



Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Múltiplas Soluções para um Problema de Dirichlet Superlinear em Domínios Limitados

por

Sérgio Leandro Nascimento Neves

Brasília  
2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Incluir aqui a folha com as assinaturas, que  
está na secretaria.

*Aos meus pais,  
Ademir Rocha Neves e Ellen Maria do Nascimento Neves.*

# Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus de todo coração por mais esta conquista.

Agradeço aos meus pais, minha irmã Laiana e meu tio Carlos Américo. Muito obrigado pelo apoio e incentivo, vocês são a minha inspiração.

Aos demais membros de minha família, em especial aos meus tios que me ajudaram muito.

Ao professor Elves Silva, por aceitar ser meu orientador, por compartilhar comigo um pouco do seu conhecimento e pela paciência que teve comigo. Agradeço também aos professores: Hemar Godinho, João Carlos, José Valdo, Liliane Maia, Lineu Neto, Marcelo Furtado, entre outros que me ajudaram bastante tirando dúvidas, emprestando livros e escrevendo cartas de recomendação.

Aos funcionários da secretaria do departamento de matemática da UnB, que sempre me atenderam bem quando foram solicitados.

À minha pequena, Juliana Motinha. Obrigado pelo enorme apoio e carinho e também pelas páginas digitadas.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Aos amigos e colegas: Claudinei, Eryc, Flávia, Gilberto, Igor, Jeferson, João Carlos, João Paulo, Juliana, Leonardo, Luciana, Manoela, Maxwell, Michael, Patrícia, Renato, Simone, Susanne, Vagner, Wesley, Zapata e demais amigos que esqueci de mencionar. Alguns tiveram importância fundamental para a conclusão deste trabalho.

# Resumo

Nesta dissertação, iremos garantir a existência de três soluções não triviais para o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , é um domínio limitado com fronteira suave e  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  satisfaz  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  e possui crescimento subcrítico e superlinear no infinito.

# Abstract

In this dissertation, we will ensure the existence of three nontrivial solutions to the following Dirichlet problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

where  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , is a bounded domain with smooth boundary and  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  satisfies  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 0$  and has subcritical growth and superlinear at infinity.

# Índice

Notações	1
Introdução	3
<b>1 Métodos Variacionais</b>	<b>6</b>
1.1 O Teorema do Passo da Montanha . . . . .	7
1.2 Diferenciabilidade do funcional associado . . . . .	8
<b>2 Primeiras soluções</b>	<b>19</b>
2.1 As duas primeiras soluções . . . . .	19
2.2 A regularidade das soluções . . . . .	24
<b>3 Resultados Preliminares</b>	<b>29</b>
3.1 Lema de Morse Generalizado . . . . .	29
3.2 Aplicando o Lema de Morse ao funcional associado . . . . .	36
<b>4 Existência da terceira solução</b>	<b>44</b>
4.1 Comportamento local de $J$ próximo à $u_1$ . . . . .	45
4.2 Caso $m(u_1) = 0$ . . . . .	57
<b>Apêndices</b>	<b>64</b>
<b>A Grau topológico</b>	<b>64</b>
A.1 O Grau de Brouwer . . . . .	64
A.2 O Grau de Leray-Schauder . . . . .	65
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>66</b>

# Notações

$(PS)$	Condição de Palais-Smale
$\Delta$	O operador Laplaciano
$\dim(E)$	Dimensão do espaço $E$
$\mathcal{L}(E, F)$	Espaço dos operadores lineares limitados de $E$ em $F$
$ \Omega $	Medida de Lebesgue do conjunto $\Omega$
$\nabla$	O operador gradiente
$\oplus$	Soma direta
$\ \cdot\ $	Norma do gradiente no espaço $H_0^1(\Omega)$
$\ \cdot\ _E$	Norma do espaço normado $E$ (para os demais espaços)
$\sigma(A)$	Espectro do operador $A$
$C_0^\infty(\Omega)$	Conjunto de todas as funções em $C^\infty(\Omega)$ com suporte compacto em $\Omega$
$\deg(\Phi, \mathcal{O}, b)$	Grau topológico de $\Phi$ em $\mathcal{O}$ no ponto $b$
$\text{dist}(u, B)$	Distância do ponto $u$ ao conjunto $B$
$H^{-1}(\Omega)$	Espaço dual de $H_0^1(\Omega)$
$Id$	O operador identidade
$J_c$	Conjunto dos pontos no subnível $c$ de $J$
$K_c(J)$	Conjunto dos pontos críticos de $J$ no nível $c$
$\text{Ker}(A)$	Núcleo do operador $A$

$m(u)$	Índice de Morse do ponto crítico $u$
$R(A)$	Imagem do operador $A$
T.C.D.L.	Teorema da convergência dominada de Lebesgue

# Introdução

Neste trabalho estabeleceremos a existência de múltiplas soluções para o seguinte problema de Dirichlet superlinear:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

onde  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , é um domínio limitado com fronteira suave e a função  $f$  satisfaz as seguintes condições:

$$(f_1) \quad f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f(0) = f'(0) = 0;$$

$$(f_2) \quad \text{existem constantes positivas } C_1, C_2 \text{ tais que}$$

$$|f'(t)| \leq C_1 + C_2|t|^{\alpha-1},$$

$$\text{onde } 1 < \alpha < \frac{n+2}{n-2};$$

$$(f_3) \quad \text{existem constantes } \mu > 2 \text{ e } M > 0 \text{ tais que}$$

$$0 < \mu F(t) \leq tf(t) \quad |t| \geq M$$

onde  $F(t) = \int_0^t f(s)ds$  é a primitiva da função  $f$ .

Observe que a condição  $(f_1)$  implica que, em particular,  $u \equiv 0$  é uma solução trivial de  $(\mathcal{P})$ . A condição  $(f_2)$  implica que  $f$  tem crescimento *subcrítico* e, juntamente com  $(f_1)$ , ela também é utilizada para verificar que o funcional associado ao problema é de classe  $C^2$ . A condição  $(f_3)$ , também conhecida como condição de Ambrosetti-Rabinowitz, é que caracteriza a superlinearidade do problema, daí dizermos que  $(\mathcal{P})$  é um problema de Dirichlet superlinear.

Problemas do tipo  $(\mathcal{P})$  aparecem naturalmente em física, engenharia, biomatemática, ecologia, geometria, etc. Por esta razão o estudo de tais problemas atrai tanto a atenção

de pesquisadores de matemática pura quanto de matemática aplicada.

Ambrosetti e Rabinowitz mostraram a existência de duas soluções não triviais para o problema acima, uma positiva e outra negativa, com condições menos restritivas do que as condições especificadas acima, no famoso artigo [AR]. Eles também mostraram a existência de infinitas soluções no caso em que  $f$  é ímpar. Após este trabalho muitos matemáticos passaram a estudar o problema  $(\mathcal{P})$  com o objetivo de estabelecer múltiplas soluções. Lembrando que já é conhecida a existência de infinitas soluções no caso  $n = 1$  sem a hipótese de que  $f$  seja ímpar (ver [Ra2]).

Na década passada em um elegante trabalho, Wang [W], sob as condições acima mostrou a existência de uma terceira solução de duas maneiras diferentes, uma usando a construção de um *enlace* (em inglês “link”) e outra usando teoria de Morse. O trabalho de Wang inspirou também estudos sobre o sinal de tais soluções, ver por exemplo [BCW, BW] e suas referências, e até mesmo a construção de um algoritmo para o cálculo de soluções numéricas [CCD].

Recentemente, em outro interessante trabalho, [LW], tal problema foi estudado sob hipóteses diferentes da condição de superlinearidade de Ambrosetti-Rabinowitz  $(f_3)$ .

Nosso objetivo será garantir a existência de múltiplas soluções para o problema  $(\mathcal{P})$ . Mais precisamente, vamos demonstrar o seguinte resultado:

**Teorema A.** *Suponha que  $f$  satisfaça as condições  $(f_1), (f_2)$  e  $(f_3)$ . Então o problema  $(\mathcal{P})$  possui pelo menos três soluções não triviais.*

Para demonstrar o teorema acima utilizaremos métodos variacionais. Verificaremos que soluções clássicas do problema  $(\mathcal{P})$  correspondem aos pontos críticos do funcional (em alguns textos chamado de funcional energia)  $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u) \right) dx.$$

Assim o nosso trabalho se resume a garantir a existência de pontos críticos não triviais deste funcional. Para a demonstração do Teorema A vamos primeiro relembrar a prova da existência de duas soluções obtidas por Ambrosetti e Rabinowitz, [AR, Ra1]. Isso será feito por uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha. Após um truncamento da função  $f(t)$  obtemos pontos críticos, não do funcional  $J$ , mas de um funcional modificado  $\tilde{J}$  que coincide com  $J$  em funções que são não negativas. A seguir aplicamos o Princípio do Máximo para concluir que os pontos críticos obtidos para o funcional  $\tilde{J}$  também são pontos críticos de  $J$  e conseqüentemente soluções do problema  $(\mathcal{P})$ , obtendo também

informação sobre o sinal de tal solução. Desta maneira garantiremos a existência de duas soluções  $u_1 > 0 > u_2$  do problema  $(\mathcal{P})$ . Feito isso, seguiremos o argumento de Wang, [W], para estabelecer a existência de um enlace que nos permitirá obter uma terceira solução via um argumento de minimax. A construção deste enlace será feita da seguinte forma: primeiro iremos estudar o comportamento local do funcional  $J$  próximo às duas soluções obtidas anteriormente, construindo uma espécie de “enlace local”. Para isso utilizaremos uma generalização do Lema de Morse para espaços de Hilbert de dimensão infinita. Além disso, estudamos a estrutura topológica dos conjuntos de subnível crítico do funcional  $\tilde{J}$  e também uma estimativa para o índice de Morse em tais pontos críticos. Com essas informações construiremos um enlace global que fornecerá um novo valor crítico para o funcional  $J$  e, conseqüentemente, uma terceira solução para o nosso problema.

O trabalho está organizado da seguinte maneira. No **Capítulo 1** faremos uma breve introdução aos métodos variacionais, enunciaremos uma versão do Teorema de Deformação que se adequa às nossas necessidades e o Teorema do Passo da Montanha. Verificaremos também a diferenciabilidade do funcional  $J$  (e  $\tilde{J}$ ). No **Capítulo 2** estabeleceremos a existência das duas primeiras soluções para o problema  $(\mathcal{P})$ , como em [Ra1]. Também verificaremos a regularidade das soluções. No **Capítulo 3** será estudada uma generalização do Lema de Morse, em alguns textos conhecido como “splitting theorem”, bem como alguns resultados técnicos que serão utilizados no capítulo seguinte. No **Capítulo 4** obtemos a terceira solução para o problema  $(\mathcal{P})$  finalizando assim a demonstração do Teorema A.

Finalmente, vale a pena observar que estaremos utilizando alguns resultados de Teoria do Grau em dimensão infinita (veja por exemplo [De, Bn, Be], e também alguns resultados de equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach (veja por exemplo [SZ, Rm]).

# Capítulo 1

## Métodos Variacionais

Estamos buscando obter soluções clássicas para o problema  $(\mathcal{P})$ , ou seja, uma função  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  satisfazendo  $(\mathcal{P})$ . Suponha que  $u$  seja uma tal solução clássica, então multiplicando  $(\mathcal{P})$  por uma função  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  e usando a primeira fórmula de Green obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi \, dx = \int_{\Omega} f(u) \phi \, dx \quad (1.1)$$

Denotamos por  $H_0^1(\Omega)$  o fecho de  $C_0^\infty(\Omega)$  com respeito à norma

$$\|u\| = \left[ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

Dizemos que  $u \in H_0^1(\Omega)$  é uma solução fraca de  $(\mathcal{P})$  se  $u$  satisfaz (1.1) para toda  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ . Evidentemente uma solução clássica de  $(\mathcal{P})$  é também uma solução fraca e, como veremos mais adiante, a recíproca também é verdadeira. Considere o seguinte funcional em  $H_0^1(\Omega)$

$$J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u) \right) dx,$$

onde  $F(t) = \int_0^t f(s) ds$  é a primitiva da função  $f$ .

Veremos mais adiante que  $J$  é diferenciável em  $H_0^1(\Omega)$  com

$$J'(u)v = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - f(u)v) \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto as soluções fracas de  $(\mathcal{P})$  são exatamente os pontos críticos de  $J$ . Observe que,

por  $(f_1)$ ,  $0$  é um ponto crítico de  $J$ . Assim para garantir a existência de uma solução fraca não trivial do problema, basta garantir a existência de um ponto crítico de  $J$  diferente de  $0$ .

## 1.1 O Teorema do Passo da Montanha

O famoso Teorema do Passo da Montanha é uma poderosa ferramenta que utilizaremos para garantir a existência de soluções não triviais de  $(\mathcal{P})$ . Sua prova é relativamente simples e está fundamentada no Teorema de Deformação (Teorema 1.2). Ambos envolvem a seguinte condição:

**Definição 1.1.** Seja  $E$  um espaço de Banach real e seja  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ . Dizemos que  $I$  satisfaz a condição de Palais-Smale se qualquer sequência  $(u_k) \subset E$  tal que  $(I(u_k))$  é limitada e  $I'(u_k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  possui uma subsequência convergente. Tais sequências são frequentemente chamadas de sequência de Palais-Smale. Nesse caso, diremos que o funcional  $I$  satisfaz a condição  $(PS)$ .

**Teorema 1.2** ([Ra1],[H]). *Seja  $E$  um espaço de Banach real e seja  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  satisfazendo a condição  $(PS)$ . Sejam  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{\epsilon} > 0$  e  $N_\delta(K_c(I)) = \{u \in E \mid \text{dist}(u, K_c(I)) \leq \delta\}$ ,  $\delta > 0$ , uma vizinhança fechada de  $K_c(I)$ . Então existem  $\eta \in C([0, 1] \times E, E)$  e  $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$  tais que*

- (1)  $\eta(0, u) = u \forall u \in E$
- (2)  $\eta(t, u) = u \forall t \in [0, 1], u \notin I^{-1}([c - \bar{\epsilon}, c + \bar{\epsilon}])$
- (3)  $\eta(1, I_{c+\epsilon} \setminus N_{\frac{\delta}{2}}) \subset I_{c-\epsilon}$
- (4)  $\eta(1, N_{\frac{\delta}{2}}) \subset N_\delta$
- (5)  $\eta(t, \cdot)$  é um homeomorfismo para cada  $t \in [0, 1]$
- (6) se  $K_c(I) = \emptyset$  então  $\eta(1, I_{c+\epsilon}) \subset I_{c-\epsilon}$

**Teorema 1.3** (Teorema do Passo da Montanha, [AR]). *Sejam  $E$  um espaço de Banach real e  $I \in C^1(E, \mathbb{R})$  satisfazendo a condição  $(PS)$ . Suponha que  $I(0) = 0$  e que*

- $(I_1)$  existem constantes  $\rho, \delta > 0$  tais que  $I|_{\partial B_\rho} \geq \delta$
- $(I_2)$  existe um  $e \in E \setminus \bar{B}_\rho$  tal que  $I(e) \leq 0$ .

Então,  $I$  possui um valor crítico  $c \geq \delta$ . Além disso  $c$  pode ser caracterizado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \max_{t \in [0,1]} \{I(\gamma(t))\} \right\}$$

onde  $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$ .

**Demonstração:** Primeiramente, observe que cada curva  $\gamma \in \Gamma$  cruza a fronteira  $\partial B_\rho$  e portanto

$$c \geq \delta$$

por  $(I_1)$ . Suponha, por contradição, que  $c$  não é um valor crítico de  $I$ . Definindo  $\bar{\epsilon} = \alpha/2$  e invocando o Teorema 1.2 obtemos  $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$  e  $\eta \in C([0,1] \times E, E)$  tais que

$$\eta(1, I_{c+\epsilon}) \subset I_{c-\epsilon}. \quad (1.2)$$

Escolha  $\gamma \in \Gamma$  tal que

$$\max_{t \in [0,1]} \{I(\gamma(t))\} \leq c + \epsilon. \quad (1.3)$$

e considere  $\eta(1, \gamma(t))$ . Observe que  $\eta(1, \gamma(0)) = 0$ , pelo item (2) do Teorema de Deformação, e analogamente  $\eta(1, \gamma(1)) = e$  por  $(I_2)$ . Também pelo Teorema de Deformação segue que  $\eta(1, \gamma(t))$  é contínua. Portanto  $\eta(1, \gamma(\cdot)) \in \Gamma$ . Então, por (1.2) e (1.3) segue que

$$\max_{t \in [0,1]} \{I(\eta(1, \gamma(t)))\} \leq c - \epsilon$$

contrariando a definição de  $c$ . Portanto o Teorema do Passo da Montanha está demonstrado.  $\square$

## 1.2 Diferenciabilidade do funcional associado

Para aplicar o Teorema do Passo da Montanha, precisamos verificar que o funcional associado ao problema é de classe  $C^1$ . Em nosso caso o funcional será, na verdade, de classe  $C^2$ .

Nesta seção serão desenvolvidas as ferramentas que irão garantir a diferenciabilidade do funcional  $J$ .

**Definição 1.4.** Seja  $E$  um espaço de Banach real com norma  $\|\cdot\|_E$ . Seja  $U \subset E$  um aberto de  $E$ . Seja  $I : U \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional. Dizemos que  $I$  é Fréchet diferenciável em  $u \in U$  se existir uma aplicação linear contínua  $L = L(u) : E \rightarrow \mathbb{R}$  tal que, para todo

$\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon, u) > 0$  tal que

$$|I(u+v) - I(u) - Lv| \leq \epsilon \|v\|_E \quad \forall v \text{ tal que } \|v\|_E \leq \delta$$

ou equivalentemente, se

$$\lim_{v \in E, v \rightarrow 0} \frac{I(u+v) - I(u) - Lv}{\|v\|_E} = 0.$$

A aplicação  $L$  quando existe é única e será denotada por  $I'(u) = L = L(u)$ . Observe que  $L \in E'$ , o espaço dual de  $E$ , ou seja, o conjunto dos funcionais lineares limitados definidos em  $E$ .

Denotamos por  $C^1(U, \mathbb{R})$  o conjunto dos funcionais que são continuamente Fréchet diferenciáveis em  $U$ .

Um ponto  $u \in U$  é um ponto crítico de  $I$  se  $I'(u) = 0$ , ou seja,  $I'(u)v = 0$  para todo  $v \in E$ . Neste caso, o valor de  $I$  em  $u$  é dito um valor crítico de  $I$ .

**Definição 1.5.** Dizemos que  $I \in C^1(U, \mathbb{R})$  possui uma derivada de Fréchet de segunda ordem em  $u \in U$  se existir uma aplicação linear contínua  $L : E \rightarrow E'$  tal que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon, u) > 0$  tal que

$$\|I'(u+v) - I'(u) - Lv\|_{E'} \leq \epsilon \|v\|_E \quad \forall v \text{ tal que } \|v\|_E \leq \delta$$

ou equivalentemente, se

$$\lim_{v \in E, v \rightarrow 0} \frac{I'(u+v) - I'(u) - Lv}{\|v\|_E} = 0.$$

Denotamos por  $C^2(U, \mathbb{R})$  o conjunto dos funcionais que são continuamente Fréchet diferenciáveis em  $U$  cuja diferencial é de classe  $C^1$ .

Agora, vamos estabelecer uma simples desigualdade que será bastante utilizada ao longo de todo o texto.

**Lema 1.6.** *Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $a, b \geq 0$ , então*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

**Demonstração:** Se  $p = 1$  a desigualdade é óbvia. Se  $p > 1$  basta observar que a função  $x^p$  é convexa em  $[0, \infty)$ , isto é, seu gráfico restrito à um intervalo  $[x_1, x_2]$  está abaixo do

segmento de reta que liga os pontos  $(x_1, x_1^p)$  e  $(x_2, x_2^p)$ . Logo

$$\left[ \frac{a+b}{2} \right]^p \leq \frac{a^p + b^p}{2},$$

donde concluímos o resultado.  $\square$

**Proposição 1.7.** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado e seja  $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Suponha que existam constantes  $p \geq 1$ ,  $q \geq 1$  e  $a, b > 0$  tais que*

$$|f(t)| \leq a + b|t|^{\frac{p}{q}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Então a aplicação  $B : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$  definida por  $B(u) = f(u)$  é contínua.

**Demonstração:** Primeiro vamos mostrar que  $B(u) \in L^q(\Omega)$  para todo  $u \in L^p(\Omega)$ . Seja  $u \in L^p(\Omega)$ , pela hipótese sobre  $f$  e pelo Lema 1.6 temos

$$\int_{\Omega} |f(u(x))|^q dx \leq \int_{\Omega} \left( a + b|u|^{\frac{p}{q}} \right)^q dx \leq \bar{c} \int_{\Omega} (1 + |u|^p) dx < \infty$$

que mostra que  $B : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ .

Seja  $u_0 \in L^p(\Omega)$  e seja  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq L^p(\Omega)$  uma sequência tal que  $\|u_k - u_0\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ . Sabemos que existem uma subsequência  $\{u_{k_j}\}$  e  $\psi \in L^p(\Omega)$  tais que  $u_{k_j}(x) \rightarrow u_0(x)$  q.t.p.  $\Omega$  e  $|u_{k_j}(x)| \leq \psi(x)$  q.t.p.  $\Omega$ , (ver [Br]). Por hipótese temos

$$\begin{aligned} |f(u_{k_j}(x)) - f(u_0(x))|^q &\leq (|f(u_{k_j}(x))| + |f(u_0(x))|)^q \\ &\leq 2^{q-1} (|f(u_{k_j}(x))|^q + |f(u_0(x))|^q) \\ &\leq 2^{q-1} \left\{ \left( a + b|u_{k_j}|^{\frac{p}{q}} \right)^q + \left( a + b|u_0|^{\frac{p}{q}} \right)^q \right\} \\ &\leq (2^{q-1})^2 \{ a^q + b^q |u_{k_j}|^p + a^q + b^q |u_0|^p \} \\ &\leq d_1 + d_2 (|u_{k_j}(x)|^p + |u_0(x)|^p) \\ &\leq d_1 + d_2 (|\psi(x)|^p + |u_0(x)|^p) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Pela continuidade de  $f$  segue que

$$|f(u_{k_j}(x)) - f(u_0(x))|^q \longrightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty \quad \text{q.t.p. } \Omega$$

Portanto

$$\|Bu_{k_j} - Bu_0\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_{\Omega} |f(u_{k_j}(x)) - f(u_0(x))|^q dx \longrightarrow 0 \quad \text{quando } j \rightarrow \infty,$$

pelo T.C.D.L. Isto é suficiente para mostrar que o operador  $B : L^p(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$  é contínuo.  $\square$

**Proposição 1.8.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , um domínio limitado com fronteira suave. Seja  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  satisfazendo*

$$|f'(t)| \leq C_1 + C_2|t|^{\alpha-1}$$

onde  $C_1, C_2 > 0$  são constantes e  $1 < \alpha < (n+2)/(n-2)$ . Se

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds \quad e \quad J(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u) \right) dx$$

então  $J \in C^2(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ ,

$$J'(u)v = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - f(u)v) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (1.4)$$

e

$$J''(u)(v, w) = \int_{\Omega} (\nabla v \nabla w - f'(u)vw) dx \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega). \quad (1.5)$$

Além disso o operador  $J'$  é da forma  $Id - K$ , onde  $K$  é um operador compacto, e se considerarmos  $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$  o operador linear contínuo definido por  $J''(u)$ , ou seja,  $J''(u)(v, w) = \langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ , então  $A$  também é da forma  $Id - K$ .

**Demonstração:** Primeiramente observe que, devido à condição de crescimento de  $f'$  o funcional  $J$  está bem definido, bem como as expressões (1.4) e (1.5). Vamos mostrar, por exemplo, que (1.5) faz sentido (similarmente para (1.4)). Considere

$$p_1 = \frac{2^*}{\alpha - 1}; \quad p_2 = \frac{2^*}{2^* - (\alpha + 1)}; \quad p_3 = \frac{2^*}{2}; \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$$

e observe que  $1 < p_1$ ,  $1 < p_2 < 2^*$  e  $1 < p_3 < 2^*$ . Assim, usando a desigualdade de Hölder

e as imersões de Sobolev, temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |f'(u)vw| &\leq \int_{\Omega} (C_1 + C_2|u|^{\alpha-1})|v||w| \\
 &\leq C_3 \left( \int_{\Omega} |v||w| + \int_{\Omega} |u|^{\alpha-1}|v||w| \right) \\
 &\leq C_4 \left( \|v\|_{L^2(\Omega)}\|w\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\alpha-1}\|v\|_{L^{p_2}(\Omega)}\|w\|_{L^{p_3}(\Omega)} \right) \\
 &\leq C_5 (\|v\|\|w\| + \|u\|^{\alpha-1}\|v\|\|w\|) < \infty.
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Agora vamos mostrar que o funcional  $J$  é de classe  $C^2$ . Para isso basta mostrar que o funcional  $I(u) = \int_{\Omega} F(u)$  é de classe  $C^2$ , pois  $J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - I(u)$  e  $\|\cdot\|^2$  é de classe  $C^\infty$ . Para isso, sejam  $u \in H_0^1(\Omega)$  e  $\epsilon > 0$ , devemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$\|v\| \leq \delta \Rightarrow |I(u+v) - I(u) - Lv| \leq \epsilon\|v\|$$

onde

$$Lv = \int_{\Omega} f(u)v.$$

Podemos considerar  $\|v\| \leq 1$ . Agora, utilizando o Teorema do Valor Médio, temos

$$\begin{aligned}
 |I(u+v) - I(u) - Lv| &\leq \int_{\Omega} |F(u+v) - F(u) - f(u)v| \\
 &\leq \int_{\Omega} |(f(u+\theta v) - f(u))v| \\
 &\leq \int_{\Omega} |(f'(u+\lambda\theta v))\theta v^2|
 \end{aligned}$$

com  $\theta(x) \in (0, 1)$  e  $\lambda(x) \in (0, 1)$ . Assim, usando a condição de crescimento de  $f'$ , temos

$$\begin{aligned}
 |I(u+v) - I(u) - Lv| &\leq \int_{\Omega} (C_1 + C_2|u + \lambda\theta v|^{\alpha-1})|v|^2 \\
 &\leq \int_{\Omega} (C_1 + C_2(|u| + |v|)^{\alpha-1})|v|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\Omega} (C_1 + \overline{C}_2(|u|^{\alpha-1} + |v|^{\alpha-1})) |v|^2 \\
&\leq C_1 \int_{\Omega} |v|^2 + \overline{C}_2 \int_{\Omega} |v|^{\alpha+1} + \overline{C}_2 \int_{\Omega} |u|^{\alpha-1} |v|^2 \\
&\leq C_3 \|v\|^2 + C_4 \|v\|^{\alpha+1} + \overline{C}_2 \left[ \int_{\Omega} |u|^{(\alpha-1)\frac{n}{2}} \right]^{\frac{2}{n}} \left[ \int_{\Omega} |v|^{2^*} \right]^{\frac{n-2}{n}} \\
&\leq \overline{C} (\|v\|^2 + \|v\|^{\alpha+1} + \|u\|^{\alpha-1} \|v\|^2) \\
&\leq \overline{C} (2 + \|u\|^{\alpha-1}) \|v\|^2 \leq \epsilon \|v\|
\end{aligned}$$

desde que  $\|v\| \leq \delta = \frac{\epsilon}{\overline{C}(2+\|u\|^{\alpha-1})}$ .

Mostraremos agora que  $I'$  é contínua. Para isso, seja  $u_k \rightarrow u$  em  $H_0^1(\Omega)$ , então

$$\begin{aligned}
\|I'(u_k) - I'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\|v\| \leq 1} \left\{ \left| \int_{\Omega} (f(u_k) - f(u))v \right| \right\} \\
&\leq \sup_{\|v\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} |f(u_k) - f(u)| |v| \right\} \\
&\leq \sup_{\|v\| \leq 1} \left\{ \left[ \int_{\Omega} |f(u_k) - f(u)|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left[ \int_{\Omega} |v|^{\alpha+1} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} \right\} \\
&\leq C \|f(u_k) - f(u)\|_{L^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega)} \tag{1.7}
\end{aligned}$$

agora, como  $|f(t)| \leq \overline{C}_1 + \overline{C}_2 |t|^\alpha$ , segue da Proposição 1.7 que a aplicação

$$\begin{aligned}
B : L^{\alpha+1}(\Omega) &\longrightarrow L^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(\Omega) \\
u &\longmapsto f(u)
\end{aligned}$$

é contínua. Como  $u_k \rightarrow u$  em  $H_0^1(\Omega)$ , pelas imersões de Sobolev, segue que  $u_k \rightarrow u$  em  $L^{\alpha+1}(\Omega)$ . Assim, por (1.7) e pela continuidade de  $B$ , temos que

$$\|I'(u_k) - I'(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Portanto  $I'$  é contínua.

A seguir, vamos verificar que  $I'$  é compacto. Seja  $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$  uma sequência limitada. Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov ([AF] pág. 168), existe uma subsequência

$(u_{k_j})$  tal que  $u_{k_j} \rightarrow u_0$ , quando  $j \rightarrow \infty$ , em  $L^{\alpha+1}(\Omega)$ . Daí, pelo que vimos acima  $I'(u_{k_j}) \rightarrow I'(u_0)$ , ou seja,  $I'$  é compacto.

Agora, vamos mostrar que  $I$  é de classe  $C^2$ . Como antes, sejam  $u \in H_0^1(\Omega)$  e  $\epsilon > 0$ , devemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$\|I'(u+v) - I'(u) - Lv\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \epsilon \|v\| \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } \|v\| \leq \delta$$

onde  $Lv(w) = \int_{\Omega} f'(u)vw$ . Lembrando que

$$\|I'(u+v) - I'(u) - Lv\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{w \in H_0^1(\Omega) \\ \|w\| \leq 1}} \{|I'(u+v)w - I'(u)w - Lvw|\}.$$

Assim, basta encontrarmos  $\delta > 0$  tal que, se  $\|v\| \leq \delta$  e  $\|w\| \leq 1$ , então

$$\begin{aligned} |I'(u+v)w - I'(u)w - Lvw| &= \left| \int_{\Omega} (f(u+v)w - f(u)w - f'(u)vw) \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f(u+v)w - f(u)w - f'(u)vw| = \int_{\Omega} \Psi \leq \epsilon \|v\| \end{aligned}$$

Vamos considerar

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \bar{\Omega} : |u(x)| \geq b_1\} \\ \Omega_2 &= \{x \in \bar{\Omega} : |v(x)| \geq b_2\} \\ \Omega_3 &= \{x \in \bar{\Omega} : |u(x)| \leq b_1, \text{ e } |v(x)| \leq b_2\} \end{aligned}$$

onde  $b_1, b_2 > 0$  por enquanto são quaisquer números. Dessa forma  $\Omega \subseteq \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ . No que segue, consideramos  $\|v\| \leq 1$  e  $\|w\| \leq 1$ . Em  $\Omega_1$  temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |f(u+v) - f(u) - f'(u)v| |w| &\leq \int_{\Omega_1} |f'(u+\theta v) - f'(u)| |v| |w| \\ &\leq \int_{\Omega_1} (C_1 + C_2|u+\theta v|^{\alpha-1} + C_1 + C_2|u|^{\alpha-1}) |v| |w| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_{\Omega_1} (2C_1 + C_2(|u| + |v|)^{\alpha-1} + C_2|u|^{\alpha-1}) |v||w| \\
 &\leq \int_{\Omega_1} (2C_1 + 2C_2(|u| + |v|)^{\alpha-1}) |v||w|. \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

Agora, considere

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{2^*}{\alpha - 1}; \quad p_2 = \frac{2^*}{2^* - (\alpha + 1)}; \quad p_3 = \frac{2^*}{2} \\
 q_1 &= \frac{2^*}{\alpha - 1}; \quad q_2 = \frac{2^*}{2^* - (\alpha + 1)}; \quad q_3 = 2^*; \quad q_4 = 2^*
 \end{aligned}$$

e observe que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} &= 1 = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_4} \\
 1 < p_1, q_1; \quad 1 < p_2, q_2 < 2^*; \quad 1 < p_3, q_3 < 2^*; \quad 1 < q_4 < 2^*
 \end{aligned}$$

assim, utilizando a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_1} |f(u+v) - f(u) - f'(u)v| |w| &\leq 2C_1 \int_{\Omega_1} |v||w| + 2C_2 \int_{\Omega_1} (|u| + |v|)^{\alpha-1} |v||w| \\
 &\leq 2C_1 |\Omega_1|^{\frac{1}{p_1}} \|v\|_{L^{p_2}(\Omega_1)} \|w\|_{L^{p_3}(\Omega_1)} \\
 &\quad + 2C_2 |\Omega_1|^{\frac{1}{q_2}} \| |u| + |v| \|_{L^{2^*}(\Omega_1)}^{\alpha-1} \|v\|_{L^{q_3}(\Omega_1)} \|w\|_{L^{q_4}(\Omega_1)} \\
 &\leq C_3 |\Omega_1|^{\frac{1}{p_1}} \|v\| + C_4 |\Omega_1|^{\frac{1}{q_2}} (\|u\|^{\alpha-1} + \|v\|^{\alpha-1}) \|v\| \\
 &\leq C_5 \left[ |\Omega_1|^{\frac{1}{p_1}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{q_2}} (\|u\|^{\alpha-1} + 1) \right] \|v\|.
 \end{aligned}$$

Portanto obtemos

$$\int_{\Omega_1} \Psi \leq C_5 \left[ |\Omega_1|^{\frac{1}{p_1}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{q_2}} (\|u\|^{\alpha-1} + 1) \right] \|v\|$$

Agora, como  $u \in L^1(\Omega)$ , temos que  $|\Omega_1| \rightarrow 0$  quando  $b_1 \rightarrow \infty$ , logo podemos escolher  $b_1$  suficientemente grande de forma que

$$C_5 \left[ |\Omega_1|^{\frac{1}{p_1}} + |\Omega_1|^{\frac{1}{q_2}} (\|u\|^{\alpha-1} + 1) \right] \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Com isso temos

$$\int_{\Omega_1} \Psi \leq \frac{\epsilon}{3} \|v\| \quad (1.9)$$

Consideremos agora o subconjunto  $\Omega_2$ . Como em (1.8) temos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_2} |f(u+v) - f(u) - f'(u)v| |w| &\leq C_6 \int_{\Omega_2} (1 + (|u| + |v|)^{\alpha-1}) |v| |w| \\
 &\leq C_6 \left\{ \int_{\Omega_2} (1 + (|u| + |v|)^{\alpha-1})^{p_1} \right\}^{\frac{1}{p_1}} \|v\|_{L^{p_3}(\Omega_2)} \|w\|_{L^{p_2}(\Omega_2)} \\
 &\leq C_7 \left\{ \int_{\Omega_2} (1 + (|u| + |v|)^{2^*}) \right\}^{\frac{1}{p_1}} \|v\|_{L^{\frac{2^*}{2}}(\Omega_2)} \\
 &\leq C_8 \left\{ |\Omega|^{\frac{1}{p_1}} + \| |u| + |v| \|_{L^{2^*}(\Omega_2)} \right\} \|v\|_{L^{\frac{2^*}{2}}(\Omega_2)} \\
 &\leq C_9 \left( 1 + \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\alpha-1} + \|v\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\alpha-1} \right) \left[ \int_{\Omega_2} |v|^{\frac{2^*}{2}} \left( \frac{|v|}{b_2} \right)^{\frac{2^*}{2}} \right]^{\frac{2}{2^*}} \\
 &\leq C_{10} \left( 2 + \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\alpha-1} \right) \frac{1}{b_2} \|v\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{\Omega_2} \Psi \leq \frac{C_{11}}{b_2} \left( 2 + \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\alpha-1} \right) \|v\|^2 \quad (1.10)$$

Finalmente, vamos considerar o subconjunto  $\Omega_3$ . Como  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , sabemos que  $f$  é uniformemente diferenciável em cada subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ . Em particular, considere o compacto  $[-b_1, b_1]$ , assim dado  $\hat{\epsilon} > 0$  existe  $\hat{\delta} = \hat{\delta}(\hat{\epsilon}, b_1)$  tal que

$$|f(t+h) - f(t) - f'(t)h| \leq \hat{\epsilon}|h| \quad \forall |h| \leq \hat{\delta}, \quad \forall |t| \leq b_1 \quad (1.11)$$

Em particular se  $b_2 \leq \hat{\delta}$  então, usando (1.11) e as imersões de Sobolev, obtemos

$$\int_{\Omega_3} \Psi \leq \hat{\epsilon} \int_{\Omega} |v| |w| \leq C_{12} \hat{\epsilon} \|v\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{13} \hat{\epsilon} \|v\| \quad (1.12)$$

agora, escolhemos  $\hat{\epsilon}$  de forma que  $3C_{13}\hat{\epsilon} \leq \epsilon$ . Com esta escolha de  $\hat{\epsilon}$  teremos  $\hat{\delta}$ , daí escolha

$b_2 = \widehat{\delta}$ . Finalmente escolha  $\delta$  suficientemente pequeno tal que

$$\delta \leq \min \left\{ \frac{b_2 \epsilon}{3C_{11} \left( 2 + \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)}^{\alpha-1} \right)}, 1 \right\}$$

daí, usando (1.9), (1.10) e (1.12) obtemos

$$\int_{\Omega} \Psi \leq \int_{\Omega_1} \Psi + \int_{\Omega_2} \Psi + \int_{\Omega_3} \Psi \leq \epsilon \|v\|$$

como queríamos.

Para provar que  $I''$  é contínua, seja  $u_k \rightarrow u$  em  $H_0^1(\Omega)$  então sabemos que, a menos de subsequência,  $u_k \rightarrow u$  em  $L^{\alpha+1}(\Omega)$ . Lembrando que

$$\|I''(u_k) - I''(u)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\| \leq 1}} \left\{ \sup_{\substack{w \in H_0^1(\Omega) \\ \|w\| \leq 1}} \{|I''(u_k)vw - I''(u)vw|\} \right\}$$

Considerando  $v, w \in H_0^1(\Omega)$ , tais que  $\|v\|, \|w\| \leq 1$  e observando que  $\frac{\alpha-1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} = 1$  temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (f'(u_k)vw - f'(u)vw) \right| &\leq \int_{\Omega} |f'(u_k) - f'(u)| |v| |w| \\ &\leq \|f'(u_k) - f'(u)\|_{L^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(\Omega)} \|v\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)} \|w\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)} \\ &\leq C \|f'(u_k) - f'(u)\|_{L^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(\Omega)} \end{aligned}$$

Por outro lado, pela Proposição 1.7, a aplicação

$$\begin{aligned} B : L^{\alpha+1}(\Omega) &\longrightarrow L^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(\Omega) \\ u &\longmapsto f'(u) \end{aligned}$$

é contínua. Logo, como  $u_k \rightarrow u$  em  $L^{\alpha+1}(\Omega)$  temos

$$\|I''(u_k) - I''(u)\|_{\mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))} \leq C \|f'(u_k(\cdot)) - f'(u(\cdot))\|_{L^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Portanto  $I''$  é contínua.

Resta agora mostrar que o operador  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  definido por  $J''(u)$  é da

forma  $Id-K$ . Lembrando que  $J''(u)$  é uma aplicação bilinear simétrica de  $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$  em  $\mathbb{R}$ , isto é,  $J''(u)(v, w) = J''(u)(w, v)$  para todos  $v, w \in H_0^1(\Omega)$ . Por outro lado, para cada  $v \in H_0^1(\Omega)$ , pelo Teorema da Representação de Riesz (ver por ex. [Co] pág. 13), existe um único  $Av \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$J''(u)(v, w) = \langle Av, w \rangle \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Isto define uma aplicação linear contínua  $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$  que é simétrica, ou seja,  $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ . Frequentemente identifica-se  $J''(u)$  com  $A$ .

Para mostrar que  $A$  é da forma  $Id-K$  onde  $K$  é um operador compacto, basta mostrar que o operador

$$L : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \quad \text{tal que} \quad \langle Lv, w \rangle = \int_{\Omega} f'(u)vw$$

$$v \longmapsto Lv$$

é compacto. Se definirmos

$$T \in H^{-1}(\Omega) \quad \text{por} \quad Tw = \int_{\Omega} f'(u)vw$$

então, pelo Teorema da Representação de Riesz,  $\|Lv\| = \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}$ .

Considere  $(v_k) \subset H_0^1(\Omega)$  uma sequência limitada, então existe uma subsequência  $v_{k_j}$  tal que  $v_{k_j} \rightharpoonup v_0$  em  $L^{\alpha+1}(\Omega)$ . Assim

$$\begin{aligned} \|Lv_{k_j} - Lv_0\| &= \|T_{k_j} - T_0\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|w\| \leq 1} \{|(T_{k_j} - T_0)w|\} \\ &\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \left\{ \left| \int_{\Omega} (f'(u)v_{k_j} - f'(u)v_0)w \right| \right\} \\ &\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} |f'(u)||v_{k_j} - v_0||w| \right\} \\ &\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} (C_1 + C_2|u|^{\alpha-1})|v_{k_j} - v_0||w| \right\} \\ &\leq \bar{C} \left( \|v_{k_j} - v_0\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)} + \|u\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha-1} \|v_{k_j} - v_0\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)} \right) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $j \rightarrow \infty$ . Portanto  $L$  é compacto. □

# Capítulo 2

## Primeiras soluções

Neste capítulo vamos aplicar o Teorema 1.3 para garantir a existência de duas soluções não triviais para o problema  $(\mathcal{P})$ .

### 2.1 As duas primeiras soluções

Definamos

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0. \end{cases}$$

Observe que  $\tilde{f}(t) \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  e satisfaz  $(f_1)$ ,  $(f_2)$  e  $(f_3)$  para  $t > 0$  enquanto que  $0 = \tilde{F}(t) = \tilde{f}(t)$  para  $t \leq 0$ . Considere o funcional modificado

$$\tilde{J}(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \tilde{F}(u) \right) dx, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

onde  $\tilde{F}(t) = \int_0^t \tilde{f}(s) ds$ . Queremos mostrar que  $\tilde{J}$  satisfaz  $(I_1)$ ,  $(I_2)$  e  $(PS)$ .

Para verificar  $(I_1)$ , por  $(f_1)$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$|\tilde{F}(\xi)| \leq \frac{\epsilon}{2} |\xi|^2, \quad \forall |\xi| \leq \delta. \quad (2.1)$$

Por  $(f_2)$ , existe uma constante  $A = A(\delta) > 0$  tal que

$$|\tilde{F}(\xi)| \leq A |\xi|^{\alpha+1}, \quad \forall |\xi| \geq \delta. \quad (2.2)$$

Portanto, por (2.1) e (2.2), temos que

$$|\tilde{F}(\xi)| \leq \epsilon|\xi|^2 + A|\xi|^{\alpha+1},$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \tilde{F}(u) dx \right| &\leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx + A \int_{\Omega} |u|^{\alpha+1} dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \theta_1 \|u\|^2 + A \theta_2 \|u\|^{\alpha+1} \\ &\leq \theta \left( \frac{\epsilon}{2} + A \|u\|^{\alpha-1} \right) \|u\|^2 \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Poincaré e a imersão de Sobolev. Para  $\|u\| \leq \left(\frac{\epsilon}{2A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ , temos que

$$\left| \int_{\Omega} \tilde{F}(u) dx \right| \leq \theta \epsilon \|u\|^2. \quad (2.3)$$

Assim, usando (2.3) temos

$$\begin{aligned} \tilde{J}(u) &= \frac{1}{2} \|u\|^2 - \int_{\Omega} \tilde{F}(u) dx \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \left| \int_{\Omega} \tilde{F}(u) dx \right| \\ &\geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \theta \epsilon \|u\|^2 \geq \left( \frac{1}{2} - \theta \epsilon \right) \|u\|^2. \end{aligned}$$

Como  $\epsilon > 0$  é arbitrário, temos que  $\tilde{J}$  satisfaz  $(I_1)$ .

Para verificar que  $\tilde{J}$  satisfaz  $(I_2)$ , observe que

$$\tilde{F}(t) \geq d_1 t^\mu - d_2 \quad \forall t \geq 0$$

onde  $d_1, d_2 > 0$  são constantes. De fato, temos que  $\tilde{F}(t) \geq -d_2$  para todo  $t \in [0, M]$  e para  $t \geq M$ , temos que  $\tilde{f}$  satisfaz  $(f_3)$  daí,

$$\frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{F}(t)} \geq \frac{\mu}{t}$$

consequentemente,

$$\int_M^t \frac{\tilde{f}(s)}{\tilde{F}(s)} ds \geq \int_M^t \frac{\mu}{s} ds$$

ou seja,

$$\ln \left( \frac{\tilde{F}(t)}{\tilde{F}(M)} \right) \geq \ln \left( \frac{t}{M} \right)^\mu.$$

Logo  $\tilde{F}(t) \geq d_1 t^\mu$  para todo  $t \geq M$ . Portanto

$$\tilde{F}(t) \geq d_1 t^\mu - d_2 \quad \forall t \geq 0.$$

Seja  $e_1 \in H_0^1(\Omega)$ , com  $\|e_1\| = 1$  e  $e_1 > 0$  em  $\Omega$ , a primeira autofunção de  $(-\Delta)$ . Então temos

$$\int_\Omega \tilde{F}(e_1) dx \geq d_1 \int_\Omega |e_1|^\mu dx - d_2 |\Omega|$$

daí,

$$\begin{aligned} \tilde{J}(te_1) &= \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla e_1|^2 dx - \int_\Omega \tilde{F}(te_1) dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} \int_\Omega |\nabla e_1|^2 dx - t^\mu d_1 \int_\Omega |e_1|^\mu dx + d_2 |\Omega| \longrightarrow -\infty \quad \text{quando } t \rightarrow \infty \end{aligned}$$

pois  $\mu > 2$ . Portanto, existe  $r > 0$  suficientemente grande tal que

$$\tilde{J}(re_1) \leq 0.$$

Agora vamos verificar que  $\tilde{J}$  satisfaz (PS). Para isso, usaremos o seguinte resultado:

**Proposição 2.1.** *Seja  $I \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$  tal que  $I' = Id - K$  onde  $K$  é um operador compacto. Se  $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$  é uma sequência limitada tal que  $I'(u_k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$  então  $u_k$  possui uma subsequência convergente.*

**Demonstração:** Considere

$$\begin{aligned} D : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H^{-1}(\Omega) \\ u &\longmapsto Du \end{aligned}$$

a aplicação dualidade, ou seja,  $Du(v) = \langle u, v \rangle$ . Sabemos, pelo Teorema da Representação

de Riesz, que  $D$  é um isomorfismo isométrico linear. Assim

$$D^{-1}I'(u_k) = u_k - D^{-1}K(u_k).$$

Como  $(u_k)$  é limitada e  $K$  é compacto, segue que  $K(u_k)$  possui uma subsequência convergente, digamos  $K(u_{k_j}) \rightarrow w_0$ . Assim, utilizando a continuidade de  $D^{-1}$ , temos

$$u_{k_j} = D^{-1}I'(u_{k_j}) + D^{-1}K(u_{k_j}) \rightarrow D^{-1}w_0$$

ou seja,  $u_k$  possui uma subsequência convergente.  $\square$

Portanto é suficiente mostrar que  $(u_k)$ , sequência de Palais-Smale, é limitada. Para isso, seja  $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$  uma sequência tal que  $|\tilde{J}(u_k)| \leq d$  e  $\tilde{J}'(u_k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Logo

$$\begin{aligned} d &\geq \tilde{J}(u_k) = \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \int_{\Omega} \tilde{F}(u_k)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - \int_{\{|u_k| \leq M\}} \tilde{F}(u_k)dx - \int_{\{|u_k| > M\}} \tilde{F}(u_k)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - d_3 - \int_{\{|u_k| > M\}} \tilde{F}(u_k)dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - d_3 - \frac{1}{\mu} \int_{\{u_k > M\}} \tilde{f}(u_k)u_k dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u_k\|^2 - d_4 - \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} \tilde{f}(u_k)u_k dx. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como  $\tilde{J}'(u_k) \rightarrow 0$ , para qualquer  $\epsilon > 0$  existe  $N = N(\epsilon) > 0$  tal que

$$\left| \langle \tilde{J}'(u_k), v \rangle \right| \leq \epsilon \|v\| \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad e \quad \forall k \geq N. \tag{2.5}$$

Escolhendo  $\epsilon = 1$ , para  $k$  suficientemente grande, temos

$$-\langle \tilde{J}'(u_k), u_k \rangle \leq \left| \langle \tilde{J}'(u_k), u_k \rangle \right| \leq \|u_k\|$$

ou seja,

$$-\|u_k\|^2 + \int_{\Omega} \tilde{f}(u_k) u_k dx \leq \|u_k\|. \quad (2.6)$$

Assim, combinando (2.4), (2.5) e (2.6) obtemos

$$d \geq \frac{1}{2} \|u_k\|^2 - d_4 - \frac{1}{\mu} (\|u_k\| + \|u_k\|^2) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_k\|^2 - \frac{1}{\mu} \|u_k\| - d_4$$

Portanto  $(u_k)$  é limitada.

Acabamos de verificar que o funcional  $\tilde{J}$  satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3. Assim, definindo

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H_0^1(\Omega)) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(1) = re_1\}$$

e

$$c_1 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \{\max_{t \in [0, 1]} \{\tilde{J}(\gamma(t))\}\}$$

temos, pelo Teorema 1.3, que  $c_1 > 0$  é um valor crítico de  $\tilde{J}$ , ou seja, o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \tilde{f}(u) & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \quad (\tilde{\mathcal{P}})$$

possui uma solução fraca  $u_1 \neq 0$ . Veremos mais adiante que  $u_1$  na verdade é uma solução clássica. Por enquanto, vamos assumir que  $u_1$  é solução clássica de  $(\tilde{\mathcal{P}})$ . Considere  $\mathcal{A} = \{x \in \Omega \mid u_1(x) < 0\}$ . Então, pela definição de  $\tilde{f}$  temos

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = 0 & \mathcal{A} \\ u_1 = 0 & \partial\mathcal{A}, \end{cases}$$

Agora, aplicamos o Princípio do Máximo, para concluir que  $u_1 \equiv 0$  em  $\mathcal{A}$ . Logo  $\mathcal{A} = \emptyset$  e consequentemente  $u_1 \geq 0$  em  $\Omega$ . Reescrevendo  $(\tilde{\mathcal{P}})$  da seguinte maneira

$$\begin{cases} -\Delta u - \left(\frac{\tilde{f}(u)^-}{u}\right) u = \left(\frac{\tilde{f}(u)^+}{u}\right) u & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $\tilde{f}^+ = \max\{\tilde{f}, 0\}$  e  $\tilde{f}^- = \min\{\tilde{f}, 0\}$  e  $\frac{\tilde{f}(t)}{t}$  pode ser continuamente definido como 0 em  $t = 0$ , e aplicando o Princípio do Máximo Forte (veja [GT] pág. 35) obtemos que  $u_1(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega$ . Portanto  $u_1$  também é solução de  $(\mathcal{P})$ .

De maneira análoga podemos estabelecer a existência de outra solução  $u_2 < 0$ .

## 2.2 A regularidade das soluções

Nesta seção vamos mostrar que as soluções fracas de uma classe de problemas incluindo  $(\mathcal{P})$  e  $(\tilde{\mathcal{P}})$  (lembrando que  $(\tilde{\mathcal{P}})$  é o problema definido na pág. 23) são, na verdade, soluções clássicas. Em particular, concluiremos que os pontos críticos  $u_1$  e  $u_2$  do funcional  $J$ , obtidos na seção anterior, são soluções clássicas do problema  $(\mathcal{P})$ . Para isso utilizaremos o seguinte resultado:

**Lema 2.2** (Brézis-Kato, [BK]). *Seja  $\Omega$  um domínio limitado em  $\mathbb{R}^n$  e seja  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de Carathéodory, isto é,  $f$  é mensurável em  $\Omega$  e contínua em  $\mathbb{R}$ , tal que*

$$|f(x, u)| \leq a(x)(1 + |u|) \quad \text{q.t.p. } \Omega$$

onde a função  $a \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$ . Se  $u \in H_0^1(\Omega)$  é uma solução fraca de  $-\Delta u = f(x, u)$  então

$$u \in L^q(\Omega) \quad \text{para todo } 1 \leq q < \infty.$$

**Demonstração:** Como  $u$  é solução fraca do problema  $-\Delta u = f(x, u)$ , temos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x, u) v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.7)$$

Sejam  $s \geq 1$ ,  $L \geq 1$  e  $\varphi = \varphi_{s,L} = u \min\{|u|^{2s}, L^2\} \in H_0^1(\Omega)$ . Então

$$\nabla \varphi = \nabla u \min\{|u|^{2s}, L^2\} + 2s|u|^{2s} \nabla u \chi_{\{|u|^s < L\}}.$$

Testando (2.7) com  $\varphi$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} dx + 2s \int_{\{|u|^s < L\}} |\nabla u|^2 |u|^{2s} dx &= \int_{\Omega} f(x, u) \varphi dx \\ &\leq \int_{\Omega} a(x)(1 + |u|)|u| \min\{|u|^{2s}, L^2\} dx \\ &\leq \int_{\Omega} a(x) dx + 2 \int_{\Omega} a|u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\} dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde usamos a desigualdade

$$(1 + |u|)|u| \min\{|u|^{2s}, L^2\} \leq 1 + 2|u|^2 \min\{|u|^{2s}, L^2\},$$

pois se  $|u| \leq 1$  então

$$(1 + |u|)|u| \min \{|u|^{2s}, L^2\} = |u|^{2s+1} + |u|^{2s+2} \leq 1 + 2|u|^2|u|^{2s} = 1 + 2|u|^2 \min \{|u|^{2s}, L^2\}$$

e se  $|u| > 1$  então  $|u|^2 > |u|$ , daí

$$(1 + |u|)|u| \min \{|u|^{2s}, L^2\} \leq 2|u|^2 \min \{|u|^{2s}, L^2\} \leq 1 + 2|u|^2 \min \{|u|^{2s}, L^2\}.$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} \nabla(u \min \{|u|^s, L\}) &= \nabla u \min \{|u|^s, L\} + us|u|^{s-2}u \nabla u \chi_{\{|u|^s < L\}} \\ &= \nabla u \min \{|u|^s, L\} + s|u|^{2s} \nabla u \chi_{\{|u|^s < L\}}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} |\nabla(u \min \{|u|^s, L\})|^2 &= \langle \nabla(u \min \{|u|^s, L\}), \nabla(u \min \{|u|^s, L\}) \rangle = \\ &= |\nabla u|^2 \min \{|u|^{2s}, L^2\} + 2s|u|^{2s} |\nabla u|^2 \chi_{\{|u|^s < L\}} + s^2|u|^{2s} |\nabla u|^2 \chi_{\{|u|^s < L\}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |\nabla(u \min \{|u|^s, L\})|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \min \{|u|^{2s}, L^2\} dx + 2s \int_{\{|u|^s < L\}} |u|^{2s} |\nabla u|^2 dx + s^2 \int_{\{|u|^s < L\}} |u|^{2s} |\nabla u|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \min \{|u|^{2s}, L^2\} dx + \left(1 + \frac{s}{2}\right) 2s \int_{\{|u|^s < L\}} |u|^{2s} |\nabla u|^2 dx \\ &\leq d_1 \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \min \{|u|^{2s}, L^2\} dx + 2s \int_{\{|u|^s < L\}} |u|^{2s} |\nabla u|^2 dx \right), \quad \text{onde } d_1 = \left(1 + \frac{s}{2}\right) \\ &\leq d_1 \int_{\Omega} a(x) dx + 2d_1 \int_{\Omega} a(x) |u|^2 \min \{|u|^{2s}, L^2\} dx, \quad \text{por (2.8)} \\ &\leq d_2 + 2d_1 \int_{\Omega} a(x) |u|^2 \min \{|u|^{2s}, L^2\} dx, \quad \text{onde } d_2 = d_1 \int_{\Omega} a(x) dx. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Agora suponha que  $u \in L^{2s+2}(\Omega)$ . Seja  $R > 0$ , temos

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} |\nabla (u \min \{|u|^s, L\})|^2 dx \\
 & \leq d_2 + 2d_1 R \int_{\{a < R\}} |u|^2 \min \{|u|^{2s}, L^2\} dx + 2d_1 \int_{\{a \geq R\}} a(x) |u|^2 \min \{|u|^{2s}, L^2\} dx \\
 & \leq d_3 + 2d_1 \int_{\{a \geq R\}} a(x) |u|^2 \min \{|u|^{2s}, L^2\} dx, \quad \text{onde } d_3 = d_3(s, \|u\|_{L^{2s+2}(\Omega)}, R, \Omega) \\
 & \leq d_3 + 2d_1 \left( \int_{\{a \geq R\}} |a(x)|^{\frac{n}{2}} dx \right)^{\frac{2}{n}} \left( \int_{\{a \geq R\}} |u \min \{|u|^s, L\}|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2}},
 \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder e o fato de que  $\min \{a, b\}^2 = \min \{a^2, b^2\}$ . Seja

$$\epsilon(R) = \left( \int_{\{a \geq R\}} |a(x)|^{\frac{n}{2}} dx \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Então

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} |\nabla (u \min \{|u|^s, L\})|^2 dx & \leq d_3 + 2d_1 \epsilon(R) \left( \int_{\Omega} |u \min \{|u|^s, L\}|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2}} \\
 & \leq d_3 + d_4 \epsilon(R) \int_{\Omega} |\nabla (u \min \{|u|^s, L\})|^2 dx \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

onde  $d_4 = d_4(s, \Omega)$ , também fizemos uso da imersão de Sobolev  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ . Como  $a \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$ , então  $\epsilon(R) \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$ .

Escolhendo  $R > 0$  suficientemente grande tal que  $d_4 \epsilon(R) < \frac{1}{2}$ , obtemos de (2.10)

$$\int_{\Omega} |\nabla (u \min \{|u|^s, L\})|^2 dx \leq 2d_3.$$

Usando novamente a imersão de Sobolev, temos que

$$\left( \int_{\Omega} |\nabla (u \min \{|u|^s, L\})|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq d_5 \int_{\Omega} |\nabla (u \min \{|u|^s, L\})|^2 dx \leq 2d_3 d_5 = d_6, \quad (2.11)$$

onde  $d_5 = d_5(\Omega)$  e  $d_6 = d_6(s, \Omega, R, \|u\|_{L^{2s+2}(\Omega)})$ . Como  $d_6$  não depende de  $L$ , podemos fazer  $L \rightarrow \infty$  em (2.11) para obter

$$\left( \int_{\Omega} |u|^{(s+1)2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq d_6,$$

ou seja,  $u \in L^{(s+1)\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ . Portanto, acabamos de mostrar que

$$u \in L^{2s+2}(\Omega) \implies u \in L^{(2s+2)\frac{n}{n-2}}(\Omega).$$

Começando com  $s_0 = 0$  e fazendo um processo iterativo, obtemos que  $u \in L^q(\Omega)$  para todo  $q \geq 1$ . □

Agora, considere a seguinte equação:

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.12)$$

onde  $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  satisfaz a seguinte condição de crescimento

$$|g(u)| \leq C(1 + |u|^\alpha) \quad (2.13)$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , é um domínio limitado e  $\alpha \leq 2^* - 1$ . Se  $u \in H_0^1(\Omega)$  é uma solução fraca de (2.12) então  $u$  é solução fraca de

$$-\Delta u = a(x)(1 + |u|), \quad \text{onde } a(x) = \frac{g(u(x))}{1 + |u(x)|}.$$

Observe que  $a \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$  pois

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |a|^{\frac{n}{2}} &= \int_{\Omega} \left( \frac{|g(u)|}{1 + |u|} \right)^{\frac{n}{2}} \leq \int_{\Omega} \left( \frac{C(1 + |u|^\alpha)}{1 + |u|} \right)^{\frac{n}{2}} \leq C^{\frac{n}{2}} \int_{\Omega} \left( 1 + \frac{|u|^\alpha}{1 + |u|} \right)^{\frac{n}{2}} \\ &\leq \bar{C} \int_{\Omega} \left[ 1 + \left( \frac{|u|^\alpha}{1 + |u|} \right)^{\frac{n}{2}} \right] \\ &\leq \bar{C} \int_{\Omega} [1 + |u|^{(\alpha-1)\frac{n}{2}}] < \infty \end{aligned}$$

pois  $\Omega$  é limitado e

$$(\alpha - 1)\frac{n}{2} < 2^* = \frac{2n}{n-2}.$$

Portanto, pelo Lema 2.2,  $u \in L^p(\Omega)$  para todo  $1 \leq p < \infty$ . Nesse caso, por (2.13), também temos  $g(u) \in L^p(\Omega)$  para todo  $1 \leq p < \infty$  e, pelo Teorema 9.15 de [GT],  $u \in W^{2,p}(\Omega)$  para todo  $1 \leq p < \infty$ . Em seguida, aplicamos o Teorema da Imersão de Sobolev ([AF] pág. 85) com  $p$  suficientemente grande, para obter que  $u \in C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$  com  $\lambda > 0$ . Agora observe que

$$|g(u(y)) - g(u(x))| = |g'(\xi)||u(y) - u(x)| \leq \Lambda k_1 |y - x|^\lambda \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}$$

onde

$$\Lambda = \max_{|\xi| \leq \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})}} \{|g'(\xi)|\}$$

ou seja,  $g(u) \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ . Pelo Teorema 6.14 de [GT] temos que

$$-\Delta w = g(u) \quad \text{em } \Omega, \quad w = 0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

possui uma única solução em  $C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$ . Logo  $u \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$ , isto é,  $u$  é solução clássica de (2.12) como queríamos.

# Capítulo 3

## Resultados Preliminares

Neste capítulo estabeleceremos alguns resultados importantes que serão utilizados no próximo capítulo na obtenção da terceira solução do nosso problema.

### 3.1 Lema de Morse Generalizado

Considere  $f \in C^2(U, \mathbb{R})$  onde  $U$  é uma vizinhança de 0, a origem de  $H = (H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espaço de Hilbert com norma  $\| \cdot \|$ . Suponha que 0 seja o único ponto crítico de  $f$ . Seja  $A = f''(0)$  o único operador linear, limitado e auto-adjunto  $A : H \rightarrow H$  tal que  $f''(0)(v, w) = \langle Av, w \rangle$ , para  $v, w \in H$ , e cujo núcleo  $Ker(A)$  será denotado por  $N$ .

**Teorema 3.1.** *Nas condições acima suponha que 0 seja um ponto isolado do espectro de  $A$ ,  $\sigma(A)$ , ou que  $0 \notin \sigma(A)$ . Então existem uma bola  $B_\delta$ ,  $\delta > 0$ , centrada na origem, um homeomorfismo local  $\phi$  que preserva a origem definido em  $B_\delta$  e uma aplicação  $h \in C^1(B_\delta \cap N, N^\perp)$  tais que*

$$f \circ \phi(y + z) = f(h(y) + y) + \frac{1}{2} \langle Az, z \rangle \quad (3.1)$$

onde  $y = P_N x$  e  $z = P_{N^\perp} x$ , onde  $P_N (P_{N^\perp})$  é a projeção ortogonal sobre o espaço  $N (N^\perp)$ .

**Demonstração:**

*Passo 1.* Escrevemos  $H = N \oplus N^\perp$  e  $f = f(y + z)$ , assim temos

$$d_z f(0 + 0) = 0 ; d_z^2 f(0 + 0) = A|_{N^\perp}. \quad (3.2)$$

Observe que, para todo  $\phi \in H$  e  $\psi \in N$  temos que  $\langle A\phi, \psi \rangle = \langle \phi, A\psi \rangle = \langle \phi, 0 \rangle = 0$ , ou seja,  $A\phi \in N^\perp$  para todo  $\phi \in N^\perp$ .

Vamos mostrar agora que  $A|_{N^\perp} : N^\perp \rightarrow N^\perp$  é um isomorfismo.

$A|_{N^\perp}$  é injetiva: se  $A\phi = 0$  para algum  $\phi \in N^\perp$ , então  $\phi \in N \cap N^\perp = \{0\}$ , logo  $\phi = 0$ .

$A|_{N^\perp}$  é sobrejetiva: dado  $\psi \in N^\perp$  queremos uma solução para  $A\phi = \psi$  em  $N^\perp$ . Se  $0 \notin \sigma(A)$  o ponto crítico 0 é não degenerado e a solubilidade é óbvia. Se 0 é um ponto isolado de  $\sigma(A)$ , então o operador auto-adjunto  $A : H \rightarrow H$  possui imagem  $R(A)$  fechada (por [Co] pág. 359). Portanto  $R(A) = Ker(A)^\perp = N^\perp$  pois, da simetria de  $A$  temos que  $R(A)^\perp = Ker(A)$  e como  $R(A)$  é fechado tem-se  $((R(A)^\perp)^\perp)^\perp = R(A)$ . Assim, para  $\psi \in N^\perp$  existe  $\phi \in H$  tal que  $A\phi = \psi$ , então  $(Id - P_N)\phi$  é a tal solução em  $N^\perp$ .

Agora, aplicando o Teorema da Função Implícita, usando (3.2), temos que existem  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , e uma aplicação  $h : B_{\delta_1} \cap N \rightarrow B_{\delta_2} \cap N^\perp$ , de classe  $C^1$ , tal que  $h(0) = 0$  e

$$d_z f(y + h(y)) = 0, \quad \text{para } y \in B_{\delta_1} \cap N.$$

Defina  $u = z - h(y)$  e seja  $F : (B_{\delta_1} \cap N) \times N^\perp \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$F(y, u) = f(y + z) - f(h(y) + y) \tag{3.3}$$

assim obtemos,

$$\begin{aligned} F(y, 0) &= 0 \\ d_u F(y, 0) &= d_z f(h(y) + y) = 0 \\ d_u^2 F(0, 0) &= d_z^2 f(0) = A|_{N^\perp} \end{aligned}$$

agora defina  $F_2 : N^\perp \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$F_2(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle \tag{3.4}$$

*Passo 2.* como  $A : N^\perp \rightarrow N^\perp$  é um isomorfismo, existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|A\phi\| \geq C\|\phi\|, \quad \forall \phi \in N^\perp. \tag{3.5}$$

*Passo 3.* para cada  $u \neq 0$  considere o fluxo  $\eta(s) = \eta(s, u)$  definido pela seguinte EDO:

$$\begin{cases} \eta'(s) &= -\frac{A\eta(s)}{\|A\eta(s)\|} \\ \eta(0) &= u \end{cases} \tag{3.6}$$

em  $N^\perp \setminus \{0\}$ .

**Afirmção.**  $\eta$  está bem definido para  $|s| < \|u\|$

De fato, utilizando a desigualdade do valor médio e o fato de que  $\|\eta'(s)\| = 1$  temos que  $\|\eta(s) - u\| \leq |s|$ , logo temos  $\|\eta(s)\| \geq \|u\| - |s|$ . Assim, como  $\eta(s) \in N^\perp$ , segue de (3.5) que o denominador do campo vetorial é não nulo para  $|s| < \|u\|$ .

Agora defina  $\xi : (y, u) \mapsto u_0 \in F_2^{-1} \circ F(y, u) \cap \{\eta(t, u) \mid |t| \leq \|u\|\}$  e  $\xi(y, 0) = 0$ .

**Afirmção.**  $\xi$  está bem definida em  $B_{\delta_3}^N \times B_{\delta_3}^\perp$ , onde  $B_{\delta_3}^N = B_{\delta_3} \cap N$  e  $B_{\delta_3}^\perp = B_{\delta_3} \cap N^\perp$ , para algum  $\delta_3 > 0$ .

De fato, valem as seguintes desigualdades:

(a)  $\forall 0 < \epsilon < \frac{C}{4} \exists \delta_3 = \delta_3(\epsilon) > 0$  tal que, para  $(y, u) \in B_{\delta_3}^N \times B_{2\delta_3}^\perp$  tem-se

$$|F(y, u) - F_2(u)| = \left| \int_0^1 (1-t) \langle [d_u^2 F(y, tu) - d_u^2 F(0, 0)]u, u \rangle dt \right| \leq \epsilon \|u\|^2$$

onde escolhemos  $\delta_3$  suficientemente pequeno de forma que  $B_{\delta_3} \cap N \subset B_{\delta_1} \cap N$  e

$$\|d_u^2 F(y, u) - d_u^2 F(0, 0)\| < \epsilon \forall (y, u) \in B_{\delta_3}^N \times B_{2\delta_3}^\perp \quad (3.7)$$

(b)  $\forall t \in (-\|u\|, \|u\|)$  e  $u \in N^\perp \setminus \{0\}$  temos

$$\begin{aligned} |F_2(\eta(t, u)) - F_2(u)| &= \left| \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} F_2(\eta(s, u)) ds \right| = \left| \int_0^t \langle A\eta(s, u), \eta'(s, u) \rangle ds \right| \\ &= \left| \int_0^t -\|A\eta(s, u)\| ds \right| \geq \int_0^{|t|} \|A\eta(s, u)\| ds \\ &\geq C \int_0^{|t|} \|\eta(s, u)\| ds \geq C \left( \|u\||t| - \frac{t^2}{2} \right) \end{aligned}$$

onde  $C$  é a constante obtida em (3.5). Assim concluímos de (a) e (b) que para todo  $y \in B_{\delta_3}^N$  e para todo  $u \in B_{\delta_3}^\perp \setminus \{0\}$  temos

- $F_2(\eta(t, u))$  como função de  $t$  é estritamente decrescente em  $(-\|u\|, \|u\|)$ ;

- $F_2(\eta(t, u)) < F(y, u) < F_2(\eta(-t, u))$  vale para

$$\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\epsilon}{C}}\right) \|u\| < t < \|u\|$$

Portanto, existe um único  $\bar{t} = \bar{t}(y, u)$  com

$$|\bar{t}(y, u)| \leq \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\epsilon}{C}}\right) \|u\| \quad (3.8)$$

tal que

$$F_2(\eta(\bar{t}(y, u), u)) = F(y, u) \quad (3.9)$$

Defina a aplicação  $\xi : (B_{\delta_3} \cap N) \times (B_{\delta_3} \cap N^\perp) \rightarrow N^\perp$  como:

$$\xi(y, u) = \begin{cases} 0 & , u = 0 \\ \eta(\bar{t}(y, u), u) & , u \neq 0 \end{cases}$$

Defina a aplicação  $\Phi : (B_{\delta_3} \cap N) \times (B_{\delta_3} \cap N^\perp) \rightarrow N \times N^\perp$  por:

$$\Phi(y, u) = (y, \xi(y, u))$$

Devemos verificar que  $\Phi$  é um homeomorfismo local que preserva a origem. Primeiramente observe que  $\bar{t}(y, u)$  é contínua, pois se  $u = 0$  a continuidade segue de (3.8) e se  $u \neq 0$  segue do Teorema da Função Implícita, pois

$$\frac{\partial}{\partial t} F_2(\eta(t, u)) = -\|A\eta(t, u)\| \neq 0$$

também  $\xi$  é contínua, para isso basta verificar a continuidade em  $u = 0$ , que segue facilmente de

$$\|\eta(\bar{t}, u)\| \leq \|u\| + \|\eta(\bar{t}, u) - u\| \leq 2\|u\|.$$

Portanto  $\Phi$  é contínua.

*Passo 4.* Nós usamos o caminho  $\eta$  para levar o ponto  $(y, u)$  ao ponto  $\Phi(y, u)$ , o mesmo caminho pode ser usado para definir a aplicação inversa  $\Psi = \Phi^{-1}$ . Com um argumento similar verifica-se a continuidade de  $\Psi$ . Daí concluímos que  $\Phi$  é um homeomorfismo. Seguem os detalhes.

Dado  $(\bar{y}, \bar{u}) \in B_{\delta_3}^N \times (B_{\delta_3}^\perp \setminus \{0\})$ , considere o fluxo  $\eta(s, \bar{u})$  definido em (3.6), que está

bem definido para  $s \in (-\|\bar{u}\|, \|\bar{u}\|)$ . Nesse caso também valem as desigualdades obtidas em (a) e (b). Agora temos

- $F(\bar{y}, \eta(s, \bar{u})) < F_2(\bar{u}) < F(\bar{y}, \eta(-s, \bar{u}))$  para todo  $s$  tal que

$$\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\epsilon}{C}}\right) \|u\| < s < \|u\|$$

De fato, para  $\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\epsilon}{C}}\right) \|u\| < s < \|u\|$  temos  $F(\bar{y}, \eta(s, \bar{u})) - F_2(\bar{u}) < 0$  pois,

$$\begin{aligned} F(\bar{y}, \eta(s, \bar{u})) - F_2(\bar{u}) &= F(\bar{y}, \eta(s, \bar{u})) - F_2(\eta(s, \bar{u})) + F_2(\eta(s, \bar{u})) - F_2(\bar{u}) \\ &\leq |F(\bar{y}, \eta(s, \bar{u})) - F_2(\eta(s, \bar{u}))| + F_2(\eta(s, \bar{u})) - F_2(\bar{u}) \\ &\leq 4\epsilon\|\bar{u}\|^2 + \int_0^s -\|A\eta(\tau, \bar{u})\| d\tau \\ &\leq 4\epsilon\|\bar{u}\|^2 - C \left( \|\bar{u}\|s - \frac{s^2}{2} \right) < 0 \end{aligned}$$

analogamente temos  $F_2(\bar{u}) - F(\bar{y}, \eta(-s, \bar{u})) < 0$  para todo  $s$  tal que  $\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\epsilon}{C}}\right) \|u\| < s < \|u\|$ .

Agora observe que, fazendo uso de (3.7), temos

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial s} F(\bar{y}, \eta(s)) &= \langle d_u F(\bar{y}, \eta(s)), -\eta'(s) \rangle \\ &= \frac{1}{\|A\eta(s)\|} \langle d_u F(\bar{y}, \eta(s)), A\eta(s) \rangle \\ &= \frac{1}{\|A\eta(s)\|} \langle [d_u F(\bar{y}, \eta(s)) - F(\bar{y}, 0)], A\eta(s) \rangle \\ &= \frac{1}{\|A\eta(s)\|} \int_0^1 \langle d_u^2 F(\bar{y}, t\eta(s))\eta(s), A\eta(s) \rangle dt \\ &= \frac{1}{\|A\eta(s)\|} \int_0^1 \langle [d_u^2 F(\bar{y}, t\eta(s)) - d_u^2 F(0, 0) + d_u^2 F(0, 0)]\eta(s), A\eta(s) \rangle dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\|A\eta(s)\|} \int_0^1 \langle [d_u^2 F(\bar{y}, t\eta(s)) - d_u^2 F(0, 0)]\eta(s), A\eta(s) \rangle dt + \left\langle \frac{A\eta(s)}{\|A\eta(s)\|}, A\eta(s) \right\rangle \\
 &\geq \|A\eta(s)\| - \frac{1}{\|A\eta(s)\|} \int_0^1 |\langle [d_u^2 F(\bar{y}, t\eta(s)) - d_u^2 F(0, 0)]\eta(s), A\eta(s) \rangle| dt \\
 &\geq \|A\eta(s)\| - \frac{1}{\|A\eta(s)\|} \int_0^1 \epsilon \|\eta(s)\| \|A\eta(s)\| dt \\
 &\geq \|A\eta(s)\| - \epsilon \|\eta(s)\| \geq (C - \epsilon) \|\eta(s)\| > 0
 \end{aligned}$$

Logo, concluímos que

- $F(\bar{y}, \eta(s, \bar{u}))$ , como função de  $s$ , é estritamente decrescente em  $(-\|u\|, \|u\|)$

Portanto existe um único  $\bar{s} = \bar{s}(\bar{y}, \bar{u})$  com

$$|\bar{s}(\bar{y}, \bar{u})| \leq \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\epsilon}{C}}\right) \|\bar{u}\|$$

tal que  $F(\bar{y}, \eta(\bar{s}(\bar{y}, \bar{u}), \bar{u})) = F_2(\bar{u})$

Assim, definimos a aplicação  $\chi : B_{\delta_3}^N \times B_{\delta_3}^\perp \rightarrow N^\perp$  por

$$\chi(\bar{y}, \bar{u}) = \begin{cases} 0 & , \bar{u} = 0 \\ \eta(\bar{s}(\bar{y}, \bar{u}), \bar{u}) & , \bar{u} \neq 0 \end{cases}$$

Agora, definimos  $\Psi : B_{\delta_3}^N \times B_{\delta_3}^\perp \rightarrow N \times N^\perp$  por:

$$\Psi(\bar{y}, \bar{u}) = (\bar{y}, \chi(\bar{y}, \bar{u}))$$

que preserva a origem. A continuidade de  $\Psi$  segue de modo semelhante ao da continuidade de  $\Phi$  no passo 3.

Para provar que  $\Phi$  é um homeomorfismo local que preserva a origem, nós precisamos apenas mostrar que  $\Psi$  é a aplicação inversa de  $\Phi$  numa vizinhança da origem.

Para  $(y, u) \in B_{\frac{\delta_3}{2}}^N \times B_{\frac{\delta_3}{2}}^\perp$  seja  $(\bar{y}, \bar{u}) = \Phi(y, u) \in B_{\delta_3}^N \times B_{\delta_3}^\perp$  e seja  $(y^*, u^*) = \Psi(\bar{y}, \bar{u})$ . Então  $y = y^*$  e observe que  $u$  e  $u^*$  estão sobre o mesmo fluxo definido como na equação (3.6). Como  $F(y, u) = F_2(\bar{u}) = F(y, u^*)$  então a igualdade  $u = u^*$  segue da monotonicidade de  $F(y, \eta(\cdot))$ . Portanto  $\Psi \circ \Phi(y, u) = (y, u)$ . Analogamente mostra-se que  $\Phi \circ \Psi(\bar{y}, \bar{u}) = (\bar{y}, \bar{u})$ . *Passo 5.* Pelo Teorema da Função Inversa,  $\Theta : (y, u) \mapsto (y, u - h(y))$  é um difeomorfismo local que preserva a origem. Então  $\bar{\Phi}(y, u) = \Phi \circ \Theta(y, u) = (y, \xi(y, u - h(y)))$  é um

homeomorfismo local que preserva a origem. Defina  $\phi = \bar{\Phi}^{-1}$ , assim  $\phi$  é o homeomorfismo que aparece em (3.1). Para ver isso, seja  $(y, u) = \phi(x) = \phi(y, z)$ , ou seja

$$\bar{\Phi}(y, u) = (y, \xi(y, u - h(y))) = (y, z).$$

Então

$$\begin{aligned} f \circ \phi(x) &= f(y + u) \\ &= F(y, u - h(y)) + f(y + h(y)) \\ &= F_2(\xi(y, u - h(y))) + f(y + h(y)) \\ &= \frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + f(h(y) + y) \end{aligned}$$

□

Agora vamos verificar que os funcionais  $J$  e  $\tilde{J}$  satisfazem as hipóteses do Teorema 3.1. Vimos que tanto  $J$  quanto  $\tilde{J}$  são de classe  $C^2$ . Seja  $A$  o operador definido por  $J''(u_1) = \tilde{J}''(u_1)$ , então  $A = Id - K$  onde  $K$  é um operador compacto.

Observe que  $R(A)$  é fechado. Para isso, considere  $z_m = Au_m = u_m - K(u_m) \rightarrow z_0$ . Sem perda de generalidade podemos tomar  $(u_m) \subset N^\perp = Ker(A)^\perp$ . Afirmamos que  $(u_m) \in H_0^1(\Omega)$  é limitada.

De fato, caso contrário definindo  $w_m = \frac{u_m}{\|u_m\|}$ , temos

$$w_m - K(w_m) = \frac{z_m}{\|u_m\|} \rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty$$

pois, como  $z_m$  é convergente,  $z_m$  é limitada. Como  $\|w_m\| = 1$  e  $K$  é compacto podemos supor que  $K(w_m) \rightarrow w_0$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Logo

$$w_m = K(w_m) + \frac{z_m}{\|u_m\|} \rightarrow w_0 \text{ quando } m \rightarrow \infty$$

assim,  $w_0 \in N^\perp$ . Por outro lado temos que

$$Aw_m \rightarrow 0 \text{ e } Aw_m \rightarrow Aw_0$$

logo  $w_0 \in N$ . Assim  $w_0 \in N \cap N^\perp$ , ou seja,  $w_0 = 0$ . Mas isso contradiz o fato  $\|w_m\| = 1$ . Portanto  $(u_m)$  é limitada.

Sendo assim, podemos supor que  $K(u_m) \rightarrow w_0$  para algum  $w_0$ . Como  $z_m \rightarrow z_0$

temos que

$$u_m = z_m + K(u_m) \longrightarrow z_0 + w_0.$$

Daí, por continuidade,  $Au_m \longrightarrow A(z_0 + w_0)$ . Portanto  $R(A)$  é fechado. Logo, como vimos na demonstração do Teorema 3.1, se  $0 \in \sigma(A)$  então  $0$  é isolado em  $\sigma(A)$  ([Co]).

Além disso, temos a seguinte propriedade:

$$\dim(N) < \infty$$

pois, como  $A = Id - K$  temos que  $u = K(u)$  para todo  $u \in \overline{B_1 \cap N}$ . Consequentemente  $K(\overline{B_1 \cap N}) = \overline{B_1 \cap N}$  é compacto. Logo  $N$  possui dimensão finita(ver [Br]).

## 3.2 Aplicando o Lema de Morse ao funcional associado

Aplicando o Teorema 3.1 ao funcional  $J$  temos

$$\begin{aligned} J \circ \Phi(u_1 + y + z) &= \frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + J(u_1 + y + h(y)) \\ \forall (y, z) \in N \oplus N^\perp, \text{ e } \|y\| + \|z\| &< \delta \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $A = J''(u_1)$ ,  $N = Ker(A)$ ,  $\Phi : B_\delta(u_1) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  é um homeomorfismo que preserva  $u_1$  e  $h : B_\delta \cap N \rightarrow N^\perp$  é uma aplicação de classe  $C^1$  com  $h(0) = 0$ .

**Lema 3.2.** *Considere  $h$  e  $\delta$  obtidos em (3.10) e  $y \in N$ . Então*

- (i)  $y \in C^1(\overline{\Omega})$
- (ii)  $h(y) \in C^1(\overline{\Omega})$  para  $\|y\| < \delta$
- (iii)  $\|h(y)\|_{C^1(\overline{\Omega})} \longrightarrow 0$ , quando  $\|y\| \rightarrow 0$

**Demonstração:**

- (i). Observe que  $y \in N$  significa que  $Ay = 0$ , ou seja

$$0 = \langle Ay, w \rangle = J''(u_1)(y, w) = \int_{\Omega} (\nabla y \nabla w - f'(u_1) y w) \quad \forall w \in H_0^1(\Omega)$$

Logo,  $y$  é solução fraca do seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f'(u_1)u & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.11)$$

Assim devemos mostrar que soluções fracas de (3.11) pertencem à  $C^1(\overline{\Omega})$ . Aplicando o Lema 2.2 com  $a(x) = |f'(u_1(x))|$  obtemos que

$$y \in L^p(\Omega) \quad \forall \quad 1 \leq p < \infty,$$

onde usamos o fato de  $f'(u_1)$  ser contínua em  $\overline{\Omega}$ . Também temos  $f'(u_1)y \in L^p(\Omega)$  para todo  $p \geq 1$  pois

$$\int_{\Omega} |f'(u_1)y|^p \leq \max_{\overline{\Omega}} \{|f'(u_1)|\}^p \int_{\Omega} |y|^p < \infty.$$

Portanto, por [GT] Teorema 9.15, obtemos que  $y \in W^{2,p}(\Omega)$  para todo  $p \geq 1$  e utilizando as imersões de Sobolev, com  $p$  suficientemente grande, finalmente obtemos que  $y \in C^1(\overline{\Omega})$ .

Passemos agora à demonstração de (ii). Lembrando da demonstração do Teorema 3.1, temos que  $h(y)$  é a única solução da equação

$$\frac{\partial}{\partial z} J(u_1 + y + z) = 0 \quad \|y\| \leq \delta,$$

ou seja

$$\int_{\Omega} (\nabla(u_1 + y + h(y))\nabla z - f(u_1 + y + h(y))z) = 0 \quad \forall z \in N^{\perp} \quad (3.12)$$

Vimos que  $J''(u_1)$  é da forma  $Id - K$ , onde  $K$  é um operador compacto, e que  $\dim(N) < \infty$ . Assim podemos escrever  $N = \text{span}\{\omega_1, \dots, \omega_k\}$  onde as funções  $\omega_i$  são ortogonais umas às outras em  $H_0^1(\Omega)$  e  $\|\omega_i\| = 1$ . Reescrevendo (3.12) temos

$$\int_{\Omega} \nabla h(y)\nabla z = \int_{\Omega} (f(u_1 + y + h(y)) - f(u_1))z = 0 \quad \forall z \in N^{\perp}. \quad (3.13)$$

Agora considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta w &= f(u_1 + y + w) - f(u_1) - \varphi(y) & \Omega \\ w &= 0 & \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.14)$$

onde

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^k \beta_i(y) f'(u_1) \omega_i \quad \text{e} \quad \beta_i(y) = \int_{\Omega} (f(u_1 + y + h(y)) - f(u_1)) \omega_i.$$

Observe que  $\varphi(y) \in C^1(\overline{\Omega})$  para cada  $y \in B_{\delta} \cap N$ ,  $\beta_i \in C^1(B_{\delta} \cap N, \mathbb{R})$  e  $\beta_i(0) = 0$ . Vamos

verificar que  $h(y)$  é solução fraca de (3.14), ou seja

$$\int_{\Omega} \nabla h(y) \nabla v = \int_{\Omega} (f(u_1 + y + h(y)) - f(u_1)) v - \int_{\Omega} \varphi(y) v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.15)$$

Testando (3.15) com  $v = z \in N^\perp$  e usando (3.13) obtemos

$$\int_{\Omega} \varphi(y) z = 0 \quad \forall z \in N^\perp$$

que é verdade pois

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi(y) z &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^k \beta_i(y) f'(u_1) \omega_i z \\ &= \sum_{i=1}^k \beta_i(y) \int_{\Omega} f'(u_1) \omega_i z \\ &= \sum_{i=1}^k \beta_i(y) \int_{\Omega} \nabla \omega_i \nabla z = 0. \end{aligned}$$

Também (3.15) é satisfeita com  $v = \bar{y} \in N$ , pois é satisfeita em cada  $\omega_i$ . Portanto  $h(y)$  é solução fraca de (3.14). Reescrevendo (3.14) vemos que, dado  $y \in B_\delta \cap N$ ,  $h(y)$  é solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta w = g(x, w) & \Omega \\ w = 0 & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde  $g : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x, w) = f(u_1 + y + w) - f(u_1) - \varphi(y)$ , é uma função de Carathéodory. Além disso  $g$  satisfaz

$$\begin{aligned} |g(x, w)| &\leq |f(u_1 + y + w)| + |f(u_1)| + |\varphi(y)| \\ &\leq \bar{C}_1 + \bar{C}_2 |u_1 + y + w|^\alpha + M_0 \\ &\leq \bar{C}_3 + \bar{C}_2 (|u_1| + |y| + |w|)^\alpha \\ &\leq \bar{C}_3 + \bar{C}_4 (|u_1| + |y|)^\alpha + |w|^\alpha \\ &\leq \bar{C}_5 + \bar{C}_6 |w|^\alpha \leq C(1 + |w|^\alpha) \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde usamos a continuidade das funções  $u_1, y$  e a condição  $(f_2)$ . Assim  $h(y)$  resolve

fracamente a equação

$$-\Delta w = a(x)(1 + |w|), \quad w \in H_0^1(\Omega),$$

onde  $a(x) = \frac{g(x, h(y))}{1 + |h(y)|}$ . Além disso  $a \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$  pois

$$\int_{\Omega} \left| \frac{g(x, h(y))}{1 + |h(y)|} \right|^{\frac{n}{2}} \leq \int_{\Omega} [C(1 + |h(y)|^{\alpha-1})]^{\frac{n}{2}} \leq \int_{\Omega} \tilde{C} [(1 + |h(y)|^{(\alpha-1)\frac{n}{2}})] < \infty$$

onde usamos o fato de que  $\frac{(\alpha-1)n}{2} < 2^* = \frac{2n}{n-2}$  e o Teorema da Imersão de Sobolev (ver [AF], p. 85).

Agora prosseguimos exatamente como fizemos a regularização de  $y$  no item (i). Aplicando o Lema 2.2 obtemos  $h(y) \in L^p(\Omega)$  para todo  $1 \leq p < \infty$ . Devido à condição de crescimento de  $g$ , (3.16), segue que  $g(x, h(y)) \in L^p(\Omega)$  para todo  $1 \leq p < \infty$ , e como antes obtemos que  $h(y) \in C^1(\bar{\Omega})$  para  $\|y\| < \delta$ .

Resta agora a demonstração do item (iii). Aplicando o Teorema 9.13 [GT] obtemos

$$\|h(y)\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_p (\|h(y)\|_{L^p(\Omega)} + \|g(x, h(y))\|_{L^p(\Omega)}) \quad 1 \leq p < \infty. \quad (3.17)$$

Fazendo uso do Teorema da Imersão de Sobolev com  $p$  suficientemente grande, temos

$$\|h(y)\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq C \|h(y)\|_{W^{2,p}(\Omega)}.$$

Portanto basta mostrar que

$$(\|h(y)\|_{L^p(\Omega)} + \|g(x, h(y))\|_{L^p(\Omega)}) \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \|y\| \rightarrow 0.$$

Para isso vamos utilizar algumas das estimativas que apareceram na demonstração do Lema 2.2. Escrevendo  $h = h(y)$  e  $a = a(x, y) = \frac{g(x, h(y))}{1 + |h(y)|}$ , por (2.9) temos

$$\int_{\Omega} |\nabla(h \min\{|h|^s, L\})|^2 \leq d_1 \int_{\Omega} a + 2d_1 \int_{\Omega} a|h|^2 \min\{|h|^{2s}, L^2\} \quad (3.18)$$

e por (2.11) temos

$$\left( \int_{\Omega} |h \min\{|h|^s, L\}|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq d_5 \int_{\Omega} |\nabla(h \min\{|h|^s, L\})|^2. \quad (3.19)$$

Usando (3.18), (3.19) e a desigualdade de Hölder obtemos

$$\left( \int_{\Omega} |h \min\{|h|^s, L\}|^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|a\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)} \left\{ d_1 |\Omega|^{\frac{n-2}{n}} + 2d_1 \left( \int_{\Omega} [|h|^2 \min\{|h|^{2s}, L^2\}]^{\frac{n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}} \right\}.$$

Agora, fazendo  $L \rightarrow \infty$  na desigualdade acima temos

$$\left( \int_{\Omega} |h|^{(s+1)2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \|a\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)} \left\{ d_1 |\Omega|^{\frac{n-2}{n}} + 2d_1 \left( \int_{\Omega} |h|^{(s+1)2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \right\}$$

ou seja

$$\|h\|_{L^{(s+1)2^*}(\Omega)}^{2(s+1)} \left( 1 - 2d_1 \|a\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)} \right) \leq d_1 |\Omega|^{\frac{n-2}{n}} \|a\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}. \quad (3.20)$$

**Afirmação.**  $\|a\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\|y\| \rightarrow 0$ .

Por enquanto vamos assumir a afirmação acima. Dado  $\epsilon > 0$ , para  $\|y\|$  suficientemente pequeno temos

$$\|a\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)} < \min \left\{ \frac{1}{4d_1}, \frac{\epsilon^{2(s+1)}}{2d_1 |\Omega|^{\frac{n-2}{n}}} \right\}.$$

Daí

$$\left( 1 - 2d_1 \|a\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)} \right) > \frac{1}{2}$$

e usando (3.20) temos

$$\frac{1}{2} \|h\|_{L^{(s+1)2^*}(\Omega)}^{2(s+1)} < d_1 |\Omega|^{\frac{n-2}{n}} \|a\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)} < d_1 |\Omega|^{\frac{n-2}{n}} \frac{\epsilon^{2(s+1)}}{2d_1 |\Omega|^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\epsilon^{2(s+1)}}{2}$$

portanto  $\|h\|_{L^{(s+1)2^*}(\Omega)} \rightarrow 0$  quando  $\|y\| \rightarrow 0$ , como queríamos. Também temos

$$\begin{aligned} |f(u_1 + y + h(y)) - f(u_1)| &= |f'(u_1 + \theta(y + h(y)))(y + h(y))| \quad \theta \in [0, 1] \\ &\leq (C_1 + C_2 |u_1 + \theta(y + h(y))|^{\alpha-1}) |y + h(y)| \\ &\leq (C_3 + C_4 (|y + h(y)|)^{\alpha-1}) |y + h(y)| \\ &\leq C_3 |y + h(y)| + C_4 |y + h(y)|^{\alpha} \\ &\leq C_3 (|y| + |h(y)|) + C_4 (|y| + |h(y)|)^{\alpha} \\ &\leq C_3 (|y| + |h(y)|) + C_5 (|y|^{\alpha} + |h(y)|^{\alpha}) \end{aligned}$$

e

$$|\varphi(y)| = \left| \sum_{i=1}^k \beta_i(y) f'(u_1) \omega_i \right| \leq \sum_{i=1}^k |\beta_i(y)| \|f'(u_1)\| |\omega_i| \leq C_6 \sum_{i=1}^k |\beta_i(y)|$$

portanto

$$|g(x, h(y))| \leq C_3(|y| + |h(y)|) + C_5(|y|^\alpha + |h(y)|^\alpha) + C_6 \sum_{i=1}^k |\beta_i(y)|$$

logo, para  $p = (s + 1)2^*$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |g(x, h(y))|^p &\leq \int_{\Omega} \left[ C_3(|y| + |h(y)|) + C_5(|y|^\alpha + |h(y)|^\alpha) + C_6 \sum_{i=1}^k |\beta_i(y)| \right]^p \\ &\leq C_7 \int_{\Omega} \left[ |y|^p + |h(y)|^p + |y|^{\alpha p} + |h(y)|^{\alpha p} + \left( \sum_{i=1}^k |\beta_i(y)| \right)^p \right] \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $\|y\| \rightarrow 0$ . De fato, como vimos  $\|h(y)\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ ,  $\|y\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$  pois como  $N$  tem dimensão finita as normas em  $L^p(\Omega) \cap N$  e  $H_0^1(\Omega) \cap N$  são equivalentes e finalmente  $\beta_i(y) \rightarrow 0$  pois  $\beta_i \in C^1(B_\delta \cap N, \mathbb{R})$  e  $\beta_i(0) = 0$ .

Resta apenas a verificação da afirmação. Para isso, observe que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |a(x, y)|^{\frac{n}{2}} &= \int_{\Omega} \left[ \frac{g(x, h(y))}{1 + |h(y)|} \right]^{\frac{n}{2}} = \int_{\Omega} \left[ \frac{|f(u_1 + y + h(y)) - f(u_1) - \varphi(y)|}{1 + |h(y)|} \right]^{\frac{n}{2}} \\ &\leq C \left\{ \int_{\Omega} \left[ \frac{|f(u_1 + y + h(y)) - f(u_1)|}{1 + |h(y)|} \right]^{\frac{n}{2}} + \int_{\Omega} |\varphi(y)|^{\frac{n}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

e como antes

$$\int_{\Omega} |\varphi(y)|^{\frac{n}{2}} \leq C \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^k |\beta_i(y)| \right)^{\frac{n}{2}} \longrightarrow 0 \text{ quando } \|y\| \rightarrow 0.$$

Portanto, para concluir a verificação da afirmação, basta mostrar que o primeiro termo que aparece na soma à direita em (3.21) tende à zero quando  $\|y\| \rightarrow 0$ . Para isso considere uma sequência qualquer  $\{y_k\} \in B_\delta \cap N$  tal que  $y_k \rightarrow 0$ . Nesse caso  $h(y_k) \rightarrow 0$  em  $H_0^1(\Omega)$  (e conseqüentemente  $h(y_k) \rightarrow 0$  em  $L^p(\Omega)$  para todo  $2 \leq p \leq 2^*$ ). Sabemos que existe uma subsequência  $\{y_{k_i}\}$  tal que

- $y_{k_i} \rightarrow 0$  q.t.p. em  $\Omega$

- $h(y_{k_i}) \rightarrow 0$  q.t.p. em  $\Omega$
- $|h(y_{k_i})| \leq \psi \quad \forall i \in \mathbb{N}$ , q.t.p. em  $\Omega$  para alguma  $\psi \in L^p(\Omega)$  para todo  $2 \leq p < 2^*$

assim

$$\left[ \frac{|f(u_1 + y_{k_i} + h(y_{k_i})) - f(u_1)|}{1 + |h(y_{k_i})|} \right]^{\frac{n}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

além disso, temos

$$\begin{aligned} \left[ \frac{|f(u_1 + y_{k_i} + h(y_{k_i})) - f(u_1)|}{1 + |h(y_{k_i})|} \right]^{\frac{n}{2}} &\leq \left[ \frac{|f'(u_1 + \theta_{k_i}(y_{k_i} + h(y_{k_i}))) (y_{k_i} + h(y_{k_i}))|}{1 + |h(y_{k_i})|} \right]^{\frac{n}{2}} \\ &\leq \left[ \frac{(C_3 + C_4(|y_{k_i} + h(y_{k_i})|^{\alpha-1}) |y_{k_i} + h(y_{k_i})|)}{1 + |h(y_{k_i})|} \right]^{\frac{n}{2}} \\ &\leq C_5 \left[ \frac{|y_{k_i}| + |h(y_{k_i})| + |y_{k_i}|^\alpha + |h(y_{k_i})|^\alpha}{1 + |h(y_{k_i})|} \right]^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Como sabemos que as funções  $y_{k_i}$  são contínuas em  $\bar{\Omega}$  e que em  $N$  as normas são equivalentes, então podemos supor que  $|y_{k_i}| + |y_{k_i}|^\alpha \leq 1$  em  $\Omega$ , daí

$$\begin{aligned} \left[ \frac{|f(u_1 + y_{k_i} + h(y_{k_i})) - f(u_1)|}{1 + |h(y_{k_i})|} \right]^{\frac{n}{2}} &\leq C_5 \left[ \frac{1 + |h(y_{k_i})| + |h(y_{k_i})|^\alpha}{1 + |h(y_{k_i})|} \right]^{\frac{n}{2}} \\ &\leq C_5 [1 + |h(y_{k_i})|^{\alpha-1}]^{\frac{n}{2}} \\ &\leq C_6 [1 + |h(y_{k_i})|^{(\alpha-1)\frac{n}{2}}] \\ &\leq C_6 [1 + \psi^{(\alpha-1)\frac{n}{2}}] \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue segue que

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{|f(u_1 + y_{k_i} + h(y_{k_i})) - f(u_1)|}{1 + |h(y_{k_i})|} \right]^{\frac{n}{2}} \rightarrow 0. \quad (3.22)$$

Acabamos de mostrar que qualquer sequência  $\{y_k\} \in B_\delta \cap N$  tal que  $y_k \rightarrow 0$  possui uma subsequência para a qual vale (3.22). Isto é suficiente para mostrar que

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{|f(u_1 + y + h(y)) - f(u_1)|}{1 + |h(y)|} \right]^{\frac{n}{2}} \rightarrow 0, \quad \text{quando } \|y\| \rightarrow 0$$

pois, caso contrário, existiriam uma sequência  $y_k \rightarrow 0$  e  $\epsilon_0 > 0$  tais que

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{|f(u_1 + y_k + h(y_k)) - f(u_1)|}{1 + |h(y_k)|} \right]^{\frac{n}{2}} \geq \epsilon_0 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mas isto contradiz o fato de  $\{y_k\}$  possuir uma subsequência como em (3.22). Finalmente o lema está demonstrado.  $\square$

# Capítulo 4

## Existência da terceira solução

Vimos que sob as condições  $(f_1), (f_2)$  e  $(f_3)$  o problema  $(\mathcal{P})$  possui uma solução positiva  $u_1$  e uma solução negativa  $u_2$ . Sem perda de generalidade vamos assumir que  $c_1 = J(u_1) \geq J(u_2) = c_2$ .

Agora vamos analisar o comportamento local do funcional  $J$  próximo às duas soluções já obtidas. Para obter uma outra solução não trivial, vamos precisar de informações sobre  $J$  próximo às duas soluções  $u_1$  e  $u_2$ . Em seguida construiremos um enlace que fornecerá um novo valor crítico  $c_3 > c_1$ .

Usaremos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} J_c &= \{u \in H_0^1(\Omega) \mid J(u) \leq c\} \\ K_c(J) &= \{u \in H_0^1(\Omega) \mid J(u) = c, J'(u) = 0\} \end{aligned}$$

Por simplicidade vamos assumir que  $K_{c_1}(J) = \{u_1\}$  embora o método a ser aplicado valha numa situação mais geral, por exemplo  $K_{c_1}(J)$  finito.

Como  $u_1 > 0$  e  $\tilde{f}(t) = f(t) \forall t \geq 0$ , segue que

$$\begin{aligned} J(u_1) &= \tilde{J}(u_1) = c_1, \\ J'(u_1) &= \tilde{J}'(u_1) = 0, \\ J''(u_1) &= \tilde{J}''(u_1), \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}\tilde{J}(u) &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \tilde{F}(u) \right) dx, \\ \tilde{J}'(u)v &= \int_{\Omega} \left( \nabla u \nabla v - \tilde{f}(u)v \right) dx, \\ \tilde{J}''(u)(v, w) &= \int_{\Omega} \left( \nabla v \nabla w - \tilde{f}'(u)vw \right) dx.\end{aligned}$$

Portanto se  $u_1$  é um ponto crítico não degenerado de  $\tilde{J}$ , então ele será um ponto crítico não degenerado de  $J$  também. Assim  $J$  e  $\tilde{J}$  possuem essencialmente o mesmo comportamento local próximo à  $u_1$ . Entretanto a situação pode ser degenerada. Por isso usaremos o Lema de Morse generalizado (Teorema 3.1).

## 4.1 Comportamento local de $J$ próximo à $u_1$

O principal resultado desta seção é a Proposição 4.3. Lembremos que o índice de Morse de um ponto crítico  $u$  de  $J$  é definido como o supremo das dimensões dos subespaços de  $H_0^1(\Omega)$  onde  $J''(u)$  é negativa definida. Antes vamos mostrar que o índice de Morse de  $J$  no ponto crítico  $u_1$  é no máximo 1. Para isso precisaremos do seguinte resultado.

**Lema 4.1.** *Para qualquer vizinhança  $U$  de  $u_1$  temos que o conjunto  $(\tilde{J}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap U \neq \emptyset$  e não é conexo por caminho.*

**Demonstração:** Começamos com a seguinte afirmação:

**Afirmação.** *Dados  $\epsilon > 0$  e  $\delta > 0$  existe  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma([0, 1]) \cap B_{\delta}(u_1) \neq \emptyset$  e  $\sup\{\tilde{J}(\gamma([0, 1]))\} < c_1 + \epsilon$ .*

*Onde  $\Gamma$  é o conjunto definido anteriormente na página 23.*

De fato, basta verificar que se  $\gamma_n \in \Gamma$  é uma sequência minimizante para  $c_1$  então

$$\text{dist}(u_1, \gamma_n([0, 1])) \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

Suponha então que (4.1) seja falso. Assim existem  $\delta > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que

$$\text{dist}(u_1, \gamma_n([0, 1])) \geq \delta > 0 \quad \forall n \geq n_0.$$

Aplicando o Teorema 1.2, com  $\bar{\epsilon} > 0$  apropriado na vizinhança de  $u_1$  de raio  $2\delta$ , obtemos  $\eta \in C([0, 1] \times H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$  e  $\epsilon > 0$  tal que  $\eta(1, \tilde{J}_{c_1+\epsilon} \setminus B_\delta(u_1)) \subset \tilde{J}_{c_1-\epsilon}$ . Tomando  $n_0$  suficientemente grande podemos supor que  $\sup\{\tilde{J}(\gamma_{n_0}([0, 1]))\} \leq c_1 + \epsilon$ . Assim obtemos  $\gamma(t) = \eta(1, \gamma_{n_0}(t)) \in \Gamma$  tal que  $\tilde{J}(\gamma([0, 1])) \subset \tilde{J}_{c_1-\epsilon}$  contradizendo a definição de  $c_1$ . Portanto a afirmação está demonstrada.

Sendo assim tome  $\delta > 0$  suficientemente pequeno de forma que  $B_{2\delta}(u_1) \subset U$  e  $0, re_1 \notin B_{2\delta}(u_1)$ . Aplicando o Teorema 1.2 com  $N_\delta = B_{2\delta}(u_1)$  e  $0 < \bar{\epsilon} < c_1$  obtemos  $\eta \in C([0, 1] \times H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$  e  $\epsilon > 0$  com todas as propriedades (1) – (6). Seja  $\gamma \in \Gamma$  tal que  $\gamma([0, 1]) \cap B_\delta(u_1) \neq \emptyset$  e  $\sup\{\tilde{J}(\gamma([0, 1]))\} \leq c_1 + \epsilon$ . Agora defina  $\gamma_1(t) = \eta(1, \gamma(t))$ . Observe que  $\gamma_1 \in \Gamma$  (por (2) e pela continuidade de  $\eta$ ), além disso por (3)

$$\tilde{J}(\gamma_1(t)) < c_1 \quad \forall \gamma_1(t) \notin \bar{B}_\delta(u_1).$$

Logo, temos que  $(\tilde{J}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap U \neq \emptyset$ .

Agora defina

$$\begin{aligned} t_1 &= \inf\{t \in [0, 1] \mid \gamma_1(t) \in \bar{B}_\delta(u_1)\} \\ t_2 &= \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma_1(t) \in \bar{B}_\delta(u_1)\} \end{aligned}$$

assim temos que  $t_1 < t_2$  e  $\gamma_1(t_i) \in (\tilde{J}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap U$  para  $i = 1, 2$ . Suponha agora, por contradição, que  $(\tilde{J}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap U$  é conexo por caminho. Assim podemos ligar  $\gamma_1(t_1)$  à  $\gamma_1(t_2)$  em  $(\tilde{J}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap U$  e construir um novo caminho  $\gamma_2 \in \Gamma$  tal que

$$\tilde{J}(\gamma_2(t)) \leq c_1 \quad \text{e} \quad \gamma_2(t) \neq u_1 \quad \forall t \in [0, 1].$$

Logo  $\text{dist}(u_1, \gamma_2([0, 1])) > 0$ . Pelo Teorema 1.2  $\gamma_2$  pode ser deformado num caminho com imagem contida em  $\tilde{J}_{c_1-\epsilon}$  para algum  $\epsilon > 0$ , contradizendo a definição de  $c_1$ .  $\square$

**Lema 4.2.** *O índice de Morse,  $m(u_1)$ , de  $J$  no ponto crítico  $u_1$  é no máximo 1.*

**Demonstração:** Seja  $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  o operador linear auto-adjunto definido por  $\tilde{J}''(u_1)$ . Seja  $N = \text{Ker}(A)$  e  $W = N^\perp = W^+ \oplus W^-$  onde  $W^\pm$  é o auto-espço generalizado de  $A$  correspondente à  $\sigma(A) \cap \mathbb{R}^\pm$  respectivamente. Seja  $m(u_1) = \dim(W^-)$  o índice de Morse de  $\tilde{J}$  no ponto  $u_1$ . Pelo Teorema 3.1 existem um homeomorfismo  $\Phi : V_0 \rightarrow V$  de uma vizinhança  $V_0$  da origem em  $H_0^1(\Omega)$  numa vizinhança  $V$  de  $u_1$  em  $H_0^1(\Omega)$  e uma aplicação  $\Psi : V_0 \cap N \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , tais que

$$\tilde{J}(\Phi(v + w)) = \tilde{J}(u_1) + \frac{1}{2} \langle Aw, w \rangle + \Psi(v) \tag{4.2}$$

para  $v + w \in V_0$ , onde  $v \in N$  e  $w \in W$ . Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{c_1} \cap V &= \{\Phi(v + w) : \langle Aw, w \rangle \leq -2\Psi(v)\} \\ &\cong \{v + w \in V_0 : \langle Aw, w \rangle \leq -2\Psi(v)\}\end{aligned}$$

onde  $\cong$  significa que os conjuntos são “topologicamente equivalentes”, ou seja, analisar se um é conexo por caminho é equivalente à analisar se o outro é conexo por caminho.

Escolhemos  $\epsilon, \delta > 0$  tais que  $\overline{B_\epsilon \cap N \oplus B_\delta \cap W} \subset V_0$  e

$$|\langle Aw, w \rangle| > 2 \sup_{v \in B_\epsilon \cap N} \{|\Psi(v)|\} \text{ para } w \in W^-, \|w\| = \delta \quad (4.3)$$

isso é possível pois  $\Psi(0) = 0$  e, fixado  $\|w\| = \delta$  podemos fazer  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno de forma que tenhamos (4.3). Suponha que  $\dim(W^-) > 1$ , com isso vamos mostrar que o conjunto

$$\mathcal{U} = \tilde{J}_{c_1} \cap (\Phi(\overline{B_\epsilon \cap N \oplus B_\delta \cap W}) \setminus \{u_1\})$$

é conexo por caminho.

Dado  $v + w \in \overline{B_\epsilon \cap N \oplus B_\delta \cap W}$ , com  $\tilde{J}(\Phi(v + w)) \leq c_1$  e  $v + w \neq 0$  ( $w = w^+ + w^-$ ), nós ligamos este ponto, ao longo do caminho  $p(t) = v + w^- + (1 - t)w^+$  para  $t \in [0, 1]$ , ao ponto  $p(1) = v + w^- \in \overline{B_\epsilon \cap N \oplus B_\delta \cap W^-}$ . Afirmamos que para  $t \in [0, 1]$  temos

$$\tilde{J}(\Phi(p(t))) \leq c_1 \text{ e } p(t) \in \overline{B_\epsilon \cap N \oplus B_\delta \cap W} \setminus \{0\}$$

de fato, temos

$$\begin{aligned}\tilde{J}(\Phi(p(t))) &= \tilde{J}(u_1) + \frac{1}{2} \langle Aw^-, w^- \rangle + \frac{(1 - t)^2}{2} \langle Aw^+, w^+ \rangle + \Psi(v) \\ &\leq \tilde{J}(u_1) + \frac{1}{2} \langle Aw^-, w^- \rangle + \frac{1}{2} \langle Aw^+, w^+ \rangle + \Psi(v) \\ &= \tilde{J}(\Phi(v + w)) \leq c_1\end{aligned}$$

a outra propriedade segue da convexidade de  $\overline{B_\epsilon \cap N \oplus B_\delta \cap W}$  e do fato de obviamente  $p(t) \neq 0$  para  $t \in [0, 1]$  e  $p(1) \neq 0$  pois caso contrário teríamos  $v + w = w^+$  e consequentemente, por (4.2),  $\tilde{J}(\Phi(p(1))) > c_1$ .

Agora, se  $w^- = 0$  escolha  $w_1^- \in W^-$  com  $\|w_1^-\| = \delta$  qualquer e se  $w^- \neq 0$  escolha  $w_1^- = \delta \frac{w^-}{\|w^-\|}$ , a seguir ligamos o ponto  $p(1) = v + w^-$ , ao longo do caminho  $p(t) = v + (2 - t)w^- + (t - 1)w_1^-$  para  $t \in [1, 2]$ , ao ponto  $p(2) = v + w_1^-$ . Como an-

tes afirmamos que para  $t \in [1, 2]$  temos

$$\tilde{J}(\Phi(p(t))) \leq c_1 \text{ e } p(t) \in \overline{B_\epsilon \cap N \oplus B_\delta \cap W} \setminus \{0\}$$

de fato, se  $w^- = 0$  temos

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\Phi(p(t))) &= \tilde{J}(u_1) + \frac{(t-1)^2}{2} \langle Aw_1^-, w_1^- \rangle + \Psi(v) \\ &\leq \tilde{J}(u_1) + \Psi(v) \\ &= \tilde{J}(\Phi(p(1))) \leq c_1 \end{aligned}$$

e se  $0 < \|w^-\| \leq \delta$ , escrevendo  $s = t - 1$  temos

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\Phi(p(t))) &= \tilde{J}(u_1) + \frac{1}{2} \left\langle A \left[ (1-s) + \frac{\delta s}{\|w^-\|} \right] w^-, \left[ (1-s) + \frac{\delta s}{\|w^-\|} \right] w^- \right\rangle + \Psi(v) \\ &= \tilde{J}(u_1) + \frac{1}{2} \underbrace{\left[ (1-s) + \frac{\delta s}{\|w^-\|} \right]^2}_{\geq 1} \langle Aw^-, w^- \rangle + \Psi(v) \\ &\leq \tilde{J}(u_1) + \frac{1}{2} \langle Aw^-, w^- \rangle + \Psi(v) = \tilde{J}(\Phi(p(1))) \leq c_1 \end{aligned}$$

a segunda parte da afirmação segue como antes.

Finalmente, para  $t \in [2, 3]$  definimos  $p(t) = (3-t)v + w_1^-$  que liga o ponto  $p(2) = v + w_1^-$  à  $p(3) = w_1^-$ . Novamente  $p(t) \in \overline{B_\epsilon \cap N \oplus B_\delta \cap W} \setminus \{0\}$  para  $t \in [2, 3]$  e  $\tilde{J}(\Phi(p(t))) \leq c_1$  para  $t \in [2, 3]$  pois nesse caso, fazendo uso de (4.3), temos

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\Phi(p(t))) &= \tilde{J}(u_1) - \frac{1}{2} |\langle Aw_1^-, w_1^- \rangle| + \Psi((3-t)v) \\ &\leq \tilde{J}(u_1) - \sup_{v \in B_\epsilon \cap N} \{|\Psi(v)|\} + \Psi((3-t)v) \leq c_1 \end{aligned}$$

Assim, acabamos de mostrar que todo ponto  $u \in \mathcal{U}$  pode ser ligado à um ponto em  $\Phi(\{0\} \oplus \partial(B_\delta \cap W^-)) \subset \mathcal{U}$  por um caminho em  $\mathcal{U}$ . (onde tomamos a fronteira  $\partial$  em  $W^-$ ). Como  $\dim(W^-) > 1$  temos que  $\Phi(\{0\} \oplus \partial(B_\delta \cap W^-))$  é conexo por caminho, logo  $\mathcal{U}$  é conexo por caminho, contradizendo o lema anterior. □

Chegamos então ao principal resultado desta seção.

**Proposição 4.3.** *Considerando a expressão obtida em (3.10), existe  $0 < \delta_1 \leq \delta$  tal que*

(i) quando o índice de Morse  $m(u_1) = 0$  tem-se

$$J(u_1 + y + h(y)) < J(u_1) = c_1, \quad 0 < \|y\| \leq \delta_1$$

(ii) quando o índice de Morse  $m(u_1) = 1$  tem-se

$$J(u_1 + y + h(y)) > J(u_1) = c_1, \quad 0 < \|y\| \leq \delta_1$$

Observe que o ponto crítico  $u_1$  foi obtido através do funcional  $\tilde{J}$  (e não diretamente de  $J$ ). Assim, para darmos uma informação sobre o comportamento local de  $J$  próximo à  $u_1$ , primeiro vamos obter informações sobre o comportamento local de  $\tilde{J}$  próximo à  $u_1$  e em seguida comparar o funcional  $J$  com  $\tilde{J}$ , com isso vamos obter informações sobre o comportamento de  $J$  próximo à  $u_1$ . Por isso, para demonstrarmos a Proposição 4.3 vamos precisar do seguinte Lema:

**Lema 4.4.** *Aplicando o Teorema 3.1 à  $\tilde{J}$  numa vizinhança de  $u_1$ , similarmente obtemos  $\tilde{\delta} > 0$ ,  $\tilde{\Phi}$  e  $\tilde{h}$  tais que*

$$\begin{aligned} \tilde{J} \circ \tilde{\Phi}(u_1 + y + z) &= \frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + \tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y)) \\ \forall (y, z) \in N \oplus N^\perp, e \quad \|y\| + \|z\| &< \tilde{\delta} \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde  $A = J''(u_1) = \tilde{J}''(u_1)$  e  $N = \text{Ker}(A)$ . Assim, existe  $0 < \tilde{\delta}_1 \leq \tilde{\delta}$  tal que

(i) quando o índice de Morse  $m(u_1) = 0$  tem-se

$$\tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y)) < \tilde{J}(u_1) = c_1, \quad 0 < \|y\| \leq \tilde{\delta}_1$$

(ii) quando o índice de Morse  $m(u_1) = 1$  tem-se

$$\tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y)) > \tilde{J}(u_1) = c_1, \quad 0 < \|y\| \leq \tilde{\delta}_1$$

**Demonstração:**

(i) Caso  $m(u_1) = 0$ .

Nesse caso,  $u_1$  é ponto crítico degenerado de  $\tilde{J}$ , pois caso contrário teríamos  $N = \{0\}$  e, usando (4.4)

$$\tilde{J}(\tilde{\Phi}(u_1 + z)) = \frac{1}{2} \langle Az, z \rangle + \tilde{J}(u_1) \geq \tilde{J}(u_1)$$

assim,  $u_1$  seria um mínimo local isolado contradizendo o Lema 4.1. Além disso, observe que 0 é o menor autovalor do operador

$$Lu = -\Delta u - f'(u_1)u \quad (4.5)$$

pois caso contrário existiriam  $\lambda < 0$  e  $v \neq 0$  tais que  $-\Delta v - f'(u_1)v = \lambda v$ , daí

$$J''(u_1)(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - f'(u_1)v^2 = \lambda \int_{\Omega} v^2 < 0$$

contrariando o fato de  $m(u_1) = 0$ , e como  $N$  é não trivial segue que 0 é autovalor de  $L$  definido em (4.5).

**Afirmção.**  $\dim(N) = 1$

De fato, sabemos que  $N$  corresponde ao auto-espaço associado ao autovalor 0 de  $L$ , assim devemos mostrar que, na verdade, o autovalor 0 é simples. Como 0 é o menor autovalor de  $L$  então, necessariamente, devemos ter

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 - f'(u_1)u^2 \geq 0 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (4.6)$$

Seja  $v \in N$ . Primeiramente vamos mostrar que  $v$  não muda de sinal. Para isso suponha, por contradição, que existam dois subconjuntos de  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$  de medida positiva tais que  $v > 0$  em  $\Omega_1$  e  $v < 0$  em  $\Omega_2$ . Escrevendo  $v = v^+ - v^-$ , onde  $v^+ = \max\{v, 0\}$  e  $v^- = \max\{-v, 0\}$ , temos

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 - f'(u_1)v^2 = \int_{\Omega} (|\nabla v^+|^2 - f'(u_1)(v^+)^2) + \int_{\Omega} (|\nabla v^-|^2 - f'(u_1)(v^-)^2) \quad (4.7)$$

onde usamos que  $u \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow u^+, u^- \in H_0^1(\Omega)$  (por [St] Lema 1.1), e

$$\begin{aligned} v^2 &= (v^+ - v^-)^2 = (v^+)^2 - 2v^+v^- + (v^-)^2 = (v^+)^2 + (v^-)^2 \\ |\nabla v|^2 &= \langle \nabla(v^+ - v^-), \nabla(v^+ - v^-) \rangle = \langle \nabla v^+, \nabla v^+ \rangle + \langle \nabla v^-, \nabla v^- \rangle \end{aligned}$$

pois  $v^+v^- = 0$ . Como  $v \in N$  usando (4.6) e (4.7) temos

$$0 = \underbrace{\int_{\Omega} (|\nabla v^+|^2 - f'(u_1)(v^+)^2)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\Omega} (|\nabla v^-|^2 - f'(u_1)(v^-)^2)}_{\geq 0}.$$

Logo, cada termo da soma à direita em (4.7) é nulo. Em particular  $-\Delta v^+ - f'(u_1)v^+ = 0$  (no sentido fraco). Daí,  $\Delta v^+ - f'(u_1)^- v^+ = -f'(u_1)^+ v^+ \leq 0$ . Agora, aplicando o Princípio do Máximo Forte para soluções fracas (Teorema 8.19 [GT] com  $u = -v^+$ ) segue que  $v^+ \equiv 0$  contradizendo a hipótese de que  $v$  muda de sinal. Portanto temos que  $v \in N \Rightarrow v \geq 0$  ou  $v \leq 0$ . Sejam agora  $v_1, v_2 \in N$  queremos mostrar que  $v_1 = t_0 v_2$  para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Pelo que vimos anteriormente, para cada  $t \in \mathbb{R}$  a autofunção  $v_1 + t v_2$  possui um sinal definido. Assim os conjuntos

$$\mathcal{A} = \{t \in \mathbb{R} \mid v_1 + t v_2 \geq 0\} \text{ e } \mathcal{B} = \{t \in \mathbb{R} \mid v_1 + t v_2 \leq 0\}$$

são não vazios, fechados e  $\mathbb{R} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ . Consequentemente, existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $t_0 \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ , ou seja,  $v_1 + t_0 v_2 = 0$ . Portanto a Afirmação está verificada.

Defina  $a : B_{\tilde{\delta}} \cap N \rightarrow \mathbb{R}$  por  $a(y) = \tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y))$ . Devido ao fato de  $u_1$  ser um ponto crítico isolado de  $\tilde{J}$  segue que 0 é um ponto crítico isolado de  $a$ . De fato, pela regra da cadeia temos

$$a'(y) = \tilde{J}'(u_1 + y + \tilde{h}(y))(Id|_N + \tilde{h}'(y)).$$

Considere agora  $\bar{y} \in N$  e vejamos como  $a'(y)$  age em  $\bar{y}$

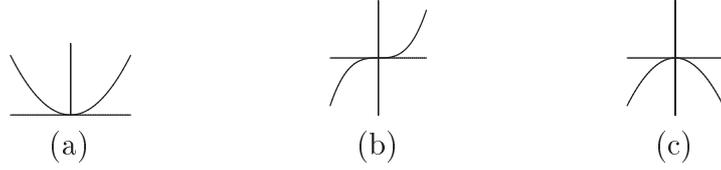
$$\begin{aligned} a'(y)\bar{y} &= \tilde{J}'(u_1 + y + \tilde{h}(y))(Id|_N + \tilde{h}'(y))\bar{y} \\ &= \tilde{J}'(u_1 + y + \tilde{h}(y))\bar{y} + \tilde{J}'(u_1 + y + \tilde{h}(y))\tilde{h}'(y)\bar{y} \\ &= \tilde{J}'(u_1 + y + \tilde{h}(y))\bar{y} + \tilde{J}'(u_1 + y + \tilde{h}(y))\bar{z} \quad \text{onde } \tilde{h}'(y)\bar{y} = \bar{z} \in N^\perp \\ &= \tilde{J}'(u_1 + y + \tilde{h}(y))\bar{y} + \tilde{J}'(u_1 + y + \tilde{h}(y))(0 \oplus \bar{z}) \\ &= \tilde{J}'(u_1 + y + \tilde{h}(y))\bar{y} + \frac{\partial \tilde{J}}{\partial z}(u_1 + y + \tilde{h}(y))\bar{z} \\ &= \tilde{J}'(u_1 + y + \tilde{h}(y))\bar{y} \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde usamos o fato de  $\tilde{h}(y)$  ser a única solução da equação  $\frac{\partial \tilde{J}}{\partial z}(u_1 + y + z) = 0$  com  $y \in B_{\tilde{\delta}} \cap N$ . Agora, se 0 não fosse um ponto crítico isolado de  $a$  teríamos  $y_1 \neq 0$ , ponto crítico de  $a$ , arbitrariamente próximo de 0. Consequentemente, por (4.8)  $u_1 + y_1 + \tilde{h}(y_1)$  seria um ponto crítico de  $\tilde{J}$  arbitrariamente próximo de  $u_1$ , observe que  $u_1 + y_1 + \tilde{h}(y_1) \neq u_1$  pois  $y_1 \neq 0$  e como  $y_1 \in N$  e  $\tilde{h}(y_1) \in N^\perp$  segue que  $y_1 + \tilde{h}(y_1) = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0$ . Seja  $0 < \tilde{\delta}_1 \leq \tilde{\delta}$  tal que  $y = 0$  é o único ponto crítico de  $a(y)$  em  $B_{\tilde{\delta}_1} \cap N$ .

Assim, existem apenas três possibilidades:

- (a)  $y = 0$  é um ponto de mínimo local de  $a$
- (b)  $y = 0$  é um ponto de sela (isolado) de  $a$

(c)  $y = 0$  é um ponto de máximo local de  $a$



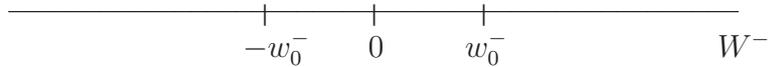
No caso (a) tem-se  $(\tilde{\mathcal{J}}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap \mathcal{U} = \emptyset$  onde  $\mathcal{U} = \{\tilde{\Phi}(u_1 + y + z) : \|y\| + \|z\| \leq \tilde{\delta}_1\}$ , para ver isto basta analisar o valor de  $\tilde{\mathcal{J}}$  em  $\mathcal{U}$  usando a fórmula (4.4).

No caso (b) tem-se que  $(\tilde{\mathcal{J}}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap \mathcal{U}$  é conexo por caminho, pois qualquer ponto em  $(\tilde{\mathcal{J}}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap \mathcal{U}$ , digamos  $\tilde{\Phi}(u_1 + y + z)$  pode ser ligado à  $\tilde{\Phi}(u_1 + y_0)$ , onde  $y_0 \in N$  é caracterizado por  $\|y_0\| = \tilde{\delta}_1$  e  $a(y_0) < c_1$ , por um caminho em  $(\tilde{\mathcal{J}}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap \mathcal{U}$ , intuitivamente partimos do ponto  $\tilde{\Phi}(u_1 + y + z)$  para o ponto  $\tilde{\Phi}(u_1 + y)$  e em seguida de  $\tilde{\Phi}(u_1 + y)$  para  $\tilde{\Phi}(u_1 + y_0)$  sem sair de  $(\tilde{\mathcal{J}}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap \mathcal{U}$ . Os detalhes desta construção serão feitos no demonstração do item (ii).

Portanto, pelo Lema 4.1 o caso (c) é a única situação possível, que nos dá a conclusão do item (i).

(ii) Caso  $m(u_1) = 1$ .

Nesse caso, escrevemos  $N^\perp = W^+ \oplus W^-$ , onde  $W^+$ ,  $W^-$  correspondem ao subespaço onde  $J''(u_1)$  é positiva-definida e negativa-definida respectivamente. Observe que nesse caso  $\dim(W^-) = m(u_1) = 1$ . Seja  $w_0^- \in W^-$  tal que  $\{w^- \in W^- \mid \|w^-\| = \tilde{\delta}\} = \{w_0^-, -w_0^-\}$  e criemos a seguinte ordem em  $W^-$ :  $w^- \geq 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \geq 0$  tal que  $w^- = \lambda w_0^-$ .



Considere a seguinte vizinhança de  $u_1$

$$\mathcal{U} = \{u = \tilde{\Phi}(u_1 + y + w^+ + w^-) \mid \|w^+\| \leq \tilde{\delta}, \|w^-\| \leq \tilde{\delta} \text{ e } \|y\| \leq \delta'\}$$

onde escolhemos  $\delta'$  suficientemente pequeno de forma que

$$\left| \tilde{\mathcal{J}}(u_1 + y + \tilde{h}(y)) - c_1 \right| \leq \frac{-\langle Aw_0^-, w_0^- \rangle}{2} \quad \text{para } \|y\| \leq \delta' \quad (4.9)$$

Reescrevendo (4.4) temos

$$\tilde{J}\left(\tilde{\Phi}(u_1 + y + w^+ + w^-)\right) = \frac{1}{2} [\langle Aw^+, w^+ \rangle + \langle Aw^-, w^- \rangle] + \tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y)) \quad (4.10)$$

**Afirmção.** Qualquer ponto em  $(\tilde{J}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap \mathcal{U}$  pode ser ligado, por um caminho em  $(\tilde{J}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap \mathcal{U}$ , à um dos seguintes dois pontos:  $\tilde{\Phi}(u_1 + w_0^-)$ ,  $\tilde{\Phi}(u_1 - w_0^-)$

De fato, é suficiente construir um caminho  $p(t)$  em  $\mathcal{V} \setminus \{u_1\}$ , onde

$$\mathcal{V} = \{u_1 + y + w^+ + w^- \mid \|w^+\| \leq \tilde{\delta}, \|w^-\| \leq \tilde{\delta} \text{ e } \|y\| \leq \delta'\}$$

tal que  $\tilde{J}(\tilde{\Phi}(p(t))) \leq c_1$ .

Dado qualquer  $(u_1 + y + w^+ + w^-) \in \mathcal{V} \setminus \{u_1\}$  tal que  $\tilde{J}(\tilde{\Phi}(u_1 + y + w^+ + w^-)) \leq c_1$ , ligamos esse ponto à  $u_1 + y + w^-$  por

$$p_1(t) = u_1 + y + (1 - t)w^+ + w^- \quad t \in [0, 1].$$

Agora, se  $w^- \geq 0$ , ligamos  $u_1 + y + w^-$  à  $u_1 + y + w_0^-$  por

$$p_2(t) = u_1 + y + (1 - t)w^- + tw_0^- \quad t \in [0, 1]$$

e finalmente ligamos  $u_1 + y + w_0^-$  à  $u_1 + w_0^-$  por

$$p_3(t) = u_1 + (1 - t)y + w_0^- \quad t \in [0, 1].$$

E se  $w^- \geq 0$ , ligamos  $u_1 + y + w^-$  à  $u_1 + y - w_0^-$  por

$$p_2(t) = u_1 + y + (1 - t)w^- + t(-w_0^-) \quad t \in [0, 1]$$

e finalmente ligamos  $u_1 + y - w_0^-$  à  $u_1 - w_0^-$  por

$$p_3(t) = u_1 + (1 - t)y - w_0^- \quad t \in [0, 1].$$

Consideramos  $p(t)$  a união dos caminhos  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$ . Por construção  $\tilde{\Phi}(p(t)) \in \mathcal{U} \setminus \{u_1\}$ .

Resta verificar que  $\tilde{J}(\tilde{\Phi}(p(t))) \leq c_1$ . Para isso observe que, para  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tilde{\Phi}(p_1(t))) &= \frac{(1-t)^2}{2} \langle Aw^+, w^+ \rangle + \frac{1}{2} \langle Aw^-, w^- \rangle + \tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y)) \\ &\leq \frac{1}{2} \langle Aw^+, w^+ \rangle + \frac{1}{2} \langle Aw^-, w^- \rangle + \tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y)) \\ &= \tilde{J}(\tilde{\Phi}(p_1(0))) \leq c_1 \end{aligned}$$

Caso  $w^- \geq 0$  escrevemos  $w^- = \|w^-\| \frac{w_0^-}{\|w_0^-\|}$ . Assim, para  $t \in [0, 1]$ , temos

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tilde{\Phi}(p_2(t))) &= \frac{1}{2} \underbrace{\left( (1-t) \frac{\|w^-\|}{\|w_0^-\|} + t \right)^2}_{\geq \left( \frac{\|w^-\|}{\|w_0^-\|} \right)^2} \langle Aw_0^-, w_0^- \rangle + \tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y)) \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{\|w^-\|^2}{\|w_0^-\|^2} \langle Aw_0^-, w_0^- \rangle + \tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y)) \\ &= \frac{1}{2} \langle Aw^-, w^- \rangle + \tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y)) = \tilde{J}(\tilde{\Phi}(p_2(0))) \leq c_1 \end{aligned}$$

Caso  $w^- < 0$  escrevemos  $-w_0^- = \|w_0^-\| \frac{w^-}{\|w^-\|}$ . Assim, para  $t \in [0, 1]$ , temos

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tilde{\Phi}(p_2(t))) &= \frac{1}{2} \underbrace{\left( (1-t) + t \frac{\|w_0^-\|}{\|w^-\|} \right)^2}_{\geq 1} \langle Aw^-, w^- \rangle + \tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y)) \\ &\leq \frac{1}{2} \langle Aw^-, w^- \rangle + \tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y)) \leq c_1 \end{aligned}$$

E finalmente, por (4.9), temos

$$\tilde{J}(\tilde{\Phi}(p_3(t))) = \frac{1}{2} \langle A \pm w_0^-, \pm w_0^- \rangle + \tilde{J}(u_1 + (1-t)y + \tilde{h}((1-t)y)) \leq c_1 \quad t \in [0, 1].$$

Portanto a Afirmação está verificada.

Agora podemos finalizar a prova de item (ii). Suponha, por contradição, que (ii) não seja verdadeira. Assim, existe  $y_0$ ,  $0 < \|y_0\| \leq \delta'$  tal que

$$\tilde{J}(u_1 + y_0 + \tilde{h}(y_0)) \leq c_1$$

observando (4.10) podemos concluir que

$$\tilde{\Phi}(u_1 + y_0 + w^-) \in \left( \tilde{J}_{c_1} \setminus \{u_1\} \right) \cap \mathcal{U} \quad \forall \|w^-\| \leq \tilde{\delta}$$

em particular

$$\tilde{\Phi}(u_1 + y_0 + (2t - 1)w_0^-) \in \left( \tilde{\mathcal{J}}_{c_1} \setminus \{u_1\} \right) \cap \mathcal{U} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Mas isto nos dá um caminho em  $\left( \tilde{\mathcal{J}}_{c_1} \setminus \{u_1\} \right) \cap \mathcal{U}$  ligando os pontos  $\tilde{\Phi}(u_1 + y_0 - w_0^-)$  e  $\tilde{\Phi}(u_1 + y_0 + w_0^-)$ . Daí, pela afirmação acima, temos que  $\left( \tilde{\mathcal{J}}_{c_1} \setminus \{u_1\} \right) \cap \mathcal{U}$  é conexo por caminho, contradizendo o Lema 4.1.  $\square$

Finalmente dispomos de todas as ferramentas necessárias para demonstrar a Proposição 4.3.

**Demonstração:**(Proposição 4.3)

Pelo resultado do Lema 4.4 precisamos apenas mostrar que, para  $\|y\|$  suficientemente pequena, tem-se  $J(u_1 + y + h(y)) = \tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y))$ . Faremos isso da seguinte maneira: primeiro vamos mostrar que, para  $\|y\|$  pequena,  $h(y) = \tilde{h}(y)$ . Em seguida utilizamos o Lema 3.2 para mostrar que, para  $\|y\|$  pequena, as funções  $u_1 + y + h(y)$  satisfazem  $u_1 + y + h(y) \geq 0$ . Com isso teremos o resultado desejado. Seguem os detalhes:

Queremos mostrar que existe  $0 < \delta_1 \leq \delta$  tal que, para  $\|y\| \leq \delta_1$ , temos

$$h(y) = \tilde{h}(y) \tag{4.11}$$

$$u_1(x) + y(x) + h(y)(x) \geq 0 \quad x \in \bar{\Omega} \tag{4.12}$$

Para isso, considere o operador

$$Lu = \Delta u + \frac{f(u_1)}{u_1}u.$$

Aplicando o Lema de Hopf (Lema 3.4 de [GT]) para  $L$  e  $-u_1$  obtemos

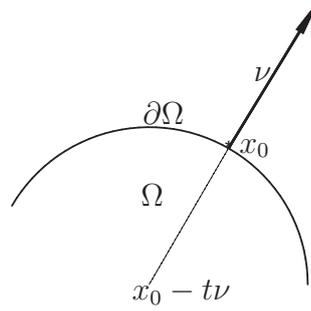
$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu}(x) < 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \tag{4.13}$$

onde  $\nu$  é a normal unitária exterior à  $\Omega$  em  $x$ . Observe que estamos exigindo certas condições de regularidade na fronteira  $\partial\Omega$ . Vamos assumir que  $\Omega$  também possui a seguinte propriedade:

Existem  $\bar{\rho} > 0$  e  $N_{\bar{\rho}} = \{x \in \bar{\Omega} \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) < \bar{\rho}\}$ , uma vizinhança de  $\partial\Omega$  em  $\bar{\Omega}$ , tal que:

Dado  $x \in N_{\bar{\rho}}$ , existem  $x_0 \in \partial\Omega$  e  $t \geq 0$  tais que  $x = x_0 - t\nu$

onde  $\nu$  é a normal unitária exterior à  $\Omega$  em  $x_0$ .



**Afirmção.** *Existem  $0 < \rho \leq \bar{\rho}$  e  $0 < \delta_2 \leq \delta$  tais que*

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(u_1 + y + h(y)) < 0 \text{ em } N_\rho, \text{ se } \|y\| \leq \delta_2$$

De fato, caso contrário existiriam, para cada  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\rho_k > 0$  e  $\delta_k > 0$  (com  $\rho_k \rightarrow 0$  e  $\delta_k \rightarrow 0$ ) bem como  $y_k \in B_{\delta_k} \cap N$  e  $x_k \in N_{\rho_k}$  tais que

$$\frac{\partial}{\partial \nu_k}(u_1 + y_k + h(y_k))(x_k) \geq 0 \tag{4.14}$$

onde  $\nu_k$  é normal unitária exterior em  $z_k \in \partial\Omega$  tal que  $x_k = z_k - t\nu_k$  para algum  $t \geq 0$ . Pela compacidade de  $\partial\Omega$  podemos supor que  $z_k \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$ , e como  $\|x_k - z_k\|_{\mathbb{R}^n} \rightarrow 0$  (pois  $\|x_k - z_k\|_{\mathbb{R}^n} \leq \rho_k$ ) também temos  $x_k \rightarrow x_0$ . Também temos  $\|y_k\|_{C^1(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$  e conseqüentemente  $\|h(y_k)\|_{C^1(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ . Além disso, pela regularidade da fronteira, temos  $\nu_k \rightarrow \nu_0$ , onde  $\nu_0$  é normal unitária exterior em  $x_0$ . Assim, fazendo  $k \rightarrow \infty$  em (4.14), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0}(u_1)(x_0) \geq 0$$

contradizendo (4.13). Portanto a Afirmção está verificada.

Em particular  $u_1 > 0$  em  $\bar{\Omega} \setminus N_\rho$  (compacto), logo

$$u_1(x) \geq r_0 > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega} \setminus N_\rho.$$

Como  $\|y + h(y)\|_{C^1(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$  quando  $\|y\| \rightarrow 0$ , tomemos  $0 < \delta_1 \leq \delta_2$  suficientemente pequeno de forma que

$$\|y + h(y)\|_{C^1(\bar{\Omega})} < \frac{r_0}{2} \quad \text{se } \|y\| \leq \delta_1.$$

Assim, para  $\|y\| \leq \delta_1$ , temos  $u_1 + y + h(y) \geq 0$  em  $\bar{\Omega} \setminus N_\rho$ . e para  $x \in N_\rho$  temos que, existem  $x_0 \in \partial\Omega$  e  $t \geq 0$ , bem como  $\nu_0$  normal unitária exterior em  $x_0$  tais que

$x = x_0 - t\nu_0$ . Assim

$$\begin{aligned} (u_1 + y + h(y))(x) &= (u_1 + y + h(y))(x_0) + \int_0^t \nabla(u_1 + y + h(y))(x_0 - s\nu_0) \cdot (-\nu_0) ds \\ (u_1 + y + h(y))(x) &= 0 - \int_0^t \frac{\partial}{\partial \nu_0} (u_1 + y + h(y))(x_0 - s\nu_0) ds \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

onde, além do Teorema Fundamental do Cálculo, usamos o resultado da Afirmação acima. Portanto, temos (4.12).

Pela definição de  $h$ , sabemos que  $h(y)$  é a única solução da equação

$$\frac{\partial J}{\partial z}(u_1 + y + z) = 0 \quad \text{para } \|y\| \leq \delta$$

ou seja

$$\frac{\partial J}{\partial z}(u_1 + y + h(y)) = 0.$$

Utilizando (4.12) e a definição de  $\tilde{J}$ , temos

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial z}(u_1 + y + h(y)) = \frac{\partial J}{\partial z}(u_1 + y + h(y)) = 0$$

e então, pela unicidade de  $\tilde{h}$ , segue (4.11).

Assim, para  $0 < \|y\| \leq \delta_1$ , temos

$$\begin{aligned} J(u_1 + y + h(y)) &= \tilde{J}(u_1 + y + h(y)) && \text{por (4.12)} \\ &= \tilde{J}(u_1 + y + \tilde{h}(y)) && \text{por (4.11)} \end{aligned}$$

e agora, a proposição segue do Lema 4.4. □

## 4.2 Caso $m(u_1) = 0$

Seja  $N = \text{span}\{\omega\}$ , com  $\|\omega\| = 1$ . Afirmamos que existem  $\rho > 0$  e  $\epsilon > 0$  tais que

$$J(u_1 + z) > c_1 \quad \text{para } 0 < \|z\| \leq \rho \tag{4.15}$$

$$J(u_1 + z) \geq c_1 + \epsilon \quad \forall z \in S_\rho = \{z \in N^\perp : \|z\| = \rho\} \tag{4.16}$$

De fato, durante a demonstração do Teorema 3.1 (pág. 35), vimos que

$$J(u_1 + z) = J(\Phi(\Phi^{-1}(u_1 + z))) = J(\Phi(u_1 + \bar{z})) = \frac{1}{2} \langle A\bar{z}, \bar{z} \rangle + c_1 > c_1 \quad (4.17)$$

pois  $z \neq 0 \Rightarrow \bar{z} \neq 0$ . Agora vamos verificar (4.16). Ainda lembrando da demonstração do Teorema 3.1, vimos que  $A|_{N^\perp} : N^\perp \longrightarrow N^\perp$  é um isomorfismo. Assim

$$\inf_{\substack{\|z\|=1 \\ z \in N^\perp}} \{ \langle Az, z \rangle \} > 0 \quad (4.18)$$

pois caso contrário teríamos  $0 \in \sigma(A|_{N^\perp})$  ([Br]), contrariando o fato de  $A|_{N^\perp} : N^\perp \longrightarrow N^\perp$  ser um isomorfismo. Observe que (4.18) implica que

$$\inf_{\substack{\|z\| \geq \rho \\ z \in N^\perp}} \{ \langle Az, z \rangle \} > 0 \quad \forall \rho > 0 \quad (4.19)$$

Agora, se (4.16) não ocorre então existiria uma sequência  $z_n \in S_\rho$  tal que

$$J(u_1 + z_n) \longrightarrow c_1 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Conseqüentemente, observando (4.17), teríamos

$$\frac{1}{2} \langle A\bar{z}_n, \bar{z}_n \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

daí, por (4.19), necessariamente teríamos  $\bar{z}_n \longrightarrow 0$ , e conseqüentemente

$$\Phi(u_1 + \bar{z}_n) \longrightarrow u_1$$

ou seja

$$u_1 + z_n \longrightarrow u_1$$

mas isso implica que  $z_n \longrightarrow 0$ , contradizendo  $\|z_n\| = \rho > 0$ .

Considere  $\mathcal{U} = \{ \tilde{\Phi}(u_1 + t\omega + z) : |t| \leq \delta, \|z\| \leq \widehat{\delta} \}$ . Afirmamos que o conjunto  $(\tilde{\mathcal{J}}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap \mathcal{U}$  possui exatamente duas componentes conexas por caminho, uma contendo  $u_1 - \delta\omega + \tilde{h}(-\delta\omega)$  e outra contendo  $u_1 + \delta\omega + \tilde{h}(\delta\omega)$ .

De fato, seja  $\tilde{\Phi}(u_1 + t\omega + z) \in (\tilde{\mathcal{J}}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap \mathcal{U}$ . Observe que  $t \neq 0$ , pois caso contrário  $\tilde{J}(\tilde{\Phi}(u_1 + t\omega + z)) > c_1$ . Agora conectamos  $\tilde{\Phi}(u_1 + t\omega + z)$  à  $\tilde{\Phi}(u_1 + t\omega)$  em  $(\tilde{\mathcal{J}}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap \mathcal{U}$

pelo caminho

$$p(s) = \tilde{\Phi}(u_1 + t\omega + (1-s)z), \quad s \in [0, 1]$$

em seguida, se  $t > 0$ , conectamos  $\tilde{\Phi}(u_1 + t\omega)$  à  $\tilde{\Phi}(u_1 + \delta\omega)$  em  $(\tilde{J}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap \mathcal{U}$  utilizando o Lema 4.4 e se  $t < 0$ , analogamente conectamos  $\tilde{\Phi}(u_1 + t\omega)$  à  $\tilde{\Phi}(u_1 - \delta\omega)$  por um caminho em  $(\tilde{J}_{c_1} \setminus \{u_1\}) \cap \mathcal{U}$ . A essa altura, já estamos utilizando o fato de que o homeomorfismo  $\tilde{\Phi}$  mantém fixa a componente em  $N$ , e que  $\tilde{\Phi}(u_1 + t\omega) = u_1 + t\omega + \tilde{h}(t\omega)$ .

Pelo que vimos na demonstração do Lema 4.1, os pontos 0 e  $re_1$  podem ser conectados por caminhos em  $\tilde{J}_{c_1}$  à uma das duas componentes.

Sem perda de generalidade, vamos assumir que existem caminhos  $\gamma_1, \gamma_2$  tais que

$$\begin{aligned} \gamma_1(0) &= 0, & \gamma_1(1) &= u_1 - \delta\omega + \tilde{h}(-\delta\omega) \\ \gamma_2(0) &= u_1 + \delta\omega + \tilde{h}(\delta\omega), & \gamma_2(1) &= re_1 \end{aligned}$$

e  $\tilde{J}(\gamma_1(t)) < c_1$ ,  $\tilde{J}(\gamma_2(t)) < c_1$ .

Pelo Lema 4.4, existe um caminho  $\gamma_3$  em  $\tilde{J}_{c_1}$  tal que  $\gamma_3(-\delta) = u_1 - \delta\omega + \tilde{h}(-\delta\omega)$  e  $\gamma_3(\delta) = u_1 + \delta\omega + \tilde{h}(\delta\omega)$ . Unindo os caminhos  $\gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$  obtemos um caminho  $\gamma^+$  em  $\tilde{J}_{c_1}$  que conecta 0 à  $re_1$ . Podemos assumir que as funções em  $\gamma^+$  são tais que  $\gamma^+(t) \geq 0$ . Pois, se definimos  $u^+ = \max\{u, 0\}$  e  $u^- = \min\{u, 0\}$ , então  $u = u^+ + u^-$ . Logo

$$\begin{aligned} \tilde{J}(u^+ + u^-) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u^+|^2 + \frac{1}{2} |\nabla u^-|^2 - \tilde{F}(u) \geq \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u^+|^2 - \tilde{F}(u^+ + u^-) \\ &\geq \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u^+|^2 - \tilde{F}(u^+) = \tilde{J}(u^+) \end{aligned}$$

Assim,  $J(\gamma^+(t)) = \tilde{J}(\gamma^+(t)) \leq c_1$ .

Pelo mesmo raciocínio, pode-se obter um outro caminho  $\gamma^-$  conectando 0 à  $-re_1$  em  $J_{c_1}$  com  $\gamma^-(t) \leq 0$  (em particular  $\gamma^-(t) \neq u_1$ ).

Agora observe que, usando a condição  $(f_3)$ , podemos concluir que  $J(u) \rightarrow -\infty$  quando  $\|u\| \rightarrow \infty$  em qualquer subespaço de  $H_0^1(\Omega)$  de dimensão finita formado por funções regulares. De fato,  $(f_3)$  implica que existem  $C_3, C_4 > 0$  tais que  $F(t) \geq C_3|t|^\mu - C_4$ ,

daí

$$\begin{aligned}
 J(u) &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + \int_{\Omega} -C_3|u|^\mu + C_4 \\
 &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + C_4|\Omega| - C_3\|u\|_{L^\mu(\Omega)}^\mu \\
 &\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 + C_4|\Omega| - C_5\|u\|^\mu \longrightarrow -\infty \text{ quando } \|u\| \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

onde usamos a equivalência das normas e o fato de que  $2 < \mu$ .

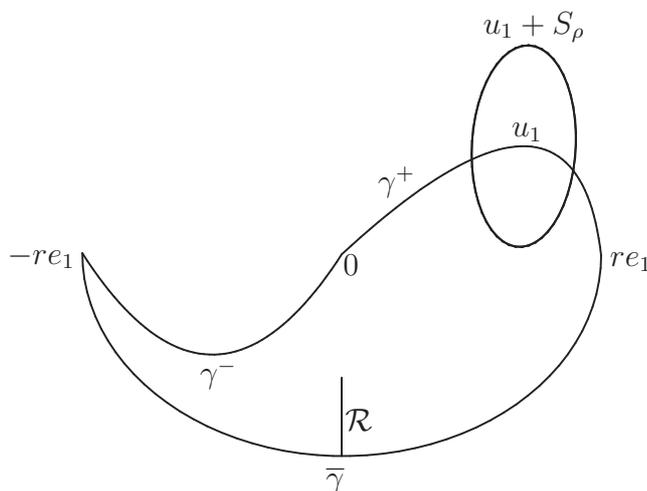
Assim, existe um caminho  $\bar{\gamma}$  conectando  $re_1$  à  $-re_1$  tal que  $J(\bar{\gamma}(t)) < c_1$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Unindo os caminhos  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$  e  $\bar{\gamma}$ , obtemos um caminho fechado, ou seja, uma aplicação  $\varphi : S^1 \rightarrow H_0^1(\Omega)$  tal que  $\varphi(S^1) = \gamma^+([0, 1]) \cup \gamma^-([0, 1]) \cup \bar{\gamma}([0, 1])$ , onde  $S^1$  é a esfera de dimensão um e  $\gamma^+([0, 1]) = \gamma_1([0, 1]) \cup \gamma_3([-\delta, \delta]) \cup \gamma_2([0, 1])$ .

Considere também um ponto  $v_0 \in \bar{\gamma}([0, 1])$  e outro ponto  $\bar{v}_0$  próximo de  $v_0$  tal que exista um segmento de reta  $\mathcal{R}$  ligando esses dois pontos onde  $\mathcal{R} \cap \varphi(S^1) = \{v_0\}$  e  $J(\mathcal{R}) < 0$ . Seja  $p : [-1, 1] \rightarrow S^1$  uma parametrização de  $S^1$  com  $p(-1) = p(1)$ . Seja

$$r : [0, p(1)] \subset B^2 \rightarrow \mathcal{R}$$

uma parametrização de  $\mathcal{R}$ .



Defina

$$\Psi = \{\psi \in C(B^2, H_0^1(\Omega)) : \psi|_{\partial B^2} = \varphi \text{ e } \psi|_{[0, p(1)]} = r\}$$

e

$$c_3 = \inf_{\psi \in \Psi} \sup_{s \in B^2} J(\psi(s))$$

onde  $B^2$  é a bola de dimensão dois.

Se mostrarmos que

$$c_3 > c_1 \tag{4.20}$$

então, utilizando um argumento de deformação conclui-se que  $c_3$  é um valor crítico de  $J$ , fornecendo assim uma terceira solução para o problema  $(\mathcal{P})$ . Em vista de (4.16), para provar (4.20) é suficiente provar o seguinte resultado:

**Lema 4.5.** *Para toda  $\psi \in \Psi$  tem-se*

$$\psi(B^2) \cap \{u_1 + S_\rho\} \neq \emptyset$$

onde  $\{u_1 + S_\rho\} = \{u_1 + z \mid z \in N^\perp \text{ e } \|z\| = \rho\}$

**Demonstração:** Supondo que o resultado do Lema não é verdadeiro temos que existe  $\psi_0 \in \Psi$  tal que

$$\psi_0(B^2) \cap \{u_1 + S_\rho\} = \emptyset. \tag{4.21}$$

Utilizaremos um argumento de teoria do grau para obter uma contradição. Considerando  $H_0^1(\Omega) = N^\perp \times N$  e identificando  $N$  com a reta  $\mathbb{R}$ , definimos uma homotopia  $F_t : B_\rho \times (-1, 1) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$  por

$$F_t(z, s) = u_1 + z - \psi_0(tp(s)) \quad \forall t \in [0, 1], (z, s) \in B_\rho \times (-1, 1)$$

onde  $B_\rho = \{z \in N^\perp : \|z\| < \rho\}$  e estamos identificando  $(-1, 1)$  com o intervalo  $(-\omega, \omega) \subset N$ . Observe que

$$\partial(B_\rho \times (-1, 1)) = \overline{B_\rho} \times \{-1, 1\} \cup S_\rho \times [-1, 1].$$

Se  $(z, s) \in \overline{B_\rho} \times \{-1, 1\}$  então  $F_t(z, s) \neq 0$  pois nesse caso

$$\psi_0(tp(\pm 1)) = \psi_0(tp(1)) \notin \{u_1 + \overline{B_\rho}\} \quad \forall t \in [0, 1] \tag{4.22}$$

visto que  $\psi_0(\mathcal{R}) \subset J_0$ . Para  $t \in [0, 1]$  e  $(z, s) \in S_\rho \times [-1, 1]$  tem-se, por (4.21),  $F_t(z, s) \neq 0$ . Portanto, pela invariância do grau por homotopia, segue que

$$\deg(F_t, B_\rho \times (-1, 1), 0) = \text{constante} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Em particular temos

$$\deg(F_0, B_\rho \times (-1, 1), 0) = 0 \tag{4.23}$$

pois  $F_0(z, s) = u_1 + z - \psi_0(0)$  e  $\psi_0(0) \notin \{u_1 + \overline{B_\rho}\}$  (por (4.22)). Por outro lado

$$F_1(z, s) = u_1 + z - \psi_0(p(s)) = u_1 + z - \varphi(p(s))$$

Lembrando que  $\varphi(S^1) = \gamma^+([0, 1]) \cup \gamma^-([0, 1]) \cup \overline{\gamma}([0, 1])$ ,

$$\gamma^+([0, 1]) = \gamma_1([0, 1]) \cup \gamma_3([-\delta, \delta]) \cup \gamma_2([0, 1])$$

e observando (4.15) e o fato de que  $J(\varphi(S^1) \setminus \gamma_3([\delta, \delta])) < c_1$  temos

$$\{u_1 + \overline{B_\rho}\} \cap \{\varphi(S^1) \setminus \gamma_3([-\delta, \delta])\} = \emptyset$$

Assim, utilizando a propriedade de excisão, obtemos

$$\deg(F_1, B_\rho \times (-1, 1), 0) = \deg(F_1, B_\rho \times (-\delta, \delta), 0)$$

onde em  $B_\rho \times (-\delta, \delta)$

$$\begin{aligned} F_1(z, s) &= u_1 + z - \gamma_3(s) \\ &= u_1 + z - (u_1 + s\omega + \tilde{h}(s\omega)) \\ &= z - s\omega - \tilde{h}(s\omega) \end{aligned}$$

Agora, defina a homotopia  $E_t(z, s) = z - s\omega - t\tilde{h}(s\omega)$  para  $t \in [0, 1]$ . Se para algum  $(t, z, s)$  tivermos  $E_t(z, s) = 0$  então  $s\omega = 0$  e  $z = \tilde{h}(s\omega)$ , ou seja,  $s = 0$  e  $z = 0$ . Logo

$$(t, z, s) \in [0, 1] \times \partial(B_\rho \times (-\delta, \delta)) \implies E_t(z, s) \neq 0$$

Portanto, pela propriedade de invariância do grau por homotopia, segue que

$$\begin{aligned} \deg(F_1, B_\rho \times (-\delta, \delta), 0) &= \deg(E_1, B_\rho \times (-\delta, \delta), 0) \\ &= \deg(E_0, B_\rho \times (-\delta, \delta), 0) \\ &= \deg(z - s\omega, B_\rho \times (-\delta, \delta), 0) \\ &= \deg(\text{Id}|_{N^\perp}, B_\rho, 0) \deg(-\text{Id}|_N, (-\delta, \delta), 0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

contradizendo (4.23). Portanto o Lema está demonstrado. □

Finalmente, vamos verificar que  $c_3$  é um valor crítico de  $J$ .

De fato, supondo que  $K_{c_3}(J) = \emptyset$ , aplicamos o Teorema 1.2 com  $c_3$ ,  $\bar{\epsilon} = \frac{c_3 - c_1}{2} > 0$  e  $N(K_{c_3}(J)) = \emptyset$  e obtemos  $\eta \in C([0, 1] \times H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$  bem como  $0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$  tais que  $\eta(1, J_{c_3 + \epsilon}) \subset \eta(1, J_{c_3 - \epsilon})$ . Note que pela escolha de  $\bar{\epsilon}$  temos  $\eta(t, \cdot)|_{\varphi(S^1)} = Id$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Seja  $\psi \in \Psi$  tal que  $\sup\{J(\psi(B^2))\} < c_3 + \epsilon$ . Defina  $\widehat{\psi}(s) = \eta(1, \psi(s))$ . Então  $\widehat{\psi} \in \Psi$  e

$$\sup_{s \in B^2} \{J(\widehat{\psi}(s))\} < c_3 - \epsilon$$

contradizendo a definição de  $c_3$ .

O outro caso  $m(u_1) = 1$  é feito de forma análoga.

# Apêndice A

## Grau topológico

Nesta seção vamos relembrar algumas das principais propriedades do grau topológico, dando maior atenção ao grau de Leray-Schauder que utilizamos no Capítulo 4. Para a construção de grau de Leray-Schauder a existência do grau de Brouwer (o grau em espaços de Banach de dimensão finita) é necessária, bem como algumas de suas propriedades.

### A.1 O Grau de Brouwer

Sejam  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado,  $f : \overline{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua e  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\mathcal{O})$ . Nessas condições associamos um número  $\deg(f, \mathcal{O}, y) \in \mathbb{Z}$ , o *grau de Brouwer* de  $f$  relativamente à  $\mathcal{O}$  no ponto  $y$ . Listaremos a seguir algumas propriedades básicas:

- $\deg(\text{Id}, \mathcal{O}, y) = 1$  para todo  $y \in \mathcal{O}$ ;
- $\deg(f, \mathcal{O}, y) = \deg(f, \mathcal{O}_1, y) + \deg(f, \mathcal{O}_2, y)$  sempre que  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  forem subconjuntos de  $\mathcal{O}$  abertos e disjuntos tais que  $y \notin f(\overline{\mathcal{O}} \setminus (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2))$ ;
- $\deg(h(t, \cdot), \mathcal{O}, y(t))$  é constante com respeito à  $t \in [0, 1]$  sempre que as aplicações  $h : [0, 1] \times \overline{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  forem contínuas e  $y(t) \notin h(t, \partial\mathcal{O})$  para todo  $t \in [0, 1]$ ;
- Sejam  $f : \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $g : \overline{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções contínuas tais que  $0 \notin f(\partial U)$  e  $0 \notin g(\partial V)$ . Então, para  $f \times g : \overline{U} \times \overline{V} \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  o grau de Brouwer  $\deg(f \times g, U \times V, (0, 0))$  está bem definido e

$$\deg(f \times g, U \times V, (0, 0)) = \deg(f, U, 0) \cdot \deg(g, V, 0);$$

- Seja  $-Id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $-Id(x) = -x$ . Se  $y \in \mathcal{O}$  então

$$\deg(-Id, \mathcal{O}, y) = (-1)^n$$

O grau de Brouwer possui ainda outras propriedades (ver [De, Bn]).

## A.2 O Grau de Leray-Schauder

É possível estender o conceito de grau topológico para uma pequena classe de funções contínuas definidas em espaços de Banach de dimensão infinita, a saber, as funções que são perturbações compactas da identidade. Este grau é chamado de *grau de Leray-Schauder*. Considere  $E$  um espaço de Banach real,  $\mathcal{O} \subset E$  aberto e limitado,  $K : \overline{\mathcal{O}} \rightarrow E$  um operador contínuo e compacto e  $y \notin (Id - K)(\partial\mathcal{O})$ . Nestas condições associamos um número  $\deg(Id - K, \mathcal{O}, y) \in \mathbb{Z}$  o grau de Leray-Schauder, que satisfaz as seguintes propriedades:

**(Normalização)**  $\deg(Id, \mathcal{O}, y) = 1$  para todo  $y \in \mathcal{O}$ ;

**(Adição/Excisão)**  $\deg(Id - K, \mathcal{O}, y) = \deg(Id - K, \mathcal{O}_1, y) + \deg(Id - K, \mathcal{O}_2, y)$  sempre que  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  forem subconjuntos de  $\mathcal{O}$  abertos e disjuntos tais que  $y \notin (Id - K)(\overline{\mathcal{O}} \setminus (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2))$ ;

**(Invariância por homotopia)**  $\deg(Id - H(t, \cdot), \mathcal{O}, y(t))$  é constante com respeito à  $t \in [0, 1]$  sempre que  $H : [0, 1] \times \overline{\mathcal{O}} \rightarrow E$  for contínua e compacta,  $y : [0, 1] \rightarrow E$  for contínua e  $y(t) \notin (Id - H(t, \cdot))(\partial\mathcal{O})$  para todo  $t \in [0, 1]$ ;

**(Existência de solução)**  $\deg(Id - K, \mathcal{O}, y) \neq 0 \implies \exists x \in \mathcal{O}$  tal que  $(Id - K)(x) = y$ ;

**(Produto cartesiano)** Sejam  $f : \overline{U} \rightarrow E$  e  $g : \overline{V} \rightarrow F$  funções contínuas e compactas. Defina  $f \times g : \overline{U} \times \overline{V} \rightarrow E \times F$  por  $(f \times g)(x_1, x_2) = (f(x_1), g(x_2))$ . Se  $f$  e  $g$  satisfazem as hipóteses do grau de Leray-Schauder então  $f \times g : \overline{U} \times \overline{V} \rightarrow E \times F$  também satisfaz as hipóteses do grau de Leray-Schauder e

$$\begin{aligned} \deg(Id_{E \times F} - (f \times g), U \times V, (y_1, y_2)) = \\ \deg(Id_E - f, U, y_1) \cdot \deg(Id_F - g, V, y_2) \end{aligned}$$

# Referências Bibliográficas

- [AF] R. A. Adams and J. J. F. Fournier: *Sobolev Spaces* 2nd ed., Academic Press (Elsevier), Oxford 2003.
- [AR] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, Journal of Functional Analysis **14** (1973) 349-381.
- [BCW] T. Bartsch, K. C. Chang and Z. Q. Wang, *On the Morse indices of sign changing solutions of nonlinear elliptic problems*, Mathematische Zeitschrift **233**, No. 4 (2000) 655-677 (disponível em <http://www.math.usu.edu/~wang>).
- [Be] H. Berestycki, *Methodes Topologiques et Problemes Aux Limites non Lineares*, Sou-tenue, These de Docteur, França, 1975.
- [BK] H. Brézis and T. Kato, *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials*, J. Math. Pures Appl. **58** (1979) 137-151.
- [Bn] R. F. Brown, *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis*, second edition, Birkhäuser, Boston 2004.
- [Br] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [BW] T. Bartsch and Z. Q. Wang, *On the existence of sign changing solutions for semilinear Dirichlet problems*, Topological Methods in Nonlinear Analysis **7**, No. 1 (1996) 115-131 (disponível em <http://www-users.mat.uni.torun.pl/~tmna/files/v07n1-05.pdf>).
- [CCD] D. Costa, G. Chen and Z. Ding, *A high-linking algorithm for sign-changing solutions of semilinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis **38** (1999) 151-172
- [Ch] K.C. Chang, *Infinite Dimensional Morse Theory and Multiple Solution Problems*, Birkhäuser, Boston 1993.

- 
- [Co] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second Edition, Springer, New York 1990.
- [De] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1985.
- [Du] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston 1966.
- [F] D. G. Figueiredo, *Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems*, Escola Latino-Americana de Equações Diferenciais, USP, São Paulo 1981.
- [GT] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, New York 1970.
- [H] H. Hofer, *A note on the topological degree at a critical point of mountainpass-type*, Proc. of the Amer. Math. Soc. **90** no. 2 (1984) 309-315.
- [M] J. Ming, *A generalization of Morse lemma and its applications*, Nonlinear Analysis **36** (1999) 943-960.
- [K] S. Kesavan, *Nonlinear Functional Analysis - A First Course*, Texts and Readings in Mathematics (TRIM), **28**, Hindustan Book Agency, New Delhi 2004.
- [LW] Z. Liu and Z. Q. Wang, *On the Ambrosetti-Rabinowitz superlinear condition*, Advanced Nonlinear Studies **4** (2004), 561-572
- [Ra1] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory With Applications to Differential Equations*, C.B.M.S. Reg. Conf. Ser. in Math. **65**, A.M.S., Providence 1986
- [Ra2] P. H. Rabinowitz, *Some aspects of nonlinear eigenvalue problems*, Rocky Mountain J. Math. **3** (1973), 161-202
- [Rm] M. P. N. Ramos, *Teoremas de Enlace Na Teoria dos Pontos Críticos*, Textos de Matemática, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa 1993.
- [S] M. Struwe, *Variational Methods - Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1996.

- [St] G. Stampacchia, *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Séminaire Jean Leray **3** (1963-1964), p. 1-77 (disponível em [http://www.numdam.org/item?id=SJL\\_1963-1964\\_\\_\\_3\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SJL_1963-1964___3_1_0))
- [SZ] M. Schechter and W. Zou, *Critical Point Theory and its Applications*, Springer, New York 2006.
- [W] Z. Q. Wang, *On a superlinear elliptic equation*, Ann. Inst. H. Poincaré - Analyse Non Linéaire **8** (1991), 43-57 (disponível em [http://www.numdam.org/item?id=AIHPC\\_1991\\_\\_8\\_1\\_43\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1991__8_1_43_0))

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)