Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas Superlineares e não Quadráticos no Infinito via Teorema do Passo da Montanha

por

César Klayson Soares dos Santos

Brasília
Março/2008

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas Superlineares e não Quadráticos no Infinito via Teorema do Passo da Montanha

por

César Klayson Soares dos Santos*

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-UnB, como requisito parcial para obtenção do grau de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Comissão Examinadora:

____

Prof. Marcelo Fernandes Furtado-MAT/UnB(Orientador)

____

Prof.ª Liliane de Almeida Maia-MAT/UNB

____

Prof. Uberlandio Batista Severo-UFPB

Brasília, 14 de março de 2008

*O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração desta dissertação

Agradecimentos

A Deus, que nos concede, a cada dia, uma página de vida nova no livro do tempo.

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para realização deste trabalho. De forma especial agradeço ao meu orientador professor Marcelo Fernandes Furtado a quem muito admiro como pessoa e como profissional.

Aos professores Alexei Krassilnikov, Ary Vasconcelos Medino, Carlos Alberto Pereira dos Santos, Carlos Maber Carrion Rivero, Cátia Regina Gonçalves, José Valdo Abreu Gonçalves e Marcelo Fernandes Furtado dos quais tive o prazer de ser aluno.

Sou grato aos que compuseram minha banca, professores Liliane de Almeida Maia, Uberlandio Batista Severo e Marcelo Fernandes Furtado.

Aos colegas de mestrado, em especial, meus amigos Michael Marcondes de Freitas e Paulo Ângelo Alves Resende.

Ao meu pai Nelson Nunes dos Santos a quem me espelho e admiro, a minha mãe Nilda Soares dos Santos que muito amo e nunca me deixou faltar carinho e atenção e ao meu irmão Wanderson Cleiber Soares dos Santos que sempre me apoiou.

A minha esposa por estar sempre ao meu lado durante esta etapa de minha vida e por nunca ter deixado que palavras de ânimo e incentivo faltassem.

"Até o mais sábio dos sábios
não vê o quadro todo."

Dedicatória

A minha querida esposa
Tatiane Ribeiro Morel.

Resumo

Neste trabalho, mostramos a existência de solução para o problema de Dirichlet não-linear

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u & = & f(x,u)\,, & x \in \Omega \\ u & = & 0\,, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um subconjunto aberto, limitado e suave do $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$.

Consideramos os casos de superlinearidade para a função f e não-quadraticidade no infinito para sua primitiva F. A principal ferramenta utilizada é o Teorema do Passo da Montanha.

Abstract

In this work, we show the existence of solution for the nonlinear Dirichlet problem

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u)\,, \quad x \in \Omega \\ u &= 0\,, \qquad\quad\; x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a smooth bounded domain of $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$.

We consider the cases where f is superlinear and where F is nonquadratic at infinity. The primary tool used is the Mountain Pass Theorem.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudamos a existência de solução para o problema de Dirichlet

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u)\,, & x \in \Omega \\ u = 0\,, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um subconjunto aberto, limitado e suave do $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ e f satisfaz
(f_0) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;
(f_1) existem constantes $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$ e $p \in [2, 2^*)$ tais que

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R};$$

(f_2) existe $\delta > 0$ tal que

$$2F(x,s) \leq \lambda_1 s^2, \ \forall \ x \in \Omega, |s| < \delta,$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor associado ao problema

$$(PA) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u\,, & x \in \Omega \\ u = 0\,, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabemos que soluções fracas do problema (P) são pontos críticos $u \in H_0^1(\Omega)$ do funcional $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u),$$

onde $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)dt$. Assumindo que f seja uma função Hölder contínua, mostraremos que tais soluções fracas podem ser regularizadas de modo a obtermos soluções clássicas, isto é, funções $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que satisfazem as equações de (P) no sentido pontual.

Vamos utilizar Métodos Variacionais para obter as soluções fracas. Em especial, utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha como ferramenta principal para a obtenção de tais pontos críticos.

No **Capítulo 1**, demonstramos o Teorema do Passo da Montanha. Em seguida, no **Capítulo 2**, demonstramos três teoremas relacionados ao problema (P) em que as condições sobre f são:

Condição de Ambrosetti-Rabinowitz

(AR) existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x,s) \leq sf(x,s) \ , \forall \ x \in \Omega \ , |s| \geq r.$$

Condições de Schechter-Zou

$(SZ1)$ uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$ vale

$$\lim_{|s| \to \infty} \frac{F(x,s)}{s^2} = \infty;$$

$(SZ2)$ existem $\mu > 2$ e $c \geq 0$ tais que

$$\mu F(x,s) - sf(x,s) \leq c(s^2 + 1), \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R};$$

$(SZ3)$ existem $m > N/2$ e uma função $g \in L^m(\Omega)$ tais que

$$g(x) \leq \frac{F(x,s)}{s^2}, \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

Condições de Costa-Magalhães

$(CM1)$ existe $\beta > \lambda_1$ tal que

$$\liminf_{|s| \to \infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \geq \beta, \ \forall \ x \in \Omega;$$

$(CM2)$ existem $\overline{\mu} > 0$ e $a > 0$ tais que

$$\liminf_{|s| \to \infty} \frac{sf(x,s) - 2F(x,s)}{|s|^{\overline{\mu}}} \geq a > 0, \ \forall \ x \in \Omega;$$

$(CM3)$ existe $q \in \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{|s| \to \infty} \frac{F(x,s)}{|s|^q} \leq b < \infty, \ \forall \ x \in \Omega.$$

Conforme veremos, a condição (AR) nos diz que F é superlinear, isto é, para alguma constante $k > 0$,

$$(AR)' \qquad F(x,s) \geq k|s|^{\mu}, \ \forall\, x \in \overline{\Omega}, |s| \geq r.$$

Note que, dividindo-se $(AR)'$ por s^2 e aplicando-se o limite com $|s| \to \infty$, pode-se concluir que (AR) implica $(SZ1)$. Observe também que em (AR), o termo $\mu F(x,s) - sf(x,s)$ é não positivo, enquanto que o mesmo em $(SZ2)$ pode assumir valores negativos, nulos ou positivos. Logo $(SZ2)$ é mais geral que (AR).

Continuando nossa análise com respeito às hipótese acima, observe que a condição de superlinearidade $(SZ1)$ é mais forte que $(CM1)$. Agora vejamos que usando $(AR)'$, temos que

$$\frac{sf(x,s) - 2F(x,s)}{|s|^{\overline{\mu}}} \geq (\mu - 2)\frac{F(x,s)}{|s|^{\overline{\mu}}} \geq (\mu - 2)k|s|^{\mu - \overline{\mu}},$$

mostrando que (AR) implica $(CM2)$ com $\overline{\mu} \leq \mu$. Note também que $(CM2)$ é uma condição de não-quadraticidade no infinito. Para ilustrar isso, vamos supor que para s suficientemente grande, f seja do tipo $f(x,s) = \gamma s$ com $\gamma \neq 0$. Desse modo, teremos que $2F(x,s) = \gamma s^2$. Logo o termo $sf(x,s) - 2F(x,s)$ é nulo, o que não pode ocorrer.

O primeiro teorema que apresentamos (Capítulo 2) pode ser encontrado em [AmbRab] em sua versão original em que f é uma função satisfazendo (f_0), (f_1), (AR) e

$$(f_0)' \qquad f(x,s) = o(|s|) \ \text{ quando } \ n \to \infty.$$

Note que nós a substituímos por (f_2), que é menos restritiva. Sobre o terceiro teorema, sua versão original encontra-se em [CosMag], f e sua primitiva F cumprem as condições (f_0), (f_1), $(CM1) - (CM3)$ e

$$(F_3)' \qquad \limsup_{s \to 0} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \lambda < \lambda_1,$$

que é uma condição mais fraca que $(f_0)'$, porém mais forte que (f_2). As hipóteses $(SZ3)$ e $(CM3)$ têm sua importância técnica.

Com o objetivo de obter pontos críticos para o funcional I, precisamos verificar uma condição de compacidade para I. Veremos que com as hipóteses (AR) e $(SZ1) - (SZ3)$ o funcional I satisfaz uma condição de compacidade introduzida por Palais e Smale, enquanto que I satisfaz, usando as hipóteses $(CM2)$ e $(CM3)$, uma outra introduzida por Cerami, que é mais geral que do que a condição de Palais e Smale.

Capítulo 1

Teorema do Passo da Montanha

Neste capítulo, vamos demonstrar o Teorema do Passo da Montanha [AmbRab] , um dos mais úteis teoremas de minimax. A demonstração tem por ingrediente básico um lema de deformação, que apresentaremos na seção 1.1. A seção 1.2 é dedicada à prova do Teorema do Passo da Montanha.

Em todo o capítulo, vamos denotar por X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{X'}$ a norma no dual de X e por $|\cdot|_p$ a norma no espaço $L^p(\Omega)$. Vamos também denotar, para todo número real d e $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $I^d = \{u \in X : I(u) \leq d\}$.

1.1 Lema da Deformação Quantitativo

O lema da deformação trata-se basicamente em garantir a existência de uma aplicação $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, dado $\epsilon > 0$ pequeno, se possa deformar o conjunto $I^{c+\epsilon}$ no conjunto $I^{c-\epsilon}$ onde c é um valor regular de I, isto é, não há pontos críticos do funcional I no nível c. Num certo sentido, os conjuntos $I^{c+\epsilon}$ e $I^{c-\epsilon}$ são iguais do pontos de vista topológico.

O lema da deformação original é devido a Clark [Cla]. Nós iremos apresentar um lema de deformação devido a Willem [Wil2] (veja também [Wil1]).

Lema 1.1 (Lema da Deformação Quantitativo) *Sejam X um espaço de Banach, $S \subseteq X$, $\delta > 0$ e defina*

$$S_\delta = \{u \in X : dist(u, S) \leq \delta\}.$$

Sejam $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ *e* $\epsilon > 0$ *tais que*

$$\|I'(u)\|_{X'} \geq \frac{4\epsilon}{\delta}, \ \forall \ u \in I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta}. \tag{1.1}$$

Então existe uma função $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ *de tal forma que:*
(i) $\eta(0,u) = u, \ \forall \ u \in X$*;*
(ii) $\eta(t,u) = u, \ \forall \ (t,u) \notin [0,1] \times I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$*;*
(iii) $\eta(1, I^{c+\epsilon} \cap S) \subseteq I^{c-\epsilon} \cap S_\delta$*.*

Demonstração: Seja $\widetilde{X} = \{u \in X : I'(u) \neq 0\}$. Pelo Lema A.1 temos que existe um campo pseudo-gradiente para I em $\widetilde{X}$, isto é, uma aplicação

$$v : \widetilde{X} \longrightarrow X$$

tal que, para todo $u \in \widetilde{X}$,
$(PG1)$ $\|v(u)\|_X \leq 2\|I'(u)\|_{X'}$;
$(PG2)$ $I'(u)v(u) \geq \|I'(u)\|^2_{X'}$.

Defina

$$A = I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon]) \cap S_{2\delta},$$

$$B = I^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]) \cap S_{2\delta}$$

e $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(u) = \frac{d(u, X\backslash A)}{d(u, X\backslash A) + d(u, B)}.$$

Observe que

$$0 \leq \psi \leq 1 \ , \psi \equiv 0 \text{ em } X\backslash A \text{ e } \psi \equiv 1 \text{ em } B.$$

Verifiquemos agora que ψ é localmente Lipschitziana. Para tanto, tome $u_1, u_2 \in X$ e denotemos, para $i = 1, 2$,

$$d^i_{u,X,A} = d(u_i, X\backslash A) \text{ e } \ d^i_{u,B} = d(u_i, B).$$

Temos

$$\begin{aligned}
|\psi(u_1) - \psi(u_2)| &= \left| \frac{(d^2_{u,X,A} + d^2_{u,B})d^1_{u,X,A} - (d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B})d^2_{u,X,A}}{(d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A} + d^2_{u,B})} \right| \\
&= \left| \frac{d^1_{u,X,A}d^2_{u,B} - d^2_{u,X,A}d^1_{u,B}}{(d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A} + d^2_{u,B})} \right|
\end{aligned}$$

$$= \left|\frac{d^1_{u,X,A}d^2_{u,B} - d^2_{u,X,A}d^2_{u,B} + d^2_{u,X,A}d^2_{u,B} - d^2_{u,X,A}d^1_{u,B}}{(d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A} + d^2_{u,B})}\right|$$

$$= \left|\frac{d^2_{u,B}(d^1_{u,X,A} - d^2_{u,X,A}) + d^2_{u,X,A}(d^2_{u,B} - d^1_{u,B})}{(d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A} + d^2_{u,B})}\right|$$

Como a função distância é uma contração fraca (cf. [Elo, Ex.3,pg.31]) temos que

$$|d^1_{u,X,A} - d^2_{u,X,A}|, |d^2_{u,B} - d^1_{u,B}| \leq \|u_1 - u_2\|.$$

Logo,

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \leq \frac{\|u_1 - u_2\|d^2_{u,B} + \|u_1 - u_2\|d^2_{u,X,A}}{(d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B})(d^2_{u,X,A} + d^2_{u,B})} = \frac{\|u_1 - u_2\|}{d^1_{u,X,A} + d^1_{u,B}}.$$

Vamos agora utilizar o fato de que a função distância é localmente Lipschitziana. Note que, para qualquer que seja $w \in X$,

$$d(w, X\backslash A) + d(w, B) > 0.$$

Assim, existe uma constante $k > 0$ e uma vizinhança W de w tal que

$$d(\overline{w}, X\backslash A) + d(\overline{w}, B) \geq \frac{1}{k} > 0 \text{ para todo } \overline{w} \in W.$$

Aumentando a vizinhança W de w se necessário, podemos supor que $u_1, u_2 \in W$. Daí,

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \leq \ k\|u_1 - u_2\|, \tag{1.2}$$

mostrando que ψ é localmente Lipschitziana.

Considere agora a função $\Phi : X \longrightarrow X$ definida por

$$\Phi(u) = \begin{cases} -\psi(u)\dfrac{v(u)}{\|v(u)\|^2}, & u \in A; \\ 0, & u \in \overline{X\backslash A}. \end{cases}$$

Note que por $(PG2)$ e por (1.1) temos

$$\|\Phi(u)\| \leq \frac{1}{\|v(u)\|} \leq \frac{1}{\|I'(u)\|} \leq \frac{\delta}{4\epsilon}. \tag{1.3}$$

Dado $u \in X$ existe uma vizinhança B_u tal que ψ e v são localmente Lipschitzianas em B_u. Tome $u_1, u_2 \in B_u$ e sejam

$$f(u_i) = \frac{v(u_i)}{\|v(u_i)\|^2} \text{ e } \ f_i(u_j) = \frac{v(u_i)}{\|v(u_j)\|^2} \text{ para } \ i, j = 1, 2.$$

Então, se $u_1, u_2 \in \overline{X \backslash A}$, temos,

$$\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\| = 0 \leq \|u_1 - u_2\|.$$

Se $u_1 \in A$ e $u_2 \in \overline{X \backslash A}$, segue que,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\| &= \|-\psi(u_1)f(u_1)\| \\
&= \|-\psi(u_1)f(u_1) + \psi(u_2)f(u_1)\| \\
&\overset{(1.3)}{\leq} \frac{\delta}{4\epsilon}|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \\
&\overset{(1.2)}{\leq} \frac{k\delta}{4\epsilon}\|u_1 - u_2\| \\
&= k_1\|u_1 - u_2\|.
\end{aligned}$$

Finalmente, se $u_1, u_2 \in A$, então

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\| &= \|-\psi(u_1)f(u_1) + \psi(u_2)f(u_2)\| \\
&= \|-\psi(u_1)f(u_1) + \psi(u_1)f(u_2) - \psi(u_1)f(u_2) + \psi(u_2)f(u_2)\| \\
&\leq \|f(u_1) - f(u_2)\| + \frac{\delta}{4\epsilon}|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \\
&\leq \|f(u_1) - f_1(u_2)\| + \|f_1(u_2) - f(u_2)\| + \frac{\delta}{4\epsilon}|\psi(u_1) - \psi(u_2)|.
\end{aligned}$$

Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}
\|f(u_1) - f_1(u_2)\| &\leq \|v(u_1)\|\left|\frac{\|v(u_2)\|^2 - \|v(u_1)\|^2}{\|v(u_1)\|^2\|v(u_2)\|^2}\right| \\
&= \frac{|\langle v(u_2) - v(u_1), v(u_2) + v(u_1)\rangle|}{\|v(u_1)\|\|v(u_2)\|^2} \\
&\leq \frac{\|v(u_1) + v(u_2)\|}{\|v(u_1)\|\|v(u_2)\|^2}\|v(u_1) - v(u_2)\| \\
&\leq k_2\|u_1 - u_2\|,
\end{aligned}$$

visto que v é localmente Lipschitziana. Observe agora que

$$\begin{aligned}\|f_1(u_2) - f(u_2)\| &= \left\| \frac{v(u_1)}{\|v(u_2)\|^2} - \frac{v(u_2)}{\|v(u_2)\|^2} \right\| \\ &\leq \frac{\delta^2}{16\epsilon^2}\|v(u_1) - v(u_2)\| \\ &\leq k_3\|u_1 - u_2\|\end{aligned}$$

e, como

$$\frac{\delta}{4\epsilon}|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \leq k_1\|u_1 - u_2\|$$

podemos concluir que

$$\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\| \leq \overline{k}\|u_1 - u_2\|$$

onde $\overline{k} = k_1 + k_2 + k_3$. Logo Φ é localmente Lipschitziana.

Considere agora o seguinte problema de Cauchy em espaços de Banach,

$$(PC)_u \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) &= \Phi(\sigma(t,u)) \\ \sigma(0,u) &= u. \end{aligned}\right.$$

Uma vez que Φ é localmente Lipschitziana, temos que, para cada $u \in X$, o problema acima tem uma única solução contínua $\sigma(\cdot, u)$ definida para t em um intervalo maximal (t_u^-, t_u^+) (ver [Bre, Teo. VII.3, pg. 104]).

Afirmação: $t_u^{\pm} = \pm\infty$.

De fato, seja σ a solução de $(PC)_u$ e suponha que $t_u^+ < \infty$. Seja ainda $(t_n) \subset (-\infty, t_u^+)$ uma sequência tal que $t_n \to t_u^+$. Então, usando a limitação de Φ, temos que

$$\|\sigma(t_m, u) - \sigma(t_n, u)\| = \left\| \int_{t_n}^{t_m} \frac{d}{d\xi}\sigma(\xi, u)d\xi \right\| = \left\| \int_{t_n}^{t_m} \Phi(\sigma(\xi, u))d\xi \right\| \leq K|t_m - t_n|.$$

Como $(t_n) \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy, então $(\sigma(t_n, u))$ também o é. Daí

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(t_n, u) = \widetilde{u} \in X.$$

Considerando o problema de Cauchy em espaços de Banach

$$(PC)_{\widetilde{u}} \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma(t,u) &= \Phi(\sigma(t,u)) \\ \sigma(t_u^+,u) &= \widetilde{u} \end{aligned}\right.$$

podemos usar o Teorema de Picard para estender σ em um intervalo do tipo $(t_u^+ - k_1, t_u^+ + k_1)$, contradizendo a maximalidade de t_u^+. A prova para t_u^- é análoga.

A dependência contínua de soluções de $(PC)_u$ com relação aos dados iniciais implica que $\sigma \in C(\mathbb{R} \times X, X)$. Desse modo, podemos definir a deformação

$$\eta : [0,1] \times X \longrightarrow X \ , \ \eta(t,u) = \sigma(\delta t, u).$$

Verifiquemos $(i) - (iii)$. Pela própria definição da função η temos que $\eta(0,u) = u$ para todo $u \in X$. Logo η satisfaz (i). Para verificar (ii), observe que $\Phi \equiv 0$ em $X \backslash A$ e portanto $\sigma(t,u) = u$ é solução de $(PC)_u$. Logo pela existência e unicidade de soluções em espaços de Banach do problema $(PC)_u$, segue que $\eta(t,u) = u$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Afim de verificar (iii) seja $t > 0$ e $u \in X$. Segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\begin{aligned} \|\sigma(\delta t, u) - u\| &= \left\| \int_0^{\delta t} \frac{d}{ds}\sigma(s,u) ds \right\| \\ &\leq \int_0^{\delta t} \left\| \frac{d}{ds}\sigma(s,u) \right\| ds \\ &= \int_0^{\delta t} \|\Phi(\sigma(s,u))\| ds \\ &\leq \delta t. \end{aligned}$$

Assim, para todo $t \in [0,1]$ vale

$$\|\sigma(\delta t, u) - u\| \leq \delta.$$

Logo,

$$\inf_{t \in [0,1]} \|\sigma(\delta t, u) - u\| \leq \delta,$$

mostrando que, para todo $u \in S$,

$$\sigma(\delta t, u) \in S_\delta.$$

Desse modo

$$\sigma(\delta, S) \subseteq S_\delta.$$

Note que se $\sigma(t,u) \notin A$, $\psi(\sigma(t,u)) = 0$ e consequentemente $\dfrac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) = 0$. Caso contrário,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) &= I'(\sigma(t,u))\frac{d}{dt}\sigma(t,u) \\
&= I'(\sigma(t,u))\Phi(\sigma(t,u)) \\
&= -\frac{\psi(\sigma(t,u))}{\|v(\sigma(t,u))\|}I'(\sigma(t,u))v(\sigma(t,u)).
\end{aligned}$$

Como ψ é não negativa e de $(PG2)$,

$$I'(\sigma(t,u))v(\sigma(t,u)) \geq 0,$$

segue que

$$\frac{d}{dt}I(\sigma(t,u)) \leq 0.$$

Donde se conclui que $I(\eta(\cdot,u))$ é não-crescente para todo $u \in X$. Tomando agora $u \in I^{c+\epsilon} \cap S$, vamos dividir a prova em dois casos:

Caso 1: Existe $t_0 \in [0,\delta)$ tal que $I(\eta(t_0,u)) < c - \epsilon$.

Como $I(\eta(\cdot,u))$ é não-crescente, tem-se que

$$I(\eta(t,u)) < c - \epsilon \ , \forall\ t \geq t_0$$

e portanto

$$\eta(1,u) = \sigma(\delta,u) \in I^{c-\epsilon}.$$

Como $\sigma(\delta,S) \subseteq S_\delta$ obtemos que

$$\eta(1,u) = \sigma(\delta,u) \in I^{c-\epsilon} \cap S_\delta.$$

Caso 2: Para todo $t \in [0,\delta)$ vale,

$$c - \epsilon \leq I(\sigma(t,u)) \leq I(\sigma(0,u)) = I(u) \leq c + \epsilon.$$

Temos que

$$\sigma(t,u) \in B.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
I(\sigma(\delta,u)) &= I(\sigma(0,u)) + \int_0^\delta \frac{d}{ds} I(\sigma(s,u))ds \\
&= I(u) + \int_0^\delta I'(\sigma(s,u))\Phi(\sigma(s,u))ds \\
&= I(u) - \int_0^\delta I'(\sigma(s,u))\psi(\sigma(s,u))\frac{v(\sigma(s,u))}{\|v(\sigma(s,u))\|}ds \\
&\overset{\psi\equiv 1 \ em \ B}{=} I(u) - \int_0^\delta \frac{I'(\sigma(s,u))v(\sigma(s,u))}{\|v(\sigma(s,u))\|}ds \\
&\overset{(PG2)}{\leq} I(u) - \int_0^\delta \frac{\|I'(\sigma(s,u))\|^2}{\|v(\sigma(s,u))\|}ds \\
&\overset{(PG1)}{\leq} I(u) - \frac{1}{2}\int_0^\delta \|I'(\sigma(s,u))\|ds \\
&\overset{(1.1)}{\leq} I(u) - \frac{1}{2}\int_0^\delta \frac{4\epsilon}{\delta}ds \\
&= I(u) - 2\epsilon \\
&\leq c - \epsilon
\end{aligned}$$

provando (iii). ■

1.2 O Teorema do Passo da Montanha

O Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti-Rabinowitz [AmbRab], é uma importante ferramenta para obtenção de pontos críticos para funcionais $I \in C^1(X,\mathbb{R})$. Conforme veremos no Capítulo 2, é possível escolher I de tal forma que seus pontos críticos sejam soluções de certas equações diferenciais parciais.

Como estamos interessados em obter pontos críticos para um dado funcioanl $I \in C^1(X,\mathbb{R})$, precisamos provar alguma propriedade de compacidade para o mesmo.

Dizemos que $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$

denotada por $(PS)_c$ se toda sequência $(u_n) \subseteq X$ satisfazendo,

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|_{X'} = 0, \tag{1.4}$$

possui subsequência convergente. A uma sequência (u_n) cumprindo (1.4), chamamos de sequência de Palais-Smale no nível c.

A condição de compacidade que usaremos, a apresentada acima, se deve a Brezis e Nirenberg (ver [BreNir]). Sua versão original foi introduzida por Palais e Smale e pode ser encontrada nas referências [Pal1, PalSma, Sma].

Proposição 1.2 *Seja $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$ e,*
(I_1) existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;
(I_2) existe $e \in X$ tal que $\|e\|_X > \rho$ e $I(e) < 0$.
Seja

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

onde

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \ e \ \gamma(1) = e\}.$$

Então, dado $\epsilon > 0$, existe $u \in X$ tal que
(i) $u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon])$;
(ii) $\|I'(u)\|_{X'} \leq 2\epsilon$.

Demonstração: Seja $e \in X$ dado por (I_2) e $\gamma \in \Gamma$. Então $e \notin B_\rho(0)$ e, como $\gamma \in \Gamma$, existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $\gamma(t_0) \in \partial B_\rho(0)$. Assim $\gamma([0,1]) \cap \partial B_\rho(0) \neq \emptyset$. Logo, por (I_1), temos que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \geq \inf_{w\in\partial B_\rho(0)} I(w) \geq \alpha.$$

Tomando o ínfimo para $\gamma \in \Gamma$, concluímos que $c \geq \alpha > 0$.

Suponha, por contradição, que a proposição seja falsa. Então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|I'(u)\|_{X'} > 2\epsilon \text{ para todo } u \in I^{-1}([c - 2\epsilon, c + 2\epsilon]).$$

Observe que a afirmação acima permanece válida se substituirmos ϵ por ϵ_0 tal que $0 < \epsilon_0 < \epsilon$. Logo, podemos supor que ϵ é pequeno de modo que $c - 2\epsilon > 0$. Estamos então nas hipóteses do Lema 1.1, considerando $S = X$ e $\delta = 2$. Assim, existe uma função contínua $\eta : [0,1] \times X \longrightarrow X$ satisfazendo:

(i) $\eta(1,u) = u, \forall\ u \notin I^{-1}([c-2\epsilon, c+2\epsilon])$;
(ii) $\eta(1, I^{c+\epsilon}) \subseteq I^{c-\epsilon}$.

Pela definição de c, existe $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\widetilde{\gamma}(t)) \leq c + \epsilon. \tag{1.5}$$

Defina agora $h : [0,1] \longrightarrow X$ por

$$h(t) = \eta(1, \widetilde{\gamma}(t)).$$

Observe que $h \in C([0,1], X)$ pois $\eta \in C([0,1] \times X, X)$. Como $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$, temos que, $\widetilde{\gamma}(0) = 0, \widetilde{\gamma}(1) = e$ e além disso, como $I(e) < c - 2\epsilon$, segue de (i) que

$$h(0) = \eta(1, \widetilde{\gamma}(0)) = \eta(1, 0) = 0$$

e

$$h(1) = \eta(1, \widetilde{\gamma}(1)) = \eta(1, e) = e,$$

donde se conclui que $h \in \Gamma$. Assim, temos que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(h(t)). \tag{1.6}$$

Usando (ii) e (1.5) obtemos

$$h(t) = \eta(1, \widetilde{\gamma}(t)) \in I^{c-\epsilon},$$

para todo $t \in [0,1]$. Desta forma

$$\max_{t\in[0,1]} I(h(t)) \leq c - \epsilon. \tag{1.7}$$

Logo, de (1.6) e (1.7), concluímos que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} I(h(t)) \leq c - \epsilon,$$

o que é um absurdo. ∎

Corolário 1.3 *Sob as hipóteses da Proposição 1.2, existe uma sequência de Palais-Smale no nível c para I.*

Demonstração: Observe que pela Proposição 1.2, para cada $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, existe $u_n \in X$ de modo que
(i) $u_n \in I^{-1}([c - 2/n, c + 2/n])$;
(ii) $\|I'(u_n)\|_{X'} \leq 2/n$.
Então,

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|_{X'} = 0,$$

e portanto existe uma sequência de Palais-Smale no nível c. ■

Agora, estamos em condições de demonstrar o

Teorema 1.4 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$ e*
(I_1) existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;
(I_2) existe $e \in X$ tal que $\|e\|_X > \rho$ e $I(e) < 0$.
Suponha que I satisfaça $(PS)_c$ com

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

onde $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$. Então existe $u \not\equiv 0$ tal que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$.

Demonstração: Pelo Corolário 1.3, existe uma sequência de Palais-Smale $(u_n) \subseteq X$ no nível c. Como I satisfaz $(PS)_c$, a menos de subseqüência, $u_n \to u \in X$. Como $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ (ver Apêndice A.2), devemos necessariamente ter $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$. Logo c é um valor crítico de I. Além disso, como $I(0) = 0$ e $I(u) = c > 0$, devemos ter $u \not\equiv 0$. ■

Vejamos agora, o Teorema do Passo da Montanha com uma condição de compacidade mais fraca que a condição de Palais-Smale.

Dizemos que I satisfaz a condição de Cerami no nível $c \in \mathbb{R}$ denotada por $(Cer)_c$ se toda sequência $(u_n) \subseteq X$ satisfazendo,

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|_{X'}(1 + \|u_n\|) = 0, \tag{1.8}$$

possui subsequência convergente. Uma sequência (u_n), satisfazendo (1.8), recebe o nome de sequência de Cerami no nível c.

A condição de Cerami é devida a Cerami [Cer]. Observe que ela é mais fraca que Palais-Smale. De fato, suponha que I satisfaz $(PS)_c$ e seja $(u_n) \subseteq X$ uma sequência Cerami do nível c. Como

$$\lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|_{X'}(1 + \|u_n\|) = 0,$$

então $\|I'(u_n)\|_{X'} \to 0$. Logo $(u_n) \subseteq X$ é uma sequência de Palais-Smale no nível c. Como I satisfaz $(PS)_c$ então (u_n) possui subsequência convergente. Portanto o funcional I satisfaz $(Cer)_c$.

De posse destes conceitos, pode-se demonstrar o teorema a seguir que diferencia-se do Teorema 1.4 apenas com respeito a condição de compacidade. A demonstração é devida a Bartolo, Benci e Fortunato [BarBenFor].

Teorema 1.5 (Teorema do Passo da Montanha) *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$ e*
(I_1) existem $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$;
(I_2) existe $e \in X$ tal que $\|e\|_X > \rho$ e $I(e) < 0$.
Suponha que I satisfaça $(Cer)_c$ com

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

onde $\Gamma := \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = e\}$. Então existe $u \not\equiv 0$ tal que $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$.

Capítulo 2

Aplicações do Teorema do Passo da Montanha

Este capítulo é dedicado a aplicações do Teorema do Passo da Montanha para obtenção de solução para o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u)\,, \quad x \in \Omega \\ u &= 0\,, \qquad\quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

onde Ω é um subconjunto aberto, limitado e suave do $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$.

Seja $C_c^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções de classe $C^\infty(\Omega)$ que têm suporte compacto em Ω, e $H_0^1(\Omega)$ o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ com respeito à norma usual de $H^1(\Omega)$. Utilizando a desigualdade de Poincaré pode-se mostrar que

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

é uma norma em $H_0^1(\Omega)$ que é equivalente a norma usual. No que segue, H denota o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido com a norma definida acima. Como no capítulo anterior, vamos denotar por $|u|_s$ a norma de uma função em $L^s(\Omega)$. Além disso, usaremons a notação

$$\int_\Omega f$$

para representar a integral $\displaystyle\int_\Omega f(x)dx$.

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é solução clássica de (P), podemos usar o Teorema da Divergência e a densidade de $C_c^\infty(\Omega)$ em H para mostrar que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f(x,u)v, \ \forall \ v \in H. \tag{2.1}$$

Observe que para a expressão acima fazer sentido, não precisamos das derivadas de ordem 2 da função u. De fato, se $u, v \in H$ então segue de (f_1) e da desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{p-1}{p}$ e p que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x,u)||v| &\leq \int_\Omega (c_1 + c_2|u|^{p-1})|v| \\
&\leq c_1 \int_\Omega |v| + c_2 \int_\Omega |u|^{p-1}|v| \\
&= c_1|v|_1 + c_2 \int_\Omega |u|^{p-1}|v| \\
&\leq c_1|v|_1 + c_2 \left\{ \int_\Omega |u|^p \right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{ \int_\Omega |v|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= c_1|v|_1 + c_2|u|_p^{p-1}|v|_p < \infty,
\end{aligned}$$

visto que a imersão contínua $H \hookrightarrow L^q(\Omega)$ vale para todo $q \in [1, 2^*]$. Motivados pela expressão (2.1), definimos por solução fraca de (P) uma função $u \in H$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f(x,u)v, \ \forall \ v \in H.$$

Note que toda solução clássica é solução fraca, mas o contrário pode não ser verdadeiro. Assim, a pergunta natural a se fazer é a seguinte: quando uma solução fraca é solução clássica? Para responder a esta pergunta precisamos do seguinte conceito de continuidade. Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $\gamma \in (0,1]$, dizemos que uma função $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é Hölder contínua com expoente γ, se existir uma constante $k > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in \Omega$,

$$|u(x) - u(y)| \leq k|x-y|^\gamma.$$

De acordo com a Proposição A.6 (ver Apêndice A.3), se f é Hölder contínua e u é solução fraca então u é solução clássica. Logo, é suficiente obtermos soluções fracas. Considerando o funcional $I : H \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u),$$

pode-se mostrar que I está bem definido e além disso pela Proposição A.5 (ver Apêndice A.2), temos que $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ com derivada dada por

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(x,u)v, \ \forall \ v \in H.$$

Logo, as soluções fracas do problema (P) são precisamente os pontos críticos de I.

Observação 2.1 *A condição (f_0) poderia ser substituída por uma condição mais fraca, chamada de condição de Carathéodory. Uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita de Carathéodory se $f(\cdot, s) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável para cada $s \in \mathbb{R}$ e $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua para quase todo $x \in \Omega$. Para simplificar os resultados e não entrarmos em questões técnicas, a condição envolvendo a regularidade de f neste trabalho será sempre (f_0).*

O lema que demonstraremos abaixo, será utilizado em todas as aplicações deste capítulo. Ele está relacionado com a condição (I_1) do Teorema do Passo da Montanha. O resultado original é devido a Silva [Sil] e a prova apresentada aqui pode ser encontrada em [SchZou1, Lema 6.6].

Lema 2.2 *Se f satisfaz $(f_0) - (f_2)$, então pelo menos uma das alternativas abaixo ocorre:*
(i) (P) possui uma solução $u \not\equiv 0$;
(ii) para cada $\rho > 0$ suficientemente pequeno, existe $\alpha > 0$ tal que

$$I(u) \geq \alpha \ , \ \forall \ u \in H, \|u\| = \rho.$$

Demonstração: Seja $V = \ker(-\Delta - \lambda_1 Id)$, em que $Id : X \longrightarrow X$ é o operador identidade, o autoespaço associado ao autovalor λ_1. Então $H = V \oplus W$ onde $W = V^\perp$. Como V tem dimensão finita, todas as normas em V são equivalentes. Em particular, existe $k > 0$ tal que $\|v\|_\infty \leq k\|v\|$, para todo $v \in V$. Aqui, $\|\cdot\|_\infty$ denota a norma do supremo, definida por $\|v\|_\infty = \sup\{|v(x)|, x \in \Omega\}$. Desse modo, se

$$0 < \rho \leq \delta/2k \ , \ \|v\| \leq \rho \tag{2.2}$$

onde δ é dado por (f_2), temos que

$$\|v\|_\infty \leq k\rho \leq \delta/2 \Longrightarrow |v(x)| \leq \delta/2, \ \forall \ x \in \Omega. \tag{2.3}$$

Seja $u \in H$, tal que $\|u\| \leq \rho$ e suponha que para algum $x \in \Omega$,

$$|u(x)| \geq \delta. \tag{2.4}$$

Escrevendo $u \in H$ como $u = v + w$, com $v \in V$ e $w \in W$, segue de (2.2)-(2.4) que

$$\delta \leq |u(x)| \leq |v(x)| + |w(x)| \leq \delta/2 + |w(x)|.$$

Assim,

$$|v(x)| \leq \delta/2 \leq |w(x)|, \tag{2.5}$$

e consequentemente

$$|u(x)| \leq 2|w(x)|. \tag{2.6}$$

Usando (f_1) e a continuidade de F em $\overline{\Omega}\times[-\delta,\delta]$, temos que para todo $(x,s) \in \overline{\Omega}\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |F(x,s)| &\leq \int_0^s |c_1 + c_2|\xi|^{p-1}|d\xi \\ &= c_1|s| + c_2\int_0^s |\xi|^{p-1}d\xi \\ &= c_1|s| + c_2\frac{1}{p}|s|^p \\ &= c_1|s| + c_3|s|^p. \end{aligned}$$

Tomando $c_4 = \max\limits_{|s|\geq\delta} c_1|s|^{1-p}$, podemos concluir que

$$|F(x,s)| \leq c_5|s|^p \ , \ |s| \geq \delta \tag{2.7}$$

onde $c_5 = c_3 + c_4$.
Daí

$$-\int_{\{|u|\geq\delta\}} F(x,u) \geq -c_5\int_{\{|u|\geq\delta\}} |u|^p. \tag{2.8}$$

Por outro lado, segue de (f_2) que

$$-\int_{\{|u|<\delta\}} F(x,u) \geq -\frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega u^2. \tag{2.9}$$

Logo, de (2.8) e (2.9), temos que

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\{|u|<\delta\}} F(x,u) - \int_{\{|u|\geq\delta\}} F(x,u) \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda_1}{2}|u|_2^2 - c_5 \int_{\{|u|\geq\delta\}} |u|^p \\ &\overset{(2.6)}{\geq} \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda_1}{2}|u|_2^2 - c_6 \int_{\Omega} |w|^p \\ &\overset{H\hookrightarrow L^p(\Omega)}{\geq} \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda_1}{2}|u|_2^2 - c_7\|w\|^p. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Lembrando agora que $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ e $|u|_2^2 = |v|_2^2 + |w|_2^2$. Como $v \in V$, então $\|v\|^2 - \lambda_1|v|_2^2 = 0$. Desse modo, (2.10) se reduz a

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\Big(\|w\|^2 - \lambda_1|w|_2^2\Big) - c_7\|w\|^p. \tag{2.11}$$

Pela desigualdade variacional em W, temos que

$$-\lambda_1|w|_2^2 \geq -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\|w\|^2$$

e portanto

$$I(u) \;\geq\; \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\|w\|^2 - c_7\|w\|^p. \tag{2.12}$$

Agora, fazendo $0 < M = 1/2(1 - \lambda_1/\lambda_2)$ e lembrando que $\|w\| \leq \rho$, (2.12) se expressa como segue,

$$I(u) \geq M_\rho\|w\|^2 \tag{2.13}$$

onde $M_\rho = M - \rho^{p-2}$ e estamos supondo que $\rho > 0$ é suficientemente pequeno de modo que $M_\rho > 0$.

Suponha agora que (ii) não ocorre. Então existe $\rho > 0$ pequeno e $(u_n) \subseteq H$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = 0 \;\text{ e }\; \|u_n\| = \rho.$$

Escrevendo $u_n = v_n + w_n$, segue da expressão acima e de (2.13) que

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\| = 0 \;\text{ e }\; \lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \rho.$$

Observe que pela finitude da dimensão de V, passando a uma subsequência se necessário for, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v_0\| = 0.$$

Logo, $\|v_0\| = \rho$ e $|v_0(x)| \leq \delta/2, \ x \in \Omega$.

Afirmação 1: $I(v_0) = 0$.

Como $w_n \to 0$ em H, segue da imersão de Sobolev $H \hookrightarrow L^p(\Omega)$ com $p \in [1, 2^*]$, que $w_n \to 0$ em $L^p(\Omega)$, então pela continuidade de F, a menos de subsequência,

$$G_n(x) = F(x, v_n(x) + w_n(x)) - F(x, v_n(x)) \to 0 \text{ q.t.p em } \Omega \tag{2.14}$$

e $|w_n(x)| \leq \psi(x) \in L^p(\Omega)$ (cf. [Bre, Teorema IV.9, pg. 58]).

Assim, por (f_1), obtemos uma constante positiva k_1 tal que

$$\begin{aligned} |G_n(x)| &\leq k_1\Big(|v_n(x)| + |v_n(x)|^p + |w_n(x)| + |w_n(x)|^p\Big) \\ &\leq k\Big(|v_n(x)| + |v_n(x)|^p + |\psi_n(x)| + |\psi_n(x)|^p\Big). \end{aligned}$$

Como $\|v_n\| \to \rho$ quando $n \to \infty$ e $\dim V < \infty$ então existe uma constante $k_2 > 0$ tal que $|v_n(x)| \leq k_2$ para todo $x \in \Omega$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Desse modo,

$$|G_n(x)| \leq k_1\Big(k_2 + k_2^p + |\psi_n(x)| + |\psi_n(x)|^p\Big) = h(x).$$

Observando que $|\psi(x)| \in L^1(\Omega)$, pois $L^p(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ e que $|\psi(x)|^p \in L^1(\Omega)$, concluimos que

$$|G_n(x)| \leq h(x) \in L^1(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada (ver [Bre, Teorema VI.1, pg. 54]) e por (2.14)

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Big(F(x, v_n(x) + w_n(x)) - F(x, v_n(x))\Big) = 0. \tag{2.15}$$

Como $I(u_n) \to 0$ e $\|w_n\| \to 0$ quando $n \to \infty$, podemos usar a continuidade de I e (2.15) para concluir que

$$I(v_n) = I(u_n) - \frac{1}{2}\|w_n\|^2 + \int_\Omega \Big(F(x, v_n(x) + w_n(x)) - F(x, v_n(x))\Big) \to 0 = I(v_0),$$

e a afirmação está provada.

Lembrando que $|v_0(x)| \leq \delta/2$, segue de (f_2) que

$$2F(x, v_0(x)) \leq \lambda_1 v_0(x)^2, \ \forall\, x \in \Omega. \tag{2.16}$$

Note que,

$$\begin{aligned} I(v_0) &= \frac{1}{2}\|v_0\|^2 - \int_\Omega F(x, v_0(x)) \\ &= \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega v_0(x)^2 - \int_\Omega F(x, v_0(x)) \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\lambda_1 v_0(x)^2 - 2F(x, v_0(x))\Big) = 0. \end{aligned}$$

Como (2.16) nos diz que o integrando da expressão acima é não negativo para quase todo $x \in \Omega$, segue que

$$2F(x, v_0(x)) \equiv \lambda_1 v_0(x)^2, \ \forall\, x \in \Omega. \tag{2.17}$$

Seja φ uma função qualquer de $C_c^\infty(\Omega)$. Como φ é limitada, então para $t > 0$ suficientemente pequeno,

$$|v_0(x) + t\varphi(x)| \leq \delta, \ \forall\, x \in \Omega.$$

Assim, pela desigualdade acima e por (f_2),

$$2F(x, v_0 + t\varphi(x)) - \lambda_1(v_0 + t\varphi(x))^2 \leq 0 \tag{2.18}$$

e, por (2.17),

$$-2F(x, v_0(x)) + \lambda_1 v_0(x)^2 = 0, \ \forall\, x \in \Omega. \tag{2.19}$$

Combinando as expressões (2.18) e (2.19), obtemos que

$$2F(x, v_0 + t\varphi(x)) - 2F(x, v_0) - \lambda_1(v_0 + t\varphi(x))^2 + \lambda_1 v_0^2 \leq 0.$$

Agora, dividindo a expressão acima por t e passando ao limite, segue que

$$2\lim_{t\to 0}\frac{F(x, v_0(x) + t\varphi(x)) - F(x, v_0(x))}{t} - 2\lambda_1 v_0(x)\varphi(x) \leq 0,$$

ou seja,

$$2[f(x, v_0(x)) - \lambda_1 v_0(x)]\varphi(x) \leq 0$$

para todo $x \in \Omega$ e toda $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Afirmação 2: $h(x) = f(x, v_0(x)) - \lambda_1 v_0(x) = 0, \ \forall\, x \in \Omega.$

De fato, suponha que a afirmação seja falsa. Então existe $x_0 \in \Omega$ de tal forma que $h(x_0) \neq 0$, digamos $h(x_0) > 0$. Tome agora $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi(x_0) > 0$ e, para $r > 0$ pequeno, tenhamos $supp(\varphi) \subseteq \overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. Desse modo $h(x_0)\varphi(x_0) > 0$, o que é um absurdo. Por outro lado, se $h(x_0) < 0$, argumentos análogos nos levam novamente a um absurdo. Portanto $h(x) \equiv 0$, ou seja,

$$f(x, v_0(x)) = \lambda_1 v_0(x), \ \forall \ x \in \Omega.$$

Sendo v_0 uma autofunção associada ao autovalor λ_1, ou seja, $\|v_0\|^2 = \lambda_1 |v_0|_2^2$, segue da expressão acima o que desejávamos, isto é, (i) ocorre e, desta forma, a demonstração está completa. ■

2.1 Condições de Ambrosetti-Rabinowitz

Nesta seção, vamos resolver o problema (P) supondo que f satisfaz, além de $(f_0) - (f_2)$, a seguinte condição de superlinearidade:

(AR) existem $\mu > 2$ e $r > 0$ tais que

$$0 < \mu F(x, s) \leq s f(x, s) \ , \forall \ x \in \Omega \ , |s| \geq r.$$

O resultado principal desta seção é devido a Ambrosetti e Rabinowitz [AmbRab] e pode ser enunciado como segue:

Teorema 2.3 *Se f satisfaz $(f_0) - (f_2)$ e (AR) então o problema (P) tem solução fraca $u \not\equiv 0$.*

A prova será feita via Teorema 1.4. Os dois lemas a seguir estão relacionados com a condição (I_2) e com a condição de Palais-Smale.

Lema 2.4 *Se f satisfaz (AR) então, para todo $\rho > 0$ dado, existe $e \in H$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) \leq 0$.*

Demonstração: Observe que de (AR), para $s \geq r$, temos,

$$\frac{f(x, s)}{F(x, s)} \geq \frac{\mu}{s}.$$

Assim,

$$\int_r^s \frac{d}{d\xi} lnF(x,\xi)d\xi = \int_r^s \frac{f(x,\xi)}{F(x,\xi)}d\xi \geq \mu \int_r^s \frac{1}{\xi}d\xi,$$

implicando que

$$ln\frac{F(x,s)}{F(x,r)} \geq ln\left(\frac{s}{r}\right)^{\mu}.$$

Logo,

$$F(x,s) \geq \frac{F(x,r)}{r^{\mu}}s^{\mu}, \ \forall \ x \in \overline{\Omega} \ , s \geq r.$$

Fazendo $a_1 = \dfrac{F(x,r)}{r^{\mu}}$ obtemos que

$$F(x,s) \geq a_1 s^{\mu}, \ \forall \ x \in \overline{\Omega} \ , s \geq r.$$

Por outro lado, para $s \leq -r$, segue de (AR) que

$$\frac{f(x,s)}{F(x,s)} \leq \frac{\mu}{s},$$

assim

$$\int_s^{-r} \frac{f(x,\xi)}{F(x,\xi)}d\xi \leq \int_s^{-r} \frac{\mu}{\xi}d\xi$$

e desta forma

$$ln\frac{F(x,-r)}{F(x,s)} \leq ln\left|\frac{r}{s}\right|^{\mu},$$

donde segue que

$$\frac{F(x,-r)}{F(x,s)} \leq \left|\frac{r}{s}\right|^{\mu},$$

ou seja

$$|F(x,s)| \geq a_2|s|^{\mu}, \ \forall \ x \in \overline{\Omega}, s \leq -r$$

onde $a_2 = \dfrac{F(x,-r)}{r^{\mu}}$. Considerando $c_3 = \min\{a_1, a_2\}$, podemos concluir que

$$F(x,s) \geq c_3|s|^{\mu}, \ \forall \ x \in \overline{\Omega}, |s| \geq r.$$

Além disso, como $F \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $\overline{\Omega} \times [-r,r]$ é compacto, podemos tomar $c_4 = \max\limits_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times[-r,r]} F(x,s)$ e usar a desigualdade acima para obter

$$F(x,s) \geq c_3|s|^{\mu} - c_4, \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Dado $u \in C_c^\infty(\Omega)\backslash\{0\}$, segue da a expressão acima que

$$\begin{aligned} I(tu) &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega F(x,tu) \\ &\leq \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - c_3|t|^\mu |u|_\mu^\mu + c_4|\Omega|. \end{aligned}$$

Lembrando que $\mu > 2$, concluímos que $I(tu) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Logo, dado $\rho > 0$ existe $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $e = t_0 u$ satisfaz $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$. Isto conclui a prova do lema. ∎

Lema 2.5 *Se f satisfaz (AR), então o funcional I satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $(u_n) \subseteq H$ uma sequência de Palais-Smale no nível c, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|_{H'} = 0.$$

Afirmação: $(u_n) \subseteq H$ é limitada.
De fato, note inicialmente que existe $M > 0$ tal que

$$|I(u_n)| < M.$$

Além disso, como $\|I'(u_n)\|_{H'} \to 0$, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|I'(u_n)\|_{H'} < \epsilon, \ \forall\ n > n_0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)\ u_n &\leq \left| I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)\ u_n \right| \\ &\leq |I(u_n)| + \frac{1}{\mu}\|I'(u_n)\|_{H'}\|u_n\| \\ &\leq M + \frac{\epsilon}{\mu}\|u_n\|, \ \forall\ n > n_0. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} I(u_n) - \frac{1}{\mu}I'(u_n)\ u_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 + \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu}f(x,u_n)\ u_n - F(x,u_n)\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2 + \int_{\{|u_n|\geq r\}} T(x,u_n) + \int_{\{|u_n|<r\}} T(x,u_n) \end{aligned}$$

onde

$$T(x,u_n)=\frac{1}{\mu}f(x,u_n)\ u_n-F(x,u_n).$$

Note que de (AR) temos que

$$\int_{\{|u_n|\geq r\}}T(x,u_n)\geq 0.$$

Defina agora a função $h:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$h(x,u)=|T(x,u)|.$$

De (f_0), as funções f e F são contínuas, e então h também o é. Desse modo $h|_{\overline{\Omega}\times[-r,r]}$ é limitada, digamos por uma constante k. Logo,

$$\int_{\{|u_n|<r\}}T(x,u_n)\geq-\int_\Omega|T(x,u_n)|\geq-\int_\Omega k.$$

Segue então que

$$\begin{aligned} I(u_n)-\frac{1}{\mu}I'(u_n)\ u_n &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2+\int_{\{|u|\geq r\}}T(x,u_n)-k|\Omega| \\ &\geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2-k|\Omega|. \end{aligned}$$

Então

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2-k|\Omega|\leq I(u_n)-\frac{1}{\mu}I'(u_n)\leq M+\frac{1}{\mu}\epsilon\|u_n\|,$$

ou seja

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2-k|\Omega|\leq M+\frac{1}{\mu}\epsilon\|u_n\|. \tag{2.21}$$

A expressão acima implica que $(u_n)\subseteq H$ é limitada. De fato, se não fosse assim, então existiria uma subsequência, ainda denotada por (u_n), tal que $\|u_n\|\to\infty$. Dividindo a expressão acima por $\|u_n\|$ e usando que $2^{-1}-\mu^{-1}>0$ obteríamos uma contradição quando $n\to\infty$. Logo (u_n) é limitada.

Mostremos agora que a limitação de (u_n) implica na existência de uma subsequência convergente. Definindo $J_0,J:H\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$J_0(u)=\int_\Omega|\nabla u|^2\ ,\ J(u)=\int_\Omega F(x,s),$$

temos que $I = \frac{1}{2}J_0(u) - J(u)$. Assim, segue do Apêndice A.2 que $I'(u) : H \longrightarrow H'$ é dado por

$$I'(u)v =< u, v >_H - \int_\Omega f(x, u)v, \ \forall \ v \in H,$$

onde $< \cdot, \cdot >_H$ denota o produto interno em H e

$$J'(u)v = \int_\Omega f(x, u)v.$$

Além disso o operador J' é compacto (ver Apêndice A.2). Então a menos de subsequência

$$\lim_{n\to\infty} J'(u_n) = v$$

e como $I'(u) = u - J'(u)$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (I'(u_n) + J'(u_n)) = v$$

Portanto u_n converge e, consequentemente, I satisfaz $(PS)_c$. ■

Demonstração do Teorema 2.3: De acordo com o Lema 2.2, uma das possibilidades abaixo ocorre:
(i) (P) possui uma solução $u \not\equiv 0$;
(ii) para cada $\rho > 0$ suficientemente pequeno, existe $\alpha > 0$ tal que

$$I(u) \geq \alpha \ , \ \forall \ u \in H, \|u\| = \rho.$$

Podemos supor que (ii) ocorre, pois, caso contrário, o item (i) acima nos fornece uma solução não nula para (P). Então I satisfaz a condição (I_1) do Teorema do Passo da Montanha. Observe que $I(0) = 0$ e pelos lemas 2.4 e 2.5 o funcional I satisfaz (I_2) e $(PS)_c$. Portanto podemos aplicar o Teorema 1.4 para obtermos um ponto crítico não nulo de I, isto é, uma solução não trivial do problema (P). ■

2.2 Condições de Schechter-Zou

Nesta seção vamos supor que f satisfaz as hipóteses de Schechter-Zou, a saber:

$(SZ1)$ uniformemente para $x \in \overline{\Omega}$ vale

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(x, s)}{s^2} = \infty;$$

$(SZ2)$ existem $\mu > 2$ e $c \geq 0$ tais que

$$\mu F(x,s) - sf(x,s) \leq c(s^2+1), \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R};$$

$(SZ3)$ existem $m > N/2$ e uma função $g \in L^m(\Omega)$ tais que

$$g(x) \leq \frac{F(x,s)}{s^2}, \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

No que segue, vamos provar o seguinte resultado devido a Schechter e Zou [SchZou2]:

Teorema 2.6 *Se f satisfaz $(f_0) - (f_2)$ e $(SZ1) - (SZ3)$, então o problema (P) tem solução fraca $u \not\equiv 0$.*

Como na seção anterior, faremos uso dos lemas abaixo.

Lema 2.7 *Se f satisfaz $(SZ1)$ e $(SZ3)$ então para todo $\rho > 0$ dado, existe $e \in H$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) \leq 0$.*

Demonstração: Seja $\varphi_1 > 0$ uma autofunção associada ao primeiro autovalor do problema (PA) definido na introdução. Note que

$$\frac{I(t\varphi_1)}{t^2} = \frac{1}{2}\|\varphi_1\|^2 - \int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}\varphi_1^2.$$

Observe que por $(SZ3)$,

$$\frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}\varphi_1^2 \geq g(x)\varphi_1^2 = h(x) \in L^1(\Omega),$$

pois $g(x) \in L^m(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ e $\varphi_1 \in C^\infty(\Omega)$. Daí, segue do Lema de Fatou que

$$\liminf_{t\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}\varphi_1^2 \geq \int_\Omega \liminf_{t\to\infty} \frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}\varphi_1^2.$$

Como $\varphi_1 > 0$, então $t\varphi_1(x) \to \infty$ q.t.p em Ω. Assim, de $(SZ1)$ obtemos que

$$\liminf_{t\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}\varphi_1^2 \geq \int_\Omega \liminf_{t\to\infty} \frac{F(x,t\varphi_1)}{(t\varphi_1)^2}\varphi_1^2 = \infty.$$

Portanto, dado $\rho > 0$, existe $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $e = t_0\varphi_1$ satisfaz $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$. ■

Lema 2.8 *Se f satisfaz $(SZ1)-(SZ3)$ então o funcional I satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subseteq H$ uma sequência de Palais-Smale no nível c. Como no Lema 2.5, é suficiente mostrar que $(u_n) \subseteq H$ é limitada. Suponha, por absurdo que (u_n) não seja limitada. Então, passando a uma subsequência se necessário, temos que $\rho_n = \|u_n\| \to \infty$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\rho_n > 0$. Logo podemos definir $(\widetilde{u}_n) \subseteq H$ por

$$\widetilde{u}_n(x) = \frac{u_n(x)}{\rho_n}.$$

Então $\|\widetilde{u}_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e a menos de subsequência,

$$\begin{cases} \widetilde{u}_n & \rightharpoonup & \widetilde{u} \text{ fracamente em } H; \\ \widetilde{u}_n & \to & \widetilde{u} \text{ em } L^s(\Omega), \text{ para todo } 1 \leq s < 2^*; \\ \widetilde{u}_n(x) & \to & \widetilde{u}(x) \text{ q.t.p em } \Omega. \end{cases} \tag{2.22}$$

Uma vez que

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\rho_n^2 - \int_\Omega F(x, u_n),$$

temos

$$\int_\Omega \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \frac{1}{2} - \frac{I(u_n)}{\rho_n^2}.$$

Como $\rho_n \to \infty$ e $I(u_n) \to c$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \frac{1}{2}. \tag{2.23}$$

Seja $\widetilde{\Omega} = \{x \in \Omega : \widetilde{u}(x) \neq 0\}$ e observe que, como $u_n(x) = \rho_n \widetilde{u}_n(x)$ e $\rho_n \to \infty$, segue de (2.22) que

$$|u_n(x)| \to \infty \text{ q.t.p em } \widetilde{\Omega}.$$

Logo, usando $(SZ1)$, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \infty, \text{ q.t.p em } \widetilde{\Omega}. \tag{2.24}$$

Afirmação: O conjunto $\widetilde{\Omega}$ é vazio.

Suponha o contrário. Então de $(SZ3)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 &= \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 + \int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \\ &\geq \int_{\widetilde{\Omega}} \frac{F(x, u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 + \int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} g\widetilde{u}_n^2. \end{aligned}$$

Mostremos agora que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\backslash\widetilde{\Omega}} g\widetilde{u}_n^2 = 0.$$

Seja $m > N/2 > 1$ dado por $(SZ3)$ e considere $m' = m/(m-1)$ seu expoente conjugado. Note que $2m' < 2^*$. De fato,

$$m > \frac{N}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{N} < -\frac{1}{2m} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{N} < \frac{1}{2} - \frac{1}{2m} \Leftrightarrow 2m' < 2^*.$$

Pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\backslash\widetilde{\Omega}} g\widetilde{u}_n^2 \leq \int_{\Omega\backslash\widetilde{\Omega}} |g|\widetilde{u}_n^2 &\leq \left\{\int_{\Omega\backslash\widetilde{\Omega}} |g|^m\right\}^{\frac{1}{m}} \left\{\int_{\Omega\backslash\widetilde{\Omega}} |\widetilde{u}_n|^{2m'}\right\}^{\frac{2}{2m'}} \\ &= |g|_m |\widetilde{u}_n|^2_{L^{2m'}(\Omega\backslash\widetilde{\Omega})} .\end{aligned}$$

Como $\widetilde{u}_n \to 0$ em $L^{2m'}(\Omega\backslash\widetilde{\Omega})$, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\backslash\widetilde{\Omega}} g\widetilde{u}_n^2 = 0. \tag{2.25}$$

Agora, observe que existe uma função $\widetilde{h} \in L^1(\Omega)$ tal que $\dfrac{F(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \geq \widetilde{h}(x)$. De fato, observando que

$$\frac{1}{N/2} + \frac{1}{2^*} + \frac{1}{2^*} = 1$$

e lembrando que $m > N/2$ então existe $m'' < 2^*$ tal que

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2^*} + \frac{1}{m''} = 1.$$

Daí, segue da desigualdade de Hölder com expoentes m, m'' e 2^* que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|g\widetilde{u}_n^2 - g\widetilde{u}^2\right| &\leq \int_\Omega |g||\widetilde{u}_n + \widetilde{u}||\widetilde{u}_n - \widetilde{u}| \\ &\leq |g|_m |\widetilde{u}_n + \widetilde{u}|_{2^*} |\widetilde{u}_n - \widetilde{u}|_{m''}.\end{aligned}$$

Assim, por $(SZ3)$ e (2.22) temos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left|g\widetilde{u}_n^2 - g\widetilde{u}^2\right| = 0.$$

Logo, existe $\psi \in L^1(\Omega)$ tal que $|g(x)\widetilde{u}_n^2| \leq \psi(x)$. Assim, usando novamente $(SZ3)$ e a última desigualdade, temos

$$\frac{F(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \geq g(x)\widetilde{u}_n^2 \geq -\psi(x) = \widetilde{h}(x).$$

Então, pela desigualdade acima, podemos aplicar o Lema de Fatou, que juntamente com (2.24) nos fornece

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{F(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \geq \int_{\widetilde{\Omega}} \liminf_{n\to\infty} \frac{F(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 + \liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} \frac{F(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \infty,$$

contradizendo (2.23). Portanto, $\widetilde{\Omega} = \emptyset$ e segue de (2.22) que

$$\widetilde{u} \equiv 0 \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Dividindo $I'(u_n)u_n$ por ρ_n^2 obtemos

$$\frac{I'(u_n)u_n}{\rho_n^2} = 1 - \int_\Omega \frac{u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2. \tag{2.26}$$

Observe que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|I'(u_n)u_n|}{\rho_n^2} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\|I'(u_n)\|_{H'}}{\rho_n} = 0, \tag{2.27}$$

visto que (u_n) é uma sequência de Palais-Smale e $\rho_n = \|u_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Assim, usando (2.27) e passando (2.26) ao limite, obtemos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = 1. \tag{2.28}$$

Segue de (2.23) que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{\mu F(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \frac{\mu}{2}. \tag{2.29}$$

Então, combinando (2.23) com (2.28) obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \frac{\mu}{2} - 1 > 0. \tag{2.30}$$

Pela hipótese $(SZ2)$

$$\frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \leq c\frac{(u_n^2+1)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 &\leq \limsup_{n\to\infty} c\frac{(u_n^2+1)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \\
&= \limsup_{n\to\infty} c\left(\widetilde{u}_n^2 + \frac{1}{\rho_n^2}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\limsup_{n\to\infty} \frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \leq 0. \tag{2.31}
$$

Como $\widetilde{u}_n^2 \to \widetilde{u}^2$ em $L^1(\Omega)$ e podemos supor que $\rho_n > 1$ temos

$$
\frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \leq c\frac{u_n^2+1}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 = \widetilde{u}_n^2 + \frac{1}{\rho_n} \leq \overline{h},
$$

onde $\overline{h} \in L^1(\Omega)$. Daí, por (2.31) e pelo Lema de Fatou segue que

$$
\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \leq \int_\Omega \limsup_{n\to\infty} \frac{\mu F(x,u_n) - u_n f(x,u_n)}{u_n^2}\widetilde{u}_n^2 \leq 0,
$$

o que contradiz (2.30). Portanto a sequência (u_n) é limitada. ∎

Demonstração do Teorema 2.6: A prova é inteiramente análoga a apresentada no Teorema 2.3, utilizando-se agora os Lemas 2.7 e 2.8. ∎

2.3 Condições de Costa-Magalhães

Por fim, nesta seção vamos supor que f satisfaz

$(CM1)$ existe $\beta > \lambda_1$ tal que

$$
\liminf_{|s|\to\infty} \frac{2F(x,s)}{s^2} \geq \beta,\ \forall\ x \in \Omega;
$$

$(CM2)$ existem $\overline{\mu} > 0$ e $a > 0$ tais que

$$
\liminf_{|s|\to\infty} \frac{sf(x,s) - 2F(x,s)}{|s|^{\overline{\mu}}} \geq a > 0,\ \forall\ x \in \Omega;
$$

$(CM3)$ existe $q \in \mathbb{R}$ tal que

$$
\limsup_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{|s|^q} \leq b < \infty,\ \forall\ x \in \Omega.
$$

O teorema abaixo é devido a Costa e Magalhães [CosMag].

Teorema 2.9 *Se f satisfaz $(f_0) - (f_2)$, $(CM1)$, $(CM2)$ e $(CM3)$ com $\overline{\mu} > \frac{N}{2}(q-2)$ então o problema (P) tem solução fraca $u \not\equiv 0$.*

Façamos agora a prova dos lemas necessários para provar o teorema acima.

Lema 2.10 *Se f satisfaz $(CM1)$ então, para todo $\rho > 0$ dado, existe $e \in H$ tal que $\|e\| > \rho$ e $I(e) \leq 0$.*

Demonstração: Note que, dado $\epsilon > 0$, por $(CM1)$ existe $M > 0$ tal que

$$F(x,s) \geq \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2, \ \forall \ x \in \overline{\Omega}, |s| \geq M. \tag{2.32}$$

Pela continuidade de F em $\overline{\Omega} \times [-M, M]$, existe uma constante positiva k, tal que

$$F(x,s) \geq \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)s^2 - k, \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Daí,

$$I(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}(\beta - \epsilon)|u|_2^2 + k|\Omega|. \tag{2.33}$$

Seja $\varphi_1 \in H$ uma autofunção associada ao autovalor λ_1 e normalizada de modo que $\|\varphi_1\|^2 = 1 = \lambda_1 |\varphi_1|_2^2$. Assim,

$$\frac{1}{\lambda_1} = |\varphi_1|_2^2.$$

Substituindo a igualdade acima em (2.24) e avaliando I em $t\varphi_1$, temos,

$$\begin{aligned} I(t\varphi_1) &\leq \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}(\beta - \epsilon)|\varphi_1|_2^2 + k|\Omega| \\ &= \left(1 - \frac{\beta - \epsilon}{\lambda_1}\right)\frac{t^2}{2} + k|\Omega|. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Diminuindo ϵ caso seja necessário, podemos supor que $\lambda_1 < \beta - \epsilon$, ou seja, $1 - (\beta - \epsilon)/\lambda_1 < 0$. Logo, dado $\rho > 0$, existe $t_0 > 0$ suficientemente grande tal que $e = t_0\varphi_1$ satisfaz $\|e\| > \rho$ e $I(e) < 0$. ■

Lema 2.11 *Se f satisfaz $(CM2)$ e $(CM3)$ com $\overline{\mu} > \frac{N}{2}(q-2)$, então o funcional I satisfaz $(Cer)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: De $(CM2)$, dado $0 < \epsilon < a$, existe $M > 0$ tal que,

$$a_1|s|^{\overline{\mu}} \leq sf(x,s) - 2F(x,s),\ \forall\ x \in \overline{\Omega}, |s| \geq M.$$

onde $a_1 = a - \epsilon$. A continuidade de f e F em $\overline{\Omega} \times [-M, M]$ nos garante que existe uma constante $a_2 > 0$ tal que

$$a_1|s|^{\overline{\mu}} - a_2 \leq sf(x,s) - 2F(x,s),\ \forall\ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \tag{2.35}$$

Seja agora $(u_n) \subseteq H$ uma seqüência de Cerami no nível c, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} I(u_n) = c\ ,\ \lim_{n\to\infty} \|I'(u_n)\|(1 + \|u_n\|) = 0,$$

mostremos que $(u_n) \subseteq H$ é limitada. Supondo o contrário e passando a uma subsequência se necessário, temos que $\|u_n\| \to \infty$ quando $n \to \infty$. De (2.35) temos que

$$\begin{aligned} a_1|u_n|_{\overline{\mu}}^{\overline{\mu}} - a_2|\Omega| &\leq \int_\Omega (u_n f(x,u_n) - 2F(x,u_n)) \\ &= 2I(u_n) - I'(u_n)u_n \\ &\leq 2|I(u_n)| + \|I'(u_n)\|_{H'}\|u_n\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a_1|u_n|_{\overline{\mu}}^{\overline{\mu}} - a_2|\Omega| \leq 2|I(u_n)| + \|I'(u_n)\|_{H'}\|u_n\|. \tag{2.36}$$

Como (u_n) é uma sequência de Cerami no nível c, o lado direito da expressão acima é limitado. Logo $u_n \in L^{\overline{\mu}}(\Omega)$ e, além disso, a seqüência (u_n) é limitada em $L^{\overline{\mu}}(\Omega)$, isto é, $|u_n|_{\overline{\mu}} \leq k_1$ para alguma constante $k_1 > 0$.

A hipótese $(CM3)$ e a continuidade F nos fornecem constantes positivas d_1 e d_2, tais que

$$F(x,s) \leq d_1|s|^q + d_2,\ \forall\ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}. \tag{2.37}$$

Assim, por (2.37) temos que,

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - I(u_n) = \int_\Omega F(x,u_n) \leq d_1|u_n|_q^q + d_2|\Omega|. \tag{2.38}$$

Como $u_n \in L^{\overline{\mu}}(\Omega) \cap L^{2^*}(\Omega)$ então, para algum $t \in (0,1)$, segue, da desigualdade de interpolação (ver [Bre, pg. 194]) que,

$$|u_n|_q^q \leq |u_n|_{2^*}^{tq}|u_n|_{\overline{\mu}}^{(1-t)q}. \tag{2.39}$$

Temos também que $H \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Então,

$$|u_n|_{2^*}^{tq} \leq k_2 \|u_n\|^{tq}. \tag{2.40}$$

Observe que,

$$|u_n|_{\overline{\mu}}^{(1-t)q} \leq k_3 \ , \ I(u_n) \leq k_4. \tag{2.41}$$

Portanto, segue de (2.38)-(2.41) que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_n\|^2 &\leq a_1|u_n|_q^q + a_2|\Omega| + I(u_n) \\ &\leq a_1|u_n|_{2^*}^{tq}|u_n|_{\overline{\mu}}^{(1-t)q} + a_2|\Omega| + k_4 \\ &\leq a_1k_2k_3\|u_n\|^{tq} + a_2|\Omega| + k_4, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 \leq a_1k_2k_3\|u_n\|^{tq} + a_2|\Omega| + k_4. \tag{2.42}$$

Afirmação: $tq < 2$.

De fato, observe inicialmente que

$$\frac{1}{q} = \frac{1-t}{\overline{\mu}} + \frac{t}{2^*},$$

e portanto

$$tq = \frac{2^*(q-\overline{\mu})}{2^*-\overline{\mu}}.$$

Por hipótese, $\overline{\mu} > \frac{N}{2}(q-2)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{4\overline{\mu}}{N-2} > \frac{2N(q-2)}{(N-2)} &\iff \overline{\mu}(2^*-2) > 2^*(q-2) \\ &\iff \overline{\mu}(2-2^*) < 2^*(2-q) \\ &\iff 2^*(q-\overline{\mu}) < 2(2^*-\overline{\mu}) \\ &\iff tq < 2. \end{aligned}$$

Como $tq < 2$, podemos usar (2.42) para obter uma contradição, como feito no Lema 2.5. Logo $(u_n) \subseteq H$ é limitada. Agora, desde que $\|I'(u_n)\|_{H'}(1 + \|u_n\|) \to 0$, então $\|I'(u_n)\|_{H'} \to 0$. Assim, podemos usar a limitação de (u_n) e o mesmo argumento da prova do Lema 2.5 para concluir que (u_n) possui uma subsequência convergente. ■

Demonstração do Teorema 2.9: Basta argumentar como no Teorema 2.3, usando os Lemas 2.10 e 2.11. ■

Observação 2.12 *Analisando a prova do Lema 2.11 percebe-se que o Teorema 2.9 continua válido se substituirmos a condição* $(CM2)$ *por*
$(\widetilde{CM2})$ *existem* $a > 0$ *e* $\overline{\mu} > 0$ *tais que*

$$\limsup_{|s|\to\infty} \frac{sf(x,s) - 2F(x,s)}{|s|^{\overline{\mu}}} \leq -a < 0.$$

Apêndice A

Neste apêndice, apresentamos alguns resultados utilizados durante este trabalho, bem como suas respectivas demonstrações.

A.1 Campo Pseudo-Gradiente

Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $v \in X$ é um vetor pseudo-gradiente para I em $u \in \widetilde{X} = \{w \in X : I'(w) \neq 0\}$ se

$$\|v\| \leq 2\|I'(u)\|_{X'} \quad \text{e} \quad I'(u)v \geq \|I'(u)\|_{X'}^2.$$

Um campo pseudo-gradiente para I em X é uma aplicação $V : \widetilde{X} \longrightarrow X$ tal que
(a) V é localmente Lipschitziana;
(b) para cada $u \in \widetilde{X}$, $V(u)$ é um vetor pseudo-gradiente para I.

Lema A.1 *Se $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ então existe um campo pseudo-gradiente para I em $\widetilde{X}$.*

Demonstração: Dado $u \in \widetilde{X}$ existe, por definição, $w \in X$ tal que $\|w\|_X = 1$ e

$$I'(u)w > \frac{2}{3}\|I'(u)\|_{X'}.$$

Então $z = \frac{3}{2}\|I'(u)\|w$ é um vetor pseudo-gradiente para I em u. De fato,

$$\|z\| = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'}\|w\| = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'} < 2\|I'(u)\|_{X'}$$

e

$$I'(u)z = \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'}I'(u)w > \frac{3}{2}\|I'(u)\|_{X'}\frac{2}{3}\|I'(u)\|_{X'} = \|I'(u)\|_{X'}^2.$$

Pela continuidade de I', existe uma vizinhaça N_u de u tal que para todo $v \in N_u$

$$I'(v)z \geq \|I'(v)\|_{X'}^2 \;\text{ e }\; \|z\| \leq 2\|I'(v)\|_{X'} \tag{A.1.1}$$

Note que a família $\mathcal{N}=\{N_u\}_{u\in\widetilde{X}}$ é uma cobertura aberta de $\widetilde{X}$. Como $\widetilde{X}$ é um espaço métrico, então é paracompacto (cf. [Elo]). Logo, existe uma cobertura $\mathcal{M}=\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $\widetilde{X}$, aberta e localmente finita que refina $\mathcal{N}$, isto é, para cada $u \in \widetilde{X}$ existem índices $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ e uma vizinhança W_u de u tal que $W_u \cap M_\lambda \neq \emptyset$ com $\lambda \in \Lambda_n = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, ou seja, a intersecção citada é não vazia apenas para um número finito de índices λ. Além disso, para cada $M_\lambda \in \mathcal{M}$ existe $N_u \in \mathcal{N}$ tal que $M_\lambda \subset N_u$. Seja z_λ um vetor pseudo-gradiente para I em M_λ. Então $z_\lambda = z$ satisfaz (A.1.1) para cada $u \in M_\lambda$.

Seja agora $d_\lambda(u)$ a distância de u ao complemento de M_λ. Então a função d_λ é Lipschitiziana e além disso $supp(d_\lambda) \subseteq M_\lambda$. Defina

$$f_\lambda(u) = \frac{d_\lambda(u)}{\displaystyle\sum_{k\in\Lambda_n} d_k(u)}.$$

Observe que f_λ está bem definida, pois para cada $u \in \widetilde{X}$, $\displaystyle\sum_{k\in\Lambda_n} d_k(u) < \infty$ e não nulo. Além disso como o refinamento é localmente finito, tem-se que, $0 \leq f_\lambda \leq 1$ e para cada $u \in \widetilde{X}$,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(u) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{d_\lambda(u)}{\displaystyle\sum_{k\in\Lambda_n} d_k(u)} = 1. \tag{A.1.2}$$

Verifiquemos agora que

$$V(u) := \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(u) z_\lambda$$

é um campo pseudo-gradiente para I um $\widetilde{X}$. Temos por (A.1.1) e (A.1.2) que

$$\|V(u)\| \leq \sum_{\lambda\in\Lambda} \left| d_\lambda(u) \Big/ \sum_{k\in\Lambda_n} d_k(u) \right| \|z\| < 2\|I'(u)\|_{X'}, \tag{A.1.3}$$

e novamente de (A.1.1) segue que

$$\begin{aligned} I'(u)V(u) &= I'(u) \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(u) z_\lambda \\ &= \frac{3}{2} \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(u) \|I'(u)\|_{X'} I'(u) w \\ &> \|I'(u)\|_{X'}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$I'(u)V(u) > \|I'(u)\|^2_{X'}. \tag{A.1.4}$$

Portando segue de (A.1.3) e (A.1.4) que V é um vetor pseudo-gradiente para I em $\widetilde{X}$. Resta mostrarmos que V é localmente Lipschitziana. Para isso, basta observar que V é uma soma finita de funções localmente Lipschitzianas, visto que a cobertura $\mathcal{M}$ de $\widetilde{X}$ é um refinamento localmente finito de $\mathcal{N}$ e as funções d_λ são localmente Lipschitzianas. Portanto V é um campo pseudo-gradiente para I em $\widetilde{X}$. ■

A.2 Funcionais Diferenciáveis

O foco desta seção é provar a regularidade $C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ do funcional $I = \frac{1}{2}J_0 - J$ onde $J_0, J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ são definidos respectivamente por

$$J_0(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \quad \text{e} \quad J(u) = \int_\Omega F(x,u),$$

com $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt$ e a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo propriedades que serão introduzidas no decorrer do texto. Além disso, veremos que J tem por diferencial o operador

$$J'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v, \ \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Em se tratando de norma, é fácil ver que na verdade $J_0 \in C^\infty(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. Então, com respeito a regularidade de I, iremos apenas nos atentar ao operador J definido acima.

No que segue, temos como referência [SchZou1, Seção 1.2].

Lema A.2 *Sejam Ω um domínio limitado, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $r, q \geq 1$, $a \geq 0$ e $b > 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq a + b|s|^{\frac{r}{q}} , \ \forall\ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Então o operador $B : L^r(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$ dado por

$$B(u) = f(x, u(x))$$

é contínuo e limitado.

Demonstração: Seja (u_n) uma sequência em $L^r(\Omega)$ tal que $u_n \to u \in L^r(\Omega)$. Então a menos de subseqüência,

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p em } \Omega.$$

Além disso, como $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$ e Ω é limitado,

$$|u_n(x)| \leq h(x) \in L^r(\Omega) \subseteq L^1(\Omega).$$

Por hipótese, temos que

$$\begin{aligned}
|f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^q &\leq (|f(x,u_n(x))| + |f(x,u(x))|)^q \\
&\leq 2^{q-1}(|f(x,u_n(x))|^q + |f(x,u(x))|^q) \\
&\leq 2^{q-1}\left\{\left(a + b|u_n(x)|^{\frac{r}{q}}\right)^q + \left(a + b|u(x)|^{\frac{r}{q}}\right)^q\right\} \\
&\leq 2^{q-1}[2^{q-1}(a^q + b^q|u_n(x)|^r) + 2^{q-1}(a^q + b^q|u(x)|^r)] \\
&\leq c_1 + c_2(|u_n(x)|^r + |u(x)|^r),
\end{aligned}$$

onde $c_1 = 2b^{2(q-1)}a^q$ e $c_2 = 2^{2(q-1)}b^q$.

Observando que $u, u_n \in L^1(\Omega)$ e que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p em Ω, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada para obtermos,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |B(u_n) - B(u)|_q^q &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |B(u_n) - B(u)|^q \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f(x,u_n(x)) - f(x,u(x))|^q = 0,
\end{aligned}$$

mostrando que B é um operador contínuo.

Tomando $u \in L^r(\Omega)$ com $|u|_r = 1$, temos

$$\begin{aligned}
|B(u)|_q^q &= \int_\Omega |f(x,u(x))|^q \\
&\leq \int_\Omega \left(a + b|u(x)|^{\frac{r}{q}}\right)^q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2^{q-1}\int_\Omega (a^q + b^q|u(x)|^r) \\ &= 2^{q-1}a^q|\Omega| + 2^{q-1}b^q|u|_r^r = 2^{q-1}a^q|\Omega| + 2^{q-1}b^q. \end{aligned}$$

Portando B é limitado e a demonstração está completa. ■

Dados $r_1, r_2, q_1, q_2 \geq 1$, sejam

$$\Sigma_1 = L^{r_1}(\Omega) \cap L^{r_2}(\Omega) \text{ e } \Sigma_2 = L^{q_1}(\Omega) + L^{q_2}(\Omega).$$

Pode-se mostrar (cf. [Ada]) que Σ_2 é um espaço vetorial com norma

$$\|u_0\|_{\Sigma_2} = \inf\{\|u_1\|_{q_1} + \|u_2\|_{q_2} : u = u_1 + u_2,\ u_1 \in L^{q_1}(\Omega),\ u_2 \in L^{q_2}(\Omega)\}.$$

Lema A.3 *Sejam Ω um domínio limitado, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $a, b \geq 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq a|s|^{\frac{r_1}{q_1}} + b|s|^{\frac{r_2}{q_2}},\ \forall\ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

e defina o operador $B : \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ por

$$B(u) = f(x, u(x)).$$

Então $B = B_1 + B_2$ onde B_i é uma aplicação contínua e limitada de L^{r_i} em L^{q_i} para $i = 1, 2$. Em particular, B é uma aplicação contínua e limitada de Σ_1 em Σ_2.

Demonstração: Seja $\xi \in C(\mathbb{R}, [0,1])$ tal que

$$\xi(s) = \begin{cases} 1, & s \in [-1/2, 1/2] \\ 0, & \mathbb{R}\backslash(-2,2), \end{cases}$$

e defina $g : \Omega \times [-1/2, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x,s) = \xi(s) f(x,s),$$

e ainda $h : \Omega \times (\mathbb{R}\backslash(-2,2)) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(x,s) = (1 - \xi(s)) f(x,s).$$

Sem perda de generalidade, suponha que $r_1/q_1 \leq r_2/q_2$. Usando a definição de ξ, temos que

$$\begin{aligned} |g(x,s)| &= |f(x,s)| \\ &\leq a|s|^{\frac{r_1}{q_1}} + b|s|^{\frac{r_2}{q_2}} \\ &\leq c_3\left(|s|^{\frac{r_1}{q_1}} + |s|^{\frac{r_2}{q_2}}\right) \\ &\leq c_4|s|^{\frac{r_1}{q_1}}, \end{aligned}$$

onde $c_4 = 2c_3 = 2\max\{a,b\}$. Analogamente temos que

$$|h(x,s)| \leq c_4|s|^{\frac{r_2}{q_2}}.$$

Definindo as aplicações

$$B_1 : L^{r_1}(\Omega) \longrightarrow L^{q_1}(\Omega)\ ,\ B_1(u) = g(x,u(x))$$

e

$$B_2 : L^{r_2}(\Omega) \longrightarrow L^{q_2}(\Omega)\ ,\ B_2(u) = h(x,u(x)),$$

segue do Lema A.2 que B_1 e B_2 são aplicações contínuas e limitadas. Além disso, como

$$u_0 = (B_1 + B_2)(u) = B_1(u) + B_2(u) = u_1 + u_2,$$

onde $u_1 \in L^{q_1}(\Omega)$ e $u_2 \in L^{q_2}(\Omega)$, então $B = B_1 + B_2$. ∎

Teorema A.4 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e suponha que $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ e que existam constantes $r, q > 0$ e $a, b \geq 0$ tais que*

$$|f(x,s)| \leq a|s|^r + b|s|^q\ ,\ \forall\ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R},$$

e que as imersões abaixo sejam contínuas

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega),\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega).$$

Então o funcional

$$J(u) = \int_\Omega F(x,u),$$

onde $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)ds$ *satisfaz*

$$J \in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R}) \ , \ J'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v \ , \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Além disso, se as imersões acima forem compactas, então $J' : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)'$ *é compacto.*

Demonstração: Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{r+1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$|u|_{r+1} \leq c_1\|u\| \ , \ |u|_{q+1} \leq c_2\|u\| \ , \ \forall \ u \in H_0^1(\Omega). \tag{A.2.1}$$

Para $u, v \in X$ fixos, considere $\gamma \in C(\mathbb{R},[0,1])$ e defina a função

$$g(\gamma(s)) = f(x, u+\gamma(s)v)v.$$

Por hipótese e pela Desigualdade de Young com $\frac{r+1}{r}$, $r+1$ e $\frac{q+1}{q}$, $q+1$, temos

$$\begin{aligned} |g(\gamma)| &\leq \{a|u+\gamma v|^r + b|u+\gamma v|^q\}|v| \\ &\leq \frac{a}{r+1}\{r|u+\gamma v|^{r+1} + |v|^{r+1}\} + \frac{b}{q+1}\{q|u+\gamma v|^{q+1} + |v|^{q+1}\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|g(\gamma)| \leq \frac{a}{r+1}\{r|u+\gamma v|^{r+1} + |v|^{r+1}\} + \frac{b}{q+1}\{q|u+\gamma v|^{q+1} + |v|^{q+1}\}. \tag{A.2.2}$$

Observe que

$$\frac{a}{r+1}\{r|u+\gamma v|^{r+1} + |v|^{r+1}\} \leq a2^r\frac{r}{r+1}\Big\{|u|^{r+1} + |\gamma|^{r+1}|v|^{r+1}\Big\} + \frac{a}{r+1}|v|^{r+1} \tag{A.2.3}$$

e

$$\frac{b}{q+1}\{q|u+\gamma v|^{q+1} + |v|^{q+1}\} \leq b2^q\frac{q}{q+1}\Big\{|u|^{q+1} + |\gamma|^{q+1}|v|^{q+1}\Big\} + \frac{b}{q+1}|v|^{q+1}. \tag{A.2.4}$$

Agora, usando que $\gamma(s) \in [0,1]$ em (A.2.3) e (A.2.4), tomando

$$c_3 = \max\Big\{a2^r\frac{r}{r+1}, b2^q\frac{q}{q+1}\Big\},$$

e substituindo em (A.2.2), obtemos

$$|g(\gamma)| \leq c_3\Big(|u|^{r+1} + |v|^{r+1} + |u|^{q+1} + |v|^{q+1}\Big).$$

Como Ω é limitado, então $L^{r+1}(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$. Assim, pela desigualdade acima, $g(\gamma)$ é limitada por uma função integrável, o que nos permitirá utilizar mais adiante o Teorema da Convergência Dominada.

Fixando $x \in \Omega$, podemos supor sem perda de generalidade, que $u(x) < u(x)+tv(x)$. Defina a função $\xi : [u, u+tv] \longrightarrow \mathbb{R}$ por,

$$\xi(s) = F(x,s).$$

Note que ξ é contínua e derivável em $(u, u+tv)$ com $\xi'(s) = f(x,s)$. Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que,

$$\xi(u+tv) - \xi(u) = \xi'(u+\theta tv)(tv),$$

ou seja,

$$\frac{F(x,u+tv) - F(u)}{t} = f(x, u+\theta tv)v.$$

Daí, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue que,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{J(u+tv) - J(u)}{t} &= \lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(x,u+tv) - F(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_\Omega f(x, u+\theta tv)v \\
&= \lim_{t\to 0} \int_\Omega g(\theta t) \\
&= \int_\Omega f(x,u)v.
\end{aligned}$$

Consideremos o funcional

$$\begin{aligned}
T_u : \ H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
v \quad &\longmapsto \int_\Omega f(x,u)v
\end{aligned}$$

e mostremos que $T_u \in H_0^1(\Omega)'$. Para tanto, tome $v_1, v_2 \in H_0^1(\Omega)$. Então,

$$T_u(v_1+v_2) = \int_\Omega f(x,u)(v_1+v_2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega (f(x,u)v_1 + f(x,u)v_2)\\
&= \int_\Omega f(x,u)v_1 + \int_\Omega f(x,u)v_2\\
&= T_u(v_1) + T_u(v_2).
\end{aligned}
$$

Observe que,

$$
\begin{aligned}
|T_u(v)| &\leq \int_\Omega |f(x,u)||v|\\
&\leq \int_\Omega \Big(a|u|^r + b|u|^q\Big)|v|\\
&= a\int_\Omega |u|^r|v| + b\int_\Omega |u|^q|v|,
\end{aligned}
$$

isto é

$$|T_u(v)| \leq a\int_\Omega |u|^r|v| + b\int_\Omega |u|^q|v| \tag{A.2.5}$$

Note também que, pela Desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{r+1}{r}$, $r+1$ e $\frac{q+1}{q}$, $q+1$, obtemos as seguintes desigualdades:

$$\int_\Omega |u|^r|v| \leq \left\{\int_\Omega |u|^{r+1}\right\}^{\frac{r}{r+1}}\left\{\int_\Omega |v|^{r+1}\right\}^{\frac{1}{r+1}} = |u|_{r+1}^r|v|_{r+1} \tag{A.2.6}$$

e

$$\int_\Omega |u|^q|v| \leq \left\{\int_\Omega |u|^{q+1}\right\}^{\frac{q}{q+1}}\left\{\int_\Omega |v|^{q+1}\right\}^{\frac{1}{q+1}} = |u|_{q+1}^q|v|_{q+1}. \tag{A.2.7}$$

Por (A.2.1), existem constantes positivas c_3 e c_4 de modo a fazer com que as desigualdades (A.2.6) e (A.2.7) se expressem como segue,

$$\int_\Omega |u|^r|v| \leq c_3\|u\|^r\|v\|, \tag{A.2.8}$$

e

$$\int_\Omega |u|^q|v| \leq c_4\|u\|^q\|v\|, \tag{A.2.9}$$

mostrando que

$$|T_u(v)| \leq c_5\|v\|,\ \forall\ v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo $T_u \in H_0^1(\Omega)'$. Assim, J possui derivada de Gateaux no ponto u e a mesmo é dada por $DJ(u) = T_u$.

Mostremos agora que $J'(u)$ é contínua em u. Para isso, considere a sequência $(u_n) \subseteq X \subseteq L^{r+1}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$ tal que $u_n \to u \in X$ e defina a aplicação

$$B : L^{r+1}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega) + L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$$

por, $B(u) := f(x,u)$. Segue do Lema A.3 que $B = B_1 + B_2$, onde

$$B_1 : L^{r+1}(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega),\ B_2 : L^{q+1}(\Omega) \longrightarrow L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$$

são aplicações contínuas e limitadas. Note que,

$$\begin{aligned}
|(DJ(u_n) - DJ(u))v| &= \left|\int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))v\right| \\
&= \left|\int_\Omega (B(u_n) - B(u))v\right| \\
&\leq \int_\Omega |B_1(u_n) - B_1(u)||v| + \int_\Omega |B_2(u_n) - B_2(u)|.
\end{aligned}$$

Usando (A.2.1) e a Desigualdade de Hölder como anteriormente, obtemos da desigualdade acima que

$$\begin{aligned}
|(J'(u_n) - J'(u))v| &\leq |B_1(u_n) - B_1(u)|_{\frac{r+1}{r}}|v|_{r+1} + |B_2(u_n) - |B_2(u)|_{\frac{q+1}{q}}|v|_{q+1} \\
&\leq c\|v\|\left\{|B_1(u_n) - B_1(u)|_{\frac{r+1}{r}} + |B_2(u_n) - |B_2(u)|_{\frac{q+1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ na expressão acima, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} |(J'(u_n) - J'(u))v| = 0,$$

pois

$$B_1(u_n) \to B_1(u)\ ,\ B_2(u_n) \to B_2(u)$$

em $L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega)$ e $L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)$ respectivamente. Como

$$\lim_{n\to\infty} \|J'(u_n) - J'(u)\|_{H_0^1(\Omega)'} = \lim_{n\to\infty} \sup_{\|v\|\neq 0} \frac{|(J'(u_n) - J'(u))v|}{\|v\|} = 0,$$

podemos concluir que $J'(u)$ é de fato contínua em u. Portanto $J \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.

Resta mostrarmos que se as imersões do enunciado são compactas, então J' é compacto. Suponha que tais imersões sejam compactas. Então, se $(u_n) \subseteq H_0^1(\Omega)$ é uma sequência limitada, a menos de uma subsequência, $u_n \to u$ em $L^{r+1}(\Omega)$ e $L^{q+1}(\Omega)$. Então,

$$B_1(u_n) \to B_1(u) \text{ em } L^{\frac{r+1}{r}}(\Omega) \text{ e } B_2(u_n) \to B_2(u) \text{ em } L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega). \tag{A.2.10}$$

Como $J'(u) = T_u$, podemos usar (A.2.10) e concluir com um argumento análogo ao feito anteriormente que $J'(u_n) \to J'(u)$. ∎

Finalizamos esta seção com a seguinte proposição.

Proposição A.5 *Suponha que* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfaz*
(f_0) $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$;
(f_1) *existem constantes* $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$ *e* $p \in [2, 2^*)$ *tais que*

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}, \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Então o funcional $I : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por*

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u)$$

é de classe C^1.

Demonstração: Considerando o funcional

$$\begin{array}{rccl} J_0 : & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2, \end{array}$$

temos que $I' = J_0' - J'$. Como $J_0 \in C^\infty(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, pelo Teorema A.4 podemos concluir que o funcional I, é tal que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ e

$$I'(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega f(x,u)v, \ \forall \ v \in H.$$

∎

A.3 Regularidade de Solução

Nesta seção, vamos provar que sob certas condições as soluções fracas do problema (P) abaixo são clássicas. Mais especificamente provaremos a

Proposição A.6 *Suponha que* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfaz*

$(\widetilde{f_0})$ f *é Hölder contínua;*

$(\widetilde{f_1})$ *existem constantes* $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$ *tais que*

$$|f(x,s)| \leq c_1 + c_2|s|^{2^*-1}, \ \forall \ (x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}.$$

Suponha ainda que $u \in H_0^1(\Omega)$ *é solução fraca de*

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u)\,, \quad x \in \Omega \\ \quad u &= 0\,, \qquad\quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

Então u *é solução clássica, ou seja,* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Para provar a Proposição acima vamos usar o seguinte resultado devido a Brezis e Kato [BreKat].

Lema A.7 (Brezis-Kato) *Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ *um domínio limitado e suave e* $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que*

$$|f(x,u(x))| \leq a(x)(1 + |u(x)|)$$

com $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. *Se* $u \in H_0^1(\Omega)$ *é solução fraca do problema*

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u)\,, \quad x \in \Omega \\ \quad u &= 0\,, \qquad\quad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

então $u \in L^q(\Omega)$ *para todo* $q \geq 1$.

Assumindo o lema acima como verdadeiro, podemos provar a Proposição A.6 como segue.

Demonstração da Proposição A.6: Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca de (P). Então u é solução fraca do problema

$$(P)_a \qquad \begin{cases} -\Delta u &= a(x)(1+|u|)\,, \quad x \in \Omega \\ \quad u &= 0\,, \qquad\qquad\qquad x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $a(x) = f(x,u(x))/(1+|u(x)|)$. Observe que de $(\widetilde{f}_1)$

$$|a(x)| = \frac{|f(x,u(x))|}{1+|u(x)|} \leq \frac{c_1 + c_2|u(x)|^{2^*-1}}{1+|u(x)|} \leq c_1 + c_2|u(x)|^{2^*-2}.$$

Assim

$$\int_\Omega |a|^{\frac{N}{2}} \leq \int_\Omega \Big(c_1 + c_2|u|^{2^*-2}\Big)^{\frac{N}{2}} \leq \int_\Omega \Big(c_3 + c_4|u|^{\frac{N}{2}(2^*-2)}\Big) = c_3|\Omega| + c_4\int_\Omega |u|^{2^*}.$$

Daí, podemos usar imersão de Sobolev para concluir que $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$. Logo, segue do Lema A.7 que $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q \geq 1$.

Usando a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{1}{2^*-1}$ e seu conjugado, digamos r, obtemos de $(\widetilde{f}_1)$ que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x,u)|^q &\leq 2^{q-1}\int_\Omega \Big(c_1^q + c_2^q|u|^{q(2^*-1)}\Big)\\
&= k_1|\Omega| + k_2\int_\Omega |u|^{q(2^*-1)}\\
&\leq k_3 + k_2|\Omega|^r|u|_q^{q(2^*-1)}\\
&= k_3 + k_4|u|_q^{q(2^*-1)} < \infty,
\end{aligned}$$

mostrando que $f \in L^q(\Omega)$ para todo $q \geq 1$. Daí, pela Desigualdade de Calderon-Zygmund (ver [GilTru] Teoremas 9.11 e 9.13), segue que $u \in W^{2,q}(\Omega)$ para todo $q \geq 1$. Como $W^{2,q}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,m}(\overline{\Omega})$, para $q > N$ e $0 \leq m < 1 - N/q$, concluímos que $u \in C^{1,m}(\overline{\Omega})$.

Para $x, y \in \Omega$ temos

$$\begin{aligned}
|f(x,u(x)) - f(y,u(y))| &\leq k_1|(x,u(x)) - (y,u(y))|^\beta\\
&\leq k_1(|x-y| + |u(x)-u(y)|)^\beta\\
&\leq k_2\Big(|x-y|^\beta + |u(x)-u(y)|^\beta\Big)\\
&\leq k_2\Big(|x-y|^\beta + k_3|x-y|^{m\beta}\Big).
\end{aligned}$$

Assim, se $x \neq y$,

$$\frac{|f(x,u(x)) - f(y,u(y))|}{|x-y|^{m\beta}} \leq k_2\Big(|x-y|^{\beta(1-m)} + k_3\Big)$$

$$\leq \quad k_2\Big(\sup_{x\neq y}|x-y|\Big)^{\beta(1-m)} + k_4$$
$$\leq \quad k_2\Big(diam(\Omega)\Big)^{\beta(1-m)} + k_4 = k_5 < \infty,$$

visto que Ω é limitado. Portanto $f \in C^{0,m\beta}(\Omega)$. Segue então pelas estimativas de Schauder (cf. [GilTru] Teoremas 6.2 e 6.6) que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, conforme queríamos.

■

Façamos agora a prova do Lema A.7. A demonstração apresentada pode ser encontrada no livro [Str].

Demonstração do Lema A.7: Como u é solução fraca do problema (P), temos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f(x,u)v, \ \forall \ v \in H_0^1(\Omega).$$

Dados $s \geq 0$ e $R > 1$, sejam

$$m_{s,R} = \min\{|u(x)|^s, R\} \ \text{ e } \ m_{2s,R^2} = \min\{|u(x)|^{2s}, R^2\},$$

e defina $v = v_{s,R}$ por,

$$v(x) = u(x) m_{2s,R^2}.$$

Como $u \in H_0^1(\Omega)$ e m_{2s,R^2} é limitada, podemos utilizar a regra da derivada do produto e obter,

$$\nabla v(x) = m_{2s,R^2}\nabla u(x) + z(x)$$

onde

$$z(x) = \begin{cases} 2s|u(x)|^{2s}\nabla u(x) & \text{se} \quad 0 \leq |u(x)|^s < R \\ 0 & \text{se} \quad |u(x)|^s \geq R. \end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \nabla v \quad &= \quad \int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + 2s\int_{\{|u|^s<R\}} |u|^{2s}|\nabla u|^2 \\ &\leq \quad \int_\Omega a(1+|u|)|u| m_{2s,R^2}, \end{aligned}$$

isto é

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \leq \int_\Omega a(1+|u|)|u| m_{2s,R^2} \tag{A.3.1}$$

Observe agora que,

$$\begin{aligned}\nabla(m_{s,R}u(x)) &= m_{s,R}\nabla u(x) + su(x)^2|u(x)|^{s-2}\nabla u(x)\chi_{\{|u|^s<R\}}\\ &= m_{s,R}\nabla u(x) + s|u(x)|^s\nabla u(x)\chi_{\{|u|^s<R\}},\end{aligned}$$

ou seja

$$\nabla(m_{s,L}u(x)) = m_{s,R}\nabla u(x) + s|u(x)|^s\nabla u(x)\chi_{\{|u|^s<R\}}, \tag{A.3.2}$$

em que χ_A denota a função característica do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$, isto é,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in A \\ 0 & \text{se} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Portanto, fazendo $c_1 = c_1(s) = 1 + s/2$, segue de (A.3.2) que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 &\leq \int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + s^2\int_{\{|u|^s<R\}} |u|^{2s}|\nabla u|^2\\ &\leq \int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + 2s\int_{\{|u|^s<R\}} |u|^{2s}|\nabla u|^2 + s^2\int_{\{|u|^s<R\}} |u|^{2s}|\nabla u|^2\\ &= \int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + 2sc_1\int_{\{|u|^s<R\}} |u|^{2s}|\nabla u|^2\\ &\leq \int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + \frac{s}{2}\int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + 2sc_1\int_{\{|u|^s<R\}} |u|^{2s}|\nabla u|^2\\ &= c_1\int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + 2sc_1\int_{\{|u|^s<R\}} |u|^{2s}|\nabla u|^2\\ &= c_1\left\{\int_\Omega m_{2s,R^2}|\nabla u|^2 + 2s\int_{\{|u|^s<R\}} |u|^{2s}|\nabla u|^2\right\}\\ &\overset{(A.3.1)}{\leq} c_1\int_\Omega a(x)(1+|u|)|u|m_{2s,R^2}.\end{aligned}$$

Afirmação 1: $(1 + |u(x)|)|u(x)|m_{2s,R^2} \leq 2 + 2|u(x)|^2 m_{2s,R^2}$.
De fato, se $|u(x)| \leq 1$, então, $|u(x)| \leq |u(x)|^2$ e

$$(1 + |u(x)|)|u(x)|m_{2s,R^2} \leq 2|u(x)|^2 m_{2s,R^2} \leq 2 + 2|u(x)|^2 m_{2s,R^2}.$$

Por outro lado, se $|u(x)| > 1$, então $m_{2s,R^2} = |u(x)|^{2s}$ $(R > 1)$ e

$$\begin{aligned}(1 + |u(x)|)|u(x)|m_{2s,R^2} &= |u(x)|^{2s+1} + |u(x)|^2 m_{2s,R^2} \\ &\leq 1 + |u(x)|^2 m_{2s,R^2} \\ &\leq 2 + 2|u(x)|^2 m_{2s,R^2}.\end{aligned}$$

Usando a afirmação acima, a hipótese de que $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ e a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{N}{2}$ e $\frac{N}{N-2}$, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 &\leq c_1 \int_\Omega a(2 + 2|u|^2 m_{2s,R^2}) \\ &= 2c_1 \int_\Omega a + 2c_1 \int_\Omega a|u|^2 m_{2s,R^2} \\ &\leq 2c_1 |\Omega|^{\frac{N-2}{N}} |a|_{\frac{N}{2}} + 2c_1 \int_\Omega a|u|^2 m_{2s,R^2} \\ &= c_2 + 2c_1 \int_\Omega a|u|^2 m_{2s,R^2},\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 \leq c_2 + 2c_1 \int_\Omega a|u|^2 m_{2s,R^2}, \tag{A.3.3}$$

onde $c_2 = c_2(s, |a|_{\frac{N}{2}}, N, \Omega)$.

Suponha que $u \in L^{2(s+1)}(\Omega)$. Para $M > 0$, temos de (A.3.3) que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 &\leq c_2 + 2c_1 \int_{\{a<M\}} a|u|^2 m_{2s,R^2} + 2c_1 \int_{\{a\geq M\}} a|u|^2 m_{2s,R^2} \\ &\leq c_2 + 2c_1 M \int_{\{a<M\}} |u|^2 m_{2s,R^2} + 2c_1 \int_{\{a\geq M\}} a|u|^2 m_{2s,R^2}.\end{aligned}$$

Note que, se $m_{2s,R^2} = |u(x)|^{2s}$, então

$$\int_{\{a<M\}} |u|^2 m_{2s,R^2} \leq \int_\Omega |u|^{2(s+1)} < \infty,$$

caso contrário,

$$\int_{\{a<M\}} |u|^2 m_{2s,R^2} \leq R^2 \int_\Omega |u|^2 < \infty,$$

pois

$$0 \leq s \Longrightarrow 1 \leq s+1 \Longrightarrow 2 \leq 2(s+1) \Longrightarrow |u|^2 \leq |u|^{2(s+1)} \Longrightarrow \int_\Omega |u|^2 \leq \int_\Omega |u|^{2(s+1)} < \infty.$$

Logo, existe uma constante $c_3 = c_3(|u|_{2(s+1)}, M)$, tal que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 &\leq c_2 + 2Mc_1c_3 + 2c_1 \int_{\{a\geq M\}} a|u|^2 m_{2s,R^2} \\ &\leq c_4 + 2c_1 \int_{\{a\geq M\}} a|u|^2 m_{2s,R^2},\end{aligned}$$

isto é,

$$\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 \leq c_4 + 2c_1 \int_{\{a\geq M\}} a|u|^2 m_{2s,R^2}, \tag{A.3.4}$$

onde $c_4 = c_4(s, N, |a|_{\frac{N}{2}}, \Omega, |u|_{2(s+1)}, M)$. Agora, fazendo

$$\epsilon(M) = \left\{\int_{\{a\geq M\}} |a|^{\frac{N}{2}}\right\}^{\frac{2}{N}}$$

e usando novamente a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{N}{2}$ e $\frac{N}{N-2}$, (A.3.4) nos fornece a desigualdade abaixo,

$$\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 \leq c_4 + 2c_1\epsilon(M)\left\{\int_\Omega |m_{s,R}u|^{2^*}\right\}^{\frac{N-2}{N}}. \tag{A.3.5}$$

Afirmação 2: Existe uma constante c_6 dependendo apenas de N e Ω tal que,

$$\left\{\int_\Omega |m_{s,R}u|^{2^*}\right\}^{\frac{N-2}{N}} \leq c_6 \int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2.$$

Para verificarmos isso, observemos inicialmente que sendo Ω um domínio limitado, a imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$, garante a existência de uma constante positiva $c_5 = c_5(N, \Omega)$ de modo que

$$\left\{\int_\Omega |m_{s,R}u|^{2^*}\right\}^{\frac{1}{2^*}} \leq c_5\left\{\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

ou ainda,

$$\left\{\int_\Omega |m_{s,R}u|^{2^*}\right\}^{\frac{N-2}{N}} \leq c_6 \int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2,$$

onde $c_6 = c_5^2$. Logo, usando a Afirmação 2 em (A.3.5), obtemos que

$$\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 \leq c_4 + 2c_1c_6\epsilon(M)\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2.$$

Como $a \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$, então $\epsilon(M) \to 0$ quando $n \to \infty$. Logo, podemos escolher $M > 0$ suficientemente grande de modo que $2c_1c_6\epsilon(M) < 1/2$. Daí, segue da desigualdade acima que

$$\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 \leq 2c_4.$$

Agora, usando a Afirmação 2 e a desigualdade acima, temos que

$$\left\{\int_\Omega |m_{s,R}u|^{2^*}\right\}^{\frac{N-2}{N}} \leq c_6\int_\Omega |\nabla(m_{s,R}u)|^2 \leq 2c_2c_4 = c_7 = c_7(s, N, |a|_{\frac{N}{2}}, \Omega, |u|_{2(s+1)}, M).$$

Observe que c_7 não depende de L, então podemos fazer $L \to \infty$ e usar o Teorema da Convergência Dominada para obter,

$$\int_\Omega (|u|^{s+1})^{2^*} \leq c_8,$$

mostrando que $u \in L^{2(s+1)\frac{N}{N-2}}(\Omega)$.

Desse modo,

$$u \in L^{2(s+1)}(\Omega) \Longrightarrow u \in L^{2(s+1)\frac{N}{N-2}}(\Omega)$$

com $\frac{N}{N-2} > 1$. Fazendo o passo inicial $s = s_0 = 0$ e iterando o processo, obtemos que $u \in L^q(\Omega)$ para todo $q \geq 1$. ∎

Referências Bibliográficas

[Ada] Adams, R., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[AmbRab] Ambrosetti, A. e Rabinowitz, P.H., *Dual variational in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal **1560**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[BarBenFor] Bartolo, P., Benci, V. e Fortunato, D., *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity,* Nonlinear Anal **7** (1983), 981-1012.

[BreKat] Brézis, H. e Kato, T., *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials* J. Math. Pures Appl. (9) **58** (1979), 137-151.

[BreNir] Brézis, H. e Nirenberg, L., *Remarks on finding critical points*, Comm. Pure Appl. Math **44** (1991), 939-963.

[Bre] Brézis, H., *Analyse fonctionelle*, Masson, 1987.

[Cer] Cerami, G., *Un criterio di essistenza per i punti critici su varietà illimitate*, Rend. Accad. Sc. Lett. Inst. Lombardo **112** (1978), 332-336.

[Cla] Clark, D., *A variant of the Ljusternik-Schnirelman theory*, Indiana J. Math **22** (1973), 65-74.

[CosMag] Costa, D.G. e Magalhães, C.A., *Variational elliptic problems which are non-quadratic at infinity*, Nonlinear Anal **23** (1994), 1401-1412.

[Elo] Lima, E.L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[Eva] Evans, L.C.,*Partial Differential Equations*, American Math. Soc. 1998.

[GilTru] Gilbarg, D. e Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[Pal1] Palais, R.S., *Morse theory on Hilbert manifolds*, Topology **2** (1963), 229-340.

[Pal2] Palais, R.S., *Critical point theory and the minimax principle*, Nonlinear Funct. Anal. App **15** (1970), 185-212.

[PalSma] Palais, R.S. e Smale, S., *A generalized Morse theory*, Bull. Am. Math. Soc. **70** (1964), 165-171.

[Rab] Rabinowitz, P.H., *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, C.B.M.S. Regional conference series in mathematics., American mathematical society **65**, 1986.

[Sch] Schechter, M., *Linking methods in Critical Point Theory*, Birkhäuser, Boston, 1999.

[SchZou1] Schechter, M. e Zou, W., *Critical point theory and its applications*, Springer, New York, 2006.

[SchZou2] Schechter, M. e Zou, W., *Superlinear problems*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 214, No. 1, 2004.

[Sil] Silva, E.A.B., *Critical point theorems and applications to differential equations,* thesis, University of Wisconsin-Madison, 1988.

[Sma] Smale, S., *Morse theory and nonlinear gerenalization of the Dirichlet problem*, Ann. Math. **17** (1964), 307-315.

[Str] Struwe, M., *Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltoniam*, Springer-Verlag, Berlim, 1990.

[Wil1] Willem, M., *Minimax theorems*, Birkhäuser, Boston, 1996.

[Wil2] Willem, M., *Lectures on critical point theory*, Trabalho de Matemática **199** (1983), Universidade de Brasília.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo