

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Efeito Aharonov-Bohm

Ricardo Mendes Grande

São Carlos - SP
fevereiro de 2005

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Efeito Aharonov-Bohm

Ricardo Mendes Grande

Orientador: Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

*Dissertação apresentada ao PPG-M da
UFSCar como parte dos requisitos para
a obtenção do título de Mestre em
Matemática*

São Carlos - SP

fevereiro - 2005

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

G751ea

Grande, Ricardo Mendes.
Efeito Aharonov-Bohm / Ricardo Mendes Grande. -- São
Carlos : UFSCar, 2005.
31 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2005.

1. Análise funcional. 2. Hilbert, Espaços de. 3. Aharonov-
Bohm, Teoria de. 4. Mecânica quântica. I. Título.

CDD: 515.7 (20^a)

Orientador

Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

À pessoa de que mais gosto e admiro, ***Maria Eugênia Mendes***, minha mãe.

Agradecimentos

A *Capes* pelo apoio financeiro e ao meu, então orientador, *César Rogério de Oliveira*.

Aos demais amigos: *Rogério Mendes* (meu irmão genial), *Viviani* (exímia pintora e bela pessoa), *Paty Zambel*, *Fabi*, Professora *Alice Kimie*, *Paulo Frenzen*, *Paulo Dattori*, *Giovana Gastaldi*, *Milton dos Santos Lambert* (pelo imenso apoio), *Carlos Roberto Ferreira*, professor *Waldir* (grande incentivador), *Renato* (pelo apoio técnico), *Marialba Matos* (minha eterna professora de música), *Cris Buosi*, *Eloésio Paulo*, com muito carinho a *Gustavo F. Madeira*, *Ivanilci*, *Ana Cláudia (Arpeggiana)*, *Adriana Ramos* (meu ídolo feminino na Matemática e que tocou-me como em arpejos - I am much more you than...you know what I mean), *Fernanda*, *Émerson* e *Nádia*, professor *Malagute*, *Emiliana Barra*, *Daniela* e *Carlos Eduardo*, professor *Ricardo Egydio*, professor *Marcus Vinícius*, professor *Jairo José*, *Mariza*, professor *Cezar Kondo*, às minhas princesas *Janis Joplin*, *Juma Mendes* (*em memória*) e *Julie Andrews*; aos meus ilustres tio-avô *Ítalo Pimenta* e *Mair*, e aos seguintes ídolos: *Yngwie Malmsteen*, *Satch*, *Steve Vai*, *Jason Becker*, *Jeff Beck*, *Jimmy Page*, *Eric Clapton*, *Jimi Hendrix*, *Robert Plant*, *S.R.V.*, *Brian May*, *Frank Solari*, *Alex Masi*, *Uli Jon Roth*, *Petrucci*, *M. Petri*, *Loreena*, *Elis*, *M. Callas*, *Boceli*, *Janis Joplin* (agora, a cantora) e outros tantos dos movimentos Clássico, Romântico, Impressionista, Barroco, Humanista, Renascentista, etc...

Finalmente ao Sr. *Jesus Cristo* pela mensagem de esperança e exemplo de vida (divinamente ‘vívuda’ na Terra), mas sem seus atributos místicos, e ao amável *Francisco de Assis* e ao *Espírito Imortal da Música de Mozart e Bach*.

Em memória do sempre jovem *Randall Willam Rhoads* (1956-1982), de *Freddie Mercury* (1946-1991), John Hendrik Bonham e de Esméria Pimenta Mendes.

Resumo

A importância dos potenciais vetorial e escalar em Mecânica Quântica é o cerne do que viria a ser chamado Efeito Aharonov-Bohm. Partindo do estudo histórico, filosófico e físico do fenômeno em questão, à uma abordagem matemática do mesmo, procura-se melhor entender a natureza do efeito e qual a importância dos, já citados, potenciais em Mecânica Quântica.

Abstract

The importance of Vector and Scalar Potentials in Quantum Mechanics is the core of what would be the so-called Aharonov-Bohm Effect. From a historical and philosophical study of the phenomenon in question, to a mathematical approach for the same, it is tried to understand the nature of the phenomenon and the importance of the, already cited, potentials in Quantum Mechanics.

Sumário

| | | |
|----------|-----------------------------------|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Uma Abordagem Matemática | 13 |
| 3 | Definições e Demonstrações | 24 |
| 4 | Conclusão | 28 |

Capítulo 1

Introdução-Aspectos

Históricos e Filosóficos

Faz-se mister a compreensão histórico-filosófica do Efeito Aharonov-Bohm (EAB) para que se possa ter uma visão geral do assunto. O advento axiomático da Mecânica Clássica se dá com a publicação dos ‘Princípios Matemáticos da Filosofia Natural,’ ou PRINCIPIA, de Isaac Newton em 1686. A ampla gama de fenômenos físicos coberta por essa obra foi um dos motivos para a imensa valorização da mesma. Além disso, serviu de apoio para o desenvolvimento da filosofia mecanicista dos séculos XVIII e XIX; a qual, como se vê, não se desenvolveu por puro acaso. O ápice do mecanicismo se daria com Laplace. Paralelamente à filosofia, a física começa a adquirir nova roupagem matemática nos trabalhos de Euler, Lagrange, Hamilton, Laplace e de outros muitos físicos. Surge, como aperfeiçoamento da Mecânica Clássica, a chamada ‘Mecânica Analítica’. Ocorre no século XVIII, o estabelecimento da unificação dos fenômenos elétricos e magnéticos; em nível teórico, destaca-se James Clerk Maxwell e, em nível experimental, Michael Faraday. Surge, então, o Eletromagnetismo Clássico. Junto a esse, novas técnicas matemáticas foram incorporadas. Os fenômenos eletromagnéticos são, então, descritos por campos físicos, os elétrico e magnético. Concernente ao ferramental matemático para cálculo dos campos, foram introduzidas funções vetoriais e escalares. Essas recebem os nomes, respec-

tivamente, POTENCIAL VETORIAL e POTENCIAL ESCALAR. Frisa-se que essas últimas não seriam interpretadas fisicamente, sendo o significado físico restrito aos campos. Uma suposta importância, não como mero instrumento de cálculo dos campos, foi proposta pelos físicos Aharonov e Bohm em seu famoso artigo de 1959 [2]. O que anteriormente era auxiliar, tornar-se-ia fundamental, i.e., a relevância dos Potenciais em Mecânica Quântica seria mais que mero instrumento de cálculo. Para ilustrar o que os físicos citados propuseram, seja a descrição do seguinte experimento (ver Figura 1.1). Denote por:

Esquema de um interferômetro de dois braços.

P = plano em que se encontra o interferômetro I .

S_0 = solenóide que penetra pelo plano, com raio r ($r \geq 0$)

fe = feixe de elétrons A, B, C = terminais que delimitam a região em que se encontra o solenóide, juntamente com a tela de interferência Sc .

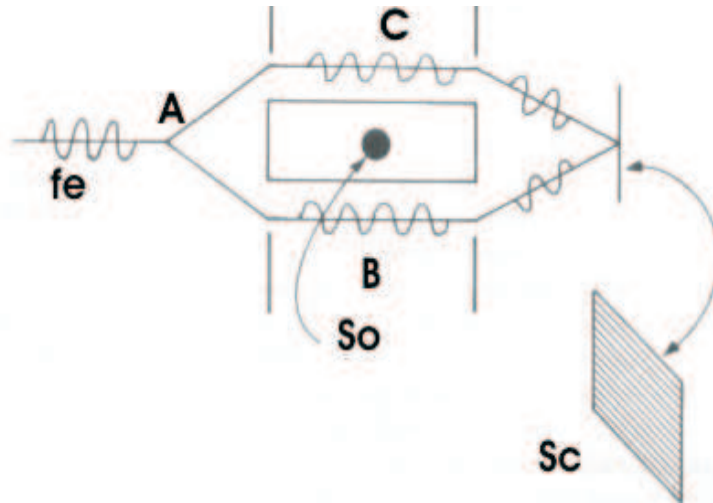


Figura 1.1: Interferômetro clássico.

Tome o operador Hamiltoniano

$$H\psi(x) = (P - A)^2\psi(x) \quad (1.1)$$

No qual tomou-se uma partícula de massa $m=1/2$, carga elétrica igual à unidade e a velocidade da luz igual à unidade, também. P representa o operador Momento e A o potencial vetorial referente ao solenóide S_0 de raio r e comprimento infinito. Observe que a região R delimitada por A , B , C e a tela de interferência (S_c) não é simplesmente conexa, pois a interseção de S_0 com P cria uma conexão múltipla. Tome $\psi(x)$ por Função Onda do feixe f , antes de passar por A . Imagine em A , um obturador que divide f em dois feixes, f_1 e f_2 , restritos às regiões R_1 e R_2 , respectivamente (ver Figura 1.1, sendo a primeira a regio delimitada por A , C , S_c , acima do solenóide, e a segunda delimitada por A , B , S_c , abaixo do mesmo, no plano em que se encontram). Note que as novas regiões são simplesmente conexas.

Seja, agora:

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x),$$

em que ψ_1 e ψ_2 estão restritas a R_1 e R_2 respectivamente. Dessa maneira, a análise do problema do movimento do feixe de elétrons é restrita a duas regiões simplesmente conexas (S_{ic}). Por um processo físico de blindagem, suponha que S_0 esteja protegido de qualquer contato físico com os feixes. Como cada função onda está restrita a uma região S_{ic} , pode-se resolver para cada uma delas o problema do movimento pelos braços do interferômetro do feixe, agora dividido.

Tome:

$$\psi = \psi_1^0 \exp\left(\frac{-iS_1}{\hbar}\right) + \psi_2^0 \exp\left(\frac{-iS_2}{\hbar}\right)$$

com

$$\psi_1 = \psi_1^0 \exp\left(\frac{-iS_1}{\hbar}\right) \quad \text{e} \quad \psi_2 = \psi_2^0 \exp\left(\frac{-iS_2}{\hbar}\right)$$

sendo $S_1 = \int \vec{A} \cdot d\vec{x}$, sendo a integral calculado sobre uma curva que liga A a S_c em R_1 . Analogamente, para R_2 , define-se S_2 .

Como é não nulo o fluxo $\phi = \phi_0 \frac{e}{c\hbar}$ (tomando por e a carga elétrica de uma partícula e, c , a velocidade da luz) , i.e.,

$$\frac{\Delta(S)}{\hbar} = \frac{S_1 - S_2}{\hbar} = \frac{e}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{x}$$

é não nula, sendo a integral de contorno tomada para uma curva que envolva S_0 , os físicos Aharonov e Bohm argumentam que, mesmo para feixes de elétrons em regiões em que o campo magnético é nulo, deve haver algum tipo

de ação sobre os feixes. Estando R livre de campos, esses físicos creditam aos potenciais quaisquer influências nas trajetórias dos elétrons. Essa é a essência do EAB, o qual, conforme Aharonov, Bohm, e muitos outros, foi ‘experimentalmente confirmado’ (ver-parte final do capítulo). No final desse primeiro artigo, os dois físicos fazem a seguinte afirmação: ‘an electron (for example) can be influenced by the potentials even if all the field regions are excluded from. In other words, in a field free multiply connected region of space, the physical properties of the system still depend on the potentials. It is true that these effects of the potential depend only on the gauge invariant quantity $\oint \vec{A}d\vec{x} = \int \text{rot } \vec{A}dS$ ’ [2] Bem, em suma, a argumentação se resume no fato de que em regiões multiplamente conexas, os potenciais possam ter significado físico, pois, afinal, aparecem no formalismo canônico da Mecânica Quântica.

Tantas foram as críticas ao artigo, acima citado, que, em 1961, um novo artigo foi por Aharonov e Bohm escrito [4]. Já no primeiro parágrafo desse novo artigo encontra-se: ‘This dependence is present even when the electrons are prevented by a barrier from entering the region, in which the fields have non-zero values’. A dependência a que se referem é a do efeito de interferência, como no experimento esquematizado na Figura 1.1, em relação a integrais do tipo: $I = \oint A_x dx$ Os autores não deixam de frisar que os experimentos confirmam o efeito, mesmo sendo impossível a obtenção de regiões totalmente livres de campos, havendo certa mistura com possíveis efeitos dos potenciais [4]. Já Tonomura [24] afirma que o efeito foi observado de maneira a se usar um toro ao invés de um solenóide, o que levaria aos efeitos previstos, pois nessa configuração, os campos ficariam restritos ao interior do toro. No fim desse capítulo, uma análise de alguns experimentos há de ser feita, inclusive a feita por Tonomura. Parte das críticas concernentes ao artigo de 1959 referem-se ao fato da invariância de calibre dos potenciais, o que faria com que vários potenciais distintos levassem a mesmos efeitos físicos; quanto à essa crítica, nada de conclusivo é dito. Outra sugestão de que os potenciais seriam mais que meras ferramentas matemáticas, baseia-se no fato de não existir em Mecânica Quântica um análogo à Força em Mecânica clássica. Partindo de um famoso teorema de Ehrenfest, que diz

como seria o conceito de Força Média em uma partícula ‘quântica’, i.e.,

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = \int \bar{\psi}(-\nabla V + e\nabla\phi - \frac{e}{c}\vec{v} \wedge \vec{H})\psi d\vec{x}$$

A sugestão, agora, tem por base uma nova e mais abstrata interpretação da ‘força’ em Mecânica Quântica, apesar de nada a respeito ter sido feito nesse artigo de 1961. Yakir Aharonov, isoladamente, publica um artigo (ver [6]) em que discute questões concernentes à ‘não-localidade’ em Mecânica Quântica, no qual, partindo da formulação Hidrodinâmica da Mecânica Quântica, argumenta a plausibilidade do EAB. Torna-se interessante que Gasati e Guarneri [5], partindo da mesma formulação Hidrodinâmica, argumentam que os potenciais não têm papel físico observável. A linha de raciocínio dos últimos fundamenta-se na arbitrariedade da escolha do operador hamiltoniano usado por Bohm e Aharonov em seu primeiro artigo já citado. Tal arbitrariedade surge da falta de um método matemático de se obter tal hamiltoniano. No capítulo 2, desta dissertação, discute-se uma abordagem possível matemática para obtenção do hamiltoniano usado por Bohm e Aharonov em seu primeiro artigo. Na realidade, toda essa discussão decorre da conexão múltipla da região R (ver Figura 1.1), i.e., do espaço de configuração. No que diz respeito à essa questão, Merzbacher [7], em um notável e muito citado artigo, elucida a questão. Sumarizando, a conclusão a que chega é a de que ‘via condições de contorno adequadas’ para as funções onda que hão de ser tomadas que se deve obter o operador hamiltoniano adequado. Dentre essas condições, estariam as regras de quantização do momento angular de Bohr e Sommerfeld. O físico holandês Ruijsenaars [8] aprofunda-se nessa análise do Hamiltoniano a ser usado, classificando as possíveis dinâmicas obtidas do seguinte hamiltoniano em coordenadas polares:

$$\hat{H}\alpha = -\partial^2 r - \frac{1}{r}\partial r + \frac{1}{r^2}(i\partial\theta - \alpha)^2,$$

com

$$\alpha = -\frac{e\phi}{2c\pi},$$

$$\phi = 2\pi \int_0^R rH(r)dr$$

Também

$$\vec{H} = (0, 0, H(r)),$$

$$\vec{A} = \frac{\phi}{2r^2\pi}(-y, x, 0)$$

para

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

com $H(r)$ se anulando para $r \geq R_o$, $R_o =$ raio do solenóide.

Seja, em princípio, $R_o = 0$ e a seguinte decomposição do Espaço de Hilbert em questão:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_\theta = L^2([0, \infty), r dr) \otimes L^2([-\pi, \pi], d\theta)$$

Primeiro caso: $\alpha = 0$

Assim, $\hat{H} = -\Delta$, i.e., o operador se reduz ao Laplaciano para partícula livre. Tal Laplaciano é unitariamente equivalente ao operador de multiplicação por t^2 no espaço $\mathcal{H}_t \otimes \mathcal{H}_\theta$. Toma-se, então, a seguinte substituição, em cada subespaço de momento angular:

$$i\partial\theta \text{ por } -m \quad (1.2)$$

Segundo caso: $\alpha \neq 0$

(i) Se considera-se possível (1.2), obtém-se:

$$\hat{H}(m + \alpha) = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{m + \alpha^2}{r^2},$$

ou seja, uma sequência de Hamiltonianos em H_r .

(ii) Se não se considera (1.2), seja, em princípio, para fixar notação:

$$\hat{H}_\alpha^0 \equiv H\alpha$$

Suponha possível

$$\nabla\Lambda = \frac{e\vec{A}}{c}. \quad (1.3)$$

Via cálculo direto, obtém-se

$$\left(\frac{\nabla}{i} - \frac{e}{c}\right)^2 = e^{i\lambda}(-\Delta e^{-i\lambda})$$

Observação: $\Lambda(x, y) = -\alpha\theta(x, y)$, i.e., θ tomada como a função que dá o ângulo entre os eixos X e Y satisfaz (1.3), a menos de uma descontinuidade

em π . Aceitando essas possibilidades e desconsiderando descontinuidade, obtém-se, como hamiltoniano:

$$H_\alpha^0 = \exp(-i\alpha\theta)\hat{H}_0^0 \exp(i\alpha\theta) = \hat{H}(0) = \hat{H}\alpha = -\partial^2 r - \frac{1}{r}\partial r + \frac{1}{r^2}i\partial\theta^2$$

Observação: As possibilidades (i) e (ii) só se diferem pela interpretação de $i\partial\theta - \alpha$, sendo este último um operador que age em funções onda que devem satisfazer certas condições em $\theta = \pi$. A diferença surge para valores não inteiros de α , coincidindo nos demais. Também, $i\partial\theta$ age, em (i), em funções onda que satisfazem:

$$\lim \psi(\theta) \text{ com } \theta \uparrow \pi,$$

sendo o mesmo que

$$\lim \psi(\theta) \text{ com } \theta \downarrow (-\pi).$$

Mas, em (ii), devemos ter o fator $\exp(2i\pi\alpha)$ multiplicando o primeiro limite.

Seguindo Ruijienaars na classificação das Dinâmicas, falta considerar o caso em que $R_0 \equiv$ raio do solenóide não-nulo e $\alpha \neq 0$. Agora, as funções onda devem se anular na fronteira da região de interseção do solenóide com o plano em que se encontra o interferômetro e deve-se tomar a seguinte decomposição dos espaços vetoriais:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_R^r \otimes \mathcal{H}_\theta = L^2([R, \infty), r dr) \otimes L^2((0, 2\pi], d\theta)$$

Usando esta decomposição, tem-se para cada R um operador Hamiltoniano, i.e.,

$$\hat{H}_{m+\alpha}^R,$$

sendo a análise restante análoga ao caso anterior, mais a condição de anulamento das funções na fronteira de $x^2 + y^2 \leq R_0$.

Muito extensa é a literatura que trata do EAB e há uma quantidade muito grande de trabalhos que tomam por certa a existência do EAB para explicar outros fenômenos, tal como o organizado em ‘proceedings’ por Yeevas Anandan [23] em que quase todo o trabalho é constituído de artigos em que o EAB é implicitamente assumido como efeito já comprovado e certo. Há outros trabalhos em que o efeito é citado, como no que resultou de um encontro a respeito de teoria quântica da gravitação [22], organizado por Roger

Penrose, do qual Aharonov participou e apresentou um trabalho, já citado, em que analisa o efeito do ponto de vista da formulação hidrodinâmica da Mecânica Quântica.

Pouco tem sido dito, até aqui, dos que se opõem à interpretação, até então discutida, em que a existência do fenômeno é certa. Antes de que uma análise dos argumentos contrários seja feita, faz-se necessário a citação de mais alguns trabalhos interessantes, embora mais de cunho filosófico que físico ou matemático. Dentre os divulgadores do EAB, Peshkin destaca-se como grande produtor de artigos em que a argumentação pouco varia e a apelação para a aceitação do EAB como inequívoca é transferida para experimentos, tidos por físicos tais como Bocchieri [9], como duvidosos.

Um trabalho famoso de Peshkin encontra-se em um ‘proceeding’ [24], no qual suas idéias, que pouco diferem daquelas de Bohm e Aharonov, são expostas. Há algo mais interessante nesse texto, embora presente só na segunda parte e escrito por Tonomura. Nessa, experimentos são discutidos e não apenas invocados como espécie de argumentos puramente autoritários. Mais um trabalho de Peshkin é um artigo [11] em que a análise matemática é quase que totalmente substituída por argumentos puramente físicos e a mesma apelação para que o efeito seja aceito devido aos experimentos é usada. Ainda, na esfera dos que defendem a aceitação do EAB, encontram-se físicos famosos, tais como Richard Philips Feynman, que faz a abordagem mais superficial dentre as aqui citadas [18]. Nessa, nada mais que pouquíssimas linhas são usadas para uma análise pífia do fenômeno e aceitação das propriedades físicas, supostas, para o potencial vetorial. Sakuray [20] em seu texto ‘Advanced Quantum Mechanics’ reserva o final do primeiro capítulo para uma análise, também superficial.

Há outros textos, embora de cunhagens muito mais filosóficas que matemáticas, como o texto de D’Espagnat [26] e o livro de Roland Omnès [28]. Nesses trabalhos há a realização de uma análise paralela ao famoso Paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen.

Também muitos foram (e ainda o são) os que não aceitam a interpretação da Mecânica Quântica em que o EAB é um fenômeno físico legítimo. Dentre esses, A. Loinger [10] resume sua argumentação em: ‘The theorists who believe in the existence of the AB effect claim that, when an electron wave

passes through two slits with a magnetic flux ϕ confined to a small, infinitely long, and impenetrable cylinder between them, the double slit interference pattern is shifted, within the single diffraction envelop with respect to the situation in which $\phi = 0$. Unfortunately, as they generally admit, this shift corresponds to variation of the average kinetic angular momentum \dots and also to a displacement of the barycentre of the electron wave package. But this is impossible: in fact, the magnetic region is impenetrable by assumption, and there is no non-local action on the particle.’ O trecho acima resume parte dos argumentos empregados para assumir a existência do efeito, mas num tom de desaprovação. Bocchieri, já enfático no título de seu artigo, ‘Against the Aharonov-Bohm Effect’, começa dizendo na primeira linha do texto: ‘I shall speak here on the Aharonov-Bohm Effect. More precisely, I shall give some arguments, that in my opinion prove that the A-B effect does not exist’ [9]. A argumentação desse último se resume em uma crítica à arbitrariedade da escolha das condições de contorno para a análise do movimento do elétron via uso do Hamiltoniano já muitas vezes, até aqui citado. Bocchieri considera equivocada a escolha das condições de contorno feitas por Bohm, Aharonov, etc., e critica o apelo enfático para a aceitação do fenômeno, devido a experimentos um tanto dúbios e livres de interpretação única. Para uma melhor compreensão desses experimentos, dos mais significativos, far-se-á uma análise desses aqui.

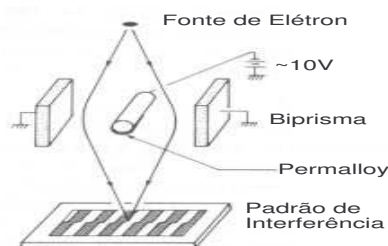


Figura 1.2: Experimento de Boersh.

Muitos têm sido os experimentos referentes ao que se denomina EAB, não sendo menor a quantidade dos que discordam e, também, daqueles que

dão como ‘carta magna’ os mesmos. A validade dos experimentos é, ainda questão aberta, pois uma condição que modele o problema de maneira próxima da ideal é um problema altamente tecnológico e que há de exigir métodos que, cada vez mais, modelem o movimento de uma partícula carregada em uma região na qual possam-se excluir todos os efeitos significativos de campos eletromagnéticos remanescentes.

Bochieri e Loinger [10] expressam suas dúvidas sobre o quão ideal é o fato de um elétron estar sob ação somente de potenciais vetoriais. Dentre os experimentos mais significativos, destaca-se o realizado por Boersh, o qual a Figura 1.2 mostra esquematicamente em que este se reduz.

Nesse experimento, um feixe de elétrons é emitido de uma fonte, passando por uma região cercada por um biprisma em cuja região interior se encontra um filamento condutor coberto por um material isolante (Polaroy), mas não cobrindo todo o filamento. Um padrão de interferência é observado em uma tela. Há um deslocamento em relação ao padrão que se observa na ausência do filamento condutor. Bocchieri e Loinger afirmam que uma Força de Lorentz remanescente poderia, mesmo em pequena amplitude, causar o que se chama EAB. Sugerem que somente um experimento que se livrasse dessas possíveis remanescentes interações poderia ser tido como comprovação irrefutável do EAB.

Seguindo as palavras de Tonomura [24]: ‘Bochieri and Loinger asserted that chambers tilted fringes could be fully explained by a leakage magnetic field from the whiskers’. Bem, o problema é claro, i.e., os elétrons estariam em regiões totalmente livres de campos?

Já, Möllenstedt e Bayth [17] argumentam que, até mesmo duas pequenas voltas consecutivas de um solenóide poderiam ser responsáveis por campos remanescentes. Nesse caso, de uma fonte de elétrons parte um feixe que passa por uma lente convergente, por um biprisma, em cujo interior se encontra um pequeno solenóide e, abaixo, uma fenda com uma tela mais abaixo; a única diferença marcante entre esse e o experimento anterior é que, agora o feixe passa por dentro do biprisma e, não somente pela região interior delimitada por esse. A análise desse experimento é a mesma do anterior, sendo desnecessária a inclusão de uma figura análoga. Já, o próximo experimento é o ‘santo graal’ da teoria experimental do EAB, por muitos

declarado. Nesse, um ímã Toroidal é utilizado no lugar de solenóides ou outros equipamentos do tipo, conforme o da Figura 1.3.

A idéia concernente ao experimento difere das anteriores em um aspecto assaz importante. O ímã é blindado com um material feito de metal supercondutor, cujo intuito é o de evitar quaisquer alterações possíveis derivadas de possíveis campos remanescentes. A idéia é de Tonomura, a qual encontra-se no seu trabalho experimental já citado. O arranjo experimental difere um pouco dos anteriores, mas pode ser pensado de maneira análoga, pois o excesso de detalhes técnicos tornaria menos frutífera a análise aqui feita, em princípio não dirigida diretamente à estrutura do método experimental em Mecânica Quântica, embora do próprio efeito, o que se encontra fora dos propósitos deste trabalho.

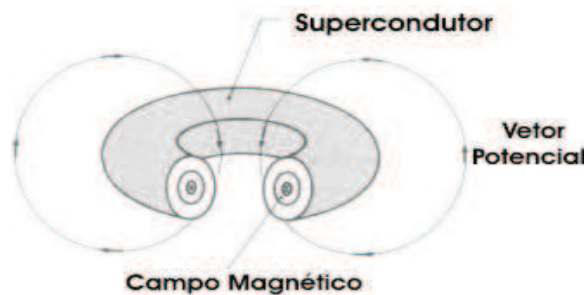


Figura 1.3: Ímã toroidal.

Myazawa [25] afirma que mesmo um caso bem ideal poderia ser obtido, como o que, em que toda superfície do ímã, a função onda do elétron se anulava, satisfazendo assim as condições gerais de contorno para resolução do problema. Tonomura argumenta enfaticamente que, devido ao efeito Meisner, o elétron não pode ter a menor influência de qualquer efeito local de um campo eletromagnético. O mesmo sumariza a argumentação da seguinte maneira: ‘... However, the fact that success has recently been achieved in confirming the AB effect experimentally now removes any doubt about the existence of the effect.’ Tal sumarização assemelha-se à uma citação profética como algumas encontradas em certos textos cujos indivíduos que desses fazem uso, o fazem de maneira autoritária e dogmática, para não

dizer, anticientífica. Seguindo o que o Sir Karl Popper [27] pensava sobre tais argumentações, o mesmo diria que uma teoria (ou qualquer processo concernente à ciência) que não se coloque frente à refutação é, por definição ‘popperiana’ de ciência, não falseável, no caso, contrária ao próprio processo de seleção a que teorias e experimentos estão sujeitos.

Capítulo 2

Uma Abordagem

Matemática

Neste capítulo há de se fazer uma análise mais aprofundada do EAB e uma descrição de um modelo menos arbitrário em que se busca a obtenção do operador Hamiltoniano usado por Aharonov e Bohm. A maior parte da argumentação se reduz a um teorema devido ao matemático Kato, o qual será demonstrado na parte final do capítulo. Antes disso, uma nova proposta e análise introdutória há de ser feita. Dentre os trabalhos citados no capítulo anterior, excetuando-se o de Ruijsenaars, há uma falha aparente, i.e., não há uma modelagem matemática rigorosa na qual poderiam se basear as argumentações. Essas acabam impregnadas de psicologismos e até sujeitas a pilhérias, como a seguinte: Se quiseres saber se uma pessoa encontra-se em sua casa, ou não, basta que dê uma volta ao redor da última e verifique para qual direção seu polegar (direito?) aponta.

Para evitar argumentações vazias de conteúdo matemático é que se faz necessária uma modelagem rigorosa. Nos trabalhos [3, 1], diferentemente daqueles da maioria da comunidade dos físicos, é feita uma classificação de todas as extensões auto-adjuntas de um Hamiltoniano descrevendo o movimento de um elétron ao redor de um solenóide de raio nulo e comprimento infinito, dando um passo em direção à análise matemática do problema. Apesar de pouco valor prático, pois não há solenóides de comprimento in-

finito e raio nulo, há um grande resíduo de boa matemática no que se propuseram a fazer. Uma outra abordagem é a proposta por dois italianos, Valz-Griz e Magni que será estudada rigorosamente no fim deste capítulo. Apenas adiantando parte da análise, o estudo feito se baseia num processo em que um solenóide de raio não-nulo e tamanho infinito é modelado para, via limite, ser transformado em um solenóide ideal, i.e., totalmente blindado. O problema é que em cada passo do processo, o potencial vetorial assumido é o do solenóide de comprimento infinito. Isso leva ao surgimento da seguinte questão, levantada pelo Professor César Rogério, aqui explicada e enunciada: será que a assunção desse potencial vetorial não engloba já o efeito em si mesmo? Bem, um solenóide cujo potencial vetorial já é o do solenóide de comprimento ideal torna pouco realista o modelo dos italianos. A crítica é ainda muito mais mordaz, i.e., uma proposta original é sugerida, ou seja, por que não tomar um solenóide de tamanho finito e calcular em cada passo do processo o potencial e, em seguida, blindá-lo até atingir o que se espera como sendo ideal? Essa questão, embora bastante realista, está repleta de detalhes técnicos que, devido ao tempo enxuto dos programas de mestrado e do grau de complexidade do problema, tornar-se-ia infactível como problema a que se dedica um estudante de mestrado, em geral.

O detalhe interessante dessa nova abordagem é que, sendo nova, precisaria de um ferramental matemático mais rico, e.g., uso do operador de Dirac em uma etapa do processo, e a do Operador de Schroedinger em outra. Para essa proposta surgem inúmeros problemas assaz interessantes, tais como: na abordagem dos italianos, os operadores tomados são todos positivos, o que não mais seria possível, o que sugere o uso do operador de Dirac (ver[14] para uma introdução ao trabalho de Dirac) para parte do estudo. Referente à essa questão, o problema que surge é que as formas quadráticas associadas aos operadores poderiam deixar de formar sequência crescente de transformações positivas, o que invalidaria o modelo que se estuda neste capítulo. Quanto à obtenção do solenóide blindado, o solenóide de comprimento infinito, talvez o operador de Schroedinger seja suficiente, o que não ocorre com relação ao restante do problema novo, que envolveria outro processo de limite relacionado a operadores não necessariamente positivos.

Resumindo a proposta sugerida pelo professor César e por mim, deve-se

notar que na abordagem abaixo descrita, i.e., a feita pelos italianos Valz-Griz e Magni, o potencial vetorial adotado já é o do solenóide de comprimento infinito. Assim, o próprio EAB já poderia ser produto dessa inclusão. Para evitar tal arbitrariedade, procurar-se-ia a cada passo obter o potencial vetorial referente ao solenóide, agora de comprimento finito. Observa-se que há necessidade de se blindar o solenóide. Caso o processo de blindagem seja feito anteriormente ao do cálculo do limite do potencial vetorial para o comprimento tendendo ao infinito, o que se poderia esperar? Em outras palavras, seria o resultado obtido o mesmo que os italianos obtiveram? O processo, agora, seria outro, i.e., tomar-se-ia o limite para o potencial vetorial para depois blindá-lo. Nesse último processo, talvez o resultado seja o mesmo obtido pelos italianos, pois, espera-se obter o potencial vetorial usado por eles para depois realizar a blindagem. Outra questão seria se os processos de limite seriam comutativos, i.e., blindar o solenóide e, em seguida, tomar o limite para se obter o potencial vetorial, ou obter, via limite, o potencial vetorial e, em seguida, blindar o solenóide. Se os limites comutarem, tal abordagem pode ser um bom caminho a se seguir.

Quanto ao uso do operador de Dirac em parte do processo, a idéia surge do fato que, na abordagem dos italianos, os operadores são todos positivos e auto-adjuntos, o que poderia ser falso na nova abordagem, pois, para o cálculo do potencial em cada passo, haveria o surgimento de novos termos que poderiam tornar falha a linha de argumentos seguida pelos italianos, na qual se faz uso das formas quadráticas associadas aos operadores, pois estas estariam, conforme análise abaixo discutida, bem definidas e formariam sequência crescente, por causa das propriedades já atribuídas aos operadores.

Mas, tal análise tornar-se-ia assaz profunda para a sua realização dentro do tempo disponível, assim, a análise aqui discutida será a feita pelos físicos italianos.

Seja a modelagem feita por Magni e Valz-Gris [15]. Seja o seguinte Potencial Vetorial:

$$\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_z)$$

com as primeira e terceira componentes nulas e:

$$A_\theta = \frac{\phi}{2r\pi} \text{ se } r \geq r_0,$$

sendo o último o raio do solenóide, o qual é não-nulo.

$$A_\theta = \frac{\phi}{2r_0\pi}r \text{ se } r_0 \geq r \geq 0$$

Onde:

$$\phi = \int \int \text{rot } \vec{A} ds = \oint \vec{A} d\vec{x}$$

Seja Σ região complementar àquela delimitada pela interseção do solenóide So com o plano P da figura primeira ($x^2 + y^2 \leq r_0$). Tome $V(r) = V \geq 0$, se $r \leq r_0$ e, caso contrário, $V(r) = 0$. Defina:

$$\hat{H}_n \equiv \frac{1}{2m}(\hat{P} - \hat{A})^2 + nV (P_n)$$

Observação: O que está sendo feito é a busca por um processo limite para se obter o operador usado por Aharonov e Bohm, em seu primeiro artigo, junto das condições de contorno também usadas pelos físicos. Note que P_n é (por definição) o n-ésimo passo para se obter um solenóide com blindagem (nV) em cada passo. A busca por um operador limite, que coincida com o procurado hamiltoniano do EAB, é o que há de ser feito. Note, também, que esse processo não é trivial, pois os H_n são não limitados e não há um processo padrão para sua obtenção. Supondo que esse operador limite exista, chame-o de H_∞ . Agora, seja, para cada n,

$$u_n(t) = e^{-iH_n t} u_0$$

com u_0 um estado inicial fixo e $u_0 \in L^2(R^3)$.

Suponha que exista o seguinte limite: $u(t) = \lim e^{-iH_n t} u_0$ e pertence a $L^2(R^3)$ para cada condição inicial u_0 e suponha que exista a seguinte família de operadores unitários (formando um grupo) $U(t)$ tais que $u(t) = U(t)u_0$. Supondo isso, define-se H_∞ como o gerador do limite do grupo de evolução $U(t)$ a fim de que $u(t) = e^{-iH_\infty t} u_0$. Tal maneira de definir o limite chama-se ‘convergência no sentido da dinâmica’ e é equivalente à definição de ‘convergência no sentido forte do resolvente’.

A seguir, algumas notações e definições hão de ser feitas, a fim de que o Teorema de Kato possa ser enunciado, dele feito uso e, no fim do capítulo, demonstrado.

Seja $H^n(\Sigma)$ com $n = 1, 2$ o espaço usual de Sobolev. $H_0^1(\Sigma)$ subespaço de $H^1(\Sigma)$, sendo o índice inferior como indicativo de que as funções devem se anular na fronteira Γ de Σ , lembre-se de que Σ é a região complementar àquela definida pela interseção do solenóide S_0 com o plano que contém o interferômetro.

Seja, dado H auto-adjunto e positivo, a forma quadrática (bem definida, pois o teorema espectral garante a existência da raiz quadrática do operador) de H , definida por:

$$Q(f) = \left\langle H^{\frac{1}{2}} f; H^{\frac{1}{2}} f \right\rangle \text{ se } f \in \text{Dom } H^{\frac{1}{2}},$$

caso contrário, ponha $Q(f) = \infty$. Notação:

$$\text{Dom } Q \equiv \text{Dom } H^{\frac{1}{2}} \equiv \text{Quad } (H)$$

$$H_{mag} = \sum_{j=1}^3 \left(-i\partial x_j + \frac{e}{c} A_j \right)^2,$$

note que esse último é o Hamiltoniano escrito como soma das componentes dos operadores Momento e Potencial Vetorial. Também temos que

$$\text{Dom } H_{mag} = H^2(\mathbb{R}^3)$$

Finalmente, seja V o ‘operador multiplicação’ pela função característica de Σ^c em $L^2(\mathbb{R}^3)$. Seja

$$H_n = H_{mag} + nV \text{ e } \text{Dom} H_n = \text{Dom} H_{mag} \cap \text{Dom} V = H^2(\mathbb{R}^3).$$

Considerações iniciais: Escreva:

$$H_{mag} = \frac{1}{2m} (-i\nabla + \frac{e}{c} \vec{A})^2$$

com $\vec{A} \in L^2(\mathbb{R}^3)_{loc}$ espaço das funções integráveis em cada compacto, i.e., localmente somáveis.

Defina: $C_j : L^2(\mathbb{R}^3) \leftrightarrow$ por:

$$C_j = -i\partial x_j + \frac{e}{c} A_j \text{ com } C_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$$

Note que: C_j é simétrico em seu domínio, assim, $T_j =$ fecho do operador C_j , que é um operador fechado e densamente definido (para essas afirmações, ver [21]), assim:

$H = \sum_{j=1}^3 T_j^* T_j$ é um operador auto-adjunto (ver [13]) com domínio:

$$\text{Dom } H = \left\{ f \in \text{Dom } T_j; T_j f \in \text{Dom } T_j^* \right\}$$

Por fim, seja a forma quadrática associada a H ,

$$Q_H f = \sum_{j=1}^3 \langle T_j f; T_j f \rangle,$$

$$\text{Quad}(H) = \bigcap \text{Dom } T_j$$

Teorema 2.1 *Seja \vec{A} limitada. Então, pode-se escrever:*

$$H_{mag} = \sum_{j=1}^3 (-i\partial x_j + \frac{e}{c} A_j)^2 \text{ e}$$

$$Q_{H_{mag}}(f) = \int_{R^3} |\nabla f|^2 + \frac{e}{c} f \vec{A} \cdot \nabla f + |f \vec{A}|^2$$

Com

$$\text{Dom } H_{mag} = H^2(R^3) \text{ e}$$

$$\text{Quad } H_{mag} = H^1(R^3)$$

A demonstração do Teorema 2.1 é um exercício de manipulação algébrica, i.e., puramente computacional, por isso há de ser omitida, mas observe que nada foi dito sobre a obtenção dos domínios acima, sendo necessária uma referência (ver [21]). Finalmente, seja o enunciado do teorema de Kato, seguido de sua aplicação ao EAB e, de sua demonstração.

Teorema 2.2 (Teorema de Kato) *Seja (H_n) uma sequência crescente de operadores positivos e auto-adjuntos em um espaço arbitrário de Hilbert \mathcal{H} .*

Seja

$$D = \bigcap \text{Quad } (H_n) \cap \left\{ f; \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle H_n^{\frac{1}{2}} f; H_n^{\frac{1}{2}} f \right\rangle < \infty \right\}$$

e seja \mathcal{H}_0 o fêcho de D . Então existe um operador positivo e auto-adjunto H em \mathcal{H}_0 , com forma quadrática, cujo domínio é D e tal que:

$$\left\langle H^{\frac{1}{2}} f; H^{\frac{1}{2}} f \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle H_n^{\frac{1}{2}} f; H_n^{\frac{1}{2}} f \right\rangle \text{ para toda } f \in D$$

e mais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq a} \|\exp(-iH_n t)f - \exp(-iHt)f\| = 0 \text{ com } f \in \mathcal{H}_0$$

Assumindo, temporariamente a veracidade do teorema de Kato, verificar-se-á que o processo de modelagem assumido nesse capítulo se enquadra nas hipóteses do mesmo. Tem-se que:

$$H_n = H_{mag} + nV$$

forma uma sequência crescente de operadores, claramente, pois, por definição V é operador ‘multiplicação pela função característica’ do conjunto complementar de Σ e, H_{mag} é positivo pela sua representação dada pelo Teorema 1 e auto-adjunto em $H^2(R^3)$, o que se verifica trivialmente ao se assumir $H^2(R^3)$ como sendo o domínio do operador.

Algumas justificativas: sendo cada H_n positivo e auto-adjunto, em seus domínios, suas formas quadráticas ficam bem-definidas, pois assim, existe a raiz quadrada de cada operador, que é consequência do Teorema Espectral para Operadores Auto-Adjuntos([12]). Sabendo que o modelo obedece às hipóteses necessárias, observe que o operador obtido como resultado da aplicação do teorema de Kato é exatamente o operador usado por Aharonov e Bohm e com as condições de contorno impostas. Na realidade, o operador H_∞ que foi citado no caso em que se discutia (início desse capítulo) a convergência no sentido da dinâmica será o limite dos H_n do teorema de Kato. A equivalência entre convergências no sentido da dinâmica e sentido forte do Resolvente (Ver-capítulo próximo) garante a parte final da demonstração do teorema, sendo somente demonstrado que a segunda implica a primeira.

Demonstração do Teorema de Kato:

Temos, em princípio:

$$H_n \text{ crescente} \Rightarrow Q_{H_n} \text{ crescente} \quad (1)$$

sendo Q_{H_n} a forma associada a cada operador, que será denotada por Q_n .
(1) segue de:

$$\langle H_n f; f \rangle \leq \langle H_{n+1} f; f \rangle$$

com f em $\text{Quad}(H_n) \cap \text{Quad}(H_{n+1})$

Assim, temos uma sequência crescente de formas positivas.

Lemas auxiliares:

Lema 2.3 (L_0): *Seja Q forma não-negativa e com D domínio denso em \mathcal{H} , então, são equivalentes:*

i) Q é forma de um operador auto-adjunto e positivo H

ii) Q é semi-contínua inferiormente de \mathcal{H} em $[0, \infty]$

iii) Q é fechada.

Para a demonstração veja o Capítulo Próximo.

Há também definições auxiliares no próximo capítulo, i.e., definição de ‘formas fechadas, quadráticas’, etc.

Lema 2.4 *Se Q e Q' são formas fechadas não-negativas em um espaço arbitrário de Hilbert \mathcal{H} e $(-a)$ positivo, então*

$$Q \leq Q' \Leftrightarrow R_a \geq R'_a,$$

sendo $R_a = (H - a)^{-1}$ e $R'_a = (H' - a)^{-1}$

Pelo lema L_0 , existem H e H' associados a Q e Q' , respectivamente. Assim, sendo tais operadores positivos e auto-adjuntos e R_a e R'_a seus respectivos resolventes.

Seja $Q' \geq Q$:

Seja f na interseção dos domínios dos resolventes R_a e R'_a , em último caso, ponha f no fecho da interseção dos domínios de forma de H e H' ,

se necessário.

Assim:

$$g = R_a f \in \text{Dom} H \subseteq \text{Quad}(H)$$

$$g' = R'_a f \in \text{Dom} H' \subseteq \text{Quad}(H') \subseteq \text{Quad}(H)$$

A última inclusão segue trivialmente de $Q' \geq Q$. Portanto:

$$\begin{aligned} \langle R'_a f, f \rangle^2 &= \langle g', (H - a)g \rangle^2 \equiv (Q - a)(g, g')^2 \leq (Q - a)(g')(Q - a)(g) \\ &\leq (Q' - a)(g')(Q - a)(g) \equiv \langle R'_a f, f \rangle \langle R_a f, f \rangle \end{aligned}$$

Assim, tirando a raiz quadrada de ambos os termos, e levando em conta que o resultado é válido para toda f nos domínios citados, no começo da demonstração, segue que:

$$R'_a \leq R_a$$

Reciprocamente, seja:

$$0 \leq R'_a \leq R_a$$

Defina: $O_n = (R_a + \frac{1}{n})^{-1}$ e $O'_n = (R'_a + \frac{1}{n})^{-1}$

Mostremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle O_n f, f \rangle = Q(f)$$

Para isso, calculemos:

$$\left\| \left\langle (R_a + \frac{1}{n})^{-1} f, f \right\rangle - Q(f) \right\|$$

ou seja,

$$\left\| \left\langle ((H - a)^{-1} + \frac{1}{n})^{-1} f, f \right\rangle - \langle H f, f \rangle \right\| = \left\| \left\langle (((H - a)^{-1} + \frac{1}{n})^{-1} - H) f, f \right\rangle \right\|$$

e, sem perda de generalidade, $a = 0$.

Assim, segue que, a seguinte expressão:

$$\left\| \left\langle n(nH^{-1} + Id)^{-1} f - H f, f \right\rangle \right\|$$

converge para zero, para $n \rightarrow \infty$, pelo Teorema Espectral, pelo simples fato da equivalência unitária (via Transformada de Fourier) entre sequência de operadores Resolventes e operadores de multiplicação, onde os últimos formam uma sequência que converge para zero(ver[19]).

Como, por definição:

$$O \leq O', \text{ temos que } Q \leq Q'$$

Sendo: $O = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n(f)$ e $O' = \lim_{n \rightarrow \infty} O'_n(f)$

Lema 2.5 *Seja (A_n) uma sequência crescente de operadores auto-adjuntos e positivos e limitados e que convirja fracamente para A , um operador limitado, auto-adjunto em um espaço de Hilbert com norma $\|\cdot, \cdot\|$, então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n f - A f\| = 0.$$

Concatenemos esses resultados acima para a demonstração do Teorema de Kato:

Seja Q definida da seguinte maneira:

$$Q(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f),$$

se este for finito, caso contrário, ponha:

$$Q(f) = \infty$$

Assim, pelo lema L_0 , sendo Q , limite de uma sequência monótona de formas quadráticas semi-contínuas inferiormente, temos que, Q , definida conforme acima, é forma quadrática positiva semi-contínua inferiormente e, portanto, existe H , positivo e auto-adjunto, pelo mesmo lema L_0 , tal que Q seja forma quadrática associada de H .

Também:

$$Q_n \leq Q_{n+1} \leq Q \Leftrightarrow R_a^n \geq R_a^{n+1} \geq R_a$$

com

$$R_a^n = (H_n - a)^{-1}$$

e

$$R_a = (H - a)^{-1}.$$

Note que R_a^n é uma sequência decrescente de operadores positivos e auto-adjuntos e limitados que converge fracamente para cada f , assim, pelo Lema (2), essas são hipóteses suficientes para que a sequência convirja fortemente. Assim, seja S o limite de tal sequência, i.e.,

$$R_a \leq S \leq R_a^n.$$

Pelo Teorema Espectral, existe H' de forma que:

$$S = R'_a = (H' - a)^{-1}.$$

Também, sendo Q' associada a H' , temos pelo L_1 :

$$Q_n \leq Q' \leq Q$$

que implica, pela definição de Q , que:

$$S = R'_a$$

que demonstra a existência e unicidade do operador H auto-adjunto, positivo e limite da sequência de operadores dados na hipótese do Teorema de Kato. A parte final do teorema, i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq a} \|\exp(-iH_n t)f - \exp(-iHt)f\| = 0$$

segue da equivalência entre convergência no Sentido Forte do Resolvente e no Sentido da Dinâmica, sendo demonstrado no próximo capítulo que a primeira implica a segunda.

Capítulo 3

Definições e Demonstrações

Definição 3.1 Uma Forma Quadrática é uma aplicação $Q : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$, com $D \subseteq H$, sendo D um subespaço de H , espaço de Hilbert, \mathbb{C} , o conjunto dos números complexos, Q satisfazendo

$$(i) Q(\alpha f + \beta g, h) = \alpha Q(f, h) + \beta Q(g, h)$$

$$(ii) \overline{Q(f, g)} = Q(g, f)$$

Diz-se que Q é Positiva se: $Q(f, f) \geq 0$, para toda f no domínio de Q e, Q é semi-limitada se: $Q(f, f) \geq -c \|f\|^2$ Vale a seguinte identidade:

$$4Q(f, g) = Q(f+g, f+g) - Q(f-g, f-g) + iQ(f+ig, f+ig) - iQ(f-ig, f-ig)$$

Por esta identidade (identidade de polarização), e por Q ser semi-limitada, vale que Q é unicamente determinada por uma função $Q' : H \rightarrow (-\infty, \infty]$, definida por: $Q'(f, f) = Q(f, f)$ se f estiver no domínio de Q e $Q'(f, f) = -\infty$ se f não estiver no domínio de Q .

Definição 3.2 Q é fechada se:

Para toda sequência limitada de funções (f_n) no domínio de Q , para todo n (n -natural), tivermos que $(Q(f_n))$ admite subsequência convergente.

Lema 2.3–demonstração: Mostremos que são equivalentes:

- (i) Q -forma quadrática de um operador auto-adjunto e positivo
- (ii) Q é semi-contínua inferiormente de H em $(0, \infty]$
- (iii) Q é fechada

(i) \rightarrow (ii) : Dada Q , seja H associado a Q tal que:

$$Q(f) = \langle Hf, f \rangle = \left\langle H^{\frac{1}{2}}f, H^{\frac{1}{2}}f \right\rangle, f \in \text{Quad}(H)$$

Seja:

$$Q_n(f) = \left\langle nH(n+H)^{-1}f, f \right\rangle$$

Por uma aplicação simples do Teorema Espectral, a mesma usada para mostrar parte do Lema 2.4 em que se mostra que, se $Q \geq Q'$, então $R_a \leq R'_a$, segue que

$$Q_n(f) \rightarrow Q(f)$$

para toda f em $\text{Quad}(H)$.

Observe que (Q_n) forma uma sequência crescente positiva de funções contínuas, assim, desde que Q é limite fraco à direita de tal sequência de formas contínuas, Q é semi-contínua inferiormente.

(ii) \rightarrow (iii):

Defina no domínio de forma de Q , o seguinte produto interno:

$$\langle f, g \rangle_1 = Q(f, g) + \langle f, g \rangle$$

sendo que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual no espaço de Hilbert H .

Como, Q é fechada se, e somente se D (domínio de forma de H) for completo com relação a norma $\|\cdot\|_1$, definida canonicamente por $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Mas, se Q é semi-contínua inferiormente e (f_n) é uma sequência fundamental com respeito a $\|\cdot\|_1$, então, a mesma sequência será fundamental com respeito à norma $\|\cdot\|$.

Assim, tome $\epsilon \geq 0$ e, a partir deste, n_0 , a fim de que para todo n, m , tal que,

$$\inf(n, m) \geq n_0$$

com

$$Q(f_m - f_n) + \|f_n - f_m\|^2 \leq \epsilon^2.$$

Deixe $m \rightarrow \infty$ para fixado n e, pela semi-continuidade inferior de Q , segue que está em D e, também:

$$Q(f_n - f) + \|f - f_n\|^2 \leq \epsilon^2$$

ou, equivalentemente:

$$\|f - f_n\|_1 \leq \epsilon$$

assim segue que (ii) \rightarrow (iii).

Agora, finalmente: (iii) \rightarrow (i).

Como, $\|f\| \leq \|f\|_1$, para toda f no domínio de $H^{\frac{1}{2}}$, existe uma contração A auto-adjunta(ver[19]) em D tal que:

$$\langle f, g \rangle = \langle Af, g \rangle_1$$

mas, A é injetora se, e só se $Af = 0$ implicar em:

$$\|f\|^2 = \langle Af, f \rangle_1 = 0$$

segue, então que(ver[19]):

$$A = (1 + H')^{-1}, \quad H' \geq 0, \quad (H')^* = H$$

Sendo o domínio de H igual a D .

Pelo Teorema espectral: Existe uma função mensurável não-negativa, denotada aqui por $h(m)$, em um espaço de medida $(M, d'm)$, de modo que D é isomorfo a $L^2(M, d'm)$ e:

$$\langle f, g \rangle = \int f(m)\bar{g}(m)dm$$

onde, para f e g em $L^2(M, d'm)$, temos: $dm=(1 + h(m))^{-1}d'm$ mas, como H , o espaço com norma $\|\cdot\|$, é o complemento de D com respeito à última, definimos:

$$H : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

Com H sendo o operador auto-adjunto associado ao operador de multiplicação por $h(m)$ por Transformada de Fourier em $L^2(M, dm)$; segue que D é o domínio de forma de H e, é claro:

$$\langle f, g \rangle_1 = \langle f, g \rangle + \left\langle H^{\frac{1}{2}}f, H^{\frac{1}{2}}g \right\rangle$$

para toda f e g em $\text{Quad}(H)$, e assim, (iii) \rightarrow (i).

Lema 2.5–demonstração: Sejam a e b reais tais que $aId \leq A_n \leq bId$ para todo n . Seja:

$$B_n = A^{-\frac{1}{2}} A_n A^{-\frac{1}{2}}$$

o qual está bem definido, pois A é auto-adjunto, positivo e limitado (ver [29]). Assim:

$$B_n \leq B_{n+1} \leq Id$$

sendo Id o operador identidade do espaço de Hilbert em questão. Também, da hipótese de convergência fraca, temos

$$B_n \rightarrow Id \text{ (fracamente).}$$

Logo, por Polarização, segue que

$$B_n \rightarrow Id \text{ (fortemente).}$$

Assim, o mesmo é válido para (A_n) , que converge para A .

Lema 3.3 (Lema Final) *(convergência forte no sentido do resolvente implica em convergência forte no sentido da dinâmica):* Seja (H_n) como nas hipóteses do Teorema de Kato. Então, se $R_n(a) = (H_n - a)^{-1}$, segue que, para $0 \leq t \leq a$:

$$\begin{aligned} (\forall a (-a \leq 0) \forall f (f \in \bigcap_n \text{Dom}(H_n))) \rightarrow (\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n(a)f - R(a)\| = 0) \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{-iH_n t} f - e^{-iH t} f\| = 0 \end{aligned}$$

Demonstração: Se é válida a convergência forte no sentido do resolvente e se, $\phi(H_n)$ é contínua e limitada, no caso, $\phi \equiv e^{itH_n}$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi(H_n) - \phi(H)\| = 0$$

Por esse resultado (ver [21]), segue o Lema Final. \square

Capítulo 4

Conclusão

O estudo realizado nesse trabalho foi motivado pela necessidade de se buscar uma abordagem mais matemática e livre de psicologismos já amplamente presentes na análise feita desde o primeiro artigo concernente ao EAB aos dias de hoje. Apesar de haver alguma iniciativa nesse sentido, muito há a ser feito até que se tenha uma base lógica rica o suficiente para se chegar a conclusões definitivas a respeito do EAB. A proposta que o professor César e eu colocamos no fim do primeiro capítulo mostra-se como uma primeira tentativa mais realista para o estudo do EAB. A própria questão referente aos experimentos deve ser repensada e analisada de maneira crítica, pois para assumir que os experimentos são inquestionáveis, estes devem ser claros o suficiente para que possam ser reproduzidos em qualquer laboratório bem provido de recursos. Já, a análise histórico-filosófica do primeiro capítulo tem como intuito melhor direcionar os estudos para que erros passados sejam evitados e para que o verdadeiro valor científico do problema possa ser atingido, i.e., que a verdade em ciência seja o mérito de se ter o EAB como parte integrante da Mecânica Quântica (ou não), ao invés de se modificar tal abrangente ramo da física sem saber de sua verdadeira necessidade.

Referências Bibliográficas

- [1] Dąbrowski, L. Šťoviček, P.: Aharonov-Bohm effect with δ -type interaction. *J. Math. Phys.* **39** (1998), no. 1, 47–62.
- [2] Bohm, D., Aharonov, Y.: Significance of electromagnetic Potentials in the Quantum theory. *Phys. Rev.* **115**, 485-491 (1959).
- [3] Adami, R., Teta, A. On the Aharonov-Bohm Hamiltonian. *Lett. Math. Phys.* **43** (1998), no. 1, 43–53.
- [4] Bohm, D., Aharonov, Yakir.: Further Considerations on Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. *Phys. Rev.* **123**, 1551-1524 (1961).
- [5] Casati, G., Guarneri, Italo: Aharonov-Bohm Effect from the Hydrodynamical Viewpoint: *Phys. Rev.* **42** , 1579-1581 (1979).
- [6] Aharonov, Y.: *Non Local Phenomena and the Aharonov-Bohm Effect* (Oxford Press.) **49**, 217-227 (1985).
- [7] Merzbacher, E.: Single Valuednes of Wave Functions. *Amer. j. Phys.* **30**, 237-247 (1962).
- [8] Ruijsenaars, S. N. M.: *The Aharonov Bohm Effect and Scattering Theory.* **1**, 1-33 (1983).
- [9] Bocchieri, P. K. L.: Against the existence of the Aharonov Bohm Effect. *Fundamentals of Quantum Mechanics*, Ed.: Gorini, V., Frigerio, A. (Nato Asi Series), Series B Phys. Series B. (1986).

- [10] Loinger, A.: Again An Old Stuff: The Aharonov Bohm Effect. Fundamentals of Quantum Mechanics, Ed.: Gorini, V., Frigerio, A. (Nato Asi Series), Series B Phys. Series B. (1986).
- [11] Peshkin, M.: The Aharonov-Bohm Effect: Why it Cannot Be Eliminated From Quantum Mechanics. Phys. Rep. **80**, 375-386 (1981).
- [12] Rogério, César: Introdução à Análise Funcional(IMPA), pag 170, 171 (2001).
- [13] Neuman, J. V.: Mathematical Foundations of Quantum Mechanics(Prindeton Series),(1935).
- [14] Dirac, P.A.M.: The Principles of Quantum Mechanics (Claredon Press-Oxford),(1957).
- [15] Magni, C. Valz-Griz, F.: Can elementary quantum mechanics explain the Aharonov-Bohm Effect?.Amer. Inst. Phys **36**, 177-186 (1995).
- [16] Miyazawa, M.: Procc. 10th Hawaii Conf. on High energy Phisics, Hawaii, pág. 441, (1985).
- [17] Moelenstedt, G. Bayth, W.: Phys. B1. **18** pag.299 (1962).
- [18] Feynman, R. P.: Lectures on Physics (Addison Wesley Publishers), Vol 2., (1964).
- [19] Davies, E. B.: One-Parameter SemiGroups (Academic Press), pages 98, 99, 100, 105 (1980).
- [20] Sakuray, Y.: Advanced Quantum Mechanics **72**, (1993).
- [21] Kato, T. : Perturbation Theory For Linear Operators Springer Verlag, pag 251-286 (1980).
- [22] Penrose, R.: Quantum Concepts in Space And Time (Oxford Science Publications) (1986).
- [23] Anandan, Y.: Quantum Coherence (Cambridge Press) **165**, 201-205 (1994).

- [24] Tonomura, A., Peshkin, M.: The Aharonov-Bohm Effect (Lecture Notes on Physics), Springer, (1989).
- [25] Miyazawa, M.: Procc. 10th Hawaii Conf. on High Energy Physics, Hawaii, pág. 441, (1985).
- [26] D’Espagnat, B.: Conceptual Foundations of Quantum Mechanics, Perseus Books, (1999).
- [27] Popper, K.: A Lógica da Pesquisa Científica, Ed. Cultrix, (1972).
- [28] Omnès, R.: The interpretation of Quantum Mechanics, Princeton Series in Physics, (1994).
- [29] Kato, T. : Perturbation Theory For Linear Operators Springer Verlag, pag 54-55 (1980).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)