

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Máquina de Adição n -ádica e Grupos
Solúveis

por

Josimar da Silva Rocha

Brasília

2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Máquina de Adição n -ádica e Grupos Solúveis

por

Josimar da Silva Rocha *

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para obtenção do título de

Doutor em Matemática

14 de junho de 2007

Comissão Examinadora:

Prof. Said Najati Sidki -MAT/UnB (Orientador)

Prof. Pavel Zalesski - MAT/UnB (Membro)

Prof. Alexandre Grishkov - IME/USP (Membro)

Prof. Ana Cristina Vieira - UFMG (Membro)

Prof. Dessislava Kochloukova - Unicamp (Membro)

*O autor foi bolsista da CAPES/CNPq durante parte da elaboração deste trabalho

Resumo

Nesta tese provamos que todo grupo solúvel do grupo finitamente gerado do grupo de automorfismos da árvore regular n -ária T_n , $\text{Aut}(T_n)$, que contém a máquina de adição n -ádica tem uma estrutura bastante restrita.

Provamos que todo subgrupo nilpotente de $\text{Aut}(T_n)$ contendo a máquina de adição é um grupo abeliano livre de torção.

Estudando os elementos de grupos abelianos normalizados pela máquina de adição n -ádica em $\text{Aut}(T_n)$, demonstramos que quando n é um primo p , todo subgrupo solúvel finitamente gerado do pró-Sylow p -subgrupo de $\text{Aut}(T_p)$, contendo a máquina de adição p -ádica é uma extensão de um grupo metabeliano livre de torção por um p -grupo finito.

Palavras chaves: Árvore n -ária; máquina de adição; grupos nilpotentes; grupos solúveis; transformações de Tietze.

Abstract

We prove in this thesis that finitely generated soluble group of automorphisms $\text{Aut}(T_n)$ of the regular n -ary tree T_n , which contain the n -ary adding machine have restricted structure.

We prove that every nilpotent subgroup of $\text{Aut}(T_n)$ containing then n -ary adding machine is a torsion-free abelian group.

We study in detail elements of abelian groups normalized by an n -ary adding machine. For the case where n is a prime number p we prove that every finitely generated soluble subgroup of the pro-Sylow p -subgroup of $\text{Aut}(T_p)$, containing the p -adic adding machine is an extension of a torsion-free metabelian group by a finite p -group.

Keywords: n -ary trees; adding machine; nilpotent groups; solvable groups; Tietze transformations.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por mais esta conquista.

Agradeço a minha mãe, pelo incentivo, pela compreensão nos momentos difíceis e pela confiança que depositou em mim.

Agradeço a Vanessa, minha namorada, por me incentivar e me apoiar em todas as fases desta tese.

Agradeço ao Prof. Said Najati Sidki, o orientador desta tese, por acreditar em minha capacidade em desempenhar um bom trabalho sobre *Automorfismos de árvores* e também pelas sugestões e ensinamentos que ajudaram a melhorar esta tese.

Agradeço à Comissão julgadora desta tese de doutorado pelas críticas, sugestões e recomendações que foram importantes para a atualização desta tese.

Agradeço à Tânia Maria S. Sertão, da secretaria de pós-graduação, pela maneira simpática, carinhosa e eficiente com que resolve as burocracias de nossa vida acadêmica.

Agradeço a todos os meus amigos, pelo carinho, alegria, estímulo e companheirismo, fatores essenciais nesta fase de minha vida.

Agradeço aos demais professores e funcionários do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Agradeço também aos professores, alunos e funcionários da Unidade Universitária de Formosa da Universidade Estadual de Goiás pelo apoio e torcida durante todas as etapas do doutorado.

Finalmente, agradeço à CAPES e ao CNPq, pelo suporte financeiro de parte desta tese.

Sumário

1 Automorfismos de Árvores	5
1.1 Preliminares	5
1.2 Estabilizadores	10
1.3 Representação por Autômatas	11
1.4 Cálculo de Conjugados, Centralizadores e Comutadores	12
2 A máquina de adição n-ádica (τ)	15
2.1 O anel dos inteiros n -ádicos (\mathbb{Z}_n)	15
A ação de $\text{Aut}(T_n)$ no anel dos inteiros n -ádicos	16
2.2 Potências infinitas e extração de raízes	17
2.3 Polarizador e Indutor da máquina de adição n -ádica	21
2.4 O Normalizador do grupo pró-cíclico $\widehat{\langle \tau \rangle}$	26
3 Construção de Grupos Solúveis	31
3.1 Grupos Estruturais	36
4 Grupos abelianos normalizados pela máquina de adição	39
4.1 Elementos com atividade 2-ciclo	40
4.2 Elementos com atividade em $\langle \sigma_\tau \rangle$	50
O caso binário	60
Exemplos em subgrupos de $\text{Aut}(T_n)$	61
A Tabela de Símbolos	67

Introdução

Máquinas de adição foram estudadas no contexto de sistemas dinâmicos e, mais recentemente, no contexto de grupos agindo sobre árvores: veja [1, 4, 5, 7] e as referências contidas nestes artigos.

Se T_n é uma árvore regular n -ária cujos vértices são rotulados por palavras em um monóide \mathcal{M} livremente gerado pelo conjunto $Y = \{0, 1, \dots, n-1\}$, então toda palavra em \mathcal{M} pode ser vista como um elemento do conjunto dos inteiros n -ádicos. Desta forma, se τ é uma máquina de adição n -ádica e $a_0a_1 \cdots a_k$ é um vértice de T_n com $a_0, a_1, \dots, a_k \in Y$, então a ação de τ em $a_0a_1 \cdots a_k$ é dada por

$$(a_0a_1 \cdots a_k)^\tau = \begin{cases} (a_0 + 1)a_1 \cdots a_k, & \text{se } a_0 \in \{0, 1, \dots, n-2\} \\ 0(a_1 \cdots a_k)^\tau, & \text{se } a_0 = n-1 \end{cases}$$

Estendendo a ação de τ para seqüências infinitas (vértices da fronteira da árvore) de dígitos n -ádicos, então a ação de τ em um vértice de fronteira $a = a_0a_1a_2 \cdots$ pode ser traduzida como a soma de uma unidade ao elemento a visto como elemento do conjunto dos inteiros n -ádicos, ou seja,

$$a^\tau = a + 1.$$

Uma das características mais marcantes da máquina de adição n -ádica τ é que seu centralizador $C(\tau)$ no grupo de automorfismos da árvore n -ária é pró-cíclico, mais precisamente,

$$C(\tau) = \{\tau^\xi \mid \xi \in \mathbb{Z}_n\},$$

onde \mathbb{Z}_n é o anel dos inteiros n -ádicos.

O propósito principal da tese é demonstrar que um grupo solúvel de automorfismos da árvore n -ária que contém a máquina de adição tem uma estrutura bastante restrita. No caso binário, este fato foi demonstrado em [8] por Said Sidki. Mais precisamente, se G é um grupo solúvel finitamente gerado que contém a máquina de

adição binária, então este grupo é metabeliano-por-finito. Neste trabalho mostramos que este resultado se estende para o caso p -ádico para qualquer primo p :

Teorema A. *Seja p um primo e seja G um subgrupo solúvel do Pró-Sylow p -subgrupo do grupo de automorfismos da árvore p -ária contendo a máquina de adição p -ádica. Então G é metabeliano-por-finito.*

No Capítulo 1, veremos que um elemento α do grupo dos automorfismos da árvore n -ária, $\text{Aut}(T_n)$, assume a forma

$$\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})\sigma_\alpha,$$

onde $\alpha_i \in \text{Aut}(T_n)$ e $\sigma_\alpha \in S_n$. Desenvolvimentos sucessivos nos α'_i s produzem

$$Q(\alpha) = \{\alpha_u \mid u \in \mathcal{M}\},$$

o conjunto dos estados de α .

A máquina de adição n -ádica tem a representação

$$\tau = (e, \dots, e, \tau)\sigma_\tau,$$

onde e é elemento identidade de $\text{Aut}(T_n)$ e σ_τ é a permutação $(0, 1, \dots, n-1)$. Neste caso, τ possui apenas 2 estados, sendo $Q(\tau) = \{e, \tau\}$.

Mostramos que o número de automorfismos com 2 estados em $\text{Aut}(T_n)$ é

$$(2^n - 1) \cdot (n!) \cdot 2^n(n! - 1)$$

Na Capítulo 2, introduzimos a função Polarizador, definida por

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{i} \in \{0, 1, \dots, n - \bar{j}\} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

onde $\delta : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ e \bar{i} é o resto da divisão de i por n . A função Polarizador aparece naturalmente quando encontramos as potências finitas e infinitas da máquina de adição e a partir desta função, definimos a função Indutor como sendo

$$\Delta_s(i, j) = \delta(i, j - i) - \delta(i - s, j - i).$$

Estas funções são necessárias para o estudo detalhado de grupos contendo a máquina de adição n -ádica.

Através do estudo do grupo pró-cíclico $\widehat{\langle \tau \rangle}$, obtemos a caracterização dos subgrupos nilpotentes contendo τ :

Teorema B. *Todo subgrupo nilpotente de $\text{Aut}(T_n)$ contendo a máquina de adição n -ádica é um grupo abeliano livre de torção contido em $\widehat{\langle \tau \rangle}$.*

No Capítulo 3 apresentamos algumas construções de subgrupos solúveis de $\text{Aut}(T_n)$ normalizados por um dado elemento de $\text{Aut}(T_n)$. Como exemplo de grupos solúveis que contém a máquina de adição, obtemos uma classe de grupos abelianos-por-finito com a seguinte estrutura: para cada $t \in \mathbb{N}$ um subgrupo G_t solúvel de comprimento derivado $t + 1$ isomorfo ao produto entrelaçado

$$(\cdots ((\langle \tau \rangle \wr C_n) \wr C_n) \wr \cdots) \wr C_n,$$

onde C_n aparece t vezes á direita de $\langle \tau \rangle$ no produto entrelaçado.

Uma classe de grupos metabelianos que aparece naturalmente quando estudamos a solubilidade de grupos que contém a máquina de adição é a classe dos *Grupos estruturais*, semelhante aos grupos de tipo Fibonacci. Cada grupo estrutural é um grupo metabeliano livre de torção e de índice n no produto entrelaçado $C \wr C_n$ para algum inteiro positivo n .

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, o grupo

$$J(n, t) = \langle b_0, \dots, b_{n-1} \mid b_i b_{j+t} = b_j b_{i+t}, \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\} \rangle,$$

onde \bar{z} é o resto da divisão inteira de z por n será chamado de **grupo estrutural**.

No Capítulo 4 analisamos elementos de subgrupos abelianos B de $\text{Aut}(T_n)$ normalizados pela máquina de adição n -ádica. Em particular, se $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})\sigma_\beta \in B$, estudamos a solubilidade ou não do grupo $H = \langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ e obtemos os seguintes resultados:

Teorema C. *Seja n par.*

(i) *Se $\sigma_\beta = (s, s + \frac{n}{2})$ para algum $s \in \{0, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$, então*

$$M = \left\langle [\beta_i, \tau^k], \beta_j, \beta_{\frac{n}{2}+s}^2 \beta_s, \tau \beta_s^2 \mid k \in \mathbb{Z}, i, j \in Y, j \neq s, s + \frac{n}{2} \right\rangle$$

é um subgrupo normal e abeliano de H , com $\frac{H}{M} = \langle M \beta_s \rangle$.

(ii) *Se $\sigma_\beta = \sigma_\tau^{\frac{n}{2}}$, então*

$$M = \left\langle \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}}, \beta_j^2 \tau^{-\Delta_{\frac{n}{2}}(j, j+\frac{n}{2})}, [\beta_t, \tau^k] \mid i, j, t \in Y \text{ e } k \in \mathbb{Z} \right\rangle.$$

é um subgrupo normal e abeliano de H , com $\frac{H}{M}$ imagem homomórfica de

$$\mathbb{Z} \times \underbrace{C_2 \times \cdots \times C_2}_{\frac{n}{2} \text{ termos}}.$$

Teorema D. Se $\sigma_\beta = \sigma_\tau^t$ para algum inteiro t , então

$$K = \left\langle [\beta_i, \tau^k], \beta_i \beta_{i+t} \beta_{i+2t} \cdots \beta_{i+(m-1)t} \mid k \in \mathbb{Z}, i \in Y \text{ e } m = \frac{n}{(n,t)} \right\rangle$$

é subgrupo abeliano normal de H . Mais ainda, $M = K \langle \tau \rangle$ é um subgrupo metabeliano normal de H sendo $\frac{H}{M}$ uma imagem homomorfica de um subgrupo de $C_m \wr C_n$, ou seja, H é metabeliano-por-finito.

Teorema E. Sejam p um primo ímpar, G o pró-Sylow p -subgrupo de $\text{Aut}(T_p)$ e B um subgrupo abeliano de G normalizado por τ . Então, para qualquer $\beta \in B$, existe $m \in \mathbb{N}$ e algum conjugado μ de τ em $\text{Aut}(T_p)$ tal que $\beta \in \times_{p^m} \langle \mu \rangle$.

Um subgrupo de $\text{Aut}(T_n)$ que fixa todos os vértices que estão fora da subárvore com vértices $u\mathcal{M}$ e se projeta em um grupo H no vértice u é indicada por $u * H$ e seus elementos são denotados por $u * \alpha$, onde $\alpha \in H$. Desta forma,

$$(u * \alpha)_v = \begin{cases} \alpha_w, & \text{se } v = uw \text{ para algum } w \in \mathcal{M}. \\ e, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Um dos resultados principais deste trabalho demonstrado utilizando o Teorema E e [8] é:

Teorema F. Sejam p primo, K um grupo solúvel do pró-Sylow p -subgrupo contendo a máquina de adição p -ádica τ e Ψ o normalizador do grupo pró-cíclico $\langle \tau \rangle$ no pró-Sylow p -subgrupo de $\text{Aut}(T_p)$, então existe um menor inteiro positivo t tal que K é o conjugado de um subgrupo de $\Psi(t)$, onde $\Psi(t)$ é um elemento da seguinte seqüência de subgrupos de $\text{Aut}(T_n)$:

$$\Psi(0) = \Psi, \quad \Psi(1) = \langle 0 * \Psi, \Psi(0) \rangle$$

$$\Psi(k) = \langle 0^k * \Psi, \Psi(k-1) \rangle, \quad k = 1, 2, \dots$$

Capítulo 1

Automorfismos de Árvores

1.1 Preliminares

Uma árvore regular (uni-raiz) T pode ser identificada por um monóide \mathcal{M} livremente gerado por um conjunto Y e parcialmente ordenado pela relação

$$u \geq v \iff u \text{ é prefixo de } v.$$

O elemento identidade de \mathcal{M} é a seqüência vazia \emptyset . Existe uma função nível em T , denotada por $|m|$ que fornece-nos o número de caracteres de $m \in \mathcal{M}$; o vértice raiz \emptyset tem nível 0. No caso em que Y possui n elementos a árvore é dita n -ária e é simbolizada por T_n .

Sejam $\mathcal{A} = \text{Aut}(T)$ o grupo dos automorfismos da árvore T e S_Y o conjunto das permutações do conjunto Y . Toda permutação $\sigma \in S_Y$ pode ser estendida para o grupo dos automorfismos de T da seguinte forma

$$(y \cdot u)^\sigma = (y)^\sigma \cdot u, \forall y \in Y, \forall u \in \mathcal{M}.$$

Mais precisamente, σ permutará rigidamente as sub-árvores de nível 1 e, portanto, temos uma imersão do grupo S_Y das permutações de Y no grupo \mathcal{A} dos automorfismos da árvore T .

Um automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}$ induz uma permutação σ_α no conjunto Y que é identificada pela sua extensão rígida ao automorfismo da árvore. Conseqüentemente, o automorfismo nos proporciona uma representação $\alpha = \alpha' \sigma_\alpha$ onde α' fixa Y pontualmente e induz para cada $y \in Y$ um automorfismo $\alpha'(y)$ da sub-árvore cujos vértices formam o conjunto $y \cdot \mathcal{M}$. Usando o isomorfismo canônico $y \cdot u \mapsto u$ entre esta subárvore e a árvore T , podemos considerar α' como uma função de Y em \mathcal{A} ; em

forma notacional, $\alpha' \in \mathcal{F}(Y, \mathcal{A})$, onde $\mathcal{F}(Y, \mathcal{A})$ denota o conjunto das funções de Y em \mathcal{A} . Conseqüentemente, o grupo \mathcal{A} se fatora como $\mathcal{A} = \mathcal{F}(Y, \mathcal{A}) \cdot S_Y$.

Definição 1. *Seja $\alpha \in \mathcal{A}$. A permutação $\sigma_\alpha \in S_Y$ induzida por α é chamada de **atividade de α** . Neste caso, denotando por e o elemento identidade de S_Y , dizemos que α é **ativo** se $\sigma_\alpha \neq e$ e **inativo** se $\sigma_\alpha = e$.*

Notação 1. *É conveniente denotarmos α por α_\emptyset e $\alpha'(y)$ por α_y .*

Para descrever α_y utilizamos o mesmo procedimento que em α e, aplicando recursivamente este raciocínio, obtemos a descrição de α_u para todo $u \in \mathcal{M}$ e a imagem de qualquer elemento de T por α da seguinte forma:

Seja $v \in \mathcal{M}$. Então existem $y_1, y_2, \dots, y_r \in Y$ tais que $v = y_1 y_2 \dots y_r$. Daí,

$$\begin{aligned} (v)^\alpha &= (y_1 y_2 \dots y_r)^\alpha = (y_1 y_2 \dots y_r)^{\alpha_{y_1} \cdot \sigma_\alpha} = (y_1 (y_2 \dots y_r)^{\alpha_{y_1}})^{\sigma_\alpha} \\ &= (y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2 \dots y_r)^{\alpha_{y_1}} = (y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2 y_3 \dots y_r)^{\alpha_{y_1 y_2} \cdot \sigma_{\alpha_{y_1}}} \\ &= (y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2 (y_3 \dots y_r)^{\alpha_{y_1 y_2}})^{\sigma_{\alpha_{y_1}}} = (y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2)^{\sigma_{\alpha_{y_1}}} (y_3 \dots y_r)^{\alpha_{y_1 y_2}} \\ &= \dots = (y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2)^{\sigma_{\alpha_{y_1}}} (y_3)^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2}}} \dots (y_r)^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2 \dots y_{r-1}}}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Sigma_\alpha = \{\sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M}\}$$

é o conjunto das permutações de Y que descrevem fielmente o automorfismo α .

Definição 2. *Se $\alpha \in \mathcal{A}$ e $u \in \mathcal{M}$ é uma palavra de comprimento k em Y , então α_u é chamado de **estado** (do k -ésimo nível) de α . O conjunto $Q(\alpha) = \{\alpha_u \mid u \in \mathcal{M}\}$ é chamado de **conjunto dos estados** α .*

Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ e $v = y_1 u$ com $u = y_2 \dots y_r$, onde $y_1, \dots, y_r \in Y$. Assim,

$$\begin{aligned} (v)^{\alpha\beta} &= ((y_1 u)^\alpha)^\beta = ((y_1)^{\sigma_\alpha} (u)^{\alpha_{y_1}})^\beta = ((y_1)^{\sigma_\alpha})^{\sigma_\beta} ((u)^{\alpha_{y_1}})^{\beta_{(y_1)^{\sigma_\alpha}}} \\ &= (y_1)^{\sigma_{\alpha\beta}} (u)^{(\alpha\beta)_{y_1}} \\ \therefore \sigma_\alpha \sigma_\beta &= \sigma_{\alpha\beta} \text{ e } \alpha_{y_1} \beta_{(y_1)^{\sigma_\alpha}} = (\alpha\beta)_{y_1} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Para encontramos a imagem de v por $\alpha\beta$,

$$\begin{aligned} (v)^{\alpha\beta} &= ((y_1 y_2 \dots y_r)^\alpha)^\beta = ((y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2)^{\sigma_{\alpha_{y_1}}} (y_3)^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2}}} \dots (y_r)^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2 \dots y_{r-1}}}})^\beta \\ &= ((y_1)^{\sigma_\alpha})^{\sigma_\beta} ((y_2)^{\sigma_{\alpha_{y_1}}})^{\sigma_{\beta_{(y_1)^{\sigma_\alpha}}}} \dots ((y_r)^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2 \dots y_{r-1}}}})^{\sigma_{\beta_{(y_1)^{\sigma_\alpha} (y_2)^{\sigma_{\alpha_{y_1}} (y_3)^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2}} \dots (y_{r-1})^{\sigma_{\alpha_{y_1 y_2 \dots y_{r-2}}}}}}}} \end{aligned}$$

Em particular, se $Y = \{0, 1, \dots, n-1\}$ temos que $S_Y = S_n$ e se $\alpha, \beta \in \text{Aut}(T)$ podemos escrever

$$\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})\sigma_\alpha \text{ e } \beta = (\beta_0, \dots, \beta_{n-1})\sigma_\beta.$$

Daí

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})\sigma_\alpha(\beta_0, \dots, \beta_{n-1})\sigma_\beta = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})(\beta_0, \dots, \beta_{n-1})\sigma_\alpha^{-1}\sigma_\alpha\sigma_\beta \\ &\stackrel{(1.1)}{=} (\alpha_0\beta_{(0)\sigma_\alpha}, \alpha_1\beta_{(1)\sigma_\alpha}, \dots, \alpha_{n-1}\beta_{(n-1)\sigma_\alpha})\sigma_\alpha\sigma_\beta. \end{aligned}$$

Resultados bastante uteis são dados pela seguinte proposição:

Proposição 1. *Sejam $u, w, v \in \mathcal{M}$, então, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$,*

$$(i) \quad (wv)^\alpha = w^\alpha v^{\alpha w} \tag{1.2}$$

$$(ii) \quad (\alpha\beta)_u = \alpha_u \beta_{u^\alpha} \tag{1.3}$$

$$(iii) \quad (\alpha^{-1})_{u^\alpha} = \alpha_u^{-1} \tag{1.4}$$

$$(iv) \quad (\alpha_u \alpha_w^{-1})_v = \alpha_{uv} \alpha_{w(v^\alpha \alpha_w^{-1})}^{-1} \tag{1.5}$$

Demonstração.

(i) Como $w, v \in \mathcal{M}$, então existem $w_1, \dots, w_t, v_1, \dots, v_k \in Y$ tais que $w = w_1 w_2 \dots w_t$ e $v = v_1 v_2 \dots v_k$.

Assim,

$$\begin{aligned} (wv)^\alpha &= (w_1 \dots w_t v_1 \dots v_k)^\alpha = (w_1)^{\sigma_\alpha} (w_2)^{\sigma_{\alpha w_1}} \dots (w_t)^{\sigma_{\alpha w_1 \dots w_{t-1}}} (v_1 \dots v_k)^{\alpha_{w_1 \dots w_t}} \\ &= (w_1 \dots w_t)^\alpha (v_1 \dots v_k)^{\alpha_{w_1 \dots w_t}} = w^\alpha v^{\alpha w} \end{aligned}$$

(ii) Procederemos por indução sobre o comprimento da palavra $u \in \mathcal{M}$.

- Se $|u| = 1$, então $u \in Y$ e, por (1.1), temos que $(\alpha\beta)_u = \alpha_u \beta_{(u)\sigma_\alpha} = \alpha_u \beta_{(u)^\alpha}$.
- Suponhamos que $(\alpha\beta)_u = \alpha_u \beta_{(u)^\alpha}$ para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ e $u \in \mathcal{M}$ com $0 < |u| \leq k$.

Dados $y \in Y$ e $u \in \mathcal{M}$ com $|u| = k$, temos

$$(\alpha\beta)_{yu} = (\alpha_y \beta_{(y)\sigma_\alpha})_u = (\alpha_y)_u (\beta_{(y)\sigma_\alpha})_{(u)\alpha_y} = \alpha_{yu} \beta_{(y)\sigma_\alpha(u)\alpha_y} = \alpha_{yu} \beta_{(yu)^\alpha}$$

$$(iii) (\alpha\alpha^{-1})_u = e \stackrel{(1.3)}{\Leftrightarrow} \alpha_u(\alpha^{-1})_{u\alpha} = e \Leftrightarrow (\alpha^{-1})_{u\alpha} = \alpha_u^{-1}$$

$$(iv) (\alpha_u\alpha_w^{-1})_v \stackrel{(1.3)}{=} (\alpha_u)_v(\alpha_w^{-1})_{v\alpha_u} \stackrel{(1.4)}{=} (\alpha_u)_v((\alpha^{-1})_{w\alpha})_{v\alpha_u} = \alpha_{uv}(\alpha^{-1})_{w\alpha v\alpha_u}$$

$$\stackrel{(1.4)}{=} \alpha_{uv}\alpha_{(w\alpha v\alpha_u)\alpha^{-1}}^{-1} \stackrel{(1.2)}{=} \alpha_{uv}\alpha_{(w\alpha)\alpha^{-1}(v\alpha_u)(\alpha^{-1})_{w\alpha}}^{-1}$$

$$\stackrel{(1.4)}{=} \alpha_{uv}\alpha_{(w\alpha)\alpha^{-1}(v\alpha_u)\alpha_w^{-1}}^{-1} = \alpha_{uv}\alpha_{w(v\alpha_u\alpha_w^{-1})}^{-1}$$

□

Corolário 1. Se $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$, então

$$(\alpha^m)_i = \alpha_i\alpha_{i\sigma_\alpha}\alpha_{i\sigma_\alpha^2}\cdots\alpha_{i\sigma_\alpha^{m-1}}$$

para todo inteiro positivo m e $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Demonstração. O resultado segue da Proposição 1 e por indução sobre m . □

Utilizando a Proposição 1, obtemos as seguintes propriedades para a função Q :

$$Q(\alpha^{-1}) = Q(\alpha)^{-1} \text{ e } Q(\alpha\beta) \subseteq Q(\alpha)Q(\beta), \forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}. \quad (1.6)$$

Exemplo 1. Sejam $Y = \{0, 1\}$, T_2 a árvore binária e $\alpha = (e, e)\sigma, \beta = (\beta, \beta)\sigma \in \text{Aut}T_2$, onde $\sigma = (0, 1)$ e $e = (0)(1) \in \mathbf{S}_2$. Então

$$Q(\alpha) = \{e, \alpha\} = \{e, \sigma\}, \quad Q(\beta) = \{\beta\},$$

$$Q(\alpha^{-1}) = \{e, \sigma\}$$

$$Q(\alpha\alpha) = Q(e) = \{e\} \subsetneq Q(\alpha)Q(\alpha) = \{e, \sigma\}$$

$$\alpha\beta = (\beta, \beta)\sigma(e, e)\sigma = (\beta, \beta)$$

$$Q(\alpha\beta) = \{\alpha\beta, \beta\} = \{\alpha, e\}\{\beta\} = Q(\alpha)Q(\beta).$$

A seguinte proposição caracteriza os automorfismos com finitos estados:

Proposição 2. $|Q(\alpha)| \leq m \iff \exists u_1, \dots, u_m \in \mathcal{M}$ tais que $\max_{1 \leq i \leq m} |u_i| < m$ e $\alpha_u \in \{\alpha_{u_1}, \dots, \alpha_{u_m}\} \forall u \in \mathcal{M}, |u| \leq m$.

Demonstração. (\implies) Seja $|Q(\alpha)| \leq m$. Mostraremos que para todo $u \in \mathcal{M}$ existe $v \in \mathcal{M}$ com $|v| < m$ tal que $\alpha_u \in \alpha_v$.

De fato, se $|u| < m$ então $v = u$ satisfaz a condição.

Se $|u| = m$ então existem $y_1, \dots, y_m \in Y$ tais que $u = y_1 \cdots y_m$. Daí, fazendo $y_0 = \emptyset$, obtemos

$$\alpha = \alpha_{y_0}, \alpha_{y_0y_1}, \alpha_{y_0y_1y_2}, \dots, \alpha_{y_0y_1 \cdots y_m}.$$

Portanto, como $|Q(\alpha)| \leq m$, existem $i, j \in \mathbb{N}$ com $0 \leq i < j \leq m$ tais que $\alpha_{y_0 y_1 \dots y_i} = \alpha_{y_0 y_1 \dots y_j}$. Assim $\alpha_{y_0 y_1 \dots y_m} = \alpha_{y_0 y_1 \dots y_j y_{j+1} \dots y_m} = (\alpha_{y_0 y_1 \dots y_i})_{y_{j+1} \dots y_m}$. Assim, tomando $v = y_0 y_1 \dots y_i y_{j+1} \dots y_m$, temos que $|v| = m - j + i < m$ e $\alpha_u = \alpha_v$.

Se para todo $u \in \mathcal{M}$ com $0 \leq |u| \leq k$ existir $v \in \mathcal{M}$ com $|v| < m$ satisfazendo $\alpha_u = \alpha_v$, então, para qualquer $y \in Y$ temos que $\alpha_{uy} = \alpha_{vy}$, onde $|vy| \leq m$. Portanto, existe $w \in \mathcal{M}$ com $|w| < m$ tal que $\alpha_{uy} = \alpha_{vy} = \alpha_w$.

Logo, por indução, existem $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{M}$ tais que $\max_{1 \leq i \leq m} |u_i| < m$ e $\alpha_u \in \{\alpha_{u_1}, \dots, \alpha_{u_m}\} \forall u \in \mathcal{M}$ com $|u| \leq m$.

(\Leftarrow) Reciprocamente, se existirem $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{M}$ tais que $\max_{1 \leq i \leq m} |u_i| < m$ e $\alpha_u \in \{\alpha_{u_1}, \dots, \alpha_{u_m}\} \forall u \in \mathcal{M}$, $|u| \leq m$.

1o) Se $v \in \mathcal{M}$ é tal que $|v| \leq m$ então $\alpha_v \in \{\alpha_{u_1}, \dots, \alpha_{u_m}\}$.

2o) Suponhamos que $\forall u \in \mathcal{M}$ com $0 \leq |u| \leq k$ tenhamos que $\alpha_u \in \{\alpha_{u_1}, \dots, \alpha_{u_m}\}$. Então, dado $y \in Y$, $\alpha_{uy} \in \{\alpha_{u_1 y}, \dots, \alpha_{u_m y}\} \subseteq \{\alpha_{u_1}, \dots, \alpha_{u_m}\}$, pois $\max_{1 \leq i \leq m} |u_i y| \leq m$.

Logo, por indução, $\alpha_v \in \{\alpha_{u_1}, \dots, \alpha_{u_m}\} \forall v \in \mathcal{M}$, ou seja, $|Q(\alpha)| \leq m$. \square

Notação 2. Se $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$, então $(\alpha^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de $\text{Aut}(T_n)$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} \alpha^{(0)} = \alpha \\ \alpha^{(k)} = (\alpha^{(k-1)}, \alpha^{(k-1)}, \dots, \alpha^{(k-1)}), \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

A seguinte proposição caracteriza os automorfismos com apenas um estado de $\text{Aut}(T_n)$:

Proposição 3. Seja $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$ com $\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha_u}, \forall u \in \mathcal{M}$. Então

$$\alpha = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \sigma_\alpha = \alpha^{(1)} \sigma_\alpha.$$

Demonstração. Sejam $u, v \in \mathcal{M}$. Assim, $\alpha_u \alpha_v^{-1}$ é inativo, pois $\sigma_{\alpha_u} = \sigma_{\alpha_v}$. Portanto, para todo $u \in \mathcal{M}$ e $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $(\alpha \alpha_j^{-1})_u = \alpha_u \alpha_{j u \alpha_j^{-1}}^{-1}$ é inativo. Logo $\alpha = \alpha_j, \forall j \in \{0, \dots, n-1\}$, i.e., $\alpha = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \sigma_\alpha$. \square

Corolário 2. O número de elementos em $\text{Aut}(T_n)$ com 1 estado é $n!$.

Como conseqüência da Proposição anterior, temos a caracterização dos automorfismos com 2 estados:

Corolário 3. Um automorfismo $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$ possui 2 estados se, e somente se, existe $\beta \in \text{Aut}(T_n)$ tal que

- (i) $\sigma_\beta \neq \sigma_\alpha$;
- (ii) $\{\alpha_i \mid i \in Y\} \cup \{\alpha\} = \{\alpha, \beta\}$;
- (iii) $\{\beta_i \mid i \in Y\} \subset \{\alpha, \beta\}$.

Corolário 4. *O número de automorfismos com 2 estados em $\text{Aut}(T_n)$ é*

$$(2^n - 1) \cdot (n!) \cdot 2^n(n! - 1)$$

A seguinte proposição nos dá informações a respeito da ordem dos automorfismos de $\text{Aut}(T_n)$ de ordem finita:

Proposição 4. *Se $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$ e $m \in \mathbb{Z}$ satisfazem $\alpha^m = e$ e $(m, n!) = 1$, então $\alpha = e$.*

Demonstração. Como $\alpha^m = e$, então $\sigma_\alpha^m = \sigma_\alpha^{n!} = e$. Assim, como $(m, n!) = 1$, segue que α é inativo. Portanto $\alpha^m = ((\alpha_0)^m, (\alpha_1)^m, \dots, (\alpha_{n-1})^m)$ com $(\alpha_0)^m = (\alpha_1)^m = \dots = (\alpha_{n-1})^m = e$. Por indução $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = e$. \square

Corolário 5. *Seja $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$ com $\mathbf{o}(\alpha) < \infty$. Então todo divisor primo de $\mathbf{o}(\alpha)$ também é divisor de $n!$.*

1.2 Estabilizadores

O **estabilizador do k -ésimo nível de $\text{Aut}(T_n)$** , denotado por $\text{Stab}_n(k)$, é o conjunto dos automorfismos que fixam palavras de comprimento k de \mathcal{M} . Assim, $\text{Stab}_n(k) = \{\alpha \in \text{Aut}(T_n) \mid u^\alpha = u, \forall u \in \mathcal{M} \text{ com } |u| = k\}$. Evidentemente, como $\text{Stab}_n(k)$ é o núcleo em $\text{Aut}(T_n)$ da ação de $\text{Aut}(T_n)$ sobre palavras de comprimento k , então $\text{Stab}_n(k) \triangleleft \text{Aut}(T_n)$. Assim,

$$\text{Aut}(T_n) = \text{Stab}_n(0) \triangleright \text{Stab}_n(1) \triangleright \text{Stab}_n(2) \triangleright \dots \triangleright \text{Stab}_n(k) \triangleright \text{Stab}_n(k+1) \triangleright \dots \triangleright 1$$

Proposição 5. *Seja $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$, então $\alpha^{(n!)^k} \in \text{Stab}_n(k)$.*

Demonstração. Como $\alpha^{n!} = ((\alpha^{n!})_0, \dots, (\alpha^{n!})_{n-1})\sigma_\alpha^{n!}$ e $\sigma_\alpha \in S_n$, então $\sigma_\alpha^{n!} = e$ e $\alpha^{n!} \in \text{Stab}_n(1)$.

Suponhamos que $\alpha^{(n!)^k} \in \text{Stab}_n(k), \forall \alpha \in \text{Aut}(T_n)$.

Assim,

$$\alpha^{(n!)^{k+1}} = ((\alpha^{n!})_0^{(n!)^k}, \dots, (\alpha^{n!})_{n-1}^{(n!)^k})$$

e $(\alpha^{n!})_j^{(n!)^k} \in \text{Stab}_n(k), \forall j \in \{0, \dots, n-1\}$, por indução.

Logo $\alpha^{(n!)^{k+1}} \in \text{Stab}_n(k+1)$. □

Corolário 6. *Sejam $H \leq \text{Aut}(T_n)$ e $\alpha \in H$ com $\mathbf{o}(\alpha) > n!$, então H não é simples.*

Demonstração. De fato, como $\mathbf{o}(\alpha) > n!$, então $1 \neq \alpha^{n!} \in \text{Stab}_n(1) \cap H \triangleleft H$, pela Proposição 5. □

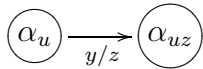
1.3 Representação por Autômatas

Os automorfismos da árvore regular (uni-raiz) T podem ser identificados em termos de autômatas de Mealy. Tal autômato é uma Máquina de Turing definida pela sextupla $(Q, L, \Gamma, f, l, q_0)$, onde Q é o conjunto de estados, L é o alfabeto de entrada, Γ é o alfabeto de saída, $f : Q \times L \rightarrow Q$ é a função de transição de estados, $l : Q \times L \rightarrow \Gamma$ é a função de saída e q_0 é o estado inicial.

Um automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}$ pode ser interpretado como o autômato de Mealy representado pela sextupla $(Q(\alpha), Y, Y, f, l, \alpha)$, onde $f : Q(\alpha) \times Y \rightarrow Q(\alpha)$ e $l : Q(\alpha) \times Y \rightarrow Y$ são definidas por $f(\alpha_u, y) = \alpha_{uz}$ e $l(\alpha_u, y) = z$, onde $z = y^{\alpha_u}$, $y \in Y$ e $u \in \mathcal{M}$. Desta forma, o autômato $\alpha \in \mathcal{A}$ poderá ser representado graficamente por um grafo direcionado onde as arestas são definidas por

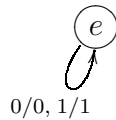
$$\Gamma(\alpha) = \{(\alpha_u, y/z, \alpha_{uz}) \mid z = y^{\alpha_u}, \text{ onde } u \in \mathcal{M} \text{ e } z, y \in Y \}$$

e os vértices são representados por pequenos círculos representando cada estado de α . Assim, se $u \in \mathcal{M}$, então α_u é um vértice de $\Gamma(\alpha)$ e para cada $y \in Y$ sai uma aresta rotulada por y/z de α_u para α_{uz} , onde $z = y^{\alpha_u}$. Graficamente,

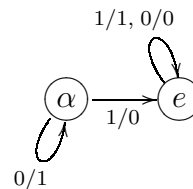


Exemplo 2. *Grafo que representa o autômato de Mealy identificado pelo automorfismo $\alpha \in \mathcal{A}$, onde*

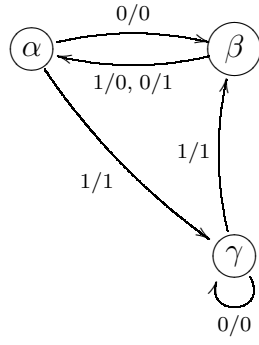
a) $\mathcal{A} = \text{Aut}(T_2)$ e $\alpha = e$:



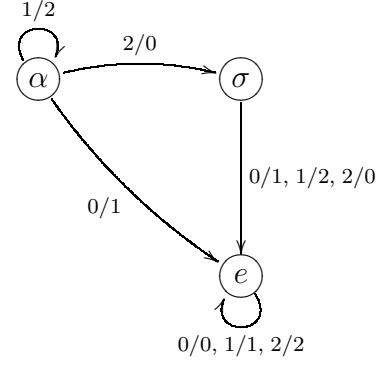
b) $\mathcal{A} = \text{Aut}(T_2)$, $\sigma = (0, 1)$ e $\alpha = (\alpha, e)\sigma$:



c) $\mathcal{A} = \text{Aut}(T_2)$, $\sigma = (0, 1)$ e $\alpha = (\beta, \gamma)$, onde $\beta = (\alpha, \alpha)\sigma$ e $\gamma = (\gamma, \beta)$:



d) $\mathcal{A} = \text{Aut}(T_3)$, $\sigma = (0, 1, 2)$ e $\alpha = (e, \alpha, \sigma)\sigma$:



1.4 Cálculo de Conjugados, Centralizadores e Comutadores

Proposição 6. *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \text{Aut}(T_n)$, então as seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $\gamma = \beta^\alpha = \alpha^{-1}\beta\alpha$
- (ii) $\sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta\sigma_\alpha$ e $\gamma_{i\sigma_\alpha} = \alpha_i^{-1}\beta_i\alpha_{i\sigma_\beta}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
- (iii) $\sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta\sigma_\alpha$ e $\alpha_{i\sigma_\beta}^s = (\beta^s)_i^{-1}\alpha_i(\gamma^s)_{i\sigma_\alpha}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\forall s \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. (i) \Leftrightarrow (ii)

$$\begin{aligned} \gamma = \beta^\alpha &\Leftrightarrow \beta\alpha = \alpha\gamma \\ &\Leftrightarrow ((\beta_0, \dots, \beta_{n-1})\sigma_\beta(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})\sigma_\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})\sigma_\alpha(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1})\sigma_\gamma) \\ &\Leftrightarrow ((\beta_0, \dots, \beta_{n-1})(\alpha_0^{\sigma_\beta}, \dots, \alpha_{(n-1)}^{\sigma_\beta})\sigma_\beta\sigma_\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})(\gamma_0^{\sigma_\alpha}, \dots, \gamma_{(n-1)}^{\sigma_\alpha})\sigma_\alpha\sigma_\gamma) \\ &\Leftrightarrow ((\beta_0\alpha_0^{\sigma_\beta}, \dots, \beta_{n-1}\alpha_{(n-1)}^{\sigma_\beta})\sigma_\beta\sigma_\alpha = (\alpha_0\gamma_0^{\sigma_\alpha}, \dots, \alpha_{n-1}\gamma_{(n-1)}^{\sigma_\alpha})\sigma_\alpha\sigma_\gamma) \\ &\Leftrightarrow (\sigma_\gamma = \sigma_\beta^{\sigma_\alpha} \text{ e } \gamma_{i\sigma_\alpha} = \alpha_i^{-1}\beta_i\alpha_{i\sigma_\beta}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}) \end{aligned}$$

(ii) \Leftrightarrow (iii)

$$\begin{aligned} (\sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta\sigma_\alpha \text{ e } \gamma_{i\sigma_\alpha} = \alpha_i^{-1}\beta_i\alpha_{i\sigma_\beta}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}) \\ \Leftrightarrow (\sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1}\sigma_\beta\sigma_\alpha \text{ e } \alpha_{i\sigma_\beta} = \beta_i^{-1}\alpha_i\gamma_{i\sigma_\alpha}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \sigma_\alpha \text{ e } \alpha_{i, \sigma_\beta^s} = \beta_{i, \sigma_\beta^{s-1}}^{-1} \alpha_{i, \sigma_\beta^{s-1}} \gamma_{i, \sigma_\beta^{s-1}} \sigma_\alpha, \\ \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall s \in \mathbb{Z} \end{array} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \sigma_\alpha \text{ e } \alpha_{i, \sigma_\beta^s} = \beta_{i, \sigma_\beta^{s-1}}^{-1} (\beta^{s-1})_i^{-1} \alpha_i (\gamma^{s-1})_{i \sigma_\alpha} \gamma_{i, \sigma_\beta^{s-1}} \sigma_\alpha, \\ \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall s \in \mathbb{Z}, \text{ por indução sobre } s \end{array} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \sigma_\alpha \text{ e } \alpha_{i, \sigma_\beta^s} = \beta_{i, \sigma_\beta^{s-1}}^{-1} (\beta^{s-1})_i^{-1} \alpha_i (\gamma^{s-1})_{i \sigma_\alpha} \gamma_{i, \sigma_\alpha \sigma_\gamma^{s-1}}, \\ \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall s \in \mathbb{Z} \end{array} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \sigma_\alpha \text{ e } \alpha_{i, \sigma_\beta^s} = \left((\beta^{s-1})_i \beta_{i, \sigma_\beta^{s-1}} \right)^{-1} \alpha_i (\gamma^{s-1})_{i \sigma_\alpha} \gamma_{i, \sigma_\alpha \sigma_\gamma^{s-1}}, \\ \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall s \in \mathbb{Z} \end{array} \right) \\
&\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \sigma_\gamma = \sigma_\alpha^{-1} \sigma_\beta \sigma_\alpha \text{ e } \alpha_{i, \sigma_\beta^s} = (\beta^s)_i^{-1} \alpha_i (\gamma^s)_{i \sigma_\alpha}, \\ \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall s \in \mathbb{Z} \end{array} \right)
\end{aligned}$$

□

Proposição 7. *Sejam $\alpha, \beta \in \text{Aut}(T_n)$, então*

(i) $\theta = [\beta, \alpha] = \beta^{-1} \beta^\alpha$ se, e somente se, $\theta_{i, \sigma_\alpha \sigma_\beta} = \beta_{i, \sigma_\alpha}^{-1} \alpha_i^{-1} \beta_i \alpha_{i, \sigma_\beta}$ e $\sigma_\theta = [\sigma_\beta, \sigma_\alpha]$.

(ii) $\beta \in C(\alpha)$ se, e somente se, $\beta_i = \alpha_i \beta_{i, \sigma_\alpha} \alpha_{i, \sigma_\beta}^{-1}$ e $\sigma_\beta \in C(\sigma_\alpha)$

Demonstração. (i) Seja $\gamma = \beta^\alpha$. Assim, $\theta = [\beta, \alpha] = \beta^{-1} \beta^\alpha = \beta^{-1} \gamma \Leftrightarrow \beta \theta = \gamma$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow ((\beta_0, \dots, \beta_{n-1}) \sigma_\beta (\theta_0, \dots, \theta_{n-1}) \sigma_\theta = (\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) \sigma_\gamma) \\
&\Leftrightarrow ((\beta_0, \dots, \beta_{n-1}) (\theta_0^{\sigma_\beta}, \dots, \theta_{(n-1)}^{\sigma_\beta}) \sigma_\beta \sigma_\theta = (\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) \sigma_\gamma) \\
&\Leftrightarrow ((\beta_0 \theta_0^{\sigma_\beta}, \dots, \beta_{n-1} \theta_{(n-1)}^{\sigma_\beta}) \sigma_\beta \sigma_\theta = (\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) \sigma_\gamma) \\
&\Leftrightarrow (\sigma_\beta \sigma_\theta = \sigma_\gamma \text{ e } \beta_i \theta_{i, \sigma_\beta} = \gamma_i \text{ para } i = 0, \dots, n-1) \\
&\Leftrightarrow (\sigma_\beta \sigma_\theta = \sigma_\gamma \text{ e } \beta_{i, \sigma_\alpha} \theta_{i, \sigma_\alpha \sigma_\beta} = \gamma_{i, \sigma_\alpha} \text{ para } i = 0, \dots, n-1) \\
&\Leftrightarrow (\sigma_\theta = \sigma_\beta^{-1} \sigma_\beta^{\sigma_\alpha} = [\sigma_\beta, \sigma_\alpha] \text{ e } \theta_{i, \sigma_\alpha \sigma_\beta} = \beta_{i, \sigma_\alpha}^{-1} \alpha_i^{-1} \beta_i \alpha_{i, \sigma_\beta} \\
&\text{para } i = 0, \dots, n-1, \text{ pela Proposição 6})
\end{aligned}$$

(ii) $\beta \in C(\alpha) \Leftrightarrow [\beta, \alpha] = e$. Assim, para $i = 0, \dots, n-1$,

$$(e = \beta_{i, \sigma_\alpha}^{-1} \alpha_i^{-1} \beta_i \alpha_{i, \sigma_\beta} \text{ e } e = [\sigma_\beta, \sigma_\alpha], \text{ por (i)})$$

$$\Leftrightarrow (\beta_i = \alpha_i \beta_{i, \sigma_\alpha} \alpha_{i, \sigma_\beta}^{-1} \text{ e } \sigma_\beta \in C(\sigma_\alpha))$$

□

Um exemplo bastante simples que ilustra a Proposição 7 é dado pelo seguinte Corolário:

Corolário 7. *Seja $\sigma = (0, \dots, n-1) \in \mathcal{A} = \text{Aut}(T_n)$, então*

(i) $C(\sigma) = \{\beta \in \mathcal{A} \mid \beta = (\beta_0, \dots, \beta_0)\sigma^t, \text{ onde } \beta_0 \in \mathcal{A} \text{ e } t \in \mathbb{Z}\};$

(ii) $Z(C(\sigma)) = \langle \sigma \rangle;$

(iii) $\frac{C(\sigma)}{\langle \sigma \rangle} \cong \mathcal{A}.$

Proposição 8. *Seja $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{n-1})\sigma \in \text{Aut}(T_n)$ com $\sigma = (0, \dots, n-1)$ e $\alpha \in \text{Stab}_n(1)$ satisfazendo $\beta^\alpha = (e, \dots, e, \gamma)\sigma$. Então γ é o conjugado de $\beta_0\beta_1 \cdots \beta_{n-1}$ por α_0 e $\alpha = (\alpha_0, \beta_0^{-1}\alpha_0, \dots, (\beta_0\beta_1 \cdots \beta_{n-2})^{-1}\alpha_0)$.*

Demonstração. Como $\beta^\alpha = (e, \dots, e, \gamma)\sigma$, então, pela Proposição 6,

$$e = \alpha_i^{-1}\beta_i\alpha_{i+1}, \forall i \in \{0, \dots, n-2\} \text{ e } \gamma = \alpha_{n-1}^{-1}\beta_{n-1}\alpha_0.$$

Assim,

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_0^{-1}\alpha_0 \\ \alpha_2 = \beta_1^{-1}\alpha_1 = \beta_1^{-1}\beta_0^{-1}\alpha_0 = (\beta_0\beta_1)^{-1}\alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} = \beta_{n-2}^{-1}\alpha_{n-2} = (\beta_0 \cdots \beta_{n-2})^{-1}\alpha_0 \\ \gamma = \alpha_0^{-1}(\beta_0\beta_1 \cdots \beta_{n-1})\alpha_0 \end{cases}$$

Logo

$$\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) = (\alpha_0, \beta_0^{-1}\alpha_0, \dots, (\beta_0\beta_1 \cdots \beta_{n-2})^{-1}\alpha_0)$$

e

$$\gamma = (\beta_0\beta_1 \cdots \beta_{n-1})^{\alpha_0}.$$

□

Capítulo 2

A máquina de adição n -ádica (τ)

Neste capítulo introduziremos o conceito de inteiro n -ádico e trabalharemos com um automorfismo da árvore n -ária que assume o papel de somar uma unidade a cada inteiro n -ádico. Chamaremos este automorfismo de máquina de adição n -ádica e estudaremos também subgrupos de $\text{Aut}(T_n)$ que contêm este automorfismo.

2.1 O anel dos inteiros n -ádicos (\mathbb{Z}_n)

Um dígito n -ádico é um número natural entre 0 e $n - 1$ (inclusive). Um inteiro n -ádico é definido como uma seqüência $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de dígitos n -ádicos. Convencionalmente escreveremos $a_0 a_1 a_2 \cdots a_i \cdots$ ou $\sum_{i=0}^{\infty} a_i n^i$ para representar esta seqüência $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$. O conjunto dos inteiros n -ádicos será denotado por \mathbb{Z}_n .

Para facilitar a notação dado $b = (b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_n$, o símbolo \bar{b} representará o dígito n -ádico b_0 que diremos ser o resto da divisão de b por n .

Se a é um número natural e $a = a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 a_0$ é sua representação n -ária (em outras palavras $a = \sum_{i=0}^{k-1} a_i n^i$ em que cada a_i é um dígito n -ádico) então nós identificamos a como o inteiro n -ádico (a_i) com $a_i = 0$ se $i \geq k$.

Portanto números naturais são inteiros n -ádicos em que apenas um número finito de dígitos são não-nulos. Note ainda que 0 é o inteiro n -ádico em que todos os seus dígitos n -ádicos são iguais a 0 e que 1 é o inteiro n -ádico em que o primeiro dígito n -ádico (escrito da esquerda para a direita) é 1 e os demais dígitos n -ádicos são iguais a 0 (zero).

Se $a = (a_i)$ e $b = (b_i)$ são dois inteiros n -ádicos, então podemos definir, indutivamente, a soma $a + b = (c_i)$ deste dois números n -ádicos da seguinte forma:

- $\varepsilon_0 = 0$;

- Se $a_i + b_i + \varepsilon_i \in \{0, \dots, n-1\}$ faça $c_i = a_i + b_i + \varepsilon_i$ e $\varepsilon_{i+1} = 0$; caso contrário, faça $c_i = a_i + b_i + \varepsilon_i - n$ e $\varepsilon_{i+1} = 1$.

Note que as regras acima são exatamente as regras utilizadas na adição de números naturais na representação n -ária.

Se $a = (a_i)$ e $b = (b_i)$ são dois inteiros n -ádicos podemos também definir uma multiplicação $a \cdot b = (c_i)$ destes dois inteiros n -ádicos da seguinte forma

- $d_0 = a_0 b_0$;
- $c_0 = \overline{a_0 b_0}$;
- $d_{i+1} = \frac{d_i - c_i}{n} + \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1-k} b_k$;
- $c_{i+1} = \overline{d_{i+1}}$

Note que esta multiplicação coincide também com a multiplicação de números naturais na representação n -ária.

Analisando o comportamento da adição e multiplicação dos números naturais quando imersos em \mathbb{Z}_n , podemos observar que o conjunto \mathbb{Z}_n munido das operações de adição e multiplicação acima define uma estrutura de anel comutativo com unidade $1 = (a_i)$, onde

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 0 \\ 0, & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$$

Além disso, denotando por $U(\mathbb{Z}_n)$ o conjunto dos elementos invertíveis de \mathbb{Z}_n . Um inteiro n -ádico $a = (a_i)$ pertence ao conjunto $U(\mathbb{Z}_n)$ se, e somente se, $(a_0, n) = 1$. Conseqüentemente $\mathbb{Z}_n^1 = \{(a_i) \in \mathbb{Z}_n \mid a_0 = 1\}$ é um subgrupo multiplicativo de $U(\mathbb{Z}_n)$.

Exemplo 3. O inverso multiplicativo de 2 em \mathbb{Z}_3 é $2 + \sum_{i=1}^{\infty} 3^i$ e o inverso multiplicativo de 3 em \mathbb{Z}_5 é $2 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^4 + \dots = 2 + \sum_{i=1}^{\infty} ((-1)^{i+1} + 2)5^i$.

A ação de $\text{Aut}(T_n)$ no anel dos inteiros n -ádicos

Estendendo a ação dos elementos de $\text{Aut}(T_n)$ para seqüências infinitas (ou pontos de fronteira da árvore) de dígitos n -ádicos então a ação de $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$ em um ponto de fronteira $a = a_0 a_1 a_2 \dots$ pode ser traduzida na ação sobre o anel dos inteiros n -ádicos da seguinte maneira:

$$a^\alpha = (a_0)^{\sigma_\alpha} (a_1 a_2 \dots)^\alpha$$

Em $\text{Aut}(T_n)$ existe um automorfismo τ que faz o papel de adicionar uma unidade a cada ponto de fronteira identificado no conjunto dos inteiros n -ádicos. Este automorfismo τ é conhecido como máquina de adição n -ádica.

Definição 3. O automorfismo $\tau = (e, \dots, e, \tau)\sigma_\tau \in \text{Aut}(T_n)$ com $\sigma_\tau = (0, \dots, n-1)$ é chamado de máquina de adição n -ádica e a ação deste automorfismo em uma dada palavra $y_0y_1 \dots y_k$ com $y_i \in \{0, \dots, n-1\}$ é dada por

$$(y_0y_1 \dots y_k)^\tau = \begin{cases} (y_0 + 1)y_1 \dots y_k & \text{se } y_0 \in \{0, \dots, n-2\} \\ 0(y_1 \dots y_k)^\tau & \text{se } y_0 = n-1 \end{cases}$$

Se $a \in \mathbb{Z}_n$ então a ação de τ estendida a \mathbb{Z}_n é traduzida por

$$a^\tau = 1 + a.$$

Proposição 9. A máquina de adição n -ádica induz uma permutação transitiva sobre os vértices de cada nível da árvore n -ária.

Demonstração. Sejam $v, u \in \mathcal{M}^*$ com $|v| = |u| = k$. Então existem v_0, v_1, \dots, v_{k-1} , $u_0, u_1, \dots, u_{k-1} \in Y$ tais que

$$v = v_0 \dots v_{k-1} \text{ e } u = u_0 \dots u_{k-1}$$

Assim, $m = (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1)n + \dots + (u_{k-1} - v_{k-1})n^{k-1}$ satisfaz

$$v^{\tau^m} = (v_0v_1 \dots v_{k-1})^{\tau^{\sum_{j=0}^{k-1} (u_j - v_j)n^j}} = u_0u_1 \dots u_{k-1} = u$$

□

2.2 Potências infinitas e extração de raízes

Se $(\alpha(k))_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de $\text{Aut}(T_n)$, com $\alpha(k)$ pertencente ao subgrupo estabilizador do nível k -ésima da árvore T_n , $\text{Stab}_n(k)$, então $\alpha = \alpha(0)\alpha(1)\alpha(2) \dots$ é um elemento bem definido de $\text{Aut}(T_n)$, já que somente os primeiros k elementos do produto $\alpha(0)\alpha(1)\alpha(2) \dots$ têm ação não-trivial nos vértices da árvore T_n até o nível k . Desta forma, se $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$ e m é um múltiplo do expoente do grupo $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$, então podemos definir potências “finitas e infinitas” de α onde cada expoente é visto como um elemento de \mathbb{Z}_m .

A seguinte proposição nos permite definir certos tipos de potências infinitas de automorfismos em $\text{Aut}(T_n)$:

Proposição 10. Se $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$ e m é um múltiplo do expoente do grupo $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$, então, para cada $\xi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k m^k \in \mathbb{Z}_m$,

$$\alpha^\xi = \alpha^{\sum_{k=0}^{\infty} a_k m^k} = \alpha^{a_0} \cdot \alpha^{a_1 m} \cdot \alpha^{a_2 m^2} \dots$$

é um bem definido elemento de $\text{Aut}(T_n)$.

Demonstração. De fato, como m é múltiplo do expoente do grupo $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$, então, para cada $k \in \mathbb{N}$, somente os primeiros k elementos do produto $\alpha^{a_0} \cdot \alpha^{a_1 m} \cdot \alpha^{a_2 m^2} \dots$ tem ação não trivial sobre os vértices da árvore T_n até o nível k . Portanto, α^ξ é um bem definido elemento de \mathcal{A} . \square

Proposição 11. As potências finitas e infinitas da máquina de adição n -ádica podem ser escritas na forma

$$\tau^\xi = \left(\tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}}, \dots, \tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}}, \underbrace{\tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}+1}, \dots, \tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}+1}}_{\bar{\xi} \text{ termos}} \right) \sigma_{\tau}^{\bar{\xi}}, \quad (2.1)$$

onde $\xi \in \mathbb{Z}_n$.

Demonstração. Seja $\xi \in \mathbb{Z}_n$, então existe uma seqüência (a_i) de dígitos n -ádicos tais que

$$\xi = a_0 + a_1 n + \dots + a_k n^k + \dots$$

Aplicando o Corolário 1, obtemos

$$(\tau^{a_0})_i = \tau_i \tau_{i\sigma_\tau} \dots \tau_{i\sigma_\tau^{a_0-1}} = \begin{cases} e, & \text{se } 0 \leq i < n - a_0 - 1 \\ \tau, & \text{se } i \geq n - a_0 \end{cases}$$

$$(\tau^n)_i = \tau_i \tau_{i\sigma_\tau} \dots \tau_{i\sigma_\tau^{n-1}} = \tau$$

$$(\tau^{kn})_i = (\tau^n)_i (\tau^n)_{i\sigma_{\tau^n}} \dots (\tau^n)_{i\sigma_{(\tau^n)^{k-1}}} = \tau^k$$

Assim,

$$\tau^{a_0} = (e, \dots, e, \underbrace{\tau, \dots, \tau}_{a_0 \text{ termos}}) \sigma_{\tau}^{a_0}$$

$$\tau^{a_j n^j} = \tau^{(a_j n^{j-1})n} = (\tau^{a_j n^{j-1}}, \tau^{a_j n^{j-1}}, \dots, \tau^{a_j n^{j-1}})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tau^\xi &= \tau^{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots} = \tau^{a_0} \cdot (\tau^{0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots}) = (\tau^{0 + a_1 n + a_2 n^2 + \dots}) \cdot \tau^{a_0} \\ &= (\tau^0 \cdot \tau^{a_1 n} \cdot \tau^{a_2 n^2} \dots) \cdot \tau^{a_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((\tau^{a_1}, \tau^{a_1}, \dots, \tau^{a_1}) \cdot (\tau^{a_{2n}}, \tau^{a_{2n}}, \dots, \tau^{a_{2n}}) \dots \\
&\quad (\tau^{a_j n^{j-1}}, \tau^{a_j n^{j-1}}, \dots, \tau^{a_j n^{j-1}}) \dots) \cdot (e, \dots, e, \underbrace{\tau, \dots, \tau}_{a_0 \text{ termos}}) \sigma_\tau^{a_0} \\
&= (\tau^{a_1} \cdot \tau^{a_{2n}} \dots \tau^{a_j n^{j-1}} \dots, \dots, \tau^{a_1} \cdot \tau^{a_{2n}} \dots \tau^{a_j n^{j-1}} \dots, \\
&\quad \underbrace{(\tau^{a_1} \cdot \tau^{a_{2n}} \dots \tau^{a_j n^{j-1}} \dots) \cdot \tau, \dots, (\tau^{a_1} \cdot \tau^{a_{2n}} \dots \tau^{a_j n^{j-1}} \dots) \cdot \tau}_{a_0 \text{ termos}}) \sigma_\tau^{a_0} \\
&= (\tau^{a_1+a_{2n}+\dots+a_j n^{j-1}+\dots}, \dots, \tau^{a_1+a_{2n}+\dots+a_j n^{j-1}+\dots}, \\
&\quad \underbrace{(\tau^{a_1+a_{2n}+\dots+a_j n^{j-1}+\dots}) \cdot \tau, \dots, (\tau^{a_1+a_{2n}+\dots+a_j n^{j-1}+\dots}) \cdot \tau}_{a_0 \text{ termos}}) \sigma_\tau^{a_0} \\
&= (\tau^{\frac{\xi-a_0}{n}}, \dots, \tau^{\frac{\xi-a_0}{n}}, \underbrace{\tau^{\frac{\xi-a_0}{n}+1}, \dots, \tau^{\frac{\xi-a_0}{n}+1}}_{a_0 \text{ termos}}) \sigma_\tau^{a_0} \\
&= (\tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}}, \dots, \tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}}, \underbrace{\tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}+1}, \dots, \tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}+1}}_{\bar{\xi} \text{ termos}}) \sigma_\tau^{\bar{\xi}}
\end{aligned}$$

□

Notação 3. O fêcho topológico de $\langle \tau \rangle$, isto é, o grupo pró-cíclico gerado por todas as potências n -ádicas de τ , será denotado por

$$\widehat{\langle \tau \rangle} = \{ \tau^\xi \mid \xi \in \mathbb{Z}_n \}$$

A seguinte proposição caracteriza os elementos de $\text{Aut}(T_n)$:

Proposição 12. Sejam $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$, m o expoente do grupo $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$ e $t \in \mathbb{N}$ satisfazendo $(m, t) = 1$. Então a equação

$$x^t = \alpha$$

sempre tem solução em $\text{Aut}(T_n)$.

Demonstração. Como m é o expoente do grupo $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$, então, pela proposição anterior, $\alpha^\xi \in \text{Aut}(T_n)$ para qualquer $\xi \in \mathbb{Z}_m$. Portanto, como $(m, t) = 1$, então t possui um inverso t^{-1} em \mathbb{Z}_m . Logo $x = \alpha^{t^{-1}}$ é solução para a equação acima. □

Corolário 8. Seja $\tau \in \text{Aut}(T_n)$ a máquina de adição n -ádica e seja m um elemento invertível em \mathbb{Z}_n . Então equação

$$x^m = \tau$$

sempre tem solução em $\text{Aut}(T_n)$.

Exemplo 4. Se $\tau \in \text{Aut}(T_n)$ é a máquina de adição n -ádica, então para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$x^{nk+1} = \tau$$

tem solução

$$x = (x^{-k}, \dots, x^{-k}, x^{(n-1)k+1})\sigma_x,$$

onde $\sigma_x = \sigma_\tau = (0, \dots, n-1)$.

Demonstração. De fato, se $x^{nk+1} = \tau$, podemos escolher $\sigma_x = (0, 1, \dots, n-1)$.

Pelo Corolário 1,

$$(x^{nk+1})_i = (x_i x_{i+1} \cdots x_{i+n-1})^k x_i = x_i (x_{i+1} \cdots x_i)^k = \begin{cases} e, & \text{se } i \in \{0, \dots, n-2\} \\ \tau, & \text{se } i = n-1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Assim, para $i \in \{0, \dots, n-3\}$,

$$\begin{cases} x_i (x_{i+1} \cdots x_i)^k = e \\ (x_{i+1} \cdots x_i)^k x_{i+1} = e \end{cases} \Rightarrow x_i = x_{i+1}$$

Logo

$$x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-2} \quad (2.3)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_{n-1} (x_0 \cdots x_{n-1})^k = \tau \\ (x_0 \cdots x_{n-1})^k x_0 = e \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} x_{n-1} (x_0 \cdots x_{n-1})^k = \tau \\ (x_0 \cdots x_{n-1})^k = x_0^{-1} \end{cases} \\ \Rightarrow & x_{n-1} x_0^{-1} = \tau \Rightarrow x_{n-1} = \tau x_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_{n-2} (x_{n-1} \cdots x_{n-2})^k = e \\ (x_{n-1} \cdots x_{n-2})^k x_{n-1} = \tau \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} x_{n-2} (x_{n-1} \cdots x_{n-2})^k = e \\ (x_{n-1} \cdots x_{n-2})^k = \tau x_{n-1}^{-1} \end{cases} \\ & \Rightarrow x_{n-2} \tau x_{n-1}^{-1} = e \\ & \Rightarrow x_{n-1} = x_{n-2} \tau \\ & \stackrel{(2.3)}{\Rightarrow} x_{n-1} = x_0 \tau \end{aligned}$$

Logo

$$x_{n-1} = x_0\tau = \tau x_0 \quad (2.4)$$

Agora,

$$\begin{aligned} (x_0 \cdots x_{n-1})^k &= e \\ \stackrel{(2.3),(2.4)}{\Rightarrow} (x_0^n \tau)^k x_0 &= e \\ \stackrel{(2.4)}{\Rightarrow} x_0^{nk+1} \tau^k &= e \\ \Rightarrow x_0^{nk+1} &= \tau^{-k} \end{aligned}$$

Fazendo $x_0 = x^{-k}$, teremos que

$$x_0 = \cdots = x_{n-2} = x^{-k}$$

e

$$x_{n-1} = \tau x_0 = x^{nk+1} \cdot x^{-k} = x^{(n-1)k+1}$$

Logo

$$x = (x^{-k}, \dots, x^{-k}, x^{(n-1)k+1})\sigma_x,$$

com $\sigma_x = (0, \dots, n-1)$ satisfaz $x^{nk+1} = \tau$. □

2.3 Polarizador e Indutor da máquina de adição n -ádica

Polarizadores e Indutores aparecem naturalmente quando trabalhamos com estruturas que envolvem a máquina de adição n -ádica. Nesta seção demonstraremos algumas propriedades dos Polarizadores e dos Indutores que serão úteis em nosso estudo.

Definição 4. *Pela Proposição 11, podemos escrever as potências da máquina de adição n -ádica na forma*

$$\tau^\xi = (\tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}+\delta(0,\xi)}, \dots, \tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}+\delta(n-\xi-1,\xi)}, \underbrace{\tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}+\delta(n-\xi,\xi)}, \dots, \tau^{\frac{\xi-\bar{\xi}}{n}+\delta(n-1,\xi)}}_{\bar{\xi} \text{ termos}}) \sigma_{\bar{\tau}}, \forall \xi \in \mathbb{Z}_n,$$

onde $\delta : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \{0, 1\}$ é a função definida por

$$\delta(j, r) = \begin{cases} 0 & \text{se } \bar{j} = 0, \dots, n-1-\bar{r} \\ 1 & \text{c.c} \end{cases}$$

Esta função é chamada de **Polarizador da máquina de adição n -ádica**.

Observação 1.

$$\delta(j, r) = \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{j} + \bar{r} \leq n - 1 \\ 1, & \text{se } \bar{j} + \bar{r} > n - 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

Proposição 13. (*Propriedades do Polarizador da máquina de adição n -ádica*)

(i) Se $(a, n) = 1$, então $\sum_{k=0}^{n-1} \delta(i + ka, \xi) = \bar{\xi}$.

(ii) Seja j inteiro positivo, então

$$\frac{j\xi - \bar{j}\bar{\xi}}{n} + \delta(i, j\xi) = j \left(\frac{\xi - \bar{\xi}}{n} \right) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta(i + k\xi, \xi), \forall i, \xi \in \mathbb{Z} \quad (2.6)$$

Demonstração. (i) Seja $\varphi : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ dada por $\varphi(x) = \overline{i + xa}$.

Como $(n, a) = 1$, então φ é uma bijeção. Portanto

$$\sum_{k=0}^{n-1} \delta(i + ka, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \delta(k, \xi) = \bar{\xi}.$$

(ii) Como $(\tau^{\xi j})_i = (\tau^{\xi})_i (\tau^{\xi})_{i+\xi} \cdots (\tau^{\xi})_{i+(j-1)\xi}$, então

$$\tau^{\frac{j\xi - \bar{j}\bar{\xi}}{n} + \delta(i, j\xi)} = \tau^{j \left(\frac{\xi - \bar{\xi}}{n} \right) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta(i + k\xi, \xi)}.$$

Logo

$$\frac{j\xi - \bar{j}\bar{\xi}}{n} + \delta(i, j\xi) = j \left(\frac{\xi - \bar{\xi}}{n} \right) + \sum_{k=0}^{j-1} \delta(i + k\xi, \xi), \forall i, \xi \in \mathbb{Z}$$

□

Definição 5. A partir do Polarizador da máquina de adição n -ádica podemos definir, para cada $s \in \mathbb{Z}$, uma função $\Delta_s : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ dada por

$$\Delta_s(i, t) = \delta(i, t - i) - \delta(i - s, t - i)$$

que chamaremos de **Indutor da máquina de adição n -ádica**.

Proposição 14 (Propriedades do Indutor da máquina de adição n -ádica).

Se $\Delta_s(i, t) = \delta(i, t - i) - \delta(i - s, t - i)$, então

$$(i) \Delta_s(i, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{t}, \bar{i} \geq \bar{s} \text{ ou } \bar{t}, \bar{i} < \bar{s} \\ 1, & \text{se } \bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i} \\ -1, & \text{se } \bar{i} < \bar{s} \leq \bar{t} \end{cases}$$

$$(ii) \Delta_s(i, t) = -\Delta_s(t, i)$$

$$(iii) \Delta_s(i + s, t + s) = -\Delta_{-s}(i, t)$$

$$(iv) \Delta_s(i, t) = \Delta_s(i, z) + \Delta_s(z, t)$$

$$(v) \sum_{k=0}^{\frac{n}{(s,n)}-1} \Delta_s(i+ks, t+ks) = 0$$

$$(vi) \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_s(k, t) = \begin{cases} n - \bar{s}, & \text{se } \bar{t} < \bar{s} \\ -\bar{s} & \text{se } \bar{t} \geq \bar{s} \end{cases}$$

para todos $i, t, z \in \mathbb{Z}$.

Demonstração.

(i) Por (2.5) temos que

$$\delta(i, t-i) = \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{t} \geq \bar{i} \\ 1, & \text{se } \bar{t} < \bar{i} \end{cases}$$

Assim,

$$\delta(i-s, t-i) = \delta(i-s, (t-s) - (i-s)) = \begin{cases} 0, & \text{se } \overline{t-s} \geq \overline{i-s} \\ 1, & \text{se } \overline{t-s} < \overline{i-s} \end{cases}$$

Analisando os intervalos,

$$(\bar{t}, \bar{i} \geq \bar{s} \text{ e } \overline{t-s} \geq \overline{i-s}) \Leftrightarrow (\bar{t} \geq \bar{i} \geq \bar{s})$$

$$(\bar{t}, \bar{i} \geq \bar{s} \text{ e } \overline{t-s} < \overline{i-s}) \Leftrightarrow (\bar{s} \leq \bar{t} < \bar{i})$$

$$(\bar{i} < \bar{s}, \bar{t} \geq \bar{s} \text{ e } \overline{t-s} \geq \overline{i-s}) \Leftrightarrow (\bar{i} < \bar{s} \leq \bar{t} \text{ e } \bar{t} - \bar{s} \geq n + \bar{i} - \bar{s})$$

$$\Leftrightarrow (\bar{i} < \bar{s} \leq \bar{t} \text{ e } \bar{t} \geq n + \bar{i}), \text{ impossível}$$

$$(\bar{i} < \bar{s}, \bar{t} \geq \bar{s} \text{ e } \overline{t-s} < \overline{i-s}) \Leftrightarrow (\bar{i} < \bar{s} \leq \bar{t} \text{ e } \bar{t} - \bar{s} < n + \bar{i} - \bar{s})$$

$$\Leftrightarrow (\bar{i} < \bar{s} \leq \bar{t})$$

$$(\bar{i} < \bar{s}, \bar{t} < \bar{s} \text{ e } \overline{t-s} \geq \overline{i-s}) \Leftrightarrow (\bar{i} < \bar{s}, \bar{t} < \bar{s} \text{ e } n + \bar{t} - \bar{s} \geq n + \bar{i} - \bar{s})$$

$$\Leftrightarrow (\bar{s} > \bar{t} \geq \bar{i})$$

$$(\bar{i} < \bar{s}, \bar{t} < \bar{s} \text{ e } \overline{t-s} < \overline{i-s}) \Leftrightarrow (\bar{i} < \bar{s}, \bar{t} < \bar{s} \text{ e } n + \bar{t} - \bar{s} < n + \bar{i} - \bar{s})$$

$$\Leftrightarrow (\bar{t} < \bar{i} < \bar{s})$$

$$\begin{aligned} (\bar{i} \geq \bar{s}, \bar{t} < \bar{s} \text{ e } \overline{t-s} \geq \overline{i-s}) &\Leftrightarrow (\bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i} \text{ e } n + \bar{t} - \bar{s} \geq \bar{i} - \bar{s}) \\ &\Leftrightarrow (\bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{i} \geq \bar{s}, \bar{t} < \bar{s} \text{ e } \overline{t-s} < \overline{i-s}) &\Leftrightarrow (\bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i} \text{ e } n + \bar{t} - \bar{s} < \bar{i} - \bar{s}) \\ &\Leftrightarrow (\bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i} \text{ e } n + \bar{t} < \bar{i}), \text{ impossível} \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } \delta(i-s, t-i) = \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{s} \leq \bar{i} \leq \bar{t} \text{ ou } \bar{i} \leq \bar{t} < \bar{s} \text{ ou } \bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i} \\ 1, & \text{se } \bar{s} \leq \bar{t} < \bar{i} \text{ ou } \bar{i} < \bar{s} \leq \bar{t} \text{ ou } \bar{t} < \bar{i} < \bar{s} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } \Delta_s(i, t) = \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{s} \leq \bar{i} \leq \bar{t} \text{ ou } \bar{i} \leq \bar{t} < \bar{s} \text{ ou } \bar{s} \leq \bar{t} < i \text{ ou } \bar{t} < \bar{i} < \bar{s} \\ 1, & \text{se } \bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i} \\ -1, & \text{se } \bar{i} < \bar{s} \leq \bar{t} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } \bar{t}, \bar{i} \geq \bar{s} \text{ ou } \bar{t}, \bar{i} < \bar{s} \\ 1, & \text{se } \bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i} \\ -1, & \text{se } \bar{i} < \bar{s} \leq \bar{t} \end{cases}$$

(ii) Segue de (i).

$$\text{(iii) } \Delta_s(i+s, t+s) = \delta(i+s, t-i) - \delta(i, t-i) = -(\delta(i, t-i) - \delta(i+s, t-i)) = -\Delta_{-s}(i, t)$$

(iv) Observe, primeiramente, que $\Delta_s(i, z) + \Delta_s(z, t) \neq 2$ e $\Delta_s(i, z) + \Delta_s(z, t) \neq -2$, pois

$$(\Delta_s(i, z) + \Delta_s(z, t) = 2) \Leftrightarrow (\bar{z} < \bar{s} \leq \bar{i} \text{ e } \bar{t} < \bar{s} \leq \bar{z})$$

e

$$(\Delta_s(i, z) + \Delta_s(z, t) = -2) \Leftrightarrow (\bar{i} < \bar{s} \leq \bar{z} \text{ e } \bar{z} < \bar{s} \leq \bar{t}),$$

por (i).

Utilizando (i) novamente, observe que

$$(\Delta_s(i, z) + \Delta_s(z, t) = 1)$$

$$\Leftrightarrow (((\bar{z} < \bar{s} \leq \bar{i}) \text{ e } (\bar{t}, \bar{z} \geq \bar{s} \text{ ou } \bar{t}, \bar{z} < \bar{s}))$$

$$\text{ou } ((\bar{z}, \bar{i} \geq \bar{s} \text{ ou } \bar{z}, \bar{i} < \bar{s}) \text{ e } (\bar{t} < \bar{s} \leq \bar{z})))$$

$$\Leftrightarrow (\bar{t} < \bar{s} \leq \bar{i})$$

$$(\Delta_s(i, z) + \Delta_s(z, t) = -1)$$

$$\Leftrightarrow (((\bar{z}, \bar{i} \geq \bar{s} \text{ ou } \bar{z}, \bar{i} < \bar{s}) \text{ e } (\bar{z} < \bar{s} \leq \bar{t}))$$

$$\text{ou } ((\bar{i} < \bar{s} \leq \bar{z}) \text{ e } (\bar{t}, \bar{z} \geq \bar{s} \text{ ou } \bar{t}, \bar{z} < \bar{s})))$$

$$\Leftrightarrow (\bar{i} < \bar{s} \leq \bar{t})$$

$$(\Delta_s(i, z) + \Delta_s(z, t) = 0)$$

$$\Leftrightarrow (((\bar{z}, \bar{i} \geq \bar{s} \text{ ou } \bar{z}, \bar{i} < \bar{s}) \text{ e } (\bar{t}, \bar{z} \geq \bar{s} \text{ ou } \bar{t}, \bar{z} < \bar{s}))$$

$$\text{ou } ((\bar{z} < \bar{s} \leq \bar{i}) \text{ e } (\bar{z} < \bar{s} \leq \bar{t}))$$

$$\text{ou } ((\bar{i} < \bar{s} \leq \bar{z}) \text{ e } (\bar{t} < \bar{s} \leq \bar{z})))$$

$$\Leftrightarrow (\bar{t}, \bar{i} \geq \bar{s} \text{ ou } \bar{t}, \bar{i} < \bar{s})$$

Logo, $\Delta_s(i, z) + \Delta_s(z, t) = \Delta_s(i, t)$.

(v) Observe primeiramente que $\sum_{k=0}^{\binom{n}{(n,s)}-1} \delta(i + ks, t - i) = \sum_{k=0}^{\binom{n}{(n,s)}-1} \delta(i + (k-1)s, t - i)$.

Assim, para $m = \frac{n}{(s,n)}$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} \Delta_s(i + ks, t + ks) &= \sum_{k=0}^{m-1} [\delta(i + ks, t - i) - \delta(i + (k-1)s, t - i)] \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \delta(i + ks, t - i) - \sum_{k=0}^{m-1} \delta(i + (k-1)s, t - i) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \delta(i + ks, t - i) - \sum_{k=0}^{m-1} \delta(i + ks, t - i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(vi) \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_s(k, t) = \sum_{k=0}^{\bar{s}-1} \Delta_s(k, t) + \sum_{k=\bar{s}}^{n-1} \Delta_s(k, t) \stackrel{(i)}{=} \begin{cases} n - \bar{s}, & \text{se } \bar{t} < \bar{s} \\ -\bar{s}, & \text{se } \bar{t} \geq \bar{s} \end{cases}$$

□

2.4 O Normalizador do grupo pró-cíclico $\widehat{\langle \tau \rangle}$

Proposição 15. *Seja N o normalizador do grupo $\widehat{\langle \tau \rangle}$ em $\text{Aut}(T_n)$, então $N' \leq C(\tau)$.*

Demonstração. Sejam $\alpha, \beta \in N$, então existem $\eta, \xi \in U(\mathbb{Z}_n)$ tais que $\tau^\alpha = \tau^\xi$ e $\tau^\beta = \tau^\eta$.

Assim,

$$\begin{aligned} \tau^\alpha &= \tau^\xi \\ \Rightarrow \tau &= (\tau^\xi)^{\alpha^{-1}} \\ \Rightarrow \tau &= (\tau^{\alpha^{-1}})^\xi \\ \Rightarrow \tau^{\xi^{-1}} &= \tau^{\alpha^{-1}} \end{aligned}$$

Da mesma forma $\tau^{\eta^{-1}} = \tau^{\beta^{-1}}$.

Portanto, $\tau^{[\alpha, \beta]} = \tau^{\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta} = (\tau^{\xi^{-1}})^{\beta^{-1}\alpha\beta} = (\tau^{\xi^{-1}\eta^{-1}})^{\alpha\beta} = \tau^{\xi^{-1}\eta^{-1}\xi\eta} = \tau$

Logo, $N' \leq C(\tau)$. □

A seguinte proposição nos diz quem são os elementos do normalizador do grupo pró-cíclico $\widehat{\langle \tau \rangle}$:

Proposição 16. *Sejam τ a máquina de adição n -ádica e $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$ satisfazendo $\tau^\alpha = \tau^\xi$, com $\xi \in U(\mathbb{Z}_n)$. Assim*

$$\alpha = \alpha_0^{(1)} \left(e, \tau^{\frac{(\xi - \bar{\xi})}{n} + \delta(v(\alpha)\xi, \xi)}, \dots, \tau^{i \frac{(\xi - \bar{\xi})}{n} + \sum_{k=0}^{i-1} \delta((v(\alpha)+k)\xi, \xi)}, \dots, \tau^{(n-1) \frac{(\xi - \bar{\xi})}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \delta((v(\alpha)+k)\xi, \xi)} \right) \sigma_\alpha \quad (2.7)$$

com $\tau^{\alpha_0} = \tau^\xi$ e $\sigma_\alpha \in S_n$ satisfazendo $(j)^{\sigma_\alpha} = \overline{(v(\alpha) + j)\xi}$ para algum $v(\alpha) \in \{0, \dots, n-1\}$.

Demonstração. Observe primeiro que $\sigma_\tau^\xi = (0, \bar{\xi}, \dots, \overline{(n-1)\xi})$ e $\sigma_\tau^{\sigma_\alpha} = \sigma_\tau^\xi$ implicam em $(0^{\sigma_\alpha}, 1^{\sigma_\alpha}, \dots, (n-1)^{\sigma_\alpha}) = (0, \bar{\xi}, \overline{2\xi}, \dots, \overline{(n-1)\xi})$. Portanto, existe $v(\alpha) \in \{0, \dots, n-1\}$ tal que $0^{\sigma_\alpha} = \overline{v(\alpha)\xi}$. Logo $(j)^{\sigma_\alpha} = \overline{(v(\alpha) + j)\xi}$, $j = 0, \dots, n-1$.

Agora,

$$\begin{aligned} \tau^\alpha &= \tau^\xi \\ \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \sigma_\tau^{\sigma_\alpha} = \sigma_\tau^\xi \text{ e } \alpha_{i\sigma_\tau^s} = (\tau^s)_i^{-1} \alpha_i (\tau^{\xi s})_{i\sigma_\alpha}, \\ \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall s \in \mathbb{Z}, \text{ pela Proposição 6(iii)} \end{array} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \sigma_\tau^{\sigma_\alpha} = \sigma_\tau^\xi, \alpha_0 = \alpha_{0\sigma_\tau^n} = (\tau^n)_0^{-1} \alpha_0 (\tau^{\xi n})_{0\sigma_\alpha} \\ \text{e } \alpha_i = \alpha_{0\sigma_\tau^i} = (\tau^i)_0^{-1} \alpha_0 (\tau^{\xi i})_{0\sigma_\alpha}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \sigma_\tau^{\sigma^\alpha} = \sigma_\tau^\xi, \quad \alpha_0 = \tau^{-1}\alpha_0\tau^\xi \\ e \quad \alpha_i = \alpha_0\tau^{\frac{\xi i - \bar{\xi} i}{n} + \delta(v(\alpha)\xi, \xi i)}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\} \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \sigma_\tau^{\sigma^\alpha} = \sigma_\tau^\xi, \quad \alpha_0 = \tau^{-1}\alpha_0\tau^\xi \\ e \quad \alpha_i = \alpha_0\tau^{i\left(\frac{\xi - \bar{\xi}}{n}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} \delta((v(\alpha)+k)\xi, \xi)}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \text{ pela Eq. (2.6)} \end{array} \right) \quad \square \end{aligned}$$

Corolário 9. *Seja $\widehat{\langle \tau \rangle} = \{\tau^\xi \mid \xi \in \mathbb{Z}_n\}$ o fecho topológico de $\langle \tau \rangle$ em \mathcal{A} . Então $C(\tau) = \widehat{\langle \tau \rangle}$. Em particular, o normalizador de $\widehat{\langle \tau \rangle}$ é metabeliano.*

Demonstração. Se $\alpha \in C(\tau)$, então $\tau^\alpha = \tau$. Fazendo $\xi = 1$ na proposição anterior teremos

$$\alpha = \alpha_0^{(1)}\tau^{v(\alpha)},$$

onde $\alpha_0 \in C(\tau)$, i.e.,

$$\alpha = \tau^{v(\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} v(\alpha_0^k)n^k} \in \widehat{\langle \tau \rangle}$$

Logo $C(\tau) = \widehat{\langle \tau \rangle}$.

Assim, se N é o normalizador de $\widehat{\langle \tau \rangle}$, temos que

$$N' \stackrel{\text{Prop.15}}{\leq} C(\tau) = \widehat{\langle \tau \rangle},$$

ou seja, N é metabeliano. □

Corolário 10. *Seja $\mathbb{Z}_n^1 = \{\xi \in \mathbb{Z}_n \mid \bar{\xi} = 1\}$. Se $\xi \in \mathbb{Z}_n^1$, então*

$$\lambda_\xi = \lambda_\xi^{(1)}(e, \tau^{\frac{\xi-1}{n}}, \tau^{2\frac{\xi-1}{n}}, \dots, \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}})$$

satisfaz

$$\tau^{\lambda_\xi} = \tau^\xi.$$

Proposição 17. *Seja $\Lambda = \{\lambda_\xi \mid \xi \in \mathbb{Z}_n^1\}$, então Λ é um grupo (abeliano) isomorfo a \mathbb{Z}_n^1 .*

Demonstração. Sejam $\xi, \theta \in \mathbb{Z}_n^1$. Assim, como $\lambda_\xi, \lambda_\theta$ e $\lambda_{\xi\theta}$ são inativos, segue que

$$\begin{aligned} (\lambda_\xi \lambda_\theta \lambda_{\xi\theta}^{-1})_i &= (\lambda_\xi)_i (\lambda_\theta)_i (\lambda_{\xi\theta}^{-1})_i = (\lambda_\xi)_i (\lambda_\theta)_i (\lambda_{\xi\theta}^{-1})_i = (\lambda_\xi)_i (\lambda_\theta)_i (\lambda_{\xi\theta})_i^{-1} \\ &= \lambda_\xi \tau^{i\frac{\xi-1}{n}} \lambda_\theta \tau^{i\frac{\theta-1}{n}} \left(\lambda_{\xi\theta} \tau^{i\frac{\xi\theta-1}{n}} \right)^{-1} = \lambda_\xi \lambda_\theta \lambda_\theta^{-1} \tau^{i\frac{\xi-1}{n}} \lambda_\theta \tau^{i\frac{\theta-1}{n}} \tau^{-i\frac{\xi\theta-1}{n}} \lambda_{\xi\theta}^{-1} \\ &= \lambda_\xi \lambda_\theta \tau^{i\theta\frac{\xi-1}{n}} \tau^{i\frac{\theta-1}{n}} \tau^{-i\frac{\xi\theta-1}{n}} \lambda_{\xi\theta}^{-1} = \lambda_\xi \lambda_\theta \lambda_{\xi\theta}^{-1}, \forall i \in \{0, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

Logo $\lambda_\xi \lambda_\theta = \lambda_{\xi\theta}$. □

Proposição 18. *Sejam $\xi \in \mathbb{Z}_n^1$ e $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$ satisfazendo $\tau^\alpha = \tau^\xi$. Então $\alpha = \lambda_\xi \tau^m$ para algum $m \in \mathbb{Z}_n$.*

Demonstração. De fato, como $\tau^{\lambda_\xi} = \tau^\xi$ e $\tau^\alpha = \tau^\xi$, então, $\tau^{\lambda_\xi^{-1}\alpha} = \tau$. Portanto, pelo Corolário 9, existe $m \in \mathbb{Z}_n$ tal que $\lambda_\xi^{-1}\alpha = \tau^m$.

Logo $\alpha = \lambda_\xi \tau^m$. □

Proposição 19. *Seja $\Psi = \{\lambda_\xi \tau^t \mid \xi \in \mathbb{Z}_n^1 \text{ e } t \in \mathbb{Z}_n\}$, então Ψ é um grupo metabeliano satisfazendo*

$$(i) \quad \Psi = \Lambda \rtimes \langle \widehat{\tau} \rangle \cong \mathbb{Z}_n^1 \rtimes \mathbb{Z}_n$$

$$(ii) \quad \Psi' = \langle \widehat{\tau^n} \rangle$$

Demonstração. (i) Dados $\lambda_\xi \tau^t, \lambda_\theta \tau^k \in \Psi$, $(\lambda_\theta \tau^k)^{-1} = \lambda_{\theta^{-1}} \tau^{-k\theta^{-1}}$, pois

$$\lambda_\theta \tau^k \lambda_{\theta^{-1}} \tau^{-k\theta^{-1}} = \lambda_\theta \lambda_{\theta^{-1}} \tau^{k\theta^{-1} - k\theta^{-1}} = \lambda_1 = 1.$$

$$\text{Assim } \lambda_\xi \tau^t \lambda_{\theta^{-1}} \tau^{-k\theta^{-1}} = \lambda_\xi \lambda_{\theta^{-1}} \tau^{t\theta^{-1} - k\theta^{-1}} = \lambda_{\xi\theta^{-1}} \tau^{(t-k)\theta^{-1}} \in \Psi.$$

Portanto Ψ é subgrupo de \mathcal{A} .

Além disso, como $\Lambda \leq N_{\mathcal{A}}(\langle \widehat{\tau} \rangle)$ e $\Lambda \cap \langle \widehat{\tau} \rangle = 1$, segue que $\Psi = \Lambda \rtimes \langle \widehat{\tau} \rangle \cong \mathbb{Z}_n^1 \rtimes \mathbb{Z}_n$.

(ii) Como $[\lambda_\xi \tau^t, \lambda_\theta \tau^k] = \tau^{-t} \lambda_{\xi^{-1}} \tau^{-k} \lambda_{\theta^{-1}} \lambda_\xi \tau^t \lambda_\theta \tau^k$

$$= \tau^{-t} \lambda_{\xi^{-1}} \tau^{-k} \lambda_{\theta^{-1}} \xi \tau^t \lambda_\theta \tau^k = \tau^{-t} \lambda_{\xi^{-1}} \tau^{-k} \lambda_{\theta^{-1}} \xi \lambda_\theta \tau^{\theta t} \tau^k$$

$$= \tau^{-t} \lambda_{\xi^{-1}} \tau^{-k} \lambda_\xi \tau^{\theta t + k} = \tau^{-t} \tau^{-\xi k} \tau^{\theta t + k} = \tau^{t(\theta-1) - k(\xi-1)} \in \langle \widehat{\tau^n} \rangle$$

e $[\tau, \lambda_\xi] = \tau^{\xi-1}$, então $\Psi' = \langle \widehat{\tau^n} \rangle$. □

Proposição 20. *Para cada $k \in \mathbb{Z}_n$, defina $H_k = \{\lambda_\xi \tau^{k(\frac{\xi-1}{n})} \mid \xi \in \mathbb{Z}_n^1\}$. Então*

(i) H_k é um subgrupo abeliano de Ψ isomorfo a \mathbb{Z}_n^1 ;

(ii) Se $k, r \in \mathbb{Z}_n$ e $k \neq r$, então $H_k \cap H_r = e$.

Demonstração. (i) Basta notar que a aplicação $\varphi_k : \mathbb{Z}_n^1 \rightarrow H_k$ definida por $\varphi_k(\xi) = \lambda_\xi \tau^{k(\frac{\xi-1}{n})}$ é um isomorfismo.

(ii) Sejam $k, r \in \mathbb{Z}_n$ com $k \neq r$ e $\xi, \theta \in \mathbb{Z}_n^1 \setminus \{1\}$.

$$\text{Assim } [\lambda_\xi \tau^{k(\frac{\xi-1}{n})}, \lambda_\theta \tau^{r(\frac{\theta-1}{n})}] = \tau^{k(\frac{\xi-1}{n})(\theta-1) - r(\frac{\theta-1}{n})(\xi-1)} = \tau^{(k-r)(\frac{\xi-1}{n})(\theta-1)} \neq e.$$

Portanto um elemento não trivial de H_k não comuta com nenhum elemento não trivial de H_r . Em particular, $H_k \cap H_r = e$. □

Proposição 21. Se $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \text{Aut}(T_n)$ satisfaz $\tau^\alpha = \lambda_\xi \tau^{1+kn}$, para algum $\xi \neq 1$, então

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_{\xi^{i+1}} \tau^{\frac{1}{n} \left[(1+kn) \frac{\xi^{i+1}-1}{\xi-1} - (i+1) \right]}, i = 0, 1, \dots, n-2 \\ \tau^{\alpha_0} = \lambda_{\xi^n} \tau^{\frac{1}{n} \left[(1+kn) \frac{\xi^n-1}{\xi-1} \right]} \end{cases}$$

Demonstração. De $\tau^\alpha = \lambda_\xi \tau^{1+kn}$, obtemos

$$[(e, e, \dots, e, \tau)\sigma_\tau]^{(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})} = (\lambda_\xi \tau^k, \lambda_\xi \tau^{\frac{\xi-1}{n}+k}, \dots, \lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k+1})\sigma_\tau$$

Pela Proposição 6,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \lambda_\xi \tau^{i\frac{\xi-1}{n}+k} = \alpha_i^{-1} \alpha_{i+1}, \text{ se } i = 0, 1, \dots, n-2 \\ \lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k} = \alpha_{n-1}^{-1} \tau \alpha_0, \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_i \lambda_\xi \tau^{i\frac{\xi-1}{n}+k}, \text{ se } i = 0, 1, \dots, n-2 \\ \alpha_0 = \tau^{-1} \alpha_{n-1} \lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k}, \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_\xi \tau^k \lambda_\xi \tau^{\frac{\xi-1}{n}+k} \dots \lambda_\xi \tau^{i\frac{\xi-1}{n}+k}, \text{ se } i = 0, 1, \dots, n-2 \\ \alpha_0 = \tau^{-1} \alpha_{n-1} \lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k}, \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_{\xi^{i+1}} \tau^{k \sum_{j=0}^i \xi^j + \frac{\xi-1}{n} \xi^i \sum_{j=1}^i j (\xi^{-1})^j}, \text{ se } i = 0, 1, \dots, n-2 \\ \alpha_0 = \tau^{-1} \alpha_{n-1} \lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k}, \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_{\xi^{i+1}} \tau^{\frac{1}{n} \left[(1+kn) \frac{\xi^{i+1}-1}{\xi-1} - (i+1) \right]}, i = 0, 1, \dots, n-2 \\ \alpha_0 = \tau^{-1} \alpha_{n-1} \lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k}, \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_{\xi^{i+1}} \tau^{\frac{1}{n} \left[(1+kn) \frac{\xi^{i+1}-1}{\xi-1} - (i+1) \right]}, i = 0, 1, \dots, n-2 \\ \alpha_0 = \tau^{-1} (\alpha_0 \lambda_{\xi^{n-1}} \tau^{\frac{1}{n} \left[(1+kn) \frac{\xi^{n-1}-1}{\xi-1} - (n-1) \right]}) \lambda_\xi \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k}, \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_{\xi^{i+1}} \tau^{\frac{1}{n} \left[(1+kn) \frac{\xi^{i+1}-1}{\xi-1} - (i+1) \right]}, i = 0, 1, \dots, n-2 \\ \alpha_0 = \tau^{-1} \alpha_0 \lambda_{\xi^n} \tau^{\frac{\xi}{n} \left[(1+kn) \frac{\xi^{n-1}-1}{\xi-1} - (n-1) \right]} \tau^{(n-1)\frac{\xi-1}{n}+k}, \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \alpha_{i+1} = \alpha_0 \lambda_{\xi^{i+1}} \tau^{\frac{1}{n} \left[(1+kn) \frac{\xi^{i+1}-1}{\xi-1} - (i+1) \right]}, i = 0, 1, \dots, n-2 \\ \tau^{\alpha_0} = \lambda_{\xi^n} \tau^{\frac{1}{n} \left[(1+kn) \frac{\xi^n-1}{\xi-1} \right]} \end{cases} \end{aligned}$$

□

A seguinte proposição caracteriza grupos nilpotentes que contêm a máquina de adição:

Proposição 22. *Seja G um subgrupo nilpotente de $\text{Aut}(T_n)$ contendo a máquina de adição n -ádica. Então G é um grupo abeliano livre de torção contido em $\widehat{\langle \tau \rangle}$.*

Demonstração. Suponhamos que G seja um grupo nilpotente de classe $k > 1$ contendo a máquina de adição n -ádica.

Considere a *série central descendente* de G , definida por

$$G = \Gamma_1(G) \geq \Gamma_2(G) \geq \cdots \geq \Gamma_n(G) \geq \Gamma_{n+1}(G) \geq \cdots$$

onde $\Gamma_{t+1}(G) = [\Gamma_t(G), G]$ para todo $t \in \mathbb{N}$ maior que 1.

Como G é nilpotente de classe $k > 1$, então k é o menor inteiro positivo tal que $\Gamma_{k+1}(G) = 1$. Além disso, como $\widehat{\langle \tau \rangle}$ é abeliano e G é nilpotente de classe $k > 1$, existe $\alpha \in G - \widehat{\langle \tau \rangle}$.

Considere agora a seqüência de elementos de G definida recursivamente por:

$$\theta(1) = \alpha, \theta(2) = [\alpha, \tau], \cdots, \theta(t+1) = [\theta(t), \tau], \cdots.$$

Deste modo, como $\theta(t) \in \Gamma_t(G), \forall t \in \mathbb{N}$ e G é nilpotente de classe $k > 1$, então existe um menor inteiro positivo m tal que $\theta(m) = e$ e $2 < m \leq k+1$.

Desta forma,

$$e = \theta(m) = [\theta(m-1), \tau].$$

Pelo Corolário 9, existe $\xi \in \mathbb{Z}_n^*$ tal que

$$\theta(m-1) = \tau^\xi.$$

Logo

$$\begin{aligned} \theta(m-1) &= [\theta(m-2), \tau] = \tau^\xi \\ \Rightarrow \theta(m-2)^{-1} \tau^{-1} \theta(m-2) \tau &= \tau^\xi \\ \Rightarrow \tau^{\theta(m-2)} &= \tau^{1-\xi} \end{aligned}$$

Como G é nilpotente de classe $k > 1$, temos que

$$[\Gamma_k(G), \langle \tau \rangle] \leq [\Gamma_k(G), G] = \Gamma_{k+1}(G) = e$$

com $\Gamma_k(G) \neq e$.

Desta forma, existe $s \in \mathbb{Z}_n^*$ tal que $\tau^s \in \Gamma_k(G)$.

Assim,

$$[\tau^s, \theta(m-2)] = \tau^{-s} (\tau^s)^{\theta(m-2)} = \tau^{-s} \tau^{s(1-\xi)} = \tau^{-s\xi} \in \Gamma_{k+1}(G) \setminus \{e\},$$

o que é impossível.

Logo $G \leq \widehat{\langle \tau \rangle}$

□

Capítulo 3

Construção de Grupos Solúveis

Neste capítulo apresentamos algumas construções de grupos solúveis a partir de um automorfismo de $Aut(T_n)$. As idéias aqui apresentadas podem ser combinadas para auxiliar na construção de grupos solúveis mais complexos.

Teorema 1. *Sejam $\alpha \in Aut(T_n)$, $t \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_\alpha^t = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ a decomposição de σ_α^t em ciclos disjuntos nos símbolos em $Y = \{0, \dots, n-1\}$.*

Assim, se $T = \{\sigma_i \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$ e para cada $S \subset T$, definirmos um automorfismo

$$\gamma_S = ((\gamma_S)_0, \dots, (\gamma_S)_{n-1}) \prod_{\sigma \in S} \sigma,$$

onde

$$(\gamma_S)_j = \begin{cases} (\alpha^t)_j, & \text{se } j \text{ é um símbolo que} \\ & \text{aparece em algum elemento de } S. \\ e & \text{c. c.} \end{cases}$$

então

- (i) $H = \langle \gamma_S, \alpha \mid S \subset T \rangle$ é um grupo metabeliano.
- (ii) $N = \langle \gamma_S \mid S \subset T \rangle$ é um subgrupo normal e abeliano de H .
- (iii) $\frac{H}{N} = \frac{N\langle \alpha \rangle}{N} = \frac{\langle \alpha \rangle}{N \cap \langle \alpha \rangle}$ é um grupo cíclico de ordem divisora de t .

Demonstração. Sejam $\gamma_{S_1}, \gamma_{S_2} \in N$.

Assim,

$$\sigma_{\gamma_{S_1}\gamma_{S_2}} = \sigma_{\gamma_{S_1}}\sigma_{\gamma_{S_2}} = \sigma_{\gamma_{S_2}} \cdot \sigma_{\gamma_{S_1}} = \sigma_{\gamma_{S_2}\gamma_{S_1}}$$

e

$$(\gamma_{S_1}\gamma_{S_2})_j = (\gamma_{S_1})_j(\gamma_{S_2})_j^{\gamma_{S_1}} = \begin{cases} (\alpha^{2t})_j, & \text{se } j \text{ é símbolo que aparece em} \\ & \text{algum elemento de } S_1 \cap S_2. \\ (\alpha^t)_j, & \text{se } j \text{ é símbolo que aparece em} \\ & \text{algum elemento de } S_1 \cup S_2 \text{ mas} \\ & \text{não aparece em elementos de } S_1 \cap S_2. \\ e, & \text{c. c.} \end{cases}$$

Logo $\gamma_{S_1}\gamma_{S_2} = \gamma_{S_2}\gamma_{S_1}$ e N é abeliano.

Como

$$((\gamma_S)^\alpha)_j = (\alpha^{-1})_j(\gamma_S)_{j^{\alpha^{-1}}}\alpha_{j^{\alpha^{-1}}\gamma_S}$$

$$= \begin{cases} (\alpha^{-1})_j(\alpha^t)_{j^{\alpha^{-1}}}\alpha_{j^{\alpha^{-1}}\alpha^t} = (\alpha^t)_j, & \text{se } j^{\alpha^{-1}} \text{ é um símbolo que} \\ & \text{aparece em algum elemento de } S, \\ (\alpha^{-1})_j e \alpha_{j^{\alpha^{-1}}\gamma_S} = (\alpha^{-1})_j \alpha_{j^{\alpha^{-1}}} = e & \text{c.c.} \end{cases}$$

então

$$((\gamma_S)^\alpha)_{j^\alpha} = \begin{cases} (\alpha^t)_{j^\alpha} = (\alpha^t)_{j^{\sigma_\alpha}} & \text{se } j \text{ é um símbolo que} \\ & \text{aparece em algum elemento de } S, \\ e & \text{c.c.} \end{cases}$$

Além disso, como σ_α age sobre T por conjugação, existe $S' \subset T$ com a mesma quantidade de elementos de S de tal forma que

- $S' = S^{\sigma_\alpha}$
- Se j é símbolo de algum elemento de S , então $j^\alpha = j^{\sigma_\alpha}$ é símbolo de algum elemento de S' .
- Se $\sigma \in S$, então $\sigma^{\sigma_\alpha} \in S'$.

$$\text{Assim, } ((\gamma_S)^\alpha)_j = (\gamma_{S'})_j \text{ e } \sigma_{\gamma_S^\alpha} = (\sigma_{\gamma_S})^{\sigma_\alpha} = \left(\prod_{\sigma \in S} \sigma \right)^{\sigma_\alpha} = \prod_{\sigma \in S} \sigma^{\sigma_\alpha} = \prod_{\sigma \in S'} \sigma = \sigma_{\gamma_{S'}}.$$

Portanto $(\gamma_S)^\alpha = \gamma_{S'}$, i.e., N é um subgrupo normal de H .

Para o restante da demonstração, basta observar que $H = N \langle \alpha \rangle$, pois N é normal em H . Assim, pelo *Teorema do isomorfismo*,

$$\frac{H}{N} = \frac{N \langle \alpha \rangle}{N} \cong \frac{\langle \alpha \rangle}{N \cap \langle \alpha \rangle}$$

é um grupo cíclico.

Além disso, como

$$\gamma_{\{\sigma_1\}}\gamma_{\{\sigma_2\}}\cdots\gamma_{\{\sigma_k\}} = \alpha^t,$$

então

$$\langle \alpha^t \rangle \subset N \cap \langle \alpha \rangle.$$

Logo

$$[\langle \alpha \rangle : \langle \alpha^t \rangle] = [\langle \alpha \rangle : N \cap \langle \alpha \rangle] \cdot [N \cap \langle \alpha \rangle : \langle \alpha^t \rangle]$$

e como $[\langle \alpha \rangle : \langle \alpha^t \rangle]$ é um divisor de t , segue que $[H : N] = [\langle \alpha \rangle : N \cap \langle \alpha \rangle]$ também é um divisor de t . \square

Teorema 2. *Dados $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$ e $t \in \mathbb{N}$, sejam m o expoente do grupo $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$ e $\varphi(\alpha, u) \in \text{Stab}_n(|u|)$ tal que para cada $w \in \mathcal{M}$ com $|w| = |u|$,*

$$\varphi(\alpha, u)_w = \begin{cases} \left(\alpha^{m|u|} \right)_u, & \text{se } w = u \\ e, & \text{se } w \neq u \end{cases}$$

Assim,

$$G(\alpha, t) = \langle \varphi(\alpha, u) \mid u \in \mathcal{M}, |u| \leq t \rangle$$

é um grupo solúvel com comprimento derivado menor ou igual a $t + 1$ contendo α .

Demonstração. Sejam $u, v, w \in \mathcal{M}$ tais que $|v| \leq |u| = |w|$. Assim,

$$\varphi(\alpha, u)^{\varphi(\alpha, v)} \in \text{Stab}_n(|u|)$$

e

$$\begin{aligned} (\varphi(\alpha, u)^{\varphi(\alpha, v)})_w &= (\varphi(\alpha, v)^{-1})_w \varphi(\alpha, u)_{w\varphi(\alpha, v)^{-1}} \varphi(\alpha, v)_{w\varphi(\alpha, v)^{-1}\varphi(\alpha, u)} \\ &= \begin{cases} (\varphi(\alpha, v)^{-1})_{u\varphi(\alpha, v)} \varphi(\alpha, u)_u \varphi(\alpha, v)_u, & \text{se } w\varphi(\alpha, v)^{-1} = u \\ e, & \text{se } w\varphi(\alpha, v)^{-1} \neq u \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(\alpha^{m|u\varphi(\alpha, v)|} \right)_{u\varphi(\alpha, v)}, & \text{se } w = u\varphi(\alpha, v) \\ e, & \text{se } w \neq u\varphi(\alpha, v) \end{cases} \\ &= \varphi(\alpha, u\varphi(\alpha, v))_w. \end{aligned}$$

Portanto, para $u, v \in \mathcal{M}$ tais que $|v| \leq |u|$,

$$\varphi(\alpha, u)^{\varphi(\alpha, v)} = \varphi(\alpha, u\varphi(\alpha, v)) \tag{3.1}$$

Para cada $k \in \{0, \dots, t\}$, considere os seguintes subgrupos de $G(\alpha, t)$:

$$H_k = \langle \varphi(\alpha, u) \mid u \in \mathcal{M}, |u| = k \rangle$$

e

$$N_k = \langle \varphi(\alpha, u) \mid u \in \mathcal{M}, k \leq |u| \leq t \rangle.$$

Assim, pela Equação (3.1), H_k é abeliano, N_k é um subgrupo normal de $G(\alpha, t)$,

$$N_k = N_{k+1}H_k, \forall k \in \{0, \dots, t-1\}$$

$$N_0 = G(\alpha, t) \text{ e } N_t = H_t$$

satisfazem

$$\frac{N_k}{N_{k+1}} \cong \frac{N_{k+1}H_k}{N_{k+1}} \cong \frac{H_k}{N_{k+1} \cap H_k} \cong H_k, \forall k \in \{0, \dots, t-1\}$$

e

$$G(\alpha, t) = N_0 \triangleright N_1 \triangleright N_2 \triangleright \dots \triangleright N_t \triangleright 1.$$

Logo $G(\alpha, t)$ é solúvel de comprimento derivado menor ou igual a $t + 1$.

□

Corolário 11. *Sejam $\tau \in \text{Aut}(T_n)$ a máquina de adição n -ádica e*

$$G_t = \langle \varphi(\tau, u) \mid u \in \mathcal{M}, |u| \leq t \rangle.$$

Então G_t é um grupo solúvel de comprimento derivado $t + 1$ isomorfo ao produto entrelaçado

$$(\dots((\langle \tau \rangle \wr C_n) \wr C_n) \wr \dots) \wr C_n,$$

onde C_n aparece t vezes á direita de $\langle \tau \rangle$ no produto entrelaçado.

Corolário 12. *Sejam $\tau \in \text{Aut}(T_n)$ a máquina de adição n -ádica. Então*

$$G_\infty = \langle \varphi(\tau, u) \mid u \in \mathcal{M} \rangle$$

é um grupo localmente solúvel que contém subgrupos solúveis com comprimento solúvel t para cada $t \in \mathbb{N}$.

Corolário 13. *Sejam p primo e $\tau \in \text{Aut}(T_p)$ a máquina de adição p -ádica. Então*

$$G_t = \langle \varphi(\tau, u) \mid u \in \mathcal{M}, |u| \leq t \rangle$$

contém um subgrupo isomorfo a um Sylow p -subgrupo de S_{p^t} .

Demonstração 1. Seja $u \in \mathcal{M}$, então $\varphi(\tau, u) \in \text{Stab}_p(|u|)$ satisfaz

$$\varphi(\tau, u)_v = \begin{cases} \tau, & \text{se } v = u \\ e, & \text{se } v \neq u \end{cases}$$

para cada $v \in \mathcal{M}$ com $|v| = |u|$.

Para cada $w \in \mathcal{M}$ com $|w| < t$, seja $\gamma(w) \in \text{Stab}_p(|w|)$ tal que para $v \in \mathcal{M}$ com $|v| = |w|$,

$$\gamma(w)_v = \begin{cases} (0, 1, \dots, p-1), & \text{se } v = w \\ e, & \text{se } v \neq w \end{cases}$$

Mostraremos que $\gamma(w) \in G_t$.

Como $\varphi(\tau, w), \varphi(\tau, w(p-1)) \in G_t$, então $\varphi(\tau, w(p-1))^{-1}\varphi(\tau, w) = \gamma(w) \in G_t$.

Assim, $\langle \gamma(w) \mid w \in \mathcal{M}, |w| < t \rangle \cong (\dots((C_p \wr C_p) \wr C_p) \wr \dots) \wr C_p$, onde C_p aparece t vezes no produto entrelaçado.

Portanto, $\langle \gamma(w) \mid w \in \mathcal{M}, |w| < t \rangle$ é isomorfo a um subgrupo de Sylow de S_{p^t} . □

Demonstração 2. Basta utilizar o Corolário 11 e notar que

$$(\dots((C_p \wr C_p) \wr C_p) \wr \dots) \wr C_p$$

é um subgrupo de

$$(\dots((\langle \tau \rangle \wr C_p) \wr C_p) \wr \dots) \wr C_p,$$

onde C_p aparece t vezes nos produtos entrelaçados. □

Um subgrupo de $\text{Aut}(T_n)$ que fixa todos os vértices que estão fora da subárvore com vértices $u\mathcal{M}$ e se projeta em um grupo H no vértice u é indicada por $u * H$ e seus elementos são denotados por $u * \alpha$, onde $\alpha \in H$. Assim,

$$(u * \alpha)_v = \begin{cases} \alpha_w, & \text{se } v = uw \text{ para algum } w \in \mathcal{M}. \\ e, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desta forma, se $\alpha \in \text{Aut}(T_n)$, então $\varphi(\alpha, u) = u * (\alpha^{m^{|u|}})_u$, onde m é o expoente do grupo $\langle \sigma_{\alpha_u} \mid u \in \mathcal{M} \rangle$.

Seja $\Psi = \{\lambda_\xi \tau^t \mid \xi \in \mathbb{Z}_n^1, t \in \mathbb{Z}_n\}$ como na Seção 2.4 e seja $(\Psi(t))_{t \in \mathbb{N}}$ a sequência de grupos:

$$\Psi(0) = \Psi, \quad \Psi(1) = \langle 0 * \Psi, \Psi(0) \rangle$$

$$\Psi(t) = \langle 0^t * \Psi, \Psi(t-1) \rangle,$$

$$\Psi(\omega) = \cup\{\Psi(t) \mid t \geq 0\}.$$

Denotando $\Upsilon = \widehat{\langle \tau \rangle}$, podemos construir a seguinte seqüência de subgrupos de $\Psi(\omega)$:

$$\Upsilon(0) = \Upsilon, \quad \Upsilon(1) = \langle 0 * \Upsilon(0), \Upsilon(0) \rangle,$$

$$\Upsilon(t) = \langle 0^t * \Upsilon(0), \Upsilon(t-1) \rangle,$$

$$\Upsilon(\omega) = \cup\{\Upsilon(t) \mid t \geq 0\}$$

de forma que $\Upsilon(t) = G_t$ e $\Upsilon(\omega) = G_\infty$.

Além disso, chamando de P_0 o grupo gerado pelo n -ciclo $(0, 1, \dots, n-1)$ e P_t o produto entrelaçado

$$(\dots((C_n) \wr C_n) \wr \dots) \wr C_n,$$

onde C_n aparece $t+1$ vezes no produto entrelaçado, então, $\Upsilon(t) = (\times_{n^t} \Upsilon)P_{t-1}$, que é uma extensão do grupo abeliano livre de torção $\times_{n^t} \Upsilon$ pelo grupo P_{t-1} , solúvel de grau t . Da mesma forma, como $\Psi(t) = (\times_{n^t} \Psi)P_{t-1}$ é uma extensão do grupo metabeliano livre de torção $\times_{n^t} \Psi$ pelo grupo finito P_{t-1} , solúvel de grau t , então $\Psi(t)$ é solúvel de comprimento derivado $t+2$.

3.1 Grupos Estruturais

Uma classe de grupos metabelianos que aparecem naturalmente quando estudamos a solubilidade de grupos que contém a máquina de adição é a classe dos *Grupos estruturais*.

Definição 6. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, o grupo

$$J(n, t) = \langle b_0, \dots, b_{n-1} \mid b_i b_{j+\bar{t}} = b_j b_{i+\bar{t}}, \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\} \rangle,$$

onde \bar{z} é o resto da divisão inteira de z por n será chamado de **grupo estrutural**.

Teorema 3. Seja $G = C \wr C_n$, então $J(n, t)$ é isomorfo a um subgrupo normal livre de torção de índice n em G . Além disto, valem

$$(i) \quad b_i^{\frac{n}{(t,n)}} \in Z(J(n, t));$$

(ii) Se $(t, n) = 1$, então $J(n, t)$ é 2-gerado;

$$(iii) \quad [b_j, b_i]^{b_k} = [b_{j+\bar{t}}, b_{i+\bar{t}}];$$

Demonstração. O grupo G tem a seguinte apresentação:

$$\langle a, u \mid a^n = e, u^{a^i} u^{a^j} = u^{a^j} u^{a^i}, \forall i \in \mathbb{Z} \rangle \quad (3.2)$$

Introduzindo um gerador $b = a^t u^{-1}$,

$$\begin{aligned} u^{a^i} u^{a^j} &= u^{a^j} u^{a^i} \\ \Rightarrow (b^{-1} a^t)^{a^i} (b^{-1} a^t)^{a^j} &= (b^{-1} a^t)^{a^j} (b^{-1} a^t)^{a^i} \\ \Rightarrow (a^{-t} b)^{a^j} (a^{-t} b)^{a^i} &= (a^{-t} b)^{a^i} (a^{-t} b)^{a^j} \\ \Rightarrow (a^{-t})^{a^j} b^{a^j} (a^{-t})^{a^i} b^{a^i} &= (a^{-t})^{a^i} b^{a^i} (a^{-t})^{a^j} b^{a^j} \\ \Rightarrow b^{a^j} a^{-t} b^{a^i} &= b^{a^i} a^{-t} b^{a^j} \\ \Rightarrow b^{a^j} b^{a^{i+t}} &= b^{a^i} b^{a^{j+t}} \end{aligned}$$

Utilizando Transformações de Tietze, a apresentação (3.2) é transformada em:

$$\langle b, a \mid a^n = e, b^{a^i} b^{a^{j+t}} = b^{a^j} b^{a^{i+t}} \rangle. \quad (3.3)$$

Por fim, adicionando os geradores $b_i = b^{a^i}$, $i = 0, \dots, n-1$ a apresentação (3.3) e aplicando o processo de Transformação de Tietze, obtemos

$$\langle b_0, \dots, b_{n-1}, a \mid a^n = e, b_i = b_0^{a^i}, b_i b_{j+t}^{-1} = b_j b_{i+t}^{-1}, \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \rangle = J(n, t) \rtimes \langle a \rangle, \quad (3.4)$$

ou seja, $J(n, t)$ é isomorfo a um subgrupo normal livre de torção de índice n em $G = C \wr C_n$.

Sejam $i, j, k \in \{0, \dots, n-1\}$.

(i)

$$\begin{aligned} b_i b_{j+t}^{-1} b_{i+t}^{-1} = b_j &\Rightarrow \underbrace{b_i \cdots b_i}_{m \text{ termos}} \underbrace{b_{j+mt}^{-1} \cdots b_{i+t}^{-1}}_{m \text{ termos}} = b_j \\ &\Rightarrow b_i^{\frac{n}{(t,n)}} b_j b_{i+j}^{-\frac{n}{(t,n)}} = b_j \\ &\Rightarrow b_{i+t}^{\frac{n}{(t,n)}} = \left(b_i^{\frac{n}{(t,n)}} \right)^{b_j} \\ &\Rightarrow b_{i+t}^{\frac{n}{(t,n)}} = b_i^{\frac{n}{(t,n)}} \in Z(J(n, t)). \end{aligned}$$

(ii) Observe que $b_i b_{j+t}^{-1} b_{i+t}^{-1} = b_j \Rightarrow \underbrace{b_i \cdots b_i}_{m \text{ termos}} \underbrace{b_{j+mt}^{-1} \cdots b_{i+t}^{-1}}_{m \text{ termos}} = b_j$.

Desta forma, como $(t, n) = 1$, então existe $r(j) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$j + r(j)t \equiv i \pmod{n}.$$

Portanto, $b_i^{r(j)} b_{j+r(j)t}^{-1} b_{i+t}^{-r(j)} = b_j \Rightarrow b_j = b_i^{r(j)+1} b_{i+t}^{-r(j)}$.

Logo, se $(n, t) = 1$, então $J(n, t)$ é 2-gerado

(iii)

$$\begin{aligned} [b_j, b_i]^{b_k} &= b_k^{-1} b_j^{-1} b_i^{-1} b_j b_i b_k \\ &= b_k^{-1} b_j^{-1} b_i^{-1} b_j b_{k-t} b_{i+t} \\ &= b_k^{-1} b_j^{-1} b_i^{-1} b_{k-2t} b_{j+t} b_{i+t} \\ &= b_k^{-1} b_j^{-1} b_{k-t} b_{i+t}^{-1} b_{j+t} b_{i+t} \\ &= b_k^{-1} b_k b_{j+t}^{-1} b_{i+t}^{-1} b_{j+t} b_{i+t} \\ &= b_k^{-1} b_k b_{j+t}^{-1} b_{i+t}^{-1} b_{j+t} b_{i+t} \\ &= [b_{j+t}, b_{i+t}] \end{aligned}$$

□

Capítulo 4

Grupos abelianos normalizados pela máquina de adição

Neste capítulo analisaremos os elementos de subgrupos abelianos B de $\mathcal{A} = \text{Aut}(T_n)$ normalizados por τ . Em particular, se $\beta \in B$, estudaremos a solubilidade ou não do grupo $H = \langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ para alguns casos particulares.

Se B é abeliano e τ normaliza B , então $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\beta \in B$ e para todo ξ inteiro. Assim, se $\beta \in B$ então a seguinte proposição nos proporciona relações na apresentação de $H = \langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$:

Proposição 23. *Seja $\beta \in \mathcal{A}$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Então as seguintes relações se verificam em $H = \langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ para todos $\xi, k \in \mathbb{Z}$.*

- (I) $(\tau^\xi)^{-1} \beta_{i\sigma_\tau^{-\xi}} (\tau^\xi)_{i\sigma_\tau^{-\xi}} \beta_{i\sigma_\tau^{-\xi}\sigma_\beta} (\tau^\xi)_{i\sigma_\tau^{-\xi}\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\xi}} = \beta_i (\tau^\xi)^{-1} \beta_{i\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\xi}} (\tau^\xi)_{i\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\xi}} e [\sigma_\beta, \sigma_\beta^{\sigma_\tau^{-\xi}}] = e$
- (II) $[\beta_i, \tau^\xi]^{\beta_i\sigma_\beta} = [\beta_{i\sigma_\beta}, \tau^\xi]$
- (III) $[\beta_i, \tau^\xi]^{\beta_{i\sigma_\beta}\beta_{i\sigma_\beta^2}\dots\beta_{i\sigma_\beta^{s_i}}} = [\beta_i, \tau^\xi]$, onde $s_i = |\text{Orb}_{\sigma_\beta}(i)|$
- (IV) $[[\beta_i, \tau^k], [\beta_i, \tau^\xi]] = e$

Demonstração. (I) $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(e = \beta_{i\sigma_\beta\tau^\xi}^{-1} (\beta^{\tau^\xi})_i^{-1} \beta_i (\beta^{\tau^\xi})_{i\sigma_\beta} e [\sigma_\beta, \sigma_\beta^{\sigma_\tau^{-\xi}}] = e, \text{ pela Proposição 7} \right) \\ &\Leftrightarrow \left((\beta^{\tau^\xi})_i \beta_{i\sigma_\beta\tau^\xi} = \beta_i (\beta^{\tau^\xi})_{i\sigma_\beta} e [\sigma_\beta, \sigma_\beta^{\sigma_\tau^{-\xi}}] = e \right) \\ &\Leftrightarrow \left((\tau^\xi)^{-1} \beta_{i\sigma_\tau^{-\xi}} (\tau^\xi)_{i\sigma_\tau^{-\xi}} \beta_{i\sigma_\tau^{-\xi}\sigma_\beta} (\tau^\xi)_{i\sigma_\tau^{-\xi}\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\xi}} \right. \\ &\quad \left. = \beta_i (\tau^\xi)^{-1} \beta_{i\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\xi}} (\tau^\xi)_{i\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\xi}} e [\sigma_\beta, \sigma_\beta^{\sigma_\tau^{-\xi}}] = e, \text{ pela Proposição 6} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left((\tau^\xi)^{-1} \beta_{i\sigma_\tau^{-\xi}} \beta_{i\sigma_\tau^{-\xi}} (\tau^\xi)_{i\sigma_\tau^{-\xi}\sigma_\beta} \beta_{i\sigma_\tau^{-\xi}\sigma_\beta\sigma_\tau^\xi} \right) \\ &= \beta_i (\tau^\xi)^{-1} \beta_{i\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\xi}} \beta_{i\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\xi}} (\tau^\xi)_{i\sigma_\beta\sigma_\tau^{-\xi}\sigma_\beta} e [\sigma_\beta, \sigma_\beta^\xi] = e \end{aligned}$$

(II) Trocando ξ por $n\xi$ em (I), obtemos:

$$\begin{aligned} &(\tau^{-\xi} \beta_i \tau^\xi \beta_{i\sigma_\beta} = \beta_i \tau^{-\xi} \beta_{i\sigma_\beta} \tau^\xi) \\ &\Leftrightarrow ((\beta_{i\sigma_\beta}^{-1} \beta_i^{-1}) \tau^{-\xi} \beta_i \tau^\xi \beta_{i\sigma_\beta} = (\beta_{i\sigma_\beta}^{-1} \beta_i^{-1}) \beta_i \tau^{-\xi} \beta_{i\sigma_\beta} \tau^\xi) \\ &\Leftrightarrow ([\beta_i, \tau^\xi]^{\beta_{i\sigma_\beta}} = [\beta_{i\sigma_\beta}, \tau^\xi]) \end{aligned}$$

(III) Utilizando (II), temos

$$[\beta_i, \tau^\xi]^{\beta_{i\sigma_\beta} \beta_{i\sigma_\beta^2} \cdots \beta_{i\sigma_\beta^{s_i}}} = [\beta_{i\sigma_\beta}, \tau^\xi]^{\beta_{i\sigma_\beta^2} \cdots \beta_{i\sigma_\beta^{s_i}}} \cdots [\beta_{i\sigma_\beta^{s_i}}, \tau^\xi] = [\beta_i, \tau^\xi]$$

(IV) Trocando i por $i\sigma_\beta^{-1}$ em (II) obtemos

$$[\beta_i, \tau^\xi]^{\beta_i^{-1}} = [\beta_{i\sigma_\beta^{-1}}, \tau^\xi] \quad (4.1)$$

Além disso, pelas propriedades dos comutadores, temos

$$[\beta_i, \tau^{\xi+k}] = [\beta_i, \tau^k] [\beta_i, \tau^\xi]^{\tau^k}, \forall \xi, k \in \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

Portanto, utilizando alternadamente as equações (4.1) e (4.2),

$$\begin{aligned} [\beta_i, \tau^\xi]^{\beta_i, \tau^k} &= [\beta_i, \tau^\xi]^{\beta_i^{-1} \tau^{-k} \beta_i \tau^k} = [\beta_{i\sigma_\beta^{-1}}, \tau^\xi]^{\tau^{-k} \beta_i \tau^k} \\ &= ([\beta_{i\sigma_\beta^{-1}}, \tau^{-k}]^{-1} [\beta_{i\sigma_\beta^{-1}}, \tau^{\xi-k}])^{\beta_i \tau^k} = ([\beta_i, \tau^{-k}]^{-1} [\beta_i, \tau^{\xi-k}])^{\tau^k} = [\beta_i, \tau^\xi] \quad \square \end{aligned}$$

A seguinte observação servirá de ajuda na escolha de σ_β , onde $\beta \in \text{Aut}(T_n)$ satisfaz $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo ξ inteiro:

Observação 2. *Sejam $\sigma = (0, 1, 2, \dots, k-1) \in S_n$ e $\sigma^j = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{(j,k)}$ a representação permutacional de σ^j em produtos de ciclos disjuntos de comprimento $k/(j,k)$, então $K = \langle \sigma_i \mid 1 \leq i \leq (j,k) \rangle$ é abeliano. Em particular, como $K^\sigma \subset K$, então $[x, x^{\sigma^\xi}] = 1$ para todo $x \in K$ e para todo ξ inteiro.*

4.1 Elementos com atividade 2-ciclo

Nesta seção mostraremos que todo elemento β de um subgrupo abeliano de $\text{Aut}(T_n)$ normalizado por τ com σ_β 2-ciclo nos proporciona $\langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ metabeliano.

Teorema 4. *Sejam n par e $\beta \in \text{Aut}(T_n)$ com $\sigma_\beta = (0, \frac{n}{2})$. Se $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, então $H = \langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ é metabeliano.*

Demonstração. Fazendo $j = i^{\sigma_\tau^{-\bar{\xi}}}$ em (I) da proposição anterior, obtemos

$$(\tau^\xi)_j^{-1} \beta_j (\tau^\xi)_{j^{\sigma_\beta}} \beta_{j^{\sigma_\beta \sigma_\tau^{-\bar{\xi}}}} = \beta_{j^{\sigma_\tau^{-\bar{\xi}}}} (\tau^\xi)^{-1}_{j^{\sigma_\tau^{-\bar{\xi}}}} \beta_{j^{\sigma_\tau^{-\bar{\xi}} \sigma_\beta \sigma_\tau^{-\bar{\xi}}}} (\tau^\xi)_{j^{\sigma_\tau^{-\bar{\xi}} \sigma_\beta \sigma_\tau^{-\bar{\xi}}}} \beta_{j^{\sigma_\tau^{-\bar{\xi}} \sigma_\beta \sigma_\tau^{-\bar{\xi}}}} \quad (4.3)$$

para todos $\xi \in \mathbb{Z}$ e $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Fazendo $\xi = kn + r$ com $r = \bar{\xi}$ em (4.3) e lembrando que $\sigma_\beta = (0, \frac{n}{2})$ e $\sigma_\tau = (0, 1, \dots, n-1)$, obtemos

$$\tau^{-k-\delta(j,r)} \beta_j \tau^{k+\delta(j, (0, \frac{n}{2}), r)} \beta_{(j+r)^{(r, \frac{n}{2}+r)}} = \beta_{j+r} \tau^{-k-\delta(j, (\overline{-r}, \frac{n}{2}-r), r)} \beta_{j^{(\overline{-r}, \frac{n}{2}-r)}} \tau^{k+\delta(j, (\overline{-r}, \frac{n}{2}-r), (0, \frac{n}{2}), r)}, \quad (4.4)$$

para todos $k \in \mathbb{Z}$ e $r, j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Analisaremos agora 3 casos:

1o Caso: $j = 0$.

Neste caso, a equação (4.4) toma a forma

$$\tau^{-k} \beta_0 \tau^{k+\delta(\frac{n}{2}, r)} \beta_{\frac{n}{2}+r} = \beta_r \tau^{-k-\delta(0, (\overline{-r}, \frac{n}{2}-r), r)} \beta_{0^{(\overline{-r}, \frac{n}{2}-r)}} \tau^{k+\delta(\frac{n}{2}, (\overline{-r}, \frac{n}{2}-r), r)}, \quad (4.5)$$

para todos $k \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, \dots, n-1\}$.

Assim,

- Se $r = 0$,

$$\begin{aligned} (\tau^{-k} \beta_0 \tau^k \beta_{\frac{n}{2}} &= \beta_0 \tau^{-k} \beta_{\frac{n}{2}} \tau^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow (\beta_0 [\beta_0, \tau^k] \beta_{\frac{n}{2}} &= \beta_0 \beta_{\frac{n}{2}} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Logo,

$$[\beta_0, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}} = [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k], \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (4.6)$$

- Se $r = \frac{n}{2}$,

$$\begin{aligned} (\tau^{-k} \beta_0 \tau^{k+1} \beta_0 &= \beta_{\frac{n}{2}} \tau^{-k-1} \beta_{\frac{n}{2}} \tau^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}) \\ \Leftrightarrow (\beta_0 [\beta_0, \tau^k] \tau \beta_0 &= \beta_{\frac{n}{2}} \tau^{-1} \beta_{\frac{n}{2}} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k], \quad \forall k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Logo,

$$\beta_0 \tau \beta_0 = \beta_{\frac{n}{2}} \tau^{-1} \beta_{\frac{n}{2}} \quad (4.7)$$

e

$$[\beta_0, \tau^k]^{\tau \beta_0} = [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k], \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (4.8)$$

- Se $r \neq 0$ e $r \neq \frac{n}{2}$,

$$\begin{aligned} & \left(\tau^{-k} \beta_0 \tau^{k+\delta(\frac{n}{2}, r)} \beta_{\frac{n}{2}+r} = \beta_r \tau^{-k} \beta_0 \tau^{k+\delta(\frac{n}{2}, r)}, \forall k \in \mathbb{Z} \right) \\ & \Leftrightarrow \left(\tau^{\delta(\frac{n}{2}, r)} \beta_0 \beta_0^{-1} \tau^{-k-\delta(\frac{n}{2}, r)} \beta_0 \tau^{k+\delta(\frac{n}{2}, r)} \beta_{\frac{n}{2}+r} = \beta_r \tau^{\delta(\frac{n}{2}, r)} \beta_0 \beta_0^{-1} \tau^{-k-\delta(\frac{n}{2}, r)} \beta_0 \tau^{k+\delta(\frac{n}{2}, r)}, \forall k \in \mathbb{Z} \right) \\ & \Leftrightarrow \left(\tau^{\delta(\frac{n}{2}, r)} \beta_0 [\beta_0, \tau^k] \beta_{\frac{n}{2}+r} = \beta_r \tau^{\delta(\frac{n}{2}, r)} \beta_0 [\beta_0, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z} \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\tau^{\delta(\frac{n}{2}, r)} \beta_0 \beta_{\frac{n}{2}+r} = \beta_r \tau^{\delta(\frac{n}{2}, r)} \beta_0, \forall r \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1\} \quad (4.9)$$

e

$$[\beta_0, \tau^k]^{\beta_r} = [\beta_0, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall r \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1\} \quad (4.10)$$

2o Caso: $j = \frac{n}{2}$.

Neste caso, a equação (4.4) toma a forma

$$\tau^{-k-\delta(\frac{n}{2}, r)} \beta_{\frac{n}{2}} \tau^k \beta_r = \beta_{\frac{n}{2}+r} \tau^{-k-\delta(\frac{n}{2}(\overline{-r}, \frac{n}{2}-r), r)} \beta_{\frac{n}{2}(\overline{-r}, \frac{n}{2}-r)} \tau^{k+\delta(0(\overline{-r}, \frac{n}{2}-r), r)}, \quad (4.11)$$

para todos $k \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, \dots, n - 1\}$.

Assim,

- Se $r = 0$,

$$\begin{aligned} & \left(\tau^{-k} \beta_{\frac{n}{2}} \tau^k \beta_0 = \beta_{\frac{n}{2}} \tau^{-k} \beta_0 \tau^k, \forall k \in \mathbb{Z} \right) \\ & \Leftrightarrow \left(\beta_{\frac{n}{2}} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k] \beta_0 = \beta_{\frac{n}{2}} \beta_0 [\beta_0, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z} \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_0} = [\beta_0, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z} \quad (4.12)$$

- Se $r = \frac{n}{2}$,

$$\begin{aligned} & \left(\tau^{-k-1} \beta_{\frac{n}{2}} \tau^k \beta_{\frac{n}{2}} = \beta_0 \tau^{-k} \beta_0 \tau^{k+1}, \forall k \in \mathbb{Z} \right) \\ & \Leftrightarrow \left(\tau^{-1} \beta_{\frac{n}{2}} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k] \beta_{\frac{n}{2}} = \beta_0^2 [\beta_0, \tau^k] \tau, \forall k \in \mathbb{Z} \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\tau^{-1} \beta_{\frac{n}{2}}^2 = \beta_0^2 \tau \quad (4.13)$$

e

$$[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}} \tau^{-1}} = [\beta_0, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z} \quad (4.14)$$

- Se $r \neq 0$ e $r \neq \frac{n}{2}$,

$$\begin{aligned} & \left(\tau^{-k-\delta(\frac{n}{2},r)} \beta_{\frac{n}{2}} \tau^k \beta_r = \beta_{\frac{n}{2}+r} \tau^{-k-\delta(\frac{n}{2},r)} \beta_{\frac{n}{2}} \tau^k, \forall k \in \mathbb{Z} \right) \\ \Leftrightarrow & \left(\tau^{-\delta(\frac{n}{2},r)} \beta_{\frac{n}{2}} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k] \beta_r = \beta_{\frac{n}{2}+r} \tau^{-\delta(\frac{n}{2},r)} \beta_{\frac{n}{2}} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z} \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\tau^{-\delta(\frac{n}{2},r)} \beta_{\frac{n}{2}} \beta_r = \beta_{\frac{n}{2}+r} \tau^{-\delta(\frac{n}{2},r)} \beta_{\frac{n}{2}}, \forall r \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1\} \quad (4.15)$$

e

$$[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_r} = [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall r \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1\} \quad (4.16)$$

3o Caso: $j \neq 0$ e $j \neq \frac{n}{2}$.

Neste caso, a equação (4.4) toma a forma

$$\tau^{-k-\delta(j,r)} \beta_j \tau^{k+\delta(j,r)} \beta_{\overline{j+r}} = \beta_{\overline{j+r}} \tau^{-k-\delta(j, \overline{\frac{n}{2}-r})} \beta_j \tau^{k+\delta(j, \overline{\frac{n}{2}-r})}, \quad (4.17)$$

para todos $k \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, \dots, n - 1\}$.

Assim,

- Se $j \neq \overline{-r}$ e $j \neq \overline{\frac{n}{2} - r}$,

$$\begin{aligned} & \left(\tau^{-k-\delta(j,r)} \beta_j \tau^{k+\delta(j,r)} \beta_{\overline{j+r}} = \beta_{\overline{j+r}} \tau^{-k-\delta(j,r)} \beta_j \tau^{k+\delta(j,r)}, \forall k \in \mathbb{Z} \right) \\ \Leftrightarrow & \left(\beta_j [\beta_j, \tau^{k+\delta(j,r)}] \beta_{\overline{j+r}} = \beta_{\overline{j+r}} \beta_j [\beta_j, \tau^{k+\delta(j,r)}], \forall k \in \mathbb{Z} \right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\beta_j \beta_t = \beta_t \beta_j, \forall j, t \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1\} \quad (4.18)$$

e

$$[\beta_j, \tau^k]^{\beta_t} = [\beta_j, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j, t \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1\} \quad (4.19)$$

- Se $j = \overline{-r}$ e $0 < r < \frac{n}{2}$, então $\frac{n}{2} + 1 < j \leq n - 1$,

$$\delta(j, r) = 1 \text{ e } \delta(j, \overline{\frac{n}{2}-r}) = \delta(\frac{n}{2} - r, r) = 0.$$

Assim, substituindo em (4.17),

$$\begin{aligned} & \left(\tau^{-k-1} \beta_j \tau^{k+1} \beta_0 = \beta_0 \tau^{-k} \beta_{\frac{n}{2}+j} \tau^k, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1\} \right) \\ \Leftrightarrow & \left(\tau^{-1} \beta_j [\beta_j, \tau^k] \tau \beta_0 = \beta_0 \tau_{\frac{n}{2}+j} [\beta_{\frac{n}{2}+j}, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1\} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} \tau^{-1}\beta_j\tau\beta_0 = \beta_0\beta_{\frac{n}{2}+j} \\ [\beta_j, \tau^k]^{\tau\beta_0} = [\beta_{\frac{n}{2}+j}, \tau^k], \end{cases} \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n - 1\} \right)$$

Logo,

$$\tau^{-1}\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau\beta_0 = \beta_0\beta_j, \forall j \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\} \quad (4.20)$$

e

$$[\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau\beta_0} = [\beta_j, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\} \quad (4.21)$$

- Se $j = \overline{-r}$ e $\frac{n}{2} < r \leq n - 1$, então $0 < j < \frac{n}{2}$,

$$\delta(j, r) = 1 \text{ e } \delta(j^{\overline{(-r, \frac{n}{2}-r)}}, r) = \delta(\frac{n}{2} - r, r) = 1.$$

Assim, substituindo em (4.17),

$$(\tau^{-k-1}\beta_j\tau^{k+1}\beta_0 = \beta_0\tau^{-k-1}\beta_{\frac{n}{2}+j}\tau^{k+1}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\})$$

$$\Leftrightarrow (\beta_j[\beta_j, \tau^{k+1}]\beta_0 = \beta_0\beta_{\frac{n}{2}+j}[\beta_{\frac{n}{2}+j}, \tau^{k+1}], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\})$$

Logo,

$$\beta_j\beta_0 = \beta_0\beta_{\frac{n}{2}+j}, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\} \quad (4.22)$$

e

$$[\beta_j, \tau^k]^{\beta_0} = [\beta_{\frac{n}{2}+j}, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\} \quad (4.23)$$

- Se $j = \overline{\frac{n}{2} - r}$ e $0 < r < \frac{n}{2}$, então $0 < j < \frac{n}{2}$,

$$\delta(j, r) = 0 \text{ e } \delta(j^{\overline{(-r, \frac{n}{2}-r)}}, r) = \delta(n - r, r) = 1.$$

Assim, substituindo em (4.17),

$$(\tau^{-k}\beta_j\tau^k\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-k-1}\beta_{\frac{n}{2}+j}\tau^{k+1}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\})$$

$$\Leftrightarrow (\beta_j[\beta_j, \tau^k]\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}+j}[\beta_{\frac{n}{2}+j}, \tau^k]\tau, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\})$$

Logo,

$$\beta_j\beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\beta_{j+\frac{n}{2}}\tau, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\} \quad (4.24)$$

e

$$[\beta_j, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}} = [\beta_{\frac{n}{2}+j}, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\} \quad (4.25)$$

- Se $j = \overline{\frac{n}{2} - r}$ e $\frac{n}{2} < r \leq n - 1$, então $\frac{n}{2} < j \leq n - 1$,

$$\delta(j, r) = 1 \text{ e } \delta(j^{\overline{(-r, \frac{n}{2}-r)}}, r) = \delta(n - r, r) = 1.$$

Assim, substituindo em (4.17),

$$\begin{aligned}
& \left(\tau^{-k-1} \beta_j \tau^{k+1} \beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}} \tau^{-k-1} \beta_{\frac{n}{2}+j} \tau^{k+1}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n-1\} \right) \\
& \Leftrightarrow \left(\beta_j [\beta_j, \tau^{k+1}] \beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}} \beta_{\frac{n}{2}+j} [\beta_{\frac{n}{2}+j}, \tau^{k+1}], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n-1\} \right) \\
& \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \beta_j \beta_{\frac{n}{2}} = \beta_{\frac{n}{2}} \beta_{\frac{n}{2}+j} \\ [\beta_j, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}} = [\beta_{\frac{n}{2}+j}, \tau^k], \end{cases}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n-1\} \right)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\beta_{\frac{n}{2}} \beta_j = \beta_{\frac{n}{2}+j} \beta_{\frac{n}{2}}, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\} \quad (4.26)$$

e

$$[\beta_j, \tau^k] = [\beta_{\frac{n}{2}+j}, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}}, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\} \quad (4.27)$$

Os seguintes lemas nos ajudarão na demonstração de nosso teorema:

Lema 1.

$$D = \langle [\beta_i, \tau^k] \mid k \in \mathbb{Z}, i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \rangle$$

é um subgrupo normal e abeliano de H .

Demonstração. Para cada $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ defina

$$D_i = \langle [\beta_i, \tau^k] \mid k \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Assim, $D = \langle D_i \mid i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \rangle$ e cada D_i é abeliano, pela Proposição 23(IV).

Das equações (4.10), (4.16) e (4.19), obtemos que

$$[\beta_i, \tau^k]^{\beta_j^{-1}} = [\beta_i, \tau^k], \forall k \in \mathbb{Z}, \forall i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2} \quad (4.28)$$

Temos que $[D_i, D_j] = 1, \forall i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2}$, pois

$$\begin{aligned}
[\beta_i, \tau^k]^{\beta_j, \tau^t} &= [\beta_i, \tau^k]^{\beta_j^{-1} \tau^{-t} \beta_j \tau^t} \stackrel{(4.28)}{=} [\beta_i, \tau^k]^{\tau^{-t} \beta_j \tau^t} \stackrel{(4.2)}{=} ([\beta_i, \tau^{-t}]^{-1} [\beta_i, \tau^{k-t}])^{\beta_j \tau^t} \\
&\stackrel{(4.28)}{=} ([\beta_i, \tau^{-t}]^{-1} [\beta_i, \tau^{k-t}])^{\tau^t} \stackrel{(4.2)}{=} [\beta_i, \tau^k]^{\tau^{-t} \tau^t} = [\beta_i, \tau^k], \forall k, t \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

$\forall i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2}$

Além disso, $[D_0, D_{\frac{n}{2}}] = 1$, pois

$$\begin{aligned}
[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_0, \tau^t} &= [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_0^{-1} \tau^{-t} \beta_0 \tau^t} \stackrel{(4.8)}{=} [\beta_0, \tau^k]^{\tau \tau^{-t} \beta_0 \tau^t} \stackrel{(4.2)}{=} \\
&= ([\beta_0, \tau^{-t}]^{-1} [\beta_0, \tau^{k-t}])^{\tau \beta_0 \tau^t} \stackrel{(4.8)}{=} ([\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^{-t}]^{-1} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^{k-t}])^{\tau^t} \\
&\stackrel{(4.2)}{=} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau^{-t} \tau^t} = [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k], \forall k, t \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Logo D é abeliano.

Da equação (4.2),

$$D_i^{\tau^k} = D_i, \forall k \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (4.29)$$

Da equação (4.28),

$$D_i = D_i^{\beta_j} = D_i^{\beta_j^{-1}}, \forall i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2} \quad (4.30)$$

Das equações (4.2) e (4.6),

$$\begin{cases} D_{\frac{n}{2}} = D_0^{\beta_0} \\ D_0 = D_{\frac{n}{2}}^{\beta_0^{-1}} \end{cases} \quad (4.31)$$

Da equação (4.12),

$$\begin{cases} D_0 = D_{\frac{n}{2}}^{\beta_0} \\ D_{\frac{n}{2}} = D_0^{\beta_0^{-1}} \end{cases} \quad (4.32)$$

Das equações (4.2) e (4.14),

$$\begin{cases} D_0 = D_{\frac{n}{2}}^{\beta_{\frac{n}{2}}} \\ D_{\frac{n}{2}} = D_0^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \end{cases} \quad (4.33)$$

Das equações (4.2) e (4.21),

$$\begin{cases} D_j = D_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_0} \\ D_{j+\frac{n}{2}} = D_j^{\beta_0^{-1}} \end{cases}, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\} \quad (4.34)$$

Da equação e (4.23),

$$\begin{cases} D_{j+\frac{n}{2}} = D_j^{\beta_0} \\ D_j = D_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_0^{-1}} \end{cases}, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\} \quad (4.35)$$

Das equações (4.2) e (4.25),

$$\begin{cases} D_{j+\frac{n}{2}} = D_j^{\beta_{\frac{n}{2}}} \\ D_j = D_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \end{cases}, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\} \quad (4.36)$$

Da equação e (4.27),

$$\begin{cases} D_j = D_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_{\frac{n}{2}}} \\ D_{j+\frac{n}{2}} = D_j^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \end{cases}, \forall j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\} \quad (4.37)$$

As equações (4.29)-(4.37) nos mostram que $D = \langle D_i \mid i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \rangle = \langle [\beta_i, \tau^k] \mid k \in \mathbb{Z}, i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \rangle$ é normal em H .

Portanto D é um subgrupo normal e abeliano de H .

□

Lema 2.

$$L = \left\langle [\beta_i, \tau^k], \beta_j \mid k \in \mathbb{Z}, i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2} \right\rangle$$

é um subgrupo normal e abeliano de H .

Demonstração. O Lema 1 e as equações (4.10), (4.16), (4.18) e (4.19) mostram que L é abeliano.

Além disso, como $D = \langle [\beta_i, \tau^k] \mid \forall k \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \rangle$ é normal em H e para todo $t \in \mathbb{Z}$ e todo $j \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$,

- (a) $\beta_j^{\tau^t} = \beta_j [\beta_j, \tau^t] \in L$;
- (b) $\beta_j^{\beta_0} \stackrel{(4.22)}{=} \beta_{j+\frac{n}{2}} \in L$;
- (c) $\beta_j^{\beta_0^{-1}} \stackrel{(4.20)}{=} \tau^{-1} \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau = \beta_{j+\frac{n}{2}} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau] \in L$;
- (d) $\beta_j^{\beta_{\frac{n}{2}}} \stackrel{(4.24)}{=} \tau^{-1} \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau = \beta_{j+\frac{n}{2}} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau] \in L$;
- (e) $\beta_j^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \stackrel{(4.26)}{=} \beta_{j+\frac{n}{2}} \in L$;
- (f) $\beta_{j+\frac{n}{2}}^{\tau^t} = \beta_{j+\frac{n}{2}} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^t] \in L$;
- (g) $\beta_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_0} \stackrel{(4.20)}{=} \beta_0^{-1} \tau \beta_0 \beta_j \beta_0^{-1} \tau^{-1} \beta_0 = ([\beta_0, \tau]^{-1})^{\tau^{-1}} \beta_j^{\tau^{-1}} [\beta_0, \tau]^{\tau^{-1}} \in L$
- (h) $\beta_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_0^{-1}} \stackrel{(4.22)}{=} \beta_j \in L$;
- (i) $\beta_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_{\frac{n}{2}}} \stackrel{(4.26)}{=} \beta_j \in L$;
- (j) $\beta_{j+\frac{n}{2}}^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \stackrel{(4.24)}{=} \beta_{\frac{n}{2}} \tau \beta_{\frac{n}{2}}^{-1} \beta_j \beta_{\frac{n}{2}} \tau^{-1} \beta_{\frac{n}{2}}^{-1} = [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau]^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1} \tau^{-1}} \beta_j^{\tau^{-1}} ([\beta_{\frac{n}{2}}, \tau]^{-1})^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1} \tau^{-1}} \in L$;
- (k) $\beta_r^{\beta_k} \stackrel{(4.18)}{=} \beta_r, \forall r, k \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1, \dots, n-1\}$;

então L é normal em H .

Logo L é um subgrupo normal e abeliano de H . □

Lema 3.

$$M = \left\langle [\beta_i, \tau^k], \beta_j, \beta_{\frac{n}{2}} \beta_0, \tau \beta_0^2 \mid k \in \mathbb{Z}, i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2} \right\rangle$$

é um subgrupo normal e abeliano de H .

Demonstração. Para $j \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$ e $k \in \mathbb{Z}$, temos

- (a) $(\beta_j)^{\beta_{\frac{n}{2}} \beta_0} \stackrel{(4.24)}{=} (\beta_{j+\frac{n}{2}})^{\tau \beta_0} \stackrel{(4.20)}{=} \beta_j$;

- (b) $(\beta_{j+\frac{n}{2}})^{\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0} \stackrel{(4.26)}{=} (\beta_j)^{\beta_0} \stackrel{(4.22)}{=} \beta_{j+\frac{n}{2}};$
- (c) $[\beta_j, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0} = [\beta_j, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\tau\beta_0} \stackrel{(4.25)}{=} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau\beta_0} \stackrel{(4.21)}{=} [\beta_j, \tau^k];$
- (d) $[\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0} \stackrel{(4.27)}{=} [\beta_j, \tau^k]^{\beta_0} \stackrel{(4.23)}{=} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k];$
- (e) $[\beta_0, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0} \stackrel{(4.6)}{=} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_0} \stackrel{(4.12)}{=} [\beta_0, \tau^k];$
- (f) $[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0} = [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\tau\beta_0} \stackrel{(4.14)}{=} [\beta_0, \tau^k]^{\tau\beta_0} \stackrel{(4.8)}{=} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k];$
- (g) $(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{\tau\beta_0^2} = \beta_0^{-2}\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0\tau\beta_0^2 \stackrel{(4.7)}{=} \beta_0^{-2}\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0$
 $= \beta_0^{-2}\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^2\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0 = (\tau\beta_0^2)^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^2\tau^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0 \stackrel{(4.13)}{=} \beta_{\frac{n}{2}}\beta_0;$
- (h) $\beta_j^{\tau\beta_0^2} = (\beta_j[\beta_j, \tau])^{\beta_0^2} = (\beta_j^{\beta_0}[\beta_j, \tau]^{\beta_0})^{\beta_0}$
 $\stackrel{(4.22),(4.23)}{=} (\beta_{j+\frac{n}{2}}[\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau])^{\beta_0} = \beta_{j+\frac{n}{2}}^{\tau\beta_0} \stackrel{(4.20)}{=} \beta_j;$
- (i) $(\beta_{j+\frac{n}{2}})^{\tau\beta_0^2} \stackrel{(4.20)}{=} \beta_j^{\beta_0} \stackrel{(4.22)}{=} \beta_{j+\frac{n}{2}};$
- (j) $[\beta_0, \tau^k]^{\tau\beta_0^2} \stackrel{(4.8)}{=} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_0} \stackrel{(4.12)}{=} [\beta_0, \tau^k];$
- (k) $[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau\beta_0^2} \stackrel{(4.2)}{=} ([\beta_{\frac{n}{2}}, \tau]^{-1}[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^{k+1}])^{\beta_0^2} \stackrel{(4.12)}{=} ([\beta_0, \tau]^{-1}[\beta_0, \tau^{k+1}])^{\beta_0}$
 $\stackrel{(4.2)}{=} [\beta_0, \tau^k]^{\tau\beta_0} \stackrel{(4.8)}{=} [\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k];$
- (l) $[\beta_j, \tau^k]^{\tau\beta_0^2} \stackrel{(4.2)}{=} ([\beta_j, \tau]^{-1}[\beta_j, \tau^{k+1}])^{\beta_0^2} \stackrel{(4.23)}{=} ([\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau]^{-1}[\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^{k+1}])^{\beta_0}$
 $\stackrel{(4.2)}{=} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau\beta_0} \stackrel{(4.21)}{=} [\beta_j, \tau^k];$
- (m) $[\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau\beta_0^2} \stackrel{(4.21)}{=} [\beta_j, \tau^k]^{\beta_0} \stackrel{(4.23)}{=} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k];$
- (n) $(\tau\beta_0^2)^{\tau^k} = \tau(\beta_0^2)^{\tau^k} = \tau\beta_0^2[\beta_0^2, \tau^k] = \tau\beta_0^2[\beta_0, \tau^k]^{\beta_0}[\beta_0, \tau^k];$
- (o) $(\tau\beta_0^2)^{\beta_0} = \beta_0^{-1}\tau\beta_0^2\beta_0 = \tau\tau^{-1}\beta_0^{-1}\tau\beta_0\beta_0^2 = \tau[\tau, \beta_0]\beta_0^2$
 $= \tau[\tau, \beta_0]\tau^{-1}\tau\beta_0^2 = ([\beta_0, \tau]^{-1})^{\tau^{-1}}\tau\beta_0^2;$
- (p) $(\tau\beta_0^2)^{\beta_0^{-1}} = \beta_0\tau\beta_0 = \tau\beta_0[\beta_0, \tau]\beta_0 = \tau\beta_0^2[\beta_0, \tau]^{\beta_0};$
- (q) $(\tau\beta_0^2)^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \stackrel{(p)}{=} \left((\tau\beta_0^2)^{\beta_0^{-1}}([\beta_0, \tau]^{-1})^{\beta_0} \right)^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} = (\tau\beta_0^2)^{\beta_0^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}}([\beta_0, \tau]^{-1})^{\beta_0\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}}$
 $= (\tau\beta_0^2)^{(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{-1}}([\beta_0, \tau]^{-1})^{\beta_0\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} \stackrel{(g)}{=} \tau\beta_0^2([\beta_0, \tau]^{-1})^{\beta_0\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}};$

- (r) $(\tau\beta_0^2)^{\beta_{\frac{n}{2}}} \stackrel{(q)}{=} \tau\beta_0^2[\beta_0, \tau]^{\beta_0}$;
- (s) $(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{\tau^k} = \beta_{\frac{n}{2}}\beta_0[\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0, \tau^k] = \beta_{\frac{n}{2}}\beta_0[\beta_{\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_0}[\beta_0, \tau^k]$;
- (t) $(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{\beta_0} = \beta_0^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0^2 = \beta_0^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}\tau^{-1}\tau\beta_0^2 = \beta_0^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^2\tau^{-1}\tau\beta_0^2$
 $= (\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{-1}(\tau\beta_0^2)^2$;
- (u) $\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0 \stackrel{(t)}{=} (\tau\beta_0^2)^2((\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{-1})^{\beta_0}$;
- (v) $(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{\beta_0^{-1}} \stackrel{(u)}{=} ((\tau\beta_0^2)^2)^{\beta_0^{-1}}(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{-1}$;
- (x) $(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}} = \beta_{\frac{n}{2}}^2\beta_0\beta_{\frac{n}{2}}^{-1} = \beta_{\frac{n}{2}}^2\tau^{-1}\tau\beta_0\beta_0\beta_0^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^{-1}$
 $\stackrel{(4.13)}{=} (\tau\beta_0^2)^2\beta_0^{-1}\beta_{\frac{n}{2}}^{-1} = (\tau\beta_0^2)^2(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{-1}$;
- (z) $(\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{\beta_{\frac{n}{2}}} \stackrel{(x)}{=} (\beta_{\frac{n}{2}}\beta_0)^{-1}((\tau\beta_0^2)^2)^{\beta_{\frac{n}{2}}}$.

Portanto, pelo Lema 2 e pelas relações acima, temos que M é um subgrupo normal e abeliano de H . \square

Pelo Lema 3,

$$M = \left\langle [\beta_i, \tau^k], \beta_j, \beta_{\frac{n}{2}}\beta_0, \tau\beta_0^2 \mid k \in \mathbb{Z}, i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, j \neq 0, \frac{n}{2} \right\rangle$$

é um subgrupo normal e abeliano de H .

Além disso, como $M\tau = M\beta_0^{-2}$ e $M\beta_{\frac{n}{2}} = M\beta_0$, então $H/M = \langle M\beta_0 \rangle$, i.e., H é metabeliano. \square

Teorema 5. *Sejam n par e $\beta \in \text{Aut}(T_n)$ com atividade $\sigma_\beta = (i, i + \frac{n}{2})$ para algum $i \in \{0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$. Se $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, então $H = \langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ é metabeliano.*

Demonstração. Como $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$, $\forall \xi \in \mathbb{Z}$, então $[\beta^{\tau^{-i}}, (\beta^{\tau^{-i}})^{\tau^\xi}] = e$, $\forall \xi \in \mathbb{Z}$.

Pela Proposição 6, temos que

$$\sigma_{\beta^{\tau^{-i}}} = (0, \frac{n}{2}) \quad \text{e} \quad (\beta^{\tau^{-i}})_{j^{\sigma_{\tau^{-i}}}} = (\tau^{-i})_j^{-1} \beta_j (\tau^{-i})_{j^{\sigma_\beta}}$$

Utilizando a definição de Polarizador na equação acima, obtemos

$$(\beta^{\tau^{-i}})_{\overline{j-i}} = \left(\tau^{\frac{-i-(n-i)}{n} + \delta(j, -i)} \right)^{-1} \beta_j \tau^{\frac{-i-(n-i)}{n} + \delta(j^{\sigma_\beta, -i})}$$

Assim,

$$(\beta^{\tau^{-i}})_{\overline{j-i}} = \tau^{1-\delta(j,-i)} \beta_j \tau^{-1+\delta(j^{\sigma_\beta, -i})} \quad (4.38)$$

Pelo Teorema 4,

$$\left\langle (\beta^{\tau^{-i}})_0, (\beta^{\tau^{-i}})_1, \dots, (\beta^{\tau^{-i}})_{n-1}, \tau \right\rangle$$

é metabeliano.

Logo, por (4.38),

$$\langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle = \left\langle (\beta^{\tau^{-i}})_0, (\beta^{\tau^{-i}})_1, \dots, (\beta^{\tau^{-i}})_{n-1}, \tau \right\rangle$$

é metabeliano. \square

4.2 Elementos com atividade em $\langle \sigma_\tau \rangle$

Proposição 24. *Sejam $\beta \in \mathcal{A} = \text{Aut}(T_n)$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_\beta = \sigma_\tau^s$ para algum $s \in \{0, \dots, n-1\}$. Então $H = \langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ possui um subgrupo normal abeliano*

$$N = \langle [\beta_0, \tau^{k_0}], [\beta_1, \tau^{k_1}], \dots, [\beta_{n-1}, \tau^{k_{n-1}}] \mid k_0, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Demonstração. Usando que $\sigma_\beta = \sigma_\tau^s$ e $\xi = kn + \bar{\xi} = kn + r$ em (I) da Proposição 23, obtemos

$$(\tau^\xi)_{\overline{j-r}}^{-1} \beta_{\overline{j-r}} (\tau^\xi)_{\overline{j+s-r}} \beta_{\overline{j+s}} = \beta_j (\tau^\xi)_{\overline{j+s-r}}^{-1} \beta_{\overline{j+s-r}} (\tau^\xi)_{\overline{j+2s-r}}$$

Logo,

$$\tau^{-k-\delta(j-r,r)} \beta_{\overline{j-r}} \tau^{k+\delta(j+s-r,r)} \beta_{\overline{j+s}} = \beta_j \tau^{-k-\delta(j+s-r,r)} \beta_{\overline{j+s-r}} \tau^{k+\delta(j+2s-r,r)},$$

para todos $r, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Fazendo $t = \overline{j+s}$, $i = \overline{j+s-r}$ e $z = k + \delta(j+s-r, r) = k + \delta(i, t-i)$, obtemos

$$\tau^{-z+\delta(i,t-i)-\delta(i-s,t-i)} \beta_{\overline{i-s}} \tau^z \beta_t = \beta_{\overline{t-s}} \tau^{-z} \beta_i \tau^{z-\delta(i,t-i)+\delta(i+s,t-i)},$$

para todos $t, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e para todo $z \in \mathbb{Z}$.

Assim,

$$\tau^{\delta(i,t-i)-\delta(i-s,t-i)} \beta_{\overline{i-s}} [\beta_{\overline{i-s}}, \tau^z] \beta_t = \beta_{\overline{t-s}} \beta_i [\beta_i, \tau^z] \tau^{-\delta(i,t-i)+\delta(i+s,t-i)}$$

para todos $t, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e para todo $z \in \mathbb{Z}$.

Como

$$\Delta_s(i, t) = \delta(i, t - i) - \delta(i - s, t - i)$$

e

$$\Delta_s(i + s, t + s) = \delta(i + s, t - i) - \delta(i, t - i),$$

para todos $i, t \in \mathbb{Z}$, obtemos

$$\tau^{\Delta_s(i, t)} \beta_{i-s} [\beta_{i-s}, \tau^z] \beta_t = \beta_{t-s} \beta_i [\beta_i, \tau^z] \tau^{\Delta_s(i+s, t+s)}$$

para todos $t, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e para todo $z \in \mathbb{Z}$.

Conseqüentemente,

$$\tau^{\Delta_s(i, t)} \beta_{i-s} \beta_t = \beta_{t-s} \beta_i \tau^{\Delta_s(i+s, t+s)} \quad (4.39)$$

e

$$[\beta_{i-s}, \tau^z]^{\beta_t \tau^{-\Delta_s(i+s, t+s)}} = [\beta_i, \tau^z], \quad (4.40)$$

para todos $t, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e para todo $z \in \mathbb{Z}$.

Segue das equações (4.2) e (4.40) que N é subgrupo normal de H . Além disso, aplicando alternadamente estas equações, obtemos

$$\begin{aligned} [\beta_i, \tau^z]^{\beta_t \tau^k} &= [\beta_i, \tau^z]^{\beta_t^{-1} \tau^{-k} \beta_t \tau^k} = [\beta_i, \tau^z]^{\tau^{-\Delta_s(i+s, t+s)} \tau^{\Delta_s(i+s, t+s)} \beta_t^{-1} \tau^{-k} \beta_t \tau^k} \\ &\stackrel{(4.2)}{=} ([\beta_i, \tau^{-\Delta_s(i+s, t+s)}]^{-1} [\beta_i, \tau^{z-\Delta_s(i+s, t+s)}])^{\tau^{\Delta_s(i+s, t+s)} \beta_t^{-1} \tau^{-k} \beta_t \tau^k} \\ &\stackrel{(4.40)}{=} ([\beta_{i-s}, \tau^{-\Delta_s(i+s, t+s)}]^{-1} [\beta_{i-s}, \tau^{z-\Delta_s(i+s, t+s)}])^{\tau^{-k} \beta_t \tau^k} \\ &\stackrel{(4.2)}{=} \left(([\beta_{i-s}, \tau^{-k}]^{-1} [\beta_{i-s}, \tau^{-k-\Delta_s(i+s, t+s)}])^{-1} ([\beta_{i-s}, \tau^{-k}]^{-1} [\beta_{i-s}, \tau^{-k+z-\Delta_s(i+s, t+s)}]) \right)^{\beta_t \tau^k} \\ &= ([\beta_{i-s}, \tau^{-k-\Delta_s(i+s, t+s)}]^{-1} [\beta_{i-s}, \tau^{-k+z-\Delta_s(i+s, t+s)}])^{\beta_t \tau^k} \\ &\stackrel{(4.40)}{=} ([\beta_i, \tau^{-k-\Delta_s(i+s, t+s)}]^{-1} [\beta_i, \tau^{-k+z-\Delta_s(i+s, t+s)}])^{\tau^{k+\Delta_s(i+s, t+s)}} \stackrel{(4.2)}{=} [\beta_i, \tau^z] \end{aligned}$$

□

Corolário 14. *Sejam $\beta \in \mathcal{A} = \text{Aut}(T_n)$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_\beta = \sigma_\tau^s$ para algum $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Então $H = \langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ possui um subgrupo normal metabeliano*

$$M = \langle [\beta_0, \tau^{k_0}], [\beta_1, \tau^{k_1}], \dots, [\beta_{n-1}, \tau^{k_{n-1}}], \tau \mid k_0, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Demonstração. De fato, se $N = \langle [\beta_0, \tau^{k_0}], [\beta_1, \tau^{k_1}], \dots, [\beta_{n-1}, \tau^{k_{n-1}}] \mid k_0, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{Z} \rangle$, então, pela Proposição 24, N é normal e abeliano.

Além disso, como $N\tau \in Z(H/N)$, então $\frac{N\langle\tau\rangle}{N} \triangleleft \frac{H}{N}$. Portanto, pelo *Teorema da Correspondência*,

$$M = N \langle \tau \rangle = \langle [\beta_0, \tau^{k_0}], [\beta_1, \tau^{k_1}], \dots, [\beta_{n-1}, \tau^{k_{n-1}}], \tau \mid k_0, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{Z} \rangle$$

é um subgrupo normal de H , com $\frac{N\langle\tau\rangle}{N} \cong \frac{\langle\tau\rangle}{N \cap \langle\tau\rangle}$ abeliano. \square

Lema 4 (O caso inativo). *Seja $\beta \in \mathcal{A} = \text{Aut}(T_n)$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_\beta = e$. Então as seguintes relações se verificam em $H = \langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ para todos $i, t \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ e para todo $\xi \in \mathbb{Z}$:*

$$(i) \quad \beta_i \beta_t = \beta_t \beta_i;$$

$$(ii) \quad [\beta_i, \beta_t^{\tau^\xi}] = e.$$

Demonstração.

(i) Basta tomar $s = 0$ em (4.39).

(ii) Basta tomar $s = 0$ em (4.40) e utilizar (i) deste lema. \square

Uma generalização do Lema 4 é dada pela seguinte Proposição:

Proposição 25. *Sejam $\alpha, \gamma \in \text{Stab}_n(1)$ tais que $[\alpha, \alpha^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Então,*

$$[\alpha_i, \gamma_j^{\tau^\xi}] = e, \forall i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall \xi \in \mathbb{Z}$$

Demonstração. Para cada $\xi \in \mathbb{Z}$, sejam $r, k \in \mathbb{Z}$ tais que $\xi = kn + r = kn + \bar{r}$.

Assim, pela Proposição 6,

$$\begin{aligned} \left(\gamma^{\tau^\xi} \right)_{i\tau^\xi} &= (\tau^\xi)_i^{-1} \gamma_i (\tau^\xi)_i \\ \Rightarrow \left(\gamma^{\tau^\xi} \right)_i &= (\tau^\xi)_{i-\xi}^{-1} \gamma_{i-\xi} (\tau^\xi)_{i-\xi} \\ \Rightarrow \left(\gamma^{\tau^\xi} \right)_i &= (\tau^\xi)_{i-r}^{-1} \gamma_{i-r} (\tau^\xi)_{i-r} \\ \Rightarrow \left(\gamma^{\tau^\xi} \right)_i &= \tau^{-k-\delta(i-r,r)} \gamma_{i-r} \tau^{k+\delta(i-r,r)} \end{aligned}$$

Como $[\alpha, \gamma^{\tau^\xi}] = e$ e $\alpha, \gamma^{\tau^\xi} \in \text{Stab}_n(1)$, então,

$$[\alpha_i, (\gamma^{\tau^\xi})_i] = e, \forall \xi \in \mathbb{Z}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$\Rightarrow [\alpha_i, \gamma_{i-r}^{\tau^{k+\delta(i-r,r)}}] = e, \forall r, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow [\alpha_i, (\gamma_j)^{\tau^\xi}] = e, \forall i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \forall \xi \in \mathbb{Z}.$$

□

Proposição 26. *Sejam $\alpha, \gamma \in \text{Stab}_n(k)$ tais que $[\alpha, \gamma^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Então $[\alpha_u, \gamma_v^{\tau^\xi}] = e$ para todos $u, v \in \mathcal{M}$ tais que $|u| = |v| \leq k$.*

Demonstração. Segue da Proposição 25. □

Proposição 27. *Sejam n par, $\Delta(i, j) = \Delta_{\frac{n}{2}}(i, j)$ e $\beta \in \text{Aut}(T_n)$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_\beta = \sigma_\tau^{\frac{n}{2}}$. Então as seguintes relações se verificam em $H = \langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ para todos $k, t \in \mathbb{Z}$ e para todos $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$:*

- (i) $[\beta_i, \tau^k]^{\beta_j \tau^t} = [\beta_i, \tau^k]^{\tau^t \beta_j}$;
- (ii) $\tau^{\Delta(i,j)} \beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_j \tau^{\Delta(i,j)} = \beta_{j+\frac{n}{2}} \beta_i$;
- (iii) $[\beta_{i+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_j} = [\beta_i, \tau^k]^{\tau^{\Delta(j,i)}}$;
- (iv) $[\beta_i, \tau^k]^{\beta_j \beta_{j+\frac{n}{2}}} = [\beta_i, \tau^k]$;
- (v) $[\beta_i, \tau^k]^{\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}} = [\beta_i, \tau^k]$;
- (vi) $(\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{\tau^k} = \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}} [\beta_{i+\frac{n}{2}}, \tau^k]^2$;
- (vii) $(\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})})^{\tau^k} = \beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k] [\beta_j, \tau^k] \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}$;
- (viii) $(\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{\beta_j} = (\beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_i)^{\tau^{\Delta(j,i)}}$;
- (ix) $(\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{\beta_j \beta_{j+\frac{n}{2}}} = \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}}$;
- (x) $(\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}} = \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}}$;
- (xi) $(\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})})^{\beta_i} = \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2 \tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)} [\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2},j)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}] \right)^{\tau^{\Delta(i,j)}}$;
- (xii) $(\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})})^{\beta_i^2 \tau^{-\Delta(i,i+\frac{n}{2})}} = \beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}$.

Demonstração.

- (i) Segue da Proposição 24.
- (ii) Segue da Proposição 14 e de (4.39).
- (iii) Segue da Proposição 14 e de (4.40).
- (iv) $[\beta_i, \tau^k]^{\beta_j \beta_{j+\frac{n}{2}}} \stackrel{(iii)}{=} [\beta_{i+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau^{\Delta(j, i+\frac{n}{2})} \beta_{j+\frac{n}{2}}} \stackrel{(i)}{=} [\beta_{i+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_{j+\frac{n}{2}}} \tau^{\Delta(j, i+\frac{n}{2})}$
 $\stackrel{(iii)}{=} [\beta_i, \tau^k]^{\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2}, i)+\Delta(j, i+\frac{n}{2})}} \stackrel{\text{Prop.14}}{=} [\beta_i, \tau^k]$
- (v) $[\beta_i, \tau^k]^{\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j+\frac{n}{2})}} \stackrel{(iii)}{=} [\beta_{i+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau^{\Delta(j, i+\frac{n}{2})} \beta_j \tau^{-\Delta(j, j+\frac{n}{2})}} \stackrel{(i)}{=} [\beta_{i+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\beta_j \tau^{\Delta(j, i+\frac{n}{2})-\Delta(j, j+\frac{n}{2})}}$
 $\stackrel{(iii)}{=} [\beta_i, \tau^k]^{\tau^{\Delta(j, i)+\Delta(j, i+\frac{n}{2})-\Delta(j, j+\frac{n}{2})}} \stackrel{\text{Prop.14}}{=} [\beta_i, \tau^k]$
- (vi) $(\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{\tau^k} = \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}} [\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}}, \tau^k] = \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}} [\beta_i, \tau^k]^{\beta_{i+\frac{n}{2}}} [\beta_{i+\frac{n}{2}}, \tau^k]$
 $\stackrel{(iii)}{=} \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}} [\beta_{i+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau^{\Delta(i+\frac{n}{2}, i+\frac{n}{2})}} [\beta_{i+\frac{n}{2}}, \tau^k] \stackrel{\text{Prop.14}}{=} \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}} [\beta_{i+\frac{n}{2}}, \tau^k]^2$
- (vii) $(\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j+\frac{n}{2})})^{\tau^k} = \beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j+\frac{n}{2})} [\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j+\frac{n}{2})}, \tau^k] = \beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j+\frac{n}{2})} [\beta_j, \tau^k]^{\tau^{-\Delta(j, j+\frac{n}{2})}}$
 $= \beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j+\frac{n}{2})} ([\beta_j, \tau^k]^{\beta_j} [\beta_j, \tau^k])^{\tau^{-\Delta(j, j+\frac{n}{2})}}$
 $\stackrel{(iii)}{=} \beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j+\frac{n}{2})} \left([\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k]^{\tau^{\Delta(j, j+\frac{n}{2})}} [\beta_j, \tau^k] \right)^{\tau^{-\Delta(j, j+\frac{n}{2})}}$
 $= \beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j+\frac{n}{2})} [\beta_{j+\frac{n}{2}}, \tau^k] [\beta_j, \tau^k]^{\tau^{-\Delta(j, j+\frac{n}{2})}}$
- (viii) $(\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{\beta_j} = \beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_j \stackrel{(ii)}{=} \beta_j^{-1} \beta_i \tau^{\Delta(j, i)} \beta_{j+\frac{n}{2}} \beta_i \tau^{\Delta(j, i)}$
 $= \beta_j^{-1} \beta_i \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(j, i)} [\tau^{\Delta(j, i)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}] \beta_i \tau^{\Delta(j, i)}$
 $\stackrel{(ii)}{=} \beta_j^{-1} \tau^{\Delta(j+\frac{n}{2}, i+\frac{n}{2})} \beta_j \beta_{i+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(j+\frac{n}{2}, i+\frac{n}{2})+\Delta(j, i)} [\tau^{\Delta(j, i)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}] \beta_i \tau^{\Delta(j, i)}$
 $\stackrel{\text{Prop.14}}{=} \beta_j^{-1} \tau^{-\Delta(j, i)} \beta_j \beta_{i+\frac{n}{2}} [\tau^{\Delta(j, i)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}] \beta_i \tau^{\Delta(j, i)}$
 $= \tau^{-\Delta(j, i)} [\tau^{-\Delta(j, i)}, \beta_j] \beta_{i+\frac{n}{2}} [\tau^{\Delta(j, i)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}] \beta_i \tau^{\Delta(j, i)}$
 $= \tau^{-\Delta(j, i)} [\tau^{-\Delta(j, i)}, \beta_j] \beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_i [\tau^{\Delta(j, i)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}]^{\beta_i} \tau^{\Delta(j, i)}$
 $\stackrel{(iii)}{=} \tau^{-\Delta(j, i)} [\tau^{-\Delta(j, i)}, \beta_j] \beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_i [\tau^{\Delta(j, i)}, \beta_j]^{\tau^{\Delta(i, j)}} \tau^{\Delta(j, i)}$
 $\stackrel{(iv)}{=} \tau^{-\Delta(j, i)} \beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_i [\tau^{-\Delta(j, i)}, \beta_j] [\tau^{\Delta(j, i)}, \beta_j]^{\tau^{\Delta(i, j)}} \tau^{\Delta(j, i)}$
 $\stackrel{\text{Prop.14}}{=} \tau^{-\Delta(j, i)} \beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_i [\tau^{-\Delta(j, i)}, \beta_j] [\tau^{\Delta(j, i)}, \beta_j]^{\tau^{-\Delta(j, i)}} \tau^{\Delta(j, i)}$
 $\stackrel{\text{Prop.24}}{=} \tau^{-\Delta(j, i)} \beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_i [\tau^{\Delta(j, i)}, \beta_j]^{\tau^{-\Delta(j, i)}} [\tau^{-\Delta(j, i)}, \beta_j] \tau^{\Delta(j, i)}$
 $= (\beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_i)^{\tau^{\Delta(j, i)}}$

$$(ix) \quad (\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{\beta_j \beta_{j+\frac{n}{2}}} \stackrel{(viii)}{=} (\beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_i)^{\tau^{\Delta(j,i)} \beta_{j+\frac{n}{2}}} = (\beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_i)^{\beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(j,i)} [\tau^{\Delta(j,i)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}]}$$

$$\stackrel{(viii)}{=} (\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2}, i+\frac{n}{2})+\Delta(j,i)} [\tau^{\Delta(j,i)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}]} \stackrel{\text{Prop.14}}{=} (\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{[\tau^{\Delta(j,i)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}]}$$

$$\stackrel{(iv)}{=} \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}}$$

$$(x) \quad (\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}} \stackrel{(viii)}{=} (\beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_i)^{\tau^{\Delta(j,i)} \beta_j \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}}$$

$$= (\beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_i)^{\beta_j \tau^{\Delta(j,i)} [\tau^{\Delta(j,i)}, \beta_j] \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}} = (\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{\tau^{\Delta(j,i+\frac{n}{2})+\Delta(j,i)} [\tau^{\Delta(j,i)}, \beta_j] \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}}$$

$$\stackrel{\text{Prop.14}}{=} (\beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}})^{[\tau^{\Delta(j,i)}, \beta_j] \tau^{\Delta(j+\frac{n}{2}, j)}} \stackrel{\text{Prop.24}}{=} \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}}$$

$$(xi) \quad (\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})})^{\beta_i} = \beta_i^{-1} \beta_j^2 \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})} \beta_i = \beta_i^{-1} \beta_j^2 \beta_i \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})} [\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}, \beta_i]$$

$$= \beta_i^{-1} \beta_j \beta_j \beta_i \tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})} [\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}, \beta_i]$$

$$\stackrel{(ii)}{=} \beta_i^{-1} \beta_j \tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})} \beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})-\Delta(j,j+\frac{n}{2})} [\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}, \beta_i]$$

$$\stackrel{\text{Prop.14}}{=} \beta_i^{-1} \beta_j \tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})} \beta_{i+\frac{n}{2}} \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j)} [\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}, \beta_i]$$

$$= \beta_i^{-1} \beta_j \beta_{i+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})} [\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})}, \beta_{i+\frac{n}{2}}] \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j)} [\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}, \beta_i]$$

$$= \beta_i^{-1} \beta_j \beta_{i+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})} \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j)} [\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})}, \beta_{i+\frac{n}{2}}]^{\beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j)}} [\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}, \beta_i]$$

$$\stackrel{(iii)}{=} \beta_i^{-1} \beta_j \beta_{i+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})} \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j)} [\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})}, \beta_i]^{\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2}, i)+\Delta(i,j)}} [\tau^{-\Delta(j,j+\frac{n}{2})}, \beta_i]$$

$$\stackrel{\text{Prop.14}}{=} \beta_i^{-1} \beta_j \beta_{i+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})} \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j)} [\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})}, \beta_i] \tau^{\Delta(j+\frac{n}{2}, j)} [\tau^{\Delta(j+\frac{n}{2}, j)}, \beta_i]$$

$$= \beta_i^{-1} \beta_j \beta_{i+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})} \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j)} [\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})+\Delta(j+\frac{n}{2}, j)}, \beta_i]$$

$$\stackrel{(ii)}{=} \beta_i^{-1} \tau^{\Delta(i+\frac{n}{2}, j+\frac{n}{2})} \beta_i \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i+\frac{n}{2}, j+\frac{n}{2})+\Delta(i,j+\frac{n}{2})} \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j)} [\tau^{\Delta(i,j+\frac{n}{2})+\Delta(j+\frac{n}{2}, j)}, \beta_i]$$

$$\stackrel{\text{Prop.14}}{=} \beta_i^{-1} \tau^{-\Delta(i,j)} \beta_i \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2}, j)} \beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(i,j)} [\tau^{\Delta(i,j)}, \beta_i]$$

$$= \tau^{-\Delta(i,j)} [\tau^{-\Delta(i,j)}, \beta_i]^{\beta_{j+\frac{n}{2}} \tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2}, j)}} \tau^{\Delta(i,j)} [\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2}, j)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}] \tau^{\Delta(i,j)} [\tau^{\Delta(i,j)}, \beta_i]$$

$$\stackrel{(v)}{=} \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2 \tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2}, j)} \right)^{\tau^{\Delta(i,j)}} [\tau^{-\Delta(i,j)}, \beta_i]^{\tau^{\Delta(i,j)}} [\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2}, j)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}]^{\tau^{\Delta(i,j)}} [\tau^{\Delta(i,j)}, \beta_i]$$

$$\stackrel{\text{Prop.24}}{=} \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2 \tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2}, j)} \right)^{\tau^{\Delta(i,j)}} [\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2}, j)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}]^{\tau^{\Delta(i,j)}} [\tau^{-\Delta(i,j)}, \beta_i]^{\tau^{\Delta(i,j)}} [\tau^{\Delta(i,j)}, \beta_i]$$

$$= \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2 \tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2}, j)} \right)^{\tau^{\Delta(i,j)}} [\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2}, j)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}]^{\tau^{\Delta(i,j)}}$$

$$= \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2 \tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2}, j)} [\tau^{-\Delta(j+\frac{n}{2}, j)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}] \right)^{\tau^{\Delta(i,j)}}$$

$$\begin{aligned}
\text{(xii)} \quad & \left(\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2})} \right)^{\beta_i^2 \tau^{-\Delta(i, i + \frac{n}{2})}} \stackrel{(xi)}{=} \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2 \tau^{-\Delta(j + \frac{n}{2}, j)} [\tau^{-\Delta(j + \frac{n}{2}, j)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}] \right)^{\tau^{\Delta(i, j)} \beta_i \tau^{-\Delta(i, i + \frac{n}{2})}} \\
& = \left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2 \tau^{-\Delta(j + \frac{n}{2}, j)} [\tau^{-\Delta(j + \frac{n}{2}, j)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}] \right)^{\beta_i \tau^{\Delta(i, j)} [\tau^{\Delta(i, j)}, \beta_i] \tau^{-\Delta(i, i + \frac{n}{2})}} \\
& = \left(\left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2 \tau^{-\Delta(j + \frac{n}{2}, j)} \right)^{\beta_i} [\tau^{-\Delta(j + \frac{n}{2}, j)}, \beta_{j+\frac{n}{2}}]^{\beta_i} \right)^{\tau^{\Delta(i, j)} [\tau^{\Delta(i, j)}, \beta_i] \tau^{-\Delta(i, i + \frac{n}{2})}} \\
& \stackrel{(iii)}{=} \left(\left(\beta_{j+\frac{n}{2}}^2 \tau^{-\Delta(j + \frac{n}{2}, j)} \right)^{\beta_i} [\tau^{-\Delta(j + \frac{n}{2}, j)}, \beta_j]^{\tau^{\Delta(i, j)}} \right)^{\tau^{\Delta(i, j)} [\tau^{\Delta(i, j)}, \beta_i] \tau^{-\Delta(i, i + \frac{n}{2})}} \\
& \stackrel{(xi)}{=} \left(\left(\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2})} [\tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2})}, \beta_j] \right)^{\tau^{\Delta(i, j + \frac{n}{2})}} [\tau^{-\Delta(j + \frac{n}{2}, j)}, \beta_j]^{\tau^{\Delta(i, j)}} \right)^{\tau^{\Delta(i, j)} [\tau^{\Delta(i, j)}, \beta_i] \tau^{-\Delta(i, i + \frac{n}{2})}} \\
& = \left(\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2})} [\tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2})}, \beta_j] [\tau^{-\Delta(j + \frac{n}{2}, j)}, \beta_j]^{\tau^{\Delta(i, j) - \Delta(i, j + \frac{n}{2})}} \right)^{\tau^{\Delta(i, j + \frac{n}{2}) + \Delta(i, j)} [\tau^{\Delta(i, j)}, \beta_i] \tau^{-\Delta(i, i + \frac{n}{2})}} \\
& \stackrel{\text{Prop.14}}{=} \left(\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2})} [\tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2})}, \beta_j] [\tau^{-\Delta(j + \frac{n}{2}, j)}, \beta_j]^{\tau^{\Delta(j + \frac{n}{2}, j)}} \right)^{\tau^{\Delta(i, i + \frac{n}{2})} [\tau^{\Delta(i, j)}, \beta_i] \tau^{-\Delta(i, i + \frac{n}{2})}} \\
& = \left(\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2})} [\tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2})}, \beta_j] [\tau^{\Delta(j + \frac{n}{2}, j)}, \beta_j]^{-1} \right)^{[\tau^{\Delta(i, j)}, \beta_i] \tau^{-\Delta(i, i + \frac{n}{2})}} \\
& \stackrel{\text{Prop.14}}{=} \left(\beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2})} \right)^{[\tau^{\Delta(i, j)}, \beta_i] \tau^{-\Delta(i, i + \frac{n}{2})}} \\
& \stackrel{\text{Prop.24 e (v)}}{=} \beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2})}
\end{aligned}$$

□

Teorema 6. *Sejam n par, $\beta \in \mathcal{A} = \text{Aut}(T_n)$ tal que $\sigma_\beta = \sigma_\tau^{\frac{n}{2}}$ e $[\beta, \beta^{\tau^\epsilon}] = e$ para todo $\epsilon \in \mathbb{Z}$. Então $H = \langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ é um subgrupo metabeliano de $\text{Aut}(T_n)$.*

Demonstração. De fato, pela Proposição 27,

$$N = \langle \beta_i \beta_{i+\frac{n}{2}}, \beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2})}, [\beta_t, \tau^k] \mid i, j, t \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } k \in \mathbb{Z} \rangle$$

é um subgrupo normal e abeliano de H .

Além disso, como

$$\begin{aligned}
N\beta_i N\beta_j &= N\beta_i \beta_j \stackrel{\text{Prop.27}}{=} N\tau^{\Delta(j, i + \frac{n}{2})} \beta_{j+\frac{n}{2}} \beta_{i+\frac{n}{2}} \tau^{\Delta(j, i + \frac{n}{2})} = N\beta_{j+\frac{n}{2}} \beta_{i+\frac{n}{2}} \tau^{2\Delta(j, i + \frac{n}{2})} \\
&= N\beta_j^{-1} \beta_i^{-1} \tau^{2\Delta(j, i + \frac{n}{2})} = N\beta_j^{-1} \beta_j^2 \tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2})} \beta_i^{-1} \beta_i^2 \tau^{-\Delta(i, i + \frac{n}{2})} \tau^{2\Delta(j, i + \frac{n}{2})} \\
&= N\beta_j \beta_i \tau^{-\Delta(j, j + \frac{n}{2}) - \Delta(i, i + \frac{n}{2}) + 2\Delta(j, i + \frac{n}{2})} \stackrel{\text{Prop.14}}{=} N\beta_j \beta_i = N\beta_j N\beta_i
\end{aligned}$$

e

$$N\beta_i = N\beta_{i+\frac{n}{2}}^{-1}, \quad N\beta_i^2 = N\tau^{\Delta(i, i + \frac{n}{2})}, \quad \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\},$$

então $\frac{H}{N}$ é imagem homomórfica de

$$\mathbb{Z} \times \underbrace{C_2 \times \dots \times C_2}_{\frac{n}{2} \text{ termos}}$$

□

Teorema 7. *Seja $\beta \in \text{Aut}(T_n)$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e, \forall \xi \in \mathbb{Z}$ e $\sigma_\beta = \sigma_\tau^t$ para algum $t \in \{0, \dots, n-1\}$. Então $H = \langle \beta_0, \dots, \beta_{n-1}, \tau \rangle$ é metabeliano-por-finito.*

Demonstração. Como $[\sigma_\beta, \sigma_\tau] = e$, então existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_\beta = \sigma_\tau^t$ e $i^{\sigma_\beta} = \overline{i+t}$.

Se $N = \langle [\beta_0, \tau^{k_0}], \dots, [\beta_{n-1}, \tau^{k_{n-1}}] \mid k_0, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{Z} \rangle$, então, pela Proposição 24, N é um subgrupo normal e abeliano de H .

Seja $m = \frac{n}{(n,t)}$ e considere

$$K = N \langle \beta_0 \beta_{0+t} \cdots \beta_{0+(m-1)t}, \beta_1 \beta_{1+t} \cdots \beta_{1+(m-1)t}, \dots, \beta_{n-1} \beta_{n-1+t} \cdots \beta_{n-1+(m-1)t} \rangle$$

Por (4.40), temos que

$$\begin{aligned} [\beta_i, \tau^z]^{\beta_j \beta_{j+t} \cdots \beta_{j+(m-1)t}} &= [\beta_{i+t}, \tau^z]^{\tau^{\Delta_t(i+2t, j+t)} \beta_{j+t} \cdots \beta_{j+(m-1)t}} \\ &= [\beta_{i+2t}, \tau^z]^{\tau^{\Delta_t(i+2t, j+t) + \Delta_t(i+3t, j+2t)} \beta_{j+2t} \cdots \beta_{j+(m-1)t}} \\ &= [\beta_i, \tau^z]^{\tau^{\sum_{k=0}^{m-1} \Delta_t(i+(k+1)t, j+kt)}} \\ &\stackrel{\text{Prop.14(v)}}{=} [\beta_i, \tau^z] \end{aligned}$$

Como $\sigma_\beta = \sigma_\tau^t$, então $\theta = \beta^m$ satisfaz

$$[\theta_i, \theta_j] = e, \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\},$$

pelo Lema 4.

Daí,

$$[(\beta^m)_i, (\beta^m)_j] = e, \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}$$

Portanto,

$$[\beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-1)t}, \beta_j \beta_{j+t} \cdots \beta_{j+(m-1)t}] = e, \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}$$

Isto mostra que K é abeliano.

Como N é normal,

$$(\beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-1)t})^\tau = \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-1)t} [\beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-1)t}, \tau]$$

e

$$\begin{aligned} &\beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-1)t} \beta_j \\ &= \beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-2)t} \tau^{-\Delta_t(i,j)} \beta_{j-t} \beta_i \tau^{\Delta_t(i+t, j+t)} \\ &= \beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-2)t} \beta_{j-t} \tau^{-\Delta_t(i,j)} [\tau^{-\Delta_t(i,j)}, \beta_{j-t}] \beta_i \tau^{\Delta_t(i+t, j+t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-2)t} \beta_{j-t} \tau^{-\Delta_t(i,j)} \beta_i [\tau^{-\Delta_t(i,j)}, \beta_{j-t}]^{\beta_i} \tau^{\Delta_t(i+t,j+t)} \\
&= \beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-3)t} \beta_{j-2t} \tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)} \beta_{i-t} [\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)}, \beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t}} \tau^{\Delta_t(i,j)} \tau^{-\Delta_t(i,j)} \\
&\quad \beta_i [\tau^{-\Delta_t(i,j)}, \beta_{j-t}]^{\beta_i} \tau^{\Delta_t(i+t,j+t)} \\
&= \beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-3)t} \beta_{j-2t} \tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)} \beta_{i-t} [\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)}, \beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t}} \\
&\quad \beta_i [\tau^{-\Delta_t(i,j)}, \beta_{j-t}]^{\beta_i} \tau^{\Delta_t(i+t,j+t)} \\
&= \beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-3)t} \beta_{j-2t} \tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)} \beta_{i-t} \beta_i [\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)}, \beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t} \beta_i} \\
&\quad [\tau^{-\Delta_t(i,j)}, \beta_{j-t}]^{\beta_i} \tau^{\Delta_t(i+t,j+t)} \\
&= \beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-4)t} \beta_{j-3t} \\
&\quad \tau^{-\Delta_t(i-2t,j-2t)} \beta_{i-2t} [\tau^{-\Delta_t(i-2t,j-2t)}, \beta_{j-3t}]^{\beta_{i-2t}} \tau^{\Delta_t(i-t,j-t)} \tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)} \beta_{i-t} \beta_i \\
&\quad [\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)}, \beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t} \beta_i} [\tau^{-\Delta_t(i,j)}, \beta_{j-t}]^{\beta_i} \tau^{\Delta_t(i+t,j+t)} \\
&= \beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-4)t} \beta_{j-3t} \\
&\quad \tau^{-\Delta_t(i-2t,j-2t)} \beta_{i-2t} [\tau^{-\Delta_t(i-2t,j-2t)}, \beta_{j-3t}]^{\beta_{i-2t}} \beta_{i-t} \beta_i \\
&\quad [\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)}, \beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t} \beta_i} [\tau^{-\Delta_t(i,j)}, \beta_{j-t}]^{\beta_i} \tau^{\Delta_t(i+t,j+t)} \\
&= \beta_j^{-1} \beta_i \beta_{i+t} \cdots \beta_{i+(m-4)t} \beta_{j-3t} \\
&\quad \tau^{-\Delta_t(i-2t,j-2t)} \beta_{i-2t} \beta_{i-t} \beta_i [\tau^{-\Delta_t(i-2t,j-2t)}, \beta_{j-3t}]^{\beta_{i-2t} \beta_{i-t} \beta_i} \\
&\quad [\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)}, \beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t} \beta_i} [\tau^{-\Delta_t(i,j)}, \beta_{j-t}]^{\beta_i} \tau^{\Delta_t(i+t,j+t)} \\
&= \tau^{-\Delta_t(i+t,j+t)} \beta_{i+t} \beta_{i+2t} \cdots \beta_i [\tau^{-\Delta_t(i+t,j+t)}, \beta_j]^{\beta_{i+t} \beta_{i+2t} \cdots \beta_i} \\
&\quad [\tau^{-\Delta_t(i+2t,j+2t)}, \beta_{j+t}]^{\beta_{i+2t} \beta_{i+3t} \cdots \beta_i} \cdots [\tau^{-\Delta_t(i+(m-1)t, j+(m-1)t)}, \beta_{j+(m-2)t}]^{\beta_{i+(m-1)t} \beta_{i+mt}} \\
&\quad [\tau^{-\Delta_t(i+mt, j+mt)}, \beta_{j+(m-1)t}]^{\beta_{i+mt}} \tau^{\Delta_t(i+(m+1)t, j+(m+1)t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tau^{-\Delta_t(i+t,j+t)} \beta_{i+t} \beta_{i+2t} \cdots \beta_i [\tau^{-\Delta_t(i+t,j+t)}, \beta_j]^{\beta_{i+t} \beta_{i+2t} \cdots \beta_i} \\
&[\tau^{-\Delta_t(i+2t,j+2t)}, \beta_{j+t}]^{\beta_{i+2t} \beta_{i+3t} \cdots \beta_i} \cdots [\tau^{-\Delta_t(i-t,j-t)}, \beta_{j-2t}]^{\beta_{i-t} \beta_i} \\
&[\tau^{-\Delta_t(i,j)}, \beta_{j-t}]^{\beta_i} \tau^{\Delta_t(i+t,j+t)},
\end{aligned}$$

então K é subgrupo normal e abeliano de H .

Além disso, se $M = K \langle \tau \rangle$, então,

$$\frac{M}{K} = \frac{K \langle \tau \rangle}{K} \cong \frac{\langle \tau \rangle}{K \cap \langle \tau \rangle}$$

é abeliano.

Portanto,

$$M = \left\langle [\beta_i, \tau^\xi], \beta_j \beta_{j+t} \cdots \beta_{j+(m-1)t}, \tau \mid i, j \in \{0, \dots, n-1\}, \xi \in \mathbb{Z} \right\rangle$$

é metabeliano.

Considere agora o grupo

$$G = \left\langle b_0, \dots, b_{n-1} \mid b_i b_{j+t} = b_j b_{i+t}, b_i b_{i+t} \cdots b_{i+(m-1)t} = e, \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\} \right\rangle$$

As equações (4.39) e (4.40) mostram que $\frac{H}{M}$ é imagem homomórfica de G .

Mostraremos que G é isomorfo a um subgrupo de $C_m \wr C_n$.

De fato, uma apresentação para $C_m \wr C_n$ é

$$\left\langle u, a \mid u^m = e, a^n = e, u^{a^i} u^{a^j} = u^{a^j} u^{a^i} \right\rangle$$

Introduzindo um gerador $b = a^t u^{-1}$,

$$\begin{aligned}
u^m = e &\Rightarrow u^{-m} = e \\
&\Rightarrow (u^{-1})^m = e \Rightarrow (a^{-t} b)^m = e \\
&\Rightarrow \underbrace{a^{-t} b \cdots a^{-t} b}_{m \text{ termos}} = e \\
&\Rightarrow \underbrace{(a^{-t} b \cdots a^{-t} b)}_{m \text{ termos}}^{a^{-t+i}} = e \\
&\Rightarrow b^{a^i} b^{a^{i+t}} \cdots b^{a^{i+(m-1)t}} = e
\end{aligned}$$

e

$$u^{a^i} u^{a^j} = u^{a^j} u^{a^i}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (b^{-1}a^t)^{a^i}(b^{-1}a^t)^{a^j} = (b^{-1}a^t)^{a^j}(b^{-1}a^t)^{a^i} \\
&\Rightarrow (a^{-t}b)^{a^j}(a^{-t}b)^{a^i} = (a^{-t}b)^{a^i}(a^{-t}b)^{a^j} \\
&\Rightarrow (a^{-t})^{a^j}b^{a^j}(a^{-t})^{a^i}b^{a^i} = (a^{-t})^{a^i}b^{a^i}(a^{-t})^{a^j}b^{a^j} \\
&\Rightarrow b^{a^j}a^{-t}b^{a^i} = b^{a^i}a^{-t}b^{a^j} \\
&\Rightarrow b^{a^j}b^{a^{i+t}} = b^{a^i}b^{a^{j+t}}
\end{aligned}$$

Utilizando Transformações de Tietze podemos obter a seguinte apresentação para $C_m \wr C_n$:

$$\langle a, b \mid a^n = e, b^{a^j}b^{a^{i+t}} = b^{a^i}b^{a^{j+t}}, b^{a^i}b^{a^{i+t}} \dots b^{a^{i+(m-1)t}} = e, \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\} \rangle$$

Por fim, adicionando os geradores $b_i = b^{a^i}, i = 0, \dots, n-1$, obtemos, por Transformações de Tietze, a seguinte apresentação para $C_m \wr C_n$:

$$\begin{aligned}
&\langle a, b_0, \dots, b_{n-1} \mid a^n = e, b_i = b_0^{a^i}, b_j b_{i+t} = b_i b_{j+t}, b_i b_{i+t} \dots b_{i+(m-1)t} = e, \\
&\quad \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\} \rangle
\end{aligned}$$

Portanto, G é finito, já que é isomorfo a um subgrupo de $C_m \wr C_n$.

Logo $\frac{H}{M}$ é finito, já que é imagem homomórfica de um subgrupo de $C_m \wr C_n$.

□

O caso binário

Em [8] Said Sidki demonstrou os seguintes resultados:

Resultado 1. *Seja $\beta = (\beta_0, \beta_1)\sigma$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^i}] = e$ para todo inteiro i . Então β é um conjugado de τ e existe uma unidade 2-ádica ξ tal que $\beta^\tau = \beta^\xi$.*

Resultado 2. *Seja B um subgrupo abeliano de $\text{Aut}(T_2)$, normalizado por τ . Então existe μ um conjugado de τ , e um nível t tal que*

- (i) τ normaliza $\widehat{\langle \mu \rangle}$;
- (ii) B é um subgrupo de $\times_{2^t} \widehat{\langle \mu \rangle}$.

No Capítulo 3 obtivemos um grupo solúvel $\Psi(t)$ de comprimento derivado $t+2$ normalizado pela máquina de adição n -ádica. Para o caso binário, o principal resultado demonstrado em [8] foi o seguinte:

Resultado 3. *Seja K um grupo solúvel dos automorfismos da árvore binária, contendo a máquina de adição binária τ . Então existe um inteiro t tal que K é conjugado de um subgrupo de $\Psi(t)$.*

Exemplos em subgrupos de $\text{Aut}(T_n)$

Embora os resultados encontrados no caso binário (Veja [8]) não possam ser generalizados para elementos em um subgrupo abeliano arbitrário de $\text{Aut}(T_n)$ normalizado pela máquina de adição n -ádica, quando tratamos de subgrupos abelianos normalizados pela máquina de adição n -ádica cujos elementos estão em

$$G = \langle \alpha \in \text{Aut}(T_n) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle \sigma \rangle, \forall u \in \mathcal{M} \rangle, \text{ onde } \sigma = (0, 1, \dots, n-1) \in S_n,$$

obtemos alguns resultados idênticos ao caso binário para os casos em que n é um primo ímpar, o que nos permite fazer a seguinte conjectura:

Conjectura 1. *Seja K um subgrupo solúvel de*

$$G = \langle \alpha \in \text{Aut}(T_n) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle (0, 1, \dots, n-1) \rangle, \forall u \in \mathcal{M} \rangle,$$

contendo a máquina de adição n -ádica τ . Então existe um inteiro t tal que K é um conjugado de um subgrupo de $\Psi(t)$ em $\text{Aut}(T_n)$.

Lema 5. *Sejam $\sigma = (0, 1, \dots, n-1)$, $G = \langle \alpha \in \text{Aut}(T_n) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle \sigma \rangle, \forall u \in \mathcal{M} \rangle$ e $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})\sigma \in G$ tal que $\sigma_\beta = \sigma^s$ e $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, então, para todos $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,*

$$\Delta_s(i, t) + m_{\overline{i-s}} + m_t \equiv m_{\overline{t-s}} + m_i + \Delta_s(i+s, t+s) \pmod{n}, \quad (4.41)$$

onde $m_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ satisfaz $\sigma_{\beta_i} = \sigma^{m_i}$.

Demonstração. Como $\sigma_{\beta_i} = \sigma^{m_i}$, para todo $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, então, por (4.39),

$$\sigma^{\Delta_s(i,t)+m_{\overline{i-s}}+m_t} = \sigma^{m_{\overline{t-s}}+m_i+\Delta_s(i+s,t+s)}.$$

Logo $\Delta_s(i, t) + m_{\overline{i-s}} + m_t \equiv m_{\overline{t-s}} + m_i + \Delta_s(i+s, t+s) \pmod{n}$. □

Teorema 8. *Sejam n ímpar, $\sigma = (0, \dots, n-1)$, $G = \langle \alpha \in \text{Aut}(T_n) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle \sigma \rangle, \forall u \in \mathcal{M} \rangle$ e $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})\sigma \in G$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Então β é um conjugado de τ em G .*

Demonstração. Pela Proposição 8,

$$\alpha(1) = (e, \beta_0^{-1}, (\beta_0\beta_1)^{-1}, \dots, (\beta_0 \cdots \beta_{n-2})^{-1}) \in \text{Stab}_G(1)$$

satisfaz

$$\beta^{\alpha(1)} = (e, \dots, e, \beta_0 \cdots \beta_{n-1})\sigma.$$

Mostraremos agora que $\sigma_{\beta_0 \cdots \beta_{n-1}} = \sigma$.

Pelo Lema 5,

$$\Delta_1(i, t) + m_{\overline{i-1}} + m_t \equiv m_{\overline{t-1}} + m_i + \Delta_1(i+1, t+1) \pmod{n},$$

onde $i, j \in Y$ e $m_i \in Y$ satisfaz $\sigma_{\beta_i} = \sigma^{m_i}$.

Assim,

$$\sum_{i=0}^{n-2} \sum_{t=i+1}^{n-1} (\Delta_1(i, t) + m_{\overline{i-1}} + m_t) \equiv \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{t=i+1}^{n-1} (m_{\overline{t-1}} + m_i + \Delta_1(i+1, t+1)) \pmod{n},$$

Agora,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{t=i+1}^{n-1} \Delta_1(i, t) \stackrel{\text{Prop.14(i)}}{=} \sum_{t=1}^{n-1} \Delta_1(0, t) \stackrel{\text{Prop.14(ii)}}{=} \sum_{t=0}^{n-1} \Delta_1(0, t) \\ & \stackrel{\text{Prop.14(ii)}}{=} \sum_{t=0}^{n-1} -\Delta_1(t, 0) \stackrel{\text{Prop.14(vi)}}{=} -(n-1), \\ & \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{t=i+1}^{n-1} \Delta_1(i+1, t+1) \stackrel{\text{Prop.14(i)}}{=} \sum_{i=0}^{n-2} \Delta_1(i+1, 0) \stackrel{\text{Prop.14(ii)}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_1(i, 0) \\ & \stackrel{\text{Prop.14(vi)}}{=} (n-1), \\ & \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{t=i+1}^{n-1} (m_{\overline{i-1}} + m_t) = m_{n-1} + m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1} \\ & \quad + m_0 + m_2 + m_3 + \cdots + m_{n-1} \\ & \quad + m_1 + m_3 + m_4 + \cdots + m_{n-1} \\ & \quad + \cdots \\ & \quad + m_{n-3} + m_{n-1} \\ & = 2(n-1)m_{n-1} + (n-2) \sum_{k=0}^{n-2} m_k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{t=i+1}^{n-1} (m_{\overline{t-1}} + m_i) &= (n-1)m_0 + m_0 + m_1 + \cdots + m_{n-2} \\ &+ (n-2)m_1 + m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-2} \\ &+ (n-3)m_2 + m_2 + m_3 + \cdots + m_{n-2} \\ &+ \cdots \\ &+ m_{n-2} + m_{n-2} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} m_k. \end{aligned}$$

Logo, como n é ímpar,

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \equiv 1 \pmod{n}.$$

Portanto, $\sigma_{\beta_0 \dots \beta_{n-1}} = \sigma^{\sum_{k=0}^{n-1} m_k} = \sigma$.

Como $\sigma_{\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{n-1}} = \sigma$ e, pela Proposição 25,

$$[(\beta^n)_0, (\beta^n)_0^{\tau^\xi}] = [\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{n-1}, (\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{n-1})^{\tau^\xi}] = e,$$

para todo inteiro ξ , então $\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{n-1}$ satisfaz as hipóteses deste Teorema. Portanto o processo pode ser repetido de modo a obtermos uma seqüência $(\alpha(k))_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\beta^{\alpha(1)\alpha(2)\dots\alpha(k)\dots} = \tau$, onde $\alpha(k) \in \text{Stab}_G(k)$ satisfaz $\alpha(k)_u = \alpha(k)_v$ para todos $u, v \in \mathcal{M}$ tais que $|u| = |v| = k - 1$. \square

A seguinte Corolário é consequência do Teorema 8:

Corolário 15. *Sejam n ímpar, $\sigma = (0, \dots, n - 1)$, $G = \langle \alpha \in \text{Aut}(T_n) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle \sigma \rangle, \forall u \in \mathcal{M} \rangle$ e $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1})\sigma^s \in G$ tal que $(s, n) = 1$ e $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Então β é um conjugado de τ em $\text{Aut}(T_n)$.*

Demonstração. Como $(s, n) = 1$, existe um menor inteiro positivo k tal que $(k, n) = 1$ e $(\sigma^s)^k = \sigma$

Assim, como $\sigma_{\beta^k} = \sigma$, então β^k satisfaz as hipóteses do Teorema 8, ou seja, existe $\alpha \in G$ tal que $(\beta^k)^\alpha = \tau$. Agora como $(k, n) = 1$, então $\beta^\alpha = \tau^{k^{-1}}$.

Pela Proposição 16, existe $\gamma \in \text{Aut}(T_n)$ tal que $\tau^\gamma = \tau^{k^{-1}} = \beta^\alpha$. Logo $\alpha\gamma^{-1} \in \text{Aut}(T_n)$ satisfaz $\beta^{\alpha\gamma^{-1}} = \tau$. \square

Teorema 9. *Sejam p um primo ímpar, $\sigma = (0, 1, \dots, p - 1)$, $G = \langle \alpha \in \text{Aut}(T_p) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle \sigma \rangle, \forall u \in \mathcal{M} \rangle$ e $\beta \in G$ tal que $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta \in \times_{p^m} \widehat{\langle \mu \rangle}$ para algum conjugado μ de τ em $\text{Aut}(T_p)$.*

Demonstração. Seja m o menor número natural tal que $\sigma_{\beta_u} \neq e$ para algum $u \in \mathcal{M}$ tal que $|u| = m$.

Como $\beta \in \text{Stab}_G(m) \subset \text{Stab}_n(m)$ e $[\beta, \beta^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, então $[\beta_w, \beta_v^{\tau^\xi}] = e$ para todos $w, v \in \mathcal{M}$ tais que $|w| = |v| = m$, pela Proposição 25.

Assim, $[\beta_u, \beta_u^{\tau^\xi}] = e$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}$ e, como $\sigma_{\beta_u} \neq e$, então $\sigma_{\beta_u} = \sigma^s$ para algum $s \in \mathbb{N}$ tal que $(s, n) = 1$.

Logo, pelo Corolário 15, $\mu = \beta_u$ é um conjugado de τ em $\text{Aut}(T_p)$ e, portanto, $\beta \in \times_{p^m} \widehat{\langle \mu \rangle}$. \square

Um dos resultados principais deste trabalho que generaliza o caso binário (Veja [8]) é o seguinte:

Teorema 10. *Seja p primo e seja K um subgrupo solúvel de*

$$G = \langle \alpha \in \text{Aut}(T_p) \mid \sigma_{\alpha_u} \in \langle (0, 1, \dots, p-1) \rangle, \forall u \in \mathcal{M} \rangle,$$

contendo a máquina de adição p -ádica τ . Então existe um inteiro t tal que K é um conjugado de um subgrupo de $\Psi(t)$ em $\text{Aut}(T_p)$.

Demonstração. Podemos assumir que K tenha comprimento derivado $d \geq 2$. Seja B o $(d-1)$ -ésimo termo da série derivada de K . Então B é um grupo abeliano normalizado por τ . Pelo Teorema 9, existe um nível t tal que B é um subgrupo de $V = \times_{p^t} \widehat{\langle \mu \rangle}$ onde μ é algum conjugado de τ e $\mu^\tau = \mu^\xi$ para algum $\xi \in \mathbb{Z}_p^1$. Além disso, existe $b(i) \in B$ com μ em alguma coordenada i . Como τ é transitivo em qualquer nível, dados $1 \leq j \leq p^t$ podemos conjugar $b(i)$ por uma potência adequada de τ para obtermos $b(j) \in B$ com μ ou μ^τ em sua j -ésima coordenada. Seja T o normalizador de $\widehat{\langle \mu \rangle}$ em G e $R = \times_{p^t} T$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja P_m é o grupo de automorfismos da árvore truncada até o nível m que pertencem a G . Desta forma, todo $c \in K$ pode ser decomposto como $c = \pi c'$, onde $\pi \in P_{t-1}$ e $c' = (c_1, c_2, \dots, c_{p^t}) \in \text{Stab}_p(t) \cap G$. Seja $(j)\pi = k$. Então $b(j)^c$ tem $(\mu^\eta)^{c_k}$ em sua k -ésima coordenada, onde $\eta = 1$ ou $\eta = \xi$. Em todo caso, já que $(\mu^\eta)^{c_k}$ comuta com μ , existe $\delta_k \in \mathbb{Z}_p^1$ tal que $\mu^{\eta c_k} = \mu^{\delta_k}$. Assim, $c_k \in T$ para todo k e, portanto, $K \leq P_{t-1}R$. Como T é um conjugado de Ψ por algum $\alpha \in \text{Aut}(T_p)$, então $P_{t-1}R$ é conjugado de $\Psi(t)$ por $(\alpha, \dots, \alpha) \in \text{Stab}_p(t)$. \square

Referências Bibliográficas

- [1] H. Bass, O. Espinar, D. Rockmore, C. Tresser, *Cyclic Renormalization and the Automorphism Groups of Rooted Trees*, Lecture Notes in Mathematics 1621, Springer, Berlin, 1995.
- [2] A. M. Brunner, S. Sidki, *The generation of $GL(n, \mathbb{Z})$ by finite-state automata*, Int. J. Algebra Comput. **8** (1998), 127-139.
- [3] A. M. Brunner, S. Sidki, A. C. Vieira, *A just-nonsolvable torsion-free group defined on the binary tree*, J. Algebra **211** (1999), 99-114.
- [4] V. V. Nekrashevych, S. Sidki, *Automorphisms of the binary tree: State-Closed subgroups and dynamics of 1/2-endomorphisms*, Proc. Conf. Group Theory, Bielefeld, 1999.
- [5] R. I. Grigorchuk, V. V. Nekrashevych, V. I. Suschanskii, *Automata, dynamical systems, and groups*, Proc. Steklov Institute **231** (2000), 128-203.
- [6] S. Sidki, E. F. Silva, *A family of just-nonsolvable torsion-free groups defined on n -ary trees*, In Atas da XVI Escola de Álgebra, Brasília, Matematica Contemporânea **21** (2001).
- [7] S. Sidki, *Automorphisms of one-rooted trees: growth, circuit structure and acyclicity*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. **100**, no 1 (2000), 1925-1943.
- [8] S. Sidki, *The Binary Adding Machine and Solvable Groups*, International Journal of Algebra and Computation, Vol. **13**, no 1 (2003), 95-110.
- [9] S. Sidki, *Regular Trees and their Automorphisms*, Monografias de Matemática, No **56**, Impa, Rio de Janeiro, 1998.

- [10] J.D.P Meldrum, *Wreath Products of Groups and Semigroups*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **74**, Longman, New York, (1995).

- [11] A. Karrass, W. Magnus, D. Solitar, *Combinatorial Group Theory: presentation of groups in terms of generators and relators*, second revised edition, Dover Publications, New York, 1976.

Apêndice A

Tabela de Símbolos

T	árvore regular uni-raiz.
T_n	árvore regular n -ária.
$\mathcal{M} = \mathcal{M}(Y)$	monóide livremente gerado por Y .
\mathcal{A}	grupos dos automorfismos da árvore regular T (ou T_n).
$\text{Aut}(T)$	grupo dos automorfismos da árvore regular T .
$\text{Stab}_n(k)$	estabilizador de palavras com comprimento k em $\text{Aut}(T_n)$.
$\text{Stab}_G(k)$	estabilizador de palavras com comprimento k em G .
$\mathcal{F}(Y, \mathcal{A})$	conjunto das funções de Y em \mathcal{A} .
S_Y	grupo das permutações do conjunto Y .
S_n	grupo das permutações do conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$.
$ u $	comprimento da palavra u .
$\bar{\xi}$	primeiro dígito de ξ escrito na forma n -ádica.
\bar{m}	resto da divisão inteira de m por n .
(m, n)	máximo divisor comum entre m e n .
τ	máquina de adição n -ádica.
Σ_α	conjunto das permutações induzidas pelos estados de α .
$Q(\alpha)$	conjunto dos estados de α .
e	elemento identidade do grupo.
$\mathfrak{o}(\alpha)$	ordem de α .
\mathbb{Z}_n	anel dos inteiros n -ádicos.
$U(\mathbb{Z}_n)$	elementos invertíveis do anel \mathbb{Z}_n .
$C(\alpha)$	centralizador de α .
u^α	imagem da palavra u pelo automorfismo α .
$\text{Orb}_\sigma(i)$	órbita do elemento i na permutação σ .

α^β	conjugação $\beta^{-1}\alpha\beta$.
$[\alpha, \beta]$	$\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$.
$\Gamma^{(k)}(G)$	termo da série central descendente do grupo G .
$Z(G)$	centro do grupo G .
$H \leq G$	H é um subgrupo de G .
$H \triangleleft G$	H é um subgrupo normal de G .
$G_1 \rtimes G_2$	produto semidireto de G_1 e G_2 .
$G \wr H$	produto entrelaçado de G e H .
G'	subgrupo derivado do grupo G .
$[G, H]$	subgrupo gerado pelos elementos $g^{-1}h^{-1}gh$, onde $g \in G$ e $h \in H$.
$A - B$	conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B .
$\frac{G}{H}$	grupo quociente de G por H .
$[G : H]$	índice de H em G .
$G_1 \cong G_2$	G_1 é isomorfo a G_2 .
$A \times B$	produto cartesiano dos conjuntos A e B .
$G \times H$	produto direto dos grupos G e H .
$\times_k G$	produto direto de k cópias de G .
$\langle x_1, \dots, x_n \rangle$	grupo gerado por x_1, \dots, x_n .
$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_k \rangle$	grupo gerado por x_1, \dots, x_n com relações r_1, \dots, r_k
\mathbb{N}	conjunto dos números naturais.
\mathbb{Z}	conjunto dos números inteiros.
\emptyset	conjunto vazio.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)