ALEXANDRE MARCELO FERNANDES DA SILVA

Obtenção de Conjuntos Estabilizantes de Controladores PID para Sistemas com Atraso Utilizando o Teorema de Hermite-Biehler

Dissertação de Mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos
Orientador: Prof. Dra. Vilma Alves de Oliveira

São Carlos
2008

Eu te amo Iahweh, minha força,

As ondas da Morte me envolviam,
as torrentes de Belial me aterravam,
cercavam-me os laços do Xeol,
as ciladas da Morte me atingiam.

Na minha angústia invoquei a Iahweh,
ao meu Deus lancei o meu grito;
do seu templo ele ouviu minha voz,
meu grito chegou aos seus ouvidos.

E a terra balançou e tremeu,
as bases dos montes se abalaram,

Ele inclinou os céus e desceu.
(Sl 18,2a.5-8a.10a)

A meus pais, Manoel Roberto Fernandes da Silva (†) e Célia Mariana Franchi Fernandes da Silva, dedico este trabalho.

Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora, Vilma Alves de Oliveira, pelo incentivo, paciência e precioso auxílio na realização deste trabalho. Sou grato a meus colegas do LAC (Laboratório de Controle), Wilson, Marcel, Gláucia, Fábio, Elenice, Caio e tantos outros com quem convivi.

Agradeço também aos funcionários e professores do Departamento de Engenharia Elétrica (SEL), da EESC, Escola de Engenharia de São Carlos, por seu apoio e amizade.

Agradeço a meus familiares, especialmente às minhas avós, Celina Cardeal Franchi e Mercedes Capello Fernandes da Silva, cujo apoio financeiro foi fundamental.

E por último desejo agradecer aos irmãos da 2ª Comunidade Neocatecumenal da Paróquia Santa Isabel de São Carlos, cuja generosa hospitalidade foi fundamental no início deste trabalho.

Lista de Figuras

Resumo

Os controladores PID são largamente utilizados em processos industriais. Recentemente, novos resultados de projeto de controladores PID foram obtidos para sistemas lineares invariantes no tempo sem atraso. Entretanto, o comportamento de diversas plantas industriais pode ser descrito matematicamente por sistemas lineares invariantes no tempo com atraso. O problema de estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo com atraso envolve encontrar a locação de raízes de funções transcedentais. Neste trabalho, o teorema de Hermite-Biehler é usado para estabelecer resultados para o projeto de controladores PID para uma classe de sistemas lineares com atraso. Usando a propriedade de entrelaçamento em altas freqüências da classe estudada e programação linear obtém-se o conjunto de todos os controladores PID. Até onde se sabe resultados anteriores de síntese de controladores PID envolvem a solução de equações transcendentais.

Palavras-chave: Propriedade de entrelaçamento, sistemas com atraso, projeto PID, programação linear.

Abstract

The PID controller is widely used in industrial processes. Recently, new results on the design of PID controllers for invariant time linear systems without time delays have appeared. However, the dynamic behavior of many industrial plants may be mathematically described by linear time invariant systems with time delays. The problem of stability of linear time invariant systems with time delays involves finding the location of roots of transcendental functions. In this work, the Hermite-Biehler theorem is used to establish results on the design of proportional plus integral plus derivative (PID) controllers for a class of time delay systems. Using the property of interlacing at high frequencies of the class of systems considered and linear programming we obtain the set of all stabilizing PID controllers. As far as we know, previous results on the synthesis of PID controllers rely on the solution of transcendental equations.

Key-words: Property of interlacing, delay systems, syntesis of PID controllers, linear programming.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Existe desde os anos 50 uma lacuna significativa entre a prática e a teoria da engenharia de controle. A partir dos anos 60 surgiram os métodos de controle ótimo, de caráter analítico. O desenvolvimento destes métodos foi impulsionado pelo trabalho pioneiro de Kalman sobre o regulador linear quadrático. Esta nova tendência levou ao abandono de pesquisas relacionadas aos métodos anteriormente utilizados, os quais eram geralmente de natureza *ad hoc*.

Os controladores obtidos a partir da teoria de controle ótimo são em geral de ordem elevada, comparável à ordem da planta. Os novos métodos de síntese foram justificados pela sua fácil implementação em computadores digitais, levando-se em consideração a crescente queda de custo de memórias e o aumento da velocidade de processamento.

Persiste, entretanto, a ampla utilização de controladores PID em aplicações industriais. O avanço da tecnologia de computação foi incorporado aos modernos controladores PID, os quais são implementados digitalmente através de microprocessadores, conversores A/D e D/A e circuitos de processamento digital de sinais especialmente projetados.

Existe hoje em dia um grande número de pesquisas e uma extensa literatura sobre controladores PID. Apesar disto, permanecem quase que ausentes da literatura os métodos de controle ótimo desenvolvidos.

Argumentam Datta et al. (2000) que é irreal a expectativa de que a indústria atualize a existente aparelhagem PID em favor de controladores complexos de ordem elevada, a menos que se comprove que o melhor desempenho atingido por um controlador PID é ainda inadequado.

A busca por um controlador PID "ótimo" esbarra sempre na dificuldade de caracterizar o conjunto de controladores PID estabilizantes. A superação desta dificuldade, que surge também no projeto de qualquer controlador de ordem fixa reduzida, é o primeiro passo para o fechamento da lacuna entre a prática e a teoria da engenharia de controle.

Uma linha de pesquisa direcionada à resolução deste problema tomou como ponto de partida a utilização do teorema de Hermite-Biehler como critério de estabilidade. Este teorema verifica a existência ou não de zeros com parte real positiva em um polinômio $\delta(s)$ através da verificação de uma condição de entrelaçamento. Uma generalização do teorema de Hermite-Biehler (Ho et al. 1999) permite não só determinar a estabilidade, mas, também, a assinatura (diferença entre o número de zeros no semiplano esquerdo e o semiplano direito). Este resultado pode ser obtido através de um somatório de sinais da parte real de $\delta(j\omega)$ calculada nos zeros da parte imaginária, ou através de um somatório de sinais da parte imaginária de $\delta(j\omega)$ calculada nos zeros da parte real. Uma transformação algébrica evita o aparecimento de um mesmo parâmetro, tanto na parte real como na parte imaginária do polinômio caracteristico. Aplicada a transformação algébrica, o conjunto de controladores estabilizantes para os casos ganho constante, PI e PID pode ser caracterizado através do teorema de Hermite-Biehler generalizado. Conforme o procedimento estabelecido em Datta et al. (2000), para a aplicação do teorema de Hermite-Biehler generalizado, estabelecem-se uma ou mais cadeias de sinais dos valores da parte real do polinômio característico, calculada nos zeros da parte imaginária do mesmo, as quais garantem a assinatura desejada. Verificam-se, então, as faixas dos valores dos parâmetros que permitem ajustar, a uma das cadeias de sinais que satisfazem à assinatura desejada, os sinais da parte real do polinômio característico, calculada nos zeros da função imaginária.

Quando a planta a ser estabilizada possui atrasos de transporte surgem funções características do tipo quasipolinomial, isto é, além de potências de s aparecem termos do tipo e^{Ls} com L uma constante real. Foi desenvolvida por Pontryagin uma extensão do teorema de Hermite-Biehler aplicável a quasipolinômios (Pontryagin 1955). Esta extensão, entretanto, tem sua aplicação dificultada pelo fato de que se a função característica é um quasipolinômio, o número de zeros de sua parte real e de sua parte imaginária é infinito. Em Silva et al. (2001) e Silva et al. (2002) foi resolvido o problema da determinação do conjunto estabilizante de parâmetros para controladores PI e PID aplicados a plantas de primeira ordem com atraso. Nestes dois artigos, a dificuldade quanto ao número infinito de zeros foi sobrepujada através da utilização de um resultado de Pontryagin (1955) e de uma análise tipológica dos gráficos das partes real e imaginária da equação característica, em função de diferentes valores de parâmetros da planta e do controlador. Este procedimento, entretanto, não é facilmente estendido a sistemas de ordem superior por envolver o uso de equações transcendentais (Xu et al. 2003, Silva et al. 2005). Uma outra abordagem baseia-se em um resultado apresentado em Oliveira et al. (2003), que utiliza o entrelaçamento em altas freqüências para uma certa classe de quasipolinômios. Este resultado possibilita a aplicação de um procedimento envolvendo a utilização de cadeias de sinais, semelhante ao utilizado em Datta et al. (2000) para a estabilização de plantas polinomiais. Em Oliveira et al. (2003) foi resolvido o problema de estabilização por ganho constante através da utilização do entrelaçamento em altas freqüências. Neste trabalho estendemos o procedimento aplicado em Oliveira et al. (2003), resolvendo o problema da determinação do conjunto de parâmetros estabilizantes para controladores PI e PID aplicados a sistemas com um atraso.

Capítulo 2

O Teorema de Hermite-Biehler

2.1 Alguns Conceitos e Resultados Básicos

A dinâmica de muitos sistemas físicos pode ser descrita por equações diferenciais. Se a equação diferencial for linear e tiver os coeficientes constantes, o sistema é dito linear e invariante no tempo. A dinâmica de um sistema também pode ser representada por uma função de transferência, que é a transformada de Laplace de sua resposta a uma entrada impulso. Denomina-se polinômio característico o polinômio do denominador da função de transferência.

Definição 2.1 *Denomina-se* polinômio Hurwitz *um polinômio cujas raízes possuem partes reais negativas.*

A determinação da condição Hurwitz de um polinômio real intrigou pesquisadores por mais de cem anos. Entre as primeiras soluções apresentadas para este problema tem-se o critério de Routh-Hurwitz. Existe, além deste critério, outro resultado equivalente que permite verificar a estabilidade Hurwitz de um polinômio real. Este resultado é o teorema de Hermite-Biehler, o qual constitui atualmente uma importante ferramenta de investigação do problema da estabilidade robusta paramétrica, que consiste em garantir que as raízes de um polinômio Hurwitz se mantenham no semiplano esquerdo complexo, sob perturbações dos coeficientes do polinômio.

Vários resultados relacionados a este teorema podem ser encontrados em Mansour (1992). Podem ser encontradas em Chapellat et al. (1990) e Bhattacharyya et al. (1995)

demonstrações alternativas, que utilizam o teorema do cruzamento de fronteiras.

Seja $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + ... + \delta_n s^n$ um dado polinômio real de grau n. Escreva

$$\delta(s) = \delta_e(s^2) + s\delta_o(s^2) \tag{2.1}$$

em que $\delta_e(s^2)$, $s\delta_o(s^2)$ são os componentes de $\delta(s)$ formados pelas potências pares e ímpares de s, respectivamente. Para cada freqüência $\omega \in \mathcal{R}$, denote

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega) \tag{2.2}$$

com $p(\omega) = \delta_e(-\omega^2)$, $q(\omega) = \omega\delta_o(-\omega^2)$. Sejam $\omega_{e1}, \omega_{e2}, ...$ os zeros reais, distintos e não negativos de $\delta_e(-\omega^2)$ e sejam $\omega_{o1}, \omega_{o2}, ...$ os zeros reais, distintos e não negativos de $\delta_o(-\omega^2)$, ambos arranjados em ordem ascendente de magnitude.

Definição 2.2 (Entrelaçamento) *Diz-se que ocorre entrelaçamento em um polinômio real* $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + ... + \delta_n s^n$ *de grau n quando todos os zeros de $\delta_e(-\omega^2)$ e $\delta_o(-\omega^2)$ são reais e distintos, δ_n e δ_{n-1} são de mesmo sinal, e os zeros reais e não negativos satisfazem à seguinte propriedade*

$$0 < \omega_{e1} < \omega_{o1} < \omega_{e2} < ... \tag{2.3}$$

Teorema 2.1 (Teorema de Hermite-Biehler) *Um polinômio real é Hurwitz estável se e somente se há entrelaçamento.*

2.2 Exemplos Ilustrativos

São apresentados nesta seção alguns exemplos ilustrativos, nos quais o teorema de Hermite-Biehler é aplicado para verificar a característica Hurwitz de polinômios. Os exemplos apresentados foram obtidos com o auxílio de uma ferramenta computacional, a qual permite a verificação das condições do teorema de Hermite-Biehler satisfeitas por um polinômio real. As condições do teorema de Hermite-Biehler são verificadas na seguinte seqüência: inicialmente verifica-se a condição de mesmo sinal de δ_n e δ_{n-1}; a seguir verifica-se se são simples as raízes de $\delta_e(-\omega^2)$ e $\delta_o(-\omega^2)$; verifica-se, então, a pertinência das raízes de $\delta_e(-\omega^2)$ e $\delta_o(-\omega^2)$ ao conjunto dos números reais; e finalmente verifica-se a condição de entrelaçamento.

Além da verificação das condições do teorema de Hermite-Biehler são fornecidos os gráficos de $p(\omega) := \delta_e(-\omega^2)$ e de $q(\omega) := \omega\delta_o(-\omega^2)$ os quais permitem a verificação visual da condição de entrelaçamento. Por facilidade de visualização, aplicam-se as seguintes normalizações:

$$p(\omega)_{NORM} = \text{sgn}(p(\omega)) \cdot \ln(1 + |p(\omega)|) \tag{2.4}$$

e

$$q(\omega)_{NORM} = \text{sgn}(q(\omega)) \cdot \ln(1 + |q(\omega)|). \tag{2.5}$$

Exemplo 2.1 *Seja o polinômio*

$$\delta(s) = s^7 + 5s^6 + 14s^5 + 25s^4 + 31s^3 + 26s^2 + 14s + 4.$$

Para

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$$

tem-se que

$$p(\omega) = -5\omega^6 + 25\omega^4 - 26\omega^2 + 4$$

$$q(\omega) = \omega(-\omega^6 + 14\omega^4 - 31\omega^2 + 14).$$

Neste polinômio δ_n *e* δ_{n-1} *possuem o mesmo sinal, as raízes de* $\delta_e(j\omega)$ *e de* $\delta_o(j\omega)$ *são simples e reais, e as raízes reais e não negativas de* $\delta_e(j\omega)$ *e de* $\delta_o(j\omega)$ *são*

$$\begin{array}{llll} \omega_{e1} = 0,4311 & \omega_{o1} = 0,7841 & \omega_{e2} = 1,0895 & \omega_{o2} = 1,4142 \\ \omega_{e3} = 1,9045 & \omega_{o3} = 3,3742. & & \end{array}$$

Verifica-se a ocorrência do entrelaçamento, que pode ser constatada visualmente na Figura 2.1. Conclui-se, então, que este polinômio é Hurwitz.

Exemplo 2.2 *Seja o polinômio* $\delta(s) = s^5 + 13s^4 + 66s^3 + 162s^2 + 188s + 80$. *Neste polinômio* δ_n *e* δ_{n-1} *possuem o mesmo sinal, as raízes de* $\delta_e(j\omega)$ *e de* $\delta_o(j\omega)$ *são simples e reais, e as raízes reais e não negativas de* $\delta_e(j\omega)$ *e de* $\delta_o(j\omega)$ *são*

$$\omega_{e1} = 0,7177 \quad \omega_{o1} = 1,7272 \quad \omega_{e2} = 3,4564 \quad \omega_{o2} = 7,9383.$$

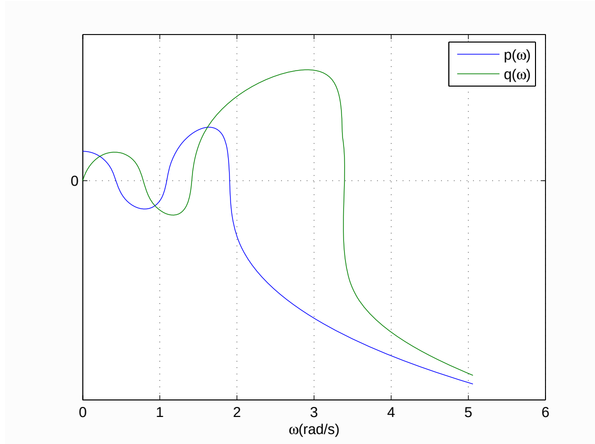

Figura 2.1: Gráficos de $p(j\omega)$ e $q(j\omega)$ (Exemplo 2.1).

Ocorre entrelaçamento, como pode ser verificado visualmente na Figura 2.2. Conclui-se, então, que este polinômio é Hurwitz.

Exemplo 2.3 *Seja o polinômio* $\delta(s) = s^6 + 12s^5 + 53s^4 + 96s^3 + 26s^2 - 108s - 80.$ *Neste polinômio* δ_n *e* δ_{n-1} *possuem o mesmo sinal e as raízes de* δ_e *e* δ_o *são simples, mas,* δ_e *e* δ_o *possuem raízes complexas. As raízes reais e não negativas de* $\delta_e(j\omega)$ *e de* $\delta_o(j\omega)$ *são*

$$\omega_{e1} = 1,2347 \quad \omega_{o1} = 3,0000 \quad \omega_{e2} = 7,2440.$$

Ocorre, portanto, entrelaçamento, como pode ser verificado na Figura 2.3. Entretanto, o polinômio não é Hurwitz, pois existem raízes complexas em δ_e *e* δ_o.

2.3 Interpretação Alternativa do Teorema de Hermite-Biehler

Nesta seção é apresentada uma interpretação alternativa do teorema de Hermite-Biehler, como etapa preliminar à generalização do teorema de Hermite-Biehler, introduzida em Datta et al. (2000), que será apresentada na Seção 2.5. Introduz-se inicialmente a função sinal padrão $\text{sgn} : \mathcal{R} \to \{-1, 0, 1\}$, definida como

$$\text{sgn}[x] = \begin{cases} -1 \; se \; x < 0 \\ 0 \; se \; x = 0 \\ 1 \; se \; x > 0. \end{cases}$$

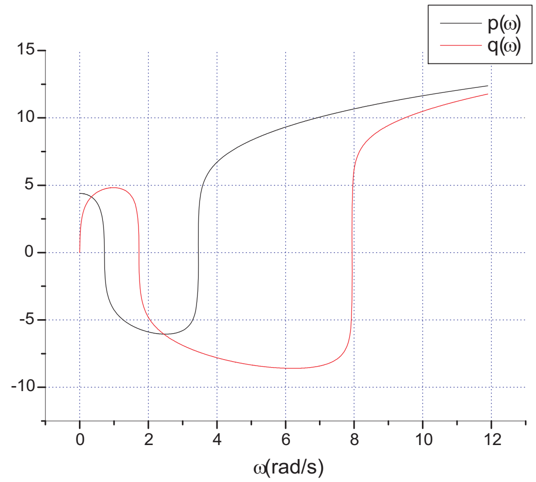

Figura 2.2: Gráficos de $p(j\omega)$ e $q(j\omega)$ (Exemplo 2.2).

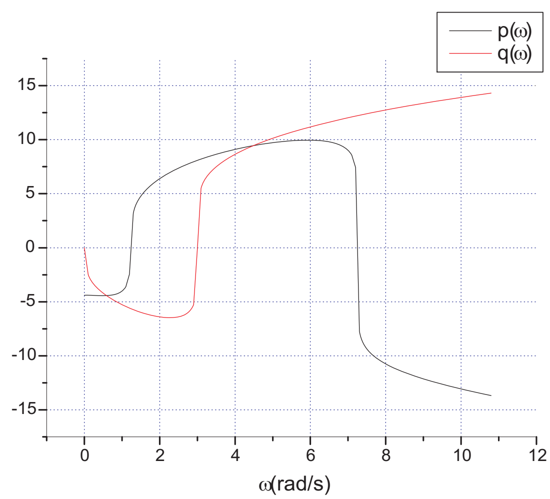

Figura 2.3: Gráficos de $p(j\omega)$ e $q(j\omega)$ (Exemplo 2.3).

Teorema 2.2 *Seja $\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + ... + \delta_n s^n$ um dado polinômio real de grau n. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $\delta(s)$ é Hurwitz estável.

(ii) δ_n e δ_{n-1} são de mesmo sinal e

$$n = \begin{cases} \text{sgn}[\delta_0] \cdot \{\text{sgn}[p(0)] - 2\text{sgn}[p(\omega_{o1})] + 2\text{sgn}[p(\omega_{o2})] + \cdots \\ +(-1)^{m-1} \cdot 2\text{sgn}[p(\omega_{om-1})] + (-1)^m \cdot \text{sgn}[p(\infty)]\}, \\ \qquad \text{para } n = 2m \\ \text{sgn}[\delta_0] \cdot \{\text{sgn}[p(0)] - 2\text{sgn}[p(\omega_{o1})] + 2\text{sgn}[p(\omega_{o2})] + \cdots \\ +(-1)^{m-1} \cdot 2\text{sgn}[p(\omega_{om-1})] + (-1)^m \cdot \text{sgn}[p(\omega_{om})]\}, \\ \qquad \text{para } n = 2m+1 \end{cases} \tag{2.6}$$

(iii) δ_n e δ_{n-1} são de mesmo sinal e

$$n = \begin{cases} \text{sgn}[\delta_0] \cdot \{\text{sgn}[q(\omega_{e1})] - 2\text{sgn}[q(\omega_{e2})] + 2\text{sgn}[q(\omega_{e3})] + \cdots \\ +(-1)^{m-2} \cdot 2\text{sgn}[p(\omega_{em-1})] + (-1)^{m-1} \cdot \text{sgn}[q(\omega_{em})]\}, \\ \qquad \text{para } n = 2m \\ \text{sgn}[\delta_0] \cdot \{\text{sgn}[q(\omega_{e1})] - 2\text{sgn}[q(\omega_{e2})] + 2\text{sgn}[q(\omega_{e3})] + \cdots \\ +(-1)^{m-1} \cdot 2\text{sgn}[q(\omega_{em})] + (-1)^m \cdot \text{sgn}[q(\infty)]\}, \\ \qquad \text{para } n = 2m+1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Prova. A prova apresentada em Datta et al. (2000) é repetida a seguir para fácil referência.

1. $(i) \Leftrightarrow (ii)$

   Demonstra-se inicialmente que $(i) \Rightarrow (ii)$. Uma característica de um polinômio Hurwitz $\delta(s)$ é a *monotonicidade de fase*, isto é, a fase de $\delta(j\omega)$ cresce de forma monótona em relação a ω, quando ω vai de $-\infty$ a ∞. Pode-se mostrar, utilizando esta propriedade, que o gráfico de $\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$ deve mover-se estritamente no sentido anti-horário e percorrer n quadrantes enquanto ω cresce de 0 a ∞ (ver (Bhattacharyya et al. 1995)). Os gráficos admissíveis de $\delta(j\omega)$ para $\delta(s)$ Hurwitz são ilustrados na Figura 2.4.

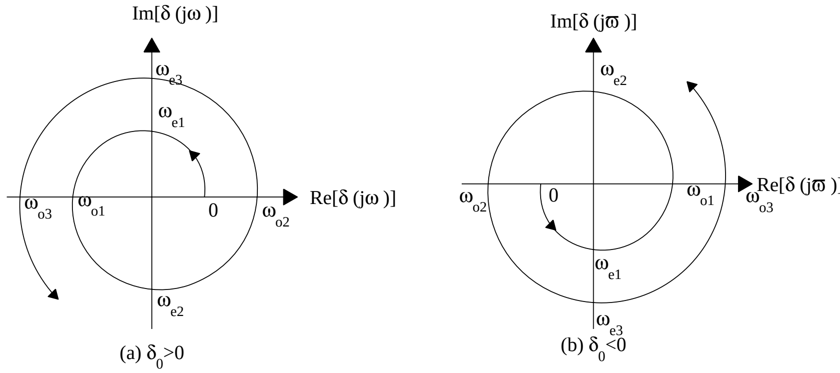

Figura 2.4: Monotonicidade de fase para polinômios $\delta(s)$ Hurwitz.

Pela observação da Figura 2.4, torna-se evidente que

$$\begin{cases} \text{para } n = 2m \\ sgn[\delta_0] \cdot sgn[p(0)] > 0 \\ -sgn[\delta_0] \cdot sgn[p(\omega_{o1})] > 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ (-1)^{m-1} sgn[\delta_0] \cdot sgn[p(\omega_{om-1})] > 0 \\ (-1)^m sgn[\delta_0] \cdot sgn[p(\infty)] > 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

e

$$\begin{cases} \text{para } n = 2m+1 \\ sgn[\delta_0] \cdot sgn[p(0)] > 0 \\ -sgn[\delta_0] \cdot sgn[p(\omega_{o1})] > 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ (-1)^{m-1} sgn[\delta_0] \cdot sgn[p(\omega_{om-1})] > 0 \\ (-1)^m sgn[\delta_0] \cdot sgn[p(\omega_{om})] > 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

De (2.8) e (2.9) segue a veracidade de (2.6).

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $\omega_{o0} = 0$ e defina, para $n = 2m$, $\omega_{om} = \infty$. A equação (2.6) vale se e somente se $[p(\omega_{ol-1})]$ e $[p(\omega_{ol})]$ são de sinais opostos para $l = 1, 2, \cdots, m$. Como $p(\omega)$ é contínua existe ao menos um $\omega_e \in \mathcal{R}$, $\omega_{ol-1} < \omega_e < \omega_{ol}$, tal que

$p(\omega_e) = 0$. Além disso, sabendo que o máximo número possível de raízes reais não negativas de $p(.)$ é m, concluí-se que existe um e apenas um $\omega_e \in (\omega_{ol-1}, \omega_{ol})$ tal que $p(\omega_e) = 0$, o que leva à propriedade de entrelaçamento (2.3).

2. $(i) \Leftrightarrow (iii)$ Segue as mesmas linhas da demonstração de $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

■

O Teorema 2.2 fornece uma caracterização analítica do Teorema 2.1. A partir do Teorema 2.2 observa-se que, se $\delta(s)$ é Hurwitz, então todos os zeros de $p(\omega)$ e $q(\omega)$ devem ser reais e distintos, caso contrário (2.6) e (2.7) deixam de ser verdadeiras. Além disso, os sinais de $p(\omega)$ nos sucessivos cruzamentos de zero de $q(\omega)$ devem ser alternados. Isto também é verdadeiro para os sinais de $q(\omega)$ nos sucessivos cruzamentos do zero de $p(\omega)$. Apresenta-se a seguir um exemplo de aplicação do Teorema 2.2.

Exemplo 2.4 *Considere o mesmo polinômio do Exemplo 2.1. Como se pode verificar na Figura 2.1, os gráficos de $p(\omega)$ e $q(\omega)$ mostram que o polinômio $\delta(s)$ satisfaz à propriedade de entrelaçamento. Além disso,*

$$\begin{array}{llll} \omega_{e1} = 0,4311 & \omega_{o1} = 0,7841 & \omega_{e2} = 1,0895 & \omega_{o2} = 1,4142 \\ \omega_{e3} = 1,9045 & \omega_{o3} = 3,3742 & & \end{array}$$

e $\mathrm{sgn}[p(0)] = 1$, $\mathrm{sgn}[p(\omega_{o1})] = -1$, $\mathrm{sgn}[p(\omega_{o2})] = 1$, $\mathrm{sgn}[p(\omega_{o3})] = -1$, $\delta(s)$ é de grau ímpar $n = 7$, e $\mathrm{sgn}[\delta_0] \cdot [\mathrm{sgn}[p(0)] - 2\ \mathrm{sgn}[p(\omega_{o1})] + 2\mathrm{sgn}[p(\omega_{o2})] - 2\mathrm{sgn}[p(\omega_{o3})]] = 7$, o que mostra a validade de (2.6).

Tem-se também $\mathrm{sgn}[q(\omega_{e1})] = 1$, $\mathrm{sgn}[q(\omega_{e2})] = -1$, $\mathrm{sgn}[q(\omega_{e3})] = 1$, $\mathrm{sgn}[q(\infty)] = -1$, de forma que $\mathrm{sgn}[\delta_0] \cdot [\mathrm{sgn}[q(\omega_{e1})] - 2\ \mathrm{sgn}[q(\omega_{e2})] + 2\mathrm{sgn}[q(\omega_{e3})] - 2\mathrm{sgn}[q(\infty)]] = 7$ o que mostra a validade de (2.7).

Para verificar que $\delta(s)$ é de fato um polinômio Hurwitz, são obtidas as raízes de $\delta(s)$: $-0,5 \pm 1,3229j, -0,5 \pm 0,8660j$, $-1 \pm j$ e -1, as quais pertencem ao semiplano esquerdo, o que mostra que $\delta(s)$ é Hurwitz.

Exemplo 2.5 *Considere agora o polinômio*

$$\delta(s) = s^8 + s^7 - 18s^6 - 14s^5 + 97s^4 + 61s^3 - 180s^2 - 84s + 100.$$

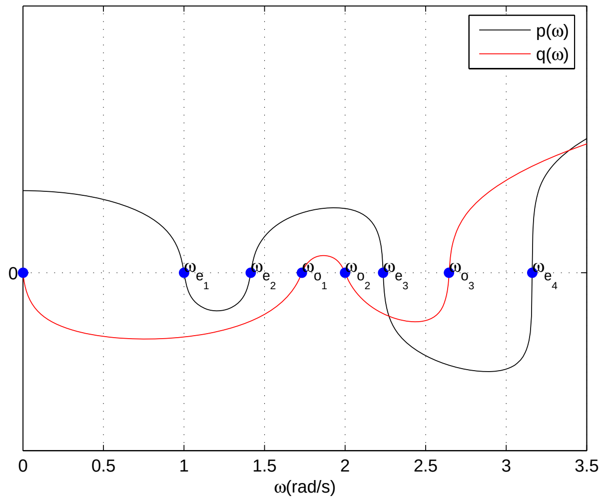

Figura 2.5: Entrelaçamento falha em polinômios não Hurwitz.

Seja $\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$. Os gráficos de $p(\omega)$ e $q(\omega)$ são mostrados na Figura 2.5. A observação da Figura 2.5 permite verificar que $\delta(s)$ não é um polinômio Hurwitz, pois não satisfaz à propriedade de entrelaçamento. Observe que ω_{e1} e ω_{e2} são duas raízes consecutivas de $p(\omega)$, e ω_{o1} e ω_{o2} são duas raízes consecutivas de $q(\omega)$. Apesar disso, ocorre uma questão lógica: este gráfico oferece alguma informação sobre $\delta(s)$, além de se é ou não Hurwitz? É realmente possível conhecer o número de raízes de $\delta(s)$ no semi-plano direito a partir da Figura 2.5. Isto motivou a derivação da versão generalizada do teorema de Hermite-Biehler, que é aplicável a polinômios não necessariamente Hurwitz. Esta generalização também é necessária para a resolução do problema de estabilização com ordem fixa, como será visto na discussão a seguir.

2.4 Motivação para Generalizar o Teorema de Hermite-Biehler

Considere o problema de estabilização por ganho constante mostrado na Figura 2.6. Aqui r é o sinal de comando, y é a saída, $G(s) = N(s)/D(s)$ é a planta a ser controlada, $N(s)$ e $D(s)$ são polinômios coprimos[1], e $C(s) = k$, isto é, o controlador é de ordem

[1] Dois polinômios são considerados *coprimos* se não houver nenhum polinômio de grau 1 ou superior que divida a ambos sem resto.

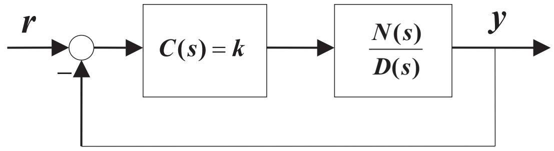

Figura 2.6: Sistema de controle realimentado.

zero. Assim, o polinômio característico em malha fechada é

$$\delta(s,k) = D(s) + kN(s) \tag{2.10}$$

em que k é um escalar.

O objetivo é determinar analiticamente os valores para k, se existirem, para os quais $\delta(s,k)$ é Hurwitz. Sejam $D(s)$ e $N(s)$ dados através da seguinte decomposição par-ímpar:

$$D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2) \tag{2.11}$$

$$N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2). \tag{2.12}$$

Então,

$$\delta(s,k) = [D_e(s^2) + kN_e(s^2)] + s[D_o(s^2) + kN_o(s^2)]. \tag{2.13}$$

Fazendo a substituição $s = j\omega$, tem-se

$$\delta(j\omega,k) = [D_e(-\omega^2) + kN_e(-\omega^2)] + j\omega[D_o(-\omega^2) + kN_o(-\omega^2)]. \tag{2.14}$$

Considere a seguinte notação

$$\overline{p}(\omega,k) = D_e(-\omega^2) + kN_e(-\omega^2) \tag{2.15}$$

$$\overline{q}(\omega,k) = \omega[D_o(-\omega^2) + kN_o(-\omega^2)]. \tag{2.16}$$

Tem-se que

$$\delta(j\omega,k) = \overline{p}(\omega,k) + j\overline{q}(\omega,k). \tag{2.17}$$

Inicialmente é necessário determinar as freqüências ω em função de k, isto é, $\omega = \omega(k)$, tais que $\overline{p}(\omega, k) = 0$ ou $\overline{q}(\omega, k) = 0$, e depois os valores de k para os quais sejam válidas as condições (iii) ou (ii) do Lema 2.2. O fato de que tanto $\overline{p}(\omega, k)$ como $\overline{q}(\omega, k)$ dependem de k, faz com que estas determinações sejam um problema de difícil resolução, mesmo quando $\overline{p}(\omega, k)$ e $\overline{q}(\omega, k)$ são de ordem reduzida. É possível superar esta dificuldade, reformulando o problema com $\overline{p}(\omega, k)$ ou $\overline{q}(\omega, k)$ independente de k. Isto se realiza por meio do procedimento a seguir (Datta et al. 2000).

Seja

$$\begin{aligned} N^*(s) &= N(-s) && (2.18)\\ &= N_e(s^2) - sN_o(s^2). && (2.19) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \delta(s,k)N^*(s) &= [D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2D_o(s^2)N_o(s^2) + kN_e^2(s^2) - ks^2N_o(s^2)] \\ &\quad + s[N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2)]. \qquad (2.20) \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $s = j\omega$, obtém-se

$$\delta(j\omega, k)N^*(j\omega) = p(\omega, k) + jq(\omega) \qquad (2.21)$$

em que

$$p(\omega, k) = D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) + kN_e^2(-\omega^2) + k\omega^2N_o(-\omega^2) \qquad (2.22)$$

e

$$q(\omega) = \omega[N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)]. \qquad (2.23)$$

Seja $N^*(s)$ Hurwitz. Então, $\delta(s, k)$ é Hurwitz se e somente se $\delta(s, k)N^*(s)$ é Hurwitz. De (2.23) é claro que $q(\omega)$ é independente de k. Sejam $\omega_{o0}, \omega_{o1}, \cdots, \omega_{ol}$ os zeros reais não negativos de $q(\omega)$. Suponha que o grau de $\delta(s, k)N^*(s)$ é n. Desde que

$$\delta(j\omega, k)N^*(j\omega) = p(\omega, k) + jq(\omega), \qquad (2.24)$$

a condição (ii) do Lema 2.2 pode ser utilizada para determinar os valores de k para os quais $\delta(s,k)N^*(s)$ é Hurwitz.

Entretanto, geralmente $N^*(s)$ *não* é Hurwitz, e não é possível utilizar a abordagem acima, desde que o Lema 2.2 não é aplicável a polinômios não Hurwitz. Isto dá a motivação para uma generalização apropriada do Lema 2.2 para polinômios não necessariamente Hurwitz.

2.5 Generalização do Teorema de Hermite-Biehler

2.5.1 Distribuição de raízes e Fase Acumulada Líquida

Inicialmente, consideram-se os polinômios sem zeros no eixo imaginário. Seja um polinômio real $\delta(s)$ de grau n:

$$\delta(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \cdots + \delta_n s^n,\ \ \delta_i \in \mathcal{R},\ \ i = 0, 1, \ldots, n,\ \ \delta_n \neq 0. \tag{2.25}$$

Sejam $p(\omega)$ e $q(\omega)$ duas funções definidas por $p(\omega) = \mathrm{Re}[\delta(j\omega)]$ e $q(\omega) = \mathrm{Im}[\delta(j\omega)]$. Assim, tem-se

$$\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)\ \forall\omega. \tag{2.26}$$

Além disso, $\theta(\omega) = \angle\delta(j\omega) = \arctan[\frac{q(\omega)}{p(\omega)}]$. Denote por Δ_0^∞ a mudança líquida do argumento $\theta(\omega)$ conforme ω cresce de 0 a ∞ e sejam $l(\delta)$ e $r(\delta)$ os números de raízes de $\delta(s)$ em $\mathcal{C}^-$ e $\mathcal{C}^+$, respectivamente. Pode-se, então, enunciar o seguinte lema (Gantmacher 1959).

Lema 2.1 *Seja $\delta(s)$ um polinômio real sem raízes no eixo imaginário. Então,*

$$\Delta_0^\infty = \frac{\pi}{2}(l(\delta) - r(\delta)). \tag{2.27}$$

Prova. Cada raiz em $\mathcal{C}^-$ contribui com $+\frac{\pi}{2}$ e cada raiz em $\mathcal{C}^+$contribui com $-\frac{\pi}{2}$ para a mudança líquida de argumento. ■

2.5.2 Assinaturas Reais e Imaginárias Associadas a um Polinômio Real

Definição 2.3 *Seja $\delta(s)$ um dado polinômio real de grau n com k denotando a multiplicidade de uma raiz na origem. Defina*

$$p_f(\omega) = \frac{p(\omega)}{(1+\omega^2)^{\frac{n}{2}}},\ q_f(\omega) = \frac{q(\omega)}{(1+\omega^2)^{\frac{n}{2}}}. \tag{2.28}$$

Sejam $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{m-1}$ zeros reais, não negativos, distintos e finitos de $q_f(\omega)$ com multiplicidades ímpares. Defina, também, $\omega_m = \infty$. Então, a assinatura imaginária $\sigma_i(\delta)$ de $\delta(s)$ é definida por[2]

[2] Por $\operatorname{sgn}[p(\infty)]$ e $\operatorname{sgn}[q(\infty)]$ entendam-se, respectivamente, os limites de $\operatorname{sgn}[p(\omega)]$ e $\operatorname{sgn}[q(\omega)]$, quando $\omega \to \infty$.

$$
\sigma_i(\delta) = \begin{cases} \{\text{sgn}[p_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2\text{sgn}[p_f(\omega_2)] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ \cdot 2\text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn}[p_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^{m-1}\text{sgn}[q(\infty)] \\ \qquad\qquad \textit{se } n \textit{ é par} \\ \{\text{sgn}[p_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn}[p_f(\omega_1)] + 2\text{sgn}[p_f(\omega_2)] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ \cdot 2\text{sgn}[p_f(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^{m-1}\text{sgn}[q(\infty)] \\ \qquad\qquad \textit{se } n \textit{ é ímpar} \end{cases} \tag{2.29}
$$

em que $p_f^{(k)}(\omega_0) = \frac{d^k}{d\omega^k}[p_f(\omega)]\,|_{\omega=\omega_0}$

Definição 2.4 *Seja $\delta(s)$ um dado polinômio real de grau n com k denotando a multiplicidade de uma raiz na origem. Sejam $p_f(\omega)$, $q_f(\omega)$ como na última definição, e sejam $0 < \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{m-1}$ os zeros reais, não negativos, distintos e finitos de $p_f(\omega)$ com multiplicidades ímpares. Defina, também, $\omega_0 = 0$, $\omega_m = \infty$. Então, a assinatura real $\sigma_r(\delta)$ de $\delta(s)$ é definida por*

$$
\sigma_r(\delta) = \begin{cases} \{\text{sgn}[q_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn}[q_f(\omega_1)] + 2\text{sgn}[q_f(\omega_2)] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ \cdot 2\text{sgn}[q_f(\omega_{m-1})]\} \cdot (-1)^m \text{sgn}[p(\infty)] \\ \qquad\qquad \textit{se } n \textit{ é par} \\ \{\text{sgn}[q_f^{(k)}(\omega_0)] - 2\text{sgn}[q_f(\omega_1)] + 2\text{sgn}[q_f(\omega_2)] + \cdots + (-1)^{m-1} \\ \cdot 2\text{sgn}[q_f(\omega_{m-1})] + (-1)^m \text{sgn}[q_f(\omega_m)]\} \cdot (-1)^m \text{sgn}[p(\infty)] \\ \qquad\qquad \textit{se } n \textit{ é ímpar} \end{cases} \tag{2.30}
$$

em que $q_f^{(k)}(\omega_0) = \frac{d^k}{d\omega^k}[q_f(\omega)]\,|_{\omega=\omega_0}$.

2.5.3 O Teorema de Hermite-Biehler Generalizado

Apresenta-se nesta subseção o teorema de Hermite-Biehler generalizado. Observe inicialmente que em qualquer freqüência ω dada, o ângulo de fase de $\delta(j\omega)$ é dado por

$$
\theta(\omega) = \arctan\left[\frac{q(\omega)}{p(\omega)}\right]. \tag{2.31}
$$

A taxa de variação de fase de $\delta(j\omega)$ em relação à freqüência, em cada freqüência ω, é dada conseqüentemente por

$$
\begin{aligned}
\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} &= \frac{1}{1+\frac{q^2(\omega)}{p^2(\omega)}} \frac{\dot{q}(\omega)p(\omega)-\dot{p}(\omega)q(\omega)}{p^2(\omega)} = \\
&= \frac{\dot{q}(\omega)p(\omega)-\dot{p}(\omega)q(\omega)}{p^2(\omega)+q^2(\omega)}.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Se $p(\omega)$ e $q(\omega)$ são conhecidas para todo ω, pode-se integrar (2.32) para obter a fase acumulada líquida. Entretanto, para calcular a acumulação líquida de fase sobre todas as freqüências é desnecessário conhecer a taxa precisa de mudança de fase em cada freqüência. Isto ocorre porque é sabido que, nas freqüências em que o gráfico polar de $\delta(j\omega)$ faz uma transição do eixo real para o eixo imaginário, ou vice-versa, pode haver no máximo uma mudança de fase de $\pm\frac{\pi}{2}$ radianos. Analisando (2.32), o sinal de mudança de fase pode ser determinado pelo sinal do numerador, tendo em vista que o denominador é sempre positivo. Em particular, se o gráfico $\delta(j\omega)$ intercepta o eixo real (ou o eixo imaginário), então, $p(\omega)$ (ou $q(\omega)$) se anula, e o sinal, conseqüentemente, é dado por $-\dot{p}(\omega)q(\omega)$ (ou $\dot{q}(\omega)p(\omega)$).

Dado qualquer polinômio $\delta(s)$ de grau maior ou igual a um, ou a parte real ou a parte imaginária ou ambas de $\delta(j\omega)$ tornam-se infinitamente grandes quando $\omega \to \pm\infty$. Entretanto, se se deseja obter a acumulação total de fase em múltiplos inteiros dos cruzamentos de eixo, é imperativo que o gráfico de resposta em freqüência utilizado se aproxime do eixo real ou imaginário quando $\omega \to \pm\infty$. Para atingir este objetivo pode-se normalizar o gráfico de $\delta(j\omega)$ através de $\frac{1}{f(\omega)}$, onde $f(\omega) = (1+\omega^2)^{\frac{n}{2}}$. Desde que $f(\omega)$ não possui nenhuma raiz real, esta normalização assegura que o gráfico normalizado de resposta em freqüência $\delta_f(\omega) = p_f(\omega) + jq_f(\omega)$ onde $p_f(\omega) = \frac{p(\omega)}{(1+\omega^2)^{\frac{n}{2}}}$, $q_f(\omega) = \frac{q(\omega)}{(1+\omega^2)^{\frac{n}{2}}}$ realmente intersecciona o eixo real ou imaginário em um ponto finito quando $\omega = \pm\infty$, ao mesmo tempo em que ficam inalteradas as freqüências finitas nas quais $\delta(j\omega)$ intersecciona o eixo real ou imaginário.

Sejam $p(\omega)$, $q(\omega)$, $p_f(\omega)$, $q_f(\omega)$ como já definidos e sejam

$$0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{m-1}$$

os zeros reais, não negativos, distintos e finitos de $q_f(\omega)$ com multiplicidades ímpares. A função $q_f(\omega)$ não muda de sinal ao passar por um zero de multiplicidade par. Assim, tais zeros devem ser omitidos na contagem da acumulação de fase líquida. Defina também $\omega_m = +\infty$.

Teorema 2.3 *Seja $\delta(s)$ um polinômio real dado de grau n. Então*

$$l(\delta) - r(\delta) = \sigma_r(\delta) \tag{2.33}$$

Prova. Ver Datta et al. (2000). ■

Reproduz-se agora um resultado análogo ao Teorema 2.3 em que o valor de $l(\delta)-r(\delta)$ de um dado polinômio real deve ser determinado a partir dos valores das freqüências onde $\delta_f(j\omega)$ cruza o eixo imaginário.

Teorema 2.4 *Seja $\delta(s)$ um dado polinômio real de grau n. Então,*

$$l(\delta) - r(\delta) = \sigma_i(\delta). \tag{2.34}$$

Prova. Ver Datta et al. (2000). ■

Capítulo 3

Aplicação do Teorema de Hermite-Biehler à Estabilização de Sistemas Lineares

Neste capítulo os resultados existentes para a estabilização de um sistema linear invariante no tempo, sem atrasos, através de um controlador PID são apresentados para facilitar o entendimento dos resultados apresentados para o caso com atraso. A solução dada fornece uma condição construtiva para a existência de um tal controlador, e além disso, é caracterizada a família completa de todos os controladores estabilizantes em termos de um problema de programação linear.

As técnicas atualmente existentes de controle ótimo (tais como H_2, H_∞ Doyle et al. (1989) e L_1 Dahleh e Diaz Bobillo (1994)) não permitem restrições quanto à ordem ou à estrutura do controlador em seus métodos de projeto. Como conseqüência, tais técnicas não podem ser empregadas para o projeto de controladores PID ótimos ou robustos. É importante a obtenção de uma metodologia para a resolução deste problema, uma vez que tais controladores continuam a ser amplamente utilizados em aplicações industriais.

3.1 Caracterização de Todos os Ganhos Estabilizantes

Considere novamente o sistema realimentado mostrado na Figura 2.6. Aqui r é o sinal de comando, y é a saída, $G(s) = N(s)/D(s)$ é a planta a ser controlada, $N(s)$ e $D(s)$ são polinômios coprimos, e $C(s)$ é o controlador a ser projetado. No caso de estabilização por ganho constante,

$$C(s) = k_p, \tag{3.1}$$

de forma que o polinômio característico em malha fechada $\delta(s, k_p)$ é dado por

$$\delta(s, k) = D(s) + k_p N(s). \tag{3.2}$$

O objetivo é determinar os valores de k_p, se existirem, para os quais o sistema em malha fechada é estável, isto é, $\delta(s, k_p)$ é Hurwitz.

Existem várias abordagens clássicas para a resolução deste problema: a técnica do Lugar das raízes, o critério de estabilidade de Nyquist, e o critério de Routh-Hurwitz. Entre estas abordagens, a técnica do Lugar das raízes e o critério de estabilidade de Nyquist resolvem este problema obtendo o lugar das raízes de $\delta(s, k_p)$ e o gráfico de Nyquist de $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, respectivamente. Tanto um como outro destes métodos são de natureza gráfica, e não fornecem uma caracterização analítica de todos os $k_p's$ estabilizantes. O critério de Routh-Hurwitz, por outro lado, fornece uma solução analítica. Entretanto, o conjunto de $k_p's$ estabilizantes deve ser determinado a partir da resolução de um conjunto de desigualdades polinomiais, uma tarefa que não é simples, especialmente para sistemas de ordens elevadas.

Veja agora como os resultados apresentados no último capítulo podem ser utilizados para determinar os valores de k_p que fazem $\delta(s, k_p)$ em (3.2) ser Hurwitz estável. Como foi discutido na Seção 2.4, tanto a parte par como a parte ímpar de $\delta(s, k_p)$ dependem de k_p e isto cria dificuldades quando se tenta utilizar o Lema 2.2 para assegurar a estabilidade Hurwitz de $\delta(s, k_p)$. Consequentemente, partindo de $\delta(s, k_p)$, obtém-se um polinômio para o qual apenas a parte par depende de k_p, e ao qual o Teorema 2.3 é aplicável.

Com este fim, considere (3.2) com as decomposições par-ímpar:

$$\begin{aligned} N(s) &= N_e(s^2) + sN_o(s^2) \\ D(s) &= D_e(s^2) + sD_o(s^2). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Suponha que o grau de $D(s)$ é n enquanto o grau de $N(s)$ é m e $m \leq n$ e defina

$$N^*(s) = N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2). \tag{3.4}$$

Multiplicando $\delta(s, k_p)$ por $N^*(s)$ e examinando o polinômio resultante, obtem-se

$$\begin{aligned} l(\delta(s,k_p)N^*(s)) - r(\delta(s,k_p)N^*(s)) &= l(\delta(s,k_p)) - r(\delta(s,k_p)) \\ &\quad + l(N^*(s)) - r(N^*(s)) \\ &= l(\delta(s,k_p)) - r(\delta(s,k_p)) \\ &\quad + l(N(-s)) - r(N(-s)) \\ &= l(\delta(s,k_p)) - r(\delta(s,k_p)) \\ &\quad - l((N(s)) - r(N(s))). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sabe-se que $\delta(s, k_p)$ de grau n é Hurwitz se e somente se $l(\delta(s, k_p)) = n$ e $r(\delta(s, k_p)) = 0$. Além disso, tem-se do Teorema 2.3 que

$$\sigma_i(\delta(s,k_p)N^*(s)) = l(\delta(s,k_p)N^*(s)) - r(\delta(s,k_p)N^*(s)). \tag{3.6}$$

Tem-se, assim, o seguinte resultado.

Lema 3.1 *$\delta(s, k_p)$ é Hurwitz se e somente se*

$$\sigma_i(\delta(s,k_p)N^*(s)) = n - l((N(s)) - r(N(s))). \tag{3.7}$$

Prova. Ver Datta et al. (2000). ■

A tarefa agora é determinar aqueles valores de k_p, se existirem, para os quais (3.7) é válida. É simples verificar que

$$\delta(s,k_p)N^*(s) = h_1(s^2) + k_p h_2(s^2) + s g_1(s^2), \tag{3.8}$$

em que

$$h_1(s^2) = D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2 D_o(s^2)N_o(s^2)$$

$$\begin{aligned} h_2(s^2) &= N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2) \\ g_1(s^2) &= N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Fazendo a substituição $s = j\omega$, obtém-se

$$\delta(j\omega, k_p)N^*(j\omega) = p(\omega, k_p) + jq(\omega) \tag{3.10}$$

em que

$$p(\omega, k_p) = p_1(\omega) + k_p p_2(\omega) \tag{3.11}$$

$$p_1(\omega) = [D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)] \tag{3.12}$$

$$p_2(\omega) = [N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)] \tag{3.13}$$

$$q(\omega) = \omega[N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)]. \tag{3.14}$$

Do mesmo modo, defina

$$\begin{aligned} p_f(\omega, k_p) &= \frac{p(\omega, k_p)}{(1+\omega^2)^{\frac{m+n}{2}}} \\ q_f(\omega) &= \frac{q(\omega)}{(1+\omega^2)^{\frac{m+n}{2}}}. \end{aligned}$$

Desde que $l(N(s)) - r(N(s))$ é conhecido e fixo, os valores estabilizantes de k_p podem ser determinados a partir de (3.7).

O enunciado formal do principal resultado sobre estabilização com ganho constante envolve certas cadeias dos números reais 0, 1 e -1. Estas cadeias são utilizadas essencialmente para capturar todas as diferentes possibilidades para o sinal de $p_f(\omega, k_p)$ nos valores de ω que são zeros reais de $q_f(\omega)$ (com multiplicidades ímpares). Entre estas possibilidades, tem interesse apenas as que, quando substituídas na expressão para $\sigma_i(\delta(s, k_p)N^*(s))$, que é calculada a partir da fórmula (2.29), fornecem um valor para o qual (3.7) seja válida.

Definição 3.1 *Sejam os inteiros m e n e a função $q_f(\omega)$ como já definidos. Sejam $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{l-1}$ os zeros reais, não negativos, distintos e finitos de $q_f(\omega)$ com multiplicidades ímpares. Defina uma seqüência de números $i_0, i_1, i_2, \cdots, i_l$ da seguinte forma:*

(i) Se $N^*(j\omega_t) = 0$ para algum $t = 1, 2, \cdots, l-1$, então, defina

$$i_t = 0; \tag{3.15}$$

(ii) Se $N^*(s)$ possui um zero de multiplicidade k_n na origem, então, defina

$$i_0 = \mathrm{sgn}[p_{1_f}^{(K_n)}(0)] \tag{3.16}$$

em que

$$p_{1_f}(\omega) = \frac{p_1(\omega)}{(1+\omega^2)^{\frac{m+n}{2}}}; \tag{3.17}$$

(iii) Para todos os outros $t = 0, 1, 2, \ldots, l$,

$$i_t \in \{-1, 1\}. \tag{3.18}$$

Com $i_0, i_1, \ldots$ definidos desta forma, defina o conjunto A como

$$A = \begin{cases} \{\{i_0, i_1, \ldots, i_l\}\} & \text{se } n+m \text{ é par} \\ \{\{i_0, i_1, \ldots, i_{l-1}\}\} & \text{se } n+m \text{ é ímpar.} \end{cases} \tag{3.19}$$

Em outras palavras, A é o conjunto de todas as cadeias possíveis de $1's, 0's$, e $-1's$, cujo comprimento é l ou $l+1$ dependendo do valor de $n+m$ e sujeitas às restrições delineadas em (i), (ii) e (iii).

Definição 3.2 *Sejam os inteiros m, n e as funções $q(\omega)$, $q_f(\omega)$ como já definidos. Sejam $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{l-1}$ os zeros reais, distintos, finitos e não negativos de $q_f(\omega)$ com multiplicidades ímpares. Defina também $\omega_l = \infty$. Para cada cadeia $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, \ldots\}$ em A, denote por $\gamma(\mathcal{I})$ a "assinatura imaginária" associada à cadeia $\mathcal{I}$*

definida por

$$\gamma(\mathcal{I}) = \begin{cases} \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \cdots (-1)^{l-1}2i_{l-1} \\ +(-1)^l i_l\} \cdot (-1)^{l-1}\mathrm{sgn}[q(\infty)] \\ \qquad\qquad \textit{para } m+n \textit{ par} \\ \\ \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \cdots (-1)^{l-1}2i_{l-1}\} \\ \cdot(-1)^{l-1}\mathrm{sgn}[q(\infty)] \\ \qquad\qquad \textit{para } m+n\textit{ímpar} \end{cases} \tag{3.20}$$

Observação 3.1 *Observe que se* $i_0 := \mathrm{sgn}[p_f^{(k_n)}(0, k_p)]$, $i_t = \mathrm{sgn}[p_f(\omega_t, k_p)]$ *para* $t \neq 0$, *então, a assinatura imaginária de* $\delta(s, k_p)N^*(s)$ *determinada como em (2.29) é igual à quantidade* $\gamma(\mathcal{I})$ *definida acima. Assim, é uma terminologia apropriada referir-se a* $\gamma(\mathcal{I})$ *como a "assinatura imaginária" de* $\mathcal{I}$ *.*

Definição 3.3 *O conjunto de cadeias em* A *com uma assinatura imaginária prescrita* $\gamma = \psi$ *é denotado por* $A(\psi)$*. Defina também o conjunto de cadeias factíveis para o problema de estabilização por ganho constante como*

$$F^* = A(n - (l(N(s)) - r(N(s))). \tag{3.21}$$

Na referência Datta et al. (2000), exemplos são apresentados para ilustrar estas definições.

Teorema 3.1 (Estabilização por Ganho Constante) *O problema de estabilização por ganho constante pode ser resolvido para uma dada planta com função de transferência* $G(s)$ *se e somente se as seguintes condições forem válidas:*

(i) F^* não é vazio, sendo F^* como definido acima, isto é, existe ao menos uma cadeia factível.

(ii) Existe uma cadeia $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, \ldots\} \in F^*$ tal que

$$\max_{i_t \in \mathcal{I},\ i_t > 0} \left[-\frac{1}{G(j\omega_t)} \right] < \min_{i_t \in \mathcal{I},\ i_t < 0} \left[-\frac{1}{G(j\omega_t)} \right] \tag{3.22}$$

onde $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots$são como já definidos. Além disso, se a condição acima for satisfeita pelas cadeias factíveis $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_s \in F^*$, então, o conjunto de todos os ganhos estabilizantes é dado por $k_p = \cup_{\ell=1}^{s} k_p^{\ell}$ onde

$$k_p^{\ell} = \left(\max_{i_t \in \mathcal{I}_\ell,\ i_t>0} \left[-\frac{1}{G(j\omega_t)}\right], \min_{i_t \in \mathcal{I}_\ell,\ i_t<0} \left[-\frac{1}{G(j\omega_t)}\right]\right), \quad \ell = 1, 2, \ldots, s. \tag{3.23}$$

Prova. Ver Datta et al. (2000). ■

Observação 3.2 *É preciso apontar aqui que as partes (i) e (ii) do Teorema 3.1 fornecem uma caracterização de todas as plantas que são estabilizáveis por um ganho constante. Note também que uma condição necessária para F^* não seja vazio é que para $m+n$ par,*

$$l \geq \frac{|n - (l(N(s)) - r(N(s)))|}{2} \tag{3.24}$$

e para $m+n$ ímpar,

$$l \geq \frac{|n - (l(N(s)) - r(N(s)))| + 1}{2}. \tag{3.25}$$

3.2 Caracterização de Todos os Controladores PI Estabilizantes

Considere novamente o sistema de controle realimentado mostrado na Figura 2.6. Desde que agora tem-se um controlador PI, desta vez $C(s)$ é dado por

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_i + k_p s}{s}. \tag{3.26}$$

O polinômio característico em malha fechada é

$$\delta(s, k_p, k_i) = sD(s) + (k_i + k_p s)N(s). \tag{3.27}$$

Seja n o grau de $\delta(s, k_p, k_i)$. O problema de estabilização por controlador PI, é a determinação dos valores de k_p e k_i para os quais o polinômio característico em malha fechada $\delta(s, k_p, k_i)$ é Hurwitz.

Claramente, tanto k_p como k_i afetam as partes pares e ímpares de $\delta(s, k_p, k_i)$. Considere as seguintes decomposições par-ímpar

$$
\begin{aligned}
N(s) &= N_e(s^2) + sN_o(s^2) \\
D(s) &= D_e(s^2) + sD_o(s^2).
\end{aligned}
$$

Defina

$$N^*(s) = N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2). \tag{3.28}$$

Seja m o grau de $N(s)$. Multiplicando $\delta(s, k_p, k_i)$ por $N^*(s)$ e examinando o polinômio resultante obtém-se

$$l(\delta(s, k_p, k_i)N^*(s)) = l(\delta(s, k_p, k_i)) - r(\delta(s, k_p, k_i)) - (l(N(s)) - r(N(s))). \tag{3.29}$$

Determine agora os valores de k_p, k_i para os quais vale (3.29). Pode ser verificado que

$$
\begin{aligned}
\delta(s, k_p, k_i)N^*(s) &= [s^2(N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2)) \\
&\quad + k_i(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2))] \\
&\quad + s[D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2D_o(s^2)N_o(s^2) \\
&\quad + k_p(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2N_o(s^2)N_o(s^2))]
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

Fazendo a substituição $s = j\omega$ obtém-se

$$\delta(j\omega, k_p, k_i)N^*(j\omega) = p(\omega, k_i) + jq(\omega, k_p) \tag{3.31}$$

em que

$$
\begin{aligned}
p(\omega, k_i) &= p_1(\omega) + k_i p_2(\omega) \\
q(\omega, k_p) &= q_1(\omega) + k_p q_2(\omega) \\
p_1(\omega) &= -\omega^2(N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\
p_2(\omega) &= N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\
q_1(\omega) &= \omega(D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\
q_2(\omega) &= \omega(N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2))
\end{aligned}
$$

Defina também

$$
\begin{aligned}
p_f(\omega, k_i) &= \frac{p(\omega, k_i)}{(1+\omega^2)^{\frac{m+n}{2}}} \\
q_f(\omega, k_p) &= \frac{q(\omega, k_p)}{(1+\omega^2)^{\frac{m+n}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Observa-se primeiramente que k_i e k_p aparecem de forma afim em $p(\omega, k_i)$ e $q(\omega, k_p)$, respectivamente. Além disso, os zeros de $q(\omega, k_p)$ para k_p fixado não dependem de k_i, e assim pode-se aplicar os resultados da Seção 3.1. Pode-se então, fazendo uma varredura sobre todos os valores de k_p e resolvendo um problema de estabilização por ganho constante a cada estágio, determinar o conjunto de todos os valores estabilizantes de (k_p, k_i) para a planta dada.

A faixa de valores de k_p sobre os quais é necessário realizar a varredura pode ser consideravelmente reduzida em muitos casos. Recordando a Observação 3.2 da Seção 3.1 tem-se que para um k_p fixado, uma condição necessária para a existência de um valor estabilizante de k_i é que $q(\omega, k_p)$ possua pelo menos

$$\frac{|n-(l(N(s))-r(N(s))|}{2} \tag{3.32}$$

ou

$$\frac{|n-(l(N(s))-r(N(s))|+1}{2} \tag{3.33}$$

zeros reais, distintos, finitos e não negativos com multiplicidades ímpares, conforme $m+n$ seja par ou ímpar. Esta condição necessária pode ser verificada através do procedimento a seguir.

Inicialmente lembre que

$$q(\omega, k_p) = \omega[U(\omega) + k_p V(\omega)] \tag{3.34}$$

em que

$$
\begin{aligned}
U(\omega) &= D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) \\
V(\omega) &= N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2).
\end{aligned}
$$

De (3.34) tem-se que $q(\omega, k_p)$ possui pelo menos uma raiz real não negativa na origem. Aplicando as propriedades do lugar das raízes discutidas no Apêndice A, pode-se determinar as distribuições de raízes reais de $q(\omega, k_p)$ correspondentes a diferentes faixas de k_p. Utilizando, então, o fato de que

$$n - (l(N(s)) - r(N(s)) \tag{3.35}$$

é conhecido, pode-se identificar os intervalos de k_p para os quais $q(\omega, k_p)$ não satisfaz à condição necessária estabelecida acima. Não há necessidade de realizar a varredura sobre estas faixas de k_p, que podem seguramente ser descartadas.

3.3 Caracterização de Todos os Controladores PID Estabilizantes

Considere o sistema de controle realimentado da Figura 2.6 onde escolhe-se $C(s)$ como:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_i + k_p s + k_d s^2}{s}. \tag{3.36}$$

O polinômio característico em malha fechada torna-se

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d) = sD(s) + (k_i + k_d s^2)N(s) + k_p s N(s). \tag{3.37}$$

O problema da estabilização por controlador PID consiste na determinação dos valores de k_p, k_i e k_d para os quais o polinômio característico em malha fechada $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ é Hurwitz. Considere uma abordagem similar à da Seção 3.1 para a determinação dos valores de (k_p, k_i, k_d) para os quais $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ é Hurwitz. Observando (3.37) verifica-se que os parâmetros k_p, k_i e k_d afetam tanto a parte par como a parte ímpar de $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$. Procedendo conforme a Seção 3.1 constrói-se um novo polinômio cuja parte par depende de (k_i, k_d) e cuja parte ímpar depende de k_p. Considere portanto as seguintes decomposições par-ímpar

$$\begin{aligned} N(s) &= N_e(s^2) + sN_o(s^2) \\ D(s) &= D_e(s^2) + sD_o(s^2). \end{aligned}$$

Defina também

$$N^*(s) = N(-s) = N_e(s^2) - sN_o(s^2). \tag{3.38}$$

Sejam n, m os graus de $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ e $N(s)$ respectivamente. Multiplicando $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ por $N^*(s)$ e examinando o polinômio resultante obtém-se

$$\begin{aligned} & l(\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s)) - r(\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s)) \\ = \quad & (l(\delta(s, k_p, k_i, k_d)) - r(\delta(s, k_p, k_i, k_d))) - (l(N(s)) - r(N(s))). \end{aligned}$$

O polinômio $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ de grau n é Hurwitz se e somente se

$$l(\delta(s, k_p, k_i, k_d)) = n \tag{3.39}$$

e

$$r(\delta(s, k_p, k_i, k_d)) = 0. \tag{3.40}$$

Assim, em vista do Teorema 2.3 tem-se o seguinte resultado.

Lema 3.2 *$\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ é Hurwitz se e somente se*

$$\sigma_i(\delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s)) = n - (l(N(s)) - r(N(s))) \tag{3.41}$$

Determinam-se agora os valores de k_p, k_i, k_d para os quais (3.41) é válida. É simples verificar que

$$\begin{aligned} \delta(s, k_p, k_i, k_d)N^*(s) \quad = \quad & [s^2(N_e(s^2)D_o(s^2) - D_e(s^2)N_o(s^2)) \\ & +(k_i + k_d s^2)(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2 N_o(s^2)N_o(s^2))] \\ & +s[D_e(s^2)N_e(s^2) - s^2 D_o(s^2)N_o(s^2) \\ & +k_p(N_e(s^2)N_e(s^2) - s^2 N_o(s^2)N_o(s^2))]. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Fazendo a substituição $s = j\omega$, obtém-se

$$\delta(j\omega, k_p, k_i, k_d)N^*(j\omega) = p(\omega, k_i, k_d) + jq(\omega, k_p) \tag{3.43}$$

onde

$$\begin{aligned}
p(\omega, k_i, k_d) &= p_1(\omega) + (k_i - k_d\omega^2)p_2(\omega) \\
q(\omega, k_p) &= q_1(\omega) + k_p q_2(\omega) \\
p_1(\omega) &= -\omega^2(N_e(-\omega^2)D_o(-\omega^2) - D_e(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\
p_2(\omega) &= N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\
q_1(\omega) &= \omega(D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)) \\
q_2(\omega) &= \omega(N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2))
\end{aligned}$$

Defina também

$$\begin{aligned}
p_f(\omega, k_i, k_d) &= \frac{p(\omega, k_i, k_d)}{(1+\omega^2)^{\frac{m+n}{2}}} \\
q_f(\omega, k_p) &= \frac{q(\omega, k_p)}{(1+\omega^2)^{\frac{m+n}{2}}}.
\end{aligned}$$

Observe primeiramente que k_i, k_d aparecem de maneira afim em $p(.,.,.)$ enquanto k_p aparece de modo afim em $q(.,.)$. Além disso, para cada k_p fixado os zeros de $q(\omega, k_p)$ não dependem de k_i nem de k_d e portanto pode-se utilizar a abordagem da Seção 3.1 para determinar os valores estabilizantes de k_i e k_d. Desde que neste caso tem-se duas variáveis não é mais possível obter uma solução literal. Ao invés disso um problemas de programação linear tem de ser resolvido para cada k_p fixado. Conforme k_p é variado tem-se uma família de problemas de programação linear de um parâmetro para resolver. Antes de enunciar formalmente o resultado principal existente sobre estabilização PID, serão feitas algumas definições. Estas definições são essencialmente as mesmas da Seção 3.1 com a única diferença de que as presentes definições *são condicionadas a k_p mantido em um valor fixo*.

Definição 3.4 *Sejam $m, n, q_f(\omega, k_p)$ como já definidos. Para um dado k_p fixo sejam $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{l-1}$ os zeros reais, distintos, finitos e não negativos de $q(\omega, k_p)$ com multiplicidades ímpares*[1]*. Defina uma seqüência de números $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_t$ da seguinte forma:*

[1] *Observe que estes zeros são independentes de k_i e de k_d.*

(i) Se $N^*(j\omega_t) = 0$ para algum $t = 1, 2, \cdots, l-1$, então, defina

$$i_t = 0; \tag{3.44}$$

(ii) Se $N^*(s)$ possui um zero de multiplicidade k_n na origem, defina, então

$$i_0 = \operatorname{sgn}[p_{1_f}^{(k_n)}(0)] \tag{3.45}$$

onde

$$p_{1_f}(\omega) = \frac{p_1(\omega)}{(1+\omega^2)^{\frac{m+n}{2}}}; \tag{3.46}$$

(iii) Para todos os outros $t = 0, 1, 2, \cdots, l$,

$$i_t \in \{-1, 1\}. \tag{3.47}$$

Definindo $i_0, i_1, \cdots$ desta maneira, obtém-se o conjunto A_{k_p} como

$$A_{k_p} = \begin{cases} \{\{i_0, i_1, \cdots, i_l\}\} & \text{se } n+m \text{é par} \\ \{\{i_0, i_1, \cdots, i_{l-1}\}\} & \text{se } n+m \text{é ímpar.} \end{cases} \tag{3.48}$$

Em outras palavras, A_{k_p} é o conjunto de todas as possíveis cadeias de $1's$, $0's$ e $-1's$, cujo comprimento é l ou $l+1$ dependendo do valor de $n+m$ e sujeitas às restrições (i), (ii) e (iii).

Definição 3.5 *Sejam $m, n, q(\omega, k_p), q_f(\omega, k_p)$ como já definidos. Para um dado k_p fixo sejam $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{l-1}$ os zeros reais, distintos, finitos e não negativos de $q(\omega, k_p)$ com multiplicidades ímpares. Defina também $\omega_l = \infty$. Para cada cadeia $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, \cdots\}$ em A_{k_p}, denote por $\gamma(\mathcal{I})$ a "assinatura imaginária" associada com a* *cadeia $\mathcal{I}$ definida por*

$$\gamma(\mathcal{I}) = \begin{cases} \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \cdots + (-1)^{l-1} 2i_{l-1} \\ +(-1)^l i_l\} \cdot (-1)^{l-1}\mathrm{sgn}[q(\infty, k_p)] \\ \qquad\qquad \textit{para } m+n \textit{ par} \\ \\ \{i_0 - 2i_1 + 2i_2 + \cdots + (-1)^{l-1} 2i_{l-1}\} \\ \cdot(-1)^{l-1}\mathrm{sgn}[q(\infty, k_p)] \\ \qquad\qquad \textit{para } m+n \textit{ ímpar} \end{cases} \tag{3.49}$$

Observe que a referência a $\gamma(\mathcal{I})$ como a "assinatura imaginária" pode ser justificada da mesma forma como na Seção 3.1.

Definição 3.6 *O conjunto de cadeias em A_{k_p} com uma assinatura imaginária prescrita $\gamma = \psi$ é denotado por $A_{k_p}(\psi)$. Para um dado k_p fixo define-se o conjunto de cadeias factíveis para o problema de estabilização PID como*

$$F^*_{k_p} = A_{k_p}(n - (l(N(s)) - r(N(s)))). \tag{3.50}$$

Teorema 3.2 (Resultado principal sobre estabilização PID) *O problema de estabilização PID com um k_p fixado possui solução para uma dada planta com função de transferência $G(s)$ se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) $F^*_{k_p}$ não é vazio, sendo $F^*_{k_p}$ como já definido, ou seja, existe pelo menos uma cadeia factível, e

(ii) Existe uma cadeia $\mathcal{I} = \{i_0, i_1, \cdots\} \in F^*_{k_p}$ e valores de k_i e k_d tais que $\forall t = 0, 1, 2, \cdots$ para o qual $N^*(j\omega_t) \neq 0$

$$p(\omega_t, k_i, k_d) i_t > 0. \tag{3.51}$$

onde $p(\omega, k_i, k_d)$ é como já definido. Além disso, se existirem valores de k_i e k_d tais que a condição acima é satisfeita para as cadeias factíveis $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \cdots, \mathcal{I}_s \in F^*_{k_p}$, então o conjunto de valores estabilizantes (k_i, k_d) correspondentes ao valor fixado de k_p é a união dos valores (k_i, k_d) satisfazendo (3.51) para $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \cdots, \mathcal{I}_s$.

Prova. Ver Datta et al. (2000). ■

Observação 3.3 *Deve-se notar que desde que o conjunto de restrições é linear, o conjunto admissível para (3.51) é ou um polígono convexo ou uma intersecção de semiplanos, que é também um* conjunto convexo. *Desta forma, para um valor fixado de k_p, se existir uma região no plano (k_i, k_d) para a qual $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ é Hurwitz, esta será uma união de conjuntos convexos.*

Observação 3.4 *O intervalo de valores de k_p sobre o qual deve ser realizada a varredura pode ser estreitado* a priori *utilizando propriedades do lugar das raízes expostas no Apêndice A.*

Utilizando o Teorema 3.2 e realizando a varredura sobre $k_p \in [k_{p\min}, k_{p\max}]$, é possível determinar o conjunto completo de valores de (k_p, k_i, k_d) para os quais $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ é Hurwitz.

Capítulo 4

Introdução à Estabilização de Sistemas Lineares com Atraso

Neste capítulo são apresentados resultados preliminares para solucionar o problema da estabilização de um sistema com atraso através de controladores PID. Este problema caracteriza-se por envolver a localização de zeros de funções características do tipo quasipolinomial. Diferentemente dos polinômios, os quasipolinômios apresentam, além da potências de s, termos do tipo e^{Ts}, onde T é uma constante. O teorema de Hermite-Biehler não é, de modo geral, aplicável a funções não polinomiais. Entretanto, foi obtida por Pontryagin uma extensão do teorema de Hermite-Biehler aplicável a uma classe de quasipolinômios (Pontryagin 1955).

Para uma melhor compreensão do conceito de quasipolinômios, e para o estabelecimento da classe de quasipolinômios aos quais é aplicável a extensão do teorema de Hermite-Biehler, faz-se na Seção 4.1 uma revisão da notação, seguindo-se de perto a referência El'sgol'ts e Norkin (1973). São apresentados as equações diferenciais com argumentos desviantes, os quasipolinômios e a classificação dos quasipolinômios nos tipos retardo, neutral e avançado.

4.1 Equações Diferenciais com Argumentos Desviantes

Inicia-se esta seção com o tipo mais simples de equação diferencial com argumentos desviantes, a saber,

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau)) \tag{4.1}$$

em que τ é um atraso positivo. Para uma equação deste tipo o problema do valor inicial básico consiste na determinação de uma solução contínua $x(t)$ de (4.1) para $t > t_0$, sob a condição de que $x(t) = \phi(t)$ para $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$, sendo $\phi(t)$ uma função contínua denominada função inicial. O intervalo fechado $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ sob o qual a função inicial é definida denomina-se *conjunto inicial*, denotado por E_{t_0}; o ponto t_0 denomina-se *ponto inicial*. É suposto que $x(t_0^+) = \phi(t_0)$. Ao ser estabelecida a existência de uma solução para (4.1), esta será denotada por $x_\phi(t)$.

Considere a equação diferencial de ordem $n = \max\limits_{0 \leq i \leq \ell} m_i$ com ℓ argumentos desviantes, e com desvios $\tau_i, i = 1, \ldots, \ell$ positivos e constantes.

$$\begin{aligned} x^{m_0}(t) \quad = \quad & f(t, x(t), \ldots, x^{(m_0-1)}(t), \\ & x(t-\tau_1), \ldots, x^{(m_1)}(t-\tau_1), \ldots, \\ & x(t-\tau_\ell), \ldots, x^{(m_\ell)}(t-\tau_\ell)). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Aqui entende-se por $x^{(k)}(t-\tau_i)$ a k-ésima derivada da função $x(z)$, tomada no ponto $z = t - \tau_i$.

Seja t_0 o ponto inicial. Cada desvio define um conjunto inicial $E_{t_0}^{(i)} = t_0 - \tau_i \leq t \leq t_0$. O conjunto inicial completo do problema é definido por $E_{t_0} = \bigcup\limits_{i=1}^{\ell} E_{t_0}^{(i)}$. Seja $\mu = \max\limits_{1 \leq i \leq \ell} m_i$ e sejam dadas as funções iniciais $\phi_k(t)$, $(k = 0, 1, \ldots, \mu)$ definidas sobre E_{t_0}.

É natural considerar, em aplicações práticas, o seguinte caso:

$$\phi_k(t) = \phi_0^{(k)}(t),\ k = 0, 1, \ldots, \mu. \tag{4.3}$$

Seja $x_0^{(k)} = \phi_k(t_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, \mu)$. Se, $\mu < n - 1$, adicionalmente, são dados $x_0^{(\mu+1)}, \ldots, x_0^{(n-1)}$. De acordo com (4.2), o problema de valor inicial básico consiste na determinação de uma solução $x(t)$ que seja $n-1$ vezes continuamente diferenciável para

$t > t_0$, sob a condição de que

$$\begin{aligned} x^{(k)}(t_0^+) &= x_0^{(k)},\ (k = 0, 1, \ldots, n-1) \\ x^{(k)}(t - \tau_i) &= \phi_k(t - \tau_i)\ (k = 0, 1, \ldots, \mu;\ i = 1, 2, \ldots, \ell). \end{aligned}$$

Inspirada em (4.2) existe uma classificação natural das equações diferenciais com argumentos desviantes. Designe $\lambda = m_0 - \mu$. As equações nas quais $\lambda > 0$ são denominadas equações de *tipo retardo*. As equações em que ocorre $\lambda = 0$ são denominadas equações de *tipo neutral*. As equações para as quais $\lambda < 0$ são denominadas equações de *tipo avançado*.

4.1.1 Algumas Propriedades de Equações Diferenciais Lineares com Argumentos Desviantes

Funções lineares de n-ésima ordem com um argumento desviante podem ser descritas por

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\kappa} \sum_{j=0}^{n} a_{kj}(t) x^{(j)}(t - \tau_k(t)), \tag{4.4}$$

onde $\tau_0 = 0$.

A equação

$$\sum_{k=0}^{\kappa} \sum_{j=0}^{n} a_{kj}(t) x^{(j)}(t - \tau_k(t)) = 0, \tag{4.5}$$

é denominada a equação linear homogênea correspondente à (4.4).

Seja o operador diferencial L, definido como

$$L(x(t)) = \sum_{k=0}^{\kappa} \sum_{j=0}^{n} a_{kj}(t) x^{(j)}(t - \tau_k(t)).$$

As equações (4.4) e (4.5) serão daqui em diante escritas na forma reduzida

$$L(x(t)) = f(t) \tag{4.6}$$

e

$$L(x(t)) = 0. \tag{4.7}$$

O operador diferencial $L(x(t))$ é linear, e conseqüentemente,

1. $L(x_1(t) + x_2(t)) = L(x_1(t)) + L(x_2(t))$

2. $L(Cx(t)) = CL(x(t))$

onde C é uma constante.

As equações homogêneas lineares possuem as seguintes propriedades:

1. A linearidade e a homogeneidade das equações são preservadas sob transformações lineares homogêneas das funções desconhecidas, e sob transformações da variável independente.

2. Uma combinação linear de soluções com coeficientes constantes arbitrários

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_{\phi_i}(t) = x_\phi(t) \tag{4.8}$$

é também uma solução, sendo

$$\phi = \sum_{i=1}^{k} c_i \phi_i \tag{4.9}$$

se t_0 é um ponto isolado de E_{t_0}, então,

$$x_\phi^{(s)}(t_0^+) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_{\phi_i}^{(s)}(t_0^+),\ s = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4.10}$$

Esta propriedade é preservada para $k \to \infty$, se a série $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_{\phi_i}(t)$ converge, e permite n sucessivas diferenciações.

4.1.2 Equações Lineares com Coeficientes Constantes e Argumentos com Desvios Constantes

Se na função

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\kappa} \sum_{j=0}^{n} a_{kj}\, x^{(j)}(t - \tau_k) \tag{4.11}$$

todos os coeficientes a_{kj} e todos os argumentos desviantes τ_k são constantes, então, (4.11) é denominada uma função linear diferenciável com coeficientes constantes e argumentos com desvios constantes.

Suponha que

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_\ell. \tag{4.12}$$

Se $a_{0n} \neq 0$, enquanto os outros $a_{kn} = 0$, então, conforme a Seção 4.1 tem-se $m_0 = n$, $\mu < n$, $\lambda > 0$ e (4.11) é uma equação do tipo retardo. Se $a_{0n} = 0$ mas no entanto $a_{kn} \neq 0$ para apenas um $j > 0$, então, tem-se $m_0 < n$, $\mu = n$, $\lambda > 0$ e (4.11) é uma equação do tipo avançado. Se $a_{0n} \neq 0$ e para apenas um $j > 0$ ocorre $a_{kn} \neq 0$, então, tem-se $m_0 = n$, $\mu = n$, $\lambda = 0$ e (4.11) é uma equação do tipo neutral.

Considere inicialmente a equação homogênea com coeficientes constantes e argumentos com desvios constantes

$$\sum_{k=0}^{\kappa} \sum_{j=0}^{n} a_{kj}\, x^{(j)}(t - \tau_k) = 0. \tag{4.13}$$

Será buscada uma solução particular de (4.13) da forma

$$x(t) = e^{st}, \tag{4.14}$$

onde s é uma variável complexa.

Substituindo (4.14) em (4.13) e cancelando e^{st}, obtém-se a assim denominada equação característica

$$\sum_{k=0}^{\kappa} \sum_{j=0}^{n} a_{kj} s^j e^{-s\tau_k} = 0, \tag{4.15}$$

para a determinação de s.

O lado esquerdo de (4.15)

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\kappa} \sum_{j=0}^{n} a_{kj} s^j e^{-s\tau_k} \tag{4.16}$$

é denominado função característica. A função característica (4.16) possui um conjunto infinito de raízes. A cada raiz s_k corresponde a solução $e^{s_k t}$. As combinações lineares de soluções

$$\sum_{k=0}^{r} c_k e^{s_k t} \tag{4.17}$$

com coeficientes c_k constantes e mesmo a soma da série infinita

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{s_k t} \tag{4.18}$$

de soluções, se a série (4.18) converge e admite n diferenciações sucessiva, são também soluções de (4.13).

Se todos os coeficientes a_{kj} são reais, então a cada raiz complexa $s = x \pm yi$ de (4.15) corresponde à solução complexa $e^{(x\pm yi)t}$ ou às soluções reais $e^{xt}\cos(yt)$, $e^{xt}\text{sen}(yt)$, as quais são as correspondentes partes real e imaginária da solução $e^{(x\pm yi)t}$.

4.2 O Teorema de Hermite-Biehler Estendido a Quasipolinômios

Na resolução dos problemas de estabilização de sistemas com atraso surgem funções características do tipo definido em (4.16). Sejam os atrasos $\tau_k, i = 1, \ldots, \kappa$, tais que

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_\kappa. \tag{4.19}$$

A multiplicação de (4.16) por $e^{s\tau_\kappa}$ resulta em

$$g(s) = e^{s\tau_\kappa} f(s) = \sum_{k=0}^{\kappa} p_k(s) e^{s(\tau_\kappa - \tau_k)} \tag{4.20}$$

em que

$$p_k(s) = \sum_{j=0}^{n} a_{kj} s^j, \; i = 0, \cdots, \kappa. \tag{4.21}$$

Se $\kappa \neq 0$ a função (4.20) pertence a uma classe geral de quasipolinômios (Bellman e Cooke 1963).

A estabilidade de sistemas descritos por equações homogêneas com coeficientes constantes e argumentos com desvios constantes (4.13), depende da localização das raízes de (4.16). É evidente que f e g possuem os mesmos zeros. O quasipolinômio (4.20) é uma função inteira[1], assim pode haver, em qualquer região limitada do plano complexo, apenas um nùmero finito de raízes. As raízes de (4.20) com $|s|$ suficientemente grande podem ser agrupadas em um número finito de cadeias assintóticas. Os quasipolinômios correspondentes à equação do tipo retardo contém uma cadeia assintótica de raízes que se dirige para o semiplano complexo esquerdo, enquanto naqueles do tipo neutral existe, em adição a esta cadeia assintótica de raízes, pelo menos uma cadeia assintótica de raízes numa faixa vertical do plano complexo. Finalmente, os quasipolinômios correspondentes à equação do tipo avançado contém pelo menos uma cadeia assintótica de raízes que se dirige para o semiplano complexo direito (Kharitonov e Zhabko 1994).

Um quasipolinômio no qual se tem $a_{0n} \neq 0$ corresponde a uma equação do tipo neutral ou retardo. O quasipolinômio (4.20) é considerado estável se e somente se existe um número positivo ϵ tal que as partes reais de todos os zeros de g são menores do que $-\epsilon$. Deve-se mencionar que somente os quasipolinômios correspondentes às equações do tipo retardo ou neutral podem ser estáveis e que a estabilidade da primeira é equivalente à negatividade das partes reais de todos os zeros de g.

Considere uma classe especial de (4.16) que aparece em problemas de engenharia de controle

$$\Delta(s) = d(s) + \sum_{k=1}^{M} e^{-s\tau_k} n_k(s) \tag{4.22}$$

com $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_M$, $n_k(s) = b_{M_k} s^{M_k} + b_{M_k-1} s^{M_k-1} + \cdots + b_{0k}$, $k = 1, ..., M$ e $d(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$.

Multiplicando-se $\Delta(s)$ por $e^{s\tau_M}$ obtém-se

$$\delta(s) = e^{s\tau_M} d(s) + \sum_{k=1}^{M} e^{s(\tau_M - \tau_k)} n_k(s) \tag{4.23}$$

Neste quasipolinômio tem-se $a_{Mn} = 1$.

[1]Função inteira: função complexa que é analítica em todos os pontos do plano complexo.

Suponha a seguinte hipótese

$$\text{A1)} \qquad M_k < n \;\; \text{para} \;\; k = 1, \cdots, M. \tag{4.24}$$

Observe-se que, sob a Hipótese A1), o quasipolinômio (4.23) é um quasipolinômio de uma equação do tipo retardo. Há funções transcendentais[2] reais $p(\omega)$ e $q(\omega)$ na variável real ω associadas com (4.23) tais que $\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$, onde $p(\omega)$ e $q(\omega)$ denotam as partes reais e imaginárias de $\delta(j\omega)$.

A extensão do Teorema de Hermite-Biehler para estudar a estabilidade do quasipolinômio (4.23), que será enunciada de acordo com Silva et al. (2002), foi obtida, por Pontryagin, para funções transcendentais da forma $h(s, e^s)$, onde $h(s,t)$ é um polinômio de duas variáveis (Pontryagin 1955). Assim, no enunciado a seguir, será também feita a hipótese de que os atrasos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_M$ sejam todos múltiplos inteiros de uma mesma constante real e positiva.

Teorema 4.1 *Seja $\delta(s)$ uma função inteira do tipo (4.23), obedecendo à Hipótese A1) e tal que os atrasos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_M$ sejam todos múltiplos inteiros de uma mesma constante real e positiva. $\delta(s)$ é estável se e somente se*

i) *$p(\omega)$ e $q(\omega)$ possuem apenas raízes simples e estas raízes se entrelaçam;*

ii) *$q'(\omega^*)p(\omega^*) - q(\omega^*)p'(\omega^*) > 0$ para algum $\omega^* \in (-\infty, \infty)$*

onde $p'(\omega)$ e $q'(\omega)$ denotam a primeira derivada em relação a ω de $p(\omega)$ e $q(\omega)$ respectivamente.

4.3 Entrelaçamento de Quasipolinômios em Altas Freqüências

Quando se utiliza o teorema de Hermite-Biehler estendido a quasipolinômios para a determinação de um conjunto de ganhos estabilizantes para um sistema com atraso, a

[2]Denominam-se funções transcendentes ou transcendentais as funções que não podem ser obtidas apenas através de um número finito de operações elementares, tais como adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes com índices inteiros.

maior dificuldade encontrada, se se pretende utilizar um método similar ao apresentado no Capítulo 3 para sistemas sem atraso, é o fato de que o número de zeros reais de $p(\omega)$ e $q(\omega)$ para quasipolinômios do tipo (4.23) satisfazendo à Hipótese A1) é infinito. Nesta seção apresenta-se um resultado, seguindo-se de perto a referência Oliveira et al. (2003), que garante o entrelaçamento de quasipolinômios do tipo (4.23) satisfazendo á Hipótese A1) em altas freqüências. Antes, porém, serão fornecidos algumas notações e teoremas relativos à distribuição de zeros de polinômios exponenciais.

4.3.1 Classe de Quasipolinômios Estudada por Pontryagin

A equação (4.16) contempla uma classe muito geral de quasipolinômios, uma vez que os atrasos podem ser quaisquer constantes reais e positivas. O teorema de Hermite-Biehler aplicável a quasipolinômios, desenvolvido por Pontryagin, é entretanto aplicável apenas à classe de quasipolinômios em que os atrasos são múltiplos inteiros de uma mesma constante real positiva (Pontryagin 1955).

Considere, sem perda de generalidade, um quasipolinômio na variável z, cujos atrasos são dados por $\tau_k = k,\ k = 0, 1, \ldots, \kappa$,

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\kappa} \sum_{j=0}^{n} a_{kj} z^j e^{kz}. \tag{4.25}$$

O quasipolinômio (4.25) pode ser convertido em um polinômio $h(s,t)$ de duas variáveis, tomando-se $s = z$ e $t = e^z$,

$$h(s,t) = \sum_{k=0}^{\kappa} \sum_{j=0}^{n} a_{kj} t^k s^j. \tag{4.26}$$

4.3.2 Polinômios Exponenciais e Notação

Seja $h(s,t)$ um polinômio em s e t com coeficientes constantes, reais ou complexos

$$h(s,t) = \sum_{\kappa,n} a_{\kappa n} s^{\kappa} t^{n}. \tag{4.27}$$

O termo $a_{pq} s^p t^q$ é denominado o termo principal do polinômio se $a_{pq} \neq 0$ onde p e

q são as potências mais elevadas de s e t, respectivamente. Como exemplo, o polinômio $h(s,t) = s^3t + st + s^2 + 1$ apresenta $p = 3$ e $q = 1$ e possui como termo principal $a_{pq} = 1$ mas $h(s,t) = s^3 + s^2t + t^2 + 1$ não possui o termo principal.

Sendo $h(s,t)$ tal como definido acima, denomina-se polinômios exponenciais aos polinômios da forma $H(s) = h(s, e^s)$. Para $s = j\omega$ com ω real, a função $H(j\omega)$ pode ser escrita, em termos de suas partes real e imaginária, como

$$H(j\omega) = f_r(\omega, \cos(\omega), \text{sen}(\omega)) + jf_i(\omega, \cos(\omega), \text{sen}(\omega)), \tag{4.28}$$

onde $f_r(\omega, u, v)$ e $f_i(\omega, u, v)$ são polinômios nas variáveis ω, u e v, com coeficientes reais e constantes.

Considere $f(s, u, v)$ um polinômio representado na forma

$$f(s,u,v) = \sum_{\kappa,n} s^\kappa \phi_\kappa^{(n)}(u,v), \tag{4.29}$$

onde $\phi_m^{(n)}(u,v)$ denota um polinômio de grau n, que é homogêneo em u e v, isto é, a soma dos expoentes de u e v é n. Denote por $\phi_*^{(q)}(u,v)$ o coeficiente de s^p em $f(s,u,v)$ de forma que

$$\phi_*^{(q)}(u,v) = \sum_{n \leq q} \phi_p^{(n)}(u,v) \tag{4.30}$$

e defina $\Phi_*^{(q)}(s) = \phi_*^{(q)}(\cos(s), \text{sen}(s))$. Esta notação é esclarecida pelo seguinte exemplo.

Exemplo 4.1 *Considere $H(s) = ae^s + b - se^s$. Para ω real pode-se escrever $H(j\omega)$ em termos de suas partes real e imaginária $f_r(\omega, u, v) = au + \omega v + b$ e $f_i(\omega, u, v) = av - \omega u$, respectivamente, com $p = 1$ e $q = 1$. Além disso, $f_r(\omega, u, v)$ e $f_i(\omega, u, v)$ possuem $\phi_*^{(1)}(u,v) = v$ e $\phi_*^{(1)}(u,v) = -u$ respectivamente.*

Supondo $u = \cos(s)$ e $v = \text{sen}(s)$ em (4.29) define-se $F(s) = f(s, \cos(s), \text{sen}(s))$. O resultado sobre os zeros da função $F(s)$ devido a Pontryagin é enunciado a seguir acordo com Bellman e Cooke (1963).

Teorema 4.2 *Seja $f(s,u,v)$ um polinômio com termo principal $s^p\phi_p^{(q)}(u,v)$. Se ϵ é tal que $\Phi_*^{(q)}(\epsilon + j\omega)$ não assume o valor zero para ω real, então na faixa $-2\ell\pi + \epsilon \leq x \leq 2\ell\pi + \epsilon$, $s = j\omega$ a função $F(s) = f(s, \cos(s), \text{sen}(s))$ possuirá, para valores suficientemente* *elevados de ℓ, exatamente $4q\ell + p$ zeros. Assim, para que a função $F(s)$ possua apenas raízes reais, é necessário e suficiente que no intervalo $-2\ell\pi + \epsilon \leq x \leq 2\ell\pi + \epsilon$ haja exatamente $4q\ell + p$ raízes reais para ℓ suficientemente elevado.*

Considere $F(\omega) = f(\omega, \cos(\omega), \mathrm{sen}(\omega))$ uma função transcendental inteira no argumento real ω. Com a finalidade de obter o número de zeros de $F(\omega)$ em um intervalo o Teorema 4.2 é enunciado da seguinte forma.

Teorema 4.3 *Considere as funções transcendentais reais $f_r(\omega, \cos(\omega), \mathrm{sen}(\omega))$ e $f_i(\omega, \cos(\omega), \mathrm{sen}(\omega))$ tais que $H(j\omega) = f_r(\omega, \cos(\omega), \mathrm{sen}(\omega)) + jf_i(\omega, \cos(\omega), \mathrm{sen}(\omega))$. Suponha que $f_r(\omega, u, v)$ e $f_i(\omega, u, v)$ são polinômios com os termos principais da forma $\omega^p \phi_p^{(q)}(u, v)$. Seja η uma constante apropriada tal que $\phi_*^{(q)}(u, v)$ em $f_r(\omega, u, v)$ e $f_i(\omega, u, v)$ não se anula em $\omega = \eta$. Então, para que as equações $F_r(\omega) = 0$ ou $F_i(\omega) = 0$ possuam apenas raízes reais é necessário e suficiente que no intervalo $-2\pi\ell + \eta \leq \omega \leq 2\pi\ell + \eta$, $f_r(\omega, u, v)$ e $f_i(\omega, u, v)$ possuam exatamente $4q\ell + p$ raízes reais, para ℓ suficientemente elevado.*

O exemplo seguinte ilustra a aplicação do Teorema 4.3.

Exemplo 4.2 *Considere o Exemplo 4.1 dado anteriormente com $a < 1$ e $a < -b < \sqrt{a_1^2 + a^2}$ onde a_1 é a raiz de $\omega = a\tan(\omega)$ tal que $0 < \omega < \pi$. Se $a = 0$ faz-se $a_1 = \pi/2$. Afirma-se que $F_i(\omega) = a\sin(\omega) - \omega\cos(\omega) = 0$ possui raízes reais e simples. De fato, a partir de $F_i(\omega) = 0$ pode-se escrever $\tan(\omega) = \frac{\omega}{a}$. Utilizando o Teorema 4.3 pode-se escolher $\eta = 0$ desde que $\Phi_*^{(1)}(\omega) = -\cos(\omega) \neq 0$ para $\omega = \eta$. É fácil verificar graficamente que como $a < 1$, $F_i(\omega)$ possui $4\ell + 1$ raízes reais no intervalo $-2\ell\pi \leq \omega \leq 2\ell\pi$, $\ell = 1, 2, \ldots$. Segue portanto que $F_i(\omega)$ possui apenas raízes reais.*

Lema 4.1 *Considere o quasipolinômio dado em (4.23). Sejam $p(\omega)$ e $q(\omega)$ as partes reais e imaginárias de $\delta(j\omega)$, respectivamente. Sob a Hipótese A1), existem $0 < \omega_0 < +\infty$ tais que em $[\omega_0, \infty)$ as funções $p(\omega)$ e $q(\omega)$ possuem apenas raízes reais e estas raízes se entrelaçam.*

Prova. A prova dada em Oliveira et al. (2003) é repetida a seguir. O quasipolinômio

(4.23) pode ser escrito no formato a seguir para $|s|$ grande

$$\delta(s) \simeq e^{s\tau_M} s^n + \sum_{k=1}^{M} b_{M_k} e^{s(\tau_M-\tau_k)} s^{M_k}. \tag{4.31}$$

Tem-se, de fato

$$\delta(s) = e^{s\tau_M} s^n[1+\varepsilon_0(s)] + \sum_{k=1}^{M} b_{M_k} e^{s(\tau_M-\tau_k)} s^{M_k}[1+\varepsilon_k(s)], \tag{4.32}$$

onde

$$\varepsilon_0(s) = \frac{a_{n-1}}{s} + \cdots + \frac{a_0}{s^n} \tag{4.33}$$

e

$$\varepsilon_k(s) = \frac{1}{b_{M_k}}\left(\frac{b_{M_k-1}}{s} + \cdots + \frac{b_{0_k}}{s^{M_k}}\right), \quad k = 1, \ldots, M \tag{4.34}$$

(ver (Bellman e Cooke 1963)). Assim, $\varepsilon_k(s) \to 0$ quando $|s| \to \infty$, $k = 0, 1, \ldots, M$. Pode-se supor então que os zeros de $\delta(s)$ e os zeros de $e^{s\tau_M} s^n + \sum_{k=1}^{M} b_{M_k} e^{s(\tau_M-\tau_k)} s^{M_k}$ são bastante próximos para $|s|$ grande. De (4.31) tem-se $\delta(s) \simeq e^{s\tau_M} s^n[1+\varepsilon_*(s)]$ com $\varepsilon_*(s) = \sum_{k=1}^{M} (\frac{b_{M_k}}{e^{s\tau_k} s^{n-M_k}})$.

Fazendo a substituição $s = j\omega$ e utilizando o fato de que $\varepsilon_*(j\omega) \to 0$ quando $\omega \to \infty$ pode-se escrever

$$\delta(j\omega) = e^{j\omega\tau_M}(j\omega)^n \text{ para } \omega > \omega_0; \quad \text{sendo } \omega_0 \text{ suficientemente grande.} \tag{4.35}$$

Expandindo o termo exponencial pode-se escrever

$$\delta(j\omega) = (\cos(\omega\tau_M) + j\mathrm{sen}(\omega\tau_M))(j\omega)^n. \tag{4.36}$$

Suponha n par. Então,

$$\delta_r(\omega) = (-1)^{n/2}\cos(\omega\tau_M)\omega^n \tag{4.37}$$

$$\delta_i(\omega) = (-1)^{n/2}\sin(\omega\tau_M)\omega^n. \tag{4.38}$$

A condição pode ser então verificada através do Teorema 4.3, isto é, as soluções de $\delta_r(\omega)$ são reais e ocorre entrelaçamento. De fato, substituindo $\omega_1 = \omega\tau_M$ em (4.37) e

(4.38) e definindo $u = \cos(\omega_1)$ e $v = \text{sen}(\omega_1)$ pode-se escrever

$$\delta_r(\omega_1, u, v) = \frac{(-1)^{n/2}}{\tau_M^n} u\omega_1^n \tag{4.39}$$

$$\delta_i(\omega_1, u, v) = \frac{(-1)^{n/2}}{\tau_M^n} v\omega_1^n \tag{4.40}$$

Os termos principais de $\delta_r(\omega_1)$ e $\delta_i(\omega_1)$ são $\omega_1^n \phi_p^{(q)}(u,v) = \omega_1^n((-1)^{n/2}/\tau_M^n)u$ e $\omega_1^n \phi_p^{(q)}(u,v) = \omega_1^n((-1)^{n/2}/\tau_M^n)v$ respectivamente, e $p = q$ e $q = 1$ em ambas as funções. Escolhe-se então $\eta = \pi/4$ desde que $\phi_*^{(1)} \neq 0$. É fácil verificar que $\phi_p^{(q)}(\omega_1)$ em (4.39) possui quatro raízes reais no intervalo $[-2\pi + \pi/4, 2\pi + \pi/4]$. Além disso, a raiz de ω_1^n é zero com multiplicidade n. Segue assim que $\delta_r(\omega_1)$ possui $4 + n$ raízes reais no intervalo $[-2\pi + \pi/4, 2\pi + \pi/4]$. Conseqüentemente $\delta_r(\omega_1)$ possui $4\ell + n$ raízes reais no intervalo $[-2\pi\ell + \pi/4, 2\pi\ell + \pi/4]$ para $\ell = 1, 2, \ldots$. Utilizando o Teorema 4.3 verifica-se que $\delta_r(\omega_1)$ possui apenas raízes reais. Pode-se utilizar o mesmo raciocínio para mostrar que este resultado também é válido para $\delta_i(\omega_1)$. Observe que tanto $\delta_r(\omega_1)$ como $\delta_i(\omega_1)$ possuem unicamente raízes reais e simples, com exceção da origem.

As soluções de $\delta_i(\omega_1)$ são dadas por $\omega = 0$ com multiplicidade $n + 1$ e $\omega_1 = \ell\pi, \ell = 1, 2, \ldots$ e as soluções $\delta_r(\omega_1)$ são dadas por $\omega_1 = 0$ com multiplicidade n e $\omega_1 = (2\ell + 1)\pi/2, \ell = 1, 2$ Verifica-se assim que $\delta_r(\omega_1)$ e $\delta_i(\omega_1)$ entrelaçam-se para $\omega_1 > \omega_0$ com ω_0 suficientemente grande.

Estes resultados podem ser verificados de maneira similar para n ímpar. ■

Observação 4.1 *Como resultado do Lema 4.1, sob a Hipótese A1), os zeros suficientemente grandes de $p(\omega)$ e $q(\omega)$ se entrelaçam em $[\omega_0, +\infty)$, seja o quasipolinômio (4.23) estável ou não.*

Capítulo 5

Aplicação do Teorema de Hermite-Biehler à Estabilização de Sistemas Lineares com Atraso

Os resultados apresentados neste capítulo sobre o projeto de controladores proporcionais para uma classe de sistemas com atraso foram publicados em Oliveira et al. (2003) e Oliveira et al. (2005).

Considere um quasipolinômio $\delta(s)$ como em (4.23) sob a Hipótese (A1). Como já comentado, diferentemente dos polinômios, os quasipolinômios possuem infinitas raízes. Os resultados apresentados no Capítulo 3 tratam de polinômios e fazem uso do número de raízes para estabelecer um procedimento de projeto de controladores de ordem fixa. Considere o quasipolinômio $\delta(j\omega) = p(\omega) + jq(\omega)$, decomposto em suas partes real e imaginária $p(\omega)$ e $q(\omega)$, e $0 = \omega_{q_0} < \omega_{q_1} < \omega_{q_2} < \cdots < \omega_{q_\nu}$ e $\omega_{p_1} < \omega_{p_2} < \cdots < \omega_{p_r}$ os zeros reais, distintos e finitos de $q(\omega)$ e $p(\omega)$ respectivamente. A seguinte definição é crucial para a seleção do intervalo de freqüências para analisar a distribuição de raízes de $\delta(s)$.

Definição 5.1 *Sejam $\nu+1$ e r os números de zeros de $q(\omega)$ em $[0\omega_{pr}]$ e $p(\omega)$ em $[0\omega_{pr}]$ respectivamente, com ν e r suficientemente grandes tais que estes zeros se entrelaçam em $[\omega_{q_\nu}, \infty)$ e $[\omega_{p_r}, \infty)$. Para $\nu+r$ par defina $\omega_0 = \omega_{q_\nu}$, caso contrário defina $\omega_0 = \omega_{p_r}$.*

Definição 5.2 *Seja $\delta(s)$ um quasipolinômio descrito como em (4.23) sem raízes no* *eixo $j\omega$ exceto para possivelmente uma na origem. Para um ω_0 suficientemente grande, sejam $0 = \omega_{q_0} < \omega_{q_1} < \omega_{q_2} < \cdots < \omega_{q_\nu} \leq \omega_0$ e $\omega_{p_1} < \omega_{p_2} < \cdots < \omega_{p_r} \leq \omega_0$ zeros reais, distintos e finitos de $q(\omega)$ e $p(\omega)$ respectivamente. Então a assinatura para $\delta(s)$ que denota-se como $\sigma_q(\delta)$ é dada por*

$$\sigma_q(\delta) = \begin{cases} \{\mathrm{sgn}[p(\omega_{q_0})] - 2\mathrm{sgn}[p(\omega_{q_1})] + 2\mathrm{sgn}[p(\omega_{q_2})] + \cdots + (-1)^{\nu-1} \\ \cdot 2\mathrm{sgn}[p(\omega_{q_{\nu-1}})] + (-1)^{\nu}\mathrm{sgn}[p(\omega_{q_\nu})]\} \cdot (-1)^{\nu-1}\mathrm{sgn}[q(\omega^+_{q_{\nu-1}})] \\ \qquad\qquad se\ \nu + r\ \acute{e}\ par \\ \{\mathrm{sgn}[p(\omega_{q_0})] - 2\mathrm{sgn}[p(\omega_{q_1})] + 2\mathrm{sgn}[p(\omega_{q_2})] + \cdots + (-1)^{\nu} \\ \cdot 2\mathrm{sgn}[p(\omega_{q_\nu})]\} \cdot (-1)^{\nu}\mathrm{sgn}[q(\omega^+_{q_\nu})] \\ \qquad\qquad se\ \nu + r\ \acute{e}\ \acute{\imath}mpar \end{cases} \tag{5.1}$$

onde sgn *é a função sinal padrão e* $\mathrm{sgn}[q(\omega_i^+)]$ *denota o sinal de $q(\omega)$ logo após a ocorrência do zero $q(\omega_i)$.*

Observação 5.1 *A assinatura $\sigma_q(\delta)$ na forma da Definição 5.2 equivale à assinatura dos polinômios.*

Lema 5.1 *Considere um quasipolinômio $\delta(s)$ descrito como em (4.23) sob a Hipótese A1). Sejam ν e r como já definidos. Então, a assinatura para o quasipolinômio $\delta(s)$ é dada por $\sigma_q(\delta) = \nu + r$.*

Prova. Sejam $q(\omega)$ e $p(\omega)$ como antes e sejam $0 = \omega_{q_0} < \omega_{q_1} < \omega_{q_2} < \cdots < \omega_{q_\nu} \leq \omega_0$ os zeros reais, distintos e finitos de $q(\omega)$ em $[0, \omega_0]$. Denote por $\Delta_0^{\omega_0}\theta_\delta$ a mudança líquida do argumento $\theta_\delta(\omega) = \arctan\left[\frac{q(\omega)}{p(\omega)}\right]$ enquanto ω cresce de 0 a ω_0. Tem-se o seguinte.

1. Se ω_{q_i} e $\omega_{q_{i+1}}$ são ambos zeros de $q(\omega)$ no intervalo $[0, \omega_0]$, então

$$\Delta_{\omega_{q_i}}^{\omega_{q_{i+1}}}\theta_\delta = \frac{\pi}{2}\left[\mathrm{sgn}[p(\omega_{q_i})] - \mathrm{sgn}[p(\omega_{q_{i+1}})]\right]\mathrm{sgn}[q(\omega^+_{q_i})] \tag{5.2}$$

2. Se ω_{q_i} é um zero de $q(\omega)$ no intervalo $[0, \omega_0]$, mas $\omega_{q_{i+1}}$ não é, então

$$\Delta_{\omega_{q_i}}^{\omega_{q_{i+1}}}\theta_\delta = \frac{\pi}{2}[\mathrm{sgn}[p(\omega_{q_i})]\mathrm{sgn}[q(\omega^+_{q_i})]] \tag{5.3}$$

3. Para $i = 0, 1, 2, \cdots, \nu - 1$ tem-se

$$\text{sgn}[q(\omega^+_{q_{i+1}})] = -\text{sgn}[q(\omega^+_{q_i})] \tag{5.4}$$

Considere o caso em que $\nu + r$ é par. Utilizando a Definição 5.1 para ω_0 suficientemente grande, pode-se escrever

$$\Delta_0^{\omega_0} \theta_\delta = \sum_{i=0}^{\nu-1} \Delta_{\omega_{q_i}}^{\omega_{q_{i+1}}} \theta_\delta \tag{5.5}$$

onde $\omega_0 = \omega_{q_m}$. Assim, substituindo (5.2) em (5.5) e utilizando (5.4) nós obtém-se

$$\Delta_0^{\omega_0} \theta_\delta = \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{\pi}{2} sgn[p(\omega_{q_i}) - sgn[p(\omega_{q_{i+1}})]](-1)^{\nu-1-i} sgn[q(\omega^+_{q_{\nu-1}})] \tag{5.6}$$

Considere agora o caso em que $\nu + r$ é ímpar. Novamente, utilizando a Definição 5.1 para um ω_0 suficientemente grande, pode-se escrever

$$\Delta_0^{\omega_0} \theta_\delta = \sum_{i=0}^{\nu-1} \Delta_{\omega_{q_i}}^{\omega_{q_{i+1}}} \theta_\delta + \Delta_{\omega_{q_\nu}}^{\omega_0} \theta_\delta \tag{5.7}$$

onde $\omega_0 = \omega_{p_r}$. Substituindo (5.3) em (5.7) e utilizando (5.4) resulta

$$\Delta_0^{\omega_0} \theta_\delta = \sum_{i=0}^{\nu-1} \frac{\pi}{2} sgn[p(\omega_{q_i}) - sgn[p(\omega_{q_{i+1}})]](-1)^{\nu-i} sgn[q(\omega^+_{q_\nu})] + \frac{\pi}{2} sgn[p(\omega_{q_\nu})] sgn[q(\omega^+_{q_\nu})] \tag{5.8}$$

assim, da Definição 5.2 tem-se

$$\Delta_0^{\omega_0} \theta_\delta = \frac{\pi}{2} \sigma_q(\delta). \tag{5.9}$$

Finalmente, utilizando a propriedade de entrelaçamento de quasipolinômios estáveis estabelecida no Lema 4.1 e a Definição 5.1, tem-se para $\nu + r$ par $0 = \omega_{q_0} < \omega_{p_1} < \omega_{q_1} < \omega_{p_2} < \cdots < \omega_{p_r} < \omega_{q_\nu} = \omega_0$ ou $0 = \omega_{q_0} < \omega_{p_1} < \omega_{q_1} < \omega_{p_2} < \cdots < \omega_{q_\nu} < \omega_{p_r} = \omega_0$ para $\nu + r$ ímpar. Então, a mudança líquida do argumento $\theta_\delta(\omega)$ enquanto ω cresce de 0 a ω_0 é $\Delta_0^{\omega_0} \theta_\delta = (\nu + r)\frac{\pi}{2}$. Utilizando (5.9) segue o resultado. ■

5.1 Caracterização de Todos os Ganhos Estabilizantes

Seja $G(s)$ a planta a ser controlada, descrita por

$$G(s) = \frac{n_1(s)e^{-sL}}{d(s)}. \tag{5.10}$$

A função característica do sistema realimentado com um controlador $C(s) = k_p$ para este sistema é dada por

$$\delta^*(s, k_p) = d(s) + k_p e^{-sL} n_1(s) \tag{5.11}$$

onde $d(s)$ e $n_1(s)$ são como em (4.22) com $M = 1$. Supondo $L > 0$ obtém-se um quasipolinômio na forma de (4.23). A multiplicação de (5.11) por e^{sL} resulta no quasipolinômio da forma

$$\delta(s, k_p) = e^{sL} d(s) + k_p n_1(s). \tag{5.12}$$

Nos desenvolvimentos seguintes retira-se o subscrito de $n_1(s)$ e considera-se $\delta(s, k_p)$ novamente sob a Hipótese A1). No problema de estabilização constrói-se um quasipolinômio da forma $\delta(s, k_p)n(-s)$ para o qual somente a parte real depende de k_p, ou seja,

$$\delta(j\omega, k_p)n(-j\omega) = p(\omega, k_p) + jq(\omega) \tag{5.13}$$

onde

$$\begin{aligned}
p(\omega, k_p) &= p_1(\omega) + k_p p_2(\omega) && (5.14)\\
p_1(\omega) &= [N_e(-\omega^2)D_e(-\omega^2) - \omega^2 N_o(-\omega^2)D_o(-\omega^2)]cos(\omega L) \\
&\quad +\omega[N_o(-\omega^2)D_e(-\omega^2) - D_o(-\omega^2)N_e(-\omega^2)]sin(\omega L && (5.15)\\
p_2(\omega) &= N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) && (5.16)\\
q(\omega) &= [N_e(-\omega^2)D_e(-\omega^2) - \omega^2 N_o(-\omega^2)D_o(-\omega^2)]sin(\omega L) \\
&\quad -\omega[N_o(-\omega^2)D_e(-\omega^2) + D_o(-\omega^2)N_e(-\omega^2)]cos(\omega L) && (5.17)
\end{aligned}$$

sendo N_e, D_e a parte par e N_o, D_o a parte ímpar da decomposição

$$N(s) = N_e(s^2) + sN_o(s^2) \tag{5.18}$$

$$D(s) = D_e(s^2) + sD_o(s^2). \tag{5.19}$$

O Lema 5.2 abaixo fornece uma assinatura em um intervalo de freqüência para o produto (5.13), a qual é utilizada para estabelecer o Teorema 5.1 sobre o problema de estabilização. Para um k_p estabilizante pode-se associar a ν e a r o número de zeros de $\delta(s, k_p)$ no intervalo de freqüência determinado pela freqüência ω_0 utilizando o Teorema de Hermite-Biehler. Assim, o produto $\delta(s, k_p)n(-s)$ introduz um número finito de zeros no intervalo de freqüência considerado. De fato, a mudança líquida no argumento de $\delta(j\omega, k_p)n(-j\omega)$ é dada por $\Delta_0^{\omega_0}\theta_{\delta n} = \Delta_0^{\omega_0}\theta_\delta + \Delta_0^{\omega_0}\theta_n$. Utilizando (5.9) e o Lema 2.1 obtém-se $\Delta_0^{\omega_0}\theta_{\delta n} = \frac{\pi}{2}[\sigma_q(\delta) - \sigma(n)]$, onde $\sigma(n)$ é a assinatura do polinômio $n(s)$.

Lema 5.2 *Defina $\nu + 1$ e r como sendo o número de zeros reais, distintos e finitos das partes imaginária e real de $\delta(j\omega, k_p)$ em (5.12), respectivamente, para um k_p estabilizante e uma freqüência ω_0 suficientemente grande, estabelecida conforme a Definição 5.1. Então, $\delta(s, k_p)$ é estável se e somente se para qualquer k_p estabilizante a assinatura para $\delta(s, k_p)n(-s)$ determinada pela freqüência ω_0 é dada por $\nu + r - \sigma(n)$.*

Prova. Pela aplicação das Definições 5.1 e 5.2, a assinatura $\sigma_q(\delta)$ do quasipolinômio (5.12) para um k_p estabilizante é dada em termos dos zeros das partes real e imaginária de $\delta(j\omega, k_p)$ no intervalo de freqüências determinado por ω_0, denotadas como $\omega_{q_0}, \omega_{q_1}, \ldots, \omega_{q_\nu}$ para $\nu + r$ par ou $\omega_{q_0}, \omega_{q_1}, \ldots, \omega_{q_\nu}, \omega_{p_r}$ para $\nu + r$ ímpar. Utilizando a Definição 5.1, pode-se sempre escolher os mesmos ν e r para definir os zeros das partes real e imaginária de $\delta(j\omega, k_p)$ que serão utilizados para qualquer k_p estabilizante. Observe que tem-se diferentes ω_0 para diferentes valores de k_p estabilizante. Isto mostra a invariância de $\sigma_q(\delta)$ em relação à escolha de ω_0 para dados ν e r. De acordo com o Lema 5.1 sabe-se que, no intervalo de freqüências determinado por ω_0, a assinatura no intervalo de freqüências de $\sigma(s, k_p)n(-s)$ é $\nu+r-\sigma(n)$ para qualquer k_p estabilizante. É fácil mostrar a recíproca; isto é, se a assinatura de $\sigma(s, k_p)n(-s)$ é dada por $\nu+r-\sigma(n)$, sendo $\nu + r$ a assinatura de $\delta(s, k_p)$, então $\delta(s, k_p)$ é estável. Suponha por contradição que exista um k_p que instabiliza $\delta(s, k_p)$ mas fornece o mesmo $\nu + r$ no intervalo $[0, \omega_0]$ considerado. Como a mudança líquida é dada por $\Delta_0^{\omega_0}\theta_\delta = (\nu + r)\frac{\pi}{2}$, isto significa que tem-se a mesma mudança líquida, tanto para o caso estável como para o caso instável, o que é um absurdo. ∎

Com base nos resultados dados em Datta et al. (2000) introduz-se a seguinte definição.

Definição 5.3 *Sejam $0 = \omega_{o_0} < \omega_{o_1} < \omega_{o_2} < \cdots < \omega_{o_i}$ os zeros reais, distintos e finitos de $q(\omega)$. Então, o conjunto de cadeias A_I num intervalo de freqüências determinado pela freqüência ω_0 é definido como*

$$A_I = \{z_0, z_1, \cdots, z_i\} \tag{5.20}$$

onde $z_0 \in \{-1, 0, 1\}$ e $z_t \in \{-1, 1\}$ para $t \neq 0$.

Teorema 5.1 *Considere $p(\omega)$ e $q(\omega)$ como as partes real e imaginária de $\delta(j\omega, k_p)n(-j\omega)$ respectivamente, e o quasipolinômio $\delta(s, k_p)$ como já definido. Sejam $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_i$ os zeros reais, distintos e finitos de $q(\omega)$ em um intervalo de freqüência. Suponha que exista um k_p estabilizante e escolha ω_0 como na Definição 5.1 associado a $\delta(s, k_p)$. Então, o conjunto de todos os k_p tais que $\delta(s, k_p)$ é estável pode ser obtido utilizando a seguinte expressão para a assinatura de $\delta(s, k_p)n^*(s)$*

$$\sigma_q(\delta(s,k_p)n^*(s)) = \begin{cases} \{z_0 - 2z_1 + 2z_2 + \cdots + \\ (-1)^{i-1}2z_{i-1} + (-1)^i z_i\}.(-1)^{i-1} sgn[q(\omega^+_{i-1})] \\ se\ \nu + r + \nu'\ \text{é par} \\ \{z_0 - 2z_1 + 2z_2 + \cdots + (-1)^i 2z_i\}(-1)^i sgn[q(\omega^+_i)] \\ se\ \nu + r + \nu'\ \text{é ímpar} \end{cases} \tag{5.21}$$

e

$$k_p = \cup k_{p_\ell} \tag{5.22}$$

onde $\{z_0, z_1, \cdots\} \in A_I$

tal que $\max_{z_t \in A_I, z_t.sgn[p_2(\omega_t)]=1}[-\frac{1}{G(j\omega_t)}] < \min_{z_t \in A_I, z_t.sgn[p_2(\omega_t)]=-1}[-\frac{1}{G(j\omega_t)}])$,

$k_{p_\ell} = (\max_{z_t \in A_I, z_t.sgn[p_2(\omega_t)]=1}[-\frac{1}{G(j\omega_t)}], \min_{z_t \in A_I, z_t.sgn[p_2(\omega_t)]=-1}[-\frac{1}{G(j\omega_t)}])$ *sendo r o número de cadeias factíveis, $\delta(j\omega, k_p)n^*(s) = p_1(\omega) + k_p p_2(\omega) + jq(\omega)$, $n^*(s) = n(-s)$, ν' o grau de $n(s)$ e $\sigma_q(\delta(s, k_p)n(-s))$ dado por $\nu + r - \sigma(n)$.*

Prova. Considerando o intervalo de freqüências determinado por ω_0 e utilizando o Lema 5.2, a prova segue linhas semelhantes às utilizadas na demonstração do caso polinomial dada em Datta et al. (2000). Para cada cadeia factível $\mathcal{I} = \{z_0, z_1, \cdots\} \in A$, considere as duas seguintes possibilidades:

(a) $z_j > 0$: Se $z_j > 0$, então a condição de estabilidade é

$$p_1(\omega_{q_j}) + k_p p_2(\omega_{q_j}) > 0. \tag{5.23}$$

De acordo com (5.17) observe que

$$p_2(\omega) = |N(j\omega)|^2 . \tag{5.24}$$

Desde que por hipótese $N(-j\omega_{q_t}) \neq 0,\ t = 0, \cdots, i$ e $N(-s)$ não possui zeros na origem, então, para todo k_p estabilizante, $\delta(s, k_p)N(-s)$ e $z_j \in \{-1, 1\}$ tem-se $p_2(\omega_{q_j}) > 0$ para $j = 0, 1, 2, \ldots, i$. Assim

$$k_p > -\frac{p_1(\omega_{q_j})}{p_2(\omega_{q_j})}. \tag{5.25}$$

(b) $z_j < 0$: Se $z_j < 0$ a condição de estabilidade é

$$p_1(\omega_{q_j}) + k_p p_2(\omega_{q_j}) < 0. \tag{5.26}$$

Como antes, desde que $p_2(\omega_{q_j}) > 0$, segue que

$$k_p < -\frac{p_1(\omega_{q_j})}{p_2(\omega_{q_j})}. \tag{5.27}$$

De acordo com (a) and (b) é possível estabelecer um limite inferior de k_p para cada $z_j > 0$ na cadeia $\mathcal{I}$ e um limite superior de k_p pode ser estabelecido em correspondência a cada $z_j < 0$. Utilizando, então, o fato de que $\sigma_q(\delta(s, k_p)N(-s)) = \nu + r - \sigma(N)$, para que se obtenha uma cadeia $\mathcal{I} = \{z_0, z_1, \ldots\} \in A_I$ correspondendo a um valor estabilizante de k_p deve-se ter, conforme o Lema 5.2,

$$\max_{z_t \in \mathcal{I},\ z_t > 0} \left[-\frac{p_1(\omega_{q_t})}{p_2(\omega_{q_t})} \right] < \min_{z_t \in \mathcal{I},\ z_t < 0} \left[-\frac{p_1(\omega_{q_t})}{p_2(\omega_{q_t})} \right]. \tag{5.28}$$

Utilizando (5.10) e suprimindo o argumento $-\omega^2$ de D_e, D_o, N_e e N_o, pode-se escrever

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G(j\omega)} &= \frac{1}{\cos(L\omega)+j\sin(L\omega)}\frac{D_e+j\omega D_o}{N_e+j\omega N_o} = \\
&= \frac{1}{\cos(L\omega)+j\sin(L\omega)}\frac{D_e+j\omega D_o}{N_e+j\omega N_o}\frac{N_e-j\omega N_o}{N_e-j\omega N_o} = \\
&= \frac{(N_eD_e+\omega^2N_oD_o)+j\omega(N_eD_o-D_eN_o)}{(\cos(L\omega)+j\sin(L\omega))(N_eN_e+\omega^2N_oN_o)} = \\
&= \frac{(N_eD_e+\omega^2N_oD_o)+j\omega(N_eD_o-D_eN_o)}{(\cos(L\omega)+j\sin(L\omega))(N_eN_e+\omega^2N_oN_o)}\frac{\cos(L\omega)-j\sin(L\omega)}{\cos(L\omega)-j\sin(L\omega)} = \\
&= \frac{(N_eD_e+\omega^2N_oD_o)\cos(L\omega)+\omega(N_eD_o-D_eN_o)\sin(L\omega)}{(N_eN_e+\omega^2N_oN_o)} + \\
&\quad + \frac{j[\omega(N_eD_o-D_eN_o)\cos(L\omega)-(N_eD_e+\omega^2N_oD_o)\sin(L\omega)]}{(N_eN_e+\omega^2N_oN_o)} = \\
&= \frac{p_1(\omega)-jq(\omega)}{p_2(\omega)}.
\end{aligned}$$

Utilizando no resultado acima o fato de que $q(\omega_{q_t})=0$, segue que

$$-\frac{p_1(\omega_{q_t})}{p_2(\omega_{q_t})} = -\frac{1}{G(j\omega_{q_t})}. \tag{5.29}$$

Utilizando (5.29) em (5.28) obtém-se

$$\max_{z_t\in\mathcal{I},\ z_t>0}\left[-\frac{1}{G(j\omega_{q_t})}\right] < \min_{z_t\in\mathcal{I}, z_t<0}\left[-\frac{1}{G(j\omega_{q_t})}\right] \tag{5.30}$$

O conjunto estabilizante $k_p's$ é determinado pela união de todos os $k_p's$ obtido da cadeias factíveis satisfazendo (5.30), o que completa a demonstração. ■

Apresenta-se agora um exemplo para ilustrar a aplicação do Teorema 5.1.

Exemplo 5.1 *Considere a estabilização de um dado sistema com atraso através de um controlador proporcional. O sistema é de fase não mínima, de quinta ordem com um atraso de tempo na entrada*

$$G(s) = \frac{e^{-0,1s}(s^4+4s^3+23s^2+46s-12)}{s^5+2s^4+23s^3+44s^2+97s+98}. \tag{5.31}$$

Neste caso, $N(s) = s^4+4s^3+23s^2+46s-12$*,* $D(s) = s^5+2s^4+23s^3+44s^2+97s+98$ *e* $L = 0,1$*. Utilizando o critério de Nyquist escolhe-se um valor estabilizante* $k_p = 6$*. Escolhe-se então,* $\nu = 4$ *e* $r = 4$ *resultando em* $\sigma_q(\delta) = 8$ *com* $\omega_0 = \omega_{q_4} = 47.65$*. Obtém-se* $\nu+r+\deg(N(s)) = 12$*, que é par. Finalmente, deve-se ter*

$\sigma_q(\delta(s,k_p)N(-s)) = \nu + r - \sigma(n) = 6$, onde $\sigma(N) = 2$. Escrevendo $\delta(j\omega,k_p)N(-j\omega)$ $= p_1(\omega) + k_p p_2(w) + jq(\omega)$ verifica-se que os zeros de $q(\omega)$ de $\delta(j\omega,k_p)n(-j\omega)$ são $0,\ 1{,}972,\ 4{,}126,\ 5{,}044,\ 14{,}199,\ 46{,}693$. A Figura 5.1 apresenta os gráficos de $p(\omega)$ e de $q(\omega)$ de $\delta(s,k_p)$ para $k_p = 6$ e o gráfico de $q(\omega)$ de $\delta(s,k_p)N(-s)$. Para a obtenção dos zeros de $q(\omega)$ pode-se utilizar a função "fzero" do Matlab. Encontra-se as cadeias $A_I = \{\{-1,1,-1,1,1,1\},\{-1,1,-1,-1,-1,1\},\{-1,-1,-1,1,-1,1\},\ \{-1,1,1,1,-1,1\}\}$ que satisfazem a $-z_0 + 2z_1 - 2z_2 + 2z_3 - 2z_4 + z_5 = 6$ e ao Teorema 5.1. Obtém-se assim o conjunto de ganhos estabilizantes como $k_p \in [-0{,}589,\ -0{,}508] \cup [2{,}967,\ 8{,}166]$.

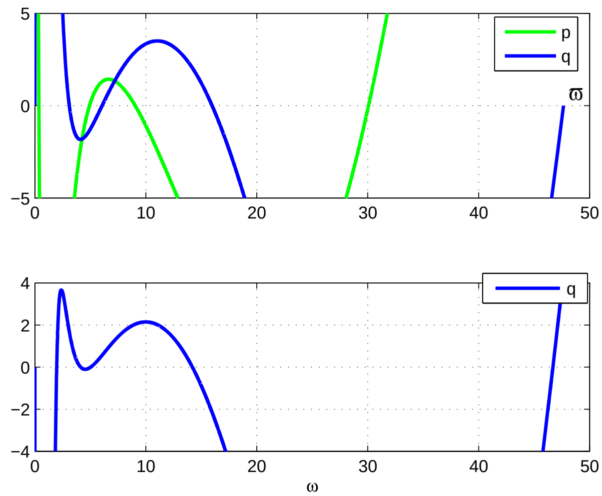

Figura 5.1: Gráficos de $p(\omega)$ e $q(\omega)$ com $k_p = 6$ para $\delta(s,k_p)$(superior) e gráfico de $q(\omega)$ para $\delta(s,k_p)N(-s)$ (inferior) com $k_p = 6$.

5.2 Caracterização de Todos os Controladores PI Estabilizantes

Considere inicialmente um controlador PI da forma $C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$. Para a planta $G(s)$ dada por (5.10), a função característica do sistema realimentado é da forma

$$F(s,k_p,k_i) = sD(s) + (k_i + k_p s)e^{-Ls}N(s) \qquad (5.32)$$

onde $D(s)$ e $N(s)$ são como já definidos. Supondo novamente que $L > 0$, obtém-se, depois de multiplicar (5.32) por e^{Ls}, um quasipolinômio da forma

$$\delta(s, k_p, k_i) = e^{Ls} sD(s) + (k_i + k_p s)N(s). \tag{5.33}$$

O problema da estabilização por um controlador PI envolve a obtenção de um conjunto de valores (k_p, k_i) para os quais o quasipolinômio $\delta(s, k_p, k_i)$ é estável. De modo semelhante ao caso proporcional um novo quasipolinômio do tipo $\delta(s, k_p, k_i)N(-s)$ é construído de forma que sua parte real dependa apenas de k_i e sua parte imaginária dependa apenas de k_p. Substituindo $s = j\omega$ em (5.33) obtém-se

$$\delta(j\omega, k_p, k_i)N(-j\omega) = p(\omega, k_i) + jq(\omega, k_p) \tag{5.34}$$

onde

$$\begin{aligned}
p(\omega, k_i) &= p_1(\omega) + k_i p_2(\omega) && (5.35)\\
q(\omega, k_p) &= q_1(\omega) + k_p q_2(\omega) && (5.36)\\
p_1(\omega) &= -\omega[\omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) + D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2)]\sin(L\omega) && \\
&\quad +\omega^2[N_o(-\omega^2)D_e(-\omega^2) - D_o(-\omega^2)N_e(-\omega^2)]\cos(L\omega) && (5.37)\\
p_2(\omega) &= N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) && (5.38)\\
q_1(\omega) &= \omega[\omega^2 D_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2) + D_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2)]\cos(L\omega) && (5.39)\\
&\quad +\omega^2[N_o(-\omega^2)D_e(-\omega^2) - D_o(-\omega^2)N_e(-\omega^2)]\sin(L\omega) && (5.40)\\
q_2(\omega) &= \omega[N_e(-\omega^2)N_e(-\omega^2) + \omega^2 N_o(-\omega^2)N_o(-\omega^2)]. && (5.41)
\end{aligned}$$

Para cada valor fixado de k_p, os zeros de $q(\omega, k_p)$ não dependem de k_i e os resultados do caso proporcional podem ser utilizados para encontrar as faixas estabilizantes de k_i. Assim, o conjunto de todos os (k_p, k_i) estabilizantes para o sistema pode ser obtido realizando-se a varredura sobre todos os k_p reais e resolvendo o caso proporcional para que sejam obtidas as correspondentes faixas estabilizantes de k_i.

Pode-se reduzir a faixa de valores de k_p sobre os quais se deve realizar a varredura utilizando as propriedades do lugar das raízes apresentadas no Apêndice A.

Exemplo 5.2 *Como em (Silva et al. 2001), considere o problema de buscar ganhos PI estabilizantes para a planta*

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{4s+1} \tag{5.42}$$

em que $N(s) = 1$, $D(s) = 4s+1$, $L = 1$ *e o controlador é dado por* $C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$. *Para obter a assinatura do quasipolinômio correspondente busca-se inicialmente um valor de* k_p *e* k_i *que estabilize o sistema realimentado. Para encontrá-los pode-se utilizar o Critério de Nyquist. Utilizando o conjunto de valores de* (k_p, k_i) *dados em (Silva et al. 2001) escolhe-se* $k_p = 3$ *e* $k_i = 1$. *Examinam-se os gráficos de* $p(\omega, k_i)$ *e* $q(\omega, k_p)$ *obtendo-se, para* $\nu = 4$ *e* $r = 4$, $\omega_{e_1} = 0,5$, $\omega_{e_2} = 1,6$, $\omega_{e_3} = 4,8$, $\omega_{e_4} = 7,8$, $\omega_{o_0} = 0$, $\omega_{o_1} = 1$, $\omega_{o_2} = 3$, $\omega_{o_3} = 6,4$, $\omega_{o_4} = 9,3$. *Isto resulta em* $\sigma_q(\delta) = 8$ *and* $\omega_0 := \omega_{o_4} = 9,3$. *Para obter os pontos de ramificação do lugar das raízes escreve-se*

$$q(\omega, k_p) = -4\omega^2 \sin(\omega) + \omega \cos(\omega) + k_p\omega \tag{5.43}$$

e

$$\frac{q_1(\omega)}{q_2(\omega)} = -4\omega \sin(\omega) + \cos(\omega) = -k_p. \tag{5.44}$$

Obtém-se assim

$$\frac{dk_p}{d\omega} = 5\sin(\omega) + 4\omega\cos(\omega). \tag{5.45}$$

Os zeros positivos de $\frac{dk_p}{d\omega}$ *são* 0, $2,1064$, $4,9593$, $8,0088$. *A partir de (5.44) os valores encontrados para* k_p *são* $k_{p_0} = -19,4800$, $k_{p_1} = -1,0000$, $k_{p_2} = 7,7560$, $k_{p_3} = 31,8062$. *A partir dos gráficos de* $\frac{q_1(\omega)}{q_2(\omega)}$, $-k_{p_0}$, $-k_{p_1}$, $-k_{p_2}$, $-k_{p_3}$, $-k_{p_4}$ *pode-se obter a distribuição dos zeros reais não negativos de* $q(\omega, k_p)$ *no intervalo* $[0, \omega_0]$, *com exceção do zero na origem. Neste exemplo é preciso buscar* $\frac{m+r}{2} = 4$ *zeros reais, distintos e não negativos de* $q(\omega, k_p)$. *Os gráficos são mostrados na Figura 5.2. Desta maneira, os valores aceitáveis de* k_p *estão no intervalo entre* $k_{p_0} = -1$ *e* $k_{p_1} = 7,756$ *onde existem pelo menos 4 zeros reais distintos e não negativos de* $q(\omega, k_p)$. *Realizando a varredura sobre* $k_p \in (-1, 7,756)$, *obtém-se o intervalo estabilizante* $-1 < k_p < 6,93$ *o que está em concordância com os resultados de (Silva et al. 2001) no qual outro método foi utilizado. A região estabilizante do plano* $k_p\, k_i$ *é mostrada na Figura 5.3.*

O resultado do Exemplo 5.2 pode ser verificado utilizando-se o critério de Nyquist através do gráfico de Nyquist de $G(s)$. Entretanto, nesta seção é fornecida uma ca-

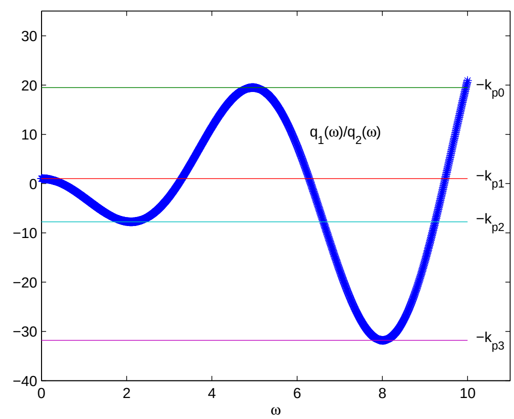

Figura 5.2: Distribuição dos zeros reais de $q(\omega, k_p)$.

racterização analítica de todos os ganhos PI estabilizantes, o que facilita a obtenção de soluções ótimas utilizando vários critérios de desempenho, tais como as normas H_2 e H_∞ de certas funções de transferência em malha fechada. É fornecido a seguir um algoritmo para a busca dos valores estabilizantes de (k_p, k_i) por meio da realização de uma varredura dos valores de k_p em um certo intervalo.

Algoritmo 5.2 (Controlador PI)

Passo 1) Adote um par $(\bar{k}_p, \bar{k}_i)$ *que estabilize* $G(s)$*. Selecione* ν *e* r *e escolha* ω_0 *como na Definição 5.1.*

Passo 2) Introduza $p_1(\omega)$*,* $q_1(\omega)$*,* $p_2(\omega)$ *e* $q_2(\omega)$ *como em (5.37)-(5.38)*

Passo 3) Plote $\frac{q_1(\omega)}{q_2(\omega)}$ *e obtenha seus máximos e mínimos no intervalo* ω_0*. Trace linhas paralelas* $\frac{q_1(\omega)}{q_2(\omega)} = -k_{pm}$*,* $m = 0, 1, \ldots$ *passando através destes pontos.*

Passo 4) Se o número de zeros de $q(\omega, k_p)$ *entre cada par de linhas consecutivas* $-k_{pm}$*,* $-k_{pm+1}$ *satisfaz à condição de existência de* k_i*, obtenha o número de elementos da cadeia* $\{z_0, z_1, \cdots, z_i\}$ *como a soma do número de possíveis soluções de* $\frac{q_1(\omega)}{q_2(\omega)} = -k_p$ *mais uma para* $k_p \in (-k_{pm}, -k_{pm+1})$*.*

Passo 5) Para cada cadeia encontrada no Passo 4) gere um vetor igualmente espaçado para k_p *no intervalo definido por* $-k_{pm}$ *e* $-k_{pm+1}$

Passo 6) Encontre os zeros de $q(\omega, k_p)$ *denominados* $\omega_{o_j}, j = 0, 1, \cdots$ *definidos por (5.34) para* $k_p(1)$ *utilizando* $\frac{q_1(\omega)}{q_2(\omega)} = -k_p(1)$*.*

Passo 7) Inicialize $n = 2$*.*

Passo 8) Obtenha $\min k_i(n-1)$ *e* $\max k_i(n-1)$ *utilizando o Teorema 1 para* $p_1(\omega)$*,* $p_2(\omega)$

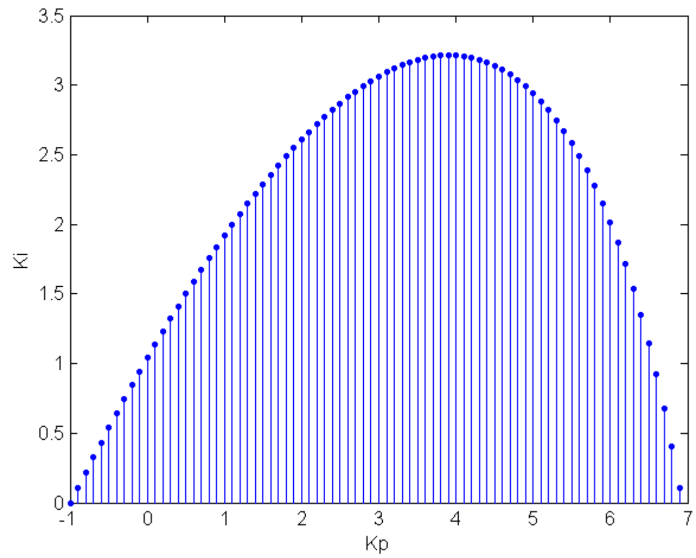

Figura 5.3: Região estabilizante para k_p e k_i.

no Passo 2. Se $\max k_i(n-1) < \min k_i(n-1)$ *faça* $\max k_i(n-1) = 0$ *e* $\min k_i(n-1) = 0$.

Passo 9) Se $n < size(k_p + 1)$ *encontre* $\omega_{o_j}, j = 0, 1, \cdots$ *para* $k_p(n)$ *utilizando* $\frac{q_1(\omega)}{q_2(\omega)} = -k_p(n)$.

Passo 10) Faça $n = n + 1$.

Passo 11) Se $n < size(k_p + 1)$ *vá para o Passo 5. Fim.*

5.3 Caracterização de Todos os Controladores PID Estabilizantes

O desenvolvimento de controladores PID segue a mesma linha do projeto do controlador PI com a nova caracterização de uma assinatura para $\delta(s)$ como em (5.1). Para um controlador PID tem-se

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s. \tag{5.46}$$

A função característica correspondente é

$$F(s, k_p, k_i, k_d) = sD(s) + (k_i + k_p s + k_d s^2)e^{-sL}N(s) \tag{5.47}$$

e, como antes obtém-se

$$\delta(s, k_p, k_i, k_d) = se^{sL}D(s) + (k_i + k_p s + k_d s^2)N(s). \tag{5.48}$$

Agora, considere a mesma abordagem usada no problema de estabilização PI. Substituindo $s = j\omega$ em (5.48) obtém-se

$$\delta(j\omega, k_p, k_i, k_p)N(-j\omega) = p(\omega, k_i, k_d) + jq(\omega, k_p) \tag{5.49}$$

em que

$$p(\omega, k_i, k_d) = p_1(\omega) + (k_i - k_d\omega^2)p_2(\omega) \tag{5.50}$$

$$q(\omega, k_p) = q_1(\omega) + k_p\, q_2(\omega). \tag{5.51}$$

Para todo k_p fixado, note que $q(\omega, k_p)$ não depende de k_i e k_d. Assim, pode-se usar a abordagem para a estabilização de ganho para obter os k_i e k_d estabilizantes a partir da sol ção de um problema de programação linear para cada k_p.

Lema 5.3 *Sejam $\nu + 1$ e r o número de zeros reais, finitos e distintos das partes real e imaginária, respectivamente, de $\delta(j\omega, k_p, k_i, k_d)$ em (5.48), para um valor estabilizante para (k_p, k_i, k_d) e uma frequência suficientemente alta ω_0 definida como antes. Então, $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ é estável se e só se para qualquer conjunto estabilizante (k_p, k_i, k_d) a assinatura para $\delta(s, k_p, k_i, k_d)N(-s)$ determinada pela frequência ω_0 é dada por $\nu + r - \sigma(N)$.*

Teorema 5.3 *Considere $p(\omega, k_i, k_d)$ e $q(\omega, k_p)$ como as partes real e imaginária do quasipolinômio $\delta(j\omega, k_p, k_i, k_d)N(-j\omega)$, respectivamente. Suponha que exista um para estabilizante (k_p, k_i, k_d) para uma dada planta $G(s)$ satisfazendo Hipótese A1). Escolha ω_0 associada a $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ como na Definição 5.1. Para um k_p fixado, considere que $0 = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_i$ sejam zeros reais,finitos e distintos de $q(\omega, k_p)$ na faixa de frequência. Então, os valores (k_i, k_d) tais que estabilizem $\delta(s, k_p, k_i, k_d)$ são obtidos a partir da solução do seguinte problema de programação linear para $z_t \in A_I$ tal que a* *assinatura para* $\delta(s, k_p, k_i, k_d)N(-s)$ *seja igual a* $\nu + r - \sigma(N))$ *e* $t = 0, 1, ..., i$

$$p_1(\omega_t) + (k_i - k_d\omega_t^2)p_2(\omega_t) \;>\; 0,\ for\ z_t = 1 \tag{5.52}$$

$$p_1(\omega_t) + (k_i - k_d\omega_t^2)p_2(\omega_t) \;<\; 0,\ for\ z_t = -1. \tag{5.53}$$

Algoritmo 5.4 (Controlador PID)

Passo 1) Adote um valor para o conjunto k_p, k_i, k_d *que estabilize a planta fornecida* $G(s)$. *Selecione* ν *e* r *e escolha* ω_0 *conforme a Definição 5.1.*

Passo 2) Introduza as funções $p_1(\omega)$ *e* $p_2(\omega)$*, de acordo com (5.50).*

Passo 3) No intervalo de freqüências determinado por ω_0*, encontre os zeros de* $q(\omega, k_p)$ *definidos por (5.49), para um* k_p *fixado.*

Passo 4) Utilizando a Definição 5.3 para $\delta(s, k_p, k_i, k_d)N(-s)$*, encontre* A_I *que satisfaça* $\sigma_q(\delta(s, k_p, k_i, k_d)N(-s)) = \nu + r - \sigma(N))$.

Passo 5) Aplicar o Teorema 5.3 para obter as desigualdades (5.52) e (5.53).

Exemplo 5.3 *Como em Xu et al. (2003), considere o problema de encontrar o conjunto de ganhos PID para estabilizar a planta* $G(s) = \frac{e^{-sL}N(s)}{D(s)}$ *com* $N(s) = s^3 - 4s^2 + s + 2$, $D(s) = s^8 + 8s^4 + 32s^3 + 46s62 + 46s + 17$ *e* $L = 1$. *Para* $k_p = 1$, $k_i = 1$ *e* $k_d = 0$ *plotar*

$qw = inline('3. * w.^3 + 3 * w - (w.^6 - 32 * w.^4 + 46 * w.^2)$
$. * sin(w) + (8 * w.^5 - 46 * w.^3 + 17 * w). * cos(w)',' w')$

para escolher $\nu = 8$ *e* $r = 8$ *para obter* $\sigma_q(\delta) = 16$ *e* $w_0 = 16,2095$. *Como* $\nu + 4 - deg(N(s)) = 17$*, que é impar, os elementos em* A_I *devem satisfazer* $z_0 - 2z_1 + 2z_2 - 2z_3 + 2z_4 - 2z_5 + 2z_6 - 2z_7 + 2z_8 = 17$. *A parte imaginária de* $\delta(j\omega, k_p, k_i, k_d)N(-j\omega)$ *denotada* $q(w, k_p)$ *é afim em* k_p *e então para um* k_p *fixado os seus zeros podem ser obtidos com a função MATLAB inline*

$inline(['w. * (-w.^8 + 65 * w.^6 - 246 * w.^4 + 22 * w.^2 + 34)$
$. * cos(w) + (-12 * w.^8 + 180 * w.^6 - 149 * w.^4 - 75 * w.^2)$
$. * sin(w) + kp * (w.^7 + 14 * w.^5 + 17 * w.^3 + 4 * w)'],' w',' kp')$

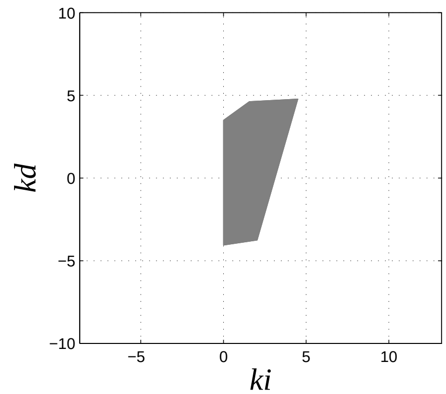

Figura 5.4: Pares estabilizantes (k_i, k_d) para $k_p = 1$ e $L = 1$.

Então, os zeros de $q(\omega)$ *de* $\delta(j\omega, k_p)N(-j\omega)$ *são 0, 0,5377, 1,1764, 2,5880, 4,3155, 6,6001, 9,1734, 12,0136, 14,9422. A partir de (5.50) obtém-se* $p_1(w)$ *e* $p_2(w)$ *como segue.*

$p_1 = inline(['-w.*(-w.^8 + 65*w.^6 - 246*w.^4+$
$22*w.^2 + 34).*sin(w) + (-12*w.^8 + 180*w.^6 - 149*w.^4-$
$75*w.^2).*cos(w)'],'w')$
$p_2 = inline('w.^6 + 14*w.^4 + 17*w.^2 + 4','w').$

Finalmente, as desiguladades afins em k_i *e* k_d *obtidas usando o Teorema 5.3 são* $k_i > 0$

$k_i - 0,289135k_d < 3,11984; k_i - 1,38400k_d > -4,83381$

e

$k_i - 6,69759k_d < 27,1568;\ \ k_i - 18,6231k_d > -84,5249$

$k_i - 43,5614k_d < 271,696;\ \ k_i - 84,1517k_d > -732,245$

$k_i - 144,328k_d < 1669,5\ ;\ \ k_i - 223,271k_d > -3247,82$

e a solução é mostrada na Figura 5.4.

Capítulo 6

Conclusão

Este trabalho se insere em recente linha de pesquisa, direcionada à resolução do problema da determinação do conjunto de controladores PID estabilizantes para uma planta dada. Uma solução efetiva para o caso em que as plantas são polinomiais, isto é, sem atrasos, foi obtida tomando-se como ponto de partida o teorema de Hermite-Biehler. Para o caso quasipolinomial (sistemas com atraso de transporte), tem sido utilizada como ponto de partida uma extensão do teorema de Hermite-Biehler a quasipolinômios.

Partindo de um resultado anterior, que garante a propriedade de entrelaçamento de quasipolinômios em altas freqüências, é possível derivar uma assinatura para quasipolinômios da classe de equações diferença-diferencial lineares do tipo retardo ou neutral. Assim, pode-se aplicar, no caso quasipolinomial, um procedimento bastante análogo ao empregado no caso polinomial, envolvendo uma transformação algébrica da função característica, estabelecimento de cadeias de sinais que permitem a obtenção de uma assinatura estabilizante, e resolução final através da aplicação da extensão do teorema de Hermite-Biehler a quasipolinômios.

Neste trabalho foram desenvolvidos e aplicados procedimentos para a determinação do conjunto de controladores estabilizantes para um controlador PI e para um controlador PID, resultando o último num conjunto de desigualdades lineares, para um valor do parâmetro k_p dado.

Apêndice A

Utilização do Lugar das Raízes para o Estreitamento da Faixa de Varredura de k

Considere-se o problema da determinação do lugar das raízes de $U(x) + kV(x) = 0$, onde $U(x)$ e $V(x)$ são polinômios reais e coprimos e k varia de $-\infty$ a ∞. Podem ser feitas as seguintes observações:

1. Os pontos de ramificação reais dos lugar das raízes de $U(x) + kV(x) = 0$ correspondem a raizes reais e múltiplas as quais devem, portanto, satisfazer

$$\frac{d(\frac{V(x)}{U(x)})}{dx} = 0 \tag{A.1}$$

   ou seja,

$$\frac{U(x)\frac{dV(x)}{dx} - V(x)\frac{dU(x)}{dx}}{U^2(x)} = 0. \tag{A.2}$$

   Os pontos de ramificação reais são os zeros reais da equação acima.

2. Sejam $k_1 < k_2 < \cdots < k_z$ os valores distintos e finitos de k correspondentes aos pontos de ramificação reais x_i, $i = 1, 2, \ldots, z$ sobre os lugar das raízes de $U(x) + kV(x) = 0$. Defina $k_0 = -\infty$ e $k_{z+1} = \infty$. Então x_i, $i = 1, 2, \ldots, z$ são as raizes reais múltiplas de $U(x) + kV(x) = 0$ e os correspondentes $k's$ são os $k_i's$. Pode-se observar que para $k \in (k_i, k_{i+1})$, as raizes reais de $U(x) + kV(x) = 0$ são

simples e o número de raizes reais de $U(x) + kV(x) = 0$ é invariante.

3. Se $U(0) + kV(0) \neq 0$ para todo $k \in (k_i, k_{i+1})$, então a distribuição das raizes reais de $U(x) + kV(x) = 0$ em relação á origem é invariante neste intervalo de valores de k.

O exemplo a seguir ilustra como as observações acima podem ser utilizadas para determinar a distribuição das raizes reais de $U(x) + kV(x) = 0$ em relação à origem quando k varia de $-\infty$ a ∞.

Exemplo A.1 *Sejam*

$$U(x) = (x+1)^3(x-1)(x^2 - x + 1)^2 \tag{A.3}$$

e

$$V(x) = (x-2)^2(x+3)(x^2 + 2x + 2) \tag{A.4}$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{U(x)\frac{dV(x)}{dx} - V(x)\frac{dU(x)}{dx}}{U^2(x)} &= [(x^8 - x^6 + 2x^5 - 2x^3 + x^2 - 1)(5x^4 + 4x^3 \\
&\quad -24x^2 - 12x + 8) - (x^5 + x^4 - 8x^3 - 6x^2 \\
&\quad +8x + 24)(8x^7 - 6x^5 + 10x^4 - 6x^2 + 2x)]/ \\
&\quad [(x+1)^6(x-1)^2(x^2 - x + 1)^4] \\
&= [-3x^{12} - 4x^{11} + 41x^{10} + 38x^9 - 82x^8 - 188x^7 \\
&\quad +77x^6 + 82x^5 - 265x^4 + 28x^3 + 160x^2 - 36x \\
&\quad -8]/[(x+1)^6(x-1)^2(x^2 - x + 1)^4]
\end{aligned}$$

Os pontos de ramificação x_i, os quais são os zeros reais da expressão acima são

$$x_1 = 2.96872,\ \ x_2 = -1,\ \ x_3 = 0.42142,\ \ x_4 = 0.66720,\ \ x_5 = -0.14008,\ \ x_6 = -3.84988$$

Além disso $U(x) + kV(x)$ possui uma raiz na origem quando $k = k^* = 0.04167$.

Para $k \in (k_i, k_{i+1})$ e $k^* \notin (k_i, k_{i+1})$, a distribuição das raizes reais de $U(x) + kV(x) = 0$ em relação a origem é invariante. Assim, pode-se simplesmente checar um $k \in (k_i, k_{i+1})$ arbitrário e determinar a distribuição de raizes reais de $U(x)+kV(x) = 0$ em relação à origem, e esta distribuição é válida para todo k neste intervalo. Neste exemplo $k^* \in (k_4, k_5)$ e assim a distribuição de raizes reais de $U(x) + kV(x) = 0$ em relação à origem pode não ser invariante sobre o intervalo (k_4, k_5). Assim o intervalo (k_4, k_5) deve ser dividido em dois sub-intervalos (k_4, k^*), (k^*, k_5), e a distribuição de raizes reais deve ser checada em cada um destes sub-intervalos.

A distribuição de raizes reais em relação à origem de $U(x) + kV(x) = 0$ para k pertencente a diferentes intervalos, é dada abaixo

$$\begin{aligned}
k \in (-\infty, -61.44924) &: \text{ 3 raizes reais simples e positivas} \\
&\text{ 1 raizes real simples e negativa} \\
k \in (-61.44924, 0) &: \text{ 1 raizes real simples e positiva} \\
&\text{ 1 raiz real simples e negativa} \\
k \in (0, 0.03689) &: \text{ 1 raiz real simples e positiva} \\
&\text{ 1 raizes real simples e negativa} \\
k \in (0.03689, 0.03791) &: \text{ 3 raizes reais simples e negativas} \\
&\text{ 1 raiz real simples e negativa} \\
k \in (0.03791, 0.04167) &: \text{ 1 raiz real simples e positiva} \\
&\text{ 1 raiz real simples e negativa} \\
k \in (0.04167, 0.04279) &: \text{ 2 raizes reais simples e negativas} \\
k \in (0.04279, 163.73847) &: \text{ nenhuma raiz real} \\
k \in (163.73847, \infty) &: \text{ 2 raizes reais simples e negativas}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

O exemplo acima mostra como idéias simples sobre o lugar das raízes podem ser utilizadas para determinar a distribuição dos zeros reais de $U(x) + kV(x)$, em relação à origem, enquanto k varia de $-\infty$ a ∞.

Referências Bibliográficas

BELLMAN, R.; COOKE, K. L. (1963). **Differential-Difference Equations**. Academic Press: New York.

BHATTACHARYYA, S. P.; CHAPELLAT, H.; KEEL, L. (1995). **Robust Control: The Parametric Approach**. Prentice-Hall: Englewood Cliffs.

CHAPELLAT, H. et al. (1990). Elementary proofs of some classical stability criteria. **IEEE Transactions on Education,** v.33, n.3, p.232–239.

DAHLEH, M. A.; DIAZ BOBILLO, I. J. (1994). **Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach**. Prentice Hall: Upper Saddle River.

DATTA, A. et al. (2000). **Structure and synthesis of PID controllers**. Springer-Verlag: London.

DATTA, A. et al. (2005). **PID controllers for time-delay systems**. Birkhauser: Boston.

Doyle, J. et al. (1989). State space solutions to standard H2 and H_∞ control Problems. **IEEE Transactions on Automatic Control,** v.34, n.8, p.831–847.

EL'SGOL'TS, L. E.; NORKIN, S. B. (1973). **Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments**. Academic Press: London. (Mathematics in Science and Engineering, 105).

GANTMACHER, F. R. (1959). **The Theory of Matrices**. Chelsea Publishing Company: New York.

Ho, M. T. et al. (1999). Generalizations of the Hermite-Biehler Theorem. **Linear Algebra and its Applications,** v.302-303, p.135–153.

KHARITONOV, V. L.; ZHABKO, A. P. (1994). Robust stability of time delay systems. **IEEE Transactions on Automatic Control,** v.12, n.39, p.2388–2397.

MANSOUR, M. (1992). Robust stability in systems described by rational functions. C. T. LEONDES (ed.). **Control and dynamic systems**, v. 51, Academic Press: New York. p. 79–128.

Oliveira, V. A. et al. & Teixeira, M. C. M. (2005). PID stabilization of a class of time delay systems, In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 12., 2005, Seville. **Proceedings...** New York: IEEE, p. 1367–1372.

OLIVEIRA, V. A. ET AL. (2003). Stabilizing a class of time delay systems using the Hermite-Biehler theorem. **Linear Algebra and Its Applications,** v.369, n.1, p.203–216.

PONTRYAGIN, L. (1955). On the zeros of some elementary transcendental functions (English Translation). **American Mathematical Society Translations Series,** v.2, p.95–110.

Silva, G. J. et al. (2001). PI stabilization of first-order systems with time-delay. **Automatica,** v.37, n.12, p.2025–2031.

Silva, G. J. et al. (2002). New results on the synthesis of PID controllers. **IEEE Transactions on Automatic Control,** v.47, n.2, p.241–252.

Xu, H. et al. (2003). PID stabilization of LTI plants with time-delay. In: CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 12. 2003, Hawaii. **Proceedings ...** New York: IEEE, p.4038-4043

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo