

**UM MODELO PARA A OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO DE  
GASODUTOS E UMA PROPOSTA HEURÍSTICA PARA SUA  
SOLUÇÃO**

**GILBERTO MAZOCO JUBINI**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE – UENF**

**CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ**

**MARÇO – 2008**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**UM MODELO PARA A OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO DE GASODUTOS E UMA  
PROPOSTA HEURÍSTICA PARA SUA SOLUÇÃO**

**GILBERTO MAZOCO JUBINI**

“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção”.

Orientador: José Ramón Arica Chávez, D. Sc.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE – UENF**

**CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ**

**MARÇO – 2008**

## FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pela Biblioteca do **CCT / UENF**

**35/2008**

Jubini, Gilberto Mazoco

Um modelo para a otimização da operação de gasodutos e uma proposta heurística para sua solução / Gilberto Mazoco Jubini. – Campos dos Goytacazes, 2008.

xii, 82 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) --Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Engenharia de Produção. Campos dos Goytacazes, 2008.

Orientador: José Ramón Arica Chávez.

Área de concentração: Pesquisa operacional

Bibliografia: f. 70-74

1. Modelo matemático 2. Transporte de gás 3. Pseudo-algoritmo 4. GRASP I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Engenharia de Produção II. Título

CDD 665.744068

**UM MODELO PARA A OTIMIZAÇÃO DA OPERAÇÃO DE GASODUTOS E UMA  
PROPOSTA HEURÍSTICA PARA SUA SOLUÇÃO**

**GILBERTO MAZOCO JUBINI**

**“Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção”.**

Aprovada em 24 de março de 2008.

Comissão Examinadora:

---

Prof.<sup>o</sup> Edson Kenji Iamashita, D. Sc. – PETROBRÁS

---

Prof.<sup>o</sup> Geraldo Galdino de Paula Junior, D. Sc. – LEPROD/UENF

---

Prof.<sup>o</sup> Gudelia Guillermina Morales de Arica, D.Sc. – LEPROD/UENF

---

Prof.<sup>o</sup>: José Ramon Arica Chávez, D. Sc. – LEPROD/UENF

**Orientador**

## DEDICATÓRIA

À Deus que cuida e orienta a minha vida

### AGRADEÇO

*Toda a boa dádiva e todo dom perfeito são lá do alto, descendo do Pai.*      *Tiago 1:17.*

*O Senhor é meu pastor e nada me faltará.*      *Salmo 23:1.*

### DEDICO

Ao professor José Ramón Arica Chávez, que com paciência, sabedoria, dedicação e, às vezes, com sacrifício tornou possível à realização deste trabalho.

### OFEREÇO

Aos meus pais José Jubini e Gerci Elena Mazoco Jubini, sem os quais eu não existiria e que me ajudaram e incentivaram com amor. Aos meus filhos Rita de Cássia Moreira Jubini e Marcelo Augusto Moreira Jubini, que me re-ensinaram a acreditar na vida e a ter novas expectativas.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, Senhor da minha existência, pela oportunidade de desenvolver este trabalho e por ter colocado as pessoas certas em meu caminho.

Ao meu orientador, José Ramón Arica Chávez, que pela oportunidade, pela amizade, paciência, dedicação, companheirismo, exemplo e ensinamentos transmitidos tornou possível à concretização deste trabalho, agradeço também pela orientação na condução desta pesquisa e pelo quanto me fez crescer profissionalmente e como pessoa.

Aos funcionários da Universidade Estadual Norte Fluminense que, direta ou indiretamente, colaboraram na condução deste trabalho, em especial à Kátia secretária do LEPROD e ao Rogério secretário do programa de pós-graduação em Engenharia de Produção, pelo apoio e pela amizade.

A Professora Dr.<sup>a</sup> Gudelia Guillermina Morales de Arica, pelos ensinamentos transmitidos, amizade e incentivo.

A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, em especial ao Professor Dr. Geraldo Galdino de Paula Junior, pelos ensinamentos transmitidos e sugestões apresentadas;

Aos meus pais José e Gerci pelo apoio e incentivo, aos filhos Rita de Cássia e Marcelo Augusto que me motivam para continuar a minha caminhada e a Teresa pelo apoio em meus estudos.

Ao amigo Rodrigo Resende Ramos que não mediu esforços para me incentivar e que através de seu apoio foi possível à realização deste trabalho.

Ao amigo e colega de mestrado Frederico Galaxe Paes, pela sua colaboração na realização deste trabalho.

A amiga Veruschka, que mesmo à distância, me incentivou, me ajudou e apoiou, com paciência, habilidade e sabedoria contribuiu para a concretização deste trabalho.

A amiga e colega de mestrado Sara Meira Moutta que muito me ajudou na compreensão dos artigos, que incentivou e fez acreditar que seria possível concluir este trabalho

Aos amigos e companheiro de viagens, em especial ao amigo Daniel que com sua paciência, sabedoria e irreverência tornou nossas viagens mais agradáveis.

Aos amigos e companheiros de repúblicas, em especial ao amigo Ailton que com sua animação e alegria fez com que a vida na republica fosse mais amena.

A todos os amigos e colegas que me ajudaram de uma forma ou de outra no desenvolvimento deste trabalho, em especial ao Ângelo e à Márcia com quem trabalhamos juntos, neste mesmo projeto.

Aos membros da banca por compartilharem suas experiências profissionais na avaliação desta dissertação.

À Universidade Estadual Norte Fluminense, pela oportunidade de estudo e desenvolvimento desta dissertação.

À Coordenadoria de apoio a Pesquisa e Ensino Superior – CAPES, pela bolsa concedida, com a qual foi possível garantir autonomia para investir no projeto.

A todos os verdadeiros mestres que, desde a alfabetização até este curso de pós-graduação, ofereceram o seu conhecimento e mostraram os caminhos a serem seguidos, um agradecimento especial.

## SUMÁRIO

|                                                                             |      |
|-----------------------------------------------------------------------------|------|
| LISTA DE TABELAS .....                                                      | x    |
| LISTA DE FIGURAS .....                                                      | xi   |
| RESUMO.....                                                                 | xiii |
| ABSTRACT .....                                                              | xiv  |
| CAPÍTULO 01 – INTRODUÇÃO .....                                              | 1    |
| 1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA .....                                             | 1    |
| 1.2 OBJETIVOS.....                                                          | 4    |
| 1.3 CONTRIBUIÇÕES .....                                                     | 5    |
| CAPÍTULO 02 – REVISÃO DE LITERATURA .....                                   | 6    |
| CAPÍTULO 03 – HIPÓTESES PARA UMA REDE DE TRANSPORTE .....                   | 12   |
| 3.1 REDE DE TRANSMISSÃO.....                                                | 13   |
| 3.2 DECOMPONDO A REDE DE TRANSMISSÃO .....                                  | 16   |
| 3.2 REDE REDUZIDA ASSOCIADA.....                                            | 21   |
| 3.3 CONTROLANDO O SUB-PROBLEMA .....                                        | 23   |
| CAPÍTULO 04 – MATRIZ DE CICLOS REDUZIDA.....                                | 28   |
| 4.1 ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DE GRAFOS.....                               | 28   |
| CAPÍTULO 05 – DOMÍNIO E FUNÇÃO CUSTO EM UMA REDE DE TRANSMISSÃO .....       | 33   |
| 5.1 DOMÍNIO DE UMA ESTAÇÃO GENERALIZADA.....                                | 33   |
| 5.2 FUNÇÃO CUSTO DE COMBUSTÍVEL PARA UMA ESTAÇÃO<br>GENERALIZADA .....      | 41   |
| 5.2.1 Domínio generalizado aproximado.....                                  | 43   |
| 5.2.1 Função custo generalizada aproximada.....                             | 44   |
| CAPÍTULO 06 – MATERIAIS E MÉTODOS.....                                      | 46   |
| 6.1 O PROBLEMA DO TRANSPORTE DE GÁS NATURAL EM REDE .....                   | 46   |
| 6.2 MODELO MATEMÁTICO PARA O PROBLEMA DE REDE EM ESTADO<br>CONTÍNUO.....    | 47   |
| CAPÍTULO 07 – TESTES NUMÉRICOS, PSEUDO-ALGORITMO E RESULTADOS .....         | 53   |
| 7.1 Algoritmo GRASP .....                                                   | 53   |
| 7.2 Pseudo-Algoritmo 4 (GRASP) – Minimização de custos em um gasoduto ..... | 54   |
| 7.3 TESTES NUMÉRICOS .....                                                  | 57   |

|                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------|----|
| CAPÍTULO 08 – CONCLUSÕES .....                               | 67 |
| 9.0 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....                         | 70 |
| APÊNDICE A: ÁRVORE GERADORA .....                            | 75 |
| A.1 CONCEITOS BÁSICOS .....                                  | 75 |
| A.2 SUBGRAFO E ÁRVORE GERADORA .....                         | 76 |
| A.3 COMO ENCONTRAR A ÁRVORE GERADORA.....                    | 77 |
| A.4 ALGORITMO DE PRIM PARA DETERMINAR A ÁRVORE GERADORA..... | 78 |
| A.5 ALGORITMO DE PRIM .....                                  | 79 |
| A.6 ALGORITMO DE PRIM (MATLAB) .....                         | 79 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Tabela 01:</b> Exemplo de divisão da taxa de fluxo de massa $W$ para compressores do tipo A e do tipo B, de uma mesma estação de compressão.....                    | 39 |
| <b>Tabela 02:</b> Resultados obtidos em duas iterações utilizando a rede do exemplo 1, com estações de compressão compostas de compressores do tipo A e do tipo B. ... | 60 |
| <b>Tabela 03:</b> Lista restrita de candidatos para o algoritmo GRASP.....                                                                                             | 62 |
| <b>Tabela 04:</b> Primeira Iteração do Algoritmo 4 com ponto inicial $(W_4, W_6)=(98,72)$ . ....                                                                       | 63 |
| <b>Tabela 05:</b> Segunda Iteração do Algoritmo 4 com ponto inicial $(W_4, W_6)=(92,78)$ . ..                                                                          | 64 |
| <b>Tabela 06:</b> Terceira Iteração do Algoritmo 4 com ponto inicial $(W_4, W_6)=(86,84)$ .....                                                                        | 65 |
| <b>Tabela 07:</b> Passo 5 do Algoritmo 4; procura do melhor ponto na vizinhança originada pelas pressões. ....                                                         | 66 |

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Figura 01:</b> Exemplo de rede em cano-de-revólver .....                                                                                                          | 7  |
| <b>Figura 02:</b> Exemplo de rede em Árvore.....                                                                                                                     | 7  |
| <b>Figura 03:</b> Exemplo de rede com Ciclo.....                                                                                                                     | 8  |
| <b>Figura 04:</b> Exemplo de desvios em uma rede de transmissão de gás .....                                                                                         | 13 |
| <b>Figura 05:</b> Exemplo de sub-grafos depois da remoção de arcos de compressão. ...                                                                                | 17 |
| <b>Figura 06:</b> Exemplo de uma rede reduzida $G'$ .....                                                                                                            | 21 |
| <b>Figura 07:</b> Exemplo de um Sistema em cano-de-revólver.....                                                                                                     | 22 |
| <b>Figura 08:</b> Grafo com Ciclo.....                                                                                                                               | 28 |
| <b>Figura 09:</b> Os ciclos fundamentais no grafo. As arestas indicam uma árvore. ....                                                                               | 30 |
| <b>Figura 10:</b> Perfil dos domínios unitários de três tipos de compressores<br>( $p_s = 500(psia)$ ) .....                                                         | 36 |
| <b>Figura 11:</b> Perfil dos domínios unitários de dois tipos de compressores<br>( $p_s = 500(psia)$ ) .....                                                         | 37 |
| <b>Figura 12:</b> Eficiência $\eta$ para os compressores do tipo A e B.....                                                                                          | 37 |
| <b>Figura 13:</b> Custo de combustível para diferentes números de compressores em uma<br>estação de compressão com quatro compressores idênticos e em paralelo. .... | 41 |
| <b>Figura 14:</b> Aproximação inteira para os perfis dos domínios unitários dos<br>compressores do tipo A e do tipo B.....                                           | 43 |
| <b>Figura 15:</b> Aproximação externa para os perfis dos domínios unitários dos<br>compressores do tipo A e do tipo B.....                                           | 44 |
| <b>Figura 16:</b> Estação de compressão, com $K_{ab}$ compressores.....                                                                                              | 50 |
| <b>Figura 17:</b> Balanço de fluxo dado o nó <b>a</b> .....                                                                                                          | 51 |
| <b>Figura 18:</b> Balanço de pressões nos gasodutos.....                                                                                                             | 51 |
| <b>Figura 19:</b> Rede Simples de transmissão de gás natural. ....                                                                                                   | 57 |
| <b>Figura 20:</b> Rede de transmissão de gás natural com ciclos. ....                                                                                                | 61 |
| <b>Figura A1:</b> Árvore Geradora $T$ de solução: $\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{5,6\}$ .....                                                                    | 75 |
| <b>Figura A2:</b> Grafo.....                                                                                                                                         | 76 |
| <b>Figura A3:</b> Subgrafo .....                                                                                                                                     | 76 |
| <b>Figura A4:</b> Subgrafo e Árvore Geradora .....                                                                                                                   | 76 |
| <b>Figura A5:</b> Grafo.....                                                                                                                                         | 77 |

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| <b>Figura A6:</b> Não representa uma árvore geradora..... | 77 |
| <b>Figura A7:</b> Subgrafo Gerador .....                  | 78 |
| <b>Figura A8:</b> Árvore Geradora .....                   | 78 |

## RESUMO

O desenvolvimento deste trabalho tem por objetivo apresentar um modelo matemático para o problema de minimização do custo de combustível num gasoduto de gás natural em estado estacionário. Sabe-se que a medida em que o gás flui, perde pressão, principalmente devido à fricção com a parede interna dos dutos. As estações de compressão são equipamentos compostos por vários compressores, instalados ao longo da rede para restabelecer periodicamente a pressão perdida e manter a movimentação do gás. Esta operação consome, parte do gás transportado, na forma de combustível. Uma parte significativa do custo operacional da movimentação de gás natural está associada à operação das estações de compressão. O problema trata como determinar a melhor configuração dos compressores de cada estação para minimizar o custo total do combustível.

A estrutura do modelo matemático de minimização de custo de combustível em redes de gasodutos é complexa. O problema é NP-completo. Baseados em Ríos-Mercado et al (2000, 2002, 2004) e Wu et al (2000), desenvolveu-se um modelo mais próximo da realidade introduzindo variáveis binárias associadas à operação dos diferentes compressores de cada estação. O modelo resultante é misto-inteiro, quadrático, não convexo e não diferenciável, onde algumas das funções envolvidas estão dadas implicitamente.

A proposta algorítmica é baseada em técnicas meta-heurísticas, tipo GRASP. Uma abordagem similar foi usada para o caso do transporte de gás natural *off-shore*, proposta por Iamashita (2006), que é um caso particular do problema estudado.

Vários exemplos numéricos encontrados na literatura foram testados e seus resultados se apresentam ao final deste trabalho, verificando o potencial desta proposta.

**PALAVRAS-CHAVES:** Transporte de gás, modelo matemático, pseudo-algoritmo, GRASP.

## ABSTRACT

The aim of this work is to develop a mathematical model for the fuel cost minimization of steady-state gas pipeline networks problem. As the gas flows through the network it loses pressure mainly due to friction with pipes inner wall. The compressor stations are equipments composed by several compressors, installed in the network to restore periodically the lost pressure to keep the gas moving. This operation consumes part of the transported gas, resulting in a fuel consumption cost. A significant part of natural gas transporting operational cost is associated to operate compressor stations. Thus, the problem deals with determining the best configuration of compressors at each station to minimize the fuel cost.

The mathematical model structure of the minimization fuel cost for steady-state gas pipeline networks is complex. The problem is NP-complete. Here, based on Ríos-Mercado et al (2000, 2002, 2004) and Wu et al (2000), it is developed a more real world model, by introducing binary variables associated to the operation of the different compressors at each station. The resulting model is mixed-integer, quadratic, non-convex and non-differentiable, where some of the involved functions are implicitly given.

The algorithmic approach is based in meta-heuristic techniques, GRASP type. A similar approach was used in the case of transporting offshore natural gas proposed by Lamashita (2006), which is a particular case of the studied problem.

Several numerical experiments were done with examples given in the literature, whose results are shown at the end of this work, verifying the potential of this approach.

**KEY WORDS:** gas transporting, mathematical model, pseudo-algorithmic, GRASP.

## CAPÍTULO 01 – INTRODUÇÃO

### 1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Os sistemas de transporte de gás natural através dos gasodutos cresceram e se tornaram mais complexos e a importância de operação ótima e planejada destas instalações, também cresceu. As despesas com as operações de redes de transporte e com os gasodutos são de tal magnitude que até mesmo pequenas melhorias na utilização do sistema são significativas.

Extrair, transportar e distribuir são serviços da indústria de gás natural e este trabalho focalizou-se no transporte por uma rede de gasodutos. Sendo a movimentação de gás dividida em duas etapas: o transporte e a distribuição.

A extração de gás natural associado consiste em retirar gás e óleo de um reservatório, separar o gás do óleo, se necessário, utilizar o gás necessário e suficiente para manter a estação de compressão e disponibilizar o volume excedente para ser transportado através dos gasodutos e distribuído pelos nós de entrega. Um sistema de extração de óleo e gás é composto por um determinado número de reservatórios, estações de compressão e gasodutos, todos interligados a centros de distribuição.

O transporte de gás natural consiste em mover um grande volume de gás excedente em altas pressões e em longas distâncias, ou seja, de fontes de extração para centros de distribuições.

A distribuição consiste em entregar gás natural a clientes individuais. Para ser transportado e distribuído, o gás natural passa por diversos dispositivos como: gasodutos, reguladores, válvulas e compressores. Durante o percurso, o gás natural perde pressão devido à fricção com a parede dos gasodutos e para ser transportado ao seu destino final, recebe re-compressão nas estações que fazem parte da rede de transmissão. As companhias de petróleo objetivam minimizar os custos da movimentação de gás natural, de maneira que as demandas continuem sendo satisfeitas, além de atender os níveis de pressão e de fluxos exigidos nos nós de fonte e/ou de entrega. (Ríos-Mercado et al., 2004; lamashita, 2006).

O custo operacional global em uma rede de transporte de gás natural é altamente dependente do custo operacional das estações de compressão (entre 25% e 50% - c.f., Ríos-Mercado et al., 2004), que por sua vez, tem seus custos governados pelo número de compressores em operação durante o transporte, fundamentalmente pela quantidade de combustível gasto na compressão. Segundo Ríos-Mercado et al. (2002), é importante minimizar o consumo de combustível em cada estação de compressão, satisfazendo os fluxos de entrega especificados e as pressões exigidas nos terminais de entrega. Considerou-se o sistema em estado contínuo e as relações, que modelam a movimentação de gás natural pelos gasodutos, descritas por equações não-linear. Em contraste, no estado transiente, o fluxo de gás na rede depende do tempo e exige o uso de equações diferenciais parciais para serem descritos e não será abordado neste trabalho.

Ao comparar os problemas da rede de transporte de gás natural com problemas tradicionais de transporte de fluxos em rede de transmissão, foram observadas algumas diferenças em seus aspectos fundamentais. A rede de transporte de gás natural apresenta: variáveis de taxa de fluxo de massa (vazão massa) em cada gasoduto e variáveis de pressão em cada nó. Além disso, existem vários tipos de restrições: uma restrição linear, de balanço de vazão massa em cada nó do gasoduto; uma restrição não-linear, de igualdade em cada gasoduto, que representa a relação entre as pressões nas extremidades e a taxa de fluxo de massa; canalização de pressão em cada nó; e, um conjunto não-convexo e não-linear que representa o conjunto viável de operação de pressões e a taxa de fluxo para cada estação de compressão. Além destas restrições, que só podem ser dadas implicitamente, a função objetivo é não-linear e descontínua.

O problema é difícil de ser resolvido por diversas razões, principalmente, pela função objetivo e pela região viável não-convexa, e também pelas restrições envolverem funções não diferenciáveis, além de algumas relações não serem estabelecidas explicitamente.

Diversos algoritmos de otimização usados em redes com topologia acíclica estão relativamente bem desenvolvidos, entretanto, algoritmos eficazes para redes

com topologias cíclicas praticamente não existem. Ríos-Mercado et al. (2004) introduziu um modelo de otimização não-linear, combinando técnicas heurísticas, programação dinâmica e busca linear para resolver o problema. Dada a complexidade do modelo, assumiu-se que os compressores, das estações de compressão, são idênticos e que a vazão massa a ser comprimida foi dividida em partes iguais entre os compressores em operacionalidade. Em lamashita (2006) e lamashita et al. (2008) são propostas técnicas heurísticas que abordam um caso particular, onde só tem compressão nos nós produtores, mas foi assumido que as estações de compressão têm compressores não idênticos e pode não comprimir a mesma vazão, o que tornou necessário introduzir variáveis binárias na modelagem do problema. E, se por um lado estes últimos dois trabalhos abordaram um problema particular em relação ao de Ríos-Mercado et al. (2004), por outro lado o generalizaram ao considerar compressores com características diferentes em cada estação.

A maioria dos sistemas de transporte de gás natural tem estruturas acíclicas, mas existe um número importante de sistemas cíclicos para os quais estes resultados são aplicáveis. O modelo matemático, deste trabalho, focalizou redes com topologia cíclica, mas comportou-se bem ao ser aplicado em uma rede de transporte com topologia acíclica e apresentou bons resultados.

A configuração de cada estação de compressão foi gerenciada de forma independente e obedecendo às taxas de fluxos e os limites de pressões, visando obter o menor custo operacional. Cada estação de compressão tem objetivos próprios que precisam ser atendidos. Os objetivos das diferentes estações de compressão nem sempre estão em harmonia e a alteração na movimentação de uma estação pode comprometer a movimentação e objetivos da própria estação bem como a de toda a rede de transmissão. Em uma rede de transporte de gás natural, além do gerenciamento de cada estação de compressão, precisa-se planejar a movimentação de forma global, pois assim pode-se definir uma melhor estratégia de movimentação de gás para todo o sistema, levando-se em consideração a compatibilidade entre a oferta e a demanda, bem como as taxas de fluxos e os limites de pressão.

As restrições do problema consistem nos limites de operacionalidade encontrados durante toda a movimentação do gás pela rede de transmissão, desde as estações de compressão até os pontos de distribuição. Estas restrições definem as condições de operacionalidade do sistema e estabelecem as relações entre as variáveis. São exemplos de restrições: os limites de pressão, a capacidade das estações de compressão e as características físicas dos dutos.

Para otimizar a movimentação de gás, levou-se em consideração o balanço volumétrico em condições padrão (temperatura de 20°C e pressão de 1 atm), também os parâmetros econômicos, tais como: preço do petróleo e do gás natural (que não serão considerados neste trabalho), custos envolvidos na compressão, tratamento, transporte, etc. (Iamashita, 2006).

A estrutura matemática que define o problema de minimização dos custos em uma rede de transmissão de gás natural, tem na sua formulação original, um modelo misto-inteiro, não-linear, não-convexo e complexo do ponto de vista de otimização. Sabe-se que o problema é NP-Completo (Bemporad et al., 1999; Rios – Mercado et al., 2004), isto é, o tempo utilizado para resolver o problema cresce exponencialmente com o tamanho do problema. O modelo envolve relações não diferenciáveis e os métodos clássicos de programação não-linear não podem ser aplicados diretamente ao problema. Na abordagem de Iamashita (2006) e Iamashita et al., (2008), o modelo é não-linear, misto-inteiro, não diferenciável com funções contínuas, não-convexo e, formulou-se um algoritmo metaheurístico, tipo GRASP, que apresentou sucesso em seu desempenho.

## 1.2 OBJETIVOS

Considerando-se o contexto anterior, foi estabelecido como objetivos desta pesquisa:

- Modelar o custo operacional global de um gasoduto de gás natural, em uma rede de transmissão em estado estacionário;
- Apresentar o Modelo Matemático que minimiza o custo global de uma rede de transmissão de gás natural com re-compressão;

- Apresentar um Algoritmo de resolução baseado em GRASP;
- Apresentar os resultados obtidos, ao aplicar o Modelo Matemático e o Algoritmo, em redes de transmissão de gás natural.

### 1.3 CONTRIBUIÇÕES

A contribuição é o próprio modelo matemático e a proposta de um procedimento heurístico GRASP que tem por objetivo minimizar o custo global, para o problema de transporte de gás natural em redes cíclicas. Sendo o problema NP-completo, não existe algoritmo exato que resolva problemas desta natureza e a abordagem proposta é inédita. Com o modelo e a proposta algorítmica, generalizou-se o modelo e algoritmos introduzidos na literatura por Rios-Mercado et al. (2000), Wu et al. (2000), Rios-Mercado et al. (2002), Rios-Mercado et al. (2004), Iamashita (2006) e Iamashita et al. (2008).

## CAPÍTULO 02 – REVISÃO DE LITERATURA

Nesta secção será apresentada uma visão geral dos trabalhos que abordaram o problema de sistemas de transmissão em rede, e que utilizaram metodologias como a programação dinâmica (DP), a programação matemática e abordagem em dois níveis em rede de transporte de gás natural em estado contínuo.

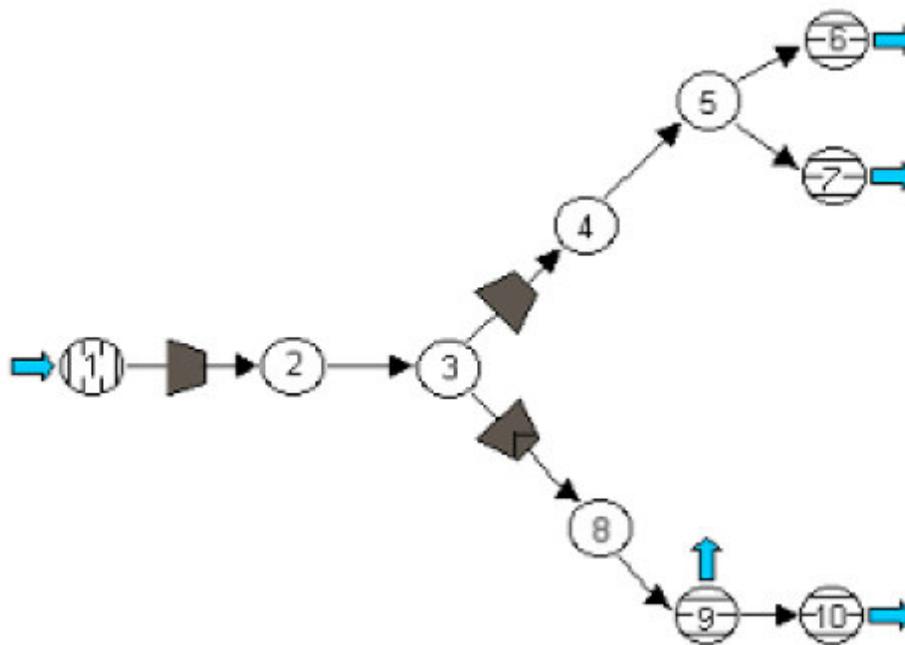
A programação dinâmica (DP, do inglês *Dinamic Programming*) foi à técnica popular utilizada para resolver muitas classes de redes de gasodutos de gás natural, desde os anos 1960. Uma das principais razões é que em uma estrutura de Programação Dinâmica é relativamente fácil satisfazer as restrições dos gasodutos e controlar a não-convexidade do domínio viável (Ríos-Mercado et al., 2004).

De acordo com Dreyfus e Law (1977), apud Ríos-Mercado et al. (2004), a Programação Dinâmica foi usada primeiramente para um sistema de transmissão de gás natural em estado contínuo e Wong e Larson (1968), também citados em Ríos-Mercado et al. (2004), aplicaram a Programação Dinâmica a sistemas em *cano de revólver* (rede em árvore, sem ramificações; ver Figura 01) e compararam com o problema da rede de transmissão com ramificações (rede em árvore; ver Figura 02), com o objetivo de resolverem o problema de rede em estado estacionário. O sistema de rede em cano de revólver é simples, com topologia de trajeto único, possui uma estrutura apropriada, em série, a qual pode ser resolvida através da Programação Dinâmica. Para resolver o problema de uma rede com ramificações, decompõe-se o problema global em uma seqüência com diversos sub-problemas de uma única dimensão, ou seja, cada ramificação é resolvida separadamente. (Ríos-Mercado et al., 2004).



**Figura 01:** Exemplo de rede em cano-de-revólver

Fonte: Zaleta, 2003.

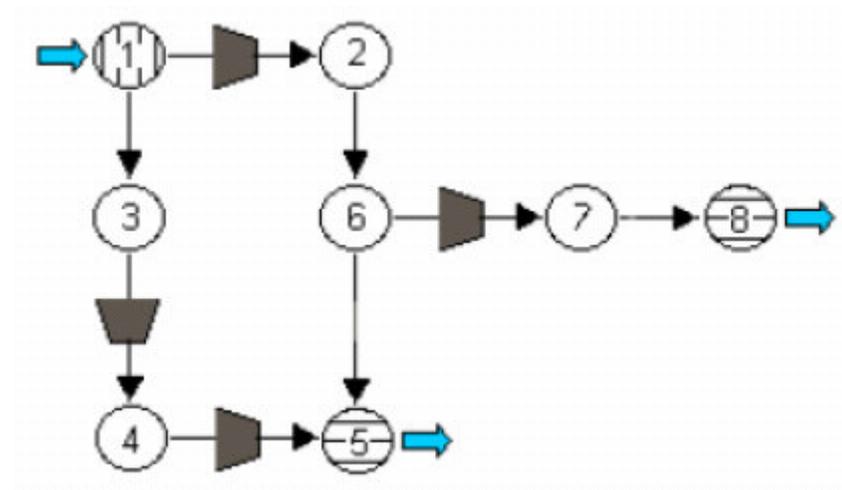


**Figura 02:** Exemplo de rede em Árvore.

Fonte: Zaleta, 2003.

Ao aplicar a Programação Dinâmica para a configuração da sub-rede pode-se desencadear um processo de solução do problema dado. Para sistemas acíclicos, a formulação da Programação Dinâmica é unidimensional e pode ser facilmente aplicada. De acordo com Ríos-Mercado et al. (2002), as variáveis de vazão massa podem ser determinadas antecipadamente e eliminadas do

problema, restando apenas as variáveis de pressão para serem calculadas. Em um sistema de transmissão de gás natural em rede, tipo árvore em estado contínuo, quando se conhece a pressão em um nó e as vazões massa de entrega, todos as outras vazões massa podem ser calculadas de maneira única. Esta propriedade não se aplica a sistemas de transmissão cíclicos (ver Figura 03). A existência de ciclos torna o problema difícil de ser resolvido, pois quebra a estrutura em série e exige que as variáveis de fluxos sejam explicitamente conhecidas, o que torna a Programação Dinâmica multidimensional (Ríos-Mercado et al., 2004).



**Figura 03:** Exemplo de rede com Ciclo.

**Fonte:** Zaleta, 2003.

A abordagem por Programação Dinâmica para sistemas de transmissão é limitada. Alguns esforços, em aplicar a Programação Dinâmica em uma rede de transporte não-sequencial, aconteceram para problemas da engenharia química. Dois dos trabalhos mais relevantes, um de Wilde (1965) e outro de Aris et al. (1964), que são citados em Ríos-Mercado et al. (2004), estudaram ciclos através de "cortes", ou seja, cortam uma extremidade de um ciclo no sistema e estudam o sistema resultante usando a Programação Dinâmica para uma rede de transporte em estruturas de árvore. Uma discussão sobre o uso da Programação Dinâmica

para uma estrutura de rede não- seqüencial pode ser encontrada em Bertele e Brioschi (1972), apud Ríos-Mercado et al. (2004).

Embora diversos pesquisadores dedicaram seus estudos durante anos, a sistemas em árvore para o problema de transporte de gás natural, os estudos não foram direcionados para resolver sistemas cíclicos, até que Luongo et al. (1989), apud Ríos-Mercado et al. (2004), aplicou a Programação Dinâmica supondo fixa as taxas de vazão massa através das tubulações e nas estações de compressão. Após ter resolvido o problema por Programação Dinâmica com taxas de vazão massa pré-fixadas, aplicou um método direto de busca com múltiplos reinícios e com ajustes diferentes para a vazão massa. A abordagem resulta em um Modelo híbrido de Programação Dinâmica em uma ou outra iteração heurística. Carter (1998), apud Ríos-Mercado et al. (2004), propôs uma aproximação de Programação Dinâmica em uma estrutura geral com taxas fixas de vazão massa. Uma descrição mais detalhada das abordagens por Programação Dinâmica em redes de transporte de gás natural pode ser encontrada em Ríos-Mercado et al. (2002).

Uma das vantagens de DP é a busca do ótimo global e o fácil manejo da não-convexidade, porém existem certas desvantagens em se usar a Programação Dinâmica, pois sua aplicação é praticamente limitada à redes com estruturas simples, tais como estruturas em cano de revólver e estruturas em árvore, além do esforço computacional crescer exponencialmente com as dimensões do problema. (Zaleta, 2003, apud em lamashita, 2006).

Existem algumas limitações ao método da formulação por Programação Dinâmica descrito por Wong e Larson, 1968, apud Ríos-Mercado et al. (2004), pois supõe que há somente uma unidade simples de compressor instalada em de cada estação de compressão e o domínio viável é simplificado para facilitar o processo de solução. Um bom otimizador comercial para redes de transporte de gás natural com estruturas em árvores que usa a Programação Dinâmica foi desenvolvido por Zimmer, (1975), Lall e Percell (1990), apud Ríos-Mercado et al. (2004).

Um algoritmo de Programação Dinâmica para resolver problemas de redes com diversas ramificações (árvore) foi apresentado por Lall e Percell (1990), apud Ríos-Mercado et al. (2004), onde se incorporou ao modelo uma variável de decisão para representar o número de compressores em operacionalidade. (Iamashita, 2006).

Outras técnicas tais como programação matemática e métodos de controles hierárquicos também foram aplicados com modestos graus de sucesso. A programação matemática é usada, geralmente, para sistemas cíclicos. As técnicas hierárquicas (abordagem por dois níveis) de controle são mais eficazes quando o modelo da estação de compressão é razoavelmente complicado (Ríos-Mercado et al., 2004), mas a complexidade computacional dessas técnicas é fator limitante.

Como mencionado em Wu et al. (2000), o problema de transmissão de gás natural em redes de gasodutos tem uma região viável não-convexa e função objetivo não-linear que tornam o problema difícil de ser resolvido usando técnicas clássicas de programação matemática. Diversos pesquisadores tentaram aplicar técnicas de programação matemática, mas suas abordagens foram baseadas em modelos que simplificam demais as estações de compressão.

Entre os trabalhos relevantes que utilizam a programação matemática, têm-se os mencionados a seguir.

Um método de programação linear sucessiva misto-inteira foi proposto por Prat e Wilson (1984), apud Ríos-Mercado et al. (2004). O método abordou o problema de otimização não-linear iterativamente através da linearização das equações de pressão de fluxo e incluindo na formulação, variáveis binárias  $\{0,1\}$  que seleciona a unidade compressora que irá operar. O problema foi resolvido usando a técnica *branch e bound*.

Em Percell e Ryan (1987), apud Ríos-Mercado et al. (2004), o algoritmo usa o método de gradiente reduzido para minimizar o problema do consumo de combustível em uma rede de transporte de gás natural.

As dificuldades em controlar as igualdades nas restrições não-lineares e a natureza complexa das estações, são fatores chave no baixo sucesso das abordagens que usaram técnicas de programação matemática.

A dificuldade em resolver um problema de rede de transporte de gás natural de maneira integrada foi abordada por técnicas de *dois níveis* (ou estrutura hierárquica), e o processo de solução exige método eficiente para decompor o problema. Em uma formulação de otimização por abordagem de dois níveis (Singh, (1980), apud Ríos-Mercado et al. (2004)), a rede de transporte de gás natural (a rede global) foi decomposta em dois níveis: o nível do estado da rede; e, o nível da estação de compressão. O problema da estação de compressão foi o de nível inferior e o problema do estado da rede foi o de nível superior. A otimização das estações de compressão, no nível inferior, consiste a base para a minimização global do custo operacional da rede de transporte de gás natural. A otimização do sub-problema da estação de compressão foi estudada previamente por Osiadacz (1980), Percell e Reet (1989) e Wu et. al. (1996), apud Ríos-Mercado et al. (2004). Entretanto, sabe-se que não existem algoritmos eficientes para este tipo de modelos.

## CAPÍTULO 03 – HIPÓTESES PARA UMA REDE DE TRANSPORTE

Neste capítulo foram formuladas as considerações sobre a configuração original da rede de transmissão de gás natural e as diversas hipóteses sobre a configuração das sub-redes. As redes de transporte de gás natural são compostas de gasodutos, válvulas, reguladores, compressores e outros dispositivos que as tornam complexas. Para simplificar o modelo matemático foram feitas várias hipóteses, que podem ser encontradas em Ríos-Mercado et al. (2004).

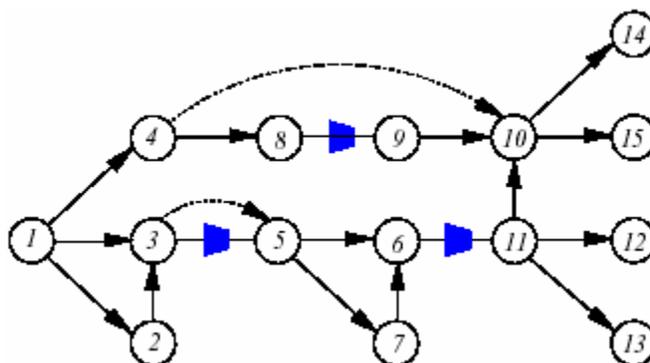
**Hipótese 01:** *Considera-se que uma rede de transmissão de gás natural é composta somente de nós, gasodutos e estações de compressão.*

Sob a Hipótese 01, as únicas variáveis de controle sobre a rede são as das estações de compressão: vazão massa a ser comprimida, pressão de sucção e pressão de descarga. As pressões de sucção e de descarga dos compressores de uma mesma estação de compressão são consideradas iguais aos da estação. Uma estação de compressão pode estar em um de três estados: **ativo** (quando a pressão de descarga é maior que a de sucção), **não utilizado** (*bypassed*, quando a pressão de descarga é igual que a de sucção) e **fechado** (quando a vazão na estação é zero). Neste modelo de rede de transmissão, os estados não serão representados explicitamente nas formulações, mas se decidem no contexto do problema de otimização. Para as estações de compressão no estado não utilizado e fechado os custos operacionais são iguais a zero.

**Hipótese 02:** *Não existem auto-ciclos no sistema.*

**Hipótese 03:** *Não se permite o estado **não utilizado** nas estações de compressão.*

Caso exista um caminho dirigido nos dutos entre o nó  $i$  e o nó  $j$ , para o qual existe um caminho alternativo entre dois nós que contenha pelo menos uma estação de compressão, então a estação é considerada em estado não utilizado. Na Figura 04 os arcos pontilhados (3, 5) e (4, 10) não utilizam as estações de compressão (3, 5) e (8, 9), respectivamente, o que não é permitido no modelo aqui apresentado.



**Figura 04:** Exemplo de desvios em uma rede de transmissão de gás

**Fonte:** Ríos-Mercado et al., 2004

Sob as Hipóteses 02 e 03, o problema da rede de transmissão de gás pode ser visto como uma rede dirigida  $G$  cujas componentes são nós, arcos-gasodutos e arcos-estações de compressão.

As quantias de vazão massa a serem injetadas ou retiradas dos nós do gasoduto, são supostamente conhecidas e então se elabora a hipótese seguinte:

**Hipótese 04:** Para cada nó  $i$  ( $i \in N$ ) de  $G$ , assume-se que a vazão massa líquida  $s_i$  seja conhecida. Assume-se, também, que se conhecem os limites de pressões exigidos em cada nó de entrega.

A Hipótese 04 não é restritiva e origina-se do fato de que a quantidade de gás a ser injetado ou retirado de um dado nó, seja informada antecipadamente.

### 3.1 REDE DE TRANSMISSÃO

Um gasoduto de transmissão de gás natural pode ser modelado representando-o por uma grafo dirigido  $G = (N, L, M)$ , definido por um conjunto  $N$  de  $n$  nós, um conjunto  $L$  de  $l$  dutos e um conjunto  $M$  de  $m$  estações de compressão, onde o conjunto de arcos  $A$  de  $G$  é definido como  $A = L \cup M$ , com  $L \cap M = \emptyset$  (Ríos-Mercado et al., 2004).

As variáveis de decisão associadas ao modelo são:

- $w_{ij}$ , taxa de vazão massa no arco  $(i, j)$  e  $(i, j) \in A$ ;

- $p_i$ , pressão do gás no nó  $i$  e  $i \in N$ .

Adicionalmente, associa-se a cada nó um parâmetro  $s_i$  conhecido, denominado **vazão massa líquida do nó  $i$**  ( $i \in N$ ), onde se:

- $s_i > 0$ , o nó  $i$  é um nó fonte;
- $s_i < 0$ , o nó  $i$  é um nó de entrega;
- $s_i = 0$ , o nó  $i$  é um nó de transbordo.

Estabelecem-se limites de pressão inferior e superior em cada nó  $i$  ( $i \in N$ ):  $p_i^L$  e  $p_i^U$ , respectivamente. Para cada arco (do gasoduto)  $(i, j)$  existe uma resistência  $t_{ij}$  (conhecida) que é determinada pelas propriedades físicas da tubulação.

Para cada arco  $(i, j)$  existem três variáveis associadas:  $w_{ij}$ ,  $p_i$  e  $p_j$ . Quando o arco  $(i, j)$  é uma estação de compressão,  $p_i$  e  $p_j$  são chamados de pressão de sucção e pressão de descarga, respectivamente.

Para formalizar o modelo necessita-se do conceito de *matriz de incidência* de uma rede. Uma rede com  $n$  nós e  $l$  dutos pode ser descrita por um grafo orientado (direcionado)  $G=(N,A)$ , onde  $N$  é o conjunto de vértices (nós) e  $A=L \cup M$ , com  $L \cap M = \emptyset$  é o conjunto de arcos (dutos). A cada duto  $(i, j)$  com  $(i, j) \in A$  associa-se uma direção do nó  $i$  ao nó  $j$ , que pode coincidir ou não com a direção do fluxo de gás. A matriz de incidência do grafo  $G$ , de dimensão  $n \times l$ , é definida pelos elementos de  $a_{ij}$  dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } j \text{ sai do nó } i; \\ -1, & \text{se o arco } j \text{ entra no nó } i; \\ 0, & \text{em outro caso.} \end{cases} \quad (1)$$

O objetivo do problema é minimizar o consumo global de combustível usado pelas estações de compressão, satisfazendo as exigências especificadas ao longo do sistema de transmissão. Assume-se que não há nenhum custo associado ao transporte com as tubulações ordinárias. O custo associado ao consumo de combustível nas estações de compressão  $(i, j)$ , é medido pela função

$g_{ij}(w_{ij}, p_i, p_j)$  e o consumo total do sistema de transmissão é dado pela função  $\sum_{(i,j) \in M} g_{ij}(w_{ij}, p_i, p_j)$ ; isto é, a soma do combustível consumido por todas as estações.

A formulação matemática do problema de rede de transmissão de gás (GTN, *gas transmission network*) está determinada por (Ríos-Mercado et al., 2004):

$$(GTN) \quad \min \quad \sum_{(i,j) \in M} g_{ij}(w_{ij}, p_i, p_j) \quad (2a)$$

sujeito a:

$$\sum_{j:(i,j) \in A} w_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} w_{j,i} = s_i, \quad i \in N \quad (2b)$$

$$p_i^2 - p_j^2 = t_{ij} w_{ij} |w_{ij}|, \quad (i, j) \in L \quad (2c)$$

$$p_i \in [p_i^L, p_i^U], \quad i \in N \quad (2d)$$

$$(w_{ij}, p_i, p_j) \in D_{ij} \subset R^3, \quad (i, j) \in M \quad (2e)$$

onde

- $g_{ij}(w_{ij}, p_i, p_j)$  é o combustível consumido pela estação de compressão  $(i, j) \in M$ ;

- $\sum_{j:(i,j) \in A} w_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A} w_{j,i} = s_i$  é a equação de balanço de vazões em cada nó  $i \in N$ ;

- $p_i^2 - p_j^2 = t_{ij} w_{ij} |w_{ij}|$  é a relação de pressões e vazão em cada duto  $(i, j) \in L$ ;

- $t_{ij}$ , representa as propriedades físicas do duto;

- $p_i \in [p_i^L, p_i^U]$  é a relação de limites de pressão em cada nó  $i (i \in N)$ ; e,

- $D_{ij}$  é o domínio viável de operacionalidade da estação de compressão  $(i, j)$  com  $(i, j) \in M$ .

O modelo (*GTN*) representa um sistema de transmissão de gás natural em estado estacionário, e a relação (2e), que envolve o  $D_{ij} \subset R^3$ , não explicita todas as restrições das estações de compressão, mas, como será discutido em secção futuras, resulta em um conjunto não-convexo definido implicitamente.

A função consumo global de combustível pode ser escrita da seguinte forma:

$$g(w_{ij}, p_i, p_j) = \alpha w_{ij} \left\{ \left( \frac{p_j}{p_i} \right)^m - 1 \right\}, \quad (w_{ij}, p_i, p_j) \in D_{ij}, \quad (3)$$

onde  $\alpha$  é uma constante (que por simplicidade, foi considerada igual a 1). Um estudo detalhado sobre a natureza do conjunto domínio da estação de compressão,  $D_{ij} \subset R^3$ , e da função de consumo de combustível de uma rede de transmissão de gás natural se encontra em Wu et al. (2000).

O modelo (*GTN*) é difícil de ser resolvido, pois sua natureza é não-convexa, não diferenciável e existe falta de definição explícita da função objetivo e da região viável  $D_{ij} \subset R^3$ .

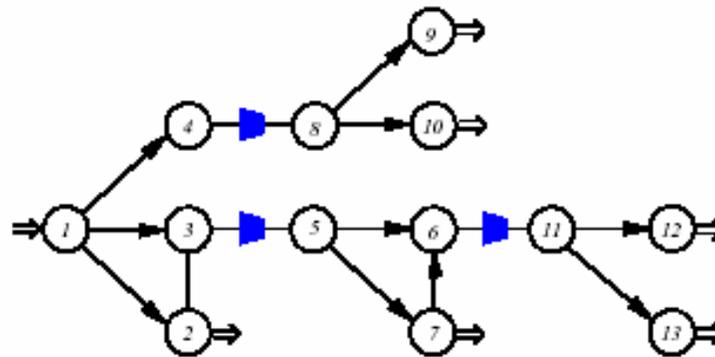
### 3.2 DECOMPONDO A REDE DE TRANSMISSÃO

Considere uma rede de transmissão de gás natural  $G = (N, L, M)$  definida como na Secção 3.1, onde  $A_L$  é a matriz de incidência nó-duto (de dimensão  $n \times l$ ),  $A_M$  é a matriz de incidência nó-estação de compressão (de dimensão  $n \times m$ ), sendo  $A = (A_L | A_M)$ . Esta última partição induz uma outra partição correspondente sobre as variáveis de vazão massa  $W = (W^L | W^M)$ . Assim, o conjunto das restrições de igualdades do problema (*GTN*) pode ser representado matricialmente por:

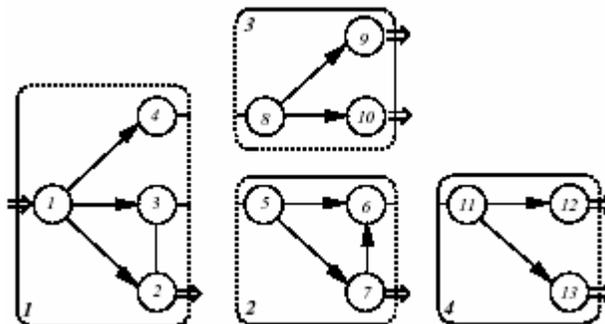
$$\begin{cases} A_L w^L + A_M w^M = s \\ A_L^T p^2 = \phi(w^L) \end{cases} \quad (4)$$

onde  $(p^2)^T = (p_1^2, \dots, p_n^2)$  e  $\phi(w^L)$  é o vetor de  $\phi(w_{ij}^L)$ 's, com  $(i, j) \in L$ , no qual  $\phi(w_{ij}^L) = t_{ij} w_{ij}^L |w_{ij}^L|$ .

De acordo às hipóteses assumidas, o estado de **não utilizado** não existe para as estações de compressão do sistema, então retirando as estações de compressão da rede original, geram-se sub-grafos desconectados, cada um dos quais composto apenas de gasodutos e nós (nesses sub-grafos não existem estações de compressão). A Figura 05 mostra um exemplo de sub-grafos criados retirando-se as estações de compressão.



(a) Rede  $G$



(b) Sub-grafos  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  e  $G_4$ .

**Figura 05:** Exemplo de sub-grafos depois da remoção de arcos de compressão.

**Fonte:** Ríos-Mercado et al., 2004.

Cada nó ou gasoduto de  $G$  pertence exatamente a um sub-grafo. Os sub-grafos de  $G$  determinam uma única partição de nós e gasodutos. Considere que existam  $r$  sub-grafos e seja  $G_h = (N_h, L_h)$ , com  $h = 1, \dots, r$ , o conjunto dos sub-

grafos definido por um conjunto de nós  $N_h$  e um conjunto de gasodutos  $L_h$ , com  $n_h$  nós e  $l_h$  gasodutos. Os nós em  $G$  podem ser re-enumerados de tal maneira que sua matriz de incidência nó-gasoduto tenha a forma diagonal em bloco, como mostra a equação seguinte:

$$A_L = \begin{pmatrix} A_{L_1} & & & & & \\ & A_{L_2} & & & & \\ & & \bullet & & & \\ & & & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \\ & & & & & A_{L_r} \end{pmatrix} \quad (5)$$

onde  $A_{L_h}$  representa a matriz de incidência nó-gasoduto na rede  $G_h$ , com  $h = 1, \dots, r$ .

Seja  $W_h$  o vetor vazão massa através dos gasodutos de  $G_h$  e  $p_h$  o vetor pressão nos nós de  $G_h$ , isto é,  $W_h = \{W_{ij} / (i, j) \in L_h\}$  e  $p_h = \{p_i / i \in N_h\}$ .

Adicionalmente, considere  $b_h$  o vetor de vazão líquida para os nós localizados no sub-grafo  $G_h$ ; isto é,  $b_h = \{s_i / i \in N_h\}$ . Desde que,  $A = (A_L | A_M)$  e  $W = (W^L | W^M)$ , a primeira equação do sistema (4) (o balanço de vazões massa para cada nó da rede) pode ser escrito como:

$$A_L W^L + A_M W^M = s. \quad (6)$$

Logo, as equações (4) e (5), podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} A_{L_1} & & & & & \\ & A_{L_2} & & & & \\ & & \bullet & & & \\ & & & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \\ & & & & & A_{L_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1^L \\ W_2^L \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ W_r^L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{M_1} \\ A_{M_2} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ A_{M_r} \end{pmatrix} W^M = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ b_r \end{pmatrix},$$

onde  $A_{M_h}$  é a matriz de incidência nó-estação de compressão rearranjada (correspondente a  $G_h$ ), com  $h = 1, \dots, r$ . Isto é, quando se decompõe o conjunto de

equações de restrições de equilíbrio de fluxo massa em cada sub-grafo  $G_h$ , por:

$$A_{L_h} W_h^L + A_{M_h} W_h^M = b_h, \text{ com } h = 1, \dots, r.$$

Como os conjuntos de gasodutos  $L_h$  em  $G_h$ , com  $h = 1, \dots, r$ , são disjuntos, a segunda equação do sistema (4) (o balanço de pressões e vazões massa para cada arco da rede) pode ser escrita da seguinte forma:

$$A_{L_h}^T p_h^2 = \phi(w_h^L), \text{ com } h = 1, \dots, r \quad (7)$$

onde  $p_h^2$  é o vetor das pressões  $p_i^2, i \in N_h$  e  $\phi(w_h^L)$  é o vetor cujas componentes são  $\phi_{ij}(w_{ij}^L) = t_{ij} w_{ij}^L |w_{ij}^L|$ ,  $(i, j) \in L_h$ .

Assim, o sistema (4) pode ser decomposto em um conjunto de subsistemas equivalente (cada subsistema correspondente a um sub-grafo):

$$\begin{cases} A_{L_h} W_h^L + A_{M_h} W_h^M = b_h \\ A_{L_h}^T p_h^2 = \phi(W_h^L) \end{cases}, \text{ com } h = 1, \dots, r. \quad (8)$$

Para resolver o sistema (8), Rios-Mercado et al. (2004) introduz a idéia de usar a **matriz de ciclos reduzida**  $B_{T_h}$ , associada a grafos  $G_h$  com ciclos e a uma árvore geradora  $T_h$  desse grafo (esta matriz será discutida no Capítulo 4). A principal propriedade da matriz  $B_{T_h}$  é dada pela seguinte relação:  $A_{L_h} B_{T_h}^T = B_{T_h} A_{L_h}^T = 0$ , com  $h = 1, \dots, r$ ; que permite, a partir da segunda equação do sistema (8), a relação:  $B_{T_h} \phi(W_h^L) = 0$ , com  $h = 1, \dots, r$ .

Conseqüentemente, para cada sub-grafo  $G_h$  com  $h = 1, \dots, r$ , tem-se o sistema abaixo:

$$\begin{cases} A_{L_h} W_h^L + A_{M_h} W_h^M = b_h \\ B_{T_h} \phi(W_h^L) = 0 \\ A_{L_h}^T p_h^2 = \phi(W_h^L) \end{cases} \quad (9)$$

A vantagem de se utilizar o sistema (9) em relação ao sistema (8), é que as vazões massa ( $W^M$ ), através das estações de compressão, se conhecidas, permitem calcular de maneira única as vazões massa dos dutos ( $W^L$ ), a partir das duas primeiras equações do sistema (9), separadamente das variáveis de pressão

$p_h$  (Rios-Mercado et al., 2002). Isto é, podem-se usar as duas primeiras equações do sistema (9) para encontrar a única solução  $W^L$ , quando  $W^M$  é fixo, e, em seguida, usar a terceira equação do sistema (9) e encontrar o vetor de pressões  $p_h$ , para cada  $h = 1, \dots, r$ .

O sistema de equações a ser usado para encontrar  $W_h^L$ , para qualquer  $h = 1, \dots, r$ , é:

$$\begin{cases} A_{L_h} W_h^L = b_h' \\ B_{T_h} \phi(W_h^L) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

onde  $b_h' = b_h - A_{M_h} W_h^M$ .

Se a configuração de  $G_h$  for uma árvore, nenhuma matriz ciclo reduzida é associada, e o sistema (10) se reduz a  $A_{L_h} W_h = b_h'$ , que é resolvido de forma trivial. Quando  $G_h$  tem ciclos, usa-se outros métodos para resolver o sistema (10), tal como o método de Newton que apresenta bom comportamento por se tratar de um sistema convexo.

Decompondo a rede original em sub-grafos, tem-se a compreensão clara da estrutura e motivação para o desenvolvimento de um procedimento de solução. Uma vez fixadas as vazões massa  $W^M$  nas estações de compressão, as vazões massa nos dutos são calculadas para cada sub-grafo, resolvendo o sistema (10). Desse modo, apenas as variáveis de pressão  $p$  são desconhecidas, mais mesmo assim é importante focalizar dois assuntos:

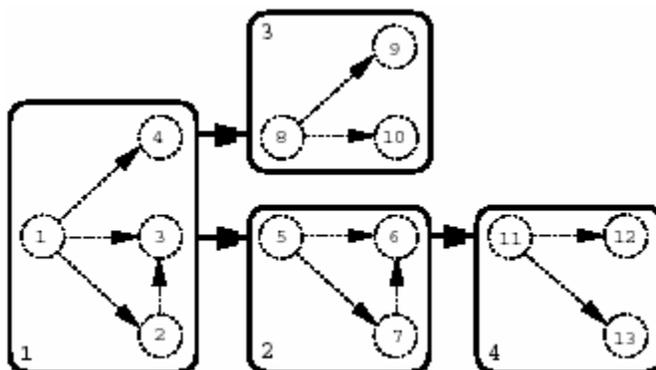
- Como resolver o restante do problema que contém somente as variáveis da pressão como valores desconhecidos; e,
- Como modificar as vazões massa através de cada estação de compressão, caso a solução encontrada não seja a ótima.

Estes assuntos foram abordados por Rios-Mercado et al. (2004), usando programação dinâmica (DP) e um método que mistura direção de descida e uma heurística. Neste trabalho foram utilizadas as idéias apresentadas em Ríos-Mercado et al. (2004), para estabelecer um modelo geral mais completo que o ali formulado, além de uma proposta algorítmica baseada em técnicas GRASP.

### 3.2 REDE REDUZIDA ASSOCIADA

Como foi mencionado na secção anterior, ao fixar as vazões massa  $W_h^M$  através das estações de compressão, as vazões massa através dos gasodutos são unicamente determinadas pela configuração da rede, em cada sub-grafo  $G_h$ , com  $h=1, \dots, r$ , do sistema (10). Conseqüentemente, é conveniente analisar como os compressores participam na estrutura da rede ao invés de analisar os sub-grafos individualmente. Com esse propósito, foi introduzido o conceito de **grafo reduzido**. Dado um gasoduto e sua representação por um grafo  $G=(N, L, M)$ , define-se o grafo reduzido correspondente a  $G$  como  $G'=(\Omega, \varepsilon)$ , onde  $\Omega$  e  $\varepsilon$  são, respectivamente, o conjunto de **nós** e o conjunto de **arcos** de  $G'$ . Cada nó de  $G'$  corresponde a um subgrafo de  $G$  e cada arco de  $G'$  corresponde a uma estação de compressão de  $G$ .

Os sub-grafos de uma rede determinam uma única partição dos nós; ou seja, ao desconectar todas as estações de compressão da rede original, obtém-se em cada partição um único sub-grafo. Portanto, contraindo os sub-grafos para transformá-los em nós, e expandindo às estações de compressão para transformá-las em arcos, obtém-se a rede reduzida associada ao grafo original. A Figura 06 é a rede reduzida da rede original da Figura 05(a).



**Figura 06:** Exemplo de uma rede reduzida  $G'$ .

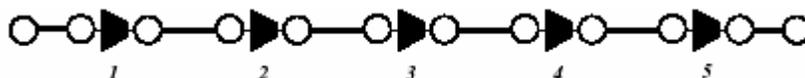
**Fonte:** Rios-Mercado et al., 2004.

Cada nó da rede reduzida  $G'$  corresponde a um sub-grafo da rede original  $G$  e cada arco de  $G'$  corresponde a uma estação de compressão de  $G$ . Assim,  $G'$  é uma rede dirigida conectada que não apresenta auto-ciclos. Conseqüentemente, podem-se ter várias configurações, divididas em três classes:

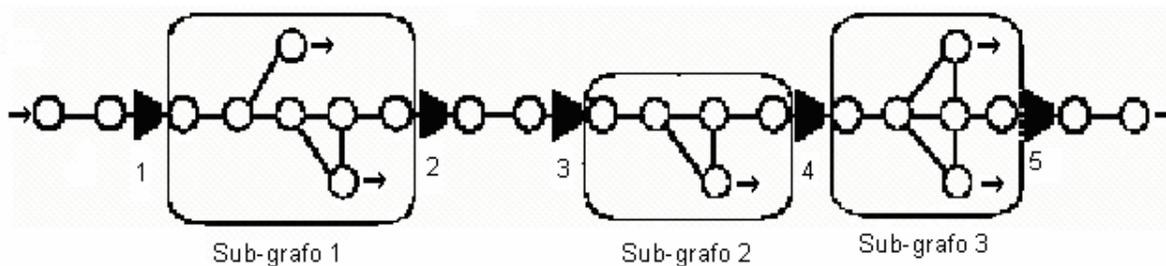
- Sistema em cano-de-revólver; i.e., sistema acíclico sem ramificações;
- Sistema de estrutura em árvore; i.e., sistema acíclico com ramificações; e,
- Sistema cíclico; i.e., sistema com pelo menos um ciclo em sua estrutura.

A partir daqui, quando for mencionado a configuração da rede de transmissão de gás, trata-se da configuração da rede reduzida  $G'$ .

Em uma rede reduzida  $G'$ , quando se contrai um sub-grafo em um nó, a configuração de cada sub-grafo, individualmente, não afeta a configuração da rede reduzida. Por exemplo, na Figura 06, mesmo que o exemplo da rede original tenha ciclos, a rede reduzida é acíclica, e é considerada uma estrutura em árvore. Similarmente, as redes reduzidas das figuras 07(a) e 07(b) são as mesmas, e em ambos os sistemas são em cano-de-revólver, embora a rede na Figura 07 (b) tenha ciclos nos sub-grafos  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$ .



(a) Sistema em cano-de-revólver com 5 estações de compressão.



(b) Sistema em cano-de-revólver com um sub-grafo entre as estações de compressão.

**Figura 07:** Exemplo de um Sistema em cano-de-revólver.

**Fonte:** Rios-Mercado et al., 2004.

Caso a rede reduzida  $G'$  seja um sistema acíclico, vazões massa através dos arcos  $\varepsilon$  de  $G'$  correspondem às vazões massa em cada estação de compressão da rede  $G$ , e tem solução única. Caso a rede reduzida  $G'$  tenha um ciclo, os valores ótimos são determinados no contexto do problema de minimização subjacente. Mesmo que, neste procedimento de solução,  $G'$  tenha ciclos, inicia-se com um valor viável para  $W^M$ . Fixando (conhecendo)  $W^M$ , tem-se um sistema não-linear (Sistema 10) com solução única  $W_h^L, h=1, \dots, r$ , como discutido anteriormente, onde cada  $W_h^L$  corresponde a uma sub-rede  $G_h$ , com  $h=1, \dots, r$  de  $G$ . Através da solução do sistema (10) para os sub-grafos de  $G_h$ , tem-se um perfil da vazão massa para toda a rede com vazões massa fixas para as estações de compressão. O problema restante é determinar as variáveis de pressão. Na sub-seção seguinte, considerou-se este problema e discutiu-se um procedimento para a sua solução.

### 3.3 CONTROLANDO O SUB-PROBLEMA

A subsecção anterior mostrou que fixando as taxas de fluxo através das estações de compressão, podem-se determinar todas as outras variáveis de fluxos, resolvendo o sistema (10) em cada sub-grafo, independentemente. Desta forma eliminam-se as variáveis de fluxo da formulação, ou seja, precisa-se apenas calcular a pressão. Cada sub-rede  $G_h$ , com  $h=1, \dots, r$ , equivale a:

$$A_{L_h}^T p_h^2 = \phi(\bar{W}_h), \quad (11)$$

onde  $\bar{W}_h$  é o vetor vazões massa através dos gasodutos  $\bar{W}_{ij}$ , com  $(i, j) \in L_h$ , o qual é conhecido. Usando a notação original, ao se fixar as vazões massa  $\bar{W}_{ij}$ , o problema de otimização fica apenas com as variáveis de pressão com valores desconhecido e, tem-se o modelo:

$$\min \sum_{(i,j) \in M} \bar{g}_{ij}(\bar{W}_{ij}, p_i, p_j) \quad (12a)$$

sujeito a:

$$p_j^2 - p_k^2 = t_{jk} \bar{W}_{jk} |\bar{W}_{jk}|, \quad \text{com } (j,k) \in L \quad (12b)$$

$$p_j \in [p_j^L, p_j^U], \quad \text{com } j \in N \quad (12c)$$

$$(\bar{W}_{ij}, p_i, p_j) \in D_{(i,j)} \subset R^3, \quad \text{com } (i,j) \in M \quad (12d)$$

A partir de (11), desde que cada  $G_h$  é um grafo conexo (conectado), se alguma variável de pressão  $p_j$ , com  $j \in N_h$ , for conhecida, podem-se calcular as variáveis de pressão dos outros nós em  $G_h$ . Entre dois nós quaisquer  $j, k$  em  $G_h$ , se existir um caminho direto  $P_{<j,k>}$ , do nó  $j$  para o nó  $k$ , então  $p_j(p_k)$  pode ser escrita como uma função de  $p_k(p_j)$ . Usando estas duas observações, pode-se reduzir o problema em sub-grafos quando se inclui a relação não-linear entre os nós de referência como nós de sucção, nós de descarga, nós fonte e nós de entrega de  $G_h$ . Assim, outras equações não-lineares são eliminadas do modelo, simplificando o problema de forma que o problema reduzido tenha apenas as variáveis de pressão dos nós de entrada ou saída (sucção, descarga, fonte ou entrega) em cada sub-grafo  $G_h$ , com  $h = 1, \dots, r$ .

A cada sub-grafo  $G_h$ , a vazão de gás entra em  $G_h$  através dos nós de descarga ou dos nós fonte. Similarmente, a vazão de gás sai de  $G_h$  através dos nós de sucção ou dos nós de entrega. Seja  $N_h^{dc}$  o conjunto dos nós de descarga,  $N_h^{sc}$  o conjunto dos nós de sucção,  $N_h^{su}$  o conjunto dos nós fonte e  $N_h^{dv}$  o conjunto dos nós de entrega em  $G_h$ , então tem-se que  $N_h^{in} = N_h^{dc} \cup N_h^{su}$  é o conjunto dos nós de entrada e  $N_h^{out} = N_h^{sc} \cup N_h^{dv}$ , o conjunto dos nós de saída de  $G_h$ .

Por exemplo, se  $j_d$  é um nó de descarga e  $j_s$  um nó de sucção, então  $j_d \in N_h^{dc}$  e  $j_s \in N_h^{sc}$ . Seja  $P_{<j_d, j_s>}$  um caminho dirigido de  $j_d$  para  $j_s$ , então,  $j_d$  e  $j_s$  pertencem a dois compressores diferentes de estações conectadas pelo sub-grafo  $G_h$ . Um caminho  $P_{<j_d, j_s>}$  é representado por uma sucessão de gasodutos, isto é,

$\{(j_d, j_1), (j_1, j_2), \dots, (j_q, j_s)\}$ , onde  $j_l \in N_h$ , com  $l=1, \dots, q$ . Para cada caminho dirigido (de gasodutos)  $P_{\langle j_d, j_s \rangle}$  define-se uma equação de balanço de pressão em (12b).

Conseqüentemente, tem-se:

$$\begin{cases} p_{j_d}^2 - p_{j_1}^2 = t_{j_d j_1} \bar{W}_{j_d j_1}^2 \\ p_{j_1}^2 - p_{j_2}^2 = t_{j_1 j_2} \bar{W}_{j_1 j_2}^2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ p_{j_d}^2 - p_{j_s}^2 = t_{j_d j_s} \bar{W}_{j_d j_s}^2. \end{cases}, \quad (13)$$

Ao somar as equações de (13), obtém-se:

$$p_{j_d}^2 - p_{j_s}^2 = \sum_{(l,m) \in P_{\langle j_d, j_s \rangle}} t_{lm} \bar{W}_{lm}^2 \quad (14)$$

Assim a equação (14) substitui as equações (13) no modelo. Igualmente, entre dois nós quaisquer  $i$  e  $j$ , onde  $i \in N_h^{in}$  e  $j \in N_h^{out}$  se existir um caminho  $P_{\langle i, j \rangle}$  pode-se obter uma relação não-linear como a equação (14) e incluí-la na formulação reduzida.

Baseado na mesma lógica pode-se converter também a pressão do nó  $i$  ( $i \in N_h^{in}$ ) em outra variável de pressão  $p_i$ ,  $i \in N_h^{dc}, N_h^{sc}$ . Por exemplo, considerando a restrição que exige a pressão mínima  $p_j \geq p_j^L, j \in N_h^{dv}$  para o nó de entrega  $j$  em  $G_h$  e  $P_{\langle i, j \rangle}$  um caminho do nó  $i$  ( $i \in N_h^{in}$ ) para o nó  $j$  ( $j \in N_h^{out}$ ), pode-se eliminar  $p_j$  da formulação do problema e incluir uma nova restrição para a pressão  $p_i$ . Tem-se que:  $p_i \geq \sqrt{(p_j^L)^2 + \sum_{(l,m) \in P_{\langle i, j \rangle}} t_{lm} \bar{W}_{lm}^2}$ .

Em geral, os limites  $p_j^L \leq p_j \leq p_j^U$  de qualquer nó  $j$  ( $j \in N_h$ ) de  $G_h$  são substituídos pelos limites da variável de pressão  $p_i$ ,  $i \in N_h^{sc}$  ou  $i \in N_h^{dc}$  com:

$$\alpha_{i,j} = \sqrt{(p_j^L)^2 + \sum_{(l,m) \in P_{\langle i, j \rangle}} t_{lm} \bar{W}_{lm}^2} \leq p_i \leq \sqrt{(p_j^U)^2 + \sum_{(l,m) \in P_{\langle i, j \rangle}} t_{lm} \bar{W}_{lm}^2} = \beta_{i,j}, \text{ com } i \in N_h^{dc}, \quad (15)$$

$$\alpha_{j,i} = \sqrt{(p_j^L)^2 - \sum_{(l,m) \in P_{\langle j, i \rangle}} t_{lm} \bar{W}_{lm}^2} \leq p_i \leq \sqrt{(p_j^U)^2 - \sum_{(l,m) \in P_{\langle j, i \rangle}} t_{lm} \bar{W}_{lm}^2} = \beta_{i,j}, \text{ com } i \in N_h^{sc}. \quad (16)$$

O procedimento anterior é motivado pelo seguinte:

- O problema reduzido contém apenas variáveis de pressão em cada nó  $i \in N_h^{in} \cup N_h^{out}$ , com  $h=1, \dots, r$ , e conseqüentemente o tamanho de problema é reduzido.

- O problema reduzido pode ser convertido em uma seqüência de estruturas de decisão, o qual permite aplicar eficientemente outras técnicas de otimização, como por exemplo, a programação dinâmica (DP).

Considerando  $B_h = \{(i, j) : i \in N_h^{in}, j \in N_h^{out}\}$ , o problema reduzido denotado por  $Q_{\bar{W}}(p)$ , pode-se formular o seguinte:

$$Q_W(p) : \quad \min \sum_{(i,j) \in M} \bar{g}_{ij}(\bar{W}_{ij}, p_i, p_j) \quad (17a)$$

sujeito a:

$$p_j^2 - p_k^2 = \sum_{(l,m) \in P_{<j,k>}} t_{lm} \bar{W}_{lm} |\bar{W}_{lm}|, (j,k) \in B_h, h=1, \dots, r, \quad (17b)$$

$$\max\{p_j^L, \alpha_{j,k}\} \leq p_j \leq \min\{p_j^U, \beta_{j,k}\}, i \in N_h^{dc}, h=1, \dots, r, \quad (17c)$$

$$\max\{p_j^L, \alpha_{k,j}\} \leq p_j \leq \min\{p_j^U, \beta_{k,j}\}, i \in N_h^{dc}, h=1, \dots, r, \quad (17d)$$

$$(\bar{W}_{ij}, p_i, p_j) \in D_{(i,j)} \subset R^3, (i, j) \in M, \quad (17e)$$

onde  $\alpha_{j,k}, \alpha_{k,j}, \beta_{j,k}$  e  $\beta_{k,j}$  são definidos nas equações (15) e (16).

O grau da estrutura seqüencial de decisão, deste problema, varia de acordo com a natureza dos sub-grafos. Isto é, se todo  $G_h$ , com  $h=1, \dots, r$ , tem um único nó de entrada  $i \in N_h^{in}$  e um único nó de saída  $j \in N_h^{out}$ , então o problema reduzido de  $G$  tem uma estrutura seqüencial de decisão apropriada. Qualquer sistema em cano-de-revólver tem tal estrutura, para a qual DP está bem definida. Porém, se o sub-grafo tem múltiplos nós de sucção ou tem múltiplos nós de descarga, então neste caso, o problema reduzido  $Q_{\bar{W}}(p)$  tem uma estrutura não- seqüencial e com ramificações que divergem ou convergem, respectivamente.

Existem limitações na aplicação da Programação Dinâmica para algumas configurações complexas de sub-grafos. Portanto, assume-se o seguinte:

**Hipótese 05:** *Em um sub-grafo qualquer só podem existir múltiplos nós de descarga com apenas um nó de sucção ou múltiplos nós de sucção com apenas um nó de descarga, mas não podem existir, simultaneamente, múltiplos nós de descarga e múltiplos nós de sucção.*

A Hipótese 05 foi feita com o propósito de modelar o problema por Programação Dinâmica. De acordo com a Hipótese 05 tem-se os seguintes casos relacionados à configuração de  $G_h$ , com  $h = 1, \dots, r$ , isto é:

**Caso 01:**  $G_h$  tem um único nó  $i \in N_h^{in}$  de entrada e um único nó  $j \in N_h^{out}$  de saída.

**Caso 02:**  $G_h$  tem um único nó  $i \in N_h^{in}$  de entrada e múltiplos nós  $j \in N_h^{out}$  de saída.

**Caso 03:**  $G_h$  tem múltiplos nós  $i \in N_h^{in}$  de entrada e um único nó  $j \in N_h^{out}$  de saída.

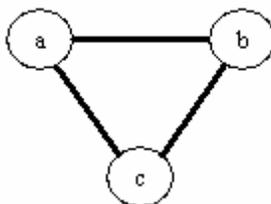
Em uma rede em cano-de-revólver, todo sub-grafo  $G_h$  tem a configuração declarada no Caso 01 e conseqüentemente a estrutura seqüencial de decisão é mantida ao longo da rede. Porém, na rede em árvore e com estruturas cíclicas, tem-se uma combinação de  $G_h$ 's com diversas configurações, dos Caso 01 ao Caso 03.

O procedimento heurístico e sua descrição, bem como os resultados podem ser encontrados em Rios-Mercado et al. (2004).

## CAPÍTULO 04 – MATRIZ DE CICLOS REDUZIDA

### 4.1 ALGUNS CONCEITOS DA TEORIA DE GRAFOS

Esta secção apresenta alguns conceitos da Teoria de Grafos que serão utilizados para desenvolver as técnicas aqui aplicadas. Seja o grafo  $G(V, E)$  constituído do conjunto de vértices ou de nós,  $V$ , e por do conjunto de arcos ou arestas,  $E$ . Um grafo dirigido é definido quando o par de nós (vértices) conectados por uma aresta (arco) tem sentido definido de um para outro. Em grafos, uma aresta (arco) que conecta o nó  $i$  ao nó  $j$  é chamada de caminho ou trajeto  $(i, j)$ . Aqui serão apresentadas hipóteses sobre ciclos e, como pode ser observado na Figura 08, as arestas do tipo  $(a, a)$  não são consideradas.



**Figura 08:** Grafo com Ciclo

Um *caminho* no grafo  $G$  é uma seqüência finita alternada de vértices e arestas, que começa e termina com um nó, de modo que cada aresta tenha um vértice em cada extremidade. Um caminho que nenhum vértice aparece mais de uma vez chama-se *trajetória*. Uma trajetória em que o nó de saída é o mesmo que o nó de chegada chama-se de *ciclo*. Similarmente, em um grafo dirigido, um *caminho dirigido* é uma seqüência alternada de vértices e arcos, e quando  $v_{i-1}, e_i, v_i$  estão na seqüência, significa que  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ . Uma *trajetória dirigida* é um caminho dirigido em que nenhum vértice pode ser visitado mais que uma vez e um *ciclo dirigido* é uma trajetória dirigida cujos vértices, inicial e final, coincidem (Ríos-Mercado et al., 2000).

Um grafo  $G$  é *conectado* (ou *conexo*), quando existe pelo menos uma trajetória entre cada par de vértices em  $G$ . Uma *árvore* é um grafo conectado e acíclico. Uma *árvore geradora*  $T$  de um grafo  $G$  contém todos os vértices de  $G$ . Para uma árvore geradora  $T$  de um grafo  $G$ , toda aresta em  $G$  que não está na árvore  $T$  é chamada *corda*. Um resultado básico da Teoria de Grafos indica que ao se acrescentar uma corda  $c$  à árvore geradora  $T$ , faz com que ela tenha um ciclo que é chamado de *ciclo fundamental*.

Alguns resultados considerados básicos para árvore e ciclo fundamental estão apresentados a seguir. As provas dos Teoremas 01 e 02 podem ser encontradas em Dryfus e Law, (1977), apud Rios-Mercado et al., (2000).

**Teorema 01:** *Seja  $n$  e  $e$  o número de vértices e de arestas, respectivamente, no Grafo  $G$ . Se  $T$  for uma árvore geradora de  $G$ , tem-se que:*

- (a) *o número arestas da árvore  $T$  é  $n-1$  e o número de vértices é  $e-n+1$ .*
- (b) *o número de ciclos fundamentais da árvore  $T$  é  $e-n+1$ . Todo ciclo em  $G$  é uma combinação linear dos ciclos fundamentais.*

Caso o grafo  $G$  tem  $n$  vértices e  $e$  arestas, a matriz  $A$  de incidência nó-aresta tem dimensão  $(n \times e)$ , cada coluna compõe-se de um (1), menos um (-1) e zeros(0) e então pode-se provar que a ordem de  $A$  é  $n-1$ . Ao retirar uma linha da matriz  $A$ , obtém-se a matriz incidente reduzida  $A_f$  de dimensão  $(n-1) \times e$ , na qual os  $n-1$  vetores linha são linearmente independentes. O vértice que corresponde à linha suprimida é chamado *vértice de referência*. A matriz de incidência determina completamente um grafo dirigido.

Para um grafo dirigido  $G$  existe um grafo não dirigido associado  $G'$ , que tem o mesmo conjunto de vértices e de arestas, isto é, a cada arco  $(i, j)$  em  $G$  corresponde uma aresta  $(i, j)$  de  $G'$ . Em outras palavras, a versão não dirigida de  $G$  ignora o sentido dos arcos. Neste trabalho, quando se referir a ciclos em um grafo significa um ciclo em  $G'$ . Cada ciclo em  $G$ , após se atribuir uma orientação arbitrária (horária ou anti-horária) é um ciclo orientado e representa-se por um vetor de componentes 1, -1, 0 conforme a orientação de seus arcos. Para

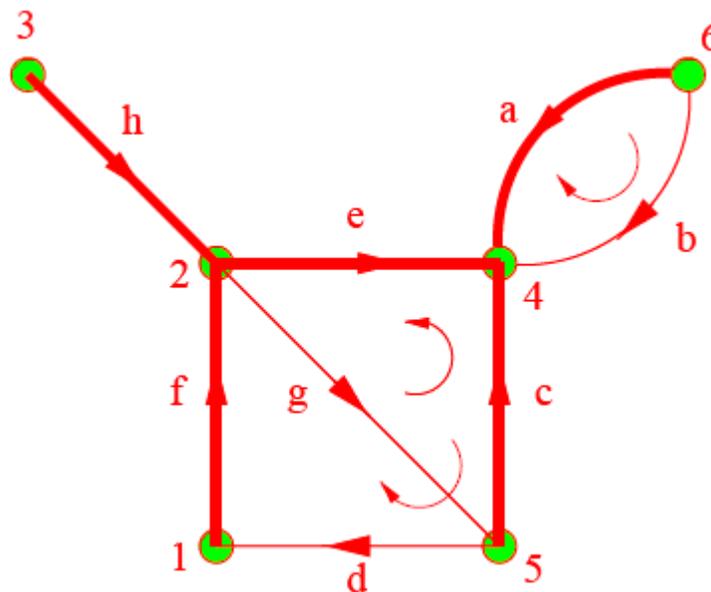
representar o ciclo orientado define-se uma *matriz de ciclos*  $B$ , onde cada linha (coluna) corresponda a um vetor do ciclo (aresta), da seguinte maneira:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o ciclo } i \text{ contém o arco } j \text{ e as orientações coincidem;} \\ -1, & \text{se o ciclo } i \text{ contém o arco } j \text{ e as orientações não coincidem;} \\ 0, & \text{se o ciclo } i \text{ não contém o arco } j. \end{cases}$$

De acordo com o Teorema 01, só  $(e-n+1)$  vetores ciclo fundamentais relativos a uma árvore geradora são independentes. Uma matriz de ciclos que tem  $(e-n+1)$  vetores ciclo fundamentais chama-se *matriz de ciclos reduzida* e é denotada por  $B_f$ , cuja dimensão é  $(e-n+1) \times e$ .

**Teorema 02:** Seja  $G$  um grafo,  $A_f$  a matriz reduzida e  $B_f$  a matriz de ciclos reduzida. Cumpre-se que  $A_f B_f^T = B_f A_f^T = 0$ .

Para ilustrar os conceitos e os resultados acima mostra-se um grafo simples  $G=(V,A)$ , na Figura 09, onde  $V=\{1,2,3,4,5,6\}$  e  $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$



**Figura 09:** Os ciclos fundamentais no grafo. As arestas indicam uma árvore.

**Fonte:** Rios-Mercado et al., 2000.

A matriz de incidência do grafo  $G$ , é:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtém-se a matriz reduzida  $A_f$  abaixo eliminando-se a linha 3 da matriz de incidência  $A$ , que corresponde ao vértice 3.

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando  $G'$  a versão não orientada de  $G$  pode-se ver que as arestas  $\{a, c, e, f, h\}$  formam uma árvore geradora  $T$ , indicada pelas linhas grossas na figura anterior. As arestas  $\{b, d, g\}$  são as cordas da árvore  $T$ , que tem exatamente  $e - n + 1 = 3$  ciclos fundamentais. Por exemplo, quando se adiciona a aresta  $b$  forma-se o ciclo  $\{a, b\}$ , adicionando-se a aresta  $d$  forma-se o ciclo  $\{c, d, f, e\}$  e ao adicionar a aresta  $g$  forma-se o ciclo  $\{c, e, g\}$ . Assim cada ciclo fundamental corresponde a uma aresta. A correspondente matriz de ciclos reduzida está dada por:

$$B_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ciclo da aresta b} \\ \leftarrow \text{ciclo da aresta d} \\ \leftarrow \text{ciclo da aresta g} \end{matrix}$$

A matriz de ciclos reduzida  $B_f$ , como discutido na Secção 3.1, é de importância algorítmica, pois permite resolver o sistema (4) através do sistema (9) de forma eficiente. Esta matriz depende de uma árvore geradora e a determinação de caminhos numa rede é fundamental para diminuir o tamanho do modelo, como visto em (17a)-(17e). Esses caminhos, em geral, são determinados encontrando uma árvore geradora do sub-grafo correspondente. Mas é necessário contar com

algoritmos eficientes para a determinação de uma árvore geradora de um grafo. No Anexo A é apresentada uma breve discussão sobre árvore geradora e um algoritmo para encontrar um tal árvore.

## CAPÍTULO 05 – DOMÍNIO E FUNÇÃO CUSTO EM UMA REDE DE TRANSMISSÃO

### 5.1 DOMÍNIO DE UMA ESTAÇÃO GENERALIZADA

Os trabalhos apresentados por Rios-Mercado e outros (Rios-Mercado (2002), Rios-Mercado et al. (2000), Rios-Mercado et al. (2002) e Rios-Mercado et al. (2004) e Wu et al. (2000)), consideram as estações de compressão compostas de compressores necessariamente iguais. Já, neste trabalho, consideram-se compostas por  $N$  compressores não necessariamente iguais. Dado um compressor  $i \in \{1, \dots, N\}$  as variáveis que modelam seu comportamento são:  $Q$  (vazão volumétrica de entrada),  $S$  (velocidade de rotação do compressor),  $H$  (“cabeza adiabática”, *adiabatic head*) e  $\eta$  (eficiência adiabática) que satisfazem as equações:

$$\frac{H}{S^2} = A_{H_i} + B_{H_i} \left( \frac{Q}{S} \right) + C_{H_i} \left( \frac{Q}{S} \right)^2 + D_{H_i} \left( \frac{Q}{S} \right)^3, \quad (18)$$

$$\eta = A_{E_i} + B_{E_i} \left( \frac{Q}{S} \right) + C_{E_i} \left( \frac{Q}{S} \right)^2 + D_{E_i} \left( \frac{Q}{S} \right)^3, \quad (19)$$

onde  $A_{H_i}, B_{H_i}, C_{H_i}, D_{H_i}, A_{E_i}, B_{E_i}, C_{E_i}$  e  $D_{E_i}$  são constantes que dependem do respectivo compressor.

Adicionalmente, existem as constantes  $(S_i)_{\min}$ ,  $(S_i)_{\max}$ , *surge* e *stonewall*, tais que:

$$(S_i)_{\min} \leq S \leq (S_i)_{\max}, \quad (20)$$

$$\text{surge}_i \leq \frac{Q}{S} \leq \text{stonewall}_i, \quad (21)$$

As variáveis  $H$  e  $S$  estão relacionadas por:

$$Q^{L_i} \leq Q \leq Q^{U_i}, \quad (22)$$

$$H^{L_i}(Q) \leq H \leq H^{U_i}(Q), \quad (23)$$

onde  $Q^{L_i} = (S_i)_{\min} * surge_i$  e  $Q^{U_i} = (S_i)_{\max} * stonewall_i$ .

Assim, o domínio do compressor  $i$  é dado por:

$$D_i = \left\{ (w, p_s, p_d) : p_s^{L_i} \leq p_s \leq p_s^{U_i}, W^{L_i} \leq \frac{v}{p_s} \leq W^{U_i}, G^{L_i} \left( \frac{w}{p_s} \right) \leq \frac{p_d}{p_s} \leq G^{U_i} \left( \frac{w}{p_s} \right) \right\}, \quad (24)$$

$$\text{onde} \quad w^{L_i} = \frac{Q^{L_i}}{ZRT_s}, \quad w^{U_i} = \frac{Q^{U_i}}{ZRT_s}, \quad G^{L_i}(q) = \left[ 1 + \frac{m}{ZRT_s} H^{L_i}(ZRT_s q) \right]^{\frac{1}{m}},$$

$$G^{U_i}(q) = \left[ 1 + \frac{m}{ZRT_s} H^{U_i}(ZRT_s q) \right]^{\frac{1}{m}}.$$

Por exemplo, considerando uma estação de compressão composta por três tipos diferentes de compressores: tipo A, tipo B e tipo C. Para cada um dos três tipos têm-se os valores constantes das equações (18) e (19) apresentados abaixo:

- Compressor tipo A:

$$A_{H_A} = 0.6824 * 10^{-3}; B_{H_A} = -0.9002 * 10^{-3}; C_{H_A} = 0.5689 * 10^{-3};$$

$$D_{H_A} = 0.1247 * 10^{-3}; A_{E_A} = 134.8055; B_{E_A} = 148.5468; C_{E_A} = 125.1013; D_{E_A} = -32.0965.$$

- Compressor tipo B:

$$A_{H_B} = 0.6824 * 10^{-3}; B_{H_B} = -0.45010 * 10^{-3}; C_{H_B} = 0.14223 * 10^{-3};$$

$$D_{H_B} = -0.015587 * 10^{-3}; A_{E_B} = 140.7825; B_{E_B} = -93.6928; C_{E_B} = 44.2825; D_{E_B} = -5.9793.$$

- Compressor tipo C:

$$A_{H_C} = A_{H_A}; B_{H_C} = B_{H_A} / 2; C_{H_C} = C_{H_A} / 4; D_{H_C} = D_{H_A} / 8; A_{E_C} = A_{E_A};$$

$$B_{E_C} = B_{E_A}; C_{E_C} = C_{E_A}; D_{E_C} = D_{E_A}.$$

De acordo com a relação (20) para cada tipo de compressor existe um limite inferior e um limite superior de velocidade de rotação. Sendo  $S_A, S_B$  e  $S_C$  as

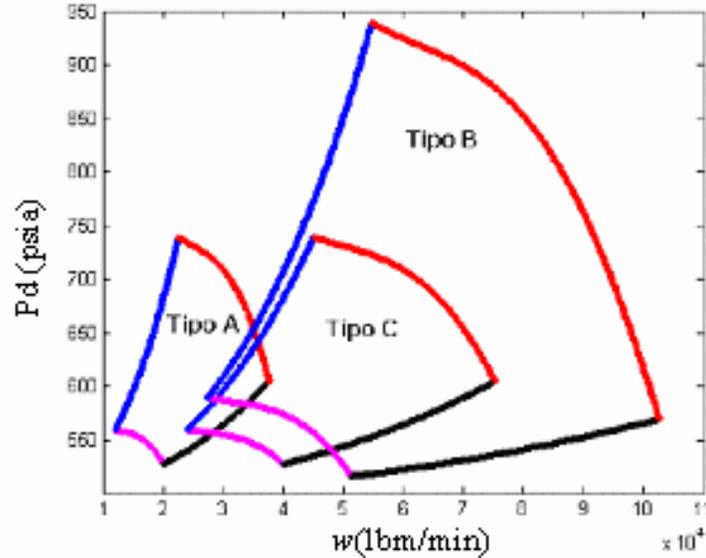
velocidades de rotação dos compressores dos tipos A, B e C, respectivamente, define-se:

- $(S_A)_{\min} = 5000 \leq S_A \leq (S_A)_{\max} = 9400$ ;
- $(S_B)_{\min} = 6000 \leq S_B \leq (S_B)_{\max} = 12000$ ;
- $(S_C)_{\min} = 10000 \leq S_C \leq (S_C)_{\max} = 18800$ ;

A vazão volumétrica de entrada  $Q$  varia entre um limite inferior  $Q^L$  e um limite superior  $Q^U$  para cada compressor. Denotando por  $Q_A, Q_B$  e  $Q_C$  as taxas volumétricas de fluxo de entrada nos compressores dos tipos A, B e C, respectivamente, tem-se:

- $(Q_A)^L = 7000 \leq Q_A \leq (Q_A)^U = 22000$ ;
- $(Q_B)^L = 16000 \leq Q_B \leq (Q_B)^U = 60000$ ;
- $(Q_C)^L = 28000 \leq Q_C \leq (Q_C)^U = 87984$ ;

De acordo com a equação (21) é possível calcular o valor de *surge* e de *stonewall* para cada tipo de compressor. A Figura 10 mostra um corte dos domínios unitários para os três tipos de compressores mencionados acima, considerando  $p_s = 500(\text{psia})$  (onde em todos eles, considera-se como limite inferior da pressão de sucção  $p_s^L = 450(\text{psia})$  e como limite superior da pressão de sucção  $p_s^U = 800(\text{psia})$ ).



**Figura 10:** Perfil dos domínios unitários de três tipos de compressores ( $p_s = 500(\text{psia})$ )

**Fonte:** Azeredo, 2008.

A princípio, se a vazão massa  $W$  (determinadas às respectivas pressões de sucção e descarga,  $p_s$  e  $p_d$ ) chega a uma estação de compressão com  $N$  compressores, então  $W$  pode ser comprimida pela estação utilizando quaisquer de seus  $r \in \{1, \dots, N\}$  compressores, desde que:

$$w = w_{i_1} + \dots + w_{i_r}, \quad (25)$$

onde  $w_{i_k}$  é a taxa de fluxo de massa no compressor  $i_k$ ,  $\forall i_k \in \{1, \dots, N\}$  e  $k = 1, \dots, r$ .

Além disso, a condição seguinte deve ser satisfeita:

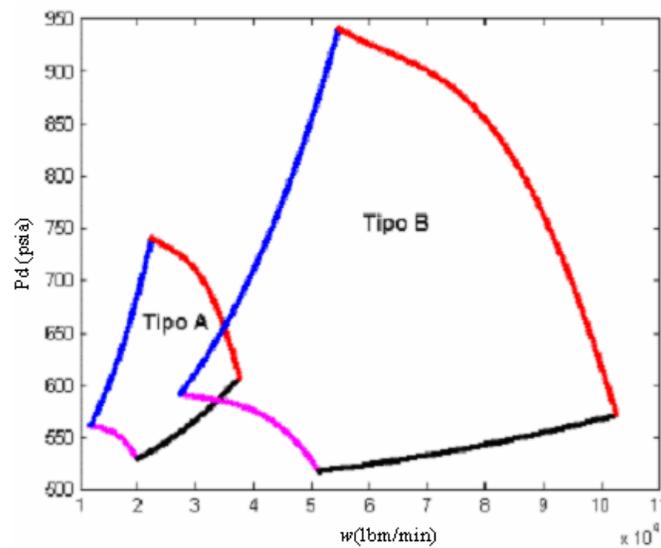
$$(w_{i_k}, p_s, p_d) \in D_{i_k}. \quad (26)$$

Portanto, pode-se determinar o domínio viável de uma estação, com  $N$  compressores não necessariamente iguais, por:

$$D = \{(w, p_s, p_d) : w = w_{i_1} + \dots + w_{i_r}, r \in \{1, \dots, N\}, (w_{i_k}, p_s, p_d) \in D_{i_k}, i_k \in \{1, \dots, N\}, k = 1, \dots, r, i_j \neq i_l \text{ se } j \neq l\} \quad (27)$$

Considera-se, para efeitos ilustrativos, uma estação de compressão que possui cinco compressores sendo três do tipo A e dois do tipo B. As características dos compressores do tipo A e do tipo B estão dispostas no texto

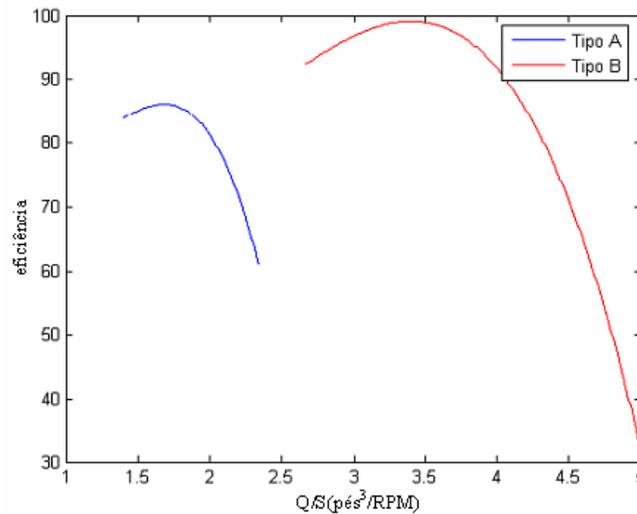
acima, e pode-se observar na Figura 11 o perfil dos domínios unitários para esses compressores, com uma pressão de sucção  $p_s = 500(\text{psia})$ .



**Figura 11:** Perfil dos domínios unitários de dois tipos de compressores ( $p_s = 500(\text{psia})$ )

**Fonte:** Azeredo, 2008.

A equação (19) mostra a eficiência  $\eta$  como função de  $Q/S$ , e está graficada para dois tipos de compressores A e B na Figura 12.



**Figura 12:** Eficiência  $\eta$  para os compressores do tipo A e B

**Fonte:** Azeredo, 2008

Denota-se por  $r_A$  e  $r_B$  o número de compressores do tipo A e B, respectivamente, que podem ser ativados. Assim, o número máximo de compressores ativados é  $r_A + r_B$ . Note que  $r_A$  e  $r_B$  satisfazem:  $0 \leq r_A \leq 3$ ,  $0 \leq r_B \leq 2$ ,  $0 \leq r_A + r_B \leq 5$ .

Dados  $r_A$  e  $r_B$  foi definido uma configuração dos compressores da estação que podem ser utilizados para processar a vazão massa  $W$ , considerando os  $r_A$  primeiros compressores tipo A e os  $r_B$  primeiros compressores tipo B.

Para  $r_A = 2$  e  $r_B = 1$ , por exemplo, definiu-se a configuração  $r = (1, 1, 0, 1, 0)$ ; isto é, cada vetor  $r \in \{0, 1\}^5$  define de maneira única uma configuração da estação e, reciprocamente, cada  $0 \leq r_A \leq 3$  e  $0 \leq r_B \leq 2$  define de maneira única um vetor  $r \in \{0, 1\}^5$ . Nesse sentido,  $r_A$  e  $r_B$  são equivalentes ao respectivo  $r \in \{0, 1\}^5$ .

Considera-se que na estação entra a vazão massa  $W$  que pode ser dividida entre dois compressores dos tipos A e B, com  $r$  definido. Para proceder a essa divisão, tomam-se as seguintes considerações:

- (i) a vazão massa total  $W$  é dividida entre os compressores tipo A e tipo B em parcelas  $W/ativados$  (onde  $ativados = r_A + r_B$ );
- (ii) o número de parcelas diferentes é correspondente aos pares ordenados  $(a, b) \in \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}^2$ , tal que  $a + b = ativados$ . Note que o número de pares ordenados é:  $ativados + 1$ .

Considera-se uma estação com cinco compressores, com  $r_A = 3$  e  $r_B = 2$ , e define a configuração  $r = (1, 1, 1, 1, 1)$ , a divisão é feita tomando parcelas de  $W/5$  de acordo com a Tabela 01.

**Tabela 01:** Exemplo de divisão da taxa de fluxo de massa  $W$  para compressores do tipo A e do tipo B, de uma mesma estação de compressão.

| Tipos de Compressores | Parcela de $W$ alocada |                        |                        |                        |                        |                        |
|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
|                       | A                      | $0 \times \frac{w}{5}$ | $1 \times \frac{w}{5}$ | $2 \times \frac{w}{5}$ | $3 \times \frac{w}{5}$ | $4 \times \frac{w}{5}$ |
| B                     | $5 \times \frac{w}{5}$ | $4 \times \frac{w}{5}$ | $3 \times \frac{w}{5}$ | $2 \times \frac{w}{5}$ | $1 \times \frac{w}{5}$ | $0 \times \frac{w}{5}$ |

Fonte: Azeredo, 2008.

O número de compressores que efetivamente serão utilizados, dentre os  $r_A=3$  do tipo A e  $r_B=2$  do tipo B, ainda não é conhecido e não está definida a maneira de distribuir a vazão massa para os compressores selecionados. Uma vez definida a alocação  $(a,b)$  de parcelas de  $W/ativados$  para os compressores tipo A e tipo B (isto é,  $a \times \frac{w}{ativados}$  para tipo A e  $b \times \frac{w}{ativados}$  para tipo B), estas parcelas podem ser sub-allocadas entre os  $r_A$  compressores do tipo A e  $r_B$  compressores do tipo B, em parcelas de sextas partes e quartas partes, respectivamente.

Com este objetivo definiu-se uma matriz para os compressores do tipo A, denotada  $AlocaA$  que armazena todas as formas possíveis de distribuir a vazão massa entre os compressores do tipo A e, analogamente, a matriz  $AlocaB$  que armazena as possíveis distribuições da vazão massa entre os compressores do tipo B. Estas matrizes são dadas por:

$$AlocaA = \begin{pmatrix} \frac{6}{6} & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{6}{4} & \frac{6}{2} & 0 \\ \frac{6}{6} & \frac{6}{6} & 0 \\ \frac{3}{6} & \frac{3}{6} & 0 \\ \frac{6}{6} & \frac{6}{6} & 0 \\ \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{6}{6} & \frac{6}{6} & \frac{6}{6} \\ \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{6}{6} & \frac{6}{6} & \frac{6}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{6}{6} & \frac{6}{6} & \frac{6}{6} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad AlocaB = \begin{pmatrix} \frac{4}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{4} & \frac{4}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{4}{4} & \frac{4}{4} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Portanto, se  $rA = 3$  e  $rB = 2$ , a vazão massa  $W$  que entra na estação, pode ser alocada segundo as seguintes opções:

- (i) Escolher uma alocação para compressores tipo A e tipo B, segundo a Tabela 01.
- (ii) Escolher uma forma de sub-alocar as quantias correspondentes à alocação  $(a,b)$ , determinada no item anterior, definindo uma linha de  $AlocaA$  e uma linha de  $AlocaB$ .

Por exemplo, escolhe-se a alocação  $(3,2)$  para os compressores tipo A e tipo B, na Tabela 01, e distribui-se  $\frac{3w}{5}$  para compressores do tipo A e  $\frac{2w}{5}$  para os do tipo B. Escolhe-se sub-alocar as quantias de  $(3,2)$  da linha 4 de  $AlocaA$  e da linha 3 de  $AlocaB$  e obtém-se a seguinte distribuição entre os compressores da

estação:  $w_{parcial}^{(3,2)} = \left( \frac{3}{6} \times \frac{3w}{5}, \frac{3}{6} \times \frac{3w}{5}, 0, \frac{2}{4} \times \frac{2w}{5}, \frac{2}{4} \times \frac{2w}{5} \right)$  equivalente a

$$\sum_{i=1}^5 w_{parcial}_i^{(3,2)} = w.$$

O vetor  $w_{parcial}^{(3,2)}$  definido, está no domínio  $D$  da estação se, e somente se:  $(w_{parcial}_i^{(3,2)}, p_s, p_d) \in D_i, i = 1, \dots, 5$ .

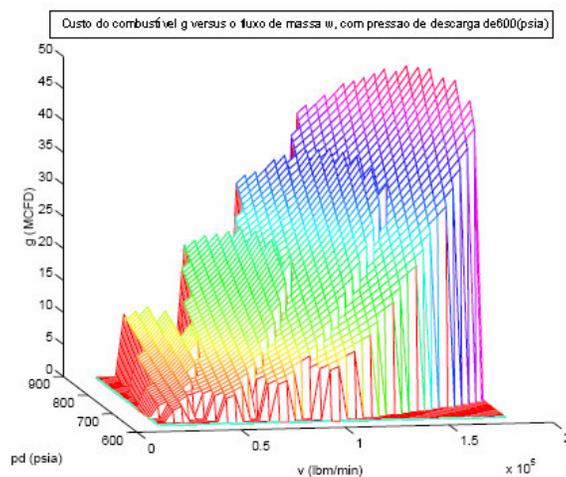
Caso  $w_{parcial}^{(a,b)} \in D$  pode-se calcular o custo de compressão correspondente. A viabilidade de um ponto  $(w, p_s, p_d)$  para um compressor, um

compressor aproximado e uma estação de compressão e o Algoritmo da implementação no MatLab se encontram em Azeredo (2008).

## 5.2 FUNÇÃO CUSTO DE COMBUSTÍVEL PARA UMA ESTAÇÃO GENERALIZADA

Esta secção estuda a função custo de combustível utilizando os princípios desenvolvidos por Wu et al. (2000), leva em consideração uma estação que possui compressores idênticos e dispostos em paralelos e estende-os, para o caso de uma estação de compressão que possui  $N$  compressores não necessariamente iguais.

A princípio a vazão massa  $W$ , que chega a estação com  $N$  compressores, pode ser comprimida utilizando quaisquer  $r \in \{1, \dots, N\}$  compressores da estação, desde que  $w = w_{i_1} + \dots + w_{i_r}$ , e  $w_{i_k}$  seja a vazão massa no compressor  $i_k$ ,  $\forall i_k \in \{1, \dots, N\}$  e  $k = 1, \dots, r$ . A Figura 13, a seguir, mostra o custo de combustível para diferente número de compressores que operam em uma estação de compressão.



**Figura 13:** Custo de combustível para diferentes números de compressores em uma estação de compressão com quatro compressores idênticos e em paralelo.

**Fonte:** Wu et al., (2000).

Para alguns valores  $(w, p_s, p_d) \in D$ , diferentes combinações de compressores da estação podem ser utilizadas, com diferentes custos de combustível. Para estabelecer a função custo correspondente para um dado  $(w, p_s, p_d) \in D$ , necessita-se introduzir o conjunto  $R$  de combinações viáveis de compressores, isto é:

$$R = \{\tilde{r} : \tilde{r} = (i_1, \dots, i_r) \in C(N, r), r \in \{1, \dots, N\}, w = w_{i_1} + \dots + w_{i_r}, (w, p_s, p_d) \in D\}, \quad (29)$$

onde  $C(N, r)$  é o conjunto de combinações de  $N$  elementos em grupos de  $r$ .

Determina-se o custo mínimo de combustível para  $(w, p_s, p_d) \in D$  por:

$$g(w, p_s, p_d) = \min_{\tilde{r} \in R} \left\{ \sum_{k=1}^r g_{i_k}^{mit}(w, p_s, p_d) \right\}, \quad (30)$$

onde  $g_{i_k}^{mit}(w, p_s, p_d)$  é o custo correspondente para processar  $(w, p_s, p_d)$  no compressor  $i_k$ .

Caso o número de elementos de  $R$  seja infinito utiliza-se  $rA$  (número de compressores do tipo A que podem ser ativados) e  $rB$  (número de compressores do tipo B que podem ser ativados). Para definir uma configuração considera-se os  $rA$  primeiros compressores do tipo A e  $rB$  primeiros compressores do tipo B.

Conhecidos  $rA$  e  $rB$ , escolhe-se a parcela de  $W$  para alocar nos compressores do tipo A e do tipo B de acordo com a Tabela 01, e em seguida, define-se o vetor  $w_{parcial}^{(a,b)}$  para a distribuição da taxa de fluxo de massa  $w$  nos diferentes tipos de compressores da estação. Sabe-se que  $a+b$  é o número de compressores que podem ser ativados na estação de compressão e que  $w_{parcial}^{(a,b)}$  pertence ao domínio  $D$  se, somente se:  $(w_{parcial}^{(a,b)}, p_s, p_d) \in D_i$ , onde  $D_i$  é o domínio do compressor  $i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ .

Caso  $w_{parcial}^{(a,b)} \in D$  pode-se calcular o custo de compressão correspondente a configuração escolhida, onde se considera  $N=5$  e  $rA+rB=5$ , tem-se:

$$g_{(a,b)}(w, p_s, p_d) = \sum_{i=1}^5 g_i(w_{parcial}^{(a,b)}, p_s, p_d). \quad (31)$$

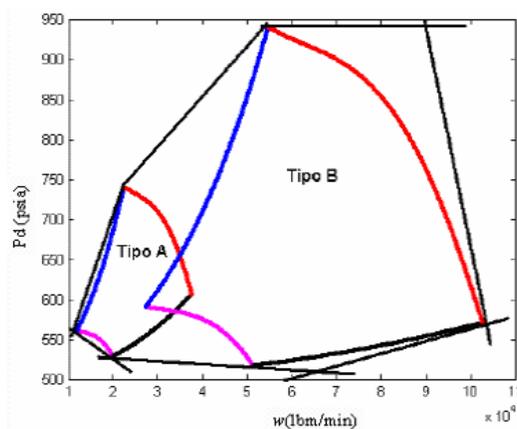
Observe que se usa as matrizes de alocação  $AlocaA$  e  $AlocaB$  de maneira que o número de elementos de  $R$ , neste caso, seja finito. Mas necessita-se calcular o custo correspondente de todas as configurações possíveis para que se escolha a melhor, ou seja, a de menor custo, que é definida por:

$$g(w, p_s, p_d) = \min_{w_{parcial(a,b)} \in D} g_{(a,b)}(w, p_s, p_d). \quad (32)$$

A função  $g(w, p_s, p_d)$  é uma função complicada, pois é não-linear, pode ter descontinuidade e ainda ser não diferenciável, além de não estar explicitamente definida. As características de não convexidade do domínio  $D$  e as dificuldades relativas da função custo  $g$  contribuem para a difícil solução do modelo que será apresentado no próximo capítulo.

### 5.2.1 Domínio generalizado aproximado

Considera-se uma estação com dois tipos de compressores (ver Azeredo, 2008): A e B. A Figura 14 mostra os domínios unitários para esses compressores. Para encontrar uma aproximação que envolva todos os domínios dos compressores da estação, tem-se um conjunto não convexo, como mostra a figura a seguir, e a aproximação aparece para os domínios unitários dos compressores do tipo A e tipo B, o que não seria possível encontrar por uma aproximação convexa que envolvesse o domínio unitário de todos os compressores. E, torna-se necessário trabalhar com a aproximação poliedral para cada compressor.



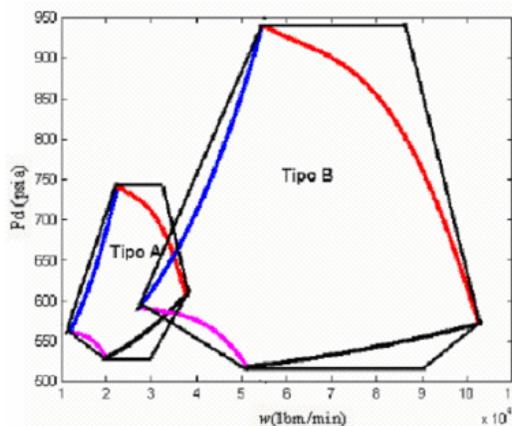
**Figura 14:** Aproximação inteira para os perfis dos domínios unitários dos compressores do tipo A e do tipo B

**Fonte:** Azeredo, 2008

Para aproximar o domínio do compressor do tipo A, procede-se da maneira mostrada na secção 5.1 e faz-se uma aproximação linear externa para o contorno do perfil do domínio unitário do compressor tipo A, em seguida, conecta-se o contorno linear externo com a origem, repetindo-se o procedimento para o compressor do tipo B.

A aproximação linear externa para o contorno do perfil do domínio compõe-se de seis segmentos de reta, que conectados com a origem formam seis planos. Estes planos juntamente com outros dois planos  $p_s = p_s^L$  e  $p_s = p_s^U$ , constituem um super-conjunto linear de domínio unitário. As equações destes seis planos são dadas da mesma forma e os detalhes são encontrados em Azeredo (2008).

A Figura 15 mostra a aproximação linear externa para o perfil dos dois tipos de compressores A e B.



**Figura 15:** Aproximação externa para os perfis dos domínios unitários dos compressores do tipo A e do tipo B.

**Fonte:** Azeredo, 2008.

### 5.2.1 Função custo generalizada aproximada

A Função custo de combustível  $g(w, p_s, p_d)$  é difícil de ser trabalhada, pois para encontrar a  $g_{i_k}^{unit}$  precisa-se resolver equações não-lineares, da mesma maneira que ocorreu para a função custo unitária do modelo clássico. Então,

sugere-se que a  $g_{i_k}^{unit}$  seja aproximada pela função  $g_6(w, p_s, p_d)$ , onde se observa que a função  $g_6$  depende das características do compressor. (Azeredo, 2008).

O cálculo do custo de compressão de uma estação generalizada, o Algoritmo implementado no MatLab são encontrados com detalhes em Azeredo (2008) e os resultados serão apresentados ao final deste trabalho.

## CAPÍTULO 06 – MATERIAIS E MÉTODOS

### 6.1 O PROBLEMA DO TRANSPORTE DE GÁS NATURAL EM REDE

Uma rede de transporte de gás natural é composta por gasodutos, estações de compressão, nós de sucção, nós de descarga, nós fonte e nós de entrega. A existência das estações de compressão na rede é uma das características chave no transporte de gás natural. O segmento do transporte opera sistemas de gasodutos e de compressores com o objetivo de mover grandes quantidades de gás a longas distâncias e a altas pressões. Ao viajar através dos gasodutos, o gás natural, perde pressão devido à fricção com as paredes dos gasodutos, reposta nas estações de compressão.

As estações de compressão, em uma rede de transporte de gás natural, são instalações complexas que envolvem tipicamente um número de compressores arranjados em paralelo ou em série. O custo operacional de uma estação de compressão é governado pelo custo operacional dos compressores ligados e, como consequência, o custo operacional global de uma rede de transporte é medido pela soma dos custos de operacionalidade de suas estações de compressão. É importante representar as estações de compressão em rede de transmissão e suas configurações, mas a maneira de representá-las varia de acordo com a metodologia de solução.

O modelo matemático aqui desenvolvido tem como base o modelo desenvolvido por Ríos-Mercado et al. (2004), apresentado na Seção 3.1, mas diferencia-se em alguns aspectos. O modelo desenvolvido por Ríos-Mercado et al. (2004) propõe um procedimento de solução híbrida de descida-heurística para minimizar o custo global em sistemas de gás em rede cíclica, a solução heurística é baseada em um procedimento iterativo de dois estágios, onde contrai a rede original para uma rede reduzida. O modelo proposto, neste trabalho, usa a meta-heurística GRASP para solucionar o problema de consumo de combustível e contrai a rede original iniciar o procedimento, e aloca vazões massa nas estações

de compressão. Configura as estações de compressão de forma independente levando em consideração seus compressores, como será apresentado nas secções subseqüentes.

## 6.2 MODELO MATEMÁTICO PARA O PROBLEMA DE REDE EM ESTADO CONTÍNUO

Uma rede dirigida de transmissão de gás natural  $G = (N, L, M)$  definida por um conjunto  $N$  de  $n$  nós, um conjunto  $L$  de  $l$  dutos e um conjunto  $M$  de  $m$  estações de compressão. Pode-se observar que o conjunto de arcos  $A$  em  $G$  é definido como  $A = L \cup M$ , com  $L \cap M = \emptyset$ . As variáveis de decisão são:

- $W_{ab}$ , taxa de fluxo de massa em cada arco  $(a,b) \in A$ ;
- $p_a$ , pressão do gás em cada nó  $a \in N$ ;

Em cada nó  $a \in N$ , existe um parâmetro conhecido  $s_a$  chamado de *vazão líquida* do nó, que indica:

- nó fonte, se  $s_a > 0$ ;
- nó de entrega, se  $s_a < 0$ ;
- nó de transbordo, se  $s_a = 0$ ;

Para cada  $a \in N$  existem limites de pressão  $p_a^L$  e  $p_a^U$ , respectivamente, pressão inferior e pressão superior. Em toda rede de transporte de gás natural, supõe-se conhecida a resistência do duto por  $t_{ab}$ , determinada pelas propriedades físicas do duto.

Para cada arco  $(a,b)$  existem três variáveis associadas:  $W_{ab}$ ,  $p_a$  e  $p_b$ . Em particular, se o arco é estação de compressão  $(a,b)$ , então  $p_a$  e  $p_b$  são chamados de pressão de sucção e pressão de descarga, respectivamente.

Para cada compressor  $k$ , com  $k = 1, 2, \dots, K_{ab}$  e  $K_{ab}$  o número de compressores na estação, existem as seguintes variáveis:

- $w_{abk}$ , vazão massa em cada compressor  $k$ ;

- $P_{ab}^S$ , pressão de sucção em cada unidade compressora  $k$  ;
- $P_{ab}^D$ , pressão de descarga em cada unidade compressora  $k$  ;
- $K_{ab}$ , número de compressores na estação de compressão  $(a,b)$ , com  $(a,b) \in M$ , onde  $|M| = m$  ;
- $x_{abk}$ , variável binária (0, 1) de decisão de operacionalidade dos compressores e  $x_{abk} = \begin{cases} 0, & \text{indica que o compressor } k \text{ está desligado.} \\ 1, & \text{indica que o compressor } k \text{ está ligado.} \end{cases}$  ;

A função  $g_{abk}$  de custo de operacionalidade de cada compressor  $k$ , com  $k = 1, 2, \dots, K_{ab}$ , está definida por  $g_{abk}(w_{abk}, P_{ab}^S, P_{ab}^D)$ .

Cada estação de compressão da rede tem as seguintes variáveis associadas:

- $W_{ab}$ , vazão massa em cada estação de compressão e  $W_{ab} = \sum_{k=1}^{K_{ab}} w_{abk} x_{abk}$  ;
- $p_{ab}^S$ , variável da pressão de sucção na estação de compressão  $(a,b) \in M$  ;
- $p_{ab}^D$ , variável de pressão de descarga da estação de compressão  $(a,b) \in M$  ;

A pressão de sucção e a pressão de descarga na estação de compressão  $(a,b)$  e nos compressores da própria estação são consideradas as mesmas.

A rede  $G$  objetiva satisfazer a vazão massa necessária para a transmissão, obedecendo os limites de pressão em cada nó operando os compressores com o menor custo possível, ou seja, minimizar o consumo global de combustível usado pelas estações de compressão da rede de transporte de gás natural, satisfazendo as exigências especificadas de entrega ao longo de todo o sistema de transmissão. Considera-se que não existe nenhum custo associado, ao transporte de gás em suas tubulações ordinárias e que a rede está em estado estacionário.

A formulação matemática a seguir tem como principal objetivo minimizar os custos operacionais globais de uma rede de transporte de gás natural com topologia cíclica, mantendo as especificações contratuais e satisfazendo as

exigências da própria rede. Naturalmente descreve, também, o comportamento de uma rede acíclica.

O modelo matemático do problema de rede de transporte de gás natural, denotado por  $(GTN^*)$ , está dado por:

$$(GTN^*): \quad \text{Minimizar} \quad \sum_{(a,b) \in M}^m g_{ab}(W_{ab}, p_{ab}^S, p_{ab}^D) \quad (32a)$$

sujeito a:

$$\sum_{b:(a,b) \in A} W_{ab} - \sum_{b:(b,a) \in A} W_{ba} = s_a, a \in N, \quad (32b)$$

$$W_{ab} = \sum_{k=1}^{K_{ab}} x_{abk} w_{abk}, (a,b) \in M \quad (32c)$$

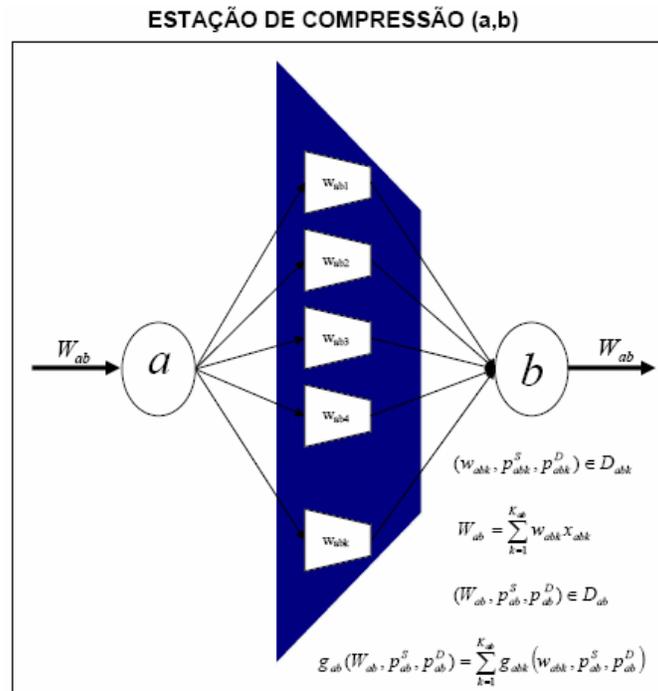
$$x_{abk} = \begin{cases} 0, & \text{indica que o compressor } \kappa \text{ está desligado.} \\ 1, & \text{indica que o compressor } \kappa \text{ está ligado.} \end{cases} \quad (32d)$$

$$p_a^2 - p_b^2 = t_{ab} W_{ab} |W_{ab}|, (a,b) \in L, \quad (32e)$$

$$p_a \in [p_a^L, p_a^U], a \in N, \quad (32f)$$

$$(W_{ab}, p_{ab}^S, p_{ab}^D) \in D_{ab} \subset \mathfrak{R}^3, (a,b) \in M, \quad (32h)$$

A Figura 16, a seguir, representa uma estação de compressão com  $K_{ab}$  compressores dispostos em paralelo.

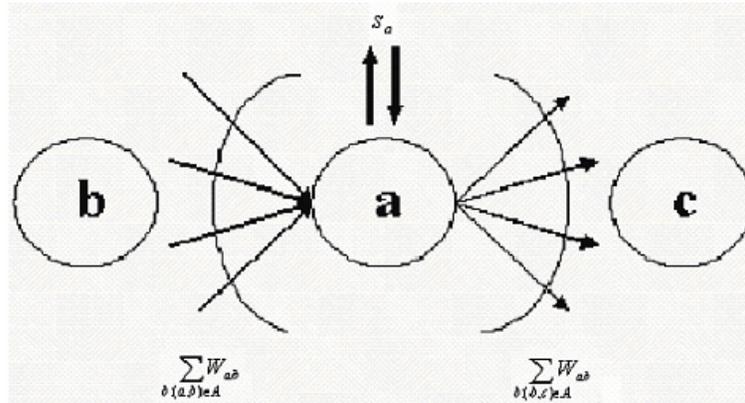


**Figura 16:** Estação de compressão, com  $K_{ab}$  compressores.

onde:

- $\sum_{(a,b) \in M} g_{ab}(W_{ab}, P_{ab}^S, P_{ab}^D)$ , função objetivo do consumo global de combustível;
- $g_{ab}(W_{ab}, P_{ab}^S, P_{ab}^D)$ , função de consumo de combustível em uma estação de compressão  $(a,b) \in M$  ;
- $\sum_{b:(a,b) \in A} W_{ab} - \sum_{b:(b,a) \in A} W_{ba} = s_a$ , equação de vazão massa em cada nó  $a \in N$  ;

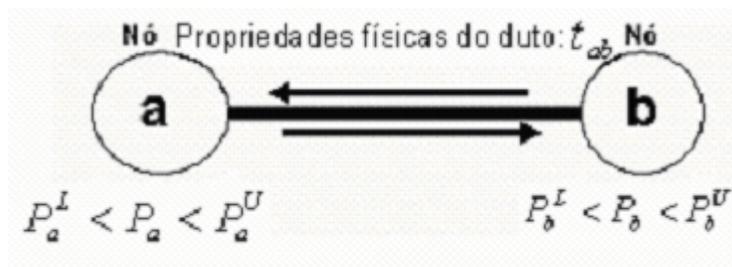
A Figura 17, a seguir representa a vazão massa em um nó  $a$  :



**Figura 17:** Balanço de fluxo dado o nó **a**

- $W_{abk} = \sum_{k=1}^{K_{ab}} x_{abk} W_{abk}$ , equação de vazão massa através da estação de compressão  $(a,b) \in \{1,2,\dots,m\}$ ;
- $p_a^2 - p_b^2 = t_{ab} W_{ab} |W_{ab}|$ , equação de balanço de pressões em cada gasoduto  $l$ , com  $(a,b) \in L$ ;

A Figura 18, a seguir, representa o balanço de pressão em um gasoduto  $(a,b)$ .



**Figura 18:** Balanço de pressões nos gasodutos.

- $p_a \in [p_a^L, p_a^U]$ , os limites de pressões em cada nó  $a \in N$ ;
- $(W_{ab}, P_{ab}^S, P_{ab}^D) \in D_{ab} \subset \mathfrak{R}^3$ , conjunto domínio viável de operacionalidade das estações de compressão  $(a,b) \in M$ .

O custo operacional de cada compressor  $k$  é medido pela função  $g_{abk}$ , com  $k = 1,2,\dots,K_{ab}$  é definida por:  $g_{abk}(W_{abk}, P_{ab}^S, P_{ab}^D)$ .

Uma estação de compressão  $(a,b)$ , com  $(a,b) \in M$  e que tem  $K_{ab}$  compressores, tem seu custo operacional medido pela soma dos custos de cada

compressor, ou seja:  $g_{ab}(W_{ab}, P_{ab}^S, P_{ab}^D) = \sum_{k=1}^{K_{ab}} g_{abk}(w_{abk}, P_{abk}^S, P_{abk}^D)$ .

## CAPÍTULO 07 – TESTES NUMÉRICOS, PSEUDO-ALGORITMO E RESULTADOS

### 7.1 Algoritmo GRASP

Os algoritmos apresentados por Azeredo (2008), foram utilizados como parte do algoritmo formulado por Christo (2008) para determinar a configuração de redes de gasodutos. Foram utilizadas as redes do Exemplo 02 e do Exemplo 03 de Wu et. al. (2000) para testar o algoritmo. As respectivas redes, dados e resultados alcançados serão apresentados no desenvolvimento deste capítulo. A topologia, das redes originais, foi mantida, porém os dados foram modificados de forma a considerar que todas as estações de compressão possuam cinco compressores: três do tipo A e dois do tipo B; cujas características foram especificadas por Azeredo (2008) (ver Secção 5.1, neste trabalho). Os dados em relação aos limites de pressão e as características físicas dos dutos foram alterados, para permitir a modificação em relação às estações de compressão que originalmente eram compostas por cinco compressores do tipo A.

O algoritmo heurístico, implementado por Christo (2008), é uma estrutura meta-heurística GRASP que inicia a etapa de pré-processamento e distribui aleatoriamente uma vazão massa para cada estação de compressão. Após distribuir as vazões nas estações de compressão, distribuem-se as vazões nas sub-redes, entre as subestações e, considerando uma pressão de entrega como referência, calculam-se as outras pressões da rede. Desta forma, um ponto  $(w, u, p)$  viável para a rede é calculado, onde  $w$  é um vetor de vazões massa de gás pelas estações de compressão,  $u$  é um vetor de vazões massa de gás pelos dutos e  $p$  é um vetor de pressões para os nós do gasoduto (incluídas as pressões de sucção e descarga das estações de compressão).

Admitindo-se que existam  $m$  estações de compressão no gasoduto, dado o vetor  $w^T = (w_1, \dots, w_m)$  de vazões massa a serem escoadas pelos compressores e

calculado o vetor  $u$ , as pressões são determinadas de maneira simples, enquanto os arcos da sub-rede envolvida não correspondem às estações de compressão. Mas, se um arco corresponde a uma estação de compressão  $k$ , então é conhecida a vazão massa  $w_k$  e uma das pressões envolvida, dentre a de sucção e a de descarga. Quando se conhecem a pressão de descarga  $p_d^k$ , necessita saber, se existe alguma pressão de sucção para a estação  $k$  que permita o escoamento da vazão  $w_k$ , na pressão  $p_d^k$ , ou seja, se existe algum ponto  $(w_k, p_s^k, p_d^k)$  viável para a estação de compressão  $k$ , cuja resposta algorítmica é obtida utilizando-se o Algoritmo 3 e sua modificação apresentada por Azeredo, (2008). Determinando, posteriormente, o custo de compressão e a configuração mais econômica associada à configuração determinada pelo usuário. Dessa forma, viabiliza-se o vetor  $(w,u)$  dotando-o das pressões correspondentes e calculando, simultaneamente, os custos de compressão.

O pseudo-algoritmo GRASP implementado em Christo (2008) para o problema de transporte de gás natural em redes, envolve estações de compressão com três compressores do tipo A e dois compressores do tipo B foi formulado como mostra a próxima secção.

## 7.2 Pseudo–Algoritmo 4 (GRASP) – Minimização de custos em um gasoduto

**Passo 1.** Determinar os dados de entrada do gasoduto:

- Matrizes de incidência  $A_l$  e  $A_m$ ;
- Características dos dutos e limites de pressão  $[p_s^L, p_s^U]$  nos nós;
- Características das estações de compressão: dois tipos de compressores, (como na Seção 6.1 de Azeredo, 2008).
- Informar dados necessários para rodar o algoritmo que calcula custos de compressão numa estação (que aqui chamaremos de Algoritmo 3) e um parâmetro  $\alpha \in (0,1)$  para determinar a lista de candidatos restrita que o Algoritmo GRASP trabalha. (Para cálculos  $\alpha$  foi considerado igual a 0,5).

- Fazer custo =  $\infty$ .

**Passo 2.** Pré-processamento do gasoduto:

- Montar a rede reduzida do gasoduto e determinar uma distribuição de possíveis vetores  $w^T = (w_1, \dots, w_m)$ , distribuições de vazão massa, a serem, comprimidas pelas estações de compressão; construir uma lista  $L_{\text{candidatos}}$ , conformada por todos os vetores  $w$  determinados;
- Aplicar o Algoritmo 3 para determinar, se possível, pressões de sucção e custos de compressão para cada estação  $k=1, \dots, m$ , processando a  $k$ -ésima parcela de  $w$ ; i.e, calcular

$$(p_s^k, p_d^k) \text{ e } g_k(w_k, p_s^k, p_d^k).$$

Os vetores  $w$ , para os quais não é possível encontrar as pressões  $(p_s^k, p_d^k)$  necessárias para a compressão, são declarados inviáveis e retirados da lista  $L_{\text{candidatos}}$ .

- Definir o custo total de compressão para cada vetor  $w$  determinado anteriormente, como

$$g(w, p_s, p_d) = \sum_{k=1}^m g_k(w_k, p_s^k, p_d^k),$$

onde  $(p_s^T, p_d^T) = (p_s^1, \dots, p_s^m, p_d^1, \dots, p_d^m)$ ; ordenar a lista  $L_{\text{candidatos}}$  de forma crescente em relação a esses custos e considerar, mediante o parâmetro  $\alpha \in (0,1)$ , a lista de candidatos restrita  $L_{\text{restrita}}$ .

**Passo 3.** Escolher aleatoriamente  $w \in L_{\text{restrita}}$  e determinar o vetor  $(u, p)$ , com  $u$  vazões massa escoando pelos dutos depois da compressão e  $p$  vetor das correspondentes pressões:

3.1 Se  $L_{\text{restrita}} \neq \emptyset$

3.2 Encontrar um vetor  $u$ , solucionando o sistema (9):

$$A_1 u = s - A_m w;$$

Se o vetor  $u$  não existir, ir para a sentença 3.7;

- 3.3 Determinar o vetor de pressões  $p_m$  na sub-rede correspondente à pressão de referência, solucionando  $A_l^T p_m^2 = \phi(u_m)$ , e  $u_m$  é o vetor de vazão massa escoada na respectiva rede (se o vetor  $p_m$  não existir, ir para a sentença 3.7); fazer  $k=m$ ;
- 3.4 Calcular, através do Algoritmo 3, as pressões de sucção para as estações associadas à sub-rede  $k$ , calcular o custo de compressão correspondente e a respectiva configuração da estação;
- 3.5 Calcular  $A_l^T p_k^2 = \phi(u_k)$ , e voltar a 3.5 até esgotar as sub-redes do gasoduto.
- 3.6 Calcular o custo de processar no gasoduto o ponto viável  $(w, u, p)$ :

$$g(w, u, p) = \sum_{k=1}^m g_k(w_k, p_s^k, p_d^k);$$

Ir para 3.8;

- 3.7 Não existe um vetor  $(w, u, p)$  viável para o gasoduto, fazer

$$L_{restrita} = L_{restrita} - \{w\}.$$

- 3.8 Fim do Se, 3.1.
- 3.9 Se  $L_{restrita} = \phi$ , Parar! O gasoduto não pode atender as especificações demandadas.

**Passo 4.** Busca de menores custos na vizinhança do ponto  $(w, u, p)$ :

- Construir uma vizinhança  $Wiz$  de  $(w, u, p)$  considerando variações de  $w$  e  $p$ , com as configurações fixas, determinadas no Passo 3, e calcular os respectivos custos dos pontos vizinhos:  $g(w_{viz}, u_{viz}, p_{viz})$ , onde  $(w_{viz}, u_{viz}, p_{viz}) \in Wiz$ ;
- Fazer

$$g(\hat{w}, \hat{u}, \hat{p}) = \min_{(w_{viz}, u_{viz}, p_{viz}) \in W_{viz}} \{g(w, u, p), g(w_{viz}, u_{viz}, p_{viz})\};$$

- Se o critério de parada do algoritmo não for atingido, voltar ao Passo 3. Caso contrário, ir ao Passo 5.

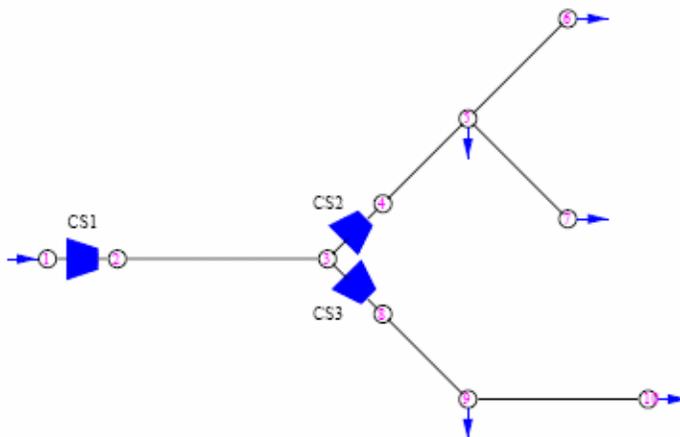
**Passo 5.** Busca de melhores pressões para o melhor ponto atual ponto  $(\hat{w}, \hat{u}, \hat{p})$  :

- Mantendo fixo o vetor  $(\hat{w}, \hat{u})$  e as correspondentes configurações, gerar uma vizinhança de  $(\hat{w}, \hat{u}, \hat{p})$ , mudando as pressões em passos pequenos (adequados), a partir de  $\hat{p}$ , a fim de encontrar um vetor  $(\hat{w}, \hat{u}, \tilde{p})$  tal que  $g(\hat{w}, \hat{u}, \tilde{p}) < g(\hat{w}, \hat{u}, \hat{p})$ .
- Parar! O ponto  $(\hat{w}, \hat{u}, \tilde{p})$  e o custo  $g(\hat{w}, \hat{u}, \tilde{p})$  associado são: o melhor ponto e o melhor custo encontrados para o gasoduto, respectivamente. A melhor configuração encontrada para o gasoduto corresponde ao ponto  $(\hat{w}, \hat{u}, \tilde{p})$ .
- Fim.

O Algoritmo 4 foi testado nos dois exemplos mencionados no início deste capítulo e os resultados são apresentados a seguir.

### 7.3 TESTES NUMÉRICOS

**Exemplo 01:** Este exemplo corresponde a uma rede em árvore, com dez nós, seis dutos e três estações (Wu et al., 2000).



**Figura 19:** Rede Simples de transmissão de gás natural.

**Fonte:** Wu et al., 2000.

Esta rede inclui um nó de fornecimento (nó 1) onde  $s_1 = 800$  e cinco nós de entrega (nós 5, 6, 7, 9 e 10), com  $s_5 = s_9 = -100$ ,  $s_6 = s_7 = -50$  e  $s_{10} = -300$ . Os limites inferiores de pressão são dados por  $p_1^L = p_2^L = 600$ ,  $p_3^L = p_6^L = p_7^L = p_9^L = 450$ ,  $p_4^L = 500$ ,  $p_5^L = p_{10}^L = 400$  e  $p_8^L = 550$ . Os limites superiores de pressão são dados por  $p_1^U = 700$  e  $p_i^U = 800$ , para todo  $i > 1$ . O conjunto de dutos é  $\{(2,3), (4,5), (5,6), (5,7), (8,9), (9,10)\}$  com comprimento de 50 milhas, diâmetro interno de 3 pés e fator de atrito 0.0085, para todos os dutos. As estações de compressão  $\{(1,2), (3,4), (3,8)\}$  desta rede estão compostas de cinco compressores centrífugos, três Tipo A e dois Tipo B, dispostos em paralelo.

Note que na aplicação do Passo 02 do algoritmo descrito (pré-processamento), desde que a rede reduzida é uma árvore, existe uma única distribuição de vetores vazão massa a serem comprimidos pelas estações de compressão:  $w^f = (w_1, w_2, w_3) = (800, 400, 400)$ . Portanto, a lista de candidatos,  $L_{candidatos}$ , e a lista de candidatos restrita,  $L_{restrita}$ , reduzem-se a esse único ponto. Pelo que o algoritmo só realiza uma única iteração, como mostrado na Tabela 02.

Determinado o vetor vazão massa nas estações,  $w$ , distribuem-se as vazões massa pelos dutos, solucionando o sistema (9),  $A_l u = s - A_m w$ . Assim, obtém-se o vetor  $u^T = (800, 400, 150, 150, 400, 300)$ . A partir da pressão de referência  $p_{10} = 700$ , usando a relação  $A_l^T p_m^2 = \phi(u_m)$ , para o sub-grafo correspondente, calculam-se as pressões  $(p_8, p_9) = (714.1718, 705.1346)$  e, usando o Algoritmo 3, calcula-se o custo de comprimir  $w_3 = 400$ , na estação 3, com pressão de descarga  $p_8$ , começando a testar com pressão de sucção  $p_3 = p_8 - k \cdot \Delta p$ , para  $k = 1, 2, \dots$ , com  $\Delta p = 5$ , até conseguir escoar  $w_3$  ou atingir o limite inferior  $p_3^L$ , em cujo caso  $w$  não seria possível escoar (e o problema não teria solução). Neste caso, como mostrado na Tabela 02, resultou  $p_3 = 665$ . Ao mesmo tempo, o Algoritmo 3 determina a configuração da estação  $r = (1, 0, 0, 1, 0)$  – i.e, usa-se um compressor Tipo A e um compressor Tipo B) – e o custo  $5.3999 \cdot 10^6$ .

Determinado  $p_3 = 665$ , usando novamente o Algoritmo 3, calcula-se o custo de comprimir  $w_2 = 400$ , na estação 2, com pressão de sucção  $p_3$ , começando a testar com pressão de descarga  $p_4 = p_3 + k \cdot \Delta p$ , para  $k = 1, 2, \dots$ , até conseguir escoar  $w_2$  ou atingir o limite superior  $p_4^U$ , em cujo caso  $w$  não seria possível escoar (e o problema não teria solução). Neste caso, como mostrado na Tabela 02, resultou  $p_4 = 715$ , com a configuração da estação  $r = (1, 0, 0, 1, 0)$  e custo  $5.438 \cdot 10^6$ . Calcula-se, então, a partir de  $A_l^T p_m^2 = \phi(u_m)$ , para o sub-grafo correspondente, as pressões  $(p_5, p_6, p_7)$ , usando  $p_4 = 715$  como referência.

Logo se calcula, a pressão  $p_2 = 702.5174$ , usando  $p_3 = 665$  como referência, e a pressão de sucção  $p_1 = 655$ , para comprimir  $w_1 = 800$ , na estação 1, usando a pressão de descarga  $p_2 = 702.5174$ . Resultando a configuração  $r = (1, 1, 0, 1, 1)$  e o custo  $1.0899 \cdot 10^6$ . Assim, obtém-se o custo total  $11.9278 \cdot 10^6$ , para transportar  $(\hat{w}, \hat{u}, \hat{p})$  pelo gasoduto.

O Passo 05 do algoritmo consiste em, mantendo vazões massa e configurações encontradas, variar as pressões de sucção e ou descarga com passo  $\Delta p = 1$  (menor que o anterior, que foi  $\Delta p = 5$ ), tentando melhorar o desempenho das configurações encontradas. Como mostrado na Tabela 02, as pressões mudaram, para:

$\tilde{p}^T = (600, 706.305, 669, 714, 704.9607, 703.6802, 703.6802, 714.1718, 705.1346, 700)$ , que resultou num custo de  $11,3813 \cdot 10^6$ , menor que o anterior ( $11.9278 \cdot 10^6$ ). Assim, o resultado obtido é  $(\hat{w}, \hat{u}, \tilde{p})$ , com custo  $11,3813 \cdot 10^6$  e configuração das estações determinada pela última linha da Tabela 02: Estação 1  $= (1, 1, 0, 1, 1)$ , Estação 2  $= (1, 0, 0, 1, 0)$  e Estação 3  $= (1, 0, 0, 1, 0)$ .

## RESULTADOS DO EXEMPLO 1

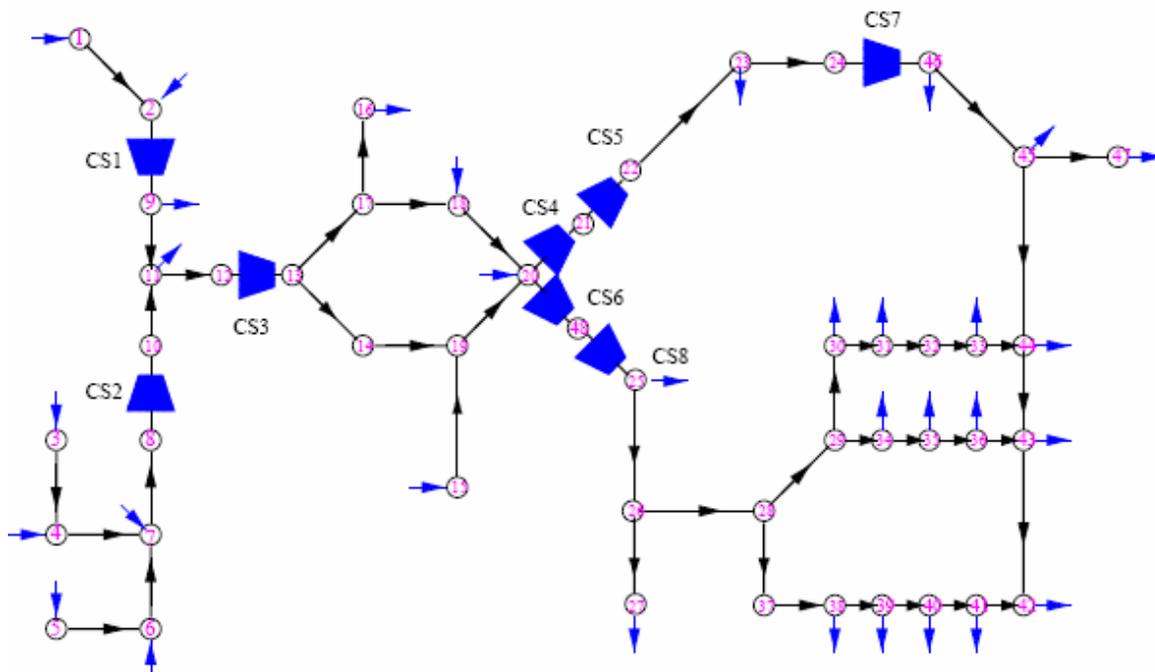
**Tabela 02:** Resultados obtidos em duas iterações utilizando a rede do exemplo 1, com estações de compressão compostas de compressores do tipo A e do tipo B.

| Vazão nas Estações de Compressão (MMSCFD) |     | Vazão nos Dutos (MMSCFD) |     | Pressões (psia) |          | Configurações |       | Custos (MMSCFD)                         |
|-------------------------------------------|-----|--------------------------|-----|-----------------|----------|---------------|-------|-----------------------------------------|
| W1                                        | 800 | U1                       | 800 | P1              | 655,0000 | Estação 1     | 11011 | $1,0899 \times 10^6$                    |
| W2                                        | 400 | U2                       | 400 | P2              | 702,5174 | Estação 2     | 10010 | $5,4380 \times 10^6$                    |
| W3                                        | 400 | U3                       | 150 | P3              | 665,0000 | Estação 3     | 10010 | $5,3999 \times 10^6$                    |
|                                           |     | U4                       | 150 | P4              | 715,0000 |               |       |                                         |
|                                           |     | U5                       | 400 | P5              | 705,9735 |               |       |                                         |
|                                           |     | U6                       | 300 | P6              | 704,6949 |               |       |                                         |
|                                           |     |                          |     | P7              | 704,6949 |               |       |                                         |
|                                           |     |                          |     | P8              | 714,1718 |               |       |                                         |
|                                           |     |                          |     | P9              | 705,1346 |               |       |                                         |
|                                           |     |                          |     | P10             | 700,0000 |               |       |                                         |
| <b>Total</b>                              |     |                          |     |                 |          |               |       | <b><math>11,9278 \times 10^6</math></b> |

| Vazão nas Estações de Compressão (MMSCFD) |     | Vazão nos Dutos (MMSCFD) |     | Pressões Modificadas (psia) |          | Configurações |       | Custo (MMSCFD)                          |
|-------------------------------------------|-----|--------------------------|-----|-----------------------------|----------|---------------|-------|-----------------------------------------|
| W1                                        | 800 | u1                       | 800 | P1                          | 660,0000 | Estação 1     | 11011 | $1,0655 \times 10^6$                    |
| W2                                        | 400 | u2                       | 400 | P2                          | 706,3050 | Estação 2     | 10010 | $5,1538 \times 10^6$                    |
| W3                                        | 400 | u3                       | 150 | P3                          | 669,0000 | Estação 3     | 10010 | $5,1620 \times 10^6$                    |
|                                           |     | u4                       | 150 | P4                          | 714,0000 |               |       |                                         |
|                                           |     | u5                       | 400 | P5                          | 704,9607 |               |       |                                         |
|                                           |     | u6                       | 300 | P6                          | 703,6802 |               |       |                                         |
|                                           |     |                          |     | P7                          | 703,6802 |               |       |                                         |
|                                           |     |                          |     | P8                          | 714,1718 |               |       |                                         |
|                                           |     |                          |     | P9                          | 705,1346 |               |       |                                         |
|                                           |     |                          |     | P10                         | 700,0000 |               |       |                                         |
| <b>Total</b>                              |     |                          |     |                             |          |               |       | <b><math>11,3813 \times 10^6</math></b> |

Fonte: Christo, 2008.

**Exemplo 2:** Este exemplo corresponde a uma rede mais complexa que apresenta ciclos e está composta de 48 nós, 43 dutos e 8 estações de compressão.



**Figura 20:** Rede de transmissão de gás natural com ciclos.

**Fonte:** Wu et al., 2000.

A rede inclui vários ciclos, de forma que as vazões não podem ser determinadas de maneira única. Os dados correspondentes às fontes, configuração de dutos, estações de compressão, limites de pressão e outros, que podem ser vistos com mais detalhes em Wu et al., (2000).

## RESULTADOS DO EXEMPLO 2

**Lista restrita:** na Tabela 03 na última coluna aparecem os custos em ordem decrescente da lista restrita de candidatos  $L_{restrita}$ , resultante do pré-processamento que corresponde ao Passo 2 do Algoritmo 4, onde inicia-se com um  $w_4$  e um  $w_6$  como parcelas críticas da vazão  $w^T = (w_1, \dots, w_8)$  em função do ciclo na rede reduzida. As vazões  $(w_4, w_6)$  são acompanhadas de pressões de sucção e de descarga para as respectivas estações e para os custos correspondentes, os quais são calculados de acordo com Azeredo (2008). Para determinar a  $L_{restrita}$ , (Tabela 03) foi utilizado  $\alpha = 0,5$ , ou seja, 50% dos pontos viáveis determinados na

$L_{candidatos}$  do Passo 2 do Algoritmo 4, onde observa-se que as pressões de descarga são iguais para cada par  $(w_4, w_6)$ .

**Tabela 03:** Lista restrita de candidatos para o algoritmo GRASP.

|    | $W_4$ | Ps (20) | P <sub>d</sub> (21) | Custo $w_4$ | $w_6$ | Ps (20) | P <sub>d</sub> (48) | Custo $w_6$ | Soma de Custos |
|----|-------|---------|---------------------|-------------|-------|---------|---------------------|-------------|----------------|
| 01 | 86    | 1010    | 1200                | 2,8009      | 84    | 1010    | 1200                | 2,69970     | 5,5006         |
| 02 | 83    | 1010    | 1200                | 2,6508      | 87    | 1010    | 1200                | 2,85330     | 5,5041         |
| 03 | 89    | 1010    | 1200                | 2,9616      | 81    | 1010    | 1200                | 2,55670     | 5,5183         |
| 04 | 80    | 1010    | 1200                | 2,5114      | 90    | 1010    | 1200                | 3,01750     | 5,5289         |
| 05 | 92    | 1010    | 1200                | 3,1328      | 78    | 1010    | 1200                | 2,42450     | 5,5573         |
| 06 | 77    | 1010    | 1200                | 2,3828      | 93    | 1010    | 1200                | 3,19220     | 5,5750         |
| 07 | 95    | 1010    | 1200                | 3,3143      | 75    | 1010    | 1200                | 2,30300     | 5,6173         |
| 08 | 74    | 1010    | 1200                | 2,2648      | 96    | 1010    | 1200                | 3,37700     | 5,6418         |
| 09 | 98    | 1010    | 1200                | 3,5059      | 72    | 1010    | 1200                | 2,19190     | 5,6978         |
| 10 | 71    | 1010    | 1200                | 2,1571      | 99    | 1010    | 1200                | 3,57190     | 5,7290         |
| 11 | 101   | 1010    | 1200                | 3,7073      | 69    | 1010    | 1200                | 2,09070     | 5,7980         |
| 12 | 68    | 1010    | 1200                | 2,0590      | 102   | 1010    | 1200                | 3,77670     | 5,8357         |
| 13 | 104   | 1010    | 1200                | 3,9185      | 66    | 1010    | 1200                | 1,99870     | 5,9172         |
| 14 | 65    | 1010    | 1200                | 1,9698      | 105   | 1010    | 1200                | 3,98960     | 5,9594         |
| 15 | 107   | 1010    | 1200                | 4,1264      | 63    | 1010    | 1200                | 1,90190     | 6,0283         |
| 16 | 62    | 1010    | 1200                | 1,8656      | 108   | 1010    | 1200                | 4,19610     | 6,0617         |
| 17 | 110   | 1010    | 1200                | 4,3379      | 60    | 1010    | 1200                | 1,79690     | 6,1348         |
| 18 | 59    | 1010    | 1200                | 1,7645      | 111   | 1010    | 1200                | 4,41000     | 6,1745         |
| 19 | 113   | 1010    | 1200                | 4,5567      | 57    | 1010    | 1200                | 1,70320     | 6,2599         |
| 20 | 56    | 1010    | 1200                | 1,6742      | 114   | 1010    | 1200                | 4,69050     | 6,3647         |
| 21 | 116   | 1010    | 1200                | 4,8571      | 54    | 1010    | 1200                | 1,60620     | 6,4633         |
| 22 | 53    | 1010    | 1200                | 1,5693      | 117   | 1010    | 1200                | 4,94190     | 6,5112         |
| 23 | 119   | 1010    | 1200                | 5,1143      | 51    | 1010    | 1200                | 1,50040     | 6,6147         |
| 24 | 50    | 1010    | 1200                | 1,4684      | 120   | 1010    | 1200                | 5,20200     | 6,6704         |
| 25 | 122   | 1010    | 1200                | 5,3803      | 48    | 1010    | 1200                | 1,40890     | 6,7892         |

**Fonte:** Christo, 2008.

As Tabelas 04 e 05 mostram os resultados de três iterações do Algoritmo 4. Os pontos  $(w_4, w_6)$  da lista restrita foram escolhidos aleatoriamente de acordo com a ordem em que apareceram: o primeiro foi o da posição 09, o segundo foi o da posição 05 e o terceiro foi o da posição 01, respectivamente. Além disso, aparecem: o vetor das vazões  $(w_4, w_6)$ , o vetor completo das vazões  $w^T = (w_1, \dots, w_8)$ , determinados pelas correspondentes escolhas, as pressões de

sucção e pressões de descarga, com a melhor configuração para cada estação de compressão, e os custos parciais correspondentes ao custo total. (Christo, 2008).

A última Tabela mostra o resultado do Passo 05, variação das pressões, com um  $\Delta p = 1$ , para a melhor escolha atual  $(\hat{w}, \hat{u}, \hat{p})$ . Resultando  $(\hat{w}, \hat{u}, \hat{p})$  o custo final de  $16,0203 \times 10^6$ , com as respectivas configurações.

**Tabela 04:**Primeira Iteração do Algoritmo 4 com ponto inicial  $(W4, W6)=(98, 72)$ .

| Aleatória 1 – Iteração 01: Candidato da Linha 09 da Lista Restrita |     |                           |      |                             |           |               |       |                               |
|--------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------|------|-----------------------------|-----------|---------------|-------|-------------------------------|
| Vazão nas Estações de Compressão (MMSCFD)                          |     | Pressões de Sucção (psia) |      | Pressões de Descarga (psia) |           | Configurações |       | Custo (MMSCFD)                |
| W1                                                                 | 60  | P02                       | 940  | P09                         | 985,52450 | W1            | 00011 | 1,4267x10 <sup>6</sup>        |
| W2                                                                 | 100 | P08                       | 920  | P10                         | 985,98170 | W2            | 11111 | 2,9179x10 <sup>6</sup>        |
| W3                                                                 | 110 | P12                       | 985  | P13                         | 1057,9000 | W3            | 11111 | 3,3517x10 <sup>6</sup>        |
| W4                                                                 | 98  | P20                       | 1055 | P21                         | 1140,0000 | W4            | 11111 | 2,2381x10 <sup>6</sup>        |
| W5                                                                 | 72  | P21                       | 1140 | P22                         | 1222,1000 | W5            | 11111 | 1,9576x10 <sup>6</sup>        |
| W6                                                                 | 72  | P20                       | 1055 | P48                         | 1115,0000 | W6            | 00011 | 1,9770x10 <sup>6</sup>        |
| W7                                                                 | 78  | P24                       | 1220 | P46                         | 1280,2000 | W7            | 00011 | 1,8728x10 <sup>6</sup>        |
| W8                                                                 | 72  | P48                       | 1115 | P25                         | 1278,4000 | W8            | 11011 | 1,8304x10 <sup>6</sup>        |
| <b>Total</b>                                                       |     |                           |      |                             |           |               |       | <b>17,5722x10<sup>6</sup></b> |

| Iteração 01: Modifica-se a vazão massa para os vizinhos de W4 – 1 e W6 + 1 |     |                           |      |                             |           |               |       |                               |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------|------|-----------------------------|-----------|---------------|-------|-------------------------------|
| Vazão nas Estações de Compressão (MMSCFD)                                  |     | Pressões de Sucção (psia) |      | Pressões de Descarga (psia) |           | Configurações |       | Custo (MMSCFD)                |
| W1                                                                         | 60  | P02                       | 935  | P09                         | 980,5272  | W1            | 00011 | 1,4387x10 <sup>6</sup>        |
| W2                                                                         | 100 | P08                       | 915  | P10                         | 980,9867  | W2            | 11111 | 2,9424x10 <sup>6</sup>        |
| W3                                                                         | 110 | P12                       | 980  | P13                         | 105,9000  | W3            | 11111 | 3,3778x10 <sup>6</sup>        |
| W4                                                                         | 97  | P20                       | 1050 | P21                         | 1135,0000 | W4            | 11111 | 2,2068x10 <sup>6</sup>        |
| W5                                                                         | 97  | P21                       | 1135 | P22                         | 1222,1000 | W5            | 11111 | 1,9812x10 <sup>6</sup>        |
| W6                                                                         | 73  | P20                       | 1050 | P48                         | 1115,0000 | W6            | 00011 | 2,1207x10 <sup>6</sup>        |
| W7                                                                         | 77  | P24                       | 1220 | P46                         | 1280,1000 | W7            | 00011 | 1,8202x10 <sup>6</sup>        |
| W8                                                                         | 73  | P48                       | 1115 | P25                         | 1278,6000 | W8            | 11011 | 1,8332x10 <sup>6</sup>        |
| <b>Total</b>                                                               |     |                           |      |                             |           |               |       | <b>17,7610x10<sup>6</sup></b> |

| <b>Iteração 01: Modifica-se a vazão massa para os vizinhos de W4 – 1 e W6 + 1</b> |     |                                  |      |                                    |           |                      |       |                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|----------------------------------|------|------------------------------------|-----------|----------------------|-------|-------------------------------|
| <b>Vazão nas Estações de Compressão (MMSCFD)</b>                                  |     | <b>Pressões de Sucção (psia)</b> |      | <b>Pressões de Descarga (psia)</b> |           | <b>Configurações</b> |       | <b>Custo (MMSCFD)</b>         |
| W1                                                                                | 60  | P02                              | 925  | P09                                | 975,5299  | W1                   | 00011 | 1,5276x10 <sup>6</sup>        |
| W2                                                                                | 100 | P08                              | 910  | P10                                | 975,9918  | W2                   | 11111 | 2,9672x10 <sup>6</sup>        |
| W3                                                                                | 110 | P12                              | 975  | P13                                | 1047,9000 | W3                   | 11111 | 3,4043x10 <sup>6</sup>        |
| W4                                                                                | 99  | P20                              | 1045 | P21                                | 1135,0000 | W4                   | 11111 | 2,3792x10 <sup>6</sup>        |
| W5                                                                                | 99  | P21                              | 1135 | P22                                | 1217,2000 | W5                   | 11111 | 2,0140x10 <sup>6</sup>        |
| W6                                                                                | 71  | P20                              | 1045 | P48                                | 1105,0000 | W6                   | 00011 | 1,9472x10 <sup>6</sup>        |
| W7                                                                                | 79  | P24                              | 1215 | P46                                | 1280,2000 | W7                   | 00011 | 2,0024x10 <sup>6</sup>        |
| W8                                                                                | 60  | P48                              | 925  | P25                                | 975,5299  | W8                   | 11011 | 1,5276x10 <sup>6</sup>        |
| <b>Total</b>                                                                      |     |                                  |      |                                    |           |                      |       | <b>18,1264x10<sup>6</sup></b> |

Fonte: Christo, 2008

**Tabela 05:** Segunda Iteração do Algoritmo 4 com ponto inicial (W4,W6)=(92,78).

| <b>Aleatória 2 – Iteração 02: Candidato da Linha 05 da Lista Restrita</b> |     |                                  |      |                                    |        |                      |       |                               |
|---------------------------------------------------------------------------|-----|----------------------------------|------|------------------------------------|--------|----------------------|-------|-------------------------------|
| <b>Vazão nas Estações de Compressão (MMSCFD)</b>                          |     | <b>Pressões de Sucção (psia)</b> |      | <b>Pressões de Descarga (psia)</b> |        | <b>Configurações</b> |       | <b>Custo (MMSCFD)</b>         |
| W1                                                                        | 60  | P02                              | 955  | P09                                | 1000,5 | W1                   | 00011 | 1,3914x10 <sup>6</sup>        |
| W2                                                                        | 100 | P08                              | 935  | P10                                | 1000,1 | W2                   | 11111 | 2,8295x10 <sup>6</sup>        |
| W3                                                                        | 110 | P12                              | 1000 | P13                                | 1072,8 | W3                   | 11111 | 3,2732x10 <sup>6</sup>        |
| W4                                                                        | 92  | P20                              | 1070 | P21                                | 1145,0 | W4                   | 11111 | 1,8160x10 <sup>6</sup>        |
| W5                                                                        | 92  | P21                              | 1145 | P22                                | 1231,8 | W5                   | 11011 | 2,0893x10 <sup>6</sup>        |
| W6                                                                        | 78  | P20                              | 1070 | P48                                | 1140,0 | W6                   | 00011 | 2,4488x10 <sup>6</sup>        |
| W7                                                                        | 72  | P24                              | 1230 | P46                                | 1280,1 | W7                   | 00011 | 1,4416x10 <sup>6</sup>        |
| W8                                                                        | 78  | P48                              | 1140 | P25                                | 1279,7 | W8                   | 11111 | 1,8283x10 <sup>6</sup>        |
| <b>Total</b>                                                              |     |                                  |      |                                    |        |                      |       | <b>17,1181x10<sup>6</sup></b> |

| <b>Iteração 02: Modifica-se a vazão massa para os vizinhos de W4 – 1 e W6 + 1</b> |     |                                  |      |                                    |           |                      |       |                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|----------------------------------|------|------------------------------------|-----------|----------------------|-------|-------------------------------|
| <b>Vazão nas Estações de Compressão (MMSCFD)</b>                                  |     | <b>Pressões de Sucção (psia)</b> |      | <b>Pressões de Descarga (psia)</b> |           | <b>Configurações</b> |       | <b>Custo (MMSCFD)</b>         |
| W1                                                                                | 60  | P02                              | 950  | P09                                | 995,5192  | W1                   | 00011 | 1,4032x10 <sup>6</sup>        |
| W2                                                                                | 100 | P08                              | 930  | P10                                | 995,9718  | W2                   | 11111 | 2,8698x10 <sup>6</sup>        |
| W3                                                                                | 110 | P12                              | 995  | P13                                | 1067,8000 | W3                   | 11111 | 3,2983x10 <sup>6</sup>        |
| W4                                                                                | 91  | P20                              | 1065 | P21                                | 1145,0000 | W4                   | 11111 | 1,8404x10 <sup>6</sup>        |
| W5                                                                                | 91  | P21                              | 1145 | P22                                | 1231,8000 | W5                   | 11011 | 2,0411x10 <sup>6</sup>        |
| W6                                                                                | 79  | P20                              | 1065 | P48                                | 1135,0000 | W6                   | 00011 | 2,5353x10 <sup>6</sup>        |
| W7                                                                                | 71  | P24                              | 123  | P46                                | 1280,1000 | W7                   | 00011 | 1,3989x10 <sup>6</sup>        |
| W8                                                                                | 79  | P48                              | 1135 | P25                                | 1279,9000 | W8                   | 11111 | 1,9224x10 <sup>6</sup>        |
| <b>Total</b>                                                                      |     |                                  |      |                                    |           |                      |       | <b>17,3094x10<sup>6</sup></b> |

| Iteração 03: Candidato da Linha 01 da Lista Restrita |     |                           |      |                             |        |               |       |                               |
|------------------------------------------------------|-----|---------------------------|------|-----------------------------|--------|---------------|-------|-------------------------------|
| Vazão nas Estações de Compressão (MMSCFD)            |     | Pressões de Sucção (psia) |      | Pressões de Descarga (psia) |        | Configurações |       | Custo (MMSCFD)                |
| W1                                                   | 60  | P02                       | 955  | P09                         | 1000,5 | W1            | 00011 | 1,3914x10 <sup>6</sup>        |
| W2                                                   | 100 | P08                       | 935  | P10                         | 1001,0 | W2            | 11111 | 2,8468x10 <sup>6</sup>        |
| W3                                                   | 110 | P12                       | 1000 | P13                         | 1072,8 | W3            | 11111 | 3,2732x10 <sup>6</sup>        |
| W4                                                   | 86  | P20                       | 1070 | P21                         | 1155,0 | W4            | 11011 | 1,9924x10 <sup>6</sup>        |
| W5                                                   | 86  | P21                       | 1155 | P22                         | 1231,6 | W5            | 11011 | 1,6932x10 <sup>6</sup>        |
| W6                                                   | 84  | P20                       | 1070 | P48                         | 1150,0 | W6            | 11011 | 2,4488x10 <sup>6</sup>        |
| W7                                                   | 66  | P24                       | 1230 | P46                         | 1280,0 | W7            | 00011 | 1,1925x10 <sup>6</sup>        |
| W8                                                   | 84  | P48                       | 1150 | P25                         | 1280,8 | W8            | 11011 | 2,0528x10 <sup>6</sup>        |
| <b>Total</b>                                         |     |                           |      |                             |        |               |       | <b>16,8911x10<sup>6</sup></b> |

Fonte: Christo, 2008

**Tabela 06:** Terceira Iteração do Algoritmo 4 com ponto inicial (W4,W6)=(86,84).

| Aleatória 3 – Iteração 01: Candidato da Linha 05 da Lista Restrita |     |                           |      |                             |        |               |       |                               |
|--------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------|------|-----------------------------|--------|---------------|-------|-------------------------------|
| Vazão nas Estações de Compressão (MMSCFD)                          |     | Pressões de Sucção (psia) |      | Pressões de Descarga (psia) |        | Configurações |       | Custo (MMSCFD)                |
| W1                                                                 | 60  | P02                       | 955  | P09                         | 1000,5 | W1            | 00011 | 1,3914x10 <sup>6</sup>        |
| W2                                                                 | 100 | P08                       | 935  | P10                         | 1000,1 | W2            | 11111 | 2,8295x10 <sup>6</sup>        |
| W3                                                                 | 110 | P12                       | 1000 | P13                         | 1072,8 | W3            | 11111 | 3,2732x10 <sup>6</sup>        |
| W4                                                                 | 92  | P20                       | 1070 | P21                         | 1145,0 | W4            | 11111 | 1,8160x10 <sup>6</sup>        |
| W5                                                                 | 92  | P21                       | 1145 | P22                         | 1231,8 | W5            | 11011 | 2,0893x10 <sup>6</sup>        |
| W6                                                                 | 78  | P20                       | 1070 | P48                         | 1140,0 | W6            | 00011 | 2,4488x10 <sup>6</sup>        |
| W7                                                                 | 72  | P24                       | 1230 | P46                         | 1280,1 | W7            | 00011 | 1,4416x10 <sup>6</sup>        |
| W8                                                                 | 78  | P48                       | 1140 | P25                         | 1279,7 | W8            | 11111 | 1,8283x10 <sup>6</sup>        |
| <b>Total</b>                                                       |     |                           |      |                             |        |               |       | <b>17,1181x10<sup>6</sup></b> |

| Iteração 02: Modifica-se a vazão massa para os vizinhos de W4 – 1 e W6 + 1 |     |                           |      |                             |           |               |       |                               |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------|------|-----------------------------|-----------|---------------|-------|-------------------------------|
| Vazão nas Estações de Compressão (MMSCFD)                                  |     | Pressões de Sucção (psia) |      | Pressões de Descarga (psia) |           | Configurações |       | Custo (MMSCFD)                |
| W1                                                                         | 60  | P02                       | 950  | P09                         | 995,5192  | W1            | 00011 | 1,4032x10 <sup>6</sup>        |
| W2                                                                         | 100 | P08                       | 930  | P10                         | 995,9718  | W2            | 11111 | 2,8698x10 <sup>6</sup>        |
| W3                                                                         | 110 | P12                       | 995  | P13                         | 1067,8000 | W3            | 11111 | 3,2983x10 <sup>6</sup>        |
| W4                                                                         | 91  | P20                       | 1065 | P21                         | 1145,0000 | W4            | 11111 | 1,8404x10 <sup>6</sup>        |
| W5                                                                         | 91  | P21                       | 1145 | P22                         | 1231,8000 | W5            | 11011 | 2,0411x10 <sup>6</sup>        |
| W6                                                                         | 79  | P20                       | 1065 | P48                         | 1135,0000 | W6            | 00011 | 2,5353x10 <sup>6</sup>        |
| W7                                                                         | 71  | P24                       | 123  | P46                         | 1280,1000 | W7            | 00011 | 1,3989x10 <sup>6</sup>        |
| W8                                                                         | 79  | P48                       | 1135 | P25                         | 1279,9000 | W8            | 11111 | 1,9224x10 <sup>6</sup>        |
| <b>Total</b>                                                               |     |                           |      |                             |           |               |       | <b>17,3094x10<sup>6</sup></b> |

| Iteração 03: Candidato da Linha 01 da Lista Restrita |     |                           |      |                             |        |               |       |                               |
|------------------------------------------------------|-----|---------------------------|------|-----------------------------|--------|---------------|-------|-------------------------------|
| Vazão nas Estações de Compressão (MMSCFD)            |     | Pressões de Sucção (psia) |      | Pressões de Descarga (psia) |        | Configurações |       | Custo (MMSCFD)                |
| W1                                                   | 60  | P02                       | 955  | P09                         | 1000,5 | W1            | 00011 | 1,3914x10 <sup>6</sup>        |
| W2                                                   | 100 | P08                       | 935  | P10                         | 1001,0 | W2            | 11111 | 2,8468x10 <sup>6</sup>        |
| W3                                                   | 110 | P12                       | 1000 | P13                         | 1072,8 | W3            | 11111 | 3,2732x10 <sup>6</sup>        |
| W4                                                   | 86  | P20                       | 1070 | P21                         | 1155,0 | W4            | 11011 | 1,9924x10 <sup>6</sup>        |
| W5                                                   | 86  | P21                       | 1155 | P22                         | 1231,6 | W5            | 11011 | 1,6932x10 <sup>6</sup>        |
| W6                                                   | 84  | P20                       | 1070 | P48                         | 1150,0 | W6            | 11011 | 2,4488x10 <sup>6</sup>        |
| W7                                                   | 66  | P24                       | 1230 | P46                         | 1280,0 | W7            | 00011 | 1,1925x10 <sup>6</sup>        |
| W8                                                   | 84  | P48                       | 1150 | P25                         | 1280,8 | W8            | 11011 | 2,0528x10 <sup>6</sup>        |
| <b>Total</b>                                         |     |                           |      |                             |        |               |       | <b>16,8911x10<sup>6</sup></b> |

Fonte: Christo, 2008

**Tabela 07:** Passo 5 do Algoritmo 4; procura do melhor ponto na vizinhança originada pelas pressões.

| Iteração 03: Candidato da Linha 01 da Lista Restrita |     |                           |      |                             |        |               |       |                               |
|------------------------------------------------------|-----|---------------------------|------|-----------------------------|--------|---------------|-------|-------------------------------|
| Vazão nas Estações de Compressão (MMSCFD)            |     | Pressões de Sucção (psia) |      | Pressões de Descarga (psia) |        | Configurações |       | Custo (MMSCFD)                |
| W1                                                   | 60  | P02                       | 960  | P09                         | 1004,5 | W1            | 00011 | 1,3673 x10 <sup>6</sup>       |
| W2                                                   | 100 | P08                       | 943  | P10                         | 1005,0 | W2            | 11111 | 2,7325 x10 <sup>6</sup>       |
| W3                                                   | 110 | P12                       | 1004 | P13                         | 1074,8 | W3            | 11111 | 3,2129 x10 <sup>6</sup>       |
| W4                                                   | 85  | P20                       | 1072 | P21                         | 1151,0 | W4            | 11011 | 1,8790 x10 <sup>6</sup>       |
| W5                                                   | 85  | P21                       | 1151 | P22                         | 1225,6 | W5            | 11011 | 1,6420 x10 <sup>6</sup>       |
| W6                                                   | 85  | P20                       | 1072 | P48                         | 1151,0 | W6            | 11011 | 1,8790 x10 <sup>6</sup>       |
| W7                                                   | 65  | P24                       | 1224 | P46                         | 1280,0 | W7            | 00011 | 1,2142 x10 <sup>6</sup>       |
| W8                                                   | 85  | P48                       | 1151 | P25                         | 1281,0 | W8            | 11011 | 2,0934 x10 <sup>6</sup>       |
| <b>Total</b>                                         |     |                           |      |                             |        |               |       | <b>16,0203x10<sup>6</sup></b> |

Fonte: Christo, 2008

## CAPÍTULO 08 – CONCLUSÕES

O problema de minimização de custos de combustível no transporte de gás natural, em uma rede de gasodutos, consiste em satisfazer as demandas de entrega de gás natural em pontos determinados da rede, a partir de pontos de injeção conhecidos, de forma a minimizar os custos operacionais. Os custos operacionais referidos correspondem ao consumo de combustível nas estações de compressão, que estão dispostas ao longo da rede com o objeto de devolver a pressão que o gás perde ao escoar pelos dutos. As estações são compostas por compressores que consomem parte do gás a ser comprimido. O consumo é denominado custo de combustível ou custo operacional. Foi assumido que a rede está em estado estacionário ou contínuo.

O problema é complexo e objeto de estudos de muitos pesquisadores (c.f., Carter, 1998; Ríos-Mercado et al, 2002, 2004; Wu et al, 2000; Iamashita, 2006; Iamashita et al, 2008). Um modelo contínuo apresentado por Ríos-Mercado et al (2002, 2004), sob a hipótese de estações compostas por compressores centrífugos idênticos, junto ao estudo sobre os domínios viáveis dessas estações e seus custos de combustível realizado por Wu et al (2000) e um algoritmo heurístico apresentado por Iamashita (2006), serviram como base para este trabalho que consistiu em: modelar o problema para o caso geral considerando as estações compostas por compressores centrífugos não necessariamente idênticos e formular um algoritmo para solucionar o modelo correspondente.

Considerou-se que as redes de transporte de gás natural são formadas unicamente por dutos para condução do gás, válvulas e outros dispositivos que permitem a junção dos dutos, que são denominados genericamente de nós do gasoduto, e as estações de compressão que permitem repor a pressão necessária para que o gás continue a escoar até os nós de entrega. Ainda supõe-se que as estações de compressão estão compostas por compressores centrífugos dispostos em paralelo, que podem ser ativados para aumentar a pressão da vazão de gás a ser escoada.

Ríos-Mercado et al (2002, 2004) e Wu et al (2000), junto à hipótese de estações compostas por compressores idênticos, assumiram que as vazões a serem comprimidas pelas estações dividem-se em parcelas iguais entre os compressores ativados na estação. Assim, se uma certa vazão  $w$  deve ser comprimida por uma certa estação composta por  $K$  compressores, poderão funcionar  $r$  destes e cada um comprimindo  $w/r$  da vazão, permitindo que a decisão a ser tomada responda qual deve ser o número de compressores, do total da estação, que deve ser ativado. Entretanto, quando os compressores não são idênticos, a decisão deve responder quais dos compressores, da estação, devem ser ativados. Naturalmente, sabendo-se quais serão ativados saber-se-á quanto o que conduz à formulação de um modelo mais complexo que o modelo original (Ríos-Mercado et al, 2002, 2004), que corresponde à função custo de combustível e a um domínio de funcionamento das estações mais complexo que os apresentados por Wu et al (2000).

Para o caso de estações compostas por compressores não idênticos, o modelo resultante é misto-inteiro, quadrático, não convexo e não diferenciável (pois algumas das funções envolvidas são dadas implicitamente), para o qual os algoritmos apresentados pelos autores mencionados não são aplicáveis, pois funcionam para os modelos contínuos e com os domínios de estação de compressão especificados.

Baseado no trabalho desenvolvido por Iamashita (2006), para o caso de redes de gás natural *off-shore*, onde unicamente é necessário contar com estações de compressão nos pontos de injeção da rede (um caso particular, onde as estações de compressão podem ser localizadas não unicamente nos pontos de injeção), em que se desenvolvem técnicas heurísticas genéticas e GRASP, sendo que esta última apresenta significativa superioridade, nesta pesquisa, foi proposta uma heurística GRASP para a solução do problema, a qual, foi testada em alguns exemplos da literatura mostrando sua potencialidade.

Futuros trabalhos são sinalizados, tendo em vista, que os resultados do algoritmo apresentado foram formulados de maneira simples e percebeu-se que sua performance pode ser melhorada realizando, por exemplo, um pré-

processamento do problema similar ao realizado por Wu et al (2000), onde as variáveis de pressão correspondentes aos nós que são de sucção ou a pressão podem ser devidamente substituídos, diminuindo o tamanho do problema. Testes adicionais, para um maior número de problemas devem ser desenvolvidos.

## 9.0 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

**Alvarenga, F. V. De & Rocha, M. L.** (2006). – Uma Metaheurística GRASP para o Problema da Árvore Geradora de Custo Mínimo com Grupamentos Utilizando Grafos Fuzzy. Departamento de Ciência da Computação Fundação-UNIRG, Gurupi, Tocantins, Brasil, January.

**Anglard, P. & David, P.** (1988). – Hierarchical steady optimization of very large gas pipelines. In Proceedings of the 20 th PSIG Annual Meeting, Toronto, October.

**Azeredo, M.M.** (2008). – Aproximações do domínio e a função custo de combustível no planejamento de movimentação de gás natural em gasodutos. Tese de Mestrado. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Produção. Universidade Estadual do Norte Fluminense.

**Bazaraa, M. S.; Sherali, H. D.; Shetty, C. M.** (1993). – Nonlinear Programming Theory and Algorithms – A Wiley – Interscience publication, USA.

**Bemporad, A.; Mignone, D.; Morari, M.** (1999). – An Efficient Branch and Bound Algorithm for State Estimation and Control of Hybrid Systems. European Control Conference.

**Carter, R. G.; Schroeder, D. W. And Harbick, T. D.** (1993). – Some causes and effects of discontinuities in modeling and optimizing gas transmission networks. In Proceedings of the 25 th PSIG Annual Meeting, Pittsburgh, Outubro.

**Cobos-Zaleta, D. & Ryos-Mercado, R. Z.** (2002). – A MINLP model for minimizing fuel consumption on natural gas pipeline networks. In Proceedings of the XI Latin-Ibero-American Conference on Operations, Concepcion, Chile, October.

**Christo, A.C.T.** (2008). – Uma Meta-Heurística GRASP para o planejamento de Movimentação de Gás Natural em Gasodutos. Tese de Mestrado. Curso de Pós-

Graduação de Engenharia de Produção. Universidade Estadual do Norte Fluminense. Campos dos Goytacazes. Março.

**De Wolf, D.** (2003). – Mathematical Properties of Formulations of the Gas Transmission Problem, Université de Lille 3, B. P. 149, 59 653 Villeneuve D'ascq Cedex, France.

**Gersting, J. L.** (2001). Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação, 4.<sup>a</sup> Edição .Rio de Janeiro: Editora LTC, 538pp.

**Iamashita, E. K., Galaxe, F., Arica, J., Justiniano, L. R. S., Iachan, R.** (2005a). – Um Algoritmo Genético Híbrido Para o Planejamento de Movimentação de Gás da Bacia de Campos. In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 37. Gramado, RS. 2005. CD-ROOM.

**Iamashita, E. K., Galaxe, F., Arica, J.,** (2005 b). – A New Integrated Planning Model for Gas Compression and Transmission Through a Complex Pipeline Network. Rio Pipeline Conference e Exposition. Rio de Janeiro.

**Iamashita, E. K.** (2006). – Sistemas de Planejamento de Movimentação de Gás Utilizando Metaheurísticas. Tese de Doutorado. Curso de Pós-Graduação de Engenharia de Produção. Universidade Estadual do Norte Fluminense. Macaé (Rio de Janeiro).

**Iamashita, E.K.; Galaxe, F.P.; Arica, J.** (2008). – *Planning Model for Offshore Natural gas Transmission*, A ser publicado em Pesquisa Operacional.

**Jurkiewicz, S.** (2002) – Introdução à Teoria dos Grafos. In: XXV CNMAC Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Nova Friburgo - RJ.

**Kim, S.** (1999). – Minimum-Cost Fuel Consumption on Natural Gas Transmission Network Problem. Doctoral dissertation. Texas A&M University, College Station. December.

**Larson, R. E. & Wisner, D. A.** (1971). – Hierarchical control of transient flow gas pipeline networks. In Proceedings of the IFAC Symposium on Distributed Parameter Systems, Banff, Alberta, Canadá.

**Lovász, L., Pelikán, J. & Vesztergombi, K.** (2006). – Matemática Discreta, volume 05 da Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira, 285pp, 1.<sup>a</sup> Edição, ISBN 85-85818-28-X.

**Matlab,** (2007) – Capturado do site: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=8569&objectType=FILE>, 13 de novembro às 14h10min.

**Miyazawa, F.K.** (2002). – Notas de Aula de Complexidade de Algoritmos. Disponível para download em [www.ic.unicamp.br/~fkm](http://www.ic.unicamp.br/~fkm).

**Osiadacz, A. J.** (1994). – Dynamic optimization of high pressure gas networks using hierarchical systems theory. In proceedings of the 26 th PSIG Annual Meeting, San Diego, October.

**Osiadacz, A. J. & Bell, D. J.** (1986). – A simplified algorithm for optimization of large – scale gas networks. Optimal Control Applications e Methods, 7: 95 – 104.

**Osiadacz, A. J. & Swierczewski, S.** (1994). – Optimal Control of gas transportation systems. In Proceedings of the 3<sup>rd</sup> IEEE Conference on Control Applications, p. 795 – 796, agosto.

**PBGAS – COMPANHIA PARAÍBANA DE GÁS.** (2007). – Capturado site: <http://www.pbgas.pb.gov.br/gasnat.shtml>. 13 de novembro às 13h30min.

**Rangel, M. C., Abreu, N. M. M., Boaventura-Neto, P.O.** (2000). – GRASP para o PQA: Um limite de aceitação para soluções iniciais. Pesquisa Operacional vol.20 numero 1. Rio de Janeiro, junho.

**Rezende, P.J.** (2002). – Complexidade de Algoritmos i. Disponível para download em [www.ic.unicamp.br/~rezende](http://www.ic.unicamp.br/~rezende).

**Rios-Mercado, R. Z., Kim, S., Boyd, E., A.** (2004). – Efficient Operation of Natural Gas Transmission Systems: A Network-based Heuristic for Cyclic Structures, September.

**Rios -Mercado, R.Z. (2002).** – Natural gas pipeline optimization. In: PARDALOS, P.M. & RESEND, M.G.C. ed. Handbook of Applied Optimization. Oxford University Press, p. 813-825., New York.

**Rios-Mercado, R. Z., Wu, S., Scott, L. R. & Boyd, E. A.** (2002). – A reduction technique for natural gas transmission network optimization problems. Annals of Operations Research, 117(1 – 4): 217 – 234.

**Rios-Mercado, R. Z., Wu, S., Scott, L. R. & Boyd, E. A.** (2000). – Preprocessing on Natural Gas Transmission Networks. Technical Report PISIS – 2000 – 01, Graduate Program in Aystems Engineering, UANL, San Nicolás de Los Garza, México, Novembro.

**Syslo, M. M, Deo, N. & Kowalik,J.S.** (1983). – Discret Optimization Algorithms with Pascal Programs. Rio de Janeiro: Editora Pretince-Hall doBrasil, 542pp.

**Weatherford** (2006). – Ver site: [http://www.weatherford.com/weatherford/groups/public/documents/production/gl\\_applications.hcsp](http://www.weatherford.com/weatherford/groups/public/documents/production/gl_applications.hcsp)

**Wong, P. J. and Larson, R. E. (1968).** – Optimization of tree – structured natural – gas transmission networks. Journal of Mathematical Analysis and Aplications, 24(3): 613 – 626.

**Wu, S.; Ríos-Mercado, R. Z.; Boyd, E. A. & Scott, L. R.** (2000). – Model Relaxations for the fuel cost minimization of steady-state gas pipeline networks. Mathematical and Computer Modelling, 31(2 – 3): 197 – 220.

**Zaleta, D. C.** (2003). – Modelos de Optimización Entera Mixta No Lineal En Sistemas de Transporte de Gas Natural. Tesis. Universidad Autónoma de Nuevo León, Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica División de Estudios Posgrado. San Nicolás de Los Garza, N. L. MX.

**Ziviani, N.** (2004). – Projeto de Algoritmos. Pioneira Thomson Learning, São Paulo. ISBN 85-221-0390-9.

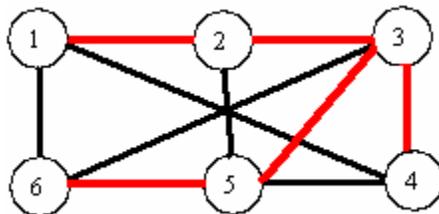
## APÊNDICE A: ÁRVORE GERADORA

### A.1 CONCEITOS BÁSICOS

De acordo com Alvarenga e Rocha, (2006), Lovász et al., (2006), Jurkiewicz e Gersting, (2001), tem-se as seguintes definições:

- Vértice: objeto simples que pode ter nome e outros atributos; O conjunto de vértices é denotado por  $V$ ;
- Aresta,  $(a,b), a,b \in V$  : conexão entre dois vértices (quando se associa direção ao grafo, o grafo diz-se direcionado ou dirigido, e a aresta recebe o nome de *arco*, sendo  $(a,b) \in V \times V$ );
- Grafo não direcionado (direcionado),  $(G,V)$ : conjunto de vértices e arestas (arcos);
- Grafo conectado: quando existe uma aresta que liga cada par de nós;
- Árvore livre: grafo não direcionado acíclico e conectado. É comum dizer apenas que o grafo é uma árvore omitindo o “livre”;
- Floresta: grafo não direcionado acíclico, podendo ou não ser conectado;
- Árvore Geradora de um grafo conectado  $G = (V, A)$ : subgrafo que contém todos os vértices de  $G$  e forma uma árvore;
- Floresta Geradora de um grafo  $G = (V, A)$ : subgrafo que contém todos os vértices de  $G$  e forma uma floresta;

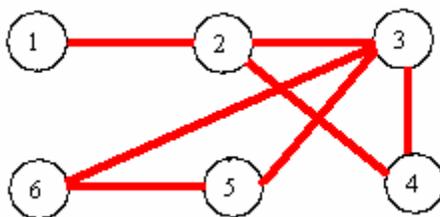
No grafo conectado  $G$ , abaixo, temos que  $T$  é uma Árvore Geradora, pois é um subgrafo e contém todos os vértices de  $G$ .



**Figura A1:** Árvore Geradora  $T$  de solução:  $\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{3,5\},\{5,6\}$ .

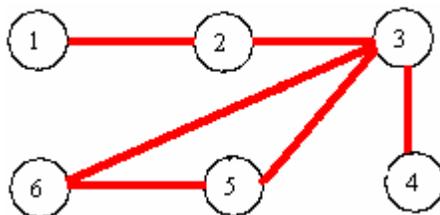
## A.2 SUBGRAFO E ÁRVORE GERADORA

As Figuras A2 e A3 são sub-grafos geradores da Figura A1. A Figura A4 é árvore geradora de A2 e A3 (Lovász et al., 2006).



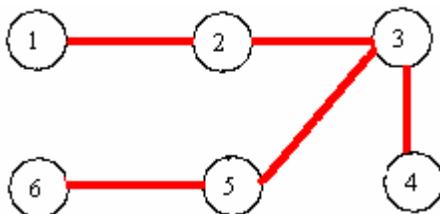
**Figura A2:** Grafo

Fonte: Adaptado Lovász et al., 2006.



**Figura A3:** Subgrafo

Fonte: Adaptado Lovász et al., 2006.



**Figura A4:** Subgrafo e Árvore Geradora

Fonte: Adaptado Lovász et al., 2006.

Em uma rede de transmissão de gás natural é importante conhecer a árvore geradora e o caminho (gasoduto) que conecta cada par de nós é dado pela matriz de incidência  $B$ . A matriz  $B$  definida na secção anterior.

Considere uma rede não direcionada conectada, para a qual existe uma distância (custo, tempo, etc) não-negativa associada a cada arco. Encontra-se

uma árvore geradora de custo mínimo, quando a conexão entre todos os nós é feita por caminhos de menor custo. (Jurkiewicz e Gersting, 2001).

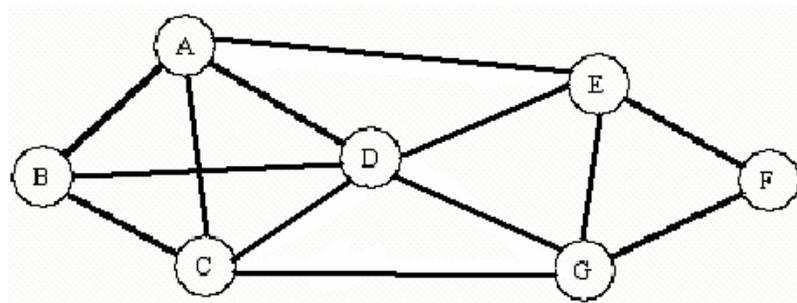
No transporte de gás natural precisa-se apenas da Árvore Geradora, pois os gasodutos não apresentam custos.

### A.3 COMO ENCONTRAR A ÁRVORE GERADORA

Uma rede com  $n$  nós requer somente  $n-1$  arcos para fornecer um caminho entre cada par de nós. Os  $n-1$  arcos formam uma Árvore Geradora. Portanto, uma árvore  $T$  é denominada **árvore geradora** de um grafo conexo se  $T$  é um subgrafo acíclico e contém todos os vértices de  $G$ . (Jurkiewicz e Gersting, 2001).

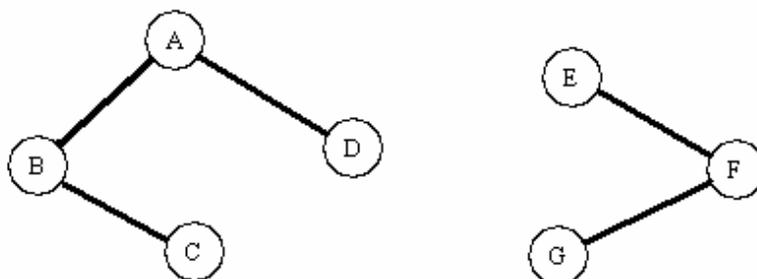
Exemplo:

Dado o grafo:



**Figura A5:** Grafo

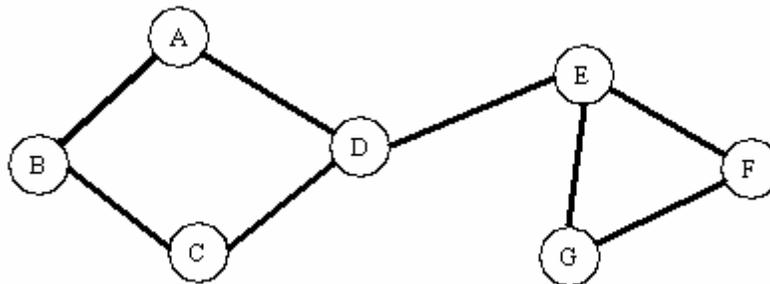
A figura abaixo não é uma Árvore Geradora do grafo da figura 14, pois os nós A, B, C e D não estão conectados aos nós E, F e G. (Lovász et al., 2006).



**Figura A6:** Não representa uma árvore geradora

**Fonte:** Lovász et al., 2006.

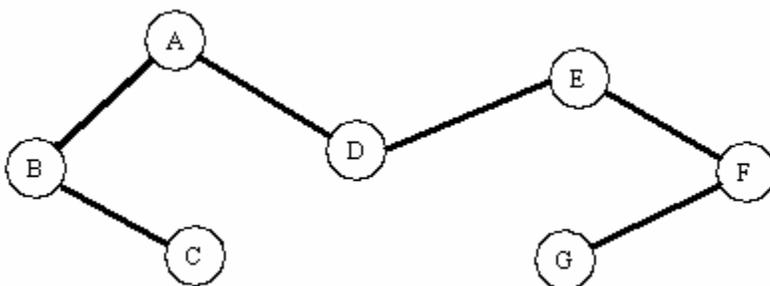
A figura abaixo gera uma rede, porém não é uma árvore da figura A5, pois existem dois ciclos: (A-B-C-D) e (E-F-G). (Lovász et al., 2006).



**Figura A7:** Subgrafo Gerador

**Fonte:** Lovász et al., 2006.

A figura abaixo é uma Árvore Geradora da figura A5, pois não existem ciclos e todo par de nós estão conectados. (Existe  $n-1=6$  arcos para  $n=7$  nós). Esta rede é uma solução viável, porém não se pode afirmar que é ótima, ou seja, não é necessariamente uma Árvore Geradora Mínima (AGM). Existem outras configurações, desta rede, que podem fornecer outras Árvore Geradoras. (Lovász et al., 2006).



**Figura A8:** Árvore Geradora

**Fonte:** Lovász et al., 2006.

#### A.4 ALGORITMO DE PRIM PARA DETERMINAR A ÁRVORE GERADORA

Nesta secção, será apresentado o Algoritmo utilizado para encontrar a Árvore Geradora de uma rede de transmissão de gás natural. Foram estudados outros algoritmos, como o de Kruskal, que seleciona a melhor aresta sem se preocupar com a conexão das arestas selecionadas anteriormente e o resultado é

uma proliferação de árvores que eventualmente se juntam para formar uma única árvore. Para o caso de gasodutos, os arcos não possuem custo. Portanto, é necessário encontrar apenas uma árvore geradora. O algoritmo que melhor atende estes objetivos é o Algoritmo de Prim. ( Miyazawa, (2002), Rezende, (2002) e Ziviani, (2004)).

## A.5 ALGORITMO DE PRIM

O algoritmo De Prim foi descoberto independentemente por R. C. Prim (1957) e por Dijkstra (1959) e é chamado o método do vizinho mais próximo, que se inicia escolhendo um nó (vértice) arbitrário, em seguida, vai construindo a árvore com arestas, sempre mantendo-a acíclica e conexa. A próxima aresta a ser incluída deve ser uma de menor custo, pois este algoritmo é guloso. A chave para uma boa implementação deste algoritmo é fazer a busca da próxima aresta de forma eficiente. (Syslo et. al.,(1983) e Rezende, (2002)).

Pseudocódigo do Algoritmo de Prim

- 1.º Passo: Começar com uma árvore formada apenas por um nó (vértice) arbitrário;
- 2.º Passo: A cada iteração adicionar uma aresta conectando o nó (vértice) já conectado a outro nó (vértice) não conectado, mantendo-a acíclica;
- 3.º Passo: Repetir o 2.º Passo até conectar todos os nós (vértices);
- 4.º Passo: Parar quando todos os nós (vértices) estiverem conectados.

## A.6 ALGORITMO DE PRIM (MATLAB)

```
%Prims Algorithm
%coded by Vikramaditya V. Kundur
clc
fid = fopen('matrix3.txt', 'r'); % Input file
%Input file should be in the form of a text file.
%5 %order of matrix
%0 2 3 4 0
%2 0 1 2 5
%3 1 0 1 2
%4 2 1 0 2
```

```

%0 5 2 2 0
l = fscanf(fid, '%g %g', [1 1]) % Input matrix size from line 1
h = fscanf(fid, '%g %g', [1 1]) % Input the matrix
a=h'
fclose(fid);

fid = fopen('Result.txt','wt'); % Output file
fprintf(fid,'Original matrix\n\n'); % Printing the original matrix in the output file
for i=1:l
    for k=1:l
        fprintf(fid,'%6d',a(i,k));
    end
    fprintf(fid,' \n');
end

for i=1:l
    for j=1:l
        if a(i,j)==0
            a(i,j)=inf;
        end
    end
end
k=1:l
listV(k)=0;
listV(1)=1;
e=1;
while (e<l)
    min=inf;
    for i=1:l
        if listV(i)==1
            for j=1:l
                if listV(j)==0
                    if min>a(i,j)
                        min=a(i,j);
                        b=a(i,j);
                        s=i;
                        d=j;
                    end
                end
            end
        end
    end
    listV(d)=1;
    distance(e)=b;
    source(e)=s;
    destination(e)=d;
    e=e+1;
end

```

```
end

fprintf(fid, '\n\nDistance modified matrix\n\n');
for i=1:l
    for k=1:l
        if i==k
            fprintf(fid, '%6d', 0);
        else
            fprintf(fid, '%6d', a(i,k));
        end
    end
    fprintf(fid, '\n');
end
fprintf(fid, '\n The nodes and shortest distances are \n');
fprintf(fid, '\nFORMAT: Distance(Source, destination) \n');
for g=1:e-1
    fprintf(fid, '%d(%d,%d)\n', distance(g), source(g), destination(g));
end
status = fclose(fid);
clear
```

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)