PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

César Augusto Sverberi Carvalho

O aluno do Ensino Médio e a criação de uma fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

César Augusto Sverberi Carvalho

O aluno do Ensino Médio e a criação de uma fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do título de *Mestre em Educação Matemática* pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação da *Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado*.

São Paulo

2008

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ______________________________________ **Local e Data:** ______________

Aos meus pais Paulo e Sheila, pelo apoio e incentivo. Aos meus irmãos Benedito, Alessandra e Rosylaine, pelo exemplo de determinação e responsabilidade.

Agradecimentos

À Prof.ª Dr.ª Sílvia Dias Alcântara Machado, pela orientação objetiva e esclarecedora que possibilitou o desenvolvimento desta pesquisa e pela amizade e paciência .

Ao Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud e à Prof.ª Dr.ª Cláudia Regina Flores, membros da Banca Examinadora deste trabalho, pelas sugestões que o enriqueceram.

À Prof.ª Dr.ª Bárbara Lutaif Bianchini, pelas contribuições que aprimoraram minha dissertação.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, pela concessão da Bolsa que ajudou a continuar minha formação.

À Diretora da EE Conselheiro Rodrigues Alves, Nísia Maria da Silva Néto, por permitir que alunos da escola participassem da experiência constante neste trabalho.

Aos Vice-Diretores e Coordenadoras desta escola, por contribuirem para que conseguisse conciliar o trabalho desenvolvido na mesma com o Mestrado.

À Prof.ª Marli Anes Cordeiro, pela compreensão demonstrada ao aceitar que trabalhasse em horários de suas aulas com seus alunos.

Aos alunos que participaram do experimento realizado, por aceitarem participar de algo que desconheciam e por terem se dedicado nas resoluções das atividades.

Aos colegas de Mestrado, pelos momentos de aprendizagem e troca de experiências. Em especial, à Juliana Grassmann dos Santos, pelo apoio que foi fundamental para que conseguisse terminar este trabalho.

Aos meus amigos, pelo apoio recebido enquanto me dediquei ao Mestrado. Em especial, à Silvia Mendes Moreira, pelo companheirismo demonstrado durante este período.

À minha família, por ter me dado força. Em especial, ao meu tio Stelvio Sverberi, pelo carinho dedicado e por ter me dado abrigo quando precisei.

A todos que torceram para que eu conseguisse terminar esta pesquisa e efetivar a realização de algo muito esperado.

Resumo

Este trabalho apresenta uma pesquisa qualitativa orientada pelo objetivo de investigar se é possível criar condições para que alunos do Ensino Médio generalizem termos de progressões aritméticas e, em caso afirmativo, se esta generalização permite que os alunos construam uma fórmula para o termo geral deste tipo de seqüência. A relevância desta pesquisa se justifica pela importância do trabalho com observação e generalização de padrões, apontado por pesquisadores como Mason (1996), Lee (1996) e Vale e Pimentel (2005) como recurso para que alunos manifestem o pensamento algébrico e criem expressões algébricas, dando sentido à utilização dos símbolos. Para os procedimentos metodológicos foram utilizadas fases da Engenharia Didática, descrita por Artigue (1996), para elaborar, aplicar e analisar uma seqüência didática para alunos de uma 1ª série do Ensino Médio. As análises das resoluções presentes nos protocolos e gravações feitas durante algumas sessões indicam que grande parte dos alunos conseguiu generalizar os termos, mas isso não possibilitou que algum deles utilizasse notação algébrica formal para representar a generalidade.

Palavras-Chave: Generalização de Padrões, Progressão Aritmética, Engenharia Didática.

Abstract

This work presents a qualitative research which is guided by the objective of investigating whether if it’s possible to create conditions so that High School students generalise terms of arithmetic progressions and, if so, whether this generalization allows students to build a formula of general term of this type of sequence. The relevance of this research is justified by the importance of the work with observation and generalization of patterns, identified by researchers like Mason (1996), Lee (1996) and Vale and Pimentel (2005) as a resource to students express algebraic thinking and create algebraic expressions, giving sense to the use of symbols. For methodological procedures, there were used stages of Didactic Engineering, described by Artigue (1996), to develop, implement and analyze a didactic sequence for the students of the Grade 10. The analysis about the present resolutions in the protocols and the recordings that were made during some sessions indicated that many of the students succeeded in generalizing terms, but that didn’t allow some of them to use formal algebraic notation to represent the generality.

Keywords: Generalization of Patterns, Arithmetic Progression, Didactic Engineering, High School.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

César Augusto Sverberi Carvalho

O aluno do Ensino Médio e a criação de uma fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo
2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

César Augusto Sverberi Carvalho

O aluno do Ensino Médio e a criação de uma fórmula para o termo geral da Progressão Aritmética

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do título de *Mestre em Educação Matemática* pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob orientação da *Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado*.

São Paulo
2008

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: ____ **Local e Data:** ______________

Aos meus pais Paulo e Sheila, pelo apoio e incentivo. Aos meus irmãos Benedito, Alessandra e Rosylaine, pelo exemplo de determinação e responsabilidade.

Agradecimentos

À Prof.ª Dr.ª Sílvia Dias Alcântara Machado, pela orientação objetiva e esclarecedora que possibilitou o desenvolvimento desta pesquisa e pela amizade e paciência .

Ao Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud e à Prof.ª Dr.ª Cláudia Regina Flores, membros da Banca Examinadora deste trabalho, pelas sugestões que o enriqueceram.

À Prof.ª Dr.ª Bárbara Lutaif Bianchini, pelas contribuições que aprimoraram minha dissertação.

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, pela concessão da Bolsa que ajudou a continuar minha formação.

À Diretora da EE Conselheiro Rodrigues Alves, Nísia Maria da Silva Néto, por permitir que alunos da escola participassem da experiência constante neste trabalho.

Aos Vice-Diretores e Coordenadoras desta escola, por contribuírem para que conseguisse conciliar o trabalho desenvolvido na mesma com o Mestrado.

À Prof.ª Marli Anes Cordeiro, pela compreensão demonstrada ao aceitar que trabalhasse em horários de suas aulas com seus alunos.

Aos alunos que participaram do experimento realizado, por aceitarem participar de algo que desconheciam e por terem se dedicado nas resoluções das atividades.

Aos colegas de Mestrado, pelos momentos de aprendizagem e troca de experiências. Em especial, à Juliana Grassmann dos Santos, pelo apoio que foi fundamental para que conseguisse terminar este trabalho.

Aos meus amigos, pelo apoio recebido enquanto me dediquei ao Mestrado. Em especial, à Silvia Mendes Moreira, pelo companheirismo demonstrado durante este período.

À minha família, por ter me dado força. Em especial, ao meu tio Stelvio Sverberi, pelo carinho dedicado e por ter me dado abrigo quando precisei.

A todos que torceram para que eu conseguisse terminar esta pesquisa e efetivar a realização de algo muito esperado.

Resumo

Este trabalho apresenta uma pesquisa qualitativa orientada pelo objetivo de investigar se é possível criar condições para que alunos do Ensino Médio generalizem termos de progressões aritméticas e, em caso afirmativo, se esta generalização permite que os alunos construam uma fórmula para o termo geral deste tipo de seqüência. A relevância desta pesquisa se justifica pela importância do trabalho com observação e generalização de padrões, apontado por pesquisadores como Mason (1996), Lee (1996) e Vale e Pimentel (2005) como recurso para que alunos manifestem o pensamento algébrico e criem expressões algébricas, dando sentido à utilização dos símbolos. Para os procedimentos metodológicos foram utilizadas fases da Engenharia Didática, descrita por Artigue (1996), para elaborar, aplicar e analisar uma seqüência didática para alunos de uma 1ª série do Ensino Médio. As análises das resoluções presentes nos protocolos e gravações feitas durante algumas sessões indicam que grande parte dos alunos conseguiu generalizar os termos, mas isso não possibilitou que algum deles utilizasse notação algébrica formal para representar a generalidade.

Palavras-Chave: Generalização de Padrões, Progressão Aritmética, Engenharia Didática.

Abstract

This work presents a qualitative research which is guided by the objective of investigating whether if it’s possible to create conditions so that High School students generalise terms of arithmetic progressions and, if so, whether this generalization allows students to build a formula of general term of this type of sequence. The relevance of this research is justified by the importance of the work with observation and generalization of patterns, identified by researchers like Mason (1996), Lee (1996) and Vale and Pimentel (2005) as a resource to students express algebraic thinking and create algebraic expressions, giving sense to the use of symbols. For methodological procedures, there were used stages of Didactic Engineering, described by Artigue (1996), to develop, implement and analyze a didactic sequence for the students of the Grade 10. The analysis about the present resolutions in the protocols and the recordings that were made during some sessions indicated that many of the students succeeded in generalizing terms, but that didn’t allow some of them to use formal algebraic notation to represent the generality.

Keywords: Generalization of Patterns, Arithmetic Progression, Didactic Engineering, High School.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Desde que tomei a decisão de aprimorar minha formação de professor de Matemática e entrar no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, desejava realizar uma pesquisa sobre aprendizagem em Álgebra, já que esta era a área da Matemática que mais gostava de ensinar e por perceber que meus alunos apresentavam muita dificuldade para se expressar algebricamente.

A idéia da presente pesquisa surgiu após compreender, através de estudos do Grupo de Pesquisa Educação Algébrica da PUC-SP, o quanto a observação e generalização de padrões são atividades que auxiliam no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Fui sensibilizado por esse tema por acompanhar e ler resultados de pesquisa que mostravam a importância destas atividades e por anteriormente a isso não ter propiciado a meus alunos momentos de observação de padrões ou dado oportunidade para que estes criassem e compreendessem a linguagem algébrica.

Esta pesquisa busca verificar se é possível criar condições para que alunos de uma 1ª série do Ensino Médio generalizem termos de progressões aritméticas e, em caso afirmativo, verificar se esta generalização conduz à construção de uma fórmula para o termo geral da PA.

No Capítulo I apresento problemática e objetivo que nortearam o desenvolvimento da pesquisa, evidenciando os motivos que levaram à escolha por esse tema e a importância deste.

No Capítulo II apresento as leituras que fiz sobre pesquisas e trabalhos que situaram a observação e generalização de padrões no campo da pesquisa em Educação Matemática, procurando discutir quais foram as maiores contribuições trazidas por elas para a discussão do tema.

No Capítulo III apresento considerações acerca da metodologia utilizada, explicando como foi feita a seleção dos sujeitos e a elaboração da experimentação. Faço breve descrição da teoria das situações didáticas proposta por Guy Brousseau e da Engenharia Didática, metodologia de pesquisa qualitativa inspirada em tal teoria, descrita por Michèle Artigue.

No Capítulo IV descrevo a seqüência didática, com análise *a priori*, descrição da realização e análise *a posteriori* de cada uma das três sessões realizadas, além de relatar entrevistas feitas com alguns alunos para melhor compreensão dos resultados da 1ª sessão.

No Capítulo V apresento considerações finais do trabalho, comentando os resultados de cada sessão e analisando de forma geral os efeitos da seqüência didática sobre os alunos participantes da pesquisa.

CAPÍTULO I – PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

A pesquisa que será evidenciada nas páginas seguintes se enquadra dentre os projetos do Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica (GPEA) do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Esse grupo possui trabalhos referentes às linhas de pesquisa “A Matemática na estrutura curricular e formação de professores” e “História, Epistemologia e Didática da Matemática”.

O projeto “Qual a Álgebra a ser ensinada na formação de professores que ensinam Matemática?” é o direcionador dos demais projetos do GPEA. Sobre esse projeto, Coelho, Machado e Maranhão (2003) afirmam que, no momento atual, as políticas educacionais vêm incorporando novos conceitos e referenciais que desafiam os processos formativos de professores.

As autoras comentam que as recentes mudanças curriculares e avaliativas, relativas à formação e ao controle do trabalho docente, sugerem a necessidade de pesquisas que tragam subsídios para uma tomada de posição consistente e fundamentada.

Elas apontam que para a Álgebra, talvez mais do que para os outros ramos da Matemática, levantam-se questões de pertinência e relevância. Defendem que após o ganho de importância nos anos 60 - adquirido graças à valorização do formalismo, própria do movimento da Matemática Moderna - a Álgebra pré-universitária veio perdendo espaço e é freqüentemente vista hoje como um amontoado de símbolos de valor indiscernível.

As mesmas autoras afirmam que, se por um lado, a Álgebra é o caminho para estudos futuros e para idéias matematicamente significativas, dada uma de suas dimensões – a de linguagem da matemática – por outro, ela é freqüentemente um obstáculo na trajetória educacional de muitos. Enfatizam que o desempenho de alunos nas avaliações oficiais deixa muito a desejar e parece indicar a existência de um certo descompasso entre o que se espera que estudantes do ensino básico saibam e o que eles realmente sabem sobre a matemática.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1992) revelam que, durante o período do movimento da Matemática Moderna, a introdução do espírito da Álgebra moderna contribuiria para que o ensino de Geometria sofresse uma descaracterização. No entanto, salientam que o ensino de Álgebra também sairia prejudicado ao se tornar austero, formal e estéril e perder seu valor instrumental para a resolução de problemas.

Os mesmos autores afirmam a necessidade de um repensar do ensino de Álgebra nos níveis fundamentais de escolaridade.

> Esse repensar implica alguns desafios. Um deles seria a realização de estudos que procurem explicitar a especificidade da Álgebra e o papel por ela desempenhado na história do pensamento humano [...] Um outro estudo consistiria na discussão dos principais argumentos e justificativas que pedagogos e pesquisadores em educação matemática, de âmbito mundial, têm apresentado com relação ao ensino de Álgebra. (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1992, p. 52).

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) afirmam que a introdução precoce e sem suporte concreto a uma linguagem simbólica abstrata pode funcionar como freio à aprendizagem significativa da Álgebra, bem como o menosprezo ao modo de expressão simbólico-formal. Afirmam que parece subsistir entre pensamento e linguagem simbólico-formal uma relação análoga àquela existente entre pensamento e linguagem natural, no desenvolvimento psico-cognitivo.

Estes autores consideram importante a existência de uma linguagem simbólico-formal que cumpra um papel fundamental na constituição do pensamento algébrico[1] e defendem este pensamento como base da construção e da compreensão do universo conceitual de diversos campos e áreas.

Defendem eles que a primeira etapa da Educação Algébrica deve ser o trabalho com situações-problema, que deve ser realizado de forma a garantir o exercício dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico e afirmam que é preciso saber chegar às expressões simbólicas por meio da análise de situações concretas[2] para depois atribuir algumas significações e transformismos para a expressão algébrica.

Um dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico é o processo de generalização. Lins e Gimenez (2005) comentam que há uma visão de álgebra que se convencionou chamar aritmética generalizada[3].

Tais autores afirmam que a idéia central dessa proposta é a de que a atividade algébrica se caracteriza pela expressão da generalidade[4] e concluíram que:

> um aspecto-chave dessa abordagem [...] é que a tendência letrista é de certa forma compensada por uma preocupação com a linguagem algébrica como meio de expressão, e não apenas como objeto a que se aplicam diversas técnicas. (LINS e GIMENEZ, 2005, p. 111).

Comentam eles que nessa abordagem a preocupação maior não é com uma delimitação precisa do que é tratado em cada atividade proposta, e sim, com o envolvimento dos alunos na organização de dados e no estabelecimento de relações, característicos de atividades investigativas.

---

[1] Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) defendem que o pensamento algébrico se caracteriza por percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização.

[2] Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) analisam situações nas quais acreditam ser possível a manifestação, em maior ou menor grau, do pensamento algébrico.

[3] Os autores citam John Mason como maior defensor dessa proposta.

[4] Segundo o minidicionário Houaiss (2004), generalidade significa qualidade do que abrange uma totalidade de coisas ou do que é considerado em toda a sua extensão; generalização significa ação de estender os resultados da observação de alguns casos ao conjunto dos casos possíveis.

Sobre atividades investigativas numéricas, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que as investigações contribuem, de modo decisivo, para desenvolver uma compreensão global dos números e operações, bem como capacidades matemáticas importantes como a formulação e teste de conjecturas e a procura de generalizações.

Segundo os autores:

> Os alunos podem realizar pequenas investigações que conduzem à descoberta de fatos, propriedades e relações entre conjuntos de números. [...] Podem, ainda, explorar seqüências numéricas, descobrindo relações numéricas e apreendendo progressivamente a idéia de variável. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2003, p. 55).

O trabalho com generalização de padrões tem sido apontado por pesquisadores, dentre eles Vale e Pimentel (2005), como importante para que os alunos criem expressões algébricas ou mecanismos que conduzam a estas.

Os padrões têm sido evidenciados como propícios para elaboração de atividades de generalização. Esclarece Devlin (2002) que nos últimos vinte anos surgiu a definição de matemática, que é hoje consensual entre a maioria dos matemáticos, como a ciência dos padrões.

Segundo Devlin, o que o matemático faz é examinar “padrões” abstratos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento etc – e que tais padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo.

Vale e Pimentel (2005) afirmam que o uso de padrões é um componente poderoso da atividade matemática, uma vez que a sua procura é indispensável para conjecturar e generalizar. Elas consideram que as tarefas que envolvem a procura de padrões permitem promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e melhorar a compreensão do sentido do número, da álgebra e de conceitos geométricos.

Tais autoras acreditam que os padrões, nos diversos níveis de ensino, permitem:

- contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da matemática por parte dos aluno;
- promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos tornando-os bons solucionadores de problemas e pensadores abstratos;
- melhorar a compreensão do sentido do número, da álgebra e de conceitos geométricos.

Para isso, os alunos devem ter oportunidade de:

> transferir padrões [...] de uma representação para outra; averiguar se uma lista de números mostra alguma regularidade; descobrir o padrão numa seqüência; descrever o padrão oralmente e por escrito; continuar uma seqüência, prever termos numa seqüência; generalizar; construir uma seqüência. (VALE e PIMENTEL, 2005, p.16).

Para o Ensino Médio, elas afirmam que os estudos das sucessões (progressões, indução matemática) e funções representam um universo para explorar problemas e investigações com padrões.

Analisando orientações e propostas curriculares para o Ensino Médio, pude notar o quanto a observação e a generalização de padrões são indicadas para o trabalho com alunos desse nível de ensino.

Algumas indicações do NCTM[5] (2000) para estudantes de Álgebra do *High School* [6] afirmam que estes devem ter oportunidade de:

- generalizar padrões usando funções definidas explicitamente ou recursivamente;
- compreender o significado de formas equivalentes das expressões, equações, inequações e relações;
- utilizar álgebra simbólica para representar e explicar relações matemáticas;
- utilizar expressões simbólicas para representar relações em vários contextos;

[5] National Council of Teachers of Mathematics - Conselho de professores de Matemática dos Estados Unidos

[6] Período equivalente aos Grades 9 a 12, correspondente à oitava série/nono ano do Ensino Fundamental e às três séries do Ensino Médio.

As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio também indicam para o ensino de Matemática o trabalho com observação de regularidades. Encontramos como parâmetros para o ensino de Matemática:

> Colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (BRASIL, 2006, p.70).

Para as Orientações Curriculares devemos ter um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a apresentação de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.

Entretanto, sobre o ensino de progressões, Brasil (2006) salienta que estas não devem ser propostas com exaustivas coletâneas de cálculos que fazem somente uso de fórmulas.

Em uma pesquisa do GPEA, Perez (2006) verificou que um grupo de alunos do Ensino Médio foi capaz de generalizar padrões através de diferentes estratégias. Tal pesquisa mostrou que os alunos conseguiram construir e explicar mecanismos de generalização para seqüências diversas.

De acordo com Perez, em relação à Matemática, podemos descobrir e revelar padrões, sendo que a Geometria descreve alguns que são visuais. Ela comenta isso mostrando uma seqüência de triângulos, onde vários padrões podem ser percebidos e descritos.

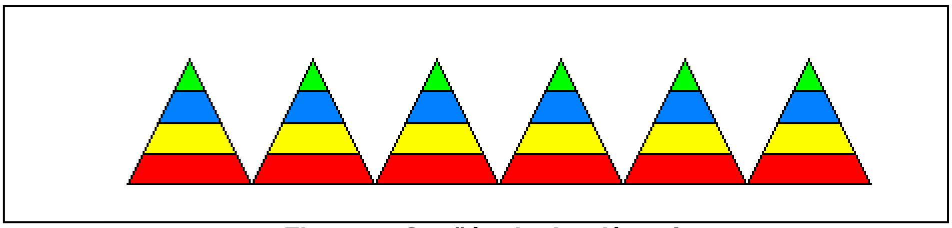


Figura 1: Seqüência de triângulos

A pesquisadora comenta que os padrões representados por números são mais abstratos, da mesma forma que os números utilizados para descrevê-los, como é o caso das seqüências de progressões aritméticas e geométricas.

Perez (2006) afirma que além dos padrões figurativos e puramente numéricos, existem padrões compostos que podem ser denominados de figurativo-numéricos, como no exemplo a seguir.

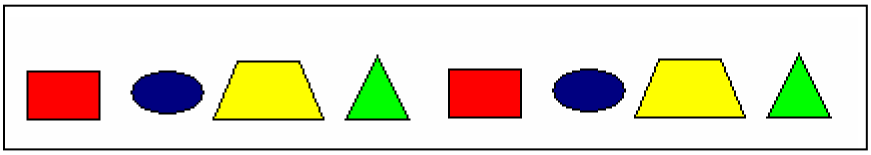


Figura 2: Seqüência com padrão figurativo-numérico

Podemos notar que a seqüência apresentada confere importância à posição de cada figura e não somente à figura em si. Ela acrescenta que, dentre os padrões figurativo-numéricos, há os que são denominados geométrico-numéricos, por apresentarem somente formas geométricas como figuras, como no exemplo apresentado pela Figura 2.

A pesquisa de Perez explorou padrões numéricos e figurativo-numéricos, que mostrassem algum tipo de regularidade, por repetição ou recursiva, na qual fosse possível identificar uma lei que permitisse continuar uma seqüência e assim chegar à generalização.

Ela verificou que, por mais que o pensamento algébrico já estivesse sendo desenvolvido[7], os alunos tiveram dificuldades em escrever algebricamente/ simbolicamente a regra geral de uma seqüência. A dificuldade dos alunos em escrever algebricamente o termo geral de uma seqüência é comentada pela pesquisadora quando afirma que:

> ao solicitar que escrevessem uma regra que pudessem representar o número de pontos ou uma regra qualquer da seqüência, eles não conseguiam expressar na linguagem matemática, mesmo já tendo expressado diversas vezes na linguagem natural. (PEREZ, 2006, p. 114).

[7] Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), o pensamento algébrico pode ser expresso por meio da linguagem natural, aritmética, geométrica ou através de uma linguagem específica para este fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica.

Instigado pelo resultado da pesquisa diagnóstica realizada por Perez que mostrou alunos que ainda não haviam estudado Progressões generalizando e encontrando termos destas, me questionei sobre a possibilidade de propor um trabalho sobre Progressão Aritmética (PA) que capacitasse alunos do Ensino Médio a generalizar termos da seqüência e os levasse à construção de uma fórmula para o termo geral.

Sobre isso me apóio em Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), que afirmam que:

> é esse trabalho reflexivo e analítico sobre situações-problema de naturezas diversas, isto é, sobre o modo como conduzimos e expressamos o nosso pensamento visando à resolução de tais situações, que possibilitará a construção de uma linguagem simbólica que seja significativa par o estudante. (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 90).

Este questionamento fez-me optar por desenvolver esta pesquisa, que se enquadra na linha de pesquisa “A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores” do GPEA e, mais particularmente, no projeto “Sobre observação e generalização de padrões – uma atividade matemática transversal” .

Minha pesquisa foi orientada pelo objetivo de verificar se é possível criar condições para que alunos de uma 1ª série do Ensino Médio generalizem termos de progressões aritméticas e, em caso afirmativo, verificar se esta generalização conduz à construção de uma fórmula para o termo geral da PA.

CAPÍTULO II – LEITURAS E ESCOLHAS TEÓRICAS

Neste capítulo apresento pesquisas e teorias que situaram Progressões Aritméticas no trabalho com observação e a generalização de padrões. Antes apresento as definições matemáticas que considero necessárias à exposição.

A definição de seqüência pode ser encontrada em Lima et al. (1997), que consideram esta como uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais. De acordo com os autores, a notação usual para uma seqüência é $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ou, abreviadamente, (x_n), o que significa que a seqüência dada é a função $1 \mapsto x_1$, $2 \mapsto x_2$, ..., $n \mapsto x_n$ ..., a qual faz corresponder a cada número natural *n* o número real x_n, chamado n-ésimo (ou enésimo) termo da seqüência.

Lima et al. (1997) definem progressão aritmética como uma seqüência onde cada termo, a partir do segundo, é a soma $x_{n+1} = x_n + r$ do termo anterior mais uma constante *r*, chamada a razão da progressão.

Os autores comentam que a razão de uma progressão aritmética pode ser um número positivo, negativo ou igual a zero. Complementam eles que no primeiro caso a seqüência é crescente, no segundo caso a seqüência é decrescente e no terceiro caso a seqüência é constante.

Em seguida apresento pesquisas do Programa de Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica que abordaram o tema da generalização de padrão e que, de alguma forma, contribuíram para minhas análises e decisões. Depois, comento autores que apresentam teorias sobre o assunto de minha pesquisa e que endossam minhas análises.

As pesquisas de Modanez (2002), Nakamura (2003) e Andrezzo (2005) utilizaram seqüências figurativo-numéricas que representavam números em progressão aritmética.

Modanez (2002) tinha por objetivo investigar se o trabalho com seqüências de padrões geométricos[8] poderia proporcionar ao aluno a introdução ao pensamento algébrico.

Para isso, ela elaborou uma seqüência didática com oito atividades que abordavam padrões e aplicou-a para alunos de 6ª série do Ensino Fundamental. Algumas seqüências utilizadas por Modanez representavam valores que caracterizavam uma progressão aritmética. O padrão apresentado na Figura 3 corresponde à PA (3, 5, 7,...) de razão 2.

A autora concluiu que a seqüência didática possibilitou aos alunos o desenvolvimento do pensamento algébrico, bem como a autonomia em observar, levantar hipóteses, tirar conclusões e justificar respostas. Portanto, essa pesquisa confirmou que alunos do Ensino Fundamental desenvolvem expressões algébricas pela observação de padrões característicos de uma PA.

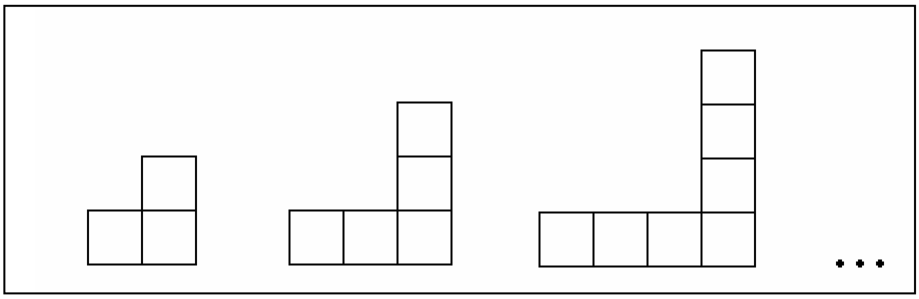


Figura 3: Seqüência figura-numérica presente em Modanez (2002)

[8] Alguns pesquisadores, dentre eles Modanez (2002), denominam padrão geométrico o que chamarei de padrão figurativo-numérico.

Nakamura (2003), por sua vez, defende o desenvolvimento de expressões algébricas por meio de padrões por acreditar que a generalização de padrões geométricos é caminho para construção de expressões algébricas no ensino fundamental.

Sua pesquisa consiste em uma avaliação de proposta de ensino desenvolvida em uma oitava série do ensino fundamental que buscou compreender os procedimentos utilizados pelos alunos durante o processo de generalização de padrões tomados como um meio para a construção de expressões algébricas significativas.

Interessava-me ver nessa pesquisa se alunos com um ano a menos de escolaridade que os alunos que observaria, utilizariam notação algébrica formal para expressar a generalidade.

As principais conclusões desta pesquisa apontam para uma diversidade de procedimentos que os alunos utilizaram para a generalização algébrica dos padrões. Alguns desses alunos em fase final do Ensino Fundamental conseguiram expressar a generalidade utilizando simbologia adequada.

Cabe ressaltar que ambas as pesquisas investigaram generalização de padrões, utilizando procedimentos metodológicos diferentes. Diferenciam da minha proposta por terem pesquisado produções de alunos do Ensino Fundamental e não terem dado enfoque somente a progressões aritméticas.

Andrezzo (2005) tinha por objetivo de pesquisa investigar a compreensão de objetos algébricos, utilizando seqüências de padrões figurativos, por alunos sem acuidade visual do Ensino Médio e elaborar situações que facilitassem a participação destes alunos em atividades de generalização.

O resultado desta pesquisa aponta que estes foram favorecidos por tais padrões para chegarem a regras de generalidade. A passagem da expressão numérica para a algébrica, onde a variável não era diretamente substituível, não ocorreu de forma espontânea para todos os alunos, sendo necessária intervenção da pesquisadora em alguns casos.

Com a pesquisa de Andrezzo pude ver uma experiência com alunos do Ensino Médio e confirmar que a construção de expressões algébricas pode apresentar dificuldades para alunos desse nível.

Dentre as pesquisas do GPEA sobre o tema, comento as que foram desenvolvidas por Almeida e Perez.

Almeida (2006) buscou verificar se professores do Ensino Fundamental de escolas públicas estaduais de uma cidade do interior de São Paulo trabalhavam atividades com observação e generalização de padrão, e caso trabalhassem, quais as estratégias de resolução estes previam que seus alunos utilizariam.

Para a coleta de dados, entrevistas semi-estruturadas com cinco professores da rede estadual foram realizadas, sendo que as análises dos dados mostraram que os professores trabalhavam esporadicamente atividades desse tipo em sala de aula e julgavam que seus alunos não chegariam a generalizar.

Esta pesquisa deixa claro que há necessidade de sensibilizar professores do Ensino Fundamental sobre a importância da observação e generalização de padrões. Como se trata de um tipo de atividade matemática transversal, pode-se dizer que professores do Ensino Médio também devem ser sensibilizados, confirmando a necessidade de pesquisas nessa área.

Perez (2006) realizou uma pesquisa diagnóstica para investigar se e como alunos do Ensino Médio resolvem situações problemas que envolvem generalização de padrões. Para a coleta de dados utilizou cinco atividades, que foram aplicadas durante duas sessões a nove alunos pertencentes às três séries do ensino médio de uma Escola Estadual do interior de São Paulo.

Os resultados obtidos nesta pesquisa levaram-na a concluir que os alunos, embora tenham alegado não ter trabalhado com aquele tipo de atividade antes, não só as resolveram como empregaram várias estratégias para generalizar.

A pesquisa de Perez me convenceu a investigar a generalização com um padrão específico de seqüência, pois sugere uma abordagem para o ensino de progressões aritméticas e geométricas que possibilite ao aluno dar significado às fórmulas construídas. Além disso, essa pesquisa relata como alunos que não tiveram contato com o estudo das progressões generalizaram corretamente termos de seqüências com esse determinado padrão.

A partir deste momento irei apresentar teorias de autores que recomendam o trabalho com generalização de padrões.

Vale e Pimentel (2005) consideram as atividades que possuem tarefas generalizadoras baseadas em padrões necessárias para estabelecer conexões entre os padrões e a Álgebra.

Tais autoras argumentam que a procura de padrões é uma parte crucial na resolução de problemas e no trabalho investigativo e consideram importante o desenvolvimento dessa capacidade nos estudantes, começando com tarefas de reconhecimento de padrões para facilitar em posteriores tarefas mais complexas.

> Nos anos iniciais, os alunos devem ser capazes de descrever padrões como 2, 4, 6, 8, ... dizendo como é obtido o termo a partir do anterior – neste caso somando 2 – é o início do pensamento recursivo. [...] Mais tarde os alunos devem realizar pensamento recursivos mais complexos, como na seqüência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8,... (VALE e PIMENTEL, 2005, p. 15).

Vale e Pimentel (2005) afirmam que a procura e identificação de padrões utilizam e enfatizam a exploração, investigação, conjectura e prova, desafiando os alunos a recorrer às suas destrezas de pensamento e ordem.

Segundo as autoras, na medida em que a matemática é a ciência dos padrões, ela trata da procura da estrutura comum subjacente a coisas que em tudo o resto parecem completamente diferentes e que, deste modo, o uso de padrões é uma componente poderosa da atividade matemática, uma vez que a sua procura é indispensável para conjecturar e generalizar.

Um dos autores citados por Vale e Pimentel é Orton (1999), que afirma que no caminho para a álgebra, descrita como uma expressão de generalidade, a primeira fase pela qual o aluno passa é “ver” e isto significa compreender mentalmente um padrão ou uma relação.

Consideremos, por exemplo, as seqüências presentes na Figura 4. Para a seqüência 1, “ver” significa reconhecer o padrão de formação dos termos. Já para a seqüência 3, “ver” pode ser baseado na seqüência de figuras ou na correspondente seqüência numérica ou em ambas.

Sobre os diferentes modos de “ver” as autoras afirmam que “os alunos devem estar cientes de que há mais que uma representação da mesma situação e que devemos ser capazes de passar de uma para outra compreendendo que as regras são equivalentes”. (VALE e PIMENTEL, 2005, p. 15).

Vale et al. (2005) afirmam que quando padrões são utilizados no ensino da matemática normalmente pretende-se ajudar os alunos a aprender matemática de forma significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem, facultando-lhes um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências.

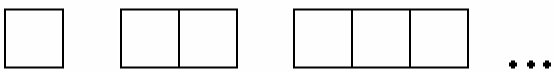
Enfatizam eles que o estudo de padrões vai ao encontro deste aspecto, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões.

Os mesmos autores comentam que os padrões lineares são normalmente os mais utilizados na abordagem com alunos do ensino básico, podendo ser utilizados também padrões não lineares como, por exemplo, os que envolvem quadrados de números. Temos a seguir, com a Figura 4, exemplos de seqüências sugeridas para investigação de termos.

1) 1, 2, 4, 7, 11, ...

2) 3, 6, 11, 18, 27, ...

3)



4)

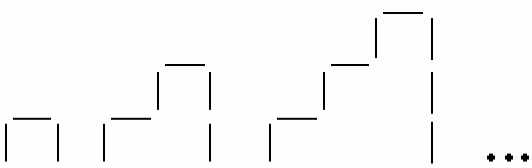


Figura 4: Seqüências sugeridas por Vale et al. (2005)

Vale et al. (2005) salientam que uma questão importante a se colocar, nessa abordagem da álgebra recorrendo aos padrões, é saber até que ponto os alunos são capazes de compreender e generalizar padrões numéricos propostos e qual o desempenho que apresentam neste tipo de tarefas.

Estes autores citam estudos presentes em Orton (1999) que apontam que:

- encontrar termos numa seqüência torna-se progressivamente mais difícil para os alunos à medida que se encontram mais distantes dos termos que lhes são apresentados;
- muitos alunos têm mais dificuldade em explicar um padrão do que continuá-lo;
- geralmente há mais alunos a explicar as regras, detectadas nas seqüências, oralmente do que por escrito.

Um aspecto importante ligado aos padrões que devemos considerar é como ocorre o processo de generalização, pois o trabalho com padrões exige investigação adequada dos termos a serem generalizados.

Segundo Herbert e Brown (1997), o processo investigativo com padrões envolve três fases:

1. Procura de padrões – extrair a informação relevante;
2. Reconhecimento do padrão, descrevendo-o através de métodos diferentes – a análise dos aspectos matemáticos;
3. Generalização do padrão – a interpretação e aplicação do que se aprendeu.

De acordo com estas autoras, estudantes usam múltiplas representações de uma informação na procura pela generalização de um padrão. Com isso, sugerem que os professores, quando observarem essa multiplicidade, devem direcionar os alunos a representarem esta informação em tabelas ou gráficos.

Elas verificaram que este tipo de abordagem tem um impacto positivo na habilidade de estudantes para generalizar uma regra, ou seja, para pensar algebricamente, partindo de situações concretas.

Um grande defensor do trabalho com padrões e referência em diversos estudos sobre o tema é o pesquisador inglês John Mason, que afirma que o futuro da aritmética e da álgebra depende da utilização do sentido de generalidade.

> [9]A essência do pensamento matemático é o reconhecimento, apreciação, expressão e manipulação da generalidade. Isso implica ao mesmo tempo particularizar e generalizar, assim como conjecturar e justificar. (Mason, 1996b, p.8).

Mason (1996b) afirma que a aritmética foi e ainda é a fonte original da álgebra como instrumento para expressar generalidade e representar o desconhecido e que o futuro do ensino de aritmética e álgebra está no sentido que o professor tem dos processos de pensamento matemático e, em particular, da generalização.

Mason (1996a) afirma que um dos meios de desenvolver a consciência de generalidade é sensibilizar-se pela distinção entre “olhar através” e “olhar para”, o que implica “ver a generalidade no particular” e “ver o particular no geral”.

Logo, o aluno deve ser freqüentemente instigado a procurar e reconhecer padrões para que posteriormente consiga generalizar, conforme apontam as três fases indicadas por Brown e Herbert (1997) e, também, deve ser instigado a particularizar determinados elementos da generalidade, conforme aponta Mason.

Mason (1996a) defende que a facilidade na manipulação de generalidades acompanha a confiança em desenvolver expressões e perceber múltiplas expressões para uma mesma coisa.

O autor argumenta que [10]”o emprego da Álgebra para resolver problemas depende de uma expressão confiável da generalidade [...] apoiada pela compreensão do papel das restrições sobre as variáveis”. (MASON, 1996a, p.66).

Um exemplo de atividade de generalização de padrões defendida por Mason pode ser baseado na seqüência figurativo-numérica apresentada a seguir. Nela se propõe

---

[9] Tradução de “La esencia del pensamiento matemático es el reconocimento, apreciación, expresión y manipulación de la generalidad. Ello implica al mismo tiempo especializarse y generalizar, así como conjecturar y justificar.”

[10] Tradução de “The use of algebra to solve problem depends on confident expression of generality […] supported by awareness of the role of constraints on variables“.

ao aluno que investigue um termo com posição distante em tal seqüência, como por exemplo, o termo que ocupa a posição 140.

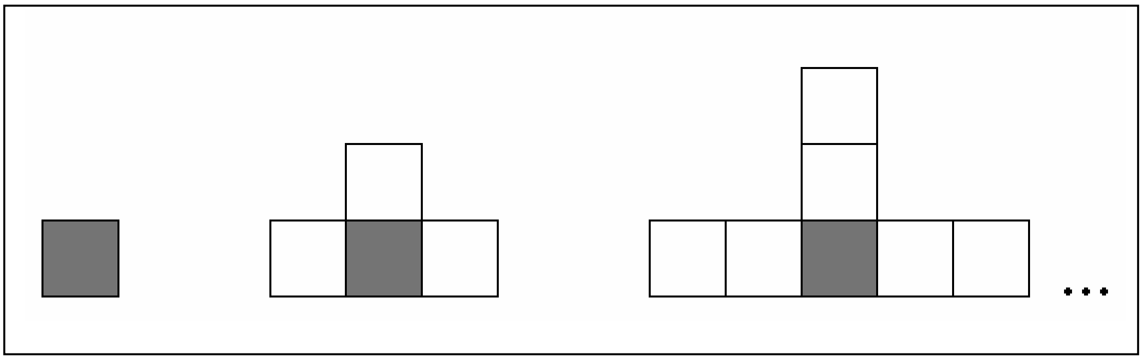


Figura 5: Seqüência figurativo-numérica proposta por Mason (1996a)

1ª : $1 + 3 \times 0 = 1$

2ª: $1 + 3 \times 1 = 4$

3ª: $1 + 3 \times 2 = 7$

4ª: $1 + 3 \times 3 = 10$

...

140ª: $1 + 3 \times (140 - 1) = 418$

...

enésima: $1 + 3.\ (n - 1) = 3n - 2$

Temos aqui uma seqüência que informa os primeiros três termos representados por figuras, mas que observados corretamente podem levar ao número representativo de qualquer termo da seqüência, inclusive à representação do enésimo termo.

Sobre esse tipo de atividade, Mason (1996a) sugere abordagens de visualização, manipulação da figura, formulação de uma regra recursiva que mostre como encontrar termos posteriores e busca de um padrão que leve diretamente a uma fórmula. Notemos que o pensamento algébrico de tal atividade se faz necessário para evitar que os alunos encontrem um determinado termo pela explicitação de todos os termos anteriores.

O mesmo autor afirma que a percepção de diferentes padrões de regularidade e a descrição destes padrões cria oportunidade para um confronto entre as diferentes soluções e torna evidente a possibilidade da existência de modos diferentes de ver um problema e suas soluções.

Mason (1996a) propôs uma espiral de desenvolvimento para explicar o processo pelo qual o aluno passa resolvendo atividades de observação e generalização de padrões.

O autor afirma que essa espiral tenta conectar estados semelhantes e ao mesmo tempo diferentes, sugerindo que a manipulação muda quando um padrão é percebido, mas que através de um processo fluido, a facilidade e a confiança se desenvolvem.

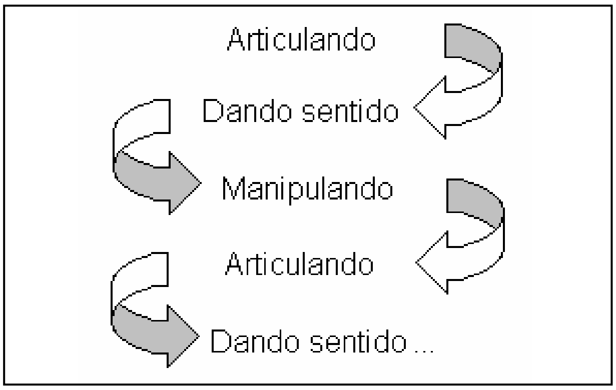


Figura 6: Espiral de desenvolvimento de Mason (1996a)

Sobre as fases da espiral de desenvolvimento, Mason (1996b) afirma que o propósito de manipular objetos não é simplesmente a manipulação, mas sim dar sentido a uma situação, que a medida que se desenvolve volta-se mais articulada, que estas articulações se convertem em mais e mais expressões do pensamento e que, por sua vez, servem como elementos manipuláveis para abstração. O todo se converte em uma espiral de desenvolvimento sem necessidade de percurso linear, pois cada manipulação, sentido, articulação, informa e é informada por outras.

Lesley Lee (1996) acredita que o trabalho com padrões é benéfico para o ensino da Álgebra porque importantes atividades como resolução de problemas, estudo de funções e outras, podem ser vistas como atividades de generalização de padrão. O artigo da autora relata uma pesquisa com alunos do *high school* e universitários.

Segundo a autora, a chave para o sucesso nesse tipo de atividade parece estar na primeira fase que ela contempla, ou seja, na observação do padrão, onde certa flexibilidade é necessária para chegar a um padrão matemático perceptível.

O artigo de Lee (1996) mostra que o trabalho desenvolvido por meio da generalização de padrões é estimulante e propicia que o aluno exercite seu modo de observar, pensar e agir diante de um determinado problema. A autora ressalta que o professor, ao propor esse tipo de atividade, deve estar atento para compreender e avaliar as diversas maneiras que os alunos encontram para resolver problemas desse tipo.

A autora destaca que para os jovens e adultos observados, o maior problema não foi o de ver o padrão, mas sim o de perceber um padrão útil algebricamente, o qual levasse a uma solução geral e comenta que quando os alunos se fixavam em uma percepção inicial de padrão, era muito difícil fazê-los abandoná-la, pois eles freqüentemente retornavam a uma percepção que não levava à solução.

Uma das atividades propostas pela autora e comentada no mesmo artigo utiliza retângulos sobrepostos contendo certo número de pontos. O enunciado de tal problema sugeria que fossem descobertos os números de pontos do quinto retângulo, do centésimo retângulo e do enésimo retângulo.

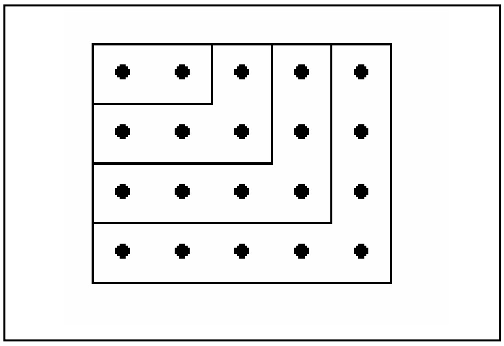


Figura 7: Retângulos sobrepostos em atividade de Lee (1996)

Lee comenta que dos 176 estudantes do *high school* que responderam à atividade, 26 deram respostas corretas às três questões, mas somente 13 estudantes não deram resposta correta à primeira questão (referente ao quinto retângulo), o que indica que os alunos não encontraram dificuldades em reconhecer o padrão. Desses 13 alunos que não indicaram a resposta correta para o quinto retângulo, 10 alunos deram o número 10 como resposta, que representava o número de pontos da borda do quinto retângulo.

Sobre dificuldades que alunos podem vir a ter no processo de generalização de padrões, Zazkis e Liljedhal (2002) afirmam que existe uma tensão entre pensamento algébrico e escrita algébrica.

Estes autores relatam tentativas de professores em formação para generalizar um padrão numérico, discutindo as emergentes formas de pensamento algébrica destes estudantes e a variedade de maneiras pelas quais generalizaram e simbolizaram suas generalizações. Os resultados desta pesquisa indicam que a capacidade dos estudantes de expressar a generalidade verbalmente não foi acompanhada por notação algébrica formal e não dependia de tal notação.

Zazkis e Liljedhal afirmam que existe um "vão" entre a capacidade de expressar a generalidade verbalmente e a capacidade de empregar notação algébrica confortavelmente. Vários participantes observados por estes pesquisadores manifestaram uma preocupação explícita: que suas soluções estavam incompletas porque faltava uma "fórmula", acreditando que a forma de expressão era mais importante do que o que foi produzido.

> [11]Ao invés de insistir sobre qualquer notação simbólica particular, esse vão deveria ser aceito e utilizado como um local de prática para os estudantes praticarem seus pensamentos algébricos. Eles deveriam ter a oportunidade de engajar em situações que promovem esse pensamento sem as limitações formais do simbolismo. (ZAZKIS e LILJEDHAL, 2002, p. 400).

Becker e Rivera (2005) e Radford, Bardini e Sabena (2006) realizaram pesquisas com alunos do *Grade 9*, ou seja, em faixa etária próxima a dos alunos que me propus a observar.

Becker e Rivera (2005) fizeram um estudo qualitativo do desempenho de 22 alunos numa tarefa que envolvia generalização de um padrão linear[12], verificando quais estratégias foram mais utilizadas pelos estudantes que desenvolveram uma generalização explícita.

---

[11] Tradução de "Rather than insisting on any particular symbolic notation, this gap should be accepted and used as a venue for students to practice their algebraic thinking. They should have the opportunity to engage in situations that promote such thinking without the constraints of formal symbolism".

[12] Para Becker e Rivera padrão linear é aquele que envolve valores em progressão aritmética.

A atividade proposta consiste na identificação de quantidades de quadrados brancos e escuros necessários para construir figuras como as presentes na seqüência da Figura 8.

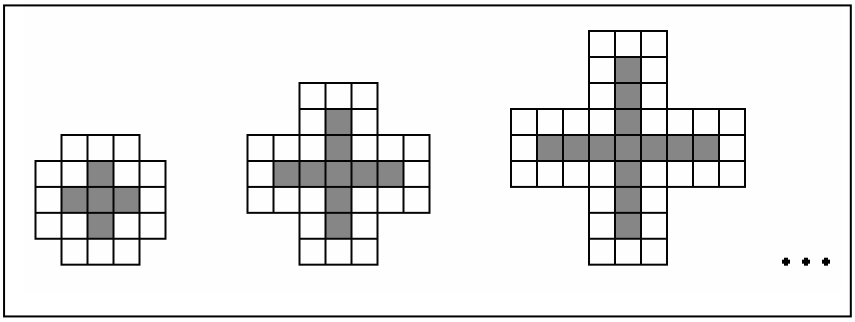


Figura 8: Padrão utilizado em atividade de Becker e Rivera (2005)

Os autores observaram uma diversidade de estratégias utilizadas pelos alunos e que dos 22 alunos, 13 não conseguiram responder à última parte da atividade, que solicitava três fórmulas para relacionar a posição da figura com as quantidades de quadrados brancos, escuros e totais.

Verificaram que os alunos que utilizaram estratégia numérica empregaram tentativa e erro e não deram sentido ao que os coeficientes do padrão linear representavam, ou seja, utilizaram números para generalizar mas não sabiam explicar porque estes números deveriam ser utilizados.

Estes autores comentam que os alunos que não conseguiram generalizar iniciaram com estratégias numéricas, mas faltava-lhes flexibilidade para tentar outras estratégias e ver possíveis conexões entre as diferentes formas de representação e as estratégias de generalização.

Radford, Bardini e Sabena (2006) acreditam que a percepção de padrões possibilita a "visão" da generalidade. Estes autores relatam as respostas de um grupo de alunos para uma atividade que contempla a investigação com um padrão de progressão aritmética.

Eles investigaram a produção de estudantes sobre generalização algébrica como um processo de objetificação[13] e afirmam que esse processo em generalização de

[13] Segundo Radford, Bardini e Sabena (2006), objetificação é um processo de ação, criação, imaginação e interpretação social para compreensão gradual de algo.

padrões consiste em observar propriedades matemáticas gerais não diretamente visíveis em um caso particular.

Para entender como ocorre a percepção dos estudantes em relação à generalidade matemática, os autores investigaram como os estudantes coordenavam os diversos meios semióticos da objetificação em tarefas generalizadoras. Para isso, observaram palavras, gestos e o ritmo da coordenação entre eles.

Os dados apresentados pelos autores foram coletados cinco anos antes da publicação do referente artigo durante a realização de uma atividade proposta a estudantes de uma escola em Ontário (Canadá). Nessa atividade, nas quais os estudantes trabalhavam por um determinado período em grupos com três ou quatro componentes, o professor era responsável por conduzir discussões para que os estudantes expusessem, comparassem e contestassem suas diferentes soluções.

A atividade proposta consistia em observar um padrão, fornecendo os três primeiros termos de uma seqüência figurativo-numérica.

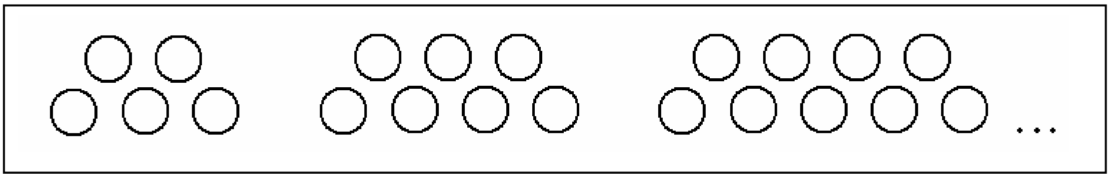


Figura 9: Seqüência proposta por Radford, Bardini e Sabena (2006)

A primeira parte do problema pedia aos alunos que continuassem a seqüência, desenhando as figuras 4 e 5, e descobrissem o número de círculos presentes nas figuras 10 e 100. A segunda parte do problema proposto pelos pesquisadores pedia aos alunos que explicassem como calcular o número de círculos em qualquer figura da seqüência. Já a terceira parte do problema pedia que os estudantes criassem uma fórmula algébrica que indicasse o número de círculos em qualquer figura.

Radford, Bardini e Sabena (2006) focam em seu artigo a análise do trabalho feito na segunda parte do problema por um grupo com três estudantes. Na primeira parte do problema, esses estudantes perceberam que as figuras eram formadas sempre por duas fileiras e formularam uma generalização por um esquema operacional.

Sobre a figura 100, um aluno disse que deveria ter 101 círculos na fileira de cima (um a mais que sua posição) e 102 círculos na fileira de baixo (dois a mais que sua posição). Esse tipo de generalização levou-os a concluir que a figura 10 e a figura 100 continham respectivamente, 23 e 203 círculos.

Para tentar responder à segunda parte do problema envolvendo padrões e indicar como descobrir o número de círculos em qualquer figura da seqüência, uma aluna chamou atenção ao fato do dígito 3 aparecer ao final das respostas da primeira parte do problema. Ela então sugeriu que formulassem um esquema generalizador que incluísse o número 3 e o número indicativo da posição da figura.

Para explorar o papel do algarismo 3 no esquema, estes estudantes relacionaram o número 3 com 3 círculos preenchidos na primeira figura. Com a manipulação da figura, eles puderam ver uma regra comum a todas as figuras da seqüência, estabelecendo um nível mais profundo para a objetificação.

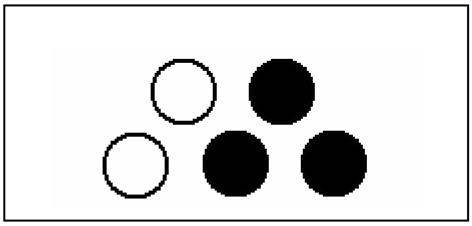


Figura 10: **Três círculos preenchidos**

Os autores afirmam que com uma coordenação de gestos e palavras, os alunos estabeleceram uma conexão da estrutura geral da seqüência de uma forma dinâmica e puderam mover-se do particular para o geral.

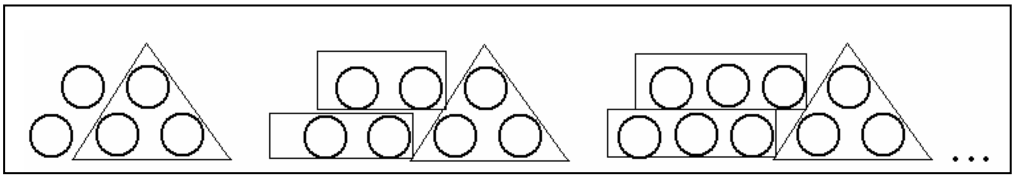


Figura 11: **Percepção da generalidade pelo grupo**

Segundo os autores [14]"para perceber a generalidade, [...] há um outro importante elemento: ritmo. Ritmo [...] constitui um artifício semiótico crucial para tornar aparente a percepção de uma ordem que continue além das primeiras figuras da seqüência." (RADFORD, BARDINI e SABENA, 2006, p. 397).

[14] Tradução de "In order to perceive the general [...] there is another important element: rhythm. Rhythm […] constitutes a crucial semiotic device in making apparent the perception of an order that continues beyond the first figures of the sequence."

Eles afirmam que a percepção da generalidade é um processo gradual que possui como parte essencial a projeção de uma regularidade que prove a generalidade expressa nas figuras e salientam a importância dos gestos e do ritmo no trabalho com generalização como parte da linguagem, comunicação e também da cognição matemática.

As teorias escolhidas para essa pesquisa foram utilizadas para auxiliar nas análises feitas, onde procurei semelhanças entre o que observei e o que afirmam tais teorias sobre o trabalho com generalização de padrões.

CAPÍTULO III – CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Sobre a Metodologia

Para investigar se alunos generalizam termos de progressões aritméticas, atividades baseadas em observação e generalização de padrões foram desenvolvidas e propostas. Para aplicação e análise de tais atividades, foram utilizadas fases da Engenharia Didática definidas por Artigue (1996), cuja engenharia está totalmente relacionada com a teoria das Situações Didáticas proposta por Guy Brousseau (1996).

Almouloud (2007) afirma que o objeto central da teoria das situações é a situação didática definida como o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo *milieu*[15] (contendo

[15] Segundo Almouloud (2007), a noção de *milieu* (meio) foi introduzida por Brousseau para analisar, de um lado, as relações entre os alunos, os conhecimentos ou saberes e as situações e, por outro lado, as relações entre os próprios conhecimentos e entre as situações.

eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição.

Brousseau (1996) afirma que a concepção moderna de ensino espera que se provoque no aluno adaptações desejadas, através de uma escolha judiciosa de problemas, que devem levá-lo a agir, falar, refletir e a evoluir por si próprio. Salienta que entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento em que o aluno produz a sua resposta, o professor deve recusar-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir.

O autor aponta a necessidade de situações adidáticas[16], construídas com fins didáticos, que provoquem no aluno a interação mais independente e mais fecunda possível.

Brousseau (1996) comenta que, numa situação didática, o professor está envolvido num jogo com o sistema das interações do aluno e os problemas que ele lhe coloca, sendo que este jogo caracteriza tal situação.

O professor tem de simular na sua aula uma microsociedade científica, se quer que os conhecimentos sejam meios para colocar boas questões e resolver debates e que as linguagens sejam meios para dominar situações de formulação e que as demonstrações sejam provas.

Para Brousseau o professor tem de efetuar não a comunicação de um conhecimento, mas a devolução do problema adequado. Salienta que se esta devolução se opera, o aluno entra no jogo e, se ele acaba por ganhar, a aprendizagem teve lugar. A regra desse jogo é chamada de contrato didático.

> O contrato didático é a regra do jogo e a estratégia da situação didática. É o meio que o professor tem de a colocar em cena. Mas a evolução da situação modifica o contrato, que permite então a obtenção de situações novas. (BROUSSEAU, 1996, p. 50)

O autor salienta que as rupturas de contrato que são realmente importantes e afirma ser necessário que o professor garanta aos alunos os meios efetivos de aquisição de conhecimento e que, além disso, o aluno aceite a responsabilidade de resolver

[16] Segundo Brousseau (1996), é uma situação onde desaparece a intenção de ensinar, mas continua a ser específica do saber.

problemas cuja solução não foi ensinada a ele. As cláusulas de ruptura e o enquadramento do contrato não podem ser descritos antecipadamente, sendo que o conhecimento será precisamente aquilo que resolverá as crises resultantes dessas rupturas, que não podem ser pré-definidas.

Encontramos em Almouloud (2007) que a teoria das situações desenvolveu-se a partir da classificação de situações caracterizadas por tipos de dialéticas ou interações fundamentais com o *milieu*.

A dialética de ação é aquela que coloca um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar. Esta situação deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre. Suas interações estão centralizadas na tomada de decisões, embora possa haver troca de informações, mesmo que não sejam necessárias à ação.

A dialética de formulação é aquela na qual o aluno troca informações com uma ou várias pessoas através de mensagens escritas ou orais, explicitando as ferramentas que utilizou e a solução encontrada. Consiste em proporcionar ao aluno condições para que este construa, progressivamente, uma linguagem compreensível por todos.

A dialética de validação é a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática ao julgamento de um interlocutor. Seu objetivo é a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação.

A dialética de institucionalização é aquela em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. Salienta que depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos.

Com vistas a utilizar a teoria das situações didáticas nas pesquisas da Didática da Matemática desenvolveu-se na França a metodologia de pesquisa denominada Engenharia Didática. Essa metodologia, descrita primeiramente por Michèle Artigue, se constituiu com a finalidade de analisar as situações didáticas, objeto de estudo da Didática da Matemática.

Machado (2002) conta que a noção de engenharia didática foi se construindo na Didática da Matemática com uma dupla função, na qual ela pode ser compreendida tanto como um produto resultante de uma análise *a priori*, caso da metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino. Esta autora salienta que a engenharia didática se caracteriza também pelo registro dos estudos feitos sobre um caso em questão e pela validação da pesquisa feita, sobretudo, internamente, pois baseia-se na confrontação entre uma análise *a priori* e uma análise *a posteriori*.

Artigue (1996) justifica a metodologia:

> A engenharia didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de seqüências de ensino. (ARTIGUE, 1996, p. 196)

São quatro as fases da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa segundo Machado (2002): análise preliminar, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* (validação).

Nas análises preliminares fiz um levantamento bibliográfico sobre o assunto de meu interesse que me possibilitou fazer algumas escolhas teóricas e analisar os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão. Pude também verificar como as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio sugerem o trabalho com as progressões.

Na fase da concepção e análise *a priori* fiz a delimitação do número de variáveis[17] didáticas pertinentes ao sistema sobre o qual queria atuar. Levei em consideração o fato de que, segundo Artigue (1996), o objetivo dessa fase é determinar de que forma as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos além de ter tentado criar uma situação adidática que procurasse a devolução aos alunos.

---

[17] Artigue (1996) distingue as variáveis de comando como macrodidáticas (que dizem respeito à organização global da engenharia) ou microdidáticas (que dizem respeito à organização local da engenharia)

Respeitei a observação de Machado (2002) de que a análise *a priori* objetiva a consideração do aluno sob dois aspectos: o descritivo e o previsivo. Não há nessa fase, tradicionalmente, lugar para o papel do professor. O aluno é considerado o ator principal e o papel do professor é recuperado, em parte, no contrato didático e no caso das situações de institucionalização local ou final, onde são retomadas as questões discutidas e os principais resultados da teoria são estabelecidos.

Na experimentação tentei respeitar, na medida do possível, as escolhas e deliberações feitas na análise *a priori*.

A fase de análise *a posteriori*:

> é aquela que se apóia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação [...] É nesta fase que se dá o tratamento dos dados que consta da seleção dos dados pertinentes à análise *a posteriori*. (MACHADO, 2002, p. 207).

Nessa fase ocorreu o que Machado (2002) já havia descrito, isto é, que para uma melhor compreensão do ocorrido, tornou-se necessária a realização de entrevistas durante a experimentação, o que mostra que experimentação e análise *a posteriori* não foram excludentes, mas sim complementares.

Para essa pesquisa, a análise a posteriori local da 1ª sessão, além de ter apontado a necessidade de entrevistas para compreender algumas escolhas feitas pelos alunos e verificar como foram feitas as resoluções em casos onde os alunos só apresentaram a resposta final, apontou também para a necessidade de realizar na 2ª sessão uma institucionalização local que estabelecesse os conhecimentos construídos e esclarecesse alguns significados de termos matemáticos.

As análises *a posteriori* locais e geral da experimentação procuraram identificar se os objetivos gerais e de cada atividade foram atingidos e se os alunos resolveram as atividades conforme o que foi anteriormente previsto nas análises a priori, a fim de validar a pesquisa realizada.

Procedimentos Metodológicos

Pelo fato de morar no Vale do Paraíba e freqüentar principalmente as cidades de Lorena e Guaratinguetá onde, respectivamente, moro e trabalho, decidi aplicar minha pesquisa na escola estadual de Guaratinguetá na qual leciono.

Muitas atividades que abordam generalização de padrões envolvendo progressões podem ser propostas a alunos de Ensino Fundamental, conforme o que foi evidenciado por Modanez (2002) e Nakamura (2003) , mas optei por alunos de Ensino Médio porque é nesse período que costuma ser abordado o tópico *Progressão Aritmética*.

Escolhi trabalhar com alunos de uma 1ª série porque é esta a série recomendada pelas Orientações Curriculares Nacionais em Brasil (2006) para o trabalho com PA e nesta série os professores da escola costumavam propor esse tópico.

Das nove 1as séries do Ensino Médio que a escola comportava em 2007, cinco funcionavam no período da manhã, duas no período da tarde e duas no período da noite. Como lecionava à tarde e à noite, preferi selecionar uma classe da manhã e aplicar as atividades com alunos de outro professor.

Das cinco turmas da 1ª série matutina, escolhi trabalhar com aquela cujos professores mais se queixavam de falta de disciplina e motivação. Se a aplicação da pesquisa os motivasse e fizesse com que os alunos generalizassem o padrão proposto, estaria comprovando a eficiência desse tipo de abordagem.

A diretora da Escola autorizou a experimentação com os alunos e não considerou necessário pedir autorização aos seus pais devido a seqüência didática envolver um assunto específico da 1ª série do Ensino Médio. Entretanto, ela solicitou que a pesquisa fosse realizada em horário de aula destes alunos.

Disse a ela que faria o possível para atender à sua solicitação e garanti que seriam utilizados nomes fictícios para identificar os alunos na dissertação, a fim de preservar suas identidades.

Não houve familiarização com os alunos antes da primeira sessão, ou seja, eles tiveram seu primeiro contato com o pesquisador no dia em que iniciei a aplicação da seqüência didática.

A professora da classe, que mantinha um ótimo relacionamento com os alunos escolhidos, foi quem explicou para eles que participariam de uma pesquisa. Ela pediu a colaboração de todos e avisou com antecedência o dia em que a primeira sessão da seqüência didática aconteceria.

A professora se mostrou acessível e disposta a colaborar para a realização da experimentação com seus alunos. Ela me disse que iria ensinar PA somente em novembro de 2007, o que fez com que decidisse aplicar a seqüência didática em setembro, outubro e início de novembro do mesmo ano.

A escolha por aplicar nos meses anteriores a novembro e no início deste deve-se ao fato de que seria mais interessante trabalhar com alunos que não tiveram contato com fórmulas para progressões, a fim de possibilitar que estes criassem suas próprias leis de generalização sem utilizar fórmulas já conhecidas.

A professora disponibilizou aulas suas para trabalhar com os alunos, sem precisar que estes viessem à escola fora do horário de aula. Optei por essa alternativa, pois assim estaria satisfazendo o que havia sido solicitado pela diretora.

Observei que as duas primeiras aulas de 4ª feira dessa turma eram aulas de Matemática. Como tinha disponível esse horário decidi utilizá-lo para realização da experimentação.

Avisei a professora que para a experimentação estavam previstas três sessões com duração de 40 minutos cada e que cada sessão ocorreria numa quarta-feira, tendo início às 7 horas e 30 minutos.

Procurei propor uma seqüência didática com atividades que contemplassem observação de seqüências diversas para posterior investigação de uma regra de generalização dos termos de progressões aritméticas.

Para esta pesquisa foram feitas análises *a priori* de todas as sessões realizadas. Estas análises contêm o objetivo geral da sessão e os objetivos específicos, variáveis didáticas e possíveis estratégias de resolução de cada atividade proposta.

Para resolver as atividades os alunos foram divididos em duplas, por acreditar que assim eles se envolveriam mais nas atividades produzindo mais do que se estivessem trabalhando individualmente. Além disso, colocar os alunos para trabalhar em grupos possibilita a gravação de seus diálogos e comentários.

Sobre isso me apóio em Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) que afirmam que o aluno deve sentir que as suas idéias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, para não ser necessária a validação constante por parte do professor.

Os mesmos autores salientam que, no entanto, se os alunos não estão acostumados nem a trabalhar em grupo nem a realizar investigações, fazer entrar na aula, simultaneamente, esses dois elementos novos pode trazer alguns problemas de gestão ao professor.

As sessões tiveram os diálogos de algumas duplas gravados para auxiliar na compreensão dos raciocínios utilizados pelos alunos. Como a classe escolhida era muito numerosa e havia poucos gravadores disponíveis, estabeleci que três duplas teriam seus diálogos gravados.

O critério de escolha para as duplas que tiveram seus diálogos gravados foi direcionado pela professora da classe. Pedi para que esta identificasse uma dupla que considerava com bom rendimento, uma dupla que considerava com rendimento médio e uma dupla que acreditava ter rendimento insatisfatório.

As análises *a priori* de cada sessão da seqüência didática estão presentes no capítulo seguinte, bem como as análises *a posteriori* das resoluções presentes nos protocolos recolhidos em tais sessões.

CAPÍTULO IV – A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Análise *a Priori* da 1ª sessão

O objetivo desta sessão foi introduzir os alunos em atividades de observação de regularidades em seqüências, de uma forma suave e crescente quanto à necessidade de uma observação mais específica.

Procurei elaborar atividades acessíveis aos alunos a fim de possibilitar uma apropriação do aluno pelo tema, atraindo e obtendo o interesse do mesmo pelo assunto.

Apresento cada uma das atividades com seus objetivos específicos e a descrição de algumas estratégias previstas. Exponho estas estratégias, identificadas por E_1, E_2, e assim por diante, em ordem crescente de dificuldade e de probabilidade de uso pelos estudantes.

Atividade 1

Tinha por objetivo apresentar seqüências para introduzir o aluno na observação de padrões, através da solicitação do próximo termo de cada uma delas.

Observem as seguintes seqüências:
a) 0, 3, 6, 9, 12, ...
b) 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...
c) 4, 2, 0, -2, -4, ...
d) □ ,○ ,✧ ,□ ,○ ,✧ , ...
e) 4, 8, 16, 32, 64, ...
Lucas e Joana do 1ºM1 conseguiram dizer quais os termos ou elementos que vinham a seguir em cada uma das seqüências. Vocês podem identificar, em cada seqüência, qual será o próximo termo?

Atividade 1

Dentre as possibilidades de variáveis didáticas, optei por utilizar os seguintes tipos de seqüências:

- progressão aritmética;
- seqüência cíclica;
- progressão geométrica (PG).

Quanto à variável sinal da razão da PA, optei por utilizar uma seqüência com razão positiva, ou seja, crescente e uma seqüência com razão negativa, ou seja, decrescente.

Decidi utilizar seqüências cíclicas, figurativo-numérica e numérica, e uma progressão geométrica para apresentar tipos de seqüências com padrão diferente do apresentado pela PA. O valor da variável sinal da razão da progressão geométrica foi escolhido como positivo.

Em geral apresento os cinco primeiros termos das progressões, pois considero esse número suficiente para que o aluno investigue o padrão e indique o próximo termo.

As seqüências cíclicas, ambas com ciclos de três elementos, estão representadas por nove e seis primeiros termos, para que o aluno perceba os ciclos e possa continuar indicando o próximo termo.

Vários autores, dentre eles Lima et al. (1997), utilizam parênteses para representar seqüências mas optei por não utilizar e apresentar ao aluno uma seqüência mais simplificada.

Foram previstas as seguintes estratégias para resolução dos variados itens:

item a

E_1 – O aluno percebe que cada termo equivale à soma de seu anterior com o número 3, calcula 12 + 3 e afirma que o próximo termo é 15.

E_2 – Após identificar que os termos de tal seqüência são múltiplos de 3 e que o último termo apresentado era 3×4, o aluno afirma que o próximo termo é 3×5, ou seja, 15.

itens b e d

E_1 – O aluno percebe que as seqüências possuem termos que se repetem ciclicamente e identifica que, pela ordem apresentada, os próximos termos são, respectivamente, o número 1 e o quadrado.

item c

E_1 – Ao identificar que cada termo pode ser calculado pela diferença entre o termo anterior e o número 2, o aluno efetua -4 – 2 e afirma que -6 é o próximo termo.

E_2 – O aluno percebe que os termos desta seqüência são múltiplos de 2 e segue a regra 2×2, 2×1, 2×0, $2 \times (-1)$, $2 \times (-2)$, concluindo que o próximo pode ser calculado por $2 \times (-3)$ e identificando -6.

item e

E_1 – O aluno verifica que cada termo equivale ao termo anterior multiplicado pelo número 2 e efetua 2 × 64, identificando 128.

E_2 – Ao verificar que a soma do termo anterior com o próprio resulta no termo seguinte, o aluno efetua a soma 64 + 64 e descobre que o próximo termo é o número 128.

Atividade 2

Seu objetivo era fazer com que os alunos percebessem características importantes de seqüências, levando-os a aprofundar seus conhecimentos sobre o tema.

<table>
<tr><td>Observem as seguintes seqüências:
a) 0, 3, 6, 9, 12, ..
b) 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...
c) 4, 2, 0, -2, -4, ...
d) □ ,○ ,✧ ,□ ,○ ,✧ ,...
e) 4, 8, 16, 32, 64, ...
f) 4, 2, 1, ½ , ¼, ...</td><td>Características:
I) crescente
II) decrescente
III) a diferença entre um termo e o seguinte (o sucessor) é constante
IV) os termos são separados por vírgula
V) um termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante
VI) os termos se repetem ciclicamente
VII) os termos da seqüência são números inteiros</td></tr>
<tr><td colspan="2">Quais dessas características cada seqüência possui?</td></tr>
</table>

Atividade 2

Decidi utilizar todas as seqüências presentes na atividade 1 e inseri uma nova seqüência com números inteiros e racionais não-inteiros representados na forma de fração.

Optei por utilizar as seguintes características:

- crescente - para verificar o que os alunos consideram por tal conceito e se associam essa característica a todas as seqüências que a possuem;
- decrescente - para verificar o que os alunos identificam por tal conceito e se associam essa característica às seqüências que a contemplam;
- diferença constante entre um termo e o seguinte - para investigar se os alunos associam essa característica às progressões aritméticas;

- termos separados por vírgula - para explicitar uma característica comum a todas as seqüências apresentadas;
- termo obtido pela multiplicação do anterior por uma constante - para investigar se os alunos associam tal característica às progressões geométricas da atividade;
- termos se repetem ciclicamente - para observar o que os alunos entendem por isso e se associam esta característica às seqüências cíclicas;
- todos os termos são inteiros - para chamar a atenção do aluno sobre essa característica.

Atividade 3

Tinha por objetivo propor a observação de uma progressão aritmética para possibilitar ao aluno elaborar mecanismos de generalização. Para isso foi solicitada a identificação de um termo distante, que dificultava a investigação por contagem. Chamo por termo distante o termo que se encontra distante do início da seqüência, ou seja, de seu primeiro termo.

Observe a seguinte seqüência:

1, 5, 9, 13, 17, ...

a) Qual será o próximo termo da seqüência?
b) Qual será o vigésimo quinto - 25º - termo da seqüência?
c) Qual será o 937º termo?

Atividade 3

Para a única seqüência da atividade decidi utilizar o número 1 como primeiro termo e o número 4 como razão para que os alunos trabalhassem somente com termos ímpares e pequenos, a fim de facilitar a observação e descoberta dos termos a serem identificados.

As identificações do próximo termo e do 25° termo foram propostas para que os alunos descobrissem por contagem estes termos e se sentissem envolvidos pela atividade.

A descoberta do 937° termo foi proposta para induzir os alunos a perceberem que a resolução por contagem é longa e passível de erros e tentarem formular uma estratégia de generalização.

Previ como estratégias de resolução:

item a

E_1 – Ao compreender que cada termo é a soma do termo anterior com o número 4, o aluno conclui que o quinto termo é 17 + 4 = 21.

E_2 – O aluno percebe que cada termo é um número consecutivo a um múltiplo de 4 e verifica que o número 20 é o próximo múltiplo a ser utilizado, concluindo que o quinto termo é 20 + 1 = 21.

item b

E_1 – O aluno percebe que cada termo aumenta em 3 de uma posição para outra e soma 3 a cada novo termo, a partir do primeiro, até chegar ao vigésimo quinto número.

$$\begin{array}{l} 1 + 4 = 5 \\ 5 + 4 = 9 \\ 9 + 4 = 13 \\ 13 + 4 = 17 \\ \ldots \\ 93 + 4 = 97 \end{array}$$

E_2 – Após verificar que o primeiro termo equivale a $4 \times 1 - 3$, o segundo termo equivale $4 \times 2 - 3$, o terceiro termo equivale a $4 \times 3 - 3$ e assim por diante, o aluno conclui que o vigésimo quinto termo será $4 \times 25 - 3 = 97$.

$$\begin{array}{l} (4 \times 1) - 3 = 1 \\ (4 \times 2) - 3 = 5 \\ (4 \times 3) - 3 = 9 \\ (4 \times 4) - 3 = 13 \\ \ldots \\ (4 \times 25) - 3 = 97 \end{array}$$

item c

E_1 – Após verificar que o primeiro termo equivale a $4 \times 1 - 3$, o segundo termo equivale $4 \times 2 - 3$, o terceiro termo equivale a $4 \times 3 - 3$ e assim por diante, o aluno conclui que o 937° termo será $4 \times 937 - 3 = 3745$.

$$
\begin{aligned}
&(4 \times 1) - 3 = 1\\
&(4 \times 2) - 3 = 5\\
&(4 \times 3) - 3 = 9\\
&(4 \times 4) - 3 = 13\\
&\ldots\\
&(4 \times 937) - 3 = 3745
\end{aligned}
$$

E_2 – Após identificar que o primeiro termo equivale a $4 \times (1 - 1) + 1$, o segundo termo equivale $4 \times (2 - 1) + 1$, o terceiro termo equivale a $4 \times (3 - 1) + 1$ e assim por diante, o aluno afirma que o 937° termo equivale a $4 \times (937 - 1) + 1 = 3744 + 1 = 3745$.

$$
\begin{aligned}
&(4 \times (1 - 1)) + 1 = 1\\
&(4 \times (2 - 1)) + 1 = 5\\
&(4 \times (3 - 1)) + 1 = 9\\
&(4 \times (4 - 1)) + 1 = 13\\
&\ldots\\
&(4 \times (937 - 1)) + 1 = 3745
\end{aligned}
$$

Descrição da realização da 1ª sessão

A primeira sessão ocorreu em 12 de setembro de 2007 e, conforme previsto, teve início às 7 horas e 30 minutos. Estavam presentes na sala o pesquisador, a professora da classe e 35 alunos. Os 35 alunos foram organizados em 16 duplas e 1 trio para resolver as atividades.

No horário determinado, as folhas com todas as atividades foram entregues aos alunos para que começassem a experimentação.

Os alunos foram orientados a deixar sobre as carteiras somente o material recebido, entregue na sessão, e uma caneta para cada dupla, a fim de evitar que apagassem suas tentativas de resolução.

Eles aparentavam calma no início e durante toda a sessão. O fato de nenhum aluno se recusar a participar dessa sessão confirma a colaboração da classe.

A professora da classe estava presente, mas foi orientada a não se comunicar com os alunos durante a aplicação das atividades. Da mesma forma, durante a sessão, quando os alunos tentavam obter alguma resposta a dúvidas sobre a atividade, pedia a eles que lessem novamente a questão sem lhes dar mais informações sobre a questão.

Todas as atividades foram entregues ao mesmo tempo, mas orientei os alunos a responderem as atividades seguindo a ordem numérica, só partindo para a próxima atividade após refletir e responder a atividade anterior.

Três duplas foram escolhidas pela professora para terem seus diálogos gravados, sendo elas as duplas D03, D11 e D14, consideradas respectivamente média, frágil e boa.

Após 40 minutos do início das atividades, com todos os alunos participantes presentes, os protocolos e gravações foram recolhidos.

Análise *a posteriori* da 1ª sessão

A seguir descrevo as resoluções dos alunos levando em conta os protocolos recolhidos bem como as observações feitas durante a aplicação e as transcrições das gravações obtidas das duplas D03 e D14, pois houve um problema com a gravação da dupla D11.

A Tabela 1 contém as respostas pelos alunos sobre os próximos termos das seqüências da Atividade 1. As colunas das seqüências dos itens **a** e **c** estão destacadas porque informam os próximos termos escolhidos para as progressões aritméticas.

	A	B	C	D	E
Enéas e Teca (D01)	15	1	**0**	□	128
Dora e Eva (D02)	15	1	-6	□	128
Aldo e Léo (D03)	15,18,21,...	1,2,3,...	-6, -8, -10,...	□ ○ ✧ ,...	128,256,512,...
Kim, Lino e Rui (T04)	15	1	-6	□	128
Dan e Diva (D05)	15,18,21,...	1,2,3,...	-6,-8,...	□ ,○, ✧ ,...	128,256,...
Pam e Wlad (D06)	15	1	-6	□	128
Kauê e Miro (D07)	15	1	**4**	□	128
Ada e Ciro (D08)	15,18,21,...	1,2,3,...	**-8**, -10,...	□ ,○, ✧ ,...	128,256,...
Hilda e Perla (D09)	15	1	-6	□	128
Mano e Raul (D10)	15	1	-6	□	128
Ali e Remo (D11)	15	1,2,3,...	**0**	□ ,○, ✧ ,...	128
José e Vilma (D12)	15	1	-6	□	128
Flora e Wanda (D13)	15	1	-6	□	128
Edu e Mário (D14)	15	1	-6	□	128
Bia e Mel (D15)	15,18,21,...	1,2,3,...	-6,-8,...	□ ,○, ✧ ,...	128,256,...
Fábio e Mirna (D16)	15	1	-6	□	128
Aura e Tuca (D17)	15	1	-6	□	128

Tabela 1: Resoluções da Atividade 1

Nota-se que as únicas 4 respostas “não esperadas” das 85 respostas dadas, que aparecem destacadas em negrito, recaíram na progressão aritmética decrescente, onde o termo solicitado é um número inteiro negativo.

Enquanto as duplas D01 e D11 não deixaram traços de suas resoluções e responderam que o termo seguinte era o zero, a dupla D07 identificou o número 4 como próximo termo desta PA sem explicar o porquê.

Nesses três casos, creio que o fato dessa seqüência vir logo após de uma seqüência cíclica pode ter influenciado as respostas que se justificariam como seqüências cíclicas: 4, 2, **0**, -2, -4, **0**, 4, 2, **0**, -2... ou 4,2,0,-2,-4, **4**,2,0,-2,-4,...

A dupla D08, formada por Ada e Ciro, identificou o número -8 como próximo termo da PA, indicando também o número -10 como termo seguinte ao -8. Isso indica que a dupla percebeu que a seqüência evoluía somando -2 ao termo anterior, embora ao registrar no papel tenham omitido o número -6, conforme pode ser visto na Figura 12.

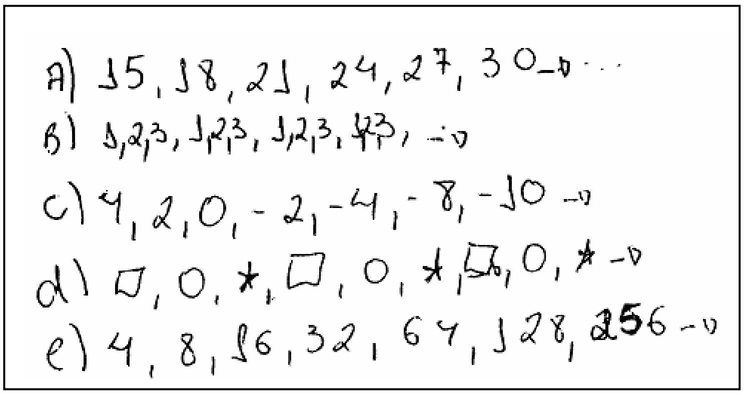


Figura 12: Extraída do Protocolo da Atividade 1 de Ada e Ciro (D08)

É interessante notar que quatro duplas (D03, D05, D08 e D15), além de indicar o termo seguinte ao último apresentado, escreveram mais alguns termos da seqüência.

Pela gravação da dupla D03 ficou evidente que esta dupla observou as seqüências e indicou termos das mesmas antes de terminar de ler o que estava sendo solicitado.

Apresento a seguir a transcrição do diálogo de Aldo e Léo ao observar a terceira seqüência e a quarta seqüência:

-Vai diminuindo menos dois. Menos dois, menos quatro, menos seis, menos oito, menos dez, menos doze.

- E a d? Quadradinho, bolinha, estrelinha (pausa). *Quadradinho, bolinha, estrelinha.*

Nesse momento, após terem continuado as quatro primeiras seqüências, um componente da dupla lê o enunciado em voz alta e ambos percebem que se tratava apenas da identificação do próximo termo.

Esta dupla não utilizou vírgulas para separar os termos pertencentes a um ciclo da seqüência figurativo-numérica, como pode ser visto na Figura 13. Embora não haja indícios na gravação feita, é provável que esta dupla tenha percebido o ciclo como termo seguinte da seqüência.

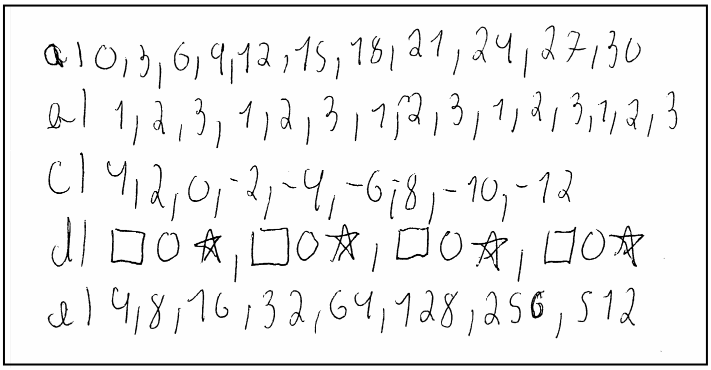

a) 0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30
b) 1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3
c) 4,2,0,-2,-4,-6,-8,-10,-12
d) □○☆,□○☆,□○☆,□○☆
e) 4,8,16,32,64,128,256,512

Figura 13: Extraída do Protocolo da Atividade 1 de Aldo e Léo (D03)

Ali e Remo, que apresentaram como próximo termo das duas seqüências cíclicas os ciclos 1,2,3 e □,○,✧, também parecem ter interpretado o ciclo como um termo de cada seqüência.

Apenas quatro dos dezessete protocolos apresentam cálculos, sendo estes relativos à multiplicação ou adição para a seqüência **e**, uma progressão geométrica. Três duplas preferiram utilizar a estratégia E_2, somando 64 com 64 para identificar 128 e uma dupla preferiu multiplicar 64 por 2, ou seja, preferiu utilizar a estratégia E_1.

A seguir transcrevo parte de diálogos que explicitam essas resoluções:

-Tem que somar! Sessenta e quatro mais sessenta e quatro dá cento e vinte e oito. (D03)

-Vai dobrando! Quatro, oito, dezesseis, trinta e dois, sessenta e quatro, cento e vinte e oito. (D14)

O objetivo da atividade foi atingido, pois propiciou aos alunos observação de diferentes padrões de seqüências conforme os resultados apresentados. Segundo Lee (1996), a chave para o sucesso em atividades de generalização de padrões parece estar na observação e esta deve ser pertinente à questão proposta.

Assim, considero que na maior parte das seqüências houve observações pertinentes. As poucas observações não esperadas, como a identificação do ciclo como termo, não comprometem os resultados obtidos.

A Atividade 2 se diferencia da primeira por possibilitar uma observação mais profunda das seqüências presentes na Atividade 1, com a inserção de uma seqüência com números inteiros e racionais não-inteiros em forma de fração.

Dos dezessete grupos, cinco duplas interpretaram a questão como sendo para designar uma característica a cada seqüência, o que sugere falta de atenção de alguns alunos na leitura do que a atividade solicitava. Outras duas duplas distribuíram as características para as seqüências, indicando duas características a uma das seqüências.

Refiro-me a grupos de alunos porque os alunos não se dividiram somente em duplas, pois um trio (T04) também foi formado.

Para verificarmos como cada grupo respondeu à atividade vejamos uma tabela com as características associadas a cada seqüência.

Na Tabela 2 as características em negrito na segunda coluna representam as associações que deveriam ser feitas a cada seqüência e as linhas em destaque representam a característica da PA.

		D 01	D 02	D 03	T 04	D 05	D 06	D 07	D 08	D 09	D 10	D 11	D 12	D 13	D 14	D 15	D 16	D 17
a	**I**	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	II																	
	III				X			X							X			
	IV		X		X	X			X	X			X	X	X			X
	V			X									X	X				
	VI																	
	VII		X		X	X				X			X	X	X			X
b	I				X								X					
	II																	
	III						X						X					X
	IV	X	X	X	X	X			X	X			X	X	X			X
	V																	
	VI		X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	VII				X	X		X		X			X	X	X		X	X
c	I																	
	II	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	III		X	X	X										X			X
	IV		X			X			X	X			X	X	X			X
	V												X					
	VI																	
	VII							X							X			X
d	I																	
	II																	
	III	X				X							X				X	X
	IV		X		X	X			X	X	X	X	X	X	X	X		X
	V																	
	VI		X	X	X			X	X	X			X	X	X			X
	VII						X											
e	**I**		X		X	X		X	X	X			X	X	X			X
	II																	
	III																	
	IV		X			X			X	X			X	X	X			X
	V	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	VI																	
	VII			X	X	X		X		X			X	X	X			X
f	I																	
	II		X	X	X	X		X	X	X			X	X	X			X
	III									X	X	X			X	X		
	IV		X			X	X	X	X	X			X	X	X		X	X
	V														X			
	VI																	
	VII	X																

Tabela 2: Resoluções da Atividade 2

Podemos perceber pela tabela que nenhuma dupla identificou todas as características pertinentes a cada seqüência, o que já era esperado devido ao nível de complexidade proposto.

Sobre as características I e II, crescente e decrescente, podemos ver que ocorreram poucas associações incorretas por parte dos alunos. O trio e a dupla D12 associaram crescente à seqüência **b**, que possui um ciclo crescente.

Quanto à característica III, que diz respeito à PA, pode-se dizer que foi a mais associada incorretamente nessa atividade. Apenas o trio e a dupla formada por Edu e Mário identificaram que essa era característica das seqüências **a** e **c**, sendo que a dupla associou III também à progressão geométrica.

Pela transcrição da gravação é possível identificar quando um componente da dupla diz :

- Quatro. Metade é dois. Metade é um. Metade é meio. Metade é um quarto.

Após ler a característica sobre diferença constante entre um termo e o seguinte, esse aluno afirma:

- É constante né, a diferença? Porque é metade, outra metade, outra metade.

Logo, essa dupla entendeu como diferença constante o fato de um termo ser sempre metade do termo anterior, o que revela não compreensão do significado da palavra diferença no contexto matemático ou que esta palavra foi utilizada no sentido cotidiano.

A falta de compreensão sobre a noção de "diferença constante" ficou mais evidente ao verificar que três duplas associaram essa característica à seqüência **b** e cinco duplas associaram-na com a seqüência **d**, ambas cíclicas. Além disso, cinco duplas associaram-na com a seqüência **f**, uma P.G.

A associação da característica da PA com as seqüências cíclicas pode indicar que esses alunos associaram a palavra constante à forma cíclica de algumas seqüências.

Três duplas que indicaram uma característica para cada seqüência associaram a característica III à PG, o que pode indicar que utilizaram uma das duas características que sobraram para a última seqüência apresentada. Na Figura 14 podemos ver as respostas de uma destas duplas associando a característica da PA à PG (4, 2, 1, ½, ¼, ...).

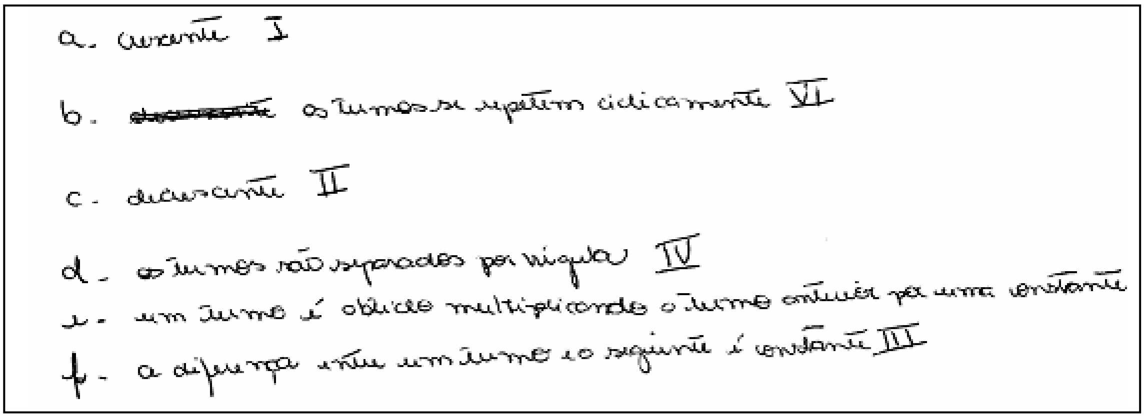

a. crescente I
b. ~~decrescente~~ os termos se repetem ciclicamente VI
c. decrescente II
d. os termos são separados por vírgula IV
e. um termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante
f. a diferença entre um termo e o seguinte é constante III

Figura 14: Extraída do Protocolo da Atividade 2 de Hilda e Perla (D09)

A característica IV, única que contemplava todas as seqüências presentes na atividade, deixou de ser associada algumas vezes. Observando as dez duplas que melhor compreenderam a proposta da atividade, podemos ver que apenas duas duplas não associaram essa característica a todas as seqüências.

A característica V, de uma PG, foi pouco associada incorretamente. Três duplas associaram essa característica à seqüência **a** e uma dupla associou-a à seqüência **c**, ambas progressões aritméticas.

A dupla D03, formada por Aldo e Léo, que faz parte das duplas que não compreenderam corretamente a atividade, optou por associar essa característica à PA crescente.

Pela gravação de Aldo e Léo podemos identificar quando um aluno muda de opinião sobre a característica a ser associada e diz:

> *- A **a** tá errada, olha! Três vezes um, três. Três vezes dois, seis. Três vezes três, nove.*

Essa dupla havia classificado a PA (0, 3, 6, 9, 12,...) como crescente mas ao perceber que esta poderia ser formada multiplicando três aos elementos do conjunto {0,1, 2, 3, ...} afirmou que cada termo era obtido multiplicando o termo anterior por uma constante.

As progressões geométricas **e** e **f** não foram percebidas na mesma. Enquanto dezesseis grupos perceberam que V era característica de **e** (uma PG com razão inteira), apenas uma dupla percebeu que a seqüência **f** (uma PG com razão pertencente ao intervalo]0,1[) era formada por sucessivas multiplicações.

Isso indica que esses alunos apresentavam dificuldade com multiplicação por racionais não-inteiros, por não identificarem uma divisão como um caso específico de multiplicação.

Quanto à característica VI, de seqüências cíclicas, pode-se dizer que foi bem compreendida pelos alunos. Além de não ser associada indevidamente, foi associada às seqüência **b** e **d** por nove dos dez grupos que indicaram mais de uma característica a cada seqüência.

Já a característica VII, sobre termos inteiros, foi associada incorretamente apenas por duas das sete duplas que não compreenderam a atividade. Dos outros dez grupos, o que mais me chamou atenção foi que apenas três duplas perceberam tal característica para a seqüência **c**, talvez por esta apresentar números negativos.

Como essa atividade tinha por objetivo possibilitar uma observação mais profunda e muitas duplas fizeram associações pertinentes, julgo que esse objetivo foi atingido.

A percepção de diferentes padrões de regularidade e a descrição destes padrões cria oportunidade para um confronto de idéias, segundo Mason (1996a). Como essa atividade privilegiava a descrição das seqüências, considero que esta também colaborou para que o aluno percebesse as seqüências como objetos passíveis de várias interpretações.

A terceira atividade da sessão exigia identificação do próximo termo e de termos distantes de uma PA.

Observemos na página seguinte a Tabela 3, que contém as resoluções e respostas dos alunos para os termos solicitados.

Grupos	6º termo	25º termo	937º termo
D01	21	101 (contagem)	(912 × 4) + 101 = 3749
D02	21	97 (contagem)	(937 × 4) – 3 = 3745
D03	21	69 (contagem)	(937 × 4) + 1 = 3749
T04	21	97 (contagem)	3637
D05	21	97 (contagem)	-
D06	21	25	937
D07	21	97 (contagem)	3634
D08	21	90	1692
D09	21	97	3748
D10	21	97 (contagem)	937 × 4 = 3748
D11	21	101	3749
D12	21	97	3748
D13	21	97 (contagem)	937 × 4 = 3748
D14	21	97 (contagem)	-
D15	21	97	3745
D16	21	97 (contagem)	(937 × 4) – 3 = 3745
D17	21	97	-

Tabela 3: Resoluções da Atividade 3

Todas as duplas indicaram corretamente o termo seguinte da seqüência envolvida no item **a**, o que confirma a facilidade dos alunos em observar padrões para indicar termos seguintes. As duas primeiras fases do processo investigativo em generalização de padrões sugeridas por Herbert e Brown (1997) foram contempladas pelos alunos: a procura do padrão e o reconhecimento do mesmo.

Para o item **b**, doze grupos indicaram corretamente o número 97 como vigésimo quinto termo, sendo que sete duplas e o trio mostraram ter resolvido a atividade por contagem, explicitando todos os termos anteriores ao vigésimo quinto, ou seja, utilizando a estratégia E_1. A Figura 15 mostra a resolução por contagem de Mano e Raul para descobrir o 25º termo da seqüência.

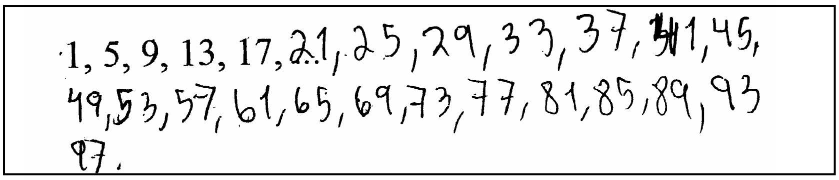

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45,
49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81, 85, 89, 93
97.

Figura 15: Extraída do Protocolo da Atividade 3 de Mano e Raul (D10)

Das cinco duplas que indicaram outro valor, duas indicaram o vigésimo sexto termo e uma indicou um termo anterior da seqüência. As duplas D06 e D08 não compreenderam o que foi solicitado.

Ada e Ciro informaram um número par como termo da seqüência de números ímpares e não apresentaram os cálculos feitos para chegar ao resultado.

Pam e Wlad confundiram o número de posição com o termo que ocupa tal posição, o que também ocorreu com um aluno pesquisado por Becker e Rivera (2005), que afirma que isso acontece quando o aluno confunde os papéis das variáveis dependente e independente.

O item **c** exigia maior complexidade de raciocínio mas três duplas indicaram corretamente o termo distante, sendo que uma delas não apresentou a resolução. As duplas D02 e D16 chegaram ao resultado observando que o resultado da multiplicação de 4 por 937 deve ser subtraído de 3 para se chegar a esse termo, resolvendo a atividade pela estratégia E_1 prevista.

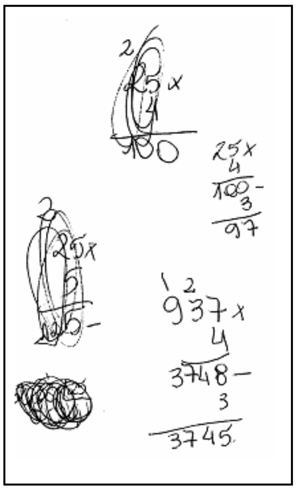


Figura 16: Extraída do Protocolo da Atividade 3 de Fábio e Mirna (D16)

Por mais que não tenham construído fórmula, o pensamento algébrico se fez presente no raciocínio utilizado pelas duplas, pois segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) o pensamento algébrico não se expressa de uma única forma e pode se manifestar através da linguagem aritmética. As duplas não escreveram uma fórmula de natureza simbólica mas criaram um esquema generalizador, também característico do pensamento algébrico.

Pode-se dizer então que essas duplas atingiram a terceira fase do processo investigativo de Herbert e Brown (1997), correspondente à generalização do padrão proposto.

Quatro duplas identificaram 3748 como o termo solicitado, sendo que duas delas efetuaram a multiplicação de 937 por 4.

Três duplas deram como resposta 3749, que vem a ser o 938º termo da seqüência, mas apenas a dupla formada por Aldo e Léo mostrou ter efetuado a multiplicação anteriormente citada e somado ao resultado o número 1.

Aldo e Léo deixaram claro o que entenderam sobre esse item com o seguinte diálogo:

> *- Aqui não vai somando quatro mais quatro? Então é novecentos e trinta e sete vezes quatro.*
> *- Um, cinco, nove, três, sete. Não tem oito!*

O último comentário mostra que esse aluno percebeu que os números dessa seqüência nunca terminam em oito, afinal são todos ímpares. Isso levou a dupla a somar o número um ao resultado e dar como resposta um número ímpar.

O objetivo de possibilitar a elaboração de um mecanismo de generalização foi alcançado e muitos alunos que não construíram um mecanismo eficiente chegaram perto de conseguir isto.

Interessante notar que a dupla D14, considerada a melhor da classe, sequer ensaiou uma solução para o 937º termo.

Para compreender melhor as impressões dos alunos sobre a característica III da Atividade 2 e as estratégias de resolução para a Atividade 3, selecionei seis duplas para serem entrevistadas.

As entrevistas feitas com algumas duplas ou componentes serão detalhadas a seguir.

Entrevistas após a 1ª sessão

As entrevistas foram feitas em 26 de setembro de 2007, duas semanas após a primeira sessão, com os alunos sendo retirados da classe por um breve período de 10 minutos. Serão relatados a seguir os motivos pelos quais cada dupla entrevistada foi selecionada e os detalhes mais importantes das entrevistas, com a transcrição de frases ditas pelos alunos durante nossos diálogos.

Sobre entrevistas individuais, Lüdke e André (2001 *apud* Almeida, 2006) consideram três tipos: não estruturada, estruturada e semi-estruturada. De acordo com as autoras, as entrevistas não estruturadas são aquelas que permitem uma maior liberdade de percurso, enquanto as estruturadas são aquelas que seguem um determinado roteiro a ser seguido pelo entrevistador e têm por objetivo obtenção de dados mais uniformes entre os entrevistados. Entre esses dois tipos situam-se as entrevistas semi-estruturadas, que permitem um roteiro flexível para poder ser adaptado durante o transcorrer da entrevista.

Como utilizei um roteiro previamente definido e esse não foi alterado em nenhuma das entrevistas, posso afirmar que realizei entrevistas estruturadas com as duplas escolhidas. Esse roteiro era baseado em atividades a serem resolvidas pelos alunos diante do pesquisador.

1) Em qual ou quais das seqüências abaixo a diferença entre um termo e o seguinte é constante:

I) 1, 3, 5, 7, 9, ...
II) 4, 5, 4, 5, 4, 5, ...
III) 2, 4, 8, 16, 32, ...

2) Qual é próximo termo, o 20º termo e o 728 º termo da seqüência a seguir?

1, 7, 13, 19, 25, ...

Figura 17: Atividades que basearam a entrevista

A fim de evitar comunicações entre os alunos na troca de entrevistados, optei por alternar as seqüências da questão 1 com outras seguindo o mesmo padrão. Enquanto as duplas D05, D09 e D15 seguiram o roteiro acima, as duplas D11, D12 e D17 observaram as seguintes seqüências:

I) 2, 4, 6, 8, 10, ...
II) 1, 9, 1, 9, 1, 9, ...
III) 1, 3, 9, 27, 81, ...

A primeira dupla a ser entrevistada foi a dupla D15, que contava com as duas componentes, Bia e Mel, presentes. Esta dupla foi escolhida porque não associou corretamente a característica da PA e indicou a resposta correta para o 938º termo da Atividade 3 mas não apresentou cálculos para mostrar como chegou ao resultado.

Essa dupla era uma das sete duplas que interpretaram a Atividade 2 como sendo a indicação de uma característica para cada seqüência e indicou a seqüência **f** como tendo a característica III - diferença entre um termo e seu sucessor é constante - e não indicou essa característica para as seqüências **a** e **c**. Durante a entrevista com as alunas, Bia, observando as 3 seqüências da 1ª questão da entrevista, afirmou que a seqüência II - cíclica - tinha essa característica. E explicou:

- Acho que é a segunda, pois são diferentes e repetem.

Sobre a progressão aritmética da segunda questão, ambas componentes da dupla identificaram o próximo termo como sendo o número 31 e o vigésimo termo como o número 115, descobrindo por contagem e explicitando todos os termos anteriores.

O 728º termo dessa seqüência não foi informado pelas alunas, mas estas disseram como fariam para identificá-lo. Disseram que multiplicando 708 (apresentado após a subtração 728 – 20) por 6, pode-se descobrir o referido termo. As alunas utilizaram o valor de posição 20 mas não utilizaram o termo que ocupa tal posição (no caso, 115), que deveria ser somado ao resultado do produto indicado para chegar ao termo correto. Embora tenham se esquecido desse detalhe, elas afirmaram que essa foi a estratégia utilizada na resolução da Atividade 3.

A dupla D12 foi a segunda dupla a ser chamada mas só contava com a presença de um componente, José, que aceitou ser entrevistado sozinho. Essa dupla foi escolhida porque seu protocolo apresentava incoerência na indicação de um termo par em uma seqüência de números ímpares da Atividade 3 e não apresentação de cálculos para a mesma atividade. Além disso, a dupla indicou a seqüência **b** - cíclica - como tendo a característica III na Atividade 2.

Observando as 3 seqüências da 1ª questão da entrevista, o aluno perguntou:

- Constante é igual? Como assim constante?

Diante de meu silêncio, José decidiu:

- É a II, pois os termos se repetem.

Sobre a seqüência da segunda questão, o aluno rapidamente identificou 31 como próximo termo e disse que poderia achar o 20 º termo por contagem, continuando a seqüência até identificá-lo.

Sobre o 728º termo da seqüência, José disse que uma multiplicação deveria ser utilizada e efetuou o produto de 728 por 6. Ao me dizer que o número 4368 era o termo a ser identificado, pedi a ele que observasse que a seqüência só apresentava números ímpares e 4368 era um número par.

O aluno pensou por um tempo, concordou que não havia como aquele número ser o termo procurado mas se julgava incapaz de dar outra resposta naquele momento.

Após essa entrevista, a dupla D09 foi chamada para ser entrevistada, mas apenas a componente Hilda estava presente. Essa dupla foi escolhida porque apresentou incoerência indicando um termo par em uma seqüência de números ímpares e não mostrou os cálculos utilizados para se chegar às respostas na Atividade 3. Para a Atividade 2, essa dupla indicou a seqüência **f** – uma PG – como tendo a característica da PA e não indicou esta característica para as seqüências que a contemplavam.

Em entrevista com Hilda, a aluna afirmou que as seqüências I e III tinham a característica III da Atividade 2. E explicou:

- Pela variação. Não há repetição.

Hilda indicou o próximo termo da seqüência 1, 7, 13, 19, 25, ... e demorou muito a responder o 20º termo da mesma. A aluna confessou que estava com vergonha de dizer qual estratégia utilizaria, mas ao final continuou a seqüência por contagem e mostrou que se tratava do número 115.

A aluna afirmou que o resultado da multiplicação de 728 por 6 resultaria no 728º termo da seqüência. Questionei sobre este número ser par e a seqüência apresentar somente números ímpares. Hilda notou a incoerência mas não soube dar uma nova resposta.

A dupla D11 foi a próxima a ser entrevistada, estando ambos os componentes desta, Ali e Remo, presentes. Essa dupla foi selecionada para entrevista porque não informou como chegou às respostas e indicou termos posteriores aos solicitados na Atividade 3.

Essa dupla era uma das duas duplas que distribuiu as características para as seqüências da Atividade 2 e informou a seqüência **f** como tendo a característica III.

Em entrevista com os componentes dessa dupla, estes, observando as 3 seqüências da primeira questão da entrevista, afirmaram que a seqüência II tinha a característica da PA. E explicaram:

- Constante é repetir.

Sobre a progressão aritmética da segunda questão, ambos afirmaram que o próximo termo seria o número 31. Para achar o 20º termo, Remo continuou a seqüência até encontrar o número 115. Ali auxiliou o colega com os cálculos e disse que tinha interesse em ver se chegaria ao número 120.

Ao ver que o resultado da multiplicação de 20 por 6 excedia o 20º termo em 5 unidades, Ali disse que encontraria o 728º termo efetuando 728 × 6 e subtraindo 5 do resultado.

Essa dupla disse ter utilizado essa estratégia para resolver à atividade 3 da primeira sessão, mas chegaram ao 26º e 938º termos, ao invés dos solicitados 25º e 937º termos, provavelmente por um erro de contagem na identificação do 25º.

Vale comentar que essa dupla precisou ser motivada constantemente pelo pesquisador, pois possuíam histórico muito ruim na escola e não acreditavam que podiam fornecer respostas interessantes para as atividades.

A próxima dupla convidada foi a dupla D05, que contava apenas com a presença da componente Diva. Essa aluna aceitou ser entrevistada sem a presença do outro componente.

A dupla foi escolhida porque não apresentou solução para o 937º termo da seqüência da Atividade 3 e indicou apenas a seqüência **d** – cíclica – como tendo a característica da PA na Atividade 2. Durante a entrevista, Diva disse:

- O que é constante? Nem imagino!

Após observar as seqüências que poderiam ter tal característica na primeira questão da entrevista, a aluna disse que não tinha como responder, já que não compreendia o que a característica informava.

Diva identificou o próximo termo e o 20º termo da seqüência da segunda parte da entrevista por contagem, mas não identificou o termo distante solicitado. A aluna argumentou:

- Acho que é muito grande. E o de vezes não dá certo.

Após a recusa de Diva em pensar um pouco mais, pedi para chamar a última dupla a ser entrevistada.

A dupla D08 contava com ambos componentes presentes: Ada e Ciro. Essa dupla foi escolhida porque identificou dois números pares como termos de uma seqüência formada somente por ímpares e não apresentou cálculos que mostrassem o raciocínio utilizado para resolução da Atividade 3. Um outro grande motivo para selecionar essa dupla é o fato desta não ter associado a característica III a nenhuma seqüência da Atividade 2.

Na primeira questão da entrevista, Ciro disse que as seqüências I e III apresentavam diferença constante entre um termo e seu sucessor. Perguntei o porquê da afirmação e o aluno explicou o padrão de cada seqüência, não deixando claro o motivo da escolha por aquelas seqüências.

Ada afirmou que as duas seqüências escolhidas pelo colega eram muito diferentes para ter a mesma característica, mas preferiu não indicar uma resposta para a questão.

Para a segunda questão da entrevista, ambos indicaram o próximo termo como sendo 31 e o 20º termo como sendo o número 120, por este ser o resultado da multiplicação de 20 por 6. Os alunos disseram que fariam o mesmo para indicar o 728º termo, efetuando a multiplicação de 728 por 6.

Assim como na atividade 3, esses alunos forneceram dois números pares como termos de seqüências com números ímpares. Após serem questionados sobre isso, aparentaram curiosidade mas não conseguiram dar outra resposta.

As entrevistas me confirmaram que os alunos apresentavam dificuldades para compreender características das seqüências por falta de compreensão do sentido matemático de algumas palavras e que alguns alunos percebiam que suas estratégias de generalização eram insuficientes mas não conseguiam criar uma nova estratégia.

Pensando em aproveitar as estratégias de generalização criadas e discutir as características que muitos alunos não compreenderam, vi a necessidade de uma segunda sessão como institucionalização local abordando esses dois aspectos anteriormente citados. A elaboração, aplicação e discussão dos resultados dessa sessão se encontram nas páginas seguintes.

Análise *a Priori* da 2ª sessão

As análises dos resultados da 1ª sessão levaram-me a verificar a necessidade de uma sessão de institucionalização local que abordasse questões, que embora não estivessem diretamente ligadas ao tema de progressões, interferiram na compreensão da proposta das atividades por um grupo expressivo de duplas e que propiciasse a discussão de algumas das estratégias de generalização utilizadas pelas duplas.

Decidi abordar nesta sessão questões que causaram problemas para a compreensão dos alunos durante a resolução das atividades propostas na 1ª sessão, como os significados de termos polissêmicos, ou seja, que comportam mais de um significado, e a leitura e interpretação de enunciados de algumas das atividades. Além disso, decidi apresentar um painel com diferentes estratégias utilizadas pelas duplas na resolução da Atividade 3, para compartilhá-las e propiciar uma discussão na classe.

A sessão comportou três momentos distintos, cada um contemplando uma atividade, que serão comentados a seguir.

1° Momento

Para esse momento me inspirei na teoria de Durkin e Shire (1995 *apud* Munhoz, 1999) que salienta que o contexto matemático é muito teórico e talvez não seja suficiente para esclarecer o significado de um termo com mais de um sentido.

Estes autores afirmam que ao invés de evitar a ambigüidade, o professor deve explorá-la, tirando vantagem dela. Sugerem que a citação de exemplos em que o termo aparece numa situação cotidiana e outro exemplo com o mesmo termo usado no contexto matemático pode deixar o estudante mais seguro, percebendo a diferença entre os significados.

Dessa forma, o 1º momento procurou seguir a sugestão de Durkin e Shire, propondo frases contendo as palavras que causaram dificuldade de compreensão entre os alunos e fazendo com que estes refletissem sobre o significado dessas palavras no cotidiano e no contexto matemático.

As palavras apontadas pela análise dos protocolos e das entrevistas que causaram problemas de compreensão foram: termo, diferença, constante, sucessor e anterior.

A seguir descrevo alguns significados dessas palavras, retirados do Dicionário Houaiss (2004):

- Termo – fim no tempo ou no espaço; marco divisório; palavra, vocábulo; teor, conteúdo; modo, maneira; qualquer elemento de uma expressão algébrica.
- Diferença – falta de semelhança, desigualdade; alteração; falta de harmonia; divergência; resultado de uma subtração; abatimento no preço; desconto.
- Constante – que faz parte de algo; incluído; inalterável, imutável, invariável, fixo; freqüente; progressivo; grandeza cujo valor não varia.
- Sucessor – que sucede a outro ou o substitui; herdeiro; descendente.
- Anterior – o que vem antes; situado na parte da frente.

Decidi fazer três frases relativas a cada um dos termos polissêmicos. Duas frases representando o significado das palavras no cotidiano e uma com o termo inserido no contexto da Matemática. Utilizei maior número de frases com contexto do cotidiano e não coloquei a frase do contexto matemático na mesma ordem entre os diferentes grupos.

A fim de prepará-los para a Atividade 4, decidi escrever na lousa as frases:

- Um dos mergulhadores ficou na superfície, dentro do barco, para monitorar o oxigênio do outro.
- A superfície do dado de aresta 1 cm tem área de 6 cm^2.

Estas frases serviriam para perguntar à classe se *superfície* tem o mesmo significado nas duas frases e discutir os significados diferentes, enfatizando que outras palavras da língua portuguesa também têm diferentes significados no cotidiano e na matemática.

Após essa introdução, a Atividade 4 seria entregue para que os alunos a resolvessem em duplas, solicitando que lessem com atenção e verificassem para cada frase se a palavra indicada na primeira coluna tinha o significado matemático ou cotidiano.

Palavra	**Frases**	**Sentido Cotidiano**	**Sentido Matemático**
Diferença	1) Há muita diferença entre o meu jeito e o seu.		
	2) O médico detectou uma diferença no resultado do exame.		
	3) A diferença entre nossas idades é grande.		
Termo	1) Quando será o termo da filmagem?		
	2) Encontrei o 5º termo da seqüência.		
	3) O predicado é um termo essencial de uma oração		
Constante	1) A soma dos ângulos internos de um triângulo é constante.		
	2) Tenho uma constante dor nas pernas.		
	3) Naquela época era constante o uso do chapéu.		
Sucessor	1) O irmão de Fidel Castro é seu sucessor.		
	2) Este modelo de moto é o sucessor do de sua moto atual.		
	3) Entre os números primos, o 13 é o sucessor de 11.		
Anterior	1) Um programa anterior não foi recomendado para crianças.		
	2) No conjunto dos múltiplos de 3 o número 12 é anterior a 15		
	3) A parte anterior da perna do sujeito está gravemente ferida.		

Atividade 4

2° Momento

Tinha por objetivo fazer os alunos interpretar o enunciado da Atividade 2 da sessão inicial e observar as características de seqüências com padrões que as seqüências dessa atividade apresentavam.

Para esse momento da institucionalização, vi a necessidade de discutir com os alunos as características da Atividade 2 que proporcionaram maior falta de compreensão ou associação indevida por parte dos alunos:

- a diferença entre um termo e o seguinte é constante;
- um termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante;
- os termos se repetem ciclicamente

As 4 seqüências tiveram cada uma as seguintes características:

- PA com razão positiva – para levar o aluno que ainda não percebeu a diferença constante entre termos consecutivos desta seqüência a observar essa característica;
- PA com razão negativa – como a PA com razão negativa presente na 1ª sessão causou dificuldades em alguns alunos até mesmo para indicar o próximo termo, achei que seria necessário retomar esse tipo de seqüência;
- PG com razão menor que 1 e positiva – pois a grande maioria dos alunos não associou esta seqüência à sua característica na Atividade 2, talvez por não considerar a divisão como uma multiplicação por um número do intervalo]0,1[;
- seqüência cíclica – por essa ter sido compreendida por muitas duplas, na realização das atividades e nas entrevistas, como tendo a característica principal da PA.

Uma folha com a Atividade 5 seria entregue aos alunos e solicitaria que observassem as características e as seqüências e ligassem com um traço cada seqüência às suas características. Após alguns minutos de reflexão dos alunos, os resultados seriam discutidos.

Características	Seqüências
A diferença entre qualquer termo e seu sucessor é constante. Os termos se repetem ciclicamente O sucessor de um termo ***a*** é obtido multiplicando o termo ***a*** por uma constante.	I) 5, 7, 9, 11,... II) 2, 1, 3, 2, 1, 3,... III) 27, 9, 3, 1, ... IV) 8, 4, 0, -4, ...

Atividade 5

3° Momento

Pretendia gerenciar um painel com diferentes estratégias de resolução apresentadas para a Atividade 3 da 1ª sessão, para que os alunos discutissem e chegassem à conclusão de qual ou quais eram o(s) mecanismo(s) mais eficiente(s) para se chegar à generalização

Optei por comentar com os alunos as seguintes resoluções para a questão **c** da atividade, que consistia na identificação do 937º termo da PA (1, 5, 9, 13, 17, ...):

- A multiplicação da razão 4 pelo número 937, resultando o número 3748;
- A multiplicação da razão 4 por 937 somada ao número 1, resultando o número 3749;
- A multiplicação de 4 por 937 subtraída de 5, resultando o número 3745.

Após um tempo para que os alunos comentassem estas estratégias, seria proposto a identificação do 20° termo e do 728° termo da seqüência (1, 7, 13, 19, 25,...), que já havia sido apresentada aos alunos entrevistados. Escolhi essa PA porque, com esta, estaria propondo uma nova investigação aos alunos não entrevistados e ao mesmo tempo dando um retorno aos alunos que observaram tal seqüência.

Identifiquem o 20° termo e o 728° termo da seqüência: 1, 7, 13, 19, 25, ...

Atividade 6

As estratégias de resolução previstas para a Atividade 6 foram:

20º termo

E_1 – O aluno percebe que cada termo aumenta em 6 de uma posição para outra e soma esse número a cada novo termo, a partir do primeiro, até chegar ao vigésimo número.

1 + 6 = 7
7 + 6 = 13
13 + 6 = 19
19 + 6 = 25
...
109 + 6 = 115

E_2 – Após verificar que o primeiro termo equivale a 6 × 1 – 5, o segundo termo equivale 6 × 2 – 5, o terceiro termo equivale a 6 × 3 – 5 e assim por diante, o aluno conclui que o vigésimo quinto termo será 6 × 25 – 5 = 115.

(6 × 1) – 5 = 1
(6 × 2) – 5 = 7
(6 × 3)– 5 = 13
(6 × 4) – 5 = 19
...
(6 × 25) – 5 = 115

728º termo

E_1 – Após verificar que o primeiro termo equivale a 6 × 1 – 5, o segundo termo equivale 6 × 2 – 5, o terceiro termo equivale a 6 × 3 – 5 e assim por diante, o aluno conclui que o 728° termo será 6 × 728 – 5 = 4363.

(6 × 1) – 5 = 1
(6 × 2) – 5 = 7
(6 × 3)– 5 = 13
(6 × 4) – 5 = 19
...
(6 × 728) – 5 = 4363

E_2 – O aluno identifica que o primeiro termo equivale a $6\times(1-1)+1$, o segundo termo equivale $6\times(2-1)+1$, o terceiro termo equivale a $6\times(3-1)+1$ e assim por diante e afirma que o 728° termo equivale a $6\times(728-1)+1 = 4362+1 = 4363$.

$$(6\times(1-1))+1 = 1$$
$$(6\times(2-1))+1 = 7$$
$$(6\times(3-1))+1 = 13$$
$$(6\times(4-1))+1 = 19$$
$$\ldots$$
$$(6\times(728-1))+1 = 4363$$

Descrição da realização da 2ª sessão

A segunda sessão de atividades, que consistia numa institucionalização, pretendia discutir com os alunos as idéias cujos resultados da primeira sessão revelaram não terem ficado claras para estes.

Esta sessão ocorreu em 17 de outubro de 2007 (pouco mais de um mês após a 1ª sessão) e teve início às 7 horas e 30 minutos, sendo dividida em 3 momentos que contemplavam discussão entre o pesquisador e os alunos e atividades para cada momento previsto.

Os alunos se mostravam bastante interessados em discutir as idéias e nenhum aluno se recusou a participar. Estavam presentes 31 alunos, que foram divididos em 15 duplas e 1 aluno preferiu realizar as atividades individualmente. Alunos que não participaram da primeira sessão estavam presentes e alguns alunos que participaram desta se ausentaram.

Três alunos que não participaram da primeira sessão estavam presentes e não impedi que estes participassem dessa sessão. Dois destes alunos iniciantes na experimentação formaram uma nova dupla (D18) e o outro aluno formou dupla com um colega já participante.

No primeiro momento, discutimos sobre como palavras podem apresentar diferentes significados em relação ao sentido cotidiano e ao sentido matemático. Exemplifiquei isso com frases explorando sentidos diferentes para a palavra *superfície.*

Logo após, os alunos tiveram 10 minutos para responder à Atividade 4, que explorava os sentidos de palavras que os alunos não compreenderam ou utilizaram incorretamente na sessão anterior. Após esse tempo, discutimos o sentido dessas palavras nas frases presentes em tal atividade.

O segundo momento teve início com a exposição das características que mais proporcionaram incompreensão aos alunos. Muitos deles afirmaram que, após a realização do primeiro momento da institucionalização local, compreenderam finalmente estas características. Sem que o pesquisador precisasse identificar qual seqüência continha qual característica, os alunos discutiram e fizeram conexões.

Antes de propor a atividade prevista para este momento, li com os alunos o enunciado da Atividade 2 da 1ª sessão, que pedia que os alunos identificassem quais características algumas seqüências possuíam e comentei que muitos atribuíram apenas uma característica para cada seqüência.

Em seguida, disponibilizei 5 minutos para que os alunos resolvessem a Atividade 5, que solicitava que ligassem 3 características a 4 seqüências. Após o término desses minutos, discutimos e chegamos a um consenso de quais eram as ligações a serem feitas.

O terceiro momento era o mais esperado pelos alunos, que se mostravam envolvidos pela atividade que exigia identificação de um termo distante de uma PA. Comecei fazendo um painel, semelhante ao apresentado na Figura 18, com estratégias de generalização que alguns deles utilizaram para identificar o 937º termo da PA (1, 5, 9, 13, 17, ...) na Atividade 3.

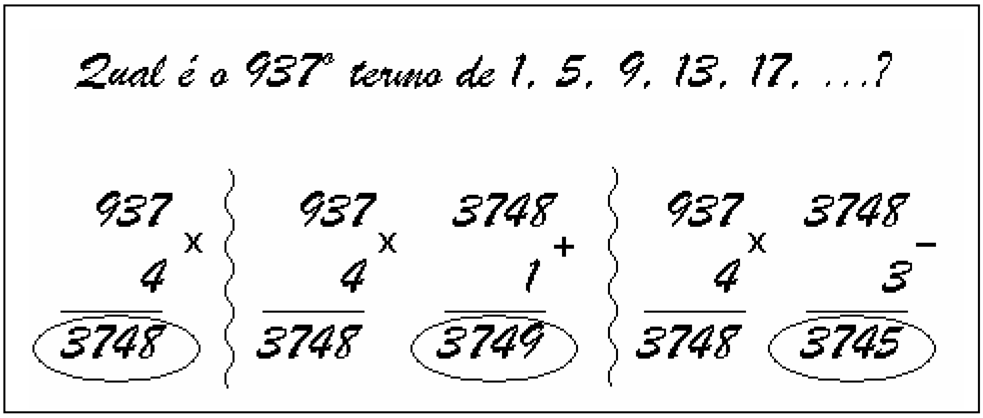


Figura 18: Painel feito durante a sessão

Os alunos observaram as estratégias de resolução e discutiram cada uma delas. Eles chegaram à conclusão de que a última estratégia (da esquerda para a direita) era a mais eficiente dentre as expostas no painel após ouvirem os argumentos da aluna Mirna, que utilizou essa estratégia para resolver a atividade. Esta aluna argumentou aos colegas que todos os termos dessa seqüência tinham três unidades a menos que os múltiplos positivos de 4 (razão dessa PA).

Após a discussão, eles tiveram 5 minutos para responder à Atividade 6 que solicitava termos da PA (1, 7, 13, 19, 25, ...).

Essa sessão terminou às 8 horas e 30 minutos, totalizando uma hora de sessão, 20 minutos a mais do que o previsto. Envolvidos pela Atividade 6, os alunos mostraram-se ansiosos para uma próxima sessão com atividades.

Análise *a posteriori* da 2ª sessão

As tabelas que descrevem os resultados da segunda sessão apresentam em suas primeiras colunas os alunos que participaram da segunda sessão, não necessariamente mantendo as duplas formadas na primeira.

A Atividade 4 tem seus resultados organizados pela Tabela 4, que informa quais frases cada aluno associou ao sentido matemático. A primeira linha da tabela apresenta qual das frases mostra a palavra exclusivamente no sentido da Matemática.

Alunos	**Diferença: 3**	**Termo: 2**	**Constante: 1**	**Sucessor: 3**	**Anterior: 2**
Mel e Teca	3	2	1	1 e 3	2
Eva e Mano	3	2	1	3	2
Aldo e Rui	2	1 e 2	1	3	2
Iran e Kim	2	2	1	3	2
Pam e Tuca	3	2	1	3	2
Dan e Kauê	-	2	1	3	2
Ada e Léo	2 e 3	1 e 2	1	1, 2 e 3	2
Hilda e Perla (D09)	3	2	1	3	2
Ali e Remo (D11)	2 e 3	2	1	2 e 3	2
José e Lino	2	2	1	2 e 3	2
Dora e Flora	2	2	1	3	2
Edu e Ciro	3	2	1	1 e 3	2
Fábio e Mirna (D16)	3	2	1	3	2
Aura e Mário	2 e 3	2	1	3	2 e 3
Alê e Gina (D18)	3	2	1	3	2
Wlad	3	1 e 2	1	3	2

Tabela 4: Resoluções da Atividade 4

Podemos ver pela Tabela 4 que as palavras *diferença* e *sucessor* foram as que mais foram associadas incorretamente ou não associadas ao sentido matemático, talvez porque muitos alunos utilizavam essas palavras demasiadamente no sentido cotidiano e não as compreendiam quando utilizadas em outros contextos.

Oito duplas e o aluno Wlad associaram o sentido matemático à frase 3 da palavra *diferença*, mas quatro duplas associaram tal sentido somente à frase 2 e três duplas associaram-no a ambas as frases. Por mais que a frase 2 possa ser utilizada com sentido matemático, não diz respeito exclusivamente ao domínio da Matemática.

Para a palavra *termo*, todos perceberam o sentido matemático da frase 2, mas duas duplas e Wlad também o associaram à frase 1. Uma das possíveis causas dos alunos terem associado esta última ao sentido matemático talvez seja o desconhecimento da palavra termo como tendo significado de fim.

Quanto à palavra *constante*, todos os alunos perceberam que somente a frase 1 possui sentido matemático.

Já para a palavra *sucessor*, podemos ver que todas as duplas associaram a frase 3 ao sentido matemático, sendo que cinco duplas não perceberam que somente essa era exclusiva da Matemática. Esta palavra foi a única associada a três frases por uma das duplas, o que confirma maior dificuldade em percebê-la nos diferentes sentidos.

Por fim, a palavra *anterior* teve sua frase 2 associada por todos os alunos ao sentido matemático, com apenas uma dupla não percebendo que somente esta apresenta tal sentido.

Como essa atividade tinha por objetivo proporcionar um momento de reflexão sobre o significado de palavras, considero que esse objetivo foi alcançado, uma vez que os alunos se empenharam em identificar os sentidos cotidiano ou matemático de cada frase.

Procurei fazer da multiplicidade de sentidos um fato favorável e motivador para o ensino, ao invés de me conformar com a sua condição de elemento complicador para a compreensão de conceitos matemáticos, de acordo com o que sugere Durkin e Shire (1995 *apud* Munhoz, 1999).

A próxima tabela revela os resultados da Atividade 5, que solicitava associação de seqüências (duas PA, uma PG e uma seqüência cíclica) às características principais dessas.

A primeira linha dessa tabela informa as características que podem ser associadas à PA, à seqüência cíclica e à PG.

Muitos alunos afirmaram, durante a resolução desta atividade, que a discussão dos significados dos termos no momento anterior auxiliou para compreensão de características antes não compreendidas.

	PA: I e IV	Cíclica: II	PG: III
Mel e Teca	I	II	III e IV
Eva e Mano	I	II	III e IV
Aldo e Rui	I e IV	II	III
Iran e Kim	I e IV	II	III
Pam e Tuca	I e IV	II e III	-
Dan e Kauê	I e IV	II	III
Ada e Léo	I e IV	II	III
Hilda e Perla (D09)	I	II	III e IV
Ali e Remo (D11)	I e IV	II	III
José e Lino	I e IV	II	III
Dora e Flora	I e IV	II	III
Edu e Ciro	I e IV	II	III
Fábio e Mirna (D16)	I	II e IV	III
Aura e Mário	I e IV	II	III
Alê e Gina (D18)	I e IV	II	III
Wlad	I e III	II	IV

Tabela 5: Resoluções da Atividade 5

A característica da PA foi associada corretamente por todos os alunos à seqüência I, com razão inteira e positiva, mas quatro duplas e o aluno Wlad não perceberam a diferença constante entre um termo e seu sucessor para a seqüência IV, com razão inteira negativa.

Isso já havia acontecido na primeira sessão, o que confirma que alguns alunos não perceberam semelhanças entre uma PA com razão positiva e uma PA com razão negativa.

A seqüência cíclica, que alguns associaram na sessão anterior à característica da PA, desta vez foi ligada à seqüência II por todos, o que revela que muitos passaram a compreender o significado do termo “ciclicamente”.

A característica da PG não foi associada por todos à seqüência III, mas onze duplas perceberam que somente III tinha essa característica, número relativamente grande considerando que pouquíssimas duplas associaram a característica da PG à seqüência (4, 2, 1, ½, ¼, ...) na resolução da Atividade 2.

O momento de observação de características de seqüências pelos alunos foi concretizado conforme o planejado, com muitos destes compreendendo pela primeira vez o significado de características já vistas numa atividade anterior.

A Tabela 6 resume como as duplas resolveram a Atividade 6, que solicitava o 20º termo e o 728º termo de uma PA.

	20º termo: 115	**728º termo: 4363**
Mel e Teca	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Eva e Mano	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
Aldo e Rui	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
Iran e Kim	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Pam e Tuca	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
Dan e Kauê	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Ada e Léo	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
Hilda e Perla (D09)	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Ali e Remo (D11)	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
José e Lino	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Dora e Flora	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Edu e Ciro	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
Fábio e Mirna (D16)	(20 x 6) – 5 = 115 e contagem	(728 x 6) – 5 = 4363
Aura e Mário	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Alê e Gina (D18)	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
Wlad	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363

Tabela 6: Resoluções da Atividade 6

Esta atividade ocorreu após o painel de estratégias mais utilizadas para resolução da Atividade 3. Como a aluna Mirna convenceu o restante dos alunos de que a melhor estratégia para identificar um termo qualquer de uma PA, numa posição *n*, era multiplicar *n* por *r* e somar ou subtrair o resultado por um certo número, os alunos discutiram um meio de encontrar esse número.

Esta discussão fez com que os alunos concluíssem que o número era fácil de se verificar comparando a PA com a seqüência dos múltiplos da razão (r, 2r, 3r, 4r,...). Pode-se dizer que os alunos compreenderam que o número que deveria ser utilizado era o resultado da subtração $a_1 - r$.

Para identificar o 20º termo da seqüência, alguns resolveram por contagem e outros multiplicaram 20 por 6 e subtraíram 5, utilizando respectivamente as estratégias E_1 e E_2. A dupla na qual estava Mirna preferiu resolver dos dois modos, talvez para confirmar a validade da estratégia.

Para achar o 728º termo, todas as duplas procederam da mesma forma e resolveram o que foi pedido, multiplicando 728 por 6 e subtraindo do resultado o número 5.

Com a compreensão da eficácia dessa estratégia, os alunos pareciam aptos a perceber a generalidade e também a particularizar qualquer termo distante desta seqüência. Ou seja, desenvolveram a consciência de generalidade difundida por Mason (1996a), por estes terem visto “a generalidade no particular” e “o particular no geral”.

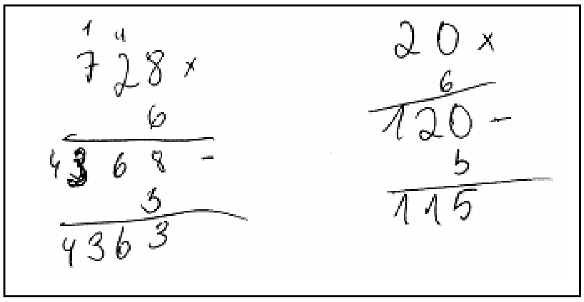


Figura 19: Extraída do Protocolo da Atividade 6 de Ali e Remo (D11)

Como o objetivo deste terceiro momento consistia na discussão e conclusão do mecanismo mais eficiente para se chegar à generalização, e todos os alunos concordaram em utilizar uma estratégia realmente válida, considero este objetivo atingido, bem como o objetivo geral da sessão.

Análise *a Priori* da 3ª sessão

Essa sessão pretendia propiciar condições para que os alunos chegassem a uma fórmula algébrica para o enésimo termo de qualquer PA, utilizando a estratégia de generalização criada por eles em sessões anteriores ao identificar termos distantes de uma PA e, além disso, finalizar as atividades provocando o aluno sobre a generalização da soma dos termos de uma PA.

Atividade 7

Tinha por objetivo possibilitar ao aluno a observação e generalização dos termos de uma PA com um primeiro termo negativo e razão positiva e introduzir a notação simbólica (r, n, a_1) para o aluno.

Essa atividade permitia confrontar a estratégia utilizada pelos alunos em atividades anteriores com uma nova situação, para verificar se os alunos iriam manter essa estratégia e quais seriam as dificuldades encontradas diante da mudança.

Para encontrar o 728º termo da seqüência **A= 1, 7, 13, 19,...** vocês fizeram o seguinte:
Primeiro: Encontraram a **razão r**, constante: 7 – 1 = 13 – 7 = 19 –13 = ... = **6**; então **r=6**.
Segundo: Escreveram/pensaram na seqüência B dos múltiplos de 6; **B= 6, 12, 18, 24, ..., 6n,** ...
Terceiro: Obtiveram a diferença entre o 1º termo da seqüência **A,** a_1= 1, e a razão **r = 6**, isto é: $a_1 - r = 1 - 6 =$ **- 5** .
Finalmente: Para obter o termo da seqüência A que ocupa a 728ª posição (n = 728), que indicaremos por a_{728}, somaram 6n com -5 obtendo:

$$a_{728} = (6 \times 728) + (-5) = 4368 - 5 = 4363.$$

Observem a seqüência: **C = -28, -23, -18, -13, ...** Qual é o 874º termo dessa seqüência?

Atividade 7

Disponibilizei a estratégia criada pelos alunos em atividades anteriores, explicando o que eles fizeram na Atividade 6 com a utilização de notação simbólica usual para o estudo de PA.

Optei por utilizar uma PA com o número -28 como primeiro termo, apresentando pela primeira vez numa PA um sinal negativo como valor da variável didática sinal do primeiro termo.

Utilizei o número 5 como razão, porque me interessava ter os primeiros termos da seqüência negativos. Estas escolhas se deram para causar novas perturbações para a generalização dos termos e fazer o aluno pensar sobre a estratégia criada.

Apresentei os quatro primeiros termos desta seqüência, pois considerei esse número de termos suficiente para a observação do padrão envolvido.

Solicitei a descoberta do 874º termo, a fim de possibilitar a generalização dos termos. Com isso, poderia verificar se a estratégia utilizada anteriormente seria mantida ou modificada.

As estratégias de resolução previstas foram:

E_1 – O aluno entende que a razão dessa seqüência é o número 5 e utiliza corretamente a estratégia criada em atividades anteriores.

Ele percebe que $a_n = 5n - 28 - 5$ ou o respectivo $a_n = 5n - 33$ e calcula o 874ª termo efetuando $5 \times 874 - 33$, identificando 4337.

$$a_1 = (5 \times 1) - 33 = -28$$
$$a_2 = (5 \times 2) - 33 = -23$$
$$a_3 = (5 \times 3) - 33 = -18$$
$$a_4 = (5 \times 4) - 33 = -13$$
$$a_5 = (5 \times 5) - 33 = -8$$
$$\ldots$$
$$a_{873} = (5 \times 874) - 33 = 4337$$

E2 – O aluno observa o número 5 como razão constante mas não utiliza a estratégia criada anteriormente. Ele conclui que $a_n = 5(n - 1) - 28$ e calcula o 874º termo como $5 \times 873 - 28$, identificando o número 4337.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (5 \times (1 - 1)) - 28 = -28 \\
a_2 &= (5 \times (2 - 1)) - 28 = -23 \\
a_3 &= (5 \times (3 - 1)) - 28 = -18 \\
a_4 &= (5 \times (4 - 1)) - 28 = -13 \\
a_5 &= (5 \times (5 - 1)) - 28 = -8 \\
&\ldots \\
a_{874} &= (5 \times (874 - 1)) - 28 = 4337
\end{aligned}
$$

Atividade 8

Objetivo – Esta atividade pretendia fazer com que o aluno observasse e generalizasse os termos de uma progressão aritmética qualquer, dando oportunidade para a criação de uma fórmula do termo geral da PA.

Além disso, pretendia verificar se o aluno utilizaria a estratégia de generalização criada em sessões anteriores ou perceberia estratégias de generalização equivalentes.

Considerem a seqüência: $\mathbf{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots , a_n, \ldots}$ onde n é um número natural qualquer maior que zero (n pertence ao conjunto {1,2,3,....}).
Nesta seqüência $\mathbf{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = r}$ (r é a razão).
a) Como representar o 617º termo?
b) Como pode ser representado o termo que ocupa a enésima posição (a_n) na seqüência?
c) Qual o primeiro termo da seqüência B que tem razão 4 e tem como sétimo termo $\mathbf{a_7} = 30$?

Atividade 8

Decidi utilizar uma seqüência representativa de todas as PA para que o aluno pudesse criar uma fórmula que representasse o termo geral de uma PA qualquer.

Decidi propor primeiramente a descoberta do 617º termo para verificar como o aluno representaria um termo específico da seqüência, sem conhecer os valores representativos dos termos e da razão. Essa descoberta auxiliaria o aluno para a representação do enésimo termo, solicitada posteriormente.

O último item solicitava a identificação do primeiro termo de uma PA específica, dados sua razão e o sétimo termo, para verificar se o aluno compreenderia a formação de uma PA e se utilizaria uma generalização para resolver o que lhe foi pedido.

Previ como estratégias de resolução:

item a

E1 – O aluno utiliza a estratégia já familiar por atividades anteriores e afirma que $a_{617} = 617r + a_1 - r$.

E2 – O aluno utiliza uma nova estratégia ao perceber a relação entre os termos e as somas consecutivas de *r* ao primeiro termo.

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_1 + 2r \\
a_4 &= a_1 + 3r \\
a_5 &= a_1 + 4r \\
&\dots \\
a_{617} &= a_1 + 616r
\end{aligned}
$$

item b

E_1 – O aluno utiliza a estratégia anteriormente descoberta e afirma que $a_n = n \times r + a_1 - r$.

E_2 – Ao perceber a relação entre os termos e as somas consecutivas de *r* ao primeiro termo, o aluno identifica que $a_n = a_1 + (n - 1) \times r$.

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_1 + 2r \\
a_4 &= a_1 + 3r \\
a_5 &= a_1 + 4r \\
&\dots \\
a_n &= a_1 + (n - 1) \times r
\end{aligned}
$$

item c

E_1 – O aluno entende que $a_7 – a_6 = a_6 – a_5 = a_5 – a_4 = ... = a_2 – a_1 = 4$ e subtrai 4 de 30 seis vezes até encontrar o número 6 como primeiro termo.

E_2 – Ao generalizar que $a_7 = nr + a_1 – r$ ou $a_7 = a_1 + (n – 1) \times r$, o aluno compreende que $a_7 = a_1 + 6r$ e que, portanto, $30 = a_1 + 6 \times 4$. Com isso, ele encontra $a_1 = 30 – 24 = 6$.

Atividade 9

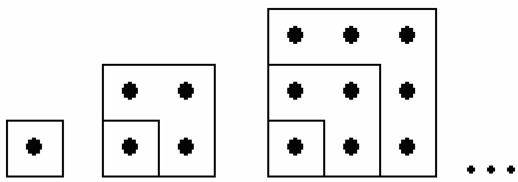
Objetivo – Esta atividade tinha por finalidade introduzir o aluno em atividades que necessitam da observação de seqüências formadas pelas somas de termos de uma PA e pretendia levar o aluno a observar os termos da PA formada pelos números ímpares e a generalizar as somas dos *n* primeiros termos desta seqüência.

Observem a seqüência:

1, 3, 5, 7, ...

a) Quanto é a soma dos 10 primeiros termos?

b) Jonas e Laura do 1M2 afirmaram terem encontrado uma regra para descobrir a soma dos n primeiros termos da seqüência, após terem criado uma seqüência de figuras. Observem essa nova seqüência e descubram qual é a soma dos 97 primeiros termos



Atividade 9

Decidi utilizar a PA formada pelos números ímpares porque esta apresenta uma generalização mais simples para a soma dos seus *n* primeiros termos.

Como a soma dos *n* primeiros números ímpares é o quadrado de *n*, decidi utilizar uma seqüência figurativo numérica com quadrados, para auxiliar o aluno em sua generalização.

Foram previstas as seguintes estratégias de resolução:

item a

E_1 – O aluno soma os 10 primeiros ímpares positivos (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19) e conclui que o resultado é 100

E_2 – O aluno percebe que a soma dos n primeiros ímpares equivale ao quadrado de *n* e afirma que o resultado é o quadrado de 10, ou seja, 100.

$S_1 = 1 \times 1 = 1$
$S_2 = 2 \times 2 = 4$
$S_3 =3 \times 3 = 9$
$S_3 = 4 \times 4 = 16$
...
$S_{10} = 10 \times 10 = 100$

item b

E_1 – O aluno percebe que a resolução por contagem exige muito tempo, investiga as somas iniciais e descobre que a soma dos *n* primeiros ímpares positivos é o quadrado de *n*, concluindo que $S_{97} = 97^2 = 9409$.

$S_1 = 1 \times 1 = 1$
$S_2 = 2 \times 2 = 4$
$S_3 =3 \times 3 = 9$
$S_3 = 4 \times 4 = 16$
...
$S_{97} = 97 \times 97 = 9409$

Descrição da realização da 3ª sessão

A terceira sessão ocorreu em 7 de novembro de 2007 (menos de um mês após a segunda sessão), tendo início às 7 horas e 30 minutos. Inicialmente estavam presentes na sala, o pesquisador, a professora e 33 alunos.

Os 33 alunos presentes foram organizados em 15 duplas e 1 trio para resolver as atividades. Todos esses alunos participaram de pelo menos uma sessão anterior e 11 duplas e o trio da 1ª sessão mantiveram a dupla.

A dupla D17 também poderia ter se mantido, mas houve recusa por parte das duas alunas que a compunham. A dupla formada por alunos iniciantes na segunda sessão (D18) também se manteve para essa sessão. Ou seja, 13 grupos foram formados por alunos que já haviam trabalhado juntos em alguma das sessões anteriores.

No horário previamente definido, as folhas com as atividades foram entregues aos alunos e nesse momento a professora da classe se retirou.

Pedi aos alunos que respondessem as atividades obedecendo à ordem numérica, ou seja, começando pela atividade 7 e terminando pela atividade 9 e que deixassem sobre as carteiras somente o material entregue e uma caneta para cada dupla.

Como na primeira sessão muitos alunos deixaram cálculos na carteira escolar, reforcei a necessidade de que qualquer esboço de resolução deveria estar presente na folha recebida.

Os alunos aparentaram calma durante toda a sessão e novamente nenhum aluno se recusou a participar. Dessa vez, entretanto, muitos alunos reclamaram do nível de dificuldade das atividades.

Nessa sessão, pela primeira vez no processo, preferi que os alunos que terminassem de responder as atividades antes do tempo estipulado saíssem da classe. Isso porque as atividades exigiam maior reflexão devido ao nível de dificuldade proposto e queria evitar que o barulho de alunos sem ocupação atrapalhassem outros colegas.

Estabeleci, entretanto, um tempo mínimo de 25 minutos para permanência na classe, a fim de evitar que alunos resolvessem rapidamente para sair da sala.

As 3 duplas escolhidas pela professora para terem seus diálogos gravados na 1ª sessão estavam presentes e foram novamente convidadas a ter suas conversas gravadas.

Após 40 minutos do início das atividades, conforme previsto, os protocolos foram recolhidos. A descrição das resoluções das Atividades 7, 8 e 9 e análise *a posteriori* dessa última sessão podem ser vistas a seguir.

Análise *a Posteriori* da 3ª sessão

Descreverei a seguir as resoluções dos alunos considerando os protocolos extraídos da terceira sessão e as transcrições das gravações feitas com as duplas D03, D11 e D14, que se mantiveram com os mesmos componentes da 1ª sessão.

A Tabela 7 resume as respostas dadas por cada dupla para o 874º termo da seqüência apresentada aos alunos na Atividade 7. Como foram fornecidos aos alunos quatro passos para ajudá-los a resolver a atividade, a tabela apresenta quais destes passos foram atingidos.

	1º passo	2º passo	3º passo	4º passo
Componentes	Achar a razão (r = 5)	Registrar a seqüência dos múltiplos de r	$a_1 - r =$ -28 – 5 = -33	A_{874} = 5 x 874 + (-33) = 4337
Enéas e Teca (D01)	5	-	-	870 × 5 = -4350
Aldo e Léo (D03)	5	-	-	(874 × 5 – 3) – 30 = 4337
Kim, Lino e Rui (T04)	-8	-	5 – 8 = -3	A_{874} = (874 × 5) –8 = 4362
Dan e Diva (D05)	5	-	-	870 × 5 = 4350
Kauê e Miro (D07)	5	-	-28 + (-5)	(874 × 5) – 33 = 4337
Ada e Ciro (D08)	5	-	-	(874 × 5) – 28 = 4342
Mano e Raul (D10)	r = 5	B = 5, 10, 15, 20 … 5n	a_{-28}= -28 – 5 = -33	874 × 5 – 33 = 4337
Ali e Remo (D11)	5	-	-	(874 × 5) – 5 = -4365
Flora e Wanda D13)	r = -5	-	$a_1 - r$ = -28 – 5 = -33	A_{874} = (874 × (-5))+ (-33) = -4403
Edu e Mário (D14)	5	-30,-25,-20,-15, -10,-5,0,5, 10...	-	(874 × 5 + 7) – 2= 4375
Bia e Mel (D15)	5	-	-	870 × 5 = -4350
Fábio e Mirna (D16)	r = 5	-	-	(874 × 5) – 2= 4368
Alê e Gina (D18)	r = 5	5,10,15...	-28 – 5 = -33	(874 × 5) + (-33) = 4337
Dora e Hilda	5	-	-	874 × 5 – 12 = 4358
Aura e Iran	r = 5	5,10,15,20,25	-28 – 5 = -33	(874 × 5) = (-33) = 4337
José e Tuca	5	-	-	a_{874} = (874 × 5) + (-4) = -4366

Tabela 7: Resoluções da Atividade 7

Essa tabela reproduz o que foi feito por cada dupla, incluindo a simbologia utilizada. Os alunos que utilizaram implicitamente o valor 5 como razão tiveram o primeiro passo considerado.

Dos dezesseis grupos formados, quatro duplas seguiram passos indicados pela atividade de maneira eficiente, fazendo com que descobrissem o termo correto. Podemos ver pela Figura 20 um caso em que uma dupla explicita cada passo sugerido.

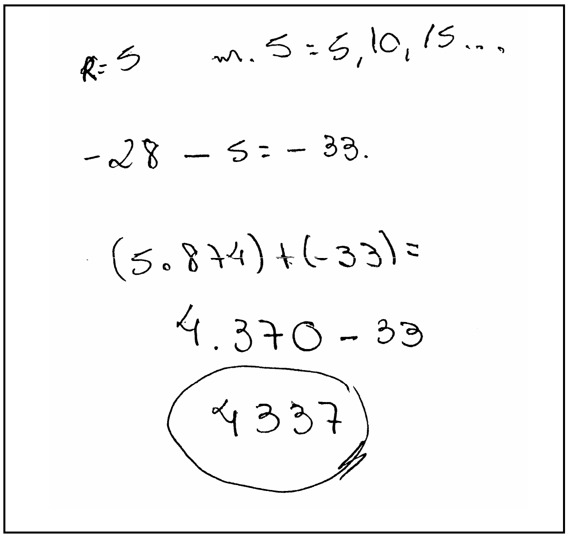


Figura 20: Extraída do Protocolo da Atividade 7 de Alê e Gina (D18)

A dupla D03 também conseguiu chegar ao resultado esperado mas trabalhou de uma forma diferente. Aldo e Léo efetuaram duas subtrações (por 30 e por 3) do resultado do produto entre a razão e a posição do termo, utilizando uma estratégia não prevista anteriormente.

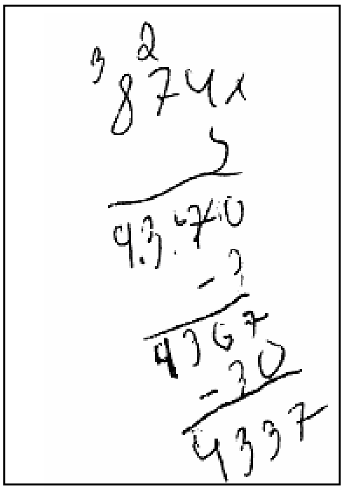


Figura 21: Extraída do Protocolo da Atividade 7 de Aldo e Léo (D03)

Na gravação obtida dessa dupla temos um diálogo, transcrito a seguir, que deixa claro que os alunos utilizaram o primeiro termo positivo da seqüência (-28, -23, -18, -13, -8, -3, **2**, 7, 12, ...):

> *- Menos três mais cinco?*
>
> *- Dois*
>
> *- Estamos chegando lá.* (pausa*) Aqui ó! Dois menos cinco é menos três! Vamos somar menos três com esse número aqui.*

A gravação mostra claramente que tal dupla trabalhou como se o primeiro termo fosse o número 2 e utilizou o número -3 por esse ser o resultado da diferença entre o primeiro termo e a razão da seqüência. O passo seguinte efetuado por esses alunos foi subtrair 30, o que representa um raciocínio correto já que o real primeiro termo da PA investigada (-28) tem 30 unidades a menos que o número 2.

Três duplas resolveram a atividade expressando falta de atenção, já que utilizaram o produto da razão 5 por 870 e não pelo valor de posição 874. Além disso, é bem provável que essas duplas tenham se comunicado, já que responderam exatamente da mesma forma. Duas dessas duplas indicaram o resultado dessa multiplicação como um número negativo, talvez por entender que a seqüência somente apresentava números negativos.

A dificuldade com números negativos pôde ser notada também na resolução feita pela dupla D13, formada por Flora e Wanda, que identificaram o resultado do produto de 5 por 874 como -4370, comprometendo o resultado final da generalização efetuada.

Entretanto, o que mais chama atenção é o fato de que oito duplas utilizaram o recurso de multiplicar a razão pelo valor de posição e se equivocaram com o valor a ser somado ao resultado dessa multiplicação, ou seja, $a_1 - r$. O fato de o primeiro termo ser um número negativo pode ter causado essa dificuldade na generalização dos termos da seqüência.

Isso lembra a pesquisa de Becker e Rivera (2005), onde alunos que trabalharam com estratégias numéricas de generalização utilizaram tentativa e erro e não deram sentido ao que os "coeficientes do padrão linear" representavam. Os alunos desta pesquisa utilizaram um valor qualquer para subtrair do resultado de $n \times r$ por não terem compreendido o porquê da utilização do valor $a_1 - r$ ou não terem conseguido identificá-lo.

O protocolo da dupla D14, formada por Edu e Mário, apresenta uma resolução que pode ser vista na Figura 22.

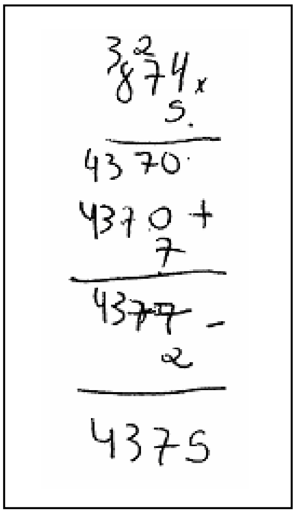


Figura 22: Extraída do Protocolo da Atividade 7 de Edu e Mário (D14)

No protocolo recolhido de tal dupla pode-se ver que os alunos utilizaram a seqüência (-30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10,...) para resolver a questão. A gravação dessa dupla mostra o seguinte comentário de um de seus componentes:

> -*Vamos ter que fazer assim ó! Aqui é negativo então conta os números que tem antes do zero*.

O mesmo componente, após observar mais a seqüência:

> - *Acho que a gente tem que somar sete termos. Depois diminuir dois.*

O que se pode deduzir é que os alunos, após calcular 874 × 5, somaram ao resultado o número 7 por este ser a quantidade indicativa dos números negativos e o zero na seqüência criada por eles e somaram -2, provavelmente, por este ser o resultado da diferença entre -30 e -28.

A gravação também mostra que os alunos da dupla não leram os passos sugeridos pela atividade, o que os levou a criar um outro esquema generalizador que não foi eficiente.

A dupla D11, formada por Ali e Remo, escolheu subtrair 5 do resultado da multiplicação entre *n × r.* Essa dupla também informou a resposta como um número negativo e não deixa claro em sua gravação o porquê de ter escolhido o número 5. A gravação possui a seguinte fala de um componente:

> - *Aqui ó! Tem que utilizar menos* (logo após ter efetuado a multiplicação).

Esse aluno pode ter sido influenciado pelo exemplo presente no enunciado, que subtraía 5 do resultado de uma multiplicação.

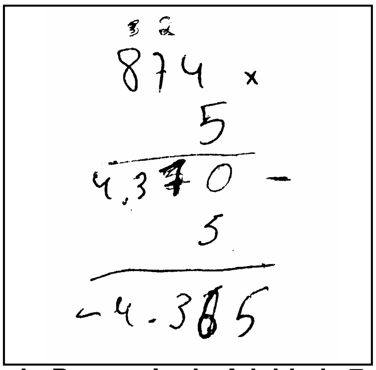


Figura 23: Extraída do Protocolo da Atividade 7 de Ali e Remo (D11)

O objetivo da atividade foi atingido, pois grande maioria das duplas parece ter se empenhado na observação da seqüência e quatro duplas conseguiram identificar o termo distante da PA, apesar desta apresentar características diferentes das apresentadas em atividades anteriores.

Além disso, essa atividade conseguiu confrontar a estratégia utilizada em atividades anteriores com uma nova situação, exigindo dos alunos maior destreza no trabalho com números inteiros negativos.

Três das quatro duplas que conseguiram encontrar o termo distante utilizaram a estratégia E_1 prevista na análise *a priori.*

Não é de surpreender o maior número de estratégias não-eficientes utilizadas, pois esta atividade contemplava uma estratégia numérica de generalização mais exigente em comparação com atividades anteriores.

Sobre estratégias de generalização numéricas, Vale e Pimentel (2005) têm constatado que a maioria dos alunos, perante atividades que envolvem generalização, utiliza esta abordagem e que alguns alunos manifestam insuficiências na resolução, não conseguindo obter uma generalização completa ou obtendo uma lei de formação errada.

A notação simbólica foi pouco utilizada pelos grupos para resolução da atividade e uma provável causa para isso é o excesso de simbologia em única atividade. A simbologia deveria ser introduzida nas sessões anteriores, para que os alunos se adaptassem aos poucos com a notação.

A Atividade 8, importante para a pesquisa, possibilitava a generalização algébrica ao trabalhar com uma PA genérica (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...).

A Tabela 8 resume os resultados dessa atividade, que solicitava a representação do 617º termo, do enésimo termo e a identificação de um primeiro termo em condições específicas.

Grupos	**617º termo: $a_{617} = a_1 + 616r$**	**enésimo termo: $a_{617} = a_1 + (n - 1)r$**	**1º termo se $r = 4$ e $a_7 = 30$: 6**
Enéas e Teca(D01)	-	-	-
Aldo e Léo (D03)	$a_{619} = a_{618 - } a_{617}$	$a_n > 0$	$a_7 = 24 + a_1$
Kim, Lino e Rui (T04)	$a_{617} = 617$	$a_n = -1$	$30 - (7 \times 4) = 2$
Dan e Diva (D05)	-	-	-
Kauê e Miro (D07)	$a_{617} = 616 + 35 = 651$	$A_6 - 1 = 5$	7,5
Ada e Ciro (D08)	$a_{617} - a_{616}$	a_4	3 (contagem)
Mano e Raul (D10)	$a_{617} - a_{616}$	617n	6
Ali e Remo (D11)	$a_{617} = a_{616 -} a_{615}$	-	-
Flora e Wanda (D13)	$a_{617} = 617r + a_1 - r = 616$	$a_n = 5$	18
Edu e Mário (D14)	$a_{617} = 617 - r = 616$	$a_n = 6$	6 (contagem)
Mel e Bia (D15)	-	-	-
Fábio e Mirna (D16)	$a_{617} = 617r + a_1 - r = 616$	-	-
Alê e Gina (D18)	$a_{617} = 617$	617_n	6 (contagem)
Dora e Hilda	619	6	-
Aura e Iran	a_{617}	-	6 (contagem)
José e Tuca	$a_{617} = 617 - a$	617n	6

Tabela 8: Resoluções da Atividade 8

Dos dezesseis grupos, mais da metade não conseguiu responder a todas as questões da atividade, revelando maior dificuldade dos alunos nessa atividade em relação às atividades anteriores.

Sobre o item **a** podemos ver que treze grupos indicaram uma resposta para o 617º termo da seqüência genérica, sendo que sete duplas deram uma resposta numérica (616, 617, 619 ou 651).

As duas duplas que deram como resposta o número 617 podem ter confundindo o número indicativo de posição com o número que ocupa tal posição, o que já havia acontecido em atividades anteriores. As duplas que indicaram os números 619 e 651 não deixaram indícios suficientes para compreensão do porquê de tais respostas.

Três duplas deram como resposta o número 616, sendo que os protocolos recolhidos de duas dessas duplas deixam claro que o número surgiu de uma simplificação algébrica inadequada. Na verdade, considero que essas duplas (D13 e D16) resolveram a atividade em conjunto já que pude notar a comunicação entre elas durante a realização da sessão.

Flora, Wanda, Fábio e Mirna deram como resposta parcial uma generalização algébrica correta para o 617º termo ($617r + a_1 - r$), prevista na análise *a priori* como E_1, como podemos ver na Figura 24.

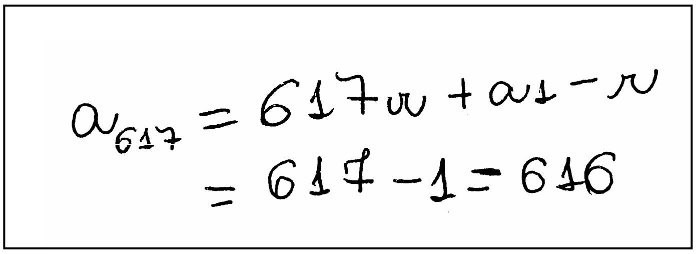


Figura 24: Extraída do Protocolo da Atividade 8 de Fábio e Mirna (D16)

No entanto, esses alunos somaram os coeficientes dos fatores que continham *r*, representando essa expressão como sendo o número 616, provavelmente por considerar correta apenas uma resposta numérica.

Almouloud (2007), ao comentar a noção de contrato didático de Brousseau, aponta que:

> os problemas de matemática costumam ter em seus enunciados somente os dados necessários para sua solução e ter sempre uma única resposta, obtida pelo uso de operações numéricas. Com isso, quando os alunos têm um problema para resolver, é comum que procurem os números contidos no enunciado do problema e façam operações matemáticas para encontrar a resposta. (ALMOULOUD, 2007, p. 91-92).

Edu e Mário deram como resposta o número 616 mas utilizaram a expressão algébrica $a_{617} = 617 - r$. Essa dupla, além de ter utilizado uma expressão generalizadora não eficiente, atribuiu um valor para a razão da seqüência. O argumento para tal resposta pode ser encontrado na transcrição de parte da gravação abaixo:

> *- $a_2 - a_1$ é um. Então a razão é um. Seiscentos e dezessete menos um é seiscentos e dezesseis.*

Outras seis duplas, incluindo duas duplas que foram gravadas, utilizaram expressões algébricas para representar o 617º termo mas não utilizaram a variável *n*, indispensável para a representação algébrica desse termo.

Quatro dessas seis duplas parecem ter confundido a representação do termo da seqüência com a representação da razão da seqüência, utilizando respostas como $a_{617} = a_{617} - a_{616}$, $a_{617} = a_{616} - a_{615}$ (utilizada pela dupla D11) ou $a_{619} = a_{618} - a_{617}$ (utilizada pela dupla D03) .

A seguir apresento transcrições do argumento presente nas gravações de Aldo e Léo:

> *- Aqui ó! $a_2 - a_1 = a_3$. Seiscentos e dezessete um acima, seiscentos e dezoito. Mais um acima seiscentos e dezenove.*

Outras respostas presentes para essa questão são representações simples para o termo: a_{617} e $617 - a$. Os alunos que utilizaram a notação a_{617} representaram corretamente o termo, já que o enunciado não informava que tipo de representação deveria ser utilizada.

O item **b** propiciou menos resoluções que a anterior. Dos dezesseis grupos, dez representaram o enésimo termo, sendo que nenhuma dupla representou a_n em função de *n*, *r* e a_1, ou seja, não construíram uma fórmula para o termo geral de uma PA.

Como pôde ser visto inclusive pelas resoluções da Atividade 7, a simbologia apresentada não foi bem compreendida, o que confirma que a introdução da mesma deveria ser feita em sessões anteriores.

Neste item, mais uma vez, respostas numéricas foram dadas para representar um termo genérico. Cinco grupos indicaram o enésimo termo como sendo números (1, 5 ou 6). As duplas que indicaram 5 ou 6 como resposta podem ter sido influenciadas pelo enunciado, que informava a seqüência como $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$, enxergando a_n numa quinta ou sexta posição.

A dupla D14 respondeu que o enésimo termo é o número 6, como podemos ver na figura abaixo.

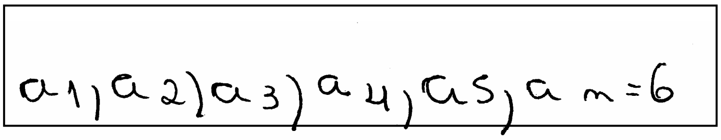


Figura 25: Extraída do Protocolo da Atividade 8 de Edu e Mário (D14)

Apresento a seguir transcrição da gravação de Edu e Mário, onde encontramos o seguinte diálogo:

> - *Enésimo? O que é enésimo?* (pausa) *Deve ser* a_n.
> - *É o seis então.*
> - *É. Acho que é do jeito que tá aqui. Aí a gente completa.* [...] *Põe aqui cinco. E aqui cinco mais um que é seis.*

Esse diálogo confirma que tais alunos completaram a seqüência do enunciado, identificando a_n no sexto termo e confundindo o termo com a posição que ele ocupa.

A dupla D03 utilizou uma desigualdade para representar o enésimo termo ($a_n > 0$). Esses alunos deram essa resposta depois de lerem no enunciado que *n* é um elemento do conjunto dos naturais. A gravação de Aldo e Léo mostra a seguinte indagação de um dos componentes da dupla:

> - *O que será o* a_n *? Ene é maior que zero. Então* a_n *é maior que zero?*

Como vimos, os alunos utilizaram números presentes no enunciado da questão. O mesmo pode ter acontecido com a dupla que representou o enésimo termo como a_4, que pode ter copiado o último termo com índice numérico apresentado na seqüência do enunciado. Já as duplas que utilizaram 617*n* ou 617_n para responder à questão, utilizaram o número 617 presente no enunciado da questão anterior.

Penso que esses alunos podem estar adaptados a problemas com respostas retiradas do enunciado ou descobertas por operações com números extraídos do enunciado. Almouloud (2007) explica que quando alunos com essa característica se deparam com problemas que não têm solução ou que têm mais de uma solução, ou que têm excessos de dados ou não são resolvidos com operações numéricas, cometem erros ou não sabem respondê-los.

O fato de nenhum aluno ter construído uma fórmula para o termo geral de uma PA, objetivo principal da sessão, pode encontrar explicação no que Zazkis e Liljedhal (2002) falam sobre a tensão existente entre o pensamento algébrico e a notação algébrica. Estes autores afirmam que a habilidade que estudantes expressam para indicar a generalidade de um padrão numérico não é acompanhada de notação algébrica e não depende desta.

O item **c** desta atividade pretendia verificar se o aluno utilizaria uma notação algébrica criada na questão anterior ou se voltaria à resolução por contagem. Como não houve fórmulas construídas, não é de surpreender o fato de que dos dez grupos que indicaram uma resposta, quatro duplas explicitaram o trabalho com contagem.

A dupla formada por Ada e Ciro não conseguiu chegar à resposta por ter começado supondo 3 como primeiro termo e não percebeu que este número escolhido não forma uma seqüência contendo como sétimo termo o número 30 indicado pela questão.

As outras três duplas, porém, parecem ter começado do sétimo termo e subtraído a razão de cada novo termo encontrado até descobrirem o número 6, conforme podemos conferir na figura abaixo. Esses alunos utilizaram a estratégia E_1 prevista na análise *a priori*.

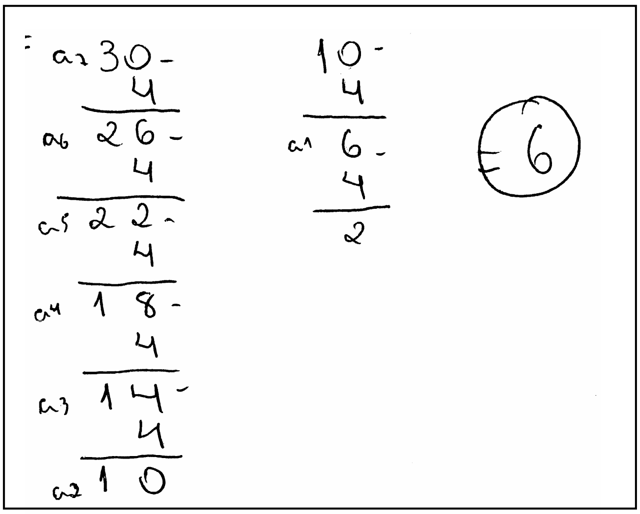


Figura 26: Extraída do Protocolo da Atividade 8 de Edu e Mário (D14)

Outras duas duplas também informaram o número 6 como resposta da atividade, mas não deixaram traços de suas resoluções.

A dupla que informou o número 18 como resposta não apresentou indícios suficientes para compreender essa resposta.

A dupla que deu como resposta o número 7,5 também não mostrou como chegou a essa resposta, mas tudo leva a crer que esses alunos utilizaram os dados principais do enunciado da questão e dividiram 30 por 4.

O trio formado por Kim, Lino e Rui não resolveu essa atividade por contagem e optou por um procedimento numérico, conforme mostra a próxima figura. O equívoco destes alunos foi efetuar a multiplicação entre 4 e 7. Como o sétimo termo deve ter a razão subtraída seis vezes para descobrirmos o primeiro termo, a multiplicação efetuada deveria ser entre 4 e 6.

$$\begin{array}{r} 7 \times \\ 4 \\ \hline 28 + 2 = 30 \end{array}$$

$$a_1 = 2$$

Figura 27: Extraída do Protocolo da Atividade 8 de Kim, Lino e Rui (T04)

Já a dupla formada por Aldo e Léo optou por utilizar uma notação algébrica, o que me surpreendeu por estes não terem construído fórmulas em questões anteriores. Esses alunos representaram algebricamente o sétimo termo da PA de forma correta, utilizando a estratégia E_2 prevista, conforme vemos na Figura 28.

$$a7 = 7.4 + a1 - 4$$
$$a7 = 28 + a1 - 4$$
$$a7 = 24 + a1$$

Figura 28: Extraída do Protocolo da Atividade 8 de Aldo e Léo (D03)

Entretanto, esses alunos não substituíram a_7 pelo número 30, o que possibilitaria que descobrissem que $a_1 = 30 - 24 = 6$. A gravação do diálogo dessa dupla revela uma certa descrença dos alunos em relação ao método utilizado, o que fez com que estes abandonassem a atividade e partissem para a atividade seguinte.

Sobre a atividade em si, acredito que foi insuficiente para atingir o objetivo, já que os alunos não estavam preparados para utilizar notação algébrica formal. Pude verificar casos em que alunos utilizaram notação algébrica, como a dupla citada no parágrafo anterior, mas percebi uma insegurança por parte dos alunos na utilização de notação simbólica para expressar seus pensamentos.

Após propor a generalização de termos de PA durante todas as sessões, considerei interessante terminar a experimentação com uma atividade que contemplasse a identificação de somas de termos de PA.

A Tabela 9 resume como os alunos responderam à Atividade 9 desta experimentação.

	S_{10}: 100	**S_{97}: 9409**
Enéas e Teca (D01)	100 (contagem)	-
Aldo e Léo (D03)	100 (contagem)	$(97 \times 2) - 1 = 193$
Kim, Lino e Rui (T04)	100 (contagem)	$97 \times 97 = 9409$
Dan e Diva (D05)	-	-
Kauê e Miro (D07)	100 (contagem)	9409
Ada e Ciro (D08)	100 (contagem)	$97 \times 3 = 291$
Mano e Raul (D10)	100	949
Ali e Remo (D11)	21	209
Flora e Wanda (D13)	$10 \times 10 = 100$ e contagem	$97 \times 97 = 9409$
Edu e Mário (D14)	100 (contagem)	$97 \times 97 = 9309$
Mel e Bia (D15)	100 (contagem)	-
Fábio e Mirna (D16)	100 (contagem)	$97 \times 97 = 8809$
Alê e Gina (D18)	100 (contagem)	949
Dora e Hilda	190 (contagem)	-
Aura e Iran	100 (contagem)	$97 \times 97 = 9409$
José e Tuca	100	949

Tabela 9: Resoluções da Atividade 9

Notemos pela Tabela 9 que apenas uma dupla não apresentou respostas para ambas as questões, o que confirma que os alunos ficaram envolvidos pela atividade.

Em relação ao item **a**, podemos ver que a resolução por contagem foi utilizada por doze grupos para indicar a soma dos 10 primeiros termos, ou seja, os alunos destes grupos prefeririam utilizar a estratégia E_1.

Dora e Hilda descobriram os 10 primeiros termos da PA mas chegaram a uma resposta “não esperada” por errarem no cálculo da soma desses termos, sendo esse o único engano dentre as resoluções dos que trabalharam com contagem.

Flora e Wanda resolveram a atividade conforme vemos na Figura 29.

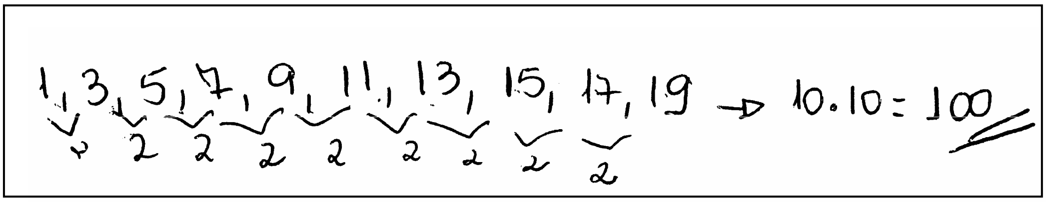


Figura 29: Extraída do protocolo da Atividade 9 de Flora e Wanda (D13)

Após terem utilizado contagem para identificar os 10 primeiros termos, essas alunas não efetuaram a soma e utilizaram a estratégia E_2, mostrando que o resultado pode ser encontrado efetuando-se a multiplicação entre 10 e 10, ou seja, encontrando o quadrado de 10.

Aparentemente, estas alunas não testaram somas anteriores para chegar a essa conclusão. Ao que tudo indica, elas perceberam a generalização expressa pela figura da questão seguinte e preferiram efetuar a multiplicação a somar os 10 números que já haviam descoberto.

O modo de “ver” dessas alunas estava baseado tanto na seqüência figurativo-numérica quanto na seqüência numérica de acordo com o que sugere Orton (1999), quando este afirma que o modo de “ver” pode conduzir a modos diferentes mas equivalentes de observação, sendo que os alunos devem estar cientes de que pode haver mais de uma representação da mesma situação. Tudo leva a crer que estas alunas perceberam a equivalência de métodos para identificar a soma proposta.

Duas duplas informaram como resposta para essa questão o número 100 mas não mostraram como chegaram a essa conclusão. Ali e Remo, que deram como resposta o número 21, também não mostraram qual foi o raciocínio utilizado.

A gravação dos diálogos de Ali e Remo mostra que essa dupla estava distraída, o que fez com que esses alunos indicassem um termo e não uma soma. Estes alunos podem ter identificado 21 como décimo termo da seqüência (1, 3, 5, 7, ...).

As resoluções para o item **b** foram mais diversificadas que as resoluções da questão anterior. Doze grupos informaram uma resposta para o 97ª soma, que dificultava a resolução por contagem.

Quatro duplas e o trio perceberam o que a seqüência figurativo-numérica sugeria e procuraram descobrir o valor do quadrado de 97, conforme a única estratégia prevista para esse item. Uma dupla deu como resposta o número correto, mas não apresentou resolução mostrando a estratégia utilizada. Duas das duplas que efetuaram o quadrado de 97 se equivocaram nos cálculos e por isso não chegaram ao resultado.

Acredito que a seqüência com figuras foi a responsável por essa percepção dos alunos, pois nos protocolos não há indícios de que os alunos fizeram testes com outras somas. As figuras seguintes mostram como Edu e Mário manipularam a figura para resolver a atividade.

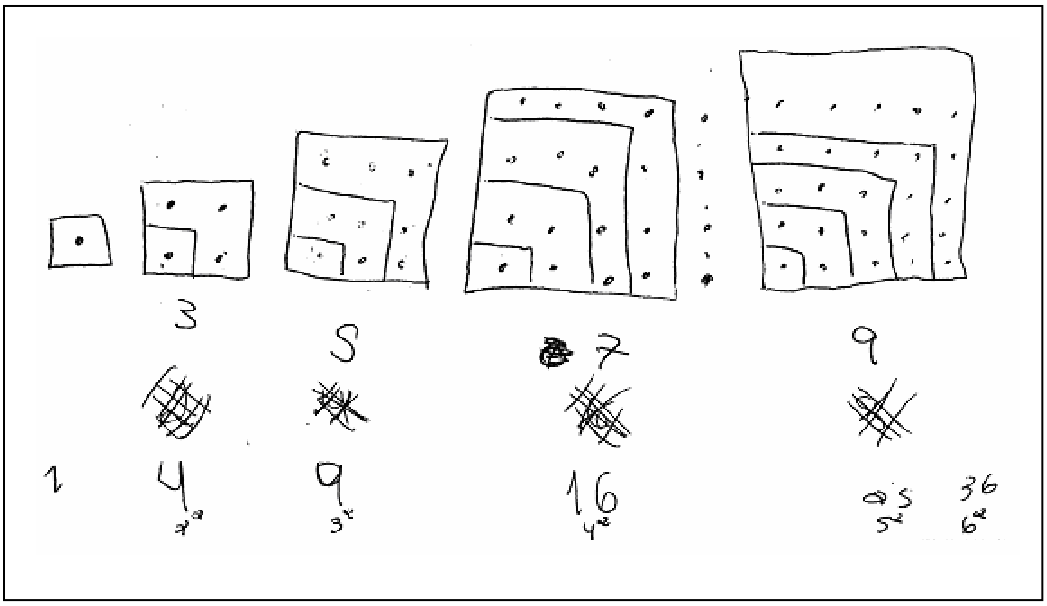


Figura 30: Extraída do Protocolo da Atividade 9 de Edu e Mário (D14)

Assim como os alunos relatados na pesquisa de Radford, Bardini e Sabena (2006), Edu e Mário, com a manipulação das figuras, puderam ver uma regra comum a todas as figuras da seqüência, estabelecendo um nível mais profundo de percepção.

A seqüência figurativo-numérica propiciou que os alunos estabelecessem uma conexão da estrutura geral da seqüência de uma forma dinâmica, fazendo com que percebessem tanto o particular quanto o geral e descobrissem como calcular a soma dos 97 primeiros termos.

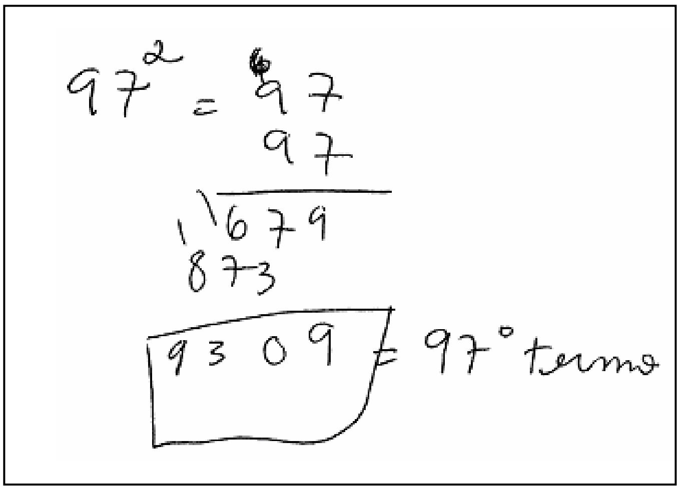


Figura 31: Extraída do Protocolo da Atividade 9 – Edu e Mário (D14)

As três duplas que deram resposta 949 estavam sentadas próximas durante a realização dessa sessão e devem ter se comunicado sobre a resposta. Como nenhuma destas mostrou como resolveu a questão, acredito que um destes alunos tenha olhado a resposta de uma dupla que resolveu pelo quadrado de 97, não percebendo que se tratava de 9409.

A resposta dada por Ali e Remo também não tem como ser analisada, pois tanto o protocolo quanto a gravação dos comentários não contém uma explicação destes alunos pela indicação de 209 como a soma solicitada.

Ada e Ciro deram como resposta o número 291 e mostraram terem resolvido o item através da multiplicação entre os números 3 e 97. Esses alunos não compreenderam o que a seqüência figurativo-numérica sugeria e podem ter direcionado suas observações apenas para a terceira figura da seqüência, onde realmente a quantidade de pontos é o triplo do número indicativo de posição.

Já Aldo e Léo confundiram a soma dos 97 primeiros termos com a identificação do 97º termo da seqüência (1, 3, 5, 7, ...). A gravação de tais alunos mostra que estes alunos estavam interessados em utilizar o mecanismo criado anteriormente para achar apenas o termo. Tem-se o diálogo:

- Vai aumentando dois. Então é noventa e sete vezes dois?
- É. Cento e noventa e quatro. Depois tira um.

Esses alunos se preocuparam em achar o 97º termo e não há indícios nas gravações e no protocolo que indiquem que eles pensaram em indicar a soma do número descoberto com seus termos anteriores.

Com o objetivo de introduzir os alunos no trabalho com soma de termos de uma PA alcançado, pude verificar que os alunos não somente conseguem identificar termos distantes de uma PA como também podem perceber uma regra para generalizar a soma dos termos de uma PA com o apoio de uma seqüência figurativo-numérica.

Nesta sessão, os alunos observaram o esquema generalizador criado por eles em sessões anteriores mas o objetivo de propiciar a criação de uma fórmula algébrica não foi atingido. Os alunos, que anteriormente haviam conseguido generalizar termos de uma PA, tiveram dificuldade em utilizar notação algébrica formal para representar a generalidade.

CAPÍTULO V – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresento como parte final do trabalho minhas ultimas considerações, baseadas nas análises *a posteriori* já relatadas no final de cada sessão, porém agora vistas de forma global, como um todo.

Para investigar a possibilidade de criar condições a alunos do Ensino Médio de generalizarem termos de uma PA, uma seqüência didática foi proposta para que esses alunos observassem seqüências diversas, observassem a particularidade da PA e generalizassem seus termos implicitamente e/ou utilizando notação algébrica.

Antes de expor a análise global da pesquisa, proponho lembrar os resultados locais de cada sessão.

Na 1ª sessão pode-se dizer que os alunos demonstraram facilidade em indicar o próximo termo de seqüências diversas, ocorrendo apenas quatro respostas não previstas, relativas à uma PA com razão negativa.

Os alunos souberam observar e associar características a diversos tipos de seqüências. No entanto, a característica de uma PA – diferença constante entre um termo e o sucessor – não foi compreendida por muitos alunos, tanto para a PA com razão positiva quanto para a PA com razão negativa.

Os resultados da sessão indicam que o trabalho com progressões aritméticas deve contemplar a discussão de sua característica principal e a observação de vários tipos de seqüências para confrontar as diferenças entre estas e as particularidades de uma PA.

A construção de um esquema generalizador dos termos de uma PA ocorreu logo na 1ª sessão, mas foi na 2ª sessão que os alunos discutiram estratégias de generalização e adotaram um esquema eficiente para identificar qualquer termo de PA.

Na 2ª sessão, os alunos foram beneficiados pela discussão sobre a diferença entre o sentido cotidiano e o sentido matemático de palavras que impossibilitavam a compreensão de características presentes na Atividade 2 da sessão anterior.

Os alunos compreenderam as características da PA, da PG e da seqüência cíclica e, desta vez, todos os alunos participantes associaram a característica da PA pelo menos à PA com razão positiva.

Entretanto, mesmo com o trabalho sobre os diferentes sentidos de alguns termos utilizados na matemática e a discussão da característica de uma PA, muitos alunos não associaram a "diferença constante entre um termo e seu sucessor" à PA com razão negativa, ou seja, decrescente.

Com isso sugiro que, além de propor a observação e comparação de vários tipos de seqüências, o professor deve estar atento às particularidades dos diversos tipos de PA, fazendo o aluno perceber que esta pode ser crescente ou decrescente, mas que sua característica principal se mantém.

Porém, apesar de grande maioria dos alunos ter conseguido identificar um termo distante de uma PA com razão e primeiro termo positivos, poucos alunos conseguiram identificar um termo distante de uma PA com razão positiva e primeiro termo negativo na Atividade 7 da 3ª sessão, mesmo tendo a referida atividade explicitado cada passo a ser seguido para que conseguissem isso.

A Atividade 7 pode ter sido muito ambiciosa pois, além de propor uma PA mais difícil de se trabalhar, nela foi introduzida toda a simbologia para os alunos. Isso pode têlos assustado, pois tiveram que trabalhar com algo que não estavam familiarizados. Esta simbologia deveria ser introduzida aos poucos, começando em sessões anteriores.

A 3ª sessão mostrou a grande dificuldade dos alunos em representar um termo utilizando notação algébrica formal na Atividade 8, pois poucos alunos utilizaram simbologia para representar um termo e nenhum aluno conseguiu representar o enésimo termo e, por conseqüência, construir uma fórmula do termo geral.

A atividade 8 revelou-se insuficiente para atingir o objetivo de levá-los a construir uma fórmula algébrica, já que eles não haviam compreendido a simbologia presente na atividade anterior.

Por fim, muitos alunos conseguiram identificar somas de termos de PA, sendo que a soma de um maior número de termos foi descoberta com o auxílio de uma seqüência figurativo-numérica. No entanto, a generalização da soma para essa atividade foi bastante induzida e não se pode afirmar que os alunos construíram um esquema generalizador para soma de termos de qualquer PA.

Pelas análises *a posteriori* já descritas pude constatar que os alunos conseguiram generalizar termos de uma PA após um momento de observação, mas isso não implicou na construção da fórmula do termo geral devido a dificuldade apresentada por esses alunos em relação à utilização de notação algébrica formal.

No entanto, o fato de o pensamento algébrico ter se manifestado confirmou a autonomia dos alunos em generalizar. Sobre a importância de tal pensamento, Fiorentini, Miorim e Miguel explicam que:

> O pensamento algébrico está na base da construção e da compreensão e da compreensão do universo conceitual desses campos e áreas, isto é, é um pensamento indispensável para a constituição do universo conceitual e temático subjacente à ciência contemporânea. Nesse sentido, o olhar algébrico perpassa e impregna o modo de produção do conhecimento de qualquer domínio. (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 89).

Interessava-me saber o quanto esse desenvolvimento contribuiu para que estes alunos compreendessem e dessem significado à fórmula do termo geral.

Após a realização de toda a experimentação, alguns alunos me procuraram e me perguntaram se a representação do enésimo termo que havia solicitado na 3ª sessão não era a fórmula que eles aprenderam como sendo a do termo geral de uma PA.

Procurei a professora da classe e esta me disse o quanto esses alunos não somente compreenderam o processo de construção da fórmula do termo geral como também se empenharam mais no estudo das progressões em comparação com outras classes da mesma série em que ela lecionava.

Lembrando que essa classe era considerada a mais preocupante em relação ao comportamento e ao desempenho, o fato dos alunos terem se empenhado e conseguido generalizar mostra o quanto o trabalho com observação e generalização de padrões pode ser benéfico tanto para a aprendizagem quanto para a autonomia no ensino da Matemática.

Os alunos participantes da experimentação conseguiram desenvolver a consciência de generalidade, o que segundo Mason (1996a) consiste em sensibilizar-se pela distinção entre "olhar através" e "olhar para", ou seja, "ver a generalidade no particular" e "ver o particular no geral".

Afirmo isso devido a muitos alunos participantes da 2ª sessão terem utilizado o mesmo esquema generalizador para identificar termos diferentes na Atividade 6, observando uma regra geral para identificar qualquer termo da seqüência, ou seja, "vendo o geral" e ao mesmo tempo "percebendo o particular".

Sobre a não-construção da fórmula do termo geral, penso que esse resultado é semelhante ao da experiência feita por Lee (1996), que afirma que para os alunos que observou o maior problema não era o reconhecimento do padrão, mas sim perceber esse padrão útil algebricamente.

A tensão existente entre o pensamento algébrico e a notação algébrica, apontada por Zazkis e Liljedhal (2002), pôde ser notada nos alunos que chegaram a esboçar algum tipo de expressão algébrica mas não acreditaram naquele tipo de expressão ou se recusaram a tê-la como resposta, informando uma resposta numérica.

Concordo com as opiniões expressas em Brasil (2006): as progressões não devem ser caracterizadas por cálculos que fazem somente uso de fórmulas e o processo de ensino deve valorizar a apresentação de fórmulas acompanhadas de dedução. Com isso, defendo que o trabalho com progressões deve compreender a observação deste tipo de seqüência e descoberta por parte dos alunos de mecanismos ou expressões algébricas que generalizem os seus termos.

Para finalizar, gostaria de indicar algumas questões que me surgiram ao longo de minha pesquisa como sugestão para próximas investigações:

- O professor do Ensino Fundamental trabalha com observação e generalização de padrões?
- O trabalho com observação e generalização de padrões no EF leva o aluno a dar sentido à simbologia algébrica e utilizá-la com desenvoltura?

Finalizo minha pesquisa com a esperança de ter contribuído para melhor compreensão sobre as facilidades e dificuldades dos alunos do Ensino Médio em generalizar padrões, especificamente, de progressões aritméticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA. M. M. M. de. **Estratégia de Generalização de Padrões de alunos do Ensino Fundamental do ponto de vista de seus professores**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**, n. 121. Curitiba: Editora da UFPR, 2007. 218 p.

ANDREZZO, K. L. **Um estudo de padrões figurativos na aprendizagem de Álgebra para alunos sem acuidade visual**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Piaget, 1996. 280 p.

BECKER, J. R.; RIVERA, F. Generalization strategies of beginning high school algebra students. In: 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2005, Melbourne. **Anais**... Melbourne: PME, 2005. p. 121-128.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília, v. 2, 2006.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da matemática. In: BRUN, J (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Piaget, 1996. 280 p.

COELHO, S. P.; MACHADO, S. D. A.; MARANHÃO, M. C. S. A. Projeto: qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática? In: II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), 2003, Santos. **Anais...** Santos: SBEM, 2003.

DEVLIN, K. **Matemática: a ciência dos padrões**. Porto: Porto Editora, 2002.

DURKIN, K.; SHIRE, B. Lexical ambiguity in mathematical contexts. In: **Language in Mathematics Educational.** Grã-Bretanha: Open University Press, 1995.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Revista Quadrimestral Pro-Posições,** Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, v. 3, n. 1, p. 39 – 54, mar. 1992.

____. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Revista Quadrimestral Pro-Posições,** Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, v. 4, n. 1, p. 79 – 91, mar. 1993.

HERBERT, K.; BROWN, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. **Teaching Children Mathematics**, v. 3, p. 340-345, 1997.

HOUAISS, A. (Org.). **Minidicionário Houaiss da Língua Portuguesa.** Rio de Janeiro: Editora Objetiva, 2004. 907 p.

LEE, L. An initiation into algebraic culture through generalization activities**.** In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to Algebra**: Perspectives for Research and Teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. p.87-106.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.** 5. ed. São Paulo: Editora Papirus, 2005.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 2001. p.11-53.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002. p. 197 – 212.

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra**.** In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to Algebra**: Perspectives for Research and Teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996a. p. 65-86.

_________. El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad. **Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas**, Barcelona, n. 9, p. 15 – 22, 1996b.

MODANEZ, L. **Das seqüências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2002.

MUNHOZ, M. **A impregnação do sentido cotidiano de termos Geométricos no Ensino/Aprendizagem de Geometria Analítica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1999.

NAKAMURA, O. Y. A. **Generalização de Padrões Geométricos: caminho pra construção de expressões algébricas no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

ORTON, A. (Ed.). **Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics.** London: Cassel, 1999.

PEREZ, E. P. Z. **Alunos do Ensino Médio e a Generalização de Padrão**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006. 119 p.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2003.

RADFORD, L.; BARDINI, C.; SABENA, C. Rhythm and the Grasping of the General. In: 30^{th} Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2006, Prague. **Anais**... Prague: PME, 2006. p. 393-400.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. Os padrões no ensino e aprendizagem em Álgebra. Encontro de Investigação em Educação Matemática promovido pela Secção de Educação e Matemática, n. 14, 2005, Caminha. **Anais**... Caminha: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2005.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. **Revista Educação e Matemática**, Portugal, v. 85, p. 14-20, nov/dez, 2005.

ZAZKIS, R.; LILJEDHAL, P. Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. **Educational Studies in Mathematics Teaching Children Mathematics**, v. 49, p. 379-403, 2002.

ANEXO A – Solicitação de Autorização

Senhora Diretora da E. E. Conselheiro Rodrigues Alves

Eu, César Augusto Sverberi Carvalho, peço sua autorização para realizar um experimento de pesquisa com a participação dos alunos da 1ª série do Ensino Médio, turma 4, que têm por finalidade contribuir para a melhoria do ensino de Matemática nesse nível.

Os alunos participarão dessa pesquisa por meio de atividades a serem desenvolvidas na própria sala de aula em horário de aula de Matemática, com a autorização da professora responsável por esta disciplina na classe.

Os alunos terão seus nomes preservados na redação da pesquisa e não serão obrigados a participar do experimento, caso se recusem.

As atividades ocorrerão em sessões de 40 minutos cada a serem realizadas em dias letivos de setembro, outubro e novembro de 2007.

Agradeço sua atenção, contando com sua compreensão.

____

Pesquisador

____

Professora da classe

Guaratinguetá, 10 de setembro de 2007

____

Diretora da Escola

ANEXO B – Atividades

Nome ____________________________ Nome______________________________

Sessão 1 – Atividade 1

Observem as seguintes seqüências:

a) 0, 3, 6, 9, 12, ...

b) 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...

c) 4, 2, 0, -2, -4, ...

d) □, ○, ✧, □, ○, ✧, ...

e) 4, 8, 16, 32, 64, ...

Lucas e Joana do 1ºM1 conseguiram dizer quais os termos ou elementos que vinham a seguir em cada uma das seqüências. Vocês podem identificar, em cada seqüência, qual será o próximo termo?

Resolução e respostas:

Sessão 1 – Atividade 2

<table>
<tr>
<td>Observem as seguintes seqüências:

a) 0, 3, 6, 9, 12, ...

b) 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...

c) 4, 2, 0, -2, -4, ...

d) □ ,○ ,✧ ,□ ,○ ,✧, ...

e) 4, 8, 16, 32, 64, ...

f) 4, 2, 1, ½ , ¼, ...</td>
<td>Características:

I) crescente

II) decrescente

III) a diferença entre um termo e o seguinte (o sucessor) é constante

IV) os termos são separados por vírgula

V) um termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante

VI) os termos se repetem ciclicamente

VIII) os termos da seqüência são números inteiros</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Quais dessas características cada seqüência possui?</td>
</tr>
</table>

Resolução e respostas:

Sessão 1 – Atividade 3

Observem a seguinte seqüência: 1, 5, 9, 13, 17, ... a) Qual será o próximo termo da seqüência? b) Qual será o vigésimo quinto - 25º - termo da seqüência? c) Qual será o 937º termo?

Resolução e Respostas:

Nome:________________________________ Nome:_____________________________

Sessão 2 - Atividade 4

Palavra	Frases	Sentido cotidiano	Sentido matemático
Diferença	1) Há muita diferença entre o meu jeito e o seu.		
	2) O médico detectou uma diferença no resultado do exame.		
	3) A diferença entre nossas idades é grande.		
Termo	1) Quando será o termo da filmagem?		
	2) Encontrei o 5º termo da seqüência.		
	3) O predicado é um termo essencial de uma oração		
Constante	1) A soma dos ângulos internos de um triângulo é constante.		
	2) Tenho uma constante dor nas pernas.		
	3) Naquela época era constante o uso do chapéu.		
Sucessor	1) O irmão de Fidel Castro é seu sucessor.		
	2) Este modelo de moto é o sucessor do de sua moto atual.		
	3) Entre os números primos, o 13 é o sucessor de 11.		
Anterior	1) Um programa anterior não foi recomendado para crianças.		
	2) No conjunto dos múltiplos de 3 o número 12 é anterior a 15		
	3) A parte anterior da perna do sujeito está gravemente ferida.		

Sessão 2 – Atividade 5

Características	Seqüências
A diferença entre qualquer termo e seu sucessor é constante.	I) 5, 7, 9, 11,...
Os termos se repetem ciclicamente	II) 2, 1, 3, 2, 1, 3,...
O sucessor de um termo ***a*** é obtido multiplicando o termo ***a*** por uma constante.	III) 27, 9, 3, 1, ...
	IV) 8, 4, 0, -4, ...

Sessão 2 – Atividade 6

Identifiquem o 20° termo e o 728° termo da seqüência:

1, 7, 13, 19, 25, ...

20° termo:

728° termo:

Nome______________________________ Nome _______________________________

Sessão 3 – Atividade 7

Para encontrar o 728º termo da seqüência **A= 1, 7, 13, 19,...** vocês fizeram o seguinte:

Primeiro:
Encontraram a **razão r**, constante: 7 – 1 = 13 – 7 = 19 –13 = ... = **6**; então **r=6**.

Segundo:
Escreveram/pensaram na seqüência B dos múltiplos de 6; **B= 6, 12, 18, 24, ..., 6 n,** ...

Terceiro:
Obtiveram a diferença entre o 1º termo da seqüência **A,** $a_1 = 1$, e a razão **r = 6**, isto é: $a_1 - r = 1 - 6 = \mathbf{-5}$.

Finalmente:
Para obter o termo da seqüência A que ocupa a 728ª posição (n = 728), que indicaremos por a_{728}, somaram 6n com -5 obtendo:

$$a_{728} = (6 \times 728) + (-5) = 4368 - 5 = 4363.$$

Observem a seqüência: **C = - 28, -23, -18, -13, ...** Qual é o 874º termo dessa seqüência?

Resolução e respostas:

Sessão 3 – Atividade 8

Considerem a seqüência: $\mathbf{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots , a_n, \ldots}$ onde n é um número natural qualquer maior que zero (n pertence ao conjunto {1,2,3,....}).

Nesta seqüência $\mathbf{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = r}$ (r é a razão).

a) Como representar o 617º termo?

b) Como pode ser representado o termo que ocupa a enésima posição (a_n) na seqüência?

c) Qual o primeiro termo da seqüência B que tem razão 4 e tem como sétimo termo $\mathbf{a_7} = 30$?

Resolução e Respostas:

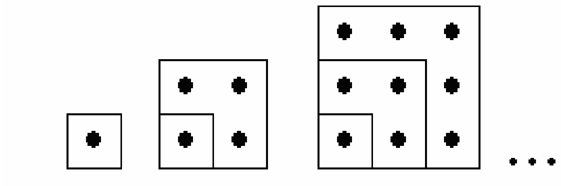
Sessão 3 – Atividade 9

Observem a seqüência:

1, 3, 5, 7, ...

a) Quanto é a soma dos 10 primeiros termos?

b) Jonas e Laura do 1M2 afirmaram terem encontrado uma regra para descobrir a soma dos *n* primeiros termos da seqüência, após terem criado uma seqüência de figuras. Observem essa nova seqüência e descubram qual é a soma dos 97 primeiros termos.



Resolução e Respostas:

INTRODUÇÃO

Desde que tomei a decisão de aprimorar minha formação de professor de Matemática e entrar no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, desejava realizar uma pesquisa sobre aprendizagem em Álgebra, já que esta era a área da Matemática que mais gostava de ensinar e por perceber que meus alunos apresentavam muita dificuldade para se expressar algebricamente.

A idéia da presente pesquisa surgiu após compreender, através de estudos do Grupo de Pesquisa Educação Algébrica da PUC-SP, o quanto a observação e generalização de padrões são atividades que auxiliam no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Fui sensibilizado por esse tema por acompanhar e ler resultados de pesquisa que mostravam a importância destas atividades e por anteriormente a isso não ter propiciado a meus alunos momentos de observação de padrões ou dado oportunidade para que estes criassem e compreendessem a linguagem algébrica.

Esta pesquisa busca verificar se é possível criar condições para que alunos de uma 1ª série do Ensino Médio generalizem termos de progressões aritméticas e, em caso afirmativo, verificar se esta generalização conduz à construção de uma fórmula para o termo geral da PA.

No Capítulo I apresento problemática e objetivo que nortearam o desenvolvimento da pesquisa, evidenciando os motivos que levaram à escolha por esse tema e a importância deste.

No Capítulo II apresento as leituras que fiz sobre pesquisas e trabalhos que situaram a observação e generalização de padrões no campo da pesquisa em Educação Matemática, procurando discutir quais foram as maiores contribuições trazidas por elas para a discussão do tema.

No Capítulo III apresento considerações acerca da metodologia utilizada, explicando como foi feita a seleção dos sujeitos e a elaboração da experimentação. Faço breve descrição da teoria das situações didáticas proposta por Guy Brousseau e da Engenharia Didática, metodologia de pesquisa qualitativa inspirada em tal teoria, descrita por Michèle Artigue.

No Capítulo IV descrevo a seqüência didática, com análise *a priori*, descrição da realização e análise *a posteriori* de cada uma das três sessões realizadas, além de relatar entrevistas feitas com alguns alunos para melhor compreensão dos resultados da 1ª sessão.

No Capítulo V apresento considerações finais do trabalho, comentando os resultados de cada sessão e analisando de forma geral os efeitos da seqüência didática sobre os alunos participantes da pesquisa.

CAPÍTULO I – PROBLEMÁTICA E OBJETIVO

A pesquisa que será evidenciada nas páginas seguintes se enquadra dentre os projetos do Grupo de Pesquisa de Educação Algébrica (GPEA) do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Esse grupo possui trabalhos referentes às linhas de pesquisa "A Matemática na estrutura curricular e formação de professores" e "História, Epistemologia e Didática da Matemática".

O projeto "Qual a Álgebra a ser ensinada na formação de professores que ensinam Matemática?" é o direcionador dos demais projetos do GPEA. Sobre esse projeto, Coelho, Machado e Maranhão (2003) afirmam que, no momento atual, as políticas educacionais vêm incorporando novos conceitos e referenciais que desafiam os processos formativos de professores.

As autoras comentam que as recentes mudanças curriculares e avaliativas, relativas à formação e ao controle do trabalho docente, sugerem a necessidade de pesquisas que tragam subsídios para uma tomada de posição consistente e fundamentada.

Elas apontam que para a Álgebra, talvez mais do que para os outros ramos da Matemática, levantam-se questões de pertinência e relevância. Defendem que após o ganho de importância nos anos 60 - adquirido graças à valorização do formalismo, própria do movimento da Matemática Moderna - a Álgebra pré-universitária veio perdendo espaço e é freqüentemente vista hoje como um amontoado de símbolos de valor indiscernível.

As mesmas autoras afirmam que, se por um lado, a Álgebra é o caminho para estudos futuros e para idéias matematicamente significativas, dada uma de suas dimensões – a de linguagem da matemática – por outro, ela é freqüentemente um obstáculo na trajetória educacional de muitos. Enfatizam que o desempenho de alunos nas avaliações oficiais deixa muito a desejar e parece indicar a existência de um certo descompasso entre o que se espera que estudantes do ensino básico saibam e o que eles realmente sabem sobre a matemática.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1992) revelam que, durante o período do movimento da Matemática Moderna, a introdução do espírito da Álgebra moderna contribuiria para que o ensino de Geometria sofresse uma descaracterização. No entanto, salientam que o ensino de Álgebra também sairia prejudicado ao se tornar austero, formal e estéril e perder seu valor instrumental para a resolução de problemas.

Os mesmos autores afirmam a necessidade de um repensar do ensino de Álgebra nos níveis fundamentais de escolaridade.

> Esse repensar implica alguns desafios. Um deles seria a realização de estudos que procurem explicitar a especificidade da Álgebra e o papel por ela desempenhado na história do pensamento humano [...] Um outro estudo consistiria na discussão dos principais argumentos e justificativas que pedagogos e pesquisadores em educação matemática, de âmbito mundial, têm apresentado com relação ao ensino de Álgebra. (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1992, p. 52).

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) afirmam que a introdução precoce e sem suporte concreto a uma linguagem simbólica abstrata pode funcionar como freio à aprendizagem significativa da Álgebra, bem como o menosprezo ao modo de expressão simbólico-formal. Afirmam que parece subsistir entre pensamento e linguagem simbólico-formal uma relação análoga àquela existente entre pensamento e linguagem natural, no desenvolvimento psico-cognitivo.

Estes autores consideram importante a existência de uma linguagem simbólico-formal que cumpra um papel fundamental na constituição do pensamento algébrico[1] e defendem este pensamento como base da construção e da compreensão do universo conceitual de diversos campos e áreas.

Defendem eles que a primeira etapa da Educação Algébrica deve ser o trabalho com situações-problema, que deve ser realizado de forma a garantir o exercício dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico e afirmam que é preciso saber chegar às expressões simbólicas por meio da análise de situações concretas[2] para depois atribuir algumas significações e transformismos para a expressão algébrica.

Um dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico é o processo de generalização. Lins e Gimenez (2005) comentam que há uma visão de álgebra que se convencionou chamar aritmética generalizada[3].

Tais autores afirmam que a idéia central dessa proposta é a de que a atividade algébrica se caracteriza pela expressão da generalidade[4] e concluíram que:

> um aspecto-chave dessa abordagem [...] é que a tendência letrista é de certa forma compensada por uma preocupação com a linguagem algébrica como meio de expressão, e não apenas como objeto a que se aplicam diversas técnicas. (LINS e GIMENEZ, 2005, p. 111).

Comentam eles que nessa abordagem a preocupação maior não é com uma delimitação precisa do que é tratado em cada atividade proposta, e sim, com o envolvimento dos alunos na organização de dados e no estabelecimento de relações, característicos de atividades investigativas.

---

[1] Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) defendem que o pensamento algébrico se caracteriza por percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização.

[2] Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) analisam situações nas quais acreditam ser possível a manifestação, em maior ou menor grau, do pensamento algébrico.

[3] Os autores citam John Mason como maior defensor dessa proposta.

[4] Segundo o minidicionário Houaiss (2004), generalidade significa qualidade do que abrange uma totalidade de coisas ou do que é considerado em toda a sua extensão; generalização significa ação de estender os resultados da observação de alguns casos ao conjunto dos casos possíveis.

Sobre atividades investigativas numéricas, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam que as investigações contribuem, de modo decisivo, para desenvolver uma compreensão global dos números e operações, bem como capacidades matemáticas importantes como a formulação e teste de conjecturas e a procura de generalizações.

Segundo os autores:

> Os alunos podem realizar pequenas investigações que conduzem à descoberta de fatos, propriedades e relações entre conjuntos de números. [...] Podem, ainda, explorar seqüências numéricas, descobrindo relações numéricas e apreendendo progressivamente a idéia de variável. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2003, p. 55).

O trabalho com generalização de padrões tem sido apontado por pesquisadores, dentre eles Vale e Pimentel (2005), como importante para que os alunos criem expressões algébricas ou mecanismos que conduzam a estas.

Os padrões têm sido evidenciados como propícios para elaboração de atividades de generalização. Esclarece Devlin (2002) que nos últimos vinte anos surgiu a definição de matemática, que é hoje consensual entre a maioria dos matemáticos, como a ciência dos padrões.

Segundo Devlin, o que o matemático faz é examinar “padrões” abstratos – padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento etc – e que tais padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais que recreativo.

Vale e Pimentel (2005) afirmam que o uso de padrões é um componente poderoso da atividade matemática, uma vez que a sua procura é indispensável para conjecturar e generalizar. Elas consideram que as tarefas que envolvem a procura de padrões permitem promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e melhorar a compreensão do sentido do número, da álgebra e de conceitos geométricos.

Tais autoras acreditam que os padrões, nos diversos níveis de ensino, permitem:

- contribuir para a construção de uma imagem mais positiva da matemática por parte dos aluno;
- promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos tornando-os bons solucionadores de problemas e pensadores abstratos;
- melhorar a compreensão do sentido do número, da álgebra e de conceitos geométricos.

Para isso, os alunos devem ter oportunidade de:

> transferir padrões [...] de uma representação para outra; averiguar se uma lista de números mostra alguma regularidade; descobrir o padrão numa seqüência; descrever o padrão oralmente e por escrito; continuar uma seqüência, prever termos numa seqüência; generalizar; construir uma seqüência. (VALE e PIMENTEL, 2005, p.16).

Para o Ensino Médio, elas afirmam que os estudos das sucessões (progressões, indução matemática) e funções representam um universo para explorar problemas e investigações com padrões.

Analisando orientações e propostas curriculares para o Ensino Médio, pude notar o quanto a observação e a generalização de padrões são indicadas para o trabalho com alunos desse nível de ensino.

Algumas indicações do NCTM[5] (2000) para estudantes de Álgebra do *High School* [6] afirmam que estes devem ter oportunidade de:

- generalizar padrões usando funções definidas explicitamente ou recursivamente;
- compreender o significado de formas equivalentes das expressões, equações, inequações e relações;
- utilizar álgebra simbólica para representar e explicar relações matemáticas;
- utilizar expressões simbólicas para representar relações em vários contextos;

[5] National Council of Teachers of Mathematics - Conselho de professores de Matemática dos Estados Unidos

[6] Período equivalente aos Grades 9 a 12, correspondente à oitava série/nono ano do Ensino Fundamental e às três séries do Ensino Médio.

As Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio também indicam para o ensino de Matemática o trabalho com observação de regularidades. Encontramos como parâmetros para o ensino de Matemática:

> Colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. (BRASIL, 2006, p.70).

Para as Orientações Curriculares devemos ter um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a apresentação de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.

Entretanto, sobre o ensino de progressões, Brasil (2006) salienta que estas não devem ser propostas com exaustivas coletâneas de cálculos que fazem somente uso de fórmulas.

Em uma pesquisa do GPEA, Perez (2006) verificou que um grupo de alunos do Ensino Médio foi capaz de generalizar padrões através de diferentes estratégias. Tal pesquisa mostrou que os alunos conseguiram construir e explicar mecanismos de generalização para seqüências diversas.

De acordo com Perez, em relação à Matemática, podemos descobrir e revelar padrões, sendo que a Geometria descreve alguns que são visuais. Ela comenta isso mostrando uma seqüência de triângulos, onde vários padrões podem ser percebidos e descritos.

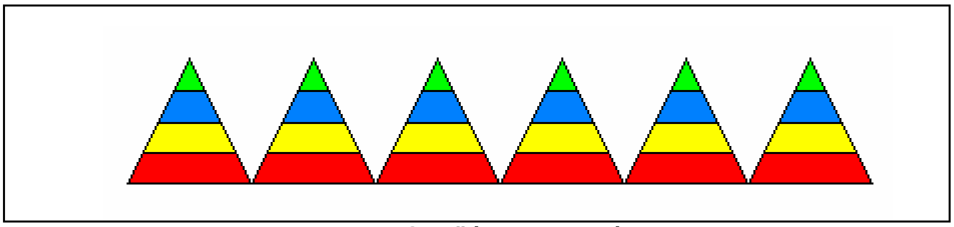


Figura 1: Seqüência de triângulos

A pesquisadora comenta que os padrões representados por números são mais abstratos, da mesma forma que os números utilizados para descrevê-los, como é o caso das seqüências de progressões aritméticas e geométricas.

Perez (2006) afirma que além dos padrões figurativos e puramente numéricos, existem padrões compostos que podem ser denominados de figurativo-numéricos, como no exemplo a seguir.

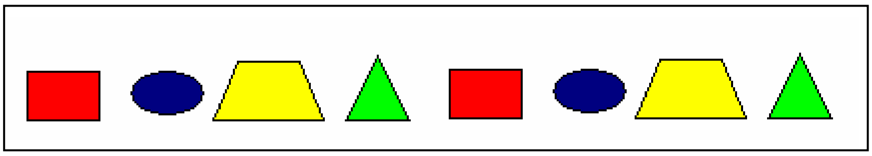


Figura 2: Seqüência com padrão figurativo-numérico

Podemos notar que a seqüência apresentada confere importância à posição de cada figura e não somente à figura em si. Ela acrescenta que, dentre os padrões figurativo-numéricos, há os que são denominados geométrico-numéricos, por apresentarem somente formas geométricas como figuras, como no exemplo apresentado pela Figura 2.

A pesquisa de Perez explorou padrões numéricos e figurativo-numéricos, que mostrassem algum tipo de regularidade, por repetição ou recursiva, na qual fosse possível identificar uma lei que permitisse continuar uma seqüência e assim chegar à generalização.

Ela verificou que, por mais que o pensamento algébrico já estivesse sendo desenvolvido[7], os alunos tiveram dificuldades em escrever algebricamente/ simbolicamente a regra geral de uma seqüência. A dificuldade dos alunos em escrever algebricamente o termo geral de uma seqüência é comentada pela pesquisadora quando afirma que:

> ao solicitar que escrevessem uma regra que pudessem representar o número de pontos ou uma regra qualquer da seqüência, eles não conseguiam expressar na linguagem matemática, mesmo já tendo expressado diversas vezes na linguagem natural. (PEREZ, 2006, p. 114).

[7] Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), o pensamento algébrico pode ser expresso por meio da linguagem natural, aritmética, geométrica ou através de uma linguagem específica para este fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica.

Instigado pelo resultado da pesquisa diagnóstica realizada por Perez que mostrou alunos que ainda não haviam estudado Progressões generalizando e encontrando termos destas, me questionei sobre a possibilidade de propor um trabalho sobre Progressão Aritmética (PA) que capacitasse alunos do Ensino Médio a generalizar termos da seqüência e os levasse à construção de uma fórmula para o termo geral.

Sobre isso me apóio em Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), que afirmam que:

> é esse trabalho reflexivo e analítico sobre situações-problema de naturezas diversas, isto é, sobre o modo como conduzimos e expressamos o nosso pensamento visando à resolução de tais situações, que possibilitará a construção de uma linguagem simbólica que seja significativa par o estudante. (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 90).

Este questionamento fez-me optar por desenvolver esta pesquisa, que se enquadra na linha de pesquisa “A Matemática na Estrutura Curricular e Formação de Professores” do GPEA e, mais particularmente, no projeto “Sobre observação e generalização de padrões – uma atividade matemática transversal” .

Minha pesquisa foi orientada pelo objetivo de verificar se é possível criar condições para que alunos de uma 1ª série do Ensino Médio generalizem termos de progressões aritméticas e, em caso afirmativo, verificar se esta generalização conduz à construção de uma fórmula para o termo geral da PA.

CAPÍTULO II – LEITURAS E ESCOLHAS TEÓRICAS

Neste capítulo apresento pesquisas e teorias que situaram Progressões Aritméticas no trabalho com observação e a generalização de padrões. Antes apresento as definições matemáticas que considero necessárias à exposição.

A definição de seqüência pode ser encontrada em Lima et al. (1997), que consideram esta como uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais. De acordo com os autores, a notação usual para uma seqüência é $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ ou, abreviadamente, (x_n), o que significa que a seqüência dada é a função $1 \mapsto x_1$, $2 \mapsto x_2$, ..., $n \mapsto x_n$ ..., a qual faz corresponder a cada número natural *n* o número real x_n, chamado n-ésimo (ou enésimo) termo da seqüência.

Lima et al. (1997) definem progressão aritmética como uma seqüência onde cada termo, a partir do segundo, é a soma $x_{n+1} = x_n + r$ do termo anterior mais uma constante *r*, chamada a razão da progressão.

Os autores comentam que a razão de uma progressão aritmética pode ser um número positivo, negativo ou igual a zero. Complementam eles que no primeiro caso a seqüência é crescente, no segundo caso a seqüência é decrescente e no terceiro caso a seqüência é constante.

Em seguida apresento pesquisas do Programa de Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica que abordaram o tema da generalização de padrão e que, de alguma forma, contribuíram para minhas análises e decisões. Depois, comento autores que apresentam teorias sobre o assunto de minha pesquisa e que endossam minhas análises.

As pesquisas de Modanez (2002), Nakamura (2003) e Andrezzo (2005) utilizaram seqüências figurativo-numéricas que representavam números em progressão aritmética.

Modanez (2002) tinha por objetivo investigar se o trabalho com seqüências de padrões geométricos[8] poderia proporcionar ao aluno a introdução ao pensamento algébrico.

Para isso, ela elaborou uma seqüência didática com oito atividades que abordavam padrões e aplicou-a para alunos de 6ª série do Ensino Fundamental. Algumas seqüências utilizadas por Modanez representavam valores que caracterizavam uma progressão aritmética. O padrão apresentado na Figura 3 corresponde à PA (3, 5, 7,...) de razão 2.

A autora concluiu que a seqüência didática possibilitou aos alunos o desenvolvimento do pensamento algébrico, bem como a autonomia em observar, levantar hipóteses, tirar conclusões e justificar respostas. Portanto, essa pesquisa confirmou que alunos do Ensino Fundamental desenvolvem expressões algébricas pela observação de padrões característicos de uma PA.

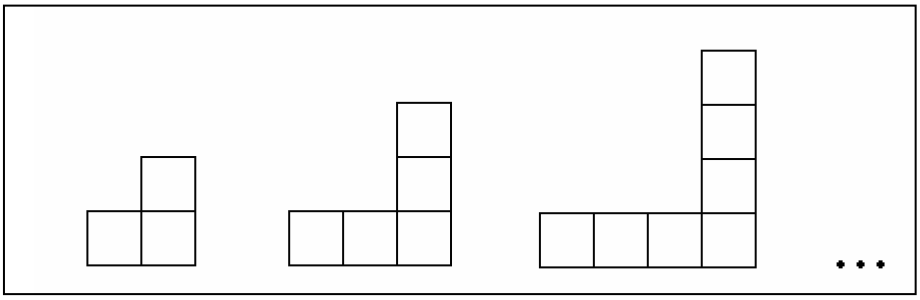


Figura 3: Seqüência figura-numérica presente em Modanez (2002)

[8] Alguns pesquisadores, dentre eles Modanez (2002), denominam padrão geométrico o que chamarei de padrão figurativo-numérico.

Nakamura (2003), por sua vez, defende o desenvolvimento de expressões algébricas por meio de padrões por acreditar que a generalização de padrões geométricos é caminho para construção de expressões algébricas no ensino fundamental.

Sua pesquisa consiste em uma avaliação de proposta de ensino desenvolvida em uma oitava série do ensino fundamental que buscou compreender os procedimentos utilizados pelos alunos durante o processo de generalização de padrões tomados como um meio para a construção de expressões algébricas significativas.

Interessava-me ver nessa pesquisa se alunos com um ano a menos de escolaridade que os alunos que observaria, utilizariam notação algébrica formal para expressar a generalidade.

As principais conclusões desta pesquisa apontam para uma diversidade de procedimentos que os alunos utilizaram para a generalização algébrica dos padrões. Alguns desses alunos em fase final do Ensino Fundamental conseguiram expressar a generalidade utilizando simbologia adequada.

Cabe ressaltar que ambas as pesquisas investigaram generalização de padrões, utilizando procedimentos metodológicos diferentes. Diferenciam da minha proposta por terem pesquisado produções de alunos do Ensino Fundamental e não terem dado enfoque somente a progressões aritméticas.

Andrezzo (2005) tinha por objetivo de pesquisa investigar a compreensão de objetos algébricos, utilizando seqüências de padrões figurativos, por alunos sem acuidade visual do Ensino Médio e elaborar situações que facilitassem a participação destes alunos em atividades de generalização.

O resultado desta pesquisa aponta que estes foram favorecidos por tais padrões para chegarem a regras de generalidade. A passagem da expressão numérica para a algébrica, onde a variável não era diretamente substituível, não ocorreu de forma espontânea para todos os alunos, sendo necessária intervenção da pesquisadora em alguns casos.

Com a pesquisa de Andrezzo pude ver uma experiência com alunos do Ensino Médio e confirmar que a construção de expressões algébricas pode apresentar dificuldades para alunos desse nível.

Dentre as pesquisas do GPEA sobre o tema, comento as que foram desenvolvidas por Almeida e Perez.

Almeida (2006) buscou verificar se professores do Ensino Fundamental de escolas públicas estaduais de uma cidade do interior de São Paulo trabalhavam atividades com observação e generalização de padrão, e caso trabalhassem, quais as estratégias de resolução estes previam que seus alunos utilizariam.

Para a coleta de dados, entrevistas semi-estruturadas com cinco professores da rede estadual foram realizadas, sendo que as análises dos dados mostraram que os professores trabalhavam esporadicamente atividades desse tipo em sala de aula e julgavam que seus alunos não chegariam a generalizar.

Esta pesquisa deixa claro que há necessidade de sensibilizar professores do Ensino Fundamental sobre a importância da observação e generalização de padrões. Como se trata de um tipo de atividade matemática transversal, pode-se dizer que professores do Ensino Médio também devem ser sensibilizados, confirmando a necessidade de pesquisas nessa área.

Perez (2006) realizou uma pesquisa diagnóstica para investigar se e como alunos do Ensino Médio resolvem situações problemas que envolvem generalização de padrões. Para a coleta de dados utilizou cinco atividades, que foram aplicadas durante duas sessões a nove alunos pertencentes às três séries do ensino médio de uma Escola Estadual do interior de São Paulo.

Os resultados obtidos nesta pesquisa levaram-na a concluir que os alunos, embora tenham alegado não ter trabalhado com aquele tipo de atividade antes, não só as resolveram como empregaram várias estratégias para generalizar.

A pesquisa de Perez me convenceu a investigar a generalização com um padrão específico de seqüência, pois sugere uma abordagem para o ensino de progressões aritméticas e geométricas que possibilite ao aluno dar significado às fórmulas construídas. Além disso, essa pesquisa relata como alunos que não tiveram contato com o estudo das progressões generalizaram corretamente termos de seqüências com esse determinado padrão.

A partir deste momento irei apresentar teorias de autores que recomendam o trabalho com generalização de padrões.

Vale e Pimentel (2005) consideram as atividades que possuem tarefas generalizadoras baseadas em padrões necessárias para estabelecer conexões entre os padrões e a Álgebra.

Tais autoras argumentam que a procura de padrões é uma parte crucial na resolução de problemas e no trabalho investigativo e consideram importante o desenvolvimento dessa capacidade nos estudantes, começando com tarefas de reconhecimento de padrões para facilitar em posteriores tarefas mais complexas.

> Nos anos iniciais, os alunos devem ser capazes de descrever padrões como 2, 4, 6, 8, ... dizendo como é obtido o termo a partir do anterior – neste caso somando 2 – é o início do pensamento recursivo. [...] Mais tarde os alunos devem realizar pensamento recursivos mais complexos, como na seqüência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8,... (VALE e PIMENTEL, 2005, p. 15).

Vale e Pimentel (2005) afirmam que a procura e identificação de padrões utilizam e enfatizam a exploração, investigação, conjectura e prova, desafiando os alunos a recorrer às suas destrezas de pensamento e ordem.

Segundo as autoras, na medida em que a matemática é a ciência dos padrões, ela trata da procura da estrutura comum subjacente a coisas que em tudo o resto parecem completamente diferentes e que, deste modo, o uso de padrões é uma componente poderosa da atividade matemática, uma vez que a sua procura é indispensável para conjecturar e generalizar.

Um dos autores citados por Vale e Pimentel é Orton (1999), que afirma que no caminho para a álgebra, descrita como uma expressão de generalidade, a primeira fase pela qual o aluno passa é “ver” e isto significa compreender mentalmente um padrão ou uma relação.

Consideremos, por exemplo, as seqüências presentes na Figura 4. Para a seqüência 1, "ver" significa reconhecer o padrão de formação dos termos. Já para a seqüência 3, "ver" pode ser baseado na seqüência de figuras ou na correspondente seqüência numérica ou em ambas.

Sobre os diferentes modos de "ver" as autoras afirmam que "os alunos devem estar cientes de que há mais que uma representação da mesma situação e que devemos ser capazes de passar de uma para outra compreendendo que as regras são equivalentes". (VALE e PIMENTEL, 2005, p. 15).

Vale et al. (2005) afirmam que quando padrões são utilizados no ensino da matemática normalmente pretende-se ajudar os alunos a aprender matemática de forma significativa e/ou a envolver-se na sua aprendizagem, facultando-lhes um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências.

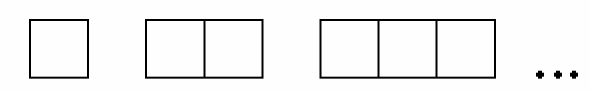
Enfatizam eles que o estudo de padrões vai ao encontro deste aspecto, apoiando a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões.

Os mesmos autores comentam que os padrões lineares são normalmente os mais utilizados na abordagem com alunos do ensino básico, podendo ser utilizados também padrões não lineares como, por exemplo, os que envolvem quadrados de números. Temos a seguir, com a Figura 4, exemplos de seqüências sugeridas para investigação de termos.

1) 1, 2, 4, 7, 11, ...

2) 3, 6, 11, 18, 27, ...

3)



4)

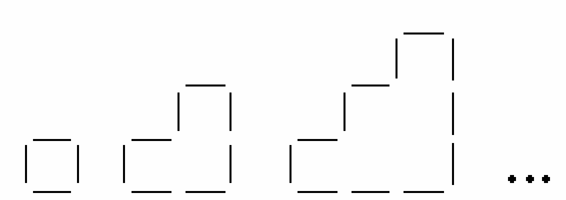


Figura 4: Seqüências sugeridas por Vale et al. (2005)

Vale et al. (2005) salientam que uma questão importante a se colocar, nessa abordagem da álgebra recorrendo aos padrões, é saber até que ponto os alunos são capazes de compreender e generalizar padrões numéricos propostos e qual o desempenho que apresentam neste tipo de tarefas.

Estes autores citam estudos presentes em Orton (1999) que apontam que:

- encontrar termos numa seqüência torna-se progressivamente mais difícil para os alunos à medida que se encontram mais distantes dos termos que lhes são apresentados;
- muitos alunos têm mais dificuldade em explicar um padrão do que continuá-lo;
- geralmente há mais alunos a explicar as regras, detectadas nas seqüências, oralmente do que por escrito.

Um aspecto importante ligado aos padrões que devemos considerar é como ocorre o processo de generalização, pois o trabalho com padrões exige investigação adequada dos termos a serem generalizados.

Segundo Herbert e Brown (1997), o processo investigativo com padrões envolve três fases:

1. Procura de padrões – extrair a informação relevante;
2. Reconhecimento do padrão, descrevendo-o através de métodos diferentes – a análise dos aspectos matemáticos;
3. Generalização do padrão – a interpretação e aplicação do que se aprendeu.

De acordo com estas autoras, estudantes usam múltiplas representações de uma informação na procura pela generalização de um padrão. Com isso, sugerem que os professores, quando observarem essa multiplicidade, devem direcionar os alunos a representarem esta informação em tabelas ou gráficos.

Elas verificaram que este tipo de abordagem tem um impacto positivo na habilidade de estudantes para generalizar uma regra, ou seja, para pensar algebricamente, partindo de situações concretas.

Um grande defensor do trabalho com padrões e referência em diversos estudos sobre o tema é o pesquisador inglês John Mason, que afirma que o futuro da aritmética e da álgebra depende da utilização do sentido de generalidade.

> [9]A essência do pensamento matemático é o reconhecimento, apreciação, expressão e manipulação da generalidade. Isso implica ao mesmo tempo particularizar e generalizar, assim como conjecturar e justificar. (Mason, 1996b, p.8).

Mason (1996b) afirma que a aritmética foi e ainda é a fonte original da álgebra como instrumento para expressar generalidade e representar o desconhecido e que o futuro do ensino de aritmética e álgebra está no sentido que o professor tem dos processos de pensamento matemático e, em particular, da generalização.

Mason (1996a) afirma que um dos meios de desenvolver a consciência de generalidade é sensibilizar-se pela distinção entre “olhar através” e “olhar para”, o que implica “ver a generalidade no particular” e “ver o particular no geral”.

Logo, o aluno deve ser freqüentemente instigado a procurar e reconhecer padrões para que posteriormente consiga generalizar, conforme apontam as três fases indicadas por Brown e Herbert (1997) e, também, deve ser instigado a particularizar determinados elementos da generalidade, conforme aponta Mason.

Mason (1996a) defende que a facilidade na manipulação de generalidades acompanha a confiança em desenvolver expressões e perceber múltiplas expressões para uma mesma coisa.

O autor argumenta que [10]”o emprego da Álgebra para resolver problemas depende de uma expressão confiável da generalidade [...] apoiada pela compreensão do papel das restrições sobre as variáveis”. (MASON, 1996a, p.66).

Um exemplo de atividade de generalização de padrões defendida por Mason pode ser baseado na seqüência figurativo-numérica apresentada a seguir. Nela se propõe

---

[9] Tradução de “La esencia del pensamiento matemático es el reconocimento, apreciación, expresión y manipulación de la generalidad. Ello implica al mismo tiempo especializarse y generalizar, así como conjecturar y justificar.”

[10] Tradução de “The use of algebra to solve problem depends on confident expression of generality […] supported by awareness of the role of constraints on variables“.

ao aluno que investigue um termo com posição distante em tal seqüência, como por exemplo, o termo que ocupa a posição 140.

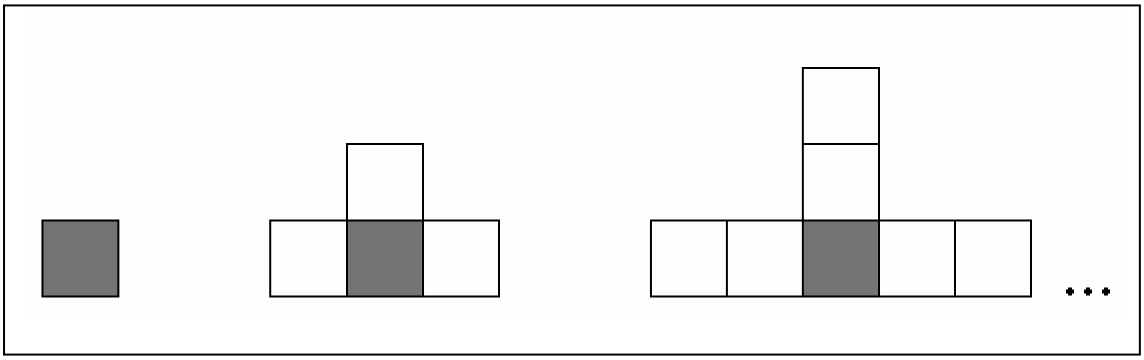


Figura 5: Seqüência figurativo-numérica proposta por Mason (1996a)

1ª : $1 + 3 \times 0 = 1$

2ª: $1 + 3 \times 1 = 4$

3ª: $1 + 3 \times 2 = 7$

4ª: $1 + 3 \times 3 = 10$

...

140ª: $1 + 3 \times (140 - 1) = 418$

...

enésima: $1 + 3. (n - 1) = 3n - 2$

Temos aqui uma seqüência que informa os primeiros três termos representados por figuras, mas que observados corretamente podem levar ao número representativo de qualquer termo da seqüência, inclusive à representação do enésimo termo.

Sobre esse tipo de atividade, Mason (1996a) sugere abordagens de visualização, manipulação da figura, formulação de uma regra recursiva que mostre como encontrar termos posteriores e busca de um padrão que leve diretamente a uma fórmula. Notemos que o pensamento algébrico de tal atividade se faz necessário para evitar que os alunos encontrem um determinado termo pela explicitação de todos os termos anteriores.

O mesmo autor afirma que a percepção de diferentes padrões de regularidade e a descrição destes padrões cria oportunidade para um confronto entre as diferentes soluções e torna evidente a possibilidade da existência de modos diferentes de ver um problema e suas soluções.

Mason (1996a) propôs uma espiral de desenvolvimento para explicar o processo pelo qual o aluno passa resolvendo atividades de observação e generalização de padrões.

O autor afirma que essa espiral tenta conectar estados semelhantes e ao mesmo tempo diferentes, sugerindo que a manipulação muda quando um padrão é percebido, mas que através de um processo fluido, a facilidade e a confiança se desenvolvem.

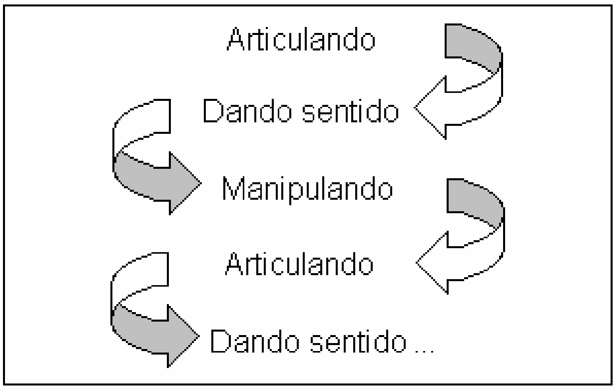


Figura 6: Espiral de desenvolvimento de Mason (1996a)

Sobre as fases da espiral de desenvolvimento, Mason (1996b) afirma que o propósito de manipular objetos não é simplesmente a manipulação, mas sim dar sentido a uma situação, que a medida que se desenvolve volta-se mais articulada, que estas articulações se convertem em mais e mais expressões do pensamento e que, por sua vez, servem como elementos manipuláveis para abstração. O todo se converte em uma espiral de desenvolvimento sem necessidade de percurso linear, pois cada manipulação, sentido, articulação, informa e é informada por outras.

Lesley Lee (1996) acredita que o trabalho com padrões é benéfico para o ensino da Álgebra porque importantes atividades como resolução de problemas, estudo de funções e outras, podem ser vistas como atividades de generalização de padrão. O artigo da autora relata uma pesquisa com alunos do *high school* e universitários.

Segundo a autora, a chave para o sucesso nesse tipo de atividade parece estar na primeira fase que ela contempla, ou seja, na observação do padrão, onde certa flexibilidade é necessária para chegar a um padrão matemático perceptível.

O artigo de Lee (1996) mostra que o trabalho desenvolvido por meio da generalização de padrões é estimulante e propicia que o aluno exercite seu modo de observar, pensar e agir diante de um determinado problema. A autora ressalta que o professor, ao propor esse tipo de atividade, deve estar atento para compreender e avaliar as diversas maneiras que os alunos encontram para resolver problemas desse tipo.

A autora destaca que para os jovens e adultos observados, o maior problema não foi o de ver o padrão, mas sim o de perceber um padrão útil algebricamente, o qual levasse a uma solução geral e comenta que quando os alunos se fixavam em uma percepção inicial de padrão, era muito difícil fazê-los abandoná-la, pois eles freqüentemente retornavam a uma percepção que não levava à solução.

Uma das atividades propostas pela autora e comentada no mesmo artigo utiliza retângulos sobrepostos contendo certo número de pontos. O enunciado de tal problema sugeria que fossem descobertos os números de pontos do quinto retângulo, do centésimo retângulo e do enésimo retângulo.

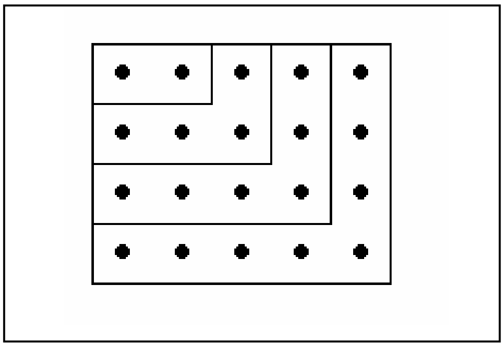


Figura 7: Retângulos sobrepostos em atividade de Lee (1996)

Lee comenta que dos 176 estudantes do *high school* que responderam à atividade, 26 deram respostas corretas às três questões, mas somente 13 estudantes não deram resposta correta à primeira questão (referente ao quinto retângulo), o que indica que os alunos não encontraram dificuldades em reconhecer o padrão. Desses 13 alunos que não indicaram a resposta correta para o quinto retângulo, 10 alunos deram o número 10 como resposta, que representava o número de pontos da borda do quinto retângulo.

Sobre dificuldades que alunos podem vir a ter no processo de generalização de padrões, Zazkis e Liljedhal (2002) afirmam que existe uma tensão entre pensamento algébrico e escrita algébrica.

Estes autores relatam tentativas de professores em formação para generalizar um padrão numérico, discutindo as emergentes formas de pensamento algébrica destes estudantes e a variedade de maneiras pelas quais generalizaram e simbolizaram suas generalizações. Os resultados desta pesquisa indicam que a capacidade dos estudantes de expressar a generalidade verbalmente não foi acompanhada por notação algébrica formal e não dependia de tal notação.

Zazkis e Liljedhal afirmam que existe um "vão" entre a capacidade de expressar a generalidade verbalmente e a capacidade de empregar notação algébrica confortavelmente. Vários participantes observados por estes pesquisadores manifestaram uma preocupação explícita: que suas soluções estavam incompletas porque faltava uma "fórmula", acreditando que a forma de expressão era mais importante do que o que foi produzido.

> [11]Ao invés de insistir sobre qualquer notação simbólica particular, esse vão deveria ser aceito e utilizado como um local de prática para os estudantes praticarem seus pensamentos algébricos. Eles deveriam ter a oportunidade de engajar em situações que promovem esse pensamento sem as limitações formais do simbolismo. (ZAZKIS e LILJEDHAL, 2002, p. 400).

Becker e Rivera (2005) e Radford, Bardini e Sabena (2006) realizaram pesquisas com alunos do *Grade 9*, ou seja, em faixa etária próxima a dos alunos que me propus a observar.

Becker e Rivera (2005) fizeram um estudo qualitativo do desempenho de 22 alunos numa tarefa que envolvia generalização de um padrão linear[12], verificando quais estratégias foram mais utilizadas pelos estudantes que desenvolveram uma generalização explícita.

---

[11] Tradução de "Rather than insisting on any particular symbolic notation, this gap should be accepted and used as a venue for students to practice their algebraic thinking. They should have the opportunity to engage in situations that promote such thinking without the constraints of formal symbolism".

[12] Para Becker e Rivera padrão linear é aquele que envolve valores em progressão aritmética.

A atividade proposta consiste na identificação de quantidades de quadrados brancos e escuros necessários para construir figuras como as presentes na seqüência da Figura 8.

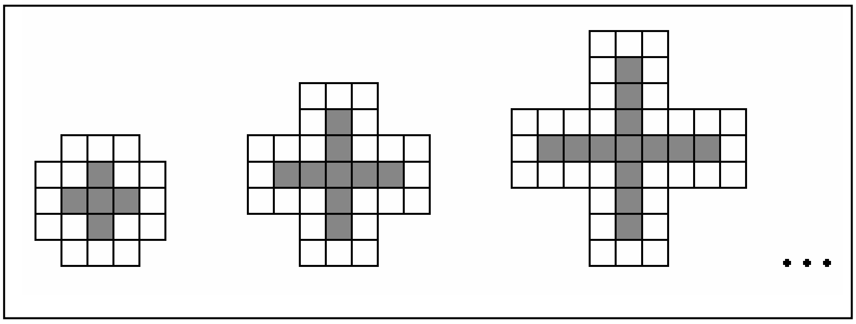


Figura 8: Padrão utilizado em atividade de Becker e Rivera (2005)

Os autores observaram uma diversidade de estratégias utilizadas pelos alunos e que dos 22 alunos, 13 não conseguiram responder à última parte da atividade, que solicitava três fórmulas para relacionar a posição da figura com as quantidades de quadrados brancos, escuros e totais.

Verificaram que os alunos que utilizaram estratégia numérica empregaram tentativa e erro e não deram sentido ao que os coeficientes do padrão linear representavam, ou seja, utilizaram números para generalizar mas não sabiam explicar porque estes números deveriam ser utilizados.

Estes autores comentam que os alunos que não conseguiram generalizar iniciaram com estratégias numéricas, mas faltava-lhes flexibilidade para tentar outras estratégias e ver possíveis conexões entre as diferentes formas de representação e as estratégias de generalização.

Radford, Bardini e Sabena (2006) acreditam que a percepção de padrões possibilita a "visão" da generalidade. Estes autores relatam as respostas de um grupo de alunos para uma atividade que contempla a investigação com um padrão de progressão aritmética.

Eles investigaram a produção de estudantes sobre generalização algébrica como um processo de objetificação[13] e afirmam que esse processo em generalização de

[13] Segundo Radford, Bardini e Sabena (2006), objetificação é um processo de ação, criação, imaginação e interpretação social para compreensão gradual de algo.

padrões consiste em observar propriedades matemáticas gerais não diretamente visíveis em um caso particular.

Para entender como ocorre a percepção dos estudantes em relação à generalidade matemática, os autores investigaram como os estudantes coordenavam os diversos meios semióticos da objetificação em tarefas generalizadoras. Para isso, observaram palavras, gestos e o ritmo da coordenação entre eles.

Os dados apresentados pelos autores foram coletados cinco anos antes da publicação do referente artigo durante a realização de uma atividade proposta a estudantes de uma escola em Ontário (Canadá). Nessa atividade, nas quais os estudantes trabalhavam por um determinado período em grupos com três ou quatro componentes, o professor era responsável por conduzir discussões para que os estudantes expusessem, comparassem e contestassem suas diferentes soluções.

A atividade proposta consistia em observar um padrão, fornecendo os três primeiros termos de uma seqüência figurativo-numérica.

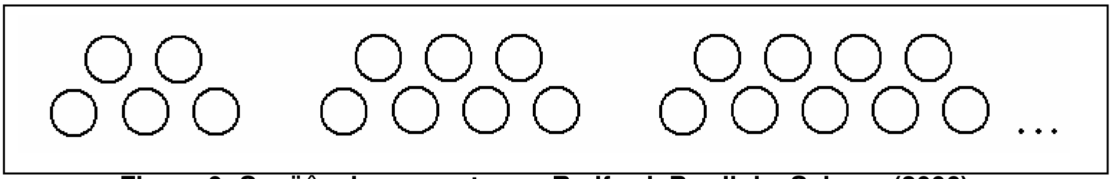


Figura 9: Seqüência proposta por Radford, Bardini e Sabena (2006)

A primeira parte do problema pedia aos alunos que continuassem a seqüência, desenhando as figuras 4 e 5, e descobrissem o número de círculos presentes nas figuras 10 e 100. A segunda parte do problema proposto pelos pesquisadores pedia aos alunos que explicassem como calcular o número de círculos em qualquer figura da seqüência. Já a terceira parte do problema pedia que os estudantes criassem uma fórmula algébrica que indicasse o número de círculos em qualquer figura.

Radford, Bardini e Sabena (2006) focam em seu artigo a análise do trabalho feito na segunda parte do problema por um grupo com três estudantes. Na primeira parte do problema, esses estudantes perceberam que as figuras eram formadas sempre por duas fileiras e formularam uma generalização por um esquema operacional.

Sobre a figura 100, um aluno disse que deveria ter 101 círculos na fileira de cima (um a mais que sua posição) e 102 círculos na fileira de baixo (dois a mais que sua posição). Esse tipo de generalização levou-os a concluir que a figura 10 e a figura 100 continham respectivamente, 23 e 203 círculos.

Para tentar responder à segunda parte do problema envolvendo padrões e indicar como descobrir o número de círculos em qualquer figura da seqüência, uma aluna chamou atenção ao fato do dígito 3 aparecer ao final das respostas da primeira parte do problema. Ela então sugeriu que formulassem um esquema generalizador que incluísse o número 3 e o número indicativo da posição da figura.

Para explorar o papel do algarismo 3 no esquema, estes estudantes relacionaram o número 3 com 3 círculos preenchidos na primeira figura. Com a manipulação da figura, eles puderam ver uma regra comum a todas as figuras da seqüência, estabelecendo um nível mais profundo para a objetificação.

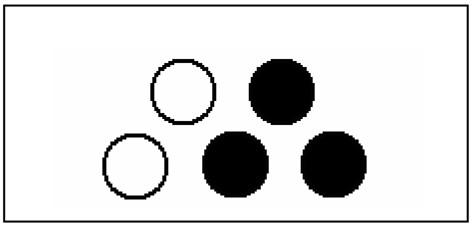


Figura 10: **Três círculos preenchidos**

Os autores afirmam que com uma coordenação de gestos e palavras, os alunos estabeleceram uma conexão da estrutura geral da seqüência de uma forma dinâmica e puderam mover-se do particular para o geral.

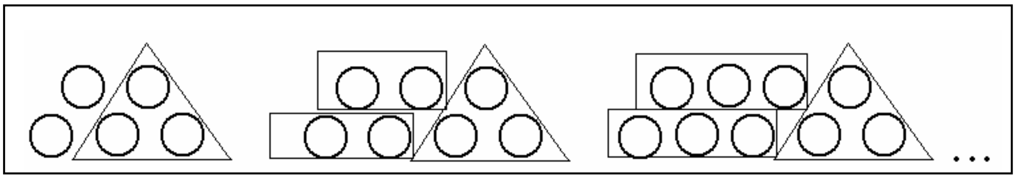


Figura 11: **Percepção da generalidade pelo grupo**

Segundo os autores [14]"para perceber a generalidade, [...] há um outro importante elemento: ritmo. Ritmo [...] constitui um artifício semiótico crucial para tornar aparente a percepção de uma ordem que continue além das primeiras figuras da seqüência." (RADFORD, BARDINI e SABENA, 2006, p. 397).

[14] Tradução de "In order to perceive the general [...] there is another important element: rhythm. Rhythm […] constitutes a crucial semiotic device in making apparent the perception of an order that continues beyond the first figures of the sequence."

Eles afirmam que a percepção da generalidade é um processo gradual que possui como parte essencial a projeção de uma regularidade que prove a generalidade expressa nas figuras e salientam a importância dos gestos e do ritmo no trabalho com generalização como parte da linguagem, comunicação e também da cognição matemática.

As teorias escolhidas para essa pesquisa foram utilizadas para auxiliar nas análises feitas, onde procurei semelhanças entre o que observei e o que afirmam tais teorias sobre o trabalho com generalização de padrões.

CAPÍTULO III – CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Sobre a Metodologia

Para investigar se alunos generalizam termos de progressões aritméticas, atividades baseadas em observação e generalização de padrões foram desenvolvidas e propostas. Para aplicação e análise de tais atividades, foram utilizadas fases da Engenharia Didática definidas por Artigue (1996), cuja engenharia está totalmente relacionada com a teoria das Situações Didáticas proposta por Guy Brousseau (1996).

Almouloud (2007) afirma que o objeto central da teoria das situações é a situação didática definida como o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo *milieu*[15] (contendo

[15] Segundo Almouloud (2007), a noção de *milieu* (meio) foi introduzida por Brousseau para analisar, de um lado, as relações entre os alunos, os conhecimentos ou saberes e as situações e, por outro lado, as relações entre os próprios conhecimentos e entre as situações.

eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição.

Brousseau (1996) afirma que a concepção moderna de ensino espera que se provoque no aluno adaptações desejadas, através de uma escolha judiciosa de problemas, que devem levá-lo a agir, falar, refletir e a evoluir por si próprio. Salienta que entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento em que o aluno produz a sua resposta, o professor deve recusar-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir.

O autor aponta a necessidade de situações adidáticas[16], construídas com fins didáticos, que provoquem no aluno a interação mais independente e mais fecunda possível.

Brousseau (1996) comenta que, numa situação didática, o professor está envolvido num jogo com o sistema das interações do aluno e os problemas que ele lhe coloca, sendo que este jogo caracteriza tal situação.

O professor tem de simular na sua aula uma microsociedade científica, se quer que os conhecimentos sejam meios para colocar boas questões e resolver debates e que as linguagens sejam meios para dominar situações de formulação e que as demonstrações sejam provas.

Para Brousseau o professor tem de efetuar não a comunicação de um conhecimento, mas a devolução do problema adequado. Salienta que se esta devolução se opera, o aluno entra no jogo e, se ele acaba por ganhar, a aprendizagem teve lugar. A regra desse jogo é chamada de contrato didático.

> O contrato didático é a regra do jogo e a estratégia da situação didática. É o meio que o professor tem de a colocar em cena. Mas a evolução da situação modifica o contrato, que permite então a obtenção de situações novas. (BROUSSEAU, 1996, p. 50)

O autor salienta que as rupturas de contrato que são realmente importantes e afirma ser necessário que o professor garanta aos alunos os meios efetivos de aquisição de conhecimento e que, além disso, o aluno aceite a responsabilidade de resolver

[16] Segundo Brousseau (1996), é uma situação onde desaparece a intenção de ensinar, mas continua a ser específica do saber.

problemas cuja solução não foi ensinada a ele. As cláusulas de ruptura e o enquadramento do contrato não podem ser descritos antecipadamente, sendo que o conhecimento será precisamente aquilo que resolverá as crises resultantes dessas rupturas, que não podem ser pré-definidas.

Encontramos em Almouloud (2007) que a teoria das situações desenvolveu-se a partir da classificação de situações caracterizadas por tipos de dialéticas ou interações fundamentais com o *milieu*.

A dialética de ação é aquela que coloca um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar. Esta situação deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre. Suas interações estão centralizadas na tomada de decisões, embora possa haver troca de informações, mesmo que não sejam necessárias à ação.

A dialética de formulação é aquela na qual o aluno troca informações com uma ou várias pessoas através de mensagens escritas ou orais, explicitando as ferramentas que utilizou e a solução encontrada. Consiste em proporcionar ao aluno condições para que este construa, progressivamente, uma linguagem compreensível por todos.

A dialética de validação é a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática ao julgamento de um interlocutor. Seu objetivo é a validação das asserções que foram formuladas nos momentos de ação e de formulação.

A dialética de institucionalização é aquela em que o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber. Salienta que depois da institucionalização, feita pelo professor, o saber torna-se oficial e os alunos devem incorporá-lo a seus esquemas mentais, tornando-o assim disponível para utilização na resolução de problemas matemáticos.

Com vistas a utilizar a teoria das situações didáticas nas pesquisas da Didática da Matemática desenvolveu-se na França a metodologia de pesquisa denominada Engenharia Didática. Essa metodologia, descrita primeiramente por Michèle Artigue, se constituiu com a finalidade de analisar as situações didáticas, objeto de estudo da Didática da Matemática.

Machado (2002) conta que a noção de engenharia didática foi se construindo na Didática da Matemática com uma dupla função, na qual ela pode ser compreendida tanto como um produto resultante de uma análise *a priori*, caso da metodologia de pesquisa, quanto como uma produção para o ensino. Esta autora salienta que a engenharia didática se caracteriza também pelo registro dos estudos feitos sobre um caso em questão e pela validação da pesquisa feita, sobretudo, internamente, pois baseia-se na confrontação entre uma análise *a priori* e uma análise *a posteriori*.

Artigue (1996) justifica a metodologia:

> A engenharia didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de seqüências de ensino. (ARTIGUE, 1996, p. 196)

São quatro as fases da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa segundo Machado (2002): análise preliminar, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* (validação).

Nas análises preliminares fiz um levantamento bibliográfico sobre o assunto de meu interesse que me possibilitou fazer algumas escolhas teóricas e analisar os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão. Pude também verificar como as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio sugerem o trabalho com as progressões.

Na fase da concepção e análise *a priori* fiz a delimitação do número de variáveis[17] didáticas pertinentes ao sistema sobre o qual queria atuar. Levei em consideração o fato de que, segundo Artigue (1996), o objetivo dessa fase é determinar de que forma as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos além de ter tentado criar uma situação adidática que procurasse a devolução aos alunos.

[17] Artigue (1996) distingue as variáveis de comando como macrodidáticas (que dizem respeito à organização global da engenharia) ou microdidáticas (que dizem respeito à organização local da engenharia)

Respeitei a observação de Machado (2002) de que a análise *a priori* objetiva a consideração do aluno sob dois aspectos: o descritivo e o previsivo. Não há nessa fase, tradicionalmente, lugar para o papel do professor. O aluno é considerado o ator principal e o papel do professor é recuperado, em parte, no contrato didático e no caso das situações de institucionalização local ou final, onde são retomadas as questões discutidas e os principais resultados da teoria são estabelecidos.

Na experimentação tentei respeitar, na medida do possível, as escolhas e deliberações feitas na análise *a priori*.

A fase de análise *a posteriori*:

> é aquela que se apóia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação [...] É nesta fase que se dá o tratamento dos dados que consta da seleção dos dados pertinentes à análise *a posteriori*. (MACHADO, 2002, p. 207).

Nessa fase ocorreu o que Machado (2002) já havia descrito, isto é, que para uma melhor compreensão do ocorrido, tornou-se necessária a realização de entrevistas durante a experimentação, o que mostra que experimentação e análise *a posteriori* não foram excludentes, mas sim complementares.

Para essa pesquisa, a análise a posteriori local da 1ª sessão, além de ter apontado a necessidade de entrevistas para compreender algumas escolhas feitas pelos alunos e verificar como foram feitas as resoluções em casos onde os alunos só apresentaram a resposta final, apontou também para a necessidade de realizar na 2ª sessão uma institucionalização local que estabelecesse os conhecimentos construídos e esclarecesse alguns significados de termos matemáticos.

As análises *a posteriori* locais e geral da experimentação procuraram identificar se os objetivos gerais e de cada atividade foram atingidos e se os alunos resolveram as atividades conforme o que foi anteriormente previsto nas análises a priori, a fim de validar a pesquisa realizada.

Procedimentos Metodológicos

Pelo fato de morar no Vale do Paraíba e freqüentar principalmente as cidades de Lorena e Guaratinguetá onde, respectivamente, moro e trabalho, decidi aplicar minha pesquisa na escola estadual de Guaratinguetá na qual leciono.

Muitas atividades que abordam generalização de padrões envolvendo progressões podem ser propostas a alunos de Ensino Fundamental, conforme o que foi evidenciado por Modanez (2002) e Nakamura (2003) , mas optei por alunos de Ensino Médio porque é nesse período que costuma ser abordado o tópico *Progressão Aritmética*.

Escolhi trabalhar com alunos de uma 1ª série porque é esta a série recomendada pelas Orientações Curriculares Nacionais em Brasil (2006) para o trabalho com PA e nesta série os professores da escola costumavam propor esse tópico.

Das nove 1as séries do Ensino Médio que a escola comportava em 2007, cinco funcionavam no período da manhã, duas no período da tarde e duas no período da noite. Como lecionava à tarde e à noite, preferi selecionar uma classe da manhã e aplicar as atividades com alunos de outro professor.

Das cinco turmas da 1ª série matutina, escolhi trabalhar com aquela cujos professores mais se queixavam de falta de disciplina e motivação. Se a aplicação da pesquisa os motivasse e fizesse com que os alunos generalizassem o padrão proposto, estaria comprovando a eficiência desse tipo de abordagem.

A diretora da Escola autorizou a experimentação com os alunos e não considerou necessário pedir autorização aos seus pais devido a seqüência didática envolver um assunto específico da 1ª série do Ensino Médio. Entretanto, ela solicitou que a pesquisa fosse realizada em horário de aula destes alunos.

Disse a ela que faria o possível para atender à sua solicitação e garanti que seriam utilizados nomes fictícios para identificar os alunos na dissertação, a fim de preservar suas identidades.

Não houve familiarização com os alunos antes da primeira sessão, ou seja, eles tiveram seu primeiro contato com o pesquisador no dia em que iniciei a aplicação da seqüência didática.

A professora da classe, que mantinha um ótimo relacionamento com os alunos escolhidos, foi quem explicou para eles que participariam de uma pesquisa. Ela pediu a colaboração de todos e avisou com antecedência o dia em que a primeira sessão da seqüência didática aconteceria.

A professora se mostrou acessível e disposta a colaborar para a realização da experimentação com seus alunos. Ela me disse que iria ensinar PA somente em novembro de 2007, o que fez com que decidisse aplicar a seqüência didática em setembro, outubro e início de novembro do mesmo ano.

A escolha por aplicar nos meses anteriores a novembro e no início deste deve-se ao fato de que seria mais interessante trabalhar com alunos que não tiveram contato com fórmulas para progressões, a fim de possibilitar que estes criassem suas próprias leis de generalização sem utilizar fórmulas já conhecidas.

A professora disponibilizou aulas suas para trabalhar com os alunos, sem precisar que estes viessem à escola fora do horário de aula. Optei por essa alternativa, pois assim estaria satisfazendo o que havia sido solicitado pela diretora.

Observei que as duas primeiras aulas de 4ª feira dessa turma eram aulas de Matemática. Como tinha disponível esse horário decidi utilizá-lo para realização da experimentação.

Avisei a professora que para a experimentação estavam previstas três sessões com duração de 40 minutos cada e que cada sessão ocorreria numa quarta-feira, tendo início às 7 horas e 30 minutos.

Procurei propor uma seqüência didática com atividades que contemplassem observação de seqüências diversas para posterior investigação de uma regra de generalização dos termos de progressões aritméticas.

Para esta pesquisa foram feitas análises *a priori* de todas as sessões realizadas. Estas análises contêm o objetivo geral da sessão e os objetivos específicos, variáveis didáticas e possíveis estratégias de resolução de cada atividade proposta.

Para resolver as atividades os alunos foram divididos em duplas, por acreditar que assim eles se envolveriam mais nas atividades produzindo mais do que se estivessem trabalhando individualmente. Além disso, colocar os alunos para trabalhar em grupos possibilita a gravação de seus diálogos e comentários.

Sobre isso me apóio em Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) que afirmam que o aluno deve sentir que as suas idéias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, para não ser necessária a validação constante por parte do professor.

Os mesmos autores salientam que, no entanto, se os alunos não estão acostumados nem a trabalhar em grupo nem a realizar investigações, fazer entrar na aula, simultaneamente, esses dois elementos novos pode trazer alguns problemas de gestão ao professor.

As sessões tiveram os diálogos de algumas duplas gravados para auxiliar na compreensão dos raciocínios utilizados pelos alunos. Como a classe escolhida era muito numerosa e havia poucos gravadores disponíveis, estabeleci que três duplas teriam seus diálogos gravados.

O critério de escolha para as duplas que tiveram seus diálogos gravados foi direcionado pela professora da classe. Pedi para que esta identificasse uma dupla que considerava com bom rendimento, uma dupla que considerava com rendimento médio e uma dupla que acreditava ter rendimento insatisfatório.

As análises *a priori* de cada sessão da seqüência didática estão presentes no capítulo seguinte, bem como as análises *a posteriori* das resoluções presentes nos protocolos recolhidos em tais sessões.

CAPÍTULO IV – A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Análise *a Priori* da 1ª sessão

O objetivo desta sessão foi introduzir os alunos em atividades de observação de regularidades em seqüências, de uma forma suave e crescente quanto à necessidade de uma observação mais específica.

Procurei elaborar atividades acessíveis aos alunos a fim de possibilitar uma apropriação do aluno pelo tema, atraindo e obtendo o interesse do mesmo pelo assunto.

Apresento cada uma das atividades com seus objetivos específicos e a descrição de algumas estratégias previstas. Exponho estas estratégias, identificadas por E_1, E_2, e assim por diante, em ordem crescente de dificuldade e de probabilidade de uso pelos estudantes.

Atividade 1

Tinha por objetivo apresentar seqüências para introduzir o aluno na observação de padrões, através da solicitação do próximo termo de cada uma delas.

Observem as seguintes seqüências:
a) 0, 3, 6, 9, 12, ...
b) 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...
c) 4, 2, 0, -2, -4, ...
d) □ ,○ ,✧ ,□ ,○ ,✧ , ...
e) 4, 8, 16, 32, 64, ...
Lucas e Joana do 1ºM1 conseguiram dizer quais os termos ou elementos que vinham a seguir em cada uma das seqüências. Vocês podem identificar, em cada seqüência, qual será o próximo termo?

Atividade 1

Dentre as possibilidades de variáveis didáticas, optei por utilizar os seguintes tipos de seqüências:

- progressão aritmética;
- seqüência cíclica;
- progressão geométrica (PG).

Quanto à variável sinal da razão da PA, optei por utilizar uma seqüência com razão positiva, ou seja, crescente e uma seqüência com razão negativa, ou seja, decrescente.

Decidi utilizar seqüências cíclicas, figurativo-numérica e numérica, e uma progressão geométrica para apresentar tipos de seqüências com padrão diferente do apresentado pela PA. O valor da variável sinal da razão da progressão geométrica foi escolhido como positivo.

Em geral apresento os cinco primeiros termos das progressões, pois considero esse número suficiente para que o aluno investigue o padrão e indique o próximo termo.

As seqüências cíclicas, ambas com ciclos de três elementos, estão representadas por nove e seis primeiros termos, para que o aluno perceba os ciclos e possa continuar indicando o próximo termo.

Vários autores, dentre eles Lima et al. (1997), utilizam parênteses para representar seqüências mas optei por não utilizar e apresentar ao aluno uma seqüência mais simplificada.

Foram previstas as seguintes estratégias para resolução dos variados itens:

item a

E_1 – O aluno percebe que cada termo equivale à soma de seu anterior com o número 3, calcula 12 + 3 e afirma que o próximo termo é 15.

E_2 – Após identificar que os termos de tal seqüência são múltiplos de 3 e que o último termo apresentado era 3 × 4, o aluno afirma que o próximo termo é 3 × 5, ou seja, 15.

itens b e d

E_1 – O aluno percebe que as seqüências possuem termos que se repetem ciclicamente e identifica que, pela ordem apresentada, os próximos termos são, respectivamente, o número 1 e o quadrado.

item c

E_1 – Ao identificar que cada termo pode ser calculado pela diferença entre o termo anterior e o número 2, o aluno efetua -4 – 2 e afirma que -6 é o próximo termo.

E_2 – O aluno percebe que os termos desta seqüência são múltiplos de 2 e segue a regra 2 × 2, 2 × 1, 2 × 0, 2 × (-1), 2 × (-2), concluindo que o próximo pode ser calculado por 2 × (-3) e identificando -6.

item e

E_1 – O aluno verifica que cada termo equivale ao termo anterior multiplicado pelo número 2 e efetua 2 × 64, identificando 128.

E_2 – Ao verificar que a soma do termo anterior com o próprio resulta no termo seguinte, o aluno efetua a soma 64 + 64 e descobre que o próximo termo é o número 128.

Atividade 2

Seu objetivo era fazer com que os alunos percebessem características importantes de seqüências, levando-os a aprofundar seus conhecimentos sobre o tema.

<table>
<tr><td>Observem as seguintes seqüências:
a) 0, 3, 6, 9, 12, ..
b) 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...
c) 4, 2, 0, -2, -4, ...
d) □ ,○ ,✧ ,□ ,○ ,✧ ,...
e) 4, 8, 16, 32, 64, ...
f) 4, 2, 1, ½ , ¼, ...</td><td>Características:
I) crescente
II) decrescente
III) a diferença entre um termo e o seguinte (o sucessor) é constante
IV) os termos são separados por vírgula
V) um termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante
VI) os termos se repetem ciclicamente
VII) os termos da seqüência são números inteiros</td></tr>
<tr><td colspan="2">Quais dessas características cada seqüência possui?</td></tr>
</table>

Atividade 2

Decidi utilizar todas as seqüências presentes na atividade 1 e inseri uma nova seqüência com números inteiros e racionais não-inteiros representados na forma de fração.

Optei por utilizar as seguintes características:

- crescente - para verificar o que os alunos consideram por tal conceito e se associam essa característica a todas as seqüências que a possuem;
- decrescente - para verificar o que os alunos identificam por tal conceito e se associam essa característica às seqüências que a contemplam;
- diferença constante entre um termo e o seguinte - para investigar se os alunos associam essa característica às progressões aritméticas;

- termos separados por vírgula - para explicitar uma característica comum a todas as seqüências apresentadas;
- termo obtido pela multiplicação do anterior por uma constante - para investigar se os alunos associam tal característica às progressões geométricas da atividade;
- termos se repetem ciclicamente - para observar o que os alunos entendem por isso e se associam esta característica às seqüências cíclicas;
- todos os termos são inteiros - para chamar a atenção do aluno sobre essa característica.

Atividade 3

Tinha por objetivo propor a observação de uma progressão aritmética para possibilitar ao aluno elaborar mecanismos de generalização. Para isso foi solicitada a identificação de um termo distante, que dificultava a investigação por contagem. Chamo por termo distante o termo que se encontra distante do início da seqüência, ou seja, de seu primeiro termo.

Observe a seguinte seqüência: 1, 5, 9, 13, 17, ... a) Qual será o próximo termo da seqüência? b) Qual será o vigésimo quinto - 25º - termo da seqüência? c) Qual será o 937º termo?

Atividade 3

Para a única seqüência da atividade decidi utilizar o número 1 como primeiro termo e o número 4 como razão para que os alunos trabalhassem somente com termos ímpares e pequenos, a fim de facilitar a observação e descoberta dos termos a serem identificados.

As identificações do próximo termo e do 25° termo foram propostas para que os alunos descobrissem por contagem estes termos e se sentissem envolvidos pela atividade.

A descoberta do 937° termo foi proposta para induzir os alunos a perceberem que a resolução por contagem é longa e passível de erros e tentarem formular uma estratégia de generalização.

Previ como estratégias de resolução:

item a

E_1 – Ao compreender que cada termo é a soma do termo anterior com o número 4, o aluno conclui que o quinto termo é 17 + 4 = 21.

E_2 – O aluno percebe que cada termo é um número consecutivo a um múltiplo de 4 e verifica que o número 20 é o próximo múltiplo a ser utilizado, concluindo que o quinto termo é 20 + 1 = 21.

item b

E_1 – O aluno percebe que cada termo aumenta em 3 de uma posição para outra e soma 3 a cada novo termo, a partir do primeiro, até chegar ao vigésimo quinto número.

1 + 4 = 5
5 + 4 = 9
9 + 4 = 13
13 + 4 = 17
...
93 + 4 = 97

E_2 – Após verificar que o primeiro termo equivale a $4 \times 1 - 3$, o segundo termo equivale $4 \times 2 - 3$, o terceiro termo equivale a $4 \times 3 - 3$ e assim por diante, o aluno conclui que o vigésimo quinto termo será $4 \times 25 - 3 = 97$.

$(4 \times 1) - 3 = 1$
$(4 \times 2) - 3 = 5$
$(4 \times 3) - 3 = 9$
$(4 \times 4) - 3 = 13$
...
$(4 \times 25) - 3 = 97$

item c

E_1 – Após verificar que o primeiro termo equivale a $4 \times 1 - 3$, o segundo termo equivale $4 \times 2 - 3$, o terceiro termo equivale a $4 \times 3 - 3$ e assim por diante, o aluno conclui que o 937° termo será $4 \times 937 - 3 = 3745$.

$$(4 \times 1) - 3 = 1$$
$$(4 \times 2) - 3 = 5$$
$$(4 \times 3) - 3 = 9$$
$$(4 \times 4) - 3 = 13$$
$$\ldots$$
$$(4 \times 937) - 3 = 3745$$

E_2 – Após identificar que o primeiro termo equivale a $4 \times (1 - 1) + 1$, o segundo termo equivale $4 \times (2 - 1) + 1$, o terceiro termo equivale a $4 \times (3 - 1) + 1$ e assim por diante, o aluno afirma que o 937° termo equivale a $4 \times (937 - 1) + 1 = 3744 + 1 = 3745$.

$$(4 \times (1 - 1)) + 1 = 1$$
$$(4 \times (2 - 1)) + 1 = 5$$
$$(4 \times (3 - 1)) + 1 = 9$$
$$(4 \times (4 - 1)) + 1 = 13$$
$$\ldots$$
$$(4 \times (937 - 1)) + 1 = 3745$$

Descrição da realização da 1ª sessão

A primeira sessão ocorreu em 12 de setembro de 2007 e, conforme previsto, teve início às 7 horas e 30 minutos. Estavam presentes na sala o pesquisador, a professora da classe e 35 alunos. Os 35 alunos foram organizados em 16 duplas e 1 trio para resolver as atividades.

No horário determinado, as folhas com todas as atividades foram entregues aos alunos para que começassem a experimentação.

Os alunos foram orientados a deixar sobre as carteiras somente o material recebido, entregue na sessão, e uma caneta para cada dupla, a fim de evitar que apagassem suas tentativas de resolução.

Eles aparentavam calma no início e durante toda a sessão. O fato de nenhum aluno se recusar a participar dessa sessão confirma a colaboração da classe.

A professora da classe estava presente, mas foi orientada a não se comunicar com os alunos durante a aplicação das atividades. Da mesma forma, durante a sessão, quando os alunos tentavam obter alguma resposta a dúvidas sobre a atividade, pedia a eles que lessem novamente a questão sem lhes dar mais informações sobre a questão.

Todas as atividades foram entregues ao mesmo tempo, mas orientei os alunos a responderem as atividades seguindo a ordem numérica, só partindo para a próxima atividade após refletir e responder a atividade anterior.

Três duplas foram escolhidas pela professora para terem seus diálogos gravados, sendo elas as duplas D03, D11 e D14, consideradas respectivamente média, frágil e boa.

Após 40 minutos do início das atividades, com todos os alunos participantes presentes, os protocolos e gravações foram recolhidos.

Análise *a posteriori* da 1ª sessão

A seguir descrevo as resoluções dos alunos levando em conta os protocolos recolhidos bem como as observações feitas durante a aplicação e as transcrições das gravações obtidas das duplas D03 e D14, pois houve um problema com a gravação da dupla D11.

A Tabela 1 contém as respostas pelos alunos sobre os próximos termos das seqüências da Atividade 1. As colunas das seqüências dos itens **a** e **c** estão destacadas porque informam os próximos termos escolhidos para as progressões aritméticas.

	A	B	C	D	E
Enéas e Teca (D01)	15	1	**0**	□	128
Dora e Eva (D02)	15	1	-6	□	128
Aldo e Léo (D03)	15,18,21,...	1,2,3,...	-6, -8, -10,...	□ ○ ✧ ,...	128,256,512,...
Kim, Lino e Rui (T04)	15	1	-6	□	128
Dan e Diva (D05)	15,18,21,...	1,2,3,...	-6,-8,...	□ ,○, ✧ ,...	128,256,...
Pam e Wlad (D06)	15	1	-6	□	128
Kauê e Miro (D07)	15	1	**4**	□	128
Ada e Ciro (D08)	15,18,21,...	1,2,3,...	**-8**, -10,...	□ ,○, ✧ ,...	128,256,...
Hilda e Perla (D09)	15	1	-6	□	128
Mano e Raul (D10)	15	1	-6	□	128
Ali e Remo (D11)	15	1,2,3,...	**0**	□ ,○, ✧ ,...	128
José e Vilma (D12)	15	1	-6	□	128
Flora e Wanda (D13)	15	1	-6	□	128
Edu e Mário (D14)	15	1	-6	□	128
Bia e Mel (D15)	15,18,21,...	1,2,3,...	-6,-8,...	□ ,○, ✧ ,...	128,256,...
Fábio e Mirna (D16)	15	1	-6	□	128
Aura e Tuca (D17)	15	1	-6	□	128

Tabela 1: Resoluções da Atividade 1

Nota-se que as únicas 4 respostas “não esperadas” das 85 respostas dadas, que aparecem destacadas em negrito, recaíram na progressão aritmética decrescente, onde o termo solicitado é um número inteiro negativo.

Enquanto as duplas D01 e D11 não deixaram traços de suas resoluções e responderam que o termo seguinte era o zero, a dupla D07 identificou o número 4 como próximo termo desta PA sem explicar o porquê.

Nesses três casos, creio que o fato dessa seqüência vir logo após de uma seqüência cíclica pode ter influenciado as respostas que se justificariam como seqüências cíclicas: 4, 2, **0**, -2, -4, **0**, 4, 2, **0**, -2... ou 4,2,0,-2,-4, **4**,2,0,-2,-4,...

A dupla D08, formada por Ada e Ciro, identificou o número -8 como próximo termo da PA, indicando também o número -10 como termo seguinte ao -8. Isso indica que a dupla percebeu que a seqüência evoluía somando -2 ao termo anterior, embora ao registrar no papel tenham omitido o número -6, conforme pode ser visto na Figura 12.

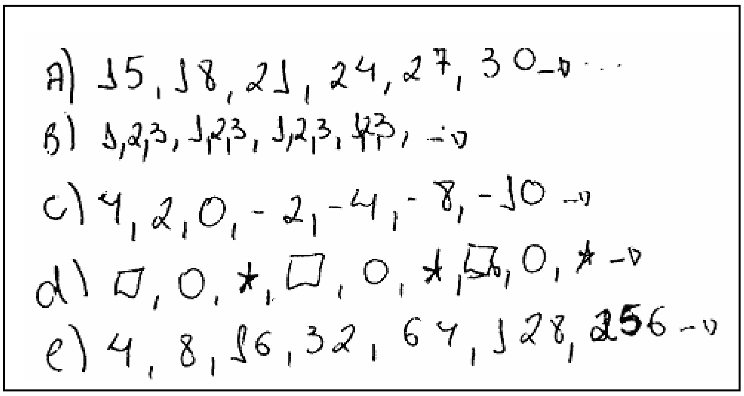

a) 15, 18, 21, 24, 27, 30 → ...
b) 1,2,3, 1,2,3, 1,2,3, 123, →
c) 4, 2, 0, - 2, -4, - 8, -10 →
d) □, 0, ★, □, 0, ★, □, 0, ★ →
e) 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 →

Figura 12: Extraída do Protocolo da Atividade 1 de Ada e Ciro (D08)

É interessante notar que quatro duplas (D03, D05, D08 e D15), além de indicar o termo seguinte ao último apresentado, escreveram mais alguns termos da seqüência.

Pela gravação da dupla D03 ficou evidente que esta dupla observou as seqüências e indicou termos das mesmas antes de terminar de ler o que estava sendo solicitado.

Apresento a seguir a transcrição do diálogo de Aldo e Léo ao observar a terceira seqüência e a quarta seqüência:

> -*Vai diminuindo menos dois. Menos dois, menos quatro, menos seis, menos oito, menos dez, menos doze.*
>
> - *E a d? Quadradinho, bolinha, estrelinha* (pausa). *Quadradinho, bolinha, estrelinha.*

Nesse momento, após terem continuado as quatro primeiras seqüências, um componente da dupla lê o enunciado em voz alta e ambos percebem que se tratava apenas da identificação do próximo termo.

Esta dupla não utilizou vírgulas para separar os termos pertencentes a um ciclo da seqüência figurativo-numérica, como pode ser visto na Figura 13. Embora não haja indícios na gravação feita, é provável que esta dupla tenha percebido o ciclo como termo seguinte da seqüência.

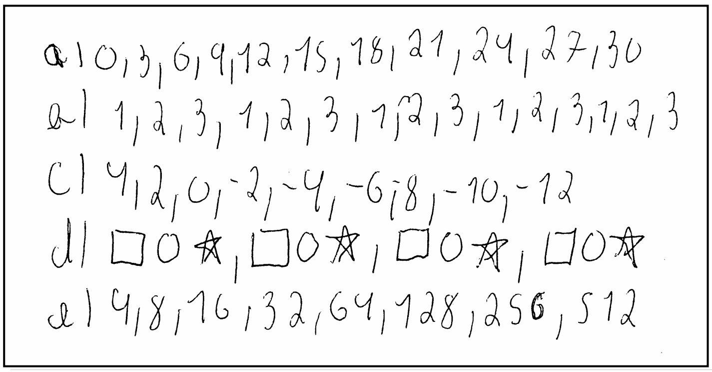

a) 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30
b) 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3
c) 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10, -12
d) □○☆, □○☆, □○☆, □○☆
e) 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512

Figura 13: Extraída do Protocolo da Atividade 1 de Aldo e Léo (D03)

Ali e Remo, que apresentaram como próximo termo das duas seqüências cíclicas os ciclos 1,2,3 e □,○,✧, também parecem ter interpretado o ciclo como um termo de cada seqüência.

Apenas quatro dos dezessete protocolos apresentam cálculos, sendo estes relativos à multiplicação ou adição para a seqüência **e**, uma progressão geométrica. Três duplas preferiram utilizar a estratégia E_2, somando 64 com 64 para identificar 128 e uma dupla preferiu multiplicar 64 por 2, ou seja, preferiu utilizar a estratégia E_1.

A seguir transcrevo parte de diálogos que explicitam essas resoluções:

> -*Tem que somar! Sessenta e quatro mais sessenta e quatro dá cento e vinte e oito.* (D03)

-Vai dobrando! Quatro, oito, dezesseis, trinta e dois, sessenta e quatro, cento e vinte e oito. (D14)

O objetivo da atividade foi atingido, pois propiciou aos alunos observação de diferentes padrões de seqüências conforme os resultados apresentados. Segundo Lee (1996), a chave para o sucesso em atividades de generalização de padrões parece estar na observação e esta deve ser pertinente à questão proposta.

Assim, considero que na maior parte das seqüências houve observações pertinentes. As poucas observações não esperadas, como a identificação do ciclo como termo, não comprometem os resultados obtidos.

A Atividade 2 se diferencia da primeira por possibilitar uma observação mais profunda das seqüências presentes na Atividade 1, com a inserção de uma seqüência com números inteiros e racionais não-inteiros em forma de fração.

Dos dezessete grupos, cinco duplas interpretaram a questão como sendo para designar uma característica a cada seqüência, o que sugere falta de atenção de alguns alunos na leitura do que a atividade solicitava. Outras duas duplas distribuíram as características para as seqüências, indicando duas características a uma das seqüências.

Refiro-me a grupos de alunos porque os alunos não se dividiram somente em duplas, pois um trio (T04) também foi formado.

Para verificarmos como cada grupo respondeu à atividade vejamos uma tabela com as características associadas a cada seqüência.

Na Tabela 2 as características em negrito na segunda coluna representam as associações que deveriam ser feitas a cada seqüência e as linhas em destaque representam a característica da PA.

		D 01	**D 02**	**D 03**	**T 04**	**D 05**	**D 06**	**D 07**	**D 08**	**D 09**	**D 10**	**D 11**	**D 12**	**D 13**	**D 14**	**D 15**	**D 16**	**D 17**
	I	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	II																	
	III				X			X							X			
a	**IV**		X		X	X			X	X			X	X	X			X
	V			X									X	X				
	VI																	
	VII		X		X	X				X			X	X	X			X
	I				X								X					
	II																	
	III						X						X					X
b	**IV**	X	X	X	X	X			X	X			X	X	X			X
	V																	
	VI		X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	VII				X	X		X		X			X	X	X		X	X
	I																	
	II	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	III		X	X	X										X			X
c	**IV**		X			X			X	X			X	X	X			X
	V												X					
	VI																	
	VII							X							X			X
	I																	
	II																	
	III	X				X							X				X	X
d	**IV**		X		X	X			X	X	X	X	X	X	X	X		X
	V																	
	VI		X	X	X			X	X	X			X	X	X			X
	VII						X											
	I		X		X	X		X	X	X			X	X	X			X
	II																	
	III																	
e	**IV**		X			X			X	X			X	X	X			X
	V	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	VI																	
	VII			X	X	X		X		X			X	X	X			X
	I																	
	II		X	X	X	X		X	X	X			X	X	X			X
	III									X	X	X			X	X		
f	**IV**		X			X	X	X	X	X			X	X	X		X	X
	V														X			
	VI																	
	VII	X																

Tabela 2: Resoluções da Atividade 2

Podemos perceber pela tabela que nenhuma dupla identificou todas as características pertinentes a cada seqüência, o que já era esperado devido ao nível de complexidade proposto.

Sobre as características I e II, crescente e decrescente, podemos ver que ocorreram poucas associações incorretas por parte dos alunos. O trio e a dupla D12 associaram crescente à seqüência **b**, que possui um ciclo crescente.

Quanto à característica III, que diz respeito à PA, pode-se dizer que foi a mais associada incorretamente nessa atividade. Apenas o trio e a dupla formada por Edu e Mário identificaram que essa era característica das seqüências **a** e **c**, sendo que a dupla associou III também à progressão geométrica.

Pela transcrição da gravação é possível identificar quando um componente da dupla diz :

> *- Quatro. Metade é dois. Metade é um. Metade é meio. Metade é um quarto.*

Após ler a característica sobre diferença constante entre um termo e o seguinte, esse aluno afirma:

> *- É constante né, a diferença? Porque é metade, outra metade, outra metade.*

Logo, essa dupla entendeu como diferença constante o fato de um termo ser sempre metade do termo anterior, o que revela não compreensão do significado da palavra diferença no contexto matemático ou que esta palavra foi utilizada no sentido cotidiano.

A falta de compreensão sobre a noção de “diferença constante” ficou mais evidente ao verificar que três duplas associaram essa característica à seqüência **b** e cinco duplas associaram-na com a seqüência **d**, ambas cíclicas. Além disso, cinco duplas associaram-na com a seqüência **f**, uma P.G.

A associação da característica da PA com as seqüências cíclicas pode indicar que esses alunos associaram a palavra constante à forma cíclica de algumas seqüências.

Três duplas que indicaram uma característica para cada seqüência associaram a característica III à PG, o que pode indicar que utilizaram uma das duas características que sobraram para a última seqüência apresentada. Na Figura 14 podemos ver as respostas de uma destas duplas associando a característica da PA à PG (4, 2, 1, ½, ¼, ...).

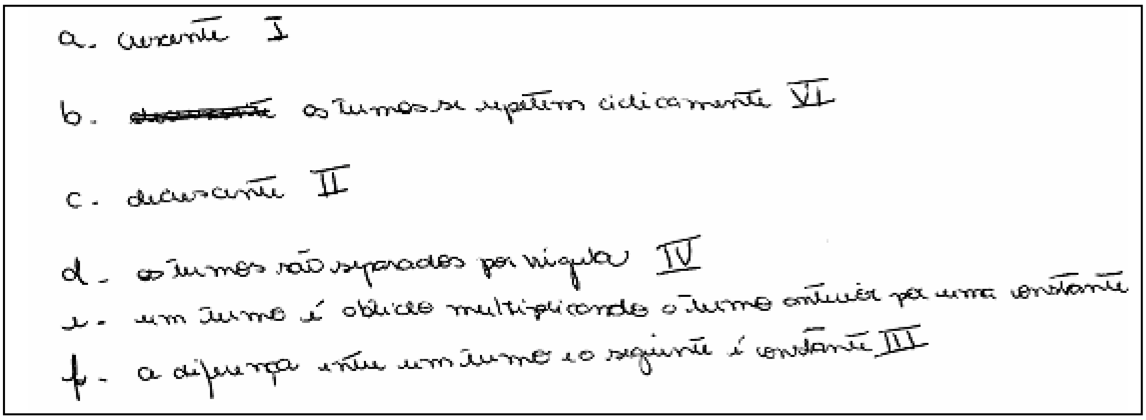

a. crescente I
b. ~~decrescente~~ os termos se repetem ciclicamente VI
c. decrescente II
d. os termos são separados por vírgula IV
e. um termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante
f. a diferença entre um termo e o seguinte é constante III

Figura 14: Extraída do Protocolo da Atividade 2 de Hilda e Perla (D09)

A característica IV, única que contemplava todas as seqüências presentes na atividade, deixou de ser associada algumas vezes. Observando as dez duplas que melhor compreenderam a proposta da atividade, podemos ver que apenas duas duplas não associaram essa característica a todas as seqüências.

A característica V, de uma PG, foi pouco associada incorretamente. Três duplas associaram essa característica à seqüência **a** e uma dupla associou-a à seqüência **c**, ambas progressões aritméticas.

A dupla D03, formada por Aldo e Léo, que faz parte das duplas que não compreenderam corretamente a atividade, optou por associar essa característica à PA crescente.

Pela gravação de Aldo e Léo podemos identificar quando um aluno muda de opinião sobre a característica a ser associada e diz:

> *- A **a** tá errada, olha! Três vezes um, três. Três vezes dois, seis. Três vezes três, nove.*

Essa dupla havia classificado a PA (0, 3, 6, 9, 12,...) como crescente mas ao perceber que esta poderia ser formada multiplicando três aos elementos do conjunto {0,1, 2, 3, ...} afirmou que cada termo era obtido multiplicando o termo anterior por uma constante.

As progressões geométricas **e** e **f** não foram percebidas na mesma. Enquanto dezesseis grupos perceberam que V era característica de **e** (uma PG com razão inteira), apenas uma dupla percebeu que a seqüência **f** (uma PG com razão pertencente ao intervalo]0,1[) era formada por sucessivas multiplicações.

Isso indica que esses alunos apresentavam dificuldade com multiplicação por racionais não-inteiros, por não identificarem uma divisão como um caso específico de multiplicação.

Quanto à característica VI, de seqüências cíclicas, pode-se dizer que foi bem compreendida pelos alunos. Além de não ser associada indevidamente, foi associada às seqüência **b** e **d** por nove dos dez grupos que indicaram mais de uma característica a cada seqüência.

Já a característica VII, sobre termos inteiros, foi associada incorretamente apenas por duas das sete duplas que não compreenderam a atividade. Dos outros dez grupos, o que mais me chamou atenção foi que apenas três duplas perceberam tal característica para a seqüência **c**, talvez por esta apresentar números negativos.

Como essa atividade tinha por objetivo possibilitar uma observação mais profunda e muitas duplas fizeram associações pertinentes, julgo que esse objetivo foi atingido.

A percepção de diferentes padrões de regularidade e a descrição destes padrões cria oportunidade para um confronto de idéias, segundo Mason (1996a). Como essa atividade privilegiava a descrição das seqüências, considero que esta também colaborou para que o aluno percebesse as seqüências como objetos passíveis de várias interpretações.

A terceira atividade da sessão exigia identificação do próximo termo e de termos distantes de uma PA.

Observemos na página seguinte a Tabela 3, que contém as resoluções e respostas dos alunos para os termos solicitados.

Grupos	6º termo	25º termo	937º termo
D01	21	101 (contagem)	(912 × 4) + 101 = 3749
D02	21	97 (contagem)	(937 × 4) – 3 = 3745
D03	21	69 (contagem)	(937 × 4) + 1 = 3749
T04	21	97 (contagem)	3637
D05	21	97 (contagem)	-
D06	21	25	937
D07	21	97 (contagem)	3634
D08	21	90	1692
D09	21	97	3748
D10	21	97 (contagem)	937 × 4 = 3748
D11	21	101	3749
D12	21	97	3748
D13	21	97 (contagem)	937 × 4 = 3748
D14	21	97 (contagem)	-
D15	21	97	3745
D16	21	97 (contagem)	(937 × 4) – 3 = 3745
D17	21	97	-

Tabela 3: Resoluções da Atividade 3

Todas as duplas indicaram corretamente o termo seguinte da seqüência envolvida no item **a**, o que confirma a facilidade dos alunos em observar padrões para indicar termos seguintes. As duas primeiras fases do processo investigativo em generalização de padrões sugeridas por Herbert e Brown (1997) foram contempladas pelos alunos: a procura do padrão e o reconhecimento do mesmo.

Para o item **b**, doze grupos indicaram corretamente o número 97 como vigésimo quinto termo, sendo que sete duplas e o trio mostraram ter resolvido a atividade por contagem, explicitando todos os termos anteriores ao vigésimo quinto, ou seja, utilizando a estratégia E_1. A Figura 15 mostra a resolução por contagem de Mano e Raul para descobrir o 25º termo da seqüência.

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45,
49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81, 85, 89, 93
97.

Figura 15: Extraída do Protocolo da Atividade 3 de Mano e Raul (D10)

Das cinco duplas que indicaram outro valor, duas indicaram o vigésimo sexto termo e uma indicou um termo anterior da seqüência. As duplas D06 e D08 não compreenderam o que foi solicitado.

Ada e Ciro informaram um número par como termo da seqüência de números ímpares e não apresentaram os cálculos feitos para chegar ao resultado.

Pam e Wlad confundiram o número de posição com o termo que ocupa tal posição, o que também ocorreu com um aluno pesquisado por Becker e Rivera (2005), que afirma que isso acontece quando o aluno confunde os papéis das variáveis dependente e independente.

O item **c** exigia maior complexidade de raciocínio mas três duplas indicaram corretamente o termo distante, sendo que uma delas não apresentou a resolução. As duplas D02 e D16 chegaram ao resultado observando que o resultado da multiplicação de 4 por 937 deve ser subtraído de 3 para se chegar a esse termo, resolvendo a atividade pela estratégia E_1 prevista.

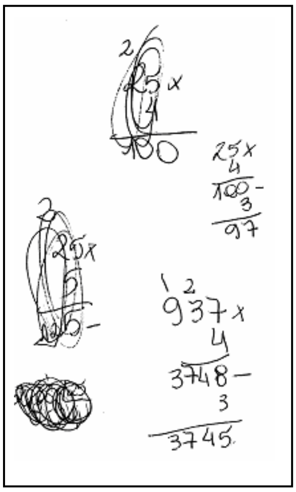


Figura 16: Extraída do Protocolo da Atividade 3 de Fábio e Mirna (D16)

Por mais que não tenham construído fórmula, o pensamento algébrico se fez presente no raciocínio utilizado pelas duplas, pois segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) o pensamento algébrico não se expressa de uma única forma e pode se manifestar através da linguagem aritmética. As duplas não escreveram uma fórmula de natureza simbólica mas criaram um esquema generalizador, também característico do pensamento algébrico.

Pode-se dizer então que essas duplas atingiram a terceira fase do processo investigativo de Herbert e Brown (1997), correspondente à generalização do padrão proposto.

Quatro duplas identificaram 3748 como o termo solicitado, sendo que duas delas efetuaram a multiplicação de 937 por 4.

Três duplas deram como resposta 3749, que vem a ser o 938º termo da seqüência, mas apenas a dupla formada por Aldo e Léo mostrou ter efetuado a multiplicação anteriormente citada e somado ao resultado o número 1.

Aldo e Léo deixaram claro o que entenderam sobre esse item com o seguinte diálogo:

> *- Aqui não vai somando quatro mais quatro? Então é novecentos e trinta e sete vezes quatro.*
> *- Um, cinco, nove, três, sete. Não tem oito!*

O último comentário mostra que esse aluno percebeu que os números dessa seqüência nunca terminam em oito, afinal são todos ímpares. Isso levou a dupla a somar o número um ao resultado e dar como resposta um número ímpar.

O objetivo de possibilitar a elaboração de um mecanismo de generalização foi alcançado e muitos alunos que não construíram um mecanismo eficiente chegaram perto de conseguir isto.

Interessante notar que a dupla D14, considerada a melhor da classe, sequer ensaiou uma solução para o 937º termo.

Para compreender melhor as impressões dos alunos sobre a característica III da Atividade 2 e as estratégias de resolução para a Atividade 3, selecionei seis duplas para serem entrevistadas.

As entrevistas feitas com algumas duplas ou componentes serão detalhadas a seguir.

Entrevistas após a 1ª sessão

As entrevistas foram feitas em 26 de setembro de 2007, duas semanas após a primeira sessão, com os alunos sendo retirados da classe por um breve período de 10 minutos. Serão relatados a seguir os motivos pelos quais cada dupla entrevistada foi selecionada e os detalhes mais importantes das entrevistas, com a transcrição de frases ditas pelos alunos durante nossos diálogos.

Sobre entrevistas individuais, Lüdke e André (2001 *apud* Almeida, 2006) consideram três tipos: não estruturada, estruturada e semi-estruturada. De acordo com as autoras, as entrevistas não estruturadas são aquelas que permitem uma maior liberdade de percurso, enquanto as estruturadas são aquelas que seguem um determinado roteiro a ser seguido pelo entrevistador e têm por objetivo obtenção de dados mais uniformes entre os entrevistados. Entre esses dois tipos situam-se as entrevistas semi-estruturadas, que permitem um roteiro flexível para poder ser adaptado durante o transcorrer da entrevista.

Como utilizei um roteiro previamente definido e esse não foi alterado em nenhuma das entrevistas, posso afirmar que realizei entrevistas estruturadas com as duplas escolhidas. Esse roteiro era baseado em atividades a serem resolvidas pelos alunos diante do pesquisador.

1) Em qual ou quais das seqüências abaixo a diferença entre um termo e o seguinte é constante:

I) 1, 3, 5, 7, 9, ...
II) 4, 5, 4, 5, 4, 5, ...
III) 2, 4, 8, 16, 32, ...

2) Qual é próximo termo, o 20º termo e o 728 º termo da seqüência a seguir?

1, 7, 13, 19, 25, ...

Figura 17: Atividades que basearam a entrevista

A fim de evitar comunicações entre os alunos na troca de entrevistados, optei por alternar as seqüências da questão 1 com outras seguindo o mesmo padrão. Enquanto as duplas D05, D09 e D15 seguiram o roteiro acima, as duplas D11, D12 e D17 observaram as seguintes seqüências:

I) 2, 4, 6, 8, 10, ...
II) 1, 9, 1, 9, 1, 9, ...
III) 1, 3, 9, 27, 81, ...

A primeira dupla a ser entrevistada foi a dupla D15, que contava com as duas componentes, Bia e Mel, presentes. Esta dupla foi escolhida porque não associou corretamente a característica da PA e indicou a resposta correta para o 938º termo da Atividade 3 mas não apresentou cálculos para mostrar como chegou ao resultado.

Essa dupla era uma das sete duplas que interpretaram a Atividade 2 como sendo a indicação de uma característica para cada seqüência e indicou a seqüência **f** como tendo a característica III - diferença entre um termo e seu sucessor é constante - e não indicou essa característica para as seqüências **a** e **c**. Durante a entrevista com as alunas, Bia, observando as 3 seqüências da 1ª questão da entrevista, afirmou que a seqüência II - cíclica - tinha essa característica. E explicou:

- Acho que é a segunda, pois são diferentes e repetem.

Sobre a progressão aritmética da segunda questão, ambas componentes da dupla identificaram o próximo termo como sendo o número 31 e o vigésimo termo como o número 115, descobrindo por contagem e explicitando todos os termos anteriores.

O 728º termo dessa seqüência não foi informado pelas alunas, mas estas disseram como fariam para identificá-lo. Disseram que multiplicando 708 (apresentado após a subtração 728 – 20) por 6, pode-se descobrir o referido termo. As alunas utilizaram o valor de posição 20 mas não utilizaram o termo que ocupa tal posição (no caso, 115), que deveria ser somado ao resultado do produto indicado para chegar ao termo correto. Embora tenham se esquecido desse detalhe, elas afirmaram que essa foi a estratégia utilizada na resolução da Atividade 3.

A dupla D12 foi a segunda dupla a ser chamada mas só contava com a presença de um componente, José, que aceitou ser entrevistado sozinho. Essa dupla foi escolhida porque seu protocolo apresentava incoerência na indicação de um termo par em uma seqüência de números ímpares da Atividade 3 e não apresentação de cálculos para a mesma atividade. Além disso, a dupla indicou a seqüência **b** - cíclica - como tendo a característica III na Atividade 2.

Observando as 3 seqüências da 1ª questão da entrevista, o aluno perguntou:

- Constante é igual? Como assim constante?

Diante de meu silêncio, José decidiu:

- É a II, pois os termos se repetem.

Sobre a seqüência da segunda questão, o aluno rapidamente identificou 31 como próximo termo e disse que poderia achar o 20 º termo por contagem, continuando a seqüência até identificá-lo.

Sobre o 728º termo da seqüência, José disse que uma multiplicação deveria ser utilizada e efetuou o produto de 728 por 6. Ao me dizer que o número 4368 era o termo a ser identificado, pedi a ele que observasse que a seqüência só apresentava números ímpares e 4368 era um número par.

O aluno pensou por um tempo, concordou que não havia como aquele número ser o termo procurado mas se julgava incapaz de dar outra resposta naquele momento.

Após essa entrevista, a dupla D09 foi chamada para ser entrevistada, mas apenas a componente Hilda estava presente. Essa dupla foi escolhida porque apresentou incoerência indicando um termo par em uma seqüência de números ímpares e não mostrou os cálculos utilizados para se chegar às respostas na Atividade 3. Para a Atividade 2, essa dupla indicou a seqüência **f** – uma PG – como tendo a característica da PA e não indicou esta característica para as seqüências que a contemplavam.

Em entrevista com Hilda, a aluna afirmou que as seqüências I e III tinham a característica III da Atividade 2. E explicou:

- Pela variação. Não há repetição.

Hilda indicou o próximo termo da seqüência 1, 7, 13, 19, 25, ... e demorou muito a responder o 20º termo da mesma. A aluna confessou que estava com vergonha de dizer qual estratégia utilizaria, mas ao final continuou a seqüência por contagem e mostrou que se tratava do número 115.

A aluna afirmou que o resultado da multiplicação de 728 por 6 resultaria no 728º termo da seqüência. Questionei sobre este número ser par e a seqüência apresentar somente números ímpares. Hilda notou a incoerência mas não soube dar uma nova resposta.

A dupla D11 foi a próxima a ser entrevistada, estando ambos os componentes desta, Ali e Remo, presentes. Essa dupla foi selecionada para entrevista porque não informou como chegou às respostas e indicou termos posteriores aos solicitados na Atividade 3.

Essa dupla era uma das duas duplas que distribuiu as características para as seqüências da Atividade 2 e informou a seqüência **f** como tendo a característica III.

Em entrevista com os componentes dessa dupla, estes, observando as 3 seqüências da primeira questão da entrevista, afirmaram que a seqüência II tinha a característica da PA. E explicaram:

- Constante é repetir.

Sobre a progressão aritmética da segunda questão, ambos afirmaram que o próximo termo seria o número 31. Para achar o 20º termo, Remo continuou a seqüência até encontrar o número 115. Ali auxiliou o colega com os cálculos e disse que tinha interesse em ver se chegaria ao número 120.

Ao ver que o resultado da multiplicação de 20 por 6 excedia o 20º termo em 5 unidades, Ali disse que encontraria o 728º termo efetuando 728 × 6 e subtraindo 5 do resultado.

Essa dupla disse ter utilizado essa estratégia para resolver à atividade 3 da primeira sessão, mas chegaram ao 26º e 938º termos, ao invés dos solicitados 25º e 937º termos, provavelmente por um erro de contagem na identificação do 25º.

Vale comentar que essa dupla precisou ser motivada constantemente pelo pesquisador, pois possuíam histórico muito ruim na escola e não acreditavam que podiam fornecer respostas interessantes para as atividades.

A próxima dupla convidada foi a dupla D05, que contava apenas com a presença da componente Diva. Essa aluna aceitou ser entrevistada sem a presença do outro componente.

A dupla foi escolhida porque não apresentou solução para o 937º termo da seqüência da Atividade 3 e indicou apenas a seqüência **d** – cíclica – como tendo a característica da PA na Atividade 2. Durante a entrevista, Diva disse:

> *- O que é constante? Nem imagino!*

Após observar as seqüências que poderiam ter tal característica na primeira questão da entrevista, a aluna disse que não tinha como responder, já que não compreendia o que a característica informava.

Diva identificou o próximo termo e o 20º termo da seqüência da segunda parte da entrevista por contagem, mas não identificou o termo distante solicitado. A aluna argumentou:

> *- Acho que é muito grande. E o de vezes não dá certo.*

Após a recusa de Diva em pensar um pouco mais, pedi para chamar a última dupla a ser entrevistada.

A dupla D08 contava com ambos componentes presentes: Ada e Ciro. Essa dupla foi escolhida porque identificou dois números pares como termos de uma seqüência formada somente por ímpares e não apresentou cálculos que mostrassem o raciocínio utilizado para resolução da Atividade 3. Um outro grande motivo para selecionar essa dupla é o fato desta não ter associado a característica III a nenhuma seqüência da Atividade 2.

Na primeira questão da entrevista, Ciro disse que as seqüências I e III apresentavam diferença constante entre um termo e seu sucessor. Perguntei o porquê da afirmação e o aluno explicou o padrão de cada seqüência, não deixando claro o motivo da escolha por aquelas seqüências.

Ada afirmou que as duas seqüências escolhidas pelo colega eram muito diferentes para ter a mesma característica, mas preferiu não indicar uma resposta para a questão.

Para a segunda questão da entrevista, ambos indicaram o próximo termo como sendo 31 e o 20º termo como sendo o número 120, por este ser o resultado da multiplicação de 20 por 6. Os alunos disseram que fariam o mesmo para indicar o 728º termo, efetuando a multiplicação de 728 por 6.

Assim como na atividade 3, esses alunos forneceram dois números pares como termos de seqüências com números ímpares. Após serem questionados sobre isso, aparentaram curiosidade mas não conseguiram dar outra resposta.

As entrevistas me confirmaram que os alunos apresentavam dificuldades para compreender características das seqüências por falta de compreensão do sentido matemático de algumas palavras e que alguns alunos percebiam que suas estratégias de generalização eram insuficientes mas não conseguiam criar uma nova estratégia.

Pensando em aproveitar as estratégias de generalização criadas e discutir as características que muitos alunos não compreenderam, vi a necessidade de uma segunda sessão como institucionalização local abordando esses dois aspectos anteriormente citados. A elaboração, aplicação e discussão dos resultados dessa sessão se encontram nas páginas seguintes.

Análise *a Priori* da 2ª sessão

As análises dos resultados da 1ª sessão levaram-me a verificar a necessidade de uma sessão de institucionalização local que abordasse questões, que embora não estivessem diretamente ligadas ao tema de progressões, interferiram na compreensão da proposta das atividades por um grupo expressivo de duplas e que propiciasse a discussão de algumas das estratégias de generalização utilizadas pelas duplas.

Decidi abordar nesta sessão questões que causaram problemas para a compreensão dos alunos durante a resolução das atividades propostas na 1ª sessão, como os significados de termos polissêmicos, ou seja, que comportam mais de um significado, e a leitura e interpretação de enunciados de algumas das atividades. Além disso, decidi apresentar um painel com diferentes estratégias utilizadas pelas duplas na resolução da Atividade 3, para compartilhá-las e propiciar uma discussão na classe.

A sessão comportou três momentos distintos, cada um contemplando uma atividade, que serão comentados a seguir.

1° Momento

Para esse momento me inspirei na teoria de Durkin e Shire (1995 *apud* Munhoz, 1999) que salienta que o contexto matemático é muito teórico e talvez não seja suficiente para esclarecer o significado de um termo com mais de um sentido.

Estes autores afirmam que ao invés de evitar a ambigüidade, o professor deve explorá-la, tirando vantagem dela. Sugerem que a citação de exemplos em que o termo aparece numa situação cotidiana e outro exemplo com o mesmo termo usado no contexto matemático pode deixar o estudante mais seguro, percebendo a diferença entre os significados.

Dessa forma, o 1º momento procurou seguir a sugestão de Durkin e Shire, propondo frases contendo as palavras que causaram dificuldade de compreensão entre os alunos e fazendo com que estes refletissem sobre o significado dessas palavras no cotidiano e no contexto matemático.

As palavras apontadas pela análise dos protocolos e das entrevistas que causaram problemas de compreensão foram: termo, diferença, constante, sucessor e anterior.

A seguir descrevo alguns significados dessas palavras, retirados do Dicionário Houaiss (2004):

- Termo – fim no tempo ou no espaço; marco divisório; palavra, vocábulo; teor, conteúdo; modo, maneira; qualquer elemento de uma expressão algébrica.
- Diferença – falta de semelhança, desigualdade; alteração; falta de harmonia; divergência; resultado de uma subtração; abatimento no preço; desconto.
- Constante – que faz parte de algo; incluído; inalterável, imutável, invariável, fixo; freqüente; progressivo; grandeza cujo valor não varia.
- Sucessor – que sucede a outro ou o substitui; herdeiro; descendente.
- Anterior – o que vem antes; situado na parte da frente.

Decidi fazer três frases relativas a cada um dos termos polissêmicos. Duas frases representando o significado das palavras no cotidiano e uma com o termo inserido no contexto da Matemática. Utilizei maior número de frases com contexto do cotidiano e não coloquei a frase do contexto matemático na mesma ordem entre os diferentes grupos.

A fim de prepará-los para a Atividade 4, decidi escrever na lousa as frases:

- Um dos mergulhadores ficou na superfície, dentro do barco, para monitorar o oxigênio do outro.
- A superfície do dado de aresta 1 cm tem área de 6 cm^2.

Estas frases serviriam para perguntar à classe se *superfície* tem o mesmo significado nas duas frases e discutir os significados diferentes, enfatizando que outras palavras da língua portuguesa também têm diferentes significados no cotidiano e na matemática.

Após essa introdução, a Atividade 4 seria entregue para que os alunos a resolvessem em duplas, solicitando que lessem com atenção e verificassem para cada frase se a palavra indicada na primeira coluna tinha o significado matemático ou cotidiano.

Palavra	**Frases**	**Sentido Cotidiano**	**Sentido Matemático**
Diferença	1) Há muita diferença entre o meu jeito e o seu.		
	2) O médico detectou uma diferença no resultado do exame.		
	3) A diferença entre nossas idades é grande.		
Termo	1) Quando será o termo da filmagem?		
	2) Encontrei o 5º termo da seqüência.		
	3) O predicado é um termo essencial de uma oração		
Constante	1) A soma dos ângulos internos de um triângulo é constante.		
	2) Tenho uma constante dor nas pernas.		
	3) Naquela época era constante o uso do chapéu.		
Sucessor	1) O irmão de Fidel Castro é seu sucessor.		
	2) Este modelo de moto é o sucessor do de sua moto atual.		
	3) Entre os números primos, o 13 é o sucessor de 11.		
Anterior	1) Um programa anterior não foi recomendado para crianças.		
	2) No conjunto dos múltiplos de 3 o número 12 é anterior a 15		
	3) A parte anterior da perna do sujeito está gravemente ferida.		

Atividade 4

2° Momento

Tinha por objetivo fazer os alunos interpretar o enunciado da Atividade 2 da sessão inicial e observar as características de seqüências com padrões que as seqüências dessa atividade apresentavam.

Para esse momento da institucionalização, vi a necessidade de discutir com os alunos as características da Atividade 2 que proporcionaram maior falta de compreensão ou associação indevida por parte dos alunos:

- a diferença entre um termo e o seguinte é constante;
- um termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante;
- os termos se repetem ciclicamente

As 4 seqüências tiveram cada uma as seguintes características:

- PA com razão positiva – para levar o aluno que ainda não percebeu a diferença constante entre termos consecutivos desta seqüência a observar essa característica;
- PA com razão negativa – como a PA com razão negativa presente na 1ª sessão causou dificuldades em alguns alunos até mesmo para indicar o próximo termo, achei que seria necessário retomar esse tipo de seqüência;
- PG com razão menor que 1 e positiva – pois a grande maioria dos alunos não associou esta seqüência à sua característica na Atividade 2, talvez por não considerar a divisão como uma multiplicação por um número do intervalo]0,1[;
- seqüência cíclica – por essa ter sido compreendida por muitas duplas, na realização das atividades e nas entrevistas, como tendo a característica principal da PA.

Uma folha com a Atividade 5 seria entregue aos alunos e solicitaria que observassem as características e as seqüências e ligassem com um traço cada seqüência às suas características. Após alguns minutos de reflexão dos alunos, os resultados seriam discutidos.

Características	Seqüências
A diferença entre qualquer termo e seu sucessor é constante. Os termos se repetem ciclicamente O sucessor de um termo ***a*** é obtido multiplicando o termo ***a*** por uma constante.	I) 5, 7, 9, 11,... II) 2, 1, 3, 2, 1, 3,... III) 27, 9, 3, 1, ... IV) 8, 4, 0, -4, ...

Atividade 5

3° Momento

Pretendia gerenciar um painel com diferentes estratégias de resolução apresentadas para a Atividade 3 da 1ª sessão, para que os alunos discutissem e chegassem à conclusão de qual ou quais eram o(s) mecanismo(s) mais eficiente(s) para se chegar à generalização

Optei por comentar com os alunos as seguintes resoluções para a questão **c** da atividade, que consistia na identificação do 937º termo da PA (1, 5, 9, 13, 17, ...):

- A multiplicação da razão 4 pelo número 937, resultando o número 3748;
- A multiplicação da razão 4 por 937 somada ao número 1, resultando o número 3749;
- A multiplicação de 4 por 937 subtraída de 5, resultando o número 3745.

Após um tempo para que os alunos comentassem estas estratégias, seria proposto a identificação do 20° termo e do 728° termo da seqüência (1, 7, 13, 19, 25,...), que já havia sido apresentada aos alunos entrevistados. Escolhi essa PA porque, com esta, estaria propondo uma nova investigação aos alunos não entrevistados e ao mesmo tempo dando um retorno aos alunos que observaram tal seqüência.

Identifiquem o 20° termo e o 728° termo da seqüência: 1, 7, 13, 19, 25, ...

Atividade 6

As estratégias de resolução previstas para a Atividade 6 foram:

20º termo

E_1 – O aluno percebe que cada termo aumenta em 6 de uma posição para outra e soma esse número a cada novo termo, a partir do primeiro, até chegar ao vigésimo número.

1 + 6 = 7
7 + 6 = 13
13 + 6 = 19
19 + 6 = 25
...
109 + 6 = 115

E_2 – Após verificar que o primeiro termo equivale a 6 × 1 – 5, o segundo termo equivale 6 × 2 – 5, o terceiro termo equivale a 6 × 3 – 5 e assim por diante, o aluno conclui que o vigésimo quinto termo será 6 × 25 – 5 = 115.

(6 × 1) – 5 = 1
(6 × 2) – 5 = 7
(6 × 3)– 5 = 13
(6 × 4) – 5 = 19
...
(6 × 25) – 5 = 115

728º termo

E_1 – Após verificar que o primeiro termo equivale a 6 × 1 – 5, o segundo termo equivale 6 × 2 – 5, o terceiro termo equivale a 6 × 3 – 5 e assim por diante, o aluno conclui que o 728° termo será 6 × 728 – 5 = 4363.

(6 × 1) – 5 = 1
(6 × 2) – 5 = 7
(6 × 3)– 5 = 13
(6 × 4) – 5 = 19
...
(6 × 728) – 5 = 4363

E_2 – O aluno identifica que o primeiro termo equivale a $6\times(1 - 1) + 1$, o segundo termo equivale $6 \times (2 - 1) + 1$, o terceiro termo equivale a $6 \times (3 - 1) + 1$ e assim por diante e afirma que o 728° termo equivale a $6 \times (728 - 1) + 1 = 4362 + 1 = 4363$.

$$(6 \times (1 - 1)) + 1 = 1$$
$$(6 \times (2 - 1)) + 1 = 7$$
$$(6 \times (3 - 1)) + 1 = 13$$
$$(6 \times (4 - 1)) + 1 = 19$$
...
$$(6 \times (728 - 1)) + 1 = 4363$$

Descrição da realização da 2ª sessão

A segunda sessão de atividades, que consistia numa institucionalização, pretendia discutir com os alunos as idéias cujos resultados da primeira sessão revelaram não terem ficado claras para estes.

Esta sessão ocorreu em 17 de outubro de 2007 (pouco mais de um mês após a 1ª sessão) e teve início às 7 horas e 30 minutos, sendo dividida em 3 momentos que contemplavam discussão entre o pesquisador e os alunos e atividades para cada momento previsto.

Os alunos se mostravam bastante interessados em discutir as idéias e nenhum aluno se recusou a participar. Estavam presentes 31 alunos, que foram divididos em 15 duplas e 1 aluno preferiu realizar as atividades individualmente. Alunos que não participaram da primeira sessão estavam presentes e alguns alunos que participaram desta se ausentaram.

Três alunos que não participaram da primeira sessão estavam presentes e não impedi que estes participassem dessa sessão. Dois destes alunos iniciantes na experimentação formaram uma nova dupla (D18) e o outro aluno formou dupla com um colega já participante.

No primeiro momento, discutimos sobre como palavras podem apresentar diferentes significados em relação ao sentido cotidiano e ao sentido matemático. Exemplifiquei isso com frases explorando sentidos diferentes para a palavra *superfície.*

Logo após, os alunos tiveram 10 minutos para responder à Atividade 4, que explorava os sentidos de palavras que os alunos não compreenderam ou utilizaram incorretamente na sessão anterior. Após esse tempo, discutimos o sentido dessas palavras nas frases presentes em tal atividade.

O segundo momento teve início com a exposição das características que mais proporcionaram incompreensão aos alunos. Muitos deles afirmaram que, após a realização do primeiro momento da institucionalização local, compreenderam finalmente estas características. Sem que o pesquisador precisasse identificar qual seqüência continha qual característica, os alunos discutiram e fizeram conexões.

Antes de propor a atividade prevista para este momento, li com os alunos o enunciado da Atividade 2 da 1ª sessão, que pedia que os alunos identificassem quais características algumas seqüências possuíam e comentei que muitos atribuíram apenas uma característica para cada seqüência.

Em seguida, disponibilizei 5 minutos para que os alunos resolvessem a Atividade 5, que solicitava que ligassem 3 características a 4 seqüências. Após o término desses minutos, discutimos e chegamos a um consenso de quais eram as ligações a serem feitas.

O terceiro momento era o mais esperado pelos alunos, que se mostravam envolvidos pela atividade que exigia identificação de um termo distante de uma PA. Comecei fazendo um painel, semelhante ao apresentado na Figura 18, com estratégias de generalização que alguns deles utilizaram para identificar o 937º termo da PA (1, 5, 9, 13, 17, ...) na Atividade 3.

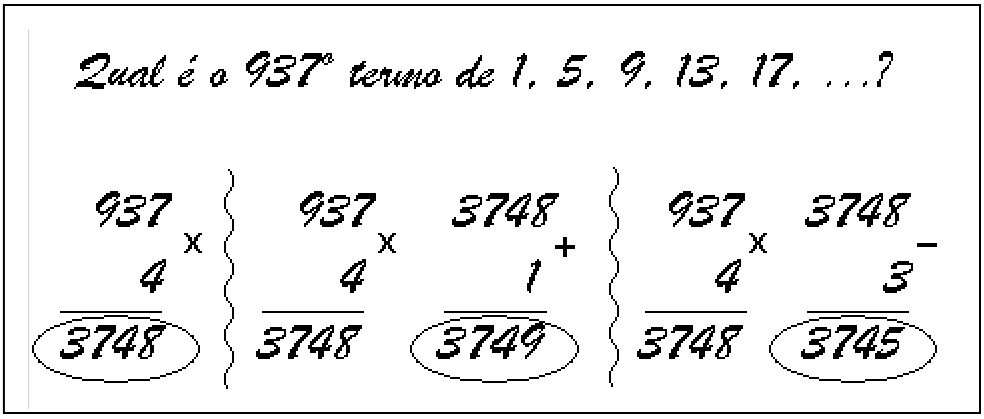


Figura 18: Painel feito durante a sessão

Os alunos observaram as estratégias de resolução e discutiram cada uma delas. Eles chegaram à conclusão de que a última estratégia (da esquerda para a direita) era a mais eficiente dentre as expostas no painel após ouvirem os argumentos da aluna Mirna, que utilizou essa estratégia para resolver a atividade. Esta aluna argumentou aos colegas que todos os termos dessa seqüência tinham três unidades a menos que os múltiplos positivos de 4 (razão dessa PA).

Após a discussão, eles tiveram 5 minutos para responder à Atividade 6 que solicitava termos da PA (1, 7, 13, 19, 25, ...).

Essa sessão terminou às 8 horas e 30 minutos, totalizando uma hora de sessão, 20 minutos a mais do que o previsto. Envolvidos pela Atividade 6, os alunos mostraram-se ansiosos para uma próxima sessão com atividades.

Análise *a posteriori* da 2ª sessão

As tabelas que descrevem os resultados da segunda sessão apresentam em suas primeiras colunas os alunos que participaram da segunda sessão, não necessariamente mantendo as duplas formadas na primeira.

A Atividade 4 tem seus resultados organizados pela Tabela 4, que informa quais frases cada aluno associou ao sentido matemático. A primeira linha da tabela apresenta qual das frases mostra a palavra exclusivamente no sentido da Matemática.

Alunos	**Diferença: 3**	**Termo: 2**	**Constante: 1**	**Sucessor: 3**	**Anterior: 2**
Mel e Teca	3	2	1	1 e 3	2
Eva e Mano	3	2	1	3	2
Aldo e Rui	2	1 e 2	1	3	2
Iran e Kim	2	2	1	3	2
Pam e Tuca	3	2	1	3	2
Dan e Kauê	-	2	1	3	2
Ada e Léo	2 e 3	1 e 2	1	1, 2 e 3	2
Hilda e Perla (D09)	3	2	1	3	2
Ali e Remo (D11)	2 e 3	2	1	2 e 3	2
José e Lino	2	2	1	2 e 3	2
Dora e Flora	2	2	1	3	2
Edu e Ciro	3	2	1	1 e 3	2
Fábio e Mirna (D16)	3	2	1	3	2
Aura e Mário	2 e 3	2	1	3	2 e 3
Alê e Gina (D18)	3	2	1	3	2
Wlad	3	1 e 2	1	3	2

Tabela 4: Resoluções da Atividade 4

Podemos ver pela Tabela 4 que as palavras *diferença* e *sucessor* foram as que mais foram associadas incorretamente ou não associadas ao sentido matemático, talvez porque muitos alunos utilizavam essas palavras demasiadamente no sentido cotidiano e não as compreendiam quando utilizadas em outros contextos.

Oito duplas e o aluno Wlad associaram o sentido matemático à frase 3 da palavra *diferença*, mas quatro duplas associaram tal sentido somente à frase 2 e três duplas associaram-no a ambas as frases. Por mais que a frase 2 possa ser utilizada com sentido matemático, não diz respeito exclusivamente ao domínio da Matemática.

Para a palavra *termo*, todos perceberam o sentido matemático da frase 2, mas duas duplas e Wlad também o associaram à frase 1. Uma das possíveis causas dos alunos terem associado esta última ao sentido matemático talvez seja o desconhecimento da palavra termo como tendo significado de fim.

Quanto à palavra *constante*, todos os alunos perceberam que somente a frase 1 possui sentido matemático.

Já para a palavra *sucessor*, podemos ver que todas as duplas associaram a frase 3 ao sentido matemático, sendo que cinco duplas não perceberam que somente essa era exclusiva da Matemática. Esta palavra foi a única associada a três frases por uma das duplas, o que confirma maior dificuldade em percebê-la nos diferentes sentidos.

Por fim, a palavra *anterior* teve sua frase 2 associada por todos os alunos ao sentido matemático, com apenas uma dupla não percebendo que somente esta apresenta tal sentido.

Como essa atividade tinha por objetivo proporcionar um momento de reflexão sobre o significado de palavras, considero que esse objetivo foi alcançado, uma vez que os alunos se empenharam em identificar os sentidos cotidiano ou matemático de cada frase.

Procurei fazer da multiplicidade de sentidos um fato favorável e motivador para o ensino, ao invés de me conformar com a sua condição de elemento complicador para a compreensão de conceitos matemáticos, de acordo com o que sugere Durkin e Shire (1995 *apud* Munhoz, 1999).

A próxima tabela revela os resultados da Atividade 5, que solicitava associação de seqüências (duas PA, uma PG e uma seqüência cíclica) às características principais dessas.

A primeira linha dessa tabela informa as características que podem ser associadas à PA, à seqüência cíclica e à PG.

Muitos alunos afirmaram, durante a resolução desta atividade, que a discussão dos significados dos termos no momento anterior auxiliou para compreensão de características antes não compreendidas.

	PA: I e IV	Cíclica: II	PG: III
Mel e Teca	I	II	III e IV
Eva e Mano	I	II	III e IV
Aldo e Rui	I e IV	II	III
Iran e Kim	I e IV	II	III
Pam e Tuca	I e IV	II e III	-
Dan e Kauê	I e IV	II	III
Ada e Léo	I e IV	II	III
Hilda e Perla (D09)	I	II	III e IV
Ali e Remo (D11)	I e IV	II	III
José e Lino	I e IV	II	III
Dora e Flora	I e IV	II	III
Edu e Ciro	I e IV	II	III
Fábio e Mirna (D16)	I	II e IV	III
Aura e Mário	I e IV	II	III
Alê e Gina (D18)	I e IV	II	III
Wlad	I e III	II	IV

Tabela 5: Resoluções da Atividade 5

A característica da PA foi associada corretamente por todos os alunos à seqüência I, com razão inteira e positiva, mas quatro duplas e o aluno Wlad não perceberam a diferença constante entre um termo e seu sucessor para a seqüência IV, com razão inteira negativa.

Isso já havia acontecido na primeira sessão, o que confirma que alguns alunos não perceberam semelhanças entre uma PA com razão positiva e uma PA com razão negativa.

A seqüência cíclica, que alguns associaram na sessão anterior à característica da PA, desta vez foi ligada à seqüência II por todos, o que revela que muitos passaram a compreender o significado do termo “ciclicamente”.

A característica da PG não foi associada por todos à seqüência III, mas onze duplas perceberam que somente III tinha essa característica, número relativamente grande considerando que pouquíssimas duplas associaram a característica da PG à seqüência (4, 2, 1, ½, ¼, ...) na resolução da Atividade 2.

O momento de observação de características de seqüências pelos alunos foi concretizado conforme o planejado, com muitos destes compreendendo pela primeira vez o significado de características já vistas numa atividade anterior.

A Tabela 6 resume como as duplas resolveram a Atividade 6, que solicitava o 20º termo e o 728º termo de uma PA.

	20º termo: 115	**728º termo: 4363**
Mel e Teca	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Eva e Mano	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
Aldo e Rui	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
Iran e Kim	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Pam e Tuca	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
Dan e Kauê	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Ada e Léo	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
Hilda e Perla (D09)	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Ali e Remo (D11)	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
José e Lino	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Dora e Flora	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Edu e Ciro	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
Fábio e Mirna (D16)	(20 x 6) – 5 = 115 e contagem	(728 x 6) – 5 = 4363
Aura e Mário	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363
Alê e Gina (D18)	(20 x 6) – 5 = 115	(728 x 6) – 5 = 4363
Wlad	115 (contagem)	(728 x 6) – 5 = 4363

Tabela 6: Resoluções da Atividade 6

Esta atividade ocorreu após o painel de estratégias mais utilizadas para resolução da Atividade 3. Como a aluna Mirna convenceu o restante dos alunos de que a melhor estratégia para identificar um termo qualquer de uma PA, numa posição *n*, era multiplicar *n* por *r* e somar ou subtrair o resultado por um certo número, os alunos discutiram um meio de encontrar esse número.

Esta discussão fez com que os alunos concluíssem que o número era fácil de se verificar comparando a PA com a seqüência dos múltiplos da razão (r, 2r, 3r, 4r,...). Pode-se dizer que os alunos compreenderam que o número que deveria ser utilizado era o resultado da subtração $a_1 - r$.

Para identificar o 20º termo da seqüência, alguns resolveram por contagem e outros multiplicaram 20 por 6 e subtraíram 5, utilizando respectivamente as estratégias E_1 e E_2. A dupla na qual estava Mirna preferiu resolver dos dois modos, talvez para confirmar a validade da estratégia.

Para achar o 728º termo, todas as duplas procederam da mesma forma e resolveram o que foi pedido, multiplicando 728 por 6 e subtraindo do resultado o número 5.

Com a compreensão da eficácia dessa estratégia, os alunos pareciam aptos a perceber a generalidade e também a particularizar qualquer termo distante desta seqüência. Ou seja, desenvolveram a consciência de generalidade difundida por Mason (1996a), por estes terem visto “a generalidade no particular” e “o particular no geral”.

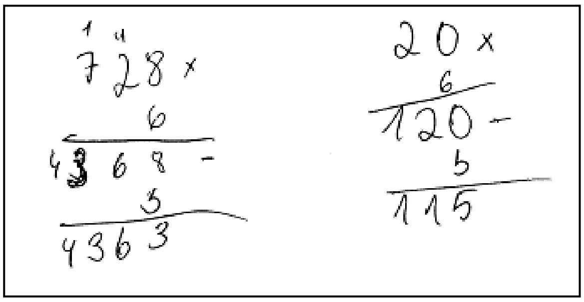


Figura 19: Extraída do Protocolo da Atividade 6 de Ali e Remo (D11)

Como o objetivo deste terceiro momento consistia na discussão e conclusão do mecanismo mais eficiente para se chegar à generalização, e todos os alunos concordaram em utilizar uma estratégia realmente válida, considero este objetivo atingido, bem como o objetivo geral da sessão.

Análise *a Priori* da 3ª sessão

Essa sessão pretendia propiciar condições para que os alunos chegassem a uma fórmula algébrica para o enésimo termo de qualquer PA, utilizando a estratégia de generalização criada por eles em sessões anteriores ao identificar termos distantes de uma PA e, além disso, finalizar as atividades provocando o aluno sobre a generalização da soma dos termos de uma PA.

<u>**Atividade 7**</u>

Tinha por objetivo possibilitar ao aluno a observação e generalização dos termos de uma PA com um primeiro termo negativo e razão positiva e introduzir a notação simbólica (r, n, a_1) para o aluno.

Essa atividade permitia confrontar a estratégia utilizada pelos alunos em atividades anteriores com uma nova situação, para verificar se os alunos iriam manter essa estratégia e quais seriam as dificuldades encontradas diante da mudança.

Para encontrar o 728º termo da seqüência **A= 1, 7, 13, 19,...** vocês fizeram o seguinte: Primeiro: Encontraram a **razão r**, constante: 7 – 1 = 13 – 7 = 19 –13 = ... = **6**; então **r=6**. Segundo: Escreveram/pensaram na seqüência B dos múltiplos de 6; **B= 6, 12, 18, 24, ..., 6n,** ... Terceiro: Obtiveram a diferença entre o 1º termo da seqüência **A,** a_1= 1, e a razão **r = 6**, isto é: $a_1 - r = 1 - 6 =$ **- 5** . Finalmente: Para obter o termo da seqüência A que ocupa a 728ª posição (n = 728), que indicaremos por a_{728}, somaram 6n com -5 obtendo: $a_{728} = (6 \times 728) + (-5) = 4368 - 5 = 4363$. Observem a seqüência: **C = -28, -23, -18, -13, ...** Qual é o 874º termo dessa seqüência?

Atividade 7

Disponibilizei a estratégia criada pelos alunos em atividades anteriores, explicando o que eles fizeram na Atividade 6 com a utilização de notação simbólica usual para o estudo de PA.

Optei por utilizar uma PA com o número -28 como primeiro termo, apresentando pela primeira vez numa PA um sinal negativo como valor da variável didática sinal do primeiro termo.

Utilizei o número 5 como razão, porque me interessava ter os primeiros termos da seqüência negativos. Estas escolhas se deram para causar novas perturbações para a generalização dos termos e fazer o aluno pensar sobre a estratégia criada.

Apresentei os quatro primeiros termos desta seqüência, pois considerei esse número de termos suficiente para a observação do padrão envolvido.

Solicitei a descoberta do 874º termo, a fim de possibilitar a generalização dos termos. Com isso, poderia verificar se a estratégia utilizada anteriormente seria mantida ou modificada.

As estratégias de resolução previstas foram:

E_1 – O aluno entende que a razão dessa seqüência é o número 5 e utiliza corretamente a estratégia criada em atividades anteriores.

Ele percebe que $a_n = 5n - 28 - 5$ ou o respectivo $a_n = 5n - 33$ e calcula o 874ª termo efetuando $5 \times 874 - 33$, identificando 4337.

$$a_1 = (5 \times 1) - 33 = -28$$
$$a_2 = (5 \times 2) - 33 = -23$$
$$a_3 = (5 \times 3) - 33 = -18$$
$$a_4 = (5 \times 4) - 33 = -13$$
$$a_5 = (5 \times 5) - 33 = -8$$
$$\ldots$$
$$a_{873} = (5 \times 874) - 33 = 4337$$

E2 – O aluno observa o número 5 como razão constante mas não utiliza a estratégia criada anteriormente. Ele conclui que $a_n = 5(n - 1) - 28$ e calcula o 874º termo como $5 \times 873 - 28$, identificando o número 4337.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= (5 \times (1 - 1)) - 28 = -28 \\
a_2 &= (5 \times (2 - 1)) - 28 = -23 \\
a_3 &= (5 \times (3 - 1)) - 28 = -18 \\
a_4 &= (5 \times (4 - 1)) - 28 = -13 \\
a_5 &= (5 \times (5 - 1)) - 28 = -8 \\
&\ldots \\
a_{874} &= (5 \times (874 - 1)) - 28 = 4337
\end{aligned}
$$

<u>Atividade 8</u>

Objetivo – Esta atividade pretendia fazer com que o aluno observasse e generalizasse os termos de uma progressão aritmética qualquer, dando oportunidade para a criação de uma fórmula do termo geral da PA.

Além disso, pretendia verificar se o aluno utilizaria a estratégia de generalização criada em sessões anteriores ou perceberia estratégias de generalização equivalentes.

Considerem a seqüência: $\mathbf{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots}$ onde n é um número natural qualquer maior que zero (n pertence ao conjunto {1,2,3,....}). Nesta seqüência $\mathbf{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = r}$ (r é a razão). a) Como representar o 617º termo? b) Como pode ser representado o termo que ocupa a enésima posição (a_n) na seqüência? c) Qual o primeiro termo da seqüência B que tem razão 4 e tem como sétimo termo $\mathbf{a_7} = 30$?

Atividade 8

Decidi utilizar uma seqüência representativa de todas as PA para que o aluno pudesse criar uma fórmula que representasse o termo geral de uma PA qualquer.

Decidi propor primeiramente a descoberta do 617º termo para verificar como o aluno representaria um termo específico da seqüência, sem conhecer os valores representativos dos termos e da razão. Essa descoberta auxiliaria o aluno para a representação do enésimo termo, solicitada posteriormente.

O último item solicitava a identificação do primeiro termo de uma PA específica, dados sua razão e o sétimo termo, para verificar se o aluno compreenderia a formação de uma PA e se utilizaria uma generalização para resolver o que lhe foi pedido.

Previ como estratégias de resolução:

item a

E1 – O aluno utiliza a estratégia já familiar por atividades anteriores e afirma que $a_{617} = 617r + a_1 - r$.

E2 – O aluno utiliza uma nova estratégia ao perceber a relação entre os termos e as somas consecutivas de *r* ao primeiro termo.

$$
\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + r \\
&a_3 = a_1 + 2r \\
&a_4 = a_1 + 3r \\
&a_5 = a_1 + 4r \\
&\ldots \\
&a_{617} = a_1 + 616r
\end{aligned}
$$

item b

E_1 – O aluno utiliza a estratégia anteriormente descoberta e afirma que $a_n = n \times r + a_1 - r$.

E_2 – Ao perceber a relação entre os termos e as somas consecutivas de *r* ao primeiro termo, o aluno identifica que $a_n = a_1 + (n - 1)\times r$.

$$
\begin{aligned}
&a_2 = a_1 + r \\
&a_3 = a_1 + 2r \\
&a_4 = a_1 + 3r \\
&a_5 = a_1 + 4r \\
&\ldots \\
&a_n = a_1 + (n - 1)\times r
\end{aligned}
$$

item c

E_1 – O aluno entende que $a_7 - a_6 = a_6 - a_5 = a_5 - a_4 = ... = a_2 - a_1 = 4$ e subtrai 4 de 30 seis vezes até encontrar o número 6 como primeiro termo.

E_2 – Ao generalizar que $a_7 = nr + a_1 - r$ ou $a_7 = a_1 + (n - 1) \times r$, o aluno compreende que $a_7 = a_1 + 6r$ e que, portanto, $30 = a_1 + 6 \times 4$. Com isso, ele encontra $a_1 = 30 - 24 = 6$.

<u>Atividade 9</u>

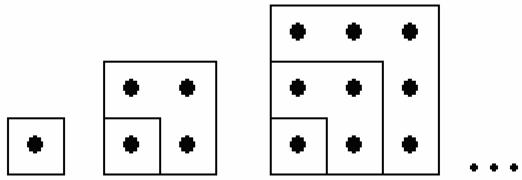
Objetivo – Esta atividade tinha por finalidade introduzir o aluno em atividades que necessitam da observação de seqüências formadas pelas somas de termos de uma PA e pretendia levar o aluno a observar os termos da PA formada pelos números ímpares e a generalizar as somas dos *n* primeiros termos desta seqüência.

Observem a seqüência:

1, 3, 5, 7, ...

a) Quanto é a soma dos 10 primeiros termos?

b) Jonas e Laura do 1M2 afirmaram terem encontrado uma regra para descobrir a soma dos n primeiros termos da seqüência, após terem criado uma seqüência de figuras. Observem essa nova seqüência e descubram qual é a soma dos 97 primeiros termos



Atividade 9

Decidi utilizar a PA formada pelos números ímpares porque esta apresenta uma generalização mais simples para a soma dos seus *n* primeiros termos.

Como a soma dos *n* primeiros números ímpares é o quadrado de *n*, decidi utilizar uma seqüência figurativo numérica com quadrados, para auxiliar o aluno em sua generalização.

Foram previstas as seguintes estratégias de resolução:

item a

E_1 – O aluno soma os 10 primeiros ímpares positivos (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19) e conclui que o resultado é 100

E_2 – O aluno percebe que a soma dos n primeiros ímpares equivale ao quadrado de *n* e afirma que o resultado é o quadrado de 10, ou seja, 100.

$S_1 = 1 \times 1 = 1$
$S_2 = 2 \times 2 = 4$
$S_3 = 3 \times 3 = 9$
$S_3 = 4 \times 4 = 16$
...
$S_{10} = 10 \times 10 = 100$

item b

E_1 – O aluno percebe que a resolução por contagem exige muito tempo, investiga as somas iniciais e descobre que a soma dos *n* primeiros ímpares positivos é o quadrado de *n*, concluindo que $S_{97} = 97^2 = 9409$.

$S_1 = 1 \times 1 = 1$
$S_2 = 2 \times 2 = 4$
$S_3 = 3 \times 3 = 9$
$S_3 = 4 \times 4 = 16$
...
$S_{97} = 97 \times 97 = 9409$

Descrição da realização da 3ª sessão

A terceira sessão ocorreu em 7 de novembro de 2007 (menos de um mês após a segunda sessão), tendo início às 7 horas e 30 minutos. Inicialmente estavam presentes na sala, o pesquisador, a professora e 33 alunos.

Os 33 alunos presentes foram organizados em 15 duplas e 1 trio para resolver as atividades. Todos esses alunos participaram de pelo menos uma sessão anterior e 11 duplas e o trio da 1ª sessão mantiveram a dupla.

A dupla D17 também poderia ter se mantido, mas houve recusa por parte das duas alunas que a compunham. A dupla formada por alunos iniciantes na segunda sessão (D18) também se manteve para essa sessão. Ou seja, 13 grupos foram formados por alunos que já haviam trabalhado juntos em alguma das sessões anteriores.

No horário previamente definido, as folhas com as atividades foram entregues aos alunos e nesse momento a professora da classe se retirou.

Pedi aos alunos que respondessem as atividades obedecendo à ordem numérica, ou seja, começando pela atividade 7 e terminando pela atividade 9 e que deixassem sobre as carteiras somente o material entregue e uma caneta para cada dupla.

Como na primeira sessão muitos alunos deixaram cálculos na carteira escolar, reforcei a necessidade de que qualquer esboço de resolução deveria estar presente na folha recebida.

Os alunos aparentaram calma durante toda a sessão e novamente nenhum aluno se recusou a participar. Dessa vez, entretanto, muitos alunos reclamaram do nível de dificuldade das atividades.

Nessa sessão, pela primeira vez no processo, preferi que os alunos que terminassem de responder as atividades antes do tempo estipulado saíssem da classe. Isso porque as atividades exigiam maior reflexão devido ao nível de dificuldade proposto e queria evitar que o barulho de alunos sem ocupação atrapalhassem outros colegas.

Estabeleci, entretanto, um tempo mínimo de 25 minutos para permanência na classe, a fim de evitar que alunos resolvessem rapidamente para sair da sala.

As 3 duplas escolhidas pela professora para terem seus diálogos gravados na 1ª sessão estavam presentes e foram novamente convidadas a ter suas conversas gravadas.

Após 40 minutos do início das atividades, conforme previsto, os protocolos foram recolhidos. A descrição das resoluções das Atividades 7, 8 e 9 e análise *a posteriori* dessa última sessão podem ser vistas a seguir.

Análise *a Posteriori* da 3ª sessão

Descreverei a seguir as resoluções dos alunos considerando os protocolos extraídos da terceira sessão e as transcrições das gravações feitas com as duplas D03, D11 e D14, que se mantiveram com os mesmos componentes da 1ª sessão.

A Tabela 7 resume as respostas dadas por cada dupla para o 874º termo da seqüência apresentada aos alunos na Atividade 7. Como foram fornecidos aos alunos quatro passos para ajudá-los a resolver a atividade, a tabela apresenta quais destes passos foram atingidos.

	1º passo	2º passo	3º passo	4º passo
Componentes	Achar a razão (r = 5)	Registrar a seqüência dos múltiplos de r	$a_1 - r =$ -28 – 5 = -33	A_{874} = 5 x 874 + (-33) = 4337
Enéas e Teca (D01)	5	-	-	870 × 5 = -4350
Aldo e Léo (D03)	5	-	-	(874 × 5 – 3) – 30 = 4337
Kim, Lino e Rui (T04)	-8	-	5 – 8 = -3	A_{874} = (874 × 5) –8 = 4362
Dan e Diva (D05)	5	-	-	870 × 5 = 4350
Kauê e Miro (D07)	5	-	-28 + (-5)	(874 × 5) – 33 = 4337
Ada e Ciro (D08)	5	-	-	(874 × 5) – 28 = 4342
Mano e Raul (D10)	r = 5	B = 5, 10, 15, 20 … 5n	a_{-28}= -28 – 5 = -33	874 × 5 – 33 = 4337
Ali e Remo (D11)	5	-	-	(874 × 5) – 5 = -4365
Flora e Wanda D13)	r = -5	-	$a_1 - r$ = -28 – 5 = -33	A_{874} = (874 × (-5))+ (-33) = -4403
Edu e Mário (D14)	5	-30,-25,-20,-15, -10,-5,0,5, 10...	-	(874 × 5 + 7) – 2= 4375
Bia e Mel (D15)	5	-	-	870 × 5 = -4350
Fábio e Mirna (D16)	r = 5	-	-	(874 × 5) – 2= 4368
Alê e Gina (D18)	r = 5	5,10,15...	-28 – 5 = -33	(874 × 5) + (-33) = 4337
Dora e Hilda	5	-	-	874 × 5 – 12 = 4358
Aura e Iran	r = 5	5,10,15,20,25	-28 – 5 = -33	(874 × 5) = (-33) = 4337
José e Tuca	5	-	-	a_{874} = (874 × 5) + (-4) = -4366

Tabela 7: Resoluções da Atividade 7

Essa tabela reproduz o que foi feito por cada dupla, incluindo a simbologia utilizada. Os alunos que utilizaram implicitamente o valor 5 como razão tiveram o primeiro passo considerado.

Dos dezesseis grupos formados, quatro duplas seguiram passos indicados pela atividade de maneira eficiente, fazendo com que descobrissem o termo correto. Podemos ver pela Figura 20 um caso em que uma dupla explicita cada passo sugerido.

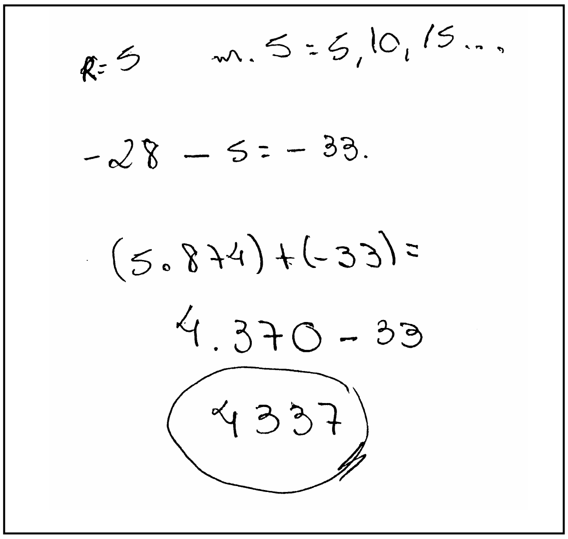


Figura 20: Extraída do Protocolo da Atividade 7 de Alê e Gina (D18)

A dupla D03 também conseguiu chegar ao resultado esperado mas trabalhou de uma forma diferente. Aldo e Léo efetuaram duas subtrações (por 30 e por 3) do resultado do produto entre a razão e a posição do termo, utilizando uma estratégia não prevista anteriormente.

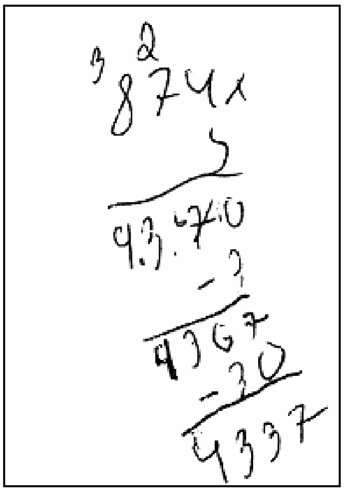


Figura 21: Extraída do Protocolo da Atividade 7 de Aldo e Léo (D03)

Na gravação obtida dessa dupla temos um diálogo, transcrito a seguir, que deixa claro que os alunos utilizaram o primeiro termo positivo da seqüência (-28, -23, -18, -13, -8, -3, **2**, 7, 12, ...):

> *- Menos três mais cinco?*
>
> *- Dois*
>
> *- Estamos chegando lá.* (pausa*) Aqui ó! Dois menos cinco é menos três! Vamos somar menos três com esse número aqui.*

A gravação mostra claramente que tal dupla trabalhou como se o primeiro termo fosse o número 2 e utilizou o número -3 por esse ser o resultado da diferença entre o primeiro termo e a razão da seqüência. O passo seguinte efetuado por esses alunos foi subtrair 30, o que representa um raciocínio correto já que o real primeiro termo da PA investigada (-28) tem 30 unidades a menos que o número 2.

Três duplas resolveram a atividade expressando falta de atenção, já que utilizaram o produto da razão 5 por 870 e não pelo valor de posição 874. Além disso, é bem provável que essas duplas tenham se comunicado, já que responderam exatamente da mesma forma. Duas dessas duplas indicaram o resultado dessa multiplicação como um número negativo, talvez por entender que a seqüência somente apresentava números negativos.

A dificuldade com números negativos pôde ser notada também na resolução feita pela dupla D13, formada por Flora e Wanda, que identificaram o resultado do produto de 5 por 874 como -4370, comprometendo o resultado final da generalização efetuada.

Entretanto, o que mais chama atenção é o fato de que oito duplas utilizaram o recurso de multiplicar a razão pelo valor de posição e se equivocaram com o valor a ser somado ao resultado dessa multiplicação, ou seja, $a_1 - r$. O fato de o primeiro termo ser um número negativo pode ter causado essa dificuldade na generalização dos termos da seqüência.

Isso lembra a pesquisa de Becker e Rivera (2005), onde alunos que trabalharam com estratégias numéricas de generalização utilizaram tentativa e erro e não deram sentido ao que os “coeficientes do padrão linear” representavam. Os alunos desta pesquisa utilizaram um valor qualquer para subtrair do resultado de $n \times r$ por não terem compreendido o porquê da utilização do valor $a_1 - r$ ou não terem conseguido identificá-lo.

O protocolo da dupla D14, formada por Edu e Mário, apresenta uma resolução que pode ser vista na Figura 22.

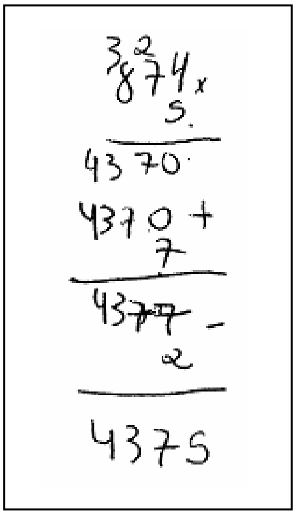


Figura 22: Extraída do Protocolo da Atividade 7 de Edu e Mário (D14)

No protocolo recolhido de tal dupla pode-se ver que os alunos utilizaram a seqüência (-30, -25, -20, -15, -10, -5, 0, 5, 10,...) para resolver a questão. A gravação dessa dupla mostra o seguinte comentário de um de seus componentes:

> -*Vamos ter que fazer assim ó! Aqui é negativo então conta os números que tem antes do zero*.

O mesmo componente, após observar mais a seqüência:

> - *Acho que a gente tem que somar sete termos. Depois diminuir dois.*

O que se pode deduzir é que os alunos, após calcular 874 × 5, somaram ao resultado o número 7 por este ser a quantidade indicativa dos números negativos e o zero na seqüência criada por eles e somaram -2, provavelmente, por este ser o resultado da diferença entre -30 e -28.

A gravação também mostra que os alunos da dupla não leram os passos sugeridos pela atividade, o que os levou a criar um outro esquema generalizador que não foi eficiente.

A dupla D11, formada por Ali e Remo, escolheu subtrair 5 do resultado da multiplicação entre $n \times r$. Essa dupla também informou a resposta como um número negativo e não deixa claro em sua gravação o porquê de ter escolhido o número 5. A gravação possui a seguinte fala de um componente:

> - *Aqui ó! Tem que utilizar menos* (logo após ter efetuado a multiplicação).

Esse aluno pode ter sido influenciado pelo exemplo presente no enunciado, que subtraía 5 do resultado de uma multiplicação.

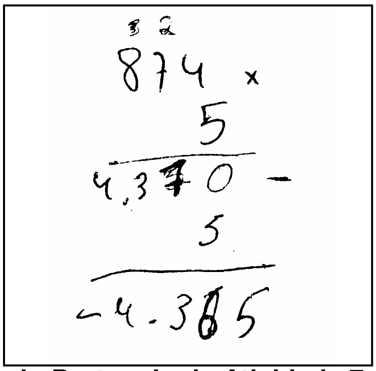


Figura 23: Extraída do Protocolo da Atividade 7 de Ali e Remo (D11)

O objetivo da atividade foi atingido, pois grande maioria das duplas parece ter se empenhado na observação da seqüência e quatro duplas conseguiram identificar o termo distante da PA, apesar desta apresentar características diferentes das apresentadas em atividades anteriores.

Além disso, essa atividade conseguiu confrontar a estratégia utilizada em atividades anteriores com uma nova situação, exigindo dos alunos maior destreza no trabalho com números inteiros negativos.

Três das quatro duplas que conseguiram encontrar o termo distante utilizaram a estratégia E_1 prevista na análise *a priori.*

Não é de surpreender o maior número de estratégias não-eficientes utilizadas, pois esta atividade contemplava uma estratégia numérica de generalização mais exigente em comparação com atividades anteriores.

Sobre estratégias de generalização numéricas, Vale e Pimentel (2005) têm constatado que a maioria dos alunos, perante atividades que envolvem generalização, utiliza esta abordagem e que alguns alunos manifestam insuficiências na resolução, não conseguindo obter uma generalização completa ou obtendo uma lei de formação errada.

A notação simbólica foi pouco utilizada pelos grupos para resolução da atividade e uma provável causa para isso é o excesso de simbologia em única atividade. A simbologia deveria ser introduzida nas sessões anteriores, para que os alunos se adaptassem aos poucos com a notação.

A Atividade 8, importante para a pesquisa, possibilitava a generalização algébrica ao trabalhar com uma PA genérica (a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...).

A Tabela 8 resume os resultados dessa atividade, que solicitava a representação do 617º termo, do enésimo termo e a identificação de um primeiro termo em condições específicas.

Grupos	617º termo: $a_{617} = a_1 + 616r$	enésimo termo: $a_{617} = a_1 + (n - 1)r$	1º termo se $r = 4$ e $a_7 = 30$: 6
Enéas e Teca(D01)	-	-	-
Aldo e Léo (D03)	$a_{619} = a_{618} - a_{617}$	$a_n > 0$	$a_7 = 24 + a_1$
Kim, Lino e Rui (T04)	$a_{617} = 617$	$a_n = -1$	$30 - (7 \times 4) = 2$
Dan e Diva (D05)	-	-	-
Kauê e Miro (D07)	$a_{617} = 616 + 35 = 651$	$A_6 - 1 = 5$	7,5
Ada e Ciro (D08)	$a_{617} - a_{616}$	a_4	3 (contagem)
Mano e Raul (D10)	$a_{617} - a_{616}$	617n	6
Ali e Remo (D11)	$a_{617} = a_{616} - a_{615}$	-	-
Flora e Wanda (D13)	$a_{617} = 617r + a_1 - r = 616$	$a_n = 5$	18
Edu e Mário (D14)	$a_{617} = 617 - r = 616$	$a_n = 6$	6 (contagem)
Mel e Bia (D15)	-	-	-
Fábio e Mirna (D16)	$a_{617} = 617r + a_1 - r = 616$	-	-
Alê e Gina (D18)	$a_{617} = 617$	617_n	6 (contagem)
Dora e Hilda	619	6	-
Aura e Iran	a_{617}	-	6 (contagem)
José e Tuca	$a_{617} = 617 - a$	617n	6

Tabela 8: Resoluções da Atividade 8

Dos dezesseis grupos, mais da metade não conseguiu responder a todas as questões da atividade, revelando maior dificuldade dos alunos nessa atividade em relação às atividades anteriores.

Sobre o item **a** podemos ver que treze grupos indicaram uma resposta para o 617º termo da seqüência genérica, sendo que sete duplas deram uma resposta numérica (616, 617, 619 ou 651).

As duas duplas que deram como resposta o número 617 podem ter confundindo o número indicativo de posição com o número que ocupa tal posição, o que já havia acontecido em atividades anteriores. As duplas que indicaram os números 619 e 651 não deixaram indícios suficientes para compreensão do porquê de tais respostas.

Três duplas deram como resposta o número 616, sendo que os protocolos recolhidos de duas dessas duplas deixam claro que o número surgiu de uma simplificação algébrica inadequada. Na verdade, considero que essas duplas (D13 e D16) resolveram a atividade em conjunto já que pude notar a comunicação entre elas durante a realização da sessão.

Flora, Wanda, Fábio e Mirna deram como resposta parcial uma generalização algébrica correta para o 617º termo ($617r + a_1 - r$), prevista na análise *a priori* como E_1, como podemos ver na Figura 24.

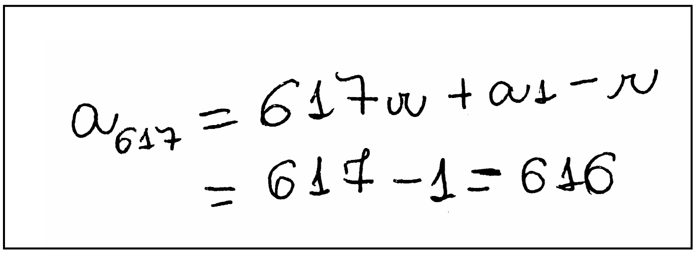


Figura 24: Extraída do Protocolo da Atividade 8 de Fábio e Mirna (D16)

No entanto, esses alunos somaram os coeficientes dos fatores que continham *r*, representando essa expressão como sendo o número 616, provavelmente por considerar correta apenas uma resposta numérica.

Almouloud (2007), ao comentar a noção de contrato didático de Brousseau, aponta que:

> os problemas de matemática costumam ter em seus enunciados somente os dados necessários para sua solução e ter sempre uma única resposta, obtida pelo uso de operações numéricas. Com isso, quando os alunos têm um problema para resolver, é comum que procurem os números contidos no enunciado do problema e façam operações matemáticas para encontrar a resposta. (ALMOULOUD, 2007, p. 91-92).

Edu e Mário deram como resposta o número 616 mas utilizaram a expressão algébrica $a_{617} = 617 - r$. Essa dupla, além de ter utilizado uma expressão generalizadora não eficiente, atribuiu um valor para a razão da seqüência. O argumento para tal resposta pode ser encontrado na transcrição de parte da gravação abaixo:

> *- $a_2 - a_1$ é um. Então a razão é um. Seiscentos e dezessete menos um é seiscentos e dezesseis.*

Outras seis duplas, incluindo duas duplas que foram gravadas, utilizaram expressões algébricas para representar o 617º termo mas não utilizaram a variável *n*, indispensável para a representação algébrica desse termo.

Quatro dessas seis duplas parecem ter confundido a representação do termo da seqüência com a representação da razão da seqüência, utilizando respostas como $a_{617} = a_{617} - a_{616}$, $a_{617} = a_{616} - a_{615}$ (utilizada pela dupla D11) ou $a_{619} = a_{618} - a_{617}$ (utilizada pela dupla D03) .

A seguir apresento transcrições do argumento presente nas gravações de Aldo e Léo:

> *- Aqui ó! $a_2 - a_1 = a_3$. Seiscentos e dezessete um acima, seiscentos e dezoito. Mais um acima seiscentos e dezenove.*

Outras respostas presentes para essa questão são representações simples para o termo: a_{617} e *617 – a.* Os alunos que utilizaram a notação a_{617} representaram corretamente o termo, já que o enunciado não informava que tipo de representação deveria ser utilizada.

O item **b** propiciou menos resoluções que a anterior. Dos dezesseis grupos, dez representaram o enésimo termo, sendo que nenhuma dupla representou a_n em função de *n*, *r* e a_1, ou seja, não construíram uma fórmula para o termo geral de uma PA.

Como pôde ser visto inclusive pelas resoluções da Atividade 7, a simbologia apresentada não foi bem compreendida, o que confirma que a introdução da mesma deveria ser feita em sessões anteriores.

Neste item, mais uma vez, respostas numéricas foram dadas para representar um termo genérico. Cinco grupos indicaram o enésimo termo como sendo números (1, 5 ou 6). As duplas que indicaram 5 ou 6 como resposta podem ter sido influenciadas pelo enunciado, que informava a seqüência como $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$, enxergando a_n numa quinta ou sexta posição.

A dupla D14 respondeu que o enésimo termo é o número 6, como podemos ver na figura abaixo.

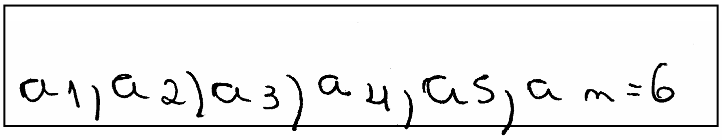


Figura 25: Extraída do Protocolo da Atividade 8 de Edu e Mário (D14)

Apresento a seguir transcrição da gravação de Edu e Mário, onde encontramos o seguinte diálogo:

> - *Enésimo? O que é enésimo?* (pausa) *Deve ser* a_n.
> - *É o seis então.*
> - *É. Acho que é do jeito que tá aqui. Aí a gente completa.* [...] *Põe aqui cinco. E aqui cinco mais um que é seis.*

Esse diálogo confirma que tais alunos completaram a seqüência do enunciado, identificando a_n no sexto termo e confundindo o termo com a posição que ele ocupa.

A dupla D03 utilizou uma desigualdade para representar o enésimo termo ($a_n > 0$). Esses alunos deram essa resposta depois de lerem no enunciado que n é um elemento do conjunto dos naturais. A gravação de Aldo e Léo mostra a seguinte indagação de um dos componentes da dupla:

> - *O que será o* a_n *? Ene é maior que zero. Então* a_n *é maior que zero?*

Como vimos, os alunos utilizaram números presentes no enunciado da questão. O mesmo pode ter acontecido com a dupla que representou o enésimo termo como a_4, que pode ter copiado o último termo com índice numérico apresentado na seqüência do enunciado. Já as duplas que utilizaram 617n ou 617_n para responder à questão, utilizaram o número 617 presente no enunciado da questão anterior.

Penso que esses alunos podem estar adaptados a problemas com respostas retiradas do enunciado ou descobertas por operações com números extraídos do enunciado. Almouloud (2007) explica que quando alunos com essa característica se deparam com problemas que não têm solução ou que têm mais de uma solução, ou que têm excessos de dados ou não são resolvidos com operações numéricas, cometem erros ou não sabem respondê-los.

O fato de nenhum aluno ter construído uma fórmula para o termo geral de uma PA, objetivo principal da sessão, pode encontrar explicação no que Zazkis e Liljedhal (2002) falam sobre a tensão existente entre o pensamento algébrico e a notação algébrica. Estes autores afirmam que a habilidade que estudantes expressam para indicar a generalidade de um padrão numérico não é acompanhada de notação algébrica e não depende desta.

O item **c** desta atividade pretendia verificar se o aluno utilizaria uma notação algébrica criada na questão anterior ou se voltaria à resolução por contagem. Como não houve fórmulas construídas, não é de surpreender o fato de que dos dez grupos que indicaram uma resposta, quatro duplas explicitaram o trabalho com contagem.

A dupla formada por Ada e Ciro não conseguiu chegar à resposta por ter começado supondo 3 como primeiro termo e não percebeu que este número escolhido não forma uma seqüência contendo como sétimo termo o número 30 indicado pela questão.

As outras três duplas, porém, parecem ter começado do sétimo termo e subtraído a razão de cada novo termo encontrado até descobrirem o número 6, conforme podemos conferir na figura abaixo. Esses alunos utilizaram a estratégia E_1 prevista na análise *a priori*.

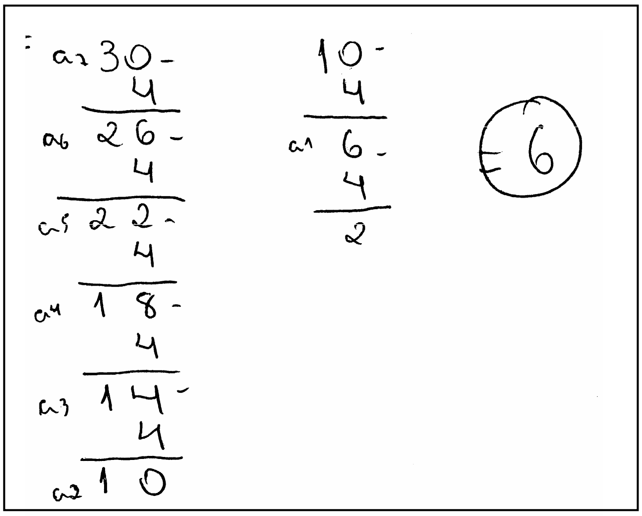


Figura 26: Extraída do Protocolo da Atividade 8 de Edu e Mário (D14)

Outras duas duplas também informaram o número 6 como resposta da atividade, mas não deixaram traços de suas resoluções.

A dupla que informou o número 18 como resposta não apresentou indícios suficientes para compreender essa resposta.

A dupla que deu como resposta o número 7,5 também não mostrou como chegou a essa resposta, mas tudo leva a crer que esses alunos utilizaram os dados principais do enunciado da questão e dividiram 30 por 4.

O trio formado por Kim, Lino e Rui não resolveu essa atividade por contagem e optou por um procedimento numérico, conforme mostra a próxima figura. O equívoco destes alunos foi efetuar a multiplicação entre 4 e 7. Como o sétimo termo deve ter a razão subtraída seis vezes para descobrirmos o primeiro termo, a multiplicação efetuada deveria ser entre 4 e 6.

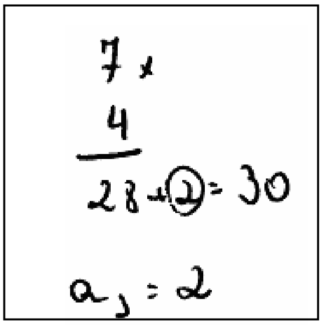


Figura 27: Extraída do Protocolo da Atividade 8 de Kim, Lino e Rui (T04)

Já a dupla formada por Aldo e Léo optou por utilizar uma notação algébrica, o que me surpreendeu por estes não terem construído fórmulas em questões anteriores. Esses alunos representaram algebricamente o sétimo termo da PA de forma correta, utilizando a estratégia E_2 prevista, conforme vemos na Figura 28.

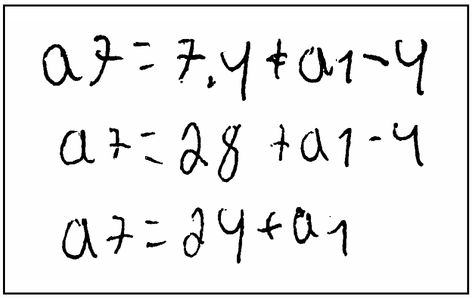


Figura 28: Extraída do Protocolo da Atividade 8 de Aldo e Léo (D03)

Entretanto, esses alunos não substituíram a_7 pelo número 30, o que possibilitaria que descobrissem que $a_1 = 30 - 24 = 6$. A gravação do diálogo dessa dupla revela uma certa descrença dos alunos em relação ao método utilizado, o que fez com que estes abandonassem a atividade e partissem para a atividade seguinte.

Sobre a atividade em si, acredito que foi insuficiente para atingir o objetivo, já que os alunos não estavam preparados para utilizar notação algébrica formal. Pude verificar casos em que alunos utilizaram notação algébrica, como a dupla citada no parágrafo anterior, mas percebi uma insegurança por parte dos alunos na utilização de notação simbólica para expressar seus pensamentos.

Após propor a generalização de termos de PA durante todas as sessões, considerei interessante terminar a experimentação com uma atividade que contemplasse a identificação de somas de termos de PA.

A Tabela 9 resume como os alunos responderam à Atividade 9 desta experimentação.

	S_{10}: 100	**S_{97}: 9409**
Enéas e Teca (D01)	100 (contagem)	-
Aldo e Léo (D03)	100 (contagem)	(97 × 2) – 1 = 193
Kim, Lino e Rui (T04)	100 (contagem)	97 × 97 = 9409
Dan e Diva (D05)	-	-
Kauê e Miro (D07)	100 (contagem)	9409
Ada e Ciro (D08)	100 (contagem)	97 × 3 = 291
Mano e Raul (D10)	100	949
Ali e Remo (D11)	21	209
Flora e Wanda (D13)	10 × 10 = 100 e contagem	97 × 97 = 9409
Edu e Mário (D14)	100 (contagem)	97 × 97 = 9309
Mel e Bia (D15)	100 (contagem)	-
Fábio e Mirna (D16)	100 (contagem)	97 × 97 = 8809
Alê e Gina (D18)	100 (contagem)	949
Dora e Hilda	190 (contagem)	-
Aura e Iran	100 (contagem)	97 × 97 = 9409
José e Tuca	100	949

Tabela 9: Resoluções da Atividade 9

Notemos pela Tabela 9 que apenas uma dupla não apresentou respostas para ambas as questões, o que confirma que os alunos ficaram envolvidos pela atividade.

Em relação ao item **a**, podemos ver que a resolução por contagem foi utilizada por doze grupos para indicar a soma dos 10 primeiros termos, ou seja, os alunos destes grupos prefeririam utilizar a estratégia E_1.

Dora e Hilda descobriram os 10 primeiros termos da PA mas chegaram a uma resposta "não esperada" por errarem no cálculo da soma desses termos, sendo esse o único engano dentre as resoluções dos que trabalharam com contagem.

Flora e Wanda resolveram a atividade conforme vemos na Figura 29.

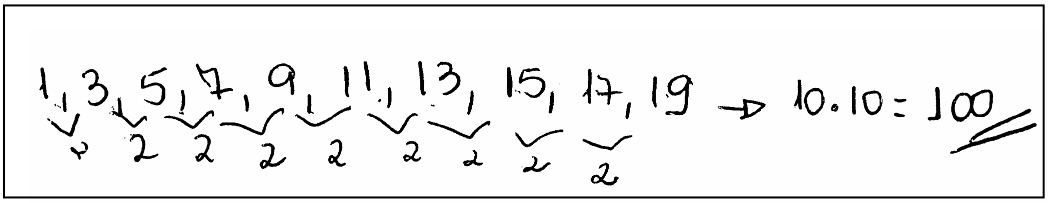


Figura 29: Extraída do protocolo da Atividade 9 de Flora e Wanda (D13)

Após terem utilizado contagem para identificar os 10 primeiros termos, essas alunas não efetuaram a soma e utilizaram a estratégia E_2, mostrando que o resultado pode ser encontrado efetuando-se a multiplicação entre 10 e 10, ou seja, encontrando o quadrado de 10.

Aparentemente, estas alunas não testaram somas anteriores para chegar a essa conclusão. Ao que tudo indica, elas perceberam a generalização expressa pela figura da questão seguinte e preferiram efetuar a multiplicação a somar os 10 números que já haviam descoberto.

O modo de "ver" dessas alunas estava baseado tanto na seqüência figurativo-numérica quanto na seqüência numérica de acordo com o que sugere Orton (1999), quando este afirma que o modo de "ver" pode conduzir a modos diferentes mas equivalentes de observação, sendo que os alunos devem estar cientes de que pode haver mais de uma representação da mesma situação. Tudo leva a crer que estas alunas perceberam a equivalência de métodos para identificar a soma proposta.

Duas duplas informaram como resposta para essa questão o número 100 mas não mostraram como chegaram a essa conclusão. Ali e Remo, que deram como resposta o número 21, também não mostraram qual foi o raciocínio utilizado.

A gravação dos diálogos de Ali e Remo mostra que essa dupla estava distraída, o que fez com que esses alunos indicassem um termo e não uma soma. Estes alunos podem ter identificado 21 como décimo termo da seqüência (1, 3, 5, 7, ...).

As resoluções para o item **b** foram mais diversificadas que as resoluções da questão anterior. Doze grupos informaram uma resposta para o 97ª soma, que dificultava a resolução por contagem.

Quatro duplas e o trio perceberam o que a seqüência figurativo-numérica sugeria e procuraram descobrir o valor do quadrado de 97, conforme a única estratégia prevista para esse item. Uma dupla deu como resposta o número correto, mas não apresentou resolução mostrando a estratégia utilizada. Duas das duplas que efetuaram o quadrado de 97 se equivocaram nos cálculos e por isso não chegaram ao resultado.

Acredito que a seqüência com figuras foi a responsável por essa percepção dos alunos, pois nos protocolos não há indícios de que os alunos fizeram testes com outras somas. As figuras seguintes mostram como Edu e Mário manipularam a figura para resolver a atividade.

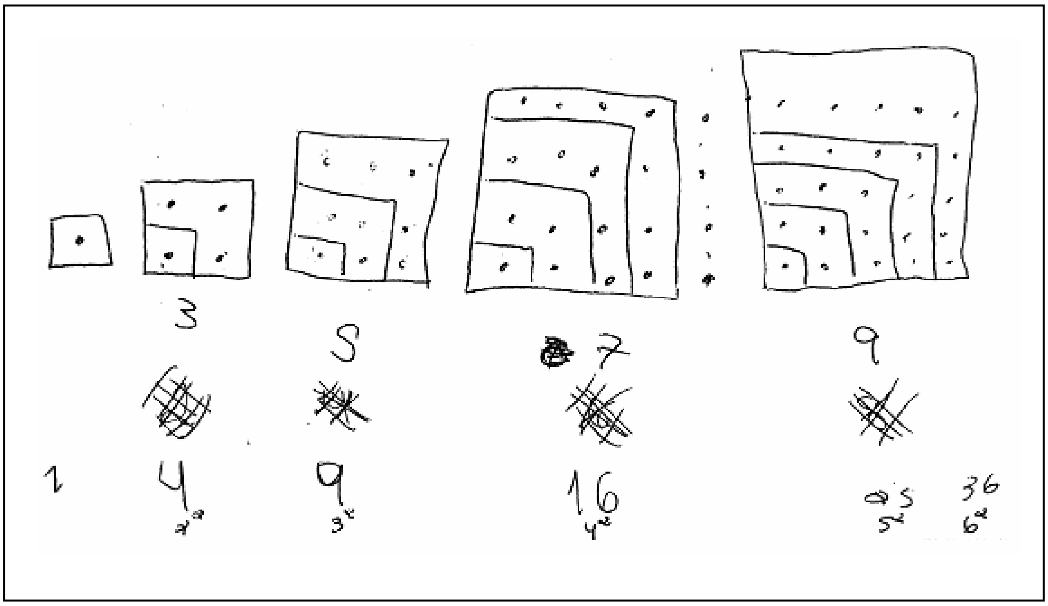


Figura 30: Extraída do Protocolo da Atividade 9 de Edu e Mário (D14)

Assim como os alunos relatados na pesquisa de Radford, Bardini e Sabena (2006), Edu e Mário, com a manipulação das figuras, puderam ver uma regra comum a todas as figuras da seqüência, estabelecendo um nível mais profundo de percepção.

A seqüência figurativo-numérica propiciou que os alunos estabelecessem uma conexão da estrutura geral da seqüência de uma forma dinâmica, fazendo com que percebessem tanto o particular quanto o geral e descobrissem como calcular a soma dos 97 primeiros termos.

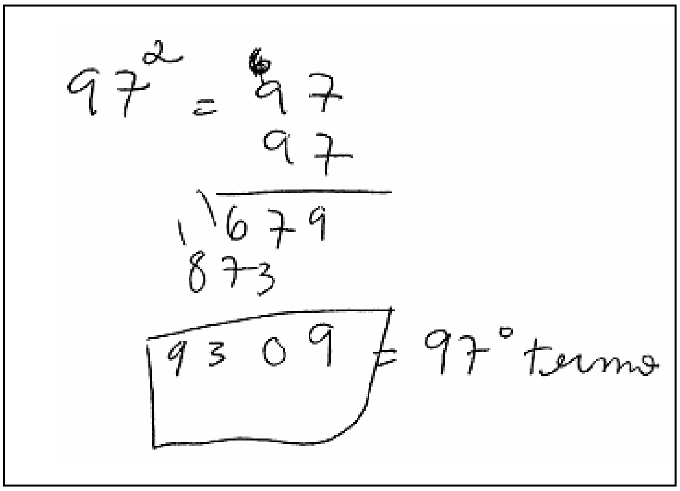


Figura 31: Extraída do Protocolo da Atividade 9 – Edu e Mário (D14)

As três duplas que deram resposta 949 estavam sentadas próximas durante a realização dessa sessão e devem ter se comunicado sobre a resposta. Como nenhuma destas mostrou como resolveu a questão, acredito que um destes alunos tenha olhado a resposta de uma dupla que resolveu pelo quadrado de 97, não percebendo que se tratava de 9409.

A resposta dada por Ali e Remo também não tem como ser analisada, pois tanto o protocolo quanto a gravação dos comentários não contém uma explicação destes alunos pela indicação de 209 como a soma solicitada.

Ada e Ciro deram como resposta o número 291 e mostraram terem resolvido o item através da multiplicação entre os números 3 e 97. Esses alunos não compreenderam o que a seqüência figurativo-numérica sugeria e podem ter direcionado suas observações apenas para a terceira figura da seqüência, onde realmente a quantidade de pontos é o triplo do número indicativo de posição.

Já Aldo e Léo confundiram a soma dos 97 primeiros termos com a identificação do 97º termo da seqüência (1, 3, 5, 7, ...). A gravação de tais alunos mostra que estes alunos estavam interessados em utilizar o mecanismo criado anteriormente para achar apenas o termo. Tem-se o diálogo:

- Vai aumentando dois. Então é noventa e sete vezes dois?
- É. Cento e noventa e quatro. Depois tira um.

Esses alunos se preocuparam em achar o 97º termo e não há indícios nas gravações e no protocolo que indiquem que eles pensaram em indicar a soma do número descoberto com seus termos anteriores.

Com o objetivo de introduzir os alunos no trabalho com soma de termos de uma PA alcançado, pude verificar que os alunos não somente conseguem identificar termos distantes de uma PA como também podem perceber uma regra para generalizar a soma dos termos de uma PA com o apoio de uma seqüência figurativo-numérica.

Nesta sessão, os alunos observaram o esquema generalizador criado por eles em sessões anteriores mas o objetivo de propiciar a criação de uma fórmula algébrica não foi atingido. Os alunos, que anteriormente haviam conseguido generalizar termos de uma PA, tiveram dificuldade em utilizar notação algébrica formal para representar a generalidade.

CAPÍTULO V – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresento como parte final do trabalho minhas ultimas considerações, baseadas nas análises *a posteriori* já relatadas no final de cada sessão, porém agora vistas de forma global, como um todo.

Para investigar a possibilidade de criar condições a alunos do Ensino Médio de generalizarem termos de uma PA, uma seqüência didática foi proposta para que esses alunos observassem seqüências diversas, observassem a particularidade da PA e generalizassem seus termos implicitamente e/ou utilizando notação algébrica.

Antes de expor a análise global da pesquisa, proponho lembrar os resultados locais de cada sessão.

Na 1ª sessão pode-se dizer que os alunos demonstraram facilidade em indicar o próximo termo de seqüências diversas, ocorrendo apenas quatro respostas não previstas, relativas à uma PA com razão negativa.

Os alunos souberam observar e associar características a diversos tipos de seqüências. No entanto, a característica de uma PA – diferença constante entre um termo e o sucessor – não foi compreendida por muitos alunos, tanto para a PA com razão positiva quanto para a PA com razão negativa.

Os resultados da sessão indicam que o trabalho com progressões aritméticas deve contemplar a discussão de sua característica principal e a observação de vários tipos de seqüências para confrontar as diferenças entre estas e as particularidades de uma PA.

A construção de um esquema generalizador dos termos de uma PA ocorreu logo na 1ª sessão, mas foi na 2ª sessão que os alunos discutiram estratégias de generalização e adotaram um esquema eficiente para identificar qualquer termo de PA.

Na 2ª sessão, os alunos foram beneficiados pela discussão sobre a diferença entre o sentido cotidiano e o sentido matemático de palavras que impossibilitavam a compreensão de características presentes na Atividade 2 da sessão anterior.

Os alunos compreenderam as características da PA, da PG e da seqüência cíclica e, desta vez, todos os alunos participantes associaram a característica da PA pelo menos à PA com razão positiva.

Entretanto, mesmo com o trabalho sobre os diferentes sentidos de alguns termos utilizados na matemática e a discussão da característica de uma PA, muitos alunos não associaram a “diferença constante entre um termo e seu sucessor” à PA com razão negativa, ou seja, decrescente.

Com isso sugiro que, além de propor a observação e comparação de vários tipos de seqüências, o professor deve estar atento às particularidades dos diversos tipos de PA, fazendo o aluno perceber que esta pode ser crescente ou decrescente, mas que sua característica principal se mantém.

Porém, apesar de grande maioria dos alunos ter conseguido identificar um termo distante de uma PA com razão e primeiro termo positivos, poucos alunos conseguiram identificar um termo distante de uma PA com razão positiva e primeiro termo negativo na Atividade 7 da 3ª sessão, mesmo tendo a referida atividade explicitado cada passo a ser seguido para que conseguissem isso.

A Atividade 7 pode ter sido muito ambiciosa pois, além de propor uma PA mais difícil de se trabalhar, nela foi introduzida toda a simbologia para os alunos. Isso pode têlos assustado, pois tiveram que trabalhar com algo que não estavam familiarizados. Esta simbologia deveria ser introduzida aos poucos, começando em sessões anteriores.

A 3ª sessão mostrou a grande dificuldade dos alunos em representar um termo utilizando notação algébrica formal na Atividade 8, pois poucos alunos utilizaram simbologia para representar um termo e nenhum aluno conseguiu representar o enésimo termo e, por conseqüência, construir uma fórmula do termo geral.

A atividade 8 revelou-se insuficiente para atingir o objetivo de levá-los a construir uma fórmula algébrica, já que eles não haviam compreendido a simbologia presente na atividade anterior.

Por fim, muitos alunos conseguiram identificar somas de termos de PA, sendo que a soma de um maior número de termos foi descoberta com o auxílio de uma seqüência figurativo-numérica. No entanto, a generalização da soma para essa atividade foi bastante induzida e não se pode afirmar que os alunos construíram um esquema generalizador para soma de termos de qualquer PA.

Pelas análises *a posteriori* já descritas pude constatar que os alunos conseguiram generalizar termos de uma PA após um momento de observação, mas isso não implicou na construção da fórmula do termo geral devido a dificuldade apresentada por esses alunos em relação à utilização de notação algébrica formal.

No entanto, o fato de o pensamento algébrico ter se manifestado confirmou a autonomia dos alunos em generalizar. Sobre a importância de tal pensamento, Fiorentini, Miorim e Miguel explicam que:

> O pensamento algébrico está na base da construção e da compreensão e da compreensão do universo conceitual desses campos e áreas, isto é, é um pensamento indispensável para a constituição do universo conceitual e temático subjacente à ciência contemporânea. Nesse sentido, o olhar algébrico perpassa e impregna o modo de produção do conhecimento de qualquer domínio. (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 89).

Interessava-me saber o quanto esse desenvolvimento contribuiu para que estes alunos compreendessem e dessem significado à fórmula do termo geral.

Após a realização de toda a experimentação, alguns alunos me procuraram e me perguntaram se a representação do enésimo termo que havia solicitado na 3ª sessão não era a fórmula que eles aprenderam como sendo a do termo geral de uma PA.

Procurei a professora da classe e esta me disse o quanto esses alunos não somente compreenderam o processo de construção da fórmula do termo geral como também se empenharam mais no estudo das progressões em comparação com outras classes da mesma série em que ela lecionava.

Lembrando que essa classe era considerada a mais preocupante em relação ao comportamento e ao desempenho, o fato dos alunos terem se empenhado e conseguido generalizar mostra o quanto o trabalho com observação e generalização de padrões pode ser benéfico tanto para a aprendizagem quanto para a autonomia no ensino da Matemática.

Os alunos participantes da experimentação conseguiram desenvolver a consciência de generalidade, o que segundo Mason (1996a) consiste em sensibilizar-se pela distinção entre “olhar através” e “olhar para”, ou seja, “ver a generalidade no particular” e “ver o particular no geral”.

Afirmo isso devido a muitos alunos participantes da 2ª sessão terem utilizado o mesmo esquema generalizador para identificar termos diferentes na Atividade 6, observando uma regra geral para identificar qualquer termo da seqüência, ou seja, “vendo o geral” e ao mesmo tempo “percebendo o particular”.

Sobre a não-construção da fórmula do termo geral, penso que esse resultado é semelhante ao da experiência feita por Lee (1996), que afirma que para os alunos que observou o maior problema não era o reconhecimento do padrão, mas sim perceber esse padrão útil algebricamente.

A tensão existente entre o pensamento algébrico e a notação algébrica, apontada por Zazkis e Liljedhal (2002), pôde ser notada nos alunos que chegaram a esboçar algum tipo de expressão algébrica mas não acreditaram naquele tipo de expressão ou se recusaram a tê-la como resposta, informando uma resposta numérica.

Concordo com as opiniões expressas em Brasil (2006): as progressões não devem ser caracterizadas por cálculos que fazem somente uso de fórmulas e o processo de ensino deve valorizar a apresentação de fórmulas acompanhadas de dedução. Com isso, defendo que o trabalho com progressões deve compreender a observação deste tipo de seqüência e descoberta por parte dos alunos de mecanismos ou expressões algébricas que generalizem os seus termos.

Para finalizar, gostaria de indicar algumas questões que me surgiram ao longo de minha pesquisa como sugestão para próximas investigações:

- O professor do Ensino Fundamental trabalha com observação e generalização de padrões?
- O trabalho com observação e generalização de padrões no EF leva o aluno a dar sentido à simbologia algébrica e utilizá-la com desenvoltura?

Finalizo minha pesquisa com a esperança de ter contribuído para melhor compreensão sobre as facilidades e dificuldades dos alunos do Ensino Médio em generalizar padrões, especificamente, de progressões aritméticas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA. M. M. M. de. **Estratégia de Generalização de Padrões de alunos do Ensino Fundamental do ponto de vista de seus professores**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**, n. 121. Curitiba: Editora da UFPR, 2007. 218 p.

ANDREZZO, K. L. **Um estudo de padrões figurativos na aprendizagem de Álgebra para alunos sem acuidade visual**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Piaget, 1996. 280 p.

BECKER, J. R.; RIVERA, F. Generalization strategies of beginning high school algebra students. In: 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2005, Melbourne. **Anais**... Melbourne: PME, 2005. p. 121-128.

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília, v. 2, 2006.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da matemática. In: BRUN, J (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Piaget, 1996. 280 p.

COELHO, S. P.; MACHADO, S. D. A.; MARANHÃO, M. C. S. A. Projeto: qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática? In: II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), 2003, Santos. **Anais...** Santos: SBEM, 2003.

DEVLIN, K. **Matemática: a ciência dos padrões**. Porto: Porto Editora, 2002.

DURKIN, K.; SHIRE, B. Lexical ambiguity in mathematical contexts. In: **Language in Mathematics Educational.** Grã-Bretanha: Open University Press, 1995.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Revista Quadrimestral Pro-Posições,** Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, v. 3, n. 1, p. 39 – 54, mar. 1992.

______________________________________. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Revista Quadrimestral Pro-Posições,** Campinas: Faculdade de Educação da Unicamp, v. 4, n. 1, p. 79 – 91, mar. 1993.

HERBERT, K.; BROWN, R. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. **Teaching Children Mathematics**, v. 3, p. 340-345, 1997.

HOUAISS, A. (Org.). **Minidicionário Houaiss da Língua Portuguesa.** Rio de Janeiro: Editora Objetiva, 2004. 907 p.

LEE, L. An initiation into algebraic culture through generalization activities**.** In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to Algebra**: Perspectives for Research and Teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. p.87-106.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.** 5. ed. São Paulo: Editora Papirus, 2005.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 2001. p.11-53.

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002. p. 197 – 212.

MASON, J. Expressing Generality and Roots of Algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Ed.). **Approaches to Algebra**: Perspectives for Research and Teaching. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996a. p. 65-86.

_________. El futuro de la aritmética y del álgebra: utilizar el sentido de generalidad. **Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas**, Barcelona, n. 9, p. 15 – 22, 1996b.

MODANEZ, L. **Das seqüências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2002.

MUNHOZ, M. **A impregnação do sentido cotidiano de termos Geométricos no Ensino/Aprendizagem de Geometria Analítica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1999.

NAKAMURA, O. Y. A. **Generalização de Padrões Geométricos: caminho pra construção de expressões algébricas no Ensino Fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2003.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

ORTON, A. (Ed.). **Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics.** London: Cassel, 1999.

PEREZ, E. P. Z. **Alunos do Ensino Médio e a Generalização de Padrão**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006. 119 p.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula.** Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2003.

RADFORD, L.; BARDINI, C.; SABENA, C. Rhythm and the Grasping of the General. In: 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2006, Prague. **Anais**... Prague: PME, 2006. p. 393-400.

VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. Os padrões no ensino e aprendizagem em Álgebra. Encontro de Investigação em Educação Matemática promovido pela Secção de Educação e Matemática, n. 14, 2005, Caminha. **Anais**... Caminha: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2005.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. **Revista Educação e Matemática**, Portugal, v. 85, p. 14-20, nov/dez, 2005.

ZAZKIS, R.; LILJEDHAL, P. Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. **Educational Studies in Mathematics Teaching Children Mathematics**, v. 49, p. 379-403, 2002.

ANEXO A – Solicitação de Autorização

Senhora Diretora da E. E. Conselheiro Rodrigues Alves

Eu, César Augusto Sverberi Carvalho, peço sua autorização para realizar um experimento de pesquisa com a participação dos alunos da 1ª série do Ensino Médio, turma 4, que têm por finalidade contribuir para a melhoria do ensino de Matemática nesse nível.

Os alunos participarão dessa pesquisa por meio de atividades a serem desenvolvidas na própria sala de aula em horário de aula de Matemática, com a autorização da professora responsável por esta disciplina na classe.

Os alunos terão seus nomes preservados na redação da pesquisa e não serão obrigados a participar do experimento, caso se recusem.

As atividades ocorrerão em sessões de 40 minutos cada a serem realizadas em dias letivos de setembro, outubro e novembro de 2007.

Agradeço sua atenção, contando com sua compreensão.

____

Pesquisador

____

Professora da classe

Guaratinguetá, 10 de setembro de 2007

____

Diretora da Escola

ANEXO B – Atividades

Nome ___________________________ Nome_____________________________

Sessão 1 – Atividade 1

Observem as seguintes seqüências:

a) 0, 3, 6, 9, 12, ...

b) 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...

c) 4, 2, 0, -2, -4, ...

d) □, ○, ✧, □, ○, ✧, ...

e) 4, 8, 16, 32, 64, ...

Lucas e Joana do 1ºM1 conseguiram dizer quais os termos ou elementos que vinham a seguir em cada uma das seqüências. Vocês podem identificar, em cada seqüência, qual será o próximo termo?

Resolução e respostas:

Sessão 1 – Atividade 2

<table>
<tr>
<td>Observem as seguintes
seqüências:

a) 0, 3, 6, 9, 12, ...

b) 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ...

c) 4, 2, 0, -2, -4, ...

d) □ ,○ ,✧ ,□ ,○ ,✧, ...

e) 4, 8, 16, 32, 64, ...

f) 4, 2, 1, ½ , ¼, ...</td>
<td>Características:

I) crescente

II) decrescente

III) a diferença entre um termo e o seguinte (o sucessor) é constante

IV) os termos são separados por vírgula

V) um termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante

VI) os termos se repetem ciclicamente

VIII) os termos da seqüência são números inteiros</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Quais dessas características cada seqüência possui?</td>
</tr>
</table>

Resolução e respostas:

Sessão 1 – Atividade 3

Observem a seguinte seqüência:

1, 5, 9, 13, 17, ...

a) Qual será o próximo termo da seqüência?

b) Qual será o vigésimo quinto - 25º - termo da seqüência?

c) Qual será o 937º termo?

Resolução e Respostas:

Nome:______________________________ Nome:___________________________

Sessão 2 - Atividade 4

Palavra	Frases	Sentido cotidiano	Sentido matemático
Diferença	1) Há muita diferença entre o meu jeito e o seu.		
	2) O médico detectou uma diferença no resultado do exame.		
	3) A diferença entre nossas idades é grande.		
Termo	1) Quando será o termo da filmagem?		
	2) Encontrei o 5º termo da seqüência.		
	3) O predicado é um termo essencial de uma oração		
Constante	1) A soma dos ângulos internos de um triângulo é constante.		
	2) Tenho uma constante dor nas pernas.		
	3) Naquela época era constante o uso do chapéu.		
Sucessor	1) O irmão de Fidel Castro é seu sucessor.		
	2) Este modelo de moto é o sucessor do de sua moto atual.		
	3) Entre os números primos, o 13 é o sucessor de 11.		
Anterior	1) Um programa anterior não foi recomendado para crianças.		
	2) No conjunto dos múltiplos de 3 o número 12 é anterior a 15		
	3) A parte anterior da perna do sujeito está gravemente ferida.		

Sessão 2 – Atividade 5

Características	Seqüências
A diferença entre qualquer termo e seu sucessor é constante.	I) 5, 7, 9, 11,...
Os termos se repetem ciclicamente	II) 2, 1, 3, 2, 1, 3,...
O sucessor de um termo ***a*** é obtido multiplicando o termo ***a*** por uma constante.	III) 27, 9, 3, 1, ...
	IV) 8, 4, 0, -4, ...

Sessão 2 – Atividade 6

Identifiquem o 20° termo e o 728° termo da seqüência:

1, 7, 13, 19, 25, ...

20° termo:

728° termo:

Nome____________________________ Nome _____________________________

Sessão 3 – Atividade 7

Para encontrar o 728º termo da seqüência **A= 1, 7, 13, 19,...** vocês fizeram o seguinte:

Primeiro:
Encontraram a **razão r**, constante: 7 – 1 = 13 – 7 = 19 –13 = ... = **6**; então **r=6**.

Segundo:
Escreveram/pensaram na seqüência B dos múltiplos de 6; **B= 6, 12, 18, 24, ..., 6 n,** ...

Terceiro:
Obtiveram a diferença entre o 1º termo da seqüência **A,** $a_1 = 1$, e a razão **r = 6**, isto é: $a_1 - r = 1 - 6 =$ **- 5** .

Finalmente:
Para obter o termo da seqüência A que ocupa a 728ª posição (n = 728), que indicaremos por a_{728}, somaram 6n com -5 obtendo:

$$a_{728} = (6 \times 728) +(-5) = 4368 - 5 = 4363.$$

Observem a seqüência: **C = - 28, -23, -18, -13, ...** Qual é o 874º termo dessa seqüência?

Resolução e respostas:

Sessão 3 – Atividade 8

Considerem a seqüência: $\mathbf{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots , a_n, \ldots}$ onde n é um número natural qualquer maior que zero (n pertence ao conjunto {1,2,3,....}).

Nesta seqüência $\mathbf{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = r}$ (r é a razão).

a) Como representar o 617º termo?

b) Como pode ser representado o termo que ocupa a enésima posição (a_n) na seqüência?

c) Qual o primeiro termo da seqüência B que tem razão 4 e tem como sétimo termo $\mathbf{a_7} = 30$?

Resolução e Respostas:

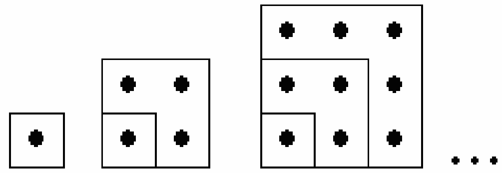
Sessão 3 – Atividade 9

Observem a seqüência:

1, 3, 5, 7, ...

a) Quanto é a soma dos 10 primeiros termos?

b) Jonas e Laura do 1M2 afirmaram terem encontrado uma regra para descobrir a soma dos *n* primeiros termos da seqüência, após terem criado uma seqüência de figuras. Observem essa nova seqüência e descubram qual é a soma dos 97 primeiros termos.



Resolução e Respostas: