INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

CAP WAGNER JOSÉ MOREIRA

IDENTIFICAÇÃO LINEAR A PARÂMETROS VARIANTES NO TEMPO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE
Co-orientador: Prof. Waldemar de Castro Leite Filho, DSc.

Rio de Janeiro
2008

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

M838i Moreira, Wagner José.
Identificação Linear a Parâmetros Variantes no Tempo de Sistemas Não-Lineares / Wagner José Moreira. - Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2008.
106 p.: il., graf., tab.

Dissertação (mestrado) - Instituto Militar de Engenharia - Rio de Janeiro, 2008.

1. Identificação de Sistemas. 2. Sistemas Não-lineares. 3. Sistemas LPV. 4. Filtro de Kalman. I. Título. II. Instituto Militar de Engenharia.

CDD 003.75

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

CAP WAGNER JOSÉ MOREIRA

IDENTIFICAÇÃO LINEAR A PARÂMETROS VARIANTES NO TEMPO DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE

Co-orientador: Prof. Waldemar de Castro Leite Filho, DSc.

Aprovada em 29 de Janeiro de 2008 pela seguinte Banca Examinadora:

____
Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE do IME - Presidente

____
Prof. Waldemar de Castro Leite Filho, DSc. do IAE

____
Prof. Roberto Ades, Dr. PUC-Rio do IME

____
Prof. Pedro Cunha Campos Roquette, Ph.D. do IPqM

Rio de Janeiro
2008

A Deus por mais uma oportunidade de progredir, e a todos que me acompanharam nesta jornada.

RESUMO

Esta dissertação aborda a identificação Linear a Parâmetros Variantes (LPV) no tempo de sistemas não-lineares.

Inicialmente, são apresentadas a fundamentação teórica e algumas técnicas de identificação de sistemas utilizadas atualmente e que contribuíram para o desenvolvimento da metodologia apresentada.

Em seguida, é desenvolvida uma metodologia analítica para identificação do modelo LPV, tema central deste trabalho. Considerando que um sistema não-linear pode ser representado por uma equação diferença variante no tempo, a variação dos seus coeficientes é aproximada por um polinômio dependente de um parâmetro θ, cujos valores, aliados a um conjunto de dados de entrada e de saída, supõem-se conhecidos. Com o objetivo de minimizar uma função custo quadrático médio, constrói-se um Sistema de Equações Lineares (SEL) que, ao ser resolvido, resulta nos coeficientes do modelo LPV identificado.

Além disso, mostra-se que os resultados podem ser melhorados realizando-se uma identificação por partes, dividindo-se os dados em intervalos menores de tempo. Assim, chega-se a um conjunto de modelos que representam o sistema original, ao invés de um modelo único. Apesar disso, a continuidade na região de transição entre modelos é garantida. Devem-se levar em conta os objetivos da identificação, de modo que os resultados estejam dentro da margem de erro considerada, mas o número de modelos identificados não seja elevado. O método é então estendido a sistemas multivariáveis do tipo MISO (do inglês *Multiple Inputs Single Output*), sendo que o número de coeficientes a serem identificados aumenta de acordo com o número de entradas do sistema.

Por fim, mostra-se que a identificação pode ser realizada utilizando um Filtro de Kalman, procedimento recursivo de estimação dos estados de um sistema, sendo que estes estados serão os coeficientes do modelo LPV que se deseja identificar.

A metodologia foi testada em modelos acadêmicos (massa-mola-amortecedor de 2^a e 4^a ordens), modelos no domínio aeroespacial (míssil não-linear e Veículo Lançador de Satélites - VLS) e sistemas com ruídos na saída.

ABSTRACT

This dissertation deals with the Linear Parameter-Varying (LPV) identification techniques applied to non-linear systems.

Firstly, the theoretical basis and some recent system identification techniques, whose principles are used in this dissertation, are presented.

Then, an analytical methodology for identifying LPV models is developed, which is the main contribution of this work. Considering that a nonlinear system can be represented by a time-varying difference equation, the variation of its coefficients is approximated by a polynomial function on a parameter θ, whose values as well as those of a set of input and output data are supposed to be known. In order to minimize a mean square cost function, a linear equations system is built, whose solution gives the identified LPV model coefficients.

Furthermore, it is shown that the results can be improved in terms of identification error by performing a piecewise identification procedure, that is, by splitting the data into smaller sets in time. Then, a set of models representing the original system is obtained instead of a single model. The continuity in the switching zone is, however, guaranteed. A good identification considers a tradeoff between the number of models and the global error. The method is extended to Multiple-Inputs-Single-Output systems, where the number of coefficients to be identified increases according to the number of inputs.

Finally, it is shown that the identification can be performed in a recursive way by using a Kalman Filter, where the estimated states are the coefficients of the LPV model to be identified.

The methodology was tested in academic models (mass-spring-damper of 2^{nd} and 4^{th} orders), models in aerospace domain (a non-linear missile and a vehicle satellite launcher), and systems with output noises.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

ABREVIATURAS

ARX	*Autoregressive with Exogenous Input* (Autoregressivo com Entradas Externas)
BLG	Bloco Girométrico
CTA	Centro Técnico Aeroespacial
FT	Função de Transferência
IAE	Instituto de Aeronáutica e Espaço
IME	Instituto Militar de Engenharia
IPqM	Instituto de Pesquisa da Marinha
LIT	Linear Invariante no Tempo
LMI	*Linear Matrix Inequalities* (Desigualdades Matriciais Lineares)
LMS	*Least Mean Square* (Mínimo Médio Quadrático)
LPV	Linear a Parâmetros Variantes
LQ	Linear Quadrático
LTI	*Linear Time Invariant* (Linear Invariante no Tempo)
LTV	*Linear Time Variant* (Linear Variante no Tempo) ou Linear a Tempo Variante
MIMO	*Multiple Inputs Multiple Outputs* (Múltiplas Entradas Múltiplas Saídas)
MISO	*Multiple Inputs Single Output* (Múltiplas Entradas Única Saída)
MSE	*Mean Square Error* (Erro Quadrático Médio)
N2CACGO	Norma 2 - Convexo - Analítico - Conjuntos Geradores Otimizados (metodologia de identificação no domínio da freqüência)
PID	Proporcional Integral Derivativo
SEL	Sistema de Equações Lineares
SISO	*Single Input Single Output* (Única Entrada Única Saída)
VLS	Veículo Lançador de Satélites

SÍMBOLOS

$y(t)$	-	Saída do sistema
$u(t)$	-	Entrada do sistema
y_k	-	Saída discreta do sistema no instante k
u_k	-	Entrada discreta do sistema no instante k
J	-	Custo (medida do erro do método de identificação)
J_{Id}	-	Custo de identificação do sistema
J_{Val}	-	Custo de validação dos sistema
$\|\| \, . \, \|\|$	-	Norma do argumento
$\| \, . \, \|$	-	Módulo do argumento
$G(j\boldsymbol{\omega})$	-	Resposta em freqüência da função de transferência $G(s)$
$\boldsymbol{\omega}$	-	Vetor de freqüências
$N(\boldsymbol{\alpha}, s)$	-	Polinômio do numerador da FT
$D(\boldsymbol{\beta}, s)$	-	Polinômio do denominador da FT
$\triangleq$	-	Por definição igual a
$\mathcal{L}[.]$	-	Operador de Transformada de Laplace
$\bigtriangledown J_S(\boldsymbol{\theta})$	-	Gradiente da função custo $J_S(\boldsymbol{\theta})$
$< A, B >$	-	Produto interno definido pela EQ. 2.42
$a >> b$	-	a muito maior que b

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO E MOTIVAÇÃO

A Engenharia de Controle tem por objetivo fazer com que os sistemas se comportem da maneira desejada, de forma a atender às especificações de desempenho pré-determinadas. Para se alcançar com êxito esse objetivo, é necessário o conhecimento do comportamento dos sistemas. A partir de uma análise de seu funcionamento e da dinâmica de interesse, pode-se projetar e desenvolver controladores adequados para atingir os objetivos determinados.

A viabilidade do projeto de um controlador depende muitas vezes da obtenção de um modelo que descreva satisfatoriamente o comportamento dinâmico do sistema a ser controlado. Na maioria dos casos, quanto mais preciso for o modelo, os controladores serão obtidos mais facilmente e terão desempenho melhor. Segundo AGUIRRE (2004), a modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda maneiras de construir e implementar modelos de sistemas reais. Uma das maneiras de se obter um modelo é analisar todas as leis físicas que envolvem o sistema, encontrando as equações que regem a sua dinâmica. Entretanto, para sistemas físicos complexos, a análise dessas leis pode se tornar difícil, impedindo que se chegue a um modelo satisfatório.

Nessas circunstâncias, uma opção viável é extrair dados de experimentos em que, através de entradas que excitem a planta, se possa medir a sua resposta. A construção de modelos numéricos a partir dos dados de entrada e de saída de uma planta é chamada Identificação de Sistemas. Essa metodologia tem se mostrado muito prática e eficaz, já que, mesmo que os modelos obtidos sejam mais simples (o que é uma vantagem, pois facilita a análise e o projeto de controladores), eles produzem respostas que se aproximam muito da resposta real da planta.

Os métodos de identificação se utilizam de dados no domínio do tempo (seqüências temporais de medidas feitas na entrada e na saída), ou de dados no domínio da freqüência (características da resposta em freqüência do sistema). São divididos, segundo LJUNG (1987), em:

- Métodos Paramétricos;
- Métodos Não-Paramétricos; e

- Métodos no Domínio da Freqüência.

Os métodos paramétricos consideram conhecida a estrutura do modelo (a partir das leis físicas que regem o sistema), buscando determinar os valores dos seus parâmetros. Ao contrário, os métodos não-paramétricos são utilizados quando a estrutura do modelo é desconhecida, resultando em representações gráficas que caracterizam a dinâmica do sistema (AGUIRRE, 2004). As técnicas no domínio da freqüência geram modelos que reproduzem a dinâmica do sistema nesse domínio, utilizando a Transformada de Fourier (HOUGEN, 1972).

Outra classificação dos métodos de identificação se refere à utilização de dados conhecidos *a priori* do sistema (CORRÊA, 2001; TULLEKEN, 1993; SJÖBERG et al., 1995; BOHLIN & GRAEBES, 1995):

- modelagem caixa-branca;
- modelagem caixa-cinza; e
- modelagem caixa-preta.

A modelagem caixa-branca requer um conhecimento prévio do comportamento da dinâmica do sistema, equacionado a partir da estrutura da planta. Dessa forma, os dados de entrada e de saída são dispensáveis, já que os parâmetros envolvidos possuem significado físico. Já a modelagem caixa-preta considera o desconhecimento do funcionamento interno da planta, baseando-se apenas nos dados de entrada e de saída da mesma.

Entre esses dois extremos se situa a modelagem caixa-cinza, a qual relaciona tanto informações de sinais de entrada e de saída da planta, quanto o conhecimento prévio (mesmo que incompleto) da sua estrutura. Entre as vantagens dessa modelagem pode-se destacar o fato que, mesmo com uma relativa escassez de dados, o uso de informações a priori diminui o número de parâmetros a serem estimados, facilitando a solução do problema.

Dessa forma, pode-se considerar a Identificação de Sistemas uma área de modelagem matemática que estuda técnicas alternativas à modelagem caixa-branca (AGUIRRE, 2004), normalmente se valendo da observação de sinais de entrada e de saída do sistema em estudo. Tem sido considerável o interesse em identificação de sistemas nos últimos anos para fins de previsão, supervisão, diagnóstico e controle, com aplicação em diversos campos da engenharia, como processos químicos, elétricos, aeronáuticos, em sistemas biomédicos, sistemas socioeconômicos, etc. (COELHO & COELHO, 2004).

Muitos sistemas de interesse são não-lineares. Mesmo nestes casos, a utilização de modelos lineares em detrimento de modelos não-lineares se justifica pela sua simplicidade, facilidade de obtenção e disponibilidade de um amplo ferramental matemático na engenharia de controle (BILLINGS, 1980). Entretanto, esses modelos conservam sua precisão somente na vizinhança dos pontos de operação considerados no processo de identificação. Uma modelagem que leve em conta as não-linearidades do modelo se faz necessária para suprir a necessidade de obtenção de modelos mais precisos, em faixas mais amplas de operação.

Para superar as dificuldades inerentes aos sistemas não-lineares em largas faixas de condições operativas, além de fornecer maior liberdade frente aos métodos de projetos Lineares Invariantes no Tempo (LIT, ou LTI, do inglês *Linear Time Invariant*), as técnicas de escalonamento de ganhos têm sido tradicionalmente utilizadas (LEITH & LEITHEAD, 2000; RUGH & SHAMMA, 2000). Avanços recentes nas técnicas de controle robusto linear têm permitido tratar do controle de sistemas não-lineares de maneira sistemática e com alguma garantia de estabilidade e desempenho no contexto de escalonamento de ganhos. Assim acontece com as técnicas de controle Linear a Parâmetros Variantes (LPV) (LU & DOYLE, 1992; PACKARD, 1994; APKARIAN & GAHINET, 1995; WU et al., 1996; APKARIAN et al., 2000).

Um sistema linear pode ser considerado variante no tempo ou não-estacionário - Linear Variante no Tempo (LTV, do inglês *Linear Time Variant*) ou Linear a Parâmetros Variantes (LPV) - quando um ou mais parâmetros do seu modelo variam amplamente com o tempo e não podem ser tratados como parâmetros incertos. Muitas vezes, os sistemas não-lineares podem ser tratados como sistemas lineares não-estacionários. Assim, boa parte dos sistemas não-lineares de interesse podem ser representados com precisão adequada por modelos LPV.

1.2 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

Os objetivos deste trabalho são:

a) Estudar a aplicabilidade de técnicas de identificação LPV em sistemas não-lineares;

b) Propor uma nova metodologia;

c) Identificar modelos LPV de sistemas não-lineares; e

d) Avaliar os modelos identificados.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está organizada em 4 capítulos, além desta introdução e do Apêndice.

O Capítulo 2 apresenta a teoria que subsidiou este estudo, necessária para seu entendimento. São apresentadas metodologias de identificação no domínio da freqüência e no domínio do tempo, bem como a modelagem de sistemas discretos. Além disso é tratado o caso de sistemas LPV e *quasi*-LPV. Por fim é mostrado como se pode melhorar o condicionamento numérico da solução de sistemas de equações lineares, que constitui um ponto importante em diversos problemas tratados neste trabalho.

O Capítulo 3 trata do desenvolvimento de uma metodologia analítica para a identificação de um modelo linear variante no tempo de um sistema não-linear, a partir dos seus dados de entrada e de saída. Este modelo é parametrizado por uma variável θ, que pode ser exógena ao sistema, ou endógena (caracterizando um modelo $quasi$-LPV).

O Capítulo 4 mostra a aplicação da metodologia desenvolvida no capítulo anterior em diversos sistemas, verificando seus resultados. Primeiramente são apresentados dois sistemas massa-mola-amortecedor com características não-lineares. Em seguida é realizada a identificação de um modelo de míssil ar-ar, e por fim de um Veículo Lançador de Satélites.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões deste trabalho baseadas nos resultados obtidos, indicando sugestões para futuras pesquisas e aprimoramento das técnicas apresentadas.

O Apêndice contém o programa utilizado para encontrar o modelo com o menor custo dos exemplos do Capítulo 4, além das tabelas contendo os coeficientes dos modelos identificados para cada sistema.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Este capítulo tem por finalidade apresentar a teoria que fundamentou este trabalho. São apresentados tópicos sobre identificação de sistemas, mostrando alguns métodos empregados atualmente, tanto no domínio do tempo como no domínio da freqüência, bem como metodologias desenvolvidas para tratar de sistemas LPV. Para o desenvolvimento do trabalho no domínio do tempo, são apresentadas teorias de modelagem de sistemas discretos. Muitos métodos necessitam, em algum momento, solucionar um Sistema de Equações Lineares (SEL). Por isso, é tratado também o problema de melhoria dos resultados na solução de SEL, com a utilização do método de Gauss-Jordan com pivoteamento, ao invés do método da matriz pseudo-inversa.

2.1 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Conforme citado no Capítulo 1, a identificação de sistemas visa encontrar modelos que reproduzam o comportamento dinâmico de um determinado sistema, seja no que se refere à resposta em freqüência ou à resposta temporal do mesmo. Para isso, diversas metodologias foram desenvolvidas ao longo dos anos para encontrar esses modelos. Muitas vezes o problema de identificação é tratado como um problema de otimização (COELHO & COELHO, 2004), pois procura minimizar o erro de identificação representado por um índice quantitativo.

A seleção de modelos matemáticos e o ajuste dos parâmetros são influenciados por diversos fatores, entre os quais:

a) conhecimento *a priori* do sistema (linearidade, graus de não-linearidade, atraso);

b) propriedades do modelo a ser identificado, como a sua complexidade;

c) seleção de medidas do erro a ser minimizado; e

d) presença de ruídos.

A identificação de sistemas é um exercício que envolve múltiplos e conflitantes objetivos, sendo que a noção de um bom modelo é subjetiva. Usualmente, considera-se como parâmetro para a qualidade do modelo o valor de uma função custo dos tipos:

- Norma da diferença entre as saídas do sistema em estudo (y_p) e do modelo estimado (y_e):

$$J = ||y_p - y_e||$$

- Norma da diferença entre a resposta em freqüência do sistema real $[G_p(j\boldsymbol{\omega})]$ e do modelo estimado $[G_e(j\boldsymbol{\omega})]$:

$$J = ||G_p(j\boldsymbol{\omega}) - G_e(j\boldsymbol{\omega})||$$

sendo $\boldsymbol{\omega}$ um vetor que contém os valores das freqüências amostradas e selecionadas para a identificação do sistema.

Um dos objetivos seria então encontrar um modelo que resulte num valor pequeno para as funções custo acima. Dessa forma, adotando-se uma norma específica (norma 2, por exemplo), e valendo-se de métodos de otimização numéricos ou analíticos, pode-se encontrar os modelos matemáticos que melhor representem uma dada planta.

A seguir são apresentados alguns métodos de identificação para ilustrar a teoria apresentada.

2.1.1 METODOLOGIA N2CACGO

Esta metodologia foi desenvolvida em SILVEIRA (2006), e será brevemente apresentada a seguir. Considerando um sistema monovariável (uma entrada e uma saída), toma-se um conjunto de dados complexos das respostas em freqüência $G_s(j\boldsymbol{\omega})$, calculados ou medidos em m valores de freqüência $\boldsymbol{\omega} = [w_1\ w_2\ \cdots\ w_m]$, convenientemente escolhidos e distribuídos na faixa de interesse.

Admite-se que a Função de Transferência (FT) racional estimada de ordem n seja da seguinte forma:

$$G_e^n(\boldsymbol{\theta}, s) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(s) = \frac{N(\boldsymbol{\alpha}, s)}{D(\boldsymbol{\beta}, s)} = \frac{\alpha_0\ s^n + \alpha_1\ s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\ s + \alpha_n}{s^n + \beta_1\ s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}\ s + \beta_n} \tag{2.1}$$

em que:

$$P_k(s) = \frac{s^{n-k}}{\beta_0\ s^n + \beta_1\ s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}\ s + \beta_n} \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_0\ \alpha_1\ \cdots\ \alpha_n]^T \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_n]^T \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\alpha}^T\ \boldsymbol{\beta}^T]^T \tag{2.5}$$

O objetivo da metodologia é encontrar um modelo $G_e^n(\boldsymbol{\theta}, s)$, parametrizado pelo vetor $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\alpha}^T \ \boldsymbol{\beta}^T]^T$, que minimize a seguinte função custo:

$$J_S(\boldsymbol{\theta}) = ||D(\boldsymbol{\beta}, j\boldsymbol{\omega}) \oplus G(j\boldsymbol{\omega}) - N(\boldsymbol{\alpha}, j\boldsymbol{\omega})||_2^2 \tag{2.6}$$

sendo que a operação $\oplus$ é definida como:

$$D(\boldsymbol{\beta}, j\boldsymbol{\omega}) \oplus G(j\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} D(\boldsymbol{\beta}, j\omega_1)G(j\omega_1) \\ D(\boldsymbol{\beta}, j\omega_2)G(j\omega_2) \\ \vdots \\ D(\boldsymbol{\beta}, j\omega_m)G(j\omega_m) \end{bmatrix}$$

Deve-se então calcular os pólos e zeros de $G_e^n(s)$ [parâmetros $\boldsymbol{\beta}$ de $D(s)$ e $\boldsymbol{\alpha}$ de $N(s)$] de maneira que a função custo na EQ. 2.6 seja minimizada. Pode-se reescrever a EQ. 2.6 como:

$$J_S(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{m} |D(\boldsymbol{\beta}, j\omega_i) \oplus G(j\omega_i) - N(\boldsymbol{\alpha}, j\omega_i)|^2 \tag{2.7}$$

ou simplificadamente:

$$J_S(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{m} \Psi(j\omega_i)\Psi^*(j\omega_i) \tag{2.8}$$

sendo

$$\Psi(j\omega_i) = D(\boldsymbol{\beta}, j\omega_i)G(j\omega_i) - N(\boldsymbol{\alpha}, j\omega_i) \tag{2.9}$$

com $\Psi^*(j\omega_i) = \Psi(-j\omega_i)$, ou seja, "$*$" representa o operador conjugado.

Como mostrado em SILVEIRA (2006), a EQ. 2.7 é convexa em relação ao vetor paramétrico $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}^T]^T$, e possui uma solução ótima global que é calculada a partir do gradiente de $J_S(\boldsymbol{\theta})$:

$$\nabla J_S(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial J_S}{\partial \alpha_0} \ \frac{\partial J_S}{\partial \alpha_1} \ \cdots \ \frac{\partial J_S}{\partial \alpha_n} \frac{\partial J_S}{\partial \beta_1} \frac{\partial J_S}{\partial \beta_2} \cdots \frac{\partial J_S}{\partial \beta_n}\right)^T = \mathbf{0}_{(2n+1)\text{x}1} \tag{2.10}$$

Derivando parcialmente a EQ. 2.8 em relação a um parâmetro θ_t (α_k, $k = 0, \cdots, n$ ou β_l, $l = 1, \cdots, n$) de $\boldsymbol{\theta}$ dado pela EQ. 2.5:

$$\frac{\partial J_S}{\partial \theta_t} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \theta_t}\Psi^*(j\omega_i) + \Psi(j\omega_i)\frac{\partial \Psi^*(j\omega_i)}{\partial \theta_t}\right) \tag{2.11}$$

Adotando-se a notação $R_n(j\omega_i) \triangleq (j\omega_i)^n$, as derivadas parciais de $\Psi(j\omega_i)$ em relação a α_k e β_l resultam em:

$$\frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \alpha_k} = -[j\omega_i]^{n-k} = -R_{n-k}(j\omega_i) \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial \Psi(j\omega_i)}{\partial \beta_l} = [j\omega_i]^{n-l}G(j\omega_i) = R_{n-l}(j\omega_i)G(j\omega_i) \tag{2.13}$$

Substituindo a EQ. 2.12 na EQ. 2.11, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_S}{\partial \alpha_k} &= \sum_{i=1}^{m}[-R_{n-k}(j\omega_i)\Psi^*(j\omega_i) - \Psi(j\omega_i)R^*_{n-k}(j\omega_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{m} 2Re[-R_{n-k}(j\omega_i)\Psi^*(j\omega_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{m} 2Re\{-R_{n-k}(j\omega_i)[D^*(\boldsymbol{\beta}, j\omega_i)G^*(j\omega_i) - N^*(\boldsymbol{\alpha}, j\omega_i)]\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} 2Re[R_{n-k}(j\omega_i)N^*(\boldsymbol{\alpha}, j\omega_i) - R_{n-k}(j\omega_i)G^*(j\omega_i)D^*(\boldsymbol{\beta}, j\omega_i)] \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Analogamente para o parâmetro β_l, substituindo a EQ. 2.13 na EQ. 2.11:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_S}{\partial \beta_l} &= \sum_{i=1}^{m}[R_{n-l}(j\omega_i)G(j\omega_i)\Psi^*(j\omega_i) + \Psi(j\omega_i)R^*_{n-l}(j\omega_i)G^*(j\omega_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{m} 2Re[R_{n-l}(j\omega_i)G(j\omega_i)\Psi^*(j\omega_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{m} 2Re\{R_{n-l}(j\omega_i)G(j\omega_i)[D^*(\boldsymbol{\beta}, j\omega_i)G^*(j\omega_i) - N^*(\boldsymbol{\alpha}, j\omega_i)]\} \\
&= \sum_{i=1}^{m} 2Re[R_{n-l}(j\omega_i)\Gamma(j\omega_i)D^*(\boldsymbol{\beta}, j\omega_i) - R_{n-l}(j\omega_i)G(j\omega_i)N^*(\boldsymbol{\alpha}, j\omega_i)] \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

na qual $\Gamma(j\omega_i) = G(j\omega_i)G^*(j\omega_i)$ e $Re[\star]$ representa a parte real do argumento $\star$.

De acordo com a EQ. 2.10, a condição ótima é atingida quando $\frac{\partial J_S}{\partial \alpha_k} = 0$ e $\frac{\partial J_S}{\partial \beta_l} = 0$. Fazendo isso, escolhendo-se a ordem n do modelo estimado, variando-se o índice k (referente ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\alpha}$) e o índice l (referente ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\beta}$) nas EQ. 2.14 e EQ. 2.15, e manipulando-se algebricamente o conjunto de equações, é possível estabelecer a relação:

$$\begin{aligned}
Q\,\boldsymbol{\theta} &= \boldsymbol{Y} \\
\left[\begin{array}{c:c} Q_1 & -Q_2 \\ \hdashline Q_3 & -Q_4 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\alpha} \\ \hdashline \boldsymbol{\beta} \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{c} \mathbf{Y_1} \\ \hdashline \mathbf{Y_2} \end{array}\right] \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

que nada mais é que um SEL. Simplificando a notação $R_n = R_n(j\omega_i)$, $G = G(j\omega_i)$ e $\Gamma = \Gamma(j\omega_i) = G(j\omega_i)G^*(j\omega_i)$, definem-se as matrizes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, e os vetores $\mathbf{Y_1}$ e $\mathbf{Y_2}$ como:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{m} Re \begin{bmatrix} R_nR_n^* & R_nR_{n-1}^* & \cdots & R_nR_0^* \\ R_{n-1}R_n^* & R_{n-1}R_{n-1}^* & \cdots & R_{n-1}R_0^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_0R_n^* & R_0R_{n-1}^* & \cdots & R_0R_0^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \qquad (2.17)$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{m} Re \begin{bmatrix} R_n R_{n-1}^* G^* & R_n R_{n-2}^* G^* & \cdots & R_n R_0^* G^* \\ R_{n-1} R_{n-1}^* G^* & R_{n-1} R_{n-2}^* G^* & \cdots & R_{n-1} R_0^* G^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_0 R_{n-1}^* G^* & R_0 R_{n-2}^* G^* & \cdots & R_0 R_0^* G^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times n} \tag{2.18}$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^{m} Re \begin{bmatrix} R_{n-1} R_n^* G & R_{n-1} R_{n-1}^* G & \cdots & R_{n-1} R_0^* G \\ R_{n-2} R_n^* G & R_{n-2} R_{n-1}^* G & \cdots & R_{n-2} R_0^* G \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_0 R_n^* G & R_0 R_{n-1}^* G & \cdots & R_0 R_0^* G \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)} \tag{2.19}$$

$$Q_4 = \sum_{i=1}^{m} Re \begin{bmatrix} R_{n-1} R_{n-1}^* \Gamma & R_{n-1} R_{n-2}^* \Gamma & \cdots & R_{n-1} R_0^* \Gamma \\ R_{n-2} R_{n-1}^* \Gamma & R_{n-2} R_{n-2}^* \Gamma & \cdots & R_{n-2} R_0^* \Gamma \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_0 R_{n-1}^* \Gamma & R_0 R_{n-2}^* \Gamma & \cdots & R_0 R_0^* \Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{2.20}$$

$$\boldsymbol{Y_1} = \sum_{i=1}^{m} Re \begin{bmatrix} R_n R_n^* G^* \\ R_{n-1} R_n^* G^* \\ \vdots \\ R_0 R_n^* G^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{Y_2} = \sum_{i=1}^{m} Re \begin{bmatrix} R_{n-1} R_n^* \Gamma \\ R_{n-2} R_n^* \Gamma \\ \vdots \\ R_0 R_n^* \Gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n} \tag{2.22}$$

Esta metodologia utiliza dados no domínio da freqüência, que é de difícil aplicação em sistemas do tipo LPV e não-lineares. Entretanto, o princípio utilizado (modificação da função custo visando obter uma função que possa ser resolvida analiticamente, ao invés de se valer de métodos de otimização - iterativos ou recursivos) serviu como base para o desenvolvimento no domínio do tempo da metodologia proposta no Capítulo 3, de forma que pudesse ser aplicada a sistemas não-lineares e LPV.

2.2 SISTEMAS LPV

Um sistema linear pode ser considerado variante no tempo ou não-estacionário quando um ou mais parâmetros do seu modelo variam amplamente com o tempo e não podem ser considerados como parâmetros incertos. Muitas vezes, os sistemas não-lineares podem ser tratados como sistemas lineares não-estacionários (ARAÚJO, 2006).

Um sistema LPV pode ser descrito através das equações a seguir:

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))\, x(t) + B(\theta(t))\, u(t) \tag{2.23}$$

$$y(t) = C(\theta(t))\, x(t) + D(\theta(t))\, u(t) \tag{2.24}$$

sendo que as matrizes A, B, C e D são dependentes do parâmetro continuamente variante no tempo $\theta(t)$.

Quando $\theta(t)$ possui elementos cuja variação depende, além do tempo, de um ou mais estados do sistema, configura-se uma não-linearidade no sistema, fazendo com que o termo *quasi*-LPV seja mais adequado, ou seja, apesar do sistema ser não-linear, considera-se que o parâmetro $\theta(t)$ evolui num domínio específico sem obedecer à dinâmica de $x(t)$. Dessa forma, $\theta(t) = [\theta_x^T(x(t))\ \theta_p^T(t)]$, sendo:

- $\theta_x^T(x(t))$ - conjunto de variáveis endógenas (dependem da dinâmica interna do sistema);
- $\theta_p^T(t)$ - conjunto de variáveis exógenas (evoluem no tempo independente da dinâmica interna).

São apresentadas a seguir algumas metodologias de identificação aplicadas a sistemas do tipo LPV.

2.2.1 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS LPV E QUASI-LPV

A técnica tratada nesta seção foi apresentada em ARAÚJO (2006). Para uma planta com as características das EQ. 2.23 e EQ. 2.24 e que seja estável, pode-se construir um modelo *quasi*-LPV que a represente de maneira adequada. Para isso é necessário identificar preliminarmente um conjunto de modelos lineares em tantos pontos de operação quantos necessários, que corresponderão a valores pré-determinados do parâmetro θ (endógeno ou exógeno, de acordo com a planta). O modelo, recebendo a medição em tempo real do parâmetro θ e do valor de entrada da planta, faz com que a saída identificada convirja para a resposta da planta física.

Considera-se que a dinâmica a pequenas perturbações de uma planta não-estacionária possa ser representada por um conjunto de modelos lineares, que podem ser parametrizados por um sinal contínuo θ a ser medido. O problema consiste, numa primeira etapa, em identificar os modelos lineares $\overline{G}_i(s)$, $i \in \{0, 1, \cdots, v\}$, para os v pontos de operação de interesse da planta.

Em uma segunda etapa, procura-se determinar, a partir dos modelos $\overline{G}_i(s)$, um novo modelo *quasi*-LPV M dependente do parâmetro θ que define uma trajetória de variação lenta de pontos de operação. O modelo *quasi*-LPV identificado será válido para pequenos desvios em torno da trajetória nominal.

Adota-se para cada modelo $\overline{G}_i(s)$ uma FT da forma:

$$\overline{G}_i(s) = \frac{b_{i0}s^n + b_{i1}s^{n-1} + \cdots + b_{i(n-1)}s + b_{in}}{s^n + a_{i1}s^{n-1} + \cdots + a_{i(n-1)}s + a_{in}} \tag{2.25}$$

para a_{ij}, $b_{i\ell} \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2 \cdots, n\}$ e $\ell \in \{0, 1 \cdots, n\}$.

O conjunto de modelos LTI $\overline{G}_i(s)$ foi obtido pela identificação do sistema. Assim, para se comparar as entradas e as saídas do modelo com a da planta no ponto de operação i, deve-se adicionar valores constantes a essas variáveis:

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \overline{y}_i(t) + y_{Ni} \\ u_i(t) &= \overline{u}_i(t) + u_{Ni} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Os valores y_{Ni} e $u_{Ni} \in \mathbb{R}$ são as constantes que se referem ao ponto de operação i da planta em relação ao modelo $\overline{G}_i(s)$. Os sinais $y(t)$ e $u(t)$ são a entrada e a saída da planta, respectivamente. Os sinais $\overline{y}(t)$ e $\overline{u}(t)$ são a entrada e a saída, respectivamente, correspondentes à aplicação no modelo LTI.

Os modelos LTI obtidos possuem os estados nulos, entretanto isso não condiz com a realidade do modelo LPV original. Assim, deve-se compatibilizar os modelos LTI obtidos $\overline{G}_i(s)$ com as necessidades de equacionamento proposto $G_i(s)$, fazendo com que os estados dos primeiros representem as mesmas grandezas em toda a faixa de operação do parâmetro, sem deslocamento de entrada e de saída. Para isso, uma manipulação no conjunto de modelos LTI se faz necessária:

$$\begin{aligned} Y_i(s) &= \mathcal{L}[y_i(t)] \\ Y_i(s) &= \mathcal{L}[\overline{y}_i(t) + y_{Ni}] \\ Y_i(s) &= \overline{Y}_i(s) + \frac{y_{Ni}}{s} \end{aligned}$$

Analogamente para $U_i(s) = \overline{U}_i(s) + \frac{u_{Ni}}{s}$, chega-se a:

$$G_i(s) = \frac{Y_i(s)}{U_i(s)} = \frac{\overline{Y}_i(s) + \frac{y_{Ni}}{s}}{\overline{U}_i(s) + \frac{u_{Ni}}{s}} = \frac{s\,\overline{Y}_i(s) + y_{Ni}}{s\,\overline{U}_i(s) + u_{Ni}} \tag{2.27}$$

Para conveniência de notação, define-se $y_{Ni} = b_{i(n+1)}$ e $u_{Ni} = a_{i(n+1)}$. A nova FT é dada por:

$$G_i(s) = \frac{b_{i0}s^{n+1} + b_{i1}s^n + \cdots + b_{in}s + b_{i(n+1)}}{s^{n+1} + a_{i1}s^n + \cdots + a_{in}s + a_{i(n+1)}} \tag{2.28}$$

Com $j \in \{0, 1, \cdots, (n+1)\}$, tem-se:

$$\boldsymbol{a_j} = [a_{1j}\ a_{2j}\ \cdots\ a_{vj}]^T \tag{2.29}$$

$$\boldsymbol{b_j} = [b_{0j}\ b_{1j}\ \cdots\ b_{vj}]^T \tag{2.30}$$

$$\boldsymbol{\theta_j} = [\theta_{1j}\ \theta_{2j}\ \cdots\ \theta_{vj}]^T \tag{2.31}$$

Com as definições acima pode-se determinar a variação dos parâmetros a_i e b_i da FT em função do parâmetro θ de forma que:

$$G(s,\theta) = \frac{b_0(\theta)s^{n+1} + b_1(\theta)s^n + \cdots + b_n(\theta)s + b_{n+1}(\theta)}{s^{n+1} + a_1(\theta)s^n + \cdots + a_n(\theta)s + a_{n+1}(\theta)} \tag{2.32}$$

Uma FT dependente de um parâmetro não tem significado quando este varia no tempo. A notação $G(s,\theta)$ é utilizada para indicar que um sistema G do tipo *quasi*-LPV tem como modelo freqüencial:

$$G(s,\theta) \triangleq \left[\begin{array}{c|c} A(\theta) & B(\theta) \\ \hline C(\theta) & D(\theta) \end{array}\right] \triangleq C(\theta)[sI - A(\theta)]^{-1}B(\theta) + D(\theta) \tag{2.33}$$

para valores estacionários de θ, e modelos em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

quando θ varia.

Para definir as funções $a_i(\theta)$ e $b_i(\theta)$ na EQ. 2.32 é utilizada uma base polinomial em θ do tipo $f(\theta) = \alpha_0\theta^p + \alpha_1\theta^{p-1} + \cdots + \alpha_p$, $p \in \mathbb{N}$. Para encontrar estas funções é necessário arbitrar uma ordem de grandeza p para os polinômios, equacionando da seguinte forma:

$$\boldsymbol{a_j} = \begin{bmatrix} \theta_1^p & \theta_1^{p-1} & \cdots & 1 \\ \theta_2^p & \theta_2^{p-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \theta_k^p & \theta_k^{p-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = X\ \boldsymbol{\alpha_j} \tag{2.35}$$

A EQ. 2.35 é um SEL, que pode ser resolvido por métodos como da matriz pseudo-inversa, Gauss-Jordan, etc. O mesmo se dá, analogamente, para $\boldsymbol{b_j}$:

$$\boldsymbol{b_j} = \begin{bmatrix} \theta_1^p & \theta_1^{p-1} & \cdots & 1 \\ \theta_2^p & \theta_2^{p-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \theta_k^p & \theta_k^{p-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} = X\ \boldsymbol{\beta_j} \tag{2.36}$$

Este método de identificação de sistemas do tipo LPV considera que um conjunto de modelos lineares em torno de alguns pontos de operação foram previamente identificados. Para o caso em que só estão disponíveis os dados de entrada, de saída e do parâmetro θ no domínio do tempo, essa identificação preliminar pode não ser possível. A aproximação da variação dos coeficientes a_i e b_j por uma base polinomial em θ também é utilizada na metodologia proposta neste trabalho apresentada no Capítulo 3.

2.2.2 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS LPV

Em BAMIEH & GIARRÉ (1999) é proposta uma metodologia iterativa de identificação de sistemas LPV que utiliza os dados temporais da planta. Seja o modelo LPV discreto parametrizado como se segue:

$$M(q,\theta) = \frac{B(q,\theta)}{A(q,\theta)} = \frac{b_0(\theta) + b_1(\theta)\ q^{-1} + \cdots + b_{nb}(\theta)\ q^{-nb}}{1 + a_1(\theta)\ q^{-1} + \cdots + a_{na}(\theta)\ q^{-na}} \tag{2.37}$$

sendo q^{-1} o operador de atraso. Tem-se $n = na + nb + 1$ funções paramétricas a serem identificadas, correspondentes às funções que traçam a variação dos parâmetros $a_i(\theta)$ e $b_j(\theta)$ da FT discreta, $i \in [0, 1, \cdots, na]$ e $j \in [0, 1, \cdots, nb]$. Assumindo que as funções a_i e b_j sejam da forma polinomial:

$$a_i(\theta) = a_i^1 + a_i^2\ \theta + \cdots + a_i^N\ \theta^{N-1} \tag{2.38}$$

$$b_j(\theta) = b_j^1 + b_j^2\ \theta + \cdots + b_j^N\ \theta^{N-1} \tag{2.39}$$

Assim, qualquer modelo particular $M(q,\theta)$ é caracterizado pelos coeficientes a_i^k e b_j^l, $k, l \in [1, 2, \cdots, N]$. Definindo agora a matriz Θ de coeficientes a serem identificados:

$$\hat{\Theta} \triangleq \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^N \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{na}^1 & a_{na}^2 & \cdots & a_{na}^N \\ b_0^1 & b_0^2 & \cdots & b_0^N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{nb}^1 & b_{nb}^2 & \cdots & b_{nb}^N \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

e

$$\Psi_k \triangleq \phi_k \ \pi_k \triangleq \begin{bmatrix} -y_{k-1} \\ \vdots \\ -y_{k-na} \\ u_k \\ \vdots \\ u_{k-nb} \end{bmatrix} [1 \ \theta_k \ \theta_k^2 \ \cdots \ \theta_k^{N-1}] \tag{2.41}$$

em que $\theta_k = \theta(k)$ para simplificar a notação.

Define-se o produto interno de duas matrizes A e B de dimensões iguais como:

$$< A, B >= traço(A^* \ B) = traço(B \ A^*) \tag{2.42}$$

onde A^* é o transposto complexo conjugado da matriz A. Desse modo, pode-se reescrever o modelo dado pelas EQ. 2.37 a 2.41 como:

$$\hat{y}_k \ = < \hat{\Theta}, \Psi_k > \tag{2.43}$$

Considera-se a função custo:

$$J = J(\hat{\Theta}) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T} E\{\epsilon(k, \hat{\Theta})^2\} \tag{2.44}$$

em que o erro de predição ϵ é definido como:

$$\epsilon(k, \hat{\Theta}) = y_k - < \hat{\Theta}, \Psi_k > \tag{2.45}$$

Seja $\hat{\Theta}_k$ a matriz de parâmetros estimados no instante k. A atualização dos parâmetros e minimização da EQ. 2.45 utilizando o algoritmo *steepest descent* recai na seguinte equação:

$$\delta\hat{\Theta} = \hat{\Theta}_k - \hat{\Theta}_{k-1} = -\frac{1}{2}\alpha \ g(\hat{\Theta}_{k-1}) \tag{2.46}$$

sendo que $g(\hat{\Theta}_{k-1})$ é o gradiente do erro quadrático médio (MSE, do inglês *Mean Square Error*):

$$g(\Theta) = \frac{dJ(\Theta)}{d\Theta} \tag{2.47}$$

e o parâmetro α é o tamanho do passo. Uma aproximação do algoritmo MSE é o LMS (do inglês *Least Mean Square*), em que na EQ. 2.47 a função custo é substituída por:

$$J(\Theta) = \epsilon(k, \Theta)^2 \tag{2.48}$$

A atualização dos parâmetros é então feita de acordo com a seguinte fórmula recursiva:

$$\hat{\Theta}_{k+1} = \hat{\Theta}_{k+1} - \frac{1}{2}\alpha \left[\frac{d}{d\Theta} \left(\epsilon(k,\Theta)^2 \right) \right] \Bigg|_{\Theta=\hat{\Theta}_k} \tag{2.49}$$

Lembrando que $\epsilon(k,\hat{\Theta}) = y_k - <\hat{\Theta}, \Psi_k> = y_k - traço(\hat{\Theta}^T \Psi_k)$ e usando a propriedade $\frac{d}{dX} traço(X^T B) = B$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha \frac{d}{d\hat{\Theta}}(\epsilon^2) &= \alpha(\epsilon \frac{d}{d\hat{\Theta}}(y_k - traço(\hat{\Theta}^T \Psi_k))) \\ &= -\alpha(\epsilon \Psi_k) \end{aligned}$$

Assim, calculando para $\Theta = \hat{\Theta}_k$, chega-se ao seguinte algoritmo LMS:

$$\Psi_k = \phi_k \ \pi_k \tag{2.50}$$

$$\epsilon_k = y_k - <\hat{\Theta}_k, \Psi_k> = y_k - traço \left(\hat{\Theta}_k^* \ \Psi_k \right) \tag{2.51}$$

$$\hat{\Theta}_{k+1} = \hat{\Theta}_k + \alpha \ \epsilon_k \ \Psi_k \tag{2.52}$$

Deve-se então escolher valores para o passo α e para a matriz $\hat{\Theta}_0$ convenientes, calcular as EQ. 2.50 a 2.52 para os k valores de θ_k, u_k e y_k, até que os coeficientes de $\hat{\Theta}$ convirjam para os valores reais. Este método, por ser iterativo, apresenta problemas de precisão e dificuldade na escolha do passo adequado e da matriz $\hat{\Theta}$ inicial, que deve ser feita por tentativa e erro.

Assim como a metodologia N2CACGO (Seção 2.1.1) altera a função custo (EQ. 2.6), a metodologia apresentada no Capítulo 3 reescreve a matriz $\hat{\Theta}$ definida na EQ. 2.40 como um vetor. Dessa forma a EQ. 2.45 pode ser resolvida analiticamente. A consideração de que as funções $a_i(\theta)$ e $b_j(\theta)$ são polinomiais, assim como ocorre na metodologia apresentada na Seção 2.2.1, também é utilizada no Capítulo 3.

2.3 SISTEMAS DISCRETOS

Os controladores contínuos são construídos utilizando eletrônica analógica, cujos componentes são circuitos contendo resistores, capacitores e amplificadores operacionais. Entretanto, embora vários processos sejam contínuos por natureza, os modernos sistemas de controle utilizados se baseiam em computadores digitais e aplicam algoritmos de controle digital (COELHO & COELHO, 2004). Diferente da eletrônica analógica, os computadores digitais não podem integrar, tendo que resolver equações diferenciais através de aproximações envolvendo somas e multiplicações apenas, técnica conhecida como integração numérica (FRANKLIN et al., 1988).

Um sistema digital opera com amostragens da saída sensoriada da planta e o controlador digital é implementado por equações algébricas recursivas chamadas equações diferenças. Tanto a amostragem quanto o sinal de controle são ativados em intervalos de tempo definidos, chamados de período de amostragem (T). A taxa de amostragem é dada por $1/T$, que pode estar em ciclos por segundo (ou Hertz), ou ainda em radianos por segundo (rad/s).

O sinal amostrado da saída é $y(kT)$, em que k pode assumir qualquer valor inteiro (normalmente usa-se a notação $y(k)$ ou y_k). O período de amostragem T é considerado um valor fixo, embora possa variar em certos algoritmos. Uma maneira simples de fazer um computador digital aproximar a solução de uma equação diferencial é utilizar o método de Euler. Da definição de derivada:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{2.53}$$

A relação abaixo será aproximadamente verdadeira se $T \to 0$ ou se $x(t)$ varia pouco no intervalo T:

$$\dot{x}(k) \cong \frac{x(k+1) - x(k)}{T} \tag{2.54}$$

2.3.1 REPRESENTAÇÕES DISCRETAS

Considera-se o seguinte modelo (AGUIRRE, 2004):

$$A(q)\ y(k) = \frac{B(q)}{F(q)} u(k) + \frac{C(q)}{D(q)} v(k) \tag{2.55}$$

$$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)A(q)} u(k) + \frac{C(q)}{D(q)A(q)} v(k) \tag{2.56}$$

$$y(k) = H(q)\ u(k) + G(q)\ v(k) \tag{2.57}$$

sendo q^{-1} o operador de atraso, de forma que $y(k)q^{-1} = y(k-1)$, $v(k)$ um ruído branco e $A(q)$, $B(q)$, $C(q)$, $D(q)$ e $F(q)$ definidos pelos polinômios a seguir:

$$\begin{aligned}
A(q) &= 1 - a_1\ q^{-1} - \cdots - a_{n_y}\ q^{-n_y} \\
B(q) &= 1 - b_1\ q^{-1} - \cdots - b_{n_u}\ q^{-n_u} \\
C(q) &= 1 - c_1\ q^{-1} - \cdots - c_{n_v}\ q^{-n_v} \\
D(q) &= 1 - d_1\ q^{-1} - \cdots - d_{n_d}\ q^{-n_d} \\
F(q) &= 1 - f_1\ q^{-1} - \cdots - f_{n_f}\ q^{-n_f}
\end{aligned}$$

"As funções $H(q)$ e $G(q)$ normalmente são referidas como FT do processo e do ruído, respectivamente, ou seja, $H(q)$ é o resultado de se substituir $q = z$ na transformada unilateral Z da resposta ao impulso do processo $h(k)$. Essa susbtituição se faz necessária uma vez que, a rigor, $H(z)$ é uma representação no domínio da freqüência ao passo que $H(q)$ é uma representação no domínio do tempo. Além disso, q^{-1} é um operador de atraso, ao passo que z^{-1}, a rigor, não é um operador, mas o inverso de uma variável complexa" (AGUIRRE, 2004).

2.3.2 MODELO ARX

O modelo auto-regressivo com entradas externas (ARX do inglês *Autoregressive with Exogenous Inputs*) pode ser obtido a partir do modelo geral dado pela EQ. 2.55, fazendo $C(q) = D(q) = F(q) = 1$, resultando em:

$$\begin{aligned} A(q)\ y(k) &= B(q)\ u(k) + v(k) \\ y(k) &= \frac{B(q)}{A(q)} u(k) + \frac{1}{A(q)} v(k) \end{aligned}$$

Na equação acima pode-se perceber claramente as funções de transferência do sistema $H(q) = \frac{B(q)}{A(q)}$ e do ruído $G(q) = \frac{1}{A(q)}$, coforme a FIG. 2.1.

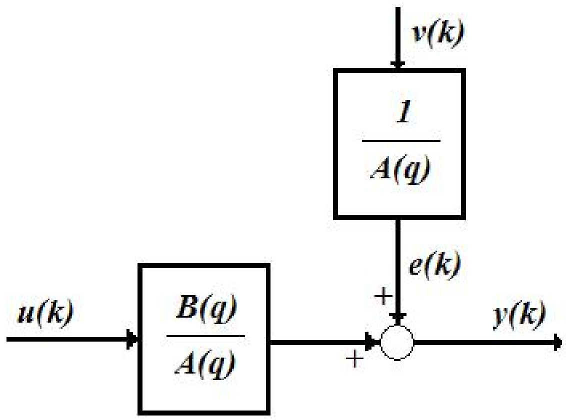

FIG.2.1: Representação esquemática do modelo ARX (AGUIRRE, 2004).

2.3.3 MODELO ARX MULTIVARIÁVEL

Considerando um modelo com p entradas e q saídas, uma possível realização multivariável de um modelo ARX é:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(k) &= A_1 \boldsymbol{y}(k-1) + A_2 \boldsymbol{y}(k-2) + \cdots + A_{n_y} \boldsymbol{y}(k-n_y) + \\ & \quad B_1 \boldsymbol{u}(k-1) + B_2 \boldsymbol{u}(k-2) + \cdots + B_{n_u} \boldsymbol{u}(k-n_u) + \boldsymbol{e}(k) \end{aligned}$$

sendo $A_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $B_i \in \mathbb{R}^{p \times r}$ e

$$\boldsymbol{y}(k) = [y_1(k)\ y_2(k)\ \cdots\ y_p(k)]^T \tag{2.58}$$

$$\boldsymbol{u}(k) = [u_1(k)\ u_2(k)\ \cdots\ u_r(k)]^T \tag{2.59}$$

$$\boldsymbol{e}(k) = [e_1(k)\ e_2(k)\ \cdots\ e_p(k)]^T \tag{2.60}$$

São definidas matrizes de polinômios, ou seja, matrizes em que cada elemento é um polinômio:

$$\boldsymbol{A}(q) = I - A_1\ q^{-1} - \cdots - A_{n_y}\ q^{-n_y} \tag{2.61}$$

$$\boldsymbol{B}(q) = B_1\ q^{-1} + \cdots + B_{n_u}\ q^{-n_u} \tag{2.62}$$

Esta representação é conhecida como VAR (do inglês *vector autoregressive model with exogenous inputs*). Para ilustrar essa representação, será utilizado o modelo apresentado em AGUIRRE (2004):

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & 1,2 \\ 0,3 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-1) \\ y_2(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,35 & -0,3 \\ -0,4 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k-2) \\ y_2(k-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \end{bmatrix}$$

Pode-se representar o mesmo sistema da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{y}(k) = \Theta^T\ \psi(k-1) + \boldsymbol{e}(k) \tag{2.63}$$

$$\Theta = [A_1\ A_2 \cdots A_{n_y}\ B_1\ B_2 \cdots B_{n_u}]^T \tag{2.64}$$

$$\psi(k-1) = [\boldsymbol{y}^T(k-1)\ \boldsymbol{y}^T(k-2) \cdots \boldsymbol{y}^T(k-n_y)\ \boldsymbol{u}^T(k-1)\ \boldsymbol{u}^T(k-2) \cdots \boldsymbol{u}^T(k-n_u)]^T \tag{2.65}$$

2.3.4 REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS DE EQUAÇÕES DIFERENÇAS VARIANTES NO TEMPO

Um sistema discreto variante no tempo pode ser descrito pelas seguintes equações de estado com os parâmetros conhecidos (no instante k):

$$x_{k+1} = A_k\ x_k + B_k\ u_k \tag{2.66}$$

$$y_k = C_k\ x_k + D_k\ u_k \tag{2.67}$$

Para a análise que se segue será considerado um sistema de 2^a ordem, cuja equação diferença está apresentada a seguir:

$$y_k = -a_{1k}\ y_{k-1}\ - a_{2k}\ y_{k-2}\ +\ b_{0k}\ u_k\ +\ b_{1k}\ u_{k-1}\ +\ b_{2k}\ u_{k-2} \tag{2.68}$$

O vetor de estados é representado da seguinte forma:

$$x_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

Comparando as EQ. 2.67 e EQ. 2.68, e considerando que $C_k = [\ 1 \quad 0\ ]$, tem-se:

$$D_k = b_{ok} \tag{2.70}$$

$$x_{1k} = -a_{1k}\ y_{k-1} \ - a_{2k}\ y_{k-2} \ + \ b_{1k}\ u_{k-1} \ + \ b_{2k}\ u_{k-2} \tag{2.71}$$

A EQ. 2.67 no instante $k-1$:

$$\begin{aligned} y_{k-1} &= C_{k-1}\ x_{k-1} + D_{k-1}\ u_{k-1} \\ y_{k-1} &= x_{1(k-1)} + b_{0(k-1)}\ u_{k-1} \end{aligned} \tag{2.72}$$

Substituindo a EQ. 2.72 na EQ. 2.71:

$$x_{1k} = -a_{1k}\ [x_{1(k-1)} + b_{0(k-1)}\ u_{k-1}] - a_{2k}\ y_{k-2} + b_{1k}\ u_{k-1} + b_{2k}\ u_{k-2}$$

$$x_{1k} = -a_{1k}\ x_{1(k-1)} - a_{1k}\ b_{0(k-1)}\ u_{k-1} - a_{2k}\ y_{k-2} + b_{1k}\ u_{k-1} + b_{2k}\ u_{k-2}$$

$$x_{1k} = -a_{1k}\ x_{1(k-1)} + [b_{1k} - a_{1k}\ b_{0(k-1)}]\ u_{k-1} - a_{2k}\ y_{k-2} + b_{2k}\ u_{k-2} \tag{2.73}$$

Comparando a EQ. 2.73 com a EQ. 2.66 (no instante $k-1$), obtém-se a seguinte forma matricial:

$$\begin{aligned} x_k &= \begin{bmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{bmatrix} = A_{k-1}\ x_{k-1} + B_{k-1}\ u_{k-1} \\ x_k &= \underbrace{\begin{bmatrix} -a_{1k} & 1 \\ \square & \square \end{bmatrix}}_{A_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1(k-1)} \\ -a_{2k}\ y_{k-2} + b_{2k}\ u_{k-2} \end{bmatrix}}_{x_{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1k} - a_{1k}\ b_{0(k-1)} \\ \square \end{bmatrix}}_{B_{k-1}} u_{k-1} \end{aligned} \tag{2.74}$$

na qual $\square$ representa os elementos desconhecidos nas matrizes A_{k-1} e B_{k-1}. Para descobrir estes elementos, avança-se a EQ. 2.74 para o instante k:

$$x_{k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_{1(k+1)} & 1 \\ \square & \square \end{bmatrix}}_{A_k} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1k} \\ -a_{2(k+1)}\ y_{k-1} + b_{2(k+1)}\ u_{k-1} \end{bmatrix}}_{x_k} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1(k+1)} - a_{1(k+1)}\ b_{0(k)} \\ \square \end{bmatrix}}_{B_k} u_k$$

Substituindo y_{k-1} pela EQ. 2.72 no estado x_{2k} da equação acima:

$$\begin{aligned} x_{2k} &= -a_{2(k+1)}\ y_{k-1} + b_{2(k+1)}\ u_{k-1} \\ x_{2k} &= -a_{2(k+1)}\ [x_{1(k-1)} + b_{0(k-1)}\ u_{k-1}] + b_{2(k+1)}\ u_{k-1} \\ x_{2k} &= -a_{2(k+1)}\ x_{1(k-1)} - a_{2(k+1)}\ b_{0(k-1)}\ u_{k-1} + b_{2(k+1)}\ u_{k-1} \\ x_{2k} &= -a_{2(k+1)}\ x_{1(k-1)} + [b_{2(k+1)} - a_{2(k+1)}\ b_{0(k-1)}]\ u_{k-1} \end{aligned} \tag{2.75}$$

Assim, para que a EQ. 2.75 seja válida, as matrizes A_{k-1} e B_{k-1} devem ser completadas da seguinte forma:

$$x_k = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_{1k} & 1 \\ -a_{2(k+1)} & 0 \end{bmatrix}}_{A_{k-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{1(k-1)} \\ -a_{2k}\ y_{k-2} + b_{2k}\ u_{k-2} \end{bmatrix}}_{x_{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1k} - a_{1k}\ b_{0(k-1)} \\ b_{2(k+1)} - a_{2(k+1)}\ b_{0(k-1)} \end{bmatrix}}_{B_{k-1}} u_{k-1} \tag{2.76}$$

Dessa forma, pode-se definir as equações de estado para um sistema variante no tempo de 2^a ordem:

$$\begin{aligned} A_k &= \begin{bmatrix} -a_{1(k+1)} & 1 \\ -a_{2(k+2)} & 0 \end{bmatrix} \\ B_k &= \begin{bmatrix} b_{1(k+1)} - a_{1(k+1)}\ b_{0(k)} \\ b_{2(k+2)} - a_{2(k+2)}\ b_{0(k)} \end{bmatrix} \\ C_k &= [1\ 0] \\ D_k &= b_{0k} \end{aligned}$$

Generalizando para um sistema de ordem n:

$$A_k = \begin{bmatrix} -a_{1(k+1)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{2(k+2)} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \cdots & \\ -a_{n(k+n-1)} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{n(k+n)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} b_{1(k+1)} - a_{1(k+1)}\ b_{0(k)} \\ b_{2(k+2)} - a_{2(k+2)}\ b_{0(k)} \\ \vdots \\ b_{n(k+n)} - a_{2(k+n)}\ b_{0(k)} \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

$$C_k = [1\ 0\ 0\ \cdots\ 0] \tag{2.79}$$

$$D_k = b_{0k} \tag{2.80}$$

Para comprovar a correspondência da representação em espaço de estados através das EQ. 2.77 a EQ. 2.80 com a EQ. 2.68, será considerado para análise um sistema de 2^a ordem.

A equação diferença para um sistema de 2^a ordem variante no tempo é mostrada a seguir:

$$y_k = -a_{1k}\ y_{k-1} - a_{2k}\ y_{k-2} + b_{0k}\ u_k + b_{1k}\ u_{k-1} + b_{2k}\ u_{k-2} \tag{2.81}$$

Considerando nulas as entradas e saídas para $k < 1$, as saídas para $k = \{1, 2, 3\}$ são apresentadas a seguir:

- Para $k = 1$:

$$y_1 = b_{01}\ u_1 \tag{2.82}$$

- Para $k = 2$:

$$y_2 = -a_{12}\ y_1 + b_{02}\ u_2 + b_{12}\ u_1 \tag{2.83}$$

- Para $k = 3$:

$$y_3 = -a_{13}\ y_2 - a_{23}\ y_1 + b_{03}\ u_3 + b_{13}\ u_2 + b_{23}\ u_1 \tag{2.84}$$

A partir das equações de estado (EQ. 2.77 a EQ. 2.80) e considerando o estado inicial nulo ($x_1 = [0\ 0]^T$), tem-se:

- Para $k = 1$:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \begin{bmatrix} -a_{12} & 1 \\ -a_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{12} - a_{12}\ b_{01} \\ b_{23} - a_{23}\ b_{01} \end{bmatrix} u_1 \\
x_2 &= \begin{bmatrix} b_{12}\ u_1 - a_{12}\ b_{01}\ u_1 \\ b_{23}\ u_1 - a_{23}\ b_{01}\ u_1 \end{bmatrix} \\
y_1 &= [1\ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b_{01}\ u_1 \\
y_1 &= b_{01} u_1 \qquad (2.85)
\end{aligned}$$

- Para $k = 2$:

$$\begin{aligned}
x_3 &= \begin{bmatrix} -a_{13} & 1 \\ -a_{24} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12}\ u_1 - a_{12}\ b_{01}\ u_1 \\ b_{23}\ u_1 - a_{23}\ b_{01}\ u_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{13} - a_{13}\ b_{02} \\ b_{24} - a_{24}\ b_{02} \end{bmatrix} u_2 \\
x_3 &= \begin{bmatrix} -a_{13}[b_{12}\ u_1 - a_{12}\ b_{01}\ u_1] + b_{23}\ u_1 - a_{23}\ b_{01}\ u_1 + b_{13}\ u_2 - a_{13}\ b_{02}\ u_2 \\ -a_{24}[b_{12}\ u_1 - a_{12}\ b_{01}\ u_1] + b_{24}\ u_2 - a_{24}\ b_{02}\ u_2 \end{bmatrix} \\
y_2 &= [1\ 0] \begin{bmatrix} b_{12}\ u_1 - a_{12}\ b_{01}\ u_1 \\ b_{23}\ u_1 - a_{23}\ b_{01}\ u_1 \end{bmatrix} + b_{02}\ u_2 \\
y_2 &= b_{12}\ u_1 - a_{12}\ \underbrace{b_{01}\ u_1}_{y_1} + b_{02} u_2 \\
y_2 &= -a_{12}\ y_1 + b_{02} u_2 + b_{12}\ u_1 \qquad (2.86)
\end{aligned}$$

- Para $k = 3$:

$$
\begin{aligned}
y_3 &= [1\ 0] \left[\begin{array}{c} -a_{13}[b_{12}\ u_1 - a_{12}\ b_{01}\ u_1] + b_{23}\ u_1 - a_{23}\ b_{01}\ u_1 + b_{13}\ u_2 - a_{13}\ b_{02}\ u_2 \\ -a_{24}[b_{12}\ u_1 - a_{12}\ b_{01}\ u_1] + b_{24}\ u_2 - a_{24}\ b_{02}\ u_2 \end{array} \right] \\
&\quad + b_{03}\ u_3 \\
y_3 &= -a_{13}\ [b_{12}\ u_1 - a_{12}\ b_{01}\ u_1] + b_{23}\ u_1 - a_{23}\ b_{01}\ u_1 + b_{13}\ u_2 - a_{13}\ b_{02}\ u_2 + \ b_{03}u_3 \\
y_3 &= -a_{13}\ \underbrace{[-a_{12}\ b_{01}\ u_1 + b_{02}\ u_2 + b_{12}\ u_1]}_{y_2} - a_{23}\ \underbrace{b_{01}\ u_1}_{y_1} + b_{03}u_3 + b_{13}\ u_2 + b_{23}\ u_1 \\
y_3 &= -a_{13}\ y_2 - a_{23}\ y_1 + b_{03}u_3 + b_{13}\ u_2 + b_{23}\ u_1 \qquad (2.87)
\end{aligned}
$$

Comparando os resultados obtidos, pode-se ver que as respostas da equação diferença (EQ. 2.82 a EQ. 2.84) e da formulação em espaço de estados (EQ. 2.85 a EQ. 2.87) são iguais, podendo-se utilizar tanto uma quanto outra maneira para representar o mesmo sistema.

A dificuldade encontrada para a representação em espaço de estados está no fato de que as matrizes A_k, B_k , C_k e D_k dependem de coeficientes nos tempos $k+1$, $k+2$, $\cdots$, $k+n$ (sendo n a ordem do sistema), porque nem sempre é possível ter o conhecimento prévio do valor destes coeficientes. Quando se faz uma aproximação polinomial da variação destes coeficientes ao longo do tempo, e este polinômio é parametrizado por uma variável cujos valores são conhecidos previamente, pode-se contornar este problema.

A representação em espaço de estados em contrapartida à representação através de equação diferença é importante na simulação dos modelos, especialmente quando se utiliza a ferramenta *Simulink* do *MatLab*.

2.4 MÍNIMOS QUADRADOS

O método de mínimos quadrados é um dos mais conhecidos e utilizados em diversas áreas de ciência e tecnologia. Karl Friedrich Gauss formulou o Princípio dos Mínimos Quadrados ao final do século XVIII para prever a trajetória de planetas e cometas a partir das observações realizadas.

Considerando uma função escalar $y = f(x)$ aplicada a N valores de x, de forma que:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f(x_1) \\
y_2 &= f(x_2) \\
\vdots &= \vdots \\
y_N &= f(x_N) \qquad (2.88)
\end{aligned}
$$

No caso vetorial, $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ depende de um vetor $\boldsymbol{\theta}$ de n parâmetros. Diz-se então que a função $f(\mathbf{x})$ é parametrizada por $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ e pode ser representada como:

$$y = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \tag{2.89}$$

Assim, tem-se um conjunto de equações a partir de várias observações do escalar y (variável dependente) e do vetor de variáveis independentes, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y_1 &= f(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\theta}) \\ y_2 &= f(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\theta}) \\ \vdots &= \vdots \\ y_N &= f(\mathbf{x}_N, \boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \tag{2.90}$$

sendo que y_i é a i-ésima observação de y, e $\mathbf{x}_i = [x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{ni}]^T$ são as i-ésimas observações dos n elementos do vetor $\boldsymbol{x}$. A função definida na EQ. 2.89 define uma família de equações, sendo que N membros dessa família estão representados na EQ. 2.90. A partir de agora, cada membro será denominado *restrição*, ou seja, a EQ. 2.90 é um conjunto de N restrições da função descrita na EQ. 2.89.

Caso sejam conhecidos x_i e y_i, $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$, deseja-se determinar f e $\boldsymbol{\theta}$. Para isso, serão feitas as seguintes considerações:

a) A função f e o vetor $\boldsymbol{\theta}$ não variam de uma restrição para outra, ou seja, todas as restrições são, de fato, da mesma equação.

b) A EQ. 2.89 pode ser escrita como:

$$y = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\theta} \tag{2.91}$$

c) São consideradas n restrições, a fim de se ter n equações para determinar os n elementos de $\boldsymbol{\theta}$, de forma que $N = n$.

Da consideração a) fica claro que em problemas de identificação de sistemas dinâmicos, normalmente supõe-se que o sistema seja invariante no tempo e que os sinais medidos sejam estacionários. A consideração b) implica que f seja linear nos parâmetros. A partir das considerações acima, pode-se escrever a EQ. 2.90 da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = X\ \boldsymbol{\theta} \tag{2.92}$$

sendo $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{x}_i$ a i-ésima coluna de X (deve-se notar que $\mathbf{x}_i$ é um vetor coluna de n linhas, ou seja, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ que é diferente de $x_i \in \mathbb{R}$).

Na EQ. 2.89, y é a variável dependente, pois depende dos regressores x_1, x_2, $\cdots$, x_n, que são também chamados de variáveis independentes. $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros a determinar. Pode-se determinar o vetor de parâmetros invertendo X (desde que X seja não singular), ou seja:

$$\boldsymbol{\theta} = X^{-1}\boldsymbol{y} \tag{2.93}$$

Esta solução é válida para os casos em que o número de restrições é igual ao número de parâmetros de $\boldsymbol{\theta}$ ($n = N$). Na prática, normalmente ocorre que $N >> n$, como pode ser observado nos exemplos apresentados no Capítulo 4. Nesse caso, a matriz $X \in \mathbb{R}^{N \times n}$ é não inversível. A seção seguinte apresenta a solução da EQ. 2.92 para este caso.

2.4.1 SISTEMAS SOBREDETERMINADOS

Caso houver $N > n$ restrições da EQ. 2.89, tem-se um sistema sobredeterminado, de forma que $X \in \mathbb{R}^{N \times n}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ e $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Como a matriz X não é quadrada, ela não pode ser invertida. Entretanto, pré-multiplicando a EQ. 2.92 por X^T em ambos os lados, tem-se:

$$X^T\boldsymbol{y} = X^T X\ \boldsymbol{\theta} \tag{2.94}$$

Dessa forma, $X^T\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $X^T X \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se $X^T X$ for não singular, pode ser invertida, chegando-se a:

$$\boldsymbol{\theta} = [X^T X]^{-1} X^T \boldsymbol{y} \tag{2.95}$$

sendo $[X^T X]^{-1} X^T$ chamada de *matriz pseudo-inversa.*

A EQ. 2.95 resolve o problema de determinação de $\boldsymbol{\theta}$ quando se tem maior número de restrições do que parâmetros.

2.4.2 O MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS

Supondo que se conhece o valor estimado do vetor de parâmetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e que é cometido um erro ξ ao se tentar explicar o valor observado y a partir dos regressores de $\mathbf{x}$ e de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, ou seja:

$$y = \mathbf{x}^T \hat{\boldsymbol{\theta}} + \xi \tag{2.96}$$

Escrevendo de forma matricial, quando se tem $N > n$ medições da equação acima:

$$\boldsymbol{y} = X\hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\xi} \tag{2.97}$$

Deseja-se encontrar $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ que minimize o valor do vetor de erros $\boldsymbol{\xi}$. Este valor será dado pelo somatório do quadrado dos erros ξ, ou seja:

$$J = \sum_{i=1}^{N} \xi(i)^2 = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi} = ||\ \xi\ ||^2 \tag{2.98}$$

O custo J é uma quantia que mostra o quanto o vetor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ se ajusta às medidas de $\boldsymbol{y}$ e X. Quanto menor for J, melhor será esse ajuste. Isolando $\boldsymbol{\xi}$ na EQ. 2.97 e substituindo na EQ. 2.98:

$$\begin{aligned} J &= (\boldsymbol{y} - X\hat{\boldsymbol{\theta}})^T(\boldsymbol{y} - X\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^T X\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^T X^T\boldsymbol{y} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T X^T X\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \tag{2.99}$$

Para encontrar o vetor de parâmetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ que minimiza o valor de J, deve-se resolver $\frac{\partial J}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} &= -(\boldsymbol{y}^T X)^T - X^T\boldsymbol{y} + (X^T X + X^T X)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -(X^T\boldsymbol{y}) - X^T\boldsymbol{y} + 2X^T X\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= -2(X^T\boldsymbol{y}) + 2X^T X\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \tag{2.100}$$

Igualando a EQ. 2.100 a 0 tem-se:

$$\begin{aligned} -2(X^T\boldsymbol{y}) + 2X^T X\hat{\boldsymbol{\theta}} &= 0 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= [X^T X]^{-1}\ X^T\boldsymbol{y} \end{aligned} \tag{2.101}$$

Para que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ corresponda ao mínimo de J, é necessário verificar que $\frac{\partial^2 J}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}^2} = 2X^T X > 0$, o que é verdadeiro, pois $2X^T X$ é positiva definida por construção. Percebe-se que as EQ. 2.101 e EQ. 2.95 são idênticas.

2.4.3 ESTIMADOR DE MÍNIMOS QUADRADOS NÃO-RECURSIVO

Para aplicar o princípio dos mínimos quadrados à teoria de identificação de sistemas, será considerado um processo físico caracterizado por uma entrada $u(t)$, uma saída $y(t)$ e uma perturbação $e(t)$ (esta última pode ser o erro de modelagem, o erro de medição ou o ruído na saída).

Este sistema pode ser representado por uma equação diferença da forma:

$$y_k = -a_1\ y_{k-1} - a_2\ y_{k-2} - \cdots - a_{na}\ y_{k-na} + b_0\ u_k + b_1\ uk - 1 + \cdots + b_{nb}\ u_{k-nb} \tag{2.102}$$

Deseja-se determinar os parâmetros a_i e b_j, $i \in \{1, 2, \cdots, na\}$ e $j \in \{0, 1, 2, \cdots, nb\}$, supondo-se conhecidas as entradas e saídas $[u_k$ e $y_k]$. Para isso, definem-se os seguintes vetores:

$$\psi_k^T = [-y_{k-1} \ -y_{k-2} \ \cdots \ -y_{k-na} \ u_k \ u_{k-1} \ \cdots \ u_{k-nb}] \tag{2.103}$$

$$\theta^T = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{na} \ b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{nb}] \tag{2.104}$$

sendo $\psi_k \in \mathbb{R}^{(na+nb+1)\times 1}$ o vetor de medidas e $\theta \in \mathbb{R}^{(na+nb+1)\times 1}$ o vetor de parâmetros. Assim, pode-se reescrever a EQ. 2.102 como:

$$y_k = \psi_k^T \ \theta + e_k \tag{2.105}$$

denominado *modelo de regressão linear* (LJUNG & SÖDERSTRÖM, 1983).

Admitindo que se tem disponíveis N medições de entradas e de saídas (suficientes para determinar os parâmetros a_i e b_j):

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_0^T \\ \psi_1^T \\ \cdots \\ \psi_{N-1}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} + \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \cdots \\ e_{N-1} \end{bmatrix} \tag{2.106}$$

que pode ser representada matricialmente por:

$$\boldsymbol{Y} = \Psi \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{e} \tag{2.107}$$

Partindo da EQ. 2.107, pode-se utilizar o princípio dos mínimos quadrados para encontrar o valor de $\hat{\theta}$ que minimize a função custo:

$$J = \sum_{k=1}^{N} (y_k - \psi_k^T \ \hat{\boldsymbol{\theta}})^2 \tag{2.108}$$

ou seja, que melhor represente o sistema físico desejado.

2.5 SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

A solução de um SEL através do método da matriz pseudo-inversa foi demonstrado nas Seções 2.4.1 e 2.4.2. Entretanto, a utilização da inversa de X na EQ. 2.93 ou de $(X^T X)$ nas EQ. 2.95 e EQ. 2.101 para resolver o SEL pode não trazer bons resultados, em especial nos casos de sistemas sobredeterminados em que o número de linhas de X é muito maior que o número de colunas.

Existem outros métodos com melhor condicionamento dos resultados, como a Eliminação Gaussiana com Pivoteamento Parcial, Gauss-Jordan, Gauss-Seidel, Gauss-Jacobi e Choleski, sendo este último desenvolvido especialmente para o caso de matrizes simétricas (DIEGUEZ, 1992). Pode-se ainda utilizar as LMI (*Linear Matrix Inequalities*, ou Desigualdades Matriciais Lineares) para resolver um SEL, entretanto, para grandes sistemas o método torna-se inviável devido ao elevado custo computacional. No desenvolvimento deste trabalho foi utilizado o método de Gauss-Jordan, o qual será explicado a seguir.

2.5.1 MÉTODO DE GAUSS-JORDAN

O objetivo deste método é a transformação da matriz principal ($X \in \mathbb{R}^{n \times n}$) do SEL dado por $X\theta = B$ (θ e $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$) em uma matriz identidade ($I \in \mathbb{R}^{n \times n}$), através de operações com linhas. Submetendo-se o vetor B às mesmas operações, este se transformará no vetor solução θ (DIEGUEZ, 1992). As operações efetuadas são as seguintes:

a) Multiplicação (ou divisão) de todos os elementos de uma linha por um valor real;

b) Permutação de linhas; e

c) Substituição de uma linha pela soma algébrica desta linha com uma outra.

Durante a execução do algoritmo poderá surgir um elemento nulo na diagonal da matriz. Nesse caso, o sistema pode ser indeterminado (caso o respectivo elemento de B também seja nulo) ou impossível (caso o respectivo elemento de B não seja nulo).

Para evitar a ocorrência de um elemento muito pequeno na diagonal, produzindo erros numéricos, deve-se colocar na diagonal os termos de maior valor absoluto. A esse procedimento dá-se o nome de *pivoteamento*, que pode ser feito previamente ou durante o processo, sendo este último mais eficiente (DIEGUEZ, 1992).

Inicialmente, deve-se construir a matriz estendida $A = X|B \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$. Em seguida, para i variando de 1 até n, segue-se os seguintes passos:

a) Permutar a linha i com a linha k que possuir o elemento a_{ki} com maior valor absoluto (pivoteamento);

b) Dividir todos os elementos da linha i pelo elemento da diagonal a_{ii}; e

c) Para as linhas $k = 1$ a n, $k \neq i$, subtrair de cada elemento a_{kj} o produto do elemento a_{kj} pelo elemento a_{ij}.

Ao final das iterações obtém-se $A = I|\theta$, ou seja, a matriz X foi transformada na matriz identidade, e o vetor B foi transformado no vetor solução do SEL (θ).

3 METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO LPV DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

Este capítulo apresenta um método para a identificação de um modelo LPV a partir do conhecimento, no domínio do tempo, dos dados de entrada, de saída e da variável que parametriza o comportamento de um sistema.

Seja um sistema G do tipo ARX, linear invariante no tempo, cujos dados de entrada e de saída (u e y, respectivamente) no domínio do tempo sejam conhecidos. Estas variáveis u_k e y_k, $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$, são consideradas discretas, com m sendo o número de amostras disponíveis dos dados. A saída do instante atual desse sistema (y_k) se relaciona com as saídas anteriores e entradas atual e anteriores através de uma equação diferença como se segue:

$$y_k = -a_1\, y_{k-1} \;\; - a_2\, y_{k-2} - \;\cdots\; - a_n\, y_{k-n} \;+\; b_0\, u_k \;+\; b_1\, u_{k-1} \;+\; \cdots \;+\; b_n\, u_{k-n} \quad (3.1)$$

Os coeficientes a_i e b_j, $i \in \{1, \cdots, n\}$ e $j \in \{0, 1, \cdots, n\}$, são constantes e definem o modelo do sistema G.

Agora, seja G seja um sistema *variante no tempo*, os coeficientes a_i e b_j deixam de ser constantes, possuindo um valor diferente para cada instante de tempo k. Assim, pode-se reescrever a equação diferença da seguinte forma:

$$y_k = -a_{1k}\, y_{k-1} \;\; -a_{2k}\, y_{k-2} - \;\cdots\; -a_{nk}\, y_{k-n} + b_{0k}\, u_k + b_{1k}\, u_{k-1} + \cdots + b_{nk}\, u_{k-n} \quad (3.2)$$

em que o índice k acrescentado aos coeficientes indica o instante de tempo considerado.

Assumindo que os coeficientes não sofrem grandes variações entre dois instantes k e $k+1$, pode-se aproximá-los por funções polinomiais dependentes de um parâmetro θ. Admite-se que θ *parametriza o sistema* G, e sua variação é limitada por um valor máximo e mínimo, ou seja, $\theta \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$.

Cabe ressaltar que há sistemas que realmente guardam uma relação entre a variação dos seus coeficientes (a_i e b_j) e uma variável física θ (seja ela endógena ou exógena ao sistema). Caso isso não ocorra, pode-se considerar θ como sendo o próprio tempo, entretanto, isso pode resultar numa aproximação não muito satisfatória, gerando imperfeições no resultado da identificação.

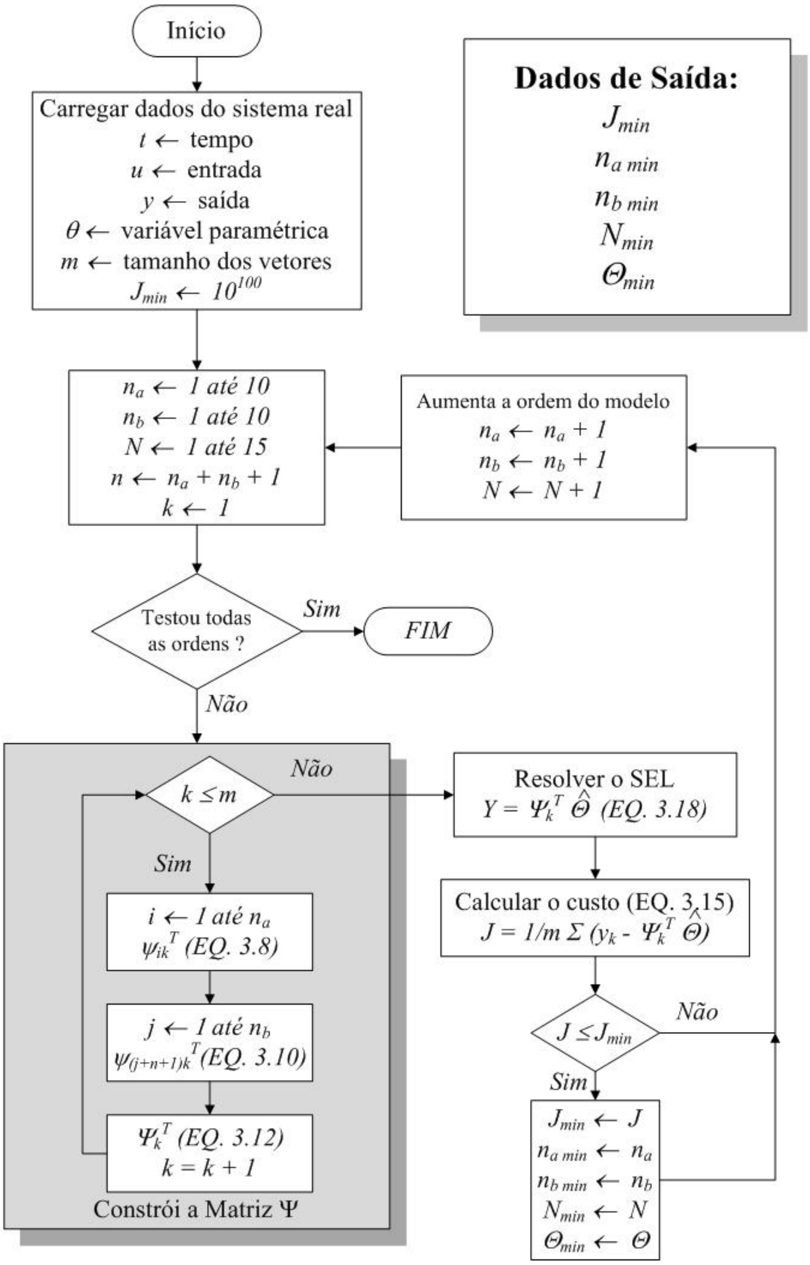

FIG.3.1: Fluxograma do método de identificação proposto.

Cada coeficiente a_{ik} e b_{jk} na EQ. 3.2 pode ser aproximado por uma função polinomial dependente do parâmetro θ:

$$a_{ik} = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}\ \theta_{k-1} + \cdots + \alpha_{iN}\ \theta_{k-1}^{N} \tag{3.3}$$

$$b_{jk} = \beta_{j0} + \beta_{j1}\ \theta_{k-1} + \cdots + \beta_{jN}\ \theta_{k-1}^{N} \tag{3.4}$$

Os coeficientes $\alpha_{i\ell}$ e $\beta_{j\ell}$, $\ell \in [0, \cdots, N]$ e a ordem N do polinômio, quando conhecidos, definem um sistema $\bar{G}$. O objetivo deste método de indentificação é encontrar os coeficientes $\alpha_{i\ell}$ e $\beta_{j\ell}$, de modo que, com a seqüência de entradas u_k e dos parâmetros θ_k, a saída $\bar{y}$ de $\bar{G}$ se aproxime da saída real y de G. Essa aproximação pode ser mensurada através de uma função custo quadrático médio da diferença entre as saídas y e $\bar{y}$, dada por:

$$J = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} (y_k - \bar{y}_k)^2 \tag{3.5}$$

Sendo assim, o objetivo é minimizar a equação acima, obtendo o modelo que mais se aproxima do sistema original. O método é ilustrado pelo algoritmo da FIG. 3.1.

3.1 DESENVOLVIMENTO DA METODOLOGIA

Substituindo os coeficientes a_{ik} e b_{jk} das EQ. 3.3 e EQ. 3.4 na EQ. 3.2:

$$\begin{aligned} y_k &= -\sum_{i=1}^{n} y_{k-i}\ a_{ik} + \sum_{j=0}^{n} u_{k-j}\ b_{jk} \\ y_k &= -\sum_{i=1}^{n} y_{k-i}\ (\alpha_{i0} + \alpha_{i1}\ \theta_{k-1} + \cdots + \alpha_{iN}\ \theta_{k-1}^{N}) + \\ & \sum_{j=0}^{n} u_{k-j}\ (\beta_{j0} + \beta_{j1}\ \theta_{k-1} + \cdots + \beta_{jN}\ \theta_{k-1}^{N}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Separando a parte dependente de θ, dos coeficientes $\alpha_{i\ell}$ e $\beta_{i\ell}$:

$$\begin{aligned} y_k &= -\sum_{i=1}^{n} y_{k-i}\ [\ 1\ \theta_{k-1}\ \cdots\ \theta_{k-1}^{N}\ ]\ [\alpha_{i0}\ \alpha_{i1}\ \cdots\ \alpha_{iN}]^T + \\ & \sum_{j=0}^{n} u_{k-j}\ [\ 1\ \theta_{k-1}\ \cdots\ \theta_{k-1}^{N}\ ]\ [\beta_{j0}\ \beta_{j1}\ \cdots\ \beta_{jN}]^T \end{aligned} \tag{3.7}$$

Definindo os seguintes vetores para $i \in [1, 2, \cdots, n]$:

$$\psi_{ik}^T \triangleq -y_{k-i}\ [\ 1\ \theta_{k-1}\ \cdots\ \theta_{k-1}^{N}\ ] \tag{3.8}$$

$$\phi_i \triangleq [\alpha_{i0}\ \alpha_{i1}\ \cdots\ \alpha_{iN}]^T \tag{3.9}$$

e para $j \in [0, 1, \cdots, n]$:

$$\psi_{(j+n+1)k}^T \triangleq u_{k-j}\ [\ 1\ \theta_{k-1}\ \cdots\ \theta_{k-1}^{N}\ ] \tag{3.10}$$

$$\phi_{(j+n+1)} \triangleq [\beta_{j0}\ \beta_{j1}\ \cdots\ \beta_{jN}]^T \tag{3.11}$$

Definindo também:

$$\Psi_k^T = [\ \psi_{1k}^T\ \psi_{2k}^T\ \cdots\ \psi_{(2n+1)k}^T\ ] \tag{3.12}$$

e

$$\Theta = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdots \\ \phi_{2n+1} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Chega-se a:

$$y_k = \Psi_k^T \; \Theta \tag{3.14}$$

Enquanto o vetor Ψ_k varia a cada instante k, conforme os valores de $-y_{k-1}$, $-y_{k-2}$, $\cdots$, $-y_{k-n}$, u_k, $\cdots$, u_{k-n} e θ_{k-1}, o vetor Θ é constante. Este contém todos os coeficientes $\alpha_{i\ell}$ e $\beta_{j\ell}$ que definem o modelo $\bar{G}$.

A partir da EQ. 3.14 pode-se encontrar o melhor valor de $\hat{\Theta}$ que minimize a função custo quadrático médio:

$$J = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} (y_k - \Psi_k^T \hat{\Theta})^2 \tag{3.15}$$

Conhecendo-se m amostras da saída, da entrada e do parâmetro θ, constrói-se o vetor Y e a matriz Ψ:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1^T \\ \Psi_2^T \\ \cdots \\ \Psi_m^T \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

de forma que:

$$Y = \Psi \; \hat{\Theta} \tag{3.18}$$

com $Y \in \Re^{m \times 1}$ e $\Psi \in \Re^{m \times (2n+1)N}$. Multiplicando ambos os lados por Ψ^T:

$$\underbrace{\Psi^T \; Y}_{P} = \underbrace{\Psi^T \; \Psi}_{Q} \; \hat{\Theta} \tag{3.19}$$

Na EQ. 3.19, $Q \in \Re^{(2n+1)N \times 1}$ e $P \in \Re^{(2n+1)N \times (2n+1)N}$. Esta equação representa um SEL que pode ser resolvido utilizando o método da matriz *pseudo-inversa*, ou outros métodos com melhor condicionamento numérico, como *Gauss-Jordan* com pivoteamento, como citado na Seção 2.5.

3.2 METODOLOGIA APLICADA A SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

A metodologia desenvolvida na seção anterior pode ser estendida para sistemas multivariáveis do tipo MISO (do inglês *Multiple Input Single Output*) e, por conseguinte, para sistemas MIMO (do inglês *Multiple Inputs Multiple Outputs*). O desenvolvimento é análogo, entretanto apresenta um considerável aumento das variáveis a serem identificadas, de acordo com o número de entradas e de saídas do sistema. Seja um sistema G com p entradas e uma saída, definido por uma equação diferença como se segue:

$$\begin{aligned} y_k &= -a_{1k}\ y_{k-1} - a_{2k}\ y_{k-2} - \cdots - a_{nk}\ y_{k-n} \\ &\quad +b^1_{0k}\ u^1_k + b^1_{1k}\ u^1_{k-1} + \cdots + b^1_{nk}\ u^1_{k-n} \\ &\quad +b^2_{1k}\ u^2_{k-1} + b^2_{1k}\ u^2_{k-1} + \cdots + b^2_{nk}\ u^2_{k-n} \\ &\quad +\cdots+ \\ &\quad +b^p_{0k}\ u^p_k + b^p_{1k}\ u^p_{k-1} + \cdots + b^p_{nk}\ u^p_{k-n} \\ y_k &= -\sum_{i=1}^{n} y_{k-i}\ a_{ik} + \sum_{r=1}^{p}\sum_{j=0}^{n} u^r_{k-j}\ b^r_{jk} \end{aligned} \tag{3.20}$$

na qual a_{ik}, $i \in [1, \cdots, n]$, indica os coeficientes que relacionam a saída y no instante atual (instante k) com as saídas anteriores, e b^r_{jk}, $j \in [0, \cdots, n]$, $r \in [1, \cdots, p]$, os coeficientes que relacionam a saída y com a entrada u^r.

Novamente, a variação de cada coeficiente a_i e b^r_j será aproximada por um polinômio dependente do parâmetro θ. Sendo assim:

$$a_{ik} = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}\ \theta_{k-1} + \cdots + \alpha_{iN}\ \theta^N_{k-1} \tag{3.21}$$

$$b^r_{jk} = \beta^r_{j0} + \beta^r_{j1}\ \theta_{k-1} + \cdots + \beta^r_{jN}\ \theta^N_{k-1} \tag{3.22}$$

Substituindo os coeficientes a_{ik} e b^r_{jk} das EQ. 3.21 e EQ. 3.22 na equação diferença em EQ. 3.20:

$$\begin{aligned} y_k = &-\sum_{i=1}^{n} y_{k-i}\ (\alpha_{i0} + \alpha_{i1}\ \theta_{k-1} + \cdots + \alpha_{iN}\ \theta^N_{k-1}) + \\ &\sum_{r=1}^{p}\ \sum_{j=0}^{n} u^r_{k-j}\ (\beta^r_{j0} + \beta^r_{j1}\ \theta_{k-1} + \cdots + \beta^r_{jN}\ \theta^N_{k-1}) \end{aligned}$$

Separando a parte dependente de θ, dos coeficientes $\alpha_{i\ell}$ e $\beta^r_{i\ell}$:

$$\begin{aligned} y_k = &-\sum_{i=1}^{n} y_{k-i}\ [\ 1\ \theta_{k-1}\ \cdots\ \theta^N_{k-1}\ ]\ [\alpha_{i0}\ \alpha_{i1}\ \cdots\ \alpha_{iN}]^T + \\ &\sum_{r=1}^{p}\ \sum_{j=0}^{n} u^r_{k-j}\ [\ 1\ \theta_{k-1}\ \cdots\ \theta^N_{k-1}\ ]\ [\beta^r_{j0}\ \beta^r_{j1}\ \cdots\ \beta^r_{jN}]^T \end{aligned}$$

Definindo os seguintes vetores para $i \in [1, 2, \cdots, n]$:

$$\begin{aligned} \psi_{ik}^T &\triangleq -y_{k-i} \left[\ 1\ \theta_{k-1}\ \cdots\ \theta_{k-1}^N\ \right] \\ \phi_i &\triangleq [\alpha_{i0}\ \alpha_{i1}\ \cdots\ \alpha_{iN}]^T \end{aligned}$$

e para $j \in [0, 1, \cdots, n]$ e $r \in [1, 2, \cdots, p]$:

$$\begin{aligned} \psi_{jk}^{rT} &\triangleq u_{k-j}^r \left[\ 1\ \theta_{k-1}\ \cdots\ \theta_{k-1}^N\ \right] \\ \phi_j^r &\triangleq [\beta_{j0}^r\ \beta_{j1}^r\ \cdots\ \beta_{jN}^r]^T \end{aligned}$$

Definindo também:

$$\begin{aligned} \Psi_{1k}^T &\triangleq \left[\ \psi_{1k}^T\ \psi_{2k}^T\ \cdots\ \psi_{nk}^T\ \right] \\ \Psi_{2k}^T &\triangleq \left[\ \psi_{0k}^{1T}\ \psi_{1k}^{1T}\ \cdots\ \psi_{nk}^{1T}\ \right] \\ \Psi_{3k}^T &\triangleq \left[\ \psi_{0k}^{2T}\ \psi_{1k}^{2T}\ \cdots\ \psi_{nk}^{2T}\ \right] \\ &\cdots \\ \Psi_{(p+1)k}^T &\triangleq \left[\ \psi_{0k}^{pT}\ \psi_{1k}^{pT}\ \cdots\ \psi_{nk}^{pT}\ \right] \end{aligned} \tag{3.23}$$

e

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\triangleq \left[\ \phi_1^T\ \phi_2^T\ \cdots\ \phi_n^T\ \right]^T \\ \Phi_2 &\triangleq \left[\ \phi_0^{1T}\ \phi_1^{1T}\ \cdots\ \phi_n^{1T}\ \right]^T \\ \Phi_3 &\triangleq \left[\ \phi_0^{2T}\ \phi_1^{2T}\ \cdots\ \phi_n^{2T}\ \right]^T \\ &\cdots \\ \Phi_{p+1} &\triangleq \left[\ \phi_0^{pT}\ \phi_1^{pT}\ \cdots\ \phi_n^{pT}\ \right]^T \end{aligned} \tag{3.24}$$

Ainda:

$$\begin{aligned} \Psi_k^T &\triangleq [\Psi_{1k}^T\ \Psi_{2k}^T\ \cdots\ \Psi_{(p+1)k}^T] \\ \Theta &\triangleq \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdots \\ \Phi_{p+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Chega-se a:

$$y_k = \Psi_k^T\ \Theta \tag{3.25}$$

com $\Psi_k^T \in \Re^{1 \times N[n(p+1)+p]}$ e $\Theta \in \Re^{N[n(p+1)+p] \times 1}$. O caso monovariável apresentado na seção anterior é uma particularidade do caso MISO, quando $p = 1$.

3.3 IDENTIFICAÇÃO PARAMÉTRICA POR FILTRO DE KALMAN

O Filtro de Kalman pode ser utilizado na identificação LPV proposta nas Seções 3.1 e 3.2. A partir do conhecimento dos sinais de entrada u, de saída y, e da variável θ que parametriza o sistema G, é possível estimar os valores dos coeficientes $\alpha_{i\ell}$ e $\beta_{j\ell}$ das EQ. 3.3 e EQ. 3.4 ou $\alpha_{i\ell}$ e $\beta^r_{j\ell}$ das EQ. 3.21 e EQ. 3.22. Contudo, é possível que se obtenha uma identificação pobre, caso não se escolham adequadamente os sinais (ANDERSON & MOORE, 1979). Esta seção apresenta a implementação do Filtro de Kalman para identificação LPV e os resultados obtidos encontram-se na Seção 4.7.

Seja um modelo LPV descrito como na EQ. 3.2. Supondo o sistema sujeito a um ruído do sensor de medidas v_k e que a transição do vetor de parâmetros Θ está sujeita a perturbações aleatórias w_k:

$$\begin{cases} \Theta^{(i)}_{k+1} = \Theta^{(i)}_k + w^{(i)}_k \\ y_k + a_{1k}\ y_{k-1} + \cdots + a_{nk}\ y_{k-n} = b_{1k}\ u_{k-1} + \cdots + b_{mk}\ u_{k-m} + v_k \end{cases} \tag{3.26}$$

em que $\{w^{(i)}_k\}$ e v_k são considerados processos estocásticos gaussianos, brancos, de média nula e independentes. É suposta também a independência entre $\{w^{(i)}_k\}$ e $\{w^{(j)}_k\}$, para $i \neq j$.

Assim, o modelo na EQ. 3.26 pode ser reescrito sob a forma de espaço de estado discreto:

$$\begin{cases} \Theta_{k+1} &= \underbrace{I_{N(2n+1)\ \mathrm{x}\ N(2n+1)}}_{F}\ \Theta_k + w_k \\ y_k &= \underbrace{\Psi^T_k}_{H^T_k}\ \Theta_k + v_k \end{cases} \tag{3.27}$$

onde $F = I$ é a matriz de transição de estados e H^T_k é a matriz de saída.

A seguir são relacionadas as equações do filtro de Kalman:

$$\bar{x}_k = F_{k-1}\ \hat{x}_{k-1} \tag{3.28}$$

$$P_{p(k)} = F_{k-1}\ P_{e(k-1)}\ F^T_{k-1} + Q_{k-1} \tag{3.29}$$

$$K_{f(k)} = P_{p(k)}\ H^T_k\ [H_k\ P_{p(k)}\ H^T_k + R_k]^{-1} \tag{3.30}$$

$$\hat{x}_k = \bar{x}_k + K_{f(k)}[y_k - H_k\ \bar{x}_k] \tag{3.31}$$

$$P_{e(k)} = [I - K_{f(k)}\ H_k]\ P_{p(k)} \tag{3.32}$$

sendo $\bar{x}$ o estado predito, $\hat{x}$ o estado estimado, P_p a matriz covariância de erro de predição, P_e a matriz covariância de erro de estimação, Q a matriz expectância de ruído da planta,

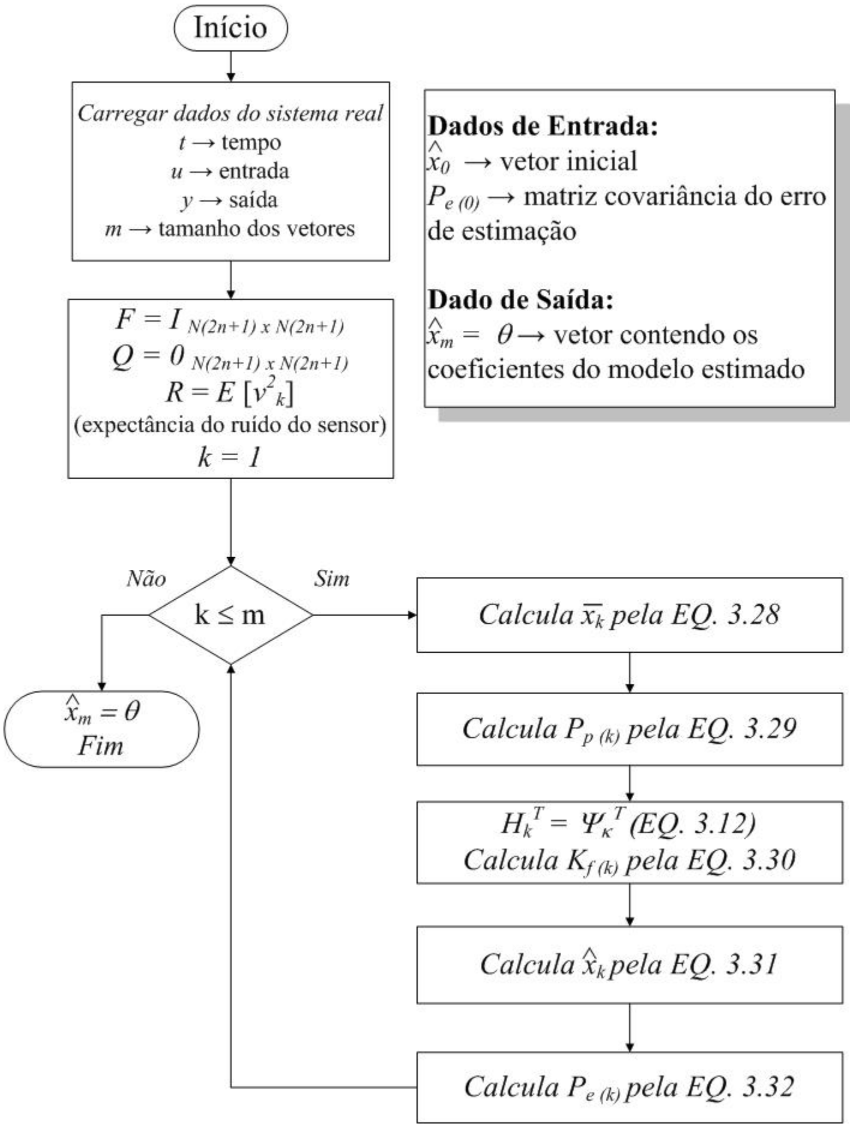

FIG.3.2: Fluxograma do método de identificação utilizando Filtro de Kalman.

R a expectância de ruído do sensor, e K_f o ganho de Kalman. O algoritmo da FIG. 3.2 mostra como utilizar o Filtro de Kalman para realizar a identificação.

A identificação pelo Filtro de Kalman tem a vantagem de, por ser um método recursivo, poder ser realizada em tempo real. Com isso, não há necessidade de uma grande quantidade de memória para armazenar os dados, pois os mesmos podem ser descartados à medida em que forem utilizados.

3.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO DE IDENTIFICAÇÃO

Esta seção trata de alguns aspectos relevantes quanto à metodologia para identificação de sistemas proposta neste capítulo.

Inicialmente, para o desenvolvimento da metodologia foi considerado que a saída y_k depende de n saídas anteriores e de n entradas anteriores. Na prática, isso pode não ocorrer. Assim, na busca do melhor modelo, testa-se relações da saída atual com n_a saídas anteriores e n_b entradas anteriores, permitindo uma maior variedade de modelos testados. Através dos resultados obtidos no Capítulo 4, vê-se que a maioria dos modelos identificados possuem valores diferentes de n_a e n_b, confirmando o exposto aqui.

Além disso, é possível que se obtenha melhores resultados caso sejam considerados que os coeficientes possam ter ordens diferentes de polinômios. Devido ao aumento do tempo de execução do algoritmo que essa situação traria, nos exemplos do Capítulo 4 foi considerado que todos os coeficientes possuem a mesma ordem de polinômio N.

Outro ponto a ser destacado é que a saída y_k não necessariamente está relacionada com a entrada atual u_k, o que equivale a uma matriz de transmissão direta nula ($D = 0$) em espaço de estados. Isso também deve ser levado em conta na identificação, testando-se as duas alternativas e verificando qual traz melhores resultados.

A TAB. 3.4 mostra os custos de identificação (J_{Id}) e de validação (J_{Val}) de modelos de diferentes ordens para o sistema massa-mola-amortecedor de 4^a ordem da Seção 4.2. Percebe-se que os modelos possuem valores diferentes de n_a, n_{b1} (com relação à primeira entrada) e n_{b2} (com relação à segunda entrada), além de custos diferentes para o caso em que b_0 é levado em consideração ou não.

TAB.3.1: Ordens de alguns modelos identificados para o sistema massa-mola-amortecedor de 4^a ordem e os respectivos custos de identificação (J_{Id}) e de validação (J_{Val}).

Massa	Saída	n_a	n_{b1}	n_{b2}	N	b_0	J_{Id}
m_1	Posição	4	5	3	6	Sim	$7{,}20895 \times 10^{-13}$
	Posição	4	1	4	6	Não	$7{,}03720 \times 10^{-13}$
m_2	Posição	4	5	5	3	Sim	$2{,}30827 \times 10^{-16}$
	Posição	4	5	5	3	Não	$2{,}32548 \times 10^{-16}$

Ao se transformar o problema de identificação de modelos em um problema de resolução de um Sistema de Equações Lineares, deve-se ter o cuidado de garantir a viabilidade deste último. Para isso, a matriz $\Psi^T \Psi$ da EQ. 3.19 precisa ser inversível. A matriz Ψ é uma combinação dos dados de saída, de entrada, e da variável paramétrica θ (EQ. 3.8 e EQ. 3.10), sendo assim, uma maneira de garantir a não singularidade de $\Psi^T \Psi$ é utilizar sinais que sejam suficientemente ativos. Supondo que todos os sinais sejam constantes, $u_k = c_u$, $y_k = c_y$ e $\theta_k = c_\theta$, $\forall k$, a matriz Ψ terá colunas repetidas, bem como $\Psi^T \Psi$, que consequentemente será singular.

Assim, quando possível, deve-se utilizar sinais de entrada u ativos o suficiente para estimular o sinal de saída y. Quando isso não é possível, no caso de identificação utilizando dados de um experimento real por exemplo, a variação de θ normalmente compensará o fato da entrada não ser um sinal suficientemente ativo. Cabe ressaltar que a disponibilidade dos dados da variável paramétrica é muito importante nessa metodologia de identificação LPV, pois ela define uma trajetória de operação do sistema. O conhecimento dessa informação adicional aos dados de entrada e de saída caracteriza uma metodologia do tipo caixa-cinza.

Ao testar a metodologia nos exemplos do Capítulo 4, verificou-se que nem sempre o resultado era satisfatório, ao tentar encontrar um modelo único que se aproximasse do sistema original durante todo o intervalo de tempo considerado. Com isso, desenvolveu-se uma alternativa para melhorar os resultados da identificação, que resultou em custos de identificação menores. Essa metodologia alternativa é detalhada na seção seguinte.

3.5 IDENTIFICAÇÃO POR PARTES

Em alguns casos, quando se realiza a identificação de um modelo LPV que reproduza a saída do sistema real, o resultado não é satisfatório (caso do Veículo Lançador de Satélites na Seção 4.4 e do míssil não-linear nas Seções 4.3 - saída η - e 4.5.2 - com ruído). Isso pode ser explicado pelo fato da variação dos coeficientes ser muito grande, ou ainda, apresentar descontinuidades, de forma que não possa ser aproximada por um polinômio.

A fim de contornar esse problema, divide-se os dados em n intervalos de tempo menores, nos quais considera-se a variação dos coeficientes aproximável por um polinômio. Em seguida, executa-se a identificação para cada intervalo, encontrando n modelos.

Nesse ponto, é interessante observar que, mesmo encontrando os melhores modelos para cada faixa de tempo (utilizando os dados reais), quando se simula o sistema com todos os modelos em conjunto, o resultado ainda não é satisfatório. A FIG. 3.3 mostra a identificação por partes do VLS, com os dados divididos em intervalos de 5s. Percebe-se que a resposta do modelo identificado diverge dos dados ideais.

Para resolver este problema, deve-se levar em consideração na identificação de um intevalo, os resultados obtidos na identificação do intervalo anterior. Os passos a seguir detalham esse procedimento:

- Divide-se os dados em intervalos de tempo $\boldsymbol{t_1}$, $\boldsymbol{t_2}$, $\boldsymbol{t_3}$, $\cdots$, $\boldsymbol{t_n}$ (saída $\boldsymbol{y}$ em $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{y_n}$; entrada $\boldsymbol{u}$ em $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{u_n}$; e variável $\boldsymbol{\theta}$ em $\boldsymbol{\theta_1}$, $\boldsymbol{\theta_2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\theta_n}$);

- Para o primeiro intervalo $\boldsymbol{t_1}$, utilizam-se os dados reais ($\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{u_1}$ e $\boldsymbol{\theta_1}$) para encontrar o modelo estimado $\bar{G}_1$;

- O modelo $\bar{G}_1$ gera a saída identificada $\boldsymbol{\bar{y}_1}$;

- Para identificar o modelo $\bar{G}_2$ referente ao intervalo $\boldsymbol{t_2}$, ao invés de utilizar o conjunto de dados reais $[\boldsymbol{y_1}^T \ \ \boldsymbol{y_2}^T]^T$, utiliza-se uma combinação dos dados identificados do primeiro intervalo com os dados reais do segundo intervalo $[\boldsymbol{\bar{y}_1} \ \ \boldsymbol{y_2}]$;

- O procedimento segue assim sucessivamente: para encontrar o modelo $\boldsymbol{\bar{G}_n}$ utiliza-se o conjunto de dados $[\boldsymbol{\bar{y}_1} \ \ \boldsymbol{\bar{y}_2} \ \ \cdots \ \ \boldsymbol{\bar{y}_{n-1}} \ \ \boldsymbol{y_n}]$.

Dessa forma, garante-se que não haja descontinuidades na transição entre os modelos, fazendo com que a simulação completa obtenha resultados melhores que a identificação de um único modelo para o sistema.

A transição entre um modelo e outro é feita de forma direta, bastando atualizar os coeficientes do vetor Θ. Deve-se apenas tomar cuidado com a mudança do grau dos mesmos (valores de na, nb e N), para construir a matriz Ψ_k (EQ. 3.12) com a dimensão adequada ao vetor Θ (EQ. 3.13).

Essa técnica traz um aumento do número de modelos identificados ao final. Portanto, deve-se ter em mente o quanto se quer melhorar os resultados, em contrapartida ao aumento significativo dos modelos identificados, obtendo o melhor resultado para o objetivo desejado. A FIG. 3.4 mostra o resultado da identificação por partes do VLS, com os dados divididos em intervalos de 5s, utilizando o procedimento exposto nesta seção. Pode-se perceber que a resposta do modelo identificado é próxima da resposta ideal.

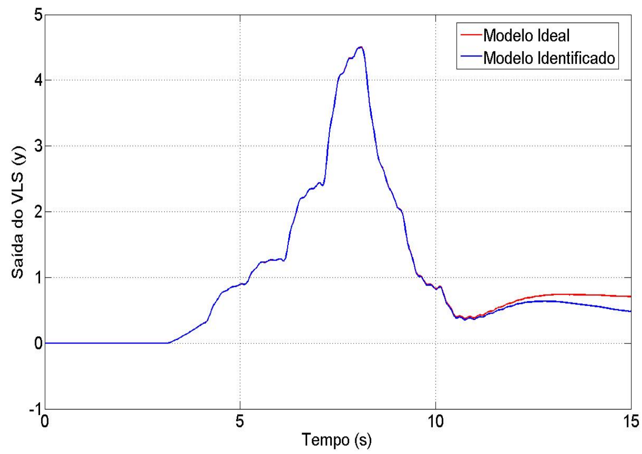

FIG.3.3: Identificação do VLS (dados divididos em intervalos de 5s).

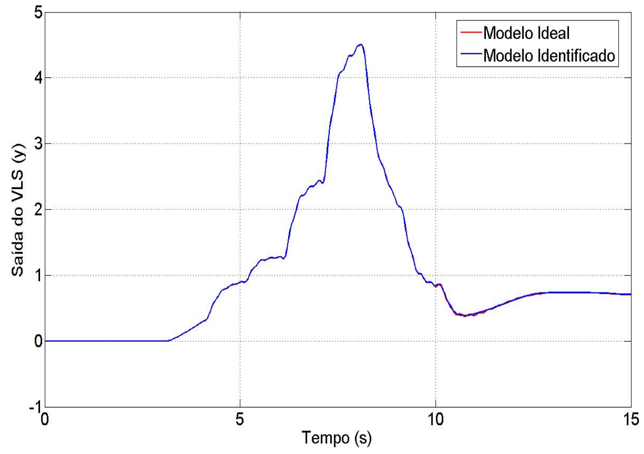

FIG.3.4: Identificação por partes do VLS (dados divididos em intervalos de 5s).

4 APLICAÇÃO E RESULTADOS

Para demonstrar a aplicabilidade e os resultados do método proposto no Capítulo 3, o mesmo será empregado em alguns modelos. Para isso, serão utilizados um sistema massa-mola-amortecedor de 2^a e 4^a ordens (com coeficiente de elasticidade das molas variando de forma não-linear conforme a posição das massas), o modelo não-linear de um míssil ar-ar e, por fim, um modelo LPV de um veículo lançador de satélites. É visto também o resultado quando o sistema a ser identificado apresenta ruído na saída. Por fim, é apresentado o resultado da identificação por Filtro de Kalman no modelo do míssil não-linear com ruído.

Para encontrar os melhores modelos, foram testados valores de n_a e n_b variando de 1 até 10, e valores de N variando de 2 até 15, conforme exposto na Seção 3.4. O programa utilizado se encontra no Apêndice 7.1. Os coeficientes dos modelos identificados do sistema Massa-Mola-Amortecedor de 2^a e 4^a ordens, do míssil não-linear, dos sistemas com ruído e utilizando Filtro de Kalman encontram-se nos Apêndices. Os dados foram discretizados utilizando uma freqüência de amostragem de 64Hz, que é o valor utilizado na obtenção das informações de vôos reais do VLS.

Tendo em vista que nenhum modelo poderá representar o sistema real em todos os aspectos (AGUIRRE, 2004), deve-se levar em conta na sua validação quais características deseja-se que ele reproduza. Outra informação importante a saber é quão gerais os modelos são, de modo que na validação deve-se utilizar uma entrada diferente da que foi utilizada na identificação. Entretanto, no caso da identificação de modelos LPV que representem sistemas não-lineares, a identificação é realizada ao longo de uma trajetória de operação determinada pela variável paramétrica θ. Sendo assim, a validação deve ser feita com o sistema em condições de operação semelhante, ou seja, próximo dessa mesma trajetória. Caso contrário, o modelo revelará diferenças com relação às observações quando for validado (AGUIRRE, 2004).

Assim, com exceção do modelo do VLS (Seção 4.4), foram utilizadas para a validação dos modelos identificados entradas com valores 1% menores que as entradas utilizadas para identificação, de modo que a trajetória de operação não se alterasse muito, embora produzisse uma diferença entre os conjuntos de dados. Além disso, as entradas foram defasadas no tempo de 1 período de amostragem ($\frac{1}{64}s = 0,015625s$).

4.1 SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR DE SEGUNDA ORDEM

Considere um sistema massa-mola-amortecedor com uma massa, conforme a FIG. 4.1. A constante elástica da mola e o coeficiente de amortecimento são representados por k e b, respectivamente, e uma força F é aplicada na massa.

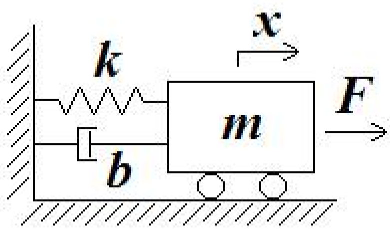

FIG.4.1: Diagrama do sistema massa-mola-amortecedor de 2^a ordem.

Considerando o sistema sem atrito, a equação da dinâmica desse sistema é dada por:

$$m\,\ddot{x} = F - F_k - F_b \tag{4.1}$$

sendo que:

$$\begin{aligned} F_k &= k\,x && (4.2)\\ F_b &= b\,\dot{x} && (4.3) \end{aligned}$$

Substituindo as EQ. 4.2 e EQ. 4.3 na EQ. 4.1, tem-se:

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x} &= F - k\,x - b\,\dot{x} \\ \ddot{x} &= \frac{F}{m} - \frac{k}{m}\,x - \frac{b}{m}\,\dot{x} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Considerando as seguintes variáveis de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= \dot{x} = x_2 && (4.5)\\ \dot{x_2} &= \ddot{x} = \frac{F}{m} - \frac{k}{m}\,x_1 - \frac{b}{m}\,x_2 && (4.6) \end{aligned}$$

Pode-se colocar as EQ. 4.5 e EQ. 4.6 em espaço de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F \tag{4.7}$$

As saídas identificadas foram a posição da massa e a sua velocidade:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} F \tag{4.8}$$

Este é um sistema linear. Para inserir uma não-linearidade no modelo, a constante elástica da mola será considerada dependente da posição da massa:

$$k = cos(x) \tag{4.9}$$

Assim, a variável que parametriza o sistema será a posição da massa [$\theta = x(t)$]. As entradas utilizadas para identificação e para validação dos modelos estão representadas nas FIG. 4.2 e FIG. 4.3. Aa trajetórias de operação nominal e de validação, obtidas utilizando-se a entrada de identificação e de validação, respectivamente, estão na FIG. 4.4. O sistema foi simulado considerando-se $m = 1Kg$ e $b = 1Ns/m$. Aplicando a metodologia apresentada no Capítulo 3, obteve-se os resultados mostrados nas FIG. 4.5 e FIG. 4.6.

Também é considerado o caso em que a constante elástica da mola varia conforme o seno da posição da massa [$k = sen(x)$]. As forças empregadas estão representadas nas FIG. 4.7 e FIG. 4.8, e os resultados nas FIG. 4.10 e FIG. 4.11. Aa trajetórias de operação nominal e de validação estão na FIG. 4.9.

Neste exemplo, todas as saídas obtiveram bons resultados, com custos de identificação e de validação baixos, da ordem de 10^{-3} a 10^{-10}. Os coeficientes dos modelos identificados estão nos Apêndices 7.2.1 a 7.2.4. A TAB. 4.1 reúne os resultados obtidos, e a TAB. 4.2 mostra a variação do custo conforme a ordem dos modelos identificados para a posição da massa m com $k = cos(x)$.

Na TAB. 4.1, o custo de identificação J_{Id} se refere à comparação da saída do modelo com a saída do sistema original, utilizando a entrada de identificação. O custo de validação J_{Val}, analogamente, se refere à diferença entre a saída do modelo e a saída do sistema original, utilizando a entrada de validação.

TAB.4.1: Custos de identificação (J_{Id}) e de validação (J_{Val}) para o sistema massa-mola-amortecedor de 2^a ordem.

Não-Linearidade	Saída	n_a	n_b	N	b_0	J_{Id}	J_{Val}
$k = cos(x)$	Posição	3	6	6	Não	$8{,}46422\times10^{-8}$	$3{,}98232\times10^{-5}$
	Velocidade	10	4	10	Sim	$7{,}46147\times10^{-8}$	$2{,}63667\times10^{-6}$
$k = sen(x)$	Posição	2	3	6	Não	$4{,}33910\times10^{-10}$	$5{,}59088\times10^{-3}$
	Velocidade	7	2	5	Não	$2{,}05898\times10^{-9}$	$2{,}99107\times10^{-6}$

TAB.4.2: Variação do custo de identificação (J_{Id}) e de validação (J_{Val}) e as respectivas ordens dos modelos para a posição da massa m: $k = cos(x)$.

n_a	n_b	N	b_0	J_{Id}	J_{Val}
1	1	1	Não	1,33565	1,32820
1	1	3		0,95465	0,94361
1	2	4		0,95445	0,93886
1	8	4		0,94832	0,93141
2	1	5		0,50132	0,49362
2	1	15		$1{,}31308\times10^{-5}$	0,54745
2	7	7		$3{,}99286\times10^{-7}$	$6{,}20015\times10^{-3}$
3	6	6		$8{,}46422\times10^{-8}$	$3{,}98232\times10^{-5}$

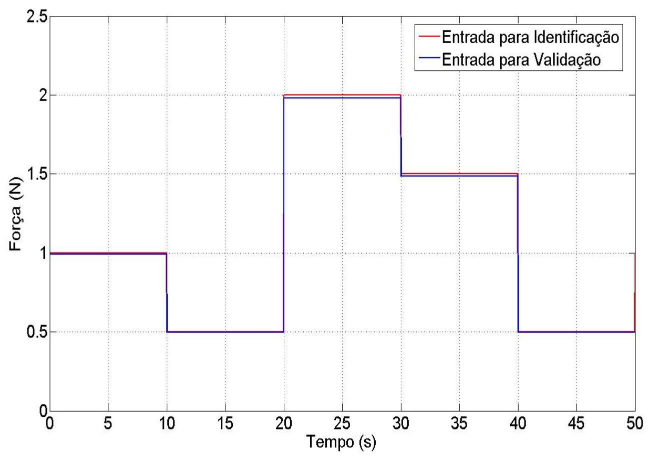

FIG.4.2: Forças aplicadas na massa m para identificação e para validação: $k = cos(x)$.

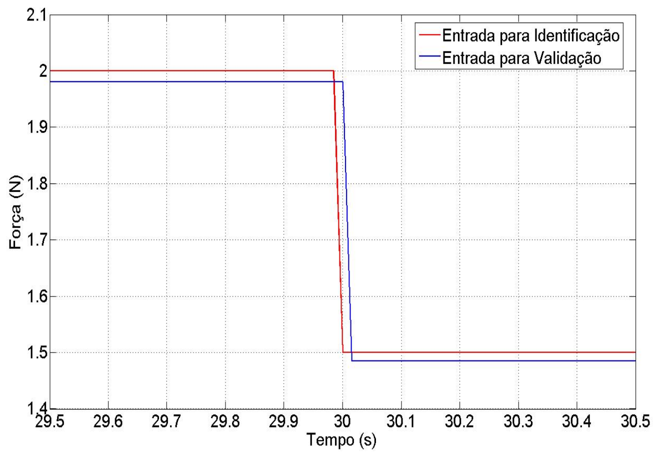

FIG.4.3: Detalhe das forças aplicadas na massa m para identificação e para validação: $k = cos(x)$.

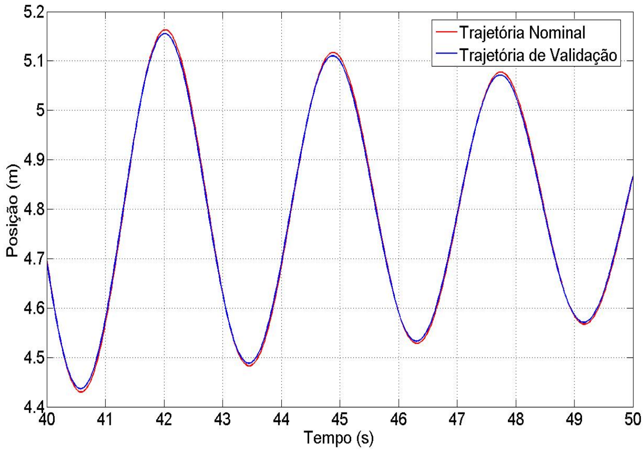

FIG.4.4: Detalhe das trajetórias de operação do sistema massa-mola-amortecedor de 2^a ordem: $k = cos(x)$.

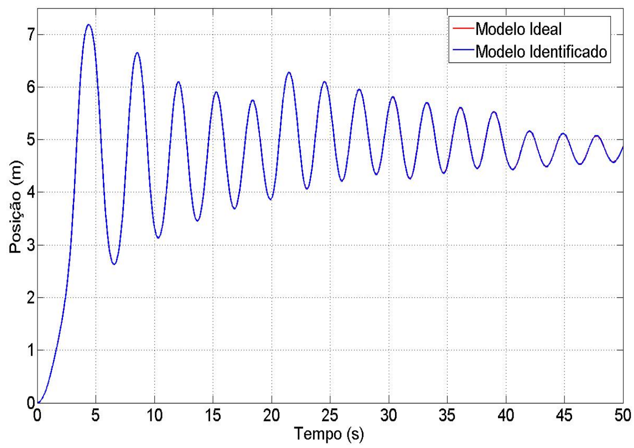

FIG.4.5: Identificação da posição da massa m: $k = cos(x)$.

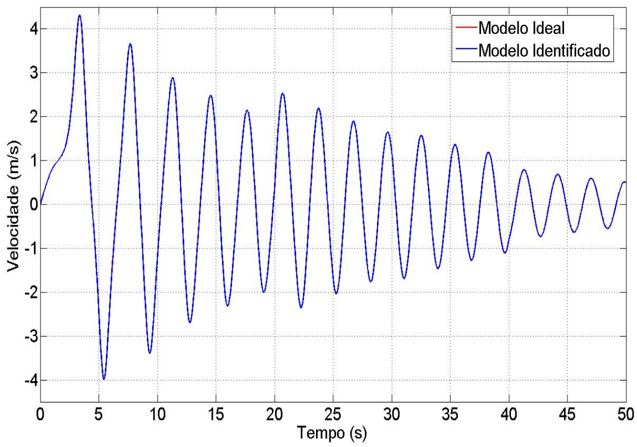

FIG.4.6: Identificação da velocidade da massa m: $k = cos(x)$.

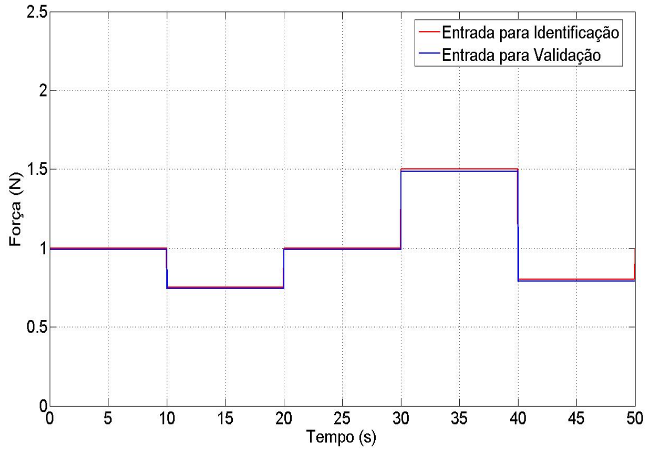

FIG.4.7: Forças aplicadas na massa m para identificação e para validação: $k = sen(x)$.

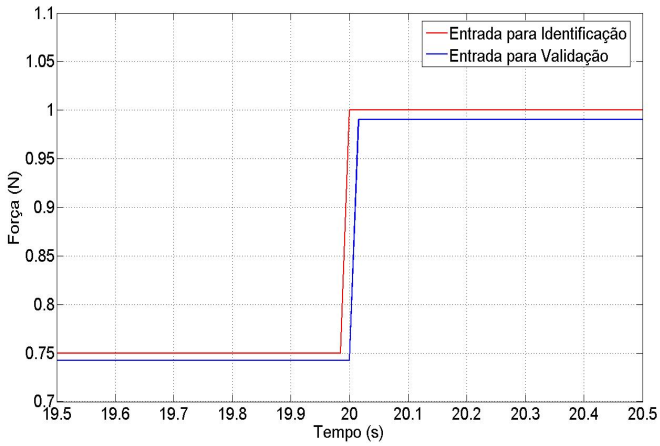

FIG.4.8: Detalhe das forças aplicadas na massa m para identificação e para validação: $k = sen(x)$.

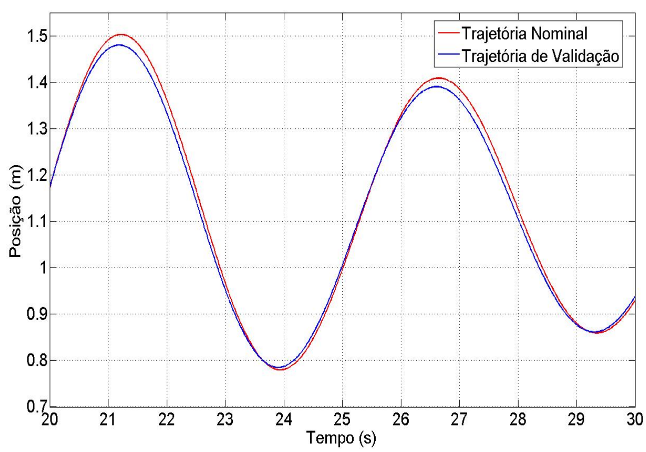

FIG.4.9: Detalhe das trajetórias de operação do sistema massa-mola-amortecedor de 2^a ordem: $k = sen(x)$.

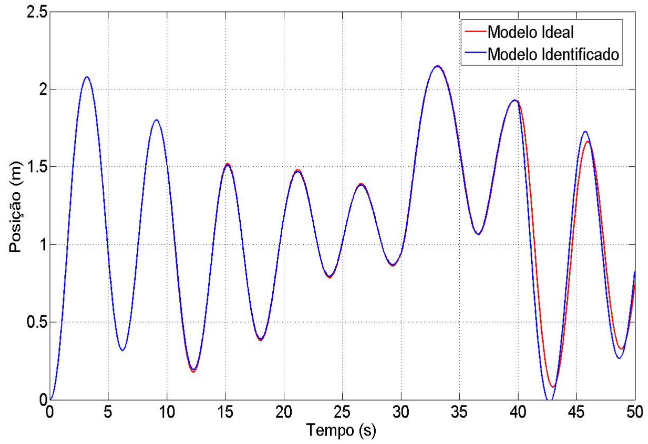

FIG.4.10: Identificação da posição da massa m: $k = sen(x)$.

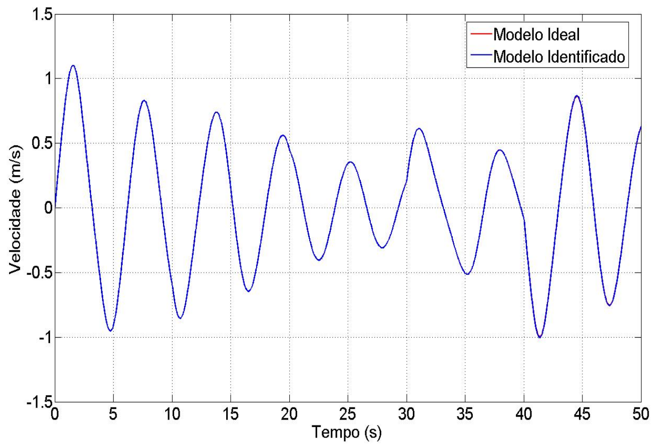

FIG.4.11: Identificação da velocidade da massa m: $k = sen(x)$.

4.2 SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR DE QUARTA ORDEM

A metodologia proposta, como mostrado na Seção 3.2, pode ser estendida para um sistema MISO. Para ilustrar, será mostrado a seguir um sistema massa-mola-amortecedor com duas massas. As forças aplicadas em cada massa serão as entradas F_1 e F_2 respectivamente, conforme mostra a FIG. 4.12. Equacionando as forças atuantes no bloco com massa m_1:

$$m_1\,\ddot{x}_{m1} = F_1 + F_{k_2} + F_{b_2} - F_{k_1} - F_{b_1} \tag{4.10}$$

Como:

$$F_{k1} = k_1\,x_{m1} \tag{4.11}$$

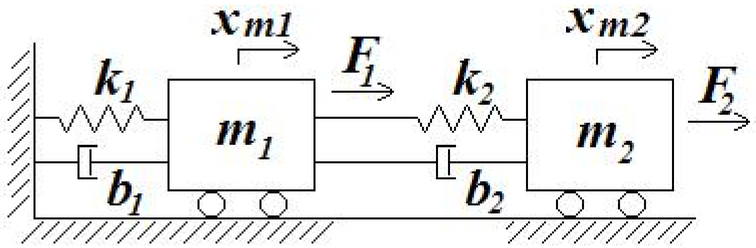

FIG.4.12: Diagrama do sistema massa-mola-amortecedor de 4^a ordem.

$$F_{k2} = k_2\ (x_{m2} - x_{m1}) \tag{4.12}$$

$$F_{b1} = b_1\ \dot{x}_{m1} \tag{4.13}$$

$$F_{b2} = b_2\ (\dot{x}_{m2} - \dot{x}_1) \tag{4.14}$$

Substituindo as EQ. 4.11 a EQ. 4.14 na EQ. 4.10:

$$\begin{aligned} m_1\ \ddot{x}_{m1} &= F_1 + k_2(x_{m2} - x_{m1}) + b_2(\dot{x}_{m2} - \dot{x}_{m1}) - k_1\ x_{m1} - b_1\ \dot{x}_{m1} \\ \ddot{x}_{m1} &= \frac{1}{m_1}[F_1 + k_2(x_{m2} - x_{m1}) + b_2(\dot{x}_{m2} - \dot{x}_{m1}) - k_1\ x_{m1} - b_1\ \dot{x}_{m1}] \end{aligned} \tag{4.15}$$

Analogamente para o bloco com massa m_2:

$$\begin{aligned} m_2\ \ddot{x}_{m2} &= F_2 - F_{k_2} - F_{b_2} \\ m_2\ \ddot{x}_{m2} &= F_2 - k_2(x_{m2} - x_{m1}) - b_2(\dot{x}_{m2} - \dot{x}_{m1}) \\ \ddot{x}_{m2} &= \frac{1}{m_2}[F_2 - k_2(x_{m2} - x_{m1}) - b_2(\dot{x}_{m2} - \dot{x}_{m1})] \end{aligned} \tag{4.16}$$

Serão consideradas as seguintes variáveis de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{m1} & \dot{x}_1 &= \dot{x}_{m1} = x_2 \\ x_2 &= \dot{x}_{m1} & \dot{x}_2 &= \ddot{x}_{m1} \\ x_3 &= x_{m2} & \dot{x}_3 &= \dot{x}_{m2} = x_4 \\ x_4 &= \dot{x}_{m2} & \dot{x}_4 &= \ddot{x}_{m2} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Representando em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{b_1+b_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

As saídas identificadas serão as posições e velocidades das massas m_1 e m_2.

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Da mesma forma que na Seção 4.1, será inserida uma não-linearidade no modelo, considerando que a constante elástica da mola k_1 varie conforme a posição da massa m_1 $[k_1 = cos(x_{m1}) = cos(x_1)]$. As entradas utilizadas para identificação e para validação do sistema estão representadas nas FIG. 4.13 e FIG. 4.14, e as trajetórias de operação nominal e de validação estão na FIG. 4.15. O sistema foi simulado considerando $m_1 = m_2 = 3Kg$, $k_1 = 1000\ cos(x_1)N/m$, $k_2 = 1000N/m$, $b_1 = b_2 = 1Ns/m$. Para encontrar o melhor modelo foram testados valores de n_a, n_{b1} (referente à entrada F_1), n_{b2} (referente à entrada F_2) de 1 até 5, e N de 1 até 10.

Pode-se ver que a identificação das posições x_{m1} e x_{m2} das massa m_1 e m_2, respectivamente, mostradas nas FIG. 4.16 e FIG. 4.17, são satisfatórias apenas no intervalo de 0 a 30s. O mesmo corre para a velocidade v_{m1} na FIG. 4.18. Já para a velocidade v_{m2} na FIG. 4.19, a saída do modelo é próxima da saída ideal em todo o intervalo de 0 a 50s.

Isto se deve ao fato da entrada de validação definir uma trajetória de operação diferente da trajetória nominal, prejudicando os resultados. Percebe-se isso através da TAB. 4.3, na qual os custos de identificação são muito baixos, da ordem de 10^{-9} a 10^{-16}, mostrando que os modelos, quando se mantêm próximos da trajetória de operação nominal, reproduzem bem a saída do sistema original. Os coeficientes dos modelos identificados estão nos Apêndices 7.3.1 a 7.3.4.

TAB.4.3: Custos de identificação (J_{Id}) e de validação (J_{Val}) para o sistema massa-mola-amortecedor de 4^a ordem.

Massa	Saída	n_a	n_{b1}	n_{b2}	N	b_0	J_{Id}	J_{Val}
m_1	Posição	4	1	4	5	Não	$7{,}03721\times10^{-13}$	$5{,}30931\times10^{-5}$
	Velocidade	5	5	5	3	Sim	$1{,}38637\times10^{-9}$	$1{,}13422\times10^{-2}$
m_2	Posição	4	5	5	2	Sim	$2{,}30827\times10^{-16}$	$7{,}60411\times10^{-6}$
	Velocidade	4	2	4	8	Não	$1{,}87704\times10^{-12}$	$1{,}63421\times10^{-5}$

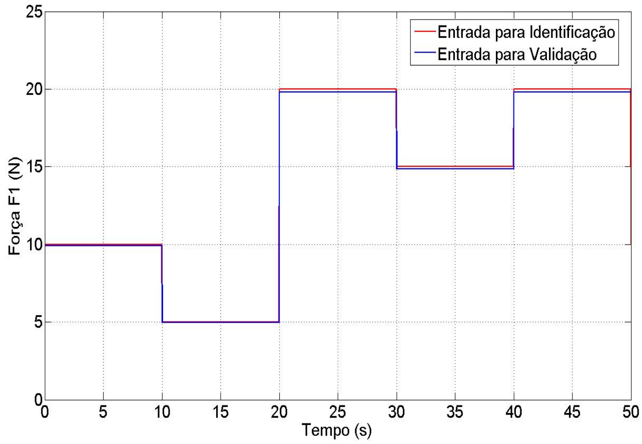

FIG.4.13: Força aplicada na massa m_1 (F_1).

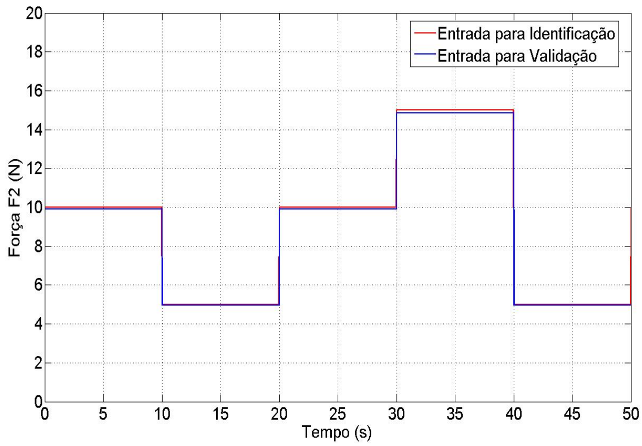

FIG.4.14: Força aplicada na massa m_2 (F_2).

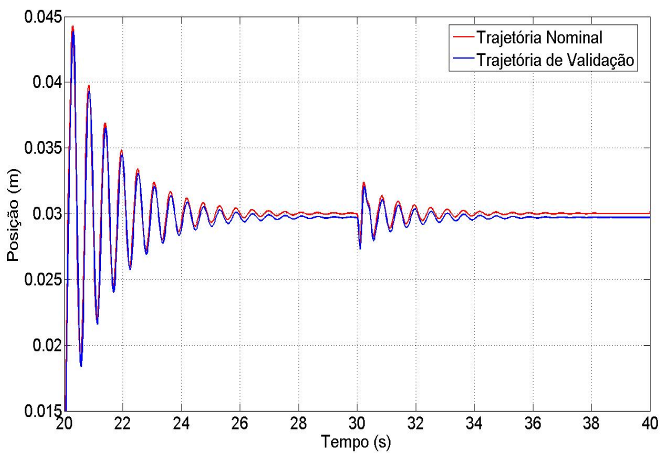

FIG.4.15: Detalhe das trajetórias de operação do sistema massa-mola-amortecedor de 4^a ordem.

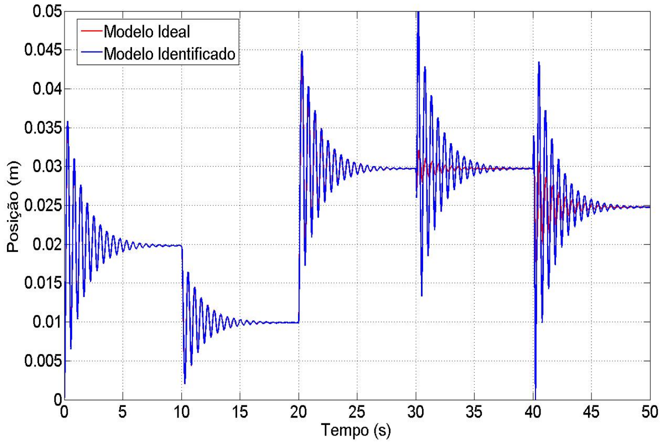

FIG.4.16: Identificação da posição da massa m_1 (x_1).

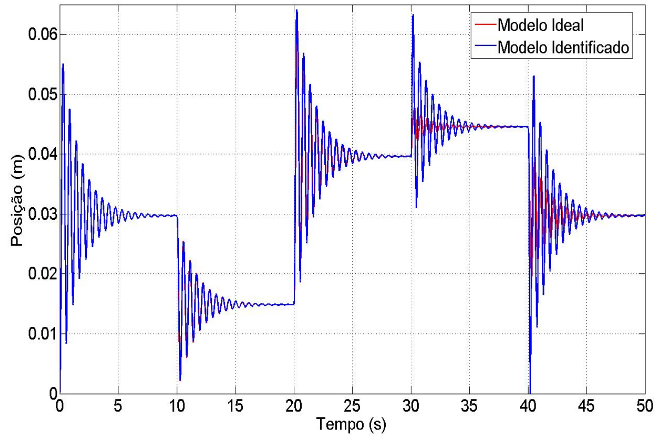

FIG.4.17: Identificação da posição da massa m_2 (x_2).

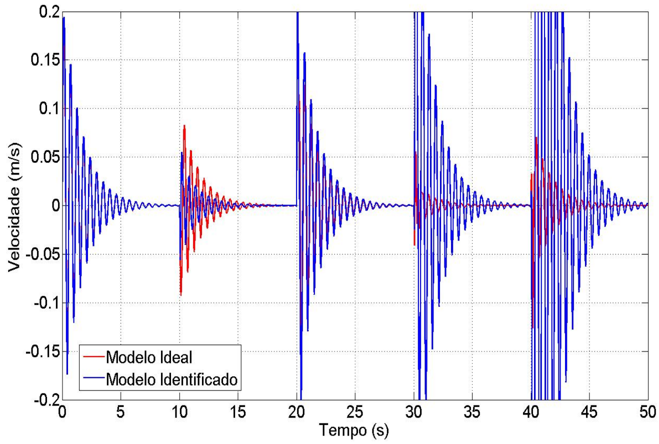

FIG.4.18: Identificação da velocidade da massa m_1 (v_1).

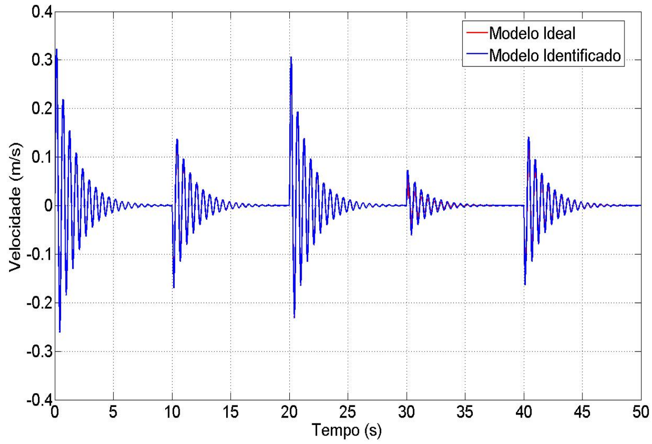

FIG.4.19: Identificação da velocidade da massa m_2 (v_2).

4.3 MODELO DE UM MÍSSIL AR-AR

O modelo não-linear a seguir representa o canal vertical de um míssil ar-ar (REICHERT, 1992; PELLANDA et al., 2002; ARAÚJO et al., 2006). A FIG. 4.20 ilustra o eixo de elevação do mesmo. A entrada do sistema é o ângulo comandado do profundor $\delta_c(t)$ (em graus), e as saídas são a aceleração vertical $\eta(t)$ (em g) e a velocidade angular em arfagem $q(t)$ (em graus/s). Para análise de desempenho da metodologia serão consideradas a primeira saída $\eta(t)$ e o ângulo de ataque (α).

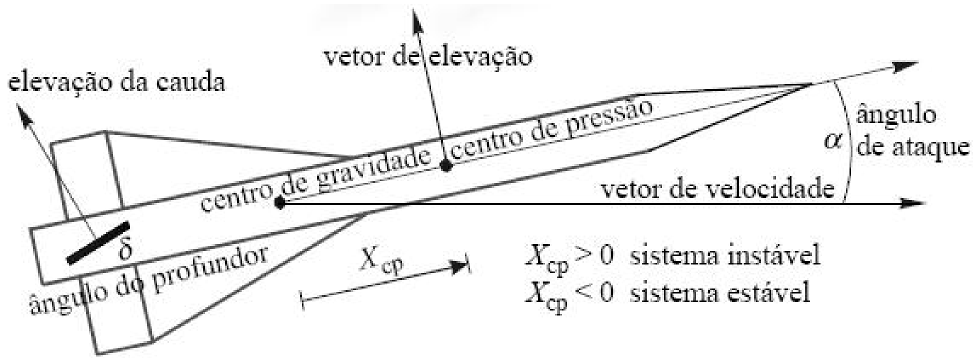

FIG.4.20: Diagrama ilustrativo do míssil.

Uma descrição da dinâmica não-linear do míssil é apresentada como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 & Z_\delta & 0 \\ M_\alpha & 0 & M_\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 & -2\zeta\omega_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_a^2 \end{bmatrix} \delta_c$$

$$\begin{bmatrix} \eta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_\alpha & 0 & N_\delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}$$

Os coeficientes Z_α, Z_δ, M_α, M_δ , N_α e N_δ são apresentados a seguir:

$$\begin{aligned}
Z_\alpha &= K_\alpha \; M \; cos(\alpha) \; [a_n \; \alpha^2 + b_n \; |\alpha| + c_n(2 - M/3)] \\
Z_\delta &= K_\alpha \; M \; d_n \; cos(\alpha) \\
M_\alpha &= K_q \; M^2 \; [a_m \; \alpha^2 + b_m \; |\alpha| + c_m \; (-7 + 8M/3)] \\
M_\delta &= K_q \; M^2 \; d_m \\
N_\alpha &= K_z \; M^2 \; [a_n \; \alpha^2 + b_n \; |\alpha| + c_n \; (2 - M/3)] \\
N_z &= K_z \; M^2 \; d_n
\end{aligned}$$

Este modelo representa um míssil voando a 20.000 pés de altitude. A sua velocidade será considerada constante em Mach 3 (M = 3). Assim, o sistema passa a ser definido completamente pela variável endógena $\alpha(t)$, responsável pela não-linearidade. Esse modelo é simétrico em relação a $\alpha = 0$, de forma que será utilizado $\theta = |\alpha|$ na sua parametrização. Os valores e unidades das constantes são dados a seguir:

K_α	=	$0,7 \; P_0 \; \frac{180S}{\pi m v_s}$	m	=	$13,98$ *slugs* (massa)
K_z	=	$0,7 \; P_0 \; \frac{S}{mg}$	v_s	=	$1036,4$ *pés/s* (velocidade do som a 20.000 pés)
K_q	=	$0,7 \; P_0 \; \frac{180Sd}{\pi I_y}$			
A_x	=	$0,7 \; P_0 \; \frac{SC_a}{m}$	a_n	=	$0,000103$ grau^{-3}
d	=	$0,75$ *pés* (diâmetro)	b_n	=	$-0,00945$ grau^{-2}
I_y	=	$182,5$ *slug.pés*^{2} (momento de inércia em arfagem)	c_n	=	$-0,1696$ grau^{-1}
C_a	=	$-0,3$ (coeficiente de arrasto)	d_n	=	$-0,034$ grau^{-1}
ζ	=	$0,7$ (fator de amortecimento do atuador)	a_m	=	$0,000215$ grau^{-3}
ω_a	=	150 *rad/s* (freqüência natural não-amortecida do atuador)	b_m	=	$-0,0195$ grau^{-2}
			c_m	=	$0,051$ grau^{-1}
g	=	$32,2$ *pés/s*^{2} (constante de gravidade)	d_m	=	$-0,206$ grau^{-1}
P_0	=	$973,3$ *lbs/pés*^{2} (pressão estática a 20.000 pés)			
S	=	$0,44$ *pés*^{2} (superfície de referência)			

O comportamento do míssil foi simulado utilizando como entrada uma seqüência de degraus variando de -12° a 15° entre 0 e 70s. Os sinais utilizados para identificação e para validação estão na FIG. 4.21, e as trajetórias de operação nominal e de validação estão na FIG. 4.22.

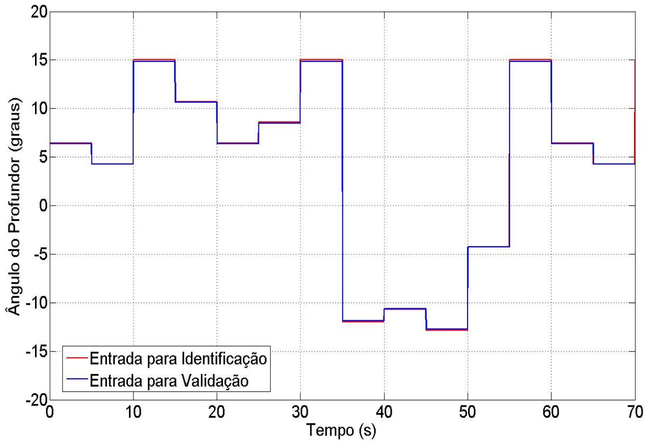

FIG.4.21: Entradas utilizadas no modelo do míssil.

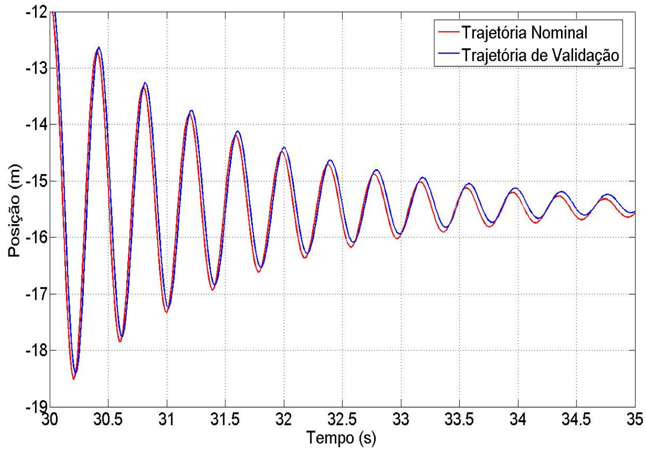

FIG.4.22: Detalhe das trajetórias de operação do modelo do míssil.

A TAB. 4.4 mostra os resultados obtidos. A identificação da saída α é mostrada nas FIG. 4.23 e FIG. 4.24, e da saída η nas FIG. 4.25 e FIG. 4.26. Os coeficientes dos modelos estão nos Apêndices 7.4.1 e 7.4.2.

A identificação de ambas as saídas foram satisfatórias. Embora a saída α tenha obtido um custo muito menor que a saída η, as duas mantêm a sua precisão ao longo de todo o intervalo de 0 a 70s.

TAB.4.4: Custos de identificação (J_{Id}) e de validação (J_{Val}) para o sistema do míssil não-linear.

Saída	n_a	n_b	N	b_0	J_{Id}	J_{Val}
α	8	9	8	Não	3,13727 $\times 10^{-6}$	5,53335 $\times 10^{-6}$
η	7	1	2	Não	4,21029	4,14531

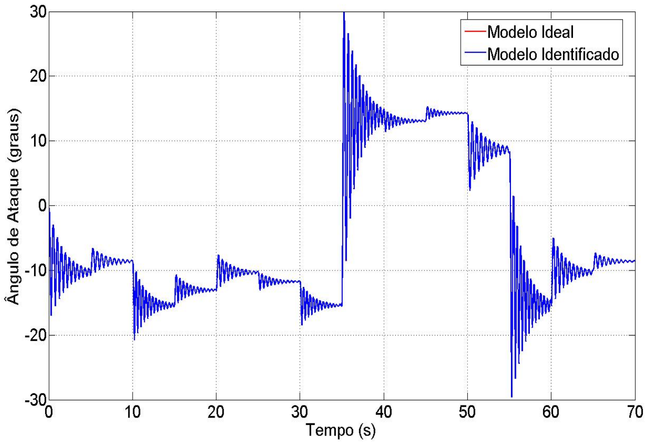

FIG.4.23: Identificação da saída α.

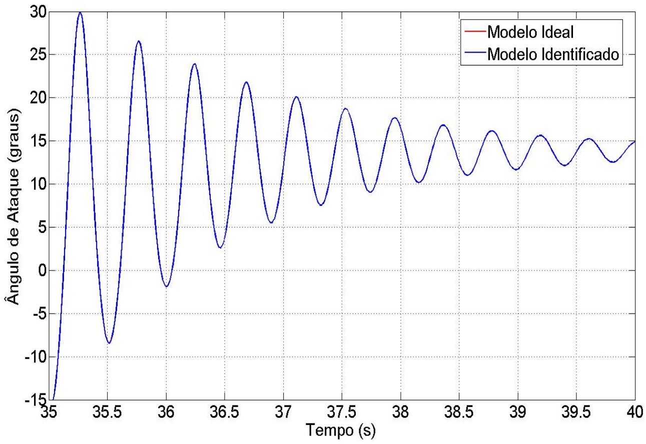

FIG.4.24: Identificação da saída α entre 35s e 40s.

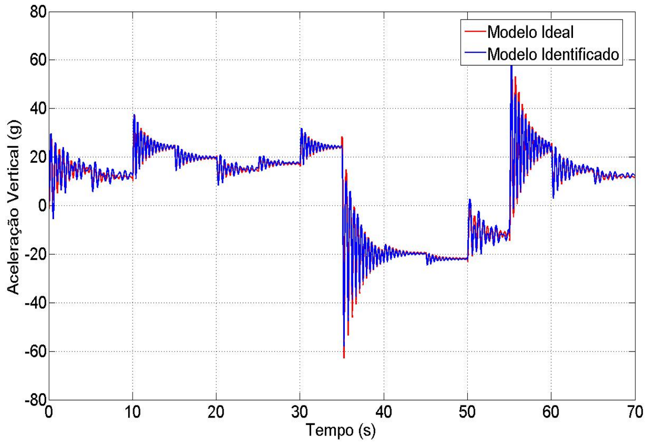

FIG.4.25: Identificação da saída η.

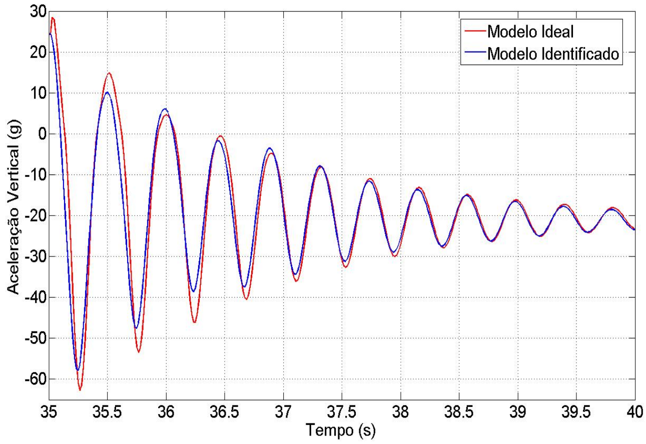

FIG.4.26: Identificação da saída η entre 35s e 40s.

4.3.1 ANÁLISE DO MODELO DO MÍSSIL

Lembrando que Z_α, Z_δ, M_α, M_δ, N_α e N_δ dependem de α, e que M é constante, pode-se reescrever as FT que relacionam as saídas α e η com a entrada δ_c de uma forma geral:

$$G(s,\alpha)|_{\alpha=\alpha_0} = \frac{b_2(\alpha_0)\ s^2 + b_3(\alpha_0)\ s + b_4(\alpha_0)}{s^4 + a_1(\alpha_0)\ s^3 + a_2(\alpha_0)\ s^2 + a_3(\alpha_0)\ s + a_4(\alpha_0)} \tag{4.20}$$

Sendo:

$$\begin{array}{rclcrcl} a_1(\alpha) & = & 2\ \xi\ \omega_a - Z_\alpha & & a_2(\alpha) & = & \omega_a - M_\alpha - 2\ \xi\ \omega_a\ Z_\alpha \\ a_3(\alpha) & = & -Z_\alpha\ \omega_a - M_\alpha\ 2\ \xi\ \omega_a & & a_4(\alpha) & = & -M_\alpha\ \omega_a \end{array} \tag{4.21}$$

Para a saída α:

$$\begin{array}{rcl} b_2(\alpha) & = & 0 \\ b_3(\alpha) & = & Z_\delta\ \omega_a^2 \\ b_4(\alpha) & = & M_\delta\ \omega_a^2 \end{array}$$

Para a saída η:

$$\begin{array}{rcl} b_2(\alpha) & = & N_\delta\ \xi\ \omega_a^2 \\ b_3(\alpha) & = & N_\alpha\ Z_\delta\ \omega_a^2 \\ b_4(\alpha) & = & N_\alpha\ M_\delta\ \omega_a^2 \end{array}$$

As FIG. 4.27 a FIG. 4.29 mostram a variação dos coeficientes da FT na EQ. 4.20 com relação à variável paramétrica α. Percebe-se que todas podem ser aproximadas por um polinômio de ordem 2, justificando os resultados obtidos para este exemplo.

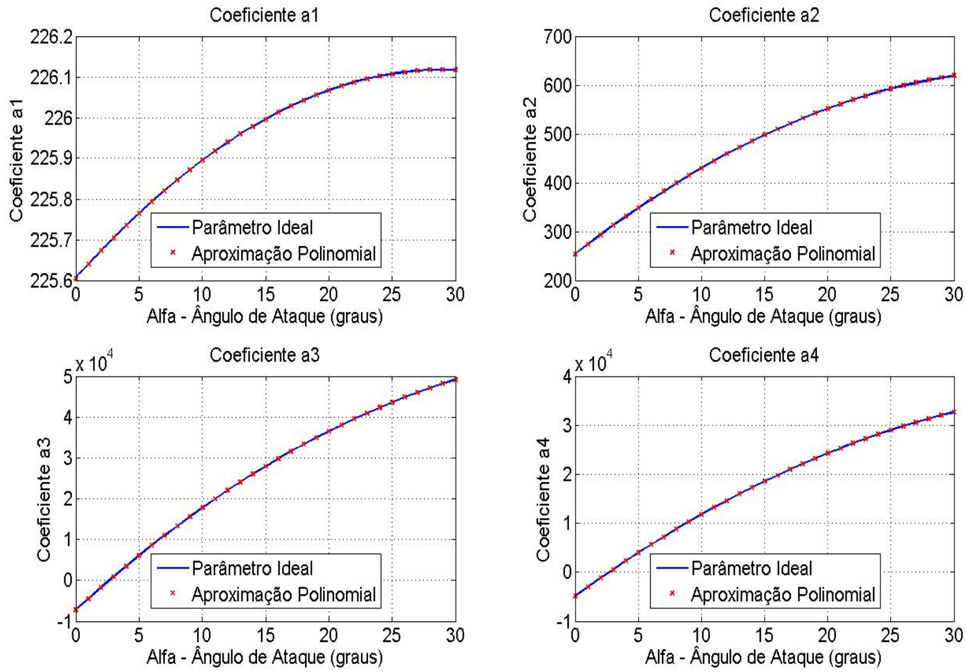

FIG.4.27: Aproximação polinomial dos coeficientes do modelo do míssil.

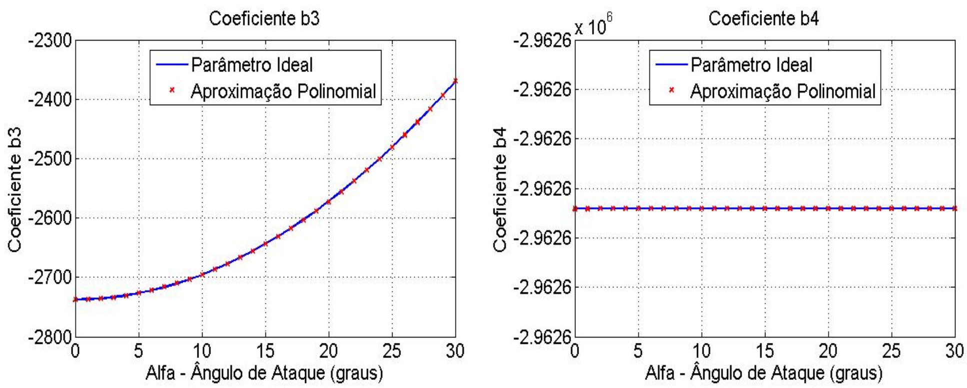

FIG.4.28: Aproximação polinomial dos coeficientes do modelo do míssil (saída α).

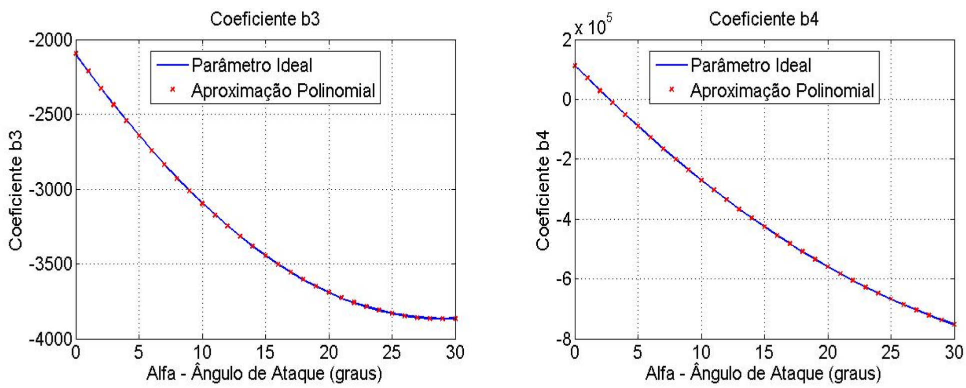

FIG.4.29: Aproximação polinomial dos coeficientes do modelo do míssil (saída η).

4.3.2 IDENTIFICAÇÃO POR PARTES DO MODELO DO MÍSSIL

Embora o resultado da identificação da saída α na Seção 4.3 tenha sido próximo do ideal, o mesmo não ocorreu com a saída η. Para melhorar os resultados, fez-se a identificação por partes, como mostrado na Seção 3.5.

Os dados foram divididos nos instantes de 35s, 45s e 55s, encontrando-se 4 modelos que representam a saída ideal com um custo menor. As FIG. 4.30 e FIG. 4.31 mostram a comparação das saídas real e identificada, e a TAB. 4.5 mostra o custos obtidos, que reduziram cerca de 40% os custos originais.

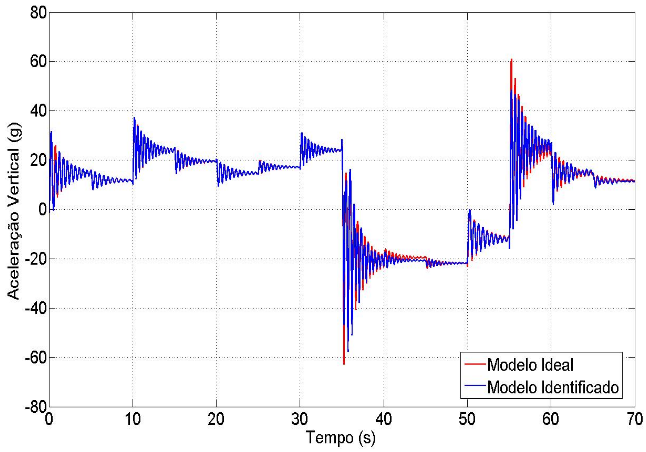

FIG.4.30: Identificação por partes da saída η.

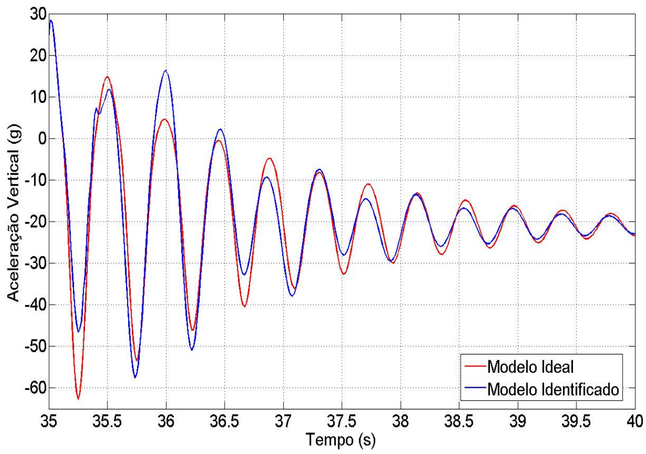

FIG.4.31: Identificação por partes da saída η entre 35s e 40s.

TAB.4.5: Custos de identificação (J_{Id}) e de validação (J_{Val}) para a saída η do míssil não-linear identificado por partes.

Saída	n_a	n_b	N	b_0	Início	Fim	J_{Id}	J_{Val}
η	8	10	6	Não	0s	35s	2,50720	2,58640
	6	6	2		35s	45s		
	2	1	2		45s	55s		
	2	10	2		55s	70s		

4.4 VEÍCULO LANÇADOR DE SATÉLITES

Os veículos lançadores de satélites devem atender a missões típicas de introdução de satélites em determinadas órbitas e alturas específicas, além de requisitos operacionais como nível de confiabilidade condizente com a classe de veículos considerada e acesso ao espaço com grau de segurança adequado e compatível com as normas existentes.

Um veículo lançador de satélites é um sistema de complexidade elevada, pois envolve diversos parâmetros, não-linearidades, acoplamentos aerodinâmicos, além de dinâmicas de flexão cujas propriedades não são muito conhecidas, mas que têm um efeito importante, podendo desestabilizar o lançador caso sejam excitadas.

O Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE) do Centro Técnico Aeroespacial (CTA) desenvolveu o projeto do sistema de controle do VLS. São utilizados controladores com estrutura do tipo Proporcional-Integral-Derivativo (PID) e os ganhos são ajustados através de técnicas de controle ótimo Linear Quadrático (LQ), de forma a atender requisitos de desempenho estacionário.

A FIG. 4.32 mostra o diagrama de blocos do sistema de controle atualmente empregado. O objetivo é identificar um modelo LPV do veículo lançador de satélites, composto pelos blocos *Planta* e *Flex*, correspondentes à dinâmica de corpo rígido e aos modos de flexão, respectivamente, conforme MEDEIROS (2005).

A EQ. 4.22 representa o modelo de corpo rígido do lançador de satélites para o plano de arfagem:

$$G_P(s) = \frac{\dot{\Theta}(s)}{B_Z(s)} = \frac{M_\beta\ s^2 + (M_\beta\ Z_\alpha - M_\alpha\ Z_\beta)\ s/U}{s^2 + (M_q + Z_\alpha/U)s + (M_q\ Z_\alpha/U - M_\alpha) + M_\alpha\ g/U} \tag{4.22}$$

A velocidade de arfagem é representada por $\dot{\Theta}$(s), $B_Z(s)$ é a saída do atuador, U o módulo do vetor de velocidade do lançador, g a aceleração da gravidade, M_α, M_β e M_q os momentos angulares, Z_α e Z_β são forças que atuam no veículo. Os valores dessas variáveis foram obtidos através de simulações e ensaios e tabelados para cada segundo

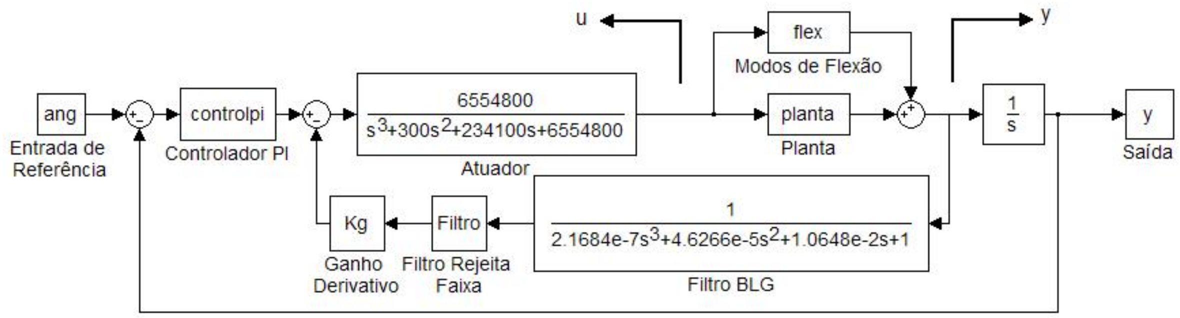

FIG.4.32: Diagrama ilustrativo do sistema de controle do VLS.

de vôo. Os coeficientes são interpolados linearmente para efeito de escalonamento de ganhos.

Ainda na FIG. 4.32 estão indicados os locais onde foram colhidos os sinais u e y, utilizados como entrada e saída no processo de identificação, e que estão representados nas FIG. 4.34 e FIG. 4.35. Eles foram obtidos a partir da simulação do sistema utilizando como entrada de referência o sinal apresentado na FIG. 4.33, que é semelhante ao empregado em um vôo real.

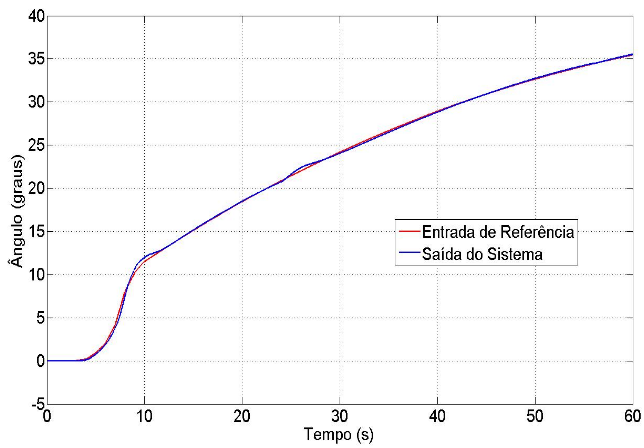

FIG.4.33: Simulação do modelo LPV do VLS.

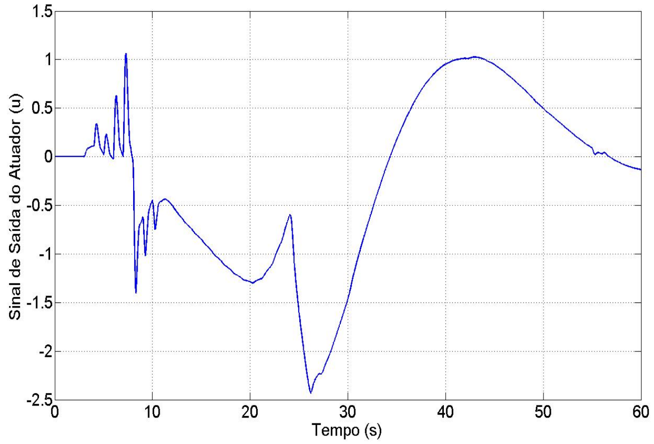

FIG.4.34: Sinal de saída do atuador (entrada do VLS): B_Z(t).

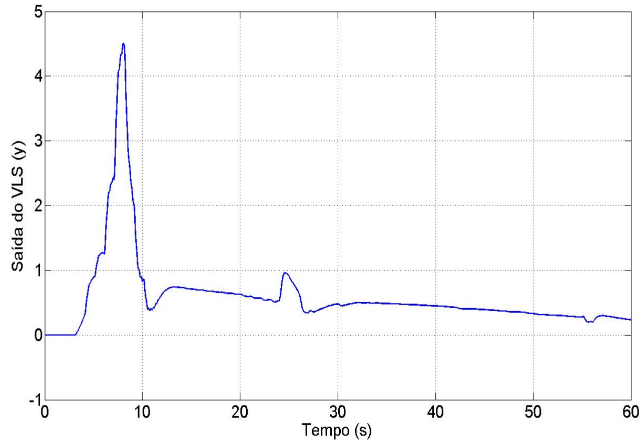

FIG.4.35: Saída do VLS: $\dot{\Theta}$(t).

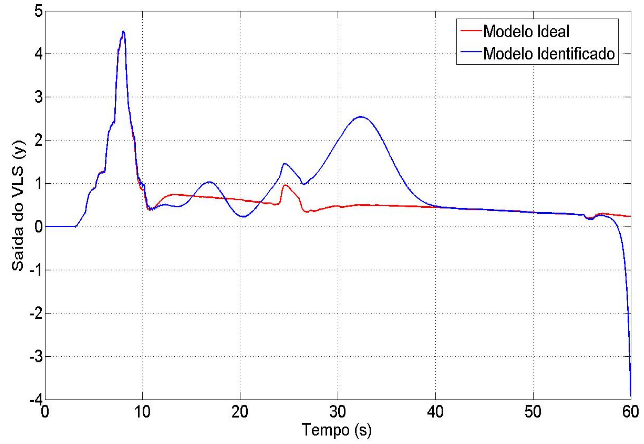

FIG.4.36: Identificação do Veículo Lançador de Satélites.

Inicialmente foi feita a tentativa de identificar um modelo único para todo o intervalo de tempo de interesse (0s a 60s). Entretanto, o resultado não foi satisfatório, como se pode observar através da FIG. 4.36.

Isso pode ser explicado ao se reescrever a FT da EQ. 4.22 como na EQ. 4.23, e se observar como os coeficientes da nova FT (EQ. 4.23) variam ao longo do tempo. A FIG. 4.37 mostra essa variação, juntamente com a tentativa de se aproximar a mesma através de polinômios de ordem 15.

$$G(s,t)|_{t=t_0} = \frac{b_1(t_0)\ s^2 + b_2(t_0)\ s}{s^3 + a_1(t_0)\ s^2 + a_2(t_0)\ s + a_3(t_0)} \tag{4.23}$$

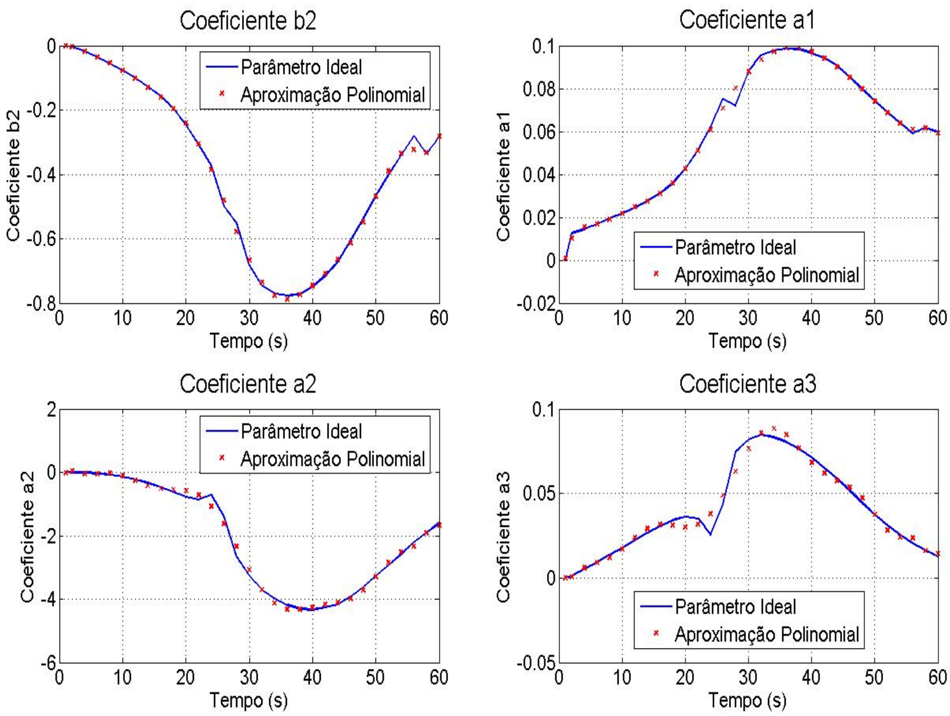

FIG.4.37: Aproximação polinomial (de ordem 15) dos coeficientes do modelo do VLS.

Percebe-se que a variação dos coeficientes possui descontinuidades que impedem que a aproximação das mesmas por polinômios, mesmo de ordem elevada, seja satisfatória.

Buscando melhorar os resultados, foi realizada a identificação por partes do VLS. Os dados foram divididos nos instantes de 8s, 10s, 12s, 15s, 18s, 20s, 22s, 24s, 26s, 30s, 35s, 40s, 55s e 60s, obtendo-se ao final 14 modelos que conjuntamente representam o VLS ao longo do tempo. As ordens dos modelos estao na TAB. 4.6, os custos obtidos na TAB. 4.7, e os resultados nas FIG. 4.38.

TAB.4.6: Ordens dos modelos identificados por partes para o VLS.

Saída	n_a	n_b	N	b_0	Início	Fim
$\dot{\Theta}$(t)	8	4	9	Não	0s	8s
	10	11	2		8s	10s
	10	11	2		10s	12s
	3	3	9		12s	15s
	1	1	15		15s	18s
	3	2	8		18s	20s
	3	1	8		20s	22s
	3	1	13		22s	24s
	10	1	2		24s	26s
	3	2	13		26s	30s
	10	2	4		30s	35s
	1	2	11		35s	40s
	6	6	11		40s	55s
	4	1	12		55s	60s

TAB.4.7: Custos de identificação (J_{Id}) para o VLS.

Identificação	n_a	n_b	N	b_0	Início	Fim	J_{Id}
Única	10	3	6	Sim	0s	60s	0,463050
Partes	—	—	—	Não	—	—	2,27505 $\times 10^{-6}$

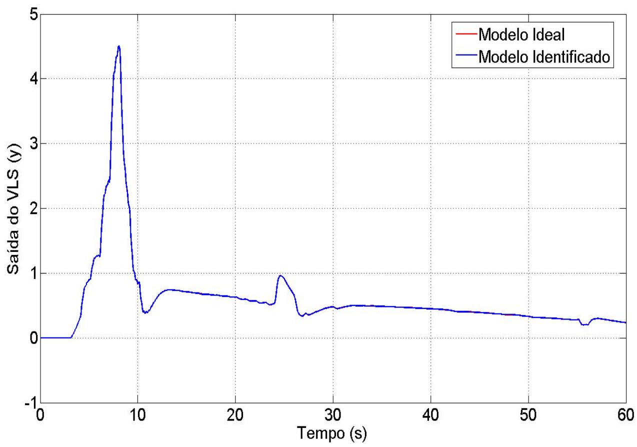

FIG.4.38: Identificação do Veículo Lançador de Satélites por partes.

4.4.1 VEÍCULO LANÇADOR DE SATÉLITES COM OS MODOS DE FLEXÃO AMPLIFICADOS

Nesta seção é apresentada a identificação do VLS no caso em que o modo de flexão, representado pelo bloco *Flex* na FIG. 4.32, é 2,5 vezes maior que na Seção 4.4. Neste caso é realizada apenas a identificação por partes, com a divisão dos dados nos instantes de

10s, 12s, 14s, 16s, 18s, 24s, 26s, 27s, 30s, 35s, 40s, 55s, 59s e 60s, totalizando 14 modelos. O custo de identificação obtido encontra-se na TAB. 4.8 e os resultados na 4.39.

TAB.4.8: Ordens dos modelos identificados e custo de identificação (J_{Id}) para o VLS com modo de flexão amplificado.

Saída	n_a	n_b	N	b_0	Início	Fim	J_{Id}
$\dot{\Theta}$(t)	9	8	4	Não	0s	10s	6,50711 $\times 10^{-6}$
	9	10	4		10s	12s	
	4	4	14		12s	14s	
	9	8	7		14s	16s	
	9	9	6		16s	18s	
	5	6	1		18s	24s	
	7	6	1		24s	26s	
	4	5	14		26s	27s	
	2	3	2		27s	30s	
	2	3	2		30s	35s	
	1	2	12		35s	40s	
	3	3	13		40s	55s	
	3	4	5		55s	59s	
	6	6	6		59s	60s	

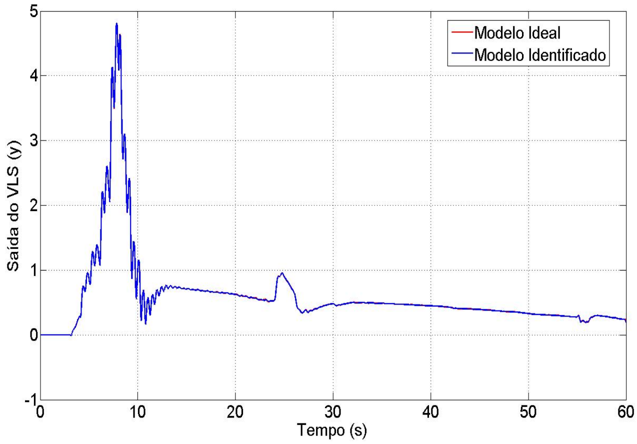

FIG.4.39: Identificação por partes do VLS com os modos de flexão amplificados.

4.5 RESULTADOS DE SISTEMAS COM RUÍDO

Esta seção mostra os resultados do método proposto quando aplicado a sistemas com ruído. Para isso, utilizou-se os modelos Massa-Mola-Amortecedor da Seção 4.1 e do Míssil não-linear da Seção 4.3.

4.5.1 SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR DE SEGUNDA ORDEM COM RUÍDO

Foi adicionado à saída da posição dos sistemas massa-mola-amortecedor de 2^a ordem da Seção 4.1 um ruído branco de média nula e variância de 10^{-6}. Através dos resultados mostrados na TAB. 4.9, percebe-se que o ruído nesse caso pouco prejudica a identificação, obtendo-se ainda bons resultados. A comparação das saídas reais e identificadas é mostrada nas FIG. 4.40 e FIG. 4.41.

Os coeficientes dos modelos identificados estão nos Apêndices 7.2.5 e 7.2.6.

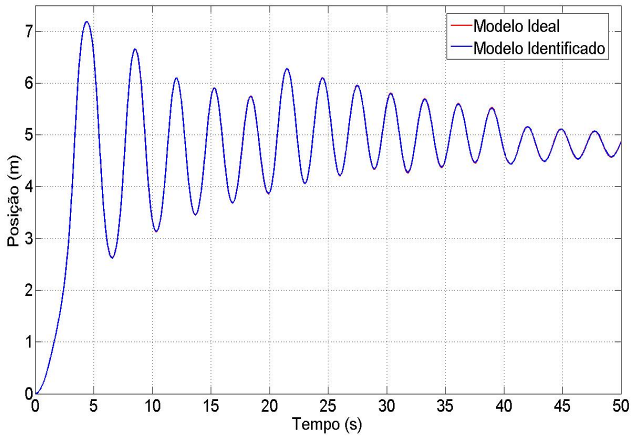

FIG.4.40: Identificação da posição da massa m com ruído: $k = cos(x)$.

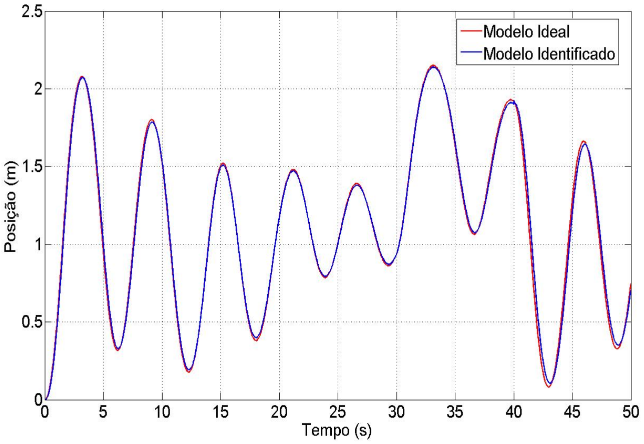

FIG.4.41: Identificação da posição da massa m com ruído: $k = sen(x)$.

TAB.4.9: Custos de identificação (J_{Id}) e de validação (J_{Val}) para o sistema massa-mola-amortecedor de 2^a ordem com ruído.

Não-Linearidade	Saída	n_a	n_b	N	b_0	J_{Id}	J_{Val}
$k = cos(x)$	Posição	10	5	6	Sim	6,49552 $\times 10^{-5}$	6,83133 $\times 10^{-5}$
$k = sen(x)$	Posição	10	2	5	Não	4,79767 $\times 10^{-4}$	1,27817 $\times 10^{-3}$

4.5.2 MÍSSIL NÃO-LINEAR COM RUÍDO

Adicionando um ruído branco com média nula e variância de 0,05 nas duas saídas do míssil não-linear da Seção 4.3, pode-se ainda obter modelos que representam satisfatoriamente o sistema original. Os resultados são apresentados na TAB. 4.10 e nas FIG. 4.42 a FIG. 4.45.

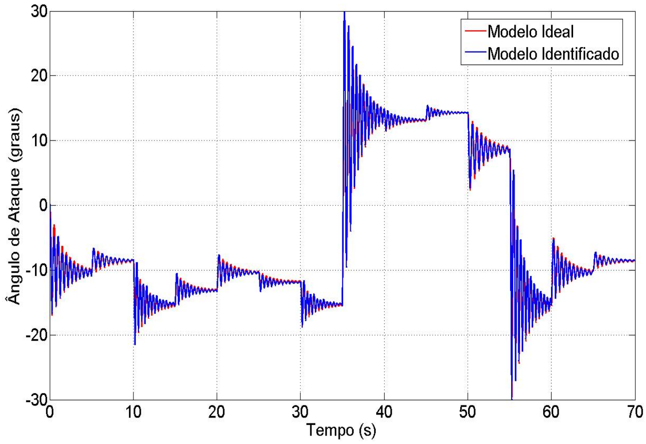

FIG.4.42: Identificação da saída α com ruído.

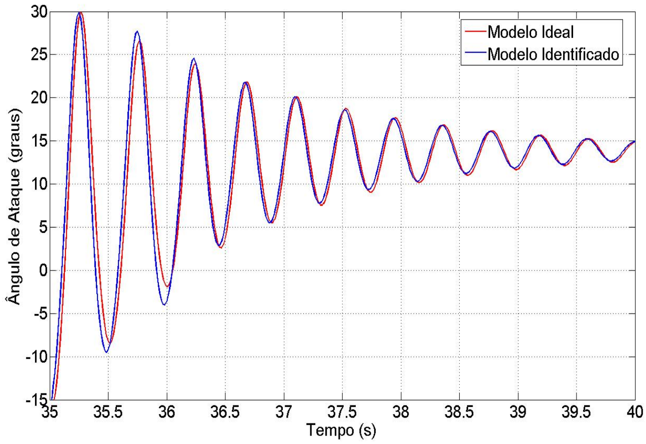

FIG.4.43: Identificação da saída α entre 35s e 40s com ruído.

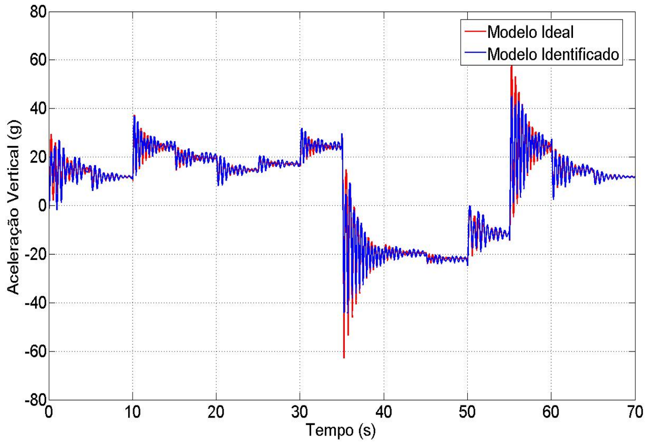

FIG.4.44: Identificação da saída η com ruído.

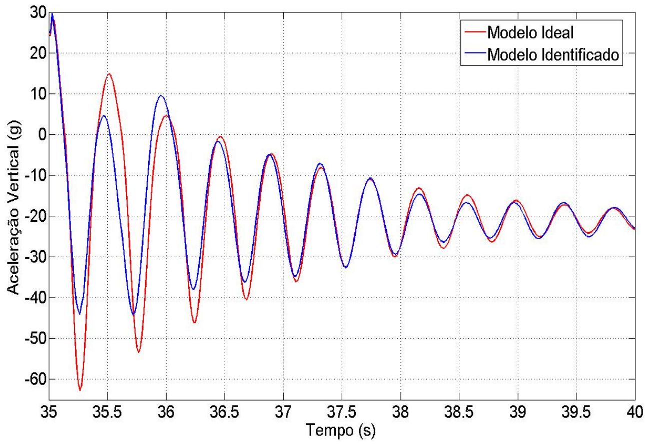

FIG.4.45: Identificação da saída η entre 35s e 40s com ruído.

TAB.4.10: Custos de identificação (J_{Id}) e de validação (J_{Val}) para o sistema do míssil não-linear com ruído.

Saída	n_a	n_b	N	b_0	J_{Id}	J_{Val}
α	4	1	1	Sim	0,76865	0,65391
η	6	2	4	Sim	6,37249	6,24803

4.6 IDENTIFICAÇÃO POR PARTES DO MÍSSIL NÃO-LINEAR COM RUÍDO

Assim como na Seção 4.3.2, os custos de identificação da saída η serão reduzidos através da identificação por partes. Os dados foram divididos nos instantes de 35s e 50s, obtendo-se 3 modelos que reproduzem a saída original com uma redução de cerca de 40% no erro quadrático médio.

Os resultados podem ser observados através da TAB. 4.11 e das FIG. 4.46 e FIG. 4.47.

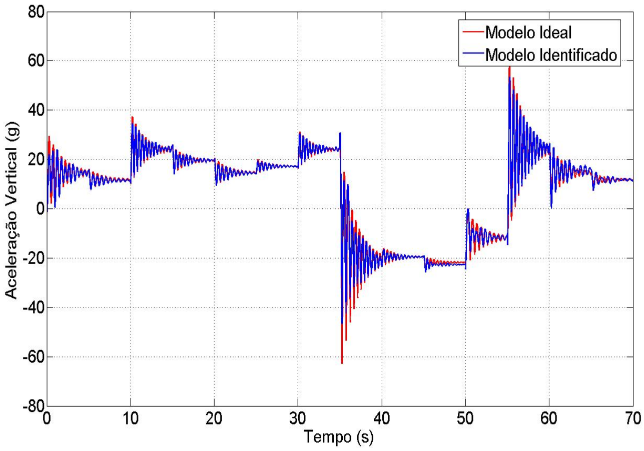

FIG.4.46: Identificação por partes da saída η com ruído.

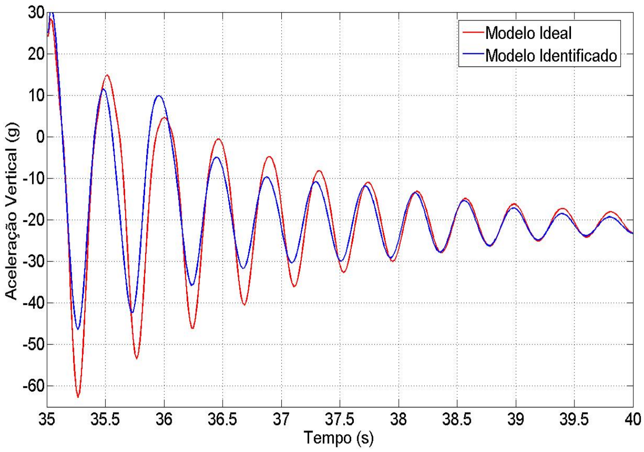

FIG.4.47: Identificação por partes da saída η entre 35s e 40s com ruído.

TAB.4.11: Custos de identificação (J_{Id}) e de validação (J_{Val}) para a saída η do míssil não-linear com ruído identificado por partes.

Saída	n_a	n_b	N	b_0	Início	Fim	J_{Id}	J_{Val}
η	5	2	2	Não	0	35s	3,91764	3,85016
	3	4	1		35s	50s		
	9	2	3		50s	70s		

4.7 RESULTADOS DA IDENTIFICAÇÃO PELO FILTRO DE KALMAN

Nesta seção são apresentados os resultados obtidos através da identificação pelo Filtro de Kalman no modelo do míssil não-linear com ruído (Seção 4.5.2), e comparados com os resultados obtidos anteriormente. Para efeito de comparação, o vetor Θ terá a mesma dimensão do que obteve o melhor resultado apresentado, não sendo realizada aqui a busca da ordem dos polinômios e do modelo.

A TAB. 4.12 mostra os custos de identificação e validação obtidos. Percebe-se que os valores estão próximos dos encontrados na Seção 4.5.2, mostrando a viabilidade da utilização do filtro de Kalman para obter modelos adequados. As FIG. 4.48 e FIG. 4.49 mostram os resultados para a saída α e as FIG. 4.50 e FIG. 4.51 os resultados para a saída η.

Os coeficientes dos modelos identificados estão nos Apêndices 7.4.5 e 7.4.6.

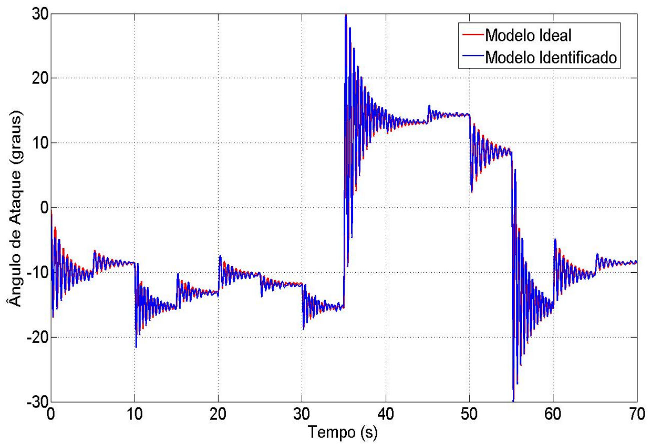

FIG.4.48: Identificação por Filtro de Kalman da saída α com ruído.

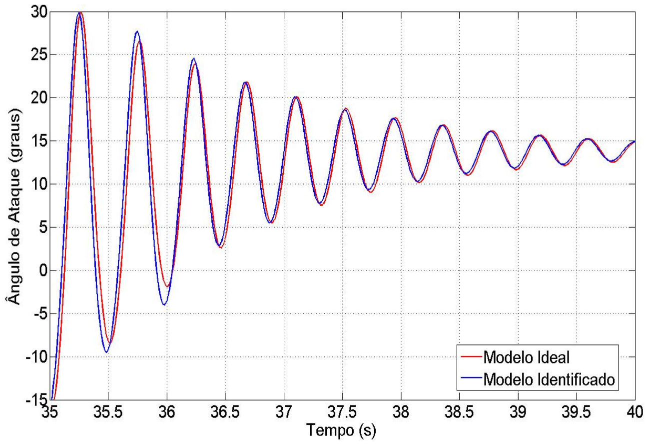

FIG.4.49: Identificação por Filtro de Kalman da saída α com ruído entre 35s e 40s.

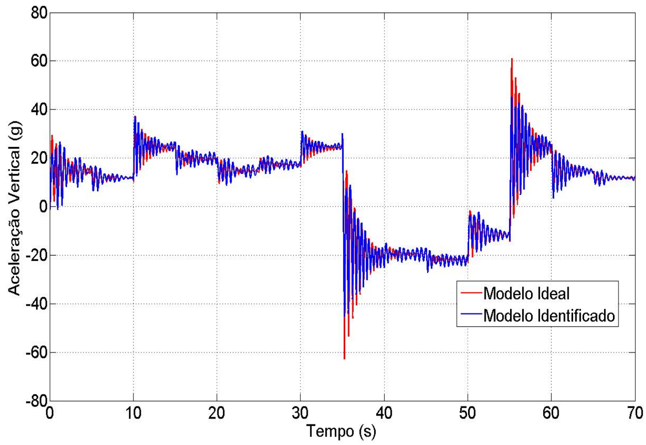

FIG.4.50: Identificação por Filtro de Kalman da saída η com ruído.

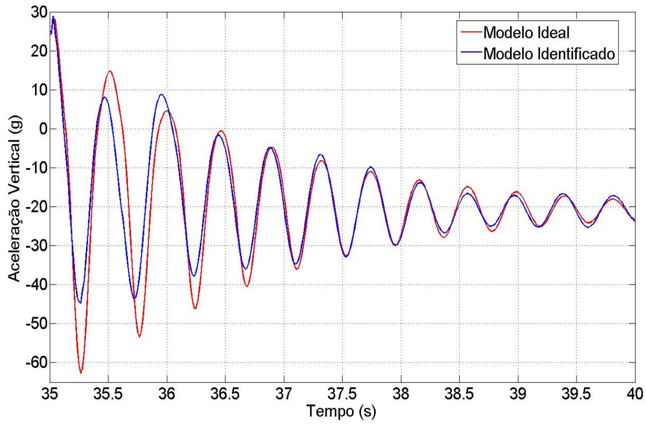

FIG.4.51: Identificação por Filtro de Kalman da saída η com ruído entre 35s e 40s.

TAB.4.12: Custos de identificação (J_{Id}) e de validação (J_{Val}) para o sistema do míssil não-linear com ruído identificado por Filtro de Kalman.

Saída	n_a	n_b	N	b_0	J_{Id}	J_{Val}
α	4	1	1	Sim	1,99827	0,65960
η	6	2	4	Sim	10,51229	6,22350

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma metodologia de identificação LPV de sistemas não lineares. O método se baseia na suposição de que a variação dos coeficientes possa ser aproximada por um polinômio em função de uma variável de parametrização θ. Tendo conhecimento de um conjunto de m valores de θ, da entrada u e da saída y do sistema, constrói-se um SEL que pode ser resolvido analiticamente, e que tem como resultado os coeficientes dos polinômios de cada coeficiente da equação diferença que representa o sistema (EQ. 3.2 a 3.4), e que minimizam uma função custo quadrático (EQ. 3.5).

Para encontrar o melhor modelo que reproduza a saída do sistema original, foram testadas várias ordens de equações diferença, em que a saída atual y_k se relaciona com n_a saídas anteriores e n_b entradas anteriores, além de diferentes ordens N de polinômios. Aqui foi considerado n_a e n_b variando entre 1 e 10, e N variando de 1 a 15, exceto para o sistema massa-mola-amortecedor de 4^a ordem. É levada em consideração também a relação ou não de y_k com a entrada atual u_k, adotando-se o que produz o menor erro.

Como em alguns casos, em virtude de fatores como a variação grande ou descontínua dos coeficientes, o resultado não foi próximo do ideal, propôs-se uma alternativa para contornar esse problema: realizar a identificação por partes (dividindo os dados disponíveis em intervalos menores) obtendo-se então um conjunto de modelos que reproduzem o sistema original com um custo menor. Para encontrar o modelo $\bar{G}_n$ correspondente ao n-ésimo intervalo, deve-se levar em conta o resultado dos $n-1$ modelos identificados anteriormente, de forma que os dados não apresentem descontinuidades no tempo.

A identificação por partes demanda mais de um modelo para representar um sistema real único. Deve-se então analisar a situação visando os objetivos pretendidos, para obter-se um bom resultado da identificação, sem aumentar de forma excessiva o número de modelos.

A identificação através do Filtro de Kalman chegou a resultados semelhantes aos originais, mostrando ser viável a sua utilização. Além disso, tem a vantagem de poder ser realizada em tempo real e de necessitar de menor quantidade de memória, entretanto, apresenta valores de custo maiores do que a metodologia original.

O método traz bons resultados na identificação de sistemas que apresentam ruído na saída (com uma relação sinal/ruído alta). Esses resultados também são melhorados com a técnica de identificação por partes.

Uma das vantagens desta metodologia é o fato de não ser necessário um conhecimento profundo da dinâmica do sistema para executá-la. Como informação *a priori*, deve-se saber qual é a variável θ que parametriza o sistema, e dispor de um conjunto de valores da mesma, caracterizando uma identificação do tipo caixa cinza. Outra vantagem é o fato do método ser analítico, diferente de outros métodos de identificação LPV recursivos ou que utilizam algoritmos de otimização.

A metodologia mostrou-se eficaz também na identificação de sistemas do tipo MISO, mesmo trazendo um aumento do número de variáveis a serem identificadas, dependendo do número de entradas adicionais levadas em conta.

5.1 SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS

Destaca-se a seguir algumas sugestões para pesquisas futuras, visando aprofundar os temas abordados neste trabalho, bem como a melhoria dos resultados obtidos até o momento.

a) Analisar o comportamento dos resultados da metodologia proposta, com relação à variação do período de amostragem dos dados. Quanto menor o período de amostragem, maior é a riqueza dos dados, mas em contrapartida, aumenta-se a ordem da matriz $\boldsymbol{\Psi}$ e do vetor $\boldsymbol{Y}$, nas EQ. 3.16 e 3.17, o que contribui para um pior condicionamento dos resultados;

b) Verificar a possibilidade de arredondamento ou truncamento dos valores dos coeficientes identificados, reduzindo a memória necessária para armazenamento dos mesmos e simplificando os resultados;

c) Melhoria do condicionamento dos resultados através da normalização dos vetores de entrada, de saída e de θ, quando houver uma discrepância grande entre a ordem de seus valores;

d) Aplicar o método de identificação em sistemas reais (não-lineares, LPV ou *quasi*-LPV) mais complexos comparando os resultados;

e) Na identificação por partes, verificar a possibilidade de melhoria dos resultados realizando uma transição “suave” entre os modelos, através de uma interpolação linear dos seus coeficientes; e

f) Analisar o caso em que os coeficiente possuem ordens de polinômios diferentes, comparando os resultados com o caso em que a ordem de todos os polinômios seja a mesma.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. Editora UFMG, 2nd. edition, 2004.

ANDERSON, B. D. O. e MOORE, J. B. **Optimal Filtering**. Prentice Hall, New Jersey, 1 edition, 1979.

APKARIAN, P. e GAHINET, P. A Convex Characterization of Gain-Scheduled H_∞ Controllers. **IEEE Trans. Automat. Contr.**, 40(5):853–864, 1995.

APKARIAN, P., PELLANDA, P. C. e TUAN, H. D. Mixed H_2/H_∞ Multi-Channel Linear Parameter-Varying Control in Discrete Time. **Syst. & Contr. Letters**, 41:333–346, 2000.

ARAÚJO, L. O. **Identificação e Controle de Algumas Classes de Sistemas Não-Estacionários**. Tese Mestrado, IME - Instituto Militar de Engenharia, 2006.

ARAÚJO, L. O., PELLANDA, P. C. e ADES, R. Identificação de Modelos *quasi*-LPV via Parametrização Polinomial - Aplicação em um Modelo Não-Linear de Míssil. **XVI Congresso Brasileiro de Automática**, 1(1):2280–2285, 2006.

BAMIEH, B. e GIARRÉ, L. Identification of Linear Parameter Varying Models. **Proceedings of 38th Conference on Decisions and Control**, WeA06(09:50):1505–1510, December 1999.

BILLINGS, S. A. Identification of Nonlinear Systems - A Survey. **Proc. IEE**, págs. 272–285, 1980.

BOHLIN, T. e GRAEBES, S. T. Issues in Nonlinear Stochastic Gray Box Identification. **Int. J. of Adaptative Control and Signal Processing**, 3(2):123–142, 1995.

COELHO, A. A. R. e COELHO, L. S. **Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares**. Editora da UFSC, 1a. edition, 2004.

CORRÊA, M. V. **Identificação Caixa-Cinza de Sistemas Não-Lineares Utilizando Representações NARMAX Racionais e Polinomiais**. Tese, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte - MG, Brasil, 2001.

DIEGUEZ, J. P. D. P. **Métodos numéricos computacionais para a engenharia**, volume 1. Editora Interciência, Rio de Janeiro - RJ, 1 edition, 1992.

FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D. e MICHAEL WORKMAN. **Digital Control of Dynamic Systems**. Addison Wesley Longman, 3a. edition, 1988.

HOUGEN, J. O. **Measurement and Control Applications for Practicing Engineers**. Cahmers Books, Massachusets, U. S. A., 1972.

LEITH, D. J. e LEITHEAD, W. E. Survey of Gain-Scheduling Analysis and Design. **Int. J. Contr.**, 11(73):1001–1025, 2000.

LJUNG, L. **System Identification, Theory for the Use**. Prentice Hall, 1987.

LJUNG, L. e SÖDERSTRÖM, T. **Theory and practice of recursive identification.** MIT Press, Cambridge-MA, 1983.

LU, W. M. e DOYLE, J. C. H_∞ Control of LFT Systems: An LMI Approach. **Proc. IEEE Conf. Decision Contr.**, págs. 1997–2001, 1992.

MEDEIROS, F. E. L. **Técnicas H_∞ com Escalonamento de Ganhos aplicadas no Sistema de Controle de Atitude Veículos Lançadores de Satélites**. Tese Mestrado, IME - Instituto Militar de Engenharia, 2005.

PACKARD, A. Gain-Scheduling via Linear Fractional Transformations. **System & Contr. Letters**, 22:79–92, 1994.

PELLANDA, P. C., APKARIAN, P. e TUAN, H. D. Missile Autopilot Design via a Multi-channel LFT/LPV Control Method. **International journal Robust and Nonlinear Control**, 12(1):1–20, 2002.

REICHERT, R. T. Dynamic Scheduling of Modern-Robust-Control Autopilot Designs for Missiles. **IEEE Conttrol Systems Magazine**, 12(5):35–42, 1992. ISSN 0272-1708.

RUGH, W. J. e SHAMMA, J. S. Research on Gain Scheduling. **Automatica**, 1(36): 1401–1425, 2000.

SILVEIRA, B. P. **Identificação de Sistemas no Domínio da Freqüência Para Aplicação em Veículos Aéreos Não-Tripulados**. Tese Mestrado, IME - Instituto Militar de Engenharia, 2006.

SJÖBERG, J., ZHANG, Q., LJUNG, L., BENVENISTE, A., DELYON, B., GLOREN-NEC, P.-Y., HJALMARSSON, H. e JUDITSKY, A. Nonlinear black-box modeling in system identification: a unified overview. **Automatica**, 31(12):1691–1724, 1995. ISSN 0005-1098.

TULLEKEN, H. J. A. F. Grey-box modelling and identification using physical knowledge and Bayesian techniques. **Automatica**, 29(2):285–308, 1993. ISSN 0005-1098.

WU, F., YANG, X., PACKARD, A. e BECKER, G. Induced L2-Norm Control for LPV System with Bounded Parameter Variations Rates. **Int J. Robust and Nonlinear Control**, 6:983–998, 1996.

7 APÊNDICES

7.1 APÊNDICE 1: PROGRAMA DO MATLAB UTILIZADO

```
% Método de Identificação LPV de Sistemas Nao-Lineares no Domínio do Tempo
% Aplicação no Modelo do Míssil Não-Linear
% Encontra o melhor modelo testando:
% na = 1 -> 10
% nb = 1 -> 10
% N = 1 -> 15

clear
clc

load Missil
% Carrega dados do Missil Não-Linear real
% u - entrada
% y - saída (eta)
% teta - parâmetro (saída alfa)
% t - tempo

% Para identicar a saída alfa
y = teta;

np = max(size(t)); % Numero de pontos da simulacao
T = max(t) / (np-1); % Período de Amostragem

Jmin = 1e100; % Custo inicial

for na = 1:10 % Testa na = 1 -> 10
    na % Exibe na atual
    beep % Avisa que mudou para o próximo na

    for nb = 1:10 % Testa na = 1 -> 10
```

```
for N = 1:15 % Testa N = 1 -> 15

    % Testa com b0
    n = na + nb +1; % Coeficientes a identificar

    % Cria a variável psi
    psi = zeros(np, n*N);

    % Constrói os vetores psi do sistema [psi * Teta = y]
    for k = 1:np

        % Saídas anteriores (do sistema real)
        o = 1;
        for j = k-1:-1:k-na
            if j > 0
                p1(o,1) = - y(j);
                o = o+1;
            elseif j <= 0
                p1(o,1) = 0;
                o = o+1;
            end
        end

        % Entradas atual e anteriores
        for j = k:-1:k-nb
            if j > 0
                p1(o,1) = u(j);
                o = o+1;
            elseif j <= 0
                p1(o,1) = 0;
                o = o+1;
            end
        end
```

```
    % Parâmetro teta (elevado a 0, 1, ..., N)
    o = 1;
    for j = 1:n
        for i = 1:N+1
            if (k-1) <= 0
                if i == 1
                    pk(o) = 1;
                else
                    pk (o) = 0;
                end
            else
                pk(o) = abs(teta(k-1))^(i-1);
            end
            o = o + 1;
        end
    end

    % Matriz psi
    o = 1;
    for i = 1:n
        for j = 1:N+1
            psi(k,o) = p1(i) * pk(o);
            o = o + 1;
        end
    end

end

% Resolve o SEL gerado pelo metodo de Gauss-Jordan com pivoteamento
H = psi(1:np,:);
TETA = GJ(H'*H, H'*y(1:np));

% Simula a resposta se existe solução para o SEL (Teta <> 0)
if TETA  = 0
```

```
for k = 1:np

    % Saídas anteriores (do sistema identificado)
    o = 1;
    for j = k-1:-1:k-na
        if j > 0
            p1(o,1) = - ye(j);
            o = o+1;
        elseif j <= 0
            p1(o,1) = 0;
            o = o+1;
        end
    end

    % Entradas atual e anteriores
    for j = k:-1:k-nb
        if j > 0
            p1(o,1) = u(j);
            o = o+1;
        elseif j <= 0
            p1(o,1) = 0;
            o = o+1;
        end
    end

    % Parametro teta (elevado a 0, 1, ..., N)
    o = 1;
    for j = 1:n
        for i = 1:N+1
            if (k-1) <= 0
                if i == 1
                    pk(o) = 1;
                else
                    pk (o) = 0;
```

```
                end
            else
                pk(o) = abs(teta(k-1))^(i-1);
            end
            o = o + 1;
        end
    end

    % Matriz psi
    o = 1;
    for i = 1:n
        for j = 1:N+1
            psi(k,o) = p1(i) * pk(o);
            o = o + 1;
        end
    end

    % Saída identificada
    ye(k,1) = psi(k,:) * TETA(:,1);
  end
end

% Custo quadrático
J = sum( (y(1:np) - ye(1:np)).^2 );

% Se o custo atual for menor que o menor custo obtido armazena os valores
if J < Jmin
    L = [na nb N J]
    ye_min = ye;
    TETA_min = TETA;
    Jmin = J;
end

end
```

```
    end
end

% Plota a saída real e identificada
figure(1)
subplot(1,1,1)
hold off
plot(t(1:np), y(1:np), 'r', t(1:np), ye_min(1:np), 'b')
axis([1/50 np/50 min(ye_min) max(ye_min)])
grid
xlabel('Tempo (s)')

% Exibe os graus do modelo e o custo obtido
L
```

7.2 APÊNDICE 2: COEFICIENTES DOS MODELOS IDENTIFICADOS DO SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR DE SEGUNDA ORDEM

7.2.1 POSIÇÃO DA MASSA M: $K = SEN(X)$

TAB.7.1: Coeficientes do modelo identificado da posição da massa m: $k = sen(x)$.

α_{10}	-1,99844881465992	β_{10}	0,00012200674808	β_{30}	-0,00003055563653
α_{11}	0,00035319986041	β_{11}	-0,26640041112314	β_{31}	0,25037486911295
α_{12}	-0,00038640623240	β_{12}	0,81877653354031	β_{32}	-0,75227209073836
α_{13}	0,00057788213029	β_{13}	-0,91629697753076	β_{33}	0,80985058569797
α_{14}	-0,00049380779263	β_{14}	0,44001697609770	β_{34}	-0,35724977403187
α_{15}	0,00019374841610	β_{15}	-0,07443385675794	β_{35}	0,04300256414769
α_{16}	-0,00002890416964	β_{16}	-0,00114189204154	β_{36}	0,00581794523759
α_{20}	0,99844865938792	β_{20}	0,00015247819878	—	—
α_{21}	-0,00010833619951	β_{21}	0,01602560484847	—	—
α_{22}	0,00038421311680	β_{22}	-0,06650457345590	—	—
α_{23}	-0,00061562424465	β_{23}	0,10644661548799	—	—
α_{24}	0,00049142749979	β_{24}	-0,08276743946899	—	—
α_{25}	-0,00019051914766	β_{25}	0,03143141241505	—	—
α_{26}	0,00002855589020	β_{26}	-0,00467607511913	—	—

7.2.2 VELOCIDADE DA MASSA M: $K = SEN(X)$

TAB.7.2: Coeficientes do modelo identificado da velocidade da massa m: $k = sen(x)$.

α_{10}	-1,99838617752157	α_{40}	0,00001389746859	α_{70}	0,00015138846372
α_{11}	-0,05372600957305	α_{41}	-0,01623109407833	α_{71}	-0,05013010130737
α_{12}	0,16677084667286	α_{42}	0,04333528897845	α_{72}	0,15873621747055
α_{13}	-0,18793824158460	α_{43}	-0,04152169454048	α_{73}	-0,18456736179060
α_{14}	0,09160303139770	α_{44}	0,01697785167659	α_{74}	0,09289883431933
α_{15}	-0,01632327474759	α_{45}	-0,00250967819604	α_{75}	-0,01704317518255
α_{20}	0,99836091934550	α_{50}	0,00022792579899	β_{10}	0,01561279927910
α_{21}	0,14625008745414	α_{51}	-0,07131237167193	β_{11}	-0,02336261698482
α_{22}	-0,44680015380652	α_{52}	0,23139518119449	β_{12}	0,07213059891190
α_{23}	0,49939743348957	α_{53}	-0,27512191883108	β_{13}	-0,08137090916456
α_{24}	-0,24193870883198	α_{54}	0,14113949114404	β_{14}	0,03973567691514
α_{25}	0,04287367636815	α_{55}	-0,02630081508763	β_{15}	-0,00708863880378
α_{30}	-0,00000336857387	α_{60}	-0,00036422218877	β_{20}	-0,01561208335224
α_{31}	-0,08681190656105	α_{61}	0,13244573679280	β_{21}	0,02336001117182
α_{32}	0,26475338415332	α_{62}	-0,41817245756368	β_{22}	-0,07212686305994
α_{33}	-0,29512509888004	α_{63}	0,48467954656571	β_{23}	0,08136827030906
α_{34}	0,14257012528543	α_{64}	-0,24322261634245	β_{24}	-0,03973475959778
α_{35}	-0,02519608059926	α_{65}	0,04450269320086	β_{25}	0,00708851339327

7.2.3 POSIÇÃO DA MASSA M: $K = COS(X)$

TAB.7.3: Coeficientes do modelo identificado da posição da massa m: $k = cos(x)$.

α_{10}	-1,34238051864531	β_{10}	0,00012200435921	β_{40}	-0,00036379219913
α_{11}	-0,09455832885564	β_{11}	0,26781113722072	β_{41}	0,11426859166451
α_{12}	-0,00064076166817	β_{12}	-0,21733278831957	β_{42}	-0,08107926658419
α_{13}	-0,00129612924029	β_{13}	0,05427335343933	β_{43}	0,01179312013812
α_{14}	0,00063547998273	β_{14}	-0,00142242039803	β_{44}	0,00348076544114
α_{15}	0,00002263411858	β_{15}	-0,00112382666304	β_{45}	-0,00112105199059
α_{16}	-0,00001247974759	β_{16}	0,00010936546384	β_{46}	0,00008370537813
α_{20}	-0,31041030621229	β_{20}	0,00022091543258	β_{50}	0,00027212747615
α_{21}	0,18825638486400	β_{21}	-0,42326223565073	β_{51}	-0,36115446140489
α_{22}	0,00073391319593	β_{22}	0,32897853723755	β_{52}	0,27058511821511
α_{23}	0,00285250575520	β_{23}	-0,07190210866639	β_{53}	-0,05124733287712
α_{24}	-0,00131726782439	β_{24}	-0,00266043918851	β_{54}	-0,00596323390035
α_{25}	-0,00004019395326	β_{25}	0,00253710288968	β_{55}	0,00275069080717
α_{26}	0,00002467443607	β_{26}	-0,00021645448882	β_{56}	-0,00021872860880
α_{30}	0,65300615968298	β_{30}	-0,00013034656968	β_{60}	0,00028649887836
α_{31}	-0,09343478824622	β_{31}	0,54833104270700	β_{61}	-0,14611334757602
α_{32}	-0,00050360481718	β_{32}	-0,46075442943185	β_{62}	0,15969484944463
α_{33}	-0,00146425814139	β_{33}	0,12567303529909	β_{63}	-0,06862641956700
α_{34}	0,00068685006882	β_{34}	-0,00790587537169	β_{64}	0,01447847376435
α_{35}	0,00001479212073	β_{35}	-0,00154489446396	β_{65}	-0,00149872300232
α_{36}	-0,00001201622041	β_{36}	0,00018127602242	β_{66}	0,00006086153686

7.2.4 VELOCIDADE DA MASSA M: $K = COS(X)$

TAB.7.4: Coeficientes do modelo identificado da velocidade da massa m: $k = cos(x)$.

α_{10}	-1,81564056425780	α_{50}	0,00000512793376	α_{90}	-0,00061946726298	β_{20}	-0,01275336474253
α_{11}	0,04201155407415	α_{51}	-0,00599138836564	α_{91}	0,07703756258268	β_{21}	0,03601695408375
α_{12}	-0,01742170067127	α_{52}	0,00641062700891	α_{92}	-0,04961319059467	β_{22}	-0,03952330542097
α_{13}	0,00473227786672	α_{53}	-0,00233485498108	α_{93}	0,00757670267499	β_{23}	0,01440385853330
α_{14}	-0,00028449367097	α_{54}	0,00024909355762	α_{94}	0,00043925295684	β_{24}	-0,00153865629658
α_{15}	-0,00002688367608	α_{55}	0,00009258588413	α_{95}	-0,00005102055162	β_{25}	-0,00010021425782
α_{16}	0,00000374685918	α_{56}	-0,00004647494482	α_{96}	-0,00000933277588	β_{26}	-0,00000252326986
α_{17}	0,00000163137960	α_{57}	0,00000887285776	α_{97}	-0,00000114933959	β_{27}	0,00000514395967
α_{18}	-0,00000124021435	α_{58}	-0,00000071169266	α_{98}	-0,00000021200505	β_{28}	-0,00000023777687
α_{19}	0,00000012541996	α_{59}	0,00000001487498	α_{99}	0,00000001029077	β_{29}	0,00000008149754
α_{110}	-0,00000000115734	α_{510}	-0,00000000011326	α_{910}	0,00000000907905	β_{210}	-0,00000001481699
α_{20}	0,31331446486896	α_{60}	-0,00019432948807	α_{100}	0,00034191830309	β_{30}	-0,00786350553048
α_{21}	0,05596439729794	α_{61}	0,05176721759188	α_{101}	-0,04271045568452	β_{31}	0,08012860582432
α_{22}	-0,00331372004904	α_{62}	-0,02650703078428	α_{102}	0,02943247863624	β_{32}	-0,04100538957542
α_{23}	-0,00264424446528	α_{63}	0,00099708169422	α_{103}	-0,00496232167374	β_{33}	0,00198577364877
α_{24}	-0,00041541118424	α_{64}	0,00051836696073	α_{104}	-0,00038372754661	β_{34}	0,00080308619501
α_{25}	0,00001172971666	α_{65}	0,00018159325980	α_{105}	0,00007437712863	β_{35}	0,00018698613539
α_{26}	0,00000180682999	α_{66}	-0,00002497634429	α_{106}	0,00002529237648	β_{36}	-0,00002157873835
α_{27}	0,00000699477534	α_{67}	-0,00000544311179	α_{107}	-0,00000550815883	β_{37}	-0,00000671755384
α_{28}	-0,00000001719240	α_{68}	0,00000007350359	α_{108}	0,00000043477492	β_{38}	-0,00000050323974
α_{29}	0,00000000380343	α_{69}	0,00000006162055	α_{109}	0,00000000746172	β_{39}	0,00000014476557
α_{210}	-0,00000000898001	α_{610}	0,00000000523970	α_{1010}	-0,00000000438967	β_{310}	0,00000000664425
α_{30}	0,81978927883962	α_{70}	0,00045610769201	β_{00}	0,00000000005597	β_{40}	0,00496447946080
α_{31}	-0,22518572206516	α_{71}	-0,10087943185095	β_{01}	-0,00420189430730	β_{41}	-0,00915543218866
α_{32}	0,03951511494049	α_{72}	0,06267909002352	β_{02}	0,00050063833307	β_{42}	0,00146089682393
α_{33}	-0,00019381389124	α_{73}	-0,00853477914986	β_{03}	0,00183199219773	β_{43}	-0,00017370171330
α_{34}	0,00058427871699	α_{74}	-0,00067614728035	β_{04}	-0,00074098529862	β_{44}	0,00090507998913
α_{35}	-0,00003258421813	α_{75}	0,00003017460305	β_{05}	0,00002361374855	β_{45}	-0,00030889363960
α_{36}	-0,00002205243284	α_{76}	0,00000398584827	β_{06}	0,00003043433502	β_{46}	0,00001917235002
α_{37}	-0,00000350832288	α_{77}	0,00000488014151	β_{07}	-0,00000475585955	β_{47}	0,00000003161358
α_{38}	0,00000043243712	α_{78}	0,00000021692184	β_{08}	0,00000016794602	β_{48}	0,00000037260894
α_{39}	-0,00000002447047	α_{79}	-0,00000003109137	β_{09}	-0,00000001160028	β_{49}	0,00000008540258
α_{310}	0,00000000235600	α_{710}	-0,00000001339655	β_{010}	0,00000000224026	β_{410}	-0,00000001899463
α_{40}	-0,31724927304065	α_{80}	0,00002176150022	β_{10}	0,01561216396429	—	—
α_{41}	0,12426005266605	α_{81}	0,02387963785520	β_{11}	-0,10274370364287	—	—
α_{42}	-0,01686790605941	α_{82}	-0,02513183670666	β_{12}	0,07858172513766	—	—
α_{43}	-0,00238855143953	α_{83}	0,00843317784404	β_{13}	-0,01812738902923	—	—
α_{44}	-0,00003211187127	α_{84}	-0,00052101916592	β_{14}	0,00064712136006	—	—
α_{45}	0,00021552296007	α_{85}	-0,00021866898029	β_{15}	0,00016228833156	—	—
α_{46}	-0,00003945603270	α_{86}	0,00002464727430	β_{16}	-0,00001529481438	—	—
α_{47}	0,00000463137592	α_{87}	0,00000300295204	β_{17}	0,00000452628866	—	—
α_{48}	-0,00000007039586	α_{88}	-0,00000040061103	β_{18}	0,00000038711946	—	—
α_{49}	-0,00000008456145	α_{89}	0,00000000439678	β_{19}	-0,00000031105150	—	—
α_{410}	0,00000000989339	α_{810}	-0,00000000079724	β_{110}	0,00000002520481	—	—

7.2.5 POSIÇÃO DA MASSA M COM RUÍDO: $K = COS(X)$

TAB.7.5: Coeficientes do modelo identificado da posição da massa m com ruído: $k = cos(x)$.

α_{10}	-0,40196329901583	α_{50}	-0,09829005438158	α_{90}	0,19996942497396	β_{20}	0,00499796486585
α_{11}	-0,01761965858042	α_{51}	-0,21739809328140	α_{91}	-0,43460350966333	β_{21}	-4,12720362476964
α_{12}	0,02959513743696	α_{52}	0,22961272432778	α_{92}	0,52970029386833	β_{22}	3,18941911120987
α_{13}	-0,01467971656708	α_{53}	-0,08520077780117	α_{93}	-0,25386171793637	β_{23}	-0,67909791816350
α_{14}	0,00253571893448	α_{54}	0,01158045380050	α_{94}	0,05681481429332	β_{24}	-0,03516971913725
α_{15}	-0,00008321069146	α_{55}	-0,00021390670788	α_{95}	-0,00591639611070	β_{25}	0,02636374452968
α_{16}	-0,00000793426763	α_{56}	-0,00004105277963	α_{96}	0,00022920968250	β_{26}	-0,00221313488370
α_{20}	-0,17162019510193	α_{60}	0,07235712510590	α_{100}	0,24682098443754	β_{30}	-0,00098093485878
α_{21}	-0,50858755787278	α_{61}	0,15929322793632	α_{101}	0,36876211002418	β_{31}	3,46980628102420
α_{22}	0,42636577592179	α_{62}	-0,09687562931895	α_{102}	-0,38692542128153	β_{32}	-1,26001187588703
α_{23}	-0,14545526360985	α_{63}	-0,01471771625877	α_{103}	0,15631725030775	β_{33}	-0,79015419542503
α_{24}	0,02331511220512	α_{64}	0,01566611957507	α_{104}	-0,03170164244074	β_{34}	0,51171740786949
α_{25}	-0,00172554137867	α_{65}	-0,00292353851434	α_{105}	0,00325750143647	β_{35}	-0,09703823048996
α_{26}	0,00004557186016	α_{66}	0,00017028183917	α_{106}	-0,00013520323577	β_{36}	0,00616057186555
α_{30}	-0,21085987754522	α_{70}	-0,37922597994483	β_{00}	0,00116493992544	β_{40}	0,00287273088156
α_{31}	0,29068832530581	α_{71}	0,10714884427148	β_{01}	3,36392371052196	β_{41}	-5,38163764297125
α_{32}	-0,36547071495799	α_{72}	0,06606783548676	β_{02}	-3,68947887210320	β_{42}	3,16347999134239
α_{33}	0,14785129663482	α_{73}	-0,03781217232895	β_{03}	1,59155539067962	β_{43}	0,06566134037367
α_{34}	-0,02533391359584	α_{74}	0,00778255638777	β_{04}	-0,33741941859992	β_{44}	-0,38195863309735
α_{35}	0,00174441206595	α_{75}	-0,00079821560975	β_{05}	0,03514595271076	β_{45}	0,08642471184461
α_{36}	-0,00002814584093	α_{76}	0,00003593760826	β_{06}	-0,00143847082173	β_{46}	-0,00586564522185
α_{40}	-0,45777850132182	α_{80}	0,20466888664574	β_{10}	-0,00684719050855	β_{50}	0,00177278967072
α_{41}	0,58934852692942	α_{81}	-0,33988725912391	β_{11}	1,76058040090632	β_{51}	0,91753882574046
α_{42}	-0,46732376797900	α_{82}	0,03545809320595	β_{12}	-1,47783595963087	β_{52}	0,06968483772019
α_{43}	0,16865106200203	α_{83}	0,07849304793225	β_{13}	0,40168535892770	β_{53}	-0,58711240965674
α_{44}	-0,03125492968128	α_{84}	-0,02917452410009	β_{14}	-0,02455999029150	β_{54}	0,26676001697621
α_{45}	0,00293931907359	α_{85}	0,00368313603600	β_{15}	-0,00511149449345	β_{55}	-0,04570982578705
α_{46}	-0,00011253544893	α_{86}	-0,00015433823117	β_{16}	0,00059196527828	β_{56}	0,00276126799265

7.2.6 POSIÇÃO DA MASSA M COM RUÍDO: $K = SEN(X)$

TAB.7.6: Coeficientes do modelo identificado da posição da massa m com ruído: $k = sen(x)$.

α_{10}	-0,62181940667594	α_{40}	0,05885630606765	α_{70}	-0,36393205958363	α_{100}	0,09629827771536
α_{11}	2,36162021837947	α_{41}	-2,81731938392933	α_{71}	2,24681153853980	α_{101}	0,95350588676675
α_{12}	-6,87410418824842	α_{42}	6,98578473332096	α_{72}	-4,44887287105631	α_{102}	-2,27612223736715
α_{13}	8,06390037363147	α_{43}	-6,77259947423541	α_{73}	3,69522350615513	α_{103}	2,41800435868103
α_{14}	-4,08013781053861	α_{44}	2,83198290859449	α_{74}	-1,34434823799258	α_{104}	-1,17896551992989
α_{15}	0,74198031060383	α_{45}	-0,42994084879809	α_{75}	0,17759198180568	α_{105}	0,21315207792080
α_{20}	-0,35406784386844	α_{50}	-0,04367672077904	α_{80}	0,29765381734516	β_{10}	-0,00471182207281
α_{21}	0,22343019100181	α_{51}	-1,21392263464055	α_{81}	-1,25615045894951	β_{11}	4,08298399973969
α_{22}	0,00494364551109	α_{52}	3,11017912239086	α_{82}	2,02383558987815	β_{12}	-12,55393675682800
α_{23}	-0,67671012189162	α_{53}	-3,56825900489067	α_{83}	-1,21252288298545	β_{13}	14,13555985841880
α_{24}	0,62007888247226	α_{54}	1,88744607032765	α_{84}	0,23297774754295	β_{14}	-6,90317862683837
α_{25}	-0,15522897220353	α_{55}	-0,36491713912733	α_{85}	0,00274124254018	β_{15}	1,23329842801686
α_{30}	-0,23652467586364	α_{60}	0,09596816645685	α_{90}	0,07092278747765	β_{20}	0,00633263751850
α_{31}	0,31953448699808	α_{61}	-1,85538459037941	α_{91}	1,04875706296048	β_{21}	-4,06951023523375
α_{32}	-0,98886759489490	α_{62}	5,88592844173387	α_{92}	-3,45053747940681	β_{22}	12,51404878232120
α_{33}	1,01813454664782	α_{63}	-6,98098957202963	α_{93}	4,04966636006756	β_{23}	-14,08914329997870
α_{34}	-0,45542458521276	α_{64}	3,43620311264571	α_{94}	-1,96745515339375	β_{24}	6,87997236346768
α_{35}	0,07688469855381	α_{65}	-0,59730168485281	α_{95}	0,33827673612340	β_{25}	-1,22912919135490

7.3 APÊNDICE 3: COEFICIENTES DOS MODELOS IDENTIFICADOS DO SISTEMA MASSA-MOLA-AMORTECEDOR DE QUARTA ORDEM

7.3.1 POSIÇÃO DA MASSA M_1 ($\times 10^6$)

TAB.7.7: Coeficientes do modelo identificado da posição da massa m_1 (x_1).

α_{10}	-0,00000363345982	α_{40}	0,00000085941349	β^2_{20}	-0,00000000014321
α_{11}	0,00000224472910	α_{41}	-0,00000149487105	β^2_{21}	0,00000056609600
α_{12}	-0,00023678768654	α_{42}	0,00016692046155	β^2_{22}	-0,00009456451519
α_{13}	0,01114808113924	α_{43}	-0,00812400887398	β^2_{23}	0,00416713698484
α_{14}	-0,24263676484577	α_{44}	0,18083232422263	β^2_{24}	-0,01662001499495
α_{15}	1,98448637155941	α_{45}	-1,50523236544104	β^2_{25}	-1,26550174555372
α_{20}	0,00000513990022	β^1_{10}	0,00000000000575	β^2_{30}	-0,00000000030614
α_{21}	-0,00000591517596	β^1_{11}	0,00000000005628	β^2_{31}	0,00000002685368
α_{22}	0,00063299376914	β^1_{12}	-0,00000000483890	β^2_{32}	0,00000223718507
α_{23}	-0,03005514223372	β^1_{13}	0,00000020305153	β^2_{33}	-0,00037306802347
α_{24}	0,65783012377875	β^1_{14}	-0,00000416145868	β^2_{34}	0,01587055614924
α_{25}	-5,40317822612744	β^1_{15}	0,00003329696664	β^2_{35}	-0,21692593615770
α_{30}	-0,00000335993362	β^2_{10}	0,00000000003399	β^1_{40}	0,00000000042143
α_{31}	0,00000518798895	β^2_{11}	-0,00000025916421	β^1_{41}	-0,00000033379205
α_{32}	-0,00056532621291	β^2_{12}	0,00003284644476	β^1_{42}	0,00005948084241
α_{33}	0,02713199265589	β^2_{13}	0,00028689633140	β^1_{43}	-0,00408094078321
α_{34}	-0,59824360852071	β^2_{14}	-0,11923413962655	β^1_{44}	0,11998268789705
α_{35}	4,94262951549558	β^2_{15}	2,75675767108174	β^1_{45}	-1,27431993117193

7.3.2 VELOCIDADE DA MASSA M_1 ($\times 10^4$)

TAB.7.8: Coeficientes do modelo identificado da velocidade da massa m_1 (v_1).

α_{10}	-0,00038360789805	β^1_{00}	0,00000046593279	β^1_{50}	0,00000100382610	β^2_{40}	0,00000092111615
α_{11}	-0,00312336137523	β^1_{01}	-0,00004590907057	β^1_{51}	-0,00000734825864	β^2_{41}	0,00007294050159
α_{12}	0,00287131027967	β^1_{02}	0,00180206493326	β^1_{52}	-0,00571642334100	β^2_{42}	-0,01054231285105
α_{13}	0,72385298432131	β^1_{03}	-0,02626957098877	β^1_{53}	0,20179848277035	β^2_{43}	0,21848567380092
α_{20}	0,00058822411899	β^1_{10}	0,00000053088885	β^2_{00}	-0,00000046593279	β^2_{50}	-0,00000103524009
α_{21}	0,01132631608247	β^1_{11}	-0,00001213609477	β^2_{01}	-0,00005050972279	β^2_{51}	0,00007790401561
α_{22}	-0,01039422190398	β^1_{12}	-0,00099536054287	β^2_{02}	0,00623302079173	β^2_{52}	-0,00045146577843
α_{23}	-2,62561974200765	β^1_{13}	0,04492362682754	β^2_{03}	-0,13435197244155	β^2_{53}	-0,01685482322887
α_{30}	-0,00044185922524	β^1_{20}	-0,00000118351520	β^2_{10}	-0,00000002981951	—	—
α_{31}	-0,01599804165453	β^1_{21}	-0,00001593396672	β^2_{11}	0,00008865488383	—	—
α_{32}	0,01471161671207	β^1_{22}	-0,00086294921482	β^2_{12}	-0,00539311465111	—	—
α_{33}	3,70857617169259	β^1_{23}	0,02629267284310	β^2_{13}	0,08313879170597	—	—
α_{40}	0,00015564256878	β^1_{30}	0,00000089049183	β^2_{20}	-0,00000024063745	—	—
α_{41}	0,01044863395477	β^1_{31}	0,00011762068287	β^2_{21}	-0,00012940349194	—	—
α_{42}	-0,00966328747560	β^1_{32}	-0,00079528154398	β^2_{22}	0,01109041620604	—	—
α_{43}	-2,42144392953107	β^1_{33}	-0,04012881058285	β^2_{23}	-0,21475569469337	—	—
α_{50}	-0,00001792444202	β^1_{40}	-0,00000170762308	β^2_{30}	0,00000085051338	—	—
α_{51}	-0,00267238979408	β^1_{41}	-0,00003629357487	β^2_{31}	-0,00005958608286	—	—
α_{52}	0,00249614644700	β^1_{42}	0,00656796525618	β^2_{32}	-0,00093654927847	—	—
α_{53}	0,61891612875606	β^1_{43}	-0,20661665324084	β^2_{33}	0,06433810751502	—	—

7.3.3 POSIÇÃO DA MASSA M_2

TAB.7.9: Coeficientes do modelo identificado da posição da massa m_2 (x_2).

α_{10}	-3,62645524231858	β^1_{00}	-0,00000000000256	β^1_{40}	-0,00351002054563	β^2_{20}	-0,00149546584260
α_{11}	-0,00257429143116	β^1_{01}	0,00000000023549	β^1_{41}	0,39685348061353	β^2_{21}	0,17460634623079
α_{12}	0,04971844849445	β^1_{02}	-0,00000000598020	β^1_{42}	-10,03749675596000	β^2_{22}	-4,11210763222486
α_{20}	5,12201329635174	β^1_{10}	-0,00013249235046	β^1_{50}	0,00044313543097	β^2_{30}	-0,00168032509600
α_{21}	0,00698064373903	β^1_{11}	0,01775392367016	β^1_{51}	-0,04677781035081	β^2_{31}	0,13187172792631
α_{22}	-0,17581376337574	β^1_{12}	-0,44427404942867	β^1_{52}	1,18035214729510	β^2_{32}	-2,23097996001386
α_{30}	-3,34488035552536	β^1_{20}	0,00147420112562	β^2_{00}	0,00000000000253	β^2_{40}	0,00342448507155
α_{31}	-0,00635080914657	β^1_{21}	-0,18624727384803	β^2_{01}	-0,00000000016121	β^2_{41}	-0,32366093100719
α_{32}	0,19899442409742	β^1_{22}	4,68921732732085	β^2_{02}	0,00000000201198	β^2_{42}	6,53176467981290
α_{40}	0,85532873805271	β^1_{30}	0,00173118275138	β^2_{10}	0,00017316730857	β^2_{50}	-0,00040984853972
α_{41}	0,00192763909976	β^1_{31}	-0,18158233509234	β^2_{11}	-0,01767945379236	β^2_{51}	0,03486227482346
α_{42}	-0,07567643321331	β^1_{32}	4,61220152402152	β^2_{12}	0,44054565651580	β^2_{52}	-0,62922525421494

7.3.4 VELOCIDADE DA MASSA M_2 ($\times 10^{10}$)

TAB.7.10: Coeficientes do modelo identificado da velocidade da massa m_2 (v_2).

α_{10}	-0,00000000036279	α_{40}	0,00000000008556	β^2_{10}	0,00000000000043	β^2_{40}	-0,00000000000045
α_{11}	0,00000000008132	α_{41}	0,00000000000418	β^2_{11}	0,00000000001996	β^2_{41}	0,00000000000568
α_{12}	-0,00000001821966	α_{42}	-0,00000000286546	β^2_{12}	-0,00000000019819	β^2_{42}	-0,00000000036459
α_{13}	0,00000200997502	α_{43}	0,00000051263971	β^2_{13}	0,00000000599575	β^2_{43}	-0,00000000020021
α_{14}	-0,00012263288197	α_{44}	-0,00004532494974	β^2_{14}	-0,00000097696501	β^2_{44}	-0,00000007632502
α_{15}	0,00433755513080	α_{45}	0,00221754633250	β^2_{15}	-0,00000860247514	β^2_{45}	0,00003117911036
α_{16}	-0,08844421455849	α_{46}	-0,06077576510170	β^2_{16}	0,00040840595900	β^2_{46}	-0,00007361357630
α_{17}	0,96463932439023	α_{47}	0,87043422271195	β^2_{17}	0,02947039442138	β^2_{47}	-0,05488325214533
α_{18}	-4,37437210972611	α_{48}	-5,04923721890439	β^2_{18}	-0,69455638960397	β^2_{48}	1,09540838317170
α_{20}	0,00000000051251	β^1_{10}	0,00000000000009	β^2_{20}	-0,00000000000128	—	—
α_{21}	-0,00000000015634	β^1_{11}	-0,00000000000674	β^2_{21}	-0,00000000001482	—	—
α_{22}	0,00000003323937	β^1_{12}	-0,00000000042154	β^2_{22}	0,00000000018705	—	—
α_{23}	-0,00000348643364	β^1_{13}	0,00000001066780	β^2_{23}	0,00000000024323	—	—
α_{24}	0,00019981986261	β^1_{14}	-0,00000073309043	β^2_{24}	0,00000047162036	—	—
α_{25}	-0,00650398967832	β^1_{15}	0,00004540588184	β^2_{25}	-0,00005747020141	—	—
α_{26}	0,11835154245135	β^1_{16}	-0,00113709855206	β^2_{26}	0,00106712428654	—	—
α_{27}	-1,10056865163273	β^1_{17}	0,02574863898012	β^2_{27}	0,02253922155246	—	—
α_{28}	3,98016739365597	β^1_{18}	-0,02002891980497	β^2_{28}	-0,15308125605122	—	—
α_{30}	-0,00000000033468	β^1_{20}	-0,00000000000009	β^2_{30}	0,00000000000131	—	—
α_{31}	0,00000000007335	β^1_{21}	0,00000000000828	β^2_{31}	-0,00000000001236	—	—
α_{32}	-0,00000001278709	β^1_{22}	0,00000000021320	β^2_{32}	0,00000000058579	—	—
α_{33}	0,00000104028090	β^1_{23}	0,00000000532022	β^2_{33}	-0,00000002232002	—	—
α_{34}	-0,00003698940220	β^1_{24}	-0,00000002984692	β^2_{34}	0,00000137103591	—	—
α_{35}	0,00015002575491	β^1_{25}	-0,00002219015231	β^2_{35}	0,00001030836703	—	—
α_{36}	0,02627348280951	β^1_{26}	0,00069650289576	β^2_{36}	-0,00092030037482	—	—
α_{37}	-0,67788700973691	β^1_{27}	-0,02097322470582	β^2_{37}	-0,00256232354710	—	—
α_{38}	5,15269342764387	β^1_{28}	-0,00263536691568	β^2_{38}	-0,22067874378840	—	—

7.4 APÊNDICE 4: COEFICIENTES DOS MODELOS IDENTIFICADOS DO MÍSSIL NÃO-LINEAR

7.4.1 SAÍDA α

TAB.7.11: Coeficientes do modelo identificado do míssil (saída α).

α_{10}	-2,39533662669774	α_{60}	0,10435921909123	β_{30}	-0,00020508873592	β_{80}	0,00026092503772
α_{11}	-0,01749725396542	α_{61}	0,04271873637672	β_{31}	-0,01883883426745	β_{81}	0,00052580478211
α_{12}	0,00140315815441	α_{62}	-0,01028873151759	β_{32}	0,00927645283077	β_{82}	-0,00054105163169
α_{13}	-0,00056818250386	α_{63}	0,00010471842694	β_{33}	-0,00175442936650	β_{83}	0,00019696686603
α_{14}	0,00002715937672	α_{64}	0,00005237776110	β_{34}	0,00016020763304	β_{84}	-0,00003509957120
α_{15}	-0,00000076742123	α_{65}	-0,00000198207863	β_{35}	-0,00000603450824	β_{85}	0,00000335583846
α_{16}	0,00000003955765	α_{66}	-0,00000001978467	β_{36}	-0,00000006907742	β_{86}	-0,00000017223110
α_{17}	-0,00000000100394	α_{67}	0,00000000181826	β_{37}	0,00000001197788	β_{87}	0,00000000428989
α_{18}	0,00000000000789	α_{68}	-0,00000000001341	β_{38}	-0,00000000025583	β_{88}	-0,00000000003659
α_{20}	2,03697154574713	α_{70}	0,04479455424168	β_{40}	-0,00641747361818	β_{90}	0,00045781718796
α_{21}	0,00828222195301	α_{71}	-0,05793397341728	β_{41}	0,01290475249035	β_{91}	-0,00063490350209
α_{22}	0,00046559484720	α_{72}	0,01154968086148	β_{42}	-0,00590778228571	β_{92}	0,00031847386190
α_{23}	0,00074508392291	α_{73}	-0,00059686831080	β_{43}	0,00128199572601	β_{93}	-0,00008608692080
α_{24}	-0,00000331831144	α_{74}	-0,00001166760618	β_{44}	-0,00014907610030	β_{94}	0,00001338192756
α_{25}	-0,00000073234300	α_{75}	0,00000176157849	β_{45}	0,00000942463922	β_{95}	-0,00000119885167
α_{26}	-0,00000001724173	α_{76}	-0,00000006111185	β_{46}	-0,00000028921200	β_{96}	0,00000006003110
α_{27}	0,00000000045294	α_{77}	0,00000000170965	β_{47}	0,00000000208111	β_{97}	-0,00000000152130
α_{28}	0,00000000000102	α_{78}	-0,00000000003355	β_{48}	0,00000000005594	β_{98}	0,00000000001445
α_{30}	-1,09715292788218	α_{80}	-0,02348382538588	β_{50}	-0,00303212392114	—	—
α_{31}	0,06085247258793	α_{81}	0,01882010943023	β_{51}	0,00143519790062	—	—
α_{32}	-0,00112354401663	α_{82}	-0,00369381153353	β_{52}	0,00008101008172	—	—
α_{33}	-0,00054258147908	α_{83}	0,00021009160405	β_{53}	-0,00014802149623	—	—
α_{34}	-0,00001644040796	α_{84}	0,00000636955914	β_{54}	0,00002865124014	—	—
α_{35}	0,00000070215032	α_{85}	-0,00000127182275	β_{55}	-0,00000218488948	—	—
α_{36}	0,00000000606039	α_{86}	0,00000006649872	β_{56}	0,00000004588843	—	—
α_{37}	-0,00000000015595	α_{87}	-0,00000000183088	β_{57}	0,00000000220406	—	—
α_{38}	0,00000000001659	α_{88}	0,00000000002301	β_{58}	-0,00000000008955	—	—
α_{40}	0,77433037097401	β_{10}	-0,00446703734962	β_{60}	0,00450515035091	—	—
α_{41}	-0,08544773926153	β_{11}	0,01251744459683	β_{61}	-0,00794124114076	—	—
α_{42}	-0,00223811508669	β_{12}	-0,00604356815608	β_{62}	0,00316268371997	—	—
α_{43}	0,00048048452762	β_{13}	0,00115241626105	β_{63}	-0,00058005119445	—	—
α_{44}	-0,00000172649881	β_{14}	-0,00010568586823	β_{64}	0,00006294868792	—	—
α_{45}	0,00000058500734	β_{15}	0,00000404202855	β_{65}	-0,00000490780931	—	—
α_{46}	-0,00000001680279	β_{16}	0,00000004023439	β_{66}	0,00000030119030	—	—
α_{47}	0,00000000164136	β_{17}	-0,00000000775810	β_{67}	-0,00000001235462	—	—
α_{48}	-0,00000000006871	β_{18}	0,00000000016812	β_{68}	0,00000000022718	—	—
α_{50}	-0,44979356157103	β_{20}	-0,01959948441999	β_{70}	0,00448940353709	—	—
α_{51}	0,03231957341826	β_{21}	0,00811838875204	β_{71}	-0,00645633686015	—	—
α_{52}	0,00389053617096	β_{22}	-0,00388188207229	β_{72}	0,00326855173694	—	—
α_{53}	0,00016229254195	β_{23}	0,00075736768176	β_{73}	-0,00077096480667	—	—
α_{54}	-0,00005287523563	β_{24}	-0,00007199940577	β_{74}	0,00009271301767	—	—
α_{55}	0,00000167622421	β_{25}	0,00000304784361	β_{75}	-0,00000536336441	—	—
α_{56}	0,00000000871630	β_{26}	-0,00000000021147	β_{76}	0,00000007712085	—	—
α_{57}	-0,00000000289565	β_{27}	-0,00000000421393	β_{77}	0,00000000545377	—	—
α_{58}	0,00000000007096	β_{28}	0,00000000009871	β_{78}	-0,00000000018437	—	—

7.4.2 SAÍDA η

TAB.7.12: Coeficientes do modelo identificado do míssil (saída η).

α_{10}	-2,19965219260500	α_{40}	0,61995944234620	α_{70}	-0,05889489472038
α_{11}	-0,01138071881891	α_{41}	-0,18413712400187	α_{71}	0,02683985075041
α_{12}	0,00185061891671	α_{42}	0,01206113055316	α_{72}	-0,00062245655510
α_{20}	1,75317825993478	α_{50}	-0,67997452160551	β_{10}	0,06646363222796
α_{21}	-0,01687345696632	α_{51}	0,16533545222181	β_{11}	0,00110740651641
α_{22}	-0,00228082924962	α_{52}	-0,00880623151236	β_{12}	-0,00011380361850
α_{30}	-0,87797860317646	α_{60}	0,42359917405394	—	—
α_{31}	0,12127503775474	α_{61}	-0,09427428240466	—	—
α_{32}	-0,00529236431727	α_{62}	0,00287903438748	—	—

7.4.3 SAÍDA α COM RUÍDO

TAB.7.13: Coeficientes do modelo identificado do míssil com ruído (saída α).

α_{10}	-1,01826387613496	α_{30}	0,10877052079799	β_{00}	0,02929540939173
α_{11}	0,00394515552602	α_{31}	-0,00541121044634	β_{01}	-0,00151526493431
α_{20}	-0,47086419722868	α_{40}	0,37772916201994	β_{10}	-0,10957784573884
α_{21}	-0,00021743304129	α_{41}	0,00629517972579	β_{11}	0,00216801871712

7.4.4 SAÍDA η COM RUÍDO

TAB.7.14: Coeficientes do modelo identificado do míssil com ruído (saída η).

α_{10}	-1,35708001020589	α_{40}	-0,02295351235345	β_{00}	0,04048082831834
α_{11}	0,01927417637760	α_{41}	-0,02102706414322	β_{01}	-0,20065958276123
α_{12}	0,01085865448505	α_{42}	0,00405036024868	β_{02}	0,05407543007952
α_{13}	-0,00113897089545	α_{43}	-0,00017407061444	β_{03}	-0,00478588790981
α_{14}	0,00002762252282	α_{44}	0,00000349585272	β_{04}	0,00013715805580
α_{20}	0,13426724206072	α_{50}	-0,25777634450335	β_{10}	-0,24067276029889
α_{21}	-0,00212860651587	α_{51}	0,08532509238199	β_{11}	0,20310299174036
α_{22}	-0,01358639820045	α_{52}	-0,01035661959129	β_{12}	-0,05197685943623
α_{23}	0,00121471286816	α_{53}	0,00058202254799	β_{13}	0,00455742681265
α_{24}	-0,00002814181370	α_{54}	-0,00001049817506	β_{14}	-0,00013136239814
α_{30}	0,32447452375584	α_{60}	0,21393176834892	β_{20}	0,27712937115024
α_{31}	-0,07657849084176	α_{61}	-0,02641220904641	β_{21}	0,01241599485602
α_{32}	0,00650715424896	α_{62}	0,00831870333172	β_{22}	-0,00043159123508
α_{33}	-0,00013472083304	α_{63}	-0,00073497263303	β_{23}	-0,00001553452052
α_{34}	-0,00000086605823	α_{64}	0,00001602348678	β_{24}	0,00000041819170

7.4.5 IDENTIFICAÇÃO POR FILTRO DE KALMAN DA SAÍDA α

TAB.7.15: Coeficientes do modelo identificado por Filtro de Kalman do míssil: saída α com ruído.

α_{10}	-1,01777412669741	α_{30}	0,10859289421423	β_{00}	0,02692447305750
α_{11}	0,00391160669508	α_{31}	-0,00539404527522	β_{01}	-0,00137099873865
α_{20}	-0,47141639254429	α_{40}	0,37798674484588	β_{10}	-0,10723317963367
α_{21}	-0,00018278188693	α_{41}	0,00627494320103	β_{11}	0,00202634807747

7.4.6 IDENTIFICAÇÃO POR FILTRO DE KALMAN DA SAÍDA η

TAB.7.16: Coeficientes do modelo identificado por Filtro de Kalman do míssil: saída η com ruído.

α_{10}	-1,33492103401240	α_{40}	-0,00999860479709	β_{00}	0,03943579928317
α_{11}	0,01202199454126	α_{41}	-0,02874449342470	β_{01}	-0,20840247951793
α_{12}	0,01177640410495	α_{42}	0,00514552683888	β_{02}	0,05625212560520
α_{13}	-0,00118482740518	α_{43}	-0,00022114146120	β_{03}	-0,00497413333867
α_{14}	0,00002836937678	α_{44}	0,00000401598011	β_{04}	0,00014233967141
α_{20}	0,12113269243942	α_{50}	-0,26169528131113	β_{10}	-0,23221933777255
α_{21}	0,00488569887582	α_{51}	0,08697813713858	β_{11}	0,19001091371872
α_{22}	-0,01459073710810	α_{52}	-0,01043304597490	β_{12}	-0,04913266394191
α_{23}	0,00125973205215	α_{53}	0,00058035156614	β_{13}	0,00433930097243
α_{24}	-0,00002872039702	α_{54}	-0,00001041767422	β_{14}	-0,00012577239422
α_{30}	0,32429966447153	α_{60}	0,21241799644659	β_{20}	0,26780114992675
α_{31}	-0,07770625184931	α_{61}	-0,02473490902622	β_{21}	0,03326864397335
α_{32}	0,00649586569906	α_{62}	0,00811432750896	β_{22}	-0,00537632903652
α_{33}	-0,00012153428068	α_{63}	-0,00073387462461	β_{23}	0,00038627589652
α_{34}	-0,00000124989897	α_{64}	0,00001623096785	β_{24}	-0,00001028512670