PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

ELISABETE MARCON MELLO

ANÁLISE DE DIFICULDADES DE ALUNOS COM O ALGORITMO DA SUBTRAÇÃO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

ELISABETE MARCON MELLO

ANÁLISE DE DIFICULDADES DE ALUNOS COM O ALGORITMO DA SUBTRAÇÃO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação do* ***Prof. Dr. Saddo Ag. Almouloud.***

São Paulo

2008

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ Local e Data: ______________

À minha família,

que esteve sempre ao meu lado

e foi minha força neste caminho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todos os momentos.

Ao Professor Doutor Saddo Ag Almouloud, pela atenção, paciência e competência com que orientou esta pesquisa.

Às Professoras Doutoras Maria José Ferreira da Silva e Ana Chiummo, por participarem da banca examinadora e por suas imprescindíveis contribuições que enriqueceram este trabalho.

A todos os professores do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelos importantes ensinamentos.

À Minha família, pela compreensão e incentivo em todos os momentos de desatenção e ausência.

A todos que me ajudaram no trabalho de “garimpo” dos livros didáticos.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, pela bolsa de estudos concedida.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Ainda que eu falasse
as línguas dos homens e dos anjos,
mesmo que eu conhecesse
todos os mistérios e toda a ciência,
sem amor, eu nada seria.

(Coríntios 13, 1-2)

RESUMO

Neste trabalho levantamos as dificuldades enfrentadas por alunos do Ensino Fundamental com o uso do algoritmo do empréstimo (decomposição do minuendo) para efetuar subtrações. Fazemos uma comparação entre o algoritmo do empréstimo e o algoritmo da compensação (adição de quantidades iguais no minuendo e no subtraendo) a fim de saber se, com esse último, poderíamos diminuir as dificuldades dos alunos. Por meio de um estudo diagnóstico constatamos que os alunos cometem muitos erros ao utilizar o algoritmo do empréstimo, principalmente quando são necessários vários empréstimos para efetuar a subtração. Verificamos que essa dificuldade é encontrada em todas as séries do Ensino Fundamental II e se estende ao Ensino Médio. Verificamos sessenta títulos de livros didáticos e cinco apostilas de sistemas educacionais de segunda série do Ensino Fundamental e todos propõem o uso do algoritmo do empréstimo para efetuar as subtrações com reserva. Os seis títulos destinados à formação de professores, que analisamos, também privilegiam o uso do algoritmo do empréstimo. A maioria dos professores analisados reconhece que os alunos têm dificuldades com as subtrações que envolvem vários empréstimos. Aplicamos uma seqüência didática a alunos de quinta série do Ensino Fundamental a fim de introduzir o uso do algoritmo da compensação. Baseados nos resultados de nossa pesquisa, acreditamos que o uso do algoritmo da compensação poderia ser mais eficiente do que o uso do algoritmo do empréstimo, contornando problemas que os alunos enfrentam para efetuar subtrações. Nossa pesquisa está fundamentada na teoria dos campos conceituais de Gerard Vergnaud e na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau.

Palavras chave: Subtração, Algoritmo, Teoria dos Campos Conceituais, Esquemas.

ABSTRACT

This research analyzed the difficulties that students from Basic Education face up to the use of the algorithm of the borrowing (decomposition of the minuend) to solve subtractions operations. Therefore, it was made a comparison between the algorithm of the borrowing and algorithm of the compensation (addition of equal quantities in the minuend and the subtrahend) in order to check if using the algorithm of compensation it could diminish their mistakes. Once in the diagnosis study we found out that students make many mistakes when they have to use the algorithm of the borrowing, mainly when it is necessary to proceed some borrowings to solve the operation. This difficulty was found out in all grades from Basic Education 2 and sometimes it extends to High School level. It was analyzed sixty didactic books and five pedagogical publications from private schools systems of the second grade and we realized the use of the algorithm of the borrowing to solve the subtractions with reserve in all of them. Besides, we analyzed six books for teacher's formation and the same procedure was adopted. Most of teachers who were interviewed recognized that students have difficulties with the subtractions that involve some borrowings. We applied a didactic sequence for fifth grade students in order to introduce the use of the algorithm of the compensation. Based on results of our research, we believed that the use of the algorithm of the compensation could be more efficient for the subtraction problems faced to the students. Our research is based on the Theory of the conceptual fields of Gerard Vergnaud and on the Theory of the Situations of Brousseau.

Keywords: Subtraction; Algorithm; Theory of the Conceptual Fields; Projects.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.. 13

CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA.. 15

1.1 JUSTIFICATIVA.. 15

1.2 QUESTÃO DE PESQUISA.. 16

1.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.. 17

1.4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA... 19

1.4.1 Vergnaud e a Teoria dos Campos Conceituais.. 19

1.4.2 Brousseau e a Teoria das Situações Didáticas.. 23

CAPÍTULO 2: ESTUDOS PRELIMINARES.. 27

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.. 27

2.1.1 Pesquisas relacionadas à Teoria dos Campos Conceituais ou à subtração.. 27

2.1.2 Pesquisas de Brousseau sobre multiplicação e divisão............................. 31

2.2 ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO SUBTRAÇÃO.. 45

2.2.1 Subtrair: tirar, comparar e completar.. 45

2.2.2 Os algoritmos da subtração... 49

2.2.3 Comparando os algoritmos da subtração.. 54

2.2.4 A subtração no algoritmo da divisão... 57

2.3 DIAGNÓSTICO DE DIFICULDADES DE ALUNOS 63

2.3.1 Estudo das dificuldades dos alunos com o uso do algoritmo da subtração.. 63

2.3.2 Diagnóstico de dificuldades em relacionar a subtração às idéias de tirar, comparar e completar.. 68

2.4 ANÁLISE DA CONCEPÇÃO DE PROFESSORES.. 71

2.5 A SUBTRAÇÃO EM DOCUMENTOS OFICIAIS... 75

2.5.1 Verificação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)......................... 75

2.5.2 Verificação da Proposta Curricular de São Paulo.. 82

2.6 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS.. 83

2.6.1 Análise dos livros didáticos do Ensino Fundamental.................................. 83
2.6.2 Análise de livros didáticos destinados à formação do professor.................. 89
2.6.3 O uso do material dourado e do cartaz valor de lugar.................................... 93

CAPÍTULO 3: EXPERIMENTO: "CRIANDO NOVOS ESQUEMAS".................... 97
3.1 DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO.. 97
3.2 PARTE 1: DIAGNÓSTICO.. 98
3.2.1 Análise a priori.. 99
3.2.2 Aplicação e análise a posteriori da Parte 1... 101
3.3 PARTE 2: A INVARIÂNCIA DA DIFERENÇA.. 103
3.3.1 Análise a priori.. 103
3.3.2 Aplicação e análise a posteriori da Parte 2.. 107

3.4 PARTE 3: O ALGORITMO DA COMPENSAÇÃO... 110
3.4.1 Análise a priori.. 110
3.4.2 Aplicação e análise a posteriori da Parte 3... 112

3.5 PARTE 4: O USO DO ALGORITMO DA COMPENSAÇÃO.................................... 113
3.5.1 Análise a priori.. 113
3.5.2 Aplicação e análise a posteriori da Parte 4.. 115

CONSIDERAÇÕES FINAIS.. 121
REFERÊNCIAS.. 126
ANEXO A - Livros didáticos analisados.. 129
APÊNDICE A - Questionário dos Professores.. 134
APÊNDICE B - Seqüência didática – 1ª parte.. 133
APÊNDICE C - Seqüência didática – 2ª parte.. 136
APÊNDICE D - Seqüência didática – 3ª parte.. 139
APÊNDICE E - Seqüência didática – 4ª parte.. 140

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Multiplicação em quadro – fase 1 ... 33
Figura 2: Multiplicação em quadro – fase 2 ... 34
Figura 3: Multiplicação em quadro – fase 3 ... 34
Figura 4: Multiplicação em quadro – fase 4 ... 35
Figura 5: Multiplicação em quadro – fase 5 ... 35
Figura 6: Divisão em quadro ... 37
Figura 7: Divisão em quadro ... 38
Figura 8: Divisão em quadro ... 39
Figura 9: Divisão em quadro ... 39
Figura 10: Divisão em quadro ... 40
Figura 11: Divisão em quadro ... 40
Figura 12: Divisão em quadro ... 40
Figura 13: Divisão em quadro ... 41
Figura 14: Divisão em quadro ... 41
Figura 15: Divisão em quadro ... 42
Figura 16: Fichas de cartolina a serem utilizadas nas atividades ... 49
Figura 17: Ábaco de papel ... 50
Figura 18: Atividade para introduzir o algoritmo do empréstimo ... 50
Figura 19: Atividade para introduzir o algoritmo do empréstimo ... 51
Figura 20: Atividade para introduzir o algoritmo da compensação ... 52
Figura 21: Atividade para introduzir o algoritmo da compensação ... 53
Figura 22: Algoritmo divisão – processo breve ... 59
Figura 23: Algoritmo da divisão – processo breve ... 59
Figura 24: Algoritmo da divisão – processo breve ... 62
Figura 25: Erros cometidos por um aluno da 5ª série ... 66
Figura 26: Erro cometido por um aluno da 5ª série ... 66
Figura 27: Erro cometido por um aluno da 8ª série ... 66
Figura 28: Erro cometido por um aluno da 7ª série ... 67
Figura 29: Erros de um aluno com o uso do algoritmo do empréstimo ... 70
Figura 30: Erros de um aluno com o uso do algoritmo do empréstimo ... 70
Figura 31: Erros de um aluno com o uso do algoritmo do empréstimo ... 71
Figura 32: subtração efetuada por um professor ... 73
Figura 33: Resoluções de problemas a serem analisadas pelos professores ... 74
Figura 34: Algoritmo do empréstimo ... 84
Figura 35: Algoritmo do empréstimo ... 85
Figura 36: Algoritmo do empréstimo ... 85
Figura 37: Algoritmo do empréstimo ... 86
Figura 38: Algoritmo do empréstimo ... 86
Figura 39: Algoritmo do empréstimo ... 87
Figura 40: Introdução à subtração ... 87
Figura 41: Algoritmo da subtração ... 88
Figura 42: Algoritmo do empréstimo ... 89
Figura 43: Exercício apresentando os dois algoritmos ... 90
Figura 44: Algoritmo do empréstimo e da compensação ... 91
Figura 45: Algoritmo da compensação ... 92
Figura 46: Algoritmo da compensação ... 93
Figura 47: Material dourado ... 94
Figura 48: Cartaz valor de lugar ... 95
Figura 49: Resposta de um aluno à questão 2 da parte 1 da seqüência didática ... 101
Figura 50: Resposta de um aluno à questão 2 da parte 1 da seqüência didática ... 102

Figura 51: Respostas de um aluno da 5ª série.. 103
Figura 52: Respostas de um aluno da 5ª série.. 116
Figura 53: Resposta de um aluno da 5ª série.. 119

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Exemplos de situações do campo aditivo.. 23

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Resumo dos resultados do teste com alunos de uma escola pública.............. 65
Tabela 2: Resumo dos erros cometidos pelos alunos por questão e série....................... 65

INTRODUÇÃO

Nosso interesse pelo estudo do algoritmo da subtração surgiu de nossas observações, em sala de aula, em relação às dificuldades que os alunos enfrentam ao realizar essa operação, principalmente quando é necessário fazer vários empréstimos. Percebemos a existência dessa dificuldade em alunos da quinta série ao Ensino Médio e, ainda, observamos que muitas vezes o aluno utiliza os procedimentos corretos para a resolução de um problema, mas erra ao efetuar as subtrações, o que compromete o resultado final de seu trabalho. Assim surgiram as indagações que passaram a nos inquietar. Se o algoritmo do empréstimo provoca tantos erros, por que ele é o mais utilizado, visto que todos os nossos alunos utilizavam esse algoritmo? Será que realmente ele é o mais utilizado ou esse fenômeno ocorria apenas na região em que estávamos lecionando? Se usássemos o algoritmo da compensação poderíamos diminuir esses erros? Dessa forma, ao surgir a oportunidade de iniciar essa pesquisa, esse foi o tema por nós escolhido.

Neste trabalho analisamos o algoritmo do empréstimo e o algoritmo da compensação e comparamos os procedimentos envolvidos na execução de cada um deles. Estudamos as dificuldades de alunos da quinta à oitava série do Ensino Fundamental ao utilizarem o algoritmo do empréstimo e verificamos se essas dificuldades continuam existindo no Ensino Médio.

A fim de responder a questão: “se usássemos o algoritmo da compensação poderíamos diminuir os erros dos alunos do Ensino Fundamental ao efetuar as subtrações?”, preparamos uma seqüência didática, para introdução do algoritmo da compensação a alunos de quinta série (sexto ano), observando as fases da aprendizagem descritas por Brousseau (1996), e analisamos suas reações diante de um novo método para resolver algo que eles já possuem esquemas para resolver.

Nossa pesquisa está fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996), especialmente no enfoque dado por ele ao conceito de esquema. Para ele algoritmos são esquemas, ou ainda, os esquemas são objetos do mesmo tipo lógico que os algoritmos. De acordo com Vergnaud (1996) são as situações que dão sentido aos conceitos matemáticos, mas o sentido não está nas próprias situações. O sentido é uma relação do sujeito com as situações e os significantes. Mais precisamente, são os esquemas evocados, no sujeito individual, por uma situação, que constitui o sentido dessa situação para esse indivíduo.

Estruturamos nosso trabalho de acordo com alguns pressupostos da engenharia didática (Artigue, 1996). No capítulo 1 apresentamos nossa questão de pesquisa e nossa fundamentação teórico-metodológica.

No capítulo 2 buscamos fazer nossas análises prévias. Trazemos uma revisão bibliográfica das pesquisas relacionadas à subtração ou à Teoria dos Campos Conceituais. Apresentamos dois algoritmos da subtração e os comparamos. Fazemos um diagnóstico das dificuldades dos alunos com o uso do algoritmo do empréstimo e analisamos as concepções dos professores em relação a essas dificuldades. Estudamos os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, 1998) e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1991) a fim de verificar o enfoque dado à subtração nesses documentos oficiais e analisamos os livros didáticos para identificar qual algoritmo eles propõem para a resolução das subtrações e como o apresentam.

No capítulo 3 apresentamos nosso experimento, que consiste na aplicação de uma seqüência didática e suas análises.

Em nossas considerações finais fazemos uma síntese dos resultados de nossa pesquisa e apresentamos nossas perspectivas em relação à continuidade deste estudo.

CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA

Neste capítulo apresentaremos os principais motivos que nos levaram a escolher como tema de nossa pesquisa a subtração e quais as questões que tentaremos responder com nosso trabalho. Apresentaremos também os procedimentos metodológicos que seguiremos com o intuito de atingir esse objetivo.

1.1 JUSTIFICATIVA

Quando comecei a lecionar para o Ensino Fundamental em uma escola pública estadual, percebi que o algoritmo que eu usava para efetuar a subtração não era o mesmo de meus alunos. Eles usavam o método do empréstimo (decomposição do minuendo), e eu o método do "abaixa um" (subtração por compensação). Tratei logo de me adaptar e usar o método que eles usavam, o que faço até hoje, mas percebi que os alunos erram muito com esse método quando um só empréstimo não é suficiente para efetuar a subtração. Fiquei, então, a me questionar porque esse método havia sido escolhido pela maioria das escolas em que meus alunos haviam estudado os primeiros ciclos, visto que não encontrei nenhum aluno que usasse outro método.

Dessas observações começou a surgir o interesse pelo ensino da subtração, mais especificamente, pelo algorItimo utilizado para resolver as subtrações com reserva ou reagrupamento.

É muito importante a criança dar significado à subtração, associando-a às idéias de tirar, comparar e completar. A partir do momento em que a criança é capaz de operar a subtração em sua fase elementar, é importante mostrar a ela que existem técnicas que facilitam a execução dessa operação, principalmente à medida que comece a trabalhar com números de maior valor.

É importante ressaltar que o algoritmo é um facilitador e não impede que o aluno entenda o fundamento da operação, além de ser um complemento importante que deve facilitar o dia-a-dia do indivíduo.

Segundo Vergnaud (1996), o funcionamento cognitivo do aluno comporta operações que se automatizam progressivamente e essa automatização não impede que o sujeito conserve o controle das condições nas quais determinada operação é ou não apropriada, e as condutas automatizadas se organizam por meio de um esquema único. Então, quando ensinamos um algoritmo, estamos induzindo o aluno a criar um determinado esquema, que será por ele mobilizado, provavelmente, daí em diante, sem mais questionamentos. Se vamos automatizar alguns procedimentos, criar esquemas, é importante que eles sejam os mais eficientes possíveis.

A partir do momento que a criança aprendeu a trabalhar com a subtração, esta se torna uma ferramenta para que ela consiga resolver problemas. Se toda vez que alguém for efetuar uma subtração tiver que lembrar de todos os conceitos envolvidos para executá-la, isso acaba se tornando um obstáculo para o desenvolvimento de novos conhecimentos. O algoritmo, como uma ferramenta, deve estar sempre à mão, e seu uso deve ser o mais simples possível. Só se pára para pensar na ferramenta quando esta é o objeto de estudo.

Devemos enfatizar que não é nosso objetivo discutir, neste trabalho, em que momento o uso do algoritmo deve ser introduzido. Pretendemos investigar se a escolha do algoritmo pode influenciar no desempenho dos alunos e qual o melhor algoritmo a ser utilizado.

1.2 QUESTÃO DE PESQUISA

Observamos que a grande maioria de nossos alunos utiliza o método do empréstimo para efetuar as subtrações, e comete muitos erros. Será que se eles usasem o algoritmo da compensação cometeriam menos erros?

Assim, nossa questão de pesquisa é:

- Se usássemos o algoritmo da compensação poderíamos diminuir os erros de alunos do Ensino Fundamental ao efetuarem subtrações?

Nossa hipótese é que a escolha do algoritmo pode influenciar no desempenho dos alunos ao trabalharem com a subtração.

Em nosso trabalho consideraremos dois algoritmos da subtração:

- recorrendo à ordem superior ou decomposição do minuendo (método do empréstimo) e

- método da compensação (“abaixa um”).

Nosso principal objetivo ao procurar essa resposta é encontrar caminhos para superar, ou pelo menos minimizar, as dificuldades enfrentadas por alunos do Ensino Fundamental ao se depararem com a matemática, especificamente as dificuldades relacionadas à subtração. Procuraremos identificar quais são as dificuldades enfrentadas por esses alunos ao utilizarem o algoritmo do empréstimo e analisaremos se algumas dessas dificuldades poderiam ser superadas utilizando o algoritmo da compensação.

1.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Segundo Booth (2000), pesquisar é simplesmente reunir informações necessárias para encontrar resposta para uma pergunta e assim chegar à solução de um problema. Uma definição simples para algo tão complexo, pois, quais são as informações necessárias que devem ser reunidas? E quando as encontramos, como podemos ter certeza que elas nos levam à solução correta?

É esse caminho que começaremos a trilhar, em busca da resposta à nossa questão de pesquisa mas, como segundo Bachelard (1996), o homem movido pelo espírito científico deseja saber para melhor questionar, provavelmente, ao final desse caminho, teremos novas questões a serem respondidas.

Adotaremos como metodologia alguns pressupostos da engenharia didática. Segundo Artigue (1996), a engenharia didática é inserida no quadro teórico da Educação Matemática, com a finalidade de fornecer ferramentas para analisar as situações didáticas, objeto de estudo das pesquisas na Didática da Matemática, incluindo uma parte experimental. O processo experimental da engenharia didática é composto por quatro diferentes fases:

• **Análises prévias:** a fase de concepção apóia-se num quadro teórico didático geral, em conhecimentos didáticos já adquiridos, em estudos prévios de programas, de propostas curriculares e de livros didáticos e em estudos históricos e epistemológicos dos conteúdos visados.

• **Concepção e análise a *priori* das situações didáticas:** nesta fase o investigador faz escolhas didáticas, adequadas à sala de aula, para a concepção de sua seqüência de atividades e inicia a análise a *priori* das mesmas. É uma análise matemática da situação que antecipa o funcionamento didático decorrente das escolhas feitas.

• **A experimentação e aplicação da seqüência:** é o momento da organização e aplicação da seqüência de atividades planejadas.

• **Análise a *posteriori*:** é a interpretação das informações extraídas da experimentação e da seqüência de ensino e que levam a validar ou não as hipóteses de pesquisa. É uma análise baseada nos protocolos de observação, em referência à análise a *priori*. É feita para ligar os fatos observados com os objetivos definidos a *priori* na concepção das atividades. A comparação entre a análise a *priori* e a análise a *posteriori* permitirá validar ou não a questão de pesquisa.

Iniciaremos nosso trabalho com um estudo diagnóstico a fim de verificar a dificuldade dos alunos com o uso do algoritmo do empréstimo (decomposição do minuendo) para efetuar subtrações. Esse estudo consiste na resolução de algumas subtrações, nas quais serão necessários um ou mais empréstimos. Tentaremos identificar se os alunos têm dificuldades em relacionar a subtração às idéias de tirar comparar e completar, solicitando que resolvam três problemas, cada um deles relacionado a uma dessas três idéias.

Faremos uma análise de livros didáticos verificando qual algoritmo eles usam para efetuar subtrações com recurso e como o apresentam. Verificaremos se os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1992) fazem alguma referênca aos algoritmos da subtração. Examinaremos o material dourado com o propósito de descobrir se a disseminação do seu uso pode ter influenciado na escolha do algoritmo do empréstimo para efetuar as subtrações pelos professores e livros didáticos.

Por meio de um questionário, entrevistaremos professores de escolas públicas e privadas a fim de verificar se eles conhecem os dois algoritmos, qual eles usam e como analisam alguns erros dos alunos.

Organizaremos uma sequência didática a fim de introduzir o algoritmo da compensação para efetuar subtrações a alunos de quintas séries.

1.4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Abordaremos a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, que sustentam nossa pesquisa. Analisaremos os algoritmos da subtração e sua apropriação pelo aluno de acordo com a noção de esquema de Vergnaud (1996) e organizaremos nossa sequência didática observando as fases da aprendizagem descritas por Brousseau (1996).

1.4.1 Vergnaud e a Teoria dos Campos Conceituais

Nosso trabalho será fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais que foi desenvolvida por Gerard Vergnaud, a fim de fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas.

Segundo Vergnaud (1996), é por meio das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança. Ele distingue duas classes de situações:

— uma em que o sujeito dispõe, no seu reportório, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;

— e outra na qual o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso.

Vergnaud (1996) afirma que o conceito de esquema é interessante para as duas classes de situações, mas não funciona da mesma maneira nos dois casos. No primeiro caso, as condutas do sujeito são, em grande parte, automatizadas e organizadas por meio de um esquema único; no segundo caso, há um desencadeamento sucessivo de diversos esquemas, que podem entrar em competição e que, para chegarem à solução procurada, devem ser acomodados, descombinados e recombinados e este processo é sempre acompanhado por descobertas. Ele chama de esquema a "organização invariante da conduta para uma dada classe de situações" e diz que é nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos-em-ato do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operatória. O esquema é composto por regras de ações e de antecipações, e gera uma seqüência de ações visando atingir determinado objetivo.

De acordo com Vergnaud (1996) o funcionamento cognitivo do aluno comporta operações que se automatizam progressivamente e decisões conscientes que permitem considerar valores particulares das variáveis da situação. A confiabilidade do esquema para o sujeito está no conhecimento, explícito ou implícito, que ele tem das relações entre o algoritmo e as características do problema a resolver. Para ele a automatização é evidentemente uma das manifestações mais visíveis do caráter invariante da organização da ação e essa automatização não impede que o sujeito conserve o controle das condições nas quais determinada operação é ou não apropriada. Sendo assim, todas as nossas condutas comportam uma parte de automaticidade e uma parte de decisão consciente.

Para o autor (1996) os algoritmos são esquemas, ou ainda, os esquemas são objetos do mesmo tipo lógico que os algoritmos e quando uma criança utiliza um esquema ineficaz para determinada situação, a experiência a conduzirá, a mudar ou alterar o esquema. Citando Piaget, Vergnaud (1996) diz que os esquemas se encontram no centro do processo de adaptação das estruturas cognitivas: assimilação e acomodação. Portanto, quando ensinamos um algoritmo da subtração, estamos induzindo o aluno a criar determinado esquema.

Vergnaud (1996) denomina por “conceito-em-ato” e “teorema-em-ato” os conhecimentos contidos nos esquemas e os designa, igualmente, por “invariantes operatórios”. Segundo ele, conceitos e teoremas explícitos constituem apenas a parte visível do iceberg da conceituação: sem a parte escondida, constituída pelos invariantes operatórios, esta parte visível nada seria. Ou seja, para Vergnaud (1996) a operacionalidade de um conceito deve ser experimentada por meio de situações variadas, e o investigador deve analisar uma grande variedade de condutas e de esquemas para compreender em que consiste, do ponto de vista cognitivo, este ou aquele conceito.

O autor (1996) considera um campo conceitual como um conjunto de situações, composto também por conceitos e teoremas, por exemplo, o campo conceitual das estruturas aditivas é, ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas.

Segundo Vergnaud (1996), são as situações que dão sentido aos conceitos matemáticos, mas o sentido não está nas próprias situações. O sentido é uma relação do sujeito com as situações e os significantes (conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento). Mais precisamente, são os esquemas (as condutas e a sua organização) evocados, no sujeito individual, por uma situação ou um significante que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para esse indivíduo. O sentido da adição para um sujeito individual é o conjunto dos esquemas que ele pode pôr em prática para tratar as situações com as quais é confrontado, e que implicam a idéia de adição, bem como o conjunto dos esquemas que ele pode pôr em prática para operar sobre os símbolos numéricos, algébricos, gráficos e de linguagem que representam a adição. Uma dada situação ou um simbolismo particular não evoca, num indivíduo, todos os esquemas disponíveis. Quando se diz que determinada palavra tem determinado sentido, remete-se, na realidade, para um subconjunto de esquemas, operando assim uma restrição no conjunto dos esquemas possíveis.

De acordo com Nunes (2001), os esquemas de ação a partir dos quais a criança começa a compreender que a adição e a subtração são representações das ações de juntar e retirar, respectivamente, permitem à criança resolver, de modo prático, questões sobre adição e subtração. Ela cita como exemplo que, se pedirmos a uma criança de 6 anos para imaginar que ela tem 3 bombons e sua avó lhe dá mais 2 bombons, com quantos ela vai ficar, a criança provavelmente vai usar os dedos para representar os bombons, esticando 3 dedos de uma das mãos, 2 da outra depois vai contar os dedos em seqüência, e responder "cinco bombons". Essa solução é obtida por meio de um esquema de ação: o esquema de juntar. Essa forma de resolução do problema é chamada de "esquema de ação" porque a criança não estava contando bombons. Portanto, o que a criança considerou foi a ação, não os objetos que ela usou para resolver o problema. Esse esquema de ação pode ser expresso por uma afirmativa, que provavelmente a criança compreende apenas de modo implícito, sem ser capaz de verbalizar: o todo é igual à soma das partes. É o que Vergnaud chamou de "teoremas em ação" ou “teoremas em ato”.

Para as estruturas aditivas, Vergnaud (1996), identifica seis relações de base, a partir das quais é possível engendrar todos os problemas de adição e de subtração. São elas:

- A composição de duas medidas numa terceira;
- A transformação (quantificada) de uma medida inicial numa medida final;
- A relação (quantificada) de comparação entre duas medidas;
- A composição de duas transformações;
- A transformação de uma relação;
- A composição de duas relações.

Segundo o autor, essa classificação das situações resulta de considerações matemáticas e psicológicas, sendo que algumas das distinções só são interessantes porque envolvem diferenças significativas na maneira como os alunos se servem delas para tratar as situações assim diferenciadas. Vejamos, no quadro 1, alguns exemplos de situações do campo aditivo, baseados nas relações de base descritas por Vergnaud (1996):

Quadro 1: exemplos de situações do campo aditivo

Situação	Representação
- Tinha 10, ganhou 4, com quanto ficou ?	a + b = ?
- Quanto tinha se ganhou 4 e ficou com 14?	? + b = c
- Quanto tinha se perdeu 3 e ficou com 7?	? - b = c
- Numa sala com 20 pessoas, 12 são homens, quantas são as mulheres?	a + ? = c ou ? + b = c
- Um tem 8 o outro tem 5 a mais. Quanto tem o outro?	a + b = ?
- Tinha 10, ganhou 3, depois ganhou 7. Com quanto ficou?	a + b + c = ?
- Tinha 10, perdeu 3, depois ganhou 7. Com quanto ficou?	a - b + c = ?
- Tinha 10, ganhou 3, depois perdeu 7. Com quanto ficou?	a + b - c = ?

Podemos verificar, no quadro 1, a importância de variar o lugar em que a incógnita é colocada, ampliando as opções de resolução, possibilitando ao aluno raciocínios diferentes e ajudando-o a entender o sentido das operações.

Embasados pelo trabalho de Vergnaud (1996), analisaremos, em nossa pesquisa, as dificuldades dos alunos em utilizar a subtração em várias situações do campo canceitual aditivo, principalmente no que diz respeito em relacioná-la às idéias de tirar, comparar e completar. Verificaremos se o algoritmo utilizado pode facilitar, ou não, esse relacionamento, e quais os conhecimentos em ato podem estar implícitos em cada um dos algoritmos que apresentaremos neste trabalho.

1.4.2 Brousseau e a Teoria das Situações Didáticas

Segundo Almouloud (2007) a Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida por Guy Brousseau, pesquisador francês da Universidade de Bordeaux e busca criar um modelo da interação entre o aprendiz, o saber e o ambiente (*milieu*) no qual a aprendizagem deve se desenvolver. O seu objetivo é caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo freqüentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. O objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática na qual são identificadas as interações estabelecidas entre professor, aluno e saber.

Para a teoria das situações, de acordo com Almouloud (2007), o aluno aprende adaptando-se a um "*milieu*" que é fator de dificuldades, de contradições, de desequilíbrio, um pouco como acontece na sociedade humana. Este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se por meio de respostas novas, que são a prova da aprendizagem. Um "*milieu*" onde não haja intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos pelo aprendiz. Para que haja essa intencionalidade didática, o professor deve criar e organizar um "*milieu*" no qual serão desenvolvidas as situações suscetíveis de provocar essas aprendizagens. Esse "*milieu*" e essas situações devem engajar fortemente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Brousseau (1996), o objeto central da teoria das situações é a <u>situação didática</u> definida como o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo "*milieu*" (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição. A <u>situação adidática</u>, como parte essencial da situação didática, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar ao aluno condições favoráveis para a apropriação do novo saber que se deseja ensinar.

De acordo com Almouloud (2007) em uma situação adidática o problema matemático deve ser escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria. Isso para que ele adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo às razões didáticas (o aluno aprende por uma necessidade própria e não por uma necessidade aparente do professor ou da escola). O professor assume o papel de mediador e cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos.

Segundo Brousseau (1996), uma situação fundamental constitui um grupo restrito de situações adidáticas cuja noção a ensinar é a resposta considerada a mais adequada e permitem introduzir os conhecimentos em sala de aula numa epistemologia propriamente científica.

O autor enfatiza que uma situação didática se caracteriza pela interação do professor com o problema que ele propõe ao aluno. O professor procura fazer a devolução ao aluno de uma situação adidática na qual o aluno interaja de forma mais rica e independente possível. A noção de devolução é definida como o ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem e aceitar as conseqüências dessa transferência.

Afirma ainda que uma situação didática é caracterizada pelo "*milieu*", e este é organizado a partir da escolha das variáveis didáticas, que são aquelas para as quais a mudança de valores provoca modificações nas estratégias, o que as torna um ponto importante no estudo de modelos de aprendizagem. Uma primeira escolha das variáveis e dos valores a serem assumidos por elas pode servir à devolução do problema e ao encaminhamento de uma estratégia básica. Novas escolhas poderão ser necessárias para o desenvolvimento da situação adidática pretendida.

Para analisar o processo da aprendizagem, a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996) decompõe esse processo em quatro fases diferentes. Nessas fases interligadas, pode-se observar momentos de ação, de formulação, de validação e de institucionalização.

Dialética da ação: consiste em colocar o aprendiz numa situação de ação, apresentando-lhe um problema cuja melhor solução é o conhecimento a ensinar. O aluno deve poder agir sobre essa situação e ela deve lhe retornar informações sobre sua ação.

Dialética de formulação: nesta fase o aluno troca informações com uma ou várias pessoas. É o momento em que o aluno ou grupo de alunos explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas que ele utilizou e a solução encontrada.

Dialética da validação: é nesse momento que o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado submetendo a mensagem matemática ao julgamento de um interlocutor.

Dialética da institucionalização: são situações em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. Depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos.

As dialéticas da ação, formulação e validação fazem parte da fase adidática da situação e a institucionalização da fase didática.

Neste trabalho prepararemos uma seqüência didática a fim de introduzir, a alunos da quinta série do Ensino Fundamental, o algoritmo da subtração pelo método da compensação. Pretendemos organizar esta seqüência, escolhendo com cuidado as variáveis didáticas, de modo a conduzir o aluno a percorrer as fases do processo de aprendizagem descritas por Brousseau (1996) e assim poder vivenciar momentos de ação, formulação, validação e institucionalização.

CAPÍTULO 2
ESTUDOS PRELIMINARES

Neste capítulo faremos uma revisão bibliográfica e estudaremos o objeto matemático subtração abordando as três idéias relacionadas a ele: tirar, comparar e completar. Por meio de testes diagnósticos, investigaremos a verdadeira dimensão dos problemas enfrentados pelos alunos com o uso do algoritmo do "empréstimo" para efetuar as subtrações. Estudaremos também alguns documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo e analisaremos livros didáticos.

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Faremos um levantamento de algumas pesquisas relacionadas à Teoria dos Campos Conceituais ou ao estudo da subtração e apresentaremos seus principais resultados. Destacaremos uma pesquisa realizada por Brousseau (2007) sobre os algoritmos da multiplicação e divisão.

2.1.1 Pesquisas relacionadas à Teoria dos Campos Conceituais ou à subtração

Franchi (1977) faz um estudo sistemático das dificuldades encontradas pelas crianças de 1ª série do primeiro grau (Ensino Fundamental) no que diz respeito à aprendizagem da ligação entre adição e subtração e na resolução de problemas associados a estas operações. Em suas análises dos procedimentos de resolução associados pelos alunos às diferentes situações de subtração propostas, observou que em algumas fórmulas, tais como $c - x = a$, $x - b = c$, as freqüências de erros de cálculo eram bastante elevadas.

Canoas (1997) desenvolve um estudo sobre as operações de multiplicação e divisão no Campo Conceitual das estruturas multiplicativas de Vergnaud. Seu trabalho está mais direcionado a estudar o professor, diferente do nosso que tem como enfoque o aluno, mas, em sua fundamentação teórica, fez um levantamento relacionando os estudos de Piaget e Vigotsky à teoria de Vergnaud muito interessante à nossa pesquisa.

Segundo a autora (1997) a teoria de Piaget é talvez aquela que maior influência tem sobre a teoria de Vergnaud, pois, vários conceitos que nasceram dentro do corpo teórico de sua epistemologia genética ganharam mais profundidade a partir da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud. Acrescenta que uma explicação para isso pode estar no fato de que, enquanto Piaget centrava sua atenção para o problema da gênese do conhecimento, Vergnaud focava seu estudo para a formação e desenvolvimento matemático. Segundo Piaget (apud Canoas, 1997) é na passagem do período sensório motor (aproximadamente 0 a 2 anos) para o período pré-operacional (aproximadamente 2 a 7 anos), em que o sujeito começa a desenvolver a noção de objeto, tornando-se capaz de criar esquemas de pensamento, que surge a função simbólica. Piaget (apud Canoas, 1997) chama de esquemas as organizações de ações, no nível do pensamento, que podem ser transferidas ou generalizadas para situações análogas. Assim, é a partir do surgimento da função simbólica que o sujeito torna-se capaz de formar um quadro completo de uma situação, graças à evolução de sua capacidade de representar.

Em relação aos estudos de Vygotsky, Canoas (1997) ressalta sua busca pelo entendimento da formação do conceito. Afirma que para Vygotsky um conceito deve pressupor o desenvolvimento de várias funções intelectuais: atenção deliberada, memória lógica, abstração, entre outras; e que é no aprendizado que encontramos as principais fontes da formação dos conceitos que nos levam a um desenvolvimento cognitivo. Vygotsky (apud Canoas, 2007) considera os conceitos sob dois pontos de vista: o conceito espontâneo e o conceito científico. Os conceitos espontâneos são aqueles que o sujeito desenvolve a partir de sua realidade, com sua atenção voltada ao objeto a que se refere. Já nos conceitos científicos, as relações entre o sujeito e o objeto são mediadas por um outro conceito. Canoas (1997) interpreta que, para Vygotsky, esses dois tipos de conceitos devem funcionar como uma rua de mão dupla, onde o sujeito, durante seu processo de aprendizagem, deve caminhar nos dois sentidos.

Em seu trabalho Canoas (1997) procurou entender como o professor trabalha com as continuidades e descontinuidades de raciocínio, e que relações ele estabelece entre os termos presentes nesse campo. Seus resultados apontam duas perspectivas desse professor:

• Os professores têm uma visão estreita do campo conceitual multiplicativo, principalmente no que diz respeito à exploração das situações presentes nesse campo.

• Os professores tendem a utilizar conceitos e procedimentos dentro de um domínio de validade que não são verdadeiros em outros domínios sem, contudo, ter um entendimento claro do que é possível e do que não é possível ser conectado nesses domínios.

Cunha (1997) elaborou e aplicou uma seqüência de atividades com alunos de quinta e sétima séries da rede particular de ensino, com a finalidade de investigar as concepções dos alunos de que a "multiplicação sempre aumenta" e "a divisão sempre diminui" na busca de uma expansão do Campo Conceitual multiplicativo desses alunos. Na seqüência de atividades, a autora trabalhou situações multiplicativas e problemas, no domínio dos inteiros positivos e dos racionais, colocando os alunos em situações onde eles pudessem refletir sobre as descontinuidades entre o raciocínio aditivo e o multiplicativo, podendo ainda, estabelecer relações entre as operações de multiplicação e divisão, levando-os além do que é transmitido nos manuais didáticos. Em seu trabalho ela faz um estudo histórico da divisão e um levantamento sobre seu ensino atualmente que nos será muito útil. Além disso, ela entrevistou os alunos, explorando situações diversas que envolvem essas operações (multiplicação e divisão). A entrevista teve a finalidade de perceber se os alunos conseguiram expandir seus conhecimentos no que se refere às estruturas multiplicativas. Dentre os principais resultados estão os seguintes:

• os alunos apresentaram dificuldades em entender o surgimento dos números racionais;

• as justificativas dos alunos, nas entrevistas, foram do tipo: "qualquer número multiplicado por zero dá zero"; "qualquer número multiplicado por 1 dá ele mesmo”, "qualquer número dividido por ele mesmo dá 1";

• os alunos apresentam as seguintes concepções em relação às operações de multiplicação e divisão: “multiplicação sempre aumenta e a divisão sempre diminui”.

Gregolin (2002) realizou um estudo de caso: o estudo do conhecimento matemático escolar nas séries finais do primeiro ciclo do Ensino Fundamental, tendo como ponto de partida as quatro operações – adição, subtração, multiplicação e divisão – com números naturais. Para isso, acompanhou o trabalho de duas professoras de terceira e quarta séries de uma escola pública estadual de São Carlos, SP. Em relação à subtração, ele ressalta a dificuldade dos alunos com o uso do algoritmo do empréstimo:

> Alunos com dificuldade não se atrevem a tentar entender as notações de colegas. Quem fez pode não entender seus próprios registros.... A professora, observando a dificuldade dos alunos para efetuarem subtrações na lousa, comentou que ensina dessa forma porque não dá para justificar o outro algoritmo (Ibid, p.66 e 67).

Segundo Gregolin, o outro algoritmo, referido pela professora, se trata do algoritmo da compensação. Ele apresenta os dois algoritmos em seu trabalho, e sugere que o uso do algoritmo da compensação (chamado por ele de algoritmo por invariância) provocaria menos erros do que o uso do algoritmo do empréstimo (chamado por ele de algoritmo das trocas):

> [...]usando o algoritmo *das trocas*, para subtrair unidades é necessário *trocar* dezenas, que, por sua vez, necessitam de *troca* nas centenas, que também precisam de *troca* nas unidades de milhar.
> No algoritmo por invariância, a subtração é *local*, envolvendo sempre duas ordens. Se for necessária uma soma, a questão (não chega a ser problema) é resolvida na própria ordem e na imediatamente superior.
> Sobre a notação, comparando os dois algoritmos, o da invariância é muito mais compacto, não compromete a divisão e evita confusão no próprio algoritmo ou com o da adição: o "1", indicador das *somas de ajuste*, é colocado entre o minuendo e o subtraendo e, na adição, o algarismo "1" que corresponde a "10" da ordem imediatamente inferior (*reserva*) pode ser colocado acima das parcelas (Ibid, p.70).

Em seu trabalho, Gregolin (2002) cita uma estratégia apresentada por Dante (1997, p.104), chamada de 'buscando noves':

$$
\begin{array}{l}
7000 - 597 \\
\\
6999 + 1 \\
\underline{-597} \\
6402 + 1 = 6403
\end{array}
$$

Gregolin (2002) afirma que durante suas observações esse procedimento não foi apresentado aos alunos, e que é uma estratégia muito útil para o cálculo mental. Ao final de sua pesquisa, uma de suas propostas é o uso do algoritmo da subtração por invariância da diferença (algoritmo da compensação) como início de uma (re)significação dos conhecimentos matemáticos.

Damm (2003) estudou os problemas aditivos e a passagem do enunciado ao tratamento aritmético. Define como "problemas aditivos" aqueles nos quais os enunciados, descrevem uma situação social ou econômica muito simples e a resolução pede somente a utilização das operações de adição e subtração. A autora investiga se as representações semióticas podem se constituir num instrumento eficaz para levar os alunos à compreensão e à resolução dos problemas e, no caso dos problemas aditivos, qual seria essa representação. Foram propostos aos alunos problemas representados por gráficos e ilustrações. Os resultados obtidos nos problemas considerados mais difíceis mostraram um aumento significativo de acertos. Segundo Damm, esse aumento de acertos apresentou duas características:

• foi muito importante, pois passou-se de uma taxa de 10% a 20% de acertos antes do trabalho para uma taxa de 60% a 80% de acertos após a seqüência didática.

• foi mantida a estabilidade dos resultados, verificada um ano após, em classes que haviam trabalhado com representações bidimensionais.

2.1.2 Pesquisas de Brousseau sobre os algoritmos da multiplicação e divisão

Brousseau (2007) resume uma série de seus próprios trabalhos sobre a escolha dos métodos de cálculo da multiplicação e divisão, realizados nos anos 60-70 no âmbito do IREM de Bordeaux sobre o ensino e a aprendizagem dos números na escolaridade obrigatória.

De acordo com o autor, o ensino do cálculo das operações seguiu a evolução da humanidade e suas necessidades e a partir do início do século XIX tomou uma importância considerável no ensino elementar e, hoje, o ensino das operações está em crise. Parece que os professores têm cada vez mais dificuldades para obter resultados satisfatórios o que, por sua vez, fez com que se permitisse baixar as suas exigências, suprimindo ou atrasando aprendizagens consideradas fundamentais.

Segundo Brousseau (2007), se existe uma solução a este dilema, está na modificação do que é necessariamente ensinado e nos métodos didáticos que podem ser-lhes associados. De acordo com os países, as épocas, as necessidades e os recursos das sociedades humanas existiram numerosas maneiras de efetuar os cálculos necessários às transações humanas. Alguns recorriam à ajuda de materiais como abaques, bouliers, máquinas diversas, outros não. Poderia-se crer que hoje, o ensino do cálculo teria se beneficiado desta experiência milenar para propor aos alunos os meios mais adaptados, mais certos e mais eficientes para efetuar estes cálculos. Mas ele afirma que não é bem assim.

Em seu artigo, Brousseau (2007) inicia relembrando o método clássico da multiplicação e suas pequenas variações de um país para outro. Por exemplo:

- a multiplicação de 624 por 25 efetua-se no Chile utilizando a disposição seguinte:

```
   1 2
   624 x 25
  31'20
+ 1248
 15600
```

- e na França é escrita em duas linhas:

```
    624
   x 25
  31'20
+ 1248
 15600
```

Segundo Brousseau (2007), o papel de um cálculo é assegurar o seu resultado e permitir o seu controle. O objetivo da aprendizagem é permitir ao executante ter confiança suficiente no seu trabalho. Essa confiabilidade depende de diversos fatores:
- alguns estão propensos ao executante: aprendizagem, habilidade, cansaço...;
- outros ao próprio método: complexidade do algoritmo e os valores dos números a serem mantidos em memória por curto prazo simultaneamente;
- e outros, por último, dizem respeito à adaptação da tarefa às possibilidades do executante.

Em suas análises, o autor observa que a ocorrência de erros é maior nas multiplicações que apresentam retenção (resultados parciais acima de 9) e quando o multiplicando compreende muitos algarismos, pois o aluno deve efetuar de uma vez uma longa série de operações e se ele for interrompido deve recomeçar. Ele afirma ainda que a relação entre a execução do algoritmo com o sentido da operação em curso (o significado de um produto parcial, por exemplo) revelou-se mal compreendida e difícil de explicar para os professores.

Brousseau (2007) propõe como alternativa o uso do método do quadro das potências. É o método utilizado pelos matemáticos para efetuar os produtos de polinômios. Começa pelo traçado de um quadro que comporta tantas colunas quanto o multiplicando compreende de algarismos, e de tantas linhas quanto o multiplicador compreende. Os algarismos do multiplicando são escritos acima do quadro (um por coluna) e os do multiplicando à direita (um por linha). Cada célula do quadro é compartilhada em dois pela sua primeira diagonal. Por exemplo, para a multiplicação de 7503 por 945 o quadro tem o aspecto seguinte:

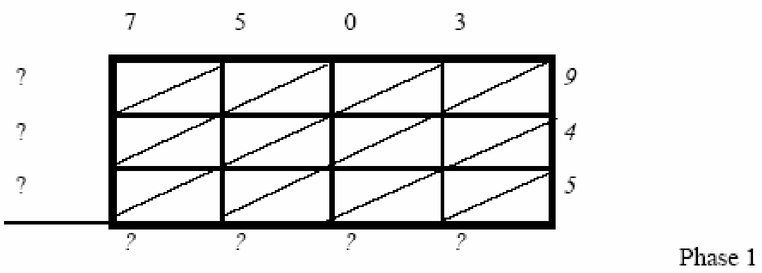


Figura 1: multiplicação em quadro – fase 1
Fonte: Brousseau, 2007, parte 1, p. 7

Os pontos de interrogação representam os algarismos do produto procurado. Vê-se imediatamente que serão 7. Um aluno cuidadoso poderá dizer que o primeiro algarismo será 6 ou 7 e o produto será de aproximadamente 7 milhões. Para calcular, um aluno principiante pode começar pelos produtos que conhece efetivamente, por exemplo, pela coluna do 0.

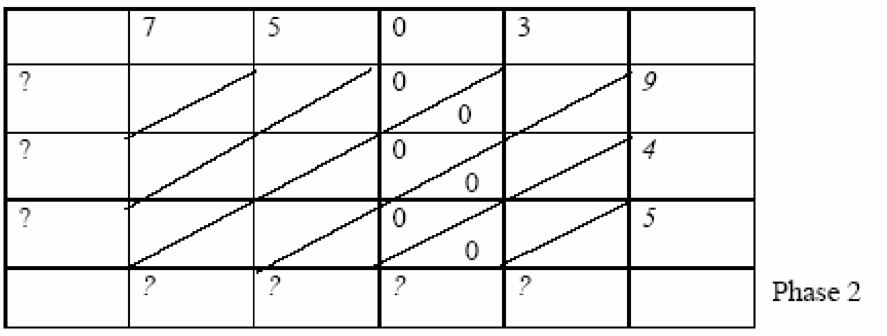


Figura 2: multiplicação em quadro – fase 2
Fonte: Brousseau, 2007, parte 1, p. 7

Ao localizar 3 x 4 que já conhece: escreve o 1 acima da diagonal e o 2 à direita inferior. Faz do mesmo modo com o 5 x 4, o 5 x 5 e o 3 x 5 que conhece também.

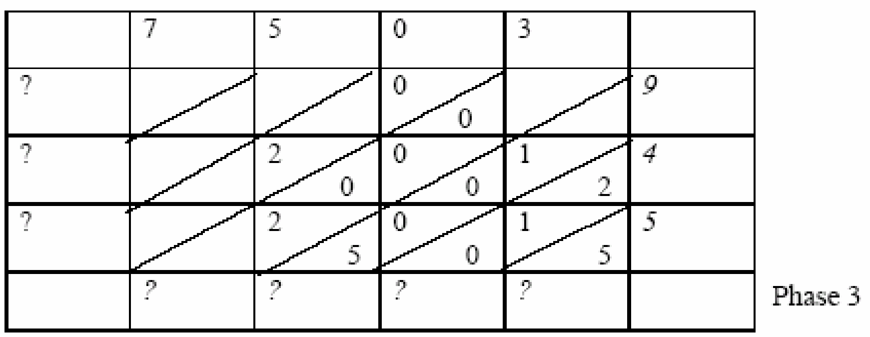


Figura 3: multiplicação em quadro – fase 3
Fonte: Brousseau, 2007, parte 1, p. 7

Durante todo o tempo pode verificar, ou mesmo contar, os produtos que ainda não conhece perfeitamente: como 4 x 7 = 28 ou 5 x 7 = 35. Pode mesmo servir-se de certos cálculos já feitos para verificar outros: Se hesitar 9x7 (61?), pode verificar 5+4=9 então 5x7+4x7=9x7 e então (5+4)x7 = 35+28=63, ou mesmo que 9x7=(10x7)-7.

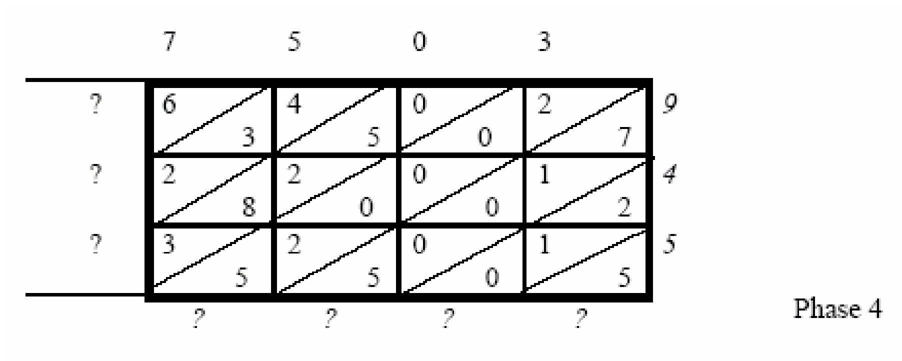


Figura 4: multiplicação em quadro – fase 4
Fonte: Brousseau, 2007, parte 1, p. 8

Resta então adicionar os números de uma mesma ordem, uma mesma potência de I0, que se encontram em diagonal:

as unidades com as unidades: 5

As dezenas com as dezenas: 0 + 1 + 2 = 3

As centenas: 5 + 0 + 0 + 1 + 7 = 13

Às vezes há retenções, mas são as de uma adição, uma por coluna. E o resultado lê-se sobre as margens da parte lateral e inferior da esquerda para a direita: 7.090.335.

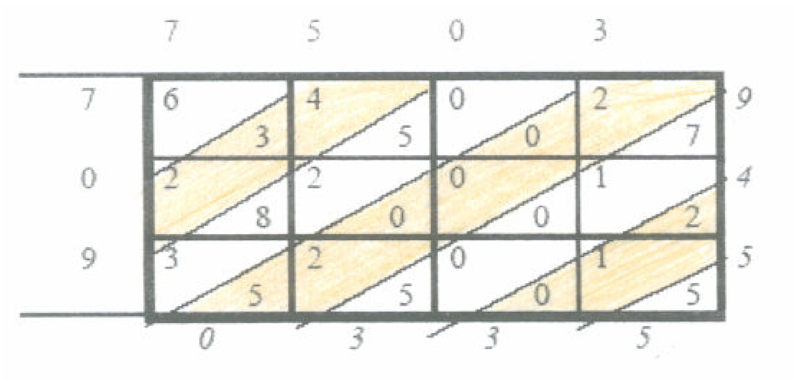


Figura 5: multiplicação em quadro – fase 5
Fonte: Brousseau, 2007, parte 1, p. 8

Analisando esse método, Brousseau (2007) ressalta que:

- o lugar dos algarismos do resultado está previsto a partir da instalação da operação, o que diminui muito os erros de ordem de grandeza. Todos os resultados dos cálculos elementares são escritos, o que facilita o controle e a correção.

- não tem retenção durante o cálculo de um produto elementar. Todas as retenções são adiadas para a adição, o que a torna um pouco mais complicada do que no outro método, pois há mais algarismos e as colunas são oblíquas. No entanto os resultados empíricos mostraram que o aumento das dificuldades da adição foi pequeno e foi compensado pela diminuição dos erros durante os produtos parciais.

O autor conta que o método foi ensinado, a título experimental, em algumas classes de curso elementar e de curso médio. As melhorias da percentagem de sucessos dependiam dos desempenhos antigos dos alunos, os que aproveitavam melhor das vantagens do "novo método" eram os alunos que apresentavam, de antemão, desempenhos fracos ou médios, os que antes já calculavam bem achavam que este método era mais agradável. Temia-se que o fato de ter que desenhar o quadro alongasse muito o tempo de execução dos cálculos, mas não aconteceu. Não houve um desvio significativo entre o tempo de cálculo pelos mesmos alunos, antes com o método clássico e após, com o método em quadro. Espontaneamente os alunos dispunham de maneira clássica as pequenas operações, mas logo que a dificuldade se tornava maior, retomavam o método em quadro, conscientes de ter uma prática mais adaptada e mais refinada do cálculo.

Após as considerações sobre os algoritmos da multiplicação, Brousseau (2007) passa a analisar a divisão. Assim como com a multiplicação, inicia descrevendo o método clássico da divisão utilizado na França. Para dividir 836 por 2:

$$\begin{array}{l} \;\;8\,3\,6 : 2 = 418 \\ \underline{-\,8} \\ \;\;0\,3 \\ \;\;\underline{-\,2} \\ \;\;\;\;16 \\ \;\;\underline{-16} \\ \;\;\;\;\;0// \end{array}$$

Analisando esse método, o autor afirma que a divisão conjuga as dificuldades da multiplicação com retenções, com as da subtração e as suas retenções. Assim, a divisão demonstra uma complexidade estrutural que tem conseqüências específicas. O principal fator de complexidade didática e de dificuldades é decorrente das tentativas para determinar um algarismo do quociente. O aluno deve escrever os seus cálculos antes de saber se convêm ou não. Ora estas "tentativas" não são "erros", são etapas normais, inevitáveis numa aproximação progressiva de um resultado. As tentativas são ensaios legítimos. A tentativa infeliz deve ser riscada, o que desperdiça irremediavelmente a prescrição do cálculo, ela desloca os números e é interpretada como uma inaptidão e mesmo como um erro. Para evitar este resultado o aluno deve prever o correto algarismo por um cálculo mental ainda mais complexo. Um outro fator de erros é a perda do alinhamento das colunas logo que a operação alonga-se, mas, a característica mais incerta do quociente é o número de algarismos. Os alunos que sabem deduzir ordem de grandeza do resultado podem corrigir os seus erros. Os outros têm frequentemente maus resultados.

Assim como fez com a multiplicação, Brousseau (2007) procurou um método melhor adaptado às possibilidades humanas, que possa diminuir as dificuldades de execução e aumentar a confiabilidade do cálculo, melhorando, assim, as condições de aprendizagem. O método apresentado por ele será descrito a seguir.

Para efetuar 14.456.665 dividido por 481.

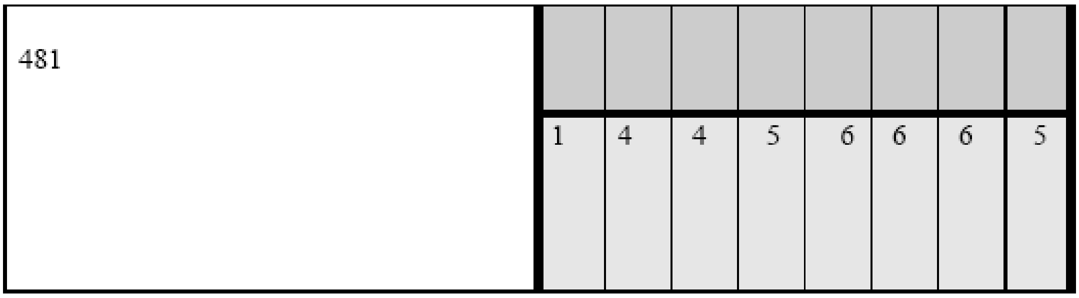


Figura 6: divisão em quadro
Fonte: Brousseau, 2007, parte 2, p. 5

O espaço de trabalho do aluno é compartilhado em três zonas:

A esquerda, a zona dos ensaios de multiplicações, onde fica o divisor (zona branca) .

A direita, um quadro aberto que compreende um número de colunas igual ao número de algarismos do dividendo. Esta zona é separada em dois por um traço horizontal:

- A zona do quociente ou a adição dos quocientes parciais que se encontra acima do traço (zona cinzenta escura).
- A zona das subtrações e do cálculo dos restos, abaixo deste traço, onde fica o dividendo que fixa o número de colunas (zona cinzenta clara).

Primeira fase da execução: Como no método clássico, é necessário investigar o número mínimo de algarismos no dividendo para poder subtrair pelo menos uma vez o divisor 481. É necessário tomar os quatro primeiros algarismos, obtêm-se 1445.

Segunda fase: Estimativa do primeiro algarismo do quociente:
em 14 há quantas vezes 4? "há três vezes", ou em 14 há quantas vezes 5? Pode ser 2 ou 3.

Terceira fase: As multiplicações de teste são feitas na parte branca: 481 x 3 = 1443.
O aluno que tenta: 481 x 2 = 962 verificará que o resto será demasiado grande, e escreve abaixo da sua multiplicação por dois, a multiplicação por 3.

Quarta fase: Subtração do maior produto:

				3				
481 x 3 = 1443	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2				

Figura 7: divisão em quadro
Fonte: Brousseau, 2007, parte 2, p. 6

O resto parcial é 2.

Quinta fase: O quociente 3 é conveniente, portanto o aluno pode escrevê-lo definitivamente na parte do quociente (cinzenta escura) na coluna das unidades da sua subtração. O aluno pode já estimar:

- o número de algarismos do resultado: é o número de colunas que não estão à esquerda do primeiro número obtido 3.
- e, por conseguinte, fazer uma estimativa do quociente: entre 30.000 e 39.999.

Sexta fase: Escrita do resto útil

				3				
481 x 3 = 1443	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2	6	6	6	

Figura 8: divisão em quadro
Fonte: Brousseau, 2007, parte 2, p. 6

O aluno "desce" uma quantidade de algarismos suficiente para formar um número maior que o divisor. Este resto é aqui 2666.

Sétima fase: Reiteração da fase 2: estimativa do quociente parcial: em 2666 há quantas vezes 481? ou em 26 há quantas vezes 4? Tentam 6 vezes.

Oitava fase: Multiplicação de teste à esquerda 481 x 6 = 2886 , que não dá. Segunda multiplicação de teste: 481 x 5 = 2405, o aluno já pode efetuar a subtração.

Nona fase: Nova subtração no quadro: 2666 - 2405 = 261.

				3				
481 x 3 = 1443 x 5 = 2405	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2 - 2	6 4	6 0	6 5	
					2	6	1	

Figura 9: divisão em quadro
Fonte: Brousseau, 2007, parte 2, p. 7

Décima fase: Escrita do quociente parcial 5 na coluna das unidades da subtração parcial, e ocupação das colunas vazias onde o quociente parcial é 0...

				3			**5**	
481 x 3 = 1443 x 5 = 2405	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2 - 2	6 4	6 0	6 5	
					2	6	1	

Figura 10: divisão em quadro
Fonte: Brousseau, 2007, parte 2, p. 7

Décima primeira fase: Reiteração das fases 2 à 6 ou da 7 à 9.

				3	**0**	**0**	**5**	
481 x 3 = 1443 x 5 = 2405	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2 - 2	6 4	6 0	6 5	
					2	6	1	5

Figura 11: divisão em quadro
Fonte: Brousseau, 2007, parte 2, p. 8

				3	**0**	**0**	**5**	**5**
481 x 3 = 1443 x 5 = 2405	**1** -1	**4** 4	**4** 4	**5** 3	**6**	**6**	**6**	**5**
	0	0	0	2 - 2	6 4	6 0	6 5	
					2 - 2	6 4	1 0	5 5
					0	2	1	0

Figura 12: divisão em quadro
Fonte: Brousseau, 2007, parte 2, p. 8

Retornemos ao nosso aluno novato que põe a subtração de um número "demasiado pequeno" e que escreve na zona dos quocientes o quociente parcial: 2, na coluna das unidades da sua subtração.
O número de algarismos do quociente é fixado e conhecido: 5 algarismos.

481 481 x 2 = 962				**2**				
	1 -	4 9	4 6	5 2	6	6	6	5
		4	8	3				

Figura 13: divisão em quadro
Fonte: Brousseau, 2007, parte 2, p. 8

Aplicando o método o aluno vê que pode tirar 481 de 483 e faz: 483 - 481 = 002
E como retirou 481 uma vez, deve colocar o "1" na coluna das unidades da sua subtração, onde já tem colocado um 2. Coloca o 1 acima e vê que poderia ter subtraído 3 x 481, de uma vez.

481 481 x 2 = 962				**1** **2**				
	1 -	4 9	4 6	5 2	6	6	6	5
	-	4 4	8 8	3 1				
		0	0	2				

Figura 14: divisão em quadro
Fonte: Brousseau, 2007, parte 2, p. 9

Em seguida, continua com os procedimentos já descritos anteriormente.
Ao final, efetua a soma dos quocientes parciais que não conseguiu encontrar de uma única vez.

481
481 x 2 = 962
481 x 4 = 1924
x 5 = 2405
x 6 = 2886

			3	**0**	**0**	**5**	**5**
			1 **2**			**5**	**5**
1 -	4 9	4 6	5 2	6	6	6	5
-	4 4	8 8	3 1				
	0	0 -	2 2	6 4	6 0	6 5	5
			0 -	2 2	6 4	1 0	5 5
					2	1	0

Figura 15: divisão em quadro
Fonte: Brousseau, 2007, parte 2, p. 10

Segundo o autor este método pode ser ensinado aos alunos que estudaram o método clássico, como um meio de controle em caso de operação complicada, como meio para compreender o que fazem no método clássico.

Comparando os métodos, Brousseau (2007) afirma que apesar da disposição pedir um pouco de tempo, e ainda o traçado das colunas não ser elegante, tudo isso tem muito menos importância que os erros que são evitados. Globalmente, verificou-se que não houve um alongamento significativo do tempo de cálculo.

Segundo o autor as vantagens são muito importantes e muito claras. Todas as tentativas são aceitas e não perturbam o trabalho, muito rapidamente os alunos utilizam os cálculos de teste para evitar ter que efetuar uma adição dos quocientes parciais. Todos os cálculos são escritos. Encontra-se a mesma facilidade de controle e de correção que na multiplicação em quadro. O método permite conservar o sentido das operações sucessivas efetuadas. É possível estabelecer uma relação desta operação com o cálculo da multiplicação em quadro. As propriedades mais interessantes desse método são as propriedades relativas à aprendizagem. A flexibilidade do método permite aos alunos mais lentos prosseguir e terminar a sua aprendizagem com os exercícios e problemas, sem serem imediatamente desqualificados pelas suas dificuldades.

Brousseau (2007) observa que, nos anos 30 o ensino das operações numéricas elementares absorvia grande parte do tempo da escolaridade primária, este fato explica-se pela complexidade dos algoritmos e suas imperfeições, pelo nível de rapidez e de confiabilidade que era necessário e pelas concepções didáticas clássicas da época que, nestas condições, levavam os professores a escolher métodos de aprendizagem extremamente dispendiosos. E ele diz que apesar deste esforço considerável, os métodos de cálculo ensinados aos alunos na França eram aprendidos apenas por uma parte da população, embora, nessa época, estes cálculos fossem empregados muito correntemente em todas as espécies de atividades sociais visíveis pelos alunos.

As experiências de Brousseau (2007) mostraram que é possível melhorar os resultados do ensino do cálculo ensinando os “novos” métodos de multiplicação e divisão aos alunos que já praticavam os métodos clássicos. Ele observou, em dois ou três meses, um nítido aumento da percentagem de sucesso global, sobretudo sobre as operações longas, sem diminuir sensivelmente a velocidade de execução. A melhoria foi mais importante para os alunos "fracos" e "médios". Mostrou também que é possível ensinar estes modos de cálculo diretamente a alunos da escola primária, sem ensinar primeiro o método clássico. Mostrou, ainda, que os alunos conseguem, facilmente, passar deste modo de cálculo ao antigo nas operações curtas. Verificou ser possível ensinar o cálculo por métodos de descoberta e de otimização menos vinculativos, mais interessantes e rápidos para os alunos. Os resultados, controlados regularmente, não foram piores do que com os antigos métodos e ainda ganhou-se tempo, o que permitiu empreender o estudo de noções matemáticas mais avançadas e aplicar atividades mais interessantes para os alunos.

Brousseau (2007) relata que a condução pedagógica das situações didáticas necessária é mais delicada e mais fatigante para os professores, mas pareceu-lhes mais atrativa. No entanto há riscos ligados às práticas dos professores muito resistentes a mudanças, muito preocupados com o comportamento e que usem procedimentos de ensino inadequados.

Em seu artigo, Brousseau (2007) lança, dentre outras, essas perguntas:

– Por que propostas realizáveis, fundadas sobre resultados científicos estabelecidos e, sobretudo, que têm em conta todo o funcionamento micro didático do sistema encontram oponentes selvagens, os quais não hesitam a aderir a grandes projetos ideológicos leves e incertos, que são baseados, por inferências duvidosas, apenas em opiniões ou na importação da didática de conhecimentos parciais?

– Por que crer que os professores poderão restaurar métodos de cálculo inábeis, de execução inutilmente complicada, cuja aprendizagem é penosa para uma grande parte da população?

Segundo ele, as bases científicas da didática ainda são pouco conhecidas. A aplicação direta e ingênua dos seus resultados seria, provavelmente, prematura. Mas é urgente que a didática desenvolva-se primeiro como ciência, pelo estudo científico dos seus fundamentos, pela confrontação e verificações mais rigorosas dos seus resultados. Então, o futuro dirá se a melhoria progressiva do ensino, fundada sobre investigações científicas e sobre provas experimentais e respeitosas das leis (dos equilíbrios) do sistema escolar, pode substituir utilmente as reformas brutais, ideológicas e cegas que conhecemos hoje.

Os resultados da pesquisa de Brousseau (2007) mostram que é possível melhorar o desempenho dos alunos por meio de um trabalho com algoritmos das operações básicas. Nossa investigação visa ser uma alternativa, ao menos no que diz respeito à subtração, para enfrentarmos a crise que, segundo Brousseau (2007), o ensino das operações enfrenta hoje.

O autor apresentou algoritmos para a multiplicação e divisão que se mostraram eficientes para ajudar alunos com dificuldades nessas operações. Em nosso trabalho apresentaremos, como opção, o uso do algoritmo da compensação para alunos que têm dificuldades com o uso do algoritmo do empréstimo para efetuar subtrações. Como no trabalho de Brousseau (2007), estaremos apresentando um algoritmo para alunos que já conhecem um outro para efetuar a mesma operação.

2.2 ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO SUBTRAÇÃO

Estudaremos a subtração relacionando-a às idéias de tirar, comparar e completar. Apresentaremos os algoritmos que serão analisados neste trabalho e faremos uma comparação entre eles. Discutiremos, também, o uso da subtração no algoritmo da divisão.

2.2.1 Subtrair: tirar, comparar e completar

Domingues e Iezzi (s.d. p.54) definem a subtração sobre **Z** como a aplicação f: Z x Z→Z tal que f(x, y) = x – y.

Segundo Franchi (1977), a subtração é definida como lei de composição que ao par (a, b) faz corresponder o número *x* único, quando existe, tal que a = b + *x*. Em N a subtração é definida se e somente se *b* é inferior ou igual a *a*. A imagem do par (a, b) pela subtração é o número designado por (a – b) e é chamado de diferença entre *a* e *b*. Do ponto de vista matemático, o significado do termo subtração é dado por meio de uma definição que implica na compreensão de a = b + *x* e b = a – *x*.

Em **N** a subtração não é uma operação, pois recebe o nome de operação toda aplicação f: N x N→N, isto é, o conjunto dos naturais não é fechado para que a subtração seja considerada operação. No entanto, como as idéias de tirar, comparar e completar fazem parte da vivência das crianças desde cedo, a subtração faz parte das quatro operações fundamentais e é tratada em N como $x = a - b$ sempre que $a \geq b$.

Segundo Domingues (1991), a relação $\leq$ (menor que ou igual) em N é definida do seguinte modo:

“Se a, b $\in \mathrm{N}$, diz-se que $a \leq b$ *se* $b = a + \mu$, para algum $\mu \in \mathrm{N}$. O número μ nessas condições chama-se diferença entre *a e b* e é indicado por $\mu = b - a$, onde *b* é o minuendo e *a* o subtraendo”.

Assim, a subtração (a, b)→ a – b só está definida neste caso para os pares ordenados (a,b) em que $a \geq b$.

Valem as seguintes propriedades:

- (b – a) + a = b sempre que $a \leq b$.

- Se c $\leq$ a, então (a + b) – c = (a – c) + b.
- (b + c) $\leq$ a $\Rightarrow$ a – (b + c)= (a – b) – c.
- Se b $\leq$ a e d $\leq$ c então (a – b) + (c – d) = (a + c) – (b + d).

Na subtração vale a propriedade da invariância da diferença: “somando um mesmo número ao minuendo e ao subtraendo, a diferença não se altera”. Por exemplo: 7 – 3 = 4 acrescentando 10 ao minuendo e ao subtraendo temos 17 – 13 = 4.

De acordo com Atividades Matemáticas 2ª série (1989, p. 29) o conceito de subtração é um dos mais complexos a ser aprendido pela criança, uma vez que a ele estão associadas três idéias distintas: tirar, comparar e completar. Na idade em que a subtração é apresentada, a maioria das crianças tem dificuldade em compreender a equivalência dessas três idéias.

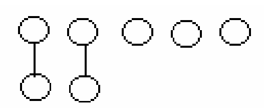
Na idéia de **tirar** temos uma coleção da qual é retirada uma certa quantia de elementos. Trata-se, então, de saber quantos elementos restaram. Comumente esta idéia é apresentada por meio da seguinte representação (São Paulo, 1989, p.30):

5 – 2 = 3

Exemplificando:

Em uma caixa tinha 5 bolas. Foram tiradas 2. Quantas restaram?

Na idéia de **comparar** temos duas coleções e o problema consiste em saber qual delas tem mais elementos e quantos a mais. Comumente esta idéia é apresentada por meio da seguinte representação (São Paulo, 1989, p.30):

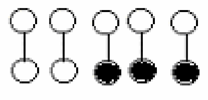


5 – 2 = 3

Exemplificando:

Uma caixa tem 5 bolas e outra tem 2. Quantas bolas a primeira caixa tem a mais que a segunda?

Na idéia de **completar**, temos duas coleções e o problema consiste em saber quanto se deve acrescentar à que tem menos objetos para obter uma coleção equivalente à primeira. Segundo Atividades Matemáticas 2ª série (1989) é difícil para as crianças perceberem que o número de elementos a serem acrescentados é obtido por meio de uma subtração.



5 – 2 = 3

A dificuldade resulta do fato das crianças estarem, na verdade, achando uma parcela desconhecida de uma adição, isto é 2 + ... = 5 (São Paulo, 1989, p.30).

Exemplificando:

Em uma caixa há 5 bolas e em outra 2. Quantas bolas devo acrescentar à segunda caixa para que tenha a mesma quantidade que a primeira?

São três idéias distintas que devem ser expressas por meio de um único tipo de escrita: a – b, com a, b $\in \mathbb{N}$ e $a \geq b$.

A atividade a seguir foi apresentada por Pereira (1997, p.72 e 73) com o objetivo de trabalhar a compreensão da operação subtração associando-a às três idéias que estamos abordando. O nome da atividade é ‘preenchendo espaços’. Os materiais necessários são: um engradado com 12 lugares e 12 garrafas.

Procedimentos:

1) Questionar se há garrafas suficientes para preencher os espaços do engradado.
2) Solicitar que uma criança comprove.
3) Sugerir que sejam retiradas duas garrafas.
4) Pedir para que registrem em forma de desenho.
5) Pedir para que registrem sob forma de operação.

Com esta atividade podemos explorar as idéias de tirar, comparar e completar:

- Quantas restaram no engradado? (idéia de tirar)
- Quantas faltam para completar os espaços vazios do engradado? (idéia aditiva ou de completar).
- Comparar a quantidade de espaços vazios deste engradado e de um idêntico e completo. Quantos há a mais? (idéia comparativa).

Como esta, podemos propor várias outras situações-problema que ajudem o aluno a inferir significado à subtração e associá-la às idéias de tirar, comparar e completar.

Ressaltamos aqui a importância da abordagem da subtração pela Teoria dos Campos Conceituais, identificando as situações envolvidas nessa conceituação, que possibilitem ao aluno trabalhar as diferentes idéias relacionadas à subtração, elaborando enunciados que variem a posição da incógnita e ajudem o aluno a entender o sentido da operação e ampliar suas opções de resolução. Os PCN (1997, p.69) citam o desenvolvimento da investigação na área da Didática da Matemática em relação ao tratamento das operações, e faz referência às que apontam os problemas aditivos e subtrativos como aspecto inicial a ser trabalhado na escola, concomitantemente ao trabalho de construção do significado dos números naturais. A justificativa para o trabalho conjunto dos problemas aditivos e subtrativos baseia-se no fato de que eles compõem uma mesma família, ou seja, há estreitas conexões entre situações aditivas e subtrativas. Assim, de acordo com os PCN (1997), o estudo da adição e da subtração deve ser proposto ao longo dos dois ciclos (1 e 2), juntamente com o estudo dos números e com o desenvolvimento dos procedimentos de cálculo, em função das dificuldades lógicas, específicas a cada tipo de problema, e dos procedimentos de solução de que os alunos dispõem. Dentre os procedimentos de cálculo da subtração, destacaremos os algoritmos que apresentaremos a seguir.

2.2.2 Os algoritmos para a subtração

Neste trabalho trataremos de dois algoritmos para efetuar a subtração:

- um subtrai recorrendo à ordem superior ou “método do empréstimo” (decomposição do minuendo, quando ele executa “empréstimos”);
- o outro subtrai por compensação (adição de quantidades iguais no minuendo e no subtraendo).

Apresentaremos esses algoritmos por meio de dois exemplos de atividades extraídas de “Atividades Matemáticas 2ª série do 1º grau” (1989), páginas 110 à 113. A coleção “Atividades Matemáticas” é um material oferecido aos professores pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Por meio dessas atividades podemos ter a idéia exata de como é sugerido aos professores que trabalhem esses dois algoritmos.

Estas atividades são compostas por duas partes, a primeira explicita o objetivo, a descrição do comportamento esperado de cada aluno, o material necessário e o desenvolvimento da atividade, a segunda explicita o tema, a finalidade da atividade e informações complementares referentes ao tema em tratamento. Nessas duas atividades, os materiais utilizados são: fichas de cartolina recortadas (figura 16) e o ábaco de papel (figura 17). As fichas são dois quadrados grandes (10cm de lado) representando as centenas, 20 retângulos (2cm x 5cm) representando as dezenas e 140 quadrados pequenos (1cm x 1cm) representando as unidades.

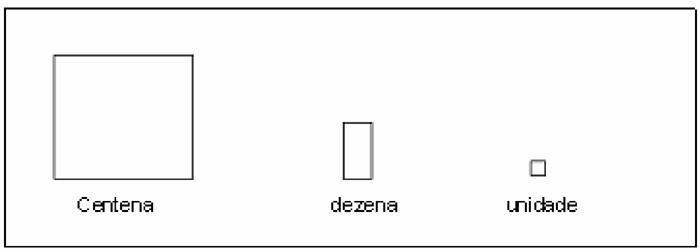


Figura 16: Fichas de cartolina a serem utilizadas nas atividades

O ábaco de papel é uma folha de sulfite dividida em três partes, uma para as centenas, outra para as dezenas e outra para as unidades.

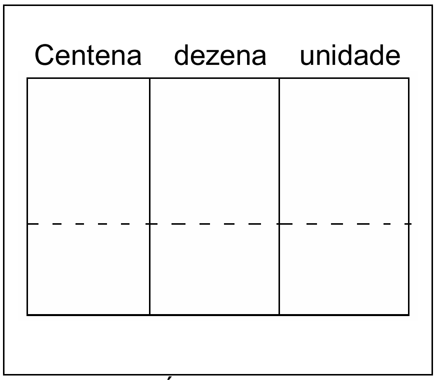


Figura 17: Ábaco de papel 1

A primeira atividade a ser apresentada (81A) subtrai recorrendo à ordem superior ou "método do empréstimo" (figuras 18 e 19).

ATIVIDADE Nº 81A: "DECOMPONDO A DEZENA PARA SUBTRAIR"

OBJETIVO: Efetuar, pela técnica do recurso à unidade de ordem superior, a subtração de dois números menores que 1 000, em que o valor do algarismo de primeira ordem do 1º termo é menor do que o valor do algarismo de mesma ordem do 2º termo.

MATERIAL NECESSÁRIO: O mesmo da Atividade nº 71A.

DESENVOLVIMENTO: Escreva no quadro-negro: 395 − 176.

Peça que utilizem o ábaco de papel e as fichas para descobrirem o resultado.

Uma vez percebido que existe uma dificuldade, interrompa o trabalho e peça que contem o que descobriram: de 5 não dá para tirar 6!

Em seguida, diga que, apesar disso, é possível calcular o resultado de 395 − 176 e que você vai orientá-los para descobrirem como fazê-lo.

1ª ação: Solicite aos alunos que representem o número 395 no ábaco de papel, utilizando as fichas.

2ª ação. A seguir, pergunte se não é possível trocar algumas das fichas que estão no ábaco de maneira que a quantidade resultante de fichas pequenas permita tirar 6.

Discuta com eles por que a solução é trocar uma ficha média (1 dezena) por dez fichas pequenas (10 unidades).

3ª ação: Em seguida, pergunte o que devem fazer para mostrar que estão tirando 176 de 395.

Discuta por que tiraram 1 ficha grande, 7 médias e 6 pequenas.

4ª ação: Peça que leiam quanto restou no ábaco, escrevendo o número em questão.

Terminado o trabalho com o ábaco, represente, no quadro-negro, as escritas numéricas que correspondem às ações executadas.

No ábaco | No quadro-negro

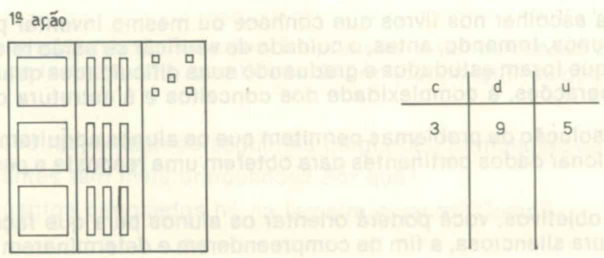
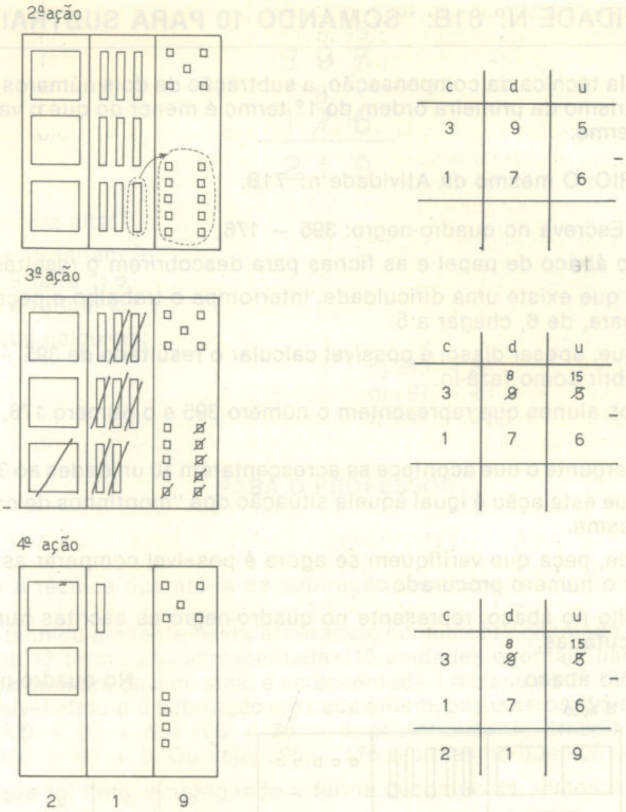


Figura 18: Atividade para introduzir o algoritmo do empréstimo
Fonte: São Paulo, SE/CENP, 1989 p.110



Peça que copiem no caderno:

$$\begin{array}{r} 3\overset{8}{\cancel{9}}\overset{15}{\cancel{5}} \\ -\;176 \\ \hline 219 \end{array}$$

fazendo a leitura em voz alta:

- "15 menos 6 é igual a 9" ou "de 15 tiro 6, fico com 9";
- "8 menos 7 é igual a 1" ou "de 8 tiro 7, fico com 1";
- "3 menos 1 é igual a 2" ou "de 3 tiro 1, fico com 2".

A seguir, peça que calculem:

a) 251 − 137	c) 280 − 113	e) 97 − 48
b) 125 − 107	d) 343 − 38	f) 341 − 202

PARA O PROFESSOR

TEMA: Subtração.

META: Desenvolver a técnica operatória da subtração denominada "do recurso à unidade de ordem superior".

COMENTÁRIOS: Comumente, essa técnica é chamada de "emprestar". Porém, essa linguagem não é correta, uma vez que não há empréstimo (um empréstimo supõe devolução...). Na verdade, fazemos uma **decomposição diferente** do 1º termo. No nosso exemplo, para que fosse possível efetuar a subtração, em cada ordem, o número 395 foi inicialmente decomposto em 300 + 90 + 5 e, a seguir, em 300 + 80 + 15.

Os seis exercícios apresentados não são, evidentemente, suficientes para garantir a fixação do processo ora desenvolvido. É necessário multiplicá-los.

111

Figura 19: Atividade para introduzir o algoritmo do empréstimo
Fonte: São Paulo, SE/CENP, 1989 p.111

A segunda atividade (81B) introduz o uso do algoritmo da compensação (figuras 20 e 21).

ATIVIDADE Nº 81B: "SOMANDO 10 PARA SUBTRAIR"

OBJETIVO: Efetuar, pela técnica da compensação, a subtração de dois números menores que 1 000, em que o valor do algarismo da primeira ordem do 1º termo é menor do que o valor do algarismo de mesma ordem do 2º termo.

MATERIAL NECESSÁRIO: O mesmo da Atividade nº 71B.

DESENVOLVIMENTO: Escreva no quadro-negro: 395 − 176.

Peça que utilizem o ábaco de papel e as fichas para descobrirem o resultado.

Uma vez percebido que existe uma dificuldade, interrompa o trabalho e peça que contem o que descobriram: não dá para, de 6, chegar a 5.

Em seguida, diga que, apesar disso, é possível calcular o resultado de 395 − 176 e que você vai orientá-los para descobrir como fazê-lo.

1ª ação: Solicite aos alunos que representem o número 395 e o número 176, no ábaco de papel, utilizando as fichas.

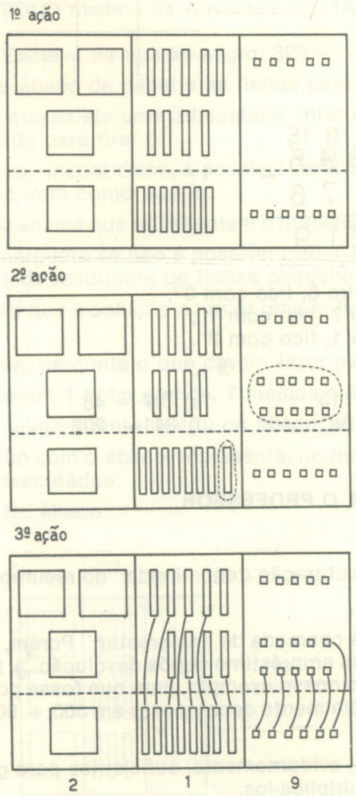
2ª ação: A seguir, pergunte o que acontece se acrescentarem 10 unidades ao 395 e 1 dezena a 176.

Discuta com eles que esta ação é igual àquela situação dos "montinhos de cartas", isto é, a diferença permanece a mesma.

3ª ação: Em seguida, peça que verifiquem se agora é possível comparar as fichas uma a uma, a fim de ler e escrever o número procurado.

Terminado o trabalho no ábaco, represente no quadro-negro as escritas numéricas que correspondem às ações executadas.

No ábaco



No quadro-negro

c	d	u	
3	9	5	−
1	7	6	

c	d	u	
3	9	15 ~~5~~	−
1	8 ~~7~~	6	

c	d	u
3	9	15 ~~5~~
1	8 ~~7~~	6
2	1	9

Figura 20: Atividade para introduzir o algoritmo da compensação
Fonte: São Paulo, SE/CENP, 1989 p.112

Peça que copiem no caderno

$$\begin{array}{r} 3\;9\;\overset{15}{\cancel{5}} \\ -\quad 1\;\overset{8}{\cancel{7}}\;6 \\ \hline 2\;1\;9 \end{array}$$

fazendo a leitura em voz alta:

"6 para chegar a 15 faltam 9;
8 para chegar a 9 falta 1; e
1 para chegar a 3 faltam 2."

A seguir, peça que calculem:

a) 251 − 137 b) 343 − 38
c) 125 − 107 d) 97 − 48
e) 280 − 113 f) 341 − 202

PARA O PROFESSOR

TEMA: Subtração.

META: Desenvolver a técnica operatória da subtração denominada técnica da compensação.

COMENTÁRIOS: A técnica presente nesta atividade é comumente chamada "técnica da compensação". Isto porque ao 1.º termo são acrescentadas 10 unidades e, então, para "compensar", isto é, para que a diferença permaneça a mesma, é acrescentada 1 dezena ao 2.º termo. No nosso exemplo, para que fosse possível efetuar a subtração em cada ordem, os números 395 e 176 foram inicialmente decompostos em 300 + 90 + 5 e 100 + 70 + 6; posteriormente, trabalhamos com os números 300 + 90 + 15 e 100 + 80 + 6. Ou seja, 395 − 176 é o mesmo que 405 − 186.

Explicitando o que foi feito, empregando a forma decomposta, temos:

$$\begin{array}{r} 300 + 90 + \overset{15}{\cancel{5}} \\ -\quad 100 + \overset{80}{\cancel{70}} + 6 \\ \hline 200 + 10 + 9 \\ 219 \end{array}$$

Os seis exercícios apresentados são insuficientes para garantir a fixação da técnica. É necessário multiplicá-los.

Figura 21: Atividade para introduzir o algoritmo da compensação
Fonte: São Paulo, SE/CENP, 1989 p.113

Podemos observar que, de acordo com as instruções da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, ambos os algoritmos podem ser introduzidos por meio de atividades, utilizando-se os mesmos materiais. Nas duas atividades, figuras 18, 19, 20 e 21, ao indicar o material necessário, se faz referência a outras atividades (71A, 71B), esse material consiste nas fichas e no ábaco de papel que apresentamos no início deste item.

Após o uso do ábaco de papel, em ambas as atividades, é feita a representação da operação no caderno e é solicitado aos professores que apresentem aos alunos exercícios para fixação da técnica.

A quantidade de ações solicitadas ao professor é a mesma nas duas atividades, embora na segunda não esteja explícita a quarta ação. Portanto a dificuldade no trabalho do professor para a introdução dos dois algoritmos é praticamente a mesma, não sendo este um fator determinante para a escolha de um ou outro algoritmo. Faremos, então, a comparação entre os dois algoritmos.

2.2.3 Comparando os algoritmos da subtração

Detalharemos primeiro a técnica operatória da subtração recorrendo à ordem superior (decomposição do minuendo), ou algoritmo do "empréstimo".

Esta técnica se torna complicada quando, para efetuar a subtração, um único empréstimo não é suficiente, por exemplo:

$$\begin{array}{r} 70.205\ - \\ 8.378\ \ \ \\ \hline \end{array}$$

Para que essa explicação fique mais simples, não falaremos em centenas e milhares, e trataremos todos os empréstimos por dezena.

O 5 não é suficiente para subtrair o 8, portanto deve-se recorrer ao empréstimo do algarismo ao lado, no caso o zero. Mas o zero não tem para emprestar, então deve-se recorrer ao 2. Assim, onde estava o 2 fica 1 pois, emprestou uma dezena ao zero que passa a valer 10. Agora o 10 pode emprestar um ao cinco, portanto onde estava o 10 fica o 9 e o 5 passa a valer 15. Aí começa a subtração:

$$\begin{array}{r} 7\ 0\ .\ \cancel{2}^{1}\ \cancel{0}^{\cancel{10}\ 9}\ \cancel{5}^{15}\ - \\ 8\ .\ 3\ \ \ 7\ \ \ 8\ \ \ \\ \hline 2\ \ \ 7\ \ \ \end{array}$$

Mas agora, 1 não é suficiente para tirar 3 e o zero, que está ao lado, também não tem para emprestar. Então é necessário recorrer ao 7, que passa a valer 6, pois empresta uma dezena ao zero, que passa a valer 10, tornando-se assim suficiente para emprestar uma dezena ao 1 que já estava no lugar do 2. Portanto 10 passa a valer 9 e o 1 passa a valer 11.

Assim:

$$\begin{array}{r} \cancel{7}^{6}\ \cancel{0}^{\cancel{10}\ 9}\ .\ \cancel{2}^{\cancel{1}\,11}\ \cancel{0}^{\cancel{10}\ 9}\ \cancel{5}^{15} \\ 8\ .\ 3\ \ 7\ \ 8\ - \\ \hline 6\ \ 1\ .\ 8\ \ 2\ \ 7 \end{array}$$

São muitas passagens e muitas decisões a tomar para resolver esta subtração.

Efetuaremos agora a mesma subtração utilizando o algoritmo da compensação ou "abaixa um".

Nessa técnica não se usa a idéia de empréstimo. Quando necessário são acrescentadas dez unidades ao minuendo e, para <u>compensar</u>, acrescenta-se uma dezena ao subtraendo. Veja:

$$\begin{array}{r} 7\ 0\ .\ 2\ 0\ {}^{1}5 \\ -\quad 8\ .\ 3\ \cancel{7}^{8}\ 8 \\ \hline 2\ 7 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 7\ {}^{1}0\ .\ {}^{1}2\ {}^{1}0\ {}^{1}5 \\ -\ {}_{1}\ \cancel{8}^{9}\ .\ \cancel{3}^{4}\ \cancel{7}^{8}\ 8 \\ \hline 6\ 1\ .\ 8\ 2\ 7 \end{array}$$

Como o 5 não é suficiente para tirar 8, a ele são acrescentadas dez unidades. Então ele passa a valer 15 e já pode subtrair 8. Para compensar é somada uma dezena no subtraendo que era 70 e passa a ser 80. E este procedimento é repetido cada vez que o algarismo do minuendo for menor que o algarismo do subtraendo.

Com esse método o aluno não precisa manipular várias vezes o mesmo algarismo. Desta forma ele tem um procedimento único independente dos algarismos que formem o minuendo e o subtraendo.

Uma outra diferença importante é a narrativa usada ao efetuar a subtração. Nos exercícios descritos anteriormente, nas figuras 19 e 21, para apresentar os algoritmos, podemos verificar que, no final de cada exercício, tem a recomendação para que o aluno copie a subtração no caderno e depois repita os procedimentos em voz alta. No método do empréstimo, figura 19, parte-se sempre do minuendo para o subtraendo, observe:

"15 menos 6 é igual a 9" ou "de 15 tiro 6, fico com 9";
"8 menos 7 é igual a 1" ou "de 8 tiro 7, fico com 1";
"3 menos 1 é igual a 2" ou "de 3 tiro 1, fico com 2".

Dessa forma, trabalha-se apenas a idéia de tirar.

Quando usamos o método da compensação, figura 21, partimos do subtraendo para o minuendo, observe:

"6 para chegar no 15 faltam 9";
"8 para chegar no 9 falta1";
"1 para chegar a 3 faltam 2".

Dessa forma trabalha-se principalmente a idéia de completar.

Segundo Vergnaud (1996), na Teoria dos Campos Conceituais a função da linguagem é tripla:

- ajuda na identificação dos objetos, propriedades, relações e teoremas;
- ajuda ao raciocínio e à inferência;
- ajuda na antecipação dos efeitos e dos objetivos, na planificação e no controle da ação.

Para o autor, é clássico dizer que a linguagem tem dupla função, de comunicação e de representação, mas, dessa forma, podemos estar subestimando sua função de auxílio ao pensamento, que só parcialmente é coberta pelas funções de comunicação e de representação.

O autor designa por <u>conhecimentos em ação</u> os conhecimentos contidos nos esquemas. Indicaremos alguns conhecimentos em ação contidos na resolução de uma subtração com o uso de cada algoritmo:

- Método do empréstimo: sistema decimal (uma dezena = dez unidades, uma centena = 10 dezenas, etc.), conceito de tirar (se tiramos uma parte do todo sobra a outra parte).

- Método da compensação: sistema decimal, propriedade da invariância da diferença, conceito de tirar, conceito de completar (para chegar ao total falta a outra parte).

Segundo Gregolin (2002), o algoritmo da subtração por empréstimo que nós, professores, propostas pedagógicas, e quem mais possa influir, impomos aos nossos alunos, pode exigir transformações em várias ordens para a resolução em uma única ordem, ter sua leitura dificultada pelas trocas e vai na contramão do conhecimento matemático socialmente estabelecido. Já no algoritmo da compensação, a subtração é local, envolvendo sempre duas ordens. Se for necessária uma soma, a questão (não chega a ser problema) é resolvida na própria ordem e na imediatamente superior. De acordo com o autor, durante suas observações, alguns alunos usaram o algoritmo da compensação, que haviam aprendido com os pais, principalmente nas divisões. Analisaremos, portanto, as implicações da subtração no algoritmo da divisão.

2.2.4 A subtração no algoritmo da divisão

Em seu trabalho Cunha (1997) observa que a operação de divisão era considerada uma das mais difíceis no século XV e cita Pacioli (1494) que afirmou: "*se um homem pode dividir bem, tudo mais torna-se fácil*". Ainda hoje é muito comum encontrarmos, no terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (5ª a 8ª séries), alunos que têm muita dificuldade para efetuar divisão.

Segundo Cunha (1997) a proposta curricular sugere que se trabalhe, num primeiro momento, a divisão de números naturais por meio do processo americano (que associa a divisão a subtrações sucessivas) até que os alunos percebam que não há necessidade de distribuir de um em um, diminuindo o número de passagens. Em seguida, sugere a introdução do processo longo ou do processo breve, ressaltando a ordem de grandeza prevista para o quociente, antes de iniciar o processo. A forma sintética do algoritmo poderá ser apresentada ao final do processo, quando o aluno já tenha compreendido o significado de cada etapa.

Cunha (1997) afirma que é impossível estabelecermos uma data exata para a origem do nosso atual método de divisão longo, visto que ele foi se desenvolvendo progressivamente.

Observe um exemplo do que seria o processo longo e o processo breve da divisão.

Processo longo

$$
\begin{array}{rl}
1\,8\,4\,1 & \underline{|\ 7\quad} \\
-\underline{1\,4} & \ \ 263 \\
4\,4 & \\
-\underline{4\,2} & \\
2\,1 & \\
-\underline{2\,1} & \\
0 &
\end{array}
$$

Processo breve

$$
\begin{array}{rl}
1\,8\,4\,1 & \underline{|\ 7\quad} \\
4\,4 & \ \ 263 \\
2\,1 & \\
0 &
\end{array}
$$

No processo longo as subtrações são explicitadas no papel, no processo breve são feitas mentalmente. Brousseau (2007), analisando esses métodos, afirma que a divisão conjuga as dificuldades da multiplicação com as da subtração, assim, as dificuldades encontradas na divisão podem ser agravadas pelas dificuldades com a subtração.

Os livros destinados ao professor que analisamos (anexo A) sugerem que, ao final do processo de ensino da divisão, seja introduzido o processo breve onde as subtrações são feitas mentalmente. Observe nas figuras 22 e 23 como é sugerido que seja feita essa introdução:

26'2 | 7 — 26 dividido por 7, 3.
5 3 — 3 vezes 7, 21; para 26, 5.

26'2' | 7 — Abaixa o 2.
5 2 37
3

52 dividido por 7, 7.
7 vezes 7, 49; para 52, 3.

Outro exemplo:

49'4' | 23 — 49 por 23, 2. 2 vezes 3, 6; para 9, 3;
03 4 21 — 2 vezes 2, 4; para 4, zero. Abaixa o 4.
1 1 . — 34 por 23, 1. Uma vez 3, 3; para 4, 1; uma vez 2, 2; para 3, 1.

Figura 22: Algoritmo divisão – processo breve
Fonte: Neto, 1993, p. 119

DIVISÃO ABREVIADA

O algoritmo da divisão abreviada, embora siga os mesmos passos da divisão longa, não evidencia a subtração. Por exemplo, na divisão 378 ÷ 25, teríamos:

378 | 25
128 15
03

onde se pensou: uma vez cinco, cinco; cinco para sete, dois. Uma vez dois, dois; dois para três, um, etc.

A forma abreviada deve ser introduzida com divisores de um algarismo e gradativamente expandida.

Figura 23: Algoritmo da divisão – processo breve
Fonte: Valle, 1969, p. 108

Na figura 22 observamos dois exemplos de divisão pelo processo breve, um com o divisor com um único algarismo e outro com o divisor formado por dois algarismos. No exemplo da figura 23 o divisor também é formado por dois algarismos. Neste caso, divisor com dois algarismos, no momento da multiplicação para o cálculo do resto, se multiplica um algarismo do divisor por vez, calculando a diferença com o respectivo algarismo do dividendo (2 vezes 3, 6; para 9, 3). Nos exemplos apresentados acima, o resultado da multiplicação é menor que o algarismo do dividendo. Em nenhum dos livros por nós analisados encontramos um exemplo em que o resultado da multiplicação fosse maior que o algarismo do dividendo no momento do cálculo do resto. Para tentar explicar melhor, vamos resolver 67 **:** 14 seguindo o mesmo método apresentado nos exemplos das figuras 22 e 23.

$$\begin{array}{r|l} 6\ 7 & 14 \\ \cline{2-2} & \ 4 \end{array}$$

- 67 dividido por 14, 4;
- 4 vezes 4, 16; para 7 ?

Como 7 é menor que 16, usaremos uma estratégia para calcular o resto:

$$\begin{array}{r|l} 6\ {}^{1}7 & 14 \\ \cline{2-2} 1\ 1 & \ 4 \end{array}$$

- 4 vezes 4, 16; para 17 falta 1;
- 4 vezes 1, 4; mais 1, 5; para chegar no 6 falta 1.

Nesta forma de raciocínio, quando acrescentamos uma dezena ao 7 e depois somamos um ao 4, estamos usando o método da compensação para efetuar a subtração mentalmente.

O aluno que não conhece esse método, para utilizar o método breve do algoritmo da divisão, geralmente faz a multiplicação separadamente e depois efetua a subtração. Observe:

6 7 | 14 4	1 4 x 4 5 6	6 7 | 14 1 1 4

Neste caso, a subtração 67 – 56 não é difícil de fazer mentalmente, mas, quando trabalhamos com números de maior valor, esse cálculo pode se tornar complicado. Por exemplo:

1 5 1 3 | 1 7 8	17 x 8 136	1 5 1 3 | 1 7 - 1 3 6 8 9 1 5 3 - 1 5 3 0

Pode não ser fácil para o aluno efetuar 151 – 136 mentalmente, portanto ele, provavelmente, recorrerá ao processo longo para efetuar a divisão.
Conhecendo o método da compensação poderia fazer:

1 5 ^{6}1 3 | 1 7
1 5   8

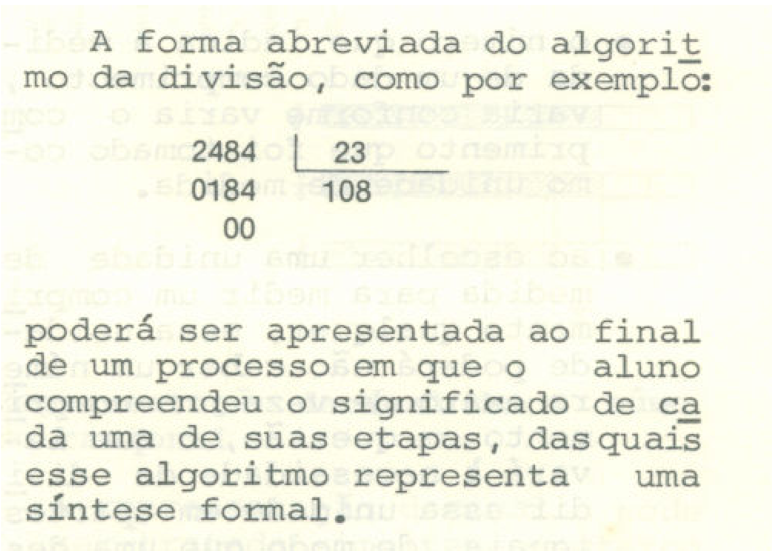
- 151 dividido por 17 = 8
- 8 vezes 7 = 56; para 61 falta 5; (observe que acrescentamos 60 à unidade 1)
- 8 vezes 1 = 8; mais 6, 14; para 15 falta 1. (observe que adicionamos 6 às dezenas)
- abaixa o 3

1 5 1 3 | 1 7
1 5 ^{6}3   8 9
0 0

- 153 dividido por 17 = 9
- 9 vezes 7 = 63; para 63, 0;
- 9 vezes 1 = 9; mais 6, 15; para 15, 0.

Podemos observar que os livros sugerem o uso do processo breve da divisão, mas trazem apenas os exemplos mais simples e não ampliam os casos para identificar possíveis dificuldades, o que pode levar o professor a trabalhar com os alunos apenas os casos elementares, limitando as possibilidades de resolução do aluno.

Mesmo na Proposta Curricular de São Paulo (1991) é sugerido que seja apresentada a forma abreviada da divisão, mas, não é discutida nenhuma das dificuldades que o aluno possa ter ao utilizar essa forma do algoritmo, como podemos ver na figura 24.


A forma abreviada do algorit-
mo da divisão, como por exemplo:

```
2484 | 23
0184   108
  00
```

poderá ser apresentada ao final
de um processo em que o aluno
compreendeu o significado de ca-
da uma de suas etapas, das quais
esse algoritmo representa uma
síntese formal.

Figura 24: Algoritmo da divisão – processo breve
Fonte: São Paulo, 1991, p.47

Centurión (1994), ao descrever os processos do algoritmo da divisão, ressalta que os algoritmos têm sido ensinados e reproduzidos há vários séculos, e que, ao fazer mecanicamente um algoritmo, não pensamos, a cada momento, o porquê do processo. No entanto, é muito importante que compreendamos a técnica, para que possamos fazê-la de várias maneiras diferentes, sabendo, a cada passo, o quê e o porquê de estarmos fazendo algo.

2.3 DIAGNÓSTICO DE DIFICULDADES DOS ALUNOS

A fim de identificar as dificuldades dos alunos ao utilizarem a subtração, preparamos um diagnóstico dos problemas relacionados ao uso do algoritmo do empréstimo e das dificuldades dos alunos em relacionar a subtração às idéias de tirar, comparar e completar.

2.3.1 Estudo de dificuldades dos alunos com o algoritmo da subtração

Para detectar as dificuldades dos alunos com o uso do algoritmo do empréstimo para efetuar subtrações, aplicamos um teste em duas fases. Na primeira fase, analisamos o desempenho de alunos do terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (5ª a 8ª séries). Na segunda fase, para verificar se as dificuldades se mantêm além do Ensino Fundamental, aplicamos o teste a alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Como nosso objetivo principal é detectar a existência de dificuldades com o uso do algoritmo, faremos apenas uma análise quantitativa dos erros.

Inicialmente, o teste foi aplicado a 33 alunos de uma sala de 5ª série (6º ano) de uma escola pública estadual de Santo André, na faixa etária de 10 a 12 anos, que, sem exceção, efetuam as subtrações utilizando o algoritmo do empréstimo. Foi solicitado que eles resolvessem as seguintes subtrações, nas quais são necessários um ou mais empréstimos:

A	B	C	D	E	F
1572	500903	900	20000	4781	1000
- 698	- 19927	- 81	- 19989	- 920	- 319

Os dados obtidos foram os seguintes:

- Total de alunos: 33
- Quantidade de alunos que cometeram pelo menos um erro: 22.
- Quantidade de alunos que erraram todas as subtrações: 3.
- Apenas 11 conseguiram resolver corretamente todas as questões.

Resolvemos, então, aplicar o mesmo teste a alunos das 6ª, 7ª e 8ª séries da mesma escola pública estadual. Todos esses alunos utilizam o algoritmo do empréstimo para efetuar as subtrações.

Em uma classe de 6ª série, com 26 alunos na faixa etária de 11 a 13 anos, obtivemos o seguinte resultado:

- Quantidade de alunos que cometeram pelo menos 1 erro: 19.
- Quantidade de alunos que erraram todas as subtrações: 0.
- 7 alunos conseguiram resolver corretamente todas as questões.

Na classe de 7ª série, com 36 alunos na faixa etária de 12 a 14 anos o resultado foi:

- Quantidade de alunos que cometeram pelo menos 1 erro: 27.
- Quantidade de alunos que erraram todas as subtrações: 2.
- 9 alunos conseguiram resolver corretamente todas as questões.

Na classe de 8ª série, com 35 alunos na faixa etária de 13 a 15 anos o resultado foi o seguinte:

- Quantidade de alunos que cometeram pelo menos 1 erro: 27.
- Quantidade de alunos que erraram todas as subtrações: 2.
- 8 alunos conseguiram resolver corretamente todas as questões.

Na tabela 1 temos um resumo dos resultados do teste aplicado a alunos de quinta a oitava séries de uma escola pública.

Tabela 1: resumo dos resultados do teste com alunos de uma escola pública

Série	Qde. alunos	Qde. alunos com pelo menos um erro	Qde. alunos que acertaram todas
5ª	33	22	11
6ª	26	19	7
7ª	36	27	9
8ª	35	27	8
Total	130	95	35

Como podemos observar na tabela 1, em todas as séries a quantidade de erros foi muito grande, considerando-se que se trata de alunos do 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental (5ª à 8ª séries) que já trabalham com a subtração desde o 1º ciclo, o que pode representar um obstáculo para a construção de novos conhecimentos. É importante destacar que todos os alunos resolveram as subtrações usando o método do empréstimo (decomposição do minuendo).

Analisamos também em quais das subtrações os alunos cometeram mais erros. Na tabela 2 relacionamos a quantidade de erros por subtrações (A, B, C, D, E, F) em cada série. Cada erro significa uma subtração na qual o aluno não chegou ao resultado correto.

Tabela 2: resumo dos erros cometidos pelos alunos por questão e série

Série	Qde de erros **A**	Qde de erros **B**	Qde de erros **C**	Qde de erros **D**	Qde de erros **E**	Qde de erros **F**
5ª	11	17	10	14	11	13
6ª	3	12	10	8	5	12
7ª	7	17	7	12	11	13
8ª	7	17	12	19	16	18
TOTAL	**28**	**63**	**39**	**53**	**43**	**56**

As subtrações que os alunos mais erraram foram as B, D e F. Essas são as que apresentam, no minuendo, a maior quantidade de zeros. A subtração B (500903 – 19927) é a que tem os termos formados pela maior quantidade de algarismos e as D (20000 – 19989) e F (1000 – 319) as que possuem o minuendo com a maior quantidade de zeros juntos.

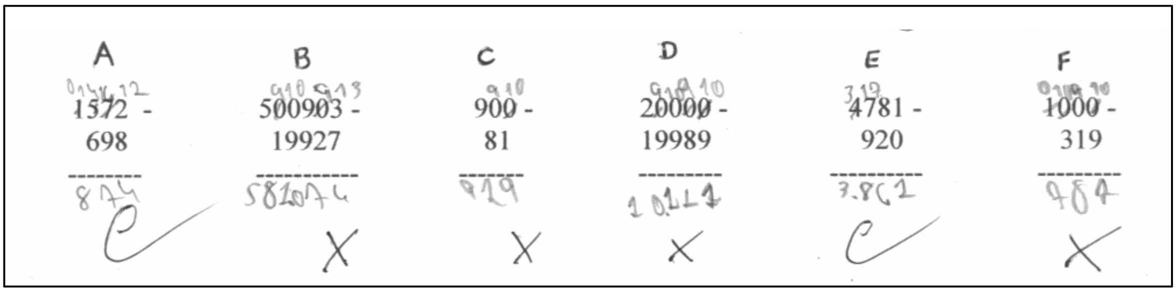


Figura 25: Erros cometidos por um aluno da 5ª série

Observe na figura 25 que o aluno acertou apenas as subtrações que não continham o algarismo zero no minuendo (A e E). Nas outras, suas anotações são confusas e ele acabou errando. Podemos perceber que no item B ele não iniciou as trocas pelo primeiro algarismo do minuendo, o 5, ele iniciou cortando o zero e colocando o algarismo 9 no lugar, o que pode sugerir um procedimento automatizado de forma errada. O mesmo problema ocorreu no item D. Nas figura 26 e 27 podemos observar o mesmo tipo de erro cometido por outros alunos.

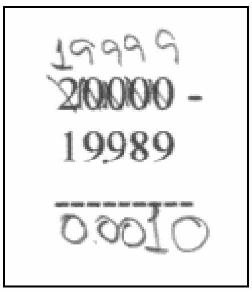


Figura 26: Erro cometido por um aluno da 5ª série

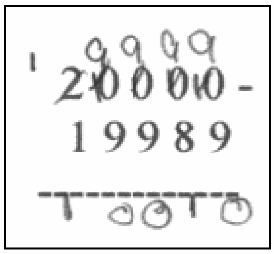


Figura 27: Erro cometido por um aluno da 8ª série

Observe na figura 28 que, mesmo em uma subtração na qual o minuendo não contém zeros, o aluno pode ter se confundido com as anotações e acabou errando o resultado:

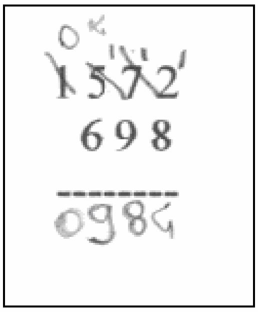


Figura 28: Erro cometido por um aluno da 7ª série

Na segunda fase, para verificar se as dificuldades com a subtração se mantêm além do Ensino Fundamental, resolvemos aplicar o mesmo teste a alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Com o intuito de comprovar que a dificuldade dos alunos está realmente nas subtrações com vários empréstimos, dividimos nosso teste em duas partes. Na primeira parte usamos subtrações nas quais são necessários poucos ou nenhum empréstimo. Na segunda parte usamos subtrações nas quais são necessários vários empréstimos. Esse teste foi aplicado a alunos do primeiro ano do Ensino Médio (15 a 17 anos), de uma escola pública estadual, que utilizam o algoritmo do empréstimo para resolver as subtrações.

Na primeira parte foi solicitado que os alunos resolvessem as seguintes subtrações:

1572	529943	995	19989	4781	1093
- 421	- 18827	- 81	- 10089	- 510	- 319

Os resultados foram os seguintes:

- Total de alunos: 34
- Quantidade de alunos que cometeram pelo menos 1 erro: 7.
- 27 alunos conseguiram resolver corretamente todas as questões.

No mesmo dia, assim que terminaram a primeira parte, foi solicitado que os mesmos alunos resolvessem essas outras subtrações, nas quais são necessários vários empréstimos:

1 5 7 2	5 0 0 9 0 3	9 0 0	2 0 0 0 0	4 7 8 1	1 0 0 0
- 6 9 8	- 1 9 9 2 7	- 8 1	- 1 9 9 8 9	- 9 2 0	- 3 1 9

Obtivemos o seguinte resultado:

- Total de alunos: 34
- Quantidade de alunos que cometeram pelo menos um erro: 21.
- Apenas 13 alunos conseguiram resolver corretamente todas as questões.

De uma parte para outra, podemos observar que a quantidade de erros aumentou consideravelmente, ressaltando a dificuldade dos alunos em efetuar as subtrações com vários empréstimos. Podemos verificar que as dificuldades com o algoritmo do empréstimo vão além do Ensino Fundamental, pois, a quantidade de erros dos alunos do Ensino Médio também foi grande.

Segundo Vergnaud (1996) quando uma criança utiliza um esquema ineficaz para determinada situação, a experiência a conduzirá, quer a mudar ou alterar o esquema. No entanto, de acordo com o resultado de nossos testes, pudemos verificar que quando se trata de um algoritmo matemático, como o da subtração por empréstimo, a criança pode ser levada, em alguns casos, a cometer erros que ela, em determinado momento, não é capaz de detectar e superar.

2.3.2 Diagnóstico de dificuldades em relacionar a subtração às idéias de tirar, comparar e completar

Após detectar as dificuldades dos alunos com o uso do algoritmo, resolvemos verificar se eles têm dificuldades em relacionar a subtração às idéias de tirar, comparar e completar. Para esta verificação, solicitamos que 71 alunos, de 10 a 12 anos, de 5ª séries (6º ano) de uma escola pública estadual resolvessem três problemas. Em cada um dos problemas o aluno deveria usar a subtração relacionada a uma idéia diferente: tirar, comparar ou completar. As variáveis numéricas dos problemas foram escolhidas para provocar subtrações com vários empréstimos.

Os problemas propostos foram:

Resolva os problemas abaixo:

a) Nesse mês, uma fábrica produziu 200.000 parafusos e vendeu 19.989. Quantos parafusos não foram vendidos?

b) Maria tem 1572 reais e Joana tem 698 reais. Quantos reais Maria tem a mais que Joana?

c) Para bater o recorde em um jogo de vídeo game, Lucas precisa fazer 500.103 pontos. Ele já conseguiu fazer 19.297 pontos. Quantos pontos faltam para que ele consiga bater o recorde?

O problema ***a*** relaciona a subtração à idéia de tirar, o problema ***b*** relaciona a subtração à idéia de comparar e o problema ***c*** à idéia de completar.

Obtivemos os seguintes resultados:

Total de alunos que resolveram os problemas: 71

55 alunos utilizaram a operação correta, subtração, em todos os problemas, o que mostra que eles associaram corretamente a subtração às idéias de tirar, comparar e completar.

16 alunos utilizaram uma operação diferente em algum dos problemas, o que pode indicar alguma dificuldade em relacionar a subtração às três idéias. Todos usaram a subtração para resolver o problema **a**, o que significa que a idéia de tirar é sempre relacionada à subtração. 13 alunos usaram operações incorretas para resolver os problemas **b** e **c**, o que pode indicar uma maior dificuldade em relacionar as idéias de comparar e completar à subtração.

Dos 55 alunos que utilizaram a operação correta, 20 efetuaram todas as subtrações corretamente e 35 cometeram erros ao efetuar as subtrações. Portanto, grande parte dos alunos, que mobilizam corretamente a subtração para resolver problemas, comete erros ao usar o algoritmo quando são necessários vários empréstimos. As figuras 29, 30 e 31 mostram os erros cometidos por alguns alunos.

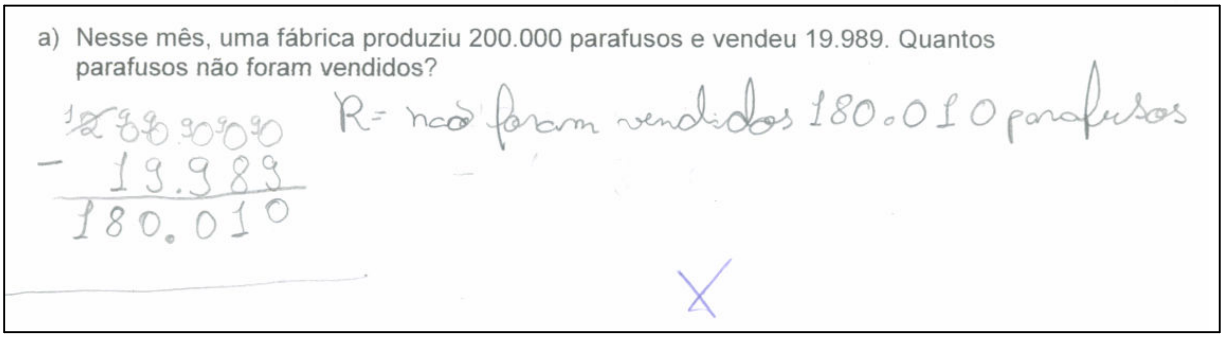


Figura 29: Erros de um aluno com o uso do algoritmo do empréstimo

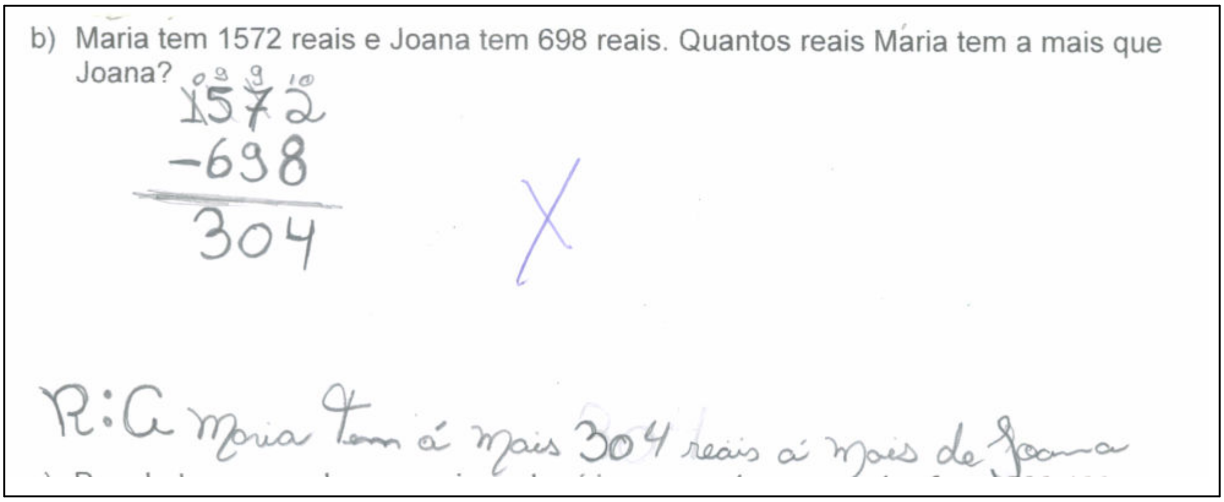


Figura 30: Erros de um aluno com o uso do algoritmo do empréstimo

Observamos que os alunos utilizaram corretamente a subtração para resolver o problema, mas cometeram erros ao utilizar o algoritmo do empréstimo. Na figura 29 podemos perceber que o aluno cortou os zeros e automaticamente colocou o 9 no lugar, sem perceber que no último deveria ter colocado o 1 e considerado o valor 10. Na figura 30 podemos observar o mesmo tipo de erro, dessa vez nos algarismo 5 e 7 que também foram cortados e, acima deles, colocado o 9.

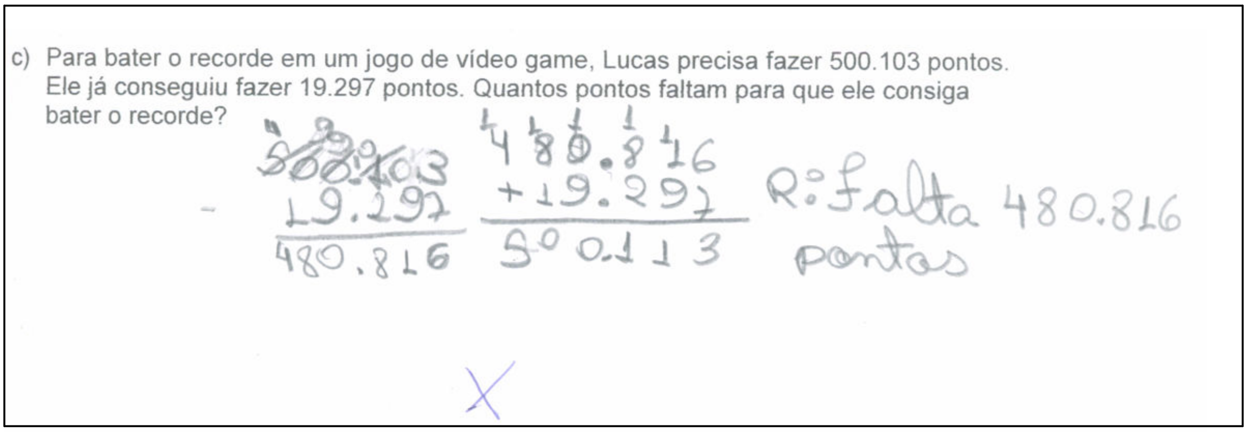


Figura 31: Erros de um aluno com o uso do algoritmo do empréstimo

Observe que na figura 31 o aluno conferiu a subtração por meio da operação inversa e, ainda assim, não conseguiu encontrar o erro. Isso pode vir a comprovar que muitos alunos não entendem seus próprios registros ao utilizar o algoritmo do empréstimo, como afirmou Gregolin (2002).

Esses resultados reforçam nossa hipótese de que o algoritmo do empréstimo pode levar o aluno a cometer erros, influenciando negativamente no seu desempenho.

2.4 ANÁLISE DA CONCEPÇÃO DE PROFESSORES

Resolvemos, então, investigar a opinião dos professores em relação ao uso do algoritmo do empréstimo. Será que eles percebem as dificuldades de seus alunos ao usarem esse algoritmo?

Para isso preparamos um questionário que deixamos com a coordenação de várias escolas, públicas e privadas, da cidade de Santo André, e solicitamos que pedissem para que os professores respondessem.

Trinta e quatro professores aceitaram responder o questionário, por meio do qual pretendemos verificar se eles conhecem os dois algoritmos da subtração, qual eles usam e como analisam os erros dos alunos. Esses professores são, em sua maioria, professores polivalentes de 1ª a 4ª séries, apenas quatro deles lecionam para o terceiro e quarto ciclos de Ensino Fundamental (5ª a 8ª séries) ou Ensino Médio. Todos estavam lecionando no ano de 2007.

QUESTIONÁRIO PARA O PROFESSOR

Nome: ....
Cidade:...UF:..................Data:___/___/______
Disciplinas que leciona:..
Escolas em que leciona:..
Séries para as quais leciona:..

1) Como você ensina seu aluno a efetuar a subtração?
( ) Método do empréstimo (decomposição do minuendo)
( ) Método da compensação (abaixa o 1)

2) Você conhece os dois métodos? ( ) sim ( ) não

3) Como você aprendeu a efetuar a subtração? Usando o mesmo método que ensina?
4) Resolva a subtração abaixo (se você conhece os dois métodos, utilize o método do empréstimo). Quais as dificuldades que um aluno teria para resolver essa subtração utilizando o método do empréstimo?

$$\begin{array}{r} 200100 \\ -\ 148319 \\ \hline \end{array}$$

Analisando as respostas dos 34 professores pudemos observar que 18 deles dizem conhecer os dois métodos, 16 conhecem apenas o método do empréstimo e todos afirmam ensinar usando o método do empréstimo.

Na questão 4, na qual pedimos para que os professores efetuassem a subtração 200100 – 148319 utilizando o método do empréstimo e relacionassem as dúvidas que, em sua opinião, um aluno teria para resolvê-la, obtivemos o seguinte:

- 6 professores não responderam;
- 5 disseram achar que os seus alunos não teriam dificuldades;
- 23 disseram achar que eles teriam alguma dificuldade e que se confundiriam na hora de fazer os empréstimos, principalmente pela quantidade de zeros do minuendo. Observe algumas respostas dos professores, por meio das quais podemos perceber que eles reconhecem que o algoritmo do empréstimo pode gerar dificuldades para os alunos:

> "Por se tratar de um número grande, o método do empréstimo causa confusão, fica difícil visualizar os números".
>
> "Ele teria dificuldade devido o número repetir o algarismo zero várias vezes, apesar do aluno já estar na 5ª série".
>
> "Sim, ele teria dificuldades, pois ele ia se confundir com os vários números 0, e não saberia de início qual pegar emprestado".
>
> "Acho que sim, pois quando o cálculo tem muitos zeros no minuendo, a conta fica um pouco confusa, é necessário prestar muita atenção".

As resoluções dos professores apresentaram, todas elas, a resposta correta. No entanto, verificando suas anotações, pudemos observar que 3 delas se apresentavam assim:

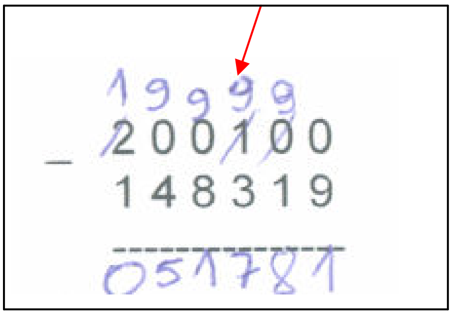
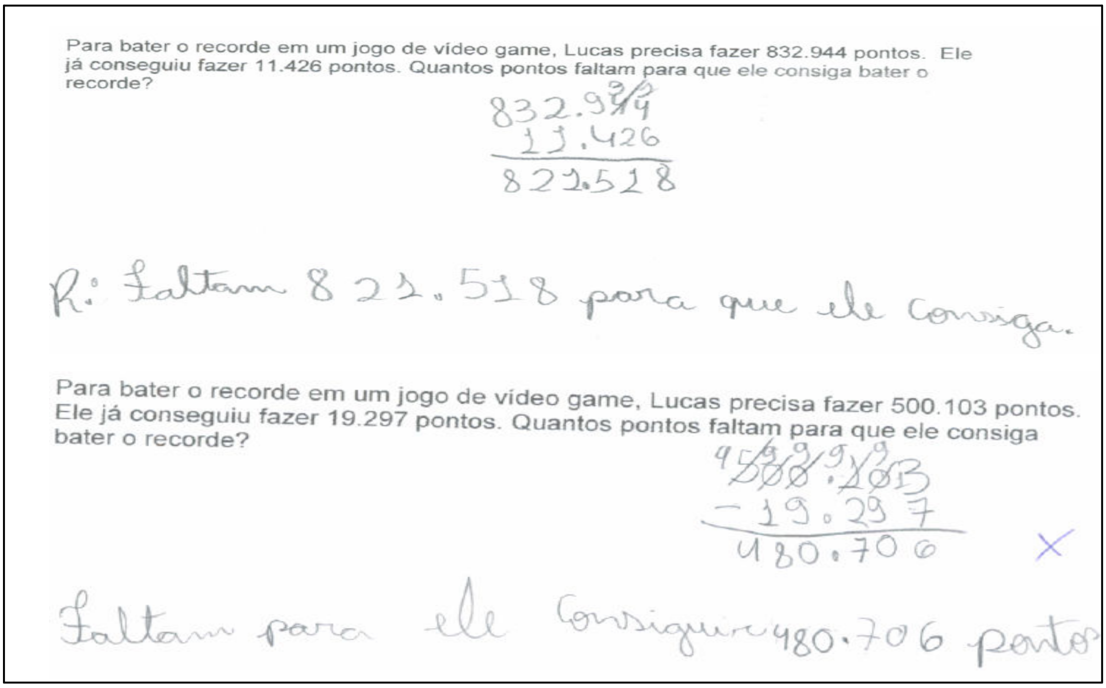


Figura 32: subtração efetuada por um professor

Observe, na figura 32, o número 1 cortado e em seu lugar colocado o algarismo 9. Nessa subtração a posição do algarismo 1 não assume o valor 9 em nenhum momento. Isso mostra um procedimento automatizado que pode levar a erros, como observamos nas resoluções dos alunos nas figuras 29 e 30, e pode sugerir certa dificuldade, dos próprios professores, com o uso do algoritmo. Esses três casos foram observados em questionários de professores do primeiro ciclo do Ensino Fundamental (1ª a 4ª séries).

Em outra questão, apresentamos aos professores a resolução de dois problemas praticamente iguais, feitas por um mesmo aluno (figura 33). A única diferença entre os dois problemas eram os valores. Para resolver o primeiro o aluno teria que efetuar uma subtração na qual seria necessário apenas um empréstimo e para resolver o segundo efetuaria uma subtração na qual seriam necessários vários empréstimos.



Para bater o recorde em um jogo de vídeo game, Lucas precisa fazer 832.944 pontos. Ele já conseguiu fazer 11.426 pontos. Quantos pontos faltam para que ele consiga bater o recorde?

832.944
11.426
821.518

R: faltam 821.518 para que ele consiga.

Para bater o recorde em um jogo de vídeo game, Lucas precisa fazer 500.103 pontos. Ele já conseguiu fazer 19.297 pontos. Quantos pontos faltam para que ele consiga bater o recorde?

500.103
− 19.297
480.706

faltam para ele conseguir 480.706 pontos

Figura 33: Resoluções de problemas a serem analisadas pelos professores

Como podemos observar na figura 33, o aluno utilizou a operação correta nos dois problemas, mas, acertou o primeiro e errou o segundo. Pedimos aos professores que analisassem por que isso havia acontecido.

- 8 professores não responderam;
- 6 atribuíram o erro à falta de atenção do aluno;
- 20 disseram que na primeira questão a subtração era mais simples, pois era necessário apenas um empréstimo, já na segunda questão, para efetuar a subtração o aluno necessitava fazer vários empréstimos o que o levou a se confundir e errar na resolução. Suas respostas foram semelhantes a esta:

> “Na segunda conta o minuendo é composto por alguns zeros, isso confunde o raciocínio do aluno, pois ele tem que pensar de que lugar ele vai emprestar e o empréstimo tem que passar de ‘casa em casa’”.

Podemos observar que esses professores reconhecem a dificuldade dos alunos para efetuarem as subtrações utilizando o método do empréstimo, principalmente quando o minuendo é composto por um ou mais algarismos zero e são necessários vários empréstimos.

Dezesseis, dos trinta e quatro professores que responderam nosso questionário, nem sabem que existe um outro algoritmo para efetuar as subtrações, o que nos leva a crer que em sua formação apenas o algoritmo do empréstimo foi trabalhado. Investigaremos, então, o que dizem os documentos oficiais e os livros didáticos em relação à subtração e se eles se referem aos dois algoritmos.

2.5 A SUBTRAÇÃO EM DOCUMENTOS OFICIAIS

Estudaremos os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, procurando entender qual a abordagem sugerida para o ensino da subtração e se fazem referência ao uso dos algoritmos.

2.5.1 Estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN, 1997) para o ensino de 1ª a 4ª séries afirmam que, ao longo do Ensino Fundamental, os conhecimentos numéricos são construídos e assimilados pelos alunos num processo dialético, em que intervêm como instrumentos eficazes para resolver determinados problemas e como objetos que serão estudados, considerando-se suas propriedades, relações e o modo como se configuram historicamente. Sugere que no primeiro ciclo, sejam explorados alguns dos significados das operações, colocando-se em destaque a adição e a subtração, em função das características da situação. Ao longo desse trabalho, os alunos devem construir os fatos básicos das operações (cálculos com dois termos, ambos menores do que dez), constituindo um repertório que dá suporte ao cálculo mental e escrito. Já no segundo ciclo deve haver a ampliação do repertório básico das operações com números naturais para o desenvolvimento do cálculo mental e escrito. O aluno deve reconhecer que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e de que diferentes operações podem resolver um mesmo problema. Deve ser capaz de resolver operações com números naturais, por meio de estratégias pessoais e do uso de técnicas operatórias convencionais, com compreensão dos processos nelas envolvidos.

Segundo os PCN (1997) uma boa habilidade em cálculo depende de consistentes pontos de apoio, em que se destacam o domínio da contagem e das combinações aritméticas, conhecidas por denominações diversas como tabuadas, listas de fatos fundamentais, leis, repertório básico, etc. Enfatiza que a aprendizagem de um repertório básico de cálculos não se dá pela simples memorização de fatos de uma dada operação, mas sim pela realização de um trabalho que envolve a construção, a organização e, como conseqüência, a memorização compreensiva desses fatos. A construção apóia-se na resolução de problemas e confere significados a escritas do tipo a + b = c, a x b = c. Já a organização dessas escritas e a observação de regularidades facilitam a memorização compreensiva.

De acordo com os PCN (1997) ao construírem e organizarem um repertório básico os alunos começam a perceber, intuitivamente, algumas propriedades das operações, tais como a associatividade e a comutatividade, na adição e multiplicação. A comutatividade na adição é geralmente identificada antes de qualquer apresentação pelo professor. Isso pode ser notado em situações em que, ao adicionarem 4 + 7, invertem os termos para começar a contagem pelo maior número. Também algumas regularidades, presentes nas operações, começam a ser percebidas, tais como: observar que, nas multiplicações por 2, todos os resultados são pares; que, na tabuada do cinco, os resultados terminam em zero ou em cinco, etc. Dentre os procedimentos que os alunos costumam utilizar na construção e organização desse repertório, os PCN (1997) destacam:

> — contar de dois em dois, três em três para construir as multiplicações por 2, por 3...;
> — usar resultados de adições de números iguais, como 4 + 4, 7 + 7 para cálculos com números maiores como 40 + 40, 700 + 700, etc.;
> — “dobrar e adicionar um” para se chegar ao resultado de 5 + 6 como sendo 5 + 5 + 1;
> — adicionar pares de números iguais, como, por exemplo, 8 + 8, para calcular 7 + 9;
> — adicionar 10 e subtrair 1 para somar 9;
> — aplicar as adições que resultam 10 em situações como 7 + 4, calculando (7 + 3) + 1 (um dos números é decomposto de maneira a completar um outro para formar dez);
> — usar regras ou padrões na construção de listas, como, por exemplo:
>
> | | |
> |---|---|
> | 07 + 5 = 12 = 5 + 07 | 17 + 5 = 22 = 5 + 17 |
> | 27 + 5 = 32 = 5 + 27 | 37 + 5 = 42 = 5 + 37 |

> — encontrar resultados de multiplicações pela adição ou pela subtração:
> 6 x 8 pode ser calculado como 5 x 8 + 8 = 40 + 8 = 48,
> e 9 x 7 como 10 x 7 - 7 = 70 - 7 = 63;
> — decompor um número para multiplicá-lo, usando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição:
> 12 x 5 = (10 x 5)+ (2 x 5) ou (6 x 5) + (6 x 5). (PCN, 1997, p.74-75).

Os PCN (1997) destacam que a construção dos fatos da subtração e da divisão deve ser realizada, buscando-se compreender suas relações com a adição e a multiplicação, utilizando-se como recurso a exploração de estratégias semelhantes usadas no cálculo dessas operações. É importante que os alunos observem:

> — a validade da "invariância da diferença": adicionar ou subtrair um mesmo valor aos dois termos de uma subtração não altera a diferença
> — 16 - 9 dá o mesmo resultado que 17 - 10;
> — a validade de "simplificar" os termos de uma divisão para obter o quociente (16 : 4 dá o mesmo resultado que 8 : 2 e 4 : 1);
> — a não-validade, na subtração e na divisão, de propriedades presentes na adição e na multiplicação, tais como a comutatividade e a associatividade. (PCN, 1997, p.75).

Segundo esse documento o foco do trabalho de construção de um repertório básico para o desenvolvimento do cálculo consiste em identificar as estratégias pessoais utilizadas pelos alunos e fazer com que eles evidenciem sua compreensão por meio de análises e comparações, explicitando-as oralmente. Já a organização desse repertório dá-se por meio da exploração das escritas numéricas e apóia-se na contagem, no uso de materiais didáticos e da reta numérica.

Os PCN (1997) enfatizam que a construção de um repertório básico constitui suporte para a ampliação dos diferentes procedimentos e tipos de cálculos que o aluno desenvolverá ao longo dos ciclos iniciais: cálculo mental ou escrito, exato ou aproximado. Esses diferentes procedimentos e tipos de cálculo relacionam-se e complementam-se. O cálculo escrito, para ser compreendido, apóia-se no cálculo mental e nas estimativas e aproximações. Por sua vez, as estratégias de cálculo mental, pela sua própria natureza, são limitadas. É bastante difícil, principalmente tratando-se de cálculos envolvendo números com vários dígitos, armazenar na memória uma grande quantidade de resultados. Assim, a necessidade de registro de resultados parciais acaba originando procedimentos de cálculo escrito.

Nos dois primeiros ciclos, o objetivo principal do trabalho com o cálculo consiste em fazer com que os alunos construam e selecionem procedimentos adequados à situação-problema apresentada, aos números e às operações nela envolvidos. Por exemplo: numa situação de compra em um supermercado, para saber se é possível continuar comprando ou não, em função do dinheiro de que se dispõe, basta fazer um cálculo mental aproximado, enquanto para saber qual é o saldo ou o débito em uma conta bancária recorre-se a um procedimento de cálculo exato. Assim, os PCN (1997) recomendam que a organização do estudo do cálculo privilegie um trabalho que explore concomitantemente procedimentos de cálculo mental e cálculo escrito, exato e aproximado, de tal forma que o aluno possa perceber gradativamente as relações existentes entre eles e com isso aperfeiçoar seus procedimentos pessoais, para torná-los cada vez mais práticos, aproximando-os aos das técnicas usuais. Segundo esse documento a importância do estudo do cálculo, em suas diferentes modalidades desde as séries iniciais, justifica-se pelo fato de que é uma atividade básica na formação do indivíduo, pois:

> — possibilita o exercício de capacidades mentais como memória, dedução, análise, síntese, analogia e generalização;
> — permite a descoberta de princípios matemáticos como a equivalência, a decomposição, a igualdade e a desigualdade;
> — propicia o desenvolvimento de conceitos e habilidades fundamentais para aprofundar os conhecimentos matemáticos;
> — favorece o desenvolvimento da criatividade, da capacidade para tomar decisões e de atitudes de segurança para resolver problemas numéricos cotidianos. (PCN, 1997, p.76).

Os PCN (1997) afirmam que na atividade de resolução de problemas é comum que os alunos construam registros numéricos para expressar os procedimentos de cálculo mental que utilizam. A análise desses registros evidencia, muitas vezes, o domínio de conhecimentos matemáticos que são a base para o cálculo escrito e particularmente para a compreensão das técnicas de cálculo que usualmente são ensinadas na escola. Por exemplo, se para multiplicar 14 por 7 o aluno faz 7 x 7 + 7 x 7 isso mostra que, nessa situação, ele recorre à decomposição de um dos termos e à propriedade distributiva para encontrar o resultado, de uma forma bastante simples. Partindo desse raciocínio é possível fazer com que ele verifique que existe uma outra forma de decompor o número que também leva à obtenção do resultado: 10 x 7 + 4 x 7. Esta forma de decomposição — nas unidades das diversas ordens que compõem o número — é utilizada na técnica usual da multiplicação. Assim como outros procedimentos de cálculo, as técnicas operatórias usualmente ensinadas nas escolas também apóiam-se nas regras do sistema de numeração decimal e na existência de propriedades e regularidades presentes nas operações. Porém, muitos dos erros cometidos pelos alunos são provenientes da não-disponibilidade desses conhecimentos ou do não-reconhecimento de sua presença no cálculo. De acordo com os PCN (1997) isso acontece, provavelmente, porque não se exploram os registros pessoais dos alunos, que são formas intermediárias para se chegar ao registro das técnicas usuais.

Esse documento enfatiza que o cálculo deve ser incentivado nas mais diferentes situações de aprendizagem e destaca alguns recursos que podem auxiliar a compreensão das técnicas operatórias. Selecionamos as que se referem à subtração:

> — a escrita decomposta dos números ajuda a evidenciar o estabelecimento de correspondência entre as unidades das diversas ordens, no registro da técnica da adição e da subtração; também evidencia o "transporte", no caso da adição, e o "empréstimo", no caso da subtração, à ordem imediatamente superior;

200	**50**	**5**
+100	**40**	**8**
300	+ 90	+ 13
300	+ 100	+ 3
400		**+ 3**

200	140	15
300	**50**	**5**
-100	**60**	**8**
100	**+ 80**	**+ 7**

> — A aplicação da invariância da diferença — adicionar (ou subtrair) um mesmo número aos dois termos de uma subtração não altera a diferença — permite a compreensão de uma das técnicas utilizadas para subtrair. (PCN, 1997, p.78).

300	1**50**	**15**
200	70	
-100	**60**	**8**

100 + 80 + 7

Os PCN de matemática para 5ª à 8ª séries (1998, p.95) reconhecem que, embora o estudo dos números e das operações seja um tema importante nos currículos do Ensino Fundamental, constata-se, com freqüência, que muitos alunos chegam ao final desse curso com um conhecimento insuficiente dos números, de como eles são utilizados e sem ter desenvolvido uma ampla compreensão dos diferentes significados das operações. Supõem que, provavelmente, isso ocorra em função de uma abordagem inadequada para o tratamento dos números e das operações e da pouca ênfase que tradicionalmente se dá a esse assunto nos terceiro e quarto ciclos. Sugere que, nesses ciclos, o trabalho com os conteúdos relacionados aos números e às operações deve privilegiar atividades que possibilitem ampliar o sentido numérico e a compreensão do significado das operações, ou seja, atividades que permitam estabelecer e reconhecer relações entre os diferentes tipos de números e entre as diferentes operações.

Com relação aos números naturais os PCN (1998) identificam alguns fatores que têm concorrido para que sua aprendizagem acabe não se consolidando ao longo do Ensino Fundamental e salienta alguns aspectos do tratamento habitualmente dado ao estudo dos números naturais nos ciclos finais do Ensino Fundamental que comprometem sua aprendizagem:

> - ausência de situações-problema envolvendo números grandes;
> - desestímulo ao uso dos procedimentos aritméticos considerados como raciocínios inferiores quando comparados aos procedimentos algébricos;
> - ausência de um trabalho com estimativas e com cálculo mental e o abandono da exploração dos algoritmos das operações fundamentais. (PCN, 1998, p.97).

Diante dessas dificuldades, conclui que a compreensão dos números naturais acontece por um processo de sucessivas aproximações e para que sua aprendizagem se consolide é necessário desenvolver, ao longo dos terceiro e quarto ciclos, um trabalho sistemático que proporcione ao aluno explorar as funções dos números naturais, analisar e produzir números que expressem diferentes ordens de grandeza, reconhecer a característica posicional da escrita do número e interpretar suas variadas formas de representação.

Em suas considerações sobre a adição e subtração, os PCN (1998) reforçam que, embora o estudo dos significados da adição e da subtração se inicie nos ciclos anteriores, o que se tem notado, em função da variedade e complexidade dos conceitos que integram esse tema, é que eles levam tempo para serem construídos e consolidados pelos alunos, o que impõe um trabalho sistemático desse conteúdo ao longo dos terceiro e quarto ciclos, concomitante ao trabalho de sistematização da aprendizagem dos números naturais e da construção dos significados dos números inteiros, racionais e irracionais.

Pudemos observar que os PCN (1997, 1998), no que diz respeito às operações, estão de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996), pois, sugerem o trabalho conjunto da adição e subtração como componentes de uma mesma família, havendo estreitas conexões entre as situações aditivas e subtrativas. Afirma que o aluno deve reconhecer que diferentes situações podem ser resolvidas por uma única operação e que diferentes operações podem resolver um mesmo problema. Abordam, ainda, os problemas de adição e subtração, relacionando-os às relações de base identificadas por Vergnaud (1996), como podemos ver no trecho a seguir:

> Dentre as situações que envolvem adição e subtração a serem exploradas nesses dois ciclos, podem-se destacar, para efeito de análise e sem qualquer hierarquização, quatro grupos:
> - Num primeiro grupo, estão as situações associadas à idéia de combinar dois estados para obter um terceiro, mais comumente identificada como ação de “juntar”. (...)
> - Num segundo grupo, estão as situações ligadas à idéia de transformação, ou seja, alteração de um estado inicial, que pode ser positiva ou negativa. (...)
> - Num terceiro grupo, estão as situações ligadas à idéia de comparação. (...)
> - Num quarto grupo, estão as situações que supõem a compreensão de mais de uma transformação (positiva ou negativa). (PCN, 1997, p.70-71).

Os PCN (1997, 1998) dão ênfase ao ensino das operações, destacando que o aluno deve ser capaz de resolvê-las por meio de estratégias pessoais e do uso de técnicas operatórias convencionais, tais como os algoritmos. Em relação aos algoritmos da subtração, os PCN (1997) citam os dois, o do empréstimo e o da compensação, deixando livre a escolha pelo professor. Em nenhum momento, porém, é identificado que o aluno possa ter alguma dificuldade com o uso de algum deles, especificamente com o algoritmo do empréstimo, quando o minuendo é formado por um ou mais zeros e são necessários vários empréstimos, como pudemos verificar em nosso estudo diagnóstico.

2.5.2 Estudo da Proposta Curricular do Estado de São Paulo

Segundo a Proposta Curricular para o Ensino da Matemática (1991), a abordagem do conceito de subtração deverá ser feita associando-se essa operação às idéias de tirar, comparar e completar, que são expressas simbolicamente da mesma forma pela escrita: $a - b = c$, com $a \geq b$ e $a, b \in IN$.

Esse documento sugere que, do mesmo modo que na adição, essas idéias devem ser apresentadas às crianças em atividades nas quais elas próprias estejam envolvidas e também em atividades que possibilitem a utilização de materiais de manipulação, e devem ser identificados os casos em que a subtração não é possível (números naturais).

De acordo com a Proposta Curricular (1991), os fatos fundamentais da subtração deverão ser construídos pelas crianças, com a utilização de material didático (ábacos, fichas, material dourado, etc.), estabelecendo-se sempre as relações entre adição e subtração. Por meio de atividades com material concreto, os alunos poderão observar que, na subtração, não valem propriedades como a associativa e a comutativa válidas no caso da adição. Não é necessário que, no primeiro momento, os nomes das propriedades sejam informados às crianças, mas devem ser trabalhadas significativamente.

Em relação ao algoritmo a ser utilizado para efetuar a subtração a Proposta Curricular (1991) observa:

> Cabe aqui uma observação a respeito das técnicas da subtração: enquanto subtrair recorrendo à ordem superior (decomposição do minuendo) tem todos os pré-requisitos no sistema de numeração decimal (que já vem sendo trabalhado), subtrair por compensação (adição de quantidades iguais no minuendo e no subtraendo) necessita de um trabalho prévio com a propriedade da invariância da diferença (se somarmos ou subtrairmos um mesmo número aos termos de uma subtração o resultado não se altera). Na realidade, a criança convive com essa propriedade em diversas situações de seu dia a dia (por exemplo, ela sabe que a diferença de idades entre ela e seu irmão permanece sempre a mesma, não importa quantos anos passem). (SÃO PAULO, 1991, p.35) .

Com essa observação, a Proposta Curricular sugere que seja mais fácil para o professor trabalhar com o método do empréstimo, que não necessita de nenhum pré-requisito além do que já vem sendo trabalhado na introdução do sistema de numeração decimal, já o uso do método da compensação necessita de um trabalho prévio introduzindo a propriedade da invariância da diferença. Mas não identifica nenhuma dificuldade que o aluno possa vir a ter ao usar os algoritmos.

2.6 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Como os alunos e professores por nós pesquisados utilizam o algoritmo do empréstimo para efetuar as subtrações, resolvemos analisar os livros didáticos a fim de verificar até que ponto eles influenciam nessa escolha.

Analisaremos livros didáticos e apostilas de sistemas educacionais de 2ª série (3º ano) do Ensino Fundamental para descobrir qual o algoritmo mais sugeridos por eles para efetuar as subtrações. Posteriormente, verificaremos alguns livros destinados à formação de professores de Ensino Fundamental.

2.6.1 Análise de livros didáticos do Ensino Fundamental

Segundo Lopes (2000) o livro didático determina a prática docente, sendo assim, complemento de sua formação acadêmica. De acordo com o guia do PNLD (2007) o livro didático, em qualquer disciplina, é um instrumento fundamental (às vezes praticamente único) do acesso da criança popular à leitura e à cultura letrada. Revela-se, assim, a importância do livro didático tanto para o aluno quanto para o professor.

Ao decidirmos analisar os livros didáticos, nos deparamos com novas questões: “quais títulos analisar?”, “quais são os mais utilizados?”. Resolvemos, então, iniciar nosso levantamento pelos títulos contidos no Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) de 2007, por se tratar de um projeto de alcance nacional, que influencia escolas de todo país, inclusive nas comunidades indígenas.

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é desenvolvido pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) que tem por objetivo oferecer, a alunos e professores de escolas públicas do Ensino Fundamental, de forma universal e gratuita, livros didáticos e dicionários de língua portuguesa para apoio ao processo ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula. A Secretaria de Educação Básica coordena o processo de avaliação pedagógica das obras inscritas no PNLD. Esse processo é realizado em parceria com universidades públicas que se responsabilizam pela avaliação dos livros didáticos. Ao final de cada processo, é elaborado o Guia de Livros Didáticos que é enviado às escolas como instrumento de apoio aos professores no momento da escolha dos livros didáticos. Esse guia, no ano de 2007, na área de matemática, das séries iniciais do Ensino Fundamental, indicou 35 títulos para apreciação e escolha pelos professores das escolas públicas.

Além dos contidos no guia do PNLD (2007), fizemos o levantamento de mais 25 títulos, chegando ao total de 60 títulos analisados. Os livros estão relacionados no anexo A. Todos eles se referem à 2ª série (3º ano) do Ensino Fundamental (ciclo 1). Nossa análise se limitou a verificar qual o algoritmo proposto por eles para efetuar as subtrações com reagrupamento (quando um algarismo do minuendo é menor que o do subtraendo) e quais os recursos apresentados.

Todos esses livros apresentam a resolução da subtração com recurso ou reagrupamento utilizando o algoritmo da decomposição do minuendo, ou seja, o método do empréstimo. A maioria deles utiliza ilustrações de cubinhos e barrinhas representado as unidades e dezenas, similares ao material dourado, para mostrar as trocas e depois apresentam a operação, com os números separados em centenas, dezenas e unidades, como podemos observar nas figuras 34, 35 e 36.

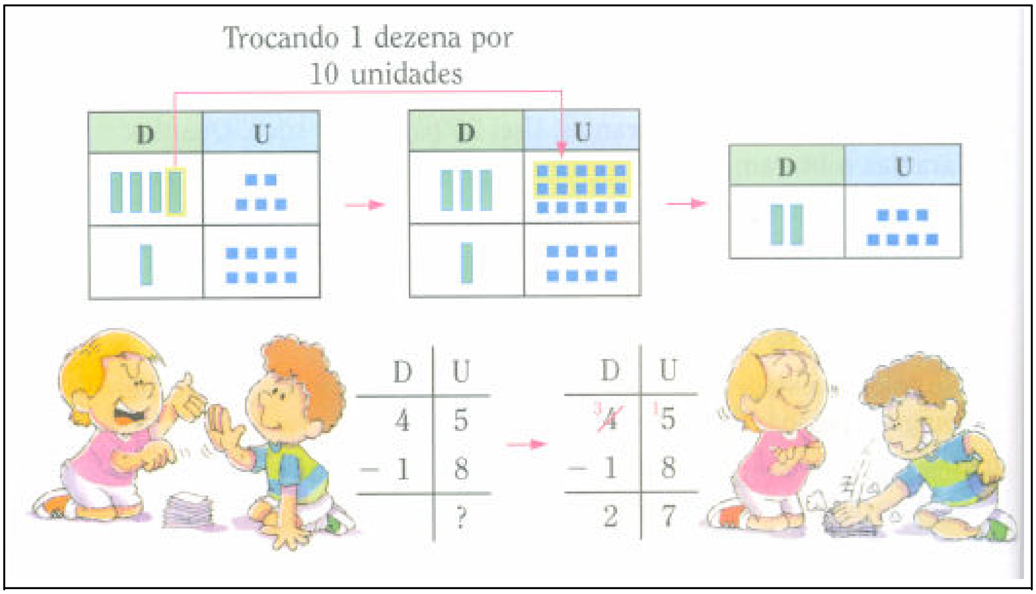


Figura 34: Algoritmo do empréstimo
Fonte: Bonjorno, 1995, p.78

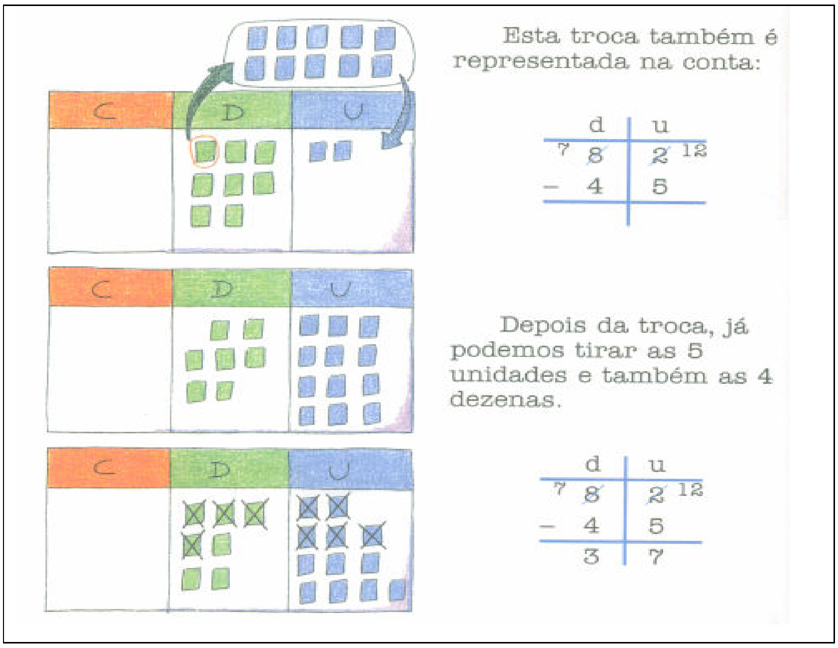


Figura 35: Algoritmo do empréstimo
Fonte: Pires, 1998, p. 182

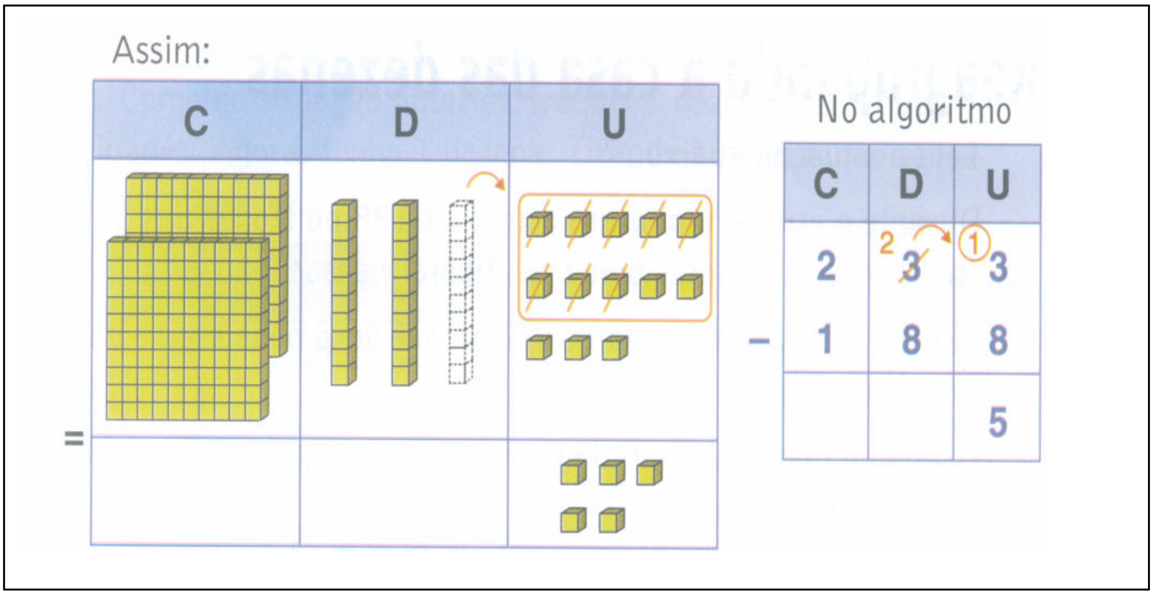


Figura 36: Algoritmo do empréstimo
Fonte: Darin, 2005, p.114

Observamos que a forma de apresentar o algoritmo é bem parecida em todos os livros. Aqueles que não trazem ilustrações similares ao material dourado, utilizam o ábaco ou o dinheiro para exemplificar as trocas, como podemos observar nas figuras 37 e 38.

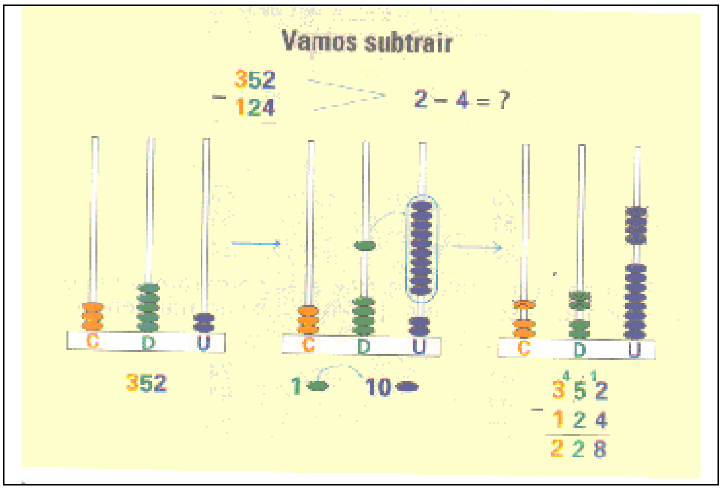


Figura 37: Algoritmo do empréstimo
Fonte: Guelli, 2004, p.76

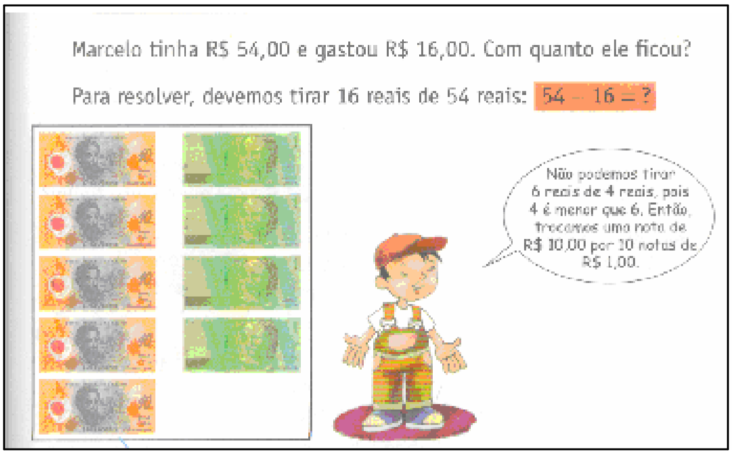


Figura 38: Algoritmo do empréstimo
Fonte: Cardoso, 2001, p.37

Alguns livros ilustram as trocas utilizando fichas, como podemos ver na figura 39.

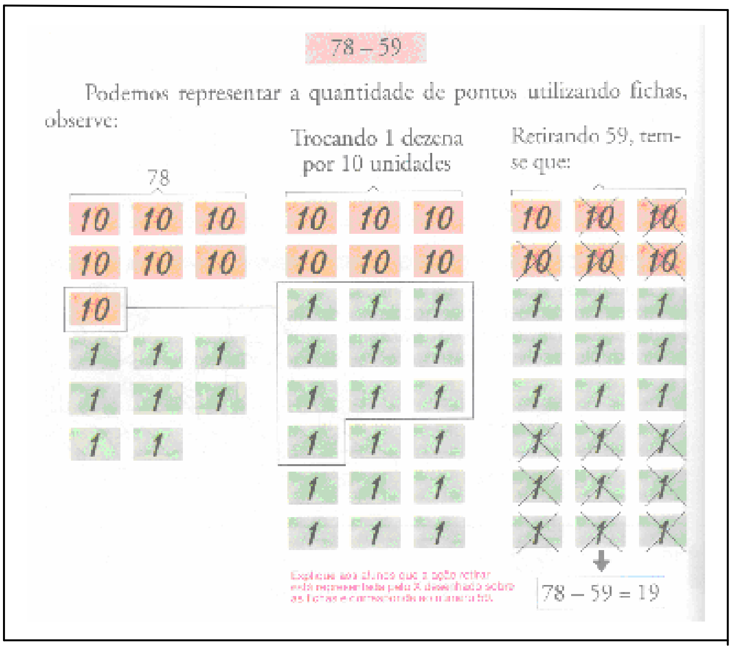


Figura 39: Algoritmo do empréstimo.
Fonte: Meneghelo, 2005, p. 74

O livro Matemática em Construção da segunda série (Caetano, 2001) não traz nenhum algoritmo para a subtração, mas trabalha com trocas no sistema decimal, utilizando o material dourado, como pode ser observado na figura 40:

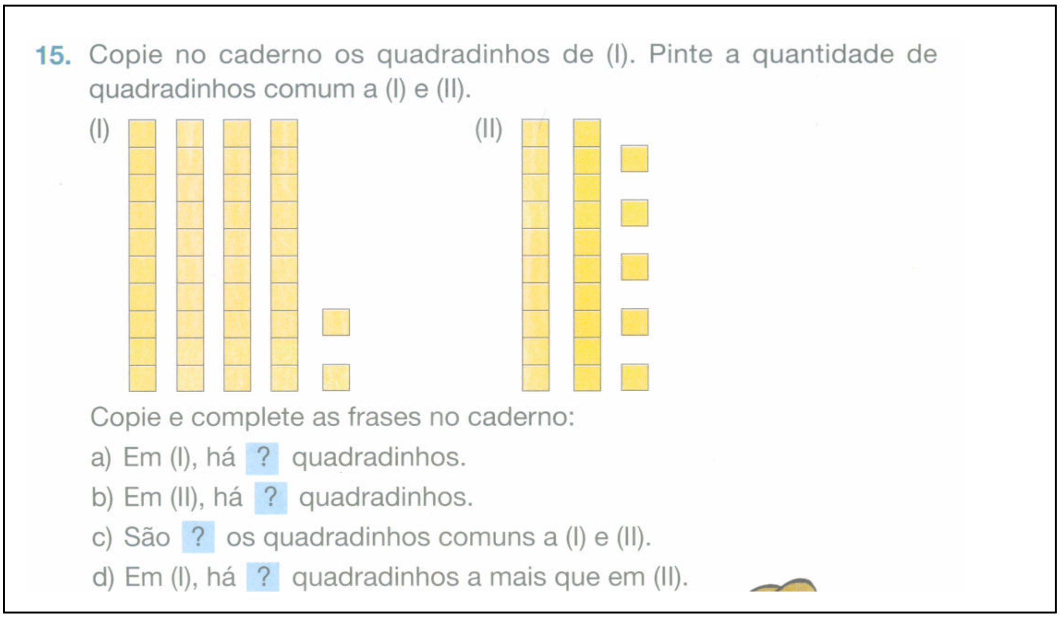


Figura 40: Introdução à subtração
Fonte: Caetano, 2001, p. 88

Analisamos também 5 apostilas de sistemas educacionais:

- Sistema Objetivo
- Sistema Etapa
- Sistema Dom Bosco
- Sistema Positivo
- Sistema Anglo de ensino

Todas elas utilizam o método do "empréstimo" (decomposição do minuendo). As formas de apresentação do algoritmo são semelhantes às apresentadas nos livros didáticos como podemos observar na figura 41.

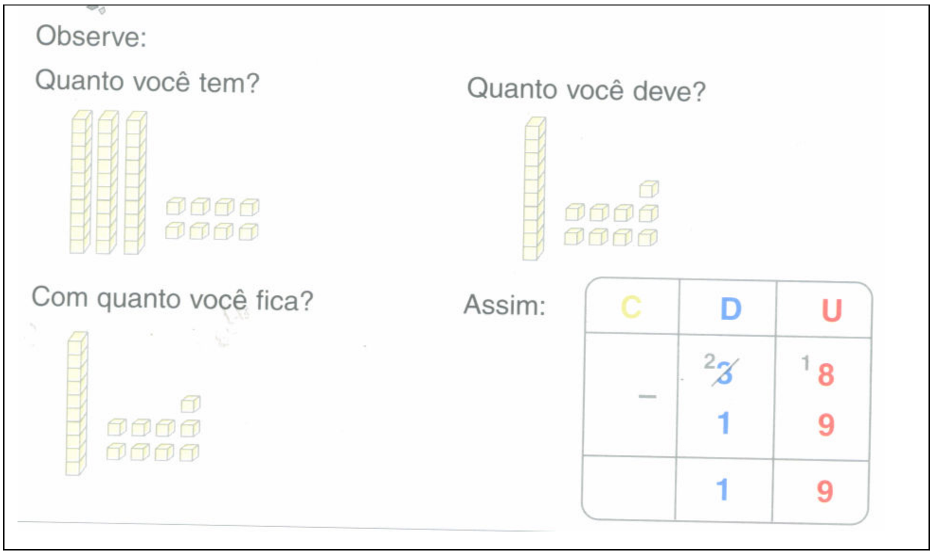


Figura 41: Algoritmo da subtração
Fonte: Dom Bosco, 2ª série, 2003, p. 85

Nenhum dos livros didáticos ou apostila, por nós analisados, trazem como opção para resolver a subtração o algoritmo da compensação. Provavelmente, isso tenha uma grande influência no fato de todos os alunos e professores, por nós consultados, utilizarem somente o algoritmo do empréstimo.

2.6.2 Análise de livros didáticos destinados à formação do professor

Passamos a analisar 6 livros destinados ao antigo curso de magistério, formação de professores:

1º livro: Matemática para o Curso de Formação de Professores
de 1^a à 4^a séries do primeiro grau.
Cléa Rubinstein, et al. Editora Moderna, 1991.

Nesse livro é apresentado, primeiro, o método do empréstimo, ou de recurso à ordem superior (decomposição do minuendo). Para explicá-lo ele traz ilustrações (como podemos ver na figura 42) parecidas com as dos livros didáticos que analisamos.

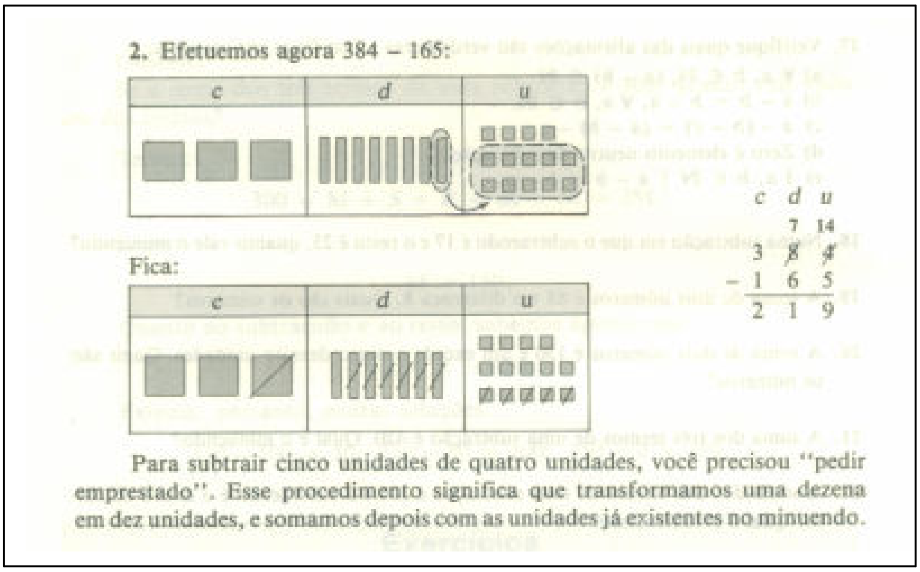


Figura 42: Algoritmo do empréstimo
Fonte: Rubinstein, 1991, p. 56

Como esse exemplo apresentado na figura 42, o livro traz mais dois, ocupando uma página e meia com essas explicações. Depois são propostos exercícios. Em um dos exercícios, apresenta o algoritmo da compensação e cita que esse método é conhecido como “processo austríaco”, mas não traz nenhuma ilustração ou explicação, observe na figura 43.

27. As subtrações são comumente efetuadas como os exemplos abaixo:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ 15} \\ 4\ \cancel{3}\ \cancel{5} \\ -\quad 1\ 8 \\ \hline 4\ 1\ 7 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 15} \\ 4\ 3\ \cancel{5} \\ -\quad \cancel{1}^{2}\ 8 \\ \hline 4\ 1\ 7 \end{array}$$

Descreva por que o resto encontrado à direita é o mesmo que na subtração à esquerda. Tente justificar o procedimento usado, recorrendo ao ábaco de papel se necessário.

Observação
O segundo processo é conhecido como **processo austríaco**.

Figura 43: Exercício apresentando os dois algoritmos
Fonte: Rubinstein, 1991, p. 58

Em nenhum outro momento o algoritmo da compensação é citado, nem são propostos outros execícios para utilizá-lo.

2º livro: Matemática para o Magistério
Ernesto Rosa Netto, et al. Editora Ática, 1993.

Nesse livro também é apresentado, primeiro, o método do empréstimo, explicado com a ajuda de ilustrações. A subtração por compensação é citada, mas com pouca ênfase. Observamos, na figura 44, que o método do empréstimo é mais explicado e ilustrado, a segunda opção, a subtração por compensação, é apenas citada no final, nas últimas 5 linhas, e explicada de forma confusa.

102. Exemplo: 52 − 34.

52 = 50 + 2

centenas	dezenas	unidades
	IIIII	II

52 = 40 + 12

centenas	dezenas	unidades
	IIII	IIIIIIIIIIII

	centenas	dezenas	unidades	
52		I	IIIIIIII	→ 18
− 34		III	IIII	

$$\begin{array}{r} 52 \\ -\ 34 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 50 + 2 \\ -\ 30 + 4 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 40 + 12 \\ -\ 30 + \ \ 4 \\ \hline 10 + \ \ 8 \\ \hline 18 \end{array}$$

Mais compactamente:

$$\begin{array}{r} 52 \\ -\ 34 \\ \hline 18 \end{array}$$

Ao invés de subtrair 1 do 5, adicionamos 1 ao 3, que, em termos práticos, dá no mesmo:

$$4 - 3 = 5 - 4 = 1$$

Pensamos assim: 4 para 12, 8, vai 1; 1 mais 3, igual a 4; 4 para 5, 1. É assim que fazemos na divisão.

Figura 44: Algoritmo do empréstimo e da compensação
Fonte: Neto, 1993, p. 75

3º livro: Conteúdo e Metodologia da Matemática: Números e Operações
Marília Centurión. Editora Scipione, 1994.

Nesse livro o método do empréstimo é explicado por meio de ilustrações, sugerindo o uso do ábaco e do material dourado. Executa esse método até mesmo com símbolos egípcios e enfatiza que esse algoritmo é bastante utilizado. No final cita a existência de um outro processo, o algoritmo da compensação. Para ter uma idéia melhor, a explicação do método do empréstimo ocupa três páginas do livro e a do método da compensação apenas meia página.

4º livro: Didática da Matemática
Ernesto Rosa Neto. Editora Ática, nd.

Esse livro cita vários materiais concretos a serem usados para introduzir as operações matemáticas, entre eles o Cartaz Valor Lugar (cavalu) e o Material Dourado

Montessori. Em todos os casos, para introduzir a resolução de subtrações com reserva (reagrupamento) é indicado o método do empréstimo.

5º livro: Didática Viva da Matemática no Curso Primário

Maria Helena Roxo e Maria Luiza do Carmo Neves. Editora Ática, 1970.

Nesse livro o método do empréstimo também é detalhado com várias ilustrações. No final dessa explicação surge um tópico “outros modos de efetuar a subtração”, no qual é citado e explicado o método da compensação em poucas linhas, como podemos verificar na figura 45.

Outros modos de efetuar a subtração:

a) 51 - 26

−	5 dezenas	1 unidade	− 5 dezenas	11 unidades
	2 dezenas	6 unidades	3 dezenas	6 unidades
		?	2 dezenas	5 unidades

Êste processo justifica-se através do princípio: "adicionando a mesma quantidade a ambos os têrmos de uma subtração, a diferença não se altera".

Pensamos:

11 - 6 = 5 ou 6 para 11 faltam 5.
5 - 3 = 2 ou 2 + 1 = 3
3 para 5 faltam 2.

Indicamos:

$$\begin{array}{r} 51 \\ -\,26 \\ \hline 25 \end{array}$$

Figura 45: Algoritmo da compensação
Fonte: Roxo; Neves, 1970, p. 88

6º livro: Explorando a Matemática na Escola Primária

Magdalena Pinho del Valle. Livraria José Olympio Editora , 1969.

Nesse livro o algoritmo do empréstimo é devidamente explicado e ilustrado e encontramos a seguinte observação, se referindo ao método do empréstimo:

> “Acreditamos que o professor deva levar a criança a usar o método da decomposição, que é mais fácil não só de ser visualizado no cartaz valor de lugar como de ser compreendido pela criança”. (Valle, 1969, p. 79).

A essa observação segue a explicação do algoritmo do empréstimo e, no final, o método da compensação é apenas citado como podemos ver na figura 46.

Outro método, comumente usado nas escolas, é o das adições iguais que se baseia no fato de que a diferença não se altera quando se soma o mesmo número ao minuendo e ao subtraendo.

Por exemplo, 17 — 8 = 9, logo 27 — 18 = 9 e 37 — 28 = 9.

Para o exemplo já apresentado (64 — 17) a criança seria levada a pensar: 7 para 14, 7 (somou-se 10 ao minuendo; logo deve somar-se 10 ao subtraendo); então, 2 para 6, 4.

Figura 46: Algoritmo da compensação
Fonte: Valle, 1969, p.80

Por meio de nossas análises pudemos observar que os livros destinados à formação do professor, que verificamos, privilegiam o uso do algoritmo do empréstimo para efetuar as subtrações, o que pode justificar o fato de todos os professores que responderam nosso questionário ensinarem esse algoritmo em suas aulas e também o fato de muitos deles nem conhecerem o algoritmo da compensação. Nenhum desses livros levanta as dificuldades que os alunos podem ter ao utilizar o algoritmo do empréstimo.

2.6.3 O uso do material dourado e do cartaz valor de lugar

O material dourado e o cartaz valor de lugar são muito usados por professores do primeiro ciclo do Ensino Fundamental. Assim, resolvemos verificar se o uso destes mareriais pode influenciar na escolha dos algoritmos a serem utilizados na resolução das operações fundamentais.

O Material Dourado é um dos materiais criados por Maria Montessori (1870 - 1952), e baseia-se nas regras do sistema de numeração posicional de base 10. É confeccionado em madeira e composto por: cubos, placas, barras e cubinhos, sendo o cubo formado por dez placas, a placa por dez barras e a barra por dez cubinhos, como pode ser observado na figura 47.

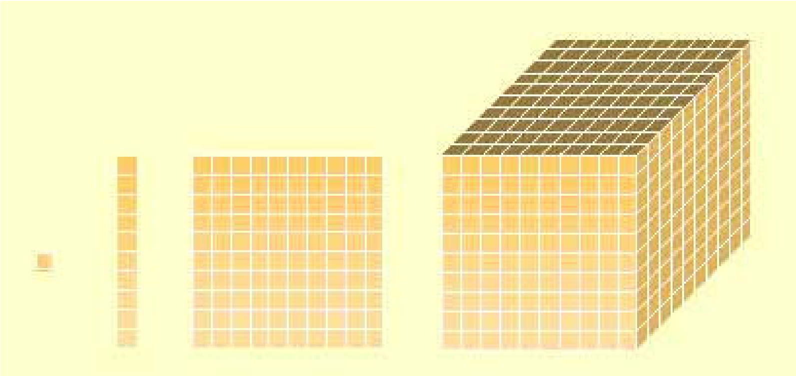


Figura 47: Material dourado

O Material Dourado Montessori destina-se a atividades que auxiliam o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração decimal-posicional e dos métodos para efetuar as operações fundamentais, ou seja, os algoritmos.

Segundo Nunes (2001), a partir de meados dos anos 70, começam a surgir as preocupações com a relação entre desenvolvimento e educação. Surgem, então, referências ao conceito de número, às concepções do sistema decimal e aos conceitos das operações. Nessa época o material dourado foi amplamente divulgado pelas Secretarias de Educação, mostrando a preocupação com a compreensão das idéias de trocas e agrupamentos como noções básicas no sistema de numeração: dez unidades são trocadas por uma dezena, dez dezenas por uma centena, etc. A autora apresenta uma sugestão para o uso do material dourado no ensino da subtração, e o algoritmo sugerido é o do "empréstimo". A sugestão é muito semelhante aos procedimentos utilizados nos livros didáticos que analisamos.

Além do material dourado, os professores do primeiro ciclo do Ensino Fundamental usam também o 'cartaz valor de lugar', também conhecido por "cavalu". É um cartaz que indica as posições das unidades, dezenas, centenas e milhar.

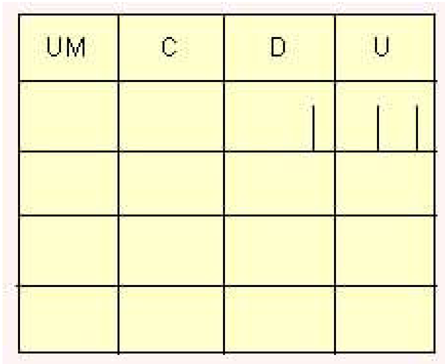


Figura 48: Cartaz valor de lugar

No cartaz apresentado na figura 48 está indicado o número 12: uma dezena e duas unidades.

Como o método do empréstimo é, geralmente, o indicado para trabalhar com o material dourado e o cartaz valor de lugar, a ampla divulgação do uso desses materiais, pode ter influenciado na escolha do método do empréstimo para resolver subtrações com reserva (ou reagrupamento). Esta pode ser uma explicação, ou pelo menos uma pista, para entendermos por que todos os livros didáticos que analisamos utilizam o método do empréstimo para efetuar as subtrações. Apesar que, tanto o material dourado como o cartaz valor de lugar, podem ser utilizados para auxiliar no ensino e aprendizagem do algoritmo da compensação, assim como são usados hoje no ensino do algoritmo do empréstimo.

CAPÍTULO 3
EXPERIMENTO: CRIANDO NOVOS ESQUEMAS

Neste capítulo apresentaremos nosso experimento que consiste na aplicação de uma seqüência didática e suas análises.

3.1 DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO

Como todos os alunos que pesquisamos utilizam o método do empréstimo (decomposição do minuendo) para resolver as subtrações, e todos os livros didáticos, por nós analisados, também propõem esse método, resolvemos aplicar uma seqüência didática para introduzir o método da compensação a alunos do Ensino Fundamental, e então analisar suas reações diante do novo algoritmo.

Sabemos que poderá haver resistência, pois esses alunos estarão frente a uma situação para a qual eles já dispõem de esquemas para resolver e nós tentaremos conduzi-los a criar novos esquemas, para resolver essa mesma situação, o que, segundo Vergnaud (1996), exige um tempo de reflexão, e gera hesitações. Mas, encorajados pelos resultados positivos do trabalho de Brousseau (2007) com os algoritmos da multiplicação e divisão, acreditamos que também poderemos obter bons resultados.

Essa seqüência foi preparada para alunos da 5ª série (6º ano) do Ensino Fundamental, na qual, geralmente, faz parte do currículo o trabalho com as operações fundamentais e suas propriedades. Inicialmente ela continha apenas três partes, mas, após a aplicação da primeira parte, sentimos a necessidade de trabalhar melhor com os alunos a propriedade da invariância da diferença, então foi incluída uma parte a mais.

Como o algoritmo da compensação se apóia na propriedade da invariância da diferença (adicionando quantidades iguais aos dois termos de uma subtração a diferença não se altera), a primeira parte (apêndice B) foi elaborada com o objetivo de verificar se os alunos conhecem essa propriedade, se conseguem resolver problemas do dia-a-dia relacionados a ela e diagnosticar suas principais dificuldades.

Na segunda parte (apêndice C) preparamos atividades para trabalhar a propriedade da invariância da diferença. Com as atividades propostas pretendemos que os alunos vivenciem as quatro diferentes fases da Teoria das situações Didáticas de Brousseau (1996): ação, formulação, validação e institucionalização. Esperamos criar possibilidades para que o aluno possa agir sobre a situação, trocar informações, explicitar suas conclusões, validá-las e, finalmente, institucionalizar o saber referente à propriedade da invariância da diferença.

A terceira parte (apêndice D) refere-se à introdução da técnica operatória da subtração utilizando o algoritmo da compensação. Neste momento o professor fará a institucionalização da nova técnica, a fim de que o aluno incorpore o saber em seus esquemas mentais, tornando-o disponível para utilização na resolução de problemas.

A quarta parte (apêndice E) é composta de três exercícios relacionados ao uso dos algoritmos. Nosso objetivo é observar se os alunos aprenderam a utilizar o algoritmo da compensação e levá-los a fazer uma comparação entre as duas técnicas para resolver subtrações. É uma fase de avaliação. Por um lado o professor estará avaliando o aprendizado do aluno em relação ao novo saber apresentado e por outro o aluno estará avaliando o novo método aprendido (algoritmo da compensação), comparando-o com o antigo (algoritmo do empréstimo).

3.2 PARTE 1: DIAGNÓSTICO

Nesta primeira parte de nosso experimento, apresentaremos aos alunos situações relacionadas ao seu dia-a-dia nas quais está implícita a propriedade da invariância da diferença. Nosso objetivo é levar os alunos a refletir sobre essas situações, verificar se conseguem resolver os problemas propostos e se percebem que há uma característica comum entre esses problemas, o fato de que se somamos quantidades iguais a dois termos a diferença entre eles se mantém.

3.2.1 Análise a *priori*

Em relação às questões 1 e 2:

1- Lucas tem 6 anos e seu primo Mateus tem 18.

a) Quem é mais velho e quantos anos tem a mais que o outro?
b) Daqui a 4 anos qual a idade de cada um deles?
c) Quem será o mais velho e quantos anos terá a mais que o outro?

2- Você tem 8 figurinhas e seu amigo tem 5.

a) Quem tem mais figurinhas?
b) Quantas a mais?
c) Se cada um de vocês ganhar mais 10 figurinhas, com quantas cada um vai ficar?
d) Quem tem mais figurinhas agora?
e) Quantas a mais?
f) A diferença entre a quantidade de figurinhas que você tem e quantidade que seu amigo tem mudou?
g) Porque isso ocorreu?

Estas questões remetem a fatos conhecidos dos alunos. As variáveis numéricas utilizadas nestas questões são formadas por poucos algarismos para evitar erros de cálculo e evidenciar o entendimento da situação pelo aluno.

Na questão 1 esperamos que o aluno responda que a diferença entre as idades de Lucas e Mateus é de 12 anos, e após somar 4 anos à idade de cada um, perceba que a diferença de idade entre eles se mantém a mesma.

Na questão 2, esperamos que o aluno identifique que ele tem 3 figurinhas a mais que o amigo e que, se ambos ganharem 10 figurinhas, ficando com 18 e 15 respectivamente, a diferença entre as quantidades continua sendo de 3 figurinhas. Esperamos que ele explique que isso ocorreu porque os dois ganharam a mesma quantidade de figurinhas.

Nesta parte tentamos relacionar situações da vida do aluno à propriedade da invariância da diferença que pretendemos ensinar-lhes. Segundo Vergnaud (1996), os processos cognitivos e as respostas do aluno estão em função das situações com as quais eles se confrontam, assim, os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles se depararam e progressivamente dominaram, especificamente pelas situações susceptíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes.

Em relação à questão 3:

3- Complete e observe os resultados:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{r} 6 \\ \underline{-\ 2} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rl} 6 + 10 = & \ldots\ldots\ldots \\ 2 + 10 = & \underline{-\ \ldots\ldots\ldots} \end{array}$$

$$\text{b)}\quad \begin{array}{r} 9 \\ \underline{-\ 4} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rl} 9 + 10 = & \ldots\ldots\ldots \\ 4 + 10 = & \underline{-\ \ldots\ldots\ldots} \end{array}$$

$$\text{c)}\quad \begin{array}{r} 38 \\ \underline{-\ 15} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{rl} 38 + 10 = & \ldots\ldots\ldots \\ 15 + 10 = & \underline{-\ \ldots\ldots\ldots} \end{array}$$

O professor explicará ao aluno que nessa questão ele deverá efetuar as subtrações apresentadas à sua esquerda, depois somar 10 a cada um de seus termos e efetuar novamente a subtração, à direita, com os novos valores obtidos.

Nos itens ‘a’ e ‘b’ o minuendo e o subtraendo são números menores que 10, para facilitar o cálculo e evitar erros, pois nosso objetivo é que o aluno perceba que somando 10 aos dois membros da subtração, o resultado não se altera. No item ‘c’ foram utilizados números maiores que 10 para que o aluno possa verificar que a propriedade é válida para quaisquer que sejam os termos da subtração.

Em relação à questão 4:

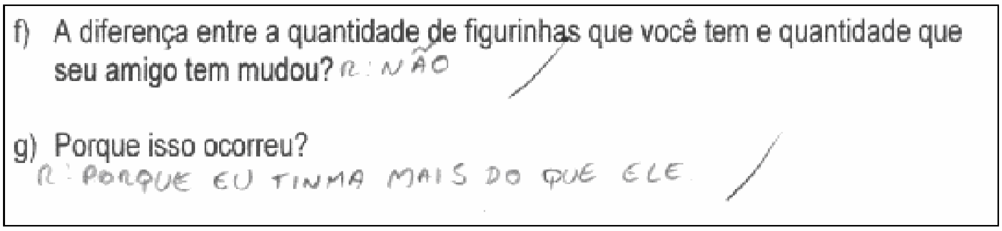
4- Quando você acrescenta um mesmo valor aos dois termos de uma subtração o que acontece com o resultado?

Nessa questão esperamos que o aluno responda que quando acrescentamos um mesmo valor aos dois termos de uma subtração o resultado se mantém o mesmo.

3.2.2 Aplicação e análise a *posteriori* da Parte 1

Iniciamos a aplicação da primeira atividade a 35 alunos de uma 5ª série de uma escola pública. Eles demoraram cerca de 30 minutos para responder as questões.

Os alunos não tiveram dificuldades para responder a questão 1 e os itens ‘a’, ‘b’, ‘c’, ‘d’, e ‘e’ da questão 2. Em relação ao item ‘f’, que pergunta se a diferença entre a quantidade de figurinhas que ele tem e a de seu amigo mudou, 22 deles responderam corretamente “não”, mas, apenas 13 conseguiram responder satisfatoriamente o item ‘g’ no qual teriam que explicar porque a diferença não se alterou, e assim demonstrar a compreensão da propriedade da invariância da diferença.

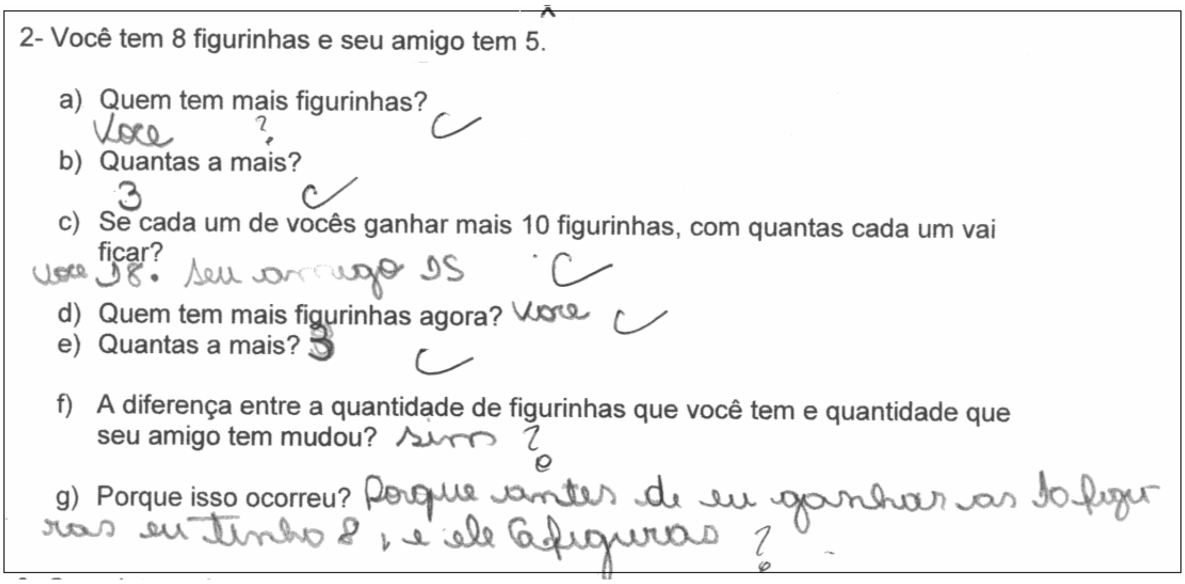

f) A diferença entre a quantidade de figurinhas que você tem e quantidade que seu amigo tem mudou? R: NÃO

g) Porque isso ocorreu?
R: PORQUE EU TINHA MAIS DO QUE ELE

Figura 49: resposta de um aluno à questão 2 da parte 1 da seqüência didática.

Podemos observar, na figura 49, que o aluno respondeu corretamente o item ‘f’, mas não conseguiu explicar, no item ‘g’, porque a diferença não se alterou.

13 alunos responderam “sim” no item ‘f’ da questão 2 e, pelas suas explicações no item ‘g’, percebemos que a maioria desses alunos não relacionou a palavra “diferença” ao resultado da subtração, assim quando responderam que a diferença havia se alterado se referiam às quantidades de cada um. Podemos observar isso na figura 50.


2- Você tem 8 figurinhas e seu amigo tem 5.

a) Quem tem mais figurinhas?
Voce

b) Quantas a mais?
3

c) Se cada um de vocês ganhar mais 10 figurinhas, com quantas cada um vai ficar?
voce 18. seu amigo 15

d) Quem tem mais figurinhas agora? Voce

e) Quantas a mais? 3

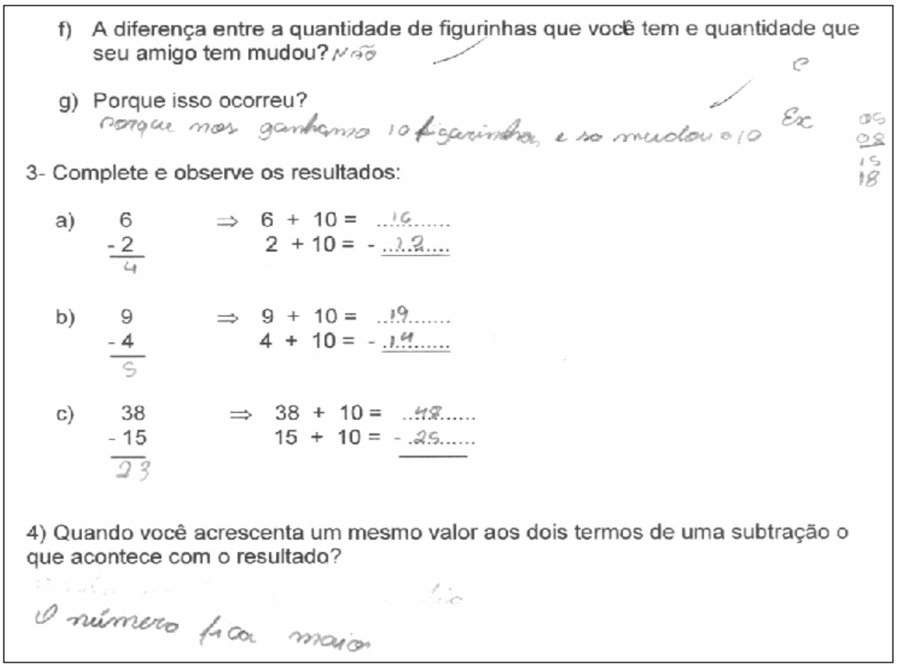
f) A diferença entre a quantidade de figurinhas que você tem e quantidade que seu amigo tem mudou? sim

g) Porque isso ocorreu? Porque antes de eu ganhar as 10 figuras eu tinho 8, e ele 5 figuras

Figura 50: resposta de um aluno à questão 2 da parte 1 da seqüência didática

Podemos observar, na figura 50, que o aluno respondeu corretamente do item '*a'* ao '*e',* quando chegou ao item '*f'* ele respondeu incorretamente 'sim', mas pela sua explicação, no item '*g'*, supomos que ele não relacionou a palavra diferença ao resultado da subtração e comparou apenas as quantidades de figurinhas, que eram diferentes das iniciais.

Em relação às questões 3 e 4 a maioria dos alunos, 25, respondeu corretamente que os resultados não se alterariam. 9 alunos que responderam incorretamente o item 'f' da questão 2, responderam corretamente essa questão. O mais interessante é que, 6 alunos que haviam respondido corretamente o item 'f' da questão 2, responderam incorretamente a questão 4. Isso pode mostrar que esses alunos entenderam a situação anterior, mas não compreenderam a existência da propriedade da invariância da diferença na subtração. A figura 51 mostra a resposta de um aluno que respondeu corretamente os itens 'f' e 'g' da questão 2 e respondeu incorretamente a questão 4.



f) A diferença entre a quantidade de figurinhas que você tem e quantidade que seu amigo tem mudou? Não

g) Porque isso ocorreu?
porque nós ganhamos 10 figurinhas e só mudou o 10

3- Complete e observe os resultados:

a) 6 − 2 = 4 ⇒ 6 + 10 = ...16......
2 + 10 = - ...12....

b) 9 − 4 = 5 ⇒ 9 + 10 = ..19.......
4 + 10 = - .14......

c) 38 − 15 = 23 ⇒ 38 + 10 = ..48......
15 + 10 = - .25......

4) Quando você acrescenta um mesmo valor aos dois termos de uma subtração o que acontece com o resultado?
O número fica maior

Figura 51: respostas de um aluno da 5ª série

Diante desses resultados e da importância da assimilação dessa propriedade para o entendimento do algoritmo da compensação, resolvemos trabalhar um pouco mais, com esses alunos, a propriedade da invariância da diferença antes de introduzirmos o algoritmo da compensação e preparamos a parte 2 de nossa seqüência didática.

3.3 PARTE 2: A INVARIÂNCIA DA DIFERENÇA

Estas atividades foram elaboradas, baseadas na apostila do Sistema Sigma (2002), com o intuito de trabalhar, com os alunos, a idéia de que adicionando quantidades iguais, a dois conjuntos distintos, não alteramos a diferença entre eles.

3.3.1 Análise a *priori*

Esperamos utilizar três aulas, de cinqüenta minutos cada uma, para aplicar estas atividades.

Atividade 1: O professor vai medir o aluno mais baixo e o mais alto da classe e pedir aos alunos que calculem , ou meçam a diferença de altura entre eles.

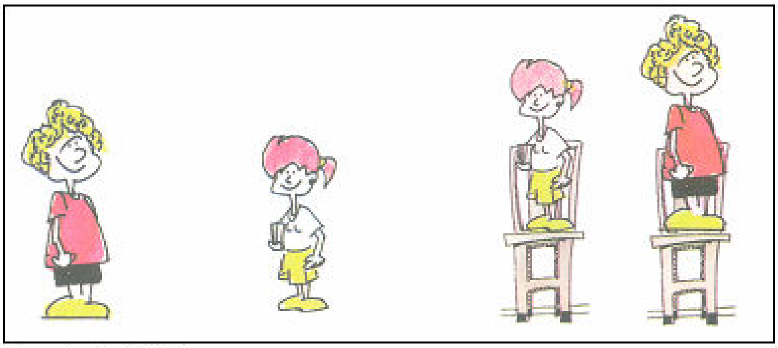


Figura: Suplegraf, p. 74

Depois pega duas cadeiras exatamente iguais e pede aos dois alunos que subam nelas. Pergunta aos alunos o que eles acham que vai acontecer com a diferença entre as alturas agora: vai aumentar, vai diminuir ou vai continuar a mesma?

Inicialmente, o professor escolherá dois alunos, de preferência que tenham uma boa diferença de altura. Medirá os dois, anotará as alturas na lousa e calculará a diferença entre elas. Em seguida pegará dois banquinhos (ou cadeiras) de mesma altura e os medirá. Pede para que os alunos calculem com que altura os alunos, medidos anteriormente, ficariam se subissem nos banquinhos. Então, pede para que os alunos subam nos banquinhos e os mede. É provável que haja uma pequena diferença entre a altura calculada e a altura medida, sendo necessária a intervenção do professor explicando que a medida feita com a fita métrica nem sempre é exata e que alguns fatores podem gerar essas pequenas diferenças (postura do aluno, posição da fita, distância da parede, etc.). Calcula, novamente, a diferença entre as alturas (essa diferença pode ser medida ao invés de ser calculada). Espera-se que os alunos percebam que aumentando a mesma medida nas duas alturas não alteramos a diferença entre elas. Em seguida, os alunos, em duplas, repetirão a atividade, medindo, eles mesmos, as alturas e calculando as diferenças. Esperamos que essa interação faça com que eles se envolvam mais com a atividade e os ajude a compreender a propriedade da invariância da diferença.

Atividade 2A: O professor formará dois grupos de alunos na frente da sala, com quantidades diferentes de elementos. Então perguntará aos alunos qual grupo tem mais elementos e quantos a mais. Irá incluindo quantidades iguais de alunos em cada grupo e repetindo a pergunta.

Atividade 2B: O professor formará dois grupos de alunos na frente da sala, com a mesma quantidade de alunos. Irá retirando ou incluindo quantidades iguais de alunos em cada grupo e perguntando se ainda continuam com a mesma quantidade de pessoas.

Na atividade 2A, alguns alunos serão selecionados, ao acaso, para formarem dois grupos com quantidades diferentes de pessoas, de modo que sobre uma quantidade par de alunos que não pertençam aos grupos. Eles deverão observar quantas pessoas há em cada grupo e qual a diferença entre essas quantidades. A seguir serão adicionadas quantidades iguais de alunos em cada grupo. Observarão, novamente, com quantos alunos ficou cada um e deverão recalcular a diferença entre eles. Este procedimento deverá ser repetido até todos os alunos da classe pertencerem a algum grupo. Espera-se que os alunos percebam que, incluindo quantidades iguais de elementos aos grupos, a diferença entre eles não se altera. Esta atividade deverá ser repetida formando-se grupos com quantidades iguais de elementos (atividade 2B), e então inclui-se ou retira-se quantidades iguais de alunos dos grupos, a fim que percebam que a igualdade também não se altera.

Com essas atividades, esperamos proporcionar aos alunos uma variedade de situações nas quais ele possa vivenciar, compreender e dar sentido à propriedade da invariância da diferença. Segundo Vergnaud (1996), a encenação dos conceitos e procedimentos matemáticos é uma arte que se alimenta, tanto da psicologia social, como da epistemologia e da psicologia da matemática, e uma situação didática é, antes de mais nada, uma encenação interessante e rica. De acordo com o autor, a tese subjacente à Teoria dos Campos Conceituais é, contudo, a de que uma boa encenação didática se apóia necessariamente no conhecimento: da dificuldade relativa das tarefas cognitivas, dos obstáculos com que habitualmente se depara, do repertório dos procedimentos disponíveis e das representações possíveis.

Atividade 3: Observe esta balança:

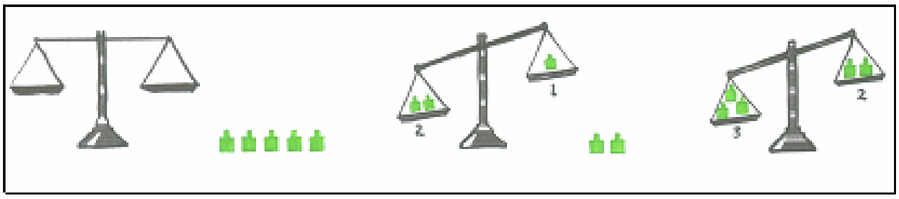


Figura: Suplegraf (2002), p. 76

Como acrescentamos a mesma quantidade de objetos com mesmo peso nos dois pratos, a diferença continua a mesma, e o prato que anteriormente estava mais pesado que o outro, continua mais pesado. E se calcularmos a diferença entre as quantidades de pesos entre os pratos veremos que também continua a mesma.

Como não temos uma balança de pratos, a atividade 3 será apresentada na forma de desenho, na lousa e no papel, e serão calculadas as diferenças entre as quantidades de objetos e não entre os pesos dos mesmos. Como nas atividades anteriores, esperamos que os alunos percebam que, acrescentando quantidades iguais de objetos nos dois lados da balança, a diferença entre essas quantidades não se altera. Acreditamos que os alunos não terão dificuldade para perceber isto, pois, nesse momento, já terão passado pelas atividades anteriores e essa idéia já não será nova para eles.

Pretendemos, com estas atividades, levar o aluno a agir sobre as situações apresentadas, discutir e expressar sua opinião e refletir sobre os resultados encontrados. O professor deverá assumir o papel de mediador e criar condições para que o aluno seja o principal ator na construção de seus conhecimentos. Esperamos observar, de acordo com Brousseau (1996), momentos de ação, de formulação e de validação. Ao final das atividades o professor institucionalizará a propriedade da invariância da diferença, discutindo com os alunos os resultados das atividades e demonstrando sua validade.

3.3.2 Aplicação e análise a *posteriori* da Parte 2

Quando aplicamos a atividade 1, os 35 alunos da quinta série estavam presentes. Escolhemos dois alunos e medimos suas alturas utilizando uma trena. Para facilitar os cálculos, resolvemos utilizar as medidas em centímetros inteiros. O aluno maior media 154 cm e o menor 142 cm. As medidas foram riscadas na parede e anotadas na lousa.

Solicitamos aos demais alunos da sala que calculassem a diferença entre as alturas, e a um deles que resolvesse na lousa. Este calculou a diferença de 12 cm sem dificuldade. Pedimos então, que os dois alunos subissem em banquinhos que mediam 48 cm cada um. As novas alturas foram calculadas, medidas, riscadas na parede e anotadas na lousa. Como trabalhamos com arredondamentos, não houve diferença entre as alturas calculadas e medidas. Pedimos para os alunos que calculassem a diferença entre as novas alturas, 202 cm e 190 cm, e um deles registrou a subtração na lousa.

Perguntamos por que o resultado das duas subtrações havia sido o mesmo. A maioria dos alunos respondeu prontamente que era porque os dois haviam subido em banquinhos do mesmo tamanho, assim a diferença de altura entre eles continuava a mesma. Alguns faziam questão de mostrar, visualmente, a diferença entre as posições do ombro de cada aluno, "*ele continua batendo aqui*", apontando a altura no ombro do outro aluno.

Os alunos foram, então, separados em duplas, e com fitas métricas mediam a própria altura, no chão e sobre a cadeira, e calculavam a diferença entre a sua altura e a do parceiro. Nesse momento, por se tratar de muitos alunos, houve certo alvoroço na sala de aula, mas os alunos se mostraram interessados em realizar a tarefa. Algumas vezes o professor foi solicitado para ajudar no arredondamento da medida da altura. Essa atividade foi realizada em uma aula de 50 minutos.

A atividade 2 foi realizada em um outro dia, também em uma aula de 50 minutos. Formamos, inicialmente, dois grupos de alunos, um com 2 o outro com 7 alunos. Os alunos foram escolhidos aleatoriamente, e os grupos formados na frente da sala, um de cada lado, o grupo com 2 alunos ficou do lado esquerdo dos alunos e o com 7 do lado direito. Perguntamos a todos, qual grupo tinha mais participantes e quantos a mais.

Todos responderam que era o grupo da direita com 5 participantes a mais. Acrescentamos 3 alunos em cada grupo, e perguntamos quantos alunos havia agora em cada grupo, qual grupo tinha mais elementos e quantos a mais. Todos responderam que o grupo da esquerda tinha 5 elementos, o da direita tinha 10 e que o grupo da direita tinha 5 elementos a mais.

Acrescentamos, então, 10 alunos em cada grupo, não ficando assim, nenhum aluno sem pertencer a algum grupo. Perguntamos, novamente, quantos alunos havia agora em cada grupo, qual grupo tinha mais elementos e quantos a mais. Responderam que o grupo da esquerda tinha 15 elementos, o da direita tinha 20 e que o grupo da direita tinha 5 elementos a mais.

Perguntamos, dessa vez a um determinado aluno, porque a quantidade de elementos que o grupo da direita tinha a mais do que o grupo da esquerda continuava sempre igual, 5 alunos. Ele não teve dificuldade em responder que era porque, todas as vezes, incluímos quantidades iguais de alunos em cada grupo.

Repetimos a atividade, formando grupos com quantidades iguais de elementos. O decorrer da atividade se deu da mesma forma que a anterior, mas, em alguns momentos, ao invés de acrescentar, retiramos quantidades iguais de alunos de cada grupo. Os alunos se interessaram em participar da atividade e mostraram entender porque as quantidades de elementos dos dois grupos se mantinham iguais.

Em uma outra aula de cinqüenta minutos foi realizada a atividade 3, na qual foi entregue aos alunos um impresso com desenhos da balança de pratos. Explicamos aos alunos como essa balança funciona e que, para que ela fique equilibrada, é necessário que seja colocado o mesmo peso de cada lado. Então, começamos a fazer suposições:

- Temos dez objetos pesando um quilo cada um, se colocarmos quatro de um lado e seis do outro, para que lado a balança penderá?

- Se acrescentarmos um quilo de cada lado, mudará a posição da balança?

- Vamos tirar todos os objetos da balança e colocar 5 quilos de cada lado. O que acontecerá com a balança?

- Se tirarmos dois quilos de cada lado, mudará a posição da balança?

Os alunos participaram satisfatoriamente da atividade, a maioria respondia corretamente e, quando um aluno demonstrava não ter entendido a situação, os próprios alunos esclareciam suas dúvidas.

No mesmo dia, ao final dessa atividade, foi feita a recapitulação de todas as atividades, levantando os pontos em comum entre elas e enfatizando a propriedade da invariância da diferença. Foram apresentados exemplos de subtrações, para reforçar o fato que, somando o mesmo valor no minuendo e no subtraendo, o resultado não se altera. Exemplo:

$$\begin{array}{rcccr} 18 & \longrightarrow & +\ 10 = 28 & \longrightarrow & 28 \\ -\ 15 & \longrightarrow & +\ 10 = 25 & \longrightarrow & -\ 25 \\ \hline 03 & & & & 03 \end{array}$$

Acreditamos ter proporcionado aos alunos uma situação didática descrita por Vergnaud (1996) como uma encenação interessante e rica, na qual eles tiveram oportunidade de se depararem com situações susceptíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos na propriedade da invariância da diferença.

Durante as três atividades observamos que houve interação entre os alunos, o professor e a situação apresentada. Estas atividades foram importantes e eficientes no intuito de fazer o aluno compreender que quando acrescentamos ou retiramos quantidades iguais de elementos a dois grupos distintos não alteramos a diferença entre eles. Os alunos agiram, trocaram informações, argumentaram, e se mostraram motivados a participar, contribuindo, assim, para a própria aprendizagem. Acreditamos que, por meio dessas atividades, levamos os alunos a vivenciar momentos de ação, formulação, validação e institucionalização, de acordo com as fases do processo de aprendizagem descritas por Brousseau (1996), e que estão preparados para utilizar a propriedade da invariância da diferença no algoritmo da compensação que iremos introduzir na próxima parte de nossa seqüência didática.

3.4 PARTE 3: O ALGORITMO DA COMPENSAÇÃO

Nesta parte de nossa seqüência didática, será introduzida a técnica operatória da subtração pelo método da compensação (algoritmo da compensação). Esperamos utilizar duas aulas, de cinqüenta minutos cada uma, para esta introdução.

3.4.1 Análise a *priori*

Como vimos no capítulo 2, Vergnaud (1996) distingue duas classes de situações, uma em que o sujeito dispõe das competências necessárias ao tratamento imediato da situação e outra na qual ele não dispõe destas competências. No primeiro caso as condutas do sujeito são, em grande parte, automatizadas e organizadas por meio de um único esquema, no segundo caso há o desencadeamento sucessivo de diversos esquemas, que podem entrar em competição, até chegarem à solução desejada. No caso de nossa experiência, os alunos já conhecem um algoritmo para resolver as subtrações, portanto, já possuem as condutas automatizadas e organizadas em um esquema para isso. No entanto, queremos ensinar a eles um novo algoritmo e, para Vergnaud (1996), os algoritmos são esquemas. Dessa forma, queremos que eles criem novos esquemas, ou alterem os que já existem, para resolver um mesmo tipo de situação. Acreditamos que possa haver algum tipo de resistência por parte dos alunos, pois, o algoritmo anterior (do empréstimo) já está automatizado, enquanto que o novo (algoritmo da compensação) ainda requer um esforço de aprendizagem que gera desequilíbrios.

Introduziremos o algoritmo detalhando as passagens e propondo exercícios para que os alunos possam dominar a técnica. Pretendemos utilizar duas aulas de cinqüenta minutos.

Introdução à técnica operatória da subtração pelo algoritmo da compensação

Maria tinha 353 figurinhas e perdeu 115, quantas tem agora?

Nesse problema ocorreu uma perda, ou seja, a idéia é de diminuição, de subtração.

Teremos que efetuar 353 – 115 . Montando a conta temos:

$$\begin{array}{r} 3\,5\,3 \\ -\underline{1\,1\,5} \end{array}$$

Mas nessa conta temos um problema: não podemos tirar 5 de 3.

Para resolver esse problema vamos usar uma técnica chamada de "**compensação**". Para facilitar o entendimento, vamos decompor os números:

$$\begin{array}{rl} 300 + 50 + \;\;3 & \text{(minuendo)} \\ -\;\underline{100 + 10 + 5} & \text{(subtraendo)} \end{array}$$

Iniciaremos com uma situação-problema simples, para introduzir a subtração e levantar o fato que, a unidade do minuendo tem um algarismo menor do que a unidade do subtraendo, e para efetuar a subtração devemos contornar esse problema. Sugeriremos, então, que seja adicionada uma dezena às unidades do minuendo e, para compensar, adicionamos um à casa das dezenas do subtraendo, pois, como vimos anteriormente, quando adicionamos quantidades iguais aos dois termos de uma subtração, não alteramos seu resultado. Dessa forma já se pode efetuar a subtração. Para facilitar o entendimento recorreremos à decomposição dos números e à representação desses no quadro valor de lugar.

Nessa técnica, para realizar a subtração, acrescentamos uma dezena ao minuendo e, para **compensar,** acrescentamos uma dezena ao subtraendo. Observe:

$$\begin{array}{rl} 300 + 50 + \overset{13}{\cancel{3}} & \text{no minuendo acrescentamos 10 à casa das unidades e no} \\ -\;\underline{100 + \overset{20}{\cancel{10}} + 5} & \text{subtraendo acrescentamos 10 unidades à casa das dezenas,} \\ 200 + 30 + 8 & \text{então, iniciamos a conta:} \\ 238 & \end{array}$$

Observe no quadro valor de lugar:

	c	d	u
	3	5	$\overset{13}{\cancel{3}}$
-	1	$\overset{2}{\cancel{1}}$	5
	2	3	8

Segundo Brousseau (1996) esta é a fase de institucionalização na qual o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber, e os alunos incorporam este saber a seus esquemas mentais, tornando-o, assim, disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos.

Após a apresentação do algoritmo será solicitado que os alunos efetuem várias outras subtrações para que possam dominar a técnica.

3.4.2 Aplicação e análise a *posteriori* da Parte 3

Quando dissemos aos alunos que íamos ensiná-los a efetuar a subtração, a maioria se manifestou dizendo que já sabia fazer “conta de menos”. Dissemos, então, que iríamos ensinar uma maneira diferente de fazer a subtração. Ainda assim alguns perguntaram se poderiam continuar fazendo da forma como estavam acostumados. Pedimos que tivessem um pouco de paciência e que se esforçassem para entender esse outro método, mas, deixamos claro que, depois, cada um poderia resolver as subtrações como achasse melhor.

Muitos alunos demonstraram surpresa ao perceber que havia uma outra forma de efetuar a subtração. A maioria conseguiu entender a nova técnica, mas ainda não tinham domínio suficiente para responder as questões referentes à próxima parte de nossa seqüência didática. Percebemos que duas aulas não seriam suficientes, pois os alunos ainda demonstravam dúvidas em relação ao novo método. Percebemos também, que algumas dificuldades já vinham do método anterior e o fato de trabalharmos a subtração estava colaborando para sanar dúvidas antigas, por exemplo: 0 – 5 = 5; 0 - 3 = 3. Decidimos, então, utilizar mais uma aula para tirar as dúvidas e dar tempo para que os alunos assimilassem e treinassem o algoritmo da compensação.

3.5 PARTE 4: O USO DO ALGORITMO DA COMPENSAÇÃO

Na quarta parte de nossa seqüência didática propomos exercícios relacionados ao uso dos algoritmos. Nosso objetivo é observar se os alunos aprenderam a utilizar o algoritmo da compensação e fazer que comparem as duas técnicas utilizadas para resolver as subtrações. Como já dissemos anteriormente, é uma fase de avaliação.

3.5.1 Análise a *priori*

Esperamos utilizar uma aula de cinqüenta minutos para a execução dessa atividade.

5) Efetue as subtrações abaixo utilizando a técnica da compensação:

a) 65 – 17 =	b) 173 – 64 =	c) 164 – 39 =
d) 286 – 148 =	e) 5007 – 138 =	f) 80103 – 4518 =

No exercício 5 solicitamos que os alunos efetuem algumas subtrações, utilizando o método da compensação. Pretendemos verificar se eles adquiriram domínio do algoritmo. Inicialmente, os termos das subtrações são formados por números com menos algarismos, o que vai aumentando no decorrer dos itens. Esperamos que a maioria deles consiga efetuar corretamente as subtrações utilizando o algoritmo da compensação, mas, acreditamos que, principalmente nos itens ‘e’ e ‘f’ possa haver alguma dificuldade, pois se trata de um algoritmo que acabaram de aprender e eles podem confundir com o algoritmo que já estão acostumados a usar.

6) Efetue a subtração abaixo utilizando os dois métodos, primeiro o da compensação depois usando o método do empréstimo:

```
  4060101             4060101
- 1376539           - 1376539
  _______             _______
```

Com qual dos dois métodos foi mais fácil resolver a subtração? Por quê?

7) Efetue a subtração abaixo utilizando os dois métodos, primeiro o do empréstimo e depois usando o método da compensação:

```
  201005              201005
-  32017            -  32017
  ______              ______
```

Com qual dos dois métodos foi mais fácil resolver a subtração? Por quê?

Nos exercícios 6 e 7 nosso objetivo é que o aluno compare os dois algoritmos para que possamos analisar sua opinião. Propusemos subtrações nas quais o minuendo e o subtraendo são formados por números que provocarão vários empréstimos durante a resolução.

No exercício 6 o aluno deverá resolver primeiro a subtração utilizando o algoritmo da compensação e depois utilizando o algoritmo do empréstimo. Já no exercício 7, a ordem é inversa, primeiro deverá resolver utilizando o algoritmo do empréstimo e depois o algoritmo da compensação. Em cada questão ele deve responder com qual dos dois métodos achou mais fácil efetuar a subtração. Pretendemos verificar se a ordem de resolução pode influenciar na opinião do aluno.

Os alunos estarão comparando algo que acabaram de aprender com algo que já sabem fazer a um bom tempo e com certa segurança. É pouco provável que tenham mais facilidade em usar um método novo do que aquele que já faz parte da sua rotina escolar, principalmente se tratando de uma operação básica. Acreditamos, porém, que por meio de suas respostas, poderemos analisar suas concepções e dificuldades diante da operação de subtração.

3.5.2 Aplicação e análise a *posteriori* da Parte 4

Esta aplicação se deu em uma aula de cinqüenta minutos, na qual os 35 alunos estavam presentes. Percebemos que alguns alunos ainda tinham dúvidas em relação ao uso do novo algoritmo e alguns se confundiram quanto à ordem de resolução das questões 6 e 7, onde deveriam resolver uma vez pelo método do empréstimo e outra pelo da compensação, mas isso não comprometeu a resolução das questões.

Inicialmente faremos uma análise quantitativa dos erros e acertos dos alunos na questão 5, na qual o aluno deveria efetuar seis subtrações. Por meio dessa análise pretendemos verificar se o aluno adquiriu domínio da técnica operatória pelo método da compensação.

8 alunos acertaram todos os itens da questão, o que sugere que adquiriram domínio do algoritmo.

7 alunos acertaram 5 itens.

4 alunos acertaram 4 itens.

6 alunos acertaram 3 itens.

4 alunos acertaram apenas dois itens.

1 aluno acertou apenas um item.

3 alunos erraram todos os itens, e 2 efetuaram todas as subtrações utilizando o método do empréstimo, o que pode significar que não entenderam como efetuar a subtração utilizando o algoritmo da compensação, ou ainda uma resistência em alterar os esquemas já construídos com o algoritmo do empréstimo.

Em uma análise geral, 25 alunos acertaram três ou mais itens da questão e 10 alunos acertaram menos que três itens.

Um dos alunos que acertou todos os itens resolveu as subtrações duas vezes, uma pelo método do empréstimo e outra pelo método da compensação. Ele resolveu por um método e conferiu pelo outro, como podemos ver na figura 52.

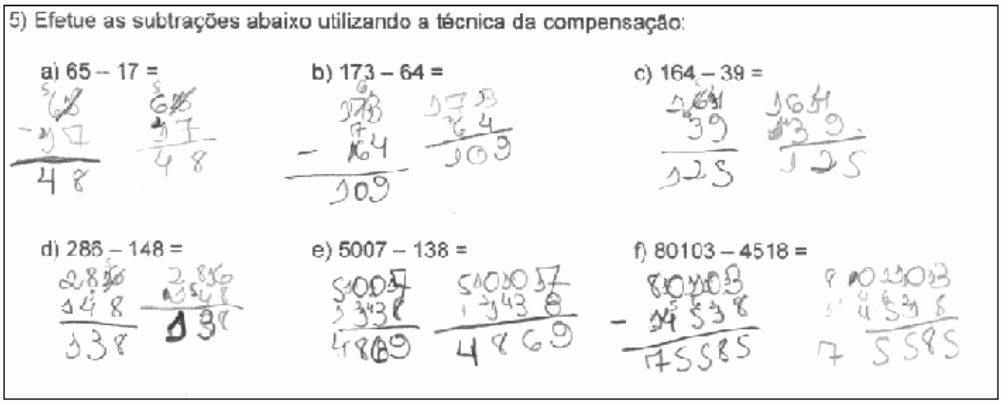


Figura 52: respostas de um aluno da 5ª série

Na questão 6, na qual os alunos deveriam resolver a subtração 4060101 – 1376539 primeiro pelo algoritmo da compensação e depois pelo algoritmo do empréstimo, obtivemos os seguintes resultados:

21 alunos efetuaram a subtração corretamente ao utilizar os dois métodos.

4 alunos acertaram pelo método da compensação e erraram pelo método do empréstimo.

1 aluno errou pelo método da compensação e acertou pelo método do empréstimo.

8 alunos erraram pelos dois métodos.

1 aluno não respondeu a questão.

Desses alunos:

17 responderam que foi mais fácil resolver pelo método da compensação.

12 responderam que foi mais fácil resolver pelo método do empréstimo.

4 responderam que foi fácil pelos dois métodos.

1 respondeu que foi difícil pelos dois métodos.

1 não respondeu a questão.

Na questão 7, na qual os alunos deveriam resolver 201005 – 32017 primeiro utilizando o algoritmo do empréstimo e depois o algoritmo da compensação, obtivemos os seguintes resultados:

20 alunos efetuaram a subtração corretamente utilizando os dois métodos.

2 alunos erraram pelo método da compensação e acertaram pelo método do empréstimo.

12 alunos erraram pelos dois métodos.

1 aluno não respondeu a questão.

Desses alunos:

16 responderam que foi mais fácil resolver pelo método da compensação.

9 responderam que foi mais fácil resolver pelo método do empréstimo.

8 responderam que foi fácil pelos dois métodos.

1 respondeu que foi difícil pelos dois métodos.

1 não respondeu a questão.

As principais justificativas dos alunos que escolheram o método do empréstimo como sendo mais fácil foram:

> - "Porque eu já tinha aprendido antes e já tinha mais prática".
> - "Porque eu já sabia faz tempo".
> - "Porque não teve que subir e descer tantos números".
> - "Porque no da compensação eu me atrapalhei um pouco".

Por essas justificativas, podemos perceber que a prática que os alunos têm com o uso do algoritmo do empréstimo foi influência determinante em sua escolha.

As principais justificativas dos alunos que escolheram o método da compensação como sendo mais fácil foram:

> - "Porque você só adiciona os números, não precisa tirar de outros".
> - "Porque não precisa ficar cortando os números".
> - "Porque é mais fácil de ver os números".
> - "Porque não precisa emprestar"
> - "Porque não precisa ficar procurando um número para poder emprestar".
> - "Acho mais fácil o da compensação porque é de pôr 10 em cima e pôr 1 em baixo".
> - "Porque eu achei legal".

As respostas dos alunos reforçam a existência dos problemas que levantamos anteriormente com o algoritmo do empréstimo e que o algoritmo da compensação vem resolver, como a dificuldade de entender as anotações dificultando a visualização da operação, a dificuldade de saber de onde começar a emprestar e ficar passando de “casa em casa”.

O aluno que resolveu todos os itens da questão 5 pelos dois métodos, que citamos anteriormente na figura 52, também efetuou corretamente a subtração da questão 6 pelos dois métodos e disse ter achado mais fácil resolver pelo método do empréstimo porque já tinha mais prática, no entanto, na questão 7, ele respondeu:

> - “Foi mais fácil o da compensação porque, quando eu fui conferir, a da compensação estava certa e a do empréstimo estava errada”.

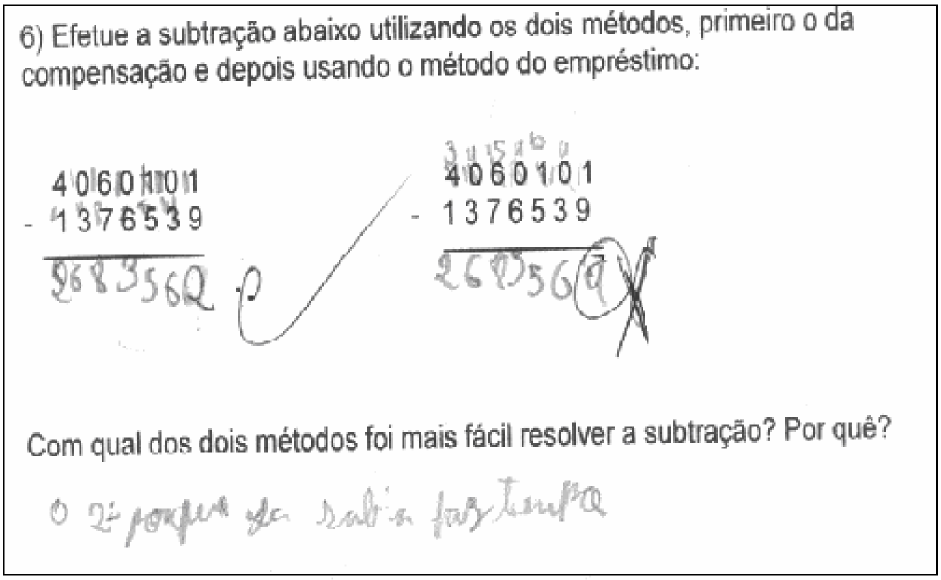
17 alunos acertaram as subtrações das questões 6 e 7 pelos dois métodos. Desses alunos:

- 8 acharam mais fácil resolver pelo método da compensação.
- 4 acharam mais fácil resolver pelo método do empréstimo.
- 2 acharam que os dois métodos tiveram o mesmo grau de dificuldade.
- 3 acharam que a questão 6 foi mais fácil pelo método da compensação e a questão 7 foi mais fácil pelo método do empréstimo.

Dois alunos erraram todas as subtrações da atividade (questões 5, 6 e 7), demonstrando muita dificuldade com a subtração.

Uma aluna acertou apenas a subtração da questão 6 pelo método da compensação. Ela demonstrou alegria ao conseguir entender esse método e respondeu que ele era mais fácil porque só precisava aumentar os números.

Um aluno, na questão 6, respondeu que achou mais fácil resolver pelo método do empréstimo porque já estava acostumado, mas, no entanto, ele errou a subtração pelo método do empréstimo e acertou pelo método da compensação, como podemos ver na figura 53. Isso mostra que, mesmo o aluno estando acostumado a utilizar o algoritmo do empréstimo, este pode levá-lo ao erro.


6) Efetue a subtração abaixo utilizando os dois métodos, primeiro o da compensação e depois usando o método do empréstimo:

$$\begin{array}{r} 4060101 \\ -\ 1376539 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4060101 \\ -\ 1376539 \\ \hline \end{array}$$

Com qual dos dois métodos foi mais fácil resolver a subtração? Por quê?

Figura 53: resposta de um aluno da 5ª série

Apesar do pouco tempo de contato que tiveram com o algoritmo da compensação, a maioria dos alunos o utilizou corretamente e grande parte deles respondeu achar o seu uso mais fácil do que o do algoritmo do empréstimo.

O fato dos alunos, nas questões 6 e 7, terem resolvido as subtrações pelos dois métodos, possibilitou que eles conferissem e corrigissem as que tinham errado. Ainda assim, na questão 6, quatro alunos erraram a resolução pelo algoritmo do empréstimo e acertaram pelo algoritmo da compensação, o que nos leva a crer que o uso do algoritmo da compensação pode ajudar contornar problemas enfrentados com o uso do algoritmo do empréstimo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nosso trabalho pesquisamos qual algoritmo os alunos e professores utilizam para efetuar as subtrações e quais as dificuldades que enfrentam com seu uso. Analisamos dois algoritmos da subtração: o algoritmo do empréstimo (decomposição do minuendo) e o algoritmo da compensação.

Organizamos nossa pesquisa de acordo com alguns pressupostos da Engenharia Didática (Artigue, 1996), o que muito contribuiu para elaboração, aplicação e análise de nossa seqüência didática.

Esta pesquisa foi embasada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996), mais precisamente em seu conceito de esquema, pois, para ele, algoritmos são esquemas. Segundo o autor, o funcionamento cognitivo do aluno comporta operações que se automatizam progressivamente e a automatização é uma das manifestações mais visíveis do caráter invariável da organização da ação. De fato, todas as nossas condutas comportam uma parte automatizada e uma parte de decisões conscientes.

Guiando-nos por essa teoria, acreditamos que, geralmente, ao resolver um problema, o aluno toma decisões conscientes quando escolhe que operações utilizar, em que ordem e com quais valores. Ao decidir utilizar um algoritmo, definidos os números que farão parte dele, entra em ação a parte automatizada do procedimento. Essa parte automatizada deve ser precisa e eficiente para não comprometer o resultado de toda conduta e justifica a importância de estudarmos os algoritmos.

Todos os alunos que participaram de nossa pesquisa utilizam e conhecem apenas o algoritmo do empréstimo. Em nossas análises verificamos que a maioria deles comete muitos erros ao efetuarem as subtrações, e essa ocorrência se dá em todas as séries do Ensino Fundamental II e se mantém no Ensino Médio. Verificamos que esses erros ocorrem principalmente quando o minuendo é formado por um ou mais zeros e se torna necessário fazer muitos empréstimos para efetuar a subtração. Na resolução de problemas, mesmo quando o aluno emprega corretamente a subtração, comete erros ao utilizar o algoritmo.

Os trinta e quatro professores, que colaboraram com nosso trabalho, afirmaram que ensinam seus alunos a efetuarem a subtração utilizando o algoritmo do empréstimo e, dezesseis deles, nem conhecem o algoritmo da compensação, o que nos leva a crer que em sua formação o uso do algoritmo do empréstimo foi enfatizado. Muitos desses professores reconhecem que grande parte dos alunos se confunde ao utilizar o algoritmo do empréstimo, principalmente quando o minuendo contém o algarismo zero e é necessário fazer vários empréstimos. Procedimentos automatizados incorretamente, que observamos nas resoluções dos alunos, também foram encontrados nas resoluções dos professores.

No estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997, 1998) e da Proposta Curricular do Estado de São Paulo (1991), verificamos que os dois algoritmos são citados e a escolha de qual utilizar em sala de aula fica a critério do professor, porém, não identificam nenhuma dificuldade que o aluno possa vir a ter ao utilizá-los. No entanto, a Proposta Curricular faz uma ressalva, dizendo que o algoritmo do empréstimo tem todos os pré-requisitos no sistema de numeração decimal que já vem sendo trabalhado, enquanto o algoritmo da compensação necessita de um trabalho prévio com a propriedade da invariância da diferença. Acreditamos que essa observação possa sugerir que seria mais fácil, para o professor, trabalhar com o algoritmo do empréstimo e assim influenciar sua escolha.

Em nossa análise de livros didáticos da 2ª série (3º ano) do Ensino Fundamental, em que foram verificados 60 títulos, inclusive os 35 indicados no guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD, 2007), e mais 5 apostilas de sistemas educacionais, constatamos que todos propõem o uso do algoritmo do empréstimo para efetuar as subtrações. Os livros destinados à formação do professor, que analisamos, também privilegiam esse algoritmo, o que pode justificar o fato de todos os professores que pesquisamos o utilizarem.

Preparamos uma seqüência didática, a fim de introduzir o algoritmo da compensação a alunos de uma quinta série (sexto ano) do Ensino Fundamental e assim poder analisar o uso desse algoritmo. A Teoria das Situações de Brousseau (1996) foi um importante instrumento para organização dessa seqüência didática. Procuramos prepará-la de modo que nossos alunos vivenciassem as fases de ação, formulação, validação e institucionalização, e isso foi determinante para o sucesso de nosso experimento.

Com a aplicação dessa seqüência didática pudemos constatar que a maioria dos alunos conseguiu assimilar e utilizar corretamente o novo algoritmo para resolução das subtrações. Apesar de estarem aprendendo um novo método para resolver algo que eles já sabiam resolver há um bom tempo, observamos que alguns alunos erraram ao resolver uma subtração com o algoritmo do empréstimo, que já estavam acostumados a usar, e acertaram usando o algoritmo da compensação, que haviam acabado de aprender.

Em uma das questões, em que os alunos deveriam responder com qual algoritmo havia sido mais fácil resolver uma determinada subtração, nove responderam ter tido o mesmo grau de dificuldade com os dois algoritmos, nove acharam mais fácil resolver com o uso do algoritmo do empréstimo e dezesseis deles acharam mais fácil resolver utilizando o algoritmo da compensação. Suas justificativas vieram reforçar a existência de problemas com o uso do algoritmo do empréstimo, como o fato de se confundirem com suas próprias anotações, não saberem de onde começar a fazer os empréstimos e não ter uma boa visualização da operação. Os alunos que acharam mais fácil o algoritmo do empréstimo justificaram sua escolha pela prática que já tinham com o uso desse método, o que já era esperado.

Ao compararmos os dois algoritmos, pudemos perceber que os procedimentos de uso do algoritmo do empréstimo variam de acordo com os algarismos que formam o minuendo (às vezes inicia-se a decomposição do algarismo ao lado, às vezes tem-se que procurar de onde iniciar as decomposições). Já o uso do algoritmo da compensação é sempre da mesma forma, independente dos algarismos que formam o minuendo e o subtraendo. Gregolin (2002) ressalta a dificuldade dos alunos do Ensino Fundamental I com o uso do algoritmo do empréstimo e sugere que o uso do algoritmo da compensação poderia diminuir esses erros:

> [...]usando o algoritmo *das trocas*, para subtrair unidades é necessário *trocar* dezenas, que, por sua vez, necessitam de *troca* nas centenas, que também precisam de *troca* nas unidades de milhar. No algoritmo por invariância, a subtração é *local*, envolvendo sempre duas ordens. Se for necessária uma soma, a questão (não chega a ser problema) é resolvida na própria ordem e na imediatamente superior (GREGOLIN, 2002, p.70).

A dificuldade para a introdução dos algoritmos pelos professores é praticamente a mesma, como pudemos verificar pelas atividades sugeridas em Atividades Matemáticas (SP, 1989), desde que eles conheçam os dois métodos. À subtração estão associadas três idéias distintas: tirar, comparar e completar. O algoritmo do empréstimo trabalha apenas a idéia de tirar, enquanto o algoritmo da compensação, além da idéia de tirar, trabalha também a idéia de completar, à qual os alunos têm mais dificuldades de relacionar a subtração.

Baseados nestes resultados, acreditamos que o uso do algoritmo da compensação poderia ser mais eficiente do que o uso do algoritmo do empréstimo, contornando problemas que os alunos enfrentam para efetuar subtrações. E, assim, respondemos positivamente nossa questão de pesquisa: "*Se usássemos o algoritmo da compensação poderíamos diminuir os erros dos alunos do Ensino Fundamental ao efetuarem subtrações?*".

Nossa intenção inicial era encontrar escolas que usassem o algoritmo do empréstimo e outras que usassem o algoritmo da compensação para que pudéssemos comparar o desempenho dos alunos ao utilizarem um e outro método. Como isso não foi possível, pois não encontramos escolas que usassem o algoritmo da compensação, pelo menos em nossa região, nossa perspectiva futura é dar continuidade a essa pesquisa introduzindo o algoritmo da compensação a alunos que ainda não aprenderam a utilizar outro método e, assim, poder analisar sua atuação. Surgem, ainda, outras questões a serem respondidas por futuras pesquisas: por que o algoritmo do empréstimo é o mais indicado nos livros didáticos (indicado em todos os títulos do PNLD 2007)? Em que momento o algoritmo da compensação começou a ser preterido? Visto que, em nosso estudo, concluímos que o uso do algoritmo da compensação tem vantagens em relação ao uso do algoritmo do empréstimo.

Foi observando a dificuldade de nossos alunos, no dia-a-dia da sala de aula, que detectamos as dificuldades criadas pelo algoritmo da subtração com a decomposição do minuendo. Falar de um algoritmo pode parecer uma coisa simples demais ou então, uma solução "simplista" para problemas tão complicados como são os da educação. Mas, às vezes, uma mudança pequena e simples pode trazer importantes resultados. Pode não resolver todos os problemas, mas diminuiria um deles.

Falar em mudança na educação é falar na formação do professor, pois, no caso da subtração, verificamos que muitos professores nem conhecem o algoritmo da compensação e os livros, destinados à sua formação, também enfatizam o uso do algoritmo do empréstimo.

Esperamos que nossa pesquisa possa contribuir positivamente com a Educação Matemática e estimular novas pesquisas a respeito dos algoritmos das operações básicas, especialmente da subtração e divisão, além de ajudar a superar a crise no ensino das operações básicas citada por Brousseau (2007).

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget, 1996, p. 193-218.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico:** contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução de Estela dos Santos Abreu, Rio de Janeiro: Contraponto, 1996, 316p.

BOOTH, Wayne C; COLOMB, Gregory G; WILLIAMS, Joseph M. **A arte da pesquisa.** São Paulo: Martins Fontes, 2000.

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Guia do livro didático PNLD 2007:** apresentação: séries/anos iniciais do ensino fundamental. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos PCN's. Brasília: MEC/SEF, 1998. 174p.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Terceiros quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e métodos da didáctica da matemática. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p.35-113.

BROUSSEAU, G. **Le calcul « a la plume » des multiplications et des divisions elementaires**, 2007. http://www.ardm.asso.fr/didactique/Francais_Calcul_Partie1.pdf e www.ardm.asso.fr/didactique/Francais_Calcul_Partie2.pdf, acessado em 08/07/2008.

CANOAS, S. **O campo conceitual multiplicativo na perspectiva do professor das séries iniciais (1ª à 4ª série).** Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática)-PUC/SP, São Paulo, 1997.

CUNHA, M.C. **As operações de multiplicação e divisão junto aos alunos de 5ª e 7ª séries.** Dissertação (Mestrado em Ensino da matemática)-PUC/SP, São Paulo, 1997.

DAMM, Regina F. Representação, compreensão e resolução de problemas aditivos. In: MACHADO, Silvia Dias (org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DOMINGUES, Higino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna.** São Paulo: Atual, s.d.

DOMINGUES, Higino H. **Fundamentos de aritmética.** São Paulo: Atual, 1991.

FRANCHI, Anna. **O problema do ensino de subtração na 1ª série do 1º grau.** Dissertação (Mestrado em Psicologia Educacional)-PUC/SP, São Paulo, 1977.

GREGOLIN, Vanderlei Rodrigues. **O Conhecimento Matemático Escolar:** operações com números naturais (e adjacências) no Ensino Fundamental. Tese (Doutorado em Educação)– Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2002.

LOPES, Jairo de Araújo. **Livro Didático de Matemática:** concepção, seleção e possibilidades frente a Descritores de Análise e Tendências em Educação Matemática. Tese (Doutorado em Educação)– FE/UNICAMP, Campinas, 2000.

NUNES, Terezinha. et al. **Introdução à educação matemática:** Os números e as operações numéricas. São Paulo: Proem, 2001.

PEREIRA, Tânia Michel. **Matemática das séries iniciais**. 2. ed. Ijuí : ed. UNIJUÍ, 1997.

SÃO PAULO (estado), Secretaria da Educação; Coordenadoria de estudos e normas pedagógicas. **Atividades matemáticas;** 2ª série do 1º grau. São Paulo: SE/CENP/CECISP, 1983. vol.1.

SÃO PAULO (estado), Secretaria da Educação; Coordenadoria de estudos e normas pedagógicas. **Atividades matemáticas;** 2ª série do 1º grau. 4ª ed. São Paulo: SE/CENP, 1989.

SÃO PAULO (estado), Secretaria da Educação; Coordenadoria de estudos e normas pedagógicas. **Prática pedagógica.** São Paulo: SE/CENP, 1993.

SÃO PAULO (estado), Secretaria da Educação; Coordenadoria de estudos e normas pedagógicas. **Ciclo Básico.** São Paulo: SE/CENP, 1993.

SÃO PAULO (estado), Secretaria da Educação; Coordenadoria de estudos e normas pedagógicas. **Proposta curricular para o ensino de matemática 1º grau.** 4. ed. São Paulo: SE/CENP, 1991.

SÃO PAULO (estado), Secretaria da Educação; Coordenadoria de estudos e normas pedagógicas. **Proposta educacional:** Currículo e avaliação. São Paulo: SE/CENP, 1992. 55p.

SISTEMA SIGMA DE ENSINO. **Material do professor:** 1ª e 2ª séries. São Paulo: Suplegraf, 2002.

VERGNAUD, G. A teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, Jean. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p.155-191.

ANEXO A

LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

TÍTULOS INDICADOS NO GUIA DO PNLD 2007

1- BIGODE, Antonio José Lopes; GIMENEZ, Joaquim. **Matemática do cotidiano e suas conexões**. São Paulo: FTD, 2005.

2- BONJORNO, Regina A; BONJORNO, José R. **Matemática: Pode Contar Comigo**. São Paulo: FTD, 1995.

3- BONJORNO, Regina A; BONJORNO, José R. **Vamos Juntos nessa Matemática**. São Paulo: FTD, 2000.

4- BORDEAUX, Ana Lúcia. et al. **Matemática na Vida e na Escola**. São Paulo: Ed. Brasil, 2005.

5- BUENO, Ana Maria C. et al. **Pensar e viver: Matemática.** São Paulo: Ática, 2006.

6- CAETANO, Marluce; MONTEIRO, Paula. **Matemática em construção**. São Paulo: Atual, 2001.

7- CARDOSO, Mario L; GONÇALVES, Otânio Alves. **Alegria de aprender: Matemática.** São Paulo: Editora do Brasil, 2001.

8- CENTURION, Marília. **Coleção Porta aberta Matemática.** São Paulo: FTD, 2005.

9- CERULLO, Maria Inês; SATO, Maria Tomie; CHACUR, Regina Maria. **Trocando idéias: Matemática**. São Paulo: Scipione, 2001.

10- DANTE, Luiz Roberto. **Vivência e Construção Matemática**. São Paulo: Ática, 2000.

11- DANTAS, Sérgio. et al. **Matemática: A escola é nossa**. São Paulo: Scipione, 2003.

12- DARIN, Áurea; MEDEIROS, Ieda. **Coleção Colibri: Matemática**. São Paulo: IBEP, 2005.

13- GARCIA, Jaqueline; DANTAS, Marcio**. Coleção Conhecer e crescer: matemática**. São Paulo: Escala Educacional, 2005.

14-GUELLI, Oscar. **Coleção Matemática em construção**. São Paulo: Ática, 2006.

15-GIOVANNI, José Rui. **A conquista da Matemática.** São Paulo: FTD, 1986.

16-GIOVANNI, José Rui; GIOVANNI, José Rui Jr. **Matemática Pensar e Descobrir.** São Paulo: FTD, 1998.

17-IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo; MILANI, Estela. **Matemática Paratodos**. São Paulo: Scipione, 2004.

18-ISOLANI, Clélia Maria Martins. et al. **Construindo o conhecimento: Matemática.** São Paulo: IBEP, 2005.

19-LIMA, Maria Apparecida Barroso de. **Registrando descobertas: matemática nos novos tempos**. São Paulo: FTD, 2003.

20-LONGEN, Adilson. **Descobrindo a vida: matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2001.

21-MARSICO, Maria Teresa. et al. **Coleção Caracol: matemática**. São Paulo: Scipione, 2001.

22-MAGNUSSON, Mário Jr; PASCHOALICK, Hely Loureiro. **Coleção Recri(e)ação: matemática.** São Paulo: IBEP, 2005.

23-MENEGHELO, Marinez; PASSOS, Ângela. **De olho no futuro: Matemática**. São Paulo: Quinteto Editorial, 2005.

24-MIANI, Marcos. **Coleção Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2005.

25-MODERNA. **Projeto Pitanguá: matemática.** São Paulo: Editora Moderna, 2005.

26-MORI, Iracema. **Viver e Aprender Matemática**. São Paulo: Saraiva, 1997.

27-MUNHOZ, Aida F; NAZARETH, Helenalda; TOLEDO, Marília. **Fazer, compreender e criar em Matemática**. São Paulo: IBEP, 2004.

28-PADOVAN, Daniela; GUERRA, Isabel C. F.; MILAN, Ivonildes S. **Coleção Matemática.** São Paulo: Moderna, 2001.

29-REAME, Eliane. **Matemática criativa**. São Paulo: Editora Saraiva, 2004.

30-SANCHES, Lucilia; LIBERMAN, Manhúcia; WEY, Regina. **Fazendo e compreendendo Matemática.** São Paulo: Saraiva, 2004.

31-SOARES, Eduardo Sarquis. **Matemática com o sarquis**. Belo Horizonte: Formato editorial, 2004.

32-SOSSO, Juliana. **Convivendo com a Matemática**. São Paulo: Atual, 2000.

33-SPINELLI, Walter; SOUZA, Maria Helena. **Coleção Série Brasil: Matemática**. São Paulo: Ática, 2006.

34-STAREPRAVO, Ana Ruth. **Coleção Curumim: matemática**. São Paulo: Saraiva, 2003.

35-TOSSATTO, Carla Cristina. et al. **Matemática: Coleção Idéias & relações**. Curitiba: Positivo, 2004.

TÍTULOS NÃO INDICADOS NO GUIA DO PNLD 2007

1. AGUIAR, Helena de Jesus. **Conte Comigo: matemática para o 1º grau - 3ª série**. São Paulo: Ed. Nacional, 1980.
2. ALVES, Wanda Maria C. **Matemática com a turma dos 9**. São Paulo: FTD, 1999.
3. AMARAL, Lurdes; ALPENDRE, Beatriz. **Coleção Vitória Régia: Matemática**. São Paulo: IBEP, 2001.
4. BORDEAUX, Ana Lúcia. et al. **Estação matemática**. São Paulo: Ed. Brasil, 2007.
5. CASARIN, Nelson E. F.; MIRANDA, Marilene M.; ROCHA, Fábio T. N. **Interagir e crescer: matemática**. São Paulo: Casa Publicadora Brasileira, 2007.
6. COLL, César; TABEROSKI, Ana. **Aprendendo Matemática.** São Paulo: Ática, 2000.
7. COSCRATO, Nívea; GARCIA, Jaqueline; DANTAS, Márcio. **Projeto Meu livro: Matemática.** São Paulo: Escala Educacional, 2004.
8. FRANÇA, Elisabete. et al. **Matemática Para Gostar e Aprender.** São Paulo: Ed. Brasil, 2001.
9. FRAVET, Maria Luiza; LIMA, Carlos Augusto; CARVALHO, Mercedes. **Os Caminhos da Matemática**. São Paulo: Atual, 2000.
10. GARCIA, Tânia M. F. B.; SOARES, Maria T. C. **Matemática: Educação e o desenvolvimento do senso crítico**. São Paulo: Ed. Brasil, 1998.
11. GIOVANNI, José Rui; GIOVANNI, José Rui Jr. **Viva Vida: Matemática**. São Paulo: FTD, 1995.

12. GROSSESCHI, Maria Cecília C.; ANDRETTA, Maria Capucho; SANTOS, Aparecida B. **PROMAT 2 – Projeto Oficina de Matemática.** São Paulo: FTD, 1995.

13. GUELLI, Oscar. **Coleção Nosso Mundo: Matemática**. São Paulo: Ática, 2004.

14. GUELLI, Oscar. **Coleção Quero Aprender Matemática**. São Paulo: Ática, 1999.

15. IMENES, Luiz Márcio; JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Novo Caminho: Matemática**. São Paulo: Scipione, 1998.

16. LONGEN, Adilson. **Interagindo com a matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2005.

17. MAROTE; D'Olim. **Coleção Aquarela: Matemática**. São Paulo: Ática, 1989.

18. MARSICO, Maria T. et al. **Marcha Criança: Matemática**. São Paulo: Scipione, 2002.

19. NEME, Adla. **Assim se Aprende Matemática**. São Paulo: Abril Cultural, 1977.

20. OLIVEIRA, Emanuel Cavalcanti de; GONÇALVES, Maria da Penha. **Coleção Rosa dos Ventos: Matemática.** São Paulo: Moderna, 1997.

21. PIRES, Célia Carolino; NUNES, Maria. **Matemática no Planeta Azul**. São Paulo: FTD, 1998.

22. SANTOS, Maria da Glória M. **Texto e Contexto: Matemática**. São Paulo: Ed. Brasil, 1987.

23. TABOADA, Roberta. **Aprender juntos: matemática**. São Paulo: Edições SM, 2007.

24. VARGAS, Sides; NICOLAS, Aparecida. **Descobrindo e Construindo Matemática**. Belo Horizonte: Editora Lê, 1991.

25. WAKABAYASHI, Jukie Kiyosen. **É Divertido Aprender Matemática**. São Paulo: FTD, 1997.

APOSTILAS DE SISTEMAS EDUCACIONAIS

ANGLO. **Apostila do ensino fundamental : 2ª série**. São Paulo: Anglo, 2002.

DOM BOSCO. **Apostila do ensino fundamental: 2ª série**. Curitiba: Editora Dom Bosco, 2005.

ETAPA. **Apostila do ensino fundamental : 2ª série**. São Paulo: Etapa, 2007.

OBJETIVO. **Apostila do ensino fundamental : 2ª série**. São Paulo: Objetivo, 2007.

POSITIVO. **Apostila do ensino fundamental : 2ª série**. Curitiba: Positivo, 2007.

SIGMA. **Apostila Projeto Sigma: ensino fundamental – 2ª série**. São Paulo: Ed. Didática Suplegraf

LIVROS DESTINADOS A CURSOS DE MAGISTÉRIO

CENTURIÓN, Marília. **Conteúdo e Metodologia da Matemática: Números e Operações.** São Paulo: Scipione, 1994.

ROSA NETO, Ernesto; MENDONÇA, Eliana Riscalla; SMITH, Maria Lúcia. **Matemática para o Magistério.** São Paulo: Ática, 1993.

ROSA NETO, Ernesto; **Didática da Matemática.** São Paulo: Ática, 1987.

ROXO, Maria Helena; NEVES, Maria Luiza do Carmo. **Didática Viva da matemática no curso primário.** São Paulo: Moderna, 1970.

RUBINSTEIN, Cléa. et al. **Matemática: para o Curso de Formação de Professores de 1ª à 4ª séries do primeiro grau.** São Paulo: Moderna, 1991.

VALLE, Magdalena Pinho Del. **Explorando a matemática na escola primária.** Rio de Janeiro: Livraria José Olímpio Editora, 1969.

APÊNDICE A

QUESTIONÁRIO PARA O PROFESSOR

Nome: ....

Cidade:..UF:...................Data:___/___/______

Disciplinas que leciona:...

Escolas em que leciona:...

....

Séries para as quais leciona:..

4) Como você ensina seu aluno a efetuar a subtração?

( ) Método do empréstimo (decomposição do minuendo)

( ) Método da compensação (abaixa o 1)

5) Você conhece os dois métodos? ( ) sim ( ) não

6) Como você aprendeu a efetuar a subtração? Usando o mesmo método que ensina?

7) Resolva a subtração abaixo (se você conhece os dois métodos, utilize o método do empréstimo). Quais as dificuldades que um aluno teria para resolver essa subtração utilizando o método do empréstimo?

$$\begin{array}{r} 200100 \\ -\ 148319 \\ \hline \end{array}$$

8) Observe os exercícios a seguir, que foram resolvidos por um mesmo aluno da 5ª série do ensino fundamental. Os dois exercícios são praticamente iguais, ele usou a operação correta, acertou o primeiro, mas, errou o segundo. Em sua opinião, por que isso ocorreu?

Para bater o recorde em um jogo de vídeo game, Lucas precisa fazer 832.944 pontos. Ele já conseguiu fazer 11.426 pontos. Quantos pontos faltam para que ele consiga bater o recorde?

$$\begin{array}{r} 832.944 \\ 11.426 \\ \hline 821.518 \end{array}$$

R: faltam 821.518 para que ele consiga.

Para bater o recorde em um jogo de vídeo game, Lucas precisa fazer 500.103 pontos. Ele já conseguiu fazer 19.297 pontos. Quantos pontos faltam para que ele consiga bater o recorde?

$$\begin{array}{r} 500.103 \\ -\ 19.297 \\ \hline 480.706 \end{array}$$

faltam para ele conseguir 480.706 pontos

APÊNDICE B

SEQÜÊNCIA DIDÁTICA: 1ª PARTE

Escola:____
Nome:_____________________________________Série:______Data___/___/___

1- Lucas tem 6 anos e seu primo Mateus tem 18.

a) Quem é mais velho e quantos anos tem a mais que o outro?
b) Daqui a 4 anos qual a idade de cada um deles?
c) Quem será o mais velho e quantos anos terá a mais que o outro?

2- Você tem 8 figurinhas e seu amigo tem 5.

a) Quem tem mais figurinhas?
b) Quantas a mais?
c) Se cada um de vocês ganhar mais 10 figurinhas, com quantas cada um vai ficar?
d) Quem tem mais figurinhas agora?
e) Quantas a mais?
f) A diferença entre a quantidade de figurinhas que você tem e quantidade que seu amigo tem mudou?
g) Porque isso ocorreu?

3- Complete e observe os resultados:

a) $\begin{array}{r} 6 \\ -\ 2 \\ \hline \end{array}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{r} 6 + 10 = \text{...........} \\ 2 + 10 = -\ \text{...........} \\ \hline \end{array}$

b) $\begin{array}{r} 9 \\ -\ 4 \\ \hline \end{array}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{r} 9 + 10 = \text{...........} \\ 4 + 10 = -\ \text{...........} \\ \hline \end{array}$

c) $\begin{array}{r} 38 \\ -\ 15 \\ \hline \end{array}$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{r} 38 + 10 = \text{...........} \\ 15 + 10 = -\ \text{...........} \\ \hline \end{array}$

4) Quando você acrescenta um mesmo valor aos dois termos de uma subtração o que acontece com o resultado?

APÊNDICE C

SEQÜÊNCIA DIDÁTICA: 2ª PARTE

Atividades para trabalhar a propriedade da invariância da diferença

Atividade 1: O professor vai medir o aluno mais baixo e o mais alto da classe e pedir aos alunos que calculem, ou meçam a diferença de altura entre eles.

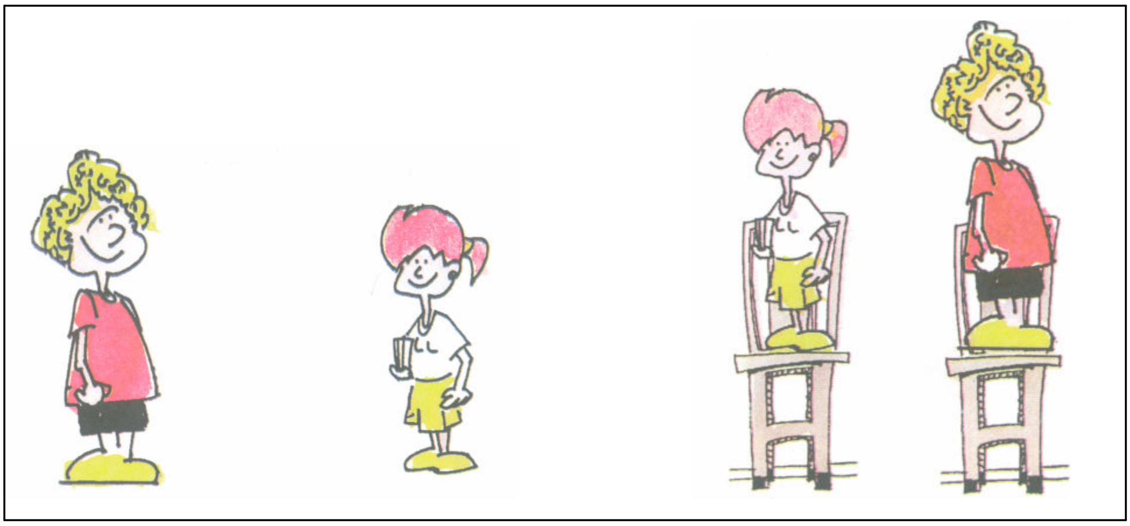


Figura: Suplegraf, p. 74

Depois pega duas cadeiras exatamente iguais e pede aos dois alunos que subam nelas. Pergunta aos alunos o que eles acham que vai acontecer com a diferença entre as alturas agora: vai aumentar, vai diminuir ou vai continuar a mesma?

Atividade 2A: O professor formará dois grupos de alunos na frente da sala, com quantidades diferentes de elementos. Então perguntará aos alunos qual grupo tem mais elementos e quantos a mais. Irá incluindo quantidades iguais de alunos em cada grupo e repetindo a pergunta.

Atividade 2B: O professor formará dois grupos de alunos na frente da sala, com a mesma quantidade de alunos. Irá retirando ou incluindo quantidades iguais de alunos em cada grupo e perguntando se ainda continuam com a mesma quantidade de pessoas.

Atividade 3: Observe esta balança:

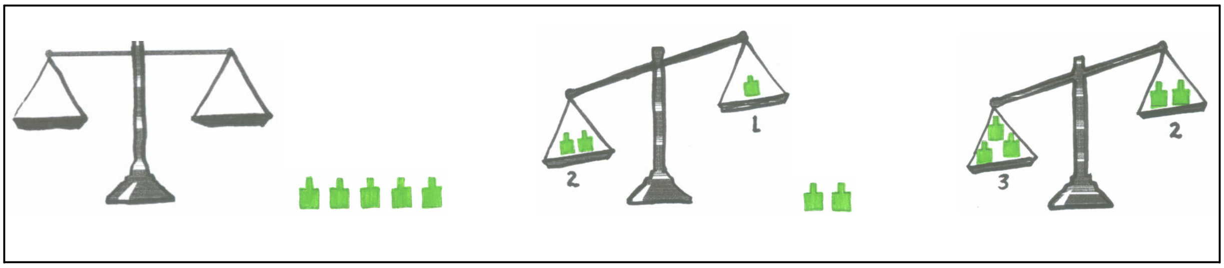


Figura: Suplegraf, p. 76

Como acrescentamos a mesma quantidade de objetos com mesmo peso nos dois pratos, a diferença continua a mesma, e o prato que anteriormente estava mais pesado que o outro, continua mais pesado. E se calcularmos a diferença entre as quantidades de pesos entre os pratos veremos que também continua a mesma.

APÊNDICE D

SEQÜÊNCIA DIDÁTICA: 3ª PARTE

Introdução à técnica operatória da subtração pelo algoritmo da compensação

Maria tinha 353 figurinhas e perdeu 115, quantas tem agora?

Nesse problema ocorreu uma perda, ou seja, a idéia é de diminuição, de subtração.

Teremos que efetuar 353 – 115. Montando a conta temos:

$$\begin{array}{r} 3\ 5\ 3 \\ -\ 1\ 1\ 5 \\ \hline \end{array}$$

Mas nessa conta temos um problema: não podemos tirar 5 de 3.

Para resolver esse problema vamos usar uma técnica chamada de "**compensação**". Para facilitar o entendimento, vamos decompor os números:

$$\begin{array}{rl} 300 + 50 + 3 & \text{(minuendo)} \\ -\ 100 + 10 + 5 & \text{(subtraendo)} \\ \hline \end{array}$$

Nessa técnica, para realizar a subtração, acrescentamos uma dezena ao minuendo e, para **compensar,** acrescentamos uma dezena ao subtraendo. Observe:

$$\begin{array}{r} 300 + 50 + \overset{13}{\cancel{3}} \\ -\ 100 + \overset{20}{\cancel{10}} + 5 \\ \hline 200 + 30 + 8 \end{array}$$

no minuendo acrescentamos 10 à casa das unidades e no subtraendo acrescentamos 10 unidades à casa das dezenas, então

Iniciamos a conta:

238

Observe no quadro valor de lugar:

	c	d	u
	3	5	$\overset{13}{\cancel{3}}$
-	1	$\overset{2}{\cancel{1}}$	5
	2	3	8

APÊNDICE E

SEQÜÊNCIA DIDÁTICA: 4ª PARTE

Nome:___________________________________Série:______Data___/___/___

5) Efetue as subtrações abaixo utilizando a técnica da compensação:

a) 65 – 17 = b) 173 – 64 = c) 164 – 39 =

d) 286 – 148 = e) 5007 – 138 = f) 80103 – 4518 =

6) Efetue a subtração abaixo utilizando os dois métodos, primeiro o da compensação e depois usando o método do empréstimo:

$$\begin{array}{r} 4\,0\,6\,0\,1\,0\,1 \\ -\ 1\,3\,7\,6\,5\,3\,9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,0\,6\,0\,1\,0\,1 \\ -\ 1\,3\,7\,6\,5\,3\,9 \\ \hline \end{array}$$

Com qual dos dois métodos foi mais fácil resolver a subtração? Por quê?

7) Efetue a subtração abaixo utilizando os dois métodos, primeiro o do empréstimo e depois usando o método da compensação:

$$\begin{array}{r} 2\,0\,1\,0\,0\,5 \\ -\ 3\,2\,0\,1\,7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,0\,1\,0\,0\,5 \\ -\ 3\,2\,0\,1\,7 \\ \hline \end{array}$$

Com qual dos dois métodos foi mais fácil resolver a subtração? Por quê?