

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Uma generalização do teorema de  
Ljusternik-Schnirelmann**

Eduardo Silva Palmeira

**Orientador:** Prof. Dr. Tomas Edson Barros

Dissertação apresentada ao  
Programa de Pós-Graduação  
em Matemática da UFSCar  
como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre em  
Matemática.

São Carlos - SP

Agosto - 2005

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da  
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

P172gt

Palmeira, Eduardo Silva.

Uma generalização do teorema de Ljusternik-Schnirelmann / Eduardo Silva Palmeira. -- São Carlos : UFSCar, 2006.

76 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2005.

1. Topologia algébrica. 2. Teorema de Ljusternik-Schnirelmann . 3. Gênis de um  $Z_p$ -espaço. 4. Retrato absoluto. I. Título.

CDD: 514.2 (20<sup>a</sup>)

# Resumo

O objetivo desse trabalho é apresentar uma versão generalizada do teorema clássico de Ljusternik-Schnirelmann devida a H. Steinlein [16], usando o conceito de *genus* (c.f. [20]) de um espaço de Hausdorff  $M$  com uma função  $f : M \longrightarrow M$  que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre em  $M$ , bem como estimar o valor do *genus* de  $L_{k,p}$ , um espaço especial usado para majorar o *genus* de  $(M, f)$ .

# Abstract

The purpose of this work is to present a generalized version of the classic Ljusternik-Schnirelmann theorem given by H. Steinlein [16] by using the concept of genus (c.f. [20]) of a Hausdorff space  $M$  with a mapping  $f : M \longrightarrow M$  which generates a free  $\mathbb{Z}_p$ -action over  $M$  and to estimate the value of the genus of  $L_{k,p}$ , a special space used to construct an upper bound for the genus of  $(M, f)$ .

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>7</b>
1.0.1	n-simplexos e complexos simpliciais em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	7
1.0.2	G-ação livre sobre um conjunto S . . . . .	10
1.0.3	Retrato absoluto . . . . .	13
1.0.4	Extensão de homotopia . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Uma generalização do teorema de cobertura de Ljusternik-Schnirelmann</b>	<b>18</b>
<b>3</b>	<b>Estimativas para <math>g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})</math></b>	<b>47</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>74</b>

# Introdução

Sejam  $S^n$  a esfera  $n$ -dimensional e  $A : S^n \rightarrow S^n$  a aplicação antípoda, ou seja,  $A(x) = -x$ , para todo  $x \in S^n$ . O teorema clássico de Ljusternik-Schnirelmann, afirma que se  $H_1, \dots, H_k$  são subconjuntos fechados que cobrem  $S^n$  tais que  $H_i \cap (-H_i) = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k$  então  $k \geq n + 2$ . Agora, se trocarmos  $S^n$  por um espaço de Hausdorff  $M$  e  $A$  por uma função  $f : M \rightarrow M$  que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $M$  ( $f$  contínua,  $f^p = id_M$  e  $f(x) \neq x$ ,  $\forall x \in M$ ), de forma que existam subconjuntos fechados  $M_1, \dots, M_k$  tais que  $M = \cup_{i=1}^k M_i$  e  $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$  para todo  $i = 1, \dots, k$ , como poderíamos substituir a estimativa do teorema de Ljusternik-Schnirelmann?

Nosso trabalho visa descrever uma resposta a essa questão, dada por H. Steinlein em [16]. No capítulo 2 é dada a demonstração do teorema de Steinlein, uma versão generalizada do teorema de Ljusternik-Schnirelmann baseada no conceito de genus segundo A. S. Švarc, isto é, dado um espaço de Hausdorff  $M$ , uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre  $f$  e considerando o conjunto  $C(M, f) = \{G \subset M : \text{existem fechados disjuntos } G_0, \dots, G_{p-1} \subset M \text{ tais que } G = \cup_{i=0}^{p-1} G_i \text{ e para todo } i = 1, \dots, p-1, f^i(G_0) = G_i\}$ , define-se o genus de  $M$  com a  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre  $f$  (notação:  $g(M, f)$ ) como sendo o mínimo dos cardinais de  $\mathcal{G} \subset C(M, f)$  tais que  $\cup_{G \in \mathcal{G}} G = M$ .

Em 1955, Krasnosel'skii provou em [11] que o  $g(S^n, f) = n + 1$  independentemente da  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre  $f : S^n \rightarrow S^n$  e do primo  $p$ . Logo, podemos

substituir a estimativa  $k \geq n + 2$  do teorema de Ljusternik-Schnirelmann por  $k \geq g(M, f) + 1$ . Nessa linha de pensamento temos, para  $p = 2$ , o seguinte resultado (c.f. [17] e [21])

**Teorema:** Sejam  $M$  um espaço de Hausdorff,  $f : M \rightarrow M$  uma  $\mathbb{Z}_2$ -ação livre e  $M_1, M_2, \dots, M_k \subset M$  subconjuntos fechados tais que  $\cup_{i=1}^k M_i = M$  e  $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k$ . Então  $k \geq g(M, f) + 1$ .

Entretanto, a generalização dada em [16] por Steinlein, a qual tratamos no capítulo 2, contempla apenas a classe dos espaços normais. Steinlein mostra que dado um espaço normal  $M$ , uma função  $f : M \rightarrow M$  que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre e  $M_1, M_2, \dots, M_k \subset M$  subconjuntos fechados tais que  $\cup_{i=1}^k M_i = M$  e  $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k$ , então  $g(M, f) \leq g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$ , onde  $L_{k,p}$  é um espaço métrico, especialmente construído para esse propósito e  $\varphi_{k,p}$  é uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre ele.

No capítulo 3, buscamos calcular o valor de  $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$ , visando estimar o genus de  $M$  com a ação  $f$  em termos de  $k$  e  $p$ . Contudo, apenas para  $k = 3$  ou  $p = 2$  temos o valor exato de  $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$ . Nos demais casos, apenas uma estimativa um tanto grosseira será dada. Um melhoramento da estimativa dada no teorema 3.0.12 pode ser encontrada em [18] e [2], para  $p = 7$ .

Começamos o trabalho definindo alguns conceitos e listando alguns resultados no capítulo 1, os quais usaremos nos capítulos seguintes.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo daremos algumas definições e listaremos alguns resultados, os quais serão usados na confecção do corpo do trabalho. Começamos definindo simplexes e complexos simpliciais Euclidianos. Em seguida, falaremos um pouco a respeito da ação de um grupo  $G$  sobre um espaço topológico, retrato absoluto e de extensão de homotopia. Em todo o capítulo, o intervalo fechado  $[0, 1]$  será denotado por  $I$ .

Para maiores detalhes a respeito dos tópicos abordados aqui consulte as referências [4], [6], [8], [9], [10], [13] e [14].

### 1.0.1 n-simplexes e complexos simpliciais em $\mathbb{R}^n$

Seja  $\mathbb{R}^n$  o espaço Euclidiano n-dimensional. Dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , definamos  $[x, y] := \{tx + (1 - t)y \in \mathbb{R}^n : 0 \leq t \leq 1\}$  como sendo o segmento de reta unindo os pontos  $x$  e  $y$ . Dizemos que um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é **convexo** se para quaisquer  $x, y \in A$ , tivermos  $[x, y] \subset A$ .

**Definição 1.0.1** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Definimos a **envoltória convexa** de  $A$  (notação:  $co\{A\}$ ) como sendo a interseção da família de todos os subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  que são convexos e contém  $A$ .*

Em outras palavras  $co\{A\}$  é o menor subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  que contém o conjunto  $A$  no sentido de que:

1.  $co\{A\} \subset \mathbb{R}^n$  é convexo
2.  $A \subset co\{A\}$
3. Se  $K \subset \mathbb{R}^n$  é convexo e  $A \subset K$  então  $co\{A\} \subset K$

**Exemplo 1.0.1** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  e definamos  $P(A) := \cup_{x,y \in A} [x,y]$ . Suponhamos que para algum  $m \geq 0$  tenhamos  $P^m(A)$  convexo (estamos considerando  $P^0(A) = A$  e  $P^m(A) = P(P^{m-1}(A))$ , se  $m > 0$ ). Então temos  $P^m(A) = co\{A\}$ .*

*De fato, uma vez que  $P^m(A)$  é convexo e  $A \subset P^m(A)$ , conclui-se de 3 acima que  $co\{A\} \subset P^m(A)$ . Basta então provarmos que, se  $K \subset \mathbb{R}^n$  é convexo e  $A \subset K$  então o conjunto  $P^m(A) \subset K$ .*

*Mas se  $A \subset K$ , então  $P(A) \subset P(K) = {}^1K$ . Repetindo tal procedimento  $m - 1$  vezes chegamos a  $P^m(A) \subset K$ . Assim, como  $co\{A\}$  é convexo e contém  $A$ , segue que  $P^m(A) \subset co\{A\}$ , donde segue a igualdade desejada.*

**Definição 1.0.2** *Um subconjunto  $\{a_0, \dots, a_n\}$  de pontos do  $\mathbb{R}^n$  é dito ser **independente** se o conjunto de vetores  $\{a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0\}$  for linearmente independente.*

**Lema 1.0.1** *Se  $A = \{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto independente, então*

$$co\{A\} = \left\{ x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i ; 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

*Além disso, se  $\sum_{i=0}^n \lambda_i a_i = \sum_{i=0}^n \beta_i a_i$ , com  $0 \leq \lambda_i, \beta_i \leq 1$  e  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = \sum_{i=0}^n \beta_i = 1$ , segue que  $\lambda_i = \beta_i$  para todo  $i = 0, 1, \dots, n$  (veja [15]).*

---

<sup>1</sup>a igualdade é devido ao fato de  $K$  ser convexo

Definimos um **n-simplexo**  $\sigma^n$  em  $\mathbb{R}^n$  como sendo a envoltória convexa de  $n + 1$  pontos  $\{a_0, \dots, a_n\}$  independentes de  $\mathbb{R}^n$ . Pelo lema acima, um elemento  $x \in \sigma^n$  é da forma  $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$  com  $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$  e os  $\lambda_i$ 's, os quais chamamos de **coordenadas baricêntricas** de  $x$ , são unicamente determinados. Os pontos  $a_0, \dots, a_n$  são chamados de **vértices** de  $\sigma^n$  e qualquer  $q$ -simplexo  $\sigma^q$  contido em  $\sigma^n$  ( $q \leq n$ ) é dito ser uma **q-face** de  $\sigma^n$ . Dizemos ainda que o número  $n$  é a **dimensão** de  $\sigma^n$ . Além disso, o ponto  $[\sigma^n] = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} a_i \in \sigma^n$  é dito ser o **baricentro** de  $\sigma^n$ .

**Exemplo 1.0.2** *Seja  $B = \{e_1, \dots, e_{p+1}\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^{p+1}$ . Desde que  $B$  é uma coleção independente de pontos em  $\mathbb{R}^{p+1}$ , então  $B$  determina um  $p$ -simplexo especial  $\Delta_p$ , o qual é chamado um **p-simplexo padrão**. As coordenadas baricêntricas desse simplexo coincidem com as cartesianas.*

**Definição 1.0.3** *Um **complexo simplicial**  $K$  em  $\mathbb{R}^n$  (ou um complexo simplicial Euclidiano) é uma coleção de simplexos em  $\mathbb{R}^n$  tais que:*

1. *Toda face de um simplexo em  $K$ , ainda é um elemento de  $K$*
2. *Dados  $\sigma, \sigma' \in K$ , então  $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$  ou é uma face de ambos*

Agora, se  $L$  é um subconjunto de  $K$  o qual é ele mesmo um complexo simplicial, então dizemos que  $L$  é um **subcomplexo** de  $K$ . Ao subcomplexo de  $K$  formado por todos os  $p$ -simplexos, atribuímos o nome de **p-esqueleto** de  $K$ , e denotamos por  $K^{(p)}$ . Ainda, os pontos da coleção  $K^{(0)}$  são chamados de vértices de  $K$ .

**Exemplo 1.0.3** *Qualquer  $p$ -simplexo pode ser considerado um complexo simplicial cujos elementos são todos os simplexos que o compõem. Para qualquer  $k \leq p$ , temos que o conjunto formado por todas as  $i$ -faces de  $\Delta_p$  com  $0 \leq i \leq k$ , é um subcomplexo de  $\Delta_p$ .*

Observemos que, dado um complexo simplicial Euclidiano  $K \subset \mathbb{R}^n$ , cada simplexo  $\sigma \in K$  pode ser encarado como um subespaço de  $\mathbb{R}^n$  com a topologia induzida. Logo, faz sentido definir o espaço  $|K|$  como sendo a união de todos os simplexos de  $K$ , munido da **topologia fraca**, isto é, um subconjunto  $A$  de  $|K|$  é aberto se, e somente se,  $A \cap \sigma$  é aberto em  $\sigma$ , para cada  $\sigma \in K$ . O espaço  $|K|$  assim definido é um espaço topológico, o qual denominamos **poliedro** de  $K$ .

**Observação 1.0.1** *Seja agora  $V$  um conjunto não vazio. Alternativamente, definimos um **complexo simplicial (abstrato)**  $K$  como sendo uma família não vazia de subconjuntos finitos de  $V$  tais que:*

1. *Se  $u \in V$ , então  $\{u\} \in K$ .*
2. *Se  $s \in K$  e  $s' \subset s$ , então  $s' \in K$ .*

## 1.0.2 G-ação livre sobre um conjunto S

**Definição 1.0.4** *Sejam  $G$  um grupo e  $S$  um conjunto não vazio. Uma **ação** (à esquerda) de  $G$  sobre o conjunto  $S$  é uma função  $G \times S \rightarrow S$  (usualmente denotada por  $(g, x) \mapsto gx$ ) tal que, para todo  $x \in S$  e  $g_1, g_2 \in G$ , tem-se:*

1.  *$ex = x$ , sendo  $e$  o elemento neutro de  $G$ ,*
2.  *$(g_1 \cdot g_2)x = g_1(g_2x)$ .*

**Exemplo 1.0.4** *Seja  $S_n$  o grupo de todas as permutações do conjunto  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Então a função  $S_n \times I_n \rightarrow I_n$  dada por  $(\sigma, x) \mapsto \sigma(x)$  é uma ação de  $S_n$  sobre  $I_n$ .*

**Exemplo 1.0.5** *Sendo  $H$  um subgrupo do grupo  $G$ , uma ação do grupo  $H$  sobre o conjunto  $G$  é dada por  $(h, x) \mapsto h.x$ , para  $h \in H$  e  $x \in G$ .*

Suponhamos que  $G$  seja um grupo atuando no conjunto  $S$ . Consideremos a seguinte relação sobre  $S$

$$x \sim y \iff gx = y \text{ para algum } g \in G$$

Segue direto das propriedades da definição de ação que essa relação é reflexiva e transitiva. Além disso, se  $x \sim y$ , então existe  $g \in G$  tal que  $gx = y \Rightarrow g^{-1}gx = g^{-1}y \Rightarrow x = g^{-1}y \Rightarrow y \sim x$ . Portanto, a relação  $\sim$  é de equivalência sobre  $S$ . À classe de equivalência de um elemento  $x \in S$  damos o nome de **órbita** de  $x$ , a qual será denotada por  $\bar{x}$ . Ainda, o subgrupo  $G_x = \{g \in G ; gx = x\}$  de  $G$  é chamado **subgrupo de isotropia** de  $x$ .

**Definição 1.0.5** *Seja  $G$  um grupo atuando sobre o conjunto  $S$ . Dizemos que essa ação é uma **G-ação livre**, se para todo  $x \in S$ ,  $G_x = \{e\}$  sendo "e" o elemento neutro de  $G$ .*

Observamos que a ação do exemplo 1.0.4 não é livre, uma vez que podemos ter  $\sigma(x) = x$  sem que  $\sigma = 1_{S_n}$ . Já no caso do exemplo 1.0.5, como o único elemento que satisfaz a igualdade  $hx = x$  é o elemento neutro de  $H$ , segue que a ação de  $H$  sobre  $G$  é livre.

Sejam  $\mathbb{Z}_p$  o grupo dos inteiros módulo  $p$  ( $p$  primo),  $X$  um espaço topológico e  $f : X \rightarrow X$  uma função contínua satisfazendo

- $f^p = id_X \quad (f^p = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_p)$
- $f(x) \neq x$ , para todo  $x \in X$

A função  $\mathbb{Z}_p \times X \xrightarrow{\varphi} X$  dada por  $(\bar{k}, x) \mapsto f^k(x)$  é uma ação livre de  $\mathbb{Z}_p$  sobre  $X$ , e dizemos que  $f$  gera uma  **$\mathbb{Z}_p$ -ação livre** sobre  $X$ .

Com efeito, verifica-se sem grandes dificuldades que a função  $\varphi$  definida acima é uma ação de  $\mathbb{Z}_p$  sobre  $X$ . Mostremos então que essa ação é livre. Para isso, consideremos os seguintes resultados (c.f. [10]):

**Lema 1.0.2 (Lagrange)** *Seja  $G$  um grupo. Então<sup>2</sup>  $|G| = [G : G_x] \cdot |G_x|$  para todo  $x \in G$ , onde  $[G : G_x]$  é o cardinal do quociente  $G/G_x$ .*

**Lema 1.0.3** *Se um grupo  $G$  atua sobre um conjunto  $S$ , então o cardinal da órbita de  $x \in S$  é o índice  $[G : G_x]$ .*

Logo, os lemas acima nos permitem concluir que  $p = |\bar{x}| \cdot |(\mathbb{Z}_p)_x|$ . Mas  $p$  é primo e portanto devemos ter  $|\bar{x}| = 1$  ou  $p$ . Como a órbita de  $x \in X$  é o conjunto  $\{f^k(x) ; \bar{k} \in \mathbb{Z}_p\}$  e  $f$  não fixa pontos, então  $|\bar{x}| \geq 2$  e daí temos que  $|\bar{x}| = p$ . Então,  $|(\mathbb{Z}_p)_x| = 1$  para todo  $x \in X$ , isto é,  $(\mathbb{Z}_p)_x = \{\bar{0}\}$  e portanto a ação é livre.

**Exemplo 1.0.6** *Sejam  $X = S^n$  a esfera  $n$ -dimensional e  $A : X \rightarrow X$  a aplicação tal que  $x \mapsto -x$  (aplicação antípoda). É fácil ver que  $A^2 = id_X$  e que  $A(x) \neq x$  para todo  $x \in X$ . A aplicação  $A$  gera uma  $\mathbb{Z}_2$ -ação livre sobre  $S^n$ .*

Vale ressaltar que quando  $n$  é par,  $\mathbb{Z}_2$  é o único grupo não trivial que atua livremente sobre  $S^n$  (c.f. [8], p. 135)

**Exemplo 1.0.7** *Consideremos  $S^1 \subset \mathbb{C}$ . A função  $f : S^1 \rightarrow S^1$  dada por  $f(z) = e^{\frac{p-1}{p}\pi i} z$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre em  $S^1$ , com  $p \geq 3$ . De fato, observemos que se  $e^{n\pi i} = 1$  então  $n\pi = 2k\pi$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ . Logo se existisse  $z \in S^1$  tal que  $f(z) = z$ , então  $e^{\frac{p-1}{p}\pi i} z = z \Rightarrow 1 - \frac{1}{p} = 2k$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ , o que é absurdo, pois  $p$  é primo. Além disso,  $f^p(z) = e^{(\frac{p-1}{p}\pi i)p} z = e^{(p-1)\pi i} z = z = id_X(z)$ .*

---

<sup>2</sup>A notação  $|G|$  significa cardinalidade de  $G$

### 1.0.3 Retrato absoluto

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços e  $A \subset X$  fechado. Se  $f : A \rightarrow Y$  é contínua, dizemos que uma função contínua  $F : X \rightarrow Y$  é uma **extensão** de  $f$ , se  $F|_A = f$ , sendo  $F|_A$  a restrição da função  $F$  ao subconjunto  $A$  de  $X$ .

**Definição 1.0.6** *Dados arbitrariamente um espaço  $X$  e um subconjunto fechado  $A \subset X$  dizemos que o espaço  $Y$  é um **retrato absoluto** de  $X$  (abreviadamente **AR**), se toda função  $f : A \rightarrow Y$  contínua pode ser estendida a uma função contínua  $F : X \rightarrow Y$ . Se  $X$  é um espaço normal, dizemos que  $Y$  é **AR(normal)**.*

**Exemplo 1.0.8** *Pelo teorema de Tietze ([14]), qualquer intervalo fechado e limitado de  $\mathbb{R}$  e o próprio  $\mathbb{R}$  são espaços AR(normais).*

**Exemplo 1.0.9** *O espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , o cubo  $n$ -dimensional  $I^n$  e o cubo de Hilbert  $I^\infty = \{(x_n) \in \prod_{i=1}^\infty \mathbb{R}_i : \mathbb{R}_i = \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N} \text{ e } |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$  são AR(normais). Isso é consequência imediata do seguinte fato.*

**Lema 1.0.4** *Seja  $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  uma família de espaços. Então  $\prod_\alpha Y_\alpha$  é AR(normal) se, e somente se, cada  $Y_\alpha$  é AR(normal).*

O resultado a seguir será fortemente usado no capítulo 2, para demonstrar o teorema 2.0.8. Antes, considere o seguinte resultado, cuja demonstração se encontra em [6].

**Teorema 1.0.1** *Sejam  $X$  um espaço métrico,  $A$  subespaço fechado de  $X$ ,  $L$  um espaço vetorial localmente convexo e  $f : A \rightarrow L$  contínua. Então existe uma extensão  $F : X \rightarrow L$ . Além disso,  $F(X)$  está contido na envoltória convexa de  $f(A)$ , ou seja,  $F(X) \subset \text{co}\{f(A)\}$ .*

Lembramos que um espaço vetorial  $L$  é dito ser **localmente convexo**, se para cada  $a \in L$  e cada vizinhança  $U_a$  de  $a$ , existir uma vizinhança convexa  $V_a$  tal que  $a \in V_a \subset U_a$ .

**Corolário 1.0.1** *Todo subconjunto convexo  $C$  de um espaço vetorial localmente convexo é AR.*

**Teorema 1.0.2** *Todo subconjunto fechado e convexo de um espaço vetorial normado de dimensão finita é AR(normal).*

**Demonstração:**

Seja  $V$  um espaço normado de dimensão finita e  $C$  um subconjunto fechado convexo de  $V$ . Queremos mostrar que, se  $X$  é um espaço normal e  $A$  é um subconjunto fechado de  $X$ , então qualquer função contínua  $f : A \rightarrow C$  possui uma extensão contínua  $F : X \rightarrow C$

Seja então  $f : A \rightarrow C$  uma função contínua. Note que, como  $V$  é espaço normado de dimensão finita, então  $V$  é homeomorfo a algum  $\mathbb{R}^n$ . Ora, pelo lema 1.0.4, sabemos que  $\mathbb{R}^n$  é AR(normal). Assim, se  $i : C \rightarrow V$  é a inclusão e  $h$  é o homeomorfismo entre  $V$  e  $\mathbb{R}^n$ , então a aplicação contínua  $g = h \circ i \circ f$

$$A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{i} V \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n$$

pode ser estendida a uma função  $G : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Logo, temos a função contínua  $H = h^{-1} \circ G : X \rightarrow V$ . Basta então mostrar que  $id_C : C \rightarrow C$  pode ser estendida a uma aplicação  $r : V \rightarrow C$  e daí a função  $F = r \circ H$  será a desejada extensão de  $f$  com relação a  $C$ .

Mas,  $V$  é métrico<sup>3</sup> e localmente convexo pois  $V$  é homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , e além disso, pelo corolário 1.0.1,  $C$  é AR. Portanto, como  $C$  é subconjunto

---

<sup>3</sup>Como  $V$  é normado então  $d(x, y) = |x - y|$  define uma métrica sobre  $V$

fechado de  $V$  segue que existe uma extensão  $r : V \longrightarrow C$  de  $id_C$ , como queríamos.

#### 1.0.4 Extensão de homotopia

Sejam  $f, g : X \longrightarrow Y$  funções contínuas. Dizemos que  $f$  é **homotópica** a função  $g$  (notação:  $f \simeq g$ ), se existir uma aplicação contínua  $F : X \times I \longrightarrow Y$  tal que

$$F(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad F(x, 1) = g(x)$$

para todo  $x \in X$ .  $F$  é dita ser uma **homotopia** entre  $f$  e  $g$ .

**Lema 1.0.5** *A relação  $\simeq$  é de equivalência*

Dada uma  $f$ , denotamos por  $[f]$  a classe de homotopia de  $f$ , isto é,  $[f]$  é o conjunto de todas as funções  $g$  tais que  $f \simeq g$ .

**Exemplo 1.0.10** *Sejam  $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $X$  é um espaço qualquer. Pode-se verificar sem maiores dificuldades que a função  $F : X \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $F(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$  é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ . A função  $F$  é comumente chamada de **homotopia linear**, pois ela "move" o ponto  $f(x)$  até o ponto  $g(x)$  através do segmento de reta ligando os dois pontos.*

**Observação 1.0.2** *Se  $A$  é um subespaço de um espaço  $X$ , não é simples responder quando uma dada função  $f : A \longrightarrow Y$  possui uma extensão. Na grande maioria dos casos, a resposta para esse tipo de questionamento depende da classe de homotopia de  $f$ .*

**Definição 1.0.7** *Seja  $f : X \times \{0\} \longrightarrow Y$  e  $A$  subespaço de  $X$ . Uma homotopia  $H : A \times I \longrightarrow Y$  é dita ser uma **homotopia parcial** de  $f$ , se  $f(x, 0) = H(x, 0)$  para todo  $x \in A$ .*

Dado um espaço topológico  $X$  uma **triangulação**  $T = \{t, K\}$  de  $X$  consiste de um complexo simplicial  $K$  e um homeomorfismo  $t : |K| \longrightarrow X$ .

O espaço  $X$  é dito ser **triangulável** se admite uma triangulação  $T = \{t, K\}$ .

Dizemos que  $X$  é **finitamente triangulável**, se existe uma triangulação  $T = \{t, K\}$  de  $X$  tal que  $K$  é um complexo simplicial finito.

**Exemplo 1.0.11** *Sejam  $S^1$  a esfera 1-dimensional e  $\Delta_2$  o 2-simplexo padrão. Se  $K = \partial\Delta_2$  é a união das faces de  $\Delta_2$  com dimensão menor que 2, então existe um homeomorfismo  $f : |K| \longrightarrow S^1$ , logo  $T = \{f, K\}$  é uma triangulação de  $S^1$ . Em geral,  $S^n$  é triangulável.*

**Definição 1.0.8** *Um par de espaços topológicos<sup>4</sup>  $(X, A)$  possui a **propriedade de extensão de homotopia** (notação: *PEH*) com relação a um espaço  $Y$  se, para toda aplicação  $f : X \times \{0\} \longrightarrow Y$  e toda homotopia parcial  $G : A \times I \longrightarrow Y$ , existir uma função  $F : X \times I \longrightarrow Y$  fazendo o diagrama abaixo comutar*

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{F} & Y \\ \uparrow i & \nearrow f \cup G & \\ (X \times \{0\}) \cup (A \times I) & & \end{array}$$

onde  $i$  é a inclusão e a função  $f \cup G : (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \longrightarrow Y$  é tal que

$$(f \cup G)(x, t) = \begin{cases} f(x, 0), & \text{se } x \in X \\ G(x, t), & \text{se } x \in A \end{cases}$$

Notamos que  $f \cup G$  está bem definida desde que  $G(x, 0) = f(x, 0)$  para todo  $x \in A$  e é contínua pelo lema da colagem.

**Teorema 1.0.3** *Seja  $Y$  um espaço (finitamente) triangulável. Então todo subconjunto fechado de qualquer espaço binormal<sup>5</sup>  $X$  tem a PEH em  $X$  com relação a  $Y$ .*

<sup>4</sup> $X$  espaço topológico e  $A$  subconjunto fechado de  $X$

<sup>5</sup>Um espaço  $X$  é binormal, se  $X \times I$  é normal

A prova desse teorema pode ser encontrada em [9]. No capítulo 3, usaremos esse resultado fortemente na demonstração do teorema 3.0.11.

## Capítulo 2

# Uma generalização do teorema de cobertura de Ljusternik-Schnirelmann

Considere o teorema clássico de Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk:

**Teorema 2.0.4** *Sejam  $H_1, H_2, \dots, H_k$  subconjuntos fechados da esfera  $S^n$  tais que  $\cup_{i=1}^k H_i = S^n$  e  $H_i \cap (-H_i) = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k$ . Então  $k \geq n + 2$*

Agora, se ao invés da  $S^n$  tivermos um espaço de Hausdorff  $M$  qualquer juntamente com uma função  $f : M \rightarrow M$  que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $M$  tal que os fechados  $H_1, H_2, \dots, H_k$  cobrem  $M$  e satisfazem  $H_i \cap f(H_i) = \emptyset$ , para  $i = 1, \dots, k$  e  $p$  primo, como poderíamos substituir a estimativa  $k \geq n + 2$ ?

Nesse capítulo nos dedicamos a responder essa questão. Daremos uma versão generalizada do teorema 2.0.4, segundo Steinlein [16], no contexto do *genus* segundo A. S. Švarc

**Definição 2.0.9** *Sejam  $M$  um espaço de Hausdorff,  $p$  um número primo e  $f : M \rightarrow M$  uma função que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre em  $M$  (isto é,  $f$  é*

contínua,  $f^p = id_M$  e  $f(x) \neq x, \forall x \in M$ ). Seja ainda

$C(M, f) = \{G \subset M : \text{existem conjuntos fechados disjuntos } G_0, G_1, \dots, G_{p-1} \subset M \text{ com } \cup_{i=0}^{p-1} G_i = G \text{ e } f^i(G_0) = G_i \text{ para } i = 1, \dots, p-1\}$

Então, definimos o genus  $g(M, f)$  por

$$g(M, f) = \min\{\text{card } \mathcal{G} \ ; \ \mathcal{G} \subset C(M, f), \cup_{G \in \mathcal{G}} G = M\}$$

**Observação 2.0.3** Por simplicidade, a partir daqui quando dissermos que  $f$  é uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre, estaremos nos referindo a uma função que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $M$ .

Nessa linha de pensamento, temos para  $p = 2$  o seguinte resultado (veja [17], [21]):

**Teorema 2.0.5** Sejam  $M$  um espaço de Hausdorff,  $f : M \rightarrow M$  uma  $\mathbb{Z}_2$ -ação livre e  $M_1, M_2, \dots, M_k \subset M$  subconjuntos fechados tais que  $\cup_{i=1}^k M_i = M$  e  $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k$ . Então  $k \geq g(M, f) + 1$

**Demonstração:**

Como  $M_k \cap f(M_k) = \emptyset$  e  $\cup_{i=1}^k f(M_i) = f(\cup_{i=1}^k M_i) = f(M) = M$ , segue que  $M_k \subset \cup_{i=1}^k f(M_i)$ . Assim,

$$M = \cup_{i=1}^k M_i = \cup_{i=1}^{k-1} M_i \cup M_k = \cup_{i=1}^{k-1} (M_i \cup f(M_i))$$

Sejam  $G^i = M_i \cup f(M_i)$  para  $i = 1, \dots, k-1$ , e chamemos  $G_0^i = M_i$  e  $G_1^i = f(M_i)$ . Logo,  $G^i = G_0^i \cup G_1^i$ ,  $f(G_0^i) = G_1^i$  e  $G_0^i \cap G_1^i = \emptyset$  para todo  $i = 1, \dots, k-1$ . Portanto, cada  $G^i \in C(M, f)$  e ainda  $M = \cup_{i=1}^{k-1} G^i$ . Daí  $g(M, f) \leq k-1$ .  $\square$

Entretanto, a questão análoga para uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre com  $p \geq 3$  primo, parece ser muito mais complicada. Assim, descreveremos aqui uma generalização do teorema 2.0.4 para espaços normais.

Vale ressaltar que o cálculo do *genus*, em geral, não é tarefa simples, apesar de existirem algumas estimativas em termos da dimensão, conexidade ou (co)-homologia do espaço. A exemplo disso, Krasnosel'skiï mostra em [11] o seguinte

**Teorema 2.0.6** *Seja  $M$  um espaço de Hausdorff. Independente da função  $f$  que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $M$  e do primo  $p$ , temos sempre  $g(S^n, f) = n + 1$ .*

Um resumo da demonstração desse teorema pode ser encontrada em [2].

Mostraremos, no teorema 2.0.8, que  $g(M, f) \leq g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$  sendo  $L_{k,p}$  um espaço normal especial e  $\varphi_{k,p}$  uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $L_{k,p}$ .

Consideremos  $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$  e  $\mathbb{R}^\infty := \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : x_n = x(n) = 0 \text{ para quase todo } n \in \mathbb{N}\}$  dotado da topologia Euclidiana, isto é, a topologia induzida da métrica  $d(x, y) = (\sum_{i=1}^\infty (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}}$ . Assim, sendo  $e_i \in \mathbb{R}^\infty$  tal que

$$e_i(n) := \delta_{in} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = n \\ 0 & \text{se } i \neq n \end{cases}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ ,  $I \subset \{1, \dots, q\}$  e  $i \in \{1, \dots, q\}$ , definimos

$$\begin{aligned} \Delta_{q-1} &:= \text{co}\{e_1, \dots, e_q\} \\ \Delta_{q-1}^I &:= \text{co}\{e_j \mid j \in I\} \\ \Delta_{q-1:i} &:= \Delta_{q-1}^{\{1, \dots, q\} \setminus \{i\}} = \text{co}\{e_j \mid j \in \{1, \dots, q\} \setminus \{i\}\} \\ \partial\Delta_{q-1} &:= \cup_{i=1}^q \Delta_{q-1:i} \end{aligned}$$

Assim,  $\Delta_{q-1}$  é o simplexo  $(q - 1)$ -dimensional gerado por  $e_1, \dots, e_q$ ,  $\Delta_{q-1}^I$  e  $\Delta_{q-1:i}$  são faces e  $\partial\Delta_{q-1}$  é o bordo de  $\Delta_{q-1}$ . Além disso, usaremos  $[\Delta_{q-1}^I]$  para denotar o baricentro de  $\Delta_{q-1}^I$ .

Demonstraremos agora um teorema que é de fundamental importância na prova do resultado principal.

**Teorema 2.0.7** *Sejam  $M$  um espaço normal,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p$  um número primo,  $f : M \rightarrow M$  uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre e  $M_1, M_2, \dots, M_k \subset M$  subconjuntos fechados tais que  $\cup_{i=1}^k M_i = M$  e  $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k$ . Então existe uma função contínua  $h : M \rightarrow \partial\Delta_{k-1}$  tal que  $h(M_i) \subset \Delta_{k-1:i}$  e*

$$h(f(h^{-1}(\Delta_{k-1:i}))) \subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \text{co}\{[\Delta_{k-1}^K] \setminus \{i\}\} \subset K \subset \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}$$

*Em particular,  $h(f(h^{-1}(\Delta_{k-1:i}))) \cap \Delta_{k-1:i} = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k$ .*

Antes de demonstrarmos esse teorema, consideremos os seguintes lemas:

**Lema 2.0.6** *Nas hipóteses do teorema acima, para cada  $i = 1, \dots, k$ , existe aberto  $N_i \subset M$  tal que  $M_i \subset N_i$  e  $N_i \cap f(N_i) = \emptyset$ .*

### Demonstração:

Notamos que  $f$  é homeomorfismo ( $f$  é contínua cuja inversa é  $f^{p-1}$ ), e como cada  $M_i$  é fechado, segue que  $f(M_i)$  é fechado em  $M$ . Daí,  $M_i$  e  $f(M_i)$  são subconjuntos fechados do espaço normal  $M$  tais que  $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$ , logo existem abertos  $A$  e  $B$  de  $M$  os quais são disjuntos e  $A \supset M_i$  e  $B \supset f(M_i)$ .

Agora, como  $B$  é aberto e  $f$  é contínua, então  $f^{-1}(B)$  é aberto em  $M$ . Segue então que  $N_i = f^{-1}(B) \cap A$  é aberto.

**Afirmção 2.0.1**  *$N_i$  é tal que  $M_i \subset N_i$  e  $N_i \cap f(N_i) = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k$ .*

De fato, como  $f(M_i) \subset B$  então  $M_i \subset f^{-1}(f(M_i)) \subset f^{-1}(B)$ . Ainda,  $M_i \subset A$ , o que nos permite concluir que  $M_i \subset f^{-1}(B) \cap A = N_i$ , como queríamos.

Ainda,

$$(f^{-1}(B) \cap A) \cap (B \cap f(A)) = f^{-1}(B) \cap (A \cap B) \cap f(A) = \emptyset$$

Portanto,  $N_i \cap f(N_i) = \emptyset$ . □

Consideremos, nas notações acima, para  $I, J \subset \{1, \dots, k\}$ , o seguinte conjunto:

$$W_{I,J} := \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i \setminus \bigcup_{j \in J} N_j \quad (2.1)$$

Observemos que, se  $J \subset I$  e  $I = \emptyset$  então  $J = \emptyset$  e  $W_{I,J} := \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\}} M_i = \emptyset$ . Com efeito, como  $\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\}} M_i \subset M_j$  para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$  temos que  $f(\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\}} M_i) \subset f(M_j)$  e conseqüentemente,  $f(\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\}} M_i) \cap M_j \subset f(M_j) \cap M_j = \emptyset$  para cada  $j \in \{1, \dots, k\} \implies \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\}} M_i = \emptyset$ .

Seja  $n \in \{1, 2, \dots, k-2\}$ . Denotando por  $\text{card } I$  a cardinalidade do conjunto  $I$ , definimos

$$M^{(n)} := \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I \leq n}} \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i \quad (2.2)$$

**Lema 2.0.7** *Segundo as mesmas notações e definições dadas acima, valem as seguintes afirmações:*

1.  $M^{(n+1)} = \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I = n+1}} (M^{(n)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i)$ .
2.  $[(M^{(n)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_1} M_i) \cap (M^{(n)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_2} M_i)] \subset M^{(n)}$  para  $I_1, I_2 \subset \{1, \dots, k\}$  com  $\text{card } I_1 = \text{card } I_2 = n+1$  e  $I_1 \neq I_2$ .

**Demonstração:**

1. Pelo que definimos em (2.2) temos:

$$M^{(n+1)} := \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I \leq n+1}} \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i$$

Daí,

$$\begin{aligned}
M^{(n+1)} &= \left( \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I \leq n}} \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I = n+1}} \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i \right) \\
&= M^{(n)} \cup \left( \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I = n+1}} \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i \right) \\
&= \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I = n+1}} (M^{(n)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i)
\end{aligned}$$

2. Primeiramente, observemos que:

$$(\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_1} M_i) \cap (\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_2} M_i) = \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_1 \cap I_2} M_i \quad (2.3)$$

pois

$$\begin{aligned}
(\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_1} M_i) \cap (\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_2} M_i) &= \bigcap_{i \in (\{1, \dots, k\} \setminus I_1) \cup (\{1, \dots, k\} \setminus I_2)} M_i \\
&= \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_1 \cap I_2} M_i
\end{aligned}$$

Ainda, notemos que  $\text{card } (I_1 \cap I_2) \leq n$ , desde que  $\text{card } I_1 = \text{card } I_2 = n + 1$  e  $I_1 \neq I_2$ . Logo, temos que  $\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_1 \cap I_2} M_i \subset M^{(n)}$ .

Portanto, segue que:

$$\begin{aligned}
& (M^{(n)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_1} M_i) \cap (M^{(n)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_2} M_i) = \\
&= [(M^{(n)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_1} M_i) \cap M^{(n)}] \cup [(M^{(n)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_1} M_i) \cap \\
& \quad \cap (\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_2} M_i)] \\
&= M^{(n)} \cup [M^{(n)} \cap (\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_1} M_i)] \cup [M^{(n)} \cap (\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_2} M_i)] \cup \\
& \quad \cup [(\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_1} M_i) \cap (\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_2} M_i)] \\
&\stackrel{(2.3)}{\subset} M^{(n)} \cup (M^{(n)} \cap \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_1} M_i) \cup (M^{(n)} \cap \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_2} M_i) \subseteq M^{(n)}.
\end{aligned}$$

□

Dados  $I_0 \subset \{1, \dots, k\}$  tal que  $\text{card } I_0 = n + 1$  e  $m \in \{1, \dots, n + 1\}$ , definimos

$$M_{I_0}^{(m)} := M^{(n)} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq m}} W_{I_0, J} \quad (2.4)$$

**Lema 2.0.8** *Valem as seguintes propriedades:*

1.  $M_{I_0}^{(m-1)} = \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J = m-1}} (M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0, J})$ .
2.  $[(M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0, J_1}) \cap (M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0, J_2})] \subset M_{I_0}^{(m)}$  para  $J_1, J_2 \subset I_0$  tais que  $\text{card } J_1 = \text{card } J_2 = m - 1$  e  $J_1 \neq J_2$ .
3. Se  $J_0 \subset I_0$  então  $W_{I_0, J_0} \cap M_{I_0}^{(m)} = \bigcup_{\substack{J_0 \subset I \subset I_0 \\ \text{card } I \leq n}} W_{I, J_0} \cup \bigcup_{\substack{J_0 \subset J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq m}} W_{I_0, J}$ .
4. Se  $\text{card } I_0 = n + 1$  então  $M^{(n)} \cap W_{I_0, I_0} = \emptyset$
5.  $M_{I_0}^{(1)} = M^{(n)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i$

**Demonstração:**

1. De acordo com a definição (2.4), temos:

$$\begin{aligned} M_{I_0}^{(m-1)} &= M^{(n)} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq m-1}} W_{I_0, J} \\ &= M^{(n)} \cup \left( \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq m}} W_{I_0, J} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J = m-1}} W_{I_0, J} \right) \\ &= M_{I_0}^{(m)} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J = m-1}} W_{I_0, J} \\ &= \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J = m-1}} (M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0, J}) \end{aligned}$$

2. Para  $J_1, J_2 \subset I_0$  tais que  $\text{card } J_1 = \text{card } J_2 = m - 1$  e  $J_1 \neq J_2$ , temos:

$$\begin{aligned}
& [(M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0, J_1}) \cap (M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0, J_2})] = \\
& = [(M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0, J_1}) \cap M_{I_0}^{(m)}] \cup [(M_{I_0}^{(m)} \cup W_{I_0, J_1}) \cap W_{I_0, J_2}] \\
& = M_{I_0}^{(m)} \cup (M_{I_0}^{(m)} \cap W_{I_0, J_1}) \cup (M_{I_0}^{(m)} \cap W_{I_0, J_2}) \cup (W_{I_0, J_1} \cap W_{I_0, J_2}) \\
& \stackrel{(*)}{\subset} M_{I_0}^{(m)} \cup (M_{I_0}^{(m)} \cap W_{I_0, J_1}) \cup (M_{I_0}^{(m)} \cap W_{I_0, J_2}) \subset M_{I_0}^{(m)}
\end{aligned}$$

(\*) Observe que,  $W_{I_0, J_1} \cap W_{I_0, J_2} = W_{I_0, J_1 \cup J_2} \subset M_{I_0}^{(m)}$ . Com efeito, por um lado, se tomarmos  $x \in W_{I_0, J_1} \cap W_{I_0, J_2}$  então:

- $x \in W_{I_0, J_1} = \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1} N_j \Rightarrow x \in M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1} N_j$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0$
- $x \in W_{I_0, J_2} = \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i \setminus \bigcup_{j \in J_2} N_j \Rightarrow x \in M_i \setminus \bigcup_{j \in J_2} N_j$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0$

Logo,  $x \in M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1 \cup J_2} N_j$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0$ , isto é,  $x \in \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1 \cup J_2} N_j = W_{I_0, J_1 \cup J_2}$ .

Reciprocamente, se  $x \in W_{I_0, J_1 \cup J_2}$ , temos

$$\begin{aligned}
& x \in M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1 \cup J_2} N_j \text{ para todo } i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0 \\
& \Rightarrow x \in (M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1} N_j) \cap (M_i \setminus \bigcup_{j \in J_2} N_j) \text{ para todo } i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0 \\
& \Rightarrow x \in (M_i \setminus \bigcup_{j \in J_1} N_j) \text{ e } x \in (M_i \setminus \bigcup_{j \in J_2} N_j) \text{ para todo } i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0 \\
& \Rightarrow x \in W_{I_0, J_1} \text{ e } x \in W_{I_0, J_2} \Rightarrow x \in W_{I_0, J_1} \cap W_{I_0, J_2}
\end{aligned}$$

Ainda,  $W_{I_0, J_1 \cup J_2} \subset M_{I_0}^{(m)}$ , pois  $\text{card}(J_1 \cup J_2) \geq m$  dado que  $\text{card } J_1 = \text{card } J_2 = m - 1$  e  $J_1 \neq J_2$ .

3. Considerando as definições dos conjuntos envolvidos, temos

$$\begin{aligned}
W_{I_0, J_0} \cap M_{I_0}^{(m)} &= W_{I_0, J_0} \cap (M^{(n)} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq m}} W_{I_0, J}) \\
&= (W_{I_0, J_0} \cap M^{(n)}) \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq m}} (W_{I_0, J_0} \cap W_{I_0, J}) \\
&= \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I \leq n}} [W_{I_0, J_0} \cap (\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i)] \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq m}} W_{I_0, J \cup J_0} \\
&= \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I \leq n}} [(\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i \setminus \bigcup_{j \in J_0} N_j) \cap (\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i)] \cup \\
&\quad \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq m}} W_{I_0, J \cup J_0} \\
&= \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I \leq n}} [(\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i \cap \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i) \setminus \bigcup_{j \in J_0} N_j] \cup \\
&\quad \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq m}} W_{I_0, J \cup J_0} \\
&= \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I \leq n}} (\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I \cap I_0} M_i \setminus \bigcup_{j \in J_0} N_j) \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq m}} W_{I_0, J \cup J_0} \\
&= \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I \leq n}} W_{I \cap I_0, J_0} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq m}} W_{I_0, J \cup J_0} \\
&= \bigcup_{\substack{J_0 \subset I \subset I_0 \\ \text{card } I \leq n}} W_{I, J_0} \cup \bigcup_{\substack{J_0 \subset J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq m}} W_{I_0, J}
\end{aligned}$$

4. Seja  $I_0 \subset \{1, \dots, k\}$  tal que  $\text{card } I_0 = n + 1$ . Temos, por definição, que:

$$M^{(n)} := \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I \leq n}} \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i$$

e

$$W_{I_0, I_0} := \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i \setminus \bigcup_{j \in I_0} N_j$$

Notamos que, se existisse  $x \in M^{(n)} \cap W_{I_0, I_0}$  então, por um lado,  $x \in M_i \setminus \bigcup_{j \in I_0} N_j$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0$  e portanto, desde que  $M_j \subset N_j$  (veja lema 2.0.6), segue que  $x \notin M_i, \forall i \in I_0$ . Mas  $\text{card } I_0 = n + 1$  e  $\text{card } I \leq n$ , logo existe pelo menos um índice  $i_0 \in I_0 \setminus I$  qualquer

que seja  $I \subset \{1, \dots, k\}$ . Por outro lado,  $x \in \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i$  para algum  $I \subset \{1, \dots, k\}$  com  $\text{card } I \leq n$  e conseqüentemente  $x \in M_{i_0}$  pois  $i_0 \notin I$  e  $I_0 \subset \{1, \dots, k\}$ , o que contradiz o fato de  $x \notin M_i$  com  $i \in I_0$ . Concluimos então que  $M^{(n)} \cap W_{I_0, I_0} = \emptyset$ .

5. Segue da definição (2.4) que

$$M_{I_0}^{(1)} = M^{(n)} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq 1}} W_{I_0, J}$$

Logo, tomando-se  $x \in M_{I_0}^{(1)}$ , então  $x \in M^{(n)}$  ou  $x \in \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq 1}} W_{I_0, J}$ .

Se  $x$  pertencer a  $M^{(n)}$ , certamente  $x \in M^{(n)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i$ . Agora suponhamos que  $x \in \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq 1}} W_{I_0, J}$ . Segue que  $x \in W_{I_0, J}$  para algum  $J \subset I_0$  com  $\text{card } J \geq 1$  e daí

$$x \in W_{I_0, J} = \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i \setminus \bigcup_{j \in J} N_j \subset \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i$$

Portanto,  $x \in M^{(n)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i$

Agora, tomando-se  $x \in M^{(n)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i$ . Observa-se que, para cada  $j = 1, \dots, k$

$$f(N_j) \cap (\bigcap_{i=1}^k N_i) = (f(N_j) \cap N_j) \cap (\bigcap_{i=1}^k N_i) = \emptyset$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^k N_i &= (\bigcap_{i=1}^k N_i) \cap M = (\bigcap_{i=1}^k N_i) \cap (\bigcup_{j=1}^k f(N_j)) \\ &= \bigcup_{j=1}^k [(\bigcap_{i=1}^k N_i) \cap f(N_j)] = \emptyset \end{aligned}$$

Assim, para cada  $x \in M$ , existe um índice  $j \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $x \notin N_j$ . Logo, se  $x \in \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i$ , então existe  $j \in I_0$  (aqui necessariamente devemos ter  $j \in I_0$ , visto que  $\bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i \subset N_j$  para todo

$j \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0$ , tal que  $x \notin N_j$  e daí  $x \in \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I_0} M_i \setminus N_j = W_{I_0, \{j\}} \subset M_{I_0}^{(1)}$ , isto é,  $x \in M_{I_0}^{(1)}$ . Por outro lado, se  $x \in M^{(n)}$  então  $x \in M_{I_0}^{(1)} = M^{(n)} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq 1}} W_{I_0, J}$ .

□

### Demonstração do teorema 2.0.7:

Daremos aqui apenas a demonstração para o caso  $k = 4$ , meramente para deixar mais "evidente" a técnica usada para  $k$  qualquer. A prova do caso geral é dada em [16] por indução.

Assim, como no lema 2.0.6, para cada  $M_i$  existe um aberto  $N_i \subset M$  tal que  $N_i \cap f(N_i) = \emptyset$  para  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Queremos construir uma função contínua  $h : M \rightarrow \partial\Delta_3$  tal que  $h(M_i) \subset \Delta_{3;i}$  para cada  $i = 1, 2, 3, 4$ , ou seja, de forma que a imagem de cada  $M_i$  por  $h$  esteja contida na face oposta ao vértice  $e_i$  e ainda

$$h(f(h^{-1}(\Delta_{3;i}))) \subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \text{co}\{[\Delta_3^K] \setminus \{i\}\} \subset K \subset \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}$$

Para isso, definiremos  $h$  continuamente sobre  $M$  satisfazendo, para todo  $\emptyset \neq J \subset I \subset \{1, 2, 3, 4\}$

$$h(W_{I,J}) \subset \text{co}\{[\Delta_3^K] \mid J \subset K \subset I\} \quad (2.5)$$

o que caracteriza as propriedades que exigimos para  $h$ , como acima (constataremos isso no final da demonstração).

Bem, observemos que, para  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ , pelo que definimos em (2.2) temos  $M^{(1)} \subset M^{(2)} \subset M^{(3)} = M$  (para  $n = 4$ ,  $M^{(n)} = \emptyset$ ). Começaremos então definindo uma função contínua  $h_1$  sobre o conjunto

$$M^{(1)} = \bigcup_{\substack{I \subset \{1, 2, 3, 4\} \\ \text{card } I = 1}} \bigcap_{i \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus I} M_i$$

chegando em  $\partial\Delta_3$  tal que, para todo  $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$  com  $\text{card } I = 1$  e  $\emptyset \neq J \subset I$ , a imagem de cada conjunto  $W_{I,J}$  (veja (2.1)) por  $h_1$  esteja contida em  $\text{co}\{[\Delta_3^K] \mid J \subset K \subset I\}$ . Notemos que, para cada  $I$  nestas condições, o conjunto  $W_{I,J}$  nada mais é do que o conjunto dos pontos de  $\bigcap_{i \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus I} M_i$ , que não pertencem a  $\bigcup_{j \in J} N_j$  e portanto  $W_{I,J}$  é um subconjunto de  $\bigcap_{i \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus I} M_i$ .

Em seguida, definiremos uma função  $h_2 : M^{(2)} \longrightarrow \partial\Delta_3$  de maneira que  $h_2$  seja uma extensão contínua de  $h_1$ . Ora, pelo lema 2.0.7 item 1, temos

$$M^{(2)} = \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I = 2}} (M^{(1)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i)$$

Logo, desde que a interseção duas a duas das parcelas dessa união está contida em  $M^{(1)}$  (veja item 2 do lema 2.0.7), podemos assim definir  $h_2$  em cada um dos conjuntos  $M^{(1)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i$  separadamente, com  $\text{card } I = 2$ . Para isso, definiremos  $h_2$  sobre cada conjunto  $M_I^{(2)}$  para  $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$  com cardinal igual a dois, e estenderemos para o conjunto  $M_I^{(1)}$ , o qual é igual a  $M^{(1)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i$  (lema 2.0.8, item 5) para cada  $I$ , o que conseqüentemente nos dará uma definição de  $h_2$  sobre  $M^{(2)}$ . Vale ressaltar que, cada extensão dessa é feita de modo a preservar a propriedade (2.5). Finalmente, desde que

$$M^{(3)} = \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, k\} \\ \text{card } I = 3}} (M^{(2)} \cup \bigcap_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} M_i)$$

construiremos  $h_3 : M^{(3)} \longrightarrow \partial\Delta_3$ , a qual estende  $h_2$ , de maneira inteiramente análoga ao que faremos para definir  $h_2$ , mas agora para todo  $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$  com  $\text{card } I = 3$ . Assim, como  $M^{(3)} = M$ , segue que  $h_3$  será a requerida função  $h$ .

Sendo assim, consideremos o conjunto

$$\begin{aligned}
M^{(1)} &= \bigcup_{\substack{I \subset \{1,2,3,4\} \\ \text{card } I=1}} \bigcap_{i \in \{1,2,3,4\} \setminus I} M_i = \\
&= \underbrace{(M_2 \cap M_3 \cap M_4)}_{V_1} \cup \underbrace{(M_1 \cap M_3 \cap M_4)}_{V_2} \cup \underbrace{(M_1 \cap M_2 \cap M_4)}_{V_3} \cup \\
&\quad \cup \underbrace{(M_1 \cap M_2 \cap M_3)}_{V_4}
\end{aligned}$$

Definamos então,  $h_1 : M^{(1)} \rightarrow \partial\Delta_3$  como segue:

$$h_1(x) = \begin{cases} e_1, & \text{se } x \in V_1 \\ e_2, & \text{se } x \in V_2 \\ e_3, & \text{se } x \in V_3 \\ e_4, & \text{se } x \in V_4 \end{cases}$$

onde  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ , são os vértices do 3-simplexo  $\Delta_3$ .

Observemos que  $h_1$  está bem definida desde que  $V_i \cap V_j = \emptyset$  para todo  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  com  $i \neq j$ , pois  $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 = \emptyset$  conforme já mostramos (veja página 20). Além disso, claramente  $h_1$  é contínua e satisfaz a condição (2.5), visto que para  $I = \{t\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$  podemos ter somente  $J = I$  e portanto

$$W_{I,I} = \bigcap_{i \in \{1,2,3,4\} \setminus I} M_i \setminus N_i \subset \bigcap_{i \in \{1,2,3,4\} \setminus I} M_i = V_t$$

Logo, como  $h(V_t) = e_t$  e  $co\{[\Delta_3^K] | I \subset K \subset I\} = [\Delta_3^{\{t\}}] = e_t$  para  $t = 1, 2, 3, 4$ , segue que

$$h_1(W_{I,I}) \subset co\{[\Delta_3^K] | I \subset K \subset I\}$$

Agora, nosso próximo passo será definir  $h_2$  continuamente no conjunto

$$\begin{aligned}
M^{(2)} &= M^{(1)} \cup \left( \bigcup_{\substack{I \subset \{1,2,3,4\} \\ \text{card } I=2}} \bigcap_{i \in \{1,2,3,4\} \setminus I} M_i \right) \\
&= \bigcup_{\substack{I \subset \{1,2,3,4\} \\ \text{card } I=2}} (M^{(1)} \cup \bigcap_{i \in \{1,2,3,4\} \setminus I} M_i)
\end{aligned}$$

de forma a estender  $h_1$  no conjunto  $M^{(2)}$  preservando (2.5).

Notamos que, para  $I_1, I_2 \subset \{1, 2, 3, 4\}$  com  $\text{card } I_1 = \text{card } I_2 = 2$  e  $I_1 \neq I_2$ , segue do lema 2.0.7 item 2 que

$$(M^{(1)} \cup \bigcap_{i \in \{1,2,3,4\} \setminus I_1} M_i) \cap (M^{(1)} \cup \bigcap_{i \in \{1,2,3,4\} \setminus I_2} M_i) \subset M^{(1)}$$

e portanto, basta que  $h_1$  seja estendida continuamente em cada um dos conjuntos  $M^{(1)} \cup \bigcap_{i \in \{1,2,3,4\} \setminus I} M_i$  para todo  $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$  com  $\text{card } I = 2$ .

Por uma questão de otimização da demonstração, nos concentraremos aqui apenas na construção de  $h_2$  especificamente para  $I_0 = \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$ , visto que para os demais  $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$  com cardinal igual a dois, a demonstração é inteiramente análoga. Logo, considerando  $I_0$ , como  $\emptyset \neq J \subset I_0$ , temos

**Caso 1** ( $J = I_0$ ):

Para todo  $x \in W_{I_0, I_0}$  definamos

$$h_2(x) = [\Delta_3^{I_0}].$$

Note que,  $M^{(1)} \cap W_{I_0, I_0} = \emptyset$  (lema 2.0.8, item 4). Portanto a função está bem definida e é contínua em  $M_{I_0}^{(2)} = M^{(1)} \cup W_{I_0, I_0}$ . Além disso,

$$h_2(W_{I_0, I_0}) \subset \text{co}\{[\Delta_3^K] \mid I_0 \subset K \subset I_0\} = [\Delta_3^{I_0}]$$

logo,  $h_2|_{M_{I_0}^{(2)}}$  satisfaz (2.5).

**Caso 2** ( $J = \{1\}$  ou  $J = \{2\}$ ):

Por conveniência, chamemos  $J = \{1\}$  de  $J_1$  e  $J = \{2\}$  de  $J_2$  e consideremos:

$$\begin{aligned} M_{I_0}^{(1)} &= M_{I_0}^{(2)} \cup (W_{I_0, J_1} \cup W_{I_0, J_2}) \\ &= (M_{I_0}^{(2)} \cup W_{I_0, J_1}) \cup (M_{I_0}^{(2)} \cup W_{I_0, J_2}) \end{aligned}$$

Queremos mais uma vez definir  $h_2$ , continuamente, agora sobre o conjunto  $M_{I_0}^{(1)}$ , de forma a satisfazer a condição (2.5). Já sabemos que  $h_2$  está bem definida em  $(M_{I_0}^{(2)} \cup W_{I_0, J_1}) \cap (M_{I_0}^{(2)} \cup W_{I_0, J_2}) \subset M_{I_0}^{(2)}$  (lema 2.0.8, item 2). Portanto basta que estendamos  $h_2$  em cada um dos conjuntos  $M_{I_0}^{(2)} \cup W_{I_0, J_i}$ , para  $i = 1, 2$ .

Mas, pelo lema 2.0.8 item 3, para  $i = 1, 2$ , segue que:

$$\begin{aligned} W_{I_0, J_i} \cap M_{I_0}^{(2)} &= \bigcup_{\substack{J_i \subset I \subset I_0 \\ \text{card } I \leq 1}} W_{I, J_i} \cup \bigcup_{\substack{J_i \subset J \subset I_0 \\ \text{card } J \geq 2}} W_{I_0, J} \\ &= W_{J_i, J_i} \cup W_{I_0, I_0} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h_2(W_{I_0, J_i} \cap M_{I_0}^{(2)}) &= h_2(W_{J_i, J_i}) \cup h_2(W_{I_0, I_0}) \\ &\stackrel{(*)}{\subset} \text{co}\{[\Delta_3^K] \mid K = J_i\} \cup \text{co}\{[\Delta_3^K] \mid K = I_0\} \\ &\subset \text{co}\{e_i, [\Delta_3^{I_0}]\} \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

(\*) Essa passagem segue do fato de que  $h_2$  está definida em  $M_{I_0}^{(2)}$  satisfazendo a condição (2.5) e que  $(W_{I_0, J_i} \cap M_{I_0}^{(2)}) \subset M_{I_0}^{(2)}$ .

Notemos ainda que,  $\text{co}\{e_i, [\Delta_3^{I_0}]\}$  nada mais é do que o 1-simplexo gerado por  $\{e_i, [\Delta_3^{I_0}]\}$ , o qual é um subconjunto fechado e convexo de  $\mathbb{R}^3$ . Assim,  $\text{co}\{e_i, [\Delta_3^{I_0}]\}$  satisfaz as hipóteses do teorema 1.0.2 e, portanto é AR(normal). Mas,  $M_{I_0}^{(2)}$  e  $W_{I_0, J_i}$  são subconjuntos fechados de  $M$ , logo  $W_{I_0, J_i}$  é normal e  $W_{I_0, J_i} \cap M_{I_0}^{(2)}$  é um subconjunto fechado de  $W_{I_0, J_i}$  para  $i = 1, 2$ . Daí,  $h_2|_{W_{I_0, J_i} \cap M_{I_0}^{(2)}}$  pode ser estendida continuamente para cada  $W_{I_0, J_i}$  de forma que  $h_2(W_{I_0, J_i}) \subset \text{co}\{e_i, [\Delta_3^{I_0}]\} = \text{co}\{[\Delta_3^K] \mid J_i \subset K \subset I_0\}$  para  $j = 1, 2$ . Portanto, temos  $h_2$  definida sobre o conjunto  $M_{I_0}^{(1)}$  e satisfazendo (2.5).

Dessa forma, finalmente obtivemos uma definição para  $h_2$  no conjunto  $M^{(1)} \cup \bigcap_{i \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus I_0} M_i = M^{(1)} \cup (M_3 \cap M_4) = M_{I_0}^{(1)}$  (lema 2.0.8, item 5). Como

já tínhamos dito antes para os demais  $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$  com cardinal igual a dois, construímos  $h_2$  sobre cada  $M^{(1)} \cup \bigcap_{i \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus I} M_i$ , a qual estende  $h_1$ , de maneira inteiramente análoga ao que fizemos acima. Portanto, a união de todas essas extensões nos dá a requerida função  $h_2$  sobre o conjunto  $M^{(2)} = \bigcup_{\substack{I \subset \{1, 2, 3, 4\} \\ \text{card } I=2}} M_I^{(1)}$  satisfazendo a condição (2.5), como queríamos.

Por fim, consideremos o conjunto

$$\begin{aligned}
M^{(3)} &= \bigcup_{\substack{I \subset \{1, 2, 3, 4\} \\ \text{card } I \leq 3}} \bigcap_{i \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus I} M_i \\
&= M^{(2)} \cup \left( \bigcup_{\substack{I \subset \{1, 2, 3, 4\} \\ \text{card } I=3}} \bigcap_{i \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus I} M_i \right) \\
&= M^{(2)} \cup (M_4 \cup M_3 \cup M_2 \cup M_1) \\
&= (M^{(2)} \cup M_1) \cup (M^{(2)} \cup M_2) \cup (M^{(2)} \cup M_3) \cup (M^{(2)} \cup M_4)
\end{aligned}$$

Mais uma vez, observemos que  $(M^{(2)} \cup M_i) \cap (M^{(2)} \cup M_j) \subset M^{(2)}$  para todo  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $i \neq j$  e portanto basta que definamos  $h_3 : M^{(3)} \rightarrow \partial\Delta_3$ , uma extensão de  $h_2$ , em cada  $M^{(2)} \cup M_i$  com  $i = 1, 2, 3, 4$  separadamente. Note-mos que  $M^{(3)} = M$  e, portanto se definirmos  $h_3$  satisfazendo a condição (2.5), teremos  $h = h_3 : M \rightarrow \partial\Delta_3$ , como desejamos. A técnica para estendermos  $h_2$  é a mesma usada no processo de extensão de  $h_1$ . Entretanto, agora temos  $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$  com  $\text{card } I = 3$ . Por esse motivo, faz sentido começarmos definindo  $h_3$  sobre  $M_I^{(3)}$ , em seguida estenderemos ao conjunto  $M_I^{(2)}$  usando o fato de que  $\text{co}\{[\Delta_3^K] \mid J \subset K \subset I\}$  é AR(normal). Desde que

$$M_I^{(3)} \subset M_I^{(2)} \subset M_I^{(1)} \quad \text{para cada } I \subset \{1, 2, 3, 4\}, \text{ card } I = 3$$

pelo mesmo motivo estenderemos  $h_3$  sobre  $M_I^{(1)} = M^{(2)} \cup \bigcap_{i \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus I} M_i$  finalizando a prova do teorema.

Nos restringiremos novamente a construir a função  $h_3$  para um determinado  $I_1 \subset \{1, 2, 3, 4\}$  com  $\text{card } I_1 = 3$ , mais especificamente para  $I_1 = \{1, 2, 4\}$ , devido ao fato de que a construção para os demais casos é mais uma vez análoga, o que tornaria a demonstração longa e mais enfadonha. Assim, considerando  $I_1$ , temos as seguintes possibilidades para  $\emptyset \neq J \subset I_1$ .

**Caso 1** ( $J = I_1$ ):

Seja

$$M_{I_1}^{(3)} = M^{(2)} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_1 \\ \text{card } J \geq 3}} W_{I_1, J}$$

como definido em (2.4). Logo,  $M_{I_1}^{(3)} = M^{(2)} \cup W_{I_1, I_1}$ . Uma vez que já temos a  $h_3$  para todo  $x \in M^{(2)}$ , definamos então,

$$h_3(x) = [\Delta_3^{I_1}], \quad \forall x \in W_{I_1, I_1}$$

Portanto, como  $M^{(2)} \cap W_{I_1, I_1} = \emptyset$  (lema 2.0.8, item 4), então  $h_3$  está bem definida em  $M_{I_1}^{(3)}$ , é contínua e  $h_3|_{M_{I_1}^{(3)}}$  satisfaz (2.5).

**Caso 2** ( $\text{card } J = 2$ ):

Agora consideremos,

$$\begin{aligned} M_{I_1}^{(2)} &= M_{I_1}^{(3)} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_1 \\ \text{card } J = 2}} W_{I_1, J} \\ &= (M_{I_1}^{(3)} \cup W_{I_1, J_{12}}) \cup (M_{I_1}^{(3)} \cup W_{I_1, J_{14}}) \cup (M_{I_1}^{(3)} \cup W_{I_1, J_{24}}) \end{aligned}$$

sendo que  $J_{12} = \{1, 2\}$ ,  $J_{14} = \{1, 4\}$  e  $J_{24} = \{2, 4\}$ .

Novamente, pelo lema 2.0.8 item 2, segue que  $(M_{I_1}^{(3)} \cup W_{I_1, J_{ij}}) \cap (M_{I_1}^{(3)} \cup W_{I_1, J_{kl}}) \subset M_{I_1}^{(3)}$ , com  $J_{ij}$  e  $J_{kl}$  sendo  $J_{12}$  ou  $J_{14}$  ou  $J_{24}$ . Logo, basta definirmos  $h_3$  em cada parcela  $M_{I_1}^{(3)} \cup W_{I_1, J_{ij}}$  do conjunto  $M_{I_1}^{(2)}$  com  $i, j \in \{1, 2, 4\}$ ,  $i \neq j$ , separadamente.

Mas pelo lema 2.0.8 item 3, temos que:

$$W_{I_1, J_{12}} \cap M_{I_1}^{(3)} = W_{J_{12}, J_{12}} \cup W_{I_1, I_1}$$

$$W_{I_1, J_{14}} \cap M_{I_1}^{(3)} = W_{J_{14}, J_{14}} \cup W_{I_1, I_1}$$

$$W_{I_1, J_{24}} \cap M_{I_1}^{(3)} = W_{J_{24}, J_{24}} \cup W_{I_1, I_1}$$

e portanto, segue que

$$\begin{aligned} h_3(W_{I_1, J_{12}} \cap M_{I_1}^{(3)}) &= h_3(W_{J_{12}, J_{12}}) \cup h_3(W_{I_1, I_1}) \\ &\subset \text{co}\{[\Delta_3^K] | K = J_{12}\} \cup \text{co}\{[\Delta_3^K] | K = I_1\} \\ &= \text{co}\{[\Delta_3^K] | J_{12} \subset K \subset I_1\} = \text{co}\{[\Delta_3^{J_{12}}], [\Delta_3^{I_1}]\}. \end{aligned}$$

Analogamente, verifica-se que

$$\begin{aligned} h_3(W_{I_1, J_{14}} \cap M_{I_1}^{(3)}) &\subset \text{co}\{[\Delta_3^K] | J_{14} \subset K \subset I_1\} = \text{co}\{[\Delta_3^{J_{14}}], [\Delta_3^{I_1}]\} \\ h_3(W_{I_1, J_{24}} \cap M_{I_1}^{(3)}) &\subset \text{co}\{[\Delta_3^K] | J_{24} \subset K \subset I_1\} = \text{co}\{[\Delta_3^{J_{24}}], [\Delta_3^{I_1}]\}. \end{aligned}$$

Logo, desde que  $\text{co}\{[\Delta_3^{J_{12}}], [\Delta_3^{I_1}]\}$ ,  $\text{co}\{[\Delta_3^{J_{14}}], [\Delta_3^{I_1}]\}$  e  $\text{co}\{[\Delta_3^{J_{24}}], [\Delta_3^{I_1}]\}$  são subconjuntos fechados e convexos em  $\mathbb{R}^3$ , segue que eles são AR(normais) (teorema 1.0.2), o que nos permite concluir que podemos estender  $h_3$  continuamente dos fechados  $W_{I_1, J_{12}} \cap M_{I_1}^{(3)}$ ,  $W_{I_1, J_{14}} \cap M_{I_1}^{(3)}$  e  $W_{I_1, J_{24}} \cap M_{I_1}^{(3)}$  para os espaços normais  $W_{I_1, J_{12}}$ ,  $W_{I_1, J_{14}}$  e  $W_{I_1, J_{24}}$  respectivamente, satisfazendo

$$h_3(W_{I_1, J_{12}}) \subset \text{co}\{[\Delta_3^K] | J_{12} \subset K \subset I_1\}$$

$$h_3(W_{I_1, J_{14}}) \subset \text{co}\{[\Delta_3^K] | J_{14} \subset K \subset I_1\}$$

$$h_3(W_{I_1, J_{24}}) \subset \text{co}\{[\Delta_3^K] | J_{24} \subset K \subset I_1\}.$$

**Caso 3** (*card*  $J = 1$ ):

Resta definirmos  $h_3$  no conjunto,

$$\begin{aligned} M_{I_1}^{(1)} &= M_{I_1}^{(2)} \cup \bigcup_{\substack{J \subset I_1 \\ \text{card } J \geq 1}} W_{I_0, J} \\ &= (M_{I_1}^{(2)} \cup W_{I_1, \{1\}}) \cup (M_{I_1}^{(2)} \cup W_{I_1, \{2\}}) \cup (M_{I_1}^{(2)} \cup W_{I_1, \{4\}}) \end{aligned}$$

Novamente, a intersecção das duas parcelas do conjunto  $M_{I_1}^{(1)}$  está contida em  $M_{I_1}^{(2)}$ , no qual a função  $h_3$  já está definida. Portanto é suficiente que definemos  $h_3$  para cada  $W_{I_1, \{i\}}$  com  $i \in I_1$ . Mais um vez, pelo item 3 do lema 2.0.8, temos

$$M_{I_1}^{(2)} \cap W_{I_1, \{i\}} = \bigcup_{\substack{\{i\} \subset I \subset I_1 \\ \text{card } I \leq 2}} W_{I, \{i\}} \cup \bigcup_{\substack{\{i\} \subset J \subset I_1 \\ \text{card } J \geq 2}} W_{I_1, J}, \quad \forall i \in I_1$$

e, portanto

$$\begin{aligned} h_3(M_{I_1}^{(2)} \cap W_{I_1, \{i\}}) &= h_3\left(\bigcup_{\substack{\{i\} \subset I \subset I_1 \\ \text{card } I \leq 2}} W_{I, \{i\}}\right) \cup h_3\left(\bigcup_{\substack{\{i\} \subset J \subset I_1 \\ \text{card } J \geq 2}} W_{I_1, J}\right) \\ &= \bigcup_{\substack{\{i\} \subset I \subset I_1 \\ \text{card } I \leq 2}} h_3(W_{I, \{i\}}) \cup \bigcup_{\substack{\{i\} \subset J \subset I_1 \\ \text{card } J \geq 2}} h_3(W_{I_1, J}) \\ &\subset \bigcup_{\substack{\{i\} \subset I \subset I_1 \\ \text{card } I \leq 2}} \text{co}\{[\Delta_3^K] \mid \{i\} \subset K \subset I\} \cup \\ &\quad \cup \bigcup_{\substack{\{i\} \subset J \subset I_1 \\ \text{card } J \geq 2}} \text{co}\{[\Delta_3^K] \mid J \subset K \subset I_1\} \\ &\subset \text{co}\{[\Delta_3^K] \mid \{i\} \subset K \subset I_1\} \quad \forall i \in I_1. \end{aligned}$$

Logo, se chamarmos de  $A_i = \text{co}\{[\Delta_3^K] \mid \{i\} \subset K \subset I_1\}$  para  $i = 1, 2, 4$ , então, pelo teorema 1.0.2, cada  $A_i$  é AR(normal), e consequentemente podemos estender  $h_3$  de cada fechado  $M_{I_1}^{(2)} \cap W_{I_1, \{i\}}$  para  $W_{I_1, \{i\}}$ , tal que

$$h_3(W_{I_1, \{i\}}) \subset \text{co}\{[\Delta_3^K] \mid \{i\} \subset K \subset I_1\} \quad \forall i \in I_1.$$

Assim, desde que  $M_{I_1}^{(1)} = M^{(2)} \cup M_3$ , finalmente temos uma extensão de  $h_2$  sobre o conjunto  $M_3$  cumprindo a condição (2.5), como desejávamos. Observemos que aqui obtivemos apenas a extensão para  $M_3$  devido as restrições que fizemos. Entretanto, procedendo da mesma maneira para as outras possibilidades de  $I_0$  e  $I_1$  obtemos uma extensão de  $h_1$  para  $M_1, M_2$  e  $M_4$  e portanto em  $M$ . Resta então mostrar que a condição (2.5) implica que  $h(M_i) \subset \Delta_{3;i}$  e

$$h(f(h^{-1}(\Delta_{3;i}))) \subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \text{co}\{[\Delta_3^K]|\{i\} \subset K \subset \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{j\}\}$$

Para isso, seja  $I_i := \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{i\}$  onde  $i = 1, 2, 3, 4$ . Assim,

$$\begin{aligned} W_{I_i, J} &= \bigcap_{k \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus I_i} M_k \setminus \bigcup_{j \in J} N_j \\ &= M_i \setminus \bigcup_{j \in J} N_j \end{aligned}$$

Afirmamos que  $M_i \subset \bigcup_{\emptyset \neq J \subset I_i} W_{I_i, J}$  para todo  $i = 1, 2, 3, 4$ . De fato, seja  $x \in M_i$ . Como  $\bigcap_{j=1}^4 N_j = \emptyset$ , segue que existe  $j \in I_i$  tal que  $x \notin N_j$ . Logo,  $x \in W_{I_i, \{j\}} \subset \bigcup_{\emptyset \neq J \subset I_i} W_{I_i, J}$ . Assim, para todo  $i = 1, 2, 3, 4$ , temos

$$\begin{aligned} h(M_i) &\subset \bigcup_{\emptyset \neq J \subset I_i} h(W_{I_i, J}) \subset \bigcup_{\emptyset \neq J \subset I_i} \text{co}\{[\Delta_3^K]|\{i\} \subset J \subset K \subset I_i\} \\ &\subset \Delta_3^{I_i} = \Delta_{3;i} \end{aligned}$$

Além disso, como  $M = \bigcup_{j=1}^4 M_j$ , então

$$\begin{aligned} h(M \setminus N_i) &= \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 h(M_j \setminus N_i) = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 h(W_{I_j, \{i\}}) \subset \\ &\subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \text{co}\{[\Delta_3^K]|\{i\} \subset K \subset \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{j\}\} \subset \partial \Delta_3 \setminus \Delta_{3;i} \end{aligned}$$

e portanto,  $h^{-1}(\Delta_{3;i}) \subset N_i$ . Ainda,  $N_i \cap f(N_i) = \emptyset$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ , implicando que  $f(N_i) \subset M \setminus N_i$ . Logo,

$$\begin{aligned} h(f(h^{-1}(\Delta_{3;i}))) &\subset h(f(N_i)) \subset h(M \setminus N_i) \\ &\subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 \text{co}\{[\Delta_3^K] \mid \{i\} \subset K \subset \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{j\}\}. \end{aligned}$$

□

Com esse teorema em mãos, estamos aptos a demonstrar o resultado principal deste capítulo. Entretanto, antes introduziremos algumas definições e demonstraremos um lema que iremos precisar.

Sejam  $f : M \rightarrow M$  e  $g : N \rightarrow N$  homeomorfismos que geram  $\mathbb{Z}_p$ -ações livres sobre os espaços  $M$  e  $N$ , respectivamente. Dizemos que uma aplicação contínua  $P : (M, f) \rightarrow (N, g)$  é **equivariante** se  $P$  satisfaz  $g \circ P = P \circ f$ . Neste caso, verifica-se sem maiores dificuldades, que  $g^i \circ P = P \circ f^i$  para todo  $i = 0, 1, \dots, p-1$ .

Além disso, se  $A$  é um subconjunto qualquer de  $N$ , temos

$$f^i(P^{-1}(A)) = P^{-1}(g^i(A)) \quad \forall i = 0, 1, \dots, p-1.$$

De fato, por um lado se  $x \in f^i(P^{-1}(A))$  então  $x = f^i(w)$  para algum  $w \in P^{-1}(A)$ , isto é,  $P(w) = y \in A$ . Assim, como  $g^i \circ P = P \circ f^i$ , segue que  $P(x) = P(f^i(w)) = g^i(P(w)) = g^i(y) \Rightarrow x \in P^{-1}(g^i(A))$ . Agora, por outro lado, se tomarmos  $x \in P^{-1}(g^i(A))$  então  $P(x) = g^i(y)$  para algum  $y \in A$ . Mas  $f^i$  é sobrejetora e portanto, existe  $w \in M$  tal que  $x = f^i(w) \Rightarrow g^i(y) = P(x) = P(f^i(w)) = g^i(P(w))$ . Desde que  $g^i$  é injetora, segue que  $P(w) = y$  com  $y \in A$  e ainda  $x = f^i(w)$ , ou seja,  $x \in f^i(P^{-1}(A))$ .

**Lema 2.0.9** *Sejam  $f$  e  $h$  funções que geram uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre os espaços de Hausdorff  $M$  e  $N$ , respectivamente, com  $p$  primo. Suponhamos que*

a aplicação  $P : (M, f) \longrightarrow (N, h)$  seja equivariante. Então  $g(M, f) \leq g(N, h)$ .

**Demonstração:**

Seja  $g(N, h) = n$ . Portanto, pela definição do genus, existem  $n$  subconjuntos  $G^1, G^2, \dots, G^n$  fechados de  $N$  tais que,  $N = \cup_{j=1}^n G^j$  e ainda, para cada  $G^j$ , existem fechados disjuntos  $G_0^j, G_1^j, \dots, G_{p-1}^j \subset N$  satisfazendo:

1.  $\cup_{i=0}^{p-1} G_i^j = G^j$ , para cada  $j = 1, 2, \dots, n$  e
2.  $h^i(G_0^j) = G_i^j$ ,  $i = 1, \dots, p-1$

Desde que  $P$  é contínua, consideremos a coleção  $\{P^{-1}(G^1), P^{-1}(G^2), \dots, P^{-1}(G^n)\}$  de subconjuntos fechados de  $M$ . Denotemos  $M^j = P^{-1}(G^j)$ , para cada  $j = 1, \dots, n$ .

Notamos que, se  $x \in M$  então  $P(x) \in N = \cup_{j=1}^n G^j$ , ou seja,  $P(x) \in G^j$  para algum  $j \in \{1, \dots, n\}$  e portanto  $x \in M^j \implies M = \cup_{j=1}^n M^j$ . Agora, fixemos um  $j$  e definamos  $M_i^j = P^{-1}(G_i^j)$  para cada  $i = 0, 1, \dots, p-1$ . Então, para todo  $i \in \{1, \dots, p-1\}$ , temos

$$M^j = P^{-1}(G^j) = P^{-1}(\cup_{i=0}^{p-1} G_i^j) = \cup_{i=0}^{p-1} P^{-1}(G_i^j) = \cup_{i=0}^{p-1} M_i^j \quad (2.7)$$

$$f^i(M_0^j) = f^i(P^{-1}(G_0^j)) = P^{-1}(h^i(G_0^j)) = P^{-1}(G_i^j) = M_i^j \quad (2.8)$$

Além disso, se  $i_1, i_2 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  com  $i_1 \neq i_2$ , então

$$M_{i_1}^j \cap M_{i_2}^j = P^{-1}(G_{i_1}^j) \cap P^{-1}(G_{i_2}^j) = P^{-1}(\underbrace{G_{i_1}^j \cap G_{i_2}^j}_{\emptyset}) = \emptyset \quad (2.9)$$

Portanto, temos  $n$  fechados  $M^1, \dots, M^n$  que cobrem  $M$ , cada um deles satisfazendo (2.7), (2.8) e (2.9). Segue, da definição de genus, que  $g(M, f) \leq n$ .

□

Ainda, para todo  $k \in \mathbb{N}$  e todo primo  $p$ , definamos

$$L_{k,p} := \{(x_1, \dots, x_p) \in (\partial\Delta_{k-1})^p \mid \text{se } m, n \in \{1, \dots, p\}, n \equiv m + 1 \pmod{p} \\ \text{e } x_m \in \Delta_{k-1;i}, \text{ então } x_n \notin \Delta_{k-1;i}\}$$

e

$$\tilde{L}_{k,p} := \{(x_1, \dots, x_p) \in (\partial\Delta_{k-1})^p \mid \text{se } m, n \in \{1, \dots, p\}, n \equiv m + 1 \pmod{p} \\ \text{e } x_m \in \Delta_{k-1;i}, \text{ então } x_n \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \text{co}\{[\Delta_{k-1}^K] \mid \{i\} \subset K \subset \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}\}\}$$

A idéia por trás da definição de  $L_{k,p}$  é de que, dada uma coordenada  $x_i$  em  $(x_1, \dots, x_p)$ , ela não pode estar na mesma face em  $\partial\Delta_{k-1}$  que a coordenada imediatamente anterior a ela pertence<sup>1</sup>. Esse fato é caracterizado pela congruência módulo  $p$ , ou seja, dado  $n \in \{1, \dots, p\}$  a relação  $n \equiv m + 1 \pmod{p}$  diz que o único  $m \in \{1, \dots, p\}$  que satisfaz essa relação é o índice imediatamente anterior a  $n$ . Logo, se  $x_m \in \Delta_{k-1;i}$  para algum  $i \in \{1, \dots, k\}$ , segue que  $x_n \notin \Delta_{k-1;i}$ . A exemplo disso, se tomarmos  $p = 5$ ,  $k = 4$  e  $n = 3$ , o único número  $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  que satisfaz  $3 \equiv m + 1 \pmod{5}$  é  $m = 2$ . Portanto se  $x_2 \in \Delta_{3;1}$ , ou seja, se  $x_2$  estiver na face oposta ao vértice  $e_1$  do 3-simplexo  $\Delta_3$  então  $x_3$  não pode estar nesta face.

Ainda, notemos que  $\tilde{L}_{k,p} \subset L_{k,p}$ . Com efeito, basta observar que dado  $x \in \tilde{L}_{k,p}$  tal que  $x_n \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \text{co}\{[\Delta_{k-1}^K] \mid \{i\} \subset K \subset \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}\}$ , como  $\{i\} \subset K \subset \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}$  e  $j \neq i$ , então  $x_n$  pertence somente às faces de  $\partial\Delta_{k-1}$  nas quais um dos vértices é  $e_i$  e portanto  $x \notin \Delta_{k-1;i}$ . Em outras palavras,  $\tilde{L}_{k,p}$  é o subconjunto de  $L_{k,p}$ , no qual exigimos ainda que se  $x_i \in \Delta_{k-1;i}$  para algum

---

<sup>1</sup>considerando  $x_p$  a coordenada imediatamente anterior a  $x_1$



Portanto,  $(\varphi_{k,p})^p(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_{p-1}, x_p) = id_{L_{k,p}}(x_1, \dots, x_{p-1}, x_p)$ .

Agora, suponhamos por absurdo, que  $\varphi_{k,p}$  fixe algum ponto, isto é, que existe  $x = (x_1, \dots, x_p) \in L_{k,p}$  tal que  $\varphi_{k,p}(x) = x$ . Logo,  $(x_1, \dots, x_p) = (x_2, \dots, x_p, x_1)$  implicando que  $x_1 = x_2 = \dots = x_{p-1} = x_p$ . Assim, em particular  $x_1 = x_2$ , e, portanto  $x_1, x_2 \in \Delta_{k-1;i}$  para algum  $i \in \{1, \dots, p\}$ , contradizendo o fato de  $x \in L_{k,p}$ .

Portanto,  $\varphi_{k,p}$  é uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre.

Ainda, como observamos para  $L_{k,p}$ , devido a dinâmica da função  $\varphi_{k,p}$  segue que  $\varphi_{k,p}(\tilde{L}_{k,p}) \subset \tilde{L}_{k,p}$  e, portanto  $\varphi_{k,p}$  também gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $\tilde{L}_{k,p}$ .

**Observação 2.0.4** *Desde que  $(\partial\Delta_{k-1})^p$  é métrico (pois cada  $\partial\Delta_{k-1}$  é métrico), então se considerarmos em  $L_{k,p}$  a métrica induzida de  $(\partial\Delta_{k-1})^p$ , segue que  $L_{k,p}$  é métrico e conseqüentemente normal.*

**Teorema 2.0.8** *Sejam  $M$  um espaço normal,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p$  um número primo,  $f : M \rightarrow M$  uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre e  $M_1, M_2, \dots, M_k \subset M$  subconjuntos fechados tais que  $\cup_{i=1}^k M_i = M$  e  $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k$ . Então, temos  $g(M, f) \leq g(\tilde{L}_{k,p}, \varphi_{k,p}) = g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$ .*

**Demonstração:**

Nessas condições, pelo teorema 2.0.7, existe uma aplicação contínua  $h : M \rightarrow \partial\Delta_{k-1}$  tal que  $h(M_i) \subset \Delta_{k-1;i}$  e

$$h(f(h^{-1}(\Delta_{k-1;i}))) \subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k co\{[\Delta_{k-1}^K] \setminus \{i\}\} \subset K \subset \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}.$$

Definamos  $P : M \rightarrow \tilde{L}_{k,p}$  por

$$P(x) := (h(x), h(f(x)), \dots, h(f^{p-1}(x))). \quad (2.11)$$

Observemos que  $P$  é equivariante, isto é,  $P$  é tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ P \downarrow & & \downarrow P \\ \tilde{L}_{k,p} & \xrightarrow{\varphi_{k,p}} & \tilde{L}_{k,p} \end{array}$$

comuta.

De fato, se  $x \in M$ , então

$$\begin{aligned} (P \circ f)(x) &= P(f(x)) = (h(f(x)), h(f^2(x)), \dots, h(f^p(x))) \\ &= (h(f(x)), h(f^2(x)), \dots, h(f^{p-1}(x)), h(x)) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} (\varphi_{k,p} \circ P)(x) &= \varphi_{k,p}(P(x)) = \varphi_{k,p}(h(x), h(f(x)), \dots, h(f^{p-1}(x))) \\ &= (h(f(x)), h(f^2(x)), \dots, h(f^{p-1}(x)), h(x)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Logo, pelo lema 2.0.9, segue que  $g(M, f) \leq g(\tilde{L}_{k,p}, \varphi_{k,p}) \leq {}^2g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$ .

Resta mostrar que  $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p}) \leq g(\tilde{L}_{k,p}, \varphi_{k,p})$ . Para isso, usaremos a mesma técnica aplicada acima para  $(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$ . Consideremos então os seguintes subconjuntos de  $L_{k,p}$ ,

$$\widehat{M}_i := \{(x_1, \dots, x_p) \in L_{k,p} ; x_1 \in \Delta_{k-1;i}\}.$$

Notemos que, cada  $\widehat{M}_i$  é fechado em  $L_{k,p}$ . Com efeito, consideremos a projeção na primeira coordenada  $p_1 : L_{k,p} \longrightarrow \partial\Delta_{k-1}$ , isto é,  $p_1(x_1, \dots, x_p) = x_1$ . Portanto  $\widehat{M}_i$  é fechado, desde que  $\widehat{M}_i$  é a imagem inversa de  $\Delta_{k-1;i}$  por  $p_1$ , o qual é fechado em  $\partial\Delta_{k-1}$ . Além disso, para cada  $x \in L_{k,p}$ ,  $x_1 \in \partial\Delta_{k-1} := \cup_{i=1}^k \Delta_{k-1;i}$ . Logo,  $x_1 \in \Delta_{k-1;i}$  para algum  $i \in \{1, \dots, k\}$  e consequentemente  $x \in \widehat{M}_i$ . Assim,  $L_{k,p} = \cup_{i=1}^k \widehat{M}_i$ .

Ainda, se existisse  $x = (x_1, \dots, x_p) \in \widehat{M}_i \cap \varphi_{k,p}(\widehat{M}_i)$  então  $x_1 \in \Delta_{k-1;i}$  e  $x = \varphi_{k,p}(y)$  com  $y = (y_1, \dots, y_p) \in \widehat{M}_i$ . Logo,  $x_1 = y_2$  o que implica que

---

<sup>2</sup>segue também pelo lema 2.0.9, pois a inclusão de  $\tilde{L}_{k,p}$  em  $L_{k,p}$  é equivariante

$y_2 \in \Delta_{k-1;i}$ . Ora, isso contradiz o fato de  $y \in L_{k,p}$ , ou seja,  $y_1 \in \Delta_{k-1;i}$  (observe que  $y \in \widehat{M}_i$ ). Segue então que  $\widehat{M}_i \cap \varphi_{k,p}(\widehat{M}_i) = \emptyset$  para todo  $i = 1, \dots, k$ .

Já que  $L_{k,p}$  é normal ( veja a observação 2.0.4) e os  $\widehat{M}_i$  satisfazem às hipóteses do teorema 2.0.7, então existe uma função  $h' : L_{k,p} \longrightarrow \partial\Delta_{k-1}$  contínua, tal que

$$h'(\widehat{M}_i) \subset \Delta_{k-1;i} \text{ para todo } i = 1, \dots, k \quad (2.14)$$

$$h'(\varphi_{k,p}((h')^{-1}(\Delta_{k-1;i}))) \subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k co\{[\Delta_{k-1}^K] \mid \{i\} \subset K \subset \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}\} \quad (2.15)$$

Podemos assim, definir a função contínua  $P' : L_{k,p} \longrightarrow \widetilde{L}_{k,p}$  por

$$P'(x) := (h'(x), h'(\varphi_{k,p}(x)), \dots, h'(\varphi_{k,p}^{p-1}(x)))$$

Precisamos verificar se  $P'$  está bem definida, isto é, que  $P'(x) \in \widetilde{L}_{k,p}$  qualquer que seja  $x \in L_{k,p}$ . Para isso, dada uma  $m$ -ésima coordenada  $x_m$  de  $x$  a qual pertence a  $\Delta_{k-1;i}$  para algum  $i = 1, 2, \dots, k$ , devemos provar que a  $n$ -ésima coordenada  $x_n$  de  $x$  tal que  $n \equiv m + 1 \pmod{p}$  pertence ao conjunto  $\bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k co\{[\Delta_{k-1}^K] \mid \{i\} \subset K \subset \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}\}$ .

Observemos que cada coordenada de  $P'(x)$  é da forma  $h'(\varphi_{k,p}^j(x))$  com  $0 \leq j \leq p-1$ . Suponhamos então que  $h'(\varphi_{k,p}^j(x)) \in \Delta_{k-1;i}$  seja a  $m$ -ésima coordenada de  $P'(x)$ , para algum  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Então da definição de  $P'$  concluímos que  $h'(\varphi_{k,p}^{j+1}(x))$  é a  $n$ -ésima coordenada de  $P'(x)$ . Assim, considerando (2.15) e como  $h'(\varphi_{k,p}^{j+1}(x)) = h'(\varphi_{k,p}(\varphi_{k,p}^j(x)))$ , basta então provarmos que  $\varphi_{k,p}^j(x) \in (h')^{-1}(\Delta_{k-1;i})$ . Mas isso segue direto do fato de que  $h'(\varphi_{k,p}^j(x)) \in \Delta_{k-1;i}$ , isto é,  $\varphi_{k,p}^j(x) \in (h')^{-1}(\Delta_{k-1;i})$  e portanto,

$$h'(\varphi_{k,p}^{j+1}(x)) \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k co\{[\Delta_{k-1}^K] \mid \{i\} \subset K \subset \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}\}$$

mostrando assim que  $(h'(x), h'(\varphi_{k,p}(x)), \dots, h'(\varphi_{k,p}^{p-1}(x))) \in \tilde{L}_{k,p}$ . Logo,  $P'$  está bem definida.

Ainda,

$$\begin{aligned} (P' \circ \varphi_{k,p})(x) &= P'(\varphi_{k,p}(x)) = (h'(\varphi_{k,p}(x)), h'(\varphi_{k,p}^2(x)), \dots, h'(\varphi_{k,p}^p(x))) \\ &= (h'(\varphi_{k,p}(x)), h'(\varphi_{k,p}^2(x)), \dots, h'(\varphi_{k,p}^{p-1}(x)), h'(x)) \\ (\varphi_{k,p} \circ P')(x) &= \varphi_{k,p}(P'(x)) = \varphi_{k,p}(h'(x), h'(\varphi_{k,p}(x)), \dots, h'(\varphi_{k,p}^{p-1}(x))) \\ &= (h'(\varphi_{k,p}(x)), h'(\varphi_{k,p}^2(x)), \dots, h'(\varphi_{k,p}^{p-1}(x)), h'(x)) \end{aligned}$$

Logo,  $P' \circ \varphi_{k,p} = \varphi_{k,p} \circ P'$ . Então, novamente pelo lema 2.0.9, temos  $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p}) \leq g(\tilde{L}_{k,p}, \varphi_{k,p})$ .

□

Assim, para que tenhamos uma estimativa do genus de  $M$  com a ação  $f$ , basta então que calculemos o valor de  $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$ . Desde que,  $L_{k,p}$  é um subconjunto de  $(\partial\Delta_{k-1})^p$  e cada  $\partial\Delta_{k-1}$  é homeomorfo a  $S^{k-2}$ , logo, a menos de homeomorfismos, temos  $L_{k,p} \subset \underbrace{S^{k-2} \times \dots \times S^{k-2}}_{p \text{ vezes}}$ , e portanto um primeiro passo para que possamos estimar o genus de  $L_{k,p}$  seria então calcular o valor de  $g(S^{k-2} \times \dots \times S^{k-2}, \varphi_{k,p})$  (observemos que  $\varphi_{k,p}$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $S^{k-2} \times \dots \times S^{k-2}$ ).

Portanto, consideremos o seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [2]

**Teorema 2.0.9** *Seja  $M$  uma  $n$ -variedade topológica conexa por caminhos, isto é,  $M$  é um espaço de Hausdorff com base enumerável conexo por caminhos, tal que para cada ponto  $p \in M$  existe uma vizinhança aberta de  $p$  que é homeomorfa a um aberto do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Se  $f : M \rightarrow M$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre em  $M$ , então  $g(M, f) \leq n + 1$ .*

Observemos ainda que, se  $M_i$  é uma  $n_i$ -variedade topológica,  $i = 1, \dots, k$ , então  $M_1 \times \dots \times M_k$  é uma  $(n_1 + \dots + n_k)$ -variedade topológica. Além disso, verifica-se que  $S^{k-2}$  é uma  $(k-2)$ -variedade topológica. Logo, pelo teorema anterior, temos  $g(S^{k-2} \times \dots \times S^{k-2}, \varphi_{k,p}) \leq p(k-2) + 1$ .

O fato acima, juntamente com teorema 2.0.8, produz o seguinte

**Corolário 2.0.2** *Sejam  $M$  um espaço normal,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p$  um número primo,  $f : M \rightarrow M$  uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre e  $M_1, M_2, \dots, M_k \subset M$  subconjuntos fechados tais que  $\cup_{i=1}^k M_i = M$  e  $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k$ . Então, temos  $g(M, f) \leq p(k-2) + 1$ .*

Entretanto, essa parece ser uma estimativa um pouco distante do que se espera. Como prova disso, daremos no capítulo seguinte, uma outra estimativa de  $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$  a qual melhora a que acabamos de fornecer, mas que ainda parece não ser a melhor possível.

Cabe ainda uma última observação a respeito do teorema 2.0.8. O espaço  $\tilde{L}_{k,p}$  pode ser descrito da seguinte forma:

$$\tilde{L}_{k,p} = \bigcap_{j=1}^p (\cup_{i=1}^k (p_j^{-1}(\Delta_{k-1;i}) \cap p_{j+1}^{-1}(C_i)))$$

sendo  $p_j : (\partial\Delta_{k-1})^p \rightarrow \partial\Delta_{k-1}$  a projeção sobre a  $j$ -ésima coordenada e

$$C_i = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \text{co}\{[\Delta_{k-1}^K] \setminus \{i\} \} \subset K \subset \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}$$

(quando  $j = p$  consideramos  $j+1 = 1$ ).

Como cada  $\Delta_{k-1;i}$  e  $C_i$  são fechados em  $\partial\Delta_{k-1}$  para  $i = 1, \dots, k$  e cada  $p_j$  é contínua ( $j = 1, \dots, p$ ), segue que  $\tilde{L}_{k,p}$  é fechado em  $(\partial\Delta_{k-1})^p \approx \underbrace{S^{k-2} \times \dots \times S^{k-2}}_p$  o qual é compacto, portanto  $\tilde{L}_{k,p}$  é compacto.

Assim, a estimativa para o genus de  $(M, f)$  no teorema 2.0.8 não pode ser melhorada se restringirmos a classe dos espaços normais para a classe dos espaços compactos.

## Capítulo 3

### Estimativas para $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$

Vimos no capítulo 2 que dado um espaço  $M$ , uma função  $f : M \rightarrow M$  que gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre e fechados  $M_1, M_2, \dots, M_k$  que cobrem  $M$  satisfazendo  $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$  para todo  $i = 1, 2, \dots, k$ , então  $g(M, f) \leq g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$  (teorema 2.0.8). Logo, um próximo passo no sentido de estimar o genus de  $M$  seria calcular o valor de  $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$ . Entretanto, o cálculo do genus de  $L_{k,p}$  com a ação  $\varphi_{k,p}$  em alguns casos não é muito fácil.

Apenas para  $k = 3$  ou  $p = 2$  sabemos calcular o valor exato de  $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$ . Para os demais casos, temos a estimativa

$$g(L_{k,p}, \varphi_{k,p}) \leq \frac{p-1}{2}(k-3) + \begin{cases} 1 & \text{se } p = 3 \\ 2 & \text{se } p \geq 5 \end{cases}$$

a qual parece não ser a melhor possível. Um melhoramento dessa estimativa, para  $p = 7$ , é dada em [18] e [2].

Vale ressaltar que estamos considerando aqui a definição do genus e também de alguns conjuntos que utilizaremos, como dadas no capítulo 2. Além disso, em todo o capítulo consideraremos  $[0, 1] = I$ .

**Teorema 3.0.10** *Seja  $k \in \mathbb{N}$ . Então  $g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) = k - 1$ .*

**Demonstração:**

Primeiramente, exibiremos uma cobertura de  $L_{k,2}$  com  $k - 1$  fechados cada um satisfazendo a propriedade do genus, o que nos permitirá concluir que  $g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) \leq k - 1$

Consideremos os fechados  $M_i = \{(x_1, x_2) \in L_{k,2} ; x_1 \in \Delta_{k-1;i}\}$  para  $i = 1, \dots, k$ . Observamos que, pela definição de  $L_{k,2}$ ,  $x_1$  e  $x_2$  não podem pertencer ao mesmo  $\Delta_{k-1;i}$ , logo  $M_i \cap \varphi_{k,2}(M_i) = \emptyset$ . Portanto,  $M_k \subset \cup_{i=1}^{k-1} \varphi_{k,2}(M_i)$  e daí

$$L_{k,2} = \cup_{i=1}^k M_i = \cup_{i=1}^{k-1} M_i \cup M_k \subseteq \cup_{i=1}^{k-1} (M_i \cup \varphi_{k,2}(M_i)) \quad (3.1)$$

Mostremos que cada  $G_i = M_i \cup \varphi_{k,2}(M_i)$  é um elemento de  $C(L_{k,2}, \varphi_{k,2})$  conforme a definição 2.0.9. De fato, para cada  $i = 1, \dots, k - 1$  definamos

$$G_i^0 = M_i \quad e \quad G_i^1 = \varphi_{k,2}(M_i) \quad (3.2)$$

É obvio que  $\varphi_{k,2}(G_i^0) = G_i^1$ . Além disso,  $\emptyset = M_i \cap \varphi_{k,2}(M_i) = G_i^0 \cap G_i^1$ . Portanto, segue que cada  $G_i = M_i \cup \varphi_{k,2}(M_i) \in C(L_{k,2}, \varphi_{k,2})$  e daí  $g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) \leq k - 1$ .

Para mostrarmos que  $g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) \geq k - 1$ , basta considerarmos o seguinte resultado (c.f [5] ou [1])

**Lema 3.0.10** *A esfera  $S^{k-2}$  pode ser coberta por  $k$  fechados  $M_1, \dots, M_k$  tais que  $M_i \cap (-M_i) = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, k$ .*

Mas, já sabemos do lema 2.0.6 que  $g(S^{k-2}, -id_{S^{k-2}}) = k - 1$  e daí, pelo teorema 2.0.8 juntamente com o lema acima, concluímos que  $g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) \geq g(S^{k-2}, -id_{S^{k-2}}) = k - 1$ .

□

No teorema que segue, calculamos o valor do  $g(L_{k,p}, \varphi_{k,p})$  para  $k = 3$ . Consideraremos  $p \geq 3$ , pois para  $p = 2$  já temos a estimativa dada no teorema 3.0.10. Antes, consideremos os seguintes resultados.

**Lema 3.0.11** *Seja  $M$  um espaço de Hausdorff e  $f : M \rightarrow M$  uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre, com  $p$  primo. Suponhamos que  $g(M, f) = m$ . Então existe um subconjunto  $N$  de  $M$  tal que  $f(N) = N$  e  $g(N, f|_N) = m - 1$ .*

**Demonstração:**

Desde que  $g(M, f) = m$ , então existem  $F^1, \dots, F^m$  fechados tais que  $M = \cup_{i=1}^m F^i$ ,  $F^i = \cup_{j=0}^{p-1} F_j^i$ ,  $f^j(F_0^i) = F_j^i$  para cada  $i = 1, \dots, m$  e para  $j = 0, \dots, p-1$ , onde  $F_0^i, F_1^i, \dots, F_{p-1}^i$  são fechados disjuntos.

Seja então  $N = \cup_{i=1}^{m-1} F^i$ . Afirmamos que  $g(N, f) = m - 1$ .

De fato, notemos que,  $f(N) = f(\cup_{i=1}^{m-1} F^i) = \cup_{i=1}^{m-1} f(F^i) = \cup_{i=1}^{m-1} F^i = N$ . Logo, segue imediatamente das definições de  $N$  e do genus, que  $g(N, f) \leq m - 1$ .

Agora, suponhamos que  $g(N, f) = k < m - 1$ . Logo, existem  $G^1, \dots, G^k$  fechados tais que  $N = \cup_{i=1}^k G^i$ , onde cada  $G^i$  é coberto por  $p$  fechados disjuntos  $G_0^i, \dots, G_{p-1}^i$  satisfazendo  $f^j(G_0^i) = G_j^i$ . Como  $M = N \cup F^m$ , então  $G^1, \dots, G^k, F^m$  é uma coleção de conjuntos em  $C(M, f)$  que cobre  $M$  e portanto  $g(M, f) \leq k + 1 < m$ , o que é absurdo. Temos então que  $g(N, f) = m - 1$ .

□

**Lema 3.0.12** *Sejam  $M$  um espaço de Hausdorff e  $f : M \rightarrow M$  uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre. Suponhamos que existam  $M_1, \dots, M_k$  subconjuntos (não vazios) fechados disjuntos do espaço  $M$  os quais são invariantes por  $f$  e cobrem  $M$ . Então, se  $g(M_i, f) \leq 2$  para cada  $i = 1, \dots, k$ , temos  $g(M, f) \leq 2$ .*

**Demonstração:**

Temos aqui três possíveis casos. Primeiro suponhamos que para todo  $i = 1, \dots, k$ ,  $g(M_i, f) = 1$ . Então, para cada  $i$ , existem subconjuntos  $G_i^0, G_i^1, \dots, G_i^{p-1}$  de  $M_i$  fechados e disjuntos tais que

- $M_i = \cup_{j=0}^{p-1} G_i^j$
- $f^j(G_i^0) = G_i^j$  para  $j = 1, \dots, p-1$

Ainda, desde que os  $M_i$ 's são disjuntos então  $G_{i_1}^j \cap G_{i_2}^j = \emptyset$  para todo  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, k\}$  e  $i_1 \neq i_2$ . Portanto, se definirmos  $W^m = \cup_{i=1}^k G_i^m$  com  $m = 0, 1, \dots, p-1$ , segue então que

$$\begin{aligned} W^{m_1} \cap W^{m_2} &= (\cup_{i=1}^k G_i^{m_1}) \cap (\cup_{j=1}^k G_j^{m_2}) \\ &= \cup_{i=1}^k [G_i^{m_1} \cap (\cup_{j=1}^k G_j^{m_2})] \\ &= \cup_{i=1}^k [\underbrace{\cup_{j=1}^k (G_i^{m_1} \cap G_j^{m_2})}_{\emptyset}] = \emptyset \end{aligned}$$

Além disso, como  $f^j(G_i^0) = G_i^j$  para todo  $j = 1, \dots, p-1$ , então

$$f^j(W^0) = f^j(\cup_{i=1}^k G_i^0) = \cup_{i=1}^k f^j(G_i^0) = \cup_{i=1}^k G_i^j = W^j$$

Portanto,  $W = \cup_{m=0}^{p-1} W^m \in C(M, f)$  e cobre  $M$  pois  $M = \cup_{i=1}^k M_i$ . Logo,  $g(M, f) = 1$  (notemos que  $M$  é não vazio).

Analogamente, se  $g(M_i, f) = 2$  para todo  $i = 1, \dots, k$ , podemos construir uma cobertura como fizemos no caso anterior, mas agora com dois fechados  $W_1 = \cup_{m=0}^{p-1} W_1^m$  e  $W_2 = \cup_{m=0}^{p-1} W_2^m$  onde  $W_1^m = \cup_{i=1}^k G_{(1,i)}^m$  e  $W_2^m = \cup_{i=1}^k G_{(2,i)}^m$ . Portanto,  $g(M, f) \leq 2$ .

Agora suponhamos, sem perda de generalidade, que  $g(M_i, f) = 1$  para  $i = 1, \dots, l$  e  $g(M_i, f) = 2$  para os demais  $i = l+1, \dots, k$ . Logo, temos  $l$  fechados  $G_1, \dots, G_l$  tais que, para cada  $i = 1, \dots, l$

- $G_i = \cup_{j=0}^{p-1} G_i^j$  e  $f^j(G_i^0) = G_i^j$

- $M_i = G_i$  e  $G_i^{j_1} \cap G_i^{j_2} = \emptyset$  para  $j_1, j_2 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  e  $j_1 \neq j_2$ ,
- $G_i^j$  são fechados em  $G_i = M_i$ ,  $\forall j \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ .

Além disso, como  $g(M_i, f) = 2$ , para cada  $i = l+1, \dots, k$ , existem dois fechados  $W_{(i,1)}$  e  $W_{(i,2)}$  tais que  $M_i = W_{(i,1)} \cup W_{(i,2)}$  e ainda

- $W_{(i,s)} = \bigcup_{t=0}^{p-1} W_{(i,s)}^t$  para  $s = 1, 2$  e  $i = l+1, \dots, k$ ,
- $W_{(i,s)}^{t_1} \cap W_{(i,s)}^{t_2} = \emptyset$  para  $t_1, t_2 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,  $t_1 \neq t_2$  e  $f^t(W_{(i,s)}^0) = W_{(i,s)}^t$  com  $s = 1, 2$  e  $t = 1, \dots, p-1$ ,
- $W_{(i,s)}^t$  é fechado em  $W_{(i,s)}$  para todo  $t \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,  $i \in \{l+1, \dots, k\}$  e  $s \in \{1, 2\}$ .

Assim, definamos para  $r = 0, 1, \dots, p-1$

$$\begin{aligned} A_1^r &= (\bigcup_{i=1}^l G_i^r) \cup (\bigcup_{i=l+1}^k W_{(i,1)}^r) \\ A_2^r &= \bigcup_{i=l+1}^k W_{(i,2)}^r \end{aligned}$$

Logo, se chamarmos de  $A_1 = \bigcup_{r=0}^{p-1} A_1^r$  e  $A_2 = \bigcup_{r=0}^{p-1} A_2^r$  então certamente  $M = A_1 \cup A_2$ . Ainda, como os  $M_i$ 's são disjuntos e temos  $G_i^{j_1} \cap G_i^{j_2} = \emptyset$  para  $j_1, j_2 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,  $j_1 \neq j_2$  e  $W_{(i,s)}^{t_1} \cap W_{(i,s)}^{t_2} = \emptyset$  para  $t_1, t_2 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ ,  $t_1 \neq t_2$ , segue que

$$\begin{aligned} A_1^{r_1} \cap A_1^{r_2} &= [(\bigcup_{i=1}^l G_i^{r_1}) \cup (\bigcup_{i=l+1}^k W_{(i,1)}^{r_1})] \cap [(\bigcup_{i=1}^l G_i^{r_2}) \cup (\bigcup_{i=l+1}^k W_{(i,1)}^{r_2})] \\ &= \{[(\bigcup_{i=1}^l G_i^{r_1}) \cup (\bigcup_{i=l+1}^k W_{(i,1)}^{r_1})] \cap (\bigcup_{i=1}^l G_i^{r_2})\} \cup \\ &\quad \cup \{[(\bigcup_{i=1}^l G_i^{r_1}) \cup (\bigcup_{i=l+1}^k W_{(i,1)}^{r_1})] \cap (\bigcup_{i=l+1}^k W_{(i,1)}^{r_2})\} \\ &= [(\bigcup_{i=1}^l G_i^{r_1}) \cap (\bigcup_{i=1}^l G_i^{r_2})] \cup [(\bigcup_{i=l+1}^k W_{(i,1)}^{r_1}) \cap (\bigcup_{i=1}^l G_i^{r_2})] \cup \\ &\quad \cup [(\bigcup_{i=1}^l G_i^{r_1}) \cap (\bigcup_{i=l+1}^k W_{(i,1)}^{r_2})] \cup [(\bigcup_{i=l+1}^k W_{(i,1)}^{r_1}) \cap (\bigcup_{i=l+1}^k W_{(i,1)}^{r_2})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{ \cup_{i=1}^l [\cup_{i=1}^l (G_i^{r_1} \cap G_i^{r_2})] \} \cup \{ \cup_{i=l+1}^k [\cup_{i=1}^l (W_{(i,1)}^{r_1} \cap G_i^{r_2})] \} \cup \\
&\quad \cup \{ \cup_{i=1}^l [\cup_{i=l+1}^k (G_i^{r_1} \cap W_{(i,1)}^{r_2})] \} \cup \{ \cup_{i=l+1}^k [\cup_{i=l+1}^k (W_{(i,1)}^{r_1} \cap W_{(i,1)}^{r_2})] \} \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
A_2^{r_1} \cap A_2^{r_2} &= (\cup_{i=l+1}^k W_{(i,2)}^{r_1}) \cap (\cup_{i=l+1}^k W_{(i,2)}^{r_2}) \\
&= \cup_{i=l+1}^k [\underbrace{\cup_{i=l+1}^k (W_{(i,2)}^{r_1} \cap W_{(i,2)}^{r_2})}_{\emptyset}] = \emptyset
\end{aligned}$$

para todo  $r_1, r_2 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  e  $r_1 \neq r_2$ .

Além disso, desde que  $f^j(G_i^0) = G_i^j$  e  $f^t(W_{(i,s)}^0) = W_{(i,s)}^t$  para  $s = 1, 2$  e  $j, t = 1, \dots, p-1$ , então para todo  $r = 1, \dots, p-1$  temos

$$\begin{aligned}
f^r(A_1^0) &= f^r((\cup_{i=1}^l G_i^0) \cup (\cup_{i=l+1}^k W_{(i,1)}^0)) = f^r(\cup_{i=1}^l G_i^0) \cup f^r(\cup_{i=l+1}^k W_{(i,1)}^0) \\
&= (\cup_{i=1}^l f^r(G_i^0)) \cup (\cup_{i=l+1}^k f^r(W_{(i,1)}^0)) = (\cup_{i=1}^l G_i^r) \cup (\cup_{i=l+1}^k W_{(i,1)}^r) \\
&= A_1^r \\
f^r(A_2^0) &= f^r(\cup_{i=l+1}^k W_{(i,2)}^0) = \cup_{i=l+1}^k f^r(W_{(i,2)}^0) = \cup_{i=l+1}^k W_{(i,2)}^r = A_2^r
\end{aligned}$$

Segue portanto que  $g(M, f) \leq 2$  □

**Observação 3.0.5** *Provamos no lema acima que  $g(M, f) \leq 2$  supondo que  $g(M_i, f) \leq 2$  para todo  $i = 1, \dots, k$ . Contudo, esse resultado vale de maneira mais geral da seguinte forma*

**Proposição 3.0.1** *Sejam  $M$  um espaço de Hausdorff e  $f : M \rightarrow M$  uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre. Suponhamos que existam  $M_1, \dots, M_k$  subconjuntos (não vazios) fechados disjuntos do espaço  $M$  os quais são invariantes por  $f$  e cobrem  $M$ . Então, se  $g(M_i, f) \leq n$  para cada  $i = 1, \dots, k$ , temos  $g(M, f) \leq n$ .*

A prova dessa proposição é dada de maneira análoga ao que fizemos no lema 3.0.12, considerando o fato de que se  $g(M_i, f) \leq n$ , então para qualquer  $m \geq n$  podemos construir uma cobertura com  $m$  fechados a qual ainda satisfaz as propriedades do genus.

**Teorema 3.0.11** *Seja  $p$  um número primo. Então*

$$g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) = \begin{cases} 1 & \text{se } p = 3 \\ 2 & \text{se } p \geq 5 \end{cases}$$

**Demonstração:**

Primeiramente, seja  $p = 3$ . Por definição, temos que

$$L_{3,3} = \{(x_1, x_2, x_3) \in (\partial\Delta_2)^3 : \text{Se } m, n \in \{1, 2, 3\}, n \equiv m + 1 \pmod{3} \\ \text{e } x_m \in \Delta_{2;i}, \text{ então } x_n \notin \Delta_{2;i}\}$$

É fácil ver que  $L_{3,3} \neq \emptyset$ , por exemplo, o ponto  $([\Delta_{2;3}], [\Delta_{2;1}], [\Delta_{2;2}])$  pertence a  $L_{3,3}$ . Portanto,  $g(L_{3,3}, \varphi_{3,3}) \geq 1$ .

Consideremos o conjunto

$$M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in L_{3,3} : x_1 \in \Delta_{2;1}\}$$

Agora, tomemos  $x = (x_1, x_2, x_3) \in L_{3,3}$ . Então  $x_1 \in \Delta_{2;i}$  para algum  $i = 1, 2, 3$ . Afirmamos que  $M_1$  contém apenas um dos pontos  $x, \varphi_{3,3}(x), \varphi_{3,3}^2(x)$ . De fato, suponhamos que  $x \in M_1$ , logo  $x_1 \in \Delta_{2;1}$ . Portanto, pela definição do conjunto  $L_{3,3}$ ,  $x_2$  e  $x_3$  não podem pertencer a  $\Delta_{2;1}$  e daí  $\varphi_{3,3}(x), \varphi_{3,3}^2(x) \notin M_1$ . Agora, se  $x \notin M_1$  então  $x_2$  ou  $x_3$  pertence a  $\Delta_{2;1}$

- Se  $x_2 \in \Delta_{2;1}$  então  $x_1, x_3 \notin \Delta_{2;1}$ . Logo, somente  $\varphi_{3,3}(x) \in M_1$

- Se  $x_3 \in \Delta_{2:1}$  então  $x_1, x_2 \notin \Delta_{2:1}$ . Logo, somente  $\varphi_{3,3}^2(x) \in M_1$

Segue então que  $\varphi_{3,3}^i(M_1) \cap \varphi_{3,3}^j(M_1) = \emptyset$  para  $i, j \in \{0, 1, 2\}$  e  $i \neq j$ .

Além disso, claramente  $L_{3,3} = \cup_{i=0}^2 \varphi_{3,3}^i(M_1)$ . Assim, pela definição do genus, temos  $g(L_{3,3}, \varphi_{3,3}) \leq 1$ . Portanto,  $g(L_{3,3}, \varphi_{3,3}) = 1$ .

Agora, seja  $p \geq 5$ . Para mostrarmos que  $g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) \geq 2$ , consideremos a  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre  $f : S^1 \rightarrow S^1$  dada por  $f(z) = e^{\frac{p-1}{p}\pi i} z$  (veja exemplo 1.0.7). Para  $j = 1, 2, 3$ , definamos

$$M_j = \{e^{\alpha i} ; 2\pi(j-1)/3 \leq \alpha \leq 2\pi j/3\}$$

Observemos que, os  $M_j$  formam uma cobertura de  $S^1$  por três fechados. Além disso, para todo  $j = 1, 2, 3$ , dado  $x = e^{\alpha i} \in M_j$  a dinâmica da ação  $f$  é de somar o ângulo  $\frac{p-1}{p}\pi$  a  $\alpha$ , isto é, uma rotação do ângulo  $\frac{p-1}{p}\pi$ . Daí, como os arcos determinados pelos ângulos  $\alpha$  compreendidos no intervalo  $2\pi(j-1)/3 \leq \alpha \leq 2\pi j/3$  tem comprimento  $\frac{2\pi}{3}$ , então  $f(x) \notin M_j$  para qualquer  $x \in M_j$  desde que  $\frac{(p-1)\pi}{p} > \frac{2\pi}{3}$  para todo  $p \geq 5$  primo. Portanto,  $M_j \cap f(M_j) = \emptyset$ . Segue então do teorema 2.0.8 que  $2 = g(S^1, f) \leq g(L_{3,p}, \varphi_{3,p})$ .

Mostremos agora que  $g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) \leq 2$ . Para isso, construiremos uma cobertura finita de  $L_{3,p}$  por fechados disjuntos invariantes por  $\varphi_{3,p}$ , tais que o genus de cada um desses fechados com a ação  $\varphi_{3,p}$  é  $\leq 2$ . Daí, pelo lema 3.0.12, teremos  $g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) \leq 2$ .

Assim, para cada  $x = (x_1, \dots, x_p) \in L_{3,p}$  definamos o conjunto

$$T_x = \{(a_1, \dots, a_p) \in \{1, 2, 3\}^p ; x_j \in \Delta_{2:a_j} \text{ com } j = 1, \dots, p\}$$

Ainda, para  $a_i, a_j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $a_i \neq a_j$  e  $i, j \in \{1, \dots, p\}$ , seja

$$r(a_i, a_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } a_j \equiv a_i + 1 \pmod{3} \\ 2 & \text{se } a_j \equiv a_i + 2 \pmod{3} \end{cases}$$

e para cada  $j \in \{1, \dots, p\}$ , consideremos

$$j^+ = \begin{cases} j+1, & \text{se } j \leq p-1 \\ 1, & \text{se } j = p \end{cases} \quad e \quad j^- = \begin{cases} j-1, & \text{se } j \geq 2 \\ p, & \text{se } j = 1 \end{cases}$$

Notamos que, qualquer que seja  $x \in L_{3,p}$ , o conjunto  $T_x$  é não vazio desde que cada coordenada  $x_i$  pertence a  $\Delta_{2;j}$  para algum  $j \in \{1, 2, 3\}$  e  $i = 1, \dots, p$ . O que determina a cardinalidade de  $T_x$  é a quantidade de coordenadas de  $x$  que são vértices de  $\partial\Delta_2$ . Na pior das hipóteses, quando nenhuma das coordenadas de  $x$  é vértice de  $\partial\Delta_2$ , o cardinal de  $T_x$  é 1. Faz sentido então definirmos a função  $v : L_{3,p} \rightarrow \mathbb{N}$  por

$$v(x) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^p r(a_j, a_{j^+})$$

onde a  $p$ -upla  $(a_1, \dots, a_p)$  pertence a  $T_x$ . Mostremos então que a definição de  $v$  independe da escolha do elemento  $(a_1, \dots, a_p) \in T_x$ . Suponhamos que  $\text{card } T_x \geq 2$ , pois para  $\text{card } T_x = 1$  não temos problemas quanto a escolha do representante.

Sejam então  $(a_1, \dots, a_p), (b_1, \dots, b_p) \in T_x$  e suponhamos que para os índices  $j_1, \dots, j_l \in \{1, \dots, p\}$  com  $j_1 < \dots < j_l$  as coordenadas  $a_{j_k} \neq b_{j_k}$ ,  $k = 1, \dots, l$  e para os demais  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $a_j = b_j$ .

Seja  $x_{j_k}$  uma coordenada de  $x$  com  $k = 1, \dots, l$ . Como  $a_{j_k} \neq b_{j_k}$ ,  $x_{j_k} \in \Delta_{2;a_{j_k}}$  e  $x_{j_k} \in \Delta_{2;b_{j_k}}$  então necessariamente  $x_{j_k}$  está no vértice cuja face oposta é o simplexo determinado por  $\text{co}\{e_{a_{j_k}}, e_{b_{j_k}}\}$ . Seja  $e_m$  esse vértice. Portanto,  $\Delta_{2;m} = \text{co}\{e_{a_{j_k}}, e_{b_{j_k}}\}$  e daí, concluímos da definição de  $L_{3,p}$  que  $x_{j_k}^-$  e  $x_{j_k}^+$  necessariamente pertencem a  $\Delta_{2;m}$ . Logo, temos  $a_{j_k}^- = a_{j_k}^+ = b_{j_k}^- = b_{j_k}^+ = m$  para todo  $j = 1, \dots, l$ .

**Afirmção 3.0.2**  $r(a_{j_k}^-, a_{j_k}) + r(a_{j_k}, a_{j_k}^+) = 3$ , para todo  $k = 1, \dots, l$

Com efeito, suponhamos primeiro que  $r(a_{j_k^-}, a_{j_k}) = 1$ . Logo,

$$a_{j_k} \equiv a_{j_k^-} + 1 \pmod{3} \Rightarrow a_{j_k^-} \equiv a_{j_k} - 1 \equiv a_{j_k} + 2 \pmod{3}.$$

Portanto, como  $a_{j_k^-} = a_{j_k^+}$ , temos  $2 = r(a_{j_k}, a_{j_k^-}) = r(a_{j_k}, a_{j_k^+})$  implicando que  $r(a_{j_k^-}, a_{j_k}) + r(a_{j_k}, a_{j_k^+}) = 3$ . Analogamente, se  $r(a_{j_k^-}, a_{j_k}) = 2$ , segue que  $a_{j_k^-} \equiv a_{j_k} - 2 \equiv a_{j_k} + 1 \pmod{3}$ , e então  $1 = r(a_{j_k}, a_{j_k^-}) = r(a_{j_k}, a_{j_k^+})$ . Logo,  $r(a_{j_k^-}, a_{j_k}) + r(a_{j_k}, a_{j_k^+}) = 3$ .

Seja agora  $J = \{j_1^-, \dots, j_l^-, j_1, \dots, j_l\}$ . Pela afirmação acima e considerando que para  $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{j_1, \dots, j_l\}$ ,  $a_j = b_j$ , segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_{j=1}^p r(a_j, a_{j+}) &= \frac{1}{3} \sum_{j \in \{1, \dots, p\} \setminus J} r(a_j, a_{j+}) + \frac{1}{3} \sum_{j \in J} r(a_j, a_{j+}) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j \in \{1, \dots, p\} \setminus J} r(a_j, a_{j+}) + \frac{1}{3} \underbrace{(3 + 3 + \dots + 3)}_{l \text{ vezes}} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j \in \{1, \dots, p\} \setminus J} r(a_j, a_{j+}) + l \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j \in \{1, \dots, p\} \setminus J} r(b_j, b_{j+}) + l \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j \in \{1, \dots, p\} \setminus J} r(b_j, b_{j+}) + \frac{1}{3} \sum_{j \in J} r(b_j, b_{j+}) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^p r(b_j, b_{j+}). \end{aligned}$$

Assim, para mostrarmos que  $v$  está bem definida, resta verificarmos que  $v(x) \in \mathbb{N}$ .

Antes observemos que, dados  $x \in L_{3,p}$  e  $(a_1, \dots, a_p) \in T_x$  então  $(a_2, \dots, a_p, a_1) \in T_{\varphi_{3,p}(x)}$ . Daí

$$\begin{aligned} v(\varphi_{3,p}(x)) &= \frac{1}{3} (r(a_2, a_3) + \dots + r(a_p, a_1) + r(a_1, a_2)) \\ &= \frac{1}{3} (r(a_1, a_2) + r(a_2, a_3) + \dots + r(a_p, a_1)) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^p r(a_j, a_{j+}) = v(x). \end{aligned}$$

**Afirmção 3.0.3** Para cada  $x \in L_{3,p}$  temos  $v(x) \in \mathbb{N}$  e  $p/3 < v(x) < 2p/3$ .

Ainda, cada  $W_n = v^{-1}(n)$  é fechado em  $L_{3,p}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Com efeito, tomemos  $x \in L_{3,p}$ . Logo, para qualquer  $(a_1, \dots, a_p) \in T_x$ , temos  $v(x) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^p r(a_j, a_{j+})$ . Portanto, para mostrarmos que  $v(x) \in \mathbb{N}$ , basta verificarmos que  $\sum_{j=1}^p r(a_j, a_{j+})$  é um múltiplo de 3. Mas, considerando a definição de  $r(a_j, a_{j+})$  e denotando por  $\bar{x}$  a classe do inteiro  $x$  módulo 3, temos

$$\begin{aligned}
 \overline{\sum_{j=1}^p r(a_j, a_{j+})} &= \overline{\sum_{j=1}^p r(a_j, a_{j+})} \\
 &= \overline{\sum_{j=1}^p a_{j+} - a_j} \\
 &= \overline{a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \dots + a_p - a_{p-1} + a_1 - a_p} \\
 &= \overline{a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \dots + a_p - a_{p-1} + a_1 - a_p} \\
 &= \bar{0}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Segue então que  $v(x) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^p r(a_j, a_{j+})$  é um número natural. Além disso, observemos que não podemos ter  $\sum_{j=1}^p r(a_j, a_{j+}) = \underbrace{1 + \dots + 1}_{p \text{ vezes}} = p$  pois  $v(x)$  é natural e  $p \geq 5$  primo. Analogamente,  $\sum_{j=1}^p r(a_j, a_{j+}) \neq \underbrace{2 + \dots + 2}_{p \text{ vezes}} = 2p$  desde que  $3 \nmid 2p$  (isso também pode ser verificado através da definição de  $T_x$ ). Portanto, certamente  $p/3 < v(x) < 2p/3$ .

Agora, queremos mostrar que  $W_n \subset L_{3,p} \subset (\partial\Delta_2)^p$  é fechado. Para isso, mostraremos que o seu complementar  $L_{3,p} \setminus W_n$  é aberto.

Assim, tomando  $x = (x_1, \dots, x_p) \in L_{3,p} \setminus W_n$  temos que  $v(x) = m \neq n$ . Suponhamos primeiro que nenhuma das coordenadas de  $x$  é vértice de  $\partial\Delta_2$ . Logo,  $x_i \in \Delta_{2;a_i}$  para  $i = 1, \dots, p$  e consideremos  $(a_1, \dots, a_p) \in T_x$ . Seja então  $V_{x_i} = B(x_i, \varepsilon_i) \cap \partial\Delta_2$  uma vizinhança de  $x_i$ , onde  $\varepsilon_i$  é tomado suficientemente pequeno de forma que  $V_{x_i}$  esteja inteiramente contida em  $\Delta_{2;a_i}$  para cada  $i = 1, \dots, p$ . Portanto,  $V_x = V_{x_1} \times \dots \times V_{x_p}$  é uma vizinhança de  $x$  em  $L_{3,p}$  que

está inteiramente contida em  $L_{3,p} \setminus W_n$ . De fato, tomemos  $y \in V_x \Rightarrow y_i \in V_{x_i}$  e daí  $y_i \in \Delta_{2,a_i}$ . Logo,  $(a_1, \dots, a_p) \in T_y \Rightarrow v(y) = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^p r(a_j, a_{j+}) = m \neq n$ . Logo  $V_x \subset L_{3,p} \setminus W_n$ .

Agora, se algumas das coordenadas de  $x$  são vértices de  $\partial\Delta_2$ , digamos  $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ , então consideremos a vizinhança de  $x_{i_k}$ ,  $U_{x_{i_k}} = B(x_{i_k}, \varepsilon_{x_{i_k}}) \cap \partial\Delta_2$  com  $\varepsilon_{x_{i_k}}$  suficientemente pequeno de tal sorte que  $U_{x_{i_k}} \cap \Delta_{2;a_{i_k}} = \emptyset$  para todo  $k = 1, \dots, l$ . Observemos que, como  $x_{i_k}$  é vértice de  $\partial\Delta_2$  então se chamarmos de  $b_{i_k}^1$  e  $b_{i_k}^2$  os vértices da face oposta a  $a_{i_k}$ , segue que  $x_{i_k} \in \Delta_{2;b_{i_k}^1}$  e  $x_{i_k} \in \Delta_{2;b_{i_k}^2}$ . Logo  $(a_1, \dots, b_{i_1}^1, \dots, b_{i_l}^1, \dots, a_p)$  e  $(a_1, \dots, b_{i_1}^2, \dots, b_{i_l}^2, \dots, a_p)$  pertencem a  $T_x$ . Para os  $x_j$  tais que  $j \in \{1, \dots, p\} \setminus \{i_1, \dots, i_l\}$  tomemos a vizinhança  $V_{x_j}$  como acima.

Assim, seja então  $U_x$  a vizinhança de  $x$  tal que nas  $i_k$ -ésimas "fatias" temos  $U_{i_k}$  para  $k = 1, \dots, l$  e nas demais  $V_{x_j}$ . Portanto se  $y \in U_x$  então  $y_j \in \Delta_{2;a_j}$  e  $y_{i_k} \in \Delta_{2;b_{i_k}^1}$  ou  $y_{i_k} \in \Delta_{2;b_{i_k}^2}$ . Logo,  $(a_1, \dots, b_{i_1}^1, \dots, b_{i_l}^1, \dots, a_p)$ ,  $(a_1, \dots, b_{i_1}^2, \dots, b_{i_l}^2, \dots, a_p)$  pertencem a  $T_y$ , implicando que  $v(y) = m \neq n$ . Concluimos então que  $L_{3,p} \setminus W_n$  é aberto e conseqüentemente  $W_n$  é fechado.

Bem, desde que  $v(x) \in \mathbb{N}$  e  $p/3 < v(x) < 2p/3$ , temos então uma quantidade finita de conjuntos  $W_n$  de  $L_{3,p}$  os quais são disjuntos e cobrem  $L_{3,p}$ . Além disso,  $\varphi_{3,p}(W_n) = W_n$  pois  $v(x) = v(\varphi_{3,p}(x))$  qualquer que seja  $x \in L_{3,p}$ . Mostraremos que  $g(W_n, \varphi_{3,p}) \leq 2$  para todo  $p/3 < n < 2p/3$  e conseqüentemente  $g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) \leq 2$  (veja lema 3.0.12).

Suponhamos então, por absurdo, que exista algum  $n$  para o qual tenhamos  $g(W_n, \varphi_{3,p}) \geq 3$ . Tendo em vista o lema 3.0.11, podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $g(W_n, \varphi_{3,p}) = 3$  pois, caso contrário, poderíamos substituir  $W_n$  por um subconjunto  $W'_n$  invariante por  $\varphi_{3,p}$  e tal que  $g(W'_n, \varphi_{3,p}) = 3$ .

Seja  $f : S^1 \rightarrow S^1$  dada por  $f(z) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)n}z$ . Como  $p/3 < n < 2p/3$ , segue sem dificuldades que  $f$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre em  $S^1$ . Construiremos uma função  $P : W_n \rightarrow S^1$  equivariante, o que nos permitirá concluir que  $g(W_n, \varphi_{3,p}) \leq g(S^1, f) = 2$  (lema 2.0.9), contradizendo o fato de  $g(W_n, \varphi_{3,p}) = 3$ .

Seja  $h : \partial\Delta_2 \rightarrow S^1$  o homeomorfismo tal que

$$h(\Delta_{2;j}) = \left\{ e^{i\alpha} ; \frac{2\pi(j-1)}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi j}{3} \right\} \text{ para } j = 1, 2, 3$$

Como  $g(W_n, \varphi_{3,p}) = 3$ , existem fechados  $W^1, W^2$  e  $W^3$  que cobrem  $W_n$  tais que, para cada  $j = 1, 2, 3$ , existem fechados  $W_0^j, \dots, W_{p-1}^j$  satisfazendo:

- $W^j = \bigcup_{k=0}^{p-1} W_k^j$
- $\varphi_{3,p}^k(W_0^j) = W_k^j$  e  $W_{k_1}^j \cap W_{k_2}^j = \emptyset$  para  $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  e  $k_1 \neq k_2$

Queremos definir uma homotopia  $H : (W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times I \rightarrow S^1$ . A idéia é construir  $H$  sobre determinados subconjuntos de  $(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times I$  que possuem a propriedade de extensão de homotopia, o que ao final nos dará a definição de  $H$  desejada.

Começemos então definindo

$$H(x, t) = \begin{cases} h(x_1) & \text{para } (x, t) \in [(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times \{0\}] \cup (W_0^1 \times I) \\ f^k(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 1)) & \text{para } (x, t) \in W_k^1 \times \{1\}, k = 1, \dots, p-1 \end{cases}$$

Observemos que,  $[(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times \{0\}] \cup (W_0^1 \times I) \subset (W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times I$  e além disso,

$$[(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times \{0\}] \cup (W_0^1 \times I) \cap (W_k^1 \times \{1\}) = \emptyset$$

para todo  $k = 1, \dots, p-1$ . Portanto  $H$  está bem definida.

Ainda,  $\varphi_{3,p}^k(W_0^1) = W_k^1$  e daí  $\varphi_{3,p}^{p-k}(W_k^1) = W_0^1$  para  $k = 1, \dots, p-1$ .

Assim,  $H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 1) = h(x_{p+1-k})$ , desde que  $\varphi_{3,p}^{p-k}(x) = (x_{p+1-k}, \dots, x_{p-k})$

para todo  $x \in W_k^1$ . Logo,

$$f^k(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 1)) = f^k(h(x_{p+1-k})) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)nk} h(x_{p+1-k}) \quad (3.4)$$

**Afirmação 3.0.4** *Para todo  $x \in W^1$  a aplicação  $H_1(x) := H(x, 1)$  é equivariante.*

Primeiramente, observemos que se  $x \in W^1 = \cup_{k=0}^{p-1} W_k^1$ , então  $x \in W_k^1$  para algum  $k = 0, 1, \dots, p-1$ . Assim,  $\varphi_{3,p}(x) \in \varphi_{3,p}(W_k^1) = W_{k+1}^1$  (para  $k = p-1$ ,  $\varphi_{3,p}(W_k^1) = W_0^1$ ) e portanto  $\varphi_{3,p}(W^1) \subseteq W^1$ . Por outro lado, se  $x \in W_k^1 = \varphi_{3,p}(\varphi_{3,p}^{k-1}(W_0^1)) = \varphi_{3,p}(W_{k-1}^1)$ , então  $x = \varphi_{3,p}(y)$  com  $y \in W_{k-1}^1$ , isto é,  $x \in W^1$  e daí  $W^1 \subseteq \varphi_{3,p}(W^1)$ . Logo,  $\varphi_{3,p}(W^1) = W^1$  e daí  $\varphi_{3,p}$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre sobre  $W^1$ .

Agora, para mostrarmos que  $H_1$  é equivariante em  $W^1$ , temos os seguintes casos.

- Se  $x \in W_0^1$  então  $\varphi_{3,p}(x) \in \varphi_{3,p}(W_0^1) = W_1^1$ . Logo

$$\begin{aligned} f \circ H_1(x) &= f(H(x, 1)) = f(h(x_1)) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)n} h(x_1) \\ H_1 \circ \varphi_{3,p}(x) &= H_1(\varphi_{3,p}(x)) = H(\varphi_{3,p}(x), 1) = f(H(\varphi_{3,p}^{p-1}(\varphi_{3,p}(x)), 1)) = \\ &= f(H(\varphi_{3,p}^p(x), 1)) = f(H(x, 1)) = f(h(x_1)) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)n} h(x_1) \end{aligned}$$

- Para  $x \in W_{p-1}^1$ , temos

$$\begin{aligned} f \circ H_1(x) &= f(H(x, 1)) = f(f^{p-1}(H(\varphi_{3,p}^{p-p+1}(x), 1))) = \\ &= f^p(H(\varphi_{3,p}(x), 1)) = H(\varphi_{3,p}(x), 1) = h(x_2) \\ H_1 \circ \varphi_{3,p}(x) &= H_1(\varphi_{3,p}(x)) = H(\varphi_{3,p}(x), 1) = h(x_2) \end{aligned}$$

desde que,  $\varphi_{3,p}(W_{p-1}^1) = W_0^1$ .

- Agora, para  $x \in W_k^1$  com  $k = 1, \dots, p-2$ , temos que  $\varphi_{3,p}(W_k^1) = \varphi_{3,p}^{k+1}(W_0^1) = W_{k+1}^1$ . Assim,

$$\begin{aligned}
f \circ H_1(x) &= f(H(x, 1)) = f(f^k(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 1))) = \\
&= f^{k+1}(h(x_{p+1-k})) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)n(k+1)}h(x_{p+1-k}) \\
H_1 \circ \varphi_{3,p}(x) &= H_1(\varphi_{3,p}(x)) = H(\varphi_{3,p}(x), 1) = \\
&= f^{k+1}(H(\varphi_{3,p}^{p-k-1}(\varphi_{3,p}(x)), 1)) = f^{k+1}(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 1)) = \\
&= f^{k+1}(h(x_{p+1-k})) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)n(k+1)}h(x_{p+1-k}).
\end{aligned}$$

Portanto,  $(f \circ H_1)(x) = (H_1 \circ \varphi_{3,p})(x)$  qualquer que seja  $x \in W^1$ .

Definamos agora a função  $d_1 : W^1 \times I \longrightarrow (0, 2\pi)$  por

$$d_1(x, t) := \begin{cases} \arg\left(\frac{H(\varphi_{3,p}(x), t)}{H(x, t)}\right) & \text{para } (x, t) \in W^1 \times \{0, 1\} \\ td_1(x, 1) + (1-t)d_1(x, 0) & \text{para } (x, t) \in W^1 \times (0, 1) \end{cases}$$

Notemos que, como  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in L_{3,p}$ , então  $H(\varphi_{3,p}(x), 1) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)n}h(x_1) = f(h(x_1)) \neq h(x_1) = H(x, 1)$  para  $x \in W_0^1$ . Pelo mesmo motivo  $f^{k+1}(h(x_{p+1-k})) \neq f^k(h(x_{p+1-k}))$  e daí  $H(\varphi_{3,p}(x), 1) \neq H(x, 1)$  para todo  $x \in W_k^1$  com  $k = 1, \dots, p-1$ . Ainda, se  $x \in L_{3,p}$  então  $x_2 \neq x_1$  e conseqüentemente  $H(\varphi_{3,p}(x), 0) = h(x_2) \neq h(x_1) = H(x, 0)$  e em particular para  $x \in W^1$ . Logo,  $d_1(x, t) \in (0, 2\pi)$ ,  $\forall (x, t) \in W^1 \times \{0, 1\}$  e portanto  $d_1$  está bem definida e é contínua. Podemos assim definir

$$H(x, t) = H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), t) \prod_{m=1}^k e^{id_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t)} \quad (3.5)$$

para  $(x, t) \in W_k^1 \times (0, 1)$ ,  $k = 1, \dots, p-1$ . Temos assim, em particular,  $H : W^1 \times I \longrightarrow S^1$ . Agora, consideremos o conjunto  $(W^1 \cup W_0^2) \times \{0\}$  onde  $H$  também já está definida. Como  $(W^1 \cup W_0^2)$  é um subconjunto fechado do espaço normal  $L_{3,p}$ , então  $(W^1 \cup W_0^2)$  é normal. Além disso,  $(W^1 \cup W_0^2) \times I$  é fechado em  $L_{3,p} \times \mathbb{R}$  e portanto normal. Logo  $(W^1 \cup W_0^2)$  é binormal. Daí,

como  $W^1$  é fechado em  $(W^1 \cup W_0^2)$ , pelo teorema 1.0.3,  $H$  pode ser estendida ao conjunto  $(W^1 \cup W_0^2) \times I$  de forma que  $H((W^1 \cup W_0^2) \times I) \subset S^1$ .

Ainda, definimos para  $x \in W_k^2$  com  $k = 1, \dots, p-1$

$$H(x, 1) = f^k(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 1)) = e^{(\frac{2}{p}\pi i)nk} H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 1).$$

Desejamos agora estender continuamente  $H$  sobre  $W^2 \times I$ . Para isso, basta construirmos  $H$  sobre  $W_k^2 \times (0, 1)$ ,  $k = 0, 1, \dots, p-1$ , visto que, para  $W_k^2 \times \{0, 1\}$  a função já está definida.

Assim, definamos  $d_2 : (W^1 \cup W^2) \times I \longrightarrow (0, 2\pi)$  por

$$d_2(x, t) := \begin{cases} \arg\left(\frac{H(\varphi_{3,p}(x), t)}{H(x, t)}\right) & \text{para } (x, t) \in (W^1 \cup W^2) \times \{0, 1\} \\ td_2(x, 1) + (1-t)d_2(x, 0) & \text{para } (x, t) \in (W^1 \cup W^2) \times (0, 1) \end{cases}$$

Observemos que  $d_2(x, t) = d_1(x, t)$  para todo  $(x, t) \in W^1 \times I$ . Além disso,

**Afirmção 3.0.5** *Para todo  $x \in W^1 \cup W^2$ ,  $(a_1, \dots, a_p) \in T_x$  e  $s \in \{1, \dots, p\}$  temos*

$$\left| \frac{2\pi}{3} \sum_{m=1}^s r(a_m, a_{m+}) - \sum_{m=1}^s d_2(\varphi_{3,p}^{m-1}(x), 0) \right| \leq \frac{2\pi}{3} \quad (3.6)$$

Com efeito, consideremos primeiro os seguintes fatos:

(1) Se  $(a_1, \dots, a_p) \in T_x$  e  $m \in \{1, \dots, p\}$ , então

$$a_m < a_{m+} \iff \arg(h(x_m)) < \arg(h(x_{m+})). \quad (3.7)$$

Pela definição de  $T_x$  temos que  $x_m \in \Delta_{2;a_m}$  e  $x_{m+} \in \Delta_{2;a_{m+}}$  e portanto  $h(x_m) \in h(\Delta_{2;a_m})$  e  $h(x_{m+}) \in h(\Delta_{2;a_{m+}})$ . Daí,

$$\frac{2\pi(a_m - 1)}{3} \leq \arg(h(x_m)) \leq \frac{2\pi a_m}{3}$$

$$\frac{2\pi(a_{m+} - 1)}{3} \leq \arg(h(x_{m+})) \leq \frac{2\pi a_{m+}}{3}.$$

Mas,  $a_m < a_{m+} \Rightarrow a_m \leq a_{m+} - 1$ . Assim,

$$\arg(h(x_m)) \leq \frac{2\pi a_m}{3} \leq \frac{2\pi(a_{m+} - 1)}{3} \leq \arg(h(x_{m+})). \quad (3.8)$$

Ainda,  $x_m \neq x_{m+}$ . Então  $\arg(h(x_m)) \neq \arg(h(x_{m+}))$ . Logo,  $\arg(h(x_m)) < \arg(h(x_{m+}))$ . Analogamente, verifica-se que, se  $a_m > a_{m+}$  então  $\arg(h(x_m)) > \arg(h(x_{m+}))$ .

Como consequência desse fato temos que

$$\begin{aligned} a_m < a_{m+} &\Rightarrow \arg\left(\frac{h(x_{m+})}{h(x_m)}\right) = \arg(h(x_{m+})) - \arg(h(x_m)) \\ a_m > a_{m+} &\Rightarrow \arg\left(\frac{h(x_{m+})}{h(x_m)}\right) = 2\pi + (\arg(h(x_{m+})) - \arg(h(x_m))) \end{aligned}$$

(2) Dados  $a_i, a_j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $a_i \neq a_j$  e  $i, j \in \{1, \dots, p\}$  temos

$$r(a_i, a_j) = \begin{cases} a_j - a_i, & \text{se } a_j > a_i \\ 3 + (a_j - a_i), & \text{se } a_j < a_i \end{cases}$$

Esse fato segue direto da definição de  $r(a_i, a_j)$  dada anteriormente (veja p. 54).

Agora, seja  $s \in \{1, \dots, p\}$  e consideremos  $A_1 = \{m \in \{1, \dots, s\} : a_m < a_{m+}\}$  e  $A_2 = \{m \in \{1, \dots, s\} : a_m > a_{m+}\}$ . Observemos que, pelos fatos (1) e (2) temos que, se  $m \in A_1$ , então

$$r(a_m, a_{m+}) = a_{m+} - a_m \quad (3.9)$$

$$\arg\left(\frac{h(x_{m+})}{h(x_m)}\right) = \arg(h(x_{m+})) - \arg(h(x_m)). \quad (3.10)$$

Mas, se  $m \in A_2$ , segue que

$$r(a_m, a_{m+}) = 3 + (a_{m+} - a_m) \quad (3.11)$$

$$\arg\left(\frac{h(x_{m+})}{h(x_m)}\right) = 2\pi + (\arg(h(x_{m+})) - \arg(h(x_m))) \quad (3.12)$$

Suponhamos que  $\text{card } A_2 = l$ . Segue então que,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^s d_2(\varphi_{3,p}^{m-1}(x), 0) &= d_2(x, 0) + d_2(\varphi_{3,p}(x), 0) + \cdots + d_2(\varphi_{3,p}^{s-1}(x), 0) \\
&= \arg\left(\frac{h(x_2)}{h(x_1)}\right) + \arg\left(\frac{h(x_3)}{h(x_2)}\right) + \cdots + \arg\left(\frac{h(x_{s+1})}{h(x_s)}\right) \\
&= \sum_{m=1}^s \arg\left(\frac{h(x_{m+})}{h(x_m)}\right) \\
&= \sum_{m \in A_1} \arg\left(\frac{h(x_{m+})}{h(x_m)}\right) + \sum_{m \in A_2} \arg\left(\frac{h(x_{m+})}{h(x_m)}\right) \\
&= \sum_{m \in A_1} (\arg(h(x_{m+})) - \arg(h(x_m))) + \\
&\quad + (2\pi l + \sum_{m \in A_2} (\arg(h(x_{m+})) - \arg(h(x_m)))) \\
&= 2\pi l + \sum_{m=1}^s (\arg(h(x_{m+})) - \arg(h(x_m))) \\
&= 2\pi l + (\arg(h(x_2)) - \arg(h(x_1)) + \\
&\quad + \cdots + \arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_s))) \\
&= 2\pi l + (\arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_1))).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{3} \sum_{m=1}^s r(a_m, a_{m+}) &= \frac{2\pi}{3} \left( \sum_{m \in A_1} r(a_m, a_{m+}) + \sum_{m \in A_2} r(a_m, a_{m+}) \right) \\
&= \frac{2\pi}{3} \left( \sum_{m \in A_1} (a_{m+} - a_m) + (3l + \sum_{m \in A_2} (a_{m+} - a_m)) \right) \\
&= \frac{2\pi}{3} \left( 3l + \sum_{m=1}^s (a_{m+} - a_m) \right) \\
&= 2\pi l + \frac{2\pi}{3} (a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \cdots + a_{s+1} - a_s) \\
&= 2\pi l + \frac{2\pi}{3} (a_{s+1} - a_1).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{3} \sum_{m=1}^s r(a_m, a_{m+}) - \sum_{m=1}^s d_2(\varphi_{3,p}^{m-1}(x), 0) &= \frac{2\pi}{3} (a_{s+1} - a_1) - \\
&= -(\arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_1))).
\end{aligned}$$

Basta então mostrarmos que a soma acima satisfaz a desigualdade (3.6). Notamos que, se  $a_{s+1} - a_1 = 0$  então  $x_{s+1}$  e  $x_1$  pertencem à mesma face em  $\partial\Delta_2$  e portanto  $\frac{-2\pi}{3} \leq \arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_1)) \leq \frac{2\pi}{3}$ . Suponhamos então agora que  $a_{s+1} \neq a_1$ . Pela definição de  $T_x$  sabemos que  $x_1 \in \Delta_{2;a_1}$  e  $x_{s+1} \in \Delta_{2;a_{s+1}}$  e daí  $h(x_1) \in h(\Delta_{2;a_1})$  e  $h(x_{s+1}) \in h(\Delta_{2;a_{s+1}})$ . Assim,

$$\begin{aligned} \frac{2\pi(a_1 - 1)}{3} &\leq \arg(h(x_1)) \leq \frac{2\pi a_1}{3} \\ \frac{2\pi(a_{s+1} - 1)}{3} &\leq \arg(h(x_{s+1})) \leq \frac{2\pi a_{s+1}}{3} \end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned} ((a_{s+1} - a_1) - 1)\frac{2\pi}{3} &\leq \arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_1)) \leq ((a_{s+1} - a_1) + 1)\frac{2\pi}{3} \\ \Rightarrow \frac{2\pi}{3}(a_{s+1} - a_1) - \frac{2\pi}{3} &\leq \arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_1)) \leq \frac{2\pi}{3}(a_{s+1} - a_1) + \frac{2\pi}{3} \\ &\Rightarrow -\frac{2\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3}(a_{s+1} - a_1) - (\arg(h(x_{s+1})) - \arg(h(x_1))) \leq \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Consequentemente, segue que

$$\left| \frac{2\pi}{3} \sum_{m=1}^s r(a_m, a_{m+}) - \sum_{m=1}^s d_2(\varphi_{3,p}^{m-1}(x), 0) \right| \leq \frac{2\pi}{3}$$

Observemos ainda que, quando  $s = p$  temos

$$\sum_{m=1}^s d_2(\varphi_{3,p}^{m-1}(x), 0) = 2\pi l \quad (3.13)$$

Assim, como  $(W^1 \cup W^2) \subset W_n = v^{-1}(n)$ , temos  $\frac{2\pi}{3} \sum_{m=1}^p r(a_m, a_{m+}) = 2\pi n$  e portanto, podemos concluir da afirmação acima juntamente com (3.13) que

$$|2\pi n - 2\pi l| \leq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2\pi|n - l| \leq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |n - l| \leq \frac{1}{3} \Rightarrow n = l$$

pois  $n \in \mathbb{N}$  e  $l \in \mathbb{Z}$ . Logo,

$$\sum_{m=1}^p d_2(\varphi_{3,p}^{m-1}(x), 0) = \frac{2\pi}{3} \sum_{m=1}^p r(a_m, a_{m+}) = 2\pi n$$

Mostramos na afirmação 3.0.4 que  $H_1$  é equivariante em  $W^1$ . Analogamente, mostra-se também que  $H_1 \circ \varphi_{3,p} = f \circ H_1$  para todo  $x \in W^2$ . Observe-mos ainda que se  $z = e^{i\alpha} \in S^1$  então  $f(z) = e^{(\frac{2\pi n}{p} + \alpha)i}$  e daí  $\frac{f(z)}{z} = \frac{e^{(\frac{2\pi n}{p} + \alpha)i}}{e^{i\alpha}} = e^{\frac{2\pi n}{p}i}$ . Logo,  $\arg(f(z)/z) = \frac{2\pi n}{p}$  e portanto

$$\begin{aligned} d_2(x, 1) &= \arg\left(\frac{H(\varphi_{3,p}(x), 1)}{H(x, 1)}\right) = \arg\left(\frac{H_1(\varphi_{3,p}(x))}{H(x, 1)}\right) \\ &= \arg\left(\frac{f(H_1(x))}{H(x, 1)}\right) = \arg\left(\frac{f(H(x, 1))}{H(x, 1)}\right) = \frac{2\pi n}{p} \end{aligned}$$

Ressaltamos que o mesmo vale para  $d_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), 1)$  com  $m = 1, \dots, p$ , visto que  $H_1 \circ \varphi_{3,p}^{p-m} = f^{p-m} \circ H_1$

Assim, para todo  $(x, t) \in (W^1 \cup W^2) \times I$  temos

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^p d_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t) &= t \sum_{m=1}^p d_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), 1) + (1-t) \sum_{m=1}^p d_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), 0) \\ &= t \sum_{m=1}^p \frac{2\pi n}{p} + (1-t)2\pi n = 2\pi n \end{aligned}$$

e conseqüentemente

**Afirmação 3.0.6** Para  $(x, t) \in W^1 \times I$  e  $k \in \{1, \dots, p-1\}$  temos

$$H(x, t) = H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), t) \prod_{m=1}^k e^{d_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t)}$$

De fato, se  $(x, t) \in W_k^1 \times (0, 1)$ ,  $k = 1, \dots, p-1$ , então pelo que definimos em (3.5) temos

$$H(x, t) = H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), t) \prod_{m=1}^k e^{id_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t)}.$$

Além disso, como  $H_1(x) = H(x, 1)$  é equivariante em  $W^1$  segue então que  $H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 1) = f^{p-k}(H(x, 1))$ . Logo

$$\begin{aligned} H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 1) &= f^{p-k}(H(x, 1)) = H(x, 1)e^{i(\frac{2\pi n}{p})(p-k)} \\ &= H(x, 1)e^{i(\frac{2\pi n}{p})(p-k-1+1)} = H(x, 1)e^{i(\frac{2\pi n}{p})(p-(k+1)+1)} \\ &= H(x, 1)e^{i\sum_{m=k+1}^p (\frac{2\pi n}{p})} = H(x, 1)e^{i\sum_{m=k+1}^p d_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), 1)} \\ &= H(x, 1) \prod_{m=k+1}^p e^{id_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), 1)}. \end{aligned}$$

Ainda, para  $(x, t) \in W_0^1 \times I$ ,

$$\begin{aligned} H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), t) &= H(x, t) = H(x, t)e^{i2\pi n} = H(x, t)e^{i\sum_{m=1}^p d_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t)} \\ &= H(x, t) \prod_{m=1}^p e^{id_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t)} \end{aligned}$$

e para  $x \in W_k^1$ , com  $k = 1, \dots, p-1$ , analogamente ao que fizemos na demonstração da afirmação 3.0.5, segue que

$$\sum_{m=k+1}^p d_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), 0) = 2\pi l_1 + (\arg(h(x_{p-k+1})) - \arg(h(x_1)))$$

onde  $l_1$  é o cardinal de  $A' = \{m \in \{k+1, \dots, p\} : a_m > a_m^+\}$ . Daí,

$$\begin{aligned} H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 0) &= h(x_{p-k+1}) = e^{i\arg(h(x_{p-k+1}))} = \\ &= e^{i2\pi l_1} e^{i(\arg(h(x_1)) - \arg(h(x_1)) + \arg(h(x_{p-k+1})))} \\ &= e^{i\arg(h(x_1))} e^{i(2\pi l_1 + \arg(h(x_{p-k+1})) - \arg(h(x_1)))} \\ &= h(x_1) e^{i(2\pi l_1 + \arg(h(x_{p-k+1})) - \arg(h(x_1)))} \\ &= H(x, 0) \prod_{m=k+1}^p e^{id_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), 0)}. \end{aligned}$$

Portanto,  $\forall (x, t) \in W^1 \times I$  temos

$$\begin{aligned} H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), t) \prod_{m=1}^k e^{id_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t)} &= H(x, t) \prod_{m=k+1}^p e^{id_1(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t)} \prod_{m=1}^k e^{id_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t)} \\ &= H(x, t) \prod_{m=k+1}^p e^{id_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t)} \prod_{m=1}^k e^{id_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t)} \\ &= H(x, t) \prod_{m=1}^p e^{id_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t)} \\ &= H(x, t) e^{i\sum_{m=1}^p d_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t)} \\ &= H(x, t) e^{i2\pi n} = H(x, t). \end{aligned}$$

Isso justifica o fato de definirmos, para todo  $(x, t) \in W_k^2 \times (0, 1)$  e

$k = 1, \dots, p-1$ ,

$$H(x, t) = H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), t) \prod_{m=1}^k e^{id_2(\varphi_{3,p}^{p-m}(x), t)}$$

Bem, até aqui já temos  $H$  definida continuamente sobre o conjunto  $[(W^1 \cup W^2) \times I] \cup (W_0^3 \times \{0\})$ . Para alcançarmos nosso objetivo, resta estender  $H$  sobre o conjunto  $W_0^3 \times (0, 1)$ . Mas, em particular, temos  $H : (W^1 \cup W^2) \times I \longrightarrow S^1$  e além disso  $(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3)$  é binormal (como observado para  $W^1 \cup W^2$ ). Assim, desde que  $W^1 \cup W^2$  é um subconjunto fechado de  $(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3)$ , novamente pelo teorema 1.0.3, segue que a função  $H : (W^1 \cup W^2) \times I \longrightarrow S^1$  pode ser estendida à homotopia  $H : (W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \times I \longrightarrow S^1$  a qual desejávamos obter.

Finalmente, podemos então definir  $P : W_n \longrightarrow S^1$  por

$$P(x) = \begin{cases} H(x, 1), & \text{para } x \in W^1 \cup W^2 \cup W_0^3 \\ f^k(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 1)), & \text{para } x \in W_k^3, k = 1, \dots, p-1 \end{cases}$$

Observemos que  $P$  está bem definida, desde que  $(W^1 \cup W^2 \cup W_0^3) \cap W_k^3 = \emptyset$ , para qualquer  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ . Além disso, como  $H_1(x) = H(x, 1)$  é tal que  $H_1 \circ \varphi_{3,p} = f \circ H_1$  para todo  $x \in W^1 \cup W^2 \cup W_0^3$ , segue que  $P$  é equivariante neste conjunto. Para  $x \in W_k^3$ ,  $k = 1, \dots, p-1$ , temos que  $\varphi_{3,p}(x) \in \varphi_{3,p}(W_k^3) = \varphi_{3,p}(\varphi_{3,p}^k(W_0^3)) = W_{k+1}^3$  e daí

$$P(\varphi_{3,p}(x)) = f^{k+1}(H(\varphi_{3,p}^{p-k-1}(\varphi_{3,p}(x)), 1)) = f(f^k(H(\varphi_{3,p}^{p-k}(x), 1))) = f(P(x)).$$

Logo, pelo lema 2.0.9, temos  $g(W_n, \varphi_{3,p}) \leq g(S^1, f) = 2$ , contradizendo o fato de  $g(W_n, \varphi_{3,p}) = 3$ .

Portanto, temos que  $L_{3,p}$  é coberto por uma quantidade finita de fechados disjuntos  $W_n = v^{-1}(n)$  os quais são invariantes por  $\varphi_{3,p}$  com  $g(W_n, \varphi_{3,p}) \leq 2$ . Segue então do lema 3.0.12 que  $g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) \leq 2$ .

□

Para demonstrarmos o teorema que segue, considere primeiro o seguinte:

**Lema 3.0.13** *Suponhamos que os subconjuntos fechados  $M_1, \dots, M_k$  cubram*

o espaço de Hausdorff  $M$ . Se  $f : M \rightarrow M$  é uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre e  $g(M_i, f) = n_i$  para cada  $i = 1, \dots, k$ , então  $g(M, f) \leq \sum_{i=1}^k g(M_i, f)$

**Demonstração:**

Como  $g(M_i, f) = n_i$ , então existem, para cada  $i = 1, \dots, k$ , fechados  $M_i^1, \dots, M_i^{n_i}$  que cobrem  $M_i$  tais que  $M_i^j = \cup_{k=0}^{p-1} M_i^{(j,k)}$ ,  $M_i^{(j,k)} = f^k(M_i^{(j,0)})$  e  $M_i^{(j,k_1)} \cap M_i^{(j,k_2)} = \emptyset$  para  $k_1, k_2 \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $k_1 \neq k_2$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ . Ainda, cada  $M_i^{(j,k)}$  é fechado em  $M_i^j$ .

Desde que cada  $M_i^j$  é um subconjunto fechado de  $M_i$ , o qual é fechado em  $M$ , então  $M_i^j$  é fechado em  $M$ . Portanto, se  $\lambda_i = \{1, \dots, n_i\}$  com  $i = 1, 2, \dots, k$ , então o conjunto  $B = \{M_i^j ; i = 1, \dots, k \text{ e } j \in \lambda_i\}$  é uma cobertura de  $M$ , satisfazendo as propriedades do genus. Logo,  $g(M, f) \leq \sum_{i=1}^k n_i = \sum_{i=1}^k g(M_i, f)$ .

□

**Teorema 3.0.12** *Se  $p \geq 3$  é um primo e  $k \in \{3, 4, 5, \dots\}$ , então*

$$g(L_{k,p}, \varphi_{k,p}) \leq \frac{(p-1)}{2}(k-3) + \begin{cases} 1 & \text{se } p = 3 \\ 2 & \text{se } p \geq 5 \end{cases}$$

**Demonstração:**

Consideremos os fechados  $M_i = \{(x_1, \dots, x_p) \in \tilde{L}_{k,p} ; x_1 \in \Delta_{k-1;i}\}$  os quais cobrem  $\tilde{L}_{k,p}$  (como na demonstração do teorema 2.0.8). Então sejam  $F_i = \cup_{j=0}^{p-1} \varphi_{k,p}^j(M_i)$  para  $i = 1, \dots, k-3$ .

Agora, desde que  $\cup_{j=k-2}^k \Delta_{k-1;j}$  é fechado em  $\partial\Delta_{k-1}$  então segue que  $(\cup_{j=k-2}^k \Delta_{k-1;j})^p$  é fechado em  $(\partial\Delta_{k-1})^p$ . Portanto, consideremos o subconjunto fechado  $G = \tilde{L}_{k,p} \cap (\cup_{j=k-2}^k \Delta_{k-1;j})^p$  de  $\tilde{L}_{k,p}$ .

**Afirmção 3.0.7**  $\tilde{L}_{k,p} = \cup_{i=1}^{k-3} F_i \cup G$

Com efeito, certamente temos  $\tilde{L}_{k,p} \supseteq \cup_{i=1}^{k-3} F_i \cup G$ . Tomemos então  $x \in \tilde{L}_{k,p}$ . Como  $x_1 \in \partial\Delta_{k-1} = \cup_{i=1}^k \Delta_{k-1;i}$ , então  $x_1 \in \Delta_{k-1;i}$ , para algum  $i = 1, \dots, k$ . Se  $i \in \{1, \dots, k-3\}$  então  $x \in F_i \subset \cup_{j=1}^{k-3} F_j$ . Suponhamos então que  $x_1 \in \Delta_{k-1;j}$  para  $j \in \{k-2, k-1, k\}$ . Se  $x_2 \in \Delta_{k-1;i}$  para  $i = 1, \dots, k-3$  então  $x \in \varphi_{k,p}(M_i) \subset F_i$ . Caso contrário,  $x_2 \in \Delta_{k-1;j}$  para  $j = k-2, k-1, k$  e daí olhemos para  $x_3$ . Resumidamente, se  $x_i \in \Delta_{k-1;j}$  com  $j = k-2, k-1, k$  para todo  $i = 1, \dots, p$  então  $x \in (\cup_{j=k-2}^k \Delta_{k-1;j})^p$  e portanto a  $G$ . Mas se alguma coordenada de  $x$  pertence a um  $\Delta_{k-1;i}$  com  $i = 1, \dots, k-3$  então  $x \in \varphi_{k,p}^j(M_i)$  para algum  $j = 0, \dots, p-1$ , logo  $x \in F_i$ . Daí,  $\tilde{L}_{k,p} \subseteq \cup_{i=1}^{k-3} F_i \cup G$ .

Notamos ainda que, como  $G$  é um subconjunto fechado de  $\tilde{L}_{k,p}$ , temos que  $G$  é normal. Além disso, se  $x \in G$  então  $\varphi_{k,p}(x) \in G$  pois todas as coordenadas de  $x$  pertencem a  $(\cup_{j=k-2}^k \Delta_{k-1;i})^p$ , logo as coordenadas de  $\varphi_{k,p}(x)$  também pertencem. Segue então que  $\varphi_{k,p}|_G$  é uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre.

Consideremos então os seguintes subconjuntos de  $G$

$$G_1 = \{x \in G ; x_1 \in \Delta_{k-1;k-2}\}$$

$$G_2 = \{x \in G ; x_1 \in \Delta_{k-1;k-1}\}$$

$$G_3 = \{x \in G ; x_1 \in \Delta_{k-1;k}\}$$

Observemos que  $G_i = M_{k+i-3} \cap G$  para  $i = 1, 2, 3$  e portanto são fechados em  $G$ . Notamos ainda que se  $x \in G_i$  então  $\varphi_{k,p}(x) \notin G_i$ , pois caso contrário teríamos que  $x = (x_1, \dots, x_p) \in G_i$  e  $\varphi_{k,p}(x) = (x_2, \dots, x_p, x_1) \in G_i$  implicando que  $x_1$  e  $x_2$  pertencem à mesma face  $\Delta_{k-1;k+i-3}$  de  $\Delta_{k-1}$ , contradizendo o fato de  $x \in \tilde{L}_{k,p}$ . Segue então que  $G_i \cap \varphi_{k,p}(G_i) = \emptyset$  para todo  $i = 1, 2, 3$  e  $G = \cup_1^3 G_i$ .

Assim, pelos teoremas 2.0.8 e 3.0.11, temos

$$g(G, \varphi_{k,p}) \leq g(\tilde{L}_{3,p}, \varphi_{3,p}) = g(L_{3,p}, \varphi_{3,p}) = \begin{cases} 1 & \text{se } p = 3 \\ 2 & \text{se } p \geq 5 \end{cases}$$

Além disso, Steinlein prova em [17], que  $g(F_i, \varphi_{k,p}) \leq \frac{p-1}{2}$ . Segue então do lema 3.0.13 que

$$\begin{aligned} g(L_{k,p}, \varphi_{k,p}) = g(\tilde{L}_{k,p}, \varphi_{k,p}) &\leq \sum_{i=1}^{k-3} g(F_i, \varphi_{k,p}) + g(G, \varphi_{k,p}) \\ &\leq \frac{(p-1)}{2}(k-3) + \begin{cases} 1 & \text{se } p = 3 \\ 2 & \text{se } p \geq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Finalizamos o capítulo com alguns exemplos envolvendo o toro bidimensional.

**Exemplo 3.0.12** *Considere o toro 2-dimensional  $T = S^1 \times S^1$  e  $f : T \rightarrow T$  a função dada por  $f(x, y) = (x, e^{\frac{2\pi i}{p}} y)$  com  $p$  primo, ou seja, uma rotação de  $\frac{2\pi}{p}$  radianos na segunda coordenada. Observemos que  $f$  é contínua desde que suas funções coordenadas o são, e além disso*

$$f^p(x, y) = (x, e^{\frac{2\pi i}{p} p} y) = (x, e^{2\pi i} y) = (x, y) = id_T(x, y)$$

*Ainda, temos  $f(x, y) \neq (x, y)$  para todo  $(x, y) \in T$ , pois se existisse  $(x, y) \in T$  tal que  $f(x, y) = (x, y)$  então teríamos que  $(x, y) = (x, e^{\frac{2\pi i}{p}} y)$  e daí  $y = e^{\frac{2\pi i}{p}} y \Rightarrow \frac{1}{p} = k$  para algum  $k \in \mathbb{Z}$ , o que é absurdo, visto que  $p$  é primo. Segue então que  $f$  gera uma  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre em  $T$ .*

*Consideremos agora os seguintes fechados de  $T$*

$$M_j = \{(e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \in T : \frac{\pi(j-1)}{p} \leq \beta \leq \frac{\pi j}{p}\} \text{ para } j = 1, 2$$

Notamos que, a dinâmica da  $f$  é somar o ângulo  $\frac{2\pi}{p}$  ao argumento  $\beta$ . Daí, se  $z = (e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \in M_j$ , segue que  $f(z) = (e^{i\alpha}, e^{i\gamma})$ , com  $\frac{\pi(j+1)}{p} \leq \gamma \leq \frac{\pi(j+2)}{p}$  e, portanto temos  $M_j \cap f(M_j) = \emptyset$  para  $j = 1, 2$ . Concluimos então que  $f^i(M_j) \cap f^{i+1}(M_j) = \emptyset$  para todo  $i = 0, 1, \dots, p-1$ .

Assim, se definirmos  $G_i^{(j)} = f^i(M_j)$  para cada  $i = 0, 1, \dots, p-1$  e  $j = 1, 2$ , então os fechados  $G^{(j)} = \cup_{i=0}^{p-1} f^i(M_j)$  pertencem a  $C(T, f)$  (veja definição do genus) e cobrem  $T$ , isto é,  $T = G^{(1)} \cup G^{(2)}$ . Portanto  $g(T, f) \leq 2$ .

Provemos que  $g(T, f) = 2$ . Com efeito, primeiramente observemos que  $T \neq \emptyset$ , logo  $g(T, f) \neq 0$ . Agora, suponhamos que  $g(T, f) = 1$ . Assim, existem fechados disjuntos  $G_0, \dots, G_{p-1}$  tais que  $f^i(G_0) = G_i$  para todo  $i = 1, \dots, p-1$  e  $T = \cup_{i=1}^{p-1} G_i$ , o que produz uma cisão não trivial do toro, contradizendo o fato de  $T$  ser conexo. Concluimos então que  $g(T, f) = 2$ .

**Exemplo 3.0.13** Sejam  $T$  e  $f$  como no exemplo anterior, com  $p = 2$ . Temos então que  $G^{(j)} = G_0^{(j)} \cup G_1^{(j)}$  para  $j = 1, 2$  são tais que  $T = G^{(1)} \cup G^{(2)}$  (veja anexo I, figura 3.1.13).

Assim, como  $g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) = k - 1$  (teorema 3.0.10) e  $g(T, f) = 2$ , segue do teorema 2.0.8 que

$$2 = g(T, f) \leq g(L_{k,2}, \varphi_{k,2}) = k - 1 \Rightarrow k \geq 3$$

ou seja,  $T$  pode ser coberto com no mínimo 3 fechados  $M_1, M_2, M_3$  tais que  $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$  para  $i = 1, 2, 3$  (anexo I, figura 3.2.13).

Agora, consideremos  $p = 3$ . Neste caso, temos  $G^{(j)} = \cup_{i=0}^2 G_i^{(j)}$  para  $j = 1, 2$  os quais pertencem a  $C(T, f)$  e cobrem  $T$ , como na figura 3.3.13 (veja anexo I). Bem, uma vez que  $g(T, f)$  também é igual a 2, então não podemos cobrir  $T$  com três fechados  $M_1, M_2, M_3$  tais que  $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$  para  $i = 1, 2, 3$ , visto que para  $k = 3$  e  $p = 3$  temos  $g(L_{3,3}, \varphi_{3,3}) = 1$  (teorema 3.0.11) e daí,

pelo teorema 2.0.8, teríamos  $2 = g(T, f) \leq g(L_{3,3}, \varphi_{3,3}) = 1$ . Observamos no entanto que  $T$  pode ser coberto com quatro fechados  $M_1, M_2, M_3, M_4$  satisfazendo  $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$  para  $i = 1, 2, 3, 4$  (anexo I, figura 3.4.13). Pode ser mostrado com o auxílio de um resultado encontrado em [1] que para qualquer primo  $p$ , existem 4 fechados  $M_1, M_2, M_3$  e  $M_4$  de  $T$  que cobrem  $T$  e satisfazem  $M_i \cap f(M_i) = \emptyset$  para todo  $i = 1, 2, 3, 4$ , sendo  $f$  a  $\mathbb{Z}_p$ -ação livre dada no exemplo 3.0.12. Uma configuração disso é dada na figura 3.5.13, no anexo I, para  $p = 5$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] Aarts, J. M., Fokkink, R. J. e Vermeer, H. *Variations on a Theorem of Ljusternik and Schnirelmann*, Topology vol. 35, n. 4 (1996), 1051-1056.
- [2] Amaral, Fabíolo M., *Estimativas Ótimas para certos Teoremas Generalizados de Borsuk-Ulam e Ljusternik-Schnirelmann*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática-UFSCar, São Carlos, (2005).
- [3] Armstrong, M. A., *Basic Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1990).
- [4] Bredon, G. E., *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 139, Springer-Verlag, New York, (1997).
- [5] Borsuk, K., *Drei Sätze über die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math., 20 (1933), 177-190.
- [6] Dugundji, J., *An Extension do Tietze's Theorem*, Pacific J. Math., I (1951), 353-367.
- [7] Dugundji, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, (1966).
- [8] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, University Press, Cambridge, (2002).
- [9] Hu, Sze-Tsen, *Homotopy Theory*, Academic Press, New York and London, (1959).

- [10] Hungerford, Thomas W., *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics 73, Springer-Verlag, New York, fifth printing (1989).
- [11] Krasnosel'skiĭ, M. A., *On special coverings of a finite-dimensional sphere*, Doklady Akad. Nauk SSSR103 (1955), 961-964 (Russian).
- [12] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, (1998).
- [13] Munkres, J. R., *Elements of Algebraic Topology*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Cambridge, Massachusetts, (1984).
- [14] Munkres, J. R., *Topology, a first course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ (1975).
- [15] Rotman, J. J., *An Introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics 119, Springer-Verlag, New York, (1998).
- [16] Steinlein, H., *Some abstract generalizations of the Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk covering theorem*, Pacific J. Math. 83 (1979), 285-296.
- [17] Steinlein, H., *Borsuk-Ulam Sätze und Abbildungen mit kompakten Iterierten*, Habilitationsschrift, University of Munich, (1976).
- [18] Steinlein, H., *On the Theorems of Borsuk-Ulam and Ljusternik-Schnirelmann-Borsuk*, Canad. Math. Bull. Vol. 27 (2) (1984).
- [19] Švarc, A. S., *Some estimates of the genus of a topological space in the sense of Krasnosel'skiĭ*, Usephi Mat. Nauk 12, 209-214, (1957) (Russian).

- [20] Švarc, A. S., *The genus of a fiber space*, English translation in Amer. Math. Soc., Translat, II. Ser. 55 , 49-140, 1966.
- [21] Yang, Chung-Tao, *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson*, I. Ann. Math. 60 (1954), 262-282.

# Anexo I

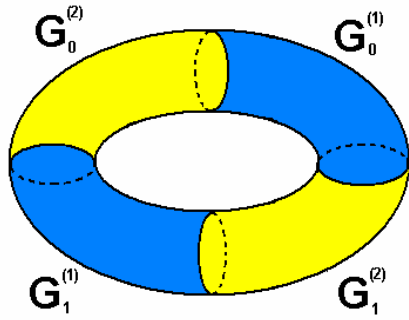


Figura 3.1.13

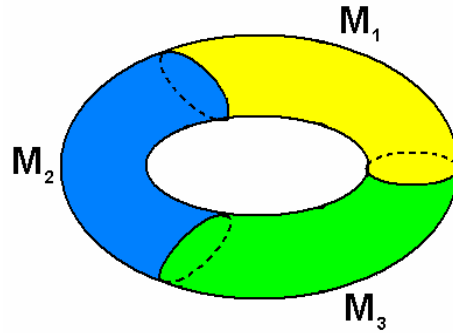


Figura 3.2.13

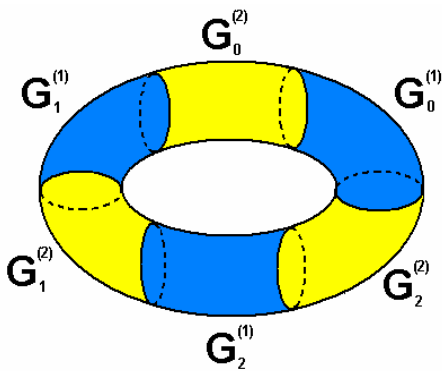


Figura 3.3.13

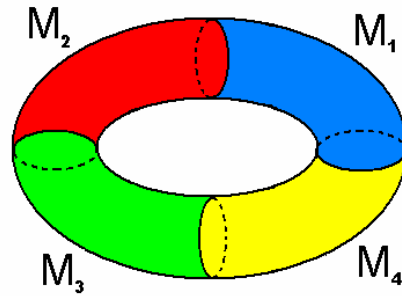


Figura 3.4.13

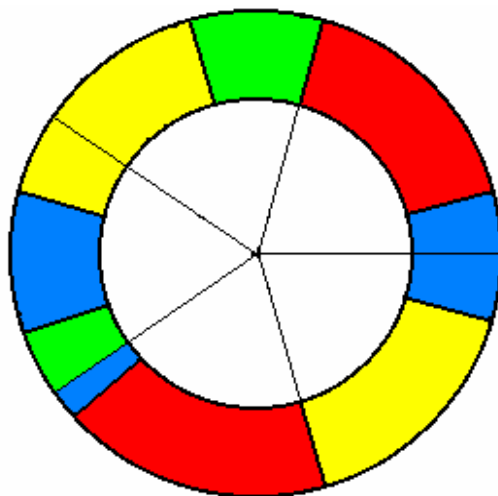


Figura 3.5.13

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)