 0,001161 | 0,998656 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 41 | 16,14 | 0,017703 | 0,939782 | 0,000668 | 0,999324 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 42 | 16,22 | 0,014894 | 0,954676 | 0,000359 | 0,999683 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 43 | 16,31 | 0,012190 | 0,966866 | 0,000180 | 0,999863 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 44 | 16,38 | 0,009679 | 0,976545 | 0,000083 | 0,999945 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 45 | 16,46 | 0,007431 | 0,983977 | 0,000035 | 0,999980 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 46 | 16,52 | 0,005498 | 0,989475 | 0,000013 | 0,999994 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 47 | 16,59 | 0,003905 | 0,993379 | 0,000005 | 0,999998 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 48 | 16,65 | 0,002651 | 0,996030 | 0,000001 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 49 | 16,71 | 0,001712 | 0,997742 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 50 | 16,76 | 0,001046 | 0,998788 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 51 | 16,81 | 0,000602 | 0,999390 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 52 | 16,86 | 0,000324 | 0,999714 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 53 | 16,91 | 0,000162 | 0,999876 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 54 | 16,95 | 0,000075 | 0,999951 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 55 | 16,99 | 0,000031 | 0,999982 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 56 | 17,03 | 0,000012 | 0,999994 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 57 | 17,06 | 0,000004 | 0,999998 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 58 | 17,10 | 0,000001 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 59 | 17,13 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 60 | 17,16 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |

Tabela v

DISTRIBUIÇÃO DA RESERVA MATEMÁTICA - V_x (Masculino AT-83)

| i | V_i | x = 50 | | x = 60 | | x = 70 | | x = 80 | |
|----|-------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| | | $P(V_x = v_i)$ | $F_{V_x}(v)$ | $P(V_x = v_i)$ | $F_{V_x}(v)$ | $P(V_x = v_i)$ | $F_{V_x}(v)$ | $P(V_x = v_i)$ | $F_{V_x}(v)$ |
| 0 | 1,00 | 0,004057 | 0,004057 | 0,008338 | 0,008338 | 0,021371 | 0,021371 | 0,057026 | 0,057026 |
| 1 | 1,94 | 0,004413 | 0,008470 | 0,008908 | 0,017246 | 0,023142 | 0,044513 | 0,059210 | 0,116236 |
| 2 | 2,83 | 0,004771 | 0,013241 | 0,009572 | 0,026818 | 0,024968 | 0,069480 | 0,061051 | 0,177288 |
| 3 | 3,67 | 0,005129 | 0,018370 | 0,010345 | 0,037163 | 0,026832 | 0,096312 | 0,062450 | 0,239738 |
| 4 | 4,47 | 0,005488 | 0,023859 | 0,011231 | 0,048394 | 0,028732 | 0,125044 | 0,063277 | 0,303015 |
| 5 | 5,21 | 0,005851 | 0,029710 | 0,012229 | 0,060623 | 0,030664 | 0,155708 | 0,063417 | 0,366431 |
| 6 | 5,92 | 0,006219 | 0,035928 | 0,013338 | 0,073961 | 0,032616 | 0,188323 | 0,062801 | 0,429232 |
| 7 | 6,58 | 0,006593 | 0,042522 | 0,014555 | 0,088515 | 0,034567 | 0,222890 | 0,061402 | 0,490633 |
| 8 | 7,21 | 0,006980 | 0,049502 | 0,015873 | 0,104388 | 0,036486 | 0,259376 | 0,059247 | 0,549881 |
| 9 | 7,80 | 0,007397 | 0,056898 | 0,017282 | 0,121670 | 0,038331 | 0,297707 | 0,056442 | 0,606323 |
| 10 | 8,36 | 0,007864 | 0,064762 | 0,018771 | 0,140441 | 0,040049 | 0,337756 | 0,053102 | 0,659425 |
| 11 | 8,89 | 0,008401 | 0,073163 | 0,020326 | 0,160767 | 0,041583 | 0,379339 | 0,049340 | 0,708765 |
| 12 | 9,38 | 0,009027 | 0,082191 | 0,021930 | 0,182697 | 0,042876 | 0,422215 | 0,045266 | 0,754031 |
| 13 | 9,85 | 0,009756 | 0,091947 | 0,023567 | 0,206264 | 0,043858 | 0,466074 | 0,040985 | 0,795017 |
| 14 | 10,29 | 0,010592 | 0,102538 | 0,025236 | 0,231500 | 0,044439 | 0,510512 | 0,036597 | 0,831614 |
| 15 | 10,71 | 0,011533 | 0,114072 | 0,026933 | 0,258432 | 0,044537 | 0,555049 | 0,032198 | 0,863812 |
| 16 | 11,11 | 0,012579 | 0,126651 | 0,028647 | 0,287080 | 0,044104 | 0,599154 | 0,027881 | 0,891692 |
| 17 | 11,48 | 0,013726 | 0,140377 | 0,030361 | 0,317441 | 0,043122 | 0,642276 | 0,023732 | 0,915425 |
| 18 | 11,83 | 0,014969 | 0,155347 | 0,032047 | 0,349488 | 0,041609 | 0,683885 | 0,019853 | 0,935278 |
| 19 | 12,16 | 0,016298 | 0,171645 | 0,033667 | 0,383155 | 0,039639 | 0,723524 | 0,016303 | 0,951580 |
| 20 | 12,47 | 0,017703 | 0,189348 | 0,035176 | 0,418331 | 0,037293 | 0,760817 | 0,013117 | 0,964698 |
| 21 | 12,76 | 0,019169 | 0,208518 | 0,036524 | 0,454855 | 0,034651 | 0,795468 | 0,010312 | 0,975010 |
| 22 | 13,04 | 0,020682 | 0,229200 | 0,037659 | 0,492514 | 0,031790 | 0,827258 | 0,007893 | 0,982902 |
| 23 | 13,30 | 0,022226 | 0,251426 | 0,038522 | 0,531036 | 0,028784 | 0,856042 | 0,005854 | 0,988756 |
| 24 | 13,55 | 0,023800 | 0,275226 | 0,039032 | 0,570068 | 0,025702 | 0,881744 | 0,004184 | 0,992940 |
| 25 | 13,78 | 0,025400 | 0,300626 | 0,039118 | 0,609186 | 0,022612 | 0,904356 | 0,002861 | 0,995801 |
| 26 | 14,00 | 0,027017 | 0,327644 | 0,038738 | 0,647925 | 0,019580 | 0,923936 | 0,001857 | 0,997658 |
| 27 | 14,21 | 0,028634 | 0,356278 | 0,037875 | 0,685800 | 0,016667 | 0,940603 | 0,001132 | 0,998790 |
| 28 | 14,41 | 0,030223 | 0,386501 | 0,036547 | 0,722346 | 0,013942 | 0,954546 | 0,000640 | 0,999430 |
| 29 | 14,59 | 0,031752 | 0,418253 | 0,034816 | 0,757162 | 0,011449 | 0,965995 | 0,000330 | 0,999760 |
| 30 | 14,76 | 0,033175 | 0,451427 | 0,032756 | 0,789918 | 0,009212 | 0,975207 | 0,000152 | 0,999912 |
| 31 | 14,93 | 0,034445 | 0,485873 | 0,030435 | 0,820353 | 0,007242 | 0,982450 | 0,000061 | 0,999973 |
| 32 | 15,08 | 0,035516 | 0,521389 | 0,027922 | 0,848276 | 0,005543 | 0,987992 | 0,000020 | 0,999994 |
| 33 | 15,23 | 0,036330 | 0,557720 | 0,025282 | 0,873557 | 0,004111 | 0,992104 | 0,000005 | 0,999999 |
| 34 | 15,37 | 0,036811 | 0,594531 | 0,022575 | 0,896132 | 0,002938 | 0,995042 | 0,000001 | 1,000000 |
| 35 | 15,50 | 0,036892 | 0,631423 | 0,019861 | 0,915993 | 0,002009 | 0,997051 | 0,000000 | 1,000000 |
| 36 | 15,62 | 0,036534 | 0,667957 | 0,017198 | 0,933191 | 0,001304 | 0,998355 | 0,000000 | 1,000000 |
| 37 | 15,74 | 0,035720 | 0,703677 | 0,014639 | 0,947830 | 0,000795 | 0,999150 | 0,000000 | 1,000000 |
| 38 | 15,85 | 0,034467 | 0,738144 | 0,012246 | 0,960076 | 0,000449 | 0,999600 | 0,000000 | 1,000000 |
| 39 | 15,95 | 0,032835 | 0,770979 | 0,010056 | 0,970133 | 0,000232 | 0,999832 | 0,000000 | 1,000000 |
| 40 | 16,05 | 0,030892 | 0,801871 | 0,008091 | 0,978224 | 0,000107 | 0,999939 | 0,000000 | 1,000000 |
| 41 | 16,14 | 0,028703 | 0,830575 | 0,006361 | 0,984585 | 0,000043 | 0,999981 | 0,000000 | 1,000000 |
| 42 | 16,22 | 0,026334 | 0,856908 | 0,004868 | 0,989453 | 0,000014 | 0,999996 | 0,000000 | 1,000000 |
| 43 | 16,31 | 0,023843 | 0,880752 | 0,003611 | 0,993064 | 0,000004 | 0,999999 | 0,000000 | 1,000000 |
| 44 | 16,38 | 0,021290 | 0,902042 | 0,002581 | 0,995645 | 0,000001 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 45 | 16,46 | 0,018731 | 0,920773 | 0,001765 | 0,997410 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 46 | 16,52 | 0,016219 | 0,936992 | 0,001146 | 0,998555 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 47 | 16,59 | 0,013806 | 0,950799 | 0,000698 | 0,999254 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 48 | 16,65 | 0,011549 | 0,962348 | 0,000395 | 0,999649 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 49 | 16,71 | 0,009484 | 0,971832 | 0,000204 | 0,999852 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 50 | 16,76 | 0,007631 | 0,979463 | 0,000094 | 0,999946 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 51 | 16,81 | 0,005999 | 0,985462 | 0,000038 | 0,999984 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 52 | 16,86 | 0,004591 | 0,990053 | 0,000013 | 0,999996 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 53 | 16,91 | 0,003405 | 0,993459 | 0,000003 | 0,999999 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 54 | 16,95 | 0,002434 | 0,995893 | 0,000001 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 55 | 16,99 | 0,001665 | 0,997557 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 56 | 17,03 | 0,001080 | 0,998638 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 57 | 17,06 | 0,000659 | 0,999296 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 58 | 17,10 | 0,000372 | 0,999669 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 59 | 17,13 | 0,000192 | 0,999861 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 60 | 17,16 | 0,000089 | 0,999949 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 61 | 17,19 | 0,000035 | 0,999985 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 62 | 17,22 | 0,000012 | 0,999996 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 63 | 17,24 | 0,000003 | 0,999999 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 64 | 17,27 | 0,000001 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |

Tabela vi

DISTRIBUIÇÃO DA RESERVA MATEMÁTICA - V_x (Feminino AT-83)

| i | V_i | $x = 50$ | | $x = 60$ | | $x = 70$ | | $x = 80$ | |
|----|-------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|----------------|--------------|
| | | $P(V_x = v_i)$ | $F_{V_x}(v)$ | $P(V_x = v_i)$ | $F_{V_x}(v)$ | $P(V_x = v_i)$ | $F_{V_x}(v)$ | $P(V_x = v_i)$ | $F_{V_x}(v)$ |
| 0 | 1,00 | 0,001830 | 0,001830 | 0,004467 | 0,004467 | 0,011697 | 0,011697 | 0,036395 | 0,036395 |
| 1 | 1,94 | 0,002012 | 0,003842 | 0,004886 | 0,009353 | 0,012754 | 0,024451 | 0,039484 | 0,075879 |
| 2 | 2,83 | 0,002206 | 0,006049 | 0,005362 | 0,014715 | 0,013969 | 0,038420 | 0,042621 | 0,118500 |
| 3 | 3,67 | 0,002411 | 0,008460 | 0,005902 | 0,020617 | 0,015366 | 0,053786 | 0,045740 | 0,164240 |
| 4 | 4,47 | 0,002628 | 0,011088 | 0,006496 | 0,027114 | 0,016946 | 0,070732 | 0,048755 | 0,212995 |
| 5 | 5,21 | 0,002859 | 0,013947 | 0,007137 | 0,034251 | 0,018703 | 0,089435 | 0,051563 | 0,264558 |
| 6 | 5,92 | 0,003107 | 0,017054 | 0,007813 | 0,042064 | 0,020628 | 0,110063 | 0,054050 | 0,318608 |
| 7 | 6,58 | 0,003373 | 0,020427 | 0,008514 | 0,050578 | 0,022701 | 0,132764 | 0,056091 | 0,374699 |
| 8 | 7,21 | 0,003663 | 0,024090 | 0,009239 | 0,059817 | 0,024904 | 0,157669 | 0,057538 | 0,432237 |
| 9 | 7,80 | 0,003983 | 0,028072 | 0,010016 | 0,069832 | 0,027231 | 0,184900 | 0,058191 | 0,490428 |
| 10 | 8,36 | 0,004342 | 0,032414 | 0,010880 | 0,080712 | 0,029666 | 0,214565 | 0,057890 | 0,548318 |
| 11 | 8,89 | 0,004749 | 0,037163 | 0,011863 | 0,092576 | 0,032183 | 0,246748 | 0,056563 | 0,604880 |
| 12 | 9,38 | 0,005212 | 0,042375 | 0,012993 | 0,105569 | 0,034741 | 0,281489 | 0,054219 | 0,659100 |
| 13 | 9,85 | 0,005736 | 0,048111 | 0,014293 | 0,119862 | 0,037283 | 0,318772 | 0,050952 | 0,710051 |
| 14 | 10,29 | 0,006314 | 0,054425 | 0,015762 | 0,135625 | 0,039740 | 0,358512 | 0,046924 | 0,756975 |
| 15 | 10,71 | 0,006937 | 0,061362 | 0,017397 | 0,153022 | 0,042029 | 0,400541 | 0,042342 | 0,799317 |
| 16 | 11,11 | 0,007594 | 0,068955 | 0,019187 | 0,172209 | 0,044056 | 0,444597 | 0,037434 | 0,836751 |
| 17 | 11,48 | 0,008275 | 0,077230 | 0,021116 | 0,193326 | 0,045720 | 0,490317 | 0,032429 | 0,869180 |
| 18 | 11,83 | 0,008979 | 0,086210 | 0,023165 | 0,216491 | 0,046900 | 0,537216 | 0,027616 | 0,896796 |
| 19 | 12,16 | 0,009735 | 0,095944 | 0,025329 | 0,241820 | 0,047431 | 0,584647 | 0,023164 | 0,919960 |
| 20 | 12,47 | 0,010575 | 0,106519 | 0,027594 | 0,269414 | 0,047186 | 0,631834 | 0,019147 | 0,939107 |
| 21 | 12,76 | 0,011530 | 0,118050 | 0,029936 | 0,299350 | 0,046104 | 0,677938 | 0,015586 | 0,954692 |
| 22 | 13,04 | 0,012629 | 0,130678 | 0,032315 | 0,331664 | 0,044194 | 0,722132 | 0,012469 | 0,967161 |
| 23 | 13,30 | 0,013892 | 0,144570 | 0,034679 | 0,366344 | 0,041531 | 0,763663 | 0,009770 | 0,976931 |
| 24 | 13,55 | 0,015320 | 0,159890 | 0,036965 | 0,403309 | 0,038247 | 0,801910 | 0,007460 | 0,984391 |
| 25 | 13,78 | 0,016909 | 0,176799 | 0,039094 | 0,442403 | 0,034513 | 0,836423 | 0,005516 | 0,989907 |
| 26 | 14,00 | 0,018649 | 0,195448 | 0,040979 | 0,483382 | 0,030513 | 0,866936 | 0,003917 | 0,993825 |
| 27 | 14,21 | 0,020523 | 0,215971 | 0,042527 | 0,525909 | 0,026433 | 0,893368 | 0,002643 | 0,996468 |
| 28 | 14,41 | 0,022515 | 0,238486 | 0,043624 | 0,569534 | 0,022510 | 0,915879 | 0,001673 | 0,998141 |
| 29 | 14,59 | 0,024618 | 0,263104 | 0,044119 | 0,613653 | 0,018881 | 0,934759 | 0,000977 | 0,999118 |
| 30 | 14,76 | 0,026819 | 0,289923 | 0,043891 | 0,657544 | 0,015607 | 0,950366 | 0,000515 | 0,999634 |
| 31 | 14,93 | 0,029095 | 0,319019 | 0,042885 | 0,700428 | 0,012704 | 0,963070 | 0,000238 | 0,999872 |
| 32 | 15,08 | 0,031408 | 0,350426 | 0,041108 | 0,741536 | 0,010163 | 0,973233 | 0,000093 | 0,999965 |
| 33 | 15,23 | 0,033706 | 0,384132 | 0,038631 | 0,780167 | 0,007963 | 0,981196 | 0,000028 | 0,999993 |
| 34 | 15,37 | 0,035927 | 0,420059 | 0,035577 | 0,815743 | 0,006081 | 0,987277 | 0,000006 | 0,999999 |
| 35 | 15,50 | 0,037997 | 0,458056 | 0,032103 | 0,847846 | 0,004496 | 0,991774 | 0,000001 | 1,000000 |
| 36 | 15,62 | 0,039829 | 0,497885 | 0,028382 | 0,876228 | 0,003193 | 0,994966 | 0,000000 | 1,000000 |
| 37 | 15,74 | 0,041333 | 0,539218 | 0,024587 | 0,900815 | 0,002155 | 0,997121 | 0,000000 | 1,000000 |
| 38 | 15,85 | 0,042400 | 0,581618 | 0,020938 | 0,921753 | 0,001364 | 0,998485 | 0,000000 | 1,000000 |
| 39 | 15,95 | 0,042880 | 0,624498 | 0,017562 | 0,939315 | 0,000797 | 0,999281 | 0,000000 | 1,000000 |
| 40 | 16,05 | 0,042659 | 0,667157 | 0,014517 | 0,953832 | 0,000420 | 0,999701 | 0,000000 | 1,000000 |
| 41 | 16,14 | 0,041681 | 0,708838 | 0,011817 | 0,965649 | 0,000194 | 0,999896 | 0,000000 | 1,000000 |
| 42 | 16,22 | 0,039954 | 0,748792 | 0,009454 | 0,975102 | 0,000076 | 0,999971 | 0,000000 | 1,000000 |
| 43 | 16,31 | 0,037546 | 0,786338 | 0,007407 | 0,982509 | 0,000023 | 0,999994 | 0,000000 | 1,000000 |
| 44 | 16,38 | 0,034578 | 0,820916 | 0,005656 | 0,988166 | 0,000005 | 0,999999 | 0,000000 | 1,000000 |
| 45 | 16,46 | 0,031201 | 0,852117 | 0,004182 | 0,992348 | 0,000001 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 46 | 16,52 | 0,027585 | 0,879703 | 0,002970 | 0,995318 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 47 | 16,59 | 0,023897 | 0,903599 | 0,002004 | 0,997322 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 48 | 16,65 | 0,020350 | 0,923950 | 0,001269 | 0,998591 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 49 | 16,71 | 0,017069 | 0,941019 | 0,000741 | 0,999331 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 50 | 16,76 | 0,014109 | 0,955128 | 0,000391 | 0,999722 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 51 | 16,81 | 0,011485 | 0,966613 | 0,000181 | 0,999903 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 52 | 16,86 | 0,009188 | 0,975801 | 0,000070 | 0,999973 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 53 | 16,91 | 0,007199 | 0,983000 | 0,000022 | 0,999995 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 54 | 16,95 | 0,005498 | 0,988498 | 0,000005 | 0,999999 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 55 | 16,99 | 0,004065 | 0,992563 | 0,000001 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 56 | 17,03 | 0,002886 | 0,995449 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 57 | 17,06 | 0,001948 | 0,997397 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 58 | 17,10 | 0,001233 | 0,998630 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 59 | 17,13 | 0,000720 | 0,999350 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 60 | 17,16 | 0,000380 | 0,999730 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 61 | 17,19 | 0,000176 | 0,999906 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 62 | 17,22 | 0,000068 | 0,999974 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 63 | 17,24 | 0,000021 | 0,999995 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 64 | 17,27 | 0,000004 | 0,999999 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 65 | 17,29 | 0,000001 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |
| 66 | 17,31 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 | 0,000000 | 1,000000 |

ANEXO VII

Tabela vii

MEDIDAS ASSOCIADAS À DISTRIBUIÇÃO DE V_x

| Idade | Média | | Variância | | Coef. de Variação | | Moda | | P* | |
|-------|-------|-------|-----------|-------|-------------------|------|-------|-------|-------|-------|
| | Fem | Masc | Fem | Masc | Fem | Masc | Fem | Masc | Fem | Masc |
| 35 | 16,39 | 15,92 | 2,25 | 3,73 | 0,09 | 0,12 | 16,95 | 16,76 | 16,81 | 16,52 |
| 36 | 16,33 | 15,83 | 2,39 | 3,97 | 0,09 | 0,13 | 16,91 | 16,71 | 16,76 | 16,46 |
| 37 | 16,26 | 15,74 | 2,53 | 4,22 | 0,10 | 0,13 | 16,86 | 16,65 | 16,71 | 16,46 |
| 38 | 16,18 | 15,64 | 2,69 | 4,50 | 0,10 | 0,14 | 16,81 | 16,59 | 16,65 | 16,38 |
| 39 | 16,10 | 15,54 | 2,86 | 4,79 | 0,10 | 0,14 | 16,76 | 16,52 | 16,59 | 16,31 |
| 40 | 16,02 | 15,43 | 3,04 | 5,10 | 0,11 | 0,15 | 16,71 | 16,46 | 16,52 | 16,22 |
| 41 | 15,93 | 15,31 | 3,23 | 5,42 | 0,11 | 0,15 | 16,65 | 16,38 | 16,46 | 16,14 |
| 42 | 15,84 | 15,20 | 3,43 | 5,76 | 0,12 | 0,16 | 16,59 | 16,31 | 16,38 | 16,05 |
| 43 | 15,74 | 15,07 | 3,64 | 6,10 | 0,12 | 0,16 | 16,52 | 16,22 | 16,31 | 15,95 |
| 44 | 15,64 | 14,94 | 3,86 | 6,44 | 0,13 | 0,17 | 16,46 | 16,14 | 16,22 | 15,85 |
| 45 | 15,54 | 14,81 | 4,10 | 6,79 | 0,13 | 0,18 | 16,38 | 16,05 | 16,14 | 15,74 |
| 46 | 15,43 | 14,68 | 4,34 | 7,13 | 0,14 | 0,18 | 16,31 | 15,95 | 16,05 | 15,62 |
| 47 | 15,31 | 14,54 | 4,59 | 7,46 | 0,14 | 0,19 | 16,22 | 15,85 | 15,95 | 15,50 |
| 48 | 15,19 | 14,39 | 4,86 | 7,79 | 0,15 | 0,19 | 16,14 | 15,74 | 15,95 | 15,37 |
| 49 | 15,07 | 14,24 | 5,12 | 8,10 | 0,15 | 0,20 | 16,05 | 15,62 | 15,85 | 15,23 |
| 50 | 14,93 | 14,09 | 5,40 | 8,40 | 0,16 | 0,21 | 15,95 | 15,50 | 15,74 | 15,08 |
| 51 | 14,80 | 13,93 | 5,67 | 8,69 | 0,16 | 0,21 | 15,85 | 15,37 | 15,62 | 14,93 |
| 52 | 14,65 | 13,77 | 5,96 | 8,97 | 0,17 | 0,22 | 15,74 | 15,23 | 15,50 | 14,76 |
| 53 | 14,51 | 13,60 | 6,24 | 9,24 | 0,17 | 0,22 | 15,62 | 15,08 | 15,37 | 14,59 |
| 54 | 14,35 | 13,43 | 6,53 | 9,50 | 0,18 | 0,23 | 15,50 | 14,93 | 15,23 | 14,41 |
| 55 | 14,19 | 13,25 | 6,82 | 9,75 | 0,18 | 0,24 | 15,37 | 14,76 | 15,08 | 14,21 |
| 56 | 14,02 | 13,06 | 7,12 | 10,00 | 0,19 | 0,24 | 15,23 | 14,59 | 14,93 | 14,00 |
| 57 | 13,85 | 12,86 | 7,42 | 10,24 | 0,20 | 0,25 | 15,08 | 14,41 | 14,76 | 13,78 |
| 58 | 13,66 | 12,66 | 7,72 | 10,49 | 0,20 | 0,26 | 14,93 | 14,21 | 14,59 | 13,55 |
| 59 | 13,48 | 12,45 | 8,03 | 10,75 | 0,21 | 0,26 | 14,76 | 14,00 | 14,41 | 13,55 |
| 60 | 13,28 | 12,24 | 8,34 | 11,00 | 0,22 | 0,27 | 14,59 | 13,78 | 14,21 | 13,30 |
| 61 | 13,07 | 12,01 | 8,65 | 11,26 | 0,23 | 0,28 | 14,41 | 13,55 | 14,00 | 13,04 |
| 62 | 12,86 | 11,78 | 8,96 | 11,53 | 0,23 | 0,29 | 14,21 | 13,30 | 13,78 | 12,76 |
| 63 | 12,64 | 11,54 | 9,26 | 11,78 | 0,24 | 0,30 | 14,00 | 13,04 | 13,55 | 12,47 |
| 64 | 12,41 | 11,29 | 9,54 | 12,03 | 0,25 | 0,31 | 13,78 | 12,76 | 13,30 | 12,16 |
| 65 | 12,18 | 11,03 | 9,81 | 12,25 | 0,26 | 0,32 | 13,55 | 12,47 | 13,04 | 11,83 |
| 66 | 11,94 | 10,77 | 10,05 | 12,45 | 0,27 | 0,33 | 13,30 | 12,16 | 12,76 | 11,48 |
| 67 | 11,69 | 10,51 | 10,28 | 12,62 | 0,27 | 0,34 | 13,04 | 11,83 | 12,47 | 11,48 |
| 68 | 11,43 | 10,24 | 10,50 | 12,76 | 0,28 | 0,35 | 12,76 | 11,48 | 12,16 | 11,11 |
| 69 | 11,17 | 9,97 | 10,70 | 12,86 | 0,29 | 0,36 | 12,47 | 11,11 | 12,16 | 10,71 |
| 70 | 10,89 | 9,70 | 10,88 | 12,92 | 0,30 | 0,37 | 12,16 | 10,71 | 11,83 | 10,29 |
| 71 | 10,61 | 9,42 | 11,06 | 12,94 | 0,31 | 0,38 | 11,83 | 10,29 | 11,48 | 10,29 |
| 72 | 10,32 | 9,14 | 11,21 | 12,92 | 0,32 | 0,39 | 11,48 | 9,85 | 11,11 | 9,85 |
| 73 | 10,02 | 8,86 | 11,34 | 12,85 | 0,34 | 0,40 | 11,11 | 9,38 | 10,71 | 9,38 |
| 74 | 9,72 | 8,58 | 11,44 | 12,75 | 0,35 | 0,42 | 10,71 | 8,89 | 10,29 | 8,89 |
| 75 | 9,41 | 8,30 | 11,51 | 12,61 | 0,36 | 0,43 | 10,29 | 8,36 | 9,85 | 8,89 |
| 76 | 9,10 | 8,02 | 11,53 | 12,43 | 0,37 | 0,44 | 9,85 | 7,80 | 9,85 | 8,36 |
| 77 | 8,78 | 7,74 | 11,51 | 12,21 | 0,39 | 0,45 | 9,38 | 7,21 | 9,38 | 7,80 |
| 78 | 8,46 | 7,46 | 11,44 | 11,97 | 0,40 | 0,46 | 8,89 | 6,58 | 8,89 | 7,80 |
| 79 | 8,15 | 7,18 | 11,33 | 11,69 | 0,41 | 0,48 | 8,36 | 5,92 | 8,36 | 7,21 |
| 80 | 7,83 | 6,91 | 11,18 | 11,38 | 0,43 | 0,49 | 7,80 | 5,21 | 8,36 | 7,21 |
| 81 | 7,51 | 6,64 | 10,98 | 11,04 | 0,44 | 0,50 | 7,21 | 4,47 | 7,80 | 6,58 |
| 82 | 7,20 | 6,38 | 10,74 | 10,67 | 0,46 | 0,51 | 6,58 | 3,67 | 7,21 | 6,58 |
| 83 | 6,89 | 6,13 | 10,47 | 10,29 | 0,47 | 0,52 | 5,92 | 2,83 | 7,21 | 5,92 |
| 84 | 6,58 | 5,88 | 10,16 | 9,88 | 0,48 | 0,53 | 5,21 | 1,94 | 6,58 | 5,92 |
| 85 | 6,28 | 5,65 | 9,82 | 9,46 | 0,50 | 0,54 | 4,47 | 1,00 | 6,58 | 5,21 |
| 86 | 5,99 | 5,42 | 9,45 | 9,02 | 0,51 | 0,55 | 3,67 | 1,00 | 5,92 | 5,21 |
| 87 | 5,71 | 5,20 | 9,07 | 8,57 | 0,53 | 0,56 | 2,83 | 1,00 | 5,92 | 5,21 |
| 88 | 5,44 | 4,99 | 8,67 | 8,11 | 0,54 | 0,57 | 1,94 | 1,00 | 5,21 | 4,47 |
| 89 | 5,18 | 4,78 | 8,25 | 7,65 | 0,55 | 0,58 | 1,00 | 1,00 | 5,21 | 4,47 |
| 90 | 4,94 | 4,59 | 7,83 | 7,19 | 0,57 | 0,58 | 1,00 | 1,00 | 4,47 | 4,47 |
| 91 | 4,71 | 4,39 | 7,40 | 6,73 | 0,58 | 0,59 | 1,00 | 1,00 | 4,47 | 3,67 |
| 92 | 4,50 | 4,21 | 6,97 | 6,28 | 0,59 | 0,60 | 1,00 | 1,00 | 4,47 | 3,67 |
| 93 | 4,30 | 4,03 | 6,54 | 5,83 | 0,59 | 0,60 | 1,00 | 1,00 | 3,67 | 3,67 |
| 94 | 4,11 | 3,85 | 6,11 | 5,40 | 0,60 | 0,60 | 1,00 | 1,00 | 3,67 | 3,67 |
| 95 | 3,94 | 3,68 | 5,68 | 4,97 | 0,61 | 0,61 | 1,00 | 1,00 | 3,67 | 3,67 |
| 96 | 3,77 | 3,51 | 5,26 | 4,55 | 0,61 | 0,61 | 1,00 | 1,00 | 3,67 | 2,83 |
| 97 | 3,61 | 3,34 | 4,84 | 4,14 | 0,61 | 0,61 | 1,00 | 1,00 | 2,83 | 2,83 |
| 98 | 3,45 | 3,18 | 4,42 | 3,75 | 0,61 | 0,61 | 1,00 | 1,00 | 2,83 | 2,83 |
| 99 | 3,29 | 3,02 | 4,01 | 3,37 | 0,61 | 0,61 | 1,00 | 1,00 | 2,83 | 2,83 |
| 100 | 3,13 | 2,86 | 3,60 | 3,01 | 0,61 | 0,61 | 1,00 | 1,00 | 2,83 | 2,83 |

* Experiência de Mortalidade: AT-83

Tabela viii

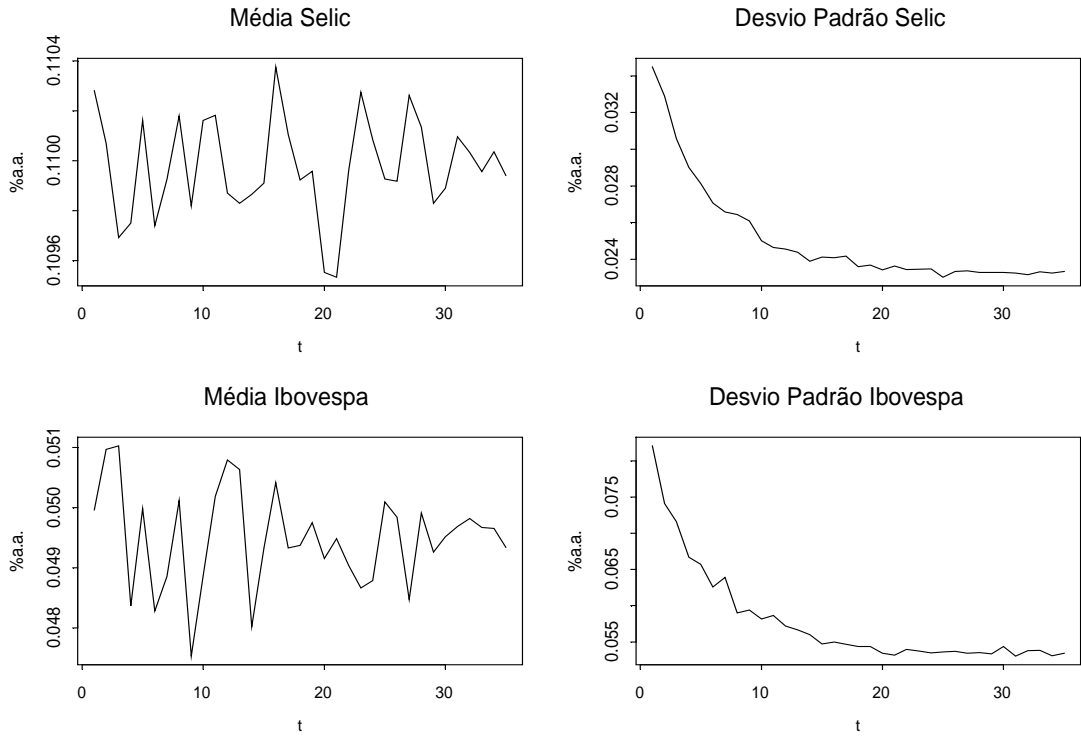
MEDIDAS ASSOCIADAS À DISTRIBUIÇÃO DE V_x

| Idade | Média | | Variância | | Coef. de Variação | | Moda | | P* | |
|-------|-------|-------|-----------|-------|-------------------|------|-------|-------|-------|-------|
| | Fem | Masc | Fem | Masc | Fem | Masc | Fem | Masc | Fem | Masc |
| 35 | 15,98 | 15,38 | 3,40 | 4,98 | 0,12 | 0,15 | 16,76 | 16,52 | 16,52 | 16,14 |
| 36 | 15,89 | 15,26 | 3,59 | 5,28 | 0,12 | 0,15 | 16,71 | 16,46 | 16,46 | 16,05 |
| 37 | 15,80 | 15,14 | 3,79 | 5,60 | 0,12 | 0,16 | 16,65 | 16,38 | 16,46 | 15,95 |
| 38 | 15,71 | 15,01 | 3,99 | 5,94 | 0,13 | 0,16 | 16,59 | 16,31 | 16,38 | 15,85 |
| 39 | 15,61 | 14,88 | 4,21 | 6,30 | 0,13 | 0,17 | 16,52 | 16,22 | 16,31 | 15,74 |
| 40 | 15,50 | 14,74 | 4,43 | 6,69 | 0,14 | 0,18 | 16,46 | 16,14 | 16,22 | 15,62 |
| 41 | 15,39 | 14,59 | 4,66 | 7,10 | 0,14 | 0,18 | 16,38 | 16,05 | 16,14 | 15,50 |
| 42 | 15,28 | 14,44 | 4,91 | 7,53 | 0,14 | 0,19 | 16,31 | 15,95 | 16,05 | 15,37 |
| 43 | 15,16 | 14,28 | 5,16 | 7,98 | 0,15 | 0,20 | 16,22 | 15,85 | 15,95 | 15,23 |
| 44 | 15,03 | 14,12 | 5,42 | 8,43 | 0,15 | 0,21 | 16,14 | 15,74 | 15,85 | 15,08 |
| 45 | 14,90 | 13,95 | 5,68 | 8,88 | 0,16 | 0,21 | 16,05 | 15,62 | 15,74 | 15,08 |
| 46 | 14,77 | 13,78 | 5,96 | 9,32 | 0,17 | 0,22 | 15,95 | 15,50 | 15,62 | 14,93 |
| 47 | 14,63 | 13,60 | 6,24 | 9,76 | 0,17 | 0,23 | 15,85 | 15,37 | 15,50 | 14,76 |
| 48 | 14,48 | 13,42 | 6,53 | 10,18 | 0,18 | 0,24 | 15,74 | 15,23 | 15,37 | 14,59 |
| 49 | 14,33 | 13,24 | 6,82 | 10,58 | 0,18 | 0,25 | 15,62 | 15,08 | 15,23 | 14,41 |
| 50 | 14,17 | 13,05 | 7,11 | 10,95 | 0,19 | 0,25 | 15,50 | 14,93 | 15,08 | 14,21 |
| 51 | 14,00 | 12,85 | 7,41 | 11,30 | 0,19 | 0,26 | 15,37 | 14,76 | 14,93 | 14,00 |
| 52 | 13,82 | 12,66 | 7,71 | 11,63 | 0,20 | 0,27 | 15,23 | 14,59 | 14,76 | 13,78 |
| 53 | 13,64 | 12,46 | 8,02 | 11,93 | 0,21 | 0,28 | 15,08 | 14,41 | 14,59 | 13,55 |
| 54 | 13,46 | 12,25 | 8,33 | 12,19 | 0,21 | 0,28 | 14,93 | 14,21 | 14,41 | 13,30 |
| 55 | 13,26 | 12,05 | 8,64 | 12,43 | 0,22 | 0,29 | 14,76 | 14,00 | 14,21 | 13,04 |
| 56 | 13,06 | 11,83 | 8,95 | 12,63 | 0,23 | 0,30 | 14,59 | 13,78 | 14,00 | 13,04 |
| 57 | 12,85 | 11,62 | 9,26 | 12,81 | 0,24 | 0,31 | 14,41 | 13,55 | 13,78 | 12,76 |
| 58 | 12,63 | 11,40 | 9,56 | 12,96 | 0,24 | 0,32 | 14,21 | 13,30 | 13,55 | 12,47 |
| 59 | 12,40 | 11,17 | 9,86 | 13,07 | 0,25 | 0,32 | 14,00 | 13,04 | 13,30 | 12,16 |
| 60 | 12,17 | 10,94 | 10,14 | 13,17 | 0,26 | 0,33 | 13,78 | 12,76 | 13,04 | 11,83 |
| 61 | 11,93 | 10,70 | 10,41 | 13,24 | 0,27 | 0,34 | 13,55 | 12,47 | 12,76 | 11,83 |
| 62 | 11,68 | 10,46 | 10,67 | 13,28 | 0,28 | 0,35 | 13,30 | 12,16 | 12,76 | 11,48 |
| 63 | 11,43 | 10,22 | 10,90 | 13,30 | 0,29 | 0,36 | 13,04 | 11,83 | 12,47 | 11,11 |
| 64 | 11,17 | 9,96 | 11,11 | 13,29 | 0,30 | 0,37 | 12,76 | 11,48 | 12,16 | 10,71 |
| 65 | 10,90 | 9,71 | 11,30 | 13,25 | 0,31 | 0,37 | 12,47 | 11,11 | 11,83 | 10,29 |
| 66 | 10,63 | 9,45 | 11,45 | 13,18 | 0,32 | 0,38 | 12,16 | 10,71 | 11,48 | 10,29 |
| 67 | 10,35 | 9,19 | 11,58 | 13,08 | 0,33 | 0,39 | 11,83 | 10,29 | 11,11 | 9,85 |
| 68 | 10,06 | 8,92 | 11,66 | 12,95 | 0,34 | 0,40 | 11,48 | 9,85 | 10,71 | 9,38 |
| 69 | 9,77 | 8,65 | 11,71 | 12,78 | 0,35 | 0,41 | 11,11 | 9,38 | 10,71 | 9,38 |
| 70 | 9,47 | 8,38 | 11,72 | 12,57 | 0,36 | 0,42 | 10,71 | 8,89 | 10,29 | 8,89 |
| 71 | 9,17 | 8,11 | 11,69 | 12,33 | 0,37 | 0,43 | 10,29 | 8,36 | 9,85 | 8,36 |
| 72 | 8,87 | 7,83 | 11,61 | 12,06 | 0,38 | 0,44 | 9,85 | 7,80 | 9,38 | 8,36 |
| 73 | 8,57 | 7,56 | 11,49 | 11,76 | 0,40 | 0,45 | 9,38 | 7,21 | 9,38 | 7,80 |
| 74 | 8,26 | 7,28 | 11,32 | 11,42 | 0,41 | 0,46 | 8,89 | 6,58 | 8,89 | 7,80 |
| 75 | 7,95 | 7,01 | 11,11 | 11,05 | 0,42 | 0,47 | 8,36 | 5,92 | 8,36 | 7,21 |
| 76 | 7,64 | 6,74 | 10,86 | 10,66 | 0,43 | 0,48 | 7,80 | 5,21 | 7,80 | 6,58 |
| 77 | 7,33 | 6,47 | 10,56 | 10,24 | 0,44 | 0,49 | 7,21 | 4,47 | 7,80 | 6,58 |
| 78 | 7,02 | 6,20 | 10,23 | 9,81 | 0,46 | 0,51 | 6,58 | 3,67 | 7,21 | 5,92 |
| 79 | 6,72 | 5,94 | 9,86 | 9,35 | 0,47 | 0,52 | 5,92 | 2,83 | 7,21 | 5,92 |
| 80 | 6,41 | 5,68 | 9,45 | 8,88 | 0,48 | 0,52 | 5,21 | 1,94 | 6,58 | 5,92 |
| 81 | 6,11 | 5,42 | 9,02 | 8,40 | 0,49 | 0,53 | 4,47 | 1,00 | 5,92 | 5,21 |
| 82 | 5,82 | 5,17 | 8,56 | 7,91 | 0,50 | 0,54 | 3,67 | 1,00 | 5,92 | 5,21 |
| 83 | 5,53 | 4,92 | 8,09 | 7,42 | 0,51 | 0,55 | 2,83 | 1,00 | 5,21 | 4,47 |
| 84 | 5,25 | 4,68 | 7,60 | 6,93 | 0,53 | 0,56 | 1,94 | 1,00 | 5,21 | 4,47 |
| 85 | 4,97 | 4,45 | 7,10 | 6,44 | 0,54 | 0,57 | 1,00 | 1,00 | 4,47 | 4,47 |
| 86 | 4,70 | 4,23 | 6,59 | 5,96 | 0,55 | 0,58 | 1,00 | 1,00 | 4,47 | 3,67 |
| 87 | 4,44 | 4,01 | 6,09 | 5,49 | 0,56 | 0,58 | 1,00 | 1,00 | 4,47 | 3,67 |
| 88 | 4,19 | 3,80 | 5,59 | 5,04 | 0,57 | 0,59 | 1,00 | 1,00 | 3,67 | 3,67 |
| 89 | 3,94 | 3,59 | 5,11 | 4,60 | 0,57 | 0,60 | 1,00 | 1,00 | 3,67 | 2,83 |
| 90 | 3,71 | 3,40 | 4,64 | 4,18 | 0,58 | 0,60 | 1,00 | 1,00 | 3,67 | 2,83 |
| 91 | 3,49 | 3,21 | 4,19 | 3,78 | 0,59 | 0,61 | 1,00 | 1,00 | 2,83 | 2,83 |
| 92 | 3,27 | 3,03 | 3,76 | 3,41 | 0,59 | 0,61 | 1,00 | 1,00 | 2,83 | 2,83 |
| 93 | 3,07 | 2,87 | 3,35 | 3,05 | 0,60 | 0,61 | 1,00 | 1,00 | 2,83 | 2,83 |
| 94 | 2,88 | 2,71 | 2,97 | 2,72 | 0,60 | 0,61 | 1,00 | 1,00 | 2,83 | 1,94 |
| 95 | 2,70 | 2,55 | 2,62 | 2,42 | 0,60 | 0,61 | 1,00 | 1,00 | 1,94 | 1,94 |
| 96 | 2,53 | 2,41 | 2,30 | 2,14 | 0,60 | 0,61 | 1,00 | 1,00 | 1,94 | 1,94 |
| 97 | 2,37 | 2,28 | 2,00 | 1,88 | 0,60 | 0,60 | 1,00 | 1,00 | 1,94 | 1,94 |
| 98 | 2,22 | 2,15 | 1,73 | 1,65 | 0,59 | 0,60 | 1,00 | 1,00 | 1,94 | 1,94 |
| 99 | 2,08 | 2,03 | 1,49 | 1,43 | 0,59 | 0,59 | 1,00 | 1,00 | 1,94 | 1,94 |
| 100 | 1,95 | 1,92 | 1,27 | 1,24 | 0,58 | 0,58 | 1,00 | 1,00 | 1,94 | 1,94 |

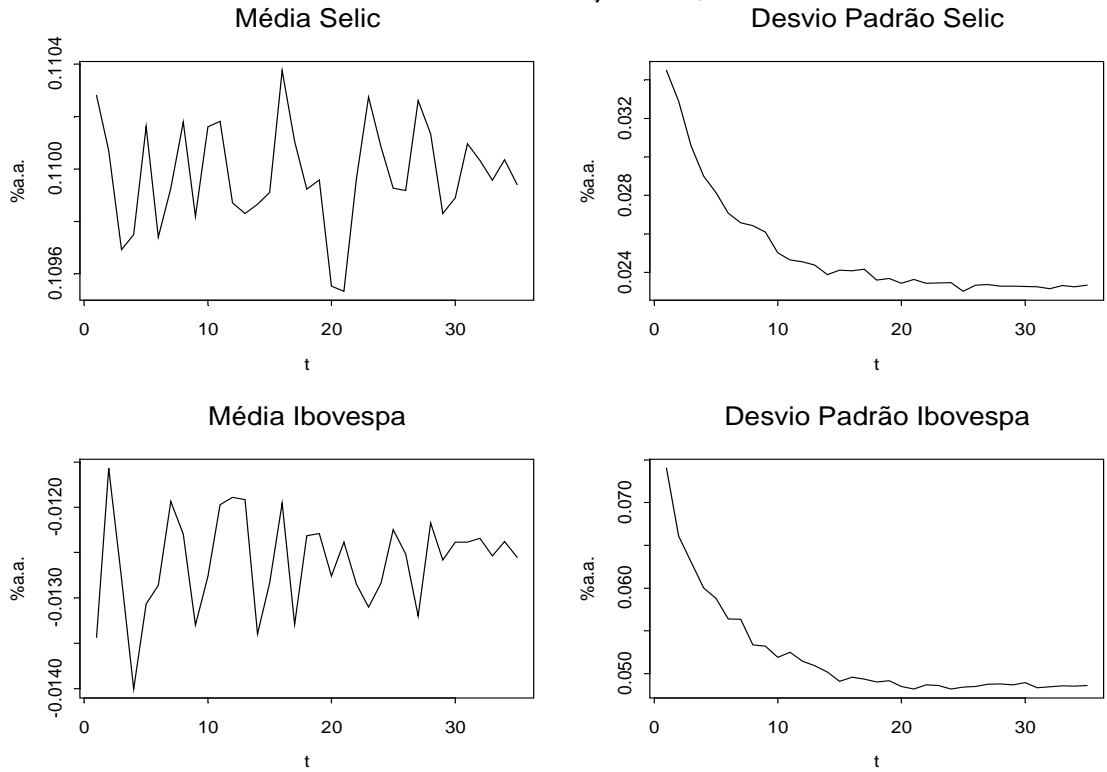
* Experiência de Mortalidade: AT-49

ANEXO VIII

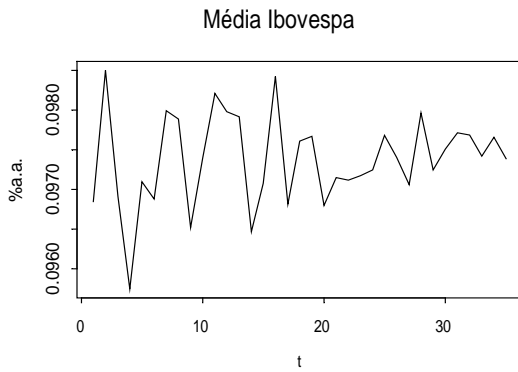
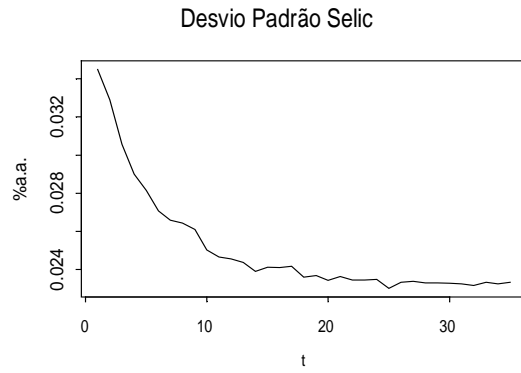
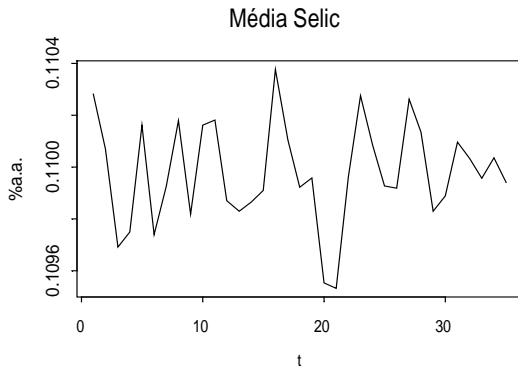
Gráficos xvi ($\rho = -1$)



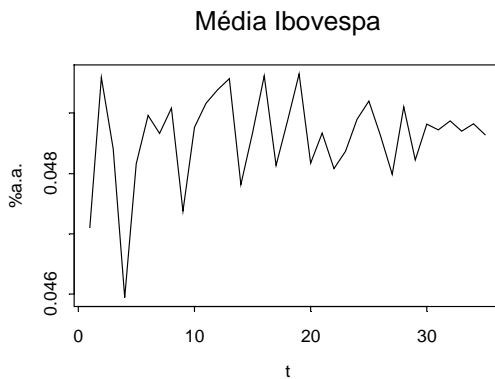
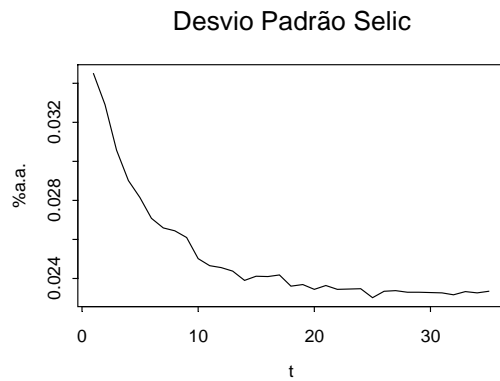
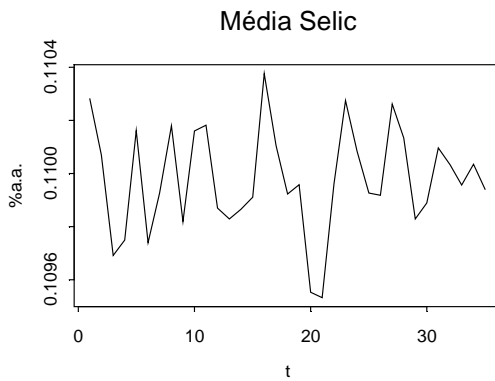
Gráficos xvii ($\rho = -1/2$)



Gráficos xviii ($\rho = 1/2$)

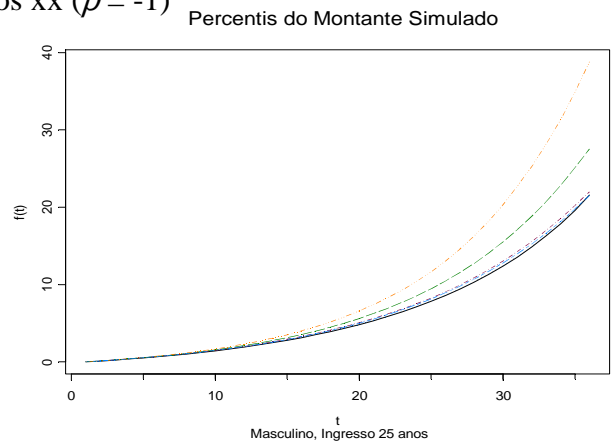
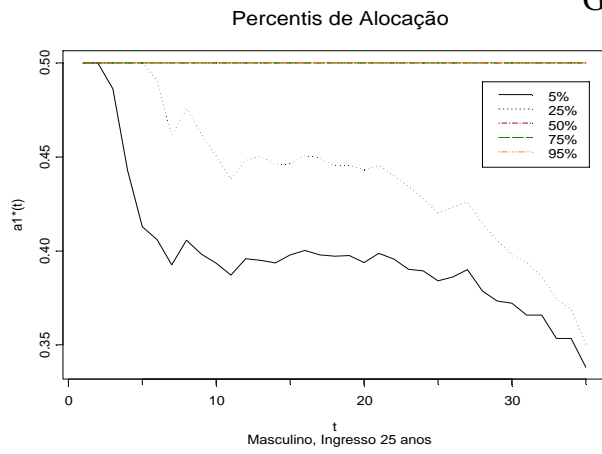


Gráficos xix ($\rho = 1$)

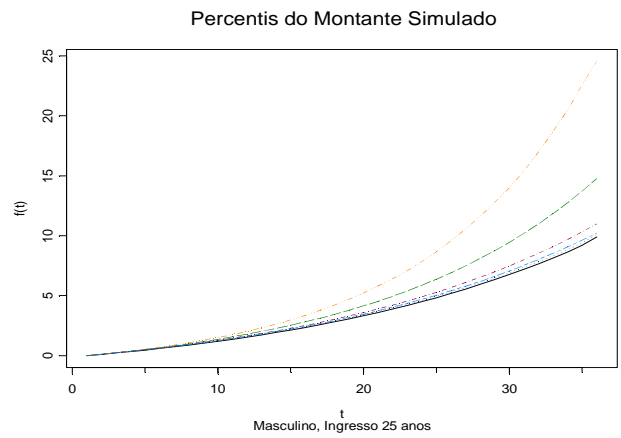
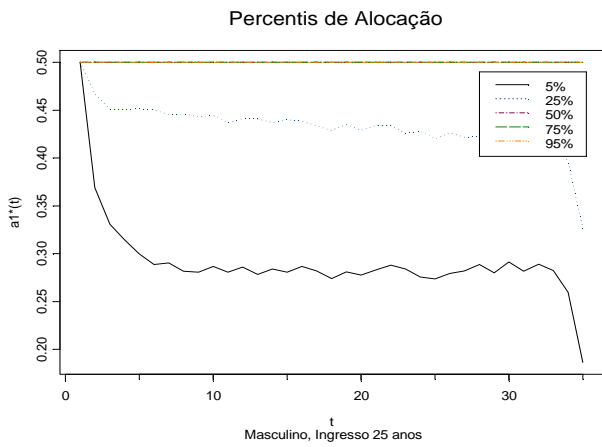


ANEXO IX

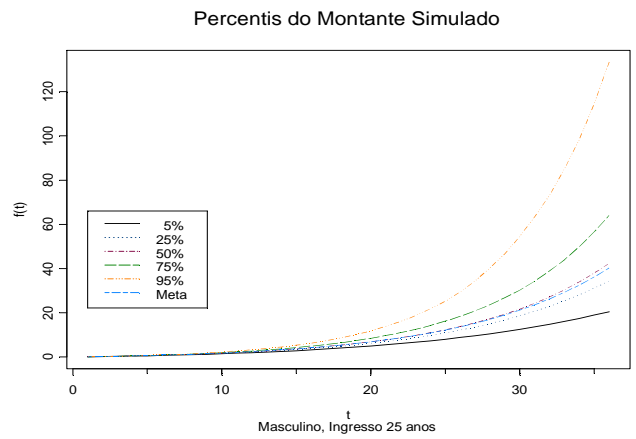
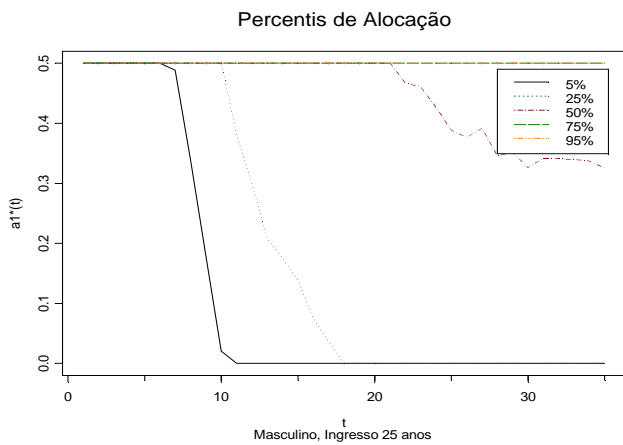
Gráficos xx ($\rho = -1$)



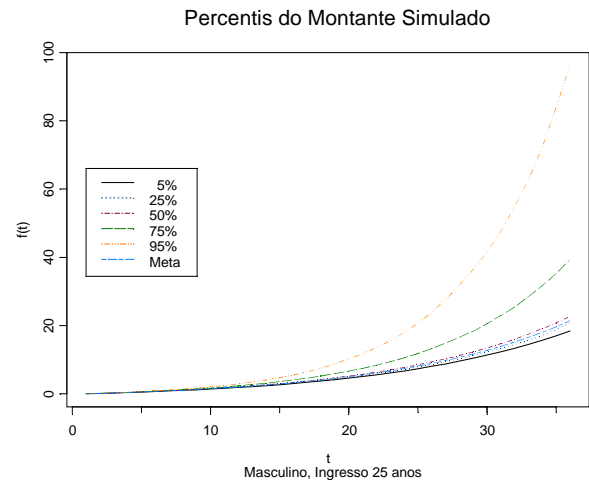
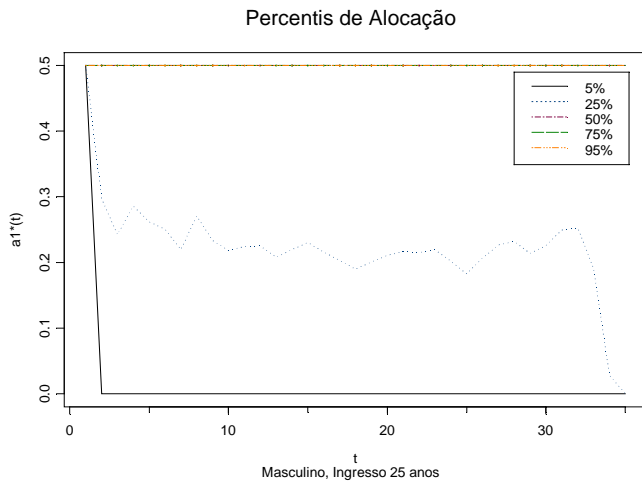
Gráficos xxi ($\rho = -1/2$)



Gráficos xxii ($\rho = 1/2$)



Gráficos xxiii ($\rho=1$)



Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)