

MINISTÉRIO DA DEFESA  
EXÉRCITO BRASILEIRO  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
CURSO DE MESTRADO EM SISTEMAS E COMPUTAÇÃO

DANIEL GOMES

ANÁLISE DE RESULTADOS OBTIDOS PELA HEURÍSTICA  
ESPECTRAL PARA O PROBLEMA LARGURA DE BANDA EM  
CATERPILLARS

Rio de Janeiro  
2008

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

**DANIEL GOMES**

**ANÁLISE DE RESULTADOS OBTIDOS PELA HEURÍSTICA  
ESPECTRAL PARA O PROBLEMA LARGURA DE BANDA EM  
CATERPILLARS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Sistemas e Computação do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Sistemas e Computação.

Orientadora: Prof. Claudia Marcela Justel - DSc

Rio de Janeiro  
2008

c2008

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha  
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmar ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e do orientador.

G633a Daniel Gomes  
Análise de resultados obtidos pela heurística espectral para o problema Largura de Banda em caterpillars / Daniel Gomes.  
– Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2008.  
152 p.: il., tab.

Dissertação (mestrado) – Instituto Militar de Engenharia – Rio de Janeiro, 2008.

1.Algoritmos. 2.Teoria dos Grafos. 3.Teoria Espectral.  
4.Problema Bandwidth. 5.Caterpillars. 6.Vetor de Fiedler. I.Título. II.Instituto Militar de Engenharia.

CDD 511.5

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
DANIEL GOMES  
ANÁLISE DE RESULTADOS OBTIDOS PELA HEURÍSTICA  
ESPECTRAL PARA O PROBLEMA LARGURA DE BANDA EM  
CATERPILLARS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Sistemas e Computação do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Sistemas e Computação.

Orientadora: Prof. Claudia Marcela Justel - DSc

Aprovada em 08 de agosto de 2008 pela seguinte Banca Examinadora:

---

Prof. Claudia Marcela Justel - DSc do IME - Presidente

---

Prof. Lilian Markenzon - DSc do NCE-UFRJ

---

Prof. Nair Maria Maia de Abreu - DSc da COPPE-UFRJ

---

Prof. Leonardo Silva de Lima - DSc do CEFET-RJ

---

Prof. Paulo Renato da Costa Pereira - DSc do IME

Rio de Janeiro  
2008

Dedico à minha família pelo apoio e compreensão do comprimento desta jornada e aos amigos que estiveram juntos de mim me apoiando.

## AGRADECIMENTOS

A Deus em primeiro lugar, aos meus familiares e amigos.

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram com o desenvolvimento desta dissertação de mestrado, tenha sido por meio de críticas, idéias, apoio, incentivo ou qualquer outra forma de auxílio. Em especial, desejo agradecer às pessoas citadas a seguir.

Agradeço a Professora Claudia Marcela Justel pela dedicação em me orientar e instruir ao longo desta jornada. Ao professor Paulo Renato da Costa Pereira, pela colaboração durante o desenvolvimento da Tese. A todos os professores que acompanharam o meu desenvolvimento durante todo o curso.

A minha Família, por me incentivar para comprimento deste desafio e em especial minha mãe Laura Teresa Gomes.

Por fim, a todos os funcionários do Departamento de Engenharia de Sistemas (SE/8) do Instituto Militar de Engenharia.

*Daniel Gomes*

*"Se eu vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros  
de gigantes."*

**Isaac Newton**



## SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES .....	10
LISTA DE TABELAS .....	13
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS .....	17
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>20</b>
1.1 Motivação e objetivo .....	21
1.2 Organização .....	21
<b>2 CONCEITOS BÁSICOS .....</b>	<b>23</b>
2.1 Conceitos básicos em grafos .....	23
2.2 Largura de banda .....	24
2.2.1 Definição.....	24
2.2.2 Exemplo .....	24
2.2.3 Complexidade do problema .....	26
2.2.4 Aplicações .....	26
2.2.4.1 Resoluções de equações lineares .....	27
2.2.4.2 Layout VLSI .....	28
2.2.4.3 Interconexões de redes .....	29
2.3 Caterpillars .....	30
2.4 Caterpillars com cabelos de comprimento máximo 2 .....	31
2.5 Teoria espectral .....	33
2.5.1 Propriedades básicas.....	33
<b>3 ALGORITMOS EXATOS .....</b>	<b>35</b>
3.1 Algoritmo de Miller .....	35
3.1.1 Introdução .....	35
3.1.2 Descrição da entrada .....	35
3.1.3 Descrição .....	36
3.1.4 Exemplo .....	39
3.2 Algoritmo de Assmann.....	42
3.2.1 Introdução .....	42

3.2.2	Descrição da entrada .....	43
3.2.3	Descrição .....	44
3.2.4	Exemplo .....	45
<b>4</b>	<b>HEURÍSTICA ESPECTRAL</b> .....	<b>51</b>
4.1	Heurística espectral de Mohar .....	51
4.2	Exemplo .....	53
<b>5</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO</b> .....	<b>56</b>
5.1	Especificações da ferramenta .....	56
5.1.1	Ambiente de desenvolvimento .....	56
5.1.2	Interface com o usuário - entrada e saída .....	57
5.2	Ferramenta de experimentos .....	60
5.2.1	Módulo gerador de grafos .....	61
5.2.1.1	Implementação do gerador .....	61
5.2.1.2	Entrada do gerador .....	62
5.2.1.3	Etapas do gerador .....	63
5.2.1.4	Modelos de arquivos de saída .....	64
5.2.2	Módulo estrutura de dados .....	67
5.2.3	Módulo algoritmos implementados .....	70
5.2.3.1	Miller .....	70
5.2.3.2	Heurística espectral de Mohar .....	72
<b>6</b>	<b>EXPERIMENTOS E RESULTADOS</b> .....	<b>75</b>
6.1	Introdução .....	75
6.2	Resultados apresentados no artigo Juvan e Mohar (1992) .....	75
6.3	Algoritmo de Miller .....	80
6.3.1	Resultados obtidos utilizando o algoritmo de Miller .....	80
6.4	Heurística espectral de Mohar .....	84
6.4.1	Resultados obtidos utilizando a heurística espectral de Mohar .....	84
6.4.2	Observações sobre resultados obtidos pela heurística espectral de Mohar ....	89
6.5	Comparação de resultados dos algoritmos .....	95
<b>7</b>	<b>HEURÍSTICA PROPOSTA</b> .....	<b>97</b>
7.1	Motivação .....	97

7.2	Heurística proposta.....	99
7.3	Exemplo .....	100
7.4	Experimentos caterpillars .....	104
7.5	Outros testes com a heurística proposta .....	105
7.5.1	Definição de famílias $C + aresta$ , $C + leque$ , $C + 2(p - 1)aresta$ .....	106
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>111</b>
8.1	Contribuições .....	111
8.2	Trabalhos futuros .....	113
<b>9</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>114</b>
<b>10</b>	<b><u>ANEXOS</u></b> .....	<b>116</b>

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Grafo $G$ .....	24
FIG.2.2	Possíveis rotulações do grafo $G$ da Figura 2.1 .....	25
FIG.2.3	Largura de banda do grafo $G$ .....	25
FIG.2.4	Largura de banda do grafo $G$ .....	27
FIG.2.5	Caterpillar 1 .....	30
FIG.2.6	Caterpillar 2 .....	30
FIG.2.7	Caterpillar com cabelos de comprimento 1 e 2 .....	31
FIG.2.8	Corpo Estendido de $C_{1e2}$ .....	32
FIG.2.9	Não é caterpillar com cabelos de comprimento máximo 2 .....	32
FIG.3.1	Caterpillar $C(2, 5, 2)$ .....	36
FIG.3.2	1ª Iteração do algoritmo de Miller para $C(2, 5, 2)$ .....	39
FIG.3.3	2ª Iteração do algoritmo de Miller para $C(2, 5, 2)$ .....	40
FIG.3.4	Rotulação Algoritmo de Miller para $C(2, 5, 2)$ .....	42
FIG.3.5	$C_{1e2}([3, 0], [1, 3], [1, 0], [0, 2], [3, 1], [1, 0])$ $n = 27$ $m = 26$ $p=6$ $d=8$ .....	44
FIG.3.6	Rótulos atribuídos aos vértices do corpo estendido .....	46
FIG.3.7	Início iteração $k = 1$ rótulos disponíveis 1, 2, 3 .....	47
FIG.3.8	Início iteração $k = 2$ e rótulos disponíveis 3, 5, 6, 7 .....	47
FIG.3.9	Início iteração $k = 3$ rótulos disponíveis 9, 10, 11 .....	48
FIG.3.10	Início iteração $k = 4$ rótulos disponíveis 13, 14, 15 .....	48
FIG.3.11	Início iteração $k = 5$ rótulos disponíveis 17, 18, 19 .....	49
FIG.3.12	Início iteração $k = 6$ e disponíveis rótulos = 21, 22, 23 .....	50
FIG.3.13	Rotulação $C_{1e2}([3, 0], [1, 3], [1, 0], [0, 2], [3, 1], [1, 0])$ .....	50
FIG.4.1	Heurística Espectral de Mohar .....	52
FIG.4.2	Grafo Associado a Matriz Laplaciana do caterpillar $C(2, 5, 2)$ .....	53
FIG.4.3	Vetor de Fiedler para o caterpillar $C(2, 5, 2)$ .....	54
FIG.4.4	Odernação dos componentes do vetor de Fiedler para $C(2, 5, 2)$ .....	55
FIG.4.5	Rótulos obtidos pela heurística espectral para o caterpillar $C(2, 5, 2)$ .....	55
FIG.5.1	Fluxograma da entrada do algoritmo Miller .....	57
FIG.5.2	Fluxograma da entrada da heurística espectral de Mohar .....	58
FIG.5.3	Relatório de resultados do Miller para $C(2, 5, 2)$ rotulado .....	59

FIG.5.4	<i>Relatório de resultados do Mohar para <math>C(2, 5, 2)</math> rotulado</i>	59
FIG.5.5	<i>Diagrama da ferramenta</i>	60
FIG.5.6	<i>Diagrama do Módulo Gerador de Caterpillar</i>	62
FIG.5.7	<i>Código fonte do método de Entrada do gerador</i>	63
FIG.5.8	<i>Chamada do Método CriaNomeArquivoTxt</i>	64
FIG.5.9	<i>Chamada do Método CriaNomeArquivoXml</i>	64
FIG.5.10	<i>Arquivo escrito pelo método imprimirArquivoTxt - <math>C(2, 5, 2)</math></i>	65
FIG.5.11	<i>Representação do Caterpillar <math>C(2, 5, 2)</math></i>	65
FIG.5.12	<i>Arquivo gerado pelo método imprimirArquivoXml - <math>C(2, 5, 2)</math></i>	66
FIG.5.13	<i>Diagrama do módulo estrutura de dados</i>	69
FIG.5.14	<i>Restrições de entrada</i>	71
FIG.5.15	<i>Código fonte das restrições de entrada</i>	72
FIG.5.16	<i>Diagrama do Módulo Algoritmos</i>	74
FIG.6.1	<i>Caminho <math>P_{10}</math> com rótulos obtidos pela heurística espectral de Mohar</i>	76
FIG.6.2	<i>Ciclo <math>C_{10}</math> com rótulos obtidos pela heurística espectral de Mohar</i>	77
FIG.6.3	<i>Árvore binária cheia <math>T_3</math> com rótulos obtidos pela heurística espectral de Mohar</i>	78
FIG.6.4	<i>Árvore binária cheia <math>T_5</math> com rótulos obtidos pela heurística espectral de Mohar</i>	78
FIG.6.5	<i>Grafo Estrela <math>Z_{3,2}</math> com rótulo obtido pela heurística espectral</i>	79
FIG.6.6	<i>Caterpillar <math>C(1, 1, 1)</math></i>	81
FIG.6.7	<i>Caterpillar <math>C(1, 1, 5, 1, 1)</math></i>	90
FIG.6.8	<i>Caterpillar <math>C(2, 5, 2)</math></i>	90
FIG.6.9	<i>Caterpillar <math>C(1, 5, 1, 1)</math></i>	92
FIG.6.10	<i>Experimentos com o 2º menor autovalor</i>	93
FIG.6.11	<i>Experimentos com o 4º menor autovalor</i>	93
FIG.6.12	<i>Experimentos com o 5º menor autovalor</i>	94
FIG.6.13	<i>Experimentos com o 3º menor autovalor</i>	94
FIG.7.1	<i>Caterpillar <math>C(1, 1, 5, 1, 1)</math></i>	98
FIG.7.2	<i>Heurística 1</i>	99
FIG.7.3	<i><math>C(8, 2, 8, 2, 8)</math> - Heurística espectral de Mohar</i>	100
FIG.7.4	<i><math>C(8, 2, 8, 2, 8)</math> - Resultados obtidos pela heurística 1</i>	101

FIG.7.5	$C(8, 2, 8, 2, 8)$ - <i>Resultado da heurística 1</i> .....	102
FIG.7.6	$C(9, 2, 9, 2, 9)$ - <i>Heurística espectral de Mohar</i> .....	102
FIG.7.7	$C(9, 2, 9, 2, 9)$ - <i>Intervalos da heurística 1</i> .....	103
FIG.7.8	$C(9, 2, 9, 2, 9)$ - <i>Resultado da heurística 1</i> .....	103
FIG.7.9	$C(2, 5, 2)$ e $C(2, 5, 2)$ + <i>arestas</i> .....	105
FIG.7.10	<i>Caterpillars</i> $C(9, 5, 9, 5, 9)$ .....	106
FIG.7.11	<i>Caterpillars</i> + <i>aresta</i> .....	107
FIG.7.12	<i>Caterpillars</i> + <i>leques</i> .....	107
FIG.7.13	<i>Caterpillars</i> + <i>leques</i> + <i>aresta</i> .....	108
FIG.7.14	$C$ + <i>leque</i> + <i>aresta</i> .....	109

## LISTA DE TABELAS

TAB.6.1	Resultados obtidos pela heurística espectral de Mohar	76
TAB.6.2	Teste de Famílias de Caterpillars - $C(k, \dots, k, \dots, k)$ , $k = 1$	81
TAB.6.3	Teste de Famílias de Caterpillars - $C(1, 1, \dots, k, \dots, 1, 1)$ , $k = 6$	82
TAB.6.4	Teste de Famílias de Caterpillars - $C(k, z, k, z, k)$ - $k = 3$ até $6$ e $z = 2$ até $5$	83
TAB.6.5	Teste de Famílias de Caterpillars - $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 1$	84
TAB.6.6	Vetores de Fiedler da Família - $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 1$	85
TAB.6.7	Teste de Famílias de Caterpillars - $C(1, 1, \dots, k, \dots, 1, 1)$ , $k = 6$	86
TAB.6.8	Vetores de Fiedler da Família - $C(1, 1, \dots, k, \dots, 1, 1)$ - $k = 6$	87
TAB.6.9	Teste de Famílias de Caterpillars - $C(k, z, k, z, k)$ , $k = 3$ até $6$ e $z = 2$ até $5$ $p = 5$	88
TAB.6.10	Vetores de Fiedler da Família - $C(k, z, k, z, k)$ - $k = 3$ até $k = 5$ e $z = 2$	89
TAB.6.11	Comparação da largura de banda calculada por Miller e pela <i>HEM</i>	95
TAB.7.1	Teste de Famílias de Caterpillars - Mohar - Miller - Heurística 1	104
TAB.7.2	Teste de Famílias de Caterpillars - Mohar - Miller - Heurística 1	109
TAB.10.1	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 2$ - Miller	117
TAB.10.2	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 3$ - Miller	117
TAB.10.3	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 4$ - Miller	118
TAB.10.4	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 5$ - Miller	118
TAB.10.5	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 6$ - Miller	118
TAB.10.6	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 7$ - Miller	119
TAB.10.7	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 8$ - Miller	119
TAB.10.8	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 9$ - Miller	119
TAB.10.9	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 2$ - Miller	120
TAB.10.10	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 3$ - Miller	120
TAB.10.11	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 4$ - Miller	120
TAB.10.12	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 5$ - Miller	120
TAB.10.13	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 6$ - Miller	121
TAB.10.14	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 7$ - Miller	121
TAB.10.15	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 8$ - Miller	121

TAB.10.16	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 9$ - Miller	121
TAB.10.17	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 2$ - Miller	122
TAB.10.18	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 3$ - Miller	122
TAB.10.19	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 4$ - Miller	123
TAB.10.20	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 5$ - Miller	123
TAB.10.21	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 6$ - Miller	124
TAB.10.22	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 7$ - Miller	124
TAB.10.23	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 8$ - Miller	124
TAB.10.24	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 9$ - Miller	125
TAB.10.25	Famílias - $C(k, 1\dots, k, \dots 1, k)$ - $k = 2$ - Miller	125
TAB.10.26	Famílias - $C(k, 1\dots, k, \dots 1, k)$ - $k = 3$ - Miller	125
TAB.10.27	Famílias - $C(k, 1\dots, k, \dots 1, k)$ - $k = 4$ - Miller	126
TAB.10.28	Famílias - $C(k, 1\dots, k, \dots 1, k)$ - $k = 5$ - Miller	126
TAB.10.29	Famílias - $C(k, 1\dots, k, \dots 1, k)$ - $k = 6$ - Miller	127
TAB.10.30	Famílias - $C(k, 1\dots, k, \dots 1, k)$ - $k = 7$ - Miller	127
TAB.10.31	Famílias - $C(k, 1\dots, k, \dots 1, k)$ - $k = 8$ - Miller	128
TAB.10.32	Famílias - $C(k, 1\dots, k, \dots 1, k)$ - $k = 9$ - Miller	128
TAB.10.33	Famílias - $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 1$ - Miller	129
TAB.10.34	Famílias - $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 2$ - Miller	129
TAB.10.35	Famílias - $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 3$ - Miller	129
TAB.10.36	Famílias - $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 4$ - Miller	130
TAB.10.37	Famílias - $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 5$ - Miller	131
TAB.10.38	Famílias - $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 6$ - Miller	131
TAB.10.39	Famílias - $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 7$ - Miller	132
TAB.10.40	Famílias - $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 8$ - Miller	132
TAB.10.41	Famílias - $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 9$ - Miller	132
TAB.10.42	Famílias - $C(k, w, x, y, z)$ - Miller	133
TAB.10.43	Famílias - $C(k, z, k, z, k)$ - Miller	134
TAB.10.44	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 2$ - Mohar	135
TAB.10.45	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 3$ - Mohar	135
TAB.10.46	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 4$ - Mohar	135
TAB.10.47	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 5$ - Mohar	136
TAB.10.48	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 6$ - Mohar	136



TAB.10.49	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 7$ - Mohar	136
TAB.10.50	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 8$ - Mohar	137
TAB.10.51	Famílias - $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ - $k = 9$ - Mohar	137
TAB.10.52	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 2$ - Mohar	137
TAB.10.53	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 3$ - Mohar	138
TAB.10.54	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 4$ - Mohar	138
TAB.10.55	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 5$ - Mohar	138
TAB.10.56	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 6$ - Mohar	138
TAB.10.57	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 7$ - Mohar	139
TAB.10.58	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 8$ - Mohar	139
TAB.10.59	Famílias - $C(1, k, \dots, 1)$ - $k = 9$ - Mohar	139
TAB.10.60	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 2$ - Mohar	140
TAB.10.61	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 3$ - Mohar	140
TAB.10.62	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 4$ - Mohar	140
TAB.10.63	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 5$ - Mohar	141
TAB.10.64	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 6$ - Mohar	141
TAB.10.65	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 7$ - Mohar	141
TAB.10.66	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 8$ - Mohar	142
TAB.10.67	Famílias - $C(k, 1\dots 1, k)$ - $k = 9$ - Mohar	142
TAB.10.68	Famílias - $C(k, 1..k..1, k)$ - $k = 2$ - Mohar	142
TAB.10.69	Famílias - $C(k, 1..k..1, k)$ - $k = 3$ - Mohar	143
TAB.10.70	Famílias - $C(k, 1..k..1, k)$ - $k = 4$ - Mohar	143
TAB.10.71	Famílias - $C(k, 1..k..1, k)$ - $k = 5$ - Mohar	143
TAB.10.72	Famílias - $C(k, 1..k..1, k)$ - $k = 6$ - Mohar	144
TAB.10.73	Famílias - $C(k, 1..k..1, k)$ - $k = 7$ - Mohar	144
TAB.10.74	Famílias - $C(k, 1..k..1, k)$ - $k = 8$ - Mohar	145
TAB.10.75	Famílias - $C(k, 1..k..1, k)$ - $k = 9$ - Mohar	145
TAB.10.76	Famílias $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 1$ - Mohar	146
TAB.10.77	Famílias $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 2$ - Mohar	146
TAB.10.78	Famílias $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 3$ - Mohar	147
TAB.10.79	Famílias $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 4$ - Mohar	147
TAB.10.80	Famílias $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 5$ - Mohar	148
TAB.10.81	Famílias $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 6$ - Mohar	148

TAB.10.82 Famílias $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 7$ - Mohar	149
TAB.10.83 Famílias $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 8$ - Mohar	149
TAB.10.84 Famílias $C(k, \dots, k, \dots, k)$ - $k = 9$ - Mohar	150
TAB.10.85 Famílias - $C(k, z, k, z, k)$ - Mohar	151
TAB.10.86 Famílias - $C(k, w, x, y, z)$ - Mohar	152

## LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

### ABREVIATURAS

TEG	-	<i>Teoria Espectral dos Grafos</i>
CSP	-	<i>Constraint Satisfaction Problem</i>
VLSI	-	<i>Very-large-scale integration</i>
HEM	-	<i>Heurística Espectral de Mohar</i>
HE1	-	<i>Heurística Espectral 1</i>
IDE	-	<i>Integrated Development Environment</i>

## RESUMO

Neste trabalho serão apresentados resultados experimentais obtidos com a heurística espectral para resolver o problema de largura de banda (*bandwidth*) restrito à classe particular de grafos conhecida na literatura como "caterpillars". Caterpillars formam uma subfamília das árvores. O problema de largura de banda é NP-completo para grafos em geral. Porém, existem algoritmos polinomiais para resolver o problema de determinar a largura de banda em caterpillars proposto por Miller e outro por Assman para uma extensão da família de caterpillars. Juvan e Mohar definiram um procedimento aproximado para determinar a largura de banda de um grafo geral usando conceitos da teoria espectral, mais especificamente o vetor de Fiedler. Mostraremos resultados computacionais obtidos a partir das implementações dos algoritmos propostos por Miller e por Juvan e Mohar para casos particulares de caterpillar. A partir das conclusões obtidas dos resultados de comparação, será proposto a melhoria do algoritmo aproximado de Juvan e Mohar (Heurística 1) para caterpillars e para alguns supergrafos de caterpillars.

## ABSTRACT

This work presents experimental results the spectral heuristic for the bandwidth problem in caterpillars. Caterpillars are a special type of trees. The bandwidth problem is NP-complete for general graphs. However, polynomial algorithms exist for this problem when restricted to caterpillars propose by Miller and other by Assman to extension of caterpillars family. Juvan and Mohar defined an approximated procedure to determine the bandwidth of general graph by using concepts of spectral graph theory, more specifically the Fiedler's vector. We will show computational results obtained by the Juvan and Mohar approach compared with the exacts results obtained by Miller exact algorithm for particular cases of caterpillars. From the conclusions about spectral heuristic results, an improvement of the Juvan and Mohar heuristic (Heuristic 1) will be proposed for caterpillars and for certain supergraphs of caterpillars.

# 1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação será estudado um tipo de problema de layout em grafos.

O objetivo dos problemas de layout é encontrar uma rotulação dos vértices do grafo que otimize uma certa função definida a partir da rotulação. Com exemplos de problemas de layout temos: *Bandwidth*, *Min Linear Arrangement*, *Min-P Sum*, *Cutwidth*, *Modified Cut*, *Vertex Separation*, *Sum Cut*, *Edge Bisection*, *Vertex Bisection* e dentre outros (DIAZ et al., 2002), (MICHALLS e ROSEN, 1992). A maior parte dos problemas de layout em grafos são problemas NP-Completo. O problema de layout que será analisado nesta pesquisa será o problema de largura de banda (*Bandwidth*). Existem na literatura diversos resultados sobre o problema de largura de banda. No artigo (PAPADIMITRIOU, 1976) é provado que o problema em determinar a Largura de Banda para grafos em geral é um problema NP-Completo. Segundo (GAREY et al., 1978) para árvores com grau máximo 3 o problema também é NP-Completo.

Posteriormente foram propostas soluções deste problema para classes particulares de grafos: (MILLER, 1981) e (ASSMANN et al., 1981). O primeiro autor propõe um algoritmo que determina a largura de banda para uma classe particular de árvores (*caterpillars*) e o segundo apresenta um algoritmo para uma extensão desta família, os *caterpillars* com cabelos de comprimento máximo 2. Ambos algoritmos são polinomiais e exatos.

Na linha das soluções aproximadas, vários algoritmos foram propostos para resolver o problema de largura de banda (DIAZ et al., 2002), (LAI e WILLIAMS, 1997), (CORSO e ROMANI, 2001).

(JUVAN e MOHAR, 1992) definem um procedimento aproximado para determinar a largura de banda de um grafo qualquer usando conceitos da teoria espectral, mais especificamente o vetor de Fiedler.

## 1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVO

O problema de determinar largura de banda para grafos em geral é NP-Completo. Porém existem algoritmos polinomiais para resolver esse problema quando restrito a classes particulares de grafos. O objetivo deste trabalho é fazer uma análise dos resultados obtidos pela heurística espectral definida por (JUVAN e MOHAR, 1992). A heurística espectral de Mohar que será notada como *HEM*, é um algoritmo aproximado que pode ser usado para determinar a largura de banda de qualquer grafo.

Para analisar o comportamento de *HEM* foi escolhida a classe de grafos conhecida na literatura como caterpillars. O motivo desta escolha é aproveitar a existência de algoritmo exato para resolver o problema de determinar a largura de banda de caterpillars.

A partir da análise dos resultados do *HEM* para caterpillars quando comparados com os resultados exatos, será proposta uma modificação de *HEM* que chamaremos de *HE1*. A *HE1* melhora o resultado de largura de banda para caterpillars. Logo, serão testados outros grafos usando a *HE1* mostrando a melhora dos resultados obtidos quando comparados aos do *HEM*.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2 consiste da apresentação das definições básicas necessárias para compreensão da dissertação.

No Capítulo 3 será apresentado o estudo e análise dos algoritmos exatos encontrados na literatura para resolver o problema de largura de banda em caterpillars. Na Seção 3.1 será apresentado o algoritmo de Miller, sua complexidade, pseudocódigo e um exemplo da aplicação do mesmo. Na Seção 3.2, será apresentado o algoritmo de Assmann, o pseudocódigo e um exemplo da aplicação do mesmo.

No Capítulo 4 será introduzido o algoritmo aproximado proposto por Mohar e Juvan, *HEM*, e também será apresentado um exemplo da aplicação. O Capítulo 5 trata da estrutura criada para implementação dos algoritmos. Esta estrutura consiste em três módulos: Gerador de grafos, Estrutura de dados e Algoritmos implementados. Os três módulos integrados resultam numa ferramenta para automatização dos experimentos. No Capítulo 6 serão mostrados os testes realizados e a comparação dos resultados obtidos pelos algoritmos de Miller e *HEM* para caterpillars. Neste mesmo capítulo identificamos alguns

padrões de comportamento para classes de caterpillars utilizando a heurística espectral. Foram escolhidas algumas famílias de caterpillars para a análise e apresentação de resultados. Outros testes com famílias de caterpillars podem ser encontrados no Anexo. O Capítulo 7 apresentará uma modificação da *HEM* que melhora os resultados obtidos pela heurística espectral para caterpillars. Neste capítulo, a heurística proposta é testada em outras famílias de grafos que são próximas dos caterpillars.

E por fim, o Capítulo 8 traz a conclusão e propostas para trabalhos futuros.



## 2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo serão definidos os conceitos principais para o desenvolvimento deste trabalho. Na Seção 2.1 serão apresentados definições básicas de teoria dos grafos. Na Seção 2.2 será definido o problema de largura de banda, na Seção 2.3 será abordada a classe de grafos denominada caterpillars e na Seção 2.4 mostraremos uma extensão da família dos caterpillars, apresentado os caterpillars com cabelos de comprimento máximo 2.

Por fim, na Seção 2.5, serão apresentadas definições básicas sobre teoria espectral de grafos.

### 2.1 CONCEITOS BÁSICOS EM GRAFOS

Seja  $G = (V, E)$  um grafo onde  $V$  é um conjunto finito não-vazio e  $E$  é um conjunto de pares não-ordenados de elementos distintos de  $V$  (SZWARCFITER, 1983). Os elementos de  $V$  são os vértices e os  $E$  são arestas de  $G$ , onde cada aresta  $e \in E$  será denotada pelo par de vértices  $e = (v, w)$ . Se  $(v, w)$  é aresta de  $G = (V, E)$  então  $v$  é adjacente a  $w$  e  $w$  é adjacente a  $v$ .

Define-se *grau* de um vértice  $v \in V$  como sendo o número de vértices adjacentes a  $v$ .

Um *subgrafo* de  $G$  é um grafo cujo conjunto dos vértices é um subconjunto do conjunto de vértices de  $G$  e cujo conjunto de arestas é um subconjunto do conjunto de arestas de  $G$ .

Denomina-se *subgrafo gerador* de um grafo  $G_1 = (V_1, E_1)$  a um subgrafo  $G_2 = (V_2, E_2)$  de  $G_1$  se  $V_1 = V_2$ .

Um *passeio* pode ser definido como uma seqüência de vértices  $v_1, \dots, v_k$  tal que  $(v_j, v_{j+1}) \in E$  em que  $1 \leq j < k - 1$ . Um caminho é um passeio que não admite repetição de vértices. *Ciclo* é um passeio fechado caminho  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ , sendo  $v_1, \dots, v_k$  um caminho,  $v_1 = v_{k+1}$  e  $k \geq 3$ .

Se for possível estabelecer um caminho de qualquer vértice para qualquer outro vértice de um grafo, diz-se que o grafo é *conexo*.

Um *Componente conexo* de  $G$  é um subgrafo conexo maximal de  $G$ . Se um grafo não

possui ciclos é *acíclico*. Uma árvore é um grafo acíclico e conexo. Uma *folha* é um vértice de grau 1.

## 2.2 LARGURA DE BANDA

Na Subseção 2.2.1 será definido o conceito de largura de banda de um grafo. Em seqüência, a Subseção 2.2.2 apresenta um exemplo da determinação da largura de banda de um grafo. Na Subseção 2.2.3 mostraremos uma revisão da literatura sobre o problema abordado e, por fim, algumas aplicações deste problema serão vistas na Subseção 2.2.4.

### 2.2.1 DEFINIÇÃO

Seja  $G = (V, E)$  um grafo não direcionado, sem laços e arestas múltiplas, onde  $E$  é o conjunto de arestas e  $V$  o conjunto de vértices. Notamos  $|V| = n$  e  $|E| = m$ .

Seja  $f$  uma função injetora,  $f : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , chamada de função de rotulação.

Dado um grafo  $G$  podemos obter  $n!$  funções de rotulação diferentes. Sendo assim, calcularemos para cada uma das  $n!$  possíveis funções de rotulação  $f$ , a largura de banda da mesma,  $b_f(G)$ . Dentre todos os valores achados, a largura de banda do grafo  $G$  é obtida através do valor mínimo de  $b_f(G)$ . Ou seja,

$$b_f(G) = \max \{|f(u) - f(v)|, (u, v) \in E\} \text{ e}$$

$$b(G) = \min_f b_f(G)$$

### 2.2.2 EXEMPLO

Seja  $G = (V, E)$  o grafo apresentado na Figura 2.1, onde  $V = \{a, b, c, d\}$ ,  $E = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$ ,  $|V| = 4$  e  $|E| = 5$ :

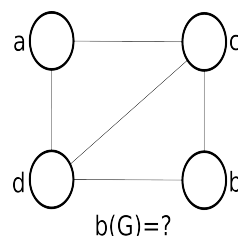


FIG. 2.1: Grafo  $G$

Para determinar a largura de banda do grafo  $G$ , é necessário determinar a largura de banda de cada possível função de rotulação correspondente a este grafo. Para este exemplo, 24 funções de rotulação diferentes são mostradas na Figura 2.2.

Após determinada a largura de banda de cada uma das 24 funções de rotulação deste

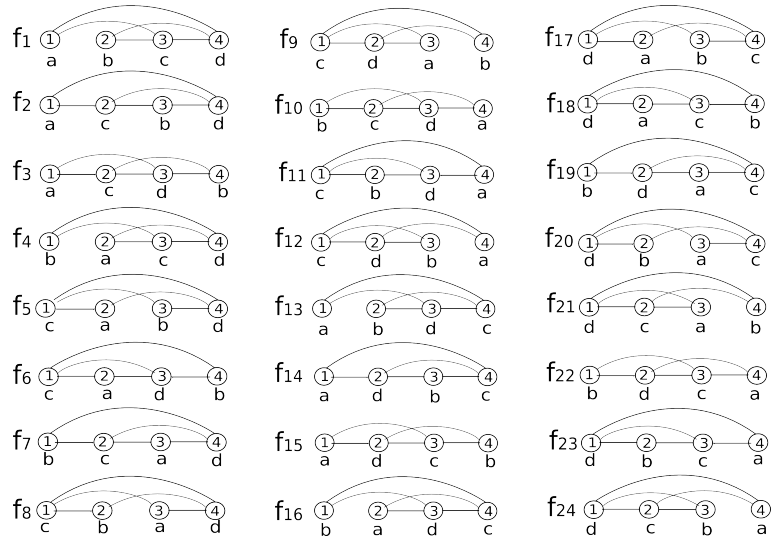


FIG. 2.2: Possíveis rotulações do grafo  $G$  da Figura 2.1

grafo, escolhe-se o menor valor. No exemplo, o valor obtido para a largura de banda do grafo é igual a 2. A Figura 2.3 mostra o resultado da largura de banda do grafo da Figura 2.1 e uma das funções de rotulação ( $f_{15}$ ) cujo valor da largura de banda é igual a 2. Nas Figuras 2.2 e 2.3, os grafos rotulados são desenhados com vértices numerados segundo a função de rotulação correspondente.

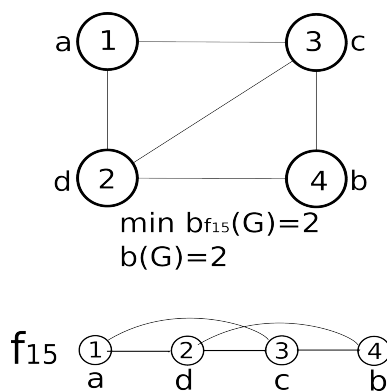


FIG. 2.3: Largura de banda do grafo  $G$

### 2.2.3 COMPLEXIDADE DO PROBLEMA

Segundo (PAPADIMITRIOU, 1976) o problema em determinar a largura de banda para grafos em geral é um problema NP-Completo. O artigo (GAREY et al., 1978) mostra que o problema é NP-Completo mesmo restrito para árvores com vértices de grau no máximo 3.

Dado um grafo  $G$  qualquer, (SAXE, 1980) propôs um algoritmo utilizando a programação dinâmica que resolve o problema. Para qualquer  $k$  fixo de entrada pode-se determinar se  $b(G) \leq k$  em tempo  $O(2^{nk})$ .

Posteriormente, (MILLER, 1981) desenvolveu um algoritmo exato e polinomial, para resolver o problema de largura de banda para um subconjunto de árvores que são os caterpillars. Complementando este estudo, (ASSMANN et al., 1981) propôs um algoritmo polinomial para uma extensão dos caterpillars, que são os caterpillars com cabelos de comprimento máximo 2.

Na literatura podem ser encontrados algoritmos aproximados para o problema de largura de banda para classes específicas de grafos e para grafos em geral. O artigo (LAI e WILLIAMS, 1997) traz várias referências sobre algoritmos aproximados. Dentre estes, a heurística espectral desenvolvida por (JUVAN e MOHAR, 1992), utiliza a teoria espectral para desenvolver o algoritmo aproximado.

### 2.2.4 APLICAÇÕES

Existem aplicações para o problema de largura de banda em diversas áreas. Algumas dessas aplicações estão citadas em (LAI e WILLIAMS, 1997) e são descritas nas Subseções a seguir.

Na Subseção 2.2.4.1 apresentaremos uma aplicação para soluções de equações lineares usando matrizes esparsas. Abordaremos problemas sobre Layout VLSI na Subseção 2.2.4.2 e sobre o problema em redes de interconexão, na Subseção 2.2.4.3.

### 2.2.4.1 RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES LINEARES

Esta aplicação trata do problema de resolver sistemas de equações lineares. Considere um conjunto de equações lineares definidas pelo sistema  $Ax = b$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ . Supondo  $A$  uma matriz esparsa, ou seja, o número de elementos iguais a zero é muito maior que o número total de elementos não-nulos da matriz. Nesta situação pode ser reduzido o número de operações necessárias para resolver o sistema e armazenar de maneira otimizada os elementos diferentes de zero da matriz  $A$ .

A idéia para reduzir o espaço de armazenamento da matriz esparsa  $A$  é permutar linhas e colunas de matriz de maneira tal que seja obtida uma matriz banda, com elementos diferentes de zero somente na diagonal principal e nas diagonais próximas da matriz diagonal.

Podemos relacionar esse problema com o problema de determinar a largura de banda de um grafo. Seja  $G$  um grafo não direcionado e seja  $A$  sua matriz de adjacência.

Encontrar uma função de rotulação dos vértices de  $G$  ( $f$ ), de maneira tal que o  $\max |f(v_i) - f(v_j)|$  seja mínimo para todo  $(v_i, v_j)$ , produzindo uma matriz cujos elementos diferentes de zero se encontram próximos da diagonal principal.

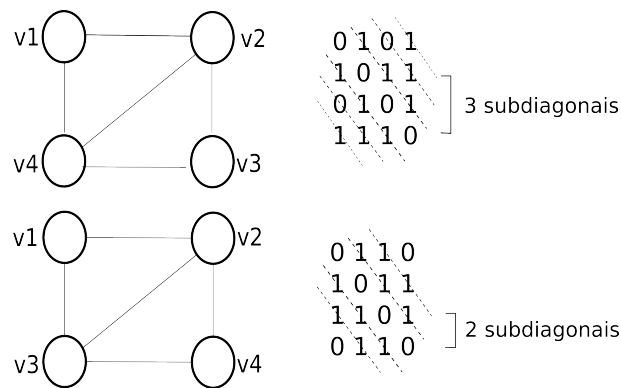


FIG. 2.4: *Largura de banda do grafo  $G$*

O exemplo da Figura 2.4, é baseado no exemplo do (MILLER et al., 1991), e mostra que a maneira como é estabelecido a rotulação para os vértices do grafo, resultará em representação do grafo em uma matriz de adjacência diferente.

Observar que na primeira rotulação da vértice do grafo, a matriz terá 3 subdiagonais não nulas próximas à diagonal principal. A segunda rotulação resulta em uma matriz com unicamente 2 subdiagonais não nulas próximas à diagonal principal.

Pelo fato dos rótulos de  $v_3$  e  $v_4$  terem sido trocados o número de subdiagonais não nulas de matriz de adjacência diminuiu. Portanto determinar a largura de banda de um grafo permite compactar a representação da matriz de adjacência e otimizar o armazenamento desta matriz em memória.

#### 2.2.4.2 LAYOUT VLSI

Esta aplicação destina-se ao problema conhecido na literatura como *Layout VLSI* que consiste em posicionar os módulos (Circuitos Integrados) em uma posição otimizada e especificar como os circuitos serão organizados. O problema consiste de dois pontos, o primeiro de localização, que consiste em posicionar os módulos na placa. O segundo ocorre após os módulos terem sido situados e como os circuitos serão ligados de maneira a evitar que os circuitos se interfiram um ao outro.

Podemos associar o circuito Layout VLSI com um grafo, assumindo que esse grafo terá graus limitados. Os vértices representam os módulos e as arestas são os barramentos.

O problema consiste em posicionar os módulos de maneira que o número total do tamanho de barramentos seja minimizado. Isto é possível criando caminhos verticais e horizontais, respeitando a função de distância  $d_{ij} = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|$  que mede o tamanho real dos barramentos entre dois pinos nas posições  $(x_i, y_i)$  e  $(x_j, y_j)$ , e sendo  $c_{ij}$  o número de barramentos entre os módulos. A solução deste problema consiste está em encontrar um posicionamento de módulos que minimize a função  $\sum_{i \neq j} c_{ij} d_{ij}$ . Este problema é equivalente a encontrar a rotulação dos vértices do grafo que minimize  $\sum_{uv \in E} |f(u) - f(v)| \cdot C_{i,j}$ . A largura de banda mede a máxima distância entre os módulos. Os sinais transmitidos não se propagam instantaneamente através dos barramentos e quanto maior for o barramento, maior o atraso do sinal. Então, minimizando a largura de banda podemos minimizar o atraso de transmissão de sinais entre os módulos.

### 2.2.4.3 INTERCONEXÕES DE REDES

Nesta aplicação consideramos a representação de uma rede de computadores através de um grafo  $G$ , tal que cada vértice de  $G$  represente um processador e cada aresta  $(u, v) \in E$ , uma ligação direta entre dois processadores  $u$  e  $v$ .

A interconexão de redes modela processos de computação paralela, e nesta rede cada processador recebe partes de uma entrada e existe um programa mestre que controla todos os processadores, especificando qual deles irá executar a próxima tarefa.

Quando terminar o tempo de execução de um processo, cada processador passa o resultado obtido para um de seus vizinhos, sendo seu vizinho aquele que está ligado por um link.

O problema citado por (MILLER et al., 1991) considera um dado problema  $p$  a ser resolvido em uma interconexão de uma rede  $G$ , supondo que a rede  $G$  não está disponível, e que existe uma outra rede  $H$  disponível. Podemos então simular o programa  $g$  que seria executado pela rede  $G$  para resolver o problema por um programa  $h$  que será executado na  $H$  resolvendo o mesmo problema. Essa simulação de  $G$  em  $H$  é uma maneira de descrever como usar o programa  $g$  como guia de modo que a rede  $H$  possa efetuar as mesmas tarefas que a rede  $G$ , designando aos seus processadores as mesmas tarefas que eram designadas para os processadores em  $G$ .

Esta simulação ocorrerá através de uma função injetora  $f$  entre os conjuntos de processadores de  $G$  em relação aos processadores de  $H$  ( $f : G \rightarrow H$ ). Desta forma cada execução de um processo do programa  $g$  em um processador  $x$  qualquer em  $G$ , será associada por um processador  $f(x)$  correspondente em  $H$ . Vale ressaltar que cada comunicação de  $g$  entre processadores vizinhos  $x_i$  e  $x_j$  é associada através de  $f(x_i)$  e  $f(x_j)$  em  $H$ .

A eficiência da relação entre  $G$  e  $H$  pode ser medida através do tempo de atraso (*delay factor*). Se  $t$  é o comprimento da aresta entre os processadores vizinhos  $x_i$  e  $x_j$ , deseja-se encontrar o componente da aresta entre  $f(x_i)$  e  $f(x_j)$  em  $H$  que seja o menor possível.

A função de rotulação que determina a largura de banda de  $G$  resulta no melhor mapeamento possível entre os processadores de ambas as redes.

### 2.3 CATERPILLARS

Caterpillars são uma classe especial de árvores. Seja uma árvore  $C$  com pelo menos 3 vértices, se ao eliminar todas as folhas obtemos um caminho de comprimento maior ou igual a 0 então  $C$  é um **caterpillar** (HARARY e SCHWENK, 1973).

Define-se o **corpo** do caterpillar como o grafo resultante após a eliminação de todas as folhas. Os **cabelos** são caminhos de comprimento 1 que conectam uma folha a um vértice do corpo do caterpillar. O tamanho do corpo é notado por  $p$ .

As arestas do caterpillar  $C$  podem ser classificadas em dois conjuntos não vazios disjuntos, um contendo as arestas que ligam vértices do corpo e outro contendo todas as arestas que fazem parte dos cabelos de  $C$ .

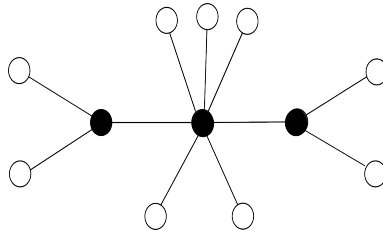


FIG. 2.5: *Caterpillar 1*

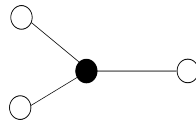


FIG. 2.6: *Caterpillar 2*

As Figuras 2.5 e 2.6 apresentam dois exemplos de árvores que verificam a definição de caterpillar. Os vértices desenhados na cor branca são as folhas (extremidades dos Cabelos) desta árvore. Ao remover as folhas de  $C$  obtêm-se um caminho (Corpo) que contém os vértices representados na cor preta.

Um **subcaterpillar** é definido como um subgrafo de um caterpillar que verifica a definição de caterpillar.



## 2.4 CATERPILLARS COM CABELOS DE COMPRIMENTO MÁXIMO 2

Segundo (ASSMANN et al., 1981) os caterpillars com cabelos de comprimento máximo 2, são uma extensão da família dos caterpillars que se caracteriza por ter, para qualquer vértice do corpo do caterpillar, caminhos de tamanho no máximo 2 conectados com ele. A Figura 2.7 mostra um caterpillar com cabelos de comprimento máximo 2, cujos vértices do corpo são desenhados na cor preta e os vértices desenhados na cor branca pertencem aos caminhos de comprimento 1 ou 2 ligados ao corpo.

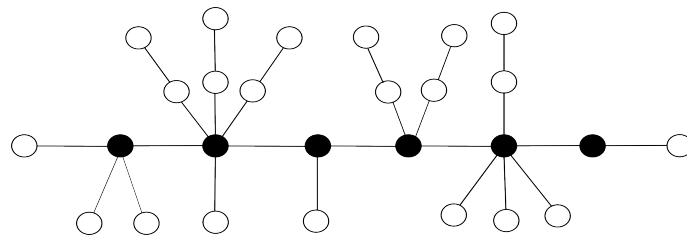


FIG. 2.7: *Caterpillar com cabelos de comprimento 1 e 2*

A Figura 2.8 mostra o grafo obtido ao remover do caterpillar com cabelos de comprimento máximo 2 da Figura 2.7 todas as folhas.

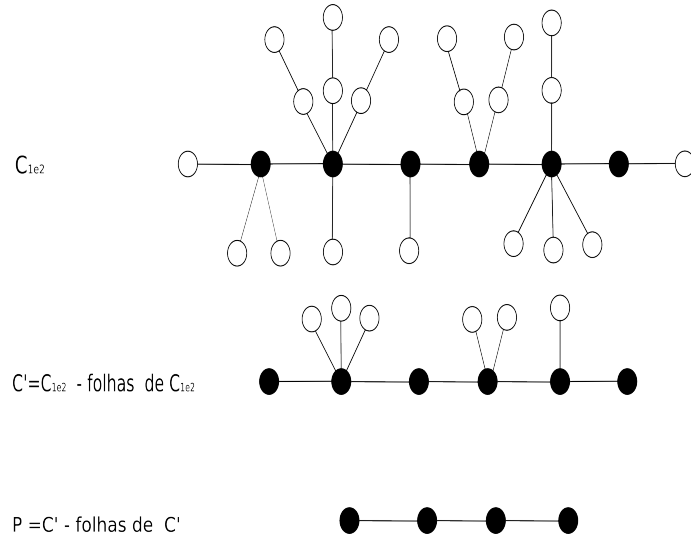


FIG. 2.8: *Corpo Estendido de  $C_{1e2}$*

Seja  $T$  uma árvore,  $T$  é um **lobster** se o grafo resultante ao remover todas as folhas de  $T$  é um caterpillar (GALLIAN, 2008). Se  $C_{1e2}$  é um caterpillar com cabelos de comprimento máximo 2, então o grafo obtido ao remover as folhas de  $C_{1e2}$  é um caterpillar, portanto todo caterpillar com cabelos de comprimento máximo 2 é um lobster.

A recíproca não é válida. A Figura 2.9 mostra uma árvore  $T$  tal que  $T - \text{folhas}$  é um caterpillar mas  $T$  não é um caterpillar com cabelos de comprimento máximo 2.

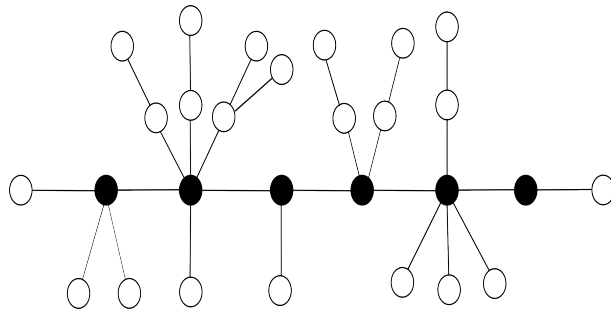


FIG. 2.9: *Não é caterpillar com cabelos de comprimento máximo 2*

Podemos observar que em um caterpillar com cabelos de comprimento máximo 2, os vértices do corpo são os únicos e podem possuir grau maior ou igual a 3.

## 2.5 TEORIA ESPECTRAL

Nesta seção serão apresentadas definições básicas da teoria espectral dos grafos (TEG). Segundo (GROSS e YELLEN, 2004) e (ABREU, 2005), o estudo da TEG caracteriza-se por obter relações entre as propriedades algébricas de matrizes associadas a um grafo e as propriedades estruturais do mesmo. A tradução das propriedades estruturais em propriedades algébricas pode ocorrer de diversas maneiras. Dado um grafo  $G$ , representado por uma matriz adequada, pode ser determinado o polinômio característico dessa matriz, e obter as raízes deste polinômio. Essas raízes, são os autovalores da matriz do grafo, que formam o espectro do grafo associada a matriz.

Na Subseção 2.5.1 serão definidas propriedades básicas de álgebra linear e a notação utilizada neste texto.

### 2.5.1 PROPRIEDADES BÁSICAS

A **matriz de adjacência** de um grafo  $G$  é uma matriz quadrada  $A$  de dimensão  $n \times n$ , com linhas e colunas correspondendo aos vértices.

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ se } (v_i, v_j) \in E, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

O **polinômio característico** da matriz de adjacência  $A$  de um grafo  $G$  é o determinante  $\det(\mu I - A)$ .

Os **autovalores do grafo** são as raízes do polinômio característico.

A **multiplicidade algébrica** para o autovalor  $\mu$  é o número de vezes que este valor ocorre como raiz do polinômio característico (multiplicidade da raiz).

- Denotamos  $\mu_1(G), \mu_2(G), \dots, \mu_n(G)$  os autovalores da matriz de adjacência do grafo  $G$  em ordem não decrescente ( $\mu_i$  podem ser iguais).

O **espectro de um grafo** é o conjunto de seus autovalores. Para o grafo com  $n$  vértices, existem  $n$  autovalores. Denotamos  $S_p(G) = (\mu_1(G), \mu_2(G)), \dots, \mu_n(G)$ .

A **matriz diagonal**  $D(G)$ , é uma matriz quadrada cujo os elementos fora da diagonal são iguais a zero e os elementos da diagonal principal iguais a  $d(v)$ , sendo  $d(v)$  o grau do vértice  $v \in V$ .

A **matriz Laplaciana** é matriz obtida pela subtração da matriz diagonal  $D(G)$  e a matriz de adjacência do grafo  $A(G)$  ou seja,

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

$$L(G) = \begin{cases} -1, & \text{se } (v_i, v_j) \in E, \\ d(v_i), & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } (v_i, v_j) \notin E \text{ e } i \neq j \end{cases}$$

A **multiplicidade algébrica** para o autovalor  $\lambda$  é o número de vezes que este valor ocorre como raiz do polinômio característico da matriz Laplaciana.

- Denotamos  $\lambda_1(G), \lambda_2(G), \dots, \lambda_n(G)$  os autovalores da matriz Laplaciana do grafo  $G$  em ordem não decrescente. ( $\lambda_i$  podem ser iguais ).

O **espectro da matriz Laplaciana de um grafo** é o seu conjunto de autovalores. Para um grafo com  $n$  vértices, existem  $n$  autovalores.  $S_{p_L}(G) = (\lambda_1(G), \lambda_2(G), \dots, \lambda_n(G))$

A **matriz semidefinida positiva**  $M$  é uma matriz simétrica tal que  $x^T M x \geq 0$  para todos os vetores  $x \in \mathfrak{R}^n$ .

Pode ser provado que se  $M$  é matriz simétrica e semidefinida positiva então todos os seus autovalores são números reais maiores ou iguais a zero.

## 3 ALGORITMOS EXATOS

Neste capítulo apresentaremos dois algoritmos exatos encontrados na literatura para resolver o problema de largura de banda tendo como entrada o grafo caterpillar.

Na Seção 3.1 mostraremos o algoritmo exato desenvolvido por (MILLER, 1981) que propõe determinar a largura de banda para caterpillars. Na Seção 3.2 apresentaremos o algoritmo também exato proposto por (ASSMANN et al., 1981), neste caso, para caterpillars com cabelos de comprimento máximo 2.

### 3.1 ALGORITMO DE MILLER

#### 3.1.1 INTRODUÇÃO

O artigo (MILLER, 1981) apresenta um algoritmo com complexidade  $O(pn)$  para determinar a largura de banda de um caterpillar com  $n$  vértices, sendo  $p$  o número de vértices no corpo e cada vértice do corpo com pelo menos 1 cabelo. O algoritmo funciona de maneira construtiva. A cada iteração são determinados os rótulos de um subconjunto de vértices do caterpillar, seguindo a ordem dos vértices ao percorrer o corpo e os cabelos ligados neles. (MILLER, 1981) apresenta uma notação para a representação do caterpillar que será introduzida na Subseção 3.1.2. Na Subseção 3.1.3 descreveremos o pseudocódigo do algoritmo de Miller. E por fim, na Subseção 3.1.4, mostraremos um exemplo do algoritmo.

#### 3.1.2 DESCRIÇÃO DA ENTRADA

A notação estabelecida por (MILLER, 1981) caracteriza de maneira formal o caterpillar. Esta notação representa o caterpillar através de suas partes, corpo e cabelos, e foi definida da seguinte maneira. Seja  $C(m_1, m_2, \dots, m_p)$  um caterpillar cujo corpo é um caminho formado por  $p$  vértices; cada vértice do corpo tem associado um número  $m_i, 1 \leq i \leq p$ , que representa o número de cabelos ligados nele.

No exemplo da Figura 3.1 o corpo possui 3 vértices, com isso a representação do caterpillar terá parâmetros:  $C(m_1, m_2, m_3)$ . Os valores  $m_1, m_2, m_3$  serão determinados de acordo com a quantidade de cabelos que existem para cada vértice do corpo. Então seguindo a

notação anterior, o caterpillar da Figura 3.1 será representado por  $C(2, 5, 2)$ .

(MILLER, 1981) restringe os caterpillars de entrada do algoritmo, proibindo a existência de vértices no corpo do caterpillar que não possuam cabelos ( $m_i \geq 1, 1 \leq i \leq k$ ). Todos os vértices do corpo tem pelo menos um cabelo e a quantidade de cabelos total maior ou igual 3, segundo a premissa de (MILLER, 1981).

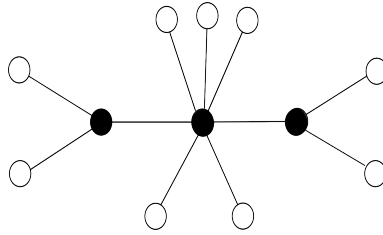


FIG. 3.1: *Caterpillar*  $C(2, 5, 2)$

### 3.1.3 DESCRIÇÃO

Apresentaremos a seguir os passos que descrevem o algoritmo de Miller.

Inicialmente o algoritmo recebe como entrada um caterpillar  $C(m_1, m_2, \dots, m_p)$ .

As variáveis e estruturas utilizadas pelo algoritmo são as seguintes. A matriz  $g_{p \times p}$  contém, os rótulos dos vértices do corpo do caterpillar, obtidos durante a execução do algoritmo.

A matriz auxiliar  $h_{p \times p}$  é a matriz de resultados parciais dos rótulos do corpo.

Os vetores são:  $g_{aux_{p \times p}}$ , responsável por armazenar as matrizes auxiliares de resultados parciais,  $f_p$  responsável por armazenar a largura de banda parcial a cada iteração, o vetor  $l_p$  é auxiliar do vetor  $f_p$  que também armazena os resultados da largura de banda parcial e o vetor  $S_p$  é responsável pelo armazenamento do número de vértices dos subcaterpillars que estão sendo utilizados a cada iteração do algoritmo.

O vetor  $c_p$  recebe a quantidade de cabelos de cada vértice do corpo em cada posição do vetor.

As variáveis são: **larguraBanda**, que armazena o resultado final da largura de banda e **p** que recebe o valor do tamanho do corpo.

**1º passo** (linhas de 1 a 5), neste passo ocorre a verificação da restrição:  $g[i - 1][i - 1] + f[i - 1] = S[i - 1]$ . Tendo como objetivo verificar a igualdade entre o rótulo temporário do corpo do caterpillar na matriz  $g$  somado com o valor de largura de banda parcial armazenado no vetor  $f$  e comparando com o número de vértices do subcaterpillar especi-

ficado pelo vetor  $S$ . Sendo a restrição válida, o rótulo para o vértice do corpo deve ser atualizado.

Com a validação da restrição da linha 1 a matriz auxiliar  $h$  receber um novo rótulo obtido pela função **Min**, determinando um mínimo entre dois valores passados por parâmetros. Sendo esses valores o número de vértices do subcaterpillar em  $S[1]$  e um rótulo parcial de  $g[i-1][1] + 1$  ou  $S[j]$  e  $h[i-1][j-1] + 1 + f[i-1]$ . Por fim neste passo, atualizaremos o valor do vetor auxiliar  $l$  para receber a atualização largura de banda parcial somada ao valor em uma unidade.

O **2º passo** (linhas 6 a 10) é executado quando a restrição do **1º passo** não é verificado. Neste caso podemos constatar que o rótulo adquirido é um valor adequado para rotulação do corpo, não precisando ser atualizado.

Isso significa que o valor da soma de  $g[i-1][i-1] + f[i-1]$  é maior que o número de vértices do subcaterpillar especificado pelo vetor  $S$ , respeitando  $g[i-1][i-1] + f[i-1] > S[i-1]$  a restrição do **2º passo**.

Com isso, neste passo, não é necessário atualizar a matriz  $g$  (matriz responsável pelos rótulos finais do corpo do caterpillar).

O vetor auxiliar  $l$  recebe de  $f$  o valor atual da largura de banda parcial e a matriz auxiliar  $h$  recebe os valores dos rótulos de  $g$ .

Pode-se caracterizar o **1º** e **2º passo** pela soma do rótulo e largura de banda parciais, com o intuito de verificar se é necessário a atualização por um rótulo mais adequado.

O **3º passo** (linhas 11 até 14) verifica a seguinte restrição:  $S[i] - (h[i-1][i-1] + l[i-1]) \leq l[i-1]$  (somar o rótulo parcial em  $h$  e a largura de banda parcial em  $l$  e subtrair pelo o número de vértices do subcaterpillar especificado por  $S$ ). Se o resultado da expressão for menor igual a largura de banda, então armazenamos os valores da matriz  $h$  em uma matriz contida na posição inicial do *gaux*. Sendo o *gaux* um vetor de matrizes auxiliares. No **4º passo** (linhas 15 até 24), ocorre a atualização do vetor *gaux* com valores da matriz auxiliar  $h$ , e com valores das matrizes nas posições anteriores ao do vetor *gaux* no momento atual. Estes procedimento somente ocorre quando a restrição  $S[i] - (h[i-1][i-1] + l[i-1]) > l[i-1]$  é válida.

No **5º passo** (linhas 25 até 31), são construídos os resultados finais e os rótulos a serem armazenados na matriz  $g$ . Esta matriz recebe no final de todas as iterações os rótulos ótimos do corpo do caterpillar.

---

Algoritmo de Miller	
Entrada:	$C(m_1, m_2, \dots, m_p)$ Saída: $b(G)$
Inicialização:	$l[0] \leftarrow \frac{m_1}{2}$
	$f[1] \leftarrow \frac{m_1}{2}$
	$gaux[0].Mat[1][1] \leftarrow 1 + \frac{m_1}{2}$
	$gaux[1][1] \leftarrow 1 + \frac{m_1}{2}$
	$i = 1$

---

0	Enquanto( $i \leq p$ )
1	Se $((g[i-1][i-1] + f[i-1]) = S[i-1])$
2	$h[i-1][1] \leftarrow \text{Min}((g[i-1][1] + 1), S[1])$
3	Para ( $j \leftarrow 2$ até $i-1$ ) faça
4	$h[i-1][j] \leftarrow \text{Min}((h[i-1][j-1] + 1 + f[i-1]), S[j])$
5	$l[i-1] \leftarrow f[i-1] + 1$
6	Senão
7	Se $((g[i-1][i-1] + f[i-1]) > S[i-1])$
8	$l[i-1] \leftarrow f[i-1]$
9	Para ( $j \leftarrow 1$ até $i-1$ ) faça
10	$h[i-1][j] \leftarrow g[i-1][j]$
11	Se $((S[i] - (h[i-1][i-1] + l[i-1])) \leq (l[i-1]))$
12	$gaux[0].Mat[i][i] \leftarrow \text{Min}((h[i-1][i-1] + l[i-1]), S[i])$
13	Para ( $j \leftarrow 1$ até $i-1$ ) faça
14	$gaux[0].Mat[i][j] \leftarrow h[i-1][j]$
15	Senão
16	Se $((S[i-1] - (h[i-1][i-1] + l[i-1])) > (l[i-1]))$
17	$gaux[0].Mat[i][i] \leftarrow h[i-1][i-1] + l[i-1]$
19	Para ( $j \leftarrow 1$ até $i-1$ ) faça
20	$gaux[0].Mat[i][j] \leftarrow h[i-1][j]$
21	Para ( $t \leftarrow 1$ até $i-1$ ) faça
22	$gaux[t].Mat[i][1] \leftarrow \text{Min}((gaux[t-1].Mat[i][1] + 1), S[1])$
23	Para ( $j \leftarrow 2$ até $i$ ) faça
24	$gaux[t].Mat[i][j] \leftarrow \text{Min}((gaux[t].Mat[i][j-1] + l[i-1] + t), S[j])$
25	Enquanto( $si \leq (i-1)$ )
26	Se $((S[i] - gaux[si].Mat[i][i]) \leq (l[i-1] + si))$
27	Para ( $j \leftarrow 1$ até $i$ ) faça
28	$g[i][j] \leftarrow gaux[si].Mat[i][j]$
29	$f[i] \leftarrow l[i-1] + si$
30	$LarguraBanda \leftarrow f[i]$
31	$si = si + 1$

---

Concluindo esta seção, podemos resumir o objetivo de cada passo do algoritmo da seguinte maneira.

O **1º passo** atualiza o rótulo de um vértice do corpo, caso seja possível. No **2º passo** são realizados cópias de valores entre estruturas auxiliares para o andamento do algoritmo.

O **3º passo** mantém os valores armazenados em matrizes auxiliares em um vetor identificando os rótulos parciais com a iteração correspondente.

No **4º passo** é atualizado o vetor do **3º passo**.

No **5º passo** a matriz  $g$  de resultados recebe valores finais dos rótulos. Esses valores são



adquiridos com a manipulação do vetor de matrizes, manipulados no **3º** e **4º** passo.

### 3.1.4 EXEMPLO

O algoritmo de Miller produz como saída uma rotulação dos vértices do corpo que determina a largura de banda do caterpillar. Estes rótulos se encontram armazenados na  $p$ -ésima linha da matriz  $g$ .

Apresentaremos um exemplo da construção da função de rotulação do caterpillar da Figura 3.1 obtido pelo algoritmo de Miller.

O algoritmo constrói a rotulação dos vértices do corpo do caterpillar, isto acontece seguindo os passos descritos na Subseção 3.1.3. As Figuras 3.2 e 3.3 mostram os valores de rótulos atribuídos a cada iteração do algoritmo para os vértices do corpo.

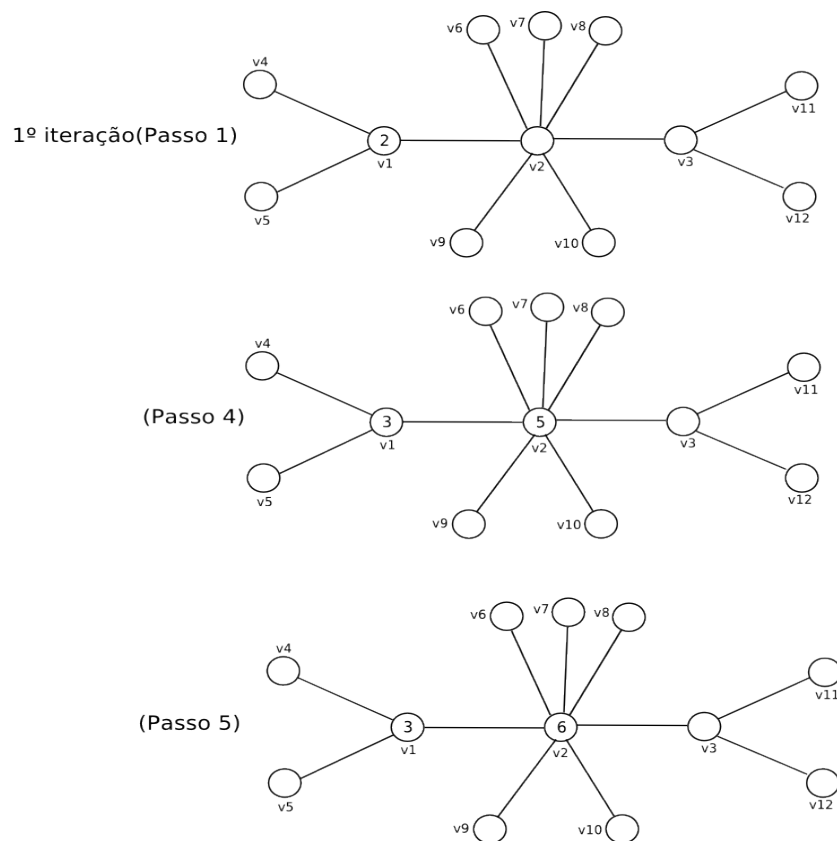


FIG. 3.2: 1ª Iteração do algoritmo de Miller para  $C(2, 5, 2)$

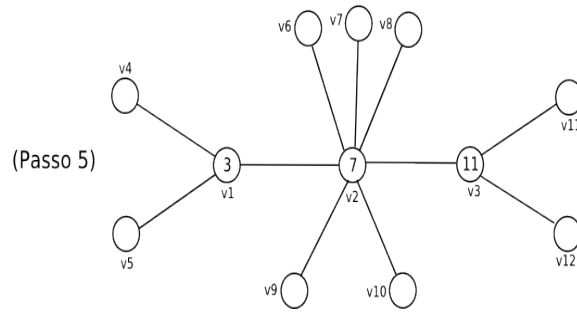
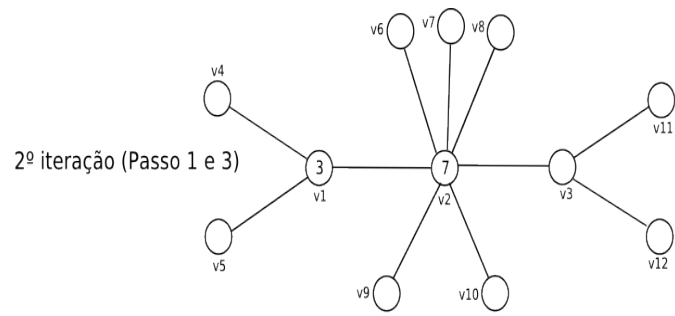


FIG. 3.3: 2ª Iteração do algoritmo de Miller para  $C(2, 5, 2)$

Complementado a rotulação dos vértices do corpo dado pelo algoritmo de Miller propusemos um tratamento adicional à saída. Esta contribuição consiste em rotular todos os cabelos do caterpillar. Apresentaremos um exemplo da construção da rotulação dos vértices do caterpillar, a partir dos rótulos 3, 7 e 11 obtidos pelo algoritmo para o caterpillar da Figura 3.1.

Rotularemos os vértices dos cabelos respeitando os rótulos disponíveis e a ordem destes vértices com respeito aos vértices do corpo. Se um vértice do corpo recebe um rótulo  $n_i$ , então para rotular os cabelos ligados a ele, é necessário que se respeite um intervalo dos rótulos a serem utilizados. Este intervalo começa com valores de 1 até  $n_i - 1$ . Se a quantidade de rótulos for insuficiente, considere outro intervalo entre os números  $n_1 + 1$  e  $n_2 - 1$ , onde  $n_2$  é o rótulo atribuído ao vértice consecutivo no corpo do vértice rotulado  $n_1$ .

Dado o caterpillar da Figura 3.1 como entrada, o algoritmo de Miller obteve os rótulos 3, 7, 11 para os vértices do corpo. Usando os rótulos do corpo, podemos rotular os vértices dos cabelos do caterpillar seguindo a idéia anterior. Iniciamos o exemplo rotulando com número 3, o primeiro vértice do corpo ( $v_1$ ). Devemos então determinar um intervalo de rótulos possíveis de 1 até 2 para os cabelos correspondentes ao vértice  $v_1$ . Neste caso o vértice  $v_1$  de rótulo 3, só tem dois cabelos ligados a ele. Sendo assim, rotulamos com os valores 1 e 2 os vértices nos cabelos ligados ao vértice de rótulo  $v_1$ .

O passo seguinte é rotular o segundo vértice do corpo  $v_2$ , com o rótulo 7 e os vértices nos cabelos correspondentes. Esses vértices irão receber rótulos no intervalo  $[4,6]$ . O vértice  $v_2$  tem cinco cabelos ligados nele. Assim rotularemos 3 cabelos, com os números 4, 5 e 6 restando dois cabelos a serem rotulados.

O próximo intervalo de rótulos disponíveis é o intervalo  $[8, 10]$ , pois o passo seguinte corresponde ao terceiro vértice do corpo  $v_3$  com rótulo 11. Então com esses rótulos, terminamos de rotular 2 vértices nos cabelos ligados ao vértice  $v_2$ .

O vértice  $v_3$  tem dois cabelos ligados nele, com isso o rótulo 10 que sobrou da iteração anterior será utilizado para rotular um vértice. O outro vértice do cabelo ligado a  $v_3$  recebe o rótulo 12.

A Figura 3.4 mostra o caterpillar  $C(2, 5, 2)$  com todos os vértices rotulados. Podemos observar que a diferença dos rótulos das extremidades da arestas que compõem o corpo do caterpillar são  $|3 - 7| = 4$  e  $|7 - 11| = 4$ .

Enquanto a diferença dos rótulos das extremidades das arestas que formam os cabelos

tem valor absoluto inferior a 4. Logo a largura de banda do caterpillar  $C(2, 5, 2)$  obtido pelo algoritmo de Miller é determinado pelos rótulos dos vértices do corpo. E o valor da largura de banda neste exemplo é  $b(C) = 4$ .

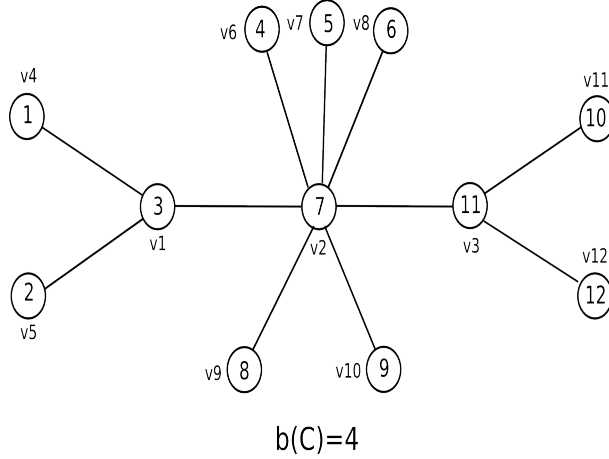


FIG. 3.4: Rotulação Algoritmo de Miller para  $C(2, 5, 2)$

**Teorema 3.1** (MILLER,1981). *Para qualquer caterpillar  $C = C(m_1, m_2, \dots, m_p)$   $m_i \geq 1$ ,  $1 \leq i \leq p$  existe uma função de rotulação  $f$  tal que  $\max_{(f(v)-f(u)), (u,v) \in E}$ .*

**Teorema 3.2** (MILLER,1981). *O algoritmo de Miller determina a largura de banda para caterpillar  $C = C(m_1, m_2, \dots, m_p)$  em no máximo  $n \cdot p$  iterações onde  $n$  é o número de vértices de  $C$  e  $p$  o tamanho do corpo de  $C$ .*

### 3.2 ALGORITMO DE ASSMANN

Esta seção apresenta o algoritmo exato proposto por (ASSMANN et al., 1981) para determinar o problema de largura de banda, para uma extensão da família dos caterpillars.

#### 3.2.1 INTRODUÇÃO

Nesta seção apresentaremos o algoritmo proposto em (ASSMANN et al., 1981) que tendo como entrada um dado caterpillar  $C$  com cabelos de comprimento ao máximo 2 e um inteiro positivo  $m$  determina-se, caso seja possível, uma função de rotulação  $f$  adequada tal que  $b_f(C) = m$ .

Usando este algoritmo pode ser calculada a largura de banda de um caterpillar com cabelos de comprimento máximo 2 utilizando busca binária.

Desta forma, a complexidade do algoritmo de Assmann para determinar a largura de banda de um caterpillar com cabelos de comprimentos no máximo 2 e  $n$  vértices é de  $O(n \log n)$ .

Para introduzir o algoritmo de Assmann propomos uma notação para caterpillars com cabelos de comprimento máximo 2.

Na Subseção 3.2.3 descreveremos o pseudocódigo do algoritmo (ASSMANN et al., 1981). E por fim na Subseção 3.2.4 um exemplo de aplicação é apresentado.

### 3.2.2 DESCRIÇÃO DA ENTRADA

Baseado na notação criada por Miller para representar caterpillars, propomos uma notação para os caterpillars com cabelos de comprimento máximo 2.

A notação proposta representa o caterpillar através de suas partes: corpo e cabelos assim denotamos  $C_{1e2}([m_{i1}, m_{i2}], \dots [m_{p1}, m_{p2}])$ , onde  $p$  é o número de vértices no corpo e, para cada valor  $i$  entre 1 e  $p$ . Notamos com um vetor de dimensão  $p$  cujo elementos são pares ordenados  $[m_{i1}, m_{i2}]$  contendo o número de cabelos de comprimento 1 e 2 ligados no vértice  $i$  do corpo. Sendo assim,  $m_{1i}$  representa a quantidade de cabelos de comprimento 1 e  $m_{2i}$  e representa a quantidade de cabelos de comprimento 2 ligados aos vértices  $v_i$  do corpo. Observar que é permitido a existência de vértices do corpo sem cabelos, por exemplo  $[0, 0]$  em que  $m_{1i} = 0$  e  $m_{2i} = 0$ .

A notação para o caterpillar da Figura 3.5 é  $C_{1e2}([3, 0], [1, 3], [1, 0], [0, 2], [3, 1], [1, 0])$ . Utilizando esta notação foi possível padronizar a entrada do algoritmo proposto por *Assmann* para os caterpillars com cabelos de comprimento máximo 2.

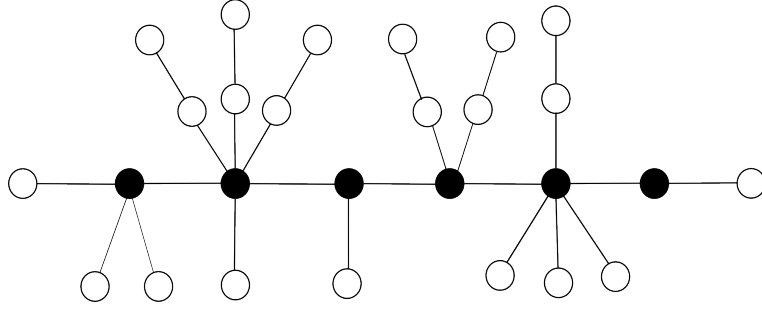


FIG. 3.5:  $C_{1e2}([3, 0], [1, 3], [1, 0], [0, 2], [3, 1], [1, 0])$   $n = 27$   $m = 26$   $p=6$   $d=8$

### 3.2.3 DESCRIÇÃO

Seja a entrada do algoritmo dado por  $C_{1e2}([m_{i1}, m_{i2}], \dots [m_{p1}, m_{p2}])$  e  $m$  inteiro positivo apresentaremos a seguir cada etapa do algoritmo proposto por (ASSMANN et al., 1981). Seja  $d$  igual  $p+2$  que chamaremos de tamanho do corpo estendido. No **passo 1** obtemos os possíveis rótulos para os vértices do corpo mais 2 vértices com valores  $0, m, 2m, \dots, dm$  em ordem crescente, sendo  $m$  o parâmetro de entrada e  $p$  o tamanho do corpo.

O **passo 2** é iniciado por uma estrutura de repetição para valores de  $k$  entre 1 e  $TamanhoCorpoEstendido$ . O objetivo deste laço é percorrer todos os vértices do corpo estendido. Dessa forma, os cabelos pendurados no vértice numerado  $km$  serão rotulados, atribuindo a cada vértice o menor rótulo possível e consistente com a preservação da largura de banda  $m$ . Caso não seja possível fazer a rotulação, o algoritmo é interrompido e retorna uma mensagem de erro.

No **passo 2A** o objetivo é de rotular possíveis cabelos de comprimento 2, de maneira tal que, dentre estes vértices o vértice mais distante do vértice rotulado  $km$  receba rótulo entre  $(k-2)m$  e  $(k-1)m$  (isso ocorre exclusivamente em casos que sobraram rótulos da iteração anterior que podem ser utilizados na iteração posterior). No **passo 2B** os vértices nos cabelos de comprimento 1 recebem rótulos com valores entre  $(k-1)m$  e  $km$ . O **passo 2C** rotula cabelos de comprimento 2, de maneira tal que esses vértices recebam rótulos entre  $(k-1)m$  e  $km$ . O **passo 2D** rotula todos os vértices ainda não rotulados a distância 1 do vértice  $km$  e o **passo 2E** rotula todos os vértices não rotulados a distância 2 do vértice  $km$ .

É importante ressaltar que nos passos 2A, 2C, 2E deve ser verificada a largura de banda, respeitando os rótulos a ser usados pertencer ao intervalo entre  $(k-1)m$  e  $(k+1)m$ . Esta verificação é usada unicamente nos passos que tratam cabelos de comprimento 2.

Nas passos  $2B$  e  $2D$  que tratam vértices a distância 1 do corpo é sempre verificado que largura de banda menor ou igual a  $k$  será respeitada.

---

Algoritmo de Assmann	
Entrada: $C_{1e2}$ e $m =$ inteiro positivo	
Saída: $b(C_{1e2})$	
0	Para ( $i \leftarrow 0$ até $d$ ) faça
1	Rotular os vértices do Corpo Estendido com rótulo $i * m$
2	Para ( $k \leftarrow 1$ até $(d - 1)$ ) faça
3	Se((Existe Cabelo de Comprimento 2) e (Verifica se $b(C_{1e2}) \leq m$ ))
4	rotule esses vértices com os rótulos no intervalo de $((k - 2)m)$ até $((k - 1)m)$
5	Se((Existe Cabelo de Comprimento 1) e (Verifica se $b(C_{1e2}) \leq m$ ))
6	rotule esses vértices com os rótulos restante do intervalo de rótulos
7	Se((Existe Cabelo de Comprimento 2) e (Verifica se $b(C_{1e2}) \leq m$ ))
8	rotule esses vértices com os rótulos no intervalo de $((k - 1)m)$ até $(km)$
9	Se((Existe vértice a distância 1 do vértice rotulado $km$ ) e (Verifica se $b(C_{1e2}) \leq m$ ))
10	rotule esses vértices com os rótulos restante do intervalo de rótulos
11	Se((Existe vértice a distância 1 do vértice rotulado $km$ ) e (Verifica se $b(C_{1e2}) \leq m$ ))
12	rotule esses vértices com os rótulos restante do intervalo de rótulos

**Teorema 3.3** (ASSMANN et al.,1981). *A largura de banda para o caterpillar  $C$  com cabelos de comprimento máximo 2 é igual a*

$$\max_{C' \text{ subcaterpillar } C} \left\{ \lceil (n' - 1)/d' \rceil, n' = n^\circ \text{ vértices de } C', d' = p' + 2 \right\}$$

**Teorema 3.4** (ASSMANN et al.,1981). *Existe algoritmo com complexidade  $O(n \log n)$  para encontrar tanto a largura de banda para o caterpillar  $C$  com cabelos de comprimento máximo 2, quanto a função que define os rótulos correspondentes para o valor de largura de banda achado.*

### 3.2.4 EXEMPLO

Apresentaremos um exemplo de como é construída a rotulação dos vértices do caterpillar com cabelos de comprimento no máximo 2 apresentado na Figura 3.5 usando o algoritmo de Assmann. O algoritmo tem como entrada o caterpillar  $C_{1e2}([3, 0], [1, 3], [1, 0], [0, 2], [3, 1], [1, 0])$  e o valor inteiro  $m = 4$ .

O algoritmo procura uma função de rotulação  $f$  dos vértices do caterpillar de entrada  $C$ , para a qual  $b_f(C) \leq m$ . Caso não seja possível achar tal rotulação o algoritmo é interrompido.

A idéia da rotulação consiste inicialmente em determinar o corpo estendido. Utilizando o corpo estendido iniciamos o 1º passo que consiste em rotular os vértices do mesmo. Os

rótulos são atribuídos da seguinte forma  $0, m, 2m, \dots, dm$  em ordem crescente. A Figura 3.6 mostra detalhes dos rótulos  $0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28$  atribuídos aos vértices do corpo estendido do caterpillar.

Seja  $C_{1e2}$  caterpillar com cabelos de comprimentos máximo 2 com  $n$  vértices e tamanho do corpo igual a  $p$ ,  $d = p + 2$ . Seja  $C'_{1e2}$  subcaterpillar de  $C_{1e2}$  com  $n'$  vértices e  $d' = p' + 2$ ,  $p'$  tamanho do corpo de  $C'$ . A largura de banda de  $C_{1e2}$  é igual a

$$\max \{ \lceil (n' - 1)/d' \rceil, \forall C'_{1e2} \text{ subcaterpillar de } C_{1e2} \}.$$

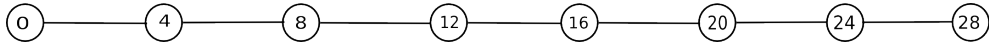


FIG. 3.6: Rótulos atribuídos aos vértices do corpo estendido

O 2º passo é o início de um laço que tem como critério de parada o tamanho do corpo estendido. A cada iteração  $k$  os vértices rotulados do corpo estendido serão percorridos e será verificado qual deles possui cabelos de comprimento 1, 2 ou ambos que ainda não foram rotulados.

Os seguintes passos do algoritmo complementam o laço do 2º passo e podem ser classificados em duas categorias, os passos que tratam dos cabelos de comprimento 1 e os que tratam dos cabelos de comprimento 2. Os passos  $2B$  e  $2D$  trabalham com a rotulação dos vértices dos cabelos de comprimento 1. Os passos  $2A$ ,  $2C$  e  $2E$  trabalham com a rotulação dos vértices dos cabelos de comprimento 2.

Para a iteração  $k = 1$ , consideramos o vértice do corpo estendido rotulado 4 ( $k = 1$  e  $m = 4$ ).

Neste exemplo o vértice com o rótulo 4 tem 2 cabelos de comprimento 1 a serem rotulados. O passo  $2B$  trata os cabelos de comprimento 1. Para este passo, nesta iteração, existe um intervalo de possíveis rótulos ainda não usados entre  $(k - 1)m$  e  $km$ , (neste exemplo os rótulos 1, 2, 3, pois os rótulos 0 e 4 já foram utilizados).

Neste passo rotulamos os vértices dos dois cabelos, dando o rótulo 1 e 2 a cada um deles.



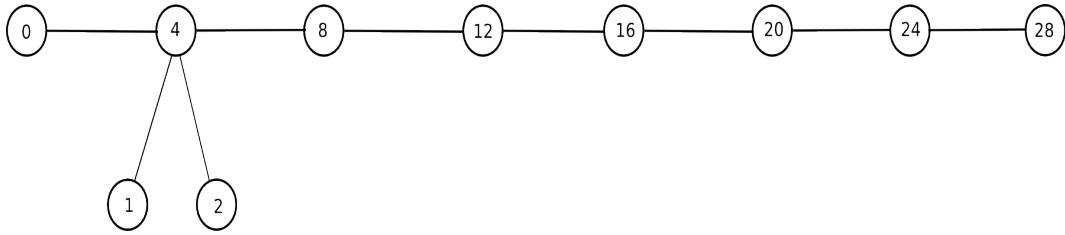


FIG. 3.7: *Início iteração  $k = 1$  rótulos disponíveis 1, 2, 3*

Para iteração  $k = 2$ , iremos para o vértice do corpo estendido rotulado  $km = 8$  do corpo estendido. Nesta posição as condições dos passos  $2A$  e  $2B$  são atendidas. O passo  $2A$  é responsável por rotular os vértices dos cabelos de comprimento 2 com rótulos ainda não usados no intervalo entre  $(k - 2)m$  e  $(k - 1)m$ . Este intervalo contém os rótulos disponíveis da iteração anterior, como na iteração anterior só sobrou o rótulo 3, este rótulo será utilizado nesta iteração para rotular um vértice folha do cabelo de comprimento 2. No passo  $2B$  são rotulados os cabelos de comprimento 1 com rótulos ainda não usados no intervalo  $(k - 1)m$  e  $km$ . Neste exemplo, rótulos são: 5, 6 e 7.

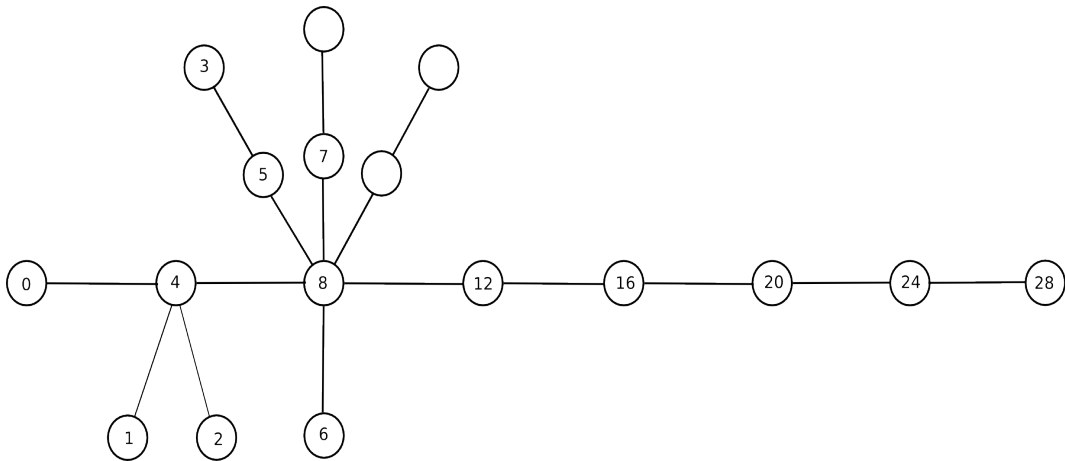


FIG. 3.8: *Início iteração  $k = 2$  e rótulos disponíveis 3, 5, 6, 7*

Na iteração  $k = 3$ , consideramos o vértice do corpo estendido rotulado  $km = 12$ . Apesar de estarmos em uma posição avançada e que temos somente um cabelo de comprimento 1, existem cabelos ligados aos vértices rotulados  $(k - 1)m$  na iteração anterior contém vértices que precisam ser rotulados. Nesta iteração o intervalo com novos rótulos ainda não usados pertencem ao intervalo entre  $(k - 1)m$  e  $km$  que são 9, 10 e 11. No passo  $2B$  o número 9 é utilizado para rotular o último vértice do cabelo de com-

primário 2 ligado ao vértice do corpo estendido na posição  $km = 8$ . No passo  $2C$  são rotulados os dois últimos vértices com os números 10 e 11 pertencentes aos últimos cabelos de comprimento 2 ligados ao vértice do corpo estendido com o rotulado 8.

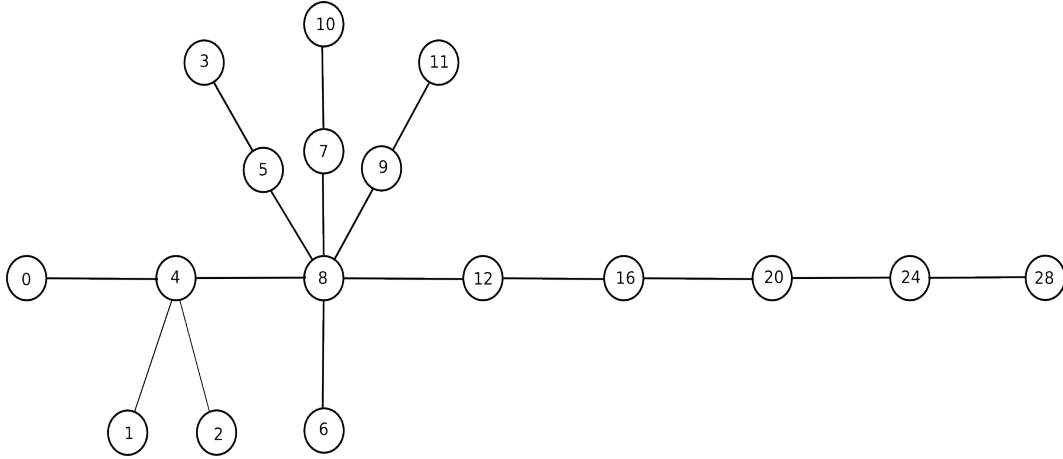


FIG. 3.9: *Início iteração  $k = 3$  rótulos disponíveis 9, 10, 11*

Na iteração  $k = 4$ , consideramos o vértice do corpo estendido rotulado  $km = 16$ . Neste caso os rótulos ainda não usados pertencem ao intervalo  $(k - 1)m$  até  $km$ . Esses rótulos são 13, 14 e 15, que serão utilizados nos passos  $2B$ ,  $2C$  e  $2D$ . O passo  $2B$  rotula o único cabelo da posição  $km = 12$  com o rótulo 13, no passo  $2C$ , rotularemos um dos cabelos de comprimento 2 com o rótulo 14, e o rótulo 15 será atribuído a um vértice de distância 1 do vértice do corpo estendido rotulado 16.

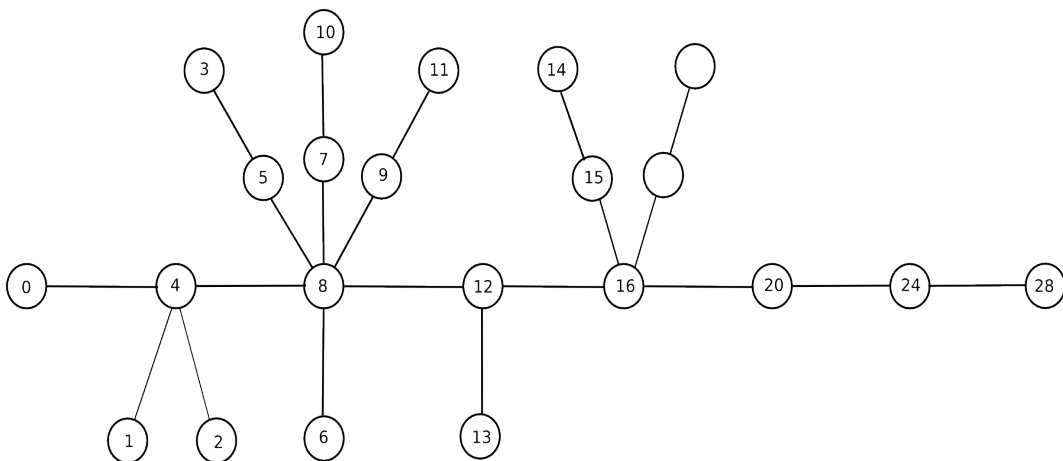


FIG. 3.10: *Início iteração  $k = 4$  rótulos disponíveis 13, 14, 15*

Na iteração  $k = 5$ , consideramos o vértice do corpo estendido rotulado  $km = 20$ . Ainda existem cabelos a serem rotulados ligados ao vértice do corpo estendido da iteração anterior ( $km = 16$ ). Então os novos rótulos 17, 18 e 19, vão para os vértices pendentes da iteração anterior.

O passo  $2B$  rotula o vértice do cabelo de comprimento 1 restante, o passo  $2C$  rotula o 18 no último cabelo de comprimento 2 e no passo  $2D$  rotula o 19 o vértice de distância 1 do ponto  $km = 20$ .

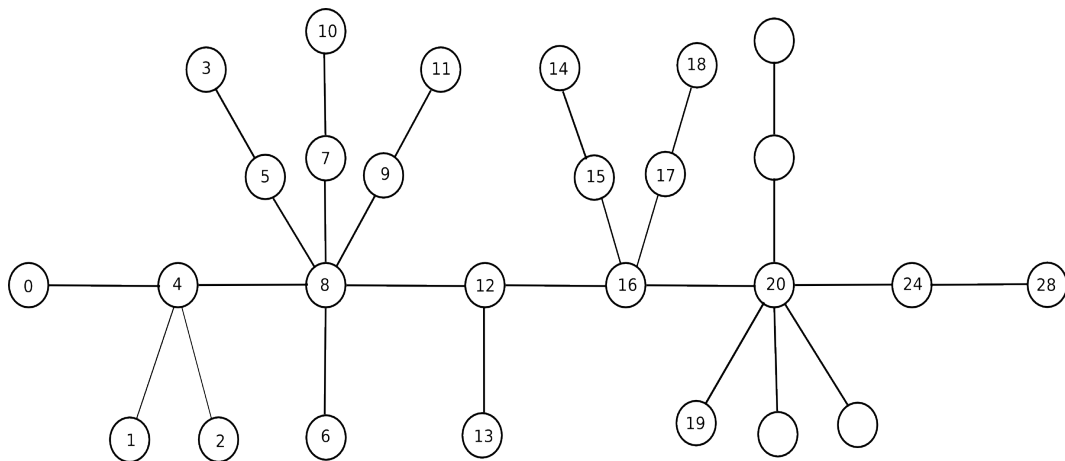


FIG. 3.11: *Início iteração  $k = 5$  rótulos disponíveis 17, 18, 19*

Na iteração  $k = 6$ , consideramos o vértice do corpo estendido rotulado  $km = 24$ . Nesta posição resolveremos todas as rotulações dos cabelos de comprimento 1. Os novos rótulos ainda não usados do intervalo  $(k - 1)m$  até  $km$  são 21, 22 e 23.

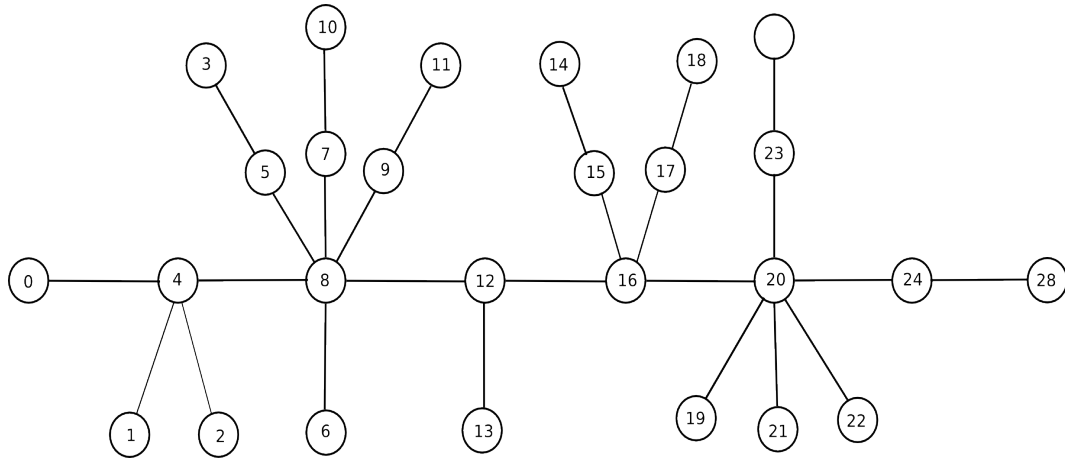


FIG. 3.12: *Início iteração  $k = 6$  e disponíveis rótulos = 21, 22, 23*

Esses rótulos serão todos utilizados no passo  $2B$  para rotular os cabelos de comprimento 1 ligados ao vértice do corpo estendido da iteração anterior  $km = 20$  e por fim na iteração  $k = 7$  considerando o vértice do corpo estendido rotulado  $km = 28$ , rotularemos o último cabelo de comprimento 2 com o rótulo 25.

A rotulação obtida ao finalizar o algoritmo de Assmann é aproximado na Figura 3.13

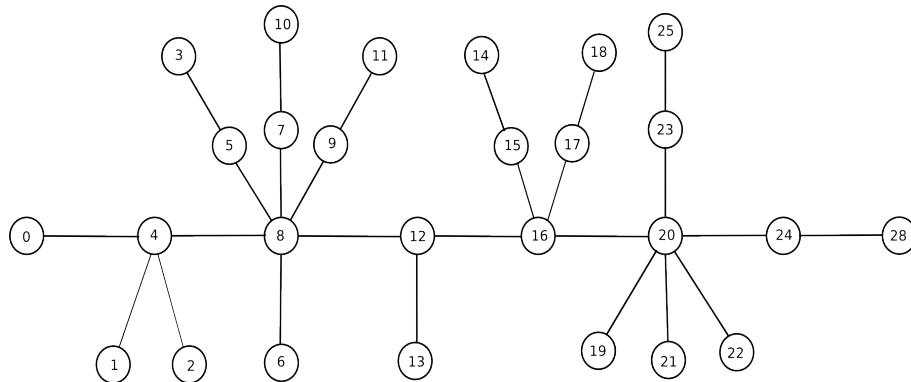


FIG. 3.13: *Rotulação  $C_{1e2}([3, 0], [1, 3], [1, 0], [0, 2], [3, 1], [1, 0])$*

A idéia deste algoritmo é que nenhum vértice a distância 2 do vértice rotulado  $km$  recebe um rótulo entre  $(k - 1)m$  e  $(k + 1)m$  a menos que, no passo  $2E$ , não exista vértice de distância 1 que precise ser rotulado, ou, no passo  $2C$ . Em outras palavras, são primeiro rotulados os vértices à distância 1 do vértice  $km$  e quando não existir em mais vértices a distância 1 para serem rotulados, os vértices a distância 2 do corpo do vértice rotulado  $km$  são rotulados.

## 4 HEURÍSTICA ESPECTRAL

Neste capítulo mostraremos o estudo realizado sobre o algoritmo aproximado proposto por (JUVAN e MOHAR, 1992) que pode ser usado para determinar a solução dos problemas de layouts: Largura de Banda, Cutwidth e Min- $p$ -Sum. A heurística proposta pode ser aplicada para resolver qualquer um destes problemas de layout em grafos, mas o foco deste trabalho está em analisar a solução para o problema de largura de banda.

Na Seção 4.1 será apresentada a heurística espectral proposta em (JUVAN e MOHAR, 1992). E na Seção é mostrado um exemplo de aplicação do mesmo.

### 4.1 HEURÍSTICA ESPECTRAL DE MOHAR

Na literatura existem várias soluções aproximadas para resolver o problema de largura de banda (LAI e WILLIAMS, 1997), mas dentre todas estas, a solução proposta por (JUVAN e MOHAR, 1992) é a única baseada na teoria espectral de grafos. Dado como entrada um grafo  $G$  representado pela matriz laplaciana, são determinados os autovalores da mesma, que são denotados em ordem crescente por:  $0 \leq \lambda_1(G) \leq \lambda_2(G) \leq \dots \leq \lambda_n(G)$ .

Foi apresentado em (JUVAN e MOHAR, 1992) que o menor autovalor de  $L(G)$  é  $\lambda_1(G) = 0$  cujo autovetor correspondente é  $(1, 1, \dots, 1)$ . Também foi mostrado que autovalor  $\lambda_2$  tem grande influência nas propriedades estruturais do grafo (FIEDLER, 1975). Em particular, o autovalor  $\lambda_2$  controla propriedades de corte do grafo e questões que envolve conectividade. O autovetor correspondente ao segundo menor autovalor da matriz laplaciana,  $\lambda_2(G)$ , é chamado **vetor de Fiedler**.

O algoritmo proposto em (JUVAN e MOHAR, 1992) utiliza o vetor de Fiedler para construir a rotulação dos vértices de um grafo e determinar um valor de largura de banda aproximada. Vale lembrar que deve-se escolher o mais adequado autovetor dentre os demais correspondentes ao autovalor  $\lambda_2$  para o algoritmo descrito em (JUVAN e MOHAR, 1992), caso  $\lambda_2$  tenha multiplicidade maior que 1. Esta escolha é naturalmente feita no espaço vetorial correspondente à  $\lambda_2$ .

A solução proposta por Mohar é baseada nas idéias descritas a seguir.

Seja  $\lambda_2$  o segundo menor autovalor e um autovetor  $x^{(2)}$  correspondente a  $G$ . Seja  $L^e$  a

função de rotulação que define o layout  $L^e : V \rightarrow \{1, \dots, n\}$  induzida pelo autovetor  $x^{(2)}$  da seguinte maneira :

*Expressão 1*

$$\text{Se } x_u^{(2)} \leq x_v^{(2)} \text{ então } L^e(u) \leq L^e(v).$$

**Teorema 4.1** (JUVAN e MOHAR, 1992). *Seja  $G = (V, E)$ ,  $\lambda_2$ ,  $x^{(2)}$ ,  $L^e$  definidos anteriormente e seja  $x^e$  o vetor correspondente à rotulação  $L^e$ . Então para qualquer outro vetor  $x$  obtido de uma função de rotulação tem-se:*

$$|\langle x^{(2)}, x^e \rangle| \geq |\langle x^{(2)}, x \rangle|.$$

**Teorema 4.2** (JUVAN e MOHAR, 1992). *Seja  $\psi = (L^e)^{-1}$ . Se  $x_{\psi(i+1)}^{(2)} - x_{\psi(i)}^{(2)} = \text{constante}$ ,  $1 \leq i < n$  então  $L^e$  é a função de rotulação correspondente à solução ótima do problema de 2-soma mínima.*

A Figura 4.1 mostra o pseudocódigo da heurística espectral. A ordenação escolhida para verificar a condição apresentada na *Expressão 1* é a ordem crescente dos elementos do vetor  $x^{(2)}$ .

Heurística Espectral de Mohar	
Entrada:	Saída: $\hat{b}(G)$
1	Construção da Matriz Laplaciana $L(G)$ ;
2	A partir de $L(G)$ obter o autovalor $\lambda_2$ e o autovetor $x^{(2)}$ ;
3	Para cada elemento $x^{(2)}$ faça
4	Identificar os componentes $x^{(2)}$ com os vértices de $V$ ;
5	Se elementos de $x^{(2)}$ não estão ordenados então
6	Ordenar os componentes de $x^{(2)}$ em ordem crescente obtendo $x_{ord}^{(2)}$ ;
7	Construir função de rotulação usando os elementos de $x_{ord}^{(2)}$ ;
8	Determinar a largura de banda da função rotulação construída;

FIG. 4.1: *Heurística Espectral de Mohar*

O **1º passo** (linha 1) cria a matriz Laplaciana a partir do grafo  $G$  de entrada. Para criar a matriz, associa-se a cada vértice do grafo, uma linha e uma coluna da matriz. A adjacência entre dois vértices distintos é representada com o valor  $-1$  e  $0$  caso contrário;

elemento diagonal ( $L_{ii}$ ) contém o grau do vértice associado ao índice  $i$ .

O **2º passo** (linha 2) calcula o 2º menor autovalor de  $L(G)$  e um autovetor correspondente (vetor de Fiedler).

O **3º passo** (linhas 3 e 4) consiste em um laço cuja função é identificar cada elemento do vetor de Fiedler com o vértice  $v$  do grafo  $G$  correspondente.

O **4º passo** nas (linhas 5 e 7) ordena os elementos do vetor de Fiedler em ordem crescente.

No **5º passo** (linha 8) é construída a rotulação do grafo a partir do vetor de Fiedler ordenado.

## 4.2 EXEMPLO

Nesta seção mostraremos um exemplo de como é construída a função de rotulação utilizando a heurística espectral de Mohar, que terá como entrada o caterpillar  $C(2, 5, 2)$  mostrado na Figura 3.1 e cuja saída é a rotulação da Figura 4.4.

O **1º passo** determina a criação da matriz Laplaciana do grafo. A Figura 4.2 mostra a matriz correspondente ao caterpillar da Figura 3.1.

$$L(C(2, 5, 2)) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FIG. 4.2: Grafo Associado a Matriz Laplaciana do caterpillar  $C(2, 5, 2)$

O **2º passo** determina o espectro da matriz laplaciana e identifica o 2º menor autovalor.

O espectro desta matriz laplaciana é  $S_{pL}(C(2, 5, 2)) = [0, 0.26795, 0.42782, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3.45593, 3.73205, 8.11625]$  e  $\lambda^2 = 0.26795$ . Um autovetor correspondente ao  $x^2$ , é dado por  $x^2 = [-0.32506, 0, 0.32506, -0.44404, -0.44404, 0, 0, -0.00001, 0, 0, 0.44404, 0.44404]$ . O **3º passo** identifica cada elemento pertencente ao vetor de Fiedler com o vértice correspondente do grafo  $G$  na Figura 4.3.

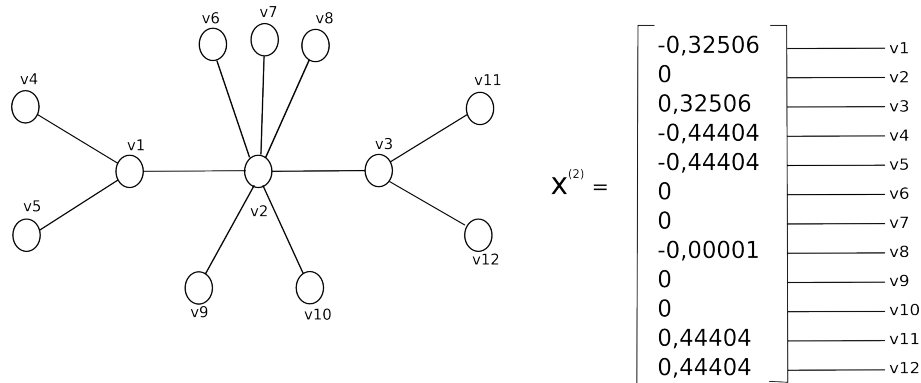


FIG. 4.3: Vetor de Fiedler para o caterpillar  $C(2, 5, 2)$

O **4º passo** ordena os elementos do vetor de Fiedler  $x^2$  em ordem crescente obtendo o vetor  $x^2_{ord}$  e no **5º passo** os vértices associados aos elementos do vetor, recebem os rótulos de acordo com a condição dada na *Expressão 1*.

A Figura 4.4 mostra o elemento  $-0.44404$  do vetor  $x^2_{ord}$  que associado ao vértice  $v_4$  se encontra na 1ª posição do vetor de  $x^2_{ord}$ . Então devemos rotular o vértice  $v_4$  com o rótulo 1. Sendo assim, se o elemento  $x^2_{ord_i}$  está associado ao vértice  $v_j \in V$  então  $v_j$  recebe o rótulo  $i$ .



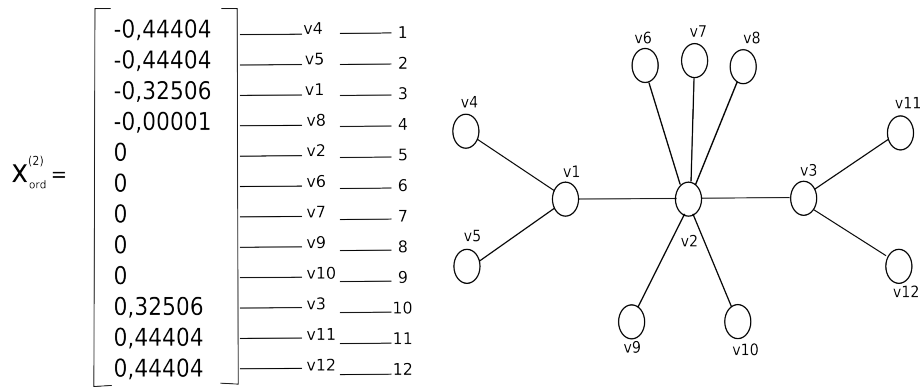


FIG. 4.4: Ordenação dos componentes do vetor de Fiedler para  $C(2, 5, 2)$

Por fim, usando o layout construído pela heurística espectral de Mohar, devemos determinar a largura de banda aproximada do grafo da Figura 4.3. A rotulação obtida pela heurística espectral e o valor de largura de banda  $\hat{b}(C(2, 5, 2) = 5)$  correspondente são mostradas na Figura 4.5.

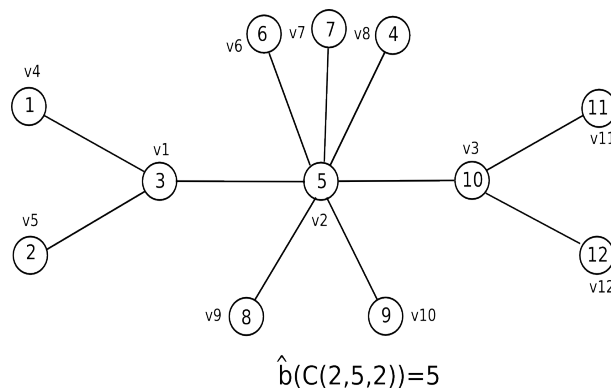


FIG. 4.5: Rótulos obtidos pela heurística espectral para o caterpillar  $C(2, 5, 2)$

## 5 IMPLEMENTAÇÃO

Neste capítulo apresentaremos a ferramenta desenvolvida para gerar classes de grafos e automatizar experimentos, utilizando os algoritmos estudados nos Capítulos 3 e 4, mostrando os mecanismos de criação e automatização dos experimentos e a interface com o usuário proposta.

O software apresentado nesta seção foi desenvolvido para automatizar os conjuntos de experimentos e testes utilizados para comparação dos resultados obtidos pelo algoritmo exato e pelo algoritmo aproximado para o problema de largura de banda.

O objetivo deste capítulo é apresentar a ferramenta que permita comparar os resultados obtidos pela heurística espectral de Mohar e o algoritmo de Miller para caterpillars. Serão utilizados dois algoritmos na comparação. O algoritmo de Miller para determinar a largura de banda de caterpillars apresentado na Seção 3.1 e a heurística espectral proposta por Mohar para determinar de maneira aproximada o valor da largura de banda de um grafo qualquer apresentado na Seção 4.1.

Na Seção 5.1 mostraremos ambiente de desenvolvimento e os recursos utilizados para o desenvolvimento da ferramenta. Na Seção 5.2 detalharemos cada módulo da ferramenta desenvolvida.

### 5.1 ESPECIFICAÇÕES DA FERRAMENTA

Nesta seção abordaremos as especificações da ferramenta. O ambiente de desenvolvimento será apresentado na Subseção 5.1.1. Na Subseção 5.1.2 detalharemos a interface do usuário com a ferramenta desenvolvida.

#### 5.1.1 AMBIENTE DE DESENVOLVIMENTO

Nesta seção será especificado o ambiente em que foi desenvolvida para construção da ferramenta e os softwares utilizados. A ferramenta foi desenvolvida na linguagem de programação *C++* utilizando o *GNU GCC Compiler* versão para plataforma Windows

*mingw32-g++.exe*. A *IDE*(Integrated Development Environment) usada para edição e integração com o compilador foi o *Code::Blocks v1.0*. O Software *NewGraph*, foi utilizado para determinar os autovalores da matriz Laplaciana do grafo. Esta é um software acadêmico desenvolvido inicialmente por Dragos Cvetkovic e posteriormente implementado por Dragan Stevanovic. Outros detalhes sobre documentação e requisitos para que ocorra a instalação o *NewGpgraph* podem ser obtidos em (STEVANOVIC et al., 2003).

### 5.1.2 INTERFACE COM O USUÁRIO - ENTRADA E SAÍDA

As Figuras 5.1 e 5.2 mostram o fluxograma de dados dos algoritmos de Miller e da Heurística Espectral de Mohar (*HEM*) integrantes do módulo *algoritmos implementados* da ferramenta, desde a entrada do grafo até o relatório de saída.

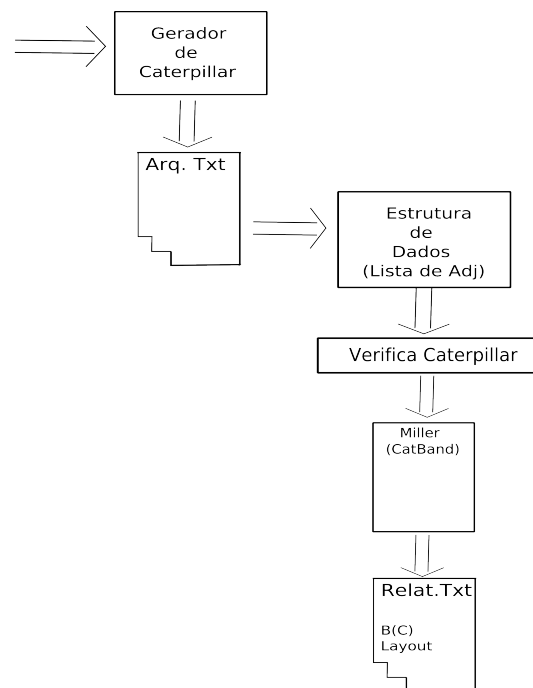


FIG. 5.1: Fluxograma da entrada do algoritmo Miller

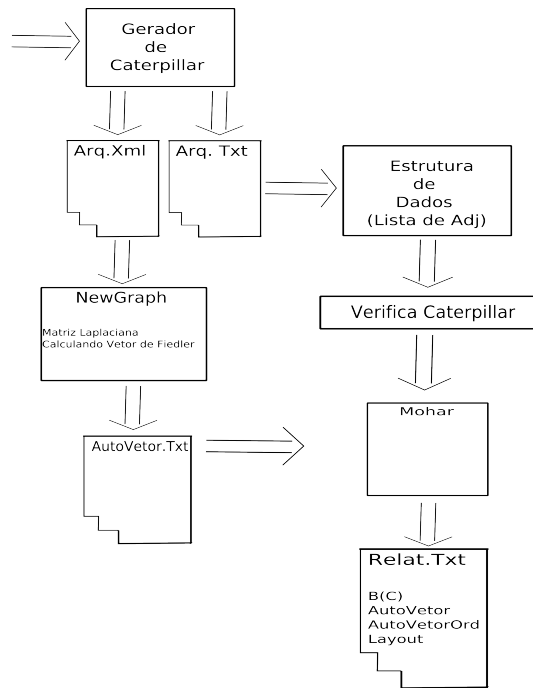


FIG. 5.2: Fluxograma da entrada da heurística espectral de Mohar

Os arquivos têm o nome padronizado no formato "entrada+nome do algoritmo". Sendo assim, o nome do arquivo com os caminhos de entrada do algoritmo de Miller é "entradaMiller" + nome do arquivo. Considerando como exemplo o caterpillar  $C(2, 5, 2)$  o módulo gerador produz o arquivo "C252.txt".

O arquivo "entradaMiller" deve conter as informações do diretório onde o arquivo  $C(2, 5, 2).txt$  e no caso da *HEM* o arquivo "entradaMohar" deverá conter duas informações: a correspondente ao arquivo  $C(2, 5, 2).txt$  e a correspondente ao vetor de Fiedler.

No caso da saída, para cada algoritmo é gerado um relatório contendo informações com a notação que identifica o caterpillar, função de rotulação e o valor da largura de banda obtido. A Figura 5.3 mostra o relatório de resultados obtidos pelo algoritmo de Miller para o caterpillar de entrada  $C(2, 5, 2)$ .

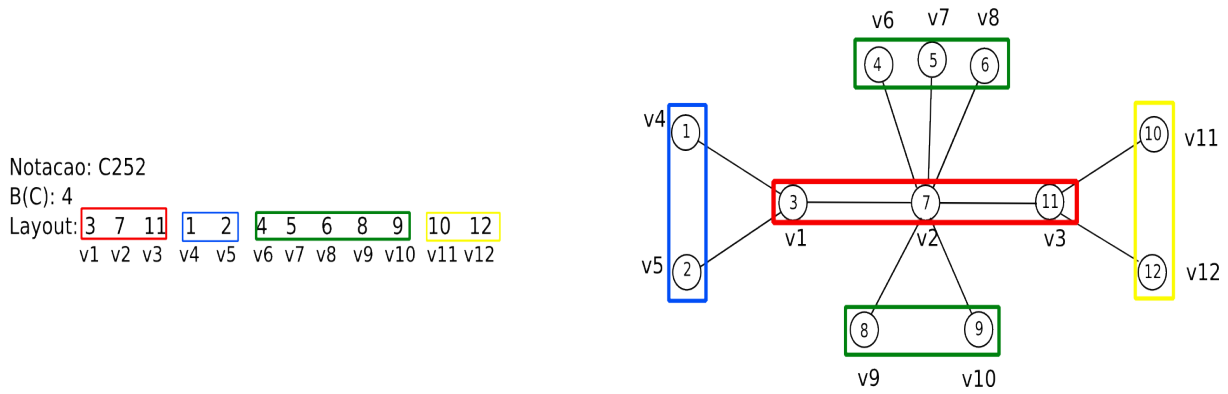


FIG. 5.3: Relatório de resultados do Miller para  $C(2, 5, 2)$  rotulado

O relatório contém a notação do caterpillar dado como entrada do algoritmo ( $C(2, 5, 2)$ ), a largura de banda do mesmo calculada pelo algoritmo e o layout determinado. O layout é construído da esquerda para direita, na ordem crescente da função de rotulação. Observe que os rótulos 3, 7, 11 serão associados aos vértices de nome  $v_1, v_2, v_3$  ou seja são os rótulos correspondente aos vértices do corpo do caterpillar. Os rótulos 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 são atribuídos respectivamente aos vértices  $v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}$ .

No caso da *HEM*, o relatório contém as mesmas informações anteriores, e mais duas novas informações que são o *Vetor de Fiedler* (autovetor) e o *Vetor de Fiedler Ordenado* (autovetor de ordenado).

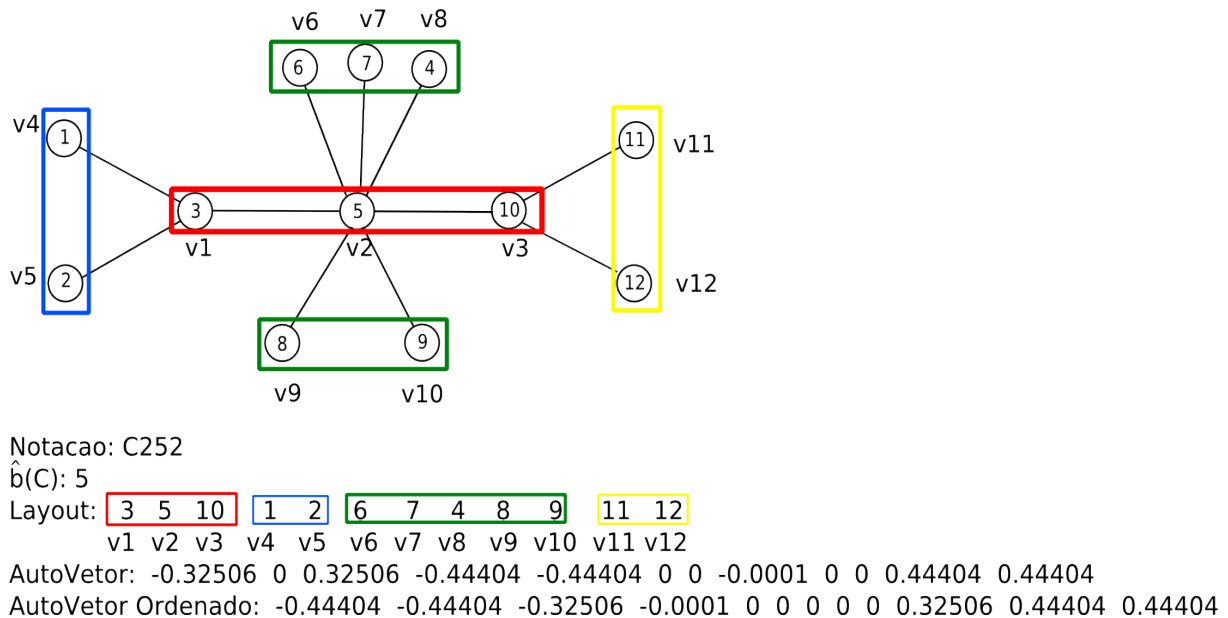


FIG. 5.4: Relatório de resultados do Mohar para  $C(2, 5, 2)$  rotulado

## 5.2 FERRAMENTA DE EXPERIMENTOS

A Ferramenta de auxílio para criação e automatização de experimentos e está organizada em 3 módulos integrados. Cada módulo é responsável por funções distintas. A Figura 5.5 mostra os diagramas da ferramenta contendo os 3 módulos.

O primeiro módulo é o **gerador de grafos** e o gerador de caterpillars. Sendo responsável em criar arquivos de texto contendo as arestas dos caterpillars gerados. O processo de criação dos caterpillars será detalhado na Subseção 5.2.1.3.

O segundo módulo é responsável pelo armazenamento de grafos em geral gerados em uma estrutura dedicada, sendo possível armazenar grafos específicos como caterpillars. Essa **estrutura de dados** será apresentada na Subseção 5.2.2. O último e terceiro módulo é formado por **algoritmos** que foram apresentados nos Capítulos 3 e 4 que será detalhado na Subseção 5.2.3.

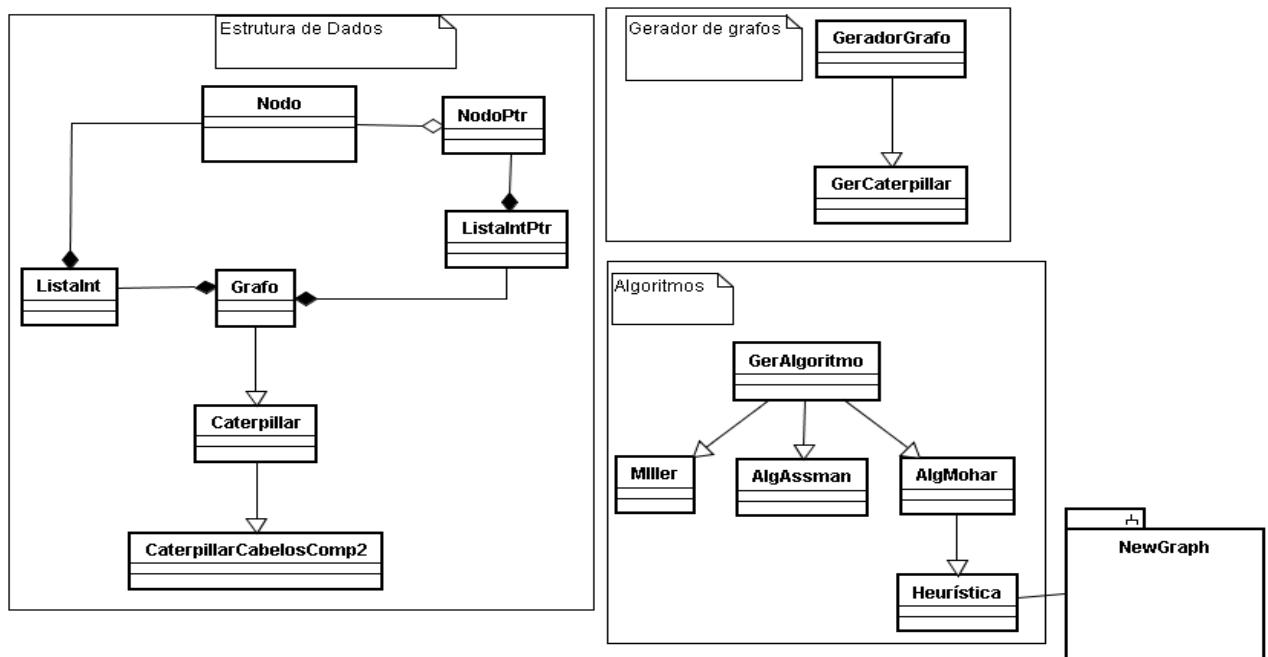


FIG. 5.5: Diagrama da ferramenta

## 5.2.1 MÓDULO GERADOR DE GRAFOS

Nesta seção apresentamos uma descrição do módulo responsável por gerar as entradas para a ferramenta. Essas entradas são os arquivos criados seguindo um formato específico que contém todos os dados necessários para a representação em uma estrutura de dados de um grafo qualquer. Na Subseção 5.2.1.1 será detalhada a implementação do gerador, sendo mostrado na Subseção 5.2.1.2 a identificação de um caterpillar. Logo, na Subseção 5.2.1.3, descreveremos como funciona o gerador. Finalizamos esta seção mostrando na Subseção 5.2.1.4 o modelo de arquivos gerados no formato *TXT* e *XML* para os grafos de entrada.

### 5.2.1.1 IMPLEMENTAÇÃO DO GERADOR

As classes implementadas neste módulo são as *GeradorGrafo* e *GeradorCaterpillar*. Sendo a *GeradorCaterpillar* uma especialização da *GeradorGrafo*.

Os atributos são :

*srtEntrada* → armazena notação de entrada;

*nVert* → número de vértices;

*nArest* → número de arestas;

*VertCorpo* → nome dos vértices do corpo;

*VertArest* → nome dos vértices da aresta;

Os métodos são :

*Entrada* → responsável pelo tratamento de entrada;

*CriaNomeArquivoTxt* → Criando o Arquivo Txt;

*CriaNomeArquivoXml* → Criando o Arquivo Xml;

*GerarTxt* → Gera o caterpillar no modelo Txt;

*GerarXml* → Gera o caterpillar no modelo Xml;

*imprimirArquivoTxt* → Escreve o caterpillar em um arquivo Txt;

*imprimirArquivoXml* → Escreve o caterpillar em um arquivo Xml;

A Figura 5.6 mostra o diagrama correspondente ao gerador de grafos e caterpillars.

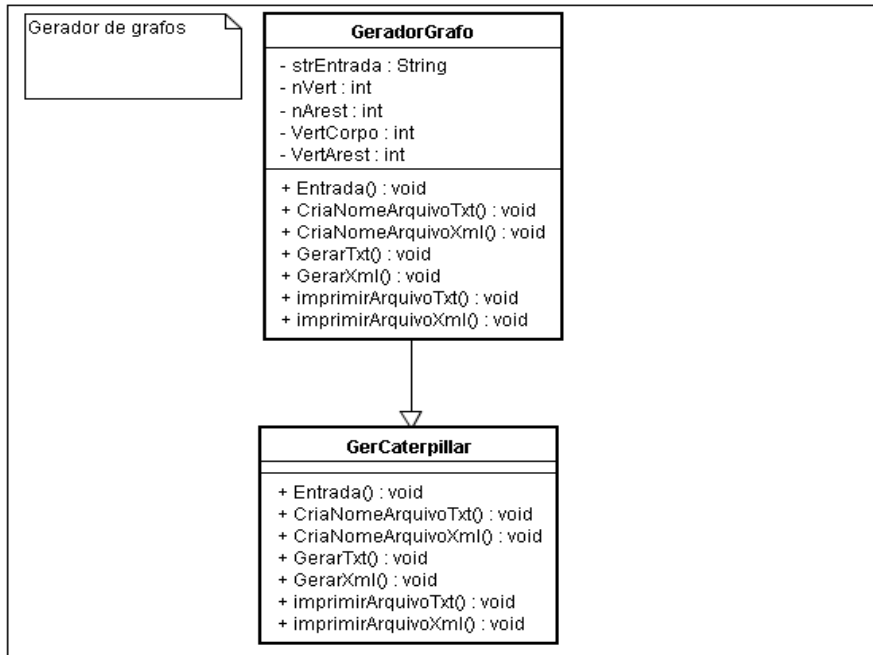


FIG. 5.6: Diagrama do Módulo Gerador de Caterpillar

### 5.2.1.2 ENTRADA DO GERADOR

O gerador de caterpillars, utiliza a notação criada por Miller e que foi apresentada no Capítulo 3, na Subseção 3.1.2. Assim automatizamos o processo de criação de caterpillars para testes e experimentos criando um repositório de arquivos, que serão as entradas para o terceiro módulo da ferramenta.

Ao executar o gerador de caterpillar, o usuário tem como interface o modo texto. Dessa forma o usuário passa como entrada, através da notação, do caterpillar que deseja gerar. O método **Entrada** é responsável por receber e tratar a notação do caterpillar passada pelo usuário e identifica o tamanho do corpo e cabelos.

O trecho do código fonte do método *Entrada* é mostrado na Figura 5.7.



```

void GerCaterpillar::Entrada(string entrada){
    // inicialização
    soma=0;
    TotalCab=0;
    TotalCorpo=0;
    strEntrada.clear();
    mNumero.clear();

    strEntrada.assign(entrada);// notação de entrada

    for(inteiro i=2; i <strEntrada.length()-1;i++){
        strparametro=strEntrada.at(i);
        if(((strparametro!="")&&(strparametro!="C"))&&((strparametro!="(")&&(strparametro!=")"))){
            //convertendo para string para inteiro
            mNumero << strparametro;
            mNumero >> soma;
            TotalCab=TotalCab+soma;// somando os paramentros par o total de cabelos
        }else{
            TotalCorpo++;// somando o total de parametros
        }
        mNumero.clear();// limpa o buffer
    }
    TotalCorpo++;//soma mais 1 a quantidade de parametro passado
}

```

FIG. 5.7: *Código fonte do método de Entrada do gerador*

### 5.2.1.3 ETAPAS DO GERADOR

Nesta subseção detalharemos as etapas de construção do caterpillar usando o gerador. O caterpillar é armazenado em uma estrutura auxiliar que será mostrada na Seção 5.2.2.

Logo após o método *Entrada* o método que trata a notação que representa o caterpillar é chamado de *CriaNomeArquivoTxt* ou *CriaNomeArquivoXml*. Estes dois métodos são responsáveis por criar um arquivo no formato *Txt* ou *Xml* cujo nome é gerado usando a notação  $C(m_1, m_2, \dots, m_p)$  do caterpillar de entrada.

O passo seguinte é construir e armazenar a representação do grafo através dos métodos *GerarTxt* e *GerarXml*. Os dois modelos de representação de caterpillars são distintos, sendo gerados nos métodos *GerarTxt* e *GerarXml*. Esses métodos são responsáveis por definir quais vértices serão o corpo do caterpillar e quais serão os cabelos, armazenando essa informação em uma estrutura de dados auxiliar.

Na Figura 5.8 é mostrado o trecho do gerador de caterpillar em arquivos *Txt*.

```

cout<<"Digite o caterpillar a ser gerado:"<<endl; //entrada do gerador
cin >> strEntrada;
gercat = new GerCaterpillar(); // instância do objeto Gerador de caterpillar
gercat->Entrada(strEntrada); // método Entrada
gercat->CriaNomeArquivoTxt(); // método CriaNomeArquivoTxt
gercat->GerarTxt(); // método GerarTxt
gercat->imprimirArquivoTxt(); // método ImprimirArquivoTxt

```

FIG. 5.8: *Chamada do Método CriaNomeArquivoTxt*

Na Figura 5.9 é mostrado o trecho do gerador de caterpillar em arquivos *Xml*:

```

cout<<"Digite o caterpillar a ser gerado:"<<endl; //entrada do gerador
cin >> strEntrada;
gercat = new GerCaterpillar(); // instância do objeto Gerador de caterpillar
gercat->Entrada(strEntrada); // método Entrada
gercat->CriaNomeArquivoXml(); // método CriaNomeArquivoXml
gercat->GerarXml(); // método GerarXml
gercat->imprimirArquivoXml(); // método ImprimirArquivoXml

```

FIG. 5.9: *Chamada do Método CriaNomeArquivoXml*

Os dois formatos *Txt* e *Xml* são necessários pois serão usados como parâmetros de entrada no terceiro módulo da ferramenta Seção 5.2.3.

#### 5.2.1.4 MODELOS DE ARQUIVOS DE SAÍDA

A última etapa do gerador consiste em criar um arquivo de saída, tendo duas possibilidades, uma para cada formato, *Txt* e *Xml*. Os modelos construídos para a entrada do módulo dos algoritmos possuem como último passo os métodos *imprimirArquivoTxt* e *imprimirArquivoXml*.

*Gerar Txt* cria um arquivo contendo nas duas primeiras linhas o número de vértices e o número de arestas do caterpillar de entrada.

A Figura 5.10 que mostra o modelo *Txt* representando o caterpillar  $C(2, 5, 2)$ :

```

12 -> N° de vértices
11 -> N° de arestas

1 2 -> Adjacentes aos vértices do corpo
1 4
1 5
2 1
2 3
2 6
2 7
2 8
2 9
2 10
3 2
3 11
3 12
4 1 -> Adjacentes ao vértice do cabelo
5 1
6 2
7 2
8 2
9 2
10 2
11 3
12 3

```

FIG. 5.10: *Arquivo escrito pelo método imprimirArquivoTxt - C(2, 5, 2)*

A Figura 5.11 representa o Caterpillar  $C(2, 5, 2)$  descrito no arquivo da figura 5.10.

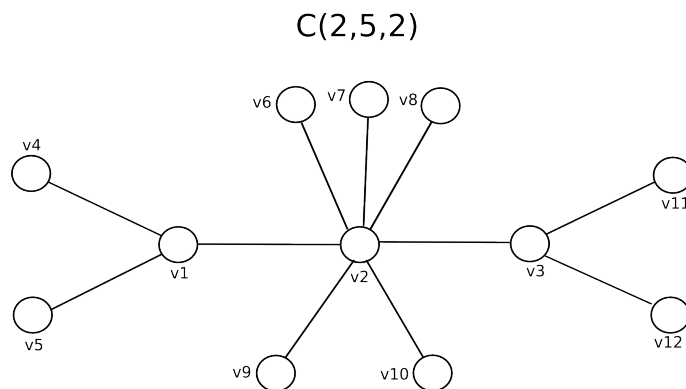


FIG. 5.11: *Representação do Caterpillar C(2, 5, 2)*

O sistema *NewGraph* é usado para determinar o vetor de Fiedler usado na heurística espectral de Mohar.

Tornou-se necessário desenvolver um gerador de arquivos *XML*, pois o software *Newgraph* (STEVANOVIC et al., 2003) faz interface com a ferramenta e recebe como entrada grafos em um formato próprio de arquivo.

O método *GerarXml* armazena os vértices do corpo em uma estrutura e logo após gera os vértices cabelos e armazena em uma estrutura auxiliar. O método *imprimirArquivoXml* cria o cabeçalho, gera todos vértices do grafo e todos os adjacentes.

O *Newgraph* é uma ferramenta que permite visualizar o grafo, em que os vértices são declarados no arquivo *XML* com as coordenadas  $x$  e  $y$  da respectiva posição.

Para facilitar o mecanismo de automatização do gerador, os valores das coordenadas  $x$  e  $y$  foram fixados, pois para este trabalho não é necessário visualizar o posicionamento dos vértices no software *NewGraph*. Somente será usado para calcular as invariantes disponibilizadas no *Newgraph*, sendo indiferente o posicionamento dos vértices do grafo gerado na visualização.

A Figura 5.12 mostra o modelo *XML* que representa o caterpillar  $C(2, 5, 2)$ .

```

<graphml>
  <key id="x" for="node"/>
  <key id="y" for="node"/>
  <key id="weight" for="node"/>
  <graph edgedefault="undirected">
    <node id="v1">
      <data key="x">-46.0</data>
      <data key="y">264.0</data>
    </node>
    <node id="v2">
      <data key="x">46.0</data>
      <data key="y">264.0</data>
    </node>
    <node id="v3">
      <data key="x">46.0</data>
      <data key="y">264.0</data>
    </node>
    <node id="v4">
      <data key="x">-46.0</data>
      <data key="y">264.0</data>
    </node>
    <node id="v5">
      <data key="x">-46.0</data>
      <data key="y">264.0</data>
    </node>
    <node id="v6">
      <data key="x">-46.0</data>
      <data key="y">264.0</data>
    </node>
    <node id="v7">
      <data key="x">46.0</data>
      <data key="y">264.0</data>
    </node>
    <node id="v8">
      <data key="x">46.0</data>
      <data key="y">264.0</data>
    </node>
    <node id="v9">
      <data key="x">46.0</data>
      <data key="y">264.0</data>
    </node>
    <node id="v10">
      <data key="x">46.0</data>
      <data key="y">264.0</data>
    </node>
    <node id="v11">
      <data key="x">46.0</data>
      <data key="y">264.0</data>
    </node>
    <node id="v12">
      <data key="x">46.0</data>
      <data key="y">264.0</data>
    </node>
    <edge source="v2" target="v1">
    </edge>
    <edge source="v3" target="v2">
    </edge>
    <edge source="v1" target="v4">
    </edge>
    <edge source="v1" target="v5">
    </edge>
    <edge source="v2" target="v6">
    </edge>
    <edge source="v2" target="v7">
  </graph>
</graphml>

```

-> Cabeçalho do arquivo

-> Identificação dos vértices

-> identificação das arestas

FIG. 5.12: Arquivo gerado pelo método *imprimirArquivoXml* -  $C(2, 5, 2)$

## 5.2.2 MÓDULO ESTRUTURA DE DADOS

O módulo de estruturas de dados é responsável pelo auxílio e armazenamento de uma estrutura dedicada a um dado grafo. Esta estrutura permite armazenar grafos em geral e caterpillars em particular. Os caterpillars armazenados devem ser previamente gerados pelo módulo gerador de grafos. A estrutura de dados utilizada é uma listas de adjacências, cujos elementos usados na lista são: *Nodo* e *NodoPtr*. O elemento *Nodo* tem como atributos: *Dado*, *ProxNodo*, *Cabelo*, *CorpoVertPos*, *CorpoNumVertCabelos*, *Visitado*, *Rótulo* e o elemento *NodoPtr* tem como atributos: *Dado*, *ProxNodo*, *Cabelo*, *CorpoVertPos*, *CorpoNumVertCabelos*, *Visitado*, *Rótulo* e *ProxNodoLst*.

Vale observar os elementos *Nodo* e *NodoPtr* se diferenciam unicamente no atributo *ProxNodoLst*.

A descrição de cada um desses atributos é:

***Dado*** → armazena o nome do vértice;

***ProxNodo*** → armazena o endereço do próximo *Nodo*;

***Cabelo*** → recebe o valor 1 se for vértice do cabelo e 0 se for vértice do corpo e 2 se for vértice do cabelo de comprimento dois;

***CorpoVertPos*** → recebe o valor 1 para os vértices das extremidades do corpo e 0 para os vértices do meio do corpo;

***CorpoNumVertCabelos*** → recebe o números de cabelos adjacentes ou 0 se não for do corpo;

***Visitado*** → recebe 1 se o vértice for visitado e 0 caso não visitado;

***Rótulo*** → recebe um número inteiro positivo;

***ProxNodoLst*** → armazena o endereço de uma *Lista*.

Assim definimos uma lista contendo elementos *NodoPtr* que chamaremos de *ListaIntPtr*, onde cada elemento é uma outra lista contendo elementos do tipo *Nodo* que chamaremos de *ListaInt*. As estruturas *ListaIntPtr* e *ListaInt* foram anteriormente citadas e estão encapsuladas na estrutura *Grafo*. Esta estrutura é a principal para armazenar qualquer grafo a ser utilizado pela ferramenta. A partir da estrutura *Grafo* determinamos para uma estrutura dedicada a *Caterpillars*.

Os atributos utilizados na estrutura Grafos são:

***NumVértices*** → número de vértices;

**NumArestas** → número de arestas;

**Arestas** → lista do tipo *ListaInt*;

**Vértices** → lista do tipo *ListaIntPtr*.

Os métodos são :

**CarregaGrafo** → responsável carregar o arquivo *Txt*;

**ImprimeGrafo** → imprime a estrutura carregada;

**InseraAresta** → insere aresta no grafo;

**RemoveAresta** → remove aresta do grafo;

**InseraVertice** → insere vértice no grafo;

**RemoveVertice** → remove vértice do grafo;

**VerticesAdjacentes** → verifica adjacência entre vértices;

**ExisteArestas** → verifica se existe aresta entre vértices.

A especialização da estrutura *Grafos* determina uma nova estrutura *caterpillars*, herdando todas as funcionalidades da estrutura *Grafos* e acrescentando outros métodos que são específicos para *caterpillars*.

A partir dos métodos usados para grafos, obtemos os métodos específicos para *caterpillars* da seguinte maneira:

**IdentificaCabelos** → identifica os cabelos do *caterpillar*;

**IdentificaCorpo** → identifica o corpo do *caterpillar*;

**RotularVertice** → rotula o vértice;

**ImprimeCaterpillar** → imprime *caterpillar*;

**VerificaCaterpillar** → verifica se é um *caterpillar*;

**NumeroDeCabelosDoVertice** → retorna o número de cabelos do vértice;

**ListaQuantCabelosVertCorpo** → lista a quantidade de cabelos de cada vértice;

**ListaCabelosDoVertice** → lista os cabelos do vértice;

**ListaRotulosDosVerticesCorpo** → lista os rótulos do corpo;

**TamanhoCorpo** → retorna o tamanho do corpo;

**ListaVerticesCorpo** → lista os vértices do corpo;

**BFS** → aplica Busca em Largura - (utilizada para identificar os vértices do corpo e do cabelo);

O diagrama apresentado na Figura 5.13 mostra os componentes do módulo *estrutura de dados*.

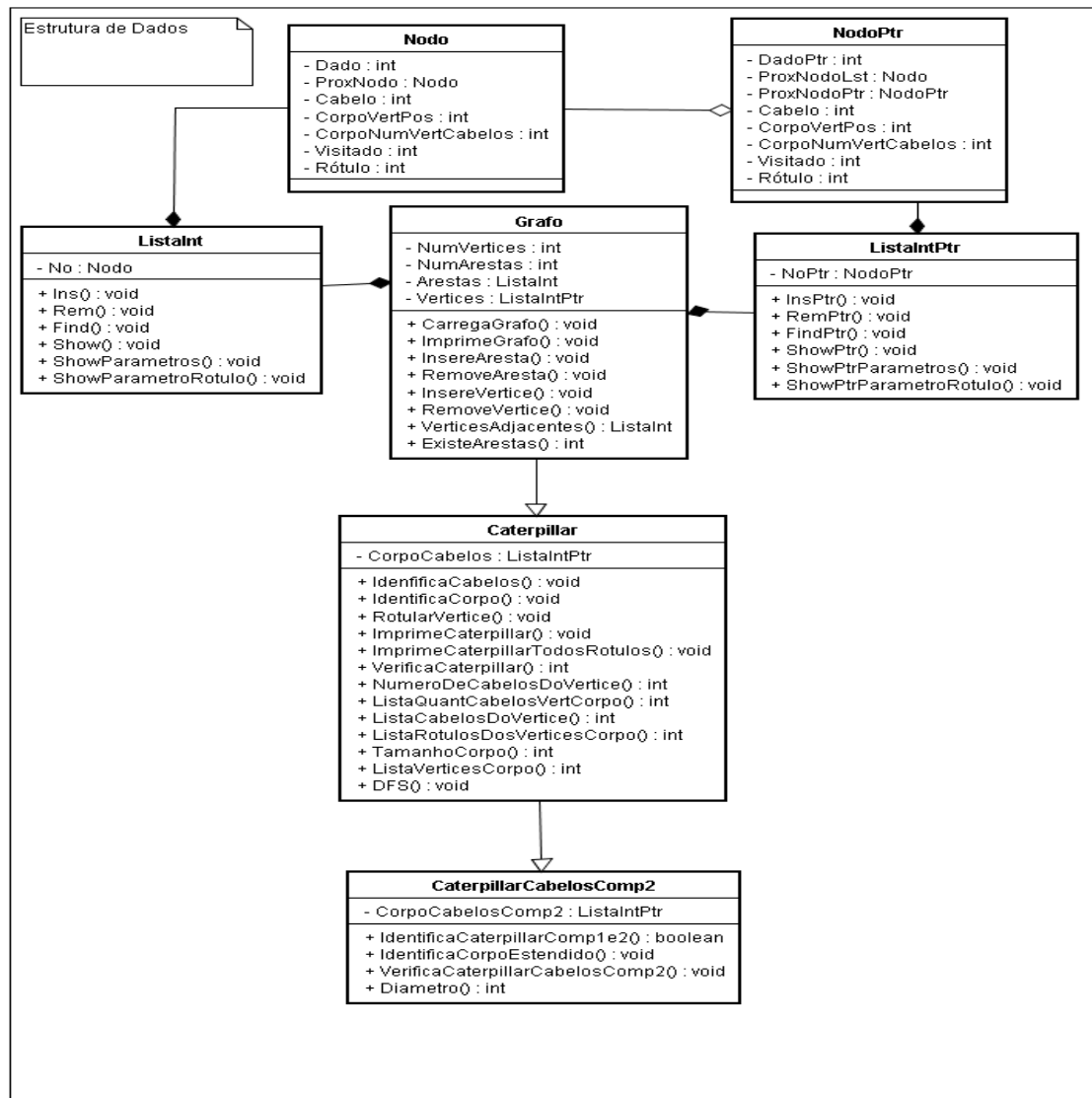


FIG. 5.13: Diagrama do módulo *estrutura de dados*

### 5.2.3 MÓDULO ALGORITMOS IMPLEMENTADOS

Nesta seção abordaremos o módulo principal da ferramenta responsável pelas implementações dos algoritmos. Este módulo é o núcleo central da ferramenta e utiliza como módulos auxiliares o *gerador de grafos* e o *módulo de estrutura de dados*. Este módulo permite resolver o problema de determinar a largura de banda de um grafo utilizando os algoritmos exato para caterpillar e aproximado para grafos (algoritmos de Miller e Mohar, respectivamente). Na Subseção 5.2.3.1 mostraremos a implementação do algoritmo de Miller. A implementação da heurística espectral (Mohar) é apresentada na Subseção 5.2.3.2.

#### 5.2.3.1 MILLER

O algoritmo exato apresentado no Capítulo 3 foi implementado e essa implementação associada a uma classe que tem como atributos as variáveis e vetores utilizados para descrever o mesmo na Subseção 3.1.3.

Os atributos modelados e transportados para a implementação foram:

***f*** → tem a função de armazenar a largura de banda parcial a cada iteração;

***l*** → vetor auxiliar do vetor *f*, que armazena largura de banda parcial;

***S*** → vetor que armazena os subcaterpillares que estão sendo utilizados a cada iteração do algoritmo;

***gaux*** → vetor contendo matrizes auxiliares de resultados parciais para o resultado final;

***g*** → matriz do resultado final dos rótulos do corpo do caterpillar;

***h*** → matriz auxiliar de resultados parciais dos rótulos do corpo do caterpillar;

***LarguraBanda*** → resultado final da largura de banda;

***caterpillar*** → estrutura de armazenamento;

***p*** → recebe o tamanho do corpo;

***c*** → vetor armazena a quantidade de cabelos de cada vértice no vetor;

Os métodos desenvolvidos são:

***Entrada*** → associado ao construtor recebe como parâmetro o *caterpillar*;

***Saida*** → rotula vértices do *caterpillar* e chama o método ***EscreverArquivoResultado***;

***AlgMiller*** → contém a implementação o algoritmo de Miller resultando nos rótulos do corpo e na largura de banda;



**RestricoesEntrada** → tratamento que restringe a entrada de caterpillars seguindo a literatura de Miller;

**DeterminarSubCaterpillar** → determina subcaterpillar;

**Min** → determina o valor Minimo;

**ImprimirResultados** → imprimir resultados;

**EscreverArquivoResultado** → escrever arquivos de resultados;

O método *RestricoesEntrada* verifica se o caterpillar de entrada tem pelo menos 1 cabo ligado a cada vértice do corpo ( $m_i > 0, 1 \leq i \leq p$ ). Propusemos restrições adicionais para evitar possíveis erros de entrada no algoritmo que não foram previstos no artigo de Miller.

Restringimos as seguintes possibilidades: grafo trivial ( com somente um vértice ) e grafos com menos de 6 vértices que não atendam a definição de caterpillar. Dessa forma os menores grafos de entrada para o algoritmo implementado são o caterpillar  $C(2, 1)$  ou  $C(1, 2)$ .

A lista de todos os casos de caterpillars proibidos é mostrada na Figura 5.14.




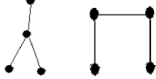
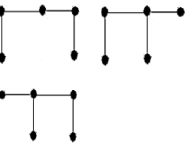
V(G) - Notação Miller	Representação
<u>V(G)=1</u> C(0) Grafo trivial	
<u>V(G)=2</u> C(1) C(0,0)	
<u>V(G)=3</u> C(2) C(0,0,0) C(0,1) C(1,0)	
<u>V(G)=4</u> C(0,0,0,0) C(1,1) C(3) Grafo Estrela C(0,1,0)	
<u>V(G)=5</u> C(1,0,1) C(0,0,0,0,0) C(1,1,0) C(0,1,1) C(3,0) C(0,3)	

FIG. 5.14: Restrições de entrada

O trecho de código que foi implementado para obter essas restrições é mostrado na Figura 5.15:

```

0 int Catband:: RestricoesEntrada(){
1 int flag=1;
2     if(k > 1){// se o corpo é diferente de zero e um Ex:.grafo trivial C(0)
3         // se o corpo tem 2 vértices e um cabelo para cada C(1,1)
4             if(((k==2)&&(c[1]==1)&&(c[2]==1)){
5                 flag=0;
6             }else{
7                 for(Tipo i=1;i<=k;i++){
8                     if(c[i]==0){//se existe zero cabelos para um vértice do corpo
9                         flag=0;
10                        break;
11                    }
12                }
13            }
14        }else{
15            flag=0;
16        }
17        return flag;
18 }

```

FIG. 5.15: Código fonte das restrições de entrada

Na linha 2 do trecho de código apresentado na Figura 5.15, a primeira restrição verifica se o tamanho do corpo é diferente de 0 ou 1. A linha 4 é para verificar se o corpo tem 2 vértices e um cabelo para cada vértice ( $C(1,1)$ ). E por último, a linha 8 é para verificar se existe algum vértice do corpo sem cabelos.

Outro método importante a ser detalhado é o método *Saída*. Neste método são rotulados os vértices dos cabelos do caterpillar. O método *AlgMiller* determina unicamente a largura de banda e os rótulos dos vértices do corpo.

O método *Saída* atribui os rótulos aos vértices dos cabelos a partir dos rótulos obtidos pelos vértices do corpo, como fora descrito na Subseção 3.1.4.

### 5.2.3.2 HEURÍSTICA ESPECTRAL DE MOHAR

O algoritmo aproximado, detalhado na Seção 4.1, também foi implementado no módulo dos algoritmos.

A heurística espectral de Mohar foi modelada como uma classe, onde os atributos, variáveis e vetores utilizados são definidos a seguir.

***nVertices*** → Número de vértices;

***AutoVetor*** → Estrutura contendo os elementos do vetor de Fiedler;

**AutoVetorOrdenado** → Estrutura contendo os elementos do vetor de Fiedler Ordenados;

**Grafo** → Estrutura de armazenamento.

**Caterpillar** → Estrutura de armazenamento;

Os métodos desenvolvidos são:

**Entrada** → recebe como entrada grafos em geral;

**Saída** → associado ao método *EscreverArquivoResultado* gera relatório de resultados;

**ResultadoAlgMohar** → rotula os vértices do grafo;

**OrdenaValoresFiedler** → ordena os elementos do vetor de Fiedler;

**LarguraDeBanda** → obtêm a largura de banda;

**CarregaAutoVetores** → armazena e trata os valores do vetor de Fiedler;

**ImprimiAutoVetoresOrdenandos** → imprime os elementos do vetor de Fiedler ordenados;

**EscreverArquivoResultado** → escreve o arquivo de resultado.

O método *Entrada* é responsável por receber um grafo gerado pelo módulo gerador de grafos. O método pode receber qualquer grafo representado em arquivo texto.

O algoritmo de Mohar implementado neste módulo faz interface com uma ferramenta denominada *NewGraph*, que será usada para calcular o espectro da matriz Laplaciana do grafo e o vetor de Fiedler do mesmo. O software *NewGraph* calcula invariantes de grafos, entre eles autovalores e autovetores da matriz Laplaciana, tendo como entrada um grafo num arquivo no formato XML.

Os resultados obtidos por *NewGraph* armazenados em um arquivo no formato de texto (vetor de Fiedler) são recebidos pelo método *CarregaAutoVetores* para continuar com o passo seguinte do algoritmo.

A Figura 5.16 mostra o diagrama correspondente ao módulo de algoritmos :

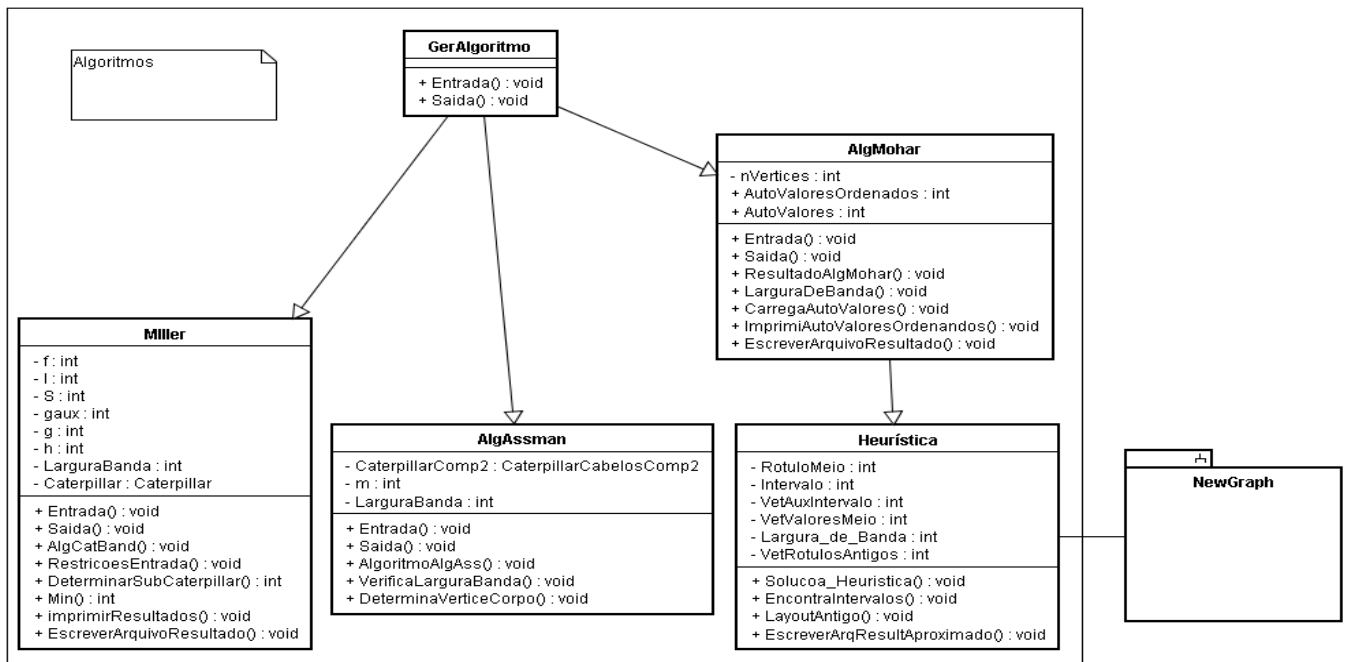


FIG. 5.16: Diagrama do Módulo Algoritmos

## 6 EXPERIMENTOS E RESULTADOS

### 6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo mostramos em detalhes os experimentos que foram executados utilizando o a ferramenta proposto no capítulo anterior. Na Seção 6.2 são apresentados os resultados obtidos usando a implementação da heurística espectral de Mohar para os grafos apresentados no artigo (JUVAN e MOHAR, 1992) em algumas classes de grafos. A partir dos caterpillars, classe de grafos que não foi tratada no artigo de Juvan e Mohar, desenvolvemos alguns experimentos calculando largura de banda exata e aproximada de algumas famílias (Seções 6.3 e 6.4). Como conclusão e resumo, na Seção 6.5 resultados obtidos pelo algoritmo exato e pelo algoritmo aproximado para as diferentes famílias caterpillars são apresentados.

### 6.2 RESULTADOS APRESENTADOS NO ARTIGO JUVAN E MOHAR (1992)

(JUVAN e MOHAR, 1992) apresentam resultados obtidos para a largura de banda para algumas classes de grafos (Tabela 1). Para cada tipo de grafos foram apresentados a solução exata e aproximada com intuito de mostrar o desempenho da heurística espectral proposta por eles.

As famílias escolhidas pelos autores foram: Caminhos -  $P_n$ ; Ciclos -  $C_n$ ; Grafos Bipartidos -  $K_{p,q}$  e Subdivisões do grafo estrela -  $Z_{d,q}$  e  $T_h$  árvore binária cheia de altura  $h$ .

Parte da Tabela 1 apresentada em (JUVAN e MOHAR, 1992) é reproduzida na Tabela 6.1.

TAB. 6.1: Resultados obtidos pela heurística espectral de Mohar

	$P_{10}$	$P_{50}$	$C_{10}$	$C_{50}$	$K_{5,10}$	$K_{10,10}$	$K_{10,20}$	$Z_{3,2}$	$Z_{3,5}$	$Z_{10,3}$	$Z_{10,10}$	$Z_{10,15}$	$T_3$	$T_5$	$T_7$
$b(G)$	1	1	2	2	9	14	19	2	2	5	5	5	2	4	11
$\hat{b}(G)$	1	1	3	3	10	16	20	3	4	16	19	35	2	8	32

A seguir, apresentaremos o espectro do segundo menor autovalor, a função de rotulação e os valores do vetor de Fiedler para alguns grafos na Tabela 6.1.

Seja  $P_{10}$  um caminho formado por 10 vértices.

A Figura 6.1 mostra os rótulos obtidos pela heurística espectral para cada vértice de  $P_{10}$ .

O espectro da matriz laplaciana deste grafo é:

$$S_{pL}(P_{10}) = [-0.00000, 0.09789, 0.38197, 0.82443, 1.38197, 2.00000, 2.61803, 3.17557, 3.61803, 3.90211]$$

O segundo menor autovalor de  $P_{10}$  é  $\lambda_2 = 0.09789$ .

O vetor de Fiedler, com suas coordenadas ordenadas se transforma em :

$$x_{ord}^{(2)} = [-0.44171, -0.39847, -0.31623, -0.20303, -0.06996, 0.06996, 0.20303, 0.31623, 0.39847, 0.44171]$$

O valor de largura de banda obtido pela heurística espectral de Mohar implementado neste trabalho é  $\hat{b}(P_{10}) = 1$ .

A Figura 6.2 mostra os rótulos obtidos pela heurística espectral de Mohar para cada

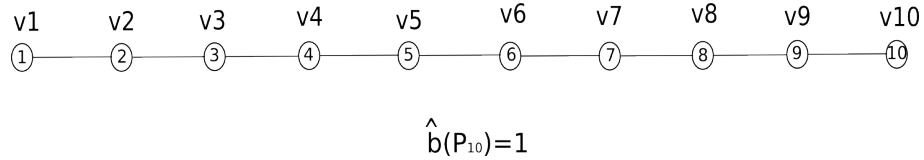


FIG. 6.1: Caminho  $P_{10}$  com rótulos obtidos pela heurística espectral de Mohar

vértice de  $C_{10}$  (um ciclo de tamanho 10).

O espectro da matriz laplaciana deste grafo é:

$$S_{pL}(C_{10}) = [-0.00000, 0.38197, 0.38197, 1.38197, 1.38197, 2.61803, 2.61803, 3.61803, 3.61803, 4.00000]$$

O segundo menor autovalor de  $C_{10}$  é  $\lambda_2 = 0.38197$ . Após ordenação dos componentes de vetor de Fiedler, tem-se

$$x_{ord}^{(2)} = [-0.42533, -0.42533, -0.26287, -0.26287, -0.0001, -0.0001, 0.26287, 0.26287, 0.42533, 0.42533]$$

O valor de largura de banda obtido pela heurística espectral implementado neste trabalho é  $\hat{b}(C_{10}) = 3$ .

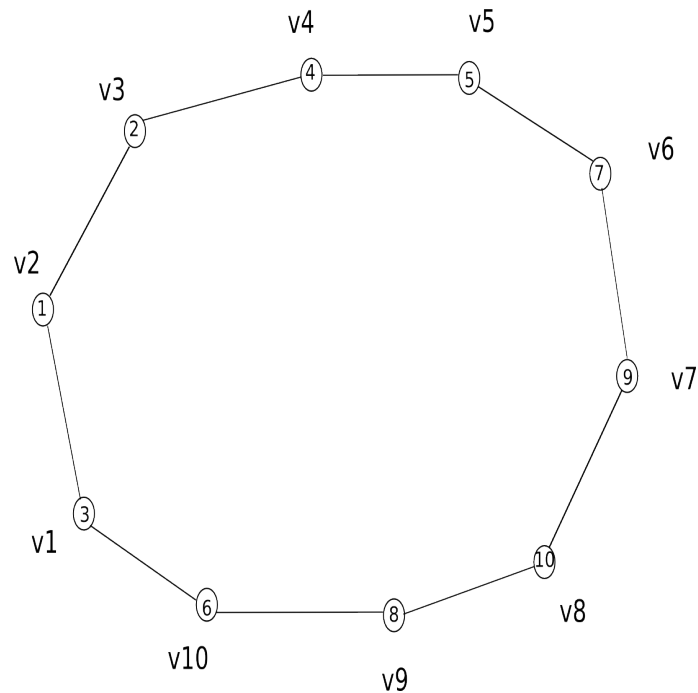


FIG. 6.2: *Ciclo  $C_{10}$  com rótulos obtidos pela heurística espectral de Mohar*

Seja  $T_3$  uma árvore binária cheia de altura 2.

A Figura 6.3 mostra os rótulos obtidos pela heurística espectral de Mohar para cada vértice de  $T_3$ .

O espectro da matriz laplaciana deste grafo é:

$$S_{pL}(T_3) = [0, 0.26795, 1, 1, 1.58579, 3.73205, 4.41421]$$

O segundo menor autovalor de  $T_3$  é  $\lambda_2 = 0.26795$ .

Após ordenar os componentes do vetor de Fiedler tem-se

$$x_{ord}^{(2)} = [-0.44404, -0.44404, -0.32506, 0, 0.32506, 0.44404, 0.44404]$$

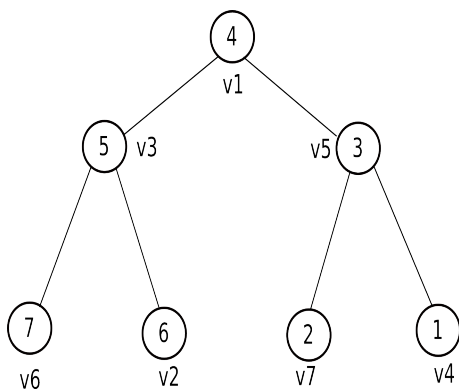


FIG. 6.3: *Árvore binária cheia  $T_3$  com rótulos obtidos pela heurística espectral de Mohar*

O valor de largura de banda obtido pela heurística espectral de Mohar implementado neste trabalho é  $\hat{b}(T_3) = 2$ .

Seja  $T_5$  uma árvore binária cheia de altura 4. A Figura 6.4 mostra os rótulos obtidos pela heurística espectral de Mohar cada vértices de  $T_5$ :

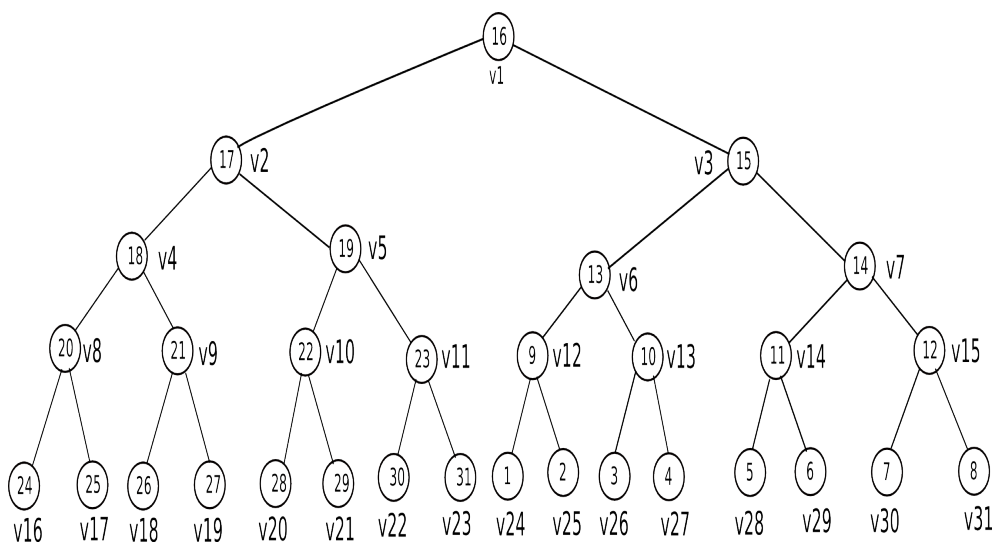


FIG. 6.4: *Árvore binária cheia  $T_5$  com rótulos obtidos pela heurística espectral de Mohar*

O espectro da matriz laplaciana deste grafo é:

$$S_{PL}(T_5) = [0, 0.04031, 0.09679, 0.09679, 0.26795, 0.26795, 0.26795, 0.26795, 0.71175, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.41951, 2.12597, 2.19394, 2.19394, 3.39945, 3.73205, 3.73205, 3.73205, 3.73205, 3.87403, 4.70928, 4.70928, 5.14073, 5.28825]$$

O segundo menor valor do  $\lambda_2 = T_5$  é 0.04031.

O vetor obtido após a ordenação dos componentes do vetor de Fiedler é:

$$x_{ord}^{(2)} = [-0.19303, -0.19303, -0.19303, -0.19303, -0.19303, -0.19303, -0.19303, -0.19303,$$



$-0.18525, -0.18525, -0.18525, -0.18525, -0.16222, -0.16222, -0.10962, 0, 0.10962, 0.16222, 0.16222, 0.18525, 0.18525, 0.18525, 0.18525, 0.18525, 0.19303, 0.19303, 0.19303, 0.19303, 0.19303, 0.19303, 0.19303, 0.19303, 0.19303$ ].

O valor de largura de banda obtido pela heurística espectral de Mohar implementado neste trabalho é  $\hat{b}(T_5) = 8$ .

Seja  $Z_{d,q}$  o grafo obtido pela subdivisão de todas as arestas da estrela obtendo  $d$  caminhos de comprimento  $q$ . A Figura 6.5 mostra o grafo  $Z_{3,2}$  e os rótulos de cada vértice obtido pela heurística espectral de Mohar:

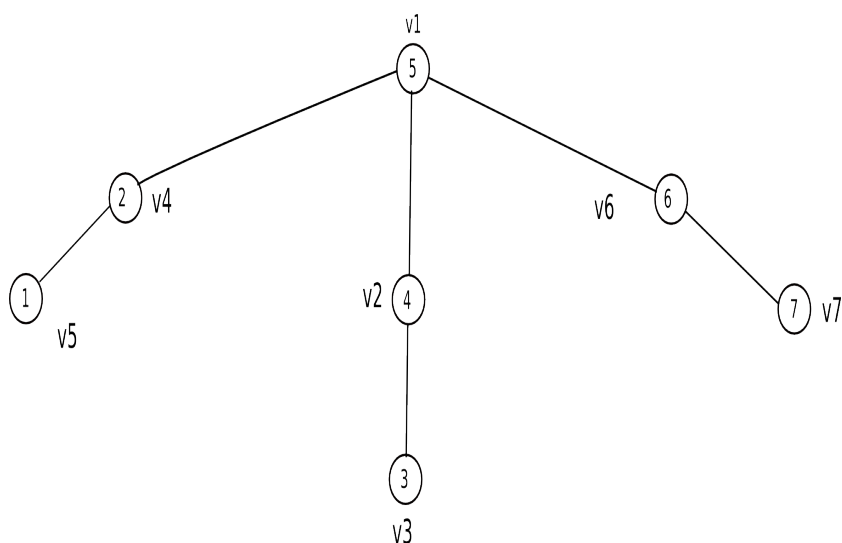


FIG. 6.5: Grafo Estrela  $Z_{3,2}$  com rótulo obtido pela heurística espectral

O espectro da matriz laplaciana deste grafo é:

$$S_{pL}(Z_{3,2}) = [0, 0.38197, 0.38197, 1.58579, 2.61803, 2.61803, 4.41421]$$

O segundo menor autovalor é 0.38197.

O vetor de Fiedler deste grafo estrela:

$$x_{ord}^{(2)} = [0, -0.12264, -0.19843, -0.29494, -0.47722, 0.41757, 0.67565]$$

O valor da largura de banda obtido pela heurística espectral implementado neste trabalho é  $\hat{b}(Z_{3,2}) = 3$ .

Os exemplos que serão apresentados nas próximas Seções 6.3 e 6.4 correspondem a classes de grafos de caterpillars que não foram testadas no artigo (JUVAN e MOHAR, 1992).

Serão comparados o valor aproximado da largura de banda obtido pelo heurística espectral para alguns caterpillars com o valor exato obtido para os mesmos caterpillars pelo algoritmo de Miller.

### 6.3 ALGORITMO DE MILLER

#### 6.3.1 RESULTADOS OBTIDOS UTILIZANDO O ALGORITMO DE MILLER

O algoritmo de Miller determina a largura de banda exclusivamente para caterpillars com  $n$  vértices, tendo  $p$  vértices no corpo e cada vértice do corpo com pelo menos 1 cabelo. Os experimentos tiveram foco em dois critérios tais como tamanho do corpo e quantidades diferentes de cabelos ligados a cada vértice do corpo.

A partir destes critérios foram criadas famílias específicas de caterpillars, facilitando a classificação e análise dos resultados obtidos.

Os parâmetros a serem considerados serão representados pelas variáveis:

$p$  = tamanho do corpo;

$k$  = número de cabelos ligados a 1 vértice do corpo;

$b(C)$  = largura de banda do caterpillar;

Rotulação = função de rotulação obtida pelo algoritmo.

A seguir mostraremos os resultados obtidos para a família  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  formada pelos caterpillars com  $p$  vértices no corpo com a mesma quantidade de cabelos ( $k$ ) para cada vértice do corpo. Os testes realizados consideram valores de  $k$  variando entre 1 e 9 e tamanhos de corpo  $p$  variando entre 3 e 12.

A Tabela 6.2 deve ser interpretada de acordo com a notação apresentada para os relatórios de saída do algoritmo de Miller (Seção 5.1.2). A coluna *rotulação* considera os rótulos da esquerda para a direita na ordem crescente dos nomes dos vértices  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ . Portanto, a quantidade  $p$  de rótulos iniciais corresponde aos rótulos dos vértices do corpo do caterpillar e os demais rótulos são para os vértices dos cabelos.

Para o caterpillar  $C(1, 1, 1)$  da tabela 6.2, temos a rotulação 2, 4, 6, 1, 3, 5 onde o tamanho do corpo é  $p = 3$ , então os valores 2, 4, 6 são rótulos referentes aos vértices do corpo e os rótulos 1, 3, 5 referentes aos vértices dos cabelos. A Figura 6.6 apresenta os rótulos dos vértices do caterpillar  $C(1, 1, 1)$  obtidos pelo algoritmo de Miller.

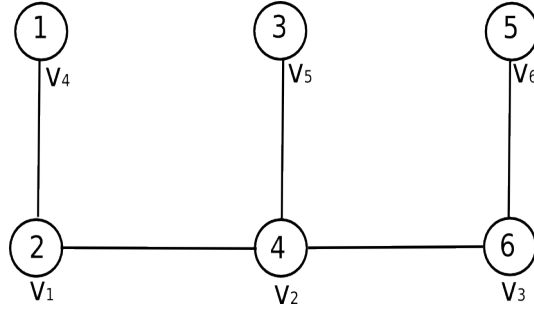


FIG. 6.6: *Caterpillar*  $C(1, 1, 1)$

Iniciaremos a descrição dos resultados obtidos com a família  $C(k, \dots, k, \dots, k)$ , que se caracteriza por ter a mesma quantidade de cabelos ( $k$ ) para cada vértice do corpo. Consideramos grafos desta família para os quais os valores de  $k$  variam de 1 até 9. Observa-se que os caterpillars desta família apresentam simetria a respeito do(s) vértice(s) central(is) do corpo. Foram executados testes com o algoritmo de Miller para caterpillars com tamanho do corpo  $p$  variando de 3 até 12. A Tabela 6.2 apresenta os valores de largura de banda obtidos pelo algoritmo de Miller  $b(G)$  para caterpillars da família  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  onde  $k = 1$ .

TAB. 6.2: Teste de Famílias de Caterpillars -  $C(k, \dots, k, \dots, k)$ ,  $k = 1$

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C111$	3	1	2	2,4,6,1,3,5
$C1111$	4	1	2	2,4,6,8,1,3,5,7
$C11111$	5	1	2	2,4,6,8,10,1,3,5,7,9
$C111111$	6	1	2	2,4,6,8,10,12,1,3,5,7,9,11
$C1111111$	7	1	2	2,4,6,8,10,12,14,1,3,5,7,9,11,13
$C11111111$	8	1	2	2,4,6,8,10,12,14,16,1,3,5,7,9,11,13,15
$C111111111$	9	1	2	2,4,6,8,10,12,14,16,18,1,3,5,7,9,11,13,15,17
$C1111111111$	10	1	2	2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,1,3,5,7,9,11,13,15,17,19
$C11111111111$	11	1	2	2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21
$C111111111111$	12	1	2	2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23

Também foram realizados testes com os algoritmos para caterpillars do tipo  $C(1, 1, \dots, k, \dots, 1, 1)$ , onde os valores de  $k$  variam de 2 até 9, e o tamanho do corpo  $p$  (número ímpar) variando entre 5 até 19. Na Tabela 6.3 são mostrados os resultados para caterpillars desta família no caso  $k = 6$ .

TAB. 6.3: Teste de Famílias de Caterpillars -  $C(1, 1, \dots, k, \dots, 1, 1)$ ,  $k = 6$

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C11611$	5	6	4	2 ,4 ,8 ,12 ,15 ,1 ,3 ,5 ,6 ,7 ,9 ,10 ,11 ,13 ,14
$C1116111$	7	6	4	2 ,4 ,6 ,10 ,14 ,17 ,19 ,1 ,3 ,5 ,7 ,8 ,9 ,11 ,12 ,13 ,15 ,16 ,18
$C111161111$	9	6	4	2 ,4 ,6 ,8 ,12 ,16 ,19 ,21 ,23 ,1 ,3 ,5 ,7 ,9 ,10 ,11 ,13 ,14 ,15 ,17 ,18 ,20 ,22
$C11111611111$	11	6	4	2 ,4 ,6 ,8 ,10 ,14 ,18 ,21 ,23 ,25 ,27 ,1 ,3 ,5 ,7 ,9 ,11 ,12 ,13 ,15 ,16 ,17 ,19 ,20 ,22 ,24 ,26
$C1111116111111$	13	6	4	2 ,4 ,6 ,8 ,10 ,12 ,16 ,20 ,23 ,25 ,27 ,29 ,31 ,1 ,3 ,5 ,7 ,9 ,11 ,13 ,14 ,15 ,17 ,18 ,19 ,21 ,22 ,24 ,26 ,28 ,30
$C111111161111111$	15	6	4	2 ,4 ,6 ,8 ,10 ,12 ,14 ,18 ,22 ,25 ,27 ,29 ,31 ,33 ,35 ,1 ,3 ,5 ,7 ,9 ,11 ,13 ,15 ,16 ,17 ,19 ,20 ,21 ,23 ,24 ,26 ,28 ,30 ,32 ,34
$C11111111611111111$	17	6	4	2 ,4 ,6 ,8 ,10 ,12 ,14 ,16 ,20 ,24 ,27 ,29 ,31 ,33 ,35 ,37 ,39 ,1 ,3 ,5 ,7 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,18 ,19 ,21 ,22 ,23 ,25 ,26 ,28 ,30 ,32 ,34 ,36 ,38
$C1111111116111111111$	19	6	4	2 ,4 ,6 ,8 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,22 ,26 ,29 ,31 ,33 ,35 ,37 ,39 ,41 ,43 ,1 ,3 ,5 ,7 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,20 ,21 ,23 ,24 ,25 ,27 ,28 ,30 ,32 ,34 ,36 ,38 ,40 ,42

A Tabela 6.4 mostra alguns resultados obtidos pelo algoritmo de Miller para a família de caterpillars do tipo  $C(k, z, k, z, k)$ , onde  $z < k$  e  $p = 5$  para alguns valores de  $z$  e  $k$ . Também neste caso foram executados testes para valores de  $k$  variando de 3 até 6,  $z$  variando de 2 até 5, e o tamanho do corpo  $p$  igual a 5.

TAB. 6.4: Teste de Famílias de Caterpillars -  $C(k, z, k, z, k)$  -  $k = 3$  até 6 e  $z = 2$  até 5

Notação	$p$	$k$	$z$	$b(G)$	Rotulação
$C32323$	5	3	2	3	4 ,7 ,10 ,13 ,16 ,1 ,2 ,3 ,5 ,6 ,8 ,9 ,11 ,12 ,14 ,15 ,17 ,18
$C42424$	5	4	2	4	5 ,8 ,12 ,16 ,20 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,9 ,10 ,11 ,13 ,14 ,15 ,17 ,18 ,19 ,21
$C43434$	5	4	3	4	5 ,9 ,13 ,17 ,21 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,11 ,12 ,14 ,15 ,16 ,18 ,19 ,20 ,22 ,23
$C52525$	5	5	2	4	5 ,9 ,13 ,17 ,21 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,11 ,12 ,14 ,15 ,16 ,18 ,19 ,20 ,22 ,23 ,24
$C53535$	5	5	3	5	6 ,10 ,15 ,20 ,25 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,11 ,12 ,13 ,14 ,16 ,17 ,18 ,19 ,21 ,22 ,23 ,24 ,26
$C54545$	5	5	4	5	6 ,11 ,16 ,21 ,26 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,10 ,12 ,13 ,14 ,15 ,17 ,18 ,19 ,20 ,22 ,23 ,24 ,25 ,27 ,28
$C62626$	5	6	2	5	6 ,10 ,15 ,20 ,25 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,11 ,12 ,13 ,14 ,16 ,17 ,18 ,19 ,21 ,22 ,23 ,24 ,26 ,27
$C63636$	5	6	3	5	6 ,11 ,16 ,21 ,26 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,10 ,12 ,13 ,14 ,15 ,17 ,18 ,19 ,20 ,22 ,23 ,24 ,25 ,27 ,28 ,29
$C64646$	5	6	4	5	6 ,11 ,16 ,21 ,26 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,10 ,12 ,13 ,14 ,15 ,17 ,18 ,19 ,20 ,22 , 23 , 24 ,25 ,27 ,28 ,29 ,30 ,31
$C65656$	5	6	5	6	7 ,13 ,19 ,25 ,31 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,8 ,9 ,10 ,11 ,12 ,14 ,15 ,16 ,17 ,18 ,20 ,21 ,22 , 23 ,24 ,26 ,27 ,28 ,29 ,30 ,32 ,33

Outras instâncias testadas com famílias de caterpillars podem ser encontradas no Anexo.

## 6.4 HEURÍSTICA ESPECTRAL DE MOHAR

### 6.4.1 RESULTADOS OBTIDOS UTILIZANDO A HEURÍSTICA ESPECTRAL DE MOHAR

Nesta seção mostraremos os testes realizados com a heurística espectral, onde trabalharemos com as mesmas famílias apresentadas na Seção 6.3.

Os experimentos utilizaram os mesmos critérios apresentados na seção anterior e alguns parâmetros adicionais para análise.

O parâmetro adicional é:

$x^{(2)}$  = Autovetor associado ao segundo menor autovalor da matriz Laplaciana correspondente ao caterpillar (vetor de Fiedler);

Mostramos os resultados obtidos para a família  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  com valores de  $k$  variando de 1 até 9 e o tamanho do corpo  $p$  variando de 3 até 12.

Para  $k = 1$  e  $p$  variando 3 até 12 os valores de largura de banda e a rotulação obtida pela *HEM* são mostrados na Tabela 6.5.

A Tabela 6.6 mostra o autovalor  $\lambda^{(2)}$  e o vetor de Fiedler dos caterpillars da Tabela 6.5.

TAB. 6.5: Teste de Famílias de Caterpillars -  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 1$

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C_{111}$	3	1	2	2,3,5,1,4,6
$C_{1111}$	4	1	2	7,5,4,2,8,6,3,1
$C_{11111}$	5	1	2	9,7,5,4,2,10,8,6,3,1
$C_{111111}$	6	1	2	2,4,6,7,9,11,1,3,5,8,10,12
$C_{1111111}$	7	1	2	2,4,6,7,9,11,13,1,3,5,8,10,12,14
$C_{11111111}$	8	1	2	15,13,11,9,8,6,4,2,16,14,12,10,7,5,3,1
$C_{111111111}$	9	1	2	17,15,13,11,9,8,6,4,2,18,16,14,12,10,7,5,3,1
$C_{1111111111}$	10	1	2	19,17,15,13,11,10,8,6,4,2,20,18,16,14,12,9,7,5,3,1
$C_{11111111111}$	11	1	2	21,19,17,15,13,11,10,8,6,4,2,22,20,18,16,14,12,9,7,5,3,1
$C_{111111111111}$	12	1	2	23,21,19,17,15,13,12,10,8,6,4,2,24,22,20,18,16,14,11,9,7,5,3,1

TAB. 6.6: Vetores de Fiedler da Família -  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 1$

Notação	$\lambda_{(2)}$	Vetor de Fiedler
$C^{111}$	0.38197	-0.37175 ;0 ;0.37175 ;-0.6015 ;0 ;0.6015
$C^{11111}$	0.25088	0.39167 ;0.16224 ;-0.16224 ; -0.39167 ; 0.52285 ; 0.21657 ; -0.21657 ;-0.52285
$C^{111111}$	0.17291	0.23693 ; -0.0001 ; -0.23693 ; -0.38336 ; 0.46351 ; 0.28646 ; -0.0001 ; -0.28646, -0.46351
$C^{1111111}$	0.12504	0.36722 ;-0.26883 ;-0.0984 ;0.0984 ;0.26883 ;0.36722 ;-0.4197 ;-0.30724 ;-0.11246 ;0.11246 ;0.30724 ;-0.4197
$C^{11111111}$	0.09414	-0.34986 ;-0.28057 ;-0.1557 ;-0.0001 ;0.1557 ;0.28057 ;0.34986 ;-0.38622 ;-0.30972 ;-0.17188 ;-0.0001 ;0.17188 ;0.30972 ;0.38622
$C^{111111111}$	0.07323	0.33334 ;0.28259 ;0.18882 ;0.06631 ;-0.06631 ;-0.18882 ;-0.28259 ;-0.33334 ;0.35968 ;0.30492 ;0.20374 ;0.07154 ;-0.07154 ;-0.20374 ;-0.30492 ;-0.35968
$C^{1111111111}$	0.05849	0.31824 ;0.27985 ;0.20771 ;0.11052 ;-0.0001 ;-0.11052 ;-0.20771 ;-0.27985 ;-0.31824 ;0.33801 ;0.29724 ;0.22062 ;0.11739 ;-0.0001 ;-0.11739 ;-0.22062 ;-0.29724 ;-0.33801
$C^{11111111111}$	0.4775	0.3046 ;0.27479 ;0.21807 ;0.14001 ;0.04824 ;-0.04824 ;-0.14001 ;-0.21807 ;-0.27479 ;-0.3046 ;0.31988 ;0.28857 ;0.22901 ;0.14703 ;0.05066 ;-0.05066 ;-0.14703 ;-0.22901 ;-0.28857 ; -0.31988 ;
$C^{111111111111}$	0.03969	0.29234 ;0.26866 ;0.22321 ;0.15968 ;0.08321 ;-0.0001 ;-0.08321 ;-0.15968 ;-0.22321 ;-0.26866 ;-0.29234 ;0.30442 ;0.27976 ;0.23243 ;0.16628 ;0.08665 ;-0.0001 ;-0.08665 ;-0.16628 ; -0.23243 ;-0.27976 ;-0.30442 ;
$C^{1111111111111}$	0.03349	0.28129 ;0.26212 ;0.22509 ;0.17272 ;0.10857 ;0.03703 ;-0.03703 ;-0.10857 ;-0.17272 ;-0.22509 ;-0.26212 ;-0.28129 ;0.29104 ;0.2712 ;0.23289 ;0.1787 ;0.11234 ;0.03832 ;-0.03832 ;-0.11234 ;-0.1787 ;-0.23289 ;-0.2712 ;-0.29104 ;
$C^{11111111111111}$	0.02864	-0.2713 ;-0.25553 ;-0.22492 ;-0.18123 ;-0.12701 ;-0.0654 ;0 ;0.0654 ;0.12701 ;0.18123 ;0.22492 ;0.25553 ;0.2713 ;-0.2793 ;-0.26307 ;-0.23155 ;-0.18657 ;0.13075 ;-0.06733 ;0 ;0.06733 ;0.13075 ;0.18657 ;0.23155 ;0.26307 ;0.2793
$C^{1111111111111111}$	0.02476	0.26223 ; 0.24908 ; 0.22344 ; 0.18660 ; 0.14040 ; 0.08716 ; 0.02955 ; -0.02955 ; -0.08716 ; -0.14040 ; -0.18660 ; -0.22344 ; -0.24908 ; -0.26223 ; 0.26889 ; 0.25541 ; 0.22911 ; 0.19134 ; 0.14396 ; 0.08937 ; 0.03030 ; -0.03030 ; -0.08937 ; -0.14396 ; -0.19134 ; -0.22911 ; -0.25541 ; -0.26889

Também foram realizados testes com a heurística espectral de Mohar para caterpillars do tipo  $C(1, 1, \dots, k, \dots, 1, 1)$ , onde os valores de  $k$  variam de 1 até 9, e o tamanho do corpo  $p$  (número ímpar) varia de 3 até 21. Nas Tabelas 6.7 e 6.8 são mostrados os resultados para caterpillars desta família no caso  $k = 6$ .

TAB. 6.7: Teste de Famílias de Caterpillars -  $C(1, 1, \dots, k, \dots, 1, 1)$ ,  $k = 6$

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C161$	3	6	7	10 ,3, 2, 11, 4, 9, 5, 6, 7, 8, 1
$C11611$	5	6	7	14 ,12, 5, 4, 2, 15, 13, 6, 7, 8, 9, 11, 10, 3, 1
$C1116111$	7	6	7	18 ,16, 14, 7, 6, 4, 2, 19, 17, 15, 8, 9, 10 ,11 ,12 ,13 ,5 ,3, 1
$C111161111$	9	6	7	22 ,20, 18, 16, 9 ,8 ,6 ,4 ,2 ,23 ,21 ,19 ,17 ,10 ,11 ,12 ,13 ,14, 15, 7, 5, 3
$C11111611111$	11	6	7	2, 4, 6, 8, 10, 11, 18, 20, 22, 24, 26, 1, 3, 5, 7, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27
$C1111116111111$	13	6	7	2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 1, 3 ,5, 7, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31
$C111111161111111$	15	6	7	2 ,4 ,6, 8, 10, 12, 14, 15, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 1, 3 ,5 ,7 ,9 ,11 ,13 ,16 ,17 ,18 ,19 ,20 ,21 ,23 ,25 ,27 ,29 ,31 ,33 ,35
$C11111111611111111$	17	6	7	38 ,36, 34, 32, 30, 28, 26, 24, 17, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C1111111116111111111$	19	6	7	42 ,40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 19, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 20, 21, 22, 23, 24,25, 17, 15, 13, 11, 9 ,7 ,5 ,3 ,1
$C111111111161111111111$	21	6	7	2 ,4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 28 ,30 ,32 ,34 ,36, 38,40 ,42, 44 , 46 , 1 , 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 22,23 ,24, 25,26 ,27 ,29 ,31 33, 35, 37,39 ,41 ,43 ,45 ,47



TAB. 6.8: Vetores de Fiedler da Família -  $C(1, 1, \dots, k, \dots, 1, 1)$  -  $k = 6$

Notação	$\lambda_{(2)}$	Vetor de Fiedler
$C_{161}$	0.38197	-0.37175 ;0 ;0.37175 ;-0.6015 ;0 ;0.6015
$C_{11611}$	0.17291	0.38336; 0.23693; -0.0001; -0.23693; -0.38336; 0.46351; 0.28646; -0.0001; -0.0001; -0.0001; -0.0001; 0; -0.0001; -0.28646; -0.46351;
$C_{1116111}$	0.09414	0.34986 ;0.28057; 0.1557; 0; -0.1557; -0.28057; -0.34986; 0.38622; 0.30972; 0.17188; 0; 0; 0; 0; 0; -0.17188; -0.30972; -0.38622;
$C_{111161111}$	0.05849	0.31824; 0.27985; 0.20771; 0.11052; 0; -0.11052; -0.20771; -0.27985; -0.31824; 0.33801;0.29724 ;0.22062 ;0.11739 ;0; 0; 0; 0; -0.11739; -0.22062; -0.29724; -0.33801;
$C_{11111611111}$	0.03969	-0.29234; -0.26866; -0.22321; -0.15968; -0.08321; -0.0001; 0.08321; 0.15968; 0.22321; 0.26866; 0.29234; -0.30442; -0.27976; -0.23243; -0.16628; -0.08665; -0.0001; -0.0001; -0.0001; -0.0001; -0.0001; -0.0001; 0.08665; 0.16628; 0.23243; 0.27976; 0.30442;
$C_{1111116111111}$	0.02864	-0.2713 ;-0.25553 ;-0.22492 ;-0.18123 ;-0.12701 ;-0.0654 ;-0.0001 ;0.0654 ;0.12701 ;0.18123 ;0.22492 ;0.25553 ;0.2713 ;-0.2793 ;-0.26307 ;-0.23155 ;-0.18657 ;-0.13075 ;-0.06733 ;-0.0001 ;-0.0001 ;-0.0001 ;-0.0001 ;-0.0001 ;0.06733 ;0.13075 ;0.18657 ;0.23155 ;0.26307 ;0.2793 ;
$C_{111111161111111}$	0.02161	-0.25396; -0.24286; -0.22115; -0.18977; -0.1501; -0.10387; -0.05309; 0; 0.05309; 0.10387; 0.1501; 0.18977; 0.22115; 0.24286; 0.25396; -0.25957; -0.24823; -0.22604; -0.19396; -0.15341; -0.10616; -0.05427; 0; 0; 0; 0; 0; 0.05427; 0.10616; 0.15341; 0.19396; 0.22604; 0.24823; 0.25957;
$C_{11111111611111111}$	0.01688	0.23944; 0.23128; 0.21525; 0.19189; 0.16200; 0.12659; 0.08686; 0.04418; 0; -0.04418; -0.08686; -0.12659; -0.16200; -0.19189; -0.21525; -0.23128; -0.23944; 0.24355; 0.23525; 0.21895; 0.19519; 0.16478; 0.12876; 0.08836; 0.04494; 0; 0; 0; 0; -0.04494; -0.08836; -0.12876; -0.16478; -0.19519; -0.21895; -0.23525; -0.24355;
$C_{1111111116111111111}$	0.01355	0.22707; 0.22087; 0.20866; 0.19075; 0.16763; 0.13995; 0.10844; 0.07398; 0.03750; 0; -0.03750; -0.07398; -0.10844; -0.13995; -0.16763; -0.19075; -0.20866; -0.22087; -0.22707; 0.23019; 0.22391; 0.21152; 0.19336; 0.16993; 0.14187; 0.10993; 0.07500; 0.03802; 0; 0; 0; 0; 0; -0.03802; -0.07500; -0.10993; -0.14187; -0.16993; -0.19336; -0.21152; -0.22391; -0.23019; ;
$C_{11111111116111111111}$	0.01111	-0.21639; -0.21156; -0.20200; -0.18792; -0.16965; -0.14759; -0.12224; -0.09415; -0.06396; -0.03234; 0; 0.03234; 0.06396; 0.09415; 0.12224; 0.14759; 0.16965; 0.18792; 0.20200; 0.21156; 0.21639; -0.21882; -0.21393; -0.20426; -0.19003; -0.17156; -0.14925; -0.12361; -0.09521; -0.06468; -0.03270; 0; 0; 0; 0; 0; 00000; 0.03270; 0.06468; 0.09521; 0.12361; 0.14925; 0.17156; 0.19003; 0.20426; 0.21393; 0.21882;

A Tabela 6.9 a seguir mostra alguns resultados obtidos pela heurística espectral de Mohar para a família de caterpillars do tipo  $C(k, z, k, z, k)$ , onde  $z < k$  e  $p = 5$  para alguns valores de  $z$  e  $k$ . Também neste caso foram executados testes para valores de  $k$  variando de 3 até 6,  $z$  variando de 2 até 5, e o tamanho do corpo  $p$  número 5.

TAB. 6.9: Teste de Famílias de Caterpillars -  $C(k, z, k, z, k)$ ,  $k = 3$  até 6 e  $z = 2$  até 5  $p = 5$

Notação	$p$	$k$	$z$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C32323$	5	3	2	4	4 ,7, 8, 12, 15, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17 ,18
$C42424$	5	4	2	5	5 ,8, 9, 14, 17, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15,16 ,18 ,19, 20, 21
$C43434$	5	4	3	5	5,9, 10, 15, 19, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 16, 17,18, 20, 21, 22, 23
$C52525$	5	5	2	6	6 ,9 ,10, 16, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24
$C53535$	5	5	3	6	6 ,10, 11, 17, 21 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,12 ,13 ,14 ,15 ,16 ,18 ,19 ,20 ,22 ,23 ,24 ,25 ,26
$C54545$	5	5	4	6	23, 18, 12, 11, 6, 24, 25, 26, 27, 28, 19, 20, 21, 22, 13, 14, 15, 16, 17, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5
$C62626$	5	6	2	7	7 ,10 ,11 ,18 ,21 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,8 ,9 ,12 ,13 ,14 ,15 ,16 ,17 ,19 ,20 ,22 ,23 ,24 ,25 ,26 ,27
$C63636$	5	6	3	7	7 ,11 ,12 ,19 ,23 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,8 ,9 ,10 ,13 ,14 ,15 ,16 ,17 ,18 ,20 ,21 ,22 ,24 ,25 ,26 ,27 ,28 ,29
$C64646$	5	6	4	7	25 ,20 ,13 ,12 ,7 ,26 ,27 ,28 ,29 ,30 ,31 ,21 ,22 ,23 ,24 ,14 ,15 ,16 ,17 ,18 ,19 ,8 ,9 ,10 ,11 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6
$C65656$	5	6	5	7	27 ,21 ,14 ,13 ,7 ,28 ,29 ,30 ,31 ,32 ,33 ,22 ,23 ,24 ,25 ,26 ,15 ,16 ,17 ,18 ,19 ,20 ,8 ,9 ,10 ,11 ,12 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6

TAB. 6.10: Vetores de Fiedler da Família -  $C(k, z, k, z, k)$  -  $k = 3$  até  $k = 5$  e  $z = 2$

Notação	$\lambda_{(2)}$	Vetor de Fiedler
$C32323$	0.9502	-0.29207 ; -0.17232 ; -0.0001 ; 0.17232 ; 0.29207 ; -0.32274 ; -0.32274 ; -0.32274 ; -0.19041 ; -0.19041 ; -0.0001 ; -0.0001 ; -0.0001 ; 0.19041 ; 0.19041 ; 0.32274 ; 0.32274 ; 0.32274
$C42424$	0.07992	-0.27061 ; -0.15496 ; 0 ; 0.15496 ; 0.27061 ; -0.29412 ; -0.29412 ; -0.29412 ; -0.29412 ; -0.16842 ; -0.16842 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0.16842 ; 0.16842 ; 0.29412 ; 0.29412 ; 0.29412 ; 0.29412
$C43434$	0.07583	-0.26196 ; -0.15612 ; 0 ; 0.15612 ; 0.26196 ; -0.28346 ; -0.28346 ; - 0.28346 ; -0.28346 ; -0.16893 ; -0.16893 ; -0.16893 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0.16893 ; 0.16893 ; 0.16893 ; 0.28346 ; 0.28346 ; 0.28346 ; 0.28346
$C52525$	0.06894	-0.25305 ; -0.14193 ; 0 ; 0.14193 ; 0.25305 ; -0.27179 ; -0.27179 ; -0.27179 ; -0.27179 ; -0.27179 ; -0.15244 ; -0.15244 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0.15244 ; 0.15244 ; 0.27179 ; 0.27179 ; 0.27179 ; 0.27179 ; 0.27179 ;
$C53535$	0.06600	-0.2465 ; -0.14315 ; 0 ; 0.14315 ; 0.2465 ; -0.26392 ; -0.26392 ; - 0.26392 ; -0.26392 ; -0.26392 ; -0.15326 ; -0.15326 ; -0.15326 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0.15326 ; 0.15326 ; 0.15326 ; 0.26392 ; 0.26392 ; 0.26392 ; 0.26392 ; 0.26392
$C54545$	0.06314	0.23978 ; 0.14382 ; 0 ; -0.14382 ; -0.23978 ; 0.25595 ; 0.25595 0.25595 ; 0.25595 ; 0.25595 ; 0.15352 ; 0.15352 ; 0.15352 ; 0.15352 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; -0.15352 -0.15352 ; -0.15352 ; -0.15352 ; -0.25595 ; -0.25595 ; -0.25595 ; -0.25595 ; -0.25595
$C62626$	0.06060	-0,23842; -0,13170; 0; 0,13170; 0,23842; -0,25380; -0,25380; - 0,25380; -0,25380; -0,25380; -0,25380; -0,14019; -0,14019; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,14019; 0,14019; 0,25380; 0,25380; 0,25380; 0,25380; 0,25380; 0,25380
$C63636$	0.05838	-0,23326; -0,13287; 0,00000; 0,13287; 0,23326; -0,24772; - 0,24772; -0,24772; -0,24772; -0,24772; -0,24772; -0,14110; - 0,14110; -0,14110; 0; 0; 0; 0; 0; 0,14110; 0,14110; 0,14110; 0,24772; 0,24772; 0,24772; 0,24772; 0,24772; 0,24772
$C64646$	0.05622	0,22793; 0,13365; 0; -0,13365; -0,22793; 0,24151; 0,24151; 0,24151; 0,24151; 0,24151; 0,24151; 0,14161; 0,14161; 0,14161; 0,14161; 0; 0; 0; 0; 0; -0,14161; -0,14161; -0,14161; -0,14161; -0,24151; -0,24151; -0,24151; -0,24151; -0,24151; -0,24151
$C65656$	0.05413	0,22252; 0,13407; 0; -0,13407; -0,22252; 0,23525; 0,23525; 0,23525; 0,23525; 0,23525; 0,23525; 0,14174; 0,14174; 0,14174; 0,14174; 0,14174; 0; 0; 0; 0; 0; 0; -0,14174; -0,14174; -0,14174; -0,14174; -0,14174; -0,23525; -0,23525; -0,23525; -0,23525; - 0,23525; -0,23525

Experimentos com outras famílias podem ser encontrados detalhadamente no Anexo.

#### 6.4.2 OBSERVAÇÕES SOBRE RESULTADOS OBTIDOS PELA HEURÍSTICA ESPECTRAL DE MOHAR

Nas famílias testadas observamos que os valores dos elementos do vetor de Fiedler têm um comportamento particular. Independente da família considerada, os valores dos componentes do vetor de Fiedler apresentam as seguintes características. Os vértices dos cabelos adjacentes ao mesmo vértice do corpo recebem componentes do vetor de Fiedler iguais. Seja o caterpillar  $C(1, 1, 5, 1, 1)$  da Figura 6.7.

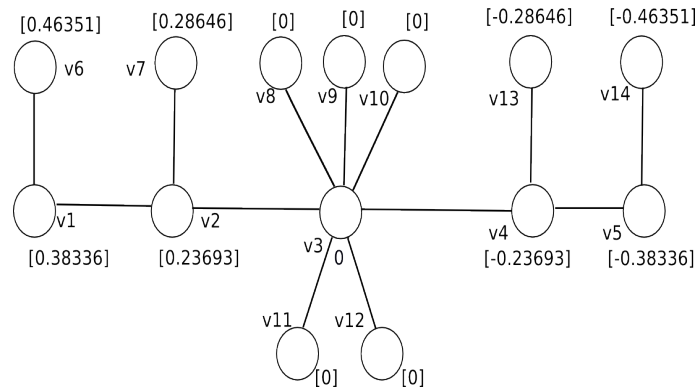


FIG. 6.7: *Caterpillar*  $C(1, 1, 5, 1, 1)$

O espectro da matriz laplaciana obtido pela heurística espectral de Mohar  $C(1, 1, 5, 1, 1)$  é  $S_{PL}(C(1, 1, 5, 1, 1)) = [0, 0.17291, 0.31531, 0.66174, 0.67763, 1, 1, 1, 1, 2.17081, 2.20906, 3.71806, 3.95630, 8.11819]$ . Sendo o segundo menor autovalor o  $\lambda_2 = 0.17291$

Os valores dos componentes do vetor de Fiedler são

$$x^{(2)} = [0.38336, 0.23693, 0, -0.23693, -0.38336, 0.46351, 0.28646, 0, 0, 0, 0, 0, -0.28646, -0.46351]$$

Observe que os 5 componentes iguais no vetor de Fiedler correspondem aos componentes dos vértices dos cabelos  $v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}$ , adjacentes ao vértice  $v_3$  do corpo.

Este comportamento foi verificado para a família  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  e para outras famílias de caterpillars testadas.

Para o caterpillar  $C(2, 5, 2)$  da Figura 6.8, o espectro da matriz laplaciana.

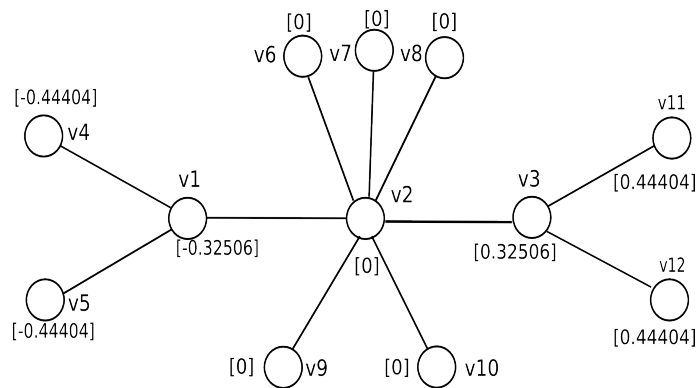


FIG. 6.8: *Caterpillar*  $C(2, 5, 2)$

$$S_{pL}(C(2, 5, 2)) = [0, 0.26795, 0.42782, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3.45593, 3.73205, 8.11625]$$

Sendo o segundo menor autovalor o  $\lambda_2 = 0.26795$ . O vetor de Fiedler correspondente é

$$x^{(2)} = [-0.32506, 0, 0.32506, -0.44404, -0.44404, 0, 0, 0, 0, 0, 0.44404, 0.44404]$$

Neste caso o vetor de Fiedler apresenta as mesmas características. Os componentes correspondente aos vértices  $v_6, v_7, v_8$  vértices pertencente aos cabelos ligados aos vértice do corpo  $v_2$  são iguais.

Os vértices  $v_4$  e  $v_5$  adjacentes ao vértice  $v_1$  têm associados componentes do vetor de Fiedler iguais a  $-0.44404$  e os dois vértices  $v_{11}$  e  $v_{12}$  adjacentes aos vértices do corpo  $v_3$  tem associado, componentes do vetor de Fiedler igual a  $0.44404$ . E por fim todos os vértices pertencentes aos cabelos ligados a  $v_2$  têm associado o valor  $0$  (inclusive  $v_2$ ).

Os componentes do vetor de Fiedler correspondentes aos vértices do corpo recebem valores numéricos diferentes. Neste exemplo os valores dos componentes do vetor de Fiedler dos elementos associados aos vértices do corpo foram  $-0.32506, 0, 0.32506$ .

Analisando os valores encontrados no vetor de Fiedler para as famílias de experimentos que foram testadas. Observamos que existe ocorre um comportamento para os casos de caterpillars possuem uma certa simetria.

Portanto, o vetor de Fiedler também é sensível a simetria em caterpillars.

Os exemplos mostrados nas Figuras 6.7 e 6.8 têm em comum a relação de valores apresentadas nos componentes do vetor de Fiedler para o vértice do corpo. Esses valores têm sinais diferentes para vértices que são simétricos no corpo. Os vértices  $v_1$  e  $v_3$  do caterpillar da Figura 6.8 são os extremos do corpo do caterpillar, os valores dos componentes do vetor de Fiedler correspondentes são  $-0.32506$  e  $0.32506$ .

O vértice  $v_2$  tem o componente do vetor Fiedler igual a  $0$ .

Isso corre também com o caterpillar da Figura 6.7, para os vértices  $v_1$  e  $v_5$  os valores dos componentes do vetor de Fiedler são  $0.38336$  e  $-0.38336$ . Para os vértices  $v_2$  e  $v_6$  os valores são  $0.23693$  e  $-0.23693$ .

O exemplo da Figura 6.9,  $C(1, 5, 1, 1)$ , mostra um comportamento diferente. Neste caso observa-se que o grafo não é simétrico ao respeito do centro e os componentes do vetor de Fiedler associados aos vértice do corpo não são simétricos.

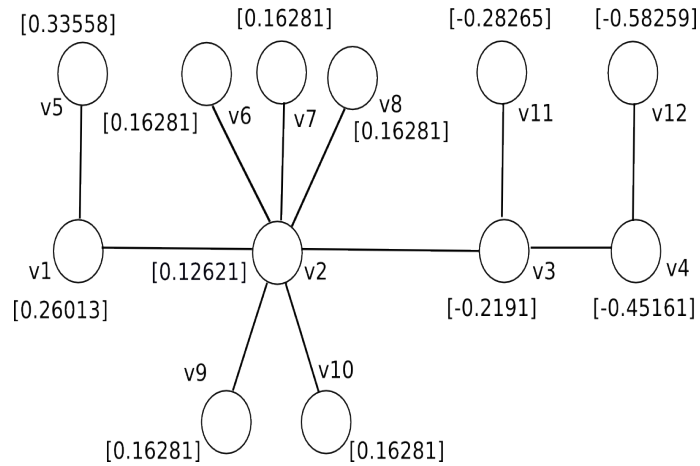


FIG. 6.9: *Caterpillar*  $C(1, 5, 1, 1)$

É importante destacar que em todos os experimentos para as classes de caterpillars testadas, o segundo menor autovalor da matriz laplaciana  $\lambda_2$  tem multiplicidade 1 e o autovetor correspondente tem um espaço vetorial de dimensão 1 (um único vetor livremente indefinido demais).

No exemplo da Figura 6.7 podemos observar que o espectro do caterpillar  $C(1, 1, 5, 1, 1)$  tem como segundo menor autovalor é  $\lambda_2 = 0.17291$  e tem multiplicidade 1.

O mesmo acontece com o caterpillar  $C(2, 5, 2)$  apresentado na Figura 6.8, cujo segundo menor autovalor é  $\lambda_2 = 0.26795$  e com o caterpillar da Figura 6.9 com  $\lambda_2 = 0.22482$ .

Foram também testados caterpillars com a heurística espectral modificando o autovetor usado (diferente do vetor de Fiedler).

Considerando o caterpillar  $C(1, 1, 9, 1, 1)$  foi executada a *HEM* usando o 3º, 4º, 5º menor autovalor.

Utilizando a *HEM* com o segundo menor autovalor obtemos a largura de banda aproximada igual a 10. Na Figura 6.10 apresentamos a rotulação obtida.

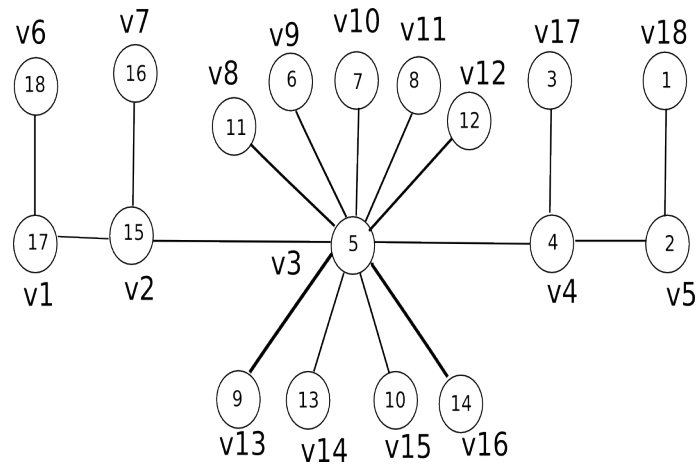


FIG. 6.10: *Experimentos com o 2º menor autovalor*

O valor de largura de banda aproximada para o 3º menor autovalor foi também 9, e para o 4º e 5º menor autovalor foi igual a 12.

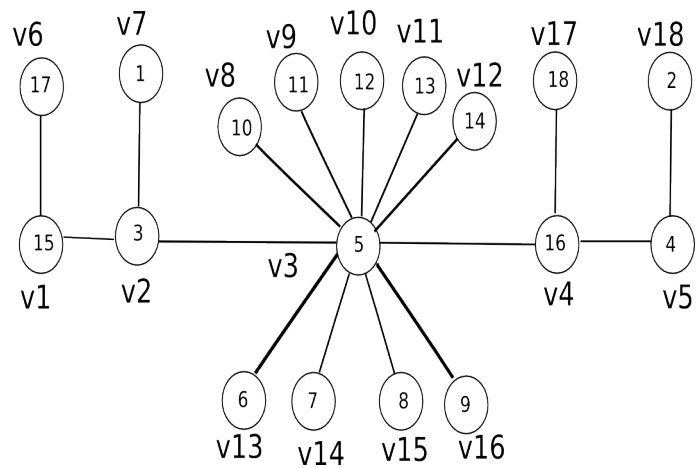


FIG. 6.11: *Experimentos com o 4º menor autovalor*

As Figuras 6.11, 6.12 e 6.13 mostram a função de rotulação e largura de banda obtidas pela heurística espectral usado o 4º menor autovalor, o 5º menor autovalor e o 3º menor autovalor respectivamente.

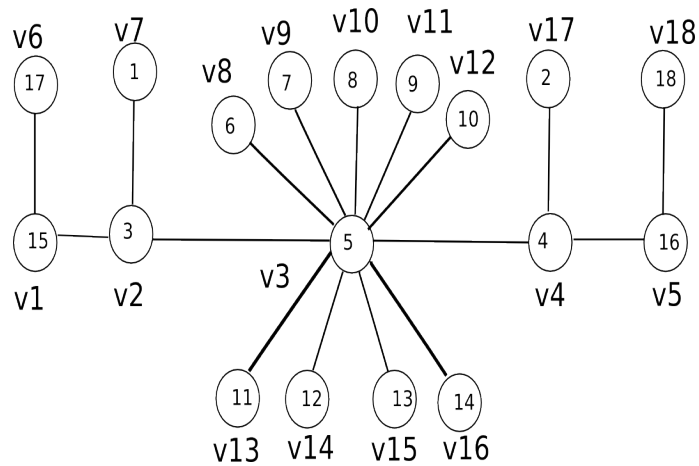


FIG. 6.12: Experimentos com o 5º menor autovalor

No experimento utilizando o terceiro menor autovalor houve uma melhoria do valor de largura de banda. Mesmo com a diminuição em 1 unidade da largura de banda não podemos afirmar que para todas as famílias aplicando o terceiro menor autovalor na heurística iremos obter melhorias de todos os resultados.

Esta situação ocorreu com esta família específica  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  e  $k = 9$  sendo assim um caso excepcional.

As demais famílias experimentadas não obtiveram resultados de melhorias.

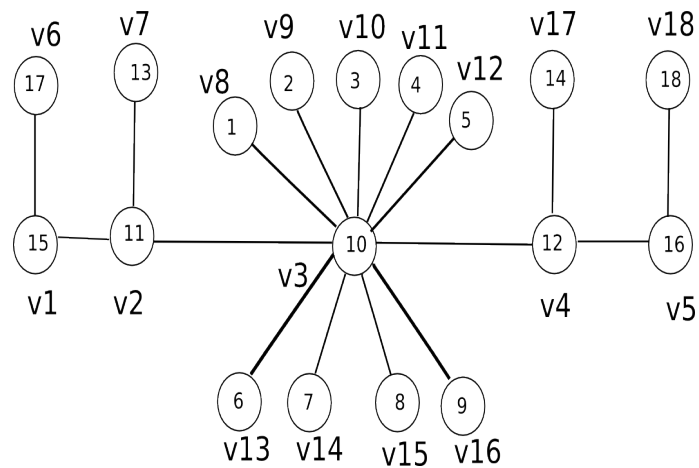


FIG. 6.13: Experimentos com o 3º menor autovalor



## 6.5 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS DOS ALGORITMOS

Nesta seção será apresentado um resumo de todos os experimentos feitos com a ferramenta Seções anteriores. As famílias testadas e as variações dos parâmetros para criação das diferentes instâncias serão detalhadas na Tabela 6.11.

TAB. 6.11: Comparação da largura de banda calculada por Miller e pela *HEM*

Família $C$	$b(C)$ - Miller	$\tilde{b}(C)$ - HEM
$C(k, k, \dots, k, \dots, k, k)$	$k + 1$	$k + 1$
$C(1, \dots, k, \dots, 1)$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil$	$k + 1$
$C(1, k, \dots, 1)$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil$	$k + 1$
$C(k, 1, \dots, 1, k)$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil$	$k$
$C(k, 1, \dots, k, \dots, 1, k)$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil$	$k + 1$
$C(k, z, k, z, k)$	$\lceil (k/2 + z/2) \rceil$	$k + 1$
$C(k, w, x, y, z)$	$(k - 2)$	$k$

As famílias de caterpillars utilizadas como grupos de experimentos são:

$C(k, k, \dots, k, \dots, k, k)$ ,  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ ,  $C(1, k, \dots, 1)$ ,  $C(k, 1, \dots, 1, k)$ ,  $C(k, 1, \dots, k, \dots, 1, k)$ ,  $C(k, z, k, z, k)$ ,  $C(k, w, x, y, z)$ .

Para esses experimentos foram criadas instâncias para cada variação dos parâmetros referentes a quantidade de cabelos  $k$  e ao tamanho do corpo  $p$  os resultados obtidos nos experimentos, com cada instância destas famílias foram analisadas.

A largura de banda para a família  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ , obtida pela heurística espectral foi  $k + 1$ , para por todas as instâncias consideradas (tamanho do corpo  $p$  e número de cabelos  $k$ ).

A largura de banda para a família  $C(k, 1, \dots, 1, k)$  obtida pela *HEM* foi  $k$  para as instâncias consideradas.

No caso das famílias  $C(k, 1, \dots, 1, k)$  e  $C(k, w, x, y, z)$ , a largura de banda obtida pela *HEM* foi igual a  $k$ .

O resultado obtido pela *HEM* para largura de banda da família  $C(k, k, \dots, k, \dots, k, k)$  coincide com o valor ótimo obtido pelo algoritmo de Miller,  $(k + 1)$ .

Para todas as outras famílias da Tabela 6.11, o resultado obtida pela *HEM* é diferente do resultado exato obtido por Miller. Miller obtém a largura de banda de  $\lceil (k + 1)/2 \rceil$  para

as famílias  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ ,  $C(1, k, \dots, 1)$ ,  $C(k, 1, \dots, 1, k)$  e  $C(k, 1, \dots, 1, k, 1, \dots, 1, k)$ .

No caso das famílias  $C(k, z, k, z, k)$  e  $C(k, w, x, y, z)$  os valores aproximados obtidos pela *HEM* não são ótimos.

## 7 HEURÍSTICA PROPOSTA

Neste capítulo propomos uma modificação da heurística espectral para melhorar o resultado obtido por Mohar para determinar o valor de largura de banda de caterpillars. Baseado na solução aproximada de Mohar e nos experimentos realizados para a classe de caterpillars testados, foi desenvolvida uma nova heurística.

A Seção 7.1 introduz a motivação da nova heurística. A Seção 7.2 apresenta a descrição da heurística proposta e a Seção 7.3 mostra a nova heurística aplicada a dois exemplos de caterpillars. A Seção 7.4 apresenta os resultados obtidos para outros grafos.

### 7.1 MOTIVAÇÃO

Propomos uma nova heurística com objetivo de melhorar os resultados obtidos pela heurística espectral de Mohar apresentados no Capítulo 6.

Observando os resultados de testes realizados, foi possível concluir que a aproximação da largura de banda para a família  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  calculada pela *HEM* é o dobro do valor exato obtido pelo Miller para a mesma família.

Observando os rótulos determinados por Mohar, foi constatado que uma pequena alteração dos valores destes rótulos melhoraria o valor da largura de banda aproximada. Esta alteração consiste em permutar rótulos de vértices específicos, que resultam em valores menores de largura de banda.

Analisando o layout obtido pela *HEM* para o caterpillar  $C(1, 1, 5, 1, 1)$  pertencente a família  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ , observamos que para diminuir a largura de banda basta permutar o rótulo do vértice do corpo por um rótulo apropriado de um vértice de um cabelo ligado a ele.

Mostramos na Figura 7.1 o caterpillar  $C(1, 1, 5, 1, 1)$ . O vértice do corpo  $v_3$  possui 5 cabelos ligados nele. Trocando o rótulo de  $v_3$  com o rótulo de algum dos vértices nos 5 cabelos ligados nele, obtemos uma melhora no valor da largura de banda.

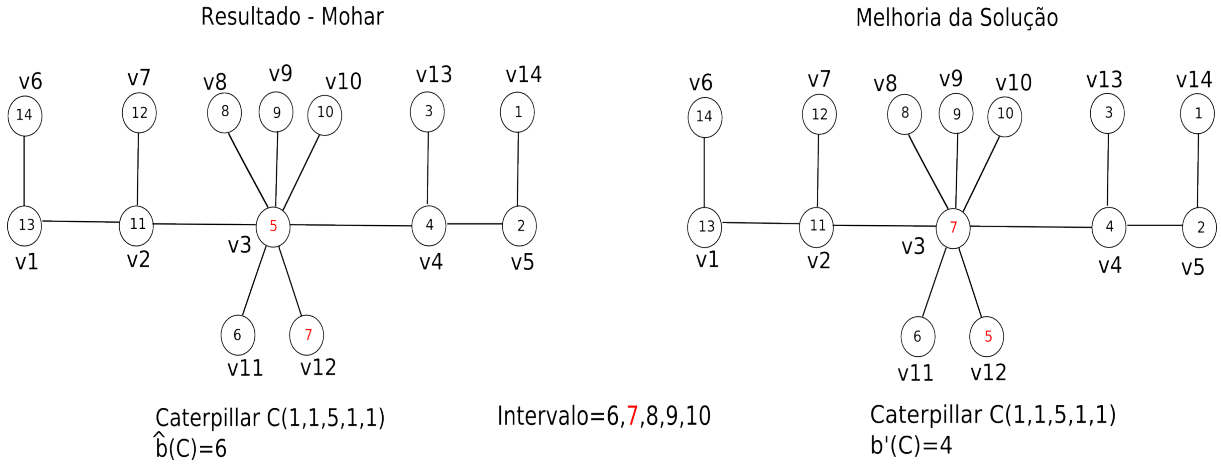


FIG. 7.1: *Caterpillar*  $C(1, 1, 5, 1, 1)$

O vetor de Fiedler do  $C(1, 1, 5, 1, 1)$  é  $x^{(2)} = [0.38336, 0.23693, -0.0001, -0.23693, -0.38336, 0.46351, 0.28646, 0, 0, 0, 0, 0, -0.28646, -0.46351]$ . O vértice do corpo  $v_3$  que tem 5 cabelos ligados, recebe o componente do vetor de Fiedler igual a  $-0.0001$ . Os vértices dos 5 cabelos ligados a  $v_3$  recebem o valor 0. Isso mostra que o vetor de Fiedler trata os vértices dos cabelos adjacentes ao mesmo vértice do corpo da mesma maneira. Portanto, quando se definem os rótulos associados para estes vértices, não há uma distinção entre eles.

Com isso, nossa proposta de melhoria consiste em aproveitar esta característica observada.

A Figura 7.1 apresenta um caterpillar com os rótulos obtidos pela *HEM*, onde o vértice do corpo  $v_3$  têm 5 cabelos ligados nele. Sendo assim, existe um intervalo de rótulos a serem usados entre 6 e 10, para os vértices deste cabelos.

Permutando o rótulo de  $v_3$  que é igual a 5 com algum dos rótulos obtemos um nova rotulação dos vértices de  $C(1, 1, 5, 1, 1)$  com valor de largura de banda menor. Escolhemos o rótulo 7 do vértice do cabelo para permutar com o rótulo 5 do vértice do corpo.

Com esta pequena alteração percebemos que a largura de banda obtido com a nova rotulação é melhor, quando comparada ao resultado obtido pela *HEM*. Neste exemplo específico, a mudança fez com que para o caterpillar  $C(1, 1, 5, 1, 1)$  diminuísse o valor da largura de banda de 6 para 4.

Os experimentos realizados com a família  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  e outras famílias de caterpillar para esta modificação da *HEM*, serão detalhados na Seção 7.4.

## 7.2 HEURÍSTICA PROPOSTA

A *heurística proposta* chamado (heurística 1) apresentada nesta dissertação, melhora os resultados obtidos pela *HEM* para caterpillars.

Dado um caterpillar de entrada e obtendo a função de rotulação construída pela heurística espectral. A idéia central da heurística 1 consiste em permutar o rótulo de algum vértice do corpo com rótulos dos vértices dos cabelos ligados nele. Assim a rotulação resultante produzirá um valor menor de largura de banda.

Para avaliar os resultados obtidos pela heurística 1, serão utilizados os valores obtidos pelo algoritmo de Miller para caterpillars.

A Figura 7.2 apresenta o pseudocódigo da heurística proposta.

Pseudocódigo da Heurística 1	
Entrada: Função Rotulação obtida pela Heurística espectral	
Saída: $b'(G)$	
1	Para cada vértice do corpo do caterpillar faça
2	Se vértice do corpo tem pelo menos 1 cabelo então
3	Para cada vértice cabelo adjacente ao vértice corpo $v_c$ faça
4	Determinar o rótulo do vértice do corpo e dos cabelos;
5	Criar o intervalo que contém os rótulos mencionados $I_{v_c} = I_1^{v_c}, \dots, I_k^{v_c}$ ;
6	Se $n^\circ$ de rótulos no $I_{v_c}$ é ímpar então
7	$Meio = I[TamInter/2]$ ;
8	Se $n^\circ$ de rótulos no $I_{v_c}$ é par então
9	$Meio = I[TamInter/2]$ ou $I[TamInter/2 + 1]$ ;
10	Substituir o rótulo do vértice do corpo pelo valor Meio;
11	Substituir o rótulo do cabelo de valor Meio pelo rótulo antigo do vértice do corpo;

FIG. 7.2: *Heurística 1*

Depois de receber como entrada o caterpillar e de obter a rotulação resultante da *HEM*, o **passo 0** (linha 1), estabelece um laço que tem como finalidade percorrer os vértice do corpo. O critério de parada do algoritmo é o tamanho do corpo do caterpillar. No **passo 1** (linha 2), verifica-se o vértice atual do corpo tem pelo menos um cabelo ligado nele. Se não houver pelo menos um cabelo não há possibilidade de troca de rótulos.

O **passo 2** (linha 3 até 5) percorre cada vértice do cabelo ligado ao vértice do corpo  $v_c$  atual. Neste laço identificam-se os rótulos de  $v_c$  e de cada vértices no cabelo usado com ele e cria-se um intervalo contendo todos estes rótulos. Assim, para cada vértice do corpo atual será criado um intervalo de rótulos  $I_{v_c}$ .

No **passo 3** (linha 6 até 9) será validada a paridade do número de rótulos do intervalo  $I_v$ . Em cada caso será determinado o valor *Meio* do intervalo  $I_v$ .

Na linha 8 se o número de rótulos do  $I_v$  é par, obteremos dois possíveis valores para a

variável **Meio**, sendo  $Meio = I[\lceil TamInter/2 \rceil]$  ou  $Meio = I[\lceil (TamInter/2) + 1 \rceil]$ . A escolha de qual valor **Meio** será usado, dependerá da verificação de qual rótulo vai contribuir para obter maior diminuição da largura de banda.

E por fim no **passo** 4 (linha 10 e 11), é trocado o valor do rótulo do vértice do corpo pelo rótulo do vértice do cabelo apropriado, determinado no passo 3.

### 7.3 EXEMPLO

Nesta Seção mostraremos dois exemplos para os quais é determinada a rotulação dos vértices do caterpillars usando a heurística proposta. Sejam  $C(8, 2, 8, 2, 8)$  e  $C(9, 2, 9, 2, 9)$  os caterpillars considerados (para um deles o número de cabelos é par e o outro o número de cabelos é ímpar).

Primeiro consideramos o caterpillar  $C(8, 2, 8, 2, 8)$ . Calcula-se a função de rotulação usando a *HEM*. A Figura 7.3 mostra a rotulação obtida pela *HEM* para o caterpillar  $C(8, 2, 8, 2, 8)$ .

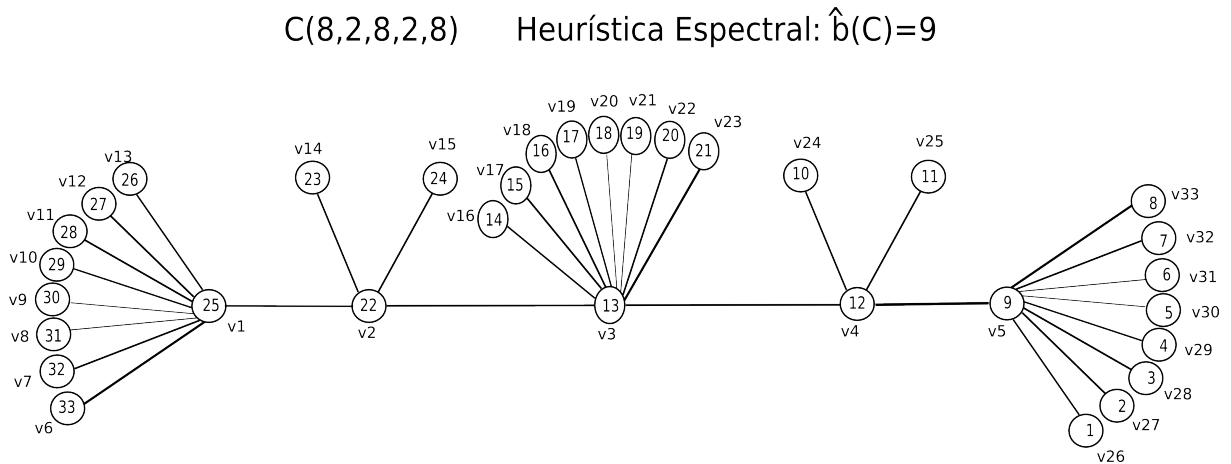


FIG. 7.3:  $C(8, 2, 8, 2, 8)$  - Heurística espectral de Mohar

A Figura 7.4 mostra para cada vértice  $v_c$  do corpo do caterpillar  $C(8, 2, 8, 2, 8)$  os rótulos obtidos pela *HEM*, o intervalo  $I_{v_c}$  correspondente aos rótulos dados pela *HEM* para o vértice do corpo  $v_c$  e para os vértices dos cabelos ligados em  $v_c$ , identificando os valores médios de  $I_{v_c}$  e a troca de rótulos proposta.

Seguindo os passos da heurística 1, a cada iteração verifica-se o vértice do corpo atual tem pelo menos um cabelo. Neste exemplo é válido em todas as iterações, portanto ocorre

troca de rótulos nas 5 iterações.

Observar também que neste exemplo, no passo 3, o número de vértices em  $I_{v_c}$  é ímpar nas 5 iterações e o valor **Meio** é um único rótulo para cada iteração.

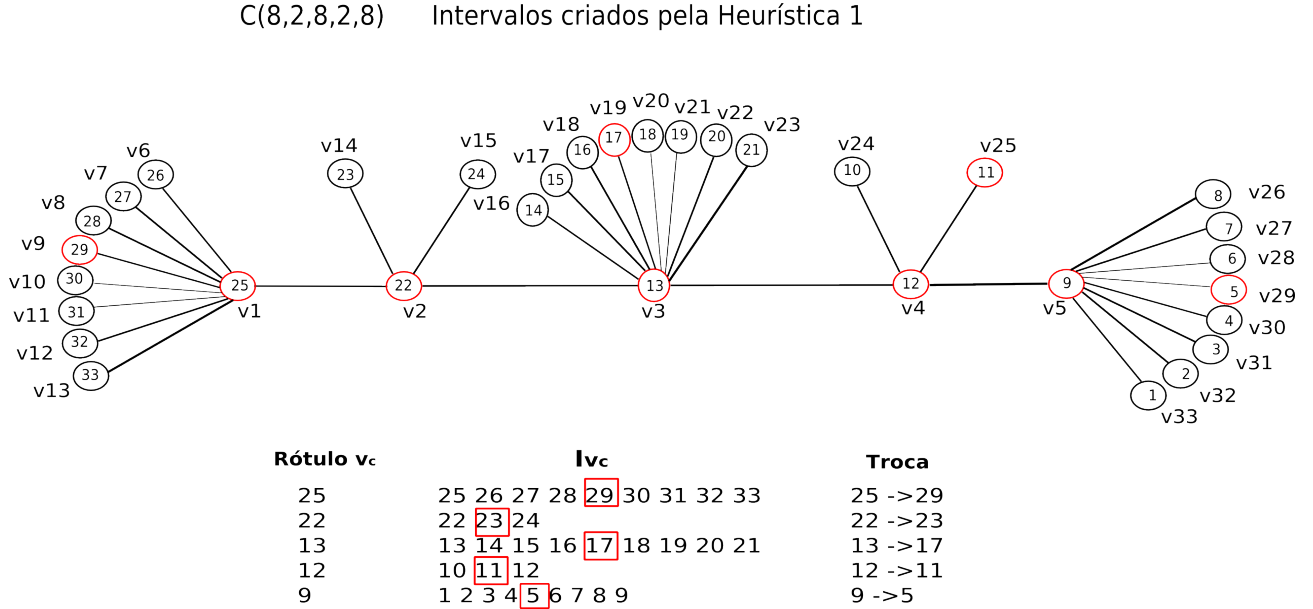


FIG. 7.4:  $C(8, 2, 8, 2, 8)$  - Resultados obtidos pela heurística 1

Na 1ª iteração, identificam-se os rótulos dos vértices de cada cabelo  $v_k$  ligados ao vértice do corpo  $v_1$  (rótulo de  $v_1$  igual a 25). O intervalo  $I_{v_c}$  é construído com o rótulo 25 e os rótulos correspondente aos vértices nos cabelos ligados ao vértices  $v_1$ : {26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33}. Logo  $I_{v_1} = \{25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33\}$ .

Verificamos que a quantidade de rótulos pertencentes ao intervalo  $I_{v_1}$  é ímpar.

Sendo assim,  $\mathbf{Meio} = (\text{TamanhoIntervalo}/2) = 29$ . A troca dos rótulos ocorre entre o rótulo do vértice do corpo  $v_1$  e o rótulo dado por **Meio** que é 29, correspondente ao vértice  $v_9$ .

Desta forma as seguintes iterações continuam. Na 2ª iteração  $I_{v_2} = \{22, 23, 24\}$  e a permutação será realizada entre os vértices com rótulos 22 e 23.

Na 3ª iteração:  $I_{v_3} = \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}$  e a permutação será realizada entre os vértices com rótulo 13 e 17. Na 4ª iteração  $I_{v_4} = \{10, 11, 12\}$  e a troca ocorre entre os vértices rotulados 12 e 11. Concluindo, na 5ª iteração:  $I_{v_5} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  e a permutação será entre os vértices rotulados 9 e 5.

Observando a Figura 7.5 as modificações dos rótulos fizeram com que o valor da largura

de banda diminuisse de 9 para 6.

$C(8,2,8,2,8)$  Heurística 1:  $b'(C)=6$

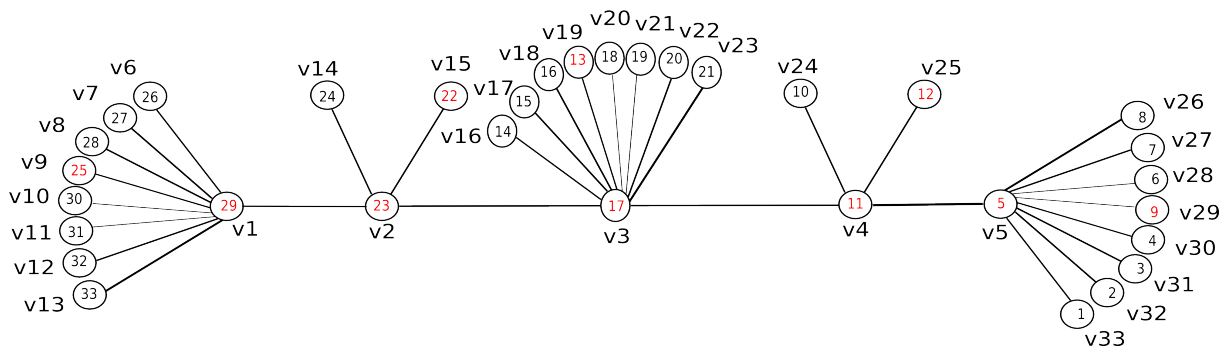


FIG. 7.5:  $C(8, 2, 8, 2, 8)$  - Resultado da heurística 1

A Figura 7.6 mostra o caterpillar  $C(9, 2, 9, 2, 9)$  com a função de rotulação obtida pela *HEM*. No exemplo anterior o caterpillar  $C(8, 2, 8, 2, 8)$  tinha somente quantidade de cabelos par ligados a cada vértice do corpo, diferentemente do exemplo com o caterpillar  $C(9, 2, 9, 2, 9)$  que varia entre par e ímpar.

$C(9,2,9,2,9)$  Heurística Espectral:  $b'(C)=10$

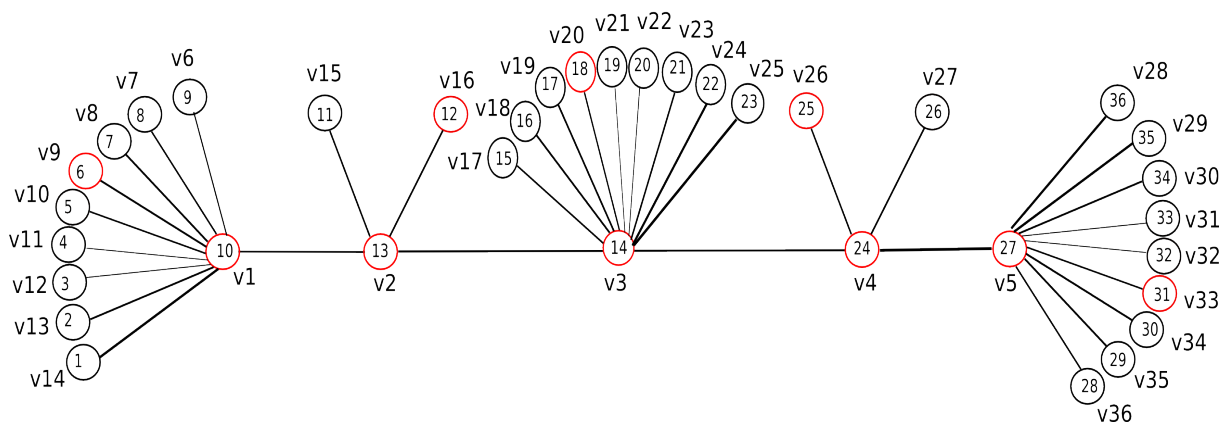


FIG. 7.6:  $C(9, 2, 9, 2, 9)$  - Heurística espectral de Mohar

A função de rotulação obtida pela heurística espectral para  $C(9, 2, 9, 2, 9)$  é mostrada na Figura 7.7 e os intervalos  $I_{v_c}$  calculados pela heurística 1. O valor de largura de banda



obtida pela *HEM* para  $C(9, 2, 9, 2, 9)$  é  $\hat{b}(C) = 10$ .

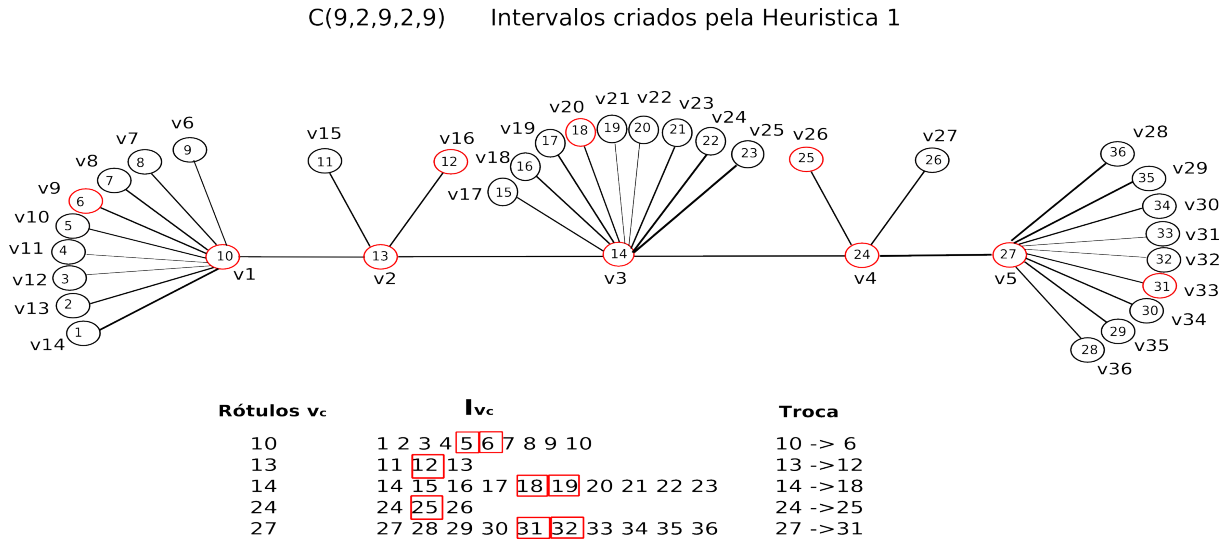


FIG. 7.7:  $C(9, 2, 9, 2, 9)$  - Intervalos da heurística 1

O resultado da rotulação obtida com a heurística 1 pode ser visto na Figura 7.8.

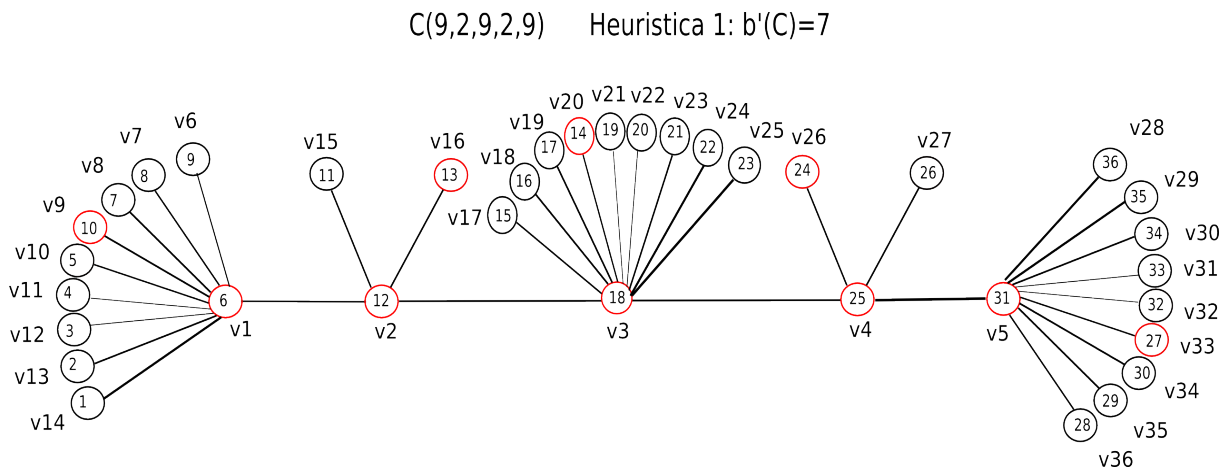


FIG. 7.8:  $C(9, 2, 9, 2, 9)$  - Resultado da heurística 1

Podemos observar que a heurística proposta melhora os rótulos obtidos pela *HEM*, diminuindo a largura de banda dos caterpillars  $C(8, 2, 8, 2, 8)$  e  $C(9, 2, 9, 2, 9)$ .

O valor exato da largura de banda dada pelo algoritmo de Miller para o caterpillar  $C(8, 2, 8, 2, 8)$  é igual a 6.

Para o caterpillar  $C(9, 2, 9, 2, 9)$  a largura de banda exata obtida pelo algoritmo de Miller

também igual a 6, sendo o valor da largura de banda determinada pela heurística 1 é igual 7.

#### 7.4 EXPERIMENTOS CATERPILLARS

Nesta Seção apresentaremos os testes realizados com a heurística proposta.

Estes testes fizeram uso das mesmas famílias utilizadas com a *HEM* ( Tabela 6.11 ). Com o objetivo de mostrar as melhorias obtidas pela heurística 1.

A Tabela 7.1 apresenta os resultados obtidos pelos 3 algoritmos (Miller, *HEM*, HE1) para famílias particulares de caterpillars.

TAB. 7.1: Teste de Famílias de Caterpillars - Mohar - Miller - Heurística 1

Família $C$	$b(C)$ - Miller	$\hat{b}(C)$ <i>HEM</i> (Mohar)	$b'(C)$ HE1 (Heurística proposta)
$C(k, k, \dots, k, \dots, k, k)$	$k + 1$	$k + 1$	$k + 1$
$C(1, \dots, k, \dots, 1)$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil$	$k + 1$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil$
$C(1, k, \dots, 1)$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil$	$k + 1$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil$
$C(k, 1, \dots, 1, k)$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil$	$k$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil + 1$
$C(k, 1, \dots, k, \dots, 1, k)$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil$	$k + 1$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil + 1$
$C(k, z, k, z, k)$	$\lceil (k/2 + z/2) \rceil$	$k + 1$	$k - 1$
$C(k, w, x, y, z)$	$\lceil (k - 2) \rceil$	$k$	$k$

As famílias usadas nos testes são  $C(k, k, \dots, k, \dots, k, k)$ ,  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$ ,  $C(1, k, \dots, 1)$ ,  $C(k, 1, \dots, 1, k)$ ,  $C(k, 1, \dots, k, \dots, 1, k)$ ,  $C(k, z, k, z, k)$ ,  $C(k, w, x, y, z)$  onde  $p$  é o tamanho do corpo e  $k$  o número de cabelos ligados ao mesmo vértice do corpo.

Para a família  $C(k, k, \dots, k, \dots, k, k)$  não houve qualquer melhoria obtida pela heurística 1 comparando com os resultados obtidos pela *HEM*.

Com as famílias  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  e  $C(1, k, \dots, 1)$  os resultados de largura de banda obtidos pela *HEM* são  $k$  e  $k + 1$  respectivamente. Com a heurística 1 foram  $\lceil (k + 1)/2 \rceil$ , que coincidem com o resultado obtido pelo algoritmo de Miller.

Com as famílias  $C(k, 1, \dots, 1, k)$  e  $C(k, 1, \dots, k, \dots, 1, k)$  os resultados de largura de banda obtidos pelo *HEM* são  $k$  e  $k + 1$  respectivamente. Com a heurística 1 os resultados da largura de banda obtidos foram  $\lceil (k + 1)/2 \rceil + 1$  nas duas famílias, enquanto os resultados

obtidos pelo algoritmo de Miller fora  $\lceil (k + 1)/2 \rceil$  nas duas famílias.

Com a família  $C(k, z, k, z, k)$  o valor de largura de banda obtido  $HEM$  é  $k + 1$ , a  $HE1$  obteve largura de banda  $k - 1$  enquanto o resultado exato de Miller foi  $\lceil (k/2 + z/2) \rceil$ . Mesmo distante do resultado ótimo, houve uma melhoria significativa com a aplicação da heurística 1 para esta família.

A família  $C(k, w, x, y, z)$  obteve resultado exato  $\lceil (k - 2) \rceil$  e a  $HEM$  obteve valor  $k$ . Com a  $HE1$  obtivemos o mesmo valor  $k$ . Com esta família especificamente não obtivemos melhoria com a aplicação da heurística proposta.

## 7.5 OUTROS TESTES COM A HEURÍSTICA PROPOSTA

Nesta seção serão apresentados outros testes realizados com classes de grafos definidos a partir de caterpillars.

Os grafos a serem testados contém caterpillars como subgrafos e diferem dos caterpillars em apenas algumas arestas.

A idéia da escolha destes grafos é que a adição de arestas entre pares de vértices apropriados de um caterpillar não altera o valor da largura de banda. E dessa forma será possível comparar os resultados de largura de banda obtidos pela heurística espectral de Mohar e a heurística 1.

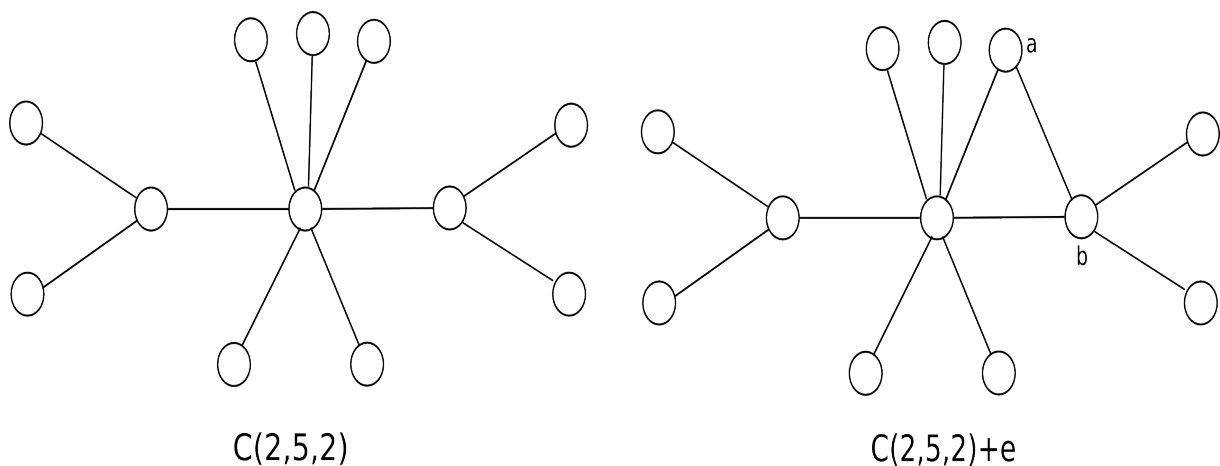


FIG. 7.9:  $C(2, 5, 2)$  e  $C(2, 5, 2) + arestas$

Na Figura 7.9 é mostrado o caterpillar  $C(2, 5, 2)$  e o grafo obtido adicionando uma aresta entre um vértice do corpo e um vértice de um cabelo apropriado do caterpillar. O

grafo obtido é notado  $C(2, 5, 2) + (a, b)$ . Neste caso, a adição da aresta não altera o valor da largura de banda:  $b(C(2, 5, 2)) = b(C(2, 5, 2) + (a, b)) = 2$ .

### 7.5.1 DEFINIÇÃO DE FAMÍLIAS $C + ARESTA$ , $C + LEQUE$ , $C + 2(P - 1)ARESTA$

A seguir são apresentadas três famílias de grafos definidas a partir de um caterpillar pela adição de algumas arestas cujas extremidades são vértices apropriados.

Seja  $C = C(m_1, m_2, \dots, m_p)$ ,  $m_i \geq 1, 1 \leq i \leq p$  um caterpillar. Pela definição,  $P = C - folhas$  é um caminho de comprimento  $p - 1$ . Seja  $P = (V(P), E(P))$  e supor os vértices de  $P$  numerados de maneira tal que  $(v_i, v_{i+1}), 1 \leq i \leq p - 1$ , pertence ao conjunto  $E(P)$ .

Seja a aresta  $e = (a, b)$  onde  $a, b$  são vértices de  $C$  tal que existe  $i, 1 \leq i \leq p, a = v_i$  e existe a aresta  $(b, v)$  em  $C$  sendo  $b$  um vértice fora do corpo e  $v = v_{i-1}$  ou  $v = v_{i+1}$ . Ou seja, a aresta  $e = (a, b)$  tem como extremidades um vértice no corpo do caterpillar e outro vértice num cabelo ligado a um vértice consecutivo no corpo. Notaremos por  $C + (a, b)$  o grafo obtido pela adição da aresta  $(a, b)$  no caterpillar  $C = C(m_1, m_2, \dots, m_p)$ . E notaremos  $C + aresta$  a família formada por todos os grafos obtidos a partir do caterpillar  $C = C(m_1, m_2, \dots, m_p)$  pela adição de uma aresta que verifique a condição anterior.

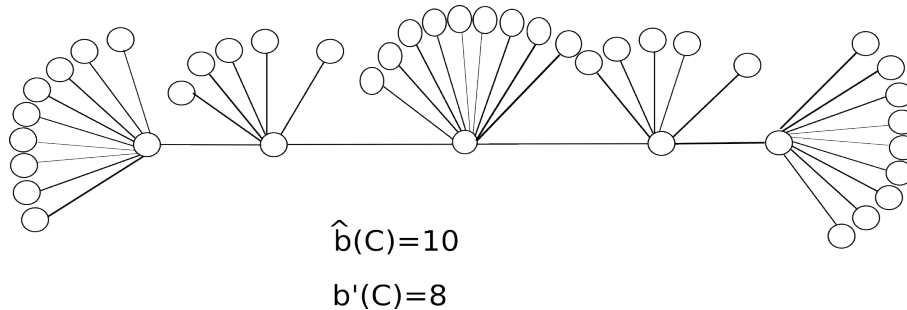


FIG. 7.10: *Caterpillars*  $C(9, 5, 9, 5, 9)$

A Figura 7.10 mostra o caterpillar  $C(9, 5, 9, 5, 9)$  e a Figura 7.11 mostra exemplos de grafos obtidos a partir do caterpillar  $C(9, 5, 9, 5, 9)$  pela adição de uma aresta apropriada. O grafo  $C(9, 5, 9, 5, 9)$  teve valor de largura de banda obtida pela *HEM* igual a 10, enquanto a *HE1* obteve valor de largura de banda igual a 8.

Para os quatro grafos da Figura 7.11, obtiveram-se os mesmos resultados usando *HEM* e *HE1*.

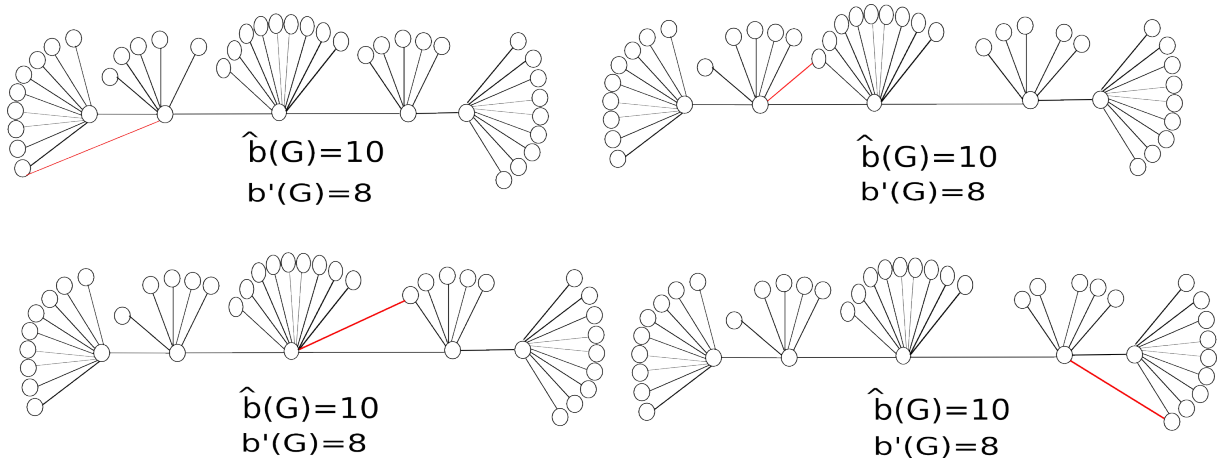


FIG. 7.11: *Caterpillars + aresta*

Seja  $C = C(m_1, m_2, \dots, m_p)$ ,  $m_i \geq 2$  um caterpillar. Pela definição,  $P = C - \text{folhas}$  é um caminho de comprimento  $p - 1$ . Seja  $P = (V(P), E(P))$  e supor os vértices de  $P$  numerados de maneira tal que  $(v_i, v_{i+1})$ ,  $1 \leq i \leq p - 1$  pertence ao conjunto  $E(P)$ . Sejam as arestas  $e_i^j = (a_i^j, b_i^j)$ ,  $1 \leq i \leq m_j - 1$ ,  $1 \leq j \leq p$  definidas da seguinte maneira. Dado  $v_j$  um vértice do corpo de  $C$ , sejam  $v_{p+m_1+\dots+m_{j-1}+1}, \dots, v_{p+m_1+\dots+m_{j-1}+m_j}$  as folhas de  $C$ , extremidades dos cabelos ligados a  $v_j$ . Sejam  $(a_i^j, b_i^j) = (v_{p+m_1+\dots+m_{j-1}+r}, v_{p+m_1+\dots+m_{j-1}+r+1})$  onde  $1 \leq r \leq m_j - 1$ , arestas cujas extremidades são pares de vértices pertencentes aos cabelos ligados a  $v_j$ .

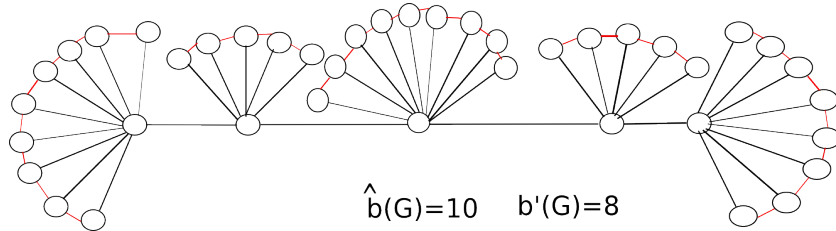


FIG. 7.12: *Caterpillars + leques*

A Figura 7.12 mostra exemplos de grafos obtidos a partir do caterpillar  $C = C(9, 5, 9, 5, 9)$ . Definimos  $C + \text{leque}$  sendo o conjunto de todos os grafos obtidos a partir de um caterpillar  $C = C(m_1, m_2, \dots, m_p)$ ,  $m_i \geq 2$ , pela adição de  $m_1 - 1 + m_2 - 1 + \dots + m_p - 1 = m_1 + \dots + m_p - p$  arestas da maneira descrita anteriormente. A família  $C + \text{leque} + \text{aresta}$  é formada pela adição de uma aresta num grafo tipo  $C + \text{leque}$ . A aresta adicionada deve ligar um vértice do corpo  $v_i$  com um vértice do cabelo ligado ao

vértice anterior no corpo  $v_{i-1+m_1+\dots+m_{i-1}}$ .

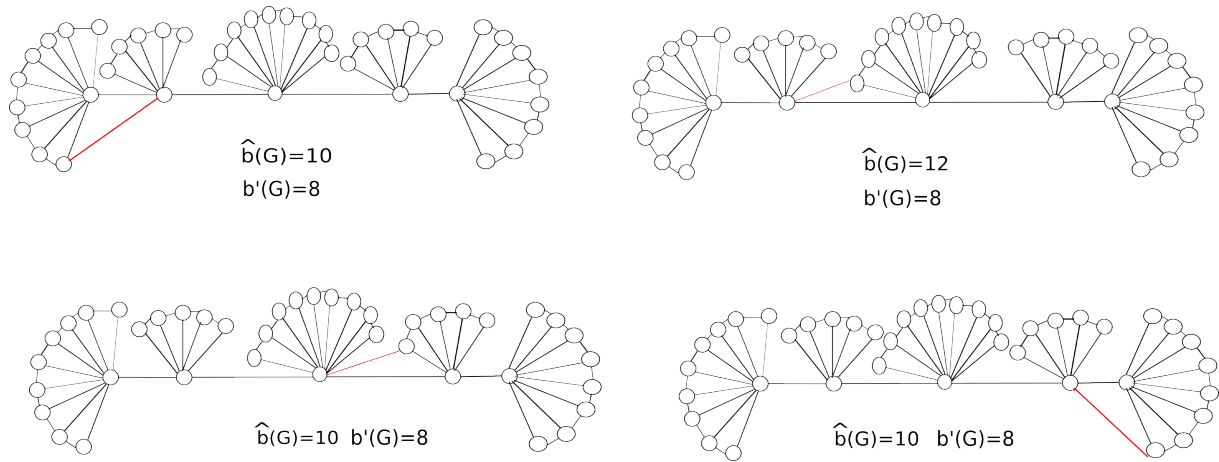


FIG. 7.13: *Caterpillars + leques + aresta*

A Figura 7.13 mostra quatro exemplos de grafos da família  $C + leque + aresta$  obtidos a partir do caterpillar  $C(9, 5, 9, 5, 9)$  e valores da largura de banda obtidos pelo *HEM* e pela heurística 1.

Seja  $C = C(m_1, m_2, \dots, m_p)$ ,  $m_i \geq 2$  um caterpillar. Pela definição,  $P = C - folhas$  é um caminho de comprimento  $p - 1$ . Seja  $P = (V(P), E(P))$  e supor os vértices de  $P$  numerados de maneira tal que  $(v_i, v_{i+1})$ ,  $1 \leq i \leq p - 1$ , pertence ao conjunto  $E(P)$ .

Considere um grafo do tipo  $C + leque$ . Adicionar neste grafo  $2(p - 1)$  arestas da seguinte forma: para cada índice  $i$ ,  $1 \leq i \leq p - 1$ , adicionar uma aresta cujas extremidades são um vértice de um cabelo apropriado correspondente a  $v_i$  e o vértice do corpo  $v_{i+1}$  e adicionar uma segunda aresta cujas extremidades são o vértice do corpo  $v_i$  e um vértice de um cabelo apropriado correspondente a  $v_{i+1}$ .

A Figura 7.14 mostra quatro exemplos de grafos deste tipo obtidos a partir do grafo da família  $C + leque$  para  $C = C(9, 5, 9, 5, 9)$ .

Definimos  $C + leque + 2(p - 1) arestas$  sendo o conjunto de todos os grafos obtidos a partir de um caterpillar da família  $C + leque$  onde  $C = C(m_1, m_2, \dots, m_p)$   $m_i \geq 2$  pela adição de  $2(p - 1)$  arestas da maneira descrita anteriormente.

Um resumo dos experimentos realizados, com as famílias  $C + leque + aresta$  e  $C + leque + 2(p - 1) + aresta$  para diferentes famílias de caterpillars são detalhadas na Tabela 7.2.

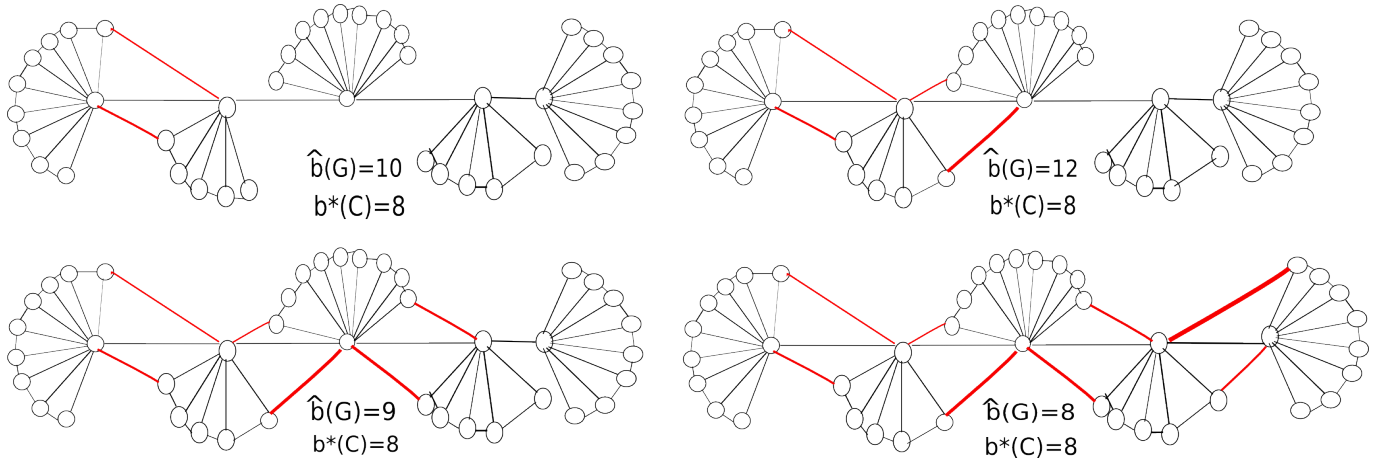


FIG. 7.14:  $C+leque+aresta$

TAB. 7.2: Teste de Famílias de Caterpillars - Mohar - Miller - Heurística 1

Família $C$	$\hat{b}(C)$ - HEM Mohar	$b'(C)$ - HE1
$C(1, \dots, k, \dots, 1) + leque + e$	$k + 1$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil$
$C(1, k, \dots, 1) + leque + e$	$k + 1$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil$
$C(k, 1, \dots, 1, k) + leque + e$	$k$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil + 1$
$C(k, 1, \dots, k, \dots, 1, k) + leque + e$	$k + 1$	$\lceil (k + 1)/2 \rceil + 1$
$C(k, z, k, z, k) + leque + e$	$k + 1$	$k - 1$
$C(k, w, x, y, z) + leque + e$	$k$	$k$
$C(1, \dots, k, \dots, 1) + 2(p - 1)e$	$k + 1$	$k + 1$
$C(1, k, \dots, 1) + 2(p - 1)e$	$k + 1$	$k + 1$
$C(k, 1, \dots, 1, k) + 2(p - 1)e$	$k$	$k$
$C(k, 1, \dots, k, \dots, 1, k) + 2(p - 1)e$	$k + 1$	$k + 1$
$C(k, z, k, z, k) + 2(p - 1)e$	$k + 1$	$k + 1$
$C(k, w, x, y, z) + 2(p - 1)e$	$k$	$k$

As famílias de caterpillars utilizadas como grupos de experimentos são as seguintes famílias:  $C + aresta$ ,  $C + leque$ ,  $C + leque + aresta$  e  $C + 2(p - 1)aresta$ .

Para esses experimentos foram criadas instâncias para cada variação dos parâmetros referentes a quantidade de cabelos  $k$  e ao tamanho do corpo  $p$ .

A largura de banda para a família  $C(1, \dots, k, \dots, 1) + leque + aresta$  e  $C(1, k, \dots, 1) + leque + aresta$  obtida pela *HE1* foi  $\lceil (k + 1)/2 \rceil$  para todas as instâncias (tamanho do corpo  $p$  e número de cabelos  $k$ ). A largura de banda obtida para as mesmas famílias com a *HEM* foi  $k + 1$ .

No caso das famílias  $C(k, 1, \dots, 1, k) + leque + aresta$  e  $C(k, 1, \dots, k, \dots, 1, k) + leque + aresta$ ,

a largura de banda obtidas com *HE1* resultou em  $\lceil (k+1)/2 \rceil + 1$ . Para as mesmas famílias a *HEM* obteve a largura de banda  $k$  e  $k + 1$ .

A família  $C(k, z, k, z, k) + leque + aresta$  obteve com a *HE1* a largura de banda  $k - 1$  e para  $C(k, w, x, y, z) + leque + aresta$  a largura de banda obtida foi  $k$ .

Para as famílias  $C(1, \dots, k, \dots, 1) + 2(p-1)aresta$ ,  $C(1, k, \dots, 1) + 2(p-1)aresta$ ,  $C(k, 1, \dots, 1, k) + 2(p-1)aresta$ ,  $C(k, 1, \dots, k, \dots, 1, k) + 2(p-1)aresta$  os mesmos resultados foram obtidos tanto com a *HEM* quanto com a *HE1*.



## 8 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estudado o problema de layout conhecido como largura de banda. O material encontrado na literatura levou ao desenvolvimento de um estudo experimental sobre algoritmos exatos e aproximados para esse problema.

O objetivo principal da pesquisa, foi comparar resultados experimentais utilizando dois algoritmos encontrados na literatura para determinar largura de banda. A família escolhida para fazer a comparação foi a dos caterpillars.

No decorrer da pesquisa, as famílias de experimentos foram ampliadas para famílias que contém caterpillars como subgrafos.

Os algoritmos polinomiais achados na literatura para resolver o problema de determinar a largura de banda em caterpillars são (MILLER, 1981) e (ASSMANN et al., 1981).

Também na literatura, (JUVAN e MOHAR, 1992) definiram um procedimento aproximado para determinar a largura de banda de um grafo geral usando conceitos da teoria espectral.

Os algoritmos propostos por Miller e por Juvam e Mohar foram implementados. Os resultados obtidos pelo algoritmo exato de Miller e pelo algoritmo aproximado de Juvam e Mohar foram comparados considerando a classe de grafos caterpillar.

### 8.1 CONTRIBUIÇÕES

Este trabalho faz uma análise dos resultados obtidos para o problema de largura de banda em caterpillars.

Foi observado o comportamento da *HEM* proposta por Juvam e Mohar para grafos em geral na família particular de caterpillars, mais especificamente o comportamento do layout determinado pela *HEM*.

Cada experimento foi desenvolvido para famílias distintas de caterpillars. Assim foi possível observar os resultados por categorias de experimentos.

Na Seção 6.4.2 foram apresentadas características da função de rotulação obtida pela *HEM* em caterpillars. As características do comportamento são:

- Dentre várias famílias analisadas, percebemos que os componentes do vetor de Fiedler têm um comportamento homogêneo. Independente da família de caterpillars, os valores dos componentes do vetor de Fiedler apresentam valores numéricos diferenciados. Os vértices dos cabelos adjacentes ao mesmo vértice do corpo, recebem valores iguais no componentes vetor de Fiedler. Os componentes do vetor de Fiedler correspondentes aos vértices do corpo, recebem valores numéricos diferentes entre os valores associados aos vértices dos cabelos.
- O vetor de Fiedler para as famílias de experimentos testados, apresentou uma simetria dos componentes associados aos vértices do caterpillar. O vetor de Fiedler identifica o(s) vértice(s) central(is) do corpo do caterpillar e os vértices do caterpillar simétricos ao(s) vértice(s) centrais no corpo (os componentes correspondentes aos vértices simétricos do corpo têm atribuídos valores com igual valor absoluto).
- Baseado nos experimentos realizados com caterpillars, conjecturamos que nesta família de árvores o segundo menor autovalor da matriz Laplaciana tem multiplicidade 1 e portanto existe um autovetor correspondente linearmente independente.

Desenvolvemos também outros experimentos mudando o parâmetro de entrada da *HEM*, considerando um autovetor diferente do vetor de Fiedler. Em quase todos os experimentos realizados utilizando outros autovalores diferentes do vetor de Fiedler não foram obtidas melhorias consideráveis no valor de largura de banda.

A ferramenta desenvolvida para automatização dos experimentos no Capítulo 5 pode ser ampliada para testar outros algoritmos e permitir novas comparações de algoritmos para resolver o problema largura de banda.

Todos os algoritmos apresentados neste trabalho foram implementados usando a linguagem C++ a partir da modelagem proposta no Capítulo 5 (Módulo algoritmos implementados).

No Capítulo 7 propusemos uma modificação da *HEM*, chamada *HE1* que permite, no caso particular de caterpillars, obter melhores resultados de largura de banda.

Esta proposta foi motivada pelos resultados obtidos pela *HEM*. Dado um caterpillar de

entrada obtivemos a rotulação construída pela heurística espectral, a *HE1* consiste em permuta o rótulo de cada vértice do corpo pelo rótulo de um vértice dos cabelos apropriados, de maneira tal que a rotulação resultante produza um valor menor de largura de banda.

Utilizamos como medida de avaliação para esta heurística, os resultados obtidos entre a solução exata de Miller e pela *HEM*.

Na Seção 7.4 foi mostrada a comparação entre os experimentos feitos com famílias de caterpillars.

A Seção 7.5 trata sobre experimentos realizados com classes de grafos próximos à classe de caterpillars.

Analisar essas outras classes teve como motivação, verificar o comportamento da *HE1* em grafos que contém caterpillars como subgrafos.

Os grafos considerados são subgrafos obtidos a partir de um caterpillar, adicionando algumas arestas entre pares de vértices aproximados.

As classes que foram utilizadas para experimentos com a *HE1* foram: *Caterpillars + leque* e *Caterpillars + leque + 2(p - 1)arestas*.

Os experimentos foram realizados de maneira análoga a descrita para caterpillars.

Também na Seção 7.5 foram comparados os novos experimentos obtidos pelo *HE1* em relação ao resultados obtidos *HEM*. Assim pode se concluir a *HE1* melhorou alguns resultados da largura de banda em relação ao *HEM*.

## 8.2 TRABALHOS FUTUROS

Propomos como trabalhos futuros:

- Comparar os resultados obtidos pelo *HE1* na classe *C + leque + 2(p - 1) arestas* com algoritmo exato para grafos e intervalo existente na literatura (KLEITMAN e VOHRA, 1990).
- Aproveitar os resultados obtidos pelo *HE1* em caterpillars para obter um limite inferior para o valor de largura de banda em outros grafos para os quais não se conhece algoritmo polinomial para resolver o problema.

## 9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABREU, N. **Teoria espectral dos grafos: um híbrido entre a álgebra linear e a matemática discreta e combinatória com origens na química quântica.** *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.* - 6 - No.1 - 1-10., 2005.
- ASSMANN, S., PECK, G., SYSLO, M., e ZAK, J. **The bandwidth of caterpillars with hairs of length 1 and 2.** *Siam J. Alg. Disc Math Vol.2 N° 4*, 1981.
- CORSO, G. M. D. e ROMANI, F. **Heuristic spectral techniques for the reduction of bandwidth and work-bound of sparse matrices.** *Corso Italia 40*, 2001.
- DIAZ, J., J.PETIT, e SERNA, M. **A survey on graph layout problems.** *ACM Computing Surveys 34:313-356*, 2002.
- FIEDLER, M. **A property of eigenvectors os nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory.** *Czechoslovak Math J.25 (100) 619-633*, 1975.
- GALLIAN, J. **A dynamic survey of graph labeling.** *The Electronic Journal of Combinatorics 15*, 2008.
- GAREY, M., GRAHAM, R., JOHSON, D., e KNUTH, D. **The bandwidth of caterpillars with hairs of length 1 and 2.** *Siam J. Alg. Disc Math 34 pp. 477 - 495*, 1978.
- GROSS, J. L. e YELLEN, J. **Handbook of graph theory.** 557 - 573, 2004.
- HARARY, F. e SCHWENK, A. **The number of caterpillars.** *Discrete Mathematics 6* , 359-365, 1973.
- JUVAN, M. e MOHAR, B. **Optimal linear labelings and eigenvalues of graphs.** *Discrete Applied Mathematics 36, 153 - 168*, 1992.
- KLEITMAN, D. e VOHRA, R. **Computing the bandwidth of interval graphs.** *SIAM J.Disc.Math 3(3), pp.373-375*, 1990.
- LAI, Y. e WILLIAMS, K. **A survey of solved problems and appications on bandwidth, edgesum,and profile of graphs.** *Journal of graph theory pp.83-88*, 1997.
- MICHALLS, G. J. e ROSEN, H. K. **Applications of discrete mathematics.** *Journal of Algorithms Vol 5 pp.531-546 - McGraw - Hill Inc. - Chapter 21 "Graph Layout", pp.365-391*, 1992).
- MILLER, Z. **The bandwidth of caterpillar graphs.** *Congressus Numeration, Vol 33, pp.235 - 252.*, 1981.

- MILLER, Z., J.G.MICHAELS, e ROSEN, K. **Graphs layouts.** *Applications of discrete mathematics, Vol 33, pp.365 - 393 .*, 1991.
- PAPADIMITRIOU, C. **The np-completeness of the bandwidth minimization problem.** *Computing, pp. 263 - 270*, 1976.
- SAXE, J. B. **Dynamic- programming algorithms for recognizing small-bandwidth graphs in polynomial time.** *Siam J. Alg. Disc. Meth Vol.1 N° 4*, 1980.
- STEVANOVIC, D., BRANKOV, V., CVETKOVIC, D., e SLOBODAN, S. **newgraph.** *www.mi.sanu.ac.yu/newgraph/*, 2003.
- SZWARCFITER, J. L. **Grafos e algoritmos computacionais.** *2ª edição - editora Campus - Rio de Janeiro COPPE/UFRJ.*, 1983.

## 10 ANEXOS

## Miller

TAB. 10.1: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  -  $k = 2$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C121$	3	2	2	2, 4, 6, 1, 3, 5, 7
$C11211$	5	2	2	2, 4, 6, 8, 10, 1, 3, 5, 7, 9, 11
$C1112111$	7	2	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15
$C111121111$	9	2	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19
$C11111211111$	11	2	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23
$C1111112111111$	13	2	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27
$C111111121111111$	15	2	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31
$C11111111211111111$	17	2	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35
$C1111111112111111111$	19	2	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39
$C111111111121111111111$	21	2	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43

TAB. 10.2: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  -  $k = 3$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C131$	3	3	3	2, 5, 8, 1, 3, 4, 6, 7
$C11311$	5	3	3	2, 4, 7, 10, 12, 1, 3, 5, 6, 8, 9, 11
$C1113111$	7	3	3	2, 4, 6, 9, 12, 14, 16, 1, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 15
$C111131111$	9	3	3	2, 4, 6, 8, 11, 14, 16, 18, 20, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 19
$C11111311111$	11	3	3	2, 4, 6, 8, 10, 13, 16, 18, 20, 22, 24, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 23
$C1111113111111$	13	3	3	2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27
$C111111131111111$	15	3	3	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31
$C11111111311111111$	17	3	3	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35
$C1111111113111111111$	19	3	3	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39
$C111111111131111111111$	21	3	3	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 23, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43

TAB. 10.3: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1) - k = 4$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C11411$	5	4	3	2, 4, 7, 10, 13, 1, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12
$C1114111$	7	4	3	2, 4, 6, 9, 12, 15, 17, 1, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16
$C111141111$	9	4	3	2, 4, 6, 8, 11, 14, 17, 19, 21, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 20
$C11111411111$	11	4	3	2, 4, 6, 8, 10, 13, 16, 19, 21, 23, 25, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 22, 24
$C1111114111111$	13	4	3	2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 21, 23, 25, 27, 29, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 24, 26, 28
$C111111141111111$	15	4	3	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 17, 20, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 26, 28, 30, 32
$C11111111411111111$	17	4	3	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 22, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36
$C1111111114111111111$	19	4	3	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40
$C11111111114111111111$	21	4	3	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 23, 26, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44

TAB. 10.4: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1) - k = 5$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C11511$	5	5	4	2, 4, 8, 12, 14, 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13
$C1115111$	7	5	4	2, 4, 6, 10, 14, 16, 18, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 17
$C111151111$	9	5	4	2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 22, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21
$C11111511111$	11	5	4	2, 4, 6, 8, 10, 14, 18, 20, 22, 24, 26, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29
$C1111115111111$	13	5	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29
$C111111151111111$	15	5	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33
$C11111111511111111$	17	5	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37
$C1111111115111111111$	19	5	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 22, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41
$C11111111115111111111$	21	5	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45

TAB. 10.5: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1) - k = 6$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C11611$	5	6	4	2, 4, 8, 12, 15, 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14
$C1116111$	7	6	4	2, 4, 6, 10, 14, 17, 19, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 18
$C111161111$	9	6	4	2, 4, 6, 8, 12, 16, 19, 21, 23, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 22
$C11111611111$	11	6	4	2, 4, 6, 8, 10, 14, 18, 21, 23, 25, 27, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 24, 26
$C1111116111111$	13	6	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 23, 25, 27, 29, 31, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 26, 28, 30
$C111111161111111$	15	6	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 22, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 28, 30, 32, 34
$C11111111611111111$	17	6	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 20, 24, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38
$C1111111116111111111$	19	6	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 22, 26, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42
$C11111111116111111111$	21	6	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 28, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46



TAB. 10.6: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  -  $k = 7$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C11711$	5	7	5	2, 4, 9, 14, 16, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15
$C1117111$	7	7	5	2, 4, 6, 11, 16, 18, 20, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 19
$C111171111$	9	7	5	2, 4, 6, 8, 13, 18, 20, 22, 24, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 23
$C11111711111$	11	7	5	2, 4, 6, 8, 10, 15, 20, 22, 24, 26, 28, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 27
$C1111117111111$	13	7	5	2, 4, 6, 8, 10, 12, 17, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 31
$C111111171111111$	15	7	5	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 19, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35
$C11111111711111111$	17	7	5	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 21, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39
$C1111111117111111111$	19	7	5	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 23, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43
$C111111111171111111111$	21	7	5	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 25, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47

TAB. 10.7: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  -  $k = 8$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C11811$	5	8	4	2, 4, 8, 12, 16, 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17
$C1118111$	7	8	5	2, 4, 6, 11, 16, 19, 21, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20
$C111181111$	9	8	5	2, 4, 6, 8, 13, 18, 21, 23, 25, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 24
$C11111811111$	11	8	5	2, 4, 6, 8, 10, 15, 20, 23, 25, 27, 29, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 26, 28
$C1111118111111$	13	8	5	2, 4, 6, 8, 10, 12, 17, 22, 25, 27, 29, 31, 33, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 26, 28, 30, 32
$C111111181111111$	15	8	5	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 19, 24, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36
$C11111111811111111$	17	8	5	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 21, 26, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40
$C1111111118111111111$	19	8	5	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 23, 28, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44
$C111111111181111111111$	21	8	5	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 25, 30, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48

TAB. 10.8: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  -  $k = 9$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C11911$	5	9	4	2, 4, 8, 12, 16, 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18
$C1119111$	7	9	6	2, 4, 6, 12, 18, 20, 22, 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21
$C111191111$	9	9	6	2, 4, 6, 8, 14, 20, 22, 24, 26, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 25
$C11111911111$	11	9	6	2, 4, 6, 8, 10, 16, 22, 24, 26, 28, 30, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 27, 29
$C1111119111111$	13	9	6	2, 4, 6, 8, 10, 12, 18, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 27, 29, 31, 33
$C111111191111111$	15	9	6	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 20, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37
$C11111111911111111$	17	9	6	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 22, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41
$C1111111119111111111$	19	9	6	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 24, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45
$C111111111191111111111$	21	9	6	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 26, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49

TAB. 10.9: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 2$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C121$	3	2	2	2,4,6,1,3,5,7
$C1211$	4	2	2	2,4,6,8,1,3,5,7,9
$C12111$	5	2	2	2,4,6,8,10,1,3,5,7,9,11
$C121111$	6	2	2	2,4,6,8,10,12,1,3,5,7,9,11,13
$C1211111$	7	2	2	2,4,6,8,10,12,14,1,3,5,7,9,11,13,15
$C12111111$	8	2	2	2,4,6,8,10,12,14,16,1,3,5,7,9,11,13,15,17
$C121111111$	9	2	2	2,4,6,8,10,12,14,16,18,1,3,5,7,9,11,13,15,17,19
$C1211111111$	10	2	2	2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21
$C12111111111$	11	2	2	2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23
$C121111111111$	12	2	2	2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25

TAB. 10.10: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 3$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C131$	3	3	3	2,5,8,1,3,4,6,7
$C1311$	4	3	3	2,5,8,10,1,3,4,6,7,9
$C13111$	5	3	3	2,5,8,10,12,1,3,4,6,7,9,11
$C131111$	6	3	3	2,5,8,10,12,14,1,3,4,6,7,9,11,13
$C1311111$	7	3	3	2,5,8,10,12,14,16,1,3,4,6,7,9,11,13,15
$C13111111$	8	3	3	2,5,8,10,12,14,16,18,1,3,4,6,7,9,11,13,15,17
$C131111111$	9	3	3	2,5,8,10,12,14,16,18,20,1,3,4,6,7,9,11,13,15,17,19
$C1311111111$	10	3	3	2,5,8,10,12,14,16,18,20,22,1,3,4,6,7,9,11,13,15,17,19,21
$C13111111111$	11	3	3	2,5,8,10,12,14,16,18,20,22,24,1,3,4,6,7,9,11,13,15,17,19,21,23

TAB. 10.11: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 4$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C1411$	4	4	3	2,5,8,11,1,3,4,6,7,9,10
$C14111$	5	4	3	2,5,8,11,13,1,3,4,6,7,9,10,12
$C141111$	6	4	3	2,5,8,11,13,15,1,3,4,6,7,9,10,12,14
$C1411111$	7	4	3	2,5,8,11,13,15,17,1,3,4,6,7,9,10,12,14,16
$C14111111$	8	4	3	2,5,8,11,13,15,17,19,1,3,4,6,7,9,10,12,14,16,18
$C141111111$	9	4	3	2,5,8,11,13,15,17,19,21,1,3,4,6,7,9,10,12,14,16,18,20
$C1411111111$	10	4	3	2,5,8,11,13,15,17,19,21,23,1,3,4,6,7,9,10,12,14,16,18,20,22
$C14111111111$	11	4	3	2,5,8,11,13,15,17,19,21,23,25,1,3,4,6,7,9,10,12,14,16,18,20,22,24
$C141111111111$	12	4	3	2,5,8,11,13,15,17,19,21,23,25,27,1,3,4,6,7,9,10,12,14,16,18,20,22,24,26

TAB. 10.12: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 5$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C1511$	4	5	3	2,5,8,11,1,3,4,6,7,9,10,12
$C15111$	5	5	3	2,5,8,11,14,1,3,4,6,7,9,10,12,13
$C151111$	6	5	3	2,5,8,11,14,16,1,3,4,6,7,9,10,12,13,15
$C1511111$	7	5	3	2,5,8,11,14,16,18,1,3,4,6,7,9,10,12,13,15,17
$C15111111$	8	5	3	2,5,8,11,14,16,18,20,1,3,4,6,7,9,10,12,13,15,17,19
$C151111111$	9	5	3	2,5,8,11,14,16,18,20,22,1,3,4,6,7,9,10,12,13,15,17,19,21
$C1511111111$	10	5	3	2,5,8,11,14,16,18,20,22,24,1,3,4,6,7,9,10,12,13,15,17,19,21,23
$C15111111111$	11	5	3	2,5,8,11,14,16,18,20,22,24,26,1,3,4,6,7,9,10,12,13,15,17,19,21,23,25
$C151111111111$	12	5	3	2,5,8,11,14,16,18,20,22,24,26,28,1,3,4,6,7,9,10,12,13,15,17,19,21,23,25,27

TAB. 10.13: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 6$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C1611$	4	6	3	2, 5, 8, 11, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13
$C16111$	5	6	3	2, 5, 8, 11, 14, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15
$C161111$	6	6	3	2, 5, 8, 11, 14, 17, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16
$C1611111$	7	6	3	2, 5, 8, 11, 14, 17, 19, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18
$C16111111$	8	6	3	2, 5, 8, 11, 14, 17, 19, 21, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 20
$C161111111$	9	6	3	2, 5, 8, 11, 14, 17, 19, 21, 23, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 22
$C1611111111$	10	6	3	2, 5, 8, 11, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24
$C16111111111$	11	6	3	2, 5, 8, 11, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26
$C161111111111$	12	6	3	2, 5, 8, 11, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28

TAB. 10.14: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 7$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C1711$	4	7	3	2, 5, 8, 11, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14
$C17111$	5	7	4	2, 6, 10, 14, 16, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15
$C171111$	6	7	4	2, 6, 10, 14, 16, 18, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 17
$C1711111$	7	7	4	2, 6, 10, 14, 16, 18, 20, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 19
$C17111111$	8	7	4	2, 6, 10, 14, 16, 18, 20, 22, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 21
$C171111111$	9	7	4	2, 6, 10, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 23
$C1711111111$	10	7	4	2, 6, 10, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25
$C17111111111$	11	7	4	2, 6, 10, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27
$C171111111111$	12	7	4	2, 6, 10, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29

TAB. 10.15: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 8$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C18111$	5	8	3	2, 5, 8, 11, 14, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17
$C181111$	6	8	4	2, 6, 10, 14, 17, 19, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 18
$C1811111$	7	8	4	2, 6, 10, 14, 17, 19, 21, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 20
$C18111111$	8	8	4	2, 6, 10, 14, 17, 19, 21, 23, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 22
$C181111111$	9	8	4	2, 6, 10, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24
$C1811111111$	10	8	4	2, 6, 10, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26
$C18111111111$	11	8	4	2, 6, 10, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28
$C181111111111$	12	8	4	2, 6, 10, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30

TAB. 10.16: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 9$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C19111$	5	9	4	2, 6, 10, 14, 18, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17
$C191111$	6	9	4	2, 6, 10, 14, 18, 20, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19
$C1911111$	7	9	4	2, 6, 10, 14, 18, 20, 22, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 21
$C19111111$	8	9	4	2, 6, 10, 14, 18, 20, 22, 24, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 23
$C191111111$	9	9	4	2, 6, 10, 14, 18, 20, 22, 24, 26, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 23, 25
$C1911111111$	10	9	4	2, 6, 10, 14, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27
$C19111111111$	11	9	4	2, 6, 10, 14, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29
$C191111111111$	12	9	4	2, 6, 10, 14, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31

TAB. 10.17: Famílias -  $C(k, 1\dots 1, k)$  -  $k = 2$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C212$	3	2	2	3,5,7,1,2,4,6,8
$C2112$	4	2	2	3,5,7,9,1,2,4,6,8,10
$C21112$	5	2	2	3,5,7,9,11,1,2,4,6,8,10,12
$C211112$	6	2	2	3,5,7,9,11,13,1,2,4,6,8,10,12,14
$C2111112$	7	2	2	3,5,7,9,11,13,15,1,2,4,6,8,10,12,14,16
$C21111112$	8	2	2	3,5,7,9,11,13,15,17,1,2,4,6,8,10,12,14,16,18
$C211111112$	9	2	2	3,5,7,9,11,13,15,17,19,1,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20
$C2111111112$	10	2	2	3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,1,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22
$C21111111112$	11	2	2	3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,1,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24
$C211111111112$	12	2	2	3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,1,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26

TAB. 10.18: Famílias -  $C(k, 1\dots 1, k)$  -  $k = 3$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C313$	3	3	3	4,6,9,1,2,3,5,7,8,10
$C3113$	4	3	3	4,6,8,11,1,2,3,5,7,9,10,12
$C31113$	5	3	3	4,6,8,10,13,1,2,3,5,7,9,11,12,14
$C311113$	6	3	3	4,6,8,10,12,15,1,2,3,5,7,9,11,13,14,16
$C3111113$	7	3	3	4,6,8,10,12,14,17,1,2,3,5,7,9,11,13,15,16,18
$C31111113$	8	3	3	4,6,8,10,12,14,16,19,1,2,3,5,7,9,11,13,15,17,18,20
$C311111113$	9	3	3	4,6,8,10,12,14,16,18,21,1,2,3,5,7,9,11,13,15,17,19,20,22
$C3111111113$	10	3	3	4,6,8,10,12,14,16,18,20,23,1,2,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,22,24
$C31111111113$	11	3	3	4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,25,1,2,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,24,26
$C311111111113$	12	3	3	4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,27,1,2,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,26,28

TAB. 10.19: Famílias -  $C(k, 1...1, k)$  -  $k = 4$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C414$	3	4	3	4, 7, 10, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12
$C4114$	4	4	3	4, 7, 9, 12, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14
$C41114$	5	4	3	4, 7, 9, 11, 14, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 16
$C411114$	6	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 16, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 18
$C4111114$	7	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 20
$C41111114$	8	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 20, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 22
$C411111114$	9	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 22, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 24
$C4111111114$	10	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 24, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 25, 26
$C41111111114$	11	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 26, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 27, 28
$C411111111114$	12	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 28, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 29, 30

TAB. 10.20: Famílias -  $C(k, 1...1, k)$  -  $k = 5$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C515$	3	5	4	5, 8, 12, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14
$C5115$	4	5	3	4, 7, 10, 13, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16
$C51115$	5	5	3	4, 7, 10, 12, 15, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 18
$C511115$	6	5	3	4, 7, 10, 12, 14, 17, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 20
$C5111115$	7	5	3	4, 7, 10, 12, 14, 16, 19, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 22
$C51111115$	8	5	3	4, 7, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 23, 24
$C511111115$	9	5	3	4, 7, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 23, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 26
$C5111111115$	10	5	3	4, 7, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 24, 26, 27, 28
$C51111111115$	11	5	3	4, 7, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 27, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 28, 29, 30
$C511111111115$	12	5	3	4, 7, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 29, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 28, 30, 31, 32

TAB. 10.21: Famílias -  $C(k, 1\dots 1, k)$  -  $k = 6$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C616$	3	6	4	5, 9, 13, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16
$C6116$	4	6	4	5, 9, 11, 15, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18
$C61116$	5	6	4	5, 9, 11, 13, 17, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20
$C611116$	6	6	4	5, 9, 11, 13, 15, 19, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22
$C6111116$	7	6	4	5, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24
$C61111116$	8	6	4	5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26
$C611111116$	9	6	4	5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 25, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28
$C6111111116$	10	6	4	5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 27, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 30
$C61111111116$	11	6	4	5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 29, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32
$C611111111116$	12	6	4	5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 31, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 30, 32, 33, 34

TAB. 10.22: Famílias -  $C(k, 1\dots 1, k)$  -  $k = 7$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C717$	3	7	5	6, 10, 15, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18
$C7117$	4	7	4	5, 9, 12, 16, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20
$C71117$	5	7	4	5, 9, 12, 14, 18, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22
$C711117$	6	7	4	5, 9, 12, 14, 16, 20, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24
$C7111117$	7	7	4	5, 9, 12, 14, 16, 18, 22, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26
$C71111117$	8	7	4	5, 9, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28
$C711111117$	9	7	4	5, 9, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 26, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30
$C7111111117$	10	7	4	5, 9, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 28, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32
$C71111111117$	11	7	4	5, 9, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 30, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34
$C711111111117$	12	7	4	5, 9, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 32, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36

TAB. 10.23: Famílias -  $C(k, 1\dots 1, k)$  -  $k = 8$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C818$	3	8	5	6, 11, 16, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20
$C8118$	4	8	5	6, 11, 13, 18, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22
$C81118$	5	8	5	6, 11, 13, 15, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24
$C811118$	6	8	5	6, 11, 13, 15, 17, 22, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26
$C8111118$	7	8	5	6, 11, 13, 15, 17, 19, 24, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28
$C81111118$	8	8	5	6, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 26, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30
$C811111118$	9	8	5	6, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 28, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32
$C8111111118$	10	8	5	6, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34
$C81111111118$	11	8	5	6, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 32, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36
$C811111111118$	12	8	5	6, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 34, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38

TAB. 10.24: Famílias -  $C(k, 1\dots 1, k)$  -  $k = 9$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C919$	3	9	6	7, 12, 18, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22
$C9119$	4	9	5	6, 11, 14, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24
$C91119$	5	9	5	6, 11, 14, 16, 21, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26
$C911119$	6	9	5	6, 11, 14, 16, 18, 23, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28
$C9111119$	7	9	5	6, 11, 14, 16, 18, 20, 25, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30
$C91111119$	8	9	5	6, 11, 14, 16, 18, 20, 22, 27, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32
$C911111119$	9	9	5	6, 11, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 29, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34
$C9111111119$	10	9	5	6, 11, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 31, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36
$C91111111119$	11	9	5	6, 11, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 33, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38
$C911111111119$	12	9	5	6, 11, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 35, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40

TAB. 10.25: Famílias -  $C(k, 1\dots, k, \dots 1, k)$  -  $k = 2$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C21212$	5	2	2	3, 5, 7, 9, 11, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 13
$C2112112$	7	2	2	3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17
$C211121112$	9	2	2	3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21
$C21111211112$	11	2	2	3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25
$C2111112111112$	13	2	2	3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 29
$C211111121111112$	15	2	2	3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 33
$C21111111211111112$	17	2	2	3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 37
$C2111111112111111112$	19	2	2	3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 41
$C211111111121111111112$	21	2	2	3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 45
$C21111111111211111111112$	23	2	2	3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 49

TAB. 10.26: Famílias -  $C(k, 1\dots, k, \dots 1, k)$  -  $k = 3$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C31313$	5	3	3	4, 6, 9, 12, 15, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16
$C3113113$	7	3	3	4, 6, 8, 11, 14, 16, 19, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 17, 18, 20
$C311131113$	9	3	3	4, 6, 8, 10, 13, 16, 18, 20, 23, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 24
$C31111311113$	11	3	3	4, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 20, 22, 24, 27, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 28
$C3111113111113$	13	3	3	4, 6, 8, 10, 12, 14, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 31, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 30, 32
$C311111131111113$	15	3	3	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 35, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 34, 36
$C31111111311111113$	17	3	3	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 39, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 38, 40
$C3111111113111111113$	19	3	3	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 23, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 43, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 42, 44
$C311111111131111111113$	21	3	3	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 47, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 24, 26, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 46, 48
$C31111111111311111111113$	23	3	3	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 27, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 51, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 28, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 50, 52

TAB. 10.27: Famílias -  $C(k, 1.., k, ..1, k)$  -  $k = 4$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C41414$	5	4	3	4, 7, 10, 13, 16, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19
$C4114114$	7	4	3	4, 7, 9, 12, 15, 18, 21, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23
$C411141114$	9	4	3	4, 7, 9, 11, 14, 17, 20, 22, 25, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24, 26, 27
$C41111411114$	11	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 16, 19, 22, 24, 26, 29, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 28, 30, 31
$C4111114111114$	13	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 21, 24, 26, 28, 30, 33, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 34, 35
$C411111141111114$	15	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 20, 23, 26, 28, 30, 32, 34, 37, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 36, 38, 39
$C41111111411111114$	17	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 22, 25, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 41, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 40, 42, 43
$C4111111114111111114$	19	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 24, 27, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 45, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 44, 46, 47
$C411111111141111111114$	21	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 26, 29, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 49, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 48, 50, 51
$C41111111111411111111114$	23	4	3	4, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 28, 31, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 53, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 52, 54, 55

TAB. 10.28: Famílias -  $C(k, 1.., k, ..1, k)$  -  $k = 5$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C51515$	5	5	4	5, 8, 12, 16, 20, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22
$C5115115$	7	5	4	5, 8, 10, 14, 18, 20, 24, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26
$C511151115$	9	5	4	5, 8, 10, 12, 16, 20, 22, 24, 28, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 29, 30
$C51111511115$	11	5	4	5, 8, 10, 12, 14, 18, 22, 24, 26, 28, 32, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 30, 31, 33, 34
$C51111151111115$	13	5	4	5, 8, 10, 12, 14, 16, 20, 24, 26, 28, 30, 32, 36, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 34, 35, 37, 38
$C51111115111111115$	15	5	4	5, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 22, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 40, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 38, 39, 41, 42
$C5111111151111111115$	17	5	4	5, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 44, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 42, 43, 45, 46
$C511111111511111111115$	19	5	4	5, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 26, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 48, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 46, 47, 49, 50
$C51111111115111111111115$	21	5	4	5, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 28, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 52, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 50, 51, 53, 54
$C5111111111151111111111115$	23	5	4	5, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 30, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 56, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 54, 55, 57, 58



TAB. 10.29: Famílias -  $C(k, 1.., k, ..1, k)$  -  $k = 6$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C61616$	5	6	4	5 ,9 ,13 ,17 ,21 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,11 ,12 ,14 ,15 ,16 ,18 ,19 ,20 ,22 ,23 ,24 ,25
$C6116116$	7	6	4	5 ,9 ,11 ,15 ,19 ,22 ,26 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,12 ,13 ,14 ,16 ,17 ,18 ,20 ,21 ,23 ,24 ,25 ,27 ,28 ,29
$C611161116$	9	6	4	5 ,9 ,11 ,13 ,17 ,21 ,24 ,26 ,30 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,12 ,14 ,15 ,16 ,18 ,19 ,20 ,22 ,23 ,25 ,27 ,28 ,29 ,31 ,32 ,33
$C61111611116$	11	6	4	5 ,9 ,11 ,13 ,15 ,19 ,23 ,26 ,28 ,30 ,34 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,12 ,14 ,16 ,17 ,18 ,20 ,21 ,22 ,24 ,25 ,27 ,29 ,31 ,32 ,33 ,35 ,36 ,37
$C6111116111116$	13	6	4	5 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,21 ,25 ,28 ,30 ,32 ,34 ,38 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,19 ,20 ,22 ,23 ,24 ,26 ,27 ,29 ,31 ,33 ,35 ,36 ,37 ,39 ,40 ,41
$C611111161111116$	15	6	4	5 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,23 ,27 ,30 ,32 ,34 ,36 ,38 ,42 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,21 ,22 ,24 ,25 ,26 ,28 ,29 ,31 ,33 ,35 ,37 ,39 ,40 ,41 ,43 ,44 ,45
$C61111111611111116$	17	6	4	5 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,25 ,29 ,32 ,34 ,36 ,38 ,40 ,42 ,46 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,23 ,24 ,26 ,27 ,28 ,30 ,31 ,33 ,35 ,37 ,39 ,41 ,43 ,44 ,45 ,47 ,48 ,49
$C6111111116111111116$	19	6	4	5 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,27 ,31 ,34 ,36 ,38 ,40 ,42 ,44 ,46 ,50 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,25 ,26 ,28 ,29 ,30 ,32 ,33 ,35 ,37 ,39 ,41 ,43 ,45 ,47 ,48 ,49 ,51 ,52 ,53
$C611111111161111111116$	21	6	4	5 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,25 ,29 ,33 ,36 ,38 ,40 ,42 ,44 ,46 ,48 ,50 ,54 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,26 ,27 ,28 ,30 ,31 ,32 ,34 ,35 ,37 ,39 ,41 ,43 ,45 ,47 ,49 ,51 ,52 ,53 ,55 ,56 ,57
$C61111111111611111111116$	23	6	4	5 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,25 ,27 ,31 ,35 ,38 ,40 ,42 ,44 ,46 ,48 ,50 ,52 ,54 ,58 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,26 ,28 ,29 ,30 ,32 ,33 ,34 ,36 ,37 ,39 ,41 ,43 ,45 ,47 ,49 ,51 ,53 ,55 ,56 ,57 ,59 ,60 ,61

TAB. 10.30: Famílias -  $C(k, 1.., k, ..1, k)$  -  $k = 7$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C71717$	5	7	5	6 ,10 ,15 ,20 ,25 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,11 ,12 ,13 ,14 ,16 ,17 ,18 ,19 ,21 ,22 ,23 ,24 ,26 ,27 ,28
$C7117117$	7	7	5	6 ,10 ,12 ,17 ,22 ,24 ,29 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,11 ,13 ,14 ,15 ,16 ,18 ,19 ,20 ,21 ,23 ,25 ,26 ,27 ,28 ,30 ,31 ,32
$C711171117$	9	7	5	6 ,10 ,12 ,14 ,19 ,24 ,26 ,28 ,33 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,11 ,13 ,15 ,16 ,17 ,18 ,20 ,21 ,22 ,23 ,25 ,27 ,29 ,30 ,31 ,32 ,34 ,35 ,36
$C71111711117$	11	7	5	6 ,10 ,12 ,14 ,16 ,21 ,26 ,28 ,30 ,32 ,37 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,18 ,19 ,20 ,22 ,23 ,24 ,25 ,27 ,29 ,31 ,33 ,34 ,35 ,36 ,38 ,39 ,40
$C7111117111117$	13	7	5	6 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,23 ,28 ,30 ,32 ,34 ,36 ,41 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,20 ,21 ,22 ,24 ,25 ,26 ,27 ,29 ,31 ,33 ,35 ,37 ,38 ,39 ,40 ,42 ,43 ,44
$C711111171111117$	15	7	5	6 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,25 ,30 ,32 ,34 ,36 ,38 ,40 ,45 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,22 ,23 ,24 ,26 ,27 ,28 ,29 ,31 ,33 ,35 ,37 ,39 ,41 ,42 ,43 ,44 ,46 ,47 ,48
$C71111111711111117$	17	7	5	6 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,27 ,32 ,34 ,36 ,38 ,40 ,42 ,44 ,49 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,24 ,25 ,26 ,28 ,29 ,30 ,31 ,33 ,35 ,37 ,39 ,41 ,43 ,45 ,46 ,47 ,48 ,50 ,51 ,52
$C7111111117111111117$	19	7	5	6 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,29 ,34 ,36 ,38 ,40 ,42 ,44 ,46 ,48 ,53 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,25 ,26 ,27 ,28 ,30 ,31 ,32 ,33 ,35 ,37 ,39 ,41 ,43 ,45 ,47 ,49 ,50 ,51 ,52 ,54 ,55 ,56
$C711111111171111111117$	21	7	5	6 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,26 ,31 ,36 ,38 ,40 ,42 ,44 ,46 ,48 ,50 ,52 ,57 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,25 ,27 ,28 ,29 ,30 ,32 ,33 ,34 ,35 ,37 ,39 ,41 ,43 ,45 ,47 ,49 ,51 ,53 ,54 ,55 ,56 ,58 ,59 ,60
$C71111111111711111111117$	23	7	5	6 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,26 ,28 ,33 ,38 ,40 ,42 ,44 ,46 ,48 ,50 ,52 ,54 ,56 ,61 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,25 ,27 ,29 ,30 ,31 ,32 ,34 ,35 ,36 ,37 ,39 ,41 ,43 ,45 ,47 ,49 ,51 ,53 ,55 ,57 ,58 ,59 ,60 ,62 ,63 ,64

TAB. 10.31: Famílias -  $C(k, 1.., k, ..1, k)$  -  $k = 8$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C81818$	5	8	5	6 ,11 ,16 ,21 ,26 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,10 ,12 ,13 ,14 ,15 ,17 ,18 ,19 ,20 ,22 ,23 ,24 ,25 ,27 ,28 ,29 ,30 ,31
$C8118118$	7	8	5	6 ,11 ,13 ,18 ,23 ,26 ,31 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,10 ,12 ,14 ,15 ,16 ,17 ,19 ,20 ,21 ,22 ,24 ,25 ,27 ,28 ,29 ,30 ,32 ,33 ,34 ,35
$C811181118$	9	8	5	6 ,11 ,13 ,15 ,20 ,25 ,28 ,30 ,35 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,10 ,12 ,14 ,16 ,17 ,18 ,19 ,21 ,22 ,23 ,24 ,26 ,27 ,29 ,31 ,32 ,33 ,34 ,36 ,37 ,38 ,39
$C81111811118$	11	8	5	6 ,11 ,13 ,15 ,17 ,22 ,27 ,30 ,32 ,34 ,39 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,19 ,20 ,21 ,23 ,24 ,25 ,26 ,28 ,29 ,31 ,33 ,35 ,36 ,37 ,38 ,40 ,41 ,42 ,43
$C8111118111118$	13	8	5	6 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,24 ,29 ,32 ,34 ,36 ,38 ,43 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,21 ,22 ,23 ,25 ,26 ,27 ,28 ,30 ,31 ,33 ,35 ,37 ,39 ,40 ,41 ,42 ,44 ,45 ,46 ,47
$C811111181111118$	15	8	5	6 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,26 ,31 ,34 ,36 ,38 ,40 ,42 ,47 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,23 ,24 ,25 ,27 ,28 ,29 ,30 ,32 ,33 ,35 ,37 ,39 ,41 ,43 ,44 ,45 ,46 ,48 ,49 ,50 ,51
$C81111111811111118$	17	8	5	6 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,28 ,33 ,36 ,38 ,40 ,42 ,44 ,46 ,51 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,25 ,26 ,27 ,29 ,30 ,31 ,32 ,34 ,35 ,37 ,39 ,41 ,43 ,45 ,47 ,48 ,49 ,50 ,52 ,53 ,54 ,55
$C8111111118111111118$	19	8	5	6 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,25 ,30 ,35 ,38 ,40 ,42 ,44 ,46 ,48 ,50 ,55 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,26 ,27 ,28 ,29 ,31 ,32 ,33 ,34 ,36 ,37 ,39 ,41 ,43 ,45 ,47 ,49 ,51 ,52 ,53 ,54 ,56 ,57 ,58 ,59
$C811111111181111111118$	21	8	5	6 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,25 ,27 ,32 ,37 ,40 ,42 ,44 ,46 ,48 ,50 ,52 ,54 ,59 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,10 ,11 ,13 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,26 ,28 ,29 ,30 ,31 ,33 ,34 ,35 ,36 ,38 ,39 ,41 ,43 ,45 ,47 ,49 ,51 ,53 ,55 ,56 ,57 ,58 ,60 ,61 ,62 ,63
$C81111111111811111111118$	23	8	5	6 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,25 ,27 ,29 ,34 ,39 ,42 ,44 ,46 ,48 ,50 ,52 ,54 ,56 ,58 ,63 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,7 ,8 ,9 ,10 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,26 ,28 ,30 ,31 ,32 ,33 ,35 ,36 ,37 ,38 ,40 ,41 ,43 ,45 ,47 ,49 ,51 ,53 ,55 ,57 ,59 ,60 ,61 ,62 ,64 ,65 ,66 ,67

TAB. 10.32: Famílias -  $C(k, 1.., k, ..1, k)$  -  $k = 9$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C91919$	5	9	6	7 ,12 ,18 ,24 ,30 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,8 ,9 ,10 ,11 ,13 ,14 ,15 ,16 ,17 ,19 ,20 ,21 ,22 ,23 ,25 ,26 ,27 ,28 ,29 ,31 ,32 ,33 ,34
$C9119119$	7	9	6	7 ,12 ,14 ,20 ,26 ,28 ,34 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,8 ,9 ,10 ,11 ,13 ,15 ,16 ,17 ,18 ,19 ,21 ,22 ,23 ,24 ,25 ,27 ,29 ,30 ,31 ,32 ,33 ,35 ,36 ,37 ,38
$C911191119$	9	9	6	7 ,12 ,14 ,16 ,22 ,28 ,30 ,32 ,38 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,8 ,9 ,10 ,11 ,13 ,15 ,17 ,18 ,19 ,20 ,21 ,23 ,24 ,25 ,26 ,27 ,29 ,31 ,33 ,34 ,35 ,36 ,37 ,39 ,40 ,41 ,42
$C91111911119$	11	9	6	7 ,12 ,14 ,16 ,18 ,24 ,30 ,32 ,34 ,36 ,42 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,8 ,9 ,10 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,20 ,21 ,22 ,23 ,25 ,26 ,27 ,28 ,29 ,31 ,33 ,35 ,37 ,38 ,39 ,40 ,41 ,43 ,44 ,45 ,46
$C9111119111119$	13	9	6	7 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,26 ,32 ,34 ,36 ,38 ,40 ,46 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,8 ,9 ,10 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,22 ,23 ,24 ,25 ,27 ,28 ,29 ,30 ,31 ,33 ,35 ,37 ,39 ,41 ,42 ,43 ,44 ,45 ,47 ,48 ,49 ,50
$C911111191111119$	15	9	6	7 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,28 ,34 ,36 ,38 ,40 ,42 ,44 ,50 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,8 ,9 ,10 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,24 ,25 ,26 ,27 ,29 ,30 ,31 ,32 ,33 ,35 ,37 ,39 ,41 ,43 ,45 ,46 ,47 ,48 ,49 ,51 ,52 ,53 ,54
$C91111111911111119$	17	9	6	7 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,30 ,36 ,38 ,40 ,42 ,44 ,46 ,48 ,54 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,8 ,9 ,10 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,25 ,26 ,27 ,28 ,29 ,31 ,32 ,33 ,34 ,35 ,37 ,39 ,41 ,43 ,45 ,47 ,49 ,50 ,51 ,52 ,53 ,55 ,56 ,57 ,58
$C9111111119111111119$	19	9	6	7 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,26 ,32 ,38 ,40 ,42 ,44 ,46 ,48 ,50 ,52 ,58 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,8 ,9 ,10 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,25 ,27 ,28 ,29 ,30 ,31 ,33 ,34 ,35 ,36 ,37 ,39 ,41 ,43 ,45 ,47 ,49 ,51 ,53 ,54 ,55 ,56 ,57 ,59 ,60 ,61 ,62
$C911111111191111111119$	21	9	6	7 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,26 ,28 ,34 ,40 ,42 ,44 ,46 ,48 ,50 ,52 ,54 ,56 ,62 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,8 ,9 ,10 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,25 ,27 ,29 ,30 ,31 ,32 ,33 ,35 ,36 ,37 ,38 ,39 ,41 ,43 ,45 ,47 ,49 ,51 ,53 ,55 ,57 ,58 ,59 ,60 ,61 ,63 ,64 ,65 ,66
$C91111111111911111111119$	23	9	6	7 ,12 ,14 ,16 ,18 ,20 ,22 ,24 ,26 ,28 ,30 ,36 ,42 ,44 ,46 ,48 ,50 ,52 ,54 ,56 ,58 ,60 ,66 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,8 ,9 ,10 ,11 ,13 ,15 ,17 ,19 ,21 ,23 ,25 ,27 ,29 ,31 ,32 ,33 ,34 ,35 ,37 ,38 ,39 ,40 ,41 ,43 ,45 ,47 ,49 ,51 ,53 ,55 ,57 ,59 ,61 ,62 ,63 ,64 ,65 ,67 ,68 ,69 ,70

TAB. 10.33: Famílias -  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 1$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C111$	3	1	2	2, 4, 6, 1, 3, 5
$C1111$	4	1	2	2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7
$C11111$	5	1	2	2, 4, 6, 8, 10, 1, 3, 5, 7, 9
$C111111$	6	1	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 1, 3, 5, 7, 9, 11
$C1111111$	7	1	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13
$C11111111$	8	1	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15
$C111111111$	9	1	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17
$C1111111111$	10	1	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19
$C11111111111$	11	1	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21
$C111111111111$	12	1	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23

TAB. 10.34: Famílias -  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 2$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C222$	3	2	2	3, 5, 7, 1, 2, 4, 6, 8, 9
$C2222$	4	2	3	3, 6, 9, 12, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11
$C22222$	5	2	3	3, 6, 9, 12, 15, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14
$C222222$	6	2	3	3, 6, 9, 12, 15, 18, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17
$C2222222$	7	2	3	3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20
$C22222222$	8	2	3	3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23
$C222222222$	9	2	3	3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26
$C2222222222$	10	2	3	3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29
$C22222222222$	11	2	3	3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 31, 32
$C222222222222$	12	2	3	3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 34, 35

TAB. 10.35: Famílias -  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 3$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C333$	3	3	3	4, 7, 10, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12
$C3333$	4	3	3	4, 7, 10, 13, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16
$C33333$	5	3	4	4, 8, 12, 16, 20, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19
$C333333$	6	3	4	4, 8, 12, 16, 20, 24, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23
$C3333333$	7	3	4	4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27
$C33333333$	8	3	4	4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 31
$C333333333$	9	3	4	4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 35
$C3333333333$	10	3	4	4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39
$C33333333333$	11	3	4	4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 41, 42, 43

TAB. 10.36: Famílias -  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 4$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C444$	3	4	4	5 ,9 ,13 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,11 ,12 ,14 ,15
$C4444$	4	4	4	5 ,9 ,13 ,17 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,11 ,12 ,14 ,15 ,16 ,18 ,19 ,20
$C44444$	5	4	4	5 ,9 ,13 ,17 ,21 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,10 ,11 ,12 ,14 ,15 ,16 ,18 ,19 ,20 ,22 ,23 ,24 ,25
$C444444$	6	4	5	5 ,10 ,15 ,20 ,25 ,30 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,9 ,11 ,12 ,13 ,14 ,16 ,17 ,18 ,19 ,21 ,22 ,23 ,24 ,26 ,27 ,28 ,29
$C4444444$	7	4	5	5 ,10 ,15 ,20 ,25 ,30 ,35 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,9 ,11 ,12 ,13 ,14 ,16 ,17 ,18 ,19 ,21 ,22 ,23 ,24 ,26 ,27 ,28 ,29 ,31 ,32 ,33 ,34
$C44444444$	8	4	5	5 ,10 ,15 ,20 ,25 ,30 ,35 ,40 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,9 ,11 ,12 ,13 ,14 ,16 ,17 ,18 ,19 ,21 ,22 ,23 ,24 ,26 ,27 ,28 ,29 ,31 ,32 ,33 ,34 ,36 ,37 ,38 ,39
$C444444444$	9	4	5	5 ,10 ,15 ,20 ,25 ,30 ,35 ,40 ,45 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,9 ,11 ,12 ,13 ,14 ,16 ,17 ,18 ,19 ,21 ,22 ,23 ,24 ,26 ,27 ,28 ,29 ,31 ,32 ,33 ,34 ,36 ,37 ,38 ,39 ,41 ,42 ,43 ,44
$C4444444444$	10	4	5	5 ,10 ,15 ,20 ,25 ,30 ,35 ,40 ,45 ,50 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,9 ,11 ,12 ,13 ,14 ,16 ,17 ,18 ,19 ,21 ,22 ,23 ,24 ,26 ,27 ,28 ,29 ,31 ,32 ,33 ,34 ,36 ,37 ,38 ,39 ,41 ,42 ,43 ,44 ,46 ,47 ,48 ,49
$C44444444444$	11	4	5	5 ,10 ,15 ,20 ,25 ,30 ,35 ,40 ,45 ,50 ,55 ,1 ,2 ,3 ,4 ,6 ,7 ,8 ,9 ,11 ,12 ,13 ,14 ,16 ,17 ,18 ,19 ,21 ,22 ,23 ,24 ,26 ,27 ,28 ,29 ,31 ,32 ,33 ,34 ,36 ,37 ,38 ,39 ,41 ,42 ,43 ,44 ,46 ,47 ,48 ,49 ,51 ,52 ,53 ,54

TAB. 10.37: Famílias -  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 5$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C555$	3	5	5	6, 11, 16, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18
$C5555$	4	5	5	6, 11, 16, 21, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24
$C55555$	5	5	5	6, 11, 16, 21, 26, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30
$C555555$	6	5	5	6, 11, 16, 21, 26, 31, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36
$C5555555$	7	5	6	6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41
$C55555555$	8	5	6	6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47
$C555555555$	9	5	6	6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53
$C5555555555$	10	5	6	6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59
$C55555555555$	11	5	6	6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 65

TAB. 10.38: Famílias -  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 6$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C666$	3	6	5	6, 11, 16, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21
$C6666$	4	6	6	7, 13, 19, 25, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28
$C66666$	5	6	6	7, 13, 19, 25, 31, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35
$C666666$	6	6	6	7, 13, 19, 25, 31, 37, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42
$C6666666$	7	6	6	7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49
$C66666666$	8	6	7	7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55
$C666666666$	9	6	7	7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62
$C6666666666$	10	6	7	7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 65, 66, 67, 68, 69
$C66666666666$	11	6	7	7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 76

TAB. 10.39: Famílias -  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 7$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C777$	3	7	6	7, 13, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24
$C7777$	4	7	7	8, 15, 22, 29, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32
$C77777$	5	7	7	8, 15, 22, 29, 36, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40
$C777777$	6	7	7	8, 15, 22, 29, 36, 43, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48
$C7777777$	7	7	7	8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 56
$C77777777$	8	7	7	8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64
$C777777777$	9	7	8	8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71
$C7777777777$	10	7	8	8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79
$C77777777777$	11	7	8	8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87

TAB. 10.40: Famílias -  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 8$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C888$	3	8	7	8, 15, 22, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27
$C8888$	4	8	7	8, 15, 22, 29, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36
$C88888$	5	8	8	9, 17, 25, 33, 41, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45
$C888888$	6	8	8	9, 17, 25, 33, 41, 49, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54
$C8888888$	7	8	8	9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63
$C88888888$	8	8	8	9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, 65, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72
$C888888888$	9	8	8	9, 17, 25, 33, 41, 49, 57, 65, 73, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81
$C8888888888$	10	8	9	9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89
$C88888888888$	11	8	9	9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98

TAB. 10.41: Famílias -  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 9$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$b(G)$	Rotulação
$C9999999999$	11	9	10	10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109

TAB. 10.42: Famílias -  $C(k, w, x, y, z)$  - Miller

Notação	$p$	$b(G)$	Rotulação
$C321$	3	3	4, 7, 9, 1, 2, 3, 5, 6, 8
$C4321$	4	3	4, 7, 10, 13, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14
$C54321$	5	4	5, 9, 13, 17, 20, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19
$C654321$	6	5	6, 11, 16, 21, 25, 27, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26
$C7654321$	7	6	7, 13, 19, 25, 30, 33, 35, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 34
$C87654321$	8	6	7, 13, 19, 25, 31, 37, 42, 44, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 43
$C987654321$	9	7	8, 15, 22, 29, 36, 43, 49, 52, 54, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 53

TAB. 10.43: Famílias -  $C(k, z, k, z, k)$  - Miller

Notação	$p$	$k$	$z$	$b(G)$	Rotulação
C32323	5	3	2	3	4, 7, 10, 13, 16, 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18
C42424	5	4	2	4	5, 8, 12, 16, 20, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 21
C43434	5	4	3	4	5, 9, 13, 17, 21, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23
C52525	5	5	2	4	5, 9, 13, 17, 21, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24
C53535	5	5	3	5	6, 10, 15, 20, 25, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 26
C54545	5	5	4	5	6, 11, 16, 21, 26, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28
C62626	5	6	2	5	6, 10, 15, 20, 25, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 27
C63636	5	6	3	5	6, 11, 16, 21, 26, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29
C64646	5	6	4	5	6, 11, 16, 21, 26, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31
C65656	5	6	5	6	7, 13, 19, 25, 31, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33
C72727	5	7	2	5	6, 11, 16, 21, 26, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30
C73737	5	7	3	6	7, 12, 18, 24, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32
C74747	5	7	4	6	7, 13, 19, 25, 31, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34
C75757	5	7	5	6	7, 13, 19, 25, 31, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36
C76767	5	7	6	7	8, 15, 22, 29, 36, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38
C82828	5	8	2	6	7, 12, 18, 24, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33
C83838	5	8	3	6	7, 13, 19, 25, 31, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35
C84848	5	8	4	6	7, 13, 19, 25, 31, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37
C85858	5	8	5	7	8, 15, 22, 29, 36, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39
C86868	5	8	6	7	8, 15, 22, 29, 36, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41
C87878	5	8	7	7	8, 15, 22, 29, 36, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43
C92929	5	9	2	6	7, 13, 19, 25, 31, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36
C93939	5	9	3	7	8, 14, 21, 28, 35, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38
C94949	5	9	4	7	8, 15, 22, 29, 36, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40
C95959	5	9	5	7	8, 15, 22, 29, 36, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42
C96969	5	9	6	8	9, 17, 25, 33, 41, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44
C97979	5	9	7	8	9, 17, 25, 33, 41, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46
C98989	5	9	8	8	9, 17, 25, 33, 41, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48

Mohar



TAB. 10.44: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  -  $k = 2$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C121$	3	2	3	6, 3, 2, 7, 4, 5, 1
$C11211$	5	2	3	10, 8, 5, 4, 2, 11, 9, 6, 7, 3, 1
$C1112111$	7	2	3	2, 4, 6, 7, 10, 12, 14, 1, 3, 5, 8, 9, 11, 13, 15
$C111121111$	9	2	3	2, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 1, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 17, 19
$C11111211111$	11	2	2	22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 23, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C1111112111111$	13	2	3	26, 24, 22, 20, 18, 16, 13, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 27, 25, 23, 21, 19, 17, 14, 15, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C111111121111111$	15	2	3	30, 28, 26, 24, 22, 20, 18, 15, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 19, 16, 17, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C11111111211111111$	17	2	3	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35
$C1111111112111111111$	19	2	3	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39
$C111111111121111111111$	21	2	3	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 22, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43

TAB. 10.45: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  -  $k = 3$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C131$	3	3	4	7, 3, 2, 8, 4, 5, 6, 1
$C11311$	5	3	4	11, 9, 5, 4, 2, 12, 10, 6, 7, 8, 3, 1
$C1113111$	7	3	4	2, 4, 6, 7, 11, 13, 15, 1, 3, 5, 8, 9, 10, 12, 14, 16
$C111131111$	9	3	4	2, 4, 6, 8, 9, 13, 15, 17, 19, 1, 3, 5, 7, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20
$C11111311111$	11	3	4	2, 4, 6, 8, 10, 11, 15, 17, 19, 21, 23, 1, 3, 5, 7, 9, 12, 13, 14, 16, 18, 20, 22, 24
$C1111113111111$	13	3	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28
$C111111131111111$	15	3	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32
$C11111111311111111$	17	3	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 19, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36
$C1111111113111111111$	19	3	4	39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 23, 19, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 24, 20, 21, 22, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C111111111131111111111$	21	3	4	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 22, 23, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44

TAB. 10.46: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  -  $k = 4$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C141$	3	4	5	8, 3, 2, 9, 4, 5, 6, 7, 1
$C11411$	5	4	5	2, 4, 5, 10, 12, 1, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 13
$C1114111$	7	4	5	16, 14, 12, 7, 6, 4, 2, 17, 15, 13, 8, 9, 10, 11, 5, 3, 1
$C111141111$	9	4	5	20, 18, 16, 14, 9, 8, 6, 4, 2, 21, 19, 17, 15, 10, 11, 12, 13, 7, 5, 3, 1
$C11111411111$	11	4	5	24, 22, 20, 18, 16, 11, 10, 8, 6, 4, 2, 25, 23, 21, 19, 17, 12, 13, 14, 15, 9, 7, 5, 3, 1
$C1111114111111$	13	4	5	28, 26, 24, 22, 20, 18, 13, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 29, 27, 25, 23, 21, 19, 14, 15, 16, 17, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C111111141111111$	15	4	5	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33
$C11111111411111111$	17	4	5	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37
$C1111111114111111111$	19	4	5	40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 24, 19, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 20, 21, 22, 23, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C111111111141111111111$	21	4	5	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 22, 23, 24, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45

TAB. 10.47: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  -  $k = 5$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C151$	3	5	6	9, 3, 2, 10, 4, 5, 6, 7, 8, 1
$C11511$	5	5	6	13, 11, 5, 4, 2, 14, 12, 6, 9, 10, 7, 8, 3, 1
$C1115111$	7	5	4	2, 4, 6, 9, 13, 15, 17, 1, 3, 5, 10, 7, 11, 8, 12, 14, 16, 18
$C111151111$	9	5	6	2, 4, 6, 8, 9, 15, 17, 19, 21, 1, 3, 5, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 20, 22
$C11111511111$	11	5	6	2, 4, 6, 8, 10, 11, 17, 19, 21, 23, 25, 1, 3, 5, 7, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26
$C1111115111111$	13	5	6	29, 27, 25, 23, 21, 19, 13, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 30, 28, 26, 24, 22, 20, 14, 15, 16, 17, 18, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C111111151111111$	15	5	6	33, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 15, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 34, 32, 30, 28, 26, 24, 22, 16, 17, 18, 19, 20, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C11111111511111111$	17	5	6	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38
$C1111111115111111111$	19	5	6	41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 19, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 42, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 20, 21, 22, 23, 24, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C111111111151111111111$	21	5	6	45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 21, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 46, 44, 42, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 22, 23, 24, 25, 26, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1

TAB. 10.48: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  -  $k = 6$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C161$	3	6	7	10, 3, 2, 11, 4, 9, 5, 6, 7, 8, 1
$C11611$	5	6	7	14, 12, 5, 4, 2, 15, 13, 6, 7, 8, 9, 11, 10, 3, 1
$C1116111$	7	6	7	18, 16, 14, 7, 6, 4, 2, 19, 17, 15, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 5, 3, 1
$C111161111$	9	6	7	22, 20, 18, 16, 9, 8, 6, 4, 2, 23, 21, 19, 17, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 7, 5, 3, 1
$C11111611111$	11	6	7	2, 4, 6, 8, 10, 11, 18, 20, 22, 24, 26, 1, 3, 5, 7, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27
$C1111116111111$	13	6	7	2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31
$C111111161111111$	15	6	7	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35
$C11111111611111111$	17	6	7	38, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 24, 17, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C1111111116111111111$	19	6	7	42, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 19, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C111111111161111111111$	21	6	7	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47

TAB. 10.49: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  -  $k = 7$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C171$	3	7	8	11, 3, 2, 12, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1
$C11711$	5	7	8	15, 13, 5, 4, 2, 16, 14, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 3, 1
$C1117111$	7	7	8	2, 4, 6, 7, 15, 17, 19, 1, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 20
$C111171111$	9	7	8	23, 21, 19, 17, 9, 8, 6, 4, 2, 24, 22, 20, 18, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 7, 5, 3, 1
$C11111711111$	11	7	8	27, 25, 23, 21, 19, 11, 10, 8, 6, 4, 2, 28, 26, 24, 22, 20, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 9, 7, 5, 3, 1
$C1111117111111$	13	7	8	2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32
$C111111171111111$	15	7	8	35, 33, 31, 29, 27, 25, 23, 15, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 24, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C11111111711111111$	17	7	8	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40
$C1111111117111111111$	19	7	8	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44
$C111111111171111111111$	21	7	8	47, 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 21, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 48, 46, 44, 42, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1

TAB. 10.50: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  -  $k = 8$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C181$	3	8	8	2, 4, 12, 1, 5, 6, 7, 8, 3, 9, 10, 11, 13
$C11811$	5	8	9	16, 14, 5, 4, 2, 17, 15, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 3, 1
$C1118111$	7	8	9	20, 18, 16, 7, 6, 4, 2, 21, 19, 17, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 5, 3, 1
$C111181111$	9	8	9	24, 22, 20, 18, 9, 8, 6, 4, 2, 25, 23, 21, 19, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 7, 5, 3, 1
$C11111811111$	11	8	9	2, 4, 6, 8, 10, 11, 20, 22, 24, 26, 28, 1, 3, 5, 7, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29
$C1111118111111$	13	8	9	2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33
$C111111181111111$	15	8	9	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37
$C11111111811111111$	17	8	9	40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 17, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C1111111118111111111$	19	8	9	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45
$C11111111118111111111$	21	8	9	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49

TAB. 10.51: Famílias -  $C(1, \dots, k, \dots, 1)$  -  $k = 9$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C191$	3	9	10	2, 3, 13, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14
$C11911$	5	9	10	17, 15, 5, 4, 2, 18, 16, 11, 6, 7, 8, 12, 9, 13, 10, 14, 3, 1
$C1119111$	7	9	10	21, 19, 17, 7, 6, 4, 2, 22, 20, 18, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 5, 3, 1
$C111191111$	9	9	10	25, 23, 21, 19, 9, 8, 6, 4, 2, 26, 24, 22, 20, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 16, 17, 7, 5, 3, 1
$C11111911111$	11	9	10	29, 27, 25, 23, 21, 11, 10, 8, 6, 4, 2, 30, 28, 26, 24, 22, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 9, 7, 5, 3, 1
$C1111119111111$	13	9	10	2, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34
$C111111191111111$	15	9	10	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38
$C11111111911111111$	17	9	10	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42
$C1111111119111111111$	19	9	10	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46
$C11111111119111111111$	21	9	10	49, 47, 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 21, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 50, 48, 46, 44, 42, 40, 38, 36, 34, 32, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1

TAB. 10.52: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 2$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C121$	3	2	3	6, 3, 2, 7, 4, 5, 1
$C1211$	4	2	3	8, 5, 4, 2, 9, 6, 7, 3, 1
$C12111$	5	2	3	10, 7, 6, 4, 2, 11, 8, 9, 5, 3, 1
$C121111$	6	2	3	12, 9, 7, 6, 4, 2, 13, 10, 11, 8, 5, 3, 1
$C1211111$	7	2	3	14, 11, 9, 8, 6, 4, 2, 15, 12, 13, 10, 7, 5, 3, 1
$C12111111$	8	2	3	2, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 1, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 15, 17
$C121111111$	9	2	3	18, 15, 13, 11, 10, 8, 6, 4, 2, 19, 16, 17, 14, 12, 9, 7, 5, 3, 1
$C1211111111$	10	2	3	20, 17, 15, 13, 11, 10, 8, 6, 4, 2, 21, 18, 19, 16, 14, 12, 9, 7, 5, 3, 1
$C12111111111$	11	2	3	22, 19, 17, 15, 13, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 23, 20, 21, 18, 16, 14, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C121111111111$	12	2	3	2, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 1, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 17, 19, 21, 23, 25

TAB. 10.53: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 3$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C131$	3	3	4	7,3,2,8,4,5,6,1
$C1311$	4	3	4	2,6,7,9,1,3,4,5,8,10
$C13111$	5	3	4	11,7,6,4,2,12,8,9,10,5,3,1
$C131111$	6	3	4	13,9,7,6,4,2,14,10,11,12,8,5,3,1
$C1311111$	7	3	4	15,11,9,8,6,4,2,16,12,13,14,10,7,5,3,1
$C13111111$	8	3	4	2,6,8,10,11,13,15,17,1,3,4,5,7,9,12,14,16,18
$C131111111$	9	3	4	2,6,8,10,11,13,15,17,19,1,3,4,5,7,9,12,14,16,18,20
$C1311111111$	10	3	4	2,6,8,10,12,13,15,17,19,21,1,3,4,5,7,9,11,14,16,18,20,22
$C13111111111$	11	3	4	2,6,8,10,12,13,15,17,19,21,23,1,3,4,5,7,9,11,14,16,18,20,22,24
$C131111111111$	12	3	4	2,6,8,10,12,14,15,17,19,21,23,25,1,3,4,5,7,9,11,13,16,18,20,22,24,26

TAB. 10.54: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 4$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C141$	3	4	5	8,3,2,9,4,5,6,7,1
$C1411$	4	4	5	2,7,8,10,1,3,4,5,6,9,11
$C14111$	5	4	5	12,7,6,4,2,13,8,9,10,11,5,3,1
$C141111$	6	4	5	2,7,9,10,12,14,1,3,4,5,6,8,11,13,15
$C1411111$	7	4	5	2,7,9,10,12,14,16,1,3,4,5,6,8,11,13,15,17
$C14111111$	8	4	5	18,13,11,9,8,6,4,2,19,14,15,16,17,12,10,7,5,3,1
$C141111111$	9	4	5	20,15,13,11,10,8,6,4,2,21,16,17,18,19,14,12,9,7,5,3,1
$C1411111111$	10	4	5	22,17,15,13,12,10,8,6,4,2,23,18,19,20,21,16,14,11,9,7,5,3,1
$C14111111111$	11	4	5	24,19,17,15,13,12,10,8,6,4,2,25,20,21,22,23,18,16,14,11,9,7,5,3,1
$C141111111111$	12	4	5	26,21,19,17,15,14,12,10,8,6,4,2,27,22,23,24,25,20,18,16,13,11,9,7,5,3,1

TAB. 10.55: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 5$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C151$	3	5	6	9,3,2,10,4,5,6,7,8,1
$C1511$	4	5	6	11,5,4,2,12,6,7,8,9,10,3,1
$C15111$	5	5	6	13,7,6,4,2,14,8,9,10,11,12,5,3,1
$C151111$	6	5	6	15,9,7,6,4,2,16,10,11,12,13,14,8,5,3,1
$C1511111$	7	5	6	2,8,10,11,13,15,17,1,3,4,5,6,7,9,12,14,16,18
$C15111111$	8	5	6	19,13,11,10,8,6,4,2,20,14,15,16,17,18,12,9,7,5,3,1
$C151111111$	9	5	6	21,15,13,11,10,8,6,4,2,22,16,17,18,19,20,14,12,9,7,5,3,1
$C1511111111$	10	5	6	23,17,15,13,12,10,8,6,4,2,24,18,19,20,21,22,16,14,11,9,7,5,3,1
$C15111111111$	11	5	6	25,19,17,15,13,12,10,8,6,4,2,26,20,21,22,23,24,18,16,14,11,9,7,5,3,1
$C151111111111$	12	5	6	27,21,19,17,15,14,12,10,8,6,4,2,28,22,23,24,25,26,20,18,16,13,11,9,7,5,3,1

TAB. 10.56: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 6$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C161$	3	6	7	10,3,2,11,4,9,5,6,7,8,1
$C1611$	4	6	7	12,5,4,2,13,6,7,8,9,10,11,3,1
$C16111$	5	6	7	14,7,6,4,2,15,8,9,10,11,12,13,5,3,1
$C161111$	6	6	7	2,9,11,12,14,16,1,3,4,5,6,7,8,10,13,15,17
$C1611111$	7	6	7	18,11,9,8,6,4,2,19,12,13,14,15,16,17,10,7,5,3,1
$C16111111$	8	6	7	2,9,11,12,14,16,18,20,1,3,4,5,6,7,8,10,13,15,17,19,21
$C161111111$	9	6	7	22,15,13,11,10,8,6,4,2,23,16,17,18,19,20,21,14,12,9,7,5,3,1
$C1611111111$	10	6	7	24,17,15,13,12,10,8,6,4,2,25,18,19,20,21,22,23,16,14,11,9,7,5,3,1
$C16111111111$	11	6	7	26,19,17,15,13,12,10,8,6,4,2,27,20,21,22,23,24,25,18,16,14,11,9,7,5,3,1
$C161111111111$	12	6	7	28,21,19,17,15,14,12,10,8,6,4,2,29,22,23,24,25,26,27,20,18,16,13,11,9,7,5,3,1

TAB. 10.57: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 7$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C171$	3	7	8	11, 3, 2, 12, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1
$C1711$	4	7	8	13, 5, 4, 2, 14, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 3, 1
$C17111$	5	7	8	15, 7, 6, 4, 2, 16, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 5, 3, 1
$C171111$	6	7	8	2, 10, 11, 13, 15, 17, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18
$C1711111$	7	7	8	19, 11, 9, 8, 6, 4, 2, 20, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 10, 7, 5, 3, 1
$C17111111$	8	7	8	2, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 22
$C171111111$	9	7	8	23, 15, 13, 11, 10, 8, 6, 4, 2, 24, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 14, 12, 9, 7, 5, 3, 1
$C1711111111$	10	7	8	25, 17, 15, 13, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 26, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 16, 14, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C17111111111$	11	7	8	2, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 24, 26, 28
$C171111111111$	12	7	8	29, 21, 19, 17, 15, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 30, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 20, 18, 16, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1

TAB. 10.58: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 8$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C181$	3	8	8	2, 4, 12, 1, 5, 6, 7, 8, 3, 9, 10, 11, 13
$C1811$	4	8	9	14, 5, 4, 2, 15, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 3, 1
$C18111$	5	8	9	16, 7, 6, 4, 2, 17, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 5, 3, 1
$C181111$	6	8	9	2, 11, 12, 14, 16, 18, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 15, 17, 19
$C1811111$	7	8	9	20, 11, 9, 8, 6, 4, 2, 21, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 10, 7, 5, 3, 1
$C18111111$	8	8	9	2, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 22, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 17, 19, 21, 23
$C181111111$	9	8	9	24, 15, 13, 11, 10, 8, 6, 4, 2, 25, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 14, 12, 9, 7, 5, 3, 1
$C1811111111$	10	8	9	26, 17, 15, 13, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 27, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 16, 14, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C18111111111$	11	8	9	2, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29
$C181111111111$	12	8	9	30, 21, 19, 17, 15, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 31, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 20, 18, 16, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1

TAB. 10.59: Famílias -  $C(1, k, \dots, 1)$  -  $k = 9$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C191$	3	9	10	2, 3, 13, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14
$C1911$	4	9	10	15, 5, 4, 2, 16, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 3, 1
$C19111$	5	9	10	17, 7, 6, 4, 2, 18, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 5, 3, 1
$C191111$	6	9	10	2, 12, 13, 15, 17, 19, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 16, 18, 20
$C1911111$	7	9	10	21, 11, 9, 8, 6, 4, 2, 22, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 10, 7, 5, 3, 1
$C19111111$	8	9	10	2, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 23, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 18, 20, 22, 24
$C191111111$	9	9	10	25, 15, 13, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 26, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 14, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C1911111111$	10	9	10	27, 17, 15, 13, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 28, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 16, 14, 11, 9, 7, 5, 3, 1
$C19111111111$	11	9	10	2, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30
$C191111111111$	12	9	10	31, 21, 19, 17, 15, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2, 32, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 20, 18, 16, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1

TAB. 10.60: Famílias -  $C(k, 1...1, k)$  -  $k = 2$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C212$	3	2	2	6, 4, 3, 7, 8, 5, 1, 2
$C2112$	4	2	2	8, 6, 5, 3, 9, 10, 7, 4, 1, 2
$C21112$	5	2	2	3, 5, 7, 8, 10, 1, 2, 4, 6, 9, 11, 12
$C211112$	6	2	2	12, 10, 8, 7, 5, 3, 13, 14, 11, 9, 6, 4, 1, 2
$C2111112$	7	2	2	14, 12, 10, 8, 7, 5, 3, 15, 16, 13, 11, 9, 6, 4, 1, 2
$C21111112$	8	2	2	3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 1, 2, 4, 6, 8, 11, 13, 15, 17, 18
$C211111112$	9	2	2	3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 1, 2, 4, 6, 8, 11, 13, 15, 17, 19, 20
$C2111111112$	10	2	2	3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 13, 15, 17, 19, 21, 22
$C21111111112$	11	2	2	3, 5, 7, 9, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 24
$C211111111112$	12	2	2	3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 26

TAB. 10.61: Famílias -  $C(k, 1...1, k)$  -  $k = 3$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C313$	3	3	3	4, 5, 7, 1, 2, 3, 6, 8, 9, 10
$C3113$	4	3	3	4, 6, 7, 9, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 11, 12
$C31113$	5	3	3	11, 9, 7, 6, 4, 12, 13, 14, 10, 8, 5, 1, 2, 3
$C311113$	6	3	3	13, 11, 9, 8, 6, 4, 14, 15, 16, 12, 10, 7, 5, 1, 2, 3
$C3111113$	7	3	3	15, 13, 11, 9, 8, 6, 4, 16, 17, 18, 14, 12, 10, 7, 5, 1, 2, 3
$C31111113$	8	3	3	4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 20
$C311111113$	9	3	3	4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 22
$C3111111113$	10	3	3	4, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 24
$C31111111113$	11	3	3	4, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26
$C311111111113$	12	3	3	4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 28

TAB. 10.62: Famílias -  $C(k, 1...1, k)$  -  $k = 4$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C414$	3	4	4	5, 6, 8, 1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12
$C4114$	4	4	4	5, 7, 8, 10, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 13, 14
$C41114$	5	4	4	12, 10, 8, 7, 5, 13, 14, 15, 16, 11, 9, 6, 1, 2, 3, 4
$C411114$	6	4	4	14, 12, 10, 9, 7, 5, 15, 16, 17, 18, 13, 11, 8, 6, 1, 2, 3, 4
$C4111114$	7	4	4	16, 14, 12, 10, 9, 7, 5, 17, 18, 19, 20, 15, 13, 11, 8, 6, 1, 2, 3, 4
$C41111114$	8	4	4	18, 16, 14, 12, 11, 9, 7, 5, 19, 20, 21, 22, 17, 15, 13, 10, 8, 6, 1, 2, 3, 4
$C411111114$	9	4	4	20, 18, 16, 14, 12, 11, 9, 7, 5, 21, 22, 23, 24, 19, 17, 15, 13, 10, 8, 6, 1, 2, 3, 4
$C4111111114$	10	4	4	22, 20, 18, 16, 14, 13, 11, 9, 7, 5, 23, 24, 25, 26, 21, 19, 17, 15, 12, 10, 8, 6, 1, 2, 3, 4
$C41111111114$	11	4	4	24, 22, 20, 18, 16, 14, 13, 11, 9, 7, 5, 25, 26, 27, 28, 23, 21, 19, 17, 15, 12, 10, 8, 6, 1, 2, 3, 4
$C411111111114$	12	4	4	26, 24, 22, 20, 18, 16, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 27, 28, 29, 30, 25, 23, 21, 19, 17, 14, 12, 10, 8, 6, 1, 2, 3, 4

TAB. 10.63: Famílias -  $C(k, 1...1, k)$  -  $k = 5$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C515$	3	5	5	6, 7, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 12, 13, 14
$C5115$	4	5	5	6, 8, 9, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 14, 15, 16
$C51115$	5	5	5	13, 11, 9, 8, 6, 14, 15, 16, 17, 18, 12, 10, 7, 1, 2, 3, 4, 5
$C511115$	6	5	5	15, 13, 11, 10, 8, 6, 16, 17, 18, 19, 20, 14, 12, 9, 7, 1, 2, 3, 4, 5
$C5111115$	7	5	5	17, 15, 13, 11, 10, 8, 6, 18, 19, 20, 21, 22, 16, 14, 12, 9, 7, 1, 2, 3, 4, 5
$C51111115$	8	5	5	6, 8, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24
$C511111115$	9	5	5	6, 8, 10, 12, 13, 15, 17, 19, 21, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 26
$C5111111115$	10	5	5	6, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 23, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 27, 28
$C51111111115$	11	5	5	6, 8, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30
$C511111111115$	12	5	5	6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32

TAB. 10.64: Famílias -  $C(k, 1...1, k)$  -  $k = 6$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C616$	3	6	6	7, 8, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16
$C6116$	4	6	6	12, 10, 9, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 11, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6
$C61116$	5	6	6	14, 12, 10, 9, 7, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 13, 11, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6
$C611116$	6	6	6	7, 9, 11, 12, 14, 16, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22
$C6111116$	7	6	6	18, 16, 14, 12, 11, 9, 7, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 17, 15, 13, 10, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6
$C61111116$	8	6	6	7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26
$C611111116$	9	6	6	7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 22, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 17, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28
$C6111111116$	10	6	6	7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30
$C61111111116$	11	6	6	7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32
$C611111111116$	12	6	6	7, 9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34

TAB. 10.65: Famílias -  $C(k, 1...1, k)$  -  $k = 7$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C717$	3	7	7	8, 10, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18
$C7117$	4	7	7	13, 11, 10, 8, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 12, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
$C71117$	5	7	7	8, 10, 11, 13, 15, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22
$C711117$	6	7	7	8, 10, 12, 13, 15, 17, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24
$C7111117$	7	7	7	19, 17, 15, 13, 12, 10, 8, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 18, 16, 14, 11, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
$C71111117$	8	7	7	8, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28
$C711111117$	9	7	7	8, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 21, 23, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30
$C7111111117$	10	7	7	8, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32
$C71111111117$	11	7	7	8, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34
$C711111111117$	12	7	7	8, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36

TAB. 10.66: Famílias -  $C(k, 1...1, k)$  -  $k = 8$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C818$	3	8	8	9, 10, 12, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20
$C8118$	4	8	8	14, 12, 11, 9, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 13, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
$C81118$	5	8	8	16, 14, 12, 11, 9, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 15, 13, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
$C811118$	6	8	8	18, 16, 14, 13, 11, 9, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 17, 15, 12, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
$C8111118$	7	8	8	9, 11, 13, 14, 16, 18, 20, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30
$C81111118$	8	8	8	9, 11, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 17, 19, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32
$C811111118$	9	8	8	9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 21, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34
$C8111111118$	10	8	8	9, 11, 13, 15, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 21, 23, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36
$C81111111118$	11	8	8	9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 23, 25, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38
$C811111111118$	12	8	8	9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38

TAB. 10.67: Famílias -  $C(k, 1...1, k)$  -  $k = 9$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C919$	3	9	9	10, 11, 13, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22
$C9119$	4	9	9	15, 13, 12, 10, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 14, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$C91119$	5	9	9	17, 15, 13, 12, 10, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 16, 14, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$C911119$	6	9	9	10, 12, 14, 15, 17, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28
$C9111119$	7	9	9	21, 19, 17, 15, 14, 12, 10, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 20, 18, 16, 13, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$C91111119$	8	9	9	23, 21, 19, 17, 16, 14, 12, 10, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 22, 20, 18, 15, 13, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$C911111119$	9	9	9	25, 23, 21, 19, 17, 16, 14, 12, 10, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 24, 22, 20, 18, 15, 13, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$C9111111119$	10	9	9	27, 25, 23, 21, 19, 18, 16, 14, 12, 10, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 26, 24, 22, 20, 17, 15, 13, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$C91111111119$	11	9	9	10, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38
$C911111111119$	12	9	9	31, 29, 27, 25, 23, 21, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 30, 28, 26, 24, 22, 19, 17, 15, 13, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

TAB. 10.68: Famílias -  $C(k, 1..k..1, k)$  -  $k = 2$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C21212$	5	2	3	11, 9, 8, 5, 3, 12, 13, 10, 6, 7, 4, 1, 2
$C2112112$	7	2	3	3, 5, 7, 8, 11, 13, 15, 1, 2, 4, 6, 9, 10, 12, 14, 16, 17
$C211121112$	9	2	3	3, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 19, 1, 2, 4, 6, 8, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 21
$C21111211112$	11	2	3	23, 21, 19, 17, 15, 12, 11, 9, 7, 5, 3, 24, 25, 22, 20, 18, 16, 13, 14, 10, 8, 6, 4, 1, 2
$C2111112111112$	13	2	3	3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 29
$C211111121111112$	15	2	3	3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 33
$C21111111211111112$	17	2	3	35, 33, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 18, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 36, 37, 34, 32, 30, 28, 26, 24, 22, 19, 20, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 1, 2
$C2111111112111111112$	19	2	3	39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 23, 20, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 40, 41, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 24, 21, 22, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 1, 2
$C211111111121111111112$	21	2	3	43, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 22, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 44, 45, 42, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 23, 24, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 1, 2
$C2111111111121111111112$	23	2	3	47, 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 24, 23, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 48, 49, 46, 44, 42, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 25, 26, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 1, 2



TAB. 10.69: Famílias -  $C(k, 1..k..1, k)$  -  $k = 3$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C31313$	5	3	4	4, 6, 7, 11, 13, 1, 2, 3, 5, 10, 8, 9, 12, 14, 15, 16
$C3113113$	7	3	4	17, 15, 13, 9, 8, 6, 4, 18, 19, 20, 16, 14, 10, 11, 12, 7, 5, 1, 2, 3
$C311131113$	9	3	4	21, 19, 17, 15, 11, 10, 8, 6, 4, 22, 23, 24, 20, 18, 16, 12, 13, 14, 9, 7, 5, 1, 2, 3
$C31111311113$	11	3	4	25, 23, 21, 19, 17, 13, 12, 10, 8, 6, 4, 26, 27, 28, 24, 22, 20, 18, 14, 15, 16, 11, 9, 7, 5, 1, 2, 3
$C3111113111113$	13	3	4	29, 27, 25, 23, 21, 19, 15, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 30, 31, 32, 28, 26, 24, 22, 20, 16, 17, 18, 13, 11, 9, 7, 5, 1, 2, 3
$C311111131111113$	15	3	4	33, 31, 29, 27, 25, 23, 21, 17, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 34, 35, 36, 32, 30, 28, 26, 24, 22, 18, 19, 20, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 1, 2, 3
$C31111111311111113$	17	3	4	37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 23, 19, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 38, 39, 40, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 24, 20, 21, 22, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 1, 2, 3
$C3111111113111111113$	19	3	4	41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 21, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 42, 43, 44, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 26, 22, 23, 24, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 1, 2, 3
$C31111111113111111113$	21	3	4	45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 23, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 46, 47, 48, 44, 42, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 24, 25, 26, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 1, 2, 3
$C3111111111131111111113$	23	3	4	49, 47, 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 25, 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 50, 51, 52, 48, 46, 44, 42, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 26, 27, 28, 23, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 1, 2, 3

TAB. 10.70: Famílias -  $C(k, 1..k..1, k)$  -  $k = 4$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C41414$	5	4	5	5, 7, 8, 13, 15, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 18, 19
$C4114114$	7	4	5	5, 7, 9, 10, 15, 17, 19, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 23
$C411141114$	9	4	5	5, 7, 9, 11, 12, 17, 19, 21, 23, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 27
$C41111411114$	11	4	5	27, 25, 23, 21, 19, 14, 13, 11, 9, 7, 5, 28, 29, 30, 31, 26, 24, 22, 20, 15, 16, 17, 18, 12, 10, 8, 6, 1, 2, 3, 4
$C4111114111114$	13	4	5	31, 29, 27, 25, 23, 21, 16, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 32, 33, 34, 35, 30, 28, 26, 24, 22, 17, 18, 19, 20, 14, 12, 10, 8, 6, 1, 2, 3, 4
$C411111141111114$	15	4	5	35, 33, 31, 29, 27, 25, 23, 18, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 36, 37, 38, 39, 34, 32, 30, 28, 26, 24, 19, 20, 21, 22, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 1, 2, 3, 4
$C41111111411111114$	17	4	5	5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 41, 42, 43
$C4111111114111111114$	19	4	5	5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 45, 46, 47
$C411111111114111111114$	21	4	5	5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 24, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 49, 50, 51
$C41111111111141111111114$	23	4	5	5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 53, 54, 55

TAB. 10.71: Famílias -  $C(k, 1..k..1, k)$  -  $k = 5$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C51515$	5	5	6	17, 15, 9, 8, 6, 18, 19, 20, 21, 22, 16, 10, 11, 12, 13, 14, 7, 1, 2, 3, 4, 5
$C5115115$	7	5	6	21, 19, 17, 11, 10, 8, 6, 22, 23, 24, 25, 26, 20, 18, 12, 13, 14, 15, 16, 9, 7, 1, 2, 3, 4, 5
$C511151115$	9	5	6	6, 8, 10, 12, 13, 19, 21, 23, 25, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30
$C51111511115$	11	5	6	29, 27, 25, 23, 21, 15, 14, 12, 10, 8, 6, 30, 31, 32, 33, 34, 28, 26, 24, 22, 16, 17, 18, 19, 20, 13, 11, 9, 7, 1, 2, 3, 4, 5
$C5111115111115$	13	5	6	6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 35, 36, 37, 38
$C511111151111115$	15	5	6	6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 39, 40, 41, 42
$C51111111511111115$	17	5	6	41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 21, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 42, 43, 44, 45, 46, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 28, 22, 23, 24, 25, 26, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 1, 2, 3, 4, 5
$C5111111115111111115$	19	5	6	45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 23, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 46, 47, 48, 49, 50, 44, 42, 40, 38, 36, 34, 32, 30, 24, 25, 26, 27, 28, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 1, 2, 3, 4, 5
$C511111111115111111115$	21	5	6	6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 51, 52, 53, 54
$C51111111111151111111115$	23	5	6	6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 55, 56, 57, 58

TAB. 10.72: Famílias -  $C(k, 1..k..1, k)$  -  $k = 6$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C61616$	5	6	7	7, 9, 10, 17, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25
$C6116116$	7	6	7	23, 21, 19, 12, 11, 9, 7, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 22, 20, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 10, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6
$C611161116$	9	6	7	7, 9, 11, 13, 14, 21, 23, 25, 27, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33
$C61111611116$	11	6	7	31, 29, 27, 25, 23, 16, 15, 13, 11, 9, 7, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 30, 28, 26, 24, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 14, 12, 10, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6
$C6111116111116$	13	6	7	35, 33, 31, 29, 27, 25, 18, 17, 15, 13, 11, 9, 7, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 34, 32, 30, 28, 26, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 16, 14, 12, 10, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6
$C611111161111116$	15	6	7	7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 45
$C61111111611111116$	17	6	7	7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49
$C6111111116111111116$	19	6	7	7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 24, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 28, 26, 29, 27, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53
$C611111111161111111116$	21	6	7	7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57
$C61111111111611111111116$	23	6	7	7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 28, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61

TAB. 10.73: Famílias -  $C(k, 1..k..1, k)$  -  $k = 7$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C71717$	5	7	8	8, 10, 11, 19, 21, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28
$C7117117$	7	7	8	25, 23, 21, 13, 12, 10, 8, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 24, 22, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 11, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
$C711171117$	9	7	8	8, 10, 12, 14, 15, 23, 25, 27, 29, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36
$C71111711117$	11	7	8	8, 10, 12, 14, 16, 17, 25, 27, 29, 31, 33, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40
$C7111117111117$	13	7	8	37, 35, 33, 31, 29, 27, 19, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 36, 34, 32, 30, 28, 20, 21, 22, 25, 26, 23, 24, 17, 15, 13, 11, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
$C711111171111117$	15	7	8	8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48
$C71111111711111117$	17	7	8	8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52
$C7111111117111111117$	19	7	8	49, 47, 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33, 25, 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 48, 46, 44, 42, 40, 38, 36, 34, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 23, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
$C711111111171111111117$	21	7	8	8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60
$C71111111111711111111117$	23	7	8	57, 55, 53, 51, 49, 47, 45, 43, 41, 39, 37, 29, 28, 26, 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 56, 54, 52, 50, 48, 46, 44, 42, 40, 38, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 27, 25, 23, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

TAB. 10.74: Famílias -  $C(k, 1..k..1, k)$  -  $k = 8$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C81818$	5	8	9	9, 11, 12, 21, 23, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31
$C8118118$	7	8	9	9, 11, 13, 14, 23, 25, 27, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35
$C811181118$	9	8	9	31, 29, 27, 25, 16, 15, 13, 11, 9, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 30, 28, 26, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 14, 12, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
$C81111811118$	11	8	9	35, 33, 31, 29, 27, 18, 17, 15, 13, 11, 9, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 34, 32, 30, 28, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 16, 14, 12, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
$C8111118111118$	13	8	9	39, 37, 35, 33, 31, 29, 20, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 38, 36, 34, 32, 30, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 18, 16, 14, 12, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
$C811111181111118$	15	8	9	9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51
$C81111111811111118$	17	8	9	9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 24, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55
$C8111111118111111118$	19	8	9	9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 26, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59
$C811111111181111111118$	21	8	9	9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 28, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63
$C81111111111811111111118$	23	8	9	59, 57, 55, 53, 51, 49, 47, 45, 43, 41, 39, 30, 29, 27, 25, 23, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 9, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 58, 56, 54, 52, 50, 48, 46, 44, 42, 40, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 28, 26, 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

TAB. 10.75: Famílias -  $C(k, 1..k..1, k)$  -  $k = 9$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C91919$	5	9	10	25, 23, 13, 12, 10, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 24, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$C9119119$	7	9	10	29, 27, 25, 15, 14, 12, 10, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 28, 26, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 13, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$C911191119$	9	9	10	33, 31, 29, 27, 17, 16, 14, 12, 10, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 32, 30, 28, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 15, 13, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$C91111911119$	11	9	10	10, 12, 14, 16, 18, 19, 29, 31, 33, 35, 37, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46
$C9111119111119$	13	9	10	10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50
$C911111191111119$	15	9	10	10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 23, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54
$C91111111911111119$	17	9	10	10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58
$C9111111119111111119$	19	9	10	53, 51, 49, 47, 45, 43, 41, 39, 37, 27, 26, 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 52, 50, 48, 46, 44, 42, 40, 38, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 25, 23, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$C911111111191111111119$	21	9	10	10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66
$C91111111111911111111119$	23	9	10	61, 59, 57, 55, 53, 51, 49, 47, 45, 43, 41, 31, 30, 28, 26, 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 60, 58, 56, 54, 52, 50, 48, 46, 44, 42, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 29, 27, 25, 23, 21, 19, 17, 15, 13, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

TAB. 10.76: Famílias  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 1$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C111$	3	1	2	2,3,5,1,4,6
$C1111$	4	1	2	7,5,4,2,8,6,3,1
$C11111$	5	1	2	9,7,5,4,2,10,8,6,3,1
$C111111$	6	1	2	2,4,6,7,9,11,1,3,5,8,10,12
$C1111111$	7	1	2	2,4,6,7,9,11,13,1,3,5,8,10,12,14
$C11111111$	8	1	2	15,13,11,9,8,6,4,2,16,14,12,10,7,5,3,1
$C111111111$	9	1	2	17,15,13,11,9,8,6,4,2,18,16,14,12,10,7,5,3,1
$C1111111111$	10	1	2	19,17,15,13,11,10,8,6,4,2,20,18,16,14,12,9,7,5,3,1
$C11111111111$	11	1	2	21,19,17,15,13,11,10,8,6,4,2,22,20,18,16,14,12,9,7,5,3,1
$C111111111111$	12	1	2	23,21,19,17,15,13,12,10,8,6,4,2,24,22,20,18,16,14,11,9,7,5,3,1

TAB. 10.77: Famílias  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 2$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C222$	3	2	3	7,4,3,8,9,5,6,1,2
$C2222$	4	2	3	10,7,6,3,11,12,8,9,4,5,1,2
$C22222$	5	2	3	13,10,7,6,3,14,15,11,12,8,9,4,5,1,2
$C222222$	6	2	3	16,13,10,9,6,3,17,18,14,15,11,12,7,8,4,5,1,2
$C2222222$	7	2	3	3,6,9,10,13,16,19,1,2,4,5,7,8,11,12,14,15,17,18,20,21
$C22222222$	8	2	3	3,6,9,12,13,16,19,22,1,2,4,5,7,8,10,11,14,15,17,18,20,21,23,24
$C222222222$	9	2	3	3,6,9,12,13,16,19,22,25,1,2,4,5,7,8,10,11,14,15,17,18,20,21,23,24,26,27
$C2222222222$	9	2	3	3,6,9,12,13,16,19,22,25,1,2,4,5,7,8,10,11,14,15,17,18,20,21,23,24,26,27
$C22222222222$	10	2	3	3,6,9,12,15,16,19,22,25,28,1,2,4,5,7,8,10,11,13,14,17,18,20,21,23,24,26,27,29,30

TAB. 10.78: Famílias  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 3$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C333$	3	3	4	9, 5, 4, 10, 11, 12, 6, 7, 8, 1, 2, 3
$C3333$	4	3	4	4, 8, 9, 13, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 15, 16
$C33333$	5	3	4	17, 13, 9, 8, 4, 18, 19, 20, 14, 15, 16, 10, 11, 12, 5, 6, 7, 1, 2, 3
$C333333$	6	3	4	4, 8, 12, 13, 17, 21, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24
$C3333333$	7	3	4	25, 21, 17, 13, 12, 8, 4, 26, 27, 28, 22, 23, 24, 18, 19, 20, 14, 15, 16, 9, 10, 11, 5, 6, 7, 1, 2, 3
$C33333333$	8	3	4	4, 8, 12, 16, 17, 21, 25, 29, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32
$C333333333$	9	3	4	4, 8, 12, 16, 17, 21, 25, 29, 33, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36
$C3333333333$	9	3	4	4, 8, 12, 16, 17, 21, 25, 29, 33, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36
$C33333333333$	10	3	4	37, 33, 29, 25, 21, 20, 16, 12, 8, 4, 38, 39, 40, 34, 35, 36, 30, 31, 32, 26, 27, 28, 22, 23, 24, 17, 18, 19, 13, 14, 15, 9, 10, 11, 5, 6, 7, 1, 2, 3

TAB. 10.79: Famílias  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 4$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C444$	3	4	5	11, 6, 5, 12, 13, 14, 15, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4
$C4444$	4	4	5	5, 10, 11, 16, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20
$C44444$	5	4	5	5, 10, 11, 16, 21, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25
$C444444$	6	4	5	26, 21, 16, 15, 10, 5, 27, 28, 29, 30, 22, 23, 24, 25, 17, 18, 19, 20, 11, 12, 13, 14, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4
$C4444444$	7	4	5	5, 10, 15, 16, 21, 26, 31, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35
$C44444444$	8	4	5	36, 31, 26, 21, 20, 15, 10, 5, 37, 38, 39, 40, 32, 33, 34, 35, 27, 28, 29, 30, 22, 23, 24, 25, 16, 17, 18, 19, 11, 12, 13, 14, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4
$C444444444$	9	4	5	5, 10, 15, 20, 21, 26, 31, 36, 41, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45
$C444444444$	9	4	5	5, 10, 15, 20, 21, 26, 31, 36, 41, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45
$C4444444444$	10	4	5	5, 10, 15, 20, 25, 26, 31, 36, 41, 46, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50

TAB. 10.80: Famílias  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 5$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C555$	3	5	6	6, 12, 13, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18
$C5555$	4	5	6	6, 12, 13, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24
$C55555$	5	5	6	25, 19, 13, 12, 6, 26, 27, 28, 29, 30, 20, 21, 22, 23, 24, 14, 15, 16, 17, 18, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 2, 3, 4, 5
$C555555$	6	5	6	31, 25, 19, 18, 12, 6, 32, 33, 34, 35, 36, 26, 27, 28, 29, 30, 20, 21, 22, 23, 24, 13, 14, 15, 16, 17, 7, 8, 9, 10, 11, 1, 2, 3, 4, 5
$C5555555$	7	5	6	6, 12, 18, 19, 25, 31, 37, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42
$C55555555$	8	5	6	6, 12, 18, 24, 25, 31, 37, 43, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48
$C555555555$	9	5	6	6, 12, 18, 24, 25, 31, 37, 43, 49, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54
$C5555555555$	9	5	6	6, 12, 18, 24, 25, 31, 37, 43, 49, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54
$C55555555555$	10	5	6	6, 12, 18, 24, 30, 31, 37, 43, 49, 55, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 60

TAB. 10.81: Famílias  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 6$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C666$	3	6	7	7, 8, 15, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21
$C6666$	4	6	7	22, 15, 14, 7, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 1, 2, 3, 4, 5, 6
$C66666$	5	6	7	7, 14, 15, 22, 29, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35
$C666666$	6	6	7	36, 29, 22, 21, 14, 7, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 1, 2, 3, 4, 5, 6
$C6666666$	7	6	7	7, 14, 21, 22, 29, 36, 43, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49
$C66666666$	8	6	7	7, 14, 21, 28, 29, 36, 43, 50, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 56
$C666666666$	9	6	7	7, 14, 21, 28, 29, 36, 43, 50, 57, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63
$C6666666666$	9	6	7	7, 14, 21, 28, 29, 36, 43, 50, 57, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63
$C66666666666$	10	6	7	7, 14, 21, 28, 35, 36, 43, 50, 57, 64, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70

TAB. 10.82: Famílias  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 7$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C777$	3	7	8	8, 9, 17, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24
$C7777$	4	7	8	8, 16, 17, 25, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32
$C77777$	5	7	8	33, 25, 17, 16, 8, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
$C777777$	6	7	8	41, 33, 25, 24, 16, 8, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
$C7777777$	7	7	8	8, 16, 24, 25, 33, 41, 49, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56
$C77777777$	8	7	8	57, 49, 41, 33, 32, 24, 16, 8, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
$C777777777$	9	7	8	8, 16, 24, 32, 33, 41, 49, 57, 65, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72
$C7777777777$	9	7	8	8, 16, 24, 32, 33, 41, 49, 57, 65, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72
$C77777777777$	10	7	8	8, 16, 24, 32, 40, 41, 49, 57, 65, 73, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80

TAB. 10.83: Famílias  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 8$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
$C888$	3	8	9	9, 10, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27
$C8888$	4	8	9	28, 19, 18, 9, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
$C88888$	5	8	9	9, 18, 19, 28, 37, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45
$C888888$	6	8	9	46, 37, 28, 27, 18, 9, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
$C8888888$	7	8	9	55, 46, 37, 28, 27, 18, 9, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
$C88888888$	8	8	9	64, 55, 46, 37, 36, 27, 18, 9, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
$C888888888$	9	8	9	9, 18, 27, 36, 37, 46, 55, 64, 73, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81
$C8888888888$	9	8	9	9, 18, 27, 36, 37, 46, 55, 64, 73, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81
$C88888888888$	10	8	9	82, 73, 64, 55, 46, 45, 36, 27, 18, 9, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

TAB. 10.84: Famílias  $C(k, \dots, k, \dots, k)$  -  $k = 9$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C999$	3	9	10	10, 11, 21, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30
$C9999$	4	9	10	10, 20, 21, 31, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40
$C99999$	5	9	10	41, 31, 21, 20, 10, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$C999999$	6	9	10	51, 41, 31, 30, 20, 10, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$C9999999$	7	9	10	10, 20, 30, 31, 41, 51, 61, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70
$C99999999$	8	9	10	71, 61, 51, 41, 40, 30, 20, 10, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
$C999999999$	9	9	10	10, 20, 30, 40, 41, 51, 61, 71, 81, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90
$C9999999999$	9	9	10	10, 20, 30, 40, 41, 51, 61, 71, 81, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90
$C99999999999$	10	9	10	10, 20, 30, 40, 50, 51, 61, 71, 81, 91, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100



TAB. 10.85: Famílias -  $C(k, z, k, z, k)$  - Mohar

Notação	$p$	$k$	$z$	$\hat{b}(G)$	Rotulação
C32323	5	3	2	4	4, 7, 8, 12, 15, 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18
C42424	5	4	2	5	5, 8, 9, 14, 17, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21
C43434	5	4	3	5	5, 9, 10, 15, 19, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23
C52525	5	5	2	6	6, 9, 10, 16, 19, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24
C53535	5	5	3	6	6, 10, 11, 17, 21, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26
C54545	5	5	4	6	23, 18, 12, 11, 6, 24, 25, 26, 27, 28, 19, 20, 21, 22, 13, 14, 15, 16, 17, 7, 8, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5
C62626	5	6	2	7	7, 10, 11, 18, 21, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27
C63636	5	6	3	7	7, 11, 12, 19, 23, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29
C64646	5	6	4	7	25, 20, 13, 12, 7, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 21, 22, 23, 24, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 8, 9, 10, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6
C65656	5	6	5	7	27, 21, 14, 13, 7, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 22, 23, 24, 25, 26, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 8, 9, 10, 11, 12, 1, 2, 3, 4, 5, 6
C72727	5	7	2	8	23, 20, 12, 11, 8, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 21, 22, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 9, 10, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
C73737	5	7	3	8	25, 21, 13, 12, 8, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 22, 23, 24, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 9, 10, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
C74747	5	7	4	8	8, 13, 14, 22, 27, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34
C75757	5	7	5	8	29, 23, 15, 14, 8, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 24, 25, 26, 27, 28, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 9, 10, 11, 12, 13, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
C76767	5	7	6	8	31, 24, 16, 15, 8, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
C82828	5	8	2	9	25, 22, 13, 12, 9, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 23, 24, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 10, 11, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
C83838	5	8	3	9	9, 13, 14, 23, 27, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35
C84848	5	8	4	9	9, 14, 15, 24, 29, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37
C85858	5	8	5	9	31, 25, 16, 15, 9, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 26, 27, 28, 29, 30, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 10, 11, 12, 13, 14, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
C86868	5	8	6	9	33, 26, 17, 16, 9, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
C87878	5	8	7	9	35, 27, 18, 17, 9, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
C92929	5	9	2	10	10, 13, 14, 24, 27, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36
C93939	5	9	3	10	29, 25, 15, 14, 10, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 26, 27, 28, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 11, 12, 13, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
C94949	5	9	4	10	31, 26, 16, 15, 10, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 27, 28, 29, 30, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 11, 12, 13, 14, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
C95959	5	9	5	10	10, 16, 17, 27, 33, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42
C96969	5	9	6	10	35, 28, 18, 17, 10, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
C97979	5	9	7	10	37, 29, 19, 18, 10, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
C98989	5	9	8	10	39, 30, 20, 19, 10, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

TAB. 10.86: Famílias -  $C(k, w, x, y, z)$  - Mohar

Notação	$p$	$\tilde{b}(G)$	Rotulação
$C_{321}$	3	3	6, 5, 2, 7, 8, 9, 3, 4, 1
$C_{4321}$	4	4	5, 9, 10, 13, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 14
$C_{54321}$	5	5	15, 10, 9, 5, 2, 16, 17, 18, 19, 20, 11, 12, 13, 14, 6, 7, 8, 3, 4, 1
$C_{654321}$	6	6	21, 15, 14, 9, 5, 2, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 16, 17, 18, 19, 20, 10, 11, 12, 13, 6, 7, 8, 3, 4, 1
$C_{7654321}$	7	7	8, 15, 21, 22, 27, 31, 34, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 32, 33, 35
$C_{87654321}$	8	8	36, 28, 21, 20, 14, 9, 5, 2, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 15, 16, 17, 18, 19, 10, 11, 12, 13, 6, 7, 8, 3, 4, 1
$C_{987654321}$	9	9	45, 36, 28, 27, 20, 14, 9, 5, 2, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 15, 16, 17, 18, 19, 10, 11, 12, 13, 6, 7, 8, 3, 4, 1

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)