

ÓRBITAS DE GEOMETRIA LIMITADA
DE
CAMPOS POLINOMIAIS EM $\mathbb{C}^2$

por

Albetã Costa Mafra

UFRJ

2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Órbitas de Geometria Limitada de Campos Polinomiais em $\mathbb{C}^2$

por

Albetã Costa Mafra

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro para obtenção do grau de doutor em ciências.

Orientador: Bruno Scárdua

Rio de Janeiro
2006

Tese de doutorado submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Bruno Scárdua, IM-UFRJ
(Presidente)

Profa. Walcy Santos, IM-UFRJ

Prof. Jesús Muciño, UNAM-México

Prof. Marcelo Saia, USP-São Carlos

Prof. Júlio César Canille Martins, LcMat-UENF

H444s Mafra, Albetã Costa
 Órbitas de Geometria Limitada de Campos Polinomiais
em $\mathbb{C}^2$ / Albetã Costa Mafra
Mafra. - Rio de Janeiro: UFRJ.IM, 2006.
 vii, 56p.
 Orientador: Bruno César de Azevedo Scárdua
 Inclui bibliografia
 Tese(Doutorado) - UFRJ.IM, 2006.

1. Folheações Holomorfas Singulares-Tese. I. Universidade
Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática
II.Scárdua, Bruno César de Azevedo. III. Título.

Aos meus pais, por tudo que me ensinaram

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Prof. Bruno Scárdua, pela orientação e pela empolgação com que fala de matemática, aos meus amigos da pós-graduação e ao amigo Helisson pelas figuras deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudamos a seguinte questão:

Seja $C \subset \mathbb{C}^2$ uma curva holomorfa com curvatura total finita. C está contida numa curva algébrica? Como existem domínios próprios de $\mathbb{C}^2$ difeomorfos a $\mathbb{C}^2$, em geral a resposta se torna negativa neste nível de generalidade. Por isso estudamos este problema sob a seguinte hipótese adicional que a curva holomorfa C seja invariante por um campo vetorial polinomial sobre $\mathbb{C}^2$. Mais precisamente, provamos que uma órbita com curvatura total finita de um campo vetorial polinomial sobre $\mathbb{C}^2$ é algébrica sob algumas hipóteses adicionais nas singularidades da folheação holomorfa projetiva associada

Abstract

In this paper we address the following question: *Let $C \subset \mathbb{C}^2$ be a holomorphic curve which has finite total Gaussian curvature. Is C contained in an algebraic curve?* Since there are proper domains of $\mathbb{C}^2$ diffeomorphic to $\mathbb{C}^2$, the answer turns out to be negative at this level of generality. We therefore regard this problem under the additional hypothesis that C is invariant by a polynomial vector field on $\mathbb{C}^2$. More precisely, we prove that a finitely curved orbit of a polynomial vector field on $\mathbb{C}^2$ is algebraic under some mild conditions on the singularities on the corresponding projective foliation.

Sumário

0	Introdução	9
1	Preliminares	12
1.1	Superfícies Mínimas em Espaços Euclidianos	12
1.2	Folheações Holomorfas Singulares	19
1.3	Exemplos	22
1.4	Desingularização	28
1.5	O Teorema do Índice de Camacho-Sad	31
2	Completude das Folhas	37
3	O Lema da Curvatura Integral	40
4	Órbitas com Curvatura Total Finita	43
4.1	Lemas Básicos	43
4.2	Linearização	45
4.3	Algebricidade de órbitas finitamente curvadas	47
4.4	Curvas Generalizadas	49
4.5	Campos com órbitas Transcendentes finitamente curvadas	56
5	Órbitas com área finita	58

Capítulo 0

Introdução

Um dos motivos que nos leva a ter interesse por folheações algébricas é a conjectura de Green-Griffiths (veja [8]): “Seja M^2 uma superfície algébrica complexa e compacta de tipo geral (veja [2] para definição) com classe de Segre positiva ($c_1^2 - c_2 > 0$). Então uma aplicação inteira $f : \mathbb{C} \longrightarrow M$ tem imagem algébrica”. Um primeiro resultado na direção de provar esta conjectura é devido ao matemático Y. Miyaoka (veja [15]). Tal resultado diz que uma aplicação não algébrica $f : \mathbb{C} \longrightarrow M$ se deforma numa folha de uma folheação algébrica de M . A conjectura é então demonstrada por M. McQuillan em [14] usando o resultado de Y. Miyaoka. Isto então nos leva ao estudo de folheações em superfícies algébricas complexas que admitem curvas inteiras como folhas.

Em nosso trabalho particularizamos o problema acima considerando um campo vetorial polinomial $X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ sobre $\mathbb{C}^2$. As órbitas não singulares de X são curvas holomorfas em $\mathbb{C}^2$ e por isso são superfícies mínimas em $\mathbb{R}^4$ com respeito à métrica euclidiana. Estas órbitas são superfícies de Riemann, e sua topologia pode ser muito complicada (espaço de fins não enumerável, gênero infinito e assim por diante). Em geral, para uma superfície L imersa em $\mathbb{R}^4$, e parametrizada localmente por coordenadas isotérmicas z , que dota L com uma estrutura de superfície de Riemann, temos associada de uma maneira natural a aplicação ϕ , denominada de aplicação de Gauss da imersão de L no espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^3$. Se considerarmos $\mathbb{C}P^3$ com as coordenadas homogêneas z_1, z_2, z_3, z_4 , a imagem de ϕ estará contida na quadrica $\mathbb{Q}_2 = \{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0\}$. No caso de uma imersão mínima temos que ϕ é uma aplicação holomorfa. A aplicação de Gauss é dita *algébrica* se L é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta $\widehat{L}$ menos um número finito de pontos e ϕ se estende como uma aplicação holomorfa de $\widehat{L}$ em $\mathbb{C}P^3$. Um resultado clássico devido a Huber, Chern e Osserman diz que são equivalentes, para imersões mínimas completas, a finitude da curvatura total da imersão e a algebricidade da aplicação de Gauss. Em particular, uma curva

algébrica $C \subset \mathbb{C}^2$ tem aplicação de Gauss algébrica, contudo existem curvas holomorfas em $\mathbb{C}^2$ com curvatura total finita porém que não são curvas algébricas (veja o Exemplo 1.4), por exemplo as órbitas de campos vetoriais polinomiais convenientes. Um dos objetivos de nosso trabalho é dar condições sobre campos vetoriais polinomiais X de forma a assegurar que órbitas não singulares com aplicação de Gauss algébrica (i.e., com curvatura total finita) seja realmente algébrica. Como será visto, isto está relacionado à natureza das singularidades da correspondente folheação induzida pelo campo polinomial X sobre o $\mathbb{CP}^2$. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação singular holomorfa com conjunto singular $\text{sing}(\mathcal{F})$ discreto sobre uma superfície complexa M . Uma singularidade $p \in \text{sing}(\mathcal{F})$ é denominada *irredutível* se existe uma vizinhança aberta U de p em M onde $\mathcal{F}$ é induzida por um campo vetorial holomorfo X da forma : $X(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} + [\lambda y + \text{h. o. t.}] \frac{\partial}{\partial y}$, $\lambda \notin \mathbb{Q}_+$ (não-degenerado), ou $X(x, y) = x^{m+1} \frac{\partial}{\partial x} + [y(1 + \lambda x^m) + \text{h. o. t.}] \frac{\partial}{\partial y}$, $m \geq 1$ (Sela-nó).

Dado um campo vetorial polinomial X sobre $\mathbb{C}^2$ denotamos por $\mathcal{F}(X)$ a correspondente folheação holomorfa com singularidades induzida pelo campo X sobre $\mathbb{CP}^2$ (veja Exemplo 1.1). Para o caso no qual somente a existência de singularidades irredutíveis são permitidas temos o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Seja X um campo vetorial polinomial definido sobre $\mathbb{C}^2$ e seja L uma órbita de X com curvatura total finita com respeito à métrica hermitiana induzida por $\mathbb{C}^2$ sobre L . Suponhamos que as singularidades da folheação $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{CP}^2$ sejam irredutíveis. Então L está contida numa curva algébrica.*

De acordo com a definição em [6], uma singularidade de uma folheação de dimensão um em uma superfície complexa é denominada uma *curva generalizada* se no seu processo de dessingularização por blow-ups não surgem singularidades do tipo sela-nó. Para este tipo de singularidade folhas com curvatura total finita são sempre algébricas como segue do próximo resultado:

Teorema 0.2. *Seja X um campo vetorial polinomial definido sobre $\mathbb{C}^2$ e seja L uma órbita de X com curvatura total finita com respeito à métrica hermitiana induzida pelo $\mathbb{C}^2$ sobre L . Suponhamos que as singularidades de $\mathcal{F}(X)$ sobre $\mathbb{CP}^2$ sejam curvas generalizadas não dicríticas, então L está contida numa curva algébrica.*

Teorema 0.3. *Seja X um campo vetorial polinomial sem retas complexas invariantes sobre $\mathbb{C}^2$. Então as órbitas de X com curvatura total finita são algébricas.*

A seguir provamos que campos vetoriais do tipo Poincaré-Dulac são caracterizados pela existência de órbitas transcendentais (não-algébricas) com curvatura total finita.

Teorema 0.4. *Seja X um campo vetorial polinomial sobre $\mathbb{C}^2$ tal que as singularidades de $\mathcal{F}(X)$ sejam não-degeneradas. Se X tem uma órbita não algébrica finitamente curvada, isto é, com curvatura total finita, então existe um sistema de coordenadas afim (x, y) sobre $\mathbb{C}^2$ tal que X é um pull-back por uma aplicação racional de um campo vetorial $X(x, y) = (nx + cy^n)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ (forma normal de Poincaré-Dulac), para algum $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e algum $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Em particular todas as órbitas de X têm curvatura total finita.*

Fazendo uso das técnicas usadas nas demonstrações dos teoremas acima, no capítulo 5 consideramos campos vetoriais polinomiais que possuem órbitas com áreas finitas e provamos que, sob condições nas singularidades da correspondente folheação projetiva induzida por X , esta órbita é algébrica como no enunciado abaixo.

Teorema 0.5. *Seja X um campo vetorial polinomial sobre $\mathbb{C}^2$. Suponhamos que as singularidades de $\mathcal{F}(X)$ in L_∞ sejam curvas generalizadas não-dicríticas. Dada qualquer métrica hermitiana completa sobre $\mathbb{C}^2$, se a folha $L \in \mathcal{F}(X)$ tem área finita então ela é algébrica.*

Devemos observar que neste caso embora um raciocínio semelhante também funcione similar, o método no qual nos baseamos é o da geometria, mais precisamente usamos uma versão complexa da fórmula de Crofton. Desde que uma curva algébrica tem área euclidiana infinita obtemos do teorema 0.5:

Corolário 0.1. *Seja X um campo vetorial polinomial sobre $\mathbb{C}^2$. Então uma órbita não trivial de X tem área infinita com relação à métrica euclidiana.*

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Superfícies Mínimas em Espaços Euclidianos

Nesta parte de nosso trabalho relembramos fatos básicos e alguns resultados a respeito de superfícies mínimas. Os resultados e definições podem ser encontrados em excelentes textos como por exemplo o devido a B. Lawson [11].

Seja L uma superfície com métrica Riemanniana ds^2 dada por

$$ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2)$$

sendo (x, y) um sistema de coordenadas local e λ uma função a valores positivos. Esta suposição para ds^2 não é restritiva, tais sistemas de coordenadas sempre existem e são chamados isotérmicos. Denotando a função λ por $2F$, podemos reescrever

$$ds^2 = 2F(dx^2 + dy^2).$$

O sistema de coordenadas isotérmicos (x, y) pode ser considerado como um sistema holomorfo $z = x + iy$ se supusermos L orientável. Assim, supondo que L seja orientável podemos dotar L de uma estrutura de superfície de Riemann. Fazendo uso dos operadores diferenciais formais

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

e das expressões $dz = dx + idy$ e $d\bar{z} = dx - idy$ poderemos escrever ds^2 como

$$ds^2 = 2F(z, \bar{z})dz \cdot d\bar{z}.$$

Definindo-se $\omega^1 = \sqrt{2F(z, \bar{z})} \left(\frac{dz + d\bar{z}}{2} \right)$ e $\omega^2 = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{F(z, \bar{z})}{2}} (dz - d\bar{z})$ e derivando-se exteriormente obtemos

$$\begin{aligned} d\omega^1 + (2F)^{-\frac{3}{2}} \left[i \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right) \omega^1 - \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right) \omega^2 \right] \wedge \omega^2 &= 0 \\ d\omega^2 + (2F)^{-\frac{3}{2}} \left[-i \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right) \omega^1 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right) \omega^2 \right] \wedge \omega^1 &= 0. \end{aligned}$$

As 1-formas ω_2^1 e ω_1^2 dadas por

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &:= (2F)^{-\frac{3}{2}} \left[i \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right) \omega^1 - \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right) \omega^2 \right] \\ \omega_1^2 &:= (2F)^{-\frac{3}{2}} \left[i \left(\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial F}{\partial z} \right) \omega^1 - \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \right) \omega^2 \right] \end{aligned}$$

são chamadas *formas de conexão*. É fato que $\omega_1^2 = -\omega_2^1$, portanto, somente precisamos de uma das formas de conexão para obter invariantes métricos.

Em coordenadas temos

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= \frac{i}{2F} \left(\frac{\partial F}{\partial z} dz - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right). \\ d \left(\frac{\partial F}{\partial z} dz - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) &= -2 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d\omega_2^1 &= \frac{i}{2} \cdot \frac{-dF}{F^2} \wedge \left(\frac{\partial F}{\partial z} dz - \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) + \frac{i}{2F} \left(\frac{-2\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \right) \\ &= \frac{i}{F^2} \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} - \frac{i}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \\ &= -i \left(\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} \\ &= -i \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log(F) dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

ou em termos de ω^1 e ω^2

$$d\omega_2^1 = -\frac{1}{F} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log(F) \omega^1 \wedge \omega^2.$$

A função $K := -\frac{1}{F} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log(F)$ é usualmente chamada de *curvatura Gaussiana* de (L, ds^2) .

Afirmção 1.1. *A curvatura Gaussiana não depende do sistema de coordenadas.*

De fato, se (u, v) é um outro sistema de coordenadas cujo domínio intersecta o domínio de (x, y) , então para $w = u + iv$

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2F|dz|^2 \\ &= 2F \left| \frac{\partial z}{\partial w} \right|^2 |dw|^2 \\ &= 2\tilde{F}(w, \bar{w})|dw|^2, \end{aligned}$$

sendo a função $\tilde{F}(w, \bar{w})$ dada por $F(w, \bar{w}) =$

$$F(w, \bar{w}) = F(z(w), \bar{z}(\bar{w})) \left| \frac{\partial z}{\partial w} \right|^2.$$

Assim, um cálculo simples nos dará

$$\frac{1}{\tilde{F}} \frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}} \log \tilde{F} = \frac{1}{F} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log F.$$

Consideremos $\mathbb{R}^n$, o espaço das n -uplas reais, com a estrutura de espaço vetorial usual, $ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ a métrica canônica em $\mathbb{R}^n$, também conhecida como métrica plana em $\mathbb{R}^n$. Dada uma superfície de Riemann com estrutura Riemanniana ds^2 , uma imersão $\psi: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita *isométrica* se ds^2 , sobre L , é o “pull-back” de ds^2 sobre $\mathbb{R}^n$, isto é,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \psi^*(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2) \\ &= d\psi_1^2 + \cdots + d\psi_n^2 \end{aligned}$$

sendo ψ_j usado para denotar a j -ésima componente de ψ .

Supondo novamente a orientabilidade de L (para a existência das coordenadas isotérmicas) dizemos que $\psi: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma *imersão isométrica minimal* se ψ é uma imersão isométrica e

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

De forma abreviada, chamaremos as imersões isométricas mínimas de imersões mínimas.

Para uma imersão qualquer $\psi: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ podemos definir uma aplicação φ de L em $\mathbb{C}^n$ ($\varphi: L \rightarrow \mathbb{C}^n$) por

$$\varphi := \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

No caso de ψ ser uma imersão mínima temos $\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} \psi = 0$, isto é, cada componente φ_1 de φ é uma função holomorfa.

Afirmação 1.2. $\varphi^2 := \sum_{j=1}^n \varphi_j^2 = 0$.

De fato, usando que $\varphi_j = \frac{\partial \psi_j}{\partial z}$

$$\begin{aligned}
\varphi^2 &= \sum_{j=1}^n \varphi_j^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial z} \\
&= \sum \left[\frac{1}{4} \left(\left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right)^2 \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right] \\
&= \frac{1}{4} \sum_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right)^2 - \sum_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
&= \frac{1}{4} (1 - 1) - \frac{1}{2} \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Afirmação 1.3. $|\varphi|^2 = F$.

De fato, um cálculo direto nos dá

$$\begin{aligned}
|\varphi|^2 &= \sum_{j=1}^n |\varphi_j|^2 \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right)^2 \\
&= F.
\end{aligned}$$

Se escolhermos um outro sistema de coordenadas holomorfo $w = u + iv$ cujo domínio intersecta o domínio de $z = x + iy$, poderemos escrever $w = w(z)$ ou $z = z(w)$ na intersecção dos domínios decorrendo daí

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(w) &= \frac{\partial \psi}{\partial w} \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial w} \\
&= \frac{\partial z}{\partial w} \varphi(z(w)).
\end{aligned}$$

Assim temos uma aplicação de L no espaço projetivo complexo que associa a cada ponto em L uma linha complexa em $\mathbb{C}^n$. Mais precisamente, esta aplicação é dada por

$$\begin{aligned}\Phi: L &\rightarrow \mathbb{CP}^{n-1} \\ z &\mapsto [\varphi(z)].\end{aligned}$$

Algumas observações devem ser feitas a respeito da aplicação Φ .

1. $\Phi: L \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ é uma aplicação holomorfa.
2. A propriedade $\sum \varphi_j^2 = 0$ implica que a imagem $\Phi(L)$ está contida na quádrlica $\mathbb{Q}_{n-2} \subset \mathbb{CP}^{n-1}$ dada em coordenadas homogêneas de $\mathbb{CP}^{n-1}$ por

$$\mathbb{Q}_{n-2} := \left\{ [z_1, \dots, z_n] : \sum z_j^2 = 0 \right\}.$$

3. Se $n = 4$, então $\Phi(L) \subset \mathbb{Q}_2 \subset \mathbb{CP}^2$ que é dada por

$$\mathbb{Q}_2 := \left\{ [z_1, \dots, z_4] : z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0 \right\}.$$

Isto é, $\mathbb{Q}_2$ é a projeção do cone

$$C(\mathbb{Q}_2) = \left\{ (z_1, z_2, z_3, z_4) : z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0 \right\}$$

$C(\mathbb{Q}_2)$ pode ser imerso em $M(2, \mathbb{C})$, espaço das matrizes complexas de ordem 2×2 , da seguinte forma

$$C(\mathbb{Q}_2) \ni (z_1, \dots, z_4) \mapsto \begin{pmatrix} z_1 + iz_2 & z_3 + iz_4 \\ -z_3 + iz_4 & z_1 - iz_2 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C}).$$

4. Denotemos por $G(2, n)$ o conjunto dos planos reais orientados em $\mathbb{R}^n$. Dada uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n$ chamamos de *aplicação de Gauss* da imersão a correspondência que a cada ponto da superfície associa o plano tangente pelo respectivo ponto. A cada plano orientado P em $\mathbb{R}^n$ podemos associar uma base ortonormal (v_1, v_2) do plano P . Dois pares de vetores ortonormais (v_1, v_2) e (w_1, w_2) definem o mesmo plano se e somente se eles diferem por uma rotação, isto é, se

$$v_1 = e^{i\theta} w_1 \quad v_2 = e^{i\theta} w_2$$

Podemos então definir a aplicação

$$G(2, n) \ni (v_1, v_2) \longrightarrow [v_1 + iv_2] \in \mathbb{CP}^{(n-1)}$$

A ortogonalidade de v_1 e v_2 e o fato de seus módulos serem iguais implicam em

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2 = 0, \quad \text{para} \quad Z_j = (v_1)_j + i(v_2)_j.$$

Não é difícil ver que a aplicação acima é uma bijeção entre $G(2, n)$ e a quádrlica Q_{n-2} . Com relação a imersão $\psi: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ e ao sistema de coordenadas isotérmicos z , a aplicação de Gauss é dada por

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}: L &\rightarrow \mathbb{CP}^{n-1} \\ z &\mapsto \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right]. \end{aligned}$$

Esta aplicação é antiholomorfa e obviamente sua função conjugada é a aplicação Φ definida anteriormente.

Consideremos agora algumas relações entre a aplicação de Gauss e a curvatura da imersão isométrica.

Proposição 1.1. *O conjunto $\{K = 0\}$ é discreto ou igual a L .*

Demonstração. Sem dúvida, planos em $\mathbb{R}^n$ são superfícies mínimas em $\mathbb{R}^n$ com relação as métricas induzidas por $\mathbb{R}^n$). Reciprocamente, fazendo uso do lema abaixo segue o resultado desejado.

Lema 1.1. *Seja $\psi: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão isométrica mínima de L em $\mathbb{R}^n$ com curvatura Gaussiana identicamente nula. Então $\psi(L)$ está contida num plano.*

Demonstração. Da relação

$$K = -|\varphi|^{-6} \left| \varphi \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|$$

e da hipótese $K \equiv 0$ concluímos que

$$\varphi(z) \wedge \varphi'(z) = 0.$$

Daí temos a existência de uma função h tal que $\varphi'(z) = h(z)\varphi(z)$. Portanto,

$$\varphi(z) = e^{\int^z h(w)dw} (c_1, \dots, c_n),$$

$c_1, \dots, c_n$ são constantes. Uma nova integração produz

$$\psi(z) = 2 \operatorname{Re} \left\{ \left(\int^z e^{\int^u h(w)dw} du \right) (c_1, \dots, c_n) \right\}. \quad \blacksquare$$

Para uma imersão isométrica mínima de L em $\mathbb{R}^n$ já vimos que a curvatura Gaussiana K é não positiva ($K \leq 0$), isto nos permite definir a *curvatura total* da imersão $\psi: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$C(\psi) := \int_L K(p) dA(p),$$

sendo dA o elemento de área da superfície L .

Para uma imersão mínima $\psi: L \rightarrow \mathbb{R}^n$, a aplicação de Gauss associada Φ de L em $\mathbb{CP}^{n-1}$ é dita *algébrica* se L é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta $\widehat{L}$ menos um número finito de pontos, e Φ é a restrição de uma aplicação holomorfa

$$\Phi' : \widehat{L} \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}.$$

$$L = \widehat{L} \setminus \{p_1, \dots, p_r\}.$$

Teorema 1.1 (Huber). *Se $\int_{\widehat{L}} |K^-| < \infty$, então $\int_{\widehat{L}} |K^+| < \infty$, e L é homeomorfa a $\widehat{L} \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$, onde $\widehat{L}$ é uma superfície compacta.*

A Finitude da curvatura total e a algebricidade da aplicação de Gauss estão extremamente relacionadas. Um resultado principal nesta direção é o teorema de Osserman (encontrado em [18] e também em [11]). Para enunciá-lo precisamos da noção de completude de uma imersão isométrica. Dizemos que uma imersão $\psi: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *completa* se com relação a função distância induzida pela métrica ds^2 o espaço métrico L é completo.

Teorema 1.2 (Osserman). *Seja $\psi: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão mínima completa. Então a curvatura total é finita se e somente se a aplicação de Gauss Φ da imersão ψ é algébrica.*

1.2 Folheações Holomorfas Singulares

Nesta etapa objetivamos definir o que é uma folheação holomorfa, conceito que é análogo ao de uma folheação no conceito de C. Ehresmann e G. Reeb com início na década de 60 do século XIX, mas cujo a necessidade de tal formalização já era sentida por Painlevé no início do século XIX.

Seja M uma superfície complexa. Uma *folheação holomorfa singular* por curvas em M , denotada por $\mathcal{F}$, é uma cobertura de M por abertos U_j , $j \in J$, e uma coleção de campos X_j sobre U_j tais que se $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, então

$$X_j|_{U_j \cap U_k} = g_{jk} X_k|_{U_j \cap U_k},$$

sendo $g_{jk}: U_j \cap U_k \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas não nulas em todos os pontos. Definimos o *conjunto singular* de $\mathcal{F}$ como sendo o subconjunto analítico $\text{Sing}(\mathcal{F})$ definido por

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap U_j = \{p \in U_j : X_j(p) = 0\}.$$

Podemos dualizar a definição de folheação da seguinte forma: Em cada aberto $U_j \subset M$ da definição de $\mathcal{F}$ consideremos ω_j , uma 1-forma holomorfa, tal que

$$\omega_j(X_j) = 0.$$

É cálculo simples que nos mostra que se $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, então

$$\omega_j = h_{jk} \omega_k,$$

sendo $h_{jk}: U_j \cap U_k \rightarrow \mathbb{C}^*$ funções holomorfas. Do fato que $\mathcal{F}$ está ligada à reta complexa na direção de X_j e não diretamente relacionada ao X_j , podemos definir $\mathcal{F}$ como uma família $(U_j)_{j \in J}$ de abertos que recobrem M e tal que para cada U_j temos uma 1-forma holomorfa ω_j , satisfazendo

$$\omega_j|_{U_j \cap U_k} = h_{jk} \omega_k|_{U_j \cap U_k}$$

sempre que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$. O conjunto singular de $\mathcal{F}$, $\text{Sing}(\mathcal{F})$, é definido por

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap U_j = \{p \in U_j : \omega_j(p) = 0\}.$$

Exemplo 1.1 (Campos Polinomiais em $\mathbb{C}^2$). É bem conhecido que o teorema do fluxo tubular para campos vetoriais holomorfos X sobre uma superfície complexa M define uma folheação holomorfa singular sobre M . Denotando-se esta folheação por $\mathcal{F}_X$, teremos $\text{Sing}(\mathcal{F}_X) = \text{Sing}(X)$. Analogamente, uma 1-forma holomorfa ω sobre

a superfície complexa M define uma folheação singular $\mathcal{F}_\omega$ e temos $\text{Sing}(\mathcal{F}_\omega) = \text{Sing}(\omega)$. Por resultados de funções de várias variáveis complexas, podemos supor que $\text{Sing}(\omega)$ é um subconjunto discreto de M . É fácil ver que $\mathcal{F}_X$ é igual a $\mathcal{F}_\omega$ se, e somente se, $\omega(X) \equiv 0$. Consideremos agora um campo vetorial holomorfo sobre $\mathbb{C}^2$

$$X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

sendo $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ polinômios.

Afirmção 1.4. $\mathcal{F}_X$ se estende a uma folheação sobre $\mathbb{CP}^2$, também denotada por $\mathcal{F}_X$ ou por $\mathcal{F}(X)$.

De fato, fixemos o atlas de $\mathbb{CP}^2$, $\mathcal{A} = \{(x, y); (u, v); (r, s)\}$, tal que

$$u = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{y}{x}; \quad r = \frac{1}{y}, \quad s = \frac{x}{y}.$$

Fixado o espaço afim $\mathbb{C}_{(x,y)}^2$, então $\mathbb{CP}^2 = \mathbb{C}_{(x,y)}^2 \cup L_\infty$, sendo L_∞ uma esfera de Riemann linearmente mergulhada, chamada de reta no infinito e dada pela relação $L_\infty = \{x = \infty\} = \{u = 0\}$. O campo vetorial polinomial X se estende de forma racional a um campo em $\mathbb{CP}^2$ e temos

$$X(u, v) = \frac{Y(u, v)}{u^m},$$

para algum campo vetorial polinomial Y com singularidades isoladas em $\mathbb{C}_{(u,v)}^2$ e algum $m \in \mathbb{N}$. Analogamente, teremos

$$X(r, s) = \frac{Z(r, s)}{r^n},$$

para algum campo vetorial polinomial Z com singularidades isoladas em $\mathbb{C}_{(r,s)}^2$ e algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, as folheações $\mathcal{F}_X$ sobre $\mathbb{C}_{(x,y)}^2$, $\mathcal{F}_Y$ sobre $\mathbb{C}_{(u,v)}^2$ e $\mathcal{F}_Z$ sobre $\mathbb{C}_{(r,s)}^2$ juntas formam uma folheação de $\mathbb{CP}^2$.

Observação: Com relação ao conjunto dos campos polinomiais em $\mathbb{C}^2$ com $r = \max\{\text{grau}(P); \text{grau}(Q)\}$ fixado, nota-se que há genericidade na propriedade: L_∞ é invariante pelo campo $P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$.

Consideremos em $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ o campo radial

$$V = X \frac{\partial}{\partial X} + Y \frac{\partial}{\partial Y} + Z \frac{\partial}{\partial Z}$$

e uma 1-forma polinomial homogênea de grau r

$$\Omega = A(X, Y, Z)dX + B(X, Y, Z)dY + C(X, Y, Z)dZ,$$

A , B e C são polinômios homogêneos de grau r . Sabemos que Ω é o pull-back pela projeção canônica $\pi: \mathbb{C}^3 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ de uma 1-forma ω em $\mathbb{CP}^2$ ($\Omega = \pi^*\omega$) se, e somente se, Ω se anula na direção do campo radial V . No sistema de coordenadas afim $x = X/Z$ e $y = Y/Z$, ω é obtida fazendo-se a restrição de Ω ao plano complexo $Z = 1$ e dada por

$$\omega = \Omega|_{\{Z=1\}} = A(x, y, 1)dx + B(x, y, 1)dy$$

que é polinomial de grau menor ou igual a r . Na situação acima dizemos que $\mathcal{F}_\omega$ tem grau projetivo r se A , B e C não têm fator comum.

O grau projetivo de uma folheação polinomial pode ser definido de uma forma totalmente geométrica como ordem de contato, com retas complexas, da referida folheação. Isto é, consideremos uma folheação polinomial $\mathcal{F}$ e uma reta projetiva $\ell \subset \mathbb{CP}^2$ que não seja invariante por $\mathcal{F}$. Definamos a ordem de tangência $\tau_p(\ell, \mathcal{F})$ entre ℓ e $\mathcal{F}$ no ponto não singular $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$ é a ordem de tangência entre a folha L_p de $\mathcal{F}$ passando por p e a reta projetiva ℓ . A ordem de tangência total entre ℓ e $\mathcal{F}$ é então definida por

$$\tau(\ell, \mathcal{F}) = \sum_{p \in \ell} \tau_p(\ell, \mathcal{F}).$$

Proposição 1.2. *A ordem de tangência total entre uma folheação de grau projetivo r e uma reta projetiva $\ell \subset \mathbb{CP}^2$ é igual a $r - 1$.*

Demonstração: Consideremos em coordenadas homogêneas ℓ dada pela equação

$$aX + bY + cZ = 0,$$

sendo a , b e c constantes complexas. Temos de forma natural a 1-forma holomorfa $\eta := a.dX + b.dY + c.dZ$. Temos também $\Omega = AdX + BdY + CdZ$, a 1-forma tal que $\Omega = \pi^*\omega$, para $\mathcal{F} = \ker(\omega)$. $\Omega \wedge \eta$ é uma 2-forma que em coordenadas é representada por

$$\Omega \wedge \eta = (bA - aB)dX \wedge dY + (cA - aC)dX \wedge dZ + (cB - bC)dY \wedge dX.$$

Existe uma outra 2-forma, denotada por Θ , que é obtida pela contração da forma volume $\text{vol} = dX \wedge dY \wedge dZ$ na direção do campo radial $V = X \frac{\partial}{\partial X} + Y \frac{\partial}{\partial Y} + Z \frac{\partial}{\partial Z}$, isto é,

$$\begin{aligned} \Theta &:= i_V(\text{vol}) \\ &= ZdX \wedge dY - YdX \wedge dZ + XdY \wedge dZ. \end{aligned}$$

As formas $\Omega \wedge \eta$ e Θ definem duas 2-formas sobre o espaço perpendicular a V (que pode ser identificado com $T\mathbb{CP}^2$), portanto, existe $f(X, Y, Z)$, polinômio homogêneo, tal que

$$\Omega \wedge \eta = f(X, Y, Z)\Theta.$$

Da relação $bA - aB = Xf(X, Y, Z)$, decorre que $\text{grau}(f) = \text{grau}(\Omega) - 1$, isto é,

$$\text{grau}(f) = r - 1.$$

A ordem total de contato entre $\mathcal{F}$ e ℓ é o número total de soluções isoladas do sistema polinomial homogêneo

$$f(X, Y, Z) = 0.$$

Pelo teorema de Bezout, o número de soluções é $\text{grau}(f) = r - 1$. $\square$

1.3 Exemplos

Seja X um campo vetorial holomorfo sobre $\mathbb{C}^2$. As órbitas de X são subvariedades complexas imersas em $\mathbb{C}^2$, assim estas subvariedades são superfícies mínimas com respeito à métrica hermitiana de $\mathbb{C}^2$. Exemplos elucidativos para o nosso estudo são dados abaixo.

Exemplo 1.2 (Campos Lineares). Seja $X = x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y}$ um campo vetorial sobre $\mathbb{C}^2$. É fácil ver que uma parametrização para a órbita passando por $(1, y_0)$ é dada por

$$\psi(z) = (e^z, y_0 e^{\lambda z}).$$

Escrevendo ψ como uma aplicação chegando em $\mathbb{R}^4$, obtemos

$$\psi(z) = \left(\frac{e^z + e^{\bar{z}}}{2}, \frac{e^z - e^{\bar{z}}}{2i}, \frac{y_0 e^{\lambda z} + e^{\bar{\lambda} \bar{z}}}{2i}, \frac{y_0 e^{\lambda z} - e^{\bar{\lambda} \bar{z}}}{2i} \right).$$

A aplicação de Gauss é dada por

$$\varphi(z) = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(\frac{1}{2}e^z, \frac{1}{2i}e^z, \frac{\lambda y_0}{2}e^{\lambda z}, \frac{\lambda y_0}{2i}e^{\lambda z} \right).$$

Por isso, denotando-se $z = u + iv$ e $\lambda = \alpha + i\beta$ temos

$$\begin{aligned} F(z) &= |\varphi|^2 \\ &= \frac{1}{4}e^z e^{\bar{z}} + \frac{1}{4}e^z e^{\bar{z}} + \frac{|\lambda|^2 |y_0|^2}{4}e^{\lambda z} e^{\bar{\lambda} \bar{z}}, \frac{|\lambda|^2 |y_0|^2}{4}e^{\lambda z} e^{\bar{\lambda} \bar{z}} \\ &= \frac{1}{2}e^{2u} + \frac{1}{2}|\lambda|^2 |y_0|^2 e^{2(\alpha u - \beta v)} \end{aligned}$$

Assim $F(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}e^{z+\bar{z}} + \frac{|\lambda|^2|y_0|^2}{2}e^{\lambda z+\bar{\lambda}\bar{z}}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \log F &= \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial z} \\ &= \frac{2}{e^{z+\bar{z}} + |\lambda|^2|y_0|^2 e^{\lambda z+\bar{\lambda}\bar{z}}} \left(\frac{1}{2}e^{z+\bar{z}} + \frac{\bar{\lambda}|\lambda|^2|y_0|^2}{2}e^{\lambda z+\bar{\lambda}\bar{z}} \right) \\ &= \frac{e^{z+\bar{z}} + \bar{\lambda}|\lambda|^2|y_0|^2 e^{\lambda z+\bar{\lambda}\bar{z}}}{e^{z+\bar{z}} + |\lambda|^2|y_0|^2 e^{\lambda z+\bar{\lambda}\bar{z}}}\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial^2 \log(F)}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{|\lambda|^2|y_0|^2(1 + |\lambda|^2 - \lambda - \bar{\lambda})e^{(1+\lambda)z+(1+\bar{\lambda})\bar{z}}}{(e^{z+\bar{z}} + |\lambda|^2|y_0|^2 e^{\lambda z+\bar{\lambda}\bar{z}})^2}.$$

Como por definição $K = -\frac{1}{F} \frac{\partial^2 \log(F)}{\partial z \partial \bar{z}}$ obtem-se

$$K = \frac{-2|\lambda|^2|y_0|^2(1 + |\lambda|^2 - \lambda - \bar{\lambda})e^{(1+\lambda)z+(1+\bar{\lambda})\bar{z}}}{(e^{z+\bar{z}} + |\lambda|^2|y_0|^2 e^{\lambda z+\bar{\lambda}\bar{z}})^3}$$

Com relação às variáveis u e v , K pode ser escrita como

$$K = \frac{-2|\lambda|^2|y_0|^2(1 + |\lambda|^2 - \lambda - \bar{\lambda})e^{2(1+\alpha)u-2\beta v}}{(e^{2u} + |\lambda|^2|y_0|^2 e^{2\alpha u-2\beta v})^3}$$

Para a imersão $\psi(z) = (e^z, y_0 e^{\lambda z})$ a métrica induzida é dada por

$$\begin{aligned}ds^2 &= e^{z+\bar{z}}|dz|^2 + |y_0|^2|\lambda|^2 e^{\lambda z+\bar{\lambda}\bar{z}}|dz|^2 \\ &= (e^{z+\bar{z}} + |y_0|^2|\lambda|^2 e^{\lambda z+\bar{\lambda}\bar{z}})|dz|^2\end{aligned}$$

O elemento de área é dado pelo cálculo

$$\begin{aligned}dA &= \frac{e^{z+\bar{z}}|dz|^2 + |y_0|^2|\lambda|^2 e^{\lambda z+\bar{\lambda}\bar{z}}}{2i} d\bar{z} \wedge dz \\ &= (e^{2u} + |y_0|^2|\lambda|^2 e^{\alpha u-\beta v}) du \wedge dv\end{aligned}$$

A curvatura total pode ser escrita como

$$c(\psi) = \int \int \frac{-2|\lambda|^2|y_0|^2(1 + |\lambda|^2 - \lambda - \bar{\lambda})e^{2(1+\alpha)u-2\beta v}}{(e^{2u} + |\lambda|^2|y_0|^2 e^{2\alpha u-2\beta v})^3} dudv$$

Afirmção 1.5. *Se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$, então ψ é injetiva.*

Para o caso $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, temos $c(\psi) = -\infty$. de fato, pela afirmação acima, $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ é injetiva. Assim

$$c(\psi) = \int \int_{\mathbb{C}} \frac{-2|\lambda|^2|y_0|^2(1 + |\lambda|^2 - \lambda - \bar{\lambda})e^{2(1+\alpha)u-2\beta v}}{(e^{2u} + |\lambda|^2|y_0|^2 e^{2\alpha u-2\beta v})^3} dudv.$$

Mudando as coordenadas para $s = e^{2u}$ e $t = e^{2v}$ obteremos o desejado resultado

Exemplo 1.3. Seja $X = (x + y)\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y}$ um campo vetorial holomorfo sobre $\mathbb{C}^2$. Um cálculo simples nos mostra que uma parametrização para a órbita de X passando por $(0, y_0)$ é dada por

$$\psi(z) = (y_0 z e^z, y_0 e^z).$$

Escrevendo ψ como uma aplicação com imagem em $\mathbb{R}^4$, obtemos

$$\psi(z) = \left(\frac{y_0 z e^z + \bar{y}_0 \bar{z} e^{\bar{z}}}{2}, \frac{y_0 z e^z - \bar{y}_0 \bar{z} e^{\bar{z}}}{2i}, \frac{y_0 e^z + \bar{y}_0 e^{\bar{z}}}{2}, \frac{y_0 e^z - \bar{y}_0 e^{\bar{z}}}{2i} \right).$$

A aplicação de Gauss é dada por

$$\varphi(z) = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(\frac{y(1+z)e^z}{2}, \frac{y(1+z)e^z}{2i}, \frac{ye^z}{2}, \frac{ye^z}{2i} \right).$$

Por isso, denotando-se $z = u + iv$ e $\lambda = \alpha + i\beta$ teremos

$$\begin{aligned} F(z) &= |\varphi|^2 \\ &= \frac{1}{4}|1+z|^2 e^z e^{\bar{z}} + \frac{1}{4}|1+z|^2 e^z e^{\bar{z}} + \frac{1}{4}|y|^2 e^z e^{\bar{z}} + \frac{1}{4}|y|^2 e^z e^{\bar{z}} \\ &= \frac{|y|^2(|1+z|^2 + 1)e^{z+\bar{z}}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Assim } F(z, \bar{z}) = \frac{|y|^2((1+z)(1+\bar{z})+1)e^{z+\bar{z}}}{2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \text{Log} F &= \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{[(1+z)(1+\bar{z})+1] + (1+z)}{(1+z)(1+\bar{z})+1} + (1+z) + 1 \\ &= \frac{(1+z)(2+\bar{z})+1}{(1+z)(1+\bar{z})+1} + 1 \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial^2 \log(F)}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{(|1+z|^2 + 1)^2}$$

Como $K = -\frac{1}{F} \frac{\partial^2 \log(F)}{\partial z \partial \bar{z}}$ temos

$$\begin{aligned} K &= \frac{-2}{|y|^2(|1+z|^2 + 1)e^{z+\bar{z}}} \frac{1}{(|1+z|^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-2}{|y|^2(|1+z|^2 + 1)^3 e^{z+\bar{z}}} \end{aligned}$$

Com relação às variáveis u e v , K pode ser escrita como

$$K = \frac{-2|\lambda|^2|y_0|^2(1+|\lambda|^2-\lambda-\bar{\lambda})e^{2(1+\alpha)u-2\beta v}}{(e^{2u}+|\lambda|^2|y_0|^2e^{2\alpha u-2\beta v})^3}$$

Para a imersão $\psi(z) = (yze^z, ye^z)$ a métrica induzida é dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= |y|^2 e^{z+\bar{z}}(|1+z|^2+1)|dz|^2 \\ &= |y|^2 e^{z+\bar{z}}(|1+z|^2+1)(|du|^2+|dv|^2) \end{aligned}$$

O elemento de área é dado por

$$dA = |y|^2 e^{z+\bar{z}}(|1+z|^2+1)du \wedge dv$$

A curvatura total pode ser escrita como

$$\begin{aligned} c(\psi) &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{-2}{|y|^2(|1+z|^2+1)^3 e^{z+\bar{z}}} (|y|^2 e^{z+\bar{z}})(|1+z|^2+1) dudv \\ &= -2 \int \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(|1+z|^2+1)^2} dudv \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

Exemplo 1.4 (Poincaré-Dulac). Consideremos a 1-forma polinomial em $\mathbb{C}^2$

$$\omega := ydx - x(y+1)dy.$$

Para $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\omega = \{\omega = 0\}$ podemos achar uma integral primeira da seguinte forma

$$\begin{aligned} ydx - x(y+1)dy &= 0 \\ \frac{dx}{x} - \left(1 + \frac{1}{y}\right)dy &= 0 \\ \ln x - y - \ln y &= c \\ xy^{-1}e^{-y} &= c. \end{aligned}$$

Portanto, as folhas de $\mathcal{F}$, diferentes destas contidas em $xy = 0$ e $x = \infty$, são transcendentais e parametrizadas por

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{C} &\rightarrow L \\ y &\mapsto (cye^y, y), \end{aligned}$$

para $c \neq 0$. ψ é uma parametrização injetiva e em termos reais, isto é, usando que $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ teremos

$$\psi(z) = \left(\frac{cze^z + \bar{c}\bar{z}e^{\bar{z}}}{2}, \frac{czc^z - \bar{c}\bar{z}c^{\bar{z}}}{2i}, \frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right).$$

A aplicação de Gauss é dada por

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ &= (ce^z + cze^z, 1).\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{c}{2} (1+z)e^z \\ \varphi_2(z) &= \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \frac{c}{2i} (1+z)e^z \\ \varphi_3(z) &= \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = \frac{1}{2} \\ \varphi_4(z) &= \frac{\partial \psi_4}{\partial z} = \frac{1}{2i}.\end{aligned}$$

A função $F = |\varphi|^2$ é dada pela relação

$$\begin{aligned}F &= \varphi_1 \bar{\varphi}_1 + \varphi_2 \bar{\varphi}_2 + \varphi_3 \bar{\varphi}_3 + \varphi_4 \bar{\varphi}_4 \\ &= \frac{|c|^2}{2} |1+z|^2 e^{z+\bar{z}} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Em direção ao cálculo da curvatura Gaussiana precisamos calcular $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log F$ e $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log F$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} &= \frac{|c|^2}{2} (1+z)(2+\bar{z})e^{z+\bar{z}} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log F &= \frac{|c|^2(1+z)(2+\bar{z})e^{z+\bar{z}}}{|c|^2(1+z)(1+\bar{z})e^{z+\bar{z}} + 1} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \log F &= \frac{|c|^2|2+z|^2 e^{z+\bar{z}}}{(|c|^2|1+z|^2 e^{z+\bar{z}} + 1)^2}.\end{aligned}$$

A métrica induzida em $\mathbb{C}^2$ por ψ é

$$\begin{aligned}ds^2 &= |dx|^2 + |dy|^2 \\ &= |c|^2 e^{z+\bar{z}} |1+z|^2 |dz|^2 + |dz|^2 \\ &= (|c|^2 |1+z|^2 e^{z+\bar{z}} + 1) |dz|^2.\end{aligned}$$

Denotando z por $z = u + iv$ teremos

$$ds^2 = \{|c|^2[(1+u)^2 + v^2]e^{2u} + 1\}(du^2 + dv^2).$$

Disto segue que o elemento de área dA é dado por

$$dA = \{|c|^2[(1+u)^2 + v^2]e^{2u} + 1\} |du \wedge dv|.$$

Podemos agora calcular a curvatura total

$$\begin{aligned} c(\psi) &= \int_{\mathbb{C}} \int K dA \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \int \frac{|c|^2[(1+u)^2 + v^2]e^{2u}}{\{|c|^2[(1+u)^2 + v^2]e^{2u} + 1\}^2} du dv \\ &= -\infty, \quad \text{para } c \neq 0 \end{aligned}$$

1.4 Desingularização

Dada uma folheação $\mathcal{F}$ da superfície complexa M (fica agora convencionado que as folhas regulares de $\mathcal{F}$ serão sempre unidimensionais) e uma singularidade q de $\mathcal{F}$ dizemos que $\mathcal{F}$ tem uma *separatriz* em q , se existe uma vizinhança U de q e uma folha de $\mathcal{F}|_{U \setminus q}$, digamos S , tal que $S \cup \{q\}$ é um conjunto analítico irreduzível de U . Diz-se que a separatriz é lisa se q não é singularidade do subconjunto analítico $S \cup \{q\}$.

Um processo que será bastante útil em seções futuras é a *explosão* em superfícies complexas. Inicialmente façamos a explosão da origem em $\mathbb{C}^2$. Para tal, notemos $\pi: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ dada por $\pi(z) = [z]$ tem como gráfico

$$\text{Graf}(\pi) = \{(z, \pi(z)) : z \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\},$$

que é um subconjunto de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$. Podemos definir

$$\tilde{\mathbb{C}}^2 := \text{Graf}(\pi) \cup (\{0\} \times \mathbb{CP}^1).$$

Note que $\text{Graf}(\pi)$ já é quase um fibrado tautológico. A adição de $0 \times \mathbb{CP}^1$ o transforma em um fibrado com base $\mathbb{CP}^1$ e fibra $\mathbb{C}$. Perceba que um ponto de $\tilde{\mathbb{C}}^2$ é da forma $(x, y, [1, t])$ ou $(x, y, [s, 1])$, mas x e y não estão livres, devendo estes satisfazerem

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= t, \quad x \neq 0 \\ \text{ou} \\ \frac{x}{y} &= s, \quad y \neq 0 \end{aligned}$$

Teremos então como cartas

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= (x, tx, [1, t]) \\ \psi(s, y) &= (sy, y, [s, 1]). \end{aligned}$$

É costume se denotar φ e ψ por $\varphi(x, t) = (x, tx)$ e $\psi(x, y) = (sy, y)$. É fácil mostrar que a aplicação $\pi: \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, extensão natural da projeção do $\text{Graf}(\pi)$ em $\mathbb{C}^2$, é um biholomorfismo quando restrita ao $\text{Graf}(\pi)$ e que $\pi^{-1}(0) = \mathbb{CP}^1$, $\pi^{-1}(0)$ é chamado de *divisor da explosão* e π é chamado de aplicação de *implosão*.

Tudo o que foi feito acima continua válido se trocarmos $\mathbb{C}^2$ por uma vizinhança U da origem de $\mathbb{C}^2$. Para uma superfície complexa M o processo de explosão em $q \in M$ é definido como segue: escolhamos uma carta $\varphi: U \rightarrow V$, sendo U uma vizinhança de q em M e V vizinhança da origem de $\mathbb{C}^2$. Suponhamos que $\varphi(q) = 0$

e que $\pi: \widetilde{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$ seja a aplicação de implosão em $0 \in \mathbb{C}^2$. Na união disjunta $N = (M \setminus \{q\}) \dot{\cup} \pi^{-1}(V)$ definamos a seguinte relação $\sim$, $m \sim n$ se, e somente se, $m = n$ ou $m \in \pi^{-1}(V \setminus \{0\})$ e

$$n = \pi^{-1}(\varphi(m)).$$

A relação $\sim$ é de equivalência. A explosão de M em q é o quociente

$$\widetilde{M} = \frac{N}{\sim}.$$

Quanto aos pontos de $\widetilde{M}$ temos as seguintes possibilidades: denotando-se por $[p]$ a classe de equivalência do ponto $p \in M$, então ou $[p] \in \mathbb{CP}^1$ (divisor) ou $[p] \in M \setminus U$ ou $[p]$ contém elementos de $U \setminus q$ e $\pi^{-1}(V \setminus \{0\})$. Claramente, os pontos de $\widetilde{M}$ que não estão em $\pi^{-1}(0)$ podem ser identificados com os de M . Os demais são chamados pontos do divisor. A aplicação de implosão pode ser definida da seguinte forma: $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$ é tal que $\pi(p) = q$ se p está no divisor, $\pi(p) = p$, se $p \in M \setminus U$ e $\pi(\tilde{p}) = p$ se $\tilde{p}$ é equivalente a $p \in U \setminus \{q\}$.

Afirmção 1.6. π tem as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \pi^{-1}(q) = \mathbb{CP}^1$$

$$(ii) \quad \pi|_{\widetilde{M} \setminus \mathbb{CP}^1}: \widetilde{M} \setminus \mathbb{CP}^1 \rightarrow M \setminus \{q\} \text{ é um biholomorfismo}$$

Podemos, escolhido um ponto $q_2 \in \widetilde{M}$, explodir $\widetilde{M}$ em q_2 e assim por diante. Obtém-se assim, após n explosões, a torre abaixo:

$$\begin{array}{ccc} M_n & & \\ \downarrow \pi_n & & \\ M_{n-1} & & \\ \downarrow \pi_{n-1} & & \\ \vdots & \vdots & \\ \downarrow \pi_2 & & \\ M_1 & & \\ \downarrow \pi_1 & & \\ M & & \end{array}$$

A aplicação $\pi = \pi_n \circ \pi_{n-1} \circ \cdots \circ \pi_2 \circ \pi_1$ é holomorfa e própria. Definimos o divisor D_n de π da seguinte forma: $D_1 = \mathbb{CP}^1$, $D_2 = \mathbb{CP}^1 \cup \pi_2^{-1}(\mathbb{CP}^2), \dots D_n = \mathbb{CP}^1 \cup \pi^{-1}(D_{n-1})$. Note que $\pi(0)$ é justamente aqueles pontos de M onde foram feitos explosões, portanto é finito.

Dada uma folheação holomorfa singular $\mathcal{F}$ sobre a superfície completa M um teorema devido a A. Seidenberg (veja [25]) nos dá uma resolução dos pontos singulares de $\mathcal{F}$.

Teorema 1.3. *Existe uma seqüência finita de blow-up nos pontos singulares tais que a composição nos dá uma aplicação holomorfa própria $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$ de uma superfície complexa $\widetilde{M}$ e uma folheação $\mathcal{F}^* = \pi^*(\mathcal{F})$ com singularidades isoladas satisfazendo as seguintes condições:*

- i) $\pi^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{F})) = \bigcup D_j$, sendo D_j uma esfera de Riemann. $\pi^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{F}))$ é chamado de divisor de resolução e $\pi|_{\widetilde{M} \setminus \pi^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{F}))}$ é um biholomorfismo.
- ii) Em qualquer singularidade $p \in \bigcup D_j$ existe uma carta (x, y) tal que $x(p) = y(p) = 0$ e $\mathcal{F}^*$ é dado por uma das 1-formas abaixo:

$$\begin{aligned} & xdy - \lambda ydx + (\text{t.o.m.}), \lambda \in \mathbb{Q}_+ \\ & x^{p+1}dy + y(1 + \lambda x^p)dx + (\text{t.o.m.}), p \geq 1. \end{aligned}$$

t.o.m. é usado para abreviar a frase: termos de ordem maior (ou mais alta).

Observações:

- (1) Quando $\mathcal{F}^*$ é dada localmente por $xdy - \lambda ydx + (\text{t.o.m.}), \lambda \in \mathbb{Q}$, dizemos que a singularidade $p \in \bigcup D_j$ é não degenerada, no caso de $\mathcal{F}^*$ ser dada localmente por $x^{p+1}dy + y(1 + \lambda x^p)dx + (\text{t.o.m.}), p \geq 1$, dizemos que p é do tipo sela-nó.
- (2) Singularidades do tipo não-degenerada e do tipo sela-nó são chamadas *singularidades irreduzíveis*.

1.5 O Teorema do Índice de Camacho-Sad

Seja S uma superfície de Riemann compacta, denotemos por $\mathcal{O}$ o feixe de funções holomorfas e denotemos por $\mathcal{O}^*$ o feixe das funções holomorfas que não se anulam em nenhum ponto do seu domínio. Definindo-se $e(f) := \exp(2\pi i f)$, para $f \in \mathcal{O}$, teremos a seguinte seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0.$$

Esta seqüência exata curta induz, via o bem conhecido lema do Zig-Zag da álgebra homológica, um homomorfismo δ ,

$$H^1(S, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(S, \mathbb{Z}).$$

A classe de Chern de um elemento E de $H^1(S, \mathcal{O}^*)$ é definido por $c(E) := \delta(E)$.

Suponhamos agora que S está mergulhada em uma superfície complexa Hermittiana M , podemos considerar o fibrado vetorial normal N de S em M

$$\pi: N \rightarrow S.$$

Denotamos por $c(N)$ o elemento $c([N])$ em $H^2(S, \mathbb{Z})$. Definimos o *número de auto interseção* do mergulho de S em M ($S \hookrightarrow M$) por

$$S \cdot S := \int_S c(N).$$

Na definição de $S \cdot S$ usamos o fato que um elemento de $H^2(S, \mathbb{Z})$ pode ser considerado como um elemento de $H^2(S, \mathbb{C})$.

Consideremos uma curva S dada por $S = \{f(x, y) = 0\}$, em que $f: U \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa e $(0, 0) \in U$. Vamos aqui supor que S é *reduzida*, isto é, que $df \neq 0$. Dizemos que um campo holomorfo X definido em U é *logarítmico* para S se $X(f)$ está no ideal gerado por f em $\mathcal{O}(U)$, da mesma forma, quando X for logarítmico para S diremos que $\mathcal{F}_X$ é logarítmica para S . Se $S = \bigcup_{j=1}^r S_j$ é a decomposição irredutível de S é fácil ver que X será logarítmica para S se, e somente se, X for logarítmico para cada uma das curvas S_j . É fato também que X é logarítmico para S_j se e somente se X for tangencial a cada superfície S_j nos pontos regulares de X . Como habitual, quando X for um campo vetorial holomorfo logarítmico para S diremos que S é *invariante* por X . Note que se S tem singularidades de X , S é uma separatriz para X (ou $\mathcal{F}_X$). Sabemos de secções anteriores que podemos considerar $\text{Sing}(\mathcal{F}_X)$ como um subconjunto discreto de U . Como estamos primeiramente interessados em

resultados locais, vamos considerar o nosso campo X com uma única singularidade em $(0, 0) \in U$ e dado por

$$X = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y},$$

sendo a e b funções holomorfas tais que $a(0, 0) = b(0, 0) = 0$ e a e b são relativamente primas em $\mathcal{O}(U)$. Sabemos também que $\mathcal{F}_X$ é também definida pela 1-forma ω dada pela relação

$$\omega = bdx - ady.$$

Lema 1.2. *Seja X um campo holomorfo definido numa vizinhança da origem $\mathbb{C}^2$ tendo na origem sua única singularidade e seja S uma curva reduzida em U e definida por $f(x, y)$. Então X é logarítmico para S se, e somente se, existem funções $h, g \in \mathcal{O}(U)$ e uma 1-forma η sobre U tais que h e f são relativamente primas e*

$$g\omega = hdf + f\eta.$$

Demonstração. A prova deste lema se deve basicamente a Lins Neto e é encontrada em [12] e [27]. Começemos a demonstração notando que, a menos de mudarmos o sistema de coordenadas em U , podemos supor que f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ sejam relativamente primas. Supondo então que X seja logarítmico para S , teremos

$$a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = Kf,$$

para alguma função holomorfa K .

Afirmção 1.7. *a e f são relativamente primas.*

De fato, basta notar que se um elemento de $\mathcal{O}(U)$ divide a e divide f ele terá que dividir $b \frac{\partial f}{\partial y}$, portanto, ou dividirá b ou dividirá $\frac{\partial f}{\partial y}$, ambos os casos contradizendo o fato de serem relativamente primos a e b e f e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Podemos então definir $g = \frac{\partial f}{\partial y}$, $h = -a$ e $\eta = Kdx$ e usar a relação $a \frac{\partial f}{\partial x} + bg = Kf$ em

$$\begin{aligned} \omega &= bdx - ady \\ g\omega &= bgdx - agdy \\ g\omega &= \left(Kf - a \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx - agdy \\ &= f\eta + hdf. \end{aligned}$$

Reciprocamente, da relação $g\omega = hdf + f\eta$ decorre que $hdf \wedge \omega + f\eta \wedge \omega = 0$. Isto mostra que se $\eta = \eta_1 dx + \eta_2 dy$ então

$$\left[f(b\eta_1 - a\eta_2) - ah \frac{\partial f}{\partial x} - bh \frac{\partial f}{\partial y} \right] dx \wedge dy = 0.$$

Portanto, $X(f)$ pertence ao ideal gerado por f . $\square$

Novamente consideremos a curva reduzida S e seja $S = \bigcup S_j$ sua decomposição por curvas irredutíveis S_j . Suponhamos também que como acima $S = \{f = 0\}$ e $S_j = \{f_j = 0\}$. É fato que se X é logarítmico para S qualquer múltiplo de X também será logarítmico para S . Faz sentido então definir que $\mathcal{F}_X$ é *logarítmica* para S se X o é.

Como anteriormente, suponhamos que $\text{Sing}(\mathcal{F}_X) = \{(0,0)\}$. Da hipótese de irredutibilidade de S_j decorre a existência de uma parametrização de Puiseux $\varphi_j: \mathbb{D}_1 \rightarrow S_j$, sendo $\mathbb{D}_1$ o disco de raio 1 e centro em $0 \in \mathbb{C}$ e φ_j um homeomorfismo sobre sua imagem. A decomposição de ω com relação a f , digo, $g\omega = hdf + f\eta$ é tomada com h e f sendo relativamente primas em $\mathcal{O}(U)$, a 1-forma $\varphi_j^* \left(\frac{1}{h} \cdot \eta \right)$ é meromorfa e definida numa vizinhança de 0 em $\mathbb{C}$. Denotemos por $\text{Res}_0 \left[\varphi_j^* \left(\frac{1}{h} \cdot \eta \right) \right]$ o resíduo de $\varphi_j^* \left(\frac{1}{h} \cdot \eta \right)$ em $0 \in \mathbb{C}$ e definamos o *índice de $\mathcal{F}_X$ relativo ao par (S, S_j)* , denotado por $\text{Ind}_0(\mathcal{F}, S, S_j)$, como sendo o valor negativo do resíduo acima, isto é,

$$\begin{aligned} \text{Ind}_0(\mathcal{F}; S, S_j) &= -\text{Res}_0 \left[\varphi_j^* \left(\frac{\eta}{h} \right) \right] \\ &= \frac{i}{1\pi} \int_{\gamma} \varphi_j^* \left(\frac{1}{h} \cdot \eta \right) \end{aligned}$$

sendo γ um caminho fechado em $\mathbb{D}$ em torno de 0 orientado no sentido contrário ao do relógio. Definamos também

$$\text{Ind}_0(\mathcal{F}; S) = \sum_{j=1}^r \text{Ind}_0(\mathcal{F}; S, S_j).$$

Denotaremos por $\text{Ind}_0(\mathcal{F}; S_j)$ o índice $\text{Ind}_0(\mathcal{F}; S_j, S_j)$.

Começaremos definindo o número de intersecção de uma maneira algébrica. Como estaremos trabalhando em superfícies complexas com curvas holomorfas, nos restringiremos ao caso de duas funções holomorfas.

Sejam f_1 e f_2 funções holomorfas em $U \subset \mathbb{C}^2$, vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^2$, tais que as curvas (divisores) $S_1 = f_1^{-1}(0)$ e $S_2 = f_2^{-1}(0)$ se intersectem somente na origem de $\mathbb{C}^2$. O *número de intersecção entre S_1 e S_2* é definido por

$$S_1 \cdot S_2 = \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \frac{dz_1 \wedge dz_2}{f_1(z)f_2(z)},$$

sendo $z = (z_1, z_2)$, $\Gamma := \{z : |f_1(z)| = |f_2(z)| = \varepsilon\}$ e orientado por

$$d(\arg f_1) \wedge d(\arg f_2) \geq 0.$$

Proposição 1.3. *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa numa vizinhança da origem e S uma curva holomorfa invariante por $\mathcal{F}$. Se $S = \bigcup S_j$ é a decomposição de S em curvas irredutíveis e $S \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \{0\}$, então*

$$\text{Ind}_0(\mathcal{F}; S, S_j) = \text{Ind}_0(\mathcal{F}; S_j) + \sum_{k \neq j} S_j \cdot S_k.$$

Demonstração. Suponhamos que f defina S , isto é, $S = \{f = 0\}$ e que $S_j = \{f_j = 0\}$. A decomposição de ω com relação a f_j nos dá

$$G_j \omega = h df_j + f_j \eta_j.$$

Multiplicando-se a igualdade acima pela função $F_j = f_1 \cdots \cdots \hat{f}_j \cdots \cdots f_r$ (^ quer dizer: omite f_j no produto), obtém-se

$$F_j g_j \omega = h F_j df_j + F_j f_j \eta_j.$$

Se somarmos todas as r igualdades obteremos

$$\left(\sum_{j=1}^r F_j g_j \right) \omega = h \left(\sum F_j df_j \right) + \left(\sum F_j f_j \eta_j \right).$$

Notando que $df = \sum F_j df_j$ e denotando-se por $g = \sum_{j=1}^r F_j g_j$ e por $\eta = \sum_{j=1}^r \eta_j$ decorre então

$$g \omega = h df + f \eta.$$

Por definição

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\mathcal{F}, S, S_j) &= -\text{Res}_0 \left(\varphi_j^* \frac{\eta}{h} \right) \\ &= -\text{Res}_0 \left(\varphi_j^* \frac{\eta_j}{h} \right) - \sum_{k \neq j} \text{Res}_0 \left(\varphi_j^* \frac{\eta_k}{h} \right). \end{aligned}$$

Ao longo das curvas integrais de ω usando a relação $g_j \omega = h df_j + f_j \eta_j$, obtemos

$$\left(\frac{df_j}{f_j} + \frac{1}{h} \eta_j \right) \wedge \omega = 0$$

e conseqüentemente $\frac{1}{h} \eta_j = -\frac{df_j}{f_j}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Ind}(\mathcal{F}; S, S_j) &= \text{Ind}(\mathcal{F}; S_j) - \sum_{k \neq j} \text{Res} \left(\varphi_j^* \frac{df_k}{f_k} \right) \\ &= \text{Ind}(\mathcal{F}; S_j) + \sum_{k \neq j} S_j \cdot S_k. \end{aligned}$$

Fizemos uso do fato $S_j \cdot S_k = \text{Res} \left[\varphi_j^* \left(\frac{df_k}{f_k} \right) \right]$. □

Sob as hipóteses da proposição anterior, $S = \{f = 0\}$, $S = US_j$ é a decomposição de S em curvas irredutíveis, $S_j = \{f_j = 0\}$ e $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_r$. Seja $\varphi_j: \mathbb{D} \rightarrow S_j$ uma parametrização de Puiseux de S_j . Temos $\varphi_j^* df = 0$, o que implica em $\varphi_j^* \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx \right) = -\varphi_j^* \left(\frac{\partial f}{\partial y} dy \right)$. Como ou $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}$ não é divisível por f_j , teremos uma 1-forma meromorfa em $\mathbb{D}$ dada por $\varphi_j^* \left(\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)} dx \right)$ ou por $\varphi_j^* \left(\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)} dy \right)$. Denotemos por $c(S, S_j)$ a ordem em 0 do pólo da referida 1-forma meromorfa mencionada.

Afirmção 1.8. $c(S, S_j) = c(S_j, S_j) + \sum_{j \neq k} S_j \cdot S_k$.

De fato, basta notar que $\varphi_j^* f_j = 0$ implica em

$$\begin{aligned} \varphi_j^* \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \varphi_j^* \left(f_1 \cdot \dots \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x} \cdot \dots \cdot f_r \right) \quad \text{e} \\ \varphi_j^* \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \varphi_j^* \left(f_1 \cdot \dots \cdot \frac{\partial f_j}{\partial y} \cdot \dots \cdot f_r \right). \end{aligned}$$

d[s

Denotemos por $\pi: \tilde{U} \rightarrow U$ uma explosão em $0 \in U$ (U é uma vizinhança da origem). $\tilde{U}$ é uma superfície complexa e π é uma aplicação holomorfa. O divisor de $f \circ \pi$ pode ser escrito como

$$\sum_{j=1}^r \tilde{S}_j + \sum_{k=1} m_{jk} D_k,$$

sendo $\tilde{S}_j$ disjuntas duas a duas e tais que $\pi|_{\tilde{S}_j}: \tilde{S}_j \rightarrow S_j$ é uma resolução da singularidade em S_j e $\pi|_{\tilde{U} \setminus \cup D_k}$ é um biholomorfismo sobre $X \setminus D$. Cada S_j intersecta $D = \cup D_k$, num ponto q_j que é não singular para D , de forma transversal.

Lema 1.3. *Nas hipóteses acima temos*

$$\text{Ind}(\mathcal{F}; S, S_j) = \text{Ind}_{q_j}(\mathcal{F}; \tilde{S}_j) + \left(\sum m_k D_k \cdot S_j \right)_{q_j}.$$

Demonstração: Seja $g\omega = hdf + f\eta$ a decomposição de ω com relação a função f . Fazendo o pull back, obtemos

$$(g \circ \pi)\pi^*\omega = (h \circ \pi)d(f \circ \pi) + (f \circ \pi)\pi^*\eta.$$

Denotemos por (x, y) uma carta sobre $\tilde{U}$ em torno de q_j tal que $\tilde{S}_j$ é dada por $x = 0$ e $\sum m_j D_j$ por $y^m = 0$, localmente para algum m . Teremos então $f \circ \pi = \mathcal{U}y^m x$, onde $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x, y)$, e a decomposição se torna

$$\begin{aligned} (g \circ \pi)\pi^*\omega &= (h \circ \pi)d(f \circ \pi) + (f \circ \pi)\pi^*\eta \\ &= (h \circ \pi)d(\mathcal{U}y^m x) + (f \circ \pi)\pi^*\eta \\ &= (h \circ \pi) \cdot \mathcal{U}y^m dx + x h \circ \pi d(\mathcal{U}y^m) + x \mathcal{U}y^m \pi^*\eta \\ &= (h \circ \pi) \cdot \mathcal{U}y^m dx + x [h \circ \pi d(\mathcal{U}y^m) + \mathcal{U}y^m \pi^*\eta]. \end{aligned}$$

De serem relativamente primos h e f , decorre que $h \circ \pi \cdot \mathcal{U}y^m$ e x são relativamente primos. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Ind } q_j(\mathcal{F}, \tilde{S}_j) &= -\text{Res}_0 \left\{ \frac{1}{(h \circ \pi)\mathcal{U}y^m} [h \circ \pi d(\mathcal{U}y^m) + \mathcal{U}y^m \pi^*\eta] \right\} \\ &= -\text{Res}_0 \left\{ \frac{\pi^*\eta}{h \circ \pi} + \frac{d(\mathcal{U}y^m)}{\mathcal{U}y^m} \right\} \\ &= \text{Ind}_0(\mathcal{F}; S, S_j) - m. \end{aligned}$$

$$m = \left(\sum m_k D_k \cdot \tilde{S}_j \right)_{q_j}.$$

□

Teorema 1.4 (do índice). *Sejam M uma superfície complexa, $\mathcal{F}$ uma folheação holomorfa singular de dimensão 1 sobre M e S uma curva reduzida holomorfa invariante por $\mathcal{F}$. Se S é compacta então*

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap S} \text{Ind}_p(\mathcal{F}; S) = S \cdot S.$$

Capítulo 2

Completude das Folhas

O lema seguinte caracteriza o comportamento métrico de uma órbita de um campo holomorfo numa superfície complexa. Este resultado inferido pelo lema abaixo junto ao teorema de Chern-Osserman são essenciais ao nosso estudo.

Lema 2.1. *Sejam M uma superfície hermiteana, X um campo holomorfo sobre M e L uma órbita não trivial de X . Suponhamos que as singularidades de X sejam irredutíveis, então com relação à métrica induzida sobre L temos uma das seguintes alternativas:*

- (i) L é completa;
- (ii) Existe uma extensão $\hat{L}$ de L , que é conformemente equivalente a união $L \cup P$, sendo P um subconjunto de $\text{Sing}(X)$.

Demonstração: Seja $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em L . Suponhamos que (p_j) seja divergente em L , isto é, que $\lim_{j \rightarrow \infty} d_L(p, p_j) = +\infty$, para algum p fixado em L . Se (p_j) é divergente como uma subsequência de M , dado qualquer compacto K de M existirá $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_j \notin K \quad \text{para } j \geq N.$$

Por isso, (p_j) satisfaz $\lim_{j \rightarrow \infty} d_L(p_j, p_i) = \infty$, para i fixado, sendo d_L a métrica sobre L . De fato,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} d_L(p_j, p_i) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} d_M(p_j, p_i) = \infty.$$

Suponhamos agora que $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ não seja divergente em M . Assim, existe um ponto $p_\infty \in M$ tal que $p_j \rightarrow p_\infty$. Temos então dois casos a analisar:

$1^\circ - p_\infty \notin \text{Sing}(X)$.

Neste caso, como $p_\infty \notin L$, divergência em L , temos a folha L acumulando a folha que passa por p_∞ (Lp_∞). Tomando uma vizinhança distinguida V (o fluxo tubular de X com centro em p_∞), existem infinitas placas de L em V . Denotemos por $P(p)$ a placa passando por p em V .

Afirmção 2.1. $P(p_j) \neq P(p_k)$ para j e k suficientemente grandes e distintos.

De fato, caso contrário existiria uma seqüência (j_ν) de índices tais que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} j_\nu = \infty$ e

$$P(p_{j_\nu}) = P(p_{j_1}), \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Por isso, passando ao limite teríamos

$$P(p_\infty) = P(p_{j_1}).$$

Isto implicaria em $p_\infty \in L$, contrariando nossa suposição inicial.

Podemos então supor que $P(p_j)$ não intersecta $P(p_k)$ se $j \neq k$.

Afirmção 2.2. *Podemos supor que todos os p_j estão contidos na mesma secção transversal $\sum$ da folheação $\mathcal{F}_X$ gerada por X em V .*

De fato, para cada j existe um único ponto $q_j \in P(p_j) \cap \sum$.

Isto é, associada à seqüência (p_j) temos a nova seqüência (q_j) ,

Afirmção 2.3. $(q_j)_{j=1}^\infty$ é uma seqüência de Cauchy.

De fato, notemos que cada placa $P(p) \subset V$ é um disco que existe uma uniformidade na função distância e que a função distância varia diferenciavelmente com respeito a $p \in \sum$. Existe também uma constante C que é uniforme para $p \in \sum$ e $q \in P(p)$ e tal que

$$d_L(p, q) \leq C d_M(p, q).$$

Assim para cada par (j, ℓ) de índices decorre

$$\begin{aligned} d_L(q_j, q_\ell) &\leq d_L(q_j, p_j) + d_L(p_j, p_\ell) + d_L(p_\ell, q_\ell) \\ &\leq d_L(q_j, p_j) + d_L(p_\ell, q_\ell) + C d_M(p_j, p_\ell). \end{aligned}$$

Suponhamos que $d_M(p_j, p_\ell) < \frac{\varepsilon}{3C}$. Os termos $d_L(q_j, p_j)$ satisfazem

$$d_L(q_j, p_j) \leq C d_M(q_j, p_j).$$

Por isso,

$$d_L(q_j, q_\ell) \leq C(d_M(q_j, p_j) + d_M(q_\ell, p_\ell)) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Como ambas as seqüências (p_j) e (q_j) convergem para p_∞ em M , segue que

$$d_M(q_j, p_j) + d_M(q_\ell, p_\ell) < \frac{2\varepsilon}{3C}, \quad \forall j, \ell \gg 1.$$

Assim

$$d_L(q_j, q_\ell) < \varepsilon, \quad \forall j, \ell \gg 1.$$

Isto mostra que $P(q_j) = P(p_\ell)$ pra j e ℓ suficientemente grandes, contradizendo nossa hipótese $p_\infty \in L$.

$2^\circ - p_\infty \in \text{Sing}(X)$.

Seja $\text{Sep}(X, p_\infty)$ a união de todas as separatrizes de X passando por p_∞ .

Afirmção 2.4. *$L \cap U$ está contida em $\text{Sep}(X, p_\infty)$ para qualquer vizinhança U de p_∞ suficientemente pequena.*

De fato, se supusermos que $L \cap U \not\subset \text{Sep}(X, p_\infty)$ para vizinhanças U de p_∞ suficientemente pequenas, isto implicaria que L não é fechada numa vizinhança U de p_∞ . Por isso, L acumula alguma separatriz local em $\text{Sep}(X, p_\infty)$. Isto também implica que L acumula algum ponto regular $p'_\infty \notin \text{Sing}(X)$; $p'_\infty \in L$. De acordo com o primeiro caso, L é fechado em $M \setminus \text{Sing}(X)$ com respeito à métrica d_L . $\square$

Proposição 2.1. *Seja X um campo vetorial polinomial holomorfo sobre $\mathbb{C}^2$ com singularidades isoladas e com uma órbita L com curvatura total finita. Então L é uma superfície de Riemann de tipo finito.*

Demonstração: As singularidades de X são isoladas, portanto, existe uma extensão completa $\widehat{L} = L \cup P$, para algum subconjunto P de $\text{sing}(X)$. Pelo teorema de Osserman $\widehat{L} \subset \mathbb{C}^2$ é de tipo topológico finito. Como X não possui retas invariantes, $\widehat{L}$ está propriamente mergulhada em $\mathbb{C}^2$ e por isso $\lim(\widehat{L}) \subset L_\infty$.

Afirmção 2.5. *Se $\widehat{L}$ tem algum fim transcendente (isto é, se $\lim(\widehat{L})$ contém algum ponto regular) então L_∞ é invariante pela folheação $\mathcal{F}_X$ induzida por X .*

A hipótese de L ter curvatura total finita impede L de acumular todos os pontos da reta no infinito L_∞ , temos assim que $\lim(L) \subset L_\infty$ não possui pontos regulares. Por isso, qualquer fim de L é algébrico e, portanto, L é algébrica. $\square$

Capítulo 3

O Lema da Curvatura Integral

Nesta seção relacionaremos a curvatura total de uma superfície qualquer L , em particular para uma órbita de um campo polinomial, com a área da imagem da aplicação de Gauss. Seja $\varphi: L \rightarrow \mathbb{CP}(n-1)$ a aplicação de Gauss da imersão de L em $\mathbb{R}^n$. A esfera S^{2n-1} induz em $\mathbb{CP}(n-1)$ uma métrica bem conhecida, chamada métrica de Fubini-Study. Em coordenadas homogêneas a métrica de Fubini-Study é dada por

$$ds^2 = \frac{|Z \wedge dZ|^2}{|Z|^2}.$$

Para $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))$, podemos calcular a área de sua aplicação de Gauss Φ pelo Cálculo da Integral

$$\text{Área}(\Phi) := \int_L \Phi^* \omega$$

onde ω é o elemento de área induzido pela métrica de Fubini-Study restrita à imagem de Φ . Temos então

Proposição 3.1. *Seja $\psi: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ imersão isométrica minimal, com aplicação de Gauss holomorfa Φ e curvatura Gaussiana K , então*

$$\int_L K d\sigma = -\text{Área}(\Phi).$$

Demonstração: Fixemos $f_j = \frac{\varphi_j}{\sqrt{F}}$, então

$$\begin{aligned} df_j &= \frac{1}{F} \left(\sqrt{F} d\varphi_j - \frac{1}{2\sqrt{F}} \varphi_j dF \right) \\ \bar{d}f_j &= \frac{1}{F} \left(\sqrt{F} d\bar{\varphi}_j - \frac{1}{2\sqrt{F}} \bar{\varphi}_j dF \right). \end{aligned}$$

O produto exterior $df_j \wedge \bar{d}f_j$ nos dá

$$\begin{aligned} df_j \wedge \bar{d}f_j &= \left[\frac{1}{F} \left(\sqrt{F} d\varphi_j - \frac{1}{2\sqrt{F}} \varphi_j dF \right) \right] \wedge \left[\frac{1}{F} \left(\sqrt{F} d\bar{\varphi}_j - \frac{1}{2\sqrt{F}} \bar{\varphi}_j dF \right) \right] \\ &= \frac{1}{F^2} \left[F d\varphi_j \wedge d\bar{\varphi}_j - \frac{1}{2} \bar{\varphi}_j \cdot d\varphi_j \wedge dF - \frac{1}{2} \varphi_j dF \wedge d\bar{\varphi}_j \right] \\ &= \frac{1}{2F^2} [2F d\varphi_j \wedge d\bar{\varphi}_j - \bar{\varphi}_j d\varphi_j \wedge dF - \varphi_j dF \wedge d\bar{\varphi}_j] \end{aligned}$$

somando-se todos estes termos teremos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n df_j \wedge \bar{d}f_j &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2F^2} (2F d\varphi_j \wedge d\bar{\varphi}_j - \bar{\varphi}_j d\varphi_j \wedge dF - \varphi_j dF \wedge d\bar{\varphi}_j) \\ &= \frac{1}{2F^2} \sum_{j=1}^n (2F d\varphi_j \wedge d\bar{\varphi}_j - \bar{\varphi}_j \wedge d\varphi_j \wedge dF - \varphi_j dF \wedge d\bar{\varphi}_j) \\ &= \frac{1}{2F^2} \left[2G \left(\sum_{j=1}^n d\varphi_j \wedge d\bar{\varphi}_j \right) - \left(\sum \bar{\varphi}_j d\varphi_j \right) \wedge dF - dF \wedge \left(\sum \varphi_j d\bar{\varphi}_j \right) \right] \end{aligned}$$

e levando-se em consideração que

$$F^2 = \sum_{j=1}^n \varphi_j \bar{\varphi}_j$$

temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n df_j \wedge \bar{d}f_j &= \frac{1}{F^2} \left[F \sum d\varphi_j \wedge d\bar{\varphi}_j - \left(\sum \bar{\varphi}_j d\varphi_j \right) \wedge \left(\sum \varphi_j d\bar{\varphi}_j \right) \right] \\ &= \frac{1}{F^2} [|\varphi(z)|^2 |\varphi'(z)|^2 - |\bar{\varphi}(z)| |\varphi'(z)|^2] dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{1}{|\varphi(z)|^4} |\varphi(z) \wedge \varphi'(z)| dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Isto nos dá

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Phi) &= \int_L \Phi^* \omega \\ &= \int_L \frac{1}{|\varphi(z)|^4} |\varphi(z) \wedge \varphi'(z)| dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Mas, na seção 1.1 vimos que a curvatura K é dada por

$$K = \frac{1}{|\varphi(z)|^6} |\varphi(z) \wedge \varphi'(z)|.$$

Como o elemento de área em L , denotado por dL , é dado por $|\varphi|^2 dz \wedge d\bar{z}$, temos

$$\int_L K dL = \int_L \frac{1}{|\varphi|^4} |\varphi \wedge \varphi'| dz \wedge d\bar{z}.$$

Para finalizar a demonstração é suficiente comparar as integrais em $\text{Area}(\Phi)$ e em $\int_L K dL$.

Observação. Uma outra forma de demonstrar esta proposição é fazendo uso da fórmula da co-área [7]. Recordemos que para duas variedades M e N com $\dim M$ maior que $\dim N$ ($\dim M \geq \dim N$) e uma função $\Phi: M \rightarrow N$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, dada uma função mensurável $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, então

$$\int_M f(x) |\mathcal{J}ac \Phi(x)| dx = \int_N \int_{\Phi^{-1}(y)} f(z) d\mathcal{H}(z) dy,$$

onde $\mathcal{H}$ é a medida de Hausdorff de dimensão $\dim M - \dim N$ induzida sobre $\Phi^{-1}(y)$ e $|\mathcal{J}ac \Phi|$ é a derivada de Radon da medida de N com respeito a imagem por $d\Phi$ da medida de M .

Capítulo 4

Órbitas com Curvatura Total Finita

4.1 Lemas Básicos

Começaremos enunciando propriedades básicas das órbitas com curvatura total finita dos campos vetoriais holomorfos. Não é difícil verificar que embora tudo seja feito para campos em $\mathbb{C}^2$ podemos trocar $\mathbb{C}^2$ por $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$).

Lema 4.1. *Seja L uma órbita do campo vetorial holomorfo X . Se L tem curvatura total finita (vista como uma superfície imersa em $\mathbb{R}^4$) então L é fechada em $\mathbb{C}^1 \setminus \text{sing}(X) \cup F(X)$, onde $F(X) \subset \mathbb{C}^2$ é a união das órbitas planas de X , isto é, órbitas com curvatura Gaussiana nula.*

Demonstração. Seja p um ponto em $\mathbb{C}^2 \setminus \text{sing}(X)$. Se supusermos que a folha L_p , que passa por p , não esteja em $F(X)$. Temos então que $\{K = 0\} \cap L_p$ é um subconjunto discreto de $\mathbb{C}^2$. Podemos por isso supor que $K(p) < 0$. Pela continuidade da função curvatura K , existe uma vizinhança U de p tal que $K(q) < \varepsilon$ para todo q em U e $\varepsilon < 0$ fixado. Pelo teorema do fluxo tubular, podemos supor que X é trivial em U (diminuindo U se necessário), portanto, $p \in L$ ou $L \cap U$ contém uma infinidade de placas de L . No entanto, uma infinidade de placas em U implicaria em curvatura total infinita, contradizendo nossa hipótese, logo, $p \in L$. $\square$

Estudaremos agora o comportamento local da órbita, com curvatura total finita, de um campo polinomial holomorfo numa vizinhança de uma singularidade irreduzível não degenerada.

Lema 4.2. *Seja $X(x, y) = \mu x \frac{\partial}{\partial x} + [\lambda y + \text{h.o.t.}] \frac{\partial}{\partial y}$ um germe de campo com singularidade não degenerada na origem $0 \in \mathbb{C}^2$. Suponhamos que $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}$. Se uma órbita de X acumula as duas separatrizes de X , então esta órbita tem curvatura total infinita.*

Demonstração. Suponhamos que o campo holomorfo X esteja definido na vizinhança U de $0 \in \mathbb{C}^2$. Denotemos por $\mathcal{F}_X$ a folheação (singular) definida por X sobre $U \setminus \{0\}$. Seja L a folha de $\mathcal{F}_X$ que acumula as separatrizes. Isto pode ser representado como na figura abaixo.

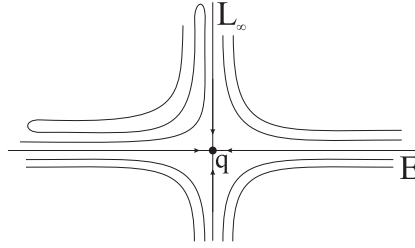


Figura 4.1:

A aplicação de Gauss da imersão de L em $\mathbb{C}^2$ é dada por

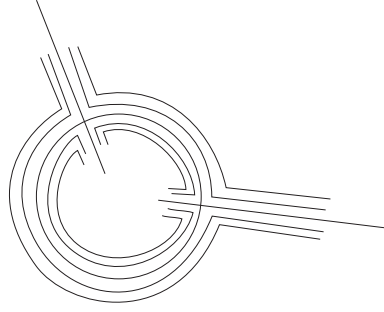
$$\Phi(p) = [X(p)], \quad p \in L$$

onde $[\]$ denote o elemento em $\mathbb{CP}^2$ dado pela reta que contém $X(p)$. Da forma como Φ é dada temos que Φ é holomorfa e sua imagem está contida na esfera de Riemann $\mathbb{CP}^1$. Uma explosão na origem $0 \in \mathbb{C}^2$ produzirá uma nova folheação $\mathcal{F}_{\tilde{X}}$ numa vizinhança do divisor D (biholomorfo ao $\mathbb{CP}^1$). $\tilde{\mathbb{C}}^2$ pode ser munido com uma métrica Riemanniana singular, com conjunto singular dado pelo divisor D . De fato, esta métrica é dada pelo “pull-back”, via aplicação de explosão $\pi: \tilde{\mathbb{C}}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}$, da métrica canônica de $\mathbb{C}^2$. A folha $\tilde{L} := \pi^{-1}(L)$ tem as mesmas propriedades Riemannianas da folha L . Temos então que

$$\int_{\tilde{L}} \tilde{K} d\tilde{L} = \int_L K dL$$

onde K e dL são as curvaturas seccional e o elemento de área de L respectivamente enquanto que $\tilde{K}$ e $d\tilde{L}$ os mesmos objetos matemáticos para $\tilde{L}$.

Como temos pelo menos duas separatrizes, e a folha L acumula duas destas, em $\mathbb{C}_0^2$ teremos $\tilde{L}$ acumulando as fibras correspondentes às duas separatrizes. Devido a isto, teremos $\tilde{L}$ acumulando o divisor D ($\mathbb{CP}^1$), como na figura abaixo.



Após um blowing-up

Figura 4.2:

Temos assim que $\tilde{L}$ tem que intersectar cada fibra do fibrado

$$\tilde{\mathbb{C}}_0^2 \xrightarrow{P} D$$

um número infinito de vezes (exceto as separatrizes). Fora as separatrizes a aplicação de Gauss pode ser identificada com a projeção do fibrado restrita à folha $\tilde{L}$. Como $\tilde{L}$ acumula D , temos que

$$\# P^{-1}(p) \cap \tilde{L} = \infty$$

para $p \in D \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_{\tilde{X}})$. Assim, fazendo uso da relação da seção 5, temos

$$\int_L K dL = \int_{\tilde{L}} \tilde{K} d\tilde{L} = -\text{área}(P) = -\infty.$$

De onde segue o que queríamos. □

Corolário 4.1. *Seja $\mathcal{F}$ um germe de folheação unidimensional em $(\mathbb{C}^2, 0)$, tendo uma única singularidade em 0. Se $\mathcal{F}$ tem uma folha L acumulando uma separatriz de $\mathcal{F}$ e a singularidade “0” não tem sela-nó em sua dessingularização, então L tem curvatura total infinita.*

Demonstração: Pelo lema (4 de Mol) temos a existência de uma segunda separatriz, que também é acumulada pela folha L de $\mathcal{F}$ que acumula a primeira separatriz. Estamos então em condição de usar o teorema acima. □

4.2 Linearização

A folheação gerada em $\mathbb{C}^2$ pelo campo de vetores polinomial X em $\mathbb{C}^2$, $\mathcal{F}_X$, tem uma extensão natural a uma folheação (singular) de $\mathbb{CP}^2$. É ainda bem sabido

que a propriedade de $\mathcal{F}_X$ ter a reta no infinito $L_\infty = \mathbb{CP}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ como uma curva algébrica invariante com $n + 1$ singularidades de $\mathcal{F}_X$ sobre L_∞ é genérica, onde $n = \max\{\deg(P); \deg(Q)\}$. Esses pontos em $\text{Sing}(\mathcal{F}_X) \cap L_\infty$ são chamados de singularidades no infinito. O grupo fundamental de $L_\infty \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}_X)$ é um grupo livre com n -geradores, as aplicações de holonomias geram um grupo de germes de aplicações holomorfas. Alguns autores chamam este grupo de *grupo de monodromia no infinito*. Dado um ponto singular p_j na reta no infinito e um laço em volta deste ponto, fazemos corresponder um germe de aplicação holomorfa $h_j: (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. O grupo de monodromia é gerado por $h_1, \dots, h_n$. É bem conhecido que a dinâmica do grupo de monodromia no infinito está bem relacionado com as propriedades da folheação $\mathcal{F}_X$. Por exemplo, a órbita do ponto p sob a ação do grupo de monodromia é o conjunto de imagens sob composições finitas de biholomorfismos representativos de h_j e h_j^{-1} sempre que definido. Se o grupo de monodromia tem órbitas densas em alguma vizinhança da origem, então com algumas outras hipóteses fracas as folhas de $\mathcal{F}$ são densas em $\mathbb{C}^2$. Também a rigidez de $\mathcal{F}$ pode ser obtida pela rigidez do grupo de monodromia correspondente. Portanto, o estudo do grupo de monodromia no infinito, ou mais especificamente, o estudo geométrico das propriedades de um grupo finitamente gerado de germes de aplicações holomorfas que fixam a origem tem papel relevante no entendimento do comportamento geométrico da folheação. Para grupos de aplicações holomorfas de $(\mathbb{C}, 0)$ em $(\mathbb{C}, 0)$ a solubilidade é equivalente ao grupo de comutadores do respectivo grupo ser ou não abeliano. A seguir enuncio (sem demonstração) alguns resultados relevantes que a partir de hipóteses algébricas tiram conseqüências geométricas dos grupos de aplicações holomorfas fixando a origem e finitamente gerados.

Teorema 4.1 ([26]). *Considere um grupo finitamente gerado e não solúvel de germes de aplicações holomorfas que fixam a origem de $\mathbb{C}$. Então suas órbitas são densas em setores, isto é, existem finitas curvas analíticas reais passando pela origem de $\mathbb{C}$ tais que as órbitas do grupo são densas nos setores limitados por estas curvas analíticas.*

Teorema 4.2 ([26]). *Um grupo finitamente gerado e não solúvel de germes de aplicações holomorfas que fixam a origem é topologicamente rígido.*

4.3 Algebricidade de órbitas finitamente curvadas

Começamos esta etapa de nosso trabalho fazendo algumas considerações gerais. Primeiramente analisaremos como uma folha com curvatura total finita pode acumular um ponto da reta no infinito L_∞ . Separamos esta análise em dois casos:

1º caso: L_∞ não é invariante por $\tilde{\mathcal{F}}_X$

Para este caso temos dois subcasos, a saber: os pontos de intersecções da folha finitamente curvada com a reta no infinito são regulares e subcaso no qual esta intersecção contém um ponto singular.

Denotemos a folha finitamente curvada por L como habitual.

1.1 $L \cap L_\infty$ não contém pontos singulares.

Neste caso existe uma vizinhança distinguida V de $\tilde{\mathcal{F}}_X$ em $q \in L \cap L_\infty$ como na figura abaixo.

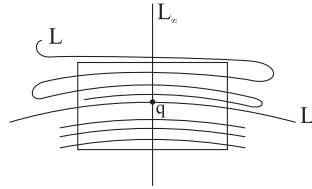


Figura 4.3:

Como q é um ponto regular, existe um ponto $p \in L_q \cap \text{sing}(\mathcal{F}_X)$ tal que $I(\mathcal{F}, L_q, p) > 0$. Pelo lema 4.2 acima obtemos um absurdo.

1.2 Existe uma singularidade em $q \in L \cap L_\infty$

Neste subcaso, existem duas configurações básicas para a singularidade q .

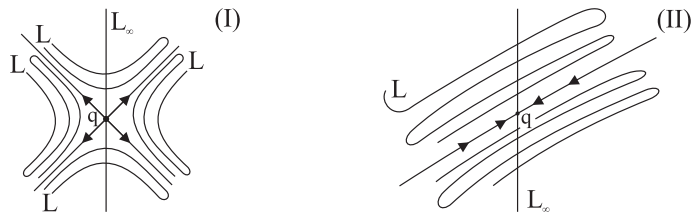


Figura 4.4:

Assim, L acumula pelo menos uma separatriz de $\mathcal{F}_X$ em $\mathbb{C}^2$, o que é um absurdo, porque L é fechada em $\mathbb{C}^2 \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_X)$.

2º caso: A reta no infinito L_∞ é invariante por $\tilde{\mathcal{F}}_X$

Para este caso temos três subcasos possíveis, isto é, o ponto $q \in L_\infty$ que é acumulado por L (folha finitamente curvada) pode ser uma singularidade não degenerada, ou uma sela-nó com a separatriz forte transversal à reta no infinito, ou uma sela-nó com separatriz forte coincidente com a reta no infinito.

2.1 q é uma singularidade não degenerada.

A figura abaixo representa esta situação.

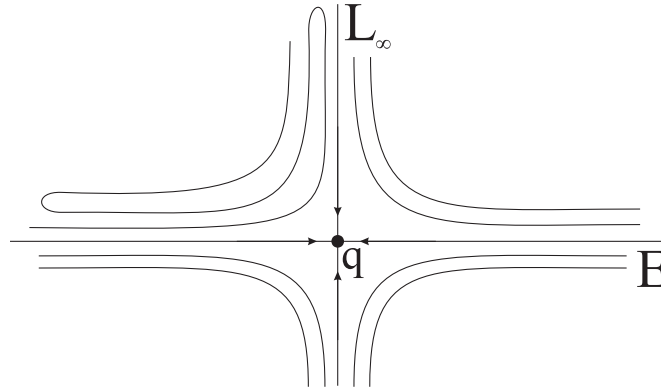


Figura 4.5:

Portanto, L acumula a reta E , o que é um absurdo (L é fechada em $\mathbb{C}^2 \setminus \text{sing}(\mathcal{F}_X)$).

2.2 q é uma sela-nó com separatriz forte transversal à reta no infinito

Esta situação pode ser representada pela figura abaixo

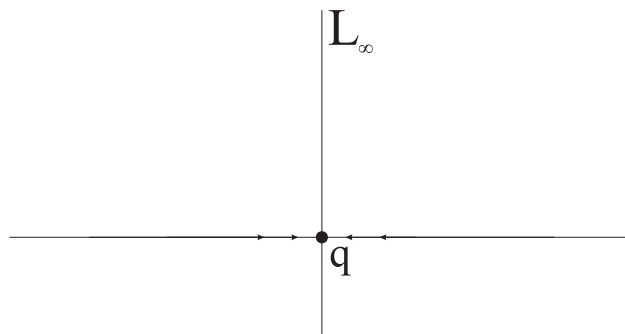


Figura 4.6:

Isto implica que a folha finitamente curvada L acumula E . Sabemos assim que $E \cap \mathbb{C}^2$ é uma reta complexa. Do fato que $I(\tilde{\mathcal{F}}_X, E, q) = 0$, existirá um ponto p em $E \cap \text{sing}(\mathcal{F}_X)$ com $I(\mathcal{F}, E, p) > 0$, novamente um absurdo.

2.3 q é uma singularidade do tipo sela-nó com separatriz forte contida em L_∞ .

Este caso pode ser representado por

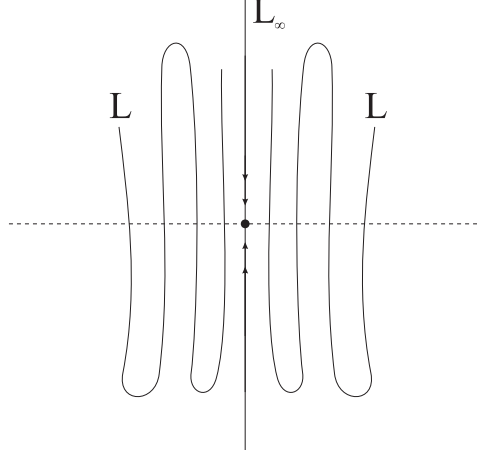


Figura 4.7:

Neste caso temos a nulidade do índice de Camacho-Sad, isto é: $I(\mathcal{F}_X, L_\infty, q) = 0$. Usando que uma generalização do teorema do índice de Camacho-Sad, teorema [3] de Lins Neto, diz que $I(\mathcal{F}_X, L_\infty) = 1$, temos a existência de uma singularidade p_ϵ na reta no infinito, L_∞ , com índice igual a 1 ($I(\mathcal{F}_X, L_\infty, p) = 1$). p tem que ser uma singularidade não degenerada ou uma sela-nó com a separatriz forte transversal à reta no infinito. Ambos os casos já foram analisados em 2.1 e 2.3 e geram absurdos.

Temos então o teorema abaixo:

Teorema 4.3. *Seja X um campo vetorial polinomial definido sobre $\mathbb{C}^2$ e seja L uma órbita de X com curvatura total finita com respeito à métrica hermitiana induzida por $\mathbb{C}^2$ sobre L . Suponhamos que as singularidades da folheação $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{C}P^2$ sejam irredutíveis. Então L está contida numa curva algébrica.*

4.4 Curvas Generalizadas

Consideraremos agora campos vetoriais polinomiais que após o processo de dessingularização as singularidades como antes do processo. Basicamente, faremos o seguinte:

olharemos para a curva invariante que passa pela singularidade e é transversal ao divisor $\pi^{-1}(0)$ (reta projetiva). Esta curva se projeta em $\mathbb{C}^2$ numa curva invariante que passa pela origem. Queremos então que nossa singularidade tenha a propriedade de existência de uma segunda curva invariante que seja normal à primeira curva invariante em $\mathbb{C}^2$.

Definição . O campo vetorial X sobre $\mathbb{C}^2$ é uma *curva generalizada* se a folheação $\mathcal{F}_X$ não tem singularidade com autovalor nulo.

Lembremos que uma separatriz do campo vetorial holomorfo X é uma curva integral (holomorfa) S de X tal que o fecho de S é $\bar{S} = S \cup \{0\}$. Pelo resultado de dessingularização após um número finito de blowing-up's as singularidades são não degeneradas ou selas-nós. Para curvas generalizadas a dessingularização de X e das separatrizes são iguais.

Lema 4.3. *Qualquer singularidade de uma curva generalizada que possui exatamente duas separatrizes lisas é simples.*

Demonstração. Começamos com a seguinte:

Afirmção 4.1. *Uma curva de peso maior que um e transversal ao divisor projetivo não é lisa.*

Seja $A = DX(0)$. Então $A \neq 0$ e temos uma das seguintes possibilidades:

- (i) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$;
- (ii) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$; $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}_+$;
- (iii) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$; $\lambda/\mu \in \mathbb{Q}_+$.

Como por hipótese existem dois subespaços linearmente independentes que são auto-espaços segue que o caso (i) é excluído. No caso (ii) devemos ter $\lambda \neq 0$. Se $\lambda = n\mu$, com $n \in \mathbb{Z}_+$, a forma normal de Dulac nos permite escrever

$$X = (\lambda x + ay^n) \frac{\partial}{\partial x} + \mu y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Se $a \neq 0$, X teria somente uma separatriz; se $a = 0$, X tem componente dicrítica em sua dessingularização. De forma análoga para $\mu/\lambda \in \mathbb{Z}_+$. Finalizando, se λ/μ e μ/λ não estão em $\mathbb{Z}_+$, então X é linearizável (Poincaré) e sua dessingularização contém uma componente dicrítica. Resta então (iii) que é uma singularidade simples. ■

Lema 4.4. *Seja p uma singularidade de uma folheação holomorfa singular $\mathcal{F}$ com uma separatriz lisa S . Suponhamos que p seja uma curva generalizada. Então p possui uma outra separatriz distinta de S .*

Demonstração: Se p for dicrítico, nada há a demonstrar. Suponhamos então que p possua um número finito de separatrizes. Se p já for reduzida, então ela é simples e possui duas separatrizes lisas e transversais. Se p não for reduzida, dessingularizaremos esta singularidade e provaremos por indução no número de blowing-ups.

Se um blow-up dessingulariza $\mathcal{F}$ e $p_0 = \pi^{-1}(0) \cap \pi^{-1}(S)$, então a existência de uma segunda singularidade de $\mathcal{F}$ em $\pi^{-1}(0)$ tem que ser reduzida (produzindo assim uma 2ª separatriz). Assim sendo, examinemos o caso em que p_0 é a única singularidade de $\mathcal{F}$ em $\pi^{-1}(0)$. p_0 será reduzida e S e $\pi^{-1}(0)$ são suas separatrizes. Temos então

$$m_p = (\mathcal{F}) + 1 = m_{p_0}(\tilde{\mathcal{F}}, \pi^{-1}(0)) = 1$$

o que implica em $m_{p_0} = 0$, absurdo.

Se a singularidade p é dessingularizada com dois blow-ups podemos supor que p_0 (definida acima) é a única singularidade de $\tilde{\mathcal{F}}$ em $\pi^{-1}(0)$. p_0 terá $\pi^{-1}(0)$ e $\tilde{S}$ como separatrizes. De acordo com o lema acima p_0 é reduzida (tem duas separatrizes transversais). Novamente teríamos

$$m_p = (\mathcal{F}) + 1 = m_{p_0}(\tilde{\mathcal{F}}, \pi^{-1}(0)) = 1$$

implicando novamente em $m_{p_0} = 0$, um absurdo.

De acordo com nossa definição, uma curva generalizada é uma singularidade de uma folheação $\mathcal{F}$ que em sua dessingularização não surgem singularidades do tipo sela-nó. Para este tipo de singularidade, folhas finitamente curvadas são sempre algébricas.

Teorema 4.4. *Seja X um campo vetorial polinomial sobre $\mathbb{C}^2$ e seja L uma órbita de X com curvatura total finita com respeito à métrica induzida por $\mathbb{C}$ sobre L . Suponhamos que as singularidades de $\mathcal{F}_X$ em L_∞ sejam curvas generalizadas não-dicríticas, então L é uma curva algébrica.*

Demonstração: A idéia da prova é usar o teorema do índice para notar que tipos de singularidades podem, ou devem, ocorrer na reta projetiva L_∞ .

Suponhamos que a nossa singularidade q seja do tipo sela-nó. Se a órbita L de X acumula q , então a separatriz forte de q tem a seguinte propriedade

Afirmção 4.2. *A intersecção de S com L_∞ é uma singularidade não degenerada.*

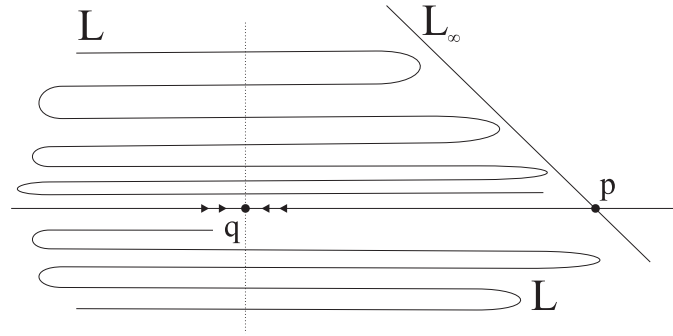


Figura 4.8:

De fato, usando a fórmula

$$\sum_{r \in \text{Sing}(\mathcal{F}_X) \cap S} \text{Ind}_r(\mathcal{F}; S) = S \cdot S$$

do teorema do índice temos

Afirmção 4.3. *As singularidades de $\mathcal{F}$ em S são selas-nó e tem S como separatriz forte.*

De fato, se supusermos que r é um elemento na interseção de S com $\text{Sing}(\mathcal{F}_X)$ e que r é não degenerada, então L acumulará as duas separtrizes (como na figura abaixo)

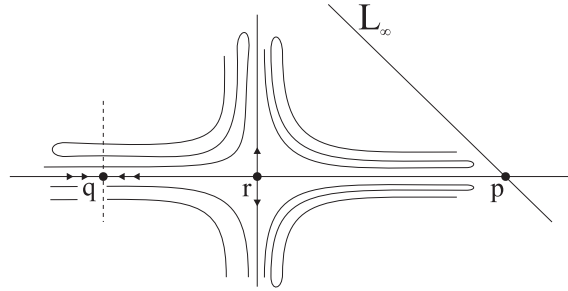


Figura 4.9:

Sabemos que a configuração acima implica em curvatura total infinita. Se supusermos que a singularidade r de $\mathcal{F}$ em S é uma sela-nó com separatriz forte transversal à reta S , estaremos na seguinte situação

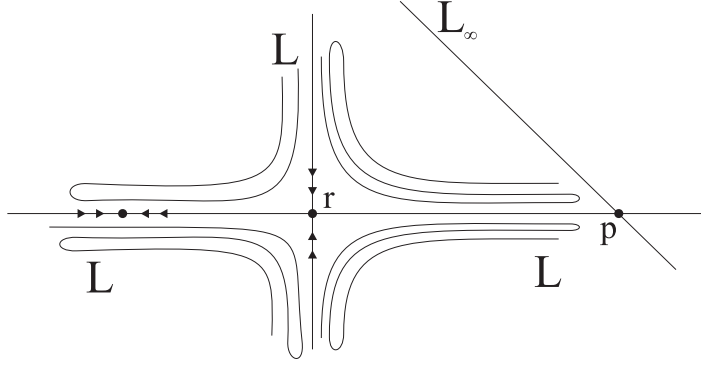


Figura 4.10:

L deve acumular a separatriz forte por r e a separatriz S por r . Esta configuração é igual ao caso de singularidades não degeneradas. Portanto, uma explosão em r nos gera um absurdo, pois produz curvatura total infinita para L .

Da existência de singularidades do tipo sela-nó e da não existência de singularidades não degeneradas em S , temos a seguinte figura representativa

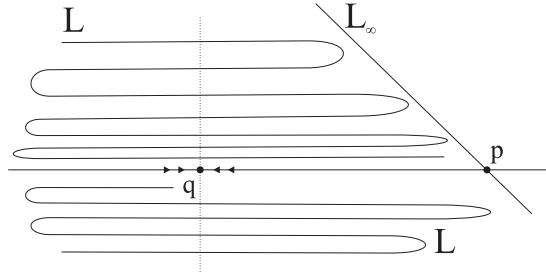


Figura 4.11:

Definamos, como na figura acima, o ponto p como sendo o ponto de intersecção entre S e L_∞ .

Afirmção 4.4. p é uma singularidade para $\mathcal{F}_X$ e $\text{Ind}_p(\mathcal{F}_X, \bar{S}) = 1$.

De fato, sabemos que para uma reta projetiva $\bar{S}$ temos $\bar{S} \cdot \bar{S} = 1$, e que se r é uma singularidade de tipo sela-nó com separatriz forte dada por S . Decorre então

que $\text{Ind}_r(\mathcal{F}; S) = 0$. Fazendo uso da fórmula do índice, teremos

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{r \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap S} \text{Ind}_r(\mathcal{F}; S) + \text{Ind}_p(\mathcal{F}, \bar{S}) \\ 1 &= \sum O + \text{Ind}_p(\mathcal{F}, \bar{S}) \\ 1 &= \text{Ind}_p(\mathcal{F}, \bar{S}) \end{aligned}$$

Afirmção 4.5. *A separatriz forte da singularidade p (da afirmação acima) é dada pela reta no infinito.*

De fato, se supusermos que exista uma separatriz forte S' transversal à reta no infinito

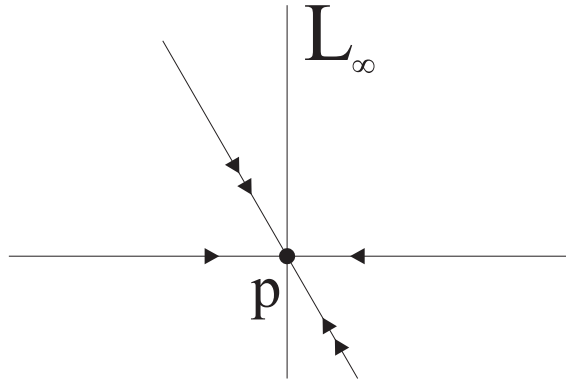


Figura 4.12:

a reta S' deve ser acumulada, em sua totalidade, pela órbita L . Pela mesma argumentação feita para S , todas as singularidades de S' diferentes de $\mathcal{F}$ ser do tipo sela-nó com separatriz forte em S' , portanto

$$\begin{aligned} \bar{S}' \cdot \bar{S}' &= \sum_{r \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap S'} \text{Ind}_r(\mathcal{F}, S') + \text{Ind}_p(\mathcal{F}, \bar{S}') \\ &= \sum O + O \\ &= 0 \end{aligned}$$

Mas, é bem conhecido que $\bar{S}' \cdot \bar{S}' = 1$.

Temos então a seguinte configuração

Afirmção 4.6. *Se r é uma singularidade de $\mathcal{F}$ de tipo sela-nó em $L_\infty \setminus \{p\}$, então L_∞ é a separatriz forte da sela-nó r .*

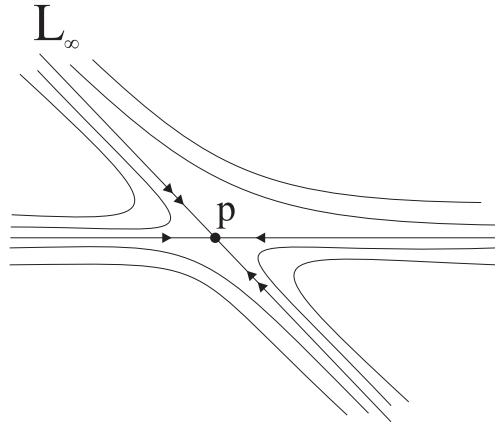


Figura 4.13:

De fato, se supuséssemos que a separatriz forte de r , S' , é transversal à linha no infinito, L_∞ , teríamos L acumulando as retas paralelas S e S' como na figura abaixo

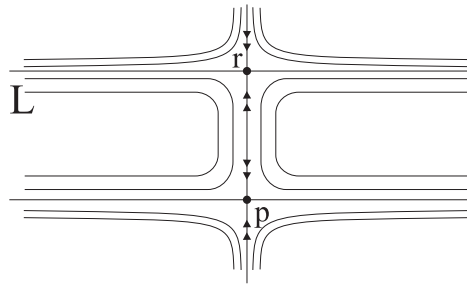


Figura 4.14:

A acumulação de retas paralelas por L implica em curvatura total infinita (veja figura 4.14). ■

4.5 Campos com órbitas Transcendentes finitamente curvadas

Nesta seção provamos que campos vetoriais do tipo Poincaré-Dulac são caracterizados pela existência de órbitas transcendentais (não algébricas) com curvatura total finita.

Definição 4.1. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{CP}^2$ dada por uma 1-forma ω com uma curva algébrica invariante Λ . Dizemos que ω possui um fator integrante formal fechado transversalmente definido sobre Λ se existe uma 1-forma transversal formal fechada η definida sobre Λ , com polos simples e tal que $d\omega = \eta \wedge \omega$.*

Lema 4.5 ([23]). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{CP}^2$ dada por uma 1-forma racional ω com uma curva algébrica invariante Λ . Suponhamos que a holonomia de Λ seja solúvel e não abeliana. Então ω possui um fator integrante formal fechado transversalmente definido sobre Λ .*

Lema 4.6 ([23]). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de $\mathbb{CP}^2$ com uma curva algébrica invariante com holonomia solúvel e não abeliana. Então a 1-forma projetiva formal η tem resíduos inteiros e polos de ordem um em $\mathbb{CP}^2$.*

Lema 4.7 ([24]). *Seja X um campo vetorial polinomial completo sobre $\mathbb{C}^2$ e seja $\mathcal{F}_X$ a folheação induzida por X em $\mathbb{CP}^2$. Suponhamos que L_∞ seja invariante por $\mathcal{F}_X$ e que as singularidades de $\mathcal{F}_X$ em L_∞ sejam ou simples ou Poincaré-Dulac ou selas-nós em boa posição, então $\mathcal{F}_X$ possui um fator integrante racional.*

Teorema 4.5. *Seja X um campo vetorial polinomial sobre $\mathbb{C}^2$ tal que as singularidades de $\mathcal{F}(X)$ sejam não-degeneradas. Se X tem uma órbita não algébrica finitamente curvada, isto é, com curvatura total finita, então existe um sistema de coordenadas afim (x, y) sobre $\mathbb{C}^2$ tal que X é um pull-back por uma aplicação racional de um campo vetorial $X(x, y) = (nx + cy^n)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ (forma normal de Poincaré-Dulac), para algum $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e algum $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Em particular todas as órbitas de X têm curvatura total finita.*

Demonstração: Seja L uma órbita algébrica de X com curvatura total finita. Pelos lemas 4.1, 4.2 e corolário 4.1 sabemos que L é fechada em $\mathbb{C}^2 \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$. Como $\bar{L} \subset L \cup \text{sing}(\mathcal{F})$ pelo teorema de Remmert-Stein, $\bar{L}$ é um subconjunto analítico em $\mathbb{C}^2$. Agora, relacionado à reta no infinito $L_\infty = \mathbb{CP}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ temos dois casos a analisar: L_∞ invariante por $\mathcal{F}$ e L_∞ não-invariante.

1º caso: L_∞ não é invariante por $\mathcal{F}(X)$.

Seja $\tilde{L}$ a folha de $\tilde{\mathcal{F}}$ tal que $L = \tilde{L} \cap \mathbb{C}^2$.

Afirmção 4.7. $\tilde{L} \cap L_\infty \subset \text{sing}(\mathcal{F})$.

De fato, se supusermos que $p \in L \cap L_\infty$ seja um ponto regular, existirá uma folha passando por p , denotado por L_p . Como L acumula p , por uniformidade transversal, L teria que acumular toda a reta L_p . Assim L_p seria uma reta complexa, contrariando o corolário 4.1. Por isso, temos que o fecho de L , $\bar{L}$, é analítico numa vizinhança de L_∞ . Isto implica que $\bar{L}$ é analítica em $\mathbb{CP}^2$. Usando o teorema de Chow podemos concluir que $\bar{L}$ é algébrica em $\mathbb{CP}^2$.

2º caso: L_∞ é invariante por $\mathcal{F}(X)$.

Afirmção 4.8. *O grupo de holonomia de $L_\infty \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ é um subgrupo solúvel de $\pi_1(L_\infty \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}))$.*

De fato, estamos na seguinte situação: L é uma órbita que acumula L_∞ . Fazendo uso do teorema de Nakai, podemos afirmar que a holonomia de $L_\infty \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ é solúvel.

Capítulo 5

Órbitas com área finita

Nesta parte de nosso trabalho analisaremos órbitas de X , campo vetorial polinomial sobre $\mathbb{C}^2$, com área finita. Mais especificamente, $\mathbb{C}^2$ pode ser munido de qualquer métrica hermiteana. O resultado principal desta etapa vai na mesma direção de resultados anteriores, mostrando a algebricidade da órbita referida.

Começaremos analisando como uma órbita de X com área total finita pode acumular um ponto na reta no infinito L_∞ . Novamente separamos esta análise em dois casos:

1º caso: L_∞ não é invariante por $\tilde{\mathcal{F}}$.

Este caso se subdivide em dois subcasos, a saber: A folha com área finita acumula um ponto regular q de $\mathcal{F}_X$ em L_∞ e a folha acumula um ponto singular de $\mathcal{F}_X$ em L_∞ .

1.1 A órbita de X com área total finita acumula um ponto regular q de L_∞ .

Para este subcaso existe uma vizinhança distinguida V em q .

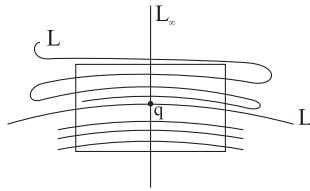


Figura 5.1:

Assim, a folha L_q por q é acumulada por L . Teríamos infinitas placas de L com mesma área, o que implicaria em L tendo área total infinita. Logo, este subcaso não pode ocorrer.

1.2 A órbita de X com área total finita acumula um ponto singular q em L_∞ .

Analogamente ao caso de órbitas finitamente curvadas, temos as possibilidades: q é uma singularidade não degenerada ou q é uma singularidade de tipo sela-nó. Estes casos estão representados nas figuras abaixo

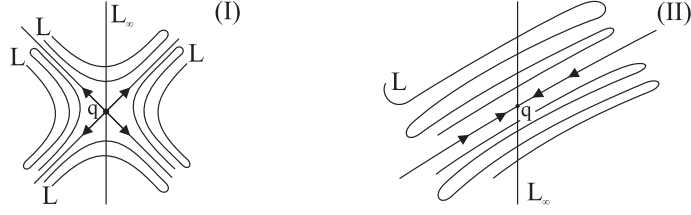


Figura 5.2:

Teorema 5.1. *Seja X um campo vetorial polinomial sobre $\mathbb{C}^2$. Suponhamos que as singularidades de $\mathcal{F}_X$ em L_∞ sejam curvas generalizadas não dicríticas. Dada qualquer métrica hermiteana sobre $\mathbb{C}^2$, se uma folha L de $\mathcal{F}_X$ tem área total finita, então L é algébrica.*

Demonstração. Seja L uma órbita de X com área total finita. Dada uma reta complexa $P \subset \mathbb{C}^2$ o número de intersecção entre P e L , $\#(P, L)$, está definido e é um inteiro não negativo. É bem conhecido de geometria complexa que o número de intersecção geométrico $n(P \cap L)$ da reta complexa P com a órbita L é igual ao número $\#(P, L)$.

Uaremos o método do referencial móvel para fazer alguns cálculos. Associemos à curva L a seguinte variedade $F(L)$

$$F(L) := \{(z; e_1, e_2) : z \in L, e_1 \in T_z L, |e_1| = |e_2| = 1, \langle e_1, e_2 \rangle = 0\}.$$

As equações de estrutura são dadas por

$$\begin{aligned} dz &= \omega^1 e_1 \\ de_1 &= \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2. \end{aligned}$$

É fácil ver que ω^1 e ω_2^1 são um formas complexas do tipo $(1, 0)$. Obtemos usando argumento de dimensionalidade que $\omega_1^2 = h\omega^1$, para uma função a valores complexos h . A forma de área de L e a primeira classe de Chern são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} \phi &:= \frac{i}{2} \omega^1 \wedge \bar{\omega}^1 \\ c(\Omega) &:= \frac{i|h|^2}{\pi} \phi \end{aligned}$$

Ω é usada para denotar a forma de curvatura de L .

Podemos associar a cada reta complexa P o referencial $(w; f_1, f_2)$ tal que $P = \{w + \lambda f_1 : \lambda \in \mathbb{C}\}$. Assim, se escrevermos

$$\begin{aligned} dw &= \eta^1 f_1 \\ df_1 &= \eta_1^1 f_1 + \eta_1^2 f_2, \end{aligned}$$

obtemos as relações

$$\begin{aligned} dz &= \pm (\eta^1 + \lambda \eta_1^1) e_2 \pm \lambda \eta_1^2 e_2 \\ de_1 &= \pm df_1. \end{aligned}$$

Portanto, $\omega^1 = \pm (\eta^1 + \lambda \eta_1^1)$ e $\omega_1^2 = \pm \eta_1^2$. Das relações acima decorre que

$$\omega^2 \wedge \omega_1^2 = \eta^2 \wedge \eta_1^2.$$

Como a reta P está fixada, obtemos

$$\omega^2 = \omega_1^2 = 0.$$

Tomemos como elemento de volume em $\mathbb{CP}^2$, ou melhor, tomemos como forma volume em $\mathbb{CP}^2$ a forma

$$dP = \omega^2 \wedge \bar{\omega}^2 \wedge \omega_1^2 \wedge \bar{\omega}_1^2.$$

Agora, definamos a variedade B como um subconjunto de $L \times \mathbb{CP}^2$ da seguinte forma

$$B = \{(z, P) : z \in P\}.$$

Temos assim o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{n} & \mathbb{CP}^2 \\ \pi \downarrow & & \\ L & & \end{array}$$

Calculemos agora a integral

$$\int_B n^*(dP).$$

Isto pode ser feito por integração sobre as fibras da submersão π . Para cada x em L , a fibra sobre x pode ser parametrizada por

$$\begin{aligned} f_1 &= A_1^1 e_1 + A_1^2 e_2 \\ f_2 &= A_2^1 e_1 + A_2^3 e_2, \end{aligned}$$

sendo $A = (A_k^j) \in U(2)$, $U(2)$ é o grupo unitário de $\mathbb{C}^2$.

Afirmção 5.1. $n^*(dP) = \phi \wedge \psi(A, dA)$, sendo $\psi(A, dA)$ uma 2-forma sobre $U(2)$.

De fato,

$$\begin{aligned}\eta^2 &= \langle dz, f_2 \rangle = A_2^1 \omega^1 \\ \eta_1^2 &= \langle df_1, f_2 \rangle \\ &= \bar{A}_2^1 dA_1^1 + \bar{A}_2^2 dA_1^2 \pmod{\omega^2 \text{ e } \bar{\omega}_1^1}\end{aligned}$$

Assim, a integral de ψ sobre $\pi^{-1}(x)$ independe do ponto x , assim temos

$$\begin{aligned}\int_B n^*(dP) &= \int_B \phi \wedge \psi(A, dA) \\ &= \text{Cte} \int_L \phi \\ &= \text{Cte} \cdot \text{vol}(L),\end{aligned}$$

sendo

$$\text{Cte} = \int_{U(2)} \psi(A, dA).$$

Esta é uma versão complexa da fórmula de Crofton para curvas no plano real. De fato, a integral $\int_B n^*(dP)$ é apenas

$$\int_{\mathbb{CP}^2} n(P \cap L) dP,$$

lembrando que $n(P \cap L)$ é a intersecção. □

Temos como corolário do teorema 5.1

Corolário 5.1. *Seja X um campo vetorial polinomial sobre $\mathbb{C}^2$. Então uma órbita não trivial de X tem área infinita com relação à métrica euclidiana.*

Referências Bibliográficas

- [1] V. Arnold; *Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires*, Mir 1980.
- [2] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven; *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin 1984.
- [3] C. Camacho, A. Lins Neto; *Geometric theory of foliations*. Translated from the Portuguese by Sue E. Goodman. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, Mass., 1985.
- [4] C. Camacho, P. Sad; *Invariants Varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Ann. of Math. 115 (1982), 579-595..
- [5] C. Camacho, A. Lins Neto, P. Sad; *Minimal sets of foliations on complex projective spaces*, Publ. Math. I.H.E.S., **68** 187-203.
- [6] C. Camacho, A. Lins Neto and P. Sad; *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*; J. of Diff. Geometry, vol. 20, no. 1 (1984), 143–174.
- [7] L. C. Evans, R. F. Gariepy; *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [8] M. Green, Ph. Griffiths; *Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings* Chern symposium, Springer (1980), 41-74.
- [9] C. Godbillon; *Feuilletages: Études géométriques*; Birkhäuser Belin 1991.
- [10] R. C. Gunning, H. Rossi; *Analytic functions of several complex variables*. Prentice Hall, N.J. 1965.
- [11] H. B. Lawson; *Lectures on minimal submanifolds*. Vol. I. Second edition. Mathematics Lecture Series, 9. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1980.

- [12] A. Lins Neto; *Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two*. Holomorphic dynamics (Mexico, 1986), 192–232, Lecture Notes in Math., 1345, Springer, Berlin, 1988.
- [13] A. Lins Neto e B. Scárdua; *Folheações Algébricas Complexas*: 21º Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA 1997.
- [14] M McQuillan, *Diophantine approximation and foliations*, Publ. Math. I.H.E.S. 87(1998), pp 121–174.
- [15] Y. Myiaoka; *Deformation of a morphism along a foliation and applications*, Algebraic Geometry (Bondoin, 1985) Proc. Symp. Pure Math., 46, AMS (1987)
- [16] R. S. Mol; *Meromorphic first integrals: some extension results*; Tohoku Math. J. (2) 54 (2002), no. 1, 85–104.
- [17] I. Nakai; *Separatrices for nonsolvable dynamics on $C, 0$* . Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 44 (1994), no. 2, 569–599.
- [18] R. Osserman; *Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n* , Ann. of Math.(2) 80 (1964), 340–364.
- [19] L. A. Santaló; *Integral geometry in Hermitian spaces*. Amer. J. Math. 74, (1952). 423–434.
- [20] B. Scárdua; *Transversely affine and transversely projective holomorphic foliations having*; Ann. Sci. École Norm. Sup. vol. **30**, n 2, 1997.
- [21] B. Scárdua; *Complex vector fields having orbits with bounded geometry*; Tohoku Math. J. (2) 54 (2002), no. 3, 367–392.
- [22] B. Scárdua; *On minimal surfaces whose Gauss map is invariant by a holomorphic foliation*. The Quarterly Journal of Mathematics, to appear.
- [23] B. Scárdua; *A Remark on Parabolic Projective Foliations*, Hokkaido Mathematical Journal, 28 (1999), 231–252.
- [24] F. Bracci, B. Scárdua; *One dimensional holomorphic foliations transverse to polydiscs*. To appear in Journal of London Mathematical Society $\geq$ 2006.
- [25] A. Seidenberg; *Reduction of singularities of the differential equations $Ady = Bdx$* , Amer. J. Math. 90(1968), 248–269.

- [26] A. A. Shcherbakov; *Density of the orbit of a pseudogroup of conformal mappings and generalization of the Khudaï-Verenov theorem.* (Russian) Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 1982, no. 4, 10–15, 84.
- [27] T. Suwa; *Indices of holomorphic vector fields relative to invariant curves on surfaces.* Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), no. 10, 2989–2997.

Albetã Costa Mafra
 Instituto de Matemática -
 Universidade Federal do Rio de Janeiro
 Caixa Postal 68530
 CEP. 21.945-970 Rio de Janeiro-RJ
 BRAZIL e-mail: albetan@im.ufrj.br

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)