

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Hipoeliticidade Global e Vetores Simultaneamente Aproximáveis

Jacson Simsen

Orientador: Prof. Dr. Gerson Petronilho

Dissertação apresentada ao Programa
de Pós-Graduação em Matemática da
UFSCar como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em
Matemática

São Carlos - SP

Agosto de 2003

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

S614hg

Simsen, Jacson.

Hipoeliticidade global e vetores simultaneamente aproximáveis / Jacson Simsen. -- São Carlos : UFSCar, 2003.

50 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2003.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Hipoeliticidade global. 3. Séries de Fourier. 4. Estimativas $-L^2$. 5. Vetores simultaneamente aproximáveis. I. Título.

CDD: 515.353 (20^a)

À minha amável e maravilhosa esposa Mariza.

Agradecimentos

À Deus pela oportunidade de vida.

À Mariza, minha adorável esposa, pelo companherismo, amor, carinho e incentivo.

Aos meus pais pela educação, formação moral, apoio, incentivo e por todo amor e carinho que tem por mim.

Ao meu orientador Prof. Dr. Gerson Petronilho, pelos ensinamentos matemáticos, pela sua paciência e pela orientação deste trabalho.

Aos meus irmãos Lírio, Marilene e Mareli, por todo amor e carinho que tem por mim.

Aos amigos Clério, Marcelo, Maurício, Kelly, Marcos, Josiane, Ivo, Streck, Sônia, Marquinhos, Luiza, Francisco, Chiquinho, Tamara, Jiuliano, Cristhian e Marcelo Japonês, pela amizade e companhia.

Aos amigos do PPG-M pelo bom ambiente de trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, em especial, ao Adalberto Panobianco Bergamasco, João Sampaio, Cezar Kondo, Dirceu Penteado, Gerson Petronilho e César Rogério de Oliveira, pelos ensinamentos e por darem sentido à palavra Professor.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSM, em especial, ao Maurício Fronza da Silva e ao João Batista Peneireiro, que mais do que professores foram e continuam sendo amigos.

Ao professor Paulo Caetano, pelas discussões matemáticas.

Ao Renato pelas discussões e ajuda nos comandos do Latex.

À secretária Célia, pela paciência e disposição em sempre nos ajudar.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Sumário

Introdução	1
1 Pré - Requisitos	3
1.1 Notações e Alguns Resultados	3
1.2 Espaços das Funções 2π -periódicas	6
1.2.1 Série de Fourier em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$	7
1.2.2 Série Parcial de Fourier em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$	8
1.3 Espaço das Distribuições 2π -periódicas	9
1.3.1 Série de Fourier em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$	10
1.3.2 Série Parcial de Fourier em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$	13
1.4 Outros Resultados	15
2 Hipoeliticidade Global e Aproximações Simultâneas	17
2.1 Definições e Exemplos	17
2.2 Teorema Central	25
2.2.1 Necessidade	25
2.2.2 Suficiência	29
3 Hipoeliticidade Global para certas Classes de Sublaplacianos	43
Referências Bibliográficas	49

Resumo

Uma condição necessária e suficiente é dada para que um operador soma de quadrados seja globalmente hipoelítico. Esta condição é expressa em termos de propriedades de aproximações Diofantinas dos coeficientes. A prova do teorema é baseada em estimativas L^2 .

Abstract

A necessary and sufficient condition is given for a sum of squares operator to be globally hypoelliptic. This condition is expressed in terms of Diophantine approximation properties of the coefficients. The proof of the Theorem is based on L^2 - estimates.

Introdução

Estamos interessados em estudar a hipoeliticidade global, isto é, a regularidade C^∞ das soluções, de uma classe de operadores diferenciais parciais lineares de segunda ordem, dados como soma de quadrados, de campos vetoriais reais, ou seja, quando P é dado por:

$$P = -\Delta_t - \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \partial_{x_j} \right)^2 \quad (1)$$

sendo que $(t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n) = (t, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$ e $a_j(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, com $a_j(t)$ a valores reais.

Para ser mais preciso, recordemos a definição de hipoeliticidade global. Dizemos que P é globalmente hipoelítico, (GH), se as condições $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^N)$ e $Pu \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^N)$ implicam que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^N)$.

Este nosso estudo foi baseado no artigo **Global Hypoellipticity and Simultaneous Approximability**, de Himonas, A. A. e Petronilho, G. (ver [HP]).

A organização desta dissertação foi elaborada como segue:

No capítulo 1 apresentamos os pré-requisitos necessários para o bom entendimento deste trabalho.

No capítulo 2 damos a definição de vetores simultaneamente aproximáveis e damos uma condição necessária e suficiente para que o operador (1) seja globalmente hipoelítico. Esta condição é expressa em termos de pro-

priedades diofantinas dos coeficientes de P . (ver página 25).

Um modelo para a classe (1) é dado por $L = -\partial_t^2 - a^2(t)\partial_x^2$, sendo que $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $a(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais. Em [FO] foi provado que L é globalmente hipoelítico em \mathbb{R}^2 se, e somente se, $a \not\equiv 0$.

Para mais resultados sobre hipoeliticidade global sugerimos ao leitor as referências [GW], [H1], [HP1], [M].

Capítulo 1

Pré - Requisitos

Neste capítulo apresentamos uma série de definições, notações e resultados utilizados ao longo deste trabalho. Salientamos que as demonstrações dos resultados apresentados neste capítulo quando forem omitidas terão referências para tais.

1.1 Notações e Alguns Resultados

Apresentaremos abaixo algumas notações utilizadas nesta dissertação, juntamente com uma explicação breve do seu significado.

\doteq igual por definição;

$x \cdot \xi$ é produto escalar usual;

$[x]$ menor inteiro maior ou igual a x ;

$\frac{\partial}{\partial x_j} = \partial_{x_j}$ derivada parcial em relação x_j ;

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$;

$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, sendo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $D_j^{\alpha_j} = \frac{1}{i} \partial_{x_j}^{\alpha_j}$, para $j = 1, \dots, n$;

$\mathbb{N} \doteq \{0, 1, 2, \dots\}$;

$\mathbb{N}^* \doteq \{1, 2, \dots\}$;

■ fim da demonstração.

Observação: Usaremos a letra C para representar diferentes constantes.

Consideremos $N \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{Z}^m$, $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $|\tau| = \sqrt{\tau_1^2 + \dots + \tau_m^2}$ e $\|\tau\| = |\tau_1| + \dots + |\tau_m|$. Lembremos que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$, $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!$, $\tau^\alpha = \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} \dots \tau_m^{\alpha_m}$. Notemos que $|\tau^\alpha| = |\tau_1|^{\alpha_1} |\tau_2|^{\alpha_2} \dots |\tau_m|^{\alpha_m}$.

Afirmção 1.1 $|\tau|^N \leq \|\tau\|^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} |\tau^\alpha|$

Demonstração: É fácil mostrar que $|\tau| \leq \|\tau\|$. Logo $|\tau|^N \leq \|\tau\|^N$. Resta mostrarmos que $\|\tau\|^N \stackrel{(*)}{=} \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} |\tau^\alpha|$.

caso m=1: trivial.

caso m=2:

$$\begin{aligned} \|\tau\|^N &= (|\tau_1| + |\tau_2|)^N \\ &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} |\tau_1|^{N-k} |\tau_2|^k \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{N!}{(N-k)!k!} |\tau_1|^{N-k} |\tau_2|^k \\ &= \sum_{j+k=N} \frac{N!}{j!k!} |\tau_1|^j |\tau_2|^k \\ &= \sum_{|(\alpha_1, \alpha_2)|=N} \frac{N!}{\alpha_1! \alpha_2!} |\tau^{(\alpha_1, \alpha_2)}|. \end{aligned}$$

Suponhamos que vale a igualdade (*) para $m = n - 1$. Note que

$$\begin{aligned} (|\tau_1| + |\tau_2| + \dots + |\tau_{n-1}| + |\tau_n|)^N &= ((|\tau_1| + \dots + |\tau_{n-1}|) + |\tau_n|)^N \\ &= \sum_{k+j=N} \frac{N!}{k!j!} (|\tau_1| + \dots + |\tau_{n-1}|)^k |\tau_n|^j \\ &= \sum_{k+j=N} \frac{N!}{k!j!} \sum_{|\beta|=k} \frac{k!}{\beta!} |\tau_1|^{\beta_1} |\tau_2|^{\beta_2} \dots |\tau_{n-1}|^{\beta_{n-1}} |\tau_n|^j \\ &= \sum_{|\beta|+j=N} \frac{N!}{\beta!j!} |\tau_1|^{\beta_1} |\tau_2|^{\beta_2} \dots |\tau_{n-1}|^{\beta_{n-1}} |\tau_n|^j \\ &= \sum_{|(\alpha_1, \dots, \alpha_n)|=N} \frac{N!}{\alpha!} |\tau^\alpha|. \end{aligned}$$

■

Lema 1.1 *Dado $N \in \mathbb{N}$, existe $C_N > 0$ tal que*

$$|\tau|^N |\xi|^N \geq C_N |(\tau, \xi)|^N, \quad \forall (\tau, \xi) \in (\mathbb{Z}^m \setminus 0) \times (\mathbb{Z}^n \setminus 0). \quad (1.1)$$

Demonstração: Lembremos que $|(\tau, \xi)| = \sqrt{|\tau|^2 + |\xi|^2}$.

Definindo $\|(\tau, \xi)\| \doteq |\tau| + |\xi|$, vemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|(\tau, \xi)\| \leq |(\tau, \xi)| \leq \|(\tau, \xi)\|. \quad (1.2)$$

Observemos que, para $\tau \neq 0$ e $\xi \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} \|(\tau, \xi)\|^N &= (|\tau| + |\xi|)^N = \sum_{\ell=0}^N \binom{N}{\ell} |\tau|^{N-\ell} |\xi|^\ell \\ &= |\tau|^N |\xi|^N \left[\frac{1}{|\xi|^N} + \binom{N}{1} \frac{1}{|\tau||\xi|^{N-1}} + \cdots + \binom{N}{N-1} \frac{1}{|\tau|^{N-1}|\xi|} + \frac{1}{|\tau|^N} \right] \\ &\leq |\tau|^N |\xi|^N \left[1 + \binom{N}{1} + \cdots + \binom{N}{N-1} + 1 \right] \\ &= C'_N |\tau|^N |\xi|^N. \end{aligned}$$

Assim,

$$|\tau|^N |\xi|^N \geq C_N \|(\tau, \xi)\|^N, \quad \tau \neq 0, \xi \neq 0. \quad (1.3)$$

De (1.2) e (1.3) segue que

$$|\tau|^N |\xi|^N \geq C_N |(\tau, \xi)|^N, \quad \tau \neq 0, \xi \neq 0. \quad \blacksquare$$

A Fórmula de Leibniz

Sejam $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$, temos

$$\partial^\alpha (f.g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta g, \quad (1.4)$$

sendo que

$$\binom{\alpha}{\beta} \doteq \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)! \beta!}$$

e $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$.

1.2 Espaços das Funções 2π -periódicas

Definição 1.1 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis definidas no \mathbb{R}^n a valores complexos.

Definição 1.2 $C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções contínuas no \mathbb{R}^n , 2π -periódicas em cada variável a valores complexos.

Definição 1.3 $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \doteq C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções infinitamente diferenciáveis no \mathbb{R}^n , 2π -periódicas em cada variável e a valores complexos.

Definição 1.4 Sejam $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que φ_j converge para φ em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $D^\alpha \varphi_j \rightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em \mathbb{R}^n .

Esta noção de convergência coincide com a induzida pela métrica

$$d(\varphi, \psi) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(\varphi - \psi)}{1 + \rho_k(\varphi - \psi)},$$

na qual $\rho_k, k \in \mathbb{N}$, é a semi-norma definida por

$$\rho_k(\phi) \doteq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| \leq k}} |D^\alpha \phi(x)|, \quad (1.5)$$

para toda $\phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.1 $\varphi_j \rightarrow \varphi$ em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $\rho_k(\varphi_j - \varphi) \rightarrow 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Ver [Z].

1.2.1 Série de Fourier em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.5 *Seja $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ uma seqüência numérica em \mathbb{C} . Dizemos que a seqüência $\{a_k\}$ é rapidamente decrescente se para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $C = C(N) > 0$ tal que*

$$|a_k| \leq C|k|^{-N}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Observação 1.1 *Equivalentemente, $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ é rapidamente decrescente se para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $C = C(N) > 0$ tal que*

$$|a_k| \leq C(1 + |k|)^{-N}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^n.$$

Suponhamos que $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ satisfaça a Definição 1.5. Então dado $N \in \mathbb{N}$ existe $\tilde{C} = \tilde{C}(N) > 0$ tal que

$$|a_k| \leq \tilde{C}|k|^{-N}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Se $k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$ então temos $1 + |k| \leq |k| + |k| = 2|k|$, e portanto

$$|a_k| \leq \tilde{C}|k|^{-N} = 2^N \tilde{C} (2|k|)^{-N} \leq 2^N \tilde{C} (1 + |k|)^{-N}.$$

Definindo $C = \max\{|a_0|, 2^N \tilde{C}\}$ obtemos o desejado.

O outro lado é imediato, lembrando que $|k| < (1 + |k|)$. ■

Denotaremos o espaço das seqüências rapidamente decrescente por $\mathbf{S}(\mathbb{Z}^n; \mathbb{C})$.

Teorema 1.2 *Seja $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ uma seqüência rapidamente decrescente. Então*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{ik \cdot x}$$

converge em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e se

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e^{ik \cdot x}$$

então

$$a_k(f) \doteq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{-ik \cdot x} f(x) dx = a_k.$$

onde $a_k(f)$ é o k -ésimo coeficiente de Fourier de f e usaremos a notação $\widehat{f}(k) = a_k(f)$.

Demonstração: Ver [Z].

Teorema 1.3 *Seja $f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\pi, \pi]^n} e^{-ik \cdot x} f(x) dx$$

forma uma seqüência rapidamente decrescente e

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k) e^{ik \cdot x}.$$

Demonstração: Ver [Z].

A série $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k) e^{ik \cdot x}$ é chamada de série de Fourier de f .

1.2.2 Série Parcial de Fourier em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Sejam p, q e $n \in \mathbb{N}^*$ tais que $n = p + q$. Consideremos a soma direta $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$.

Entenderemos $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ como sendo $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$.

Teorema 1.4 *Seja $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}^q}$ uma seqüência de funções em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ tal que para cada $\alpha \in \mathbb{N}^p$ e $N \in \mathbb{N}$ existe $C > 0$ tal que*

$$|D^\alpha \phi_k(x)| \leq C(1 + |k|)^{-N}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^q \text{ e } x \in \mathbb{R}^p.$$

Então, a função $\psi : \mathbb{R}^{p+q} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\psi(x, y) \doteq \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} \phi_k(x) e^{iy \cdot k}$$

pertence a $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [Z].

Teorema 1.5 *Seja $\phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\phi(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^q} \phi_k(x) e^{iy \cdot k},$$

na qual $\phi_k \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$ e

$$\phi_k(x) = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{[-\pi, \pi]^q} \phi(x, y) e^{-iy \cdot k} dy.$$

Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{N}^p$ e $N \in \mathbb{N}$ existe $C > 0$ tais que

$$|D^\alpha \phi_k(x)| \leq C(1 + |k|)^{-N}, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}^q \text{ e } x \in \mathbb{R}^p.$$

Demonstração: Ver [Z].

As funções $\phi_k(x)$ são chamadas coeficientes parciais de Fourier de ϕ e usaremos a notação $\hat{\phi}(x, k) = \phi_k(x)$. A série $\sum_{k \in \mathbb{Z}^q} \hat{\phi}(x, k) e^{iy \cdot k}$ é chamada de série parcial de Fourier de ϕ em relação a y .

1.3 Espaço das Distribuições 2π -periódicas

Definição 1.6 *Um funcional linear $u : \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ é dito contínuo (ou seqüencialmente contínuo) se para qualquer seqüência $\{\phi_j\}$ convergindo para 0 em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então $u(\phi_j)$ converge para 0 em \mathbb{C} .*

Definição 1.7 *O espaço vetorial*

$$\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \doteq \{u : u \text{ é um funcional linear contínuo em } \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)\}$$

é chamado de espaço das distribuições 2π -periódicas, denominando $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ como distribuição 2π -periódica.

Teorema 1.6 *Seja $u : \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. São equivalentes:*

(i) *u é contínuo;*

(ii) *Existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que*

$$| \langle u, \phi \rangle | \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \phi(x)|, \quad \forall \phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Ver [Z].

Proposição 1.1 *Seja $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Então f define uma distribuição 2π -periódica por:*

$$\langle T_f, \varphi \rangle \doteq \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.8 *Uma seqüência $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ é convergente em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se existe $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que, para toda $\phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, a seqüência $\langle u_j, \phi \rangle$ converge para $\langle u, \phi \rangle$ em \mathbb{C} .*

Definição 1.9 *Sejam $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Definimos as distribuições periódicas $D^\alpha u$ e fu como sendo:*

$$\langle D^\alpha u, \phi \rangle \doteq (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n);$$

$$\langle fu, \phi \rangle \doteq \langle u, f\phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

1.3.1 Série de Fourier em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.10 *Seja $\{u_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ uma seqüência em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. A série $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} u_m$ é convergente em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ se a seqüência das reduzidas $S_l \doteq \sum_{|m| \leq l} u_m$ for convergente em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

Teorema 1.7 Se $u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} u_m \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então $D^\alpha u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} D^\alpha u_m$.

Demonstração: Ver [Z].

Definição 1.11 Uma seqüência numérica $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ é denominada de crescimento lento se existem constantes $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$|a_m| \leq C|m|^k, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Observação 1.2 A definição acima é equivalente a existirem constantes $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$|a_m| \leq C(1 + |m|)^k, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^n.$$

A demonstração é análoga à prova da observação 1.1.

Teorema 1.8 Seja $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ uma seqüência de crescimento lento. Então a série

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{ix \cdot m}$$

é convergente em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e se

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{ix \cdot m},$$

então

$$a_m = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle u, e^{-ix \cdot m} \rangle.$$

Demonstração: Ver [Z].

Teorema 1.9 Seja $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Se $\hat{u}(m) = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle u, e^{-ix \cdot m} \rangle$, então $\{\hat{u}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ é uma seqüência de crescimento lento e

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{u}(m) e^{ix \cdot m} \quad \text{em } \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Como $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, existem $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned}
|\widehat{u}(m)| &= \frac{1}{(2\pi)^n} |\langle u, e^{-ix \cdot m} \rangle| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D_x^\alpha e^{-ix \cdot m}| \\
&= \frac{C}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(-1)^{|\alpha|} m^\alpha e^{-ix \cdot m}| \\
&= \frac{C}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |m^\alpha| = \frac{C}{(2\pi)^n} \sum_{|\alpha| \leq k} |m^\alpha| \\
&\leq C' \sum_{|\alpha| \leq k} (1 + |m|)^{|\alpha|} \leq C'' (1 + |m|)^k,
\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}^n$.

Portanto $\{\widehat{u}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$ é uma seqüência de crescimento lento.

Pelo Teorema 1.8 existe $v \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ tal que $v = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}(m) e^{ix \cdot m}$.

Vamos mostrar que $u = v$ em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Para isto necessitamos do seguinte

Lema 1.2 *Seja $v(x) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\eta) e^{ix \cdot \eta}$, então $\widehat{v}(m) = \widehat{u}(m)$, $\forall m \in \mathbb{Z}^n$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\widehat{v}(m) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \langle v, e^{-ix \cdot m} \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \sum_{|\eta| \leq j} \widehat{u}(\eta) e^{ix \cdot \eta}, e^{-ix \cdot m} \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{|\eta| \leq j} \widehat{u}(\eta) \int_{[0, 2\pi]^n} e^{i(\eta - m) \cdot x} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\eta) \int_{[0, 2\pi]^n} e^{i(\eta - m) \cdot x} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \widehat{u}(m) (2\pi)^n = \widehat{u}(m).
\end{aligned}$$

■

Mostremos agora que $u = v$ em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Então $\varphi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{\varphi}(m) e^{ix \cdot m}$. Seja

$S_j(x) = \sum_{|m| \leq j} \widehat{\varphi}(m) e^{ix \cdot m}$, $j = 1, 2, \dots$. Temos que $S_j \rightarrow \varphi$ em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.

Como $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned}
\langle u, \varphi \rangle &= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle u, S_j \rangle \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle u, \sum_{|m| \leq j} \widehat{\varphi}(m) e^{ix \cdot m} \rangle \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq j} \widehat{\varphi}(m) \langle u, e^{ix \cdot m} \rangle \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq j} \widehat{\varphi}(m) \langle v, e^{ix \cdot m} \rangle \\
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle v, S_j(x) \rangle = \langle v, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $u = v = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}(m) e^{ix \cdot m}$ em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. ■

Os números complexos $\widehat{u}(m)$ são chamados de coeficientes de Fourier de u . A série $\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}(m) e^{ix \cdot m}$ é chamada de série de Fourier de u .

1.3.2 Série Parcial de Fourier em $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$

Sejam p, q e $n \in \mathbb{N}^*$ tais que $n = p + q$ e $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \oplus \mathbb{R}^q$.

Teorema 1.10 *Se $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ então*

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} u_m(x) e^{iy \cdot m},$$

sendo que $u_m \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}_x^p)$, dada por

$$\langle u_m, \varphi(x) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^q} \langle u, \varphi(x) e^{-iy \cdot m} \rangle,$$

com $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}_x^p)$. Além disso, para cada $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}_x^p)$, $\left\{ \langle u_m, \varphi(x) \rangle \right\}_{m \in \mathbb{Z}^q}$ é uma seqüência de crescimento lento.

Demonstração: Ver [Z].

Teorema 1.11 *Seja $\{u_m\}_{m \in \mathbb{Z}^q}$ uma seqüência de $\mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^p)$, satisfazendo a seguinte condição:*

Existe $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$| \langle u_m, \varphi \rangle | \leq C \rho_k(\varphi)(1 + |m|)^k,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}_x^p)$ e $m \in \mathbb{Z}^q$, sendo ρ_k a semi-norma definida em (1.5).

$$\text{Então } u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^q} u_m(x) e^{iy \cdot m} \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Ver [Z].

As distribuições u_m são chamadas de coeficientes parciais de Fourier de u e usaremos a notação $\widehat{u}(x, m) = u_m(x)$. A série $\sum_{m \in \mathbb{Z}^q} \widehat{u}(x, m) e^{iy \cdot m}$ é chamada de série parcial de Fourier de u em relação a y .

Consideremos o operador $P(t, \partial_t, \partial_x) = \sum_{|(\alpha, \beta)| \leq m+n} a_{\alpha, \beta}(t) \partial_t^\alpha \partial_x^\beta$, sendo $(t, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$ e $a_{\alpha, \beta}(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$. Usemos a notação

$$P(t, \partial_t, \xi) = \sum_{|(\alpha, \beta)| \leq m+n} a_{\alpha, \beta}(t) (i\xi)^\beta \partial_t^\alpha.$$

Afirmção 1.2 $\widehat{Pu}(t, \xi) = P(t, \partial_t, \xi) \widehat{u}(t, \xi)$, sendo que $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Demonstração: De fato, seja $\gamma \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}_t^m)$ qualquer.

$$\begin{aligned} \langle \widehat{Pu}(t, \xi), \gamma(t) \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^n} \langle Pu, \gamma(t) e^{-ix \cdot \xi} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|(\alpha, \beta)| \leq m+n} \langle a_{\alpha, \beta}(t) \partial_t^\alpha \partial_x^\beta u, \gamma(t) e^{-ix \cdot \xi} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|(\alpha, \beta)| \leq m+n} \langle \partial_t^\alpha \partial_x^\beta u, a_{\alpha, \beta}(t) \gamma(t) e^{-ix \cdot \xi} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|(\alpha, \beta)| \leq m+n} (-1)^{|\alpha|} \langle \partial_x^\beta u, \partial_t^\alpha [a_{\alpha, \beta}(t) \gamma(t)] e^{-ix \cdot \xi} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|(\alpha, \beta)| \leq m+n} (-1)^{|\alpha| + |\beta|} \langle u, \partial_t^\alpha [a_{\alpha, \beta}(t) \gamma(t)] (-i\xi)^\beta e^{-ix \cdot \xi} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|(\alpha, \beta)| \leq m+n} (-1)^{|\alpha| + 2|\beta|} \langle u, \partial_t^\alpha [a_{\alpha, \beta}(t) \gamma(t)] (i\xi)^\beta e^{-ix \cdot \xi} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{|(\alpha, \beta)| \leq m+n} (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial_t^\alpha [a_{\alpha, \beta}(t) \gamma(t)] (i\xi)^\beta e^{-ix \cdot \xi} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq m+n} (-1)^{|\alpha|} \langle \widehat{u}(t, \xi), \partial_t^\alpha [a_{\alpha,\beta}(t)\gamma(t)](i\xi)^\beta \rangle \\
&= \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq m+n} \langle \partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi), a_{\alpha,\beta}(t)\gamma(t)(i\xi)^\beta \rangle \\
&= \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq m+n} \langle a_{\alpha,\beta}(t)(i\xi)^\beta \partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi), \gamma(t) \rangle \\
&= \langle \sum_{|(\alpha,\beta)| \leq m+n} a_{\alpha,\beta}(t)(i\xi)^\beta \partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi), \gamma(t) \rangle \\
&= \langle P(t, \partial_t, \xi)\widehat{u}(t, \xi), \gamma(t) \rangle .
\end{aligned}$$

■

1.4 Outros Resultados

Definição 1.12 *Seja P um operador diferencial parcial linear, ODPL, com coeficientes pertencentes a $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. P é dito ser globalmente hipoelítico, (GH), se as condições $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ e $Pu \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$ implicam que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$.*

Definição 1.13 *Seja $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}^n)$. Definimos*

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{[-\pi, \pi]^n} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Definição 1.14 *Um número irracional α é de Liouville se, para quaisquer $C > 0$ e $K > 0$ existe $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, $q \neq 0$, tais que*

$$|p - \alpha q| < \frac{C}{|q|^K} .$$

Exemplo: $\alpha \doteq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ é um número de Liouville. (Ver [F]).

Como consequência temos a seguinte definição:

Definição 1.15 *Um número irracional α é não-Liouville se existem $C > 0$ e $K > 0$ tais que*

$$|p - \alpha q| \geq \frac{C}{|q|^K}, \quad \forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2, \quad q \neq 0 .$$

Exemplo: $\alpha \doteq \sqrt{p}$, com p primo, é um número não-Liouville. (Ver [Z]).

Teorema 1.12 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e*

$$P = D_x - \alpha D_y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então P é (GH) se, e somente se, α é número irracional não-Liouville.

Demonstração: Ver [GW].

Teorema 1.13 *Seja $P = -\partial_t^2 - (a(t)\partial_x)^2$, sendo que $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ e $a(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais. Então P é (GH) se, e somente se, a função a não é identicamente nula.*

Demonstração: Ver [FO].

Teorema 1.14 *Seja $P = -\partial_t^2 - (\partial_{x_1} + a(t)\partial_{x_2})^2$, sendo que $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ e $a(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais. Então P é (GH) se, e somente se, a imagem de $a(t)$ contém um número não-Liouville.*

Demonstração: Ver [H1].

Capítulo 2

Hipoeliticidade Global e Aproximações Simultâneas

Neste capítulo daremos uma condição necessária e suficiente para que um operador soma de quadrados de campos vetoriais reais seja globalmente hipoelítico. Esta condição é expressa em função do conceito de vetores não simultaneamente aproximáveis dada a seguir.

2.1 Definições e Exemplos

Definição 2.1 *Uma coleção de vetores v_1, \dots, v_ℓ em \mathbb{R}^d é **não simultaneamente aproximável (não SA)** se existem $C > 0$ e $K > 0$ tais que para quaisquer $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ e $\xi \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ temos*

$$|\eta_j - v_j \cdot \xi| \geq \frac{C}{|\xi|^K} \quad \text{para algum } j = 1, \dots, \ell. \quad (2.1)$$

Observação 2.1 *Quando $\ell = 1$, esta é a definição de um vetor não-Liouville. Quando $d = 1$, esta é a definição de uma coleção de números reais v_1, \dots, v_ℓ não simultaneamente aproximáveis (veja [HP1]). Se $\ell = 1$ e $d = 1$ então esta é a definição de um número não - Liouville (ver definição1.15).*

Observação 2.2 *Segue da Definição 2.1 que uma coleção de vetores v_1, \dots, v_ℓ em \mathbb{R}^d é **simultaneamente aproximável (SA)** se, e somente se, para quaisquer $C > 0$ e $K > 0$ existem $\xi \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ e $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ tais que*

$$|\eta_j - v_j \cdot \xi| < \frac{C}{|\xi|^K}, \quad \forall j = 1, \dots, \ell. \quad (2.2)$$

Novamente, quando $\ell = 1$ esta é a definição de um vetor Liouville, e quando $d = 1$ esta é a definição de uma coleção de números reais v_1, \dots, v_ℓ ser simultaneamente aproximável. Se $\ell = 1$ e $d = 1$ então esta é a definição de um número de Liouville.

Exemplos: Iniciemos com exemplos de vetores não-Liouville.

Seja $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ números algébricos e tais que $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ são linearmente independentes sobre os racionais. Então segue de [S] que existem $C > 0$ e $K > 0$ tais que

$$|\eta - v \cdot \xi| \geq \frac{C}{|\xi|^K}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0, \quad \forall \eta \in \mathbb{Z},$$

ou seja, v é um vetor não-Liouville.

Observemos que se v_1 é um vetor em \mathbb{R}^d não-Liouville então v_1, v_2, \dots, v_ℓ são vetores (não SA) para quaisquer vetores v_2, \dots, v_ℓ em \mathbb{R}^d .

Observemos que se α e β são números racionais então α e β são números (SA).

Temos também que se os números $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{\ell 1}$ são (SA) então os vetores $v_1 \doteq (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1d}), \dots, v_\ell \doteq (\alpha_{\ell 1}, \dots, \alpha_{\ell d})$ são (SA), para quaisquer números reais α_{jk} , $j = 1, \dots, \ell$, $k = 2, \dots, d$. (Ver [HP1]).

É fácil ver que se α é um número não-Liouville, então α, β são (não SA), para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$.

Observemos também que se um vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é não-Liouville então todas as suas coordenadas são números não-Liouville. Assim, con-

siderando $v \doteq (\beta_1, \beta_2)$, sendo β_2 um número de Liouville, temos que v é um vetor Liouville.

Afirmção 2.1 *Se uma coleção de vetores v_1, \dots, v_ℓ em \mathbb{R}^d é (SA) então existem seqüências $\{\xi_n\} = \{(\xi_{1,n}, \dots, \xi_{d,n})\}$, $\xi_n \in \mathbb{Z}^d \setminus 0$ e $\{\eta_n\} = \{(\eta_{1,n}, \dots, \eta_{\ell,n})\}$, $\eta_n \in \mathbb{Z}^\ell$ tais que $|\eta_{j,n} - v_j \cdot \xi_n| < \frac{1}{|\xi_n|^n}$, $\forall j = 1, \dots, \ell$ e $|\xi_n| \geq 2$, $n = 1, 2, \dots$.*

Demonstração: Como v_1, \dots, v_ℓ são (SA) então dados $C = \frac{1}{2^{n+1}}$ e $K = n$ existem $\tilde{\eta}_n$ e $\tilde{\xi}_n$ tais que

$$|\tilde{\eta}_{j,n} - v_j \cdot \tilde{\xi}_n| < \frac{1}{|\tilde{\xi}_n|^n}, \quad \forall j = 1, \dots, \ell.$$

Para os valores de n tais que $|\tilde{\xi}_n| = 1$ definimos $\xi_n = 2\tilde{\xi}_n$ e $\eta_n = 2\tilde{\eta}_n$. Assim,

$$|\eta_{j,n} - v_j \cdot \xi_n| = 2|\tilde{\eta}_{j,n} - v_j \cdot \tilde{\xi}_n| < 2 \frac{1}{|\tilde{\xi}_n|^n} = \frac{\frac{1}{2^n} 2^n}{2^n |\tilde{\xi}_n|^n} = \frac{1}{|2\tilde{\xi}_n|^n} = \frac{1}{|\xi_n|^n}.$$

Além disso,

$$|\xi_n| = |2\tilde{\xi}_n| = 2|\tilde{\xi}_n| = 2 \cdot 1 = 2.$$

Logo as seqüências

$$\xi_n = \begin{cases} \tilde{\xi}_n, & \text{se } |\tilde{\xi}_n| \geq 2 \\ 2\tilde{\xi}_n, & \text{se } |\tilde{\xi}_n| = 1 \end{cases}$$

e

$$\eta_n = \begin{cases} \tilde{\eta}_n, & \text{se } |\tilde{\xi}_n| \geq 2 \\ 2\tilde{\eta}_n, & \text{se } |\tilde{\xi}_n| = 1 \end{cases}$$

satisfazem o desejado. ■

Observemos que na Afirmção 2.1 existem duas possibilidades:

- i) Existem infinitos índices n tais que os ξ'_n s são dois a dois distintos;
- ii) Os ξ'_n s assumem um número finito de valores.

Se ocorrer *i*) então podemos definir novas seqüências $\{\tilde{\xi}_n\}$ e $\{\tilde{\eta}_n\}$ satisfazendo

$$|\tilde{\eta}_{j,n} - v_j \cdot \tilde{\xi}_n| < \frac{1}{|\tilde{\xi}_n|^n}, \quad \forall j = 1, \dots, \ell \quad (2.3)$$

com $|\tilde{\xi}_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$.

De fato, seja $J \doteq \{n \in \mathbb{N} : \text{os } \xi_n' \text{ s são dois a dois distintos}\}$ e consideremos $\tilde{\xi}_n = \xi_n$, $\tilde{\eta}_n = \eta_n$, $n \in J$. Temos que (2.3) segue da Afirmação 2.1 e da definição de $\tilde{\xi}_n$ e $\tilde{\eta}_n$.

Mostremos que $|\tilde{\xi}_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$: Suponha que exista $M_0 > 0$ tal que para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ tal que $|\tilde{\xi}_n| \leq M_0$. Assim, temos:

dado $N = 1$, $\exists n_1 \geq 1$ tal que $|\tilde{\xi}_{n_1}| \leq M_0$.

dado $N = n_1 + 1$, $\exists n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ tal que $|\tilde{\xi}_{n_2}| \leq M_0$.

Continuando esse processo sucessivamente construímos uma subseqüência $\{\tilde{\xi}_{n_j}\}$ de $\{\tilde{\xi}_n\}$ tal que $|\tilde{\xi}_{n_j}| \leq M_0$, $\forall j = 1, 2, \dots$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\tilde{\xi}_{n_j} = \xi_{n_0}$ para uma infinidade de j 's, o que contradiz o fato de $\{\tilde{\xi}_{n_j}\}$ ser uma subseqüência de $\{\tilde{\xi}_n\}$. Logo $|\tilde{\xi}_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$. ■

Se ocorrer a situação *ii*) então podemos definir novas seqüências $\{\tilde{\xi}_n\}$ e $\{\tilde{\eta}_n\}$ com todos os termos dois a dois distintos satisfazendo

$$|\tilde{\eta}_{j,n} - v_j \cdot \tilde{\xi}_n| = 0 < \frac{1}{|\tilde{\xi}_n|^n}, \quad \forall j = 1, \dots, \ell \quad e \quad n = 1, 2, \dots$$

e pelo caso anterior $|\tilde{\xi}_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$.

De fato, segue de *ii*) que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_n = \xi_{n_0}$ para uma infinidade de n 's. Seja $J \doteq \{n \in \mathbb{N} : \xi_n = \xi_{n_0}\}$. Segue da Afirmação 2.1 que $|\xi_{n_0}| \geq 2$. Para $n \in J$ temos

$$|\eta_{j,n} - v_j \cdot \xi_{n_0}| < \frac{1}{|\xi_{n_0}|^n}, \quad \forall j = 1, \dots, \ell \quad .$$

Assim, para cada $j \in \{1, \dots, \ell\}$, tomando o limite quando $n \rightarrow +\infty$ obtemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_{j,n} = v_j \cdot \xi_{n_0}$$

e como $\eta_{j,n} \in \mathbb{Z}$ então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\eta_{j,n} = v_j \cdot \xi_{n_0}, \forall j \in \{1, \dots, \ell\} \quad e \quad \forall n \geq n_1.$$

Portanto $v_j \cdot \xi_{n_0} \in \mathbb{Z}$. Definimos $\tilde{\xi}_n = n\xi_{n_0}$, $n \geq n_1$ e $\tilde{\eta}_n = n\eta_n$, $n \geq n_1$. Assim, temos

1) $\tilde{\xi}_n \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, $\forall n \geq n_1$ e são dois a dois distintos.

2) $\tilde{\eta}_n = n\eta_n = (n\eta_{1,n}, \dots, n\eta_{\ell,n}) = (nv_1 \cdot \xi_{n_0}, \dots, nv_\ell \cdot \xi_{n_0}) \in \mathbb{Z}^\ell$ e são dois a dois distintos.

Além disso,

$$|\tilde{\eta}_{j,n} - v_j \cdot \tilde{\xi}_n| = |nv_j \cdot \xi_{n_0} - v_j \cdot n\xi_{n_0}| = |nv_j \cdot \xi_{n_0} - nv_j \cdot \xi_{n_0}| = 0$$

para todo $n \geq n_1$ e $j \in \{1, \dots, \ell\}$. Reindexando obtemos o desejado. \blacksquare

Logo, na Afirmação 2.1 podemos supor também que $|\xi_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Também observemos que a seqüência $\{\eta_n\}$ da Afirmação 2.1 satisfaz

$$|\eta_{j,n}| < 1 + |v_j| |\xi_n|, \forall j \in \{1, \dots, \ell\} \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

De fato,

$$|\eta_{j,n}| - |v_j| |\xi_n| \leq |\eta_{j,n}| - |v_j \cdot \xi_n| \leq |\eta_{j,n} - v_j \cdot \xi_n| < \frac{1}{|\xi_n|^n} \leq \frac{1}{2^n} < 1,$$

então $|\eta_{j,n}| < 1 + |v_j| |\xi_n|$, $\forall j \in \{1, \dots, \ell\} \quad e \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. \blacksquare

Levando em conta as observações feitas acima, podemos reescrever a Afirmação 2.1 da seguinte forma:

Lema 2.1 *Se uma coleção de vetores v_1, \dots, v_ℓ em \mathbb{R}^d é (SA) então existem seqüências $\{\xi_n\} = \{(\xi_{1,n}, \dots, \xi_{d,n})\}$, $\xi_n \in \mathbb{Z}^d \setminus 0$ e $\{\eta_n\} = \{(\eta_{1,n}, \dots, \eta_{\ell,n})\}$, $\eta_n \in \mathbb{Z}^\ell$ tais que $|\eta_{j,n} - v_j \cdot \xi_n| < \frac{1}{|\xi_n|^n}$, $\forall j = 1, \dots, \ell$ com $|\xi_n| \geq 2$, $n = 1, 2, \dots$, $|\xi_n| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ e $|\eta_{j,n}| < 1 + |v_j| |\xi_n|$, $\forall j \in \{1, \dots, \ell\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Também precisamos da seguinte

Definição 2.2 *Seja $(b_1(t), \dots, b_\ell(t))$ um vetor de funções a valores reais as quais são linearmente independentes sobre \mathbb{R} . Dizemos que um vetor de funções $(f_1(t), \dots, f_d(t))$ pertence a $(SA)^c(b_1, \dots, b_\ell)$ se as seguintes condições valem:*

- (1) $\{f_1, \dots, f_d\}$ está contido no gerado de $\{b_1, \dots, b_\ell\}$;
- (2) Os ℓ vetores colunas da matriz (λ_{jk}) na expressão

$$(f_1, \dots, f_d)^t = (\lambda_{jk})(b_1, \dots, b_\ell)^t$$

são vetores **não simultaneamente aproximáveis** em \mathbb{R}^d .

Observação 2.3 *Seja $(b_1(t), \dots, b_\ell(t))$ um vetor de funções a valores reais as quais são linearmente independentes sobre \mathbb{R} . Dizemos que um vetor de funções $(f_1(t), \dots, f_d(t))$ pertence a $(SA)(b_1, \dots, b_\ell)$ se as seguintes condições valem:*

- (1) $\{f_1, \dots, f_d\}$ está contido no gerado de $\{b_1, \dots, b_\ell\}$;
- (2) Os ℓ vetores colunas da matriz (λ_{jk}) na expressão

$$(f_1, \dots, f_d)^t = (\lambda_{jk})(b_1, \dots, b_\ell)^t$$

são vetores **simultaneamente aproximáveis** em \mathbb{R}^d .

Com o objetivo de esclarecer a condição que aparecerá no teorema central vamos analisar alguns exemplos.

Exemplo 1: Consideremos o operador $P_1 = -\partial_t^2 - (a_1(t)\partial_x)^2$, com $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ e $a_1(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais. Sabemos, pelo Teorema 1.13 (pag. 16), que P_1 é (GH) se, e somente se, $a_1 \not\equiv 0$. Observemos que $a_1 \not\equiv 0$ se, e somente se, a_1 é uma função linearmente independente em \mathbb{R} , (LI em \mathbb{R}).

Exemplo 2: Consideremos o operador $P_2 = -\partial_t^2 - (\partial_{x_1} + a_2(t)\partial_{x_2})^2$, com $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ e $a_2(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais. Então P_2 é (GH) se, e somente se, a imagem de a_2 contém um número não-Liouville. (Ver Teorema 1.14, pag. 16).

Suponha que a imagem de $a_2(t)$ contém um número não-Liouville.

1º caso: Se $a_2(t)$ é constante então $a_2 = \lambda.1$, com λ um número não-Liouville. Assim, a_2 pertence ao gerado pela função constante 1 com coeficiente λ que é um número não-Liouville e portanto é um vetor não simultaneamente aproximável.

2º caso: Se $a_2(t)$ é não constante temos que 1, a_2 são LI. De fato, se supormos que existe $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ tal que $\alpha.1 + \beta.a_2(t) = 0$, então teremos $\beta \neq 0$, pois se $\beta = 0$ então $\alpha = 0$. Logo teremos que $a_2(t) = \frac{-\alpha}{\beta} = \text{constante}$, o que nos dá uma contradição.

Teorema 2.1 *Seja $P = -\partial_t^2 - (\partial_{x_1} + a_2(t)\partial_{x_2} + a_3(t)\partial_{x_3})^2$, com $(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ e $a_2(t), a_3(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais. Então P é (GH) se, e somente se, vale uma das seguintes condições:*

- Se a_2 e a_3 são ambas constantes então (a_2, a_3) é um vetor não-Liouville.
- Se pelo menos uma entre as funções a_2 e a_3 é uma função não constante, então nenhuma delas pode ser escrita como uma combinação linear da outra e do número 1 com coeficientes que são (SA).

Demonstração: Ver [HP1]

Exemplo 3: Em \mathbb{R}^4 consideremos o seguinte operador:

$$P_4 = -\partial_t^2 - (\partial_{x_1} + a_2(t)\partial_{x_2} + a_3(t)\partial_{x_3})^2,$$

com $(t, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$ e $a_2(t), a_3(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ a valores reais.

1º caso : Suponhamos a_2 e a_3 constantes. Então segue do Teorema 2.1 que P_4 é (GH) se, e somente se, (a_2, a_3) é um vetor não-Liouville. Observemos que a condição acima pode ser escrita da seguinte forma: $a_1 \equiv 1 \neq 0$ é LI em \mathbb{R} e que a_2 e a_3 pertencem ao gerado por 1, isto é, $a_2 = a_2 \cdot 1$ e $a_3 = a_3 \cdot 1$. Notemos também que

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{2 \times 1} (1)_{1 \times 1}$$

com (a_2, a_3) um vetor não-Liouville e portanto é um vetor não simultaneamente aproximável.

2º caso : Uma entre as funções a_2 e a_3 não é constante. Suponhamos sem perda de generalidade que a_2 seja não constante. Segue do Teorema 2.1 que P_4 é (GH) se, e somente se, nenhuma delas pode ser escrita como combinação linear da outra e do número 1 com coeficientes que são (SA). Como a_2 é não constante então 1 e a_2 são LI sobre \mathbb{R} .

caso 2.1 : 1, a_2 e a_3 são LI. Assim, nenhuma entre a_2 e a_3 pode ser escrita como combinação linear da outra e do número 1.

caso 2.2 : 1, a_2 e a_3 são LD sobre \mathbb{R} . Observemos que neste caso a condição acima pode ser escrita da seguinte forma: $a_3 = \lambda a_2 + \beta \cdot 1$ e os números λ e β não são (SA). Logo, a_3 pertence ao gerado por $\{1, a_2\}$ e notemos que

$$(a_3)_{1 \times 1} = \begin{pmatrix} \beta & \lambda \end{pmatrix}_{1 \times 2} \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix}_{2 \times 1}$$

e os vetores $v_1 = \beta$ e $v_2 = \lambda$ não são (SA).

2.2 Teorema Central

Com as observações feitas nos três exemplos da seção anterior podemos enunciar nosso resultado central desta seção.

O que observamos nos três exemplos anteriores é que o número de funções LI, sobre \mathbb{R} , é importante bem como a forma que as funções restantes, que não são LI sobre \mathbb{R} , são escritas como combinação linear daquelas que são LI sobre \mathbb{R} .

Assim, dadas $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$ funções a valores reais denotaremos por k_0 o número de funções, entre $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$, que são LI sobre \mathbb{R} . Logo $0 \leq k_0 \leq n$.

Teorema 2.2 *Seja P um operador diferencial definido por*

$$P = -\Delta_t - \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \partial_{x_j} \right)^2 \quad (2.4)$$

em que $(t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n) = (t, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$ e $a_j(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, e são a valores reais. Suponhamos que $1 \leq k_0 \leq n - 1$. Então P é globalmente hipoeolítico (GH), em \mathbb{R}^{m+n} , se, e somente se, após uma possível renomeação das variáveis x_1, \dots, x_n e dos coeficientes correspondentes a_1, \dots, a_n , tivermos $(a_{k_0+1}, \dots, a_n) \in (SA)^c(a_1, \dots, a_{k_0})$.

2.2.1 Necessidade

Demonstração: Suponhamos que a condição dada no Teorema 2.2 não vale, isto é, $(a_{k_0+1}, \dots, a_n) \in (SA)(a_1, \dots, a_{k_0})$. Então,

$$a_m = \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k^m a_k, \quad m = k_0 + 1, \dots, n$$

e os vetores $(\lambda_k^{k_0+1}, \dots, \lambda_k^n)$, $k = 1, \dots, k_0$, são simultaneamente aproximáveis.

Assim o operador P toma a forma

$$P = -\Delta_t - \left(\sum_{k=1}^{k_0} a_k(t) \left(\partial_{x_k} + \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_k^m \partial_{x_m} \right) \right)^2. \quad (2.5)$$

Visto que os k_0 vetores $(\lambda_k^{k_0+1}, \dots, \lambda_k^n)$, $k = 1, \dots, k_0$ são simultaneamente aproximáveis, segue do Lema 2.1 que existem seqüências $\{\xi_\ell\} = \{(\xi_{k_0+1,\ell}, \dots, \xi_{n,\ell})\}$, $\xi_\ell \in \mathbb{Z}^{(n-k_0)} \setminus \{0\}$ e $\{\eta_\ell\} = \{(\eta_{1,\ell}, \dots, \eta_{k_0,\ell})\}$, $\eta_\ell \in \mathbb{Z}^{k_0}$, tais que

$$\left| \eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_k^m \xi_{m,\ell} \right| < |\xi_\ell|^{-\ell}, \quad (2.6)$$

para qualquer $k = 1, \dots, k_0$, com $|\xi_\ell| \rightarrow +\infty$ quando $\ell \rightarrow +\infty$.

Definimos $u(t, x) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \exp\{i(\eta_\ell \cdot x' - \xi_\ell \cdot x'')\}$, sendo que $x' = (x_1, \dots, x_{k_0})$, $x'' = (x_{k_0+1}, \dots, x_n)$.

Mostremos que $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n}) \setminus \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$: Note que podemos escrever

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^{m+n}} a_k \exp\{i(t, x) \cdot k\}$$

sendo que

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{se } k = k_\ell \doteq (0, \dots, 0, \eta_{1,\ell}, \dots, \eta_{k_0,\ell}, -\xi_{k_0+1,\ell}, \dots, -\xi_{n,\ell}), \ell = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{se } k \neq k_\ell, \forall \ell = 1, 2, \dots \end{cases}.$$

Temos que existe $C = 1$ e $K = 1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_k| \leq C|k|^K$, $\forall k \in \mathbb{Z}^{m+n}$.

Portanto $\{a_k\}$ é de crescimento lento. Logo pelo Teorema 1.8 segue que $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Temos também que $\{a_k\}$ não é rapidamente decrescente. Suponhamos que $\{a_k\}$ seja rapidamente decrescente, então para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ tal que $|a_k| \leq C_N|k|^{-N}$, $\forall k \in \mathbb{Z}^{m+n} \setminus 0$. Em particular $|a_{k_\ell}| = 1 \leq C_N|k_\ell|^{-N}$, $\forall \ell = 1, 2, \dots$. O que dá uma contradição, pois segue do Lema 2.1 que $|\xi_\ell| \rightarrow +\infty$ e portanto $C_N|k_\ell|^{-N} \rightarrow 0$ quando $\ell \rightarrow +\infty$. Daí pela contrapositiva do Teorema 1.3 segue que $u \notin \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Consideremos agora $L = L(t, \partial_x) \doteq \sum_{k=1}^{k_0} a_k(t) \left(\partial_{x_k} + \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_k^m \partial_{x_m} \right)$ e $E_\ell(x) \doteq \exp\{i(\eta_\ell \cdot x' - \xi_\ell \cdot x'')\}$. Temos

$$L(E_\ell)(t, x) = i \left[\sum_{k=1}^{k_0} a_k(t) \left(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_k^m \xi_{m,\ell} \right) \right] E_\ell \doteq ig_\ell(t) E_\ell(x)$$

implicando que

$$\begin{aligned} -L^2 E_\ell(t, x) &= -L(LE_\ell)(t, x) = -L(ig_\ell(t)E_\ell(x)) = -L(ig_\ell E_\ell)(t, x) \\ &= -ig_\ell(t)L(E_\ell)(t, x) = -ig_\ell(t)ig_\ell(t)E_\ell(x) = [g_\ell(t)]^2 E_\ell(x). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Logo, usando o Teorema 1.7 e (2.7) obtemos que

$$Pu = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{k_0} a_k(t) \left(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_k^m \xi_{m,\ell} \right) \right]^2 \exp\{i(\eta_\ell \cdot x' - \xi_\ell \cdot x'')\}.$$

Note que podemos escrever

$$Pu = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} b_\gamma(t) e^{ix \cdot \gamma}$$

sendo que

$$b_\gamma(t) = \begin{cases} \left[\sum_{k=1}^{k_0} a_k(t) \left(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_k^m \xi_{m,\ell} \right) \right]^2, & \text{se } \gamma = \tilde{k}_\ell \doteq (\eta_\ell, -\xi_\ell), \ell = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{se } \gamma \neq \tilde{k}_\ell, \forall \ell = 1, 2, \dots \end{cases}.$$

Mostremos agora que $Pu \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$. Para isso usaremos o Teorema 1.4. Queremos mostrar que dados $\alpha \in \mathbb{N}^m$ e $N \in \mathbb{N}$, existe $C_N > 0$ tal que

$$|\partial_t^\alpha b_\gamma(t)| \leq C_N |\gamma|^{-N}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}^m.$$

Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^m$ e $N \in \mathbb{N}$ dados.

Se $\gamma \neq \tilde{k}_\ell, \forall \ell = 1, 2, \dots$, temos

$$|\partial_t^\alpha b_\gamma(t)| = |\partial_t^\alpha 0| = 0 \leq |\gamma|^{-N}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}^m.$$

Se $\gamma = \tilde{k}_\ell, \ell = 1, 2, \dots$, então, por Leibnitz,

$$\begin{aligned}
|\partial_t^\alpha b_{\tilde{k}_\ell}(t)| &= \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k=1}^{k_0} \partial_t^{\alpha-\beta} a_k(t) \left(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_k^m \xi_{m,\ell} \right) \sum_{k=1}^{k_0} \partial_t^\beta a_k(t) \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_k^m \xi_{m,\ell} \right) \right| \\
&\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \sum_{k=1}^{k_0} |\partial_t^{\alpha-\beta} a_k(t)| \left| \left(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_k^m \xi_{m,\ell} \right) \right| \\
&\quad \cdot \sum_{k=1}^{k_0} |\partial_t^\beta a_k(t)| \left| \left(\eta_{k,\ell} - \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_k^m \xi_{m,\ell} \right) \right| \\
&\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} M_\alpha |\xi_\ell|^{-\ell} |\xi_\ell|^{-\ell}, \tag{2.8}
\end{aligned}$$

onde M_α é uma constante que depende dos coeficientes a_k e de α .

A demonstração será dividida em dois casos: $|\eta_\ell| = 0$ e $|\eta_\ell| \neq 0$.

Se $|\eta_\ell| = 0$ então $|\tilde{k}_\ell| = |\xi_\ell|$. Daí, segue de (2.8) que

$$\begin{aligned}
|\partial_t^\alpha b_{\tilde{k}_\ell}(t)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} M_\alpha |\xi_\ell|^{-2\ell} \leq C_\alpha \frac{1}{|\xi_\ell|^{2\ell}} \leq C_\alpha \frac{1}{|\tilde{k}_\ell|^{2\ell}} \\
&= C_\alpha \frac{1}{|\tilde{k}_\ell|^{2\ell-N}} \frac{1}{|\tilde{k}_\ell|^N} \leq C_{\alpha,N} \frac{1}{|\tilde{k}_\ell|^N},
\end{aligned}$$

pois $\frac{1}{|\tilde{k}_\ell|^{2\ell-N}} \rightarrow 0$ quando $\ell \rightarrow +\infty$.

Sabemos pelo Lema 2.1 que $|\eta_{j,\ell}| < 1 + |v_j||\xi_\ell|$, $j = 1, 2, \dots, k_0$. Considerando $C_1 = \max\{|v_1|, \dots, |v_{k_0}|\}$ temos que $|\eta_{j,\ell}| < 1 + C_1|\xi_\ell| \leq |\xi_\ell| + C_1|\xi_\ell| = (1 + C_1)|\xi_\ell| = C_2|\xi_\ell|$. Assim, $|\eta_\ell|^2 = \eta_{1,\ell}^2 + \dots + \eta_{k_0,\ell}^2 \leq k_0 C_2^2 |\xi_\ell|^2$. Portanto $|\eta_\ell| \leq C_3 |\xi_\ell|$. Logo

$$|\eta_\ell|^\ell \leq C_3^\ell |\xi_\ell|^\ell. \tag{2.9}$$

Se $|\eta_\ell| \neq 0$ segue de (2.9) que

$$|\xi_\ell|^{-\ell} \leq \frac{C_3^\ell}{|\eta_\ell|^\ell}. \tag{2.10}$$

Segue de (2.8) e (2.10) que

$$|\partial_t^\alpha b_{\tilde{k}_\ell}(t)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} M_\alpha |\xi_\ell|^{-\ell} |\eta_\ell|^{-\ell} C_3^\ell. \quad (2.11)$$

Sabemos do Lema 1.1 que dado $N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ tal que

$$|\eta|^{2N} |\xi|^{2N} \geq 2^{-N} |(\eta, \xi)|^{2N}, \quad \forall \eta \neq 0 \text{ e } \xi \neq 0.$$

Logo

$$|\eta_\ell|^{-\ell} |\xi_\ell|^{-\ell} \leq 2^\ell |(\eta_\ell, \xi_\ell)|^{-\ell}. \quad (2.12)$$

Segue de (2.11) e (2.12) que

$$\begin{aligned} |\partial_t^\alpha b_{\tilde{k}_\ell}(t)| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} M_\alpha 2^\ell |(\eta_\ell, \xi_\ell)|^{-\ell} C_3^\ell = C_\alpha \frac{(C_4)^\ell}{|\tilde{k}_\ell|^\ell} \\ &= C_\alpha C_4^N \frac{C_4^{\ell-N}}{|\tilde{k}_\ell|^{\ell-N} |\tilde{k}_\ell|^N} = C_\alpha C_4^N \left(\frac{C_4}{|\tilde{k}_\ell|} \right)^{\ell-N} \frac{1}{|\tilde{k}_\ell|^N}. \end{aligned}$$

Basta mostrar que $\left(\frac{C_4}{|\tilde{k}_\ell|} \right)^{\ell-N}$ é limitada. Como $|\tilde{k}_\ell| \rightarrow +\infty$ quando $\ell \rightarrow +\infty$ então existe $R > 0$ tal que $\frac{C_4}{|\tilde{k}_\ell|} < \frac{1}{2}$ se $\ell \geq R$. Consideremos $R_1 = \max\{R, N\}$.

Logo para $\ell \geq R_1$ temos

$$\left(\frac{C_4}{|\tilde{k}_\ell|} \right)^{\ell-N} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{\ell-N} \rightarrow 0 \text{ quando } \ell \rightarrow +\infty.$$

Logo $\left(\frac{C_4}{|\tilde{k}_\ell|} \right)^{\ell-N}$ é limitada.

Logo pelo Teorema 1.4 concluímos que $Pu \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Portanto o operador P não é globalmente hipolítico em \mathbb{R}^{m+n} . Isto completa a prova da necessidade. ■

2.2.2 Suficiência

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$ tal que

$$Pu = f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n}). \quad (2.13)$$

Queremos mostrar que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Se em (2.13) tomarmos a transformada de Fourier com relação a $x \in \mathbb{R}^n$ obtemos

$$-\Delta_t \widehat{u}(t, \xi) + \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2 \widehat{u}(t, \xi) = \widehat{f}(t, \xi), \quad (2.14)$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$ e todo $t \in \mathbb{R}^m$.

Como para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$ fixado, o operador na equação (2.14) é um operador diferencial parcial elítico em t , pois sua parte principal é o Laplaciano, e $\widehat{f}(\cdot, \xi) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, pois $f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$, segue que $\widehat{u}(\cdot, \xi) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$.

Multiplicando a equação (2.14) por $\overline{\widehat{u}}(t, \xi)$ obtemos,

$$-(\Delta_t \widehat{u}(t, \xi)) \overline{\widehat{u}}(t, \xi) + \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2 |\widehat{u}(t, \xi)|^2 = \widehat{f}(t, \xi) \overline{\widehat{u}}(t, \xi). \quad (2.15)$$

Integrando com relação a $t \in [-\pi, \pi]^m$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi, \pi]^m} -(\Delta_t \widehat{u}(t, \xi)) \overline{\widehat{u}}(t, \xi) dt + \int_{[-\pi, \pi]^m} \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2 |\widehat{u}(t, \xi)|^2 dt \\ = \int_{[-\pi, \pi]^m} \widehat{f}(t, \xi) \overline{\widehat{u}}(t, \xi) dt. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \int_{[-\pi, \pi]^m} |\widehat{u}_{t_k}(t, \xi)|^2 dt + \int_{[-\pi, \pi]^m} b^2(t, \xi) |\widehat{u}(t, \xi)|^2 dt \\ = \int_{[-\pi, \pi]^m} \widehat{f}(t, \xi) \overline{\widehat{u}}(t, \xi) dt. \end{aligned} \quad (2.17)$$

sendo $b^2(t, \xi) \doteq \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2$.

Agora para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$, fixo, definimos:

$$\|\varphi\|_b^2 \doteq \sum_{k=1}^m \|\varphi_{t_k}\|_{L^2}^2 + \int_{[-\pi, \pi]^m} b^2(t, \xi) |\varphi(t)|^2 dt, \quad (2.18)$$

onde $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$.

Para continuarmos a demonstração necessitamos do seguinte Lema:

Lema 2.2 *Se $(a_{k_0+1}, \dots, a_n) \in (SA)^c(a_1, \dots, a_{k_0})$ então existem constantes $\alpha > 0$, $K \geq 0$, e $\delta > 0$, dependendo dos coeficientes a_ℓ , tais que para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ podemos encontrar um intervalo aberto $I_\xi \subset [-\pi, \pi]^m$ tal que*

$$b^2(t, \xi) \geq \frac{\alpha}{|\xi|^K}, \quad \forall t \in I_\xi, \quad \text{vol}(I_\xi) > \delta. \quad (2.19)$$

Assumindo por enquanto que o Lema 2.2 acima esteja provado, mostraremos que a desigualdade (2.19) implica que o operador P é globalmente hipoelítico em \mathbb{R}^{m+n} .

Sejam $s \in I_\xi$ e $t \in [-\pi, \pi]^m$. Então pelo teorema fundamental do cálculo, temos para cada $\varphi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$ que

$$\varphi(t) = \varphi(s) + \sum_{k=1}^m \int_{s_k}^{t_k} \varphi_{\ell_k}(s_1, \dots, s_{k-1}, \ell_k, t_{k+1}, \dots, t_m) d\ell_k.$$

Definindo $w = (s_1, \dots, s_{k-1}, \ell_k, t_{k+1}, \dots, t_m)$, podemos escrever a última igualdade da seguinte forma

$$|\varphi(t)| \leq |\varphi(s)| + \sum_{k=1}^m \int_{s_k}^{t_k} |\varphi_{\ell_k}(w)| d\ell_k.$$

Então temos

$$\begin{aligned} |\varphi(t)|^2 &\leq 2|\varphi(s)|^2 + 2 \left\{ \sum_{k=1}^m \int_{s_k}^{t_k} |\varphi_{\ell_k}(w)| d\ell_k \right\}^2 \\ &\leq 2|\varphi(s)|^2 + 2m \left\{ \sum_{k=1}^m \left(\int_{s_k}^{t_k} |\varphi_{\ell_k}(w)| d\ell_k \right)^2 \right\} \\ &\leq 2|\varphi(s)|^2 + 2m \left\{ \sum_{k=1}^m \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{\ell_k}(w)| d\ell_k \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

$$\begin{aligned} |\varphi(t)|^2 &\leq 2|\varphi(s)|^2 + 4m\pi \left\{ \sum_{k=1}^m \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2 d\ell_k \right) \right\} \\ &\leq C \left(|\varphi(s)|^2 + \sum_{k=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2 d\ell_k \right), \end{aligned}$$

onde $C = 4m\pi$.

Integrando esta desigualdade em relação a $s \in I_\xi$, observando que w depende de s somente nas primeiras $(k-1)$ variáveis e usando que $\text{vol}(I_\xi) > \delta$ obtemos

$$\begin{aligned} \delta|\varphi(t)|^2 &\leq \text{vol}(I_\xi)|\varphi(t)|^2 \leq C \left(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds + \sum_{k=1}^m \int_{I_\xi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2 d\ell_k ds \right) \\ &\leq C \left(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds + \sum_{k=1}^m \int_{[-\pi, \pi]^{m+1}} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2 d\ell_k ds \right) \\ &\leq C \left(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds + \sum_{k=1}^m \tilde{C} \int_{[-\pi, \pi]^k} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2 ds_1 \cdots ds_{k-1} d\ell_k \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$|\varphi(t)|^2 \leq C \left(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds + \sum_{k=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2 ds_1 \cdots ds_{k-1} d\ell_k \right).$$

Integrando esta última desigualdade em relação a $t \in [-\pi, \pi]^m$ obtemos,

$$\begin{aligned} \int_{[-\pi, \pi]^m} |\varphi(t)|^2 dt &\leq C \left((2\pi)^m \int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds + \right. \\ &\quad \left. + \tilde{C} \sum_{k=1}^m \int_{[-\pi, \pi]^m} |\varphi_{\ell_k}(w)|^2 ds_1 \cdots ds_{k-1} d\ell_k dt_{k+1} \cdots dt_m \right) \\ &\leq C \left(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds + \sum_{k=1}^m \|\varphi_{t_k}\|_{L^2}^2 \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 \leq C \left(\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds + \sum_{k=1}^m \|\varphi_{t_k}\|_{L^2}^2 \right). \quad (2.20)$$

Pela desigualdade (2.19) temos que $1 \leq \alpha^{-1}|\xi|^K b^2(s, \xi)$ para $s \in I_\xi$ e portanto

$$\int_{I_\xi} |\varphi(s)|^2 ds \leq \alpha^{-1}|\xi|^K \int_{I_\xi} b^2(s, \xi) |\varphi(s)|^2 ds \leq \alpha^{-1}|\xi|^K \int_{[-\pi, \pi]^m} b^2(s, \xi) |\varphi(s)|^2 ds.$$

Assim, da desigualdade (2.20) segue que

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^2}^2 &\leq C \left(\alpha^{-1} |\xi|^K \int_{[-\pi, \pi]^m} b^2(s, \xi) |\varphi(s)|^2 ds + \sum_{k=1}^m \|\varphi_{t_k}\|_{L^2}^2 \right) \\ &\leq C |\xi|^K \left(\int_{[-\pi, \pi]^m} b^2(s, \xi) |\varphi(s)|^2 ds + \sum_{k=1}^m \|\varphi_{t_k}\|_{L^2}^2 \right) \\ &= C |\xi|^K \|\varphi\|_b^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\varphi\|_{L^2}^2 \leq C |\xi|^K \|\varphi\|_b^2, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}. \quad (2.21)$$

Seja $\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Se aplicarmos (2.21) com $\varphi(t) = \widehat{u}(t, \xi)$, então existe $C > 0$ tal que

$$\|\widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 \leq C |\xi|^K \|\widehat{u}(\cdot, \xi)\|_b^2. \quad (2.22)$$

Por (2.17), (2.18) e a última desigualdade obtemos

$$\|\widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 \leq C |\xi|^K \int_{[-\pi, \pi]^m} \widehat{f}(t, \xi) \overline{\widehat{u}(t, \xi)} dt.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz nesta última desigualdade vem que

$$\|\widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 \leq C |\xi|^K \|\widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \|\widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \quad (2.23)$$

Logo

$$\|\widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C |\xi|^K \|\widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2}. \quad (2.24)$$

Seja $N \in \mathbb{N}$. Como estamos supondo $f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$, pelo Teorema 1.5, dado $M = N + [K]$, existe $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{f}(t, \xi)| \leq C_N |\xi|^{-(N+[K])}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0 \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}^m. \quad (2.25)$$

Assim,

$$\|\widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 = \int_{[-\pi, \pi]^m} |\widehat{f}(t, \xi)|^2 dt \leq C_N |\xi|^{-2(N+[K])}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Portanto

$$\|\widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_N |\xi|^{-(N+[K])}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Logo, por (2.24) e pela desigualdade acima, dado $N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ tal que

$$\|\widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C |\xi|^K \|\widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C |\xi|^{[K]} \|\widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_N |\xi|^{-N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \quad (2.26)$$

Vamos mostrar agora que, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{N}^m$ e $N \in \mathbb{N}$ dados, existe $C_N > 0$ tais que

$$\|\partial_t^\alpha \widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_N |\xi|^{-N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \quad (2.27)$$

Isso será feito usando-se indução sobre $|\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{N}^m$ dado.

Inicialmente mostraremos que a desigualdade (2.27) vale para $|\alpha| = 1$.

Com argumentos semelhantes mostraremos para qualquer $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $\ell \in \{1, 2, \dots, m\}$ dados.

Derivando-se a expressão (2.14) parcialmente em relação a t_ℓ obtemos

$$\begin{aligned} & -\Delta_t (\partial_{t_\ell} \widehat{u}(t, \xi)) + \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2 (\partial_{t_\ell} \widehat{u}(t, \xi)) \\ &= \partial_{t_\ell} \widehat{f}(t, \xi) - 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i(t) (\partial_{t_\ell} a_j(t)) \xi_i \xi_j \widehat{u}(t, \xi) \\ &\doteq g(t, \xi). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Esta expressão é a expressão (2.14) com $\widehat{u}(t, \xi)$ e $\widehat{f}(t, \xi)$ trocados por $\partial_{t_\ell} \widehat{u}(t, \xi)$ e $g(t, \xi)$ respectivamente. Como $\partial_{t_\ell} \widehat{u}(t, \xi)$ e $g(t, \xi)$ satisfazem as mesmas hipóteses que $\widehat{u}(t, \xi)$ e $\widehat{f}(t, \xi)$, usando os mesmos argumentos anteriores, trocando $\widehat{u}(t, \xi)$ por $\partial_{t_\ell} \widehat{u}(t, \xi)$ e $\widehat{f}(t, \xi)$ por $g(t, \xi)$ obteremos que

$$\|\partial_{t_\ell} \widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C \cdot |\xi|^K \|g(\cdot, \xi)\|_{L^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \quad (2.29)$$

Como $a_j \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, tanto a_j quanto suas derivadas de qualquer

ordem são limitadas. Então podemos encontrar $C > 0$ tal que

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i(t) (\partial_{t_\ell} a_j(t)) \xi_i \xi_j \right| \leq C |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n. \quad (2.30)$$

Ainda, como feito antes, dados $\alpha \in \mathbb{N}^m$ e $N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$

tais que

$$\left| \partial_t^\alpha \widehat{f}(t, \xi) \right| \leq C_N |\xi|^{-(N+[K])}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \quad (2.31)$$

Em particular,

$$\left| \partial_{t_\ell} \widehat{f}(t, \xi) \right| \leq C_N |\xi|^{-(N+[K])}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \quad (2.32)$$

Com isso,

$$\|\partial_{t_\ell} \widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 = \int_{[-\pi, \pi]^m} |\partial_{t_\ell} \widehat{f}(t, \xi)|^2 dt \leq C_N |\xi|^{-2(N+[K])}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Portanto

$$\|\partial_{t_\ell} \widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_N |\xi|^{-(N+[K])}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \quad (2.33)$$

Além disso, pela desigualdade (2.26), existe $C_N > 0$ tal que

$$\|\widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_N |\xi|^{-2-N-[K]}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \quad (2.34)$$

Logo, pela definição de $g(t, \xi)$, pelas desigualdades (2.30), (2.33) e (2.34) segue que

$$\begin{aligned} \|g(\cdot, \xi)\|_{L^2} &\leq \|\partial_{t_\ell} \widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2} + \left\| 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i(\cdot) (\partial_{t_\ell} a_j(\cdot)) \xi_i \xi_j \widehat{u}(\cdot, \xi) \right\|_{L^2} \\ &\leq \|\partial_{t_\ell} \widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2} + C |\xi|^2 \|\widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \\ &\leq C_N |\xi|^{-(N+[K])} + C |\xi|^2 C_N |\xi|^{-2-N-[K]} \leq C_N |\xi|^{-(N+[K])}, \end{aligned}$$

$\forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$

Portanto, pela desigualdade (2.29) e por esta última segue que

$$\|\partial_{t_\ell} \widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_N |\xi|^{-N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^m$ e $N \in \mathbb{N}$ dados. Suponhamos que para todo β tal que $|\beta| < |\alpha|$, vale

$$\|\partial_t^\beta \widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_N |\xi|^{-N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \quad (2.35)$$

Aplicando o operador ∂_t^α na expressão (2.14) obtemos

$$-\Delta_t (\partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi)) + \partial_t^\alpha \left[\left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2 \widehat{u}(t, \xi) \right] = \partial_t^\alpha \widehat{f}(t, \xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, $t \in \mathbb{R}^m$.

Pela fórmula de Leibniz,

$$\begin{aligned} & \partial_t^\alpha \left[\left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2 \widehat{u}(t, \xi) \right] = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial_t^{\alpha-\beta} \left[\left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2 \right] \partial_t^\beta \widehat{u}(t, \xi) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2 \partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi) + \\ &+ \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial_t^{\alpha-\beta} \left[\left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2 \right] \partial_t^\beta \widehat{u}(t, \xi) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2 \partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi) + \\ &+ \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[\sum_{\gamma \leq \alpha-\beta} \binom{\alpha-\beta}{\gamma} \partial_t^{(\alpha-\beta)-\gamma} \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right) \partial_t^\gamma \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right) \right] \partial_t^\beta \widehat{u}(t, \xi) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2 \partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi) + \\ &+ \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[\sum_{\gamma \leq \alpha-\beta} \binom{\alpha-\beta}{\gamma} \left(\sum_{j=1}^n \partial_t^{(\alpha-\beta)-\gamma} a_j(t) \xi_j \right) \left(\sum_{j=1}^n \partial_t^\gamma a_j(t) \xi_j \right) \right] \partial_t^\beta \widehat{u}(t, \xi) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2 \partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi) + \\ &+ \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[\sum_{\gamma \leq \alpha-\beta} \binom{\alpha-\beta}{\gamma} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_t^{(\alpha-\beta)-\gamma} a_i(t) \partial_t^\gamma a_j(t) \xi_i \xi_j \right] \partial_t^\beta \widehat{u}(t, \xi). \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão na última igualdade obtemos que

$$\begin{aligned} & -\Delta_t (\partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi)) + \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \xi_j \right)^2 (\partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi)) \\ &= \partial_t^\alpha \widehat{f}(t, \xi) - \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[\sum_{\gamma \leq \alpha-\beta} \binom{\alpha-\beta}{\gamma} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_t^{(\alpha-\beta)-\gamma} a_i(t) \partial_t^\gamma a_j(t) \xi_i \xi_j \right] \partial_t^\beta \widehat{u}(t, \xi) \\ &\doteq g_\alpha(t, \xi), \end{aligned} \quad (2.36)$$

que é a expressão (2.14) com $\widehat{u}(t, \xi)$ e $\widehat{f}(t, \xi)$ trocados por $\partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi)$ e $g_\alpha(t, \xi)$ respectivamente. Além disso tanto $\partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi)$ quanto $g_\alpha(t, \xi)$ satisfazem as mesmas hipóteses que $\widehat{u}(t, \xi)$ e $\widehat{f}(t, \xi)$ satisfazem. Portanto, usando os mesmos resultados anteriores, trocando $\widehat{u}(t, \xi)$ por $\partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi)$ e $\widehat{f}(t, \xi)$ por $g_\alpha(t, \xi)$ chega-se a

$$\|\partial_t^\alpha \widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C|\xi|^K \|g_\alpha(\cdot, \xi)\|_{L^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \quad (2.37)$$

Como as funções a_j e suas derivadas de qualquer ordem são limitadas, pois pertencem a $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, com argumentos semelhantes ao do caso $|\alpha| = 1$, segue da desigualdade (2.31) e de (2.35) que existe $C_N > 0$ tal que

$$\|g_\alpha(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_N |\xi|^{-(N+K)}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Por esta última desigualdade e por (2.37) segue que

$$\|\partial_t^\alpha \widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_N |\xi|^{-N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \setminus 0. \quad (2.38)$$

O objetivo agora é utilizarmos a desigualdade (2.38) para mostrarmos que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$. Faremos isso mostrando que dado $N \in \mathbb{N}$ existe $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{u}(\tau, \xi)| \leq C_N |(\tau, \xi)|^{-N}, \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{Z}^{m+n} \setminus 0$$

e assim, pelo Teorema 1.2 teremos que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Sejam $N \in \mathbb{N}$ e $(\tau, \xi) \in \mathbb{Z}^{m+n} \setminus 0$ dados.

Separemos a demonstração em dois casos: $\xi \neq 0$ e $\xi = 0$.

Como para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$, $\widehat{u}(\cdot, \xi) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, temos que

$$\widehat{u}(\tau, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[-\pi, \pi]^m} e^{-i\tau \cdot t} \widehat{u}(t, \xi) dt, \quad (2.39)$$

para todo $\tau \in \mathbb{Z}^m$, $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

1º caso: $\xi \neq 0$.

Se $\tau = 0$, temos que

$$\widehat{u}(0, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[-\pi, \pi]^m} \widehat{u}(t, \xi) dt,$$

Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|\widehat{u}(0, \xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[-\pi, \pi]^m} |\widehat{u}(t, \xi)| dt \leq C \|\widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}.$$

Logo, utilizando (2.26) obtemos

$$|\widehat{u}(0, \xi)| \leq C_N |\xi|^{-N} = C_N |(0, \xi)|^{-N}. \quad (2.40)$$

Se $\tau \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \tau^\alpha \widehat{u}(\tau, \xi) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[-\pi, \pi]^m} \tau^\alpha e^{-i\tau \cdot t} \widehat{u}(t, \xi) dt, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[-\pi, \pi]^m} \frac{1}{(-i)^{|\alpha|}} (\partial_t^\alpha e^{-i\tau \cdot t}) \widehat{u}(t, \xi) dt. \end{aligned}$$

Fazendo a integração por partes nesta expressão obtemos

$$\tau^\alpha \widehat{u}(\tau, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[-\pi, \pi]^m} \frac{1}{(i)^{|\alpha|}} e^{-i\tau \cdot t} \partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi) dt. \quad (2.41)$$

Observe que estas duas últimas expressões são válidas para todo

$\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Assim, segue da Afirmação 1.1, que

$$\begin{aligned} |\tau|^N |\widehat{u}(\tau, \xi)| &\leq \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} |\tau^\alpha| |\widehat{u}(\tau, \xi)| \\ &= \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} |\tau^\alpha \widehat{u}(\tau, \xi)| \\ &= \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} \left| \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{[-\pi, \pi]^m} \frac{1}{(i)^{|\alpha|}} e^{-i\tau \cdot t} \partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} \int_{[-\pi, \pi]^m} |\partial_t^\alpha \widehat{u}(t, \xi)| dt. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Segue de (2.42) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|\tau|^N |\widehat{u}(\tau, \xi)| \leq C \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} \|\partial_t^\alpha \widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}.$$

Logo, pela desigualdade (2.38) segue que

$$|\tau|^N |\widehat{u}(\tau, \xi)| \leq C \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} C_N |\xi|^{-N} \leq \tilde{C}_N |\xi|^{-N}.$$

Portanto, para $\xi \neq 0$ e $\tau \neq 0$ esta última desigualdade implica que

$$|\widehat{u}(\tau, \xi)| \leq C_N |\tau|^{-N} |\xi|^{-N}. \quad (2.43)$$

Agora, segue de (2.43) e do Lema 1.1 que

$$|\widehat{u}(\tau, \xi)| \leq C_N |(\tau, \xi)|^{-N}, \quad \tau \neq 0, \xi \neq 0. \quad (2.44)$$

2º caso: $\xi = 0$.

Como temos que para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n$, fixado, $\widehat{u}(\cdot, \xi) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, temos em particular que $\widehat{u}(\cdot, 0) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$. Logo pelo Teorema 1.3 $\widehat{u}(\tau, 0)$ forma uma seqüência rapidamente decrescente, isto é, dado $N \in \mathbb{N} \exists C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{u}(\tau, 0)| \leq C_N |\tau|^{-N} = C_N |(\tau, 0)|^{-N}, \quad \forall \tau \in \mathbb{Z}^m \setminus 0. \quad (2.45)$$

Logo, pelas desigualdades (2.40), (2.44) e (2.45) e pela arbitrariedade de $(\tau, \xi) \in \mathbb{Z}^{m+n} \setminus 0$, segue que existe $C_N > 0$ tal que

$$|\widehat{u}(\tau, \xi)| \leq C_N |(\tau, \xi)|^{-N}, \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{Z}^{m+n} \setminus 0,$$

o que conclui a demonstração do teorema. ■

Demonstração do Lema 2.2:

Assuma que $(a_{k_0+1}, \dots, a_n) \in (SA)^c(a_1, \dots, a_{k_0})$, $1 \leq k_0 \leq n-1$. Então a_1, \dots, a_{k_0} são linearmente independentes sobre \mathbb{R} , e

$$a_m = \sum_{k=1}^{k_0} \lambda_k^m a_k, \quad m = k_0 + 1, \dots, n$$

sendo que os vetores $(\lambda_k^{k_0+1}, \dots, \lambda_k^n)$, $k = 1, \dots, k_0$, são não simultaneamente aproximáveis. Então $b(t, \xi)$ toma a forma

$$b(t, \xi) = \sum_{k=1}^{k_0} a_k(\xi_k + \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_k^m \xi_m). \quad (2.46)$$

Para completar a demonstração do Lema 2.2 precisamos do seguinte lema.

Lema 2.3 *Seja B_{k_0} a função dada por $B_{k_0}(t, \gamma) = \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_k a_k(t)$, $t \in \mathbb{R}^m$, $\gamma \in \mathbb{R}^{k_0} \setminus 0$. Então existem $C_{k_0} > 0$ e $\delta_{k_0} > 0$ tal que para cada $\gamma \in \mathbb{R}^{k_0}$, $|\gamma| = 1$, existe um intervalo aberto $I_{k_0} = I_{k_0}(\gamma) \subset [-\pi, \pi]^m$ com $|B_{k_0}(t, \gamma)| \geq C_{k_0}$, $t \in I_{k_0}$, $vol(I_{k_0}) \geq \delta_{k_0}$.*

Demonstração: Como as funções a_1, \dots, a_{k_0} são LI sobre \mathbb{R} temos

$B_{k_0}(t, \gamma) \neq 0$, para $\gamma \in \mathbb{R}^{k_0} \setminus 0$. Pela continuidade de B_{k_0} em $[-\pi, \pi]^m \times S^{k_0-1}$, sendo S^{k_0-1} a esfera unitária em \mathbb{R}^{k_0} , para cada $\xi^0 \in S^{k_0-1}$ existem uma constante $\alpha_{k_0} = \alpha_{k_0}(\xi^0) > 0$, um intervalo aberto $I_{k_0} = I_{k_0}(\xi^0) \subset [-\pi, \pi]^m$, e um conjunto aberto $\Gamma_{k_0} = \Gamma_{k_0}(\xi^0) \subset S^{k_0-1}$ tal que

$$|B_{k_0}(t, \xi)| > \alpha_{k_0}, \quad t \in I_{k_0}, \quad \xi \in \Gamma_{k_0}.$$

Visto que $\{\Gamma_{k_0}(\xi^0)\}_{\xi^0 \in S^{k_0-1}}$ cobre S^{k_0-1} , e como S^{k_0-1} é compacto, existem finitos conjuntos abertos $\Gamma_{k_0}(\xi^1), \dots, \Gamma_{k_0}(\xi^\ell)$ cobrindo S^{k_0-1} . Portanto tomando $C_{k_0} = \min\{\alpha_{k_0}(\xi^1), \dots, \alpha_{k_0}(\xi^\ell)\}$ e $\delta_{k_0} = \min\{vol(I_{k_0}(\xi^1)), \dots, vol(I_{k_0}(\xi^\ell))\}$ obtemos a desigualdade desejada. ■

Agora retornamos para a prova do Lema 2.2. Consideremos

$\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{k_0})$ e $\xi'' = (\xi_{k_0+1}, \dots, \xi_n)$. Suponhamos que $\xi = (\xi', \xi'') \in \mathbb{Z}^n \setminus 0$ e $\xi'' = 0$. Então segue do Lema 2.3 que existem $C_{k_0} > 0$, $\delta_{k_0} > 0$ independentes de ξ e existe um intervalo aberto $I_{k_0} = I_{k_0}(\xi) \subset [-\pi, \pi]^m$ tal que

$$b^2(t, \xi', 0) = \left(\sum_{k=1}^{k_0} \xi_k a_k(t) \right)^2 = B_{k_0}^2(t, \xi') = |\xi'|^2 B_{k_0}^2 \left(t, \frac{\xi'}{|\xi'|} \right) \geq |\xi'|^2 C_{k_0}^2 \geq C_{k_0}^2, \quad (2.47)$$

$\forall t \in I_{k_0}, \quad \text{vol}(I_{k_0}) \geq \delta_{k_0}$.

Agora assumimos que $\xi'' \neq 0$. Visto que os vetores $(\lambda_k^{k_0+1}, \dots, \lambda_k^n)$, $k = 1, \dots, k_0$ são não simultaneamente aproximáveis existem $C > 0$, $K > 0$, independentes de ξ'' , e k_1 , $1 \leq k_1 \leq k_0$, tal que

$$\left| \xi_{k_1} + \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_{k_1}^m \xi_m \right| \geq \frac{C}{|\xi''|^{2K}}. \quad (2.48)$$

Se considerarmos $\gamma_k \doteq \xi_k + \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_k^m \xi_m$, $k = 1, \dots, k_0$, e $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{k_0})$ então segue de (2.48) e do Lema 2.3 que existe $C > 0$, $K > 0$, $C_{k_0} > 0$, $\delta_{k_0} > 0$ independentes de ξ e um intervalo

$I_{k_0} = I_{k_0}(\xi) \subset [-\pi, \pi]^m$ tal que

$$\begin{aligned} b^2(t, \xi) &= \left[\sum_{k=1}^{k_0} a_k \left(\xi_k + \sum_{m=k_0+1}^n \lambda_k^m \xi_m \right) \right]^2 = B_{k_0}^2(t, \gamma) = |\gamma|^2 B_{k_0}^2 \left(t, \frac{\gamma}{|\gamma|} \right) \\ &\geq C_{k_0}^2 |\gamma|^2 \geq C_{k_0}^2 |\gamma_{k_1}|^2 \geq \frac{C_{k_0}^2 C^2}{|\xi''|^{2K}} \\ &\geq \frac{C_{k_0}^2 C^2}{|\xi|^{2K}}, \quad \forall t \in I_{k_0}, \quad \text{vol}(I_{k_0}) \geq \delta_{k_0}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Assim temos que se $\xi'' = 0$ vale (2.47) e se $\xi'' \neq 0$ vale (2.49). Logo segue a desigualdade desejada (2.19). ■

Teorema 2.3 *Seja P um operador diferencial definido por*

$$P = -\Delta_t - \left(\sum_{j=1}^n a_j(t) \partial_{x_j} \right)^2 \quad (2.50)$$

em que $(t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n) = (t, x) \in \mathbb{R}^{m+n}$ e $a_j(t) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^m)$, e são a valores reais. Se $k_0 = 0$ então P não é globalmente hipoeolítico em \mathbb{R}^{m+n} . Se $k_0 = n$ então P é globalmente hipoeolítico em \mathbb{R}^{m+n} .

Demonstração: Se $k_0 = 0$ então $a_1(t) \equiv a_2(t) \equiv \dots \equiv a_n(t) \equiv 0$. Então para qualquer função $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}_x^n) \setminus \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}_x^n)$ temos $Pu = 0$. Portanto P não é globalmente hipoeolítico em \mathbb{R}^{m+n} .

Para a demonstração do caso $k_0 = n$ precisamos do seguinte lema:

Lema 2.4 *Se $k_0 = n$ então existem constantes $\alpha > 0$ e $\delta > 0$, dependendo dos coeficientes a_ℓ , tais que para cada $\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ podemos encontrar um intervalo aberto $I_\xi \subset [-\pi, \pi]^m$ tal que*

$$b^2(t, \xi) \geq \alpha, \quad \forall t \in I_\xi, \quad \text{vol}(I_\xi) > \delta.$$

Demonstração: Como a demonstração do Lema 2.3 continua válida se $k_0 = n$ então dado $\xi \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, temos

$$b^2(t, \xi) = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k a_k(t) \right)^2 = B_n^2(t, \xi) = |\xi|^2 B_n^2\left(t, \frac{\xi}{|\xi|}\right) \geq |\xi|^2 C_n^2 \geq C_n^2,$$

$$\forall t \in I_n(\xi) = I_\xi, \quad \text{vol}(I_\xi) \geq \delta_n = \delta. \quad \blacksquare$$

De modo análogo à demonstração da suficiência da condição do Teorema 2.2 mostra-se que, no caso $k_0 = n$, P é (GH) em \mathbb{R}^{m+n} . ■

Capítulo 3

Hipoeliticidade Global para certas Classes de Sublaplacianos

Notemos que na classe de operadores estudada no Teorema 2.2 os coeficientes do campo vetorial $\sum_{j=1}^n a_j(t) \partial_{x_j}$ não dependem das variáveis de derivação x_1, \dots, x_n .

Assim, apresentamos uma classe de operadores onde os coeficientes podem depender de mais variáveis.

Consideremos em \mathbb{R}^3 o seguinte operador

$$P = -\partial_{t_1}^2 - \partial_{t_2}^2 - \left(\partial_{t_2} + a(t_1, t_2) \partial_x \right)^2 \quad (3.1)$$

em que $(t_1, t_2, x) = (t, x) \in \mathbb{R}^3$ e $a \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, e a valores reais. Na classe (3.1) temos que o coeficiente do campo $\partial_{t_2} + a(t_1, t_2) \partial_x$ depende da variável t_2 e a derivada com relação a esta variável comparece no campo.

O objetivo é dar uma condição necessária e suficiente para que o operador (3.1) seja (GH) em \mathbb{R}^3 .

Teorema 3.1 *O operador dado por (3.1) é (GH) em \mathbb{R}^3 se, e somente se, a função a não é identicamente nula.*

Demonstração:

Se $a \equiv 0$ então para qualquer função $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}_x) \setminus \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}_x)$ temos $Pu = 0$. Portanto P não é globalmente hipoeítico em \mathbb{R}^3 .

Suponhamos que a não é identicamente nula. Se $a(t_1, t_2)$ é constante não nula então o operador P é elítico e portanto ele é localmente hipoeítico, em particular (GH) em \mathbb{R}^3 . Portanto, assumimos que $a(t_1, t_2)$ é não-constante. Então, existe um ponto t^0 , na qual podemos tomar como $t^0 = 0 = (0, 0)$, tal que ou $\frac{\partial a}{\partial t_1}(0) \neq 0$ ou $\frac{\partial a}{\partial t_2}(0) \neq 0$. Assim, existe $\delta > 0$ tal que ou $\frac{\partial a}{\partial t_1}(t) \neq 0$, $t \in [-\delta, \delta]^2$ ou $\frac{\partial a}{\partial t_2}(t) \neq 0$, $t \in [-\delta, \delta]^2$. Agora, seja $u \in \mathcal{P}'_{2\pi}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$Pu = f, \quad f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^3). \quad (3.2)$$

Se, em (3.2), tomarmos a transformada de Fourier com relação a $x \in \mathbb{R}$ obtemos

$$[-\partial_{t_1}^2 - \partial_{t_2}^2 - (\partial_{t_2} + i\xi a(t_1, t_2))^2] \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Como para cada $\xi \in \mathbb{Z}$ fixado, o operador na equação (3.3) é elítico em t e $\hat{f}(\cdot, \xi) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, pois $f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^3)$, segue que $\hat{u}(\cdot, \xi) \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$.

O próximo resultado fornece-nos a desigualdade chave para provarmos que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^3)$.

Lema 3.1 *Existe uma constante $C_2 > 0$ tal que*

$$\|\hat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_2 \|\hat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z} \setminus 0. \quad (3.4)$$

Assumimos por enquanto que o Lema 3.1 acima esteja provado.

Seja $N \in \mathbb{N}$. Como estamos supondo $f \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^3)$, pelo Teorema 1.5, dado $N \in \mathbb{N}$, existe $C_N > 0$ tal que

$$|\hat{f}(t, \xi)| \leq C_N |\xi|^{-N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z} \setminus 0 \text{ e } \forall t \in \mathbb{R}^2. \quad (3.5)$$

Assim,

$$\|\widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 = \int_{[-\pi, \pi]^2} |\widehat{f}(t, \xi)|^2 dt \leq C_N |\xi|^{-2N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z} \setminus 0.$$

Portanto

$$\|\widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_N |\xi|^{-N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z} \setminus 0. \quad (3.6)$$

Logo, segue de (3.4) e (3.6) que, dado $N \in \mathbb{N}$ existe

$C_N > 0$ tal que

$$\|\widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_2 \|\widehat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_N |\xi|^{-N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z} \setminus 0, \quad (3.7)$$

a qual é suficiente para mostrarmos que P é (GH) em \mathbb{R}^3 , bastando para isto usar a *teoria micro local*. Daremos uma idéia de como usar tal teoria.

Lembrando que

$$\widehat{u}(\tau, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(\tau_1 t_1 + \tau_2 t_2)} \widehat{u}(t_1, t_2, \xi) dt_1 dt_2,$$

e usando (3.7) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos que

$$|\widehat{u}(\tau, \xi)| \leq C_N |\xi|^{-N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Definindo $\Gamma = \{(\tau, \xi) : |\tau| < C|\xi|\}, \xi \neq 0$, temos

$$|\widehat{u}(\tau, \xi)| \leq \frac{C_N}{(\frac{1}{2}|\xi| + \frac{1}{2}|\xi|)^N} \leq \frac{C_N}{(\frac{1}{2C}|\tau| + \frac{1}{2}|\xi|)^N} \leq \frac{C_N}{|(\tau, \xi)|^N}, \quad (3.8)$$

para $(\tau, \xi) \in \Gamma$.

Agora observando que $P_2(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2, 0) = \tau_1^2 + 2\tau_2^2$ é elítico numa vizinhança cônica, Γ_1 , de um ponto da forma $(\tau_1^0, \tau_2^0, 0)$ com $(\tau_1^0, \tau_2^0) \neq (0, 0)$, e usando a teoria micro local obtemos uma estimativa da forma

$$|\widehat{u}(\tau, \xi)| \leq C |(\tau, \xi)|^{-N} \quad (3.9)$$

para $(\tau, \xi) \in \Gamma_1$.

Segue de (3.8) e (3.9) que

$$|\widehat{u}(\tau, \xi)| \leq C|(\tau, \xi)|^{-N}, \quad \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\},$$

e isto implica que $u \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^3)$. ■

Demonstração do Lema 3.1:

Multiplicando a equação (3.3) por $\bar{\widehat{u}}$ e integrando por partes com relação a $t \in [-\pi, \pi]^2$, obtemos

$$\begin{aligned} \|Y_1 \widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 + \|Y_2 \widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 + \|Y_3 \widehat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 \\ = \int_{[-\pi, \pi]^2} \widehat{f}(t, \xi) \bar{\widehat{u}}(t, \xi) dt, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde $Y_1 = \partial_{t_1}$, $Y_2 = \partial_{t_2}$ e $Y_3 = \partial_{t_2} + i\xi a(t_1, t_2)$. Também, note que

$$[Y_1, Y_3] \doteq Y_1 Y_3 - Y_3 Y_1 = i\xi \frac{\partial a}{\partial t_1} \quad \text{e} \quad [Y_2, Y_3] \doteq Y_2 Y_3 - Y_3 Y_2 = i\xi \frac{\partial a}{\partial t_2}. \quad (3.11)$$

Seja χ uma função tal que $\chi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$, $\chi \geq 0$, $\chi \equiv 1$ em $[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]^2$ e $\chi(t) = 0$ se $t \in ([-\pi, -\delta] \cup (\delta, \pi])^2$.

Provaremos o resultado considerando somente o caso $\frac{\partial a}{\partial t_1}(t) \neq 0$ em $[-\delta, \delta]^2$ (o outro caso é análogo).

Para $\xi \in \mathbb{Z} \setminus 0$ e $\phi \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^2)$ temos que

$$\begin{aligned} \int_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]^2} |\phi(t)|^2 dt &= \int_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]^2} \left(\frac{1}{i\xi \frac{\partial a}{\partial t_1}(t)} [Y_1, Y_3] \right) |\phi(t)|^2 dt \\ &= \int_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]^2} \chi(t) \left(\frac{1}{i\xi \frac{\partial a}{\partial t_1}(t)} [Y_1, Y_3] \right) |\phi(t)|^2 dt \\ &\leq \int_{[-\delta, \delta]^2} \chi(t) \left(\frac{1}{i\xi \frac{\partial a}{\partial t_1}(t)} [Y_1, Y_3] \right) |\phi(t)|^2 dt \\ &= \int_{[-\pi, \pi]^2} \left(\chi(t) \frac{1}{i\xi \frac{\partial a}{\partial t_1}(t)} \right) [Y_1, Y_3] |\phi(t)|^2 dt \\ &\leq \left| \int_{[-\pi, \pi]^2} \left(\chi(t) \frac{1}{i\xi \frac{\partial a}{\partial t_1}(t)} \right) [Y_1, Y_3] |\phi(t)|^2 dt \right| \\ &= \frac{1}{|\xi|} |(b(t)[Y_1, Y_3]\phi, \phi)| \leq |(b(t)[Y_1, Y_3]\phi, \phi)|, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde

$$b(t) = \chi(t) \frac{1}{\frac{\partial a}{\partial t_1}} \in \mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R}^2).$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e integração por partes mostra-se que existe $C > 0$ tal que

$$|(b(t)[Y_1, Y_3]\phi, \phi)| \leq C (\|Y_1\phi\|^2 + \|Y_3\phi\|^2 + \|\phi\|\|Y_1\phi\| + \|\phi\|\|Y_3\phi\|).$$

Segue da última desigualdade e de (3.12) que

$$\int_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]^2} |\phi(t)|^2 dt \leq C (\|Y_1\phi\|^2 + \|Y_3\phi\|^2 + \|\phi\|\|Y_1\phi\| + \|\phi\|\|Y_3\phi\|).$$

Visto que

$$\|\phi\|_{L^2}^2 \leq C \left(\int_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]^2} |\phi(s)|^2 ds + \|\phi_{t_1}\|^2 + \|\phi_{t_2}\|^2 \right),$$

e aplicando a última desigualdade acima com $\phi = \hat{u}(t, \xi)$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 &\leq C_1 (\|Y_1\hat{u}\|^2 + \|Y_3\hat{u}\|^2 + \|\hat{u}\|\|Y_1\hat{u}\| + \|\hat{u}\|\|Y_3\hat{u}\|) \\ &+ C_1 (\|\hat{u}_{t_1}\|^2 + \|\hat{u}_{t_2}\|^2) \\ &= C_1 (\|Y_1\hat{u}\|^2 + \|Y_3\hat{u}\|^2 + \|\hat{u}\|\|Y_1\hat{u}\| + \|\hat{u}\|\|Y_3\hat{u}\|) \\ &+ C_1 (\|Y_1\hat{u}\|^2 + \|Y_2\hat{u}\|^2) \\ &\leq C_1 \left(\|Y_1\hat{u}\|^2 + \|Y_3\hat{u}\|^2 + \frac{\epsilon^2}{2}\|\hat{u}\|^2 + \frac{1}{2\epsilon^2}\|Y_1\hat{u}\|^2 \right) \\ &+ C_1 \left(\frac{\epsilon^2}{2}\|\hat{u}\|^2 + \frac{1}{2\epsilon^2}\|Y_3\hat{u}\|^2 + \|Y_1\hat{u}\|^2 + \|Y_2\hat{u}\|^2 \right). \end{aligned}$$

Escolhendo ϵ tal que $C_1\epsilon^2 < 1$, segue da última desigualdade que

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 &\leq C_2 (\|Y_1\hat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 + \|Y_2\hat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 + \|Y_3\hat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2) \\ &= C_2 \int_{[-\pi, \pi]^2} \hat{f}(t, \xi) \bar{\hat{u}}(t, \xi) dt. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz nesta última desigualdade vem que

$$\|\hat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}^2 \leq C_2 \|\hat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \|\hat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2}.$$

Logo

$$\|\hat{u}(\cdot, \xi)\|_{L^2} \leq C_2 \|\hat{f}(\cdot, \xi)\|_{L^2}.$$

■

Referências Bibliográficas

- [F] FIGUEIREDO, D.G.: **Números Irracionais e Transcendentes**, IMPA, Rio de Janeiro, 1985.
- [FO] FUJIWARA, D. and OMORI, H.: **An example of a globally hypoelliptic operator**, Hokkaido Mathematical Journal, 12 (1983), 293-297.
- [GW] GREENFIELD, S.J. and WALLACH, N.R.: **Global hypoellipticity and Liouville numbers**, Proc. Amer. Math. Soc., 31 (1972), 112-114.
- [H1] HIMONAS, A. A.: **On degenerate elliptic operators of infinite type**, Math. Z., 220 (1995), 449-460.
- [HP1] HIMONAS, A. A. and PETRONILHO, G.: **On global hypoellipticity of degenerate elliptic operators**, Math. Z., 230 (1999), 241-257.
- [HP2] HIMONAS, A. A. and PETRONILHO, G.: **Global hypoellipticity and simultaneous approximability**, J. Funct. Anal., 170 (2000), 356-365.
- [HP3] HIMONAS, A. A. and PETRONILHO, G.: **Global hypoellipticity for sublaplacians**, Matemática Contemporânea, 18 (2000), 167-174.
- [M] MOURA, R. J.de: **Hipoeliticidade Global para Certos Operadores Dados na Forma de Uma Soma de Quadrados de Cam-**

pos Vetoriais Reais, dissertação para obtenção do título de Mestre em Matemática, DM-UFSCar, São Carlos, 2000.

- [S] SCHMIDT, W.: **Diophantine approximations**, Lecture Notes, 785 (1980), Springer, New York.
- [Z] ZANI, S. L.: **Hipoeliticidade Global Para Operadores de Segunda Ordem**, dissertação para obtenção do título de Mestre em Matemática, Instituto de Ciências e Matemáticas de São Carlos/USP, São Carlos, 1988.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)