



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

**“ANÁLISE DE PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS ATRAVÉS DE UMA
FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO BASEADA NAS HIPÓTESES DE REISSNER”**

DANILO HIROSHI KONDA

Orientadora: Prof. Dra. Gabriela Rezende Fernandes

Co-orientador: Prof. Dr. Luiz Carlos Facundo Sanches

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia de Ilha Solteira – UNESP – para a
obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.
Área de Concentração: Estruturas

Ilha Solteira

Junho 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

| | |
|------|---|
| K82a | <p>Konda, Danilo Hiroshi. Análise de pavimentos de edifícios através de uma formulação do método dos elementos de contorno baseada nas hipóteses de Reissner / Danilo Hiroshi Konda. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2008 183 f.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Estruturas, 2008</p> <p>Orientador: Gabriela Rezende Fernandes Co-orientador: Luiz Carlos Facundo Sanches Bibliografia: p. 175-183</p> <p>1. Métodos de elementos de contorno. 2. Pavimentos de edifícios. 3. Flexão de placas.</p> |
|------|---|



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO



TÍTULO: ANÁLISE DE PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS ATRAVÉS DE UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO BASEADA NAS HIPÓTESES DE REISSNER

AUTOR: DANILO HIROSHI KONDA

ORIENTADORA: Profa. Dra. GABRIELA REZENDE FERNANDES

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA CIVIL pela Comissão Examinadora:

Profa. Dra. GABRIELA REZENDE FERNANDES
Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. RENATO BERTOLINO JUNIOR
Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. LEANDRO PALERMO JÚNIOR
Departamento de Estruturas / Universidade Estadual de Campinas

Data da realização: 15 de maio de 2008.

Presidente da Comissão Examinadora
Profa. Dra. GABRIELA REZENDE FERNANDES

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Armando Tomiharo Konda e Luzia Aparecida Beltrão Konda, com todo amor e gratidão, sem os quais nada seria possível.
Aos meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

À DEUS, que tudo criou. À Jesus Cristo salvador, rendo minha gratidão por esta relevante conquista.

Agradeço em especial à Professora Doutora Gabriela Rezende Fernandes pela excelente orientação, dedicação e estímulo despendidos ao longo deste trabalho. Da mesma forma agradeço ao Professor Doutor Luiz Carlos Facundo Sanches.

Ao Professor Doutor Renato Bertolino Júnior pela paciência e contribuições essenciais à execução deste trabalho, relativas à análise numérica utilizando-se o software ANSYS.

Ao CAPES pelo apoio financeiro.

Aos amigos Elias e Edward, que em uma demonstração de consideração fizeram de seus lares o meu. Ao camarada Tiago Leal pelas experiências de vida cedidas.

Ao Professor Mestre Niltom Vieira Junior pelo respeito e amizade adquiridos em inúmeras situações de fascínio durante todo este trabalho.

Aos familiares pela orientação emocional e espiritual, pelas críticas e por todos os conselhos, sempre úteis.

De uma maneira igual, agradeço a todos que, de qualquer forma, colaboraram positivamente para o desenvolvimento deste trabalho.

*“Try not to become a
man of success but rather
to become a man of value”*

Albert Einstein

RESUMO

KONDA, D. H. *Análise de Pavimentos de Edifícios Através de uma Formulação do Método dos Elementos de Contorno Baseada nas Hipóteses de Reissner*. Ilha Solteira. 2008. 183f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, UNESP.

Esse trabalho trata da análise linear de flexão de pavimentos de edifícios utilizando o Método dos Elementos de Contorno. A formulação de placas baseada nas hipóteses de Reissner, que possibilita a análise de placas finas e moderadamente espessas, é estendida a fim de se modelar pavimentos de edifícios. Nesse modelo, o pavimento é representado por uma placa composta de sub-regiões, sendo cada sub-região a representação de uma placa ou viga. Assim, a viga é modelada por uma sub-região de pequena largura e maior rigidez. As equações integrais dos deslocamentos são deduzidas utilizando-se o Método dos Resíduos Ponderados. Inicialmente as variáveis são definidas ao longo das interfaces e contorno externo da placa. Então, a fim de reduzir o número de graus de liberdade do problema, apresenta-se um modelo alternativo onde as variáveis ao longo das interfaces são escritas em função dos valores nos eixos das vigas. A validação da formulação proposta é feita através de exemplos, cujos resultados numéricos são comparados com valores previstos analiticamente ou com valores obtidos numericamente a partir de um *software* comercial baseado no Método dos Elementos Finitos.

Palavras – chave: Elementos de Contorno, Pavimentos de Edifícios, Flexão de Placas.

ABSTRACT

KONDA, D. H.. *Análise de Pavimentos de Edifícios Através de uma Formulação do Método dos Elementos de Contorno Baseada nas Hipóteses de Reissner*. Ilha Solteira. 2008. 183f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, UNESP.

This work deals with linear bending analysis of building floor structures by the Boundary Element Method. The plate formulation based on Reissner's hypothesis, which can be used either for thin or thick plates, is extended to model building floor structures which is represented by a zoned plate, where each sub-region defines a slab or a beam. The beams are modelled as narrow sub-regions with larger thickness. The integral equations are derived by applying the weighted residual method to each sub-region and summing them to obtain the equation for the whole body. Initially the values are defined on the interfaces and external boundary. Then, in order to reduce further the degrees of freedom, the interfaces values are translated to the the beam axis. The accuracy of the proposed model is confirmed by several numerical examples whose results are compared with the analytical solution if it exists or with a well-known finite element code.

Key words: Boundary elements; building floor structures, plate bending.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| FIGURA 2.1 – Elemento bidimensional de placa | 31 |
| FIGURA 2.2 – Posição da Reta Normal à Superfície Média Indeformada, Após a Deformação (Teoria de Kirchhoff) | 33 |
| FIGURA 2.3 – Posição da Reta Normal à Superfície Média Indeformada, Após a Deformação (Teoria de Reissner)..... | 33 |
| FIGURA 2.4 – Elemento infinitesimal..... | 34 |
| FIGURA 2.5 – Componentes de tensão em um elemento de placa | 35 |
| FIGURA 2.6 – Esforços Resultantes em um Elemento de Placa..... | 36 |
| FIGURA 3.1 – Definição do Problema Fundamental | 52 |
| FIGURA 3.2 – Efeito das Forças Unitárias no Domínio Ω^* : Solução Fundamental | 54 |
| FIGURA 3.3 – Pulso Retangular Unitário | 55 |
| FIGURA 3.4 – Integração ao Longo do Contorno da Região Carregada..... | 66 |
| FIGURA 3.5 – Representação de Pavimento Composto por três sub-regiões..... | 70 |
| FIGURA 3.6 – Domínio com Sub-Regiões Homogêneas..... | 71 |
| FIGURA 3.7 – Contorno Circular Acrescido a um Ponto Q de um Canto da Placa | 80 |
| FIGURA 3.8 – Modelo de Pavimento que Representa a Viga pela sua Linha Média | 84 |
| FIGURA 3.9 – Aproximação dos Momentos ao Longo da Largura de uma Viga Interna com Bordos Livres | 87 |
| FIGURA 3.10 – Decomposição de Forças de Superfície nas Faces de uma Viga Interna com Bordos Livres | 88 |
| FIGURA 3.11 – Sistema Local da Viga Interna | 89 |
| FIGURA 3.12 – Aproximação do Esforço Cortante ao Longo da Largura de uma Viga Interna | 90 |
| FIGURA 3.13 – Aproximação dos Momentos ao Longo da Largura da Viga Interna com Borda Vinculada..... | 92 |

| | |
|---|------------|
| FIGURA 3.14 – Aproximação do Esforço Cortante ao Longo da Largura da Viga Interna com Borda Vinculada..... | 93 |
| FIGURA 3.15 – Sistema Local de uma Viga Externa | 94 |
| FIGURA 3.16 – Aproximação de Q_n e M_n em Vigas com Extremidades Livres ... | 95 |
| FIGURA 3.17 – Aproximação de M_n em Vigas Externas com Extremidades Vinculadas..... | 97 |
| FIGURA 3.18 – Aproximação de Q_n em Vigas Externas com Extremidades Vinculadas..... | 98 |
| FIGURA 3.19 – Modelo de Pavimento com as Vigas Representadas pela Linha Média e Geração dos Elementos de Extremidade | 103 |
| FIGURA 4.1 – Métodos Numéricos Aplicados aos Problemas de Engenharia. (Kane, 1994) | 105 |
| FIGURA 4.2 – Discretização do Contorno da Placa | 106 |
| FIGURA 4.3 – Geometria do Elemento..... | 107 |
| FIGURA 4.4 – Funções de Forma em Aproximação Quadrática das Variáveis.. | 110 |
| FIGURA 4.5 – Elementos Contínuos..... | 113 |
| FIGURA 4.6 – Elementos Descontínuos..... | 113 |
| FIGURA 4.7 – Pontos de Colocação | 123 |
| FIGURA 4.8 – Movimento de Corpo Rígido - Translação | 126 |
| FIGURA 4.9 – Movimento de Corpo Rígido - Rotação | 127 |
| FIGURA 4.10a – Rotação de corpo Rígido em Torno do Eixo y | 129 |
| FIGURA 4.10b – Rotação de Corpo Rígido em Torno do Eixo x..... | 130 |
| FIGURA 4.11a – Elemento Shell 143..... | 133 |
| FIGURA 4.11b – Esforços Atuantes no Elemento Shell 143 | 133 |
| FIGURA 4.12– Placa Enrijecida com uma Viga Interna..... | 134 |
| FIGURA 4.13– Malha de 16 Elementos – 41 nós..... | 135 |
| FIGURA 4.14– Deslocamento w ao Longo do Eixo x_1 | 136 |
| FIGURA 4.15– Discretização do Domínio (ANSYS)..... | 137 |
| FIGURA 4.16– Deslocamentos ao Longo do Eixo x_1 | 137 |
| FIGURA 4.17– Malha de 30 Elementos – 69 nós..... | 139 |
| FIGURA 4.18– Convergência dos Deslocamentos..... | 139 |

| | |
|---|------------|
| FIGURA 4.19– Deslocamento w ao Longo do Eixo x_1 | 140 |
| FIGURA 4.20– Momento ao Longo do Eixo x_1 | 141 |
| FIGURA 4.21– Placa Enrijecida com Viga Externa | 142 |
| FIGURA 4.22– Deslocamento w ao Longo do Eixo x_1 | 142 |
| FIGURA 4.23 – Deslocamentos w ao Longo do Eixo x_1 | 143 |
| FIGURA 4.24 – Placa Enrijecida com Viga Externa | 144 |
| FIGURA 4.25 – Convergência dos Resultados | 145 |
| FIGURA 4.26 – Deslocamento w ao Longo do Eixo x_1 | 145 |
| FIGURA 4.27 – Momento M_n ao Longo do Eixo X_1..... | 146 |
| FIGURA 4.28 – Placa Enrijecida com Duas Vigas Externas | 147 |
| FIGURA 4.29 – Representação da Placa e Discretização do Contorno | 147 |
| FIGURA 4.30 – Viga Sujeita a Momento Fletor..... | 148 |
| FIGURA 4.31 – Deslocamento ao Longo do Eixo da Viga | 149 |
| FIGURA 4.32 – Pontos Internos | 149 |
| FIGURA 4.33 – Laje Enrijecida com Duas Vigas Externas..... | 150 |
| FIGURA 4.34 – Discretização com 96 Elementos..... | 151 |
| FIGURA 4.35 – Deslocamentos ao Longo do Eixo X | 152 |
| FIGURA 4.36 – Momento M_x ao Longo do Eixo X | 152 |
| FIGURA 4.37 – Deslocamentos ao Longo do Eixo Médio X da Placa..... | 153 |
| FIGURA 4.38 – Deslocamentos ao Longo do Eixo Médio Y da Placa..... | 153 |
| FIGURA 4.39 – Deslocamentos ao Longo do Eixo Médio da Viga..... | 154 |
| FIGURA 4.40– Momento na Direção X ao Longo do Eixo X..... | 154 |
| FIGURA 4.41 – Momento na Direção Y ao Longo do Eixo Y..... | 155 |
| FIGURA 4.42– Dimensões da Placa – Eixos de Referência..... | 156 |
| FIGURA 4.43– Representação Tridimensional do Pavimento..... | 157 |
| FIGURA 4.44– Discretização do Contorno do Pavimento | 157 |
| FIGURA 4.45 - Discretização do Domínio – Superfície Média (ANSYS) | 158 |
| FIGURA 4.46 – Deslocamentos na Laje ao Longo do Eixo x | 158 |
| FIGURA 4.47 – Deslocamentos na Laje ao Longo do Eixo x'_1 | 159 |
| FIGURA 4.48 – Deslocamentos na Laje ao Longo do Eixo y'_1 | 159 |
| FIGURA 4.49 – Deslocamentos ao Longo do Eixo X | 160 |

| | |
|--|------------|
| FIGURA 4.50 – Variação do Momento na Direção X ao Longo do Eixo x | 160 |
| FIGURA 4.51– Variação do Momento na Direção Y ao Longo do Eixo y'_1 | 161 |
| FIGURA 4.52 – Placa Enrijecida com Vigas Externas e uma Viga Interna..... | 161 |
| FIGURA 4.53 – Discretização Através das Linhas Médias das Vigas..... | 162 |
| FIGURA 4.54 – Deslocamentos ao Longo do Eixo da Viga Interna | 163 |
| FIGURA 4.55 – Discretização do Domínio – Superfície Média (ANSYS)..... | 163 |
| FIGURA 4.56 – Representação Tridimensional do Pavimento..... | 164 |
| FIGURA 4.57 – Flecha na Viga Interna | 164 |
| FIGURA 4.58 – Deslocamentos ao Longo do Eixo y'_1 | 165 |
| FIGURA 4.59 – Deslocamentos ao Longo do Eixo x'_1 | 165 |
| FIGURA 4.60– Variação do Momento M_s ao Longo do Eixo da Viga Interna | 166 |
| FIGURA 4.61– Momento M_x ao Longo do Eixo X_1 | 167 |
| FIGURA 4.62 – Placa Enrijecida com Vigas de Diferentes Rigidezes..... | 168 |
| FIGURA 4.63 – Deslocamento ao Longo do Eixo X..... | 169 |
| FIGURA 4.64 – Deslocamento w no Pavimento..... | 170 |
| FIGURA 4.65 – Deslocamento ao Longo do Eixo X'_1 | 170 |
| FIGURA 4.66 – Deslocamento ao Longo do Eixo X..... | 171 |
| FIGURA 4.67 – Momento M_x ao Longo do Eixo X'_1..... | 172 |
| FIGURA 4.68 – Momento M_s ao Longo do Eixo Y | 172 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|------------|
| TABELA 4.1 – Valores Analíticos do Momento..... | 135 |
| TABELA 4.2 – Deslocamentos nos Pontos Internos..... | 149 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FORTTRAN – *Formula Translation*

BEM – *Boundary Element Method*

MDF – Método das Diferenças Finitas

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MEF – Método dos Elementos Finitos

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|--------------------|---|
| α | :ângulo de rotação de corpo rígido; |
| ∇^2 | :operador de Laplace, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{(\partial x_i \partial x_i)}$; |
| Γ | :coordenada que percorre o contorno externo da placa; |
| $\Gamma_{s/viga}$ | :coordenada que percorre o contorno externo da placa sem vigas; |
| Γ_σ | :coordenada que percorre o contorno com esforço prescrito; |
| Γ_u | :coordenada que percorre o contorno com deslocamento prescrito; |
| Γ^* | :coordenada que percorre o contorno do domínio do problema fundamental; |
| Γ_∞ | :contorno infinito; |
| Γ_g | :contorno do carregamento transversal; |
| Γ_ξ | :contorno circular de raio infinitesimal; |
| Δ_{ij}^* | :componentes do operador de Navier |
| δ_{ij} | :delta de Kronecker; |
| $\delta(q, p)$ | :delta de Dirac; |
| γ_{ij} | :deformação no plano ij devido ao cisalhamento transversal; |
| ε_{ij} | :deformações no sistema global; |
| λ | :constante característica da teoria de Reissner; |
| σ_{ii} | :tensão normal; |
| σ_{ij} | tensor de tensões; |
| τ_{ij} | :tensão tangencial; |
| ν | :coeficiente de Poisson; |
| ξ | :coordenada local adimensional; |
| ϕ_n | :rotação na direção normal ao contorno; |

| | |
|-----------------------------------|--|
| ϕ_s | :rotação na direção tangencial ao contorno; |
| ϕ_{kn}^* | :rotação fundamental na direção normal devido à um momento unitário aplicado na direção k; |
| ϕ_{ks}^* | :rotação fundamental na direção tangencial devido à um momento unitário aplicado na direção k; |
| ϕ^T ~ | :matriz que contém as funções de interpolação dos deslocamentos e esforços;; |
| $\phi_{k,m}$ | :curvatura referente ao problema bidimensional; |
| Π_R | : funcional da placa escrito em termos de tensões, forças de superfície e deslocamentos; |
| $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ | :funções de forma quadráticas; |
| Ω | :coordenada de domínio; |
| Ω^* | :domínio semi-infinito referente ao problema fundamental; |
| Ω_∞ | :domínio infinito; |
| Ω_g | :área de aplicação do carregamento transversal distribuído; |
| Ω^+ | :domínio à direita da viga interna; |
| Ω^- | :domínio à esquerda da viga interna e externa; |
| a_{vi} | :metade da largura de uma viga interna qualquer; |
| a_{ve} | :metade da largura de uma viga externa qualquer; |
| b_i | :forças de volume na direção i; |
| C_{ijml} | :tensor de quarta ordem que contém as constantes elásticas; |
| Cos | :função cos-seno; |
| D | :rigidez à flexão da placa; |
| E | :módulo de elasticidade longitudinal; |
| G | :módulo de elasticidade transversal; |
| g | :carregamento transversal uniformemente distribuído; |
| g* | :carregamento fundamental; |

| | |
|-------------------|---|
| K_0, K_1 | :funções de Bessel; |
| L_j | :é o comprimento do elemento; |
| M_n | :momento de flexão na direção normal, por unidade de comprimento; |
| M_s | :momento de flexão na direção tangencial, por unidade de comprimento; |
| ΔM_n | :parcela da aproximação de M_n escrita em termos de deslocamentos; |
| M_{ns} | :momento volvente, por unidade de comprimento; |
| N_{noc} | :número de nós no contorno externo; |
| N_c | :número de nós no contorno externo sem vigas; |
| $N_{e(c)}$ | :número de elementos no contorno externo sem vigas; |
| $N_{vi-apoiadas}$ | :número de vigas internas apoiadas; |
| $N_{vi-livre}$ | :número de vigas internas livres; |
| N_{nove} | :número de nós nos eixos de vigas externas; |
| N_{novel} | :número de nós nos eixos de vigas externas livres; |
| $N_{novevinc}$ | :número de nós nos eixos de vigas externas engastadas e apoiadas; |
| N_{novi} | :número de nós nos eixos de vigas internas; |
| $N_{e(ve)}$ | :número de elementos nos eixos de vigas externas; |
| $N_{e(vi)}$ | :número de elementos nos eixos de vigas internas; |
| N_{vi} | :número de vigas internas |
| $N_{ve-vinc}$ | :número de vigas externas engastadas e apoiadas; |
| $N_{ve-livre}$ | :número de vigas externas apoiadas; |
| N_i | :número de pontos internos; |
| N_s | :número de sub-regiões; |
| N_{int} | :numero de interfaces; |
| N_t | :número de nós no contorno mais os nós internos; |

| | |
|------------------|--|
| n_j | :co-senos diretores na normal em relação ao eixo i; |
| n_{vi} | :normal do eixo da viga interna; |
| n_{ve} | :normal do eixo da viga externa; |
| P | :ponto onde se calculam os deslocamentos; |
| P_i | :forças generalizadas na direção i; |
| p_n | :forças de superfície na direção normal do contorno ou interface da placa; |
| p_s | :forças de superfície na direção tangencial do contorno ou interface da placa; |
| $\overline{p_i}$ | :forças prescritas no contorno; |
| P_{ks}^* | :força fundamental na direção tangencial no plano da placa, devido à uma carga fundamental aplicada na direção k; |
| P_{kn}^* | :força fundamental na direção normal no plano da placa, devido à uma carga fundamental aplicada na direção k; |
| $\tilde{p}(P)$ | :vetor de esforços do ponto P do contorno ou interface; |
| \tilde{P}^N | :vetor que contém os valores de esforços nos nós do elemento; |
| q | ponto onde se aplica a solução fundamental; |
| Q_i | :força cortante na direção i; |
| ΔQ_n | :parcela da aproximação de Q_n escrita em termos de deslocamentos; |
| r | :distância entre o ponto que se aplicou a força unitária ao ponto interno onde se deseja obter a força ou deslocamento na solução fundamental; |
| R | : distância entre o ponto que se aplicou a força unitária ao ponto do contorno ou interface onde se deseja obter a força ou deslocamento na solução fundamental; |
| Sin | :função seno; |
| S_σ | :trecho do contorno com tensões prescritas; |

| | |
|-----------------|--|
| S_u | :trecho do contorno onde os deslocamentos são prescritos; |
| s_{vi} | :sentido em que os elementos devem ser declarados na viga interna; |
| s_{ve} | :sentido em que os elementos devem ser declarados na viga externa; |
| t | :espessura da sub-região; |
| t_v | :espessura de viga; |
| t_L | :espessura de laje; |
| U | :energia de deformação; |
| U^* | :energia de deformação complementar; |
| U_i | :deslocamentos generalizados na direção i ; |
| \tilde{U} | :vetor de deslocamentos em todos os nós; |
| \tilde{U}^N | :vetor que contém os valores de deslocamentos nos nós do elemento; |
| u_1, u_2, u_3 | :componentes de deslocamentos no sistema cartesiano X_1, X_2, X_3 ; |
| \bar{u}_i | :deslocamentos prescritos no contorno; |
| $\tilde{u}(P)$ | :vetor de deslocamentos do ponto P ; |
| u_s | :deslocamento no plano da placa na direção tangencial ao contorno e interface; |
| u_n | :deslocamento no plano da placa na direção normal ao contorno e interface; |
| u_{ks}^* | :deslocamento fundamental na direção tangencial no plano da placa, devido a uma força unitária aplicada na direção k ; |
| u_{kn}^* | :deslocamento fundamental na direção normal no plano da placa, devido a uma força unitária aplicada na direção k ; |
| V | :volume; |
| V_n | :força cortante equivalente; |

| | |
|-----------------------------------|---|
| w | :deslocamento na direção do eixo X_3 ; |
| w^* | :deslocamento na solução fundamental devido à uma carga unitária; |
| $w_{,ij}$ | :curvaturas; |
| $\frac{\partial w}{\partial n}$ | :rotação normal ao contorno; |
| $\frac{\partial w}{\partial s}$ | :rotação tangencial ao contorno; |
| $\frac{\partial w}{\partial X_1}$ | :rotação em torno do eixo X_1 ; |
| $\frac{\partial w}{\partial X_2}$ | :rotação em torno do eixo X_2 ; |
| \tilde{X}^N | :vetor de coordenadas nodais de um elemento; |
| X_i^N | :coordenada cartesiana do ponto, na direção i ; |
| X_1, X_2, X_3 | :sistema de coordenadas cartesianas; |

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | APRESENTAÇÃO | 22 |
| 1.1 | INTRODUÇÃO | 22 |
| 1.2 | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 24 |
| 1.3 | CONTEÚDO DO TRABALHO | 28 |
| 2 | PROBLEMA DE PLACAS SEGUNDO A TEORIA DE REISSNER | 30 |
| 2.1 | INTRODUÇÃO | 30 |
| 2.2 | HIPÓTESES BÁSICAS | 31 |
| 2.3 | TENSÕES, ESFORÇOS E RELAÇÕES DE EQUILÍBRIO. | 34 |
| 2.4 | RELAÇÕES DOS DESLOCAMENTOS GENERALIZADOS ϕ_1 , ϕ_2 , w COM OS DESLOCAMENTOS u_1 , u_2 E u_3 | 38 |
| 2.5 | RELAÇÕES DOS ESFORÇOS COM OS DESLOCAMENTOS E SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS..... | 39 |
| 2.6 | CONDIÇÕES DE CONTORNO | 49 |
| 3 | FORMULAÇÃO DO MEC PARA ANÁLISE DO PAVIMENTO SUJEITO À FLEXÃO SIMPLES | 52 |
| 3.1 | PROBLEMA FUNDAMENTAL | 52 |
| 3.2 | SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACAS USANDO A TEORIA DE REISSNER..... | 54 |
| 3.3 | EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS PARA UM PONTO DO DOMÍNIO DE UMA PLACA..... | 60 |
| 3.4 | TRANSFORMAÇÃO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO DO CARREGAMENTO EM INTEGRAIS DE CONTORNO | 66 |
| 3.5 | EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS PARA UM PONTO INTERNO DA PLACA EM SUB-REGIÕES | 70 |
| 3.6 | EQUAÇÃO INTEGRAL DA DERIVADA DO DESLOCAMENTO TRANSVERSAL PARA UM PONTO INTERNO ($w_{,m}$) | 75 |
| 3.7 | EQUAÇÃO INTEGRAL DAS CURVATURAS ($\phi_{k,m}$) PARA UM PONTO INTERNO | 77 |
| 3.8 | EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS PARA PONTOS DO CONTORNO DA PLACA | 79 |
| 3.9 | EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS PARA PONTOS EXTERNOS | 81 |
| 3.10 | MODELO ALTERNATIVO PARA ANÁLISE DO PAVIMENTO | 82 |
| 3.10.1 | <i>EQUAÇÕES INTEGRAIS</i> | 83 |
| 3.11 | GERAÇÃO DOS ELEMENTOS DE EXTREMIDADE..... | 103 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4 | APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO..... | 104 |
| 4.1 | INTRODUÇÃO | 104 |
| 4.2 | DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO E EIXOS DE VIGAS | 105 |
| 4.3 | APROXIMAÇÃO DAS VARIÁVEIS NOS ELEMENTOS | 109 |
| 4.4 | REPRESENTAÇÃO DA DESCONTINUIDADE DAS VARIÁVEIS AO LONGO DO CONTORNO..... | 112 |
| 4.5 | TRANSFORMAÇÕES DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS EM EQUAÇÕES ALGÉBRICAS 114 | |
| 4.6 | SISTEMA DE EQUAÇÕES..... | 122 |
| 4.7 | PROPRIEDADES DA MATRIZ H | 125 |
| 4.8 | CÁLCULO DOS ESFORÇOS PARA UM PONTO INTERNO..... | 130 |
| 4.9 | EXEMPLOS NUMÉRICOS..... | 132 |
| 4.9.1 | <i>PLACA, ENRIJECIDA COM UMA VIGA INTERNA, ENGASTADA EM UM LADO E COM MOMENTO M_n APLICADO NO LADO OPOSTO.....</i> | <i>134</i> |
| 4.9.2 | <i>PLACA ENRIJECIDA COM UMA VIGA INTERNA, ENGASTADA EM UM LADO E COM FORÇA Q_n APLICADO NO LADO OPOSTO.....</i> | <i>138</i> |
| 4.9.3 | <i>PLACA ENRIJECIDA COM UMA VIGA EXTERNA, ENGASTADA EM UM LADO E COM MOMENTO M_n APLICADO NO LADO OPOSTO.</i> | <i>141</i> |
| 4.9.4 | <i>PLACA, ENRIJECIDA COM UMA VIGA EXTERNA, ENGASTADA EM UM LADO E COM FORÇA Q_n APLICADA NO LADO OPOSTO.</i> | <i>144</i> |
| 4.9.5 | <i>PLACA APOIADA, ENRIJECIDA COM DUAS VIGAS E COM MOMENTO APLICADO. 146</i> | |
| 4.9.6 | <i>PLACA ENGASTADA, ENRIJECIDA COM DUAS VIGAS EXTERNAS SUJEITA A CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA.....</i> | <i>150</i> |
| 4.9.7 | <i>PLACA APOIADA, ENRIJECIDA COM QUATRO VIGAS EXTERNAS COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA.</i> | <i>156</i> |
| 4.9.8 | <i>PLACA, ENRIJECIDA COM VIGAS EXTERNAS E UMA VIGA INTERNA COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA.</i> | <i>161</i> |
| 4.9.9 | <i>PLACA APOIADA, ENRIJECIDA COM VIGAS NO CONTORNO EXTERNO E VIGAS INTERNAS. 168</i> | |
| | CONCLUSÕES..... | 173 |
| | REFERÊNCIAS | 175 |

1 APRESENTAÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

As simulações numéricas aplicadas a problemas de engenharia têm evoluído de maneira considerável nos últimos anos, principalmente devido ao advento de computadores com maior capacidade de processamento. Computadores mais eficientes permitem reduzir o custo computacional de maneira significativa, permitindo a criação de modelos com uma menor quantidade de simplificações e, conseqüentemente, resultados mais confiáveis.

O uso de métodos numéricos facilita as representações de formas geométricas de estruturas e de materiais com leis constitutivas complexas, de difícil representação exata, ampliando o campo de análise, uma vez que, na grande maioria dos problemas a solução analítica é limitada, conhecida apenas nos casos clássicos. Tais métodos utilizam sistemas discretos em substituição aos sistemas contínuos dos métodos analíticos.

Atualmente têm-se diversos tipos de métodos numéricos, sendo três deles mais conhecidos: o método dos elementos de contorno (MEC) o método dos elementos finitos (MEF) e o método das diferenças finitas (MDF). Dentre esses três o mais recente é o MEC, que é um método de contorno, caracterizado pela formulação com equações integrais ao longo do contorno. Esse método apresenta duas vantagens principais em relação aos chamados métodos de domínio. A primeira vantagem é a possibilidade de redução da dimensionalidade do problema, ocasionando uma menor quantidade de dados de entrada e, assim, um menor sistema de equações algébricas. A segunda, é que as equações integrais que servem de base para o

cálculo, partem de uma representação exata das quantidades físicas do problema. Em contrapartida, existem algumas singularidades de difícil tratamento nas equações integrais básicas e a matriz do sistema de equações é geralmente densa e não simétrica. A formulação do método geralmente é obtida utilizando a técnica dos resíduos ponderados e em alguns casos o teorema de Betti.

O MEC desenvolveu-se rapidamente a partir da década de setenta tornando-se uma alternativa viável em diversos tipos de problemas de engenharia, principalmente onde existem elevados gradientes das variáveis envolvidas complicando a análise, por exemplo, concentração de tensão. Desta forma o método tem demonstrado bom desempenho para determinação de esforços em estruturas de pavimento de edifício, que geralmente são carregadas em pequenas áreas ou em linha, como é o caso da interação das lajes com as vigas.

A presente pesquisa tem por finalidade a análise linear de pavimentos de edifícios utilizando-se uma formulação do método dos elementos de contorno baseada nas hipóteses de Reissner. As hipóteses de Reissner permitem gerar um sistema de equações de sexta ordem, possibilitando o atendimento das três condições de contorno existentes nos problemas de placas, ao invés de duas da teoria clássica. A formulação de placas baseada nas hipóteses de Reissner é mais completa, pois é aplicável tanto para placas espessas quanto para as delgadas, ao contrário daquela baseada nas hipóteses de Kirchhoff (teoria clássica) que gera bons resultados apenas para placas delgadas. Assim, considerando-se as hipóteses de Reissner têm-se definidas as seguintes variáveis em cada nó sobre o contorno: o deslocamento transversal w , as rotações ϕ_s e ϕ_n (sendo n e s as direções tangencial e normal ao contorno), o momento fletor M_n , o momento volvente M_{ns} e o esforço cortante Q_n . Na teoria clássica em cada nó são definidos: w , w_n , M_n e o esforço cortante equivalente V_n .

A formulação desenvolvida neste trabalho se assemelha ao modelo alternativo desenvolvido por Fernandes (2003), onde o pavimento também é modelado por uma placa composta de sub-regiões, sendo cada sub-região a representação de uma laje ou viga. As vigas são representadas apenas por seus eixos médios, ou seja, as variáveis ao longo das interfaces laje-viga são escritas em função dos valores nos eixos das vigas, com a finalidade de reduzir o número de graus de liberdade do problema. Porém, no modelo de Fernandes (2003) a formulação é baseada nas hipóteses de Kirchhoff ao invés das hipóteses de Reissner, ou seja, aplica-se apenas a placas delgadas. Como as vigas são representadas por sub-regiões espessas,

uma das contribuições desse trabalho seria verificar se para um pavimento composto de lajes delgadas e vigas há diferenças significativas entre a formulação proposta por Fernandes (2003) e aquela aqui desenvolvida. É importante ressaltar que em Fernandes (2003) as forças de superfície são eliminadas das interfaces, o que diminui pela metade o número de variáveis por nó na interface, além de simplificar bastante a formulação, pois ao longo da largura das vigas tem-se a necessidade de aproximar apenas os deslocamentos. Na formulação aqui proposta não é possível eliminar as forças de superfície ao longo das interfaces, o que complicou consideravelmente o modelo, pois além dos deslocamentos teve-se que aproximar também as forças de superfície ao longo da largura das vigas.

Deve-se ressaltar que a programação da formulação proposta, que é bastante complexa para ser desenvolvida em um mestrado, foi desenvolvida por Fernandes (2007), como parte de seu projeto de pesquisa, financiado pela FAPESP, através do programa de jovem pesquisador em centros emergentes. Assim, o principal objetivo desse trabalho é validar a formulação proposta através de exemplos cujos resultados numéricos, serão comparados com a solução analítica (se existir) ou com os valores obtidos com o *software* ANSYS. Além disso, outra contribuição importante do trabalho é escrever de forma clara e detalhada todo o desenvolvimento da formulação proposta do MEC para análise de pavimentos de edifícios.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O método dos elementos de contorno é um método numérico cuja formulação é baseada em equações integrais. Fredholm (1903) deu início à solução de problemas físicos utilizando equações integrais. A primeira formulação indireta do MEC foi apresentada por Kupradze (1965), a qual consistia em obter soluções físicas a partir de fontes fictícias aplicadas no contorno. Pouco tempo depois, Rizzo (1967) publicou o primeiro artigo sobre a formulação direta do método das equações integrais de contorno, onde as variáveis eram valores que possuíam significado físico. No mesmo ano Jaswon (1967) propôs a solução da equação bi-harmônica por meio de equações integrais tornando-se o pioneiro na aplicação do método à análise de placas.

O método passa a ser denominado Método dos Elementos de Contorno ou MEC, após os trabalhos de Lachat (1975) e especialmente Brebbia (1978), que apresenta uma formulação do método das equações integrais de contorno a partir da técnica de resíduos ponderados. A partir de então o método também poderia ser combinado a outras técnicas numéricas, propiciando um equacionamento elegante e consistente.

Após 1978 o MEC começa a ficar mais conhecido, abrangendo várias áreas da engenharia, destacando: plasticidade, mecânica da fratura, mecânica dos solos, não-linearidade física e geométrica, percolação, placas, propagação de ondas, concentração de tensões, dentre outros.

Altiero e Sikarskie (1978) e Wu e Altiero (1979) apresentaram os primeiros trabalhos em formulação indireta na análise de placas. O método direto para a análise de placas se consolidou com os trabalhos de Hansen (1976), Bezine (1978), Bezine e Gamby (1978) e Stern (1979) que desenvolveram formulações considerando duas equações integrais relativas ao deslocamento transversal e à sua derivada na direção normal ao contorno baseadas na identidade de Green.

A partir desses trabalhos o MEC em placas desenvolveu-se de maneira bastante acentuada para diversos tipos de análises: Tottenham (1979) apresentou uma discussão das formulações direta e indireta para placas delgadas, bem como a sua extensão ao caso de placas apoiadas sobre base elástica e cascas abatidas. Weeën (1982) desenvolveu uma formulação para placas espessas com três graus de liberdade por nó de contorno e três representações integrais, sendo uma referente a deslocamento transversal e duas das rotações, considerando as hipóteses de Reissner. Bezine (1985) analisou placas sujeitas a instabilidade através de células internas para integrar o termo de domínio. Guo – Shu (1986) efetuou o cálculo das integrais singulares por meio de soluções particulares utilizando um esquema de interpolação hermitiana. Hartmann e Zotemantel (1986) discutiram o tratamento das integrais de domínio e possibilitaram a colocação de vínculos internos, inclusive elásticos.

Reissner (1986) apresentou uma formulação que pode ser considerada como uma generalização das equações para a análise de placas com grandes deformações, incluindo a deformabilidade da placa por cisalhamento transversal. No ano seguinte, Reissner (1987) demonstrou uma teoria para placas moderadamente espessas mostrando resultados consistentes com resultados clássicos.

Na solução do problema de placas várias formulações alternativas foram propostas, como a de Abdel – Akher e Hartley (1989), que utilizaram funções lagrangeanas e integrações analíticas para o cálculo das integrais singulares ou a de Piltner e Taylor (1989) que usaram funções complexas para a definição das soluções fundamentais considerando as deformações por cisalhamento.

Ribeiro e Venturini (1989), considerando o equacionamento proposto por Weeën (1982), escreveram um sistema de equações lineares tomando os pontos de carga fora do domínio, evitando assim a ocorrência de singularidades. Ao mesmo tempo, tratando das teorias de Reissner e Mindlin, têm-se os trabalhos de Westphal e De Barcelos (1989) e De Barcelos Silva (1989).

Reissner (1991) estudou o conceito de apoio *soft*, como uma condição para a transição de sua teoria de sexta ordem para a teoria clássica de quarta ordem.

Usando a teoria de Mindlin, Vilmann e Dasgupta (1992) desenvolveram uma solução fundamental para a flexão de placas de espessura variável, tendo como base a tese de doutorado de Vilmann (1985). Nesta tese, são apresentados exemplos de placas com carregamentos de tração e compressão aplicada no plano médio da placa.

Paiva (1991) apresenta uma nova formulação para a análise de placas elásticas em que a representação integral de Stern é alterada de forma que a força equivalente de Kirchhoff seja admitida concentrada nos pontos nodais ao longo do contorno.

Uma nova solução do MEC para placas espessas de Reissner foi modelada por Katsikadelis e Yotis (1993), onde a solução foi expressa em termos de dois potenciais, um bi-harmônico e um de Bessel. Tais potenciais eram estabelecidos a partir de suas representações integrais após a solução de seis equações de contorno, três integrais e três diferenciais.

Paiva e Oliveira Neto (1995) desenvolvem uma formulação promovendo alterações na representação integral de Stern que conduz à associação de três graus de liberdade para o deslocamento transversal, rotação normal e rotação tangencial. Desta forma, na montagem da representação integral algébrica são utilizadas equações integrais associadas ao deslocamento e suas derivadas direcionais normal e tangencial ao contorno.

El-Zafrany et al (1995) desenvolveram as soluções fundamentais para placas finas e moderadamente espessas com formas variadas. Os autores utilizaram funções no núcleo das integrais de contorno que separaram o efeito da deformação por cortante, visando a aplicação às placas finas.

Uma nova formulação para análise de placas enrijecidas foi proposta por Silva (1996), a qual permite a interação com outros elementos estruturais. Na interação placa-viga, utilizou-se uma combinação MEC-MEF.

Aliabadi et al (1997) analisaram tensões no contorno e no domínio da placa utilizando as hipóteses de Reissner. Foram utilizados dois métodos para a avaliação das tensões no contorno, um baseado nas tensões e deformações locais e o outro baseado na avaliação direta do tensor das tensões e deformações locais. As tensões internas sobre a espessura da placa também foram analisadas, sendo comparados os resultados com as soluções dos elementos de contorno para o caso tridimensional.

Uma conexão na formulação do método dos elementos de contorno entre a teoria de Reissner e a teoria clássica foi apresentada por Palermo (2000). As equações diferenciais da teoria de Mindlin foram escritas com termos equivalentes aos utilizados na análise de estados planos através de dilatações e rotações. Assim Palermo (2000) apresentou uma formulação simples para a análise de placas, a qual permitiu a obtenção de uma solução fundamental para a teoria de Reissner/Mindlin igual à obtida por Weeën (1982). Foi obtida ainda a solução fundamental da teoria clássica considerando-se a porção irrotacional da solução sem a correção do efeito do esforço cortante.

Andrade (2001) aplica o MEC como ferramenta de resolução numérica para analisar esforços e deslocamentos em placas homogêneas e isotrópicas. Atenção especial é dada a teoria de Reissner/Mindlin.

Leite, Coda e Venturini (2003), utilizando o método dos elementos de contorno, realizaram um estudo bidimensional de sólidos reforçados com barras em sub-regiões, onde é feita uma redução dos graus de liberdade do contorno através de uma aproximação linear de deslocamento da seção transversal do enrijecedor.

Fernandes e Venturini (2002) propõem um esquema alternativo para reduzir o número de graus de liberdade na análise de flexão simples de placas utilizando uma formulação do MEC baseada nas hipóteses de Kirchhoff. Neste trabalho o pavimento é modelado por uma placa dividida em zonas, onde cada sub-região define uma viga ou laje.

Recentemente, Fernandes e Venturini (2002) estenderam a formulação proposta em Fernandes e Venturini (2002) para representar todas as sub-regiões por uma mesma superfície de referência, de forma que fossem levados em conta os efeitos de excentricidade. Fernandes

(2003), também aplica a técnica de redução de graus de liberdade utilizando o método dos elementos de contorno para problemas em placas.

Paiva e Aliabadi (2004) apresentam uma formulação para placas em sub-regiões onde as equações integrais de contorno da curvatura dos pontos localizados nas zonas de interface são deduzidas de uma maneira muito conveniente.

Suetake (2006) propõe uma modificação diferenciada para incluir na formulação de placas a deformação transversal por cortante, criando uma teoria de placas que inclui não somente a deformação transversal, mas também efeitos de tensão normal.

1.3 CONTEÚDO DO TRABALHO

O presente trabalho inicia-se com uma revisão bibliográfica sobre o Método dos Elementos de Contorno aplicado às teorias de placas. No capítulo 2, apresentam-se as relações básicas da teoria tridimensional da elasticidade linear com o objetivo de ilustrar a teoria bidimensional de placa de maneira mais generalizada. Neste capítulo são apresentadas a teoria de Reissner e as hipóteses básicas da teoria clássica com a finalidade de mostrar a diferença entre as duas teorias.

No capítulo 3, é apresentada uma formulação com base na teoria de Reissner para análise do pavimento de um edifício sujeito à flexão simples. Nesse modelo o pavimento é representado por uma placa composta de sub-regiões, que podem ser a representação de lajes ou vigas. Apresenta-se ainda um modelo alternativo para análise do pavimento, onde as variáveis das vigas são definidas ao longo dos seus eixos e não sobre os seus contornos.

No capítulo 4 aplica-se o Método dos Elementos de Contorno à formulação do modelo alternativo apresentada no capítulo 3. As equações integrais de placa são transformadas em equações algébricas através da discretização do contorno, eixos de vigas e ainda da utilização de funções aproximadoras para os deslocamentos e esforços nos elementos. Assim, escrevendo-se as equações integrais para todos os nós associados aos elementos do contorno e eixos de vigas, obtém-se um sistema de equações que é solucionado com a fixação das condições de contorno. A partir dos valores encontrados no contorno e eixos de vigas, são determinados os deslocamentos e esforços em qualquer ponto do domínio. Finalmente, com a finalidade de validar a formulação proposta, apresentam-se alguns exemplos numéricos simples cujos

resultados podem ser obtidos analiticamente e outros mais complexos cujos resultados são comparados com aqueles obtidos através do software ANSYS, baseado no Método dos Elementos Finitos.

Finalmente no capítulo 5 têm-se as conclusões e no capítulo 6 a bibliografia utilizada no presente trabalho.

2 PROBLEMA DE PLACAS SEGUNDO A TEORIA DE REISSNER

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será feita uma introdução referente à teoria da elasticidade linear, apresentando as formulações básicas expressas em função das relações deformação-deslocamento, equação constitutiva e equações de equilíbrio. Esta teoria, no caso tridimensional, apresenta seis componentes de tensão escritas em função de seis componentes de deformação através da lei de *Hooke*. Para abordar a teoria bidimensional de maneira generalizada, as equações de equilíbrio da placa serão escritas em função das seis componentes de tensão. Por outro lado, na placa serão consideradas apenas três componentes de tensão e deformação, diminuindo as incógnitas do problema. Também será apresentada a teoria de Reissner, a qual conduz a um problema de integração de sexta ordem podendo e devendo satisfazer a três condições de contorno por borda.

2.2 HIPÓTESES BÁSICAS

Placas são elementos estruturais que apresentam uma dimensão muito menor que as outras e todas as solicitações são normais ao plano médio, figura (2.1).

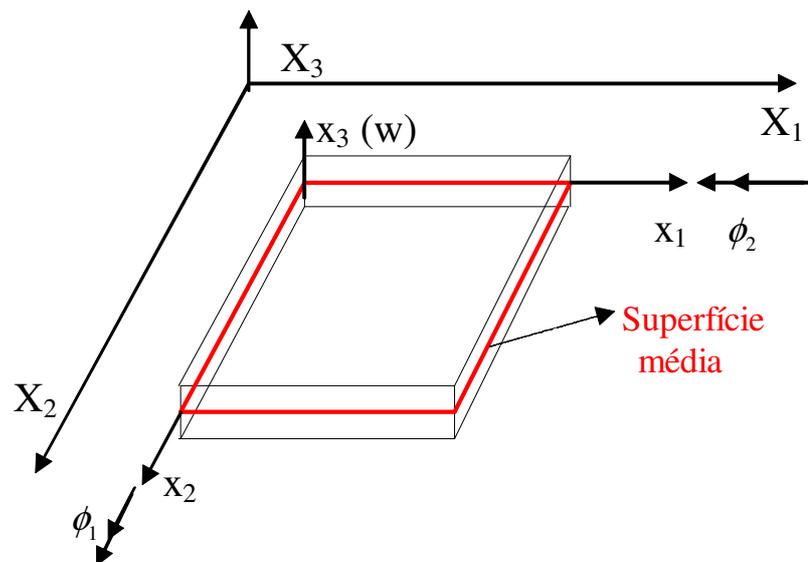


FIGURA 2.1 – Elemento bidimensional de placa

Os deslocamentos de um ponto qualquer da superfície média da placa, segundo os eixos X_1 , X_2 e X_3 , são dados, respectivamente, por: ϕ_2, ϕ_1 e w . Onde:

ϕ_2 é a rotação no plano X_2X_3 , ou seja, a rotação em torno de X_1 ; ϕ_1 é a rotação no plano X_1X_3 , ou seja, a rotação em torno de X_2 e w o deslocamento transversal.

As hipóteses básicas da teoria de Reissner são:

1. Espessura t da placa é pequena quando comparada às outras dimensões;
2. A placa é constituída de material homogêneo e isótropo, e de comportamento elástico-linear;
3. Uma reta inicialmente normal ao plano médio da placa, após a deformação permanecerá reta, porém não necessariamente normal à superfície média, devido à consideração das deformações por esforço cortante que causam distorções na peça;

4. As componentes tangenciais do tensor de tensões são nulas nas faces da placa, ou seja, $\tau_{13} = \tau_{23} = 0$ para $x_3 = \pm \frac{t}{2}$;
5. As componentes normais às superfícies externas da placa são $\sigma_{33} = \pm \frac{g}{2}$ quando $x_3 = \pm \frac{t}{2}$, sendo g o carregamento transversal aplicado à placa;
6. Os deslocamentos transversais são pequenos quando comparados com a espessura da placa.

Note que na teoria clássica de Kirchhoff (1850), as hipóteses são as seguintes:

1. Os deslocamentos transversais são pequenos e as deformações na direção da espessura são pequenas o suficiente, podendo ser desprezadas;
2. As componentes normais às superfícies externas da placa são pequenas, quando comparadas com as outras componentes de tensão, e podem ser desprezadas;
3. As componentes de deslocamento contidas no plano da placa variam linearmente com a espessura;
4. Retas normais ao plano médio da placa na posição indeformada, permanecem normais após a deformação. Isso significa desprezar as deformações por cortante que causam distorção;
5. As componentes tangenciais do tensor de tensões são nulas nas faces da placa.

Assim, as condições de deformação formuladas por Kirchhoff são:

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \quad (2.1)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0 \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0 \quad (2.3)$$

Para uma melhor compreensão entre as duas teorias, seja a figura (2.2) representando a teoria de Kirchhoff e a figura (2.3) representando a teoria de Reissner, onde está representada no plano X_2X_3 , a posição de uma reta após a deformação da placa, que inicialmente é normal à superfície média indeformada.

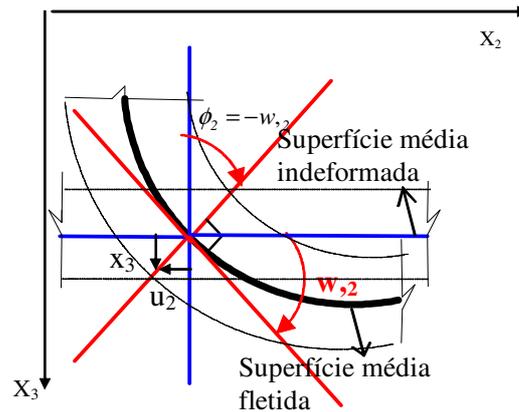


FIGURA 2.2 – Posição da Reta Normal à Superfície Média Indeformada, Após a Deformação (Teoria de Kirchhoff)

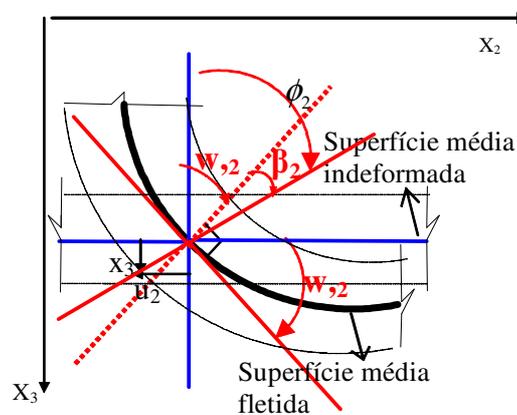


FIGURA 2.3 – Posição da Reta Normal à Superfície Média Indeformada, Após a Deformação (Teoria de Reissner)

Nas figuras (2.2) e (2.3) ϕ_2 é a rotação da reta normal à superfície média indeformada, após a deformação no plano X_2X_3 , ou seja, a rotação em torno de X_1 . Pode-se notar ainda nas

figuras (2.2) e (2.3) que $\phi_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} < 0$ e $\frac{\partial w}{\partial x_2} > 0$.

Na teoria de Kirchhoff $\phi_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -w_{,2}$ (ver figura 2.2), ou seja, o módulo da rotação é igual ao módulo da inclinação em x_2 da deformada.

Na teoria de Reissner (ver figura 2.3) tem-se que $\phi_2 = -w_{,2} + \beta_2$, chegando-se a seguinte deformação por cisalhamento transversal no plano $X_2 X_3$:

$$\gamma_{23} = \psi_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} = \beta_2 \quad (2.4)$$

2.3 TENSÕES, ESFORÇOS E RELAÇÕES DE EQUILÍBRIO.

Considere o elemento infinitesimal de volume representado pela figura (2.4).

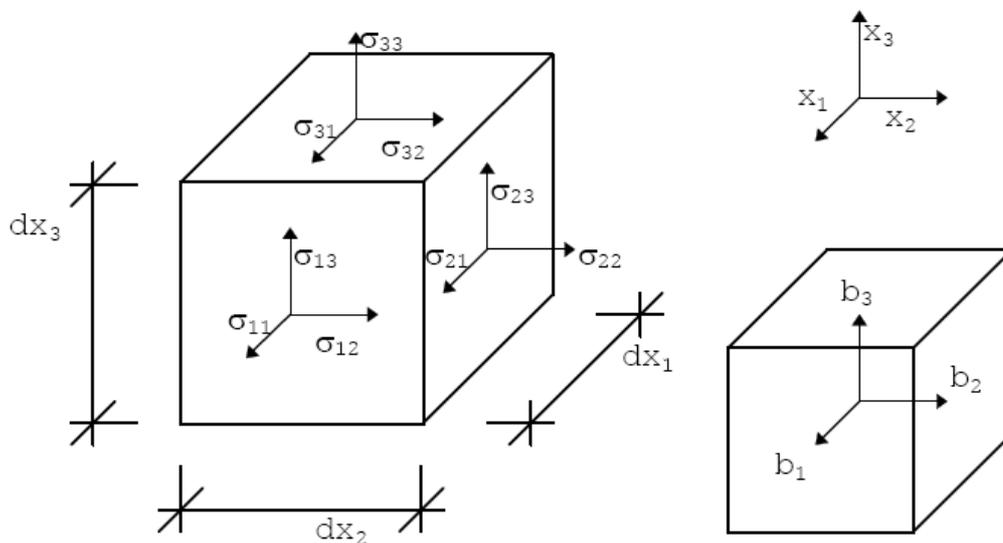


FIGURA 2.4 – Elemento infinitesimal

Este elemento, em equilíbrio estático, encontra-se sujeito a um sistema de forças aplicadas em sua superfície e sua massa. Assim de acordo com Chaves (1997), cada ponto

desse corpo, estará também, em equilíbrio, sujeito a um conjunto de tensões internas e forças de massa.

As equações de equilíbrio entre as tensões σ_{ij} e as forças de volume b_i nas direções X_1 , X_2 , X_3 , de acordo com a figura (2.5), são dadas por:

$$\sigma_{ij,j}(p) + b_i(p) = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

Onde b_i são forças de volume.

Considerando material elástico linear, homogêneo e isótropo e ainda que as tensões tangenciais sejam nulas nas faces das placas, pode-se deduzir que as componentes de tensão σ_{ij} (com $i, j = 1, 2$) variam linearmente ao longo da espessura, sendo dadas por:

$$\sigma_{ij} = \frac{12}{t^3} M_{ij} x_3 \quad (2.6)$$

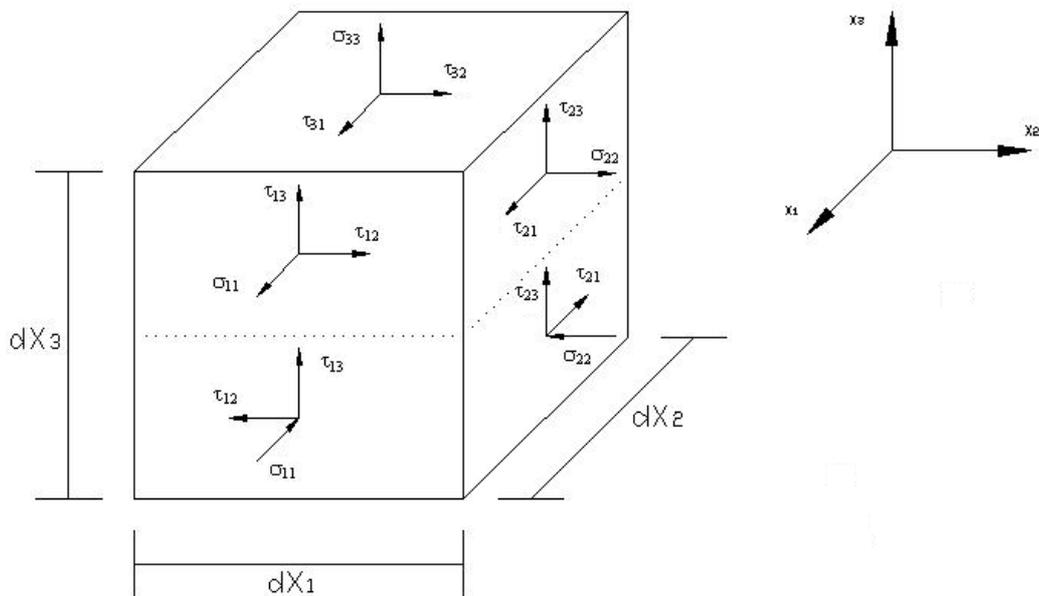


FIGURA 2.5 – Componentes de tensão em um elemento de placa

Admitindo uma distribuição linear de tensões ao longo da espessura da placa, tais tensões podem ser representadas por suas resultantes, dadas pelos momentos e forças cortantes na superfície média (ver figura (2.6)).

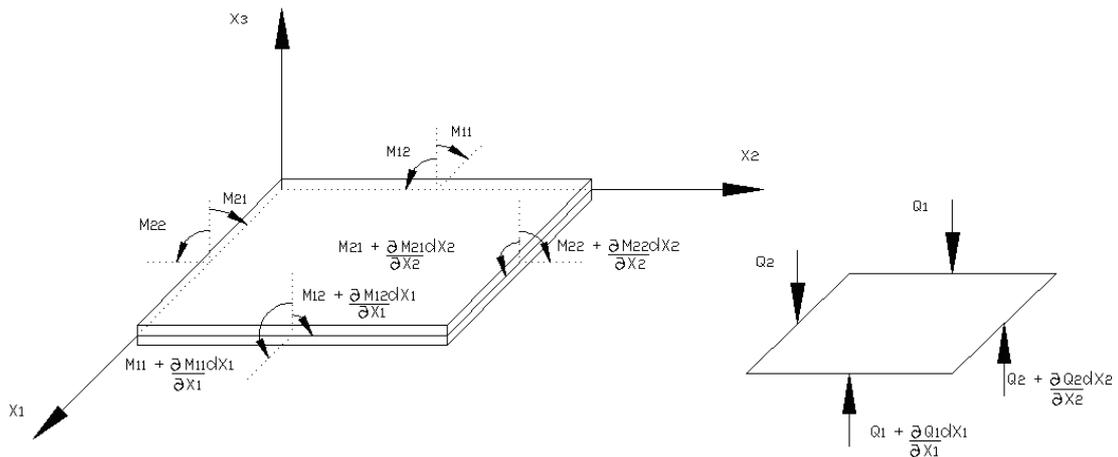


FIGURA 2.6 – Esforços Resultantes em um Elemento de Placa

Na figura (2.6) M_{11} e M_{22} são momentos de flexão e M_{12} e M_{21} momentos volventes.

No caso de placas, é conveniente expressar os esforços por unidade de comprimento Fernandes (2003). Dessa forma os momentos resultantes são obtidos fazendo-se a integração ao longo da espessura da placa, da força elementar correspondente a uma área elementar de largura unitária na direção normal, multiplicada pelo braço, Ou seja:

$$M_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{ij} \cdot 1 \cdot x_3 dx_3 \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.7)$$

Da mesma maneira obtêm-se os esforços cortantes por unidade de comprimento:

$$Q_i = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{i3} \cdot 1 \cdot x_3 dx_3 \quad i = 1, 2 \quad (2.8)$$

É importante ressaltar que as tensões τ_{13} e τ_{23} são consideradas nulas apenas nas faces da placa.

Considerando-se um elemento infinitesimal com carregamento distribuído g e fazendo-se o equilíbrio das forças verticais e dos momentos em torno de x_1 e x_2 , obtêm-se duas relações de equilíbrio:

$$Q_{i,i} + g = 0 \quad (i = 1,2) \quad (2.9)$$

$$M_{ij,i} - Q_j = 0 \quad (i, j = 1,2) \quad (2.10)$$

Substituindo a equação (2.6) na equação de equilíbrio (2.5) para $i=1$ e $i=2$, desprezando as forças de volume b_i e considerando-se a equação (2.10), chega-se à:

$$\frac{12}{t^3} Q_i x_3 + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} = 0 \quad (i = 1,2) \quad (2.11)$$

Integrando-se a equação (2.11) na direção X_3 obtêm-se a expressão para as componentes de tensão σ_{i3} :

$$\sigma_{i3} = \frac{3Q_i}{2t} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{t} \right)^2 \right] \quad i = 1,2 \quad (2.12)$$

De onde se conclui que a distribuição dessas tensões ao longo da espessura da placa é parabólica.

Substituindo-se então a expressão (2.12) na equação (2.5), para $i=3$ e considerando-se a equação (2.9), chega-se à expressão para a componente σ_{33} :

$$\sigma_{33} = \frac{gx_3}{2t} \left[3 - \left(\frac{2x_3}{t} \right)^2 \right] \quad (2.13)$$

De onde se deduz que essa tensão varia cubicamente ao longo da espessura da placa.

2.4 RELAÇÕES DOS DESLOCAMENTOS GENERALIZADOS

ϕ_1 , ϕ_2 , w COM OS DESLOCAMENTOS u_1 , u_2 e u_3

Os deslocamentos generalizados na superfície média da placa são representados por ϕ_1 , ϕ_2 e w . Os deslocamentos em um ponto qualquer ao longo da espessura da placa são representados por u_1 , u_2 e u_3 , segundo as direções X_1 , X_2 e X_3 , de acordo com a figura (2.1). Para determinar as expressões que relacionam esses deslocamentos considerar-se-á que o trabalho realizado por uma componente de tensão e seu respectivo deslocamento deve ser igual ao trabalho realizado pela resultante dessa tensão com o respectivo deslocamento generalizado. Dessa forma tem-se:

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{11} u_1 dx_3 = M_{11} \phi_1 \quad (2.14.a)$$

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{22} u_2 dx_3 = M_{22} \phi_2 \quad (2.14.b)$$

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{21} u_1 dx_3 = M_{21} \phi_1 \quad (2.14.c)$$

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{13} u_3 dx_3 = Q_1 w \quad (2.15.a)$$

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{23} u_3 dx_3 = Q_2 w \quad (2.15.b)$$

Substituindo a equação (2.6) nas equações (2.14) tem-se:

$$\phi_i = \frac{12}{t^3} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} u_i x_3 dx_3 \quad (2.16)$$

Substituindo a equação (2.12) nas equações (2.15) obtêm-se:

$$w = \frac{3}{2t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} u_3 \left[1 - \left(\frac{2x_3}{t} \right)^2 \right] dx_3 \quad (2.17)$$

2.5 RELAÇÕES DOS ESFORÇOS COM OS DESLOCAMENTOS E SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As relações dos esforços com os deslocamentos generalizados são obtidas a partir de uma condição de equilíbrio para um funcional definido para a placa.

Segundo o princípio de Reissner o funcional Π_R é escrito em função das tensões, forças de superfície e deslocamentos. De acordo com Ribeiro (1992), na ausência de forças de volume o funcional Π_R é dado por:

$$\Pi_R = -U^* - \int_{S_\sigma} \sigma_{ij,j} u_i dV + \int_{S_\sigma} (p_i - \bar{p}_i) u_i dS + \int_{S_u} p_i \bar{u}_i dS \quad (2.18)$$

Onde:

 u_i : são deslocamentos;

 p_i : são forças na superfície do contorno;

- ✚ \bar{u}_i : são deslocamentos prescritos no contorno;
- ✚ \bar{p}_i : são forças prescritas no contorno;
- ✚ S_σ : trecho do contorno com tensões prescritas;
- ✚ S_u : trecho do contorno onde os deslocamentos são prescritos;
- ✚ U^* : é a energia de deformação complementar, que no caso de material elástico linear e isótropo é igual à energia de deformação U, sendo dada por:

$$U = \int_V [\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2(1+\nu)(\sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\varepsilon_{23})] dV \quad (2.19)$$

As tensões σ_{ij} , os deslocamentos u_i e as forças de superfície atuantes em S_u são grandezas livres para assumirem valores quaisquer no funcional da placa.

A fim de escrever a expressão (2.19) em função apenas das componentes de tensão, considere as seguintes relações entre tensão e deformação válidas para um material com comportamento elástico linear:

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (2.20)$$

ou

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{ll} \delta_{ij} \right) \quad (2.21)$$

sendo:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.22)$$

onde:

- ✚ E: módulo de elasticidade longitudinal;
- ✚ G: módulo de elasticidade transversal;
- ✚ ν : coeficiente de Poisson.

Substituindo-se os valores de ε_{ij} dados em (2.21) na equação (2.19), tem-se:

$$U^* = \frac{1}{2E} \int_V [\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - 2\nu(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33}) + 2(1+\nu)(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)] dV \quad (2.23)$$

De acordo com o cálculo variacional, para que a placa esteja em equilíbrio, a condição supracitada a ser satisfeita é: $\partial\Pi_R = 0$.

Substituindo-se as expressões de σ_{ij} e σ_{i3} , dadas pelas equações (2.6) e (2.12), em (2.23) e integrando-se ao longo da espessura, chega-se à:

$$U^* = \frac{1}{2E} \int_{\Omega} \frac{12}{t^3} \left[(M_{11} + M_{22})^2 + 2(1+\nu)(M_{12}^2 - M_{11}\sigma_{22}) + \frac{(1+\nu)}{5} t^2 (Q_1^2 + Q_2^2) + \right. \\ \left. - \frac{\nu^2}{5} g(M_{11} + M_{22}) + \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{33}^2 dx_3 \right] d\Omega \quad (2.24)$$

A equação (2.18) será escrita em função dos esforços e dos deslocamentos generalizados na superfície média da placa, a fim de se obter as relações desejadas a partir da variação do funcional. Substituindo-se as expressões de σ_{ij} , σ_{i3} e σ_{33} , dadas em (2.6), (2.12) e (2.13), na equação (2.18) e sabendo-se que os valores da força de superfície p_i são dados por:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.25)$$

onde: n_j : são as componentes da normal ao contorno, dirigida para fora do domínio, a equação (2.18) resulta em:

$$\begin{aligned} \Pi_R = & -U^* - \int_V \left[\frac{12}{t^3} (M_{ij,j} - Q_i) u_i x_3 + \frac{3}{2t} (Q_{i,i} + g) u_3 \left(1 - \frac{4x_3^2}{t^2} \right) \right] dV + \\ & + \int_{S_\sigma} \left[\frac{12}{t^3} (M_{ij} n_j - \overline{M}_{ij} n_j) u_i x_3 + \frac{3}{2t} (Q_i n_i - \overline{Q}_i n_i) u_3 \left(1 - \frac{4x_3^2}{t^2} \right) \right] dS + \\ & + \int_{S_u} \left[\frac{12}{t^3} (M_{ij} n_j) \overline{u}_i x_3 + \frac{3}{2t} (Q_i n_i) \overline{u}_3 \left(1 - \frac{4x_3^2}{t^2} \right) \right] dS \end{aligned} \quad (2.26)$$

Substituindo-se os valores dos deslocamentos médios ponderados (2.16) e (2.17) na expressão do funcional (2.26) e considerando-se ainda as seguintes relações:

$$dV = dx_3 d\Omega \quad (2.27)$$

$$dS = dx_3 d\Gamma \quad (2.28)$$

chega-se à:

$$\begin{aligned} \Pi_R = & -U^* - \int_\Omega \left[(M_{ij,j} - Q_i) \phi_i + (Q_{i,i} + g) w \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_\sigma} \left[(M_{ij} n_j - \overline{M}_{ij} n_j) \phi_i + (Q_i n_i - \overline{Q}_i n_i) w \right] d\Gamma_\sigma + \int_{\Gamma_u} (M_{ij} n_j \overline{\phi}_i + Q_i n_i \overline{w}) d\Gamma_u \end{aligned} \quad (2.29)$$

A expressão (2.29) de Π_R está em função dos esforços e deslocamentos generalizados, ou seja, as grandezas sujeitas a variações são M_{ij} e Q_i definidos ao longo de Ω e Γ_u , e ainda os deslocamentos ϕ_i e w . Tomando-se a primeira variação de Π_R e igualando-a a zero, tem-se:

$$- \int_\Omega \left\{ \frac{12}{Et^3} [(M_{11} + M_{22}) \delta(M_{11} + M_{22}) + 2(1+\nu) M_{12} \delta M_{12} - (1+\nu) \delta(M_{11} M_{22})] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1+\nu)t^2}{5} (Q_1 \delta Q_1 + Q_2 \delta Q_2) - \frac{\nu^2}{10} g \delta (M_{11} + M_{22})] + \\
& + \phi_1 \delta (M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1) + \phi_2 \delta (M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2) + \\
& + w \delta (Q_{1,1} + Q_{2,2} + g) + (M_{11,1} + M_{12,1} - Q_1) \delta Q_1 + (M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2) \delta \phi_2 + \\
& + (Q_{1,1} + Q_{2,2} + g) \delta w \} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} [(M_{11} n_1 + M_{12} n_2 - \bar{M}_{11} n_1 - \bar{M}_{12} n_2) \delta \phi_1 + \\
& + (M_{21} n_1 + M_{22} n_2 - \bar{M}_{21} n_1 - \bar{M}_{22} n_2) \delta \phi_2 + (Q_1 n_1 + Q_2 n_2 - \bar{Q}_1 n_1 - \bar{Q}_2 n_2) \delta w] d\Gamma_\sigma + \\
& + \int_{\Gamma_u} [(\delta M_{11} n_1 + \delta M_{12} n_2) \bar{\phi}_1 + (\delta M_{12} n_1 + \delta M_{22} n_2) \bar{\phi}_2 + \\
& + (\delta Q_1 n_1 + \delta Q_2 n_2) \bar{w}] d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Rearranjando-se a equação (2.30), tem-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left\{ \frac{12}{Et^3} \left[(M_{11} + M_{22}) - (1+\nu)M_{22} - \frac{\nu^2}{10} g \right] \delta M_{11} + [(M_{22} + M_{11}) - (1+\nu)M_{11} + \right. \\
& - \frac{\nu^2}{10} g] \delta M_{22} + [2(1+\nu)M_{12}] \delta M_{12} + \frac{(1+\nu)}{5} t^2 (Q_1 \delta Q_1 + Q_2 \delta Q_2) \} + \\
& + \{ \phi_1 \delta (M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1) + \phi_2 \delta (M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2) + w \delta (Q_{1,1} + Q_{2,2} + g) + \\
& + (M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1) \delta \phi_1 + (M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2) \delta \phi_2 + (Q_{1,1} + Q_{2,2} + \\
& + g) \delta w \} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} [(M_{11} n_1 + M_{12} n_2 - \bar{M}_{11} n_1 - \bar{M}_{12} n_2) \delta \phi_1 + (M_{21} n_1 + M_{22} n_2 + \\
& - \bar{M}_{21} n_1 - \bar{M}_{22} n_2) \delta \phi_2 + (Q_1 n_1 + Q_2 n_2 - \bar{Q}_1 n_1 - \bar{Q}_2 n_2) \delta w] d\Gamma_\sigma + \\
& + \int_{\Gamma_u} [(\delta M_{11} n_1 + \delta M_{12} n_2) \bar{\phi}_1 + (\delta M_{12} n_1 + \delta M_{22} n_2) \bar{\phi}_2 + (\delta Q_1 n_1 + \\
& + \delta Q_2 n_2) \bar{w}] d\Gamma_u = 0
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Integrando por partes alguns termos, chega-se à:

$$\int_{\Omega} \phi_1 \delta M_{11,1} d\Omega = \int_{\Gamma} \phi_1 n_1 \delta M_{11} d\Gamma - \int_{\Omega} \phi_{1,1} \delta M_{11} d\Omega \tag{2.32.a}$$

$$\int_{\Omega} \phi_1 \delta M_{12,2} d\Omega = \int_{\Gamma} \phi_1 n_2 \delta M_{12} d\Gamma - \int_{\Omega} \phi_{1,2} \delta M_{12} d\Omega \quad (2.32.b)$$

$$\int_{\Omega} \phi_2 \delta M_{21,1} d\Omega = \int_{\Gamma} \phi_2 n_1 \delta M_{21} d\Gamma - \int_{\Omega} \phi_{2,1} \delta M_{21} d\Omega \quad (2.32.c)$$

$$\int_{\Omega} \phi_2 \delta M_{22,2} d\Omega = \int_{\Gamma} \phi_2 n_2 \delta M_{22} d\Gamma - \int_{\Omega} \phi_{2,2} \delta M_{22} d\Omega \quad (2.32.d)$$

$$\int_{\Omega} w \delta Q_{1,1} d\Omega = \int_{\Gamma} w n_1 \delta Q_1 d\Gamma - \int_{\Omega} w_{,1} \delta Q_1 d\Omega \quad (2.32.e)$$

$$\int_{\Omega} w \delta Q_{2,2} d\Omega = \int_{\Gamma} w n_2 \delta Q_2 d\Gamma - \int_{\Omega} w_{,2} \delta Q_2 d\Omega \quad (2.32.f)$$

Substituindo-se as equações (2.32) na equação (2.31) e reorganizando-a, essa resulta em:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_R = & - \int_{\Omega} \left\{ \left[\frac{12}{Et^3} \left[(M_{11} + M_{22}) - (1 + \nu) M_{22} - \frac{\nu t^2}{10} g \right] - \phi_{1,1} \right\} \delta M_{11} + \\ & + \left\{ \frac{12}{Et^3} \left[(M_{11} + M_{22}) - (1 + \nu) M_{11} - \frac{\nu t^2}{10} g \right] - \phi_{2,2} \right\} \delta M_{22} + \\ & + \left\{ \frac{12}{Et^3} [2(1 + \nu) M_{12}] - \phi_{1,2} - \phi_{2,1} \right\} \delta M_{12} + \left\{ \frac{12}{Et^3} \left[\frac{(1 + \nu) t^2}{5} Q_1 \right] - \phi_1 - w_{,1} \right\} \delta Q_1 + \\ & + \left\{ \frac{12}{Et^3} \left[\frac{(1 + \nu) t^2}{5} Q_2 \right] - \phi_2 - w_{,2} \right\} \delta Q_2 + (M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1) \delta \phi_1 + \\ & + (M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2) \delta \phi_2 + (Q_{1,1} + Q_{2,2} + g) \delta w \} d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_{\sigma}} [(M_{11} n_1 + M_{12} n_2 - \bar{M}_{11} n_1 - \bar{M}_{12} n_2) \delta \phi_1 + (M_{21} n_1 + M_{22} n_2 - \bar{M}_{21} n_1 - \bar{M}_{22} n_2) \delta \phi_2 + \\ & + (Q_1 n_1 + Q_2 n_2 - \bar{Q}_1 n_1 - \bar{Q}_2 n_2) \delta w] d\Gamma_{\sigma} + \int_{\Gamma_u} [(\bar{\phi}_1 n_1 - \phi_1 n_1) \delta M_{11} + (\bar{\phi}_2 n_2 - \phi_2 n_2) \delta M_{22} + \\ & + (\bar{\phi}_1 n_2 + \bar{\phi}_2 n_1 - \phi_1 n_2 - \phi_2 n_1) \delta M_{12} + (\bar{w} n_1 - w n_1) \delta Q_1 + (\bar{w} n_2 - w n_2) \delta Q_2] d\Gamma_u = 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

As variáveis δM_{ij} , δQ_i , $\delta \phi_i$ e δw apresentadas na equação (2.33) podem assumir valores quaisquer. Portanto, para que a condição de equilíbrio ($\delta \Pi_R = 0$) seja satisfeita, deve-se ter:

- ✚ No domínio Ω , como $\delta \phi_1 \neq 0$, $\delta \phi_2 \neq 0$ e $\delta w \neq 0$, as seguintes relações, que são as **equações de equilíbrio** (2.9) e (2.10) deduzidas anteriormente, devem ser obedecidas:

$$Q_{1,1} + Q_{2,2} + g = 0 \quad (2.34)$$

$$M_{11,1} + M_{12,2} - Q_1 = 0 \quad (2.35.a)$$

$$M_{21,1} + M_{22,2} - Q_2 = 0 \quad (2.35.b)$$

- ✚ No domínio Ω , como $\delta M_{11} \neq 0$, $\delta M_{22} \neq 0$, $\delta M_{12} \neq 0$, $\delta Q_1 \neq 0$ e $\delta Q_2 \neq 0$, as seguintes relações, que são as **relações entre esforços e deslocamentos**, também devem ser obedecidas:

$$\frac{12}{Et^3} \left[(M_{11} + M_{22}) - (1 + \nu)M_{22} - \frac{\nu t^2}{10} g \right] - \phi_{1,1} = 0 \quad (2.36.a)$$

$$\frac{12}{Et^3} \left[(M_{11} + M_{22}) - (1 + \nu)M_{11} - \frac{\nu t^2}{10} g \right] - \phi_{2,2} = 0 \quad (2.36.b)$$

$$\frac{12}{Et^3} [2(1 + \nu)M_{12}] - \phi_{1,2} - \phi_{2,1} = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{12}{Et^3} \left[\frac{(1 + \nu)t^2}{5} Q_1 \right] - \phi_1 - w_{,1} = 0 \quad (2.38.a)$$

$$\frac{12}{Et^3} \left[\frac{(1 + \nu)t^2}{5} Q_2 \right] - \phi_2 - w_{,2} = 0 \quad (2.38.b)$$

- ✚ Como ao longo de Γ_σ $\delta \phi_1 \neq 0$, $\delta \phi_2 \neq 0$ e $\delta w \neq 0$, as seguintes **condições de contorno sobre Γ_σ** devem ser obedecidas:

$$M_{11}n_1 + M_{12}n_2 = \bar{M}_{11}n_1 + \bar{M}_{12}n_2 \quad (2.39)$$

$$M_{21}n_1 + M_{22}n_2 = \bar{M}_{21}n_1 + \bar{M}_{22}n_2 \quad (2.40)$$

$$Q_1n_1 + Q_2n_2 = \bar{Q}_1n_1 + \bar{Q}_2n_2 \quad (2.41)$$

Considerando-se que as forças de superfície generalizadas são dadas por:

$$P_i = M_{ij}n_j = M_i \quad i = 1,2 \quad (2.42)$$

$$P_3 = Q_in_i = Q_n \quad (2.43)$$

As relações (2.39), (2.40) e (2.41) podem ser escritas como:

$$P_i = \bar{P}_i \quad i = 1,2,3 \quad (2.44)$$

✚ Como ao longo de Γ_u $\delta M_{11} \neq 0$, $\delta M_{22} \neq 0$, $\delta M_{12} \neq 0$, $\delta Q_1 \neq 0$ e $\delta Q_2 \neq 0$ as seguintes **condições de contorno sobre Γ_u** devem ser obedecidas:

$$\phi_1 = \bar{\phi}_1 \quad (2.45.a)$$

$$\phi_2 = \bar{\phi}_2 \quad (2.45.b)$$

$$w = \bar{w} \quad (2.45.c)$$

Considerando que os deslocamentos generalizados são dados por:

$$U_1 = \phi_1 \quad (2.46.a)$$

$$U_2 = \phi_2 \quad (2.46.b)$$

$$U_3 = w \quad (2.46.c)$$

As equações (2.45) podem ser escritas como:

$$U_i = \bar{U}_i \quad (2.47)$$

A partir das equações (2.36), (2.37) e (2.38) explicitam-se os valores dos momentos e dos esforços cortantes:

$$M_{11} = D(\phi_{1,1} + \nu\phi_{2,2}) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} g \quad (2.48.a)$$

$$M_{22} = D(\phi_{2,2} + \nu\phi_{1,1}) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} g \quad (2.48.b)$$

$$M_{12} = \frac{D(1-\nu)}{2} (\phi_{1,2} + \phi_{2,1}) \quad (2.49)$$

$$Q_1 = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\phi_1 + w_{,1}) \quad (2.50.a)$$

$$Q_2 = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\phi_2 + w_{,2}) \quad (2.50.b)$$

Onde D é a rigidez à flexão da placa e λ é uma constante característica da teoria de Reissner e são dadas por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.51)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{10}}{t} \quad (2.52)$$

As equações (2.48), (2.49), e (2.50) podem ser expressas implicitamente, como:

$$M_{ij} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\phi_{i,j} + \phi_{j,i} + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{k,k} \delta_{ij} \right) + \frac{\nu g}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{ij} \quad i, j, k = 1, 2 \quad (2.53)$$

$$Q_i = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\phi_i + w_{,i}) \quad i = 1, 2 \quad (2.54)$$

Onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

O sistema formado pelas equações de equilíbrio, (2.34) e (2.35), e pelas equações (2.36), (2.37) e (2.38) constituem um novo sistema de oito equações diferenciais de primeira ordem, apresentando as seguintes incógnitas: M_{11} , M_{22} , M_{12} , Q_1 , Q_2 , w , ϕ_1 e ϕ_2 . Esse sistema constitui a base da Teoria de Reissner para a flexão de placas com pequenos deslocamentos, sendo na verdade um sistema de equações diferenciais de sexta ordem, tendo em cada ponto do contorno seis variáveis relacionadas (M_n , M_{ns} , Q_n , w , ϕ_n e ϕ_s), sendo n e s as direções normal e tangencial ao contorno, Bacarji (2001). Portanto, esse sistema de equações permite a consideração de três condições de contorno em cada ponto, podendo ser condensado em outro composto apenas de três equações diferenciais parciais, porém com ordem superior, de modo que continuem sendo satisfeitas três condições em cada ponto da borda. Substituindo-se os valores de ϕ_1 e ϕ_2 dados pelas equações (2.50) em (2.48) e (2.49), chega-se à:

$$M_{11} = -D(w_{,11} + \nu w_{,22}) + \frac{2}{\lambda^2(1-\nu)}(Q_{1,1} + \nu Q_{2,2}) + \frac{\nu}{\lambda^2(1-\nu)}g \quad (2.55.a)$$

$$M_{22} = -D(w_{,22} + \nu w_{,11}) + \frac{2}{\lambda^2(1-\nu)}(Q_{2,2} + \nu Q_{1,1}) + \frac{\nu}{\lambda^2(1-\nu)}g \quad (2.55.b)$$

$$M_{12} = -D(1-\nu)w_{,12} + \frac{1}{\lambda^2}(Q_{1,2} + Q_{2,1}) \quad (2.56)$$

Utilizando-se a equação de equilíbrio (2.34), substituindo nas equações (2.55), obtém-se:

$$M_{11} = -D(w_{,11} + \nu w_{,22}) + \frac{2}{\lambda^2}(Q_{1,1}) - \frac{\nu}{\lambda^2(1-\nu)}g \quad (2.57.a)$$

$$M_{22} = -D(w_{,22} + \nu w_{,11}) + \frac{2}{\lambda^2}(Q_{2,2}) - \frac{\nu}{\lambda^2(1-\nu)}g \quad (2.57.b)$$

Substituindo-se as equações (2.56) e (2.57) nas equações de equilíbrio (2.35):

$$Q_1 - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 Q_1 + \frac{1}{(1-\nu)\lambda^2} \frac{\partial g}{\partial x_1} = -D \frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w \quad (2.58.a)$$

$$Q_2 - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 Q_2 + \frac{1}{(1-\nu)\lambda^2} \frac{\partial g}{\partial x_2} = -D \frac{\partial}{\partial x_2} \nabla^2 w \quad (2.58.b)$$

Derivando-se as equações (2.58) em relação à X_1 e à X_2 respectivamente e levando-se na equação de equilíbrio (2.34), chega-se à seguinte equação diferencial:

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \left[g - \frac{(2-\nu)}{(1-\nu)\lambda^2} \nabla^2 g \right] \quad (2.59)$$

Um novo sistema de equações diferenciais é formado pelas equações (2.58) e (2.59), mantendo-se as mesmas três condições de contorno em cada ponto, uma vez que a equação (2.59) é de quarta ordem e as equações (2.58) são de segunda ordem.

2.6 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Segundo Sanches (1998) as condições de contorno da placa precisam ser conhecidas para poder solucionar a equação diferencial, fazendo-se necessária uma prescrição adequada de suas vinculações. Na teoria de Reissner é necessário atender em cada ponto três condições de contorno, ao invés de duas como era na Teoria de Kirchhoff.

Desta forma, em cada nó do contorno têm-se seis variáveis associadas: o esforço cortante Q_n , o momento fletor M_n , o momento volvente M_{ns} , a flecha w e as rotações ϕ_n e ϕ_s , sendo n e s as direções normal e tangencial ao contorno. Adotando-se U_i e P_i como variáveis generalizadas, dadas por:

$$U_1 = \phi_n \quad (2.60.a)$$

$$U_2 = \phi_s \quad (2.60.b)$$

$$U_3 = w \quad (2.60.c)$$

$$P_1 = M_n \quad (2.61.a)$$

$$P_2 = M_{ns} \quad (2.61.b)$$

$$P_3 = Q_n \quad (2.61.c)$$

Geralmente quando o deslocamento U_i é dado como condição de contorno, o esforço correspondente P_i é incógnito, e vice-versa. A seguir, é apresentado o conjunto de restrições de cada tipo de apoio clássico:

✚ Borda engastada:

As forças de superfície Q_n , M_n e M_{ns} são desconhecidas e os deslocamentos são nulos, ou seja: $w = 0$, $\phi_n = 0$ e $\phi_s = 0$.

✚ Borda livre:

As forças de superfícies têm valores conhecidos. No caso particular delas serem nulas, tem-se: $Q_n = 0$, $M_n = 0$ e $M_{ns} = 0$. Os deslocamentos (w , ϕ_n e ϕ_s) são desconhecidos.

✚ Borda simplesmente apoiada: podem-se escrever duas formas distintas de condições de contorno:

- Condição Restritiva ou *Hard Condition*: a flecha e a rotação ϕ_s são adotados nulos e o momento fletor tem valor conhecido. No caso do momento fletor M_n ser nulo tem-se: $w = 0$, $M_n = 0$ e $\phi_s = 0$. Os valores Q_n , ϕ_n e M_{ns} são desconhecidos.
- Condição não Restritiva ou *Soft Condition*: a flecha é nula, o momento fletor e o momento torçor são conhecidos. No caso desses últimos serem nulos tem-se: $w = 0$, $M_n = 0$ e $M_{ns} = 0$. Os valores Q_n , ϕ_n e ϕ_s são desconhecidos.

De acordo com Ribeiro (1992), a condição de contorno restritiva é devida à imposição de deslocamento transversal e rotação tangencial nulos na borda e coincide com a condição normalmente utilizada na Teoria Clássica de Kirchhoff. A condição alternativa *soft* é devida à consideração de momento torçor nulo no plano vertical tangente ao contorno.

3 FORMULAÇÃO DO MEC PARA ANÁLISE DO PAVIMENTO SUJEITO À FLEXÃO SIMPLS

3.1 PROBLEMA FUNDAMENTAL

Segundo Barbirato (1999) para que as formulações do Método dos Elementos de Contorno fiquem completamente definidas é necessário o prévio conhecimento da solução de um problema padrão da área que se deseja analisar. Este problema é denominado de “problema fundamental”, conforme apresentado em Brebbia (1978).

O problema fundamental é definido considerando-se um domínio semi-infinito Ω^* de contorno definido por Γ^* . O objeto que se deseja analisar, de domínio Ω e contorno Γ , esta inserido em Ω^* . O problema particular, representado com índice *, é chamado de problema fundamental e está definido na figura (3.1).

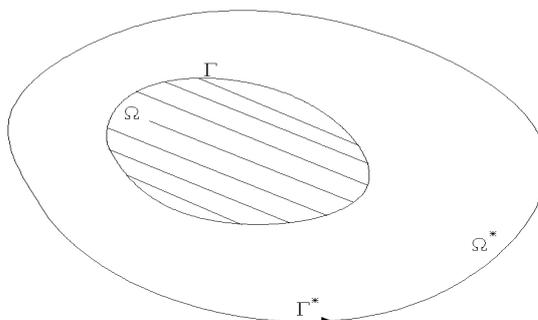


FIGURA 3.1 – Definição do Problema Fundamental

Seja agora o problema fundamental onde são consideradas ações de forças fundamentais unitárias em três direções ($k = 1, 2, 3$), sendo que, para $k = 1$ tem-se momento unitário na direção X_1 ; $k = 2$ é relativo à aplicação do momento unitário na direção X_2 e $k = 3$ é referente à força unitária na direção X_3 . Define-se o ponto q onde se aplica a força unitária como ponto de colocação, e p que é onde se calcula os deslocamentos e esforços como ponto campo. É importante ressaltar que no presente trabalho as direções das forças fundamentais são dadas por ($k = m, l, 3$) sendo que se $k = m$ ou $k = l$ aplicam-se momentos unitários nas direções m e l , que são direções quaisquer se o ponto de colocação for interno ou externo ao domínio Ω ; caso o ponto de colocação esteja sobre o contorno Γ , m e l são as direções normal e tangencial ao contorno onde está o ponto Q .

Segundo Ribeiro (1992) as soluções fundamentais envolvidas se referem a um estado de carregamento unitário, representado pela função Delta de Dirac aplicada em um ponto fonte da placa infinita. As equações de equilíbrio, apresentadas em (2.9) e (2.10), referentes ao problema fundamental são as seguintes:

$$Q_{ki,i} + \delta(q, p) \delta_{k3} = 0 \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

$$M_{kij,i} - Q_{kj} + \delta(q, p) \delta_{ki} = 0 \quad i, j = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

onde δ_{ki} é o delta de Kronecker; $\delta(q, p)$ é a função delta de Dirac, que tem as seguintes propriedades:

$$\delta(q, p) = 0, \text{ se } p \neq q; \quad (3.3)$$

$$\delta(q, p) = \infty, \text{ se } p = q; \text{ e} \quad (3.4)$$

$$\int_{\Omega} \rho(p) \delta(q, p) d\Omega = \rho(q) \quad (3.5)$$

Portanto:

$$\int_{\Omega_{\infty}} u_i(p) \delta(q, p) \delta_{ki} d\Omega_{\infty} = \begin{cases} 0 \dots \dots \dots \text{se} \dots p \neq q \\ u_k(q) \dots \dots \dots \text{se} \dots p \equiv q \end{cases} \quad (3.6)$$

3.2 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACAS USANDO A TEORIA DE REISSNER

A solução fundamental $U_{ki}^*(q, p)$ do problema particular analisado representa o deslocamento na direção i devido a uma força unitária aplicada na direção k ($k, i = m, l, 3$) em um ponto q qualquer do domínio infinito. A figura (3.2) mostra a aplicação da força unitária estática em um ponto q do domínio, chamado ponto fonte, e os efeitos nas respectivas direções em outro ponto p , chamado ponto campo. A carga unitária deve ser interpretada no sentido generalizado, pois para $k = m$, aplica-se um momento unitário na direção m ; $k = l$ é relativo a um momento na direção l e $k = 3$ refere-se a uma força unitária na direção X_3 . Do mesmo modo, o deslocamento fundamental ($U_{ki}^*(q, p)$) deve ser interpretado no sentido generalizado, pois $U_{kn}^* = \phi_{kn}^*$; $U_{ks}^* = \phi_{ks}^*$ e $U_{k3}^* = w_k^*$.

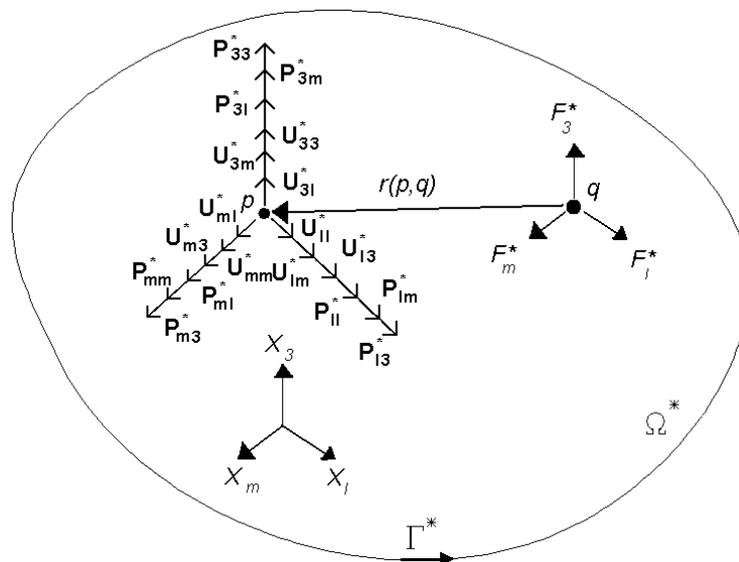


FIGURA 3.2 – Efeito das Forças Unitárias no Domínio Ω^* : Solução Fundamental

Para um bom entendimento da solução fundamental é necessário a introdução do conceito da *função delta de Dirac* ($\delta(q, p)$). De acordo com Greco (2000) a função

$\delta(q, p)$ representa a aplicação de quantidades unitárias, como por exemplo, cargas ou potenciais, concentradas no ponto q . Kane (1994) corresponde a função delta de Dirac a um pulso retangular unitário, como mostra a figura (3.3).

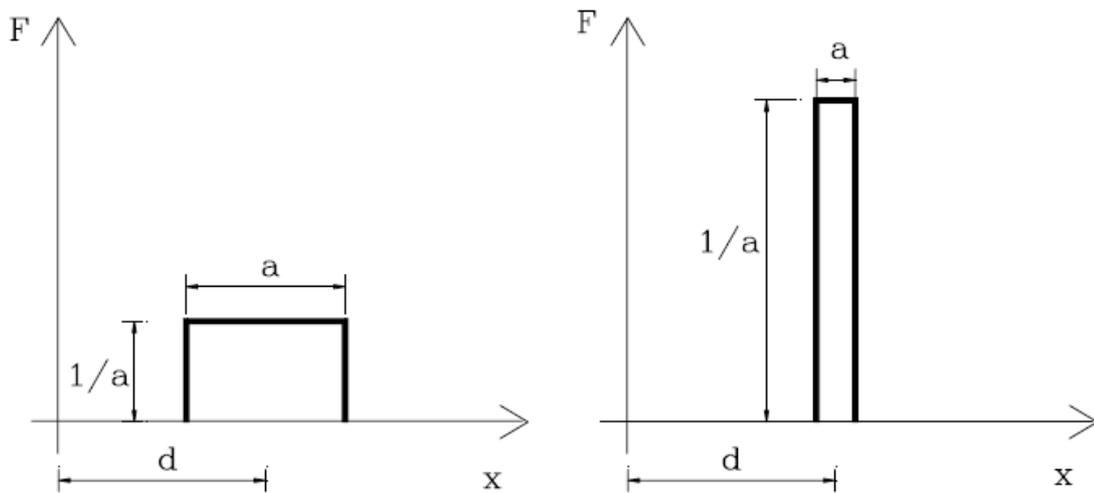


FIGURA 3.3 – Pulso Retangular Unitário

A função $F(x, d, a)$ representada na figura (3.3) apresenta como característica o valor unitário de sua integral em qualquer domínio e é definida da seguinte forma:

$$F(x, d, a) = \begin{cases} 0; & x < d - \frac{a}{2} \\ \frac{1}{a}; & d - \frac{a}{2} < x < d + \frac{a}{2} \\ 0; & x > d + \frac{a}{2} \end{cases} \quad (3.7)$$

A distribuição delta de Dirac é o limite da função pulso unitário quando a largura “a” do retângulo (ver figura 3.3) tende para zero, ou seja, $\delta(x - d) = \lim_{a \rightarrow 0} F(x, d, a)$.

Para domínios n-dimensionais, a distribuição delta de Dirac tem as propriedades mencionadas nas equações (3.3) à (3.5).

Considerando inicialmente as variáveis fundamentais referidas no sistema de coordenadas X_1, X_2, X_3 , ou seja, com $k, i = 1, 2, 3$, escrevendo-se as equações diferenciais de

equilíbrio (2.34) e (2.35) em termos de deslocamentos generalizados e substituindo-se a força b_i pela função delta de Dirac, obtém-se:

$$\Delta_{ij}^* \frac{\partial U_{ki}^*(q, p)}{\partial p} = -\delta(q, p) \delta_{kj} \quad (3.8)$$

onde Δ_{ij}^* são as componentes do operador de Navier dadas por:

$$\Delta_{ij}^* = D \frac{(1-\nu)}{2} \left[(\nabla^2 - \lambda^2) \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_i(p) \partial x_j(p)} \right] \quad (3.9.a)$$

$$\Delta_{i3}^* = -D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_i(p)} \quad (3.9.b)$$

$$\Delta_{3i}^* = -\Delta_{i3}^* \quad (3.9.c)$$

$$\Delta_{33}^* = -\Delta_{33}^* = D \frac{(1-\nu)}{2} \lambda^2 \nabla^2 \quad (3.9.d)$$

Nas equações (3.9) ∇^2 é o operador de Laplace, definido por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{(\partial x_i \partial x_i)} \quad (3.10)$$

A solução fundamental, por definição, é originária de um problema conhecido e particular, dependendo assim das características do problema fundamental, tais como o espaço a que seu domínio Ω^* e contorno Γ^* pertencem. Resolvendo-se a equação (3.8) podem-se ter diferentes soluções fundamentais. De acordo com Weeën (1982), a solução fundamental $U_{ki}^*(q, p)$ que satisfaz a equação (3.8) é obtida pelo método de Hörmander, sendo:

$$U_{ki}^* = \phi_{ki}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left\{ [8B - (1-\nu)(2 \ln(\lambda\pi) - 1)] \delta_{ki} + \right. \\ \left. - [8A + 2(1-\nu)] r_{,k} r_{,i} \right\} \quad k, i = 1, 2 \quad (3.11.a)$$

$$U_{k3}^* = w_k^* = \frac{1}{8\pi D} (2\ln(\lambda r) - 1) r r_{,k} \quad k = 1, 2 \quad (3.12.a)$$

$$U_{3i}^* = \phi_{3i}^* = -\frac{1}{8\pi D} (2\ln(\lambda r) - 1) r r_{,i} \quad i = 1, 2 \quad (3.11.b)$$

$$U_{33}^* = w_3^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left\{ [(1-\nu)(\lambda r)^2 (\ln(\lambda r) - 1)] - 8\ln(\lambda r) \right\} \quad (3.12.b)$$

onde $\lambda = \frac{\sqrt{10}}{t}$; A e B são funções de z dadas por:

$$A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (3.11.c)$$

$$B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right] \quad (3.11.d)$$

Nas equações (3.11) $z = \lambda r$; $K_0(z)$ e $K_1(z)$ funções de Bessel modificadoras de ordem inteira, que podem ser calculadas através de expansões polinomiais dadas por Abramowitz e Stegun (1965).

Para determinar as expressões fundamentais das forças de superfície $P_{ki}^*(q, p)$ generalizadas, para $k, i = 1, 2, 3$, sendo k a direção da carga fundamental e i a direção da força, considere as relações:

$$P_{ki}^*(q, p) = M_{kij}^* n_j = M_{ki}^* \quad k, i, j = 1, 2 \quad (3.13.a)$$

$$P_{3i}^*(q, p) = M_{3ij}^* n_j = M_{3i}^* \quad i, j = 1, 2 \quad (3.13.b)$$

$$P_{k3}^*(q, p) = Q_{ki}^* n_i = Q_{kn}^* \quad k, i = 1, 2 \quad (3.14.a)$$

$$P_{33}^*(q, p) = Q_{3i}^* n_i = Q_{3n}^* \quad i = 1, 2 \quad (3.14.b)$$

Onde:

- ✚ M_{ki}^* é o momento na direção $i = 1,2$ devido ao momento unitário aplicado na direção $k = 1,2$;
- ✚ M_{3i}^* é o momento na direção $i = 1,2$ devido a carga unitária aplicada na direção X_3 ;
- ✚ Q_{ki}^* é a força cortante devido ao momento unitário aplicado na direção $k = 1,2$; e
- ✚ Q_{3i}^* é a força cortante devido a carga unitária na direção X_3 .

Das equações (2.53) e (2.54), obtêm-se:

$$M_{kij}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\phi_{ki,j}^* + \phi_{kj,i}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{kl,l} \delta_{ij} \right) \quad i, j, k = 1,2 \quad (3.15.a)$$

$$M_{3ij}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\phi_{3i,j}^* + \phi_{3j,i}^* + \frac{2\nu}{1-\nu} \phi_{3l,l} \delta_{ij} \right) \quad i, j = 1,2 \quad (3.15.b)$$

$$Q_{ki}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\phi_{ki}^* + w_{k,i}^*) \quad i, k = 1,2 \quad (3.16.a)$$

$$Q_{3i}^* = \frac{D(1-\nu)}{2} \lambda^2 (\phi_{3i}^* + w_{3,i}^*) \quad i = 1,2 \quad (3.16.b)$$

Para determinar as expressões das forças de superfície generalizadas, obtêm-se as expressões dos deslocamentos fundamentais e suas derivadas a partir de (3.11) e (3.12) e substituem-se tais valores nas equações (3.15) e (3.16). Após a obtenção das expressões para os esforços M_{kij}^* , M_{3ij}^* , Q_{ki}^* e Q_{3i}^* , a partir das equações (3.13) e (3.14) chega-se às seguintes expressões para as forças de superfície generalizadas:

$$P_{ki}^*(q, p) = M_{ki}^* = -\frac{1}{4\pi r} \left[(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) \left(\delta_{ki} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,i} n_k \right) + (4A + 1 + \nu) r_{,k} n_i + \right. \\ \left. - 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) r_{,k} r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad k, i = 1,2 \quad (3.17.a)$$

$$P_{k3}^*(q, p) = Q_{kn}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left(Bn_k - Ar_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} \right) \quad k = 1,2 \quad (3.18.a)$$

$$P_{3i}^*(q, p) = M_{3i}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\left(\frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln(z) - 1 \right) n_i + 2r_{,i} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad i = 1, 2 \quad (3.17.b)$$

$$P_{33}^*(q, p) = Q_{3n}^* = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3.18.b)$$

As variáveis usadas na formulação aqui desenvolvida são dadas segundo as direções normal (n) e tangencial (s) ao contorno. Assim sendo, as expressões fundamentais também devem ser dadas nesse sistema. As expressões das rotações (ϕ_{kn}^* , ϕ_{ks}^* , ϕ_{3n}^* e ϕ_{3s}^*) e dos momentos (M_{kn}^* , M_{kns}^* , M_{3n}^* e M_{3ns}^*) segundo tais direções são dadas por:

$$\phi_{kn}^* = \phi_{ki}^* n_i = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left\{ [8B - (1-\nu)(2 \ln(\lambda r) - 1)] n_k - [8A + 2(1-\nu)] r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \quad (3.19.a)$$

$$\phi_{ks}^* = \phi_{ki}^* s_i = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \left\{ [8B - (1-\nu)(2 \ln(\lambda r) - 1)] s_k - [8A + 2(1-\nu)] r_{,k} \frac{\partial r}{\partial s} \right\} \quad (3.20.a)$$

$$\phi_{3n}^* = \phi_{3i}^* n_i = -\frac{1}{8\pi D} (2 \ln(\lambda r) - 1) r \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3.19.b)$$

$$\phi_{3s}^* = \phi_{3i}^* s_i = -\frac{1}{8\pi D} (2 \ln(\lambda r) - 1) r \frac{\partial r}{\partial s} \quad (3.20.b)$$

$$M_{kn}^* = M_{ki}^* n_i = -\frac{1}{4\pi r} \left[2(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) n_k \frac{\partial r}{\partial n} + (4A + 1 + \nu) r_{,k} + 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (3.21.a)$$

$$M_{kns}^* = M_{ki}^* s_i = -\frac{1}{4\pi r} \left[(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) \left(s_k \frac{\partial r}{\partial n} + n_k \frac{\partial r}{\partial s} \right) + 2(8A + 2zK_1 + -\nu) r_{,k} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (3.22.a)$$

$$M_{3n}^* = M_{3i}^* n_i = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\left(\frac{2(1+\nu)}{(1-\nu)} \ln(z) - 1 \right) + 2 \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (3.21.b)$$

$$M_{3ns}^* = M_{3iS_i}^* = -\frac{(1-\nu)}{4\pi} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3.22.b)$$

3.3 EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS PARA UM PONTO DO DOMÍNIO DE UMA PLACA

As representações integrais para os deslocamentos e momentos em um ponto qualquer da placa serão deduzidas aqui utilizando-se o equacionamento básico para placas através da Teoria de Reissner, apresentado nos itens (2.2) a (2.5). Será considerada uma placa de espessura constante, em equilíbrio, sob a ação de uma carga distribuída g , normal ao plano médio da placa. Bacarji (2001) apresenta essa equação integral considerando ainda um campo de tensões iniciais generalizadas e momentos externos distribuídos, todos aplicados no domínio.

Aplicando o Método dos Resíduos Ponderados, apresentado em mais detalhes no trabalho de Pouzada (1999), à equação de diferencial de equilíbrio (2.1) chega-se à seguinte equação de resíduos ponderados:

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega = \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_i - u_i) p_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} (\bar{p}_i - p_i) u_{ki}^* d\Gamma \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.23)$$

onde u_{ki}^* representa a solução fundamental genérica em deslocamentos adotada como função ponderadora, sendo k a direção da carga fundamental.

Se ao invés de considerar a equação diferencial de equilíbrio (2.5), fossem consideradas as equações diferenciais de equilíbrio dadas em (2.34) e (2.35), que representam o problema de placas a ser estudado nesse trabalho, seria obtida uma expressão análoga à equação (3.23):

$$\int_{\Omega} [\phi_{ki}^* (M_{ij,j} - Q_i) + (Q_{i,i} + g) w_k^*] d\Omega = \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_i - u_i) p_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Gamma_p} (\bar{p}_i - p_i) u_{ki}^* d\Gamma \quad i, j = 1, 2 \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.24)$$

Deve-se notar que neste caso u_{ki}^* já representa os deslocamentos generalizados na superfície média da placa definidos em (2.16) e (2.17). Fazendo-se a substituição dos deslocamentos (u_i e u_{ki}^*) e das forças de superfície (p_i e p_{ki}^*) pelos deslocamentos e forças generalizadas (U_i , U_{ki}^* , P_i e P_{ki}^*), apresentados nas equações (2.60) e (2.61), na equação (3.24) chega-se à:

$$\int_{\Omega} [\phi_{ki}^* (M_{ij,j} - Q_i) + (Q_i + g) w_k^*] d\Omega = \int_{\Gamma_u} [(\bar{\phi}_i - \phi_i) M_{ki}^* + (\bar{w} - w) Q_{kn}^*] d\Gamma +$$

$$- \int_{\Gamma_u} [(\bar{M}_i - M_i) \phi_{ki}^* + (\bar{Q}_n - Q_n) w_k^*] d\Gamma \quad i, j = 1, 2 \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.25)$$

Integrando-se por partes o primeiro e o terceiro termo da equação (3.25) tem-se:

$$\int_{\Gamma} [\phi_{ki}^* M_{ij} n_j + Q_i n_i w_k^*] d\Gamma - \int_{\Omega} [\phi_{ki,j}^* M_{ij} + Q_i w_{,ki}^*] d\Omega - \int_{\Omega} Q_i \phi_{ki}^* d\Omega + \int_{\Omega} g w_k^* d\Omega =$$

$$= \int_{\Gamma_u} [(\bar{\phi}_i - \phi_i) M_{ki}^* + (\bar{w} - w) Q_{kn}^*] d\Gamma - \int_{\Gamma_p} [(\bar{M}_i - M_i) \phi_{ki}^* + (\bar{Q}_n - Q_n) w_k^*] d\Gamma \quad (3.26)$$

onde n_j representa o co-seno diretor da normal ao contorno com o eixo X_j .

Lembrando-se que:

$$\int_{\Gamma} M_{ij} n_j \phi_{ki}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} M_i \phi_{ki}^* d\Gamma \quad (3.27)$$

$$\int_{\Gamma} Q_i n_i w_k^* d\Gamma = \int_{\Gamma} Q_n w_k^* d\Gamma \quad (3.28)$$

$$\int_{\Gamma} [\phi_{ki}^* M_i + Q_n w_k^*] d\Gamma = \int_{\Gamma_p} [M_i \phi_{ki}^* + Q_n w_k^*] d\Gamma + \int_{\Gamma_u} [M_i \phi_{ki}^* + Q_n w_k^*] d\Gamma \quad (3.29)$$

A equação (3.26) se torna:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} [\phi_{ki}^* \phi_{kj} + Q_i w_{,ki}^*] d\Omega - \int_{\Omega} Q_i \phi_{ki}^* d\Omega + \int_{\Omega} g w_k^* d\Omega = \\
 & = \int_{\Gamma_u} [(\bar{\phi}_i - \phi_i) M_{ki}^* + (\bar{w} - w) Q_{kn}^*] d\Gamma - \int_{\Gamma_p} [\bar{M}_i \phi_{ki}^* + \bar{Q}_n w_k^*] d\Gamma - \int_{\Gamma_u} [M_i \phi_{ki}^* + Q_n w_k^*] d\Gamma
 \end{aligned} \quad (3.30)$$

As equações (2.53) e (2.54) podem ser escritas, convenientemente, de uma maneira simplificada como se segue, respectivamente:

$$M_{ij} = C_{ijkl} \chi_{kl} + \frac{\nu g}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{ij} \quad i, j, k, l = 1, 2 \quad (3.31)$$

$$Q_i = C_{3i3l} \psi_{3l} \quad i, l = 1, 2 \quad (3.32)$$

Substituindo-se em (3.30) as equações (3.31) e (3.32), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} [C_{ijml} \phi_{m,l} \phi_{ki}^* + C_{3i3l} (\phi_l + w_{,l}) (w_{,ki}^* + \phi_{ki}^*)] d\Omega + \int_{\Omega_g} \left[w_k^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{ij} \phi_{ki}^* \right] d\Omega = \\
 & = \int_{\Gamma_u} [(\bar{\phi}_i - \phi_i) M_{ki}^* + (\bar{w} - w) Q_{kn}^*] d\Gamma - \int_{\Gamma_p} [\bar{M}_i \phi_{ki}^* + \bar{Q}_n w_k^*] d\Gamma + \\
 & - \int_{\Gamma_u} [M_i \phi_{ki}^* + Q_n w_k^*] d\Gamma \quad i, j, m, l = 1, 2 \quad k = 1, 2, 3
 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Considerando-se, na equação (3.33), as relações:

$$Q_{kl}^* = C_{3i3l} (w_{,ki}^* + \phi_{ki}^*) \quad (3.34)$$

$$M_{kml}^* = C_{ijml} \phi_{ki}^* \quad (3.35)$$

Tem-se:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} [\phi_{m,l} M_{kml}^* + (\phi_l + w_{,l}) Q_{kl}^*] d\Omega + \int_{\Omega_g} g \left[w_k^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{ij} \phi_{ki,j}^* \right] d\Omega = \\
 & = \int_{\Gamma_u} [(\bar{\phi}_i - \phi_i) M_{ki}^* + (\bar{w} - w) Q_{kn}^*] d\Gamma - \int_{\Gamma_p} [\bar{M}_i \phi_{ki}^* + \bar{Q}_n w_k^*] d\Gamma - \int_{\Gamma_u} [M_i \phi_{ki}^* + Q_n w_k^*] d\Gamma
 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Integrando-se novamente o primeiro e o terceiro termo do primeiro membro de (3.36), essa se torna:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Gamma} [\phi_m M_{kml}^* n_l + w Q_{kl}^* n_l] d\Gamma + \int_{\Omega} [\phi_m M_{kml,l}^* + w Q_{kl,l}^*] d\Omega - \int_{\Omega} [\phi_l Q_{kl}^*] d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega_g} g \left[w_k^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \delta_{ij} \phi_{ki,j}^* \right] d\Omega = \int_{\Gamma_u} [(\bar{\phi}_i - \phi_i) M_{ki}^* + (\bar{w} - w) Q_{kn}^*] d\Gamma + \\
 & - \int_{\Gamma_p} [\bar{M}_i \phi_{ki}^* + \bar{Q}_n w_k^*] d\Gamma - \int_{\Gamma_u} [M_i \phi_{ki}^* + Q_n w_k^*] d\Gamma
 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Considerando-se então que:

$$M_{kml}^* n_l = M_{km}^* \quad (3.38)$$

$$Q_{kl}^* n_l = Q_{kn}^* \quad (3.39)$$

$$\delta_{ij} \phi_{ki,j}^* = \phi_{ki,i}^* \quad (3.40)$$

$$\int_{\Gamma} [\phi_m M_{km}^* + w Q_{kn}^*] d\Gamma = \int_{\Gamma_p} [\phi_i M_{ki}^* + w Q_{kn}^*] d\Gamma + \int_{\Gamma_u} [\phi_i M_{ki}^* + w Q_{kn}^*] d\Gamma \quad (3.41)$$

A equação (3.37) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} [\phi_m M_{kml,l}^* + w Q_{kl,l}^*] d\Omega - \int_{\Omega} [\phi_l Q_{kl}^*] d\Omega + \int_{\Omega_g} g \left[w_k^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki,i}^* \right] d\Omega = \\
 & = \int_{\Gamma_u} [\bar{\phi}_i M_{ki}^* + \bar{w} Q_{kn}^*] d\Gamma - \int_{\Gamma_p} [\bar{M}_i \phi_{ki}^* + \bar{Q}_n w_k^*] d\Gamma - \int_{\Gamma_u} [M_i \phi_{ki}^* + Q_n w_k^*] d\Gamma +
 \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Gamma_p} [\phi_i M_{ki}^* + w Q_{kn}^*] d\Gamma \quad (3.42)$$

Porém, como $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p$ pode-se dizer ainda que:

$$- \int_{\Gamma_p} [\bar{M}_i \phi_{ki}^* + \bar{Q}_n w_k^*] d\Gamma - \int_{\Gamma_u} [M_i \phi_{ki}^* + Q_n w_k^*] d\Gamma = - \int_{\Gamma} [M_i \phi_{ki}^* + Q_n w_k^*] d\Gamma \quad (3.43.a)$$

$$\int_{\Gamma_u} [\bar{\phi}_i M_{ki}^* + \bar{w} Q_{kn}^*] d\Gamma + \int_{\Gamma_p} [\phi_i M_{ki}^* + w Q_{kn}^*] d\Gamma = \int_{\Gamma} [\phi_i M_{ki}^* + w Q_{kn}^*] d\Gamma \quad (4.43.b)$$

Portanto, a equação (3.42) resulta em:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\phi_m M_{kml,i}^* + w Q_{kl,i}^*] d\Omega - \int_{\Omega} [\phi_l Q_{kl}^*] d\Omega + \int_{\Omega_s} \left[w_k^* - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki,i}^* \right] d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} [\phi_i M_{ki}^* + w Q_{kn}^*] d\Gamma - \int_{\Gamma} [M_i \phi_{ki}^* + Q_n w_k^*] d\Gamma \quad i, m, l = 1, 2 \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Levando-se em conta as equações (3.1) e (3.2), as integrais da equação (3.44) ao longo do domínio Ω são dadas por:

$$\int_{\Omega} [\phi_m M_{kml,i}^* - \phi_l Q_{kl}^*] d\Omega = - \int_{\Omega} \phi_m(p) \delta(q, p) \delta_{km} d\Omega \quad m, l = 1, 2 \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.45)$$

$$\int_{\Omega} [w Q_{kl,i}^*] d\Omega = - \int_{\Omega} [w(p) \delta(q, p) \delta_{k3}] d\Omega \quad (3.46)$$

A fim de escrever agora a equação (3.44) em função das variáveis nas direções n e s , que são as direções normal e tangencial ao contorno, considere a seguinte relação:

$$\phi_i = \phi_n n_i + \phi_s s_i \quad i = 1, 2 \quad (3.47)$$

Substituindo-se (3.47) em (3.45) e considerando-se a equação (3.6), as equações (3.45) e (3.46) resultam em:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} \phi_m(p) \delta(q, p) \delta_{km} d\Omega &= - \int_{\Omega} [\phi_n(p) \delta(q, p) \delta_{kn} + \\
 + \phi_s(p) \delta(q, p) \delta_{ks}] d\Omega &= \begin{cases} -\phi_k(q) \dots se \dots k = n, s \\ 0 \dots \dots \dots se \dots k = 3 \end{cases} \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

$$- \int_{\Omega} [w(p) \delta(q, p) \delta_{k3}] d\Omega = \begin{cases} 0 \dots \dots \dots se \dots k = n, s \\ -w(q) \dots se \dots k = 3 \end{cases} \quad (3.49)$$

Deve-se salientar que agora os momentos fundamentais unitários são aplicados nas direções m e l e não mais nas direções X_1 e X_2 . Caso ponto de colocação estivesse sobre o contorno, as direções m e l seriam as direções normal n e tangencial s ao contorno onde está Q . Para um ponto interno q elas são direções quaisquer. Substituindo-se as equações (3.47), (3.48), (3.49) em (3.44) e considerando-se ainda as seguintes relações:

$$M_i n_i = M_n \quad (3.50.a)$$

$$M_i s_i = M_{ns} \quad (3.50.b)$$

Obtém-se finalmente a equação dos deslocamentos generalizados na superfície média da placa:

$$\begin{aligned}
 U_k(q) &= \int_{\Omega_g} g \left[w_k^*(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki,i}^*(q, p) \right] d\Omega + \\
 &- \int_{\Gamma} [\phi_n(P) M_{kn}^*(q, P) + \phi_s(P) M_{kns}^*(q, P) + w(P) Q_{kn}^*(q, P)] d\Gamma + \\
 &+ \int_{\Gamma} [M_n(P) \phi_{kn}^*(q, P) + M_{ns}(P) \phi_{ks}^*(q, P) + Q_n(P) w_k^*(q, P)] d\Gamma \quad k = m, l, 3; i = 1, 2
 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Onde: $U_m = \phi_m$, $U_l = \phi_l$ e $U_3 = w$.

3.4 TRANSFORMAÇÃO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO DO CARREGAMENTO EM INTEGRAIS DE CONTORNO

Considerando-se a equação de deslocamentos (3.51) observa-se que os efeitos do carregamento g são calculados através de integrais sobre o subdomínio Ω_g . Segundo Fernandes (1998) na aplicação do Método dos Elementos de Contorno é conveniente transformar essas integrais em integrais sobre o contorno Γ_g onde o carregamento g está distribuído, pois facilita bastante o cálculo da mesma. A fim de se obterem as relações para a transformação da integral sobre o domínio em integral de contorno, considere o caso particular onde o carregamento esteja distribuído em uma região retangular Ω_g , cujo contorno é definido por Γ_g , conforme a figura (3.4).

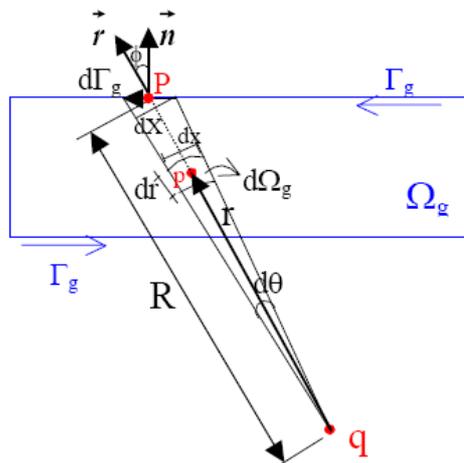


FIGURA 3.4 – Integração ao Longo do Contorno da Região Carregada

Na figura (3.4) p é um ponto qualquer do domínio Ω_g ; P é um ponto sobre o contorno Γ_g , q é o ponto de colocação; r é a distância entre p e q ; e R é a distância entre P e q .

Da figura (3.4) pode-se deduzir que:

$$d\Omega_g = drdx = r dr d\theta \quad (3.52)$$

$$d\theta = \frac{dX}{R} = \frac{\cos(\phi)d\Gamma_g}{R} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_g \quad (3.53)$$

A partir da equação (3.53) pode-se reescrever a equação (3.52) da seguinte forma:

$$d\Omega_g = r dr \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_g \quad (3.54)$$

Aplicando a equação de mudanças de coordenadas (3.54) nas integrais de domínio da equação de deslocamentos (3.51), tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} g \left[w_k^*(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki,i}^*(q, p) \right] d\Omega &= \\ &= \int_{\Gamma_g} \left[\int_0^R g(p) \left(w_k^*(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki,i}^*(q, p) \right) r dr \right] \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_g \\ & \quad k = n, s, 3 \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Onde as expressões de w_k^* ($k = n, s$) e de w_3^* são dadas respectivamente, pelas equações (3.12) e as expressões de $\phi_{ki,i}^*$ ($k, i = n, s$) e $\phi_{3i,i}^*$ são obtidas derivando-se as equações (3.11) e são dadas por:

$$\phi_{ki,i}^* = -\frac{r_{,k}}{2\pi D} \quad (3.56.a)$$

$$\phi_{3i,i}^* = -\frac{\ln(\lambda r)}{2\pi D} \quad (3.56.b)$$

Considerando que a carga $g(p)$ varie linearmente na região Ω_g , pode-se expressar tal carga da seguinte maneira:

$$g(p) = AX_1^p + BX_2^p + C \quad (3.57)$$

Seja agora escrever a equação (3.57) em coordenadas cilíndricas, que será o sistema de coordenadas adotado nesse trabalho. As coordenadas do ponto p (X_1^p e X_2^p) podem ser escritas em função de suas coordenadas cilíndricas, relativas a um sistema cuja origem é o ponto q , da seguinte maneira:

$$X_i^p = X_i^q + rr_{,i} \quad i = 1,2 \quad (3.58)$$

Sendo:

$$r_{,1} = \cos \theta \quad (3.59.a)$$

$$r_{,2} = \sin \theta \quad (3.59.b)$$

Substituindo-se a equação (3.58) em (3.57), obtêm-se a expressão de $g(p)$ em coordenadas cilíndricas:

$$g(p) = Ar \cos \theta + Br \sin \theta + g(q) \quad (3.60)$$

Onde: $g(q) = Ax_1^q + Bx_2^q + C$ é uma constante, correspondente ao valor de g no ponto q .

Determinada a expressão de $g(p)$ em coordenadas cilíndricas, seja agora determinar a expressão da integral de contorno, inicialmente para $k = m, l$:

$$\int_{\Gamma_g} \left[\int_0^R g(p) \left(w_k^*(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki,i}^*(q, p) \right) r dr \right] \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_g \quad (3.61)$$

Substituindo-se a equação (3.60) e as expressões de w_k^* e $\phi_{ki,i}^*$ em (3.61) e fazendo-se a integração em relação à r , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_g} g \left[w_k^*(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^*(q, p) \right] d\Omega = \\
 & = \frac{g(q)}{24\pi D} \int_{\Gamma_g} \left[R^2 \left(2 \ln z - \frac{5}{3} \right) + \frac{12\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \right] r_{,k} r_{,i} n_i d\Gamma_g + \\
 & + \frac{1}{32\pi D} \int_{\Gamma_g} (A \cos \theta + B \sin \theta) R \left[R^2 \left(2 \ln z - \frac{3}{2} \right) + \frac{8\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \right] r_{,k} r_{,i} n_i d\Gamma_g
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Seja agora determinar a expressão para $k = 3$:

$$\int_{\Gamma_g} \left[\int_0^R g(p) \left(w_3^*(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{3i}^*(q, p) \right) r dr \right] \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_g \tag{3.63}$$

Substituindo-se a equação (3.60) e as expressões de w_3^* e ϕ_{3i}^* em (3.63) e fazendo-se a integração em relação à r , obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_g} g \left[w_3^*(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{3i}^*(q, p) \right] d\Omega = \\
 & = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left\{ g(q) \int_{\Gamma_g} \left[\frac{(1-\nu)z^2}{4} \left(\ln z - \frac{5}{4} \right) + 2(\nu-2) \left(\ln z - \frac{1}{2} \right) \right] r_{,i} n_i d\Gamma_g + \right. \\
 & \quad + \int_{\Gamma_g} (A \cos \theta + B \sin \theta) R^2 \left[\frac{(1-\nu)z^2}{5} \left(\ln z - \frac{6}{5} \right) + \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{4}{3}(\nu-2) \left(\ln z - \frac{1}{3} \right) \right] r_{,i} n_i d\Gamma_g \right\}
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

3.5 EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS PARA UM PONTO INTERNO DA PLACA EM SUB-REGIÕES

Na análise de pavimentos compostos são consideradas placas de diferentes rigidezes e espessuras, sendo cada placa a representação de uma viga ou laje, sendo estas representadas por domínios chamados de sub-regiões como mostrado na figura (3.5).

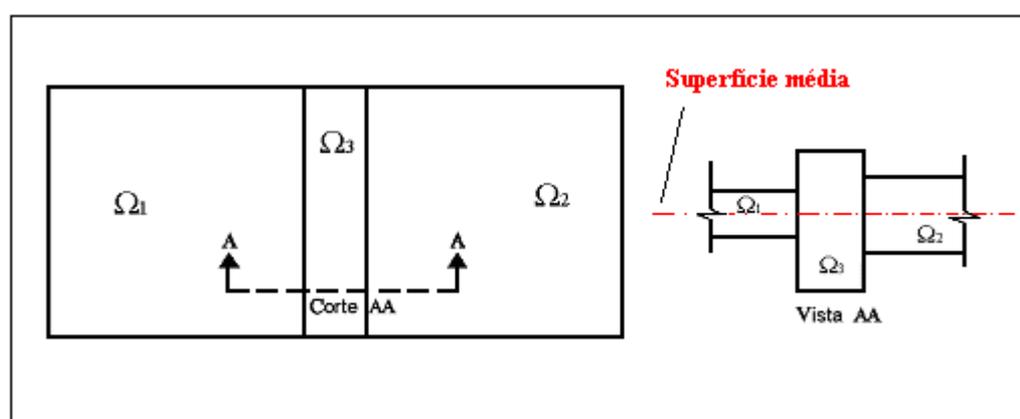


FIGURA 3.5 – Representação de Pavimento Composto por três sub-regiões

Na análise de flexão de placas, cada sub-região é representada pela superfície média (ver vista AA da figura 3.5). Assim todos os deslocamentos e forças de superfície são relativos a essa superfície. Na dedução da equação integral, será considerado o caso particular de uma placa composta de apenas duas sub-regiões Ω_1 e Ω_2 de rigidez à flexão igual à D_1 e D_2 , respectivamente. A figura (3.6) apresenta essas duas sub-regiões onde:

- ✚ Γ_1 é o contorno externo de Ω_1 ;
- ✚ Γ_2 é o contorno externo de Ω_2 ;
- ✚ Γ_{12} contorno da interface relativo à sub-região Ω_1 ;
- ✚ Γ_{21} contorno da interface relativo à sub-região Ω_2 ;
- ✚ n_1 direção da normal no trecho Γ_1 ;
- ✚ n_2 direção da normal no trecho Γ_2 ;
- ✚ n_{12} direção da normal no trecho Γ_{12} ;

✚ n_{21} direção da normal no trecho Γ_{21} .

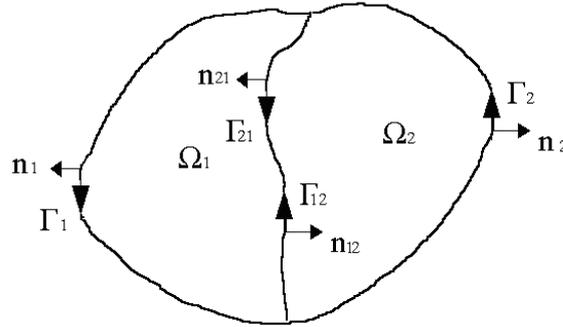


FIGURA 3.6 – Domínio com Sub-Regiões Homogêneas

A equação integral do deslocamento U_k , relativa a cada sub-região, considerando-se a figura (3.6) e adotando-se que o ponto de colocação esteja em Ω_1 , é dada por:

$$\begin{aligned}
 U_k(q) = & \int_{\Omega_g} g \left[w_k^{*(1)}(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^{*(1)},_i(q, p) \right] d\Omega + \\
 & - \int_{\Gamma_1} [\phi_n^1(P)M_{kn}^{*1}(q, P) + \phi_s^1(P)M_{kns}^{*1}(q, P) + w^1(P)Q_{kn}^{*1}(q, P)] d\Gamma + \\
 & - \int_{\Gamma_{12}} [\phi_n^1(P)M_{kn}^{*1}(q, P) + \phi_s^1(P)M_{kns}^{*1}(q, P) + w^1(P)Q_{kn}^{*1}(q, P)] d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_1} [M_n^1(P)\phi_{kn}^{*(1)}(q, P) + M_{ns}^1(P)\phi_{ks}^{*(1)}(q, P) + Q_n^1(P)w_k^{*(1)}(q, P)] d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_{12}} [M_n^1(P)\phi_{kn}^{*(1)}(q, P) + M_{ns}^1(P)\phi_{ks}^{*(1)}(q, P) + Q_n^1(P)w_k^{*(1)}(q, P)] d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_{\Omega_2} g \left[w_k^{*(2)}(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^{*(2)},_i(q, p) \right] d\Omega \\
 & - \int_{\Gamma_2} [\phi_n^2(P)M_{kn}^{*2}(q, P) + \phi_s^2(P)M_{kns}^{*2}(q, P) + w^2(P)Q_{kn}^{*2}(q, P)] d\Gamma + \\
 & - \int_{\Gamma_{21}} [\phi_n^2(P)M_{kn}^{*2}(q, P) + \phi_s^2(P)M_{kns}^{*2}(q, P) + w^2(P)Q_{kn}^{*2}(q, P)] d\Gamma +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Gamma_2} \left[M_n^2(P) \phi_{kn}^{*(2)}(q, P) + M_{ns}^2(P) \phi_{ks}^{*(2)}(q, P) + Q_n^2(P) w_k^{*(2)}(q, P) \right] d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_{21}} \left[M_n^2(P) \phi_{kn}^{*(2)}(q, P) + M_{ns}^2(P) \phi_{ks}^{*(2)}(q, P) + Q_n^2(P) w_k^{*(2)}(q, P) \right] d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

Nas equações (3.65) e (3.66) é conveniente expressar as integrais de interface em um único sentido, visto que o sentido de integração não muda o valor final da integral, assim pode-se dizer que:

$$\int_{\Gamma_{12}} d\Gamma = \int_{\Gamma_{21}} d\Gamma \tag{3.67}$$

Considerando que nas interfaces deve haver equilíbrio de forças e deslocamentos, tem-se:

a) O deslocamento transversal w tem valor único em um ponto, porém as rotações são dadas no sistema local (n, s) definido na interface, portanto:

$$w^1(\Gamma_{12}) = w^2(\Gamma_{21}) \tag{3.68}$$

$$w_k^{*2}(\Gamma_{12}) = w_k^{*2}(\Gamma_{21}) \tag{3.69}$$

$$\phi_{kn}(\Gamma_{12}) = -\phi_{kn}(\Gamma_{21}) \tag{3.70}$$

$$\phi_{kn}^{*2}(\Gamma_{12}) = -\phi_{kn}^{*2}(\Gamma_{21}) \tag{3.71}$$

$$\phi_{ks}(\Gamma_{12}) = -\phi_{ks}(\Gamma_{21}) \tag{3.72}$$

$$\phi_{ks}^{*2}(\Gamma_{12}) = -\phi_{ks}^{*2}(\Gamma_{21}) \tag{3.73}$$

b) Os momentos M_n e M_{ns} têm o mesmo sinal nos contornos Γ_{12} e Γ_{21} , porém, a força cortante Q_n relativa ao contorno Γ_{12} tem sinal contrario àquela do contorno Γ_{21} , portanto, pode-se dizer que:

$$Q_n^1(\Gamma_{12}) = -Q_n^2(\Gamma_{21}) \tag{3.74}$$

$$Q_{kn}^{*2}(\Gamma_{12}) = -Q_{kn}^{*2}(\Gamma_{21}) \quad (3.75)$$

$$M_{kn}(\Gamma_{12}) = M_{kn}(\Gamma_{21}) \quad (3.76)$$

$$M_{kn}^{*2}(\Gamma_{12}) = M_{kn}^{*2}(\Gamma_{21}) \quad (3.77)$$

$$M_{kns}(\Gamma_{12}) = M_{kns}(\Gamma_{21}) \quad (3.78)$$

$$M_{kns}^{*2}(\Gamma_{12}) = M_{kns}^{*2}(\Gamma_{21}) \quad (3.79)$$

Considerando-se as relações de (3.67) à (3.79) têm-se que:

$$\int_{\Gamma_{12}} U_i^2 P_{ki}^{*2} d\Gamma = - \int_{\Gamma_{21}} U_i^2 P_{ki}^{*2} d\Gamma \quad (3.80.a)$$

$$\int_{\Gamma_{12}} U_{ki}^{*2} P_i^2 d\Gamma = - \int_{\Gamma_{21}} U_{ki}^{*2} P_i^2 d\Gamma \quad (3.80.b)$$

Substituindo as equações (3.80) em (3.66) obtêm-se:

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Omega_g} g \left[w_k^{*(2)}(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^{*(2)},_i(q, p) \right] d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_2} \left[\phi_n^2(P) M_{kn}^{*2}(q, P) + \phi_s^2(P) M_{kns}^{*2}(q, P) + w^2(P) Q_{kn}^{*2}(q, P) \right] d\Gamma_2 + \\ & + \int_{\Gamma_{12}} \left[\phi_n^2(P) M_{kn}^{*2}(q, P) + \phi_s^2(P) M_{kns}^{*2}(q, P) + w^2(P) Q_{kn}^{*2}(q, P) \right] d\Gamma_{12} + \\ & + \int_{\Gamma_2} \left[M_n^2(P) \phi_{kn}^{*(2)}(q, P) + M_{ns}^2(P) \phi_{ks}^{*(2)}(q, P) + Q_n^2(P) w_k^{*(2)}(q, P) \right] d\Gamma_2 + \\ & - \int_{\Gamma_{12}} \left[M_n^2(P) \phi_{kn}^{*(2)}(q, P) + M_{ns}^2(P) \phi_{ks}^{*(2)}(q, P) + Q_n^2(P) w_k^{*(2)}(q, P) \right] d\Gamma_{12} \end{aligned} \quad (3.81)$$

A equação integral de todo domínio é obtida pela soma das integrais relativas a cada sub-região, ou seja, somando as equações (3.65) e (3.81):

$$U_k(q) = \int_{\Omega_g} g \left[w_k^{*(1)}(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^{*(1)},_i(q, p) \right] d\Omega +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{g_2} g \left[w_k^{*(2)}(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^{*(2)},_i(q, p) \right] d\Omega + \\
& - \int_{\Gamma_1} \left[\phi_n^1(P) M_{kn}^{*1}(q, P) + \phi_s^1(P) M_{kns}^{*1}(q, P) + w^1(P) Q_{kn}^{*1}(q, P) \right] d\Gamma + \\
& - \int_{\Gamma_2} \left[\phi_n^2(P) M_{kn}^{*2}(q, P) + \phi_s^2(P) M_{kns}^{*2}(q, P) + w^2(P) Q_{kn}^{*2}(q, P) \right] d\Gamma_2 + \\
& - \int_{\Gamma_{12}} \left[\phi_n^1(P) M_{kn}^{*1}(q, P) + \phi_s^1(P) M_{kns}^{*1}(q, P) + w^1(P) Q_{kn}^{*1}(q, P) \right] d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_{12}} \left[\phi_n^2(P) M_{kn}^{*2}(q, P) + \phi_s^2(P) M_{kns}^{*2}(q, P) + w^2(P) Q_{kn}^{*2}(q, P) \right] d\Gamma_{12} + \\
& + \int_{\Gamma_1} \left[M_n^1(P) \phi_{kn}^{*(1)}(q, P) + M_{ns}^1(P) \phi_{ks}^{*(1)}(q, P) + Q_n^1(P) w_k^{*(1)}(q, P) \right] d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_2} \left[M_n^2(P) \phi_{kn}^{*(2)}(q, P) + M_{ns}^2(P) \phi_{ks}^{*(2)}(q, P) + Q_n^2(P) w_k^{*(2)}(q, P) \right] d\Gamma_2 + \\
& + \int_{\Gamma_{12}} \left[M_n^1(P) \phi_{kn}^{*(1)}(q, P) + M_{ns}^1(P) \phi_{ks}^{*(1)}(q, P) + Q_n^1(P) w_k^{*(1)}(q, P) \right] d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_{12}} \left[M_n^2(P) \phi_{kn}^{*(2)}(q, P) + M_{ns}^2(P) \phi_{ks}^{*(2)}(q, P) + Q_n^2(P) w_k^{*(2)}(q, P) \right] d\Gamma_{12} \tag{3.82}
\end{aligned}$$

Para um caso geral, onde se tenham N_s sub-regiões, N_{int} interfaces e o ponto de colocação estando em qualquer uma das sub-regiões, a equação (3.82) fica:

$$\begin{aligned}
U_k(q) &= \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Omega_g} g \left[w_k^{*j}(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^{*j},_i(q, p) \right] d\Omega + \\
& - \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_1} \left[\phi_n^j(P) M_{kn}^{*j}(q, P) + \phi_s^j(P) M_{kns}^{*j}(q, P) + w^j(P) Q_{kn}^{*j}(q, P) \right] d\Gamma + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_{ja}} \left\{ \phi_n^j(P) \left[M_{kn}^{*j}(q, P) - M_{kn}^{*a}(q, P) \right] + \phi_s^j(P) \left[M_{kns}^{*j}(q, P) - M_{kns}^{*a}(q, P) \right] + \right. \\
& \quad \left. + w^j(P) \left[Q_{kn}^{*j}(q, P) - Q_{kn}^{*a}(q, P) \right] \right\} d\Gamma + \\
& + \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_1} \left[M_n^j(P) \phi_{kn}^{*j}(q, P) + M_{ns}^j(P) \phi_{ks}^{*j}(q, P) + Q_n^j(P) w_k^{*j}(q, P) \right] d\Gamma +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \int_{\Gamma_{ja}} \{M_n(P)[\phi_{kn}^{*j}(q, P) - \phi_{kn}^{*a}(q, P)] + M_{ns}(P)[\phi_{ks}^{*j}(q, P) - \phi_{ks}^{*a}(q, P)] + \\
 & \quad + Q_n(P)[w_k^{*1}(q, P) - w_k^{*a}(q, P)]\} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

Onde Γ é o contorno externo, dado pela soma dos contornos externos de cada sub-região.

3.6 EQUAÇÃO INTEGRAL DA DERIVADA DO DESLOCAMENTO TRANSVERSAL PARA UM PONTO INTERNO ($w_{,m}$)

A equação integral de $w_{,m}$, onde m é a direção normal definida no eixo de uma viga, é obtida derivando-se a equação (3.83) relativa ao deslocamento w ($k = 3$), ou seja:

$$\begin{aligned}
 w_{,m}(q) & = \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Omega_s} g \left[w_{3, m}^{*j}(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{3i, im}^{*j}(q, p) \right] d\Omega + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_1} [\phi_n(P)M_{3n, m}^{*j}(q, P) + \phi_s(P)M_{3ns, m}^{*j}(q, P) + w(P)Q_{3n, m}^{*j}(q, P)] d\Gamma + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \int_{\Gamma_{ja}} \{ \phi_n(P)[M_{3n, m}^{*j}(q, P) - M_{3n, m}^{*a}(q, P)] + \phi_s(P)[M_{3ns, m}^{*j}(q, P) - M_{3ns, m}^{*a}(q, P)] + \\
 & \quad + w(P)[Q_{3n, m}^{*j}(q, P) - Q_{3n, m}^{*a}(q, P)] \} d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_1} [M_n(P)\phi_{3n, m}^{*j}(q, P) + M_{ns}(P)\phi_{3s, m}^{*j}(q, P) + Q_n(P)w_{3, m}^{*j}(q, P)] d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{\text{int}}} \int_{\Gamma_{ja}} \{ M_n(P)[\phi_{3n, m}^{*j}(q, P) - \phi_{3n, m}^{*a}(q, P)] + M_{ns}(P)[\phi_{3s, m}^{*j}(q, P) - \phi_{3s, m}^{*a}(q, P)] + \\
 & \quad + Q(P)[w_{3, m}^{*j}(q, P) - w_{3, m}^{*a}(q, P)] \} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Onde as expressões fundamentais são dadas por:

$$\frac{\partial \phi_{3n}^*}{\partial m} = \frac{1}{8\pi D} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} + [2 \ln(z) - 1] n_i m_i \right\} \quad (3.85.a)$$

$$\frac{\partial \phi_{3s}^*}{\partial m} = \frac{1}{8\pi D} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial s} + [2 \ln(z) - 1] s_i m_i \right\} \quad (3.85.b)$$

$$\frac{\partial w_3^*}{\partial m} = -\frac{1}{8\pi D(1-\nu)r\lambda^2} \left\{ (1-\nu)\lambda^2 r^2 [2 \ln(z) - 1] - 8 \right\} \frac{\partial r}{\partial m} \quad (3.85.c)$$

$$\frac{\partial M_{3n}^*}{\partial m} = \frac{(1-\nu)}{8\pi r} \left\{ 2 \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\partial r}{\partial m} + 4 \frac{\partial r}{\partial n} \left[n_i m_i - \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \right\} \quad (3.85.d)$$

$$\frac{\partial M_{3ns}^*}{\partial m} = \frac{(1-\nu)}{4\pi r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} s_i m_i + \frac{\partial r}{\partial s} n_i m_i - 2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} \right\} \quad (3.85.e)$$

$$\frac{\partial Q_{3n}^*}{\partial m} = \frac{1}{2\pi r^2} \left\{ n_i m_i - 2 \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial m} \right\} \quad (3.85.f)$$

$$\frac{\partial \phi_{3i}^*}{\partial m} = \frac{1}{2\pi D r} \frac{\partial r}{\partial m} \quad (3.85.g)$$

Para transformar a integral de domínio, que envolve o carregamento g , em integral ao longo do contorno da região carregada o procedimento é análogo ao que foi feito no item (3.3). Assim a integral é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_g} g \left[w_{3,m}^*(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{3i,im}^*(q, p) \right] d\Omega = \\ & = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} \left\{ -g(q) \int_{\Gamma_g} \frac{\partial r}{\partial m} \left[(1-\nu) \frac{z^2}{3} \left(2 \ln(z) - \frac{5}{3} \right) + 4(\nu-2) \right] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_g + \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma_g} (A \cos \theta + B \sin \theta) \frac{\partial r}{\partial m} \left[(1-\nu) z^2 \frac{R}{2} \left(\ln z - \frac{3}{4} \right) + 2R(\nu-2) \right] r_{,i} n_i d\Gamma_g \right\} \quad (3.86) \end{aligned}$$

3.7 EQUAÇÃO INTEGRAL DAS CURVATURAS ($\phi_{k,m}$) PARA UM PONTO INTERNO

A equação integral de $\phi_{k,m}$ em um ponto interno qualquer, onde k e m podem ser direções quaisquer definidas no ponto é obtida derivando-se a equação (3.83) relativa ao deslocamento ϕ_k ($k=l, m$), ou seja:

$$\begin{aligned}
 \phi_{k,m}(q) = & \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Omega_g} g \left[w_{k,m}^{*j}(q,p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki,im}^{*j}(q,p) \right] d\Omega + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_1} [\phi_n(P) M_{kn,m}^{*j}(q,P) + \phi_s(P) M_{kns,m}^{*j}(q,P) + w(P) Q_{kn,m}^{*j}(q,P)] d\Gamma + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_{ja}} \{ \phi_n(P) [M_{kn,m}^{*j}(q,P) - M_{kn,m}^{*a}(q,P)] + \phi_s(P) [M_{kns,m}^{*j}(q,P) - M_{kns,m}^{*a}(q,P)] + \\
 & \quad + w(P) [Q_{kn,m}^{*j}(q,P) - Q_{kn,m}^{*a}(q,P)] \} d\Gamma + \\
 & \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_1} [M_n(P) \phi_{kn,m}^{*j}(q,P) + M_{ns}(P) \phi_{ks,m}^{*j}(q,P) + Q_n(P) w_{k,m}^{*j}(q,P)] d\Gamma \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_{ja}} \{ [M_n(P) \phi_{kn,m}^{*j}(q,P) - \phi_{kn,m}^{*a}(q,P)] + M_{ns}(P) [\phi_{ks,m}^{*j}(q,P) - \phi_{ks,m}^{*a}(q,P)] + \\
 & \quad + Q_n(P) [w_{k,m}^{*j}(q,P) - w_{k,m}^{*a}(q,P)] \} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

Onde as expressões fundamentais são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi_{kn}^*}{\partial m} = & - \frac{1}{8\pi D(1-\nu)r} \left\{ -2 \frac{\partial r}{\partial m} n_k [4(zK_1 + A) + (1-\nu)] + 8r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} (zK_1 + 2A) + \right. \\
 & \left. - [8A + 2(1-\nu)] \left[m_k \frac{\partial r}{\partial n} - 2r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,k} n_i m_i \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{3.88.a}$$

$$\frac{\partial \phi_{ks}^*}{\partial m} = - \frac{1}{8\pi D(1-\nu)r} \left\{ -2 \frac{\partial r}{\partial m} s_k [4(zK_1 + A) + (1-\nu)] + 8r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial s} (zK_1 + 2A) + \right.$$

$$- [8A + 2(1-\nu)] \left[m_k \frac{\partial r}{\partial s} - 2r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial s} + r_{,k} s_i m_i \right] \} \quad (3.88.b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{kn}^*}{\partial m} = & \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(4A + 2zK_1 + 1 - \nu) \left(n_k n_i m_i - 2n_k \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} \right) + (4A + 1 + \nu) \left(-2r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} + m_k \right) + \right. \\ & + 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial n} \left(4r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} - m_k \frac{\partial r}{\partial n} - 2r_{,k} n_i m_i \right) + \\ & \left. + 4(2A + zK_1) \frac{\partial r}{\partial m} \left(4r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial n} - 2n_k \frac{\partial r}{\partial n} - r_{,k} \right) - 4z^2 k_0 \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} \left(n_k - r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} \right) \right\} \quad (3.88.c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{kns}^*}{\partial m} = & \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ (4A + 2zK_1 + 1 - \nu) \left(n_k s_i m_i + s_k n_i m_i - 2s_k \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} - 2n_k \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial s} \right) + \right. \\ & + 2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu) \left(4r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} - m_k \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} - r_{,k} s_i m_i \frac{\partial r}{\partial n} - r_{,k} n_i m_i \frac{\partial r}{\partial s} \right) + \\ & + 4(2A + zK_1) \frac{\partial r}{\partial m} \left(4r_{,k} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial n} - s_k \frac{\partial r}{\partial n} - n_k \frac{\partial r}{\partial s} \right) + \\ & \left. - 2z^2 K_0 \frac{\partial r}{\partial m} \left(n_k \frac{\partial r}{\partial s} + s_k \frac{\partial r}{\partial n} - 2r_{,k} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial n} \right) \right\} \quad (3.88.d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{kn}^*}{\partial m} = & -\frac{\lambda^2}{2\pi r} \left\{ zK_1 \frac{\partial r}{\partial m} \left(r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} - n_k \right) + A \frac{\partial r}{\partial m} \left(4r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} - n_k \right) + \right. \\ & \left. - A \left(m_k \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,k} n_i m_i \right) \right\} \quad (3.88.e) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w_k^*}{\partial m} = -\frac{1}{8\pi D} \left\{ [2\ln(z) - 1] m_k + 2r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} \right\} \quad (3.88.f)$$

$$\frac{\partial \phi_{ki}^*}{\partial m} = -\frac{1}{2\pi D r^2} \left[2r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} - m_k \right] \quad (3.88.g)$$

Para transformar a integral de domínio, que envolve o carregamento g , em integral ao longo do contorno da região carregada o procedimento é análogo ao que foi feito no item 3.3. Assim a integral é calculada da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_g} g \left[w_{k,m}^*(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^*(q, p) \right] d\Omega =$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{8\pi D} \left\{ g(q) \int_{\Gamma_g} \left[R \left[r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} + m_k (\ln(z) - 1) \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{4\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \left(2r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} - m_k \right) \frac{\ln(R)}{R} \right] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_g + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\Gamma_g} (A \cos \theta + B \sin \theta) \left[\frac{2R^2}{3} \left[r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} + m_k \left(\ln(z) - \frac{5}{6} \right) \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{4\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \left(2r_{,k} \frac{\partial r}{\partial m} - m_k \right) \right] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_g \right\} \quad (3.89)
 \end{aligned}$$

3.8 EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS PARA PONTOS DO CONTORNO DA PLACA

Caso o ponto de colocação q pertença ao contorno externo, o ponto q é designado por Q e para se obter a equação integral dos deslocamentos trata-se tal ponto como se fosse um ponto de domínio. Assim para ser possível a aplicação da equação (3.83), acrescenta-se um contorno circular Γ_ξ de raio infinitesimal com centro em Q e retira-se o contorno $\bar{\Gamma}$. Desta forma, o ponto Q passa a ser interno ao novo contorno $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\xi$, tornando a equação (3.83) válida para tal ponto. Para que não haja alterações no domínio original, faz-se os limites do raio ξ e do contorno $\bar{\Gamma}$ tenderem a zero, assim o ponto Q pode ser considerado sobre o contorno, Fernandes (1998).

A figura (3.7) representa um caso onde o ponto Q coincide com um nó de canto sobre o contorno externo.

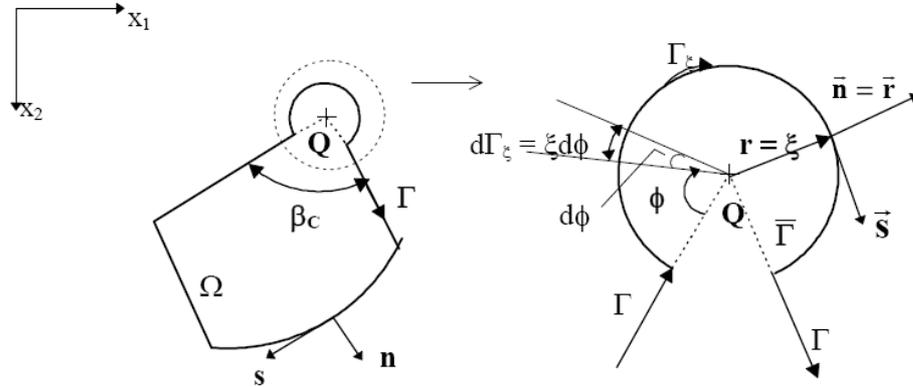


FIGURA 3.7 – Contorno Circular Acrescido a um Ponto Q de um Canto da Placa

A partir da equação (3.83), considerando a figura (3.7) e fazendo-se os limites citados anteriormente, tem-se:

$$\begin{aligned}
 C(Q)U_k(Q) = & \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Omega_g} g \left[w_k^{*j}(Q, P) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^{*j},i(Q, P) \right] d\Omega + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_1} [\phi_n(P)M_{kn}^{*j}(Q, P) + \phi_s(P)M_{kns}^{*j}(Q, P) + w(P)Q_{kn}^{*j}(Q, P)] d\Gamma + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_{ja}} \{ \phi_n(P)[M_{kn}^{*j}(Q, P) - M_{kn}^{*a}(Q, P)] + \phi_s(P)[M_{kns}^{*j}(Q, P) - M_{kns}^{*a}(Q, P)] + \\
 & \quad + w(P)[Q_{kn}^{*j}(Q, P) - Q_{kn}^{*a}(Q, P)] \} d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_1} [M_n(P)\phi_{kn}^{*j}(Q, P) + M_{ns}(P)\phi_{ks}^{*j}(Q, P) + Q_n(P)w_k^{*j}(Q, P)] d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_{ja}} \{ M_n(P)[\phi_{kn}^{*j}(Q, P) - \phi_{kn}^{*a}(Q, P)] + M_{ns}(P)[\phi_{ks}^{*j}(Q, P) - \phi_{ks}^{*a}(Q, P)] + \\
 & \quad + Q_n(P)[w_k^{*1}(Q, P) - w_k^{*a}(Q, P)] \} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Onde:

$$C(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \tag{3.91}$$

Caso o ponto Q não coincida com um nó de canto, tem-se que $\beta_c = \pi$, ou seja, na equação (3.90) o valor do termo livre é:

$$C(Q) = \frac{1}{2} \quad (3.92)$$

A equação (3.90) não será considerada neste trabalho, uma vez que no sistema de equações, serão escritas apenas equações em pontos externos. Mais detalhes sobre a obtenção da equação integral e dedução do termo livre pode ser encontrado nos trabalhos de Fernandes (1998), Barbirato (1999) e ainda no material didático desenvolvido por Fernandes (2005). Esses trabalhos não tratam de análises de placas através das hipóteses de Reissner, porém é importante notar que independente do problema considerado, segue-se um mesmo procedimento para dedução do termo livre, mudando apenas as expressões fundamentais envolvidas. No trabalho de Ribeiro (1992) contém mais detalhes sobre a dedução do termo livre para a equação de deslocamentos da placa, considerando-se as hipóteses de Reissner.

3.9 EQUAÇÃO INTEGRAL DOS DESLOCAMENTOS PARA PONTOS EXTERNOS

Caso o ponto de colocação q seja um ponto externo, o ponto q é designado por A . Assim, a equação (3.83) do deslocamento transversal para um ponto externo, fica definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C(A)U_k(A) = & \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Omega_g} g \left[w_k^{*j}(A, P) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^{*j} \nu_i(A, P) \right] d\Omega + \\ & - \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma} [\phi_n(P)M_{kn}^{*j}(A, P) + \phi_s(P)M_{kns}^{*j}(A, P) + w(P)Q_{kn}^{*j}(A, P)] d\Gamma + \\ & - \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_{ja}} [\phi_n(P)[M_{kn}^{*j}(A, P) - M_{kn}^{*a}(A, P)] + \phi_s(P)[M_{kns}^{*j}(A, P) - M_{kns}^{*a}(A, P)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + w(P)[Q_{kn}^{*j}(A, P) - Q_{kn}^{*a}(A, P)]d\Gamma + \\
& + \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_1} [M_n(P)\phi_{kn}^{*j}(A, P) + M_{ns}(P)\phi_{ks}^{*j}(A, P) + Q_n(P)w_k^{*j}(A, P)]d\Gamma + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_{ja}} \{M_n(P)[\phi_{kn}^{*j}(A, P) - \phi_{kn}^{*a}(A, P)] + M_{ns}(P)[\phi_{ks}^{*j}(A, P) - \phi_{ks}^{*a}(A, P)] + \\
& + Q_n(P)[w_k^{*1}(A, P) - w_k^{*a}(A, P)]\}d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Como a carga fundamental é definida através da função delta de Dirac, que possui as propriedades dadas pelas equações (3.3), (3.4) e (3.5), o primeiro termo da equação (3.93) será nulo, uma vez que:

$$\int_{\Omega} \delta(A, P)U_k(P)d\Omega(P) = 0 \tag{3.94}$$

ou seja, $\delta(A, P) = 0$, já que o ponto A nunca coincidirá com o ponto P . Assim, para pontos externos tem-se: $C(A) = 0$.

3.10 MODELO ALTERNATIVO PARA ANÁLISE DO PAVIMENTO

No trabalho de Fernandes (2003) é desenvolvido um modelo alternativo, baseado nas hipóteses de Kirchhoff, para análises de pavimentos onde as vigas são representadas por seus eixos médios, a fim de reduzir o número de graus de liberdade do problema. Um modelo semelhante será apresentado neste trabalho, porém baseado nas hipóteses de Reissner. No modelo de Fernandes (2003), o número de graus de liberdade é menor que aquele do modelo a ser proposto aqui, pois além de se ter apenas 2 graus de liberdades por nó, as forças de superfície V_n e M_n são eliminadas ao longo das interfaces. O modelo aqui proposto apresenta 3 graus de liberdade por nó e têm-se as forças Q_n , M_n e M_{ns} nos nós ao longo da interface.

No modelo proposto inicialmente para análise do pavimento desenvolvido no item (3.4) as variáveis são definidas ao longo do contorno externo e interfaces. Nesse item serão feitas aproximações, ao longo da largura das vigas, para os deslocamentos e forças de interfaces. Dessa forma, as variáveis definidas sobre as interfaces são escritas em função dos seus valores no eixo médio da viga, o que reduz consideravelmente o número de graus de liberdade do problema, pois os nós ficam definidos nos eixos ao invés das interfaces. Note que apesar das variáveis ficarem definidas nos eixos das vigas as integrais continuam a serem feitas ao longo das interfaces. Assim, uma outra vantagem desse modelo é que não há problemas de singularidades quando se escrevem as equações em pontos de colocação sobre o eixo.

É importante comentar que, para facilitar a entrada de dados, não há necessidade de declarar alguns elementos nas extremidades das vigas, pois o programa os gera automaticamente. Por causa disso, deve-se dar atenção especial à direção em que os elementos devem ser declarados nas vigas internas. Se a mesma for definida na direção de y (ver figura 3.8) os elementos devem ser declarados no sentido inverso ao do eixo y . No caso da viga interna ser definida na direção de x (ver figura 3.8), os elementos devem ser declarados no mesmo sentido de x . Para as vigas externas, os elementos devem ser declarados de acordo com a orientação do contorno externo da placa.

3.10.1 EQUAÇÕES INTEGRAIS

A figura (3.8) representa uma placa composta por uma viga externa e outra interna, onde a largura da viga interna é dada por $2a_{vi}$ e a da viga externa por $2a_{ve}$, sendo que essas larguras são definidas sempre na direção da normal ao eixo da viga.

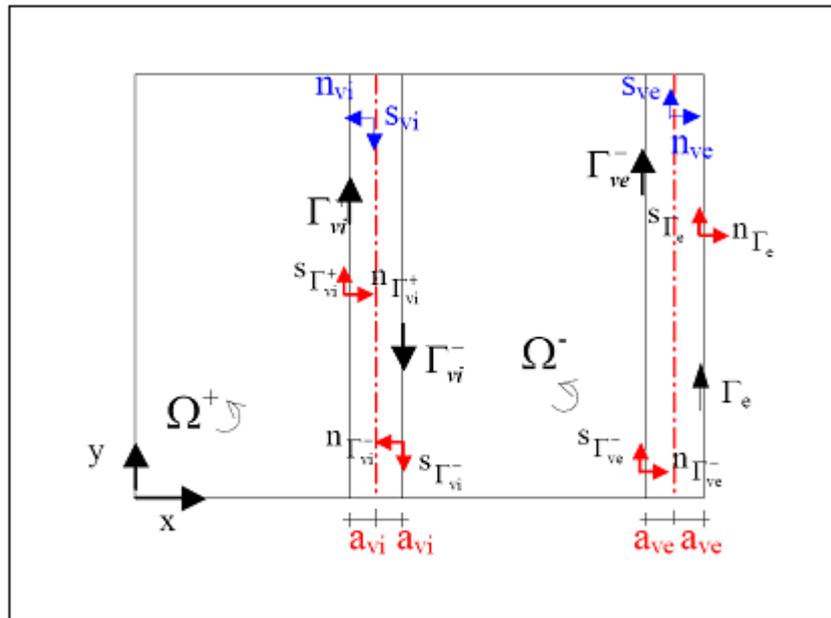


FIGURA 3.8 – Modelo de Pavimento que Representa a Viga pela sua Linha Média

Os vetores indicados nos eixos das vigas representam os sentidos da normal das vigas interna e externa (n_{vi} e n_{ve}), assim como os sentidos (s_{vi} e s_{ve}) em que os elementos devem ser declarados. Nas linhas contínuas estão indicados os sentidos de integração dos contornos das vigas, que acompanham sempre a orientação do contorno da laje.

Nas vigas externas, as integrais sobre o contorno da viga são feitas no mesmo sentido da sua linha média, logo, segundo as mesmas direções da normal e do contorno, isto é, $n_{ve} = n_{\Gamma_e} = n_{\Gamma_{ve}^-}$ e $s_{ve} = s_{\Gamma_e} = s_{\Gamma_{ve}^-}$. Porém para a viga interna, a integral referente ao domínio Ω^+ é feita no sentido contrario da linha média, ou seja, $n_{vi} = -n_{\Gamma_{vi}^+} = n_{\Gamma_{vi}^-}$ e $s_{vi} = -s_{\Gamma_{vi}^+} = s_{\Gamma_{vi}^-}$.

Reescreve-se então a equação integral dos deslocamentos (3.83) do modelo de sub-regiões, no qual têm-se variáveis ao longo de todo o contorno da viga, à placa da figura (3.8). A parcela da equação (3.83) relativa às integrais que envolvem os deslocamentos reais (w , ϕ_s , ϕ_n) é dada por:

$$\sum_{S=1}^4 \int_{\Gamma-\Gamma_e} [\phi_n(P)M_{kn}^{*j}(q,P) + \phi_s(P)M_{kns}^{*j}(q,P) + w(P)Q_{kn}^{*j}(q,P)] d\Gamma + \int_{\Gamma_{vi}^+} \{\phi_n(P)[M_{kn}^{*+}(q,P) - M_{kn}^{*vi}(q,P)] + \phi_s(P)[M_{kns}^{*+}(q,P) - M_{kns}^{*vi}(q,P)] +$$

$$\begin{aligned}
& + w(P)[Q_{kn}^{*+}(q, P) - Q_{kn}^{*vi}(q, P)]d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma_{vi}^-} \{\phi_n(P)[M_{kn}^{*vi}(q, P) - M_{kn}^{*-}(q, P)] + \phi_s(P)[M_{kns}^{*vi}(q, P) - M_{kns}^{*-}(q, P)] + \\
& + w(P)[Q_{kn}^{*vi}(q, P) - Q_{kn}^{*-}(q, P)]\}d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma_{ve}^-} \{\phi_n(P)[M_{kn}^{*-}(q, P) - M_{kn}^{*ve}(q, P)] + \phi_s(P)[M_{kns}^{*-}(q, P) - M_{kns}^{*ve}(q, P)] + \\
& + w(P)[Q_{kn}^{*-}(q, P) - Q_{kn}^{*ve}(q, P)]\}d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma_e} \{\phi_n(P)[M_{kn}^{*ve}(q, P)] + \phi_s(P)[M_{kns}^{*ve}(q, P)] + w(P)[Q_{kn}^{*ve}(q, P)]\}d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.95}$$

3.10.1.1 APROXIMAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

A fim de se escrever a equação (3.95) em função dos valores dos deslocamentos da linha média da viga, faz-se as seguintes aproximações para os deslocamentos transversais e as rotações ϕ_n e ϕ_s :

$$w_{(\Gamma_e)} = w_{(eixo)} + (w, n_{ve})_{(eixo)} a_{ve} \tag{3.96.a}$$

$$w_{(\Gamma_{ve}^-)} = w_{(eixo)} - (w, n_{ve})_{(eixo)} a_{ve} \tag{3.96.b}$$

$$w_{(\Gamma_{vi}^+)} = w_{(eixo)} + (w, n_{vi})_{(eixo)} a_{vi} \tag{3.97.a}$$

$$w_{(\Gamma_{vi}^-)} = w_{(eixo)} - (w, n_{vi})_{(eixo)} a_{vi} \tag{3.97.b}$$

$$\phi_{i(\Gamma_e)} = \phi_{i(eixo)} + (\phi_i, n_{ve})_{(eixo)} a_{ve} \quad i = n, s \tag{3.98.a}$$

$$\phi_{i(\Gamma_{ve}^-)} = \phi_{i(eixo)} - (\phi_i, n_{ve})_{(eixo)} a_{ve} \quad i = n, s \tag{3.98.b}$$

$$\phi_{i(\Gamma_{vi}^+)} = -[\phi_{i(eixo)} + (\phi_i, n_{vi})_{(eixo)} a_{vi}] \quad i = n, s \tag{3.98.a}$$

$$\phi_{i(\Gamma_{vi}^-)} = \phi_{i(eixo)} - (\phi_i, n_{vi})_{(eixo)} a_{vi} \quad i = n, s \tag{3.98.b}$$

Substituindo as aproximações dadas em (3.96), (3.97) e (3.98) na equação (3.95), obtém-se as integrais escritas apenas em função das variáveis das linhas médias das vigas, como se segue:

$$\begin{aligned}
& \sum_{S=1}^4 \int_{\Gamma-\Gamma_e} [\phi_n(P)M_{kn}^{*j}(q,P) + \phi_s(P)M_{kns}^{*j}(q,P) + w(P)Q_{kn}^{*j}(q,P)]d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma_{vi}^+} \left\{ \phi_n(eixo) + (\phi_{n,n_{vi}})_{(eixo)} a_{vi} [M_{kn}^{*+}(q,P) - M_{kn}^{*vi}(q,P)] + \right. \\
& + \left[\phi_s(eixo) + (\phi_{s,n_{vi}})_{(eixo)} a_{vi} [M_{kns}^{*+}(q,P) - M_{kns}^{*vi}(q,P)] + \right. \\
& + \left. [w(eixo) + (w_{,n_{vi}})_{(eixo)} a_{vi} [Q_{kn}^{*+}(q,P) - Q_{kn}^{*vi}(q,P)]]d\Gamma + \right. \\
& + \int_{\Gamma_{vi}^-} \left\{ \phi_n(eixo) - (\phi_{n,n_{vi}})_{(eixo)} a_{vi} [-M_{kn}^{*vi}(q,P) + M_{kn}^{*-}(q,P)] + \right. \\
& + \left[\phi_s(eixo) - (\phi_{s,n_{vi}})_{(eixo)} a_{vi} [-M_{kns}^{*vi}(q,P) + M_{kns}^{*-}(q,P)] + \right. \\
& + \left. [w(eixo) - (w_{,n_{vi}})_{(eixo)} a_{vi} [Q_{kn}^{*vi}(q,P) - Q_{kn}^{*-}(q,P)]]d\Gamma + \right. \\
& + \int_{\Gamma_e} \left\{ \phi_n(eixo) + (\phi_{n,n_{ve}})_{(eixo)} a_{ve} [M_{kn}^{*ve}(q,P)] + \left[\phi_s(eixo) + (\phi_{s,n_{ve}})_{(eixo)} a_{ve} [M_{kns}^{*ve}(q,P)] + \right. \right. \\
& \left. \left. [w(eixo) + (w_{,n_{ve}})_{(eixo)} a_{ve} [Q_{kn}^{*ve}(q,P)]]d\Gamma + \right. \right. \\
& \int_{\Gamma_{ve}^-} \left\{ \phi_n(eixo) - (\phi_{n,n_{ve}})_{(eixo)} a_{ve} [-M_{kn}^{*-}(q,P) + M_{kn}^{*ve}(q,P)] + \right. \\
& + \left[\phi_s(eixo) - (\phi_{s,n_{ve}})_{(eixo)} a_{ve} [-M_{kns}^{*-}(q,P) + M_{kns}^{*ve}(q,P)] + \right. \\
& + \left. [w(eixo) - (w_{,n_{ve}})_{(eixo)} a_{ve} [-Q_{kn}^{*-}(q,P) + Q_{kn}^{*ve}(q,P)]]d\Gamma \right.
\end{aligned} \tag{3.99}$$

3.10.1.2 APROXIMAÇÃO DOS ESFORÇOS

Diferentes aproximações para os esforços serão utilizadas para as vigas internas e externas. Desta maneira, seja inicialmente o caso da viga interna.

3.10.1.2.1 VIGAS INTERNAS

Duas aproximações diferentes serão consideradas para as vigas internas. Uma aproximação para vigas com as duas extremidades livres e outra para vigas com pelo menos uma extremidade vinculada, ou seja, apoiada ou engastada. Considere inicialmente a vigas com as extremidades livres.

✚ VIGAS COM EXTREMIDADES LIVRES

Sejam as forças de superfície M_n , M_{ns} definidas na equação de flexão ao longo das interfaces. No sistema (X_1, X_2) as integrais sobre as interfaces relativas a uma viga interna qualquer que envolvem essas forças são as seguintes:

$$\int_{\Gamma_e^V} \{M_1(P)[\phi_{k1}^{*V}(q, P) - \phi_{k1}^{*L}(q, P)] + M_2(P)[\phi_{k2}^{*V}(q, P) - \phi_{k2}^{*L}(q, P)]\} d\Gamma + \int_{\Gamma_d^V} \{M_1(P)[\phi_{k1}^{*V}(q, P) - \phi_{k1}^{*L}(q, P)] + M_2(P)[\phi_{k2}^{*V}(q, P) - \phi_{k2}^{*L}(q, P)]\} d\Gamma \quad (3.100)$$

Adotar-se-á para os momentos M_{ij} uma aproximação constante ao longo da largura da viga, conforme figura (3.9).

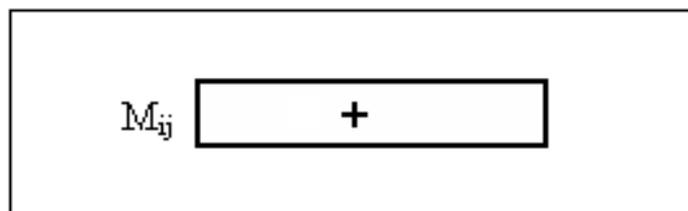


FIGURA 3.9 – Aproximação dos Momentos ao Longo da Largura de uma Viga Interna com Bordos Livres

As forças de superfície M_1 e M_2 , indicadas na figura (3.10) são aproximadas da seguinte maneira:

$$M_i(\Gamma_e) = -M_i(\text{eixo}) = -M_i \quad i = 1,2 \quad (3.101.a)$$

$$M_i(\Gamma_d) = M_i(\text{eixo}) = M_i \quad i = 1,2 \quad (3.101.b)$$

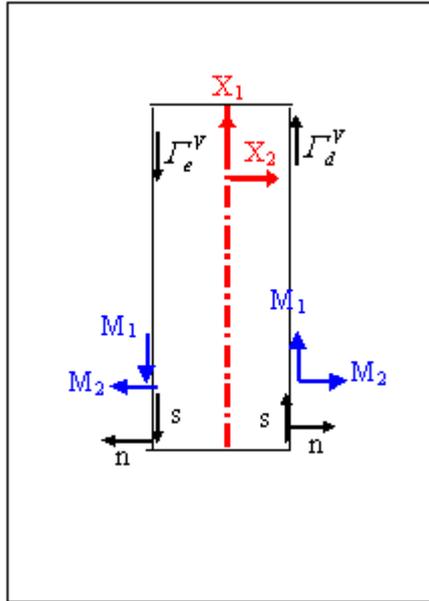


FIGURA 3.10 – Decomposição de Forças de Superfície nas Faces de uma Viga Interna com Bordos Livres

Substituindo-se (3.101) em (3.100) e mudando do sistema (X_1, X_2) para o sistema (n, s) definido no eixo da viga, de acordo com a figura (3.11), a equação (3.100) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Gamma_e^L} \{ M_n [\phi_{kn}^{*V} - \phi_{kn}^{*L}] + M_{ns} [\phi_{ks}^{*V} - \phi_{ks}^{*L}] \} d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_d^V} \{ M_n [\phi_{kn}^{*V} - \phi_{kn}^{*L}] + M_{ns} [\phi_{ks}^{*V} - \phi_{ks}^{*L}] \} d\Gamma
 \end{aligned} \quad (3.102)$$

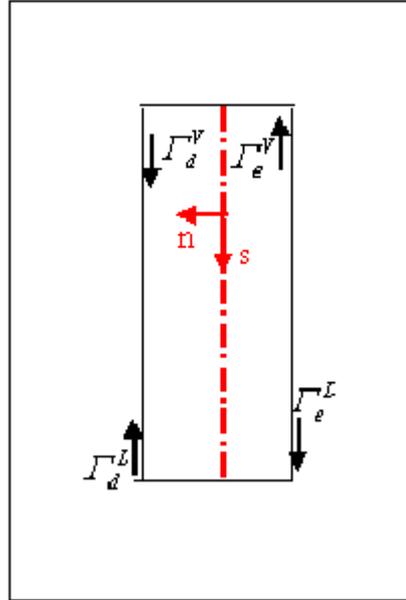


FIGURA 3.11 – Sistema Local da Viga Interna

No entanto, levando-se em conta que as integrais são feitas segundo os contornos Γ_e^L e Γ_d^L a equação (3.102) se torna;

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Gamma_e^L} \{M_n [\phi_{kn}^{*V} - \phi_{kn}^{*L}] + M_{ns} [\phi_{ks}^{*V} - \phi_{ks}^{*L}]\} d\Gamma + \\
 & - \int_{\Gamma_d^L} \{M_n [\phi_{kn}^{*V} - \phi_{kn}^{*L}] + M_{ns} [\phi_{ks}^{*V} - \phi_{ks}^{*L}]\} d\Gamma
 \end{aligned} \quad (3.103)$$

Considere agora as integrais sobre as interfaces envolvendo o esforço Q_j :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_e^V} \{Q_j(p) n_j [w_k^{*V}(q, P) - w_k^{*L}(q, P)]\} d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_d^V} \{Q_j(P) n_j [w_k^{*V}(q, P) - w_k^{*L}(q, P)]\} d\Gamma
 \end{aligned} \quad (3.104)$$

Sendo n_j referente ao sistema local de Γ_e^V ou Γ_d^V .

Da mesma forma que para os momentos, será adotada para o esforço Q_j aproximação constante ao longo da largura da viga (ver figura 3.12).

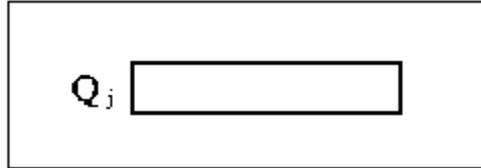


FIGURA 3.12 – Aproximação do Esforço Cortante ao Longo da Largura de uma Viga Interna

$$Q_j(\Gamma_e^V) = Q_j(\text{eixo}) = Q_j \quad (3.105.a)$$

$$Q_j(\Gamma_d^V) = Q_j(\text{eixo}) = Q_j \quad (3.105.b)$$

Substituindo-se (3.105) em (3.104), chega-se à:

$$\int_{\Gamma_e^V} \{Q_j n_j [w_k^{*V} - w_k^{*L}]\} d\Gamma + \int_{\Gamma_d^V} \{Q_j n_j [w_k^{*V} - w_k^{*L}]\} d\Gamma \quad (3.106)$$

Escrevendo a equação (3.106) em função dos contornos Γ_e^L e Γ_d^L , tem-se:

$$- \int_{\Gamma_e^L} \{Q_j n_j [w_k^{*V} - w_k^{*L}]\} d\Gamma - \int_{\Gamma_d^L} \{Q_j n_j [w_k^{*V} - w_k^{*L}]\} d\Gamma \quad (3.107)$$

Sendo n_j referente ao sistema local de Γ_e^L e Γ_d^L .

Porém, a equação (3.107) deve ser escrita em função da direção normal n definida no eixo da viga. Considerando que o sistema local, referente à Γ_e^L , coincide com aquele definido no eixo da viga e o sistema (n, s) de Γ_d^L é contrário àquele do eixo da viga, as expressões finais são dadas por:

$$- \int_{\Gamma_e^L} \{Q_n [w_k^{*V} - w_k^{*L}]\} d\Gamma + \int_{\Gamma_d^L} \{Q_n [w_k^{*V} - w_k^{*L}]\} d\Gamma \quad (3.108)$$

Como se considerou Q_j constante, ao longo da largura da viga deve ser acrescentado, no valor do momento M_n do eixo, uma parcela de momento referente ao esforço cortante Q_n , que aparece quando se escreve o momento M_n sobre a interface em função do seu valor no eixo.

Considerando-se que:

$$Q_n(\Gamma_e^L) = Q_n(\text{eixo}) = Q_n \quad (3.109.a)$$

$$Q_n(\Gamma_d^L) = -Q_n(\text{eixo}) = -Q_n \quad (3.109.b)$$

Então os momentos sobre as interfaces são reapproximados por:

$$M_n(\Gamma_e^L) = M_n - Q_n b_v \quad (3.110.a)$$

$$M_n(\Gamma_d^L) = M_n + Q_n b_v \quad (3.110.b)$$

Considerando-se as equações (3.110), a expressão (3.103) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_e^L} \{ (M_n - Q_n b_v) [\phi_{kn}^{*V} - \phi_{kn}^{*L}] + M_{ns} [\phi_{ks}^{*V} - \phi_{ks}^{*L}] \} d\Gamma + \\ & - \int_{\Gamma_d^L} \{ (M_n + Q_n b_v) [\phi_{kn}^{*V} - \phi_{kn}^{*L}] + M_{ns} [\phi_{ks}^{*V} - \phi_{ks}^{*L}] \} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.111)$$

🚧 VIGAS COM PELO MENOS UMA EXTREMIDADE VINCULADA

No caso da viga interna ter pelo menos uma das extremidades vinculada, será adotado para os momentos uma função composta de duas parcelas, uma de aproximação constante e outra de aproximação linear (ver figura (3.13)), resultado em uma aproximação linear.

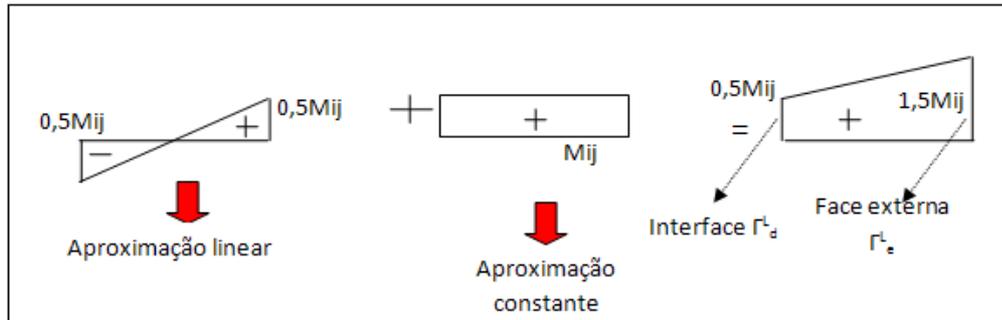


FIGURA 3.13 – Aproximação dos Momentos ao Longo da Largura da Viga Interna com Borda Vinculada

$$M_i^{\Gamma_e^L} = -1,5M_i(\text{eixo}) \quad i = 1,2 \quad (3.112.a)$$

$$M_i^{\Gamma_d^L} = \frac{1}{2}M_i(\text{eixo}) \quad i = 1,2 \quad (3.112.b)$$

Levando-se em conta que as integrais são feitas segundo os contornos Γ_e^L e Γ_d^L e substituindo-se (3.112) na equação (3.100), tem-se:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Gamma_e^L} \left\{ 1,5M_n [\phi_{kn}^{*V} - \phi_{kn}^{*L}] + 1,5M_{ns} [\phi_{ks}^{*V} - \phi_{ks}^{*L}] \right\} d\Gamma + \\
 & - \int_{\Gamma_d^L} \left\{ \frac{1}{2}M_n [\phi_{kn}^{*V} - \phi_{kn}^{*L}] + \frac{1}{2}M_{ns} [\phi_{ks}^{*V} - \phi_{ks}^{*L}] \right\} d\Gamma
 \end{aligned} \quad (3.113)$$

Da mesma maneira que para os momentos, o esforço cortante será aproximado por duas parcelas, uma com aproximação constante e outra com aproximação linear, resultando em uma aproximação final linear (ver figura (3.14)).

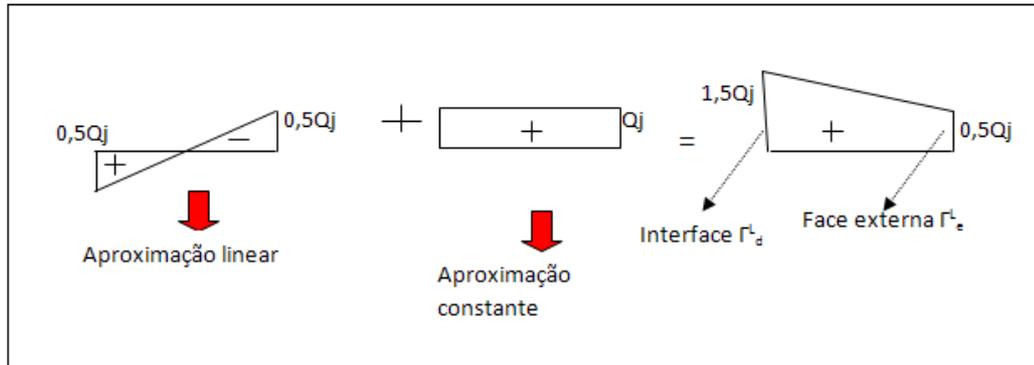


FIGURA 3.14 – Aproximação do Esforço Cortante ao Longo da Largura da Viga Interna com Borda Vinculada

$$Q_n^{\Gamma_e^L} = -\frac{1}{2}Q_n(\text{eixo}) \quad (3.114.a)$$

$$Q_n^{\Gamma_d^L} = 1,5Q_n(\text{eixo}) \quad (3.114.b)$$

Levando-se em conta que as integrais são feitas segundo os contornos Γ_e^L e Γ_d^L e Substituindo-se (3.114) na equação (3.104), tem-se:

$$-\int_{\Gamma_e^L} \left\{ \frac{1}{2} Q_j n_j [w_k^{*V} - w_k^{*L}] \right\} d\Gamma + \int_{\Gamma_d^L} \left\{ \frac{3}{2} Q_j n_j [w_k^{*V} - w_k^{*L}] \right\} d\Gamma \quad (3.115)$$

Sendo n_j referente ao sistema local de Γ_e^L e Γ_d^L .

Porém, a equação (3.115) deve ser escrita em função da direção normal n definida no eixo da viga. Considerando que o sistema local, referente à Γ_e^L , coincide com aquele definido no eixo da viga e o sistema (n, s) de Γ_d^L é contrário àquele do eixo da viga, as expressões finais são dadas por:

$$-\int_{\Gamma_e^L} \left\{ \frac{1}{2} Q_n [w_k^{*V} - w_k^{*L}] \right\} d\Gamma - \int_{\Gamma_d^L} \left\{ \frac{3}{2} Q_n [w_k^{*V} - w_k^{*L}] \right\} d\Gamma \quad (3.116)$$

3.10.1.2.2 VIGAS EXTERNAS

Para a viga externa ter-se-á aproximações diferentes no caso de vigas com extremidades livre e vigas com bordos apoiados ou engastados. A figura (3.15) apresenta o sistema local da viga externa.

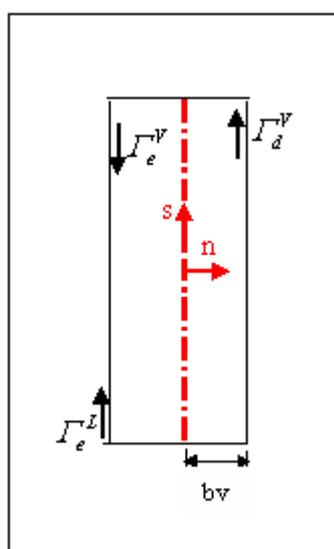


FIGURA 3.15 – Sistema Local de uma Viga Externa

✚ VIGAS COM EXTREMIDADES LIVRES

A aproximação de M_{ns} será constante, porém as forças de superfície M_n e Q_n , serão aproximadas por duas parcelas lineares (ver equações (3.117) e (3.118)), cuja soma resulta em aproximação constante (ver figura 3.16). As parcelas (ΔQ_n e ΔM_n) serão escritas em termos de deslocamentos e as forças (Q_n e M_n) são valores de contorno. Assim, quando o valor prescrito da força for nulo a aproximação resultante será linear. Caso contrário, a aproximação resultante será constante. Para o momento M_n tem-se uma parcela devido ao esforço cortante, análoga àquela considerada na viga interna. Assim os esforços sobre o contorno externo e interface são escritos em função dos valores no eixo do seguinte modo:

$$Q_n^{\Gamma_e^L} = -\frac{1}{2}\Delta Q_n + 1,5Q_n \quad (3.117.a)$$

$$Q_n^{\Gamma_d^V} = \frac{1}{2}\Delta Q_n + \frac{1}{2}Q_n \quad (3.117.b)$$

$$M_n^{\Gamma_e^L} = -\frac{1}{2}\Delta M_n + 1,5M_n - Q_n b_v \quad (3.118.a)$$

$$M_n^{\Gamma_d^V} = \frac{1}{2}\Delta M_n + \frac{1}{2}M_n + Q_n b_v \quad (3.118.b)$$

Onde os valores Q_n e M_n se referem ao eixo.

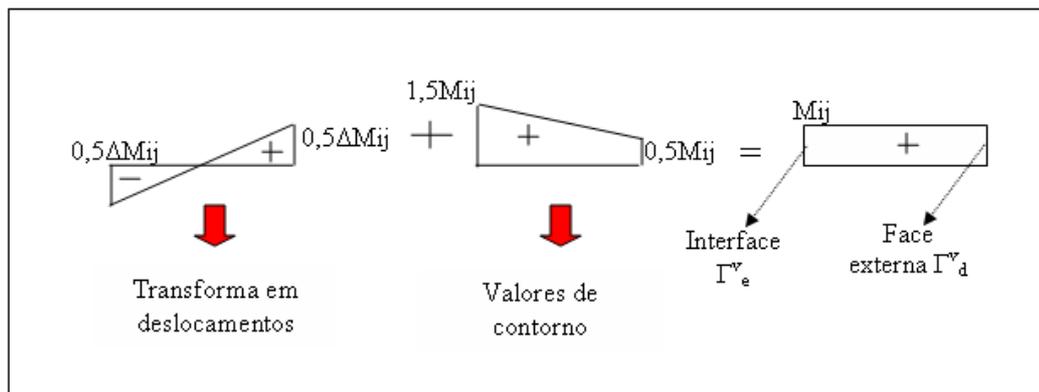


FIGURA 3.16 – Aproximação de Q_n e M_n em Vigas com Extremidades Livres

Na aproximação de Q_n e M_n , a parcela referente à aproximação linear é transformada em deslocamentos através das equações:

$$\Delta M_n = D(\phi_{n,n} + \nu\phi_{s,s}) + \frac{\nu g}{(1-\nu)\lambda^2} \quad (3.119)$$

$$\Delta Q_n = \frac{D(1-\nu)}{2}\lambda^2(\phi_n + w_n) \quad (3.120)$$

Quando se usam as equações (3.119) e (3.120) ficam definidos na interface Γ_e^V e no contorno externo Γ_d^V as seguintes variáveis ϕ_n , w_n , $\phi_{n,n}$ e $\phi_{s,s}$, sendo assim necessário,

adotar aproximações para esses valores ao longo da largura da viga. Para a rotação $w_{,n}$ e para a curvatura $\phi_{n,n}$ será adotada aproximação constante. Para a rotação ϕ_n será adotada aproximação linear de acordo com as seguintes equações:

$$\phi_n(\Gamma_e^L) = \phi_n - b_v \phi_{n,n} \quad (3.121.a)$$

$$\phi_n(\Gamma_d^V) = \phi_n + b_v \phi_{n,n} \quad (3.121.b)$$

A rotação ϕ_s será aproximada usando-se variação linear ao longo da largura da viga, sendo tais aproximações dadas por:

$$\phi_s(\Gamma_e^L) = \phi_s - b_v \phi_{s,n} \quad (3.122.a)$$

$$\phi_s(\Gamma_d^V) = \phi_s + b_v \phi_{s,n} \quad (3.122.b)$$

No caso da curvatura $\phi_{s,s}$, para que não ocorra um aumento no número de graus de liberdade do problema esta será escrita em termo de ϕ_s , utilizando-se o método das diferenças finitas através da seguinte expressão:

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial s}(Q) = \frac{2}{L} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_1(Q)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_2(Q)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_3(Q)}{\partial \xi} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \phi_s^1 \\ \phi_s^2 \\ \phi_s^3 \end{array} \right\} \quad i = n, s \quad (3.123)$$

Onde ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 são funções de forma quadráticas utilizadas para aproximar as variáveis no contorno externo e interfaces.

De posse de todas as aproximações, escrevem-se os momentos na interface em função dos seus valores no eixo, dando atenção especial ao sistema local definido no eixo da viga (ver figura (3.15)):

$$- \int_{\Gamma_e^L} \left\{ \left(-\frac{1}{2} \Delta M_n + 1,5 M_n - Q_n b_v \right) \left[\phi_{kn}^{*V} - \phi_{kn}^{*L} \right] + M_{ns} \left[\phi_{ks}^{*V} - \phi_{ks}^{*L} \right] \right\} d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma_d^v} \left\{ \left(\frac{1}{2} \Delta M_n + \frac{1}{2} M_n + Q_n b_v \right) \phi_{kn}^{*v} + M_{ns} \phi_{ks}^{*v} \right\} d\Gamma \quad (3.124)$$

Da mesma maneira, escrevem-se os esforços cortantes na interface em função dos seus valores no eixo, assim:

$$- \int_{\Gamma_c^l} \left\{ \left(-\frac{1}{2} \Delta Q_n + 1,5 Q_n \right) \left[\phi_{kn}^{*v} - \phi_{kn}^{*L} \right] + \int_{\Gamma_d^v} \left\{ \left(\frac{1}{2} \Delta Q_n + \frac{1}{2} Q_n \right) \left[w_k^{*v} \right] \right\} \right\} \quad (3.125)$$

🚧 VIGAS COM BORDO APOIADO OU ENGASTADO

Nesse caso a aproximação de M_{ns} e M_n será adotada constante (ver figura 3.17), mas no caso de M_n tem-se ainda a parcela linear devido ao esforço cortante (ver equações 3.126).

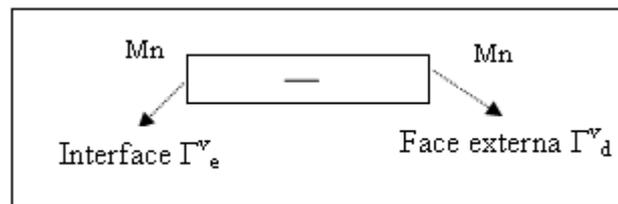


FIGURA 3.17 – Aproximação de M_n em Vigas Externas com Extremidades Vinculadas

Assim as forças são aproximadas da seguinte maneira:

$$M_n^{\Gamma_c^l} = M_n - Q_n b_v \quad (3.126.a)$$

$$M_n^{\Gamma_d^v} = M_n + Q_n b_v \quad (3.126.b)$$

Onde os valores de Q_n e M_n se referem ao eixo.

Quanto ao esforço cortante, este será aproximado por duas parcelas, uma com variação linear ou outra constante, de acordo com a figura (3.18).

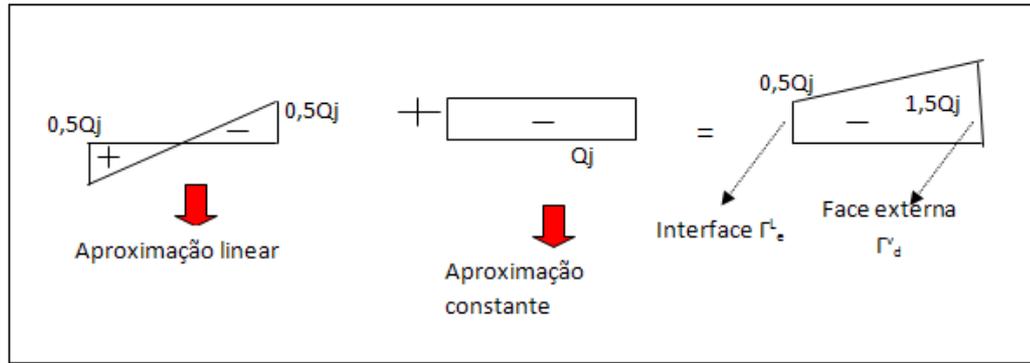


FIGURA 3.18 – Aproximação de Q_n em Vigas Externas com Extremidades Vinculadas

$$Q_n^{\Gamma_e^L} = -\frac{1}{2}Q_n \quad (3.127.a)$$

$$Q_n^{\Gamma_d^L} = -1,5Q_n \quad (3.127.b)$$

Onde os valores de Q_n e M_n se referem ao eixo.

Definidas todas as aproximações escrevem-se, respectivamente os momentos e esforços cortante sobre as interfaces em função de seus valores nos eixos.

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Gamma_e^L} \left\{ (M_n - Q_n b_v) [\phi_{kn}^{*V} - \phi_{kn}^{*L}] + M_{ns} [\phi_{ks}^{*V} - \phi_{ks}^{*L}] \right\} d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_d^V} \left\{ (M_n + Q_n b_v) \phi_{kn}^{*V} + M_{ns} \phi_{ks}^{*V} \right\} d\Gamma \quad (3.128)
 \end{aligned}$$

$$- \int_{\Gamma_e^L} \left\{ -\frac{1}{2}Q_n [w_k^{*V} - w_k^{*L}] \right\} d\Gamma + \int_{\Gamma_d^V} \left\{ -\frac{3}{2}Q_n w_k^{*V} \right\} d\Gamma \quad (3.129)$$

A partir das equações (3.108), (3.111), (3.113), (3.116), (3.124), (3.125), (3.128) e (3.129), reescreve-se as parcelas da equação (3.83) relativas às integrais que envolvem os esforços reais (Q_n , M_n , M_{ns}), em função dos valores dos esforços nos eixos das vigas. Assim, para placa da figura (3.8), considerando a viga externa engastada e a viga interna com as extremidades livres, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \sum_{S=1}^4 \int_{\Gamma-\Gamma_e} [M_n(P)\phi_{kn}^{*j}(q,P) + M_{ns}(P)\phi_{ks}^{*j}(q,P) + Q_n(P)w_k^{*j}(q,P)] d\Gamma + \\
& - \int_{\Gamma_{vi}^-} \{Q_n[w_k^{*vi} - w_k^{*-}] + (M_n - Q_n b_v)(\phi_{kn}^{*vi} - \phi_{kn}^{*-}) + M_{ns}[\phi_{ks}^{*vi} - \phi_{ks}^{*-}]\} d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_{vi}^+} \{Q_n[w_k^{*vi} - w_k^{*+}] - (M_n + Q_n b_v)(\phi_{kn}^{*vi} - \phi_{kn}^{*+}) - M_{ns}(\phi_{ks}^{*vi} - \phi_{ks}^{*+})\} d\Gamma + \\
& - \int_{\Gamma_{ve}^-} \left\{ (M_n - Q_n b_v)(\phi_{kn}^{*ve} - \phi_{kn}^{*-}) + M_{ns}(\phi_{ks}^{*ve} - \phi_{ks}^{*-}) + \frac{1}{2} Q_n (w_k^{*ve} - w_k^{*-}) \right\} d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_e} \left\{ (M_n + Q_n b_v)\phi_{kn}^{*ve} + M_{ns}\phi_{ks}^{*ve} - \frac{3}{2} Q_n w_k^{*ve} \right\} d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Considerando a equação (3.99) e (3.130), pode-se escrever a equação (3.83) para a placa definida na figura (3.8) com as variáveis definidas ao longo dos eixos das vigas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
U_k(q) &= \sum_1^4 \int_{\Omega_g} g \left[w_k^{*j}(q,p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^{*j},i(q,p) \right] d\Omega + \\
& + \sum_{S=1}^4 \int_{\Gamma-\Gamma_e} [\phi_n(P)M_{kn}^{*j}(q,P) + \phi_s(P)M_{kns}^{*j}(q,P) + w(P)Q_{kn}^{*j}(q,P)] d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_{vi}^+} \left\{ \phi_n(eixo) + (\phi_n, n_{vi})_{(eixo)} a_{vi} [M_{kn}^{*+}(q,P) - M_{kn}^{*vi}(q,P)] + \right. \\
& + \left. \phi_s(eixo) + (\phi_s, n_{vi})_{(eixo)} a_{vi} [M_{kns}^{*+}(q,p) - M_{kns}^{*vi}(q,P)] + \right. \\
& + \left. [w(eixo) + (w, n_{vi})_{(eixo)} a_{vi} [Q_{kn}^{*+}(q,P) - Q_{kn}^{*vi}(q,P)]] \right\} d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_{vi}^-} \left\{ \phi_n(eixo) - (\phi_n, n_{vi})_{(eixo)} a_{vi} [-M_{kn}^{*vi}(q,P) + M_{kn}^{*-}(q,P)] + \right. \\
& + \left. \phi_s(eixo) - (\phi_s, n_{vi})_{(eixo)} a_{vi} [-M_{kns}^{*vi}(q,p) + M_{kns}^{*-}(q,P)] + \right. \\
& + \left. [w(eixo) - (w, n_{vi})_{(eixo)} a_{vi} [Q_{kn}^{*vi}(q,P) - Q_{kn}^{*-}(q,P)]] \right\} d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_e} \left\{ \phi_n(eixo) + (\phi_n, n_{ve})_{(eixo)} a_{ve} [M_{kn}^{*ve}(q,P)] + \phi_s(eixo) + (\phi_s, n_{ve})_{(eixo)} a_{ve} [M_{kns}^{*ve}(q,P)] + \right. \\
& + \left. [w(eixo) + (w, n_{ve})_{(eixo)} a_{ve} [Q_{kn}^{*ve}(q,P)]] \right\} d\Gamma +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_{ve}^-} \left[\phi_n(eixo) - (\phi_n, n_{ve})_{(eixo)} a_{ve} \right] \left[-M_{kn}^{*-}(q, P) + M_{kn}^{*ve}(q, P) \right] + \\
& + \left[\phi_s(eixo) - (\phi_s, n_{ve})_{(eixo)} a_{ve} \right] \left[-M_{kns}^{*-}(q, P) + M_{kns}^{*ve}(q, P) \right] + \\
& + \left[w(eixo) - (w, n_{ve})_{(eixo)} a_{ve} \right] \left[-Q_{kn}^{*-}(q, P) + Q_{kn}^{*ve}(q, P) \right] d\Gamma + \\
& \sum_{S=1}^4 \int_{\Gamma-\Gamma_e} \left[M_n(P) \phi_{kn}^{*j}(q, P) + M_{ns}(P) \phi_{ks}^{*j}(q, P) + Q_n(P) w_k^{*j}(q, P) \right] d\Gamma + \\
& - \int_{\Gamma_{vi}^-} \left\{ Q_n \left[w_k^{*vi} - w_k^{*-} \right] + (M_n - Q_n b_v) \left[\phi_{kn}^{*vi} - \phi_{kn}^{*-} \right] + M_{ns} \left[\phi_{ks}^{*vi} - \phi_{ks}^{*-} \right] \right\} d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_{vi}^+} \left\{ Q_n \left[w_k^{*vi} - w_k^{*+} \right] - (M_n + Q_n b_v) \left(\phi_{kn}^{*vi} - \phi_{kn}^{*+} \right) - M_{ns} \left(\phi_{ks}^{*vi} - \phi_{ks}^{*+} \right) \right\} d\Gamma + \\
& - \int_{\Gamma_{ve}^-} \left\{ (M_n - Q_n b_v) \left(\phi_{kn}^{*ve} - \phi_{kn}^{*-} \right) + M_{ns} \left(\phi_{ks}^{*ve} - \phi_{ks}^{*-} \right) + \frac{1}{2} Q_n \left(w_k^{*ve} - w_k^{*-} \right) \right\} d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_e} \left\{ (M_n + Q_n b_v) \phi_{kn}^{*ve} + M_{ns} \phi_{ks}^{*ve} - \frac{3}{2} Q_n w_k^{*ve} \right\} d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Onde os de M_n , M_{ns} , Q_n , w , ϕ_s e ϕ_n são referentes aos valores nos eixos das vigas e no contorno externo sem vigas.

Considerando-se o caso geral em que se tenham N_s sub-regiões, N_{ve} vigas externas e N_{vi} vigas internas, pode-se escrever a equação (3.131) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
U_k(q) &= \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Omega_s} g \left[w_k^{*j}(q, P) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^{*j}, i(q, P) \right] d\Omega + \\
& + \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_s/viga} \left[\phi_n(P) M_{kn}^{*j}(q, P) + \phi_s(P) M_{kns}^{*j}(q, P) + w(P) Q_{kn}^{*j}(q, P) + \right. \\
& + \left. M_n(P) \phi_{kn}^{*j}(q, P) + M_{ns}(P) \phi_{ks}^{*j}(q, P) + Q_n(P) w_k^{*j}(q, P) \right] d\Gamma + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{vi}-livres} \left\langle \int_{\Gamma_j^-} \left[\phi_{nj} - (\phi_n, n_j)_j a_j \right] \left[-M_{kn}^{*j}(q, P) + M_{kn}^{*-}(q, P) \right] + \right. \\
& + \left. \left[\phi_{sj} - (\phi_s, n_j)_j a_j \right] \left[-M_{kns}^{*j}(q, P) + M_{kns}^{*-}(q, P) \right] + \right. \\
& + \left. \left[w_j - (w, n_j)_j a_j \right] \left[Q_{kn}^{*j}(q, P) - Q_{kn}^{*-}(q, P) \right] \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -Q_n [w_k^{*vi} - w_k^{*-}] - (M_n - Q_n b_v) (\phi_{kn}^{*vi} - \phi_{kn}^{*-}) + M_{ns} (\phi_{ks}^{*vi} - \phi_{ks}^{*-}) \} d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma_{vi}^+} \left\{ \phi_{nj} + (\phi_{n,n})_j a_j [M_{kn}^{*+}(q, P) - M_{kn}^{*j}(q, P)] + \right. \\
& + \left. \left[\phi_{sj} + (\phi_{s,n})_j a_j [M_{kns}^{*+}(q, p) - M_{kns}^{*j}(q, P)] + \right. \right. \\
& + \left. \left. [w_j + (w_{n,vi})_j a_j [Q_{kn}^{*+}(q, P) - Q_{kn}^{*j}(q, P)] + \right. \right. \\
& + \left. \left. Q_n [w_k^{*vi} - w_k^{*+}] - (M_n + Q_n b_v) (\phi_{kn}^{*vi} - \phi_{kn}^{*+}) + M_{ns} (\phi_{ks}^{*vi} - \phi_{ks}^{*+}) \right] \right\} d\Gamma + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{vi-apaídas}} \left\langle \int_{\Gamma_j^-} \left\{ \left[\phi_{nj} - (\phi_{n,n_j})_j a_j \right] [-M_{kn}^{*j}(q, P) + M_{kn}^{*-}(q, P)] + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left[\phi_{sj} - (\phi_{s,n_j})_j a_j \right] [-M_{kns}^{*j}(q, p) + M_{kns}^{*-}(q, P)] + \right. \right. \\
& + \left. \left. [w_j - (w_{n,j})_j a_j [Q_{kn}^{*j}(q, P) - Q_{kn}^{*-}(q, P)] + \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{1}{2} Q_n [w_k^{*j} - w_k^{*-}] + \frac{3}{2} M_n [\phi_{kn}^{*j} - \phi_{kn}^{*-}] + \frac{3}{2} M_{ns} [\phi_{ks}^{*j} - \phi_{ks}^{*-}] \right\} d\Gamma + \right. \\
& + \int_{\Gamma_{vi}^+} \left\{ \phi_{nj} + (\phi_{n,n})_j a_j [M_{kn}^{*+}(q, P) - M_{kn}^{*j}(q, P)] + \right. \\
& + \left. \left[\phi_{sj} + (\phi_{s,n})_j a_j [M_{kns}^{*+}(q, p) - M_{kns}^{*j}(q, P)] + \right. \right. \\
& + \left. \left. [w_j + (w_{n,vi})_j a_j [Q_{kn}^{*+}(q, P) - Q_{kn}^{*j}(q, P)] + \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{3}{2} Q_n [w_k^{*vi} - w_k^{*+}] - \frac{1}{2} M_n (\phi_{kn}^{*vi} - \phi_{kn}^{*+}) - \frac{1}{2} M_{ns} (\phi_{ks}^{*vi} - \phi_{ks}^{*+}) \right\} d\Gamma \right\rangle + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{ve-vinc}} \left\langle \int_{\Gamma_e} \left\{ \left[\phi_{nj} + (\phi_{n,n_j})_j a_j [M_{kn}^{*j}(q, P)] + \left[\phi_{sj} + (\phi_{s,n_j})_j a_j [M_{kns}^{*j}(q, P)] + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. [w_j + (w_{n,j})_j a_j [Q_{kn}^{*j}(q, P)] + (M_n + Q_n b_v) \phi_{kn}^{*j} + M_{ns} \phi_{ks}^{*j} - \frac{3}{2} Q_n w_k^{*j} \right] \right\} d\Gamma + \right. \\
& \int_{\Gamma_{ve}^-} \left\{ \left[\phi_{nj} - (\phi_{n,n_j})_j a_j [-M_{kn}^{*-}(q, P) + M_{kn}^{*j}(q, P)] + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left[\phi_{sj} - (\phi_{s,n_j})_j a_j [-M_{kns}^{*-}(q, p) + M_{kns}^{*j}(q, P)] + \right. \right. \\
& + \left. \left. [w_j - (w_{n,j})_j a_j [-Q_{kn}^{*-}(q, P) + Q_{kn}^{*j}(q, P)] + \right. \right. \\
& \left. \left. (M_n - Q_n b_v) (\phi_{kn}^{*j} - \phi_{kn}^{*-}) + M_{ns} (\phi_{ks}^{*j} - \phi_{ks}^{*-}) + \frac{1}{2} Q_n (w_k^{*j} - w_k^{*-}) \right\} d\Gamma \right\rangle +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{N_{ve-livre}} \left\langle \int_{\Gamma_e} \left\{ \left[\phi_{nj} + (\phi_{n, nj})_j a_j \right] M_{kn}^{*j}(q, P) + \left[\phi_{sj} + (\phi_{s, nj})_j a_j \right] M_{kns}^{*j}(q, P) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left[w_j + (w_{, nj})_j a_j \right] Q_{kn}^{*j}(q, P) + \left(\frac{1}{2} \Delta M_n + \frac{1}{2} M_n + Q_n b_v \right) \phi_{kn}^{*j} + M_{ns} \phi_{ks}^{*j} + \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{1}{2} \Delta Q_n + \frac{1}{2} Q_n \right) [w_k^{*j}] \right\} d\Gamma - \int_{\Gamma_{ve}^-} \left\{ \left(-\frac{1}{2} \Delta Q_n + 1,5 Q_n \right) [\phi_{kn}^{*j} - \phi_{kn}^{*-}] + \right. \\
& \quad \left. - \left(-\frac{1}{2} \Delta M_n + 1,5 M_n - Q_n b_v \right) [\phi_{kn}^{*j} - \phi_{kn}^{*-}] + M_{ns} [\phi_{ks}^{*j} - \phi_{ks}^{*-}] + \right. \\
& \quad \left. + [\phi_{nj} - (\phi_{n, nj})_j a_j] [-M_{kn}^{*-}(q, P) + M_{kn}^{*j}(q, P)] + \right. \\
& \quad \left. + [\phi_{sj} - (\phi_{s, nj})_j a_j] [-M_{kns}^{*-}(q, P) + M_{kns}^{*j}(q, P)] + \right. \\
& \quad \left. + [w_j - (w_{, nj})_j a_j] [-Q_{kn}^{*-}(q, P) + Q_{kn}^{*j}(q, P)] \right\} d\Gamma \rangle \quad (3.132)
\end{aligned}$$

Onde $N_{ve-livres}$ é o número de vigas externas livres, $N_{ve-vimc}$ é o número de vigas externas engastadas mais o número de vigas externas apoiadas, $N_{vi-apoiadas}$ é o número de vigas internas apoiadas mais o número de vigas internas engastadas e $N_{vi-livre}$ é o número de vigas internas livres. As expressões fundamentais são dadas pelas equações (3.88).

Deve-se notar que ao adotar as aproximações para os deslocamentos, surgem na formulação três novas incógnitas que são as rotações $w_{,n}$, $\phi_{s,n}$ e $\phi_{n,n}$ definidas nos eixos das vigas. Assim, surge a necessidade de escrever mais três equações para os pontos de eixos de vigas. Considerando-se esse modelo alternativo, têm-se nove variáveis nos eixos das vigas internas, sendo elas: ϕ_n , ϕ_s , $\phi_{s,n}$, $\phi_{n,n}$, w , $w_{,n}$, M_n , M_{ns} e Q_n , sendo todas elas incógnitas do problema. Portanto, com o modelo alternativo aumenta-se o número de equações a ser escrita para cada nó. Porém, mesmo assim esse modelo é mais vantajoso devido à grande redução do número de nós.

3.11 GERAÇÃO DOS ELEMENTOS DE EXTREMIDADE

O *software* utilizado no presente trabalho, programado pela orientadora desta dissertação, é capaz de gerar automaticamente elementos nos extremos das vigas. Considere a figura (3.19).

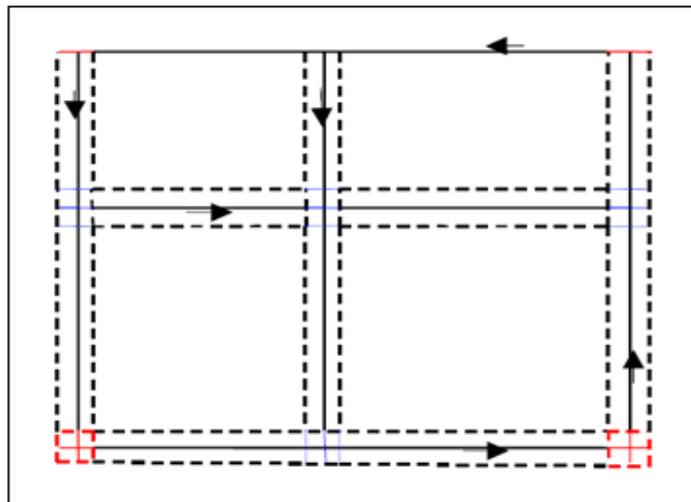


FIGURA 3.19 – Modelo de Pavimento com as Vigas Representadas pela Linha Média e Geração dos Elementos de Extremidade

Na figura (3.19) o contorno tracejado se refere às interfaces onde é feita a integração e o contorno contínuo se refere à discretização da placa, onde se calculam as variáveis do problema e são definidos os pontos de colocação. Os elementos em vermelho nos extremos das vigas externas são gerados automaticamente e os elementos em azul, são gerados somente se as rigidezes dos subdomínios, aos qual a interface pontilhada é comum, forem diferentes.

Os contornos gerados pelo *software* podem ser divididos em um ou dois elementos. A consideração de dois elementos, em alguns casos, melhora significativamente os resultados. Os elementos gerados possuem três nós e as equações são escritas para todos os pontos.

A declaração dos elementos, nas interseções de vigas é feita em apenas uma direção. Quando se tem interseção de uma viga externa com uma interna, o elemento é declarado na direção da viga externa (ver figura 3.19). Quando a interseção é entre duas vigas internas, o elemento é declarado na direção da viga que segue a direção de y (ver figuras 3.8 e 3.19).

4 APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1 INTRODUÇÃO

A maioria dos problemas de engenharia é caracterizada matematicamente por equações diferenciais. A solução analítica, que fornece os resultados exatos destas equações, é restrita a poucos casos. Desta forma, para a obtenção da solução destes problemas faz-se necessário o uso dos métodos numéricos.

Os métodos numéricos podem ser classificados, segundo Becker (1992) em: Método dos Elementos Finitos (MEF), Método das Diferenças Finitas (MDF) e Método dos Elementos Contorno (MEC), como representado na figura (4.1). Esses são os métodos numéricos mais conhecidos, no entanto, atualmente já existem outros, como o Método sem Malha (*meshless*) e o Método dos Elementos Finitos Generalizados.

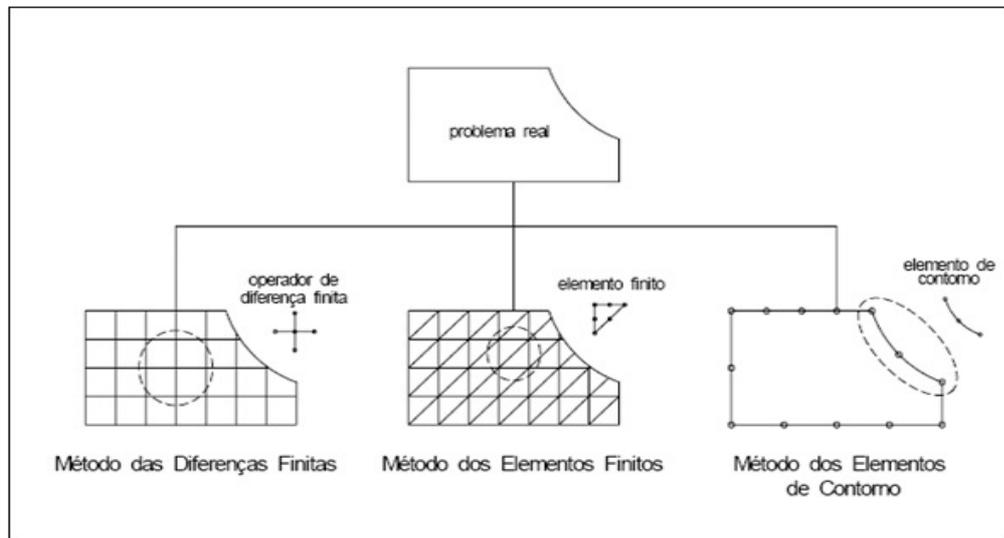


FIGURA 4.1 – Métodos Numéricos Aplicados aos Problemas de Engenharia. (Kane, 1994)

Será usado neste trabalho o Método dos Elementos de Contorno, onde as equações diferenciais governantes são transformadas em equações integrais equivalentes. A transformação em equações integrais de contorno envolve certas soluções conhecidas, chamadas soluções fundamentais, para a equação diferencial original. As equações integrais de contorno (exatas) são substituídas por equações integrais discretizadas (aproximadas), onde as incógnitas do contorno são definidas em um conjunto finito de nós. Os nós delimitam os elementos de contorno, onde a solução dentro de cada elemento é dada em função dos valores nodais e por uma função de interpolação simples. O número de nós em cada elemento depende da aproximação adotada para as variáveis.

4.2 DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO E EIXOS DE VIGAS

As generalidades das condições de vinculações, carregamentos e geometria do sólido para um problema físico tornam a obtenção da solução analítica do problema muito trabalhosa ou até impossível. Por este motivo recorre-se às técnicas numéricas, tendo sido adotado neste trabalho o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Segundo Almeida (2003), o contorno do domínio e interfaces em questão deve ser dividido em um número finito de elementos conectados. Nos elementos devem-se definir a

variação da geometria e dos parâmetros, no caso deslocamentos e forças. Tais variações podem ser adotadas como constantes, lineares, quadráticas, cúbicas ou de ordem superior. Pode-se permitir que a variação de geometria seja diferente da variação das variáveis.

A discretização do contorno e interfaces deve ser feita de maneira muito criteriosa. O número e a forma dos elementos devem ser escolhidos de tal forma que possam representar o contorno da placa da maneira mais fiel possível, figura (4.2).

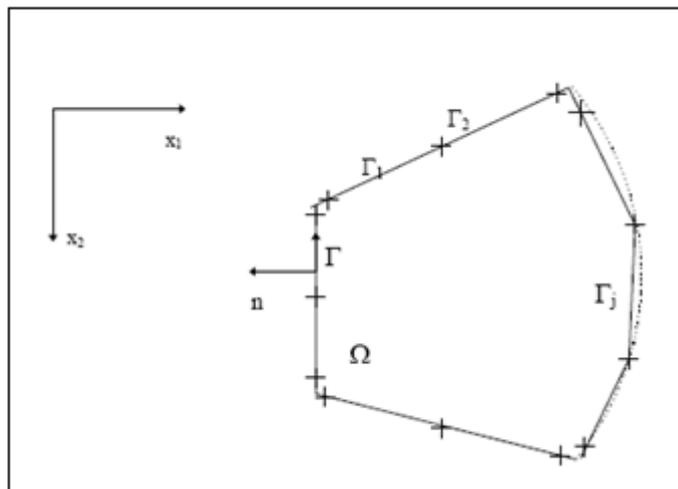


FIGURA 4.2 – Discretização do Contorno da Placa

No presente trabalho a geometria dos elementos será aproximada por uma função linear, ou seja, elementos retos. Logo, são necessários apenas dois nós para representar sua geometria. As variáveis do problema serão aproximadas por funções quadráticas, como se verá no item (4.3). Assim, considere o elemento reto da figura (4.3):

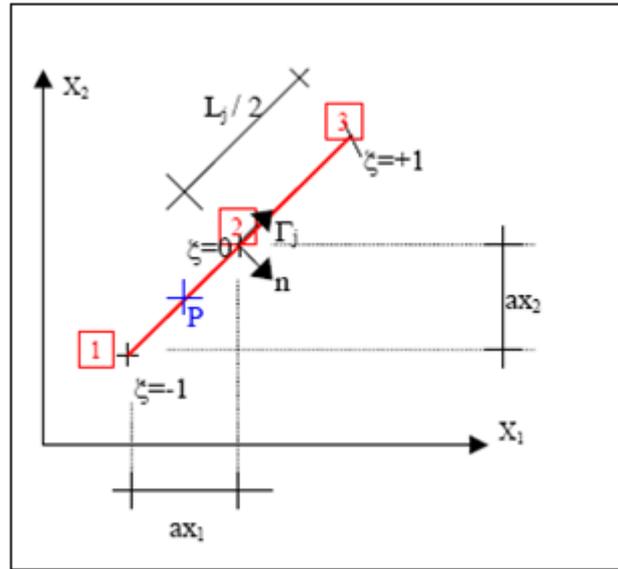


FIGURA 4.3 – Geometria do Elemento

Onde ξ é a coordenada local adimensional; 1 é o nó inicial; 2 é o nó do meio; 3 é o nó final;

L_j é o comprimento do elemento; $-1 \leq \xi \leq 1$; $-\frac{L_j}{2} \leq \Gamma \leq \frac{L_j}{2}$.

É conveniente expressar a variável Γ e as coordenadas de cada ponto P em função das coordenadas locais homogêneas ξ . Assim, segundo Brebbia et al (1984), da figura (4.2) a geometria de um elemento pode ser definida por coordenadas dos seus nós da seguinte forma:

$$\Gamma_j = \xi \frac{L_j}{2} \quad (4.1)$$

$$X_1^P = X_1^2 + \xi ax_1 \quad (4.2.a)$$

$$X_2^P = X_2^2 + \xi ax_2 \quad (4.2.b)$$

Onde: X_i^N é a coordenada na direção i do ponto N ; $X_1^2 = \frac{(X_1^1 + X_1^3)}{2}$; $X_2^2 = \frac{(X_2^1 + X_2^3)}{2}$;

$$ax_2 = \frac{(X_2^3 - X_2^1)}{2}; \quad ax_1 = \frac{(X_1^3 - X_1^1)}{2}.$$

As coordenadas de P podem ser escritas na forma matricial através da seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} X_1^P \\ X_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{g1}(P) & \phi_{g2}(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{g1}(P) & \phi_{g2}(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_1^3 \\ X_2^1 \\ X_2^3 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Onde $X_{\sim}^{(N)r} = \{X_1^1 \quad X_1^3 \quad X_2^1 \quad X_2^3\}$ é o vetor dos valores nodais das coordenadas e ϕ_{gi} são as funções interpoladoras lineares dadas por:

$$\phi_{g1}(P) = \frac{(1-\xi)}{2} \quad (4.4.a)$$

$$\phi_{g2}(P) = \frac{(1+\xi)}{2} \quad (4.4.b)$$

A equação de mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas homogêneas é obtida derivando-se a equação (4.1), ou seja:

$$d\Gamma = \frac{1}{2} d\xi \quad (4.5)$$

Desta forma a integral ao longo do contorno ou interface Γ é calculada de maneira aproximada, discretizando o contorno em $N_{e(c)}$ elementos e fazendo-se a mudança de coordenada dada por (4.5). Assim a função a ser integrada pode ser escrita em função de coordenadas homogêneas como se segue:

$$\int_{\Gamma} F(\Gamma) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_{e(c)}} \int_{-\frac{L_j}{2}}^{\frac{L_j}{2}} F(\Gamma_j) d\Gamma_j = \sum_{j=1}^{N_{e(c)}} \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \quad (4.6)$$

4.3 APROXIMAÇÃO DAS VARIÁVEIS NOS ELEMENTOS

Para escrever os esforços e deslocamentos de um ponto P qualquer de um elemento j , usam-se funções de aproximação e os valores nodais das variáveis, que são os valores dessas variáveis nos nós do elemento. Desta forma, os vetores $\{u(P)\}$ e $\{p(P)\}$ são dados por:

$$\underline{\tilde{u}}(P) = \underline{\tilde{\phi}}^T(P) \underline{\tilde{U}}^N \quad (4.7)$$

$$\underline{\tilde{p}}(P) = \underline{\tilde{\phi}}^T(P) \underline{\tilde{P}}^N \quad (4.8)$$

Onde:

- ✚ $\underline{\tilde{\phi}}^T(P)$ é o vetor que contém as funções de interpolação;
- ✚ $\underline{\tilde{u}}(P)$ é o vetor de deslocamentos do ponto P ;
- ✚ $\underline{\tilde{p}}(P)$ é o vetor de esforços do ponto P ;
- ✚ $\underline{\tilde{U}}^N$ é o vetor que contém os valores de deslocamentos nos nós; e
- ✚ $\underline{\tilde{P}}^N$ é o vetor que contém os valores de esforços nos nós.

As variáveis serão aproximadas por funções polinomiais quadráticas, sendo necessário, segundo Fernandes (2005), três nós por elemento (ver figura 4.4).

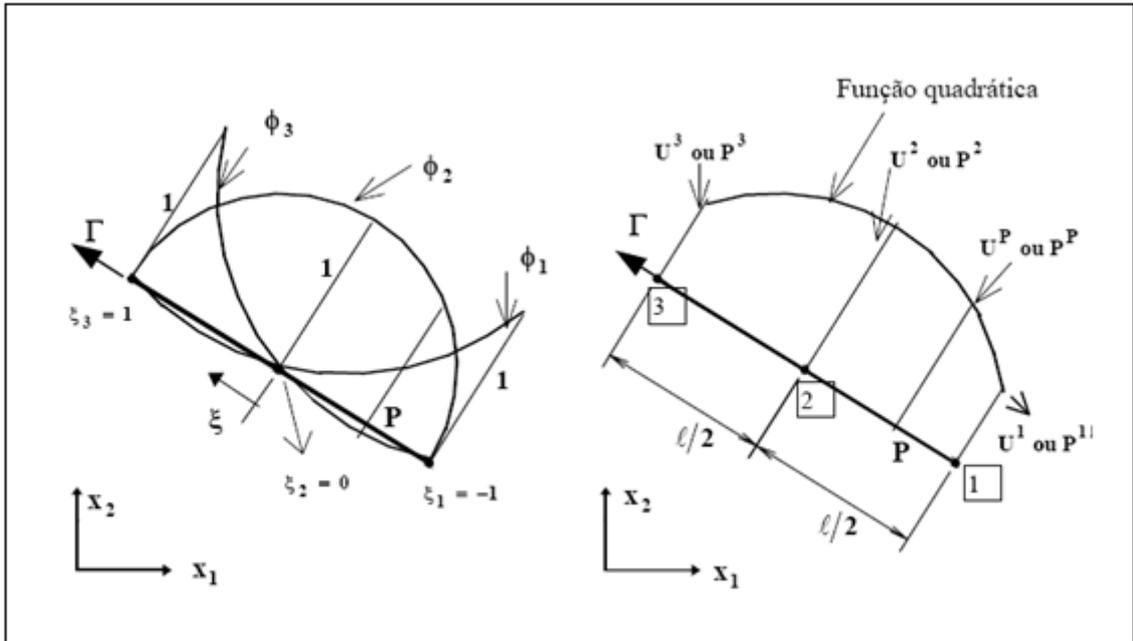


FIGURA 4.4 – Funções de Forma em Aproximação Quadrática das Variáveis

As equações (4.7) e (4.8) na forma implícita ficam:

$$\tilde{u}(P) = \begin{Bmatrix} U_1^P \\ U_2^P \\ U_3^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & 0 & \phi_2(P) & 0 & 0 & \phi_3(P) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & 0 & \phi_2(P) & 0 & 0 & \phi_3(P) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & 0 & 0 & \phi_2(P) & 0 & 0 & \phi_3(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} U_1^3 \\ U_2^3 \\ U_3^3 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \tag{4.9}$$

$$\tilde{p}(P) = \begin{Bmatrix} P_1^P \\ P_2^P \\ P_3^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & 0 & \phi_2(P) & 0 & 0 & \phi_3(P) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & 0 & \phi_2(P) & 0 & 0 & \phi_3(P) & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & 0 & 0 & \phi_2(P) & 0 & 0 & \phi_3(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left. \begin{matrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 \end{matrix} \right\} \\ \left. \begin{matrix} P_1^2 \\ P_2^2 \\ P_3^2 \end{matrix} \right\} \\ \left. \begin{matrix} P_1^3 \\ P_2^3 \\ P_3^3 \end{matrix} \right\} \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

Onde:

- ✚ U_i^N e P_i^N são os deslocamentos e esforços na direção i do nó N ;
- ✚ $U_1 = \phi_n$ é a rotação na direção normal;
- ✚ $U_2 = \phi_s$ é a rotação na direção tangencial;
- ✚ $U_3 = w$ é a flecha;
- ✚ $P_1 = M_n$ é o momento na direção normal ao contorno;
- ✚ $P_2 = M_{ns}$ é o momento volvente;
- ✚ $P_3 = Q_n$ é a cortante; e
- ✚ ϕ_i são as funções interpoladoras quadráticas, dadas por:

$$\phi_1(P) = \frac{\xi(\xi_3 - \xi)}{\xi_1(\xi_3 - \xi_1)} \quad (4.11.a)$$

$$\phi_2(P) = 1 - \frac{\xi_3 + \xi_1}{\xi_1 \xi_3} \xi + \frac{1}{\xi_1 \xi_3} \xi^2 \quad (4.11.b)$$

$$\phi_3(P) = \frac{\xi(\xi_1 - \xi)}{\xi_3(\xi_1 - \xi_3)} \quad (4.11.c)$$

No presente trabalho, os nós (1) e (3) serão adotados nos extremos do elemento (ver figura 4.3). Desta forma, tem-se que $\xi_1 = -1$ e $\xi_3 = 1$, resultando as equações (4.11) em:

$$\phi_1(P) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \quad (4.12.a)$$

$$\phi_2(P) = 1 - \xi^2 \quad (4.12.b)$$

$$\phi_3(P) = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \quad (4.12.c)$$

4.4 REPRESENTAÇÃO DA DESCONTINUIDADE DAS VARIÁVEIS AO LONGO DO CONTORNO

Com exceção da variável w , todas as outras podem apresentar descontinuidade em seus valores entre dois elementos consecutivos. Esta descontinuidade pode ocorrer em duas situações distintas:

1. Quando se tem diferentes valores prescritos de momento e/ou força cortante para dois elementos consecutivos (j e $j+1$), com a mesma direção normal, nos nós NO_j^3 e NO_{j+1}^1 .
2. Nos cantos onde a direção normal ao contorno não é única. Neste caso tem-se descontinuidade de todas variáveis, com exceção de w .

As figuras (4.5) e (4.6) apresentam exemplos de elementos contínuos e descontínuos respectivamente.

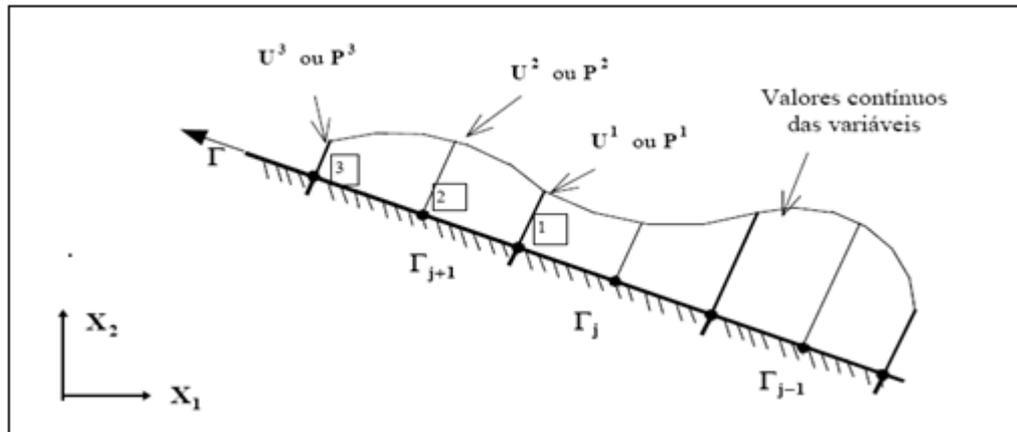


FIGURA 4.5 – Elementos Contínuos

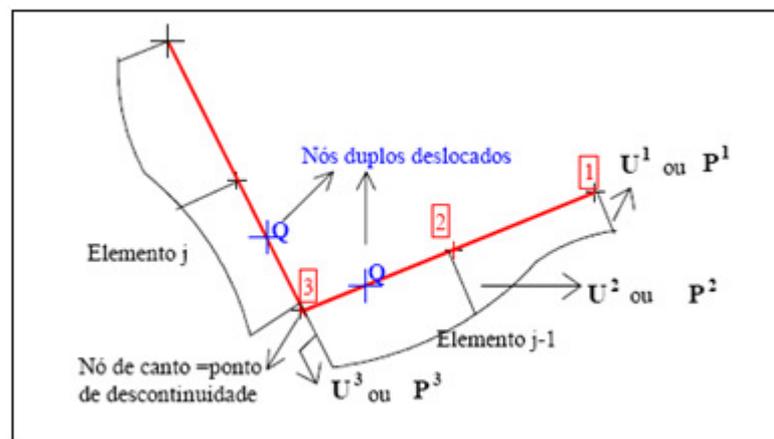


FIGURA 4.6 – Elementos Descontínuos

A descontinuidade das variáveis, que ocorre em dois elementos consecutivos, é representada definindo-se nós duplos (ver figura 4.6). Tais nós são nós definidos com as mesmas coordenadas, escritos por equações independentes para o ponto onde há descontinuidade. Uma das maneiras de se obter isso é mudando o ponto de colocação de lugar, isto é, as coordenadas dos nós duplos são recalculadas de forma que ele se torne interno ao elemento e não mais coincidente com sua extremidade (figura 4.6).

Através da equação (4.3) calculam-se as coordenadas do nó duplo, considerando $0.4 \leq \xi \leq 0.6$. Os valores limites para ξ são adotados, de tal forma, para que se tenha um afastamento adequado entre os nós, a fim de que não se tenha problemas numéricos. Note que a existência de dois pontos de colocação idênticos acarreta singularidades na resolução do sistema de equações.

4.5 TRANSFORMAÇÕES DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS EM EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

A equação (3.132) dos deslocamentos será transformada em equação algébrica através da discretização do contorno externo e eixos de vigas em elementos, nos quais as variáveis serão aproximadas. A equação (3.132) pode ser escrita, ainda sem introduzir nenhuma aproximação, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 U_k(q) = & \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Omega_g} g \left[w_k^{*j}(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^{*j}, (q, p) \right] d\Omega + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma_{s/viga}} \left[u(P) \tilde{p}^{*j}(q, P) + \tilde{p}(P) \tilde{u}^{*j}(q, P) \right] d\Gamma_{s/viga} \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left\{ \int_{\Gamma_{vi}^-} \left[\tilde{u}^-(P) \tilde{p}^{*-}(q, P) + \tilde{p}^-(P) \tilde{u}^{*-}(q, P) \right] d\Gamma_{vi}^- + \int_{\Gamma_{vi}^+} \left[\tilde{u}^+(P) \tilde{p}^{*+}(q, P) + \tilde{p}^+(P) \tilde{u}^{*+}(q, P) \right] d\Gamma_{vi}^+ \right\} + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{ve-vinc}} \left\{ \int_{\Gamma_{ve}^e} \left[\tilde{u}^e(P) \tilde{p}^{*j}(q, P) + \tilde{p}^e(P) \tilde{u}^{*j}(q, P) \right] d\Gamma_{ve}^e + \int_{\Gamma_{ve}^-} \left[\tilde{u}^-(P) \tilde{p}^{*-}(q, P) + \tilde{p}^-(P) \tilde{u}^{*-}(q, P) \right] d\Gamma_{ve}^- \right\} + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{ve-livre}} \left\{ \int_{\Gamma_{ve}^e} \left[\tilde{u}^e(P) \tilde{p}^{*j}(q, P) + \tilde{p}^{e-livre}(P) \tilde{u}^{*j}(q, P) \right] d\Gamma_{ve}^e + \int_{\Gamma_{ve}^-} \left[\tilde{p}_{ve}^{-livre}(P) \tilde{u}^{*-}(q, P) + \tilde{u}^-(P) \tilde{p}^{*-}(q, P) \right] d\Gamma_{ve}^- \right\}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Onde:

$$\tilde{u}(P) = \{u_1(P) \quad u_2(P) \quad u_3(P)\} = \{\phi_n(P) \quad \phi_s(P) \quad w(P)\} \tag{4.14}$$

$$\tilde{p}(P) = \{p_1(P) \quad p_2(P) \quad p_3(P)\} = \{M_n(P) \quad M_{ns}(P) \quad Q_n(P)\} \tag{4.15}$$

$$\tilde{u}_{\sim vi}^-(P) = \tilde{u}_{\sim ve}^-(P) = \left\{ \left(\phi_n(P) - (\phi_{n,n}(P))a_j \right) \quad \left(\phi_s(P) - (\phi_{s,n}(P))a_j \right) \quad \left(w(P) - (w_n(P))a_j \right) \right\} \tag{4.16}$$

$$\tilde{u}_{\sim vi}^+(P) = \tilde{u}_{\sim ve}^e(P) = \left\{ \left(\phi_n(P) + (\phi_{n,n}(P))a_j \right) \quad \left(\phi_s(P) + (\phi_{s,n}(P))a_j \right) \quad \left(w(P) + (w_n(P))a_j \right) \right\} \tag{4.17}$$

$$p_{\sim vi}^{-}(P) = \{(M_n(P) - Q_n(P)b_v) \quad (M_{ns}(P)) \quad (Q_n(P))\} \quad (4.18)$$

$$p_{\sim vi}^{+}(P) = \left\{ -\frac{1}{2}M_n(P) \quad \left(-\frac{1}{2}M_{ns}(P) \right) \quad -\left(\frac{3}{2}Q_n(P) \right) \right\} \quad (4.19)$$

$$p_{\sim ve}^e(P) = p_{\sim ve}^{-}(P) = \left\{ (M_n(P) - Q_n(P)b_v) \quad (M_{ns}(P)) \quad \left(\frac{1}{2}Q_n(P) \right) \right\} \quad (4.20)$$

$$p_{\sim}^{*j}(q, P) = \left\{ \begin{array}{l} M_{kn}^{*j}(q, P) \\ M_{kns}^{*j}(q, P) \\ Q_{kn}^{*j}(q, P) \end{array} \right\} \quad (4.21)$$

$$u_{\sim}^{*j}(q, P) = \left\{ \begin{array}{l} \phi_{kn}^{*j}(q, P) \\ \phi_{ks}^{*j}(q, P) \\ w_k^{*j}(q, P) \end{array} \right\} \quad (4.22)$$

$$u_{\sim vi}^{*-}(q, P) = \left\{ \begin{array}{l} \phi_{kn}^{*vi}(q, P) - \phi_{kn}^{*-}(q, P) \\ \phi_{ks}^{*vi}(q, P) - \phi_{ks}^{*-}(q, P) \\ w_k^{*vi}(q, P) - w_k^{*-}(q, P) \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

$$u_{\sim ve}^{*-}(q, P) = \left\{ \begin{array}{l} \phi_{kn}^{*ve}(q, P) - \phi_{kn}^{*-}(q, P) \\ \phi_{ks}^{*ve}(q, P) - \phi_{ks}^{*-}(q, P) \\ w_k^{*ve}(q, P) - w_k^{*-}(q, P) \end{array} \right\} \quad (4.24)$$

$$u_{\sim vi}^{*+}(q, P) = \left\{ \begin{array}{l} \phi_{kn}^{*vi}(q, P) - \phi_{kn}^{*+}(q, P) \\ \phi_{ks}^{*vi}(q, P) - \phi_{ks}^{*+}(q, P) \\ w_k^{*vi}(q, P) - w_k^{*+}(q, P) \end{array} \right\} \quad (4.25)$$

$$p_{\sim vi}^{*-}(q, P) = \left\{ \begin{array}{l} M_{kn}^{*-}(q, P) - M_{kn}^{*vi}(q, P) \\ M_{kns}^{*-}(q, P) - M_{kns}^{*vi}(q, P) \\ Q_{kn}^{*-}(q, P) - Q_{kn}^{*vi}(q, P) \end{array} \right\} \quad (4.26)$$

$$p_{\sim ve}^{*-}(q, P) = \left\{ \begin{array}{l} M_{kn}^{*ve}(q, P) - M_{kn}^{*-}(q, P) \\ M_{kns}^{*ve}(q, P) - M_{kns}^{*-}(q, P) \\ Q_{kn}^{*ve}(q, P) - Q_{kn}^{*-}(q, P) \end{array} \right\} \quad (4.27)$$

$$p_{\sim vi}^{*+}(q, P) = \left\{ \begin{array}{l} -M_{kn}^{*vi}(q, P) + M_{kn}^{*+}(q, P) \\ -M_{kns}^{*vi}(q, P) + M_{kns}^{*+}(q, P) \\ Q_{kn}^{*vi}(q, P) - Q_{kn}^{*+}(q, P) \end{array} \right\} \quad (4.28)$$

$$p_{-ve}^{e-livreT}(P) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{2} \left(D(\phi_{n,n}(P) + v\phi_{s,s}(P)) + \frac{v\mathcal{G}}{(1-v)\lambda^2} \right) + \frac{1}{2} M_n(P) + Q_n(P)b_v \right) \\ M_{ns}(P) \\ \left(\frac{1}{2} \left(\frac{D(1-v)}{2} \lambda^2 (\phi_n(P) + b_v \phi_{n,n}(P) + w_{n,n}(P)) \right) + \frac{1}{2} Q_n(P) \right) \end{array} \right\} \quad (4.29)$$

$$p_{ve}^{-livrT}(P) = \left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{\lambda^2}{4} (D(1-v)(\phi_n - b_v \phi_{n,n} + w_{n,n})) - \frac{D(\phi_{n,n} + v\phi_{s,s})}{2} - \frac{v\mathcal{G}}{2(1-v)\lambda^2} + Q_n(1,5-b_v) + 1,5M_n \right) \\ M_{ns} \\ 0 \end{array} \right\} \quad (4.30)$$

Sendo que as equações de w_k^* , Q_{kn}^* , ϕ_{kn}^* , ϕ_{ks}^* , M_{kn}^* e M_{kns}^* são dadas, respectivamente, por (3.12.a), (3.18.a), (3.19.a), (3.20.a), (3.21.a) e (3.22.a).

Discretizando-se o contorno externo sem vigas em $N_{e(c)}$ elementos, os eixos de vigas internas em $N_{e(vi)}$ elementos, os eixos de vigas externas em $N_{e(ve)}$ elementos e fazendo-se a substituição das variáveis por suas aproximações em cada elemento, dadas por (4.7) e (4.8), a equação (4.13) é calculada de forma aproximada, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} U_k(q) &= \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Omega_g} g \left[w_k^{*j}(q, p) - \frac{v}{(1-v)\lambda^2} \phi_{ki}^{*j}(q, p) \right] d\Omega + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_{e(c)}} \left[\int_{\Gamma_{s/viga}} p^{*j}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] U_{\sim k} + \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_{e(c)}} \left[\int_{\Gamma_{s/viga}} u^{*j}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] P_{\sim k} + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_{vi}} \sum_{k=1}^{N_{e(vi)}} \left[\int_{\Gamma_{vi}^-} p^{*-}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] U_{\sim vi}^{-k} + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \sum_{k=1}^{N_{e(vi)}} \left[\int_{\Gamma_{vi}^-} u^{*-}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] P_{\sim vi}^{-k} + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_{vi}} \sum_{k=1}^{N_{e(vi)}} \left[\int_{\Gamma_{vi}^+} p^{*+}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] U_{\sim vi}^{+k} + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \sum_{k=1}^{N_{e(vi)}} \left[\int_{\Gamma_{vi}^+} u^{*+}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] P_{\sim vi}^{+k} + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_{ve-vinc}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} p^{*j}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] U_{\sim ve}^{ek} + \sum_{j=1}^{N_{ve-vinc}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} u^{*j}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] P_{\sim ve}^{ek} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{N_{ve-ivres}} \sum_{k=1}^{N_e(v)} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} p^{*-}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] U_{\sim ve}^{-k} + \sum_{j=1}^{N_{ve-ivres}} \sum_{k=1}^{N_e(v)} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} u^{*-}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] P_{\sim ve}^{-k} + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{ve-ivres}} \sum_{k=1}^{N_e(v)} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} p^{*j}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] U_{\sim ve}^{ek} + \sum_{j=1}^{N_{ve-ivres}} \sum_{k=1}^{N_e(v)} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} u^{*j}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] P_{\sim ve}^{-livrek} + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{ve-ivres}} \sum_{k=1}^{N_e(v)} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} u^{*-}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] P_{\sim ve}^{-livrek} + \sum_{j=1}^{N_{ve-ivres}} \sum_{k=1}^{N_e(v)} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} p^{*-}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] U_{\sim ve}^{-k}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Definindo-se:

$$h_{\sim}^j(q) = \int_{\Gamma_{s/viga}} p^{*j}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \tag{4.32.a}$$

$$h_{\sim-}^{vi-}(q) = \int_{\Gamma_{vi}^-} p_{vi}^{*-}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \tag{4.32.b}$$

$$h_{\sim+}^{vi+}(q) = \int_{\Gamma_{vi}^+} p_{vi}^{*+}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \tag{4.32.c}$$

$$h_{\sim e}^j(q) = \int_{\Gamma_{ve}^e} p^{*j}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \tag{4.32.d}$$

$$h_{\sim-}^{ve-}(q) = \int_{\Gamma_{ve}^-} p_{ve}^{*-}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \tag{4.32.e}$$

$$g_{\sim}^j(q) = \int_{\Gamma_{s/viga}} u^{*j}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \tag{4.33.a}$$

$$g_{\sim-}^{vi-}(q) = \int_{\Gamma_{vi}^-} u_{vi}^{*-}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \tag{4.33.b}$$

$$g_{\sim+}^{vi+}(q) = \int_{\Gamma_{vi}^+} u_{vi}^{*+}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \tag{4.33.c}$$

$$g_{\sim e}^j(q) = \int_{\Gamma_{ve}^e} u^{*j}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \tag{4.33.d}$$

$$g_{\sim-}^{ve-}(q) = \int_{\Gamma_{ve}^-} u_{ve}^{*-}(q, P) \phi^T(P) d\Gamma_k \tag{4.33.e}$$

$$t(q) = \int_{\Omega_g} g(P) \left[w_k^{*j}(q, p) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \phi_{ki}^{*j}(q, p) \right] d\Omega(P) \tag{4.34}$$

A equação (4.31) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
U_k(q) = & \sum_{j=1}^{N_s} t^j(q) + \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_{e(c)}} h^j(q) U_{\sim k} + \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_{e(c)}} g^j(q) P_{\sim k} + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \sum_{k=1}^{N_{e(vi)}} h^{vi-}(q) U_{\sim vi}^{-k} + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \sum_{k=1}^{N_{e(vi)}} g^{vi-}(q) P_{\sim vi}^{-k} + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \sum_{k=1}^{N_{e(vi)}} h^{vi+}(q) U_{\sim vi}^{+k} + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \sum_{k=1}^{N_{e(vi)}} g^{vi+}(q) P_{\sim vi}^{+k} + \sum_{j=1}^{N_{ve-vinc}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} h^j(q) U_{ve}^{ek} + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{ve-vinc}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} g^j(q) P_{ve}^{ek} + \sum_{j=1}^{N_{ve-vinc}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} h^{ve-}(q) U_{\sim ve}^{-k} + \sum_{j=1}^{N_{ve-vinc}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} g^{ve-}(q) P_{\sim ve}^{-k} + \sum_{j=1}^{N_{ve-tivres}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} h^j(q) U_{ve}^{ek} + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{ve-tivres}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} g^j(q) P_{ve}^{livrek} + \sum_{j=1}^{N_{ve-tivres}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} g^{ve-}(q) P_{\sim ve}^{-livrek} + \sum_{j=1}^{N_{ve-tivres}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} h^{ve-}(q) U_{\sim ve}^{-k}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

A equação (4.35) pode ser reescrita:

$$\begin{aligned}
U_k(q) - & \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_{e(c)}} h^j(q) U_{\sim k} - \sum_{j=1}^{N_{vi}} \sum_{k=1}^{N_{e(vi)}} \left[h^{vi-}(q) U_{\sim vi}^{-k} + h^{vi+}(q) U_{\sim vi}^{+k} \right] + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{ve-vinc}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} \left[h^j(q) U_{ve}^{ek} + h^{ve-}(q) U_{\sim ve}^{-k} \right] - \sum_{j=1}^{N_{ve-tivres}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} \left[h^j(q) U_{ve}^{ek} + h^{ve-}(q) U_{\sim ve}^{-k} \right] = \\
= & \sum_{j=1}^{N_s} t^j(q) + \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_{e(c)}} g^j(q) P_{\sim k} + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \sum_{k=1}^{N_{e(vi)}} \left[g^{vi-}(q) P_{\sim vi}^{+k} + g^{vi+}(q) P_{\sim vi}^{-k} \right] + \\
& + \sum_{j=1}^{N_{ve-vinc}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} \left[g^j(q) P_{ve}^{ek} + g^{ve-}(q) P_{\sim ve}^{-k} \right] + \sum_{j=1}^{N_{ve-tivres}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} \left[g^j(q) P_{ve}^{livrek} + g^{ve-}(q) P_{\sim ve}^{-livrek} \right]
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Os vetores U e P contém os valores, respectivamente, dos deslocamentos e esforços nos nós do elemento. Desta forma pode-se escrever a equação (4.36) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
U_k(q) - & \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_{e(c)}} h^j(q) U_{\sim k} - \sum_{j=1}^{N_{vi}} \sum_{k=1}^{N_{e(vi)}} \left[h^{vi-}(q) + h^{vi+}(q) \right] U_{\sim k}^{vi} + \\
& - \sum_{j=1}^{N_{ve-vinc}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} \left[h^j(q) + h^{ve-}(q) \right] U_{\sim k}^{ve-c/vinc} - \sum_{j=1}^{N_{ve-tivres}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} \left[h^j(q) + h^{ve-}(q) \right] U_{\sim k}^{ve-livre} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{N_s} t^j(q) + \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_{e(c)}} g^j(q) P_{\sim k} + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \sum_{k=1}^{N_{e(vi)}} \left[g^{vi+}(q) + g^{vi-}(q) \right] P_{\sim k}^{vi} + \\
&+ \sum_{j=1}^{N_{ve-vinc}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} \left[g^j(q) + g^{ve-}(q) \right] P_{\sim k}^{ve-cl/vinc} + \sum_{j=1}^{N_{ve-livre}} \sum_{k=1}^{N_{e(ve)}} \left[g^j(q) + g^{ve-}(q) \right] P_{\sim k}^{ve_livre} \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Considerando-se o ponto de colocação em q somam-se as influências $h(q)$ e $g(q)$ de todos os elementos para todos os nós do contorno externo sem viga, eixos de vigas internas, eixos de vigas externas engastadas e apoiadas e eixos de vigas externas livre. Assim escreve-se a equação (4.37) matricialmente:

$$\begin{aligned}
&U_{\sim c}(q) + H_{\sim c}(q)U_{\sim c} + H_{\sim vi}(q)U_{\sim vi} + H_{\sim ve_livre}(q)U_{\sim ve_livre} + H_{\sim ve_eng}(q)U_{\sim ve_eng} = \\
&G_{\sim c}(q)P_{\sim c} + G_{\sim vi}(q)P_{\sim vi} + G_{\sim ve_livre}(q)P_{\sim ve_livre} + G_{\sim ve_eng}(q)P_{\sim ve_eng} + T(q) \quad (4.38)
\end{aligned}$$

Onde:

$\color{red}\oplus$ $U_{\sim c}^T = \{w^1 \ \phi_s^1 \ \phi_n^1 \ \dots \ w^i \ \phi_s^i \ \phi_n^i \ \dots \ w^{N_c} \ \phi_s^{N_c} \ \phi_n^{N_c}\}$ É o vetor dos deslocamentos nodais nos pontos sobre o contorno externo sem vigas;

$\color{red}\oplus$ $U_{\sim vi}^T = \{w^1 \ \phi_s^1 \ \phi_n^1 \ w_n^1 \ \phi_{s,n}^1 \ \phi_{n,n}^1 \ \dots \ w^i \ \phi_s^i \ \phi_n^i \ w_n^i \ \phi_{s,n}^i \ \phi_{n,n}^i \ \dots \ w^{N_{novi}} \ \phi_s^{N_{novi}} \ \phi_n^{N_{novi}} \ w_n^{N_{novi}} \ \phi_{s,n}^{N_{novi}} \ \phi_{n,n}^{N_{novi}}\}$ É o vetor dos deslocamentos nodais nos pontos sobre os eixos de vigas internas;

$\color{red}\oplus$ $U_{\sim ve_livre}^T = \{w^1 \ \phi_s^1 \ \phi_n^1 \ w_n^1 \ \phi_{s,n}^1 \ \phi_{n,n}^1 \ \dots \ w^i \ \phi_s^i \ \phi_n^i \ w_n^i \ \phi_{s,n}^i \ \phi_{n,n}^i \ \dots \ w^{N_{novelap}} \ \phi_s^{N_{novelap}} \ \phi_n^{N_{novelap}} \ w_n^{N_{novelap}} \ \phi_{s,n}^{N_{novelap}} \ \phi_{n,n}^{N_{novelap}}\}$ É o vetor dos deslocamentos nodais nos pontos sobre os eixos de vigas externas livres;

$\color{red}\oplus$ $U_{\sim ve_eng}^T = \{w^1 \ \phi_s^1 \ \phi_n^1 \ w_n^1 \ \phi_{s,n}^1 \ \phi_{n,n}^1 \ \dots \ w^i \ \phi_s^i \ \phi_n^i \ w_n^i \ \phi_{s,n}^i \ \phi_{n,n}^i \ \dots \ w^{N_{noveeng}} \ \phi_s^{N_{noveeng}} \ \phi_n^{N_{noveeng}} \ w_n^{N_{noveeng}} \ \phi_{s,n}^{N_{noveeng}} \ \phi_{n,n}^{N_{noveeng}}\}$ É o vetor dos deslocamentos nodais nos pontos sobre os eixos de vigas externas engastadas e apoiadas;

$\color{red}\oplus$ $P_{\sim c}^T = \{Q_n^1 \ M_n^1 \ M_{ns}^1 \ \dots \ Q_n^i \ M_n^i \ M_{ns}^i \ \dots \ Q_n^{N_c} \ M_n^{N_c} \ M_{ns}^{N_c}\}$ É o vetor das forças nodais nos pontos sobre o contorno externo sem vigas;

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} P_{\sim vi}^T = \{Q_n^1 \ M_n^1 \ M_{ns}^1 \ \dots \ Q_n^i \ M_n^i \ M_{ns}^i \ \dots \ Q_n^{N_{novi}} \ M_n^{N_{novi}} \ M_{ns}^{N_{novi}}\}$ É o vetor das forças nodais nos pontos sobre os eixos de vigas internas;

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} P_{\sim ve_livre}^T = \{Q_n^1 \ M_n^1 \ M_{ns}^1 \ \dots \ Q_n^i \ M_n^i \ M_{ns}^i \ \dots \ Q_n^{N_{novelap}} \ M_n^{N_{novelap}} \ M_{ns}^{N_{novelap}}\}$ É o vetor das forças nodais nos pontos sobre os eixos de vigas externas livres;

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} P_{\sim ve_eng}^T = \{Q_n^1 \ M_n^1 \ M_{ns}^1 \ \dots \ Q_n^i \ M_n^i \ M_{ns}^i \ \dots \ Q_n^{N_{noveeng}} \ M_n^{N_{noveeng}} \ M_{ns}^{N_{noveeng}}\}$ É o vetor das forças nodais nos pontos sobre os eixos de vigas externas engastadas e apoiadas;

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} H_c(q)$ e $\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} G_c(q)$ são vetores de dimensão $3 \times N_c$;

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} H_{vi}(q)$ é um vetor de dimensão $1 \times 6 N_{novi}$;

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} H_{ve_livre}(q)$ É um vetor de dimensão $1 \times 6 N_{novel}$

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} H_{ve_eng}(q)$ É um vetor de dimensão $1 \times 6 N_{novevinc}$

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} G_{vi}(q)$ É um vetor de dimensão $1 \times 3 N_{novi}$;

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} G_{ve_livre}(q)$ É um vetor de dimensão $1 \times 3 N_{novel}$;

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} G_{ve_eng}(q)$ É um vetor de dimensão $1 \times 3 N_{novevinc}$;

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} N_c$ É o número de nós no contorno sem viga;

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} N_{novi}$ É o número de nós nos eixos de vigas internas.

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} N_{novel}$ É o número de nós nos eixos de vigas externas livres.

$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} N_{novevinc}$ É o número de nós nos eixos de vigas externas engastadas e apoiadas.

Os vetores dos deslocamentos nodais podem ser agrupados em um único vetor, bem como os vetores das forças nodais. Assim a equação (4.38) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} U_k(q) + \begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \hat{H}(q) \begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} U = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} G(q) \begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} P + \begin{Bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} T(q) \quad (4.39)$$

Onde:

✚ $\hat{H}(q)$ é um vetor de dimensão $1 \times 3 * (N_c + 2 * N_{novi} + 2 * N_{nove})$

✚ \tilde{U}^T é um vetor de dimensão $1 \times (3N_c + 6N_{novi} + 6N_{nove})$

✚ $\tilde{G}(q)$ é um vetor de dimensão $1 \times 3 * (N_c + N_{novi} + N_{nove})$

✚ \tilde{P}^T é um vetor de dimensão $1 \times 3 * (N_c + N_{novi} + N_{nove})$

Note que se o ponto de colocação for interno ele não coincide com nenhum nó do contorno ou interface. Portanto, nesse caso a equação final é a equação (4.39). Se o ponto de colocação for externo (ponto A) o termo livre $C(A)$ é nulo; se ele estiver sobre o contorno (ponto Q) tem-se $C(Q) = \frac{I}{2}$ e para pontos de colocação sobre o eixo de uma viga, $C(q)=1$. No caso do ponto de colocação coincidente com nó de contorno ou eixo de vigas, deve-se somar o termo livre à respectiva coluna da matriz $\hat{H}(Q)$. Observe, porém, que na montagem do sistema de equações não serão considerados pontos de colocação sobre o contorno. Serão considerados apenas pontos de colocação externos e sobre os eixos das vigas. Portanto, no caso dos pontos A, Q ou q sobre o eixo da viga, a equação algébrica se torna:

$$C(Q)U_k(Q) + \hat{H}(Q)U = \tilde{G}(Q)P + T(Q) \quad (4.40)$$

Se o nó do contorno ou eixo de viga for simples, deve-se somar o valor da constante $C(Q)$ à coluna do vetor $\tilde{H}(Q)$ referente ao deslocamento $U_k(Q)$. Para os nós deslocados (como os nós duplos e nós de extremidade dos eixos das vigas), o ponto passa a ser interno ao elemento e não coincide mais com um nó da estrutura. Deve-se, nesse caso, escrever o deslocamento do ponto deslocado em função dos valores nodais do elemento ao qual o nó deslocado pertence. Assim, soma-se a parcela $C(Q)\phi_N$ à coluna relativa ao deslocamento U_k

do nó N do elemento ao qual Q pertence. Feito isso, a equação (4.24) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underline{H}(Q)\underline{U} = \underline{G}(Q)\underline{P} + \underline{T}(Q) \quad (4.41)$$

4.6 SISTEMA DE EQUAÇÕES

Nos pontos do contorno externo sem vigas, têm-se seis variáveis ($w, \phi_n, \phi_s, Q_n, M_n$ e M_{ns}), das quais três variáveis são dadas como condição de contorno, sendo necessário, portanto escrever três equações nesses pontos. No caso de pontos de vigas externas têm-se nove variáveis ($w, w_n, \phi_n, \phi_s, \phi_{s,n}, \phi_{n,n}, Q_n, M_n$ e M_{ns}), sendo as variáveis $w_n, \phi_{s,n}$ e $\phi_{n,n}$ incógnitas e das outras seis, três são conhecidas, pois são impostas nas condições de contorno. Assim, nesse caso têm-se seis incógnitas. Nas vigas internas são definidas nove variáveis ($w, w_n, \phi_n, \phi_s, \phi_{s,n}, \phi_{n,n}, Q_n, M_n$ e M_{ns}), sendo que nesse caso todas as variáveis são incógnitas do problema. Com isso, para se obter a solução do problema de flexão de placas, para cada ponto situado sobre o contorno externo sem vigas escrevem-se as equações dos deslocamentos w, ϕ_n e ϕ_s em pontos de colocação externos muito próximos ao contorno. Porém se o ponto pertencer ao eixo de uma viga externa, além destas equações, deve-se escrever ainda, as equações das rotações $w_n, \phi_{s,n}$ e $\phi_{n,n}$. Caso o ponto pertença ao eixo de uma viga interna, escrevem-se as seguintes equações: as equações dos deslocamentos w, ϕ_n e ϕ_s , as equações das rotações $w_n, \phi_{s,n}$ e $\phi_{n,n}$ e das forças M_n, M_{ns} e Q_n . Nas vigas externas e internas são adotados pontos de colocação sobre o eixo das vigas.

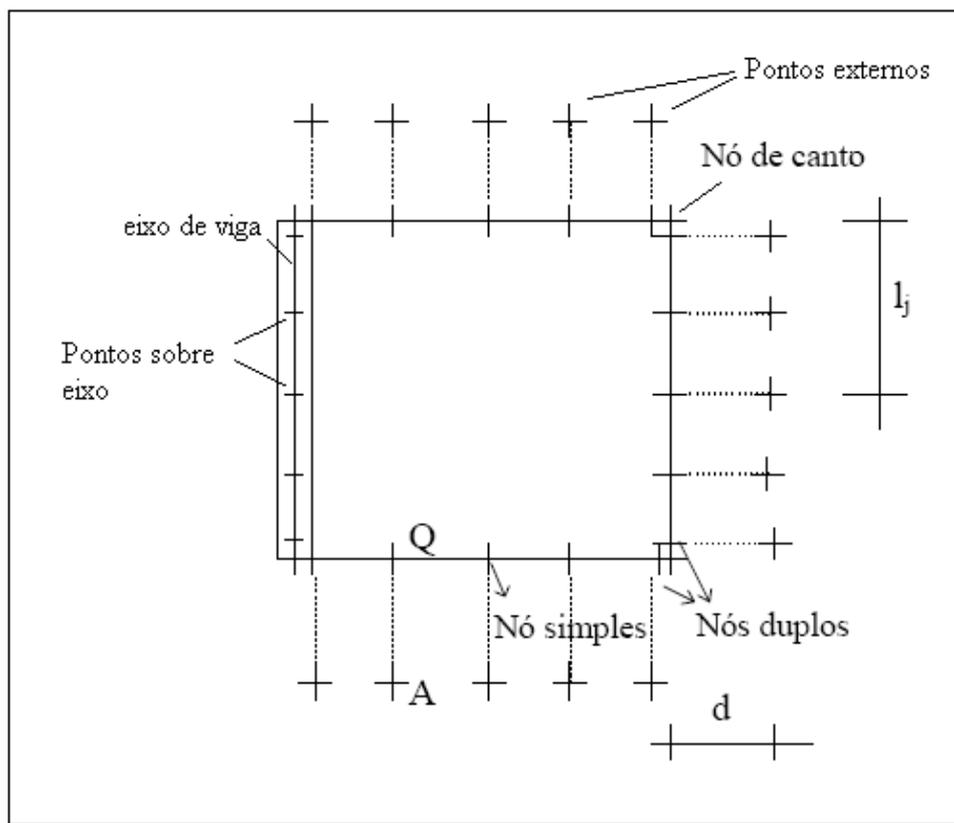


FIGURA 4.7 – Pontos de Colocação

Onde: l_j é o comprimento do elemento j ; d a distância do ponto de colocação externo ao ponto Q sobre o contorno, que é dada por:

$$d = aL_m \quad (4.42)$$

Na equação (4.42) L_m é a média dos comprimentos dos elementos concorrentes no nó, ou, se o nó for interno ao elemento (nó duplo), é igual ao comprimento do mesmo; $0.0001 \leq a \leq 1.5$; valores de a menores que o limite inferior, pode acarretar problemas de singularidades e valores maiores que o limite superior, gera resultados com baixa precisão segundo Fernandes (2005).

Após a discretização do contorno e eixos de vigas, a equação referente aos deslocamentos w , ϕ_n e ϕ_s de um ponto Q pode ser escrita, de maneira aproximada, da seguinte forma:

$$[H(Q)]\{U\} = [G(Q)]\{P\} + T(Q) \quad (4.43)$$

Onde:

- ✚ $T(Q)$ corresponde ao carregamento na placa;
- ✚ $U^T = \{... w^i \ \phi_s^i \ \phi_n^i \ w_{,n}^i \ \phi_{s,n}^i \ \phi_{n,n}^i \ ... \}$ é o vetor dos deslocamentos nodais nos pontos sobre o contorno externo sem vigas e eixos de vigas. Os deslocamentos $w_{,n}$, $\phi_{s,n}$ e $\phi_{n,n}$ são definidos apenas nos pontos sobre os eixos das vigas.
- ✚ $P^T = \{... Q_n^i \ M_n^i \ M_{ns}^i \ ... \}$ é o vetor das forças nodais nos pontos sobre o contorno externo sem vigas e eixos de vigas.
- ✚ $H(Q)$ é uma matriz cujos termos são obtidos da integração dos esforços fundamentais $(M_{kn}^*, M_{kns}^* \text{ e } Q_{kn}^*)$ ao longo das interfaces e contorno.
- ✚ $G(Q)$ é uma matriz cujos termos são obtidos da integração dos deslocamentos fundamentais $(\phi_{kn}^*, \phi_{kns}^* \text{ e } w_k^*)$ ao longo das interfaces e contorno.

Após escrever o sistema de equações, impõem-se as condições de contorno obtendo-se as incógnitas nos eixos das vigas e no contorno da placa sem vigas. Note que como as variáveis Q_n , M_n e M_{ns} dos eixos das vigas internas são incógnitas do problema, elas serão armazenadas no vetor $\{U\}$ e seus respectivos termos guardados na matriz $[H]$.

De uma maneira simplificada a equação (4.43) pode ser escrita como:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{T\} \quad (4.44)$$

Onde as dimensões dos vetores e matrizes são dadas por:

- ✚ $[H]$ é uma matriz $(3N_c + 6N_{nove} + 9N_{novi}) \times (3N_c + 6N_{nove} + 9N_{novi})$
- ✚ $[G]$ é uma matriz $(3N_c + 6N_{nove} + 9N_{novi}) \times (3(N_c + N_{nove}))$
- ✚ $\{U\}$ é um vetor $((3N_c + 6N_{nove} + 9N_{novi}) \times 1)$

✚ $\{P\}$ é um vetor $(3(N_c + N_{nove}) \times 1)$

Sendo N_c o número de nós no contorno externo sem vigas, N_{nove} o número de nós nos eixos das vigas externas e N_{novi} o número de nós nos eixos de vigas internas.

4.7 PROPRIEDADES DA MATRIZ H

Considerando algumas configurações particulares de equilíbrio para a placa, obtêm-se as propriedades da matriz H (equação 4.44), que são utilizadas para a verificação da mesma. Tais configurações são obtidas aplicando-se certos movimentos de corpo rígido às equações de flexão. Como se consideram apenas movimentos de corpo rígido, o carregamento transversal e as forças de superfície são adotados nulos. Portanto, o vetor das forças nodais \mathbf{P} , bem como o vetor formado pelas integrais sobre a região carregada \mathbf{T} , do sistema de equações (4.44) são nulos. Assim, pode-se escrever:

$$[H]\{U\} = \{0\} \quad (4.45)$$

onde $\{0\}$ é um vetor nulo.

Este sistema de equações admite soluções não triviais relativas ao movimento de corpo rígido, em outras palavras, deslocamento transversal e rotação em torno de eixos arbitrários, Fernandes (1998).

Assim, considerando inicialmente deslocamento transversal de corpo rígido w_0 na placa (figura 4.8), o vetor de deslocamentos U da equação (4.45) fica:

$$\begin{aligned} \underline{U}^T = \{ & w_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & w_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \} \end{aligned} \quad (4.46)$$

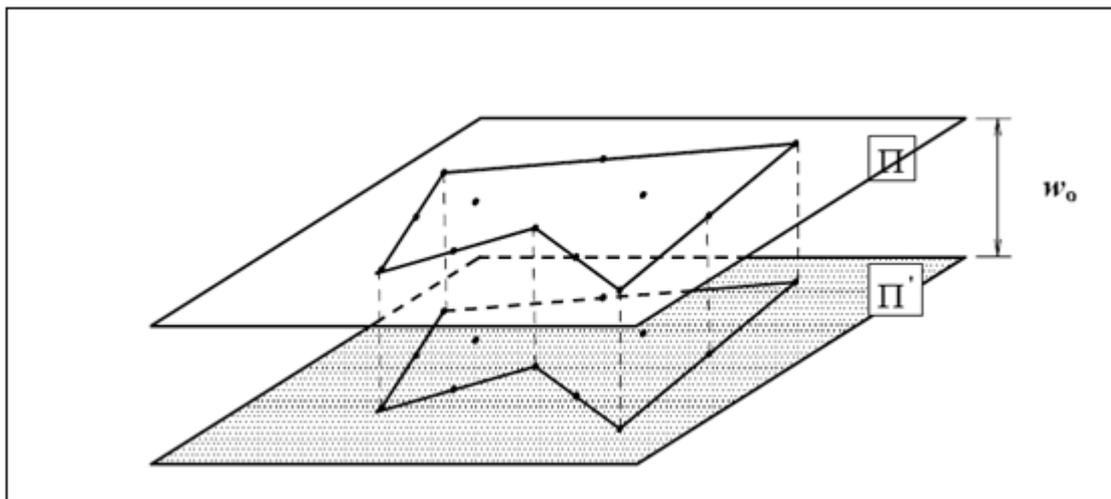


FIGURA 4.8 – Movimento de Corpo Rígido - Translação

Substituindo-se (4.46) em (4.45), obtêm-se para uma determinada linha i do sistema de equações:

$$N_{noc} + N_{neixovi} + N_{neixove} \sum_{j=1} h_{i,6j-5} w_0 = 0 \quad 1 \leq i \leq 3N_t + 6N_{neixove} + 9N_{neixovi} \quad (4.47)$$

Onde

$$N_t = N_{noc} + N_i \quad (4.48)$$

Porém, como w_0 é uma constante, a equação (4.47) pode ser escrita como:

$$N_{noc} + N_{neixovi} + N_{neixove} \sum_{j=1} h_{i,6j-5} = 0 \quad 1 \leq i \leq 3N_t + 6N_{neixove} + 9N_{neixovi} \quad (4.49)$$

A equação (4.49) corresponde a uma propriedade da matriz H , referente ao deslocamento de corpo rígido na direção do deslocamento transversal w . Seja agora uma

rotação de corpo rígido α , apresentada na figura (4.9), no sentido indicado pelo eixo arbitrário \vec{e} .

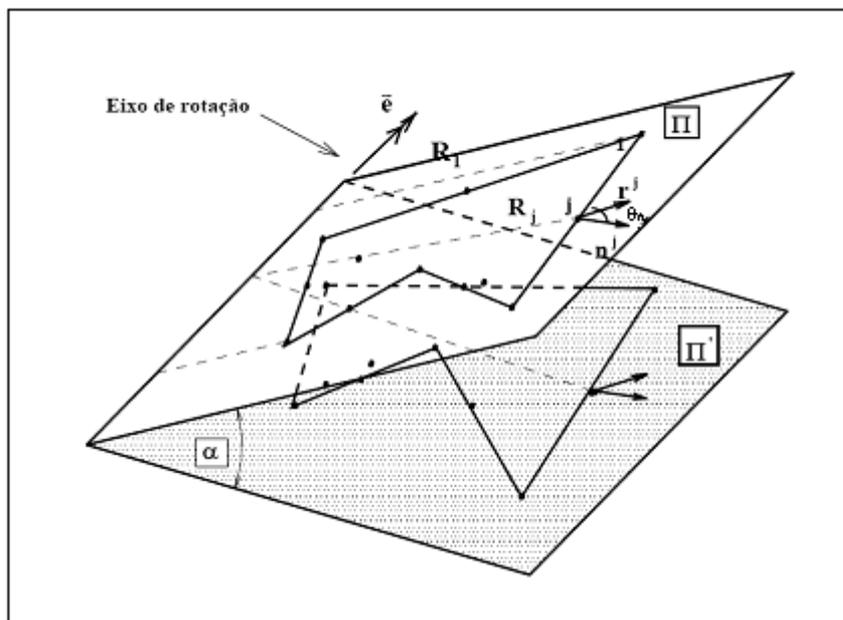


FIGURA 4.9 – Movimento de Corpo Rígido - Rotação

Nesse caso, tem-se que o deslocamento w em um ponto j é dado por:

$$w_j = \sin(\alpha)R_j \quad (4.50)$$

sendo R_j a distância entre o nó j e o eixo de rotação (ver figura 4.9).

Na figura (4.9) n^j e r^j indicam, respectivamente, as direções da normal ao contorno e de r no nó j .

A rotação normal $\frac{\partial w}{\partial n}$ de um ponto j é obtida derivando-se a equação (4.50), ou seja:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_j = \sin(\alpha)\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)_j \quad (4.51)$$

onde:

Substituindo-se (4.56) em (4.45), obtêm-se para uma determinada linha i do sistema de equações:

$$\sum_{j=1}^{N_{noc} + N_{neixove} + N_{neixovi}} [(h_{i,6j-5})R_j - (h_{i,6j-4})\cos \beta_s - (h_{i,6j-3})\cos \beta_n + (h_{i,6j-2})\cos \beta_n] = 0 \quad (4.57)$$

A equação (4.57) é relativa à propriedade da matriz H, referente à rotação de corpo rígido em torno de um eixo arbitrário \vec{e} . No caso do eixo y ser o eixo de referencia (figura 4.10a), tem-se:

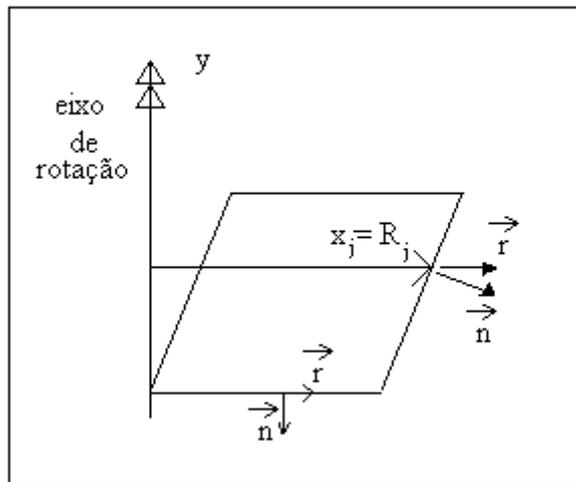


FIGURA 4.10a – Rotação de corpo Rígido em Torno do Eixo y

$$R = x \quad (4.58)$$

$$\vec{r} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

Das equações (4.52) e (4.54), escreve-se:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_1 n_1 + r_2 n_2 = n_1 = \sin \alpha \quad (4.60.a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = r_1 s_1 + r_2 s_2 = s_1 = \cos \alpha \quad (4.60.a)$$

Das equações (4.58) e (4.60), aplicadas à equação (4.45):

$$\sum_{j=1}^{N_{noc} + N_{neixove} + N_{neixovi}} [(h_{i,6j-5})x_j - (h_{i,6j-4})s_1 - (h_{i,6j-3})n_1 + (h_{i,6j-2})n_1] = 0 \quad (4.61)$$

Analogamente, considerando o eixo x como eixo de rotação (figura 4.10b), obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{N_{noc} + N_{neixove} + N_{neixovi}} [(h_{i,6j-5})y_j - (h_{i,6j-4})s_2 - (h_{i,6j-3})n_2 + (h_{i,6j-2})n_2] = 0 \quad (4.62)$$

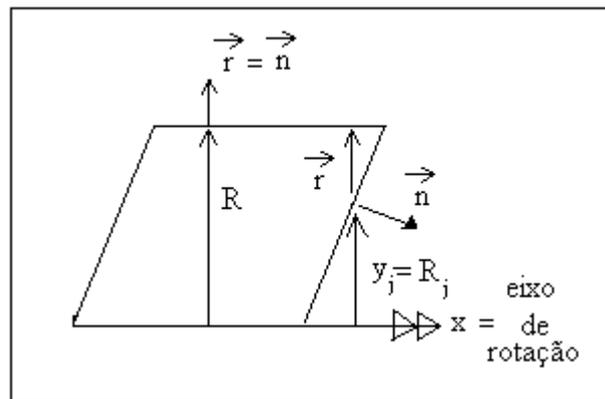


FIGURA 4.10b – Rotação de Corpo Rígido em Torno do Eixo x

4.8 CÁLCULO DOS ESFORÇOS PARA UM PONTO INTERNO

De posse dos valores dos deslocamentos e esforços nos eixos de vigas e no contorno da placa, pode-se obter os valores dos esforços em pontos quaisquer no interior placa. Na determinação dos momentos para os pontos do domínio onde haja interesse, utiliza-se a equação (2.53), na qual as curvaturas $(\phi_{1,1} \ \phi_{1,2} \ \phi_{2,1} \ \phi_{2,2})$ são obtidas derivando-se a equação (3.132) referente ao deslocamento ϕ_k em relação às direções X_1 e X_2 . A expressão

das curvaturas $\phi_{k,m}$, para um ponto interno qualquer, onde k e m podem ser direções quaisquer definidas no ponto, é obtida de maneira análoga ao item (3.7), ou seja, derivando-se a equação (3.132) relativa ao deslocamento ϕ_k ($k=l, m$).

Após a discretização do contorno e eixos de vigas e a aproximação das variáveis, as curvaturas em N_i pontos internos são calculadas através da equação matricial:

$$\phi_{k,m}(q) + \begin{bmatrix} H'_c(q) & H'_{eixo}(q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{\sim c} \\ U_{\sim eixo} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G'_c(q) & G'_{eixo}(q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{\sim c} \\ P_{\sim eixo} \end{Bmatrix} + T'(q) \quad (4.63)$$

Onde:

- ✚ $\phi_{k,m}(q)$ é o vetor que contém as curvaturas nos pontos internos;
- ✚ Os vetores $\{U_c\}$, $\{U_{eixo}\}$, $\{P_c\}$ e $\{P_{eixo}\}$ são os vetores de deslocamentos e esforços dos nós do contorno e eixos de vigas, já calculados;
- ✚ As matrizes $[H'_c]$ e $[G'_c]$ têm dimensões $4N_i \times 3N_c$;
- ✚ As matrizes $[H'_{eixo}]$ e $[G'_{eixo}]$ têm dimensões $4N_i \times 3N_{eixo}$.

Os coeficientes de $[H']$ e $[G']$ são provenientes da integração dos esforços e deslocamentos fundamentais ao longo do contorno e interfaces apresentados em (4.32) e (4.33).

O esforço cortante Q é calculado através da equação (2.54), sendo que o valor de w_m , onde m é a direção normal definida no eixo de uma viga, é calculado de maneira análoga ao feito no item (3.6), ou seja, derivando-se a equação (3.132) relativa ao deslocamento w ($k=3$).

Após a discretização do contorno, eixos de vigas e a aproximação das variáveis, os valores de w_m em N_i pontos internos são calculados através da equação:

$$w_{\sim m}(q) + \begin{bmatrix} \bar{H}'_c(q) & \bar{H}'_{eixo}(q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{\sim c} \\ U_{\sim eixo} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}'_c(q) & \bar{G}'_{eixo}(q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{\sim c} \\ P_{\sim eixo} \end{Bmatrix} + \bar{T}'(q) \quad (4.64)$$

Onde:

- ✚ $w_{,m}(q)$ é o vetor das derivadas do deslocamento transversal;
- ✚ Os vetores $\{U_c\}$, $\{U_{eixo}\}$, $\{P_c\}$ e $\{P_{eixo}\}$ são os vetores de deslocamentos e esforços dos nós do contorno e eixos de vigas, já calculados;
- ✚ As matrizes \bar{H}'_c e \bar{G}'_c têm dimensões $2N_i \times 3N_c$;
- ✚ As matrizes \bar{H}'_{eixo} e \bar{G}'_{eixo} têm dimensões $2N_i \times 3N_{neixo}$

4.9 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A seguir serão apresentados alguns exemplos, onde os resultados numéricos referente ao modelo proposto neste trabalho serão comparados com a solução analítica, quando possível, ou então com valores obtidos com o *software* ANSYS, um programa renomado baseado no Método dos Elementos Finitos. Na análise feita com o ANSYS será utilizado o elemento *Shell* 143, apresentado em mais detalhes no trabalho de Gupta et al.(2007), que leva em consideração a deformação por esforço cisalhante, ou seja, considerando as hipóteses de Reissner. A geometria do elemento, bem como a localização dos nós e o sistema de coordenadas para este elemento estão representados na figura (4.11a). Todas as discretizações utilizadas no ANSYS são feitas com elementos tendo 5 cm de comprimento cada lado.

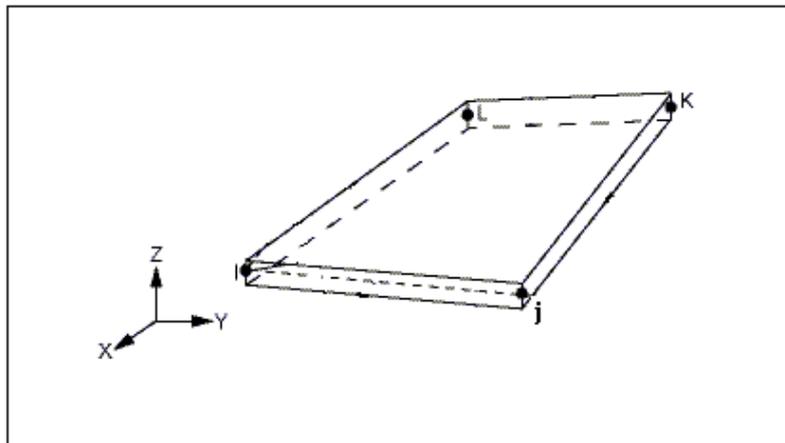


FIGURA 4.11a – Elemento Shell 143

Ainda são apresentados na figura (4.11b), vários outros itens referentes ao elemento Shell 143, como direção de tensões e forças resultantes.

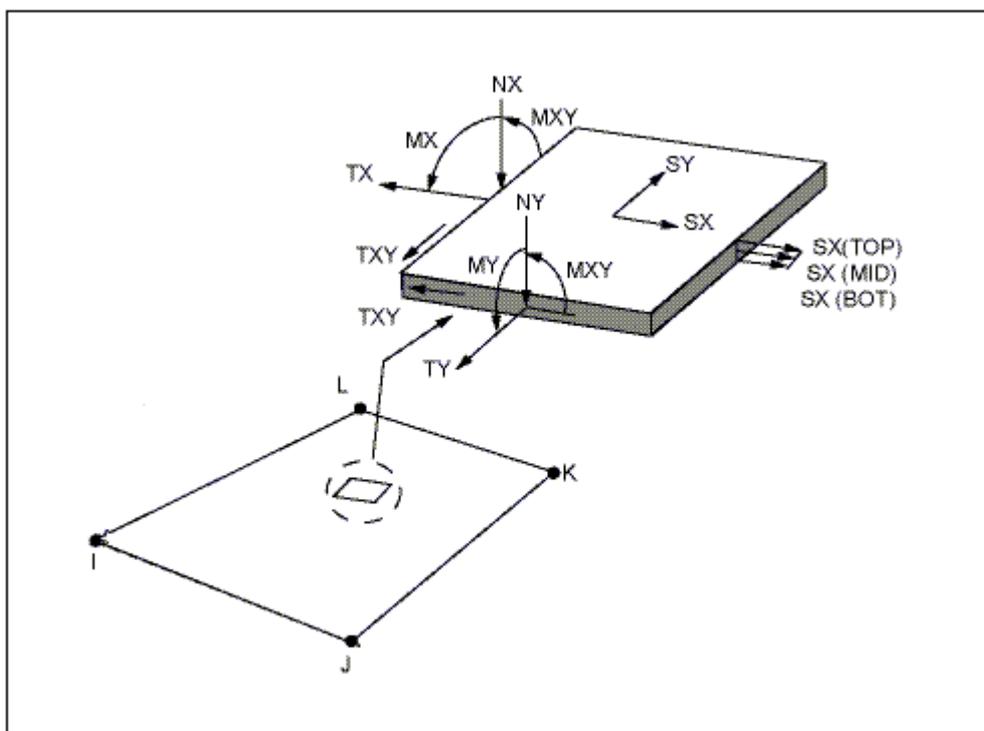


FIGURA 4.11b – Esforços Atuantes no Elemento Shell 143

Na figura (4.11b) “N” representa o esforço cortante, “M” os momentos, “T” as forças atuando na superfície do elemento e “S” as tensões atuantes ao longo da espessura do elemento.

Em cada exemplo, os resultados do modelo proposto no item (3.10) também serão comparados com aqueles obtidos a partir do modelo desenvolvido por Fernandes (2003), que é baseado na teoria de Kirchhoff, onde a deformação por esforço cisalhante não é considerada. Em alguns exemplos, ainda será apresentado um estudo da convergência dos resultados do modelo proposto.

4.9.1 PLACA, ENRIJECIDA COM UMA VIGA INTERNA, ENGASTADA EM UM LADO E COM MOMENTO M_n APLICADO NO LADO OPOSTO.

Nesse exemplo tem-se uma placa enrijecida com uma viga interna conforme a figura (4.12). A laje possui espessura $t_L = 10\text{cm}$ e a viga $t_v = 20\text{cm}$. Foi considerado módulo de elasticidade $E = 3 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$ e coeficiente de Poisson nulo, tanto para a laje como para a viga. Um dos lados da placa, paralelo ao eixo da viga, está engastado, ou seja: $w = 0$, $\phi_n = 0$ e $\phi_s = 0$. O lado oposto ao engaste é adotado livre ($M_n = 0$, $M_{ns} = 0$ e $Q_n = 0$), sendo aplicado um momento $M_n = 10 \text{ KNm/m}$ ao longo do mesmo.

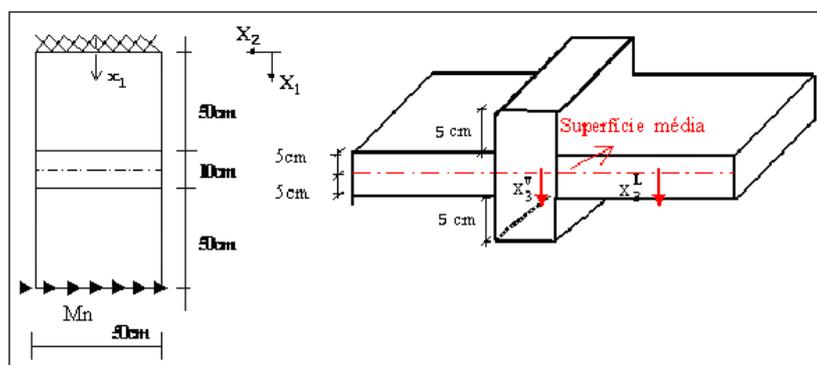


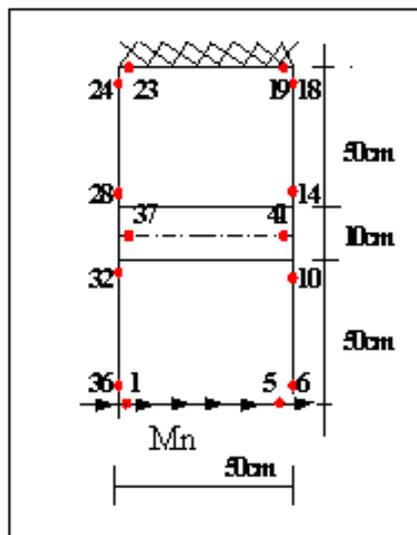
FIGURA 4.12– Placa Enrijecida com uma Viga Interna

Como valores numéricos dos momentos, esperam-se obter os valores apresentados na tabela (4.1).

TABELA 4.1 – Valores Analíticos do Momento

| Pontos | $M_n \left(\frac{KNm}{m} \right)$ |
|----------------------------------|------------------------------------|
| Ao longo do eixo da viga interna | 10 |
| Ao longo do engaste | 10 |

Adotou-se uma discretização com 41 nós e 16 elementos, conforme figura (4.13). Foram analisadas discretizações ainda mais refinadas, porém não se constatou diferença nos resultados (figura (4.16)). A discretização utilizada pelo ANSYS está apresentada na figura (4.15), composta de 220 elementos.

**FIGURA 4.13– Malha de 16 Elementos – 41 nós**

Na figura (4.14) são apresentados os deslocamentos referentes ao modelo proposto, bem como os valores referentes a um modelo baseado nas hipóteses de Kirchhoff desenvolvido em Fernandes (2003) e ainda os valores calculados com o *software* ANSYS.

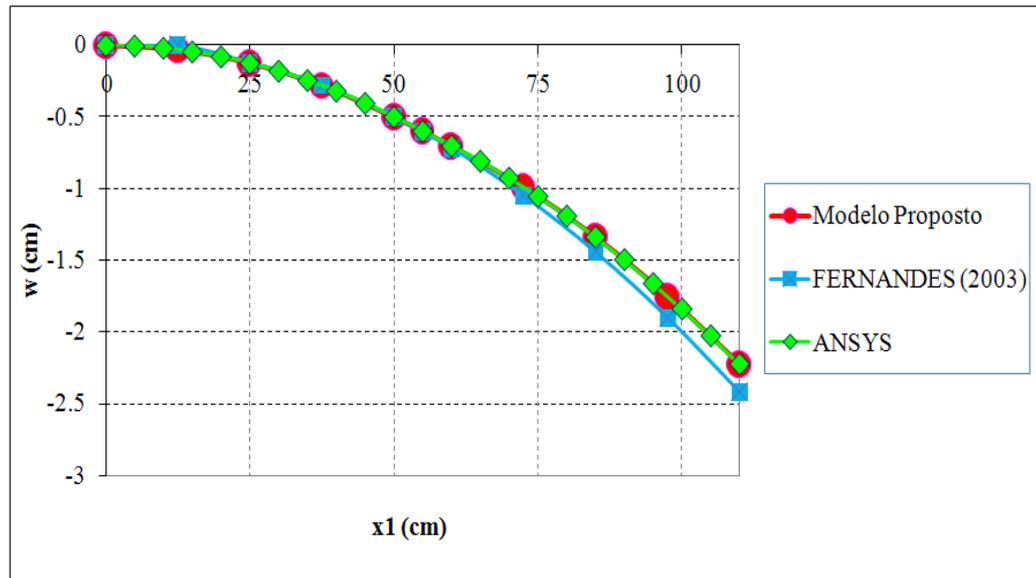


FIGURA 4.14– Deslocamento w ao Longo do Eixo x_1

Considerando os valores referentes ao ANSYS, foi observado um erro médio de 0,24% com um desvio padrão de 0,0146, ou seja, um erro irrelevante e sem grandes variações. Já o modelo baseado nas hipóteses de Kirchhoff apresenta diferenças significativas nos resultados, evidenciando a importância da deformação por esforço cortante.

Os valores do momento ao longo do eixo x_1 obtidos com o ANSYS foram os mesmos da solução analítica. No modelo proposto, considerando a malha de 16 elementos apresentada na figura (4.13), os valores obtidos para o momento M_n foram praticamente exatos, com erro menor que 0,5%.

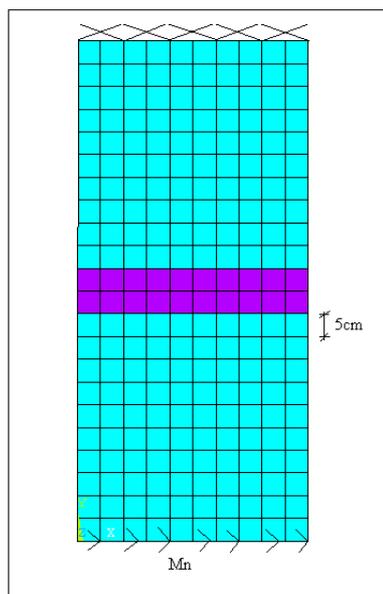


FIGURA 4.15– Discretização do Domínio (ANSYS)

Na figura (4.16) têm-se os deslocamentos ao longo do eixo x_1 com diferentes discretizações.

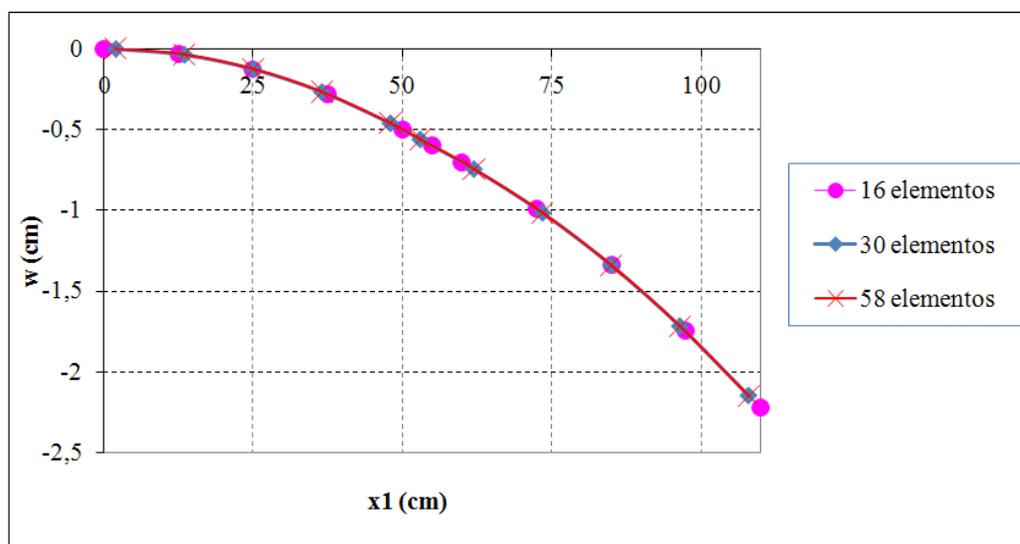


FIGURA 4.16– Deslocamentos ao Longo do Eixo x_1

Como pode-se observar na figura (4.16), tem-se convergência dos resultados à medida que se refina a malha. Em $x_1 = 0,6m$ obteve-se a maior diferença relativa de w , que foi de 8,6% entre as malhas de 16 e 30 elementos e apenas 0,0134% entre as malhas de 30 e 58

elementos. Considerando-se ainda as malhas de 30 e 58 elementos, para todos os outros nós não houve diferença relativa, ou seja, todos os valores relativos foram exatos.

4.9.2 PLACA ENRIJECIDA COM UMA VIGA INTERNA, ENGASTADA EM UM LADO E COM FORÇA Q_n APLICADO NO LADO OPOSTO.

Nesse exemplo analisa-se a placa definida na figura (4.12), com módulo de elasticidade $E = 3 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$ e coeficiente de Poisson nulo. Assim como no exemplo (4.9.1), a placa é considerada engastada (nós 31 a 39), ou seja, $w = 0$, $\phi_s = 0$ e $\phi_n = 0$, sendo todos os outros lados livres ($M_n = 0$, $M_{ns} = 0$ e $Q_n = 0$). No lado oposto ao engaste, será aplicada uma força $Q_n = -10 \text{ KN/m}$. Como resultado numérico dos esforços, espera-se obter no engaste, esforço Q_n de sinal contrário àquele aplicado e momento $M_n = Q_n * 1,1 = 11 \text{ KNm/m}$. Nos nós do eixo da viga deve-se ter $Q_n = -10 \text{ KN/m}$ e $M_n = 5,5 \text{ KNm/m}$.

Fez-se inicialmente um estudo da convergência dos resultados em função da discretização. Não houve diferença significativa nos momentos na direção X_1 obtidos para o eixo x_1 considerando diferentes malhas. Na figura (4.17) tem-se uma das discretizações utilizadas para a análise, onde se têm 30 elementos e 69 nós.

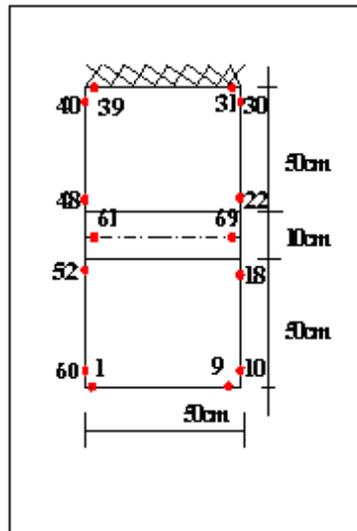


FIGURA 4.17– Malha de 30 Elementos – 69 nós

Na figura (4.18) pode-se observar a variação nos valores dos deslocamentos à medida que se refina a malha. Foram utilizadas três malhas: 16,30 e 58 elementos, comprovando a convergência dos resultados.

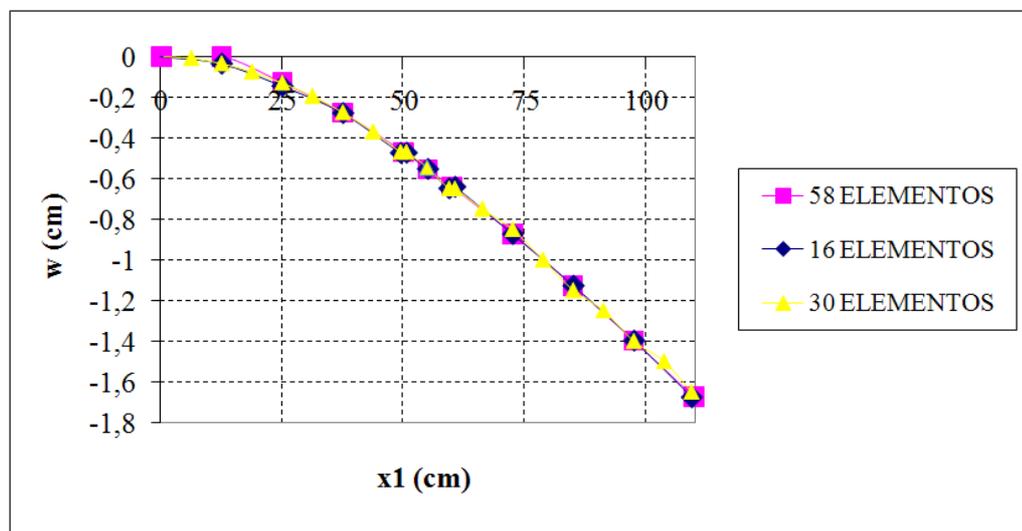


FIGURA 4.18– Convergência dos Deslocamentos

O deslocamento transversal ao longo de x_1 (ver figura 4.12) está representado na figura (4.19), onde se comparam os resultados obtidos com o modelo proposto, Fernandes (2003) e o ANSYS. Na análise feita com o ANSYS a discretização utilizada foi exatamente, a mesma usada no item (4.9.1), apresentada na figura (4.15), composta de 220 elementos. A

discretização utilizada nesse exemplo para o modelo proposto será de uma malha composta de 58 elementos.

Na figura (4.19) pode-se observar que os valores referentes ao modelo proposto se confundem com os valores obtidos com o ANSYS. Como previsto, observa-se uma pequena diferença entre os resultados obtidos considerando a teoria de Reissner e a teoria de Kirchhoff, devido à consideração da deformação por esforço cisalhante.

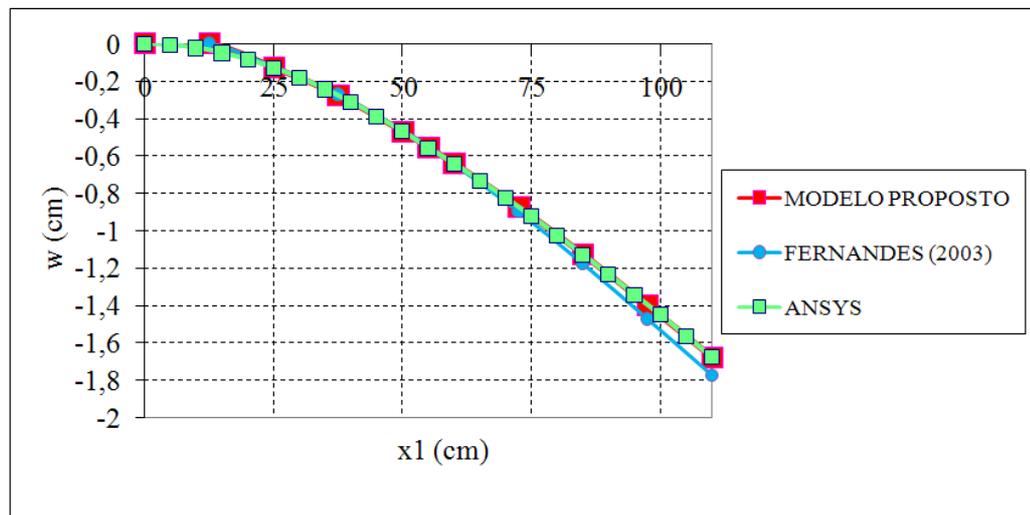


FIGURA 4.19– Deslocamento w ao Longo do Eixo x_1

Considerando o modelo proposto, os valores obtidos para o momento M_n foram praticamente exatos no engaste, com um erro menor que 0,3%, se comparados com a solução analítica (ver figura 4.20). Para Q_n o maior erro foi de 0,7%. Na viga interna o maior erro para Q_n foi de 1,2% e para M_n de 5% nos pontos de extremidade, nos outros pontos o erro não foi significativo.

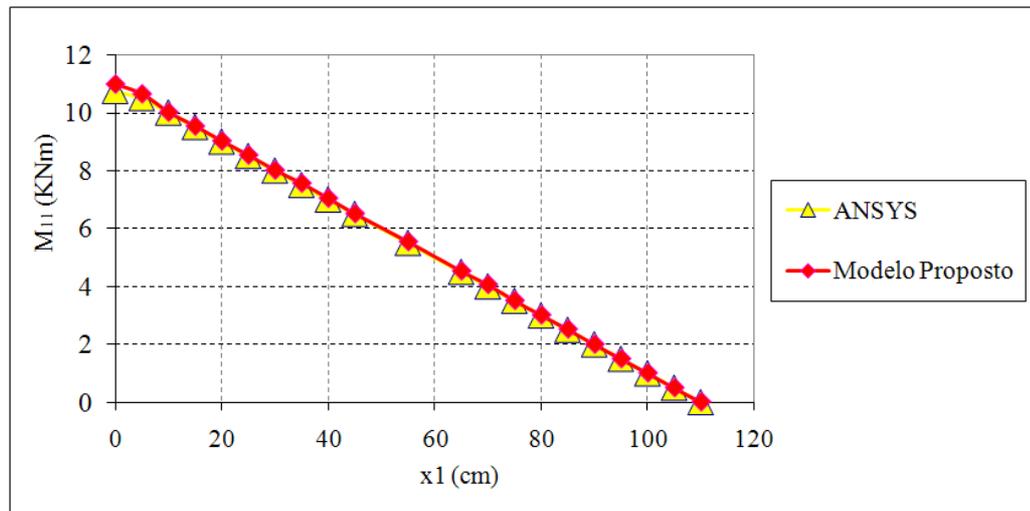


FIGURA 4.20– Momento ao Longo do Eixo x_1

4.9.3 PLACA ENRIJECIDA COM UMA VIGA EXTERNA, ENGASTADA EM UM LADO E COM MOMENTO M_n APLICADO NO LADO OPOSTO.

Nesse exemplo a placa a ser analisada está representada na figura (4.21), composta por uma laje de espessura $t_L = 10\text{cm}$ e por uma viga externa com espessura $t_V = 20\text{cm}$. Ainda na figura (4.21) apresenta-se uma discretização do contorno com 16 elementos e 36 nós, referente ao modelo proposto. O lado formado pelos nós de 1 a 9 é considerado livre com um momento aplicado $M_n = 10\text{KNm}/\text{m}$. O lado oposto, formado pelos nós de 19 a 27, é considerado engastado ($w=0$, $\phi_s=0$ e $\phi_n=0$). Todos os outros lados são considerados livres de vinculações e sem carga aplicada, ou seja, $M_n=0$, $M_{ns}=0$ e $Q_n=0$.

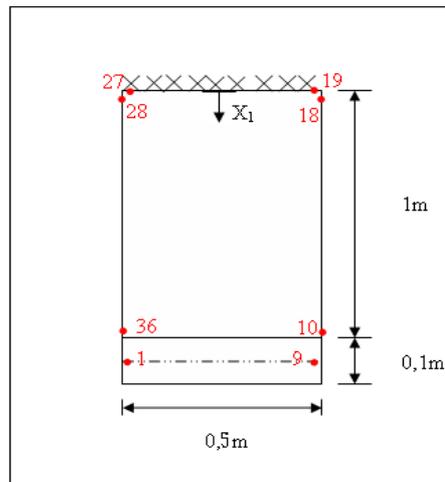


FIGURA 4.21– Placa Enrijecida com Viga Externa

O módulo de elasticidade adotado foi $E = 3 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$ e o coeficiente de Poisson nulo. Na análise feita com o ANSYS, utilizou-se uma discretização do domínio constituída de elementos quadrados com lados de 5 cm de comprimento, resultando em um total de 220 elementos.

A figura (4.22) apresenta a variação do deslocamento transversal ao longo do eixo X_1 (ver figura (4.21)), considerando os valores obtidos a partir do modelo proposto, de um modelo baseado nas hipóteses de Kirchhoff e do ANSYS.

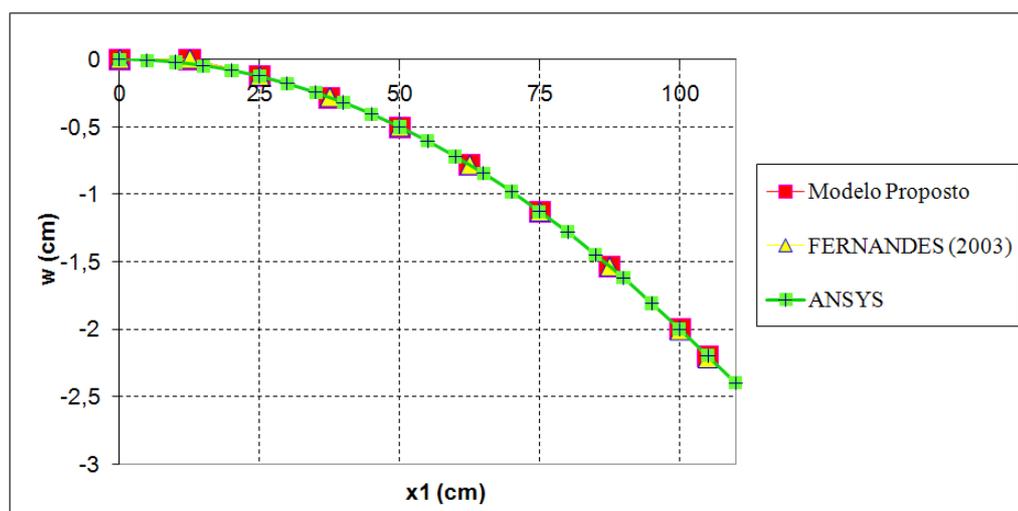


FIGURA 4.22– Deslocamento w ao Longo do Eixo x_1

Neste caso, em particular, não houve diferenças significativas nos valores dos deslocamentos entre os modelos considerando as hipóteses de Reissner e Kirchhoff. O mesmo acontece com os valores dos momentos ao longo do eixo x_1 , considerando o modelo proposto (MEC) e o ANSYS (MEF). A partir do modelo proposto, nos nós do engaste, ou seja, nós 18 a 28, obteve-se um momento $M_n = 10 \frac{KNm}{m}$, valor igual ao da solução analítica.

Nesse exemplo os valores correspondentes à teoria de Reissner foram muito parecidos com os valores obtidos utilizando-se a teoria de Kirchhoff, uma vez que, a largura da viga é pequena e o momento é aplicado no eixo da mesma. Desta forma, o ponto de aplicação do momento fica muito próximo da laje e como a laje possui espessura pequena, a influência da deformação por esforço cortante não é considerável.

Fez-se ainda um estudo da convergência dos resultados com o refinamento da malha. Consideraram-se mais duas discretizações, obtidas a partir daquela apresentada na figura (4.21), dobrando-se duas vezes o número de elementos em cada lado da placa, obtendo-se malhas de 32 e 64 elementos. Não houve diferença considerável nos valores dos deslocamentos e momentos obtidos com as malhas de 16, 32 e 64 elementos, confirmando a convergência dos resultados (figura (4.23)).

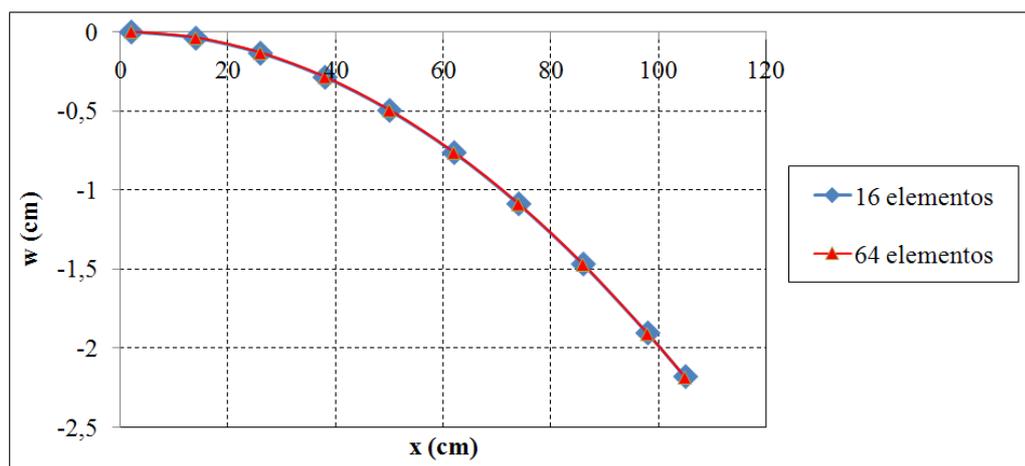


FIGURA 4.23 – Deslocamentos w ao Longo do Eixo x_1

4.9.4 PLACA, ENRIJECIDA COM UMA VIGA EXTERNA, ENGASTADA EM UM LADO E COM FORÇA Q_n APLICADA NO LADO OPOSTO.

Nesse exemplo os dados da laje e da viga, assim como as condições de contorno, são os mesmo daqueles dados no exemplo (4.9.3), exceto que nesse caso ao invés de aplicar momento M_n , prescreve-se força $Q_n = -10 \text{ KN/m}$ para os nós de 1 a 9 (ver figura (4.21)).

Para o modelo proposto utiliza-se uma discretização com 24 elementos e 52 nós (figura 4.24). O módulo de elasticidade adotado é $E = 3 \times 10^6 \text{ KN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0$. Na análise feita com o ANSYS utiliza-se a mesma discretização do exemplo (4.9.3), resultando em um total de 220 elementos.

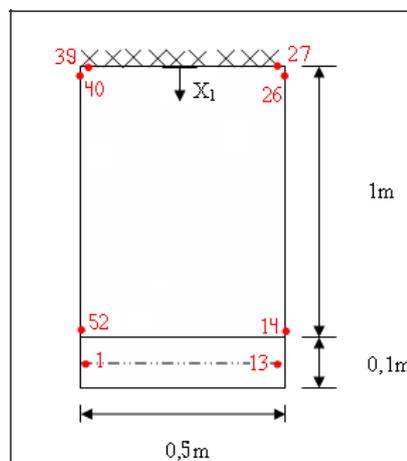


FIGURA 4.24 – Placa Enrijecida com Viga Externa

Inicialmente fez-se um estudo da convergência dos resultados considerando malhas com 16, 24, 32 e 64 elementos. Os resultados referentes às malhas de 16, 24 e 32 elementos não apresentaram diferença significativa, como observa-se na figura (4.25). Entre as malhas de 32 e 64 elementos os resultados foram praticamente idênticos, evidenciando a convergência dos resultados.

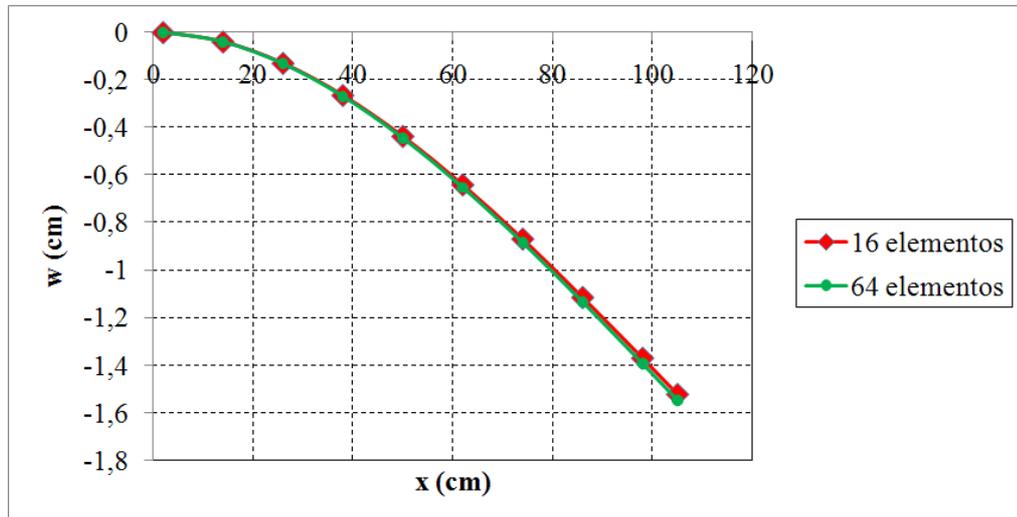


FIGURA 4.25 – Convergência dos Resultados

Os valores dos deslocamentos w ao longo do eixo x_1 (ver figura 4.24), referentes ao modelo proposto, ao modelo baseado nas hipóteses de Kirchhoff e ao ANSYS, são apresentados na figura (4.26). Comparando os resultados obtidos a partir do modelo proposto com aqueles obtidos a partir do ANSYS, observa-se uma diferença relativa máxima de 1,55%, não representando relevância significativa nos resultados.

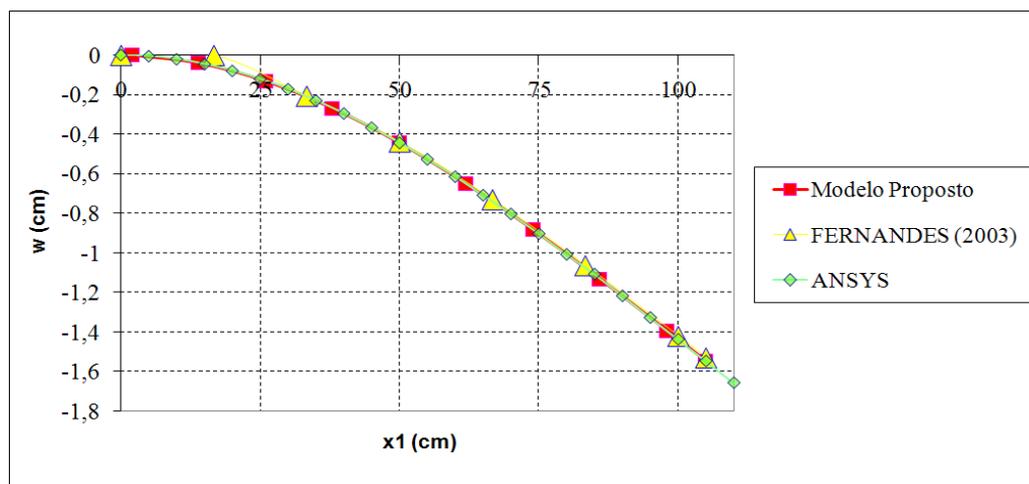


FIGURA 4.26 – Deslocamento w ao Longo do Eixo x_1

Para os nós do engaste, o valor do momento obtido com a solução analítica foi $M_n = 10,5 \text{ KNm/m}$, com o ANSYS foi $M_n = 10,25 \text{ KNm/m}$ e com o modelo proposto foi

$M_n = 10,37 \text{ KNm/m}$ (ver figura 4.27), ou seja, comparando o valor referente ao modelo proposto com os valores obtidos com a solução analítica e com o ANSYS, tem-se, respectivamente, um erro de 0,12% e 1,17%, não apresentando diferença expressiva nos resultados.

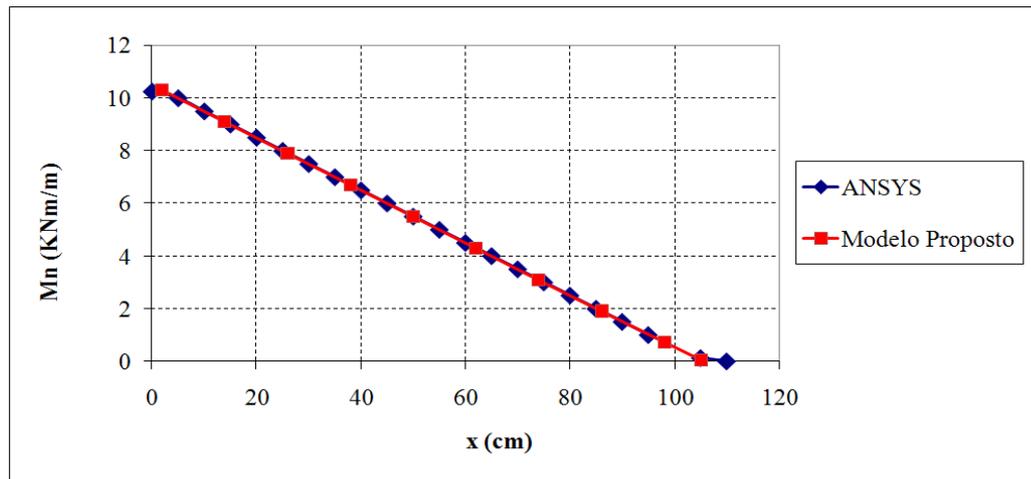


FIGURA 4.27 – Momento M_n ao Longo do Eixo X_1

4.9.5 PLACA APOIADA, ENRIJECIDA COM DUAS VIGAS E COM MOMENTO APLICADO.

Nesse exemplo analisa-se uma placa com módulo de elasticidade $E = 2,7 \times 10^4 \text{ KN/cm}^2$ e coeficiente de Poisson nulo. A placa é constituída por uma laje de espessura $t_L = 10 \text{ cm}$, enrijecida com duas vigas externas de espessuras $t_v = 25 \text{ cm}$, representada na figura (4.28).

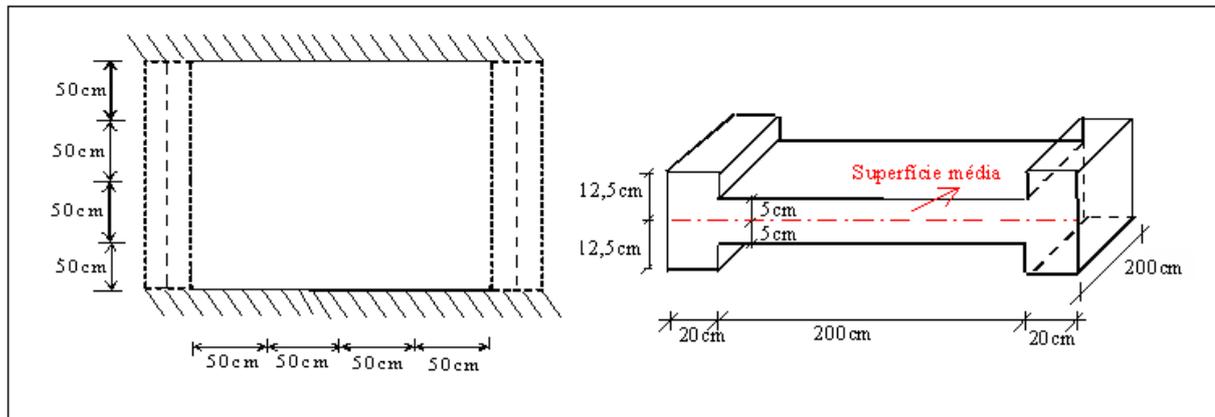


FIGURA 4.28 – Placa Enrijecida com Duas Vigas Externas

Como condições de contorno, os dois lados correspondentes às vigas são considerados livres e os outros dois apoiados. Na análise pelo modelo proposto utiliza-se a discretização apresentada na figura (4.29), onde se têm 48 elementos resultando em 100 nós ao longo do contorno e eixo de vigas.

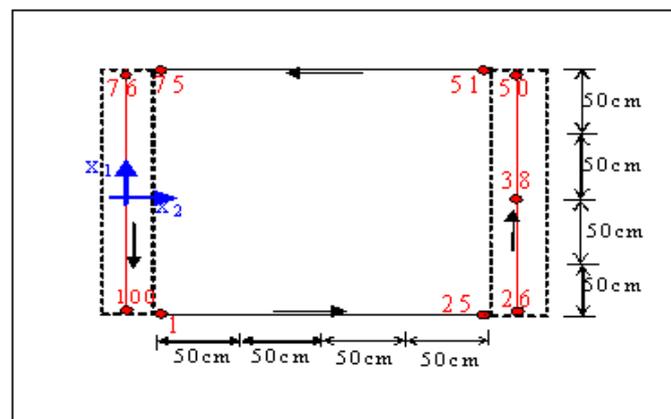


FIGURA 4.29 – Representação da Placa e Discretização do Contorno

Ao longo dos lados apoiados são aplicados momentos na laje e nas laterais das vigas de tal modo que a curvatura na placa enrijecida seja constante, pois nesse caso, a solução analítica é conhecida. Com isso, como condição de contorno nos pontos da laje aplica-se $M_{n(L)} = 150 \text{ KNcm/cm}$ e nos pontos das vigas aplica-se um momento igual à

$M_{n(V)} = \left(\frac{D_v}{D_L} \right) M_{n(L)} = 2343,75 \text{ KNcm/cm}$, sendo D_v e D_L , respectivamente, as rigidezes da

viga e da laje, sendo dadas por $\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$. Nesse caso, a laje e as vigas devem se comportar de modo independente como se fossem vigas bi-apoiadas e com momentos aplicados nas extremidades (ver figura (4.30)).

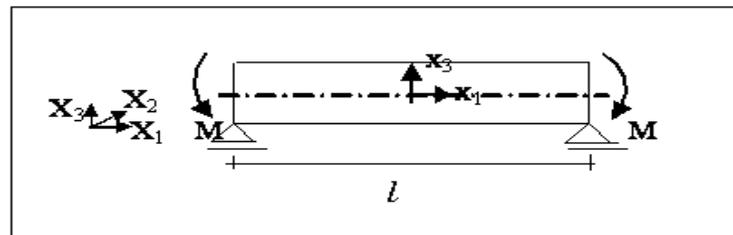


FIGURA 4.30 – Viga Sujeita a Momento Fletor

Como resultado, espera-se deslocamentos iguais na laje e nas vigas para pontos situados em uma mesma coordenada x_1 (ver figura 4.29). Os valores do deslocamento w ao longo da viga ou da laje e o da rotação no apoio podem ser obtidos analiticamente, através das seguintes equações:

$$w = \frac{M}{2EI} \left(\frac{l^2}{4} - x_1^2 \right) \quad (4.65)$$

$$\phi_1 = \frac{\delta w}{\delta x_1} = \frac{M}{EI} x_1 \quad (4.66)$$

Note-se que em todos os pontos da laje e das vigas existe momento apenas na direção x_1 , devendo esse ser igual, respectivamente, à $M_{2(L)} = 150 \text{ KNcm/cm}$ e $M_{2(V)} = 2343,75 \text{ KNcm/cm}$. Deve-se observar ainda que $Q_n = 0$ e $\phi_n = cte$ ao longo dos dois apoios e $\phi_n = 0$ ao longo dos dois lados livres.

Como respostas, se obtiveram todos os resultados esperados, sendo o comportamento do deslocamento transversal ao longo das vigas representados na figura (4.31). O valor obtido, pelo modelo proposto para a rotação ϕ_n no apoio foi igual ao analítico, ou seja, $\phi_n = 0,006667$.

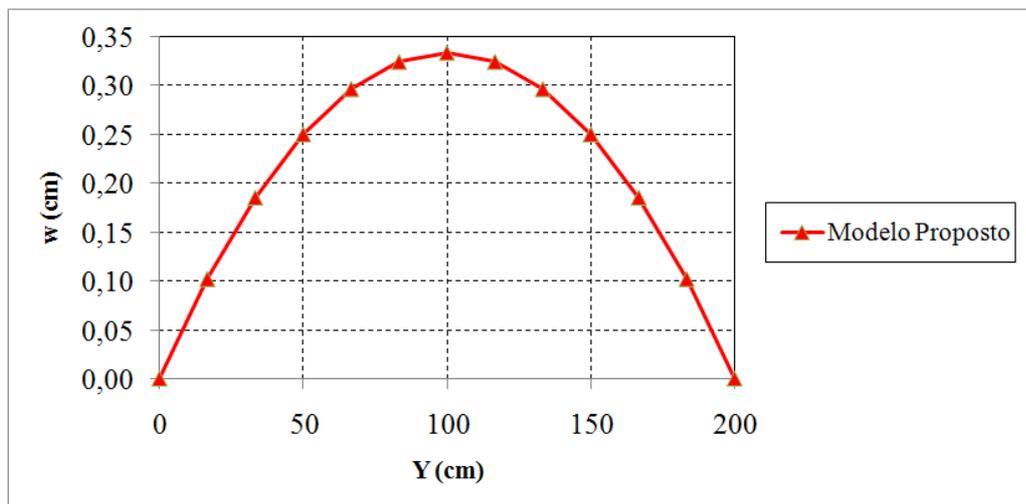


FIGURA 4.31 – Deslocamento ao Longo do Eixo da Viga

Na tabela (4.2) têm-se os deslocamentos referentes ao modelo proposto, nos pontos internos (figura (4.32)) e nos pontos dos eixos das vigas de coordenadas $x_1 = \pm 50\text{cm}$, $x_1 = 0\text{cm}$.

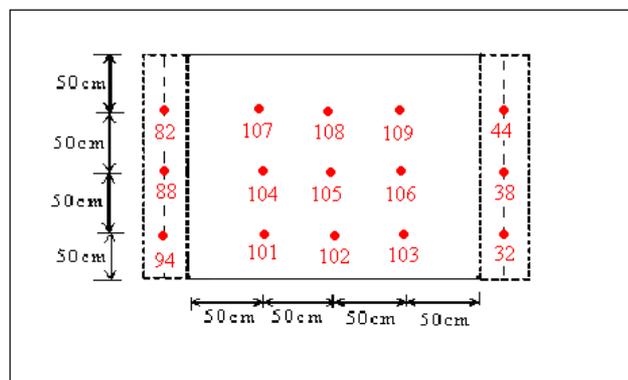


FIGURA 4.32 – Pontos Internos

TABELA 4.2 – Deslocamentos nos Pontos Internos

| Ponto | $x_1(\text{cm})$ | $w(\text{cm})$ | $\varnothing_1(\text{cm/cm})$ | $\varnothing_2(\text{cm/cm})$ |
|------------------------|------------------|----------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 101, 102, 103, 94 e 32 | -50 | 0,25 | -0,003333 | 0 |
| 104, 105, 106, 38 e 88 | 0 | 0,3333 | 0 | 0 |
| 107, 108, 109, 44 e 82 | 50 | 0,25 | 0,003333 | 0 |

Os momentos obtidos ao longo do eixo da viga são iguais ao esperado, ou seja, de valor constante e igual a $M_{n(v)} = 2343,75 \text{ KNcm/cm}$.

4.9.6 PLACA ENGASTADA, ENRIJECIDA COM DUAS VIGAS EXTERNAS SUJEITA A CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA.

A placa a ser analisada neste exemplo está representada na figura (4.33), onde se tem um pavimento composto por uma laje enrijecida por duas vigas externas. Como condição de contorno, em um dos lados perpendicular aos eixos das vigas, é considerado engaste ($w = 0$, $\phi_n = 0$ e $\phi_s = 0$) e os restantes dos lados livres ($Q_n = 0$, $M_n = 0$ e $M_{ns} = 0$).

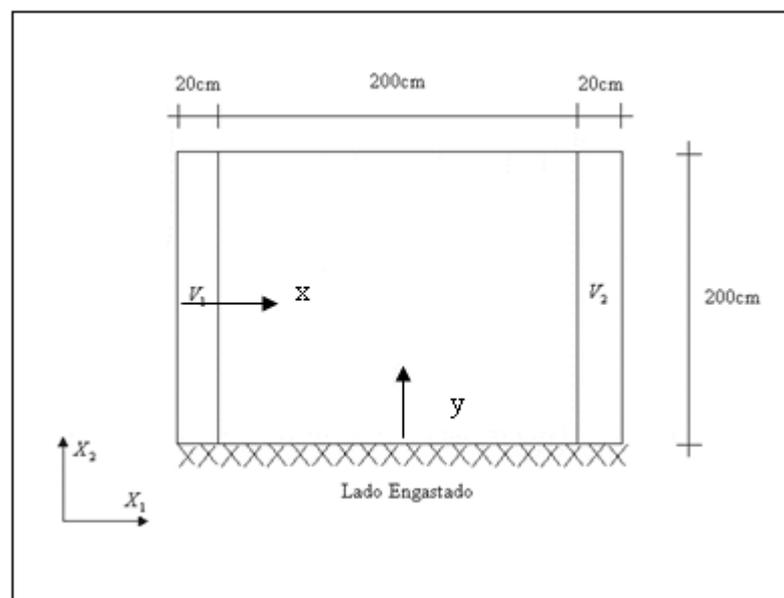


FIGURA 4.33 – Laje Enrijecida com Duas Vigas Externas

Sobre todo o pavimento é considerando um carregamento $q = 0,04 \text{ KN/m}^2$. O módulo de elasticidade adotado foi $E = 27000 \text{ KN/m}^2$ e o coeficiente de Poisson foi $\nu = 0,2$. A laje possui espessura $t_L = 10\text{cm}$ e as vigas $t_v = 25\text{cm}$.

No modelo proposto foi utilizada uma discretização constituída de 96 elementos, resultando em 196 nós definidos sobre os eixos de vigas e contorno externo sem vigas (figura (4.34)). Na análise com o ANSYS utilizou-se elementos quadrados de lado igual a 5 cm, resultando em um total de 480 elementos.

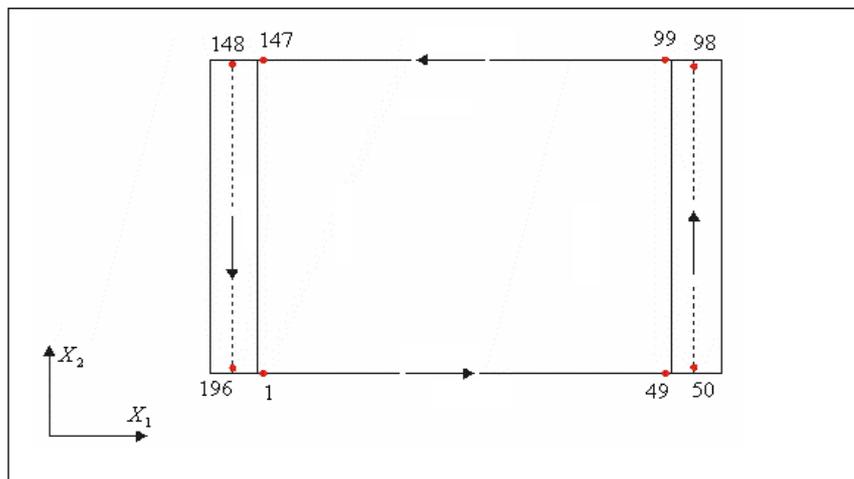


FIGURA 4.34 – Discretização com 96 Elementos

Na análise de convergência dos resultados foram consideradas quatro malhas, sendo tais malhas compostas por 40, 60, 96 e 200 elementos. Nas figuras (4.35) e (4.36), tem-se respectivamente, os deslocamentos e momentos na direção X obtidos para o eixo X (ver figura (4.33)).

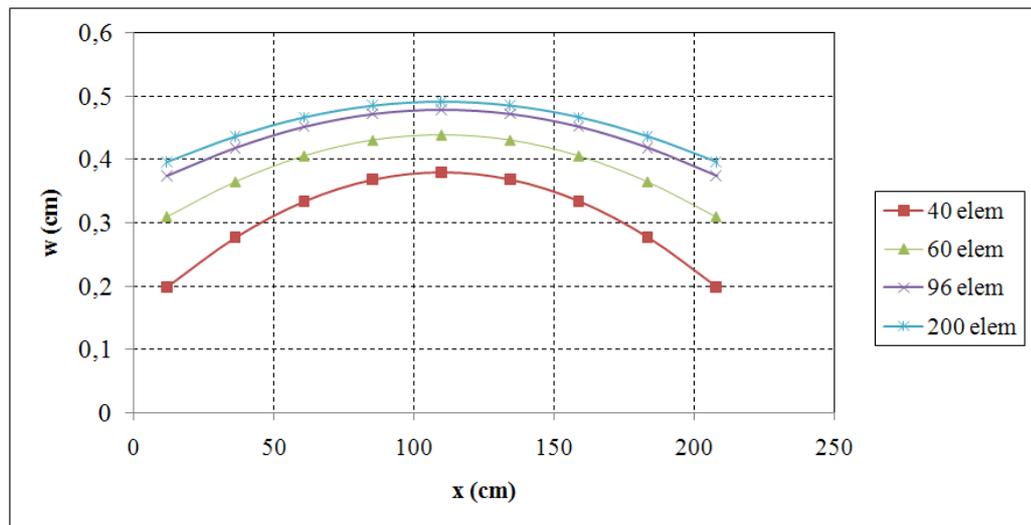


FIGURA 4.35 – Deslocamentos ao Longo do Eixo X

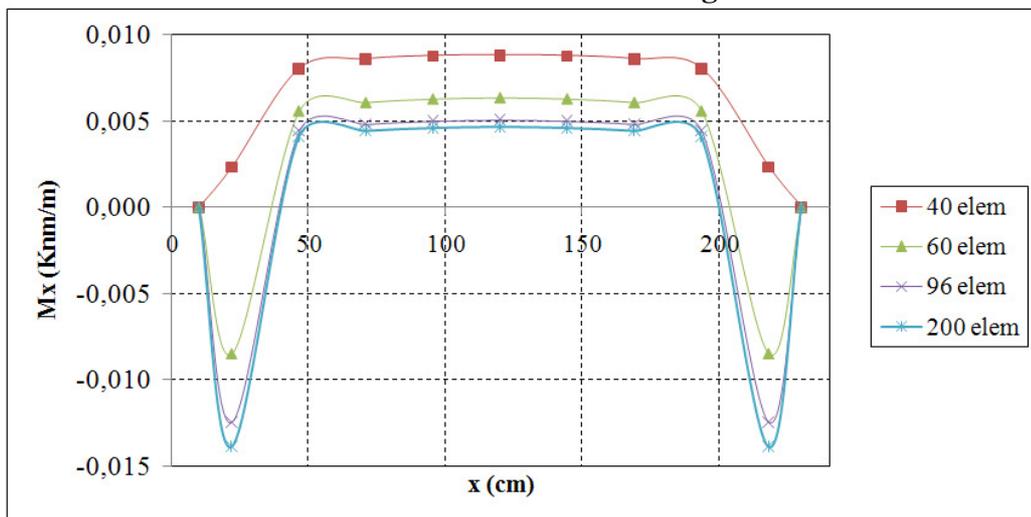


FIGURA 4.36 – Momento M_x ao Longo do Eixo X

Na figura (4.35), os deslocamentos referentes à malha mais refinada se aproximam bastante daqueles da discretização de 96 elementos, com uma diferença relativa de 2,73% entre os deslocamentos máximos. Essa diferença foi de quase 50% para os valores obtidos com as malhas menos refinadas.

Quanto à convergência dos valores do momento M_x , esta teve a mesma velocidade que a convergência dos valores de deslocamentos. Como se pode observar na figura (4.36), já na malha de 60 elementos obtêm-se bons resultados. No centro da viga ($x=120$ cm) a diferença relativa no valor de M_x foi de 38% entre as malhas de 24 e 40 elementos e de apenas 2% entre as malhas de 96 e 200 elementos.

Os resultados obtidos com o modelo proposto são comparados com aqueles obtidos com o ANSYS e também com um modelo baseado nas hipóteses de Kirchhoff. Nas figuras (4.37), (4.38) e (4.39) têm-se, respectivamente, a flecha ao longo dos eixos X e Y (ver figura (4.33)) e a flecha ao longo do eixo da viga.

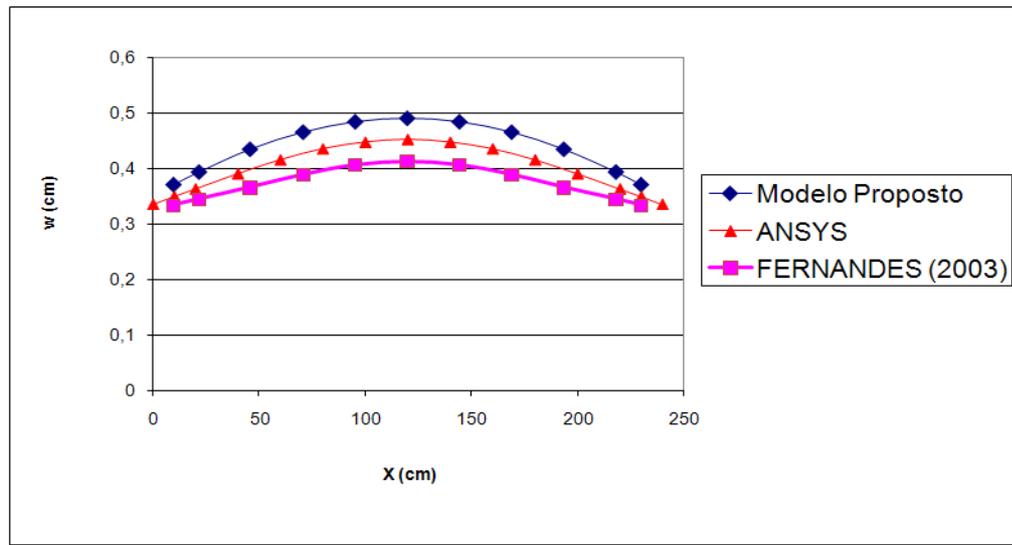


FIGURA 4.37 – Deslocamentos ao Longo do Eixo Médio X da Placa

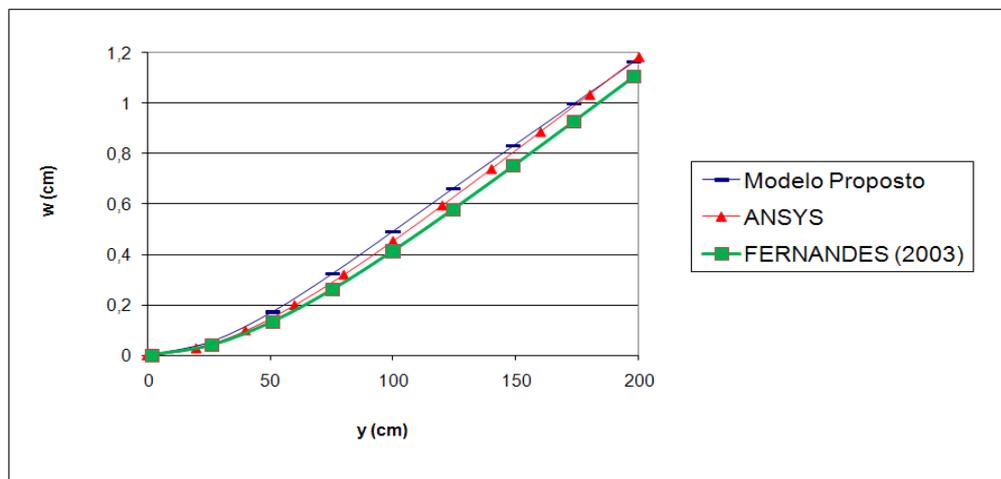


FIGURA 4.38 – Deslocamentos ao Longo do Eixo Médio Y da Placa

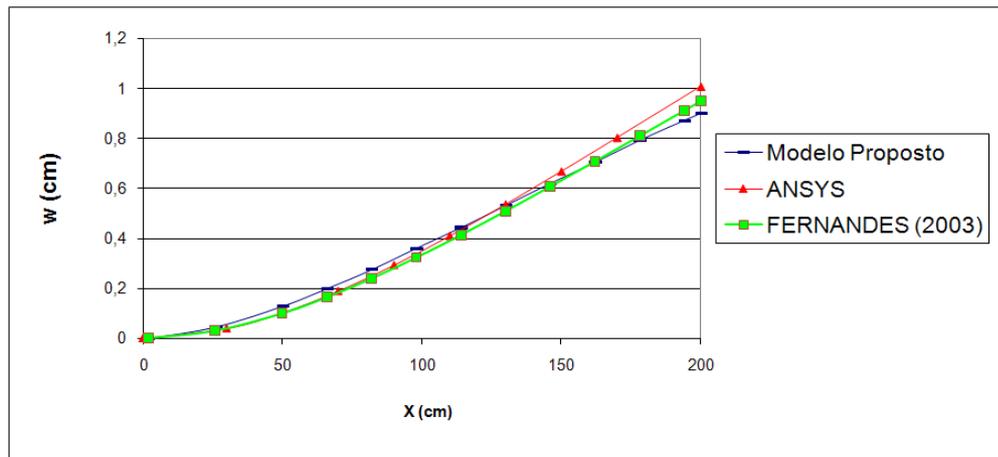


FIGURA 4.39 – Deslocamentos ao Longo do Eixo Médio da Viga

Nas figuras (4.37), (4.38) e (4.39) pode-se notar que os deslocamentos obtidos com o modelo proposto foram muito próximos daqueles obtidos com o ANSYS, com uma diferença relativa de aproximadamente 7% no valor do deslocamento do ponto central da placa. Essa diferença foi de 19% para o modelo Fernandes (2003).

Os momentos ao longo do eixo X e ao longo do eixo Y são apresentados nas figuras (4.40) e (4.41), onde se faz uma comparação com o ANSYS e com um modelo baseado nas hipóteses de Kirchhoff.

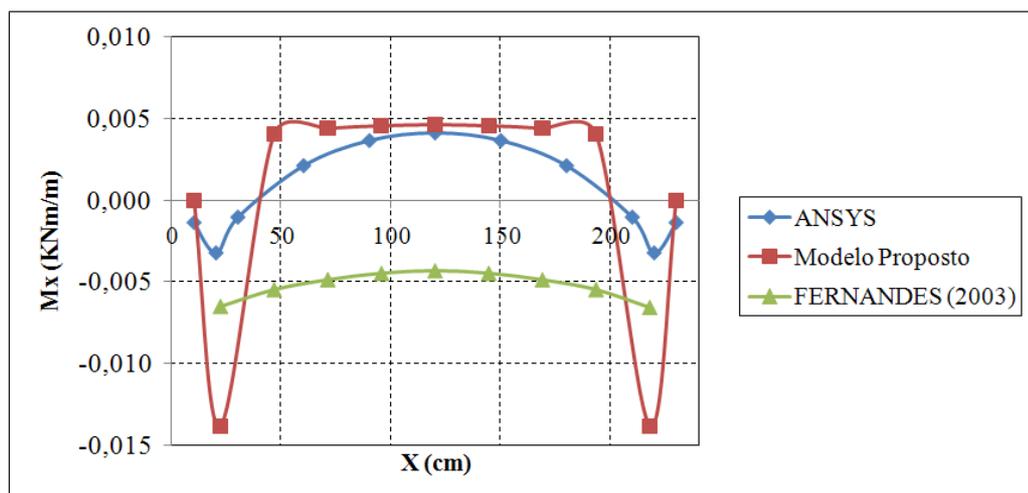


FIGURA 4.40– Momento na Direção X ao Longo do Eixo X

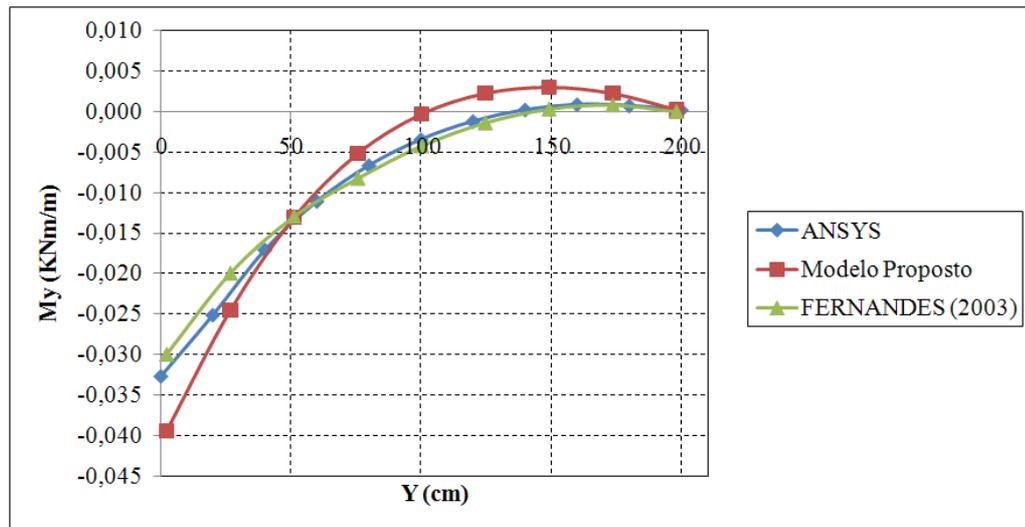


FIGURA 4.41 – Momento na Direção Y ao Longo do Eixo Y

Como se pode observar, existem diferenças significativas nos resultados obtidos com a formulação apresentada aqui com aqueles apresentados por Fernandes (2003) e com o ANSYS. Na figura (4.40), nas proximidades da viga interna nota-se um momento negativo, o qual pode ser explicado com um momento de engastamento da laje na viga.

A fim de analisar a influência da deformação por cortante no exemplo dado foi feita uma análise de uma placa simples, sem vigas, com as mesmas dimensões e condições de contorno apresentados na figura (4.33) onde se adotaram as seguintes espessuras para a placa: $t=20\text{cm}$ e $t=30\text{cm}$. Adotaram-se esses valores para a espessura, a fim de se ter placas muito espessas. Para $t=20\text{cm}$, ou seja, a espessura representando 10% da menor dimensão da placa, as diferenças entre os deslocamentos máximos relativos, considerando-se o modelo proposto e o modelo apresentado por Fernandes (2003) foi de 1,4%. Já para $t=30\text{cm}$, ou seja, a espessura representando 15% do valor da menor dimensão da placa, a diferença foi de 2,8%. Portanto, nesse caso não se obtiveram diferenças significativas entre as análises feitas com as hipóteses de Reissner e aquelas onde se considerou a teoria clássica de Kirchhoff. Esses resultados foram confirmados na análise com o ANSYS, onde se utilizou dois tipos de elementos: um que considerava a deformação devido ao esforço cortante e outro que não levava em conta essa deformação. Logo, nesse exemplo particular, mesmo com placas bem espessas, a influência da deformação por esforço cisalhante não foi relevante. Portanto, pode-se explicar o fato dos resultados apresentados anteriormente nos gráficos (4.37) a (4.39), relativos ao modelo proposto e àquele desenvolvido por Fernandes (2003), não terem sido muito diferentes.

4.9.7 PLACA APOIADA, ENRIJECIDA COM QUATRO VIGAS EXTERNAS COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA.

Neste exemplo será analisado um pavimento composto de uma laje enrijecida apenas com vigas externas, apresentado na figura (4.43). Todos os lados são apoiados, ou seja, $w = 0$, $M_n = 0$ e $M_{ns} = 0$ nos eixos das vigas externas. Uma carga uniformemente distribuída $q = 20 \text{ KN/m}^2$ é aplicada sobre todo o pavimento. Para as lajes foram adotados: espessura $t_L = 8 \text{ cm}$, módulo de elasticidade $E = 25000000 \text{ KN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. Para as vigas, adotam-se o mesmo módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, porém espessura $t_V = 25 \text{ cm}$.

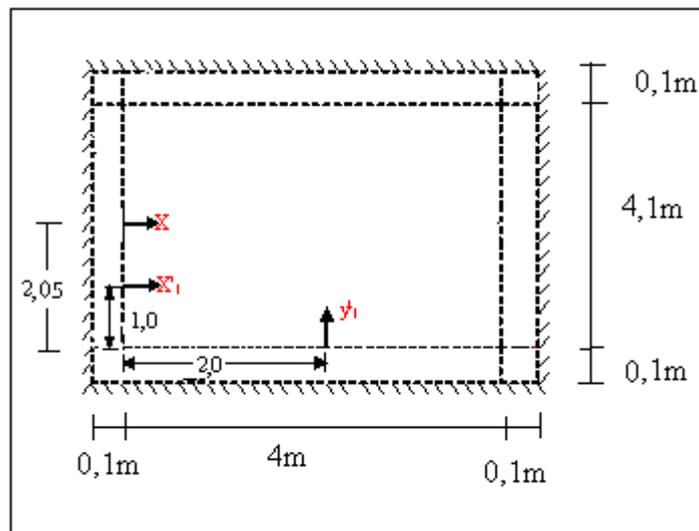


FIGURA 4.42– Dimensões da Placa – Eixos de Referência

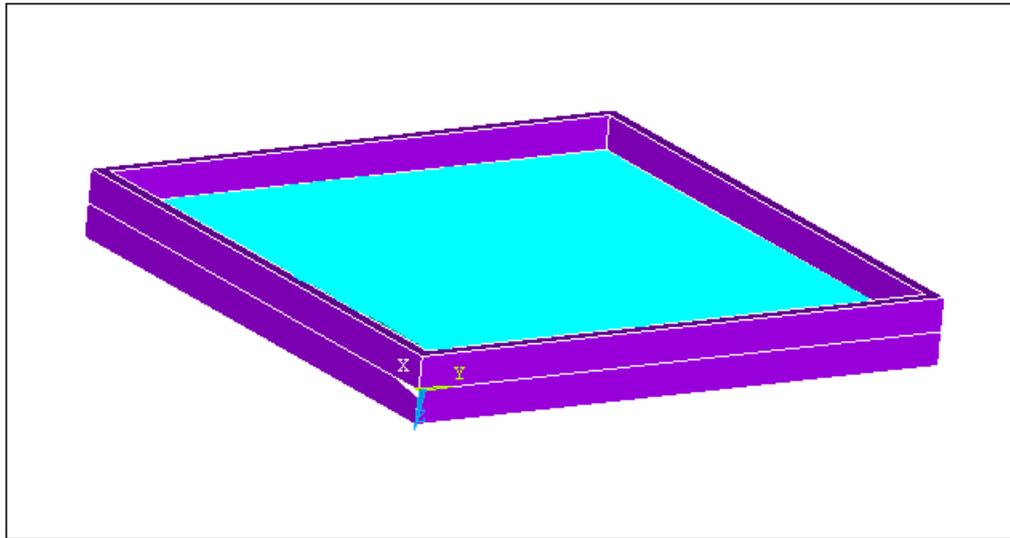


FIGURA 4.43– Representação Tridimensional do Pavimento

Na análise feita pelo modelo proposto utilizou-se uma discretização composta de 98 elementos e 196 nós, de acordo com a figura (4.44). Já na análise feita com o ANSYS, a discretização do domínio foi feita com elementos quadrados com lados de 5 cm (ver figura (4.44)), resultando em um total de 7224 elementos.

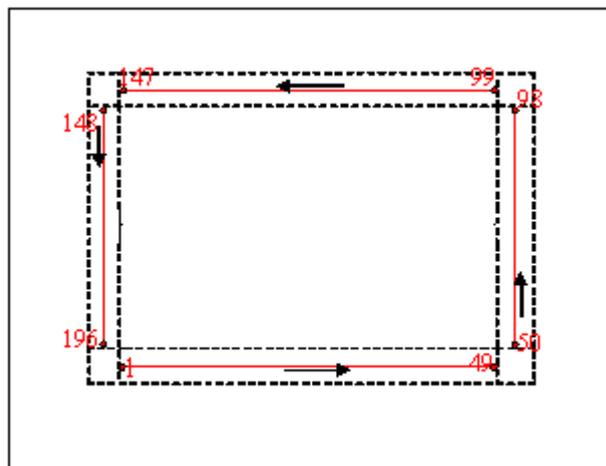


FIGURA 4.44– Discretização do Contorno do Pavimento

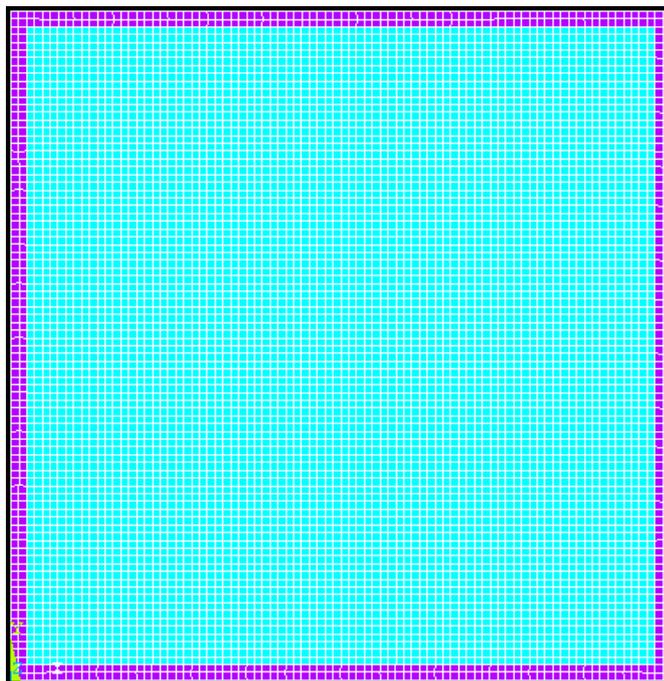


FIGURA 4.45 - Discretização do Domínio – Superfície Média (ANSYS)

A variação do deslocamento transversal ao longo dos eixos x , x'_1 e y'_1 (ver figura 4.42) estão, respectivamente, nas figuras (4.46), (4.47).e (4,48).

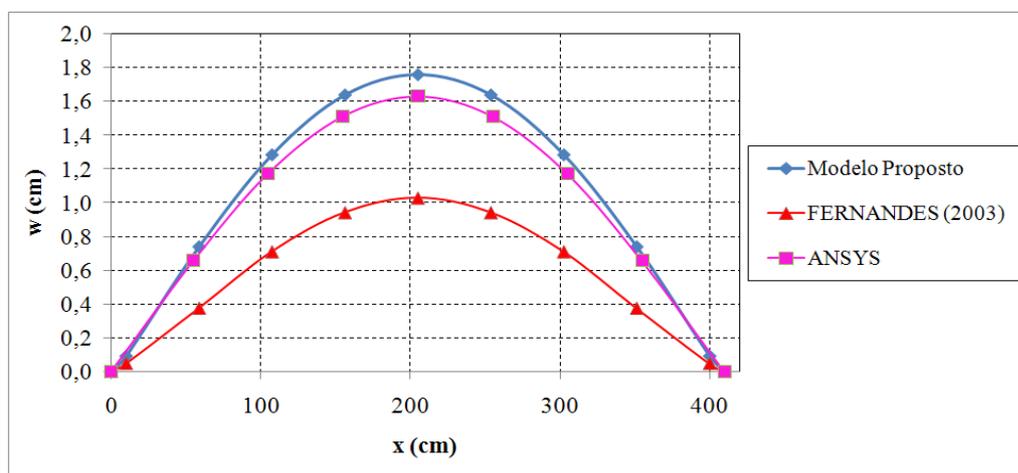


FIGURA 4.46 – Deslocamentos na Laje ao Longo do Eixo x

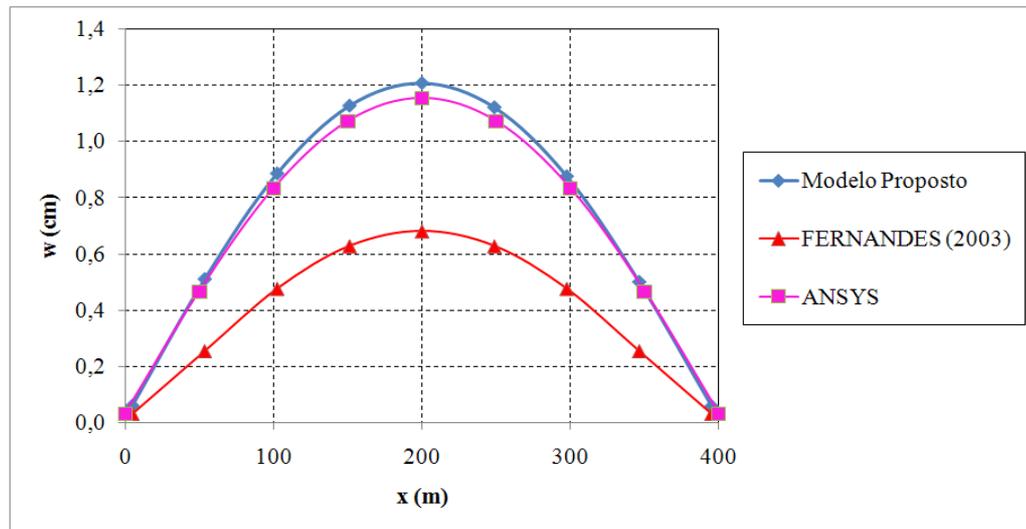


FIGURA 4.47 – Deslocamentos na Laje ao Longo do Eixo x'_1

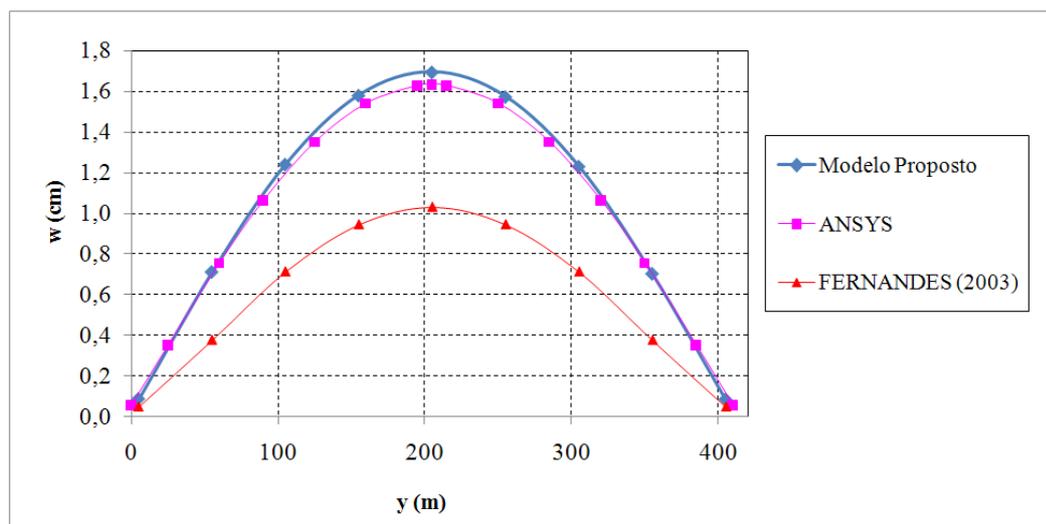


FIGURA 4.48 – Deslocamentos na Laje ao Longo do Eixo y'_1

Note-se que nos gráficos (4,46), (4,47) e (4,48), os deslocamentos do modelo proposto estão próximos daqueles obtidos com o ANSYS. É interessante observar que o deslocamento máximo da placa sem vigas externas é de $2,154\text{cm}$. Assim as vigas externas diminuiram a flecha máxima em 21%.

Quanto à convergência dos resultados, foram analisadas três malhas, sendo elas compostas de 36, 64 e 96 elementos. Os valores dos deslocamentos e momentos apresentaram uma variação insignificante à medida que a malha foi refinada, uma vez que, bons resultados já foram obtidos com a malha mais pobre, ou seja, com a malha de 36 elementos (figura (4.49)).

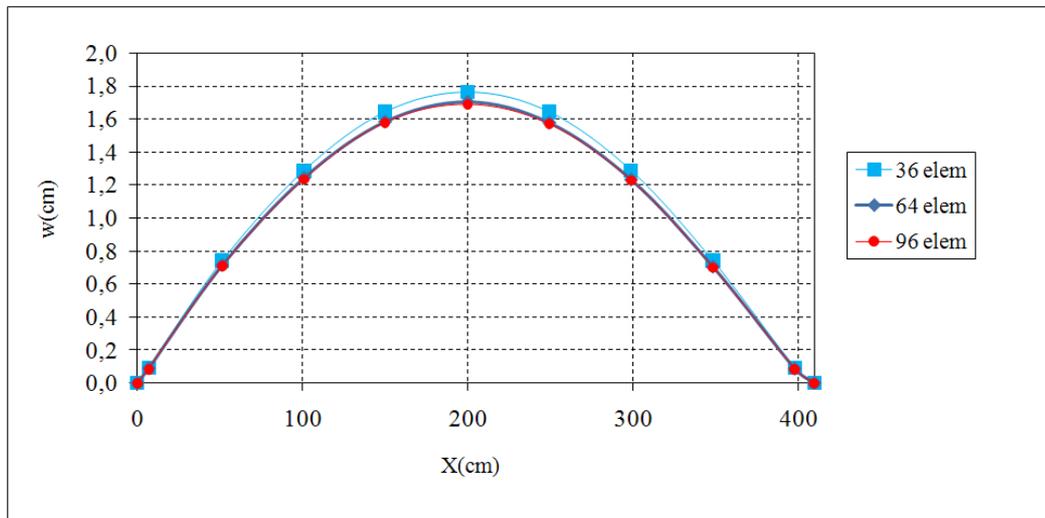


FIGURA 4.49 – Deslocamentos ao Longo do Eixo X

Nas figuras (4.50) e (4.51) são apresentados, respectivamente o momento na direção X ao longo do eixo x e o momento na direção Y ao longo do y'_1 (ver figura 4.42), onde observa-se que os valores obtidos com o modelo proposto se aproximam muito daqueles obtidos com o ANSYS. Já os valores obtidos em Fernandes (2003) apresentam diferenças significativas nos resultados, evidenciando a importância da consideração da deformação por esforço cisalhante.

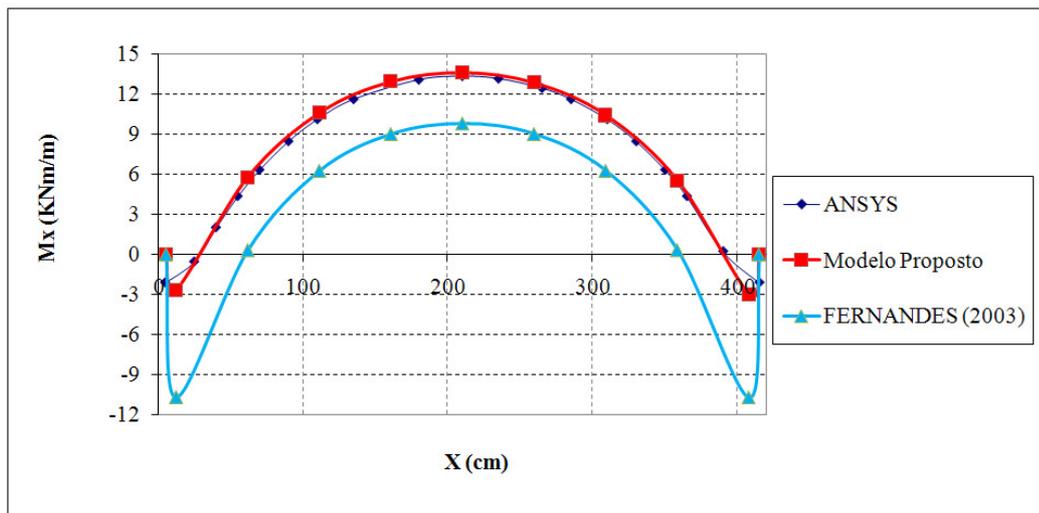


FIGURA 4.50 – Variação do Momento na Direção X ao Longo do Eixo x

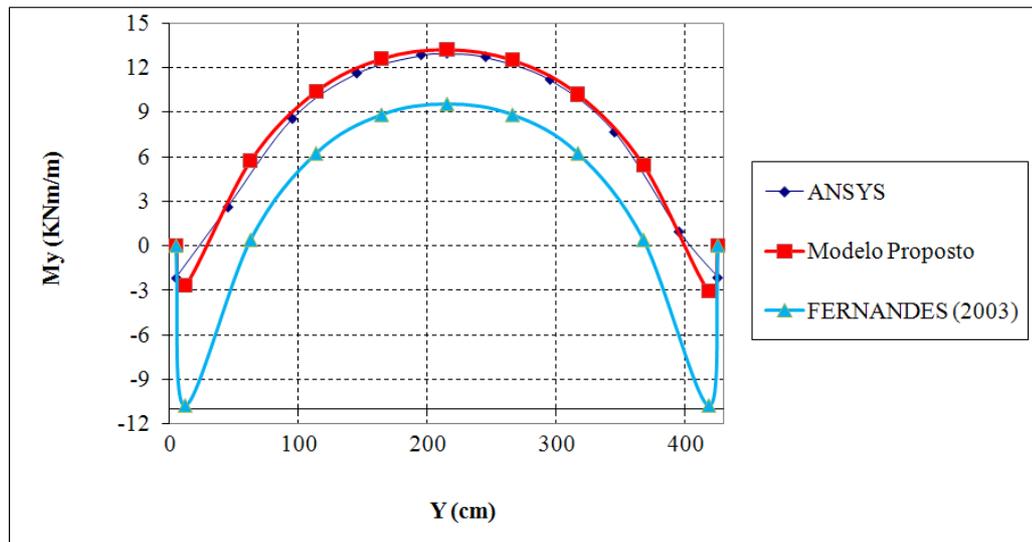


FIGURA 4.51– Variação do Momento na Direção Y ao Longo do Eixo y'_1

4.9.8 PLACA, ENRIJECIDA COM VIGAS EXTERNAS E UMA VIGA INTERNA COM CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA.

Nesse exemplo será analisado o caso de um pavimento, enrijecido por uma viga interna e vigas de contorno, de acordo com a figura (4.52), onde as dimensões estão dadas em metros.

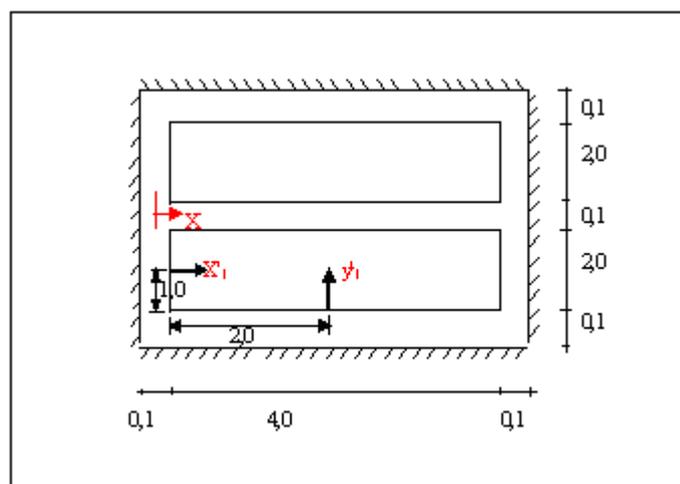


FIGURA 4.52 – Placa Enrijecida com Vigas Externas e uma Viga Interna

Como condições de contorno, a placa analisada tem todos os lados apoiados, ou seja, $w = 0$, $M_n = 0$ e $M_{ns} = 0$ em todos os eixos das vigas externas.

Sobre todo o pavimento será considerada aplicada uma carga uniformemente distribuída $q = 20 \text{ KN/m}^2$. Para as lajes foram adotadas espessura $t_L = 8 \text{ cm}$, módulo de elasticidade $E = 25000000 \text{ KN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. Para as vigas, adota-se espessura $t_v = 25 \text{ cm}$, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson iguais aos da laje.

A fim de verificar a convergência dos resultados foram analisadas quatro malhas. A primeira composta de 44 nós ao longo das vigas externas e 9 nós para representar a viga interna, resultando um total de 22 elementos e 53 nós como está apresentado na figura (4.53). Na segunda discretização, a partir da primeira, aumentam-se quatro elementos nos lados maiores e dois nos lados menores, resultando em 42 elementos e 106 nós. A terceira e quarta malhas são obtidas a partir da segunda, sendo compostas respectivamente por 82 e 122 elementos.

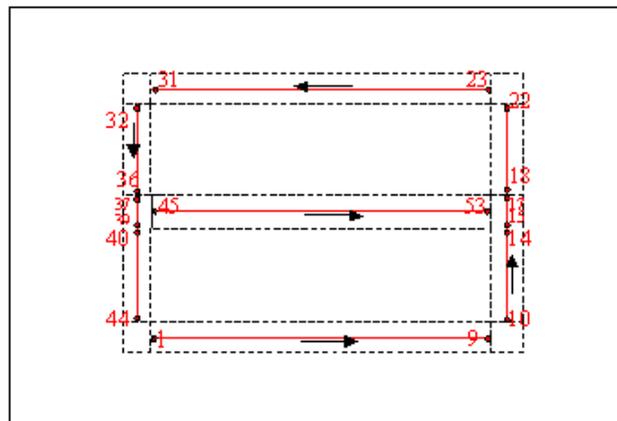


FIGURA 4.53 – Discretização Através das Linhas Médias das Vigas

Na análise de convergência dos resultados (ver figura (4.54)), foi observada uma diferença relativa máxima de 0,47% nos deslocamentos ao longo da viga interna, considerando-se a malha mais pobre e a malha mais refinada, ou seja, tem-se a convergência dos resultados mesmo na malha mais pobre. Quanto aos valores dos momentos, a diferença máxima relativa foi ainda menor, aproximadamente 0,13%.

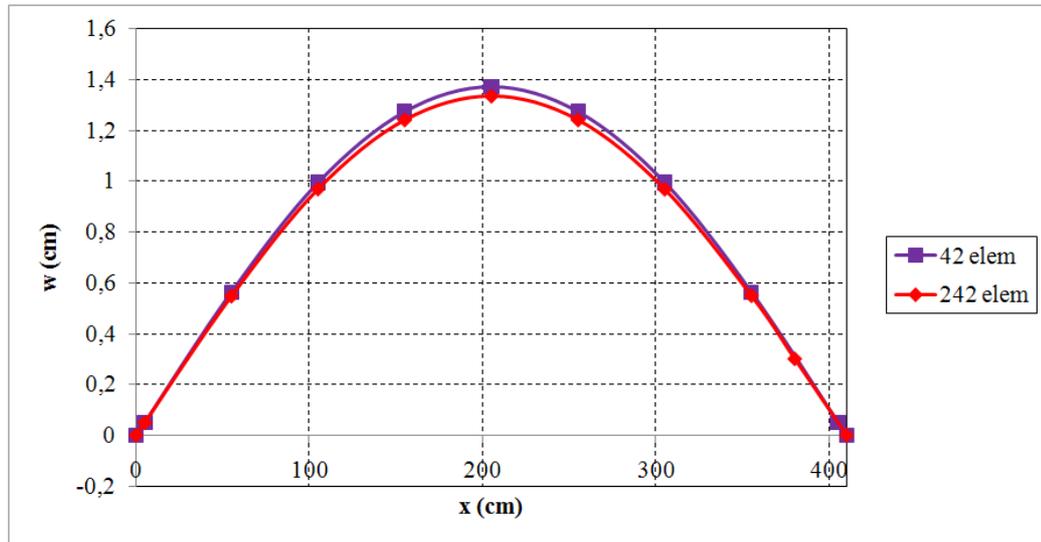


FIGURA 4.54 – Deslocamentos ao Longo do Eixo da Viga Interna

Na análise feita com o ANSYS, utilizou-se elementos quadrados com lados de 5 cm, resultando em um total de 7224 elementos. A figura (4.55) detalha a malha e a figura (4.56) apresenta o modelo 3D da estrutura, assim como a posição da superfície média, onde é feita a discretização.

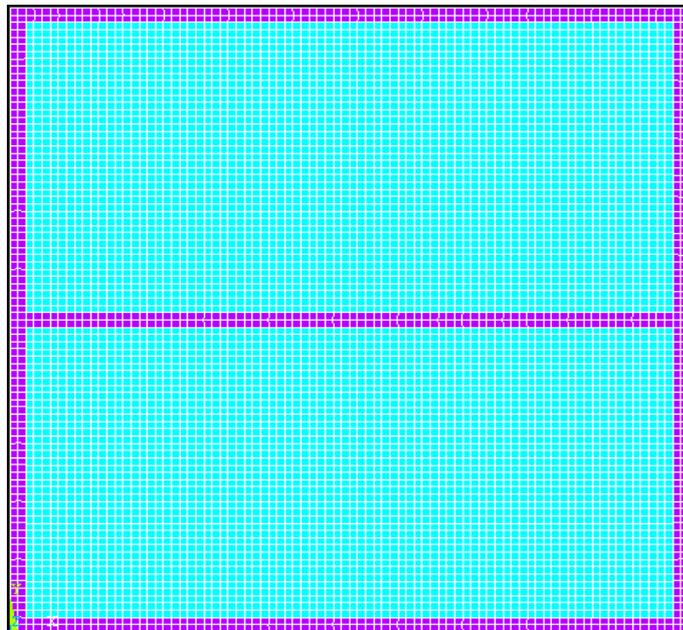


FIGURA 4.55 – Discretização do Domínio – Superfície Média (ANSYS)

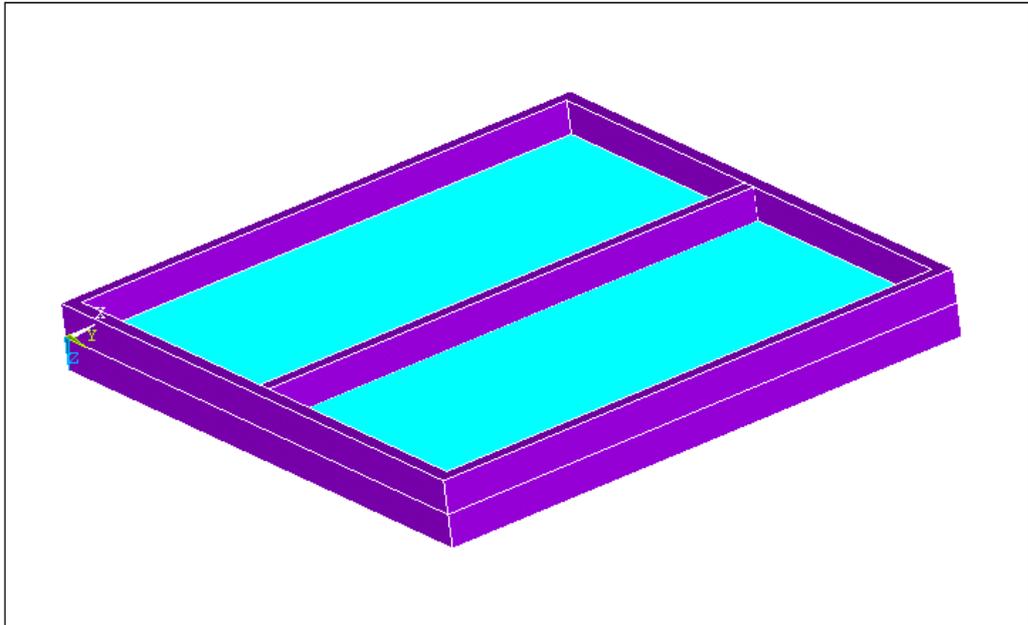


FIGURA 4.56 – Representação Tridimensional do Pavimento

Na figura (4.57), (4.58) e (4.59) têm-se os valores dos deslocamentos referentes ao modelo proposto, ao modelo baseado nas hipóteses de Kirchhoff e referentes ao ANSYS, respectivamente nos eixos da viga interna, y'_1 e x'_1 .

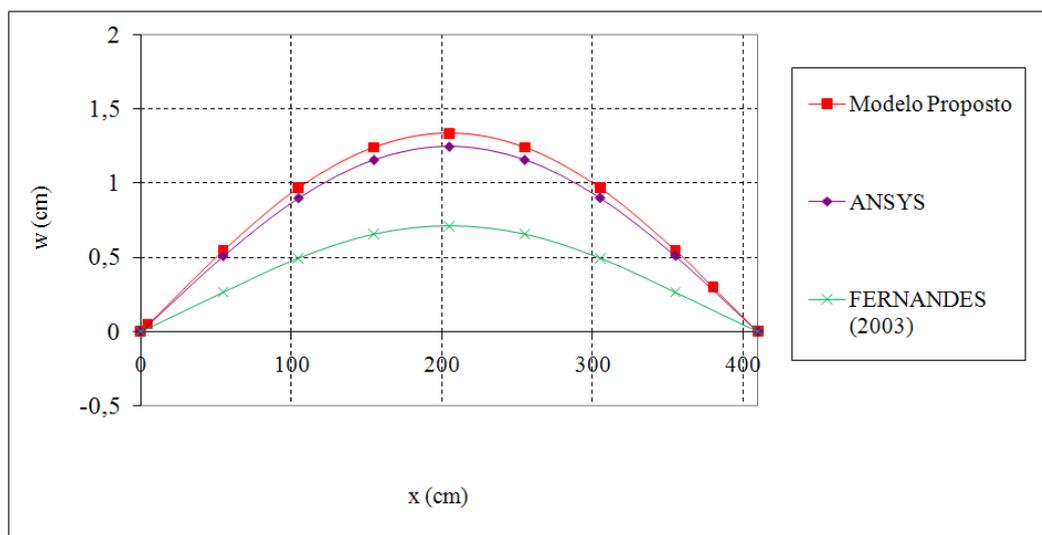


FIGURA 4.57 – Flecha na Viga Interna

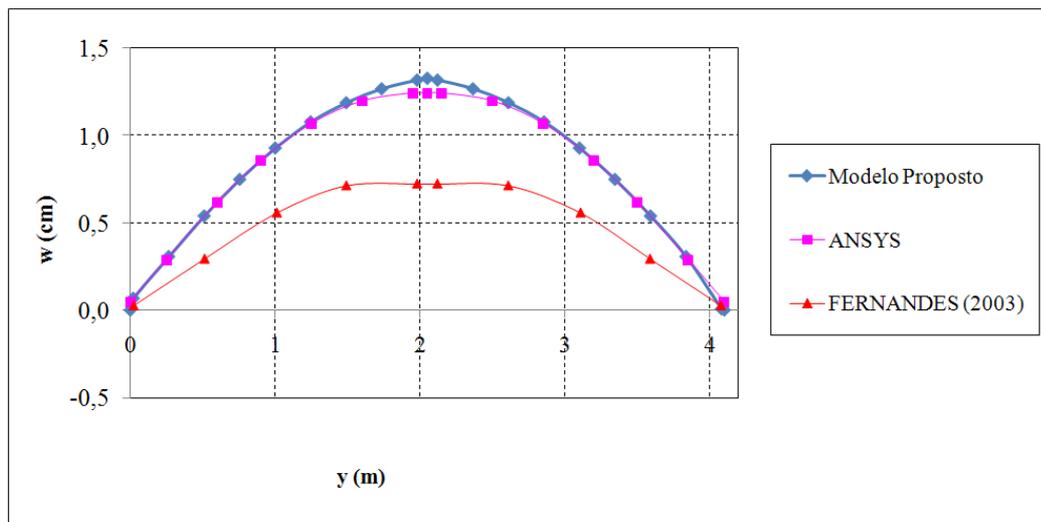


FIGURA 4.58 – Deslocamentos ao Longo do Eixo y'_1

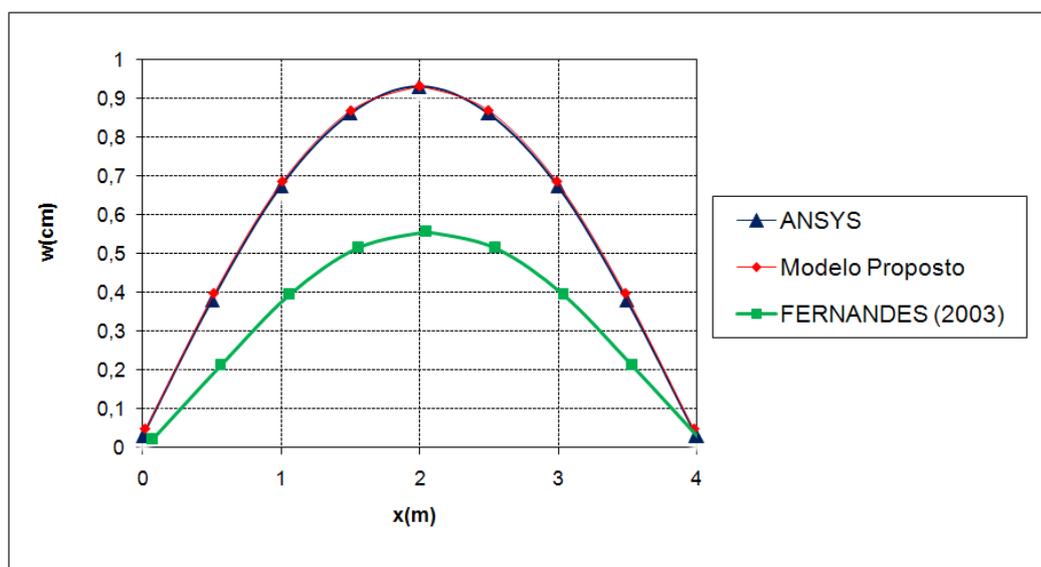


FIGURA 4.59 – Deslocamentos ao Longo do Eixo x'_1

Pode-se observar nas figuras (4.57), (4,58) e (4,59) uma diferença significativa nos valores obtidos com os dois modelos, um considerando-se as hipóteses de Reissner e o outro as hipóteses de Kirchhoff. Essa diferença é devida as deformações causadas pelo esforço cortante. Ainda nas figuras (4.57), (4.58) e (4.59), considerando os valores obtidos com o modelo proposto e com o ANSYS, nota-se que os resultados são muito próximos, não apresentando diferenças relevantes.

Note-se que comparando esse exemplo com o anterior (item (4.9.7)), a presença da viga interna diminuiu em aproximadamente 30% o valor do deslocamento máximo ao longo do eixo da viga.

É interessante dizer que os resultados apresentados para o modelo de Kirchhoff são bastante próximos dos resultados obtidos com o ANSYS, da adoção de um elemento que não leva em conta a deformação devido ao esforço cisalhante.

A variação do momento M_s , momento de flexão na direção s tangencial ao eixo da viga, ao longo do eixo da viga interna está apresentada na figura (4.60).

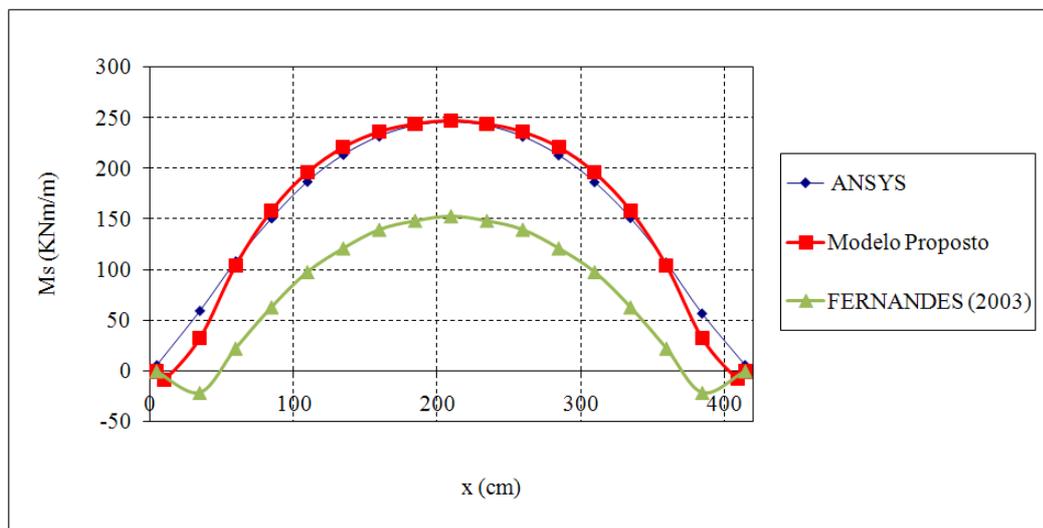


FIGURA 4.60– Variação do Momento M_s ao Longo do Eixo da Viga Interna

Na figura (4.61) tem-se o momento na direção X ao longo do eixo X_1 da placa.

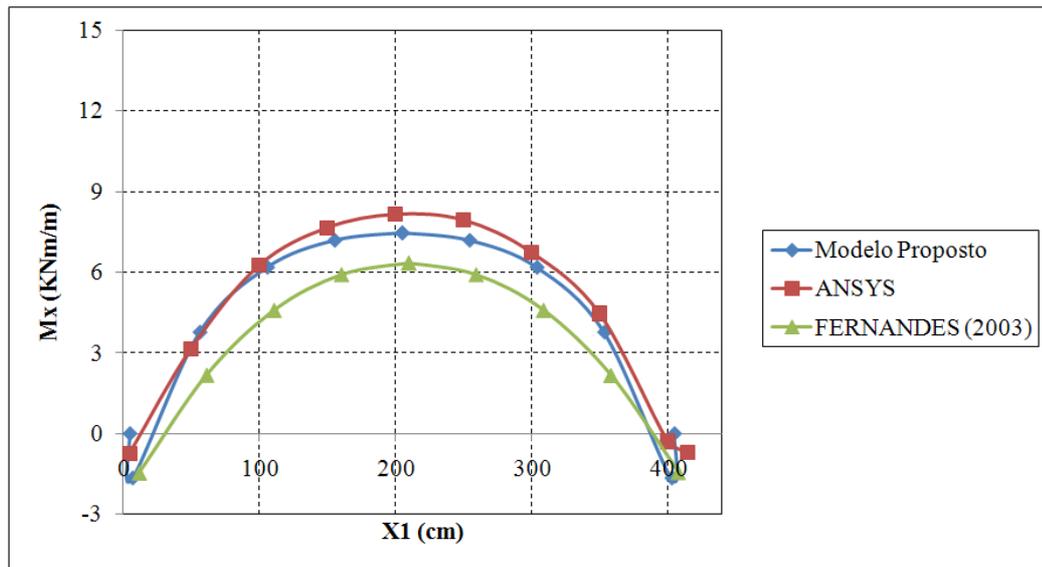


FIGURA 4.61– Momento M_x ao Longo do Eixo X_1

Nas figuras (4.60) e (4.61) pode-se observar que os resultados obtidos com o modelo proposto se aproximam bastante dos resultados obtidos com o ANSYS.

Aproveitando esse exemplo, fez-se mais uma análise adotando-se as espessuras $t_v = t_L = 8\text{cm}$. A flecha máxima na viga interna obtida com o modelo proposto foi de $2,041\text{cm}$, aquela relativa ao modelo baseado nas hipóteses de Kirchhoff foi de $2,048\text{cm}$ e a relativa ao ANSYS foi de $2,078\text{cm}$. Como era de se esperar, pois se trata de uma placa delgada, a diferença foi muito pequena, em torno de $0,4\%$. É interessante notar que a flecha máxima obtida com o modelo proposto adotando-se $t_v = 25\text{cm}$ foi aproximadamente 35% menor que aquela onde se considera $t_v = 8\text{cm}$. Para o modelo baseado nas hipóteses de Kirchhoff, a flecha máxima na viga interna referente à análise onde se admite $t_v = 8\text{cm}$ foi quase três vezes maior que aquela em que se considera $t_v = 25\text{cm}$.

4.9.9 PLACA APOIADA, ENRIJECIDA COM VIGAS NO CONTORNO EXTERNO E VIGAS INTERNAS.

Nesse exemplo será analisado um pavimento constituído por quatro lajes, enrijecidas por vigas externas e duas vigas internas. O pavimento está representado na figura (4.62), onde as dimensões são dadas em metros.

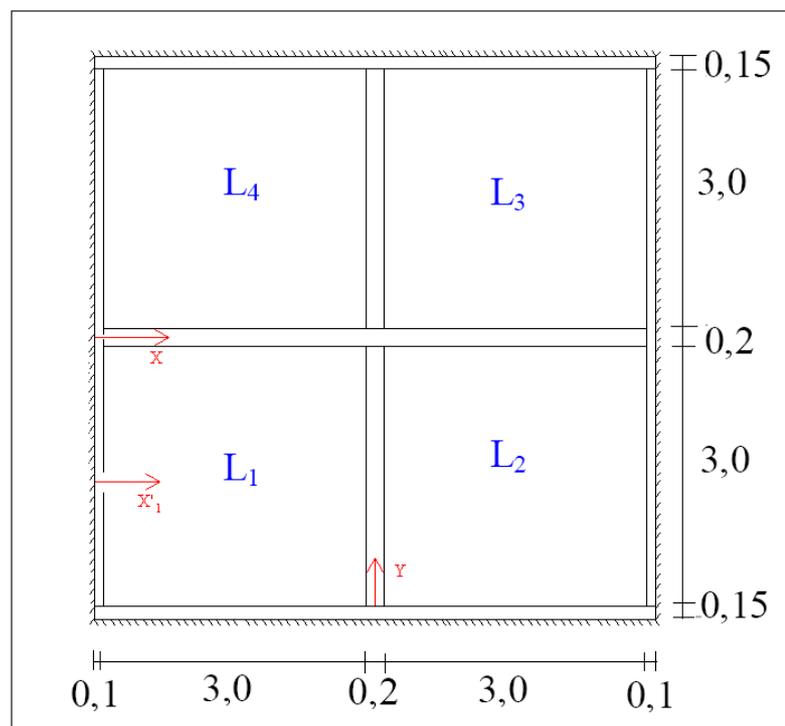


FIGURA 4.62 – Placa Enrijecida com Vigas de Diferentes Rigidezes

Como condições de contorno têm-se todos os lados da placa apoiados, ou seja, $w = 0$, $\phi_s = 0$ e $\phi_n = 0$ ao longo dos eixos das vigas de extremidades. Para todas as lajes será adotada espessura $t_L = 8\text{cm}$ e para as vigas $t_v = 25\text{cm}$.

Adotou-se ainda, módulo de elasticidade $E = 3000000 \text{ KN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,16$. Sobre todo o pavimento é considerada aplicada uma carga uniformemente distribuída de valor $q = 5 \text{ KN/m}^2$.

Inicialmente fez-se um estudo da convergência dos resultados. Para tal, foram consideradas quatro malhas, constituídas de 65, 125, 185 e 245 elementos. O deslocamento ao longo do eixo X é apresentado na figura (4.63).

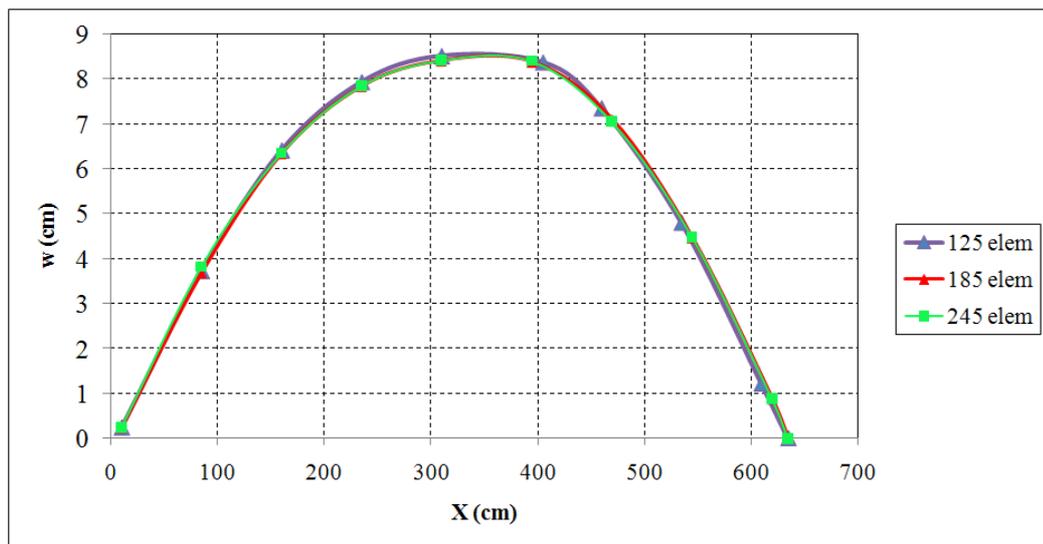


FIGURA 4.63 – Deslocamento ao Longo do Eixo X

Na figura (4.63) pode-se notar que os valores referentes à malha mais refinada são praticamente iguais àqueles da discretização de 125 elementos, com uma diferença relativa de 0,34% entre os deslocamentos máximos.

Na análise feita com o ANSYS utilizou-se elementos quadrados com lados de 5 cm, resultando em um total de 16640 elementos. A figura (4.64) detalha o comportamento do deslocamento w , obtido através do ANSYS, em toda a placa.

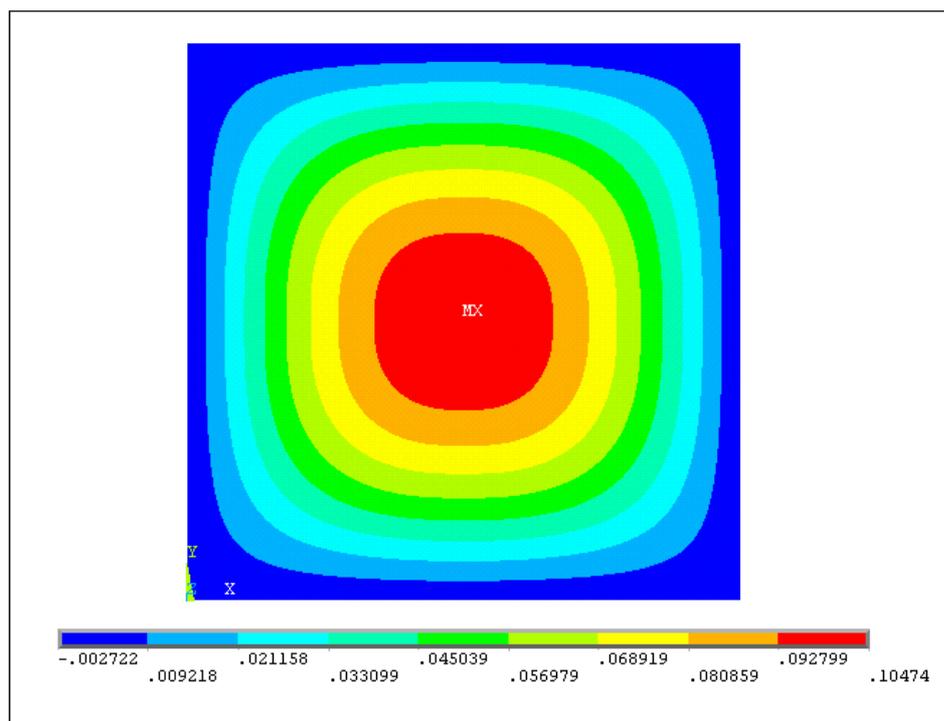


FIGURA 4.64 – Deslocamento w no Pavimento

Nas figuras (4.65) e (4.66) comparam-se os valores dos deslocamentos obtidos com o ANSYS, com um modelo baseado nas hipóteses de Kirchhoff e com o modelo proposto, respectivamente nos eixos X e X'1.

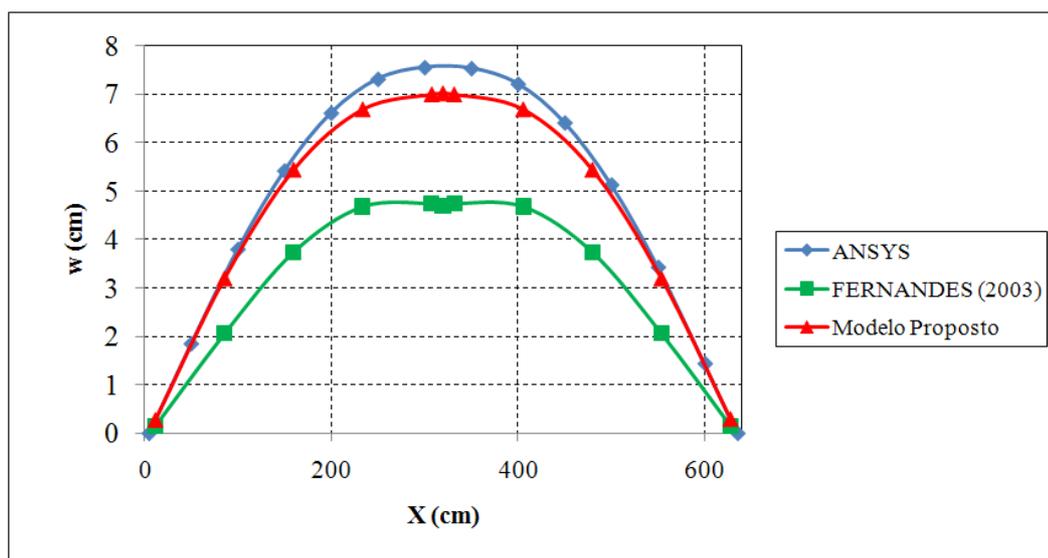


FIGURA 4.65 – Deslocamento ao Longo do Eixo X'1

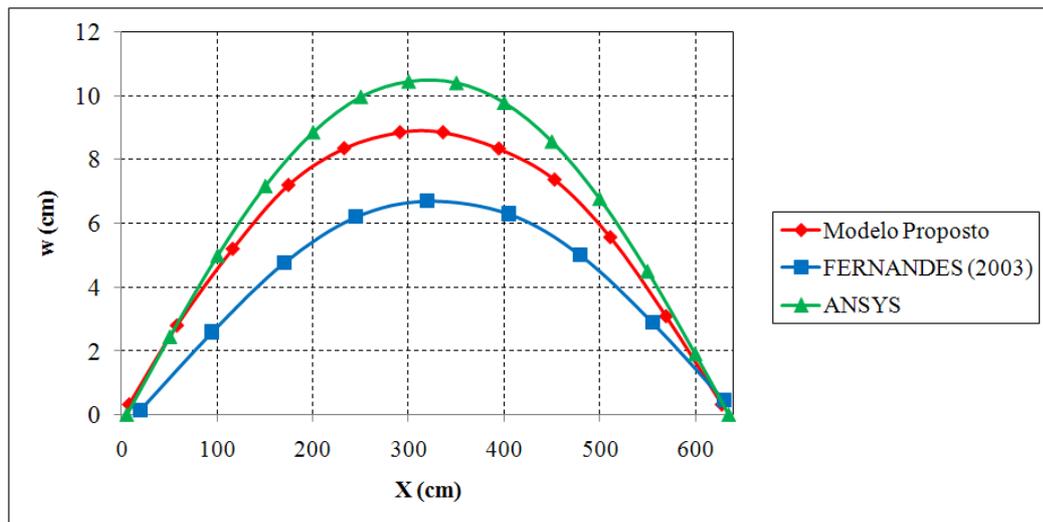


FIGURA 4.66 – Deslocamento ao Longo do Eixo X

Nas figuras (4.65) e (4.66) observa-se uma grande diferença nos valores dos deslocamentos comparando o modelo proposto com o modelo de Fernandes (2003). Já os valores obtidos com o modelo proposto e com o ANSYS, apresentam uma pequena diferença relativa. O modelo proposto apresenta-se ligeiramente mais rígido que o ANSYS. Note-se que quanto mais afastado das vigas internas, mais o deslocamento obtido com o modelo proposto se aproxima dos valores obtidos com o ANSYS.

Os valores dos momentos ao longo do eixo X'_1 estão apresentados na figura (4.67), onde compara-se os resultados obtidos com o modelo proposto, com o ANSYS e com Fernandes (2003). Na figura (4.68) apresenta-se o momento M_s ao longo do eixo Y.

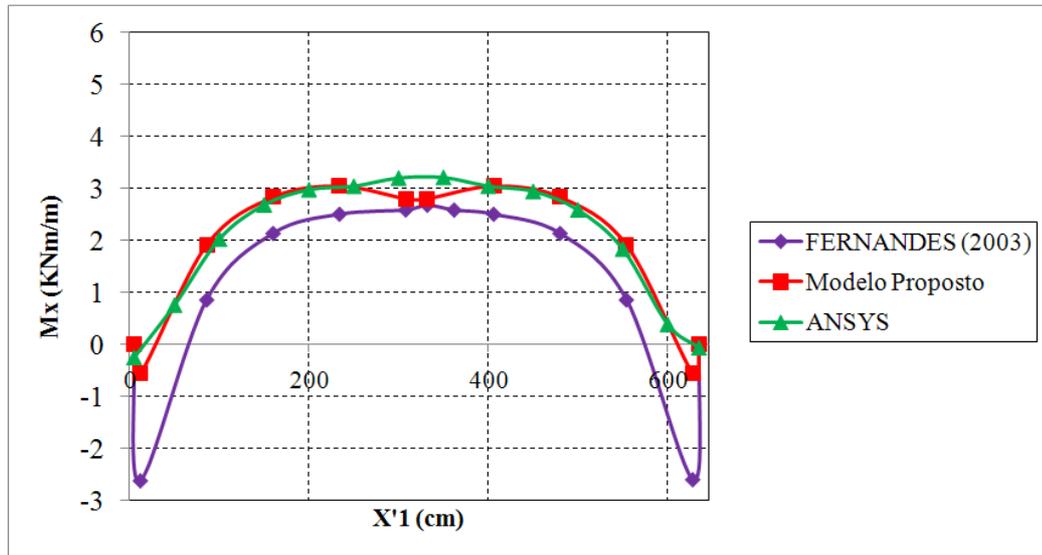


FIGURA 4.67 – Momento M_x ao Longo do Eixo X'_1

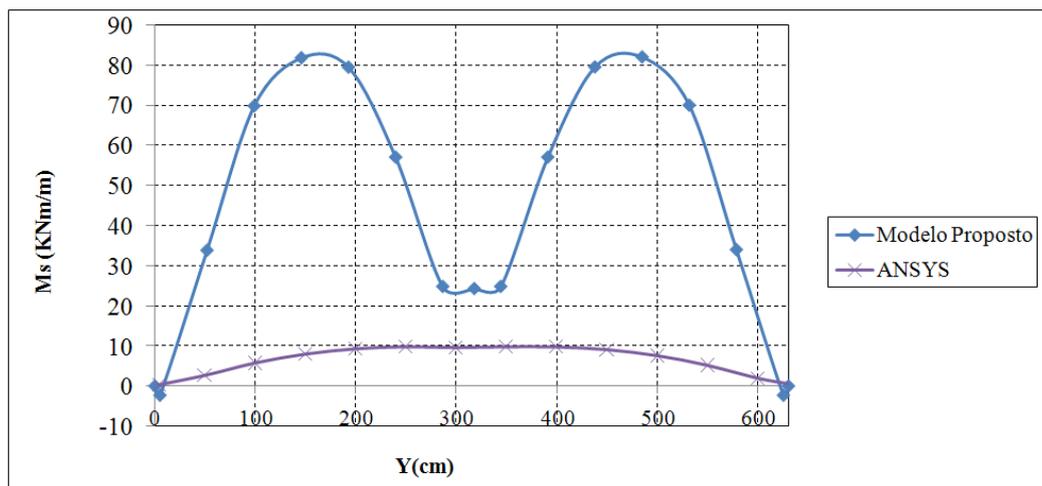


FIGURA 4.68 – Momento M_s ao Longo do Eixo Y

Na figura (4.67) nota-se que os valores relativos ao modelo proposto e ao ANSYS são muito próximos, com exceção dos valores nas proximidades de vigas. Próximo às vigas externas observa-se no modelo proposto um momento negativo, o que é coerente, representando um momento de engastamento entre a laje e a viga.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, é apresentada uma formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise linear de flexão de pavimentos de edifícios fazendo-se consideração das deformações por esforço cisalhante. O pavimento é considerado como sendo uma placa subdividida em sub-regiões, sendo cada sub-região a representação de uma laje ou viga. Nesta formulação, objetiva-se a análise de flexão simples, ou seja, as vigas e lajes são representadas pelas suas superfícies médias. Um modelo alternativo é obtido a partir da formulação apresentada, onde as variáveis ao longo das interfaces placa-viga são escritas em função de seus valores no eixo da viga. Desta forma, dispensa-se a discretização das interfaces placa-viga, discretizando-se apenas as linhas médias das vigas, o que demonstrou ser muito interessante, devido à grande redução no número de graus de liberdade do problema.

Nos exemplos numéricos cujas respostas analíticas eram conhecidas, o modelo apresentou ótimos resultados. A precisão dos resultados comprova a viabilidade da utilização do Método dos Elementos de Contorno para a análise de placas. O modelo utilizado possibilita modelar placas com geometria qualquer, incluindo placas com descontinuidades de vinculações no contorno, discretizando-se apenas o contorno externo sem vigas e eixos de vigas, o que representa vantagem em relação aos outros métodos numéricos, onde é necessário discretizar-se todo o domínio. Ressalta-se que a área onde está distribuído o carregamento pode ter qualquer forma e é independente da discretização do contorno.

Os resultados apresentaram boa convergência com o refinamento da malha, sendo que, respostas com boa precisão foram obtidas com malhas pouco refinadas. Os resultados encontrados foram comparados com aqueles obtidos através do modelo numérico desenvolvido por Fernandes (2003) ou através do *software* ANSYS (versão 10.0), que é baseado no Método dos Elementos Finitos.

Nos quatro primeiros exemplos analisados, que eram mais simples, os resultados foram próximos daqueles obtidos com outros métodos numéricos. No quinto exemplo, onde a solução analítica era conhecida, o modelo proposto produziu resultados praticamente exatos. No sexto exemplo analisou-se um pavimento um pouco mais complexo, enrijecido por vigas externas e engastado. Nesse caso, para obter a convergência foi necessária uma malha bem mais refinada.

Observou-se ainda que os deslocamentos na laje eram maiores daqueles obtidos com o modelo de Fernandes (2003), porém os deslocamentos obtidos nas vigas eram praticamente iguais a esses. No sétimo e oitavo exemplo, os deslocamentos foram muito próximos daqueles obtidos com o ANSYS, e consideravelmente maiores do que aqueles obtidos com Fernandes (2003). No nono exemplo, analisou-se um pavimento bem mais complexo, constituído de vigas externas e internas, onde observou-se um maior enrijecimento provocado pelas vigas internas, diminuindo os deslocamentos próximo destas vigas. Deve-se ressaltar que afastando das vigas internas, os deslocamentos são muito próximos daqueles obtidos com o ANSYS.

No geral, todos os exemplos apresentaram rápida convergência, produzindo resultados confiáveis, mostrando-se ser um modelo estável. Na maioria dos exemplos, os deslocamentos obtidos com o modelo proposto são maiores que aqueles relativos ao modelo de Fernandes (2003), que é baseado nas hipóteses de Kirchhoff, ou seja, não leva em conta a deformação devido ao esforço cortante. Fica-se evidenciado, dessa forma, a importância da consideração dessa deformação na análise do pavimento.

Como continuação do trabalho, seria interessante estender a formulação para poder considerar uma possível variação de espessura ao longo das lajes e vigas ou para considerar a análise de flexão composta. Nesse último caso, as sub-regiões seriam representadas por uma mesma superfície de referência, ou seja, os efeitos de membrana deveriam ser também levados em conta. Outra modificação interessante seria desenvolver a formulação para análise não-linear de pavimentos de edifícios sujeitos à flexão composta, através da inclusão de campos de momentos e forças normais iniciais na placa em sub-regiões, tornando a formulação mais geral e capaz de produzir resultados ainda mais confiáveis.

REFERÊNCIAS

ABDEL-AKHER, A.; HARTLEY, G.A. Evaluation of boundary integrals for plate bending. **Int. J. Num. Meth. Eng.**, Nova Iorque, v.28, n.2, p.75-93, 1989.

ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A. **Handbook of mathematical functions**. Nova Iorque: Dover Publications, 1965. p. 172.

AGOSTINHO, P.C. P. **Associação de chapas através da combinação do método dos elementos de contorno e finitos considerando enrijecedores e crack coesivo**. 1998. 160 f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

ALIABADI, M.H.; BREBBIA, C.A.; RASHED, Y.F. On the evaluation of the stresses in the BEM for Reissner plate-bending problems. **Appl. Math. Modelling.**, Hampshire, v. 21, n. 1, p.155-163, March, 1997.

ALMEIDA, L. P. C. P. F. **Avaliação de tensões em peças pré-fissuradas usando o método dos elementos de contorno**. 2003. 108 f. Tese (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

ALTIERO, N. J.; SIKARSKIE, L.D. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. **Computers & Structures.**, Oxford, v.9, n 1, p.163-168, 1978.

ANDRADE R C. **Uma análise das soluções fundamentais aplicáveis a placas espessas pelas teorias de Reissner e Mindlin e suas relações com a teoria clássica para uso no método dos elementos de contorno**. 2001. 248 f. Tese (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

- BACARJI, E. **Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de pavimentos de edifícios**. 2001. 160 f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.
- BARBIRATO, J. C. C. **Método dos elementos de contorno com a reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do fraturamento**. 1999. 246 f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.
- BECKER, A.A. **The boundary element method in engineering**. England: McGRAW-HILL, 1992. p. 217.
- BÉZINE, G.P. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. **Mech. Research Comm.**, Berlin, v.5, n.4, p.197-206, 1978.
- BÉZINE, G.A.; CIMETIERRE, A.; GELBERT, J.P. Unilateral buckling on thin plates by the boundary integral equation method. **Int. J. Num. Meth. Eng.**, Boston, v.28, n.21, p.2189-2199, 1985.
- BÉZINE, G.P.; GAMBY, D.A. A new integral equation formulation for plate bending problems. In: BREBBIA, C.A. **Recent advances in B.E.M.** London: Pentech Press, 1978. p. 327-342.
- BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech Press, 1978. p. 128.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques, theory and applications in engineering**. Southampton: Springer-Verlag, 1984. p. 202.
- CHAVES, E. W. V. **Análise de placas com variação de espessura através do método dos elementos de contorno**. 1997. 149 f. Tese (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

- DE BARCELOS, C. S., SILVA, L. H. M. A boundary element formulation for the Mindlin's plate. In: Brebbia, C. A., Venturini, W. S. **Boundary element techniques: applications in stress analysis and heat transfer**. Southampton: CMP, 1987. p. 98.
- EL ZAFRANY, A.; FADHIL, S.; DEBBHI, M. An efficient approach for boundary element bending analysis of thin and thick plates. **Computers & Structures**, Elmsford, v. 21, n. 3, p. 565-576, 1995.
- FERNANDES, G. R. **O método dos elementos de contorno aplicado à análise não-linear de placas**. 1998. 178 f. Tese (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.
- FERNANDES, G. R. **Análise não-linear de estruturas de pavimentos de edifícios através do método dos elementos de contorno**. 2003. 272 f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- FERNANDES, G.R.; VENTURINI, W.S. Stiffened plate bending analysis by the boundary element method. **Computational Mechanics**, Berlin, v. 28, n. 8, p. 275-281, 2002.
- FERNANDES, G. R. **Introdução ao método dos elementos de contorno**. Ilha Solteira: UNESP/FE, 2005.163p. (Material Didático).
- FERNANDES, G.R., VENTURINI, W.S. Building floor analysis by the boundary element method. **Computational Mechanics**, Berlin, v. 35,n. 12, p. 277-291, 2005.
- FERNANDES, G. R.; KONDA D. H ; SANCHES L. C. F. Analysis of the coupled stretching bending problem of stiffened plates by a BEM formulation based on Reissner's hypothesis. **International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences**., Barcelona, v. 4, n. 1,p. 576-581, 2007.
- FERNANDES, G. R.; DENADAI R. F; DENIPOTTI. G. J. BEM Formulations based on Kirchhoff's hypothesis to perform linear bending analysis of plates reinforced by beams.

International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences, Barcelona, v. 4, n. 1, p. 570-575, 2007.

FERNANDES, G. R.; KONDA D. H.; SANCHES L. C. F. Analysis of the coupled stretching bending problem of stiffened plates by a bem formulation based on reissner s hypothesis. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER, INFORMATION, AND SYSTEMS SCIENCE, AND ENGINEERING, 20, 2007, Barcelona. **Computer Science and Engeneering**... Barcelos: Science Publishers, 2007. p. 305-312.

FERNANDES, G. R.; KONDA D. H; SANCHES L. C. F. Linear analysis of building floor structures by a BEM formulation based on reissner s theory. **BEM/MRM**, New Forest, v. 29, n. 8, p. 277-291, 2007.

FERNANDES, G. R. ; KONDA D. H ; SANCHES L. C. F. Simple bending analysis of stiffened plates by a formulation of the boundary element method based on Reissner's hypothesis. **CMNE/CILAMCE**, Porto, v. 28, n. 5, p. 134-149, 2007.

FREDHOLM, I. Sur une Classe d'equations fonctionelles. **Acta Math**, Lyon, v.27, n. 2,p.365-390, 1903.

FUDOLI, C. A. **Formulação do método dos elementos de contorno e plasticidade com gradiente**. 1999. 151 f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

GRECO, M. **Análise do problema harmônico de radiação e difusão acústica, usando o método dos elementos de contorno**. 2000. 88 f. Tese (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

GUO – SHU, S.; MUKERJEE, S. boundary element method analysis of bending plates of arbitrary shape with general boundary conditions. **Engrg. Analysis**, Berlin, v.3 n.1, p. 36 – 44, 1986.

- GUPTA, N. K.; SHERIFF, N. M.; VELMURUGAN, R. Experimental and theoretical studies on buckling of thin spherical shells under axial loads. **International Journal of Mechanical Sciences**, Sydney, v. 50, n.3, p. 422-432, 2007.
- HANSEN, E. B. Numerical solution of integro-differential and singular equations for plate bending problems. **J. of Elasticity**, Essen, v.6, n.1, p.39-56, 1976.
- HARTMANN, F.; ZOTEMANTEL, R. The direct boundary element method in plate bending. **Int. J. Num. Meth. Engrg.**, Boston, v.23, n.11, p.2049-2069, 1986.
- KANE, J. H. **Boundary element in engineering continuum mechanics**. New York: Prentice-Hall, 1994. p. 295.
- KATSIKADELIS, J. T., YOTIS, A. J. New boundary element solution of thick plates modelled by Reissner's theory. **Engrg. Analysis with B.E.**, New York, v.12, n. 1, p. 1435-1462, 1993.
- KIRCHHOFF, G. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. **Crelles J.**, Edwadsville, v.40, n. 2, p.51-88, 1850.
- KUPRADZE, V. D. **Potential methods in the theory of elasticity**. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, 1965. p. 212.
- LEITE, L.G.S.; CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method. **Engineering analysis with boundary elements**, Inglaterra, v. 27, n. 3, p. 193-201, 2003.
- LEONEL, E. D. **Método dos elementos de contorno aplicado à análise de sólidos multifaturados**.2006. 164 f. Tese (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

- NETO, L. O. Uma formulação do método dos elementos de contorno com três parâmetros nodais em deslocamentos para placas delgadas e suas aplicações a problemas de engenharia. **Caderno de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v.7, n.22, p.61-88, 2005.
- PAIVA, J.B. Boundary element formulation for plate analysis with special distribution of reactions along the boundary. In: NOOR, A. K. **Advancs in engineering software and workstations 13**. Oxford: Elsevier Science , 1991. p. 162-168.
- PAIVA, J.B.; ALIVEIRA NETO, L. Na alternative boundary element formulation for plate bending analysis. In: **BETECH 95**. Adelaide: Engeneering Publications, 1995. p. 293-204.
- PAIVA, J. B.; ALIABADI, M. H. Bending moments at interfaces of thin zoned plates with discrete thickness by the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Inglaterra, v. 28, n. 3, p. 747-751, 2004.
- PALERMO JUNIOR, L. **A análise de placas e o método dos elementos de contorno**. 2000. 315 f. Tese (Livre-Docência) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.
- POUZADA, E. V. S. **Estudo da aplicação do método dos elementos de contorno à análise de propagação em estruturas guiantes**. 1999. 243 f. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.
- REISSNER, E. On small deflections of shear deformable elastic plates. **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, London, v. 59, n.1, p. 227-233, 1986.
- REISSNER, E. *On a generalization of some formulas of the theory of moderately thick elastic plates*. **Int. J. Solids Struct.**, Nottingham, v.23, n.6, p. 711-717, 1987.
- REISSNER, E. On the asymptotic expansions for the sixth-order linear theory problem of transverse bending of orthotropic elastic plates. **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, London, v.85, n.1, p.75-88, 1991.

RIBEIRO, G. C.; VENTURINI, W. S.; Aplicação do método dos elementos de contorno no cálculo de placas através da teoria de Reissner. In: ENCONTRO NACIONAL DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, 2; CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 10, 1989, Porto. **Anais....** Porto: Lamas, 1989. p. 437-448.

RIBEIRO, G. O. **Sobre a formulação do método dos elementos de contorno para a flexão de placas usando a teoria de Reissner.** 1992. 152 f. Tese (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.

SANCHES, L. C. F. **Uma resolução de placas com a teoria de Mindlin através do método dos elementos de contorno.** 1998. 138 f. Tese (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

SILVA, N.A. **Aplicação do método dos elementos de contorno às placas com enrijecedores utilizando a teoria de Reissner.** 1996. 216 f. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

SOUZA, V. J. B. **Algoritmos de integração eficientes para o método dos elementos de contorno tridimensional.** 2001. 125 f. Tese (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. **Int. J. Sol. Struct**, Hangzhou, v.15, n. 3, p.761-782, 1979.

SUETAKE, Y. Plate bending analysis by using a modified plate theory. **Computer Modeling in Engineering and Sciences - CMES**, London, v. 11, n. 43, p. 103 – 110, 2006.

TOTTENHAN, H. The boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P. K.; BUTTERFIELD, R. **Developments boundary element methods.** London: Applied Science Publ., 1979. p. 173-205.

VENTURINI, W.S. **Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems.** 1982. 269 f. Thesis (Ph. D.) – School of Civil Engineering, University of Southampton, Southampton, 1982.

VENTURINI, W.S. ; BREBBIA, C.A. Some applications of the boundary element method in geomechanics. **Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.**, Oxford, v.7, n. 4, p.419-434, 1983.

VENTURINI, W.S. **Boundary element method in geomechanics.** Berlin: Springer-Verlag, 1984. p. 185. (Lecture Notes in Engineering).

VENTURINI, W.S. **Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia.** 1988. 363 f. Tese (Livre-Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

VILMANN, O. **Boundary element techniques applied to the Mindlin plate theory.** 1985. 249 f. Thesis (Ph. D.) – Dept. of Structural Engineering, Technical University of Denmark, Denmark, 1985.

VILMANN, O., DASGUPTA, G. **Fundamental solutions of Mindlin plates with variable thickness for stochastic boundary elements, engineering analysis with boundary elements.** Elsevier: Science Publishers, 1992. p. 189.

WEEËN, F.V. **Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model.** Berlin: Springer-Verlag, 1982. p. 253.

WEEËN, F.V. Application of boundary integral equation method to reissner's plate model. **Int. J. Num. Meth. Eng.**, London, v.18, n.1, p.1-10, 1982.

WEEËN, F.V. Application of the direct boundary element method to reissner's plate model. In: **PROCEEDINGS OF THE 4th INTERNATIONAL SEMINAR**, n. 4, 1982, Southampton. **Boundary element method in engineering...** Southampton: Heideberg, 1982. p. 283-292.

WESTPHAL JR., T., DE BARCELOS, C.S. **Applications of the boundary element method to Reissner's and Mindlin's plate models.** In: INTERNATIONAL CONFERENCE BEM, 12, 1990, Sapporo. **Proceedings...** Sapporo: Oxford, 1990. v.1, p. 467-477.

WU, B. C.; ALTIERO, N. J. A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. **Computers & Structures**, Wien, v.10, n. 1, p.107-117, 1979.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)