UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Luiz Fernando de Oliveira Faria

Equações Elípticas com dependência não-linear do gradiente

Belo Horizonte

2008

Luiz Fernando de Oliveira Faria

Equações Elípticas com dependência não-linear do gradiente

Tese apresentada ao corpo docente de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador:
Paulo César Carrião
Universidade Federal de Minas Gerais

Co-orientador:
Olímpio Hiroshi Miyagaki
Universidade Federal de Viçosa

Este trabalho foi financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais

A Deus Pai

O Autor e Senhor da minha vida, o Rochedo em que me refugio.
Àquele que sempre sonha pra mim sonhos bem mais altos que os meus.
Toda a honra, toda a glória pertencem a Ti.

A Deus Filho

Meu querido Senhor Jesus, o Amado da minha alma,
o Cristo de Israel que me deu vida através de Sua morte e ressurreição,
permitindo-me desfrutar de tudo o que Ele conquistou na cruz.
Só posso dizer que te amo, Jesus!

A Deus Espírito Santo

Meu Consolador, minha fonte de inspiração.
Meu instrutor, que sempre esteve ao meu lado me mostrando por onde ir
e que até em sonhos fala comigo. Muito obrigado por se importar com cada detalhe de minha vida!

Aos meus Pais
Amaurílio Faria e Maria Cleonice de Oliveira Faria

Vocês revestiram minha existência de amor e carinho.
Levarei sempre comigo as lições e valores que me ensinaram.
Por todo investimento em minha vida, divido com vocês os méritos desta conquista,
porque ela também lhes pertence. Obrigado por toda dedicação.
Amo vocês!

À minha querida Esposa Tatiana

Que sempre teve uma palavra de incentivo, mesmo quando tudo parecia contrário.
Você que é forte e ao mesmo tempo doce, soube fazer desses anos de trabalho duro,
e porque não dizer árduos, anos mais suaves. Quantas foram as dificuldades e lutas,
e você sempre ao meu lado com fé suficiente para remover montanhas.
Eu Te amo muito!

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Paulo César Carrião e Olímpio Hiroshi Miyagaki, por toda a atenção, compreensão, sugestões e amizade durante estes anos de convivência. A experiência de vocês contribuiu em muito para a excelência deste trabalho. Expresso minha admiração e respeito pelo profissionalismo, caráter e simplicidade que sempre demonstraram. Obrigado.

Aos Professores Titulares da Banca Examinadora, Claudianor Oliveira Alves, Ma To Fu, Emerson Alves Mendonça de Abreu e Rodney Josué Biezuner, e aos Suplentes Ronaldo Brasileiro Assunção e Gastão de Almeida Braga, pela atenção e valiosas sugestões.

Às minhas irmãs Lia, Liliana e Luciana e às minhas sobrinhas Raissa e Larissa pelo amor, carinho e alegria constantes. Aos meus cunhados Wyllyam, Geraldo, Márcio, João Victor, Willian e Talita. Vocês são como irmãos pra mim!

À minha sogra, Daluz, pelo carinho e incessantes orações.

Aos Pastores, irmãos da Igreja e a todos os meus amigos pelas orações, amizade e companheirismo.

Aos Funcionários da UFMG, pelo ótimo trabalho e empenho.

À FAPEMIG, pelo auxílio financeiro, obrigado.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência de soluções para equações elípticas com dependência não-linear do gradiente da solução. Mais especificamente, garantimos a existência de solução para as seguintes classes de problemas.

$$(P_1) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u + q\Delta u + \alpha(x)u = f(x,u,\nabla u,\Delta u) & \text{em} \quad \Omega \\ u(x)=0, \ \Delta u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 5$, é um aberto limitado com fronteira suave.

$$(P_2) \qquad u^{iv} + qu'' + \alpha(x)u = f(x,u,u',u'') \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$(P_3) \qquad \begin{cases} -\Delta u = h(x,u) + g(x,\nabla u) & \text{em} \quad \Omega \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em que Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, a função h possui termos sublinear e singular e a função g é limitada superiormente por um termo de convecção do tipo $|\nabla u|^\beta$, com $\beta \in (0,1)$.

$$(P_4) \qquad \begin{cases} -H\left(a\displaystyle\int_\Omega u^\gamma ds + b\int_\Omega |\nabla u|^\theta ds\right)\Delta u = f(x,u,\nabla u) & \text{em} \quad \Omega \\ u(x) > 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\theta, \gamma > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, é um domínio suave e limitado e $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e não-negativas.

Neste trabalho, as principais técnicas usadas para estudarmos estes problemas foram: técnicas variacionais, método de Galerkin e Teorema do ponto-fixo de Krasnoselskii.

Palavras-chave: equações elípticas, dependência não-linear do gradiente, métodos variacionais, método de Galerkin, Teorema do ponto-fixo, *bootstrap*.

Abstract

In this thesis we study the existence of solutions for elliptic equations with nonlinear dependence on the gradient of the solution. More precisely, we guarantee the existence of solution for the following classes of problems.

$$(P_1) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u + q\Delta u + \alpha(x)u = f(x,u,\nabla u,\Delta u) & \text{in } \Omega \\ u(x)=0,\ \Delta u(x)=0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 5$, is a bounded smooth domain.

$$(P_2) \qquad u^{iv} + qu'' + \alpha(x)u = f(x,u,u',u'') \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$(P_3) \qquad \begin{cases} -\Delta u = h(x,u) + g(x,\nabla u) & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded, smooth domain in $\mathbb{R}^N, N \geq 3$, the function h has sublinear and singular terms and g is bounded from above by a convection term of the type $|\nabla u|^\beta$ with $\beta > 0$.

$$(P_4) \qquad \begin{cases} -H\left(a\displaystyle\int_\Omega u^\gamma ds + b\int_\Omega |\nabla u|^\theta ds\right)\Delta u = f(x,u,\nabla u) & \text{em } \Omega \\ u(x) > 0 & \text{em } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\theta,\gamma > 0$, $a,b \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, is a bounded, smooth domain and $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are nonnegative continuous functions.

In this work, the main techniques used to study these problems were: variational Techniques, Galerkin's method and Krasnoselskii's fixed point Theorem.

Keywords: elliptic equations, nonlinear dependence on the gradient, variational techniques, Galerkin's Method, fixed point Theorem, *bootstrap.*

Glossário de Notações Gerais

E'	espaço dual de E
$\sigma(E,E')$	topologia fraca definida em E
$\to$	convergência forte
$\rightharpoonup$	convergência fraca
q.t.p.	quase todo ponto
∇u	$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$
$D^\alpha u$	$\frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}u,\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)$
$\mathrm{div}F$	$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}F_i$
Δu	$\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$
$\Delta^2 u$	$\Delta(\Delta u)$
$\mathbb{R}^N_+$	$\{x=(x',x_N)\in\mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R}; x_N>0\}$
$\Omega\subset\mathbb{R}^N$	aberto
$\partial\Omega$	fronteira de Ω
$B_r(x)\subset\mathbb{R}^N$	$\{z\in\mathbb{R}^N; \|z-x\|<r\}$
$\mathrm{dist}(A,B)$	distância entre os conjuntos A e B
$w\subset\subset\Omega$	indica que o fecho do aberto w é compacto e $\overline{w}\subset\Omega$
$\mathrm{supp}f$	indica o suporte da função f
$L^p(\Omega)$	espaço das funções Lebesgue-mensuráveis $u:\Omega\to\mathbb{R}$ com norma-L^p finita $\|u\|_p=\left(\int_\Omega \|u\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $1\le p<\infty$
$L^\infty(\Omega)$	espaço das funções Lebesgue-mensuráveis e essencialmente limitadas $u:\Omega\to\mathbb{R}$ com norma-L^∞ $\|u\|_\infty = ess\ \sup_{x\in\Omega}\|u(x)\|$
$C(\Omega)$	funções contínuas em Ω
$C^k(\Omega)$	funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω
$C^k_c(\Omega)$	conjunto das funções $C^k(\Omega)$ com suporte compacto em Ω, $(k\ge 0)$
$C^\infty(\Omega)$	$\bigcap_{k\ge0} C^k(\Omega)$
$C(\overline{\Omega})$	funções contínuas em $\overline{\Omega}$
$C^k(\overline{\Omega})$	funções $C^k(\Omega)$ tais que para cada multi-índice α, $\|\alpha\|\le k$, a aplicação $x\in\Omega\mapsto D^\alpha u(x)$ se estende continuamente a $\overline{\Omega}$
$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$	$\left\{u\in C(\Omega); sup_{x,y\in\Omega}\frac{\|u(x)-u(y)\|}{\|x-y\|^\alpha}<\infty\right\}$ com $0<\alpha<1$
$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$	$\left\{u\in C^k(\Omega); D^j u\in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})\ \forall j, \|j\|\le k\right\}$
$[u]_{C^\alpha}$	$sup_{x,y\in\Omega}\frac{\|u(x)-u(y)\|}{\|x-y\|^\alpha}$
$\\|u\\|_{C^k}$	$\max_{\|\gamma\|\le k}\|D^\gamma u\|_\infty$
$\\|u\\|_{C^{k,\alpha}}$	$\\|u\\|_{C^k}+\max_{\|\gamma\|\le k}[D^\gamma u]_{C^\alpha}$
$\|u\|$	norma euclidiana seja em $\mathbb{R}$, ou em $\mathbb{R}^n$

$W^{m,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev $\left\{u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega),\ \forall i = 1, \ldots, N\right\}$
	com norma $\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{\|\alpha\| \leq m} \int_\Omega \|D^\alpha u\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
$H^m(\Omega)$	espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ com norma
	$\|u\|_{H^{m,2}} = \left(\sum_{\|\alpha\| \leq m} \int_\Omega \|D^\alpha u\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
$H_0^1(\Omega)$	fecho de C_c^1 em $H^1(\Omega)$
$\mathfrak{L}(E, F)$	espaço das funções lineares e contínuas de E em F
T^*	operador adjunto de T.

Índice

Capítulo 1

Introdução

O estudo de equações elípticas envolvendo as derivadas da solução na parte não-linear tem despertado grande interesse nos últimos anos por modelarem diversos problemas na física, química e biologia.

Do ponto de vista matemático, o interesse por tais equações não é menor. A dificuldade em se obter estimativas a priori, bem como a falta de uma estrutura variacional, proporciona um empecilho natural à aplicação imediata das principais técnicas utilizadas na busca por soluções em problemas elípticos.

Essa gama de aplicações na física, química e biologia, bem como a dificuldade do ponto de vista matemático, nos impulsionaram a estudar problemas dessa natureza.

Este trabalho consiste no estudo de três classes de problemas elípticos com dependência não-linear das derivadas da solução. Esses problemas ainda não haviam sido abordados com a formulação e com as hipóteses que usamos.

Aqui, cada classe de problemas é abordada com uma técnica diferente das demais, trazendo assim um acréscimo matemático a cada capítulo. A saber, as principais técnicas que usamos são: Técnica Variacional, Método de Galerkin e Teorema do ponto-fixo de Krasnoselskii.

O Método Direto do Cálculo das Variações, ou seja o Método Variacional, consiste na obtenção de pontos críticos para um funcional associado de modo natural à equação diferencial. Essa idéia de tratar equações diferenciais através do estudo de um funcional associado, aparece em meados do século XIX, de modo explícito com Dirichlet e Riemann.

O Método de Galerkin consiste em aproximar o espaço de soluções (em geral espaços de Hilbert), por uma sequência de subespaços de dimensão finita. Em seguida, nestes subespaços de dimensão finita, busca-se soluções fracas do problema (no sentido de soluções fracas aproximadas). Por fim, prova-se que a sequência destas soluções fracas aproximadas converge para uma solução fraca do problema.

O Método de Ponto Fixo também tem sido largamente usado na busca por soluções em EDP. Há pelo menos três classes distintas de tais Teoremas: Contrações Rígidas, Mapas Compactos e Operadores que Preservam Ordem. O resultado que usamos neste trabalho se enquadra na classe de Mapas Compactos.

A fim de explicar melhor os problemas e os resultados obtidos, dividimos o restante dessa introdução em três seções. Cada uma delas descreve um tipo de problema e apresenta os resultados que são discutidos nos próximos três capítulos. O trabalho conta ainda com um Apêndice, onde apresentamos resultados auxiliares sobre propriedades de operadores, regularidade de soluções fracas e algumas estimativas a priori.

1.1 Existência de solução para uma classe de problemas de quarta ordem

No Capítulo 2, estabelecemos a existência de solução para uma classe de problemas elípticos com condição de Navier na fronteira e com dependência não-linear do gradiente e do laplaciano da solução. Mais especificamente, garantimos a existência de solução para o problema seguinte.

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u + q\Delta u + \alpha(x)u = f(x, u, \nabla u, \Delta u) & \text{em} \quad \Omega \\ u(x) = 0, \ \Delta u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 5$, é um aberto limitado com fronteira suave.

Esta classe de problemas surge no estudo de ondas em pontes suspensas e no estudo de deformação de superfícies elásticas em um fluido. Recentemente muitos resultados de existência foram obtidos, principalmente quando f não depende dos termos ∇u e Δu. Gostaríamos de citar por exemplo Edmunds, Fortunato e Jannelli [34], Jung e Choi [47], Qian e Li [65], Xu e Zhang [73].

O conjunto de hipóteses que consideramos sobre o problema é o seguinte.

(A_1) α é uma função Hölder-contínua.

(A_2) Existem constantes positivas a, b verificando $0 < a \leq \alpha(x) < b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(A_3) $q \in (-\infty, 2\sqrt{a})$.

(f_0) $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz contínua.

(f_1) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(x,t,\xi_1,\xi_2)}{t}=0$ uniformemente para $x\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}$, $\xi_1\in\mathbb{R}^N$ e $\xi_2\in\mathbb{R}$.

(f_2) Existem constantes $a_1>0$, $p\in\left(1,\frac{N+4}{N-4}\right)$, r_1 e r_2 , tais que $r:=r_1+r_2<1$ e

$$|f(x,t,\xi_1,\xi_2)|\leq a_1(1+|t|^p)(1+|\xi_1|^{r_1})(1+|\xi_2|^{r_2}),$$

para todo $(x,t,\xi_1,\xi_2)\in\Omega\times\mathbb{R}^{N+2}$.

(f_3) Existem constantes $\theta>2$ e $t_0>0$ tais que

$$0<\theta F(x,t,\xi_1,\xi_2)\leq tf(x,t,\xi_1,\xi_2),$$

para todo $x\in\Omega, |t|\geq t_0, (\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^{N+1}$, onde

$$F(x,t,\xi_1,\xi_2)=\int_0^t f(x,s,\xi_1,\xi_2)ds.$$

(f_4) Existem constantes $a_2,a_3>0$ tais que

$$F(x,t,\xi_1,\xi_2)\geq a_2|t|^\theta-a_3,$$

para todo $x\in\Omega,(t,\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^{N+2}$.

Denotamos por $y^{i,j},\ (i=1,2,3)$ os seguintes vetores

$$y^{1,j}=(y_1^j,y_2,y_3),\ y^{2,j}=(y_1,y_2^j,y_3),\ y^{3,j}=(y_1,y_2,y_3^j).$$

Para $i,k=1,2,3$ e $j=1,2$, definimos os seguintes números

$$L_{\rho_i}=\sup\left\{\frac{|f(x,y^{i,1})-f(x,y^{i,2})|}{|y_i^1-y_i^2|}:\quad (x,y^{i,j})\in A_i\right\},$$

em que

$$A_i=\{(x,y^{i,j})\in\Omega\times\mathbb{R}^{N+2},\ |y_i^j|\leq\rho_i,|y_k|\leq\rho_k(i\neq k)\},$$

para alguma constante $\rho_i>0$.

(f_5) Existem números positivos ρ_i $(i=1,2,3)$ dependendo de q,θ,a_1,a_2 e a_3, tais que os números acima definidos $L_{\rho_i}(i=1,2,3)$ verificam a seguinte relação

$$(\tau_1L_{\rho_1}+\tau_2L_{\rho_2}+\tau_3L_{\rho_3})\tau_1<\gamma,$$

em que γ é dado no Lema 2.1.1 e τ_i $(i=1,2,3)$ são as constantes ótimas (isto é, menores constantes) das desigualdades

$$\left(\int_\Omega|u|^2dx\right)^{\frac12}\leq\tau_1\|u\|,\ \left(\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right)^{\frac12}\leq\tau_2\|u\|,\ \left(\int_\Omega|\Delta u|^2dx\right)^{\frac12}\leq\tau_3\|u\|,$$

onde

$$(u,v)=\int_\Omega(\Delta u\Delta v+\nabla u\nabla v+uv)dx\qquad\text{e}\qquad\|u\|^2=(u,u).$$

A inspiração para abordarmos este problema surge nos trabalhos de Figueiredo, Girard e Matzeu [31] e Girard e Matzeu [43]. Devido ao problema não ser variacional e devido ao fato de não existir um controle inicial do gradiente e do laplaciano da solução, utilizamos uma técnica de congelamento e truncamento, cuja formulação aparece inicialmente em [31] e [43]. Veja também Jin [46]. Este procedimento ficará mais claro no Capítulo 2.

O principal resultado do Capítulo 2, obtido em parceria com os professores P.C. Carrião e O.H. Miyagaki, é enunciado a seguir.

Teorema 1.1.1. *Se* $(A_1)-(A_3)$ *e* $(f_0)-(f_5)$ *são verificados, então existe pelo menos uma solução clássica não trivial para o problema* (1.1).

Ainda no Capítulo 2, na Seção 2.2, abordamos um problema bastante importante quando estudamos (1.1) no caso onde $\Omega = \mathbb{R}$. Mais especificamente, garantimos a existência de solução periódica para o problema

$$u^{iv} + qu'' + \alpha(x)u = f(x, u, u', u'') \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

O conjunto de hipóteses que consideramos é:

(A_1) α é uma função Hölder-contínua.

(A_2) Existem constantes positivas a, b verificando $0 < a \leq \alpha(x) < b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(A_3) $q \in (-\infty, 2\sqrt{a})$.

(A_4) α é uma função par e $2L$-periódica.

(f_0) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz contínua.

(f_1) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x,t,\xi)}{t} = 0$ uniformemente para $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, x \in (0, L)$.

(f_2) $\exists\, a_1 > 0$, $p \in (1, +\infty)$, r_1 e r_2 tais que $r := r_1 + r_2 < 1$ e

$$|f(x,t,\xi)| \leq a_1(1 + |t|^p)(1 + |\xi_1|^{r_1})(1 + |\xi_2|^{r_2}),$$

para todo $(t, \xi) \in \mathbb{R}^3, x \in (0, L)$.

(f_3) $\exists\, \theta > 2$ e $t_0 > 0$ tais que

$$0 < \theta F(x,t,\xi) \leq tf(x,t,\xi),$$

para todo $x \in (0, L), |t| \geq t_0, \xi \in \mathbb{R}^2$, onde

$$F(x,t,\xi) = \int_0^t f(x,s,\xi)ds.$$

(f_4) $\exists\, a_2$ e $a_3 > 0$ tais que

$$F(x,t,\xi) \geq a_2|t|^\theta - a_3,$$

para todo $x \in (0,L), (t,\xi) \in \mathbb{R}^3$.

Denotamos por $y^{i,j}$, $(i = 1,2,3)$ os seguintes vetores

$$y^{1,j} = (y_1^j, y_2, y_3),\ y^{2,j} = (y_1, y_2^j, y_3),\ y^{3,j} = (y_1, y_2, y_3^j).$$

Para $i,k = 1,2,3$ e $j = 1,2$, definimos os seguintes números

$$L_{\rho_i} = \sup\left\{ \frac{|f(x,y^{i,1}) - f(x,y^{i,2})|}{|y_i^1 - y_i^2|} :\ \ (x,y^{i,j}) \in A_i \right\},$$

onde

$$A_i = \{(x,y^{i,j}) \in (0,L)\times\mathbb{R}^3,\ |y_i^j| \leq \rho_i, |y_k| \leq \rho_k (i \neq k)\},$$

para alguma constante $\rho_i > 0$.

(f_5) Existem números positivos ρ_i $(i = 1,2,3)$ dependendo de q, θ, a_1, a_2 e a_3, tais que os números acima definidos $L_{\rho_i} (i = 1,2,3)$ verificam a seguinte relação

$$(\tau_1 L_{\rho_1} + \tau_2 L_{\rho_2} + \tau_3 L_{\rho_3})\tau_1 < \gamma,$$

onde γ é dado no Lema 2.1.1 e τ_{i+1} $(i = 0,1,2)$ são as constantes ótimas das desigualdades

$$\left(\int_0^L |u^{(i)}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \tau_{i+1}\|u\|,$$

onde

$$(u,v) = \int_\Omega (u''v'' + u'v' + uv)dx \quad \text{e} \quad \|u\|^2 = (u,u).$$

(f_6) f é $2L-$periódica na primeira variável e verifica

$$f(x,t,\xi_1,\xi_2) = -f(-x,-t,\xi_1,-\xi_2),\ \forall (x,t,\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^4.$$

Este tipo de equação aparece como modelo para uma ampla classe de problemas parabólicos na mecânica estatística, modelos de campos de fase, hidrodinâmica, modelo de pontes suspensas, etc. Veja por exemplo os trabalhos [62, 63] e referências neles contidas.

Quando $q > 0$ esta equação é chamada equação de Swift-Hohenberg e equação de Fisher-Kolmogorov estendida quando $q \leq 0$. Em ambos os casos, recentemente resultados de existência de soluções heteroclínicas, homoclínicas e periódicas foram obtidos por vários autores, principalmente quando f não depende das derivadas de u. Gostaríamos de mencionar os seguintes artigos [16, 21, 22, 44, 48, 49, 60, 62, 64, 67, 69, 71] e referências neles contidas.

O principal resultado da Seção 2.2 é enunciado a seguir.

Teorema 1.1.2. *Se* $(A_1) - (A_4)$ *e* $(f_0) - (f_6)$ *são válidos, então existe pelo menos uma solução não trivial,* $2L$*-periódica para o problema* (1.2).

Este resultado foi obtido em parceria com os professores P.C. Carrião e O.H. Miyagaki e está publicado em [20].

1.2 Existência de solução positiva para uma classe de equações elípticas com termo de convecção

No Capítulo 3 estudamos a existência de solução para a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x,u) + g(x,\nabla u) & \text{em } \ \Omega \\ u > 0 & \text{em } \ \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

onde Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, a função h possui termos sublinear e singular e a função g é limitada superiormente por um termo de convecção do tipo $|\nabla u|^\beta$, com $\beta \in (0,1)$.

O conjunto de hipóteses sobre este problema é:

(H_1) As funções $h : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são localmente Hölder contínuas.

(H_2) Existem constantes $b > 0$, $0 < r_i < 1$ $(i = 1,2,3)$, e funções a_i $(i = 1,3) \in L^2(\Omega)$, $a_2 \in L^{2/1-r_2}(\Omega)$, satisfazendo

$$b|\mu|^{r_1} \leq h(x,\mu) \leq a_1(x) + a_2(x)|\mu|^{r_2} + \frac{a_3(x)}{|\mu|^{r_3}},$$

para todo $(x,\mu) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$.

(H_3) Existe uma constante $0 < r_4 < 1$, e existe uma função $a_4 \in L^\theta(\Omega)$, onde $\theta = \max\left\{\frac{2}{1-r_4}, \frac{N}{r_4}\right\}$, satisfazendo

$$0 \leq g(x,\eta) \leq a_4(x)|\eta|^{r_4},$$

para todo $(x,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^N$.

Problemas não lineares com singularidade aparecem em várias situações físicas como mecânica dos fluidos, catalisadores heterogêneos químicos, fluidos não-Newtonianos e formação de padrões biológicos. Para maiores detalhes sobre esses assuntos, citamos os trabalhos Fulks e Maybe [37], Callegari e Nashman [18, 19] e referências neles contidas.

Muitos autores estudaram o caso em que a não-linearidade não depende do termo de convecção, isto é , $g = 0$. Gostaríamos de citar, por exemplo, Crandall, Rabinowitz e Tartar [29], Dávila e Montenegro [30], Choi e McKenna [25], Coclite e Palmieri [27], Cîrstea, Ghergu e Rădulescu [26], Diaz, Morel e Oswald [33], Alves e Corrêa [5], Alves, Corrêa e Gonçalves [6]. As principais ferramentas usadas nos trabalhos acima são Sub e Supersolução, Teoremas de Ponto Fixo, teoria de Bifurcação e Método de Galerkin. Quando a não-linearidade possui um termo de convecção, isto é, $g \neq 0$, gostaríamos de citar os trabalhos de Ghergu e Rădulescu [38], Zhang [75], Giarrusso e Porru [39], Wood [53], Xavier [72], Yan [74]. Em todos estes trabalhos, as principais ferramentas usadas são novamente Sub e Supersolução e Teorema de Ponto Fixo; em geral, o termo de convecção é da forma $\pm|\nabla u|^{\beta}$ com $\beta \in (0, 2)$.

Em nosso trabalho consideramos uma classe de não-linearidade, envolvendo as funções h e g, que não foi considerada nas referências acima. Em geral, os artigos citados acima supõem que os termos da não-linearidade possuem uma monotonicidade, e essas hipóteses estão relacionadas com o método utilizado. Aqui, este tipo de hipóteses não são necessárias.

No Capítulo 3, utilizamos o método de Galerkin adaptando a versão que aparece inicialmente em Alves e de Figueiredo [8] (veja também Alves, Corrêa e Gonçalves [6]), para garantir a existência de solução para o problema (1.3). O método de Galerkin tem sido largamente utilizado no estudo de EDPs de evolução, mas já em Lions [56], o mesmo resolve problemas estacionários simples, e alguns envolvendo versões do p-Laplaciano via este método. Em Kesavan [50], o Método de Galerkin é usado para resolver alguns problemas Elípticos não-lineares onde a função nula não é solução do problema.

O principal resultado do Capítulo 3, obtido em parceria com os professores P.C. Carrião e C.O. Alves, é enunciado a seguir.

Teorema 1.2.1. *Se as condições* $(H_1) - (H_3)$ *são válidas, então o problema* (1.3) *possui pelo menos uma solução.*

1.3 Existência de solução positiva para uma classe de equações elípticas do tipo Kirchhoff

No Capítulo 4 estudamos a existência de soluções positivas para o problema

$$(1.4) \quad \begin{cases} -L(u) = -H\left(a\displaystyle\int_{\Omega} u^{\gamma} ds + b\int_{\Omega} |\nabla u|^{\theta} ds\right)\Delta u = f(x, u, \nabla u) & \text{em} \quad \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\theta, \gamma > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e não-negativas.

Para estudarmos o problema proposto, consideramos o seguinte conjunto de hipóteses.

(F_0) A função f é localmente Hölder-contínua.

(F_1) A função f verifica

$$a_1|u|^p - a_2|\eta|^\alpha \leq f(x,u,\eta) \leq a_3|u|^p + a_4|\eta|^\alpha,$$

$$\forall (x,u,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \text{ com } 0 < a_i, i \in \{1,\ldots,4\},\ p \in \left(1, \tfrac{N+2}{N-2}\right) \text{ e } \alpha \in \left(1, \tfrac{2p}{p+1}\right).$$

(H_0) Existe uma constante positiva m tal que

$$m \leq H(y), \text{ para todo } y \in \mathbb{R}.$$

O operador não-linear L aparece em várias aplicações relacionadas com problemas de evolução; principalmente aqueles associados com os modelos de Kirchhoff-Carrier (veja Limaco e Medeiros [55]) e com a versão estacionária da equação de Kirchhoff

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{1.5}$$

apresentado por Kirchhoff em 1883 (veja Kirchhoff [51], e também Arosio e Panizzi [13], Cousin e Frota [28], He e Zou [45], Ono [61]).

Esta equação é uma extensão da equação da onda de d'Alembert clássica, considerando os efeitos das mudanças no comprimento de um fio durante as vibrações. Os parâmetros em (1.5) têm os seguintes significados: L é o comprimento do fio, h é a área da secção transversal, E é o coeficiente de Young do material, ρ é a densidade da massa e P_0 é a tensão inicial.

Este problema recebeu bastante atenção depois do trabalho de Lions [57], que trata de problemas de vibração não-linear.

A equação (1.4) ainda está relacionada a problemas que envolvem certas equações de Schrödinger não-lineares do tipo

$$\begin{cases} iW_t + \Delta W = M\left(\displaystyle\int_\Omega |\mathrm{Re}\nabla W|^2 dx \right) \mathrm{Re}W, (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,+\infty) \\ W(x,0) = w_0(x) = \phi(x) + i\psi(x), \text{ em } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Gostaríamos de citar Astaburuaga, Fernandez e Perla Menzala [14] .

Por outro lado, o problema (1.4) modela vários sistemas físicos e biológicos onde u descreve um processo que depende da média de si mesmo, por exemplo a densidade populacional. Veja por exemplo Andrade e Ma [12], Chipot e Lovat [23], Chipot e Rodrigues [24].

O problema (1.4) ainda engloba um caso do resultado obtido em [68], no seguinte sentido: em [68], Ruiz estudou o problema (1.4) no caso local, ou seja, $H \equiv 1$, mas substituindo o operador Δ por Δ_q, onde $\Delta_q u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{q-2}\nabla u)$.

Como a equação em (1.4) contém integral sobre Ω, esta classe de problemas é frequentemente chamada de problema não-local.

Recentemente, muitos trabalhos têm apresentado existência de solução para o problema

$$(1.6) \qquad \begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Gostaríamos de citar Alves, Corrêa e Ma [7], Ma [58], Ma e Riviera [59].

O principal resultado do Capítulo 4 é o seguinte.

Teorema 1.3.1. *Suponhamos que f e H são funções não negativas verificando $(F_0)-(F_1)$ e (H_0), respectivamente. Então o problema* (1.4) *possui pelo menos uma solução positiva $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$.*

Este resultado foi obtido em parceria com os professores P.C. Carrião e E.A.M. Abreu.

Para garantirmos a existência de solução positiva para (1.4), usamos um argumento de grau inicialmente usado por Krasnoselskii [52] (veja também [32, 68]). O principal ingrediente do nosso argumento é a estimativa a priori sobre o par (u,λ) solução do problema auxiliar

$$(1.7) \qquad \begin{cases} -L(u) = f(x,(1+\lambda H)^{\frac{1}{p}}u,\nabla u) + \lambda H & \text{em} \quad \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

com $\lambda \geq 0$ e $u \in C^2(\overline{\Omega})$. O problema auxiliar aqui utilizado é diferente daquele estudado em [68], devido à parte não-local. Para obtermos tal estimativa, usamos argumentos de blow-up e a identidade de Picone.

Consideremos agora o problema

$$
(1.8) \qquad \begin{cases} -H\left(a\displaystyle\int_\Omega u^\gamma ds + b\int_\Omega |\nabla u|^\theta ds\right)\Delta u = f(x,u,\nabla u) + \mu & \text{em} \quad \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}
$$

onde $\theta, \gamma > 0$, $a, b, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e não-negativas.

Notemos que o Teorema 1.4 não engloba o problema (1.8) devido à restrição da hipótese (F_1). Assim, pela teoria do grau estudamos este caso e garantimos a existência de solução para o mesmo.

Para isso, provamos a existência de um contínuo de soluções

$$
\mathcal{S} = \{(\mu, u) \in \mathbb{R} \times C^2(\overline{\Omega}) : u \text{ é uma solução positiva de } (1.8)\},
$$

usando um resultado de Rabinowitz [66, Teorema 6.2, pag 195], que está demonstrado em [15]. Ou seja, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 1.3.2. *Suponhamos que as hipóteses* $(F_0) - (F_1)$ *e* (H_0) *sejam válidas. Então existe* $\mu^* > 0$ *tal que* (1.8) *possui pelo menos uma solução positiva se* $\mu \leq \mu^*$.

Para finalizar esta introdução, queremos apresentar o último resultado deste trabalho. A versão aqui apresentada é uma versão simplificada; a versão geral está sendo preparada e será submetida para publicação.

A hipótese (H_0) é fundamental para a demonstração do Teorema 1.4. O que apresentamos a seguir é um caso onde esta hipótese pode ser enfraquecida.

Consideremos o problema

$$
(1.9) \qquad \begin{cases} -H\left(a\displaystyle\int_\Omega u^\gamma ds + b\int_\Omega |\nabla u|^2 ds\right)\Delta u = f(x,u,\nabla u) & \text{em} \quad \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}
$$

onde $\gamma,\ a,\ b > 0$.

Para estudarmos este problema, consideramos a seguinte hipótese adicional.

(H_1) Existe uma constante positiva τ, satisfazendo $\tau + 1 < \min\left\{\frac{p+1}{2}, \frac{\alpha+1}{2}\right\}$, tal que

$$
H(t) \geq |t|^\tau.
$$

Na verdade, na versão a ser publicada, mostramos que basta $H(t) \geq g_\delta(t)$ para algum $\delta > 0$ fixado, onde

$$g_\delta(t) = \begin{cases} |t|^\tau, & \text{se} \quad t \in [0, \delta] \\ \delta^\tau, & \text{se} \quad t \in (\delta, +\infty) \end{cases}$$

Notemos que sob a hipótese (H_1), pode ocorrer $H(0) = 0$.

Substituindo a hopótese (H_0) por (H_1), conseguimos obter o seguinte resultado.

Teorema 1.3.3. *Suponhamos que f e H são funções não negativas verificando $(F_0) - (F_1)$ e (H_1), respectivamente. Então o problema* (1.9) *possui pelo menos uma solução positiva $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.*

Capítulo 2

Existência de solução para uma classe de problemas de quarta ordem

2.1 Problema envolvendo o operador Biharmônico com fronteira de Navier

Nesta seção estabelecemos a existência de solução para uma classe de problemas elípticos com condição de Navier na fronteira e com dependência não-linear do gradiente e do laplaciano da solução. Mais especificamente, garantimos a existência de solução para o seguinte problema.

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u + q\Delta u + \alpha(x)u = f(x, u, \nabla u, \Delta u) & \text{em} \quad \Omega \\ u(x) = 0, \ \Delta u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 5$, é um aberto limitado com fronteira suave.

Para estudarmos o problema proposto, consideramos as seguintes hipóteses sobre α e q.

(A_1) α é uma função Hölder-contínua.

(A_2) Existem constantes positivas a, b verificando $0 < a \leq \alpha(x) < b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(A_3) $q \in (-\infty, 2\sqrt{a})$.

Sobre f, consideramos as seguintes hipóteses:

(f_0) $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz contínua.

(f_1) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(x, t, \xi_1, \xi_2)}{t} = 0$ uniformemente para $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, $\xi_1 \in \mathbb{R}^N$ e $\xi_2 \in \mathbb{R}$.

(f_2) Existem constantes $a_1 > 0$, $p \in \left(1, \frac{N+4}{N-4}\right)$, r_1 e r_2 , tais que $r := r_1 + r_2 < 1$ e

$$|f(x,t,\xi_1,\xi_2)| \leq a_1(1+|t|^p)(1+|\xi_1|^{r_1})(1+|\xi_2|^{r_2}),$$

para todo $(x,t,\xi_1,\xi_2) \in \Omega \times \mathbb{R}^{N+2}$.

(f_3) Existem constantes $\theta > 2$ e $t_0 > 0$ tais que

$$0 < \theta F(x,t,\xi_1,\xi_2) \leq tf(x,t,\xi_1,\xi_2), \forall x \in \Omega, |t| \geq t_0, (\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^{N+1},$$

onde

$$F(x,t,\xi_1,\xi_2) = \int_0^t f(x,s,\xi_1,\xi_2)ds.$$

(f_4) Existem constantes $a_2, a_3 > 0$ tais que

$$F(x,t,\xi_1,\xi_2) \geq a_2|t|^\theta - a_3, \forall x \in \Omega, (t,\xi_1,\xi_2) \in \mathbb{R}^{N+2}.$$

Denotamos por $y^{i,j},\ (i = 1,2,3)$ os seguintes vetores

$$y^{1,j} = (y_1^j, y_2, y_3),\ y^{2,j} = (y_1, y_2^j, y_3) \text{ e } y^{3,j} = (y_1, y_2, y_3^j).$$

Para $i,k = 1,2,3$ e $j = 1,2$, definamos os seguintes números

$$L_{\rho_i} = \sup\left\{\frac{|f(x,y^{i,1}) - f(x,y^{i,2})|}{|y_i^1 - y_i^2|} : \quad (x,y^{i,j}) \in A_i\right\},$$

onde

$$A_i = \{(x,y^{i,j}) \in \Omega \times \mathbb{R}^{N+2},\ |y_i^j| \leq \rho_i, |y_k| \leq \rho_k (i \neq k)\},$$

para alguma constante $\rho_i > 0$.

(f_5) Existem números positivos ρ_i $(i = 1,2,3)$ dependendo de q, θ, a_1, a_2 e a_3, tais que os números acima definidos $L_{\rho_i} (i = 1,2,3)$ verificam a seguinte relação

$$(\tau_1 L_{\rho_1} + \tau_2 L_{\rho_2} + \tau_3 L_{\rho_3})\tau_1 < \gamma,$$

onde γ é dado no Lema 2.1.1 e τ_i $(i = 1,2,3)$ são as constantes ótimas (isto é menores constantes) das desigualdades

$$\left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \tau_1\|u\|,\ \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \tau_2\|u\|,\ \left(\int_\Omega |\Delta u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \tau_3\|u\|,$$

onde

$$(u,v) = \int_\Omega (\Delta u \Delta v + \nabla u \nabla v + uv)dx \quad \text{ e } \quad \|u\|^2 = (u,u).$$

Observação 1. *Notemos que tomando* $\tau_i = 1$ $(i = 1, 2, 3)$, *as desigualdades acima são verificadas.*

Com tais hipóteses, demonstramos o resultado seguinte.

Teorema 2.1.1. *Se as hipóteses* $(A_1)-(A_3)$ *e* $(f_0)-(f_5)$ *são verificadas, então existe pelo menos uma solução clássica não trivial para o problema* (2.1).

Um exemplo: Suponhamos que β e δ sejam funções contínuas e positivas. Se $f(x, t, \xi_1, \xi_2) = \beta(x)t^2(1 + |\xi_1|)^{1/4}(1 + |\xi_2|)^{1/4} + \delta(x)t^3$, então esta função f satisfaz todas as condições $(f_0) - (f_5)$.

2.1.1 Notações e alguns resultados técnicos

O espaço de Sobolev que utilizamos é

$$X \equiv H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Este espaço é um espaço de Hilbert com produto interno e norma dados por

$$(u, v) = \int_\Omega (\Delta u \Delta v + \nabla u \nabla v + uv)dx \quad \text{e} \quad \|u\|^2 = (u, u), \quad \text{respectivamente.}$$

A inspiração para abordagem deste problema encontra-se nos trabalhos [31] e [43].

Como em geral o problema (2.1) não é variacional, utilizamos uma técnica de congelamento, cuja formulação aparece inicialmente em [31]. Esta técnica consiste em associar ao problema (2.1) uma família de problemas sem a dependência, em f, do gradiente e do laplaciano da solução. A saber, para cada $w \in X$ fixado consideramos o problema "congelado" dado por

$$(2.2) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u_w + q\Delta u_w + \alpha(x)u_w = f(x, u_w, \nabla w, \Delta w) & \text{em } \Omega \\ u_w(x) = 0, \ \Delta u_w(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

A falta de estimativas a priori para as normas do gradiente e do laplaciano da solução é um empecilho ao uso da técnica variacional. Para contornarmos esta dificuldade consideramos, para cada $R > 0$, as funções "truncadas"

$$f_R(x, t, \xi_1, \xi_2) = f(x, t, \xi_1\varphi_R(\xi_1), \xi_2\varphi_R(\xi_2)),$$

e

$$F_R(x, t, \xi_1, \xi_2) = \int_0^t f_R(x, s, \xi_1, \xi_2)ds,$$

onde $\varphi_R \in C^1(\mathbb{R})$, $|\varphi_R| \leq 1$ e

$$\varphi_R(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |\xi| \leq R, \\ 0 & \text{se} \quad |\xi| \geq R + 1. \end{cases}$$

Este argumento aparece inicialmente em [46]. Veja também [43].

Observação 2. *Note que* $|\xi\varphi_R(\xi)| \leq R+1$, *para todo* $\xi \in \mathbb{R}$.

Assim, para cada $w \in X$ e $R > 0$ fixado, consideramos o problema "truncado" e "congelado", que é dado por

$$\begin{cases} \Delta^2 u_w^R + q\Delta u_w^R + \alpha(x)u_w^R = f_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w) & \text{em } \Omega \\ u_w^R(x) = 0, \ \Delta u_w^R(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

O funcional $I_w^R : X \to \mathbb{R}$ associado ao problema (2.3) é dado por

$$I_w^R(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega [(\Delta v)^2 - q(\nabla v)^2 + \alpha(x)v^2]dx - \int_\Omega F_R(x, v, \nabla w, \Delta w)dx. \tag{2.4}$$

O seguinte Lema técnico nos garante uma equivalência de norma em X.

Lema 2.1.1. *Suponhamos que* α *e* q *satisfazem* $(A_1) - (A_3)$. *Então, existem constantes positivas* η *e* γ *tais que*

$$\gamma\|u\|^2 \leq \int_\Omega (\Delta u^2 - q\nabla u^2 + \alpha(x)u^2)dx \leq \eta\|u\|^2, \ \forall u \in H^2(\Omega).$$

Demonstração:

A constante η é obtida tomando $\eta = \max\{-q, b, 1\}$. Para obtermos γ, notemos que se $q < 0$, basta tomar

$$\gamma = \min\{-q, a, 1\}.$$

Para o caso em que $q \geq 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$ faremos um esboço da prova (esta demonstração é similar ao que foi feito em [71, Lema 8]).

$\Omega \subset \mathbb{R}$, γ será tomado como em [71, Lema 8]. Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n > 1$, a demonstração é similar, mas

Seja $\widehat{u}$ a transformada de Fourier de $u \in H^2(\Omega)$. Suponhamos que $k \in (0,3)$ é uma constante que verifica

$$(q+1)\xi^2 - a + 1 \leq \frac{k}{3}(1 + \xi^2 + \xi^4), \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Como obtido na demonstração do Teorema de Plancherel [36, Teorema 8.29], temos

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|\widehat{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N), |\alpha| \leq 2$. Pela letra (e) de [36, Teorema 8.22] vale

$$(\widehat{\partial^\alpha u})(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{u}(\xi).$$

Assim temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[|\Delta u|^2 - q|\nabla u|^2 + \alpha(x)u^2\right] dx &= \int_\Omega \left[|\widehat{\Delta u}|^2 - q|\widehat{\nabla u}|^2 + \alpha(x)|\widehat{u}|^2\right] d\xi \\
&\geq \int_\Omega \left[|\widehat{\Delta u}|^2 - q|\widehat{\nabla u}|^2 + a|\widehat{u}|^2\right] d\xi \\
&= \int_\Omega \left[(2\pi|\xi|)^4 - q(2\pi|\xi|)^2 + a\right] |\widehat{u}|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Façamos $\omega = (2\pi|\xi|)$. Por (2.5) temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[|\Delta u|^2 - q|\nabla u|^2 + \alpha(x)u^2\right] dx &\geq \int_\Omega \left(\omega^4 - q\omega^2 + a\right) |\widehat{u}|^2 d\xi \\
&= \int_\Omega \left(\omega^4 + \omega^2 + 1 - (q+1)\omega^2 + a - 1\right) |\widehat{u}|^2 d\xi \\
&\geq \left(1 - \tfrac{k}{3}\right) \int_\Omega \left(\omega^4 + \omega^2 + 1\right) |\widehat{u}|^2 d\xi \\
&= \left(1 - \tfrac{k}{3}\right) \|u\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, tomando $\gamma = \left(1 - \frac{k}{3}\right) > 0$, provamos o Lema.

Falta mostrar que a desigualdade (2.5) é verdadeira para algum $k \in (0,3)$. Mas isto é equivalente a demonstrar que, para algum $k \in (0,3)$,

$$0 \leq \xi^4 + \left(1 - \frac{3(q+1)}{k}\right)\xi^2 + \left(1 + \frac{3(a-1)}{k}\right), \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Para isto basta encontrar k satisfazendo

$$\left(1 - \frac{3(q+1)}{k}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{3(a-1)}{k}\right) \leq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Desenvolvendo a desigualdade acima, encontramos a seguinte desigualdade equivalente

$$k^2 + 2k(q + 2a - 1) - 3(q+1)^2 \geq 0. \tag{2.6}$$

Para obter $k \in (0,3)$ tal que a desigualdade em (2.6) é verificada, basta tomar

$$3 > k \geq 1 - q - 2a + \sqrt{(q + 2a - 1)^2 + 3(q+1)^2}.$$

Esta última desigualdade vale se $q^2 < 4a$, o que é verdade pela hipótese (A_3). Isto concluí a demonstração. $\square$

2.1.2 Definições preliminares

Vamos relembrar algumas definições que serão importantes para a próxima seção.

Definição 1. *O funcional $\varphi : U \to \mathbb{R}$, onde U é um aberto de um espaço de Banach X, é Gateaux diferenciável em $u \in U$ se existe $f \in X'$, tal que para todo $h \in X$,*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u+th) - \varphi(u) - \langle f, h\rangle] = 0.$$

A derivada de Gateaux em u é denotada por $\varphi'(u)$, e é dada por

$$\langle \varphi'(u), h\rangle := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[\varphi(u+th) - \varphi(u)].$$

Definição 2. *O funcional φ tem derivada a Fréchet $f \in X'$ em u se*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}[\varphi(u+h) - \varphi(u) - \langle f, h\rangle] = 0.$$

Definição 3. *O funcional φ pertence a $C^1(U, \mathbb{R})$ se φ possui derivada a Fréchet e esta é contínua em U.*

Observação 3. *O funcional diferenciável a Fréchet é diferenciável a Gateaux.*

Definição 4. *Seja H Banach, $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ e $c \in \mathbb{R}$. O funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ se qualquer sequência $\{u_n\} \subset H$, tal que*

$$I(u_n) \to c \text{ e } I'(u_n) \to 0,$$

possui uma subsequência convergente.

Definição 5. *Seja H Banach, $I \in C^1(H, \mathbb{R})$. O funcional I satisfaz a condição (PS) se o funcional satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

2.1.3 Demonstração do Teorema 2.1.1

Para facilitar a exposição da demonstração do Teorema 2.1.1, nós a apresentaremos em vários lemas.

Estamos procurando um ponto crítico para o funcional

$$I_w^R(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega [(\Delta v)^2 - q(\nabla v)^2 + \alpha(x)v^2]dx - \int_\Omega F_R(x, v, \nabla w, \Delta w)dx$$

no espaço de Sobolev $X \equiv H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Para tal, verificamos nos próximos dois lemas que o funcional I_w^R possui a geometria do Passo da Montanha e satisfaz as condições de Palais-Smale.

Lema 2.1.2. *Seja $w \in X$ e $R > 0$ fixado, então*

i) existem constantes positivas $\rho = \rho_R$ e $\alpha = \alpha_R$ tais que $I_w^R(v) \geq \alpha, \ \forall v \in X$ com $\|v\| = \rho$.

ii) fixado v_0 com $\|v_0\| = 1$, existe um $T > 0$ tal que $I_w^R(tv_0) < 0, \ \forall t > T$.

Demonstração:

Por (f_1), dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo $|t| < \delta, \ x \in \Omega, \ (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^{N+1}$ temos

$$F_R(x,t,\xi_1,\xi_2) \leq \int_0^t |f_R(x,s,\xi_1,\xi_2)|ds \leq \int_0^t |s|\varepsilon ds = \varepsilon\frac{t^2}{2}.$$

Assim, se $|v| < \delta$ então

$$F_R(x,v,\nabla w,\Delta w) \leq \varepsilon\frac{v^2}{2}. \tag{2.7}$$

Agora se $|t| \geq \delta$, tomemos $k = k(\delta) = 2\max\left\{a_1, \frac{a_1}{\delta^{p+1}}\right\}$. Notemos que

$$a_1|t| \leq \frac{k}{2}|t|^{p+1}.$$

Portanto, se $|v| \geq \delta$, por (f_2) e pela Observação 2,

$$\begin{aligned} F_R(x,v,\nabla w,\Delta w) &\leq a_1(|v| + |v|^{p+1})(1+(R+1)^{r_1})(1+(R+1)^{r_2}) \\ &\leq k|v|^{p+1}(R+2)^r. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Assim, pelas desigualdades (2.7) e (2.8) e pelo Lema 2.1.1, temos

$$\begin{aligned} I_w^R(v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega [(\Delta v)^2 - q(\nabla v)^2 + \alpha(x)v^2]dx - \int_\Omega F_R(x,v,\nabla w,\Delta w)dx \\ &\geq \frac{\gamma}{2}\|v\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |v|^2dx - k(R+2)^r\int_\Omega |v|^{p+1}dx. \end{aligned}$$

Pelas imersões de Sobolev (veja o Teorema $A.2.5$) temos

$$I_w^R(v) \geq \frac{1}{2}(\gamma - C\varepsilon)\|v\|^2 - kC(R+2)^r\|v\|^{p+1},$$

para alguma constante positiva C. Então para um ε suficientemente pequeno, podemos escolher $\rho = \rho_R$ e $\alpha = \alpha_R$, ambos independentes de w, tais que a primeira parte do resultado é verificada.

Agora, fixemos um arbitrário $v_0 \in X$ com $\|v_0\| = 1$. Por (f_4) e pelo Lema 2.1.1

$$I_w^R(tv_0) \leq \frac{\eta|t|^2}{2}\|v_0\|^2 - a_2|t|^\theta \int_\Omega |v_0|^\theta dx + a_3|\Omega|.$$

Assim, desde que $\theta > 2$, é possível escolher $T > 0$ tal que $I_w^R(tv_0) \leq 0,\ \forall t > T$. $\square$

Lema 2.1.3. *Para qualquer $w \in X$, $R > 0$, o problema* (2.3) *possui pelo menos uma solução fraca não trivial.*

Demonstração:

Inicialmente notemos que o funcional $I_w^R \in C^1(X, \mathbb{R})$. Para tal, consideremos

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\Delta u|^2 - q|\nabla u|^2 + \alpha(x)u^2)dx$$

e

$$\psi(u) = \int_\Omega F_R(x, u, \nabla w, \Delta w)dx.$$

Dado $h \in X$, seja χ o candidato a derivada a Fréchet de ϕ. Assim

$$\langle \chi, h\rangle = \int_\Omega (\Delta u \Delta h - q\nabla u \nabla h + \alpha(x)uh)dx.$$

Notemos que

$$\frac{\phi(u+h) - \phi(u) - (\chi, h)}{\|h\|} = \frac{\displaystyle\int_\Omega (|\Delta h|^2 - q|\nabla h|^2 + \alpha(x)h^2)dx}{2\|h\|}.$$

Assim, pelo Lema 2.1.1, verificamos que ϕ é diferenciável a Fréchet e é de classe C^1.

Verifiquemos agora que ψ é de classe C^1.

Dados $u, h \in X$, $x \in \Omega$ e $0 < |t| < 1$; pelo Teorema do Valor Médio, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$\frac{|F_R(x, u+th, \nabla w, \Delta w) - F_R(x, u, \nabla w, \Delta w)|}{|t|} = |f_R(x, u + \lambda th, \nabla w, \Delta w)h|\ .$$

Pela hipótese (f_2)

$$|f_R(x, u + \lambda th, \nabla w, \Delta w)h| \leq a_1(R+2)^r\left[1 + (|u| + |h|)^p\right]|h|.$$

Como $u, h \in L^p(\Omega)$, pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\langle \psi'(u), h\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\psi(u+th) - \psi(u)] = \int_\Omega f_R(x, u, \nabla w, \Delta w)hdx.$$

Verifiquemos agora a continuidade de ψ'. Dado $(u_n) \subset X$ uma sequência tal que $u_n \to u$ em X. Notemos que

$$\begin{aligned} |\langle \psi'(u_n) - \psi'(u), h\rangle| &\leq \int_\Omega |f_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w) - f_R(x, u, \nabla w, \Delta w)||h| dx \\ &\leq C_p |f_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w) - f_R(x, u, \nabla w, \Delta w)|_q \|h\|, \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde a constante C_p é a constante da imersão de Sobolev e $q = \frac{p+1}{p}$.

De (2.9) temos

$$\begin{aligned} \|\psi'(u_n) - \psi'(u)\| &= \sup_{\|h\|=1} |\langle \psi'(u_n) - \psi'(u), h\rangle| \\ &\leq C_p |f_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w) - f_R(x, u, \nabla w, \Delta w)|_q. \end{aligned}$$

Pelas imersões de Sobolev (Teorema A.2.5), temos que $u_n \to u$ em L^{p+1} e pelo Lema $A.1.2$ temos

$$\|\psi'(u_n) - \psi'(u)\| \to 0.$$

Assim, pela Proposição $A.1.2$, temos que ψ é C^1.

Afirmação 1. *O funcional I_w^R satisfaz a condição de Palais-Smale.*

O Lema 2.1.2 nos garante que I_w^R possui a geometria do Passo da Montanha. Supondo a Afirmação 1 válida, como o funcional $I_w^R \in C^1(X, \mathbb{R})$, temos pelo Teorema do Passo da Montanha, devido a Ambrosetti-Rabinowitz (Teorema $A.1.1$), que existe $u_w^R \neq 0$ satisfazendo

$$I_w'^R(u_w^R) = 0 \;\text{ e }\; I_w^R(u_w^R) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I_w^R(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0,\; \gamma(1) = Tv_0\}$$

e v_0 e T são obtidos no Lema 2.1.2. Ou seja, obtemos uma solução não trivial (no sentido fraco), para o problema (2.3).

Falta provar que a Afirmação 1 é verdadeira para concluirmos o Lema 2.1.3.

Verificação da Afirmação 1

Seja (u_n) uma sequência de X tal que

$$I_w^R(u_n) \to c \;\text{ e }\; I_w'^R(u_n) \to 0,$$

para alguma constante c. Então, para n suficientemente grande temos

$$I_w^R(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle I_w'^R(u_n), u_n\rangle \leq c + 1 + \|u_n\|, \quad \forall n > n_0.$$

Por outro lado, desde que $\theta > 2$, pelo Lema 2.1.1 temos

$$\begin{aligned} I_w^R(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle (I_w^R)'(u_n), u_n\rangle &\geq \gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^2 - \int_\Omega F_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w)dx \\ &+ \frac{1}{\theta}\int_\Omega f_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w)u_n dx. \end{aligned}$$

Assim, para garantir a limitação de $\|u_n\|$, basta mostrar que

$$\int_\Omega F_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w)dx - \frac{1}{\theta}\int_\Omega f_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w)u_n dx < d, \tag{2.10}$$

pois isto implica

$$d + c + 1 + \|u_n\| \geq \gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|^2.$$

E portanto obtemos

$$\|u_n\| < c_1.$$

Mostremos agora que (2.10) é verdadeiro. Seja t_0 dado na condição (f_3). Fixemos $n \in \mathbb{N}$ e consideremos o conjunto

$$D_n = \{x \in \Omega; |u_n(x)| > t_0\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(F_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w) - \frac{1}{\theta}f_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w)u_n\right)dx = \\ &\int_{D_n} \left(F_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w) - \frac{1}{\theta}f_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w)u_n\right)dx + \\ &+ \int_{\Omega\setminus D_n} \left(F_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w) - \frac{1}{\theta}f_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w)u_n\right)dx. \end{aligned}$$

Pela condição (f_3), se $x \in D_n$, então

$$F_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w) \leq \frac{1}{\theta}f_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w)u_n.$$

Portanto

$$\int_{D_n} \left(F_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w) - \frac{1}{\theta}f_R(x, u_n, \nabla w, \Delta w)u_n\right)dx \leq 0.$$

Se $x \in \Omega\setminus D_n$, de (f_2) e da Observação 2 temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega\setminus D_n} F_R(x,u_n,\nabla w,\Delta w)dx\right| &\leq \int_{\Omega\setminus D_n} a_1(1+|t_0|^p)(R+2)^r|\Omega|dx \\ &= a_1(R+2)^r(1+|t_0|^p)|\Omega|^2 = k_1,\end{aligned}$$

$$\left|\frac{1}{\theta}\int_{\Omega\setminus D_n} f_R(x,u_n,\nabla w,\Delta w)u_n dx\right| \leq \int_{\Omega\setminus D_n} \frac{a_1(R+2)^r}{\theta}\left(|t_0|+|t_0|^{p+1}\right)dx = k_2,$$

com k_1, e k_2 não dependendo de n. Assim, podemos concluir que

$$\int_\Omega F_R(x,u_n,\nabla w,\Delta w)dx - \frac{1}{\theta}\int_\Omega f_R(x,u_n,\nabla w,\Delta w)u_n dx < k_1+k_2,$$

para todo $n\in\mathbb{N}$, e portanto a desigualdade (2.10) é verdadeira.

Passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } X.$$

Pelo Teorema $A.2.5$ (Rellich-Kondrachov)

$$u_n \to u \text{ em } L^{p+1}(\Omega),$$

e pelo Lema $A.1.2$, temos

$$f_R(x,u_n,\nabla w,\Delta w) \to f_R(x,u,\nabla w,\Delta w) \text{ em } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega).$$

Portanto

$$\int_\Omega [f_R(x,u_n,\nabla w,\Delta w) - f_R(x,u,\nabla w,\Delta w)](u_n-u)dx \to 0, \text{ quando } n\to\infty. \tag{2.11}$$

Como $(I'(u_n)-I'(u)) \to -I'(u)$ e $u_n \rightharpoonup u$ em X, pela Proposição $A.1.3$, temos que

$$\langle I'^R_w(u_n) - I'^R_w(u), u_n-u\rangle \to 0, \text{ quando } n\to\infty. \tag{2.12}$$

Notemos que pelo Lema 2.1.1

$$\begin{aligned}&\langle I'^R_w(u_n) - I'^R_w(u), u_n-u\rangle + \\ &\int_\Omega [f_R(x,u_n,\nabla w,\Delta w) - f_R(x,u,\nabla w,\Delta w)](u_n-u)dx \\ &\geq \gamma\|u_n-u\|^2.\end{aligned}$$

Usando (2.11) e (2.12) na desigualdade acima, concluímos que $u_n \to u$ em X e podemos concluir que a afirmação é verdadeira. □

O próximo Lema nos garante estimativas a priori para a solução u_w^R obtida no Lema 2.1.3.

Lema 2.1.4. *Seja $R > 0$ fixado. Então, existem constantes positivas $d_1 := d_1(R)$, $d_2 := d_2(R)$, independentes de w, tais que*

$$d_2 \leq \|u_w^R\| \leq d_1,$$

para toda solução u_w^R obtida no Lema 2.1.3.

Demonstração:

Pelo Teorema do Passo da Montanha

$$I_w^R(u_w^R) \leq \max_{t\geq 0} I_w^R(tv_0), \text{ com } v_0 \text{ como no Lema 2.1.2.}$$

Por (f_4) e pelo Lema 2.1.1, obtemos que

$$I_w^R(tv_0) \leq \frac{t^2}{2}\eta - a_2|t|^\theta \int_\Omega |v_0|^\theta dx + a_3|\Omega|.$$

Observando que $\theta > 2$ e que $|v_0|_\theta \neq 0$, a função

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \eta\frac{t^2}{2} - a_2|t|^\theta \int_\Omega |v_0|^\theta dx + a_3|\Omega|$$

atinge um máximo positivo, independente de w e R. Então obtemos

$$I_w^R(u_w^R) \leq \text{C:= const.} \tag{2.13}$$

Antes de prosseguirmos, definamos:

$$|||u|||^2 = \int_\Omega (\Delta u^2 - q\nabla u^2 + \alpha(x)u^2)dx.$$

Pela desigualdade (2.13), temos

$$\frac{1}{2}|||u_w^R|||^2 - \int_\Omega F_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w) = I_w^R(u_w^R) \leq C.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}|||u_w^R|||^2 \leq C + \int_\Omega F_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w). \tag{2.14}$$

Então, nos resta verificar o que ocorre com

$$\int_\Omega F_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w).$$

Para tal, seja t_0 dado na condição (f_3). Definamos $D := \{x \in \Omega; |u_w^R(x)| > t_0\}$. Por (f_2) e (f_3) e da Observação 2, temos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F_R(x,u_w^R,\nabla w,\Delta w) &= \int_{\Omega\backslash D} F_R(x,u_w^R,\nabla w,\Delta w)+\int_D F_R(x,u_w^R,\nabla w,\Delta w)\\
&\leq \int_{\Omega\backslash D} a_1(R+2)^r\left(t_0+\frac{|t_0|^{p+1}}{p+1}\right)+\frac{1}{\theta}\int_\Omega f_R(x,u_w^R,\nabla w,\Delta w)u_w\\
& a_1(R+2)^r\left(t_0+\frac{|t_0|^{p+1}}{p+1}\right)|\Omega\backslash D|+\frac{1}{\theta}|||u_w^R|||^2.
\end{aligned}$$

Voltando à equação (2.14) temos

$$\frac{1}{2}|||u_w^R|||^2\leq C+a_1(R+2)^r\left(t_0+\frac{|t_0|^{p+1}}{p+1}\right)|\Omega\backslash D|+\frac{1}{\theta}|||u_w^R|||^2.$$

Novamente do Lema 2.1.1, podemos concluir

$$\gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_w^R\|^2\leq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)|||u_w^R|||^2\leq C+a_1(R+2)^r\left(t_0+\frac{|t_0|^{p+1}}{p+1}\right)|\Omega\backslash D|.$$

Assim, podemos concluir que existe $c_1>0$ tal que

$$\gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_w^R\|^2<c_1(R+2)^r,$$

isto é,

$$\|u_w^R\|\leq d_1,\ \text{ para algum }\ d_1(R)>0.$$

Provemos agora que existe $d_2>0$ tal que $\|u_w^R\|\geq d_2$. Pelo Lema 2.1.3, sabemos que

$$I_w'^R(u_w^R)(u_w^R)=0. \tag{2.15}$$

Das hipóteses (f_1) e (f_2), como foi feito no Lema 2.1.2, dado $\varepsilon>0$ existe $C_\varepsilon>0$ tal que

$$|f_R(x,u_w^R,\nabla w,\Delta w)|\leq\varepsilon|u_w^R|+C_\varepsilon|u_w^R|^p(R+2)^r. \tag{2.16}$$

Inserindo (2.16) em (2.26) e utilizando o Lema 2.1.1, temos:

$$\gamma\|u_w^R\|^2\leq\int_\Omega(\varepsilon|u_w^R|^2+C_\varepsilon|u_w^R|^{p+1}(R+2)^r)dx.$$

Utilizando as imersões de Sobolev, obtemos

$$\gamma\|u_w^R\|^2\leq C_1\varepsilon\|u_w^R\|^2+C_2C_\varepsilon\|u_w^R\|^{p+1}(R+2)^r.$$

E portando existe $d_2 > 0$ tal que

$$\|u_w^R\| \geq d_2.$$

Isto prova o Lema. $\square$

Examinemos agora a regularidade de u_w^R e seu comportamento na fronteira.

Lema 2.1.5. *Fixemos $w \in C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$, e seja $R > 0$ também fixado. Se $u_w^R \in X$ é uma solução fraca de (2.3), então $u_w^R \in C^{4,\beta}(\overline{\Omega})$, para algum $\beta \in (0,1)$, e $\Delta(u_w^R)(x) = 0$ se $x \in \partial\Omega$.*

Demonstração:

Seja $u_w^R \in X$ uma solução no sentido fraco de (2.3). Definamos

$$v = \Delta u_w^R$$

e

$$g(x) = f_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w) - q\Delta u_w^R - \alpha(x)u_w^R.$$

Pela hipótese (f_2) e pelo Teorema $A.2.6$, notemos que $g(x) \in L^2(\Omega)$. Assim definido, v é uma solução fraca de

$$\Delta v = g(x), \text{ em } \Omega,$$

no seguinte sentido: Dado $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega v\Delta\phi dx = \int_\Omega g\phi dx.$$

Pelo Teorema $A.2.8$, temos que $v \in H^2_{loc}(\Omega)$. E portanto, temos que

$$u_w^R \in H^4_{loc}(\Omega).$$

Fixemos agora $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Como $u_w^R \in X$ é uma solução no sentido fraco de (2.3), vale a igualdade

$$\int_\Omega \Delta u_w^R \Delta\phi dx - q\int_\Omega \nabla u_w^R \nabla\phi dx + \int_\Omega \alpha(x)u_w^R\phi dx = \int_\Omega f_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w)\phi dx. \tag{2.17}$$

Como supp$\phi \subset\subset \Omega$, temos

$$\int_\Omega (\Delta^2 u_w^R + q\Delta u_w^R + \alpha(x)u_w^R)\phi dx = \int_\Omega f_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w)\phi dx.$$

Pela densidade de $C_c^\infty(\Omega)$ em $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ podemos concluir que

$$\int_\Omega (\Delta^2 u_w^R + q\Delta u_w^R + \alpha(x)u_w^R)\phi dx = \int_\Omega f_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w)\phi dx \ \forall\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

As identidades de Green nos garantem que (veja [35, Teorema 3, p. 628])

$$\int_\Omega (\Delta u_w^R \Delta\phi - \phi\Delta^2 u_w^R)dx = \int_{\partial\Omega}\left(\Delta u_w^R\frac{\partial\phi}{\partial\nu} - \phi\frac{\partial(\Delta u_w^R)}{\partial\nu}\right)ds = \int_{\partial\Omega}\Delta u_w^R\frac{\partial\phi}{\partial\nu}ds \tag{2.18}$$

e

$$q\int_\Omega \Delta u_w^R\phi dx = q\int_{\partial\Omega}\phi\frac{\partial u_w^R}{\partial\nu}ds - q\int_\Omega \nabla u_w^R\nabla\phi dx. \tag{2.19}$$

Assim, por (2.17), (2.18) e (2.19) temos que

$$\int_{\partial\Omega}\Delta u_w^R\frac{\partial\phi}{\partial\nu}ds = 0. \tag{2.20}$$

Como

$$\int_\Omega (\Delta^2 u_w^R + q\Delta u_w^R + \alpha(x)u_w^R)\varphi dx = \int_\Omega f_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w)\varphi dx \tag{2.21}$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, temos que

$$\Delta^2 u_w^R + q\Delta u_w^R + \alpha(x)u_w^R = f_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{2.22}$$

Pelas identidades de Green, temos

$$\int_\Omega \Delta^2 u_w^R\Delta u_w^R dx = -\int_\Omega (\nabla(\Delta u_w^R))^2 dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Delta u_w^R}{\partial\nu}\Delta u_w^R ds. \tag{2.23}$$

Por (2.20) e por (2.23) temos

$$\int_\Omega \Delta^2 u_w^R\Delta u_w^R dx = -\int_\Omega (\nabla(\Delta u_w^R))^2 dx. \tag{2.24}$$

Ainda pelas identidades de Green, temos

$$\int_\Omega \Delta u_w^R u_w^R dx = -\int_\Omega (\nabla u_w^R)^2 dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u_w^R}{\partial\nu}u_w^R ds \tag{2.25}$$

e como $u_w^R \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \Delta u_w^R u_w^R dx = -\int_\Omega (\nabla u_w^R)^2 dx. \tag{2.26}$$

Multiplicando Δu_w^R em (2.22) e integrando por partes, de (2.24) e (2.26) temos

$$-\int_\Omega [(\nabla(\Delta u_w^R))^2 + q(\Delta u_w^R)^2 - \alpha(x)(\nabla u_w^R)^2]dx = \int_\Omega f_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w)\Delta u_w^R dx \tag{2.27}$$

Pela hipótese (f_2) e pelo Teorema A.2.6, temos que

$$\left(\int_\Omega (f_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Portanto, de (2.27)

$$\|u_w^R\|_{W^{3,2}(\Omega)} < \infty.$$

Seja $\nu = (\nu^1, \dots, \nu^N)$ o campo vetor normal unitário ao longo de $\partial\Omega$. Dado $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, utilizando integração por parte obtemos

$$\int_\Omega \Delta u_w^R \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \varphi \frac{\partial \Delta u_w^R}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \Delta u_w^R \varphi \nu^i ds,\ i = 1, \dots, N.$$

Por (2.20), temos

$$\left|\int_\Omega \Delta u_w^R \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx\right| \le \left|\int_\Omega \varphi \frac{\partial \Delta u_w^R}{\partial x_i} dx\right| \le \|u_w^R\|_{W^{3,2}(\Omega)} |\varphi|_{L^2(\Omega)}.$$

Pela equivalência dada na Proposição $A.1.4$, temos que

$$\Delta u_w^R \in H_0^1(\Omega). \tag{2.28}$$

Provemos agora que u_w^R pertence a $C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$. Para tal, consideremos a seguinte notação

$$v = \Delta u_w^R + q u_w^R$$

e

$$g(x) = f_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w) - \alpha(x) u_w^R.$$

Temos que v e u_w^R são soluções no sentido fraco das respectivas EPDs com condição de Dirichlet, isto é,

$$\begin{cases} \Delta v = g(x), & \text{em } \Omega \\ v(x) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.29}$$

$$\begin{cases} \Delta u_w^R + q u_w^R = v(x), & \text{em } \Omega \\ u_w^R(x) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.30}$$

Como em particular $u_w^R \in H_0^1(\Omega)$, pelo Teorema $A.2.2$, temos

$$u_w^R \in L^q(\Omega), \text{ com } q = \frac{2N}{N-2}.$$

Pela hipótese (f_2), temos que $g \in L^s(\Omega)$ com

$$s = \frac{q}{p},$$

onde p é dado em (f_2).

Queremos mostrar que $u_w^R \in W^{4,r}(\Omega)$, para algum r tal que $2r > N$. Se $2s > N$, basta tomarmos $r = s$. De fato, aplicando o Teorema $A.2.7$, temos que $v \in W^{2,r}(\Omega)$. Novamente pelo Teorema $A.2.7$, temos que

$$u_w^R \in W^{4,r}(\Omega).$$

Suponhamos agora que $2s < N$. Em particular $u_w^R \in W^{2,s}(\Omega)$; e pelas imersões do Teorema $A.2.6$, temos que

$$u_w^R \in L^{q_1}(\Omega), \text{ onde } q_1 = \frac{Ns}{N-2s}.$$

Pela hipótese (f_2), temos que

$$g \in L^{s_1} \text{ com } s_1 = \frac{q_1}{p}.$$

Pelo Teorema $A.2.7$, temos que $v \in W^{2,s_1}(\Omega)$ e

$$u_w^R \in W^{4,s_1}(\Omega).$$

Uma vez que $0 < p < \frac{N+2}{N-2}$, existe um único $\epsilon > 0$ tal que

$$s = (1+\epsilon)\frac{2N}{N+2}.$$

Assim,

$$\frac{s_1}{s} = \frac{q_1}{q} = \frac{sN}{N-2s}\frac{N-2}{2N} = (1+\epsilon)\frac{N(N-2)}{(N+2)(N-2s)}.$$

Mas notemos que (basta substituirmos $s = (1+\epsilon)2N/(N+2)$)

$$\frac{N(N-2)}{(N+2)(N-2s)} > 1.$$

E portanto,

$$\frac{s_1}{s} > 1 + \epsilon.$$

Este argumento é conhecido como *bootstrap*.

Se $2s_1 < N$, aplicando novamente o *bootstrap*, temos

$$u_w^R \in W^{4,s_2}, \text{ onde } s_2 = \frac{Ns_1}{p(N-2s_1)}.$$

Assim,

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{Ns_1(N-2s)}{Ns(N-2s_1)} > (1+\epsilon)\frac{N-2s}{N-2s_1} > (1+\epsilon).$$

Podemos repetir este último argumento um número finito de vezes e obter que $u_w^R \in W^{4,r}(\Omega)$, para algum r tal que $2r \geq N$.

Para o caso $2r = N$, como $g \in L^r(\Omega)$, temos que $g \in L^k(\Omega)$ para algum $k < r$ tal que $(1+\epsilon)k > r$. Aplicando o argumento *bootstrap* mais uma vez, concluímos que $u_w^R \in W^{4,r}(\Omega)$, com $2r > N$.

Portanto, podemos aplicar o Teorema $A.2.4$ para mostrar que $u_w^R \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Pelas hipótese (f_0) e (A_1), temos que

$$f_R(x, u_w^R, \nabla w, \Delta w) - q\Delta u_w^R - \alpha(x)u_w^R \in C^\beta(\overline{\Omega}), \text{ para algum } \beta \in (0,1).$$

Aplicando o Teorema $A.2.9$, podemos concluir que

$$u \in C^{4,\beta}(\overline{\Omega}). \tag{2.31}$$

Para finalizar, notemos que de (2.28) e (2.31), temos

$$\Delta u_w^R(x) = 0, \text{ se } x \in \partial\Omega.$$

□

Lema 2.1.6. *Existem constantes positivas μ_0, μ_1 e μ_2, independentes de $R > 0$, bem como de $w \in X$, tais que*

$$\|u_w^R\|_{C^0} \leq \mu_0(R+2)^r,$$

$$\|\nabla(u_w^R)\|_{C^0} \leq \mu_1(R+2)^r,$$

$$\|\Delta(u_w^R)\|_{C^0} \leq \mu_2(R+2)^r,$$

Além disso, existe $\overline{R} > 0$ tal que $\mu_i(\overline{R}+2)^r \leq \overline{R}, (i = 0,1,2)$.

Demonstração:

Este resultado segue combinando o Lema 2.1.4 e os resultados de imersões Sobolev por argumentos como no Lema 2.1.5.

De fato, usando as mesmas notações do Lema 2.1.5, notemos que pelo Teorema $A.2.2$, como $u_w^R \in H_0^1(\Omega)$, temos

$$|u_w^R|_q \leq C\|u_w^R\|, \text{ com } q = \frac{2N}{N-2}.$$

Pela hipótese (f_2), temos que $g \in L^s(\Omega)$ com

$$s = \frac{q}{p},$$

onde p é dado em (f_2).

Aplicando o Teorema $A.2.7$, temos que

$$\|v\|_{W^{2,s}} \leq c_1|u_w^R|_q \leq \widetilde{C}\|u_w^R\|.$$

Novamente pelo Teorema $A.2.7$, temos que

$$\|u_w^R\|_{W^{4,s}} \leq C\|u_w^R\|.$$

Podemos repetir este último argumento um número finito de vezes e obtermos que

$$\|u_w^R\|_{W^{4,r}} \leq C\|u_w^R\|.$$

para algum r tal que $2r \geq N$.

Portanto, podemos aplicar o Teorema $A.2.4$ para mostrar que

$$\|u_w^R\|_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C\|u_w^R\|.$$

Agora, pelo Lema 2.1.4, temos que

$$\|u_w^R\|_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C(R+2)^r.$$

Assim, obtemos μ_0, μ_1 e μ_2, tais que

$$\|u_w^R\|_{C^0} \leq \mu_0(R+2)^r,$$

$$\|\nabla(u_w^R)\|_{C^0} \leq \mu_1(R+2)^r,$$

$$\|\Delta(u_w^R)\|_{C^0} \leq \mu_2(R+2)^r.$$

Notemos que as constantes μ_i são constantes geométricas que só dependem das constantes de Sobolev.

Para obtermos $\overline{R} > 0$ tal que

$$\mu_i(\overline{R}+2)^r \leq \overline{R}, (i = 0, 1, 2),$$

basta observarmos que $r < 1$, e portanto

$$\frac{\mu_i}{\overline{R}^{1-r}} \left(\frac{\overline{R}+2}{\overline{R}} \right)^r \leq 1$$

para $\overline{R}$ suficientemente grande. □

Agora, vamos "construir" de forma iterativa uma solução não trivial para o problema (2.1). Consideremos o seguinte problema

Seja $u_0 \in X \cap C^{4,\lambda}(\overline{\Omega})$, $\lambda \in (0,1)$, e u_n $(n = 1, 2, \cdots)$ uma solução fraca do problema

$$(P_n) \qquad \begin{cases} \Delta^2 u_n + q\Delta u_n + \alpha(x) u_n = f(x, u_n, \nabla u_{n-1}, \Delta u_{n-1}), & \text{em} \quad \Omega \\ u_n(x) = 0, \ \Delta u_n(x) = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

A função u_n é a solução fraca de (2.3) obtida no Lema 2.1.3, com $R = \overline{R}$ como no Lema 2.1.6 e com $w = u_{n-1}$.

Pelo Lema 2.1.5, temos $u_n \in C^4(\overline{\Omega})$ e pelos lemas 2.1.4 e 2.1.6, obtemos que

$$\|u_n\| \geq d_2$$

e

$$\|u_n\|_{C^0}, \|\nabla u_n\|_{C^0}, \|\Delta u_n\|_{C^0} \leq \overline{R}, \quad \text{respectivamente.}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & f_{\overline{R}}(x, u_n, \nabla u_{n-1}, \Delta u_{n-1}) \\ &= f(x, u_n, \nabla u_{n-1}\varphi(\nabla u_{n-1}), \Delta u_{n-1}\varphi(\Delta u_{n-1})) \\ &= f(x, u_n, \nabla u_{n-1}, \Delta u_{n-1}). \end{aligned}$$

E portanto, u_n é uma solução de (P_n).

Lema 2.1.7. *Na hipótese (f_5), tomemos ρ_1, ρ_2 e ρ_3 da forma seguinte*

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \inf\{k_1; \|u_n\|_{C^0} \leq k_1, \ \forall n\} > 0, \\ \rho_2 &= \inf\{k_2; \|\nabla u_n\|_{C^0} \leq k_2, \ \forall n\} > 0, \\ \rho_3 &= \inf\{k_3; \|\Delta u_n\|_{C^0} \leq k_3, \ \forall n\} > 0. \end{aligned}$$

Então $\{u_n\}$ converge fortemente em X.

Demonstração:

Nesta demonstração, usamos um argumento similar ao utilizado em [31] e [43]. Seja u_n e u_{n+1} soluções fracas dos problemas (P_n) e (P_{n+1}), respectivamente. Então, multiplicando (P_{n+1}) e (P_n) por $(u_{n+1}-u_n)$ e integrando por partes, obtemos

$$\int_\Omega \Delta u_{n+1}(\Delta u_{n+1}-\Delta u_n) - q\nabla u_{n+1}(\nabla u_{n+1}-\nabla u_n) + \alpha(x)u_{n+1}(u_{n+1}-u_n)dx$$

$$= \int_\Omega f(x,u_{n+1},\nabla u_n,\Delta u_n)(u_{n+1}-u_n)dx,$$

$$\int_\Omega \Delta u_n(\Delta u_{n+1}-\Delta u_n) - \nabla q u_n(\nabla u_{n+1}-\nabla u_n) + \alpha(x)u_n(u_{n+1}-u_n)dx$$

$$= \int_\Omega f(x,u_n,\nabla u_{n-1},\Delta u_{n-1})(u_{n+1}-u_n)dx.$$

Então, pelo Lema 2.1.1 obtemos

$$\begin{aligned}
&\gamma\|u_{n+1}-u_n\|^2 \\
&\leq \int_\Omega \left[f(x,u_{n+1},\nabla u_n,\Delta u_n) - f(x,u_n,\nabla u_n,\Delta u_n)\right](u_{n+1}-u_n)dx \\
&+ \int_\Omega \left[f(x,u_n,\nabla u_n,\Delta u_n) - f(x,u_n,\nabla u_{n-1},\Delta u_n)\right](u_{n+1}-u_n)dx \\
&+ \int_\Omega \left[f(x,u_n,\nabla u_{n-1},\Delta u_n) - f(x,u_n,\nabla u_{n-1},\Delta u_{n-1})\right](u_{n+1}-u_n)dx.
\end{aligned}$$

Assim, pela hipótese (f_5) e pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
&\gamma\|u_{n+1}-u_n\|^2 \\
&\leq \tau_1^2 L_{\rho_1}\|u_{n+1}-u_n\|^2 + \tau_1\tau_2 L_{\rho_2}\|u_n-u_{n-1}\|\|u_{n+1}-u_n\| + \\
&+ \tau_1\tau_3 L_{\rho_3}\|u_n-u_{n-1}\|\|u_{n+1}-u_n\|.
\end{aligned}$$

E portanto

$$\|u_{n+1}-u_n\| \leq \frac{(\tau_1\tau_2 L_{\rho_2}+\tau_1\tau_3 L_{\rho_3})}{\gamma-\tau_1^2 L_{\rho_1}}\|u_n-u_{n-1}\|. \tag{2.32}$$

Novamente por (f_5), temos que

$$\frac{(\tau_1\tau_2 L_{\rho_2}+\tau_1\tau_3 L_{\rho_3})}{\gamma-\tau_1^2 L_{\rho_1}} < 1$$

o que implica a sequência u_n convergir forte para uma função u, em X. □

Finalizando a prova do Teorema 2.1.1

Como obtido anteriormente $\|u_n\| \geq d_2 > 0$. Além disso, $\|u_n\|_{C^0}, \|\nabla u_n\|_{C^0}, \|\Delta u_n\|_{C^0}$ são uniformemente limitados. Agora por (P_n), notemos que $v_n = \Delta u_n$ verifica a equação

$$\Delta v_n = g(x),\ x \in \overline{\Omega}$$

onde g é dado por

$$g(x) = f(x, u_n, \nabla u_{n-1}, \Delta u_{n-1}) - q\Delta u_n - \alpha(x)u_n.$$

Como $\|g\|_{C^\beta} \leq C$ para alguma constante positiva C, pelo Teorema $A.2.9$ (Schauder) segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|v_n\|_{C^{2,\beta}} \leq C$$

e então

$$\|u_n\|_{C^{4,\beta}} \leq C.$$

Pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, existe uma subsequência (n_k) de $\mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\partial^j}{\partial x_i^j} u_{n_k} \to \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} u$$

uniformemente em $\overline{\Omega}$ para $j = 0, 1, \ldots, 4$ e $i = 1, \ldots, N$. Pelo Lema 2.1.7, toda subsequência de $\frac{\partial^j}{\partial x_i^j} u_n$ possui o mesmo limite. Assim,

$$\frac{\partial^j}{\partial x_i^j} u_n \to \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} u,\ \text{quando } n \to \infty,\ \text{para } j = 0, 1, \ldots, 4 \text{ e } i = 1, \ldots, N.$$

Portanto, passando o limite em (P_n), concluímos que u é uma solução clássica de (2.1). Com isto, concluímos a demonstração do Teorema 2.1.1. □

2.2 Solução periódica para as equações de Fisher-Kolmogorov estendida e Swift-Hohenberg

É possível obter um resultado bastante importante quando estudamos o problema da seção anterior no caso onde $\Omega = \mathbb{R}$, isto é, quando estudamos o problema:

$$u^{iv} + qu'' + \alpha(x)u = f(x, u, u', u'') \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.33}$$

Para abordarmos o problema (2.33), estudamos o seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} u^{iv} + qu'' + \alpha(x)u = f(x, u, u', u'') & \text{em} \quad (0, L) \\ \\ u(0) = u(L) = u''(0) = u''(L) = 0, \end{cases} \tag{2.34}$$

onde L é um número positivo.

O espaço onde vamos procurar por soluções é o espaço de Sobolev $X \equiv H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$, que é um espaço de Hilbert com produto interno e norma dados, respectivamente, por

$$(u, v) = \int_0^L (u''v'' + u'v' + uv)dx \quad \text{ e } \|u\|^2 = (u, u).$$

As hipóteses que consideramos sobre f são:

(f_0) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ é localmente Lipschitz contínua.

(f_1) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(x, t, \xi)}{t} = 0$ uniformemente para $\xi \equiv (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, x \in (0, L)$.

(f_2) $\exists\, a_1 > 0$, $p \in (1, +\infty)$, r_1 e r_2 tais que $r := r_1 + r_2 < 1$ e

$$|f(x, t, \xi)| \leq a_1(1 + |t|^p)(1 + |\xi_1|^{r_1})(1 + |\xi_2|^{r_2}),$$

para todo $(t, \xi) \in \mathbb{R}^3, x \in (0, L)$.

(f_3) $\exists\, \theta > 2$ e $t_0 > 0$ tais que

$$0 < \theta F(x, t, \xi) \leq t f(x, t, \xi), \ \forall x \in (0, L), |t| \geq t_0, \xi \in \mathbb{R}^2,$$

onde

$$F(x, t, \xi) = \int_0^t f(x, s, \xi)ds.$$

(f_4) $\exists\, a_2$ e $a_3 > 0$ tais que

$$F(x, t, \xi) \geq a_2|t|^\theta - a_3, \forall x \in (0, L), (t, \xi) \in \mathbb{R}^3.$$

Denotamos por $y^{i,j}$, $(i = 1, 2, 3)$ os seguintes vetores

$$y^{1,j} = (y_1^j, y_2, y_3), \ y^{2,j} = (y_1, y_2^j, y_3) \text{ e } y^{3,j} = (y_1, y_2, y_3^j).$$

Para $i, k = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$, definimos os seguintes números

$$L_{\rho_i} = \sup \left\{ \frac{|f(x, y^{i,1}) - f(x, y^{i,2})|}{|y_i^1 - y_i^2|} : \quad (x, y^{i,j}) \in A_i \right\},$$

onde

$$A_i = \{(x, y^{i,j}) \in (0, L) \times \mathbb{R}^3, \ |y_i^j| \leq \rho_i, |y_k| \leq \rho_k (i \neq k)\},$$

para alguma constante $\rho_i > 0$.

(f_5) Existem números positivos ρ_i $(i = 1, 2, 3)$ dependendo de q, θ, a_1, a_2 e a_3, tais que os números acima definidos $L_{\rho_i}(i = 1, 2, 3)$ verificam a seguinte relação

$$(\tau_1 L_{\rho_1} + \tau_2 L_{\rho_2} + \tau_3 L_{\rho_3})\tau_1 < \gamma,$$

onde γ é dado no Lema 2.1.1 e τ_{i+1} $(i = 0, 1, 2)$ são as constantes ótimas das desigualdades

$$\left(\int_0^L |u^{(i)}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \tau_{i+1} \|u\|,$$

onde

$$(u, v) = \int_\Omega (u'' v'' + u'v' + uv) dx \qquad \text{e} \qquad \|u\|^2 = (u, u).$$

Assim, conseguimos provar o seguinte resultado

Teorema 2.2.1. *Se* $(A_1) - (A_3)$ *e* $(f_0) - (f_5)$ *são verificados, então o problema* (2.34) *possui pelo menos uma solução clássica não trivial.*

Impondo algumas hipóteses adicionais, podemos obter uma solução periódica para o problema (2.33).

(A_4) α é uma função par e $2L$-periódica.

(f_6) f é $2L-$periódica na primeira variável e verifica

$$f(x, t, \xi_1, \xi_2) = -f(-x, -t, \xi_1, -\xi_2), \ \forall (x, t, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^4.$$

Teorema 2.2.2. *Se* $(A_1) - (A_4)$ *e* $(f_0) - (f_6)$ *são válidos, então existe pelo menos uma solução, não trivial,* $2L$*-periódica para o problema* (2.33).

Um exemplo: Suponhamos que β e δ sejam funções contínuas, $2L$-periódicas e positivas. Se $f(x, t, \xi_1, \xi_2) = \beta(x)t^2(1 + |\xi_1|)^{1/4}(1 + |\xi_2|)^{1/4} + \delta(x)t^3$, com β uma função ímpar e δ uma função par, então esta função f satisfaz todas as condições $(f_0) - (f_5)$.

2.2.1 Demonstração do Teorema 2.2.1

A demonstração deste Teorema é análoga à que fizemos para o Teorema 2.1.1. A diferença básica é que como estamos em dimensão $N = 1$, podemos tomar $p \in (1, +\infty)$, e teremos as imersões de Sobolev necessárias. $\square$

2.2.2 Demonstração do Teorema 2.2.2

Seja u uma solução não trivial do problema (2.34), dado pelo Teorema 2.2.1.

Nós obtemos uma solução $2L$-periódica para o problema (2.33) que é antisimétrica com respeito a $x = 0$ e $x = L$ tomando a extensão $2L$-periódica de

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se} \quad 0 \leq x \leq L \\ -u(-x), & \text{se} \quad -L \leq x \leq 0. \end{cases}$$

Notemos que $\overline{u} \in C^4(\mathbb{R})$. De fato, já sabemos que $\overline{u} \in C^4([kL, (k+1)L])$ para cada $k \in \mathbb{Z}$. Dado $t \in (0, L)$, temos

$$\overline{u}(0) = u(0) = 0,$$
$$\overline{u}(t) = u(t),$$
$$\overline{u}(-t) = -u(t).$$

Assim,

$$\frac{\overline{u}(t) - \overline{u}(0)}{t} = \frac{\overline{u}(-t) - \overline{u}(0)}{-t}. \tag{2.35}$$

Tomando o limite em (2.35) quando $t \to 0$, obtemos que $\overline{u}$ é continuamente diferenciável em $t = 0$, e portanto $\overline{u} \in C^1(\mathbb{R})$.

Analogamente, verifica-se que $\overline{u} \in C^4(\mathbb{R})$.

Verifiquemos que $\overline{u}$ satisfaz a EDO (2.33). Dado $x \in \mathbb{R}$. Se $x \in [0, L]$, claramente $\overline{u}(x)$ satisfaz (2.33).

Seja $x \in [-L, 0]$, então temos

$$\overline{u}(x) = -u(-x),$$
$$\overline{u}'(x) = u'(-x),$$
$$\overline{u}''(x) = -u''(-x),$$

$$\overline{u}'''(x) = u'''(-x),$$
$$\overline{u}^{iv}(x) = -u^{iv}(-x).$$

E portanto

$$\overline{u}^{iv}(x) + q\overline{u}''(x) + \alpha(x)\overline{u}(x) = -u^{iv}(-x) - qu''(-x) - \alpha(x)u(-x). \tag{2.36}$$

Por (A_4) e por (2.36), temos

$$\begin{aligned} \overline{u}^{iv}(x) + q\overline{u}''(x) + \alpha(x)\overline{u}(x) &= -u^{iv}(-x) - qu''(-x) - \alpha(-x)u(-x) \\ &= -f(-x, u(-x), u'(-x), u''(-x)) \\ &= -f(-x, -\overline{u}(x), \overline{u}'(x), -\overline{u}''(x)). \end{aligned} \tag{2.37}$$

Por (f_6) e por (2.37), temos que

$$\overline{u}^{iv}(x) + q\overline{u}''(x) + \alpha(x)\overline{u}(x) = f(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x), \overline{u}''(x)). \tag{2.38}$$

Pela $2L$-periodicidade de α e f dadas em (A_4) e (f_6) provamos, por um raciocínio análogo ao anterior, que $\overline{u}(x)$ verifica a EDP em (2.33) para $x \in [kL, (k+1)L]$, $k \in \mathbb{Z}$. E portanto, $\overline{u}(x)$ verifica a EDP (2.33) para $x \in \mathbb{R}$. □

Capítulo 3

Existência de solução positiva para uma classe de equações elípticas com termo de convecção

Neste capítulo, estudamos a existência de solução para a seguinte classe de problemas

$$
\begin{cases} -\Delta u = h(x,u) + g(x,\nabla u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}
$$

onde Ω é um domínio suave e limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, a função h possui termos sublinear e singular e g é limitado superiormente por um termo de convecção do tipo $|\nabla u|^\beta$, onde $\beta \in (0,1)$.

O estudo dos casos em que $N = 1$ e $N = 2$ é análogo ao que fazemos neste trabalho. Apenas devemos tomar o cuidado com os respectivos espaços de imersão.

As hipóteses básicas que pedimos sobre as funções h e g são as seguintes:

(H_1) As funções $h : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são localmente Hölder contínuas.

(H_2) Existem constantes $b > 0$, $0 < r_i < 1 (i = 1,2,3)$, e funções a_i $(i = 1,3) \in L^2(\Omega)$, $a_2 \in L^{2/1-r_2}(\Omega)$, satisfazendo

$$b|\mu|^{r_1} \leq h(x,\mu) \leq a_1(x) + a_2(x)|\mu|^{r_2} + \frac{a_3(x)}{|\mu|^{r_3}}, \forall (x,\mu) \in \Omega \times \mathbb{R}_+.$$

(H_3) Existe uma constante $0 < r_4 < 1$, e existe uma função $a_4 \in L^\theta(\Omega)$, onde $\theta = \max\left\{\frac{2}{1-r_4}, \frac{N}{r_4}\right\}$, satisfazendo

$$0 \leq g(x,\eta) \leq a_4(x)|\eta|^{r_4}, \forall (x,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^N.$$

Observação 4. *Notemos que a função h pode ter singularidade em μ. Tomemos por exemplo a função $h(x,\mu)$ dada por*

$$h(x,\mu) = a_1(x) + a_2(x)|\mu|^{r_2} + \frac{a_3(x)}{|\mu|^{r_3}},$$

com $a_1(x)$, $a_2(x)$ e $a_3(x)$ funções satisfazendo a_i $(i = 1, 3) \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}) \cap L^2(\Omega)$, $a_2 \in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}) \cap L^{2/1-r_2}(\Omega)$.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte.

Teorema 3.0.3. *Se as condições $(H_1) - (H_3)$ são válidas, o problema (3.1) possui pelo menos uma solução.*

3.1 Verificação da Observação 4

Para verificarmos que

$$h(x,\mu) = a_1(x) + a_2(x)|\mu|^{r_2} + \frac{a_3(x)}{|\mu|^{r_3}}$$

satisfaz a condição dada em (H_2), basta verificarmos que $h(x,\mu)$ é localmente Hölder contínua. Para tal, tomemos $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $I \subset\subset \mathbb{R}_+$. Dados $x, y \in \Omega'$ e $\mu, \eta \in I$. Notemos que

$$\begin{aligned} |h(x,\mu) - h(y,\eta)| \quad &\leq \quad |a_1(x) - a_1(y)| + |a_2(x) - a_2(y)||\eta|^{r_2} + |a_2(x)|||\mu|^{r_2} - |\eta|^{r_2}| + \\ &+ \quad \frac{|a_3(x) - a_3(y)||\mu|^{r_3} + |a_3(x)|||\eta|^{r_3} - |\mu|^{r_3}|}{|\mu.\eta|^{r_3}}. \end{aligned}$$

Para concluirmos a demonstração da Observação 4, basta mostrar que dados A, B, $r \in \mathbb{R}$, $A, B > 0$ e $0 < r < 1$, vale

$$\frac{|A^r - B^r|}{|A - B|^r} \leq 1.$$

Para tal suponhamos, sem perda de generalidade, que $A > B$. Assim, tomemos $\epsilon > 0$ tal que $A = B + \epsilon$. Desta forma temos

$$\frac{|A^r - B^r|}{|A - B|^r} = \frac{||B + \epsilon|^r - |B|^r|}{|\epsilon|^r} \leq \frac{||B|^r + |\epsilon|^r - |B|^r|}{|\epsilon|^r} = 1.$$

O que termina esta demonstração. □

3.2 Definições preliminares

Com a possibilidade de existência de singularidade na segunda variável da função $h(x, \mu)$, nossa abordagem consiste em associar ao problema (3.1) uma família de problemas elípticos sem tais singularidades. A saber, para cada $\epsilon > 0$, consideramos o problema auxiliar dado por

$$(3.2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = h(x, |u| + \epsilon) + g(x, \nabla u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Agora, o problema (3.2) pode ser tratado pelo método de Galerkin.

Após mostrar a existência de solução para o problema (3.2), mostraremos que, tomando

$$\epsilon = 1/n,$$

é possível obter uma família de soluções (u_n) limitadas em $H_0^1(\Omega)$. Passando o limite quando $n \to \infty$, obteremos uma solução para (3.1) estritamente positiva por um resultado devido a Ambrosetti, Brézis e Cerami [9].

Definição 6. *Neste capítulo, u é uma solução para* (3.1) *se $u \in C^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, é positivo e satisfaz a equação no sentido clássico em Ω.*

Consideremos agora o seguinte problema

$$(A) \qquad \begin{cases} -\Delta v = f(v), & \text{em } \Omega \\ v > 0, & \text{em } \Omega \\ v(x) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Definição 7. *Uma função $v_1 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma subsolução do problema (A) se*

$$(A_1) \qquad \begin{cases} -\Delta v_1 \leq f(v_1), & \text{em } \Omega \\ v_1 > 0, & \text{em } \Omega \\ v_1(x) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Definição 8. *Similarmente, $v_2 \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma supersolução do problema (A) se*

$$(A_2) \qquad \begin{cases} -\Delta v_2 \geq f(v_2), & \text{em } \Omega \\ v_2 > 0, & \text{em } \Omega \\ v_2(x) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

3.3 Notações e resultados técnicos

Neste capítulo, $\langle x, y\rangle$ é o produto interno usual seja em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^N$.

O próximo resultado é o Teorema do ponto fixo de Brouwer e uma demonstração deste pode ser vista em [10, Teorema 3.7].

Teorema 3.3.1. *(Ponto fixo de Brouwer) Seja $f : \overline{B}_r(x) \to \overline{B}_r(x)$ uma função contínua, onde $\overline{B}_r(x) \subset \mathbb{R}^N$. Então, existe $z \in \overline{B}_r(x)$ tal que $f(z) = z$, isto é, f tem um ponto fixo z em $\overline{B}_r(x)$.*

O Lema a seguir é uma consequência do Teorema do ponto fixo de Brouwer.

Lema 3.3.1. *Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ uma função contínua, tal que $\langle f(x), x\rangle \geq 0$ para x verificando $|x| = R > 0$. Então, existe $z_0 \in \overline{B}_R(0)$ tal que $f(z_0) = 0$.*

Demonstração:

Suponhamos, por contradição, que $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \overline{B}_R(0)$. Definamos a função $g : \overline{B}_R(0) \to \overline{B}_R(0)$ dada por

$$g(x) = \frac{-R}{|f(x)|} f(x).$$

Observemos que g verifica $g(\overline{B}_R(0)) \subset \overline{B}_R(0)$, pois

$$|g(x)| = \left| \frac{-R}{|f(x)|} f(x) \right| = R.$$

Além disso, temos que g é contínua pela continuidade de f. Portanto, pelo Teorema 3.3.1, a função g possui um ponto fixo x_0 em $\overline{B}_R(0)$. Isto é $x_0 \in \overline{B}_R(0)$ é tal que $g(x_0) = x_0$ e portanto

$$|x_0| = |g(x_0)| = R > 0.$$

Por outro lado,

$$R^2 = |x_0|^2 = \langle x_0, g(x_0)\rangle = \frac{-R}{|f(x_0)|} \langle x_0, f(x_0)\rangle.$$

Mas, por hipótese

$$\langle x_0, f(x_0)\rangle \geq 0,$$

o que nos dá uma contradição. Portanto, existe $z_0 \in \overline{B}_R(0)$ tal que $f(z_0) = 0$. $\square$

O próximo resultado é um Lema de comparação entre sub e supersoluções. A demonstração deste resultado encontra-se em Ambrosetti, Brézis e Cerami [9]

Teorema 3.3.2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $t^{-1} f(t)$ é decrescente para $t > 0$. Seja v_1 e v_2 satisfazendo (A_1) e (A_2), respectivamente. Então, $v_2 \geq v_1$ em Ω.*

3.4 Existência de solução para o problema auxiliar (3.2)

O primeiro Lema desta seção é referente à regularidade de soluções fracas de (3.2).

Lema 3.4.1. ***(Regularidade)*** *Suponhamos que as hipóteses* $(H_1) - (H_3)$ *sejam válidas e seja* $u \in H_0^1(\Omega)$ *uma solução fraca de* (3.2). *Então* u *pertence a* $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Demonstração:

Definamos a função

$$\Phi(x) = h(x, |u| + \epsilon) + g(x, \nabla u).$$

Desde que $u \in H_0^1(\Omega)$, por $(H_2) - (H_3)$ temos que

$$\Phi \in L^{\frac{2}{r}}(\Omega),$$

onde $r = \max\{r_i, i = 2, 4\}$. Assim, pelo Teorema $A.2.7$, toda $u \in H_0^1(\Omega)$ solução fraca de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \Phi(x) & \text{em} \quad \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

pertence a $W^{2,s_1}(\Omega)$, onde $s_1 = 2/r$. Aplicando novamente o argumento utilizado acima, podemos concluir que

$$\Phi \in L^{\frac{s_1}{r}}(\Omega),$$
$$u \in W^{2,s_2}(\Omega)$$

com $s_2 = 2/r^2$.

Este argumento é conhecido como *bootstrap.*
Desde que $r \in (0, 1)$, podemos repetir este argumento k vezes, tal que

$$u \in W^{2,s_k}(\Omega) \text{ e } s_k = 2/r^k > N.$$

Assim, segue das imersões de Sobolev-Morrey, Teorema A.2.4, que u pertence $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $0 < \alpha < 1$. Da hipótese (H_1), existe $\beta \in (0, 1)$, tal que

$$\Phi(x) = h(x, |u| + \epsilon) + g(x, \nabla u) \in C^{\beta}(\overline{\Omega}).$$

Portanto, pelo Teorema de regularidade de Schauder $A.2.9$, temos que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. □

Para obtermos uma solução para (3.2), aplicamos o método de Galerkin adaptando argumentos desenvolvidos em Alves, Corrêa & Gonçalves [6].

Observação 5. *Notemos que, sob as hipóteses $(H_2)-(H_3)$, o Princípio do Máximo nos diz que qualquer solução clássica u_ϵ de (3.2) é positiva, isto é, $u_\epsilon(x)>0$ para todo $x\in\Omega$.*

O próximo resultado garante a existência de solução para o problema auxiliar (3.2).

Teorema 3.4.1. *Suponhamos que as hipóteses $(H_1)-(H_3)$ sejam válidas. Então o problema (3.2) possui pelo menos uma solução $u_\epsilon\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$.*

Demonstração:.

Seja $\Sigma=\{e_1,\ldots,e_m,\ldots\}$ uma base ortonormal do espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$. Para cada $m\in\mathbb{N}$, definamos o seguinte subespaço

$$V_m=[e_1,\ldots,e_m].$$

Isto é, V_m é o espaço $m-$dimensional gerado pelo conjunto ortonormal $\{e_1,\ldots,e_m\}$.

Denotamos por $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ as normas usuais de $\mathbb{R}^m$ e $H_0^1(\Omega)$, respectivamente. Notemos que $(V_m,\|\cdot\|)$ e $(\mathbb{R}^m,|\cdot|)$ são isomorfos pela transformação linear natural $T:V_m\to\mathbb{R}^m$ dada por

$$v=\sum_{i=1}^{m}\xi_ie_i\to T(v)=\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_m).$$

Assim temos a seguinte igualdade

$$\|v\|=|T(v)|=|\xi|.$$

Portanto, é possível usar a seguinte identificação

$$\xi\mapsto\sum_{i=1}^{m}\xi_ie_i=v. \tag{3.3}$$

Consideremos agora a função $F=(F_1,\ldots.,F_m):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ dada por

$$F_i(\xi)=\int_\Omega\nabla v\nabla e_idx-\int_\Omega\left(h(x,|v|+\epsilon)+g(x,\nabla v)\right)e_idx. \tag{3.4}$$

Verifiquemos que F satisfaz as condições do Lema 3.3.1.

De $(H_2)-(H_3)$ temos:

(3.5)
$$\begin{aligned}
\langle F(\xi),\xi\rangle &= \sum_{i=1}^{m}\left(\int_\Omega \nabla v\nabla(\xi_i e_i)dx - \int_\Omega (h(x,|v|+\epsilon)+g(x,\nabla v))\,\xi_i e_i dx\right)\\
&= \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega (h(x,|v|+\epsilon)v + g(x,\nabla v)v)\,dx\\
&\geq \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega (a_1 v + a_2|v|^{r_2+1} + \epsilon^{r_2}a_2|v| + \frac{a_3|v|}{\epsilon^{r_3}} + a_4|\nabla v|^{r_4}|v|)dx.
\end{aligned}$$

Notemos que, das desigualdades de Hölder, vale

$$\begin{aligned}
\langle F(\xi),\xi\rangle &\geq \|v\|^2 - |a_1|_2|v|_2 - |a_2|_{\frac{2}{1-r_2}}|v|_2^{r_2+1} - \epsilon^{r_2}|a_2|_2|v|_2\\
&- \frac{1}{\epsilon^{r_3}}|a_3|_2|v|_2 - \left(\int_\Omega a_4^2|\nabla v|^{2r_4}dx\right)^{\frac{1}{2}}|v|_2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Pela imersão de Sobolev (Teorema A.2.6), por (3.6) e pela desigualdade de Hölder com
$$q = \frac{1}{r_4},\ q' = \frac{1}{1-r_4},$$
temos

$$\begin{aligned}
\langle F(\xi),\xi\rangle &\geq \|v\|^2 - c_1|a_1|_2\|v\| - c_2|a_2|_{\frac{2}{1-r_2}}\|v\|^{r_2+1} - c_3|a_2|_2\|v\|\\
&- c_4|a_3|_2\|v\| - c_5|a_4|_{\frac{2}{1-r_4}}\|v\|^{r_4+1},
\end{aligned}$$

onde $c_i, i = 1,...,5$ dependem de ϵ, mas não dependem de m. Portanto, existem $\rho, r > 0$, independentes de m, tais que

$$\langle F(\xi),\xi\rangle \geq r > 0 \text{ quando } |\xi| = \rho. \tag{3.7}$$

Queremos agora verificar a continuidade de F. Mas pela identificação dada em (3.3), para mostrar que F é contínua, basta mostrar que para qualquer sequência $(v_m) \subset H_0^1$ tal que
$$v_m \to v \text{ em } H_0^1(\Omega),$$
temos que $F(v_m) \to F(v)$. Mas isto segue da definição em (3.4), das hipóteses $(H_2) - (H_3)$ e do Teorema da Convergência Dominada.

Então, pela continuidade de F e por (3.7), estamos aptos a utilizar o Lema 3.3.1. Este Lema garante, para cada $m \in \mathbb{N}$, a existência de um $v_m \in V_m$ verificando

$$F(v_m) = 0,\ \|v_m\| \leq \rho. \tag{3.8}$$

Verifiquemos agora que existe o limite da sequência (v_m) obtida acima e que este limite é uma solução do problema dado em (3.2).

Passando a uma subsequência, se necessário, seja $v \in H_0^1(\Omega)$ o limite fraco de (v_m). Então,

$$v_m \rightharpoonup v \in H_0^1(\Omega),$$

$$v_m(x) \to v(x) \quad \text{q.t.p em} \quad \Omega.$$

Dados $\omega \in V_k$ e $m \geq k$, temos

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \omega dx = \int_\Omega (h(x, |v_m| + \epsilon)\omega + g(x, \nabla v_m)\omega)\, dx. \tag{3.9}$$

Em particular temos

$$\int_\Omega |\nabla v_m|^2 dx = \int_\Omega (h(x, |v_m| + \epsilon)v_m + g(x, \nabla v_m)v_m)\, dx. \tag{3.10}$$

Afirmação 2. *Para a sequência (v_m), as seguintes convergências são verdadeiras.*

$$\int_\Omega \nabla v_m \nabla \omega dx \to \int_\Omega \nabla v \nabla \omega dx, \tag{3.11}$$

$$\int_\Omega h(x, |v_m| + \epsilon)\omega dx \to \int_\Omega h(x, |v| + \epsilon)\omega dx, \tag{3.12}$$

$$\int_\Omega g(x, \nabla v_m)\omega dx \to \int_\Omega g(x, \nabla v)\omega dx. \tag{3.13}$$

Admitindo que a afirmação 2 é verdadeira, podemos passar o limite em (3.9). Assim, obtemos a seguinte igualdade

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \omega dx = \int_\Omega (h(x, |v| + \epsilon)\omega + g(x, \nabla v)\omega)\, dx. \tag{3.14}$$

Notemos agora que se conseguirmos a igualdade (3.14) para uma função $\omega \in H_0^1(\Omega)$ qualquer, então temos que v é uma solução fraca do problema (3.2). É isto que provamos a seguir.

Dado $\phi \in H_0^1(\Omega)$, seja $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ verificando $\phi = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i e_i$. Para $k \geq 1$ tomemos

$$\phi_k = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i e_i \in V_k.$$

As funções ϕ_k acima definidas verificam

$$\phi_k \to \phi \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

A convergência $\phi_k \to \phi$ em $H_0^1(\Omega)$ segue de observar a seguinte igualdade

$$\|\phi_k - \phi\| = \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} \gamma_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Passando o limite em (3.14) com $w = \phi_k$, isto é, o limite $k \to \infty$, temos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi dx = \int_\Omega (h(x, |v| + \epsilon)\phi + g(x, \nabla v)\phi)\, dx. \tag{3.15}$$

Pelo estudo acima, provamos a existência de uma solução fraca u_ϵ para o problema (3.2). Pelo Lema 3.4.1, temos que $u_\epsilon \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Portanto, u_ϵ é uma solução clássica de (3.2) e o Teorema 3.4.1 é verdadeiro.

Resta-nos provar a veracidade da Afirmação 2.

Prova da Afirmação 2

A convergência em (3.11) segue pela convergência fraca $v_m \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$.

A convergência em (3.12) segue por (H_2) e pelo Teorema da convergência dominada.

Para provar a convergência em (3.13), definamos $G_m(x) := g(x, \nabla v_m(x))\ \ \forall m \in \mathbb{N}$.

Por (H_3), temos

$$|G_m|_{L^{\frac{2N}{(N+2)r_4}}(\Omega)} \leq \left(\int_\Omega a_4(x)^{\frac{2N}{(N+2)r_4}} |\nabla v_m|^{\frac{2N}{N+2}} dx \right)^{\frac{(N+2)r_4}{2N}}. \tag{3.16}$$

Usando (3.8) e a desigualdade de Hölder com $q = \frac{N+2}{N}$, obtemos a estimativa

$$|G_m|_{L^{\frac{2N}{(N+2)r_4}}(\Omega)} \leq |a_4|_{L^{\frac{N}{r_4}}(\Omega)} |\nabla v_m|^{r_4}_{L^2(\Omega)} \leq c\rho^{r_4}. \tag{3.17}$$

Como $L^{\frac{2N}{(N+2)r_4}}(\Omega)$ é reflexivo, passando a uma subsequência, existe

$$G \in L^{\frac{2N}{(N+2)r_4}}(\Omega)$$

tal que

$$G_m \rightharpoonup G \text{ em } L^{\frac{2N}{(N+2)r_4}}(\Omega),$$

isto é,

$$\int_\Omega G_m \varphi dx \to \int_\Omega G\varphi dx \quad \forall \varphi \in L^\theta(\Omega) \quad \text{onde} \quad \frac{1}{\theta} + \frac{(N+2)r_4}{2N} = 1. \tag{3.18}$$

Notemos que $\theta < 2^* = \frac{2N}{N-2}$. De fato,

$$\theta = \frac{2N}{2N-(N+2)r_4} < \frac{2N}{2N-(N+2)} = 2^*.$$

Pela imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\theta(\Omega)$ temos em particular que

$$\int_\Omega G_m \omega dx \to \int_\Omega G\omega dx \quad \forall \omega \in V_k. \tag{3.19}$$

Assim, para cada $\omega \in V_k$, de (3.11), (3.12) e (3.19), temos

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \omega dx = \int_\Omega (h(x,|v|+\epsilon)\omega + G(x)\omega)\, dx. \tag{3.20}$$

Como feito para obter a igualdade (3.14) para todo $\omega \in H_0^1(\Omega)$, obtemos que

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \phi dx = \int_\Omega (h(x,|v|+\epsilon)\phi + G(x)\phi)\, dx, \text{ para todo } \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.21}$$

Mas, notemos que

$$\|v_m - v\|^2 = \|v_m\|^2 - (v_m, v) - (v, v_m - v).$$

Como $v_m \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$, temos

$$(v, v_m - v) = o_m(1).$$

Das igualdades (3.10) e (3.21), temos

$$\|v_m - v\|^2 = \int_\Omega (h(x,|v_m|+\epsilon) - h(x,|v|+\epsilon))v_m dx - \int_\Omega (G_m(x) - G(x))v_m dx + o_m(1).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$\int_\Omega (h(x,|v_m|+\epsilon) - h(x,|v|+\epsilon))v_m dx \to 0.$$

Como

$$G_m \rightharpoonup G \text{ em } L^{\frac{2N}{(N+2)r_4}}$$

e

$$v_m \to v \text{ em } L^{\frac{2N}{2N-(N+2)r_4}},$$

pela Proposição $A.1.3$ temos que

$$\int_\Omega (G_m(x) - G(x))v_m dx \to 0.$$

Consequentemente,

$$\|v_m - v\|^2 \to 0.$$

Assim, $\nabla v_m \to \nabla v$ em $L^2(\Omega)$ e pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que (3.13) é válido. Portanto, a afirmação 2 é verdadeira. □

3.5 Demonstração do Teorema 3.0.3

Nesta demonstração, nós primeiro garantimos a existência de solução e depois provamos sua regularidade.

Existência:

Seja $u_n = u_{\epsilon_n}$ a solução do problema (3.2) com $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, obtida pelo Teorema 3.4.1. Assim, u_n satisfaz o seguinte problema:

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u_n = h(x, u_n + \epsilon_n) + g(x, \nabla u_n), & \text{em } \Omega \\ u_n > 0, & \text{em } \Omega \\ u_n(x) = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.22}$$

Multiplicando $\phi = u_n$ em (3.22) e integrando por partes temos:

$$\|u_n\|^2 = \int_\Omega (h(x, |u_n| + \epsilon)u_n + g(x, \nabla u_n)u_n)\, dx. \tag{3.23}$$

Da igualdade em (3.23), pelas hipóteses $(H_2) - (H_3)$ e por Hölder temos

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 \leq & \left(\int_\Omega a_1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u_n^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega a_2^{\frac{2}{1-r_2}} dx\right)^{\frac{1-r_2}{2}} \left(\int_\Omega u_n^2 dx\right)^{\frac{r_2+1}{2}} \\ & + \left(\int_\Omega a_2^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u_n^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega a_3^{\frac{2}{1+r_3}} dx\right)^{\frac{1+r_3}{2}} \left(\int_\Omega u_n^2 dx\right)^{\frac{1-r_3}{2}} \\ & + \left(\int_\Omega a_4^2 |\nabla u_n|^{2r_4} dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega u_n^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Pela imersão de Sobolev (Teorema A.2.6), por (3.24) e pela desigualdade de Hölder com

$$q = \frac{1}{r_4},\ q' = \frac{1}{1-r_4},$$

temos

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 &\leq c_1|a_1|_2\|u_n\| + c_2|a_2|_{\frac{2}{1-r_2}}\|u_n\|^{r_2+1} + c_3|a_2|_2\|u_n\| \\ &+ c_4|a_3|_{\frac{2}{1+r_3}}\|u_n\|^{1-r_3} + c_5|a_4|_{\frac{2}{1-r_4}}\|u_n\|^{r_4+1} \\ &\leq \widetilde{C}(\|u_n\| + \|u_n\|^{r_2+1} + \|u_n\|^{1-r_3} + \|u_n\|^{r_4+1}). \end{aligned}$$

Então, existe $M > 0$ tal que

$$\|u_n\| \leq M.$$

Passando a uma subsequência, se necessário,

$$u_n \rightharpoonup u \in H_0^1(\Omega),$$

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.t.p. } \Omega.$$

Agora, notemos que por (H_2), u_n é uma supersolução de (3.25)

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta v = v^\alpha, & \text{em} & \Omega \\ v > 0, & \text{em} & \Omega \\ v = 0, & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{3.25}$$

Como (3.25) possui uma única solução $\Psi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, pelo Teorema 3.3.2, temos

$$u_n(x) \geq \Psi(x) \ \ \forall x \in \Omega \ \text{ e } \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto

$$u(x) \geq \Psi(x) \ \text{ q.t.p.} \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{3.26}$$

Logo, temos que

$$u(x) > 0 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Repetindo o mesmo argumento explorado na Afirmação 2, passando a uma subsequência, se necessário, é possível provar que para cada $\phi \in H_0^1(\Omega)$ os limites a seguir são válidos

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \phi dx \to \int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx,$$

$$\int_\Omega h(x, u_n + 1/n)\phi dx \to \int_\Omega h(x,u)\phi dx$$

e

$$\int_\Omega g(x, \nabla u_n)\phi dx \to \int_\Omega g(x, \nabla u)\phi dx.$$

Assim, podemos concluir que u é uma solução fraca de (3.1).

Regularidade da solução:

De (3.26), temos que

$$\frac{1}{u} \in L^{\infty}_{loc}(\Omega).$$

Assim, definamos a função

$$\Phi(x) = h(x, |u| + \epsilon) + g(x, \nabla u).$$

Desde que $u \in H^1(\Omega)$, por $(H_2) - (H_3)$ temos que

$$\Phi \in L^{\frac{2}{r}}_{loc}(\Omega),$$

onde $r = \max\{r_i, i = 2, 4\}$. Assim, pelo Teorema $A.2.8$, toda $u \in H^1(\Omega)$ solução fraca de

$$-\Delta u(x) = \Phi(x) \text{ em } \Omega$$

pertence a $W^{2,s_1}_{loc}(\Omega)$, onde $s_1 = 2/r$. E portanto

$$u, |\nabla u| \in L^{s_1}_{loc}(\Omega).$$

Aplicando novamente o argumento utilizado acima, podemos concluir que

$$u \in W^{2,s_2}_{loc}(\Omega),$$

com $s_2 = 2/r^2$.

Desde que $r \in (0, 1)$, podemos repetir este argumento k vezes, tal que

$$u \in W^{2,s_k}_{loc}(\Omega) \text{ e } s_k = 2/r^k > N.$$

Assim, segue das imersões de Sobolev (Teorema A.2.4), que dado $\Omega' \subset\subset \Omega$, temos que u pertence $C^{1,\alpha}(\Omega)$, para algum $0 < \alpha < 1$. Da hipótese (H_1), existe $\beta \in (0, 1)$, tal que

$$\Phi(x) = h(x, |u| + \epsilon) + g(x, \nabla u) \in C^{\beta}(\Omega').$$

Portanto, pelo Teorema de regularidade de Schauder $A.2.9$, temos que $u \in C^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

Para concluirmos o estudo de regularidade, gostaríamos de mencionar o seguinte fato: De Ambrosetti, Brézis & Cerami [9], temos que a única solução Ψ do problema (3.25) satisfaz

$$\Psi(x) \geq C\phi_1(x) \;\; \forall x \in \Omega$$

onde C é uma constante positiva e ϕ_1 é uma autofunção positiva de $(-\Delta, H^1_0(\Omega))$. Assim, se a função a_3 dada em (H_2) satisfaz uma hipótese do tipo

$$\frac{a_3(x)}{\phi_1^{r_2}(x)} \in L^{\infty}(\Omega),$$

usando novamente teoria de regularidade, segue que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. $\square$

Capítulo 4

Existência de solução positiva para uma classe de equações elípticas do tipo Kirchhoff

Neste capítulo, estamos interessados na existência de solução positiva para a seguinte classe de problemas elípticos.

$$
(4.1) \quad \begin{cases} -L(u) = -H\left(a\displaystyle\int_\Omega u^\gamma ds + b\int_\Omega |\nabla u|^\theta ds\right)\Delta u = f(x,u,\nabla u) & \text{em } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}
$$

onde $\theta, \gamma > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e não-negativas.

Para estudar o problema proposto, consideramos o seguinte conjunto de hipóteses.

(F_0) A função f é positiva e localmente Lipschitz-contínua.

(F_1) A função f verifica

$$a_1|u|^p - a_2|\eta|^\alpha \leq f(x,u,\eta) \leq a_3|u|^p + a_4|\eta|^\alpha,$$

$\forall (x,u,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, onde $0 < a_i, i \in \{1,\dots,4\}$, $p \in \left(1, \frac{N+2}{N-2}\right)$ e $\alpha \in \left(1, \frac{2p}{p+1}\right)$.

(H_0) Existe uma constante positiva m tal que

$$m \leq H(y), \text{ para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Notemos que sob as hipóteses $(F_0) - (F_1)$ e (H_0), $u \equiv 0$ é também uma solução para (4.1).

Com tais hipóteses, conseguimos provar o seguinte resultado de existência.

Teorema 4.0.1. *Suponhamos que f e H são funções não negativas verificando $(F_0)-(F_1)$ e (H_0), respectivamente. Então o problema (4.1) possui pelo menos uma solução positiva $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.*

Consideremos agora o problema

$$(4.2) \qquad \begin{cases} -H\left(a\displaystyle\int_\Omega u^\gamma ds + b\int_\Omega |\nabla u|^\theta ds\right)\Delta u = f(x,u,\nabla u)+\mu & \text{em } \Omega \\ \\ u(x)=0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\theta, \gamma > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq \mu$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio suave e limitado, $N \geq 3$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e não-negativas.

O Teorema 4.0.1 não engloba o problema (4.2) quando $\mu \neq 0$ devido à restrição da hipótese (F_1). Assim, pela teoria do grau estudamos este caso e garantimos a existência de solução para o mesmo.

Assim, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.0.2. *Suponhamos que as hipóteses $(F_0)-(F_1)$ e (H_0) sejam válidas. Então existe $\mu^* > 0$ tal que (4.2) possui pelo menos uma solução positiva se $\mu \leq \mu^*$.*

A hipótese (H_0) é fundamental para a demonstração do Teorema 1.4. O que apresentamos a seguir é um caso onde esta hipótese pode ser enfraquecida.

Consideremos o problema

$$(4.3) \qquad \begin{cases} -H\left(a\displaystyle\int_\Omega u^\gamma ds + b\int_\Omega |\nabla u|^2 ds\right)\Delta u = f(x,u,\nabla u) & \text{em } \Omega \\ u(x)=0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\gamma,\ a,\ b > 0$.

Para estudarmos este problema, consideramos a seguinte hipótese adicional.

(H_1) Existe uma constante positiva τ, satisfazendo $\tau + 1 < \min\left\{\frac{p+1}{2}, \frac{\alpha+1}{2}\right\}$, tal que

$$H(t) \geq |t|^\tau.$$

Notemos que sob a hipótese (H_1), pode ocorrer $H(0) = 0$.

Substituindo a hopótese (H_0) por (H_1), conseguimos obter o seguinte resultado.

Teorema 4.0.3. *Suponhamos que f e H são funções não negativas verificando $(F_0)-(F_1)$ e (H_1), respectivamente. Então o problema (4.3) possui pelo menos uma solução positiva $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.*

4.1 Definições e notações

Para facilitar a notação, denotemos

$$H := H\left(a\int_\Omega u^\gamma dx + b\int_\Omega |\nabla u|^\theta dx\right)$$

Consideremos $C^{i,\tau}(\overline{\Omega})$ o espaço de Banach munido com a norma usual de Hölder $\|\cdot\|_{C^{i,\tau}}$, onde $i \in \{0,1,2\}$ e $\tau \in [0,1)$.

Definição 9. *Para cada função $v \in C^\tau(\overline{\Omega})$, denotemos por $T(v) \in C^{2,\tau}(\overline{\Omega})$ a única solução do problema (veja o Teorema A.2.9)*

$$\begin{cases} \Delta T(v) + v = 0 & em \quad \Omega \\ \\ T(v)(x) = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

É conhecido que $T : C^\tau(\overline{\Omega}) \to C^{2,\tau}(\overline{\Omega})$ é um operador contínuo e leva aberto em aberto. De fato, veja a Proposição $A.1.1$.

Definição 10. *Definamos*

$$\begin{array}{rcl} N : C^2(\overline{\Omega}) & \to & C^\tau(\overline{\Omega}) \\ u & \mapsto & \dfrac{f(x,u,\nabla u)}{H}. \end{array}$$

Pela hipótese (F_0), temos que N está bem definido.

Definição 11. *Definamos agora*

$$K := i \circ T \circ N : C^2(\overline{\Omega}) \to C^2(\overline{\Omega}),$$

onde $i : C^{2,\tau}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\overline{\Omega})$ é a imersão compacta.

Portanto K é compacto.

Denotemos agora por $\mathcal{C} \subset C^2(\overline{\Omega})$ o subconjunto das funções não negativas. Notemos que K leva $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$. De fato, tomemos $u \in \mathcal{C}$, temos

$$\Delta T(N(u)) = -\frac{f(x,u,\nabla u)}{H} \leq 0.$$

Assim, pelo princípio do máximo, temos que $T(N(u)) \geq 0$.

Definição 12. *Seja E um espaço de Banach. Um cone em E é um subconjunto não-vazio $\mathcal{B} \subseteq E$ tal que:*

(i) *Dados $x, y\mathcal{B}$, então $x + y \in \mathcal{B}$;*

(ii) *Dados $x \in \mathcal{B}$ e $\alpha > 0$, então $\alpha x \in \mathcal{B}$;*

(iii) *Se $x \in \mathcal{B}\backslash\{0\}$, então $-x \notin \mathcal{B}$.*

Proposição 4.1.1. *Suponhamos que:*

(i) *D é um conjunto aberto e limitado de um espaço de Banach X;*

(ii) *S é uma perturbação compacta da identidade, isto é $S \in C(\overline{D}, X)$ tal que $S = Id - T$, onde T é compacto;*

(iii) *p é um ponto de X tal que $p \notin S(\partial D)$.*

Para cada tripla (S, D, p) satisfazendo $(i) - (iii)$, podemos associar um inteiro

$$\deg(S, D, p)$$

chamado o grau de S (com respeito a D e p).

Para maiores detalhes sobre o grau de Leray-Schauder ver por exemplo [10, definição 3.16].

Definição 13. *Seja D um conjunto aberto e limitado de um espaço de Banach X. Uma homotopia é um mapa $h = h(\lambda, x)$ tal que $h \in C([0,1] \times \overline{D}, X)$. Uma homotopia é admissível (com respeito a D e p) se $h(\lambda, x) \neq p$ para todo $(\lambda, x) \in [0,1] \times \partial D$.*

Gostaríamos de citar duas propriedades do grau definido acima:

($\mathbf{P}_1$) Normalização: Se Id denota a função identidade em X, então

$$\deg(Id, D, p) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad p \in D \\ 0 & \text{se} \quad p \notin D. \end{cases}$$

($\mathbf{P}_2$) Invariância por Homotopia: se h é uma homotopia admissível, então $\deg(h(\lambda, \cdot), D, p)$ é constante com respeito a $\lambda \in [0,1]$. Em particular, se $f(x) = h(0, x)$ e $g(x) = h(1, x)$ então

$$\deg(f, D, p) = \deg(g, D, p).$$

4.2 Alguns resultados técnicos

Lema 4.2.1. *Seja u uma solução positiva do problema:*

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = h(x) \geq 0 & em \quad \Omega \\ u(x) = 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{4.4}$$

Então,

$$\int_\Omega h(x)\frac{\phi_1^2}{u}dx \leq \lambda_1 \int_\Omega \phi_1^2 dx,$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor do Laplaciano com condição de Dirichlet na fronteira, e ϕ_1 é a autofunção associada.

Demonstração:

Para $v \geq 0$ e $u > 0$ funções diferenciáveis, a seguinte identidade de Picone é conhecida.

$$|\nabla v|^2 - \nabla\left(\frac{v^2}{u}\right)\nabla u = |\nabla v|^2 + \frac{v^2}{u^2}|\nabla u|^2 - 2\frac{v}{u}\nabla u \nabla v = \left|\nabla v - \frac{v}{u}\nabla u\right|^2 \geq 0. \tag{4.5}$$

Tomando $v = \phi_1$ em (4.5), onde

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\phi_1(x) = \lambda_1\phi_1(x) & \text{em} \quad \Omega \\ \phi_1(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

e integrando em Ω, temos

$$\int_\Omega |\nabla\phi_1|^2 dx \geq \int_\Omega \nabla\left(\frac{\phi_1^2}{u}\right)\nabla u dx.$$

Ou ainda

$$\lambda_1 \int_\Omega \phi_1^2 dx \geq -\int_\Omega \left(\frac{\phi_1^2}{u}\right)\Delta u dx = \int_\Omega h(x)\frac{\phi_1^2}{u}dx.$$

□

Teorema 4.2.1. *Seja $\mathcal{C}$ um cone em um espaço de Banach e $K : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ um operador compacto tal que $K(0) = 0$. Suponha que existe $r > 0$, verificando:*

(a) $u \neq tK(u)$ para todo $\|u\| = r$, $t \in [0,1]$.

Suponha também que exista uma homotopia compacta $G : [0,1] \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, e um $R > r$ tal que:

(b_1) *$K(u) = G(0, u)$ para todo $u \in \mathcal{C}$.*

(b_2) *$G(t, u) \neq u$ para qualquer $\|u\| = R$, $t \in [0, 1]$.*

(b_3) *$G(1, u) \neq u$ para qualquer $\|u\| \leq R$.*

Seja $D = \{u \in \mathcal{C} : r < \|u\| < R\}$. Então, K possui um ponto fixo em D.

Demonstração:

Veja [52] . Veja também [32]. □

Teorema 4.2.2. *Seja $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$ e $(E, \| \cdot \|)$ um espaço de Banach real. Seja $\chi : \mathbb{R}^+ \times E \to E$ contínua e compacta. Suponha ainda que χ satisfaz:*

(a) $\chi(0, 0) = 0$.

(b) *existe $R > 0$ tal que*

(i) *$u \in E$, $\|u\| \leq R$ e $u = \chi(0, u)$ implica $u = 0$.*

(ii) *$deg(Id - \chi(0, \cdot), B_R(0), 0) = 1$.*

Denotamos J o conjunto de soluções do problema

$$u = \chi(t, u)$$

em $\mathbb{R}^+ \times E$. Denotamos C o compacto (fechado, conexo e subconjunto maximal com respeito a inclusão) de J que contém $(0, 0)$. Assim, se

$$C \cap (\{0\} \times E) = \{(0, 0)\},$$

então C é ilimitado em $\mathbb{R}^+ \times E$.

Demonstração:

Veja [66, Teorema 6.2, p.195]. Veja também [15]. □

4.3 Estimativas a priori

Para provarmos existência de solução positiva para (4.1), usamos um argumento de ponto fixo usado por Krasnoselskii [52] (veja também [32]). O principal ingrediente do nosso argumento é uma estimativa a priori sobre o par (u, λ) solução do problema auxiliar

$$\left\{ \begin{array}{ll} -H\Delta u = f(x, (1+\lambda H)^{\frac{1}{p}} u, \nabla u) + \lambda H & \text{em} \quad \Omega \\ \\ u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{4.6}$$

com $\lambda \geq 0$ e $u \in C^2(\overline{\Omega})$, onde f satisfaz $(F_0) - (F_1)$, e H satisfaz (H_0).

Para obter tais estimativas, usamos argumentos de blow-up e a identidade de Picone, adaptando argumento de Ruiz [68].

Como feito em [32], vamos precisar de não existência de solução para o problema (4.6) quando λ é "grande".

Proposição 4.3.1. *Suponhamos que f satisfaz $(F_0) - (F_1)$ e que H satisfaz (H_0). Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que o problema (4.6) não possui solução para $\lambda \geq \lambda_0$.*

Demonstração:

Suponhamos que u é uma solução positiva de (4.6). Pelo Lema 4.2.1 temos que

$$\int_\Omega \frac{\left[f(x, (1+\lambda H)^{\frac{1}{p}} u, \nabla u) + \lambda H\right]}{H} \frac{\phi_1^2}{u} dx \leq \lambda_1 \int_\Omega \phi_1^2 dx. \tag{4.7}$$

Definamos

$$l(\lambda) = \min_{t \geq 0} \left\{ \frac{\lambda(a_1 t^p + 1)}{t} \right\}.$$

Notemos que

$$l(\lambda) = \lambda \left[a_1 \left(\frac{1}{(p-1)a_1} \right)^{\frac{p-1}{p}} + (a_1(p-1))^{\frac{1}{p}} \right].$$

Assim, $\lim_{\lambda \to \infty} l(\lambda) = +\infty$.

Usando a hipótese (F_1), temos:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{\left[f(x,(1+\lambda H)^{\frac{1}{p}}u,\nabla u)+\lambda H\right]}{H}\frac{\phi_1^2}{u}dx \geq \\
&\int_\Omega \left[a_1\left(\frac{1}{H}+\lambda\right)|u|^p - a_2\frac{|\nabla u|^\alpha}{H}+\lambda\right]\frac{\phi_1^2}{u}dx \geq \\
&\int_\Omega \frac{\lambda(a_1|u|^p+1)}{u}\phi_1^2 dx - \int_\Omega a_2\frac{|\nabla u|^\alpha}{H}\frac{\phi_1^2}{u}dx \geq \\
&l(\lambda)\int_\Omega \phi_1^2 dx - a_2\int_\Omega \frac{|\nabla u|^\alpha}{H}\frac{\phi_1^2}{u}dx.
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

De (4.7) e (4.8) temos

$$(\lambda_1 - l(\lambda))\int_\Omega \phi_1^2 dx \geq -a_2\int_\Omega \frac{|\nabla u|^\alpha}{H}\frac{\phi_1^2}{u}dx.$$

Afirmação 3. *Existe $k>0$ tal que*

$$\frac{a_2}{H}\int_\Omega |\nabla u|^\alpha\frac{\phi_1^2}{u}dx < k.$$

Admitindo a afirmação 3 válida, se λ for ilimitado temos

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\lambda_1 - l(\lambda)) = -\infty,$$

o que nos dá uma contradição. Isto prova a limitação de λ.

Provemos a afirmação 3. Pela hipótese (F_1), sabemos que u e λ satisfazem

$$-H\Delta u \geq a_1(1+\lambda H)|u|^p - a_2|\nabla u|^\alpha. \tag{4.9}$$

Notemos que $\frac{\phi_1^2}{u}$ pertence a $W_0^{1,2}(\Omega)$ desde que u é positivo em Ω. De fato, podemos tomar $\phi_1(x) < u(x)\forall x\in\Omega$; pelo Lema de Hopf temos que u tem derivada normal não nula na fronteira, o que implica

$$\frac{\phi_1^2}{u}\in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Assim, multiplicando a função teste $\psi = \phi_1^2 u^{-1}$ em (4.9) e integrando por partes obtemos

$$
\begin{aligned}
a_1(1+\lambda H)\int_\Omega |u|^{p-1}\phi_1^2 dx &\leq H\int_\Omega \nabla u\ \mathrm{div}(\phi_1^2u^{-1})dx + a_2\int_\Omega |\nabla u|^\alpha\phi_1^2u^{-1}dx \\
&\leq 2H\int_\Omega \nabla u\nabla\phi_1\phi_1u^{-1}dx - H\int_\Omega |\nabla u|^2\phi_1^2u^{-2}dx \\
&+ a_2\int_\Omega |\nabla u|^\alpha\phi_1^2u^{-1}dx.
\end{aligned}
$$

Definindo $\tau = p - 1$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
H\int_\Omega |\nabla u|^2\phi_1^2 u^{-2}dx + a_1(1+\lambda H)\int_\Omega |u|^\tau \phi_1^2 dx &\leq 2H\int_\Omega \nabla u\nabla\phi_1\phi_1 u^{-1}dx \\
&+ a_2\int_\Omega |\nabla u|^\alpha \phi_1^2 u^{-1}dx.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

Como $\nabla\phi_1$ é limitado em $\overline{\Omega}$, podemos estimar o primeiro termo do lado direito da expressão usando a seguinte versão da desigualdade de Young

$$x < \varepsilon x^a + C, \text{ com } a > 1 \text{ e } C \text{ dependendo de } \varepsilon.$$

Assim, obtemos

$$2H\int_\Omega \nabla u\nabla\phi_1\phi_1 u^{-1}dx \leq \frac{H}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\phi_1^2 u^{-2}dx + CH. \tag{4.11}$$

De (4.10) e (4.11) temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\phi_1^2 u^{-2}dx + \frac{a_1}{H}\int_\Omega |u|^\tau\phi_1^2 dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\phi_1^2 u^{-2}dx \\
&+ a_1\left(\frac{1}{H}+\lambda\right)\int_\Omega |u|^\tau\phi_1^2 dx \\
&\leq C + \frac{a_2}{H}\int_\Omega |\nabla u|^\alpha\phi_1^2 u^{-1}dx,
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

com C não dependendo de u nem de λ.

Agora, vamos conseguir estimativas usando uma desigualdade de Young na forma

$$ab \leq \varepsilon a^q + \varepsilon^{\frac{1}{1-q}} b^{\frac{q}{q-1}}, \ \forall q > 1, \varepsilon > 0. \tag{4.13}$$

Tomemos $q = \frac{2}{\alpha}$, $\varepsilon = \frac{m}{4}$, $a = |\nabla u|^\alpha u^{-\alpha}$ e $b = a_2 u^{\alpha-1}$, onde m é dado na hipótese (H_0). Assim, pela desigualdade de Young temos

$$
\begin{aligned}
\frac{a_2}{H}\int_\Omega |\nabla u|^\alpha\phi_1^2 u^{-1}dx &\leq \frac{m}{4H}\int_\Omega |\nabla u|^2\phi_1^2 u^{-2}dx + \frac{C}{H}\int_\Omega u^{\frac{2(\alpha-1)}{2-\alpha}}\phi_1^2 dx \\
&\leq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2\phi_1^2 u^{-2}dx + \frac{C}{H}\int_\Omega u^{\frac{2(\alpha-1)}{2-\alpha}}\phi_1^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

Notemos que

$$\frac{2(\alpha-1)}{2-\alpha} < p - 1 = \tau.$$

Assim pela desigualdade de Young (4.13), com $q = \frac{\tau(2-\alpha)}{2(\alpha-1)}$, $\varepsilon = \frac{a_1}{2}$, $a = u^{\frac{2(\alpha-1)}{2-\alpha}}$ e $b = C$, temos

$$\frac{C}{H}\int_\Omega u^{\frac{2(\alpha-1)}{2-\alpha}}\phi_1^2 dx \leq \frac{a_1}{2H}\int_\Omega u^\tau \phi_1^2 dx + C_2. \tag{4.15}$$

De (4.14) e (4.15) temos

$$\frac{a_2}{H}\int_\Omega |\nabla u|^\alpha \phi_1^2 u^{-1} dx \leq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2 \phi_1^2 u^{-2} dx + \frac{a_1}{2H}\int_\Omega u^\tau \phi_1^2 dx + C_2. \tag{4.16}$$

De (4.12) e (4.16) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{a_2}{H}\int_\Omega |\nabla u|^\alpha \phi_1^2 u^{-1} dx &\leq \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u|^2 \phi_1^2 u^{-2} dx + \frac{a_1}{2H}\int_\Omega u^\tau \phi_1^2 dx + C_2 \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{a_2}{H}\int_\Omega |\nabla u|^\alpha \phi_1^2 u^{-1} dx + \frac{C}{2} + C_2,
\end{aligned}$$

o que implica existir $k > 0$ tal que

$$\frac{a_2}{H}\int_\Omega |\nabla u|^\alpha \phi_1^2 u^{-1} dx < k.$$

□

Proposição 4.3.2. *Suponhamos que as hipóteses* $(F_0) - (F_1)$ *sejam válidas e que* $\lambda < \lambda_0$ *para algum* λ_0 *fixado. Então existe* $C > 0$ *tal que*

$$|u|_\infty < C$$

para qualquer solução u *de* (4.6).

Demonstração:

Suponhamos, por contradição, que existam $\lambda_n < \lambda_0$, $u_n > 0$ tais que u_n é uma solução de (4.6) com $\lambda = \lambda_n$ e que $|u_n|_\infty \to \infty$.

Nesta demonstração, usamos argumentos de blow-up para obtermos uma contradição.

Seja $x_n \in \Omega$ tal que $u_n(x_n) = |u_n|_\infty$, definamos

$$S_n = |u_n|_\infty = u_n(x_n)$$

$$\delta_n = \mathrm{dist}(x_n, \partial\Omega)$$

$$w_n(x) = S_n^{-1} u_n(y)$$

onde

$$y = M_n x + x_n$$

e M_n será definido depois.

Notemos que as funções w_n estão bem definidas em pelo menos $B(0, \delta_n M_n^{-1})$ e vale

$$w_n(0) = |w_n|_\infty = 1.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \nabla w_n(x) &= S_n^{-1} M_n \nabla u_n(y), \\ \Delta w_n(x) &= S_n^{-1} M_n^2 \Delta u_n(y). \end{aligned}$$

E portanto

$$\begin{aligned} &-\Delta w_n(x) = \frac{S_n^{-1} M_n^2}{H} (f(y, (1+\lambda_n H)^{\frac{1}{p}} u_n(y), \nabla u_n(y)) + \lambda_n H) \\ &= \frac{S_n^{-1} M_n^2}{H} (f(M_n x + x_n, (1+\lambda_n H)^{\frac{1}{p}} u_n(M_n x + x_n), \nabla u_n(M_n x + x_n)) + \lambda_n H) \\ &:= \theta_n(x, w_n, \nabla w_n). \end{aligned}$$

Seja D_n o domínio de w_n. De modo natural definamos $\theta_n : D_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ como

$$\theta_n(x, w, \xi) = \frac{S_n^{-1} M_n^2}{H} (f(M_n x + x_n, (1+\lambda_n H)^{\frac{1}{p}} S_n w, \xi S_n M_n^{-1}) + \lambda_n H).$$

Tomemos

$$M_n = S_n^{\frac{1-p}{2}}.$$

Como $p > 1$, então $M_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

De (F_1) e (H_0) temos

$$\begin{aligned} \theta_n(x, w, \xi) &\leq \frac{S_n^{-p}}{H} \left(a_3 (1+\lambda_n H) S_n^p |w|^p + a_4 S_n^{\alpha\left(\frac{p+1}{2}\right)} |\xi|^\alpha + \lambda_n H \right) \\ &= a_3 \left(\frac{1}{H} + \lambda_n \right) |w|^p + \frac{S_n^{-p}}{H} a_4 S_n^{\alpha\left(\frac{p+1}{2}\right)} |\xi|^\alpha + S_n^{-p} \lambda_n \\ &\leq a_3 \left(\frac{1}{m} + \lambda_n \right) |w|^p + \frac{S_n^{-p}}{m} a_4 S_n^{\alpha\left(\frac{p+1}{2}\right)} |\xi|^\alpha + S_n^{-p} \lambda_n. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Como o termo $a_4 S_n^{-p} S_n^{\alpha\left(\frac{p+1}{2}\right)}/m$ tende para zero quando n tende para infinito, e $a_3 \left(\frac{1}{m} + \lambda_n\right)$ é limitado temos para n suficientemente grande

$$\theta_n(x,w,\xi) \le C|w|^p + |\xi|^\alpha + 1. \tag{4.18}$$

Novamente pela hipótese (F_1) temos

$$\begin{aligned} \theta_n(x,w,\xi) &\ge a_1\left(\frac{1}{H}+\lambda_n\right)|w|^p - \frac{S_n^{-p}}{H}a_2 S_n^{\alpha\left(\frac{p+1}{2}\right)}|\xi|^\alpha + S_n^{-p}\lambda_n \\ &\ge a_1\lambda_n|w|^p - \frac{S_n^{-p}}{m}a_2 S_n^{\alpha\left(\frac{p+1}{2}\right)}|\xi|^\alpha + S_n^{-p}\lambda_n. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Temos também que

$$\lambda_n \in [0,\lambda_0].$$

Passando a uma subsequência se necessário, temos que $\lambda_n \to \lambda^*$.

Agora, usando a regularidade $C^{1,\beta}$ devido a Lieberman (veja o Teorema $A.2.1$), concluímos de (4.18) que existe C independente de n tal que

$$\|\nabla w_n\|_{C^{1,\tau}(\overline{D})} < C, \text{ para todo } D \text{ aberto de } \mathbb{R}^N.$$

Assim, passando o limite quando $n \to \infty$ em (4.19), ou obtemos uma solução fraca, de classe C^1 e positiva com $w(0)=1$ para o problema

$$\Delta u + a_1\lambda^* u^p \le 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{4.20}$$

ou obtemos uma solução fraca, de classe C^1 e positiva com $w(0)=1$ para o problema

$$\begin{cases} \Delta u + a_1\lambda^* u^p \le 0 & \text{em} \quad H_+ \\ u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial H_+ \end{cases} \tag{4.21}$$

onde $H_+ = \{x=(x_1,x_2,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}; x_1 > 0\}$ é um semi-espaço em $\mathbb{R}^N$.
Em ambos os casos, isto contraria o resultado de Liouville por Gidas e Spruck, [40, 41].

Logo, existe $C>0$ tal que $|u|_\infty < C$ para qualquer solução u de (4.6). $\square$

4.4 Demonstração do Teorema 4.0.1

Antes de começarmos a demonstração deste resultado, notemos que sob as hipóteses $(F_0)-(F_1)$ e (H_0) o problema (4.1) é equivalente ao problema (4.22)

$$
\begin{cases} \Delta u + \dfrac{f(x,u,\nabla u)}{H} = 0 & x \in \Omega \\ \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.22}
$$

Nesta demonstração, usamos o Teorema de Krasnoselskii (veja Teorema 4.2.1) sobre a existência de ponto fixo de operadores compactos definidos em um cone. Assim, no que segue, provamos que as condições do Teorema 4.2.1 são verificadas.

Aqui, o espaço de Banach considerado é o espaço $C^2(\overline{\Omega})$. O cone considerado é $\mathcal{C} \subset C^2(\overline{\Omega})$, o subconjunto das funções não negativas.

Inicialmente, vamos verificar a condição (a).
Tome $u \in \mathcal{C} - \{0\}$ tal que $u = tK(u)$ para algum $t \in [0,1]$. Podemos reescrever esta igualdade como:

$$
\Delta u + t\frac{f(x,u,\nabla u)}{H} = 0.
$$

Multiplicando por u e integrando por partes obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega \frac{f(x,u,\nabla u)}{H} u dx &\leq \frac{a_3}{H}\int_\Omega |u|^{p+1}dx + \frac{a_4}{H}\int_\Omega |\nabla u|^\alpha u dx \\
&\leq \frac{a_3}{m}\int_\Omega |u|^{p+1}dx + \frac{a_4}{m}\int_\Omega |\nabla u|^\alpha u dx.
\end{aligned}
$$

Pela imersão

$$
W^{1,p} \hookrightarrow L^q, 1 \leq q \leq p^*,
$$

e por Hölder com $q = \frac{2}{\alpha}$, $q' = \frac{2}{2-\alpha}$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u|^2 dx &\leq \frac{a_3}{m}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{p+1}{2}} + \frac{a_4}{m}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\int_\Omega |u|^{\frac{2}{2-\alpha}} dx\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \\
&\leq C_1\left[\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{p+1}{2}} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\right].
\end{aligned}
$$

Agora, como $p > 1$ e $\alpha > 1$, temos que existe $C_2 > 0$ tal que

$$
\int_\Omega |\nabla u|^2 dx > C_2.
$$

Mas, podemos escolher $r > 0$ pequeno suficiente tal que

$$
\|u\|_{C^2} \leq r \Rightarrow \int_\Omega |\nabla u|^2 dx < C_2,
$$

e portanto a condição (a) está provada.

Observação 6. *Com restrições sobre* m, a_3 *e* a_4 *podemos obter resultado de existência para* $\alpha = 1$.

Definamos agora

$$\begin{array}{rcl} G : [0,1] \times \mathcal{C} & \rightarrow & \mathcal{C} \\ (t,u) & \mapsto & T \circ \left[\dfrac{f(x,(1+t\lambda_0 H)^{\frac{1}{p}} u, \nabla u)}{H} + t\lambda_0 \right] \end{array}$$

onde λ_0 é dado no Lema 4.3.1.

Notemos que a imagem de G está contida em $\mathcal{C}$, pois

$$\left(\frac{f(x,(1+t\lambda_0 H)^{\frac{1}{p}} u, \nabla u)}{H} + t\lambda_0 \right) > 0.$$

Assim definido, temos

$$K(u) = G(0,u)$$

Portanto (b_1) é verificado.

Para provar (b_2), observemos que

$$G(t,u) = u$$

é equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta u + \dfrac{f(x,(1+t\lambda_0 H)^{\frac{1}{p}} u, \nabla u)}{H} + t\lambda_0 = 0 & \text{em} & \Omega \\ u(x) = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{4.23}$$

Fazendo uso das estimativas $C^{1,\tau}$ Lieberman juntamente com a Proposição 4.3.2, podemos achar $R > 0$ tal que toda solução de (4.23) verifica

$$\|u\|_{C^{1,\tau}} < R. \tag{4.24}$$

Pelas hipóteses (F_1) e (H_0) e pelo Teorema $A.2.9$, obtemos

$$\|u\|_{C^2} < R_2.$$

E isto prova (b_2).

Finalmente, a Proposição 4.3.1, nos dá (b_3) pois não há solução para $t = 1$, ou seja $\lambda = \lambda_0$. Assim, a prova está finalizada, e o Teorema 4.2.1 garante a existência de uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solução do problema (4.1). □

4.5 Demonstração do Teorema 4.0.2

Nesta demonstração usamos o Teorema 4.2.2.

Definamos

$$\begin{array}{rcl} \chi : \mathbb{R}^+ \times C^2(\overline{\Omega}) & \to & C^2(\overline{\Omega}) \\ (t,u) & \mapsto & T \circ \left[\dfrac{f(x,u,\nabla u) + t}{H} \right], \end{array}$$

onde T foi definido na seção de definições.

Como observado anteriormente temos que χ, assim definida, é uma função contínua e leva subconjuntos limitados em subconjuntos relativamente compactos.

Assim, no que segue provaremos que os itens (a), $(b.i)$ e $(b.ii)$ do Teorema 4.2.2 são válidos.

A verificação da condição (a) é imediata.

Verifiquemos a condição $(b.i)$. Notemos que

$$\chi(0,u) = K(u)$$

e repetindo um raciocínio análogo ao que foi feito para demonstrarmos o item (a) do Teorema 4.2.1, podemos provar que existe $R > 0$ tal que

$$u \neq tK(u), \text{ para todo } 0 < \|u\| \leq R \text{ e para todo } t \in [0,1]. \tag{4.25}$$

Isto prova o que o item $(b.i)$ é verificado.

Verifiquemos agora o item $(b.ii)$. Definamos a homotopia

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Upsilon : \ [0,1] \times C^2(\overline{\Omega}) & \to & C^2(\overline{\Omega}) \\ (\gamma, \cdot) & \mapsto & \gamma Id + (1-\gamma)(Id - \chi(0,\cdot)) \end{array} \right. .$$

De (4.25), temos que a homotopia Υ é admissível. Assim, pela propriedade $(\mathbf{P}_2)$ (Invariância por Homotopia), temos que

$$\deg(Id - \chi(0,\cdot), B_R(0), 0) = \deg(Id, B_R(0), 0).$$

Agora, pela propriedade ($\mathbf{P}_1$) (Normalização) temos que

$$\deg(Id - \chi(0,\cdot), B_R(0), 0) = 1.$$

Assim, como uma consequência do Teorema 4.2.2, existe $\mu^* > 0$ tal que (4.2) possui solução u_μ se $\mu \leq \mu^*$. Para concluir, temos que u_μ é positivo pelo fato das funções f e H serem positivas e do princípio do máximo. □

4.6 Demonstração do Teorema 4.0.3

Seja u uma solução positiva de

$$H\left(a\int_\Omega u^\gamma ds + b\int_\Omega |\nabla u|^\theta ds\right)\Delta u + f(x,u,\nabla u) = 0.$$

Multiplicando a igualdade acima por u e integrando por partes obtemos:

$$c\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^\tau \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \;\; \leq \;\; a_3\int_\Omega |u|^{p+1}dx + a_4\int_\Omega |\nabla u|^\alpha u dx.$$

Pela imersão

$$W^{1,p} \hookrightarrow L^q, 1 \leq q \leq p^*,$$

e por Hölder com $q = \frac{2}{\alpha}$, $q' = \frac{2}{2-\alpha}$, temos

$$c\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\tau+1} \;\; \leq \;\; C_1\left[\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{p+1}{2}} + \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\right].$$

Pela hipótese (H_1) temos $\tau + 1 < \min\left\{\frac{p+1}{2}, \frac{\alpha+1}{2}\right\}$ e portanto, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx > C_2. \tag{4.26}$$

Agora, notemos que a existência de uma solução positiva para o problema (4.3) segue do Teorema 4.0.1 e da desigualdade obtida em (4.26) □

Apêndice A

Resultados Auxiliares

A.1 Propriedades de operadores e funcionais

Proposição A.1.1. *Sejam E e F dois espaços de Banach e T um operador linear contínuo e sobrejetivo de E sobre F. Então T leva todo aberto de E em um aberto de F.*

Demonstração:

Veja [17, Teorema II.5] $\square$

Lema A.1.1. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Se $v_n \to u$ em L^p, existe (w_n) subsequência de (v_n) e $g \in L^p(\Omega)$ tais que*

$$w_n(x) \overset{q.t.p.}{\to} u(x)$$

$$e \quad |u(x)|, |w_n(x)| \leq g(x).$$

Demonstração:

Dado (v_n) tal que $v_n \overset{L^p}{\to} u$. Passando a uma subsequência se necessário, temos que (v_n) é tal que

$$v_{n'} \overset{q.t.p.}{\to} u_n.$$

Como v_n é uma sequência de Cauchy em L^p, podemos extrair uma subsequência $w_n \subset v_n$ tal que

$$\|w_{j+1} - w_j\|_p \leq 2^{-j} \ \forall j \geq 1.$$

Defina

$$g(x) := |w_1(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |w_{j+1}(x) - w_j(x)|.$$

Assim,
$$|w_n(x)| \leq g(x) \text{ e portanto } |u(x)| \leq g(x).$$

$\square$

Lema A.1.2. *Sejam* $|\Omega| < \infty$, $1 \leq p, r < \infty$, $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ *e*
$$|f(x,u,\xi)| \leq c(1 + |u|^{\frac{p}{r}}).$$
Então, para todo $u \in L^p(\Omega)$, $f(\cdot, u) \in L^r(\Omega)$, *o operador*
$$\begin{array}{rcl} A : L^P(\Omega) & \to & L^r(\Omega) \\ u & \mapsto & f(x,u,\xi) \end{array}$$
é contínuo.

Demonstração:

Desde que $u \in L^p(\Omega)$, temos
$$|f(x,u,\xi)|^r \leq c^r(1 + |u|^{\frac{p}{r}})^r \leq c^r 2^r (1 + |u|^p) \in L^1(\Omega).$$
E portanto, $f(\cdot, u) \in L^r(\Omega)$.

Agora se $u_n \to u$ em $L^p(\Omega)$. Dado (v_n) uma subsequência de (u_n), tome (w_n) como no Lema $A.1.1$, e teremos
$$|f(x,w_n,\xi) - f(x,u,\xi)|^r \leq 2^r c^r (1 + |g(x)|^{\frac{p}{r}})^r \in L^1(\Omega).$$
Pelo Teorema da Convergência Dominada temos
$$A(w_n) \to A(u) \text{ em } L^r,$$
e portanto
$$A(u_n) \to A(u) \text{ em } L^r.$$

$\square$

Proposição A.1.2. *Se* φ *tem derivada Gateaux contínua em* U *então* $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$.

Demonstração:

Dados $u \in U$ e $h \in X$, e φ' a derivada de Gateaux. Pelo Teorema do Valor Médio,
$$\varphi(u+h) - \varphi(u) - \langle \varphi'(u), h\rangle = \langle \varphi'(u+\theta h), h\rangle - \langle \varphi'(u), h\rangle.$$
$$\frac{\langle \varphi'(u+\theta h) - \varphi'(u), h\rangle}{\|h\|} \leq \|\varphi'(u+\theta h) - \varphi'(u)\|$$

e pela continuidade da derivada de Gateaux, temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{\langle \varphi'(u+\theta h) - \varphi'(u), h\rangle}{\|h\|} = 0,$$

donde segue que φ é diferenciável a Fréchet e esta é contínua. $\square$

Teorema A.1.1. *(Teorema do Passo da Montanha, Ambrosetti-Rabinowitz,1973). Sejam X um espaço de Banach, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $a \in X$ e $r > 0$ tais que $\|a\| > r$ e*

$$b := \inf_{\|u\|=r} \varphi(u) > \varphi(0) \geq \varphi(a).$$

Se φ satisfaz $(PS)_c$ com

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \varphi(\gamma(t)),$$

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X);\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = a\},$$

então c é um valor crítico de φ. Isto é, existe $z \neq 0$ tal que $\varphi(z) = c$ e $\varphi'(z) = c$.

Demonstração:

Veja [11] $\square$

Proposição A.1.3. *Seja (x_n) uma sequência em E, onde E um espaço de Banach. Defina $\sigma(E, E')$ a topologia fraca sobre E. Então se $x_n \rightharpoonup x$ fracamente em $\sigma(E, E')$ e se $f_n \to f$ forte em E', então*

$$\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle.$$

Demonstração:

Veja [17, Proposição $III.5$]. $\square$

Proposição A.1.4. *Suponhamos que Ω é de classe C^1. Seja $u \in L^p(\Omega)$ com $1 < p < \infty$. As seguintes propriedades são equivalentes.*

(i) $u \in W_0^{1,p}$.

(ii) Existe uma constante C tal que

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}}\ \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N),\ \forall i = 1, \dots, N.$$

Demonstração:

Veja [17, Proposição $IX.18$]. $\square$

A.2 Resultados de regularidade e estimativas

Teorema A.2.1. *(Lieberman) Sejam $\alpha, \lambda, \Lambda, M_0$ constantes positivas, com $\alpha \leq 1$ e $\Lambda \geq \lambda$. Sejam k e Φ constantes não negativas, e seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, com fronteira $C^{1,\alpha}$. Sejam A e B funções tais que*

$$\begin{array}{rccc} A: & \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R}^{2N+1} \\ & (x,z,p) & \mapsto & A(x,z,p) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} B: & \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R} \\ & (x,z,p) & \mapsto & B(x,z,p) \end{array}$$

Definamos

$$(a^{i,j}) = (\partial A^i / \partial p_j).$$

Se as funções A e B satisfazem

$$\lambda(k+|p|)^m |\xi|^2 \leq a^{i,j}(x,z,p)\xi_i\xi_j,$$
$$|a^{i,j}(x,z,p)| \leq \Lambda(k+|p|)^m,$$
$$|A(x,z,p) - A(y,w,p)| \leq \Lambda(1+|p|)^{m+1}[|x-y|^\alpha + |z-w|^\alpha],$$
$$|B(x,z,p)| \leq \Lambda(1+|p|)^{m+2},$$

para todo $(x,z,p) \in \partial\Omega \times [-M_0, M_0] \times \mathbb{R}^N$, todo $(y,w) \in \Omega \times [-M_0, M_0]$, e todo $\xi \in \mathbb{R}^N$. Se ainda $\phi \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ com $|\phi| \leq \Phi$ e se u é uma solução fraca e limitada do problema de Dirichlet

$$divA(x,u,\nabla u) + B(x,u,\nabla u) = 0, \;\; u = \phi \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{A.1}$$

com $|u| \leq M_0$ em Ω, então existe uma constante positiva $\beta = \beta(\alpha, \Lambda, \lambda, m, N)$ tal que $u \in C^{1,\beta(\overline{\Omega})}$; e mais

$$\|u\|_{C^{1,\beta}} \leq C(\alpha, \Lambda/\lambda, m, N, M_0, \Omega, \Phi).$$

Demonstração:

Vide Lieberman [54, Teorema 1] □

Teorema A.2.2. *(Imersão de Sobolev) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^1 com fronteira Γ limitada. As seguintes inclusões são contínuas.*

$$\begin{array}{llllll} se & 1 \leq p < n, & então & W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega) & onde & \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \\ se & p = n, & então & W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) & & \forall q \in [p, +\infty[, \\ se & p > n, & então & W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega). & & \end{array}$$

Demonstração:

Vide Brézis [17, Corolário $IX.14$] $\square$

Teorema A.2.3. *(Imersão de Sobolev) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^1 com fronteira Γ limitada. A seguinte inclusão é contínua.*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\lambda}(\overline{\Omega}) \ \ \textit{para algum } 0 < \lambda < 1, \ \textit{quando } kp > n.$$

Demonstração:

Vide Adams [1, Teorema .6.2] $\square$

Teorema A.2.4. *(Sobolev-Morrey) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira Lipschitz, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Se $0 \leq m < k - \frac{n}{p} < m+1$, então vale:*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}), \ \textit{para } 0 \leq \alpha \leq k - m - \frac{n}{p}. \tag{A.2}$$

Demonstração:

Vide Struwe [70, Teorema $A.5$] $\square$

Teorema A.2.5. *(Rellich-Kondrachov) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^1 com fronteira Γ limitada. As seguintes injeções são compactas.*

$$\begin{array}{llll} \textit{se} \ \ p < n, & \textit{então} \ \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) & \forall q \in [1, p^*[& \textit{onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \\ \textit{se} \ \ p = n, & \textit{então} \ \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) & \forall q \in [p, +\infty[& , \\ \textit{se} \ \ p > n, & \textit{então} \ \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}). & & \end{array}$$

Demonstração:

Vide Brézis [17, Teorema $IX.16$] $\square$

Teorema A.2.6. *(Imersão de Sobolev) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^1 com fronteira Γ limitada. A seguinte inclusão é contínua.*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \ \ \textit{para } 1 \leq q \leq \frac{np}{n-kp}, kp < n; \ \textit{se } kp = n, \ \textit{podemos tomar } 1 \leq q < \infty.$$

Demonstração:

Vide Adams [1, Th.5.4] $\square$

Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e seja u uma função de classe $C^2(\Omega)$. Sejam a^{ij}, b^j, c constantes, definamos o operador estritamente elíptico

$$Lu = -\Sigma_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \Sigma_{i=1}^{n} b^i u_i + cu.$$

Isto é L verifica

$$\text{(A.3)} \qquad \alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\xi_j \leq \beta|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ para algum } \alpha, \beta > 0.$$

Teorema A.2.7. *Suponhamos que $h \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ e que $u \in L^q(\Omega)$ para algum $q > 1$. Suponhamos que u seja uma solução fraca do problema*

$$\text{(A.4)} \qquad \begin{cases} L^*u &= h(x) \quad em \quad \Omega \\ u &= 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

no seguinte sentido

$$\int_\Omega uLvdx = \int_\Omega hvdx,$$

para toda função $v \in C^2(\overline{\Omega})$.

Então $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e

$$\|u\|^{2,p} \leq c(|h|_p + |u|_p),$$

onde c é uma constante que depende de N, m, p, K, λ e do domínio.

Demonstração:

Vide Agmon [2, Teorema .8.2]. $\square$

Teorema A.2.8. *Suponhamos que $h \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$, $k \geq 0$, $1 < p < \infty$ e que $u \in H^1(\Omega)$ seja uma solução fraca do problema*

$$\text{(A.5)} \qquad L^*u = h(x) \ em\ \Omega$$

no seguinte sentido

$$\int_\Omega uLvdx = \int_\Omega hvdx,$$

para toda função $v \in C_c^\infty(\Omega)$.

Então

$$u \in W_{loc}^{k+2,p}(\Omega).$$

Demonstração:

Vide Agmon [2, Teorema 7.1'] □

Teorema A.2.9. *(Schauder) Seja* $0 < \alpha \leq 1$ *suponha que* $\partial\Omega$ *é limitado de classe* $C^{k+2,\alpha}$ *e que* $f \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. *Então existe uma única função* $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *tal que*

$$\text{(A.6)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x) & \textit{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \textit{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

com $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. *Além disso,*

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}} \leq \|f\|_{C^{k,\alpha}}.$$

Demonstração:

Vide Agmon, Douglis e Nirenberg [3, Teorema 6.1]. Veja também Agmon [2, Teorema 8.2] □

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975.

[2] S. Agmon, *The L_p approach to the Dirichlet problem. I. Regularity theorems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 13 (1959) 405–448.

[3] S. Agmon; A. Douglis; L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions - I*, Comm. Pure Appl. Math. 12 1959 623–727.

[4] W. Allegreto; Y.X. Huang, *A Picone's identity for the p-Laplacian and applications*, Nonlinear Anal. 32 (1998), no. 7, 819–830

[5] C.O. Alves; F.J.S.A. Corrêa, *On the existence of positive solution for a class of singular systems involving quasilinear operators*, Appl. Math. Comput. 185 (2007), no. 1, 727–736.

[6] C.O. Alves; F.J.S.A. Corrêa; J.V.A. Gonçalves, *Existence of solutions for some classes of singular Hamiltonian systems*, Adv. Nonlinear Stud. 5 (2005), no. 2, 265–278.

[7] C.O. Alves; F.J.S.A. Corrêa; T. F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*, Comput. Math. Appl. 49 (2005), no. 1, 85–93.

[8] C. O. Alves; D. G. de Figueiredo, *Nonvariational elliptic systems via Galerkin methods*, Function spaces, differential operators and nonlinear analysis (Teistungen, 2001), 47–57, Birkhäuser, Basel, (2003).

[9] A. Ambrosetti; H. Brézis; G. Cerami, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. 122 (1994), no. 2, 519–543.

[10] A. Ambrosetti; A. Malchiodi, *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge University Press, New York, 2007.

[11] A. Ambrosetti; P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349–381.

[12] D. Andrade; T.F. Ma, *An operator equation suggested by a class of nonlinear stationary problems*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. 4 (1997), no. 4, 65–71.

[13] A. Arosio; S. Panizzi, *On the well-posedness of the Kirchhoff string*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), no. 1, 305–330.

[14] M. A. Astaburuaga; C. Fernandez; G. P. Menzala, *Local smoothing effects for a nonlinear Timoshenko type equation*, Nonlinear Anal. 23 (1994), no. 9, 1091–1103.

[15] C. Azizieh; P. Clément, *A priori estimates and continuation methods for positive solutions of p-Laplace equations*, J. Differential Equations 179 (2002), no. 1, 213–245.

[16] D. Bonheure; L. Sanchez; M. Tarallo; S. Terracini, *Heteroclinic connections between nonconsecutive equilibria of a fourth order differential equation*, Calc. Var. Partial Differential Equations 17 (2003), no. 4, 341–356.

[17] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1983.

[18] A. Callegari; A. Nachman, *Some singular, nonlinear differential equations arising in boundary layer theory*, J. Math. Anal. Appl. 64 (1978), no. 1, 96–105.

[19] A. Callegari; A. Nachman, *A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluids*, SIAM J. Appl. Math. 38 (1980), no. 2, 275–281.

[20] P. C. Carrião; L. F. O. Faria; O. H. Miyagaki, *Periodic solutions for extended Fisher-Kolmogorov and Swift-Hohenberg equations by truncature techniques*, Nonlinear Anal. 67 (2007), no. 11, 3076–3083.

[21] J. Chaparova, *Existence and numerical approximations of periodic solutions of semilinear fourth-order differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 273 (2002), no. 1, 121–136.

[22] Y. Chen; P. J. McKenna, *Traveling waves in a nonlinearly suspended beam: theoretical results and numerical observations*, J. Differential Equations 136 (1997), no. 2, 325–355.

[23] M. Chipot; B. Lovat, *Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems*, Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts, Part 7 (Athens, 1996), Nonlinear Anal. 30 (1997), no. 7, 4619–4627.

[24] M. Chipot; J.F. Rodrigues, *On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems*, RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. 26 (1992), no. 3, 447–467.

[25] Y.S. Choi; P.J. McKenna, *A singular Gierer-Meinhardt system of elliptic equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 17 (2000), no. 4, 503–522.

[26] F. Cîrstea; M. Ghergu; V. Rădulescu, *Combined effects of asymptotically linear and singular nonlinearities in bifurcation problems of Lane-Emden-Fowler type*, J. Math. Pures Appl. (9) 84 (2005), no. 4, 493–508.

[27] M.M. Coclite; G. Palmieri, *On a singular nonlinear Dirichlet problem*, Comm. Partial Differential Equations 14 (1989), no. 10, 1315–1327.

[28] A.T. Cousin; C.L. Frota; N.A. Larḱin; L.A. Medeiros, *On the abstract model of the Kirchhoff-Carrier equation*, Commun. Appl. Anal. 1 (1997), no. 3, 389–404.

[29] M.G. Crandall; P. H. Rabinowitz; L. Tartar, *On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations 2 (1977), no. 2, 193–222.

[30] J. Dávila; M. Montenegro, *Positive versus free boundary solutions to a singular elliptic equation*, J. Anal. Math. 90 (2003), 303–335.

[31] D. de Figueiredo; M. Girardi; M. Matzeu, *Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via mountain-pass techniques*, Differential Integral Equations 17 (2004), no. 1-2, 119–126.

[32] D. de Figueiredo; P.L. Lions; R.D. Nussbaum, *A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, J. Math. Pures Appl. (9) 61 (1982), no. 1, 41–63.

[33] J. I. Diaz; J.M. Morel; L. Oswald, *An elliptic equation with singular nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations 12 (1987), no. 12, 1333–1344.

[34] D. E. Edmunds; D. Fortunato; E. Jannelli, *Critical exponents, critical dimensions and the biharmonic operator*, Arch. Rational Mech. Anal. 112 (1990), no. 3, 269–289.

[35] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[36] G.B. Folland, *Real analysis. Modern techniques and their applications*, Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.

[37] W. Fulks; J.S. Maybee, *A singular non-linear equation*, Osaka Math. J. 12 (1960) 1–19.

[38] M. Ghergu; V. Rădulescu, *On a class of sublinear singular elliptic problems with convection term*, J. Math. Anal. Appl. 311 (2005), no. 2, 635–646.

[39] E. Giarrusso; G. Porru, *Problems for elliptic singular equations with a gradient term*, Nonlinear Anal. 65 (2006), no. 1, 107–128.

[40] B. Gidas; J. Spruck, *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), no. 4, 525–598.

[41] B. Gidas; J. Spruck, *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations 6 (1981), no. 8, 883–901.

[42] D. Gilbarg; N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1983.

[43] M. Girardi; M. Matzeu, *Positive and negative solutions of a quasi-linear elliptic equation by a mountain pass method and truncature techniques*, Nonlinear Anal. 59 (2004), no. 1-2, 199–210.

[44] M.R. Grossinho; L. Sanchez; S. A. Tersian, *On the solvability of a boundary value problem for a fourth-order ordinary differential equation*, Appl. Math. Lett. 18 (2005), no. 4, 439–444.

[45] X. He; W. Zou, *Infinitely many positive solutions for Kirchhoff-type problems*, Nonlinear Anal. (2008), doi: 10,1016/j.na.2008.02.021.

[46] Z. R. Jin, *A truncation method for semilinear elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations 19 (1994), no. 3-4, 605–616.

[47] T. Jung; Q- Choi, *An application of a variational linking theorem to a nonlinear biharmonic equation*, Proceedings of the Third World Congress of Nonlinear Analysts, Part 6 (Catania, 2000), Nonlinear Anal. 47 (2001), no. 6, 3695–3705.

[48] W.D. Kalies; J. Kwapisz; R.C.A. M. VanderVorst, *Homotopy classes for stable connections between Hamiltonian saddle-focus equilibria*, Comm. Math. Phys. 193 (1998), no. 2, 337–371.

[49] W. D. Kalies; R. C. A. M. VanderVorst, *Multitransition homoclinic and heteroclinic solutions of the extended Fisher-Kolmogorov equation*, J. Differential Equations 131 (1996), no. 2, 209–228.

[50] S. Kesavan, *Topics in functional analysis and applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[51] G. Kirchhoff, *Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1883.

[52] M.A. Krasnoselskii, *Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 135 527–530 (Russian); translated as Soviet Math. Dokl. 1 (1960) 1285–1288.

[53] A. V. Lair; A. W. Wood, *Large solutions of semilinear elliptic equations with nonlinear gradient terms*, Int. J. Math. Math. Sci. 22 (1999), no. 4, 869–883.

[54] G.M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. 12 (1988), no. 11, 1203–1219.

[55] J. Limaco Ferrel; V.A. Medeiros, *Kirchhoff-Carrier elastic strings in noncylindrical domains*, Portugal. Math. 56 (1999), no. 4, 465–500.

[56] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[57] J.L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics*, Contemporary developments in continuum mechanics and partial differential equations (Proc. Internat. Sympos., Inst. Mat., Univ. Fed. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977), pp. 284–346, North-Holland Math. Stud., 30, North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.

[58] T.F. Ma, *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*, Nonlinear Anal. 63 (2005), no. 5-7, 1967–1977.

[59] T.F. Ma; J.E.M. Rivera, *Positive solutions for a nonlinear nonlocal elliptic transmission problem*, Appl. Math. Lett. 16 (2003), no. 2, 243–248.

[60] P. J. McKenna; W. Walter, *Travelling waves in a suspension bridge*, SIAM J. Appl. Math. 50 (1990), no. 3, 703–715.

[61] K. Ono, *On global solutions and blow-up solutions of nonlinear Kirchhoff strings with nonlinear dissipation*, J. Math. Anal. Appl. 216 (1997), no. 1, 321–342.

[62] L. A. Peletier; J. A. Rodríguez, *Homoclinic orbits to a saddle-center in a fourth-order differential equation*, J. Differential Equations 203 (2004), no. 2, 185–215.

[63] L. A. Peletier; V. Rottschäfer, *Pattern selection of solutions of the Swift-Hohenberg equation*, Phys. D 194 (2004), no. 1-2, 95–126.

[64] L. A. Peletier; W. C. Troy; R. C. A. M. VanderVorst; V. K Troĭ, *Stationary solutions of a fourth-order nonlinear diffusion equation*, Differential Equations 31 (1995), no. 2, 301–314.

[65] A. Qian; S. Li, *On the existence of nontrivial solutions for a fourth-order semilinear elliptic problem*, Abstr. Appl. Anal. (2005), no. 6, 673–683.

[66] P.H. Rabinowitz, *Some aspects of nonlinear eigenvalue problems*, Rocky Mountain Consortium Symposium on Nonlinear Eigenvalue Problems (Santa Fe, N.M., 1971). Rocky Mountain J. Math. 3 (1973), 161–202.

[67] C. G. Ragazzo, *Irregular dynamics and homoclinic orbits to Hamiltonian saddle centers*, Comm. Pure Appl. Math. 50 (1997), no. 2, 105–147.

[68] D. Ruiz, *A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems*, J. Differential Equations 199 (2004), no. 1, 96–114.

[69] D. Smets; J. B. van den Berg, *Homoclinic solutions for Swift-Hohenberg and suspension bridge type equations*, J. Differential Equations 184 (2002), no. 1, 78–96.

[70] M. Struwe, *Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[71] S. Tersian; J. Chaparova, *Periodic and homoclinic solutions of extended Fisher-Kolmogorov equations*, J. Math. Anal. Appl. 260 (2001), no. 2, 490–506.

[72] J. B. M. Xavier, *Some existence theorems for equations of the form* $-\Delta u = f(x,u,Du)$, Nonlinear Anal. 15 (1990), no. 1, 59–67.

[73] G. Xu; J. Zhang, *Existence results for some fourth-order nonlinear elliptic problems of local superlinearity and sublinearity*, J. Math. Anal. Appl. 281 (2003), 633–640.

[74] Z. Yan, *A note on the solvability in* $W^{2,p}(\Omega)$ *for the equation* $-\Delta u = f(x,u,Du)$, Nonlinear Anal. 24 (1995), no. 9, 1413–1416.

[75] Z. Zhang, *Nonexistence of positive classical solutions of a singular nonlinear Dirichlet problem with a convection term*, Nonlinear Anal. 27 (1996), no. 8, 957–961.