UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

INVOLUÇÕES FIXANDO ESPAÇOS PROJETIVOS

Adriana Ramos

São Carlos - SP

2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

INVOLUÇÕES FIXANDO ESPAÇOS PROJETIVOS

Adriana Ramos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher.

São Carlos - SP

2007

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária/UFSCar

R175if

Ramos, Adriana.
Involuções fixando espaços projetivos / Adriana Ramos. -- São Carlos : UFSCar, 2007.
133 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2007.

1. Topologia algébrica. 2. Bordismo. 3. Involuções. 4. Classes características. 5. Fibrados vetoriais. I. Título.

CDD: 514.2 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
DM - UFSCar

Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves
IME - USP

Prof. Dr. Carlos Biasi
ICMC - USP

Profa. Dra. Denise de Mattos
ICMC – USP

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
IGCE - UNESP

À Fernanda
e aos meus pais
Alzira e Acácio

Agradecimentos

A Deus por guiar meus passos.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pelo apoio financeiro e institucional.

Ao Prof. Pedro Pergher, não só pelo problema proposto e pela orientação precisa e dedicada, mas também pela paciência, entusiasmo e confiança com que me acolheu em todas as etapas deste trabalho.

Ao Prof. Robert Stong, da Virginia University at Charlottesville - USA, por técnicas às quais tive acesso em virtude do intercâmbio científico entre ele e o Prof. Pedro Pergher.

Ao Prof. Fábio Figueira, por seus conselhos, seu carinho e seu incentivo, os quais tiveram um valor inestimável na realização deste projeto.

Ao Prof. Paulo Brumatti, da Universidade Estadual de Campinas, pela imensa generosidade com que me orientou durante o Programa de Mestrado.

A todos os alunos da pós-graduação, professores e funcionários do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, por proporcionarem um ambiente de trabalho agradável e inspirador.

A todos os professores e colegas que participaram da minha formação.

Aos amigos Renato Moura, Wanderley Cerniauskas, Ricardo Mendes, Maria Helena Freitas, Claudine Hinz, Cassandra Véras, Genésio Marcondes Jr e Mina Leão.

Ao meu querido irmão Artur Rodrigo.

A todos aqueles que contribuíram, de uma ou outra maneira, para que eu concluísse esta empreitada, minha sincera gratidão.

Resumo

Sejam M uma variedade suave e fechada e $T : M \to M$ uma involução suave definida em M. É bem conhecido o fato de que o conjunto de pontos fixos F de T é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de M. Para uma dada F, um problema básico nesse contexto é a classificação, a menos de bordismo equivariante, dos pares (T, M) que possuem conjunto de pontos fixos igual a F. Para $F = \mathbb{R}P(n)$, a classificação foi determinada por P. E. Conner, E. E. Floyd e R. E. Stong. D. C. Royster estudou então tal problema com F sendo a união disjunta de dois espaços projetivos reais, $F = \mathbb{R}P(m) \cup \mathbb{R}P(n)$. Ele estabeleceu os resultados via um método caso-por-caso dependendo das paridades de m e n, usando argumentos especiais quando uma das componentes é $\mathbb{R}P(0) = \{ponto\}$, mas suas técnicas não foram suficientes para resolver o caso em que m e n são ambos pares e positivos. O primeiro objetivo deste trabalho é obter as versões complexa e quaterniônica dos resultados obtidos por Conner, Floyd, Stong e Royster, o que significa substituir o anel de divisão $\mathbb{R}$ dos reais pelos anéis de divisão $\mathbb{C}$ (dos complexos) e $\mathbb{H}$ (dos quatérnios); em outras palavras, substituir cada $\mathbb{R}P(n)$ envolvido por $\mathbb{C}P(n)$ ou $\mathbb{H}P(n)$.

Em relação à questão deixada em aberto por Royster, recentemente alguns casos particulares foram resolvidos; especificamente, o caso $m = n = par > 0$, determinado por D. Hou e B. Torrence, e o caso $m = 2$ e $n = 2q$, com $q > 1$ ímpar, determinado por R. de Oliveira. O segundo e mais importante objetivo deste trabalho é estudar outros casos da questão de Royster. Nessa direção, resolvemos completamente o caso particular $F = \mathbb{R}P(2^s) \cup \mathbb{R}P(2n)$, com $s, n \geq 1$ quaisquer. Resolvemos também a questão de encontrar a codimensão maximal com relação a qual $F = \mathbb{R}P(m) \cup \mathbb{R}P(n)$, sendo $0 \leq m < n$ ambos pares, pode ser realizado como conjunto de pontos fixos de uma involução. Além disso, para todos esses novos resultados, nós obtemos suas correspondentes versões complexa e quaterniônica.

Abstract

Suppose M is a smooth, closed manifold and $T : M \to M$ is a smooth involution defined on M. It is well known that the fixed point set F of T is a finite and disjoint union of closed submanifolds of M. For a given F, a basic problem in this context is the classification, up to equivariant cobordism, of the pairs (T, M) for which the fixed point set is F. For $F = \mathbb{R}P(n)$, the classification was established by P. E. Conner, E. E. Floyd and R. E. Stong. D. C. Royster then studied this problem with F the disjoint union of two real projective spaces, $F = \mathbb{R}P(m) \cup \mathbb{R}P(n)$. He established the results via a case-by-case method depending on the parity of m and n, with special arguments when one of the components is $\mathbb{R}P(0) = \{point\}$, but his methods were not sufficient to handle the case when m and n are even and positive. The first objective of this work is to obtain the complex and quaternionic versions of the results obtained by Conner, Floyd, Stong and Royster, which means to replace the division ring $\mathbb{R}$ by the division rings $\mathbb{C}$ (complex numbers) and $\mathbb{H}$ (quaternionic numbers); in other words, to replace each involved $\mathbb{R}P(n)$ by either $\mathbb{C}P(n)$ or $\mathbb{H}P(n)$.

Concerning the question left open by Royster recently some particular cases were considered; specifically, the case $m = n = even > 0$, established by D. Hou and B. Torrence, and the case $m = 2$ and $n = 2q$, where $q > 1$ is odd, established by R. de Oliveira. The second and more important goal of this work is to attack other cases of the Royster question. In this direction, we completely solve the particular case $F = \mathbb{R}P(2^s) \cup \mathbb{R}P(2n)$, with $s, n \geq 1$. We also solve the question of finding the maximal codimension with respect to which $F = \mathbb{R}P(m) \cup \mathbb{R}P(n)$, with $0 \leq m < n$ both even, can be realized as fixed point set of an involution. In addition, for all these new results, we obtain the correspondent complex and quaternionic versions.

Sumário

Capítulo 0

Introdução

Neste trabalho, focalizaremos nossa atenção em objetos do tipo (T, M^n), onde M^n é uma variedade fechada, suave e n-dimensional, e $T : M^n \to M^n$ é uma involução suave definida em M^n, isto é, $T^2 = Id$. Inicialmente listamos dois fatos a respeito de tais objetos:
(I) O conjunto de pontos fixos F de T, ou seja, $F = \{x \in M^n \ / \ T(x) = x\}$, é ou vazio ou uma união finita e disjunta de subvariedades fechadas de M^n, com a dimensão de cada uma dessas subvariedades podendo em princípio assumir qualquer valor entre 0 a n. As componentes 0-dimensionais constituem um conjunto finito de pontos, enquanto as componentes n-dimensionais são componentes conexas de M^n onde T atua como a identidade.
(II) É possível estabelecer uma noção natural de bordismo, denominada *bordismo equivariante*, entre os objetos (T, M^n); dois tais objetos (T, M^n) e (S, N^n) são ditos *equivariantemente bordantes*, ou, quando o contexto não der margem à confusão, simplesmente *bordantes*, se existem variedade compacta W^{n+1}, suave e com bordo, e involução $H : W^{n+1} \to W^{n+1}$ tais que o bordo de W^{n+1} é a união disjunta de M^n com N^n (ou seja, M^n e N^n são bordantes no sentido usual) e H estende $T \cup S : M^n \cup N^n \to M^n \cup N^n$ suavemente (o que estabelece a equivariância para o bordismo em questão).

No que se refere ao fato **(I)** acima, podemos então usar a notação $F = \bigcup_{i=0}^{n} F^i$, onde F^i denota a união das componentes de F com dimensão i. Considerando um objeto do tipo $F = \bigcup_{i=0}^{n} F^i$ fixado *a priori*, uma pergunta interessante que surge nesse contexto é se F pode ser realizado como o conjunto de pontos fixos de alguma involução (T, M^r), com $dim(M^r) = r \geq n$. A título de ilustração, é interessante listar alguns fatos conhecidos (alguns intrigantes) a respeito desta questão:

(a) Se F é fixado por (T, M^r) e F' é fixado por (S, N^r), com $dim(M^r) = r = dim(N^r)$, então $F \cup F'$ é fixado por $(T \cup S, M^r \cup N^r)$.

(b) $F=$ uma quantidade ímpar de pontos não pode ser realizado como conjunto de pontos fixos de involuções (T, M^r) com $dim(M^r) = r \geq 1$ (veja [6]).

(c) Se F é tal que todas suas componentes possuem mesma dimensão, então no mínimo F pode ser realizado como o conjunto de pontos fixos da involução trivial (Id, F) e da involução $(twist, F \times F)$, dada por $twist(x, y) = (y, x)$.

(d) Se F é um bordo (o que significa que, para cada $0 \leq i \leq n$, F^i é um bordo) então, para cada $r \geq n$, é possível construir uma involução (T, M^r) fixando F; ou seja, a realização de F como conjunto de pontos fixos é possível em qualquer codimensão.

(e) Se S^n é a esfera n-dimensional, $n > 0$, então $F = S^n \cup \{ponto\}$ pode ser realizado como conjunto de pontos fixos se, e somente se, $n = 1, 2, 4$ ou 8; nos casos possíveis, a realização se dá somente em codimensão n (veja [6]).

(f) Se $S = S^{n_1} \times S^{n_2} \times ... \times S^{n_r}$ é um produto arbitrário de esferas, então $F = S \cup \{ponto\}$ se realiza como conjunto de pontos fixos se, e somente se, as duas seguintes condições são satisfeitas: (i) $n_1 + ... + n_r$ é uma potência de 2; (ii) $\{n_1, n_2, ..., n_r\}$ se particiona em subconjuntos $A_1 \cup ... \cup A_s$ de tal sorte que, para cada $1 \leq i \leq s$, a soma dos elementos de A_i é 1, 2, 4 ou 8. Quando $\{n_1, n_2, ..., n_r\}$ satisfaz essas duas condições, a realização se dá somente em codimensão $n_1 + ... + n_r$ (veja [19]).

(g) Considere V^n qualquer variedade fechada, n-dimensional e conexa, com $n > 0$ ímpar. Seja $F = V^n \cup \{ponto\}$. Então, caso F se realize como conjunto de pontos fixos, a única possibilidade é em codimensão 1; por exemplo, isso ocorre com V^n sendo um espaço projetivo real (veja [29]). Existem muitos exemplos de tais V^n para as quais o correspondente F não é realizável, por exemplo as esferas S^n com $n > 1$ ímpar, ou mais geralmente produtos de esferas tais que a soma das dimensões das mesmas seja ímpar.

(h) Novamente considere V^n qualquer variedade fechada, n-dimensional e conexa, com $n > 2$ ímpar. Seja $F = V^n \cup \mathbb{R}P(2)$, $\mathbb{R}P(2)$ sendo o espaço projetivo real bidimensional. Então, caso F se realize como conjunto de pontos fixos, as únicas possibilidades são em codimensão 1 e 3 (veja [8]). Por exemplo, se $V^n = \mathbb{R}P(n)$ com n ímpar, então F se realiza em codimensão 1 e 3 se $n = 3$, e somente em codimensão 3 se $n > 3$ (veja [29]).

Os fatos acima indicam dificuldades para a realização de F como conjunto de pontos fixos no caso em que F tem dimensão variável e não é um bordo, e mesmo no caso de realização observamos restrições para as possíveis codimensões da componente de F com maior dimensão. Suponhamos então que F se realize como um conjunto de pontos fixos. Nesse caso, levando em conta a noção de bordismo descrita no fato **(II)** acima, uma questão levantada por *N. Steenrod* (segundo *D. C. Royster* em [29]) consiste na possibilidade de classificar, a menos de bordismo equivariante, todos os objetos (T, M^r) que fixam F. Mais rigorosamente, a questão consiste em catalogar todas as classes de bordismo (equivariante) β que possuem ao menos um representante (T, M^r) tal que o conjunto de pontos fixos de T é F.

Teceremos agora algumas considerações históricas sobre as ferramentas matemáticas que possibilitam atacar a questão descrita acima. Essas ferramentas inserem-se no contexto iniciado com o famoso trabalho de *R. Thom* de 1954 sobre a teoria de bordismo, *Quelques propriétés globales des variétés differentiables* [33], o qual proporcionou ao mesmo a *Medalha Fields* em 1958. Em seu trabalho, *R. Thom* transformou a questão de classificar todas as variedades fechadas, a menos de bordismo, em uma questão de homotopia, o que lhe permitiu mostrar que a classe de bordismo de uma variedade fechada e suave é completamente determinada por certos invariantes algébricos denominados *números de Stiefel-Whitney* ou *números característicos*. Dez anos depois (1964), em seu monumental trabalho *Differentiable Periodic Maps* [6], *P. E. Conner* e *E. E. Floyd* estenderam o trabalho de *Thom* introduzindo os *grupos de bordismo singular n-dimensionais de um espaço topológico X*, $\mathcal{N}_n(X)$, cujos elementos são as classes de bordismo de pares (M^n, f), onde M^n é uma variedade suave, fechada e n-dimensional e $f : M^n \to X$ é uma função contínua. A extensão é devida ao fato de que, quando $X = \{ponto\}$, $\mathcal{N}_n(X)$ reduz-se ao grupo de bordismo não-orientado de *Thom*, $\mathcal{N}_n$. Semelhantemente ao que ocorre com $X = \{ponto\}$, *Conner* e *Floyd* mostraram que, quando X é um CW-complexo finito em cada dimensão, então a classe de bordismo do par (M^n, f) é completamente determinada por números característicos, os quais são oriundos das classes de *Stiefel-Whitney* do fibrado tangente de M^n e da $\mathbb{Z}_2$-cohomologia de X. Além de sua beleza intrínseca, a importância dessa extensão é que ela permitiu, em linhas gerais, o estudo de propriedades de ações de certos grupos em variedades usando métodos de bordismo. Sob esse contexto, um amplo estudo sobre involuções foi levado a cabo por *Conner* e *Floyd* em [6], através da seguinte estratégia: quando $X = BO(r) =$ o espaço classificante para fibrados vetoriais r-dimensionais, $\mathcal{N}_n(X)$ converte-se no *grupo de bordismo de fibrados r-dimensionais sobre variedades n-dimensionais*, e desta forma estes objetos (classes de bordismo de fibrados) são completamente determinados por números característicos. *Conner* e *Floyd* construíram então uma seqüência exata curta conectando $\mathcal{I}_n =$ o grupo de bordismo equivariante de pares (T, M^n), onde M^n é uma variedade suave fechada e n-dimensional e $T : M^n \to M^n$ é uma involução suave (ou seja, os objetos por nós considerados neste trabalho), com dois outros grupos de bordismo de fibrados obtidos a partir da *fixed-point structure* ou *fixed-data* (conjunto de pontos fixos de T junto com seu fibrado normal) de (T, M^n), montando dessa forma um esquema algébrico para estudar $\mathcal{I}_n$. *Grosso modo*, a estratégia básica consiste em manipular números característicos de certos fibrados. Esse arsenal técnico permitiu a obtenção de uma porção de resultados muito atraentes sobre involuções e seus conjuntos de pontos fixos, incluindo neste particular os fatos **(b)** e **(e)** citados anteriormente; além disso, tornou plausível o problema da classificação das involuções (T, M^r), a menos de bordismo, que fixam uma F dada *a priori*. Atualmente existem vários trabalhos na literatura versando sobre tal problema; nesta direção, citamos:

(1) [6, Springer-Verlag, 1964], com $F = S^n \cup \{ponto\}$, $F=$ uma união de uma quantidade ímpar de pontos e $F = \mathbb{R}P(n)$ com n ímpar.

(2) [32, Michigan Math. Journal, 1966], com $F = \mathbb{R}P(n)$, n par.

(3) [29, Indiana Univ. Math. Journal, 1980], com $F = \mathbb{R}P(m) \cup \mathbb{R}P(n)$ para todos os possíveis pares de naturais (m, n), com exceção dos casos (m, n) com m e n pares e $m, n > 0$.

(4) [34, Proc. Amer. Math. Soc., 1993], com $F=$ uma união de uma quantidade arbitrária de espaços projetivos reais com dimensão ímpar, todos com mesma dimensão.

(5) [10, Canad. Math. Bull, 1994], com $F=$ uma união de uma quantidade arbitrária de espaços projetivos reais com dimensão ímpar.

(6) [19, Manuscripta Math., 1996], com $F = S \cup \{ponto\}$, onde S é um produto cartesiano arbitrário de esferas.

(7) [9, Acta Math. Sinica, 1997], com $F=$ uma união de uma quantidade arbitrária de espaços projetivos reais com dimensão par, todos com mesma dimensão.

(8) [31, Proc. Amer. Math. Soc., 1993], com $F=$ uma união arbitrária de produtos cartesianos arbitrários da circunferência S^1.

(9) [11, Topology, 1978], com F tendo todas suas componentes com mesma dimensão e $dim(M^r) \geq 2dim(F)$.

(10) [35, Transactions Amer. Math. Soc., 2002] e [36, Transactions Amer. Math. Soc., 2004], com F sendo a união de um espaço projetivo real com uma *variedade de Dold*.

(11) [14, tese de doutorado, 2002], com $F = \mathbb{R}P(2) \cup \mathbb{R}P(n)$, onde $n > 2$ é um par da forma $n = 2q$ com q ímpar.

(12) [15, Algebraic and Geometric Topology, 2007], com $F = \mathbb{R}P(2) \cup \mathbb{R}P(n)$, onde $n > 2$ é um par qualquer.

Podemos afirmar que o trabalho mais importante neste contexto é o citado no item **(9)** acima, desenvolvido por *Kosniowski* e *Stong*.

Todas as classificações citadas acima são decorrentes do arsenal básico desenvolvido por *Conner* e *Floyd* que mencionamos anteriormente; no entanto, salientamos que cada nova F considerada pode demandar novas informações ou técnicas, teóricas ou computacionais. Nessa direção, um conhecimento adicional e externo à teoria de bordismo equivariante é necessário: conhecer a estrutura da K-teoria real de F.

Os casos em que F possui uma ou duas cópias de espaços projetivos reais dizem respeito aos trabalhos mais antigos neste contexto, conforme notamos nos ítens **(1)**, **(2)** e **(3)** acima. Com respeito aos ítens **(1)** e **(2)**, os trabalhos desenvolvidos por *Conner* e *Floyd* [6] e por *Stong* [32] estabeleceram a classificação completa quando $F = \mathbb{R}P(n)$, $n > 0$. Com respeito ao item **(3)**, *Royster* obteve em [29] a classificação completa quando $F = \mathbb{R}P(m) \cup \mathbb{R}P(n)$ e para os pares (m, n) ali estipulados. Sua análise foi dividida em vários casos, levando em conta as paridades de m e n, e usando argumentos especiais no caso em que uma das componentes é um ponto ($m = 0$). No entanto, e conforme por ele mesmo observado em [29], seus métodos não foram suficientes para abordar o caso que se mostrou mais intrincado, dado pelos pares (m, n) com $m, n > 0$ e pares.

Um dos objetivos deste trabalho foi analisar se as classificações acima estabelecidas possuíam análogos caso o anel de divisão $\mathbb{R}$ dos reais fosse substituído pelos anéis de divisão $\mathbb{C}$ dos complexos e $\mathbb{H}$ dos quatérnios; especificamente, verificar se os resultados obtidos por *Conner* e *Floyd*, *Stong* e *Royster* envolvendo $F = \mathbb{R}P(n)$ e $F = \mathbb{R}P(m) \cup \mathbb{R}P(n)$ possuíam correspondentes caso cada espaço projetivo real $\mathbb{R}P(n)$ em jogo fosse substituído ou pelo correspondente espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P(n)$, ou pelo espaço projetivo quaterniônico $\mathbb{H}P(n)$. Nesta direção, nos Capítulos 2 e 3 obtemos todas tais classificações. Essencialmente, verificamos que os métodos utilizados pelos autores acima no caso real funcionam nos casos complexo e quaterniônico, com a ressalva de que, em certos momentos, alguns cálculos adicionais foram necessários para completar a classificação pretendida.

Isso ocorreu de forma mais proeminente no estudo dos casos $F = \{ponto\} \cup \mathbb{C}P(2n)$ e $F = \{ponto\} \cup \mathbb{H}P(2n)$ (na versão real, $F = \{ponto\} \cup \mathbb{R}P(2n)$, *Royster* usou fortemente o fato de a classe de bordismo de $\mathbb{R}P(2n)$ ser indecomponível no anel de bordismo não-orientado de *Thom*; além de $\mathbb{C}P(2n)$ e $\mathbb{H}P(2n)$ não serem indecomponíveis, outras informações sobre certos fibrados sobre $\mathbb{C}P(2n)$ e $\mathbb{H}P(2n)$, não utilizadas no caso real, foram necessárias nesses casos).

No que concerne ao caso deixado em aberto por *Royster* em [29], com $F = \mathbb{R}P(m) \cup \mathbb{R}P(n)$, $m, n > 0$ pares, recentemente alguns casos particulares foram abordados. Especificamente, em [9], citado no item **(7)** acima, *Hou* e *Torrence* mostraram que: se F é uma união de uma quantidade arbitrária de cópias de um espaço projetivo real $\mathbb{R}P(n)$, com $n > 0$ par e fixo, então toda involução (T, M^r) que fixa F com $dim(M^r) = r < 2n$ é um bordo equivariante; por outro lado, em [11], *Kosniowski* e *Stong* tinham mostrado que, se F tem todas suas componentes com mesma dimensão n, e se (T, M^r) fixa F e é tal que $dim(M^r) = r \geq 2n = 2dim(F)$, então: (i) (T, M^r) é um bordo equivariante se $r > 2n$; (ii) (T, M^r) é bordante a $(twist, F \times F)$ se $r = 2n$. Dessa forma, juntamente com [11], o trabalho de *Hou* e *Torrence* completou o caso particular do problema de *Royster* dado por $F = \mathbb{R}P(2n) \cup \mathbb{R}P(2n)$, $n > 0$. Mais recentemente, em sua tese de doutorado [14], *Rogério de Oliveira* abordou o caso $F = \mathbb{R}P(2) \cup \mathbb{R}P(2q)$ onde $q > 1$ e ímpar. Usando algumas técnicas adicionais concernentes a computações de números característicos, baseadas na ação dos quadrados de *Steenrod* em classes características dada pela fórmula de *Wu*, na fórmula de *Cartan* e em certas classes características especiais (classes $W[r]$) recentemente introduzidas por *Stong* e *Pergher* em [28, Transformation Groups, 2001], *Oliveira* obteve a classificação completa para este caso.

O segundo e mais importante objetivo deste trabalho foi atacar outras situações particulares do problema de *Royster*, usando sofisticações das técnicas usadas por *Oliveira* em [14], uma vez que essas indicavam possuir um alcance maior do que aquele obtido na resolução do caso particular abordado em [14]. Isso de fato se concretizou, com a resolução completa do caso $F = \mathbb{R}P(2) \cup \mathbb{R}P(2n)$, com $2n > 2$ par qualquer. Esse caso faz parte do artigo [15]. Posteriormente, elucidamos por completo o caso particular mais abrangente dado por $F = \mathbb{R}P(2^s) \cup \mathbb{R}P(2n)$, $s, n > 0$, $2^s \neq 2n$. O estudo desse caso mais geral requereu uma divisão em vários subcasos e a obtenção e manipulação de uma quantidade bem maior de equações envolvendo números característicos; além das mencionadas sofisticações das técnicas usadas por *Oliveira*, foi necessária uma técnica nova, no contexto específico de alguns subcasos, baseada na indução finita sobre certos intervalos de algarismos binários (veja Lema 4.2.6, página 90). Em adição, foi resolvida também a questão que consiste em determinar, dados $2m < 2n$ pares, a codimensão máxima com a qual $F = \mathbb{R}P(2m) \cup \mathbb{R}P(2n)$ pode ser realizado como conjunto de pontos fixos. Para melhor entender o alcance deste resultado, precisamos antes tecer algumas considerações adicionais. Se $F = \bigcup_{i=0}^{n} F^i$ não é um bordo e (T, M^r) fixa F, então o famoso Teorema-5/2 de *J. Boardman* de [2] garante que $(5/2)n$ é um limitante superior para as possíveis dimensões r de M^r. Em particular, se $2m$ e $2n$ são pares com $2m < 2n$, então $F = \mathbb{R}P(2m) \cup \mathbb{R}P(2n)$ não borda, o que implica na existência de um número natural $h(2m, 2n)$ que é o supremo das possíveis dimensões de variedades equipadas com involução cujo conjunto de pontos fixos é $\mathbb{R}P(2m) \cup \mathbb{R}P(2n)$; já era conhecido o fato de que $h(2m, 2n) \geq 2m + 2n + 2$. Apesar de descrever a classificação no caso $\mathbb{R}P(0) \cup \mathbb{R}P(2n) = \{ponto\} \cup \mathbb{R}P(2n)$, *Royster* deixou em aberto o cálculo do número $h(0, 2n)$. O valor de tal limitante $h(0, 2n)$ foi determinado por *Stong* e *Pergher* em [28]. Neste trabalho, calculamos $h(2m, 2n)$ para todos os pares de naturais $2m, 2n$, com $2m < 2n$, o que em particular torna numericamente precisa a classificação por nós obtida. Esse resultado também aparece em [15]. Todos tais resultados, descritos no contexto do anel de divisão dos reais $\mathbb{R}$, foram também obtidos em suas versões complexa e quaterniônica. Os resultados de *Conner* e *Floyd*, *Stong* e *Royster* concernentes aos casos $F = \mathbb{R}P(2m)$ e $F = \{ponto\} \cup \mathbb{R}P(2m)$, juntamente com o valor de $h(0, 2m)$ determinado por *Stong* e *Pergher*, desempenharam papel importante em alguns casos da classificação correspondente a $F = \mathbb{R}P(2^s) \cup \mathbb{R}P(2n)$, $2^s \neq 2n$; pela mesma razão, as versões complexa e quaterniônica desses resultados, obtidas nos Capítulos 2 e 3, foram relevantes na classificação correspondente a $F = \mathbb{C}P(2^s) \cup \mathbb{C}P(2n)$ e $F = \mathbb{H}P(2^s) \cup \mathbb{H}P(2n)$, $2^s \neq 2n$. Esse material é o conteúdo do Capítulo 4 desta tese.

Finalmente, cumpre observar que algumas das classificações obtidas neste trabalho são estendidas automaticamente, por meio de resultados presentes na literatura, no contexto do bordismo $\mathbb{Z}_2^k$-equivariante. Para entender este ponto, precisamos de algumas preliminares. Aqui, $\mathbb{Z}_2^k$ denota a soma direta $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ de k cópias do grupo $\mathbb{Z}_2$ dos inteiros módulo 2. Uma ação suave Φ de $\mathbb{Z}_2^k$ em uma variedade suave M^n deve ser entendida como uma coleção ordenada de k involuções $T_1, T_2, \ldots, T_k$, todas suaves, definidas em M^n e comutantes entre si. Semelhantemente ao que ocorre com uma única involução, o conjunto de pontos fixos F de Φ, ou seja, $F = \{x \in M^n \ / \ T_i(x) = x, \ i = 1, 2, ..., k\}$, é ou vazio ou uma união finita e disjunta de subvariedades fechadas de M^n, com a dimensão de cada uma dessas subvariedades podendo assumir qualquer valor entre 0 e n; da mesma forma, existe uma noção natural de bordismo (equivariante) entre os objetos (Φ, M^n), constituídos por uma variedade fechada e suave equipada com uma ação suave $\Phi = (T_1, \ldots, T_k)$ de $\mathbb{Z}_2^k$. Dessa forma, como no caso $k = 1$ das involuções, faz sentido o problema de classificar, a menos de bordismo equivariante, os objetos (Φ, M^n) cujo conjunto de pontos fixos é alguma F fixada *a priori*. O arsenal técnico básico que possibilita atacar tal problema tem suas origens nos resultados do artigo *Equivariant bordism and* $(\mathbb{Z}_2)^k$*-actions* [30, Duke Math. Journal, 1970], em que *Stong* constrói uma seqüência exata, não curta, que generaliza a seqüência exata curta de *Conner* e *Floyd* mencionada anteriormente. Vários trabalhos na literatura versam sobre o dito problema de classificação no contexto das ações de $\mathbb{Z}_2^k$, veja por exemplo: [3], [17], [18], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26] e [27]. Em [24], *Pergher* descreveu um procedimento explícito para, a partir da classe de bordismo de uma involução com conjunto de pontos fixos F, construir classes de bordismo de $\mathbb{Z}_2^k$-ações, $k \geq 2$, que possuem representantes fixando a mesma F; e lançou a seguinte questão: *fixada F a priori, toda classe de bordismo de uma $\mathbb{Z}_2^k$-ação, $k \geq 2$, que fixa F provém de uma involução que fixa F (no sentido de poder ser obtida via esse procedimento)?* Por [3] e [32], a resposta é afirmativa para $F = \mathbb{R}P(2n)$; no entanto, a resposta não é afirmativa de modo geral, pois é conhecida uma $\mathbb{Z}_2^2$-ação que fixa $F =$ conjunto formado por três pontos, enquanto que não há involuções fixando exatamente três pontos. Recentemente, foi mostrado que a resposta também é afirmativa para outras F particulares; nesta direção, citamos:

(i) $F = V^n \cup \{ponto\}$, com V^n suave, fechada e conexa (veja [23]),
(ii) $F = K$, onde K satisfaz a *propriedade* $\mathcal{H}$ (veja [27]),
(iii) $F = K \cup L$ onde K e L satisfazem a *propriedade* $\mathcal{H}$ e $dim(K) \neq dim(L)$ (veja [26]);

o conceito de propriedade $\mathcal{H}$ foi introduzido em [27]: uma variedade M^n conexa, fechada e suave é dita satisfazer a propriedade $\mathcal{H}$ se ela só pode ser realizada como conjunto de pontos fixos de involuções nas codimensões 0 e n. Por um resultado de [6], $\mathbb{R}P(2n)$ satisfaz a propriedade $\mathcal{H}$ e, pelos resultados por nós obtidos no Capítulo 2, os espaços projetivos pares complexos $\mathbb{C}P(2n)$ e quaterniônicos $\mathbb{H}P(2n)$ também satisfazem tal propriedade. Voltando à questão de *Pergher* descrita anteriormente, note que, se para uma certa F a resposta é afirmativa (o que ocorre em particular para F dos tipos (i), (ii) e (iii) citados acima), então pode-se determinar explicitamente a classificação das classes de bordismo das $\mathbb{Z}_2^k$-ações, $k \geq 2$, que fixam F, a partir da classificação correspondente para $k = 1$; em outras palavras, se a classificação para $k = 1$ é conhecida, então a classificação para qualquer $k \geq 2$ é automaticamente conhecida. Deste modo, a junção das classificações obtidas nos Capítulos 2, 3 e 4 com os resultados de [27], [23] e [26] produz automaticamente resultados novos, no contexto do bordismo $\mathbb{Z}_2^k$-equivariante, dados pelos casos: $F = \mathbb{C}P(2n)$ e $F = \mathbb{H}P(2n)$ com $n > 0$; $F = \mathbb{C}P(m) \cup \{ponto\}$ e $F = \mathbb{H}P(m) \cup \{ponto\}$ com $m > 0$; $F = \mathbb{R}P(2^s) \cup \mathbb{R}P(2n)$, $F = \mathbb{C}P(2^s) \cup \mathbb{C}P(2n)$ e $F = \mathbb{H}P(2^s) \cup \mathbb{H}P(2n)$ com $2^s \neq 2n$.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste capítulo estabeleceremos notações e apresentaremos ferramentas e resultados, presentes na literatura, necessários para o estudo a ser realizado nos capítulos que seguem. Incluiremos, neste particular, tópicos básicos da teoria de bordismo equivariante, conforme desenvolvida por *Conner* e *Floyd* em [6].

Admitiremos que o leitor tenha noções de topologia diferencial, homologia, cohomologia, teoria de fibrados e classes de *Stiefel-Whitney*.

Quando mencionarmos variedades e aplicações entre variedades, ficará subentendido que as variedades e as aplicações são diferenciáveis de classe C^∞. Neste trabalho, duas variedades difeomorfas serão tratadas como iguais.

Usaremos $H_n(X)$ e $H^n(X)$ para denotar, respectivamente, os n-ésimos módulos de homologia e cohomologia de um espaço topológico X, com coeficientes no corpo $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ dos inteiros módulo 2.

Denotaremos por K_d, $d = 1, 2, 4$, respectivamente, os reais ($K_1 = \mathbb{R}$), complexos ($K_2 = \mathbb{C}$) e quatérnios ($K_4 = \mathbb{H}$), e por $K_dP(n)$ os n-espaços projetivos correspondentes.

1.2 Bordismo de variedades

Dada uma variedade m-dimensional W^m compacta com bordo, denotamos por ∂W^m o bordo de W^m, o qual sabemos ser uma variedade $(m-1)$-dimensional *fechada*, isto é, compacta e sem bordo.

Definição 1.2.1. Dizemos que uma variedade fechada n-dimensional M^n *borda* se existe uma variedade compacta W^{n+1} tal que $\partial W^{n+1} = M^n$. Dizemos que duas variedades fechadas M^n e V^n são *bordantes* se a união disjunta $M^n \cup V^n$ borda.

Para cada n, a relação de bordismo dada pela definição acima é uma relação de equivalência no conjunto das variedades fechadas n-dimensionais. Denotamos por $[M^n]$ a *classe de bordismo de* M^n e, por $\mathcal{N}_n$ o conjunto de tais classes.

Com a operação $[M^n]+[V^n] = [M^n \cup V^n]$ (união disjunta), $\mathcal{N}_n$ tem estrutura de $\mathbb{Z}_2$-módulo (ou seja, um grupo abeliano em que todo elemento possui ordem 2). O elemento neutro é a classe de bordismo $[M^n] = 0$ das variedades M^n que bordam.

A soma direta $\mathcal{N}_* = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{N}_n$ possui estrutura de anel graduado comutativo com unidade: *o anel de bordismo não-orientado de Thom*. O produto dos elementos homogêneos $[M^n]$ e $[V^m]$ é dado por $[M^n] \cdot [V^m] = [M^n \times V^m]$ (produto cartesiano). A unidade é a classe de bordismo das variedades (0-dimensionais) que são formadas por um número ímpar de pontos.

Os elementos de $\mathcal{N}_*$ podem ser manipulados através de certos invariantes algébricos. Antes de defini-los, estabeleceremos algumas notações:

(a) usamos $\xi^k \to X$ para denotar um k-fibrado vetorial, com fibra k-dimensional $\mathbb{R}^k$, sobre um espaço X; os k-fibrados triviais são denotados por $\mathbb{R}^k \to X$ (no caso em que $k = 0$, escrevemos simplesmente $0 \to X$);

(b) dado um fibrado vetorial $\xi^k \to X$ sobre X paracompacto, denotamos por

$$W(\xi^k) = 1 + w_1(\xi^k) + w_2(\xi^k) + \cdots + w_k(\xi^k)$$

a classe total de *Stiefel-Whitney* de ξ^k; para cada i, $w_i(\xi^k) \in H^i(X)$ é a i-ésima classe de *Stiefel-Whitney* de ξ^k;

(c) definimos a *classe de Stiefel-Whitney da variedade* M^n, denotada por

$$W(M^n) = 1 + w_1(M^n) + \cdots + w_n(M^n),$$

como sendo a classe de *Stiefel-Whitney* do fibrado tangente $\tau M^n \to M^n$ de M^n; ou seja, escrevemos $W(M^n)$ (resp., $w_i(M^n)$) no lugar de $W(\tau M^n)$ (resp., $w_i(\tau M^n)$);

(d) usamos $\sigma(M^n) \in H_n(M^n)$ para denotar a *classe fundamental de homologia módulo 2* de uma variedade fechada M^n. Para cada $\nu \in H^n(M^n)$, denotamos por $\langle \nu, \sigma(M^n)\rangle \in \mathbb{Z}_2$ o valor de ν em $\sigma(M^n)$ (o *índice de Kronecker*).

Definição 1.2.2. Seja M^n uma variedade fechada e considere sua classe de *Stiefel-Whitney* $W(M^n) = 1 + w_1(M^n) + \cdots + w_n(M^n)$. Dados $i_1, i_2, \ldots, i_s$ naturais com $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = n$, o monômio (via produto *cup*) $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)$ é um elemento de $H^n(M^n)$. O valor

$$\langle w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n), \sigma(M^n)\rangle \in \mathbb{Z}_2$$

é chamado o *número característico* (ou o *número de Stiefel-Whitney*) de M^n associado ao monômio $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)$.

Assim, associada a uma variedade fechada M^n, existe uma família de inteiros módulo 2 (ou seja, uma família formada por $0's$ e $1's$), obtida ao considerarmos todos os possíveis monômios $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)$ em $H^n(M^n)$. Dizemos que duas variedades fechadas M^n e V^n *possuem os mesmos números característicos* se

$$\langle w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n), \sigma(M^n)\rangle = \langle w_{i_1}(V^n)w_{i_2}(V^n)\cdots w_{i_s}(V^n), \sigma(V^n)\rangle,$$

para cada partição $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = n$.

A relação entre números característicos e os elementos de $\mathcal{N}_*$ é dada pelo

Teorema 1.2.3 (*Thom*). *Uma variedade fechada M^n borda se, e somente se, todos os números característicos de M^n são nulos.* [33] □

Exemplo 1.2.4. Considere o espaço projetivo real n-dimensional $\mathbb{R}P(n)$. Usando o teorema acima, a estrutura multiplicativa do anel de cohomologia $H^*(\mathbb{R}P(n))$ e o fato de que $W(\mathbb{R}P(n)) = (1+\alpha)^{n+1}$, onde α é o gerador de $H^1(\mathbb{R}P(n))$, verifica-se que: $\mathbb{R}P(n)$ borda se, e somente se, n é ímpar.

Corolário 1.2.5. *Duas variedades fechadas M^n e V^n são bordantes se, e somente se, M^n e V^npossuem os mesmos números característicos.* □

Em outras palavras, um elemento de $\mathcal{N}_*$ é completamente caracterizado pelos números característicos de qualquer um de seus representantes.

A estrutura de $\mathcal{N}_*$ foi completamente determinada pelo

Teorema 1.2.6 (*Thom*). *$\mathcal{N}_*$ é um álgebra polinomial graduada sobre $\mathbb{Z}_2$ com um gerador $x_n \in \mathcal{N}_n$ em cada dimensão $0 \leq n \neq 2^j - 1$.* [33] □

Para cada n par, *Thom* mostrou que uma possibilidade para x_n é a classe de bordismo do espaço projetivo $\mathbb{R}P(n)$. Posteriormente, *Dold*, em [7], exibiu representantes para os geradores nas dimensões ímpares, a saber: variedades do tipo $P(i,k) = \frac{S^i \times \mathbb{C}P(k)}{\sim}$, com i e k apropriados e $\sim$ sendo a identificação

$$((x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}), [z_0, z_1, \ldots, z_k]) \sim ((-x_1, -x_2, \ldots, -x_{i+1}), [\bar{z}_0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_k]),$$

onde $\bar{z}$ denota o complexo conjugado de z. Geometricamente, isso significa que toda variedade fechada, que não borda, é bordante a uma união disjunta de certos produtos cartesianos envolvendo espaços projetivos reais pares e *variedades de Dold*.

1.3 Bordismo singular

Para os fatos abaixo, vide [5].

Fixado um espaço topológico X, uma *variedade singular em X* é um par (M^n, f), constituído por uma variedade fechada M^n e uma função contínua $f : M^n \to X$.

Definição 1.3.1. Dizemos que uma variedade singular (M^n, f) em X *borda* se existem uma variedade W^{n+1} compacta com bordo $\partial W^{n+1} = M^n$ e uma função contínua $F : W^{n+1} \to X$ com restrição $F|_{M^n} = f$. Dizemos que duas variedades singulares em X, (M^n, f) e (V^n, g), são *bordantes* se a união disjunta $(M^n \cup V^n, f \cup g)$ borda (com a união disjunta $f \cup g$ sendo definida pelas restrições $(f \cup g)|_{M^n} = f$ e $(f \cup g)|_{V^n} = g$).

A relação de bordismo dada pela definição acima é uma relação de equivalência na coleção das variedades singulares n-dimensionais em X. Denotamos por $[M^n, f]$ a *classe de bordismo da variedade singular* (M^n, f) em X e, por $\mathcal{N}_n(X)$ o conjunto de tais classes. Com a operação $[M^n, f] + [V^n, g] = [M^n \cup V^n, f \cup g]$ (união disjunta), $\mathcal{N}_n(X)$ possui estrutura de grupo abeliano: o *grupo de bordismo n-dimensional não-orientado de X*. O elemento neutro é dado pela classe de bordismo das variedades singulares (M^n, f) em X tais que M^n borda e f é constante.

O grupo $\mathcal{N}_*(X) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}_n(X)$ possui uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo graduado com a operação $\mathcal{N}_* \times \mathcal{N}_*(X) \longrightarrow \mathcal{N}_*(X)$ sendo dada por $[V^m] \cdot [M^n, f] = [V^m \times M^n, g]$, onde $g(x, y) = f(y)$. Note que $\mathcal{N}_*(\{ponto\})$ e $\mathcal{N}_*$ são $\mathcal{N}_*$-isomorfos.

A definição de números característicos de variedades fechadas é naturalmente estendida para variedades singulares, conforme veremos a seguir.

Seja (M^n, f) uma variedade singular em X. Para cada $m \leq n$, $h \in H^m(X)$ e cada monômio

$$w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n) \in H^{n-m}(M^n)$$

associamos

$$\langle w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)f^*(h), \sigma(M^n)\rangle \in \mathbb{Z}_2,$$

onde $f^* : H^*(X) \to H^*(M^n)$ é o homomorfismo induzido por $f : M^n \to X$ nos anéis de cohomologia. Os $0's$ e $1's$ assim obtidos são denominados *números característicos*, ou *números de Whitney*, de (M^n, f) e são reduzidos aos números característicos usuais de M^n se tomarmos $h = 1 \in H^0(X)$. Ocorre que, se X satisfaz certa condição, então a classe de bordismo de (M^n, f) é completamente determinada por tais números.

Teorema 1.3.2 (*Conner e Floyd*). *Seja X um CW-complexo finito em cada dimensão. Uma variedade singular $f : M^n \to X$ borda se, e somente se, todos os números característicos de (M^n, f) são nulos.* [5, p. 56, 17.3] □

Corolário 1.3.3. *Seja X um CW-complexo finito em cada dimensão. Duas variedades singulares em X são bordantes se, e somente se, possuem os mesmos números característicos.* □

1.4 Bordismo de fibrados vetoriais

Para os fatos abaixo, vide [5].

Definição 1.4.1. Dizemos que um k-fibrado vetorial $\xi^k \to M^n$, sobre uma variedade fechada M^n, *borda* se existe um k-fibrado $\zeta^k \to W^{n+1}$, sobre uma variedade W^{n+1} compacta com bordo, tal que $\partial W^{n+1} = M^n$ e $\zeta^k|_{M^n} = \xi^k$. Dois k-fibrados $\xi^k \to M^n$ e $\eta^k \to V^n$ são *bordantes* se a união disjunta $(\xi^k \to M^n) \cup (\eta^k \to V^n)$ borda.

A definição acima estabelece uma relação de equivalência (de bordismo) na coleção dos k-fibrados vetoriais sobre variedades fechadas n-dimensionais. A classe de bordismo de $\xi^k \to M^n$ é denotada por $[\xi^k \to M^n]$. Fixados k e n, existe um bijeção natural entre as classes de bordismo em questão e os elementos de $\mathcal{N}_n(BO(k))$, onde $BO(k)$ é o espaço universal classificante para fibrados k-dimensionais. Tal bijeção é definida do seguinte modo:

($\hookrightarrow$) dado $[M^n, f] \in \mathcal{N}_n(BO(k))$, associe a classe de bordismo do *pullback* $f^*(\mu^k) \to M^n$, onde $\mu^k \to BO(k)$ denota o fibrado universal k-dimensional;

($\hookleftarrow$) dada uma classe de bordismo $[\xi^k \to M^n]$, associe $[M^n, f]$, onde f é uma função classificante para ξ^k (a qual sabemos ser única, salvo homotopia).

Dessa forma, podemos ver os elementos do $\mathcal{N}_*$-módulo $\mathcal{N}_*(BO(k))$ como classes de bordismo de k-fibrados vetoriais. Com tal identificação, as operações são dadas por:

$[\xi^k \to M^n] + [\eta^k \to V^n] = [(\xi^k \to M^n) \cup (\eta^k \to V^n)]$ (união disjunta),

$[V^m] \cdot [\xi^k \to M^n] = [p^*(\xi^k) \to V^m \times M^n]$ (onde $p : V^m \times M^n \to M^n$ é a projeção na segunda coordenada).

O elemento neutro $[\xi^k \to M^n] = 0 \in \mathcal{N}_n(BO(k))$ é a classe dos k-fibrados triviais sobre as variedades que bordam.

Fixemos agora uma classe $[\xi^k \to M^n]$ identificada com um elemento $[M^n, f]$ de $\mathcal{N}_n(BO(k))$. Pelo Corolário 1.3.3, a classe de bordismo de (M^n, f) é determinada por seus números característicos, os quais têm a forma

$$\langle w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)f^*(h), \sigma(M^n)\rangle \in \mathbb{Z}_2,$$

com $h \in H^m(BO(k))$ e $w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n) \in H^{n-m}(M^n)$. Ocorre que o anel $H^*(BO(k))$ é a álgebra polinomial $\mathbb{Z}_2[w_1, w_2, \ldots, w_k]$, sendo w_i a i-ésima classe de *Stiefel-Whitney* do k-fibrado universal $\mu^k \to BO(k)$. Ou seja, cada $h \in H^m(BO(k))$ pode ser escrito na forma $\sum w_{j_1}w_{j_2}\cdots w_{j_r}$. Agora, lembrando que $f^*(\mu^k) = \xi^k$, temos

$$f^*(w_{j_1}w_{j_2}\cdots w_{j_r}) = w_{j_1}(\xi^k)w_{j_2}(\xi^k)\cdots w_{j_r}(\xi^k),$$

para cada monômio básico $w_{j_1}w_{j_2}\cdots w_{j_r}$ em $H^m(BO(k))$. Assim, concluímos que os números da forma

$$\langle w_{i_1}(M^n)w_{i_2}(M^n)\cdots w_{i_s}(M^n)w_{j_1}(\xi^k)w_{j_2}(\xi^k)\cdots w_{j_r}(\xi^k), \sigma(M^n)\rangle \in \mathbb{Z}_2,$$

com $i_1 + i_2 + \cdots + i_s + j_1 + j_2 + \cdots + j_r = n$, caracterizam a classe de bordismo de $\xi^k \to M^n$. Naturalmente, tais números são denominados os *números característicos do fibrado vetorial* $\xi^k \to M^n$.

Exemplo 1.4.2. Para cada $n \geq 1$, seja $\gamma^1 \to \mathbb{R}P(n)$ o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P(n)$. Temos $w_1(\gamma^1) = \alpha$, o gerador de $H^1(\mathbb{R}P(n))$. Então o número característico

$$\langle w_1(\gamma^1)^n, \sigma(\mathbb{R}P(n))\rangle = \langle \alpha^n, \sigma(\mathbb{R}P(n))\rangle$$

é não nulo. Logo, o fibrado $\gamma^1 \to \mathbb{R}P(n)$ não borda, embora $\mathbb{R}P(n)$ borde no caso em que n é ímpar.

Teorema 1.4.3. *$\mathcal{N}_*(BO(1))$ é um $\mathcal{N}_*$-módulo livre graduado, com um gerador em cada dimensão. Suponha que $\{\lambda \to V^n\}_{n=0}^{\infty}$ seja uma coleção de fibrados linha sobre variedades fechadas tal que, para cada n, o número característico $\langle w_1(\lambda)^n, \sigma(V^n)\rangle$ de $\lambda \to V^n$ é não nulo. Então $\{[\lambda \to V^n]\}_{n=0}^{\infty}$ é uma base homogênea para o $\mathcal{N}_*$-módulo livre $\mathcal{N}_*(BO(1))$. Em particular, $\{[\gamma^1 \to \mathbb{R}P(n)]\}_{n=0}^{\infty}$ é uma base homogênea para o $\mathcal{N}_*$-módulo livre $\mathcal{N}_*(BO(1))$.* [5, p. 74, 21.2]

1.5 Bordismo de ações de grupos

Para os fatos abaixo, vide [5].

Seja G um grupo de Lie compacto. Cada par da forma (ϕ, M^n) denotará uma ação $\phi : G \times M^n \to M^n$ de G em uma variedade fechada M^n. Lembramos que está subentendido que as variedades e aplicações entre variedades, em particular as ações, são diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Definição 1.5.1. Dizemos que uma ação (ϕ, M^n) *borda equivariantemente*, se existem uma variedade compacta W^{n+1} com bordo $\partial W^{n+1} = M^n$ e um ação $\Phi : G \times W^{n+1} \to W^{n+1}$ com restrição $\Phi|_{M^n} = \phi$. Dizemos que duas ações (ϕ, M^n) e (ψ, V^n) são *G-bordantes*, se a união disjunta $(\phi \cup \psi, M^n \cup V^n)$ borda.

A relação de G-bordismo de ações assim definida é uma relação de equivalência. Denotamos por $[\phi, M^n]$ a classe de bordismo de (ϕ, M^n) e, por $\mathcal{I}_n(G)$ a coleção das classes de bordismo das G-ações nas variedades fechadas n-dimensionais. Com a operação dada pela união disjunta, $[\phi, M^n] + [\psi, V^n] = [\phi \cup \psi, M^n \cup V^n]$, $\mathcal{I}_n(G)$ é um grupo abeliano, denominado o *grupo de G-bordismo irrestrito n-dimensional.* O elemento neutro é dado pela classe de bordismo $[\phi, M^n] = 0$ das G-ações (ϕ, M^n) que bordam equivariantemente (por exemplo, tome M^n uma variedade que borda e $\phi : G \times M^n \to M^n$ dada por $\phi(g, x) = x$). Podemos obter outros grupos de G-bordismo impondo restrições às ações consideradas.

Nesta linha, surge o *grupo de G-bordismo principal n-dimensional*, denotado por $\mathcal{N}_n(G)$, obtido ao impormos que todas as ações consideradas na relação de bordismo sejam *livres*.

Existe uma estrutura de $\mathcal{N}_*$-módulo graduado em $\mathcal{I}_*(G) = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{I}_n(G)$ (analogamente em $\mathcal{N}_*(G) = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathcal{N}_n(G)$) dada pela operação:

$$[V^m] \cdot [\phi, M^n] = [\psi, M^n \times V^m],$$

definindo $\psi : G \times (M^n \times V^m) \longrightarrow M^n \times V^m$ por $\psi(g,(m,v)) = (\phi(g,m),v)$.

Dada uma G-ação qualquer (ϕ, M^n) em uma variedade fechada M^n, a topologia diferencial garante que o conjunto de pontos fixos de ϕ,

$$F_\phi = \{x \in M^n : \phi(g,x) = x, \forall g \in G\},$$

é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de M^n. Por outro lado, dados um grupo de Lie G compacto e uma união F, disjunta e finita, de variedades fechadas, cabe perguntar: *quais são as classes de bordismo equivariante das G-ações que possuem F como conjunto de pontos fixos*?

Conforme detalhamos no Capítulo 0, esta tese consiste no estudo da questão acima para $G = \mathbb{Z}_2$ e certos casos particulares de F.

1.6 Fibrado *splitting*

Recordaremos aqui a definição de *fibrado splitting* e suas propriedades no contexto das classes de *Stiefel-Whitney*. Neste ponto, indicamos [16] como referência.

Seja $\xi^k \xrightarrow{\pi} M^n$ um k-fibrado vetorial (com fibra $\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$) sobre uma variedade fechada M^n; o espaço total de ξ^k também é denotado por ξ^k. No subconjunto $\xi_0^k \subset \xi^k$, formado pelos elementos não-nulos, definimos a seguinte relação de equivalência:

$$v \sim w \qquad \text{se, e somente se,} \qquad \pi(v) = \pi(w) \text{ e } v = a.w \text{ para algum } 0 \neq a \in \mathbb{R}.$$

O espaço quociente $\xi_0^k/\!\sim\, = \{[v] : v \in \xi_0^k\}$, também denotado por $\mathbb{R}P(\xi^k)$, é uma variedade fechada de dimensão $n+k-1$.

Definimos o *fibrado projetivo associado* ao k-fibrado vetorial $\xi^k \xrightarrow{\pi} M^n$ como sendo o fibrado $\mathbb{R}P(\xi^k) \xrightarrow{\bar{\pi}} M^n$, com projeção $\bar{\pi}([v]) = \pi(v)$ e fibra $\mathbb{R}P(k-1)$.

Ocorre que o *pullback* $\bar{\pi}^*(\xi^k) \to \mathbb{R}P(\xi^k)$ de $\xi^k \xrightarrow{\pi} M^n$, induzido pela projeção $\bar{\pi} : \mathbb{R}P(\xi^k) \longrightarrow M^n$, possui um subfibrado linha $\lambda_{\xi^k} \to \mathbb{R}P(\xi^k)$, cujo espaço total é dado por $\lambda_{\xi^k} = \{([v], w) : w \in [v]\}$.

Definição 1.6.1. O fibrado linha $\lambda_{\xi^k} \to \mathbb{R}P(\xi^k)$ é denominado o *fibrado splitting* de $\xi^k \to M^n$.

O anel de cohomologia $H^*(\mathbb{R}P(\xi^k))$ é um $H^*(M^n)$-módulo, via o homomorfismo $\bar{\pi}^* : H^*(M^n) \to H^*(\mathbb{R}P(\xi^k))$: para $\alpha \in H^*(M^n)$ e $\beta \in H^*(\mathbb{R}P(\xi^k))$, defina $\alpha \cdot \beta = \bar{\pi}^*(\alpha)\beta$. Considerando essa estrutura temos o

Teorema 1.6.2. *$H^*(\mathbb{R}P(\xi^k))$ é um $H^*(M^n)$-módulo livre com base $\{1, c, \ldots, c^{k-1}\}$, onde $c = w_1(\lambda_{\xi^k})$ é a primeira classe de Stiefel-Whitney do fibrado splitting de ξ^k.* [16, p. 202, 5.3] □

Uma estreita ligação entre a base $\{1, c, \ldots, c^{k-1}\}$ e as classes de *Stiefel-Whitney* do fibrado $\xi^k \to M^n$ é estabelecida pelo

Teorema 1.6.3. *Para cada fibrado vetorial $\xi^k \to M^n$, $k \geq 1$, vale a relação*

$$c^k = w_k \cdot 1 + w_{k-1} \cdot c + \cdots + w_1 \cdot c^{k-1} \in H^k(\mathbb{R}P(\xi)),$$

onde $w_i = w_i(\xi^k)$. [16, Cap. V] □

Lembramos que a classe de bordismo do fibrado $\lambda_{\xi^k} \to \mathbb{R}P(\xi^k)$ em $\mathcal{N}_{n+k-1}(BO(1))$ é completamente determinada por seus números característicos, os quais têm a forma

$$\left\langle w_{i_1}(\mathbb{R}P(\xi^k))w_{i_2}(\mathbb{R}P(\xi^k)) \cdots w_{i_s}(\mathbb{R}P(\xi^k))c^r, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^k))\right\rangle \in \mathbb{Z}_2,$$

com $i_1 + i_2 + \cdots i_s + r = n + k - 1$. Para calcular a classe de *Stiefel-Whitney*

$$W(\mathbb{R}P(\xi^k)) = 1 + w_1(\mathbb{R}P(\xi^k)) + \cdots + w_{n+k-1}(\mathbb{R}P(\xi^k))$$

da variedade $\mathbb{R}P(\xi^k)$, fazemos uso do

Teorema 1.6.4 (*Borel-Hirzebruch*). *A classe de Stiefel-Whitney do espaço total do fibrado projetivo associado a $\xi^k \to M^n$ é dada por*

$$W(\mathbb{R}P(\xi^k)) = W(M^n) \cdot \left((1+c)^k + w_1(\xi^k)(1+c)^{k-1} + w_2(\xi^k)(1+c)^{k-2} + \cdots + w_k(\xi^k)\right).$$

[5, p. 75, 21.3] □

Note que o termo homogêneo de grau k do fator

$$(1+c)^k + w_1(\xi^k)(1+c)^{k-1} + w_2(\xi^k)(1+c)^{k-2} + \cdots + w_k(\xi^k) \in H^*(\mathbb{R}P(\xi^k))$$

é $c^k + w_1(\xi^k)c^{k-1} + w_2(\xi^k)c^{k-2} + \cdots + w_k(\xi^k)$, o qual sabemos ser nulo pelo Teorema 1.6.3.

1.7 Seqüência de *Conner e Floyd*

Particularizaremos o estudo iniciado na Seção 1.5 para o caso em que $G = \mathbb{Z}_2$, caso extensivamente explorado em [6].

Observe que existe uma identificação imediata entre as $\mathbb{Z}_2$-ações (ϕ, M^n) e as involuções $T : M^n \to M^n$, $T^2 = Id$, em variedades fechadas. Assim, classes de $\mathbb{Z}_2$-bordismo são classes de *bordismo de involuções*. Usaremos a notação $[T, M^n]$ no lugar de $[\phi, M^n]$ em $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$ (em $\mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$, no caso do $\mathbb{Z}_2$-bordismo principal).

Inicialmente, considere (T, M^n) involução em uma variedade fechada M^n e suponha que T *não* possua pontos fixos. Então, o espaço de órbitas M^n/T ainda é uma variedade fechada n-dimensional. Definimos o *fibrado linha associado a* T como sendo o fibrado $\lambda \to \frac{M^n}{T}$ com espaço total dado pelo espaço quociente $\lambda = \frac{M^n \times \mathbb{R}}{(m,r) \sim (T(m), -r)}$. Por exemplo, o fibrado linha canônico $\gamma^1 \to \mathbb{R}P(n)$ é o fibrado linha associado à involução antipodal (A, S^n) na esfera S^n.

Observação 1.7.1. Seja $\xi^k \to V^n$ um fibrado vetorial com grupo $O(k)$ (grupo ortogonal), $k \geq 1$, sobre a variedade fechada V^n. Considere então o fibrado em esferas associado $S(\xi^k) \to V^n$ com fibra S^{k-1}, cujo espaço total $S(\xi^k)$ é uma variedade fechada $(n+k-1)$-dimensional. Definimos

$$A : S(\xi^k) \longrightarrow S(\xi^k)$$

como sendo a involução, sem pontos fixos, que atua como a antipodal em cada fibra. Referimo-nos à involução $(A, S(\xi^k))$ como o *fibrado involução* associado a ξ^k. Note que o fibrado linha associado a $(A, S(\xi^k))$, $\lambda \to \frac{S(\xi^k)}{A}$, é equivalente ao fibrado *splitting* de $\xi^k \to V^n$, $\lambda \to \mathbb{R}P(\xi^k)$.

A correspondência $[M^n, T] \mapsto [\lambda \to \frac{M^n}{T}]$ define um isomorfismo de $\mathcal{N}_*$-módulos entre $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ e $\mathcal{N}_*(BO(1))$, vide [5]. Em particular, o que caracteriza a classe de bordismo de uma involução sem pontos fixos (T, M^n) em $\mathcal{N}_n(\mathbb{Z}_2)$ são os números característicos do fibrado linha associado $\lambda \to \frac{M^n}{T}$, denominados *números de involução* de (T, M^n).

No caso do $\mathbb{Z}_2$-bordismo irrestrito, veremos a seguir que o monomorfismo j_* da *seqüência exata de Conner e Floyd* fornece uma técnica algébrica para caracterizar um elemento de $\mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2)$.

Seja $T : M^n \to M^n$ uma involução qualquer em uma variedade fechada M^n. Como o conjunto de pontos fixos de T, $F = F_T = \{x \in M^n : T(x) = x\}$, é uma união disjunta e finita de subvariedades fechadas de M^n, escrevemos F na forma $F = \cup_{j=0}^{n} F^j$, onde cada F^j é a união (eventualmente vazia) das componentes j-dimensionais de F. O *fibrado normal* de F em M^n, $(\eta \to F) = \cup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$, é chamado *o fixed-data de* (T, M^n).

Exemplo 1.7.2. Para qualquer variedade fechada M^n, o fibrado tangente $\tau M^n \to M^n$ pode ser realizado como um *fixed-data.* De fato, a involução

$$twist : M^n \times M^n \longrightarrow M^n \times M^n, \qquad twist(x, y) = (y, x),$$

tem como conjunto de pontos fixos a diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in M^n\}$, ou seja, uma cópia de M^n. O fibrado normal de Δ, no produto cartesiano $M^n \times M^n$, é equivalente ao fibrado tangente $\tau M^n \to M^n$.

Segundo identificação dada na Seção 1.4, cada fibrado $\eta^{n-j} \to F^j$ representa um elemento de $\mathcal{N}_j(BO(n-j))$ (se $F^j = \emptyset$, convenciona-se que $[\eta^{n-j} \to F^j] = 0$).

Considere o $\mathbb{Z}_2$-módulo

$$\mathcal{M}_n = \bigoplus_{j=0}^{n} \mathcal{N}_j(BO(n-j)),$$

e as seguintes aplicações:

$$j_* : \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{M}_n \qquad \text{dada por} \qquad j_*[T, M^n] = \sum_{j=0}^{n} [\eta^{n-j} \to F^j],$$

onde $\cup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$ é o *fixed-data* da involução (T, M^n); e

$$\partial : \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathcal{N}_{n-1}(BO(1))$$

que a cada

$$[\xi \to F] = \sum_{j=0}^{n} [\xi^{n-j} \to F^j] \in \mathcal{M}_n$$

associa

$$[\lambda \to \mathbb{R}P(\xi)] = \sum_{j=0}^{n-1} [\lambda_{\xi^{n-j}} \to \mathbb{R}P(\xi^{n-j})] \in \mathcal{N}_{n-1}(BO(1)),$$

onde $\lambda_{\xi^{n-j}} \to \mathbb{R}P(\xi^{n-j})$ denota o fibrado *splitting* de ξ^{n-j} (para o caso em que $j = n$, $\partial : \mathcal{N}_n(BO(0)) \longrightarrow \mathcal{N}_{n-1}(BO(1))$ é o homomorfismo nulo).

Além de verificar que tais aplicações estão bem definidas, *Conner* e *Floyd* mostraram que j_* e ∂ são homomorfismos e compõem uma seqüência exata curta.

Teorema 1.7.3 (*Seqüência de Conner e Floyd*). *Para cada n, a seqüência de $\mathbb{Z}_2$-módulos*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_*} \mathcal{M}_n \xrightarrow{\partial} \mathcal{N}_{n-1}(BO(1)) \longrightarrow 0$$

é exata. [5, p. 88, 25.2] □

Observação 1.7.4. $\mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2)$ é uma $\mathcal{N}_*$-álgebra comutativa com unidade, com o produto sendo dado por $[T, M^n] \cdot [S, V^m] = [T \times S, M^n \times V^m]$ (produto cartesiano). A soma direta $\mathcal{M}_* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}_n$ também possui estrutura de $\mathcal{N}_*$-álgebra comutativa com unidade; especificamente, dados $[\eta_1^k \to M_1^n]$ e $[\eta_2^l \to M_2^m]$, definimos o produto:

$$[\eta_1^k \xrightarrow{\pi_1} M_1^n][\eta_2^l \xrightarrow{\pi_2} M_2^m] = [\eta_1^k \times \eta_2^l \xrightarrow{\pi_1 \times \pi_2} M_1^n \times M_2^m],$$

com $\eta_1^k \times \eta_2^l$ denotando o produto cartesiano (também chamado a *soma de Whitney externa*) dos fibrados vetoriais η_1^k e η_2^l. Com tais estruturas, $j_* : \mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{M}_*$ é um homomorfismo de $\mathcal{N}_*$-álgebras (vide [5, p. 88]).

Veremos a seguir algumas conseqüências do Teorema 1.7.3.

Exemplo 1.7.5. Se (T, M^n) é uma involução sem pontos fixos então $[T, M^n] = 0$ em $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$, pois $j_*[T, M^n] = 0$. Observe que, se (T, M^n) é uma involução cujo conjunto de pontos fixos é uma variedade F^n de mesma dimensão, então F^n é a união das componentes conexas de M^n em que T atua como a identidade. Além disso, em $M^n \setminus F^n$, T atua sem pontos fixos. Logo, $[T, M^n] = [T, F^n] + [T, M^n \setminus F^n] = [Id, F^n]$ em $\mathcal{I}_n(\mathbb{Z}_2)$.

Exemplo 1.7.6. Seja (T, M^n) uma involução com conjunto de pontos fixos $F = \cup_{j=0}^n F^j$. Se F não borda (ou seja, se existe j tal que $F^j \neq \emptyset$ não borda) então (T, M^n) não borda equivariantemente, pois $j_*[T, M^n]$ é necessariamente não nulo.

Exemplo 1.7.7. Não existe involução (T, M^n) em uma variedade fechada M^n, com $n \geq 1$, fixando exatamente um ponto. De fato, se existisse tal involução (T, M^n) teríamos $j_*[T, M^n] = [\mathbb{R}^n \to *]$. Observe que o *splitting* de $\mathbb{R}^n \to *$ é o fibrado linha canônico $\gamma^1 \to \mathbb{R}P(n-1)$ sobre $\mathbb{R}P(n-1)$. Logo, teríamos $\partial j_*[T, M^n] = [\gamma^1 \to \mathbb{R}P(n-1)] \neq 0$ (conforme vimos no Exemplo 1.4.2), o que contraria a exatidão da seqüência da *Conner* e *Floyd*.

A classe de bordismo de uma involução é determinada, via o monomorfismo j_*, pela classe de bordismo do seu *fixed-data*:

Corolário 1.7.8. *Duas involuções (T, M^n) e (S, V^n) são $\mathbb{Z}_2$-bordantes se, e somente se, os seus fixed-data $\eta \to F_T$ e $\xi \to F_S$ são bordantes.*
Equivalentemente: duas involuções (T, M^n) e (S, V^n) são $\mathbb{Z}_2$-bordantes se, e somente se, os seus fixed-data possuem os mesmos números característicos. $\square$

Considere um fibrado qualquer $(\eta \to F) = \cup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$. Se $[\eta \to F] \in \mathcal{M}_n$ está no núcleo de ∂, então $[\eta] = j_*[T, M^n]$ para alguma involução (T, M^n). Em outras palavras, se $\partial[\eta] = 0$ então η é bordante a um fibrado que pode ser realizado como um *fixed-data*. Na realidade, a demonstração do Teorema 1.7.3 diz algo mais forte: o próprio η pode ser realizado como o *fixed-data* de uma involução. Em particular, vemos que: *um fibrado bordante a um fixed-data também é um fixed-data.* Dessa forma obtemos o

Corolário 1.7.9. *Um fibrado $(\eta \to F) = \cup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$ é um fixed-data se, e somente se, $\partial[\eta] = 0$.*
Equivalentemente: $(\eta \to F) = \cup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$ é um fixed-data se, e somente se, todos os números característicos do fibrado linha $(\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)) = \cup_{j=0}^{n-1}(\lambda_{\eta^{n-j}} \to \mathbb{R}P(\eta^{n-j}))$ são nulos. $\square$

Exemplo 1.7.10. Seja $(\eta \to F) = \cup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$ um fibrado que borda (ou seja, cada $\eta^{n-j} \to F^j$ borda). Então $\partial[\eta \to F] = 0$ e, portanto, existe uma involução (T, M^n) cujo *fixed-data* é $\eta \to F$ (neste caso, (T, M^n) borda equivariantemente).

Corolário 1.7.11. *Seja $(\eta \to F) = (\eta^{n-i} \to F^i) \cup (\eta^{n-j} \to F^j)$ um fixed-data.*
(a) Se $\eta^{n-i} \to F^i$ é um fixed-data, então $\eta^{n-j} \to F^j$ também é um fixed-data.
(b) Se $(\eta^{n-i} \to F^i) \cup (\mathbb{R}^n \to *)$ é um fixed-data, então $(\eta^{n-j} \to F^j) \cup (\mathbb{R}^n \to *)$ também é um fixed-data.

Demonstração:
(a) $0 = \partial[\eta \to F] = \partial[\eta^{n-i} \to F^i] + \partial[\eta^{n-j} \to F^j] = \partial[\eta^{n-j} \to F^j]$.

(b) Observe que

$$[\eta^{n-i} \to F^i] + [\eta^{n-j} \to F^j] = [\eta^{n-i} \to F^i] + [\mathbb{R}^n \to *] + [\eta^{n-j} \to F^j] + [\mathbb{R}^n \to *].$$

Logo,

$$\begin{aligned} & 0 = \partial[\eta \to F] = \partial\left([\eta^{n-i} \to F^i] + [\mathbb{R}^n \to *]\right) + \partial\left([\eta^{n-j} \to F^j] + [\mathbb{R}^n \to *]\right) \\ \Rightarrow \quad & \partial\left([\eta^{n-j} \to F^j] + [\mathbb{R}^n \to *]\right) = 0. \end{aligned}$$ $\square$

O Corolário 1.7.9 será uma ferramenta fundamental para o estudo que desenvolveremos nos capítulos subseqüentes. Sendo assim, convém reescrevê-lo de forma mais explícita, usando a definição de número característico de um fibrado. Em todo este trabalho, a primeira classe de *Stiefel-Whitney* de qualquer fibrado *splitting* será denotada pela letra c.

Corolário 1.7.12. *Um fibrado* $(\eta \to F) = \cup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$ *é um fixed-data se, e somente se,*

$$\sum_{j=0}^{n-1}\langle w_{i_1}(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))\cdots w_{i_s}(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))c^t, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))\rangle = 0 \in \mathbb{Z}_2,$$

para toda partição $i_1 + \cdots + i_s + t = n-1$. $\square$

Conforme mencionamos no Capítulo 0, a seqüência de *Conner* e *Floyd* fornece estratégias para o estudo da classificação de involuções com um dado conjunto de pontos fixos. De fato, dada uma união F disjunta e finita de variedades fechadas, o problema de calcular as classes de bordismo das possíveis involuções que têm F como conjunto de pontos fixos é equivalente ao de calcular as classes de bordismo dos possíveis *fixed-data* sobre F. Para este último temos ferramentas algébricas: as classes de fibrados, em $\mathcal{M}_*$, são completamente determinadas por números característicos; e $\eta \to F$ é um *fixed-data* se, e somente se, todos os números característicos do fibrado linha associado por ∂, $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)$, são nulos. No entanto, como mencionado anteriormente, é necessário conhecer a estrutura da K-teoria real de F.

1.8 Classes características especiais

Fixemos uma união F disjunta e finita de variedades fechadas. Se m é a dimensão máxima entre as dimensões de tais variedades, podemos escrever $F = \cup_{j=0}^{m} F^j$, com cada F^j, j variando de 0 a m, sendo a união (eventualmente vazia) das componentes j-dimensionais de F. Pela seção anterior, sabemos que o estudo da classificação das classes de bordismo das involuções que possuem tal F como conjunto de pontos fixos é equivalente ao estudo das classes de bordismo dos *fixed-data* sobre F. Considere então um *fixed-data* genérico sobre F (supondo que exista algum), o qual pode ser escrito na forma

$$(\eta \to F) = \cup_{j=0}^{m}(\eta^{n-j} \to F^j),$$

com $n > m$, já que o caso $n = m$ reduz-se ao caso $n > m$ (basta observar que, se (T, M^m) é uma involução fixando F, então $[T, M^m] = [Id, F^m] + [T, M^m \setminus F^m]$). Pelo Corolário

1.7.12, sabemos que, para cada partição $i_1 + \cdots + i_s + t = n-1$,

$$\sum_{j=0}^{m} \langle w_{i_1}(\mathbb{R}P(\eta^{n-j})) \cdots w_{i_s}(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))c^t, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))\rangle = 0 \in \mathbb{Z}_2;$$

ou ainda,

$$\sum_{j=0}^{m} \langle p(c, w(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))), \sigma(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))\rangle = 0 \in \mathbb{Z}_2,$$

para cada $p(c, w(\mathbb{R}P(\eta)))$ polinômio homogêneo de grau $n-1$ nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e c.

Logo, um procedimento razoável, em busca de informações sobre η, é usar as igualdades acima para polinômios apropriados. Deste modo, pode-se obter pistas sobre a classificação pretendida (ou pelo menos eliminar possibilidades). Isso ficará mais claro com os cálculos que desenvolveremos nos próximos capítulos.

A visualização de tais polinômios nem sempre é uma tarefa fácil. Neste contexto, nas próximas duas subseções, apresentaremos dois recursos que podem nos conduzir a equações convenientes.

1.8.1 Multiplicação por potências inteiras de $(1+c)$

Observação 1.8.1. Seja X um espaço topológico qualquer. A coleção de todos os elementos da forma

$$w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots \qquad \in H^*(X),$$

em que $w_i \in H^i(X)$ e o termo de grau zero é $1 \in H^0(X)$, é um grupo comutativo com a operação dada pelo produto *cup* (vide [13]). Dado um elemento $w = 1+w_1+w_2+w_3+\cdots$, o seu inverso (ou *dual*)

$$\frac{1}{w} = \overline{w} = 1 + \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \overline{w}_3 + \cdots,$$

caracterizado pela relação $w\overline{w} = 1 \in H^*(X)$, pode ser construído indutivamente pelo algoritmo

$$\overline{w}_0 = 1; \qquad \overline{w}_n = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{w}_{n-i}.$$

Consideramos agora um *fixed-data* $(\eta \to F) = \cup_{j=0}^{m}(\eta^{n-j} \to F^j)$. O inverso multiplicativo de $(1+c)$ em $H^*(\mathbb{R}P(\eta))$ é dado por

$$(1+c)^{-1} = \frac{1}{1+c} = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1},$$

lembrando que $c^t = 0$ se $t > n-1$, pois $\mathbb{R}P(\eta) = \cup_{j=0}^{m} \mathbb{R}P(\eta^{n-j})$ é uma variedade fechada $(n-1)$-dimensional. Mais geralmente, para qualquer inteiro d, $(1+c)^d$ pode ser escrito na forma

$$(1+c)^d = 1 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_{n-1} c^{n-1},$$

para certos $a_i \in \{0,1\}$. Assim, fixado um inteiro d qualquer,

$$(1+c)^d \cdot W(\mathbb{R}P(\eta)) = (1 + a_1 c + \cdots a_{n-1} c^{n-1})\,(1 + w_1(\mathbb{R}P(\eta)) + \cdots + w_{n-1}(\mathbb{R}P(\eta)))$$

é tal que sua parte homogênea de grau i é um polinômio homogêneo de grau i nas classes $w_{j's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e c. Logo, escrevendo

$$(1+c)^d \cdot W(\mathbb{R}P(\eta^{n-j})) = 1 + w_{j,1} + w_{j,2} + \cdots + w_{j,n-1},$$

com $w_{j,i} \in H^i(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))$, temos que

$$\sum_{j=0}^{m} \langle w_{j,i_1} w_{j,i_2} \cdots w_{j,i_s} c^t, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))\rangle = 0,$$

para cada partição $i_1 + \cdots + i_s + t = n-1$.

A discussão acima fornece então a técnica de efetuar multiplicações por potências inteiras de $1+c$ (positivas ou negativas) para obter equações com números característicos. Essa técnica foi bastante explorada por *Pergher* e *Stong*, em [28], através das chamadas classes $W[r]$. A idéia central é que cada parte homogênea de $W(\mathbb{R}P(\eta))$ pode ser algebricamente complicada, e a multiplicação por potências de $(1+c)$ pode dar origem a partes homogêneas mais simples.

1.8.2 Quadrados de *Steenrod*

As operações cohomológicas Sq^i, conhecidas como *quadrados de Steenrod*, são completamente caracterizadas pelas quatro propriedades a seguir (onde X e Y são espaços topológicos arbitrários).

(1) Para cada n e cada i inteiros não negativos,

$$Sq^i : H^n(X) \longrightarrow H^{n+i}(X)$$

define um homomorfismo aditivo.

(2) (*Naturalidade*) Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y) & \xrightarrow{f^*} & H^n(X) \\ {\scriptstyle Sq^i}\downarrow & & {\scriptstyle Sq^i}\downarrow \\ H^{n+i}(Y) & \xrightarrow{f^*} & H^{n+i}(X) \end{array}$$

é comutativo.

(3) Se $a \in H^n(X)$ então $Sq^0(a) = a$, $Sq^n(a) = a^2$ e $Sq^i(a) = 0$ para cada $i > n$.

(4) (*Fórmula de Cartan*) Se a e b são elementos homogêneos de $H^*(X)$ e ab denota o produto *cup*, então vale a identidade

$$Sq^i(ab) = \sum_{j=0}^{i} Sq^j(a)Sq^{i-j}(b).$$

Em relação às classes características de um fibrado vetorial, temos o

Teorema 1.8.2 (*Fórmula de Wu*). *Se $\eta^k \to X$ é um fibrado vetorial sobre um espaço X paracompacto, e $W(\eta^k) = 1 + w_1 + \cdots + w_k$ denota a classe de Stiefel-Whitney de η^k, então:*

$$Sq^i(w_j) = \sum_{t=0}^{i} \begin{pmatrix} j-i-1+t \\ t \end{pmatrix} w_{i-t}w_{j+t},$$

para $i < j$ (vide, por exemplo, [13]). □

Consideramos agora um *fixed-data* $(\eta \to F) = \cup_{j=0}^{m}(\eta^{n-j} \to F^j)$ e vejamos como aplicar as operações Sq^i para obter equações envolvendo números característicos do fibrado linha $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta)$. Seja $p(c, w(\mathbb{R}P(\eta)))$ um polinômio homogêneo qualquer, de grau $t \leq n-1$, nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e c. Aplicando as fórmulas de *Cartan* e de *Wu*, e lembrando que cada Sq^j é um homomorfismo aditivo, vemos que $Sq^{n-1-t}\left(p(c, w(\mathbb{R}P(\eta)))\right)$ é também um polinômio homogêneo, agora de grau $n-1$, nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e c. Deste modo, concluímos que

$$\sum_{j=0}^{m} \left\langle Sq^{n-1-t}\left(p(c, w(\mathbb{R}P(\eta^{n-j})))\right), \sigma(\mathbb{R}P(\eta^{n-j}))\right\rangle = 0.$$

A idéia central a respeito da utilização dos quadrados de *Steenrod*, neste contexto, é que eles possibilitam mostrar que certos elementos simples de $H^*(\mathbb{R}P(\eta))$ são de fato polinômios nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(\eta))$ e c, o que poderia ser extremamente difícil mostrar diretamente.

1.9 Estabilidade e o operador Γ

A soma de *Whitney* de um fibrado $(\eta \to F) = \cup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \to F^j)$ e o k-fibrado trivial $\mathbb{R}^k \to F$ é denotada por $(\eta \oplus \mathbb{R}^k \to F) = \cup_{j=0}^{n}(\eta^{n-j} \oplus \mathbb{R}^k \to F^j)$. Dizemos que o fibrado $\eta \oplus \mathbb{R}^k$ possui k *secções.*

Nesta seção, apresentaremos resultados que permitem obter um *fixed-data* adicionando ou removendo secções de um outro *fixed-data.*

Inicialmente, definiremos o $\mathcal{N}_*$-homomorfismo $\Gamma : \mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{I}_{*+1}(\mathbb{Z}_2)$ de grau $+1$. Dada uma involução (T, M^n) em uma variedade fechada M^n, considere no produto cartesiano $S^1 \times M^n$ o seguinte par de involuções comutantes:

$$T_1(z, x) = (\overline{z}, x); \qquad\qquad T_2(z, x) = (-z, T(x)),$$

onde $\overline{z}$ indica o conjugado complexo de z. Como T_2 é livre de pontos fixos, o quociente $V^{n+1} = (S^1 \times M^n)/T_2$ é ainda uma variedade fechada; além disso, em V^{n+1}, existe uma involução τ induzida por T_1. Defina $\Gamma[T, M^n] = [\tau, V^{n+1}]$.

Teorema 1.9.1. *Se $\eta \to F$ é o fixed-data da involução (T, M^n), então o fixed-data de $\Gamma(T, M^n) = (\tau, V^{n+1})$ é a união disjunta $(\eta \oplus \mathbb{R} \to F) \cup (\mathbb{R} \to M^n)$.* [5, p. 90, 25.3] □

Corolário 1.9.2. *Seja (T, M^n) uma involução com fixed-data $\eta \to F$. Então, existe involução (S, W^{n+1}) com fixed-data $\eta \oplus \mathbb{R} \to F$ se, e somente se, M^n borda. Neste caso, $[S, W^{n+1}] = \Gamma[T, M^n]$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se $\eta \oplus \mathbb{R}$ é um *fixed-data*, então $\partial[\eta \oplus \mathbb{R}] = 0$; em particular, $[\mathbb{R}P(\eta \oplus \mathbb{R})] = 0$. Daí, para concluir que $[M^n] = 0$, basta aplicar o seguinte fato (vide [5, p.78, 22.2]): *se $\eta \to F$ é o fixed-data de uma involução (T, M^n), então $[\mathbb{R}P(\eta \oplus \mathbb{R})] = [M^n]$ em $\mathcal{N}_n$.*

($\Leftarrow$) Se M^n borda então o fibrado linha trivial $\mathbb{R} \to M^n$ borda e, portanto,

$$[\eta \oplus \mathbb{R} \to F] = [\eta \oplus \mathbb{R} \to F] + [\mathbb{R} \to M^n].$$

Agora, pelo teorema anterior, $(\eta \oplus \mathbb{R} \to F) \cup (\mathbb{R} \to M^n)$ é um *fixed-data*; assim, lembrando que um fibrado bordante a um *fixed-data* também pode ser realizado como um *fixed-data*, concluímos que existe uma involução (S, W^{n+1}) tendo $\eta \oplus \mathbb{R} \to F$ como *fixed-data.*

A relação $[S, W^{n+1}] = \Gamma[T, M^n]$ segue da igualdade $j_*[S, W^{n+1}] = j_*\Gamma[T, M^n]$, uma vez que j_* é um monomorfismo. □

Por outro lado, temos o

Teorema 1.9.3 (*Teorema da Estabilidade para Involuções*). *Se $\eta \oplus \mathbb{R} \to F$ é o fixed-data de uma involução, então $\eta \to F$ também pode ser realizado como fixed-data de uma involução.* [5, p. 85, 24.3] $\square$

Seja (T, M^n) uma involução em uma variedade fechada M^n, com *fixed-data* $\eta \to F$. Suponha $[M^n] = 0$. Considere

$$J = \{j : \eta \oplus \mathbb{R}^j \to F \text{ é um } \textit{fixed-data}\}$$

e a lista

$$\{[\eta \oplus \mathbb{R}^j \to F] : j \in J\}.$$

Observe que $1 \in J$ e, por estabilidade, J é um conjunto de naturais consecutivos. Agora, usando o Corolário 1.9.2 iterativamente, obtemos o conjunto

$$\mathcal{A} = \{\Gamma^j[T, M^n] : j \in J\},$$

onde cada elemento $\Gamma^j[T, M^n]$ possui um representante com *fixed-data* $\eta \oplus \mathbb{R}^j \to F$; e ainda, para cada $j \geq 1$, temos:

$$\Gamma^j[T, M^n] \in \mathcal{A} \qquad \text{se, e somente se,} \qquad \varepsilon\Gamma^{j-1}[T, M^n] = 0 \text{ em } \mathcal{N}_{n+j-1},$$

com $\varepsilon : \mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2) \longrightarrow \mathcal{N}_*$ denotando o homomorfismo de grau zero dado por $\varepsilon[S, V^r] = [V^r]$. Se $[T, M^n]$ borda equivariantemente, então o conjunto $\mathcal{A}$ é infinito com cada classe sendo nula. Se $[T, M^n]$ não borda, então $\mathcal{A}$ é necessariamente finito; isso decorre do famoso 5/2-Teorema de [2] e sua versão reforçada de [11]:

Teorema 1.9.4. *Se a involução $[S, V^r]$ não borda, então $r \leq (5/2)dimF_S$, onde $dimF_S$ é a maior dimensão entre as dimensões das componentes não vazias do conjunto F_S de pontos fixos de S.* $\square$

Assim, na situação anterior, no caso em que F não borda, o conjunto J é finito da forma $J = \{0, 1, \ldots, \ell\}$, com o limitante $\ell \geq 1$ sendo o inteiro tal que:

$$\varepsilon\Gamma^i[T, M^n] = 0 \text{ para cada } 0 \leq i < \ell \quad \text{e} \quad \varepsilon\Gamma^\ell[T, M^n] \neq 0;$$

ou ainda, $\eta \oplus \mathbb{R}^\ell \to F$ é um *fixed-data*, enquanto que $\eta \oplus \mathbb{R}^{\ell+1}$ não o é.

1.10 Involuções e a característica de *Euler* módulo 2

Se X é um CW-complexo finito definimos

Definição 1.10.1. A *característica de Euler módulo 2* é o inteiro

$$\chi(X) = \sum(-1)^i dim H_i(X) = \sum(-1)^i dim H^i(X)$$

reduzido módulo 2. Denotamos $\chi(X)$ mod 2 por $\overline{\chi(X)}$.

Se M^n é uma variedade fechada de dimensão n ímpar, então segue da dualidade de *Poincaré* que $\chi(M^n) = 0$.

A característica de *Euler* módulo 2 é um invariante de bordismo. Este fato decorre do Corolário 1.2.5 juntamente com o

Teorema 1.10.2. *Seja M^n uma variedade fechada. Então, $\overline{\chi(M^n)} \in \mathbb{Z}_2$ coincide com o número característico $\langle w_n(M^n), \sigma(M^n)\rangle$.* [13, p. 130, 11.12] □

No contexto de involuções e conjuntos de pontos fixos, destacamos os seguintes resultados:

Teorema 1.10.3. *Seja (T, M^n) involução em uma variedade fechada, com conjunto de pontos fixos $F = \cup_{j=0}^n F^j$. Então*

$$\overline{\chi(M^n)} = \overline{\chi(F)} = \sum_{j=0}^{n} \overline{\chi(F^j)}.$$

[5, p. 99, 28.2] □

Teorema 1.10.4. *Seja (T, M^{2n}) uma involução em uma variedade fechada M^{2n} com fixed-data*

$$\eta \to F = \bigcup_{j=0}^{2n-1} (\eta^{2n-j} \to F^j).$$

Se $\overline{\chi(M^{2n})} = 1$, então existe $n \leq j < 2n$ tal que $w_{2n-j}(\eta^{2n-j}) \neq 0 \in H^{2n-j}(F^j)$.
[5, p. 100, 28.3] □

1.11 Fórmula de *Conner*

Seja $\eta^k \to M^n$ um fibrado vetorial (de dimensão $k \geq 1$) sobre uma variedade M^n fechada e conexa. Denote

$$W(\eta^k) = 1 + v_1 + \cdots + v_k.$$

Na Seção 1.6 vimos que $H^*(\mathbb{R}P(\eta^k))$ é um $H^*(M^n)$-módulo livre graduado com base $\{1, c, c^2, \ldots, c^{k-1}\}$ sujeita à relação $c^k = v_1c^{k-1} + v_2c^{k-2} + \cdots + v_k$. Em particular, se $a_n \in H^n(M^n)$ e $a_nc^{k-1} = 0$ então necessariamente $a_n = 0$. Assim, como $H^n(M^n)$ e $H^{n+k-1}(\mathbb{R}P(\eta^k))$ são isomorfos a $\mathbb{Z}_2$, vale a igualdade

$$\langle a_n, \sigma(M^n)\rangle = \langle a_nc^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle.$$

Se $a_s \in H^s(M^n)$ com $n < s \leq n+k-1$, então $\langle a_sc^{n+k-1-s}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = 0$, pois $a_s = 0$.

Vejamos agora como calcular $\langle a_sc^{n-s+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle$ no caso em que $0 \leq s < n$. Denotamos por $\overline{v}_i \in H^i(M^n)$ o termo homogêneo de grau i do inverso de $W(\eta^k)$:

$$\overline{W}(\eta^k) = \frac{1}{W(\eta^k)} = 1 + \overline{v}_1 + \cdots + \overline{v}_n.$$

Observando a forma com que cada $\overline{v}_i$ é construída (vide Observação 1.8.1) e usando a relação $c^k = v_1c^{k-1} + v_2c^{k-2} + \cdots + v_k$ iterativamente, verifica-se que, para cada $j \geq 1$,

$$c^{j+k-1} = \overline{v}_jc^{k-1} + \sum_{t=1}^{k-1} b_{j+t}c^{k-1-t},$$

para certos $b_{j+t} \in H^{j+t}(M^n)$. Em particular,

$$a_sc^{n-s+k-1} = a_s\left(\overline{v}_{n-s}c^{n-s+k-1} + \sum_{t=1}^{k-1} b_{n-s+t}c^{k-1-t}\right) = a_s\overline{v}_{n-s}c^{k-1},$$

pois para $t \geq 1$, $a_sb_{n-s+t} \in H^{n+t}(M^n) = 0$. Deste modo conclui-se que: para cada $0 \leq s \leq n$,

$$\langle a_sc^{n-s+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \langle a_s\overline{v}_{n-s}, \sigma(M^n)\rangle.$$

A fórmula acima é conhecida como a *Fórmula de Conner* (vide [4]).

1.12 Teorema de *Lucas*

Em várias computações envolvendo números característicos, é importante determinar a paridade de coeficientes binomiais $\binom{a}{b}$. Neste contexto o *Teorema de Lucas* é extremamente útil.

Definição 1.12.1. Seja p um número primo. Dado um natural n, definimos sua *expansão p-ádica* escrevendo n na forma

$$n = n_kn_{k-1}\cdots n_1n_0 = n_kp^k + n_{k-1}p^{k-1} + \cdots + n_1p + n_0, \qquad (0 \leq n_i \leq p-1).$$

Por exemplo, para $p = 2$, temos a expansão *diádica* (2-ádica) de n dada por:

$$n = n_k n_{k-1} \cdots n_1 n_0 = n_k 2^k + n_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + n_1 2 + n_0 \qquad (n_i = 0 \text{ ou } 1),$$

que é equivalente a escrever n como uma soma de potências distintas de 2. Se $n_t = 1$, dizemos que 2^t *aparece na expansão diádica de* n, ou simplesmente, 2^t *aparece em* n.

Teorema 1.12.2 (Teorema de Lucas). *Seja p um número primo e tome a e b naturais em suas expansões p-ádicas:*

$$a = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \cdots + a_1 p + a_0, \qquad (0 \leq a_i \leq p-1),$$

$$b = b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0 = b_k p^k + b_{k-1} p^{k-1} + \cdots + b_1 p + b_0, \qquad (0 \leq b_i \leq p-1).$$

Então

$$\binom{a}{b} \equiv \binom{a_0}{b_0}\binom{a_1}{b_1} \cdots \binom{a_{k-1}}{b_{k-1}}\binom{a_k}{b_k} \qquad (\mathit{mod}\ p),$$

seguindo a convenção $\binom{a}{b} = 0$ *sempre que* $a < b$. [12] □

Em nossos cálculos, faremos uso do Teorema de *Lucas* tomando $p = 2$. Em todo este trabalho, a classe de um inteiro a em $\mathbb{Z}_2$ será denotada por $\overline{a}$.

Teorema 1.12.3. *Tome naturais a e b em expansão diádica:* $(a_i, b_i = 0 \ \mathit{ou}\ 1)$

$$a = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + a_1 2 + a_0,$$

$$b = b_k b_{k-1} \cdots b_1 b_0 = b_k 2^k + b_{k-1} 2^{k-1} + \cdots + b_1 2 + b_0.$$

Sejam $A = \{i : a_i = 1\}$ e $B = \{i : b_i = 1\}$. Então

$$\overline{\binom{a}{b}} = 1 \qquad \textit{se, e somente se,} \qquad B \subseteq A.$$

Demonstração: É um corolário do teorema anterior, observando que

$$\overline{\binom{0}{0}} = \overline{\binom{1}{0}} = \overline{\binom{1}{1}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \overline{\binom{0}{1}} = 0.$$ □

Em outras palavras: $\overline{\binom{a}{b}} = 1$ se, e somente se, toda potência de 2 que aparece na expansão diádica de b também aparece na de a.

Corolário 1.12.4. *Sejam a e b naturais quaisquer com $\overline{\binom{a}{b}} = 1$. Se 2^t é uma potência qualquer que aparece na expansão diádica de b então $\overline{\binom{a}{b-2^t}} = 1$.*

Demonstração: Sejam A e B os conjuntos formados pelas potências de 2 que aparecem nas expansões diádicas de a e b, respectivamente. Pelas hipóteses, temos $t \in B \subseteq A$. Assim, $B' = \{i : 2^i$ aparece na expansão diádica de $b - 2^t\} = B \setminus \{t\} \subseteq B \subseteq A$, e a demonstração segue. $\square$

Corolário 1.12.5. $\overline{\binom{a+c}{c}} = 1$ *se, e somente se,* a *e* c *possuem expansões diádicas disjuntas.*

Demonstração: Sejam A e C os conjuntos formados pelas potências de 2 que aparecem nas expansões diádicas de a e c, respectivamente.
($\Rightarrow$) Se $A \cap C \neq \emptyset$, considere 2^t a menor das potências de $A \cap C$. Então 2^t não aparece na soma $a + c$ (mas aparece em c).
($\Leftarrow$) Se $A \cap C = \emptyset$ então o conjunto das potências de 2 que aparecem em $a + c$ é dado pela união $A \cup C$.
Pelo Teorema 1.12.3, a demonstração está concluída. $\square$

Corolário 1.12.6. *Se* b *e* c *são naturais positivos que possuem expansões diádicas disjuntas então, para qualquer* a *natural, temos*

$$\overline{\binom{a}{b+c}} = \overline{\binom{a}{b}\binom{a}{c}}.$$

Demonstração: Como b e c possuem expansões diádicas disjuntas, uma potência 2^t aparece em $b + c$ se, e somente se, 2^t aparece em b ou em c. Assim, temos:
se $\overline{\binom{a}{b+c}} = 1$ então toda potência de 2 que aparece em b (analogamente em c) aparece em a e, portanto, $\overline{\binom{a}{b}} = \overline{\binom{a}{c}} = 1$;
se $\overline{\binom{a}{b+c}} = 0$ então existe pelo menos uma potência de 2 que aparece em b ou em c, mas que não aparece em a e, portanto, $\overline{\binom{a}{b}} = 0$ ou $\overline{\binom{a}{c}} = 0$. $\square$

Observação 1.12.7. Sejam a e b naturais ímpares tais que sua soma é uma potência de 2, digamos $a + b = 2^{r+1}$. Para cada $1 \leq t \leq r$, vemos que: ou 2^t aparace na expansão diádica de a, ou 2^t aparece na expansão diádica de b. Logo, pelo Teorema 1.12.3,

$$\overline{\binom{a}{2^t}} + \overline{\binom{b}{2^t}} = 1, \qquad \text{para } t = 1, 2, \ldots, r.$$

Observação 1.12.8. Em várias computações que desenvolveremos nos próximos capítulos, usaremos propriedades básicas dos coeficientes binomiais, que valem no anel dos inteiros $\mathbb{Z}$ e, conseqüentemente, em $\mathbb{Z}_2$. Convém destacar:

(a) (relação de *Stiefel*) para quaisquer naturais n, m, temos

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1};$$

(b) para quaisquer naturais n, m, k,

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}.$$

Note que (b) é equivalente à igualdade de polinômios $(1+X)^n(1+X)^m = (1+X)^{n+m}$ em $\mathbb{Z}[X]$.

1.13 Sobre os espaços projetivos $K_dP(n)$

Enunciaremos a seguir alguns fatos bastante conhecidos, relacionados especificamente aos espaços projetivos $K_dP(n)$.

Lembramos que $K_dP(n)$ denota o espaço n-projetivo real (se $d = 1$), complexo (se $d = 2$) ou quaterniônico (se $d = 4$). Cada $K_dP(n)$ é uma variedade fechada e conexa, de dimensão $d \cdot n$, e pode ser vista como o espaço quociente

$$K_dP(n) = \frac{K_d^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim} = \{[x] : 0 \neq x \in K_d^{n+1}\},$$

onde a relação de equivalência $\sim$ é dada por: $(x, y \in K_d^{n+1} \setminus \{0\})$

$$x \sim y \qquad \text{se, e somente se,} \qquad x = a \cdot y \text{ para algum } a \in K_d \setminus \{0\}.$$

Sabe-se que: $H^k(K_dP(n)) = \mathbb{Z}_2$ para $k = 0, d, 2d, \ldots, n \cdot d$, e $H^k(K_dP(n)) = 0$ para os demais valores de k. Além disso, a estrutura multiplicativa do anel $H^*(K_dP(n))$ está completamente determinada: se denotarmos por α_d o gerador de $H^d(K_dP(n))$, então α_d^k é o gerador de $H^{k\cdot d}(K_dP(n))$ (para $k = 1, 2, \ldots, n$).

Fato 1.13.1. *A classe de Stiefel-Whitney do espaço projetivo $K_dP(n)$ é dada por*

$$W(K_dP(n)) = (1 + \alpha_d)^{n+1},$$

onde α_d é o gerador de $H^d(K_dP(n))$. [13] □

No Exemplo 1.2.4, comentamos um resultado básico em teoria de bordismo: $\mathbb{R}P(n)$ borda se, e somente se, n é ímpar. Tal resultado também vale para os casos complexo e quaterniônico, ou seja:

Proposição 1.13.2. *Para $d = 1, 2$ ou 4, $[K_dP(n)] = 0 \in \mathcal{N}_{dn}$ se, e somente se, n é ímpar.*

Demonstração: Se n é ímpar, então $n + 1 = 2q$ (para um certo natural q) e então

$$W(K_dP(n)) = (1 + \alpha_d)^{n+1} = (1 + \alpha_d)^{2q} = (1 + \alpha_d^2)^q.$$

Assim, para cada j que não é um múltiplo de $2d$, a j-ésima classe de *Stiefel-Whitney* $w_j(K_dP(n))$ é necessariamente nula. Agora, note que em qualquer partição $j_1 + j_2 + \cdots + j_s = nd$ deve existir algum j_i que não seja múltiplo de $2d$, pois n é ímpar. Portanto,

$$\langle w_{j_1}(K_dP(n))w_{j_2}(K_dP(n)) \cdots w_{j_s}(K_dP(n)), \sigma(K_dP(n))\rangle = 0.$$

Se n é par, então $w_d(K_dP(n)) = \alpha_d$ é o gerador de $H^d(K_dP(n))$. Daí, o número característico

$$\langle w_d^n(K_dP(n))), \sigma(K_dP(n))\rangle = \langle \alpha_d^n, \sigma(K_dP(n))\rangle$$

é não nulo. □

Fato 1.13.3. *Para cada natural n e cada $d = 1, 2$ ou 4, existe um d-fibrado canônico $\gamma^d \to K_dP(n)$ sobre o espaço projetivo $K_dP(n)$, com espaço total $\gamma^d = \{([x], y) : x \in K_d^{n+1} \setminus \{0\}, y \in [x]\}$. A classe total de Stiefel-Whitney de $\gamma^d \to K_dP(n)$ é*

$$W(\gamma^d) = 1 + \alpha_d,$$

onde $0 \neq \alpha_d \in H^d(K_dP(n))$. [13] □

Observação 1.13.4. Fixe m, n naturais, com $m < n$, e $d = 1, 2$ ou 4. O espaço projetivo $K_dP(m)$ pode ser visto como uma subvariedade do espaço projetivo $K_dP(n)$. Ocorre que o fibrado normal de $K_dP(m)$ em $K_dP(n)$ é a soma de *Whitney*

$$(n - m)\gamma^d \to K_dP(m)$$

de $n - m$ cópias do d-fibrado canônico $\gamma^d \to K_dP(m)$.

Da estrutura do anel de *Grothendieck* $KO(K_dP(n))$ segue o

Fato 1.13.5. *Seja $\eta^k \to K_dP(n)$ um k-fibrado vetorial qualquer sobre um espaço projetivo $K_dP(n)$, com $d = 1, 2$ ou 4. Então, a classe de Stiefel-Whitney de η^k é da forma*

$$W(\eta^k) = (1 + \alpha_d)^p,$$

para algum natural p, onde α_d denota o gerador de $H^d(K_dP(n))$. [1, K-teoria real de espaços projetivos] □

Observação 1.13.6. Seja $\eta^k \to K_dP(n)$ um k-fibrado vetorial sobre um espaço projetivo $K_dP(n)$ qualquer. Tome um natural p tal que

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p.$$

(a) Seja 2^s uma potência qualquer com $2^s > n$. Então

$$(1+\alpha_d)^{2^s} = 1 + \alpha_d^{2^s} = 1,$$

pois $\alpha_d^{2^s} \in H^{d2^s}(K_dP(n)) = 0$. Logo, definindo $p' = 2^s - p$, a classe dual $\overline{W}(\eta^k) = \frac{1}{W(\eta^k)}$ é dada por $\overline{W}(\eta^k) = (1+\alpha_d)^{p'}$.

Observe ainda que, pela Fórmula de *Conner* (vide Seção 1.11), temos

$$\left\langle \alpha_d^{n-j} c^{k-1+dj}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle = \left\langle \alpha_d^{n-j} \overline{w}_{dj}(\eta^k), \sigma(K_dP(n)) \right\rangle = \left\langle \binom{p'}{j} \alpha_d^n, \sigma(K_dP(n)) \right\rangle = \overline{\binom{p'}{j}},$$

para cada $j = 0, 1, \dots, n$.

(b) Se t é o natural tal que $2^t \leq n < 2^{t+1}$, então podemos assumir $p < 2^{t+1}$. De fato, dividindo p por 2^{t+1} escrevemos $p = 2^{t+1}q + r$, para certos naturais q e r, $0 \leq r < 2^{t+1}$. Daí, $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p = (1+\alpha_d)^{2^{t+1}q+r} = (1+\alpha_d^{2^{t+1}})^q(1+\alpha_d)^r = (1+\alpha_d)^r$.

1.14 Algumas involuções especiais

Apresentaremos aqui alguns modelos de involuções que possuem conjunto de pontos fixos sendo uma união disjunta $K_dP(m) \cup K_dP(n)$ de dois espaços projetivos sobre um mesmo anel de divisão K_d. Fixemos então $d = 1, 2$ ou 4 e dois naturais m, n.

Conforme observamos no Capítulo 0, se (T, M^r) e (S, V^r) são involuções em variedades fechadas de mesma dimensão r com $F_T = K_dP(m)$ e $F_S = K_dP(n)$, então $(T \cup S, M^r \cup V^r)$ é uma involução na variedade fechada $M^r \cup V^r$ com $F_{T\cup S} = K_dP(m) \cup K_dP(n)$. Vale frisar que, dependendo dos valores de m e n, tal dimensão r pode não existir (como veremos nos próximos capítulos).

Definimos a involução

$$\tau_n^m : K_dP(m+n+1) \longrightarrow K_dP(m+n+1)$$

dada, em coordenadas homogêneas, por:

$$\tau_n^m[x_0, x_1, \dots, x_m, y_0, y_1, \dots, y_n] = [-x_0, -x_1, \dots, -x_m, y_0, y_1, \dots, y_n].$$

Note que o conjunto de pontos fixos de τ_n^m é a união disjunta $F = K_dP(m) \cup K_dP(n)$. Além disso, pelo que comentamos na Observação 1.13.4,

$$(n+1)\gamma^d \to K_dP(m) \qquad \cup \qquad (m+1)\gamma^d \to K_dP(n)$$

é o *fixed-data* da involução $(\tau_n^m, K_dP(m+n+1))$. Em particular, para $m = 0$, a involução $(\tau_n^0, K_dP(n+1))$ possui

$$\gamma^d \to K_dP(n) \qquad \cup \qquad \mathbb{R}^{(n+1)d} \to *$$

como *fixed-data*, uma vez que $K_dP(0) = \{ponto\} = *$.

Observação 1.14.1. Se $m+n+1$ é ímpar, podemos aplicar iterativamente o operador Γ em $[\tau_n^m, K_dP(m+n+1)]$ para obter outras involuções com conjunto de pontos fixos $F = K_dP(m) \cup K_dP(n)$, conforme discutimos na Seção 1.9. Em particular, no caso em que m e n são pares distintos, F é não bordo e, portanto, existe k com $\varepsilon\Gamma^k[\tau_n^m, K_dP(m+n+1)] \neq 0$; o menor natural com tal propriedade será denotado por $h_d(m,n)$. Assim, em termos de fibrados sobre F, temos que: $((n+1)\gamma^d \oplus \mathbb{R}^i \to K_dP(m)) \cup ((m+1)\gamma^d \oplus \mathbb{R}^i \to K_dP(n))$ é um *fixed-data* se, e somente se, $0 \leq i \leq h_d(m,n)$.

Observação 1.14.2. As involuções que fixam a união disjunta de um espaço projetivo com um ponto podem ser utilizadas para a obtenção de involuções com conjunto de pontos fixos da forma $K_dP(m) \cup K_dP(n)$. De fato, suponha que para certo natural r existam duas involuções (M^r, T) e (V^r, S) com $F_T = K_dP(m) \cup *$ e $F_S = K_dP(n) \cup *$ (conforme veremos nos capítulos seguintes, há casos, os quais dependem dos valores de m e n, em que não existe tal dimensão comum r). Se $(\mathbb{R}^r \to *) \cup (\eta^{r-dn} \to K_dP(n))$ e $(\mathbb{R}^r \to *) \cup (\xi^{r-dm} \to K_dP(m))$ são os respectivos *fixed-data* de (T, M^r) e (S, V^r), então

$$j_*([M^r,T]+[V^r,S]) = \begin{bmatrix} \eta^{r-dn} \\ \downarrow \\ K_dP(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^{r-dm} \\ \downarrow \\ K_dP(m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta^{r-dn} \\ \downarrow \\ K_dP(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^{r-dm} \\ \downarrow \\ K_dP(m) \end{bmatrix}.$$

Logo, a classe de bordismo da união disjunta $(M^r \cup V^r, T \cup S)$ contém uma involução com conjunto de ponto fixos $F = K_dP(n) \cup K_dP(m)$.

Por exemplo, para qualquer $n > 0$, a classe $\Gamma[\tau_{2n}^0, \mathbb{R}P(2n+1)] + [\tau_{2n+1}^0, \mathbb{R}P(2n+2)]$ em $\mathcal{I}_{2n+2}(\mathbb{Z}_2)$ contém uma involução fixando $\mathbb{R}P(2n) \cup \mathbb{R}P(2n+1)$.

Capítulo 2

$\mathbb{C}P(n)$ e $\mathbb{H}P(n)$ como conjuntos de pontos fixos

2.1 Introdução

Este capítulo será dedicado à classificação, salvo bordismo, das involuções que possuem um dado espaço projetivo $F = K_dP(n)$ como conjunto de pontos fixos.

Conforme mencionamos no Capítulo 0, o estudo do caso em que $d = 1$, $F = \mathbb{R}P(n)$, foi iniciado por *Conner* e *Floyd* em [6] e completamente respondido por *Stong* em [32]. A saber: se n é ímpar, então qualquer involução fixando $F = \mathbb{R}P(n)$ borda equivariantemente; se n é par, então as únicas involuções, salvo bordismo, que possuem $F = \mathbb{R}P(n)$ como conjunto de pontos fixos são $(Id, \mathbb{R}P(n))$ e $(twist, \mathbb{R}P(n) \times \mathbb{R}P(n))$.

Nosso objetivo aqui é verificar que os resultados acima também são válidos para os casos complexo e quaterniônico. Mais precisamente, mostraremos os seguintes teoremas:

Teorema 2.1. *Seja $K_dP(2n+1)$ um espaço projetivo qualquer, com $d = 1, 2$ ou 4. Se (T, M^r) é uma involução com conjunto de pontos fixos $F = K_dP(2n+1)$, então (T, M^r) borda equivariantemente.*

Teorema 2.2. *Seja $K_dP(2n)$ um espaço projetivo qualquer, onde $d = 1, 2$ ou 4 e $n > 0$. Se (T, M^r) é uma involução, em uma variedade fechada M^r, $r > 2nd$, com conjunto de pontos fixos $F = K_dP(2n)$, então $[T, M^r] = [twist, K_dP(2n) \times K_dP(2n)]$.*

2.2 Prova do Teorema 2.1

Conner e *Floyd* mostraram, em [6], o caso particular do Teorema 2.1 em que $d = 1$. A seguir, verificaremos que os mesmos tipos de argumentos podem ser usados para provar o caso geral: $d = 1, 2$ ou 4.

Lema 2.2.1. *Seja $\eta^k \to K_dP(2n+1)$ um k-fibrado vetorial sobre um espaço projetivo $K_dP(2n+1)$, com $d = 1, 2$ ou 4 e $n \geq 0$. Seja p um natural tal que $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p$, onde $0 \neq \alpha_d \in H^d(K_dP(2n+1))$. Então o fibrado $\eta^k \to K_dP(2n+1)$ borda se, e somente se, p é par.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Se p é par, digamos $p = 2q$, então $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p = (1+\alpha_d^2)^q$. Assim, como $W(K_dP(2n+1)) = (1+\alpha_d)^{2n+2} = (1+\alpha_d^2)^{n+1}$, vemos que

$$w_i(\eta^k) = 0 = w_i(K_dP(2n+1))$$

para todo i que não é múltiplo de $2d$. Logo, todo monômio da forma

$$w_{i_1}(\eta^k)\cdots w_{i_r}(\eta^k)w_{j_1}(K_dP(2n+1))\cdots w_{j_s}(K_dP(2n+1)) \in H^{(2n+1)d}(K_dP(2n+1))$$

deve ser nulo.
($\Rightarrow$) Se p é ímpar, o número característico associado ao monômio $w_d^{2n+1}(\eta^k) = \alpha_d^{2n+1}$ é não nulo. $\square$

Demonstração do Teorema 2.1. Seja (T, M^r) uma involução qualquer com conjunto de pontos fixos $F = K_dP(2n+1)$. Denotamos o seu *fixed-data* por $\eta^k \to K_dP(2n+1)$, onde $k = r - (2n+1)d$.

Observe que o caso $r = (2n+1)d$ é trivial: $[T, M^{(2n+1)d}] = [Id, K_dP(2n+1)] = 0$ (vide Exemplo 1.7.5). Assumimos então $k > 0$.

Pelo Fato 1.13.5, existe p natural tal que $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p$, onde α_d é o gerador de $H^d(K_dP(2n+1))$. Mostraremos que p é par. Para isso, usaremos o fato de que todos os números característicos do fibrado *splitting* $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ são nulos (vide Corolário 1.7.9 da seqüência de *Conner e Floyd*).

Por *Borel-Hirzebruch* (Teorema 1.6.4), a classe de *Stiefel-Whitney* da variedade $(r-1)$-dimensional $\mathbb{R}P(\eta^k)$ é dada por:

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha_d)^{2n+2}\left((1+c)^k + (1+c)^{k-d}\overline{p}\alpha_d + (1+c)^{k-2d}\overline{\binom{p}{2}}\alpha_d^2 + \cdots\right).$$

Assim, vemos que

$$w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \overline{\binom{k}{d}}\, c^d + \overline{p}\alpha_d.$$

Isso nos diz que $\overline{p}\alpha_d$ pode ser escrito como o polinômio homogêneo

$$\overline{p}\alpha_d = w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) + \overline{\binom{k}{d}}\, c^d.$$

Consideramos então o número característico

$$\left\langle \left(w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) + \overline{\binom{k}{d}}\, c^d \right)^{2n+1} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle = \langle \overline{p}\alpha_d^{2n+1} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle$$

de $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$, o qual já sabemos ser nulo. Agora, como $\alpha_d^{2n+1}c^{k-1}$ é o elemento não nulo de $H^{r-1}(\mathbb{R}P(\eta^k))$ (vide Seção 1.11), a igualdade

$$\langle \overline{p}\alpha_d^{2n+1} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = 0$$

implica em $\overline{p} = 0$, ou seja, p é par. Pelo lema anterior, isso significa que $\eta^k \to K_dP(2n+1)$ borda e, portanto, $[T, M^r] = 0 \in \mathcal{I}_r(\mathbb{Z}_2)$, como queríamos demonstrar. □

Fixe um espaço projetivo ímpar $K_dP(2n+1)$ qualquer, com $d = 1, 2$ ou 4. Observe que, para cada $k \geq 0$, o k-fibrado trivial $\mathbb{R}^k \to K_dP(2n+1)$ borda e, portanto, pode ser realizado como um *fixed-data* (vide Exemplo 1.7.10). Ou seja, para cada $r \geq d(2n+1)$, a classe $0 \in \mathcal{I}_r(\mathbb{Z}_2)$ contém uma involução fixando $K_dP(2n+1)$. O Teorema 2.1 nos diz que $\{0 \in \mathcal{I}_r(\mathbb{Z}_2) : r \geq d(2n+1)\}$ é a coleção das classes de bordismo de *todas* as involuções com conjunto de pontos fixos $F = K_dP(2n+1)$.

2.3 Prova do Teorema 2.2

Em [6], *P. Conner* e *E. Floyd* determinaram a codimensão das involuções não-triviais que fixam um dado espaço projetivo real par:

Lema 2.3.1 (*Conner-Floyd*). *Seja (T, M^r) uma involução em uma variedade fechada M^r de dimensão $r > 2n$, com $F_T = \mathbb{R}P(2n)$. Então, $r = 4n$.* [5, p. 101, 29.2] □

Fazendo algumas computações adicionais, adaptaremos a demonstração do resultado acima para obter suas versões complexa e quaterniônica:

Lema 2.3.2. *Seja $K_dP(2n)$ um espaço projetivo par, com $d = 2$ ou 4. Se (T, M^r) é uma involução em uma variedade fechada M^r, $r > 2nd$, com $F_T = K_dP(2n)$, então $r = 4nd$.*

Demonstração: O k-fibrado $\eta^k \to K_dP(2n)$, de dimensão $k = r - 2nd \geq 1$, denotará o *fixed-data* da involução (T, M^r). Devemos mostrar que $k = 2nd$.

Tome p natural tal que

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p,$$

onde α_d denota o gerador de $H^d(K_dP(2n))$.

Afirmação 1: p é ímpar.

De fato, usando o Teorema 1.6.4 para calcular

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha_d)^{2n+1}\left((1+c)^k + (1+c)^{k-d}\overline{p}\alpha_d + \cdots\right)$$

vemos que

$$w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \overline{(p+1)}\alpha_d + \overline{\binom{k}{d}}c^d.$$

Assim, como todos os números característicos do *splitting* $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ são nulos, temos

$$\overline{p+1} = \left\langle \overline{(p+1)}\alpha_d^{2n}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle = \left\langle \left(w_d + \overline{\binom{k}{d}}c^d\right)^{2n} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle = 0$$

e, portanto, p é ímpar.

Afirmação 2: k é par e $w_k(\eta^k) \neq 0$.

De fato, como $\overline{\chi(M^r)} = \overline{\chi(K_dP(2n))} = 1$, temos que r é par e, pelo Teorema 1.10.4, $w_k(\eta^k) \neq 0$. Em particular, $k = r - 2nd > 0$ é par.

Consideramos então o natural $l > 0$ tal que $k = 2l$.

Afirmação 3: l é par.

De fato, destacamos que $w_j(\eta^k) = 0 \in H^j(K_dP(n))$ para todo j ímpar, pois $d = 2$ ou 4. Assim, a fórmula de *Borel-Hirzebruch*

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha_d)^{2n+1}\left(\sum_{i=0}^{k}(1+c)^{k-i}w_i(\eta^k)\right)$$

pode ser escrita na forma

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha_d)^{2n+1}\left(\sum_{i=0}^{l}(1+c^2)^{l-i}w_{2i}(\eta^k)\right).$$

Lembrando da relação $c^k + \sum w_i(\eta^k)c^{k-i} = 0$, calculamos então

$$w_{2nd+2l-2}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha_d^{2n}\left(\sum_{j=0}^{l} w_{2j}(\eta^k)\binom{l-j}{l-j-1}c^{2(l-j-1)}\right) = \binom{l}{l-1}\alpha_d^{2n}c^{2l-2}.$$

Como todos os números característicos do *splitting* $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ são nulos, temos em particular

$$0 = \langle w_{2nd+2l-2}(\mathbb{R}P(\eta^k))c, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \left\langle \tbinom{l}{l-1}\alpha_d^{2n}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle = \overline{\tbinom{l}{l-1}} = \bar{l}$$

e, portanto, l é par.

A partir deste ponto, analisaremos os casos $d = 2$ e $d = 4$ separadamente.

Caso $d = 2$: $F = \mathbb{C}P(2n)$. Precisamos mostrar que $l = 2n$.
Como $w(\eta^k) = (1 + \alpha_2)^p$ e $w_k(\eta^k) \neq 0$ (pela Afirmação 2), temos

$$w_k(\eta^k) = \binom{p}{l}\alpha_2^l \neq 0,$$

o que implica $\overline{\tbinom{p}{l}} = 1$ e $l \leq 2n$. Agora, como p é ímpar e l é par (pelas Afirmações 1 e 3),

$$\overline{\binom{p}{l}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\binom{p}{l+1}} = 1.$$

Assim, $w_{2l+2}(\eta^k) = \tbinom{p}{l+1}\alpha_2^{l+1} = \alpha_2^{l+1}$. Por outro lado, a classe $w_{2l+2}(\eta^k)$ deve ser nula, pois seu grau $k+2$ ultrapassa a dimensão do k-fibrado η^k; ou seja, devemos ter $\alpha_2^{l+1} = 0$. Pela estrutura do anel $H^*(\mathbb{C}P(2n))$ concluímos então que $l + 1 > 2n$.
Deste modo chegamos a $l \leq 2n < l + 1$, de onde obtemos a igualdade desejada: $l = 2n$.
Portanto, a demonstração do lema para o caso complexo está concluída:

$$r = k + 4n = 2l + 4n = 8n.$$

Caso $d = 4$: $F = \mathbb{H}P(2n)$. Já sabemos que $k = 2l$ e l é par (pela Afirmação 3); ou seja, $k = 4m$, para certo natural m. Precisamos mostrar que $m = 2n$.
Como $w(\eta^k) = (1 + \alpha_4)^p$ e $k = 4m$, a fórmula de *Borel-Hirzebruch* toma a forma

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1 + \alpha_4)^{2n+1}\left(\sum_{i=0}^{m}(1 + c^4)^{m-i}\binom{p}{i}\alpha_4^i\right).$$

Assim, vemos que

$$w_{8n+4m-4}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha_4^{2n}\left(\sum_{i=0}^{l}\binom{p}{i}\alpha_4^i\binom{m-i}{m-i-1}c^{4(l-i-1)}\right) = \binom{m}{m-1}\alpha_4^{2n}c^{4m-4}.$$

Como todos os números característicos do *splitting* $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ são nulos, temos então

$$0 = \langle w_{8n+4m-4}(\mathbb{R}P(\eta^k))c^3, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \left\langle \tbinom{m}{m-1}\alpha_4^{2n}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle = \overline{\tbinom{m}{m-1}} = \overline{m}$$

e, portanto, m é par.

No que segue, usaremos as mesmas idéias do caso complexo. Como

$$w_k(\eta^k) = \binom{p}{m}\alpha_4^m \neq 0,$$

temos $m \leq 2n$ e $\overline{\binom{p}{m}} = 1$. Daí, $\overline{\binom{p}{m+1}} = 1$, pois m é par e p é ímpar (pela Afirmação 1). Logo, $0 = w_{k+4}(\eta^k) = \overline{\binom{p}{m+1}}\alpha_4^{m+1} = \alpha_4^{m+1}$ e conseqüentemente $m + 1 > 2n$.
Deste modo obtemos $m = 2n$, encerrando a demonstração do caso quaterniônico:

$$r = k + 8n = 4m + 8n = 16n. \qquad \square$$

Em [32], *Stong* efetuou cálculos específicos com números característicos para concluir que todo *fixed-data* $\eta^{2n} \to \mathbb{R}P(2n)$ sobre um espaço projetivo real par $\mathbb{R}P(2n)$ é bordante ao fibrado tangente $\tau \to \mathbb{R}P(2n)$. No entanto, posteriormente, tal resultado tornou-se um caso particular do

Lema 2.3.3 (*Kosniowski-Stong*). *Se (T, M^{2m}) é uma involução com conjunto de pontos fixos F^m, então*

$$[T, M^{2m}] = [twist, F^m \times F^m].$$

[11] $\square$

Demonstração do Teorema 2.2. Seja (T, M^r) involução com conjunto de pontos fixos $F = K_dP(2n)$, $r > 2nd$ e $d = 1, 2$ ou 4. Pelos lemas 2.3.1 e 2.3.2, temos necessariamente $r = 4nd$. Daí, a demonstração segue imediatamente do Lema 2.3.3:

$$[T, M^{4nd}] = [twist, K_dP(2n) \times K_dP(2n)]. \qquad \square$$

Cumpre mencionar que o Lema 2.3.3 acima é um dos principais resultados de [11].

Capítulo 3

Versões complexa e quaterniônica dos resultados de ***Royster*** e ***Pergher-Stong***

3.1 Introdução

Conforme mencionado no Capítulo 0, *D. C. Royster* determinou, em [29], as classes de bordismo das involuções que possuem como conjunto de pontos fixos uma dada união disjunta $F = \mathbb{R}P(m) \cup \mathbb{R}P(n)$ de dois espaços projetivos reais; *Royster* dividiu sua análise em vários casos, dependendo das paridades de m e n (deixando em aberto o caso em que m e n são ambos pares positivos). Mais precisamente, os resultados obtidos em [29] estão reunidos no

Teorema 3.1 (*Royster*). *Seja (T, M^r) uma involução em uma variedade fechada com conjunto de pontos fixos $F = \mathbb{R}P(m) \cup \mathbb{R}P(n)$, $n > 0$.*

(a) Se $m = 0$ e n é ímpar, então $[T, M^r] = [\tau_n^0, \mathbb{R}P(n+1)]$.

(b) Se $m = 0$ e n é par, então $[T, M^r] = \Gamma^{r-n-1}[\tau_n^0, \mathbb{R}P(n+1)]$, com $\varepsilon\Gamma^i[\tau_n^0, \mathbb{R}P(n+1)] = 0$ para cada $0 \leq i < r-n-1$.

(c) Se m e n são ímpares, então $[T, M^r] = 0$.

(d) Se m é ímpar e n é par, então há quatro possibilidades:

$(d.1)$ $[T, M^r] = [Id, \mathbb{R}P(n)]$;

$(d.2)$ $[T, M^r] = [twist, \mathbb{R}P(n) \times \mathbb{R}P(n)]$;

$(d.3)$ $[T, M^r] = [\tau_m^n, \mathbb{R}P(m+n+1)]$;

$(d.4)$ $[T, M^r] = [\tau_m^0, \mathbb{R}P(m+1)] + \Gamma^{r-n-1}[\tau_n^0, \mathbb{R}P(n+1)]$, com $\varepsilon\Gamma^i[\tau_n^0, \mathbb{R}P(n+1)] = 0$ para cada $0 \leq i < r-n-1$. $\square$

No caso (b), em que $F = * \cup \mathbb{R}P(n)$ com n par positivo, *Royster* não determinou a codimensão máxima (ou seja, o valor máximo de $r - n$). Conforme já mencionamos, esse problema foi resolvido posteriormente por *P. Pergher* e *R. Stong*, em [28]. A saber, os autores obtiveram o

Teorema 3.2 (*Pergher-Stong*). *Se (T, M^{n+k}) é uma involução que possui conjunto de pontos fixos $F = * \cup \mathbb{R}P(n)$, com n par positivo, então:*

$$k \leq \ell(n) = \begin{cases} 3 & se \quad t = 1, \\ 2^t & se \quad t > 1, \end{cases}$$

escrevendo $n = 2^t(2j+1)$, para certos $t \geq 1$ e j naturais. Além disso, existe uma tal involução com codimensão $k = \ell(n)$. [28] $\square$

Neste capítulo, determinaremos as versões complexa e quaterniônica dos teoremas 3.1 e 3.2 acima. Dessa forma, listaremos as classes de bordismo de todas as involuções que possuem conjunto de pontos fixos da forma $F = K_dP(m) \cup K_dP(n)$, com $d = 2$ ou 4, e m e n naturais quaisquer (exceto o caso em que m e n são ambos pares positivos). Seguindo o roteiro adotado por *Royster* para espaços projetivos reais, também dividiremos nosso estudo em casos, conforme as paridades de m e n. Em todos os casos, usaremos basicamente os corolários da seqüência de *Conner* e *Floyd*, vide Seção 1.7. Neste particular, se

$$\eta^k \to K_dP(m) \qquad \cup \qquad \xi^l \to K_dP(n)$$

(com $dm + k = dn + l$) é um *fixed-data*, então sabemos que os fibrados *splitting*

$$\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k) \qquad \text{e} \qquad \lambda \to \mathbb{R}P(\xi^l)$$

possuem os mesmos números característicos. Ou seja,

$$\langle p(c, w(\mathbb{R}P(\eta^k)), \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \langle p(c, w(\mathbb{R}P(\xi^l)), \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle,$$

para cada polinômio homogêneo $p(c, w(\mathbb{R}P(-))$, de grau $dm + k - 1 = dn + l - 1$, nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(-))$ e c.

As classes de *Stiefel-Whitney* $W(\mathbb{R}P(\eta^k))$ e $W(\mathbb{R}P(\xi^l))$ serão calculadas pelo Teorema 1.6.4 (*Borel-Hirzebruch*).

Lembramos que as involuções τ_m^n foram apresentadas na Seção 1.14 e que, para cada n natural e $d = 1, 2$ ou 4, $\gamma^d \to K_dP(n)$ denota o d-fibrado canônico sobre $K_dP(n)$.

3.2 Involuções fixando $* \cup K_dP(2n+1)$

Seguiremos basicamente as mesmas idéias usadas por *Royster* em [29], no caso (a) do Teorema 3.1, para mostrar o

Teorema 3.2.1. *Se* (T, M^r) *é uma involução com* $F_T = * \cup K_dP(2n+1)$, $d = 2$ *ou* 4, *então* $[T, M^r] = [\tau^0_{2n+1}, K_dP(2n+2)]$.

Demonstração: Denote por

$$\eta^k \to K_dP(2n+1) \qquad \cup \qquad \mathbb{R}^r \to *$$

o *fixed-data* de (T, M^r). Note que $r > d(2n+1)$, isto é, $k = r - d(2n+1) > 0$, pois não existe involução não-trivial fixando exatamente um ponto.

Lembramos que

$$\gamma^d \to K_dP(2n+1) \qquad \cup \qquad \mathbb{R}^r \to *$$

é o *fixed-data* da involução $(\tau^0_{2n+1}, K_dP(2n+2))$. Assim, pelo Corolário 1.7.8 da seqüência de *Conner* e *Floyd*, basta mostrarmos que $r = d(2n+2)$ e

$$[\eta^d \to K_dP(2n+1)] = [\gamma^d \to K_dP(2n+1)].$$

Observamos que o *splitting* do r-fibrado trivial $\mathbb{R}^r \to *$ é o fibrado linha canônico $\gamma^1 \to \mathbb{R}P(r-1)$. Logo, os fibrados linhas $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ e $\gamma^1 \to \mathbb{R}P(r-1)$ devem ter os mesmos números característicos. Usaremos α_d para denotar o elemento não-nulo de $H^d(K_dP(2n+1))$. Conforme frisamos anteriormente, usaremos sempre o mesmo símbolo c para denotar a primeira classe característica dos fibrados *splitting* envolvidos.

Consideremos as classes de *Stiefel-Whitney*:

$W(\gamma^1) = 1 + c$, com $w_1(\gamma^1) = c$ sendo o gerador de $H^1(\mathbb{R}P(r-1))$,

$W(\mathbb{R}P(r-1)) = (1+c)^r$,

$W(\lambda) = 1 + c$,

$W(\eta^k) = 1 + v_d + v_{2d} + \cdots$,

$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha_d)^{2n+2}\left((1+c)^k + (1+c)^{k-d}v_d + (1+c)^{k-2d}v_{2d} + \cdots\right)$.

Assim,

$$w_d(\mathbb{R}P(r-1)) = \binom{r}{d}c^d \qquad \text{e} \qquad w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{k}{d}c^d + v_d.$$

Agora, como $k + 2nd + d = r$, vemos que d $(= 2$ ou $4)$ aparece na expansão diádica de k (resp., de r) se, e somente se, d não aparece na expansão diádica de r (resp., de k). Ou seja, pelo Teorema de *Lucas*,

$$\overline{\binom{r}{d}} + \overline{\binom{k}{d}} = 1.$$

Deste modo, chegamos aos polinômios

$$w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) + \binom{k}{d}c^d = \binom{k}{d}c^d + v_d + \binom{k}{d}c^d = v_d,$$

$$w_d(\mathbb{R}P(r-1)) + \binom{k}{d}c^d = \binom{r}{d}c^d + \binom{k}{d}c^d = c^d.$$

Afirmação 1: $v_d = \alpha_d$.

De fato, considerando os números característicos associados aos polinômios

$$\left(w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) + \binom{k}{d}c^d\right)^{2n+1} c^{k-1} \in H^{r-1}(\mathbb{R}P(\eta^k))$$

e

$$\left(w_d(\mathbb{R}P(r-1)) + \binom{k}{d}c^d\right)^{2n+1} c^{k-1} \in H^{r-1}(\mathbb{R}P(r-1)),$$

obtemos

$$\langle v_d^{2n+1}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \langle c^{d(2n+1)}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(r-1))\rangle = \langle c^{r-1}, \sigma(\mathbb{R}P(r-1))\rangle = 1,$$

lembrando que $w_1(\gamma^1) = c$ é o gerador de $H^1(\mathbb{R}P(r-1))$. Conseqüentemente, $v_d \neq 0$, ou seja, $v_d = \alpha_d$.

Afirmação 2: $k = d$.

De fato, como $w_d(\eta^k) = v_d = \alpha_d \neq 0$ (pela Afirmação 1), já temos $k \geq d$. Se tivéssemos $k > d$, então poderíamos considerar os números característicos associados a

$$\left(w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) + \binom{k}{d}c^d\right)^{2n+2} c^{k-d-1} \in H^{r-1}(\mathbb{R}P(\eta^k))$$

e

$$\left(w_d(\mathbb{R}P(r-1)) + \binom{k}{d}c^d\right)^{2n+2} c^{k-d-1} \in H^{r-1}(\mathbb{R}P(r-1)).$$

Assim, teríamos

$$\left\langle \left(w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) + \binom{k}{d}c^d\right)^{2n+2} c^{k-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle = \langle v_d^{2n+2}c^{k-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = 0,$$

pois $v_d^{2n+2} \in H^{d(2n+2)}(K_dP(2n+1)) = 0$; e, por outro lado,

$$\left\langle \left(w_d(\mathbb{R}P(r-1)) + \binom{k}{d}c^d\right)^{2n+2} c^{k-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(r-1))\right\rangle = \langle c^{r-1}, \sigma(\mathbb{R}P(r-1))\rangle = 1;$$

o que contraria o fato de $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ e $\gamma^1 \to \mathbb{R}P(r-1)$ possuírem os mesmos números característicos. Logo, devemos ter $k = d$ (em particular, $w_j(\eta^d) = 0$ para todo $j > d$).

Com as afirmações 1 e 2, obtemos $r = k + d(2n+1) = d(2n+2)$ e

$$W(\eta^d) = 1 + \alpha_d = W(\gamma^d).$$

Assim, vemos que os fibrados $\eta^d \to K_dP(2n+1)$ e $\gamma^d \to K_dP(2n+1)$ possuem os mesmos números característicos e, portanto, são bordantes. Deste modo, encerramos a demonstração. □

Em outras palavras, o Teorema 3.2.1 (para espaços projetivos complexos e quaterniônicos) juntamente com o resultado de *Royster* (para espaços projetivos reais) nos dizem que: *dada uma união disjunta de um ponto com um espaço projetivo ímpar $K_dP(2n+1)$ (real, complexo ou quaterniônico), $\tau^0_{2n+1} : K_dP(2n+2) \longrightarrow K_dP(2n+2)$ é a única involução, salvo bordismo, que possui $* \cup K_dP(2n+1)$ como conjunto de pontos fixos.*

3.3 Involuções fixando $* \cup K_dP(2n)$

Nesta seção, $2n$ é um par positivo fixado e $d = 2$ ou 4.

Teorema 3.3.1. *Se $(\eta^k \to K_dP(2n)) \cup (\mathbb{R}^{2nd+k} \to *)$ é um fixed-data, então $k \geq d$ e*

$$[\eta^k \to K_dP(2n)] = [\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d} \to K_dP(2n)] \qquad \text{em } \ \mathcal{N}_{2nd}(BO(k)).$$

Demonstração: Observamos, inicialmente, que $k \geq 1$, pois nenhuma involução não-trivial pode fixar exatamente um ponto.

Denote por α_d o gerador de $H^d(K_dP(2n))$. Pelo Fato 1.13.5, tome um natural p satisfazendo

$$W(\eta^k) = (1 + \alpha_d)^p.$$

Conforme observamos em 1.13.6, se $2^t \leq 2n < 2^{t+1}$, podemos assumir $p < 2^{t+1}$. Além disso, definindo $p' = 2^{t+1} - p$, a classe dual de $W(\eta^k)$ pode ser escrita na forma

$$\overline{W}(\eta^k) = (1 + \alpha_d)^{p'}.$$

Pelo Corolário 1.7.12, os fibrados linha $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ e $\gamma^1 \to \mathbb{R}P(2nd+k-1)$ possuem os mesmos números característicos. Considere então as classes de *Stiefel-Whitney*:

$$W(\gamma^1) = 1 + c, \text{ com } w_1(\gamma^1) = c \text{ sendo o gerador de } \mathbb{R}P(2nd+k-1),$$
$$W(\mathbb{R}P(2nd+k-1)) = (1+c)^{2nd+k},$$
$$W(\lambda) = 1 + c,$$
$$W(\eta^k) = 1 + p\,\alpha_d + \tbinom{p}{2}\alpha_d^2 + \cdots + \tbinom{p}{p-1}\alpha_d^{p-1} + \alpha_d^p,$$
$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha_d)^{2n+1}\left((1+c)^k + (1+c)^{k-d}p\,\alpha_d + (1+c)^{k-2d}\tbinom{p}{2}\alpha_d^2 + \cdots\right).$$

Afirmação 1: p é ímpar.

De fato, temos

$$w_d(\mathbb{R}P(2nd+k-1)) = \binom{2nd+k}{d}c^d \qquad \text{e} \qquad w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{k}{d}c^d + (p+1)\alpha_d.$$

Agora, note que d ($= 2$ ou 4) aparece na expansão diádica de $2nd+k$ se, e somente se, d aparece na expansão diádica de k. Ou seja, pelo Teorema de *Lucas*,

$$\overline{\binom{2nd+k}{d}} = \overline{\binom{k}{d}}.$$

Logo,

$$w_d(\mathbb{R}P(2nd+k-1)) + \binom{k}{d}c^d = 0,$$
$$w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) + \binom{k}{d}c^d = (p+1)\alpha_d.$$

Daí, como $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ e $\gamma^1 \to \mathbb{R}P(2nd+k-1)$ possuem os mesmos números característicos, obtemos

$$0 = \left\langle \left(w_d(\mathbb{R}P(2nd+k-1)) + \tbinom{k}{d}c^d\right)^{2n} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(2nd+k-1)) \right\rangle =$$
$$= \left\langle \left(w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) + \tbinom{k}{d}c^d\right)^{2n} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle =$$
$$= \langle (p+1)\alpha_d^{2n}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \overline{p+1}$$

e, portanto, p é ímpar.

Afirmação 2: $p < 2n$ e $k \geq dp$.

De fato, consideraremos, em $\mathbb{R}P(\eta^k)$ e em $\mathbb{R}P(2nd+k-1)$, o número característico associado a $c^{2nd+k-1}$. Por um lado, usando a Fórmula de *Conner*, temos

$$\langle c^{2nd+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \langle \overline{w}_{2nd}(\eta^k), \sigma(K_dP(2n))\rangle = \left\langle \binom{p'}{2n}\alpha_d^{2n}, \sigma(K_dP(2n)) \right\rangle = \overline{\binom{p'}{2n}};$$

e, por outro,

$$\langle c^{2nd+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(2nd+k-1))\rangle = 1.$$

Logo

$$\overline{\binom{p'}{2n}} = 1, \tag{3.1}$$

uma vez que tais números devem ser iguais. Em particular, temos $p' \geq 2n \geq 2^t$. Daí,

$$p = 2^{t+1} - p' \leq 2^{t+1} - 2^t = 2^t \leq 2n$$

e, conseqüentemente, $\alpha_d^p \neq 0$. Lembrando que $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p$, temos então $w_{dp}(\eta^k) = \alpha_d^p \neq 0$ e, portanto, $dp \leq k$. Observe que a desigualdade $p < 2n$ segue de $p \leq 2n$ com p ímpar (Afirmação 1). Deste modo a Afirmação 2 está provada.

Agora, como já provamos que $k - dp$ é não negativo, podemos considerar o k-fibrado vetorial $p\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-dp} \to K_dP(2n)$. Além disso, observando que

$$W(p\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-dp}) = (1+\alpha_d)^p = W(\eta^k),$$

chegamos à igualdade

$$[p\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-dp} \to K_dP(2n)] = [\eta^k \to K_dP(2n)]. \tag{3.2}$$

Logo, nosso próximo e último passo da demonstração será mostrar que $p = 1$.

Inicialmente observe que, pela igualdade (3.2), o fibrado

$$p\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-dp} \to K_dP(2n) \qquad \cup \qquad \mathbb{R}^{2nd+k} \to *$$

pode ser realizado como o *fixed-data* de uma involução, já que ele é bordante ao *fixed-data* $(\eta^k \to K_dP(2n)) \cup (\mathbb{R}^{2nd+k} \to *)$. Assim, aplicando o Teorema 1.9.3 iterativamente, $k - dp$ vezes, vemos que

$$p\gamma^d \to K_dP(2n) \qquad \cup \qquad \mathbb{R}^{(2n+p)d} \to *$$

também pode ser realizado como o *fixed-data* de uma involução. Equivalentemente,

$$[\lambda \to \mathbb{R}P(p\gamma^d)] = [\gamma^1 \to \mathbb{R}P((2n+p)d-1)]. \tag{3.3}$$

Observação: Neste ponto, no estudo do caso real $d = 1$ desenvolvido em [29], *Royster* observou que $[\mathbb{R}P(p\gamma^1)] = [\mathbb{R}P(2n) \times \mathbb{R}P(p-1)]$. Então, da igualdade $[\mathbb{R}P(p\gamma^1)] = [\mathbb{R}P(2n+p-1)]$ (decorrente de (3.3) com $d = 1$) segue que $[\mathbb{R}P(2n+p-1)] = [\mathbb{R}P(2n)][\mathbb{R}P(p-1)]$. Desse modo, usando o fato de que a classe de bordismo de todo espaço projetivo real par é um gerador (ou seja, um elemento indecomponível) do anel $\mathcal{N}_*$, *Royster* concluiu que $p = 1$. Observamos que tal argumento não funciona nos casos $d = 2$ complexo e

$d = 4$ quaterniônico; de fato, a única informação que podemos obter do bordismo entre as variedades $\mathbb{R}P(p\gamma^d)$ e $\mathbb{R}P((2n+p)d-1)$ é que $[\mathbb{R}P(p\gamma^d)] = 0$, pois $(2n+p)d-1$ é ímpar. Nesses casos, faz-se necessário utilizar a informação mais forte, dada pelo bordismo entre os fibrados $\lambda \to \mathbb{R}P(p\gamma^d)$ e $\gamma^1 \to \mathbb{R}P((2n+p)d-1)$.

Consideremos as classes de *Stiefel-Whitney*:

$W(\gamma^1) = 1 + c$, com $w_1(\gamma^1) = c$ denotando o gerador de $H^1(\mathbb{R}P((2n+p)d-1))$,

$W(\mathbb{R}P((2n+p)d-1)) = (1+c)^{(2n+p)d} = (1+c^d)^{2n+p}$,

$W(p\gamma^d) = (1+\alpha_d)^p$,

$W(\mathbb{R}P(p\gamma^d)) = (1+\alpha_d)^{2n+1}\left(\sum_{j=0}^{p}(1+c^d)^{p-j}\binom{p}{j}\alpha_d^j\right) = (1+\alpha_d)^{2n+1}(1+c^d+\alpha_d)^p$.

Calculamos então:

$$w_{dp}(\mathbb{R}P((2n+p)d-1)) = \binom{2n+p}{p}c^{dp},$$

$$w_{dp}(\mathbb{R}P(p\gamma^d)) = \sum_{i=0}^{p}\binom{2n+1}{i}\alpha_d^i\binom{p}{p-i}(c^d+\alpha_d)^{p-i} = \sum_{i=0}^{p}\binom{2n+1}{i}\binom{p}{i}\alpha_d^i(c^d+\alpha_d)^{p-i}.$$

Neste ponto, vale observar que, como p é ímpar (vide Afirmação 1) e $p' + p = 2^{t+1}$, temos

$$\overline{\binom{p}{2^s}} + \overline{\binom{p'}{2^s}} = 1, \qquad \text{para } s = 1, 2, \ldots, t.$$

Então, da igualdade (3.1), $\overline{\binom{p'}{2n}} = 1$, segue que: toda potência de 2 que aparece na expansão diádica de $2n$ aparece na de p' e, portanto, não aparece na expansão diádica de p. Em particular (vide Corolário 1.12.5 do Teorema de *Lucas*),

$$\overline{\binom{2n+p}{p}} = 1.$$

E ainda, para cada $i \geq 2$ com $\overline{\binom{2n+1}{i}} = 1$, temos $\overline{\binom{p}{i}} = 0$.

Voltando então às classes w_{dp}, vemos que:

$$w_{dp}(\mathbb{R}P((2n+p)d-1)) = \binom{2n+p}{p}c^{dp} = c^{dp},$$

$$w_{dp}(\mathbb{R}P(p\gamma^d)) = \sum_{i=0}^{p}\binom{2n+1}{i}\binom{p}{i}\alpha_d^i(c^d+\alpha_d)^{p-i} = (c^d+\alpha_d)^p + \alpha_d(c^d+\alpha_d)^{p-1}.$$

Agora observe que $(c^d+\alpha_d)^p = 0$ em $H^{dp}(\mathbb{R}P(p\gamma^d))$, pois

$$(c^d+\alpha_d)^p = c^{dp} + \sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}\alpha_d^j c^{dp-dj} = c^{dp} + \sum_{j=1}^{dp} w_j(p\gamma^d)c^{dp-j}$$

e o Teorema 1.6.3, aplicado ao dp-fibrado vetorial $p\gamma^d \to K_dP(2n)$, garante a relação $c^{dp} + \sum_{j=1}^{dp} w_j(p\gamma^d)c^{dp-j} = 0$.

Assim, obtemos

$$w_{dp}(\mathbb{R}P(p\gamma^d)) = \alpha_d(c^d + \alpha_d)^{p-1} \qquad \text{e} \qquad w_{dp}(\mathbb{R}P((2n+p)d-1)) = c^{dp}.$$

Finalmente, com tais classes $w_{dp}(\mathbb{R}P(-))$, provaremos a

Afirmação 3: $p = 1$.

De fato, suponha o contrário. Como já sabemos que p é ímpar, estamos supondo então $p \geq 3$.

Pela desigualdade $p < 2n$ (Afirmação 2), podemos considerar o monômio

$$w_{dp}^2(\mathbb{R}P(-))c^{d(2n-p)-1} \in H^{(2n+p)d-1}(\mathbb{R}P(-)).$$

Como estamos supondo $p \geq 3$, podemos escrever

$$w_{dp}^2(\mathbb{R}P(p\gamma^d)) = \alpha_d^2(c^d + \alpha_d)^{2(p-1)} = \alpha_d^2(c^d + \alpha_d)^p(c^d + \alpha_d)^{p-2}.$$

Mas, conforme observamos anteriormente, $(c^d + \alpha_d)^p = 0 \in H^{dp}(\mathbb{R}P(p\gamma^d))$. Logo,

$$\langle w_{dp}^2 c^{d(2n-p)-1}, \sigma(\mathbb{R}P(p\gamma^d))\rangle = 0.$$

Por outro lado,

$$\langle w_{dp}^2 c^{d(2n-p)-1}, \sigma(\mathbb{R}P((2n+p)d-1))\rangle = \langle c^{(2n+p)d-1}, \sigma(\mathbb{R}P((2n+p)d-1))\rangle = 1,$$

contrariando a igualdade (3.3), $[\lambda \to \mathbb{R}P(p\gamma^d)] = [\gamma^1 \to \mathbb{R}P((2n+p)d-1)]$.

Deste modo, concluímos que $p = 1$ e encerramos a demonstração. □

Lembramos que

$$\gamma^d \to K_dP(2n) \qquad \cup \qquad \mathbb{R}^{d(2n+1)} \to *$$

é o *fixed-data* da involução $(\tau_{2n}^0, K_dP(2n+1))$ e que $K_dP(2n+1)$ borda. Assim, usando estabilidade e o operador Γ (vide Seção 1.9), o Teorema 3.3.1 é equivalente ao

Teorema 3.3.2. *Se (T, M^{2nd+k}) é uma involução com $F_T = K_dP(2n) \cup *$, então $k \geq d$ e*

$$[T, M^{2nd+k}] = \Gamma^{k-d}[\tau_{2n}^0, K_dP(2n+1)],$$

com $\varepsilon\Gamma^i[\tau_{2n}^0, K_dP(2n+1)] = 0$, para todo $0 \leq i < k-d$. □

Observe que o resultado (b) do Teorema 3.1 (*Royster*) é justamente o teorema acima para o caso em que $d = 1$. Ou seja, o que obtivemos foi uma extensão natural (que contempla também os casos complexo e quaterniônico) do resultado obtido em [29] para o caso real.

Conforme comentamos na Observação 1.14.1, se $2m \neq 2n$, então existe um natural $k > 0$ tal que $\varepsilon\Gamma^k[\tau_{2n}^{2m}, K_dP(2m + 2n + 1)] \neq 0$, e denotamos por $h_d(2m, 2n)$ o menor natural com tal propriedade. Ou seja, $h_d(2m, 2n)$ é tal que

$$\begin{cases} \varepsilon\Gamma^i[\tau_{2n}^{2m}, K_dP(2m + 2n + 1)] = 0, \quad \text{para cada } i \leq h_d(2m, 2n) - 1, \\ \varepsilon\Gamma^{h_d(2m,2n)}[\tau_{2n}^{2m}, K_dP(2m + 2n + 1)] \neq 0. \end{cases}$$

Assim, o Teorema 3.3.2 nos diz que

$$\{[\tau_{2n}^0, K_dP(2n + 1)], \Gamma[\tau_{2n}^0, K_dP(2n + 1)], \ldots, \Gamma^{h_d(0,2n)}[\tau_{2n}^0, K_dP(2n + 1)]\}$$

é a coleção das classes de bordismo de todas as involuções que fixam $F = K_dP(2n) \cup *$.

Nosso próximo objetivo é então calcular tal limitante $h_d(0, 2n)$ (o qual dependerá dos valores de d e do número par $2n$). Observe que determinar $h_d(0, 2n)$ é equivalente a determinar o valor máximo de k tal que

$$[\lambda \to \mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^k)] = [\gamma^1 \to \mathbb{R}P((2n + 1)d + k - 1)] \qquad \text{em } \mathcal{N}_{(2n+1)d+k-1}(BO(1)).$$

Escreva $2n$ na forma $2n = 2^t(2j + 1)$. Usando a notação acima para o caso real, $d = 1$, o Teorema 3.2 (*Pergher-Stong*) determinou

$$h_1(0, 2n) = \begin{cases} 2 & se \quad t = 1, \\ 2^t - 1 & se \quad t > 1. \end{cases}$$

A seguir, mostraremos que:

$$\text{(no caso complexo)} \qquad h_2(0, 2n) = \begin{cases} 4 & se \quad t = 1, \\ 2^{t+1} - 2 & se \quad t > 1, \end{cases}$$

$$\text{(no caso quaterniônico)} \qquad h_4(0, 2n) = \begin{cases} 8 & se \quad t = 1, \\ 2^{t+2} - 4 & se \quad t > 1. \end{cases}$$

Lema 3.3.3. *Para cada m natural, valem as seguintes igualdades em $\mathcal{M}_*$:*

(a) $[\gamma^2 \to \mathbb{C}P(m)] = [\gamma^1 \to \mathbb{R}P(m)]^2$;

(b) $[\gamma^4 \to \mathbb{H}P(m)] = [\gamma^1 \to \mathbb{R}P(m)]^4$.

Demonstração: Conforme comentamos na Observação 1.7.4, $\mathcal{M}_*$ é um anel comutativo com o produto

$$[\xi_1^k \xrightarrow{\pi_1} M_1^r][\xi_2^l \xrightarrow{\pi_2} M_2^s] = [\xi_1^k \times \xi_2^l \xrightarrow{\pi_1\times\pi_2} M_1^r \times M_2^s].$$

Vale lembrar que o produto cartesiano $\xi_1^k \times \xi_2^l \xrightarrow{\pi_1\times\pi_2} M_1^r \times M_2^s$ é um $(k+l)$-fibrado vetorial cuja classe de *Stiefel-Whitney* é dada pelo produto *cross*

$$W(\xi_1^k \times \xi_2^l) = W(\xi_1^k) \times W(\xi_2^l).$$

(a) Mostraremos a igualdade

$$[\gamma^2 \to \mathbb{C}P(m)] = [\gamma^1 \times \gamma^1 \to \mathbb{R}P(m) \times \mathbb{R}P(m)] \in \mathcal{N}_{2m}(BO(2))$$

verificando que os fibrados em questão possuem os mesmos números característicos.
Para cada $d = 1, 2$, α_d denotará o gerador de $H^d(K_dP(m))$.
Escreva as classes de *Stiefel-Whitney*:

$W(\gamma^2) = 1 + \alpha_2$,

$W(\mathbb{C}P(m)) = (1+\alpha_2)^{m+1} = \sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i}\alpha_2^i$,

$W(\gamma^1 \times \gamma^1) = (1+\alpha_1) \times (1+\alpha_1) = 1 + (1 \times \alpha_1 + \alpha_1 \times 1) + \alpha_1 \times \alpha_1$,

$W(\mathbb{R}P(m) \times \mathbb{R}P(m)) = (1+\alpha_1)^{m+1} \times (1+\alpha_1)^{m+1} = \sum_{s=0}^{2m}\sum_{i=0}^{s} \binom{m+1}{i}\binom{m+1}{s-i}\alpha_1^i \times \alpha_1^{s-i}$.

Sem risco de confusão, pelo contexto, denotaremos por w_s a s-ésima classe de *Stiefel-Whitney* de $\mathbb{C}P(m)$ assim como a de $\mathbb{R}P(m) \times \mathbb{R}P(m)$, para cada $s = 0, 1, \ldots 2m$.
Considere uma partição qualquer $s_1 + s_2 + \cdots + s_r + t_1 + 2t_2 = 2m$. Precisamos mostrar que

$$\langle w_{s_1} w_{s_2} \cdots w_{s_r} w_1^{t_1}(\gamma^2) w_2^{t_2}(\gamma^2), \sigma(\mathbb{C}P(m))\rangle =$$
$$= \langle w_{s_1} w_{s_2} \cdots w_{s_r} w_1^{t_1}(\gamma^1\times\gamma^1) w_2^{t_2}(\gamma^1\times\gamma^1), \sigma(\mathbb{R}P(m)\times\mathbb{R}P(m))\rangle.$$

Em $\mathbb{C}P(m)$, temos: $w_s = 0$ para cada s ímpar, e $w_s = \binom{m+1}{i}\alpha_2^i$ para cada $s = 2i$ par. Além disso, $w_1(\gamma^2) = 0$ e $w_2(\gamma^2) = \alpha_2$. Assim, vemos que:

$$\langle w_{s_1} w_{s_2} \cdots w_{s_r} w_1^{t_1}(\gamma^2) w_2^{t_2}(\gamma^2), \sigma(\mathbb{C}P(m))\rangle =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{se algum } s_j \text{ é ímpar ou } t_1 > 0, \\ \binom{m+1}{i_1}\binom{m+1}{i_2}\cdots\binom{m+1}{i_r} & \text{se cada } s_j \text{ é par, } s_j = 2i_j, \text{ e } t_1 = 0. \end{cases}$$

Por outro lado, em $\mathbb{R}P(m)\times\mathbb{R}P(m)$ temos (para cada s,t):

$$w_s=\textstyle\sum_{i=0}^{s}\binom{m+1}{i}\binom{m+1}{s-i}\alpha_1^i\times\alpha_1^{s-i},$$

$$w_1^t(\gamma^1\times\gamma^1)=\textstyle\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{j}\alpha_1^j\times\alpha_1^{t-j},$$

$$w_2^t(\gamma^1\times\gamma^1)=\alpha_1^t\times\alpha_1^t.$$

Logo,

$$w_{s_1}\cdots w_{s_r}w_1^{t_1}(\gamma^1\times\gamma^1)w_2^{t_2}(\gamma^1\times\gamma^1)=$$

$$=\textstyle\sum_{i_j,i}\binom{m+1}{i_1}\binom{m+1}{s_1-i_1}\cdots\binom{m+1}{i_r}\binom{m+1}{s_r-i_r}\binom{t_1}{i}\alpha_1^{i_1+\cdots+i_r+i+t_2}\times\alpha_1^{2m-(i_1+\cdots+i_r+i+t_2)}$$

$$=\textstyle\sum_{i_1+\cdots+i_r+i=m-t_2}\binom{m+1}{i_1}\binom{m+1}{s_1-i_1}\cdots\binom{m+1}{i_r}\binom{m+1}{s_r-i_r}\binom{t_1}{i}\alpha_1^m\times\alpha_1^m,$$

pois $\alpha_1^m\times\alpha_1^m$ é o único elemento não nulo de $H^{2m}(\mathbb{R}P(m)\times\mathbb{R}P(m))$. Nesta última soma, observamos que, salvo no caso em que $s_j=2i_j$ (para cada $j=1,\dots r$) e $t_1=2i$, o coeficiente

$$\binom{m+1}{i_1}\binom{m+1}{s_1-i_1}\cdots\binom{m+1}{i_r}\binom{m+1}{s_r-i_r}\binom{t_1}{i}$$

aparece em duas parcelas distintas: uma correspondente à partição $i_1+\cdots+i_r+i=m-t_2$ e outra correspondente à partição $(s_1-i_1)+\cdots+(s_r-i_r)+(t_1-i)=m-t_2$. Assim, vemos que o monômio

$$w_{s_1}\cdots w_{s_r}w_1^{t_1}(\gamma^1\times\gamma^1)w_2^{t_2}(\gamma^1\times\gamma^1)\in H^{2m}(\mathbb{R}P(m)\times\mathbb{R}P(m))$$

tem possibilidade de ser não nulo somente se t_1 e cada s_j forem pares, digamos $t_1=2i$ e $s_j=2i_j$; e, neste caso,

$$w_{s_1}\cdots w_{s_r}w_1^{t_1}(\gamma^1\times\gamma^1)w_2^{t_2}(\gamma^1\times\gamma^1)=\textstyle\binom{m+1}{i_1}\binom{m+1}{s_1-i_1}\cdots\binom{m+1}{i_r}\binom{m+1}{s_r-i_r}\binom{t_1}{i}\alpha_1^m\times\alpha_1^m$$

$$=\textstyle\binom{m+1}{i_1}\cdots\binom{m+1}{i_r}\binom{2i}{i}\alpha_1^m\times\alpha_1^m.$$

Agora, pelo Teorema de Lucas, $\overline{\binom{2i}{i}}=1$ se, e somente se, $i=0$. Deste modo, concluímos que

$$\langle w_{s_1}w_{s_2}\cdots w_{s_r}w_1^{t_1}(\gamma^1\times\gamma^1)w_2^{t_2}(\gamma^1\times\gamma^1),\sigma(\mathbb{R}P(m)\times\mathbb{R}P(m))\rangle=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{se}\ \ \text{algum } s_j \text{ é ímpar ou } t_1>0,\\ \binom{m+1}{i_1}\binom{m+1}{i_2}\cdots\binom{m+1}{i_r} & \text{se}\ \ \text{cada } s_j \text{ é par, } s_j=2i_j,\ \text{ e } t_1=0,\end{cases}$$

o que encerra a demonstração de (a).

(b) Com argumentos análogos aos que utilizamos para provar o item (a), verifica-se que os fibrados vetoriais

$$\gamma^4 \to \mathbb{H}P(m) \quad \text{e} \quad \gamma^2 \times \gamma^2 \to \mathbb{C}P(m) \times \mathbb{C}P(m)$$

possuem os mesmos números característicos.
Daí, usando a igualdade (a), obtemos:

$$[\gamma^4 \to \mathbb{H}P(m)] = [\gamma^2 \to \mathbb{C}P(m)]^2 = \left([\gamma^1 \to \mathbb{R}P(m)]^2\right)^2 = [\gamma^1 \to \mathbb{R}P(m)]^4. \qquad \square$$

Finalmente, conforme anunciamos anteriormente, temos o

Teorema 3.3.4. *Sejam $2n > 0$ e $d = 2$ ou 4. Escreva $2n = 2^t(2j+1)$, para certos $t \geq 1$ e $j \geq 0$. Então,* $h_d(0,2n) = dh_1(0,2n) = \begin{cases} 2d & \textit{se } t = 1, \\ (2^t - 1)d & \textit{se } t > 1. \end{cases}$

Demonstração: O limitante $\ell = h_1(0,2n)$, referente ao caso real, está determinado no Teorema 3.2 (*Pergher-Stong*): $\ell = \begin{cases} 2 & \text{se } t = 1, \\ 2^t - 1 & \text{se } t > 1. \end{cases}$
Lembramos que $h_d(0,2n)$ é o número natural caracterizado pelas seguintes condições (onde $\gamma^d \to K_dP(2n)$ é o d-fibrado canônico sobre $K_dP(2n)$):

(i) $[\lambda \to \mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{h_d(0,2n)})] = [\gamma^1 \to \mathbb{R}P((2n+1)d + h_d(0,2n) - 1)]$,

(ii) $[\lambda \to \mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{h_d(0,2n)+1})] \neq [\gamma^1 \to \mathbb{R}P((2n+1)d + h_d(0,2n))]$.

Inicialmente, mostraremos que $d\ell$ satisfaz a condição (i). Com efeito, pela caracterização de ℓ, sabemos que:

$$j_*\Gamma^\ell[\tau^0_{2n}, \mathbb{R}P(2n+1)] = [\gamma^1 \oplus \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}P(2n)] + [\mathbb{R}^{2n+1+\ell} \to *].$$

Assim, usando o Lema 3.3.3 e o fato de $j_* : \mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2) \to \mathcal{M}_*$ ser um homomorfismo de álgebras (vide Observação 1.7.4), obtemos:

$$\begin{aligned} j_*\left(\left(\Gamma^\ell[\tau^0_{2n}, \mathbb{R}P(2n+1)]\right)^d\right) &= \left([\gamma^1 \oplus \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}P(2n)] + [\mathbb{R}^{2n+1+\ell} \to *]\right)^d \\ &= [\gamma^1 \oplus \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}P(2n)]^d + [\mathbb{R}^{2n+1+\ell} \to *]^d \\ &= [\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{d\ell} \to K_dP(2n)] + [\mathbb{R}^{(2n+1)d+d\ell} \to *]. \end{aligned}$$

Para provar que $d\ell$ satisfaz a condição (ii), mostraremos que os fibrados *splitting*

$$\lambda \to \mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1}) \qquad \text{e} \qquad \gamma^1 \to \mathbb{R}P((2n+1)d + d\ell)$$

não possuem os mesmos números característicos. Ou seja, exibiremos um número característico conveniente.

Especificamente, consideraremos

$$\widehat{W}(\mathbb{R}P(-)) = \frac{W(\mathbb{R}P(-))}{(1+c)^{d\ell+1}},$$

vide Seção 1.8, e mostraremos que

$$\langle \widehat{w}_{2nd}\widehat{w}_{d+d\ell}, \sigma(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1}))\rangle = 0, \tag{3.4}$$

enquanto que

$$\langle \widehat{w}_{2nd}\widehat{w}_{d+d\ell}, \sigma(\mathbb{R}P((2n+1)d + d\ell))\rangle = 1, \tag{3.5}$$

onde $\widehat{w}_i$ denota a soma de todos os termos homogêneos de grau i em $\widehat{W}(\mathbb{R}P(-))$.

Com o intuito de facilitar a compreensão dos cálculos, através dos quais verificaremos as igualdades (3.4) e (3.5) acima, analisaremos os casos em que $t = 1$ e $t \geq 2$ separadamente. Além disso, devido à analogia entre os cálculos referentes aos casos complexo ($d = 2$) e quaterniônico ($d = 4$), optamos por detalhar apenas o caso complexo.

Caso complexo com $t = 1$: $d\ell + 1 = 2.2 + 1 = 5$.
Considere os fibrados $\lambda \to \mathbb{R}P(\gamma^2 \oplus \mathbb{R}^5)$ e $\gamma^1 \to \mathbb{R}P(4n+6)$.
Lembrando que, neste caso, $2n = 4j + 2$, escrevemos:

$$\widehat{W}(\mathbb{R}P(\gamma^2 \oplus \mathbb{R}^5)) = \frac{(1+\alpha_2)^{2n+1}\left((1+c)^7 + (1+c)^5\alpha_2\right)}{(1+c)^5} = \left(\sum_{i=0}^{2n} \binom{4j+3}{i}\alpha_2^i\right)(1+c^2+\alpha_2),$$

$$\widehat{W}(\mathbb{R}P(4n+6)) = \frac{(1+c)^{4n+7}}{(1+c)^5} = (1+c)^{4n+2} = \sum_{i=0}^{4n+2} \binom{8j+6}{i} c^i.$$

Agora, usando o Teorema de *Lucas* para determinar a paridade dos coeficientes binomiais em questão, calculamos:

$$\widehat{w}_6(\mathbb{R}P(\gamma^2 \oplus \mathbb{R}^5)) = \tbinom{4j+3}{2}\alpha_2^2(c^2+\alpha_2) + \tbinom{4j+3}{3}\alpha_2^3 = \alpha_2^2 c^2,$$

$$\widehat{w}_{4n}(\mathbb{R}P(\gamma^2 \oplus \mathbb{R}^5)) = \tbinom{4j+3}{4j+1}\alpha_2^{2n-1}(c^2+\alpha_2) + \tbinom{4j+3}{4j+2}\alpha_2^{2n} = \alpha_2^{2n-1}c^2,$$

$$\widehat{w}_6(\mathbb{R}P(4n+6)) = \tbinom{8j+6}{6}c^6 = c^6,$$

$$\widehat{w}_{4n}(\mathbb{R}P(4n+6)) = \tbinom{8j+6}{8j+4} c^{8j+4} = c^{4n}.$$

Daí,

$$\langle \widehat{w}_6 \widehat{w}_{4n}, \sigma(\mathbb{R}P(\gamma^2 \oplus \mathbb{R}^5)\rangle = \langle \alpha_2^{2n+1} c^4, \sigma(\mathbb{R}P(\gamma^2 \oplus \mathbb{R}^5)\rangle = 0,$$

pois $\alpha_2^{2n+1} \in H^{4n+2}(\mathbb{C}P(2n)) = 0$. Por sua vez,

$$\langle \widehat{w}_6 \widehat{w}_{4n}, \sigma(\mathbb{R}P(4n+6))\rangle = \langle c^{4n+6}, \sigma(\mathbb{R}P(4n+6))\rangle = 1,$$

uma vez que c é o gerador de $H^1(\mathbb{R}P(4n+6))$.

Caso complexo com $t \geq 2$: $d\ell + 1 = 2(2^t - 1) + 1 = 2^{t+1} - 1$, onde $2n = 2^{t+1}j + 2^t$. Considere os fibrados $\lambda \to \mathbb{R}P(\gamma^2 \oplus \mathbb{R}^{2^{t+1}-1})$ e $\gamma^1 \to \mathbb{R}P(4n + 2^{t+1})$. Temos:

$$\widehat{W}(\mathbb{R}P(\gamma^2 \oplus \mathbb{R}^{2^{t+1}-1}) = \frac{(1+\alpha_2)^{2n+1}\left((1+c)^{2^{t+1}+1} + (1+c)^{2^{t+1}-1}\alpha_2\right)}{(1+c)^{2^{t+1}-1}} =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{2n} \binom{2^{t+1}j + 2^t + 1}{i} \alpha_2^i\right)(1 + c^2 + \alpha_2),$$

$$\widehat{W}(\mathbb{R}P(4n+2^{t+1})) = \frac{(1+c)^{4n+2^{t+1}+1}}{(1+c)^{2^{t+1}-1}} = (1+c)^{4n+2} = \sum_{i=0}^{4n+2} \binom{2^{t+2}j + 2^{t+1} + 2}{i} c^i.$$

Observe que, como $2^t \geq 4$, 2 aparece na expansão diádica de $2^t - 1$ e não aparece na expansão diádica de $2^{t+1}j + 2^t + 1$. Então, usando o Teorema de *Lucas*, calculamos:

$$\widehat{w}_{2^{t+1}}(\mathbb{R}P(\gamma^2 \oplus \mathbb{R}^{2^{t+1}-1}) = \tbinom{2^{t+1}j+2^t+1}{2^t-1}\alpha_2^{2^t-1}(c^2+\alpha_2) + \tbinom{2^{t+1}j+2^t+1}{2^t}\alpha_2^{2^t} = \alpha_2^{2^t},$$

$$\widehat{w}_{4n}(\mathbb{R}P(\gamma^2 \oplus \mathbb{R}^{2^{t+1}}) = \tbinom{2^{t+1}j+2^t+1}{2^{t+1}j+2^t-1}\alpha_2^{2n-1}(c^2+\alpha_2) + \tbinom{2^{t+1}j+2^t+1}{2^{t+1}j+2^t}\alpha_2^{2n} = \alpha_2^{2n},$$

$$\widehat{w}_{2^{t+1}}(\mathbb{R}P(4n+2^{t+1})) = \tbinom{2^{t+2}j+2^{t+1}+2}{2^{t+1}} c^{2^{t+1}} = c^{2^{t+1}},$$

$$\widehat{w}_{4n}(\mathbb{R}P(4n+2^{t+1})) = \tbinom{2^{t+2}j+2^{t+1}+2}{2^{t+2}j+2^{t+1}} c^{4n} = c^{4n}.$$

Deste modo, obtemos:

$$\langle \widehat{w}_{2^{t+1}} \widehat{w}_{4n}, \sigma(\mathbb{R}P(\gamma^2 \oplus \mathbb{R}^{2^{t+1}-1})\rangle = \langle \alpha_2^{2n+2^t}, \sigma(\mathbb{R}P(\gamma^2 \oplus \mathbb{R}^{2^{t+1}-1})\rangle = 0,$$

$$\langle \widehat{w}_{2^{t+1}} \widehat{w}_{4n}, \sigma(\mathbb{R}P(4n+2^{t+1}))\rangle = \langle c^{4n+2^{t+1}}, \sigma(\mathbb{R}P(4n+2^{t+1}))\rangle = 1. \qquad \square$$

3.4 Involuções fixando $K_dP(2m+1) \cup K_dP(2n+1)$

Nesta seção, $2m+1$ e $2n+1$ são ímpares quaisquer fixados e $d = 2$ ou 4. Denotamos por α_d e β_d os geradores de $H^d(K_dP(2m+1))$ e $H^d(K_dP(2n+1))$, respectivamente.

Verificaremos que os argumentos utilizados por *Royster* em [29] no caso real, Teorema 3.1(c), também funcionam para mostrar o

Teorema 3.4.1. *Se (T, M^r) é uma involução com $F_T = K_dP(2m+1) \cup K_dP(2n+1)$, então (T, M^r) borda equivariantemente.*

Demonstração: O *fixed-data* de (T, M^r) será denotado por

$$\eta^k \to K_dP(2m+1) \qquad \cup \qquad \xi^l \to K_dP(2n+1),$$

com $r = d(2m+1) + k = d(2n+1) + l$.

Consideramos p e q tais que

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p \qquad \text{e} \qquad W(\xi^l) = (1+\beta_d)^q.$$

Pelo Corolário 1.7.11,

$$\eta^k \to K_dP(2m+1) \text{ é um } \textit{fixed-data} \quad \Leftrightarrow \quad \xi^l \to K_dP(2n+1) \text{ é um } \textit{fixed-data}.$$

Além disso, sabemos da Seção 2.2 que:

$$\eta^k \to K_dP(2m+1) \text{ é um } \textit{fixed-data} \quad \Leftrightarrow \quad [\eta^k \to K_dP(2m+1)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \text{ é par },$$

$$\xi^l \to K_dP(2n+1) \text{ é um } \textit{fixed-data} \quad \Leftrightarrow \quad [\xi^l \to K_dP(2n+1)] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q \text{ é par }.$$

Logo, caso p (ou q) seja par, já temos $[T, M^r] = 0$.

Resta então analisar o caso em que p e q são ímpares. Para tanto, usaremos o fato de $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ e $\lambda \to \mathbb{R}P(\xi^l)$ possuírem os mesmos números característicos.

Escrevendo

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha_d)^{2m+2}\left((1+c)^k + (1+c)^{k-d}\alpha_d + \cdots\right),$$

$$W(\mathbb{R}P(\xi^l)) = (1+\beta_d)^{2n+2}\left((1+c)^l + (1+c)^{l-d}\beta_d + \cdots\right),$$

vemos que

$$w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{k}{d}c^d + \alpha_d,$$

$$w_d(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{l}{d} c^d + \beta_d.$$

Agora, da igualdade $2dm + d + k = 2dn + d + l$ segue, pelo Teorema de *Lucas*, que

$$\overline{\binom{k}{d}} = \overline{\binom{l}{d}}.$$

Logo, denotando $\widetilde{w}_d = w_d + \binom{k}{d} c^d$, temos:

$$\widetilde{w}_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) = w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) + \binom{k}{d} c^d = \alpha_d,$$

$$\widetilde{w}_d(\mathbb{R}P(\xi^l)) = w_d(\mathbb{R}P(\xi^l)) + \binom{k}{d} c^d = \beta_d.$$

Afirmação 1: $2m + 1 = 2n + 1$.

De fato, como

$$\langle \widetilde{w}_d^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle = \langle \widetilde{w}_d^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle = \langle \beta_d^{2n+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle = 1,$$

vemos que $2n + 1 \leq 2m + 1$, uma vez que $\widetilde{w}_d^j \in H^{dj}(K_dP(2m+1)) = 0$ para cada $j > 2m + 1$.

Por outro lado, temos

$$\langle \widetilde{w}_d^{2m+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle = \langle \widetilde{w}_d^{2m+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle = \langle \alpha_d^{2m+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle = 1,$$

de onde segue que $2m + 1 \leq 2n + 1$. Deste modo chegamos à igualdade $2m + 1 = 2n + 1$; equivalentemente, $k = l$.

Afirmação 2: $W(\eta^k) = (1 + \alpha_d)^p = (1 + \alpha_d)^q$.

De fato, se $p = q$, então não há mais nada a provar. Sem perda de generalidade assumimos então $p < q$.

Lembrando que $\widetilde{w}_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha_d$, $\widetilde{w}_d(\mathbb{R}P(\xi^k)) = \beta_d$ e usando a Afirmação 1, escrevemos

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1 + \widetilde{w}_d)^{2m+2} \left(\sum_j (1+c)^{k-dj} \binom{p}{j} \widetilde{w}_d^j \right),$$

$$W(\mathbb{R}P(\xi^k)) = (1 + \widetilde{w}_d)^{2m+2} \left(\sum_j (1+c)^{k-dj} \binom{q}{j} \widetilde{w}_d^j \right).$$

Uma vez que estamos assumindo $q - p$ positivo, podemos tomar 2^s a menor potência de 2 que aparece na expansão diádica de $q - p$. Ou seja, 2^s é tal que

$$\overline{\binom{p}{2^s}} \neq \overline{\binom{q}{2^s}} \quad \text{e} \quad \overline{\binom{p}{j}} = \overline{\binom{q}{j}} \text{ (para cada } j < 2^s). \tag{3.6}$$

Sem perder a generalidade, vamos assumir

$$\overline{\binom{p}{2^s}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \overline{\binom{q}{2^s}} = 0.$$

Mostraremos que $2^s > 2m+1$. Com efeito, usando (3.6), obtemos

$$w_{d2^s}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \widetilde{w}_d^{2^s} + p(\widetilde{w}_d, c) \qquad \text{e} \qquad w_{d2^s}(\mathbb{R}P(\xi^k)) = p(\widetilde{w}_d, c),$$

para um certo polinômio $p(\widetilde{w}_d, c) \in H^{d2^s}(\mathbb{R}P(-))$ nas classes $\widetilde{w}_d$ e c.
Se tivéssemos $2^s \leq 2m+1$, poderíamos considerar os números característicos

$$\langle w_{d2^s}\widetilde{w}_d^{2m+1-2^s}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \qquad \text{e} \qquad \langle w_{d2^s}\widetilde{w}_d^{2m+1-2^s}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^k))\rangle,$$

os quais devem ser iguais. No entanto,

$$\begin{aligned}
\langle w_{d2^s}\widetilde{w}_d^{2m+1-2^s}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle &= \langle(\widetilde{w}_d^{2^s} + p(\widetilde{w}_d, c))\widetilde{w}_d^{2m+1-2^s}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= \langle\widetilde{w}_d^{2m+1} + p(\widetilde{w}_d, c)\widetilde{w}_d^{2m+1-2^s}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= 1 + \langle p(\widetilde{w}_d, c))\widetilde{w}_d^{2m+1-2^s}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= 1 + \langle p(\widetilde{w}_d, c))\widetilde{w}_d^{2m+1-2^s}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^k))\rangle \\
&= 1 + \langle w_{d2^s}\widetilde{w}_d^{2m+1-2^s}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^k))\rangle.
\end{aligned}$$

Desta contradição segue que $2^s > 2m+1$. Pela forma com que tomamos 2^s, isso significa que toda potência de 2 que aparece na expansão diádica de $q-p$ é estritamente maior que $2m+1$ e, portanto, $(1+\alpha_d)^{q-p} = 1$. Ou seja,

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p = (1+\alpha_d)^{q-p}(1+\alpha_d)^p = (1+\alpha_d)^q,$$

encerrando a prova da Afirmação 2.

Assim, temos $2n+1 = 2m+1$ (pela Afirmação 1) e, como $W(\xi^k) = (1+\beta_d)^q$, a Afirmação 2 nos garante que

$$\eta^k \to K_dP(2m+1) \qquad \text{e} \qquad \xi^k \to K_dP(2m+1)$$

possuem os mesmos números característicos. Deste modo mostramos que $j_*[T, M^r] = 0$, encerrando a demonstração. $\square$

Note que para quaisquer k, l naturais, o fibrado

$$\mathbb{R}^k \to K_dP(2m+1) \qquad \cup \qquad \mathbb{R}^l \to K_dP(2n+1)$$

borda e, portanto, é um *fixed-data*. Ou seja, para cada $r \geq max\{(2m+1)d, (2n+1)d\}$, a classe $0 \in \mathcal{I}_r(\mathbb{Z}_2)$ contém uma involução que possui $F = K_dP(2m+1) \cup K_dP(2n+1)$ como conjunto de pontos fixos. Assim, o teorema anterior garante que

$$\{0 \in \mathcal{I}_r(\mathbb{Z}_2) : r \geq max\{(2m+1)d, (2n+1)d\}\}$$

é a coleção das classes de bordismo de *todas* as involuções que fixam a união disjunta $K_dP(2m+1) \cup K_dP(2n+1)$.

3.5 Involuções fixando $K_dP(2n) \cup K_dP(2m+1)$

Nesta seção obtemos as versões complexa e quaterniônica do resultado obtido por *Royster* em [29], envolvendo involuções fixando um espaço projetivo real par e outro ímpar. Uma organização melhor e algumas variantes dos argumentos ali contidos permitiram estendê-los para os casos complexo e quaterniônico.

O lema a seguir é um resultado técnico que será útil em computações não só nesta seção como também no próximo capítulo.

Lema 3.5.1. *Seja $\eta^k \to K_dP(n)$ um k-fibrado vetorial de dimensão $k > 0$ sobre um espaço projetivo $K_dP(n)$, onde $d = 1, 2$ ou 4 e $n > 0$. Se*

$$\overline{W}(\eta^k) = \frac{1}{W(\eta^k)} = (1+\alpha_d)^p,$$

onde α_d denota o gerador de $H^d(K_dP(n))$, então

$$\langle \alpha_d^{n-f}(\alpha_d + c^d)^g c^{k-1+df-dg}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \overline{\binom{g+p}{f}},$$

para cada f, g naturais tais que $f \leq n$ e $dg \leq k-1+df$.

Demonstração: Temos

$$\langle \alpha_d^{n-f}(\alpha_d + c^d)^g c^{k-1+df-dg}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{g} \overline{\binom{g}{j}} \alpha_d^{n-f+j} c^{k-1+d(f-j)}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)\right\rangle.$$

Agora observamos que se $j > f$, então $\alpha_d^{n-f+j} = 0$; e para cada $j \leq f$,

$$\left\langle \alpha_d^{n-f+j} c^{k-1+d(f-j)}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)\right\rangle = \overline{\binom{p}{f-j}},$$

pela fórmula de *Conner* (vide Observação 1.13.6). Logo,

$$\langle \alpha_d^{n-f}(\alpha_d + c^d)^g c^{k-1+df-dg}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle = \sum_{j=0}^{f} \overline{\binom{g}{j}\binom{p}{f-j}} = \overline{\binom{p+g}{f}},$$

pela Observação 1.12.8(b). □

Para o que segue, fixamos um número ímpar qualquer $2m+1$, um par positivo $2n$ e $d = 2$ ou 4. Denotaremos por α_d e β_d os geradores de $H^d(K_dP(2n))$ e $H^d(K_dP(2m+1))$, respectivamente.

Teorema 3.5.2. *Seja* (T, M^r) *uma involução com* $F_T = K_dP(2n) \cup K_dP(2m+1)$. *Então, as únicas possibilidades para a classe de bordismo de* (T, M^r) *são:*

(a) $[Id, K_dP(2n)]$;

(b) $[twist, K_dP(2n) \times K_dP(2n)]$;

(c) $[\tau_{2n}^{2m+1}, K_dP(2n+2m+2)]$;

(d) $[\tau_{2m+1}^{0}, K_dP(2m+2)] + \Gamma^{r-(2n+1)d}[\tau_{2n}^{0}, K_dP(2n+1)]$, *com* $0 \leq r-(2n+1)d \leq h_d(0, 2n)$.

Demonstração: O *fixed-data* de (T, M^r) será denotado por

$$(\eta^k \to K_dP(2n)) \qquad \cup \qquad (\xi^l \to K_dP(2m+1)),$$

com $r = 2nd + k = (2m+1)d + l$. Considere p e q tais que

$$W(\eta^k) = (1 + \alpha_d)^p \qquad \text{e} \qquad W(\xi^l) = (1 + \beta_d)^q.$$

Observe que se ξ^l borda, então η^k é o *fixed-data* de uma involução bordante a (T, M^r). Daí, pelo Teorema 2.2,

$$[T, M^r] = \begin{cases} [\ Id, K_dP(2n)], \text{ ou} \\ [\ twist, K_dP(2n) \times K_dP(2n)], \end{cases}$$

Assumimos então que $\xi^l \to K_dP(2m+1)$ não borda, ou seja, q é ímpar. Em particular, $w_d(\xi^l) = \beta_d \neq 0$ (o que implica $l \geq d$). Temos também $k > 0$.

Escrevendo

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1 + \alpha_d)^{2n+1} \left(\sum_j (1+c)^{k-dj} \binom{p}{j} \alpha_d^j \right),$$

$$W(\mathbb{R}P(\xi^l)) = (1 + \beta_d)^{2m+2} \left(\sum_j (1+c)^{l-dj} \binom{q}{j} \beta_d^j \right),$$

calculamos:

$$w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \tbinom{k}{d}c^d + \overline{p}\alpha_d + \alpha_d,$$

$$w_d(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \tbinom{l}{d}c^d + \beta_d.$$

Como d ($= 2$ ou 4) é uma potência de 2, da igualdade $2nd + k = 2md + d + l$ seque que

$$\overline{\binom{k}{d}} + \overline{\binom{l}{d}} = 1.$$

Assim, definindo $\widetilde{w}_d(\mathbb{R}P(-)) = w_d(\mathbb{R}P(-)) + \tbinom{k}{d}c^d$, obtemos:

$$\begin{cases} \widetilde{w}_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (\overline{p}+1)\alpha_d, \\ \widetilde{w}_d(\mathbb{R}P(\xi^l)) = c^d + \beta_d. \end{cases}$$

1º **caso:** p **ímpar.** Neste caso,

$$\begin{cases} \widetilde{w}_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) + c^d = c^d, \\ \widetilde{w}_d(\mathbb{R}P(\xi^l)) + c^d = \beta_d. \end{cases}$$

Suponha $l > d$. Então, podemos considerar os números característicos

$$\langle (\widetilde{w}_d + c^d)^{2m+2} c^{l-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)\rangle,$$

$$\langle (\widetilde{w}_d + c^d)^{2m+2} c^{l-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)\rangle,$$

os quais já sabemos que são iguais. No entanto,

$$\begin{aligned} 0 = \langle \beta_d^{2m+2} c^{l-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)\rangle &= \langle (\widetilde{w}_d + c^d)^{2m+2} c^{l-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)\rangle \\ &= \langle (\widetilde{w}_d + c^d)^{2m+2} c^{l-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)\rangle \\ &= \langle (c^d)^{2m+2} c^{l-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)\rangle \\ &= \langle (c^d)^{2m+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)\rangle \\ &= \langle (\widetilde{w}_d + c^d)^{2m+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)\rangle \\ &= \langle (\widetilde{w}_d + c^d)^{2m+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)\rangle \\ &= \langle \beta_d^{2m+1} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)\rangle = 1. \end{aligned}$$

Desta contradição, concluímos que $l = d$. Logo, $W(\xi^d) = 1 + \beta_d$, acarretando

$$[\xi^d \to K_dP(2m+1)] = [\gamma^d \to K_dP(2m+1)].$$

Da igualdade acima segue que $(\xi^d \to K_dP(2m+1)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$ é um *fixed-data* e, portanto, $(\eta^k \to K_dP(2n)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$ também deve ser o *fixed-data* de uma involução (vide Corolário 1.7.11). Assim, pelos resultados da Seção 3.3, concluímos que $0 \leq k-d = r-(2n+1)d = (2m+2)d-(2n+1)d \leq h_d(0,2n)$ e

$$[T, M^r] = [\tau^0_{2m+1}, K_d(2m+2)] + \Gamma^{r-(2n+1)d}[\tau^0_{2n}, K_d(2n+1)].$$

2º caso: p par. Neste caso, usaremos

$$\begin{cases} \widetilde{w}_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha_d, \\ \widetilde{w}_d(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta_d + c^d, \end{cases} \tag{3.7}$$

para provar que $[T, M^r] = [\tau^{2m+1}_{2n}, K_dP(2n+2m+2)]$.

Note que para qualquer potência 2^s maior do que $2n$, temos $(1+\alpha_d)^{2^s} = 1$ e, portanto, podemos assumir $p > 0$. Tome $2^{t+1} > max\{p, q, 2n, 2m+1\}$ e defina

$$p' = 2^{t+1} - p, \qquad q' = 2^{t+1} - q.$$

Então,

$$\overline{W}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \frac{1}{W(\mathbb{R}P(\eta^k))} = (1+\alpha_d)^{p'}, \qquad \overline{W}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \frac{1}{W(\mathbb{R}P(\xi^l))} = (1+\beta_d)^{q'}$$

e, conforme Observação 1.12.7, temos

$$\overline{\binom{p-1}{2^j}} + \overline{\binom{p'+1}{2^j}} = 1, \tag{3.8}$$

$$\overline{\binom{q}{2^j}} + \overline{\binom{q'}{2^j}} = 1, \tag{3.9}$$

para cada $j = 1, 2, \ldots, t$.

Afirmação 1: $r \geq d(2n+2m+2)$.

Provaremos esta afirmação analisando os casos em que $2n < 2m+1$ e $2n > 2m+1$ separadamente. Em ambos os casos usaremos (3.7) e o fato dos fibrados linha $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ e $\lambda \to \mathbb{R}P(\xi^l)$ possuírem os mesmos números característicos.

(I) Se $2n < 2m+1$: podemos considerar os números característicos

$$\langle \widetilde{w}_d^{2n}(\widetilde{w}_d + c^d)^{2m+1-2n}c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(-))\rangle.$$

Por um lado, temos

$$\langle \alpha_d^{2n}(\alpha_d + c^d)^{2m+1-2n}c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \langle \alpha_d^{2n}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = 1;$$

e, por outro, aplicando o Lema 3.5.1,

$$\langle (\beta_d + c^d)^{2n} \beta_d^{2m+1-2n} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle = \overline{\binom{q'+2n}{2n}}.$$

Como tais números devem coincidir, concluímos então que $\overline{\binom{q'+2n}{2n}} = 1$. Logo, q' e $2n$ possuem expansões diádicas disjuntas (vide Corolário 1.12.5). De (3.9) segue então que $\overline{\binom{q}{2n}} = 1$. Deste modo, vemos que $w_{d(2n+1)}(\xi^l) = \overline{\binom{q}{2n+1}} \beta_d^{2n+1} = \beta_d^{2n+1} \neq 0$ e, portanto, $l \geq d(2n+1)$.

(II) Se $2n > 2m+1$: podemos considerar os números característicos

$$\langle (\widetilde{w}_d + c^d)^{2m+1} \widetilde{w}_d^{2n-2m-1} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(-)) \rangle,$$

$$\langle (\widetilde{w}_d + c^d)^{2m+2} \widetilde{w}_d^{2n-2m-2} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(-)) \rangle.$$

Usando o Lema 3.5.1, obtemos:

$$\begin{aligned} 1 &= \left\langle \beta_d^{2m+1} (\beta_d + c^d)^{2n-2m-1} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle \\ &= \left\langle (\alpha_d + c^d)^{2m+1} \alpha_d^{2n-2m-1} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle \\ &= \overline{\binom{p'+2m+1}{2m+1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \beta_d^{2m+2} (\beta_d + c^d)^{2n-2m-2} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle \\ &= \left\langle (\alpha_d + c^d)^{2m+2} \alpha_d^{2n-2m-2} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle \\ &= \overline{\binom{p'+2m+2}{2m+2}}. \end{aligned}$$

De $\overline{\binom{p'+2m+1}{2m+1}} = 1$ segue que $\overline{\binom{p'+2m+1}{2m}} = 1$ e, portanto, $p'+1$ e $2m$ possuem expansões diádicas disjuntas (veja Corolário 1.12.5). Logo, usando (3.8), obtemos

$$\overline{\binom{p-1}{2m+1}} = 1$$

A igualdade $\overline{\binom{p'+2m+2}{2m+2}} = 0$ implica na existência de uma potência 2^u que aparece tanto na expansão diádica de $2m+2$ como também na de p'. Daí, 2^u aparece em $p'+1$, pois p' é par, e então, por (3.8), 2^u não aparece em $p-1$. Ou seja, 2^u aparece na expansão diádica de $2m+2$ mas não aparece na de $p-1$. Pelo Teorema de *Lucas*, isso significa que

$$\overline{\binom{p-1}{2m+2}} = 0.$$

Assim, usando a relação de *Stiefel*, concluímos que

$$\overline{\binom{p}{2m+2}} = \overline{\binom{p-1}{2m+1}} + \overline{\binom{p-1}{2m+2}} = 1 + 0 = 1.$$

Logo, $w_{d(2m+2)}(\eta^k) = \overline{\binom{p}{2m+2}}\alpha_d^{2m+2} = \alpha_d^{2m+2} \neq 0$ e, portanto, $k \geq d(2m+2)$.

Observe que, no caso (I) chegamos a $l \geq d(2n+1)$ e, no caso (II), $k \geq d(2m+2)$; ou seja, em ambos os casos, mostramos que

$$r = 2nd + k = (2m+1)d + l \geq d(2n+2m+2).$$

Portanto, a Afirmação 1 está provada.

Afirmação 2: $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^{2m+2}$.

Pela Afirmação 1, $r \geq d(2n+2m+2)$, podemos considerar os números característicos

$$\langle \widetilde{w}_d^{2n-j}(\widetilde{w}_d + c^d)^{2m+2} c^{r-d(2n+2m+2)+dj-1}, \sigma(\mathbb{R}P(-))\rangle,$$

para cada $j = 1, \dots, 2n$. Vale lembrar que, por (3.7),

$$\widetilde{w}_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha_d \qquad \text{e} \qquad \widetilde{w}_d(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta_d + c^d.$$

Assim, para cada $j = 1, \dots, 2n$, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \beta_d^{2m+2}(\beta_d + c^d)^{2n-j} c^{r-d(2n+2m+2)+dj-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\ &= \left\langle (\alpha_d + c^d)^{2m+2}\alpha_d^{2n-j} c^{r-d(2n+2m+2)+dj-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\ &= \overline{\tbinom{p'+2m+2}{j}}, \end{aligned}$$

usando o Lema 3.5.1. Logo, obtemos

$$(1+\alpha_d)^{2m+2}\overline{W}(\eta^k) = (1+\alpha_d)^{2m+2+p'} = 1 + \sum_{i=1}^{2n} \overline{\binom{p'+2m+2}{j}}\alpha_d^i = 1.$$

Da unicidade do inverso multiplicativo segue então que $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^{2m+2}$.

Afirmação 3: $W(\xi^l) = (1+\beta_d)^{2n+1}$.

Como já temos $r \geq d(2n+2m+2)$ (pela Afirmação 1), podemos considerar os números característicos

$$\langle \widetilde{w}_d^{2n+1}(\widetilde{w}_d + c^d)^{2m+1-j} c^{r-d(2n+2m+2)+dj-1}, \sigma(\mathbb{R}P(-))\rangle,$$

para cada $j = 1, \dots, 2m+1$.

Assim, para cada $j = 1, \ldots, 2m+1$, obtemos:

$$0 = \left\langle \alpha_d^{2n+1}(\alpha_d + c^d)^{2m+1-j} c^{r-d(2n+2m+2)+dj-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle$$

$$= \left\langle (\beta_d + c^d)^{2n+1} \beta_d^{2m+1-j} c^{r-d(2n+2m+2)+dj-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle$$

$$= \overline{\tbinom{q'+2n+1}{j}},$$

usando novamente o Lema 3.5.1. Assim concluímos que

$$(1+\beta_d)^{2n+1}\overline{W}(\xi^l) = (1+\beta_d)^{2n+1+q'} = 1$$

e, portanto, $W(\xi^l) = (1+\beta_d)^{2n+1}$.

Das afirmações 1, 2 e 3 segue que o fibrado

$$(2m+2)\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-(2m+2)d} \to K_dP(2n) \qquad \cup \qquad (2n+1)\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{l-(2n+1)d} \to K_dP(2m+1)$$

é bordante ao *fixed-data* $\eta^k \cup \xi^l$ e, portanto, ele também pode ser realizado como o *fixed-data* de uma involução.

Daí, como

$$(2m+2)\gamma^d \to K_dP(2n) \qquad \cup \qquad (2n+1)\gamma^d \to K_dP(2m+1)$$

é o *fixed-data* da involução $(\tau_{2n}^{2m+1}, K_d(2n+2m+2))$ e $[K_d(2n+2m+2)] \neq 0$, o Teorema 1.9.3 juntamente com o Corolário 1.9.2 nos garantem que $k-(2m+2)d = 0 = l-(2n+1)d$. Deste modo, concluímos que $r = d(2n+2m+2)$ e

$$[T, M^r] = [\tau_{2n}^{2m+1}, K_d(2n+2m+2)],$$

encerrando a demonstração do teorema. $\square$

Fixe uma união disjunta $F = K_dP(2n) \cup K_dP(2m+1)$, $2n = 2^t(2j+1) > 0$. O fato é que, como já calculamos

$$h_d(0,2n) = \begin{cases} 2d & \text{se } t = 1, \\ (2^t-1)d & \text{se } t \geq 2, \end{cases}$$

vide Teorema 3.3.4, o Teorema 3.5.2 determina precisamente a coleção $\mathcal{A}$ das classes de bordismo de todas as involuções que possuem tal F como conjunto de pontos fixos. Especificamente:

(a) se $2m+1 < 2n$,

$$\mathcal{A} = \left\{[\tau_{2n}^{2m+1}, K_dP(2n+2m+2)], [Id, K_dP(2n)], [twist, K_dP(2n) \times K_dP(2n)]\right\};$$

(b) se $2n < 2m+1 < 4n$ e $0 < (2m+2) - 2n \leq 2^t$,

$$\mathcal{A} = \left\{[\tau_{2n}^{2m+1}, K_dP(2n+2m+2)], [twist, K_dP(2n) \times K_dP(2n)], \right.$$
$$\left. [\tau_{2m+1}^{0}, K_dP(2m+2)] + \Gamma^{(2m+2)d-(2n+1)d}[\tau_{2n}^{0}, K_dP(2n+1)]\right\};$$

(c) se $2n < 2m+1 < 4n$ e $(2m+2) - 2n > 2^t$,

$$\mathcal{A} = \left\{[\tau_{2n}^{2m+1}, K_dP(2n+2m+2)], [twist, K_dP(2n) \times K_dP(2n)]\right\};$$

(d) se $4n < 2m+1$,

$$\mathcal{A} = \left\{[\tau_{2n}^{2m+1}, K_dP(2n+2m+2)]\right\}.$$

Capítulo 4

Involuções fixando $K_dP(2^s) \cup K_dP(2n)$

4.1 Introdução

Conforme mencionamos anteriormente, *D. C. Royster* determinou, em [29], as classes de bordismo das involuções que fixam $F = \mathbb{R}P(r) \cup \mathbb{R}P(s)$, para quaisquer $\{r, s\}$, com exceção do caso em que r e s são ambos pares positivos. Ressaltamos que o caso $F = \mathbb{R}P(2m) \cup \mathbb{R}P(2n)$ é um problema ainda em aberto. Na literatura recente, considerando-se duas famílias particulares de pares $\{2m, 2n\}$, encontramos os

Teorema 4.1 (caso $2m = 2n$, *Hou-Torrence*). *Toda involução com conjunto de pontos fixos da forma $F = \mathbb{R}P(2n) \cup \mathbb{R}P(2n)$ borda equivariantemente.* [9]

Teorema 4.2 (caso $\{2, 4j+2\}$, *Oliveira*). *Se $F = \mathbb{R}P(2) \cup \mathbb{R}P(4j+2)$, com $j \geq 1$, então a coleção das classes de bordismo de todas as involuções que possuem F como conjunto de pontos fixos é dada por*

$$\{\Gamma^i[\tau^2_{4j+2}, \mathbb{R}P(4j+5)] : 0 \leq i \leq 2^t - 1\},$$

onde 2^t é a menor potência de 2 que aparece na expansão diádica de $4j$. [14]

Neste capítulo, ampliaremos a família de pares considerada no Teorema 4.2 estudando todos os casos da forma $\{2^s, 2n\}$, em que um dos pares é uma potência de 2 arbitrária e o outro é um par positivo qualquer. Mais geralmente, nossos resultados também contemplarão os espaços projetivos complexos e quaterniônicos. Conforme mencionado no Capítulo 0, o caso particular envolvendo espaços projetivos reais e com $s = 1$ aparece em [15].

Considere então $d = 1, 2$ ou 4, um par qualquer $2n$ e uma potência 2^s, com $s, n \geq 1$ e $2n \neq 2^s$. Já conhecemos, vide Seção 1.14, alguns modelos de involuções que possuem $F = K_dP(2^s) \cup K_dP(2n)$ como conjunto de pontos fixos; são eles:

(I) $\Gamma^j[\tau_{2^s}^{2n}, K_dP(2^s + 2n + 1)]$, com $0 \leq j \leq h_d(2^s, 2n)$;

(II) $[T, M^r] + [S, N^r]$, com $F_T = K_dP(2^s) \cup *$ e $F_S = K_dP(2n) \cup *$;

(III) $[T, M^r] + [S, N^r]$, com $F_T = K_dP(2^s)$ e $F_S = K_dP(2n)$.

Nosso objetivo é verificar que *toda* involução com conjunto de pontos fixos $F = K_dP(2^s) \cup K_dP(2n)$ está em uma das classes acima. Mais precisamente, mostraremos o

Teorema 4.3. *Seja (T, M^r) involução fixando $F_T = K_dP(2^s) \cup K_dP(2n)$, com $s, n \geq 1$, $2n \neq 2^s$, e $d = 1, 2$ ou 4. Então, a classe $[T, M^r]$, em $\mathcal{I}_r(\mathbb{Z}_2)$, pertence à coleção $A \cup B \cup C$, onde os conjuntos A, B e C são descritos do seguinte modo:*

(a) $A = \{\Gamma^i[\tau_{2^s}^{2n}, K_dP(2^s + 2n + 1)] : 0 \leq i \leq h_d(2^s, 2n)\}$;

(b) $$B = \{\Gamma^i[\tau_{2^s}^{0}, K_dP(2^s + 1)] + \Gamma^j[\tau_{2n}^{0}, K_dP(2n + 1)] : 0 \leq i \leq h_d(0, 2^s),\ 0 \leq j \leq h_d(0, 2n),\ 2^sd + i = 2nd + j\}$$

($B = \emptyset$, se a intersecção dos intervalos $[2^sd, 2^sd + h_d(0, 2^s)]$ e $[2nd, 2nd + h_d(0, 2n)]$ é vazia);

(c) $$C = \begin{cases} \emptyset & se \quad 2^{s-1} \neq 2n \neq 2^{s+1}, \\ \{[Id, K_dP(2^s)] + [twist, K_dP(2n) \times K_dP(2n)]\} & se \quad 2n = 2^{s-1}, \\ \{[Id, K_dP(2n)] + [twist, K_dP(2^s) \times K_dP(2^s)]\} & se \quad 2n = 2^{s+1}. \end{cases}$$

Observe que os conjuntos B e C acima contêm todas as classes que participam dos modelos (II) e (III), respectivamente. Isso decorre dos resultados que aparecem nas seções 2.3 e 3.3.

Os valores explícitos de $h_d(0, 2n)$ e $h_d(0, 2^s)$ são dados pelos Teorema 3.2 (*Pergher-Stong*, caso real) e Teorema 3.3.4 (casos complexo e quaterniônico). Assim, para que a classificação dada pelo teorema acima seja numericamente precisa, resta determinar $h_d(2^s, 2n)$. Nessa direção, e de forma mais geral, mostraremos o

Teorema 4.4. *Sejam $d = 1, 2$ ou 4, e $2m, 2n$ pares quaisquer com $0 \leq 2m < 2n$. Escreva $2n - 2m = 2^t(2a + 1)$, com $t \geq 1$, $a \geq 0$. Então,* $h_d(2m, 2n) = \begin{cases} 2d & \text{se } t = 1, \\ (2^t - 1)d & \text{se } t > 1. \end{cases}$

Cumpre observar que o teorema acima no caso em que $d = 1$ também aparece em [15]. Portanto o Teorema 4.4 estende [15] para espaços projetivos complexos e quaterniônicos.

As duas seções que seguem serão dedicadas, respectivamente, às demonstrações dos teoremas 4.3 e 4.4.

4.2 Prova do Teorema 4.3

4.2.1 Preliminares

Inicialmente, apresentaremos dois lemas técnicos que serão úteis em nossos argumentos.

Lema 4.2.1. *Seja $(\eta^k \to K_dP(2m)) \cup (\xi^l \to K_dP(2n))$ um fixed-data, com $0 < 2m < 2n$, $k, l > 0$, $d = 1, 2$ ou 4. Então as d-ésimas classes de Stiefel-Whitney $w_d(\eta^k) \in H^d(K_dP(2m))$ e $w_d(\xi^l) \in H^d(K_dP(2n))$ são não nulas.*

Demonstração: Denotaremos por α_d e β_d os elementos não nulos de $H^d(K_dP(2m))$ e $H^d(K_dP(2n))$, respectivamente. Considere p e q tais que

$$W(\eta^k) = (1 + \alpha_d)^p \qquad \text{e} \qquad W(\xi^l) = (1 + \beta_d)^q.$$

Como $w_d(\eta^k) = p\alpha_d$ e $w_d(\xi^l) = q\beta_d$, precisamos mostrar que p e q são ímpares. Pelo Teorema 1.6.4, obtemos:

$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = W(K_dP(2m)) \left(\sum_i (1 + c)^{k-i} w_i(\eta^k)\right) = (1+\alpha_d)^{2m+1} \left(\sum_j (1 + c)^{k-dj} \binom{p}{j} \alpha_d^j\right)$,

$W(\mathbb{R}P(\xi^l)) = W(K_dP(2n)) \left(\sum_i (1 + c)^{l-i} w_i(\xi^l)\right) = (1 + \beta_d)^{2n+1} \left(\sum_j (1 + c)^{l-dj} \binom{q}{j} \beta_d^j\right)$.

Daí, calculamos

$$w_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{k}{d} c^d + (1 + p)\alpha_d,$$

$$w_d(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{l}{d} c^d + (1 + q)\beta_d.$$

Defina $\widehat{w}_d(\mathbb{R}P(-)) = w_d(\mathbb{R}P(-)) + \binom{k}{d} c^d$. De $k + 2md = l + 2nd$ segue, via Teorema de *Lucas*, que $\overline{\binom{k}{d}} = \overline{\binom{l}{d}}$ e portanto:

$$\widehat{w}_d(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1 + p)\alpha_d,$$

$$\widehat{w}_d(\mathbb{R}P(\xi^l)) = (1+q)\beta_d.$$

Observe que $\widehat{w}_d^{2n}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = (p+1)\alpha_d^{2n} = 0$, pois $2m < 2n$ por hipótese. Como os fibrados *splitting* $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ e $\lambda \to \mathbb{R}P(\xi^l)$ possuem os mesmos números característicos, temos então:

$$0 = \langle \widehat{w}_d^{2n} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)\rangle = \langle \widehat{w}_d^{2n} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle = \langle (q+1)\beta_d^{2n} c^{l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle = \overline{q+1}.$$

Em particular, $\widehat{w}_d(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \overline{(q+1)}\beta_d = 0$. Daí,

$$\overline{p+1} = \langle (p+1)\alpha_d^{2m} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \langle \widehat{w}_d^{2m} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \langle \widehat{w}_d^{2m} c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle = 0.$$

Desse modo mostramos que $\overline{p} = 1 = \overline{q}$, como queríamos. □

Lema 4.2.2. *Seja $\eta^k \to K_dP(n)$ um k-fibrado vetorial sobre um espaço projetivo qualquer, com $k, n > 0$ e $d = 1, 2$ ou 4. Se α_d denota o gerador de $H^d(K_dP(n))$ e c é a primeira classe característica do fibrado splitting $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$, então:*
(a) $Sq^d(c^{2d}) = 0$, $Sq^d(\alpha_d^2) = 0$ e $Sq^d(\alpha_d c^d) = \alpha_d^2 c^d + \alpha_d c^{2d}$ em $H^{3d}(\mathbb{R}P(\eta^k))$;
(b) $Sq^{2^v d}(\alpha_d^{2^v} c^d) = \alpha_d^{2^{v+1}} c^d$, $Sq^{2^v d}(\alpha_d c^{2^v d}) = \alpha_d c^{2^{v+1} d}$ e $Sq^{2^v d}(c^{(2^v+1)d}) = c^{(2^{v+1}+1)d}$ em $H^{(2^{v+1}+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k))$, para cada $v \geq 1$.

Demonstração: Usaremos as propriedades axiomáticas dos quadrados de *Steenrod* juntamente com a Fórmula de *Wu* (vide Seção 1.8).
Considere $v \geq 0$ e os $2^v d$-fibrados vetoriais $2^v\gamma^d \to K_dP(n)$ e $2^v d\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$. Como $W(2^v\gamma^d) = (1+\alpha_d)^{2^v} = 1+\alpha_d^{2^v}$ e $W(2^v d\lambda) = (1+c)^{2^v d} = 1+c^{2^v d}$, vemos que $w_j(2^v\gamma^d) = 0$ e $w_j(2^v d\lambda) = 0$, para todo $0 \neq j \neq 2^v d$. Pela Fórmula de *Wu* (Teorema 1.8.2) obtemos então, para cada $0 < i < 2^v d$,

$$Sq^i(\alpha_d^{2^v}) = Sq^i(w_{2^v d}(2^v\gamma^d)) = w_i(2^v\gamma^d) w_{2^v d}(2^v\gamma^d) = 0,$$

$$Sq^i(c^{2^v d}) = Sq^i(w_{2^v d}(2^v d\lambda)) = w_i(2^v d\lambda) w_{2^v d}(2^v d\lambda) = 0.$$

Em particular, $Sq^d(\alpha_d^2) = 0$ e $Sq^d(c^{2d}) = 0$. E ainda, usando a Fórmula de *Cartan*, calculamos:

$$Sq^{2^v d}(\alpha_d^{2^v} c^d) = \textstyle\sum_{i=0}^{2^v d} Sq^i(\alpha_d^{2^v}) Sq^{2^v d - i}(c^d) = Sq^0(\alpha_d^{2^v}) Sq^{2^v d}(c^d) + Sq^{2^v d}(\alpha_d^{2^v}) Sq^0(c^d),$$

$$Sq^{2^v d}(\alpha_d c^{2^v d}) = \textstyle\sum_{i=0}^{2^v d} Sq^i(\alpha_d) Sq^{2^v d - i}(c^{2^v d}) = Sq^0(\alpha_d) Sq^{2^v d}(c^{2^v d}) + Sq^{2^v d}(\alpha_d) Sq^0(c^{2^v d}),$$

$$Sq^{2^v d}(c^{(2^v+1)d}) = Sq^{2^v d}(c^d c^{2^v d}) = \textstyle\sum_{i=0}^{2^v d} Sq^i(c^d) Sq^{2^v d - i}(c^{2^v d}) =$$
$$= Sq^0(c^d) Sq^{2^v d}(c^{2^v d}) + Sq^{2^v d}(c^d) Sq^0(c^{2^v d}).$$

Assim, para $v = 0$ em $Sq^{2^v d}(\alpha_d^{2^v} c^d)$, obtemos

$$Sq^d(\alpha_d c^d) = Sq^0(\alpha_d)Sq^d(c^d) + Sq^d(\alpha_d)Sq^0(c^d) = \alpha_d c^{2d} + \alpha_d^2 c^d;$$

e, para $v \geq 1$,

$$Sq^{2^v d}(\alpha_d^{2^v} c^d) = Sq^0(\alpha_d^{2^v})Sq^{2^v d}(c^d) + Sq^{2^v d}(\alpha_d^{2^v})Sq^0(c^d) = \alpha_d^{2^{v+1}} c^d,$$

$$Sq^{2^v d}(\alpha_d c^{2^v d}) = Sq^{2^v d}(c^{2^v d})Sq^0(\alpha_d) + Sq^0(c^{2^v d})Sq^{2^v d}(\alpha_d) = \alpha_d c^{2^{v+1} d},$$

$$Sq^{2^v d}(c^{(2^v+1)d}) = Sq^0(c^d)Sq^{2^v d}(c^{2^v d}) + Sq^{2^v d}(c^d)Sq^0(c^{2^v d}) = c^d c^{2^{v+1} d} = c^{(2^{v+1}+1)d},$$

pois $2^v d > d$ implica $Sq^{2^v d}(c^d) = 0$ e $Sq^{2^v d}(\alpha_d) = 0$.

Desse modo provamos todas as igualdades desejadas. $\square$

Iniciamos agora a prova do Teorema 4.3. Fixamos uma potência 2^s, com $s \geq 1$, um par positivo $2n \neq 2^s$, e $d = 1, 2$ ou 4. Denotaremos por α_d o gerador de $H^d(K_dP(2^s))$, e por β_d o gerador de $H^d(K_dP(2n))$. Consideramos 2^t e 2^u sendo, respectivamente, a menor e a maior potência de 2 que aparecem na expansão diádica de $2n$. Isto é,

$$2n = 2^t(2a+1) \qquad \text{e} \qquad 2^u \leq 2n < 2^{u+1},$$

para certo inteiro $a \geq 0$. Observe que $2n \leq \sum_{i=t}^{u} 2^i = 2^{u+1} - 2^t$.

Seja (T, M^r) uma involução qualquer, em uma variedade fechada M^r, fixando $F_T = K_dP(2^s) \cup K_dP(2n)$. O *fixed-data* de (T, M^r) será denotado por

$$\eta^k \to K_dP(2^s) \qquad \cup \qquad \xi^l \to K_dP(2n),$$

com $k + 2^s d = r = l + 2nd$.

Sabemos, da seqüência de *Conner-Floyd*, que a classe de bordismo $[T, M^r]$ em $\mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2)$ é determinada pela classe $[\eta^k \to K_dP(2^s)] + [\xi^l \to K_dP(2n)]$ em $\mathcal{M}_*$.

Nosso primeiro passo será eliminar os casos imediatos da classificação pretendida.

Se $k = 0$, então $r = 2^s d > 2nd$ e $K_dP(2^s)$ é uma componente conexa de M^r em que T atua como a identidade. Além disso, $(T, M^r \setminus K_dP(2^s))$ é uma involução não trivial fixando $K_dP(2n)$; daí, pelo Teorema 2.2, concluímos que $r = 2^s d = 4nd$ e $[T, M^r \setminus K_dP(2^s)] = [twist, K_dP(2n) \times K_dP(2n)]$. Desse modo, obtemos

$$[T, M^r] = [T, K_dP(2^s)] + [T, M^r \setminus K_dP(2^s)] = [Id, K_dP(2^s)] + [twist, K_dP(2n) \times K_dP(2n)].$$

Analogamente, se $l = 0$ obtemos $r = 2nd = 2^{s+1}d$ e

$$[T, M^r] = [Id, K_dP(2n)] + [twist, K_dP(2^s) \times K_dP(2^s)].$$

Podemos assumir então $k, l > 0$. Logo, pelo Lema 4.2.1, $w_d(\eta^k) = \alpha_d \neq 0$ e $w_d(\xi^l) = \beta_d \neq 0$, acarretando $k, l \geq d$.

Se $k = d$ então $W(\eta^k) = 1 + \alpha_d$ e, portanto, $\eta^k \to K_dP(2^s)$ é bordante ao d-fibrado canônico $\gamma^d \to K_dP(2^s)$. Logo, $(\eta^k \to K_dP(2^s)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$ é um *fixed-data*, uma vez que $[\eta^k \to K_dP(2^s)] + [\mathbb{R}^r \to *] = [\gamma^d \to K_dP(2^s)] + [\mathbb{R}^r \to *] = j_*[\tau^0_{2^s}, K_dP(2^s+1)]$, j_* sendo o monomorfismo da seqüência de *Conner* e *Floyd*. Assim, pelo Corolário 1.7.11(b), $(\xi^l \to K_dP(2n)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$ também é um *fixed-data*. Dos resultados da Seção 3.3 segue então que $0 \leq i = l - d \leq h_d(0, 2n)$ e

$$[\xi^l \to K_dP(2n)] + [\mathbb{R}^r \to *] = [\gamma^d \oplus \mathbb{R}^i \to K_dP(2n)] + [\mathbb{R}^r \to *] = j_*\Gamma^i[\tau^0_{2n}, K_dP(2n+1)].$$

Portanto, obtemos $0 \leq i = l - d \leq h_d(0, 2n)$ e

$$\begin{bmatrix} \eta^k \\ \downarrow \\ K_dP(2^s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^l \\ \downarrow \\ K_dP(2n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta^k \\ \downarrow \\ K_dP(2^s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi^l \\ \downarrow \\ K_dP(2n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma^d \\ \downarrow \\ K_dP(2^s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma^d \oplus \mathbb{R}^i \\ \downarrow \\ K_dP(2n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{R}^r \\ \downarrow \\ * \end{bmatrix}.$$

Desse modo, concluímos que

$$[T, M^r] = [\tau^0_{2^s}, K_dP(2^s+1)] + \Gamma^i[\tau^0_{2n}, K_dP(2n+1)],$$

com $0 \leq i \leq h_d(0, 2n)$.

De forma análoga, se $l = d$, obtemos

$$[T, M^r] = [\tau^0_{2n}, K_dP(2n+1)] + \Gamma^i[\tau^0_{2^s}, K_dP(2^s+1)],$$

com $0 \leq i = k - d \leq h_d(0, 2^s)$.

Isto encerra os casos imediatos da classificação pretendida.

No que segue, até o final desta seção, assumimos então $k > d$ e $l > d$.

Observação 4.2.3. *A priori*, é importante analisar em quais casos, relativos a $2n$ e 2^s, a coleção

$$B' = \{\Gamma^i[\tau^0_{2^s}, K_dP(2^s+1)] + \Gamma^j[\tau^0_{2n}, K_dP(2n+1)] : 0 < i \leq h_d(0, 2^s),$$
$$0 < j \leq h_d(0, 2n),\ 2^s d + i = 2nd + j\},$$

pode ser não vazia. Suponha então que existam $0 < i \leq h_d(0, 2^s)$ e $0 < j \leq h_d(0, 2n)$ com $i+2^s d = j+2nd$. Pelos teoremas 3.2 e 3.3.4, sabemos que $h_d(0, 2^s) \leq 2^s d$ e $h_d(0, 2n) \leq 2^t d$. Assim,

$$2nd < 2nd + j = 2^s d + i \leq 2^s d + 2^s d = 2^{s+1} d \quad \Rightarrow \quad 2n < 2^{s+1}.$$

Em particular, como $2^u \leq 2n$, temos $2^u \leq 2^s$. Por outro lado,

$$2^s d < 2^s d + i = 2nd + j \leq 2nd + 2^t d \leq (2^{u+1} - 2^t)d + 2^t d = 2^{u+1} d \quad \Rightarrow \quad 2^s < 2^{u+1}.$$

Portanto, a coleção B' é não vazia somente se $2^s = 2^u$; ou seja, somente no caso em que 2^s é a maior potência de 2 que aparece na expansão diádica de $2n$.

Para concluir a demonstração do Teorema 4.3 é suficiente mostrar o

Teorema 4.2.4. *Se $2^s \neq 2^u$, então $W(\eta^k) = (1 + \alpha_d)^{2n+1}$ e $W(\xi^l) = (1 + \beta_d)^{2^s+1}$; se $2^s = 2^u$, então:* $\begin{cases} W(\eta^k) = (1 + \alpha_d)^{2n+1} \text{ e } W(\xi^l) = (1 + \beta_d)^{2^s+1} & \text{se } k > d + h_d(0, 2^s), \\ W(\eta^k) = 1 + \alpha_d & \text{se } k \leq d + h_d(0, 2^s). \end{cases}$

Com efeito, suponha inicialmente $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^{2n+1}$ e $W(\xi^l) = (1+\beta_d)^{2^s+1}$. Se $2^s < 2n$ então $w_{(2^s+1)d}(\xi^l) = \beta_d^{2^s+1} \neq 0$, acarretando $l \geq (2^s+1)d$; e da igualdade $k+2^s d = l+2nd$ segue que $k \geq (2n + 1)d$. De forma análoga, se $2n < 2^s$ obtemos $k \geq (2n + 1)d$ e, conseqüentemente, $l \geq (2^s + 1)d$. Logo,

$$[\eta^k \to K_d P(2^s)] = [(2n + 1)\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-(2n+1)d} \to K_d P(2^s)] \in \mathcal{N}_{2^s d}(BO(k))$$

pois, como $W(\eta^k) = (1 + \alpha_d)^{2n+1} = W((2n + 1)\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-(2n+1)d})$, tais k-fibrados vetoriais possuem necessariamente os mesmos números característicos. Analogamente, obtemos

$$[\xi^l \to K_d P(2n)] = [(2^s + 1)\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{l-(2^s+1)d} \to K_d P(2n)] \in \mathcal{N}_{2nd}(BO(l)).$$

Assim, o fibrado $((2n + 1)\gamma^d \oplus \mathbb{R}^i \to K_d P(2^s)) \cup ((2^s + 1)\gamma^d \oplus \mathbb{R}^i \to K_d P(2n))$, onde $i = k-(2n+1)d = l-(2^s+1)d$, é bordante ao *fixed-data* $(\eta^k \to K_d P(2^s)) \cup ((\xi^l \to K_d P(2n))$. Em particular, $((2n + 1)\gamma^d \oplus \mathbb{R}^i \to K_d P(2^s)) \cup ((2^s + 1)\gamma^d \oplus \mathbb{R}^i \to K_d P(2n))$ também é um *fixed-data*. Desse modo, vide Observação 1.14.1, concluímos que $0 \leq i \leq h_d(2^s, 2n)$ e

$$[T, M^r] = \Gamma^i[\tau_{2^s}^{2n}, K_d P(2^s + 2n + 1)].$$

Agora suponha $d < k \leq d + h_d(0, 2^s)$ e $W(\eta^k) = 1 + \alpha_d$. Então, o fibrado $(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d} \to K_d P(2^s)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$ é um *fixed-data*, bordante a $(\eta^k \to K_d P(2^s)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$; em particular $(\eta^k \to K_dP(2^s)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$ é um *fixed-data*. Daí, pelo Corolário 1.7.11(b), $(\xi^l \to K_dP(2n)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$ também é um *fixed-data*. Da Seção 3.3 segue portanto que $(\xi^l \to K_dP(2n)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$ é bordante a $(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{l-d} \to K_dP(2n)) \cup (\mathbb{R}^r \to *)$, com $0 \leq l-d \leq h_d(0,2n)$. Logo, $(\eta^k \to K_dP(2^s)) \cup (\xi^l \to K_dP(2n))$ é bordante a

$$(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d} \to K_dP(2^s)) \cup (\mathbb{R}^r \to *) \quad \cup \quad (\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{l-d} \to K_dP(2n)) \cup (\mathbb{R}^r \to *),$$

com $k-d \leq h_d(0,2^s)$ e $l-d \leq h_d(0,2n)$. Portanto

$$[T, M^r] = \Gamma^i[\tau^0_{2^s}, K_dP(2^s+1)] + \Gamma^j[\tau^0_{2n}, K_dP(2n+1)],$$

com $i = k-d \leq h_d(0,2^s)$ e $j = l-d \leq h_d(0,2n)$.

Resta então demonstrarmos o Teorema 4.2.4, o que significa que a classificação pretendida se reduz, a partir de agora, a mostrar que as classes características dos fibrados normais η^k e ξ^l assumem determinada forma.

Considere os naturais $p < 2^{s+1}$ e $q < 2^{u+1}$ tais que

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p \qquad \text{e} \qquad W(\xi^l) = (1+\beta_d)^q;$$

precisamos então mostrar que p e q assumem os valores especificados no Teorema 4.2.4. Nessa direção, nossa estratégia será determinar p e q analisando suas expansões diádicas. Para tanto, usaremos basicamente o fato de que

$$\langle p(c, w(\mathbb{R}P(\eta^k)), \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \langle p(c, w(\mathbb{R}P(\xi^l)), \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle,$$

para todo polinômio homogêneo $p(c, w(\mathbb{R}P(-))$, de grau $r-1 = 2^sd+k-1 = 2nd+l-1$, nas classes $w_{i's}(\mathbb{R}P(-))$ e c. A fim de obter polinômios $p(c, w(\mathbb{R}P(-))$ convenientes, utilizaremos as técnicas apresentadas nas Seção 1.8.

Defina $p' = 2^{s+1} - p$, $q' = 2^{u+1} - q$, obtendo as classes duais

$$\overline{W}(\eta^k) = \frac{1}{W(\eta^k)} = (1+\alpha_d)^{p'} \qquad \text{e} \qquad \overline{W}(\xi^l) = \frac{1}{W(\xi^l)} = (1+\beta_d)^{q'},$$

conforme observamos em 1.14.6. Pelo Lema 4.2.1, sabemos que p e q são ímpares. Além disso, temos:

$$\begin{cases} \overline{\binom{p}{2^v}} + \overline{\binom{p'}{2^v}} = 1, & \text{para cada } v = 1, \ldots, s, \\ \overline{\binom{q}{2^v}} + \overline{\binom{q'}{2^v}} = 1, & \text{para cada } v = 1, \ldots, u. \end{cases} \tag{4.1}$$

Em nossas computações, recorreremos exaustivamente ao Teorema de *Lucas* e seus corolários (vide Seção 1.12), e à Fórmula de *Conner* (vide Seção 1.11 e Lema 3.5.1). Neste particular, de

$$\langle c^{2^s d+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \langle c^{2nd+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle$$

segue que

$$\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2n}}. \tag{4.2}$$

Aplicando o Teorema 1.6.4 para os fibrados $\eta^k \to K_dP(2^s)$ e $\xi^l \to K_dP(2n)$, obtemos:

$$W(\mathbb{R}P(\eta^k)) = W(K_dP(2^s))\left(\textstyle\sum_i (1+c)^{k-i} w_i(\eta^k)\right) = (1+\alpha_d)^{2^s+1}\left(\textstyle\sum_i (1+c)^{k-id}\binom{p}{i}\alpha_d^i\right),$$

$$W(\mathbb{R}P(\xi^l)) = W(K_dP(2n))\left(\textstyle\sum_i (1+c)^{l-i} w_i(\xi^l)\right) = (1+\beta_d)^{2n+1}\left(\textstyle\sum_i (1+c)^{l-id}\binom{q}{i}\beta_d^i\right).$$

Para cada $v \geq 1$, definimos a classe característica

$$W[v](\mathbb{R}P(-)) = \frac{W(\mathbb{R}P(-))}{(1+c)^{l-(2^v-1)d}}.$$

Assim, como $k + 2^s d = l + 2nd$, temos:

$$W[v](\mathbb{R}P(\eta^k)) = (1+\alpha_d)^{2^s+1}(1+c^d)^{2n-2^s}\left(\sum_i (1+c^d)^{2^v-1-i}\binom{p}{i}\alpha_d^i\right), \tag{4.3}$$

$$W[v](\mathbb{R}P(\xi^l)) = (1+\beta_d)^{2n+1}\left(\sum_i (1+c^d)^{2^v-1-i}\binom{q}{i}\beta_d^i\right). \tag{4.4}$$

A soma de todos os termos homogêneos de grau i da classe $W[v](\mathbb{R}P(-))$ será denotada por $w[v]_i(\mathbb{R}P(-))$. Manipularemos certos números característicos envolvendo as classes $w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(-))$ e $w[v]_{(2^v+1)d}(\mathbb{R}P(-))$, com $1 \leq v \leq min\{s,t\}$ (vale lembrar que $2n = 2^{t+1}a + 2^t$).

Em (4.3) e (4.4), temos

$$(1+c^d)^{2n-2^s} = \left((1+c^d)^{-1}\right)^{2^s}(1+c^d)^{2n} = (1+c^d+c^{2d}+\cdots)^{2^s}(1+c^d)^{2n},$$

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_i (1+c^d)^{2^v-1-i}\binom{p}{i}\alpha_d^i = {}& (1+c^d)^{2^v-1} + (1+c^d)^{2^v-2}\alpha_d + (1+c^d)^{2^v-3}\binom{p}{2}\alpha_d^2 + \cdots + \\ & + \binom{p}{2^v-1}\alpha_d^{2^v-1} + (1+c^d)^{-1}\binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^v} + (1+c^d)^{-2}\binom{p}{2^v+1}\alpha_d^{2^v+1} + \cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_i (1+c^d)^{2^v-1-i}\binom{q}{i}\beta_d^i = {}& (1+c^d)^{2^v-1} + (1+c^d)^{2^v-2}\beta_d + (1+c^d)^{2^v-3}\binom{q}{2}\beta_d^2 + \cdots + \\ & + \binom{q}{2^v-1}\beta_d^{2^v-1} + (1+c^d)^{-1}\binom{q}{2^v}\beta_d^{2^v} + (1+c^d)^{-2}\binom{q}{2^v+1}\beta_d^{2^v+1} + \cdots.\end{aligned}$$

Então, usando (4.1), calculamos:

(I) $w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{2^s}{2}\alpha_d^2 + \binom{2^s}{2}c^{2d} + \binom{2n}{2}c^{2d} + \binom{p}{2}\alpha_d^2 + \alpha_d(c^d + \alpha_d)$
$= \left(\binom{2^s}{2} + \binom{p'}{2}\right)\alpha_d^2 + \left(\binom{2n}{2} + \binom{2^s}{2}\right)c^{2d} + \alpha_d c^d,$

$w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{2n}{2}\beta_d^2 + \binom{q}{2}\beta_d^2 + \beta_d(c^d + \beta_d)$
$= \left(\binom{2n}{2} + \binom{q'}{2}\right)\beta_d^2 + \beta_d c^d;$

(II) para cada v com $1 \leq v < min\{s,t\}$,
$w[v]_{(2^v+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^v}c^d + \binom{p}{2^v+1}\alpha_d^{2^v+1} + \alpha_d\binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^v} = \binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^v}c^d,$

$w[v]_{(2^v+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2^v}\beta_d^{2^v}c^d + \binom{q}{2^v+1}\beta_d^{2^v+1} + \beta_d\binom{q}{2^v}\beta_d^{2^v} = \binom{q}{2^v}\beta_d^{2^v}c^d,$

pois, pelo Teorema de *Lucas*, p e q ímpares implicam $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{p}{2^v+1}}$ e $\overline{\binom{q}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v+1}}$;

(III) se $s < t$ então
$w[s]_{(2^s+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{p}{2^s}\alpha_d^{2^s}c^d + \binom{p}{2^s+1}\alpha_d^{2^s+1} + \alpha_d^{2^s}(c^d + \alpha_d) + \alpha_d c^{2^s d} +$
$+\alpha_d\binom{p}{2^s}\alpha_d^{2^s} + c^{2^s d}(c^d + \alpha_d) = \binom{p'}{2^s}\alpha_d^{2^s}c^d + c^{(2^s+1)d},$

$w[s]_{(2^s+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2^s}\beta_d^{2^s}c^d + \binom{q}{2^s+1}\beta_d^{2^s+1} + \beta_d\binom{q}{2^s}\beta_d^{2^s} = \binom{q}{2^s}\beta_d^{2^s}c^d,$

uma vez que $\alpha_d^{2^s+1} = 0$ e $\overline{\binom{q}{2^s}} = \overline{\binom{q}{2^s+1}}$;

(IV) se $s \geq t$ então
$w[t]_{(2^t+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{p}{2^t}\alpha_d^{2^t}c^d + \binom{p}{2^t+1}\alpha_d^{2^t+1} + \binom{2^s}{2^t}\alpha_d^{2^t}(c^d + \alpha_d) + \alpha_d\binom{2^s}{2^t}c^{2^t d} +$
$+\alpha_d c^{2^t} + \alpha_d\binom{p}{2^t}\alpha_d^{2^t} + \binom{2^s}{2^t}c^{2^t d}(c^d + \alpha_d) + c^{2^t d}(c^d + \alpha_d)$
$= \left(\binom{p}{2^t} + \binom{2^s}{2^t}\right)\alpha_d^{2^t}c^d + \binom{2^s}{2^t}\alpha_d^{2^t+1} + \left(\binom{2^s}{2^t} + 1\right)c^{(2^t+1)d}$
$= \left(\binom{p}{2^t} + \binom{2^s}{2^t}\right)\alpha_d^{2^t}c^d + \left(\binom{2^s}{2^t} + 1\right)c^{(2^t+1)d},$

$w[t]_{(2^t+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta_d^{2^t+1}\binom{q}{2^t}\beta_d^{2^t}c^d + \binom{q}{2^t+1}\beta_d^{2^t+1} + \beta_d^{2^t}(c^d + \beta_d) + \beta_d\binom{q}{2^t}\beta_d^{2^t} = \binom{q'}{2^t}\beta_d^{2^t}c^d,$

pois $\overline{\binom{q}{2^t}} = \overline{\binom{q}{2^t+1}}$, $\overline{\binom{p}{2^t}} = \overline{\binom{p}{2^t+1}}$ e, como $\alpha_d^{2^s+1} = 0$ e $\binom{2^s}{2^t} = 0$ se $s \neq t$, temos $\binom{2^s}{2^t}\alpha_d^{2^t+1} = 0$.

Para cada $v \geq 1$ e cada $j \geq 0$, definimos:

$$\widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}(\mathbb{R}P(-)) = Sq^{2^{v+j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2^{v+1}d}\left(Sq^{2^v d}\left(w[v]_{(2^v+1)d}(\mathbb{R}P(-))\right)\right)\right)\cdots\right);$$

em particular, para $j = 0$, temos

$$\widehat{w}[v]_{(2^v+1)d}(\mathbb{R}P(-)) = w[v]_{(2^v+1)d}(\mathbb{R}P(-)).$$

Se $(2^{v+j}+1)d \leq dim(\mathbb{R}P(\eta^k)) = dim(\mathbb{R}P(\xi^l))$ então, conforme Seção 1.8,

$$\widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) \qquad \text{e} \qquad \widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l))$$

são classes características de grau $(2^{v+j}+1)d$ correspondentes, no que se refere a igualdades entre números característicos de $\lambda \to \mathbb{R}P(\eta^k)$ e $\lambda \to \mathbb{R}P(\xi^l)$.

Para calcular os valores de $\widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}(\mathbb{R}P(-))$, com $1 \leq v \leq min\{s,t\}$, aplicaremos iterativamente o Lema 4.2.2 aos valores de $w[v]_{(2^v+1)d}(\mathbb{R}P(-))$ calculados em (II), (III) e (IV) acima. Desse modo obtemos:

(V) para cada v com $1 \leq v < min\{s,t\}$,

$$\widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = Sq^{2^{v+j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2^{v+1}d}\left(Sq^{2^v d}\left(\tbinom{p}{2^v}\alpha_d^{2^v}c^d\right)\right)\right)\cdots\right) = \tbinom{p}{2^v}\alpha_d^{2^{v+j}}c^d,$$

$$\widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = Sq^{2^{v+j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2^{v+1}d}\left(Sq^{2^v d}\left(\tbinom{q}{2^v}\beta_d^{2^v}c^d\right)\right)\right)\cdots\right) = \tbinom{q}{2^v}\beta_d^{2^{v+j}}c^d;$$

(VI) se $s < t$ então

$$\widehat{w}[s]_{(2^{s+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = Sq^{2^{s+j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2^{s+1}d}\left(Sq^{2^s d}\left(\tbinom{p'}{2^s}\alpha_d^{2^s}c^d + c^{(2^s+1)d}\right)\right)\right)\cdots\right)$$
$$= \tbinom{p'}{2^s}\alpha_d^{2^{s+j}}c^d + c^{(2^{s+j}+1)d},$$

$$\widehat{w}[s]_{(2^{s+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = Sq^{2^{s+j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2^{s+1}d}\left(Sq^{2^s d}\left(\tbinom{q}{2^s}\beta_d^{2^s}c^d\right)\right)\right)\cdots\right) = \tbinom{q}{2^s}\beta_d^{2^{s+j}}c^d;$$

(VII) se $s \geq t$ então

$$\widehat{w}[t]_{(2^{t+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = Sq^{2^{t+j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2^t d}\left(\left(\tbinom{p}{2^t}+\tbinom{2^s}{2^t}\right)\alpha_d^{2^t}c^d + \left(\tbinom{2^s}{2^t}+1\right)c^{(2^t+1)d}\right)\right)\cdots\right)$$
$$= \left(\tbinom{p}{2^t}+\tbinom{2^s}{2^t}\right)\alpha_d^{2^{t+j}}c^d + \left(\tbinom{2^s}{2^t}+1\right)c^{(2^{t+j}+1)d},$$

$$\widehat{w}[t]_{(2^{t+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = Sq^{2^{t+j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2^t d}\left(\tbinom{q'}{2^t}\beta_d^{2^t}c^d\right)\right)\cdots\right) = \tbinom{q'}{2^t}\beta_d^{2^{t+j}}c^d.$$

Neste ponto, por razões técnicas, dividiremos nosso estudo em cinco casos, conforme a disposição de 2^s em relação à menor e à maior potência de 2 que aparecem na expansão diádica de $2n$, ou seja, em relação a 2^t e 2^u:

(i) **caso** $2^s < 2^t$;

(ii) **caso** $2^s = 2^t$;

(iii) **caso** $2^t < 2^s < 2^u$;

(iv) **caso** $2^s > 2^u$;

(v) **caso** $2^s = 2^u$.

Cada uma das próximas cinco subseções será dedicada à demonstração do Teorema 4.2.4 para um dos casos acima.

Nos três primeiros casos usaremos o

Lema 4.2.5. *Se* $\overline{\tbinom{q}{2^s}} = 1$, $\overline{\tbinom{q}{2}} = \overline{\tbinom{2^s}{2}}$ *e* $\overline{\tbinom{q}{2^u}} = 0$, *então* $q = 2^s + 1$.

Demonstração: Como q é ímpar e, por hipótese, $\overline{\binom{q}{2^s}} = 1$, temos $q \geq 2^s + 1$. Observe que $q > 2^s + 1$ implicaria $\alpha_d^{q-1} = 0$. Assim, para mostrar que $q = 2^s + 1$, é suficiente obtermos um número característico não nulo envolvendo α_d^{q-1}.

A hipótese $\overline{\binom{q}{2^u}} = 0$ garante que 2^u não aparece na expansão diádica de q. Daí, como $q < 2^{u+1}$ e $2^u \leq 2n < 2^{u+1}$, obtemos $q < 2^u \leq 2n$. Assim, $w_{qd}(\xi^l) = \beta_d^q \neq 0$ e portanto $qd \leq l$. Desse modo vemos que $dim(\mathbb{R}P(\xi^l)) = 2nd + l - 1 > qd + qd - 1 > 2d(q-1)$ e, então, podemos considerar números característicos envolvendo classes de grau $2d(q-1)$.

Conforme os valores de $w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(-))$ obtidos em (I), página 87, temos:

$$w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \alpha_d \left(\overline{\binom{2^s}{2}}\alpha_d + \overline{\binom{p'}{2}}\alpha_d + c^d\right) + \left(\overline{\binom{2n}{2}} + \overline{\binom{2^s}{2}}\right) c^{2d},$$

$$w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta_d \left(\left(\overline{\binom{2n}{2}} + \overline{\binom{q}{2}} + 1\right) \beta_d + c^d\right) = \beta_d \left(\left(\overline{\binom{2n}{2}} + \overline{\binom{2^s}{2}} + 1\right) \beta_d + c^d\right),$$

pois $\overline{\binom{q}{2}} = \overline{\binom{2^s}{2}}$ por hipótese.

Assim, se $\overline{\binom{2^s}{2}} + \overline{\binom{2n}{2}} = 1$,

$$\begin{aligned}
w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) &= \alpha_d \left(\overline{\binom{2^s}{2}}\alpha_d + \overline{\binom{p}{2}}\alpha_d + c^d + \alpha_d\right) + c^{2d},\\
w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) &= \beta_d c^d;
\end{aligned}$$

e, se $\overline{\binom{2^s}{2}} + \overline{\binom{2n}{2}} = 0$,

$$\begin{aligned}
w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) &= \alpha_d \left(\overline{\binom{2^s}{2}}\alpha_d + \overline{\binom{p}{2}}\alpha_d + c^d + \alpha_d\right),\\
w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) &= \beta_d(c^d + \beta_d).
\end{aligned}$$

Consideraremos os números característicos associados a $(w[1]_{2d} + c^{2d})^{q-1} c^{2nd+l-1-2d(q-1)}$ no caso $\overline{\binom{2^s}{2}} + \overline{\binom{2n}{2}} = 1$, e $w[1]_{2d}^{q-1} c^{2nd+l-1-2d(q-1)}$ no caso $\overline{\binom{2^s}{2}} + \overline{\binom{2n}{2}} = 0$.

Então, para $\overline{\binom{2^s}{2}} + \overline{\binom{2n}{2}} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left\langle \alpha_d^{q-1} \left(\overline{\binom{2^s}{2}}\alpha_d + \overline{\binom{p}{2}}\alpha_d + c^d + \alpha_d\right)^{q-1} c^{2nd+l-1-2(q-1)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle =\\
&= \langle \left(w[1]_{2d} + c^{2d}\right)^{q-1} c^{2nd+l-1-2d(q-1)}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle\\
&= \langle \left(w[1]_{2d} + c^{2d}\right)^{q-1} c^{2nd+l-1-2d(q-1)}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle\\
&= \langle \left(\beta_d c^d + c^{2d}\right)^{q-1} c^{2nd+l-1-2d(q-1)}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle\\
&= \langle \left(\beta_d + c^d\right)^{q-1} c^{2nd+l-1-d(q-1)}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle
\end{aligned}$$

e, para $\overline{\binom{2^s}{2}} + \overline{\binom{2n}{2}} = 0$,

$$\begin{aligned}
&\left\langle \alpha_d^{q-1} \left(\overline{\binom{2^s}{2}}\alpha_d + \overline{\binom{p}{2}}\alpha_d + c^d + \alpha_d\right)^{q-1} c^{2nd+l-1-2(q-1)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle =\\
&= \langle w[1]_{2d}^{q-1} c^{2nd+l-1-2d(q-1)}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle
\end{aligned}$$

$$= \left\langle w[1]_{2d}^{q-1} c^{2nd+l-1-2d(q-1)}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle$$
$$= \left\langle \beta_d^{q-1} \left(\beta_d + c^d\right)^{q-1} c^{2nd+l-1-2d(q-1)}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle.$$

Agora, aplicando o Lema 3.5.1, vemos que:

$$\left\langle \left(\beta_d + c^d\right)^{q-1} c^{2nd+l-1-d(q-1)}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle = \overline{\binom{q'+q-1}{2n}},$$

$$\left\langle \beta_d^{q-1} \left(\beta_d + c^d\right)^{q-1} c^{2nd+l-1-2d(q-1)}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle = \overline{\binom{q'+q-1}{2n-q+1}}.$$

Logo, como $q'+q-1 = 2^{u+1}-1 = 2^u + 2^{u-1} + \cdots + 2 + 1$, tais números são ambos não nulos, acarretando $\alpha_d^{q-1} \neq 0$. Assim, como já tínhamos $q-1 \geq 2^s$, mostramos que vale a igualdade $q-1 = 2^s$, como queríamos. □

Nos casos (iii) e (v), faremos uso do

Lema 4.2.6. *Se $2^t < 2^s \leq 2^u$, $q = 2^s+1$, $\overline{\binom{p}{2^t}} = \overline{\binom{2n}{2^t}}$ e $\overline{\binom{p}{2^s}} = \overline{\binom{2n}{2^s}}$, então:*

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}} \quad \textit{para cada } t \leq v \leq s.$$

Demonstração: Se $s = t+1$, não há nada a mostrar. Assim assumimos $t < s-1$ e nos resta mostrar que $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}}$ para cada $t < v \leq s-1$.

Usaremos as classes

$$\begin{cases} \widehat{w}[t]_{(2^{t+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \left(\binom{p}{2^t} + \binom{2^s}{2^t}\right) \alpha_d^{2^{t+j}} c^d + \left(\binom{2^s}{2^t} + 1\right) c^{(2^{t+j}+1)d} \\ \widehat{w}[t]_{(2^{t+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{2^t} \beta_d^{2^{t+j}} c^d, \end{cases}$$

com $0 \leq j \leq s-1-t$ (vide equação obtida em (VII), página 88). Pelas hipóteses, temos $\overline{\binom{2^s}{2^t}} = 0$, $\overline{\binom{p}{2^t}} = \overline{\binom{2n}{2^t}} = 1$ e $\overline{\binom{q'}{2^t}} = \overline{\binom{q}{2^t}} + 1 = \overline{\binom{2^s+1}{2^t}} + 1 = 1$. Assim, as classes acima se escrevem na forma

$$c^{(2^{t+j}+1)d} + \alpha_d^{2^{t+j}} c^d \qquad \text{e} \qquad \beta_d^{2^{t+j}} c^d,$$

em $\mathbb{R}P(\eta^k)$ e $\mathbb{R}P(\xi^l)$, respectivamente.

Consideraremos números característicos envolvendo certos produtos das classes acima. Por essa razão, convém observar que $2^s \leq 2^u \leq 2n$ implica $w_{2^s d}(\xi^l) = \overline{\binom{q}{2^s}}\beta_d^{2^s} = \overline{\binom{2^s+1}{2^s}}\beta_d^{2^s} = \beta_d^{2^s} \neq 0$ e portanto $l \geq 2^s d > sd$. Logo,

$$\sum_{i=t}^{s-1} (2^i+1)d < 2^s d + sd < 2nd + l.$$

Observamos ainda que, como $q' = 2^{u+1} - q = 2^{u+1} - 2^s - 1 = 2^u + \cdots + 2^{s+1} + 2^{s-1} + \cdots + 1$, temos:

$$\overline{\binom{q'}{m}} = \overline{\binom{m}{2^s}} + 1$$

para cada $m < 2^{u+1}$.

Definimos o conjunto

$$\mathcal{V} = \left\{ v \quad : \quad s > v \geq t \quad \text{e} \quad \overline{\binom{2n}{2^v}} = 1 \right\} = \{v_1, v_2, \dots, v_f\},$$

com

$$v_1 > v_2 > \cdots > v_f = t.$$

Denotaremos $v_0 = s$. Assim, como nosso objetivo é mostrar que

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}}, \text{ para todo } v \text{ tal que } s > v > t,$$

basta provarmos que, para cada $1 \leq i \leq f$,

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}}, \text{ para todo } v \text{ tal que } v_{i-1} > v \geq v_i.$$

Faremos isso por indução sobre i.

Pela definição do conjunto $\mathcal{V}$, temos $\overline{\binom{2n}{2^{v_1}}} = 1$ e $\overline{\binom{2n}{2^v}} = 0$ se $s > v \geq v_1 + 1$. Usando o Teorema de *Lucas* concluímos então que

$$\overline{\binom{2n}{2^s}} = \overline{\binom{2n - 2^{v_1}}{2^s}} \qquad \text{e} \qquad \overline{\binom{2n - 2^{v_1+1}}{2^s}} = \overline{\binom{2n}{2^s}} + 1.$$

Vale lembrar que, por hipótese, $\overline{\binom{2n}{2^s}} = \overline{\binom{p}{2^s}}$.

Assim, temos

$$\langle (c^{(2^{v_1+1}+1)d} + \alpha_d^{2^{v_1+1}} c^d) c^{2nd-(2^{v_1+1}+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle = \overline{\binom{p'}{2^s}} + \overline{\binom{p'}{2^s - 2^{v_1+1}}},$$
$$\langle (\beta_d^{2^{v_1+1}} c^d) c^{2nd-(2^{v_1+1}+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle = \overline{\binom{q'}{2n - 2^{v_1+1}}} = \overline{\binom{2n - 2^{v_1+1}}{2^s}} + 1 =$$
$$= \overline{\binom{2n}{2^s}} = \overline{\binom{p}{2^s}} = \overline{\binom{p'}{2^s}} + 1.$$

Uma vez que tais números devem ser iguais, obtemos então $\overline{\binom{p'}{2^s - 2^{v_1+1}}} = 1$.

Agora, calculamos:

$$\langle (c^{(2^{v_1}+1)d} + \alpha_d^{2^{v_1}} c^d) c^{2nd-(2^{v_1}+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle = \overline{\binom{p'}{2^s}} + \overline{\binom{p'}{2^s - 2^{v_1}}} =$$
$$= \overline{\binom{p}{2^s}} + 1 + \overline{\binom{p'}{2^s - 2^{v_1}}} = \overline{\binom{2n}{2^s}} + 1 + \overline{\binom{p'}{2^{v_1}}\binom{p'}{2^s - 2^{v_1+1}}} = \overline{\binom{2n - 2^{v_1}}{2^s}} + 1 + \overline{\binom{p'}{2^{v_1}}},$$

$$\langle (\beta_d^{2^{v_1}} c^d) c^{2nd-(2^{v_1}+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle = \overline{\binom{q'}{2n - 2^{v_1}}} = \overline{\binom{2n - 2^{v_1}}{2^s}} + 1.$$

Logo $\overline{\binom{p'}{2^{v_1}}} = 0$ e conseqüentemente $\overline{\binom{p}{2^{v_1}}} = 1$. De $\overline{\binom{p'}{2^s - 2^{v_1+1}}} = 1$ segue que $\overline{\binom{p'}{2^v}} = 1$ se $s > v \geq v_1 + 1$ e, portanto, $\overline{\binom{p}{2^v}} = 0$ se $s > v \geq v_1 + 1$.

Desse modo mostramos que $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}}$ para todo v tal que $s = v_0 > v \geq v_1$.

Seja $1 < i \leq f$ e suponha indutivamente que $\overline{\binom{2n}{2^v}} = \overline{\binom{p}{2^v}}$ para cada v tal que $s > v \geq v_{i-1}$. Pela definição do conjunto $\mathcal{V}$, usamos o Teorema de *Lucas* para constatar que

$$\overline{\binom{2n - \sum_{j=1}^{i} 2^{v_j}}{2^s}} = \overline{\binom{2n}{2^s}} \qquad \text{e} \qquad \overline{\binom{2n - \sum_{j=1}^{i-1} 2^{v_j} - 2^{v_i+1}}{2^s}} = \overline{\binom{2n}{2^s}} + 1.$$

Além disso, pela hipótese de indução, temos

$$\overline{\binom{p'}{2^{v_1}}} = \overline{\binom{p'}{2^{v_2}}} = \cdots = \overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}}}} = 0,$$

$$\overline{\binom{p'}{2^s - 2^{v_1+1}}} = \overline{\binom{p'}{2^{v_1} - 2^{v_2+1}}} = \cdots = \overline{\binom{p'}{2^{v_{i-2}} - 2^{v_{i-1}+1}}} = 1.$$

Tendo em vista as computações que faremos a seguir, convém observar que se $(a_1, \ldots, a_i) \in \mathbb{Z}_2^i$ com $(0, 0, \ldots, 0) \neq (a_1, a_2, \ldots, a_i) \neq (1, 1, \ldots, 1)$, então $\overline{\binom{p'}{2^s - a_1 2^{v_1} - \cdots - a_{i-1} 2^{v_{i-1}} - a_i 2^{v_i}}} = 0$. De fato, se $a_i = 0$, considere $1 \leq j \leq i-1$ o maior índice tal que $a_j = 1$; daí,

$$\overline{\binom{p'}{2^s - a_1 2^{v_1} - \cdots - a_{i-1} 2^{v_{i-1}} - a_i 2^{v_i}}} = \overline{\binom{p'}{2^s - a_1 2^{v_1} - \cdots - 2^{v_j}}} = 0,$$

pois $\overline{\binom{p'}{2^{v_j}}} = 0$. Para o caso em que $a_i = 1$, tome $1 \leq j \leq i-1$ com $a_j = 0$. Assim, como $2^s - 2^{v_i} = 2^{v_i} + 2^{v_i+1} + \cdots + 2^{s-1}$, concluímos que 2^{v_j} aparece na expansão diádica de $2^s - a_1 2^{v_1} - \cdots - a_{i-1} 2^{v_{i-1}} - 2^{v_i}$ e, portanto,

$$\overline{\binom{p'}{2^s - a_1 2^{v_1} - \cdots - a_{i-1} 2^{v_{i-1}} - a_i 2^{v_i}}} = \overline{\binom{p'}{2^s - a_1 2^{v_1} - \cdots - a_{i-1} 2^{v_{i-1}} - 2^{v_i}}} = 0,$$

pois $\overline{\binom{p'}{2^{v_j}}} = 0$. De forma análoga verifica-se que $\overline{\binom{p'}{2^s - a_1 2^{v_1} - \cdots - a_{i-1} 2^{v_{i-1}} - a_i 2^{v_i+1}}} = 0$ para todo $(a_1, \ldots, a_i) \in \mathbb{Z}^i$ com $(0, 0, \ldots, 0) \neq (a_1, a_2, \ldots, a_i) \neq (1, 1, \ldots, 1)$.

Nosso próximo passo é verificar que

$$\overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}} - 2^{v_i+1}}} = 1.$$

Como tal igualdade é trivial se $v_{i-1} = v_i + 1$, assumimos $v_{i-1} > v_i + 1$ e, então, calculamos:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\prod_{j=1}^{i-1} (c^{(2^{v_j}+1)d} + \alpha_d^{2^{v_j}} c^d) \right) (c^{(2^{v_i+1}+1)d} + \alpha_d^{2^{v_i+1}} c^d) c^{2nd+l-1-id-2^{v_i+1}d - \sum_{j=1}^{i-1} 2^{v_j} d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle = \\
&= \sum_{(a_1,\ldots,a_i) \in \mathbb{Z}_2^i} \left\langle \alpha_d^{a_1 2^{v_1} + \cdots + a_{i-1} 2^{v_{i-1}} + a_i 2^{v_i+1}} c^{2nd+l-1-(a_1 2^{v_1} + \cdots + a_{i-1} 2^{v_{i-1}} + a_i 2^{v_i+1})d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle \\
&= \sum_{(a_1,\ldots,a_i) \in \mathbb{Z}_2^i} \overline{\binom{p'}{2^s - a_1 2^{v_1} - \cdots - a_{i-1} 2^{v_{i-1}} - a_i 2^{v_i+1}}} \\
&= \overline{\binom{p'}{2^s}} + \overline{\binom{p'}{2^s - 2^{v_1} - \cdots - 2^{v_{i-1}} - 2^{v_i+1}}} \\
&= \overline{\binom{p}{2^s}} + 1 + \overline{\binom{p'}{2^s - 2^{v_1+1}}}\, \overline{\binom{p'}{2^{v_1} - 2^{v_2+1}}} \cdots \overline{\binom{p'}{2^{v_{i-2}} - 2^{v_{i-1}+1}}}\, \overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}} - 2^{v_i+1}}} \\
&= \overline{\binom{2n}{2^s}} + 1 + \overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}} - 2^{v_i+1}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\prod_{j=1}^{i-1} (\beta_d^{2^{v_j}} c^d) \right) (\beta_d^{2^{v_i+1}} c^d) c^{2nd+l-1-id-2^{v_i+1}d - \sum_{j=1}^{i-1} 2^{v_j} d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle = \\
&\quad = \left\langle \beta_d^{2^{v_1} + \cdots + 2^{v_{i-1}} + 2^{v_i+1}} c^{2nd+l-1-2^{v_i+1}d - \sum_{j=1}^{i-1} 2^{v_j} d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle
\end{aligned}$$

$$= \overline{\binom{q'}{2n-\sum_{j=1}^{i-1} 2^{v_j}-2^{v_i+1}}}$$
$$= \overline{\binom{2n-\sum_{j=1}^{i-1} 2^{v_j}-2^{v_i+1}}{2^s}} + 1$$
$$= \overline{\binom{2n}{2^s}}.$$

Da igualdade entre tais números característicos segue que $\overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}}-2^{v_i+1}}} = 1$, como queríamos.

Agora, calculamos:

$$\left\langle \left(\prod_{j=1}^{i} (c^{(2^{v_j}+1)d} + \alpha_d^{2^{v_j}} c^d)\right) c^{2nd+l-1-\sum_{j=1}^{i}(2^{v_j}+1)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle =$$
$$= \sum_{(a_1,\ldots,a_i)\in\mathbb{Z}_2^i} \left\langle \alpha_d^{a_1 2^{v_1}+\cdots+a_{i-1}2^{v_{i-1}}+a_i 2^{v_i}} c^{2nd+l-1-(a_1 2^{v_1}+\cdots+a_{i-1}2^{v_{i-1}}+a_i 2^{v_i})d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle$$
$$= \sum_{(a_1,\ldots,a_i)\in\mathbb{Z}_2^i} \overline{\binom{p'}{2^s-a_1 2^{v_1}-\cdots-a_i 2^{v_i}}}$$
$$= \overline{\binom{p'}{2^s}} + \overline{\binom{p'}{2^s-2^{v_1}-\cdots-2^{v_{i-1}}-2^{v_i}}}$$
$$= \overline{\binom{p}{2^s}} + 1 + \overline{\binom{p'}{2^s-2^{v_1+1}}\binom{p'}{2^{v_1}-2^{v_2+1}}\cdots\binom{p'}{2^{v_{i-2}}-2^{v_{i-1}+1}}}\,\overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}}-2^{v_i}}}$$
$$= \overline{\binom{2n}{2^s}} + 1 + \overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}}-2^{v_i}}}$$
$$= \overline{\binom{2n}{2^s}} + 1 + \overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}}-2^{v_i+1}}}\,\overline{\binom{p'}{2^{v_i}}}$$
$$= \overline{\binom{2n}{2^s}} + 1 + \overline{\binom{p'}{2^{v_i}}},$$

$$\left\langle \left(\prod_{j=1}^{i} (\beta_d^{2^{v_j}} c^d)\right) c^{2nd+l-1-\sum_{j=1}^{i}(2^{v_j}+1)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle =$$
$$= \left\langle \beta_d^{2^{v_1}+\cdots+2^{v_i}} c^{2nd+l-1-\sum_{j=1}^{i} 2^{v_j} d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle$$
$$= \overline{\binom{q'}{2n-\sum_{j=1}^{i} 2^{v_j}}}$$
$$= \overline{\binom{2n-\sum_{j=1}^{i} 2^{v_j}}{2^s}} + 1$$
$$= \overline{\binom{2n}{2^s}} + 1.$$

Como tais números característicos devem ser iguais, obtemos $\overline{\binom{p'}{2^{v_i}}} = 0$ e portanto $\overline{\binom{p}{2^{v_i}}} = 1$. De $\overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}}-2^{v_i+1}}} = 1$ segue que $\overline{\binom{p'}{2^v}} = 1$ e, conseqüentemente, $\overline{\binom{p}{2^v}} = 0$ para cada v tal que $v_{i-1} > v \geq v_i + 1$.

Desse modo, obtivemos

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}}$$

para cada v com $v_{i-1} > v \geq v_i$, encerrando a demonstração. □

4.2.2 Caso $2^s < 2^t$

Nesta subseção, estamos sob as condições apresentadas na Subseção 4.2.1 e assumimos $2 \leq 2^s < 2^t$. Em particular, $\overline{\binom{2n}{2}} = \overline{\binom{2^{t+1}a+2^t}{2}} = 0$.

Nosso objetivo é mostrar que:

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^{2n+1} \qquad \text{e} \qquad W(\xi^l) = (1+\beta_d)^{2^s+1}.$$

Observe que $(1+\alpha_d)^{2n+1} = (1+\alpha_d^{2^t})^{2a+1}(1+\alpha_d) = 1+\alpha_d$, pois $\alpha_d^{2^t} = 0$. Assim, como tomamos $p < 2^{s+1}$ e $q < 2^{u+1}$ satisfazendo

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p \qquad \text{e} \qquad W(\xi^l) = (1+\beta_d)^q,$$

devemos provar que $p = 1$ e $q = 2^s + 1$.

Substituindo $\overline{\binom{2n}{2}} = 0$ nos valores de $w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(-))$ obtidos em (I), página 87, e com as igualdades obtidas em (V) e (VI), página 88, compomos a seguinte tabela:

Tabela 1	$\mathbb{R}P(\eta^k)$	$\mathbb{R}P(\xi^l)$
$w[1]_{2d}$	$\begin{cases} c^{2d} + \binom{p}{2}\alpha_d^2 + \alpha_d c^d, & \text{se } s = 1, \\ \binom{p'}{2}\alpha_d^2 + \alpha_d c^d, & \text{se } s > 1, \end{cases}$	$\binom{q'}{2}\beta_d^2 + \beta_d c^d$
$\widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}$ $(1 \leq v < s; j \geq 0)$	$\binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^{v+j}} c^d$	$\binom{q}{2^v}\beta_d^{2^{v+j}} c^d$
$\widehat{w}[s]_{(2^{s+j}+1)d}$ $(j \geq 0)$	$c^{(2^{s+j}+1)d} + \binom{p'}{2^s}\alpha_d^{2^{s+j}} c^d$	$\binom{q}{2^s}\beta_d^{2^{s+j}} c^d$

Afirmação 1: Se $s = 1$ então $\overline{\binom{p}{2}} = 0$.

De fato, considere o polinômio $w[1]_{2d}^2 c^{2nd-4d+l-1}$ (lembrando que $2n \geq 2^t \geq 4$ e $l > d$). Aplicando a Fórmula de *Conner*, obtemos:

$\langle w[1]_{2d}^2 c^{2nd-4d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)\rangle = \langle c^{2nd+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)\rangle +$

$$+\left\langle \binom{p}{2}\alpha_d^4 c^{2nd-4d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)\right\rangle + \langle \alpha_d^2 c^{2nd-4d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)\rangle = \binom{p'}{2} + 1,$$

$\langle w[1]_{2d}^2 c^{2nd-4d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)\rangle = \left\langle \binom{q'}{2}\beta_d^4 c^{2nd-4d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)\right\rangle +$

$$+\langle \beta_d^2 c^{2nd-4d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)\rangle = \overline{\binom{q'}{2}\binom{q'}{2n-4}} + \overline{\binom{q'}{2n-2}}.$$

Como tais números devem coincidir, temos então

$$\overline{\binom{p'}{2}} + 1 = \overline{\binom{q'}{2}\binom{q'}{2n-4}} + \overline{\binom{q'}{2n-2}}.$$

Observe que 2 não aparece na expansão diádica de $2n-4 = 2^{t+1}a + 2^t - 4$. Daí, usando o Corolário 1.12.6, obtemos

$$\binom{p'}{2} + 1 = \overline{\binom{q'}{2}\binom{q'}{2n-4}} + \overline{\binom{q'}{2n-2}} = \overline{\binom{q'}{2n-2}} + \overline{\binom{q'}{2n-2}} = 0.$$

Ou seja, $\overline{\binom{p'}{2}} = 1$ e, conseqüentemente, $\overline{\binom{p}{2}} = 0$, como queríamos.

Afirmação 2: $\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q}{2^s}}\,\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}}$.

De fato, considerando os valores de $\widehat{w}[s]_{(2^{s+j}+1)d}$ (vide Tabela 1) para $j = t-s > 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\widehat{w}[s]_{(2^t+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) &= c^{(2^t+1)d} + \tbinom{p'}{2^s}\alpha_d^{2^t} c^d = c^{(2^t+1)d},\\
\widehat{w}[s]_{(2^t+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) &= \tbinom{q}{2^s}\beta_d^{2^t} c^d.
\end{aligned}$$

Consideraremos os números característicos associados a $\widehat{w}[s]_{(2^t+1)d}c^{2^{t+1}ad+l-d-1}$. Assim, via Fórmula de *Conner*, obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\tbinom{p'}{2^s}} &= \langle c^{2nd+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \langle c^{(2^t+1)d}c^{2^{t+1}ad+l-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle\\
&= \langle \widehat{w}[s]_{(2^t+1)d}c^{2^{t+1}ad+l-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle\\
&= \langle \widehat{w}[s]_{(2^t+1)d}c^{2^{t+1}ad+l-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle\\
&= \langle \tbinom{q}{2^s}\beta_d^{2^t} c^d c^{2^{t+1}ad+l-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle = \overline{\tbinom{q}{2^s}}\,\overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a}},
\end{aligned}$$

chegando à equação desejada:

$$\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q}{2^s}\binom{q'}{2^{t+1}a}}$$

Afirmação 3: Se $s > 1$, então $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}} = 1$ e $\overline{\binom{q'}{2}} + \overline{\binom{q'}{2^s}} = 1$.

De fato, como $2^{s+1}d \leq 2^t d \leq 2nd + l - 1$, podemos considerar os números característicos associados a $w[1]_{2d}^{2^s}c^{2nd-2^{s+1}d+l-1}$. Assim, usando a Tabela 1, calculamos:

$$\begin{aligned}
\left\langle w[1]_{2d}^{2^s}c^{2nd-2^{s+1}d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle &= \left\langle \left(\tbinom{p'}{2}\alpha_d^2 + \alpha_d c^d\right)^{2^s} c^{2nd-2^{s+1}d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle\\
&= \langle \alpha_d^{2^s} c^{2nd-2^{s+1}d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle\\
&= 1
\end{aligned}$$

pois $\alpha_d^{2^{s+1}} = 0$. Por sua vez,

$$\begin{aligned}
\left\langle w[1]_{2d}^{2^s}c^{2nd-2^{s+1}d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle &= \left\langle \left(\tbinom{q'}{2}\beta_d^2 + \beta_d c^d\right)^{2^s} c^{2nd-2^{s+1}d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle\\
&= \overline{\tbinom{q'}{2}\tbinom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^{s+1}}} + \overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^s}}\\
&= \overline{\tbinom{q'}{2}\tbinom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^{s+1}}} + \overline{\tbinom{q'}{2^s}\tbinom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^{s+1}}}\\
&= \overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^{s+1}}}\left(\overline{\tbinom{q'}{2}} + \overline{\tbinom{q'}{2^s}}\right)
\end{aligned}$$

(a penúltima igualdade é justificada pelo Corolário 1.12.6, uma vez que 2^s não aparece na expansão diádica de $2^{t+1}a + 2^t - 2^{s+1}$).

Logo, como tais números característicos devem ser iguais, obtemos

$$\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^{s+1}}}\left(\overline{\binom{q'}{2}} + \overline{\binom{q'}{2^s}}\right) = 1,$$

e, portanto, $\overline{\binom{q'}{2}} + \overline{\binom{q'}{2^s}} = 1 = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^{s+1}}}$. Em particular, $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}} = 1$, pois $2^{t+1}a$ e $2^t - 2^{s+1}$ possuem expansões diádicas disjuntas.

Afirmação 4: Se $s > 1$, então $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}} = 0$, para cada $v = 1, \ldots, s-1$.

Fixe v com $1 \leq v \leq s-1$. Considerando os valores de $\widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}$ (vide Tabela 1) para $j = t - v > s - v > 0$, temos:

$$\widehat{w}[v]_{(2^t+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^t} c^d = 0,$$
$$\widehat{w}[v]_{(2^t+1)d}(\mathbb{R}P(\xi_l)) = \binom{q}{2^v}\beta_d^{2^t} c^d.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \widehat{w}[v]_{(2^t+1)d} c^{2^{t+1}ad-d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{w}[v]_{(2^t+1)d} c^{2^{t+1}ad-d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle \\
&= \left\langle \binom{q}{2^v}\beta_d^{2^t} c^d c^{2^{t+1}ad-d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle = \overline{\binom{q}{2^v}}\,\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}}.
\end{aligned}$$

Mas, pela Afirmação 3, $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}} = 1$. Portanto, obtemos $\overline{\binom{q}{2^v}} = 0$.

Por sua vez, temos:

$$\widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^s} c^d,$$
$$\widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}(\mathbb{R}P(\xi_l)) = \binom{q}{2^v}\beta_d^{2^s} c^d = 0.$$

Então, considerando os números característicos associados a $\widehat{w}[v]_{(2^s+1)d} c^{k-d-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \widehat{w}[v]_{(2^s+1)d} c^{k-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{w}[v]_{(2^s+1)d} c^{k-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle \\
&= \left\langle \binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^s} c^d c^{k-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle = \overline{\binom{p}{2^v}},
\end{aligned}$$

ou seja: $\overline{\binom{p}{2^v}} = 0$.

Finalmente, usando as quatro afirmações acima, mostraremos que $p = 1$ e $q = 2^s + 1$.

Para concluir que $p = 1$, analisaremos os casos $s = 1$ e $s > 1$, separadamente.

No caso $s = 1$, temos $p < 2^{s+1} = 4$ com p ímpar. Pela Afirmação 1, $\overline{\binom{p}{2}} = 0$, o que significa que 2 não aparece na expansão diádica de p. Desse modo, obtemos $p = 1$.

No caso $s > 1$, temos $p < 2^{s+1}$ com p ímpar e, pela Afirmação 4, nenhuma potência 2^v, com $1 \leq v \leq s-1$, aparece na expansão diádica de p. Logo, para obtermos $p = 1$, basta provarmos que $\overline{\binom{p}{2^s}} = 0$. Para isso, observamos que a Afirmação 4 nos diz, em particular, que $\overline{\binom{q}{2}} = 0$ e, conseqüentemente, $\overline{\binom{q'}{2}} = 1$. Daí, usando as igualdades $\overline{\binom{q'}{2}} + \overline{\binom{q'}{2^s}} = 1$, $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}} = 1$ (vide Afirmação 3) e $\overline{\binom{p'}{2^s}} = \left(1 + \overline{\binom{q'}{2^s}}\right)\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}}$ (vide Afirmação 2), concluímos que $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 1$. Portanto, $\overline{\binom{p}{2^s}} = 0$, como queríamos.

Agora, resta obter $q = 2^s + 1$.

De $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 1$ e $\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2n}} = \overline{\binom{q}{2^s}\binom{q'}{2^{t+1}a}}$ (vide (4.2), página 86, e Afirmação 2), segue que $\overline{\binom{q}{2^s}} = 1$ e $\overline{\binom{q'}{2n}} = 1$. A igualdade $\overline{\binom{q'}{2n}} = 1$ implica que toda potência de 2 que aparece em $2n$ aparece em q'; em particular, $\overline{\binom{q'}{2^u}} = 1$ e, conseqüentemente, $\overline{\binom{q}{2^u}} = 0$. Além disso temos $\overline{\binom{q}{2}} = \overline{\binom{2^s}{2}}$, pois: para $s = 1$, temos $\overline{\binom{q}{2^s}} = \overline{\binom{q}{2}} = 1$ e, para $s > 1$, $\overline{\binom{q}{2}} = 0$ (pela Afirmação 4). Logo, todas as hipóteses do Lema 4.2.5 são satisfeitas, de onde segue a igualdade $q = 2^s + 1$.

4.2.3 Caso $2^s = 2^t$

Nesta subseção, estamos sob as condições apresentadas na Subseção 4.2.1 e assumimos $2^s = 2^t$. Em particular, como $2^s \neq 2n = 2^{t+1}a + 2^t$, temos $\overline{\binom{2n}{2}} = \overline{\binom{2^t}{2}} = \overline{\binom{2^s}{2}}$, $a \geq 1$ e $2^t < 2^u$.

Nosso objetivo é mostrar que:

$$W(\eta^k) = (1 + \alpha_d)^{2n+1} \qquad \text{e} \qquad W(\xi^l) = (1 + \beta_d)^{2^t+1}.$$

Observe que $(1+\alpha_d)^{2n+1} = (1+\alpha_d^{2^{t+1}})^a(1+\alpha_d)^{2^t+1} = (1+\alpha_d)^{2^t+1}$, pois $\alpha_d^{2^{t+1}} = 0$. Assim, como tomamos $p < 2^{t+1}$ e $q < 2^{u+1}$ satisfazendo

$$W(\eta^k) = (1 + \alpha_d)^p \qquad \text{e} \qquad W(\xi^l) = (1 + \beta_d)^q,$$

nosso objetivo é provar que $p = 2^t + 1$ e $q = 2^t + 1$.

Usando $\overline{\binom{2n}{2}} = \overline{\binom{2^t}{2}} = \overline{\binom{2^s}{2}}$ e $\overline{\binom{2^s}{2^t}} = 1$ nas classes obtidas em (I), (V) e (VII) (vide páginas 87 e 88), compomos a seguinte tabela:

Tabela 2	$\mathbb{R}P(\eta^k)$	$\mathbb{R}P(\xi^l)$
$w[1]_{2d}$	$\left(\binom{2n}{2} + \binom{p'}{2}\right)\alpha_d^2 + \alpha_d c^d$	$\left(\binom{2n}{2} + \binom{q'}{2}\right)\beta_d^2 + \beta_d c^d$
$\widehat{w}[v]_{(2^v+j+1)d}$ $(1 \leq v < t; j \geq 0)$	$\binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^v+j}c^d$	$\binom{q}{2^v}\beta_d^{2^v+j}c^d$
$\widehat{w}[t]_{(2^t+j+1)d}$ $(j \geq 0)$	$\binom{p'}{2^t}\alpha_d^{2^t+j}c^d$	$\binom{q'}{2^t}\beta_d^{2^t+j}c^d$

Afirmação 1: $\overline{\binom{q'}{2^u}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^u}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}} = 1$.

De fato, como $\alpha_d^i = 0$ para todo $i > 2^t$, temos

$$\widehat{w}[t]_{(2^{t+1}+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{p'}{2^t}\alpha_d^{2^{t+1}}c^d = 0,$$

enquanto que

$$\widehat{w}[t]_{(2^{t+1}+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{2^t}\beta_d^{2^{t+1}}c^d.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \widehat{w}_{(2^{t+1}+1)d}c^{2^{t+1}ad-2^td-d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{w}_{(2^{t+1}+1)d}c^{2^{t+1}ad-2^td-d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\
&= \left\langle \tbinom{q'}{2^t}\beta_d^{2^{t+1}}c^{2^{t+1}ad-2^td+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\
&= \overline{\tbinom{q'}{2^t}\tbinom{q'}{2n-2^{t+1}}}. \\
&= \overline{\tbinom{q'}{2^t}\tbinom{q'}{2^{t+1}a-2^t}}.
\end{aligned}$$

Como 2^t aparece na expansão diádica de $2^{t+1}a-2^t$, se tivéssemos $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^t}} = 1$ teríamos também $\overline{\binom{q'}{2^t}} = 1$. Logo, da igualdade $\overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^t}} = 0$ segue que

$$\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^t}} = 0.$$

Agora, considerando os números característicos associados a $w[1]_{2d}^{2^t}c^{2^{t+1}ad-2^td+l-1}$, calculamos

$$\begin{aligned}
1 &= \langle \alpha_d^{2^t}c^{k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= \left\langle \left(\left(\tbinom{2n}{2}+\tbinom{p'}{2}\right)\alpha_d^{2^{t+1}}+\alpha_d^{2^t}c^d\right)c^{2^{t+1}ad-2^td+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \langle w[1]_{2d}^{2^t}c^{2^{t+1}ad-2^td+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= \langle w[1]_{2d}^{2^t}c^{2^{t+1}ad-2^td+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\
&= \left\langle \left(\tbinom{2n}{2}+\tbinom{q'}{2}\right)\beta_d^{2^{t+1}}c^{2^{t+1}ad-2^td+l-1}+\beta_d^{2^t}c^{2^{t+1}ad+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle = \\
&= \left(\overline{\tbinom{2n}{2}}+\overline{\tbinom{q'}{2}}\right)\overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a-2^t}}+\overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a}} \\
&= \overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a}}
\end{aligned}$$

Desse modo, chegamos a

$$\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}} = 1.$$

A igualdade $\overline{\binom{q'}{2^u}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^u}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}}$ decorre do fato de 2^u aparecer na expansão diádica de $2^{t+1}a$.

Afirmação 2: $\overline{\binom{p}{2^t}} = \overline{\binom{q}{2^t}} = 1$; em particular, $l \geq (2^t+1)d$.

De fato, como $\overline{\binom{p'}{2^t}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t}}$ (vide (4.2), página 86) e $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}} = 1$ (pela Afirmação 1) vemos que

$$\overline{\binom{p'}{2^t}} = \overline{\binom{q'}{2^t}}.$$

Com os valores de $\widehat{w}[t]_{(2^{t+j}+1)d}$ dados na Tabela 2 para $j = u-t > 0$, temos:

$$\widehat{w}[t]_{(2^u+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \tbinom{p'}{2^t}\alpha_d^{2^u}c^d = 0,$$

$\widehat{w}[t]_{(2^u+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q'}{2^t}\beta_d^{2^u}c^d.$

Daí, considerando os números característicos associados a $\widehat{w}[t]_{(2^u+1)d}c^{2nd-2^ud-d+l-1}$, calculamos:

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \widehat{w}[t]_{(2^u+1)d}c^{2nd-2^ud-d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{w}[t]_{(2^u+1)d}c^{2nd-2^ud-d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\
&= \left\langle \tbinom{q'}{2^t}\beta_d^{2^u}c^d, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\
&= \overline{\tbinom{q'}{2^t}\tbinom{q'}{2^{t+1}a-2^u+2^t}} \\
&= \overline{\tbinom{q'}{2^t}\tbinom{q'}{2^{t+1}a-2^u}} = \overline{\tbinom{q'}{2^t}},
\end{aligned}$$

pois 2^t e $2^{t+1}a - 2^u$ possuem expansões diádicas disjuntas (veja Corolário 1.12.6) e $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^u}} = 1$, pela Afirmação 1.

Desse modo, obtemos $\overline{\binom{p'}{2^t}} = \overline{\binom{q'}{2^t}} = 0$ e, conseqüentemente,

$$\overline{\binom{p}{2^t}} = \overline{\binom{q}{2^t}} = 1.$$

Observe que, como q é ímpar e $2^t + 1 < 2n$, temos então $w_{(2^t+1)d}(\xi^l) = \overline{\binom{q}{2^t+1}}\beta_d^{2^t+1} = \beta_d^{2^t+1} \neq 0$. Portanto, $l \geq (2^t + 1)d$.

Afirmação 3: Se $t > 1$, então $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}} = 0$ para cada $1 \leq v < t$.

De fato, levando em conta os valores de $\widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}$ com $1 \leq v < t$ dados na Tabela 2, temos:

$$\begin{cases}
\widehat{w}[v]_{(2^t+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^t}c^d, \\
\widehat{w}[v]_{(2^t+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2^v}\beta_d^{2^t}c^d,
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\widehat{w}[v]_{(2^u+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^u}c^d = 0, \\
\widehat{w}[v]_{(2^u+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2^v}\beta_d^{2^u}c^d.
\end{cases}$$

Assim, para cada $1 \leq v < t$, calculamos

$$\begin{aligned}
\overline{\tbinom{p}{2^v}} &= \left\langle \tbinom{p}{2^v}\alpha_d^{2^t}c^{2^{t+1}ad+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{w}[v]_{(2^t+1)d}c^{2^{t+1}ad-d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{w}[v]_{(2^t+1)d}c^{2^{t+1}ad-d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\
&= \left\langle \tbinom{q}{2^v}\beta_d^{2^t}c^{2^{t+1}ad+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\
&= \overline{\tbinom{q}{2^v}}\,\overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a}}.
\end{aligned}$$

Então, como pela Afirmação 1 sabemos que $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}} = 1$, concluímos que

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}\binom{q'}{2^{t+1}a}} = \overline{\binom{q}{2^v}}.$$

Agora, conforme a Afirmação 2, temos $l \geq (2^t+1)d > 2d$. Assim, $(2^t+1)d + (2^u+1)d \leq 2nd + 2d \leq 2nd + l - 1 = dim(\mathbb{R}P(\xi^l))$ e, então, podemos considerar os números característicos associados a $\widehat{w}[v]_{(2^t+1)d}\widehat{w}[v]_{(2^u+1)d}c^{2nd-(2^t+2^u)d+l-2d-1}$. Logo,

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \widehat{w}[v]_{(2^t+1)d}\widehat{w}[v]_{(2^u+1)d}c^{2nd-(2^t+2^u)d+l-2d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{w}[v]_{(2^t+1)d}\widehat{w}[v]_{(2^u+1)d}c^{2nd-(2^t+2^u)d+l-2d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\
&= \left\langle \tbinom{q}{2^v}\beta_d^{2^t+2^u}c^{2nd-(2^t+2^u)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\
&= \overline{\tbinom{q}{2^v}}\,\overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a-2^u}} \\
&= \overline{\tbinom{q}{2^v}},
\end{aligned}$$

pois $\overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a-2^u}} = 1$ (vide Afirmação 1). Desse modo obtemos

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}} = 0,$$

como queríamos.

Finalmente, usaremos as três afirmações anteriores para provar que $p = 2^t+1$ e $q = 2^t+1$.

Pelas afirmações 2 e 3, temos: $\overline{\tbinom{p}{2^t}} = \overline{\tbinom{q}{2^t}} = 1$ e $\overline{\tbinom{p}{2^v}} = \overline{\tbinom{q}{2^v}} = 0$, para cada $1 \leq v < t$. Com tais valores, concluímos então que $p = 2^t+1$, pois p é ímpar e $p < 2^{t+1}$. Além disso, temos $\overline{\tbinom{q}{2^t}} = 1$ e $\overline{\tbinom{q}{2}} = \overline{\tbinom{2^t}{2}}$. Pela Afirmação 1, temos ainda $\overline{\tbinom{q'}{2^u}} = 1$ e, conseqüentemente, $\overline{\tbinom{q}{2^u}} = 0$. Logo, todas as hipóteses do Lema 4.2.5 foram satisfeitas, de onde segue a igualdade $q = 2^t+1$.

4.2.4 Caso $2^t < 2^s < 2^u$

Estando nas condições apresentadas na Subseção 4.2.1, assumimos $2^t < 2^s < 2^u$. Novamente objetivamos mostrar que

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^{2n+1} \qquad \text{e} \qquad W(\xi^l) = (1+\beta_d)^{2^s+1}.$$

Observe que $(1+\alpha_d)^{2n+1} = \sum_{i=0}^{2^s}\binom{2n+1}{i}\alpha_d^i$, pois $\alpha_d^{2^s+1} = 0$. Assim, como p e q são ímpares, com $p < 2^{s+1}$ e $q < 2^{u+1}$, e com

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p \qquad \text{e} \qquad W(\xi^l) = (1+\beta_d)^q,$$

basta provarmos que $q = 2^s+1$ e $\overline{\tbinom{p}{2^v}} = \overline{\tbinom{2n}{2^v}}$ para cada $1 \leq v \leq s$.

Substituindo $\overline{\tbinom{2^s}{2}} = 0 = \overline{\tbinom{2^s}{2^t}}$ nas classes obtidas em (I), (V) e (VII), páginas 87 e 88, compomos a seguinte tabela:

Tabela 3	$\mathbb{R}P(\eta^k)$	$\mathbb{R}P(\xi^l)$
$w[1]_{2d}$	$\binom{2n}{2}c^{2d}+\binom{p'}{2}\alpha_d^2+\alpha_d c^d$	$\left(\binom{2n}{2}+\binom{q'}{2}\right)\beta_d^2+\beta_d c^d$
$\widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}$ $(1\leq v<t; j\geq 0)$	$\binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^{v+j}}c^d$	$\binom{q}{2^v}\beta_d^{2^{v+j}}c^d$
$\widehat{w}[t]_{(2^{t+j}+1)d}$ $(j\geq 0)$	$c^{(2^{t+j}+1)d}+\binom{p}{2^t}\alpha_d^{2^{t+j}}c^d$	$\binom{q'}{2^t}\beta_d^{2^{t+j}}c^d$

Como $2^t<2^s<2^u<2n$ e $l>d$, podemos considerar os números característicos associados a $\widehat{w}[t]_{(2^s+1)d}c^{2nd-2^sd-d+l-1}$, $\widehat{w}[t]_{(2^{s+1}+1)d}c^{2nd-2^{s+1}d-d+l-1}$ e $w[1]_{2d}^{2^s}c^{2nd-2^{s+1}d+l-1}$. Desse modo, obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{\binom{p'}{2^s}}+\overline{\binom{p}{2^t}} &= \left\langle c^{2nd+l-1}+\binom{p}{2^t}\alpha_d^{2^s}c^{2nd-2^sd+l-1},\sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle\\ &= \langle \widehat{w}[t]_{(2^s+1)d}c^{2nd-2^sd-d+l-1},\sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle\\ &= \langle \widehat{w}[t]_{(2^s+1)d}c^{2nd-2^sd-d+l-1},\sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle\\ &= \left\langle \binom{q'}{2^t}\beta_d^{2^s}c^{2nd-2^sd+l-1},\sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle\\ &= \overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^s}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\binom{p'}{2^s}} &= \left\langle c^{2nd+l-1},\sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle\\ &= \left\langle \left(c^{(2^{s+1}+1)d}+\binom{p}{2^t}\alpha_d^{2^{s+1}}c^d\right)c^{2nd-2^{s+1}d-d+l-1},\sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle\\ &= \langle \widehat{w}[t]_{(2^{s+1}+1)d}c^{2nd-2^{s+1}d-d+l-1},\sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle\\ &= \langle \widehat{w}[t]_{(2^{s+1}+1)d}c^{2nd-2^{s+1}d-d+l-1},\sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle\\ &= \left\langle \binom{q'}{2^t}\beta_d^{2^{s+1}}c^{2nd-2^sd+l-1},\sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle\\ &= \overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^{s+1}}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\binom{2n}{2}}\overline{\binom{p'}{2^s}}+1 &= \left\langle \binom{2n}{2}c^{2nd+l-1}+\alpha_d^{2^s}c^{2nd-2^sd+l-1},\sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle\\ &= \left\langle w[1]_{2d}^{2^s}c^{2nd-2^{s+1}d+l-1},\sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle\\ &= \left\langle w[1]_{2d}^{2^s}c^{2nd-2^{s+1}d+l-1},\sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle\\ &= \left\langle \left(\binom{2n}{2}+\binom{q'}{2}\right)\beta_d^{2^{s+1}}c^{2nd-2^{s+1}d+l-1}+\beta_d^{2^s}c^{2nd-2^sd+l-1},\sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle\\ &= \left(\overline{\binom{2n}{2}}+\overline{\binom{q'}{2}}\right)\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^{s+1}}}+\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^s}}.\end{aligned}$$

Observe que $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^s}}=\overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}}$ e $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^{s+1}}}=\overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}}$, pois 2^t não aparece na expansões diádicas de $2^{t+1}a-2^s$ e de $2^{t+1}a-2^{s+1}$ (já que $2^t<2^s$). Assim, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\overline{\binom{p'}{2^s}}+\overline{\binom{p}{2^t}}=\overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}}, \tag{4.5}$$

$$\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}}, \tag{4.6}$$

$$\overline{\binom{2n}{2}\binom{p'}{2^s}}+1 = \left(\overline{\binom{2n}{2}}+\overline{\binom{q'}{2}}\right)\overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}}+\overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}}. \tag{4.7}$$

Somando-se (4.5) e (4.6), chegamos a

$$\overline{\binom{p}{2^t}} = \overline{\binom{q'}{2^t}}\left(\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}}+\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}}\right). \tag{4.8}$$

Vale lembrar que $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}\binom{q'}{2^t}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t}} = \overline{\binom{p'}{2^s}}$ (vide (4.2), página 82).

Afirmação 1: $\overline{\binom{p}{2^t}} = 1$ e $\overline{\binom{q}{2^t}} = 0$.

De fato, inicialmente assumimos $t = 1$ (equivalentemente, $\overline{\binom{2n}{2}} = 1$).

Neste caso, temos $\left(\overline{\binom{2n}{2}}+\overline{\binom{q'}{2}}\right)\overline{\binom{q'}{2}} = \left(1+\overline{\binom{q'}{2}}\right)\overline{\binom{q'}{2}} = 0$. Daí, por (4.2) e (4.7) obtemos:

$$\overline{\binom{q'}{4a}\binom{q'}{2}} = \overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2}\binom{q'}{4a-2^s}}+1.$$

Em particular, $\overline{\binom{q'}{2}}\left(\overline{\binom{q'}{4a}}+\overline{\binom{q'}{4a-2^s}}\right) = 1$ e portanto $\overline{\binom{q'}{2}} = 1$ (equivalentemente, $\overline{\binom{q}{2}} = 0$).

Assim, temos

$$\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{4a-2^s}}+1,$$

e ainda, por (4.5),

$$\overline{\binom{p'}{2^s}}+\overline{\binom{p}{2}} = \overline{\binom{q'}{4a-2^s}}.$$

Juntando-se as duas últimas equações acima, concluímos que $\overline{\binom{p}{2}} = 1$, como queríamos.

Agora, assumimos $t > 1$ (equivalentemente, $\overline{\binom{2n}{2}} = 0$).

Neste caso, (4.7) pode ser escrita na forma

$$1 = \overline{\binom{q'}{2}\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}}+\overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}},$$

ou ainda,

$$1 = \left(1+\overline{\binom{q}{2}}\right)\overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}}+\overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}}.$$

Considerando $\widehat{w}[1]_{(2^{s+1}+1)d}$ (vide Tabela 3), vemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \binom{p}{2}\alpha_d^{2^{s+1}}c^{2nd-2^{s+1}d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{w}[1]_{(2^{s+1}+1)d}c^{2nd-2^{s+1}d-d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \left\langle \widehat{w}[1]_{(2^{s+1}+1)d}c^{2nd-2^{s+1}d-d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\
&= \left\langle \binom{q}{2}\beta_d^{2^{s+1}}c^{2nd-2^{s+1}d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle
\end{aligned}$$

$= \overline{\binom{q}{2}}\,\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^{s+1}}}$

$= \overline{\binom{q}{2}}\,\overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}}$

Daí, usando $\overline{\binom{q}{2}}\,\overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}} = 0$ em (4.7), obtemos

$$1 = \overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}} + \overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s}}}.$$

Portanto, $\overline{\binom{q'}{2^t}} = 1$, ou seja, $\overline{\binom{q}{2^t}} = 0$. Finalmente, observamos que a expressão à direita na igualdade acima é exatamente a que aparece à direita em (4.8), de onde segue que $\overline{\binom{p}{2^t}} = 1$, encerrando a prova da Afirmação 1.

Afirmação 2: $\overline{\binom{p}{2^s}} = \overline{\binom{2^{t+1}a}{2^s}}$, $\quad \overline{\binom{q}{2^s}} = 1$ e $\overline{\binom{q}{2^u}} = 0$.

De fato, primeiro consideramos o caso em que $\overline{\binom{2^{t+1}a}{2^s}} = 0$.

Por (4.5), (4.6) e Afirmação 1, temos

$$\overline{\binom{p}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}}, \qquad \overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}}.$$

Observamos que, como estamos assumindo que 2^s não pertence à expansão diádica de $2^{t+1}a$, temos que 2^s não pertence à expansão diádica de $2^{t+1}a-2^{s+1}$; logo, pelo Corolário 1.12.6, $\overline{\binom{q'}{2^s}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}}$. Assim, obtemos:

$1 = \overline{\binom{p}{2^s}} + \overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}} + \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}\binom{q'}{2^s}} + \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^{s+1}}} = \overline{\binom{p'}{2^s}}\,\overline{\binom{q}{2^s}}$.

Portanto, $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 1 = \overline{\binom{q}{2^s}}$. Em particular, como $\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t}}$ e 2^u aparece na expansão diádica de $2^{t+1}a$, temos $\overline{\binom{q'}{2^u}} = 1$. Ou seja, mostramos que: $\overline{\binom{p}{2^s}} = 0 = \overline{\binom{2^{t+1}a}{2^s}}$, $\overline{\binom{q}{2^s}} = 1$ e $\overline{\binom{q}{2^u}} = 0$.

Assumimos agora $\overline{\binom{2^{t+1}a}{2^s}} = 1$. Daí, 2^s não pertence à expansão diádica de $2^{t+1}a - 2^s$ e portanto $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}} = \overline{\binom{q'}{2^s}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}}$. Assim, lembrando que $\overline{\binom{q'}{2^t}} = 1$ (vide Afirmação 1), obtemos

$$\overline{\binom{q'}{2^s}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t}} = \overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{p}{2^s}} + 1 = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}} + 1,$$

de onde concluímos que

$$\overline{\binom{q}{2^s}\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}} = \overline{\binom{q}{2^s}\binom{p}{2^s}} = 1.$$

Logo, $\overline{\binom{q}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}} = \overline{\binom{p}{2^s}} = 1$. Observe que os fatos de 2^u ser estritamente maior do que 2^s e de 2^s e 2^u aparecerem na expansão diádica de $2^{t+1}a$ implicam que 2^u aparece na expansão diádica de $2^{t+1}a - 2^s$. Daí, $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a-2^s}} = 1$ acarreta $\overline{\binom{q'}{2^u}} = 1$. Desse modo, obtivemos $\overline{\binom{p}{2^s}} = 1 = \overline{\binom{2^{t+1}a}{2^s}}$, $\overline{\binom{q}{2^s}} = 1$ e $\overline{\binom{q}{2^u}} = 0$, como queríamos.

Afirmação 3: No caso $t > 1$, $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}} = 0$, para cada $1 \leq v < t$.

De fato, temos $\overline{\binom{p'}{2^s}} + \overline{\binom{p}{2^t}} = \overline{\binom{q'}{2n-2^s}}$ (por (4.5)), $\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2n-2^{s+1}}}$ (por (4.6)), $\overline{\binom{p}{2^t}} = 1$ (pela Afirmação 1) e $\overline{\binom{p}{2^s}} = \overline{\binom{2n}{2^s}}$ (pela Afirmação 2); então vemos que

$$\overline{\binom{q'}{2n-2^{s+1}}} = \overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{2n}{2^s}} + 1 \qquad \text{e} \qquad \overline{\binom{q'}{2n-2^s}} = \overline{\binom{p}{2^s}} = \overline{\binom{2n}{2^s}}.$$

Fixe v com $1 \leq v < t$. Usaremos as classes

$$\widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = \binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^{v+j}}c^d, \qquad \widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \binom{q}{2^v}\beta_d^{2^{v+j}}c^d,$$

exibidas na Tabela 3.

Considerando os números característicos associados a $\widehat{w}[v]_{(2^{s+1}+1)d}c^{2nd-(2^{s+1}+1)d+l-1}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \tbinom{p}{2^v}\alpha_d^{2^{s+1}}c^{2nd-(2^{s+1}+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \langle \widehat{w}[v]_{(2^{s+1}+1)d}c^{2nd-(2^{s+1}+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= \langle \widehat{w}[v]_{(2^{s+1}+1)d}c^{2nd-(2^{s+1}+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\
&= \left\langle \tbinom{q}{2^v}\beta_d^{2^{s+1}}c^{2nd-(2^{s+1}+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\
&= \overline{\tbinom{q}{2^v}}\,\overline{\tbinom{q'}{2n-2^{s+1}}} \\
&= \overline{\tbinom{q}{2^v}}\left(\overline{\tbinom{2n}{2^s}} + 1\right).
\end{aligned}$$

Assim vemos que $\overline{\binom{q}{2^v}} = 0$, se $\overline{\binom{2n}{2^s}} = 0$. Agora, considerando os números característicos associados a $\widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}c^{2nd-(2^s+1)d+l-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\tbinom{p}{2^v}} &= \left\langle \tbinom{p}{2^v}\alpha_d^{2^s}c^{2nd-(2^s+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \langle \widehat{w}[v]_{(2^{s+1}+1)d}c^{2nd-(2^s+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= \langle \widehat{w}[v]_{(2^{s+1}+1)d}c^{2nd-(2^s+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\
&= \left\langle \tbinom{q}{2^v}\beta_d^{2^s}c^{2nd-(2^s+1)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\
&= \overline{\tbinom{q}{2^v}}\,\overline{\tbinom{q'}{2n-2^s}} \\
&= \overline{\tbinom{q}{2^v}}\,\overline{\tbinom{2n}{2^s}};
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}\binom{2n}{2^s}}.$$

Logo, $\overline{\binom{p}{2^v}} = 0$, no caso em que $\overline{\binom{2n}{2^s}} = 0$, o que encerra a prova da Afirmação 3 para tal caso.

Podemos assumir então $\overline{\binom{2n}{2^s}} = 1$. Logo, $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}}$.

Como $2n \geq 2^u + 2^s + 2^t$, podemos considerar os números característicos associados a $\widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}\widehat{w}[v]_{(2^u+1)d}c^{2nd-(2^s+2^u+2)d+l-1}$. Fazendo isso, obtemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\langle \tbinom{p}{2^v}\alpha_d^{2^s+2^u} c^{2nd-(2^s+2^u)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \langle \widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}\, w[v]_{(2^u+1)d}\, c^{2nd-(2^s+2^u+2)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= \langle \widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}\,\widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}\, w[v]_{(2^u+1)d}\, c^{2nd-(2^s+2^u+2)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\
&= \left\langle \tbinom{q}{2^v}\beta_d^{2^s+2^u} c^{2nd-(2^s+2^u)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\
&= \overline{\tbinom{q}{2^v}}\,\overline{\tbinom{q'}{2n-2^s-2^u}}.
\end{aligned}
$$

Mas, $\overline{\binom{q'}{2n-2^s-2^u}} = 1$, pois $\overline{\binom{q'}{2n-2^s}} = \overline{\binom{2n}{2^s}} = 1$ e 2^u aparece na expansão diádica de $2n-2^s$.
Logo, temos $\overline{\binom{q}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}}\,\overline{\binom{q'}{2n-2^s-2^u}} = 0$.
Desse modo, mostramos que $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}} = 0$, como queríamos.

Pelas afirmações 2 e 3, temos $\overline{\binom{q}{2^s}} = 1$, $\overline{\binom{q}{2}} = \overline{\binom{2^s}{2}}$ e $\overline{\binom{q}{2^u}} = 0$. Assim, do Lema 4.2.5 segue que $q = 2^s + 1$.

Em relação a p, temos: $\overline{\binom{p}{2^s}} = \overline{\binom{2n}{2^s}}$ (pela Afirmação 2), $\overline{\binom{p}{2^t}} = 1$ (pela Afirmação 1) e $\overline{\binom{p}{2^v}} = 0$ para $1 \leq v < t$ (pela Afirmação 3). Ou seja, já mostramos que $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}}$, para $1 \leq v \leq t$ e para $v = s$. Assim, como também já temos $q = 2^s + 1$, todas as hipóteses do Lema 4.2.6 estão satisfeitas, de onde segue que

$$
\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}}, \qquad \text{para cada } 1 \leq v \leq s,
$$

Desse modo determinamos p e q como queríamos, encerrando esta subseção.

4.2.5 Caso $2^s > 2^u$

Como anteriormente, estamos nas condições apresentadas na Subseção 4.2.1. Nesta subseção assumimos $2^s > 2^u$. Lembramos que $2n = 2^t(2a+1)$ e $2^u \leq 2n < 2^{u+1}$. A Subseção 4.2.2, onde abordamos o caso $2^s < 2^t$, prova o Teorema 4.2.4 para o caso em que $2n$ é, em particular, uma potência de 2 qualquer; sendo assim, podemos assumir $a \geq 1$, ou seja, $2^t < 2^u < 2n$.

Nosso objetivo é mostrar que:

$$
W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^{2n+1} \qquad \text{e} \qquad W(\xi^l) = (1+\beta_d)^{2^s+1}.
$$

Observe que $(1+\beta_d)^{2^s+1} = (1+\beta_d^{2^s})(1+\beta_d) = (1+\beta_d)$, pois $2^s \geq 2^{u+1} > 2n$ implica $\beta_d^{2^s} = 0$. Logo, como p e q são ímpares, com $p < 2^{s+1}$ e $q < 2^{u+1}$, satisfazendo

$$
W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p \qquad \text{e} \qquad W(\xi^l) = (1+\beta_d)^q,
$$

precisamos provar que $p = 2n+1$ e $q = 1$.

Substituindo $\overline{\binom{2^s}{2}} = 0 = \overline{\binom{2^s}{2^t}}$ nas classes obtidas em (I), (V) e (VII), páginas 87 e 88, compomos a seguinte tabela:

Tabela 4	$\mathbb{R}P(\eta^k)$	$\mathbb{R}P(\xi^l)$
$w[1]_{2d}$	$\binom{2n}{2}c^{2d} + \binom{p'}{2}\alpha_d^2 + \alpha_d c^d$	$\left(\binom{2n}{2} + \binom{q'}{2}\right)\beta_d^2 + \beta_d c^d$
$\widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}$ $(1 \leq v < t; j \geq 0)$	$\binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^{v+j}} c^d$	$\binom{q}{2^v}\beta_d^{2^{v+j}} c^d$
$\widehat{w}[t]_{(2^{t+j}+1)d}$ $(j \geq 0)$	$c^{(2^{t+j}+1)d} + \binom{p}{2^t}\alpha_d^{2^{t+j}} c^d$	$\binom{q'}{2^t}\beta_d^{2^{t+j}} c^d$

Como $k > d$, podemos considerar os números característicos associados a $\widehat{w}[t]_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}$ e $\widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}$ (para cada $1 \leq v < t$). Fazendo isso, obtemos:

$$\begin{aligned}
\overline{\binom{p'}{2^s}} + \overline{\binom{p}{2^t}} &= \left\langle \left(c^{(2^s+1)d} + \overline{\binom{p}{2^t}}\alpha_d^{2^s} c^d\right) c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \langle \widehat{w}[t]_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= \langle \widehat{w}[t]_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\
&= \left\langle \left(\overline{\binom{q'}{2^t}}\beta_d^{2^s} c^d\right) c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\binom{p}{2^v}} &= \left\langle \left(\overline{\binom{p}{2^v}}\alpha_d^{2^s} c^d\right) c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \langle \widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= \langle \widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\
&= \left\langle \left(\overline{\binom{q}{2^v}}\beta_d^{2^s} c^d\right) c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Logo, temos:

$$\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{p}{2^t}}, \tag{4.9}$$

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = 0, \qquad \text{para cada } 1 \leq v < t. \tag{4.10}$$

Afirmação 1: $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t}} = \overline{\binom{p'}{2^s}} = 1$

De fato, a primeira igualdade é dada em (4.2), página 86, quando consideramos os números característicos provindos de $c^{2^s d+k-1}$. Assim resta provar que $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 1$. Se $k > 2^s d$ então podemos considerar os números característicos associados a $w[1]_{2d}^{2^s}c^{k-1-2^s d}$, obtendo:

$$\begin{aligned}
\overline{\binom{2n}{2}}\overline{\binom{p'}{2^s}} + 1 &= \left\langle \left(\overline{\binom{2n}{2}}c^{2d} + \overline{\binom{p'}{2}}\alpha_d^2 + \alpha_d c^d\right)^{2^s} c^{k-1-2^s d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \left\langle w[1]_{2d}^{2^s}c^{k-1-2^s d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \left\langle w[1]_{2d}^{2^s}c^{k-1-2^s d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\
&= \left\langle \left(\left(\overline{\binom{2n}{2}} + \overline{\binom{q'}{2}}\right)\beta_d^2 + \beta_d c^d\right)^{2^s} c^{k-1-2^s d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle
\end{aligned}$$

$$= \left\langle \left(\left(\overline{\binom{2n}{2}} + \overline{\binom{q'}{2}} \right) \beta_d^{2^{s+1}} + \beta_d^{2^s} c^d \right) c^{k-1-2^s d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle = 0,$$

pois $\beta_d^{2^s} = 0$. Portanto, $\overline{\binom{2n}{2}}\overline{\binom{p'}{2^s}} = 1$, o que acarreta $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 1$.

Assumimos agora $k \leq 2^s d$ e argumentaremos por redução ao absurdo. Suponha então $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 0$ (equivalentemente, $\overline{\binom{p}{2^s}} = 1$). Daí, $w_{2^s d}(\eta^k) = \overline{\binom{p}{2^s}}\alpha_d^{2^s} = \alpha_d^{2^s} \neq 0$, implicando $k = 2^s d$. Pelo Teorema 2.2, sabemos que, salvo bordismo, o único fibrado não-nulo sobre um espaço projetivo par que pode ser realizado como um *fixed-data* é o fibrado tangente. Sabemos ainda, pelo Corolário 1.7.11(a), que:

$\eta^k \to K_d P(2^s)$ é um *fixed-data* se, e somente se, $\xi^l \to K_d P(2n)$ é um *fixed-data* .

Por questões dimensionais, concluímos então que $\eta^k \to K_d P(2^s)$ (assim como $\xi^l \to K_d P(2n)$) *não* pode ser um *fixed-data*, pois k e l são não nulos, $2^s \neq 2n$ e $k + 2^s d = l + 2nd$. Se tivéssemos $(1+\alpha_d)^p = (1+\alpha_d)^{2^s+1}$, teríamos $\eta^{2^s d}$ bordante ao fibrado tangente $\tau K_d P(2^s)$ e conseqüentemente $\eta^{2^s d}$ poderia ser realizado como o *fixed-data* de uma involução, o que pelo dito acima não pode ocorrer. Desse modo, concluímos que $W(\eta^{2^s d}) = (1+\alpha_d)^p \neq (1+\alpha_d)^{2^s+1}$. Assim, já que estamos supondo $\overline{\binom{p}{2^s}} = 1$ e temos $p < 2^{s+1}$, existe v com $2 \leq 2^v < 2^s$ tal que $\overline{\binom{p}{2^v}} = 1$ (equivalentemente, $\overline{\binom{p'}{2^v}} = 0$). Logo, $\overline{\binom{p'}{2^s-1}} = 0$. Por (4.10) temos $\overline{\binom{p'}{2^t-1}} = 1$ e, por (4.9), $\overline{\binom{p}{2^s}} = \overline{\binom{p'}{2^t}}$. Então, de $\overline{\binom{p}{2^s}} = 1$ segue que: $\overline{\binom{p'}{2^s-2^{t+1}}} = \overline{\binom{p'}{2^s-2^{t+1}}}\overline{\binom{p}{2^s}}\overline{\binom{p'}{2^t-1}} = \overline{\binom{p'}{2^s-2^{t+1}}}\overline{\binom{p'}{2^t}}\overline{\binom{p'}{2^t-1}} = \overline{\binom{p'}{2^s-1}} = 0$. Ou seja,

$$\overline{\binom{p'}{2^s - 2^{t+1}}} = 0.$$

Para cada $j \geq 1$, definimos a classe

$$\widetilde{w}_{(2^j+1)d}(\mathbb{R}P(-)) = Sq^{2^{j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2d}\left(Sq^d(w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(-)))\right)\right)\cdots\right)$$

e aplicamos o Lema 4.2.2, iterativamente, para calcular (vide Tabela 4 para os valores de $w[1]_{2d}$):

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_{(2^j+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) &= Sq^{2^{j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2d}\left(Sq^d(w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(\eta^k)))\right)\right)\cdots\right)\\
&= Sq^{2^{j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2d}\left(Sq^d\left(\binom{2n}{2}c^{2d} + \binom{p'}{2}\alpha_d^2 + \alpha_d c^d\right)\right)\right)\cdots\right)\\
&= Sq^{2^{j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2d}\left(\alpha_d^2 c^d + \alpha_d c^{2d}\right)\right)\cdots\right)\\
&= \alpha_d^{2^j} c^d + \alpha_d c^{2^j d},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{w}_{(2^j+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) &= Sq^{2^{j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2d}\left(Sq^d(w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(\xi^l)))\right)\right)\cdots\right)\\
&= Sq^{2^{j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2d}\left(Sq^d\left(\left(\binom{2n}{2} + \binom{q'}{2}\right)\beta_d^2 + \beta_d c^d\right)\right)\right)\cdots\right)\\
&= Sq^{2^{j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2d}\left(\beta_d^2 c^d + \beta_d c^{2d}\right)\right)\cdots\right)\\
&= \beta_d^{2^j} c^d + \beta_d c^{2^j d}.
\end{aligned}$$

Usando as classes $\widetilde{w}_{(2^s+1)d}$, obtemos então

$$\begin{aligned}
1 = 1 + \overline{\tbinom{p'}{2^s-1}} &= \langle (\alpha_d^{2^s} c^d + \alpha_d c^{2^s d}) c^{k-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle \widetilde{w}_{(2^s+1)d} c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle \widetilde{w}_{(2^s+1)d} c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle (\beta_d^{2^s} c^d + \beta_d c^{2^s d}) c^{k-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle = \overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a+2^t-1}}.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a+2^t-1}} = 1$. Em particular, $\overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a}} = 1$ e portanto $\overline{\tbinom{q'}{2^t}} = 0$, pois estamos supondo $\overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a+2^t}} = \overline{\tbinom{p'}{2^s}} = 0$.

Agora, usando as classes $\widetilde{w}_{(2^{t+1}+1)d}$, chegamos a

$$\begin{aligned}
0 = \overline{\tbinom{p'}{2^s-2^{t+1}}} + \overline{\tbinom{p'}{2^s-1}} &= \langle (\alpha_d^{2^{t+1}} c^d + \alpha_d c^{2^{t+1}}) c^{(2^s-2^{t+1})d+k-d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle \widetilde{w}_{(2^{t+1}+1)d} c^{(2^s-2^{t+1})d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle \widetilde{w}_{(2^{t+1}+1)d} c^{(2^s-2^{t+1})d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle (\beta_d^{2^{t+1}} c^d + \beta_d c^{2^{t+1}d}) c^{(2^s-2^{t+1})d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\
&= \overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^{t+1}}} + \overline{\tbinom{q'}{2^{t+1}a+2^t-1}} \\
&= \overline{\tbinom{q'}{2^t}\tbinom{q'}{2^{t+1}a-2^{t+1}}} + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Ou seja, supondo $\overline{\tbinom{p'}{2^s}} = 0$ chegamos ao absurdo $0 = 1$. Desse modo, concluímos que $\overline{\tbinom{p'}{2^s}} = 1$, como queríamos.

Da Afirmação 1 e de (4.9) segue que

$$\overline{\binom{p}{2^t}} = \overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t}} = 1.$$

Em particular, $\overline{\tbinom{q'}{2^t}} = 1$ e, conseqüentemente, $\overline{\tbinom{q}{2^t}} = 0$. Assim, para cada $j \geq 0$, temos (vide Tabela 4):

$$\begin{cases} \widehat{w}[t]_{(2^{t+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = c^{(2^{t+j}+1)d} + \alpha_d^{2^{t+j}} c^d, \\ \widehat{w}[t]_{(2^{t+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta_d^{2^{t+j}} c^d. \end{cases}$$

Afirmação 2: $\overline{\tbinom{p'}{2^s-2^{u+1}}} = 1$ e $\overline{\tbinom{p'}{2^u}} = 0$.

De fato, usando $\widehat{w}[t]_{(2^{u+1}+1)d} c^{(2^s-2^{u+1})d+k-1-d}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
1 + \overline{\tbinom{p'}{2^s-2^{u+1}}} = \overline{\tbinom{p'}{2^s}} + \overline{\tbinom{p'}{2^s-2^{u+1}}} &= \langle (c^{(2^{u+1}+1)d} + \alpha_d^{2^{u+1}} c^d) c^{(2^s-2^{u+1})d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle \widehat{w}[t]_{(2^{u+1}+1)d} c^{(2^s-2^{u+1})d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle \widehat{w}[t]_{(2^{u+1}+1)d} c^{(2^s-2^{u+1})d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle (\beta_d^{2^{u+1}} c^d) c^{(2^s-2^{u+1})d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{\tbinom{p'}{2^s-2^{u+1}}} = 1$. Em particular, $\overline{\tbinom{p'}{2^s-2^u}} = \overline{\tbinom{p'}{2^s-2^{u+1}}\tbinom{p'}{2^u}} = \overline{\tbinom{p'}{2^u}}$.

Daí,

$$\begin{aligned}1+\overline{\binom{p'}{2^u}} = \overline{\binom{p'}{2^s}} + \overline{\binom{p'}{2^s-2^u}} &= \langle (c^{(2^u+1)d} + \alpha_d^{2^u} c^d) c^{(2^s-2^u)d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\ &= \langle \widehat{w}[t]_{(2^u+1)d} c^{(2^s-2^u)d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\ &= \langle \widehat{w}[t]_{(2^u+1)d} c^{(2^s-2^u)d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\ &= \langle (\beta_d^{2^u} c^d) c^{(2^s-2^u)d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\ &= \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t-2^u}} = 1,\end{aligned}$$

pois 2^u aparece na expansão diádica de $2^{t+1}a+2^t$ e, pela Afirmação 1, $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t}} = 1$. Desse modo, mostramos que $\overline{\binom{p'}{2^u}} = 0$, encerrando a prova da Afirmação 2.

Afirmação 3: $q = 1$.

De fato, como $q < 2^{u+1}$ e q é ímpar, é suficiente mostrarmos que $\overline{\binom{q}{2^v}} = 0$, para cada $v = 1, 2, \ldots, u$.

Primeiro consideraremos v com $1 \leq v < t$ e os números característicos associados a $\widehat{w}[v]_{(2^t+1)d} c^{(2^s-2^t)d+k-1-d}$ (vide Tabela 4). Assim, por (4.10), obtemos:

$$\begin{aligned}0 &= \left\langle \left(\overline{\binom{p}{2^v}} \alpha_d^{2^t} c^d\right) c^{(2^s-2^t)d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\ &= \langle \widehat{w}[v]_{(2^t+1)d} c^{(2^s-2^t)d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\ &= \langle \widehat{w}[v]_{(2^t+1)d} c^{(2^s-2^t)d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\ &= \left\langle \left(\overline{\binom{q}{2^v}} \beta_d^{2^t} c^d\right) c^{(2^s-2^t)d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle \\ &= \overline{\binom{q}{2^v}}\,\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}} = \overline{\binom{q}{2^v}},\end{aligned}$$

pois $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t}} = 1$ (vide Afirmação 1) implica $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}} = 1$. Assim, provamos que $\overline{\binom{q}{2^v}} = 0$, para $1 \leq v < t$.

De $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t}} = 1$ segue que $\overline{\binom{q'}{2^v}} = 1$ e, conseqüentemente, $\overline{\binom{q}{2^v}} = 0$, para cada 2^v que aparece na expansão diádica de $2n = 2^{t+1}a + 2^t$. Em particular, $\overline{\binom{q}{2^t}} = \overline{\binom{q}{2^u}} = 0$.

Resta então considerarmos v com $t < v < u$ e $\overline{\binom{2n}{2^v}} = 0$ (se $u = t+1$, não há mais nada a provar). Considerando os números característicos associados a $\widehat{w}[t]_{(2^v+1)d} c^{(2^s-2^v)d+k-1-d}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\overline{\binom{q'}{2n-2^v}} &= \langle (\beta_d^{2^v} c^d) c^{(2^s-2^v)d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\ &= \langle \widehat{w}[t]_{(2^v+1)d} c^{(2^s-2^v)d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\ &= \langle \widehat{w}[t]_{(2^v+1)d} c^{(2^s-2^v)d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\ &= \langle (c^{(2^v+1)d} + \alpha_d^{2^v} c^d) c^{(2^s-2^v)d+k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\ &= \overline{\binom{p'}{2^s}} + \overline{\binom{p'}{2^s-2^v}} = 1,\end{aligned}$$

pois $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 1$, 2^u aparece na expansão diádica de $2^s - 2^v$ e, pela Afirmação 2, $\overline{\binom{p'}{2^u}} = 0$. Desse modo, mostramos que $\overline{\binom{q'}{2n-2^v}} = 1$. Observe que $\overline{\binom{2n}{2^v}} = 0$ implica que 2^v aparece na expansão diádica de $2n - 2^v$. Assim, concluímos que $\overline{\binom{q'}{2^v}} = 1$ e, portanto, $\overline{\binom{q}{2^v}} = 0$, como queríamos.

Finalmente, mostraremos que $p = 2n + 1$. Temos que p é ímpar e $2n$ e p são estritamente menores que 2^{s+1}. Então, basta provarmos que

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}}, \qquad \text{para } v = 1, 2, \ldots, s,$$

pois isso significa que p e $2n + 1$ possuem a mesma expansão diádica.

Pela Afirmação 2, $\overline{\binom{p}{2^u}} = 1$ e $\overline{\binom{p}{2^v}} = 0$ para $u + 1 \leq v < s$. Pela Afirmação 1 e (4.9), $\overline{\binom{p}{2^s}} = 0$ e $\overline{\binom{p}{2^t}} = 1$. Além disso, por (4.10) temos $\overline{\binom{p}{2^v}} = 0$ para $1 \leq v < t$. Assim, lembrando que 2^t e 2^u são respectivamente a menor e a maior potência de 2 que aparecem na expansão diádica de $2n$, já mostramos que

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}} \quad \text{para } 1 \leq v \leq t \text{ e para } u \leq v \leq s. \tag{4.11}$$

Se $u = t + 1$, então não há mais nada a provar. Logo, assumimos $u > t + 1$ e precisamos mostrar que

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}}, \qquad \text{para cada } t < v \leq u - 1.$$

Para isso, usaremos (4.11) e as classes $\widehat{w}[t]_{(2^{t+j}+1)d}$ com $0 \leq j \leq u - t$. Já sabemos que tais classes são escritas na forma

$$c^{(2^{t+j}+1)d} + \alpha_d^{2^{t+j}} c^d \qquad \text{e} \qquad \beta_d^{2^{t+j}} c^d,$$

em $\mathbb{R}P(\eta^k)$ e $\mathbb{R}P(\xi^l)$, respectivamente.

Consideraremos números característicos envolvendo certos produtos das classes acima. Então, por questões dimensionais, convém observar que $\sum_{i=t}^{u}(2^i + 1)d \leq dim(\mathbb{R}P(\eta^k))$. Com efeito, de $\overline{\binom{p}{2^u}} = 1$ segue que $w_{2^u d}(\eta^k) = \overline{\binom{p}{2^u}}\alpha_d^{2^u} = \alpha_d^{2^u} \neq 0$ e portanto $k \geq 2^u d > ud$. Assim, temos

$$(2^u + 1)d + (2^{u-1} + 1)d + \cdots + (2^t + 1)d < 2^{u+1}d + ud < 2^s d + k.$$

Observamos ainda que $q' = 2^{u+1} - q = 2^{u+1} - 1 = \sum_{i=0}^{u} 2^i$, pois $q = 1$ (vide Afirmação 3). Logo, para cada natural $m \leq 2n < 2^{u+1}$, $\langle \beta_d^m c^{(2n-m)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle = \overline{\binom{q'}{2n-m}} = 1$. Ou seja, para cada natural m tal que $md \leq 2nd + l - 1$, temos:

$$\langle \beta_d^m c^{2nd+l-1-md}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle = 0 \text{ se, e somente se, } m > 2n.$$

Definimos o conjunto

$$\mathcal{V} = \left\{ v : t \leq v < u \text{ e } \overline{\binom{2n}{2^v}} = 1 \right\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_f\},$$

com

$$v_1 > v_2 > \cdots > v_f = t.$$

Mostraremos que, para cada $1 \leq i \leq f$,

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}}, \text{ para todo } v \text{ com } v_{i-1} > v \geq v_i$$

(denotamos $v_0 = u$). Para tanto, usaremos indução sobre i.

Pela definição do conjunto $\mathcal{V}$, temos $\overline{\binom{2n}{2^{v_1}}} = 1$ e (no caso em que $u > v_1 + 1$) $\overline{\binom{2n}{2^v}} = 0$ se $u > v \geq v_1 + 1$. Logo,

$$2^u + 2^{v_1} \leq 2n \qquad \text{e} \qquad 2^u + 2^{v_1+1} > 2n.$$

Nosso próximo passo será mostrar que $\overline{\binom{p'}{2^u - 2^{v_1+1}}} = 1$. Como tal igualdade é trivial se $u = v_1 + 1$, assumimos $u > v_1 + 1$ e, então, calculamos:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle (\beta_d^{2^u+2^{v_1+1}} c^{2^s d-(2^u+2^{v_1+1})d+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle (\beta_d^{2^u} c^d)(\beta_d^{2^{v_1+1}} c^d) c^{2^s d-(2^u+2^{v_1+1}+2)d+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle (c^{(2^u+1)d} + \alpha_d^{2^u} c^d)(c^{(2^{v_1+1}+1)d} + \alpha_d^{2^{v_1+1}} c^d) c^{2^s d-(2^u+2^{v_1+1}+2)d+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\
&= \overline{\tbinom{p'}{2^s}} + \overline{\tbinom{p'}{2^s-2^{v_1+1}}} + \overline{\tbinom{p'}{2^s-2^u}} + \overline{\tbinom{p'}{2^s-2^u-2^{v_1+1}}} \\
&= \overline{\tbinom{p'}{2^s}} + \overline{\tbinom{p'}{2^s-2^u-2^{v_1+1}}} \\
&= 1 + \overline{\tbinom{p'}{2^s-2^{u+1}}\tbinom{p'}{2^u-2^{v_1+1}}} \\
&= 1 + \overline{\tbinom{p'}{2^u-2^{v_1+1}}},
\end{aligned}$$

pois $\overline{\binom{p'}{2^s-2^{u+1}}} = 1 = \overline{\binom{p'}{2^s}}$, $\overline{\binom{p'}{2^u}} = 0$ (vide (4.11)) e 2^u aparece nas expansões diádicas de $2^s - 2^u$ e $2^s - 2^{v_1+1}$.

Portanto, $\overline{\binom{p'}{2^u-2^{v_1+1}}} = 1$. Disso segue que $\overline{\binom{p'}{2^v}} = 1$ se $u > v \geq v_1 + 1$.

Por sua vez, temos:

$$\begin{aligned}
1 &= \langle (\beta_d^{2^u+2^{v_1}} c^{2^s d-(2^u+2^{v_1})d+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle (\beta_d^{2^u} c^d)(\beta_d^{2^{v_1}} c^d) c^{2^s d-(2^u+2^{v_1}+2)d+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle (c^{(2^u+1)d} + \alpha_d^{2^u} c^d)(c^{(2^{v_1}+1)d} + \alpha_d^{2^{v_1}} c^d) c^{2^s d-(2^u+2^{v_1}+2)d+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\
&= \overline{\tbinom{p'}{2^s}} + \overline{\tbinom{p'}{2^s-2^{v_1}}} + \overline{\tbinom{p'}{2^s-2^u}} + \overline{\tbinom{p'}{2^s-2^u-2^{v_1}}} \\
&= 1 + \overline{\tbinom{p'}{2^s-2^{u+1}}\tbinom{p'}{2^u-2^{v_1+1}}\tbinom{p'}{2^{v_1}}} \\
&= 1 + \overline{\tbinom{p'}{2^{v_1}}}.
\end{aligned}$$

Logo, $\overline{\binom{p'}{2^{v_1}}} = 0$.

Desse modo obtivemos $\overline{\binom{p}{2^v}} = 0$ se $u > v \geq v_1+1$ e $\overline{\binom{p}{2^{v_1}}} = 1$. Ou seja, pela caracterização de v_1, mostramos que:

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}} \text{ para todo } u = v_0 > v \geq v_1.$$

Seja $1 < i \leq f$ e suponha indutivamente $\overline{\binom{2n}{2^v}} = \overline{\binom{p}{2^v}}$ para cada $u > v \geq v_{i-1}$.

Pela definição do conjunto $\mathcal{V}$, temos $2n = \sum_{j=0}^{i-1} 2^{v_j} + \sum_{j=i}^{f} 2^{v_j}$ e $\sum_{j=i}^{f} 2^{v_j} < 2^{v_i+1}$. Logo,

$$\sum_{j=0}^{i} 2^{v_j} \leq 2n \qquad \text{e} \qquad \left(\sum_{j=0}^{i-1} 2^{v_j}\right) + 2^{v_i+1} > 2n.$$

Além disso, pela hipótese de indução (juntamente com (4.11)), temos:

$$\overline{\binom{p'}{2^{v_0}}} = \overline{\binom{p'}{2^{v_1}}} = \overline{\binom{p'}{2^{v_2}}} = \cdots = \overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}}}} = 0,$$

$$\overline{\binom{p'}{2^s - 2^{v_0+1}}} = \overline{\binom{p'}{2^{v_0} - 2^{v_1+1}}} = \overline{\binom{p'}{2^{v_1} - 2^{v_2+1}}} = \cdots = \overline{\binom{p'}{2^{v_{i-2}} - 2^{v_{i-1}+1}}} = 1.$$

Em particular, conforme observamos na demonstração do Lema 4.2.6 (vide página 92), temos que: se $(a_0, \ldots, a_i) \in \mathbb{Z}_2^{i+1}$, com $(0,0,\ldots,0) \neq (a_0, a_1, \ldots, a_i) \neq (1,1,\ldots,1)$, então $\overline{\binom{p'}{2^s - a_0 2^{v_0} - \cdots - a_{i-1}2^{v_{i-1}} - a_i 2^{v_i+1}}} = 0 = \overline{\binom{p'}{2^s - a_0 2^{v_0} - \cdots - a_{i-1}2^{v_{i-1}} - a_i 2^{v_i}}}$.

A seguir provaremos que $\overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}} - 2^{v_i+1}}} = 1$. Como tal igualdade é trivial se $v_{i-1} = v_i + 1$, podemos assumir $v_{i-1} > v_i + 1$.

Denotaremos $x = 2^s d + k - 1 - \left(2^{v_i+1} + 1 + \sum_{j=0}^{i-1}(2^{v_j}+1)\right) d$ e já observamos que $x \geq 0$.

Então, calculamos:

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \beta_d^{2^{v_i+1} + \sum_{j=0}^{i-1} 2^{v_j}} c^{2^s d + k - 1 - \left(2^{v_i+1} + \sum_{j=0}^{i-1} 2^{v_j}\right) d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\prod_{j=0}^{i-1} (\beta_d^{2^{v_j}} c^d)\right) (\beta_d^{2^{v_i+1}} c^d) c^x, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\prod_{j=0}^{i-1} (c^{(2^{v_j}+1)d} + \alpha_d^{2^{v_j}} c^d)\right) (c^{(2^{v_i+1}+1)d} + \alpha_d^{2^{v_i+1}} c^d) c^x, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle \\
&= \sum_{(a_0,\ldots,a_i)\in\mathbb{Z}_2^{i+1}} \left\langle \alpha_d^{a_0 2^{v_0} + \cdots + a_{i-1}2^{v_{i-1}} + a_i 2^{v_i+1}} c^{2^s d + k - 1 - (a_0 2^{v_0} + \cdots + a_{i-1}2^{v_{i-1}} + a_i 2^{v_i+1})d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle \\
&= \sum_{(a_0,\ldots,a_i)\in\mathbb{Z}_2^{i+1}} \overline{\binom{p'}{2^s - a_0 2^{v_0} - \cdots - a_{i-1}2^{v_{i-1}} - a_i 2^{v_i+1}}} \\
&= \overline{\binom{p'}{2^s}} + \overline{\binom{p'}{2^s - 2^{v_0} - \cdots - 2^{v_{i-1}} - 2^{v_i+1}}} \\
&= 1 + \overline{\binom{p'}{2^s - 2^{v_0+1}}\binom{p'}{2^{v_0} - 2^{v_1+1}} \cdots \binom{p'}{2^{v_{i-2}} - 2^{v_{i-1}+1}}}\,\overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}} - 2^{v_i+1}}} \\
&= 1 + \overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}} - 2^{v_i+1}}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}} - 2^{v_i+1}}} = 1,$$

como queríamos. Ou seja, $\overline{\binom{p'}{2^v}} = 1$ se $v_{i-1} > v \geq v_i + 1$.

Daí, calculamos:

$1 = \left\langle \beta_d^{\sum_{j=0}^{i} 2^{v_j}} c^{2^s d+k-1-\sum_{j=0}^{i} 2^{v_j} d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle$
$= \left\langle \left(\prod_{j=0}^{i}(\beta_d^{2^{v_j}} c^d)\right) c^{2^s d+k-1-\sum_{j=0}^{i}(2^{v_j}+1)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle$
$= \left\langle \left(\prod_{j=0}^{i}(c^{(2^{v_j}+1)d} + \alpha_d^{2^{v_j}} c^d)\right) c^{2^s d+k-1-\sum_{j=0}^{i}(2^{v_j}+1)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle$
$= \sum_{(a_0,\dots,a_i)\in\mathbb{Z}_2^{i+1}} \left\langle \alpha_d^{a_0 2^{v_0}+\cdots+a_{i-1}2^{v_{i-1}}+a_i 2^{v_i}} c^{2nd+l-1-(a_1 2^{v_1}+\cdots+a_{i-1}2^{v_{i-1}}+a_i 2^{v_i})d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle$
$= \sum_{(a_0,\dots,a_i)\in\mathbb{Z}_2^{i}} \overline{\binom{p'}{2^s-a_0 2^{v_0}-\cdots-a_i 2^{v_i}}}$
$= \overline{\binom{p'}{2^s}} + \overline{\binom{p'}{2^s-2^{v_0}-\cdots-2^{v_{i-1}}-2^{v_i}}}$
$= 1 + \overline{\binom{p'}{2^s-2^{v_0}+1}\binom{p'}{2^{v_0}-2^{v_1}+1}} \cdots \overline{\binom{p'}{2^{v_{i-2}}-2^{v_{i-1}}+1}}\overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}}-2^{v_i}}}$
$= 1 + \overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}}-2^{v_i}}}$
$= 1 + \overline{\binom{p'}{2^{v_{i-1}}-2^{v_i}+1}}\overline{\binom{p'}{2^{v_i}}}$
$= 1 + \overline{\binom{p'}{2^{v_i}}}$,

ou seja, obtivemos $\overline{\binom{p'}{2^{v_i}}} = 0$.

Assim, mostramos que $\overline{\binom{p}{2^{v_i}}} = 1$ e $\overline{\binom{p}{2^v}} = 0$ se $v_{i-1} > v > v_i$. Logo,

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}}$$

para cada v com $v_{i-1} > v \geq v_i$, encerrando o processo indutivo. Desse modo concluímos que p e $2n+1$ possuem a mesma expansão diádica e portanto $p = 2n+1$, como queríamos.

4.2.6 Caso $2^s = 2^u$

Novamente estamos sob as condições apresentadas na Subseção 4.2.1 e, finalmente, assumimos $2^s = 2^u$, abordando assim o último caso em questão. Ou seja, estamos no caso $2^s < 2n < 2^{s+1}$ e $2n = 2^{t+1}a + 2^t$ com $a \geq 1$.

Nosso objetivo é mostrar que: se $d < k \leq d + h_d(0, 2^s)$ então $W(\eta^k) = 1 + \alpha_d$; se $k > d + h_d(0, 2^s)$ então $W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^{2n+1}$ e $W(\xi^l) = (1+\beta_d)^{2^s+1}$.

Observe que $2^s > 2^t \geq 2$. Logo, $h_d(0, 2^s) = 2^s d - d$, pelos teoremas 3.2 e 3.3.4. Assim, como tomamos $p < 2^{s+1}$ e $q < 2^{u+1} = 2^{s+1}$ satisfazendo

$$W(\eta^k) = (1+\alpha_d)^p \qquad \text{e} \qquad W(\xi^l) = (1+\beta_d)^q,$$

basta provarmos que:

(a) se $d < k \leq 2^s d$ então $p = 1$;

(b) se $k > 2^s d$ então $q = 2^s + 1$ e $p = 2n + 1$.

Substituindo $\overline{\binom{2^s}{2}} = 0 = \overline{\binom{2^s}{2^t}}$ nas classes obtidas em (I), (V) e (VII), nas páginas 87 e 88, obtemos a

Tabela 5	$\mathbb{R}P(\eta^k)$	$\mathbb{R}P(\xi^l)$
$w[1]_{2d}$	$\binom{2n}{2}c^{2d} + \binom{p'}{2}\alpha_d^2 + \alpha_d c^d$	$\left(\binom{2n}{2} + \binom{q'}{2}\right)\beta_d^2 + \beta_d c^d$
$\widehat{w}[v]_{(2^{v+j}+1)d}$ $(1 \le v < t; j \ge 0)$	$\binom{p}{2^v}\alpha_d^{2^{v+j}} c^d$	$\binom{q}{2^v}\beta_d^{2^{v+j}} c^d$
$\widehat{w}[t]_{(2^{t+j}+1)d}$ $(j \ge 0)$	$c^{(2^{t+j}+1)d} + \binom{p}{2^t}\alpha_d^{2^{t+j}} c^d$	$\binom{q'}{2^t}\beta_d^{2^{t+j}} c^d$

Definimos a classe $\widetilde{w}_{(2^j+1)d}(\mathbb{R}P(-)) = Sq^{2^{j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2d}\left(Sq^d(w[1]_{2d}(\mathbb{R}P(-)))\right)\right)\cdots\right)$ e, aplicando o Lema 4.2.4 iterativamente, calculamos:

$$\begin{cases} \widetilde{w}_{(2^j+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = Sq^{2^{j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2d}\left(Sq^d(w[1]_{2d})\right)\right)\cdots\right) = \alpha_d^{2^j} c^d + \alpha_d c^{2^j d}, \\ \widetilde{w}_{(2^j+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = Sq^{2^{j-1}d}\left(\cdots\left(Sq^{2d}\left(Sq^d(w[1]_{2d})\right)\right)\cdots\right) = \beta_d^{2^j} c^d + \beta_d c^{2^j d}, \end{cases}$$

para cada $j \ge 1$.

Como $k > d$, podemos considerar os números característicos associados a $\widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}$ (para cada $1 \le v < t$), $\widehat{w}[t]_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}$ e $\widetilde{w}_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}$. Desse modo obtemos:

$$\begin{aligned} \overline{\binom{p}{2^v}} &= \left\langle \left(\overline{\binom{p}{2^v}}\alpha_d^{2^s} c^d\right) c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle \\ &= \langle \widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\ &= \langle \widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\ &= \left\langle \left(\overline{\binom{q}{2^v}}\beta_d^{2^s} c^d\right) c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle = \overline{\binom{q}{2^v}}\overline{\binom{q'}{2n-2^s}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\binom{p'}{2^s}} + \overline{\binom{p}{2^t}} &= \left\langle \left(c^{(2^s+1)d} + \overline{\binom{p}{2^t}}\alpha_d^{2^s} c^d\right) c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle \\ &= \langle \widehat{w}[t]_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\ &= \langle \widehat{w}[t]_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\ &= \left\langle \left(\overline{\binom{q'}{2^t}}\beta_d^{2^s} c^d\right) c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle = \overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2n-2^s}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + \overline{\binom{p'}{2^s-1}} &= \left\langle \left(\alpha_d^{2^s} c^d + \alpha_d c^{2^s d}\right) c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle \\ &= \langle \widetilde{w}_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\ &= \langle \widetilde{w}_{(2^s+1)d}c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\ &= \left\langle \left(\beta_d^{2^s} c^d + \beta_d c^{2^s d}\right) c^{k-1-d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle = \overline{\binom{q'}{2n-2^s}} + \overline{\binom{q'}{2n-1}}. \end{aligned}$$

Ou seja, obtivemos o seguinte sistema de equações:

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}\binom{q'}{2n-2^s}} \qquad \text{para cada } 1 \le v < t, \tag{4.12}$$

$$\overline{\binom{p'}{2^s}} + \overline{\binom{p}{2^t}} = \overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2n-2^s}}, \tag{4.13}$$

$$1 + \overline{\binom{p'}{2^s-1}} = \overline{\binom{q'}{2n-2^s}} + \overline{\binom{q'}{2n-1}}. \tag{4.14}$$

Vale lembrar que, pela igualdade entre os números característicos associados a $c^{2^s d+k-1}$ (vide (4.2), página 86), temos

$$\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2n}}.$$

Afirmação 1: Se $\overline{\binom{q'}{2n-2^s}} = 1$ então $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}} = 0$ para cada v com $1 \leq v < t$.

De fato, com a hipótese $\overline{\binom{q'}{2n-2^s}} = 1$ segue de (4.12) que

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}},$$

para cada $1 \leq v < t$. Suponha por absurdo que exista v, com $1 \leq v < t$, tal que $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}} = 1$. Logo $w_{(2^v+1)d}(\xi^l) = \overline{\binom{q}{2^v+1}}\beta_d^{2^v+1} = \beta_d^{2^v+1} \neq 0$, pois $2^v + 1 < 2^t + 1 < 2n$. Daí, teremos $l \geq (2^v + 1)d \geq 2d + 1$ e então, uma vez que $2n \geq 2^s + 2^t$, podemos considerar os números característicos associados a $\widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}\widehat{w}[v]_{(2^t+1)d}c^{2nd-(2^s+2^t)d+l-2d-1}$.

Como estamos supondo $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}} = 1$, obtemos então (vide Tabela 5):

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \alpha_d^{2^s+2^t} c^{2nd-(2^s+2^t)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= \langle (\alpha_d^{2^s} c^d)(\alpha_d^{2^t} c^d) c^{2nd-(2^s+2^t)d+l-2d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle = \\
&= \langle \widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}\widehat{w}[v]_{(2^t+1)d} c^{2nd-(2^s+2^t)d+l-2d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= \langle \widehat{w}[v]_{(2^s+1)d}\widehat{w}[v]_{(2^t+1)d} c^{2nd-(2^s+2^t)d+l-2d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\
&= \langle (\beta_d^{2^s} c^d)(\beta_d^{2^t} c^d) c^{2nd-(2^s+2^t)d+l-2d-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\
&= \langle (\beta_d^{2^s+2^t} c^d) c^{2nd-(2^s+2^t)d+l-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\
&= \overline{\binom{q'}{2n-2^s-2^t}} = 1
\end{aligned}$$

pois 2^t aparece na expansão diádica de $2n - 2^s$ e $\overline{\binom{q'}{2n-2^s}} = 1$. Com tal contradição $0 = 1$, provamos que $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{q}{2^v}} = 0$, como queríamos.

Afirmação 2: Se $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 1$, então $p = 1$.

De fato, das igualdades $1 = \overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2n}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t}}$ segue que $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}} = 1$. Além disso, como 2^s aparece na expansão diádica de $2n$, temos também $\overline{\binom{q'}{2n-2^s}} = 1$. Em particular, pela Afirmação 1, $\overline{\binom{q}{2^v}} = 0$ para cada $1 \leq v < t$; ou seja, $\overline{\binom{q'}{2^v}} = 1$ para cada $1 \leq v < t$. Logo, $\overline{\binom{q'}{2n-1}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a+2^t-1}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}\binom{q'}{2^t-1}} = 1$.

Assim, por (4.14), obtemos $\overline{\binom{p'}{2^s-1}} = 1$. Agora, $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 1 = \overline{\binom{p'}{2^s-1}}$ significa que, para todo $1 \leq v \leq s$, 2^v aparece em p' e portanto não aparece em p. Desse modo, uma vez que p é ímpar e $p < 2^{s+1}$, concluímos que $p = 1$ como queríamos.

Iniciamos agora a prova do item **(a)**. Ou seja, assumimos $d < k \leq 2^s d$ e precisamos mostrar que $p = 1$. Pela Afirmação 2, basta provarmos que $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 1$.

Como $2n > 2^s$ e $2^s d + k = 2nd + l$, temos $l < k \leq 2^s d$ acarretando $0 = w_{2^s d}(\xi^l) = \overline{\binom{q}{2^s}}\beta_d^{2^s}$ e, então, $\overline{\binom{q}{2^s}} = 0$. Ou seja, $\overline{\binom{q'}{2^s}} = 1$. Assim, uma vez que 2^s aparece na expansão diádica de $2n$, obtemos

$$\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2n}} = \overline{\binom{q'}{2n-2^s}}. \tag{4.15}$$

Se $k < 2^s d$ então necessariamente $0 = w_{2^s d}(\eta^k) = \overline{\binom{p}{2^s}}\alpha_d^{2^s}$, o que implica $\overline{\binom{p}{2^s}} = 0$ e portanto $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 1$, encerrando a demonstração.

Assim, resta provar que $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 1$ assumindo $k = 2^s d$. Faremos isso por redução ao absurdo. Suponha então $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 0$, ou equivalentemente, $\overline{\binom{p}{2^s}} = 1$. Logo, por (4.15), temos

$$\overline{\binom{q'}{2n}} = \overline{\binom{q'}{2n-2^s}} = 0.$$

Daí, por (4.12), temos $\overline{\binom{p}{2^v}} = 0$ se $1 \leq v < t$. E de (4.13) segue que $\overline{\binom{p}{2^t}} = \overline{\binom{p'}{2^s}} = 0$. Portanto, $\overline{\binom{p'}{2^{t+1}-1}} = 1$.

Conforme notamos na subseção anterior (vide página 107), $\eta^k \to K_dP(2^s)$ (assim como $\xi^l \to K_dP(2n)$) não pode ser um *fixed-data*. Logo, temos $p \neq 2^s + 1$, pois caso contrário $\eta^{2^s d} \to K_dP(2^s)$ seria bordante ao fibrado tangente $\tau \to K_dP(2^s)$, o qual é um *fixed-data*. Desse modo, como $p < 2^{s+1}$ e estamos supondo $\overline{\binom{p}{2^s}} = 1$, concluímos que $\overline{\binom{p}{2^v}} = 1$ (conseqüentemente, $\overline{\binom{p'}{2^v}} = 0$) para algum $1 \leq v < s$. Como $\overline{\binom{p'}{2^{t+1}-1}} = 1$, temos então

$$\overline{\binom{p'}{2^s-2^{t+1}}} = \overline{\binom{p'}{2^s-1}} = 0.$$

Substituindo $\overline{\binom{p'}{2^s-1}} = 0 = \overline{\binom{q'}{2n-2^s}}$ em (4.14) obtemos

$$\overline{\binom{q'}{2n-1}} = 1.$$

Em particular, $\overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}} = 1$, pois $1 = \overline{\binom{q'}{2n-1}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}\binom{q'}{2^t-1}}$. E ainda obtemos $\overline{\binom{q'}{2^t}} = \overline{\binom{q'}{2^{t+1}a}\binom{q'}{2^t}} = \overline{\binom{q'}{2n}} = 0$.

Agora, considerando os números característicos associados a $\widetilde{w}_{(2^{t+1}+1)d}c^{2^s d-(2^{t+1}+1)d+k-1}$, chegamos a

$$\begin{aligned}
0 &= \overline{\binom{p'}{2^s-2^{t+1}}} + \overline{\binom{p'}{2^s-1}} \\
&= \left\langle \left(\alpha_d^{2^{t+1}}c^d + \alpha_d c^{2^{t+1}d}\right) c^{2^s d-(2^{t+1}+1)d+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\right\rangle \\
&= \langle \widetilde{w}_{(2^{t+1}+1)d}c^{2^s d-(2^{t+1}+1)d+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle \widetilde{w}_{(2^{t+1}+1)d} c^{2^s d-(2^{t+1}+1)d+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle$$
$$= \left\langle \left(\beta_d^{2^{t+1}} c^d + \beta_d c^{2^{t+1}d}\right) c^{2^s d-(2^{t+1}+1)d+k-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\right\rangle$$
$$= \overline{\binom{q'}{2n-2^{t+1}}} + \overline{\binom{q'}{2n-1}} = 1$$

pois $\overline{\binom{p'}{2^s-2^{t+1}}} = \overline{\binom{p'}{2^s-1}} = 0$, $\overline{\binom{q'}{2n-1}} = 1$, $\overline{\binom{q'}{2^t}} = 0$ e 2^t aparece na expansão diádica de $2n-2^{t+1} = 2^{t+1}a+2^t-2^{t+1} = 2^{t+1}(a-1)+2^t$. Tal contradição, $0=1$, decorreu da nossa suposição $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 0$. Desse modo provamos que $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 1$, como queríamos. Isso encerra a prova do item **(a)**.

Resta então provarmos o item **(b)**. Assim, assumimos $k > 2^s d$ e nosso objetivo é mostrar que: $q = 2^s+1$ e $p = 2n+1$.

Afirmação 3: Se $t > 1$ então $\left(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d} \to K_dP(2^s)\right) \cup \left(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{l-d} \to K_dP(2n)\right)$ *não* é um *fixed-data.*

De fato, argumentaremos por redução ao absurdo. Suponha então que

$$\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d} \to K_dP(2^s) \quad \cup \quad \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{l-d} \to K_dP(2n)$$

é um *fixed-data*. Então, pelo Corolário 1.7.11(b): $\left(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d} \to K_dP(2^s)\right) \cup \left(\mathbb{R}^{2^s d+k} \to *\right)$ é um *fixed-data* se, e somente se, $\left(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{l-d} \to K_dP(2n)\right) \cup \left(\mathbb{R}^{2nd+l} \to *\right)$ é um *fixed-data*. Logo, temos:

$$d \le k \le h_d(0,2^s)+d \quad \text{se, e somente se} \quad d \le l \le h_d(0,2n)+d.$$

Como $k, l > d$ e, por hipótese, $t > 1$, temos então:

$$k > h_d(0,2^s)+d = 2^s d \quad \text{se, e somente se} \quad l > h_d(0,2n)+d = 2^t d.$$

Assim, como estamos assumindo $k > 2^s d$ obtemos $l > 2^t d$ (lembrando que $l < k$ pois $2^s < 2n$). Agora, removendo secções se necessário (vide Teorema 1.9.3), podemos assumir $l = 2^t d+1$. Pela equivalência acima, ainda temos $k \ge 2^s d+1$. Observe que $2n \le 2^{s+1}-2^t = 2^s+2^{s-1}+\cdots+2^t$, pois 2^s e 2^t são, respectivamente, a maior e a menor potência de 2 que aparece em $2n$. Por outro lado,

$$2^{s+1}d+1 \le 2^s d+k = 2nd+l = 2nd+2^t d+1$$

e portanto $2n \ge 2^{s+1}-2^t$. Logo, $2n = 2^{s+1}-2^t$ e $k = 2^s d+1$. Assim, temos que

$$\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^s d+1-d} \to K_dP(2^s) \quad \cup \quad \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d} \to K_dP(2^s-2^t)$$

é um *fixed-data*. Ou seja, os fibrados *splitting* $\lambda \to \mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^s d+1-d})$ e $\lambda \to \mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d})$ possuem os mesmos números característicos (com $dim(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^s d+1-d})) = dim(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d})) = 2^{s+1}d$).

Agora, como $W(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^s d+1-d}) = 1 + \alpha_d$ e $W(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d}) = 1 + \beta_d$, obtemos (pelo Teorema 1.6.4):

$$W(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^s d+1-d})) = (1+\alpha_d)^{2^s+1}\left((1+c)^{2^s d+1} + (1+c)^{2^s d+1-d}\alpha_d\right),$$
$$W(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d})) = (1+\beta_d)^{2^{s+1}-2^t+1}\left((1+c)^{2^t d+1} + (1+c)^{2^t d+1-d}\beta_d\right).$$

Logo,

$$W(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^s d+1-d}))(1+c)^{d-1} = (1+\alpha_d)^{2^s+1}\left((1+c)^{2^s d+d} + (1+c)^{2^s d}\alpha_d\right) =$$
$$= (1+\alpha_d+\alpha_d^{2^s})(1+c^d+c^{2^s d}+c^{(2^s+1)d}+\alpha_d+\alpha_d c^{2^s d}),$$
$$W(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d}))(1+c)^{d-1} = (1+\beta_d)^{2^{s+1}-2^t+1}\left((1+c)^{2^t d+d} + (1+c)^{2^t d}\beta_d\right) =$$
$$= \left(1+\sum_{i=1}^{2^{s+1}-2^t}\overline{\binom{2^{s+1}-2^t+1}{i}}\beta_d^i\right)(1+c^d+c^{2^t d}+c^{(2^t+1)d}+\beta_d+\beta_d c^{2^t d}).$$

Denotaremos por $\breve{w}_i(\mathbb{R}P(-))$ o termo homogêneo de grau i de $W(\mathbb{R}P(-))(1+c)^{d-1}$. Como, por hipótese, $2^s > 2^t > 2$, vemos que $\overline{\binom{2^{s+1}-2^t+1}{2^t-1}} = 0$. Assim, calculamos:

$$\breve{w}_{2^t d}(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^s d+1-d})) = 0,$$
$$\breve{w}_{2^t d}(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d})) = \beta_d^{2^t} + \overline{\binom{2^{s+1}-2^t+1}{2^t-1}}\beta_d^{2^t-1}(\beta^d+c^d) + c^{2^t d} = \beta_d^{2^t} + c^{2^t d},$$
$$\breve{w}_{(2^{s+1}-2^t)d}(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d})) =$$
$$= \beta_d^{2^{s+1}-2^t} + \overline{\binom{2^{s+1}-2^t+1}{2^{s+1}-2^t-1}}\beta_d^{2^{s+1}-2^t-1}(\beta^d+c^d) + \overline{\binom{2^{s+1}-2^t+1}{2^{s+1}-2^{t+1}}}\beta_d^{2^{s+1}-2^{t+1}}c^{2^t d} +$$
$$+ \overline{\binom{2^{s+1}-2^t+1}{2^{s+1}-2^{t+1}-1}}\beta_d^{2^{s+1}-2^{t+1}-1}(c^{(2^t+1)d}+\beta_d c^{2^t d}) =$$
$$= \beta_d^{2^{s+1}-2^t} + \overline{\binom{2^{s+1}-2^t+1}{2^{s+1}-2^{t+1}}\binom{2^{s+1}-2^t+1}{2^t-1}}\beta_d^{2^{s+1}-2^t-1}(\beta^d+c^d) + \beta_d^{2^{s+1}-2^{t+1}}c^{2^t d} +$$
$$+ \overline{\binom{2^{s+1}-2^t+1}{2^{s+1}-2^t+2}\binom{2^{s+1}-2^t+1}{2^t}\binom{2^{s+1}-2^t+1}{2^t-1}}\beta_d^{2^{s+1}-2^{t+1}-1}(c^{(2^t+1)d}+\beta_d c^{2^t d}) =$$
$$= \beta_d^{2^{s+1}-2^t} + \beta_d^{2^{s+1}-2^{t+1}}c^{2^t d}.$$

Agora, considerando os números característicos associados a $\breve{w}_{2^t d}\breve{w}_{(2^{s+1}-2^t)d}$, obtemos

$$0 = \langle \breve{w}_{2^t d}\breve{w}_{(2^{s+1}-2^t)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^s d+1-d}))\rangle$$
$$= \langle \breve{w}_{2^t d}\breve{w}_{(2^{s+1}-2^t)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d}))\rangle$$
$$= \langle (\beta_d^{2^t}+c^{2^t d})(\beta_d^{2^{s+1}-2^t}+\beta_d^{2^{s+1}-2^{t+1}}c^{2^t d}), \sigma(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d}))\rangle$$
$$= \langle \beta_d^{2^{s+1}} + \beta_d^{2^{s+1}-2^t}c^{2^t d} + \beta_d^{2^{s+1}-2^t}c^{2^t d} + \beta_d^{2^{s+1}-2^{t+1}}c^{2^{t+1}d}, \sigma(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d}))\rangle$$
$$= \langle \beta_d^{2^{s+1}-2^{t+1}}c^{2^{t+1}d}, \sigma(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d}))\rangle$$
$$= \overline{\binom{2^{s+1}-1}{2^t}} = 1,$$

pois $\beta_d^{2^{s+1}} = 0$ e $\overline{W}(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d})) = \frac{1}{W(\mathbb{R}P(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{2^t d+1-d}))} = \frac{(1+\beta_d)^{2^{s+1}}}{(1+\beta_d)} = (1+\beta_d)^{2^{s+1}-1}$. Assim, supondo que $\left(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d} \to K_d P(2^s)\right) \cup \left(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{l-d} \to K_d P(2n)\right)$ é um *fixed-data* chegamos a uma contradição, $0 = 1$. Desse modo, encerramos a demonstração da Afirmação 3.

Afirmação 4: $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 0$ e $\overline{\binom{q'}{2n-2^s}} = 1$.

De fato, como estamos assumindo $k > 2^s d$, podemos considerar os números característicos associados a $w[1]_{2d}^{2^s} c^{2^s d+k-1-2^{s+1}d}$. Assim, obtemos (vide Tabela 5):

$$\begin{aligned}
\overline{\binom{2n}{2}}\overline{\binom{p'}{2^s}} + 1 &= \left\langle \left(\overline{\binom{2n}{2}} c^{2d} + \binom{p'}{2}\alpha_d^2 + \alpha_d c^d \right)^{2^s} c^{2^s d+k-1-2^{s+1}d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \right\rangle \\
&= \langle w[1]_{2d}^{2^s} c^{2^s d+k-1-2^{s+1}d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle w[1]_{2d}^{2^s} c^{2^s d+k-1-2^{s+1}d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\
&= \left\langle \left(\left(\binom{2n}{2} + \binom{q'}{2} \right) \beta_d^2 + \beta_d c^d \right)^{2^s} c^{2^s d+k-1-2^{s+1}d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \right\rangle = \overline{\binom{q'}{2n-2^s}}.
\end{aligned}$$

Logo, $\overline{\binom{2n}{2}}\overline{\binom{p'}{2^s}} + 1 = \overline{\binom{q'}{2n-2^s}}$. Agora, como $\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2n}} = \overline{\binom{q'}{2^s}\binom{q'}{2n-2^s}}$, temos então $\overline{\binom{2n}{2}}\overline{\binom{q'}{2^s}\binom{q'}{2n-2^s}} + 1 = \overline{\binom{q'}{2n-2^s}}$ e portanto $\left(\overline{\binom{2n}{2}}\overline{\binom{q'}{2^s}} + 1\right)\overline{\binom{q'}{2n-2^s}} = 1$. Em particular, temos que

$$\overline{\binom{q'}{2n-2^s}} = 1$$

e ainda

$$\overline{\binom{2n}{2}\binom{q'}{2^s}} = 0.$$

Se $t = 1$ então $\overline{\binom{2n}{2}} = 1$ e da igualdade acima segue que $\overline{\binom{q'}{2^s}} = 0$. Daí,

$$\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2n}} = \overline{\binom{q'}{2^s}\binom{q'}{2n-2^s}} = 0.$$

Assim, para encerrar a prova da Afirmação 4, resta assumir $t > 1$ e obter $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 0$. Faremos isso por redução ao absurdo. Suponha então $\overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2n}} = 1$. Pela Afirmação 2, temos $p = 1$. Temos ainda, $\overline{\binom{q}{2^v}} = 0$ para cada 2^v que aparece em $2n$ (em particular para $v = t$ e $v = s$) e para cada $2 \leq 2^v < 2^t$, vide Afirmação 1. Agora, se 2^v é tal que $2^t < 2^v < 2^s$ e 2^v não aparece em $2n$ então considere os números característicos associados a $\widehat{w}[t]_{(2^v+1)d} c^{2^s d+k-1-(2^v+1)d}$ (vide Tabela 5). Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned}
1 = \overline{\binom{p'}{2^s}} &= \langle c^{(2^v+1)d} c^{2^s d+k-1-(2^v+1)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle \widehat{w}[t]_{(2^v+1)d} c^{2^s d+k-1-(2^v+1)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k)) \rangle \\
&= \langle \widehat{w}[t]_{(2^v+1)d} c^{2^s d+k-1-(2^v+1)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\
&= \langle \beta_d^{2^v} c^d c^{2^s d+k-1-(2^v+1)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l)) \rangle \\
&= \overline{\binom{q'}{2n-2^v}},
\end{aligned}$$

ou seja, $\overline{\binom{q'}{2n-2^v}} = 1$. Como 2^v não aparece em $2n$, 2^v aparace em $2n - 2^v$ e portanto $\overline{\binom{q'}{2^v}} = 1$.

Desse modo, obtemos $\overline{\binom{q}{2^v}} = 0$ para todo $1 \leq v \leq s$ e então, como q é ímpar com $q < 2^{s+1}$, temos $q = 1$.

Agora, $p = 1$ e $q = 1$ implicam que o *fixed-data* $(\eta^k \to K_dP(2^s)) \cup (\xi^l \to K_dP(2n))$ é bordante a

$$\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d} \to K_dP(2^s) \quad \cup \quad \gamma^d \oplus \mathbb{R}^{l-d} \to K_dP(2n)$$

e, conseqüentemente, $\left(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{k-d} \to K_dP(2^s)\right) \cup \left(\gamma^d \oplus \mathbb{R}^{l-d} \to K_dP(2n)\right)$ também é um *fixed-data*, o que contraria a Afirmação 3.

Dessa contradição concluímos que $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 0$, como queríamos.

Afirmação 5: $q = 2^s + 1$.

De fato, como q é ímpar com $q < 2^{s+1}$, basta provarmos que $\overline{\binom{q}{2^s}} = 1$ e $\overline{\binom{q}{2^v}} = 0$ para todo $1 \leq v < s$.

Pela Afirmação 4, temos $\overline{\binom{q'}{2n-2^s}} = 1$ e ainda $0 = \overline{\binom{p'}{2^s}} = \overline{\binom{q'}{2n}} = \overline{\binom{q'}{2^s}\binom{q'}{2n-2^s}} = \overline{\binom{q'}{2^s}}$. Logo, $\overline{\binom{q}{2^s}} = 1$ e $\overline{\binom{q}{2^v}} = 0$ para cada 2^v que aparece em $2n - 2^s$ (em particular, para $v = t$) e para cada 2^v com $2 \leq 2^v < 2^t$ (vide Afirmação 1).

Assim, resta considerarmos (caso existam) os valores de v tais que $t < v < s$ e 2^v não aparece em $2n - 2^s$, e mostrarmos que $\overline{\binom{q}{2^v}} = 0$ (equivalentemente, $\overline{\binom{q'}{2^v}} = 1$). Fixemos então v satisfazendo tais condições.

Em (4.13), página 115, temos

$$\overline{\binom{p'}{2^s}} + \overline{\binom{p}{2^t}} = \overline{\binom{q'}{2^t}\binom{q'}{2n-2^s}}.$$

Assim, vemos que $\overline{\binom{p}{2^t}} = 1$, pois já sabemos que: $\overline{\binom{q'}{2^t}} = 1$, $\overline{\binom{p'}{2^s}} = 0$ e $\overline{\binom{q'}{2n-2^s}} = 1$. Logo (vide Tabela 5),

$$\begin{cases} \widehat{w}[t]_{(2^{t+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\eta^k)) = c^{(2^{t+j}+1)d} + \alpha_d^{2^{t+j}} c^d, \\ \widehat{w}[t]_{(2^{t+j}+1)d}(\mathbb{R}P(\xi^l)) = \beta_d^{2^{t+j}} c^d, \end{cases}$$

para cada $j \geq 0$. Agora, como $2 \leq 2^t < 2^v < 2^s$, temos $(2^v + 2)d < 2^s d \leq k - 1$ e portanto podemos considerar os números característicos associados a

$$\left(\widehat{w}[t]_{(2^v+1)d} + c^{(2^v+1)d}\right)\left(\widehat{w}[t]_{(2^s+1)d} + c^{(2^s+1)d}\right) c^{k-1-(2^v+2)d}.$$

Com tais números, obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \alpha_d^{2^v+2^s} c^{k-1-2^v d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= \langle (\alpha_d^{2^v} c^d)(\alpha_d^{2^s} c^d) c^{k-1-(2^v+2)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\eta^k))\rangle \\
&= \langle (c^{(2^v+1)d} + \beta_d^{2^v} c^d)(c^{(2^s+1)d} + \beta_d^{2^s} c^d) c^{k-1-(2^v+2)d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle \\
&= \langle c^{2^s d+k-1} + \beta_d^{2^v} c^{2^s d+k-1-2^v d} + \beta_d^{2^s} c^{k-1} + \beta_d^{2^s+2^v} c^{k-1-2^v d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle
\end{aligned}$$

$= \overline{\binom{q'}{2n}} + \overline{\binom{q'}{2n-2^v}} + \overline{\binom{q'}{2n-2^s}} + \langle \beta_d^{2^s+2^v} c^{k-1-2^v d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle$
$= 0 + \overline{\binom{q'}{2n-2^v}} + 1 + \langle \beta_d^{2^s+2^v} c^{k-1-2^v d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle;$

ou seja,

$$\overline{\binom{q'}{2n-2^v}} + \langle \beta_d^{2^s+2^v} c^{k-1-2^v d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle = 1. \tag{4.16}$$

Observe que como fixamos $2^v < 2^s$ sob a condição de não aparecer em $2n - 2^s$ (e, conseqüentemente, não aparacer em $2n$) temos que 2^v aparece em $2n - 2^s - 2^v$ (assim como em $2n - 2^v$).

Se $2^s + 2^v > 2n$, então $\beta_d^{2^s+2^v} = 0$ e portanto $\langle \beta_d^{2^s+2^v} c^{k-1-2^v d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle = 0$. Logo, de (4.16) segue que $\overline{\binom{q'}{2n-2^v}} = 1$. Como 2^v aparece em $2n - 2^v$, vemos então que $\overline{\binom{q'}{2^v}} = 1$.

Se $2^s + 2^v < 2n$ então $\langle \beta_d^{2^s+2^v} c^{k-1-2^v d}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi^l))\rangle = \overline{\binom{q'}{2n-2^s-2^v}}$. Daí, por (4.16), obtemos $\overline{\binom{q'}{2n-2^v}} + \overline{\binom{q'}{2n-2^s-2^v}} = 1$ e então, como 2^v aparece em $2n-2^v$ e em $2n-2^s-2^v$, concluímos que $\overline{\binom{q'}{2^v}} = 1$.

Desse modo obtemos (em qualquer dos casos) $\overline{\binom{q}{2^v}} = 0$, como queríamos.

Afirmação 6: $p = 2n + 1$.

De fato, pela Afirmação 4 temos $\overline{\binom{p}{2^s}} = 1 = \overline{\binom{2n}{2^s}}$ e $\overline{\binom{q'}{2n-2^s}} = 1$. Daí, da Afirmação 1 segue que $\overline{\binom{p}{2^v}} = 0 = \overline{\binom{2n}{2^v}}$ se $1 \le v < t$. Conforme vimos na prova da Afirmação 5, também temos $\overline{\binom{p}{2^t}} = 1 = \overline{\binom{2n}{2^t}}$. Ou seja, já mostramos que $\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}}$ para cada $v = 1, \ldots, t$ e para $v = s$. Temos ainda, pela Afirmação 5, $q = 2^s + 1$. Desse modo, todas as hipóteses do Lema 4.2.6 estão satisfeitas, de onde segue então que

$$\overline{\binom{p}{2^v}} = \overline{\binom{2n}{2^v}} \quad \text{para cada } 1 \le v \le s.$$

Assim, como $p < 2^{s+1}$ e p é ímpar, concluímos que p e $2n+1$ possuem a mesma expansão diádica e portanto são iguais.

4.3 Prova do Teorema 4.4

Nesta seção, provaremos o Teorema 4.4, o qual determina o valor do limitante $h_d(2m, 2n)$ (com $0 < 2m < 2n$) e, assim, generaliza os teoremas 3.2 (*Pergher-Stong*, caso real) e 3.3.4 (casos complexo e quaterniônico) que determinam $h_d(0, 2n)$. Em particular, tendo em vista a classificação dada pelo Teorema 4.3, calcularemos a codimensão máxima segundo a qual uma união disjunta $K_dP(2^s) \cup K_dP(2n)$, com $2^s \neq 2n$, pode ser realizada como o conjunto de pontos fixos de uma involução.

Sejam $d = 1, 2$ ou 4, e $2m$ e $2n$ dois pares quaisquer, com $0 < 2m < 2n$. Escreva $2n - 2m = 2^t(2a+1)$, com $t \geq 1$ e $a \geq 0$.

Defina

$$\ell = \begin{cases} 2 & \text{se } t = 1, \\ 2^t - 1 & \text{se } t > 1. \end{cases}$$

Nosso objetivo é mostrar que $h_d(2m, 2n) = \ell d$.

Pela definição do limitante $h_d(2m, 2n)$, precisamos então mostrar que

$$(2n+1)\gamma^d_{2m} \oplus \mathbb{R}^{d\ell} \to K_d P(2m) \qquad \cup \qquad (2m+1)\gamma^d_{2n} \oplus \mathbb{R}^{d\ell} \to K_d P(2n)$$

é um *fixed-data* e

$$((2n+1)\gamma^d_{2m} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1} \to K_d P(2m)) \qquad \cup \qquad ((2m+1)\gamma^d_{2n} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1} \to K_d P(2n))$$

não é um *fixed-data*.

Primeiro, consideraremos o caso real, e mostraremos que

$$\varepsilon\Gamma^j[\tau^{2n}_{2m}, \mathbb{R}P(2m+2n+1)] = 0,$$

para cada $1 \leq j < \ell$.

Lema 4.3.1. *Para cada $j \geq 1$, a variedade $\varepsilon\Gamma^j(\tau^{2n}_{2m}, \mathbb{R}P(2m+2n+1))$ subjacente à involução $\Gamma^j(\tau^{2n}_{2m}, \mathbb{R}P(2m+2n+1))$ é o espaço total da fibração*

$$\mathbb{R}P(1) \leftarrow \mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}) \leftarrow \cdots \leftarrow \mathbb{R}P(\xi_{j-1} \oplus \mathbb{R}) \leftarrow \mathbb{R}P((2m+1)\xi_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}),$$

onde ξ_1 é o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P(1)$, e para $j \geq 2$, ξ_j é o fibrado linha associado à involução $(A, S(\xi_{j-1} \oplus \mathbb{R}))$ que atua como a antipodal em cada fibra (vide Observação 1.7.1).

Demonstração: A prova é baseada na comparação direta entre as construções das duas variedades em questão.

Denotaremos por 1 qualquer aplicação identidade, por $-1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a aplicação $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (-x_1, \ldots, -x_n)$, e por $\overline{z} : S^1 \to S^1$ a conjugação complexa $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

Dada uma involução (T, M^r), pela construção de $\Gamma(T, M^r)$, vide Seção 1.9, temos $\Gamma(T, M^r) = \left(\overline{z} \times 1, \frac{S^1 \times M^r}{-1 \times T}\right)$. Logo, obtemos:

$$\Gamma(\tau^{2n}_{2m}, \mathbb{R}P(2m+2n+1)) = \left(\overline{z} \times 1, \frac{S^1 \times \mathbb{R}P(2m+2n+1)}{-1 \times \tau^{2n}_{2m}}\right);$$

$$\Gamma^2(\tau_{2m}^{2n}, \mathbb{R}P(2m+2n+1)) = \left(\overline{z} \times 1 \times 1, \frac{\frac{S^1\times S^1\times \mathbb{R}P(2m+2n+1)}{1\times -1\times \tau_{2m}^{2n}}}{-1\times\overline{z}\times 1}\right);$$

$$\Gamma^3(\tau_{2m}^{2n}, \mathbb{R}P(2m+2n+1)) = \left(\overline{z} \times 1 \times 1 \times 1, \frac{\frac{\frac{S^1\times S^1\times S^1\times \mathbb{R}P(2m+2n+1)}{1\times 1\times -1\times \tau_{2m}^{2n}}}{1\times -1\times\overline{z}\times 1}}{-1\times\overline{z}\times 1\times 1}\right).$$

Para cada $1 \leq k \leq j+1$, defina $f_{j,k} = f_{j,k}^{(1)} \times \cdots \times f_{j,k}^{(j)} : \prod_1^j S^1 \to \prod_1^j S^1$, onde

$$f_{j,k}^{(i)} = \begin{cases} -1 & \text{se } i = k-1, \\ \overline{z} & \text{se } i = k, \\ 1 & \text{se } k-1 \neq i \neq k. \end{cases}$$

Assim, para cada $j \geq 2$, vemos que

$$\varepsilon\Gamma^j(\tau_{2m}^{2n}, \mathbb{R}P(2m+2n+1)) = \frac{\frac{\frac{\left(\prod_1^j S^1\right)\times \mathbb{R}P(2m+2n+1)}{f_{j,j+1}\times\tau_{2m}^{2n}}}{f_{j,j}\times 1}}{\frac{\vdots}{f_{j,2}\times 1}}.$$

Vejamos agora a construção da variedade $\mathbb{R}P((2m+1)\xi_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1})$.

Vale lembrar que: dada uma involução sem pontos fixos (T, M^r), em uma variedade fechada, seu fibrado linha associado, $\lambda \to \frac{M^r}{T}$, possui espaço total $\lambda = \frac{M^r\times\mathbb{R}}{T\times -1}$. Observamos que o fibrado em esferas $S(\lambda\oplus\mathbb{R})$ junto com a involução A que atua como a antipodal em cada fibra é a involução $(1\times -1, \frac{M^r\times S^1}{T\times\overline{z}})$ (vide [5, p. 86]). Além disso, como $(2m+1)\lambda\oplus\mathbb{R}^{2n+1} = \frac{M^r\times\mathbb{R}^{2m+1}\times\mathbb{R}^{2n+1}}{T\times -1\times 1} \to \frac{M^r}{T}$ e $\tau_{2n}^{2m} : \mathbb{R}P(2m+2n+1) \to \mathbb{R}P(2m+2n+1)$ é a induzida pela aplicação $(-1,1) : S^{2n+2m+1} \to S^{2n+2m+1}$, $(x_1,\ldots,x_{2m+1},y_1,\ldots,y_{2n+1}) \mapsto (-x_1,\ldots,-x_{2m+1},y_1,\ldots,y_{2n+1})$, vemos que:

$$\mathbb{R}P((2m+1)\lambda\oplus\mathbb{R}^{2n+1}) = \frac{S((2m+1)\lambda\oplus\mathbb{R}^{2n+1})}{A} = \frac{\frac{M^r\times S^{2m+2n+1}}{T\times(-1,1)}}{A} = \frac{M^r\times\mathbb{R}P(2m+2n+1)}{T\times\tau_{2n}^{2m}}.$$

Em particular, como $\xi_1 \to \mathbb{R}P(1)$ é o fibrado linha associado à involução $(-1, S^1)$, obtemos: $\mathbb{R}P((2m+1)\xi_1\oplus\mathbb{R}^{2n+1}) = \frac{S^1\times\mathbb{R}P(2m+2n+1)}{-1\times\tau_{2n}^{2m}} = \varepsilon\Gamma(\tau_{2m}^{2n}, \mathbb{R}P(2m+2n+1))$.

De modo geral, para $j \geq 2$, temos que:

$(A, S(\xi_1\oplus\mathbb{R})) = (1\times -1, \frac{S^1\times S^1}{-1\times\overline{z}})$,

$(A, S(\xi_2\oplus\mathbb{R})) = (1\times 1\times -1, \frac{\frac{S^1\times S^1\times S^1}{-1\times\overline{z}\times 1}}{1\times -1\times\overline{z}})$,

$(A, S(\xi_3\oplus\mathbb{R})) = (1\times 1\times 1\times -1, \frac{\frac{\frac{S^1\times S^1\times S^1\times S^1}{-1\times\overline{z}\times 1\times 1}}{1\times -1\times\overline{z}\times 1}}{1\times 1\times -1\times\overline{z}})$,

$\ldots,$

$$(A, S(\xi_{j-1} \oplus \mathbb{R})) = \left(f_{j,j+1}, \frac{\dfrac{\frac{\Pi_1^j S^1}{f_{j,2}}}{\vdots}}{f_{j,j}} \right).$$

Então, obtemos:

$$\mathbb{R}P((2m+1)\xi_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}) = \frac{\dfrac{\dfrac{\frac{\left(\Pi_1^j S^1\right) \times \mathbb{R}P(2m+2n+1)}{f_{j,2} \times 1}}{\vdots}}{f_{j,j} \times 1}}{f_{j,j+1} \times \tau_{2n}^{2m}}.$$

Desse modo, como todas as involuções envolvidas comutam entre si, concluímos que:

$$\mathbb{R}P((2m+1)\xi_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}) = \frac{\dfrac{\dfrac{\frac{\left(\Pi_1^j S^1\right) \times \mathbb{R}P(2m+2n+1)}{f_{j,j+1} \times \tau_{2m}^{2n}}}{f_{j,j} \times 1}}{\vdots}}{f_{j,2} \times 1} = \varepsilon\Gamma^j(\tau_{2m}^{2n}, \mathbb{R}P(2m+2n+1)). \qquad \square$$

Sabe-se que (vide [5, p. 77, 21.8]): se $\xi^k \to S^1$ é um k-espaço vetorial sobre S^1, então $[\mathbb{R}P(\xi^k)] = 0$. Logo, $[\mathbb{R}P((2m+1)\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{2n+1})] = 0$ e então, pelo lema acima, temos $\varepsilon\Gamma[\tau_{2m}^{2n}, \mathbb{R}P(2m+2n+1)] = 0$.

Em particular, no caso $t = 1$ ($\ell = 2$), já mostramos que:

$$\varepsilon\Gamma^j[\tau_{2m}^{2n}, \mathbb{R}P(2m+2n+1)] = 0,$$

para cada $1 \leq j < \ell$.

Lema 4.3.2. *Para cada $j \geq 2$, a variedade $\mathbb{R}P((2m+1)\xi_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1})$ é bordante ao espaço total da fibração*

$$\mathbb{R}P(1) \longleftarrow \mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1}) \longleftarrow \mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}),$$

onde ξ_1 é o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P(1)$ e μ_j é o fibrado linha canônico sobre $\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1})$ (isto é, μ_j é o splitting do fibrado vetorial $\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1} \to \mathbb{R}P(1)$).

Demonstração: Considere a coleção

$$\{X(j)\}_{j=0}^{\infty} = \{[A, S^0], [A, S^1], [A, S(\xi_1 \oplus \mathbb{R})], \ldots [A, S(\xi_{j-1} \oplus \mathbb{R})], \ldots\}$$

de elementos de $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$.

Em [5, p. 86, 21.8], está provado que $\{X(j)\}_{j=0}^{\infty}$ é a *única* base homogênea do $\mathcal{N}_*$-módulo livre $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\Delta(X(j+1)) = X(j)$ para cada $j \geq 0$,

(ii) $\varepsilon_*(X(j)) = 0 \in \mathcal{N}_*$ para cada $j \geq 1$.

Aqui, $\Delta : \mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2) \to \mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ é o *homomorfismo de Smith* e $\varepsilon_* : \mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2) \to \mathcal{N}_*$ é definido por $\varepsilon_*[T, M^r] = [M^r/T]$.

Sobre o homomorfismo de *Smith*, convém destacar que (vide [5, p. 85, 24.3]): $\Delta[A, S(\eta^k \oplus \mathbb{R})] = [A, S(\eta^k)]$ para cada k-fibrado vetorial $\eta^k \to V^n$ sobre uma variedade fechada.

Considere agora a coleção

$$\{Y(j)\}_{j=0}^{\infty} = \{[A, S^0], [A, S^1], [A, S(\xi_1 \oplus \mathbb{R})], \ldots, [A, S(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1})], \ldots\}$$

de elementos de $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$. Note que, para cada j, $Y(j) \in \mathcal{N}_j(\mathbb{Z}_2)$.

Denote por α o gerador de $H^1(\mathbb{R}P(1))$; então, $W(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1}) = 1 + \alpha$. Se $\mu_j \to \mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1})$ é o fibrado linha associado a $(A, S(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1}))$ e $w_1(\mu_j) = c$ temos então:

$$\langle c^j, \sigma(\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1}))\rangle = \langle \overline{w}_1(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1}), \sigma(\mathbb{R}P(1))\rangle = \langle \alpha, \sigma(\mathbb{R}P(1))\rangle = 1.$$

Logo, vide Teorema 1.4.3, temos que $\{Y(j)\}_{j=0}^{\infty}$ é uma base homogênea do $\mathcal{N}_*$-módulo livre $\mathcal{N}_*(\mathbb{Z}_2)$.

Como $\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1} \to \mathbb{R}P(1)$ é um fibrado vetorial sobre S^1, $\varepsilon_*[A, S(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1})] = [\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1})] = 0$. Logo, temos que $\varepsilon_*(Y(j)) = 0 \in \mathcal{N}_*$, para cada $j \geq 1$.

Além disso, $\Delta(Y(2)) = \Delta[A, S(\xi_1 \oplus \mathbb{R})] = [A, S(\xi^1)] = [A, S^1] = Y(1)$, e para cada $j \geq 2$, $\Delta(Y(j+1)) = \Delta[A, S(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^j)] = [A, S(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1})] = Y(j)$.

Logo, pela unicidade acima mencionada, temos que $X(j) = Y(j)$, para cada j. Ou seja, para cada $j \geq 2$, $[A, S(\xi_{j-1} \oplus \mathbb{R})] = [A, S(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1})]$. Então, os fibrados *splitting* $\xi_j \to \mathbb{R}P(\xi_{j-1} \oplus \mathbb{R})$ e $\mu_j \to \mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1})$ são bordantes e, conseqüentemente, $[(2m+1)\xi_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}P(\xi_{j-1} \oplus \mathbb{R})] = [(2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1})]$ em $\mathcal{N}_j(BO(2m+2n+2))$. Desse modo, concluímos que $[\mathbb{R}P((2m+1)\xi_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1})] = [\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1})]$ em $\mathcal{N}_{2m+2n+1+j}$, como queríamos demonstrar. $\square$

Pelos lemas anteriores, temos que:

$$\varepsilon\Gamma^j[\tau_{2m}^{2n}, \mathbb{R}P(2m+2n+1)] = [\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1})],$$

para cada j.

Assumimos $t > 1$ e $j < 2^t - 1 = \ell$. Mostraremos que todos os números característicos de $\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1})$ são nulos; ou seja, $[\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1})] = 0$.

Usaremos α para denotar o gerador de $H^1(\mathbb{R}P(1))$ e denotaremos por $\lambda_j \to \mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1})$ o fibrado *splitting* do $(2m+2n+2)$-fibrado vetorial $(2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1} \to$

$\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1})$. Usaremos a letra b para denotar $w_1(\mu_j)$, e a letra c para denotar $w_1(\lambda_j)$. Ou seja, temos:

$W(\xi_1) = 1 + \alpha \in H^*(\mathbb{R}P(1));$

$W(\mu_j) = 1 + b \in H^*(\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1}));$

$W(\lambda_j) = 1 + c \in H^*(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1})).$

Conseqüentemente, obtemos:

$W(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1}) = 1 + \alpha;$

$W((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}) = (1+b)^{2m+1}.$

Tome u suficientemente grande tal que $2^u > 2m + 2n + 1 + 2^t$. Então, temos a classe dual

$$\overline{W}((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}) = \frac{1}{(1+b)^{2m+1}} = (1+b)^{2^u-(2m+1)} \in H^*(\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1})).$$

Observação 4.3.3. Procedendo de forma análoga à demonstração do Lema 3.5.1, via Fórmula de *Conner*, obtemos:

$$\langle b^f(c+b)^g c^h, \sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}))\rangle = \text{ coeficiente de } b^j \text{ em } \frac{b^f(1+b)^g}{(1+b)^{2m+1}}, \quad (4.17)$$

para cada f, g, h, com $f + g + h = 2m + 2n + 1 + j$; e

$$\langle \alpha b^f(c+b)^g c^h, \sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}))\rangle = \text{ coeficiente de } b^j \text{ em } \frac{b^{f+1}(1+b)^g}{(1+b)^{2m+1}}, \quad (4.18)$$

para cada f, g, h, com $f + g + h = 2m + 2n + j$.

De fato, devido à analogia, verificaremos apenas (4.18):

$\langle \alpha b^f(c+b)^g c^h, \sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}))\rangle =$

$= \sum_i \overline{\tbinom{g}{i}} \langle \alpha b^{f+i} c^{h+g-i}, \sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}))\rangle$

$= \sum_i \overline{\tbinom{g}{i}} \langle \alpha b^{f+i} \overline{w}_{j-(f+i+1)}((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}), \sigma(\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1}))\rangle$

$= \sum_i \overline{\tbinom{g}{i}} \overline{\tbinom{2^u-(2m+1)}{j-i-f-1}} \langle \alpha b^{f+i} b^{j-f-i-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1}))\rangle$

$= \sum_i \overline{\tbinom{g}{i}} \overline{\tbinom{2^u-(2m+1)}{j-i-(f+1)}} \langle \alpha b^{j-1}, \sigma(\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1}))\rangle$

$= \sum_i \overline{\tbinom{g}{i}} \overline{\tbinom{2^u-(2m+1)}{j-i-(f+1)}}$

$=$ coeficiente de b^j em $b^{f+1}(1+b)^g(1+b)^{2^{u_j}-(2m+1)}$

$=$ coeficiente de b^j em $\frac{b^{f+1}(1+b)^g}{(1+b)^{2m+1}}$. $\square$

Aplicando o Teorema 1.6.4, calculamos:

$W(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}) =$

$= W(\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1}))\,(\sum_i (1+c)^{2m+2n+2-i} w_i((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}))$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\textstyle\sum_i (1+b)^{j-i} w_i(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1})\right)(1+c)^{2n+1}\left(\textstyle\sum_i (1+c)^{2m+1-i} w_i((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1})\right)\\
&= \left((1+b)^j + (1+b)^{j-1}\alpha\right)(1+c)^{2n+1}\left(\textstyle\sum_i (1+c)^{2m+1-i}\binom{2m+1}{i} b^i\right)\\
&= (1+b)^{j-1}(1+b+\alpha)(1+c)^{2n+1}(1+c+b)^{2m+1}\\
&= (1+b)^{j-1}(1+b+\alpha)\left((1+c)(1+c+b)\right)^{2m+1}(1+c)^{2n-2m}\\
&= (1+b)^{j-1}(1+b+\alpha)(1+b+c(c+b))^{2m+1}(1+c^{2^t})^{2a+1}.
\end{aligned}
$$

Ou seja, obtemos

$$W(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}) = (1+b)^{j-1}(1+b+\alpha)(1+b+c(c+b))^{2m+1}(1+c^{2^t})^{2a+1}.$$

Assim, vemos que toda classe característica de $\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1})$ é gerada por $\alpha, b, c(c+b)$ e c^{2^t}. Conseqüentemente, todo número característico da variedade $(2m+2n+1+j)$-dimensional $\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1})$ é uma soma de termos da forma

$$\langle \alpha^e b^f (c(c+b))^g c^{2^t h}, \sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}))\rangle,$$

com $e+f+2g+2^t h = 2m+2n+1+j$ e $e=0$ ou 1.

Se $f > j = dim(\mathbb{R}P(\xi_1 \oplus \mathbb{R}^{j-1}))$, então $\langle \alpha^e b^f (c(c+b))^g c^{2^t h}, \sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}))\rangle = 0$, pois $b^f = 0$. Observamos ainda que os casos em que $e=1$ são reduzidos ao casos em que $e=0$, pois

$$
\begin{aligned}
&\langle \alpha b^f (c(c+b))^g c^{2^t h}, \sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}))\rangle =\\
&\qquad = \langle b^{f+1} (c(c+b))^g c^{2^t h}, \sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}))\rangle,
\end{aligned}
$$

por (4.17) e (4.18).

Dados, f, g, h com $f+2g+2^t h = 2m+2n+1+j$, $f \le j < 2^t - 1$, calculamos então (aplicando (4.17)):

$$
\begin{aligned}
&\langle b^f (c(c+b))^g c^{2^t h}, \sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}))\rangle =\\
&\quad = \text{coeficiente de } b^j \text{ em } \tfrac{b^f(1+b)^g}{(1+b)^{2m+1}}\\
&\quad = \text{coeficiente de } b^j \text{ em } b^f(1+b)^g(1+b)^{2^u-(2m+1)}\\
&\quad = \overline{\binom{2^u+g-2m-1}{j-f}}\\
&\quad = \overline{\binom{2^u+\frac{2m+2n+1+j-f-2^t h}{2}-2m-1}{j-f}}\\
&\quad = \overline{\binom{2^u+n-m+\frac{j-f+1}{2}-2^{t-1}h-1}{j-f}}\\
&\quad = \overline{\binom{2^u+2^{t-1}(2a+1)+\frac{j-f+1}{2}-2^{t-1}h-1}{j-f}}\\
&\quad = \overline{\binom{2^{t-1}(2^{u-t+1}+2a+1-h)+\frac{j-f+1}{2}-1}{j-f}},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\langle b^f (c(c+b))^g c^{2^t h}, \sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}))\rangle = \overline{\binom{2^{t-1}(2^{u-t+1}+2a+1-h)+\frac{j-f+1}{2}-1}{j-f}}.$$

Como $j < 2^t - 1$, $j - f < 2^t - 1$. Escreva $j - f + 1 = 2^p(2q + 1)$, com $q \geq 0$. Então $j - f + 1 (= 2g + 2^t h - 2m - 2n)$ é um número par estritamente menor do que 2^t e, portanto, $1 \leq p \leq t - 1$. Assim, temos:
$j - f = 2^{p+1}q + 2^p - 1 = 2^{p+1}q + \sum_{i=0}^{p-1} 2^i$,
$\frac{j-f+1}{2} - 1 = 2^p q + 2^{p-1} + 1 = 2^p q + \sum_{i=0}^{p-2} 2^i$.
Logo, 2^{p-1} aparece na expansão diádica de $j-f$ e não aparece na expansão de $2^{t-1}(2^{u-t+1} + 2a + 1 - h) + \frac{j-f+1}{2} - 1$.
Assim, obtemos:

$$\langle b^f (c(c+b))^g c^{2^t h}, \sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1}))\rangle = 0$$

Com isso, concluímos que para cada $1 \leq j < 2^t - 1$ todos os números característicos de $\mathbb{R}P((2m+1)\mu_j \oplus \mathbb{R}^{2n+1})$ são nulos.

Desse modo, mostramos então que

$$\varepsilon \Gamma^j [\tau_{2m}^{2n}, \mathbb{R}P(2m + 2n + 1)] = 0,$$

para cada $1 \leq j < \ell$, como queríamos.

Portanto, temos:

$$j_* \Gamma^\ell [\tau_{2n}^{2m}, \mathbb{R}P(2m+2n+1)] = [(2n+1)\gamma_{2m}^1 \oplus \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}P(2m)] + [(2m+1)\gamma_{2n}^1 \oplus \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}P(2n)],$$

onde $\gamma_r^d \to K_d P(r)$ denota o d-fibrado canônico sobre $K_d P(r)$. Daí, usando o Lema 3.3.3, obtemos:

$$\begin{aligned}
j_* \left(\left(\Gamma^\ell [\tau_{2n}^{2m}, \mathbb{R}P(2m + 2n + 1)] \right)^d \right) &= j_* \left(\Gamma^\ell [\tau_{2n}^{2m}, \mathbb{R}P(2m + 2n + 1)] \right)^d \\
&= \left([(2n+1)\gamma_{2m}^1 \oplus \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}P(2m)] + [(2m+1)\gamma_{2n}^1 \oplus \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}P(2n)] \right)^d \\
&= [(2n+1)\gamma_{2m}^1 \oplus \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}P(2m)]^d + [(2m+1)\gamma_{2n}^1 \oplus \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}P(2n)]^d \\
&= [(2n+1)\gamma_{2m}^d \oplus \mathbb{R}^{d\ell} \to K_d P(2m)] + [(2m+1)\gamma_{2n}^d \oplus \mathbb{R}^{d\ell} \to K_d P(2n)].
\end{aligned}$$

Logo,

$$(2n+1)\gamma_{2m}^d \oplus \mathbb{R}^{d\ell} \to K_d P(2m) \qquad \cup \qquad (2m+1)\gamma_{2n}^d \oplus \mathbb{R}^{d\ell} \to K_d P(2n)$$

é um *fixed-data*.

Para concluir que $h_d(2m, 2n) = d\ell$ resta então mostrar que

$$((2n+1)\gamma_{2m}^d \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1} \to K_d P(2m)) \qquad \cup \qquad ((2m+1)\gamma_{2n}^d \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1} \to K_d P(2n))$$

não é um *fixed-data*. Equivalentemente, basta mostrar que os fibrados *splitting*

$$\lambda \to \mathbb{R}P((2n+1)\gamma^d_{2m} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1}) \qquad \text{e} \qquad \lambda \to \mathbb{R}P((2m+1)\gamma^d_{2n} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1}))$$

não possuem os mesmos números característicos.

Denote por α_d e β_d os geradores de $H^d(K_dP(2m))$ e $H^d(K_dP(2n))$, respectivamente. Então, temos:

$$W((2n+1)\gamma^d_{2m} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1}) = (1+\alpha_d)^{2n+1} = \textstyle\sum_i \binom{2n+1}{i}\alpha_d^i,$$
$$W((2m+1)\gamma^d_{2n} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1})) = (1+\beta_d)^{2m+1} = \textstyle\sum_i \binom{2m+1}{i}\beta_d^i.$$

Daí, obtemos:

$$\begin{aligned} &W(\mathbb{R}P((2n+1)\gamma^d_{2m} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1})) = \\ &\quad = (1+\alpha_d)^{2m+1}\left(\textstyle\sum_i (1+c)^{(2n+1)d+d\ell+1-i} w_i((2n+1)\gamma^d_{2m} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1})\right) \\ &\quad = (1+\alpha_d)^{2m+1}(1+c)^{d\ell+1}\left(\textstyle\sum_i (1+c^d)^{2n+1-i}\binom{2n+1}{i}\alpha_d^i\right) \\ &\quad = (1+\alpha_d)^{2m+1}(1+c)^{d\ell+1}\left(1+c^d+\alpha_d\right)^{2n+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &W(\mathbb{R}P((2m+1)\gamma^d_{2n} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1})) = \\ &\quad = (1+\beta_d)^{2n+1}\left(\textstyle\sum_i (1+c)^{(2m+1)d+d\ell+1-i} w_i((2m+1)\gamma^d_{2n} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1})\right) \\ &\quad = (1+\beta_d)^{2n+1}(1+c)^{d\ell+1}\left(\textstyle\sum_i (1+c^d)^{2m+1-i}\binom{2m+1}{i}\beta_d^i\right) \\ &\quad = (1+\beta_d)^{2n+1}(1+c)^{d\ell+1}\left(1+c^d+\beta_d\right)^{2m+1}. \end{aligned}$$

Defina $\widehat{W}(\mathbb{R}P(-)) = \frac{W(\mathbb{R}P(-))}{(1+c)^{d\ell+1}}$ e denote por $\widehat{w}_i(\mathbb{R}P(-))$ a soma de todos os termos de grau i de $\widehat{W}(\mathbb{R}P(-))$. Assim, temos:

$$\widehat{W}(\mathbb{R}P((2n+1)\gamma^d_{2m} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1})) = (1+\alpha_d)^{2m+1}\left(1+c^d+\alpha_d\right)^{2n+1};$$
$$\widehat{W}(\mathbb{R}P((2m+1)\gamma^d_{2n} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1})) = (1+\beta_d)^{2n+1}\left(1+c^d+\beta_d\right)^{2m+1}.$$

Então calculamos:

$$\begin{cases} \widehat{w}_{(2m+2n)d}(\mathbb{R}P((2n+1)\gamma^d_{2m} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1})) = \alpha_d^{2m}(c^d+\alpha_d)^{2n} + \overline{\binom{2m+1}{2}}\alpha_d^{2m-1}(c^d+\alpha_d)^{2n+1}, \\ \widehat{w}_{(2m+2n)d}(\mathbb{R}P((2m+1)\gamma^d_{2n} \oplus \mathbb{R}^{d\ell+1})) = \beta_d^{2n}(c^d+\beta_d)^{2m} + \overline{\binom{2n+1}{2}}\beta_d^{2n-1}(c^d+\beta_d)^{2m+1}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widehat{w}_{(\ell+1)d}(\mathbb{R}P((2n+1)\gamma^d_{2m} \oplus \mathbb{R}^{2d+1})) = \overline{\binom{2n+1}{\ell+1}}(c^d+\alpha_d)^{\ell+1} + \overline{\binom{2n+1}{\ell}}\alpha_d(c^d+\alpha_d)^{\ell} + \\ \hfill + \text{ termos envolvendo } \alpha_d^2, \\ \widehat{w}_{(\ell+1)d}(\mathbb{R}P((2m+1)\gamma^d_{2n} \oplus \mathbb{R}^{2d+1})) = \overline{\binom{2m+1}{\ell+1}}(c^d+\beta_d)^{\ell+1} + \overline{\binom{2m+1}{\ell}}\beta_d(c^d+\beta_d)^{\ell} + \\ \hfill + \text{ termos envolvendo } \beta_d^2. \end{cases}$$

Assim, como $\alpha_d^i = 0$ para todo $i > 2m$, e $\beta_d^i = 0$ para todo $i > 2n$, temos:

$$\widehat{w}_{(2m+2n)d}\widehat{w}_{(\ell+1)d}(\mathbb{R}P((2n+1)\gamma^d_{2m}\oplus\mathbb{R}^{2d+1})) = \left(\overline{\binom{2n+1}{\ell+1}} + \overline{\binom{2m+1}{2}\binom{2n+1}{\ell}}\right)\alpha_d^{2m}c^{d(2n+\ell+1)}+$$
$$+\overline{\binom{2m+1}{2}\binom{2n+1}{\ell+1}}\alpha_d^{2m-1}c^{d(2n+\ell+2)} + \overline{\binom{2m+1}{2}\binom{2n+1}{\ell+1}\binom{2n+\ell+2}{1}}\alpha_d^{2m}c^{d(2n+\ell+1)},$$

$$\widehat{w}_{(2m+2n)d}\widehat{w}_{(\ell+1)d}(\mathbb{R}P((2m+1)\gamma^d_{2n}\oplus\mathbb{R}^{d\ell+1})) = \left(\overline{\binom{2m+1}{\ell+1}} + \overline{\binom{2n+1}{2}\binom{2m+1}{\ell}}\right)\beta_d^{2n}c^{d(2m+\ell+1)}+$$
$$+\overline{\binom{2n+1}{2}\binom{2m+1}{\ell+1}}\beta_d^{2n-1}c^{d(2m+\ell+2)} + \overline{\binom{2n+1}{2}\binom{2m+1}{\ell+1}\binom{2m+\ell+2}{1}}\beta_d^{2n}c^{d(2m+\ell+1)},$$

Observe que, pela fórmula de *Conner*,

$$\langle\alpha_d^{2m-1}c^{d(2n+\ell+2)},\sigma(\mathbb{R}P((2n+1)\gamma^d_{2m}\oplus\mathbb{R}^{2d+1}))\rangle =$$
$$= \langle\alpha_d^{2m-1}\overline{w}_1((2n+1)\gamma^d_{2m}\oplus\mathbb{R}^{2d+1}),\sigma(K_dP(2m))\rangle$$
$$= \langle\alpha_d^{2m},\sigma(K_dP(2m))\rangle = 1;$$

analogamente, $\langle\beta_d^{2n-1}c^{d(2m+\ell+2)},\sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\gamma^d_{2n}\oplus\mathbb{R}^{2d+1}))\rangle = 1.$

Assim, obtemos:

$$\left\langle\widehat{w}_{(2m+2n)d}\widehat{w}_{(\ell+1)d},\sigma(\mathbb{R}P((2n+1)\gamma^d_{2m}\oplus\mathbb{R}^{2d+1}))\right\rangle =$$
$$= \overline{\binom{2n+1}{\ell+1}} + \overline{\binom{2m+1}{2}\binom{2n+1}{\ell}} + \overline{\binom{2m+1}{2}\binom{2n+1}{\ell+1}} + \overline{\binom{2m+1}{2}\binom{2n+1}{\ell+1}\binom{2n+\ell+2}{1}},$$

$$\left\langle\widehat{w}_{(2m+2n)d}\widehat{w}_{(\ell+1)d},\sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\gamma^d_{2n}\oplus\mathbb{R}^{2d+1}))\right\rangle =$$
$$= \overline{\binom{2m+1}{\ell+1}} + \overline{\binom{2n+1}{2}\binom{2m+1}{\ell}} + \overline{\binom{2n+1}{2}\binom{2m+1}{\ell+1}} + \overline{\binom{2n+1}{2}\binom{2m+1}{\ell+1}\binom{2m+\ell+2}{1}},$$

Se $t = 1$, ou seja, $2n - 2m = 4a + 2$, então $\ell = 2$ e $\overline{\binom{2m}{2}} \neq \overline{\binom{2n}{2}}$. Então, aplicando o Teorema de *Lucas*, concluímos que

$$\left\langle\widehat{w}_{(2m+2n)d}\widehat{w}_{(\ell+1)d},\sigma(\mathbb{R}P((2n+1)\gamma^d_{2m}\oplus\mathbb{R}^{2d+1}))\right\rangle =$$
$$= \overline{\binom{2n+1}{3}} \neq \overline{\binom{2m+1}{3}} =$$
$$= \left\langle\widehat{w}_{(2m+2n)d}\widehat{w}_{(\ell+1)d},\sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\gamma^d_{2n}\oplus\mathbb{R}^{2d+1}))\right\rangle.$$

Se $t > 1$, ou seja, $2n-2m = 2^t(2a+1)$, então $\ell = 2^t-1$, $\overline{\binom{2m}{2^t}} \neq \overline{\binom{2n}{2^t}}$, $\overline{\binom{2m+1}{2^t-1}} = \overline{\binom{2n+1}{2^t-1}}$. Daí, concluímos que

$$\left\langle\widehat{w}_{(2m+2n)d}\widehat{w}_{(\ell+1)d},\sigma(\mathbb{R}P((2n+1)\gamma^d_{2m}\oplus\mathbb{R}^{2d+1}))\right\rangle = \overline{\binom{2n+1}{2^t}} + \overline{\binom{2m+1}{2}\binom{2n+1}{2^t-1}} =$$
$$= \overline{\binom{2n+1}{2^t}} + \overline{\binom{2n+1}{2}\binom{2m+1}{2^t-1}} \neq \overline{\binom{2m+1}{2^t}} + \overline{\binom{2n+1}{2}\binom{2m+1}{2^t-1}} =$$
$$= \left\langle\widehat{w}_{(2m+2n)d}\widehat{w}_{(\ell+1)d},\sigma(\mathbb{R}P((2m+1)\gamma^d_{2n}\oplus\mathbb{R}^{2d+1}))\right\rangle.$$

Desse modo, mostramos que

$$((2n+1)\gamma^d_{2m}\oplus\mathbb{R}^{d\ell+1}\to K_dP(2m)) \qquad \cup \qquad ((2m+1)\gamma^d_{2n}\oplus\mathbb{R}^{d\ell+1}\to K_dP(2n))$$

não é um *fixed-data*, encerrando a demonstração do Teorema 4.4.

Referências Bibliográficas

[1] M. Atiyah; *K-Theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967.

[2] J. M. Boardman, *On manifolds with involution*, Bull. Am. Math. Soc. **73** (1967), n. 2, 136-138.

[3] F. L. Capobianco, *Stationary points of $\mathbb{Z}_2^k$-actions*, Proc. Amer. Math. Soc. **61** (1976), 377-380.

[4] P. E. Conner, *Diffeomorphisms of period two*, Michigan Math. Journal (1963), n. 10, 341-352.

[5] P. E. Conner, *Differentiable periodic maps*, second ed., Springer-Verlag, 1979.

[6] P. E. Conner and E. E. Floyd, *Differentiable periodic maps*, Springer-Verlag, 1964.

[7] A. Dold, *Erzeugend der Thomshen algebra $\mathcal{N}$*, Math. Z. **65** (1956), 25-35.

[8] F. G. Figueira, P. L. Q. Pergher, *Dimensions of fixed point sets of involutions*, Archiv der Mathematik **87** (2006), 280-288.

[9] D. Hou and B. Torrence, *Involutions fixing the disjoint union of copies of even projective space*, Acta Math. Sinica **12** (1997), 156.

[10] D. Hou and B. Torrence, *Involutions fixing the union of odd-dimensional projective spaces*, Canad. Math. Bull **37** (1994), 66-74.

[11] C. Kosniowski and R. E. Stong, *Involutions and characteristic numbers*, Topology **17** (1978), 309-330.

[12] E. Lucas, *Théorie des nombres*, 1878; reprint, Librarie Blanchard, Paris (1961).

[13] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princenton University Press, 1974.

[14] R. de Oliveira, *Involuções comutantes fixando dois espaços projetivos pares*, Tese de Doutorado - DM/UFSCar (2002).

[15] R. de Oliveira, P. L. Q. Pergher and A. Ramos, *$\mathbb{Z}_2^k$-Actions fixing $\mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{R}P^{even}$*, Algebraic and Geometric Topology **7** (2007), 29-45.

[16] H. Osborn, *Vector bundles*, Academic Press, Inc, 1982.

[17] P. L. Q. Pergher, *An equivariant construction*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 319-320.

[18] P. L. Q. Pergher, *Bordism of two commuting involutions*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 191-195.

[19] P. L. Q. Pergher, *Involutions fixing an arbitrary product of spheres and a point*, Manuscripta Math. **89** (1996), 471-474.

[20] P. L. Q. Pergher, *On $\mathbb{Z}_2^k$-actions*, Topology Appl. **117** (2001), 105-112.

[21] P. L. Q. Pergher, *The union of a connected manifold and a point as fixed set of commuting involutions*, Topology Appl. **69** (1996), 71-81.

[22] P. L. Q. Pergher, *$\mathbb{Z}_2^k$-Actions fixing a product of spheres and a point*, Canad. Math. Bull **38** (1995), 366-372.

[23] P. L. Q. Pergher, *$\mathbb{Z}_2^k$-Actions fixing $\{point\} \cup V^n$*, Fundamenta Mathematicae **172** (2002), 83-97.

[24] P. L. Q. Pergher, *$\mathbb{Z}_2^k$-Actions whose fixed data has a section*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 175-189.

[25] P. L. Q. Pergher, *$\mathbb{Z}_2^2$-actions with n-dimensional fixed set*, a aparecer em Proc. Amer. Math. Soc.

[26] P. L. Q. Pergher and R. de Oliveira, *Commuting involutions whose fixed point set consists of two special components*, preprint.

[27] Pedro L. Q. Pergher and R. de Oliveira, *$\mathbb{Z}_2^k$-Actions with a special fixed set*, Fund. Math. **186** (2005), 97-109.

[28] P. L. Q. Pergher and R. E. Stong, *Involutions fixing* $\{point\} \cup F^n$, Transform. Groups **6** (2001), 79-86.

[29] D. C. Royster, *Involutions fixing the disjoint union of two projective spaces*, Indiana University Mathematics Journal **29** (1980), n. 2, 267-276.

[30] R. E. Stong, *Equivariant bordism and* $\mathbb{Z}_2^k$*-actions*, Duke Math. Journal **37** (1970), 779-785.

[31] R. E. Stong, *Involutions fixing products of circles*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 1005-1008.

[32] R. E. Stong, *Involutions fixing projective spaces*, Michigan Math. Journal **13** (1966), 445-447.

[33] R. Thom, *Quelques propriétés globales des variétés differentiables*, Comm. Math. Helv. **28** (1954), 18-88.

[34] B. Torrence, *Bordism classes of vector bundles over projective spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 963-969.

[35] Zhi Lu, *Involutions fixing* $\mathbb{R}P^{odd} \cup P(h,i)$, *I*, Transactions Amer. Math. Soc. **354** (2002), 4539-4570.

[36] Zhi Lu, *Involutions fixing* $\mathbb{R}P^{odd} \cup P(h,i)$, *II*, Transactions Amer. Math. Soc. **356** (2004), 1291-1314.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo