Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

# Sobre subvariedades com vetor curvatura média paralelo

por

**Kellcio Oliveira Araújo**

Brasília
**2008**

**Universidade de Brasília**
**Instituto de Ciências Exatas**
**Departamento de Matemática**

# Sobre subvariedades com vetor curvatura média paralelo

por

**Kellcio Oliveira Araújo** *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do grau de

**Doutor em Matemática**

21 de março de 2006

Comissão Examinadora:

______________________________
Profa. Keti Tenenblat - MAT/UnB (Orientadora)

______________________________
Prof. Xia Chang Yu - MAT/UnB (Membro)

______________________________
Prof. Pedro Roitman - MAT/UnB (Membro)

______________________________
Prof. Walcy Santos - UFRJ (Membro)

______________________________
Prof. Ricardo Sá Earp - PUC/RJ (Membro)

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração deste trabalho.

# Resumo

Provamos que uma superfície completa em $\mathbb{H}^3(-1)$ com curvatura média constante é mínima se, e só se, a curvatura gaussiana $K \leq -1$. Os principais resultados do nosso trabalho mostram que pode-se reduzir a codimensão de uma imersão isométrica em um forma espacial quando o vetor curvatura média é paralelo no fibrado normal e o comprimento da segunda forma fundamental satisfaz certas condições. Como conseqüência, provamos que uma subvariedade compacta e conexa em $\mathbb{H}^{n+p}(-1)$, com o vetor curvatura média paralelo no fibrado normal e satisfazendo as hipóteses de um dos resultados principais, é uma esfera geodésica.

# Abstract

We prove that a complete surface in $\mathbb{H}^3(-1)$ with constant mean curvature is minimal if, only if, the gaussian curvature $K \leq -1$. Our main results show that we can reduce the codimension of an isometric immersion in a space form, when the mean curvature vector is parallel in the normal bundle and the length of the second fundamental form satisfies certain conditions. As a consequence, we prove that a compact connected submanifold in $\mathbb{H}^{n+p}(-1)$, with parallel mean curvature vector and satisfying the hypothesis of one of the main results, is a geodesic sphere.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por todas as bênçãos que Ele tem derramado sobre a minha vida.

Agradeço a minha querida esposa, Raquel, por todo amor, carinho, companheirismo e dedicação. Te amo.

Agradeço a minha orientadora, Keti Tenenblat, pela dedicação e competência que conduziu na orientação desta tese.

Agradeço ao amigo e ex-professor, Arnaldo, que foi o primeiro a acreditar na minha capacidade de estudar matemática e, além da amizade, apoio e confiança, fez com que despertasse em mim o sonho de estudar esta bela ciência.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Viçosa, em especial, Margareth, Olímpio e Paulo Tadeu, pelo apoio, incentivo e dedicação dispensados à minha turma de 1996, culminando em 2000 no meu ingresso no mestrado da Universidade de Brasília.

Agradeço aos professores do MAT-UnB que de forma direta ou indireta foram importantes nesses 6 anos de pós-graduação.

Agradeço aos meus pais, por todo carinho, apoio e dedicação, embora distantes, sempre estiveram em meu coração. Muito obrigado pelo apoio desde o primeiro passo da jornada acadêmica.

Agradeço ao meu querido sogro, Eleazar, pelo apoio, carinho e confiança.

Agradeço a minha querida sogra, Juventina, pela acolhida e amizade, pelo carinho e consideração.

Agradeço aos meus colegas e amigos da pós-graduação, em especial, aos grandes amigos Jeovane, Zapata, Walter, Roberto, Flávio, Rosângela, Tânia, Wescley, Max e Bianka.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro.

# Sumário

# Introdução

Liebmann provou em 1900 que as superfícies compactas com a curvatura gaussiana constante em $\mathbb{R}^3$ são as esferas. Em 1953, Hopf provou que as superfícies compactas com a curvatura média constante e gênero zero em $\mathbb{R}^3$ são as esferas. Em 1966, Klotz e Osserman [13] caracterizaram as superfícies completas em $\mathbb{R}^3$ de curvatura média constante cuja curvatura gaussiana não troca de sinal. Precisamente, eles provaram o seguinte teorema:

**Teorema 1** *Seja $M^2$ uma superfície, completa e conexa, com a curvatura média $H$ constante em $\mathbb{R}^3$. Se a curvatura gaussiana $K$ de $M^2$ não troca de sinal, então $M^2$ é uma esfera, uma superfície mínima, ou um cilindro circular reto.*

Hoffman [12] generalizou o resultado de Klotz e Osserman para superfícies contidas em uma forma espacial de dimensão 4.

Dizer que a curvatura gaussiana $K$ não troca de sinal, equivale a afirmar que $K \geq 0$ ou $K \leq 0$. Então, o resultado anterior é uma conseqüência das seguintes proposições:

**Proposição 1** *Se $K \leq 0$ e $H \equiv cte$ em $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ completa, então $M^2$ é uma superfície mínima ou um cilindro circular reto.*

**Proposição 2** *Se $K \geq 0$ e $H \equiv cte$ em $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ completa, então $M^2$ é o plano $\mathbb{R}^2$, a esfera $S^2(c)$ ou o cilindro $S^1(c) \times \mathbb{R}^1$.*

Cheng e Yau [5] provaram o seguinte resultado em dimensão maior:

**Proposição 3** *Seja $M^n$ uma hipersuperfície, completa e conexa, em $\mathbb{R}^{n+1}$, cujas curvaturas seccionais são não-negativas. Se a curvatura média $\mid H \mid$ de $M^n$ é constante, então $M^n$ é o hiperplano $\mathbb{R}^n$, a hiperesfera $S^n(c)$, ou o cilindro generalizado $S^{n-k}(c) \times \mathbb{R}^k$, $(1 \leq k \leq n-1)$.*

Em 2001, Cheng e Nonaka [4] estenderam a Proposição 2 para dimensões e codimensões maiores. Eles provaram o seguinte resultado:

**Teorema 2** *Seja $M^n$ uma subvariedade $(n \geq 3)$, completa e conexa, em $\mathbb{R}^{n+p}$, com o vetor curvatura média $H$ paralelo. Se a segunda forma fundamental $h$ de $M^n$ satisfaz*

$$\langle h \rangle^2 \leq \frac{n^2 \mid H \mid^2}{n-1},$$

*então $M^n$ é a variedade totalmente geodésica $\mathbb{R}^n$, a esfera totalmente umbílica $S^n(c)$, ou o cilindro generalizado $S^{n-1}(c) \times \mathbb{R}^1$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Na demonstração do Teorema 2, a etapa principal utilizada é que, nestas condições, a codimensão é reduzida a 1 e, em seguida, aplica-se o resultado provado por Cheng e Yau.

Em nosso trabalho vamos obter resultados de redução de codimensão análogos ao de Cheng e Nonaka quando o espaço ambiente é o hiperbólico ou a esfera. Observamos que Santos [20] e Wang [23] consideraram hipóteses semelhantes quando o espaço ambiente é a esfera. Santos considerou uma subvariedade compacta $M^n$ da esfera $S^{n+p}$ com vetor curvatura média $H$ paralelo. Introduziu um tensor $\Phi$ relacionado com $H$ e a segunda forma fundamental e provou que se $\Phi$ satisfaz uma certa desigualdade, então $\Phi \equiv 0$ e $M^n$ é totalmente umbílica ou a igualdade se verifica. Wang considerou uma imersão isométrica $M^n \subset S^{n+p}(1)$, onde $S^{n+p}(1)$ é a esfera unitária de dimensão $n+p$, $p \geq 2$, com $\langle h \rangle^2 \leq \frac{n}{a}$, onde $a = \text{máx}\left\{\frac{3}{2}, \frac{n}{2\sqrt{n-1}}\right\}$, e provou que $M$ é totalmente umbílica e é uma esfera menor em $S^{n+1}$ com curvatura constante $(1+ \mid H \mid^2)$ ou $M$ é uma hipersuperfície em $S^{n+1} \subset S^{n+p}$. Outros autores também consideraram a hipótese do vetor curvatura média ser paralelo no fibrado normal, por exemplo citamos: Alodan [2], Cheung [6], de Barros [7], Mo [16] e Shen [21].

Antes de considerar os principais resultados deste trabalho, no Capítulo 1, obteremos uma proposição análoga à Proposição 1 para superfícies no espaço hiperbólico com a hipótese de que a curvatura gaussiana satisfaz a condição de $K - \tilde{c} \leq 0$, onde $\tilde{c}$ é a curvatura do espaço ambiente. Provaremos o seguinte resultado:

**Proposição 4** *Uma superfície completa $M^2$ em $\mathbb{H}^3(-1)$ com $H \equiv c$, sobre a qual $K \leq -1$, é uma superfície mínima.*

No Capítulo 2 provaremos os seguintes resultados:

**Teorema 3** *Seja $M^n$ uma subvariedade $(n \geq 3)$, completa e conexa, em $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$, $\tilde{c} \geq 0$. Suponha que o vetor curvatura média $H \neq 0$ seja paralelo no fibrado normal. Se a segunda forma fundamental $h$ de $M$ satisfaz*

$$< h >^2 \leq \frac{n^2 \mid H \mid^2}{n-1},$$

*então a codimensão se reduz a 1.*

O teorema anterior, quando $\tilde{c} = 0$, coincide com o resultado de Cheng e Nonaka.

Como conseqüência de um resultado provado por Nomizu e Smyth [18] obtemos o seguinte corolário do Teorema 3:

**Corolário** *Seja $M^n$ uma subvariedade $(n \geq 3)$, completa e conexa, em $S^{n+p}(1)$. Suponha que o vetor curvatura média $H \neq 0$ seja paralelo no fibrado normal. Se a segunda forma fundamental $h$ de $M$ satisfaz*

$$\langle h \rangle^2 \leq \frac{n^2 \mid H \mid^2}{n-1},$$

*então $M^n$ é totalmente umbílica em $S^{n+1}(1)$.*

Quando $\tilde{c} < 0$, provaremos o seguinte teorema:

**Teorema 4** *Seja $M^n$ uma subvariedade, completa e conexa, do espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+p}(\tilde{c})$, $\tilde{c} < 0$. Suponha que o vetor curvatura média $H \neq 0$ seja paralelo no fibrado* *normal. Sejam* $\xi_1$, $\xi_2, \cdots$, $\xi_p$ *ortonormais em* $T^{\perp}M$ *e tal que* $H = \mid H \mid \xi_1$. *Se a segunda forma fundamental* $h$ *de* $M$ *satisfaz*

$$\langle h \rangle^2 \leq \frac{n^2 \mid H \mid^2}{n-1}$$

*e*

$$\tilde{c}n \mid T \mid^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2 \geq 0,$$

*onde* $A_\alpha$ *é a segunda forma fundamental associada a* $\xi_\alpha$, $\mid T \mid^2 = \displaystyle\sum_{\alpha=2}^{p} trA_\alpha^2$ *e* $\nabla^*$ *é a soma das conexões normal e tangente definido por (2.5), então a codimensão se reduz a 1.*

Observamos que a última condição é trivialmente satisfeita quando $\tilde{c} \geq 0$. Consideraremos ainda uma hipótese alternativa à última hipótese do teorema anterior. Neste caso, conforme enuciado a seguir, a codimensão se reduz a 3.

**Teorema 5** *Seja* $M^n$ *uma subvariedade, completa e conexa, de dimensão* $n \geq 4$ *em* $\mathbb{H}^{n+p}(\tilde{c})$, *com* $\tilde{c} < 0$ *e* $p \geq 3$. *Suponha que o vetor curvatura média* $H \neq 0$ *seja paralelo no fibrado normal. Sejam* $\xi_1, \cdots, \xi_p$ *ortonormais em* $T^{\perp}M$ *e tal que* $H = \mid H \mid \xi_1$. *Suponha ainda que o primeiro espaço normal é invariante por translação paralela com respeito à conexão do fibrado normal. Se a segunda forma fundamental* $h$ *de* $M$ *satisfaz*

$$\langle h \rangle^2 \leq \frac{n^2 \mid H \mid^2}{n-1} \tag{1}$$

*e*

$$\mid T \mid^2 \geq -\frac{2\tilde{c}n}{n-3}, \tag{2}$$

*onde* $\mid T \mid^2 = \displaystyle\sum_{\alpha=2}^{p} trA_\alpha^2$, *em que* $A_\alpha$ *é a segunda forma fundamental associada a* $\xi_\alpha$, *então a codimensão se reduz a 3.*

Provaremos, ao final do Capítulo 2, que uma subvariedade $M^n$ compacta satisfazendo as hipóteses do Teorema 4 é uma esfera geodésica em $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$, ou seja, $M^n$ é uma subvariedade cujos pontos estão a uma distância fixa de um determinado ponto fixado.

# Capítulo 1

# Curvatura média constante em $\mathbb{H}^3$

Obteremos, neste capítulo, uma extensão às formas espaciais $\tilde{M}^3(\tilde{c})$ de alguns resultados conhecidos quando o espaço ambiente é o euclideano.

Introduziremos, na próxima seção, um referencial móvel adaptado à imersão isométrica $\Phi : M^2 \longrightarrow \tilde{M}^3(\tilde{c})$ e apresentaremos alguns resultados acerca do método do referencial móvel que serão utilizados na última seção para demonstrar que uma superfície completa $M^2$ contida no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3(-1)$ com curvatura média constante é mínima se, e só se, a curvatura gaussiana $K \leq -1$.

## 1.1 O referencial móvel

Seja $\Phi : M^2 \longrightarrow \tilde{M}^3(\tilde{c})$ uma imersão isométrica onde $\tilde{M}^3(\tilde{c})$ denota uma variedade riemanniana de dimensão 3 e curvatura seccional constante $\tilde{c}$. Dado $p \in M^2$, considere uma vizinhança $U$ de $p$ em $M^2$, tal que $\Phi$ restrito a $U$ seja um mergulho. Nesta condição, $V = \Phi(U)$ é identificado com $U$. Considere um referencial ortonormal $e_1$, $e_2$ e $e_3$, definido em $V$, adaptado à imersão, isto é, $e_1$ e $e_2$ são tangentes a $V$ e $e_3$ é normal a $V$. Sejam $\omega_1$, $\omega_2$ e $\omega_3$ o coreferencial (base dual), ou seja, $\omega_1$, $\omega_2$ e $\omega_3$ são 1-formas tal que $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Neste caso, valem as seguintes relações

$$d\omega_A = \sum_B \omega_B \wedge \omega_{BA}, \ \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0$$

$$d\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} - \tilde{c}\, \omega_A \wedge \omega_B$$

onde $1 \leq A, B \leq 3$ que são conhecidas como equações de estrutura.

A primeira e a segunda formas fundamentais são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} I &= \omega_1^2 + \omega_2^2, \\ II &= \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23}. \end{aligned}$$

O próximo lema permite introduzir a matriz $(h_{ij})$ da segunda forma fundamental.

**Lema 1.1.** *(Cartan) Seja $E$ um espaço vetorial de dimensão $n$. Sejam $\omega_1, \cdots, \omega_r$, $r < n$ 1-formas diferenciais linearmente independentes definidas em $E$. Se existem 1-formas $\Theta_1, \cdots, \Theta_r : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \Theta_i = 0,$$

*então*

$$\Theta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\omega_j$$

*onde $a_{ij} = a_{ji}$.*

Como o referencial $e_1$, $e_2$ e $e_3$ é adaptado à imersão, temos $\omega_3 = 0$ em $M^2$. Portanto,

$$d\omega_3 = \sum_{j=1}^{2} \omega_j \wedge \omega_{j3} = 0.$$

Logo, pelo lema de Cartan 1.1, podemos escrever

$$\omega_{j3} = \sum_{i=1}^{2} h_{ji}\omega_i$$

com $h_{ji} = h_{ij}$ e $1 \leq i, j \leq 2$. A curvatura média $H$ de $M^2$ em $\tilde{M}^3(\tilde{c})$ é definida por

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2} = \frac{\mathrm{tr}(h_{ij})}{2}.$$

A superfície $M^2$ é dita mínima se $H \equiv 0$. A curvatura gaussiana $K$ é dada por

$$K - \tilde{c} = \det(h_{ij}).$$

A forma diagonalizada da matriz $h_{ij}$ fornece as curvaturas principais (autovalores) $h_1$ e $h_2$. Um ponto $p \in M^2$ é dito umbílico se $h_1 = h_2$ no ponto $p$.

Quando $H^2 - (K - \tilde{c}) > 0$, existem autovetores ortonormais $e_1$ e $e_2$ definidos num aberto. Neste caso, a matriz $h_{ij}$ é diagonal, $\omega_{13} = h_1\omega_1$ e $\omega_{23} = h_2\omega_2$. A imersão $\Phi(u, v)$ é dita parametrizada por linhas de curvatura, ou seja, $\Phi_u$ e $\Phi_v$ são paralelos aos vetores principais em cada ponto. Assim,

$$e_1 = \frac{\Phi_u}{\mid \Phi_u \mid} \;\text{ e }\; e_2 = \frac{\Phi_v}{\mid \Phi_v \mid},$$

é o referencial móvel de direções principais e

$$\begin{aligned} I &= g_1^2 du^2 + g_2^2 dv^2 \\ II &= h_1 g_1^2 du^2 + h_2 g_2^2 dv^2 \end{aligned}$$

onde $g_1^2 = \mid \Phi_u \mid^2$, $g_2^2 = \mid \Phi_v \mid^2$, $h_1$ e $h_2$ são as curvaturas principais.

## 1.2 Resultados auxiliares

A proposição seguinte é uma extensão a uma forma espacial $\tilde{M}^3(\tilde{c})$ de um resultado clássico cuja demonstração para o espaço euclidiano pode ser encontrada em [22].

**Proposição 1.1.** *Seja $M^2$ uma subvariedade bidimensional em $\tilde{M}^3(\tilde{c})$, sem pontos umbílicos, cuja primeira forma fundamental $I$ é dada por*

$$I = \lambda(u, v)\{du^2 + dv^2\}$$

*para um sistema de coordenadas locais $(u, v)$. Sejam $h_1$ e $h_2$ as curvaturas principais. Então, vale a relação*

$$\frac{\partial h_1}{\partial v} = -(h_1 - h_2)(\ln\sqrt{\lambda})_v, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial u} = -(h_2 - h_1)(\ln\sqrt{\lambda})_u. \tag{1.2}$$

**Demonstração:** Neste caso, as 1-formas $\omega_1$ e $\omega_2$, conforme definidas na seção anterior, são dadas por $\omega_1 = \sqrt{\lambda}du$ e $\omega_2 = \sqrt{\lambda}dv$. Por diferenciação, obtemos

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= -(\sqrt{\lambda})_v du \wedge dv, \\ d\omega_2 &= (\sqrt{\lambda})_u du \wedge dv. \end{aligned}$$

Por outro lado, consideremos as equações de estrutura

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_2 \wedge \omega_{21}, \\ d\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_{12}. \end{aligned}$$

Escrevendo $\omega_{12} = A\omega_1 + B\omega_2$ e substituindo nas equações de estrutura, obtemos

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \sqrt{\lambda}dv \wedge (-A\sqrt{\lambda}du - B\sqrt{\lambda}dv) = A\lambda du \wedge dv, \\ d\omega_2 &= \sqrt{\lambda}du \wedge (A\sqrt{\lambda}du + B\sqrt{\lambda}dv) = B\lambda du \wedge dv. \end{aligned}$$

Logo, $A = -\frac{(\sqrt{\lambda})_v}{\lambda}$ e $B = \frac{(\sqrt{\lambda})_u}{\lambda}$. Agora, consideremos as seguintes relações, conforme definidas anteriormente

$$\begin{aligned} d\omega_{13} &= \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \\ d\omega_{23} &= \omega_{21} \wedge \omega_{13}. \end{aligned}$$

Substituindo $\omega_{13} = h_1\omega_1$ e $\omega_{23} = h_2\omega_2$, nestas equações obtemos

$$\begin{aligned} d\omega_{13} &= (A\sqrt{\lambda}du + B\sqrt{\lambda}dv) \wedge h_2\sqrt{\lambda}dv = A\lambda h_2 du \wedge dv, \\ d\omega_{23} &= (-A\sqrt{\lambda}du - B\sqrt{\lambda}dv) \wedge h_1\sqrt{\lambda}du = B\lambda h_1 du \wedge dv. \end{aligned}$$

Por outro lado, diferenciando $\omega_{13} = h_1\sqrt{\lambda}du$ e $\omega_{23} = h_2\sqrt{\lambda}dv$, temos

$$
\begin{aligned}
d\omega_{13} &= dh_1 \wedge (\sqrt{\lambda}du) + h_1 d(\sqrt{\lambda}du) \\
&= \left[\frac{\partial h_1}{\partial u}du + \frac{\partial h_1}{\partial v}dv\right] \wedge \sqrt{\lambda}du + h_1\left[(\sqrt{\lambda})_u du + (\sqrt{\lambda})_v dv\right] \wedge du \\
&= -\frac{\partial h_1}{\partial v}\sqrt{\lambda}du \wedge dv - h_1(\sqrt{\lambda})_v du \wedge dv.
\end{aligned}
$$

Logo, $d\omega_{13} = \left(-\frac{\partial h_1}{\partial v}\sqrt{\lambda} - h_1(\sqrt{\lambda})_v\right) du \wedge dv$. Analogamente,

$$
\begin{aligned}
d\omega_{23} &= dh_2 \wedge (\sqrt{\lambda}dv) + h_2 d(\sqrt{\lambda}dv) \\
&= \left[\frac{\partial h_2}{\partial u}du + \frac{\partial h_2}{\partial v}dv\right] \wedge \sqrt{\lambda}dv + h_2\left[(\sqrt{\lambda})_u du + (\sqrt{\lambda})_v dv\right] \wedge dv \\
&= \frac{\partial h_2}{\partial u}\sqrt{\lambda}du \wedge dv + h_2(\sqrt{\lambda})_u du \wedge dv.
\end{aligned}
$$

Assim, $d\omega_{23} = \left(\frac{\partial h_2}{\partial u}\sqrt{\lambda} + h_2(\sqrt{\lambda})_u\right) du \wedge dv$. Portanto, valem as identidades

$$
-\frac{\partial h_1}{\partial v}\sqrt{\lambda} - h_1(\sqrt{\lambda})_v = A\lambda h_2 = -(\sqrt{\lambda})_v h_2,
$$

$$
\frac{\partial h_2}{\partial u}\sqrt{\lambda} + h_2(\sqrt{\lambda})_u = B\lambda h_1 = (\sqrt{\lambda})_u h_1,
$$

que se reduzem a

$$
\frac{\partial h_1}{\partial v} = (h_2 - h_1)\frac{(\sqrt{\lambda})_v}{\sqrt{\lambda}},
$$

$$
\frac{\partial h_2}{\partial u} = (h_1 - h_2)\frac{(\sqrt{\lambda})_u}{\sqrt{\lambda}}.
$$

Portanto, valem as igualdades (1.1) e (1.2).

■

Citaremos, a seguir, três observações que serão utilizadas na demonstração do próximo lema desta seção.

**Observação 1.1.** Se $M^2 \subset \tilde{M}^3(\tilde{c})$ possui curvatura média constante, então devemos ter

$$
\frac{\partial h_1}{\partial u} = -\frac{\partial h_2}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial h_2}{\partial v} = -\frac{\partial h_1}{\partial v}.
$$

De fato, segue diretamente de $h_1 + h_2 = 2H \equiv$ cte.

**Observação 1.2.** Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva de classe $C^2$. Então,

$$\Delta(\ln f) = \frac{\Delta f}{f} - \frac{\mid \nabla f \mid^2}{f^2}$$

onde $\nabla$ denota o gradiente de $f$.

De fato, como

$$(\ln f)_u = \frac{1}{f} f_u,$$

segue que

$$(\ln f)_{uu} = \frac{f_{uu}}{f} - \frac{f_u^2}{f^2}.$$

De forma análoga, obtém-se

$$(\ln f)_{vv} = \frac{f_{vv}}{f} - \frac{f_v^2}{f^2}.$$

Logo,

$$\Delta(\ln f) = \frac{f_{uu}}{f} - \frac{f_u^2}{f^2} + \frac{f_{vv}}{f} - \frac{f_v^2}{f^2} = \frac{\Delta f}{f} - \frac{\mid \nabla f \mid^2}{f^2}.$$

**Observação 1.3.** Vale a relação

$$\sqrt{H^2 - (K - \tilde{c})} = \frac{h_1 - h_2}{2} = h_1 - H,$$

com $h_1 \geq h_2$.

De fato, notemos que

$$H^2 - (K - \tilde{c}) = \left[\frac{h_1 + h_2}{2}\right]^2 - h_1 h_2 = \frac{h_1^2 + 2h_1 h_2 + h_2^2 - 4h_1 h_2}{4} = \frac{(h_1 - h_2)^2}{4}.$$

Agora, como $H = \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}$, segue que

$$\frac{h_1 - h_2}{2} = \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2} = \frac{h_1}{2} + \frac{h_1}{2} - H = h_1 - H.$$

**Lema 1.2.** *Numa região sem pontos umbílicos de uma subvariedade bidimensional $M^2 \subset \tilde{M}^3(\tilde{c})$ com métrica $I$ e curvatura média constante, a métrica $\overline{I}$, definida por*

$$\overline{I} := \sqrt{H^2 - (K - \tilde{c})}\; I$$

*é plana.*

**Demonstração:** Suponha que a parametrização de $M^2$ seja isotérmica, isto é, a primeira forma fundamental é escrita localmente como

$$I = \lambda(u, v)\{du^2 + dv^2\}.$$

Neste caso, a curvatura gaussiana é dada por

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta(\ln\lambda).$$

Consideremos a métrica $\overline{I} = \sqrt{H^2 - (K - \tilde{c})}\ I$. Seja $\overline{K}$ a curvatura gaussiana na métrica $\overline{I}$. Dessa forma temos

$$\overline{K} = -\frac{1}{2W\lambda(u,v)}\Delta\left[\ln(W\lambda(u,v))\right] \tag{1.3}$$

onde $W = \sqrt{H^2 - (K - \tilde{c})}$. Devemos provar que $\Delta\left[\ln(W\lambda(u,v))\right] = 0$. Por uma propriedade das funções logarítmicas e pela linearidade do operador laplaciano, obtemos

$$\Delta\left[\ln(W\lambda(u,v))\right] = \Delta[\ln W + \ln\lambda] = \Delta(\ln W) + \Delta(\ln\lambda). \tag{1.4}$$

Calculemos $\Delta(\ln W)$. Pela Observação 1.3, temos $W = h_1 - H$. Segue da Observação 1.2 que

$$\Delta(\ln W) = \frac{\Delta(h_1 - H)}{h_1 - H} - \frac{|\nabla(h_1 - H)|^2}{(h_1 - H)^2}.$$

Como $H \equiv$ cte, vale $\Delta(h_1 - H) = \Delta h_1$. Pela Proposição 1.1, temos

$$\frac{\partial h_1}{\partial v} = (h_2 - h_1)(\ln\sqrt{\lambda})_v = 2(H - h_1)(\ln\sqrt{\lambda})_v. \tag{1.5}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h_1}{\partial v^2} &= 2\left[-\frac{\partial h_1}{\partial v}(\ln\sqrt{\lambda})_v + (H - h_1)(\ln\sqrt{\lambda})_{vv}\right] \\
&= -4(H - h_1)\left[(\ln\sqrt{\lambda})_v\right]^2 + 2(H - h_1)(\ln\sqrt{\lambda})_{vv}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{h_1 - H}\frac{\partial^2 h_1}{\partial v^2} = 4\left[(\ln\sqrt{\lambda})_v\right]^2 - 2(\ln\sqrt{\lambda})_{vv}. \tag{1.6}$$

Por outro lado, da Observação 1.1, $\dfrac{\partial h_1}{\partial u} = -\dfrac{\partial h_2}{\partial u}$. Pela Proposição 1.1, obtemos

$$-\frac{\partial h_2}{\partial u} = (h_2 - h_1)(\ln\sqrt{\lambda})_u = 2(H - h_1)(\ln\sqrt{\lambda})_u. \tag{1.7}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h_1}{\partial u^2} &= 2\left[-\frac{\partial h_1}{\partial u}(\ln\sqrt{\lambda})_u + (H - h_1)(\ln\sqrt{\lambda})_{uu}\right] \\
&= 4(h_1 - H)\left[(\ln\sqrt{\lambda})_u\right]^2 - 2(h_1 - H)(\ln\sqrt{\lambda})_{uu}.
\end{aligned}$$

Donde segue que

$$\frac{1}{h_1 - H}\frac{\partial^2 h_1}{\partial u^2} = 4\left[(\ln\sqrt{\lambda})_u\right]^2 - 2(\ln\sqrt{\lambda})_{uu}. \tag{1.8}$$

Somando as identidades (1.6) e (1.8), obtemos

$$\frac{\Delta(h_1 - H)}{h_1 - H} = 4\left[(\ln\sqrt{\lambda})_v\right]^2 - 2(\ln\sqrt{\lambda})_{vv} + 4\left[(\ln\sqrt{\lambda})_u\right]^2 - 2(\ln\sqrt{\lambda})_{uu}. \tag{1.9}$$

As derivadas parciais (1.5) e (1.7) podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\frac{1}{H - h_1}\frac{\partial h_1}{\partial v} &= 2(\ln\sqrt{\lambda})_v,\\ \frac{1}{H - h_1}\frac{\partial h_1}{\partial u} &= 2(\ln\sqrt{\lambda})_u.\end{aligned}$$

Elevando ao quadrado as relações anteriores e somando, obtemos

$$\frac{|\nabla h_1|^2}{(H - h_1)^2} = 4\left[(\ln\sqrt{\lambda})_v\right]^2 + 4\left[(\ln\sqrt{\lambda})_u\right]^2. \tag{1.10}$$

De (1.9) e (1.10) segue que

$$\frac{\Delta(h_1 - H)}{h_1 - H} - \frac{|\nabla(h_1 - H)|^2}{(H - h_1)^2} = -2(\ln\sqrt{\lambda})_{vv} - 2(\ln\sqrt{\lambda})_{uu}.$$

Logo,

$$\Delta(\ln W) = -2\Delta(\ln\sqrt{\lambda}) = -\Delta(\ln\lambda).$$

Portanto, por (1.4), obtemos

$$\Delta\left[\ln(W\lambda(u, v))\right] = 0.$$

Assim, $\overline{K} = 0$ por (1.3). Conseqüentemente, $\overline{I}$ é uma métrica plana.

■

Observamos que, quando $\tilde{c} = 0$ o lema anterior foi provado por Klotz e Osserman [13]. Observamos ainda que Lawson [14] provou o lema anterior utilizando outra abordagem.

O próximo resultado é também uma extensão a formas espaciais $\tilde{M}^3(\tilde{c})$ de um lema provado por Klotz e Osserman [13] no $\mathbb{R}^3$.

**Lema 1.3.** *Seja $M^2$ uma subvariedade bidimensional completa de $\tilde{M}^3(\tilde{c})$ com curvatura média constante $H = c$ e curvatura gaussiana $K$. Se $(H^2 - (K - \tilde{c})) \geq \epsilon^2$ para um $\epsilon > 0$ fixado, então $M^2$ é conformemente o plano, o plano menos um ponto, ou o toro plano.*

**Demonstração:** Como $M^2$ é completa na métrica $I$, temos que $M^2$ é também completa na métrica conforme $\epsilon I$. Mas como $\epsilon \leq \sqrt{H^2 - (K - \tilde{c})}$, a métrica plana $\tilde{I} = \sqrt{H^2 - (K - \tilde{c})}I$ é também completa em $M^2$, pela caracterização da completude por meio do comprimento das curvas divergentes; observamos ainda que a hipótese $H^2 - (K - \tilde{c}) \geq \epsilon^2$ garante a não existência de pontos umbílicos sobre $M^2$.
Portanto, o recobrimento universal $\sum$ de $M^2$ com a métrica do recobrimento é completo e possui curvatura gaussiana nula, ou seja, $\sum$ é isométrico ao $\mathbb{R}^2$ com a métrica canônica. Logo, $M^2 = \mathbb{R}^2/\Gamma$ onde $\Gamma$ é um subgrupo do grupo das isometrias de $\mathbb{R}^2$ que age de forma propriamente descontínua em $\mathbb{R}^2$. Essas subvariedades são o plano, o cilindro, o toro, a faixa de Möbius e a garrafa de Klein, mas desconsideramos aqui as duas últimas por não serem orientáveis.
Portanto, $M^2$ com a métrica $I$ é conformemente o plano, o cilindro (topologicamente um plano menos um ponto) ou o toro plano.

■

## 1.3 Funções subharmônicas e superfícies parabólicas

Faremos, nesta seção, uma breve introdução ao estudo das funções subharmônicas e das superfícies parabólicas. Maiores informações podem ser obtidas em [1].

**Definição 1.1.** Uma função real $f$ é dita ser *subharmônica* numa região plana $P$ se satisfaz as seguintes condições:

1. $f$ é semi-contínua superiormente em $P$, isto é, $f(x) \geq \overline{\lim}_{y \to x} f(y)$;

2. Para qualquer função $g$ harmônica em uma região $P' \subset P$, a diferença $f - g$ ou é constante ou não atinge um máximo em $P'$.

Dizemos que $f$ é *superharmônica* se $-f$ é subharmônica. Uma função harmônica é simultaneamente subharmônica e superharmônica.

O seguinte teorema nos fornece um critério mais simples para verificar se uma dada função é superharmônica ou subharmônica.

**Teorema 1.1.** *Sejam $U$ um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $f : U \to \Re$ uma função de classe $C^2$. Se $\Delta f \leq 0$, então $f$ é superharmônica.*

**Corolário 1.1.** *Se $\Delta f \geq 0$, então $f$ é subharmônica.*

**Observação 1.4.** A definição de subharmonicidade é de caráter local. Em outras palavras, se uma função é subharmônica em uma vizinhança de todo ponto de $W$, então ela é subharmônica em $W$. O caráter subharmônico é invariante por aplicação conforme. Se $\varphi$ aplica $W$ conformemente em $W_1$, então $f = f_1 \circ \varphi$ é subharmônica junto com $f_1$.

O próximo lema é um resultado encontrado em [13].

**Lema 1.4.** *Seja $M^2$ uma variedade riemanianna bidimensional. Suponha que em um domínio $D$ de $M^2$ as coordenadas $u$, $v$ são isotérmicas, isto é, a primeira forma fundamental $I$ é dada por*

$$I = \lambda(u,v)\{du^2 + dv^2\}.$$

*Se $K \geq 0$ ($K \leq 0$) em $D$, então a função $\ln\lambda$, com $\lambda = \lambda(u,v)$, é superharmônica (subharmônica) sobre $D$.*

**Demonstração:** A Equação

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2,$$

quando a parametrização é ortogonal ($F = 0$), fornece a seguinte expressão para a curvatura gaussiana:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right\}.$$

Neste caso, $E = G = \lambda(u,v)$. Conseqüentemente, $\lambda = \sqrt{EG}$. Logo,

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{2\lambda}\left\{\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v + \left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u\right\} \\ &= -\frac{1}{2\lambda}\left\{[(\ln\lambda)_v]_v + [(\ln\lambda)_u]_u\right\} \\ &= -\frac{1}{2\lambda}\left\{(\ln\lambda)_{vv} + (\ln\lambda)_{uu}\right\}. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\bigtriangleup(\ln\lambda).$$

Portanto, se $K \geq 0$, então $\bigtriangleup(\ln\lambda) \leq 0$, que implica $\ln\lambda$ ser superharmônica. Se $K \leq 0$, então $\bigtriangleup(\ln\lambda) \geq 0$, ou seja, $\ln\lambda$ é subharmônica.

■

**Definição 1.2.** Uma superfície $M^2$ é dita ser *parabólica* se não existem funções subharmônicas negativas não-constantes definidas sobre $M^2$.

**Observação 1.5.** O plano, o plano menos um ponto e o toro plano são superfícies parabólicas.

**Observação 1.6.** Uma superfície completa $M^2 \subset \mathbb{H}^3(-1)$ com $H = c \neq 0$ e $K \leq -1$ é parabólica. De fato, a superfície satisfaz as hipóteses do Lema 1.3 para $\epsilon = \mid c \mid$. Então, $M^2$ é parabólica pela Observação 1.5.

**Observação 1.7.** Uma função $f$ subharmônica com $\Delta f \geq 0$ (resp. superharmônica com $\Delta f \leq 0$) limitada superiormente (resp. inferiormente) em uma superfície parabólica $M^2$ deve ser constante. De fato, consideremos $f$ uma função subharmônica com $\Delta f \geq 0$, limitada superiormente ($f < m$, para algum $m \in \mathbb{R}$), definida em uma superfície parabólica $M^2$. Temos que a função $g$ definida por $g = f - m$ é negativa, subharmônica e está definida em $M^2$. Como $M^2$ é parabólica, temos que $g$ deve ser constante, o que implica que $f$ deve ser constante. Analogamente, podemos verificar que uma função superharmônica com $\Delta f \leq 0$ limitada inferiormente em uma superfície parabólica $M^2$ também deve ser constante.

## 1.4 Resultado principal

Nesta seção, vamos considerar superfícies completas em $\mathbb{H}^3(-1)$, de curvatura média constante, cuja curvatura gaussiana $K$ satisfaz $K \leq -1$. Nestas condições, vamos provar que a superfície é mínima, utilizando os resultados das seções anteriores.

Iniciaremos esta seção com a seguinte observação:

**Observação 1.8.** Se $M^2 \subset \mathbb{H}^3(-1)$ é mínima, então a curvatura gaussiana $K$ satisfaz $K \leq -1$.

De fato, a curvatura gaussiana $K$ é definida por

$$K - \tilde{c} = h_1 h_2,$$

onde $h_1$, $h_2$ são as curvaturas principais e $\tilde{c} = -1$. Como $H = \frac{h_1+h_2}{2} \equiv 0$, temos que $h_1 = -h_2$. Logo, $K + 1 \leq 0$. Portanto, $K \leq -1$.

A próxima proposição estabelece condições para que a recíproca seja verdadeira.

**Proposição 1.2.** *Uma superfície completa $M^2$ em $\mathbb{H}^3(-1)$ com $H \equiv c$, sobre a qual $K \leq -1$, é uma superfície mínima.*

**Demonstração:** Suponha, por contradição, $H \equiv c \neq 0$. Como $M$ é completa, pela Observação 1.6 temos que $M^2$ é uma superfície parabólica. Segue do Lema 1.2 que a métrica $\sqrt{H^2 - (K+1)}I$ é plana. Logo, existem coordenadas locais $u$, $v$ tal que

$$\sqrt{H^2 - (K+1)}I = du^2 + dv^2.$$

Assim,

$$I = \frac{1}{\sqrt{H^2 - (K+1)}}\{du^2 + dv^2\}. \tag{1.11}$$

Segue do Lema 1.4, que $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{H^2-(K+1)}}\right)$ é subharmônica com

$$\Delta \ln\left(\frac{1}{\sqrt{H^2-(K+1)}}\right) \geq 0.$$

Como,

$$\Delta \ln\left(\frac{1}{\sqrt{H^2-(K+1)}}\right) = \Delta\left(-\frac{1}{2}\ln\big(H^2-(K+1)\big)\right) = -\frac{1}{2}\Delta \ln\big(H^2-(K+1)\big) \geq 0,$$

obtemos que $\Delta \ln(H^2-(K+1)) \leq 0$, ou seja, $\ln(H^2-(K+1))$ é uma função superharmônica. Além disso, como $H = c \neq 0$ e $K \leq -1$, temos

$$H^2-(K+1) = c^2-(K+1) \geq c^2,$$

que implica $\ln(H^2-(K+1)) \geq \ln(c^2) \neq -\infty$. Portanto, $\ln(H^2-(K+1))$ é uma função superharmônica limitada inferiormente. Segue, pela Observação 1.7, que $\ln(c^2-(K+1))$ deve ser uma função constante e, portanto, $K$ é constante. Logo, da expressão (1.11), obtemos que a métrica $I$ é plana, e portanto, $K = 0$ (absurdo).
Portanto, $M^2$ deve ser mínima.

■

Segue da proposição anterior que

**Proposição 1.3.** *Seja $M^2 \subset \mathbb{H}^3(-1)$ completa com $H \equiv cte$. Então, $M^2$ é mínima se, e somente se, $K \leq -1$.*

# Capítulo 2

# Subvariedades com vetor curvatura média paralelo

Neste capítulo, vamos provar os resultados principais do nosso trabalho, que mostram que podemos reduzir a codimensão de uma dada imersão isométrica em uma forma espacial, quando o vetor curvatura média é paralelo no fibrado normal e o comprimento da segunda forma fundamental satisfaz certas condições.

Estão listadas, na próxima seção, as principais ferramentas que serão utilizadas no decorrer do capítulo.

## 2.1 Preliminares

Seja $\Phi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica de uma variedade diferenciável $M$ de dimensão $n$ em uma forma espacial $\tilde{M}$ de dimensão $n+p$ com curvatura seccional constante $\tilde{c}$. Para todas a fórmulas locais podemos considerar $\Phi$ como sendo localmente um mergulho e identificamos $x \in M$ com $\Phi(x) \in \tilde{M}$. Neste contexto, o espaço tangente $T_xM$ é identificado com um subespaço de $T_x\tilde{M}$. O espaço normal (ou fibrado normal) $T_x^{\perp}M$ é o subespaço de $T_x\tilde{M}$ que consiste de todos $\xi \in T_x\tilde{M}$ que são ortogonais a $T_xM$ com respeito a métrica $\tilde{g}$ de $\tilde{M}$. Denotemos por $\chi(M)$ e $\chi(M)^{\perp}$, os conjuntos dos campos de vetores de classe $C^{\infty}$, tangentes e normais a $M$, respectivamente. Sejam $\nabla$ e $\tilde{\nabla}$ as conexões Riemannianas de $M$ e $\tilde{M}$, respectivamente. Denotemos por $D^{\perp}$ a conexão do fibrado normal.

Para cada $\xi \in T_x^{\perp}M$ definimos uma transformação linear em $T_xM$ da seguinte forma: Estenda $\xi$ a uma vizinhança de $x$, obtendo um campo vetorial normal e defina $-A_{\xi}(X)$ como sendo a componente tangente de $\tilde{\nabla}_X\xi$, para $X \in T_xM$. Vale a seguinte fórmula

$$\tilde{\nabla}_X\xi = -A_{\xi}(X) + D_X^{\perp}\xi. \tag{2.1}$$

$A_{\xi}(X)$ depende apenas de $\xi$ em $x$ e $X$. Dada uma base ortonormal $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p$ de $T_x^{\perp}M$, denotamos $A_{\alpha} = A_{\xi_{\alpha}}$ e dizemos que $A_1, A_2, \cdots, A_p$ são as segundas formas fundamentais associadas a $\xi_1$, $\xi_2$, $\cdots$, $\xi_p$. Se $\xi_1$, $\xi_2$, $\cdots$, $\xi_p$ são campos ortonormais em uma vizinhança de $x$, então definimos as formas de conexão normal $S_{\alpha\beta}$ por

$$D_X^{\perp}\xi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} S_{\alpha\beta}(X)\xi_\beta, \tag{2.2}$$

onde $X \in \chi(M)$. Vale a igualdade $S_{\alpha\beta} + S_{\beta\alpha} = 0$, para quaisquer $\alpha$ e $\beta$.

**Definição 2.1.** Um vetor $\xi$ normal a $M$ é dito *paralelo no fibrado normal*, ou simplesmente paralelo, se $D_X^{\perp}\xi = 0, \forall\ X \in \chi(M)$.

A segunda forma fundamental $h$ de $M$ é definida por

$$h(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

Vale a identidade

$$\tilde{g}\left(h(X,Y),\xi\right) = g\left(A_\xi(X),Y\right)$$

onde $X, Y \in \chi(M)$ e $\xi \in \chi(M)^{\perp}$.

Sejam $E_1$, $E_2$, $\cdots$, $E_n$ vetores ortonormais tangentes a $M$ em $x \in M$ e $\xi_1$, $\xi_2$, $\cdots$, $\xi_p$ vetores ortonormais normais a $M$ em $x$. Então,

$$H = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{p}(\mathrm{tr}A_\alpha)\xi_\alpha$$

é um vetor normal em $x$ que independe da escolha da base ortonormal $E_1$, $E_2$, $\cdots$, $E_n$,$\xi_1$, $\xi_2$, $\cdots$, $\xi_p$ de $T_x\tilde{M}$, onde

$$\mathrm{tr}A_\alpha = \sum_{i=1}^{n} g\left(A_\alpha(E_i),E_i\right).$$

O vetor $H$ é chamado o vetor curvatura média da imersão $\Phi$.

**Definição 2.2.** Dada uma base ortonormal $\xi_1$, $\xi_2$, $\cdots$, $\xi_p$ de $T_x^{\perp}M$, definimos o *comprimento da segunda forma fundamental* de $M$, em $x$, por

$$\langle h\rangle^2 = \sum_{\alpha=1}^{p}\mathrm{tr}A_\alpha^2. \tag{2.3}$$

**Observação 2.1.** A expressão $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{p}\mathrm{tr}A_\alpha^2$ independe da escolha da base ortonormal de $T_x^{\perp}M$.

De fato, considerando o tensor de Ricci de $M$, vale

$$\text{Ricc}\ g = (n-1)\tilde{c}I + \sum_{\alpha=1}^{p}(\text{tr}A_\alpha)A_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{p}A_\alpha^2$$

onde $I$ é aplicação identidade. A curvatura escalar $S$ é dada por

$$S = n(n-1)\tilde{c} + \sum_{\alpha=1}^{p}(\text{tr}A_\alpha)^2 - \sum_{\alpha=1}^{p}\text{tr}A_\alpha^2,$$

que pode ser escrita como

$$S = n(n-1)\tilde{c} + n^2\tilde{g}(H,H) - \sum_{\alpha=1}^{p}\text{tr}A_\alpha^2$$

onde $\tilde{g}$ é a métrica de $\tilde{M}$ e $H$ é o vetor curvatura média. Observemos que a última expressão implica que o comprimento da segunda forma fundamental definido por (2.3) independe da escolha da base ortonormal de $T_x^\perp M$.

O operador curvatura $R$ de uma variedade Riemanniana $N$ é uma correspondência que associa, a cada par $X, Y \in \chi(N)$, uma aplicação $R(X,Y) : \chi(N) \longrightarrow \chi(N)$ definida por

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Seja $\tilde{R}$ o operador curvatura de $\tilde{M}$. A equação de Ricci é dada por

$$-\langle \tilde{R}(X,Y)\xi, \eta\rangle + \langle R^\perp(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle \tag{2.4}$$

onde $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$ e

$$R^\perp(X,Y)\xi = D_X^\perp D_Y^\perp \xi - D_Y^\perp D_X^\perp - D_{[X,Y]}^\perp \xi.$$

Denotemos por $\nabla^*$ a soma das conexões normal e tangente. $\nabla^*$ é a conexão na soma de Whitney do fibrado tangente e do fibrado normal de $M$ induzidos por $\nabla$ e $D^\perp$. Então,

$$\nabla_X^* A_\alpha = \nabla_X A_\alpha - \sum_{\beta=1}^{p} S_{\alpha\beta}(X)A_\beta. \tag{2.5}$$

## 2.2 Vetor curvatura média paralelo para hipersuperfícies

Veremos, nesta seção, que no caso de hipersuperfícies (codimensão $p$ igual a 1), o vetor curvatura média $H$ ser paralelo é equivalente ao módulo da curvatura média $\mid H \mid$ ser constante.

Seja $\Phi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica. Consideremos um referencial ortonormal $E_1, \cdots, E_n, \xi_1, \cdots, \xi_p$ de $T\tilde{M}$ definido numa vizinhança de $p \in \tilde{M}$ tal que $E_1, \cdots, E_n$ são tangentes a $M$ . A matriz da segunda forma fundamental, na direção de $\xi_\alpha$, é definida por

$$h_{ij}^\alpha = \langle h(E_i, E_j), \xi_\alpha \rangle.$$

Então, o vetor curvatura média, conforme definido na seção anterior, se expressa na forma

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i,\alpha} h_{ii}^\alpha \xi_\alpha.$$

No caso particular, onde a codimensão $p$ é igual a 1, temos uma única direção normal $\xi_{n+1}$. Logo, o vetor curvatura média é escrito como

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1} \xi_{n+1}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \mid H \mid^2 = \langle H, H \rangle &= \langle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1} \xi_{n+1}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1} \xi_{n+1} \rangle \\ &= \left[ \frac{\sum_{i=1}^{n} h_{ii}^{n+1}}{n} \right]^2. \end{aligned}$$

Neste caso, o comprimento $\mid H \mid$ do vetor curvatura média coincide com o módulo da curvatura média, que a menos de sinal é a média aritmética dos autovalores da segunda forma fundamental. Se $D^\perp H \equiv 0$, então $\mid H \mid \equiv$ cte e, portanto, a curvatura média é constante. Vale a recíproca, isto é, se $\mid H \mid$ é constante, então $H$ é paralelo, pois dado qualquer campo tangente $X$ ocorre

$$0 = X \mid H \mid^2 = X \langle H, H \rangle = 2 \langle D_X^\perp H, H \rangle.$$

Logo, $D_X^\perp H \equiv 0$, ou seja, $H$ é paralelo.

Assim, em casos onde a codimensão é maior que 1, é natural impor a condição $D^\perp H \equiv 0$ (vetor curvatura média paralelo) que é equivalente a curvatura média $\mid H \mid$ constante quando a codimensão é reduzida a 1.

## 2.3 Resultado preliminar

Erbacher calculou em [10] o laplaciano da função $f = \langle h \rangle^2$, conforme definida em (2.3), quando o vetor curvatura média $H$ é paralelo no fibrado normal. Considerando campos de vetores ortonormais $\xi_1, \cdots, \xi_p$ normais a $M$ tal que $\xi_1$ está na direção de $H$, vamos obter o laplaciano de $\mid T \mid^2 = \sum_{\alpha=2}^{p} \mathrm{tr} A_\alpha^2$, que será de fundamental importância para provar os principais resultados do capítulo. Erbacher provou o seguinte lema:

**Lema 2.1.** *(Erbacher)*
*Seja $\Phi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica. Considere $\xi_\alpha$, $\alpha = 1, \cdots, p$, campos ortonormais, normais a $M$. Se o vetor curvatura média $H$ é paralelo no fibrado normal, então*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta f &= \tilde{c}nf - \tilde{c}\sum_{\alpha=1}^{p}(trA_\alpha)^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} tr[A_\alpha, A_\beta]^2 \\ &+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{p}(trA_\alpha)(trA_\alpha A_\beta^2) - \sum_{\alpha,\beta=1}^{p}(trA_\alpha A_\beta)^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \| \nabla^* A_\alpha \|^2\end{aligned}$$

*onde $f = \langle h\rangle^2$ é o comprimento da segunda forma fundamental, $\Delta$ é o laplaciano, $A_\alpha$ é a segunda forma fundamental associada a $\xi_\alpha$ e $\nabla^*$ é definido por (2.5).*

Escolheremos, a seguir, campos de vetores $\xi_1$, $\xi_2$, $\cdots$, $\xi_p$ de forma que $\xi_1$ possui a mesma direção de $H$ e, em seguida, obteremos uma aplicação do Lema 2.1.

Suponhamos, que o vetor curvatura média seja não-nulo em qualquer ponto de $M$, isto é, $\mid H \mid \neq 0$ em $M$. Assim, podemos escolher campos de vetores ortonormais $\xi_1$, $\xi_2$,$\cdots$,$\xi_p$ normais a $M$ tal que

$$H = \mid H \mid \xi_1.$$

Dessa forma, valem as seguintes relações:

$$\mathrm{tr}A_1 = n \mid H \mid \tag{2.6}$$

$$\mathrm{tr}A_\alpha = 0,\ \alpha = 2, 3, \cdots, p. \tag{2.7}$$

Consideremos a função

$$\mid T \mid^2 = \sum_{\alpha=2}^{p} \mathrm{tr}A_\alpha^2, \tag{2.8}$$

definida globalmente em $M$. O próximo lema exibe a expressão para o laplaciano de $\mid T \mid^2$.

**Lema 2.2.** *Seja $\Phi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica. Suponha que o vetor curvatura média $H$, não-nulo em qualquer ponto de $M$, seja paralelo no fibrado normal. Sejam $\xi_1, \cdots, \xi_p$ ortonormais em $T^\perp M$ e tal que $H = \mid H \mid \xi_1$. Definindo $\mid T \mid^2 = \sum_{\alpha=2}^{p} trA_\alpha^2$, tem-se*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 &= \sum_{\alpha=2}^{p}\left\{(trA_1)(trA_1A_\alpha^2) - (trA_1A_\alpha)^2\right\} \\ &- \sum_{\alpha,\beta=2}^{p}\left\{tr[A_\alpha, A_\beta]^t[A_\alpha, A_\beta] + (trA_\alpha A_\beta)^2\right\} + \tilde{c}n \mid T \mid^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \| \nabla^* A_\alpha \|^2 .\end{aligned} \tag{2.9}$$

Algumas observações serão importantes na prova do lema. A seguir, enunciaremos as principais.

**Observação 2.2.** Se o vetor curvatura média $H$ é paralelo, então $\mid H \mid$ é constante.

De fato, dado qualquer campo tangente $X$, temos

$$X\langle H, H\rangle = 2\langle D^{\perp}_X H, H\rangle = 0.$$

Logo, $\langle H, H\rangle$ é constante e, conseqüentemente, $\mid H \mid$ é constante.

**Observação 2.3.** As formas de conexão normal $S_{\alpha\beta}$, conforme definidas em (2.2), se anulam quando $\alpha = 1$.

De fato, conforme definimos nos preliminares,

$$D^{\perp}_X \xi_1 = \sum_{\beta=1}^{p} S_{1\beta}(X)\xi_\beta.$$

Como $\xi_1 = \frac{H}{|H|}$, segue que

$$D^{\perp}_X\left(\frac{H}{\mid H \mid}\right) = \frac{1}{\mid H \mid} D^{\perp}_X H + X\left(\frac{1}{\mid H \mid}\right) H = 0.$$

Como $H$ é paralelo e, pela Obervação 2.2, $\mid H \mid$ é constante, segue que $S_{1\beta} = 0$ para qualquer $\beta = 1, 2, \cdots, p$.

**Observação 2.4.** Se o vetor curvatura média é paralelo, então

$$A_1 A_\alpha = A_\alpha A_1, \text{ para todo } \alpha.$$

De fato, consideremos a equação de Ricci

$$-\langle \tilde{R}(X,Y)\xi, \eta\rangle + \langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle.$$

Como a curvatura seccional do espaço ambiente $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ é constante, a equação de Ricci se reduz a

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle.$$

Consideremos $\xi = \xi_1$ e $\eta = \xi_\alpha$. Assim, o primeiro membro torna-se

$$\tilde{g}\left(D^{\perp}_X D^{\perp}_Y \xi_1 - D^{\perp}_Y D^{\perp}_X \xi_1 - D^{\perp}_{[X,Y]}\xi_1, \xi_\alpha\right) = 0, \forall\, X, Y.$$

Logo, $[A_1, A_\alpha] = 0$ para todo $\alpha$.

**Observação 2.5.** Seja $B$ um tensor do tipo $1-1$ em $M^n$. Então, para $F = \mathrm{tr}B^2$, temos

$$\frac{1}{2}\Delta F = \mathrm{tr}\left((\Delta' B)B\right) + \parallel \nabla B \parallel^2$$

onde

$$(\Delta' B)(x) = \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 B(\ ; E_i, E_i),$$

$E_1$, $E_2$, $\cdots$ ,$E_n$ é uma base ortonormal de $T_xM$ e

$$\nabla^2 B(\ ; Y, X) = \nabla_X\left(\nabla_Y B\right) - \nabla_{\nabla_X Y} B.$$

**Demonstração do Lema 2.2:** Notemos, inicialmente, que de (2.8) temos

$$f = \sum_{\alpha=1}^{p} \mathrm{tr}A_\alpha^2 = \mathrm{tr}A_1^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \mathrm{tr}A_\alpha^2 = \mathrm{tr}A_1^2 + \mid T \mid^2 . \tag{2.10}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 = \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{2}\Delta(\mathrm{tr}A_1^2).$$

Agora, pelo Lema 2.1 de Erbacher, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 &= \tilde{c}nf - \tilde{c}\sum_{\alpha=1}^{p}(\mathrm{tr}A_\alpha)^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \mathrm{tr}[A_\alpha, A_\beta]^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} (\mathrm{tr}A_\alpha)(\mathrm{tr}A_\alpha A_\beta^2) \\
&\quad - \sum_{\alpha,\beta=1}^{p} (\mathrm{tr}A_\alpha A_\beta)^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2 - \frac{1}{2}\Delta(\mathrm{tr}A_1^2) \\
&= \tilde{c}nf - \tilde{c}\sum_{\alpha=1}^{p}(\mathrm{tr}A_\alpha)^2 + \sum_{\beta=2}^{p} \mathrm{tr}[A_1, A_\beta]^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \mathrm{tr}[A_\alpha, A_1]^2 + \sum_{\alpha,\beta=2}^{p} \mathrm{tr}[A_\alpha, A_\beta]^2 \\
&\quad + (\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1 A_1^2) + \sum_{\beta=2}^{p}(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1 A_\beta^2) + \sum_{\alpha=2}^{p}(\mathrm{tr}A_\alpha)(\mathrm{tr}A_\alpha A_1^2) \\
&\quad + \sum_{\alpha,\beta=2}^{p} (\mathrm{tr}A_\alpha)(\mathrm{tr}A_\alpha A_\beta^2) - (\mathrm{tr}A_1 A_1)^2 - \sum_{\beta=2}^{p}(\mathrm{tr}A_1 A_\beta)^2 - \sum_{\alpha=2}^{p}(\mathrm{tr}A_\alpha A_1)^2 \\
&\quad - \sum_{\alpha,\beta=2}^{p} (\mathrm{tr}A_\alpha A_\beta)^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2 - \frac{1}{2}\Delta(\mathrm{tr}A_1^2).
\end{aligned}$$

Pela Observação 2.4, $A_1 A_\alpha = A_\alpha A_1$, para qualquer $\alpha$; e $\mathrm{tr}A_\alpha = 0$ para $\alpha = 2,\cdots,p$, vemos que a terceira, a quarta, a oitava e a nona parcelas se anulam. Assim, agrupando-se os somatórios, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 &= \tilde{c}nf - \tilde{c}(\mathrm{tr}A_1)^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \left\{(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1 A_\alpha^2) - 2(\mathrm{tr}A_1 A_\alpha)^2\right\} \\
&\quad + \sum_{\alpha,\beta=2}^{p} \left\{\mathrm{tr}[A_\alpha, A_\beta]^2 - (\mathrm{tr}A_\alpha A_\beta)^2\right\} + (\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1 A_1^2) \\
&\quad - (\mathrm{tr}A_1 A_1)^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2 - \frac{1}{2}\Delta(\mathrm{tr}A_1^2).
\end{aligned}$$

Como $[A_\alpha, A_\beta]^t = -[A_\alpha, A_\beta]$, podemos escrever

$$\mathrm{tr}[A_\alpha, A_\beta]^2 = -\mathrm{tr}\left\{-[A_\alpha, A_\beta][A_\alpha, A_\beta]\right\} = -\mathrm{tr}\left\{[A_\alpha, A_\beta]^t\,[A_\alpha, A_\beta]\right\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 &= \tilde{c}nf - \tilde{c}(\mathrm{tr}A_1)^2 + \sum_{\alpha=2}^{p}\left\{(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2) - 2(\mathrm{tr}A_1A_\alpha)^2\right\} \\ &\quad - \sum_{\alpha,\beta=2}^{p}\left\{\mathrm{tr}[A_\alpha, A_\beta]^t\,[A_\alpha, A_\beta] + (\mathrm{tr}A_\alpha A_\beta)^2\right\} + (\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_1^2) \quad (2.11) \\ &\quad -(\mathrm{tr}A_1A_1)^2 + \sum_{\alpha=1}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2 - \frac{1}{2}\Delta(\mathrm{tr}A_1^2).\end{aligned}$$

Resta-nos estabelecer a expressão para $\Delta(\mathrm{tr}A_1^2)$. Seja $f_\alpha = \mathrm{tr}A_\alpha^2$. De acordo com a Observação 2.5, temos que

$$\frac{1}{2}\Delta f_\alpha = \mathrm{tr}\left((\Delta' A_\alpha)A_\alpha\right) + \parallel \nabla A_\alpha \parallel^2 . \tag{2.12}$$

Erbacher [10] obteve a seguinte expressão para $\Delta' A_\alpha$:

$$\begin{aligned}\Delta' A_\alpha &= n\tilde{c}A_\alpha - \tilde{c}(\mathrm{tr}A_\alpha)I + \sum_\beta(\mathrm{tr}A_\beta)A_\alpha A_\beta - \sum_\beta(\mathrm{tr}A_\beta A_\alpha)A_\beta \\ &\quad + \sum_\beta[A_\beta, A_\alpha A_\beta] + \sum_\beta A_\beta[A_\alpha, A_\beta] + \sum_{i,\beta}(\nabla_{E_i}S_{\alpha\beta})(E_i)A_\beta \qquad (2.13) \\ &\quad +2\sum_{i,\beta} S_{\alpha\beta}(E_i)\nabla_{E_i}A_\beta - \sum_{i,\beta,\gamma} S_{\alpha\beta}(E_i)S_{\beta\gamma}(E_i)A_\gamma.\end{aligned}$$

Logo, substituindo (2.13) em (2.12) e, usando propriedades da função traço, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta f_\alpha &= n\tilde{c}\mathrm{tr}A_\alpha^2 - \tilde{c}(\mathrm{tr}A_\alpha)^2 + \sum_\beta(\mathrm{tr}A_\beta)\mathrm{tr}(A_\alpha A_\beta A_\alpha) - \sum_\beta(\mathrm{tr}A_\beta A_\alpha)^2 \\ &\quad \sum_\beta \mathrm{tr}[A_\beta, A_\alpha A_\beta]A_\alpha + \sum_\beta \mathrm{tr}A_\beta[A_\alpha, A_\beta]A_\alpha + \sum_{i,\beta}(\nabla_{E_i}S_{\alpha\beta})(E_i)\mathrm{tr}A_\beta A_\alpha \quad (2.14) \\ &\quad +2\sum_{i,\beta} S_{\alpha\beta}(E_i)\mathrm{tr}(\nabla_{E_i}A_\beta)A_\alpha - \sum_{i,\beta,\gamma} S_{\alpha\beta}(E_i)S_{\beta\gamma}(E_i)\mathrm{tr}A_\gamma A_\alpha + \parallel \nabla A_\alpha \parallel^2 .\end{aligned}$$

Agora, considerando $\alpha = 1$ em (2.14), usando (2.7), as observações 2.3 e 2.4, e observando que $[A_\beta, A_1A_\beta]A_1 = A_\beta A_1 A_\beta A_1 - A_1 A_\beta A_\beta A_1 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta(\mathrm{tr}A_1^2) &= n\tilde{c}\mathrm{tr}A_1^2 - \tilde{c}(\mathrm{tr}A_1)^2 + (\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_1A_1) - (\mathrm{tr}A_1A_1)^2 \\ &\quad -\sum_{\beta=2}^{p}(\mathrm{tr}A_\beta A_1)^2 + \parallel \nabla A_1 \parallel^2 . \qquad (2.15)\end{aligned}$$

Substituindo (2.15) em (2.11) e usando (2.10), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 &= \tilde{c}n\mathrm{tr}A_1^2 + \tilde{c}n \mid T \mid^2 - \tilde{c}(\mathrm{tr}A_1)^2 - \sum_{\alpha=2}^{p}(\mathrm{tr}A_1A_\alpha)^2 \\
&+ \sum_{\alpha=2}^{p}\left\{(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2) - (\mathrm{tr}A_1A_\alpha)^2\right\} \\
&- \sum_{\alpha,\beta=2}^{p}\left\{\mathrm{tr}[A_\alpha, A_\beta]^t\,[A_\alpha, A_\beta] + (\mathrm{tr}A_\alpha A_\beta)^2\right\} \\
&+ (\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_1^2) - (\mathrm{tr}A_1A_1)^2 + \parallel \nabla^* A_1 \parallel^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2 \\
&- [n\tilde{c}\mathrm{tr}A_1^2 - \tilde{c}(\mathrm{tr}A_1)^2 + (\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_1A_1) - (\mathrm{tr}A_1A_1)^2 \\
&- \sum_{\beta=2}^{p}(\mathrm{tr}A_\beta A_1)^2 + \parallel \nabla A_1 \parallel^2].
\end{aligned}$$

Logo, segue de (2.5) que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 &= \sum_{\alpha=2}^{p}\left\{(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2) - (\mathrm{tr}A_1A_\alpha)^2\right\} \\
&- \sum_{\alpha,\beta=2}^{p}\left\{\mathrm{tr}[A_\alpha, A_\beta]^t\,[A_\alpha, A_\beta] + (\mathrm{tr}A_\alpha A_\beta)^2\right\} + \tilde{c}n \mid T \mid^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2
\end{aligned} \tag{2.16}$$

o que conclui da demonstração do Lema 2.2.

■

Definindo as funções

$$N(A_\alpha) = \mathrm{tr}A_\alpha^t A_\alpha, \tag{2.17}$$

$$Z_{\alpha\beta} = \mathrm{tr}A_\alpha A_\beta, \tag{2.18}$$

podemos escrever (2.16) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 &= \sum_{\alpha=2}^{p}\left\{(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2) - (\mathrm{tr}A_1A_\alpha)^2\right\} \\
&- \sum_{\alpha,\beta=2}^{p}\left\{N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + Z_{\alpha\beta}^2\right\} + \tilde{c}n \mid T \mid^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2 .
\end{aligned} \tag{2.19}$$

## 2.4 Principais resultados utilizados

Enunciaremos, nesta seção, os principais resultados utilizados em nossas demonstrações. O primeiro lema citado é um resultado algébrico obtido por Chen [3].

**Lema 2.3.** *Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ e $b$, $n+1$ números reais ($n > 1$), satisfazendo a seguinte desigualdade*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + b \; (respect.\; >).$$

*Então, ocorre a desigualdade*

$$2a_i a_j \geq \frac{b}{n-1} \; (respect.\; >)$$

*para quaisquer $i$ e $j$ distintos.*

O lema seguinte é um importante resultado obtido por Li [15].

**Lema 2.4.** *Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_l$ matrizes simétricas $n \times n$. Então,*

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{l} \left\{N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + Z_{\alpha\beta}^2\right\} \leq \frac{3}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{l} N(A_\alpha)\right)^2,$$

*onde $N$ e $Z$ estão definidos em (2.17) e (2.18). A igualdade ocorre se, e somente se, vale uma das seguintes condições:*

1. $A_1 = A_2 = \cdots = A_l = 0$;

2. *Somente duas das matrizes $A_1, A_2, \cdots, A_l$ são diferentes da matriz nula. Além disso, assumindo $A_1 \neq 0$ e $A_2 \neq 0$, então $N(A_1) = N(A_2)$ e existe uma matriz ortogonal $T$ $n \times n$ tal que*

$$T^t A_1 T = \sqrt{\frac{L}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, T^t A_2 T = \sqrt{\frac{L}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   *onde $L = N(A_1)$.*

O seguinte teorema é uma generalização do princípio do máximo de Hopf, provado por Omori [19] e Yau [24], conhecido como o princípio do máximo generalizado.

**Teorema 2.1. (Princípio do Máximo Generalizado)**
*Seja $M$ uma variedade riemanniana, completa e conexa, com a curvatura de Ricci limitada inferiormente. Se uma função $f$ de classe $C^2$, definida em $M$, é limitada superiormente, então para cada $\epsilon > 0$, existe um ponto $x \in M$ tal que*

$$sup\, f - \epsilon < f(x),$$

$$\| \, grad f(x) \, \| < \epsilon,$$

$$\Delta f(x) < \epsilon.$$

Dada uma imersão isométrica $\Phi : M^n \longrightarrow \tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$, uma questão natural, é saber quando podemos reduzir a codimensão da imersão, isto é, quando existe uma subvariedade própria totalmente geodésica $N$ de $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ tal que $\Phi(M^n) \subset N$? O próximo teorema, provado por Erbacher [11], responde esta questão. Antes, consideremos a seguinte definição:

**Definição 2.3.** *O primeiro espaço normal $N_1(x)$ é o complemento ortogonal de*

$$\left\{\xi \in T_x^\perp M / A_\xi = 0\right\} \text{ em } T_x^\perp M.$$

**Teorema 2.2. (Erbacher)**
*Se o primeiro espaço normal $N_1(x)$ é invariante por translação paralela com respeito a conexão do fibrado normal e, $l$ é a dimensão constante de $N_1$, então existe uma subvariedade totalmente geodésica $N^{n+l}$ de $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ de dimensão $n+l$ tal que $\Phi(M^n) \subset N^{n+l}$.*

## 2.5 Resultados principais

Iniciaremos esta seção demonstrando o seguinte lema auxiliar:

**Lema 2.5.** *Seja $M^n$ uma subvariedade $(n \geq 3)$ em $\tilde{M}^{n+p}$. Suponha que o vetor curvatura média $H \neq 0$ seja paralelo no fibrado normal. Sejam $\xi_1, \cdots, \xi_p$ ortonormais em $T^\perp M$ e tal que $H = \mid H \mid \xi_1$. Se a segunda forma fundamental $h$ de $M$ satisfaz*

$$\langle h \rangle^2 \leq \frac{n^2 \mid H \mid^2}{n-1}, \tag{2.20}$$

*então:*

*a)* $P_1 := \sum_{\alpha=2}^{p} \left\{(trA_1)(trA_1A_\alpha^2) - (trA_1A_\alpha)^2\right\} \geq n\frac{\mid T \mid^4}{2}$;

*b) $M^n$ possui a curvatura de Ricci limitada inferiormente.*

**Demonstração:**
**a)** Como $\xi_1, \cdots, \xi_p$ são ortonormais em $T^\perp M$ e tal que $H = \mid H \mid \xi_1$, valem (2.6) e (2.7). Pela Observação 2.4, $A_1 A_\alpha = A_\alpha A_1$, para cada $\alpha$. Logo, $A_1$ e $A_\alpha$ podem ser diagonalizados simultaneamente. Sejam $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ e $\rho_1^\alpha, \rho_2^\alpha, \cdots, \rho_n^\alpha$ os autovalores de $A_1$ e $A_\alpha$, respectivamente. Observemos que para cada $\alpha$ fixo

$$\begin{aligned}
(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2) - (\mathrm{tr}A_1A_\alpha)^2 &= \left(\sum_{i=1}^n \rho_i\right)\left(\sum_{j=1}^n \rho_j(\rho_j^\alpha)^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n \rho_i\rho_i^\alpha\right)\left(\sum_{j=1}^n \rho_j\rho_j^\alpha\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \rho_i\rho_j(\rho_j^\alpha)^2 - \sum_{i,j=1}^n \rho_i\rho_j\rho_i^\alpha\rho_j^\alpha \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \rho_i\rho_j(\rho_j^\alpha)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \rho_j\rho_i(\rho_i^\alpha)^2 - \frac{2}{2}\sum_{i,j=1}^n \rho_i\rho_j\rho_i^\alpha\rho_j^\alpha.
\end{aligned}$$

Logo,

$$(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2) - (\mathrm{tr}A_1A_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\rho_i\rho_j(\rho_i^\alpha - \rho_j^\alpha)^2. \tag{2.21}$$

Por outro lado, a hipótese (2.20) equivale a

$$n^2 \mid H \mid^2 \geq (n-1)\left[\mathrm{tr}A_1^2 + \mid T \mid^2\right],$$

que pode ser escrita como

$$(n \mid H \mid)^2 \geq (n-1)\mathrm{tr}A_1^2 + (n-1) \mid T \mid^2 .$$

Como $\mathrm{tr}A_1 = n \mid H \mid$, obtemos a desigualdade

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\rho_i\right)^2 \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n}(\rho_i)^2 + (n-1) \mid T \mid^2 . \tag{2.22}$$

Considerando $b = (n-1) \mid T \mid^2$ no Lema 2.3, temos

$$2\rho_i\rho_j \geq \frac{(n-1) \mid T \mid^2}{n-1},\ i \neq j$$

ou seja,

$$\rho_i\rho_j \geq \frac{\mid T \mid^2}{2},\ i \neq j. \tag{2.23}$$

Utilizando a desigualdade (2.23) em (2.21), obtemos

$$\begin{aligned}
(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2) - (\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2) &\geq \frac{1}{4} \mid T \mid^2 \sum_{i,j=1}^{n}(\rho_i^\alpha - \rho_j^\alpha)^2 \\
&= \frac{1}{4} \mid T \mid^2 \sum_{i,j=1}^{n}\left\{(\rho_i^\alpha)^2 - 2\rho_i^\alpha\rho_j^\alpha + (\rho_j^\alpha)^2\right\} \\
&= \frac{1}{2} \mid T \mid^2 \left\{\sum_{i,j=1}^{n}(\rho_i^\alpha)^2 - \sum_{i,j=1}^{n}\rho_i^\alpha\rho_j^\alpha\right\} \\
&= \frac{\mid T \mid^2}{2} n\sum_{i=1}^{n}(\rho_i^\alpha)^2 - \frac{1}{2} \mid T \mid^2 \left(\sum_{i=1}^{n}\rho_i^\alpha\right)^2 . \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Logo,

$$(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2) - (\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2) \geq \frac{\mid T \mid^2}{2} n\ \mathrm{tr}A_\alpha^2 - \frac{1}{2} \mid T \mid^2 (\mathrm{tr}A_\alpha)^2, \text{para cada } \alpha.$$

Realizando o somatório em $\alpha$ de $\alpha = 2, \cdots, p$ e lembrando que $\mathrm{tr}A_\alpha = 0$, para cada $\alpha$, obtemos a desigualdade

$$P_1 := \sum_{\alpha=2}^{p}\left\{(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2) - (\mathrm{tr}A_1A_\alpha)^2\right\} \geq n\frac{\mid T \mid^4}{2}, \tag{2.25}$$

onde introduzimos a notação $P_1$. Portanto, o item a) está provado.
**b)** Seja $c = -n^2 \mid H \mid^2$. Como $\mathrm{tr}A_\alpha = 0$, para cada $\alpha = 2, \cdots, p$, temos para cada $\alpha$ fixo, $\alpha = 2, \cdots, p$

$$\begin{aligned}(n-1)\mathrm{tr}A_\alpha^2 + c &= (n-1)\mathrm{tr}A_\alpha^2 - n^2 \mid H \mid^2 \\ &\leq (n-1)\sum_{\beta=2}^{p}\mathrm{tr}A_\beta^2 - n^2 \mid H \mid^2 \\ &= (n-1) \mid T \mid^2 - n^2 \mid H \mid^2 \\ &\leq 0 = (\mathrm{tr}A_\alpha)^2.\end{aligned}$$

A última desigualdade segue da hipótese (2.20) e de $\mid T \mid^2 \leq \langle h \rangle^2$. A relação anterior, para cada $\alpha = 2, \cdots, p$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\rho_i^\alpha\right)^2 \geq (n-1)\sum_{i=1}^{n}(\rho_i^\alpha)^2 + c.$$

Assim, pelo Lema 2.3, temos

$$\rho_i^\alpha\rho_j^\alpha \geq \frac{c}{2(n-1)},\ i \neq j.$$

Já vimos, conforme (2.23), que

$$\rho_i\rho_j \geq \frac{\mid T \mid^2}{2},\ i \neq j.$$

Logo, a curvatura seccional de $M^n$ é limitada inferiormente. Conseqüentemente, $M^n$ possui curvatura de Ricci limitada inferiormente.

■

O próximo resultado provado nesta seção trata do caso $\tilde{c} \geq 0$. Observamos que, quando $\tilde{c} = 0$, obtemos o resultado provado por Cheng [4].

**Teorema 2.3.** *Seja $M^n$ uma subvariedade ($n \geq 3$), completa e conexa, em $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$, $\tilde{c} \geq 0$. Suponha que o vetor curvatura média $H \neq 0$ seja paralelo no fibrado normal. Se a segunda forma fundamental $h$ de $M$ satisfaz*

$$< h >^2 \leq \frac{n^2 \mid H \mid^2}{n-1}, \tag{2.26}$$

*então a codimensão se reduz a 1.*

**Demonstração:** Como $H(p) \neq 0, \forall p \in M$, podemos escolher vetores ortonormais $\xi_1$, $\xi_2, \cdots, \xi_p$ normais em $M$ tal que $\xi_1 = \frac{H}{|H|}$. Dessa forma valem (2.6) e (2.7). Definamos

$$\mid T \mid^2 = \sum_{\alpha=2}^{p}\mathrm{tr}A_\alpha^2.$$

Do Lema 2.2 (conforme a expressão (2.19)), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 &= \sum_{\alpha=2}^{p}\left\{(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2)-(\mathrm{tr}A_1A_\alpha)^2\right\}\\ &\quad -\sum_{\alpha,\beta=2}^{p}\left\{N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)+Z_{\alpha\beta}^2\right\}+\tilde{c}n \mid T \mid^2 + \sum_{\alpha=2}^{p}\parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2,\end{aligned}$$

onde $N$ e $Z_{\alpha\beta}$ estão definidas em (2.17) e (2.18). Temos, pelo Lema 2.5, que

$$P_1 := \sum_{\alpha=2}^{p}\left\{(\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2)-(\mathrm{tr}A_1A_\alpha)^2\right\} \geq n\frac{\mid T \mid^4}{2}.$$

Por outro lado, segue do Lema 2.4, que introduzindo a notação $P_2$,

$$P_2 := \sum_{\alpha,\beta=2}^{p}\left\{N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha)+Z_{\alpha\beta}^2\right\} \leq \frac{3}{2}\left(\sum_{\alpha=2}^{p}N(A_\alpha)\right)^2 = \frac{3}{2}\mid T \mid^4 . \tag{2.27}$$

Portanto,

$$P_1 - P_2 \geq \frac{(n-3)}{2}\mid T \mid^4 .$$

Donde segue que

$$\frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 = P_1 - P_2 + \tilde{c}n \mid T \mid^2 + \sum_{\alpha=2}^{p}\parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2 \geq P_1 - P_2 \geq \frac{(n-3)}{2}\mid T \mid^4, \tag{2.28}$$

já que $\tilde{c} \geq 0$.
Observemos que $M^n$ possui curvatura de Ricci limitada inferiormente (conforme o Lema 2.5). Assim, pelo Princípio do Máximo Generalizado (Teorema 2.1), aplicado para a função $\mid T \mid^2$ que é limitada superiormente por $\dfrac{n^2 \mid H \mid^2}{n-1}$, existe uma seqüência $\{x_k\} \subset M$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \mid T \mid^2 (x_k) = \sup \mid T \mid^2, \tag{2.29}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sup\Delta \mid T \mid^2 (x_k) \leq 0. \tag{2.30}$$

Logo, por (2.30), (2.28) e (2.29), respectivamente, obtemos

$$0 \geq \lim_{k\to\infty}\sup\Delta \mid T \mid^2 (x_k) \geq (n-3)\left(\lim_{k\to\infty} \mid T \mid^2 (x_k)\right)^2 = (n-3)\left(\sup \mid T \mid^2\right)^2 \geq 0.$$

Portanto,

$$(n-3)\left(\sup \mid T \mid^2\right)^2 = 0.$$

Se $n \geq 4$, então devemos ter

$$\mid T \mid^2 = \sum_{\alpha=2}^{p}\mathrm{tr}A_\alpha^2 = 0, \text{ em } M.$$

Logo, $\rho_1^\alpha = \cdots = \rho_n^\alpha = 0$, para cada $\alpha = 2, \cdots, p$. Portanto, $A_2 = A_3 = \cdots = A_p = 0$. Conseqüentemente, o primeiro espaço normal $N_1(x)$ é gerado por $\xi_1(x)$. Existe, pelo Teorema 2.2, uma subvariedade totalmente geodésica $N^{n+1}$ de $\tilde{M}^{n+p}(\tilde{c})$ de dimensão $n+1$ tal que $\Phi(M^n) \subset N^{n+1}$, ou seja, a codimensão se reduz a 1.

**(Caso** $n = 3$**)** Agora, suponhamos $n = 3$. De (2.28) temos que $\Delta \mid T \mid^2 \geq 0$. Logo, por (2.30) obtemos

$$\lim_{k\to\infty} \sup \Delta \mid T \mid^2 (x_k) = 0. \tag{2.31}$$

Observemos, pela hipótese (2.26), que a seqüência $\left\{h_{ji}^\alpha(x_k)\right\}_{k=1}^\infty$ é limitada para cada $j$, $i$ e $\alpha$. Logo, para cada $j$, $i$ e $\alpha$ existe uma subseqüência $\left\{h_{ji}^\alpha(x_{k_r})\right\}_{k_r=1}^\infty$ convergente. Definamos

$$\overline{A}_\alpha = \lim_{k_r\to\infty} A_\alpha(x_{k_r}).$$

Restringindo a desigualdade (2.28) à seqüência $\{x_{k_r}\}_{k_r=1}^\infty$, aplicando-se o limite e denotando por $\overline{P_1}$ e $\overline{P_2}$ os limites tomados em $P_1$ e $P_2$, respectivamente, obtemos por (2.30) e (2.29) a relação

$$0 \geq \lim_{k_r\longrightarrow\infty} \sup \Delta \mid T \mid^2 (x_{k_r}) \geq 2(\overline{P_1} - \overline{P_2}) \geq (n-3)\left(\sup \mid T \mid^2\right)^2 \geq 0,$$

que implica $\overline{P_1} = \overline{P_2}$. Logo, quando toma-se o limite em (2.25) e (2.27) ocorre a igualdade, ou seja, valem as seguintes identidades

$$\sum_{\alpha=2}^{p} \left\{ \mathrm{tr}\overline{A}_1 \mathrm{tr}\overline{A}_1 \overline{A}_\alpha^2 - (\mathrm{tr}\overline{A}_1\overline{A}_\alpha)^2 \right\} = \frac{3}{2} \sup \mid T \mid^2 \sum_{\alpha=2}^{p} \mathrm{tr}\overline{A}_\alpha^2 \tag{2.32}$$

$$\sum_{\alpha,\beta=2}^{p} \left\{ N(\overline{A}_\alpha\overline{A}_\beta - \overline{A}_\beta\overline{A}_\alpha) + \overline{Z}_{\alpha\beta}^2 \right\} = \frac{3}{2}\left(\sum_{\alpha=2}^{p} N(\overline{A}_\alpha)\right)^2. \tag{2.33}$$

Pelo Lema 2.4, aplicado em (2.33), temos que

a) $\overline{A}_2 = \overline{A}_3 = \cdots = \overline{A}_p = 0$; ou

b) Somente duas das matrizes $\overline{A}_2, \overline{A}_3, \cdots, \overline{A}_p$ são diferentes da matriz nula. Neste caso, supondo sem perda de generalidade, $\overline{A}_2 \neq 0$ e $\overline{A}_3 \neq 0$, existe uma matriz ortogonal $T$ tal que

$$T^t\overline{A}_2 T = \sqrt{\frac{\overline{L}}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T^t\overline{A}_3 T = \sqrt{\frac{\overline{L}}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

onde $\overline{L} = \mathrm{tr}\overline{A}_2^2 = N(\overline{A}_2) = N(\overline{A}_3)$.

Se a) ocorre, então temos

$$\sup \mid T \mid^2 = \sum_{\alpha=2}^{p} \mathrm{tr}\overline{A}_\alpha^2 = 0,$$

e, portanto, $\mid T \mid^2 = 0$ em $M$. Logo, o teorema estará provado conforme a demonstração anterior para $n > 3$.

Provaremos, a seguir, que b) não ocorre. Suponha, por absurdo, que ocorre b). Para cada $\alpha = 2, \cdots, p$, conforme vimos em (2.21), vale

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}A_1\mathrm{tr}A_1A_\alpha^2 - (\mathrm{tr}A_1A_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\rho_i\rho_j(\rho_i^\alpha - \rho_j^\alpha)^2 &\geq \frac{1}{4} \mid T \mid^2 \sum_{i,j=1}^{n}(\rho_i^\alpha - \rho_j^\alpha)^2 \\ &= \frac{3}{2} \mid T \mid^2 \mathrm{tr}A_\alpha^2\end{aligned}$$

onde usamos (2.23) e (2.24). Logo, restringindo esta desigualdade à seqüência $\{x_{k_r}\}$ e aplicando-se o limite, segue de (2.32) a igualdade

$$\sum_{i,j=1}^{n}\overline{\rho}_i\overline{\rho}_j(\overline{\rho}_i^\alpha - \overline{\rho}_j^\alpha)^2 = \frac{1}{2}\sup \mid T \mid^2 \sum_{i,j=1}^{n}(\overline{\rho}_i^\alpha - \overline{\rho}_j^\alpha)^2, \tag{2.35}$$

onde $\overline{\rho}_i = \lim_{k_r\to\infty}\rho_i(x_{k_r})$ e $\overline{\rho}_i^\alpha = \lim_{k_r\to\infty}\rho_i^\alpha(x_{k_r})$. Além disso, de (2.34) temos que $\overline{\rho}_i^2 \neq \overline{\rho}_j^2$, para $i \neq j$. Logo, de (2.23) e (2.35) obtemos

$$\overline{\rho}_i\overline{\rho}_j = \frac{1}{2}\sup \mid T \mid^2, \text{ para } i \neq j. \tag{2.36}$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}A_1^2 - n \mid H \mid^2 &= \mathrm{tr}A_1^2 - 2n \mid H \mid^2 + n \mid H \mid^2 \\ &= \sum_{i=1}^{3}(\rho_i)^2 - 2 \mid H \mid (n \mid H \mid) + \sum_{i=1}^{3} \mid H \mid^2 \\ &= \sum_{i=1}^{3}(\rho_i)^2 - 2 \mid H \mid \mathrm{tr}A_1 + \sum_{i=1}^{3} \mid H \mid^2 \\ &= \sum_{i=1}^{3}(\rho_i)^2 - 2 \mid H \mid \sum_{i=1}^{3}\rho_i + \sum_{i=1}^{3} \mid H \mid^2 \\ &= \sum_{i=1}^{3}(\rho_i - \mid H \mid)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Então, definamos

$$\mid U \mid^2 := \mathrm{tr}A_1^2 - n \mid H \mid^2 \geq 0. \tag{2.37}$$

Pode-se verificar que

$$\sum_{i\neq j}\rho_i\rho_j=[\mathrm{tr}A_1]^2-\mathrm{tr}A_1^2.$$

Como, para $n=3$ temos

$$\begin{aligned}[\mathrm{tr}A_1]^2-\mathrm{tr}A_1^2 &= [n\mid H\mid]^2-\mathrm{tr}A_1^2=9\mid H\mid^2-\mathrm{tr}A_1^2\\ &= 6\mid H\mid^2-\left[\mathrm{tr}A_1^2-3\mid H\mid^2\right]\\ &= 6\mid H\mid^2-\mid U\mid^2.\end{aligned}$$

Logo, vale a identidade

$$\sum_{i\neq j}\rho_i\rho_j=6\mid H\mid^2-\mid U\mid^2. \tag{2.38}$$

Restringindo esta igualdade à seqüência $\{x_{k_r}\}$, tomando o limite e usando (2.36), obtemos

$$\begin{aligned}6\mid H\mid^2 &= \lim_{k_r\to\infty}\mid U\mid^2(x_{k_r})+\lim_{k_r\to\infty}\sum_{i\neq j}\rho_i(x_{k_r})\rho_j(x_{k_r})\\ &= \lim_{k_r\to\infty}\mid U\mid^2(x_{k_r})+\sum_{i\neq j}\overline{\rho}_i\overline{\rho}_j\\ &= \lim_{k_r\to\infty}\mid U\mid^2(x_{k_r})+\sum_{i\neq j}\frac{1}{2}\sup\mid T\mid^2\\ &= \lim_{k_r\to\infty}\mid U\mid^2(x_{k_r})+6\frac{1}{2}\sup\mid T\mid^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{k_r\to\infty}\mid U\mid^2(x_{k_r})+3\sup\mid T\mid^2=6\mid H\mid^2. \tag{2.39}$$

Por outro lado, aplicando o limite na desigualdade (2.22), obtemos por (2.36) e pelo Lema 2.3, a seguinte igualdade

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\overline{\rho}_i\right)^2=(n-1)\sum_{i=1}^{n}(\overline{\rho}_i)^2+(n-1)\sup\mid T\mid^2. \tag{2.40}$$

Observemos que,

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{\rho}_i=\mathrm{tr}\overline{A}_1=n\mid H\mid,\ \sum_{i=1}^{n}(\overline{\rho}_i)^2=\mathrm{tr}\overline{A}_1^2\ \text{ e }\ \sup\mid T\mid^2=\sum_{\alpha=2}^{p}\mathrm{tr}\overline{A}_\alpha^2.$$

Logo, a identidade (2.40) para $n=3$ se reduz a

$$(3\mid H\mid)^2=2\mathrm{tr}\overline{A}_1^2+2\sum_{\alpha=2}^{p}\mathrm{tr}\overline{A}_\alpha^2=2\lim_{k_r\to\infty}\langle h\rangle^2(x_{k_r}),$$

que, torna-se

$$\lim_{k_r\to\infty}\langle h\rangle^2(x_{k_r})=\frac{9}{2}\mid H\mid^2. \tag{2.41}$$

Como de (2.37) temos $\langle h \rangle^2 = \mid U \mid^2 + \mid T \mid^2 + n \mid H \mid^2$, segue de (2.41) que

$$\lim_{k_r \to \infty} \mid U \mid^2 (x_{k_r}) + \sup \mid T \mid^2 + 3 \mid H \mid^2 = \frac{9}{2} \mid H \mid^2,$$

ou seja,

$$\sup \mid T \mid^2 = \frac{3}{2} \mid H \mid^2 - \lim_{k_r \to \infty} \mid U \mid^2 (x_{k_r}). \tag{2.42}$$

Substituindo (2.42) em (2.39), temos

$$\begin{aligned} 6 \mid H \mid^2 &= \lim_{k_r \to \infty} \mid U \mid^2 (x_{k_r}) + 3 \left( \frac{3}{2} \mid H \mid^2 - \lim_{k_r \to \infty} \mid U \mid^2 (x_{k_r}) \right) \\ &= -2 \lim_{k_r \to \infty} \mid U \mid^2 (x_{k_r}) + \frac{9}{2} \mid H \mid^2 . \end{aligned}$$

Donde segue

$$\lim_{k_r \to \infty} \mid U \mid^2 (x_{k_r}) = -\frac{3}{4} \mid H \mid^2 < 0 \ \ \text{(absurdo)}.$$

Logo, b) não deve ocorrer. Portanto, o teorema está provado.

■

**Corolário 2.1.** *Seja $M^n$ uma subvariedade ($n \geq 3$), completa e conexa, em $S^{n+p}(1)$. Suponha que o vetor curvatura média $H \neq 0$ seja paralelo no fibrado normal. Se a segunda forma fundamental $h$ de $M$ satisfaz*

$$\langle h \rangle^2 \leq \frac{n^2 \mid H \mid^2}{n-1},$$

*então $M^n$ é totalmente umbílica em $S^{n+1}(1)$.*

**Demonstração:** Considerando $\tilde{c} = 1$ no Teorema 2.3 obtemos que $M^n$ está contida em $S^{n+1}(1)$ e possui curvatura média constante, pois $S^{n+1}(1)$ é totalmente geodésica em $S^{n+p}(1)$. Seja $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ uma base ortonormal de $T_pM$ para a qual a segunda forma fundamental $A$ é diagonal. Denotemos por $\rho_1$, $\rho_2$, $\cdots$, $\rho_n$ os autovalores de $A$. Logo, a equação de Gauss se escreve

$$K(E_i, E_j) - 1 = \rho_i \rho_j, \ i \neq j$$

onde $K(E_i, E_j)$ denota a curvatura seccional. Segue de (2.23) que $M^n$ possui curvatura seccional maior ou igual a 1. Pelo Teorema 2 provado por Nomizu e Smyth em [18], obtemos que $M^n$ é totalmente umbílica em $S^{n+1}(1)$.

■

O Teorema 2.3 quando $\tilde{c} < 0$ precisa de uma condição adicional que é (ver 2.43) trivialmente satisfeita quando $\tilde{c} \geq 0$. Precisamente:

**Teorema 2.4.** *Seja $M^n$ uma subvariedade ($n \geq 3$), completa e conexa, em $\mathbb{H}^{n+p}(\tilde{c})$, $\tilde{c} < 0$. Suponha que o vetor curvatura média $H \neq 0$ seja paralelo no fibrado normal. Sejam $\xi_1$, $\xi_2, \cdots$, $\xi_p$ ortonormais em $T^{\perp}M$ e tal que $H = \mid H \mid \xi_1$. Se a segunda forma fundamental $h$ de $M$ satisfaz*

$$\langle h \rangle^2 \leq \frac{n^2 \mid H \mid^2}{n-1}$$

*e*

$$\tilde{c}n \mid T \mid^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2 \geq 0, \tag{2.43}$$

*onde $A_\alpha$ é a segunda forma fundamental associada a $\xi_\alpha$, $\mid T \mid^2 = \sum_{\alpha=2}^{p} trA_\alpha^2$ e $\nabla^*$ é definido por (2.5), então a codimensão se reduz a 1.*

**Demonstração:** Pelo Lema 2.2 (expressão (2.19)), temos

$$\frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 = P_1 - P_2 + \tilde{c}n \mid T \mid^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2$$

onde

$$P_1 = \sum_{\alpha=2}^{p} \left\{ (\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1 A_\alpha^2) - (\mathrm{tr}A_1 A_\alpha)^2 \right\}$$

e

$$P_2 = \sum_{\alpha,\beta=2}^{p} \left\{ N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + Z_{\alpha\beta}^2 \right\}.$$

Pelos Lemas 2.5 e 2.4, respectivamente, obtemos

$$P_1 \geq n\frac{\mid T \mid^4}{2} \text{ e } P_2 \leq \frac{3}{2} \mid T \mid^4,$$

que implica

$$P_1 - P_2 \geq \frac{(n-3)}{2} \mid T \mid^4 . \tag{2.44}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 = P_1 - P_2 + \tilde{c}n \mid T \mid^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2 \geq P_1 - P_2 \geq \frac{(n-3)}{2} \mid T \mid^4$$

onde usamos a hipótese (2.43) e a desigualdade (2.44). A demonstração segue conforme realizado no caso $\tilde{c} \geq 0$.

■

Consideramos no próximo resultado provado nesta seção uma hipótese alternativa (ver (2.46)), substituindo a hipótese (2.43) do teorema anterior, que também nos permite controlar o sinal do laplaciano de $\mid T \mid^2$. Neste caso, conforme veremos a seguir, a codimensão se reduz a 3.

**Teorema 2.5.** *Seja $M$ uma subvariedade, completa e conexa, de dimensão $n \geq 4$ em $\mathbb{H}^{n+p}(\tilde{c})$, com $\tilde{c} < 0$ e $p \geq 3$. Suponha que o vetor curvatura média $H \neq 0$ seja paralelo no fibrado normal. Sejam $\xi_1, \cdots, \xi_p$ ortonormais em $T^{\perp}M$ e tal que $H =\mid H \mid \xi_1$. Suponha ainda que o primeiro espaço normal é invariante por translação paralela com respeito à conexão do fibrado normal. Se a segunda forma fundamental $h$ de $M$ satisfaz*

$$\langle h \rangle^2 \leq \frac{n^2 \mid H \mid^2}{n-1} \tag{2.45}$$

*e*

$$\mid T \mid^2 \geq -\frac{2\tilde{c}n}{n-3}, \tag{2.46}$$

*onde $\mid T \mid^2 = \sum_{\alpha=2}^{p} trA_\alpha^2$, em que $A_\alpha$ é a segunda forma fundamental associada a $\xi_\alpha$, então a codimensão se reduz a 3.*

**Demonstração:** Do Lema 2.2, temos

$$\frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 = P_1 - P_2 + \tilde{c}n \mid T \mid^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2,$$

onde

$$P_1 = \sum_{\alpha=2}^{p} \left\{ (\mathrm{tr}A_1)(\mathrm{tr}A_1 A_\alpha^2) - (\mathrm{tr}A_1 A_\alpha)^2 \right\}$$

e

$$P_2 = \sum_{\alpha,\beta=2}^{p} \left\{ N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + Z_{\alpha\beta}^2 \right\}.$$

Pelos Lemas 2.5 e 2.4, respectivamente, obtemos

$$P_1 \geq n\frac{\mid T \mid^4}{2} \;\text{ e }\; P_2 \leq \frac{3}{2} \mid T \mid^4 .$$

Logo,

$$P_1 - P_2 \geq \frac{(n-3)}{2} \mid T \mid^4,$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 = P_1 - P_2 + \tilde{c}n \mid T \mid^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2 \;&\geq\; P_1 - P_2 + \tilde{c}n \mid T \mid^2 \\ &\geq\; \left[ \frac{(n-3)}{2} \mid T \mid^2 + \tilde{c}n \right] \mid T \mid^2 . \end{aligned} \tag{2.47}$$

Por outro lado, pelo Princípio do Máximo Generalizado (Teorema 2.1), aplicado para $\mid T \mid^2$, temos a existência de uma seqüência $\{z_k\} \subset M$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \mid T \mid^2 (z_k) = \sup \mid T \mid^2 \tag{2.48}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sup\Delta \mid T \mid^2 (z_k) \leq 0. \tag{2.49}$$

Logo, por (2.49), (2.47), (2.48) e pela hipótese (2.46), respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \geq \lim_{k\to\infty} \sup\Delta \mid T \mid^2 (z_k) &\geq 2 \lim_{k\to\infty} \left[\frac{(n-3)}{2} \mid T \mid^2 (z_k) + \tilde{c}n\right] \mid T \mid^2 (z_k) \\ &= 2\left[\frac{(n-3)}{2} \sup \mid T \mid^2 + \tilde{c}n\right] \sup \mid T \mid^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Donde segue que

$$\left[\frac{(n-3)}{2} \sup \mid T \mid^2 + \tilde{c}n\right] \sup \mid T \mid^2 = 0,$$

e, portanto,

$$\sup \mid T \mid^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \sup \mid T \mid^2 = -\frac{2\tilde{c}n}{n-3}.$$

Mas, pela hipótese (2.46), devemos ter $\sup \mid T \mid^2 = -\frac{2\tilde{c}n}{n-3}$. Logo,

$$\mid T \mid^2 \equiv -\frac{2\tilde{c}n}{n-3}.$$

Assim, (2.47) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{2}\Delta \mid T \mid^2 = P_1 - P_2 + \tilde{c}n \mid T \mid^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2 &\geq P_1 - P_2 + \tilde{c}n \mid T \mid^2 \\ &\geq \left[\frac{(n-3)}{2} \mid T \mid^2 + \tilde{c}n\right] \mid T \mid^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, valem as identidades

$$P_1 - P_2 + \tilde{c}n \mid T \mid^2 = 0$$

e

$$\frac{(n-3)}{2} \mid T \mid^4 + \tilde{c}n \mid T \mid^2 = 0.$$

Portanto, a identidade

$$P_1 - P_2 = \frac{(n-3)}{2} \mid T \mid^4$$

ocorre em todo ponto de $M$. Conseqüentemente, em qualquer ponto de $M$, ocorre a igualdade em

$$P_2 = \sum_{\alpha,\beta=2}^{p} \left\{N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + Z_{\alpha\beta}^2\right\} \leq \frac{3}{2}\left(\sum_{\alpha=2}^{p} N(A_\alpha)\right)^2.$$

Logo, dado $y_0 \in M$, devemos ter pelo Lema 2.4, que

a) $A_2(y_0) = A_3(y_0) = \cdots = A_p(y_0)$ ou

b) Somente duas das matrizes $A_2(y_0)$, $A_3(y_0)$, $\cdots$, $A_p(y_0)$ são diferentes da matriz nula. Neste caso, supondo sem perda de generalidade, $A_2(y_0) \neq 0$ e $A_3(y_0) \neq 0$, existe uma matriz ortogonal $T$ tal que

$$T^t A_2 T = \sqrt{\frac{L_2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \; T^t A_3 T = \sqrt{\frac{L_2}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

onde $L_2 = \mathrm{tr} A_2^2$, no ponto $y_0$.

Observemos que a) não ocorre, pois caso contrário, teríamos

$$\mid T \mid^2 (y_0) = \sum_{\alpha=2}^{p} \mathrm{tr} A_\alpha^2(y_0) = 0,$$

um absurdo, pois $\mid T \mid^2 \equiv -\frac{2\tilde{c}n}{n-3}$. Logo, b) deve ocorrer. Como o primeiro espaço normal $N_1(y_0)$, conforme a Definição 2.3, é o complemento ortogonal de

$$\{\xi \in T_{y_0}^{\perp} M / A_\xi = 0\} \text{ em } T_{y_0}^{\perp} M,$$

teremos, neste caso, que $N_1(y_0)$ é gerado por $\xi_1(y_0)$, $\xi_2(y_0)$ e $\xi_3(y_0)$, o qual, por hipótese, é invariante por translação paralela. Portanto, pelo Teorema 2.2, existe uma subvariedade totalmente geodésica $N^{n+3}$ de $\mathbb{H}^{n+p}(\tilde{c})$ tal que $M^n \subset N^{n+3}$, ou seja, a codimensão se reduz a 3.

■

## 2.6 Aplicação

Uma esfera geodésica em $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ é uma subvariedade, cujos pontos estão a um distância fixa, de um determinado ponto fixado. Tais hipersuperfícies são totalmente umbílicas.

Provaremos, nesta seção, que uma subvariedade compacta com a curvatura de Ricci não-negativa e satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.4 é uma esfera geodésica. Antes, enunciaremos o seguinte teorema, provado por Morvan e Bao-Qiang [17].

**Teorema 2.6.** *Seja $M$ uma hipersuperfície compacta em $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ com a curvatura de Ricci não-negativa e curvatura média constante. Então, $M$ é uma esfera geodésica.*

O resultado principal desta seção é o seguinte teorema:

**Teorema 2.7.** *Seja $M^n$ uma subvariedade, compacta e conexa, em $\mathbb{H}^{n+p}(-1)$. Suponha que o vetor curvatura média $H \neq 0$ seja paralelo no fibrado normal e que a curvatura de Ricci seja não-negativa. Sejam $\xi_1, \cdots, \xi_p$ ortonormais em $T^{\perp}M$ e tal que $H =\mid H \mid \xi_1$. Se a segunda forma fundamental $h$ de $M$ satisfaz*

$$\langle h \rangle^2 \leq \frac{n^2 \mid H \mid^2}{n-1}$$

*e*

$$\tilde{c}n \mid T \mid^2 + \sum_{\alpha=2}^{p} \parallel \nabla^* A_\alpha \parallel^2 \geq 0,$$

*então $M^n$ é uma esfera geodésica.*

**Demonstração:** Obtemos, pelo Teorema 2.4, que $M^n$ é uma hipersuperfície de $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$. A curvatura de Ricci de $M^n$ é não-negativa por hipótese. Denotemos por $\mid H' \mid$ a curvatura média de $M^n$ em $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$. Como $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ é totalmente geodésico em $\mathbb{H}^{n+p}(-1)$, temos $\mid H \mid = \mid H' \mid$, ou seja, a curvatura média $\mid H' \mid$ de $M^n$ em $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ é constante. Portanto, pelo Teorema 2.6, obtemos que $M^n$ é uma esfera geodésica.

∎

# Referências Bibliográficas


[1] Ahlfors, L. V.; Sario, L., *Riemann surfaces*, Princeton Universtity Press, Princeton, 1960.

[2] Alodan, H.; Deshmukh, S., *Submanifolds with parallel mean curvature vector in a real space form*, Int. Math. J. **2** (2002), 85-100.

[3] Chen, B. Y., *Geometry of submanifolds*, New York: Marcel Dekker, INC., 1973.

[4] Cheng, Q. M.; Nonaka, K., *Complete submanifolds in Euclidean spaces with parallel mean curvature vector*, Manuscripta Math. **105** (2001), 353-366.

[5] Cheng, S. Y.; Yau, S. T., *Differential equations on Riemannian submanifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 333-354.

[6] Cheung, L-F.; Leung, P-F.; Leung, Y-C., *Complete submanifolds with parallel mean curvature vector in hyperbolic spaces*, J. Geom. **80** (2004), 1-9.

[7] de Barros, A. A.; Brasil, A. C., Jr.; de Sousa, L. A. M., Jr., *A new characterization of submanifolds with parallel mean curvature vector in $S^{n+p}$*, Kodai Math. J. **27** (2004), 45-56.

[8] do Carmo, M. P., *Differential Geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

[9] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, IMPA, 1998.

[10] Erbacher, J., *Isometric immersions of constant mean and triviality of the normal connection*, Nagoya Math. J. **45** (1971), 139-165.

[11] Erbacher, J., *Reduction of the codimension of an isometric immersion*, J. Differential Geometry **5** (1971), 333-340.

[12] Hoffman, D. A., *Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature*, J. Differential Geometry **8** (1973), 161-176.

[13] Klotz, T.; Osserman, R., *On complete surfaces in $E^3$ with constant mean curvature*, Comm. Math. Helv. **41** (1966-67), 313-318.

[14] Lawson, H.B., Jr., *Complete minimal surfaces in $S^3$*, Ann. of Math. (2) **92** (1970), 335-374.

[15] Li, A. M.; Li, J. M., *An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds*, Arch. Math. **58** (1992), 582-594.

[16] Mo, X. H., *Submanifolds with parallel mean curvature vector in spaces of constant curvature*, Chinese Ann. Math. Ser. A **9** (1988), 530-540.

[17] Morvan, J-M.; Bao-Qiang, Wo, *Hypersurfaces with constant mean curvature in hyperbolic space form*, Geometriae Dedicata **59** (1996), 197-222.

[18] Nomizu, K.; Smyth, B., *A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature*, J. Differential Geometry **3** (1969), 367-377.

[19] Omori, H., *Isometric immersions of Riemannian manifolds*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 205-214.

[20] Santos, W., *Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres*, Tôhoku Math. **5** (1994), 403-415.

[21] Shen, Y. B., *Complete submanifolds with parallel mean curvature vector*, J. Math. (Wuhan) **5** (1985), 67-72.

[22] Tenenblat, K., *Transformações de superfícies e aplicações*, 13o Colóquio Brasileiro de Matemática, 1981.

[23] Wang, Mei-Jiao; Li, Shi-Jie, *Submanifolds with parallel mean curvature vector in a sphere*, Kodai Math. J. **21** (1998), 201-207.

[24] Yau, S. T. *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), 201-228.