UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

ANÁLISE VIA GRUPOS DE RENORMALIZAÇÃO DE EQUAÇÕES DE DIFUSÃO NÃO-LINEARES COM COEFICIENTES DEPENDENTES DO TEMPO

Jussara de Matos Moreira

Orientador: **Gastão de Almeida Braga**

15 de março de 2007

Livros Grátis

http://www.livrosgratis.com.br

Milhares de livros grátis para download.

Ao João Pedrinho,
anjinho que com um sorriso apenas
faz com que a vida pareça mais simples.

Agradecimentos

A Deus, por uma vida com saúde, alegrias e oportunidades.

Aos meus pais e à minha irmã, fontes de amor eterno, que sempre me deram colo, confiança e carinho, sem os quais não teria forças para concluir esse trabalho. Ao Bê, que é sempre um exemplo de determinação e paixão pela vida. À tia Cleyde, pela disposição e alegria.

Ao Rift, que me entendeu e me amparou em momentos difíceis. Sem ele provavelmente não teria passado nem pelo exame de qualificação.

A todos os meus amigos, por me proporcionarem tantos momentos agradáveis que me faziam esquecer por alguns instantes os obstáculos que apareceram pelo caminho. Em especial: André, Cláudia, Érica, Flavi, Fred, Gladston, Jurandir, Mariana, Sandra e Tião.

Às minhas colegas de trabalho, companheiras de viagem e amigas: Beth, Regina e Luciana, que quebraram vários galhos durante a etapa final e estiveram sempre dispostas a me ajudar no que eu precisasse.

Ao professor Luis Felipe Pereira, que mesmo de longe esteve sempre pronto a responder minhas dúvidas e me auxiliar no que pudesse.

Ao Paulo Aleixo pela paciência em me ajudar a entender as aplicações deste trabalho.

Aos professores e funcionários do departamento de matemática. Em especial: Aldo, Aninha, César, Marcelo Marchesin, Michel, Remy e Sacha, que de uma maneira ou de outra me ajudaram durante esse processo.

Ao professor Paulo César Carrião, não só por sua participação na banca, com grande paciência para conferir as contas e dar sugestões preciosas, mas também por sua contribuição na minha formação, desde o mestrado.

Aos professores e colegas do departamento de física que me incentivaram em momentos cruciais, em especial ao professor Emmanuel Araújo Pereira, que, além disso, aceitou participar da banca e deu sugestões importantes para a continuação deste trabalho.

Aos professores César Oliveira e Aniura Malianes Barrientos pela participação na banca e ainda ao professor João Barata que, apesar das circunstâncias o terem impedido de estar presente na defesa, aceitou o convite para participar da banca e teve todo o trabalho e atenção de ler e fazer comentários.

Ao CNPq e à Universidade Federal de Ouro Preto.

Ao Fred e ao Leo, pela parceria em trabalhos durante esses anos. Qualquer agradecimento aqui será pouco para expressar a grande importância que tiveram nessa tese.

À minha "família acadêmica": ao meu "irmãozinho" Leandro, uma pessoa fantástica, responsável, sempre disposto a ajudar a todos e que em vários momentos me auxiliou nessa longa jornada. Ao "irmão" Celestino e ao "primo" Humbertinho pelo companheirismo e por boas risadas. Ao Gastão, que realmente foi um "pai" pra mim nesses quase 10 anos de convivência, me ensinando e me dando exemplos de paciência, responsabilidade e competência, entre outras qualidades. Com certeza, se me tornar um décimo do professional que ele é me darei por satisfeita.

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo o estudo do comportamento assintótico de soluções de equações de difusão não-lineares com coeficientes de difusão dependentes do tempo. Essas equações aparecem por exemplo no estudo de transporte em meios com campos de velocidade aleatórios. Nossa preocupação central é entender a relação entre a difusão e a não-linearidade na determinação do comportamento assintótico da solução. A análise se utiliza da técnica do Grupo de Renormalização desenvolvida por Bricmont et al. para estabelecer a auto-similaridade e universalidade na forma do decaimento das soluções.

Abstract

We study the long-time asymptotics of a certain class of nonlinear diffusion equations with time-dependent diffusion coefficients which arise, for instance, in the study of transport by randomly fluctuating velocity fields. Our primary goal is to understand the interplay between diffusion and nonlinearity in determining the long-time behavior of solutions. The analysis employs the renormalization group method developed by Bricmont et al. to establish the self-similarity and to uncover universality in the way solutions decay to zero.

Sumário

1 Introdução **9**

1.1 Motivação 9

1.2 Mudança de Escalas 10

1.3 O Método do Grupo de Renormalização 13

1.4 Objetivo 16

1.5 Divisão da Tese 18

2 Análise Linear **19**

2.1 Mudança de Escalas e Comportamento Assintótico 20

2.2 Descrição do Método e Definição do Operador RG Linear 22

2.3 Propriedades do RG Linear 24

2.3.1 $\mathcal{B}_q$ é Invariante pelo Operador Linear $R^0_{L,n}$ 26

2.3.2 A Propriedade de Semi-Grupo 27

2.3.3 Pontos Fixos Assintóticos 28

2.3.4 Lema da Contração 31

2.4 O Comportamento Assintótico via RG 32

3 Existência e Unicidade Locais da Solução do Problema Não-Linear 35

3.1 O Teorema de Existência e Unicidade 35

3.2 Resultados preliminares 37

3.3 Prova do Lema 3.1 42

3.4 Prova do Lema 3.2 43

4 Existência Global, Unicidade e o Comportamento Assintótico 46

4.1 Problemas Renormalizados e a Existência e Unicidade de suas Soluções 47

4.2 Renormalização 50

4.3 Existência Global e o Comportamento Assintótico 55

5 Considerações Sobre o Caso Marginal 60

A Transformada de Fourier 67

Capítulo 1

Introdução

O objetivo desta tese de doutorado é estudar o comportamento, para tempos longos, da solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t = c(t)u_{xx} + \lambda F(u), \quad t > 1, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x,1) = f(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

em que o coeficiente $c(t)$ é uma função $L^1_{loc}((1,+\infty))$, da forma $t^p + o(t^p) > 0$, sendo $p > 0$ e $o(t^p)$ uma ordem pequena de t^p quando $t \to \infty$, λ é um parâmetro real (que restringiremos a um compacto), a função $F(u)$ é da forma $F(u) = \sum_{j\geq\alpha} a_j u^j$, com raio de convergência $\rho > 0$ e α um inteiro maior que $(p+3)/(p+1)$. Além disso, o dado inicial f pertence a um certo espaço de Banach a ser especificado posteriormente.

1.1 Motivação

A abordagem desse problema foi motivada inicialmente por estudos de escoamentos bifásicos em meios porosos (aqüíferos e reservatórios de petróleo) [27, 28]. Esses escoamentos são governados por equações não-lineares que apresentam um comportamento complexo, influenciado pela presença de heterogeneidades geológicas do meio, as quais ocorrem em múltiplas escalas (micro e macroscopicamente). Devido a essa complexidade de comportamento do sistema, as variáveis a serem tratadas apresentam um caráter aleatório, impossibilitando a determinação precisa das propriedades dos fluidos no subsolo e portanto indicando a necessidade de uma análise estocástica desse sistema. Assim, quando duas fases fluidas estão sob a ação de um campo de velocidades que é uma função aleatória do espaço, há o surgimento de uma região de mistura que pode ser caracterizada por um comprimento l (*comprimento de mistura*). O crescimento assintótico da região de mistura é determinado pela relação $l(t) \sim t^{\gamma}$ (veja [30, 49]). Dessa forma, a evolução temporal dessa região pode ser descrita por uma equação de difusão linear $u_t = c(t)u_{xx}$ com coeficiente de difusão $c(t)$ dependente do tempo, tal que $c(t) \sim t^p$ quando $t \to \infty$. A equação em (1.1) supostamente modela tal evolução. Observe que ela é não-linear. Mostraremos, no Capítulo 4, que a não-linearidade da equação não afeta a forma assintótica da solução desde que aquela esteja dentro de uma certa classe de perturbações, classe esta que será determinada ao longo deste trabalho. Essa afirmação é parte do Teorema 1.1 (veja a Seção 1.4) e tem como conseqüência que os modelos lineares usados para explicar a evolução temporal do comprimento de mistura poderiam ser substituídos por modelos não-lineares sem prejuízo da sua forma assintótica.

Além dos problemas relacionados com a engenharia de petróleo [38] e hidrologia [21], as teorias de transporte por um campo aleatório de velocidade são ainda aplicadas em problemas como o transporte de calor em fluxos geofísicos [22], combustão e engenharia química [42]. Em cada um desses exemplos é possível encontrar processos físicos envolvendo o transporte passivo, em um campo de permeabilidade aleatório, de um escalar cuja concentração média u, sob circunstâncias apropriadas, satisfaz equações do tipo (1.1) ou mais geralmente equações da forma [30, 40]

$$u_t = c(t)u_{xx} + F(u, u_x, u_{xx}), \quad c(t) \sim t^p \text{ quando } t \to \infty, \text{ com } p > 0. \tag{1.2}$$

A inclusão do termo não linear $F(u, u_x, u_{xx})$ se refere às situações em que o campo escalar não é conservativo, ou seja, sua concentração u é submetida a mudanças devidas aos processos físicos, químicos ou biológicos.

1.2 Mudança de Escalas

Parte desta tese consiste em provar que, sob certas condições no dado inicial e em λ, o PVI (1.1) possui uma única solução definida para todo $t > 1$ (veja Teorema 1.1). Supondo que tal solução exista, é natural perguntar como ela se comporta para tempos longos. Provaremos assim que se

F tiver a forma $F(u) = \sum_{j \geq \alpha} a_j u^j$, com $\alpha > (p+3)/(p+1)$, então a solução do PVI (1.1) se comportará como

$$u(x,t) \sim \frac{A}{t^{\beta}} \; f_p^*\left(\frac{x}{t^{\gamma}}\right) \tag{1.3}$$

quando $t \to \infty$, sendo $\beta = \gamma = (p+1)/2$,

$$f_p^*(x) = \sqrt{\frac{p+1}{4\pi}} \; e^{-\frac{(p+1)}{4}x^2} \tag{1.4}$$

e A um pré-fator dependente do dado inicial f, da perturbação F e do expoente p. β e γ são ditos *expoentes críticos*. Observe que, de (1.3), a solução $u(x,t)$ decai para zero com potência $(p+1)/2$ e se espalha com a mesma potência (já que $\beta = \gamma$), guardando sempre o mesmo perfil f_p^* (por esta razão, a função f_p^* é chamada de *função perfil*). O limite assintótico acima é portanto considerado *universal* no sentido em que todos os parâmetros relevantes para a descrição do perfil da solução para tempos longos são independentes do dado inicial f e da não-linearidade F, sendo que toda e qualquer informação sobre estes últimos se encontra no pré-fator A. Assim, soluções de equações que diferem apenas quanto ao termo não-linear podem ser enquadradas em uma mesma *classe*, visto que apresentam mesmo comportamento assintótico, determinado por uma solução *auto-similar* (ou *invariante por mudança de escalas*) da equação de difusão $u_t = t^p\, u_{xx}$. A solução auto-similar, neste caso, é dada pelo lado direito de (1.3), como explicaremos a seguir.

De fato, considere a equação de difusão linear com coeficiente de difusão t^p,

$$u_t - t^p u_{xx} = 0, \quad t > 1. \tag{1.5}$$

A idéia é procurar uma mudança de escalas que mantenha essa equação invariante. Assim, dado $L > 1$, defina

$$v(x,t) \equiv L^{\alpha} u(L^{\gamma}x, L^{\beta}t), \tag{1.6}$$

sendo u solução da equação (1.5) e α, β e γ parâmetros a serem determinados de forma a fazer com que v também seja solução de (1.5). Facilmente verificamos através da definição (1.6) que v satisfaz

$$v_t = L^{\beta(p+1)-2\gamma} t^p v_{xx}$$

e portanto, para que a equação permaneça invariante pela mudança de escalas (1.6), é necessário que $\beta(p+1) = 2\gamma$. Além disso, para que a *massa*, isto é, a norma L^1 do dado inicial f, seja conservada, devemos tomar $\alpha = \gamma$. Assim, se fizermos $\beta = 1$ então obteremos que $\gamma = \alpha = (p+1)/2$ e, portanto, a mudança de escalas (1.6) se reduz a

$$L^{\frac{p+1}{2}} u(L^{\frac{p+1}{2}} x, Lt). \tag{1.7}$$

Soluções invariantes por essa mudança de escalas devem ser tais que $u(x,t) = L^{\frac{p+1}{2}} u(L^{\frac{p+1}{2}} x, Lt)$ seja qual for $L > 0$. Fazendo formalmente $L = 1/t$, devemos ter

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{(p+1)/2}} u\left(\frac{x}{t^{(p+1)/2}}, 1\right)$$

e a partir daí podemos obter as soluções da equação (1.5), invariantes pela mudança de escalas (1.7). De fato, definindo $\phi(x) \equiv u(x,1)$, se u acima for solução de (1.5) então, fazendo $\xi = xt^{-(p+1)/2}$, ϕ deve satisfazer a equação

$$\phi''(\xi) + \frac{(p+1)}{2}\xi\phi'(\xi) + \frac{(p+1)}{2}\phi(\xi) = 0$$

e resolvendo-se a EDO acima obtemos

$$\phi(\xi) = c_1 e^{-(p+1)\xi^2/4} \int e^{(p+1)\xi^2/4} d\xi + c_2 e^{-(p+1)\xi^2/4}.$$

Tomando $c_1 = 0$ e c_2 de forma a normalizar a função ϕ em $L^1(\mathbb{R})$, obtemos $\phi = f_p^*$, com f_p^* dada por (1.4).

Observe que se acrescentarmos um termo não-linear do tipo $\lambda u^{\frac{p+3}{p+1}}$ à equação (1.5), os argumentos acima permanecem válidos, isto é, a solução da equação

$$u_t = t^p u_{xx} + \lambda u^{\frac{p+3}{p+1}} \tag{1.8}$$

é invariante pela mudança de escalas $x \to L^{(p+1)/2}x$, $t \to Lt$ e $u \to L^{(p+1)/2}u$. Observe ainda que se ao coeficiente de difusão for acrescentada uma ordem pequena de t^p (que será o caso tratado nesta tese), então a equação não mais será invariante pela mudança de escalas (1.7). Entretanto, verificaremos que este acréscimo não irá alterar o comportamento assintótico da solução da equação no sentido que os expoentes críticos e a função perfil permanecem os mesmos. Esta afirmação é o conteúdo do Teorema 2.1. Tanto a sua prova quanto a prova do Teorema 1.1 envolvem um método matemático conhecido como *método do grupo de renormalização*, que passaremos a explicar a seguir.

1.3 O Método do Grupo de Renormalização

A relação entre escalas, auto-similaridade e o limite assintótico de soluções de equações diferenciais parciais foi introduzida inicialmente por Barenblatt [5] no final da década de 70. Entretanto, a idéia de se aplicar a técnica do Grupo de Renormalização (já desenvolvida desde o fim da década de 50 e utilizada em problemas de Teoria Quântica de Campos [7, 29] e posteriormente em Mecânica Estatística [48]) ao estudo do comportamento assintótico de soluções de EDPs surgiu apenas alguns anos depois, na década de 90, com os trabalhos de Goldenfeld e Oono [19, 32, 33, 34]. Logo depois, J. Bricmont, A. Kupiainen e colaboradores [15, 16] aprimoraram estas idéias, fornecendo uma análise rigorosa do comportamento assintótico de problemas de valor inicial. Estes últimos estudaram a equação de difusão não-linear (1.2) com $c(t) \equiv 1$, provando que para uma extensa classe de perturbações da equação do calor e para um dado inicial suficientemente pequeno, a solução do problema de valor inicial se comporta em tempos longos como a solução fundamental da equação do calor (veja [43] para um estudo mais detalhado deste problema).

A idéia de Bricmont et al. foi relacionar o comportamento assintótico das soluções de EDPs com a existência e estabilidade de pontos fixos de um operador apropriado (*operador RG*) e assim resolver o problema iterativamente, através de três etapas. Primeiramente, integra-se a equação num intervalo finito de tempo. Em seguida, reescalonam-se a variável espacial x e a solução u. A solução reescalonada é então utilizada como condição inicial para um novo problema, similar ao original, com a equação renormalizada. Assim, aplicações sucessivas desse operador evoluem progressivamente a solução no tempo e simultaneamente renormalizam os termos da EDP, transformando o problema do limite assintótico em iterações de problemas (renormalizados), definidos em intervalos de tempo fixo, seguidas por uma mudança de escalas.

Bricmont et al. introduziram ainda uma classificação formal para as perturbações da equação do calor de acordo com seu comportamento após uma mudança de escalas (isto é, após a aplicação do operador RG). Para o caso analisado por eles, ou seja, o problema (1.2) com $c(t) \equiv 1$, se $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ for analítica em uma vizinhança da origem e da forma $F(u, u_x, u_{xx}) = u^a u_x^b u_{xx}^c$, então, a mudança de escalas (1.7) faz com que a perturbação F se torne $L^{-d_F/2}F$, sendo

$$d_F \equiv a + 2b + 3c - 3,$$

isto é, se u for solução do problema (1.2) com $p = 0$, então $v(x,t) = \sqrt{L}u(\sqrt{L}x, Lt)$ é solução de $v_t = v_{xx} + F_L$, sendo $F_L \equiv L^{-d_F/2}F$. Em geral, para uma perturbação F analítica, Bricmont et al. definiram d_F como sendo o menor dos números $a + 2b + 3c - 3$ calculados para cada monômio da série de Taylor de F em torno da origem. Observa-se daí que se $d_F = 0$, então $F_L = F$ e assim a perturbação permanece inalterada após a mudança de escalas. Esse tipo de não-linearidade foi classificado como *marginal*. Se $d_F > 0$, então a perturbação é contraída pela mudança de escalas e portanto classificada como *irrelevante*. Se $d_F < 0$, F é dita *relevante*.

No caso do problema mais geral (1.2), d_F é substituído por η_F, sendo

$$\eta_F \equiv a + 2b + 3c - \frac{p+3}{p+1}.$$

Assim, nesse caso, dizemos que a perturbação é irrelevante se $\eta_F > 0$, relevante se $\eta_F < 0$ e marginal se $\eta_F = 0$. Note que se $p = 0$, então, como era de se esperar, $d_F = \eta_F$. Por outro lado, qualquer $p > 0$ faz com que perturbações como u^3 ou uu_x deixem de ser marginais e se tornem irrelevantes. Como o problema a ser tratado nesta tese será de fato (1.1), para este caso particular, sendo $F(u)$ da forma $\sum_{j \geq \alpha} a_j u^j$, com raio de convergência $\rho > 0$, então, F será irrelevante se $\alpha > (p+3)/(p+1)$, relevante se $\alpha < (p+3)/(p+1)$ e marginal se $\alpha = (p+3)/(p+1)$. Mostraremos portanto neste trabalho que, no caso em que a não-linearidade é analítica e irrelevante, a difusão é o efeito dominante no limite $t \to \infty$ e determina a forma das soluções quando estas decaem a zero.

Antes de descrever de maneira formal o resultado principal desta tese, cumpre ressaltar que o estudo do comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais utilizando a técnica do Grupo de Renormalização tem sido realizado por diversos pesquisadores. Em 1994, J. Bona, K. Promislow e G. Wayne publicaram o artigo [8] em que a técnica do RG é aplicada na obtenção do comportamento assintótico de equações da onda não-lineares com termos dissipativos e dispersivos. No ano seguinte, eles utilizaram essa mesma técnica, obtendo correções de ordem superior para o comportamento em tempos longos [9]. Mais especificamente, obtiveram através do método do RG a forma assintótica das soluções de equações Korteweg-de Vries

(KdV) generalizadas (com um termo dissipativo), que torna explícitos os efeitos dos termos não-lineares, dissipativos e dispersivos no decaimento. Caginalp [17] e Caginalp e Merdan [41] utilizaram a técnica do RG no estudo de equações parabólicas com um termo não-linear pequeno, desenvolvendo ainda essa idéia para ordens superiores no coeficiente da não-linearidade. As técnicas de renormalização têm sido aplicadas também no estudo de equações diferenciais estocásticas [4, 31]. Para referências sobre soluções auto-similares e expoentes críticos veja ainda [3, 39].

As idéias associadas a mudanças de escalas e renormalização também têm sido utilizadas numericamente. No início dos anos 90, Chen e Goldenfeld [18] propuseram uma versão numérica para o Grupo de Renormalização baseada na evolução do dado inicial segundo o fluxo dado pela equação e por uma mudança de escalas e que funcionava perfeitamente bem no caso de equações lineares ou equações não-lineares com perturbações marginais. Posteriormente, Aronson e colaboradores [2, 6] adaptaram essa versão para o estudo das soluções da equação dos meios porosos (veja [1] para um estudo desta equação, utilizando uma versão do RG numérico capaz de detectar correções logarítmicas tanto no decaimento quanto no espalhamento da solução e ao mesmo tempo computar os expoentes críticos).

G. Braga, F. Furtado e V. Isaia [10] realizaram um estudo sobre a suavização da equação de Barenblatt, mesclando os pontos de vista de Bricmont, Chen e Goldenfeld e implementando uma nova versão do RG numérico. Particularmente para a equação de Barenblatt não é possível obter os expoentes críticos a partir de auto-similaridades da equação, isto é, os expoentes críticos nesse caso são *anômalos*. Essa foi a principal contribuição dessa nova versão do RG numérico. Ela possui a vantagem de calcular os expoentes críticos dinamicamente, não necessitando do conhecimento *a priori* da invariância por escalas das soluções. Utilizando essas mesmas idéias, G. Braga, F. Furtado, J. Moreira e L. Rolla [13] estudaram o comportamento assintótico de soluções de equações de difusão não-lineares com coeficientes periódicos, obtendo o coeficiente de difusão renormalizado, previsto por técnicas de homogeneização. Entretanto, o método utilizado neste trabalho não permite a análise de perturbações marginais, devido às correções logarítmicas existentes nesse caso.

Através da utilização de uma versão modificada do RG numérico, Braga et al. [11] estudaram o comportamento assintótico de diversas equações interessantes, incluindo os casos das perturbações marginais, sendo capazes de obter as correções logarítmicas (veja também [36]). Braga, Furtado, Moreira e Rolla [12] analisaram ainda numericamente o comportamento assintótico das soluções de equações do tipo (1.2) com perturbação relevante, irrelevante ou marginal. No primeiro caso ("subcrítico"), em contraste com o caso "supercrítico"(em que a perturbação é irrelevante), o comportamento assintótico das soluções é fortemente afetado pelo termo não-linear F. No caso "crítico"(perturbação marginal) nem a difusão nem a não-linearidade prevalecem e embora apresente algumas características do caso supercrítico, há uma correção logarítmica incorporada à taxa de decaimento da solução de (1.2). De fato, a solução decai com $(t\ln t)^{-\frac{p+1}{2}}$ (veja também [44]). Este caso (crítico), mais especificamente o problema

$$\begin{cases} u_t = (t+o(t))u_{xx} - \lambda u^2, & t>1, \quad x\in\mathbb{R}, \quad \lambda>0, \\ u(x,1) = f(x), & q>1, \quad f\in\mathcal{B}_q, \end{cases} \tag{1.9}$$

foi ainda estudado nesta tese e a existência desta correção logarítmica é comprovada, analiticamente, desde que sejam satisfeitas algumas hipóteses (veja Capítulo 5).

1.4 Objetivo

Descreveremos agora, mais detalhadamente, o resultado central a ser obtido nesta tese. Nosso objetivo será aplicar o método do Grupo de Renormalização para equações parciais desenvolvido por Bricmont et al. ao problema (1.1), estabelecendo

1. a existência global e unicidade da solução do PVI;
2. o comportamento assintótico dessa solução.

Antes de enunciar nosso teorema principal é necessário definirmos os espaços de Banach em que tomaremos os dados iniciais. Assim, para cada $q>1$, defina

$$\mathcal{B}_q \equiv \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ | \ \hat{f}(w)\in C^1(\mathbb{R}) \text{ e } \|f\|<\infty\} \tag{1.10}$$

sendo

$$\|f\| = \sup_{w\in\mathbb{R}} \left[(1+|w|^q)\left(|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)|\right)\right]. \tag{1.11}$$

Os espaços $\mathcal{B}_q$ foram introduzidos por Bricmont et al. em [16] e uma descrição mais detalhada destes espaços pode ser encontrada em [14, 43]. Além do espaço dos dados iniciais, para estabelecer o item 1 acima devemos encontrar um espaço adequado no qual haja uma única solução para o PVI (1.1). Com isso em mente, defina

$$B^{(\infty)} \equiv \{u : \mathbb{R} \times [1, +\infty) \to \mathbb{R} \mid u(\cdot, t) \in \mathcal{B}_q \text{ para todo } t \geq 1 \text{ e } \|u\|_\infty < \infty\}, \tag{1.12}$$

sendo

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \geq 1} \|u(\cdot, t)\|.$$

A idéia consistirá em construir um subconjunto de $B^{(\infty)}$ no qual a solução de (1.1) é única.

Considere agora o PVI (1.1) com as seguintes hipóteses:

$(H1)$ $f \in \mathcal{B}_q$ para algum $q > 1$;

$(H2)$ $c(t) \in L^1_{loc}((1, +\infty))$ é uma função positiva e $c(t) = t^p + o(t^p)$ quando $t \to \infty$, com $p > 0$;

$(H3)$ $\lambda \in [-1, 1]$ e $F(u) = \sum_{j \geq \alpha} a_j u^j$ é analítica em $u = 0$, com α inteiro tal que

$$\alpha > (p + 3)/(p + 1).$$

Provaremos o seguinte

Teorema 1.1 *Assuma* $(H1) - (H3)$. *Então, existe* $\varepsilon > 0$ *tal que, para* $\|f\| < \varepsilon$, *é possível obter* $B \subset B^{(\infty)}$ *de forma que o PVI (1.1) possua uma solução única* $u \in B$ *satisfazendo, para um certo* $A = A(f, F, p)$,

$$\lim_{t \to \infty} \|\sqrt{t^{p+1}} u(\sqrt{t^{p+1}} \cdot, t) - A f_p^*(\cdot)\| = 0, \tag{1.13}$$

sendo f_p^* *definida por (1.4).*

Por simplicidade consideramos a inclusão de perturbações não-lineares F sendo funções analíticas de u apenas, mas essa análise pode ser estendida de forma a contemplar termos não-lineares como em (1.2), dependendo também das derivadas de u. Podemos ainda generalizar o problema para

n dimensões ou para $\lambda \in [-\lambda_0, \lambda_0]$, com $\lambda_0 > 1$. Neste caso, basta trocar λ por $\mu \equiv \lambda/\lambda_0$ e F por $F_{\lambda_0} \equiv \lambda_0 F$ na equação em (1.1), de forma a recuperar as hipóteses do Teorema 1.1. A escolha de restringir λ a um compacto é feita para que as estimativas obtidas neste trabalho sejam válidas uniformemente com respeito a λ.

1.5 Divisão da Tese

Os resultados principais desta tese (Capítulos 3 e 4) foram publicados na revista *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B, v. 7, p. 699-715, 2007.* Esta tese está dividida da seguinte forma: No Capítulo 2, definimos o operador Grupo de Renormalização para a equação linear, determinando algumas de suas propriedades. Em seguida, apresentamos como a técnica é utilizada no caso linear. No Capítulo 3, provamos a existência e unicidade da solução do problema (1.1) num intervalo finito de tempo. No Capítulo 4, definimos o RG não-linear e o utilizamos para estender a solução para tempos infinitos e obter o seu comportamento assintótico, provando portanto o Teorema 1.1. O Capítulo 5 é uma discussão sobre os resultados obtidos até o momento, para o caso da equação com perturbação marginal, mais especificamente um estudo do problema (1.9). Acrescentamos ainda um apêndice sobre a Transformada de Fourier em que enunciamos os principais resultados sobre este assunto que são utilizados nesta tese.

Capítulo 2

Análise Linear

O objetivo principal desse trabalho consiste na determinação do comportamento assintótico da solução do problema de valor inicial (1.1) com uma perturbação $F(u)$ irrelevante, no sentido do RG (para resultados parciais com perturbação marginal, veja o Capítulo 5). Entretanto, a análise do problema linear (fazendo $\lambda = 0$ em (1.1)) é essencial para um completo entendimento do procedimento. De fato, veremos no Capítulo 4 que o operador Grupo de Renormalização que definiremos para o problema não-linear está intrinsecamente ligado ao "operador RG linear", que será definido nesse capítulo. Além disso, no Capítulo 4 utilizaremos as estimativas obtidas na análise linear para concluir que o comportamento assintótico das soluções do problema não-linear é determinado pela termo difusivo da equação.

Nesse capítulo estaremos portanto interessados no PVI linear (1.1), isto é,

$$\begin{cases} u_t = c(t)u_{xx}, & t > 1, \;\; x \in \mathbb{R} \\ u(x,1) = f(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $c(t) \in L^1_{loc}((1, +\infty))$ é uma função positiva, da forma $t^p + o(t^p)$ quando $t \to \infty$, com $p > 0$ e $f \in \mathcal{B}_q$, para algum $q > 1$, sendo $\mathcal{B}_q$ o espaço de Banach definido em (1.10). Provaremos que a solução para o problema acima se aproxima da solução de $u_t = t^p u_{xx}$, com mesma condição inicial, quando $t \to \infty$. Apesar de ser possível chegarmos a esse resultado diretamente, como mostraremos na Seção 2.1, o objetivo desse capítulo é adotarmos o ponto de vista do RG, analisando seu fluxo em torno de um "ponto fixo assintótico". Essa estratégia servirá como uma introdução ao que será feito no Capítulo 4, para o caso não-linear. Provaremos portanto o seguinte

Teorema 2.1 *Seja u solução do PVI (2.1), $A \equiv \hat{f}(0)$ e f_p^* definida por (1.4). Então,*

$$\lim_{t\to\infty} \|\sqrt{t^{p+1}}u(\sqrt{t^{p+1}}\cdot, t) - Af_p^*(\cdot)\| = 0. \tag{2.2}$$

Esse capítulo está dividido da seguinte maneira: na Seção 2.1, motivaremos a definição do operador Grupo de Renormalização para o problema linear (2.1) (que chamaremos de *operador RG linear*), através de argumentos de mudanças de escala. Na Seção 2.2, além de definir convenientemente o operador RG linear, daremos uma descrição heurística do método do Grupo de Renormalização. A Seção 2.3 é destinada às propriedades do operador RG definido na Seção 2.2. Assim, na Subseção 2.3.1 provaremos que $\mathcal{B}_q$ é invariante pelo RG, que por sua vez é um operador linear. Na Subseção 2.3.2 mostraremos uma propriedade que será amplamente utilizada nesse trabalho, que é a propriedade de "semi-grupo" do RG. Essa propriedade garante que sucessivas aplicações da transformação do Grupo de Renormalização são equivalentes a uma única aplicação em outra escala devidamente escolhida. Nas Subseções 2.3.3 e 2.3.4, provaremos, respectivamente, que f_p^* definida por (1.4) é um ponto fixo assintótico do RG e que o operador RG é uma contração quando age em funções cujas Transformadas de Fourier se anulam na origem. Finalmente, na Seção 2.4, determinaremos o comportamento assintótico da solução de (2.1) utilizando o método do Grupo de Renormalização, provando desta forma o Teorema 2.1.

2.1 Mudança de Escalas e Comportamento Assintótico

A técnica do Grupo de Renormalização está intimamente relacionada com uma mudança de escalas e a escolha da mudança de escalas adequada ao problema a ser analisado é parte importante no processo de obtenção do comportamento assintótico da solução desse problema através do método do RG.

Argumentamos na introdução que a equação de difusão com coeficiente t^p e perturbação marginal

$$u_t = t^p u_{xx} + \lambda u^{\frac{p+3}{p+1}}$$

é invariante pela mudança de escalas

$$L^{\frac{p+1}{2}}u(L^{\frac{p+1}{2}}x, Lt).$$

Observamos ainda que, no caso de perturbações irrelevantes ou relevantes, a equação não é invariante por essa mudança de escalas. A mudança acarreta uma contração ou expansão de λ, que fica multiplicado por uma potência de L, negativa no caso irrelevante e positiva no caso relevante. Veremos no Capítulo 4 que essa contração de λ no caso irrelevante é o que faz com que o termo não-linear não contribua na forma com que a solução do problema decai para zero.

Os argumentos apresentados anteriormente motivam a escolha da mudança de escalas que utilizaremos nesse trabalho. Em [43] apresentamos uma prova de que, para a equação do calor linear, é possível obter o comportamento assintótico diretamente da forma integral da solução. É fácil ver que o mesmo pode ser feito no caso da equação de difusão linear, com coeficiente dependente do tempo. De fato, dado $c(t) = t^p + o(t^p)$, defina

$$s(t) = \int_1^t c(\tau)d\tau. \tag{2.3}$$

Observe que $s(t)$ está bem definida visto que $c(t) \in L^1_{loc}((1, +\infty))$.

Usando a Transformada de Fourier, podemos obter a forma integral da solução do problema linear (2.1), dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s(t)}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4s(t)}} f(y)dy. \tag{2.4}$$

Reescalonando a variável espacial e a solução, obtemos

$$\sqrt{t^{p+1}}u(\sqrt{t^{p+1}}x, t) = \sqrt{\frac{t^{p+1}}{4\pi s(t)}} \int e^{-\frac{t^{p+1}}{4s(t)}\left(x-\frac{y}{\sqrt{t^{p+1}}}\right)^2} f(y)dy.$$

Agora observe que, pela definição (2.3),

$$s(t) = \frac{t^{p+1}-1}{p+1} + r(t),$$

sendo

$$r(t) \equiv \int_1^t o(\tau^p)d\tau. \tag{2.5}$$

Logo, $s(t)/t^{p+1} \to (p+1)^{-1}$, quando $t \to \infty$ e, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [45], obtemos

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t^{p+1}}u(\sqrt{t^{p+1}}x, t) = \sqrt{\frac{p+1}{4\pi}} e^{-\frac{(p+1)}{4}x^2} \int f(y)dy,$$

isto é,

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt{t^{p+1}}u(\sqrt{t^{p+1}}x, t) = Af_p^*(x),$$

sendo $A = \hat{f}(0)$ e f_p^* a função definida por (1.4).

2.2 Descrição do Método e Definição do Operador RG Linear

Vimos anteriormente que dado $L > 1$, a mudança de escalas $x \to L^{(p+1)/2}x$, $t \to Lt$ e $u \to L^{(p+1)/2}u$ mantém a equação (1.8) invariante. Vimos ainda que essa mudança de escalas fornece um limite assintótico bem definido. Motivados por esse argumento, iremos definir o operador Grupo de Renormalização para o problema (2.1) baseados nessa mudança de escalas. O procedimento para a construção do operador RG consiste então em seguir três etapas. Dado $L > 1$,

1. evolui-se o dado inicial do tempo 1 ao tempo L, determinando $u(x, L)$;
2. reescalona-se a variável espacial por $L^{(p+1)/2}$, obtendo $u(L^{(p+1)/2}x, L)$;
3. reescalona-se a solução u por $L^{(p+1)/2}$.

Assim, definimos o operador RG para o problema (2.1), que designaremos por *operador RG linear*, como:

$$R_L^0 f(x) = L^{(p+1)/2}u(L^{(p+1)/2}x, L). \tag{2.6}$$

A idéia por trás do método do RG para equações parciais é reduzir o problema do tempo infinito à análise de uma seqüência de problemas de tempo finito, obtidos por iterações do operador RG, definido de acordo com o problema a ser analisado. Assim, considera-se inicialmente o PVI no qual se está interessado e em seguida o operador RG é aplicado ao dado inicial f, obtendo-se um certo f_1, que será o dado inicial de um novo problema, o problema *renormalizado*.

Esse processo é repetido de forma a gerar uma seqüência de PVI's considerados em intervalos finitos de tempo, cujas condições iniciais f_n são obtidas iterando-se o RG n vezes. Cada dado inicial de um dos problemas *renormalizados* é decomposto em duas parcelas. A primeira é um múltiplo da imagem pelo RG de seu "ponto fixo assintótico" e a segunda será contraída por esse operador, no sentido que, a cada iteração, sua contribuição é cada vez menor, de forma que quando $n \to \infty$, essa parcela se anula.

Mais especificamente, como a solução u do PVI (2.1) está globalmente bem definida por (2.4), fixado $L > 1$ definimos a seqüência $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ de funções reescalonadas

$$u_n(x,t) \equiv L^{n(p+1)/2} u\left(L^{n(p+1)/2}x, L^n t\right), \tag{2.7}$$

com $t \in [1, L]$. Um cálculo direto revela que u_n satisfaz o PVI renormalizado abaixo:

$$\begin{cases} \partial_t v = c_n(t)\partial_x^2 v, & x \in \mathbb{R}, \ \ t \in [1, L], \\ v(x,1) = f_n(x), \end{cases} \tag{2.8}$$

em que

$$c_n(t) = \frac{c(L^n t)}{L^{np}}, \tag{2.9}$$

sendo $c(t) = t^p + o(t^p)$ e

$$f_n(x) = u_n(x,1) \equiv L^{n(p+1)/2} u\left(L^{n(p+1)/2}x, L^n\right). \tag{2.10}$$

Dessa forma, a análise do comportamento assintótico passa a ser a análise de cada um dos problemas (2.8) em tempo finito ($t \in [1, L]$). De fato, comparando (2.10) e (2.2), fica claro que provar o limite assintótico se reduz à prova da convergência da seqüência $\{f_n\}$ (basta fazer $t = L^n$), o que motiva a definição do operador RG dada por (2.6).

Observe entretanto que, conforme já mencionamos anteriormente, o processo inicia-se com o PVI (2.1) e a cada iteração obtemos um PVI renormalizado (2.8), com $n = 1, 2, \ldots$, sendo que os dados iniciais para cada um desses problemas consistirão na imagem do operador RG aplicado ao dado inicial do problema anterior. Dessa forma, o operador RG depende da solução de cada problema a ser considerado ou, em outras palavras, do passo da iteração (ou seja, de n).

Denotaremos a solução de cada PVI linear (2.8) por u_{f_n}, de forma a diferenciar essa solução da solução do problema não-linear (1.1). Definiremos portanto o operador RG linear pela relação

$$(R^0_{L,n} f_n)(x) \equiv L^{(p+1)/2} u_{f_n} \left(L^{(p+1)/2} x, L \right). \tag{2.11}$$

Dessa forma, incluímos um índice n na definição (2.6) visto que o operador depende da equação de evolução considerada. Agora, utilizando essas notações, se considerarmos o PVI (2.8) com dado inicial f_n dado por (2.10), isto é,

$$f_n(x) = u_{f_n}(x, 1) \equiv L^{n(p+1)/2} u_f \left(L^{n(p+1)/2} x, L^n \right),$$

sendo $u_{f_n}(x,t) \equiv L^{n(p+1)/2} u_f \left(L^{n(p+1)/2} x, L^n t \right)$, em que u_f é solução de (2.1), então é conseqüência imediata das definições acima que $\{f_n\}$ satisfaz

$$f_0 = u_f(\cdot, 1) \quad \text{e} \quad f_{n+1} = R^0_{L,n} f_n. \tag{2.12}$$

Para simplificar a notação, denotaremos $R^0_L \equiv R^0_{L,0}$.

2.3 Propriedades do RG Linear

O objetivo dessa seção é enunciar e provar algumas propriedades do operador RG linear que serão utilizadas na obtenção do comportamento assintótico, tanto para o problema linear quanto para o problema não-linear.

O operador $R^0_{L,n}$ atua sobre o espaço dos dados iniciais e possui as seguintes propriedades:

1. $R^0_{L,n} g \in \mathcal{B}_q$ para toda $g \in \mathcal{B}_q$;

2. $R^0_{L,n}$ é uma transformação linear;

3. R^0_L satisfaz a propriedade de semi-grupo, isto é,
$$R^0_{L^n,0} = R^0_{L,n-1} \circ \cdots R^0_{L,1} \circ R^0_{L,0}.$$
4. f^*_p é um *ponto fixo assintótico* do operador RG linear, ou seja,
$$\lim_{n\to\infty} \|R^0_{L^n} f^*_p - f^*_p\| = 0.$$
5. Se $g \in \mathcal{B}_q$ é tal que $\hat{g}(0) = 0$ (isto é, g possui massa nula), então, existem constantes $C > 0$ e $L_1 > 1$, dependentes de p e q, tais que, para todo $L > L_1$,
$$\|R^0_{L,n} g\| \le C L^{-(p+1)/2} \|g\|.$$

A estratégia usada para obter o comportamento (1.3) quando $\lambda = 0$ (veja o Teorema 2.1) é considerar cada problema (2.8) e, a cada passo do procedimento iterativo, extrair do dado inicial a contribuição na direção do ponto fixo assintótico. Então, usando os resultados listados acima, mostramos que o que sobra após a extração é pequeno o suficiente para garantir a convergência do processo, que é repetido n vezes, arbitrariamente. Finalmente, tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos o comportamento assintótico da solução reescalonada do problema linear.

Antes de provar as propriedades enumeradas acima, para cada $n = 0, 1, 2, \cdots$, lembrando que $c_n(t)$ é dado por (2.9), definimos
$$s_n(t) \equiv \int_1^t c_n(\tau) d\tau.$$

Novamente, s_n está bem definida já que $c(t) \in L^1_{loc}((1, +\infty))$. Com isso, obtemos
$$s_n(t) = \frac{t^{p+1} - 1}{p+1} + r_n(t), \tag{2.13}$$
sendo
$$r_n(t) = \frac{r(L^n t) - r(L^n)}{L^{n(p+1)}} \tag{2.14}$$
e $r(t)$ dado por (2.5). Observe que, da definição de $c_n(t)$, temos $s_0(t) = s(t)$. Além disso, definindo o dado inicial do problema (2.8) com $n = 0$ por $f_0 \equiv f$, esse problema se reduz ao PVI (2.1). Como anteriormente, podemos escrever a solução do n-ésimo PVI (2.8) como
$$u_{f_n}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s_n(t)}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4 s_n(t)}} f_n(y) dy, \tag{2.15}$$
sendo $s_n(t)$ definida por (2.13).

2.3.1 $\mathcal{B}_q$ é Invariante pelo Operador Linear $R^0_{L,n}$

Nessa subseção provaremos as duas primeiras propriedades enumeradas anteriormente. Mostraremos portanto que $\mathcal{B}_q$ é um espaço invariante pelo operador $R^0_{L,n}$ (isto é, dada uma função g em $\mathcal{B}_q$, sua imagem pelo operador $R^0_{L,n}$ também pertence a $\mathcal{B}_q$) e que esse é um operador linear.

Propriedade 1: Seja $g \in \mathcal{B}_q$ dado inicial do PVI (2.8), para algum n. Vamos mostrar que $R^0_{L,n}g \in \mathcal{B}_q$. Pela definição (2.11) do operador $R^0_{L,n}$ e pelo Lema A.4, temos

$$\mathcal{F}[R^0_{L,n}g](w) = \widehat{u_g}\left(\frac{w}{L^{(p+1)/2}}, L\right). \tag{2.16}$$

Como a solução u_g é dada por (2.15), com $f_n = g$, podemos escrevê-la como a convolução da solução fundamental ϕ pelo dado inicial, $u_g(x,t) = [\phi(.,t) * g(.)](x)$, sendo

$$\phi(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4s_n(t)}}}{\sqrt{4\pi s_n(t)}}.$$

Como $\mathcal{B}_q \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ (veja [43]), então $g \in L^1(\mathbb{R})$. Logo, pelo Teorema da Convolução A.2, como ϕ e g são funções em $L^1(\mathbb{R})$, então,

$$\widehat{u_g}(w,t) = \hat{\phi}(w,t)\hat{g}(w).$$

Além disso, pelo Lema A.4, $\hat{\phi}(w,t) = e^{-w^2 s_n(t)}$. Portanto, $\widehat{u_g}(w,t) = e^{-w^2 s_n(t)}\hat{g}(w)$ e, com isso, obtemos

$$\mathcal{F}[R^0_{L,n}g](w) = \hat{g}\left(\frac{w}{L^{\frac{p+1}{2}}}\right) e^{-w^2 \frac{s_n(L)}{L^{p+1}}}. \tag{2.17}$$

Como $g \in \mathcal{B}_q$, então $\hat{g}\left(\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right) \in C^1(\mathbb{R})$. Logo, derivando a equação (2.17), temos

$$[\mathcal{F}(R^0_{L,n}g)]'(w) = \left[-2w\frac{s_n(L)}{L^{p+1}}\hat{g}\left(\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right) + \frac{1}{L^{(p+1)/2}}\hat{g}'\left(\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right)\right] e^{-w^2 \frac{s_n(L)}{L^{p+1}}}. \tag{2.18}$$

Usando (2.17), (2.18) e a definição da norma em $\mathcal{B}_q$, obtemos como cota superior para $\|R^0_{L,n}g\|$:

$$\sup_w (1+|w|^q)\left[\left(1 + 2|w|\left|\frac{s_n(L)}{L^{p+1}}\right|\right)\left|\hat{g}\left(\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right)\right| + \frac{1}{L^{(p+1)/2}}\left|\hat{g}'\left(\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right)\right|\right] e^{-w^2 \frac{s_n(L)}{L^{p+1}}}. \tag{2.19}$$

Fazendo $x = |w|\sqrt{s_n(L)}/L^{(p+1)/2}$ e usando que $xe^{-x^2} \leq 1$ e $L > 1$, obtemos ainda como cota superior para (2.19):

$$L^{q(p+1)/2}\left[1+\left(\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right)^q\right]\left[\left(1+2\frac{\sqrt{s_n(L)}}{L^{(p+1)/2}}\right)\left|\hat{g}\left(\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right)\right|+\left|\hat{g}'\left(\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right)\right|\right].$$

Portanto,

$$\|R^0_{L,n}g\| \leq L^{q(p+1)/2}\left(1+2\frac{\sqrt{s_n(L)}}{L^{(p+1)/2}}\right)\|g\| < \infty,$$

o que completa a prova. ∎

Propriedade 2: Para algum $n \in \mathbb{N}$, considere $u_{\lambda f+g}$ solução do PVI (2.8) com dado inicial $\lambda f + g$, sendo f e g funções em $\mathcal{B}_q$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, pela definição (2.11) do operador RG linear e da representação (2.15) com $f_n = \lambda f + g$, temos:

$$\begin{aligned}
R^0_{L,n}(\lambda f+g)(x) &= \frac{L^{(p+1)/2}}{\sqrt{4\pi s_n(L)}}\int e^{-\frac{\left(L^{(p+1)/2}x-y\right)^2}{4s_n(L)}}(\lambda f+g)(y)dy \\
&= \frac{\lambda L^{(p+1)/2}}{\sqrt{4\pi s_n(L)}}\int e^{-\frac{\left(L^{(p+1)/2}x-y\right)^2}{4s_n(L)}}f(y)dy+\frac{L^{(p+1)/2}}{\sqrt{4\pi s_n(L)}}\int e^{-\frac{\left(L^{(p+1)/2}x-y\right)^2}{4s_n(L)}}g(y)dy \\
&= \lambda(R^0_{L,n}f)(x)+(R^0_{L,n}g)(x)
\end{aligned}$$

e, portanto, $R^0_{L,n}$ é um operador linear. ∎

2.3.2 A Propriedade de Semi-Grupo

Provaremos agora que o operador RG linear definido por (2.11) satisfaz a *propriedade de semi-grupo*, isto é, n aplicações do operador a uma escala L são equivalentes a aplicar o RG uma vez, a uma escala L^n:

$$R^0_{L^n} = R^0_{L,n-1}\circ\cdots R^0_{L,1}\circ R^0_L. \tag{2.20}$$

Propriedade 3: Seja $g \in \mathcal{B}_q$ dado inicial do PVI (2.8), para algum n. A prova da propriedade de semi-grupo será feita por indução. Se $n = 1$, não há o que provar. Agora, para $n = 2$, segue diretamente de (2.17) que

$$\mathcal{F}[R^0_{L^2}g](w) = \hat{g}\left(\frac{w}{L^{p+1}}\right)e^{-\frac{w^2}{L^{2(p+1)}}s_0(L^2)}$$

e

$$\mathcal{F}[(R^0_{L,1} \circ R^0_L)g](w) = \hat{g}\left(\frac{w}{L^{p+1}}\right) e^{-\frac{w^2}{L^{2(p+1)}}\left[s_0(L)+L^{p+1}s_1(L)\right]}.$$

Da definição (2.13) é fácil ver que $s_0(L) + L^{p+1}s_1(L) = s_0(L^2)$ e, portanto, tomando a Transformada de Fourier Inversa (veja Definição A.4) obtemos $R^0_{L^2}g = (R^0_{L,1} \circ R^0_L)g$, o que completa o primeiro passo da indução.

Agora, suponha que exista $k > 2$ tal que $R^0_{L^k}g = (R^0_{L,k-1} \circ \cdots \circ R^0_L)g$. Usando (2.17) e a hipótese de indução, obtemos

$$\mathcal{F}(R^0_{L^{k+1}}g)(w) = \hat{g}\left(\frac{w}{L^{(k+1)(p+1)/2}}\right) e^{-\frac{w^2}{L^{(k+1)(p+1)}}s_0(L^{k+1})}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[(R^0_{L,k} \circ \cdots \circ R^0_L)g](w) &= \mathcal{F}(R^0_{L^k}g)\left(\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right) e^{-\frac{w^2}{L^{p+1}}s_k(L)} \\ &= \hat{g}\left(\frac{w}{L^{(k+1)(p+1)/2}}\right) e^{-\frac{w^2}{L^{(k+1)(p+1)}}\left[s_0(L^k)+L^{k(p+1)}s_k(L)\right]}.\end{aligned}$$

Usando a definição (2.13) de s_n, obtemos $s_0(L^k)+L^{k(p+1)}s_k(L) = s_0(L^{k+1})$, o que finaliza a prova.

∎

2.3.3 Pontos Fixos Assintóticos

Considere f^*_p a função definida por (1.4). Segue diretamente das definições da norma $\mathcal{B}_q$ e de f^*_p que

$$\|f^*_p\| \leq C_{p,q}, \tag{2.21}$$

sendo

$$C_{p,q} = C_{p,q}(p,q) \equiv \sup_w \left\{ \left(1 + \frac{2|w|}{p+1} + |w|^q + \frac{2|w|^{q+1}}{p+1}\right) e^{-\frac{w^2}{p+1}} \right\}. \tag{2.22}$$

Logo, $f^*_p \in \mathcal{B}_q$ e segue de (2.17) com $n = 0$ que

$$\mathcal{F}[R^0_L f^*_p](w) = \widehat{f^*_p}\left(\frac{w}{L^{\frac{p+1}{2}}}\right) e^{-w^2\frac{s_0(L)}{L^{p+1}}}.$$

Usando a definição de $s_0(t)$ e o fato de que $\widehat{f_p^*}(w) = e^{-w^2/(p+1)}$, obtemos

$$\mathcal{F}[R_L^0 f_p^*](w) = e^{-\frac{w^2}{p+1}} e^{-\frac{w^2}{L^{p+1}} r(L)}. \tag{2.23}$$

Tomando a Transformada de Fourier Inversa em ambos os lados de (2.23) concluímos que $f_p^*(x)$ é um ponto fixo do operador RG se e somente se $r(L) \equiv 0$, o que ocorre no caso $c(t) = t^p$. Provaremos no Lema 2.1 que, quando $r(L) \not\equiv 0$, f_p^* é o limite de $R_{L^n}^0 f_p^*$ quando $n \to \infty$ e portanto, será um *ponto fixo assintótico* do operador RG linear.

Lema 2.1 *Considere f_p^* dado por (1.4) e $\|\cdot\|$ a norma em $\mathcal{B}_q$. Então,*

$$\lim_{n\to\infty} \|R_{L^n}^0 f_p^* - f_p^*\| = 0. \tag{2.24}$$

Prova: Da equação (2.23) com L^n no lugar de L, temos:

$$\mathcal{F}[R_{L^n}^0 f_p^*](w) = e^{-\frac{w^2}{p+1}} e^{-w^2 \frac{r(L^n)}{L^{n(p+1)}}}. \tag{2.25}$$

Como $r(t) = o(t^{p+1})$, a identidade acima implica convergência pontual no espaço de Fourier. Entretanto, nosso intuito é provar a convergência em $\mathcal{B}_q$, o que faremos ao mesmo tempo em que estimamos a taxa de convergência. Usando (2.25),

$$\left|[\mathcal{F}(R_{L^n}^0 f_p^* - f_p^*)](w)\right| = e^{-\frac{w^2}{p+1}} \left|1 - e^{-\frac{w^2}{L^{n(p+1)}} r(L^n)}\right| \leq w^2 \left|\frac{r(L^n)}{L^{n(p+1)}}\right| e^{-w^2\left[\frac{1}{p+1} - \left|\frac{r(L^n)}{L^{n(p+1)}}\right|\right]}$$

e

$$\left|[\mathcal{F}(R_{L^n}^0 f_p^* - f_p^*)]'(w)\right| \leq 2\left[\frac{|w|^3}{p+1} + |w|\right] \left|\frac{r(L^n)}{L^{n(p+1)}}\right| e^{-w^2\left[\frac{1}{p+1} - \left|\frac{r(L^n)}{L^{n(p+1)}}\right|\right]}.$$

Como $r(t) = o(t^{p+1})$, tome $n_0 > 0$ tal que $\left|r(L^n)L^{-n(p+1)}\right| < [2(p+1)]^{-1}$, para todo $n > n_0$. Multiplicando as desigualdades acima por $(1 + |w|^q)$ e definindo

$$M_1 = M_1(p,q) \equiv \max_w (1 + |w|^q) \frac{w^2}{2(p+1)} e^{-\frac{w^2}{2(p+1)}},$$

$$M_2 = M_2(p,q) \equiv \max_w (1 + |w|^q) \left(\frac{|w|^3}{p+1} + |w|\right) \frac{e^{-\frac{w^2}{2(p+1)}}}{p+1}$$

e $M = M(p,q) \equiv M_1 + M_2$, obtemos, para todo $n > n_0$,

$$\|R^0_{L^n} f^*_p - f^*_p\| \leq M \left| \frac{r(L^n)}{L^{n(p+1)}} \right|. \tag{2.26}$$

Fazendo $n \to \infty$ em (2.26), obtemos o resultado. ∎

Observação 2.1 *Se soubermos a taxa de decaimento de $r(t)/t^{p+1}$, então (2.26) nos dá uma cota superior para a taxa de convergência de $R^0_{L^n} f^*_p$, o que é mais forte que simplesmente obter o limite (2.24).*

Mostramos no Lema 2.1 que a seqüência $R^0_{L^n} f^*_p$ é convergente e converge para f^*_p (que é portanto um *ponto fixo assintótico* do RG linear). Está claro daí que a seqüência $R^0_{L^n} f^*_p$ é limitada. No Lema 2.2, explicitaremos uma cota superior para essa seqüência, que será utilizada no decorrer desse trabalho.

Lema 2.2 *Dado $q > 1$, existem constantes $L_1 > 1$ e $K_{p,q} > 0$, dependentes de p e q, tais que, se $L > L_1$, então,*

$$\|R^0_{L^n} f^*_p\| \leq K_{p,q},$$

para todo $n = 1, 2, \cdots$.

Prova: Usando (2.17) com L^n no lugar de L e o fato de $\widehat{f^*_p}(w) = e^{-w^2/(p+1)}$, obtemos

$$\mathcal{F}[R^0_{L^n} f^*_p](w) = e^{-w^2\left[\frac{1}{L^{n(p+1)}(p+1)} + \frac{s_0(L^n)}{L^{n(p+1)}}\right]}$$

e

$$\mathcal{F}[R^0_{L^n} f^*_p]'(w) = -2w \left[\frac{1}{L^{n(p+1)}(p+1)} + \frac{s_0(L^n)}{L^{n(p+1)}}\right] e^{-w^2\left[\frac{1}{L^{n(p+1)}(p+1)} + \frac{s_0(L^n)}{L^{n(p+1)}}\right]}.$$

Além disso, usando que $r(t) = o(t^{p+1})$ na definição de $r_n(t)$ (veja (2.14)), concluímos que existe $L_0 > 1$ tal que, se $L > L_0$, então, para todo $n = 0, 1, 2, \cdots$,

$$\left| \frac{r_n(L)}{L^{p+1}} \right| < \frac{1}{2(p+1)}.$$

Defina agora

$$L_1 \equiv \max\{L_0,\ \sqrt[p+1]{3}\}. \tag{2.27}$$

Observe que L_1 depende do coeficiente de difusão c. Pela definição (2.13) de $s_n(t)$, se $L > L_1$, então

$$\frac{1}{6(p+1)} \leq \frac{s_n(L)}{L^{p+1}} \leq \frac{3}{2(p+1)}, \tag{2.28}$$

para todo $n = 0, 1, 2, \cdots$.

Assim, usando (2.28), se $L > L_1$, basta definir

$$K_{p,q} \equiv \sup_w (1 + |w|^q) \left[1 + \frac{5|w|}{p+1}\right] e^{-\frac{w^2}{6(p+1)}} \tag{2.29}$$

e o lema está provado. ∎

2.3.4 Lema da Contração

Utilizaremos agora a equação (2.17) e as cotas em (2.28) para provarmos que, para L suficientemente grande, o operador $R^0_{L,n}$ é uma contração no espaço das funções $g \in \mathcal{B}_q$ tais que $\hat{g}(0) = 0$. Esse resultado será importante na prova do comportamento assintótico das soluções, visto que será usado para provar que, ao decompor o dado inicial em duas componentes sendo a primeira um múltiplo de $R^0_{L,n} f^*_p$, a segunda decai para zero, quando $n \to \infty$. Decorrerá desse fato que a solução de (2.1) se comportará em tempos longos como um múltiplo de f^*_p, provando então o Teorema 2.1.

Daqui por diante consideraremos as constantes $C_{p,q}$, L_1 e $K_{p,q}$ dadas respectivamente por (2.22), (2.27) e (2.29).

Lema 2.3 *Dado $q > 1$, seja $g \in \mathcal{B}_q$ dado inicial do PVI (2.8), para algum n, tal que $\hat{g}(0) = 0$. Então, existe uma constante $C = C(p, q) > 0$ (independente de g e n) tal que, para todo $L > L_1$,*

$$\|R^0_{L,n} g\| \leq \frac{C}{L^{\frac{p+1}{2}}} \|g\|. \tag{2.30}$$

Prova: Usando (2.17), obtemos a desigualdade

$$(1+|w|^q)\left(|(\widehat{R^0_{L,n}g})(w)|+|(\widehat{R^0_{L,n}g})'(w)|\right)\le$$

$$(1+|w|^q)e^{-w^2\frac{s_n(L)}{L^{p+1}}}\left[\left|\hat g\left(\frac{w}{L^{\frac{p+1}{2}}}\right)\right|+2|w|\left|\frac{s_n(L)}{L^{p+1}}\right|\left|\hat g\left(\frac{w}{L^{\frac{p+1}{2}}}\right)\right|+\frac{1}{L^{\frac{p+1}{2}}}\left|\hat g'\left(\frac{w}{L^{\frac{p+1}{2}}}\right)\right|\right]. \tag{2.31}$$

Como $g\in\mathcal{B}_q$, temos

$$\hat g\left(\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right)=\hat g(0)+\int_0^{w/L^{(p+1)/2}}\hat g'(t)dt$$

e como $\hat g(0)=0$,

$$\left|\hat g\left(\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right)\right|\le\int_0^{\left|\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right|}\frac{\|g\|}{1+|t|^q}dt\le\left|\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right|\|g\|, \tag{2.32}$$

sendo que na última desigualdade usamos que $\|g\|<\infty$ e $(1+|t|^q)^{-1}\le 1$. Além disso, segue da definição da norma $\mathcal{B}_q$ que

$$\left|\hat g'\left(\frac{w}{L^{(p+1)/2}}\right)\right|\le\|g\|. \tag{2.33}$$

Usando (2.28), (2.32) e (2.33) em (2.31), se $L>L_1$ obtemos para todo $n=0,1,2,\cdots$,

$$(1+|w|^q)\left(|(\widehat{R^0_{L,n}g})(w)|+|(\widehat{R^0_{L,n}g})'(w)|\right)\le\left(|w|+\frac{3w^2}{p+1}+1\right)(1+|w|^q)e^{\frac{-w^2}{6(p+1)}}L^{-(p+1)/2}\|g\|.$$

Dessa forma, definindo

$$C=C(p,q)\equiv\sup_w\left(1+|w|+\frac{3|w|^2}{p+1}\right)(1+|w|^q)e^{\frac{-w^2}{6(p+1)}}, \tag{2.34}$$

então, para $L>L_1$ obtemos (2.30). ∎

2.4 O Comportamento Assintótico via RG

Provamos na seção anterior que, para L suficientemente grande, o operador $R^0_{L,n}$ é uma contração quando age em funções cujas transformadas de Fourier se anulam na origem. Provaremos agora que, através do operador Grupo de Renormalização, podemos caracterizar o comportamento assintótico da solução de um PVI, desde que o dado inicial pertença a $\mathcal{B}_q$ e seja suficientemente pequeno.

Lema 2.4 *Dado $L > L_1$, considere o PVI (2.8) com f_n dada por (2.12). Então, se $A \equiv \widehat{f_0}(0)$, para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, existem funções $g_n \in \mathcal{B}_q$ tais que $\hat{g}_n(0) = 0$,*

$$f_0 = Af_p^* + g_0, \quad f_n = AR^0_{L^n} f_p^* + g_n, \tag{2.35}$$

e

$$\|g_n\| \leq \left(\frac{C}{L^{\frac{p+1}{2}}}\right)^n \|g_0\|, \tag{2.36}$$

sendo C a constante dada por (2.34).

Prova: Como f_p^* e f_0 pertencem ao espaço de Banach $\mathcal{B}_q$, podemos definir $g_0 \in \mathcal{B}_q$ por $g_0 \equiv f_0 - Af_p^*$, sendo $A = \widehat{f_0}(0)$. Além disso, como $\widehat{f_p^*}(0) = 1$, obtemos $\widehat{g_0}(0) = 0$. Aplicando R_L^0 em ambos os lados da identidade $f_0 = Af_p^* + g_0$ e definindo para cada $n = 0, 1, 2, \cdots$, $g_{n+1} \equiv R^0_{L,n} g_n$, obtemos (2.35) para $n = 1$.

Como $\widehat{g_0}(0) = 0$, da equação (2.17) obtemos $\widehat{g_1}(0) = 0$ e do Lema 2.3

$$\|g_1\| = \|R_L^0 g_0\| \leq \frac{C}{L^{(p+1)/2}} \|g_0\|,$$

o que conclui o primeiro passo da indução.

Assuma agora que (2.35) e (2.36) sejam válidas para um dado n. Aplicando $R^0_{L,n}$ em ambos os lados de (2.35), usando as definições acima e a propriedade de semi-grupo, obtemos (2.35) com $n + 1$ no lugar de n. Pela hipótese de indução, $\widehat{g_n}(0) = 0$ e assim, usando novamente a equação (2.17) e o Lema 2.3, concluímos que $\widehat{g}_{n+1}(0) = 0$ e

$$\|g_{n+1}\| = \|R^0_{L,n} g_n\| \leq \frac{C}{L^{\frac{p+1}{2}}} \|g_n\| \leq \left(\frac{C}{L^{\frac{p+1}{2}}}\right)^{n+1} \|g_0\|,$$

o que finaliza a prova. ∎

Com os resultados obtidos podemos finalmente provar o Teorema 2.1, isto é, provaremos que se u é solução do PVI (2.1), $A \equiv \hat{f}(0)$ e f_p^* é a função definida por (1.4), então,

$$\lim_{t \to \infty} \|\sqrt{t^{p+1}} u(\sqrt{t^{p+1}} \cdot, t) - Af_p^*(\cdot)\| = 0.$$

Prova do Teorema 2.1: Seja C a constante dada por (2.34) e defina

$$L_2 \equiv \max\{L_1, C^{2/(p+1)}\}. \tag{2.37}$$

Então, fixado $L > L_2$, mostraremos primeiramente que

$$\lim_{n\to\infty} \|L^{n(p+1)/2}u(L^{n(p+1)/2}\cdot, L^n) - Af_p^*(\cdot)\| = 0,$$

isto é, obteremos o limite (2.2) para uma seqüência $\{t_n\}$ da forma $t_n = L^n$.

Dado $L > L_2$, pela propriedade de semi-grupo do RG linear, temos $f_n = R^0_{L^n} f$ e, usando (2.35), (2.36) e a desigualdade triangular,

$$\|R^0_{L^n} f - Af_p^*\| \leq \left(\frac{C}{L^{\frac{p+1}{2}}}\right)^n \|g_0\| + |A|\|R^0_{L^n} f_p^* - f_p^*\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $R^0_{L^n} f(x) = L^{n(p+1)/2}u(L^{n(p+1)/2}x, L^n)$, da desigualdade acima e de (2.26), temos, para todo $n > n_0$,

$$\|L^{n(p+1)/2}u(L^{n(p+1)/2}\cdot, L^n) - Af_p^*(\cdot)\| \leq \left(\frac{C}{L^{\frac{(p+1)}{2}}}\right)^n \|g_0\| + |A|M \left|\frac{r(L^n)}{L^{n(p+1)}}\right|. \tag{2.38}$$

Como $L > L_2$, então $CL^{-(p+1)/2} < 1$ e, lembrando que $r(t) = o(t^{p+1})$, basta tomar o limite quando $n \to \infty$ em (2.38) para obter (2.2) no caso particular em que $t_n = L^n$.

Para estender esse resultado, dado $\delta \in (0,1)$, tome $L_3 > L_2$ tal que $L_3^{\delta(p+1)/2} > C$. Então, se $L > L_3$,

$$\left(\frac{C}{L^{(p+1)/2}}\right)^n = \left(\frac{C}{L^{\delta(p+1)/2}}\right)^n \frac{1}{L^{n(p+1)(1-\delta)/2}} \leq \frac{1}{L^{n(p+1)(1-\delta)/2}}$$

e segue de (2.38) que se $t = L^n$ com $L > L_3$, então

$$\|t^{(p+1)/2}u(t^{(p+1)/2}\cdot, t) - Af_p^*(\cdot)\| \leq \frac{\|g_0\|}{t^{(p+1)(1-\delta)/2}} + |A|M \left|\frac{r(t)}{t^{p+1}}\right|.$$

A cota acima pode ser estendida para $t = \tau L^n$, com $\tau \in [1, L]$ e $L > L_3$ bastando para isso trocarmos L por $\tau^{1/n}L$ nas estimativas. Assim, como as constantes em (2.38) não dependem do valor particular de L considerado (dependem apenas de p e q), a desigualdade acima vale para todo $t > L_3$. Tomando o limite quando $t \to \infty$, completamos a demonstração. ∎

Observação 2.2 *Novamente observamos que, se for conhecida a taxa de decaimento de* $r(t)/t^{p+1}$, *então, mais que obter o limite (2.2), conseguimos estimar a velocidade da convergência* $\sqrt{t^{p+1}}u(\sqrt{t^{p+1}}\cdot, t) \to Af_p^*(\cdot)$ *quando* $t \to \infty$.

Capítulo 3

Existência e Unicidade Locais da Solução do Problema Não-Linear

Nesse capítulo provaremos a existência e unicidade de soluções do problema (1.1) em um intervalo finito de tempo, para no Capítulo 4 utilizarmos o procedimento iterativo do RG [16] para estender esse resultado local para um intervalo de tempo infinito. Nesse processo, obteremos estimativas que serão usadas na prova do limite (1.13).

Utilizaremos para isso o Teorema do Ponto Fixo em espaços de Banach [24, 37]. Assim, na Seção 3.1 definiremos inicialmente os espaços de Banach utilizados e em seguida enunciaremos o teorema de existência e unicidade local, apresentando sua prova, assumindo verdadeiros os resultados de dois Lemas. O restante do capítulo é dedicado à prova desses dois Lemas. Na Seção 3.2 obteremos resultados preliminares que serão utilizados no restante da tese e principalmente nas Seções 3.3 e 3.4, em que apresentamos as provas de cada um dos Lemas.

3.1 O Teorema de Existência e Unicidade

Consideremos o problema de valor inicial (1.1) sob as hipóteses $(H1)-(H3)$, isto é, considere a equação

$$u_t = c(t)u_{xx} + \lambda F(u),$$

sendo $c(t) \in L^1_{loc}((1,+\infty))$ uma função positiva, da forma $t^p + o(t^p)$ quando $t \to \infty$ e $p > 0$, $\lambda \in [-1,1]$, $t > 1$, $x \in \mathbb{R}$ e $F(u) = \sum_{j \geq \alpha} a_j u^j$ analítica em $u = 0$, com $\alpha > (p+3)/(p+1)$. Além disso, suponha que o dado inicial $u(x,1) = f(x)$ pertença ao espaço $\mathcal{B}_q$ definido em (1.10) e munido da norma (1.11).

Para obter o espaço em que se encontrará a solução única de (1.1), dados $q > 1$ e $L > 1$, consideramos inicialmente o espaço

$$B^{(L)} \equiv \{u : \mathbb{R} \times [1,L] \to \mathbb{R} \;\mid\; u(\cdot,t) \in \mathcal{B}_q \text{ para todo } t \in [1,L]\}, \tag{3.1}$$

com norma dada por

$$\|u\|_L = \sup_{t \in [1,L]} \|u(\cdot,t)\|.$$

Em [43] provamos que ambos os espaços $\mathcal{B}_q$ e $B^{(L)}$ são espaços de Banach.

Definimos em seguida a bola

$$B_f \equiv \{u \in B^{(L)} : \|u - u_f\|_L \leq \|f\|\} \tag{3.2}$$

e, lembrando que $s(t) = \int_1^t c(v)dv$ (veja definição (2.3)), definimos o operador $T : B^{(L)} \to B^{(L)}$ por

$$T(u) \equiv u_f + N(u), \tag{3.3}$$

sendo u_f solução do PVI linear (2.1), isto é,

$$u_f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s(t)}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4s(t)}} f(y)dy \tag{3.4}$$

e

$$N(u)(x,t) = \lambda \int_1^t \frac{1}{\sqrt{4\pi[s(t)-s(\tau)]}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4[s(t)-s(\tau)]}} F(u(y,\tau))dyd\tau. \tag{3.5}$$

Assumiremos que a expansão de Taylor de $F(u)$ em torno de $u = 0$ tem raio de convergência finito ρ (o caso $\rho = \infty$ é menos restritivo). Logo, para que $N(u)$ e $T(u)$ estejam bem definidos é necessário que $|u(x,t)| < \rho$ em $\mathbb{R} \times [1,L]$.

Provaremos que o operador T possui um único ponto fixo em B_f, desde que $\|f\|$ seja suficientemente pequena, o que é equivalente a provar a existência e unicidade de soluções do PVI (1.1) em B_f. Utilizaremos os seguintes lemas:

Lema 3.1 *Sejam $L > 1$, $q > 1$, $p > 0$ e $\lambda \in [-1, 1]$. Existe $\varepsilon' > 0$ tal que $\|N(u)\|_L < \|f\|$ para toda $u \in B_f$, se $f \in \mathcal{B}_q$ e $\|f\| < \varepsilon'$.*

Lema 3.2 *Sob as hipóteses do Lema 3.1, existe $\varepsilon'' > 0$ tal que $\|N(u) - N(v)\|_L < \frac{1}{2}\|u - v\|_L$, para todas as funções $u, v \in B_f$, se $f \in \mathcal{B}_q$ e $\|f\| < \varepsilon''$.*

Assumindo os Lemas 3.1 e 3.2, podemos provar o seguinte:

Teorema 3.1 *Considere o PVI (1.1) sob as hipóteses $(H1) - (H3)$ e seja $L > 1$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que o PVI (1.1) possui uma única solução u em B_f, se $\|f\| < \varepsilon$.*

Prova: Definidos ε' e ε'' pelos Lemas 3.1 e 3.2, seja $\varepsilon \equiv \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$. Então, se $\|f\| < \varepsilon$, o Lema 3.1 garante que $\|T(u) - u_f\|_L = \|N(u)\|_L < \|f\|$ e, pelo Lema 3.2, $\|T(u) - T(v)\|_L = \|N(u) - N(v)\|_L < \frac{1}{2}\|u - v\|_L$, para todas as funções $u, v \in B_f$. Logo, T é uma contração em B_f e portanto possui um único ponto fixo. Em outras palavras, o PVI (1.1) tem uma única solução em B_f. ∎

3.2 Resultados preliminares

Precisaremos de alguns resultados preliminares que serão úteis para provar os Lemas 3.1 e 3.2. Estaremos sempre usando $L > 1$ e $q > 1$.

Proposição 3.1 *Se $f \in \mathcal{B}_q$ e $u \in B_f$, então,*

$$\|u\|_L \leq 2(1 + \sqrt{s(L)})\|f\|.$$

Prova: Como u_f é a solução do problema linear com dado inicial f, dada pela fórmula integral (3.4), temos que:

$$\widehat{u_f}(w,t) = e^{-s(t)w^2}\hat{f}(w) \quad \text{e} \quad \widehat{u_f}'(w,t) = -2ws(t)\widehat{u_f}(w,t) + e^{-s(t)w^2}\hat{f}'(w).$$

Assim, usando que $e^{-s(t)w^2} \leq 1$ para todo $t \geq 1$:

$$|\widehat{u_f}(w,t)| \leq |\hat{f}(w)| \tag{3.6}$$

e, definindo $x \equiv |w|\sqrt{s(t)}$ e usando que $xe^{-x^2} \leq 1$,

$$|\widehat{u_f}'(w,t)| \leq 2\sqrt{s(t)}xe^{-x^2}|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)| \leq 2\sqrt{s(t)}|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)|, \tag{3.7}$$

Portanto, aplicando as cotas superiores (3.6) e (3.7) e usando a definição da norma em $\mathcal{B}_q$, temos:

$$\|u_f(.,t)\| \leq \sup_w (1+|w|^q)\left(|\hat{f}(w)| + 2\sqrt{s(t)}|\hat{f}(w)| + |\hat{f}'(w)|\right) \leq (1+2\sqrt{s(t)})\|f\|.$$

Como $c(t)$ é positiva, então, pela definição (2.3) a função $s(t)$ é crescente. Assim, tomando o supremo em $t \in [1, L]$ na desigualdade acima, obtemos

$$\|u_f\|_L \leq (1+2\sqrt{s(L)})\|f\|. \tag{3.8}$$

Finalmente, se $u \in B_f$, usando (3.8) e a desigualdade triangular a proposição está provada. ∎

Observação 3.1 *Iremos argumentar agora, usando a proposição anterior, que para que os operadores N e T estejam bem definidos é suficiente que $u \in B_f$ com $f \in \mathcal{B}_q$ tal que*

$$\|f\| < [2C_q(1+\sqrt{s(L)})]^{-1}\rho,$$

sendo

$$C_q = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|w|^q}dw \tag{3.9}$$

e lembrando que ρ é o raio de convergência da expansão de Taylor de $F(u)$ em torno de $u = 0$.

De fato, precisamos provar que $|u(x,t)| < \rho$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $t \in [1, L]$. Como $\mathcal{B}_q \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ (veja [43]) e $u \in B^{(L)}$, então $u(\cdot, t) \in \mathcal{B}_q$ para todo $t \in [1, L]$ e portanto, para cada $t \in [1, L]$ fixado, temos $u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}(.,t)\}(x)$ (veja DefiniçãoA.4) e

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t)| \leq \frac{1}{2\pi}\|\hat{u}(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\|u(\cdot,t)\|}{1+|w|^q} dw = C_q\|u(\cdot,t)\| < \infty, \tag{3.10}$$

sendo C_q dada por (3.9).

Assim, lembrando que $\|u\|_L = \sup_{t\in[1,L]} \|u(\cdot,t)\|$, se $u \in B^{(L)}$, então $u(\cdot,t) \in \mathcal{B}_q$ e

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t)| \leq C_q\|u\|_L$$

para todo $t \in [1, L]$. Agora, pela Proposição 3.1, se $f \in \mathcal{B}_q$ e $u \in B_f$ então,

$$\|u\|_L \leq 2(1 + \sqrt{s(L)})\|f\|.$$

Logo, para todo $t \in [1, L]$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t)| \leq 2C_q(1 + \sqrt{s(L)})\|f\|.$$

Portanto, se $u \in B_f$ com $f \in \mathcal{B}_q$ tal que

$$\|f\| < [2C_q(1 + \sqrt{s(L)})]^{-1}\rho$$

então, $|u(x,t)| < \rho$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $t \in [1, L]$ e com isso N e T estão bem definidos.

As próximas duas proposições fornecerão estimativas que serão utilizadas nas Seções 3.3 e 3.4 para demonstrar os Lemas 3.1 e 3.2.

Proposição 3.2 *Se $s(t)$ é a função definida por (2.3), sejam $\varphi(\tau) \equiv s(t) - s(t-\tau)$ e*

$$J(w,t) \equiv \int_0^{t-1} w\varphi(\tau)e^{-\varphi(\tau)w^2} d\tau$$

definidos para $t \geq 1$, $0 \leq \tau \leq t-1$ e $w \in \mathbb{R}$. Então,

$$|J(w,t)| \leq (t-1)\sqrt{s(t)}.$$

Prova: Como $s(t)$ é crescente e $0 \leq \tau \leq t-1$, então a função $\varphi(\tau)$ é positiva. Assim, fazendo $x = \sqrt{\varphi(\tau)}w$ e usando que $xe^{-x^2} \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos

$$|J(w,t)| = \left| \int_0^{t-1} \sqrt{\varphi(\tau)} x e^{-x^2} d\tau \right| \leq \int_0^{t-1} \sqrt{\varphi(\tau)} d\tau.$$

Observe que o integrando é uma função contínua no intervalo $[0, t-1]$ e ainda, como $s(t)$ é uma função crescente de t, então é fácil verificar que $\varphi(\tau)$ é uma função crescente de τ. Assim, podemos limitar superiormente a última integral anterior por

$$(t-1)\sqrt{\varphi(t-1)} = (t-1)\sqrt{s(t) - s(1)}.$$

Pela definição de $s(t)$ temos que $s(1) = 0$, o que finaliza a prova. ∎

Proposição 3.3 *Seja $q > 1$ e $w \in \mathbb{R}$. Então*

$$I(w) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx \leq \frac{C}{1+|w|^q},$$

sendo

$$C = C(q) = (2^{q+1} + 3) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} dx. \tag{3.11}$$

Prova: Se $|w| \leq 1$, então $1 \leq \frac{2}{1+|w|^q}$. Além disso, $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \dfrac{1}{1+|x-w|^q} \leq 1$. Portanto, para $|w| \leq 1$:

$$\begin{aligned} I(w) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} dx \\ &\leq \frac{2}{1+|w|^q} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} dx. \end{aligned}$$

No caso $|w| > 1$, separamos $I(w)$ em três partes e estimamos cada uma separadamente. Observe que, como $I(w)$ é uma função par, é suficiente considerar $w > 1$:

$$I(w) = \left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\frac{w}{2}} + \int_{\frac{w}{2}}^{+\infty} \right) \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx.$$

Analisando a primeira integral, para $x < 0$, como $w > 1$, temos que $|x-w|^q \geq |-w|^q$. Logo:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx \leq \frac{1}{1+|-w|^q} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+|x|^q} dx \leq \frac{1}{1+|w|^q} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} dx.$$

Para a terceira integral, obtemos:

$$\int_{\frac{w}{2}}^{+\infty} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx \quad \leq \quad \frac{1}{1+\left|\frac{w}{2}\right|^q} \int_{\frac{w}{2}}^{+\infty} \frac{1}{1+|x-w|^q} dx \leq \frac{2^q}{1+|w|^q} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} dx.$$

Finalmente, para a segunda integral, assumindo que $0 \leq x \leq \frac{w}{2}$, temos:

$$(1+|x|^q)(1+|x-w|^q) \geq (1+|x|^q)\left(1+\left|\frac{w}{2}\right|^q\right) \geq (1+|x|^q)\frac{1+|w|^q}{2^q}.$$

Portanto,

$$\int_0^{\frac{w}{2}} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx \leq \frac{2^q}{1+|w|^q} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^q} dx.$$

Para finalizar a prova basta somar as estimativas obtidas acima para as integrais e tomar a constante C dada por (3.11). ∎

Antes de demonstrar os Lemas 3.1 e 3.2, motivados pela hipótese $(H3)$, iremos definir algumas somas que serão utilizadas no restante desse capítulo. Considere a constante C dada por (3.11) e defina

$$S_0(z) \equiv \sum_{j \geq \alpha} \left(\frac{C}{2\pi}\right)^{j-1} |a_j| z^j, \tag{3.12}$$

$$S_1(z) \equiv \sum_{j \geq \alpha} \left(\frac{C}{2\pi}\right)^{j-1} |a_j| z^{j-2}, \tag{3.13}$$

$$S_2(z) \equiv \sum_{j \geq \alpha} \left(\frac{C}{2\pi}\right)^{j-1} j|a_j| z^{j-2}. \tag{3.14}$$

Note que, como ρ é o raio de convergência de $F(u)$, então o raio de convergência dessas somas é $(2\pi\rho)/C$. Iremos portanto a partir de agora considerar apenas aquelas funções u tais que $|u(x,t)| < \rho_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $t \in [1, L]$, sendo

$$\rho_0 \equiv \min\left\{\frac{\rho}{2}, \frac{\pi\rho}{C}\right\}. \tag{3.15}$$

Pela Observação 3.1 é suficiente tomarmos o dado inicial f tal que

$$\|f\| < [2C_q(1+\sqrt{s(L)})]^{-1}\rho_0. \tag{3.16}$$

3.3 Prova do Lema 3.1

Nessa seção iremos provar que dados $L, q > 1$, $p > 0$ e $\lambda \in [-1, 1]$, existe $\varepsilon' = \varepsilon'(L, q, F, c) > 0$ tal que se $f \in \mathcal{B}_q$ e $\|f\| < \varepsilon'$, então $\|N(u)\|_L < \|f\|$ para toda $u \in B_f$.

Considere então o operador N definido por (3.5). Tomando a Transformada de Fourier de $N(u)$, se $\varphi(\tau) \equiv s(t) - s(t-\tau)$, obtemos:

$$\widehat{N(u)}(w,t) = \lambda \sum_{j \geq \alpha} a_j \int_0^{t-1} e^{-\varphi(\tau) w^2} \widehat{u^j}(w, t-\tau) d\tau.$$

Escrevendo $\widehat{u^j}$ como convoluções de $\hat{u}$ (veja Lema A.3), cada termo na soma acima é da forma:

$$\frac{a_j}{(2\pi)^{j-1}} \int_0^{t-1} d\tau e^{-\varphi(\tau) w^2} \int_{\mathbb{R}^{j-1}} \hat{u}(w-p_1)\hat{u}(p_1-p_2)\cdots\hat{u}(p_{j-1}) dp_1 \cdots dp_{j-1}, \tag{3.17}$$

em que omitimos por simplicidade de notação a dependência em $t-\tau$ de $\hat{u}$. Como podemos limitar superiormente o valor absoluto de $\hat{u}$ por $\|u\|_L/(1+|w|^q)$, então, uma cota superior para (3.17) é

$$\frac{|a_j|}{(2\pi)^{j-1}} \|u\|_L^j \int_0^{t-1} d\tau e^{-\varphi(\tau) w^2} \int_{\mathbb{R}^{j-1}} \frac{1}{1+|w-p_1|^q} \cdots \frac{1}{1+|p_{j-1}|^q} dp_1 \cdots dp_{j-1}.$$

Agora as integrais em $\mathbb{R}$ não dependem mais de τ e, como $\varphi(\tau)$ é positivo (pois $s(t)$ é crescente), podemos limitar a exponencial pela unidade, obtendo $t-1$ como cota superior para a integral com respeito a τ. Logo, usando a Proposição 3.3 $j-1$ vezes,

$$|\widehat{N(u)}(w,t)| \leq |\lambda| \frac{(t-1)}{1+|w|^q} S_0(\|u\|_L), \tag{3.18}$$

sendo S_0 a soma definida em (3.12).

Da mesma maneira, usando ainda que $|\hat{u}'(w,t)| \leq \|u\|/(1+|w|^q)$, então a derivada de (3.17) com respeito a w pode ser limitada superiormente por

$$(|2J(w,t)| + t - 1) \frac{|a_j|}{(2\pi)^{j-1}} \|u\|_L^j \int_{\mathbb{R}^{j-1}} \frac{1}{1+|w-p_1|^q} \cdots \frac{1}{1+|p_{j-1}|^q} dp_1 \cdots dp_{j-1},$$

em que $J(w,t)$ é a função definida na Proposição 3.2. Usando as Proposições 3.2 e 3.3, concluímos que

$$\left| \widehat{N(u)}'(w,t) \right| \leq |\lambda| \frac{(2\sqrt{s(t)}+1)}{1+|w|^q} (t-1) S_0(\|u\|_L). \tag{3.19}$$

Observamos agora que, da hipótese $(H3)$, como α é inteiro, então α depende do expoente p da seguinte maneira

$$\alpha \equiv \alpha(p) \geq \begin{cases} 3, & \text{se } 0 < p \leq 1, \\ 2, & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

Assim, $\alpha \geq 2$ para todo $p > 0$ e usando esse fato juntamente com as estimativas (3.18) e (3.19) e a monotonicidade de $s(t)$, temos

$$\|N(u)\|_L \;\leq\; 2|\lambda|(\sqrt{s(L)}+1)(L-1)\|u\|_L^2 \sum_{j\geq\alpha} \left(\frac{C}{2\pi}\right)^{j-1} |a_j|\|u\|_L^{j-2}.$$

Como estamos considerando apenas funções u tais que $\|u\|_L < \rho_0$ e como os termos da soma acima são todos positivos, podemos limitá-la superiormente pelo seu valor quando $\|u\|_L = \rho_0$ e usar a Proposição 3.1 para obter

$$\|N(u)\|_L \leq C'|\lambda|\|f\|^2, \tag{3.20}$$

sendo

$$C' = C'(L, q, F, c) = 8(\sqrt{s(L)}+1)^3(L-1)S_1(\rho_0). \tag{3.21}$$

Finalmente, como $|\lambda| \leq 1$, usando (3.16) e definindo

$$\varepsilon' \equiv \min\left\{{C'}^{-1}, [2C_q(1+\sqrt{s(L)})]^{-1}\rho_0\right\},$$

em que C' é dada por (3.21), concluímos que $\|N(u)\|_L < \|f\|$ sempre que $\|f\| < \varepsilon'$. ∎

3.4 Prova do Lema 3.2

Provaremos agora que, dados $L, q > 1$, $p > 0$ e $\lambda \in [-1, 1]$, existe $\varepsilon'' = \varepsilon''(L, q, F, c) > 0$ tal que se $f \in \mathcal{B}_q$ e $\|f\| < \varepsilon''$, então $\|N(u) - N(v)\|_L < \frac{1}{2}\|u - v\|_L$, para todas as funções $u, v \in B_f$.

Considere então funções u e v tais que $\|u\|_L < \rho_0$ e $\|v\|_L < \rho_0$. Logo,

$$[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)}](w,t) = \lambda \sum_{j\geq\alpha} a_j \int_0^{t-1} d\tau e^{-\varphi(\tau)w^2}[\widehat{u^j} - \widehat{v^j}](w, t-\tau) \equiv \lambda \sum_{j\geq\alpha} D_j,$$

em que D_j pode ser escrito como

$$D_j = \frac{a_j}{(2\pi)^{j-1}} \int_0^{t-1} d\tau e^{-\varphi(\tau)w^2} [(\hat{u} * \cdots * \hat{u}) - (\hat{v} * \cdots * \hat{v})](w, \tau).$$

Aqui temos $j-1$ convoluções de $\hat{u}$ e $j-1$ de $\hat{v}$. Assim, adicionamos e subtraímos no integrando o termo $\hat{v} * \hat{u} * \cdots * \hat{u}$, com $j-2$ convoluções de $\hat{u}$, para obter

$$\begin{aligned} D_j &= \frac{a_j}{(2\pi)^{j-1}} \int_0^{t-1} e^{-\varphi(\tau)w^2} [(\hat{u} - \hat{v}) * \hat{u} * \cdots * \hat{u}](w, \tau) d\tau + \\ &+ \frac{a_j}{(2\pi)^{j-1}} \int_0^{t-1} e^{-\varphi(\tau)w^2} [\hat{v} * (\hat{u} * \cdots * \hat{u} - \hat{v} * \cdots * \hat{v})](w, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

A primeira integral pode ser limitada de maneira semelhante àquela feita no na prova do Lema 3.1, por

$$\frac{(t-1)}{1+|w|^q} \left(\frac{C}{2\pi}\right)^{j-1} |a_j| \|u\|_L^{j-1} \|u - v\|_L.$$

Para estimar a segunda integral, a idéia consiste em reescrevê-la, após adicionar e subtrair termos apropriados, como uma soma de duas integrais. A primeira pode ser limitada superiormente como acima e a outra é novamente separada em duas. Esse procedimento termina após $j-1$ passos, quando obtemos

$$D_j \leq \frac{(t-1)}{1+|w|^q} \cdot \left(\frac{C}{2\pi}\right)^{j-1} |a_j| \|u - v\|_L \left(\|u\|_L^{j-1} + \|v\|_L \|u\|_L^{j-2} + \cdots + \|v\|_L^{j-1}\right).$$

Observe que como as normas de u e v em $B^{(L)}$ são menores que ρ_0, a soma sobre $j \geq \alpha$ do lado direito da desigualdade acima é convergente. Além disso, podemos fatorar $\|u\|_L$ ou $\|v\|_L$ e a soma restante continua convergente. Similarmente, cada termo da derivada com respeito a w da diferença $N(u) - N(v)$ pode ser escrito como uma soma de duas integrais, que limitamos usando esse mesmo procedimento. Com isso, obtemos

$$\|N(u) - N(v)\|_L \leq C''|\lambda| \|f\| \|u - v\|_L, \tag{3.22}$$

em que

$$C'' = C''(L, q, F, c) = 4(\sqrt{s(L)} + 1)^2 (L-1) S_2(\rho_0). \tag{3.23}$$

Como $|\lambda| \leq 1$, definindo

$$\varepsilon'' \equiv \min\left\{(2C'')^{-1}, [2C_q(1 + \sqrt{s(L)})]^{-1} \rho_0\right\},$$

sendo C'' dada por (3.23), o lema está provado se tomarmos $\|f\| < \varepsilon''$. ∎

Observação 3.2 *Note que* $S_2(\rho_0) > S_1(\rho_0)$*. Logo, definindo*

$$C_0 \equiv 8(\sqrt{s(L)} + 1)^3 (L - 1) S_2(\rho_0), \tag{3.24}$$

é suficiente considerar ε *no Teorema 3.1 definido por*

$$\varepsilon \equiv \min\{(2C_0)^{-1}, [2C_q(\sqrt{s(L)} + 1)]^{-1}\rho_0\}. \tag{3.25}$$

Além disso, note que nas demonstrações dos Lemas 3.1 e 3.2 só utilizamos como hipótese sobre α que $\alpha \geq 2$. Assim, o Teorema 3.1 de existência e unicidade local da solução do PVI (1.1) é válido considerando-se uma hipótese mais fraca sobre α: $\alpha \geq 2$ ao invés de $\alpha > (p+3)/(p+1)$, como enunciado em $(H3)$. Entretanto, $(H3)$ será necessária para a obtenção do comportamento assintótico da solução de (1.1) e, portanto, para a prova do Teorema 1.1.

Capítulo 4

Existência Global, Unicidade e o Comportamento Assintótico

Segue do Teorema 3.1 que, dado $L > 1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que o PVI (1.1) tem uma única solução u em B_f para toda $f \in \mathcal{B}_q$ com $\|f\| < \varepsilon$. Assim,

$$f_1(x) \equiv L^{\frac{(p+1)}{2}} u\left(L^{\frac{(p+1)}{2}} x, L\right) \tag{4.1}$$

é um elemento bem definido do espaço $\mathcal{B}_q$. De forma análoga ao que foi feito no Capítulo 2, o lado direito de (4.1) definirá novamente um operador, que denotaremos por $R_{L,0}$, agindo na bola $\{f \in \mathcal{B}_q : \|f\| < \varepsilon\}$, que leva o dado inicial f em f_1. Chamamos $R_{L,0}$ o *Operador Grupo de Renormalização* (RG) associado ao problema (1.1).

O objetivo desse capítulo é utilizar esse operador para, através de suas iterações, primeiramente estender a existência da solução do problema (1.1) para todo tempo $t > 1$ e, em seguida, obter o comportamento assintótico dessa solução.

Como descrevemos anteriormente, o método do RG para equações parciais consiste em relacionar o comportamento assintótico das soluções de EDPs com a existência e estabilidade de pontos fixos de um operador RG apropriado e se baseia na redução do problema do tempo infinito à análise de uma seqüência de problemas de tempo finito (os problemas renormalizados), obtidos por iterações do operador RG. Assim, para dar rigor a esse processo é preciso provar que cada problema renormalizado possui uma solução única. Na Seção 4.1 provaremos que, se os dados iniciais de cada problema renormalizado forem suficientemente pequenos, então, cada PVI possui uma única solução.

A etapa da *renormalização*, feita na Seção 4.2, será importante para obter condições sobre o dado inicial do problema (1.1) suficientes para garantir que os dados iniciais dos problemas renormalizados sejam pequenos de forma que haja uma solução única para cada PVI e garanta a possibilidade de iteração do método.

Na Seção 4.3, utilizaremos todos esses resultados para, primeiramente, obter uma solução única para o problema (1.1), definida para todo $t > 1$, e em seguida obter o comportamento assintótico desta solução, provando finalmente o Teorema 1.1.

4.1 Problemas Renormalizados e a Existência e Unicidade de suas Soluções

Como no Capítulo 2, faremos primeiramente uma descrição heurística do argumento, que motivará a definição do operador RG. No presente caso, assumiremos que a solução u do PVI (1.1) é globalmente bem definida.

Fixado $L > 1$, considere a seqüência $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por (2.7), com $t \in [1, L]$ e u solução de (1.1). Agora u_n satisfaz o seguinte PVI renormalizado:

$$\begin{cases} \partial_t u_n = c_n(t)\partial_x^2 u_n + \lambda_n F_{L,n}(u_n), & t \in [1, L],\ x \in \mathbb{R}, \\ u_n(x, 1) = f_n(x), \end{cases} \tag{4.2}$$

em que $c_n(t)$ é dado por (2.9), $\lambda_n = L^{n[p+3-\alpha(p+1)]/2}\lambda$,

$$F_{L,n}(u_n) = \sum_{j\geq\alpha} a_j L^{n(\alpha-j)(p+1)/2} u_n^j,$$

e f_n é novamente definida por (2.10), sendo u solução de (1.1).

Comparando (2.10) e (1.13), verificamos como no caso linear, que o problema de se obter o comportamento assintótico (1.13) se reduz à prova da convergência da seqüência $\{f_n\}$. Assim, seja $g \in \mathcal{B}_q$ e dado $n \geq 0$ assuma que o PVI (4.2) com dado inicial g tem solução única u_n.

Então, reescalone $u_n(\cdot, L)$ de forma a obter

$$(R_{L,n}g)(x) \equiv L^{(p+1)/2} u_n \left(L^{(p+1)/2} x, L \right), \tag{4.3}$$

o que define o operador RG. Novamente o índice n na definição acima se deve ao fato de que o operador depende da equação de evolução considerada. Segue ainda das definições anteriores que, assim como no caso linear, $\{f_n\}$ satisfaz

$$f_0 = u(\cdot, 1) \qquad \text{e} \qquad f_{n+1} = R_{L,n} f_n. \tag{4.4}$$

Nosso objetivo de agora em diante será provar que, sob as hipóteses $(H1)-(H3)$, se o dado inicial for suficientemente pequeno, o problema (4.2) tem solução única para cada n de forma a garantir que o método iterativo do RG possa ser aplicado para fornecer o comportamento assintótico da solução do PVI (1.1).

No Lema 4.1 iremos proceder como na prova do Teorema 3.1 para obter a existência e unicidade locais das soluções de cada problema (4.2). Para enunciar o lema, dado $L > 1$ considere o espaço $B^{(L)}$ definido por (3.1) e, se f_n é o dado inicial de (4.2), defina

$$B_{f_n} \equiv \{u_n \in B^{(L)} : \|u_n - u_{f_n}\|_L \leq \|f_n\|\}$$

e o operador

$$T_n(u_n) \equiv u_{f_n} + N_n(u_n),$$

sendo u_{f_n} a solução de (4.2) com $\lambda_n = 0$ e

$$N_n(u_n)(x,t) = \lambda_n \int_0^{t-1} \int \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4[s_n(t)-s_n(t-\tau)]}}}{\sqrt{4\pi[s_n(t) - s_n(t-\tau)]}} F_{L,n}(u_n(y, t-\tau)) dy d\tau, \tag{4.5}$$

em que

$$s_n(t) = \int_1^t c_n(v) dv = \frac{t^{p+1} - 1}{p+1} + r_n(t).$$

Além disso, lembrando que ρ_0 é dado por (3.15), defina a constante C_n por

$$C_n \equiv 8(\sqrt{s_n(L)} + 1)^3 (L-1) S_2(\rho_0), \tag{4.6}$$

em que $S_2(\rho_0)$ é a soma dada por (3.14), com $z = \rho_0$.

Lema 4.1 *Dados $n \in \mathbb{N}$ e $L > 1$, existe $\varepsilon_n > 0$ tal que, se $\|f_n\| < \varepsilon_n$, então o PVI (4.2) possui uma única solução $u_n(x,t)$ em B_{f_n}. Além disso, f_{n+1} dado por (4.4) é um elemento bem definido em $\mathcal{B}_q$.*

Prova: Devemos provar que o operador T_n é uma contração em B_{f_n}, que leva a bola nela mesma e, dessa forma, possui um único ponto fixo, o que prova que existe uma única solução u_n em B_{f_n}. Analogamente à prova do Lema 3.1 em que obtivemos as desigualdades (3.20) e (3.22), usando o fato de que $L > 1$ e as definições de $F_{L,n}$ e $s_n(t)$ obtemos,

$$\|N_n(u_n)\|_L \leq C_n L^{n[p+3-\alpha(p+1)]/2} \|f_n\|^2 \tag{4.7}$$

e

$$\|N_n(u_n) - N_n(v_n)\| \leq C_n L^{n[p+3-\alpha(p+1)]/2} \|f_n\| \|u_n - v_n\|,$$

sendo C_n dada por (4.6). A condição para que u_n esteja na região de analiticidade de $F_{L,n}$ é agora impor que

$$\|f_n\| < [2C_q(1 + \sqrt{s_n(L)})]^{-1} \rho_0.$$

Como $p + 3 - \alpha(p+1) < 0$ e $L > 1$, definindo

$$\varepsilon_n \equiv \min\left\{(2C_n)^{-1}, [2C_q(1 + \sqrt{s_n(L)})]^{-1} \rho_0\right\}, \tag{4.8}$$

se $\|f_n\| < \varepsilon_n$, obtemos $\|N_n(u_n)\|_L < \|f_n\|$ e $\|N_n(u_n) - N_n(v_n)\| < \frac{1}{2}\|u_n - v_n\|_L$ para todas as funções $u_n, v_n \in \mathcal{B}_{f_n}$. Isso prova que o PVI (4.2) possui uma única solução $u_n(x,t)$ em B_{f_n} e, portanto, $f_{n+1} \equiv L^{(p+1)/2} u_n\left(L^{(p+1)/2} x, L\right)$ está bem definida. ∎

Observação 4.1 *Note que se $n = 0$ e $f_0 \equiv f$, o Lema 4.1 se reduz ao Teorema 3.1. Além disso, como $s_0(t) \equiv s(t)$, C_0 dada por (4.6) é a mesma constante C_0 definida em (3.24). Logo, $\varepsilon_0 = \varepsilon$ com ε dado em (3.25).*

4.2 Renormalização

Provamos que se $\|f_n\| < \varepsilon_n$, então $R_{L,n}f_n$ está bem definido. Para simplificar a notação, defina $\nu_n(x) \equiv N_n(u_n)(x, L)$ (veja a definição (4.5), sendo $N_0(u) = N(u)$). Então, a solução do PVI (4.2) no tempo $t = L$ pode ser escrita como $u_n(x, L) = u_{f_n}(x, L) + \nu_n(x)$ e temos

$$(R_{L,n}f_n)(x) = R^0_{L,n}f_n(x) + L^{(p+1)/2}\nu_n(L^{(p+1)/2}x), \tag{4.9}$$

em que $R^0_{L,n}$ é o operador RG linear, definido por (2.11). Observe que (4.9) separa o operador RG em duas partes (linear e não linear). Vê-se daí a importância da análise linear (e portanto do Capítulo 2) para uma boa compreensão do problema não linear. Nosso objetivo será provar que a parte não-linear, sob a hipótese $(H3)$, não contribui para a determinação do perfil da solução no regime assintótico.

A análise envolve a decomposição do dado inicial em duas parcelas: uma na direção do ponto fixo assintótico do operador RG e outra em uma direção que será *irrelevante no sentido do RG*. Isto é, quando aplicarmos o RG ao dado inicial, a componente irrelevante será contraída para valores suficientemente grandes de L. No Lema 4.2 iremos decompor f_n dado por (4.4) e obter estimativas que serão utilizadas posteriormente para provar o Teorema 1.1. Primeiramente iremos assumir que, dado $k \in \mathbb{N}$, f_n está bem definido para todo $n = 0, 1, \ldots, k$, o que é garantido pelo Lema 4.1 desde que $\|f_n\| < \varepsilon_n$ para todo $n = 0, 1, \ldots, k-1$. Posteriormente, no Lema 4.4 provaremos que se f_0 for suficientemente pequeno, a seqüência $\{f_n\}$ dada por (4.4) está bem definida.

Nos próximos lemas, iremos nos referir às constantes $C_{p,q}$, L_1, $K_{p,q}$, C e C_n dadas respectivamente por (2.22), (2.27), (2.29), (2.34) e (4.6).

Lema 4.2 (Lema da Renormalização) *Dados $k \in \mathbb{N}$ e $L > L_1$, suponha que f_n dada por (4.4) esteja bem definida para $n = 0, 1, \ldots, k+1$. Então existem constantes A_n e funções $g_n \in \mathcal{B}_q$ com $\widehat{g_n}(0) = 0$ tais que, para $n = 0, 1, \ldots, k$,*

$$f_0 = A_0 f_p^* + g_0, \quad f_{n+1} = A_{n+1} R^0_{L^{n+1}} f_p^* + g_{n+1}, \tag{4.10}$$

$$|A_{n+1} - A_n| \leq C_n L^{n[p+3-\alpha(p+1)]/2} \|f_n\|^2 \tag{4.11}$$

e

$$\|g_{n+1}\| \leq CL^{-(p+1)/2}\|g_n\| + \left(L^{(p+1)q/2} + K_{p,q}\right) C_n L^{n[p+3-\alpha(p+1)]/2}\|f_n\|^2. \tag{4.12}$$

Prova: Primeiramente iremos provar (4.10) de maneira indutiva. Defina g_0 pela relação $f_0 = A_0 f_p^* + g_0$, com $A_0 = \widehat{f_0}(0)$ e, como $\widehat{f_p^*}(0) = 1$, teremos $\widehat{g_0}(0) = 0$. Por hipótese, f_1 está bem definida por $R_{L,0}f_0$ e usando a representação (4.9) e a decomposição de f_0 acima, podemos escrever $f_1 = A_1 R_L^0 f_p^* + g_1$, em que

$$A_1 = A_0 + \widehat{\nu_0}(0)$$

e

$$g_1(x) = R_L^0 g_0(x) + L^{(p+1)/2}\nu_0(L^{(p+1)/2}x) - \widehat{\nu_0}(0) R_L^0 f_p^*(x).$$

Segue de (2.17) e de (2.23) que $\mathcal{F}(R_L^0 g_0)(0) = 0$ e $\mathcal{F}(R_L^0 f_p^*)(0) = 1$. Além disso, usando o Lema A.4, $\widehat{g_1}(0) = 0$, o que prova (4.10) para $n = 0$.

Agora suponha válida (4.10) com $n = 0, \ldots, j-1$, sendo $j \leq k$. Provaremos que esta estimativa ainda vale quando $n = j$. Usando (4.10) com $n = j-1$, a representação (4.9) e a propriedade de semi-grupo do operador RG linear, obtemos

$$f_{j+1}(x) = A_j R_{L^{j+1}}^0 f_p^*(x) + R_{L,j}^0 g_j(x) + L^{(p+1)/2}\nu_j(L^{(p+1)/2}x). \tag{4.13}$$

Definindo

$$A_{j+1} \equiv A_j + \widehat{\nu_j}(0) \tag{4.14}$$

e

$$g_{j+1}(x) \equiv R_{L,j}^0 g_j(x) + L^{(p+1)/2}\nu_j(L^{(p+1)/2}x) - \widehat{\nu_j}(0) R_{L^{j+1}}^0 f_p^*(x), \tag{4.15}$$

podemos reescrever (4.13) como $f_{j+1} = A_{j+1} R_{L^{j+1}}^0 f_p^* + g_{j+1}$. Pela hipótese de indução, $\widehat{g_j}(0) = 0$ e assim, da definição (4.15), como as Transformadas de Fourier de $R_{L,j}^0 g_j$ e $R_{L^{j+1}}^0 f_p^*$ na origem são respectivamente iguais a $\widehat{g_j}(0)$ e $\widehat{f_p^*}(0)$, usando novamente o Lema A.4 obtemos $\widehat{g_{j+1}}(0) = 0$, o que prova (4.10) para $n = 0, 1, \ldots, k$.

Lembrando que $\nu_n(x) \equiv N_n(u)(x, L)$ e como (4.7) vale para todo n, usando a definição (4.14) obtemos (4.11) para $n = 0, 1, \ldots, k$. Através de um cálculo semelhante àquele feito na prova do

Lema 3.1, obtemos

$$\|L^{(p+1)/2}\nu_n(L^{(p+1)/2}\cdot)\| \leq L^{(p+1)q/2}C_nL^{n[p+3-\alpha(p+1)]/2}\|f_n\|^2$$

e usando o Lema 2.2 e a desigualdade triangular,

$$\|L^{(p+1)/2}\nu_n(L^{(p+1)/2}\cdot) - \hat{\nu_n}(0)R^0_{L^{n+1}}f^*_p\| \leq (L^{(p+1)q/2} + K_{p,q})C_nL^{n[p+3-\alpha(p+1)]/2}\|f_n\|^2.$$

Como $\widehat{g_n}(0) = 0$ e $L > L_1$, da definição (4.15) e do Lema 2.3, obtemos (4.12) para todo $n = 0, 1, \ldots, k$, o que conclui a prova. ∎

Observação 4.2 *Segue de (2.28) que sob as hipóteses do Lema 4.2, as constantes C_n são uniformemente limitadas. De fato, definindo*

$$K \equiv 8(L-1)\left(\sqrt{\frac{3L^{p+1}}{2(p+1)}}+1\right)^3\left(L^{(p+1)q/2} + K_{p,q}\right)S_2(\rho_0), \tag{4.16}$$

então $C_n \leq K$, para todo n e podemos ainda reescrever a desigualdade (4.12) como

$$\|g_{n+1}\| \leq CL^{-(p+1)/2}\|g_n\| + KL^{n[p+3-\alpha(p+1)]/2}\|f_n\|^2. \tag{4.17}$$

As estimativas obtidas no Lema 4.2 serão usadas para provar o Teorema 1.1 da seguinte maneira: (4.11) irá garantir que a seqüência (A_n) é convergente e (4.17) será usada para provar que a componente g_n diminui à medida que n aumenta. Esse fato é devido à definição de α (veja hipótese $(H3)$) ou, em outras palavras devido à perturbação não linear F do problema (1.1) ser irrelevante. Entretanto, antes de aplicarmos o Lema 4.2, temos que provar que o dado inicial de cada PVI (4.2) é pequeno o suficiente e, para isso, definiremos de forma recursiva uma seqüência (G_n) tal que, para todo n, $\|f_n\| \leq G_n\|f_0\|$. No Lema 4.3 provaremos que, sob certas condições, essa seqüência é limitada.

Dado $\delta \in (0,1)$, seja

$$L_\delta \equiv \max\{L_1, [2C(1+C_{p,q})]^{2/(p+\delta)}\} \tag{4.18}$$

e para $L > L_\delta$, defina

$$G \equiv 1 + K_{p,q}\sum_{j=0}^{\infty} L^{j(\delta-1)/2} < \infty, \tag{4.19}$$

$G_1 \equiv L^{(\delta-1)/2} + K_{p,q}(1 + C_0\|f\|)$ e G_{n+1}, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, pela relação:

$$G_{n+1} \equiv L^{(\delta-1)(n+1)/2} + K_{p,q}\left(1 + C_0\|f\| + \sum_{j=1}^{n} C_j G_j^2 L^{j[p+3-\alpha(p+1)]/2}\|f\|\right),$$

em que cada C_j, para $j = 0, 1, 2, \ldots$, é dada por (4.6), com $n = j$.

Lema 4.3 *Seja $\delta \in (0,1)$ tal que $1 - \delta < \alpha(p+1) - (p+3)$ e tome $L > L_\delta$, sendo L_δ dado por (4.18). Além disso, tome K e G dadas por (4.16) e (4.19), respectivamente, e suponha f tal que*

$$KG^2\|f\| < \frac{1}{2L^{(1-\delta)/2}}. \tag{4.20}$$

Então $G_{n+1} < G$ para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Prova: Como $L > 1$ e $G > 1$, é conseqüência direta do fato de $C_0 \leq K$ e da condição (4.20) que $G_1 < G$. Agora suponha $G_{n+1} < G$ para todo $n = 1, 2, \ldots, k-1$. Da definição de G_{n+1}, usando a hipótese de indução e como $C_n \leq K$ para todo n,

$$G_{k+1} \leq L^{(\delta-1)(k+1)/2} + K_{p,q}\left(1 + K\|f\| + KG^2\|f\| \sum_{j=1}^{k} L^{j[p+3-\alpha(p+1)]/2}\right).$$

Da condição (4.20), como $L > 1$ e $\delta - 1 > p + 3 - \alpha(p+1)$, temos

$$G_{k+1} \leq 1 + K_{p,q}\left(1 + L^{(\delta-1)/2} + L^{\delta-1} + \cdots + L^{(k+1)(\delta-1)/2}\right) < G,$$

o que finaliza a prova. ∎

No Lema 4.4 iremos obter estimativas para as soluções reescalonadas do PVI (4.2). Em particular, iremos definir $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que se o dado inicial f do problema (1.1) pertencer à bola de centro na origem e raio $\bar{\varepsilon}$, então os dados iniciais f_n dos problemas renormalizados serão suficientemente pequenos de forma a garantir uma solução única para cada PVI renormalizado e, posteriormente, uma única solução global do PVI (1.1). Além disso, lembrando da decomposição do dado inicial $f_n = A_n R^0_{L^n} f^*_p + g_n$ dada no Lema 4.2, provaremos que, sob certas hipóteses, a componente g_n vai para zero quando $n \to \infty$. Esse resultado será utilizado para a obtenção do comportamento assintótico no Teorema 4.1.

Antes de enunciar o lema, note que segue de (2.28) que se $L > L_1$ e ε_n é dado por (4.8) e

$$\sigma \equiv \min\left\{(2K)^{-1}, \left[2C_q\left(1+\sqrt{\frac{3L^{p+1}}{2(p+1)}}\right)\right]^{-1}\rho_0\right\}, \tag{4.21}$$

então $\sigma < \varepsilon_n$ para todo n. Observe que esse é um fato crucial para a obtenção do resultado. Isso porque é construída a seqüência de raios ε_n das bolas em torno da origem para as quais, se o dado inicial de cada problema de valor inicial pertencer a essa bola, então cada PVI possui uma única solução. Se essa seqüência (ε_n) convergisse para zero, então não seria possível tomar o dado inicial f do PVI (1.1) suficientemente pequeno, de forma que todos os PVIs renormalizados tivessem uma única solução e com isso não conseguiríamos obter uma solução única para o PVI (1.1), definida para todo $t > 1$.

No próximo lema iremos nos referir à K, L_δ, G e σ dados, respectivamente por (4.16), (4.18), (4.19) e (4.21). Além disso, lembramos que f_0 definida por (4.4) é $u(\cdot, 1) = f$, o dado inicial do PVI (1.1).

Lema 4.4 *Dados $\delta \in (0,1)$ tal que $1-\delta < \alpha(p+1)-(p+3)$ e $L > L_\delta$, existe $\overline{\varepsilon} > 0$ tal que, se $\|f_0\| < \overline{\varepsilon}$, então f_n dada por (4.4) está bem definida para todo $n \geq 1$,*

$$\|f_n\| \leq G_n\|f_0\| \tag{4.22}$$

e se g_n é dada pela decomposição (4.10), então,

$$\|g_n\| \leq \frac{\|f_0\|}{L^{n(1-\delta)/2}}. \tag{4.23}$$

Em particular, $\|f_n\| < \varepsilon_n$, para todo $n \geq 1$.

Prova: A prova é feita por indução em n. Primeiramente, defina

$$\overline{\varepsilon} \equiv \min\left\{\sigma G^{-1}, [2KG^2L^{(1-\delta)/2}]^{-1}\right\}. \tag{4.24}$$

Como $G > 1$, temos $\|f_0\| < \sigma < \varepsilon_0$ e segue dos Lemas 4.1 e 4.2, que f_1 está bem definida por $f_1 = A_1R_L^0 f_p^* + g_1$ e g_1 satisfaz (4.17) com $n = 0$. Portanto, como $f_0 = A_0 f_p^* + g_0$, obtemos

$$\|g_1\| \leq [C(1+C_{p,q})L^{-(p+1)/2} + K\|f_0\|]\|f_0\|.$$

Além disso, como $L > L_\delta$, então $2C(1+C_{p,q})L^{-(p+1)/2} < L^{(\delta-1)/2}$ e como $G > 1$ e $\|f_0\| < \overline{\varepsilon}$, então $2K\|f_0\| < L^{(\delta-1)/2}$. Logo,

$$\|g_1\| \leq L^{(\delta-1)/2}\|f_0\|.$$

Usando agora a decomposição (4.10) e a estimativa (4.11) com $n = 0$, aplicando a desigualdade anterior e o Lema 2.2,

$$\|f_1\| \leq \left[(1 + C_0\|f_0\|)K_{p,q} + L^{(\delta-1)/2}\right]\|f_0\| = G_1\|f_0\|,$$

o que prova o Lema para $n = 1$.

Agora suponha que exista $k > 1$ tal que (4.22) e (4.23) sejam válidas para todo $n = 1, 2, \ldots, k$. Provaremos que essas estimativas também são verdadeiras para $n = k+1$. Da hipótese de indução e do Lema 4.3, como $\|f_0\| < \overline{\varepsilon}$, temos $\|f_n\| \leq G\|f_0\| < \varepsilon_n$, para todo $n = 1, 2, \ldots, k$. Portanto, podemos aplicar o Lema 4.2 para obter a estimativa (4.17) com $n = k$. Então, usando (4.22) e (4.23) com $n = k$, obtemos:

$$\|g_{k+1}\| \leq L^{(\delta-1)(k+1)/2}\left[\frac{C}{L^{(p+\delta)/2}} + \frac{L^{k[p+3-\alpha(p+1)]/2}}{L^{(\delta-1)(k+1)/2}}KG_k^2\|f_0\|\right]\|f_0\|.$$

Como $C_{p,q} > 0$ e $L > L_\delta$, então $CL^{-(p+\delta)/2} < 1/2$ e como $\|f_0\| < \overline{\varepsilon}$, usando que $\delta - 1 > p + 3 - \alpha(p+1)$, segue do Lema 4.3 a estimativa (4.23) para $n = k+1$. Pelo Lema 4.2, f_{k+1} está bem definida e pode ser representada por (4.10), com $n = k$. Logo, usando a desigualdade triangular e o Lema 2.2,

$$\|f_{k+1}\| \quad \leq \quad \frac{\|f_0\|}{L^{(1-\delta)(k+1)/2}} + K_{p,q}\left(|A_0| + \sum_{j=0}^{k}|A_{j+1} - A_j|\right).$$

Finalmente, como $|A_0| \leq \|f_0\|$ e $C_n \leq K$, para todo n, aplicamos as estimativas (4.11) e (4.22) com $n = 0, 1, 2, \ldots, k$ e usamos o Lema 4.3, para obter (4.22) com $n = k+1$. Em particular, $\|f_{k+1}\| < G\|f_0\| < \varepsilon_{k+1}$, o que finaliza a prova. ∎

4.3 Existência Global e o Comportamento Assintótico

Provamos anteriormente que, se $\|f_0\| < \overline{\varepsilon}$, então cada PVI (4.2) possui uma única solução u_n em B_{f_n}. Agora iremos provar que existe uma maneira de "unir" essas soluções de forma a obter uma única solução global para o PVI (1.1). Para fazer isso, primeiramente estenderemos a definição (3.1) do espaço $B^{(L)}$ considerando o seguinte espaço:

$$B^{(L^{n+1})} \equiv \{u : \mathbb{R} \times [L^n, L^{n+1}] \to \mathbb{R} \mid u(\cdot, t) \in \mathcal{B}_q, \forall t \in [L^n, L^{n+1}]\} \tag{4.25}$$

com a norma

$$\|u\|_{L^{n+1}} = \sup_{t \in [L^n, L^{n+1}]} \|u(\cdot, t)\|.$$

Agora defina $\{h_n\}$ por

$$h_0 \equiv f \quad \text{e} \quad h_{n+1} \equiv L^{-n(p+1)/2} u_n \left(L^{-n(p+1)/2} \cdot, L\right) \tag{4.26}$$

e seja u_{h_n} solução do PVI (4.2) com $\lambda_n = 0$ e dado inicial h_n. Defina

$$B_{h_n} = \{u \in B^{(L^{n+1})} : \|u - u_{h_n}\|_{L^{n+1}} \leq \|h_n\|\}. \tag{4.27}$$

Note que $B_{h_0} = B_f$. Finalmente, lembrando que

$$B^{(\infty)} \equiv \{u : \mathbb{R} \times [1, +\infty) \to \mathbb{R} \mid u(\cdot, t) \in \mathcal{B}_q \text{ para todo } t \geq 1 \text{ e } \|u\|_\infty < \infty\},$$

sendo

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \geq 1} \|u(\cdot, t)\|,$$

defina

$$B \equiv \{u \in B^{(\infty)} : \|u - u_{h_n}\|_{L^{n+1}} \leq \|h_n\|, \forall n\}. \tag{4.28}$$

Corolário 4.1 *Sob as hipóteses do Lema 4.4, o PVI (1.1) possui uma única solução $u \in B$. Nesse caso, o operador Grupo de Renormalização definido por (4.9) possui a* propriedade de semi-grupo*:*

$$R_{L^n,0} f = R_{L,n-1} \circ \cdots \circ R_{L,1} \circ R_{L,0} f, \quad \forall n \geq 1. \tag{4.29}$$

Prova: Do Lema 4.4, como $\|f_0\| < \overline{\varepsilon}$, então $\|f_n\| < \varepsilon_n$ para todo n e usando o Lema 4.1, obtemos a existência e unicidade das soluções u_n de cada problema (4.2) em B_{f_n}. Agora defina

$$u(x,t) \equiv L^{-n(p+1)/2} u_n \left(L^{-n(p+1)/2} x, L^{-n} t\right), \quad \forall t \in [L^n, L^{n+1}]$$

e considere a seqüência $\{h_n\}$ definida por (4.26). Para $t \in [1, L]$, $u(x,t) = u_0(x,t)$ pertence a B_{h_0}. Se $t \in [L, L^2]$, então

$$u(x,t) = L^{-(p+1)/2} u_1 \left(L^{-(p+1)/2} x, L^{-1} t \right)$$

e assim, $u(x,L) = L^{-(p+1)/2} u_1 \left(L^{-(p+1)/2} x, 1 \right)$. Agora, lembrando que f_n é dada por (4.4), temos:

$$f_1(y) = u_1(y,1) = R_{L,0} f_0(y) = L^{(p+1)/2} u_0(L^{(p+1)/2} y, L).$$

Tome $y = L^{-(p+1)/2} x$ e $\tau = L^{-1} t$. Então, $u_1(y,\tau)$ é solução de (4.2) com $n = 1$ em B_{f_1} e

$$u(x,L) = L^{-(p+1)/2} L^{(p+1)/2} u_0(L^{(p+1)/2} L^{-(p+1)/2} x, L) = u_0(x,L) = h_1(x).$$

Obtemos daí que, para $t \in [L, L^2]$, $u(x,t) \in B_{h_1}$. Em geral, para cada n, temos

$$u(x, L^n) \equiv L^{-n(p+1)/2} u_n \left(L^{-n(p+1)/2} x, 1 \right)$$

e como

$$f_n(y) = u_n(y,1) = R_{L,n-1} f_{n-1}(y) = L^{(p+1)/2} u_{n-1}(L^{(p+1)/2} y, L),$$

então

$$u(x, L^n) \equiv L^{-(n-1)(p+1)/2} u_{n-1}(L^{-(n-1)(p+1)/2} x, L) = h_n(x)$$

e $u(x,t) \in B_{h_n}$ para $t \in [L^n, L^{n+1}]$.

Assim, para cada n, se $y = L^{-n(p+1)/2} x$ e $\tau = L^{-n} t$, então $u_n(y,\tau)$ é a solução única do PVI (4.2) em B_{f_n} e, portanto, segue daí que $u(x,t)$ é a solução única do PVI (1.1) em B.

A propriedade de semi-grupo é provada por indução. Da construção anterior, temos uma solução única $u \in B$ para o PVI (1.1), definida portanto para todo $t \geq 1$. Assim, $u_1(x,t) = L^{(p+1)/2} u(L^{(p+1)/2} x, Lt)$ é solução do PVI com dado inicial $L^{(p+1)/2} u(L^{(p+1)/2} x, L)$ e está bem definida para todo $t \in [1, L]$. Segue daí que

$$\begin{aligned} R_{L^2,0} f &= L^{p+1} u(L^{p+1} x, L^2) = L^{(p+1)/2} u_1(L^{(p+1)/2} x, L) = R_{L,1} u_1(x,1) \\ &= R_{L,1} L^{(p+1)/2} u(L^{(p+1)/2} x, L) = R_{L,1} \circ R_{L,0} f, \end{aligned}$$

o que prova o primeiro passo da indução. Suponha agora que (4.29) seja válida para $n = k$, com $k > 2$, isto é,

$$L^{k(p+1)/2}u(L^{k(p+1)/2}x, L^k) = R_{L,k-1} \circ \cdots \circ R_{L,1} \circ R_{L,0}f.$$

Então, como $u(x,t) \equiv L^{-k(p+1)/2}u_k\left(L^{-k(p+1)/2}x, L^{-k}t\right)$ para $t \in [L^k, L^{k+1}]$, usando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned} R_{L^{k+1},0}f &= L^{(k+1)(p+1)/2}u(L^{(k+1)(p+1)/2}x, L^{k+1}) = L^{(p+1)/2}u_k(L^{(p+1)/2}x, L) \\ &= R_{L,k}u_k(x,1) = R_{L,k}L^{k(p+1)/2}u(L^{k(p+1)/2}x, L^k) \\ &= R_{L,k} \circ R_{L,k-1} \circ \cdots \circ R_{L,1} \circ R_{L,0}f. \end{aligned}$$

∎

Já obtivemos todos os resultados necessários para provar o Teorema 1.1. O próximo teorema unirá esses resultados de forma a provar o limite (1.13) para o caso de uma seqüência $\{t_n\}$ da forma $t_n = L^n$. Em seguida, para provar finalmente o Teorema 1.1, bastará generalizar a prova para todo $t > 1$.

Teorema 4.1 *Sob as hipóteses do Lema 4.4, existe uma constante A tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|L^{n(p+1)/2}u(L^{n(p+1)/2}\cdot, L^n) - Af_p^*(\cdot)\| = 0.$$

Prova: Como $\|f_0\| < \bar{\varepsilon}$, segue do Corolário 4.1 que o PVI (1.1) possui uma única solução $u \in B$. Além disso, pelo Lema 4.2 e pela propriedade de semi-grupo, temos

$$f_n = A_n R^0_{L^n} f^*_p + g_n = L^{n(p+1)/2}u(L^{n(p+1)/2}x, L^n).$$

Logo, a estimativa (4.23) pode ser escrita como

$$\|f_n - A_n R^0_{L^n} f^*_p\| \leq L^{n(\delta-1)/2}\|f_0\|.$$

Como $C_n \leq K$ e $\|f_0\| < \bar{\varepsilon}$, usando o Lema 4.3 e as estimativas (4.11) e (4.22), obtemos, para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$|A_{n+1} - A_n| < \frac{L^{n[p+3-\alpha(p+1)]/2}}{2L^{(1-\delta)/2}}\|f_0\|$$

e portanto, como $\alpha > (p+3)/(p+1)$, (A_n) é seqüência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Seja $A \in \mathbb{R}$ o limite dessa seqüência. Então, $|A_n - A| = \lim_{k\to\infty} |A_n - A_{k+n}|$ e usando a Desigualdade Triangular e a estimativa acima,

$$\begin{aligned} |A_n - A| &\leq \lim_{k\to\infty} \left[|A_{k+n} - A_{k+n-1}| + |A_{k+n-1} - A_{k+n-2}| + \cdots + |A_{n+1} - A_n|\right] \\ &\leq \frac{\|f_0\|}{2L^{(1-\delta)/2}} \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k-1} L^{(n+j)[p+3-\alpha(p+1)]/2} \leq \frac{L^{n[p+3-\alpha(p+1)]/2}}{2L^{(1-\delta)/2}\left(1 - L^{[p+3-\alpha(p+1)]/2}\right)}\|f_0\|. \end{aligned}$$

Usando novamente a Desigualdade Triangular,

$$\begin{aligned} \|L^{n(p+1)/2}u(L^{n(p+1)/2}x, L^n) - Af_p^*\| &\leq \|L^{n(p+1)/2}u(L^{n(p+1)/2}x, L^n) - A_n R^0_{L^n} f_p^*\| + \\ &+ |A|\|R^0_{L^n} f_p^* - f_p^*\| + |A_n - A|\|R^0_{L^n} f_p^*\|. \end{aligned}$$

O lado direito da desigualdade acima pode então ser limitado superiormente, para todo $n > n_0$, usando (2.26) e o Lema 2.2 por

$$\frac{\|f_0\|}{L^{n(1-\delta)/2}} + |A|M\left|\frac{r(L^n)}{L^{n(p+1)}}\right| + \frac{L^{n[p+3-\alpha(p+1)]/2}}{2L^{(1-\delta)/2}\left(1 - L^{[p+3-\alpha(p+1)]/2}\right)} K_{p,q}\|f_0\|. \tag{4.30}$$

Assim, é suficiente tomar o limite quando $n \to \infty$. ∎

O Teorema 1.1 agora segue diretamente da estimativa (4.30) como explicaremos em seguida:

Prova do Teorema 1.1: Provamos que (1.13) é válida quando o dado inicial $f \equiv f_0$ é suficientemente pequeno e $t = L^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, para $L > L_\delta$. De fato, segue de (4.30) que, se $t = L^n$, então, como $p + 3 - \alpha(p+1) < 0$ e $L > L_\delta$,

$$\begin{aligned} \|\sqrt{t^{p+1}}u(\sqrt{t^{p+1}}x, t) - Af_p^*\| &\leq t^{(\delta-1)/2}\|f_0\| + |A|M\left|t^{-(p+1)}r(t)\right| + \\ &+ t^{[p+3-\alpha(p+1)]/2} L_\delta^{(\delta-1)/2}\left[2\left(1 - L_\delta^{[p+3-\alpha(p+1)]/2}\right)\right]^{-1} K_{p,q}\|f_0\|. \end{aligned}$$

Podemos estender essa cota para $t = \tau L^n$, com $\tau \in [1, L]$ e $L > L_\delta$ trocando L por $\tau^{1/n}L$ em todos os lemas anteriores. Assim, como as constantes em (4.30) não dependem do valor de $L > L_\delta$ considerado, a desigualdade acima vale para todo $t > L_\delta$. Tomando o limite quando $t \to \infty$ finalizamos a prova. ∎

Capítulo 5

Considerações Sobre o Caso Marginal

Analisamos nos capítulos anteriores o comportamento assintótico da solução do PVI

$$\begin{cases} u_t = c(t)u_{xx} + \lambda F(u), \quad t > 1, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x,1) = f(x), \end{cases}$$

sendo $c(t) = t^p + o(t^p) > 0$, $\lambda \in [-1,1]$ e $F(u) = \sum_{j\geq\alpha} a_j u^j$, com $\alpha > (p+3)/(p+1)$. Assim, obtivemos a relação entre a difusão (medida em termos do expoente p) e a não-linearidade (medida em termos do expoente α) na determinação do comportamento das soluções quando decaem a zero. Provamos de fato que a solução $u(x,t)$ do problema de valor inicial acima se comporta como

$$u(x,t) \sim \frac{A}{t^{(p+1)/2}} f_p^* \left(\frac{x}{t^{(p+1)/2}} \right),$$

com f_p^* dada por (1.4), sob a hipótese $\alpha > (p+3)/(p+1)$, isto é, quando a perturbação F é irrelevante (no sentido do RG) e concluímos que, nesse caso, a difusão é o termo dominante na determinação da forma do decaimento das soluções.

Parte desse trabalho de doutorado consiste ainda em analisar, utilizando o método do Grupo de Renormalização de Bricmont et al., o que ocorre no caso marginal (ou crítico), isto é, quando $\alpha = (p+3)/(p+1)$. Como já observamos na introdução, no caso crítico nem a difusão nem a não-linearidade prevalecem e o regime observado apresenta algumas características do caso irrelevante, mas com um fator logarítmico extra na taxa de decaimento da solução. Essa descrição foi observada numericamente em [12] e assim, um resultado de nosso interesse é a obtenção da correção logarítmica, analiticamente, no comportamento assintótico para o caso marginal. Apresentaremos aqui de forma sucinta os resultados obtidos nesse caso.

A equação $u_t = c(t)u_{xx} - \lambda u^{\frac{p+3}{p+1}}$, sendo $c(t) = t^p + o(t^p)$ quando $t \to \infty$, apresenta uma perturbação não-linear classificada como marginal com respeito ao RG. O método do Grupo de Renormalização para equações parciais, da maneira como é realizado nesse trabalho, tem a limitação de ser capaz de tratar apenas não-linearidades que possam ser escritas como somas de termos do tipo $u^a u_x^b u_{xx}^c$, em que os expoentes a, b e c são números inteiros. Nos restringimos portanto mais especificamente ao caso em que, na equação acima fazemos $p = 1$, isto é, ao problema (1.9):

$$\begin{cases} u_t = (t + o(t))u_{xx} - \lambda u^2, & t > 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0, \\ u(x,1) = f(x), & q > 1, \quad f \in \mathcal{B}_q. \end{cases}$$

Observe que o sinal negativo na equação acima é necessário visto que, no caso em que o sinal é positivo, qualquer dado inicial não nulo leva a uma solução que explode em tempo finito (veja [26, 39]).

Motivados pelos resultados numéricos [12] e seguindo as idéias de Bricmont et al. [16] aplicadas no caso da equação $u_t = u_{xx} - \lambda u^3$ (caso crítico com $p = 0$), formulamos a seguinte

Conjectura 5.1 *Considere o PVI (1.9) com $f = f_1^* + g_0$, sendo $f_1^* = e^{-\frac{x^2}{2}}/\sqrt{2\pi}$. Então, existem λ^* e $\varepsilon > 0$ tais que, para $0 < \lambda < \lambda^*$ e $\|g_0\| < \varepsilon$ é possível obter um espaço B de forma que o PVI (1.9) possua uma solução única $u \in B$ satisfazendo*

$$\lim_{t\to\infty} \left\| tu(t\cdot, t) - 2\sqrt{\pi}(\lambda \ln t)^{-1} f_1^* \right\| = 0. \tag{5.1}$$

A conjectura acima fornece portanto um fator logarítmico no decaimento da solução. A idéia agora não é mais considerar o dado inicial pequeno mas sim próximo a f_1^*, isto é, gostaríamos que o dado inicial do problema fosse uma perturbação do ponto fixo assintótico do RG. Isso porque, ao iterar o método, os dados iniciais de cada problema renormalizado terão uma decomposição como em (4.10), sendo que agora, a parcela que está na direção do ponto fixo assintótico, diferentemente do caso irrelevante, também decai para zero e é necessário analisar este decaimento para observar o fator logarítmico no decaimento da solução. Além disso, λ não é mais definido num compacto, pois precisamos fazê-lo suficientemente pequeno. A estratégia para a obtenção do comportamento assintótico é entretanto similar à anterior. Inicialmente provamos a existência e unicidade locais da solução para em seguida utilizar o operador RG de forma a obter problemas renormalizados definidos para intervalos finitos de tempo e obter estimativas que determinem o decaimento da solução, garantindo ao mesmo tempo a possibilidade de extensão da solução para qualquer tempo $t > 1$.

A prova de um teorema de existência local para este caso não apresenta nenhuma dificuldade a mais do que no caso irrelevante. O espaço em que a solução é única continua sendo uma bola de centro em u_f (a solução da equação linear $u_t = (t + o(t))u_{xx}$), mas seu raio agora dependerá de λ, de tal forma a ser possível controlarmos o tamanho dessa bola, visto que não mais temos $\|f\|$ pequena. Assim, se $B^{(L)}$ é o espaço definido por (3.1), defina a bola

$$B_{C\lambda} \equiv \{u \in B^{(L)} : \|u - u_f\|_L \leq C\lambda\},$$

sendo C uma constante a ser determinada. Obtemos o seguinte teorema de existência e unicidade da solução do problema (1.9):

Teorema 5.1 *Dados $L, q > 1$ e $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que, se $f = Af_1^* + g$, com $g \in \mathcal{B}_q$, $\|g\| < \varepsilon$ e $|A| \leq 1$, então, existem $\lambda_0 = \lambda_0(L, q, \varepsilon)$ e $C = C(L, q, \varepsilon)$ tais que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$, o PVI (1.9) possui uma única solução em $B_{C\lambda}$.*

Observe que o caso em que estamos interessados é de fato $f = f_1^* + g$, que segue como um caso particular do Teorema acima, com $A = 1$. Como anteriormente, após provado o Teorema de existência e unicidade, partimos então do problema (1.9) e iteramos o procedimento, isto é, renormalizamos a solução, obtendo um novo problema de valor inicial, cujo dado inicial é agora a imagem do operador grupo de renormalização aplicado ao dado inicial f. A diferença aqui é que o termo não linear da nova equação não se altera, isto é, continuará a ser λu^2 (visto que esta perturbação é marginal com respeito ao RG). Além disso, se o coeficiente de difusão fosse apenas $c(t) = t$, a equação de cada problema renormalizado seria idêntica à equação em (1.9).

A heurística do argumento permanece como no caso anterior. Assim, fixado $L > 1$ definimos a seqüência $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ como em (2.7), mas agora com $p = 1$, isto é,

$$u_n(x,t) \equiv L^n u(L^n x, L^n t),$$

sendo u solução do problema (1.9). Nesse caso, u_n satisfaz

$$\begin{cases} \partial_t u_n = c_n(t)\partial_x^2 u_n - \lambda u_n^2, & t \in [1, L],\ x \in \mathbb{R}, \\ u_n(x,1) = f_n(x), \end{cases} \tag{5.2}$$

sendo

$$c_n(t) = \frac{c(L^n t)}{L^n} = t + \frac{o(L^n t)}{L^n}$$

e f_n definida por (2.10) com $p = 1$, ou seja, $f_n(x) = L^n u(L^n x, L^n)$. Admitindo então que para cada n, existam C_n e λ_n de forma que o problema (5.2) possua uma única solução u_n em $B_{C_n\lambda}$, para todo $\lambda \in (0, \lambda_n)$, definimos o operador Grupo de Renormalização

$$(R_{L,n} f_n)(x) \equiv L u_n(Lx, L) = R^0_{L,n} f_n(x) + L\nu_n(Lx),$$

sendo $R^0_{L,n} f_n(x) = L u_{f_n}(Lx, L)$ o operador linear. Mais uma vez f_n satisfaz (4.4).

Como no caso irrelevante, definimos A_n e g_n recursivamente por (4.14) e (4.15), obtendo uma decomposição para os dados iniciais dos problemas renormalizados como em (4.10). A existência e unicidade locais de cada problema renormalizado fica garantida em uma certa bola cujo raio é $C_n\lambda$, desde que λ seja suficientemente pequeno (claramente, o raio da bola dependerá da equação considerada, isto é, do valor de n) e desde que o dado inicial f_n esteja suficientemente próximo de um múltiplo de $R^0_{L^n} f_1^*$.

Definindo

$$\nu_n^* = \int_0^{L-1} e^{[s_n(L)-s_n(L-\tau)]\partial^2} (e^{s_n(L-\tau)\partial^2} R^0_{L^n} f_1^*)^2 d\tau$$

e $\beta_n \equiv \widehat{\nu_n^*}(0)$, dados $k \in \mathbb{N}$ e $L > L_1$ (sendo L_1 definido por (2.27) com $p = 1$), se f_n dada por (4.4) estiver bem definida para $n = 0, 1, \ldots, k+1$ e f_0 for tal que $f_0 = A_0 f_1^* + g_0$ com $0 < A_0 \leq 1$, $\widehat{g_0}(0) = 0$ e $\|g_0\| < \varepsilon < 1/2$, então, para λ suficientemente pequeno obtemos as seguintes estimativas[1]:

$$|A_{n+1} - A_n + \lambda\beta_n A_n^2| \leq C\lambda(\lambda|A_n|^3 + |A_n|\|g_n\| + \|g_n\|^2), \quad \forall n = 0, 1, \ldots, k, \tag{5.3}$$

[1]Optamos por não explicitar as constantes neste capítulo para não sobrecarregar a notação, visto que temos aqui por objetivo apenas apresentar os resultados obtidos até o momento e não os detalhes das contas.

$$\|g_1\| < \frac{C}{L}\|g_0\| + C\lambda$$

e, se $n = 1, \ldots, k$,

$$\|g_{n+1}\| \leq \frac{C}{L}\|g_n\| + C[\lambda A_n^2 + \lambda(|A_n|\|g_n\| + \|g_n\|^2 + \lambda|A_n|^3)].$$

As constantes obtidas nas desigualdades acima dependem apenas de L e q. Assim, utilizando essas estimativas, podemos provar ainda que se $A_0 = 1$ e ε e λ forem suficientemente pequenos, então, para todo $n = 1, 2, \ldots, k$, $\|g_n\| < \min\{\varepsilon, A_n^2\}$ e $A_1 < 1$. Assim, obtemos que as constantes A_n são positivas e segue de (5.3) que satisfazem

$$|A_{n+1} - A_n + \lambda\beta_n A_n^2| \leq C\lambda[(\lambda + 1)A_n^3 + A_n^4], \tag{5.4}$$

O próximo passo consiste em utilizar as desigualdades obtidas acima para estimar a taxa com que A_n, g_n decaem para zero e com isso obter a correção logarítmica. O que faremos a partir deste ponto é argumentar que a Conjectura 5.1 fica provada, desde que sejam preenchidas algumas lacunas. Os argumentos a seguir são formais, se baseiam em [23] e partem do pressuposto que, além dos resultados acima já obtidos, a seqüência (A_n) é decrescente e converge para zero.

Se (A_n) é uma seqüência decrescente, então, como $A_1 < 1$ podemos reescrever (5.4) como

$$|A_{n+1} - A_n + \lambda\beta_n A_n^2| \leq K A_n^3, \tag{5.5}$$

sendo $K \equiv \lambda(2 + \lambda)C$, isto é,

$$A_{n+1} = A_n - \lambda\beta_n A_n^2 + O(A_n^3), \qquad (n \to \infty).$$

Agora, fazendo $A_n = v_n^{-1}$, temos, para λ suficientemente pequeno,

$$v_{n+1} = v_n[1 - \lambda\beta_n A_n + O(A_n^2)]^{-1} = v_n[1 + \lambda\beta_n A_n + O(A_n^2)], \qquad (n \to \infty)$$

e portanto,

$$v_{n+1} - v_n = \lambda\beta_n + O(v_n^{-1}). \tag{5.6}$$

Além disso, da definição de β_n é possível provar que existem constantes β_* e β^* dependentes de L tais que, para todo n, $\beta_* \leq \beta_n \leq \beta^*$ e, mais que isso, podemos provar que β_n converge para β

quando $n \to \infty$, sendo

$$\beta \equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \ln L. \tag{5.7}$$

Assim, se A_n converge para zero, então, $v_n^{-1} \to 0$ e portanto existe $n_0 > 0$ tal que $v_{n+1} - v_n > \frac{\lambda\beta_*}{2}$ para todo $n > n_0$. Tomando $n > 2n_0$,

$$v_n = v_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} v_{k+1} - v_k > v_{n_0} + \lambda\beta_* \frac{(n-n_0)}{2} > \frac{\lambda\beta_* n}{2}\left(1 - \frac{n_0}{n}\right) > \frac{\lambda\beta_* n}{4}.$$

Segue que $v_n^{-1} = O(n^{-1})$ e assim, de (5.6),

$$v_{n+1} - v_n = \lambda\beta_n + O(n^{-1}).$$

Daí obtemos

$$v_n = \lambda\beta n + O(\ln n),$$

sendo β dado por (5.7) e portanto, $v_n^{-1} = [\lambda\beta n + O(\ln n)]^{-1}$. Com isso,

$$A_n = \left\{\lambda\beta n\left[1 + O\left(\frac{\ln n}{\lambda\beta n}\right)\right]\right\}^{-1} = \frac{1}{\lambda\beta n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right). \tag{5.8}$$

Finalmente, supondo a existência e unicidade globais da solução do PVI (1.9), então, usando a Desigualdade Triangular, podemos limitar $\|L^n u(L^n \cdot, L^n) - (\lambda\beta n)^{-1} f_1^*(\cdot)\|$ superiormente por

$$\|L^n u(L^n \cdot, L^n) - A_n R^0_{L^n} f_1^*(\cdot)\| + (\lambda\beta n)^{-1}\|R^0_{L^n} f_1^* - f_1^*\| + |A_n - (\lambda\beta n)^{-1}|\|R^0_{L^n} f_1^*\|. \tag{5.9}$$

Pela propriedade de semi-grupo do operador RG, temos $f_n = A_n R^0_{L^n} f_1^* + g_n = L^n u(L^n x, L^n)$ e, como $\|g_n\| < A_n^2$, se $A_n \to 0$, então, o primeiro termo acima se anula quando $n \to \infty$. Usando (2.26), o Lema 2.2 e (5.8), podemos ainda obter como cota superior para (5.9), para todo $n > n_0$:

$$\|L^n u(L^n \cdot, L^n) - A_n R^0_{L^n} f_1^*(\cdot)\| + \frac{M}{\lambda\beta n}\left|\frac{r(L^n)}{L^{2n}}\right| + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) K_{1,q} \tag{5.10}$$

e fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \|L^n u(L^n \cdot, L^n) - (\lambda\beta n)^{-1} f_1^*(\cdot)\| = 0$$

o que prova o comportamento assintótico (5.1) para $t = L^n$ e $L > L_1$. A generalização para $t \in \mathbb{R}$ e $t \to \infty$ pode ser feita como na prova do Teorema 1.1.

Observe ainda que, como já mencionamos, para ε e λ suficientemente pequenos, então, $\|g_n\| < \varepsilon$ para todo n e, com isso, é possível provar um teorema análogo ao Teorema 5.1, que garante a existência e unicidade locais de cada problema (5.2) em uma bola de raio $C_n\lambda$. Através de um processo semelhante ao que foi feito na Seção 4.3, podemos estender assim a solução do PVI (1.9) para todo $t > 1$.

Dessa forma, para que a prova da Conjectura 5.1 seja completa e rigorosa é necessária a prova de que a seqüência (A_n) é decrescente e principalmente de que ela realmente tende a zero quando n cresce. Até o presente momento estes dois resultados não foram obtidos de uma maneira que acreditamos ser coerente com o resto do trabalho, embora Bricmont et al. [16] tenham analisado o caso crítico com $p = 0$ e $\alpha = 3$ e afirmem a convergência para zero da seqüência (A_n) com estimativas semelhantes às que obtivemos.

Apêndice A

Transformada de Fourier

Para um completo entendimento do trabalho apresentado é necessário um estudo sobre a transformada de Fourier. O objetivo deste apêndice é apenas citar as principais definições e resultados utilizados nesta tese, cujas demonstrações podem ser encontradas em referências aqui mencionadas. Apresentaremos somente a demonstração do Lema A.3 que relaciona a transformada de Fourier de um produto de funções de L^2 com convoluções das transformadas de Fourier de cada uma delas, utilizado na prova da existência e unicidade de soluções do problema não-linear. Para um estudo mais detalhado recomendamos [46, 47].

Definição A.1 *A transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R})$ é definida como:*

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}\{f(.)\}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x)dx. \tag{A.1}$$

Definição A.2 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é rapidamente decrescente se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e*

$$\|f\|_{m,n} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m D^n f(x)| < \infty, \quad \forall \ (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Ou seja, f e suas derivadas tendem a zero mais rapidamente que as potências x^m vão para o infinito. Denotaremos o espaço das funções rapidamente decrescentes por $S(\mathbb{R})$. É fácil ver que toda função em $S(\mathbb{R})$ é absolutamente integrável (veja capítulo 6 de [25]).

Teorema A.1 *Se $f \in S(\mathbb{R})$, então $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ e, além disso, dados $m, n \geq 0$,*

$$(ix)^m \left(\frac{d}{dx}\right)^n \hat{f} = \mathcal{F}\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^m [(-ix)^n f]\right\}. \tag{A.2}$$

Demonstrações do teorema acima podem ser encontradas em [20, 35, 43].

Definição A.3 *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então definimos a convolução de f com g por*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy. \tag{A.3}$$

Lema A.1 *Se f, g e $h \in L^1(\mathbb{R})$, então:*

1. *$f * g \in L^1(\mathbb{R})$;*
2. *$f * g = g * f$;*
3. *$(f * g) * h = f * (g * h)$.*

A prova do Lema acima é imediata, através da utilização dos Teoremas de Fubini e de Mudança de Variáveis [45]. Além disso, através desses teoremas, obtemos ainda o seguinte resultado:

Teorema A.2 (Teorema da Convolução) *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, então:*

$$\widehat{(f * g)}(w) = \widehat{f}(w)\widehat{g}(w). \tag{A.4}$$

Definição A.4 *Definimos a Transformada de Fourier Inversa por*

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f(.)}\}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w)e^{iwx}dw. \tag{A.5}$$

Teorema A.3 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Então,*

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x),$$

em todos os pontos x onde f é contínua.

Analisaremos agora algumas propriedades da Transformada de Fourier no espaço $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema A.4 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Então, $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e vale a Identidade de Parseval:*

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2.$$

Teorema A.5 *A Transformada de Fourier é uma bijeção de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$.*

Assim, para cada $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\exists!$ $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f} = g$. Denotamos por $\check{g}(x) \equiv (\mathcal{F}^{-1}g)(x)$ a Transformada Inversa de g. A Identidade de Parseval pode ser estendida para todo $L^2(\mathbb{R})$. Além disso, se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, tomando a Transformada de Fourier Inversa em (A.4), obtemos o seguinte lema:

Lema A.2 *Se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, então:*

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\hat{g}\}(x) = (f * g)(x). \tag{A.6}$$

Uma propriedade da Transformada de Fourier amplamente utilizada nesse trabalho é a transformada do produto de n funções em $L^2(\mathbb{R})$:

Lema A.3 *Se $f_1, \cdots, f_n \in L^2(\mathbb{R})$, então:*

$$\mathcal{F}\{f_1 \cdots f_n\}(w) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}}(\hat{f}_1 * \cdots * \hat{f}_n)(w). \tag{A.7}$$

Prova: Faremos a prova por indução. Pelo lema anterior, temos que $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}_1\hat{f}_2\}(x) = (f_1 * f_2)(x)$. Logo,

$$\mathcal{F}^{-1}(f_1 f_2)(x) = (\check{f}_1 * \check{f}_2)(x).$$

Mas,

$$\mathcal{F}^{-1}\{f(.)\}(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(w)e^{-iwx}dw = \frac{1}{2\pi}\hat{f}(x).$$

Com isso, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f_1(.)f_2(.)](w) &= 2\pi(\check{f}_1 * \check{f}_2)(-w) = 2\pi\left[\frac{\hat{f}_1(-.)}{2\pi} * \frac{\hat{f}_2(-.)}{2\pi}\right](-w) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int \hat{f}_1(w_1 - w)\hat{f}_2(-w_1)dw_1\right](-w) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}_1(w_1 + w)\hat{f}_2(-w_1)dw_1 = \frac{1}{2\pi}(\hat{f}_1 * \hat{f}_2)(w).
\end{aligned}$$

Assim, provamos o primeiro passo de indução. Suponha agora que (A.7) seja válida para $n = k$. Então:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f_1 \cdots f_n \cdot f_{n+1}](w) &= \frac{1}{2\pi}(\mathcal{F}[f_1 \cdots f_n] * \widehat{f_{n+1}})(w) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\hat{f}_1 * \cdots * \hat{f}_n * \widehat{f_{n+1}}\right)(w) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}(\hat{f}_1 * \cdots * \hat{f}_n * \widehat{f_{n+1}})(w),
\end{aligned}$$

o que completa o argumento. ∎

Finalizamos esse apêndice apresentando um lema que fornece as transformadas de Fourier de funções importantes nesse trabalho, como a função Gaussiana. Sua prova também pode ser encontrada em [43]:

Lema A.4 *Seja $a > 0$ uma constante positiva. Então:*

1. $g(w) = e^{-aw^2} \Leftrightarrow \check{g}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a}}}{\sqrt{4\pi a}}$;
2. *Se* $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}\{f(ax)\} = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$.

Referências Bibliográficas

[1] A. C. L. Almeida. Análise assintótica de soluções da equação dos meios porosos com perturbações marginais via grupos de renormalização. Master's thesis.

[2] S. B. Angenent, D. G. Aronson, S. I. Betelu, and J. S. Lowengrub. Focusing of an elongated hole in porous medium flow. *Phys. D*, 151:228–252, 2001.

[3] D. G. Aronson and J. L. Vazquez. Calculation of anomalous exponents in nonlinear diffusion. *Physical Review Letters*, 17:348–351, 1994.

[4] M. Avellaneda and A. Majda. Simple examples with features of renormalization for turbulent transport. *Phil. Trans. R. Soc. London*, 346:205–233, 1994.

[5] G. I. Barenblatt. *Scaling, self-similarity and intermediate asymptotics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 1996.

[6] S. I. Betelu, D. G. Aronson, and S. B. Angenent. Renormalization study of two-dimensional convergent solutions of the porous medium equation. *Phys. D*, 138:344–359, 2000.

[7] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov. *Introduction to the Theory of Quantized Fields.* Interscience Publishers Ltd, New York, 1959.

[8] J. Bona, K. Promislow, and G. Wayne. On the asymptotic behavior of solutions to nonlinear, dispersive, dissipative wave equations. *Math. Comput. Simulation*, 37:265–277, 1994.

[9] J. L. Bona, K. S. Promislow, and C. E. Wayne. Higher order asymptotics of decaying solutions of some nonlinear, dispersive, dissipative wave equations. *Nonlinearity*, 8:1179–1206, 1995.

[10] G. A. Braga, F. Furtado, and V. Isaia. Smoothing of barenblatt equation singularity: a numerical and analytical renormalization group study. manuscript.

[11] G. A. Braga, F. Furtado, and V. Isaia. Renormalization group calculation of asymptotically self-similar dynamics. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplements*, 2005(Special):131–141, 2005.

[12] G. A. Braga, F. Furtado, J. M. Moreira, and L. T. Rolla. Renormalization group analysis of nonlinear diffusion equations with time dependent diffusion coefficients: Numerical results. Paper in preparation.

[13] G. A. Braga, F. Furtado, J. M. Moreira, and L. T. Rolla. Renormalization group analysis of nonlinear diffusion equations with periodic coefficients. *Multiscale Modeling and Simulation*, 1(4):630–644, October 2003.

[14] G. A. Braga, J. M. Moreira, and L. T. Rolla. Análise assintótica de soluções de edp´s via grupos de renormalização. In *Anais do 57 Seminário Brasileiro de Análise*, Editora da UFV, pages 215–282, 2003.

[15] J. Bricmont and A. Kupiainen. Renormalizing partial differential equations. *Constructive Physics*, 446:83–115, 1995.

[16] J. Bricmont, A. Kupiainen, and G. Lin. Renormalization group and asymptotics of solutions of nonlinear parabolic equations. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 47:893–922, 1994.

[17] G. Caginalp. Renormalization and scaling methods for nonlinear parabolic systems. *Nonlinearity*, 10:1217–1229, 1997.

[18] L. Chen and N. Goldenfeld. Numerical renormalization group calculations for similarity solutions and travelling waves. *Physical Review E*, 51:5577–5581, 1995.

[19] L.-Y. Chen, N. Goldenfeld, and Y. Oono. Renormalization group and singular perturbations: multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory. *Physical Review E*, 54:376–394, 1996.

[20] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 2 edition, 1990.

[21] G. Dagan. Theory of solute transport by groundwater. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 19:183–215, 1987.

[22] R. E. Davis. Lagrangian ocean studies. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23:43, 1991.

[23] N. G. de Bruijn. *Asymptotic Methods in Analysis*. Dover Publications, Inc., New York, 1981.

[24] L. C. Evans. Partial differential equations. In *Graduate studies in mathematics*. AMS, 1998.

[25] D. G. Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[26] H. Fujita. On the blowing up of solutions to the cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect IA*, Math 13:109–124, 1966.

[27] F. Furtado, J. Glimm, B. Lindquist, and F. Pereira. Multi-length scale calculations of mixing length growth in tracer floods. In F. Kovarik, editor, *Proc. of the Emerging Technologies Conference*, pages 251–259. Institute for Improved Oil Recovery, University of Houston, Houston TX, 1990.

[28] F. Furtado and F. Pereira. Scaling analysis for two-phase immiscible flow in heterogeneos porous media. *Comp. Appl. Math.*, 17(3):237–263, 1998.

[29] M. Gell-Mann and F. E. Low. Quantum electrodynamics at small distances. *Phys. Rev.*, 95:1300–1312, 1954.

[30] J. Glimm, B. Lindquist, F. Pereira, and Q. Zhang. A theory of macrodispersion for the scale up problem. *Transport in Porous Media*, 13:97–122, 1993.

[31] J. Glimm, Q. Zhang, and D. H. Sharp. The renormalization group dynamics of chaotic mixing of unstable interfaces. *Phys. Fluids A*, 3:1333–1335, 1991.

[32] N. Goldenfeld. *Lectures on Phase Transition and the Renormalization Group*. Addison-Wesley, Reading, 1992.

[33] N. Goldenfeld, O. Martin, and Y. Oono. Asymptotics of partial differential equations and the renormalization group. In S. Tanveer, editor, *Proc. NATO Advanced Research Workshop on Asymptotics Beyond All Orders*, New York, 1992. Plenum.

[34] N. Goldenfeld, O. Martin, Y. Oono, and F. Liu. Anomalous dimensions and the renormalization group in a nonlinear diffusion process. *Phys. Rev. Lett.*, 64:1361–1364, 1990.

[35] R. J. Iório and V. M. Iório, Jr. *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução.* IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[36] V. Isaia. *Intermediate Asymptotic Behavior of Nonlinear Parabolic PDEs via a Renormalization Group Approach: a Numerical Study.* PhD thesis, Department of Mathematics, University of Wyoming, Laramie, Wyoming, 2002.

[37] F. John. *Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York, 4 edition, 1982.

[38] L. Lake and H. Carroll, editors. *Reservoir Characterization.* Academic Press, New York, 1986.

[39] H. A. Levine. The role of critical exponents in blow-up theorems. *SIAM Review*, 32:262–288, 1990.

[40] A. J. Majda and P. R. Kramer. Simplified models for turbulent diffusion: theory, numerical modelling, and physical phenomena. *Physics Reports*, 314:237–574, 1999.

[41] H. Merdan and G. Caginalp. Decay of solutions to nonlinear parabolic equations: Renormalization and rigorous results. *Discrete and Continuous Dynamical Systems B*, 3:565–588, 2003.

[42] H. K. Moffatt. Transport effects associated with turbulence. *Rep. Prog. Phys*, 46:621, 1983.

[43] J. M. Moreira. O comportamento assintótico de soluções da equação do calor não-linear via grupos de renormalização. Master's thesis, UFMG, Belo Horizonte, Minas Gerais, 2002.

[44] L. T. Rolla. Análise assintótica de soluções de equações difusivas não-lineares via métodos de escalas múltiplas. Master's thesis, UFMG, Belo Horizonte, Minas Gerais, 2004.

[45] H. L. Royden. *Real Analysis.* Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 3 edition, 1988.

[46] Stein-Weiss, editor. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidian Spaces.* Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.

[47] Y. L. Tong, H. Dym, and H. P. McKean, editors. *Fourier Series and Integrals.* Academic Press, New York, 1985.

[48] K. Wilson. Renormalization group and critical phenomena i, ii. *Phys. Rev. B*, 4:3174–3183, 3184–3205, 1971.

[49] Q. Zhang. A multi-length scale theory of the anomalous mixing length growth for tracer flow in heterogeneous porous media. *J. Stat. Phys.*, 66:485–501, 1991.

Livros Grátis

(http://www.livrosgratis.com.br)

Milhares de Livros para Download:

Baixar livros de Administração
Baixar livros de Agronomia
Baixar livros de Arquitetura
Baixar livros de Artes
Baixar livros de Astronomia
Baixar livros de Biologia Geral
Baixar livros de Ciência da Computação
Baixar livros de Ciência da Informação
Baixar livros de Ciência Política
Baixar livros de Ciências da Saúde
Baixar livros de Comunicação
Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE
Baixar livros de Defesa civil
Baixar livros de Direito
Baixar livros de Direitos humanos
Baixar livros de Economia
Baixar livros de Economia Doméstica
Baixar livros de Educação
Baixar livros de Educação - Trânsito
Baixar livros de Educação Física
Baixar livros de Engenharia Aeroespacial
Baixar livros de Farmácia
Baixar livros de Filosofia
Baixar livros de Física
Baixar livros de Geociências
Baixar livros de Geografia
Baixar livros de História
Baixar livros de Línguas

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo