UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Coordenação de Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

Geometria de Weyl e Teorias Gravitacionais em Dimensões Extras

Guillermo Alexander Torres Gomez

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Carlos Romero, apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física

João Pessoa-PB
2008

A mi Mamá, porque siempre he podido y siempre podré contar con ella

A Luisa Fer, porque la vida se torna más fácil con ella a mi lado

Agradecimentos

Ao Prof. Carlos Romero, em especial, pela orientação competente, pela grande contribuição acadêmica e pelo estímulo constante à pesquisa.

Aos meus pais e familiares pelo incentivo e apoio.

Aos professores da Pós-Graduação do Departamento de Física pelas contribuições dadas a minha formação acadêmica.

Ao CNPq pelo apoio financiero.

A todos os que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Resumo

Revisamos a geometria de Weyl no contexto das recentes teorias do espaço-tempo em dimensões superiores. Após uma introdução à teoria de Weyl numa linguagem geométrica moderna apresentamos alguns resultados que representam extensões dos teoremas riemannianos. Consideramos a teoria local de imersões e subvariedades no contexto da geometria de Weyl e mostramos como um espaço-tempo riemanniano pode ser localmente e isometricamente imerso num espaço de Weyl de dimensão maior. Discutimos o problema clássico de confinamento e estabilidade do movimento de partículas e fótons na vizinhança de branas para o caso quando o *bulk* de Weyl tem a geometria de um espaço produto distorcido (*warped product*). Mostramos como as propriedades de confinamento e estabilidade das geodésicas perto da brana podem ser afetadas pelo campo de Weyl. Construímos um análogo clássico do confinamento quântico inspirado em modelos teóricos de campos considerando um campo escalar de Weyl que depende apenas das coordenadas extras. Finalmente, sugerimos possíveis equações para o campo métrico e o campo escalar de Weyl.

Abstract

We revisit Weyl geometry in the context of recent higher-dimensional theories of spacetime. After introducing the Weyl theory in a modern geometrical language we present some results that represent extensions of Riemannian theorems. We consider the theory of local embeddings and submanifolds in the context of Weyl geometries and show how a Riemannian spacetime may be locally and isometrically embedded in a Weyl bulk. We discuss the problem of classical confinement and the stability of motion of particles and photons in the neighbourhood of branes for the case when the Weyl bulk has the geometry of a warped product space. We show how the confinement and stability properties of geodesics near the brane may be affected by the Weyl field. We construct a classical analogue of quantum confinement inspired in theoretical-field models by considering a Weyl scalar field which depends only on the extra coordinate. Finally, we suggest possible equations for the metric field and the Weyl scalar field.

Índice

Introdução

Tem sido sugerido nos últimos anos que nosso espaço-tempo pode ser visto como uma hipersuperfície imersa numa variedade de dimensão superior, freqüentemente referida como *bulk* [1]. No que diz respeito à geometria desta hipersuperfíce, tem sido geralmente suposto que ela tem uma estrutura geométrica riemanniana. Esta suposição evita possíveis conflitos com a bem estabelecida teoria da relatividade geral, que opera numa geometria riemanniana. Por outro lado, com poucas exceções, não há muita discussão sobre o tipo de geometria que o *bulk* possui, que geralmente é suposta riemanniana também. Poucas tentativas para expandir este cenário têm aparecido recentemente na literatura, onde uma geometria não-riemanniana, a saber, uma geometria de Weyl, é tomada em consideração como uma possibilidade viável para descrever o *bulk* [2], [3], [4]. Contudo, um grande número de geometrias não-riemannianas é atualmente conhecido e poderia ser investigado neste contexto. A nossa intenção é proceder num tal programa de investigação, e um primeiro passo neste sentido seria considerar a geometria de Weyl [5], que é uma das mais simples generalizações da geometria riemanniana.

A dissertação está organizada da seguinte forma. Começamos no capítulo 1 com uma formulação moderna da geometria de Weyl e mostramos alguns resultados que representam simples extensões dos teoremas riemannianos. No capítulo 2 consideramos a teoria local de imersões e subvariedades no contexto da geometria de Weyl. Na seção 2.1 mostramos como um espaço-tempo riemanniano pode ser imerso num espaço de Weyl de dimensão maior. O capítulo 3 contém uma aplicação do formalismo para o problema clássico de confinamento e estabilidade do movimento de partículas e fótons na vizinhança de branas. Na seção 3.1 estudamos o movimento geodésico numa variedade riemanniana. Na seção 3.2 mostramos como a presença de um campo de Weyl pode afetar o confinamento e/ou a estabilidade do movimento das partículas e discutimos como um campo geométrico, tal como o campo de Weyl, pode efetivamente agir como um campo escalar quântico, que em alguns modelos teóricos é o responsável pelo confinamento de matéria na brana [6]. Na seção 3.3 fazemos uma simples aplicação das idéias desenvolvidas anteriormente. No capítulo final, capítulo 4, estudamos uma ação que, utilizando o método de variações de Palatini, fornece uma condição de compatibilidade de Weyl e equações de campo para a métrica e o campo escalar de Weyl.

Capítulo 1

Formulação Moderna da Teoria de Weyl

Como é sabido, o tipo de estrutura geométrica concebido por H. Weyl em 1918, embora admiravelmente engenhosa como uma tentativa de unificar gravidade com eletromagnetismo, revelou-se um fracasso como uma teoria física. De fato, imediatamente após ter sido exposto às ideias de Weyl, Einstein levantou forte oposição à adoção da geometria de Weyl na descrição dos fenômenos eletromagnéticos e gravitacionais [7]. O argumento de Einstein era que, em uma geometria não-integrável, não seria possível a existência de linhas espectrais nítidas na presença de um campo eletromagnético porque relógios atômicos iriam depender da sua história passada [8]. Deve ser dito, contudo, que uma variante da geometria de Weyl, conhecida como geometria de Weyl integrável, que não sofre a desvantagem assinalada por Einstein, atraiu a atenção dos cosmólogos alguns anos atrás [9].

Nesta seção revisamos algumas definições básicas e resultados que são válidos em geometria riemanniana assim como em geometria de Weyl. Como veremos, a geometria de Weyl pode ser vista como uma espécie de generalização da geometria riemanniana e alguns teoremas que serão apresentados aqui são simples extensões dos correspondentes teoremas na geometria riemanniana. No entanto, essas extensões têm um sabor diferente e novo especialmente quando são aplicados ao estudo das geodésicas. Comecemos com a definição de conexão afim.

Definição 1.1 *Seja M uma variedade diferenciável, $\Xi(M)$ o conjunto dos campos vetoriais de classe C^∞ em M, e $D(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M. Uma conexão afim ∇ em M é uma aplicação*

$$\begin{aligned} \nabla : \Xi(M) \times \Xi(M) &\longrightarrow \Xi(M) \\ (V, W) &\longrightarrow \nabla_V W \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $\nabla_{fV+gW} Z = f\nabla_V Z + g\nabla_W Z$,

ii) $\nabla_V(W + Z) = \nabla_V W + \nabla_V Z$,

iii) $\nabla_V(fW) = V[f]\, W + f\, \nabla_V W$,

onde $V, W, Z \in \Xi(M)$ e $f, g \in D(M)$.

Um resultado importante vem imediatamente da definição acima e permite definir a derivada covariante ao longo de uma curva diferenciável.

Proposição 1.1 *Dada uma variedade diferenciável M munida de uma conexão ∇, existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V definido ao longo da curva diferenciável $\alpha(\lambda)$, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$, um outro campo vetorial $\frac{DV}{d\lambda}$ ao longo de $\alpha(\lambda)$, denominado derivada covariante de V ao longo de $\alpha(\lambda)$, tal que:*

i) $\frac{D(V+W)}{d\lambda} = \frac{DV}{d\lambda} + \frac{DW}{d\lambda}$;

ii) $\frac{D(fV)}{d\lambda} = \frac{df}{d\lambda} V + f \frac{DV}{d\lambda}$, *onde V é um campo vetorial ao longo de $\alpha(\lambda)$ e f é uma função diferenciável em I;*

iii) se V for induzido por um campo vetorial $Z \in \Xi(M)$, isto é, $V(\lambda) = Z(\alpha(\lambda))$, então $\frac{DV}{d\lambda} = \nabla_{\frac{d}{d\lambda}} Z$, onde $\frac{d}{d\lambda}$ é o campo vetorial tangente à curva $\alpha(\lambda)$.

Para uma prova desta proposição remetemos o leitor para [10]. Agora estamos prontos para introduzir o conceito de transporte paralelo de um vetor ao longo de uma dada curva.

Definição 1.2 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇. Dada uma curva diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ e um campo vetorial V definido ao longo de $\alpha(\lambda)$, dizemos que V é paralelo se a derivada covariante de V ao longo de $\alpha(\lambda)$ se anula para todo λ, isto é, $\frac{DV}{d\lambda} = 0$ para $\lambda \in I$.*

Entre todas as conexões afins admissíveis definidas numa variedade, um papel importante na teoria riemanniana, assim como na teoria de Weyl, é realizado por uma classe especial de conexões, isto é, as conexões sem torção, as quais serão definidas abaixo.

Definição 1.3 *Uma conexão afim ∇ em M é dita simétrica se satisfaz a seguinte condição*

$$\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W]$$

para todo $V, W \in \Xi(M)$, onde $[V, W]$ é o comutador entre V e W.

Numa base coordenada $\{\partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}\}$, o fato de ∇ ser simétrica implica que para todo $a, b = 1, ..., n$, temos

$$\nabla_{\partial_a}\partial_b - \nabla_{\partial_b}\partial_a = (\Gamma^c_{ab} - \Gamma^c_{ba})\,\partial_c = [\partial_a, \partial_b] = 0\,. \tag{1.1}$$

A equação acima é equivalente ao fato de que $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$, o que justifica o nome adotado.

Vamos agora introduzir o conceito de variedade de Weyl através da seguinte definição.

Definição 1.4 *Seja M uma variedade diferenciável munida de uma conexão afim ∇, um tensor métrico g e um campo de 1-formas σ, chamado campo de Weyl, definido globalmente em M. Dizemos que ∇ é Weyl-compatível (ou W-compatível) com g se* *e somente se para todo campo vetorial* $U, V, W \in \Xi(M)$ *tem-se*

$$V[g(U,W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W) + \sigma(V) g(U,W)\,. \tag{1.2}$$

Isto é, naturalmente, uma generalização da idéia de compatibilidade riemanniana entre ∇ e g. Se a 1-forma σ se anula em toda M, recuperamos a condição de compatibilidade riemanniana. Logo, é natural esperar ter uma versão generalizada do teorema de Levi-Civita[1] se nos limitarmos a conexões sem torção. Na verdade, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.1 *Dada uma variedade diferenciável* M *com uma métrica* g *e um campo de 1-formas* σ *diferenciável definido em* M*, existe uma única conexão afim* ∇ *em* M *satisfazendo as condições:*

i) ∇ *é simétrica,*

ii) ∇ *é Weyl-compatível.*

Demostração: Suponhamos inicialmente a existência de uma tal ∇. Então, da equação (1.2) temos as seguintes três equações:

$$V[g(U,W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W) + \sigma(V)\, g(U,W), \tag{1.3}$$

$$W[g(V,U)] = g(\nabla_W V, U) + g(V, \nabla_W U) + \sigma(W)\, g(V,U), \tag{1.4}$$

$$U[g(W,V)] = g(\nabla_U W, V) + g(W, \nabla_U V) + \sigma(U)\, g(W,V). \tag{1.5}$$

Somando (1.3) e (1.4) e subtraindo (1.5), teremos, usando a simetria de ∇, que

$$\begin{aligned} V[g(U,W)] + W[g(V,U)] - U[g(W,V)] &= g([V,U],W) + g([W,U],V) \\ &\quad + g([V,W],U) + 2g(U, \nabla_W V) \\ &\quad + \sigma(V)\, g(U,W) + \sigma(W)\, g(V,U) \\ &\quad - \sigma(U)\, g(W,V). \end{aligned} \tag{1.6}$$

[1] O'Neill e Berger referem-se ao teorema de Levi-Civita como um "milagre" da geometria riemanniana [11].

Portanto,

$$g(U,\nabla_W V) = \frac{1}{2}\Big(V[g(U,W)] + W[g(V,U)] - U[g(W,V)] - g([V,W],U) - g([W,U],V) - g([V,U],W) + \sigma(U)\,g(W,V) - \sigma(V)\,g(U,W) - \sigma(W)\,g(V,U)\Big)\,. \tag{1.7}$$

A expressão acima mostra que a conexão afim ∇ está univocamente determinada pela métrica g e pelo campo de Weyl de 1-formas σ. Portanto, caso exista, ela será única. Para mostrar a existência, definamos ∇ por (1.7). É fácil verificar que a conexão ∇ está bem definida e que satisfaz as propriedades desejadas.

Neste ponto é instrutivo escrever (1.2) em um sistema de coordenadas locais $\{x^a\}$, $a = 1, ..., n$. Então, um simples cálculo mostra que podemos expressar os coeficientes da conexão afim ∇ completamente em termos das componentes de g e σ, isto é,

$$\Gamma^a_{bc} = \left\{ {a \atop bc} \right\} - \frac{1}{2} g^{ad}\big(g_{ab}\sigma_c + g_{dc}\sigma_b - g_{bc}\sigma_d\big)\,, \tag{1.8}$$

onde $\left\{ {a \atop bc} \right\} = \frac{1}{2} g^{ad}\big(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}\big)$ são os símbolos de Christoffel e $\sigma = \sigma_c\, dx^c$. Agora, observemos que a condição de compatibilidade de Weyl, equação (1.2), pode ser interpretada como exigindo que a derivada covariante do tensor métrico g na direção de um campo vetorial $V \in \Xi(M)$ não se anule, como em geometria riemanniana, mas, em vez disso, que ela seja regulada pelo campo de Weyl σ definido na variedade M. Em outras palavras, temos

$$\nabla_V g = \sigma(V)\, g\,. \tag{1.9}$$

É um pouco surpreendente que este novo requisito não estrague a propriedade de que a conexão ∇ seja completamente determinada por σ e g, univocamente. Uma visão geométrica clara sobre as propriedades do transporte paralelo de Weyl é dada pela seguinte proposição:

Corolário 1.1 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇, uma métrica g e um campo de Weyl de 1-formas σ. Se ∇ é W-compatível, então para* *todo par V e U de campos vetoriais paralelos ao longo da curva diferenciável $\alpha(\lambda)$, $\alpha : I \to M$, tem-se*

$$\frac{d}{d\lambda} g(V,U) = \sigma\Big(\frac{d}{d\lambda}\Big)\, g(V,U), \quad \textit{para todo } \lambda \in I, \tag{1.10}$$

onde $\frac{d}{d\lambda}$ é o campo vetorial tangente à curva $\alpha(\lambda)$.

Se integramos a equação acima ao longo da curva $\alpha(\lambda)$, a partir de um ponto $P_0 = \alpha(\lambda_o)$, então facilmente obteremos

$$g(V(\lambda), U(\lambda)) = g(V(\lambda_0), U(\lambda_0))\, e^{\int_{\lambda_0}^{\lambda} \sigma(\frac{d}{d\rho})\, d\rho}. \tag{1.11}$$

Fazendo $U = V$, e denotando por $L(\lambda)$ o comprimento do vetor $V(\lambda)$ em um ponto arbitrário $P = \alpha(\lambda)$ da curva, é fácil ver que em um sistema de coordenadas locais x^a a equação (1.10) se reduz a

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{\sigma_a}{2}\, \frac{dx^a}{d\lambda}\, L\,. \tag{1.12}$$

Considere o conjunto de todas as curvas fechadas $\alpha : [a,b] \in \mathbb{R} \to M$, ou seja, com $\alpha(a) = \alpha(b)$. Logo, a equação

$$g(V(b), U(b)) = g(V(a), U(a))\, e^{\int_a^b \sigma(\frac{d}{d\rho})\, d\rho} \tag{1.13}$$

define um grupo de holonomia, cujos elementos são, em geral, uma composição de uma transformação de homotetia e uma isometria. Se quisermos que os elementos deste grupo correspondam puramente a uma isometria, então temos que ter

$$\oint \sigma\Big(\frac{d}{d\lambda}\Big)\, d\lambda = 0\,, \tag{1.14}$$

para qualquer curva fechada. Portanto, a partir do teorema de Stokes, σ deve ser uma forma exata, ou seja, existe uma função escalar ϕ, tal que $\sigma = d\phi$. Neste caso, temos aquilo que é freqüentemente chamado na literatura uma variedade de Weyl integrável.

As variedades de Weyl são completamente caracterizadas pelo terno (M, g, σ), que vamos chamar um referencial de Weyl. É interessante verificar que a condição de compatibilidade de Weyl, equação (1.10), permanece inalterada quando vamos para outro referencial de Weyl $(M, \bar{g}, \bar{\sigma})$ realizando as seguintes transformações simultâneas em g e σ:

$$\bar{g} = e^{-\phi}\, g\,, \tag{1.15}$$

$$\bar{\sigma} = \sigma - d\phi\,, \tag{1.16}$$

onde ϕ é uma função escalar definida em M. Claramente, a aplicação conforme, equação (1.15), e a transformação de calibre, equação (1.16), definem classes de equivalências no conjunto dos referenciais de Weyl. Vale a pena mencionar que a descoberta de que a condição de compatibilidade, equação(1.10), é invariante sob este grupo de transformações foi o que guiou Weyl à sua tentativa de unificar gravidade e eletromagnetismo, estendendo o conceito de espaço-tempo ao de um conjunto de variedades equipado com uma estrutura conforme, ou seja, o espaço seria visto como uma classe $[g]$ de métricas Lorentzianas conformalmente equivalentes [5].

Capítulo 2

Subvariedades e Imersões Isométricas na Teoria de Weyl

Comecemos definindo o que é uma imersão.

Definição 2.1 *Sejam* (M, g, σ) *e* $(\bar{M}, \bar{g}, \bar{\sigma})$ *variedades de Weyl diferenciáveis de dimensão* m *e* $n = m + k$, $k \geq 0$, *respectivamente. Uma aplicação diferenciável* $f : U \subset M \to \bar{M}$ *é dita ser uma imersão se:*
i) a diferencial $df : T_p(M) \to T_{f(p)}\bar{M}$ *é injetiva em cada ponto* $p \in M$*;*
ii) $\sigma(V) = \bar{\sigma}(df(V))$ *para todo* $V \in T_p(M)$.
O número k *é chamado codimensão da imersão* f. *Dizemos ainda que* f *é uma imersão isométrica se* $g(U, V) = \bar{g}(df(U), df(V))$ *para todo* U, V *no espaço tangente de* M, $T_p(M)$, *e em todo* $p \in M$. *Se, além disto,* f *é um homeomorfismo sobre* $f(M) \subset \bar{M}$, *onde* $f(M)$ *tem a topologia induzida por* $\bar{M}$, *diz-se que* f *é um mergulho. No caso em que* $M \subset \bar{M}$ *e a inclusão* $i : M \to \bar{M}$ *é um mergulho, dizemos que* M *é uma subvariedade de* $\bar{M}$.

É importante notar que localmente toda imersão é um mergulho. De fato, seja $f : M \to \bar{M}$ uma imersão. Então, em torno de cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ tal que a restrição de f a U é um mergulho sobre $f(U)$. Podemos, portanto, identificar U com a sua imagem $f(U)$, de modo que localmente podemos considerar

M como uma subvariedade mergulhada em $\bar{M}$, com f sendo uma inclusão. Assim, vamos identificar cada vetor $V \in T_p(M)$ com $df(V) \in T_{f(p)}(M)$ e considerar $T_p(M)$ como um subespaço de $T_{f(p)}(\bar{M})$.

No espaço vetorial $T_p(\bar{M})$, $p \in \bar{M}$, a métrica $\bar{g}$ permite fazer a decomposição $T_p(\bar{M}) = T_p(M) \oplus T_p(M)^{\perp}$, onde $T_p(M)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de $T_p(M) \subset T_p(\bar{M})$. Isto é, para todo vetor $\bar{V} \in T_p(\bar{M})$, com $p \in M$, podemos decompor $\bar{V}$ em $\bar{V} = V + V^{\perp}$, onde $V \in T_p(M)$ e $V^{\perp} \in T_p(M)^{\perp}$. Denominamos V a componente tangencial de $\bar{V}$ e $V^{\perp}$ a componente normal de $\bar{V}$.

A conexão de Weyl de $\bar{M}$ será indicada por $\bar{\nabla}$. Agora podemos provar a seguinte proposição.

Proposição 2.1 *Se V e U são campos locais de vetores em M, e $\bar{V}$ e $\bar{U}$ são extensões locais desses campos a $\bar{M}$, então a conexão de Weyl $\nabla_V U$ será dada por*

$$\nabla_V U = (\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{U})^{\top}, \tag{2.1}$$

onde $(\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{U})^{\top}$ é a componente tangencial de $\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{U}$.

Demonstração: Comecemos com a equação que exprime a condição de compatibilidade de Weyl, equação (1.2):

$$\bar{V}[\bar{g}(\bar{U}, \bar{W})] = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{U}, \bar{W}) + \bar{g}(\bar{U}, \bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{W}) + \bar{\sigma}(\bar{V})\, \bar{g}(\bar{U}, \bar{W}), \tag{2.2}$$

onde $\bar{V}, \bar{U}, \bar{W} \in \Xi(\bar{M})$. Agora, suponha que $\bar{V}, \bar{U}, \bar{W}$ são extensões locais dos campos vetoriais V, U, W a M. Claramente, num ponto $p \in M$, tem-se

$$\bar{V}[\bar{g}(\bar{U}, \bar{W})] = V[\bar{g}(\bar{U}, \bar{W})] = V[g(U, W)], \tag{2.3}$$

onde levamos em conta que a inclusão de M em $\bar{M}$ é isométrica. Por outro lado, calculando separadamente cada termo do lado direito da equação (2.2) em p, obtemos

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{U}, \bar{W}) = \bar{g}\big((\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{U})^{\top} + (\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{U})^{\perp}, W\big) = \bar{g}\big((\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{U})^{\top}, W\big) = g\big((\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{U})^{\top}, W\big), \tag{2.4}$$

com uma expressão análoga para $\bar{g}(\bar{U}, \bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{W})$. A partir da equação acima e pelo fato de que $\bar{\sigma}(\bar{V}) = \sigma(V)$, num ponto $p \in M$, obtemos

$$V[g(U,W)] = g\big((\bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{U})^{\top}, W)\big) + g\big(U, (\bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{U})^{\top}\big) + \sigma(V)\, g(U,W)\,. \tag{2.5}$$

Logo, pelo teorema de Levi-Civita estendido às variedades de Weyl, que afirma a unicidade da conexão afim ∇ numa variedade de Weyl, concluímos que a equação (2.1) é satisfeita. Em outras palavras, a componente tangencial da derivada covariante $\bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{U}$, avaliada em pontos de M, é a derivada covariante da conexão de Weyl induzida a partir da métrica g em M, definida por $g(V,U) = \bar{g}(df(V), df(U))$.

2.1 Mergulhando o Espaço-Tempo num Espaço de Weyl de Dimensão Maior

Agora que sabemos como funciona o mecanismo de imersão de subvariedades na geometria Weyl, somos levados à seguinte questão: é possível ter uma subvariedade riemanniana mergulhada num espaço ambiente de Weyl? A resposta a esta pergunta é dada pelo seguinte argumento. Uma variedade riemanniana é um caso particular de uma variedade de Weyl, em que o campo de Weyl σ é nulo. Portanto, uma subvariedade M mergulhada num espaço de Weyl $\bar{M}$ será riemanniana se e somente se o campo de 1-formas σ induzido pelo *pullback* de $\bar{\sigma}$, isto é, $\sigma(V) = \bar{\sigma}(df(V))$, se anula em toda M. Isto é, a condição necessária e suficiente para M ser uma variedade riemanniana mergulhada é que $\sigma(V) = 0$ para todo $V \in T_p(M)$ e todo $p \in M$.

Para ilustrar o exposto, e tendo em vista aplicações futuras, vamos considerar o caso em que a variedade $\bar{M}$ é folheada por uma família de subvariedades definidas por k equações $y^A = y_0^A =$ constante[1], com o espaço-tempo M correspondendo a uma

[1] De agora em diante, índices Latinos minúsculos variam de 0 a $n+3$, enquanto que os índices Gregos variam de 0 a 3. As coordenadas de um ponto genérico P da variedade $\bar{M}$ serão denotados por $y^a = (x^\alpha, y^4, \cdots, y^{n+3})$, onde x^α denota as quatro coordenadas do espaço-tempo e y^A $(A \geq 4)$ refere-se às n coordenadas extras de P.

dessas variedades $y^A = y_0^A =$ constante. Em coordenadas locais $\{y^a\}$ de $\bar{M}$ adaptadas para o mergulho, a condição $\sigma(V) = 0$ se escreve $\sigma_\alpha V^\alpha = 0$, onde $\sigma = \sigma_\alpha dx^\alpha$ e $V = V^\beta \partial_\beta$. No caso de uma variedade de Weyl integrável, $\sigma = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$. Neste caso $\sigma(V) = 0$ para todo $V \in T_p(M)$ se e somente se $\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} = 0$. Portanto, numa variedade integrável de Weyl, se o campo escalar ϕ é uma função só das coordenadas extras, a subvariedade espaço-tempo M mergulhada no espaço ambiente $\bar{M}$ é riemanniana.

O fato de que podemos ter um espaço-tempo riemanniano M mergulhado num espaço ambiente de Weyl $\bar{M}$ não significa que efeitos físicos ou geométricos provenientes das dimensões extras devam estar ausentes. Um bom exemplo deste ponto é dado pelo comportamento das geodésicas perto de M. No capítulo seguinte iremos analisar como um campo de Weyl pode afetar o movimento geodésico no caso de um espaço ambiente com uma geometria produto distorcido. Estaremos particularmente interessados no problema do confinamento e da estabilidade do movimento de partículas e fótons perto da subvariedade espaço-tempo [12].

Capítulo 3

Movimento Geodésico num Espaço de Weyl Integrável

Vamos começar com o estudo de geodésicas em espaços produto distorcido riemannianos. Estudamos primeiro o caso riemanniano porque desta forma podemos observar quais são as vantagens de usar uma geometria de Weyl.

3.1 Movimento Geodésico num Espaço Riemanniano do Tipo Produto Distorcido

Nesta seção consideremos o caso em que a geometria do espaço ambiente tem dois componentes especiais: a) é uma variedade riemanniana e b) sua métrica tem a estrutura de um espaço produto distrocido [13]. Como é sabido, a importância da geometria produto distorcido está intimamente relacionada com o chamado cenário *braneworld* [1].

Definição 3.1 *Sejam (M, g) e (N, h) duas variedades riemannianas de dimensão m e r, com métricas g e h, respectivamente. Além disso, seja $\Psi > 0$, $\Psi : N \to \mathbb{R}$ (chamada função de distorção), uma função diferenciável. Um espaço produto distorcido riemanniano é o produto cartesiano $\tilde{M} = M \times N$ com uma métrica $\tilde{g} = (\Psi\, g) \oplus h$.*

Aqui, por simplicidade, vamos tomar $M = M^4$ e $N = \mathbb{R}$, onde M^4 denota uma variedade Lorentziana de quatro dimensões com assinatura $(+ - --)$ (designada como espaço-tempo). Em coordenadas locais $\{y^a = (x^\alpha, y^4)\}$ o elemento de linha correspondente a essa métrica será escrito como[1]

$$dS^2 = \tilde{g}_{ab}\, dy^a dy^b \,. \tag{3.1}$$

As equações geodésicas no espaço $\tilde{M}$ de cinco dimensões serão dadas por

$$\frac{d^2 y^a}{d\lambda^2} + {}^{(5)}\!\left\{ {a \atop bc} \right\} \frac{dy^b}{d\lambda}\frac{dy^c}{d\lambda} = 0 \,, \tag{3.2}$$

onde λ é um parâmetro afim e ${}^{(5)}\!\left\{ {a \atop bc} \right\}$ denota os símbolos de Christoffel em cinco dimensões (5D), definidos por ${}^{(5)}\!\left\{ {a \atop bc} \right\} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ad}\big(\partial_b \tilde{g}_{dc} + \partial_c \tilde{g}_{bd} - \partial_d \tilde{g}_{bc}\big)$. Denotando a quinta coordenada por y e as coordenadas restantes (as coordenadas do "espaço-tempo") por x^μ, isto é, $y^a = (x^\mu, y)$, podemos facilmente mostrar que a parte 4D das equações geodésicas (3.2) pode ser reescrita na forma [12]

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + {}^{(4)}\!\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = \xi^\mu \,, \tag{3.3}$$

onde

$$\begin{aligned} \xi^\mu = & - {}^{(5)}\!\left\{ {\mu \atop 44} \right\} \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 - 2\, {}^{(5)}\!\left\{ {\mu \atop \alpha 4} \right\} \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda} \\ & - \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu 4}\big(\tilde{g}_{4\alpha,\beta} + \tilde{g}_{4\beta,\alpha} - \tilde{g}_{\alpha\beta,4}\big)\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} \,, \end{aligned} \tag{3.4}$$

e ${}^{(4)}\!\left\{ {\mu \atop \alpha\beta} \right\} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\big(\partial_\alpha \tilde{g}_{\nu\beta} + \partial_\beta \tilde{g}_{\alpha\nu} - \partial_\nu \tilde{g}_{\alpha\beta}\big)$.

Neste ponto, voltamos nossa atenção para o cenário de branas em cinco dimensões, onde o *bulk* corresponde a uma variedade $\tilde{M}$ de dimensão cinco que está foliada por uma família de subvariedades (neste caso, hipersuperfícies) definidas pela equação $y =$ constante.

A geometria de uma hipersuperfície genérica, digamos $y = y_0$, será determinada pela métrica induzida $g_{\alpha\beta}(x) = \tilde{g}_{\alpha\beta}(x, y_0)$. Assim, sobre a hipersuperfície temos

$$ds^2 = \tilde{g}_{\alpha\beta}(x, y_0)\, dx^\alpha dx^\beta \,. \tag{3.5}$$

[1]Durante todo este capítulo, índices Latinos minúsculos variam de 0 a 4.

Vemos então que as quantidades ${}^{(4)}\left\{ {}^{\mu}_{\alpha\beta} \right\}$ que aparecem no lado esquerdo da equação (3.3) devem ser identificadas com os símbolos de Christoffel associados à métrica induzida nas folhas da foliação definida acima.

Agora, consideremos a classe de geometrias produto distorcido dadas pelo seguinte elemento de linha:

$$dS^2 = e^{2f}\, g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta - dy^2\,, \tag{3.6}$$

onde $f = f(y)$ e $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x)$. Para essa métrica, é fácil ver[2] que ${}^{(5)}\left\{ {}^{\mu}_{44} \right\} = 0$ e ${}^{(5)}\left\{ {}^{\mu}_{4\nu} \right\} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\beta}\,\partial_4 \tilde{g}_{\beta\nu} = f'\,\delta^\mu_\nu$, onde f' denota a derivada de f com respeito a y. Assim, no caso do espaço produto distorcido, equação (3.6), o lado direito da equação (3.3) se reduz a $\xi^\mu = -2f'\,\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda}$ e a parte 4D das equações geodésicas torna-se

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + {}^{(4)}\left\{ {}^{\mu}_{\alpha\beta} \right\}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = -2f'\,\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda}\,. \tag{3.7}$$

Por outro lado, a equação geodésica para a quinta coordenada y no espaço produto distorcido torna-se

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} + f'\,e^{2f} g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0\,. \tag{3.8}$$

Restringindo-nos às geodésicas em cinco dimensões (5D) do tipo-tempo $\left(\tilde{g}_{ab}\frac{dy^a}{d\lambda}\frac{dy^b}{d\lambda} = 1\right)$, podemos desacoplar facilmente a equação acima das coordenadas quadridimensionais (4D) do espaço-tempo para obter

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} + f'\left(1 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2\right) = 0\,. \tag{3.9}$$

Do mesmo modo, para estudar o movimento de fótons em 5D, temos de considerar as geodésicas nulas $\left(\tilde{g}_{ab}\frac{dy^a}{d\lambda}\frac{dy^b}{d\lambda} = 0\right)$, caso em que a equação (3.8) torna-se

$$\frac{d^2y}{d\lambda^2} + f'\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 = 0\,. \tag{3.10}$$

As equações (3.9) e (3.10) são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que, em princípio, podem ser resolvidas se a função $f' = f'(y)$ é conhecida. Um quadro

[2] No cálculo acima, estamos usando o fato de que a matriz $g_{\alpha\beta}$ tem uma inversa $g^{\alpha\beta}$, ou seja, $g^{\mu\beta}g_{\beta\nu} = \delta^\mu_\nu$. Isto pode ser facilmente visto, já que por definição $\det g = -\det\tilde{g} \neq 0$.

qualitativo do movimento na quinta dimensão pode ser obtido sem a necessidade de resolver as equações (3.9) e (3.10) analiticamente [12]. Isto é feito definindo a variável $q = \frac{dy}{d\lambda}$ e, em seguida, investigando o sistema dinâmico autônomo [14]

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\lambda} &= q\,, \\ \frac{dq}{d\lambda} &= P(y, q)\,, \end{aligned} \tag{3.11}$$

com $P(y, q) = -f'\,(\varepsilon + q^2)$, onde $\varepsilon = 1$ no caso da equação (3.9) (correspondente ao movimento de partículas com massa em repouso no nulo) e $\varepsilon = 0$ no caso da equação (3.10) (correspondente ao movimento de fótons). Na investigação de sistemas dinâmicos um papel crucial é desempenhado pelos seus pontos de equilíbrio, que no caso do sistema (3.11) são dados por $\frac{dy}{d\lambda} = 0$ e $\frac{dq}{d\lambda} = 0$. O conhecimento desses pontos juntamente com as suas propriedades de estabilidade fornece um grande volume de informação sobre os tipos de comportamento permitidos pelo sistema.

3.1.1 Partículas Maciças

No caso de partículas maciças, isto é, com massa de repouso não-nula, o movimento na quinta dimensão é regido pelo sistema dinâmico

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\lambda} &= q\,, \\ \frac{dq}{d\lambda} &= -\,f'\,(1 + q^2)\,. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Os pontos críticos de (3.12) são dados por $q = 0$ e os zeros da função $f'(y)$ (caso existam), que genericamente designaremos por y_0. Estas soluções, desenhadas como pontos isolados no espaço de fase, correspondem a curvas que estão completamente numa hipersuperfície M de nossa foliação (já que para eles $y =$ constante). Essas curvas são geodésicas tipo-tempo com relação à geometria induzida na hipersuperfície [12].

Para obter informação sobre os possíveis modos de comportamento de partículas e raios de luz em tais hipersuperfícies, é importante estudar a natureza e estabilidade dos pontos de equilíbrio correspondentes. Isto pode ser feito através da linearização das equações (3.12) e estudando os autovalores da matriz jacobiana correspondente em torno dos pontos de equilíbrio. Assumindo que a função $f'(y)$ se anula pelo menos num ponto y_0, pode facilmente ser demonstrado que os correspondentes autovalores são determinados pelo sinal da segunda derivada $f''(y_0)$ no ponto de equilíbrio[3], e algumas possibilidades surgem para os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico (3.12) [12]. Vamos discutir apenas os três seguintes casos.

Primeiro Caso. Se $f''(y_0) > 0$, então o ponto de equilíbrio $(q = 0, y = y_0)$ é um centro. Isto corresponde ao caso em que as partículas maciças oscilam em torno da hipersuperfície M $(y = y_0)$. Tais movimentos cíclicos são independentes das quatro dimensões ordinárias do espaço-tempo e, exceto para as condições $f'(y_0) = 0$ e $f''(y_0) > 0$, a função de distorção $f(y)$ permanece completamente arbitrária.

Segundo Caso. Se $f''(y_0) < 0$, então o ponto $(q = 0, y = y_0)$ é um ponto de sela. Neste caso, a solução correspondente ao ponto de equilíbrio é altamente instável e a menor perturbação transversal no movimento de partículas ao longo da brana fará com que elas sejam remetidas para a dimensão extra. Um exemplo deste confinamento, altamente instável, na hipersuperfície $y = 0$ é fornecido pela função de distorção de Gremm [15]

$$f(y) = -b\,\ln\big(\cosh(c\,y)\big)\,, \tag{3.13}$$

onde b e c são constantes positivas.

Terceiro Caso. Não há nenhum ponto de equilíbrio. A função de distorção $f(y)$

[3] A matriz jacobiana deste sistema dinâmico é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \big[-(1+q^2)f''(y)\big]_{q=0,y=y_0} & \big[-2qf'(y)\big]_{q=0,y=y_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f''(y_0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz acima são $\pm[-f''(y_0)]^{1/2}$.

não tem ponto de retorno para nenhum valor de y. Isto implica que, neste caso, não podemos ter confinamento de partículas clássicas numa hipersuperfície unicamente devido a efeitos gravitacionais. Um exemplo desta situação é ilustrado pela função de distorção $f(y) = \frac{1}{2}\ln(\Lambda\, y^2/3)$, considerada em [16]. De igual modo, note que para grandes valores de y a função de distorção (3.13) aproxima-se à função de distorção na métrica de Randall-Sundrum [17]

$$ds^2 = e^{-2k|y|}\,\eta_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta - dy^2\,, \tag{3.14}$$

onde k é uma constante. Neste caso, $f'(y) = \mp k$ de acordo com o sinal de y, se é positivo ou negativo. Novamente, não existem pontos de equilíbrio, e portanto, o confinamento de partículas não é possível apenas devido à gravidade.

3.1.2 Fótons

O movimento de fótons é regido pelo seguinte sistema dinâmico

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\lambda} &= q\,, \\ \frac{dq}{d\lambda} &= -\, f'\, q^2\,. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Os pontos de equilíbrio neste caso são dados por $q = 0$, de modo que consistem numa linha de pontos de equilíbrio ao longo do eixo y, com ambos autovalores iguais a zero. Qualquer ponto ao longo do eixo y é um ponto de equilíbrio e corresponde a uma geodésica 5D nula na hipersuperfície $y =$ constante. A existência de fótons confinados a hipersuperfícies não depende do fator de distorção [12].

Como é sabido, no cenário *braneworld*, a estabilidade do confinamento dos campos de matéria no nível quântico é feito possível pressupondo-se uma interação da matéria com um campo escalar. Um exemplo de como esse mecanismo funciona é claramente ilustrado através de um modelo teórico concebido por Rubakov, no qual férmions podem ficar presos a uma brana interagindo com um campo escalar que depende exclusivamente da dimensão extra [6]. Por outro lado, o tipo de confinamento que estamos procurando tem caráter puramente geométrico, e isso significa que a única força agindo sobre as partículas é a força gravitacional. Num quadro puramente clássico (não-quântico), gostaríamos ter mecanismos eficazes diferentes de um campo escalar quântico, a fim de obrigar as partículas maciças a moverem-se sobre hipersuperfícies de uma maneira estável. Neste ponto, pelo menos duas possibilidades vêm à nossa mente. Uma delas é supor uma interação direta entre as partículas e um campo escalar físico (seguindo esta abordagem foi demonstrado que é possível ter um confinamento estável numa brana grossa por meio de uma interação direta das partículas com um campo escalar através de uma modificação da lagrangiana da partícula [18]). A outra abordagem apelaria à geometria pura, por exemplo, utilizando uma variedade de Weyl para representar o *bulk*. Como veremos, neste caso o campo de Weyl pode fornecer um mecanismo necessário para confinar e estabilizar o movimento de partículas na brana.

3.2 Movimento Geodésico na Presença de um Campo Weyl

A questão que queremos discutir agora é: o que acontece com o movimento geodésico discutido na seção anterior quando 'ligamos' um campo de Weyl? Por simplicidade, vamos considerar o caso em que o *bulk* produto distrocido é uma variedade de Weyl integrável $(\bar{M}, \bar{g}, \phi)$. Como vimos no capítulo 2, se o campo escalar de Weyl depende exclusivamente das coordenadas extras, então o campo de Weyl de 1-formas $\sigma = d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}dx^\alpha$ induzido nas hipersuperfícies da folheação, definida anteriormente, se anula. De fato, qualquer vetor tangente V de uma determinada folha M tem a forma $V = V^\alpha\partial_\alpha$. Assim, temos $\sigma(V) = d\phi(V) = V^\alpha\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}$. Portanto, se M representa nosso espaço-tempo mergulhado num *bulk* de Weyl integrável $\bar{M}$ com $\phi = \phi(y)$, podemos ter a certeza de que M tem uma estrutura Riemanniana.

Vimos no capítulo 1 que numa variedade de Weyl os coeficientes Γ^a_{bc} da conexão de Weyl estão relacionados com os símbolos de Christoffel através da equação (1.8), isto é (para $\sigma = d\phi$),

$$\Gamma^a_{bc} = \left\{ {a \atop bc} \right\} - \frac{1}{2} g^{ad} \big(g_{db}\, \partial_c \phi + g_{dc}\, \partial_b \phi - g_{bc}\, \partial_d \phi \big) \, .$$

Usando a equação acima, não é difícil demonstrar que a equação geodésica para a quinta coordenada y neste espaço produto distorcido leva, para partículas maciças, à equação[4]

$$\frac{d^2 y}{d\lambda^2} + f' \left(1 + \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \right) - \phi' \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 \right) = 0 \, , \tag{3.16}$$

onde $\phi' = \frac{d\phi}{dy}$.

Por outro lado, temos para fótons[5]

$$\frac{d^2 y}{d\lambda^2} + (f' - \phi') \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 = 0 \, . \tag{3.17}$$

As equações (3.16) e (3.17) definem, respectivamente, os seguintes sistemas dinâmicos:

$$\frac{dy}{d\lambda} = q \, , \tag{3.18}$$

$$\frac{dq}{d\lambda} = (\phi' - f') \, q^2 + \frac{\phi'}{2} - f' \, , \tag{3.19}$$

e

$$\frac{dy}{d\lambda} = q \, , \tag{3.20}$$

$$\frac{dq}{d\lambda} = (\phi' - f') \, q^2 \, . \tag{3.21}$$

Claramente, a presença da derivada do campo escalar de Weyl nas equações acima pode alterar completamente o panorama das soluções determinadas pelo sistema dinâmico considerado na seção anterior[6]. Isto porque a existência de pontos de

[4] Ver apêndice A.

[5] Ver apêndice A.

[6] A matriz jacobiana do sistema dinâmico para partículas maciças é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \left[(\phi'' - f'') q^2 + \frac{\phi''}{2} - f'' \right]_{q=0, y=y_0} & \left[2q(\phi' - f') \right]_{q=0, y=y_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\phi''(y_0)}{2} - f''(y_0) & 0 \end{pmatrix} .$$

Os autovalores da matriz acima são $\pm [\frac{\phi''(y_0)}{2} - f''(y_0)]^{1/2}$.

equilíbrio, suas propriedades topológicas e estabilidade agora dependem não apenas dos valores da derivada da função de distorção na brana, mas também da derivada do campo escalar de Weyl $\phi(y)$.

Finalmente, notemos que no caso de fótons o campo escalar de Weyl ϕ não tem influência no confinamento. Isto pode ser facilmente explicado pelo fato de que, de acordo com (1.15) e (1.16), a presença de um campo escalar de Weyl é equivalente a executar uma transformação conforme na métrica Riemanniana $\tilde{g} = e^{2f} g \oplus h$. Isto resulta, essencialmente, na mudança da função de distorção de f para $f - \frac{\phi}{2}$. Devido a que a existência de fótons confinados na hipersuperfíce é independente da função de distorção [12], o campo escalar de Weyl não tem efeito no confinamento. Esta propriedade interessante também pode ser explicada pelo fato de que uma transformação conforme não altera a estrutura de cone de luz de uma variedade.

3.3 Um Exemplo Simples

Como uma ilustração dos resultados obtidos na seção anterior, vamos considerar um espaço riemanniano de cinco dimensões $\bar{M}$ dotado de uma métrica tipo Mashhoon-Wesson [16], isto é,

$$dS^2 = \frac{\Lambda^2}{3} y^2 \, g_{\alpha\beta} \, dx^\alpha dx^\beta - dy^2 \, . \tag{3.22}$$

Como pudemos observar na seção 3.1, neste caso não há confinamento de partículas nas hipersuperfícies $y =$ constante. Agora vamos 'ligar' um campo escalar de Weyl no espaço $\bar{M}$ escolhendo, por exemplo,

$$\phi = \ln(y^2) + K \, (y - y_0)^2 \, , \tag{3.23}$$

onde K é uma constante. Não é difícil verificar que o campo escalar de Weyl funcionará como um campo confinante, capturando partículas maciças na hipersuperfície $y = y_0$. Um cálculo simples demonstra que[7], se $K < 0$, estamos na presença de uma espécie de confinamento onde partículas que estão perto da hipersuperfície

[7] Os autovalores da matriz jacobiana deste sistema são $\pm[\frac{\phi''(y_0)}{2} - f''(y_0)]^{1/2} = \pm[K]^{1/2}$

$y = y_0$ vão oscilar em torno dela, entrando e saindo da hipersuperfície indefinidamente. Por outro lado, se $K > 0$, o confinamento clássico é altamente instável. Naturalmente, o mesmo processo pode ser usado também para estabilizar o movimento das partículas no caso da função de distorção de Gremm (3.13). Finalmente, observemos que, já que ϕ depende apenas da coordenada extra y, o caráter riemanniano das hipersuperfícies $y =$ constante não é afetado pela presença do campo escalar de Weyl.

Capítulo 4

Dinâmica

Neste capítulo consideramos uma ação de dimensão N sem torção onde os campos básicos que descrevem a gravidade consistem num tensor simétrico de segunda ordem (a métrica), uma conexão afim e um campo escalar. As equações de campo são deduzidas exigindo que esta ação seja estacionária sob variações da métrica, da conexão e do campo escalar[1].

A ação que consideramos é da forma[2]

$$S = \int d^N x \left[\sqrt{-g} \Big(D(\psi)\, \bar{R}(\Gamma^c_{de}) + A(\psi)\, g^{ab}\, \nabla_a \psi \nabla_b \psi \Big) + 8\pi \mathcal{L}_m(g_{de}, \Phi) \right], \tag{4.1}$$

onde ψ é um campo escalar, $\bar{R}$ é o escalar de curvatura, g é o determinante da métrica, g_{de} são as componentes da métrica, g^{ab} são as componentes da métrica inversa, Γ^c_{de} são os coeficientes da conexão afim e Φ simbolicamente denota os campos de matéria. Se fizermos a variação de (4.1) em relação à métrica, à conexão e ao

[1] O fato de tratar a métrica e a conexão como variáveis independentes, e fazer variações separadamente em relação a elas, é conhecido como variação de Palatini.

[2] As seguintes convenções são utilizadas: uma linha sobre o tensor de Riemann, o tensor de Ricci, o escalar de curvatura ou o tensor de Einstein significa que essas quantidades foram calculadas com a conexão afim Γ^a_{bc}; se estes tensores não têm essa linha, significa que eles foram calculados com os símbolos de Christoffel. O símbolo ∇_a denota diferenciação covariante num sentido afim geral (construída com Γ^a_{bc}), enquanto o ponto-e-vírgula significa diferenciação covariante construída com os símbolos de Christoffel.

campo escalar ψ, obtemos as seguintes equações de campo[3], respectivamente

$$8\pi T_{ab} = D\,\bar{G}_{ab} + A\left(\partial_a\psi\,\partial_b\psi - \frac{1}{2}g_{ab}\,\partial^c\psi\partial_c\psi\right), \tag{4.2}$$

$$0 = \frac{1}{2}\delta^a_c\,\nabla_d\big(\sqrt{-g}D\,g^{bd}\big) + \frac{1}{2}\delta^b_c\,\nabla_d\big(\sqrt{-g}D\,g^{ad}\big) - \nabla_c\big(\sqrt{-g}D\,g^{ab}\big), \tag{4.3}$$

$$0 = \sqrt{-g}\,\big(D'\,\bar{R} + A'\,\partial^c\psi\partial_c\psi\big) - \nabla_b\big(2\sqrt{-g}A\,\partial^b\psi\big), \tag{4.4}$$

onde T_{ab} é o tensor energia-momento, $\bar{G}_{ab} = \bar{R}_{ab} - \frac{1}{2}\bar{R}\,g_{ab}$ é o tensor de Einstein e $A' = \frac{\partial A}{\partial\psi}$.

Fazendo algumas simplificações na equação (4.3), teremos[4]

$$\nabla_c\,g_{ab} = -X\,\partial_c\psi\;g_{ab}\,, \tag{4.5}$$

onde $X = \frac{2}{N-2}\frac{D'}{D}$. A equação anterior pode ser reescrita na forma

$$\nabla_c\,g_{ab} = \partial_c\phi\;g_{ab}\,, \tag{4.6}$$

onde $\phi = -\frac{2}{N-2}\ln D$. Claramente a expressão acima mostra que a ação (4.1) produz uma geometria de Weyl. Podemos obter uma expressão da conexão afim Γ^c_{ab} em termos da métrica g_{ab} e do campo escalar ψ permutando (4.5), isto é[5],

$$\Gamma^c_{ab} = \left\{{c \atop ab}\right\} + \frac{1}{2}X\left(\delta^c_b\,\partial_a\psi + \delta^c_a\,\partial_b\psi - g_{ab}\,\partial^c\psi\right). \tag{4.7}$$

Além disso, podemos usar a forma explícita da conexão, equação anterior, para obter uma expressão geral para o tensor de Ricci $\bar{R}_{ab}$ e o escalar de curvatura $\bar{R}$ em termos dos símbolos de Christoffel, da métrica e do campo escalar. Como as componentes do tensor de Ricci são dadas em função dos coeficientes da conexão, isto é, $\bar{R}_{ab} = \partial_c\Gamma^c_{ab} - \partial_b\Gamma^c_{ac} + \Gamma^c_{cd}\Gamma^d_{ab} - \Gamma^c_{bd}\Gamma^d_{ac}$, teremos[6]

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ab} = & R_{ab} + g_{ab}\,(\partial\psi)^2\Big[-\frac{1}{2}X' + \frac{1}{4}(N-2)X^2\Big] \\ & + \partial_a\psi\,\partial_b\psi\Big[\frac{1}{2}(2-N)X' + \frac{1}{4}(2-N)X^2\Big] \\ & + \frac{1}{2}(2-N)\,X\,\nabla_a\partial_b\psi - \frac{1}{2}\,X\,g_{ab}\,(\nabla^2\psi)\,,\end{aligned} \tag{4.8}$$

[3]Ver apêndice B, equações (B.6) a (B.17) e (B.24) a (B.26).
[4]Ver apêndice B, equações (B.18) a (B.23).
[5]Ver apêndice B, equações (B.27) e (B.28).
[6]Ver apêndice B, equações (B.29) a (B.31).

onde $(\partial\psi)^2 = \partial^c\psi\partial_c\psi$ e $\nabla^2\psi = g^{cd}\,\nabla_c\partial_d\psi$. Da mesma forma, para o escalar de curvatura $\bar{R} = g^{ab}\,\bar{R}_{ab}$, obtemos

$$\bar{R} = R + (\partial\psi)^2\Big[(1-N)X' + \frac{1}{4}(N-2)(N-1)X^2\Big] + (1-N)\,X\,(\nabla^2\psi)\,. \tag{4.9}$$

Utilizando as equações (4.8) e (4.9), a equação de campo (4.2) fica[7]

$$8\pi T_{ab} = D\,G_{ab} + \alpha\,g_{ab}\,(\partial\psi)^2 + \beta\,\partial_a\psi\,\partial_b\psi - D'\Big[\nabla_a\partial_b\psi - g_{ab}\,(\nabla^2\psi)\Big]\,, \tag{4.10}$$

onde

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}R\,g_{ab}\,,$$

$$\alpha(\psi) = -\frac{1}{2}A + D'' + \frac{D'^2}{D}\frac{7-3N}{2(N-2)} \tag{4.11}$$

e

$$\beta(\psi) = A - D'' + \frac{D'^2}{D}\frac{N-3}{N-2}\,. \tag{4.12}$$

Além disso, podemos reescrever a expressão (4.10) em termos dos símbolos de Christoffel em vez dos coeficientes da conexão[8]. Assim,

$$8\pi T_{ab} = D\,G_{ab} + \gamma\,g_{ab}\,(\partial\psi)^2 + \theta\,\partial_a\psi\,\partial_b\psi - D'\,\Big[(\partial_b\psi)_{;a} - g_{ab}\,(\partial^c\psi)_{;c}\Big]\,, \tag{4.13}$$

onde o ponto-e-vírgula denota a derivada covariante com relação aos símbolos de Christoffel,

$$\gamma(\psi) = -\frac{1}{2}A + D'' + \frac{D'^2}{D}\frac{(1-N)}{2(N-2)} \tag{4.14}$$

e

$$\theta(\psi) = A - D'' + \frac{D'^2}{D}\frac{N-1}{N-2}\,. \tag{4.15}$$

Da mesma forma, utilizando (4.9) na equação de campo (4.4), obtemos[9]

$$D'\,R + \Pi\,(\partial\psi)^2 + \Lambda\,(\nabla^2\psi) = 0\,, \tag{4.16}$$

onde

$$\Lambda = 2\Big(\frac{1-N}{N-2}\frac{D'}{D} - A\Big) \tag{4.17}$$

[7] Ver apêndice B, equações (B.32) e (B.33).
[8] Ver apêndice B, equações (B.36) a (B.38).
[9] Ver apêndice B, equações (B.41) a (B.43).

e

$$\Pi = -A' + 2\frac{D'}{D}\Big(A + \frac{1-N}{N-2}D''\Big) + \frac{3(N-1)}{N-2}\Big(\frac{D'}{D}\Big)^2 D' \,. \tag{4.18}$$

Escrita em termos dos símbolos de Christoffel[10], tem-se

$$D'\,R + \Omega\,(\partial\psi)^2 + \Lambda\,(\partial^c\psi)_{;c} = 0\,, \tag{4.19}$$

onde

$$\Omega = -A' + \frac{N-1}{N-2}\frac{D'}{D}\Big(\frac{D'^2}{D} - 2D''\Big)\,. \tag{4.20}$$

O fato de ter escrito nossas equações de campo em termos dos símbolos de Christoffel permite-nos comparar estas equações com equações de campo onde tem-se suposto que os coeficientes da conexão são os símbolos de Christoffel.

Como exemplo particular, analisemos a ação

$$S = \int d^N x\,\Big[\sqrt{-g}\Big(\psi\,\bar{R}(\Gamma^c_{de}) - \frac{w}{\psi}\,g^{ab}\,\nabla_a\psi\nabla_b\psi\Big) + 8\pi\mathcal{L}_m(g_{de},\Phi)\Big]\,, \tag{4.21}$$

isto é, a ação (4.1) onde $D(\psi) = \psi$ e $A(\psi) = -\frac{w}{\psi}$ (com w uma constante).[11] Assim, para a ação acima, as equações de campo (4.13) e (4.19) ficam[12]

$$G_{ab} = \frac{8\pi}{\psi}\,T_{ab} + \frac{\hat{w}}{\psi^2}\Big[\partial_a\psi\,\partial_b\psi - \frac{1}{2}\,g_{ab}\,(\partial\psi)^2\Big] + \frac{1}{\psi}\Big[(\partial_b\psi)_{;a} - g_{ab}\,(\partial^c\psi)_{;c}\Big] \tag{4.22}$$

e

$$(\partial^c\psi)_{;c} = \frac{8\pi\,T}{(N-2)\hat{w} + (N-1)}\,, \tag{4.23}$$

[10] Ver apêndice B, equação (B.37) e (B.46).

[11] Esta ação tem a forma da ação na teoria de Brans-Dicke. A ação de Brans-Dicke e as equações de campo obtidas a partir desta são respectivamente

$$S = \int d^4x\,\Big[\sqrt{-g}\Big(\psi\,R - \frac{w}{\psi}\,g^{\mu\nu}\,\psi_{;\mu}\,\psi_{;\nu}\Big) + 8\pi\mathcal{L}_m(g_{\alpha\beta},\Phi)\Big]\,,$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\psi}\,T_{\mu\nu} + \frac{w}{\psi^2}\Big[\partial_\mu\psi\,\partial_\nu\psi - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,(\partial\psi)^2\Big] + \frac{1}{\psi}\Big[(\partial_\nu\psi)_{;\mu} - g_{\mu\nu}\,(\partial^\alpha\psi)_{;\alpha}\Big]$$

e

$$(\partial^\alpha\psi)_{;\alpha} = \frac{8\pi\,T}{2w+3}\,.$$

[12] Ver apêndice B, equações (B.48) a (B.55).

onde $\hat{w} = w - \frac{N-1}{N-2}$ e $T = g^{ab}T_{ab}$.

As equações (4.22) e (4.23) em $N = 4$ são semelhantes às equações de campo de Brans-Dicke, as quais são obtidas a partir de uma variação de Hilbert[13]. A única diferença é que nas equações de Brans-Dicke temos w em vez de $\hat{w}$. Contudo, ao contrário da variação de Hilbert, na variação de Palatini não temos que supor uma relação entre os coeficiente da conexão e a métrica, antes de fazer a variação. A condição de compatibilidade entre os coeficientes da conexão e as componentes da métrica, equação (4.5), é deduzida a partir da variação. Por isso achamos mais fundamental a variação de Palatini. É importante ressaltar que, embora as equações de campo sejam semelhantes, elas não estão no mesmo espaço, já que pela variação de Hilbert assume-se uma condição de compatibilidade riemanniana[14] enquanto que pela variação de Palatini obtém-se uma condição de compatibilidade de Weyl.

[13] Numa variação de Hilbert admite-se, antes de fazer a variação, que os coeficientes da conexão são os símbolos de Christoffel. As equações de campo são obtidas exigindo que a ação seja estacionária sob variações da métrica e do campo escalar.

[14] Isto é, a derivada covariante da métrica é nula ou equivalentemente os coeficientes da coneão são os símbolos de Christoffel.

Considerações Finais

Uma classe importante de modelos, com dimensões extras, no cenário *braneworld* compartilham as três seguintes propriedades: a) nosso espaço-tempo é visto como uma hipersuperfície riemanniana de quatro dimensões (brana) mergulhado numa variedade riemanniana de cinco dimensões (*bulk*); b) a métrica do *bulk* é do tipo produto distorcido; c) matéria fermiônica está confinada na brana através de uma interação dos férmions com um campo escalar que depende unicamente da dimensão extra. Nesta dissertação, temos considerado a possibilidade de descrever o *bulk* por uma variedade não-riemanniana, isto é, uma variedade de Weyl. Para uma classe de campos de Weyl, a geometria induzida na brana tem uma estrutura riemanniana. Contudo, o confinamento e as propriedades de estabilidade das geodésicas perto da brana podem ser afetadas pelo campo de Weyl. Tendo em conta este fato, construímos um análogo clássico do confinamento quântico considerando um campo escalar de Weyl que depende apenas da coordenada extra. De uma certa maneira, este campo escalar de Weyl, que tem uma natureza puramente geométrica, parece imitar o campo escalar quântico que é responsável pelo confinamento em modelos teóricos de campo [6].

A condição de compatibilidade deduzida a partir da ação (4.1) mostra uma classe de lagrangianas que produzem uma geometria de Weyl. A partir de uma lagrangiana deste tipo poderíamos procurar umas equações de campo em cinco (ou mais) dimensões, as quais contenham as equações de campo de Einstein em quatro dimensões. Ou seja, as equações de campo de Einstein resultariam das equações de campo cinco dimensionais restritas a uma subvariedade riemanniana de quatro dimensões.

Por outro lado, sabemos que alguns teoremas de imersão da geometria diferencial são de vital importância para algumas teorias do espaço-tempo que utilizam dimensões extras. Isto é particularmente verdadeiro no caso da teoria de matéria induzida [19], onde o teorema de Campbell-Magaard é de grande importância para estabeler a generalidade da sua proposta. Assim, uma pergunta interessante é: como formular o análogo do teorema de Campbell-Magaard e suas versões estendidas no contexto de uma geometria de Weyl? [20] Uma resposta a esta pergunta, em princípio, nos diria que tipo de *bulk* de Weyl é admissível se a matéria e os campos vão ser gerados a partir das dimensões extras (isto é, Ricci plano, de Einstein,...), praticamente da mesma forma que no caso riemanniano da teoria de matéria induzida e as teorias de Kaluza-Klein.

Apêndice A

Equações Geodésicas Numa Variedade de Weyl

Consideremos um espaço de Weyl do tipo produto distorcido com elemento de linha

$$dS^2 = \tilde{g}_{ab}(y^c)\, dy^a dy^b = e^{2f(y)}\, g_{\alpha\beta}(x^\mu)\, dx^\alpha dx^\beta - dy^2\,. \tag{A.1}$$

Ou seja, as componentes da métrica $\tilde{g}_{ab}$ neste sistema de coordenadas $y^a = (x^\alpha, y)$ são: $\tilde{g}_{\alpha\beta} = e^{2f(y)}\, g_{\alpha\beta}(x^\mu)$, $\tilde{g}_{4\alpha} = 0$ e $\tilde{g}_{44} = -1$.

As equações geodésicas neste espaço são

$$\frac{d^2 y^a}{d\lambda^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dy^b}{d\lambda}\frac{dy^c}{d\lambda} = 0\,, \tag{A.2}$$

onde os Γ^a_{bc} são os coeficientes da conexão de Weyl, que escritos em termos dos símbolos de Christoffel $\left\{ {a \atop bc} \right\}$ e do campo escalar de Weyl ϕ são

$$\Gamma^a_{bc} = \left\{ {a \atop bc} \right\} - \frac{1}{2}\tilde{g}^{ad}\left(\tilde{g}_{dc}\,\partial_b\phi + \tilde{g}_{bd}\,\partial_c\phi - \tilde{g}_{bc}\,\partial_d\phi\right). \tag{A.3}$$

Utilizando (A.3), a equação (A.2) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 y^a}{d\lambda^2} + \left\{ {a \atop bc} \right\} \frac{dy^b}{d\lambda}\frac{dy^c}{d\lambda} = w^a\,, \tag{A.4}$$

onde $w^a = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ad}\big(\tilde{g}_{dc}\,\partial_b\phi + \tilde{g}_{bd}\,\partial_c\phi - \tilde{g}_{bc}\,\partial_d\phi\big)\frac{dy^b}{d\lambda}\frac{dy^c}{d\lambda}$. Assim, a equação geodésica correspondente à quinta coordenada $y^4 = y$ fica

$$\frac{d^2 y}{d\lambda^2} + \left\{ {4 \atop \alpha\beta} \right\}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} + 2\left\{ {4 \atop \alpha 4} \right\}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dy}{d\lambda} + \left\{ {4 \atop 44} \right\}\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 = w^4\,. \tag{A.5}$$

A partir da expressão dos símbolos de Christoffel em função da métrica, isto é, $\left\{ {a \atop bc} \right\} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ad}\big(\partial_b \tilde{g}_{dc} + \partial_c \tilde{g}_{bd} - \partial_d \tilde{g}_{bc}\big)$, obtemos

$$\left\{ {4 \atop \alpha\beta} \right\} = f'\, g_{\alpha\beta}\,, \qquad \left\{ {4 \atop \alpha 4} \right\} = 0\,, \qquad \left\{ {4 \atop 44} \right\} = 0\,. \tag{A.6}$$

Além disso, como $\tilde{g}_{ab}\frac{dy^a}{d\lambda}\frac{dy^b}{d\lambda} = \varepsilon$, com $\varepsilon = 1$ ou 0 (para geodésicas tipo-tempo ou tipo-luz, respectivamente), e usando o fato de que o campo escalar de Weyl ϕ depende só da dimensão extra y, temos que w^4 é

$$w^4 = \phi' \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \frac{1}{2}\epsilon\, \phi'\,. \tag{A.7}$$

Assim, utilizando (A.7) e (A.6) tem-se em (A.5)

$$\frac{d^2 y}{d\lambda^2} + f' \left[\varepsilon + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2\right] = \phi' \left[\frac{1}{2}\,\varepsilon + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2\right], \tag{A.8}$$

onde usou-se a relação $\tilde{g}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} - \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 = \varepsilon$.

Portanto, para partículas massivas, $\varepsilon = 1$, teremos

$$\frac{d^2 y}{d\lambda^2} + \left(f' - \phi'\right)\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\phi' - f'\,, \tag{A.9}$$

e para fótons, $\varepsilon = 0$, teremos

$$\frac{d^2 y}{d\lambda^2} + \left(f' - \phi'\right)\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 = 0\,. \tag{A.10}$$

Apêndice B

Equações de Campo para uma Geometria de Weyl

Seja a ação[1]

$$S[g_{de}, \Gamma^c_{de}, \psi] = \int d^N x \left[\sqrt{-g} \Big(D(\psi)\, \bar{R}(\Gamma^c_{de}) + A(\psi)\, g^{ab}\, \nabla_a \psi \nabla_b \psi \Big) + 8\pi \mathcal{L}_m(g_{de}, \Phi) \right] . \tag{B.1}$$

As equações de campo resultam de se exigir que esta ação seja estacionária sob variações da métrica, da conexão e do campo escalar, isto é,

$$\delta S = \delta_g S + \delta_\Gamma S + \delta_\psi S = 0 \,, \tag{B.2}$$

onde $\delta_g S$ denota a variação em relação à métrica, $\delta_\Gamma S$ a variação em relação à conexão e $\delta_\psi S$ a variação em relação ao campo escalar. Como a métrica, a conexão e o campo escalar são variáveis independentes, a equação acima pode ser escrita como as seguintes três equações:

$$\delta_g S = 0 \,, \tag{B.3}$$

$$\delta_\Gamma S = 0 \,, \tag{B.4}$$

$$\delta_\psi S = 0 \,. \tag{B.5}$$

[1] Na referência [22] estuda-se uma ação mais geral.

Fazendo a varição de S em relação à métrica, obtemos

$$\delta_g S = \int d^N x \; \delta g_{cd} \sqrt{-g} \Big[\frac{1}{2} g^{cd} \Big(D \, \bar{R} + A \, g^{ab} \, \nabla_a \psi \nabla_b \psi \Big) + g^{ac} g^{bd} \Big(-D \, \bar{R}_{ab} - A \, \nabla_a \psi \nabla_b \psi \Big) + 8\pi T^{cd} \Big] = 0 \, , \quad \text{(B.6)}$$

onde utilizamos as seguintes relações

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \, g^{cd} \, \delta g_{cd} \, , \quad \text{(B.7)}$$

$$\delta g^{ab} = -g^{ac} g^{bd} \, \delta g_{cd} \, , \quad \text{(B.8)}$$

e definimos o tensor energia-momento

$$\delta_g \mathcal{L}_m = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g_{cd}} \delta g_{cd} \equiv \sqrt{-g} \, T^{cd} \, \delta g_{cd} \, . \quad \text{(B.9)}$$

Fazendo a variação em relação à conexão[2], teremos

$$\begin{aligned} \delta_\Gamma S &= \int d^N x \; \delta \bar{R}_{ab} \sqrt{-g} \, D \, g^{ab} \\ &= \int d^N x \; \sqrt{-g} \, D \, g^{ab} \Big[\nabla_c \big(\delta \Gamma^c_{ab} \big) - \nabla_b \big(\delta \Gamma^c_{ac} \big) \Big] = 0 \, . \end{aligned} \quad \text{(B.10)}$$

Agora, fazendo a variação em relação ao campo ψ [3], tem-se

$$\delta_\psi S = \int d^N x \; \sqrt{-g} \Big[\delta\psi \Big(D' \, \bar{R} + A' \, g^{ab} \, \nabla_a \psi \nabla_b \psi \Big) + 2 \, A \, g^{ab} \, \nabla_a \psi \nabla_b (\delta\psi) \Big] = 0 \, . \quad \text{(B.11)}$$

[2] A variação $\delta\Gamma^d_{ab}$ é a diferença de duas conexões e, portanto, é em si mesmo um tensor. Podemos, assim, tomar a sua derivada covariante,

$$\nabla_c (\delta \Gamma^d_{ab}) = \partial_c (\delta \Gamma^d_{ab}) + \Gamma^d_{ce} \, \delta \Gamma^e_{ab} - \Gamma^e_{ca} \, \delta \Gamma^d_{eb} - \Gamma^e_{cb} \, \delta \Gamma^d_{ae} \, .$$

Dada esta expressão e fazendo alguns cálculos simples, é fácil demonstrar que

$$\delta \bar{R}_{ab} = \nabla_c \big(\delta \Gamma^c_{ab} \big) - \nabla_b \big(\delta \Gamma^c_{ac} \big) \, .$$

[3] Como não estamos fazendo variação nas coordenadas, $\delta(\partial_a \psi) = \partial_a(\delta\psi)$. Além disso, como $\nabla_a \psi = \partial_a \psi$, temos

$$\delta(\nabla_a \psi) = \nabla_a (\delta\psi) \, .$$

A partir de (B.6) obtemos

$$-D\,\bar{G}^{cd} - A\,\nabla_p\psi\nabla_q\psi\left(g^{pc}g^{qd} - \frac{1}{2}g^{cd}g^{pq}\right) + 8\pi\,T^{cd} = 0\,. \tag{B.12}$$

Multiplicando a equação acima por $g_{ac}g_{bd}$ obtém-se a seguinte equação equivalente

$$8\pi T_{ab} = D\,\bar{G}_{ab} + A\left(\partial_a\psi\,\partial_b\psi - \frac{1}{2}g_{ab}\,\partial^c\psi\partial_c\psi\right). \tag{B.13}$$

A equação (B.10) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}&\int d^Nx\ \nabla_c(\sqrt{-g}Dg^{ab}\,\delta\Gamma^c_{ab}) - \int d^Nx\ \delta\Gamma^c_{ab}\,\nabla_c(\sqrt{-g}Dg^{ab})\\ -&\int d^Nx\ \nabla_b(\sqrt{-g}Dg^{ab}\,\delta\Gamma^c_{ac}) + \int d^Nx\ \delta\Gamma^c_{ac}\,\nabla_b(\sqrt{-g}Dg^{ab}) = 0\,.\end{aligned} \tag{B.14}$$

O primeiro e o terceiro termos são iguais a zero porque eles podem ser transformados numa integral de superfície, pelo teorema de Stokes, e é admitido que os coeficientes da conexão não variam na fronteira do volume de integração. Logo, a equação acima fica

$$\int d^Nx\ \delta\Gamma^c_{ab}\left[\delta^b_c\,\nabla_d(\sqrt{-g}Dg^{ad}) - \nabla_c(\sqrt{-g}Dg^{ab})\right] = 0\,, \tag{B.15}$$

ou[4]

$$\int d^Nx\ \delta\Gamma^c_{ab}\left[\frac{1}{2}\delta^a_c\,\nabla_d(\sqrt{-g}Dg^{bd}) + \frac{1}{2}\delta^b_c\,\nabla_d(\sqrt{-g}Dg^{ad}) - \nabla_c(\sqrt{-g}Dg^{ab})\right] = 0\,. \tag{B.16}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\delta^a_c\,\nabla_d(\sqrt{-g}Dg^{bd}) + \frac{1}{2}\delta^b_c\,\nabla_d(\sqrt{-g}Dg^{ad}) - \nabla_c(\sqrt{-g}Dg^{ab}) = 0\,. \tag{B.17}$$

Contraindo os índices a e c na equação anterior e rearrumando termos segue-se

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2} - 1\right)\nabla_d(\sqrt{-g}Dg^{bd}) &= 0\,,\\ \nabla_d(\sqrt{-g}Dg^{bd}) &= 0\,,\end{aligned} \tag{B.18}$$

para $N \neq 1$. Levando (B.18) em (B.17) tem-se

$$\nabla_c(\sqrt{-g}Dg^{ab}) = 0\,, \tag{B.19}$$

[4]Escrito desta forma o termo em parênteses é simétrico nos índices a e b.

ou

$$\nabla_c(\sqrt{-g})\, Dg^{ab} + \sqrt{-g}D'\,\partial_c\psi\, g^{ab} + \sqrt{-g}D\,\nabla_c g^{ab} = 0\,. \tag{B.20}$$

Multiplicando a anterior equação por g_{ab} e usando as relações $g_{ab}g^{ab} = N$ e $\sqrt{-g}\, g_{ab}\,\nabla_c(g^{ab}) = -2\nabla_c(\sqrt{-g})$, teremos

$$D\,\nabla_c(\sqrt{-g}) = -\frac{N}{N-2}\sqrt{-g}\, D'\,\partial_c\psi\,, \tag{B.21}$$

para $N \neq 2$. Usando a equação acima em (B.20), obtemos para a derivada covariante da inversa da métrica

$$\nabla_c g^{ab} = X\,\partial_c\psi\, g^{ab}\,, \tag{B.22}$$

onde $X = \frac{2}{N-2}\frac{D'}{D}$, ou para a derivada covariante da métrica[5],

$$\nabla_c g_{ab} = -X\,\partial_c\psi\, g_{ab}\,. \tag{B.23}$$

Utilizando a definição de derivada covariante de um produto de tensores, a equação (B.11) pode ser reescrita como

$$\int d^N x\ \sqrt{-g}\Big[\delta\psi\Big(D'\,\bar{R} + A'\,g^{ab}\,\nabla_a\psi\nabla_b\psi\Big)\Big] + \int d^N x\ \nabla_b\big(2\sqrt{-g}\,A\,g^{ab}\,\nabla_a\psi\,\delta\psi\big) - \int d^N x\ \delta\psi\,\nabla_b\big(2\sqrt{-g}\,A\,g^{ab}\,\nabla_a\psi\big) = 0\,. \tag{B.24}$$

Pelo teorema de Stokes, a segunda integral pode ser transformada numa integral de superfície, e admitindo que o campo escalar ψ não varia na fronteira do volume de integração, esta integral se anula. Logo,

$$\int d^N x\ \delta\psi\,\Big[\sqrt{-g}\Big(D'\,\bar{R} + A'\,g^{ab}\,\nabla_a\psi\nabla_b\psi\Big) - \nabla_b\big(2\sqrt{-g}\,A\,g^{ab}\,\nabla_a\psi\big)\Big] = 0\,, \tag{B.25}$$

[5] Como a relação entre a métrica e sua inversa é

$$g^{da}g_{ab} = \delta^d_b\,,$$

então, derivando covariantemente a anterior relação, obtemos

$$\nabla_c g_{pb} = -g_{dp}\,g_{ab}\,\nabla_c g^{da}\,.$$

e, portanto, temos

$$\sqrt{-g}\left(D'\,\bar{R} + A'\,\partial^b\psi\partial_b\psi\right) - \nabla_b\big(2\sqrt{-g}\,A\,\partial^b\psi\big) = 0\,. \tag{B.26}$$

Uma expressão para os coeficientes da conexão afim Γ^c_{ab} em termos da métrica g_{ab} e do campo escalar ψ pode ser obtida se calculamos $\nabla_b g_{ca} + \nabla_a g_{bc} - \nabla_c g_{ab}$. Logo, usando a equação (B.23), temos

$$\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ca} - \partial_c g_{ab} - 2\,\Gamma^d_{ab}\,g_{dc} = -\frac{2}{N-2}\frac{D'}{D}\big(\partial_a\psi\,g_{bc} + \partial_b\psi\,g_{ca} - \partial_c\psi\,g_{ab}\big)\,. \tag{B.27}$$

Multiplicando a equação acima por g^{cp} e rearrumando termos, obtemos

$$\Gamma^c_{ab} = \left\{{c \atop ab}\right\} + \frac{1}{2}X\left(\delta^c_b\,\partial_a\psi + \delta^c_a\,\partial_b\psi - g_{ab}\,\partial^c\psi\right), \tag{B.28}$$

onde $\left\{{c \atop ab}\right\} = \frac{1}{2}g^{cd}\left(\partial_a g_{db} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}\right)$ são os símbolos de Christoffel.

As componentes do tensor de Ricci[6] $\bar{R}_{ab}$ expressas em termos das componentes da conexão Γ^c_{ab} são $\bar{R}_{ab} = \partial_c\Gamma^c_{ab} - \partial_b\Gamma^c_{ac} + \Gamma^c_{cd}\Gamma^d_{ab} - \Gamma^c_{bd}\Gamma^d_{ac}$. Logo, usando a equação (B.28) o tensor de Ricci pode ser rescrito como

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{ab} =& R_{ab} \\
&+\frac{1}{2}X'\big(2\partial_a\psi\partial_b\psi - g_{ab}\,\partial^c\psi\partial_c\psi\big) + \frac{1}{2}X\big(2\partial_a\partial_b\psi - \partial_c g_{ab}\,\partial^c\psi - g_{ab}\,\partial_c\partial^c\psi\big) \\
&-\frac{N}{2}X'\,\partial_a\psi\partial_b\psi - \frac{N}{2}X\,\partial_a\partial_b\psi + \frac{1}{2}X\left(\partial_a\psi\left\{{c \atop cb}\right\} + \partial_b\psi\left\{{c \atop ca}\right\} - g_{ab}\,\partial^d\psi\left\{{c \atop cd}\right\}\right) \\
&+\frac{N}{2}X\,\partial_c\psi\,\left\{{c \atop ab}\right\} - \frac{1}{2}X\left(\partial_a\psi\,\left\{{c \atop bc}\right\} + \partial_c\psi\,\left\{{c \atop ba}\right\} - g_{ad}\,\partial^c\psi\,\left\{{d \atop bc}\right\}\right) \\
&-\frac{X}{2}\left(\partial_c\psi\left\{{c \atop ab}\right\} + \partial_b\psi\left\{{c \atop ac}\right\} - g_{db}\partial^c\psi\left\{{d \atop ac}\right\}\right) + \frac{X^2}{4}\big(2N\partial_a\psi\partial_b\psi - N g_{ab}\partial^c\psi\partial_c\psi\big) \\
&-\frac{1}{4}X^2\,\partial_a\psi\,\partial_b\psi\,(N+2) + \frac{2}{4}\,X^2\,g_{ab}\,\partial^c\psi\partial_c\psi\,,
\end{aligned} \tag{B.29}$$

[6] O tensor de Ricci é obtido contraindo o primeiro e o terceiro índices do tensor de Riemann, isto é, $\bar{R}_{ab} = \bar{R}^c{}_{acb}$. A expressão do tensor de Riemann em termos da conexão é

$$\bar{R}^c{}_{aeb} = \partial_e\Gamma^c_{ab} - \partial_b\Gamma^c_{ae} + \Gamma^c_{ed}\Gamma^d_{ab} - \Gamma^c_{bd}\Gamma^d_{ae}\,.$$

onde $R_{ab} = \partial_c\left\{{c \atop ab}\right\} - \partial_b\left\{{c \atop ac}\right\} + \left\{{c \atop cd}\right\}\left\{{d \atop ab}\right\} - \left\{{c \atop bd}\right\}\left\{{d \atop ac}\right\}$. Rearrumando termos e usando a definição de derivada covariante[7], teremos

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ab} =& R_{ab} + g_{ab}\,\partial^c\psi\partial_c\psi\left[-\frac{1}{2}X' + \frac{1}{4}(N-2)X^2\right]\\ &+ \partial_a\psi\,\partial_b\psi\left[\frac{1}{2}(2-N)X' + \frac{1}{4}(2-N)X^2\right]\\ &+ \frac{1}{2}(2-N)\,X\,\nabla_a\partial_b\psi - \frac{1}{2}\,X\,g_{ab}\,g^{cd}\nabla_c\partial_d\psi\,.\end{aligned} \tag{B.30}$$

A partir da equação anterior, para o escalar de curvatura $\bar{R} = g^{ab}\,\bar{R}_{ab}$ obtém-se

$$\bar{R} = R + \partial^c\psi\partial_c\psi\left[(1-N)X' + \frac{1}{4}(N-2)(N-1)X^2\right] + (1-N)\,X\,g^{cd}\nabla_c\partial_d\psi\,, \tag{B.31}$$

onde $R = g^{ab}\,R_{ab}$ e $X' = \frac{D''}{D}\frac{2}{N-2} - \frac{2}{N-2}\left(\frac{D'}{D}\right)^2$. Logo, o tensor de Einstein $\bar{G}_{ab} = \bar{R}_{ab} - \frac{1}{2}\bar{R}\,g_{ab}$ fica

$$\begin{aligned}\bar{G}_{ab} =& G_{ab} + \frac{1}{D}\,g_{ab}\,\partial^c\psi\partial_c\psi\left(D'' + \frac{D'^2}{D}\frac{7-3N}{2(N-2)}\right) + \frac{D'}{D}\,g_{ab}\,g^{cd}\nabla_c\partial_d\psi\\ &+ \frac{1}{D}\,\partial_a\psi\,\partial_b\psi\left(-D'' + \frac{D'^2}{D}\frac{N-3}{N-2}\right) - \frac{D'}{D}\,\nabla_a\partial_b\psi\,,\end{aligned} \tag{B.32}$$

onde $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}R\,g_{ab}$. Levando (B.32) em (B.13), tem-se que

$$8\pi T_{ab} = D\,G_{ab} + \alpha\,g_{ab}\,\partial^c\psi\partial_c\psi + \beta\,\partial_a\psi\,\partial_b\psi - D'\Big(\nabla_a\partial_b\psi - g_{ab}\,g^{cd}\nabla_c\partial_d\psi\Big)\,, \tag{B.33}$$

onde

$$\alpha(\psi) = -\frac{1}{2}A + D'' + \frac{D'^2}{D}\frac{7-3N}{2(N-2)} \tag{B.34}$$

e

$$\beta(\psi) = A - D'' + \frac{D'^2}{D}\frac{N-3}{N-2}\,. \tag{B.35}$$

A partir da definição de derivada covariante e da equação (B.28), o tensor $\nabla_a\partial_b\psi$ e o escalar $g^{cd}\nabla_c\partial_d\psi$ podem ser reescritos como

$$\begin{aligned}\nabla_a\partial_b\psi =& \partial_a\partial_b\psi - \left\{{c \atop ab}\right\}\partial_c\psi - \frac{1}{2}X\,\partial_c\psi\left(\delta^c_b\,\partial_a\psi + \delta^c_a\,\partial_b\psi - g_{ab}\,\partial^c\psi\right)\\ =& \big(\partial_b\psi\big)_{;a} - \frac{1}{2}X\left(2\,\partial_a\psi\,\partial_b\psi - g_{ab}\,\partial^c\psi\partial_c\psi\right)\end{aligned} \tag{B.36}$$

[7]Além disso, usamos a condição de compatibilidade Riemanniana, isto é, $g_{ab;c} = 0$.

e

$$\begin{aligned}
g^{cd}\nabla_c\partial_d\psi =& g^{cd}\left[\partial_c\partial_d\psi - \left\{{p \atop cd}\right\}\partial_p\psi - \frac{1}{2}X\,\partial_p\psi\left(\delta^p_d\,\partial_c\psi + \delta^p_c\,\partial_d\psi - g_{cd}\,\partial^p\psi\right)\right] \\
=& g^{cd}\left(\partial_d\psi\right)_{;c} - \frac{1}{2}X\,g^{cd}\left(2\,\partial_c\psi\,\partial_d\psi - g_{cd}\,\partial^a\psi\partial_a\psi\right) \\
=& \left(\partial^c\psi\right)_{;c} - \frac{2-N}{2}X\,\partial^c\psi\partial_c\psi\,,
\end{aligned} \tag{B.37}$$

respectivamente. Levando (B.36) e (B.37) em (B.33) e rearrumando termos, obtemos

$$8\pi T_{ab} = D\,G_{ab} + \gamma\,g_{ab}\,\partial^c\psi\partial_c\psi + \theta\,\partial_a\psi\,\partial_b\psi - D'\left[(\partial_b\psi)_{;a} - g_{ab}\,(\partial^c\psi)_{;c}\right], \tag{B.38}$$

onde

$$\gamma(\psi) = -\frac{1}{2}A + D'' + \frac{D'^2}{D}\frac{(1-N)}{2(N-2)} \tag{B.39}$$

e

$$\theta(\psi) = A - D'' + \frac{D'^2}{D}\frac{N-1}{N-2}\,. \tag{B.40}$$

Agora, usando a equação (B.31) e a expressão

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\nabla_b\left(2\sqrt{-g}\,A\,\partial^b\psi\right) = \partial^b\psi\partial_b\psi\left[A\,X\,(2-N) + 2A'\right] + 2A\,g^{ab}\nabla_a\partial_b\psi\,, \tag{B.41}$$

obtemos para (B.26)

$$\begin{aligned}
D'R + \partial^b\psi\partial_b\psi\Big[A' + (1-N)D'X' + &\frac{(N-2)(N-1)}{4}D'X^2 - AX(2-N) - 2A'\Big] \\
&+ g^{ab}\nabla_a\partial_b\psi\left[(1-N)\,D'\,X - 2\,A\right] = 0\,.
\end{aligned} \tag{B.42}$$

Utilizando as expressões para X' e X, isto é, $X' = \frac{D''}{D}\frac{2}{N-2} - \frac{2}{N-2}\left(\frac{D'}{D}\right)^2$ e $X = \frac{2}{N-2}\frac{D'}{D}$, na equação acima, temos

$$D'\,R + \Pi\,\partial^b\psi\partial_b\psi + \Lambda\,g^{ab}\nabla_a\partial_b\psi = 0\,, \tag{B.43}$$

onde

$$\Lambda = 2\left(\frac{1-N}{N-2}\frac{D'}{D} - A\right) \tag{B.44}$$

e

$$\Pi = -A' + 2\frac{D'}{D}\left(A + \frac{1-N}{N-2}D''\right) + \frac{3(N-1)}{N-2}\left(\frac{D'}{D}\right)^2 D'\,. \tag{B.45}$$

Além disso, utilizando a expressão (B.37), teremos

$$D' R + \Omega\, \partial^c\psi\partial_c\psi + \Lambda\, (\partial^c\psi)_{;c} = 0\,, \tag{B.46}$$

onde

$$\Omega = -A' + \frac{N-1}{N-2}\frac{D'}{D}\Big(\frac{D'^2}{D} - 2D''\Big)\,. \tag{B.47}$$

Como caso particular, tomemos $D(\psi) = \psi$ e $A(\psi) = -\frac{w}{\psi}$. Assim, teremos para γ, θ, Λ e Ω

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{w}{\psi} - \frac{N-1}{N-2}\,\frac{1}{2\psi}\,, \tag{B.48}$$

$$\theta = -\frac{w}{\psi} + \frac{N-1}{N-2}\,\frac{1}{\psi}\,, \tag{B.49}$$

$$\Lambda = 2\Big(\frac{1-N}{N-2}\,\frac{1}{\psi} + \frac{w}{\psi}\Big)\,, \tag{B.50}$$

$$\Omega = -\frac{w}{\psi} + \frac{N-1}{N-2}\,\frac{1}{\psi^2}\,. \tag{B.51}$$

Levando (B.48) e (B.49) em (B.38), obtemos

$$G_{ab} = \frac{8\pi}{\psi}\,T_{ab} + \frac{\hat{w}}{\psi^2}\Big[\partial_a\psi\,\partial_b\psi - \frac{1}{2}\,g_{ab}\,\partial^c\psi\partial_c\psi\Big] + \frac{1}{\psi}\Big[(\partial_b\psi)_{;a} - g_{ab}\,(\partial^c\psi)_{;c}\Big] \tag{B.52}$$

onde $\hat{w} = w - \frac{N-1}{N-2}$. Multiplicando a equação acima por g^{ab} e rearrumando termos, tem-se[8]

$$R = \frac{2}{2-N}\,\frac{8\pi}{\psi}\,T + \frac{\hat{w}}{\psi^2}\,\partial^c\psi\partial_c\psi + \frac{1-N}{2-N}\,\frac{2}{\psi}\,(\partial^c\psi)_{;c}\,, \tag{B.53}$$

onde $R = g^{ab}R_{ab}$ e $T = g^{ab}T_{ab}$. Usando (B.50), (B.51) e (B.53), teremos em (B.46)

$$\frac{2}{2-N}\,\frac{8\pi}{\psi}\,T + \frac{1}{\psi^2}\,\partial^c\psi\partial_c\psi\,\Big(\hat{w} - w + \frac{N-1}{N-2}\Big) + \frac{2w}{\psi}\,(\partial^c\psi)_{;c} = 0\,. \tag{B.54}$$

Utilizando a relação entre $\hat{w}$ e w, isto é, $\hat{w} = w - \frac{N-1}{N-2}$, tem-se

$$(\partial^c\psi)_{;c} = \frac{8\pi\, T}{(N-2)\hat{w} + (N-1)}\,. \tag{B.55}$$

[8]Usaram-se também as seguintes relações: $g_{ab;c} = 0$ e $g^{ab}g_{ab} = N$.

Bibliografia

[1] R. Maartens, *Brane-World Gravity*, Living Rev. Relativity **7** (2004).

[2] M. Israelit, Found. Phys. **35**, 1725 (2005).

[3] O. Arias, R. Cardenas and I. Quiros, Nucl. Phys. B **643**, 187 (2002).

[4] N. Barbosa-Cendejas and A. Herrera-Aguilar, Phys. Rev. D **73**, 084022 (2006).

[5] H. Weyl, Sitzungesber Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, 465 (1918); H. Weyl, *Space, Time, Matter* (Dover, New York, 1952).

[6] V. A. Rubakov, Phys. Usp. **44**, 871 (2001). e-Print: hep-ph/0104152.

[7] A. Pais, *Subtle is the Lord* (Oxford University Press, 1983).

[8] W. Pauli, *Theory of Relativity* (Dover, New York, 1981); L. O'Raiefeartaigh and N. Straumann, Rev. Mod. Phys. **72**, 1 (2000).

[9] M. Novello, *Theoretical Cosmology* in Proceedings of Seventh Brazilian School of Cosmology and Gravitation, Ed. M. Novello (Editions Frontières, Rio de Janeiro, 1994); M. Novello, L. A. R. Oliveira, J. M. Salim and E. Elbaz, Int. J. Mod. Phys. D **1**, 641 (1993); J. M. Salim and S. L. Sautú, Class. Quantum Grav. **13**, 353 (1996).

[10] M. P. do Carmo, *Riemannian Geometry*, (Birkhauser, Boston, 1991).

[11] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry* (Springer, Berlin, 2007); B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity* (Academic Press, California, 1983).

[12] F. Dahia, L. F. P. da Silva, C. Romero and R. Tavakol, J. Math. Phys. **48**, 72501 (2007).

[13] G. N. Felder, A. Frolov and L. Kofman, Class. Quantum Grav. **19**, 2983 (2002); M. Arik, A. Baykal, M. C. Çalik, D. Çiftçi and Ö. Delice, Phys. Rev. D **68**, 123503 (2003); R. L. Bishop and B. O. O'Neil, Trans. Am. Math. Soc. **145**, 1 (1969); J. K. Beem and P. E. Ehrlich, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **85**, 161 (1979); J. Carot and J. da Costa, Class. Quantum Grav. **10**, 461 (1993).

[14] P. Blanchard, R. L. Devaney and G. R. Hall, *Ecuaciones Diferenciales* (Internacional Thomson, México, 1999); A. A. Andronov, A. E. Leontovich, I. I. Gordon and A. G. Maier, *Qualitative Theory of Second Order Dynamical Systems* (Wiley, New York, 1973).

[15] M. Gremm, Phys. Lett. B **478**, 434 (2000).

[16] P. S. Wesson, B. Mashhoon and H. Liu, Mod. Phys. Lett. A **12**, 2309 (1997); B. Mashhoon and P. S. Wesson, Class. Quantum Grav. **21**, 3611 (2004).

[17] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999); L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999).

[18] F. Dahia and C. Romero, Phys. Lett. B **51**, 232 (2007).

[19] P. S. Wesson, *Space-Time-Matter* (World Scientific, 1999); J. M. Overduin and P. S. Wesson, Phys. Rep. **283**, 302 (1997); P. S. Wesson, *Five-Dimensional Physics* (World Scientific, 2006).

[20] C. Romero, R. Tavakol and R. Zalaletdinov, Gen. Rel. Grav. **28**, 365 (1995); F. Dahia and C. Romero, J. Math. Phys. **43**, 5804 (2002); E. Anderson and J.

E. Lidsey, Class. Quantum Grav. **18**, 4831 (2001); F. Dahia and C. Romero, J. Math. Phys. **43**, 3097 (2002); E. Anderson, F. Dahia, James E. Lidsey and C. Romero, J. Math. Phys. **44**, 5108 (2003); F. Dahia and C. Romero, Class. Quantum Grav. **21**, 927 (2004).

[21] T. Kaluza, Sitz. Preuss. Akad. Wiss. **33**, 966 (1921); O. Klein, Z. Phys. **37**, 895 (1926); T. Appelquist, A. Chodos and P. Freund, *Modern Kaluza-Klein Theories* (Addison-Wesley, Menlo Park, 1987).

[22] H. Burton and R. Mann, Class. Quant. Grav. **15**, 1375 (1998).