

DANIEL KIKUTI

TOMADA DE DECISÃO SEQUENCIAL COM
PREFERÊNCIAS PARCIALMENTE ORDENADAS

São Paulo
2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

DANIEL KIKUTI

**TOMADA DE DECISÃO SEQUENCIAL COM
PREFERÊNCIAS PARCIALMENTE ORDENADAS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
Título de Doutor.

São Paulo
2008

DANIEL KIKUTI

**TOMADA DE DECISÃO SEQUENCIAL COM
PREFERÊNCIAS PARCIALMENTE ORDENADAS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
Título de Doutor.

Área de concentração:
Engenharia de Controle e Automação Mecâ-
nica

Orientador:
Prof. Dr. Fabio Gagliardi Cozman

São Paulo
2008

*Aos meus tios, Tomoo e Helena,
e às minhas tias-avós, Inês e Margarida.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente, especialmente:

- A Deus . . .
- Aos meus pais, o amor paternal e formação.
- Ao meu tio Tomoo e à minha tia Helena, que me acolheram como pais durante todo o doutorado. Às minhas tias-avós, a agradável companhia e a constante motivação.
- Aos meus familiares (irmãos, tios, primos, sobrinhos, . . . , que devido a restrições de espaço não irei nomeá-los), os conselhos, as reuniões, as festas, as alegrias e o apoio em todos os momentos.
- Ao Professor Fabio Cozman, a oportunidade de pesquisar e aprender algo novo, a orientação, e a paciência durante todos estes anos.
- Aos professores membros da banca, Newton, Leliane, José Carlos e Leandro, as frutíferas conversas, discussões e sugestões.
- Aos membros atuais e “veteranos” do Laboratório de Tomada de Decisão: André Hideaki, Cassio, Clayton, Denis, Ismênia, Jaime, José Carlos, José Ochoa, Mônica, Paulo, Ricardo, Rodrigo, Victor Anselmo, Vitor Torres, Waldemar; os almoços, cafés, discussões filosóficas, sugestões, suporte técnico, . . .
- Aos vizinhos de laboratório e amigos conhecidos na USP, Fabiano, Vitor, Marcos R., Marcos H., Erick, Fábio, Marcelo, as conversas e a agradável companhia.
- Ao grande amigo Pe. Carlos Eduardo Olivieri, o apoio, o consolo em momentos difíceis, as orações, a torcida e as preciosas direções espirituais.
- Aos amigos Fernando (FHPL), Leandro, Jenifer e Fernanda M., a valiosa e divertida amizade de longa data.
- Aos amigos conhecidos no Centro Cultural Itaim: Pe. Oswaldo, Pe. Adilson, Bob, Filipe, Veneziano, Carlos Henrique, Christian, Kuk, Norbert, Levi, Arima, Antônio

Jorge, Bruno S., Gustavo J., Paulo Roberto, Anderson, Augusto, Alberto, José Armando, Fábio G., Fábio L., Roberto M., Daniel, Gabriel, João Paulo T., Rodrigo B., Paulo G., Danilo, Ivanildo, Bruno L., Duda, Alexandre, Fabrício, Lucas O., Ovandir, ...; as conversas, passeios, jantares, e orações.

- Às secretárias do PPGEM e da administração.
- À FAPESP, a bolsa de Doutorado Direto.
- A você leitor, a coragem de embarcar nestas páginas.

RESUMO

Nesta tese, exploramos tomada de decisão com preferências parcialmente ordenadas: dadas duas ações, o indivíduo pode preferir uma ação a outra, julgá-las equivalentes, ou julgá-las incomparáveis. Tais preferências são originárias da incerteza sobre determinados estados do modelo de decisão e são reveladas pela imprecisão nos valores de probabilidade. Investigamos seis critérios de escolha de estratégias em problemas de decisão seqüenciais, representados por árvores de decisão e diagramas de influência, com probabilidades imprecisas: Γ -maximin, Γ -maximax, Γ -maximix, Dominação por Intervalos, Maximalidade e E-admissibilidade. Apresentamos novos algoritmos que geram estratégias para todos estes critérios. As principais contribuições deste trabalho estão na implementação dos algoritmos e na análise, sob o ponto de vista computacional, dos diversos critérios considerados como racionais em situações de incerteza representada por conjuntos de probabilidades.

Palavras-chave: Tomada de decisão. Preferências parcialmente ordenadas. Critérios de escolha. Incerteza. Probabilidades imprecisas.

ABSTRACT

In this thesis we explore situations where preferences are partially ordered: given two acts, the agent may prefer one to another, or find them to be equivalent, or find them to be incomparable. Such preferences stem from the uncertainty associated to some states of the decision's model and are revealed by imprecision in probability values. We investigate six criteria for strategy selection in decision trees and influence diagrams with imprecise probabilities: Γ -maximin, Γ -maximax, Γ -maximix, Interval Dominance, Maximality and E-admissibility. We present new algorithms that generate strategies for all these criteria. The main contributions of this work are twofold: the implementation of these algorithms and the analysis, under the computational point of view, of the criteria considered rational in uncertain situations represented by set of probabilities.

Keywords: Decision making. Partially ordered preferences. Criteria of choice. Uncertainty. Imprecise probabilities.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Símbolos

1	Introdução	p. 17
1.1	Breve histórico	p. 20
1.2	Contribuições	p. 21
1.3	Organização do texto	p. 22
2	Fundamentos	p. 23
2.1	Decisão em estágio único	p. 23
2.1.1	Decisão sob certeza	p. 23
2.1.2	Decisão sob risco e sob incerteza	p. 25
2.2	Problema de decisão seqüencial	p. 28
2.3	Modelos probabilísticos	p. 32
2.3.1	Conjuntos credais	p. 32
2.3.2	Redes credais	p. 35
3	Cr�terios de otimalidade	p. 38
3.1	Representa�o de a�oes em um problema de decis�o	p. 38

3.2	Critérios baseados em ordenação completa	p. 42
3.2.1	Γ -Maximin e Γ -Maximax	p. 42
3.2.2	Γ -Maximix	p. 43
3.3	Critérios baseados em admissibilidade	p. 44
3.3.1	Dominação por Intervalo	p. 44
3.3.2	Maximalidade	p. 46
3.3.3	E-admissibilidade	p. 47

4 Algoritmos para resolução de problemas de decisão seqüencial p. 51

4.1	Árvore de decisão	p. 51
4.1.1	Algoritmo para árvore de decisão com probabilidades imprecisas	p. 53
4.1.2	Um exemplo ilustrando o algoritmo para árvore de decisão	p. 57
4.2	Diagrama de influência	p. 59
4.2.1	Um exemplo ilustrando o algoritmo para diagrama de influência	p. 66

5 Experimentos p. 69

5.1	Complexidade computacional na resolução de diagramas de influência com probabilidades imprecisas	p. 69
5.2	Qualidade das respostas sugeridas por critérios baseados em admissibilidade	p. 73

6 Considerações finais p. 77

6.1	Discussão sobre critérios de escolha	p. 77
6.2	Resumo	p. 80
6.3	Trabalhos futuros	p. 81

Referências p. 83

LISTA DE FIGURAS

- 1 Ilustração do axioma de independência (redução de loterias compostas). p. 27
- 2 Problema de decisão sequencial adaptado dos experimentos de (KAHNEMAN; TVERSKY, 1979) e representado por árvore de decisão. p. 29
- 3 Representação gráfica do conjunto credal do Exemplo 3. p. 34
- 4 (a) Rede credal representando o clássico problema do cão. (b) Conjunto de distribuições de probabilidade credais. p. 37
- 5 Conjunto credal $K(X)$ (área hachurada) do Exemplo 5 obtido através da especificação de intervalos de probabilidade. Os eixos x_1, x_2, x_3 representam as probabilidades de categorias da variável X p. 39
- 6 Árvore de decisão do Exemplo 6. Os nós de chance C_1, C_2, C_3 representam conjuntos credais; a, b, c, d, e, f são valores de utilidade. p. 42
- 7 Exemplo ilustrando que o critério Dominação por Intervalos não identifica dominação estocástica. p. 45
- 8 Conjunto de ações E-admissíveis do Exemplo 7. p. 48
- 9 Árvore de decisão com seis estratégias possíveis. p. 53
- 10 Árvore de decisão para o Exemplo 10. p. 58
- 11 Relações entre nós em um diagrama de influência. (a) A probabilidade da variável B depende do resultado da variável A . (b) A probabilidade da variável C depende da escolha feita em D . (c) O tomador de decisão conhece o resultado da variável E quando a decisão D for tomada. (d) O tomador de decisão conhece o resultado da decisão D_1 quando for decidir em D_2 . (e) A utilidade U depende do resultado da variável F . (f) O resultado da utilidade U depende da decisão tomada em D p. 60
- 12 Diagrama de influência representando o dilema do tomador de decisão no fim de semana. p. 61

13	Dois diagramas de influência: (a) contém arcos “no forgetting”; (b) representa um tomador de decisão esquecido.	p. 62
14	Figura representando um diagrama de influência onde o nó de utilidade U é relevante para a decisão D	p. 64
15	Diagrama de influência para o problema de perfuração de poços de petróleo.	p. 67
16	Diagrama de influência (com histórico) para o problema de criação de suínos.	p. 70
17	Diagrama de influência (sem histórico) para o problema de criação de suínos.	p. 71
18	Diagrama de influência para o Exemplo 17.	p. 74
19	Diagrama de influência para um problema hipotético de planejamento em EBO.	p. 76
20	Representação de um MDP através de diagrama de influência. Em cada nó de decisão, tem-se apenas a informação do estado anterior; e cada ação está associada a um custo (nó de utilidade r_i).	p. 82
21	Tela ilustrando saída do programa ID.	p. 92

LISTA DE TABELAS

1	Modelo do problema de decisão.	p. 25
2	Valores de utilidade para o Exemplo 5.	p. 39
3	Utilidades esperadas superior e inferior para o conjunto de ações do Exemplo 5.	p. 41
4	Intervalos de probabilidades condicionais para o teste da estrutura geológica do local, dado que o teste foi efetuado ($T=sim$). Quando ($T=não$), temos $P(S O, T = não) = 0$ exceto para $P(S = nt O, T = não) = 1$	p. 67
5	Utilidade esperada inferior e superior para as ações em D , dado resultado de S . Quando $D = não$, o valor esperado inferior e superior é igual a 0 independentemente do resultado de S	p. 68
6	Resultados dos experimentos do Exemplo 16.	p. 72
7	Valores de utilidade para o nó U_3 do Exemplo 17.	p. 74
8	Estratégias devolvidas pelo critério E-admissibilidade no Exemplo 17. . .	p. 74
9	Comparação entre critérios de otimalidade usados em situações com preferências parcialmente ordenadas.	p. 78

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolo	Descrição
\mathbb{A}	conjunto de ações
a_i, a_j, a_k	ações quaisquer em \mathbb{A}
$cc(\cdot)$	operação de casco convexo
$E[\cdot]$	função de utilidade esperada padrão
$E_P[\cdot]$	função de utilidade esperada para uma medida de probabilidade P
$\underline{E}[\cdot]$	utilidade esperada inferior
$\overline{E}[\cdot]$	utilidade esperada superior
K	conjunto credal
\mathbf{K}	coleção de conjuntos credais
$K(X)$	conjunto credal de uma variável X
$q(\cdot)$	função de atribuição de peso para probabilidades
P	um valor de probabilidade
$p(X)$	distribuição de probabilidade para a variável X
$P(x_j)$	valor de probabilidade para $p(X = x_j)$
$\underline{P}(\cdot)$	valor de probabilidade inferior
$\overline{P}(\cdot)$	valor de probabilidade superior
$pa(X_i)$	conjunto de nós pais de uma variável X_i num grafo
$u(\cdot)$	função de utilidade
$V(\cdot)_{u,q}$	função para ordenação de preferências no modelo de classificação dependente de utilidade
$V_{K(X)}$	conjunto de vértices de um conjunto credal $K(X)$
\mathbf{X}	conjunto de variáveis
X_i	variável aleatória contida em \mathbf{X}
x_i	estado (categoria) da variável X_i
\mathbb{X}_Q	conjunto de variáveis de consulta
\mathbb{X}_R	conjunto de variáveis requeridas
\mathbb{X}_E	conjunto de variáveis observadas
α, β	medidas de probabilidades usadas em combinações convexas

Ω	estados da natureza (espaço amostral)
ω_i	evento “escolhido” pela natureza
$\underset{SD}{\succ}$	dominação estocástica
\succ	relação binária de preferência estrita
\succeq	relação binária de preferência
\sim	relação de indiferença

1 INTRODUÇÃO

Certamente, muitos já experimentaram uma situação onde tiveram que efetuar uma escolha dentre um conjunto de possíveis alternativas. Este poder real de escolha, ou capacidade de decidir como agir, em geral, pressupõe que as escolhas não são feitas ao acaso. Se acreditamos ser livres e conseqüentemente capazes de decidir e influir nos fenômenos que tomamos parte, então é razoável estudar o que nos leva a escolher uma determinada alternativa em detrimento de outra. O estudo deste processo deliberativo, que resulta em escolhas, envolve pesquisadores de diferentes áreas (Filosofia, Matemática, Psicologia, Economia, entre outros). Com seus modelos, estes pesquisadores buscam entender e definir o que é uma escolha racional.

Embora o estudo de racionalidade já exista há milênios (formalizado com a Lógica, fundada por Aristóteles), é a partir do século XVIII que surgem os primeiros escritos sobre análise racional de decisão sob risco (FISHBURN, 1999). A incorporação de probabilidades no processo de raciocínio permitiu a modelagem de problemas de decisão não determinísticos, isto é, problemas onde não há certeza quanto ao próximo estado alcançado após a escolha de uma ação. Em outras palavras, o alcance de um estado específico do conjunto de possíveis estados não depende apenas da ação escolhida pelo agente.

Em meados do século XX, era usual classificar os modelos de teoria de decisão de acordo com a seguinte dicotomia: *teoria normativa* e *teoria descritiva*¹. A teoria normativa se preocupa com o processo cognitivo usado pelo agente tomador de decisão (ideal) e com a questão de como uma decisão ótima pode ser alcançada. Envolve a formulação e defesa de princípios da avaliação comparativa e da escolha entre alternativas concorrentes (FISHBURN, 1988). Nesta teoria o agente é dito *racional* se segue alguns procedimentos logicamente consistentes de decisão, isto é, algumas normas ou regras fundamentais de comportamento. Deste modo, uma norma específica como um agente *deve* agir e, toda violação caracteriza um ato irracional. A teoria descritiva considera como as pessoas (agen-

¹Bell, Raiffa e Tversky (1988) adicionam um terceiro componente à usual classificação: *teoria prescritiva* — que busca ajudar as pessoas a melhorarem suas decisões.

tes reais) tomam suas decisões, sejam elas racionais ou não. Diferentemente dos modelos normativos (avaliados por sua adequação teórica), modelos descritivos estão fortemente ligados a validação empírica, ou seja, são avaliados a medida que eles correspondem às escolhas observadas (BELL; RAIFFA; TVERSKY, 1988).

Após vários paradoxos contradizendo o conceito de racionalidade adotado nos modelos de decisão baseados na teoria de utilidade esperada (cf. (ALLAIS; HAGEN, 1979; KAHNEMAN; TVERSKY, 1979; ELLSBERG, 1961)), ficou evidente a existência de outras formas racionais de escolha. Sen (1977) diz que a teoria normativa atual de racionalidade (referindo-se à teoria de utilidade esperada) tem pouquíssima estrutura:

“A uma pessoa é dada *uma* ordenação de preferências, e quando surge a necessidade, supõe-se que esta reflita seus interesses, represente seu bem-estar, resuma suas idéias do que deveria ser feito, e descreva suas verdadeiras escolhas e seu comportamento. Uma ordenação de preferência pode fazer tudo isto? Uma pessoa assim descrita pode ser “racional” no sentido estrito de não revelar inconsistência em seu comportamento de escolha, mas se ela não tem nenhuma utilização para estas distinções entre conceitos bem diferentes, ela deve ser um pouco tola (SEN, 1977)”.

Acreditamos que o estudo e pesquisa de modelos de preferência possam auxiliar o desenvolvimento de outras áreas, especialmente em Inteligência Artificial, onde frequentemente desejamos projetar e construir artefatos computacionais capazes de realizar diversas tarefas humanas (SIMON, 1969). Este estudo permitiria adotar modelos mais próximos da realidade e, auxiliar um tomador de decisão (humano) a encontrar uma solução que, se não for a melhor, pelo menos seja satisfatória segundo algumas normas.

Apesar do infundável debate sobre a origem dos valores de probabilidade atribuídos a um determinado evento (sejam eles provenientes de abordagens freqüentistas, objetivistas ou subjetivistas²), o fato é que a teoria de probabilidades tornou-se a teoria padrão para tentar explicar de forma quantitativa como os eventos ocorrem em um espaço amostral. Probabilidades expressam incertezas sobre a ocorrência de eventos. Por exemplo, ao lançar um dado de seis faces, uma pessoa pode considerar a probabilidade do dado cair com a face seis para cima como sendo um sexto.

²Freqüentistas interpretam a probabilidade de um evento como um número baseado em sua freqüência relativa, i.e., número de observações de um evento quando o experimento é repetido um grande número de vezes. Objetivistas defendem que probabilidades representam a propensão dos objetos se comportarem de certos modos (são aspectos reais do universo). Subjetivistas vêem probabilidades como valores representando a crença do agente (RUSSELL; NORVIG, 2003).

O desconhecimento do resultado *a priori*, no entanto, não impede formulações de raciocínio. Por exemplo, se em uma aposta entre dois jogadores (onde o perdedor sempre paga uma determinada quantia ao vencedor) um deve ficar com apenas uma face do dado e o outro com as cinco restantes, então é de se esperar que se o jogador possa escolher entre as duas alternativas, ele sempre escolha aquela com cinco faces, pois terá menos chance de perder (considerando um dado não viciado). Este tipo de raciocínio levou pesquisadores a tentar formalizar a racionalidade através de um conjunto de regras. O problema de tomada de decisão é então reduzido ao problema de reproduzir decisões que não violem este conjunto de regras.

Modelos probabilísticos de decisão podem ser usados em aplicações industriais, médicas, econômicas (SAHEKI, 2005; PAUKER; WONG, 2005; RAMONI *et al.*, 1995; ANTONUCCI; PIATTI; ZAFFALON, 2007; TSENG; GMYTRASIEWICZ; CHING, 2001; SHENOY; SHENOY, 2000). Também podemos encontrar diversos exemplos de aplicações para modelos probabilísticos de decisão na área de robótica (CASSANDRA; KAELBLING; KURIEN, 1996; THRUN, 2000; MADSEN *et al.*, 2004). Em alguns casos, seja por restrições operacionais (como a impossibilidade de teleoperar o robô, por exemplo) ou por algum outro motivo, é desejável que o robô seja capaz de perceber e atuar no ambiente de maneira autônoma. Geralmente, o desenvolvimento de artefatos complexos, requerendo autonomia e comportamento deliberativo, usa algum modelo de decisão e, desta forma, pode se beneficiar do presente trabalho.

Grande parte dos modelos probabilísticos de decisão exige a especificação de valores precisos de probabilidade, o que nem sempre é trivial ou mesmo possível. Situações onde há falta de conhecimento prévio, escassez de dados empíricos, discordância entre especialistas, ou apenas uma compreensão parcial do problema, levam a incertezas sobre os valores de probabilidade (ver Seção 5.2 de (WALLEY, 1991) para uma ampla enumeração de diversas fontes de incertezas). Diferentemente de situações de risco, onde as medidas de probabilidades são previsíveis e precisas (LUCE; RAIFFA, 1957), situações de incerteza representam estados cujas medidas de probabilidade são indeterminadas ou imprecisas (WALLEY, 1996).

Em tais situações, o tomador de decisão pode identificar um conjunto de distribuições de probabilidade plausíveis e, uma consequência inevitável é que isto pode gerar indecisão. Dadas duas ações, um indivíduo pode preferir uma a outra, considerar as duas equivalentes, ou considerá-las *incomparáveis* — o indivíduo pode não ser capaz de discernir qual das duas ações é a melhor. A possibilidade de ações incomparáveis, deste

modo, é contrária a ordenação completa das ações (GOOD, 1952; AUMANN, 1962; LEVI, 1974, 1980; SEIDENFELD, 1988; SEIDENFELD; SCHERVISH; KADANE, 1990, 1995). Assim, cabem discussões sobre qual critério faz sentido em tais situações.

1.1 Breve histórico

O estudo de probabilidades imprecisas em modelos de decisão não é recente. Na década de 50, já se discutia critérios para tomada de decisão com incertezas (EICHENAUER; LEHN; RETTIG, 1988). Dentre os critérios presentes na literatura, a abordagem Γ -Maximin sem dúvida é a mais citada. Este critério considera que um tomador de decisão com incertezas fará suas escolhas considerando o pior cenário possível. Embora exista um conjunto Γ de distribuições de probabilidades, o tomador de decisão considera apenas aquela distribuição que leva ao menor ganho (ou maior perda) possível. Assim, o tomador de decisão busca uma ação que maximize o ganho mínimo (ou minimize a perda máxima — Γ -*Minimax*). Algoritmos para encontrar a solução Maximin são estudados há anos em jogos não cooperativos (PETROSJAN; ZENKEVICH, 1996; LUCE; RAIFFA, 1957).

Esta abordagem de decisão baseada em maximização de uma única distribuição de probabilidade (no pior caso) é bastante contestada (LEVI, 1974; POTTER; ANDERSON, 1980). O principal argumento é a violação do senso comum em processos de tomada de decisão reais. Também há uma certa dificuldade em obter a estratégia Γ -Maximin global em problemas de decisão seqüenciais. Em problemas de decisão seqüenciais, o tomador de decisão é chamado a fazer mais de uma escolha ao longo do tempo. A escolha Γ -Maximin em cada ponto onde o tomador de decisão é chamado a agir não garante que este conjunto de ações seja o que leva ao máximo esperado no pior caso. Assim, outras abordagens de escolha considerando conjunto de ações aceitáveis ou admissíveis foram propostas, como por exemplo: Dominação por Intervalo, Maximalidade (WALLEY, 1991) e E-admissibilidade (LEVI, 1980).

Algoritmos para Maximalidade e E-admissibilidade foram recentemente apresentados em (KIKUTI; COZMAN; CAMPOS, 2005; UTKIN; AUGUSTIN, 2005) como uma resposta à excelente revisão literária sobre os critérios de escolhas usados com probabilidades imprecisas (TROFFAES, 2004): “do ponto de vista computacional, Maximalidade é aparentemente preferível a E-admissibilidade”. Estes dois artigos, que propõem métodos para encontrar as ações maximais e E-admissíveis, usam idéias já presentes em (KYBURG JR.; PITTARELLI, 1996). Há, porém, uma diferença entre nosso trabalho e o proposto em (KYBURG JR.;

PITTARELLI, 1996; UTKIN; AUGUSTIN, 2005): em (KIKUTI; COZMAN; CAMPOS, 2005) discutimos problemas de decisão seqüenciais com relações de independência entre as ações, enquanto nos outros dois, discutem-se apenas decisões estáticas (em estágio único).

É neste contexto que o nosso trabalho está inserido e faz sua contribuição. Até onde pesquisamos, não existiam implementações que viabilizassem o uso de outros critérios não baseados em ordenação completa, nem comparações empíricas dos mesmos em situações de decisão seqüencial. Uma exceção é o algoritmo de Harmanec (2002) que usa o critério Dominação por Intervalo para resolver Processos de Decisão de Markov com Probabilidades Imprecisas. Outros algoritmos encontrados para decisão seqüencial com probabilidades imprecisas usam algum critério baseado em ordenação completa (ver por exemplo (FERTIG; BREESE, 1990; DANIELSON *et al.*, 2003) e, (COZMAN, 2005) para um breve histórico sobre modelos gráficos com probabilidades imprecisas).

Encontrar a solução Maximin *global* em problemas de decisão onde há alternância de escolha entre os jogadores nem sempre é tratável computacionalmente (considere jogos como Xadrez e Go, por exemplo). O mesmo ocorre com os modelos de decisão que iremos discutir neste trabalho, onde ora o tomador de decisão escolhe, ora a “natureza escolhe”. Seidenfeld (2004) ressalta que usar o critério Γ -Maximin em problema de decisão seqüencial juntamente com programação dinâmica (BELLMAN, 1957), em geral, não é equivalente à solução maximin global. No entanto, a não utilização de programação dinâmica (enumeração de todas as possíveis combinações de ações) e aplicação do critério Γ -Maximin neste conjunto é claramente inviável.

1.2 Contribuições

Este trabalho apresenta contribuições em três frentes:

1. Apresenta e estende duas metodologias de representação de problemas de decisão seqüenciais: árvores de decisão (LUCE; RAIFFA, 1957) e diagramas de influência (HOWARD; MATHESON, 1984). Esta extensão permite a representação de incertezas por conjuntos de probabilidades e o uso de outros critérios de escolha (além dos baseados em ordenação completa).
2. Analisa, sob o ponto de vista computacional, os critérios de escolha que podem ser adotados de forma racional. Os resultados empíricos mostram que, em alguns casos, os critérios baseados em admissibilidade (em especial E-admissibilidade) sugerem

ações “mais coerentes” que os critérios baseados em ordenação completa. Em outros casos, o uso de critérios baseados em admissibilidade não é viável computacionalmente.

3. Disponibiliza um *software* para resolver diagramas de influência com probabilidades imprecisas que implementa diversos critérios de escolha disponíveis na literatura.

1.3 Organização do texto

No Capítulo 2, apresentamos os fundamentos de teoria de decisão necessários para a compreensão dos demais capítulos. O problema de decisão em estágio único é abordado na Seção 2.1. Na Seção 2.2 discutimos o problema de decisão seqüencial. Na Seção 2.3 apresentamos o modelo de representação de incerteza que adotaremos ao longo do texto.

O Capítulo 3 é dedicado a alguns critérios presentes na literatura que foram transformados em algoritmos e implementados. Neste capítulo são discutidos seis critérios de otimalidade divididos em duas categorias: *critérios de ordenação* — Γ -Maximin, Γ -Maximax e Γ -Maximix (Seção 3.2) — e *critérios de admissibilidade* — Dominação por Intervalo, Maximalidade e E-admissibilidade (Seção 3.3).

No Capítulo 4, apresentamos duas metodologias para representação de problemas de decisão seqüenciais. Um algoritmo para resolução de árvores de decisão é apresentado na Seção 4.1. Na Seção 4.2, os problemas seqüenciais são representados através de diagramas de influência. Estes dois algoritmos admitem conjuntos credais nos nós de chance e fazem uso dos critérios de escolha apresentados no Capítulo 3.

O Capítulo 5 apresenta alguns resultados empíricos de nossa implementação de diagrama de influência. Os resultados procuram destacar as diferenças entre os critérios presentes na literatura, considerando a qualidade das respostas e o tempo despendido.

O Capítulo 6 apresenta as considerações finais sobre o trabalho, faz uma breve revisão das contribuições e apresenta algumas propostas para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTOS

Neste capítulo apresentamos uma revisão geral da teoria de decisão. Introduzimos também as notações que serão adotadas no texto.

A Seção 2.1 faz uma breve revisão da teoria de decisão em estágio único, focando nos axiomas que definem relações individuais de preferências sobre um conjunto de alternativas. Estas relações de preferência são as premissas usadas em teoria de decisão.

A Seção 2.2 descreve o que é um problema de decisão seqüencial.

A Seção 2.3 apresenta alguns conceitos essenciais da teoria de conjuntos credais e redes credais. O objetivo é apresentar algumas definições relevantes para a delimitação do problema tratado neste trabalho: representação e manipulação de incertezas em problemas de decisão. Um tratamento mais completo sobre representação e inferências em redes credais pode ser encontrado em (ROCHA, 2004; COZMAN, 2000).

2.1 Decisão em estágio único

2.1.1 Decisão sob certeza

Em problemas de *decisão sob certeza* (problemas de decisão *determinísticos*), o próximo estado é completamente determinado pelo estado corrente e pela ação executada pelo agente. Denote por a_i uma ação qualquer pertencente ao conjunto finito de possíveis ações \mathbb{A} e seja $u(a_i)$ um índice de avaliação associado a a_i , representando a utilidade de se alcançar determinado estado meta. Então o problema de decisão se resume em encontrar uma ação $a^* \in \mathbb{A}$ que leve ao índice máximo (ou mínimo, dependendo do problema em questão), ou seja, $u(a^*) \geq u(a_i)$ para todo $a_i \in \mathbb{A}$.

Como podemos notar, a maior dificuldade está na escolha de um índice apropriado. Uma maneira de superar este problema é assumirmos que a escolha feita pelo indivíduo

revela suas preferências¹ (SAMUELSON, 1938). Isto é, se a_j é uma ação que poderia ter sido escolhida pelo indivíduo quando ele de fato escolheu a ação a_i , então presumimos que o indivíduo possui uma preferência pela ação a_i à ação a_j ($a_i \succ a_j$). Adotaremos o símbolo \succ para indicar a relação binária² básica de *preferência estrita* sobre os elementos do conjunto de possíveis ações, o símbolo \sim para indicar *indiferença* ou a ausência de preferência estrita ($a_i \sim a_j \Leftrightarrow \neg(a_i \succ a_j) \wedge \neg(a_j \succ a_i)$) e o símbolo \succeq para indicar a relação *preferível ou indiferente a* ($a_i \succeq a_j \Leftrightarrow a_i \succ a_j \vee a_i \sim a_j$). Do ponto de vista introspectivo do tomador de decisão, o processo segue de suas preferências para suas ações, isto é, preferências são as premissas básicas regendo as ações do indivíduo.

A teoria de preferência revelada baseia-se numa condição de consistência conhecida como *axioma fraco da preferência revelada*, que versa: se uma pessoa revela preferir a_i a a_j , então ela *não deve* revelar preferir a_j a a_i , isto é, se ela escolhe a_i quando a_j está disponível, então ela não irá escolher a_j em uma situação que a_i também pode ser obtida (*assimetria*). Assume-se também que as preferências respeitam uma relação de *transitividade*: se $a_i \succ a_j$ e $a_j \succ a_k$, então $a_i \succ a_k$.

Definição 1. *Uma relação binária de preferência em um conjunto \mathbb{A} é uma ordenação fraca se e somente se \succ for assimétrica e transitiva e \sim for simétrica e transitiva.*

Se a relação binária de preferência em \mathbb{A} é uma ordenação fraca e \mathbb{A} é finito, então existe uma função real $u(\cdot)$ em \mathbb{A} tal que:

$$a_i \succ a_j \Rightarrow u(a_i) > u(a_j), \forall a_i, a_j \in \mathbb{A}. \quad (2.1)$$

Uma demonstração para (2.1) pode ser encontrada em (FISHBURN, 1970). Outras implicações partindo de (2.1) são:

$$\begin{aligned} a_i \sim a_j &\Leftrightarrow u(a_i) = u(a_j) \text{ e} \\ a_i \succeq a_j &\Leftrightarrow u(a_i) \geq u(a_j). \end{aligned}$$

Definição 2. *Uma função real $u(\cdot)$, definida no conjunto de ações \mathbb{A} , é linear se e somente se para todo $a_i, a_j \in \mathbb{A}$ e para todo $\alpha \in [0, 1]$:*

$$u(\alpha a_i + (1 - \alpha)a_j) = \alpha u(a_i) + (1 - \alpha)u(a_j).$$

¹Em (SAMUELSON, 1938, 1948b), a teoria do comportamento do consumidor é exposta no contexto de escolhas em um mercado econômico, porém, ela não está confinada apenas a este contexto. Uma análise filosófica da abordagem de preferências reveladas pode ser encontrada em (SEN, 1973).

²Uma relação binária em um conjunto \mathbb{A} é um conjunto de pares ordenados (x, y) com $x, y \in \mathbb{A}$ que respeitam determinadas propriedades. Todo este trabalho está fundamentado em relações binária de preferência (Capítulo 2.1 de (FISHBURN, 1970)).

Esta função real $u(\cdot)$ representando um parâmetro pessoal de avaliação de possíveis ações é conhecida como *função de utilidade de von-Neumann e Morgenstern* (NEUMANN; MORGENSTERN, 1944). Neste trabalho assumimos que as utilidades são sempre lineares.

2.1.2 Decisão sob risco e sob incerteza

Nesta subseção apresentamos a teoria de decisão sob risco e sob incerteza (problemas de decisão não determinísticos). Em problemas de *decisão sob risco*, cada ação leva a um estado específico do conjunto de possíveis estados, sendo que cada estado ocorre com uma probabilidade conhecida. Em problemas de *decisão sob incerteza*, cada ação leva a um estado específico do conjunto de possíveis estados, porém, a probabilidade dos estados é desconhecida ou imprecisa. Neste trabalho consideramos que as incertezas são representadas por conjuntos de probabilidades.

Em problemas de decisão sob risco (LUCE; RAIFFA, 1957), um indivíduo deve escolher uma ação dentre um conjunto finito de possíveis ações $\mathbb{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$. A consequência de cada ação (qual o próximo estado alcançado) depende dos *estados da natureza* $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Estes estados da natureza são os diferentes resultados de um evento aleatório (também podem ser interpretados como as possíveis escolhas que a natureza faz). Um valor c_{ij} representa o resultado da escolha da ação a_i dada a ocorrência do evento ω_j . A Tabela 1 ilustra este modelo.

Tabela 1: Modelo do problema de decisão.

	ω_1	\dots	ω_j	\dots	ω_n
a_1	c_{11}		\dots		c_{1n}
\vdots		\ddots			
a_i	\vdots		c_{ij}		\vdots
\vdots				\ddots	
a_m	c_{m1}		\dots		c_{mn}

Dada uma função utilidade $u : (\mathbb{A} \times \Omega) \mapsto \mathbb{R}$ definida sobre os valores c_{ij} e as respectivas probabilidades $P(\omega_j)$ associadas aos eventos da natureza, podemos computar a *utilidade esperada* de uma determinada ação por:

$$E[a_i] = \sum_{j=1}^n P(\omega_j) u(a_i, \omega_j). \quad (2.2)$$

Assim como no caso de decisão sob certeza, podemos assumir que o indivíduo possua uma ordenação de preferência representada pela função $E[\cdot]$ satisfazendo:

$$\begin{aligned} a_1 \succ a_2 &\Leftrightarrow E[a_1] > E[a_2] \text{ e} \\ a_1 \sim a_2 &\Leftrightarrow E[a_1] = E[a_2]. \end{aligned}$$

Basicamente existem três axiomas definindo a teoria padrão de decisão sob risco³:

Axioma 1 (ordenação completa). *Existe uma ordenação completa e negativamente transitiva de todas as possíveis ações em termos de suas utilidades, ou seja:*

$$\begin{aligned} a_i \succ a_j &\Rightarrow \neg(a_j \succ a_i) \text{ e} \\ \neg(a_i \succ a_j) \wedge \neg(a_j \succ a_k) &\Rightarrow \neg(a_i \succ a_k). \end{aligned}$$

Axioma 2 (independência). *Sejam $a_i, a_j, a_k \in \mathbb{A}$ e $0 < \alpha < 1$ a probabilidade de um dado evento. Se a_i é preferível a a_j então a combinação de a_i e a_k é preferível à combinação de a_j e a_k :*

$$a_i \succ a_j \Rightarrow \alpha a_i + (1 - \alpha)a_k \succ \alpha a_j + (1 - \alpha)a_k.$$

Axioma 3 (continuidade). *Para todo $a_i \succ a_j$ e $a_j \succ a_k$, existem $0 < \alpha, \beta < 1$ tais que:*

$$\alpha a_i + (1 - \alpha)a_k \succ a_j \succ \beta a_i + (1 - \beta)a_k.$$

Em termos normativos⁴, o Axioma 1 evita situações onde há perda certa (*dutch-book*). Considere, por exemplo, um indivíduo (I_1) com preferências intransitivas sobre três bens $\{A, B, C\}$. Suponha que para I_1 , A é preferível a B , B é preferível a C e C é preferível a A . Suponha que outro indivíduo (I_2) possua o bem A . Então I_2 pode vender A para I_1 por $B + \epsilon$ (visto que para I_1 A é preferível a B e, portanto, I_1 está disposto a pagar uma pequena quantia representada por ϵ), depois vender B para I_1 por $C + \epsilon$; depois vender C para I_1 por $A + \epsilon$ e continuar indefinidamente até se esgotarem os recursos de I_1 .

O Axioma 2 é equivalente ao postulado P2 de Savage (1954). Talvez seja o axioma mais controverso, pois permite a redução de seqüências de ações a uma única ação equivalente, através de regras de probabilidade. Considere a Figura 1. Em (a), tem-se a possibilidade

³Samuelson (1952) define apenas dois axiomas (ordenação completa e independência forte), mas implícito ao primeiro axioma está aquele que optamos por apresentar separadamente como Axioma 3. Na Seção 16.2 de (RUSSELL; NORVIG, 2003) são apresentados seis axiomas, porém, estes axiomas podem ser deduzidos dos três axiomas apresentados neste texto.

⁴Para uma exposição destacando os aspectos normativos dos axiomas da teoria de decisão sob risco e incerteza ver (FISHBURN, 1988).

de receber A com probabilidade p e, caso contrário (probabilidade $1 - p$), tem-se uma nova loteria com resultados B e C com probabilidades q e $1 - q$, respectivamente. Em (b), tem-se uma loteria com três possíveis resultados: A , B e C com respectivos valores de probabilidade p , $(1 - p)q$ e $(1 - p)(1 - q)$. De acordo com o Axioma 2, (a) e (b) são equivalentes.

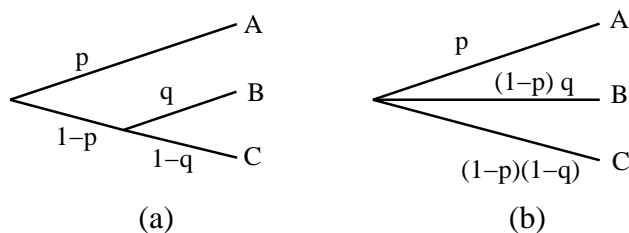


Figura 1: Ilustração do axioma de independência (redução de loterias compostas).

O Axioma 3 não é propriamente uma norma de racionalidade. Ele apenas diz que se uma ação a_j está entre duas outras ações na ordem de preferência, então existe um valor de probabilidade α no qual o agente ficará indiferente entre escolher a_j com certeza e uma combinação $(\alpha a_i + (1 - \alpha) a_k)$.

Dentro desta teoria, quanto maior a utilidade esperada, mais preferível é a ação. É normativo que um agente racional tome suas decisões maximizando a utilidade esperada. Entretanto, do ponto de vista descritivo, percebe-se que nem sempre estes axiomas são capazes de representar adequadamente as preferências do tomador de decisão (ALLAIS; HAGEN, 1979; ELLSBERG, 1961; KAHNEMAN; TVERSKY, 1979). O que se propõe então são modelos que abandonam (ou relaxam) algum desses axiomas.

Modelos lexicográficos abandonam o Axioma 3 e codificam preferências através de vetores de “utilidade esperada”⁵ (FISHBURN, 1970; BLUME; BRANDEBURGER; DEKEL, 1991). Modelos que rejeitam a hipótese da utilidade esperada (*Non-expected utility models*) satisfazem os Axiomas 1 e 3, mas abandonam o Axioma 2 (ver Capítulo 3 de (FISHBURN, 1970) e Seção 2.3 de (MACHINA, 1989) para uma lista desses modelos).

Modelos de preferência parcialmente ordenados abandonam o Axioma 1, mas satisfazem os Axiomas 2 e 3. Estes modelos ainda mantêm uma função utilidade que satisfaz a hipótese de utilidade esperada e “representam” uma ordenação das preferências em um sentido mais fraco⁶ (ver (SEIDENFELD, 1988) para algumas referências).

⁵Nos modelos lexicográficos, as preferências são ordenadas de acordo com uma hierarquia lexicográfica, i.e., sejam $x, y \in \mathbb{R}^k$, onde k é o tamanho do vetor, $x \succeq_L y$ se e somente se sempre que $y_k > x_k$, existe um $j < k$ tal que $x_j > y_j$.

⁶Como anteriormente, se a_i é preferível a a_j então $u(a_i) \geq u(a_j)$, mas a implicação oposta já não vale

Neste trabalho estamos interessados em problemas de decisão sob incertezas representadas por conjuntos de probabilidades. Tal representação leva a modelos de preferência parcialmente ordenados. A Equação (2.2) resulta então em um conjunto de utilidades esperadas porque $P(\omega_j)$ pode ter mais de uma medida de probabilidade associada. Conseqüentemente, o indivíduo pode não ser capaz de discernir qual ação é a melhor. A Seção 2.3 fornece mais detalhes sobre a teoria de probabilidades imprecisas e descreve o modo como consideramos incertezas em nossos algoritmos.

2.2 Problema de decisão seqüencial

Até agora discutimos apenas problemas de decisão envolvendo escolhas em estágio único, ou seja, o indivíduo toma uma única decisão e aguarda a resolução dos eventos. Nesta seção, abordamos problemas onde as decisões são feitas ao longo do tempo, após a resolução de algumas incertezas. O ambiente modelado é *estático*, isto é, não muda enquanto o agente está deliberando, porém, as preferências sobre as ações possíveis podem mudar com a passagem do tempo. A maneira como o tomador de decisão age em relação às suas preferências define uma *norma de comportamento*.

Uma forma intuitiva de representar seqüências de ações e possíveis eventos em problemas de decisão é através de *árvores de decisão* (RAIFFA, 1968). Nesta seção iremos focar na informação temporal representada por uma árvore de decisão (apresentamos uma definição formal para árvores de decisão no Capítulo 4). Uma árvore de decisão é um grafo⁷ conexo, direcionado e acíclico com três tipos de nós: nós de decisão (quadrados), nós de chance (círculos) e nós de utilidade. Cada nó de decisão possui um conjunto de possíveis ações (representadas por arestas saindo dos nós de decisão), cada nó de chance possui um conjunto de eventos possíveis (arestas saindo dos nós de chance) e cada nó de utilidade possui uma função de utilidade associada (nós de utilidade são sempre folhas).

Uma árvore de decisão pode ser vista como um jogo com dois jogadores, onde em cada nó, de decisão o indivíduo é chamado a fazer sua jogada; e nos nós de chance, a natureza é quem escolhe. Esta representação de jogo sob a forma de árvore é chamada de jogo na *forma extensiva*. Em teoria dos jogos é comum analisarmos os possíveis resultados em termos de *estratégia*. Uma estratégia é definida como uma seqüência de decisões (ou movimentos), levando em consideração todos os contingentes antes do evento, descrevendo

mais. Como os números reais são completamente ordenáveis e o espaço de apostas é somente parcialmente ordenado, a implicação oposta pode não ser verdadeira. Além disso, não temos mais a unicidade da função utilidade (AUMANN, 1962).

⁷Definições usadas em teoria dos grafos podem ser encontradas em (BERGE, 1973; DIESTEL, 2005).

uma escolha em cada nó de decisão (dado que alguns nós não serão alcançados depois do evento). No início de uma árvore de decisão, o indivíduo não sabe qual será a ação escolhida pela natureza, porém, ele pode especificar uma lista completa de ações que podem ser implementadas considerando todos os possíveis movimentos da natureza.

Exemplo 1. Considere o problema de decisão seqüencial representado na Figura 2. Neste problema, existem três possíveis estratégias: $s_1 = (a_1, a_3)$, $s_2 = (a_1, a_4)$ e $s_3 = (a_2)$ ⁸.

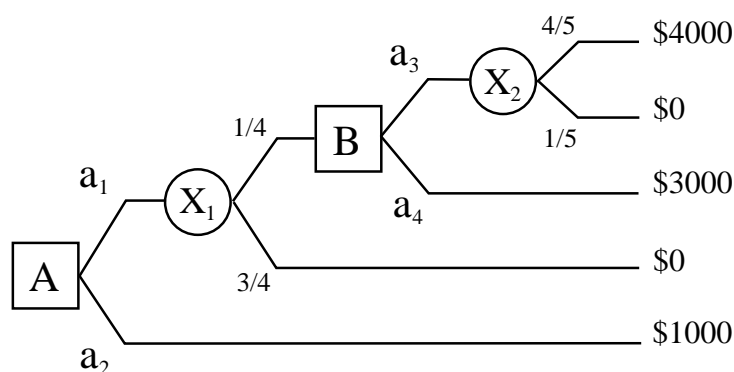


Figura 2: Problema de decisão seqüencial adaptado dos experimentos de (KAHNEMAN; TVERSKY, 1979) e representado por árvore de decisão.

Problemas de decisão seqüenciais são desafiadores porque garantir a consistência entre preferências e ações não é algo trivial. Por exemplo, se um agente embarca numa estratégia que ele irá se desviar, existe, a princípio, uma escolha inconsistente, ou seja, ou o agente não implementou sua estratégia preferida no nó inicial ou não a considera mais como uma escolha aceitável nos nós subseqüentes, desviando-se dela.

Definição 3. A distinção entre as escolhas planejadas pelo indivíduo no começo da árvore de decisão e sua escolha real quando este se encontra em um dado nó de decisão caracteriza o problema de consistência dinâmica (MACHINA, 1989).

Existem basicamente três *normas de comportamento* que um tomador de decisão pode adotar em situações de escolha dinâmica (ver (ETCHART, 2002) para uma síntese):

- *míope* (STROTZ, 1956; HAMMOND, 1973) — o tomador de decisão míope (ingênuo) faz suas escolhas considerando apenas o que ele julga preferível naquele ponto em que se encontra, independentemente das escolhas que ele efetuou no passado ou das escolhas que ele terá de fazer no futuro;

⁸Em teoria dos jogos existem 4 estratégias puras: $s_1 = (a_1, a_3)$, $s_2 = (a_1, a_4)$ e $s_3 = (a_2, a_3)$ e $s_4 = (a_2, a_4)$.

- *sofisticado* (HAMMOND, 1973, 1984) — o tomador de decisão sofisticado constrói uma estratégia antecipando suas escolhas futuras, prevenindo os potenciais desvios míopes da estratégia inicial, e escolhendo uma estratégia que ele certamente será capaz de cumprir;
- *resoluto* (MCLENNEN, 1990) — o tomador de decisão resoluto compromete-se com ele mesmo a seguir uma estratégia de uma vez por todas, subordinando as escolhas posteriores às escolhas feitas anteriormente.

Para um indivíduo que adota as normas da teoria de utilidade esperada tradicional como representação numérica de suas preferências, as normas de comportamento acima não produzem violações de consistência dinâmica, isto é, um tomador de decisão (míope, sofisticado ou resoluto) com tais preferências não irá se desviar de sua estratégia inicial, pois a melhor estratégia nos nós futuros é subestratégia da estratégia ótima inicial. Entretanto, isto pode não ser verdade para outras representações de preferência como podemos ver a seguir:

Exemplo 2. *Considere novamente a Figura 2. Esta árvore de decisão foi adaptada dos experimentos de (KAHNEMAN; TVERSKY, 1979)⁹. Suponha que o tomador de decisão tenha adotado o modelo de preferência de classificação dependente da utilidade (rank-dependent utility (QUIGGIN, 1982)), dado pela função:*

$$V(a_i)_{u,q} = u(a_i, \omega_1) + \sum_{j=2}^n [u(a_i, \omega_j) - u(a_i, \omega_{j-1})] q \left(\sum_{k=j}^n p(\omega_k) \right),$$

onde as utilidades são re-indexadas em ordem crescente ($u(a_i, \omega_1) \leq \dots \leq u(a_i, \omega_n)$) e $q(\cdot)$ é uma função de atribuição de pesos de probabilidade (weighting function): $q(p) = \exp(-(-\ln(p))^{0.5})$.

Este modelo de preferência leva à seguinte ordenação entre estratégias no nó de decisão A: $s_1 \succ s_3 \succ s_2$ (em A temos: $V(s_1) = 1124,86$, $V(s_2) = 924,23$ e $V(s_3) = 1000$). No nó de decisão B, a ação a_4 é preferível a a_3 ($V(a_3) = 2494,06$ e $V(a_4) = 3000$). Se o tomador de decisão é míope, ele tentaria implementar s_1 em A, mas quando ele alcança

⁹Os experimentos em (KAHNEMAN; TVERSKY, 1979) mostram que, em escolhas hipotéticas entre pares de alternativas oferecidas a grupos de estudantes e professores universitários, 80% deles preferem um ganho certo de 3000 (a_4) a uma alternativa com .80 de chance de ganhar 4000 (a_3); 65% preferem uma alternativa com .20 de chance de ganhar 4000 (s_1) a uma alternativa com .25 de chance de ganhar 3000 (s_2) e; 78% preferem uma alternativa com .25 de chance de um ganho certo de 3000 (s'_1) a uma alternativa com .25 de chance e ter uma outra alternativa com .80 de chance e 4000 de prêmio (s'_2). Na teoria desenvolvida pelos autores s'_1 e s'_2 são diferentes de s_1 e s_2 respectivamente (o modelo de preferência descrito neste exemplo não é capaz de distinguir s_1 e s'_1).

B ele desvia de s_1 , escolhendo a_4 (a melhor escolha local) e termina implementando a estratégia s_2 . Se o agente é sofisticado, ele poderia antecipar que em *B* ele preferiria a_4 a a_3 , desta forma, s_1 seria tratada como não factível. Comparando s_2 e s_3 em *A*, ele deveria escolher s_3 . Se o agente é resoluto, ele seleciona a estratégia mais preferida (s_1) e a implementa. Em *B*, ele sabe que para ser coerente com sua estratégia escolhida no começo da árvore, ele precisa escolher a_3 (mesmo a_4 sendo localmente melhor), i.e., ele está comprometido em obter o ótimo global (MCCLENNEN, 1990).

Podemos notar que tanto o indivíduo sofisticado quanto o resoluto apresentam um comportamento consistente. O sofisticado porque todas as estratégias que ele julga incapaz de implementar são removidas do conjunto de possíveis estratégias. O resoluto porque rejeita o *conseqüencialismo* — um comportamento explicável meramente por suas conseqüências, ou segundo Hammond (1984), um comportamento correspondendo a uma “função de escolha revelada através das conseqüências” que, para cada conjunto finito factível de possíveis conseqüências, especifica um subconjunto de conseqüências escolhidas. O resoluto, por definição, não olha apenas para o futuro, mas também para o passado.

Do ponto de vista filosófico, a norma de comportamento resoluto é um modelo mais consistente de racionalidade, principalmente se considerarmos os aspectos morais de um ato (ver (BYKVIST, 2000) para algumas violações produzidas por indivíduos míopes e sofisticados). Resolução procura admitir no modelo de racionalidade a noção de comportamento baseado em comprometimento (MCCLENNEN, 1997). Do lado pragmático, resolução enfrenta sérios problemas, a maioria deles devido à representação numérica de preferência. Renunciar ao conseqüencialismo significa que o agente não possui uma preferência bem definida localmente que pode ser revelada no sentido da teoria de Samuelson — preferências revelando o padrão consistente das escolhas entre ações feitas pelo agente (SAMUELSON, 1948a).

Geralmente, a abordagem resoluto demanda a enumeração de todas as estratégias com uma ordenação completa, o que claramente é impraticável para problemas grandes¹⁰.

Uma abordagem sofisticada faz sentido se considerarmos um tomador de decisão com *recursos limitados*, i.e., se não podemos efetuar otimizações sobre o espaço de todos os possíveis cursos de ação em situações complexas e em tempo constante (SIMON, 1955).

¹⁰Uma tentativa interessante de implementar comportamento resoluto sem renunciar completamente ao conseqüencialismo pode ser encontrada em (JAFFRAY, 1999). A proposta é modelar um agente assumindo preferências conseqüencialistas, mas com comportamento não-conseqüencialista. Uma abordagem operacional para este modelo encontra-se em (NIELSEN; JAFFRAY, 2001) e, é baseada em um modelo de classificação dependente da utilidade com a função de preferência revelada pela teoria de utilidade antecipada de (QUIGGIN, 1982).

2.3 Modelos probabilísticos

2.3.1 Conjuntos credais

Teoria de probabilidades tem sido amplamente usada para abordar problemas que envolvem raciocínio sob incerteza (ou *ambigüidade*¹¹). Em Inteligência Artificial, o raciocínio probabilístico é usado como uma metodologia para representação de crenças (ver Capítulo 5 de (RUSSELL; NORVIG, 2003), por exemplo). Porém, nem sempre é possível representar uma crença através de um valor preciso de probabilidade (BERGER, 1985; WALLEY, 1991; LEVI, 1980). Uma maneira de sobrepujar esta limitação é a utilização de modelos baseados em *conjuntos de distribuição de probabilidades*, ou também conhecidos como *conjuntos credais* (LEVI, 1980).

“O argumento subjacente a este tratamento é que se não é possível, viável ou adequado vincular o fenômeno que se deseja modelar a uma única distribuição, uma alternativa é especificar um conjunto de distribuições que contenha a distribuição correta” (ROCHA, 2004).

Uma maneira intuitiva de definir um conjunto credal é através de intervalos de probabilidades. A representação de incertezas por conjuntos credais permite a modelagem de opiniões subjetivas, tais como: “a probabilidade de chuva está entre 0.8 e 1.0”. Os extremos deste intervalo, chamados probabilidade inferior e probabilidade superior, indicam respectivamente a menor e a maior medida de probabilidade que é atribuída ao evento pelas distribuições contidas no conjunto.

Adotaremos a seguinte notação: $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ é uma variável aleatória discreta definida sobre o conjunto de possíveis resultados Ω . \mathbf{X} (em negrito) denota um conjunto de variáveis aleatórias. A função de distribuição de probabilidades para a variável X será indicada por $p(X)$, e o símbolo $P(x_j)$ é uma notação simplificada do valor de probabilidade $P(X = x_j)$.

Definição 4. *Dada uma variável aleatória X , um conjunto fechado e convexo de distribuições de probabilidades definidas sobre X é chamado de conjunto credal e indicado por $K(X)$.*

¹¹Ellsberg define ambigüidade como o julgamento de probabilidade vago ou incerto que um tomador de decisão atribui para um problema particular (ELLSBERG, 1961).

Definição 5. Dado um conjunto credal $K(X)$, a probabilidade inferior e superior de um evento são respectivamente:

$$\begin{aligned}\underline{P}(x_i) &= \min_{P(X) \in K(X)} P(x_i), \\ \overline{P}(x_i) &= \max_{P(X) \in K(X)} P(x_i).\end{aligned}$$

De modo análogo, podemos calcular a *utilidade esperada inferior* e a *utilidade esperada superior* por:

$$\begin{aligned}\underline{E}[a_i] &= \min_{P(X) \in K(X)} E[a_i], \\ \overline{E}[a_i] &= \max_{P(X) \in K(X)} E[a_i],\end{aligned}$$

onde $E[a_i]$ denota a utilidade esperada padrão obtida pela Equação (2.2).

Estas especificações têm em conta as restrições impostas pelos três axiomas básicos da teoria de probabilidades:

Axioma 4 (P1). $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$.

Axioma 5 (P2). $P(\Omega) = 1$.

Axioma 6 (P3). $P(\omega_i \cup \omega_j) = P(\omega_i) + P(\omega_j)$, se ω_i e ω_j ($i \neq j$) são eventos mutuamente exclusivos.

Assumimos neste texto que todas as variáveis são categóricas (discretas) e que os conjuntos credais associados às variáveis possuem um número finito de vértices. Um conjunto credal $K(X)$ representa um politopo no espaço \mathbb{R}^d , onde d é a cardinalidade do espaço de eventos da variável X . O conjunto de vértices de um conjunto credal $K(X)$ é denotado por $V_{K(X)}$. Um politopo convexo pode ser representado de dois modos: como o casco convexo¹² do conjunto de vértices ($K(X) = cc(V_{K(X)})$), ou como a intersecção de semi-espacos. O problema de produzir uma representação a partir de outra é discutido em (AVIS, 2000).

Para ilustrar, considere o seguinte exemplo apresentado em (IDE, 2005).

Exemplo 3. Seja X_1 uma variável ternária assumindo estados “baixo”, “médio” ou “alto”.

¹²O casco convexo de um conjunto de pontos no \mathbb{R}^d é o menor conjunto convexo que contém todos estes pontos (O'ROURKE, 1998; PREPARATA; SHAMOS, 1985). Este conjunto de pontos também é chamado de *envoltória convexa* ou *fecho convexo*.

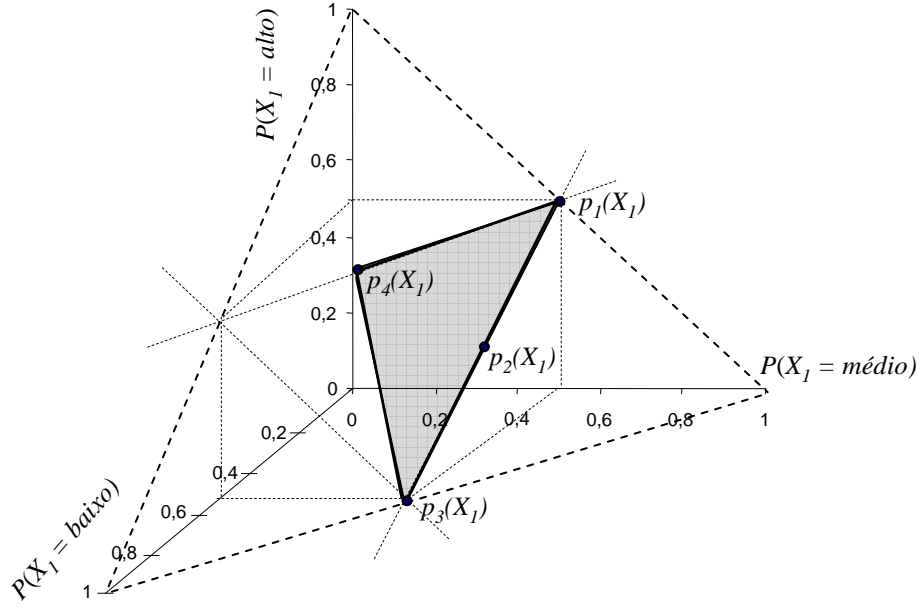


Figura 3: Representação gráfica do conjunto credal do Exemplo 3.

Temos que $K(X_1) = cc(V_{K(X_1)})$, com $V_{K(X_1)} = \{p_1(X_1), p_2(X_1), p_3(X_1), p_4(X_1)\}$, onde:

$$\begin{aligned} p_1(X_1) &= (0.0; 0.5; 0.5), \\ p_2(X_1) &= (0.25; 0.5; 0.25), \\ p_3(X_1) &= (0.5; 0.5; 0.0) \text{ e} \\ p_4(X_1) &= (0.25; 0.25; 0.5). \end{aligned}$$

As distribuições $p_1(X_1)$, $p_3(X_1)$ e $p_4(X_1)$ formam um politopo que define o conjunto credal sobre X_1 (ver Figura 3). Note que $p_2(X_1)$ é um vértice desnecessário para representar o politopo.

Dado um conjunto de variáveis credais \mathbf{X} , um conjunto credal condicional $K(\mathbf{X} \setminus \{X_i\} | X_i = x_i)$, sendo x_i um estado da variável X_i , é composto por distribuições condicionais da forma $p(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n | X_i = x_i)$ (GIRON; RIOS, 1980). Se $P(X_i = x_i) > 0$ para toda distribuição $p \in K(\mathbf{X})$, então o conjunto $K(\mathbf{X} \setminus \{X_i\} | X_i = x_i)$ pode ser obtido a partir de $K(\mathbf{X})$ aplicando-se a regra de Bayes em cada distribuição do conjunto de probabilidades conjuntas e tomando o casco convexo dos pontos gerados (MORAL, 1999; WALLEY, 1991), ou seja:

$$K(\mathbf{X} \setminus \{X_i\} | X_i = x_i) = cc \left(\left\{ \frac{p(X_1, \dots, X_i = x_i, \dots, X_n)}{P(X_i = x_i)} : p \in K(\mathbf{X}) \right\} \right). \quad (2.3)$$

Em teoria de probabilidades dizemos que duas variáveis X e Y são independentes se:

$$p(X|Y = y) = p(X) \quad \text{para } P(Y = y) > 0.$$

Se $p(X|Y, Z) = p(X|Z)$, então dizemos que X é independente de Y dado Z . Na teoria de conjuntos credais, a definição de independência é controversa, pois existe mais de uma forma de estender esta definição (CAMPOS; MORAL, 1995; COZMAN, 1998). Neste trabalho iremos adotar a definição de *independência forte*, isto é, duas variáveis X e Y , são fortemente separadas quando o conjunto credal $K(X, Y)$ tem todos os vértices satisfazendo a independência estocástica de X e Y , ou seja, todos os vértices fatorizam como $p(X)p(Y)$ (COUSO; MORAL; WALLEY, 2000; COZMAN, 2000).

2.3.2 Redes credais

Relações de dependência/independência entre variáveis em modelos probabilísticos podem ser representadas de maneira eficiente através de grafos. Uma *rede Bayesiana* (PEARL, 1988) é um grafo direcionado acíclico onde os nós simbolizam variáveis e os arcos indicam a existência de uma influência causal (asserção de dependência condicional) direta entre as variáveis. Isto permite uma representação compacta de distribuições probabilidades, pois são definidas somente as probabilidades condicionais de cada nó em relação aos seus pais – $p(X_i|pa(X_i))$ onde $pa(X_i)$ denota os pais da variável X_i . A semântica de redes Bayesianas é determinada pela *condição de Markov*: cada variável X_i é independente de seus não-descendentes não-pais dados seus pais. Esta condição leva a uma única distribuição de probabilidade conjunta:

$$p(\mathbf{X}) = \prod_i p(X_i|pa(X_i)).$$

Uma *rede credal* é um formalismo que procura estender os conceitos de redes Bayesianas à teoria de conjuntos credais, ou seja, é uma representação gráfica de relações de dependência e independência entre variáveis aleatórias associadas a conjuntos credais. Formalmente definimos uma rede credal como (CAMPOS, 2004):

Definição 6. Uma *rede credal* é uma tripla $(\mathcal{G}, \mathbf{X}, \mathbf{K})$, onde $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ é um grafo direcionado acíclico, com cada nó em \mathbb{V} associado a uma variável aleatória em \mathbf{X} , e \mathbb{E} uma coleção de arestas sobre $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ relacionando elementos de \mathbf{X} ; \mathbf{K} é uma coleção de conjuntos credais condicionais $K(X_i|pa(X_i))$ para todas as relações $\{X_i|pa(X_i)\}$ definidas por \mathbb{E} .

Neste trabalho iremos considerar apenas redes credais que especificam relações de independência forte e que armazenam em seus nós uma coleção de conjuntos credais especificados separadamente. Uma rede credal especificada separadamente implementa relações de independência forte se cada nó $X_i \in \mathbf{X}$ é fortemente independente dos demais nós da rede, exceto seus descendentes, dados seus pais (ROCHA, 2004).

Um conjunto credal de distribuições conjuntas que uma rede credal representa é chamado de *extensão* da rede. Redes credais que codificam relações de independência forte estão associados a um conjunto credal denominado *extensão forte*, que pode ser computado pela expressão (IDE, 2005):

$$K(\{X_1, \dots, X_n\}) = \text{cc}(\prod_i p(X_i|pa(X_i))),$$

onde

$$\begin{aligned} p(X_i|pa(X_i)) &\in K(X_i|pa(X_i)) \\ K(X_i|pa(X_i)) &\in \mathbf{K}(X_i|pa(X_i)) \\ \mathbf{K}(X_i|pa(X_i)) &\in \mathbf{K} \\ \forall X_i &\in \mathbf{X}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Exemplo 4. A Figura 4 apresenta uma rede credal modelando o clássico problema do cão (CAMPOS, 2004). Existem cinco variáveis binárias relacionadas, i.e., $\mathbf{X} = \{B, F, L, D, H\}$, onde $X \in \mathbf{X}$ possui duas categorias $X = x$ e $X = \bar{x}$. A variável F (family-out) indica se a família está ou não em casa e tem influência direta sobre duas outras variáveis L (light-on) contendo a probabilidade da luz estar acesa e D (dog-out) contendo a probabilidade do cão estar fora de casa. A variável D também é influenciada por B (bowel-problem) indicando que o cão está com problemas intestinais. Para finalizar, H contém a probabilidade de latidos (hear-bark) e depende diretamente de D .

Uma *inferência marginal* em uma rede credal é o cômputo dos valores inferiores e superiores de probabilidades em uma extensão da rede. Para o Exemplo 4, se desejamos inferir a probabilidade da luz estar apagada $P(\bar{l})$, devemos computar o intervalo $[\underline{P}(\bar{l}), \overline{P}(\bar{l})]$:

$$\begin{aligned} \underline{P}(\bar{l}) &= \min P(\bar{l}) = \min(P(\bar{l}|f) P(f) + P(\bar{l}|\bar{f}) P(\bar{f})), \\ \overline{P}(\bar{l}) &= \max P(\bar{l}) = \max(P(\bar{l}|f) P(f) + P(\bar{l}|\bar{f}) P(\bar{f})). \end{aligned}$$

Neste exemplo, a probabilidade da luz estar apagada está entre $[0.675, 0.73]$. Note que para o cômputo não são necessários todos os nós da rede. Para identificar conjuntos de variáveis probabilisticamente irrelevantes usamos uma propriedade gráfica de Redes Bayesianas, chamada de *d-separação* (PEARL, 1988), que também se aplica a extensões

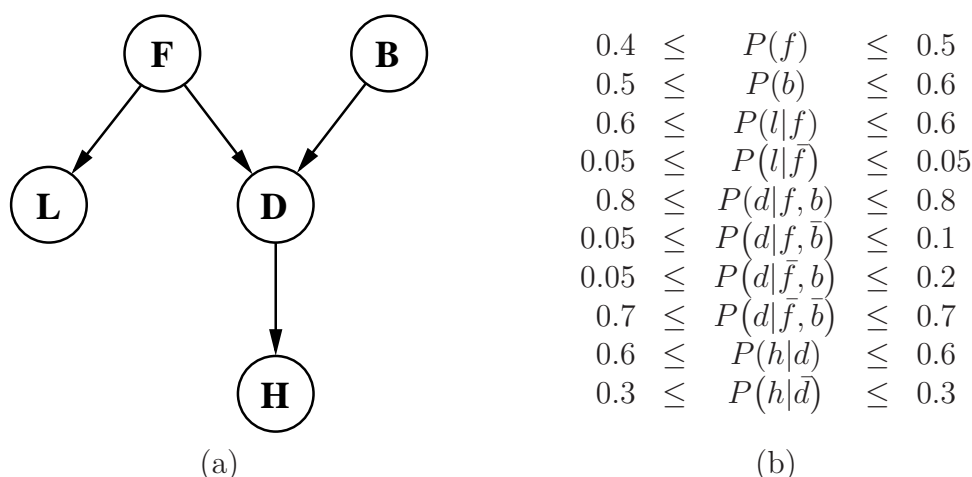


Figura 4: (a) Rede credal representando o clássico problema do cão. (b) Conjunto de distribuições de probabilidade credais.

fortes (COZMAN, 2000).

Definição 7. *Sejam \mathbf{X} , \mathbf{Y} e \mathbf{Z} três subconjuntos disjuntos de nós em um DAG D (grafo direcionado acíclico), então \mathbf{Z} d -separa \mathbf{X} de \mathbf{Y} , denotado $\langle \mathbf{X}|\mathbf{Z}|\mathbf{Y} \rangle_D$ se não existir nenhum caminho entre um nó de \mathbf{X} e um nó de \mathbf{Y} tal que as duas condições seguintes sejam verificadas: (1) cada nó com arestas convergentes está em \mathbf{Z} ou tem um descendente em \mathbf{Z} e; (2) todos os demais nós não pertencem a \mathbf{Z} .*

Esta propriedade de d -separação será usada no algoritmo para resolver diagramas de influência (Seção 4.2 do Capítulo 4). Com ela é possível identificar o conjunto de variáveis necessárias para cada nó de decisão, reduzindo o tamanho do problema de inferência. Note que inferências em redes credais é um problema NP-Completo¹³ (CAMPOS; COZMAN, 2005)).

¹³Considerando a classe de redes com comprimento induzido limitado, i.e., redes onde o grafo subjacente (obtido removendo-se as direções dos arcos) tem nível máximo e comprimento induzido limitado por $\log(f(s))$; onde $f(s)$ é uma função polinomial no tamanho s da entrada (CAMPOS; COZMAN, 2005).

3 CRITÉRIOS DE OTIMALIDADE

Neste capítulo, examinamos alguns critérios de otimalidade usados em situações de incerteza e apresentamos novos algoritmos para os mesmos. Estes algoritmos são algumas contribuições deste trabalho: apresentam uma forma eficiente de classificar ações em problemas de decisão sob incerteza representada por conjuntos de probabilidades.

No capítulo anterior, mostramos que quando o problema de decisão não envolve incertezas e o tomador de decisões aceita as normas da teoria da utilidade esperada, então o ato de decidir resume-se a encontrar aquela decisão que proporciona o maior valor esperado. Ações com o mesmo valor esperado são tratadas como indiferentes, ou seja, não há arrependimento por escolher uma ação em vez de outra. Quando há incertezas representadas por conjuntos de probabilidade, o mesmo raciocínio não pode ser aplicado de maneira direta. Dois tipos de critérios têm sido sugeridos na literatura: critérios baseados em uma ordenação completa ou critérios baseados em conceitos de admissibilidade.

Críticos baseados em ordenação completa *forçam* uma ordenação do conjunto de possíveis ações. Embora exista um intervalo de utilidade esperada representando o nível de ambigüidade do tomador de decisão, os critérios nesta categoria “linearizam” de alguma maneira a função utilidade para o conjunto dos reais e, deste modo, procedem como no caso de decisão sob risco. Já critérios baseados em admissibilidade apenas classificam as ações como: admissíveis ou não. Portanto, mais de uma ação pode ser admissível ao mesmo tempo.

3.1 Representação de ações em um problema de decisão

Esta seção apresenta um exemplo, que será usado para ilustrar os critérios de escolha, e descreve como iremos representar as ações em um problema de decisão.

Exemplo 5. *Suponha que temos um problema de decisão com ações e suas respecti-*

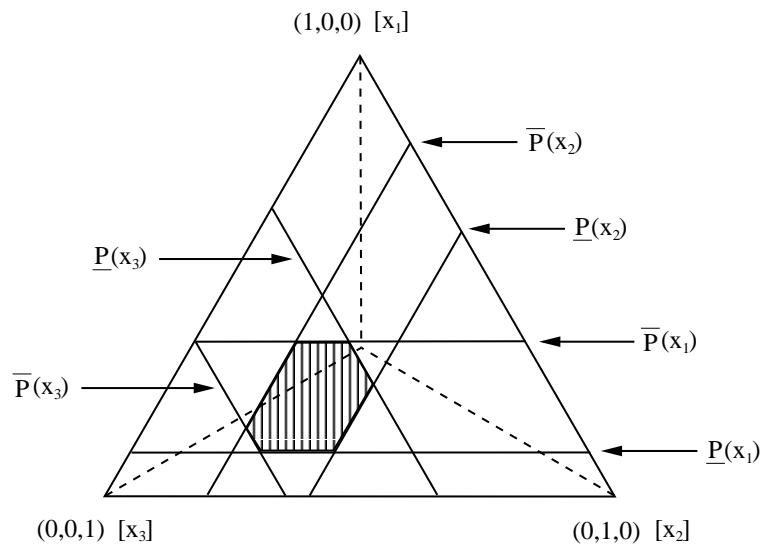


Figura 5: Conjunto credal $K(X)$ (área hachurada) do Exemplo 5 obtido através da especificação de intervalos de probabilidade. Os eixos x_1, x_2, x_3 representam as probabilidades de categorias da variável X .

vas utilidades representadas na Tabela 2. Seja $K(X)$ o conjunto de distribuições de probabilidade para os eventos em Ω tal que $P(x_1) \in [1/10; 7/20]$, $P(x_2) \in [1/5; 2/5]$ e $P(x_3) \in [7/20; 13/20]$. Este conjunto credal está representado na Figura 5.

Tabela 2: Valores de utilidade para o Exemplo 5.

	x_1	x_2	x_3
a_1	9	7	1
a_2	0	5	8
a_3	5	5	5
a_4	6	4	4
a_5	2	6	5

Como assumimos funções de utilidade lineares e que conjuntos credais são convexos, então podemos formular este problema através de programação linear — maximizar ou minimizar uma função de utilidade esperada sujeita a um conjunto de restrições de probabilidades. De acordo com resultados gerais da teoria de programação linear, o valor esperado ótimo é sempre alcançado num dos vértices do poliedro (não necessariamente em um único vértice). Este valor ótimo pode ser obtido porque assumimos que um conjunto credal não é vazio — o programa linear é viável — e limitado pelas restrições de probabilidade.

Um problema linear na forma padrão é descrito como:

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a:} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}; \\ & \mathbf{x} \geq 0; \end{aligned}$$

onde \mathbf{x} é um vetor coluna n -dimensional de variáveis, \mathbf{c}^T é um vetor linha n -dimensional de coeficientes, \mathbf{b} é um vetor coluna m -dimensional de coeficientes e \mathbf{A} é uma matriz de coeficientes de dimensão $m \times n$.

No Exemplo 5, para cada ação temos uma função objetivo dada pela utilidade esperada (Equação (2.2)), e as restrições definidas por seis inequações (duas para cada $p(x_i) \in K(X = x_i)$) e uma equação ($\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$). Portanto temos:

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & E[a_i] = \sum_{j=1}^3 P(x_j) u(a_i, x_j) \\ \text{sujeito a:} \quad & \\ & -P(x_1) + 0P(x_2) + 0P(x_3) \leq -1/10 \\ & P(x_1) + 0P(x_2) + 0P(x_3) \leq 7/20 \\ & 0P(x_1) - P(x_2) + 0P(x_3) \leq -1/5 \\ & 0P(x_1) + P(x_2) + 0P(x_3) \leq 2/5 \\ & 0P(x_1) + 0P(x_2) - P(x_3) \leq -7/20 \\ & 0P(x_1) + 0P(x_2) + P(x_3) \leq 13/20 \\ & P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) \leq 1 \\ & -P(x_1) - P(x_2) - P(x_3) \leq -1 \end{aligned}$$

Para $i = 1, \dots, 5$

O programa linear acima corresponde ao cômputo do valor esperado superior. Para o cômputo do valor esperado inferior, basta observar que um problema de minimização é equivalente ao seguinte problema de maximização:

$$\text{Minimizar } z = \text{Maximizar } -z \tag{3.1}$$

Os valores esperados inferior e superior para cada ação estão representados na Tabela 3.

O Exemplo 5 mostra um problema de decisão simples onde há apenas uma variável aleatória representando os possíveis eventos. Contudo, representar problemas de decisão

Tabela 3: Utilidades esperadas superior e inferior para o conjunto de ações do Exemplo 5.

	$\underline{E}[a_i]$	$\overline{E}[a_i]$
a_1	3.3	5.6
a_2	4.3	6.45
a_3	5.0	5.0
a_4	4.2	4.7
a_5	4.2	5.1

por programas lineares em casos mais complexos, onde a probabilidade de alguns eventos depende da realização de outros (como em redes credais que codificam relações de dependência entre variáveis), nem sempre é possível, pois, a representação de relações de independência geram restrições multilineares. Portanto, neste trabalho iremos usar uma ferramenta desenvolvida em (CAMPOS, 2004) que resolve programas multilineares — programas não lineares onde a função objetivo e as restrições envolvem variáveis em soma de produtos, i.e., $\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m x_j$ — por fornecer uma representação generalizada e eficiente.

A resolução dos programas multilineares utiliza uma técnica de Reformulação – Linearização (RL) (SHERALI; TUNCBILEK, 1992) que gera algumas restrições multilineares (implícitas ao programa original) e substitui cada produto de variáveis por uma variável artificial, obtendo assim um subproblema linear aproximado. A solução deste subproblema aproximado é um limite superior para o problema multilinear. Este método tem sido aplicado com sucesso na computação de limites inferiores e superiores de probabilidades condicionais em diversos modelos (CAMPOS; COZMAN, 2004).

Exemplo 6. Considere a Figura 6. A estratégia $s_1 = (a_1, a_3)$ pode ser representada pelo seguinte programa:

$$\text{Maximize} \quad E[s_1] = p(qa + (1 - q)b) + (1 - p)(rd + (1 - r)e)$$

sujeito a:

Restrições de probabilidade sobre p , q e r .

Note que nem todas as ações (estratégias) demandam a solução de programas multilineares (e.g., a estratégia $s_3 = (a_2)$ da Figura 6). Apenas as estratégias que envolvem relações de independência. Para os algoritmos a seguir, ações e estratégias são sinônimos, i.e., ambas estão associadas a um programa de otimização. Adotaremos o termo *programa de otimização* para designar os problemas contendo função objetivo e restrições convexas (podendo ser multilinear ou linear). Analisaremos então os critérios de otimalidade em

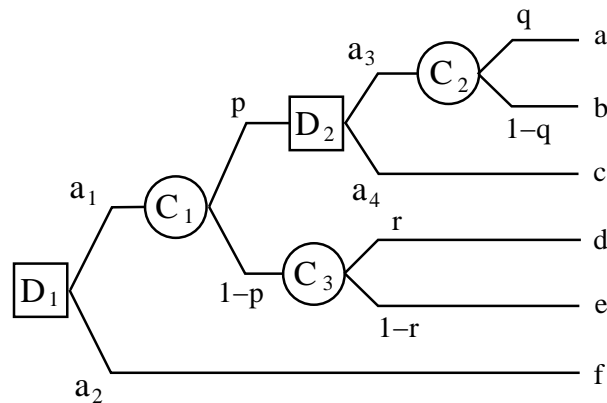


Figura 6: Árvore de decisão do Exemplo 6. Os nós de chance C_1, C_2, C_3 representam conjuntos credais; a, b, c, d, e, f são valores de utilidade.

relação ao número de programas de otimização resolvidos. Todos os algoritmos possuem como entrada um conjunto de ações com seus respectivos programas de otimização associados. A saída do algoritmo depende de qual classe ele pertence, podendo ser uma única ação ótima, ou um conjunto de ações ótimas. Recorreremos ao Exemplo 5 para ilustrar a diferença entre as soluções sugeridas pelos critérios.

3.2 Critérios baseados em ordenação completa

3.2.1 Γ -Maximin e Γ -Maximax

O critério Γ -*Maximin* seleciona a estratégia com o máximo valor esperado inferior — uma solução extremamente “pessimista” que otimiza em relação ao pior caso (BERGER, 1985; GILBOA; SCHMEIDLER, 1989).

Algoritmo 1: Critério— Γ -Maximin

Entrada: Um conjunto de ações \mathbb{A} .

Saída: A ação ótima a^* .

```

1  $a^* \leftarrow \emptyset$ ;
2  $mei \leftarrow -\infty$ ;
3 para cada  $a_i \in \mathbb{A}$  faça
4   se  $\underline{E}[a_i] > mei$  então
5      $a^* \leftarrow a_i$ ;
6      $mei \leftarrow \underline{E}[a^*]$ ;
7 devolve  $a^*$ ;

```

A solução Γ -Maximax (SATIA; JR., 1973) — versão otimista que considera maximi-

zação do melhor caso — tem a mesma estrutura, porém ao invés de comparar o valor esperado inferior na linha 4, compara o valor esperado superior.

Teorema 1. *O Algoritmo 1 (Critério— Γ -Maximin) recebe um conjunto de ações e devolve a ação com maior valor esperado inferior resolvendo um número linear de programas de otimização.*

Demonstração. A demonstração da correção do Algoritmo 1 é trivial. Basta observar o invariante de laço: a^* sempre contém a ação ótima. Como \mathbb{A} é finito, o laço termina quando todas as ações foram comparadas. A complexidade é determinada pelo número de programas de otimização que precisam ser resolvidos (linha 4). Como existem n possíveis ações, são resolvidos n programas de otimização. \square

Segundo o critério Γ -Maximin, a ação ótima para o Exemplo 5 é a_3 . Já usando o critério Γ -Maximax, a ação sugerida é a_2 .

3.2.2 Γ -Maximix

Um critério mais bem elaborado leva em consideração a atitude do tomador de decisão em situações de ambigüidade, i.e., não considera apenas o limite inferior (ou superior), e sim os dois valores definindo o intervalo. A ação ótima a^* para este critério é dada por:

$$a^* = \max_{a_i \in \mathbb{A}} (\eta \underline{E}[a_i] + (1 - \eta) \overline{E}[a_i]),$$

onde η é um parâmetro de precaução entre 0 e 1 refletindo o nível de aversão à ambigüidade. Quanto mais averso à ambigüidade for o tomador de decisão, maior é a influência do limite inferior da utilidade esperada. Note que, $\eta = 1$ corresponde à aversão estrita à ambigüidade (Γ -Maximin) e $\eta = 0$ corresponde ao tomador de decisão com máxima tendência a situações de ambigüidade (Γ -Maximax) (UTKIN; AUGUSTIN, 2005).

A correção do Algoritmo 2 (*Critério— Γ -Maximix*) é simples e segue os mesmos argumentos dos algoritmos da subseção anterior. A complexidade de tempo também é linear em relação ao número de ações ($2n$ programas de otimização devem ser resolvidos).

Com este critério, supondo um $\eta = .5$ (neutro a ambigüidade), no Exemplo 5 o tomador de decisão deve escolher a_2 .

Algoritmo 2: Critério— Γ -Maximix

Entrada: Um conjunto de ações \mathbb{A} e um parâmetro η refletindo o nível de aversão à ambigüidade.

Saída: A ação ótima a^* .

```

1  $a^* \leftarrow \emptyset$ ;
2  $mve \leftarrow -\infty$ ;
3 para cada  $a_i \in \mathbb{A}$  faça
4    $mix \leftarrow \eta \underline{E}[a_i] + (1 - \eta) \overline{E}[a_i]$ ;
5   se  $mix > mve$  então
6      $a^* \leftarrow a_i$ ;
7      $mve \leftarrow mix$ ;
8 devolve  $a^*$ ;
```

3.3 Critérios baseados em admissibilidade

3.3.1 Dominação por Intervalo

O critério *Dominação por Intervalo* classifica as ações admissíveis de acordo com uma ordenação parcial estrita gerada por meio de uma comparação em pares. Dadas duas ações a_i e a_j , se $\underline{E}[a_i] > \overline{E}[a_j]$, então a_j é considerada inadmissível na presença de a_i . O conjunto de ações admissíveis é composto por todas aquelas que não foram classificadas como inadmissíveis (TROFFAES, 2004).

Um algoritmo ingênuo para este critério efetuará um número quadrático de comparações (em relação ao número de possíveis ações) para determinar o conjunto de ações admissíveis. Apresentamos um algoritmo que evita computações desnecessárias dos valores esperados superior e inferior: ao invés de fazer uma comparação explícita par a par, ele usa a solução Γ -Maximin para produzir um número linear de programas de otimização. No algoritmo a seguir, associamos um “atributo” *admissível* para cada estratégia.

Algoritmo 3: Critério—Dominação por Intervalo

Entrada: Um conjunto de ações \mathbb{A} .

Saída: Um conjunto de ações admissíveis.

```

1 Marque todas as ações em  $\mathbb{A}$  como admissíveis;
2  $aux \leftarrow \Gamma\text{-Maximin}(\mathbb{A})$ ;
3  $mei \leftarrow \underline{E}[aux]$ ;
4 para cada  $a_i \in \mathbb{A}$  faça
5   se  $mei > \overline{E}[a_i]$  então
6      $a_i.\text{admissível} \leftarrow \text{falso}$ ;
7 devolve Todas as ações não marcadas como falso;
```

Teorema 2. *O Algoritmo 3 (Critério—Dominação por Intervalo) recebe um conjunto de ações e devolve o conjunto de ações admissíveis resolvendo um número linear de programas de otimização.*

Demonstração. Para demonstrar que o algoritmo está correto, observe que (a) a ação com o máximo valor esperado inferior é sempre admissível de acordo com o critério de Dominação por Intervalo e; (b) a comparação de todas as ações com a ação Γ -Maximin é suficiente para determinar as ações admissíveis. Para demonstrar (a) suponha por absurdo que a ação a é a ação com máximo valor esperado inferior e que não é admissível de acordo com Dominação por Intervalo. Então existe uma ação a' tal que $\underline{E}[a'] > \bar{E}[a]$. Como $\bar{E}[a] \geq \underline{E}[a]$, então $\underline{E}[a'] > \underline{E}[a]$ o que contradiz a hipótese. A condição (b) é trivial, pois uma ação a' dominada por uma ação a'' também será dominada pela ação a com máximo valor esperado inferior, pois $\underline{E}[a] \geq \underline{E}[a'']$. Quanto à complexidade do algoritmo, para encontrar a ação com máximo valor esperado inferior precisamos resolver n programas de otimização. Para determinar o conjunto de ações admissíveis resolvemos $n - 1$ programas de otimização. Portanto, resolvemos $2n - 1$ programas de otimização no total. \square

Aplicando este critério ao Exemplo 5, obtemos que apenas a_4 não é admissível.

Uma deficiência de Dominação por Intervalo é que este critério não identifica *dominância estocástica* (denotada por \geq_{SD}), i.e., dadas duas ações a_i e a_j , dizemos que a_i domina estocasticamente a_j ($a_i \geq_{SD} a_j$) se para toda medida de probabilidade P , $E_P[a_i] \geq E_P[a_j]$. A Figura 7 descreve um exemplo de dominância não identificado pelo critério de Dominação por Intervalos. Note que, para qualquer valor de probabilidade $P(E)$ no intervalo $[0.3, 0.7]$ a ação A possui um valor esperado superior ao de B .

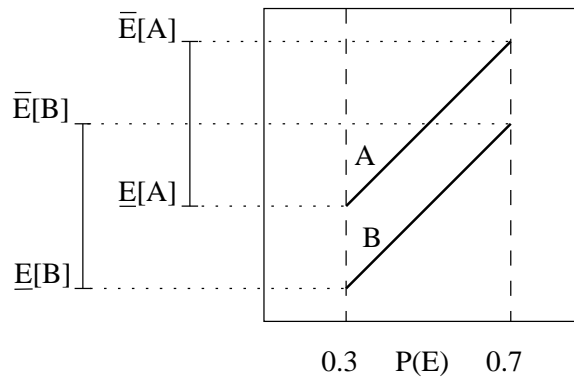


Figura 7: Exemplo ilustrando que o critério Dominação por Intervalos não identifica dominância estocástica.

3.3.2 Maximalidade

Uma ação a_i é *maximal* se não existe nenhuma ação a_j tal que, para cada medida de probabilidade P no conjunto credal, o valor esperado $E_P[a_j]$ é maior que $E_P[a_i]$. Em outras palavras, uma $a_i \in \mathbb{A}$ é maximal se não for estocasticamente dominada por outra ação $a_j \in \mathbb{A}$. O critério de maximalidade prescreve que qualquer ação maximal pode ser selecionada por um agente racional; o problema computacional é gerar o conjunto maximal de ações.

Algoritmo 4: Critério—Maximalidade

Entrada: Um conjunto de ações \mathbb{A} .

Saída: Um conjunto de ações admissíveis.

- 1 Marque todas as ações em \mathbb{A} como admissíveis;
 - 2 $n \leftarrow$ Número de ações em \mathbb{A} ;
 - 3 **para** $i \leftarrow 1$ **até** $n - 1$ **faça**
 - 4 **para** $j \leftarrow i + 1$ **até** n **faça**
 - 5 **se** $\underline{E}[a_i - a_j] > 0$ **então**
 - 6 a_j .admissível \leftarrow falso;
 - 7 **senão se** $\overline{E}[a_i - a_j] < 0$ **então**
 - 8 a_i .admissível \leftarrow falso;
 - 9 **devolve** Todas as alternativas não marcadas como falso;
-

O critério de *maximalidade* é baseado em comparações em pares entre as possíveis ações. Se sabemos o valor superior/inferior para $E[a_i - a_j]$, também sabemos quando uma ação domina outra, deste modo, não precisamos calcular $E[a_j - a_i]$.

O termo $(a_i - a_j)$ refere-se à expressão obtida pela subtração da função objetivo de a_i pela função objetivo de a_j , retendo todas as restrições de probabilidade destes programas de otimização.

Teorema 3. *O Algoritmo 4 (Critério—Maximalidade) recebe um conjunto de ações e devolve somente aquelas não dominadas no conjunto, resolvendo para isto um número quadrático (no número de ações) de programas de otimização.*

Demonstração. Inicialmente marcamos todas as ações como admissíveis. Os laços encadeados efetuam as comparações entre as ações. Note que o Algoritmo 4 compara quaisquer pares de ações somente uma vez, isto é, fixamos uma ação no laço externo e, para cada ação do conjunto verificamos se ela é admissível ou não. Quando todas as comparações daquela ação foram feitas, ela não volta a ser comparada, ou seja, reduzimos o número de elementos do conjunto de ações. Como o conjunto de ações é finito, o algoritmo pára

quando todas as ações foram classificadas. Para verificar quando n alternativas são admissíveis, o algoritmo resolve no máximo $2 * (n^2 - n)$ problemas de otimização. \square

Supondo que queremos saber se a_3 domina a_4 no Exemplo 5, devemos resolver o seguinte programa de otimização:

$$\text{Maximize } 6P(x_1) + 4P(x_2) + 4P(x_3) - 5P(x_1) - 5P(x_2) - 5P(x_3)$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} -P(x_1) + 0P(x_2) + 0P(x_3) &\leq -1/10 \\ P(x_1) + 0P(x_2) + 0P(x_3) &\leq 7/20 \\ 0P(x_1) - P(x_2) + 0P(x_3) &\leq -1/5 \\ 0P(x_1) + P(x_2) + 0P(x_3) &\leq 2/5 \\ 0P(x_1) + 0P(x_2) - P(x_3) &\leq -7/20 \\ 0P(x_1) + 0P(x_2) + P(x_3) &\leq 13/20 \\ P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) &\leq 1 \\ -P(x_1) - P(x_2) - P(x_3) &\leq -1 \end{aligned}$$

Assim, encontramos um valor positivo (0.3), o que significa que a_4 não é admissível quando a_3 está presente. Com este critério também obtemos que a_5 é dominado por a_2 .

3.3.3 E-admissibilidade

O critério de E-admissibilidade (E de “*Expectation*”) (LEVI, 1974) restringe as escolhas admissíveis do tomador de decisão àquelas que são Bayesianas para pelo menos uma medida de probabilidade P no conjunto credal relevante. Isto é, dado um conjunto de ações \mathbb{A} , um conjunto credal K representando crenças imprecisas, a ação $a_i \in \mathbb{A}$ é E-admissível quando, para pelo menos um $P \in K$, a_i maximiza a utilidade esperada (SCHERVISH *et al.*, 2003):

$$\exists(P \in K) \mid \forall(a_j \in \mathbb{A}) E[a_i - a_j] \geq 0 \quad (3.2)$$

Considere o seguinte exemplo apresentado em (SEIDENFELD, 2004).

Exemplo 7. *Sejam A , B e C três ações e E um evento com probabilidade $P(E) \in [0.25, 0.75]$. Considere que as ações possuem as seguintes utilidades associadas: $u(A) = [1, 0]$, $u(B) = [0, 1]$ e $u(C) = [0.4, 0.4]$, onde o par de valores representa o ganho para E e $\neg E$, respectivamente. A Figura 8 representa este problema de decisão. Segundo o critério de E-admissibilidade, as ações A e B são admissíveis, pois para $P(E) \in [0.25, 0.5]$ a ação*

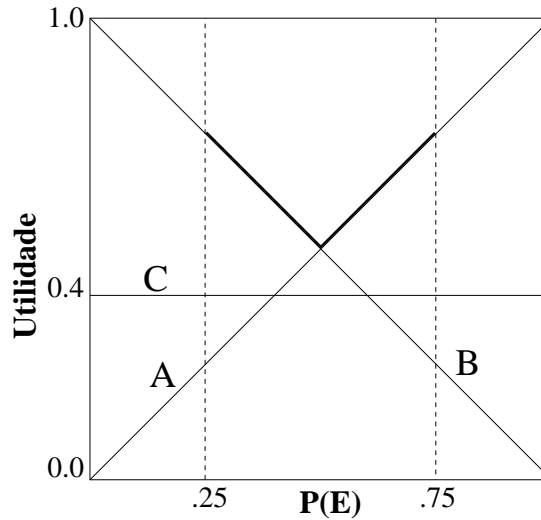


Figura 8: Conjunto de ações E-admissíveis do Exemplo 7.

B maximiza a utilidade esperada e, para $P(E) \in [0.5, 0.75]$ a ação A maximiza. Note que a ação C em nenhum ponto maximiza a utilidade esperada, portanto não é E-admissível.

Inicialmente, poderíamos pensar que E-admissibilidade é qualitativamente diferente dos critérios apresentados anteriormente, porque este critério não compara diretamente as ações (não faz comparações em pares). E-admissibilidade considera as distribuições de probabilidades que definem o conjunto credal, e compara as ações em todas as distribuições. Isto pode levar a conclusão de que E-admissibilidade é muito mais difícil de ser manipulada que os outros critérios previamente apresentados. De fato, isto parecia ser um consenso na literatura (TROFFAES, 2004).

Dois algoritmos foram apresentados em resposta a este desafio (UTKIN; AUGUSTIN, 2005; KIKUTI; COZMAN; CAMPOS, 2005). Ambos usam basicamente as mesmas idéias já presentes em (KYBURG JR.; PITTARELLI, 1996). Para saber se uma ação é admissível, deve existir um $P \in K$, tal que as restrições obtidas da Equação (3.2) devem ser satisfeitas. Deste modo, descobrir se uma ação é E-admissível é equivalente à satisfatibilidade de um conjunto de inequações. Se estas restrições não podem ser satisfeitas, então a_i não é E-admissível.

O Algoritmo 5 mostra como definir um conjunto de ações E-admissíveis. As linhas 4, 5 e 6 geram todas as restrições necessárias para saber se a ação a_i é E-admissível (para definir estas restrições efetua-se um número quadrático de operações, em relação ao número de ações). Ressaltamos aqui que este laço interno não efetua a resolução de nenhum programa de otimização, ele apenas coleta todas as restrições $E[a_i - a_j] \geq 0$

(função objetivo do programa associado à ação a_i menos a função objetivo do programa associado à ação a_j) e armazena na lista de restrições LR . A linha 7 coleta restrições de probabilidades. A linha 8 requer a solução de um programa de otimização para cada ação. Enfatizamos que todo algoritmo depende de n (número de ações) e não diretamente do número de distribuições em um conjunto credal. Mesmo que as propriedades dos conjuntos credais afetem certamente a solução dos programas de otimização relevantes, não há nenhuma necessidade de representar explicitamente os conjuntos credais, ou enumerar seus vértices. De certo modo, a complexidade de conjuntos credais está “escondida” dentro dos programas de otimização.

Algoritmo 5: Critério—E-Admissibilidade

Entrada: Um conjunto de ações \mathbb{A} .

Saída: Um conjunto de ações admissíveis.

```

1  $n \leftarrow$  número de ações em  $\mathbb{A}$  ;
2 para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
3    $LR \leftarrow$  null;
4   para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
5     se  $i \neq j$  então
6        $LR \leftarrow LR \cup E[a_i - a_j] \geq 0$ ;
7    $Q \leftarrow$  conjunto de todas as restrições de valores de probabilidade  $\cup LR$ ;
8    $P \leftarrow \arg \max_p E[a_i]$  sujeito a restrições em  $Q$ ;
9   se  $P \neq null$  então
10     $a_i$ .admissível  $\leftarrow$  verdadeiro;
11  senão
12     $a_i$ .admissível  $\leftarrow$  falso;
13 devolve Todas as alternativas não marcadas como falso;

```

Teorema 4. *O Algoritmo 5 (Critério—E-admissibilidade) recebe um conjunto de ações e devolve um conjunto de ações admissíveis. Para isto, resolve-se um número linear (no número de ações) de programas de otimização.*

Demonstração. A correção do algoritmo e a análise de complexidade segue a discussão acima. Note apenas que, a lista de restrições LR (gerada pelo laço interno) garante que se a ação é E-admissível, então ela não é estocasticamente dominada por outra ação (ou combinação de ações). Cada ação é verificada apenas uma única vez. \square

Para ilustrar o algoritmo, suponha que queremos verificar se a_1 é E-admissível no Exemplo 5. Isto é verdade se e somente se o programa de otimização abaixo for factível. Note que estamos maximizando a função objetivo, porém, qualquer atribuição de variável

satisfazendo as restrições seria suficiente para classificar a ação como admissível ou não.

$$\text{Maximize } 9P(x_1) + 7P(x_2) + 1P(x_3)$$

sujeito a:

$$-P(x_1) + 0P(x_2) + 0P(x_3) \leq -1/10$$

$$P(x_1) + 0P(x_2) + 0P(x_3) \leq 7/20$$

$$0P(x_1) - P(x_2) + 0P(x_3) \leq -1/5$$

$$0P(x_1) + P(x_2) + 0P(x_3) \leq 2/5$$

$$0P(x_1) + 0P(x_2) - P(x_3) \leq -7/20$$

$$0P(x_1) + 0P(x_2) + P(x_3) \leq 13/20$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) \leq 1$$

$$-P(x_1) - P(x_2) - P(x_3) \leq -1$$

$$9P(x_1) + 7P(x_2) + P(x_3) - 0P(x_1) - 5P(x_2) - 8P(x_3) \geq 0$$

$$9P(x_1) + 7P(x_2) + P(x_3) - 5P(x_1) - 5P(x_2) - 5P(x_3) \geq 0$$

$$9P(x_1) + 7P(x_2) + P(x_3) - 6P(x_1) - 4P(x_2) - 4P(x_3) \geq 0$$

$$9P(x_1) + 7P(x_2) + P(x_3) - 2P(x_1) - 6P(x_2) - 5P(x_3) \geq 0$$

O conjunto de ações admissíveis de acordo com o Exemplo 5 é: $\{a_1, a_2, a_3\}$.

4 ALGORITMOS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DECISÃO SEQUÊNCIAL

Este capítulo apresenta dois algoritmos para resolver problemas de tomada de decisão sequencial com incertezas representadas por conjuntos credais. A Seção 4.1 apresenta um algoritmo para resolver árvores de decisão. A Seção 4.2 apresenta um algoritmo para resolver diagramas de influência. Ambos os algoritmos fazem uso dos critérios apresentados no capítulo precedente e são contribuições deste trabalho. O algoritmo para árvores de decisão foi apresentado em (KIKUTI; COZMAN; CAMPOS, 2005) e o algoritmo para diagrama de influência foi apresentado em (KIKUTI; COZMAN, 2007a, 2007b).

4.1 Árvore de decisão

Uma árvore é um grafo conexo e sem ciclos (BERGE, 1973).

Definição 8. *Seja $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ um grafo de ordem $|\mathbb{V}| > 2$. As seguintes propriedades são equivalentes e definem uma árvore:*

1. *\mathcal{G} é conexo e não tem ciclos;*
2. *Quaisquer dois vértices de \mathbb{V} são ligados por um único caminho de $\mathcal{P} \in \mathcal{G}$;*
3. *\mathcal{G} é minimamente conectada, i.e., \mathcal{G} é conectada, mas a remoção de uma aresta $(X, Y) \in \mathbb{E}$ faz com que o grafo resultante seja desconexo;*
4. *\mathcal{G} é maximamente acíclica, i.e., \mathcal{G} não contém ciclos, mas a adição de uma aresta (X, Y) para qualquer dois vértices não adjacentes X e $Y \in \mathbb{V}$ ao conjunto \mathbb{E} faz com que o grafo resultante tenha um ciclo.*

Formalmente, uma árvore de decisão \mathcal{T} é um grafo $\mathcal{G} = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ que respeita as propriedades de uma árvore e, cujo conjunto de nós \mathbb{V} é particionado em três subconjuntos disjuntos: nós de decisão (\mathbb{D}), nós de chance (\mathbb{C}) e nós de utilidade (\mathbb{U}).

- Cada nó de decisão $D \in \mathbb{D}$ contém um conjunto de possíveis ações.
- Cada nó de chance $C \in \mathbb{C}$ contém um conjunto credal representando a probabilidade de ocorrência de um determinado evento.
- Cada nó de utilidade $U \in \mathbb{U}$ define um resultado.
- Uma aresta $e \in \mathbb{E}$ é um par de nós (X, Y) , onde $X, Y \in \mathbb{V}$ e $X \neq Y$.

Uma *subárvore* \mathcal{T}' de \mathcal{T} é um grafo $\mathcal{G}' = (\mathbb{V}', \mathbb{E}')$, onde $\mathbb{V}' \subseteq \mathbb{V}$, $\mathbb{E}' = \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq \mathbb{V}' \text{ e } (X, Y) \subseteq \mathbb{E}\}$ e que também satisfaz as propriedades de uma árvore.

Em árvores de decisão, assumimos que nós de utilidade são nós folhas e que árvores e subárvores têm um nó de decisão como raiz. Portanto será útil particionar o conjunto de decisões \mathbb{D} em subconjuntos de acordo com o número de nós de decisão que precedem \mathcal{T}' , i.e., $\mathbb{D} = \{\mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_m\}$ onde \mathcal{D}_1 é o conjunto de nós de decisão que contém apenas o nó raiz de \mathcal{T} como predecessor e \mathcal{D}_m é o conjunto de nós de decisão que contém $m - 1$ nós de decisão precedendo-o.

Uma *estratégia pura* é escolhida quando o tomador de decisão escolhe uma ação com probabilidade 1, caso contrário, quando há uma *randomização* sobre diversas ações, dizemos que ele escolhe uma *estratégia mista*. Uma implementação de estratégia especifica um conjunto de caminhos do nó raiz até as folhas. Seja s_i uma estratégia no nó raiz de uma árvore \mathcal{T} , então s_j é dita *subestratégia* de s_i se todos os caminhos definindo s_j são subcaminhos dos caminhos definindo por s_i . Representamos uma estratégia definindo apenas as escolhas feitas nos nós de decisão.

Exemplo 8. Considere a Figura 9. Nesta árvore de decisão existem seis possíveis estratégias:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= (a_1, (a_3, a_5)), \\
 s_2 &= (a_1, (a_3, a_6)), \\
 s_3 &= (a_1, (a_4, a_5)), \\
 s_4 &= (a_1, (a_4, a_6)), \\
 s_5 &= (a_2, a_7), \\
 s_6 &= (a_2, a_8).
 \end{aligned}$$

A subestratégia $s'_1 = (a_3)$ é uma subestratégia de s_1 , pois os dois caminhos, que levam aos nós de utilidade a e b , são subcaminhos dos caminhos definidos por s_1 .

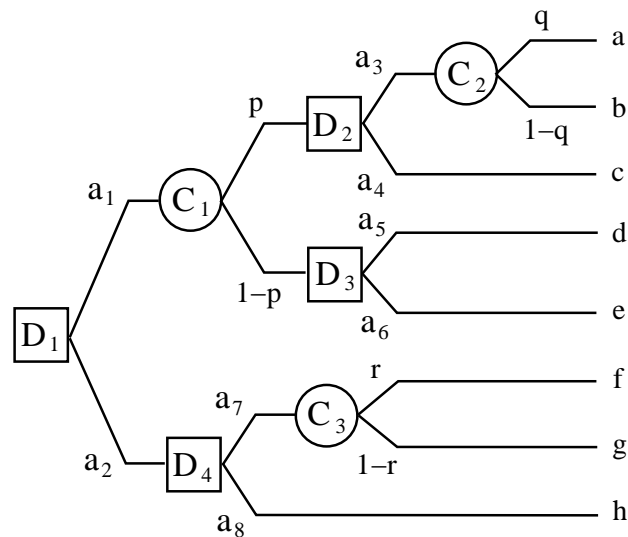


Figura 9: Árvore de decisão com seis estratégias possíveis.

Uma maneira de resolver árvores de decisão é: (1) enumerar todas as estratégias possíveis; (2) calcular o valor esperado para cada estratégia e ; (3) aplicar um critério de escolha no conjunto de todas as estratégias possíveis (estamos assumindo que os nós de chance possuem conjuntos credais associados e, portanto, vários critérios de escolha podem ser sugeridos).

Esta maneira de resolver árvores de decisão corresponde à norma de comportamento resoluta. Isto é, todas as decisões são dependentes entre si e, a escolha das estratégias são feitas apenas no nó de decisão inicial. O problema desta abordagem é que o número de estratégias possíveis cresce rapidamente em relação ao número de nós de decisão e de chance, inviabilizando a enumeração de todas as estratégias possíveis.

4.1.1 Algoritmo para árvore de decisão com probabilidades imprecisas

O algoritmo básico para resolução de árvores de decisão que propomos nesta seção é baseado no algoritmo consequencialista para árvores de decisão com probabilidades precisas. Ele *busca* evitar a enumeração de todas as estratégias possíveis assumindo independência entre as decisões feitas nos nós de decisão¹. Esta independência permite o uso de programação dinâmica (correspondendo à norma de comportamento sofisticada). Para acessar a subestratégia s_i em um nó de decisão $D \in \mathcal{D}_{m-1}$, o tomador de decisão

¹Enfatizamos a palavra “busca” porque quando assumimos conjuntos credais nos nós de chance, é possível que todas as ações avaliadas sejam consideradas admissíveis segundo algum critério. Portanto, no pior caso, todas as estratégias são enumeradas.

precisa antecipar suas escolhas nos (potenciais) futuros nós de decisão em \mathcal{D}_m , e declarar não factíveis todas as futuras alternativas em s_i que são inadmissíveis em \mathcal{D}_m .

Exemplo 9. *Considere novamente a Figura 9 do Exemplo 8. A avaliação segue um plano iterativo: comece com os nós D_2 , D_3 e D_4 e construa gradualmente as estratégias parciais que são admissíveis a partir de um certo ponto. Suponha que a_3 , a_5 , a_6 e a_8 sejam admissíveis. Então em D_1 temos que avaliar 3 estratégias (s_1 , s_2 e s_6).*

O Algoritmo 6 (*Árvore de Decisão*), resolve problemas de decisão seqüenciais com preferências parcialmente ordenadas. No algoritmo, \mathcal{D}_D representa um conjunto contendo diversos vetores ordenados de arestas. Cada um destes vetores representa uma estratégia (uma aresta saindo de um nó de decisão representa uma ação escolhida). \mathcal{C}_D representa um conjunto de estratégias combinadas devolvido pela função **Combinação(c)** e \mathcal{A}_D contém um conjunto de programas de otimização associados às respectivas estratégias. O índice D é usado para indicar o nó de decisão que está sendo analisado.

Algoritmo 6: *Árvore de Decisão*

Entrada: Uma árvore de decisão \mathcal{T} .

Saída: Um conjunto de estratégias admissíveis.

```

1 para cada  $D \in \mathcal{D}_i$ ,  $i \leftarrow m$  até 1 faça
2    $\mathcal{D}_D \leftarrow \emptyset$ ,  $\mathcal{C}_D \leftarrow \emptyset$ ,  $\mathcal{A}_D \leftarrow \emptyset$ ;
3   para cada aresta  $e$  de  $D$  faça
4     nó  $\leftarrow \text{Destino}(e)$ ;
5     se nó  $\in \mathbb{D}$  então
6       para cada  $s_j \in \text{nó.Admissíveis}$  faça
7          $\mathcal{D}_D \leftarrow \mathcal{D}_D \cup \{e, s_j\}$ ;
8     senão se nó  $\in \mathbb{C}$  então
9        $\mathcal{C}_D \leftarrow \text{Combinação}(\text{nó})$ ;
10      se  $\mathcal{C}_D \neq \emptyset$  então
11        para cada  $s_j \in \mathcal{C}_D$  faça
12           $\mathcal{D}_D \leftarrow \mathcal{D}_D \cup \{e, (s_j)\}$ ;
13        senão
14           $\mathcal{D}_D \leftarrow \mathcal{D}_D \cup \{e\}$ ;
15      senão  $\mathcal{D}_D \leftarrow \mathcal{D}_D \cup \{e\}$ ;           /* nó de utilidade */
16   $\mathcal{A}_D \leftarrow \text{Programas de otimização}(\mathcal{D}_D, D)$ ;
17   $D.\text{Admissíveis} \leftarrow \text{Critério-X}(\mathcal{A}_D)$ ;
18 devolve  $D.\text{Admissíveis}$ ;
```

Na linha 16, todas as estratégias para o nó de decisão D são transformadas em programas de otimização pela função **Programas de otimização**(\mathcal{D}_d , D). Consideramos que

cada estratégia está associada a um programa de otimização (rever Seção 3.1). Este conjunto de estratégias é avaliado na linha 17. A avaliação é feita através dos algoritmos apresentados no capítulo anterior. Adotamos a função genérica **Critério-X** para representar a implementação de um destes critérios de otimalidade. Após a avaliação, cada nó de decisão armazena (em **Admissíveis**) a informação sobre quais estratégias são admissíveis. O algoritmo itera retroativamente até primeiro nó de decisão, devolvendo o conjunto de estratégias admissíveis neste nó.

A seguir, fornecemos mais detalhes sobre a elaboração dos programas de otimização gerados a partir da árvore de decisão e a maneira como combinar estratégias quando há nós de chance no caminho entre nós de decisão e os nós de utilidade.

A Função **Programas de otimização**(\mathcal{D}, D) descreve como obter programas de otimização para um conjunto de estratégias \mathcal{D} . Em linhas gerais, a função constrói um grafo \mathcal{G} contendo apenas nós de chance e de utilidade para cada $s_i \in \mathcal{D}$, e aplica um procedimento que extrai deste grafo o programa de otimização.

Função Programas de otimização(\mathcal{D}, D)

Entrada: Um conjunto de estratégias \mathcal{D} e o nó de decisão corrente D .

Saída: Um conjunto de programas de otimização.

```

1 para cada  $s_i \in \mathcal{D}$  faça
2    $\mathcal{G} \leftarrow$  Implementação da estratégia  $s_i$ , i.e., remoção de todas as arestas saindo
   dos nós em  $\mathbb{D}$  que não estão em  $s_i$ ;
3   se  $D$  tem pai então
4      $\lfloor$  Remova a aresta  $(\text{Pai}(D), D)$  de  $\mathcal{G}$ ;
5     Remova de  $\mathcal{G}$  todos os nós (e suas arestas) que não estão conectados ao nó de
     decisão  $D$ ;
6     nó  $\leftarrow$  Filho( $D$ ) em  $\mathcal{G}$ ;
7     para cada nó de decisão  $d \in \mathcal{G}$  ( $d \neq$  raiz) faça
8        $\lfloor$  Insira arestas  $(\text{Pai}(d), \text{Filho}(d))$  em  $\mathcal{G}$ ;
9        $\lfloor$  Remova  $d \in \mathbb{D}$  e seus arcos;
10    restrições  $\leftarrow \emptyset$ , str  $\leftarrow$  “”;
11    Programa(nó);
12    Monte o programa  $P$ , tal que  $P.\text{objetivo} \leftarrow$  str; e  $P.\text{restrições} \leftarrow$  restrições;
13     $\mathbb{P} \leftarrow \mathbb{P} \cup P$ ;
14 devolve  $\mathbb{P}$ ;

```

Na linha 2, a remoção de arestas de \mathcal{T} faz com que o grafo fique desconexo (o grafo é uma floresta). As linhas 3–5 removem todas as árvores que não estão conectadas ao nó de decisão corrente, obtendo novamente uma única árvore, porém menor. Nas linhas 6–9, removemos os nós de decisão do grafo de modo a continuar com uma árvore. A raiz desta

árvore é o filho do nó de decisão corrente. Nas linhas 10–13, montamos os programas de otimização guardando-os em \mathbb{P} . A função devolve \mathbb{P} quando foram obtidos todos os programas de otimização para as estratégias em \mathcal{D} .

O procedimento **Programa(v)** é um algoritmo de busca em profundidade modificado. Ele obtém a função objetivo e as restrições de probabilidade, percorrendo os caminhos que a estratégia define e coletando as restrições de probabilidade nos nós de chance. Assumimos que as arestas em uma árvore de decisão são nomeadas de modo que não hajam repetições. Desta forma, cada aresta corresponde a uma variável do programa de otimização.

Procedimento Programa(v)

```

Marque v como visitado;
se v é nó de utilidade então
  └─ str ← str + utilidade de v ;
senão
  └─ restrições ← restrições + restrições de probabilidade de v ;
para cada nó w = Filho(v), tal que w não foi visitado faça
  └─ se w é nó de utilidade então
    └─ str ← str + nome da aresta (v,w) + "*" + utilidade de w ;
    └─ Marque w como visitado;
    └─ senão
      └─ str ← str + nome da aresta (v,w) + "(";
      └─ Programa(w);
      └─ str ← str + ")";
    └─ se w não é o último filho de v então
      └─ str ← str + "+";

```

Por fim, apresentaremos a função **Combinação(c)**, que recebe um nó de chance e faz a combinação de todas as estratégias admissíveis disponíveis, devolvendo um conjunto de estratégias combinadas, ou vazio se não houver nós de decisão sucedendo o nó de chance c.

Três casos precisam ser analisados na função **Combinação(c)**: (1) a aresta conecta o nó de chance a um nó de decisão; (2) a aresta conecta a outro nó de chance e (3) a aresta conecta o nó de chance a um nó de utilidade.

No caso (1), adiciona-se à **Lista** o conjunto de estratégias admissíveis naquele nó de decisão (o conjunto de estratégias admissíveis em um nó de decisão nunca é vazio, pois assumimos que o tomador de decisão não pode abster-se de escolher). No caso (2), se a chamada recursiva não for vazia, então o conjunto de estratégias combinadas é adicionado à **Lista**. Não adicionamos conjuntos vazios à **Lista**, pois, quando a chamada recursiva devolve vazio, o tomador de decisão não é chamado a fazer escolhas e, conseqüentemente,

Função Combinação(c)**Entrada:** Um nó de chance c **Saída:** Um conjunto de estratégias ou \emptyset

```

1 Lista  $\leftarrow \emptyset$ ;
2 para cada aresta e de c faça
3   nó  $\leftarrow$  Destino( $e$ );
4   se nó  $\in \mathbb{D}$  então
5     Adicione o conjunto nó.Admissíveis em Lista ;
6   senão se nó  $\in \mathbb{C}$  então
7     subestratégia  $\leftarrow$  Combinação(nó);
8     se subestratégia  $\neq \emptyset$  então
9       Adicione subestratégia em Lista ;
10 se Lista  $\neq \emptyset$  então
11   devolve Produto cartesiano de todos os conjuntos de estratégias em Lista;
12 devolve  $\emptyset$ ;

```

não há estratégias a combinar. No caso (3), não adicionamos nada à *Lista*.

Para a correção da função, devemos mostrar que a função *Combinação*(c) devolve vazio caso não haja nós de decisão sucedendo o nó de chance c ; ou um conjunto de estratégias combinadas caso contrário.

Na base da recursão, os filhos de um nó de chance são ou nós de utilidade ou nós de decisão. Pela definição de árvores de decisão, um nó de chance não pode ser folha, pois todas as folhas são nós de utilidade. Suponha que o nó de chance c possua apenas nós de utilidade e nós de chance como sucessores. Então, apenas os casos (2) e (3) serão analisados. Pela hipótese, o caso (2) sempre devolverá vazio, pois ou o nó de chance possui apenas nós de utilidade como filhos (analisando apenas o caso (3), $Lista = \emptyset$, logo a função *Combinação*(c) devolve \emptyset); ou possui nós de chance e nós de utilidade como filhos, porém, sempre alcançando a base com nós de utilidade. Suponha agora que c possua pelo menos um nó de decisão como sucessor. Então, sempre quando a recursão encontrar esta decisão no caso base, *Lista* será diferente de vazio e o número de estratégias será igual ao número de elementos do produto cartesiano do conjunto de estratégias em *Lista*, ou seja, $\mathbb{S}_1 \times \dots \times \mathbb{S}_n = \{(s^1, \dots, s^n) : (s^i \in \mathbb{S}_i), i = 1, \dots, n\}$.

4.1.2 Um exemplo ilustrando o algoritmo para árvore de decisão

Esta subsecção apresenta um exemplo mostrando o funcionamento do algoritmo para resolução de árvores de decisão com preferências parcialmente ordenadas.

Exemplo 10. A Figura 10 mostra um problema de decisão seqüencial, adaptado de (SEIDENFELD, 2004). Suponha que as probabilidades de p e q são imprecisas, onde $p \in [0.25, 0.75]$ e $q \in [0.4, 0.5]$. No nó de escolha inicial, há quatro opções. Para ficar com 1, 2a ou 2b devemos pagar 0.4 unidades e, para ficar com a decisão 3 pagamos 0.35 unidades.

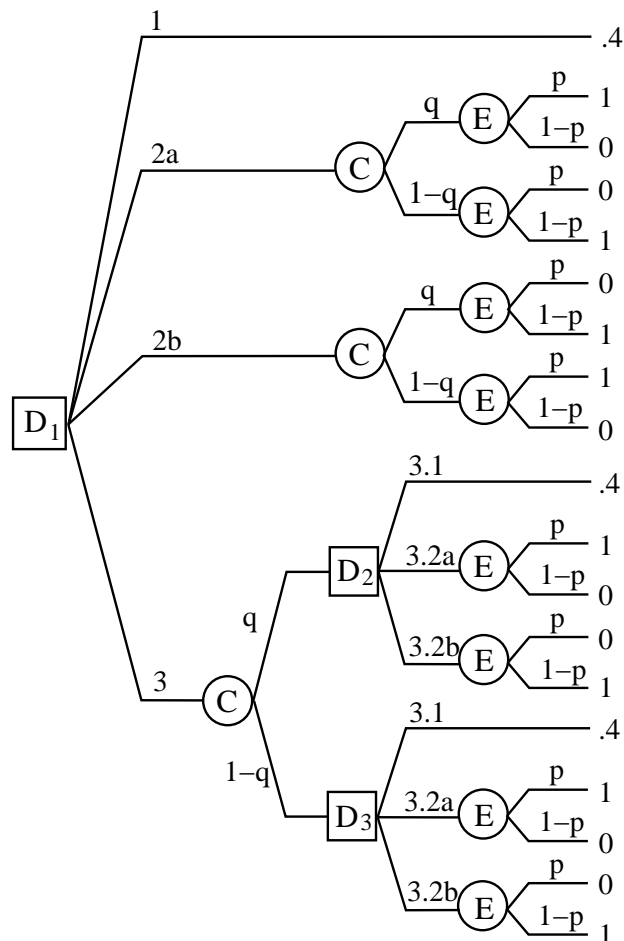


Figura 10: Árvore de decisão para o Exemplo 10.

O algoritmo **Árvore de Decisão** começa sua execução em D_3 . A função **Combinação** é chamada duas vezes, mas devolve vazio (pois não possui nós de decisão sucessores). O conjunto \mathcal{D}_D contém três estratégias (3.1), (3.2a) e (3.2b). Estas estratégias são avaliadas por **Critério-X** e são armazenadas aquelas classificadas como admissíveis. O nó de decisão D_2 é análogo ao nó D_3 . Em D_1 , \mathcal{D}_D contém as estratégias 1, 2a, 2b e todas aquelas obtidas através da combinação das ações admissíveis em D_2 e D_3 . A função **Critério-X** é chamada mais uma vez e finalmente devolve as estratégias admissíveis.

A avaliação por Γ -Maximin em nosso exemplo leva à estratégia (2.a) ou (2.b) ou (3, (3.1,3.1)) com um resultado de 0.05 unidades. Este exemplo mostra que às vezes o critério

Γ -Maximin pode apresentar um comportamento não muito coerente: as escolhas (3.2a) e (3.2b) são inadmissíveis em D_2 e D_3 , porém, a combinação delas é a mesma que (2a) e (2b) e, estas são admissíveis em D_1 (SEIDENFELD, 2004). Usando Γ -Maximax em D_2 e em D_3 , teríamos duas alternativas admissíveis possíveis: (3.2a) e (3.2b). A construção das estratégias em D_1 depende de qual delas foi escolhida como admissível.

Usando Dominação por Intervalo em D_2 e D_3 , obtemos que todas as estratégias são admissíveis, assim, em D_1 temos nove combinações possíveis para a quarta decisão mais as três primeiras estratégias. As estratégias (1) e (3, (3.1, 3.1)) são dominadas. Das restantes:

- quatro possuem $E[s] \in [-0.04, 0.26]$ (combinações entre a decisão (3.1) e as opções (3.2a) ou (3.2b));
- duas possuem $E[s] \in [-0.1, 0.4]$ (a mesma escolha em D_2 e D_3) e;
- duas possuem $E[s] \in [0.1, 0.2]$.

De acordo com o critério Maximalidade, também temos nove combinações possíveis em D_1 para a quarta decisão. As estratégias dominadas são (1), (2a), (2b) e (3, (3.1.3.1)). As outras oito estratégias são admissíveis. Finalmente, se usarmos E-admissibilidade na opção seqüencial 3, as estratégias (3.1) dos nós D_2 e D_3 são E-inadmissíveis. Assim, no nó inicial temos as primeiras três alternativas mais quatro combinações possíveis para a quarta opção. Aplicando E-admissibilidade nestas estratégias temos que as três primeiras são inadmissíveis. Duas têm $E[s] \in [-0.1, 0.4]$ (a mesma escolha em D_2 e D_3) e as outras duas têm $E[s] \in [0.1, 0.2]$.

4.2 Diagrama de influência

Um diagrama de influência (HOWARD; MATHESON, 1984) é uma representação gráfica de incertezas e decisões que revelam explicitamente dependências probabilísticas e fluxos de informação. Alguns trabalhos anteriores aplicam métodos de inferência probabilística em problemas de decisão seqüencial (representados por diagrama de influência) transformando-os em redes Bayesianas (SHENOY, 1992; JENSEN; JENSEN; DITTMER, 1994; COOPER, 1988; SHACHTER, 1998, 1999). Nossa versão estendida de diagrama de influência pode ser vista como uma *rede credal* aumentada com nós de decisão e de utilidade, permitindo assim considerar preferências parcialmente ordenadas.

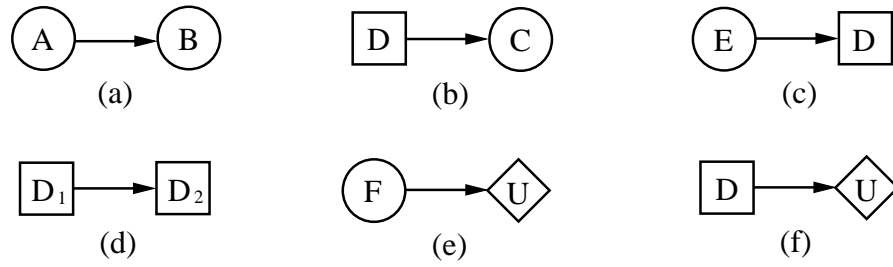


Figura 11: Relações entre nós em um diagrama de influência. (a) A probabilidade da variável B depende do resultado da variável A . (b) A probabilidade da variável C depende da escolha feita em D . (c) O tomador de decisão conhece o resultado da variável E quando a decisão D for tomada. (d) O tomador de decisão conhece o resultado da decisão D_1 quando for decidir em D_2 . (e) A utilidade U depende do resultado da variável F . (f) O resultado da utilidade U depende da decisão tomada em D .

Um diagrama de influência é composto por um grafo direcionado acíclico $\mathcal{G} = \{\mathbb{V}, \mathbb{E}\}$, onde \mathbb{V} é um conjunto finito de nós distintos particionados em três subconjuntos: nós de decisão (quadrados) \mathbb{V}_D , nós de chance (círculos) \mathbb{V}_C ; e nós de utilidade (losangos) \mathbb{V}_U ; e $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ é um conjunto de arestas relacionando os nós de \mathbb{V} . Cada nó está associado a um parâmetro:

- nós de decisão $D_i \in \mathbb{V}_D$ definem um conjunto de ações disponíveis ao tomador de decisão;
- nós de chance $C_i \in \mathbb{V}_C$ são variáveis discretas com distribuições de probabilidades condicionais $p(C_i|pa(C_i))$ (nós de chance podem ser credais);
- nós de utilidade $U_i \in \mathbb{V}_U$ são funções de utilidade que associam um valor para cada configuração dos pais $u(pa(U_i))$.

Em diagramas de influência, as arestas codificam diferentes relações entre os nós. Arestas entrando em nós de chance indicam relações de dependência probabilística. Arestas entrando em nós de decisão indicam informação disponível no momento da decisão. Arestas entrando em nós de utilidade indicam dependência funcional. A Figura 11 ilustra todas as possíveis relações entre nós em um diagrama de influência.

Exemplo 11. *Considere o dilema do fim de semana — um tomador de decisão possui as seguintes opções de ação: ir à praia, assistir um filme no cinema, ou ficar em casa estudando. Todas estas ações estão associadas a um valor de satisfação, que também depende das condições climáticas. Por exemplo, se o dia estiver ensolarado, ir à praia é preferível a ir ao cinema, que por sua vez é preferível a ficar em casa estudando. Caso o dia*

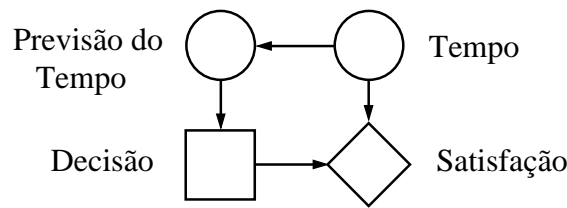


Figura 12: Diagrama de influência representando o dilema do tomador de decisão no fim de semana.

esteja tempestuoso com possibilidade de tornados, então talvez ficar em casa estudando seja preferível às demais opções. Para decidir o tomador de decisão pode consultar a previsão do tempo. A Figura 12 apresenta a representação deste problema de decisão por diagrama de influência.

Neste trabalho assumiremos uma versão de diagramas de influência com memória limitada (*Limited Memory Influence Diagram* — LIMID) (LAURITZEN; NILSSON, 2001). Em LIMIDs, a informação disponível quando a decisão deve ser tomada é representada *explicitamente* por arestas entrando no nó de decisão ($I(D_i) = pa(D_i)$)²

Exemplo 12. *Considere a Figura 13 (a). Nela, o tomador de decisão se lembra de todas as ações e eventos passados. Por exemplo, em D_3 , ele sabe o que escolheu em D_1 e D_2 , e também sabe qual foi o resultado de B . Na Figura 13 (b), o tomador de decisão não tem a informação de tudo o que ocorreu no passado. Em D_3 , ele só tem a informação de qual foi sua escolha no nó de decisão D_2 .*

Usando a representação LIMID é possível modelar problemas de decisão multiestágios sem uma ordem específica nas seqüências de decisões. Porém, neste trabalho iremos focar apenas em problemas com decisões respeitando uma seqüência estabelecida. Note que todos os problemas que podem ser representados por diagramas de influência ordinários também podem ser representados por LIMIDs (LAURITZEN; NILSSON, 2001).

Em diagramas de influência, a informação disponível em um nó de decisão ($I(D_i)$) e a especificação de uma ação definem uma política, ou seja, uma política específica uma

²A versão LIMID adotada neste texto difere da definição original de diagrama de influência (HOWARD; MATHESON, 1984) em dois pontos: número de nós de utilidade e histórico das decisões e eventos. Na definição original de diagrama de influência é permitido somente um nó de utilidade. Como em (TATMAN; SHACHTER, 1990), assumimos que um diagrama de influência pode ter mais de um nó de utilidade para representar a separabilidade da função utilidade e permitir o uso de programação dinâmica dentro do modelo gráfico. A utilidade total é então obtida pela soma das utilidades locais. Na versão original de diagrama de influência, assume-se a propriedade de *no forgetting*, ou seja, o tomador de decisão sempre se lembra das decisões que tomou e dos eventos passados: $I(D_i) = \mathbb{C}_{i-1} \cup D_{i-1} \cup I(D_{i-1})$, onde \mathbb{C}_i denota todas as variáveis de chance observadas entre as decisões D_i e D_{i+1} .

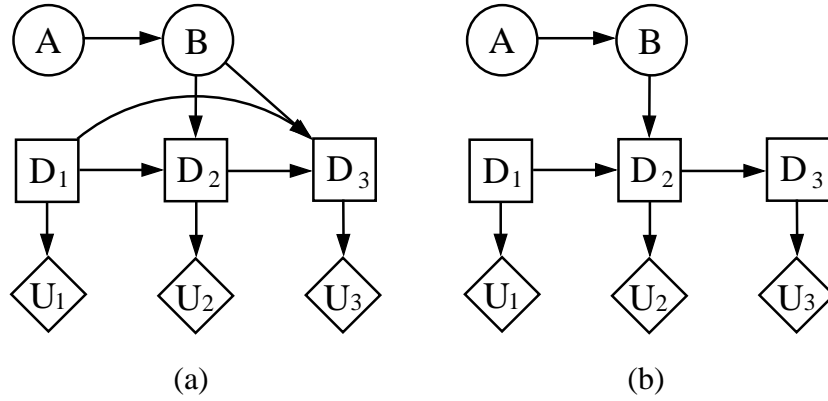


Figura 13: Dois diagramas de influência: (a) contém arcos “no forgetting”; (b) representa um tomador de decisão esquecido.

ação dadas as observações feitas *a priori*.

Definição 9. Uma política δ_i é o mapeamento do passado de D_i para o conjunto de ações de D_i , i.e., $\delta_{D_i} : I(D_i) \mapsto \text{dom}(D_i)$.

Exemplo 13. Considere novamente a Figura 13. Suponha que todos os nós de decisão e os nós de chance são binários. Em (a), uma política para D_3 especifica uma ação para $2^3 = 8$ observações. Em (b), uma política para D_3 especifica uma ação para $2^1 = 2$ observações. A seguir, apresentamos um exemplo de política para D_3 , para as figuras (a) e (b), respectivamente.

$$\delta_{D_3}(B, D_1, D_2) = \begin{cases} b, d_1, d_2 : d_3 \\ b, d_1, \bar{d}_2 : d_3 \\ b, \bar{d}_1, d_2 : d_3 \\ b, \bar{d}_1, \bar{d}_2 : d_3 \\ \bar{b}, d_1, d_2 : d_3 \\ \bar{b}, d_1, \bar{d}_2 : d_3 \\ \bar{b}, \bar{d}_1, d_2 : d_3 \\ \bar{b}, \bar{d}_1, \bar{d}_2 : \bar{d}_3 \end{cases} \quad \delta_{D_3}(D_2) = \begin{cases} d_2 : d_3 \\ \bar{d}_2 : \bar{d}_3 \end{cases}$$

Na política $\delta_{D_3}(B, D_1, D_2)$, a ação d_3 só não é recomendada quando $B = \bar{b}, D_1 = \bar{d}_1, D_2 = \bar{d}_2$. Na política $\delta_{D_3}(D_2)$, a ação d_3 é recomendada sempre. Políticas para D_2 e D_1 dependem do número de políticas admissíveis em D_3 . Se em cada nó de decisão há apenas uma política admissível, então o número de políticas nos nós precedentes depende apenas do número de configurações dos nós de informação. Este exemplo mostra que a remoção de arcos reduz significativamente o número de políticas a analisar.

Uma implementação de política consiste na substituição do nó de decisão D_i por uma variável de chance representando a política δ_{D_i} , ou seja, uma função determinística onde:

$$P(d|pa(D_i)) = \begin{cases} 1 & \text{se } \delta_{D_i} = d \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Definição 10. Uma estratégia Δ é um conjunto ordenado de políticas $\Delta = \{\delta_{D_1}, \dots, \delta_{D_n}\}$ (uma política para cada nó de decisão).

A estratégia ótima $\Delta^* = \{\delta_{D_1}^*, \dots, \delta_{D_n}^*\}$ depende do critério de otimalidade adotado pelo tomador de decisão. Para resolver um diagrama de influência é preciso determinar a estratégia ótima e computar a utilidade esperada pela adesão a tal estratégia.

Um jeito simples, porém extremamente ineficiente (força bruta), de resolver um diagrama de influência com preferências parcialmente ordenadas consiste em: (1) Enumerar todas as estratégias (fazendo a combinação de todas as políticas em todos os nós de decisão); (2) Implementar todas as políticas δ_{D_i} da estratégia; (3) Aplicar um critério de escolha; (4) Computar o valor esperado através do programa de otimização a seguir, onde $\mathcal{X} = \mathbb{V}_D \cup \mathbb{V}_C$:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize/Minimize} && \prod_{X_i \in \mathcal{X}} p(X_i|pa(X_i)) \sum_{U \in \mathbb{V}_U} u(pa(U)) \\ & \text{sujeito a:} && \\ & && \text{Restrições de probabilidade.} \end{aligned}$$

Podemos melhorar o método acima reduzindo o espaço de estratégias, ou seja, usando a função de utilidade local para determinar as ações ótimas locais. Isso reduz o número de políticas possíveis e evita a combinação de políticas dominadas na elaboração de estratégias. Assim, devemos identificar o conjunto de nós de utilidade relevantes para cada nó de decisão D_i .

Definição 11. Um nó de utilidade U é relevante para uma decisão D_i se existe uma atribuição de funções para os nós de chance e utilidade tal que D_i tem impacto na utilidade esperada de U .

Exemplo 14. Considere a Figura 14. Assuma que as funções de probabilidade condicionais são especificadas de modo que o estado de uma variável corresponde ao estado de seus pais. Então, é fácil atribuir funções de utilidade tal que uma decisão em D afeta a utilidade esperada de U .

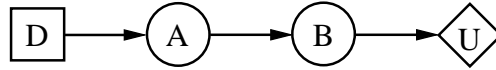


Figura 14: Figura representando um diagrama de influência onde o nó de utilidade U é relevante para a decisão D .

Proposição 1. *O nó de utilidade U é relevante para a decisão D_i se existe um caminho direcionado conectando D_i e U .*

Demonstração. A demonstração é uma extensão dos resultados de dependência e independência em redes credais, seguindo diretamente da estrutura do grafo. U é relevante para D_i se $P(\text{dom}(U)|D_i, \text{pa}(D_i))$ é uma função de D_i , onde $\text{dom}(U)$ são os possíveis resultados no domínio de U . Esta função de probabilidade condicional é função de D_i se D_i estiver d-conectada a U dados $\text{pa}(D_i)$, isto é, se existe um caminho de D_i para U . \square

A função **Encontra nós de utilidade**(D_i) descreve como identificar os nós de utilidade relevantes para um nó de decisão D_i . Este algoritmo encontra o conjunto de nós descendentes de D_i e devolve a intersecção com o conjunto de nós de utilidade \mathbb{V}_U . Para encontrar os descendentes podemos utilizar um algoritmo simples de busca em largura ou profundidade.

Função Encontra nós de utilidade(D_i)

Entrada: Um nó de decisão D_i .

Saída: Um conjunto de nós de utilidade relevantes.

1 $\mathbb{N} \leftarrow$ Liste todos os descendentes de D_i ;

2 **devolve** $\mathbb{N} \cap \mathbb{V}_U$;

Identificados os nós de utilidade requeridos (\mathbb{U}_{R_i}) para uma decisão D_i , devemos identificar o conjunto de variáveis que são d-conectadas a este conjunto. A função **Encontra variáveis D-Conectadas**(D_i, \mathbb{U}_{R_i}) devolve o conjunto de variáveis necessárias no cômputo da utilidade esperada para cada ação em D_i . Este algoritmo que identifica variáveis d-conectadas é bastante documentado na literatura. Nossa ferramenta para resolver diagramas de influência com preferências parcialmente ordenadas implementa o algoritmo descrito em (SHACHTER, 1998).

Definidas as variáveis requeridas, podemos computar a utilidade esperada local através

do seguinte programa de otimização:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize/Minimize} && z \\
 & \text{sujeito a:} && \\
 & && \sum_{\mathbb{X}_Q} p(\mathbb{X}_Q, \mathbb{X}_E) u(\mathbb{X}_Q) - zp(\mathbb{X}_E) = 0; \\
 & && \text{Restrições de probabilidade;} \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

onde, \mathbb{X}_E é o conjunto de *variáveis observadas* ($pa(D_i)$ e D_i) e \mathbb{X}_Q é o conjunto de *variáveis de consulta* (nós de utilidade requeridos \mathbb{U}_{R_i})³.

O Algoritmo 11 (*Diagrama de Influência*) resolve diagramas de influência com probabilidades imprecisas (uma extensão dos algoritmos apresentados em (NIELSEN, 2001; SHACHTER, 1999)). O algoritmo admite mais de uma política em cada nó de decisão e, conseqüentemente, devolve um conjunto de estratégias.

Algoritmo 11: Diagrama de Influência

Entrada: Um diagrama de influência \mathcal{I} .

Saída: Um conjunto de estratégias admissíveis \mathbb{S} .

```

1   $\mathbb{S} \leftarrow \emptyset$ ;
2  para cada  $D_i$ ,  $i \leftarrow N$  até 1 faça
3     $\mathbb{U}_{R_i} \leftarrow$  Encontra nós de utilidade( $D_i$ );
4     $\mathcal{D}_i \leftarrow$  Encontra variáveis D-Conectadas( $D_i, \mathbb{U}_{R_i}$ );
5    para cada configuração  $j$  em  $pa(D_i)$  faça
6       $\mathbb{A} \leftarrow \emptyset$ ;
7      para cada ação  $d \in D_i$  faça
8        para cada  $\Delta \in \mathbb{S}$  faça
9          Implemente as políticas  $\delta$  em  $\Delta$ ;
10          $d_{i,\Delta,j} \leftarrow$  Programa de otimização segundo (4.1) dado  $\mathcal{D}_i$  ;
11          $\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{A} \cup d_{i,j}$ ;
12       Admissível[ $j$ ]  $\leftarrow$  Critério--X( $\mathbb{A}$ );
13      $\mathbb{P}[i] \leftarrow$  Combinação de todas as ações admissíveis em Admissível[ $j$ ];
14      $\mathbb{S} \leftarrow$  Combinação de todas as políticas admissíveis;
15 para cada  $\Delta \in \mathbb{S}$  faça
16   Implemente as políticas  $\delta$  em  $\Delta$ ;
17    $s_\Delta \leftarrow$  Programa de otimização segundo (4.1) dado  $\mathcal{D}_i$  ;
18    $\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{A} \cup s_\Delta$ ;
19 devolve Critério--X( $\mathbb{A}$ );
  
```

³Note que, $z = p(\mathbb{X}_Q, \mathbb{X}_E) u(\mathbb{X}_Q) / p(\mathbb{X}_E)$ é uma inferência marginal em uma rede credal (cálculo de probabilidades superiores e inferiores para um evento na extensão da rede) multiplicada pelos valores de utilidade dos nós em \mathbb{X}_Q . Para efetuar o cômputo em alguns casos, definiremos a probabilidade de um nó de decisão como $P(D_i = d) = 1/|D_i|$, onde $|D_i|$ é o número de possíveis ações em D_i

O algoritmo começa com o último nó de decisão (se não houver uma ordenação completa dos nós de decisão, então uma ordenação arbitrária baseada na topologia do grafo é definida). Em seguida, encontra o conjunto de nós de utilidade relevantes para a decisão D_i (função `Encontra nós de utilidade(D_i)`). Então, a função `Encontra variáveis D-Conectadas(D_i, \mathbb{U}_R)` é usada para encontrar os nós necessários ao cômputo da utilidade esperada para cada ação em D_i .

Os laços mais internos (linhas 7 a 11) montam um programa de otimização dada uma configuração dos pais, a escolha de uma ação $d \in D_i$, e a implementação de uma subestratégia admissível⁴ (se for o último nó de decisão, não existem subestratégias a serem implementadas — o número de programas de otimização montados dependerá apenas das ações em D_i). Note que na linha 10 estamos montando um programa de otimização semelhante à Expressão (4.1), porém não estamos resolvendo-o.

O vetor `Admissível`, na linha 12, receberá o conjunto de ações admissíveis determinadas pela aplicação do critério de otimalidade escolhido no conjunto de ações \mathbb{A} . Neste ponto resolvemos os programas de otimização. A função `Critério-X` é uma função genérica que deve ser substituída por um critério de otimalidade apropriado, apresentado no capítulo anterior.

Na linha 13, constrói-se o conjunto de políticas $\mathbb{P}[i]$ combinando o conjunto de ações admissíveis em `Admissível[j]`. Na linha 14, tem-se a combinação das políticas em $\mathbb{P}[i]$ com as subestratégias usadas na montagem dos programas de otimização, i.e., definimos novas subestratégias $\Delta = \{\delta_{i_j}, \dots, \delta_{n_k}\}$. Estes passos são repetidos até todos os nós de decisão terem sido percorridos. Para finalizar, o algoritmo aplica a representação de variável de chance para todas as políticas em Δ (último laço) e mais uma vez o critério sobre o conjunto de estratégias, devolvendo o conjunto de estratégias ótimas.

4.2.1 Um exemplo ilustrando o algoritmo para diagrama de influência

Esta subseção apresenta um exemplo mostrando o funcionamento do algoritmo para resolução de diagrama de influência com preferências parcialmente ordenadas.

Exemplo 15. *Considere o problema clássico de perfuração de poços de petróleo (oil wild-catter) (RAIFFA, 1968) descrito na Figura 15. O “petroleiro” deve decidir entre perfurar ou não perfurar. O custo da perfuração é \$70K. Se ele decide perfurar, o buraco pode*

⁴A implementação de uma subestratégia consiste na substituição de um nó de decisão por um nó de chance determinístico representando cada política presente na subestratégia.

Resultados do teste (S)	Quantidade de Óleo (O)		
	seco	molhado	surgente
Sem estrutura (ns)	[0.60, 0.65]	[0.30, 0.35]	[0.10, 0.10]
Estrutura aberta (os)	[0.25, 0.30]	[0.40, 0.40]	[0.40, 0.45]
Estrutura fechada (cs)	[0.10, 0.10]	[0.25, 0.30]	[0.45, 0.50]
Não fez teste (nt)	[0.00, 0.00]	[0.00, 0.00]	[0.00, 0.00]

Tabela 4: Intervalos de probabilidades condicionais para o teste da estrutura geológica do local, dado que o teste foi efetuado ($T=sim$). Quando ($T=não$), temos $P(S|O, T = não) = 0$ exceto para $P(S = nt|O, T = não) = 1$.

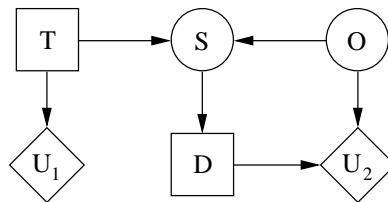


Figura 15: Diagrama de influência para o problema de perfuração de poços de petróleo.

estar surgente, molhado ou seco (com retorno de \$270K, \$120K ou \$0 respectivamente). Suponha que a distribuição de probabilidades a priori para surgente, molhado e seco seja dada pelos intervalos $[0.2, 0.2]$, $[0.3, 0.35]$ e $[0.45, 0.5]$ respectivamente. Com um custo de \$10K, o tomador de decisão pode realizar um teste sísmico da estrutura geológica do local. O teste pode apresentar um resultado indicando: sem estrutura, o que não é nada bom; estrutura aberta, algo razoável ou estrutura fechada, o que é promissor. A especificidade do teste é dada na Tabela 4.

Aplicando o Algoritmo 11 (*Diagrama de Influência*), começamos com a decisão D . Apenas o nó de utilidade U_2 é necessário a D . Aplicando a função para encontrar os nós d-conectados, obtemos que todos os nós são necessários, exceto U_1 . A Tabela 5 mostra os intervalos de utilidade esperada para as ações em D .

Considere a terceira linha da Tabela 5, para saber a utilidade esperada inferior pela ação perfurar dado que o teste sísmico indicou sem estrutura (ns), devemos resolver o seguinte programa de otimização:

Minimize z

sujeito a:

$$\sum_O P(O) P(S = ns|O, T) u(D = sim, O) - zP(S = ns) = 0;$$

Restrições de probabilidade;

D	S	inferior	superior
não	–	0	0
sim	nt	20.00	26.00
sim	ns	-32.76	-21.27
sim	os	32.86	50.00
sim	cs	82.61	91.29

Tabela 5: Utilidade esperada inferior e superior para as ações em D , dado resultado de S . Quando $D = \text{não}$, o valor esperado inferior e superior é igual a 0 independentemente do resultado de S .

Uma política para D especifica como agir nos 4 possíveis resultados de S . Aplicando o critério Γ -Maximix (com $\eta = 0.5$) ao conjunto de ações, encontramos que a ação “não perfurar” não é admissível para todas as configurações de S , exceto no caso em que o teste sísmico aponta “sem estrutura”. Portanto temos apenas uma política admissível no nó de decisão D .

$$\delta_D(S)^* = \begin{cases} nt : \text{sim} \\ ns : \text{não} \\ os : \text{sim} \\ cs : \text{sim} \end{cases}$$

O nó de decisão T representa a decisão de fazer ou não o teste sísmico e deve ser tomada baseada em nenhuma outra informação. Como o critério Γ -Maximix especifica apenas uma política ótima em D , então temos apenas duas políticas para analisar ($\delta_T = \text{sim}$ e $\delta_T = \text{não}$), cuja utilidade esperada é obtido pela soma dos nós de utilidade relevantes (U_1 e U_2), ou seja: $E[T = \text{sim}] = [-10K, -10K] + [31.75K, 37.23K] = [21.75K, 27.23K]$ e $E[T = \text{não}] = [0, 0] + [20K, 26K] = [20K, 26K]$.

Aplicando o critério Γ -Maximix temos que a mistura dos esperados inferior e superior da ação $T = \text{sim}$ é maior que a mistura de $T = \text{não}$, então, no nó T , a ação ótima é fazer o teste sísmico ($\delta_T^* = \text{sim}$). A estratégia ótima é a combinação das políticas ótimas, i.e., $\Delta^* = \{\delta_T^*, \delta_D^*\}$. A utilidade total esperada é $E[\Delta^*] = \$24.49K$. Os critérios Γ -Maximin e Γ -Maximax sugerem a mesma estratégia.

Aplicando o critério E-admissibilidade, obtemos em D a mesma política sugerida por Γ -Maximix, isto é, “não perfurar” somente no caso em que o teste sísmico aponta sem estrutura. Já no nó de decisão T , obtemos que as duas políticas são ótimas ($T = \text{sim}$ e $T = \text{não}$). A combinação das políticas ótimas sugere então duas estratégias ótimas, levando às utilidades esperadas: $[21.75K, 27.23K]$ e $[20.0K, 26.0K]$. Dominação por Intervalo e Maximalidade também sugerem as mesmas estratégias.

5 EXPERIMENTOS

Este capítulo apresenta alguns experimentos, visando investigar a complexidade de resolver diagramas de influência usando critérios baseados em admissibilidade. O capítulo também mostra que, apesar dos desafios computacionais, critérios baseados em admissibilidade produzem resultados razoáveis em situações onde há incertezas.

5.1 Complexidade computacional na resolução de diagramas de influência com probabilidades imprecisas

Esta seção apresenta uma análise do número de estratégias e do tempo gasto na resolução de um problema de decisão seqüencial representado por diagrama de influência com preferências parcialmente ordenadas. Os objetivos são:

1. Mostrar que a resolução de diagramas de influência usando critérios de admissibilidade em geral é mais complexa que a resolução de diagramas de influência usando critérios baseados em ordenação¹.
2. Mostrar que modelos de racionalidade limitada são necessários na prática (LIMID).
3. Fornecer uma noção de tempo de execução para a identificação de estratégias ótimas e cômputo de utilidades esperadas em nossas implementações.

Considere o diagrama de influência da Figura 16. Este problema fictício foi apresentado em (LAURITZEN; NILSSON, 2001) com a seguinte descrição:

Exemplo 16. *Um suinocultor está criando porcos por um período de quatro meses para vendê-los posteriormente. Durante este período, o porco pode ou não desenvolver uma*

¹Vale destacar que a resolução de diagramas de influência com probabilidades precisas já representa um desafio computacional.

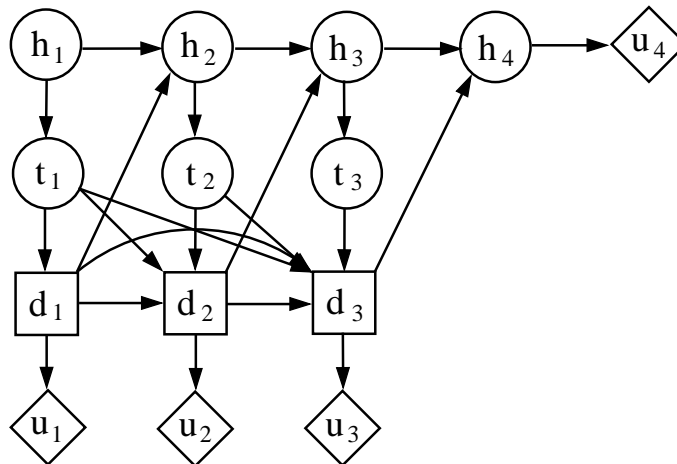


Figura 16: Diagrama de influência (com histórico) para o problema de criação de suínos.

determinada doença (h_i representa a saúde do porco — saudável ou doente). Uma vez por mês, um veterinário faz um teste para detectar a presença da doença (t_j representa o resultado do teste — livre de doença ou tem doença), e o veterinário pode ou não tratar a doença aplicando um certo tratamento (nó de decisão d_k). Os nós de utilidade u_1, u_2, u_3 representam o custo para tratar o porco, e u_4 representa o lucro pela venda do animal.

Na Figura 16, o histórico do tratamento e o resultado dos testes anteriores estão disponíveis sempre que o veterinário for tomar uma decisão. No nó de decisão d_3 , há 5 nós condicionais. Uma política em d_3 especifica uma ação para 32 possíveis observações, ou seja, como todos os nós condicionais têm apenas duas categorias, então, há 2^5 configurações possíveis. Um critério baseado em ordenação faz 64 inferências para descobrir a melhor política. A vantagem de critérios baseados em ordenação é que eles definem uma única política admissível para cada nó de decisão. Isso é extremamente desejável do ponto de vista computacional, pois, para o nó de decisão anterior (d_2), o número de políticas dependerá apenas do número de configurações, ou seja, o indivíduo vai fazer 16 inferências em d_2 e 4 em d_1 .

O caso com critérios baseados em admissibilidade é bem mais complexo. No pior caso, tais critérios podem não fazer bom uso de programação dinâmica. Suponha que depois de fazer as 64 inferências no nó de decisão d_3 , todas as ações sejam classificadas como admissíveis. Neste caso, o número de possíveis políticas é enorme 2^{32} . No nó de decisão d_2 , temos de combinar cada configuração com cada política admissível em d_3 , ou seja, $16 * 2^{32} = 2^{36}$ inferências a fazer. Se estivermos usando Maximalidade, isso significa que temos que resolver $2 * (2^{72} - 2^{36})$ programas de otimização para descobrir as escolhas admissíveis (algo intratável na prática).

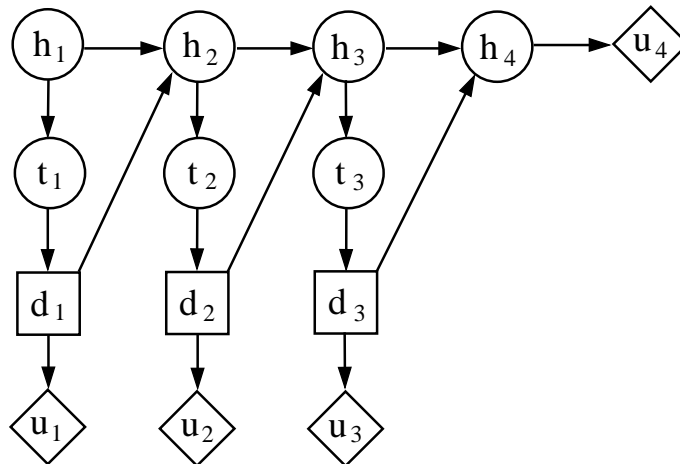


Figura 17: Diagrama de influência (sem histórico) para o problema de criação de suínos.

Considere agora uma versão para o problema de criação de porcos em que o tomador de decisão não lembra de suas decisões passadas e nem dos resultados dos testes anteriores (ele sabe apenas o resultado do teste para o mês corrente). Este problema está representado na Figura 17. Neste caso, na pior das hipóteses, para critérios baseados em admissibilidade, temos 4 programas de otimização para resolver em d_3 , 2^5 em d_2 e 2^{33} em d_1 .

Isso enfatiza a necessidade de critérios seletivos. Se os critérios de escolha não forem seletivos, então o número de estratégias a serem exploradas cresce exponencialmente, inviabilizando a resolução do problema. Além disso, no caso extremo considerado neste exemplo, a aplicação do algoritmo usando um critério baseado em admissibilidade pode não fazer sentido, pois se todas as ações são admissíveis, o algoritmo nada mais fez que listar todas as estratégias possíveis e computar suas utilidades esperadas. A possibilidade de representar tomadores de decisão “esquecidos”, através de LIMIDs, também é uma forma de reduzir a complexidade do problema, pois quanto menor o número de configuração dos pais de um nó de decisão, menor o número de problemas de otimização a serem resolvidos.

Para a análise dos resultados empíricos do Exemplo 16, suponha que:

- o preço de um porco com doença seja de \$300 e, o preço de um porco livre de doença seja \$1000 (nó de utilidade u_4);
- a aplicação do tratamento tem um custo de \$100 (nós de utilidade u_1, u_2, u_3);
- um teste pode ser feito e indica se o porco está doente ou saudável com probabilidades 0.8 e 0.9 respectivamente (nós de chance t_j);

$P(\text{doente})$	Critérios	LIMID		ID	
		#E	T(s)	#E	T(s)
[0.1, 0.2]	$\Gamma - \text{maximin}$	1	2.41	1	10.20
	$\Gamma - \text{maximax}$	1	2.63	1	11.45
	$\Gamma - \text{maximix}$	1	3.59	1	16.03
	Dominação por Intervalo	2	5.35	16	89.95
	Maximalidade	1	1.84	2	17.59
	E-admissibilidade	1	2.39	2	23.58
[0.0, 0.5]	$\Gamma - \text{maximin}$	1	3.74	1	16.48
	$\Gamma - \text{maximax}$	1	5.27	1	32.23
	$\Gamma - \text{maximix}$	1	7.57	1	43.39
	Dominação por Intervalo	8	23.42	—	—
	Maximalidade	2	3.76	—	—
	E-admissibilidade	1	4.14	7	584.64

#E número de estratégias admissíveis
T(s) tempo decorrido em segundos

Tabela 6: Resultados dos experimentos do Exemplo 16.

- um porco saudável que não recebeu tratamento desenvolve doença no mês subsequente com probabilidade 0.2, enquanto um porco saudável que recebeu tratamento desenvolve doença com probabilidade 0.1 (de modo que o tratamento tem algum efeito preventivo);
- um porco doente não tratado continuará a sê-lo no mês subsequente com probabilidade 0.9, enquanto um porco doente e tratado continuará a sê-lo com probabilidade 0.5 (nós de chance h_2, h_3, h_4).
- o tomador de decisão está incerto quanto à saúde do porco no primeiro mês (h_1). Neste experimento assumimos dois intervalos para h_1 , o primeiro é um pequeno intervalo definido perto do problema original ($P(\text{doente}) = [0.1, 0.2]$), enquanto o segundo pressupõe que o tomador de decisão é bem ignorante em relação ao valor que representa a probabilidade da saúde do porco ($P(\text{doente}) = [0.0, 0.5]$).

A Tabela 6 resume nossos experimentos. A coluna #E contém o número de estratégias admissíveis devolvidas pelo nosso programa; e a coluna T(s) contém o tempo médio de execução (média de trinta execuções para cada critério). Chamamos de ID o diagrama de influência da Figura 16 e de LIMID o diagrama de influência da Figura 17.

Um resultado curioso na Tabela 6 é o fato dos critérios Maximalidade e E-admissibilidade parecem mais rápidos na versão LIMID do problema de criação de suínos do que os

critérios baseados em ordenação. Porém, este resultado pode ser atribuído ao *solver* utilizado para resolver os programas de otimização — como a definição de um conjunto de ações admissíveis não requer a computação de valores de probabilidade exatos (apenas um que satisfaça as restrições), então usamos um *solver* aproximado (Minos) para classificar as ações. Após definir todas as estratégias admissíveis, usamos um *solver* exato (Multilin) para computar as expectativas. Isso também explica o fraco resultado de Dominação por Intervalo. Usando o *solver* Minos para descobrir o conjunto de ações admissíveis, Dominação por Intervalo levou em média, no primeiro caso, 2.68s e 56.70s para as versões LIMID e ID, respectivamente. No segundo caso, na versão LIMID, Dominação por Intervalo levou em média 9.45s. Dados os recursos computacionais disponíveis, Dominação por Intervalo e Maximalidade foram incapazes de resolver o problema na versão ID para o segundo caso.

Note que, embora Dominação por Intervalo seja rápido no caso de decisão em estágio único, no caso de decisão seqüencial, a falta de seletividade do critério compromete o desempenho. Para o primeiro intervalo, os tempos de execução de Dominação por Intervalo não são inferiores aos de Maximalidade e E-admissibilidade porque podemos observar que o número de estratégias devolvidas é maior (Dominação por Intervalo resolveu um número maior de problemas de otimização que Maximalidade e E-admissibilidade).

5.2 Qualidade das respostas sugeridas por critérios baseados em admissibilidade

Esta seção analisa, através de dois exemplos, as estratégias produzidas por Γ -Maximin e E-admissibilidade. Consideramos nestes exemplos a utilidade esperada inferior sugerida pelas estratégias como parâmetro. Destacamos também que nosso algoritmo produz uma estratégia Γ -Maximin local diferente da estratégia Γ -Maximin global (estratégia obtida aplicando-se o critério Γ -Maximin no conjunto de todas as estratégias possíveis no nó de decisão inicial).

No primeiro exemplo, o objetivo é argumentar que critérios baseados em E-admissibilidade fazem sentido em problemas de decisão seqüenciais e podem sugerir estratégias “melhores” que Γ -Maximin local. O segundo exemplo mostra que, embora E-admissibilidade sugira uma estratégia melhor que a estratégia Γ -Maximin local, E-admissibilidade não garante que a estratégia Γ -Maximin global esteja dentro de seu conjunto de ações admissíveis, quando não há histórico completo de ações e eventos passados.

	d_1		d_2		d_3	
	x_{3_1}	x_{3_2}	x_{3_1}	x_{3_2}	x_{3_1}	x_{3_2}
valores	150.00	30.00	20.00	140.00	60.00	60.00

Tabela 7: Valores de utilidade para o nó U_3 do Exemplo 17.

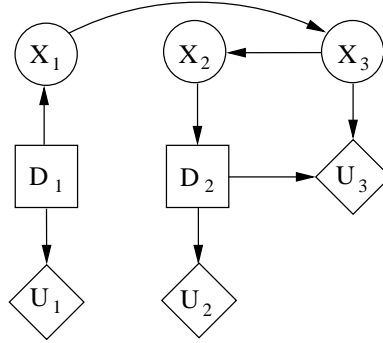


Figura 18: Diagrama de influência para o Exemplo 17.

Exemplo 17. Considere o diagrama de influência da Figura 18. Suponha que as ações disponíveis em D_1 são $\{d_1, d_2\}$, $U_1 = \{-10, 0\}$, o conjunto de ações em D_2 são $\{d_1, d_2, d_3\}$, as respectivas utilidades são $U_2 = \{-20, -20, 0\}$, X_1 , X_2 e X_3 são variáveis binária com probabilidades condicionais dadas por: $P((\) x_{1_1} | d_1) = 0.9$, $P((\) x_{1_1} | d_2) = 0.0$; $P((\) x_{2_1} | x_{3_1}) \in [0.4, 0.5]$, $P((\) x_{2_1} | x_{3_2}) \in [0.2, 0.5]$; $P((\) x_{3_1} | x_{1_1}) \in [0.3, 0.5]$, $P((\) x_{3_1} | x_{1_2}) \in [0.45, 0.55]$. As utilidade de U_3 estão na Tabela 7.

Conforme nosso algoritmo, a estratégia Γ -Maximin no Exemplo 17 sugere d_2 em D_1 e, d_3 em D_2 se x_{2_1} ou x_{2_2} ocorrer. Isto leva a uma utilidade esperada de 60.00 com certeza. O critério E-admissibilidade devolve 5 estratégias admissíveis. As estratégias e suas respectivas utilidades esperadas são apresentadas na Tabela 8.

Este exemplo mostra que Γ -Maximin (e outros critérios de ordenação) podem produzir estratégias ótimas locais quando usadas com programação dinâmica. Tome como exemplo a estratégia 2 — d_1 não é admissível em D_2 de acordo com Γ -Maximin e, portanto, ela

Estratégia	D_1	x_{2_1}	x_{2_2}	inferior	superior
1	d_1	d_2	d_2	49.40	72.20
2	d_2	d_1	d_1	64.0	76.00
3	d_2	d_2	d_1	46.85	72.15
4	d_2	d_1	d_2	57.85	83.15
5	d_2	d_2	d_2	54.00	66.00

Tabela 8: Estratégias devolvidas pelo critério E-admissibilidade no Exemplo 17.

é descartada, mas em D_1 , se considerarmos a estratégia 2 (que sugere escolher d_1 em D_2), podemos observar que esta estratégia tem uma utilidade esperada inferior maior que escolhendo d_3 em D_2 . Isto significa que, para um tomador de decisão implementando um comportamento consequencialista e com incertezas representadas por conjuntos de probabilidades, critérios baseados em admissibilidade podem devolver outras estratégias que façam sentido.

Para finalizar, considere o Exemplo 18. Este problema de planejamento hipotético de operações baseadas em efeitos (*Effects-Based Operation* — EBO) foi apresentado em (CAMPOS; JI, 2008) e está reproduzido na Figura 19 (concentramos somente em sua estrutura).

Exemplo 18. *Suponha que para o diagrama de influência da Figura 19:*

- *todas as variáveis do problema sejam binárias;*
- *todos os nós de decisão possuam duas ações possíveis: sim ou não;*
- *o custo das ações ($U_i, i = 1, \dots, 11$ dado que $D_i = \text{sim}$) sejam: 50 para U_3 , 150 para U_8 , 80 para U_{10} , 100 para U_{11} e 20 para os demais;*
- *o nó de chance C_i representa a taxa de sucesso com probabilidade imprecisa $P((\) c_{i_1} | D_i = \text{sim}) \in [0.9, 1.0]$;*
- *os nós de chance $B_j, j = 1, \dots, 6$ (e o mesmo para $A_k, k = 1, \dots, 3$) possuam probabilidade 1 se todos os pais assumem sim, 50% se possui um pai assumindo não e zero se ele possui mais de um pai assumindo não;*
- *a probabilidade de G seja 1 dado que todos os pais assumem sim, 60% dado que um pai assume não; 30% se dois pais assumem não e 0 se nenhum deles assume sim;*
- *a recompensa por alcançar o objetivo principal seja de 1000, enquanto não alcançar o objetivo custe 500 (nó de utilidade U_H).*

O diagrama de influência da Figura 19 é um tipo especial de diagrama de influência onde os nós de decisão não possuem pais e portanto não há uma ordenação em relação aos nós de decisão. Aplicando nossos algoritmos diretamente neste problema, ele assume uma ordenação topológica arbitrária para os nós de decisão. Usando Γ -Maximin, a estratégia sugerida é efetuar todas as ações exceto em D_5 , D_6 , D_7 e D_8 . A utilidade esperada inferior obtida é -55.28 com tempo de execução aproximado de 40 segundos. Usando o critério de

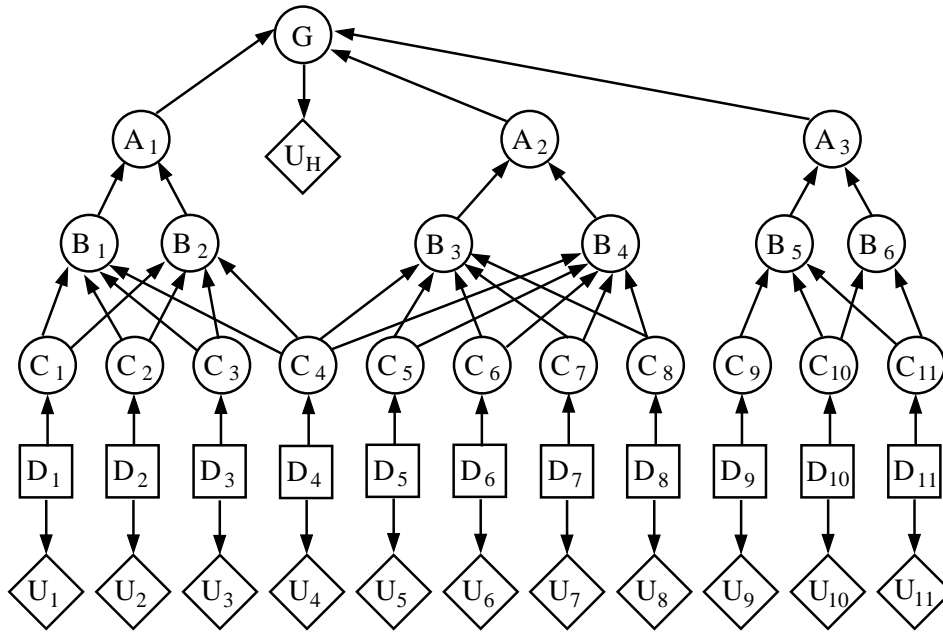


Figura 19: Diagrama de influência para um problema hipotético de planejamento em EBO.

E-admissibilidade, a estratégia sugerida é efetuar todas as ações exceto D_8 . A utilidade esperada é de $[68.97, 330]$ com tempo de execução aproximado de 2 minutos. Embora E-admissibilidade sugira uma estratégia “melhor” que a versão local de Γ -Maximin, ela não garante o ótimo global. Neste exemplo, a estratégia Γ -Maximin global sugere efetuar todas as ações — isto leva a um valor esperado entre $[156.41, 480]$.

Até onde sabemos, não existem algoritmos eficientes para encontrar a estratégia Γ -Maximin global no caso de probabilidades imprecisas. O algoritmo apresentado em (CAMPOS; JI, 2008) permite o cômputo do ótimo global para o critério Γ -Maximax de uma forma eficiente e elegante (uma exceção), mas para outros critérios apresentados nesta tese, não há outra solução a não ser aplicar o método força bruta (uma tarefa complexa mesmo para problemas de decisão não tão grandes). Nossa proposta busca evitar a exploração de todos os possíveis conjuntos de estratégias. Esta abordagem pode sugerir estratégias que não são ótimas em termos de utilidade esperada quando não há informação completa disponível. Porém, ela fornece ao tomador de decisão a possibilidade de avaliar estratégias em situações de recursos limitados, mostrando que outros critérios de escolha não baseados em ordenação completa também fazem sentido em tais situações.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo está dividido em três seções. Na Seção 6.1 apresentamos uma breve discussão sobre os diversos critérios de escolha presentes na literatura de preferências parcialmente ordenadas. Na Seção 6.2 apresentamos um resumo das contribuições deste trabalho e, na Seção 6.3 apresentamos alguns possíveis ramos de pesquisa como sugestão para trabalhos futuros.

6.1 Discussão sobre critérios de escolha

O uso de modelos baseados em preferências parcialmente ordenadas (provenientes de representação de incertezas por conjuntos de probabilidade) faz com que diversos critérios de otimalidade possam ser usados. Com esta diversidade de critérios, surge a questão pertinente e intrigante: *qual* critério usar em tal contexto?

Responder a esta pergunta parece ser tão complicado quanto definir o conceito de racionalidade. Se racionalidade pode ser traduzida como um conjunto de regras, então, como todos os critérios deste trabalho seguem um conjunto de regras, todos poderiam ser considerados “racionais”. No entanto, assim como existem diversos modelos de preferências e seus defensores, em problemas de decisão com preferências parcialmente ordenadas também existem divergências quanto ao uso dos critérios. O que propomos nos próximos parágrafos é apresentar uma análise mesclando aspectos computacionais e descritivos. A Tabela 9 apresenta um resumo da discussão.

Provavelmente o critério mais conhecido e adotado na literatura seja o Γ -Maximin. De fato, este critério é interessante porque garante que no pior caso a solução proposta é a melhor. Entre os defensores deste critério enquadram-se os adeptos da *lei de Murphy*: “Se alguma coisa tem a mais remota chance de dar errado, certamente dará”. Contudo, em situações de decisão sequencial com indução retroativa, a aplicação do critério Γ -Maximin em cada nó de decisão é desaconselhada por não produzir a solução com maior utilidade esperado inferior no nó de decisão inicial (ver Exemplo 17 do capítulo anterior

Crítérios	Vantagens	Desvantagens	#
Γ -Maximin	Velocidade, baixo consumo de recursos computacionais, facilidade de implementação, existência de uma situação em que a escolha sugerida é a melhor (no pior caso)	Solução “extensiva” gerada pelo uso de programação dinâmica difere da solução “normal” (aplicação do critério no conjunto de todas as estratégias possíveis)	n
Γ -Maximax	Mesmas vantagens do Γ -Maximin, exceto que maximiza para o melhor caso	Difícil encontrar adeptos deste critério	n
Γ -Maximix	Maior poder descritivo (permite considerar diversos níveis de aversão ao risco entre os extremos pessimismo/otimismo)	Dificuldade em definir o “ η ” representando o nível de aversão ao risco	$2n$
Dominação por Intervalos	Rápido	Pouco seletivo	$2n$
Maximalidade	Identifica dominância estocástica	Efetua comparação em pares (quadrático)	$2(n^2 - n)$
E-admissibilidade	Identifica dominância estocástica, é seletivo, evita comparação em pares	Complexidade dos programas de otimização	n

Número de programas de otimização avaliados

Tabela 9: Comparação entre critérios de otimalidade usados em situações com preferências parcialmente ordenadas.

e (SEIDENFELD, 2004)).

Γ -Maximax é pouco descritivo. Geralmente, as pessoas são aversas ao risco em situações de ignorância. Grande parte dos modelos que relaxam o axioma de independência leva em conta esta aversão (ver, por exemplo, (KAHNEMAN; TVERSKY, 1979; QUIGGIN, 1982)). Um fator positivo neste critério é que a escolha sugerida geralmente é classificada como admissível pelos critérios baseados em admissibilidade.

A solução Γ -Maximix também é razoável, porém, representar o nível de aversão a ambigüidade que o tomador de decisão possui por um número preciso é tão difícil quanto especificar um valor preciso de probabilidade. Dentre os critérios baseados em ordenação, talvez o mais razoável fosse buscar a solução Γ -Maximin global. Porém, ainda não existem formas eficientes de obter esta solução, deixando em aberto possibilidades de trabalhos futuros.

Critérios baseados em admissibilidade são atraentes porque permitem expressar incomparabilidade ou indecisão entre as possíveis ações. Normalmente, em problemas de decisão, o indivíduo deve escolher *uma* dentre as possíveis ações. Critérios baseados em admissibilidade podem sugerir mais de uma resposta, portanto, depois de classificadas as ações admissíveis, devemos selecionar uma delas aleatoriamente, ou usando algum critério baseado em ordenação. O que propomos neste trabalho é descartar as alternativas dominadas e carregar o conjunto de alternativas incomparáveis até que tenhamos melhores condições de decidir (ou que sejamos forçados a tal — por exemplo, quando temos que decidir qual estratégia adotar no primeiro nó de decisão).

Dominação por Intervalo é o critério menos seletivo dentre os baseados em admissibilidade. Do ponto de vista computacional, Dominação por Intervalo encontra de forma rápida o conjunto de ações admissíveis, porém, em situações de decisão seqüencial, esta vantagem mostra-se bastante limitada (como demonstrado no Exemplo 16 do Capítulo 5, quando há muitas ações admissíveis, o problema pode ficar intratável). Um uso prático de Dominação por Intervalo (sugerido por (TROFFAES, 2007)) é como fase de pré-processamento para eliminar ações não-ótimas antes de aplicar os critérios de Maximalidade ou E-admissibilidade (ações classificadas como dominadas por Dominação por Intervalo também não são admissíveis de acordo com Maximalidade e E-admissibilidade). Porém, em nossos experimentos, não verificamos quão vantajoso é usar esta abordagem.

Tanto o algoritmo de Maximalidade quanto o de E-admissibilidade são caros computacionalmente. Os resultados empíricos apresentados neste trabalho são os primeiros relacionando os dois algoritmos. Como demonstrado, Maximalidade exige a solução de

$2(n^2 - n)$ programas de otimização e E-admissibilidade exige a solução de n programas de otimização. Todavia, os programas de otimização resolvidos por Maximalidade são bem mais simples que os resolvidos por E-admissibilidade (na Tabela 6 do Capítulo 5, se compararmos os dois critérios para o primeiro intervalo, podemos observar que ambos levam ao mesmo número de estratégias e que Maximalidade é um pouco mais rápido; já para o segundo intervalo, Maximalidade não resolve porque o número de programas de otimização a serem avaliados é muito maior que no caso de E-admissibilidade).

A seletividade nos critérios baseados em admissibilidade é um ponto crucial na elaboração de estratégias. Tanto no algoritmo para resolver árvores de decisão quanto no algoritmo para resolver diagramas de influência, um critério pouco seletivo pode inviabilizar a resolução do problema. Se o critério adotado não descarta algumas ações, então no nó de decisão inicial temos a enumeração de todas as estratégias possíveis, o que inicialmente queríamos evitar sugerindo o uso de programação dinâmica.

Para finalizar, a resposta para a pergunta “qual critério adotar em situações de decisão sob incerteza?” é: depende! Depende do objetivo do tomador de decisão (se ele deseja algumas possíveis sugestões de alternativas de acordo com algumas propriedades de racionalidade, ou se ele quer apenas uma alternativa). Depende da norma de comportamento adotada pelo indivíduo. Depende do tamanho e da estrutura do problema para qual estamos tentando propor uma solução. Enfim, dentre todos estes fatores que se deve ter em conta na escolha do(s) critério(s), destacamos o lado computacional, sugerindo novos algoritmos e implementando-os em uma ferramenta para resolver diagramas de influência (ver Apêndice I).

6.2 **Resumo**

Este trabalho explorou um pequeno ramo da árdua área de tomada de decisão. Há muita discussão sobre os diversos modelos de representação numérica de preferência na literatura. Discute-se se determinado axioma faz sentido ou não, se é racional adotar um critério que sugere ações estocasticamente dominadas, se o tomador de decisão é dinamicamente coerente, enfim, vários pontos que devem ser considerados quando definimos um modelo teórico para decisão.

Focamos em preferências parcialmente ordenadas. Já existiam alguns algoritmos para identificação de ações ótimas em problemas de decisão em estágio único com probabilidades imprecisas. Porém, como há vários critérios e não há um consenso sobre qual é o

melhor, discutimos e apresentamos novos algoritmos para alguns deles. Estes algoritmos usam programação matemática.

A principal contribuição deste trabalho está no desenvolvimento dos algoritmos para árvore de decisão e diagrama de influência. Não encontramos algoritmos na literatura para estas duas metodologias que fizessem uso dos diversos critérios de otimalidade existentes. Estes algoritmos assumem que as ações em cada nó de decisão são independentes, favorecendo o uso de programação dinâmica. A dificuldade no desenvolvimento destes algoritmos está na elaboração os programas de otimização representando cada ação.

Com a implementação dos algoritmos para os critérios de escolha e do algoritmo para resolver diagrama de influência, constatamos que as idealizações de racionalidade muitas vezes não são alcançáveis do ponto de vista computacional. Em alguns casos, a simplificação do modelo faz-se necessária (permitindo, por exemplo, que o tomador de decisão “se esqueça” de decisões e eventos passados). Estas simplificações podem produzir diferenças no resultado esperado. Contudo, sem elas poucos problemas podem ser resolvidos na prática.

6.3 **Trabalhos futuros**

Um processo natural de estudo seria a verificação da adequação dos algoritmos desenvolvidos em situações práticas. Situações que exigem tomada de decisão envolvendo incertezas estão presente em várias atividades. Verificar se os algoritmos são descritivos (se os algoritmos prescrevem ações que um ser humano também prescreveria) é uma forma de comprovar a adequação da teoria sobre preferências parcialmente ordenadas. Este é um ponto que deveria ser melhor explorado, pois não há um estudo sistemático, sob o ponto de vista descritivo, que compare os diversos critérios de escolha presentes na teoria de preferências parcialmente ordenadas. Nosso trabalho favorece este estudo porque reúne em uma ferramenta diversos algoritmos, facilitando a comparação dos critérios.

Outra possibilidade é aprofundar o estudo de modelos de decisão baseados em grafo. Árvores de decisão e diagramas de influência são grafos direcionados acíclicos. Embora seja possível descrever um problema onde há repetições de estados através de diagramas de influência (ver Figura 20), tal representação é limitada. Grafos permitindo ciclos, como os usados em Processos de Decisão de Markov (MDPs), são amplamente usados em problemas de planejamento em Inteligência Artificial. O uso de probabilidades imprecisas e de critérios como Maximalidade e E-admissibilidade em tais modelos ainda não foi

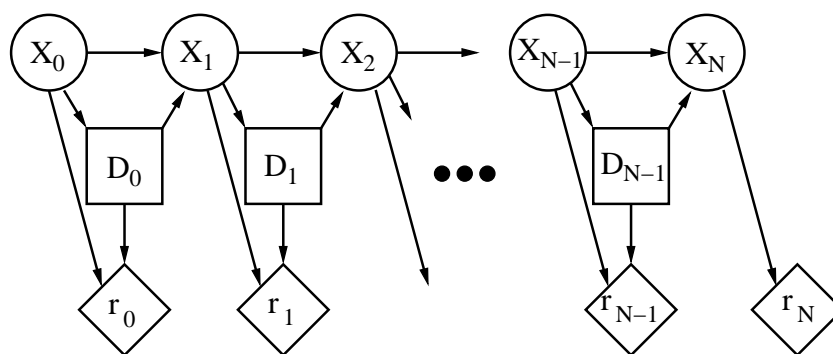


Figura 20: Representação de um MDP através de diagrama de influência. Em cada nó de decisão, tem-se apenas a informação do estado anterior; e cada ação está associada a um custo (nó de utilidade r_i).

explorado.

Uma terceira sugestão para trabalhos futuros seria o estudo de problemas de decisão em grupo. Em tais problemas é comum ter informação incompleta sobre os estados da natureza e sobre as decisões tomadas por outros agentes. A representação de problemas de decisão por diagramas de influência com memória limitada captura de certo modo esta noção. Considere, por exemplo, a Figura 19 do Capítulo 5. Nesta figura, cada decisão pode ser interpretada como um tomador de decisão independente. Em nosso algoritmo definimos implicitamente uma ordenação parcial topológica dos nós de decisão, ou seja, existe uma seqüência interna para efetuar as decisões. O estudo de problemas de decisão em grupo provavelmente exigiria outros mecanismos e algoritmos não abordados neste trabalho. Este estudo seria de grande interesse para os que trabalham com preferências.

REFERÊNCIAS

- ALLAIS, M.; HAGEN, O. *Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company, 1979.
- ANTONUCCI, A.; PIATTI, A.; ZAFFALON, M. Credal networks for operational risk measurement and management. In: *Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. p. 604–611.
- AUMANN, R. J. Utility theory without the completeness axiom. *Econometrica*, v. 30, n. 3, p. 445–461, Julho 1962.
- AVIS, D. LRS: a revised implementation of the reverse search vertex enumeration algorithm. In: KALAI, G.; ZIEGLER, G. (Ed.). *Polytopes – Combinatorics and Computation, DVM-seminars*. Birkhäuser: Verlag, 2000. p. 177–198.
- BELL, D. E.; RAIFFA, H.; TVERSKY, A. Descriptive, normative and prescriptive interactions in decision making. In: BELL, D. E.; RAIFFA, H.; TVERSKY, A. (Ed.). *Decision Making: Descriptive, Normative, and Prescriptive Interactions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. p. 9–32.
- BELLMAN, R. E. *Dynamic programming*. Princeton: Princeton University Press, 1957.
- BERGE, C. *Graphs and Hypergraphs*. New York: North-Holland and American Elsevier, 1973.
- BERGER, J. O. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. New York: Springer-Verlag, 1985.
- BLUME, L.; BRANDEBURGER, A.; DEKEL, E. Lexicographic probabilities and choice under uncertainty. *Econometrica*, v. 59, n. 1, p. 61–79, Janeiro 1991.
- BYKVIST, K. Time-partial morality and dynamic choice. In: RABINOWICZ, W. (Ed.). *Value and Choice – Some Common Themes in Decision Theory and Moral Philosophy*. Lund Philosophy Reports, 2000. p. 53–64.
- CAMPOS, C. P. de. *Redes Credais e Qualitativas: Complexidade e Algoritmos*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2004.
- CAMPOS, C. P. de; COZMAN, F. G. Inference in credal networks using multilinear programming. In: *Proceedings of 2nd European Starting AI Researcher Symposium*. Valencia, Spain: IOS Press, 2004. p. 50–61.
- CAMPOS, C. P. de; COZMAN, F. G. The inferential complexity of Bayesian and credal networks. In: *International Joint Conference on Artificial Intelligence*. Edimburgo, Reino Unido, 2005. p. 1313–1318.

- CAMPOS, C. P. de; JI, Q. Strategy selection in influence diagrams using imprecise probabilities. In: *Proceedings of the 24th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. Helsinki, Finlândia, 2008.
- CAMPOS, L. de; MORAL, S. Independence concepts for convex sets of probabilities. In: *Proceedings of the 11th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-95)*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 1995. p. 108–11.
- CASSANDRA, A. R.; KAELBLING, L. P.; KURIEN, J. A. Acting under uncertainty: discrete Bayesian models for mobile robot navigation. In: *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Osaka, Japan, 1996. v. 2, p. 963–972.
- COOPER, G. F. A method for using belief networks as influence diagrams. In: *Proceedings of the Fourth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. Minneapolis, 1988. p. 55–63.
- COUSO, I.; MORAL, S.; WALLEY, P. A survey of concepts of independence for imprecise probabilities. *Risk, Decision and Policy*, v. 5, p. 165–181, 2000.
- COZMAN, F. G. Irrelevance and independence relations in Quasi-Bayesian networks. In: *Proceedings of the 14th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-98)*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 1998. p. 89–96.
- COZMAN, F. G. Separation properties of sets of probabilities. In: BOUTILIER, C.; GOLDSZMIDT, M. (Ed.). *XVI Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2000. p. 107–115.
- COZMAN, F. G. Graphical models for imprecise probabilities. *International Journal of Approximate Reasoning*, v. 39, p. 167–184, Junho 2005.
- DANIELSON, M. *et al.* The decidit decision tool. In: BERNARD, J.-M.; SEIDENFELD, T.; ZAFFALON, M. (Ed.). *Proceedings of the Third International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications*. Lugano, Switzerland: Carleton Scientific, 2003. (Proceedings in Informatics, v. 18), p. 204–217. ISBN 1-894145-17-8.
- DIESTEL, R. *Graph Theory*. 3.ed. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 173 New York: Springer, 2005.
- EICHENAUER, J.; LEHN, J.; RETTIG, S. A gamma-minimax result in credibility theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, v. 7, n. 1, p. 49–57, Janeiro 1988.
- ELLSBERG, D. Risk, ambiguity, and the Savage axioms. *Quarterly Journal of Economics*, v. 75, n. 4, p. 643–669, 1961.
- ETCHART, N. Adequate moods for non-EU decision making in a sequential framework. *Theory and Decision*, v. 52, p. 1–28, 2002.
- FERTIG, K. W.; BREESE, J. S. Interval influence diagrams. In: *Proceedings of the Fifth Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland Publishing Co., 1990. p. 149–162. ISBN 0-444-88738-5.

- FISHBURN, P. C. *Utility Theory for Decision Making*. New York: Krieger Publishing Company, 1970.
- FISHBURN, P. C. Normative theories of decision making under risk and under uncertainty. In: BELL, D. E.; RAIFFA, H.; TVERSKY, A. (Ed.). *Decision Making: Descriptive, Normative, and Prescriptive Interactions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. p. 78–98.
- FISHBURN, P. C. Preference structures and their numerical representations. *Theoretical Computer Science*, v. 217, p. 359–383, 1999.
- GILBOA, I.; SCHMEIDLER, D. Maxmin expected utility with non-unique prior. *Journal of Mathematical Economics*, v. 18, n. 2, p. 141–153, 1989.
- GIRON, F. J.; RIOS, S. *Quasi-Bayesian Behaviour: a More Realistic Approach to Decision Making?* Valencia: University Press, 1980.
- GOOD, I. J. Rational decisions. *Journal of the Royal Statistical Society*, v. 14, n. 1, p. 107–114, 1952.
- HAMMOND, P. J. Changing tastes and coherent dynamic choice. *The Review of Economics Studies*, v. 43, n. 1, p. 159–173, 1973.
- HAMMOND, P. J. Consequentialism and the independence axiom. In: *Risk, Decision and Rationality*. Dordrecht, Holland: Bertrand Munier, 1984. p. 503–515.
- HARMANEC, D. Generalizing Markov decision processes to imprecise probabilities. *Journal of Statistical Planning and Inference*, v. 105, p. 199–213, Junho 2002.
- HOWARD, R. A.; MATHESON, J. E. Influence diagrams. In: *The Principles and Applications of Decision Analysis*. Menlo Park, CA, 1984. p. 719–762.
- IDE, J. S. *Algoritmos para Inferência Aproximada em Redes Credais com Variáveis Binárias*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2005.
- JAFFRAY, J.-Y. Rational decision making with imprecise probabilities. In: COOMAN, G. D. et al. (Ed.). *Proceedings of 1st International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications*. Ghent, Belgium, 1999.
- JENSEN, F.; JENSEN, F. V.; DITTMER, S. L. From influence diagrams to junction trees. In: *Proceedings of the Tenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*. Seattle, Washington: Morgan Kaufman, 1994. p. 367–373.
- KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Prospect theory: An analysis of decisions under risk. *Econometrica*, v. 47, p. 262–291, 1979.
- KIKUTI, D.; COZMAN, F. G. Influence diagrams with partially ordered preferences. In: *Workshop on Advances in Preference Handling*. Viena, Áustria, 2007.
- KIKUTI, D.; COZMAN, F. G. Sequential decision problems represented by set-valued influence diagrams. In: *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Santa Catarina, Brasil, 2007.

- KIKUTI, D.; COZMAN, F. G.; CAMPOS, C. P. de. Partially ordered preferences in decision trees: computing strategies with imprecision in probabilities. In: *Workshop on Advances in Preference Handling*. Edinburgh, United Kingdom, 2005. p. 118–123.
- KYBURG JR., H. E.; PITTARELLI, M. Set-based Bayesianism. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, v. 26, n. 3, p. 324–339, 1996.
- LAURITZEN, S. L.; NILSSON, D. Representing and solving decision problems with limited information. *Management Science*, v. 47, n. 9, p. 1235–1251, 2001.
- LEVI, I. On indeterminate probabilities. *Journal of Philosophy*, v. 71, p. 391–418, 1974.
- LEVI, I. *The Enterprise of Knowledge*. Massachusetts: MIT Press, 1980.
- LUCE, R. D.; RAIFFA, H. *Games and Decisions*. New York: Wiley, 1957.
- MACHINA, M. J. Dynamic consistency and non-expected utility models of choice under uncertainty. *Journal of Economic Literature*, v. 27, p. 1622–1688, 1989.
- MADSEN, A. L. *et al.* Applications of probabilistic graphical models to diagnosis and control of autonomous vehicles. In: *Proceedings of The Second Bayesian Modeling Applications Workshop*. Banff, Canada, 2004.
- MORAL, S. Algorithm for imprecise probabilities. In: *Algorithms for Uncertain and De-feasible Reasoning*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1999.
- MCCLENNEN, E. F. *Rationality and Dynamic Choice: Foundational Explorations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- MCCLENNEN, E. F. Pragmatic rationality and rules. *Philosophy and Public Affairs*, v. 26, n. 3, p. 210–258, 1997.
- NEUMANN, J. von; MORGENSTERN, O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1944.
- NIELSEN, T. D. Decomposition of influence diagrams. In: *ECSQARU '01: Proceedings of the 6th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty*. London, UK: Springer-Verlag, 2001. p. 144–155. ISBN 3-540-42464-4.
- NIELSEN, T. D.; JAFFRAY, J.-Y. An operational approach to rational decision making based on rank dependent utility. In: *Unpublished Manuscript available on <http://www.cs.aau.dk/tdn/papers/nielsen-jaffray-01.pdf>*, 2001.
- O'ROURKE, J. *Computational Geometry in C*. Second. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1998.
- PAUKER, S. G.; WONG, J. B. The influence of influence diagrams in medicine. *Decision Analysis*, INFORMS, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), Linthicum, Maryland, USA, v. 2, n. 4, p. 238–244, 2005. ISSN 1545-8490.

- PEARL, J. *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference*. Los Altos, CA: Morgan Kaufmann Publishers, 1988.
- PETROSJAN, L. A.; ZENKEVICH, N. A. *Game Theory*. World Scientific, 1996.
- POMEROL, J.-C. Artificial intelligence and human decision making. *European Journal of Operations Research*, v. 99, p. 3–25, 1995.
- POTTER, J. M.; ANDERSON, B. D. O. Partial prior information and decisionmaking. *IEEE Transactions on Systems: Man and Cybernetics*, v. 10, n. 3, p. 125–133, Março 1980.
- PREPARATA, F. P.; SHAMOS, M. I. *Computational Geometry: An Introduction*. New York, NY: Springer-Verlag, 1985.
- QUIGGIN, J. C. A theory of anticipated utility. *Journal of Economic Behavior & Organization*, v. 3, n. 4, p. 323–343, Dezembro 1982.
- RAIFFA, H. *Decision Analysis: Introductory Lectures on Choices Under Uncertainty*. Massachusetts: Addison-Welsey, 1968.
- RAMONI, M. *et al.* Medical decision making using ignorant influence diagrams. In: *Conference on Artificial Intelligence in Medicine*, 1995. p. 139–150. Disponível em: <citeseer.ist.psu.edu/57192.html>.
- ROCHA, J. C. F. da. *Algoritmos para Inferência em Redes Credais*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2004.
- RUSSELL, S.; NORVIG, P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. 2.ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2003.
- SAHEKI, A. H. *Construção de uma Rede Bayesiana Aplicada ao Diagnóstico de Doenças Cardíacas*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2005.
- SAMUELSON, P. A. A note on the pure theory of consumer's behaviour. *Econometrica*, v. 5, n. 17, p. 61–71, Fevereiro 1938.
- SAMUELSON, P. A. Are counterfactual decisions relevant for dynamically consistent updating under nonexpected utility? *Econometrica*, v. 15, p. 243–253, 1948.
- SAMUELSON, P. A. Consumption theory in terms of revealed preference. *Economica*, v. 15, n. 60, p. 243–253, Novembro 1948.
- SAMUELSON, P. A. Probability, utility, and the independence axiom. *Econometrica*, v. 20, n. 4, p. 670–678, Outubro 1952.
- SATIA, J. K.; JR., R. E. L. Markovian decision processes with uncertain transition probabilities. *Operations Research*, v. 21, n. 3, p. 728–740, Maio 1973.
- SAVAGE, L. J. *The Foundations of Statistics*. New York: John Wiley and Sons, 1954.

- SCHERVISH, M. J.; SEIDENFELD T.; KADANE, J. B.; LEVI, I. Extensions of expected utility theory and some limitations of pairwise comparisons. In: *Proceedings of 3rd International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications*. Lugano, Switzerland, 2003. p. 496–510.
- SEIDENFELD, T. Decision theory without “independence” or without “ordering”: what is the difference? *Economics and Philosophy*, v. 4, p. 267–290, 1988.
- SEIDENFELD, T. A contrast between two decision rules for use with (convex) sets of probabilities: Γ -maximin versus E-admissibility. *Synthese*, v. 140, n. 3, p. 69–88, Junho 2004.
- SEIDENFELD, T.; SCHERVISH, M. J.; KADANE, J. B. Decisions without ordering. In: SIEG, W. (Ed.). *Acting and Reflecting*. Dordrecht: Kluwer, 1990. p. 143–170.
- SEIDENFELD, T.; SCHERVISH, M. J.; KADANE, J. B. A representation of partially ordered preferences. *Annals of Statistics*, v. 23, n. 6, p. 2168–2217, Dezembro 1995.
- SEN, A. Behaviour and the concept of preference. *Economica*, v. 40, n. 159, p. 241–259, Agosto 1973.
- SEN, A. K. Rational fools: a critique of the behavioral foundations of economic theory. *Philosophy and Public Affairs*, v. 6, p. 317–344, 1977.
- SHACHTER, R. Bayes-ball: the rational pasttime (for determining irrelevance and requisite information in belief networks and influence diagrams). In: *Proceedings of the 14th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-98)*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 1998. p. 480–48.
- SHACHTER, R. Efficient value of information computation. In: *Proceedings of the 15th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence (UAI-99)*. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 1999. p. 594–60.
- SHENOY, C.; SHENOY, P. P. Bayesian network models of portfolio risk and return. In: *Computational Finance*. Cambridge, MA: MIT Press, 2000. p. 87–106.
- SHENOY, P. P. Valuation-based systems for Bayesian decision analysis. *Operations Research*, Maryland, USA, v. 40, n. 3, p. 463–484, 1992.
- SHERALI, H. D.; TUNCBILEK, C. H. A global optimization algorithm for polynomial programming problems using a reformulation-linearization technique. *Journal of Global Optimization (Historical Archive)*, v. 2, n. 1, p. 101–112, Março 1992.
- SIMON, H. A. A behavioral model of rational choice. *Quarterly Journal of Economics*, v. 69, p. 99–118, 1955.
- SIMON, H. A. *The Sciences of the Artificial*. 1.ed. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1969.
- STROTZ, R. Myopia and inconsistency in dynamic utility maximisation. *Review of Economic Studies*, v. 23, n. 3, p. 165–180, 1956.

- TATMAN, J. A.; SHACHTER, R. D. Dynamic programming and influence diagrams. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, v. 20, n. 2, p. 365–379, 1990.
- THRUN, S. Probabilistic algorithms in robotics. *AI Magazine*, v. 21, n. 4, p. 93–109, 2000.
- TROFFAES, M. C. M. Decision making with imprecise probabilities: A short review. In: COZMAN, F. (Ed.). *Society for Imprecise Probability Theory and Applications Newsletter*. Manno, Switzerland, 2004. p. 4–7.
- TROFFAES, M. C. M. Decision making under uncertainty using imprecise probabilities. *International Journal of Approximate Reasoning*, Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, v. 45, n. 1, p. 17–29, 2007.
- TSENG, C.-C.; GMYTRASIEWICZ, P. J.; CHING, C. Refining influence diagram for stock portfolio selection. In: *Proceedings of the Seventh International Conference of the Society for Computational Economics*, 2001. p. 241–256.
- UTKIN, L. V.; AUGUSTIN, T. Powerful algorithms for decision making under partial prior information and general ambiguity attitudes. In: *Proceedings of 4th International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications*. Pittsburgh, Pennsylvania, 2005.
- WALLEY, P. *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities*. London: Chapman and Hall, 1991.
- WALLEY, P. Measures of uncertainty in expert systems. *Artificial Intelligence*, v. 83, p. 1–58, Maio 1996.

APÊNDICE I – O PACOTE *ID*

O programa ID resolve diagramas de influência com probabilidades imprecisas representadas por conjunto de probabilidades. Ele implementa os seguintes critérios de otimalidade: Γ -Maximin, Γ -Maximax, Γ -Maximix, Dominação por intervalos, Maximalidade e E-admissibilidade. O programa foi implementado em linguagem Java (JDK 1.6.0_02) e os requisitos de software são: Java RE 1.6 (ou mais recente), ILOG CPLEX 10.0 com os *solvers* Minos e Multilin.

Como entrada, o programa recebe um arquivo com extensão “.xml” com a seguinte especificação:

```
<?xml version="1.0" encoding="ISO-8859-1"?>
<!-- Influence diagram in XMLID v0.1 format -->
<!-- DTD for the XMLID 0.1 format -->
<!DOCTYPE ID [
  <!ELEMENT ID ( NETWORK )*>
  <!ATTLIST ID VERSION CDATA #REQUIRED>
  <!ELEMENT NETWORK ( NAME, ( PROPERTY | NODE | DEFINITION )* )>
  <!ELEMENT NAME (#PCDATA)>
  <!ELEMENT NODE ( NAME, ( OUTCOME | PROPERTY | POSITION)* ) >
  <!ATTLIST NODE TYPE (nature|decision|utility) "nature">
  <!ELEMENT OUTCOME (#PCDATA)>
  <!ELEMENT DEFINITION ( FOR | GIVEN | CREDALSET | PROPERTY )* >
  <!ELEMENT FOR (#PCDATA)>
  <!ELEMENT GIVEN (#PCDATA)>
  <!ELEMENT CREDALSET (CONSTRAINT | VARIABLE)*>
  <!ELEMENT CONSTRAINT (#PCDATA)>
  <!ATTLIST CONSTRAINT NAME CDATA #REQUIRED>
  <!ELEMENT VARIABLE (#PCDATA)>
  <!ELEMENT PROPERTY (#PCDATA)>
  <!ELEMENT POSITION EMPTY>
  <!ATTLIST POSITION X CDATA #REQUIRED Y CDATA #REQUIRED>
]>
```

O fragmento de arquivo a seguir descreve a especificação um nó de decisão, um nó de chance e um nó de utilidade.

```

<NODE TYPE="decision">
  <NAME>D1</NAME>
  <OUTCOME>ntreat</OUTCOME>
  <OUTCOME>treat</OUTCOME>
</NODE>
<DEFINITION>
  <FOR>D1</FOR>
  <GIVEN>R1</GIVEN>
</DEFINITION>

<NODE TYPE="nature">
  <NAME>R1</NAME>
  <OUTCOME>I1</OUTCOME><!--ill-->
  <OUTCOME>H1</OUTCOME><!--healthy-->
</NODE>
<DEFINITION>
  <FOR>R1</FOR>
  <GIVEN>H1</GIVEN>
  <CREDALSET>
    <VARIABLE>R1_0 &#62;= 0.8, &#60;= 0.8</VARIABLE><!--I1|HD1-->
    <VARIABLE>R1_1 &#62;= 0.1, &#60;= 0.1</VARIABLE><!--I1|DF1-->
    <VARIABLE>R1_2 &#62;= 0.2, &#60;= 0.2</VARIABLE><!--H1|HD1-->
    <VARIABLE>R1_3 &#62;= 0.9, &#60;= 0.9</VARIABLE><!--H1|DF1-->
    <CONSTRAINT>R1_0 + R1_2 = 1.0</CONSTRAINT>
    <CONSTRAINT>R1_1 + R1_3 = 1.0</CONSTRAINT>
  </CREDALSET>
</DEFINITION>

<NODE TYPE="utility">
  <NAME>C2</NAME>
  <OUTCOME>v</OUTCOME>
</NODE>
<DEFINITION>
  <FOR>C2</FOR>
  <GIVEN>D2</GIVEN>
  <CREDALSET>
    <VARIABLE>C2_0 &#62;= 0.0, &#60;= 0.0</VARIABLE>
    <VARIABLE>C2_1 &#62;= -100.0, &#60;= -100.0</VARIABLE>
  </CREDALSET>
</DEFINITION>

```

Cada linha com a *tag* GIVEN especifica uma relação de dependência entre variáveis (por exemplo, o nó de utilidade C2 depende do nó de decisão D2). Cada linha com a *tag* OUTCOME define uma categoria do nó, cada linha com a *tag* VARIABLE contém uma variável

```

kikuti@margot: /home/kikuti
daniel@margret:~/workspace/LIMID/bin$ java id.Id ../limid_pigs_interval2.xml 6
XML File version: 0.1

Strategy 0

Decision node: D1
R1 = I1: ntreat
R1 = H1: ntreat

Decision node: D2
R2 = I2: treat
R2 = H2: ntreat

Decision node: D3
R3 = I3: treat
R3 = H3: ntreat

Expected utility: 669.7565000000002      741.0745736100002
*****

daniel@margret:~/workspace/LIMID/bin$

```

Figura 21: Tela ilustrando saída do programa ID.

do programa convexo representando o conjunto credal (esta variável deve começar com o nome do nó, seguido de um índice i representando sua posição em uma matriz n -dimensional representada por um vetor). Os símbolos $>$ e $<$ representam os sinais de $>$ e $<$ respectivamente (cada variável deve ter um intervalo associado). Cada linha com a *tag* CONSTRAINT define uma restrição do conjunto credal.

Para executar o programa ID, basta entrar com a seguinte linha de comando:

```
java Id arquivo.xml NC [parâmetros]
```

Onde NC é igual a 1 para Γ -Maximin, 2 para Γ -Maximax, 3 para Γ -Maximix (note que este critério exige a especificação do parâmetro η — um valor no intervalo $[0, 1]$), 4 para Dominação por intervalos, 5 para Maximalidade e 6 para E-admissibilidade. A Figura 21 apresenta a saída do programa ID para o exemplo de criação de porcos na versão LIMID.

O programa ID e o conjunto de testes empregado no Capítulo 5 estão disponíveis no sítio do *Laboratório de Tomada de Decisões* da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo: <http://www.pmr.poli.usp.br/ltd/>.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)