



UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
ENGENHARIA ELÉTRICA**

**Em Busca de um Algoritmo Construtivo para
Autômatos Celulares Reversíveis: A Abordagem das
Regras Primitivas e Derivadas**

Guilherme Kronemberger

Texto de dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como requisito das exigências do exame para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira

São Paulo – SP
Dezembro/2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Banca Examinadora

Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira
Universidade Presbiteriana Mackenzie

Dr. Luiz Henrique Alves Monteiro
Universidade Presbiteriana Mackenzie

Dr. André Carlos Ponce de Leon Ferreira de Carvalho
Universidade de São Paulo

Dedicatória

Aos meus pais, Waldir e Edisa,
pelo apoio em minha vida.

À Virginia, pelo seu amor
em minha vida.

A todos os meus grandes amigos por
todo o apoio sempre recebido.

Agradecimentos

A meu **Deus Jeová**, pela oportunidade da vida.

Este trabalho conta com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), através de minha bolsa de mestrado, e de auxílios pesquisa da FAPESP, através do Processo 2005/04696-3, e da Wolfram Research, através do Mathematica Academic Grant 1149, concedidos a meu orientador e do MACKPESQUISA. A essas instituições, nossos sinceros agradecimentos.

À Universidade Presbiteriana Mackenzie, pelo idealismo e dedicação ao ensino na nossa sociedade. Aos professores do Mackenzie que, durante todo o curso, procuraram incentivar a todos e construir dentro de cada estudante um cientista em busca do conhecimento. A todos os empregados do Mackenzie, que de forma direta ou indireta contribuem para a manutenção da nossa instituição.

Aos pesquisadores referenciados, suas obras, artigos e dedicação que serviram de base para esta pesquisa.

Aos familiares, amigos e todos aqueles que me apoiaram durante esta fase.

Em especial ao professor Dr. Pedro Paulo, meu orientador, que conduziu a orientação deste trabalho.

Sumário

BANCA EXAMINADORA	2
RESUMO.....	7
ABSTRACT.....	8
LISTA DE FIGURAS	9
LISTA DE TABELAS	11
LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS	12
CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO	13
CAPÍTULO 2: AUTÔMATOS CELULARES	15
2.1 Definição de AC	15
2.2 Classes e Classificações de ACs	18
2.3 A Noção de Reversibilidade em ACs.....	22
CAPÍTULO 3: IDENTIFICAÇÃO DE REGRAS REVERSÍVEIS.....	29
3.1 Características Empíricas das Regras Reversíveis	29
3.1.1 Regras Reversíveis são Balanceadas	29
3.1.2 Regras Reversíveis apresentam k-Simetria.....	30
3.1.3 Regras Reversíveis Formadas por Blocos Homogêneos	32
3.1.4 Reversibilidade de Regras se Preserva na Classe de Equivalência Dinâmica	34
3.2 Regras Inversas.....	35
3.3 As Evoluções Temporais de Regras Reversíveis	39
CAPÍTULO 4: O MODELO DE REGRAS REVERSÍVEIS PRIMITIVAS E DERIVADAS	42
4.1 Regras Reversíveis Primitivas e Derivadas	42
4.2 Operações entre RPs e RDs	44
4.2.1 Primeiro esquema de construção das RDs	44
4.2.2 Segundo esquema de construção das RDs	46
4.3 Relação entre Reversibilidade e Conservatividade.....	47

	6
CAPÍTULO 5: CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	53
APÊNDICE A	56
APÊNDICE B	65

Resumo

Autômatos celulares têm sido estudados como modelos computacionais em diversas áreas, sendo que muitas são as suas propriedades, entre elas a reversibilidade. Autômatos celulares reversíveis podem ser usados, entre outras aplicações, para compactação ou encriptação de dados. Aparentemente, as regras reversíveis apresentadas na literatura parecem ter sido derivadas apenas através de buscas exaustivas em seus espaços correspondentes. No entanto, seria importante a existência de um algoritmo que permitisse construí-las fácil e diretamente, diferente do que acontece na literatura. Este é o objetivo deste trabalho. Neste sentido, buscou-se um algoritmo que permitesse identificar regras de autômatos celulares unidimensionais reversíveis. Para tanto, foram obtidas em análises exaustivas e na literatura todas as regras reversíveis de 2 estados e vizinhanças de 2, 3, 4 e 5 células, e de 3 estados e vizinhanças de 2 e 3 células. Com o estudo destas regras constatou-se em cada espaço que: todas as regras reversíveis são balanceadas; elas se distribuem simetricamente; um subconjunto delas – aqui denominadas regras reversíveis primitivas, RPs – possui lei de formação simples, definida por blocos homogêneos de estados; e, se uma regra é reversível, todas as suas equivalentes dinâmicas também o são. Na tentativa de se obter o algoritmo desejado explorou-se uma abordagem em que as regras reversíveis não primitivas (denominadas regras derivadas, RDs), seriam obtidas a partir das primitivas. Nesse sentido foram testados dois esquemas de construção das RDs, um baseado na utilização conjunta de todas as RPs, e outro, utilizando-as individualmente; entretanto, ambos não levaram a resultado positivo. Adicionalmente, estudou-se a relação entre as propriedades de reversibilidade e conservatividade de regras nos espaços considerados.

Palavras-chave: *Autômato celular, autômato celular reversível, NKS, computação reversível.*

Abstract

Cellular automata have been studied as computer models in many different areas. They have many properties, one of them being reversibility. Reversible cellular automata can be used, among other applications, for data compressing and encryption. Apparently, the reversible rules featured in the literature seem to have been derived through exhaustive searches in their corresponding spaces. However, it would be important the availability of an algorithm that would allow their direct and easy construction, different from what occurs in literature. This is the aim of this work. Along this line, we tried to come up with an algorithm to allow the identification of one-dimensional, reversible cellular automaton rules. This was based on reversible rules with 2 states and 2, 3, 4 and 5 cells per neighborhood, and on those with 3 states and 2 and 3 cells per neighborhood, all of them drawn out of exhaustive analysis and from the literature. By studying these rules it was possible to verify in each space that: all reversible rules are balanced; they are symmetrically distributed; a subset of them – herein denoted primitive reversible rules, RPs – have a simple formation law, defined by homogeneous blocks of states; and, if a rule is reversible, so are all its dynamically equivalent rules. In the attempt to obtain the targetted algorithm, an approach was explored in which the non-primitive reversible rules (the so-called derived rules, RDs) were supposed to be obtained from the primitives. Along this line, two ways to construct the RDs were tried out, one based upon using all RPs jointly as a group, and another, using them individually; however, neither of them led to a positive result. Additionally, relations between the properties of reversibility and conservativity of a rule have also been studied in the rule spaces considered.

Keywords: *Cellular automata, reversible cellular automata, NKS, reversible computation.*

Lista de Figuras

Figura 1: Representação da regra elementar 254.	16
Figura 2: Representação da regra 30 e da operação que a denomina.....	16
Figura 3: Evolução de 7 passos da regra elementar 254 para condição inicial simples, com uma célula com estado 1 central e o restante com estado 0.....	17
Figura 4: Evolução de 7 passos da regra elementar 30 para condição inicial simples.....	17
Figura 5: Evolução de 7 passos da regra elementar 90 para condição inicial simples.....	17
Figura 6: Evolução de 300 passos da regra elementar 30 para condição inicial simples.....	18
Figura 7: Evolução de 300 passos da regra elementar 90 para condição inicial simples.....	18
Figura 8: Evolução temporal de 100 passos, para as regras elementares 28, 70, 157 e 199, com condição inicial simples.....	19
Figura 9: Representação das regras elementares 28, 70, 157 e 199.	19
Figura 10: Evolução de 8 passos de um reticulado de tamanho 50 da regra elementar 32 como exemplo da classe I para condição inicial aleatória.	20
Figura 11: Evolução de 250 passos de um reticulado de tamanho 300 da regra elementar 62 como exemplo da classe II para condição inicial aleatória.....	20
Figura 12: Evolução de 200 passos de um reticulado de tamanho 300 da regra elementar 122 como exemplo da classe III para condição inicial aleatória.....	21
Figura 13: Evolução de 400 passos de um reticulado de tamanho 350 da regra elementar 110 como exemplo da classe IV para condição inicial aleatória.	21
Figura 14: Evolução de 15 passos da regra elementar 254 para condição inicial aleatória.	22
Figura 15: Evolução de 15 passos da regra elementar 4 para condição inicial aleatória.	23
Figura 16: Evolução de 50 passos das regras elementares 15(a), 51(b), 85(c), 170(d), 204(e) e 240(f) em reticulado de tamanho 50 com condição inicial aleatória.	23
Figura 17: Aplicação da regra elementar 214R (Reversível) em 62 passos de sua evolução. .	25

Figura 18: Regra elementar 214R (Reversível).....	26
Figura 19: Ilustração das regras elementares 30R e 90R, em 62 passos de tempo. Notar que a parte superior das figuras se refere, respectivamente, às regras 30 e 90.....	26
Figura 20: Evolução da regra 150R em 300 iterações, com condições iniciais nos passos 0 e 1 formadas por apenas uma célula central no estado 1 e as demais no estado 0	27
Figura 21: Evolução da regra 214R em 300 iterações, com condições iniciais nos passos 0 e 1 formadas por apenas uma célula central no estado 1 e as outras no estado 0.....	27
Figura 22: Visualização das 6 regras elementares reversíveis 15, 51, 85, 170, 204 e 240.....	30
Figura 23: Visualização das regras reversíveis para $k=2$	Erro! Indicador não definido.
Figura 24: Visualização das regras reversíveis para $k=3$ e $r=0.5$	34
Figura 25: Visualização de 50 passos da regra 16724175 de $k=2$ e $r=2$ num reticulado tamanho 50 para condição inicial simples (a) e de sua inversa com condição inicial o último passo da regra direta (b).....	40
Figura 26: Visualização de 150 passos da regra 5515 de $k=3$ e $r=0.5$ em reticulado de tamanho 201, para condições iniciais simples, i.e.: (a) uma célula no estado 0 e as restantes no estado 1; (b) uma célula no estado 0 e as demais no estado 2; (c) uma célula no estado 1 e as demais no estado 0; (d) uma célula no estado 1 e as demais no estado 3; (e) uma célula no estado 2 e as demais no estado 0; (f) uma célula no estado 2 e as demais no estado 1.....	41
Figura 27: Visualização das 8 RPs e 8 RDs para $k=2$ e $r=1.5$	42
Figura 28: Visualização das 10 RPs e 52 RDs para $k=2$ e $r=2$	43
Figura 29: Visualização das 12 RPs e 36 RDs para $k=3$ e $r=0.5$	43
Figura 30: Visualização das representações das regras conservativas e reversíveis para $k=2$.	50

Lista de Tabelas

Tabela 1: Relação entre as regras elementares e suas respectivas classes.....	22
Tabela 2: Relação entre regras reversíveis elementares e seus comportamentos.....	24
Tabela 3: Relação entre regras reversíveis e seus correspondentes binários.....	30
Tabela 4: Exemplo de representação de regras k -simétricas.	32
Tabela 5: Relação entre regras reversíveis e suas inversas correspondentes.	36
Tabela 6: Quantidades de transformações de estados entre RPs e RDs para $k=2$ e $r=1.5$	44
Tabela 7: Possíveis distâncias de Hamming entre RPs e RDs.	45
Tabela 8: Quantidade de distâncias de Hamming entre RPs e RDs	45
Tabela 9: Possíveis distâncias de Levenshtein entre RPs e RDs.....	46
Tabela 10: Relação de regras reversíveis e conservativas.....	48

Lista de Abreviaturas, Siglas e Símbolos

ACs Autômatos Celulares

ACRs Autômatos Celulares Reversíveis

k Quantidade de estados que cada célula de um autômato celular pode apresentar

r Raio da vizinhança de um autômato celular

RPs Regras Reversíveis Primitivas

RDs Regras Reversíveis Derivadas

Capítulo 1: Introdução

Autômatos celulares (ACs) têm sido estudados como sistemas computacionais e modelos de sistemas complexos. Isso porque, com regras e programas relativamente simples, os ACs podem levar a comportamentos complexos, mesmo com condições iniciais bastante simples. Inúmeros trabalhos, por exemplo, [Wolfram, 2002], evidenciam o potencial que os ACs possuem, tanto na computação quanto na modelagem em áreas variadas.

Muitos são os parâmetros e propriedades descobertos e desenvolvidos para se estudar os ACs. Uma dessas propriedades é a reversibilidade, isto é, a possibilidade que alguns possuem de admitir uma regra inversa que, quando executada a partir de qualquer configuração da evolução temporal do AC original, reconstitui sua evolução temporal, em ordem reversa. Essa característica dos ACs reversíveis (ACRs) é importante, por exemplo, para encriptação ou compressão de dados, bem como para estudos envolvendo formas reversíveis de computação [Seredynski, Pienlosk e Bouvry, 2004]. Antes da encriptação ou compressão de dados, aplica-se uma regra reversível e para haver um rearranjo dos dados dentro do arquivo que se pretende trabalhar. Antes da desencriptação e descompressão de dados este rearranjo pode ser desfeito com a simples aplicação da regra inversa nos dados rearranjados.

[Boykett, 2004] apresentou um algoritmo para obtenção de regras reversíveis; porém o artigo é de difícil compreensão e não são apresentadas as regras obtidas pelo algoritmo. O principal objetivo do presente trabalho é caminhar na identificação de um algoritmo que permita construir mais facilmente os ACs reversíveis. Para isso o texto trata dos conceitos necessários para que se possa entender o que é um ACR e mostra os resultados obtidos até aqui, os quais ainda não permitiram identificar o algoritmo. Foram observadas quatro características relevantes nos ACRs unidimensionais identificados (os de 2 estados e vizinhanças com 2, 3, 4 e 5 células e os de 3 estados e vizinhanças com 2 e 3 células).

Como ferramentas foram utilizadas funções e arquivos disponíveis no software Mathematica e na biblioteca obtida de [de Oliveira, 2007]. Foi considerada como hipótese que existe um meio mais eficiente de se identificar os ACRs, ao invés de ser feita uma busca exhaustiva, que requer muito esforço computacional.

No Capítulo 2 apresentam-se os ACs e, depois, os ACRs. No Capítulo 3 são abordados os temas relevantes aos ACRs, como as 4 características relevantes dos ACRs e a identificação das regras reversíveis e de suas regras inversas. Também são apresentadas as regras reversíveis e as suas inversas, e também um as suas evoluções. O Capítulo 4 apresenta

o modelo proposto de regras reversíveis primitivas e derivadas, bem como os experimentos feitos para se chegar a esse modelo. O Capítulo 5 é uma conclusão e discute também possíveis continuidades para este trabalho.

Capítulo 2: Autômatos Celulares

Este capítulo apresenta alguns dos conceitos sobre autômatos celulares (ACs): o que são, como aplicar regras, como visualizá-los, e as principais propriedades relacionadas à reversibilidade. Aspectos históricos dos ACs podem ser encontrados em [Toffoli, 1994; Sarkar, 2000; Wolfram, 2002].

2.1 Definição de AC

Segundo [Wolfram, 1983]: “ACs são modelos matemáticos simples para modelar sistemas da natureza. Os ACs podem ser considerados idealizações discretas de sistemas de equações diferenciais parciais freqüentemente utilizados para descrever sistemas na natureza. ACs podem ser vistos como computadores de processamento paralelo de fácil construção.”

Autômatos celulares podem ser entendidos inicialmente como sistemas dinâmicos discretos no espaço, no tempo e nas variáveis de estado. Suas iterações podem ser consideradas locais, pois dependem apenas de cada uma de suas unidades componentes (a célula), e suas vizinhanças correspondentes.

AC unidimensionais geralmente são visualizados em um reticulado uniforme. A célula de um AC pode ter um estado em um determinado tempo. A visualização da representação da célula de um AC unidimensional é dada em um reticulado uniforme, geralmente retangular. A representação dos estados possíveis de um AC pode ser dada na forma de padrões de cores: duas no caso de um AC de 2 estados (por exemplo, preto e branco), três no caso de um AC de 3 estados, e assim por diante.

A condição inicial chamada *simples* para um AC de 2 estados tem apenas uma célula com estado 1 (preta) central, e as outras com estado 0 (brancas). Um AC de 3 estados pode ter 6 condições iniciais simples: com uma célula no estado 0 central e as outras com estado 1, e com uma alternância entre os estados das células centrais e as outras (0 e 2, 1 e 0, 1 e 2, 2 e 0, 2 e 1).

O estado da célula ao longo do tempo varia de acordo com uma determinada regra de transição, cuja base é a configuração de estados das células vizinhas à célula em questão, o que confere localidade aos ACs. Sendo k o número de estados possíveis, r o número de vizinhos de cada lado, e s o tamanho da vizinhança incluindo a própria célula (i.e., $s=2r+1$), a quantidade de regras conhecidas como elementares (i.e., aquelas com $k=2$ e $r=1$) é de 256

regras, sendo que para se representar cada regra são necessárias $k^{2r+1} = 2^{2 \times 1 + 1} = 8$ transições de estados. Com isso, pode-se calcular o tamanho do espaço de regras pela relação $k^{k^{2r+1}}$.

Uma vizinhança de tamanho par inclui a própria célula e mais um número ímpar de vizinhos dos lados; por exemplo, a vizinhança para $s=4$ tem $r=1.5$ ($s=2r+1=2 \times 1.5+1=4$), e esta pode ser a própria célula, uma célula à esquerda e duas células à direita.

A condição de contorno do reticulado unidimensional usualmente é periódica, i.e., a célula faltante após uma extremidade é tomada na extremidade oposta. Todas as transições de estado ocorrem em paralelo, sincronamente, o que define uma nova iteração. Assim, tomando-se como exemplo um AC unidimensional, toda a linha do reticulado muda de estado ao mesmo tempo.

Os bits de saída das transições de estados definem um número binário que, convertido em decimal, dá o número da regra. Por exemplo, a regra elementar 254 diz que o próximo estado de uma célula deverá ser 0 apenas quando todas as 3 células vizinhas forem 0, e em todos os outros 7 casos o próximo estado deverá ser 1. Assim, a **Figura 1** abaixo apresenta uma forma de visualização da regra 254 geralmente vista na literatura:



Figura 1: Representação da regra elementar 254.

A **Figura 2** abaixo apresenta uma forma de visualização da operação de conversão para se obter a regra 30:

Regra 30 :

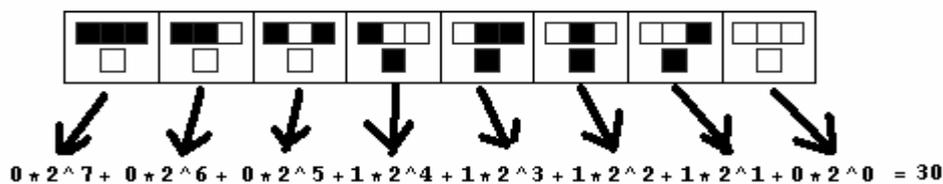


Figura 2: Representação da regra 30 e da operação que a denomina.

É possível fazer um gráfico da evolução temporal de um AC unidimensional ao se colocar a próxima iteração na linha diretamente abaixo da linha atual do reticulado. Por exemplo, aplicando-se a regra 254 por apenas algumas iterações (neste caso com condição inicial simples e por mais 6 passos) obtém-se a Figura 3:

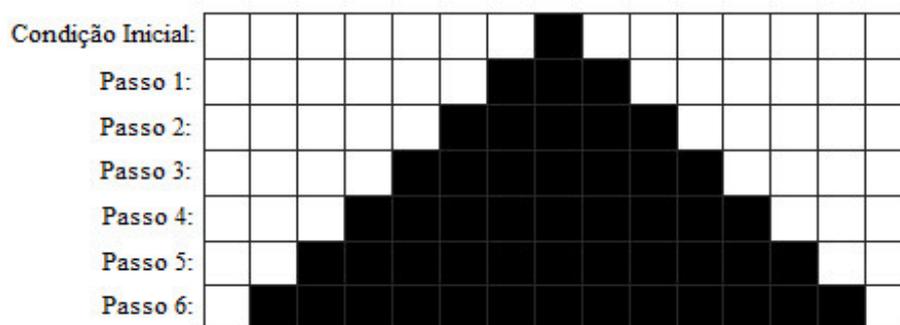


Figura 3: Evolução de 7 passos da regra elementar 254 para condição inicial simples, com uma célula com estado 1 central e o restante com estado 0.

É interessante notar que a observação de apenas para alguns passos de algumas regras não permite inferir nenhum tipo de padrão, como ilustram as Figura 4 e Figura 5 (ou mesmo a Figura 3, todas formadas com apenas sete passos). No entanto, a percepção muda ao serem apresentadas mais iterações, conforme ilustram as Figura 6 e Figura 7 abaixo, em que 300 passos são mostrados para as regras 30 e 90, com a mesma condição inicial simples de uma célula no estado 1 central e as restantes no estado 0.

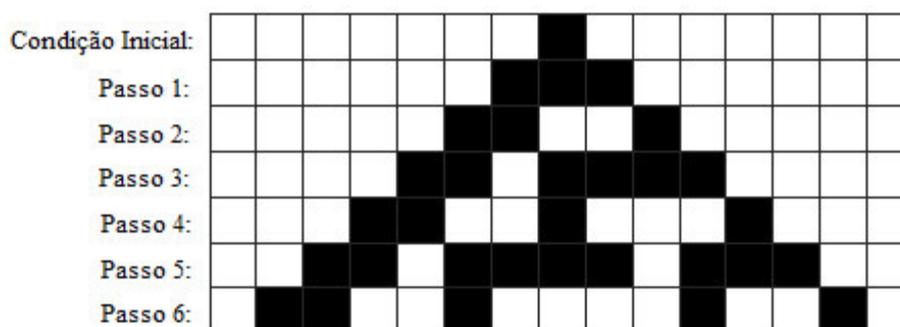


Figura 4: Evolução de 7 passos da regra elementar 30 para condição inicial simples.

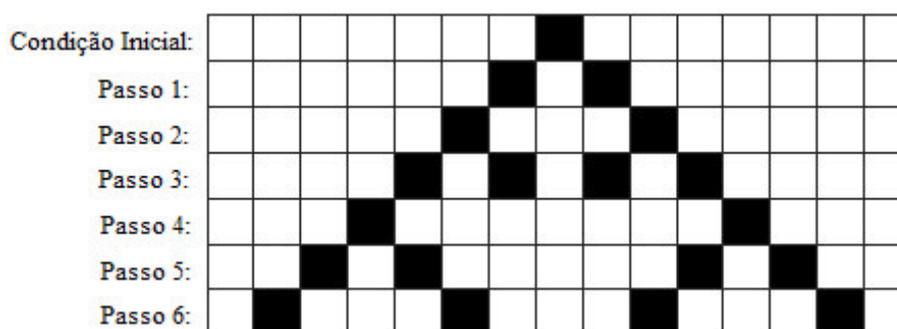


Figura 5: Evolução de 7 passos da regra elementar 90 para condição inicial simples.

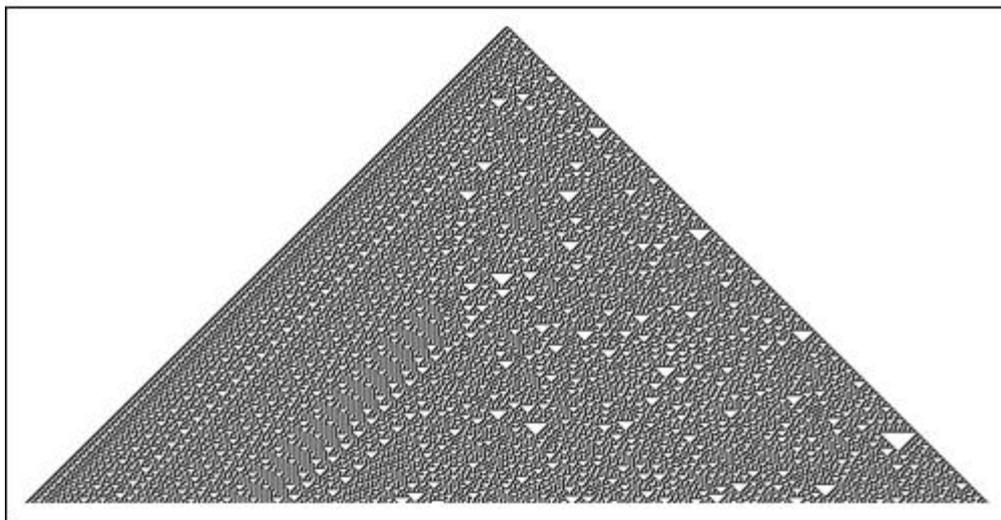


Figura 6: Evolução de 300 passos da regra elementar 30 para condição inicial simples.

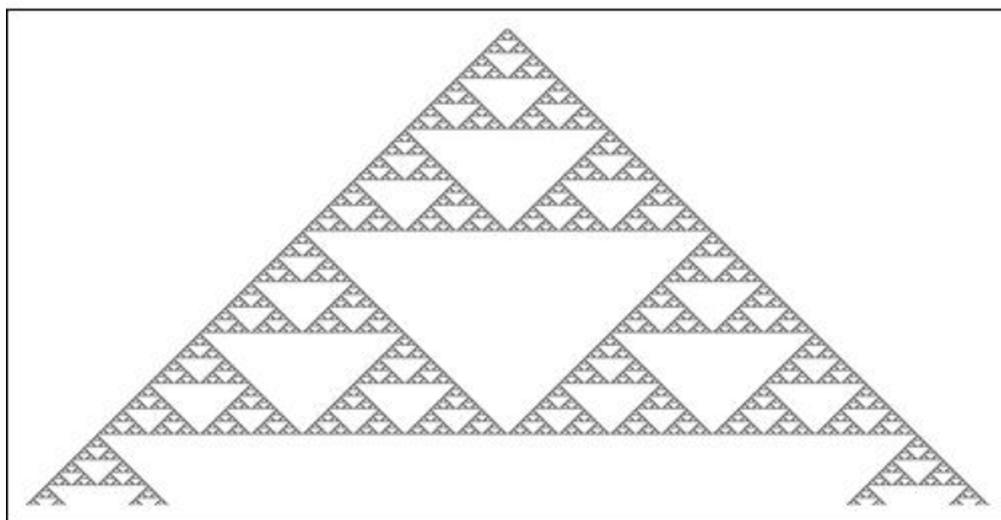


Figura 7: Evolução de 300 passos da regra elementar 90 para condição inicial simples.

Observe-se nessas Figuras que, mesmo reticulados com condição inicial muito simples produzem padrões diversificados, dependendo da regra utilizada. Assim, a Figura 6 parece não gerar um padrão bem definido, sendo inclusive aparentemente aleatório na sua parte direita, mas a Figura 7 forma triângulos que possuem alto grau de simetria.

2.2 Classes e Classificações de ACs

Uma família ou espaço de regras de ACs é usualmente caracterizada pelo par (k, r) ; assim, a família ou espaço de regras elementares é definida por $k=2$ e $r=1$. Existem inúmeras

maneiras de se classificar os ACs pertencentes a uma mesma família, sendo uma delas quanto à equivalência dinâmica das regras, ou ainda segundo o seu comportamento dinâmico.

A Figura 8 mostra uma família cujos elementos possuem equivalência dinâmica:

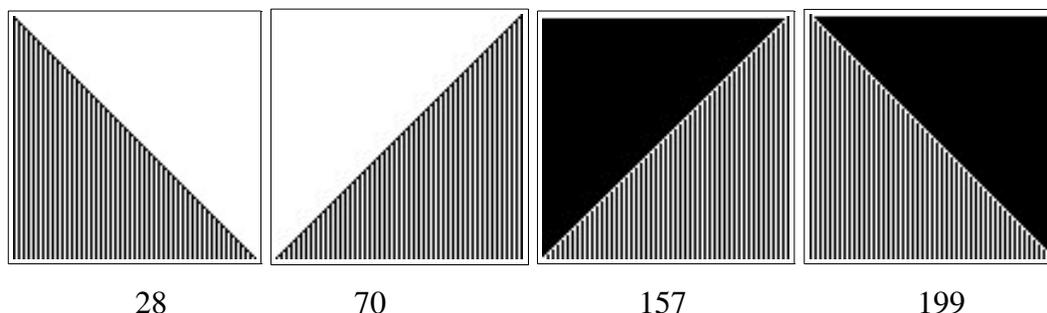


Figura 8: Evolução temporal de 100 passos, para as regras elementares 28, 70, 157 e 199, com condição inicial simples.

A Figura 9 mostra a representação dessas quatro regras, com as transformações envolvidas para cada condição da vizinhança:

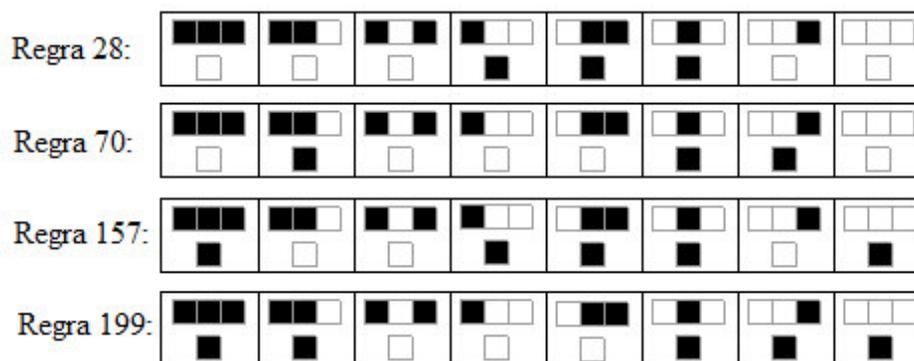


Figura 9: Representação das regras elementares 28, 70, 157 e 199.

Percebe-se que com a mesma condição inicial simples as quatro regras têm a mesma dinâmica, i.e., todas formam a mesma configuração na sua evolução temporal. Tomando por base o padrão temporal gerado pela regra 28, o que o diferencia dos outros padrões é que ocorre ou um espelhamento (regra 70), ou uma inversão entre os bits (regra 199), ou ambos (espelhamento e inversão), ao mesmo tempo (regra 157).

Do ponto de vista do tipo de comportamento dinâmico típico das regras, pode-se separá-las em classes, o que, segundo o esquema de classificação em [Wolfram, 2002] leva a quatro tipos ou classes de regras, conforme a seguir:

Classe I: é a classe que exibe o comportamento mais simples de todas, que é um comportamento uniforme, em que quase todas as configurações iniciais convergem, após um

período, para uma configuração fixa. Aqui a informação é facilmente perdida ou rapidamente transformada em um único estado final, sem ser possível identificar exatamente qual era a condição inicial. A Figura 10 ilustra o exposto.

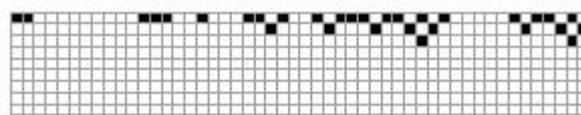


Figura 10: Evolução de 8 passos de um reticulado de tamanho 50 da regra elementar 32 como exemplo da classe I para condição inicial aleatória.

Classe II: existem muitas possibilidades de configurações finais, diferentemente da classe I, e, na sua maior parte, são estruturas – i.e., configurações de estados – que se repetem indefinidamente (ponto fixos) ou se alteram ciclicamente (padrões periódicos). Aqui alguma informação é mantida, mas sempre de forma localizada. Neste caso considera-se que praticamente não há comunicação entre as partes do sistema, significando que perturbações em uma estrutura, são rapidamente atenuadas, não se propagando adiante, para outra parte do sistema. A Figura 11 mostra um exemplo de regra dessa classe.

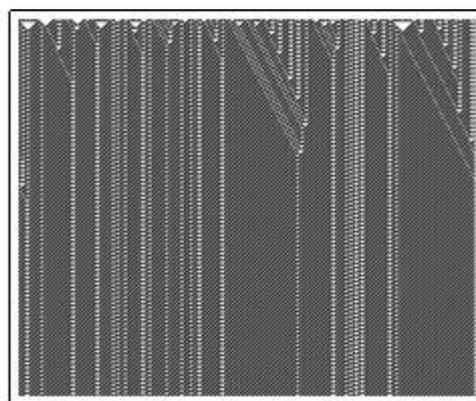


Figura 11: Evolução de 250 passos de um reticulado de tamanho 300 da regra elementar 62 como exemplo da classe II para condição inicial aleatória.

Classe III: o comportamento é aparentemente aleatório (às vezes chamado de caótico), mas ainda assim é possível distinguir alguns padrões, como triângulos. Neste caso há comunicação entre as partes do sistema. A Figura 12 apresenta uma evolução temporal dessa classe.

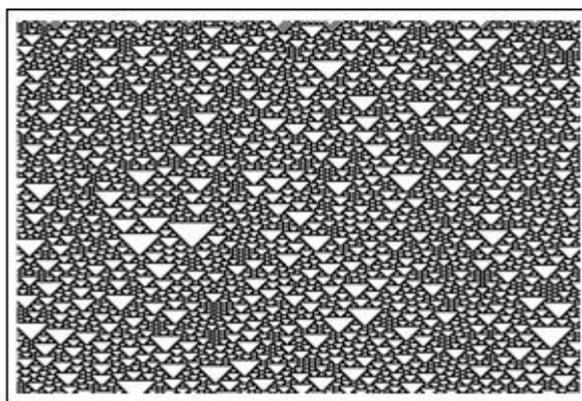


Figura 12: Evolução de 200 passos de um reticulado de tamanho 300 da regra elementar 122 como exemplo da classe III para condição inicial aleatória.

Classe IV: É uma classe cuja fenomenologia fica entre as classes II e III e, desta forma, é uma mistura de estruturas aleatórias e repetitivas, que se movem e interagem umas com as outras de diversas maneiras. Aqui ocorre transmissão de informação, ou seja, há presença de estruturas propagantes, mas não sempre. A velocidade de convergência nessa classe é menor. Assim as mudanças podem se espalhar, mas de forma esporádica. A Figura 13 mostra um padrão característico de regra nessa classe.

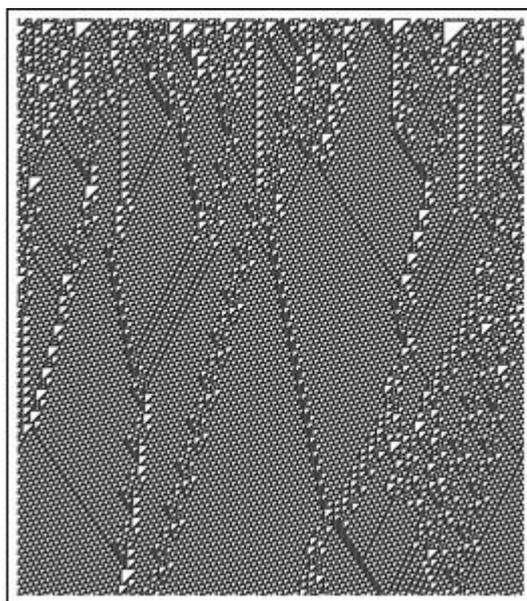


Figura 13: Evolução de 400 passos de um reticulado de tamanho 350 da regra elementar 110 como exemplo da classe IV para condição inicial aleatória.

Com essas considerações é esperado que de forma alguma uma regra que tenha o comportamento da classe I seja reversível. Observou-se que as regras reversíveis têm comportamentos da classe II. A Tabela 1 mostra alguns exemplos de regras elementares e suas respectivas classes:

Tabela 1: Relação entre as regras elementares e suas respectivas classes.

Classe	Regras elementares
I	0, 8, 32, 40, 64, 96, 128, 136, 160, 168, 192, 224, 234, 235, 238, 239, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254 e 255
II	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 87, 88, 91, 92, 93, 94, 95, 97, 98, 99, 100, 103, 104, 107, 108, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 123, 125, 127, 130, 131, 132, 133, 134, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 148, 152, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 162, 163, 164, 166, 167, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 194, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 236, 237, 240, 241, 242, 243, 244, 245 e 246
III	18, 22, 30, 45, 60, 73, 75, 86, 89, 90, 101, 102, 105, 106, 109, 120, 122, 126, 129, 135, 146, 149, 150, 151, 153, 161, 165, 169, 182, 183, 195 e 225
IV	54, 110, 124, 137, 147 e 193

2.3 A Noção de Reversibilidade em ACs

Ter algo que é reversível significa que com as informações atuais, pode-se chegar a algum estado anterior. Isso significa que a informação não pode nem ser destruída e nem criada, apenas modificada ou transformada [Toffoli e Margolus, 1990; Wolfram, 2002].

Assim, uma regra reversível de AC preserva a informação para que seja possível voltar quantos passos atrás forem necessários [Durand-Lose, 1997]. Mas isso não acontece com todas as regras. Por exemplo, a Figura 14 mostra a evolução temporal de apenas 15 passos da regra elementar 254 para condição inicial aleatória, e a Figura 15 tem as mesmas condições para a regra elementar 4:

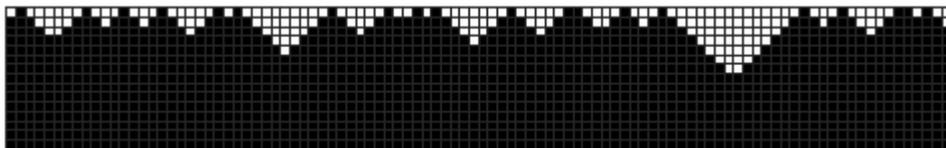


Figura 14: Evolução de 15 passos da regra elementar 254 para condição inicial aleatória.

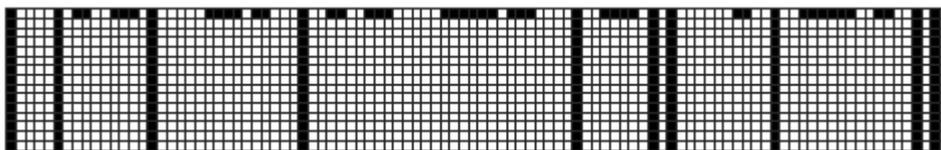


Figura 15: Evolução de 15 passos da regra elementar 4 para condição inicial aleatória.

Verifica-se que na Figura 14 em menos de 15 passos todas as células tomam o valor 1, significando que a informação inicial foi perdida, e na Figura 15, apenas uma parte da informação é mantida nos próximos passos, sendo que a sua maior parte é transformada e perdida já no segundo passo.

Apenas uma minoria de regras tem a propriedade da reversibilidade. De fato, das 256 regras elementares (2 estados e raio 1), existem apenas 6 regras reversíveis: 15, 51, 85, 170, 204, 240 [Wolfram, 2002]; suas evoluções temporais em 50 passos, a partir de condição inicial aleatória, são apresentadas na Figura 16:

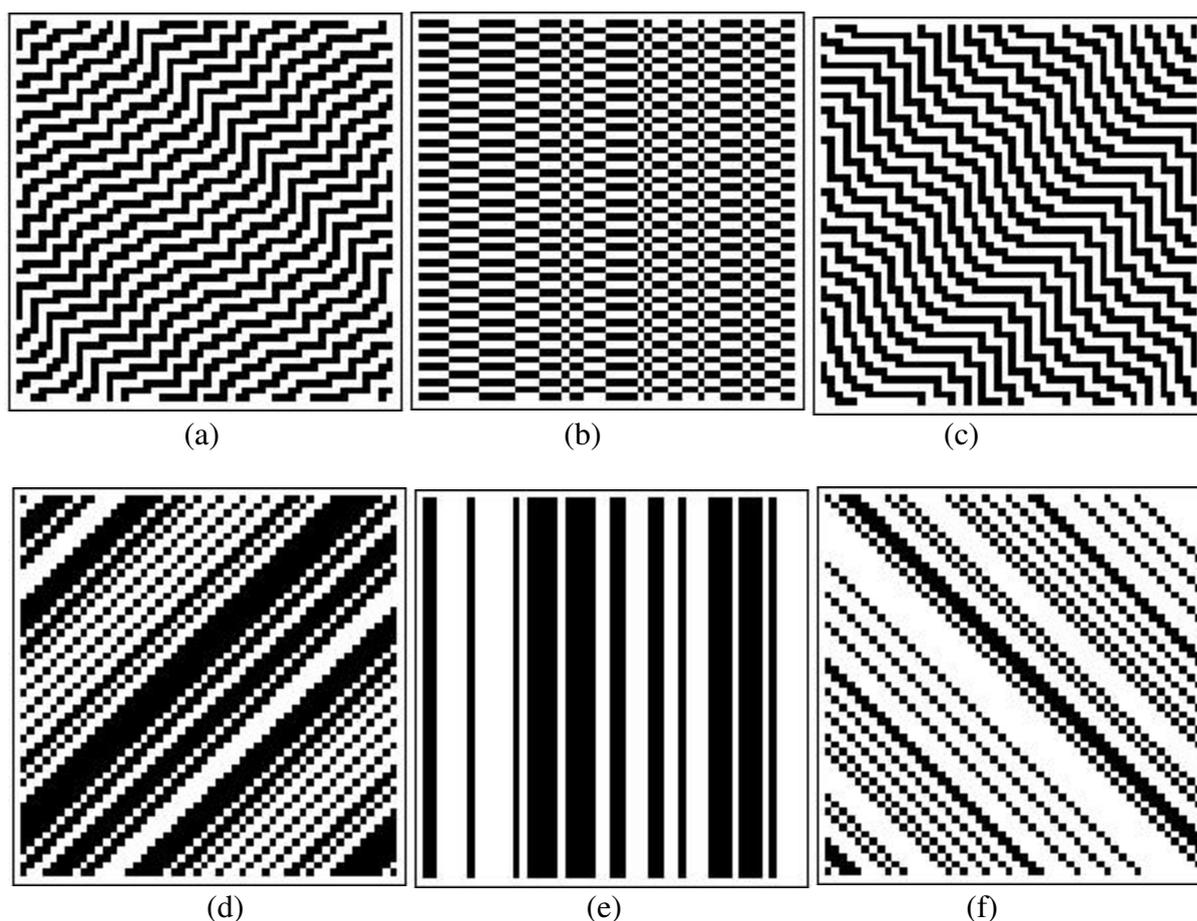


Figura 16: Evolução de 50 passos das regras elementares 15(a), 51(b), 85(c), 170(d), 204(e) e 240(f) em reticulado de tamanho 50 com condição inicial aleatória.

Para os 6 casos de ACRs do espaço elementar, todos apresentam comportamento simples (como inversão dos estados e/ou deslocamento da posição dos bits no reticulado, preservação dos estados e da posição), conforme resume a Tabela 2. Porém, isso não acontece com todos os ACRs [Wolfram, 2002].

Tabela 2: Relação entre regras reversíveis elementares e seus comportamentos.

Regra	Comportamento
15	Inversão e deslocamento para a direita
51	Inversão
85	Inversão e deslocamento para a esquerda
170	Deslocamento para a esquerda
204	Identidade
240	Deslocamento para a direita

De fato, [Toffoli e Margolus, 1990] deram uma classificação para as regras reversíveis, em que as regras lá denominadas triviais têm a própria natureza das identificadas na tabela acima, e que são decorrentes de duas situações:

1. A vizinhança da célula é apenas ela mesma. Ela não olha para as outras células, mas apenas para si. Se for um AC de dois estados, a próxima iteração será ou uma cópia exata da linha ou o seu complemento.
2. A vizinhança da célula é apenas uma outra célula, e ao olhar para esta sua vizinha, ela a copia. Isto significa que, se a vizinhança for apenas a célula à direita, então, na próxima iteração a célula irá copiar a sua vizinha à direita, gerando um deslocamento uniforme de toda a linha.

Qualquer regra binária de AC pode ser expressa de forma booleana e posteriormente minimizada. Por exemplo, a regra 204 do espaço elementar pode ser representada através da seguinte expressão booleana minimizada: $\{ \#, 1, \# \}$, onde $\#$ significa que a célula pode ser qualquer estado, e 1 significa que a regra copia a célula central. Assim o próximo estado é uma cópia da célula central, e assim o comportamento dessa regra é a identidade da condição inicial.

Nos casos triviais a vizinhança consiste em apenas um elemento. Estes são os casos mais simples do processo de minimização de expressões booleanas, em que a regra de transição de estados depende de apenas uma única célula da vizinhança. Nestes casos não

existe interação entre as células. Os casos triviais podem acontecer em qualquer tamanho de raio. De fato, essas são as regras descritas na Seção 4.1 como sendo as regras reversíveis primitivas (RPs). Alguns exemplos podem ser observados na Figura 16, em que, mesmo com condição inicial aleatória, os ACs apresentam evolução temporal de comportamento simples, por causa das regras aplicadas.

[Wolfram, 2002] apresenta uma outra classe de ACRs em que toma-se uma regra e adiciona-se uma dependência em dois passos sucessivos anteriores, ou seja, tratam-se de regras de segunda ordem. Esta classe de regras é classificada como de *espelhos invertidos*, e se aplica a qualquer AC unidimensional. Os padrões temporais resultantes dessas regras se mantêm se forem virados de cabeça para baixo, o que também é chamado de simetria reversa. É o caso observado na Figura 17, na qual a metade de cima do reticulado é um espelho invertido da metade de baixo. Essa classe de regras não se aplica no presente trabalho, dado que elas resultam de uma construção particular.

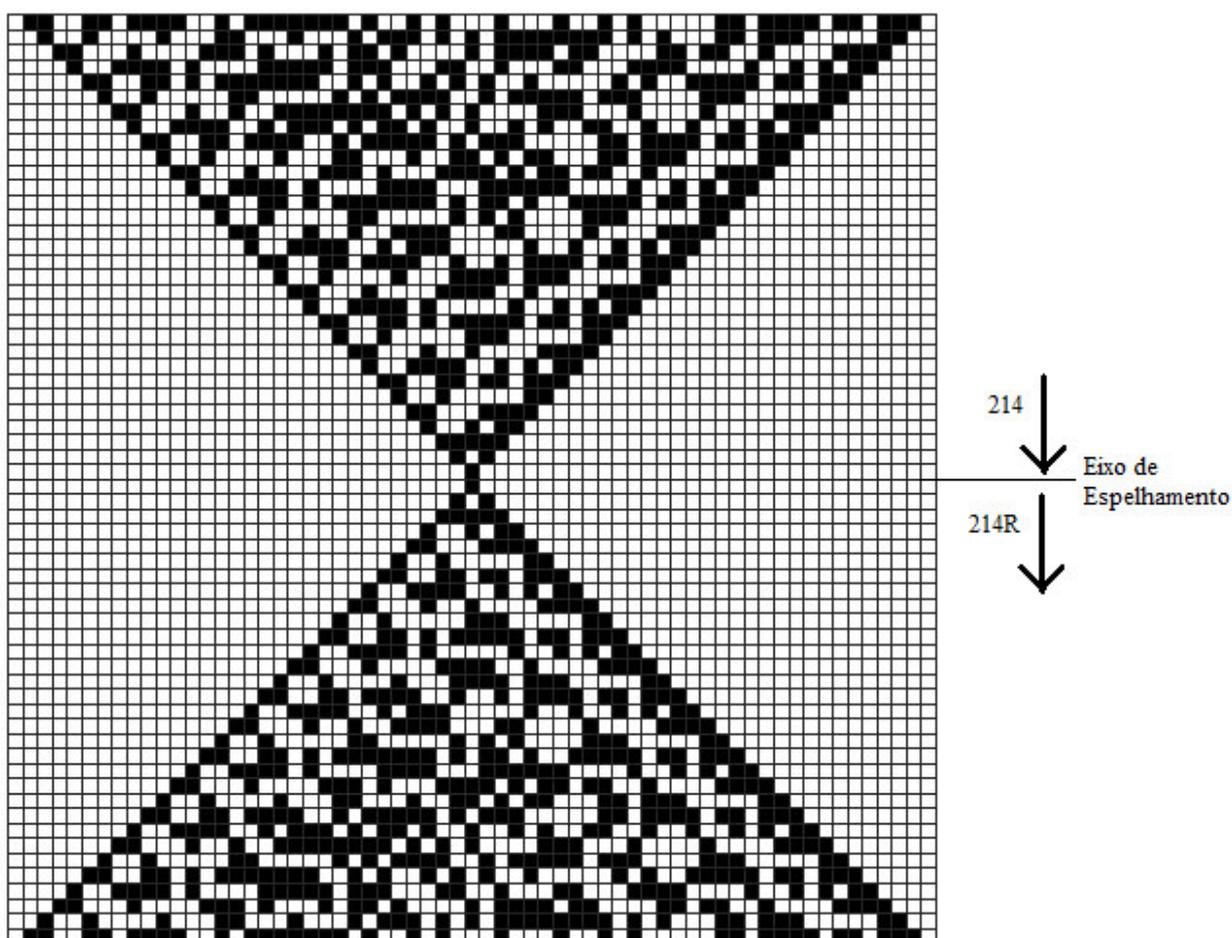


Figura 17: Aplicação da regra elementar 214R (Reversível) em 62 passos de sua evolução.
Fonte: Wolfram (2002, p.437).

Como as regras desta classe são de segunda ordem, é necessário adicionar uma dependência nas células de duas iterações consecutivas ($t-1$ e t). Assim, para se obter o estado da célula na iteração seguinte ($t+1$), observa-se qual era o estado da célula na iteração anterior ($t-1$): se esta tinha o estado 0, então aplica-se a regra normalmente; caso contrário aplica-se a regra complementar (i.e, troca-se o bit de saída da regra de transição, de 0 para 1, ou vice-versa). A Figura 18 apresenta as transformações que foram usadas na Figura 17.

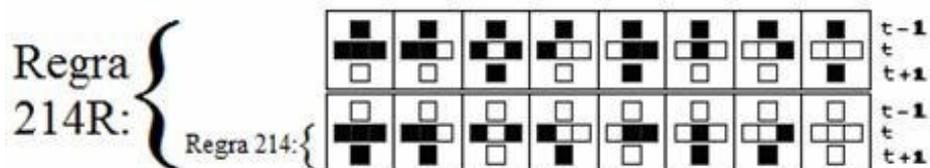


Figura 18: Regra elementar 214R (Reversível).

A Figura 19 ilustra o efeito das regras 30R e 90R, o que se evidencia pela apresentação das evoluções temporais dessas regras (no caso, por 62 passos) subsequentemente às evoluções de suas regras elementares correspondentes (regras 30 e 90, respectivamente), pela mesma quantidade de iterações.

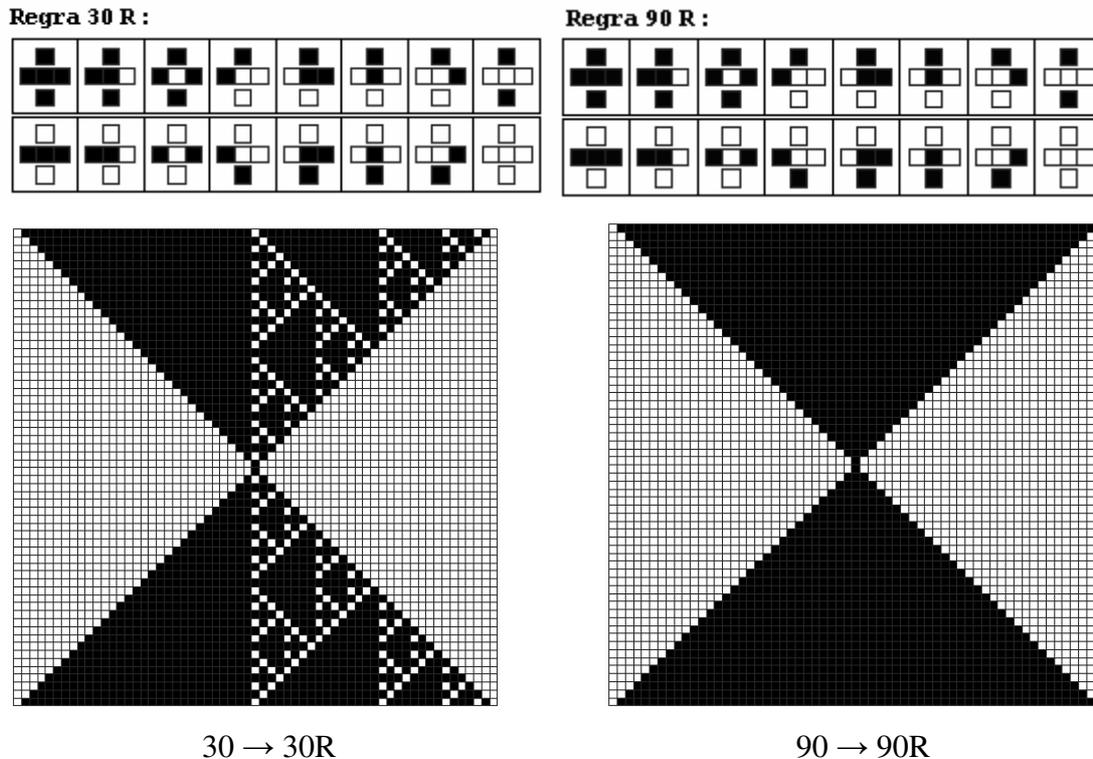


Figura 19: Ilustração das regras elementares 30R e 90R, em 62 passos de tempo. Notar que a parte superior das figuras se refere, respectivamente, às regras 30 e 90.

As Figura 20 e Figura 21 mostram exemplos adicionais, respectivamente com as regras 150R e 214R. A condição inicial de ambas (tanto no passo 0 como no passo 1) foi de apenas uma célula central no estado 1 e as outras no estado 0. Na Figura 20 a evolução parece ser regular, mas na Figura 21 a evolução parece ser aleatória.

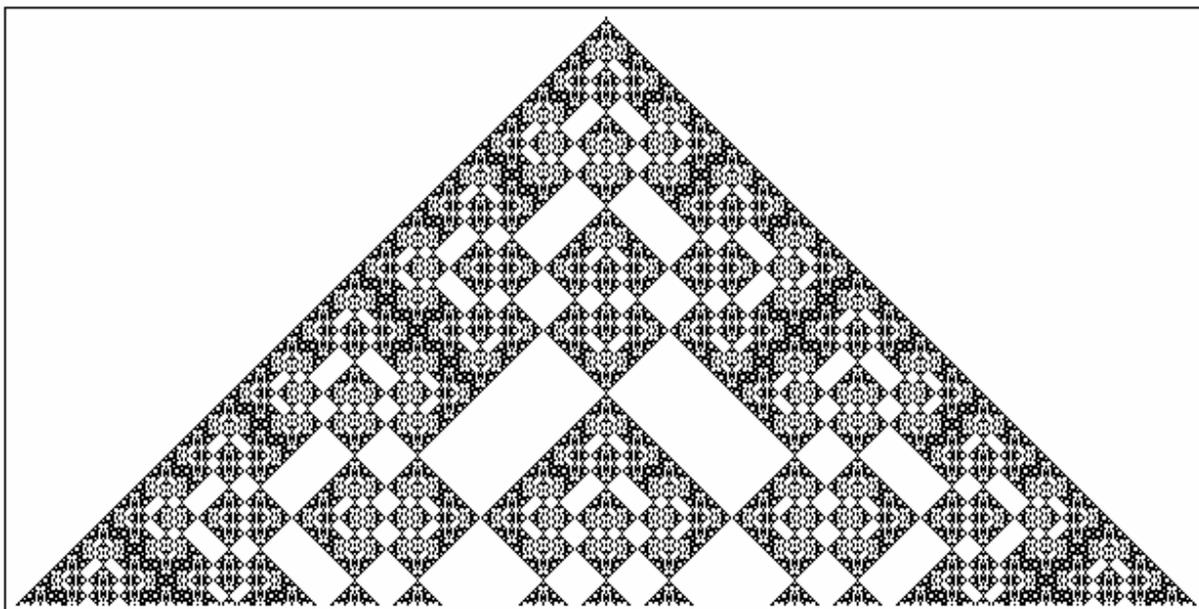


Figura 20: Evolução da regra 150R em 300 iterações, com condições iniciais nos passos 0 e 1 formadas por apenas uma célula central no estado 1 e as demais no estado 0
Fonte: Wolfram (2002, p.439).

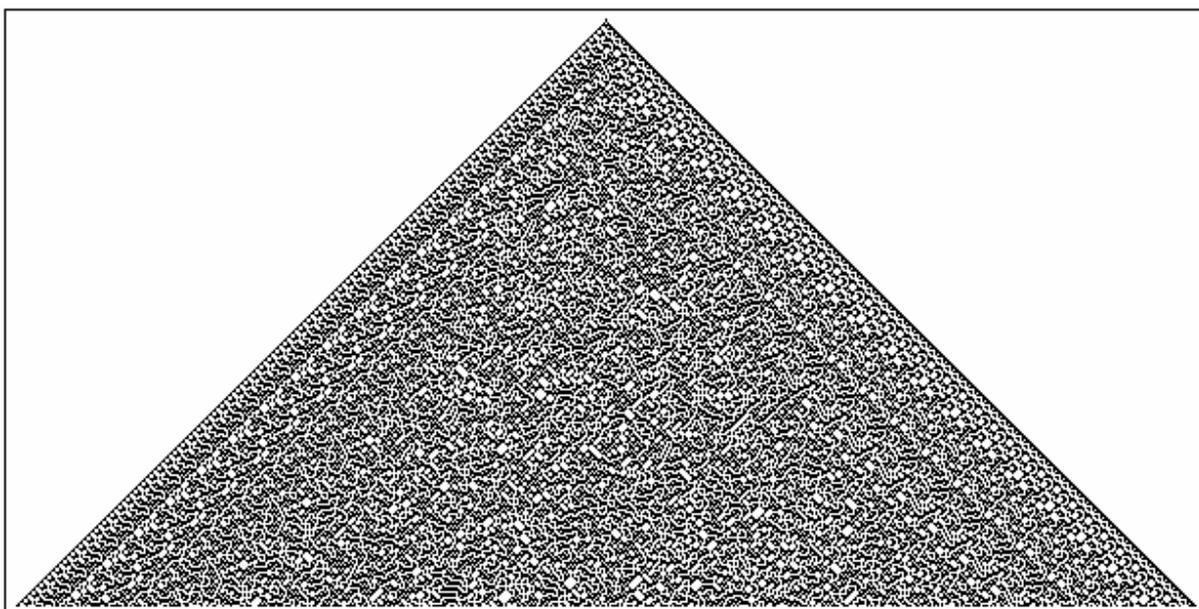


Figura 21: Evolução da regra 214R em 300 iterações, com condições iniciais nos passos 0 e 1 formadas por apenas uma célula central no estado 1 e as outras no estado 0.
Fonte: Wolfram (2002, p.439).

Com o procedimento de segunda ordem descrito é possível obter outras regras que podem ser reversíveis, uma vez que a aplicação da regra sempre será ou da própria regra ou do complemento dela (para os casos em que a célula em $t-1$ for igual a 1). Um problema, porém, é a dependência não apenas do estado atual (t), mas também da iteração anterior ($t-1$). Num processo computacional isso exige um armazenamento de informação maior na memória, já que é necessário armazenar o estado de dois passos.

Em alguns sistemas a condição inicial pode parecer simples, mas com o passar das iterações, a evolução temporal pode ficar cada vez mais complexa, fazendo com que a reversibilidade pareça um processo praticamente impossível de ser obtido.

Assim, torna-se importante a condição inicial do reticulado. Para isso definiu-se a condição conhecida como Jardim do Éden (*Garden of Eden*), para a qual não existe um instante anterior, isto é, esta configuração não possui uma pré-imagem, não sendo possível, portanto, iteragir reversamente a partir dela. Em termos matemáticos, isso corresponde a uma função não-sobrejetora [Morita e Harou, 1989]. Assim, todos os ACs que possuem configurações de Jardim do Éden seguem uma função não-sobrejetora, e portanto, não podem ser reversíveis.

Capítulo 3: Identificação de Regras Reversíveis

Este capítulo responde as seguintes perguntas: Quais regras são reversíveis? Como é possível identificá-las? Uma vez identificadas, como obter suas inversas? Além disso, foram identificadas quatro características importantes para a construção de um algoritmo de identificação dos ACRs, e estes são apresentados aqui.

3.1 Características Empíricas das Regras Reversíveis

O tamanho dos espaços de regras cresce exponencialmente com o valor de r ; por exemplo, enquanto para $k=2$ e $r=1.5$ existem $k^{2r+1} = 2^{2 \times 1.5 + 1} = 65536$ regras, para $r=2$ existem $2^{2 \times 2 + 1} = 4294967296$ regras, e para $r=2.5$ existem $2^{2 \times 2.5 + 1} = 1.84467 \times 10^{19}$ regras. Isso significa que mesmo para k pequeno só seria possível fazer uma busca exaustiva por regras reversíveis para r também pequeno.

Por isso é importante verificar a existência de características que facilitem a identificação dos ACRs. A seguir são apresentadas quatro destas características que foram observadas empiricamente nas regras obtidas. Analisando-se todas as regras reversíveis de um dado espaço de regras pôde-se perceber a existência das seguintes características:

1. Todas são balanceadas (Seção 3.1.1);
2. Há uma simetria em suas representações k -árias (Seção 3.1.2);
3. Um subconjunto das regras possui lei de formação bem definida (Seção 3.1.3); e,
4. Se uma regra é reversível, então todas as suas equivalentes dinâmicas também o são (Seção 3.1.4).

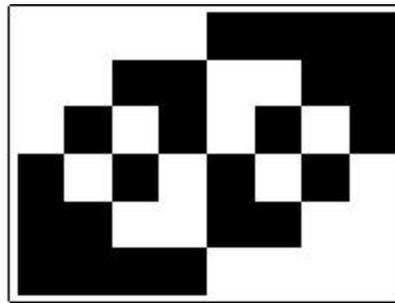
Um aspecto importante do presente trabalho, de certa forma documental, é a apresentação de inúmeras regras reversíveis e suas respectivas regras inversas, muito além das 6 regras reversíveis usualmente encontradas na literatura, por exemplo em [Wolfram, 2002].

3.1.1 Regras Reversíveis são Balanceadas

Para o espaço elementar, transformando-se as regras em representação binária obtém-se a Tabela 3. Ou ainda, para facilitar a visualização, a Figura 22 apresenta um diagrama destas (6) regras elementares reversíveis, em que a cor branca significa bit 0 e a cor preta significa bit 1:

Tabela 3: Relação entre regras reversíveis e seus correspondentes binários.

Regra	Número correspondente binário
15	00001111
51	00110011
85	01010101
170	10101010
204	11001100
240	11110000

**Figura 22:** Visualização das 6 regras elementares reversíveis 15, 51, 85, 170, 204 e 240.

Uma análise das regras reversíveis identificadas revelou que todas são balanceadas, isto é, para $k=2$ apresentam número igual de 0s e 1s em suas representações binárias, para $k=3$ apresentam número igual de 0s, 1s e 2s em suas representações ternárias, e assim por diante. Assim, uma regra é balanceada quando na sua representação as quantidade de 0s, 1s, 2s ... até $k-1$ são as mesmas e iguais a k^{2^r} .

Essa característica é importante pois, ao invés de se fazer uma busca exaustiva por todo o espaço de regras, bastaria fazer uma busca por todas as regras cujas transformações sejam todas as permutações possíveis das suas representações k -árias. Assim, no caso das regras elementares, das 256 regras possíveis, o número de regras cujas transformações são as permutações possíveis entre quatro bits 0s e quatro bits 1s é de apenas $8!/(4! \times 4!) = 70$ regras.

3.1.2 Regras Reversíveis apresentam k -Simetria

Verificou-se que para $k=2$ existe uma simetria *complementar* entre as regras reversíveis, no sentido que, dada uma regra reversível, basta fazer o complemento de cada um

dos bits de sua representação binária (de 0 para 1, e vice-versa) que a regra resultante também é reversível.

Dessa forma, uma busca por regras reversíveis pode ser diminuída pela metade. Uma vez obtida todas as regras reversíveis da primeira metade do espaço de regras, para se descobrir as demais regras reversíveis da segunda metade do espaço de regras assume-se que cada regra obtida na primeira metade tem uma correspondente na segunda, através da seguinte relação: $R_2(i) = k^{k^{2r+1}} - 1 - R_1(i)$, onde $R_1(i)$ e $R_2(i)$ são os números das regras reversíveis correspondentes na primeira e na segunda metades do espaço de regras em questão, respectivamente.

Essa simetria pode ser observada nas Figuras 22 e 23 em que existe um eixo de simetria na metade da representação das regras. Além disso, para $k=2$ a diferença do espaçamento das regras entre as da primeira metade é espelhada em relação à diferença do espaçamento entre as regras da segunda metade. Essa característica é aprofundada na seção a seguir.

Verificou-se adicionalmente que, para k maiores que 2, existe uma forma análoga de simetria que generaliza a simetria complementar do caso $k=2$. Tal característica mais geral, aqui denominada *k-simetria* é obtida através de todas as possíveis $k!$ trocas dos estados nas representações das regras. Assim, por exemplo, para $k=3$ existem $k!-1=3!-1=5$ possibilidades de trocas, sendo as seguintes trocas de estados:

- mantêm os estados 0s e troca os estados 1s para 2s e 2s para 1s,
- mantêm os estados 2s e troca os estados 0s para 1s e 1s para 0s,
- troca os estados 0s para 1s, 1s para 2s, 2s para 0s,
- troca os estados 0s para 2s, 1s para 0s, 2s para 1s, e
- mantêm os estados 1s e troca os estados 0s para 2s e 2s para 0s.

Com isso, uma busca por regras reversíveis pode ser diminuída por um fator k . Como exemplo, a primeira regra reversível do conjunto de regras reversíveis para $k=3$ e $r=1$ é 193720085, sendo a sua representação e a das regras k -simétricas apresentada na Tabela 4.

Tabela 4: Exemplo de representação de regras k -simétricas.

Regra ($k=3, r=1$)	Número correspondente ternário
193720085	00000000011111111222222222
387410647	000000000222222222111111111
3812605051931	111111111000000000222222222
3812992433055	111111111222222222000000000
7625210074339	222222222000000000111111111
7625403764901	222222222111111111000000000

3.1.3 Regras Reversíveis Formadas por Blocos Homogêneos

Foi observada a existência de uma lei de formação de regras reversíveis por blocos homogêneos de estados, de tamanho k^{2r+1-i} , com $i = 1, 2, \dots, 2r+1$. Essa lei de formação é genérica, isto é, aplicando-se para qualquer par (k, r) , e estabelece que deve criar blocos contendo k^{2r-i} 0s, k^{2r-i} 1s, k^{2r-i} 2s até $k-1$, nesta seqüência, até completar o número de bits k^{2r+1} , com $i = 0, 1, \dots, 2r$, alternando os blocos na medida do necessário.

Por exemplo, para $k=2$ a representação binária da regra reversível de número mais baixo sempre contém metade dos bits 0 e metade dos bits 1, independente do tamanho do raio r . Assim, para $k=2$ e $r=1.5$, como são necessários 16 bits para representar uma regra nesse espaço, existe uma regra reversível que possui metade dos bits 0 e metade dos bits 1 em seqüência (a regra reversível 255, com oito bits 0 seguidos por oito bits 1). Também existe uma regra reversível com metade da metade (neste caso, quatro) bits 0 e mais quatro bits 1, seguidos por mais quatro bits 0 e mais quatro bits 1. Isto representa a regra reversível 3855.

Esse processo de tomar o tamanho da representação binária e dividi-lo por blocos homogêneos de estados e preencher cada uma dessas divisões com bits 0 e 1, alternadamente, ocorre sucessivamente até a última regra reversível da primeira metade do espaço de regras, isto é, a regra 21845, formada por um bit 0 e um bit 1 alternados em toda a representação binária.

Com essas inferências é possível obter facilmente algumas regras reversíveis do espaço total de regras. No caso de $k=2$ e $r=1.5$ são inferidas quatro regras do total de 16 regras reversíveis para este caso.

Aplicando-se essas inferências para o espaço de regras elementar, em que são necessários 8 bits para ter a sua representação binária, obtém-se as 3 regras reversíveis da primeira metade do espaço de regras: a regra 15 possui quatro bits 0 seguidos por quatro bits 1; a 51 tem dois bits 0 seguidos por dois bits 1, mais dois bits 0 seguidos por mais dois bits 1; a regra 85 tem um bit 0 e um bit 1 alternados.

Essas regras reversíveis formadas por blocos homogêneos de estados são as regras aqui denominadas de *regras reversíveis primitivas* (RPs), discutidas na Seção 4.1. As demais regras reversíveis (aqui denominadas de *regras reversíveis derivadas*, RDs, também discutidas na Seção 4.1). Estas, a propósito, foram obtidas através de busca exaustiva nos seus espaços.

A partir dos conjuntos de todas as regras reversíveis obtidas foram construídos os diagramas das Figura 23 e Figura 24 a seguir.

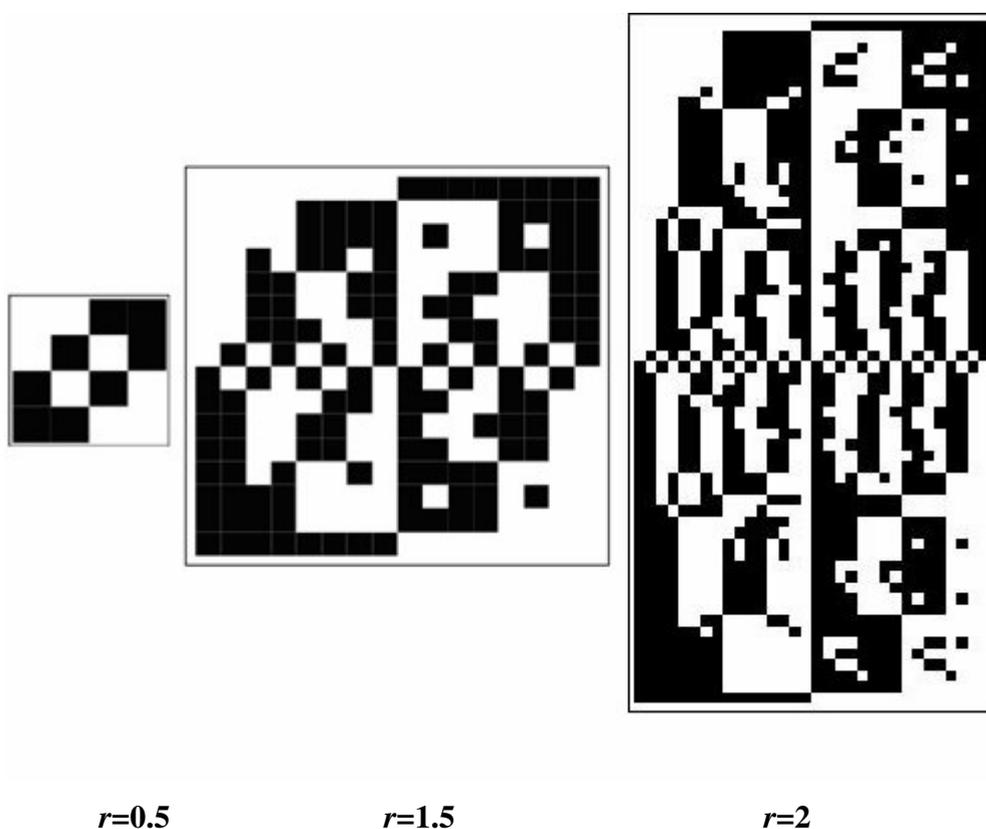


Figura 23: Visualização das regras reversíveis para $k=2$.



Figura 24: Visualização das regras reversíveis para $k=3$ e $r=0.5$.

3.1.4 Reversibilidade de Regras se Preserva na Classe de Equivalência Dinâmica

Verificou-se que se uma regra é reversível, então todas as regras de sua classe de equivalência dinâmica são reversíveis também; se uma regra não é reversível, então todas as regras de sua classe de equivalência dinâmica também não são reversíveis. Isso permite o agrupamento das regras em famílias que, para $k=2$, representam 2, 4, 6 e 20 famílias de regras reversíveis, para, respectivamente, $r=0.5$, $r=1$, $r=1.5$ e $r=2$. Já para $k=3$ representam 7 e 172 famílias de regras reversíveis, para, respectivamente, $r=0.5$ e $r=1$ [Wolfram, 2002].

Uma tabela completa com todas as famílias encontra-se no Apêndice A deste trabalho.

3.2 Regras Inversas

Ao serem aplicadas as regras de transformação de uma regra reversível em uma condição inicial é possível avançar qualquer número de passos e depois voltar para a mesma condição inicial ao se aplicar a sua regra inversa pelo mesmo número de passos [Mora, Martínez e McIntosh, 2006; Sutner, 1999]. Isso pode ser facilmente verificado entre as regras 170 e 240 do espaço elementar. Se, para determinada condição inicial, a regra 170 é aplicada por n passos, isto é, n deslocamentos para a esquerda, para se voltar à condição inicial são necessários n deslocamentos para a direita, isto é, aplicar n vezes a regra 240. Em outras palavras, a regra 240 é a inversa da regra 170. Assim, toda regra reversível tem uma regra inversa correspondente.

Foi gerada a Tabela 5 com as regras inversas de algumas regras reversíveis obtidas implementando-se um algoritmo baseado nas idéias a seguir. Antes, porém, é necessário saber que uma seqüência de DeBruijn é uma seqüência cíclica de um dado alfabeto A de tamanho L , em que cada subseqüência possível de comprimento n está presente somente 1 vez na seqüência [McIntosh, 1991]. Por exemplo, a seqüência de DeBruijn de 2 símbolos (0 e 1) que possui todas as possíveis subseqüências de quatro bits, tem comprimento de 16 bits e é: {1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0}.

Pois bem, com base no exposto, gera-se uma seqüência de DeBruijn, sobre a qual aplica-se então a regra reversível por 1 único passo de tempo. Em seguida, procura-se determinar qual regra (inversa) permitiria gerar a seqüência de DeBruijn, a partir da configuração dela produzida pela aplicação da regra reversível. Nesse processo tenta-se inicialmente construir uma regra inversa de mesmo raio que a regra original; caso ela não possa ser construída, o processo é iterado, aumentando-se o tamanho do raio da regra inversa em passos de 0.5 em 0.5. A idéia de se utilizar uma seqüência de DeBruijn decorre do fato de que ela contém todas as configurações de estado possíveis que são necessárias para definir as vizinhanças das transições de estado para a regra inversa.

No algoritmo implementado a seqüência de DeBruijn inicialmente gerada é de 256 bits, valor escolhido de forma heurística com n arbitrário, segundo a expressão k^{2r+1+n} , valor que tem relação com o tamanho da vizinhança da regra inversa. [Clementi, Menstrasti e Pierini, 1997] não puderam determinar o tamanho máximo da vizinhança da regra inversa; entretanto, [Wolfram, 2002] estabeleceu empiricamente que o valor deveria ser de $r+1/2(k2r+1)(k2r-1)$, e este foi utilizado em nossa implementação. Ressalta-se, entretanto, que algumas regras exigiram que a seqüência gerada fosse aumentada para 2048 bits, dado que em

alguns casos o tamanho da vizinhança da regra inversa é maior que a da regra direta; esse valor mudou devido ao aumento do valor de n em k^{2r+1+n} , sendo que tentativas com seqüências de 16384 bits revelaram que o tamanho do raio da inversa não diminui com uma seqüência de DeBruijn grande. Para $k=3$ o tamanho da seqüência de DeBruijn utilizada foi 6561.

Este algoritmo gera sempre uma regra inversa de raio igual ou maior do que a da regra direta. A Tabela 5 mostra todas as regras reversíveis encontradas (na segunda coluna) e suas inversas correspondentes (na terceira coluna). Em cada caso, o número da regra é seguido pelo número de estados (k) e seu raio (r). Vale observar que algumas das regras inversas encontradas possuem raio maior do que suas correspondentes, conforme possibilidade discutida em [Wolfram, 2002].

Tabela 5: Relação entre regras reversíveis e suas inversas correspondentes.

	Regra, k, r	Regra inversa, k, r
$k=2$ $r=0.5$	3, 2, 1	85, 2, 1
	5, 2, 1	5, 2, 0.5
	10, 2, 1	10, 2, 1
	12, 2, 1	170, 2, 1
$k=2$ $r=1$	15, 2, 1	85, 2, 1
	51, 2, 1	51, 2, 1
	85, 2, 1	15, 2, 1
	170, 2, 1	240, 2, 1
	204, 2, 1	204, 2, 1
	240, 2, 1	170, 2, 1
$k=2$ $r=1.5$	255, 2, 1.5	1431655765, 2, 2
	3855, 2, 1.5	21845, 2, 1.5
	3915, 2, 1.5	59894058173999010849927917856495709455, 2, 3
	11535, 2, 1.5	20328152384153110314474884994207256395, 2, 3
	13107, 2, 1.5	13107, 2, 1.5
	13155, 2, 1.5	14643, 2, 1.5
	14643, 2, 1.5	13155, 2, 1.5
	21845, 2, 1.5	3855, 2, 1.5
	43690, 2, 1.5	61680, 2, 1.5
	50892, 2, 1.5	50892, 2, 1.5
	52380, 2, 1.5	52380, 2, 1.5
	52428, 2, 1.5	52428, 2, 1.5
	54000, 2, 1.5	280388308746939452613446689575272502000, 2, 3
	61620, 2, 1.5	319954214536785353148899722437560955060, 2, 3
	61680, 2, 1.5	43690, 2, 1.5
65280, 2, 1.5	2863311530, 2, 2	
$k=2,$ $r=2$	65535, 2, 2	1431655765, 2, 2
	16711935, 2, 2	858993459, 2, 2
	16713975, 2, 2	886885064079235288801289348763401470997517052474273044871954305240 185152714537505915104989847931760799630544852153230671243380540927 469010004746301276415, 2, 4

16724175, 2, 2	59894058173999010849927917856495709455, 2, 3
16728255, 2, 2	156509784522354887606492965768305010184201091065192084716029759996 488293997155140008655205485450771653373187273496489610158475670574 895683461213687972095, 2, 4
16740555, 2, 2	785000743923191876955626067286395495717119153051897455137097663794 617979266063726789548121286393715045799555759235082257323893123683 174082084126220943615, 2, 4
50135295, 2, 2	522214058077249921512928962934889907028354539973636300955514156805 112104456427444303556303884921650139766463301712699566958082410539 89042875652076683455, 2, 4
217252095, 2, 2	20328152384153110314474884994207256395, 2, 3
252645135, 2, 2	252645135, 2, 2
252645195, 2, 2	755961615, 2, 2
252648975, 2, 2	260509455, 2, 2
252652815, 2, 2	256577295, 2, 2
252656655, 2, 2	264441615, 2, 2
256577295, 2, 2	252652815, 2, 2
256577355, 2, 2	755969295, 2, 2
260509455, 2, 2	252648975, 2, 2
264441615, 2, 2	252656655, 2, 2
284098815, 2, 2	521768272384161005252434092095659501473658912555784078689793988015 290512135432948230615355530208221801664499582487445208400291330907 10687570076909897975, 2, 4
753991935, 2, 2	522596165953086781921968556494459240042993680459464496529672250403 869386135047672859761622342826602909045098851828402394947112316122 66281828370605883535, 2, 4
755961615, 2, 2	252645195, 2, 2
755969295, 2, 2	256577355, 2, 2
858993459, 2, 2	16711935, 2, 2
858993555, 2, 2	176682021014240190955221005119509834544073582137048469843299095703 1981055, 2, 3.5
859005747, 2, 2	176682010524308704126784992318102401087903890021397910904250627891 6653055, 2, 3.5
859386675, 2, 2	176682010524308704126784846741059108503657457940211927279980320760 2733055, 2, 3.5
862139235, 2, 2	72040066293104895, 2, 2.5
862155363, 2, 2	176684695985185194827008023476163332599259301840421088057963465725 1885055, 2, 3.5
909325107, 2, 2	176682010524308704126784846741059108371255908365717938330501910156 5485055, 2, 3.5
959658291, 2, 2	71777214545264895, 2, 2.5
967915827, 2, 2	176682010524308743205383870529473058617092456309861844455668391138 5645055, 2, 3.5
1431655765, 2, 2	65535, 2, 2
2863311530, 2, 2	4294901760, 2, 2
3327051468, 2, 2	115790322390356343571622714928453146219943992072622159828577004373 255877754880, 2, 3.5
3335309004, 2, 2	18374704007416446720, 2, 2.5
3385642188, 2, 2	115790322417106053021661432798636712754924543929819193554759151016 956097658880, 2, 3.5
3432811932, 2, 2	115790322417210952336138931169982613122683813741077465421013027324 001743994880, 2, 3.5
3432828060, 2, 2	18374966859164286720, 2, 2.5
3435580620, 2, 2	115790322417210952336529717158764726829259105626740350060348541501 634212986880, 2, 3.5
3435961548, 2, 2	115790322417210952336529717160220497262184948091061161920184784204 705526906880, 2, 3.5
3435973740, 2, 2	115790322417210952336529717160220497262186272106556906860074278988 811564154880, 2, 3.5
3435973836, 2, 2	4278255360, 2, 2

3538998000, 2, 2	3538998000, 2, 2
3539005680, 2, 2	3539005680, 2, 2
3540975360, 2, 2	126228071860194052226183989309194506317622466675404959225864637799 271460508074832500123261768805097126442323024272509685964299896882 63395864349522785140480, 2, 4
4010868480, 2, 2	125209228658633618107727356494424446564818487681181203328516071384 815788773590094708867693083189716668904013133343328201825105022710 19100936428902704807680, 2, 4
4030525680, 2, 2	4030525680, 2, 2
4034457840, 2, 2	4034457840, 2, 2
4038389940, 2, 2	4038389940, 2, 2
4038390000, 2, 2	4038390000, 2, 2
4042310640, 2, 2	4042310640, 2, 2
4042314480, 2, 2	4042314480, 2, 2
4042318320, 2, 2	4042318320, 2, 2
4042322100, 2, 2	4042322100, 2, 2
4042322160, 2, 2	4042322160, 2, 2
4077715200, 2, 2	280388308746939452613446689575272502000, 2, 3
4244832000, 2, 2	132512981454202422119675320324375411172951647295272012930075316837 252757360763918367932190926814526560366586709129895612435954071413 71674262972435318112000, 2, 4
4278226740, 2, 2	133555483133472884213818281425564002034750664525464469280705942186 813770914600422095158981359326207673991273483013032106142591715803 34303664605278400200560, 2, 4
4278239040, 2, 2	133555865241348721074227321019123571367765303665950297476280100280 412528196279042323715186677784112626760552118563147808970580745708 92580903557996929400640, 2, 4
4278243120, 2, 2	319954214536785353148899722437560955060, 2, 3
4278253320, 2, 2	133556311027041809990487815889962801773319999293368149698545820449 202349788600036819788127626138826055098654082282373063329138536788 55859258863572096186120, 2, 4
4278255360, 2, 2	3435973836, 2, 2
4294901760, 2, 2	2863311530, 2, 2

k=3 r=0.5	377, 3, 0.5	1466461054805, 3, 1
	481, 3, 0.5	389877067126787111647099040862798827205050706856032990805155703827 74032181275276645794549066661195158565088763392093, 3, 2
	611, 3, 0.5	477988132518808423437359237689989699527610172364117256083130331132 9755791795934950666096857507945639824080306294747, 3, 2
	715, 3, 0.5	3226214320571, 3, 1
	1079, 3, 0.5	270667978655228866283805833390717058768646724109801337782013561003 0102677282035453991645208468354759900382824046423, 3, 2
	2119, 3, 0.5	517724495342661171891790306847350289006411499946194473757511045407 88559720777656875287000902405338918094556570590091, 3, 2
	2899, 3, 0.5	441707105592682000935487391937616987394791568919611970380434896360 23164967560025387480678189260172358374332469012903, 3, 2
	3785, 3, 0.5	3785, 3, 0.5
	3791, 3, 0.5	5243, 3, 0.5
	3841, 3, 0.5	8321, 3, 0.5
	4217, 3, 0.5	4217, 3, 0.5
	4745, 3, 0.5	210199600445018162114019423803429205213949051702292528277521169715 10371855488147674615968108318074199226377250573285, 3, 2
	5243, 3, 0.5	3791, 3, 0.5
	5299, 3, 0.5	8327, 3, 0.5
	5311, 3, 0.5	8543, 3, 0.5
	5515, 3, 0.5	11243, 3, 0.5
	7995, 3, 0.5	430189319266927581093623313920990729574849155127705530474817298019 67802126163414555994871717571510758416722756652723, 3, 2

8321, 3, 0.5	3841, 3, 0.5
8327, 3, 0.5	5299, 3, 0.5
8439, 3, 0.5	11139, 3, 0.5
8543, 3, 0.5	5311, 3, 0.5
8801, 3, 0.5	213079047026456767074485443307585769668934655150269138253925569300 2421256583730038248741972624023959921577967866333, 3, 2
9503, 3, 0.5	2053045476727, 3, 1
9711, 3, 0.5	354171929516948410137320399011257427963229224101123027097741148972 02407372945783068188549004426344198696498655075535, 3, 2
9971, 3, 0.5	128423317532161781236784469885382774692357913779756804947636221497 17295681572210771066742159328576839527348292816007, 3, 2
10179, 3, 0.5	4399383164415, 3, 1
10881, 3, 0.5	482019357732822470382011664995808889764590017191284510050096490552 16934912448163297681000840170487958225966462273533, 3, 2
11139, 3, 0.5	8439, 3, 0.5
11243, 3, 0.5	5515, 3, 0.5
11355, 3, 0.5	11355, 3, 0.5
11361, 3, 0.5	11361, 3, 0.5
11687, 3, 0.5	938699585548985217111922358355040012325306724040374852307834264755 1207157382378276609322744262592039654519155735467, 3, 2
14167, 3, 0.5	14371, 3, 0.5
14371, 3, 0.5	14167, 3, 0.5
14383, 3, 0.5	14383, 3, 0.5
14439, 3, 0.5	14439, 3, 0.5
14937, 3, 0.5	661696824414591419915091282055178511755691672345024972577731024664 80595238235292268859581798513608917564677975092341, 3, 2
15465, 3, 0.5	15465, 3, 0.5
15841, 3, 0.5	15841, 3, 0.5
15891, 3, 0.5	15891, 3, 0.5
15897, 3, 0.5	15897, 3, 0.5
16783, 3, 0.5	778026466304711060317918470023103715737110051643280015624468767904 39759936341061666866227162569091077136536069930159, 3, 2
17563, 3, 0.5	743473107327447800792326235973224942277282810267560695907615972882 73671412151229172408807747503106277263706932849619, 3, 2
18603, 3, 0.5	824097611607728739685374782089608747016879706810905775246939161266 61211301927504992809453049323737476966974919370879, 3, 2
18967, 3, 0.5	5572552008259, 3, 1
19071, 3, 0.5	844829626994086695400730122519536011092776051636337367077050838279 60864416441404489483904698363328356890672401619203, 3, 2
19201, 3, 0.5	850588520156963905321662161527849140002747258532290587029859637449 88545837139709905226807934207659156869477257799293, 3, 2
19305, 3, 0.5	6159136430181, 3, 1

3.3 As Evoluções Temporais de Regras Reversíveis

Assim como no caso de $k=2$ e $r=1$, apresentada na Tabela 1, todas as evoluções das regras reversíveis descobertas em $k=2$ têm uma característica simples (como inversão dos estados, deslocamento da posição dos bits no reticulado e preservação dos estados). Isso pode ser observado na

Figura 25, onde são mostradas, à esquerda, 50 passos da regra 16724175 de $k=2$ e $r=2$ com condição inicial simples, e, à esquerda, 50 passos de sua inversa (a regra 59894058173999010849927917856495709455 de $k=2$ e $r=3$) com a condição inicial sendo o último passo da evolução da regra direta. Observe-se que a primeira linha do reticulado da esquerda e a última linha do reticulado da direita são iguais, evidenciando a relação inversa entre as evoluções das duas regras.

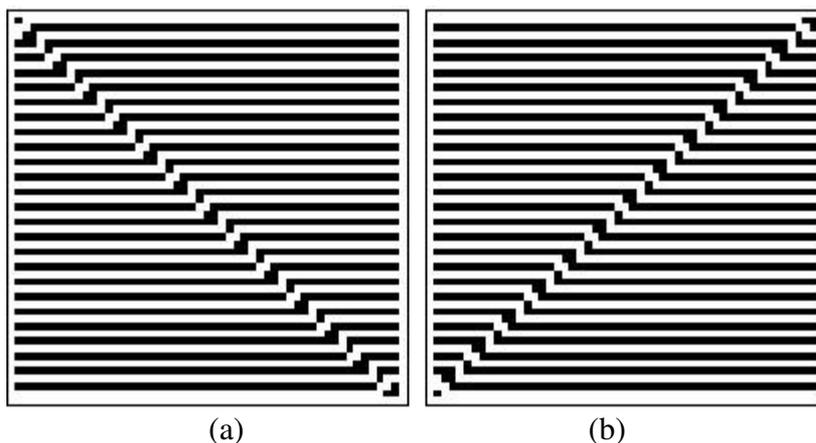


Figura 25: Visualização de 50 passos da regra 16724175 de $k=2$ e $r=2$ num reticulado tamanho 50 para condição inicial simples (a) e de sua inversa com condição inicial o último passo da regra direta (b).

Um exemplo de evolução das regras reversíveis de $k=3$ estados é mostrado na Figura 26 (na página a seguir), em que se apresentam todas as 6 possíveis condições iniciais simples.

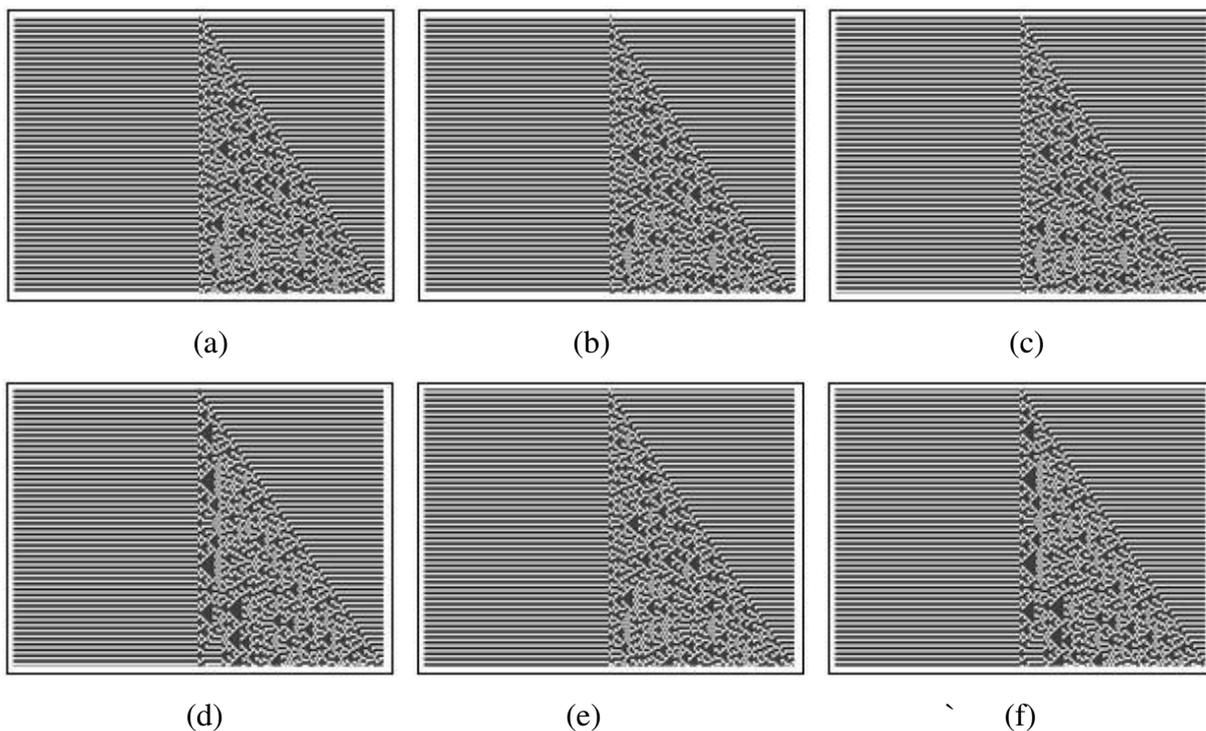


Figura 26: Visualização de 150 passos da regra 5515 de $k=3$ e $r=0.5$ em reticulado de tamanho 201, para condições iniciais simples, i.e.: (a) uma célula no estado 0 e as restantes no estado 1; (b) uma célula no estado 0 e as demais no estado 2; (c) uma célula no estado 1 e as demais no estado 0; (d) uma célula no estado 1 e as demais no estado 3; (e) uma célula no estado 2 e as demais no estado 0; (f) uma célula no estado 2 e as demais no estado 1.

Neste caso não se observam apenas as características simples nos reticulados. Assim como muitas outras regras de $k=3$, esta apresenta uma evolução temporal típica da Classe IV de Wolfram.

Capítulo 4: O Modelo de Regras Reversíveis Primitivas e Derivadas

4.1 Regras Reversíveis Primitivas e Derivadas

Conforme já se mencionou na seção anterior, pode-se separar o conjunto de regras reversíveis em dois subconjuntos, os quais foram denominados neste trabalho *regras reversíveis primitivas* (RPs) e *regras reversíveis derivadas* (RDs).

As RPs são as formadas pelos blocos homogêneos apresentados na Seção 3.1.3, e as RDs são todas as outras regras reversíveis. Por serem regras bem definidas no espaço e terem a sua representação facilmente descrita, as RPs surgiram de forma mais simples nas buscas e acabaram despontando como referenciais claros no espaço de regras reversíveis. Dessa forma, surgiu a idéia de que elas talvez pudessem ser tomadas como referências efetivas no espaço de regras reversíveis, a partir das quais as demais pudessem ser localizadas. Esta constitui, em essência, a abordagem que passou a guiar os passos seguintes do trabalho, e que acabou por definir sua estrutura conceitual de suporte.

Desta forma, o conjunto de RPs para $k=2$, $r=0.5$ e $r=1$ são os próprios conjuntos de regras reversíveis. Mas, como mostra a Figura 27 para $k=2$ e $r=1.5$ pode-se fazer essa separação entre RPs e RDs.

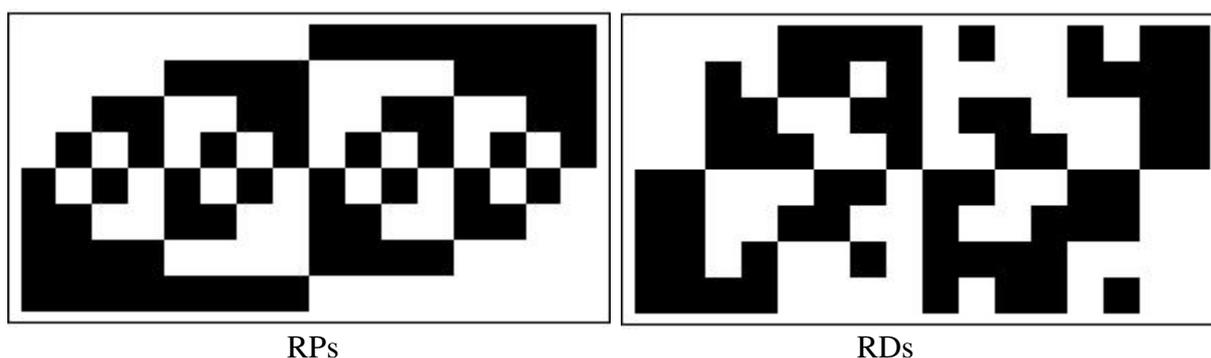


Figura 27: Visualização das 8 RPs e 8 RDs para $k=2$ e $r=1.5$.

Já a Figura 28 mostra as 10 RPs e as 52 RDs para $k=2$ e $r=2$, e a Figura 29 mostra as 12 RPs e 36 RDs para $k=3$ e $r=0.5$.

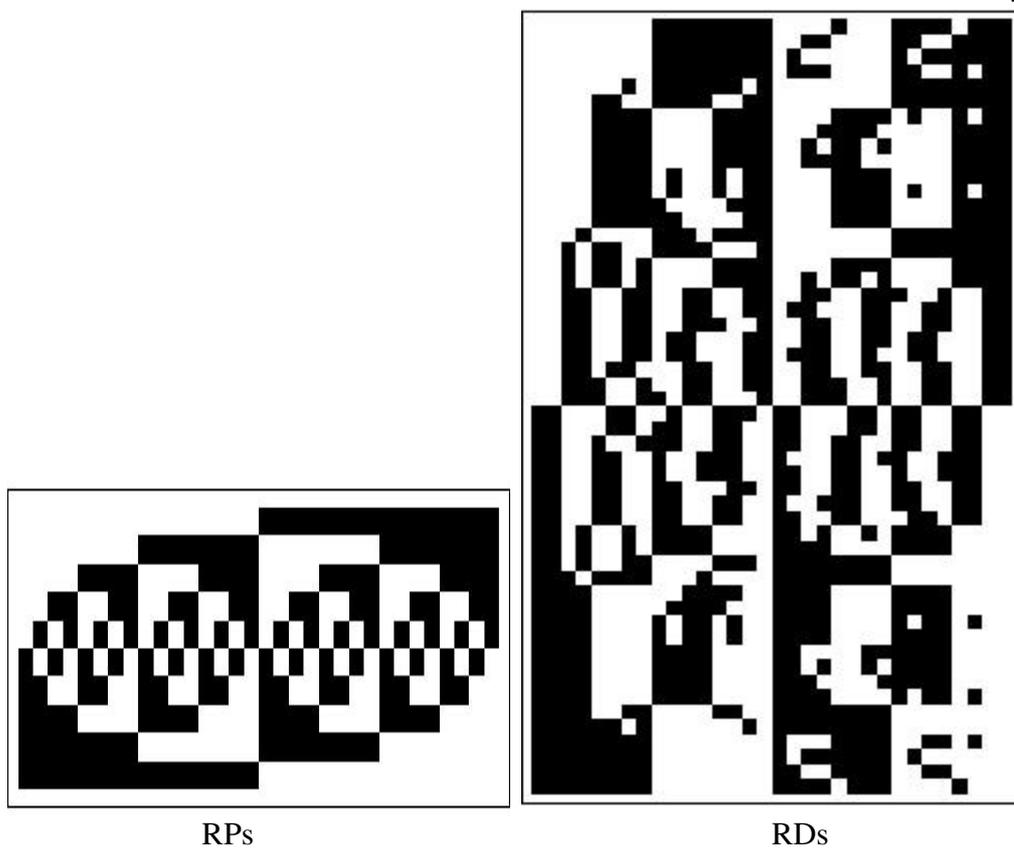


Figura 28: Visualização das 10 RPs e 52 RDs para $k=2$ e $r=2$.

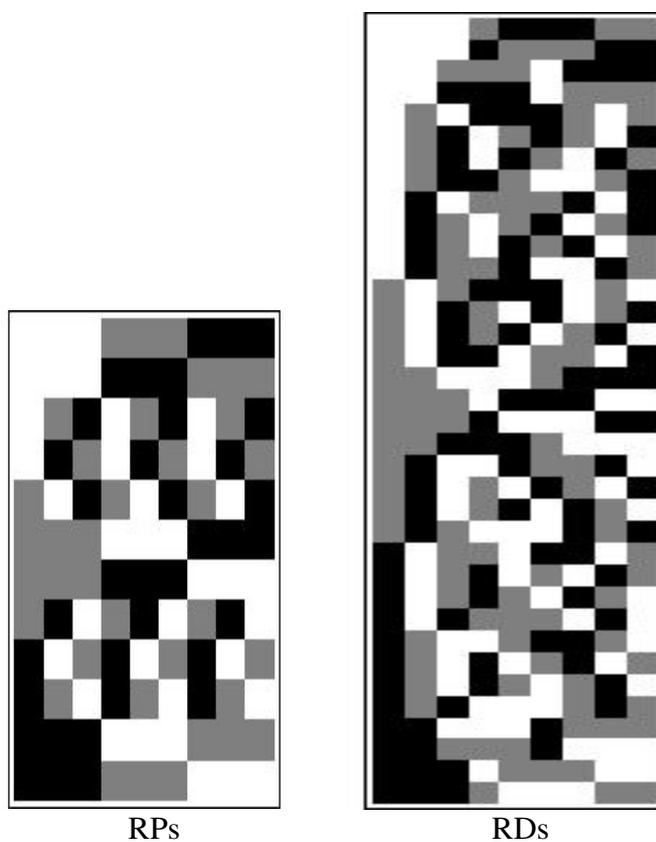


Figura 29: Visualização das 12 RPs e 36 RDs para $k=3$ e $r=0.5$.

4.2 Operações entre RPs e RDs

Uma regra que faz parte do conjunto de RPs faz parte de uma família de mesma equivalência dinâmica de outras regras RPs e uma regra que faz parte do conjunto de RDs faz parte de uma família de mesma equivalência dinâmica de outras regras RDs.

Foi testada a hipótese de que as RDs poderiam ser obtidas a partir das RPs, através de algumas trocas nas representações. Para essa hipótese foram seguidas duas linhas de investigação distintas, em que a geração das RDs ocorreria a partir de:

1. Todas as RPs, consideradas em grupo; e
2. Operações entre as RPs.

4.2.1 Primeiro esquema de construção das RDs

Para a primeira linha de investigação foram geradas e analisadas as distâncias de Hamming e de Levenshtein [Bogolmolny, 2007; Gilleland, 2007] de cada RP para cada RD. Foram obtidos mapas dessas distâncias para as regras que já tinham sido obtidas. Dessa forma, ao observar um mapa com todas as distâncias, talvez fosse possível verificar algum padrão que sugerisse que transformações nas RPs poderiam ser feitas para se obter as RDs, por exemplo, quais estados k -ários deveriam ser alterados.

Para $k=2$ e $r=1,5$ as transformações observadas entre as RPs e as RDs são apresentadas na Tabela 6, sendo que o primeiro número em cada célula é a quantidade de transformações de 0 para 1 e o segundo é a quantidade de transformações de 1 para 0, as linhas referem-se às RPs ordenadas em ordem crescente do seu número, e as colunas referem-se às RDs ordenadas também em ordem crescente do seu número. As distâncias de Hamming são as somas das duas quantidades expressas em cada célula.

Tabela 6: Quantidades de transformações de estados entre RPs e RDs para $k=2$ e $r=1.5$.

		RDs							
		1	2	3	4	5	6	7	8
RPs	1	4,4	1,1	4,4	4,4	4,4	4,4	7,7	4,4
	2	4,4	1,1	4,4	4,4	4,4	4,4	7,7	4,4
	3	4,4	4,4	1,1	4,4	4,4	7,7	4,4	4,4
	4	4,4	4,4	1,1	4,4	4,4	7,7	4,4	4,4
	5	4,4	4,4	7,7	4,4	4,4	1,1	4,4	4,4
	6	4,4	4,4	7,7	4,4	4,4	1,1	4,4	4,4
	7	4,4	7,7	4,4	4,4	4,4	4,4	1,1	4,4
	8	4,4	7,7	4,4	4,4	4,4	4,4	1,1	4,4

Para os outros casos, as tabelas análogas ficam cada vez maiores e mais complicadas, sendo que, com a observação um mapa com todas as distâncias de Hamming não foi possível verificar nenhum padrão que sugerisse que transformações nas RPs poderiam ser feitas para se obter as RDs.

Procurou-se ainda obter alguma relação entre as menores distâncias de Hamming observadas nos mapas e quais seriam as RPs e RDs envolvidas nessas menores distâncias de Hamming. Com isso seria obtido o número mínimo de transformações para transformar as RPs em RDs.

As possíveis distâncias de Hamming obtidas são apresentadas na Tabela 7.

Tabela 7: Possíveis distâncias de Hamming entre RPs e RDs.

Caso	Distâncias de Hamming
$k=2, r=1.5$	2, 8, 14
$k=2, r=2$	2, 4, 6, 14, 16, 18, 26, 28, 30
$k=3, r=0.5$	2, 4, 6, 7, 8
$k=3, r=1$	2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

Sempre tomando como base de comparação as RPs em relação às RDs foi construída a Tabela 8.

Tabela 8: Quantidade de distâncias de Hamming entre RPs e RDs

	$k=2, r=1.5$	$k=2, r=2$	$k=3, r=0.5$	$k=3, r=1$
Número de RPs	8	10	12	18
Número de RDs	8	52	36	1782
Soma das distâncias de Hamming de todas as RPs e cada RD (soma de qualquer coluna da Tabela 6)	64	160	72	324
Soma das distâncias de Hamming de uma RP e todas as RDs (soma de qualquer linha da Tabela 6)	64	832	216	32076

Tomando por base uma RP e trocando algum bit a fim de obter uma RD, foi observado que a soma de quantidade de trocas (i.e., a distância de Hamming) para chegar em uma RD é igual em todas as RPs. Assim, o esforço computacional para se chegar nas RDs independe da

RD. Também, foi obtida a relação de que a soma de quantidades de trocas (soma das distâncias de Hamming) a partir de uma RP e todas as RDs é dada por: $\#RDs \times (k-1)k^{2r}$, onde $\#RDs$ é a quantidade de regras derivadas.

Considerando a hipótese adotada de que as RDs poderiam ser obtidas a partir das RPs, através de algumas trocas nas representações, observou-se então a distância de Levenshtein, que é o número mínimo de deleções, inserções e substituições unitárias de caracteres para transformar uma seqüência em outra. Substituições unitárias são as trocas de estados (por exemplo, para $k=2$ as possíveis substituições são do estado 0 para o estado 1 e do estado 1 para o estado 0). A distância de Levenshtein é sempre igual ou menor que a distância de Hamming na comparação de duas seqüências. As possíveis distâncias de Levenshtein obtidas são apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9: Possíveis distâncias de Levenshtein entre RPs e RDs

Caso	Distâncias de Levenshtein
$k=2, r=1.5$	2, 6, 7, 8
$k=2, r=2$	2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
$k=3, r=0.5$	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
$k=3, r=1$	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24

Para todos os casos foram observados quais estados devem ser trocados. Porém, mesmo com essa observação e também sabendo quantas mudanças devem ser feitas nos estados das representações das RPs para se chegar nas RDs não se chegou a nenhuma relação entre quais estados que devem ser trocados.

4.2.2 Segundo esquema de construção das RDs

Uma vez que a primeira linha de investigação não se mostrou efetiva, passou-se então à segunda abordagem, em que com algumas operações entre as RPs poderiam ser obtidas as RDs. Dessa forma, foram verificadas duas outras possibilidades de se obter as RDs, quais sejam, a partir de:

- Concatenações de blocos das RPs; ou

- Operações lógicas entre estados de células homólogas (de mesma posição) nas representações das RPs.

No primeiro caso, tomando-se blocos de tamanho 4 (i.e., 4 estados consecutivos), de diferentes RPs, não foi possível obter nenhuma RD. Isso também não aconteceu para diversos blocos de tamanho 2. Naturalmente, obtém-se todas as RDs ao se tomar todas as possibilidades de blocos de tamanho 2, mas este é o caso trivial, pois envolve o próprio tamanho do espaço k^{2r+1} . Isso também aconteceu para blocos de tamanho 1, que significa fazer uma busca exaustiva. Assim, o esforço computacional de concatenar blocos é igual a fazer uma busca exaustiva.

No segundo caso, foram feitas as operações lógicas Or, Xor e And entre estados de células homólogas (de mesma posição) nas representações das RPs. Porém em nenhum caso foi obtida nenhuma RD.

Ao se fazer uma busca por RDs pode-se diminuir o esforço computacional ao se eliminar as regras decorrentes de k -simetrias e das equivalências dinâmicas. Por exemplo, para $k=2$ e $r=1.5$ seria preciso encontrar apenas 1 RD, e as outras 7 RDs podem ser obtidas por equivalência dinâmica e por k -simetria. Para $k=2$ e $r=2$ seria necessário encontrar pelo menos 7 RDs de diferentes famílias de equivalência dinâmica de apenas uma metade do espaço, a fim de se obter todas as RDs daquela metade do espaço, e depois aplicar a k -simetria. Porém não se encontrou um meio em que se possa dizer com certeza qual regra deve ser a representante de cada família de equivalência dinâmica.

Assim, dado que as RPs são formadas por blocos homogêneos e que algumas RDs têm pequena distância de Hamming e Levenshtein, a hipótese de que as RPs poderiam dar origem às RPs não pôde ser verificada, pois não se chegou a nenhuma relação entre quais estados deveriam ser trocados.

4.3 Relação entre Reversibilidade e Conservatividade

Em vez de se fazer a compressão de um arquivo diretamente, pode-se pensar na possibilidade de transformá-lo na condição inicial de um AC, que então o processaria e a compressão seria feita a partir de uma das iterações resultantes. No entanto, para que a descompressão seja feita, é necessário que a regra de AC utilizada seja reversível, caso contrário, alguma informação do arquivo será perdida. Esta é precisamente a idéia explorada

em [Portela e de Oliveira, 2007], cujas regras reversíveis utilizadas foram as obtidas no presente trabalho.

Pensando nesta aplicação foi feito um estudo da relação entre a reversibilidade e a conservatividade. Conservatividade é a capacidade que algumas regras apresentam de preservar as quantidades totais de cada estado na condição inicial, ao longo da evolução temporal. Ao se aplicar uma regra conservativa em uma condição inicial os estados são apenas rearranjados no reticulado, fato este observado também com algumas regras reversíveis.

Uma questão em aberto em [Portela e de Oliveira, 2007] é a determinação da iteração mais adequada em que a compressão seria mais efetiva. Uma vez que a noção de conservatividade garante que informação não é perdida, mas apenas rearranjada, uma possibilidade é o uso de uma regra que seja reversível e conservativa, ao mesmo tempo em que se monitorasse o grau de agrupamento resultante da conservatividade da regra. Com isso, o momento mais adequado para a compressão seria aquele em que o grau de agrupamento dos estados no reticulado fosse significativamente maior que o de sua configuração inicial.

Com base nessa motivação o estudo aqui realizado visou a identificação das regras que possuem as duas propriedades na expectativa que se pudesse encontrar uma regra de comportamento não-trivial, que cumprisse o papel especificado acima. Com isso seria dada uma seqüência a [Portela e de Oliveira, 2007], procurando melhorar os resultados lá reportados.

Constatou-se então que, para $k=2$ e $r=1$ existem 5 regras conservativas, sendo que 3 são reversíveis e conservativas, e 2 são não reversíveis. Já para $k=2$ e $r=1.5$, 22 regras são conservativas, sendo 4 reversíveis e conservativas, e 18 não reversíveis. E, para $k=2$ e $r=2$, 428 regras são conservativas, sendo 5 reversíveis e conservativas, e 423 não reversíveis. Os dados obtidos são apresentados na Tabela 10.

Tabela 10: Relação de regras reversíveis e conservativas

Caso	Regras Conservativas e Reversíveis	Regras Conservativas e Não-Reversíveis
$k=2, r=1$	170, 204, 240	184, 226
$k=2, r=1.5$	43690, 52428, 61680, 65280	43944, 47288, 48268, 48770, 49024, 51448, 52930, 53184, 56528, 57580, 58082, 58336, 59946, 60200, 62660, 63544, 64524, 65026
$k=2, r=2$	2863311530, 3435973836, 4042322160, 4278255360, 4294901760	2863377064, 2879957928, 2881005752, 2881267852, 2881398914, 2881464448, 2944969912, 2945232012, 2945363074, 2945428608, 2947326124, 2947457186, 2947522720, 3098065832, 3099113656, 3099375756, 3099506818, 3099572352, 3102247912, 3103295736, 3103557836, 3103688898, 3103754432, 3116153216, 3120335296, 3132144268, 3132275330, 3132340864, 3136326348, 3136457410, 3136522944, 3136981514, 3137047048, 3148921728, 3153103808, 3153627912,

3163077816, 3163339916, 3163470978, 3163536512, 3165434028, 3165565090,
 3165630624, 3167259896, 3167521996, 3167653058, 3167718592, 3169616108,
 3169747170, 3169812704, 3180117376, 3182211488, 3184299456, 3186393568,
 3196108428, 3196239490, 3196305024, 3198202540, 3198333602, 3198399136,
 3200290508, 3200421570, 3200487104, 3200945674, 3201011208, 3202384620,
 3202515682, 3202581216, 3203039786, 3203105320, 3212885888, 3213933712,
 3214980000, 3216027824, 3216289924, 3217067968, 3217592072, 3218115792,
 3218639896, 3219162080, 3219686184, 3220209904, 3220472004, 3220734008,
 3220996108, 3221127170, 3221192704, 3366517672, 3367565496, 3367827596,
 3367958658, 3368024192, 3370699752, 3371747576, 3372009676, 3372140738,
 3372206272, 3384605056, 3388787136, 3400596108, 3400727170, 3400792704,
 3404778188, 3404909250, 3404974784, 3405433354, 3405498888, 3417373568,
 3421555648, 3422079752, 3431529656, 3431791756, 3431922818, 3431988352,
 3433885868, 3434016930, 3434082464, 3435711736, 3436104898, 3436170432,
 3438067948, 3438199010, 3438264544, 3448569216, 3450663328, 3452751296,
 3454845408, 3464560268, 3464691330, 3464756864, 3466654380, 3466785442,
 3466850976, 3468742348, 3468873410, 3468938944, 3469397514, 3469463048,
 3470836460, 3470967522, 3471033056, 3471491626, 3471557160, 3481337728,
 3482385552, 3483431840, 3484479664, 3484741764, 3485519808, 3486043912,
 3486567632, 3487091736, 3487613920, 3488138024, 3488661744, 3488923844,
 3489185848, 3489447948, 3489579010, 3489644544, 3639663552, 3640187656,
 3703627712, 3704151816, 3704675536, 3705199640, 3705721824, 3706245928,
 3706769648, 3707031748, 3707293752, 3707555852, 3707686914, 3707752448,
 3724333312, 3740324364, 3740455426, 3740520960, 3757101824, 3771264248,
 3771526348, 3771657410, 3771722944, 3773620460, 3773751522, 3773817056,
 3788303808, 3790397920, 3804294860, 3804425922, 3804491456, 3804950026,
 3805015560, 3806388972, 3806520034, 3806585568, 3807044138, 3807109672,
 3821072320, 3821596424, 3822120144, 3822644248, 3823166432, 3823690536,
 3824214256, 3824476356, 3824738360, 3825000460, 3825131522, 3825197056,
 3888178416, 3888440516, 3888702520, 3888964620, 3889095682, 3889161216,
 3895257324, 3895388386, 3895453920, 3912034784, 3928025836, 3928156898,
 3928222432, 3928681002, 3928746536, 3937020586, 3937086120, 3944803296,
 3945327400, 3945851120, 3946113220, 3946375224, 3946637324, 3946768386,
 3946833920, 3953666984, 3954714808, 3954976908, 3955107970, 3955173504,
 4009815280, 4010077380, 4010339384, 4010601484, 4010732546, 4010798080,
 4012171492, 4012695596, 4012826658, 4012892192, 4018678968, 4018941068,
 4019072130, 4019137664, 4021035180, 4021166242, 4021231776, 4039180224,
 4039704328, 4040228048, 4040752152, 4041274336, 4041798440, 4042584260,
 4042846264, 4043108364, 4043239426, 4043304960, 4059885824, 4075876876,
 4076007938, 4076073472, 4092654336, 4106286320, 4106548420, 4106810424,
 4107072524, 4107203586, 4107269120, 4123849984, 4139841036, 4139972098,
 4140037632, 4156618496, 4157666320, 4162911200, 4163435304, 4163959024,
 4164221124, 4164483128, 4164745228, 4164876290, 4164941824, 4167617384,
 4168665208, 4168927308, 4169058370, 4169123904, 4171774888, 4172822712,
 4173084812, 4173215874, 4173281408, 4175956968, 4177004792, 4177266892,
 4177397954, 4177463488, 4181522688, 4185704768, 4189862272, 4194044352,
 4197513740, 4197644802, 4197710336, 4201695820, 4201826882, 4201892416,
 4205853324, 4205984386, 4206049920, 4210035404, 4210166466, 4210232000,
 4210690570, 4210756104, 4214291200, 4218473280, 4222630784, 4226812864,
 4227336968, 4227923184, 4228185284, 4228447288, 4228709388, 4228840450,
 4228905984, 4230279396, 4230803500, 4230934562, 4231000096, 4232629368,
 4232891468, 4233022530, 4233088064, 4234985580, 4235116642, 4235182176,
 4236786872, 4237048972, 4237180034, 4237245568, 4239143084, 4239274146,
 4239339680, 4240968952, 4241231052, 4241362114, 4241427648, 4243325164,
 4243456226, 4243521760, 4245486848, 4247580960, 4249668928, 4251763040,
 4253826432, 4255920544, 4258008512, 4260102624, 4261477900, 4261608962,
 4261674496, 4263572012, 4263703074, 4263768608, 4265659980, 4265791042,
 4265856576, 4267754092, 4267885154, 4267950688, 4269817484, 4269948546,
 4270014080, 4271911596, 4272042658, 4272108192, 4273999564, 4274130626,
 4274196160, 4274654730, 4274720264, 4276093676, 4276224738, 4276290272,
 4276748842, 4276814376, 4279303184, 4280349472, 4281397296, 4281659396,

	4282437440, 4283485264, 4284531552, 4285579376, 4285841476, 4286594944, 4287642768, 4288689056, 4289736880, 4289998980, 4290777024, 4291301128, 4291824848, 4292348952, 4292871136, 4293395240, 4293918960, 4294181060, 4294443064, 4294705164, 4294836226
--	---

Observa-se que as regras que possuem as duas propriedades estão sempre na segunda metade do espaço de regras para $k=2$. As suas representações são apresentadas na Figura 30.

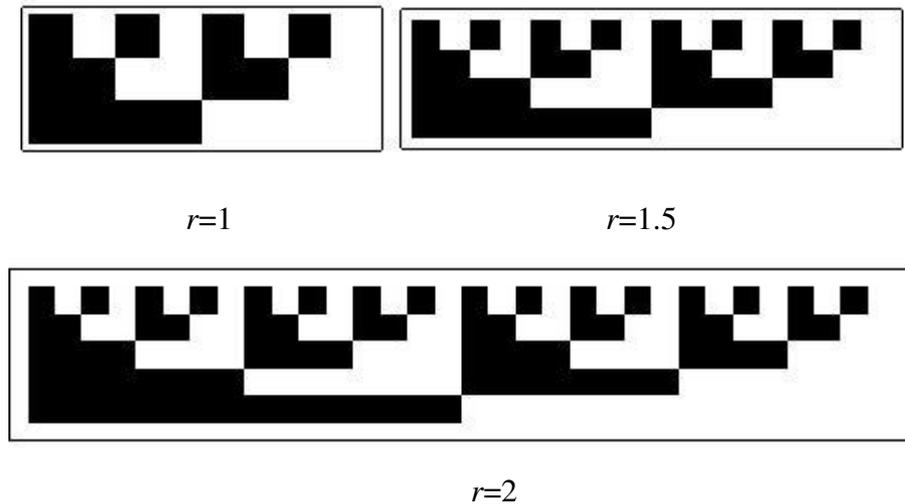


Figura 30: Visualização das representações das regras conservativas e reversíveis para $k=2$.

De todas as regras observadas para $k=2$ verificou-se que as regras caracterizadas pelas duas propriedades são as RPs das segundas metades de seus espaços. Para $k=3$ constatou-se que para $r=0.5$ existem 2 regras reversíveis e conservativas, sendo elas as regras 15897 e 19305; para $r=1$ existem 3 regras reversíveis e conservativas, sendo elas as regras 6159136430181, 7479532539765 e 7625403764901.

No entanto o padrão temporal nos reticulados quando aplicadas as regras reversíveis e conservativas é muito baixo, envolvendo apenas, deslocamento da posição dos estados no reticulado e preservação dos estados.

Por tudo acima discutido, a possibilidade da aplicação de regras conservativas e também reversíveis inviabiliza a compressão descrita em [Portela e de Oliveira, 2007].

Capítulo 5: Considerações Finais

Aplicando-se uma regra reversível por uma certa quantidade de iterações em uma condição inicial qualquer, e depois, aplicando-se sua regra inversa pela mesma quantidade de iterações, volta-se à condição inicial. Toda regra reversível tem uma regra inversa. Para o algoritmo de regras inversas implementado, verificou-se que ao se aumentar o tamanho da seqüência de DeBruijn não foi achada nenhuma regra inversa de raio menor que as regras inversas com uma seqüência de DeBruijn de tamanho menor.

A quantidade de regras reversíveis é muito pequena em comparação com o tamanho do espaço de regras possíveis. Em todas as regras reversíveis identificadas foram observadas empiricamente a existência de quatro características:

- Todas são balanceadas;
- Há k -simetria entre as regras;
- Um subconjunto das regras possui lei de formação bem definida por blocos homogêneos de estados; e,
- Se uma regra é reversível, então todas as suas equivalentes dinâmicas também são reversíveis.

Não foi descoberto neste trabalho nenhuma relação entre a quantidade de famílias de regras reversíveis com mesma equivalência dinâmica e os valores k e r .

Foi explorada uma abordagem em que as regras reversíveis foram separadas em regras primitivas (RPs), em que a representação das regras é bem comportada e de fácil obtenção (que são as regras chamadas de triviais em [Toffoli e Margolus, 1990]), e regras derivadas (RDs), supostamente obtíveis a partir das primeiras. Foi testada a hipótese de que as RDs poderiam ser obtidas a partir das RPs, através de algumas trocas nas representações. Para essa hipótese foram seguidas duas linhas de investigação distintas, em que a geração das RDs ocorreria a partir de:

- Todas as RPs, consideradas em grupo; ou
- Operações entre as RPs, envolvendo:
 - Concatenação de blocos das RPs; ou
 - Operações lógicas entre estados de células homólogas (de mesma posição) nas representações das RPs.

Essa hipótese não foi verificada.

Pensando em uma possível aplicação de reversibilidade em compressão de dados foi estudada a relação dessa propriedade com a conservatividade. A relação existente entre reversibilidade e conservatividade para $k=2$ é que as regras caracterizadas pelas duas propriedades são as RPs das segundas metades dos espaços de regras.

Nas condições iniciais em que foram aplicadas as regras reversíveis foram obtidos apenas comportamentos simples para $k=2$, envolvendo troca de estados, deslocamento da posição dos bits no reticulado e preservação de estados. Para $k=3$, com algumas regras foram obtidos comportamentos mais complexos. Esse fato sugere a necessidade de se fazer um estudo mais aprofundado pelo menos nesses espaços, dado que regras com comportamentos temporais não triviais são sérias candidatas a aplicações em compressão de arquivos, conforme discutido anteriormente.

Como próximos passos na seqüência do presente trabalho podem ser citados:

1. Separar as regras, de forma em que seja possível verificar quais RDs estão mais próximas ou mais distantes das RPs e de outras RDs nos seus espaços de regras. O estudo dessa localização pode sugerir quais RPs estão relacionadas com as RDs.
2. Fazer outras operações, além das operações lógicas apresentadas no presente trabalho, entre estados de células homólogas nas representações das RPs a fim de se obter as RDs.
3. Descrever quais regras reversíveis estão mais próximas de certas regras balanceadas. Com isso pode surgir de forma mais simples um modo em que se possa verificar com facilidade a localização das RDs nos seus espaços de regras.
4. Estudar a aplicação de regras reversíveis em compressão de dados, visto que a possibilidade da aplicação de regras conservativas e também reversíveis inviabiliza a compressão descrita em [Portela e de Oliveira, 2007].
5. Através do processo de minimização de expressões booleanas, é possível descrever facilmente as RPs como as regras triviais de [Toffoli e Margolus, 1990]. Porém, a descrição das RDs é mais complexa e parece não ser possível distinguir um padrão para estas. Formalizar a descrição das RDs através da função de minimização por regras booleanas é uma outra linha de trabalho.

Referências Bibliográficas

- [Bogolmolny, 2007], A. Bogolmolny. *Distance Between Strings*. Disponível em: http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/Strings.shtml. 2007. Acesso em: 10 de dez. de 2007.
- [Boykett, 2004] T. Boykett. “Efficient exhaustive listing of reversible one dimensional cellular automata”. *Theoretical Computer Science*, 325(2): 215-247, 2004.
- [Clementi, Menstrasti e Pierini, 1997] A. Clementi, P. Menstrasti e P. Pierini. “Some results on Invertible Cellular Automata”. *Physics and Computation*: 143-150, 1994.
- [de Oliveira, 2007] P.P.B. de Oliveira. *Cellular automata package for Mathematica*, Software de distribuição restrita, disponibilizada pelo autor, 2007.
- [Durand-Lose, 1997] J. O. Durand-Lose. “Intrinsic Universality of a 1-Dimensional Reversible Cellular Automaton”. *Lecture Notes in Computer Science*, 1200:439-450, 1997.
- [Gilleland, 2007] M. Gilleland. *Levenshtein Distance, in Three Flavors*. Disponível em: <http://www.merriampark.com/ld.htm>. Acesso em: 10 de dez. de 2007.
- [Kronemberger e de Oliveira, 2007] G. Kronemberger e P.P.B. de Oliveira. *Geração de autômatos celulares reversíveis e de suas regras inversas*. Boletim Técnico de Pós-Graduação 088/2007, Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, SP, 12 páginas, 2007.
- [McIntosh, 1991] H.V. McIntosh. *Reversible Cellular Automata*. Disponível em: <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/oldweb/pautomata.html>. 1991.
- [Mora, Martínez e McIntosh, 2006] J.C.S.T. Mora, G.J. Martínez e H.V. McIntosh. “The Inverse Behavior of a Reversible One-Dimensional Cellular Automaton obtained by a Single Welch Diagram”. *Journal of Cellular Automata*, 1/1:25-39, 2006.

- [Morita e Harou, 1989] K. Morita e M. Harao. “Computation-universality of One-Dimensional Reversible (Injective) Cellular Automata”. *The Transactions of the IEICE*, Vol. E 72, 6: 758-762, 1989.
- [Morita, 1998] K. Morita. “Cellular Automata and Artificial Life - Computation and Life in Reversible cellular Automata”. *Fiesta'98. 6th Summer School on Complex Systems*, 1998.
- [Morita, 1992] K. Morita. “Computation-universality of One-dimensional One-way Reversible Cellular Automata”. *Information Processing Letters*, 42:325-329, 1992.
- [Morita, 1995] K. Morita. “Reversible Simulation of One-dimensional Irreversible Cellular Automata”. *Theoretical Computer Science* 148:157-163, 1995.
- [Portela e de Oliveira, 2007] R.F. Portela e P.P.B. de Oliveira. “Um experimento de compactação de arquivos com autômatos celulares reversíveis”. *Proc. of the Sixth Congress of Logic Applied to Technology (LAPTEC 2007)*. CD-ROM, Unifei-Unisanta, 2007.
- [Rowland, 2007] T. Rowland. *Reversible rules of 3-states, page 1017*. A New Kind of Science: The NKS Forum – Pure NKS. Disponível em: <http://forum.wolframscience.com>. 2007.
- [Sarkar, 2000] P. Sarkar. “A Brief History of Cellular Automata”. *ACM Computing Surveys*, 32(1):80-107, 2000.
- [Seredynski, Pienlosk e Bouvry, 2004] M. Seredynski, K. Pienlosk e P. Bouvry. “Reversible Cellular Automata Based Encryption”. *Computer Science*, 3222:411-418, 2004.
- [Sutner, 1999] K. Sutner. “The Complexity of Reversible Cellular Automata”. *Theoretical Computer Science*. Theoretical aspects of cellular automata 325: 317-328, 2004.
- [Toffoli, 1994] T. Toffoli. “Occam, Turing, von Neumann, Jaynes: How much can you get for how little? (A conceptual introduction to cellular automata)”. *The Interjournal*, out.

1994. Adaptado de texto original publicado: In S. Di Gregorio and G. Spezzano, editors. *Proceedings of ACRI'94: Cellular Automata in Research and Industry*, CRAI (Conorzio per la Ricerca e le Applicazioni di Informatica), S. Stefano di Rende, CS, Italy, 1994.

[Toffoli e Margolus, 1990] T. Toffoli e N.H. Margolus. "Invertible Cellular Automata: A Review". *Physica D*, 45:229-253, 1990.

[Wolfram, 2002] S. Wolfram. *A New Kind of Science*, Wolfram Media, 2002.

APÊNDICE A

A tabela a seguir exibe todas as regras reversíveis para uma dada combinação de número de estados (k) e raio da vizinhança (r), e separadas em suas famílias de mesma equivalência dinâmica. Dentro de cada família as regras são apresentadas em ordem crescente de seu número, segundo a definição apresentada na Seção 1.3.

Caso	Família
$k=2$ e $r=0.5$	3, 5
	10, 12
$k=2$ e $r=1$	15, 85
	51
	170, 240
	204
$k=2$ e $r=1.5$	255, 21845
	3855, 13107
	3915, 11535, 13155, 14643
	43690, 65280
	50892, 52380, 54000, 61620
	52428, 61680
$k=2$ e $r=2$	65535, 1431655765
	16711935, 858993459
	16713975, 284098815, 858993555, 909325107
	16724175, 217252095, 862139235, 959658291
	16728255, 50135295, 859005747, 859386675
	16740555, 753991935, 862155363, 967915827
	252645135
	252645195, 252648975, 260509455, 755961615
	252652815, 256577295
	252656655, 256577355, 264441615, 755969295
	2863311530, 4294901760
	3327051468, 3432811932, 3540975360, 4278226740
	3335309004, 3432828060, 4077715200, 4278243120
	3385642188, 3435973740, 4010868480, 4278253320
	3435580620, 3435961548, 4244832000, 4278239040
	3435973836, 4278255360
	3538998000, 4030525680, 4038389940, 4042310640
	3539005680, 4034457840, 4042318320, 4042322100
	4038390000, 4042314480
	4042322160
$k=3$ e $r=0.5$	377, 3785, 10179, 11355, 14383, 18967
	481, 2119, 2899, 3841, 5311, 5515, 8321, 8543, 8801, 9971, 11243, 11687
	611, 1079, 3791, 5243, 7995, 8439, 9711, 11139, 14167, 14371, 16783, 17563
	715, 5299, 8327, 9503
	4217, 4745, 10881, 11361, 15841, 19201
	14439, 14937, 15465, 15891, 18603, 19071
	15897, 19305
$k=3$ e $r=1$	193720085, 1466461054805, 3812992433055, 4399383164415, 5572552008259,

7625210074339
193897223, 282608907659, 1466461059179, 1467235895783, 2965703825799, 3812982867603, 4357541751603, 4399268373159, 5572551850795, 5572552007935, 7604290430815, 7624047812875
195924469, 596209850275, 984822870655, 1466462157109, 2057694767875, 2136847502815, 3223889674997, 3310016346659, 3514693832117, 3812988024287, 4399380959807, 4797040511939
196101607, 137534263399, 575290206751, 1467236998087, 2057694767551, 2136732711559, 3223889679371, 3310016189195, 3797109019691, 3812978458835, 4357539546995, 4795878250475
198502811, 10653541847, 1466461054967, 1487381761211, 3811830171591, 3812992078779, 4397833482459, 4399383006951, 5572437217003, 5572551999511, 6777921467083, 7060379699191
198679949, 293068729421, 1466461059341, 1488156602189, 2964541564335, 3812982513327, 4355992069647, 4399268215695, 5572437059539, 5572551999187, 6776759205619, 7039460055667
200707195, 31379475127, 983660609191, 1487382863515, 2057694759127, 2136847345351, 3223889675159, 3309901555403, 3525153653879, 3812987670011, 3949751904683, 4397831277851
200884333, 10459831603, 136372001935, 1488157704493, 2057694758803, 2136732554095, 3223889679533, 3309901397939, 3807568841453, 3812978104559, 3948589643219, 4355989865039
251112797, 4842529757, 1466489754077, 1468785695837, 3708388901295, 3812877647631, 4315700338575, 4399325765871, 5488869182419, 5567902726195, 7520606542579, 7615912454995
251289935, 287257717331, 1467264595055, 1468785700211, 2861100294039, 3812868082179, 4315585547319, 4357484353059, 5488869024955, 5567902725871, 7519444281115, 7594992811471
253317181, 586912230931, 880219338895, 1466490856381, 2053045485811, 2053164676975, 3226214316029, 3226333520819, 3519342641789, 3812873238863, 4399323561263, 4692436980179
253494319, 32930731639, 565992587407, 1467265697359, 2053045485487, 2053049885719, 3226214320403, 3226333363355, 3801757829363, 3812863673411, 4357482148451, 4691274718715
255895523, 15302351519, 1468785695999, 1487410460483, 3707226639831, 3812877293355, 4315700181111, 4397776083915, 5488754391163, 5567902717447, 6673317935323, 7051082079847
256072661, 297717539093, 1468785700373, 1488185301461, 2859938032575, 3812867727903, 4315585389855, 4355934671103, 5488754233699, 5567902717123, 6672155673859, 7030162436323
258099907, 22081855783, 879057077431, 1487411562787, 2053045477063, 2053164519511, 3226214316191, 3226218729563, 3529802463551, 3812872884587, 3845148372923, 4397773879307
258277045, 1162212259, 31768470175, 1488186403765, 2053045476739, 2053049728255, 3226214320565, 3226218572099, 3812217651125, 3812863319135, 3843986111459, 4355932466495
322853687, 581120891, 1466461054811, 2031320127767, 3269665018491, 3781611373527, 3812734165851, 4399378912887, 5572547756731, 5572552008247, 7593829014811, 7624435272727
323030825, 282996308465, 1466461059185, 2032094968745, 2934322766271, 3227823605679, 3812724600399, 4399264121631, 5572547599267, 5572552007923, 7592666753347, 7603515629203
325058071, 595435048663, 953441811127, 2031321230071, 2057694767863, 2136843251287, 3223889675003, 3269662813883, 3310012095131, 3515081232923, 3812729757083, 4765659452411
325235209, 106153203871, 574515405139, 2032096071049, 2057694767539, 2136728460031, 3223889679377, 3227821401071, 3310011937667, 3797496420497, 3812720191631, 4764497190947
327636413, 11040942653, 1466461054973, 2052240834173, 3268115336535,

3780449112063, 3812733811575, 4399378755423, 5572432965475, 5572551999499, 6746540407555, 7059604897579
327813551, 293456130227, 1466461059347, 2053015675151, 2933160504807, 3226273923723, 3812724246123, 4399263964167, 5572432808011, 5572551999175, 6745378146091, 7038685254055
329840797, 30604673515, 952279549663, 2052241936477, 2057694759115, 2136843093823, 3223889675165, 3268113131927, 3309897303875, 3525541054685, 3812729402807, 3918370845155
330017935, 9685029991, 104990942407, 2053016777455, 2057694758791, 2136728302567, 3223889679539, 3226271719115, 3309897146411, 3807956242259, 3812719837355, 3917208583691
380246399, 5229930563, 1468785695843, 2031348827039, 3269607619947, 3677007841767, 3812619380427, 4315696087047, 5488864930891, 5567902726183, 7489225483051, 7615137653383
380423537, 287645118137, 1468785700217, 2032123668017, 2829719234511, 3227766207135, 3812609814975, 4315581295791, 5488864773427, 5567902725859, 7488063221587, 7594218009859
382450783, 586137429319, 848838279367, 2031349929343, 2053045485799, 2053160425447, 3226214316035, 3226329269291, 3269605415339, 3519730042595, 3812614971659, 4661055920651
382627921, 1549672111, 565217785795, 2032124770321, 2053045485475, 2053045634191, 3226214320409, 3226329111827, 3227764002527, 3802145230169, 3812605406207, 4659893659187
385029125, 15689752325, 1468785696005, 2052269533445, 3268057937991, 3675845580303, 3812619026151, 4315695929583, 5488750139635, 5567902717435, 6641936875795, 7050307278235
385206263, 298104939899, 1468785700379, 2053044374423, 2828556973047, 3226216525179, 3812609460699, 4315581138327, 5488749982171, 5567902717111, 6640774614331, 7029387634711
387233509, 21307054171, 847676017903, 2052270635749, 2053045477051, 2053160267983, 3226214316197, 3226214478035, 3268055733383, 3530189864357, 3812614617383, 3813767313395
387410647, 2053045476727, 3226214320571, 3812605051931
2518243013, 1466461369733, 1466690637317, 1694770934597, 3823452254817, 4095407620629, 4399383164577, 4399383168789, 5573326849237, 5593472714665, 7625210251477, 7625214857065
5402640113, 96068245481, 2033673466673, 2094111064361, 3185977859475, 3266504004291, 3676720760115, 3767291183331, 5484043698127, 5484215643199, 5786986341487, 7207183879519
10287122053, 45529081429, 1491261320149, 1492806987973, 1838611143499, 2141553786859, 3307576762517, 3717290105477, 3948876724871, 4215522615317, 4293227627717, 4439619625511
62955839141, 1466469557861, 3813379833861, 4399383164421, 6137411081221, 7625339207941
65280362069, 1466469872789, 1466699140373, 1757533053653, 3823839655623, 4095795021435, 4399383164583, 4399383168795, 6138185922199, 6158331787627, 7625339385079, 7625343990667
91036640591, 821137478291, 1636159861811, 2037556058351, 3332369857269, 3908307379509, 4318106703429, 4528127412549, 6053724044677, 6132790497013, 7489369023877, 7615310362933
136228461109, 191576882497, 418413605467, 1571873440309, 1613682179137, 2141381841787, 3097470072437, 3307490781557, 3807914260553, 3858306301655, 4353665221193, 4359093480695
146064945221, 3943753520967, 7348577761291
146064945455, 146064951539, 156137877935, 418034128499, 3097627172991, 3883315924683, 3943624557951, 3943744309323, 7348550126359, 7348563432067, 7348577757079, 7348577759107
146064945923, 236721339647, 3762440732115, 3943710533295, 7348534773619, 7348577759887
146064947327, 146069551043, 146078762687, 176283743363, 3923607655539,

3943739191743, 3943753518783, 3943753520499, 6502451413315, 6804639394735, 7348448798275, 7348577748655
146064948029, 146078763389, 236725945469, 266940137789, 3742294866687, 3762440731647, 3943696204071, 3943710531111, 6502408425643, 6804639393331, 7348405810603, 7348577747251
146064949589, 146093603669, 146322871253, 1838317641173, 3943753523073, 3943753527285, 3943767338433, 4215722704245, 7348577761525, 7348582367113, 7358650694005, 7378796559433
146064952241, 236721339881, 246794272361, 418034129201, 3097584185319, 3702003135831, 3762431520471, 3943581570279, 7348520444395, 7348534771435, 7348550124955, 7348577755675
146064953645, 146069551277, 186356676077, 418047945965, 3097627170807, 3863170059255, 3943610228727, 3943744308855, 6502451411131, 6804611759803, 7348434469051, 7348577744443
146064954347, 236725945703, 277013070503, 418047946667, 3097584183135, 3681857270403, 3762431520003, 3943567241055, 6502408423459, 6804611758399, 7348391481379, 7348577743039
146064954491, 236716392887, 417274168571, 779110024247, 3066203123529, 3762560660157, 3943562477769, 4528758459357, 5655119814097, 7087041275197, 7348262872657, 7348577749597
146064960905, 236855085857, 700477463465, 1123914259457, 3430808793531, 3762436296411, 3943824458499, 4792161401859, 6565170542671, 6804998647447, 7348401007951, 7348577742967
146066992357, 820985743435, 1123332353767, 3409860954149, 3943749426695, 4528156594091
146066992591, 156139925071, 277206005791, 820958108503, 820985739223, 1123203390751, 3409860960467, 3681830137427, 3883311830411, 3943740215051, 4528142264867, 4528156591907
146071598179, 176285790499, 277047376879, 820985730799, 1123318024543, 1123332351583, 3409860956255, 3409874771615, 3682030246115, 3923603561267, 3943749426227, 4528027631075
146071598413, 186358723213, 277019741947, 277206003607, 820985726587, 1123189061527, 3409860962573, 3681843954893, 3682030243931, 3863165964983, 3943740214583, 4528013301851
146071611049, 246987205465, 277034071171, 730297089769, 820985728771, 1123184455705, 3409860963041, 3682030241825, 3701989820321, 3943869177599, 4527999484385, 4709292312959
146078763623, 156137880743, 266940144107, 508695128747, 2916314383671, 3742165903671, 3883258607787, 3943701319467, 6502380790711, 6804639391147, 7348405806391, 7348563418027
146078767055, 146093605775, 176541669395, 1838322246995, 3923607661857, 3943739193849, 3943767336249, 4215722703777, 6502456019137, 6804639394969, 7358650681369, 7378667596417
146078771111, 176288349419, 186361281899, 418047948071, 3097612841583, 3863170058787, 3923598443427, 3943610226543, 6502308121075, 6502322448115, 6804611747167, 6804639377887
146078771255, 176278796603, 417274169975, 688458235643, 3066231781977, 3923727583581, 3943605463257, 4710071247741, 5655033838753, 6502179512353, 6804639384445, 7087041263965
146078771813, 266944743845, 277017676325, 418047948773, 3097569853911, 3681857269935, 3742285654575, 3943567238871, 6502265133403, 6502279460443, 6804611745763, 6804639376483
146078778371, 267073883999, 700477465571, 1123918865279, 3430808793063, 3742290430983, 3943824456315, 4792147072635, 6502274659975, 6565041579655, 6804639376411, 6804998634811
146081283175, 156139849255, 653778722071, 695461736983, 727972467223, 913996341271, 3405384101483, 3883254434891, 3943697697611, 4520393855627, 4525674832043, 4542103729547
146085888997, 184034100667, 186358647397, 653778719887, 695461724347, 913982012047, 3405384103589, 3695977381571, 3863108569463, 3943697697143,

4520264892611, 4525688649509
146093610689, 247052198393, 418034133569, 1928974035833, 3097598002785, 3702003142149, 3943581572385, 4034400703749, 7348539377257, 7348550125189, 7358650688389, 7378739242537
146093612795, 277270996535, 418047951035, 1928978641655, 3097598000601, 3681857276721, 3943567243161, 4034400703281, 6502413029281, 6804611758633, 7358650675753, 7378610279521
146150920565, 3943753521669, 7439234155717
146150924933, 146179579013, 146408846597, 1838403616517, 3943753523775, 3943753527987, 3943767339135, 4215722704947, 7439234155951, 7439238761539, 7449307088431, 7469452953859
146155530755, 146408848703, 176398377155, 1838417433983, 3923607658347, 3943739198763, 3943767338667, 4215722702763, 6593107807975, 6895300394983, 7449178125415, 7469452941223
146156633059, 176400581539, 816508871815, 1116358782763, 1120892071495, 1127192229163, 3493743887975, 3595846054175, 3660908960735, 3923603485451, 3943763716811, 4632631155815
146156633293, 186473514253, 270232434787, 816508867603, 1120864436563, 1127063266147, 3493743885791, 3660908967053, 3863165889167, 3867815237453, 3943754505167, 4632616826591
146200561429, 266946809233, 277206007819, 820985726353, 1032485071189, 1123216696459, 3409860964757, 3591196781705, 3681858284117, 3742467840215, 3943740208265, 4528022513495
146308896323, 146432741759, 991115011523, 1807022561279, 3650877488817, 3943753516977, 3943753530021, 4216123411461, 5785723508665, 7228477409701, 7438980481465, 7439243538181
146308900691, 991143669971, 1807280487311, 1838685437711, 3650877490923, 3943767334443, 4215722713299, 4216123417779, 5785728114487, 7228477409935, 7449316470895, 7469199279607
146346770783, 991286962211, 1806965244383, 1838475616931, 3650877494433, 3943767346785, 4215722699553, 4216123412865, 5695067114473, 7137825621097, 7358397019753, 7378805941897
146351529701, 1838317645541, 3943753529391, 4215736521711, 7348582367347, 7388869492147
146351534069, 1838346303989, 1838575571573, 1838604225653, 3943767346857, 4215722712669, 4215736523817, 4215736528029, 7358655300061, 7378801165489, 7388869492381, 7388874097969
146437505045, 1838403620885, 3943753530093, 4215736522413, 7439238761773, 7479525886573
146437507151, 176656303187, 1838408226707, 1838417438351, 3923607664665, 3943739200869, 4215736520229, 4215736521945, 6593112413797, 6895300395217, 7479396923557, 7479525873937
146437509413, 1838432279333, 1838661546917, 1838690200997, 3943767347559, 4215722713371, 4215736524519, 4215736528731, 7449311694487, 7469457559915, 7479525886807, 7479530492395
153282465143, 334719099899, 987240806903, 1702419036539, 3099908835405, 3399829484337, 3757782234417, 4220600270445, 5785638473785, 7228463119117, 7438865690425, 7439243613997
153411073865, 334723863185, 1733800096145, 1834529416265, 3099908835477, 3757782247533, 3964688517933, 4220213381397, 7439123970733, 7439238837589, 7479440851693, 7479511595989
156137884253, 418034128733, 3097617961347, 3883186961667, 7348550124175, 7348563427855
156137887061, 277013076821, 418047946901, 508695128981, 2916305172027, 3097574971491, 3681728307387, 3883129644771, 6502380788527, 6804611756215, 7348391477167, 7348563413815
156142483991, 186356676311, 418034136923, 418047952283, 3097483880751, 3097498207791, 3863160847611, 3883306712571, 6502437081907, 6804611755591, 7348434466867, 7348550109511
156144531127, 186358723447, 277019737735, 277062713551, 277077040591,

820958091655, 3681830145851, 3681843961211, 3682015914707, 3863156753339, 3883302618299, 4528013299667
156144543763, 246858242449, 277034066959, 277058107729, 730297090003, 820958093839, 3681830146319, 3682015912601, 3701989826639, 3883431581315, 4527999482201, 4709283101315
156271624145, 418034143481, 700477469081, 1033257865265, 3097741098195, 3612112370739, 3883311488979, 4792075426515, 6565199201119, 6804998644639, 7348443993439, 7348550109439
156398205379, 277334614513, 820598850175, 820958108575, 1839869370499, 1970492000113, 3681830150543, 3883307054003, 3974719994063, 4194788691923, 4528161355193, 4559523324473
173961161395, 397263328885, 413032207315, 653769197527, 851247527767, 1032480218965, 2825696885531, 3096796501871, 3404997216725, 3591010246031, 3756157760411, 4525702978805
176281014091, 277047370321, 397120075051, 538556214001, 1060555905331, 1123322825011, 2833450412351, 3096848237273, 3409474067207, 3409874771687, 3681773028671, 3923474421113
176290396555, 186363329035, 277019729311, 277047360031, 277191674383, 1123189059343, 3409874780039, 3681843956999, 3681886953875, 3681901280915, 3863165964515, 3923594349155
176419359571, 266946796597, 277047359797, 277191678595, 1032489677011, 1123216694275, 3409874782223, 3591196781237, 3681858286223, 3681896165519, 3742338877199, 3923594342837
183501263285, 334719102005, 987245412725, 1702432854005, 3099894506181, 3399829483869, 3737636368989, 4220600268261, 5785638461149, 6593117266021, 6894927323869, 7228334156101
184034094109, 186353870989, 397134365869, 413032207549, 653769193315, 851219892835, 2825687673887, 3096796508189, 3404997214541, 3695720164127, 3862979429309, 4525688649581
186351729317, 417274176293, 418047954533, 688458235877, 3066102818961, 3097479115281, 3863289987297, 4710062036097, 5655019509529, 6502179510169, 6804611749513, 7087041259753
186353946805, 277019735389, 277196477035, 397120075285, 538556209789, 1060426942315, 2833436083127, 3096839025629, 3409474073525, 3681773026487, 3681843954965, 3863036824829
186361282133, 418047954389, 3097483878567, 3863160847143, 6502308118891, 6804611742955
186363329269, 277019725099, 277062711367, 3681843963317, 3681886951691, 3863156752871
186490422287, 418047960947, 700477471187, 1033262471087, 3097741096011, 3612112370271, 3863165623551, 4792061097291, 6502317645463, 6565070238103, 6804611742883, 6804998632003
186617003521, 277019742019, 277334612329, 820598837539, 1839873976321, 1970477670889, 3681843968009, 3682035007217, 3863161188575, 3974719996169, 4194788691455, 4559394361457
186731794561, 270361043509, 816121978555, 1120864436635, 1839959011201, 1974351875509, 3493748649077, 3863161112759, 3867815250569, 4194802982039, 4225768000649, 4663997886197
209400783605, 1633826706485, 3817641242727, 4401707805447, 5572580707531, 7625267467051
211725306533, 1633827021413, 1634056288997, 1903977998117, 3828101064489, 4100056430301, 4401707805609, 4401707809821, 5573355548509, 5593501413937, 7625267644189, 7625272249777
236716241255, 408320450603, 779138605415, 1833754343723, 2961599598789, 3762618055677, 4131848835909, 4528800976797, 5651245609477, 7212565277437, 7355236441477, 7441563390877
236718610375, 487771863655, 538556225233, 820985735473, 1060527246883, 1123279839523, 2833536387695, 2915535448889, 3409474065803, 3409860954923, 3762307497689, 4527856388975
236723386783, 820985742031, 1123289366095, 3409860954851, 3762436637843,

4528113606419
236723387017, 246796319497, 277163018119, 820958107099, 820985737819, 1123160403079, 3409860961169, 3681830138129, 3701999041559, 3762427426199, 4528099277195, 4528113604235
236725794071, 277041651671, 409094228699, 1833754343579, 2992980658395, 3681899787843, 3762488915523, 4131853599195, 6498534218839, 6930135760639, 7355365050199, 7441563384319
236727992605, 266942184925, 277047375475, 820985729395, 1123275036871, 1123289363911, 3409860956957, 3409874772317, 3681987258443, 3742290772415, 3762436637375, 4527984643403
236727992839, 277015117639, 277019740543, 277163015935, 820985725183, 1123146073855, 3409860963275, 3681843955595, 3681853176131, 3681987256259, 3762427425731, 4527970314179
236783341223, 239050595627, 277055587943, 543571948907, 3105332592375, 3681842979819, 3762431595819, 3929620103415, 6504733048423, 6711615472939, 6809088617383, 6971818765099
236912481377, 239050602185, 826001465705, 1123956776897, 3430794502947, 3762436372227, 3929877320859, 4799909811099, 6504733048351, 6774377592151, 6809475506431, 6971828291671
236981667091, 820598852983, 820985742103, 1123417974817, 1930525764691, 1970577975457, 3409860967967, 3762431861435, 3974719988447, 4013485114715, 4528118369705, 4559494666025
240142245367, 730670161117, 816121980739, 1120878765859, 1839959023837, 1974347269687, 3493748646971, 3887961115997, 4194931945055, 4225768001117, 4663984068731, 4709287460735
246789325601, 417274174889, 418034137769, 779110024481, 3066074160513, 3097436129793, 3702123063873, 4528749247713, 5655105484873, 7087041270985, 7348262870473, 7348550114665
246791543089, 277153491547, 487771863889, 538556221021, 820958100541, 1060398283867, 2833522058471, 2915526237245, 3409474072121, 3681830138201, 3701869901405, 4527856386791
246798878417, 277013070737, 418034137625, 418047952985, 3097440893079, 3097455220119, 3681848058759, 3701993923719, 6502394094235, 6804611754187, 7348391479195, 7348550108107
246800925553, 277015117873, 277019725879, 277019736331, 277034052919, 820958090251, 3681830146553, 3681843961913, 3681843964487, 3681972927035, 3701989829447, 4527970311995
246856273937, 277055588177, 511019778905, 543571955225, 3083493755439, 3105203629359, 3681833768175, 3701993999535, 6504705413491, 6711601143715, 6809088613171, 6971818762915
246929888569, 266946803617, 277034057131, 277047360811, 820958090017, 1123141465849, 3409874781209, 3681830148737, 3681858291137, 3701989823129, 3742410523319, 4527979523639
249123534899, 508881664655, 826001465939, 1123956783215, 2916310024251, 3430665539931, 3869439724575, 4799900599455, 6504718719127, 6774349957219, 6809475504247, 6971828287459
266944592213, 277046257493, 409094230805, 1833768161045, 2992966329171, 3681899787375, 3742343050095, 4131853597011, 6498405255823, 6509238702223, 6897625017763, 6930135748003
266946790981, 277019723461, 277019727907, 277047358627, 277148686711, 1123146071671, 3409874780741, 3681843957701, 3681843966203, 3681853175663, 3681858293243, 3742281560303
267200465233, 277047375547, 820598840347, 1123417972633, 1930530370513, 1970563646233, 3409874785433, 3681992021729, 3742285996007, 3974719990553, 4013485114247, 4559365703009
272162902661, 1633835209541, 3818028643533, 4401707805453, 6137439780493, 7625396600653
272306443487, 1123282473443, 1636245825923, 2198694323327, 3271932263793, 3410074869669, 3817683224433, 4318020722469, 6011915305849, 6134336164837, 7434020602489, 7580068403557

274487425589, 1633835524469, 1634064792053, 1966740117173, 3828488465295, 4100443831107, 4401707805615, 4401707809827, 6138214621471, 6158360486899, 7625396777791, 7625401383379
277017676559, 418047955091, 3097440890895, 3681848058291, 6502265131219, 6804611741551
277019723695, 3681843964019
334723867553, 1733828754593, 1834787342297, 1845663769817, 3099922652943, 3964688524251, 4029751430811, 4220213383503, 7449196903447, 7469457635731, 7479440851927, 7479516201811
408320454971, 779396531447, 1833783002171, 1928968937207, 2961613416255, 4034587238955, 4131848838015, 4528800983115, 5651250215299, 7212565277671, 7385455239619, 7451636323591
991315620659, 1807223170415, 1838475621299, 1838599466735, 3650877496539, 4215736517019, 4215736530063, 4216123419183, 5695071720295, 7137825621331, 7388615817895, 7388878874611
1466690952245, 1697095457525, 4105867442391, 4399383168951, 5594247555643, 7625215034203
1466699455301, 1759857576581, 4106254843197, 4399383168957, 6159106628605, 7625344167805
1634056603925, 1906302521045, 4110516252063, 4401707809983, 5594276254915, 7625272426915
1634065106981, 1969064640101, 4110903652869, 4401707809989, 6159135327877, 7625401560517
1838604230021, 4215736530135, 7388874098203
1838690205365, 4215736530837, 7479530492629
5426903161659, 5531486420625, 5588041426635, 5591924018313, 5989351659063, 5989437623175, 6502315011543, 6804460006695, 7353291041499, 7529529239505, 7534560844395, 7620194844873
5572553110563, 5656532844885, 5991532378005, 6156811784607, 7327492545087, 7625212278723
5572581809835, 5865739908405, 6158898029685, 6159136425639, 7332141354759, 7625269671435
5573327951541, 5593473816969, 5658857367813, 5991532692933, 5991761960517, 6156811784769, 6156811788981, 7337952366849, 7351110059397, 7609907732661, 7625212455861, 7625217061449
5573356650813, 5593502516241, 5868064431333, 6158898344613, 6159127612197, 6159136425801, 6159136430013, 7342601176521, 7560317122917, 7614556542333, 7625269848573, 7625274454161
5594248657947, 5991762275445, 6156811789143, 7353434582325, 7620367554423, 7625217238587
5594277357219, 6159127927125, 6159136430175, 7562641645845, 7625016364095, 7625274631299
5696618843331, 5787180046635, 5787189258279, 7116902356005, 7207549533951, 7207549538085, 7348326488451, 7348584408165, 7448941181799, 7469459597925, 7479159977835, 7479503872191
5696623449153, 5787180051003, 7116902356239, 7207563351417, 7358657340879, 7378545286593, 7449199107831, 7469459604243, 7479188636283, 7479441954231, 7479503874297, 7479518721363
5696628547779, 5791814482815, 5923164630981, 6501640701771, 6638352072261, 6799596019047, 6846200953539, 7116715820331, 7217277030015, 7290878382981, 7376473950087, 7442096221701
5719294963941, 5991540881061, 6137412183525, 6156811784613, 7327879945893, 7625341412325
5721619486869, 5991541195989, 5991770463573, 6138187024503, 6156811784775, 6156811788987, 6158332889931, 7338339767655, 7413872178453, 7610295133467, 7625341589463, 7625346195051
5779933715169, 5790810142689, 5791829323941, 5891768730393, 7082025529761, 7114577706081, 7216503254181, 7290873617433, 7348541896809, 7348551227493, 7358652892773, 7378741211049
5786907279621, 7207549529895, 7348579808427

5786907283989, 5786935938069, 5787165205653, 7207549532001, 7207549536213, 7207563347361, 7348579808661, 7348584414249, 7358652741141, 7378798606569, 7479159975573, 7479518713173
5786912047275, 5818316997675, 6501678619707, 6634453815015, 6846487460505, 6925120019415, 7207563347217, 7208323310097, 7358523600987, 7378808159385, 7479288584295, 7479518706615
5786993254965, 7207549530597, 7439236202853
5786993259333, 5787021913413, 5787251180997, 7207549532703, 7207549536915, 7207563348063, 7439236203087, 7439240808675, 7449309135567, 7469455000995, 7479245950917, 7479518713875
5786998018251, 5787121863687, 5818374314571, 6592335013899, 6634281864327, 6925120013799, 6937139249109, 7207549524039, 7207549530453, 7208323308693, 7439107062699, 7439245755669
5787121868055, 5818632240603, 6592339619721, 6634310522775, 6925120015905, 6937139249343, 7207563341505, 7208323315011, 7449318688383, 7469325860841, 7479250714203, 7479518713731
5787193864101, 7207549538319, 7348584414483, 7388871539283, 7479159979941, 7479532530639
5787193868469, 7207563355785, 7358657347197, 7378803212625, 7388871539517, 7388876145105, 7479188638389, 7479417905973, 7479446560053, 7479518721597, 7479532532745, 7479532536957
5787275237991, 7207563356253, 7449055815591, 7469459600733, 7479503879211, 7479518717931
5787279839445, 7207549539021, 7439240808909, 7479245955285, 7479527933709, 7479532531341
5787279843813, 7207563356487, 7449313741623, 7469459607051, 7479274613733, 7479503881317, 7479518722299, 7479527933943, 7479532533447, 7479532535397, 7479532537659, 7479532539531
5791068068721, 5791843141407, 5891797388841, 7082025536079, 7216503256287, 7290873621801, 7348541897043, 7348555833315, 7386546889359, 7388814143763, 7388871690915, 7472186411121
5791843141263, 5923178448447, 6501640708089, 6638356678083, 6799596019281, 6846458879571, 7217277034383, 7290878385087, 7386546882801, 7388685003609, 7388881243731, 7472315019843
5818574923707, 6501683225529, 6634482473463, 6846487460739, 6925120021521, 7208323316415, 7388742399129, 7388881092099, 7479164743227, 7479288588663, 7479532524081, 7479532530495
5928502027461, 6137440882797, 6158906532741, 6159136425645, 7332528755565, 7625398805037
5930826550389, 6138215723775, 6158361589203, 6158906847669, 6159136115253, 6159136425807, 6159136430019, 7342988577327, 7614943943139, 7623079241973, 7625398982175, 7625403587763
5991770778501, 6156811789149, 6159107730909, 7416196701381, 7620754955229, 7625346372189
6159136430181, 7625403764901
7388876145339, 7479446564421, 7479532539063
7479532539765

APÊNDICE B

Como parte complementar dos estudos, o curso sobre o livro *A New Kind of Science*, de Stephen Wolfram, chamado de *NKS Summer School*, foi feito em junho e julho de 2007 na Universidade de Vermont, em Burlington, VT, EUA. Este curso foi importante, pois, ele é um aplicado pelos pesquisadores do instituto Wolfram Science sobre as idéias do livro e o uso do software Mathematica. Além do intercâmbio cultural e das portas que abriram para contatos internacionais com pessoas da área da pesquisa, houve também a possibilidade de passar algum tempo com um dos maiores nomes da área de ACs. No *NKS Summer School* foi desenvolvido um projeto sobre busca de ACRs em duas dimensões, com o apoio de Stephen Wolfram e sua equipe.

Naquele trabalho foram procuradas regras em diversas vizinhanças totalísticas e não-totalísticas para $k=2$. Aplicações de regras nesses espaços podem ser encontradas em [Morita, 1998]. Todas as regras reversíveis encontradas apresentam comportamento simples: inversão dos estados e/ou deslocamento da posição dos bits no reticulado, preservação dos estados e da posição. O projeto foi apresentado em uma palestra no *2007 NKS Summer School* e foi exposto em um Pôster no *2007 NKS Conference*, que se seguiu ao *2007 NKS Summer School*.

Além deste trabalho de dissertação, pretende-se preparar um artigo no primeiro semestre de 2008.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)