

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

RODRIGO DE PAULA PEREIRA

**ROBUSTEZ E SENSIBILIDADE PARAMÉTRICA DE
CONTROLADORES COM BASE NA IDENTIFICAÇÃO BAYESIANA -
ABORDAGEM CONTÍNUA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Geraldo Magela Pinheiro Gomes, Dr. ENSAE

Co-orientador: Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE

Rio de Janeiro
2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

c2008

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmar ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

629.8
P436r Pereira, Rodrigo de Paula
 Robustez e Sensibilidade Paramétrica de Controladores
 Com Base na Identificação Bayesiana - Abordagem Con-
 tínua / Rodrigo de Paula Pereira. - Rio de Janeiro: Instituto
 Militar de Engenharia, 2008.
 123 p.: il.

 Dissertação (mestrado) - Instituto Militar de Engenha-
 ria - Rio de Janeiro, 2008.

 1. Sistemas de Controle. 2. Controle Robusto
 Paramétrico. 3. Qualidade de Identificação Bayesiana. 4.
 Robustez Paramétrica. 5. Domínio de Estabilidade. I. Títu-
 lo. II. Instituto Militar de Engenharia.

CDD 629.8

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

RODRIGO DE PAULA PEREIRA

**ROBUSTEZ E SENSIBILIDADE PARAMÉTRICA DE CONTROLADORES COM
BASE NA IDENTIFICAÇÃO BAYESIANA - ABORDAGEM CONTÍNUA**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Geraldo Magela Pinheiro Gomes, Dr. ENSAE

Co-orientador: Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE

Aprovada em 12 de Fevereiro de 2008 pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Geraldo Magela Pinheiro Gomes, Dr. ENSAE do IME - Presidente

Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE do IME

Prof. Glauco Nery Taranto, Ph.D. da COPPE/UFRJ

Prof. Mario Cesar Mello Massa de Campos, Dr. ECP do CENPES

Prof. Roberto Ades, Dr. do IME

Rio de Janeiro
2008

Para minha família.
Aos amigos, que o caminhar da vida afasta, e a lembrança reúne.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de registrar meus sinceros agradecimentos às pessoas e instituições que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste trabalho. Agradeço especialmente:

Aos meus pais, Marcelo e Maria Eliza, pelo apoio incondicional que sempre me deram sem nunca medir os esforços necessários. A segurança de poder contar com este apoio em qualquer circunstância aliada ao exemplo irretocável dado, é que permitiram realizar este trabalho. Às minhas irmãs, Adriana e Ana Critina, pelo incentivo e amizade. À minha namorada, Jenifer, por estar sempre ao meu lado e saber compreender minha ausência.

Ao meu orientador, Prof. Pinheiro, por seu apoio, dedicação, profissionalismo e amizade, com os quais sempre pude contar desde a graduação. Neste período, além da orientação acadêmica, tive o privilégio de conviver com um grande homem. Ao meu orientador, Prof. Pellanda, que sempre incentivou, apoiou e muito contribuiu para este trabalho.

Ao Prof. Germano Amaral Monerat, que me estimulou a seguir a carreira acadêmica durante a Iniciação Científica e pelo apoio que sempre me deu.

Ao Prof. Ney Bruno, pelo acolhimento no Laboratório de Controle.

Aos professores do curso de mestrado, pela atenção, dedicação e conhecimentos passados.

Aos colegas de turma e contemporâneos pela contribuição constante, com as tarefas do mestrado, com as discussões acadêmicas e com a amizade.

Aos Profs. Glauco Nery Taranto, Mario Cesar Mello Massa de Campos e Roberto Ades, pela participação na banca examinadora, pelas valiosas sugestões e correções.

Ao Instituto Militar de Engenharia, em especial à Seção de Engenharia Elétrica, por ter disponibilizado os recursos necessários para a realização deste trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Este trabalho trata das técnicas PRCBI (*Parameter Robust Control by Bayesian Identification*) e PRABI (*Parameter Robust Analysis by Bayesian Identification*) e propõe uma metodologia para a síntese de controladores robustos à variações paramétricas considerando especificações de performance. Esta metodologia é obtida melhorando algumas características numéricas destas técnicas.

O método PRCBI foi originalmente desenvolvido para ser aplicado a sistemas de tempo discreto. Esta dissertação apresenta, como um complemento de um trabalho apresentado anteriormente da literatura de controle, uma extensão da técnica PRCBI para sistemas de tempo contínuo e mostra alguns resultados numéricos e comparações. São obtidos melhores resultados, em termos da robustez, com a implementação de algumas mudanças no critério de otimização do algoritmo de robustecimento e normalizando os parâmetros nominais.

Um novo método baseado na técnica PRABI para o cálculo do raio da hipersfera de estabilidade é também apresentado. Esta técnica modificada é menos sensível a diferenças entre os parâmetros nominais e a espaços paramétricos com geometria irregular.

Estes métodos de síntese de controle e análise são testados em exemplos acadêmicos bem como em exemplos reais.

ABSTRACT

This work deals with the PRCBI (Parameter Robust Control by Bayesian Identification) and PRABI (Parameter Robust Analysis by Bayesian Identification) techniques and provides a methodology to the synthesis of parameter robust controllers considering some performance specifications. This is obtained by improving some numerical features of those techniques.

The PRCBI method was originally developed to be applied to discrete-time systems. This dissertation presents, as a complement to a previous work appearing in the control literature, an extension of the PRCBI technique to continuous-time systems and shows some numerical results and comparisons. Better results are obtained, in terms of robustness, by implementing some changes in the robustness criterion optimization algorithm and normalizing the nominal parameters for instance.

A new method based on the PRABI technique for computation of the radius of the largest stability hypersphere centered at the nominal point in the parameter space is also presented. This modified technique is less sensitive to differences between nominal parameters and also to irregular parameter space geometries.

These methods of control synthesis and analysis are tested in academic as well as in realistic examples.

“Como é de são efeito, ajudo com meu querer acreditar. Mas nem sempre posso. O senhor saiba: eu toda minha vida pensei por mim, forro, sou nascido diferente. Eu sou é eu mesmo. Divêrjo de todo mundo... Eu quase que nada não sei. Mas desconfio de muita coisa.”

João Guimarães Rosa
(Grande Sertão Veredas)

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	11
LISTA DE TABELAS	15
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	16
1 INTRODUÇÃO	18
1.1 Controle Robusto	18
1.2 Histórico da Síntese PRCBI	19
1.3 Objetivos	20
1.4 Organização do Texto	21
2 ROBUSTEZ PARAMÉTRICA BASEADA NA QUALIDADE DE IDENTIFI- CAÇÃO BAYESIANA - PRCBI	23
2.1 Introdução	23
2.2 Teoria Geral - Abordagem Discreta	24
2.2.1 Cálculo de ΔM	28
2.2.2 A Matriz $G_{\theta_0}^{-1}$	33
2.3 Teoria Geral - Abordagem Contínua	34
2.3.1 Cálculo do traço de $M_0^{-1}\Delta M$	35
2.3.2 Relação entre ΔM e $\Delta\theta$	38
2.4 Síntese PRCBI	39
2.5 Técnica das Liberações	40
2.6 Técnica de Análise da Robustez Paramétrica Baseada na Identificação Bayesiana - PRABI	40
2.6.1 Interpretação Geométrica	41
2.7 Robustecimento de Controladores Utilizando a Síntese PRCBI Associada à Técnica PRABI	42
3 ESPAÇO PARAMÉTRICO MODIFICADO	43
3.1 Introdução	43
3.2 Definições Relativas ao Espaço Paramétrico	44
3.3 Influência dos Valores Nominais do Vetor Paramétrico nos Autovalores e Autovetores de $G_{\theta_0}^{-1}$	45

3.4	Modificação do Espaço Paramétrico	48
3.5	Cálculo do Raio da Hiperesfera de Estabilidade	50
3.6	Hipersuperfície Gerada pelo Traço da Matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ em Função do Espaço Paramétrico	53
3.7	Técnica PRABI Associada a Valores Aleatórios para Determinação do Raio da Hiperesfera	56
3.8	Robustecimento de Controladores Utilizando a Síntese PRABI Associada à Técnica PRABI	58
4	APLICAÇÕES DA SÍNTESE E ANÁLISE DA ROBUSTEZ EM ESTABILIDADE E DESEMPENHO	61
4.1	Sistema Massa-Mola de 8 Estados	61
4.1.1	Controlador Ótimo no Sistema Contínuo	62
4.1.2	Controlador Ótimo no Sistema Discreto	66
4.1.3	Controlador Robustecido no Sistema Discreto	67
4.1.4	Controlador Robustecido no Sistema Contínuo	70
4.2	Síntese de um Controlador Robusto para o Modelo de um Míssil Ar-Ar	72
4.2.1	Controlador Ótimo	76
4.2.2	Controlador Robusto	80
4.3	Síntese de Controlador Robusto para um Helicóptero de Pequena Escala em Vôo Pairado	83
4.3.1	Controlador LQG	85
4.3.2	Robustecimento do Controlador LQG com 2 Parâmetros Sensíveis	95
4.3.3	Robustecimento do Controlador LQG com 5 Parâmetros Sensíveis	101
4.3.4	Comparação Quantitativa da Robustez Paramétrica em Desempenho	105
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO	107
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	110
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	112
7	APÊNDICES	115
7.1	APÊNDICE 1: Cálculo detalhado de ΔM	116
7.1.1	Cálculo de L	121
7.1.2	Cálculo de N	122

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Diagrama em blocos da conexão da planta com o filtro de Kalman.	29
FIG.2.2	Estrutura de controle em malha fechada.	39
FIG.3.1	Espaço paramétrico do sistema massa-mola de 8 estados com o controlador LQG.	45
FIG.3.2	Raio da hiperesfera calculado com os métodos grid e PRABI, utilizando parâmetros nominais com valores iguais.	52
FIG.3.3	Raio da hiperesfera calculado com os métodos grid e PRABI, utilizando parâmetros nominais com valores diferentes.	52
FIG.3.4	Raio da hiperesfera calculado com os métodos grid e PRABI modificado, utilizando parâmetros nominais com valores diferentes.	53
FIG.3.5	Superfície do traço de $G_{\theta_0}^{-1}$ do sistema massa-mola de 8 estados com o controlador LQG.	54
FIG.3.6	Superfície do traço de $G_{\theta_0}^{-1}$ do sistema massa-mola de 8 estados com o controlador PRCBI.	54
FIG.3.7	Superfície do traço de $G_{\theta_0}^{-1}$ em função do espaço paramétrico modificado do sistema massa-mola de 8 estados com o controlador PRCBI.	55
FIG.3.8	Raio da hiperesfera do sistema massa-mola de 8 estados com o controlador PRCBI utilizando os métodos grid e PRABI modificado.	56
FIG.3.9	Raio da hiperesfera do sistema massa-mola de 8 estados com o controlador PRCBI utilizando os métodos grid e PRABI modificado com pontos aleatórios.	58
FIG.3.10	Limite em torno da DSMIN para pontos usados na otimização.	59
FIG.4.1	Sistema massa-mola de 8 estados (ADES, 1994).	61
FIG.4.2	Espaço paramétrico do sistema massa-mola de 8 estados contínuo com o controlador LQG.	64
FIG.4.3	Resposta ao degrau do sistema massa-mola contínuo com o controlador LQG.	65
FIG.4.4	Diagrama de sensibilidade dos pólos do sistema massa-mola contínuo com o controlador LQG	65
FIG.4.5	Espaço paramétrico do sistema massa-mola com o controlador LQG.	66
FIG.4.6	Resposta ao degrau do sistema massa-mola com os controlares LQG	

	contínuo e discreto.	67
FIG.4.7	Diagrama de sensibilidade dos pólos so sistema massa-mola discreto com o controlador LQG.	68
FIG.4.8	Espaço paramétrico do sistema massa-mola discreto com o controlador PRCBI.	69
FIG.4.9	Ampliação de parte da FIG. 4.8	69
FIG.4.10	Resposta ao degrau do sistema massa-mola discreto com os controladores LQG e PRCBI.	70
FIG.4.11	Diagrama de sensibilidade dos pólos do sistema massa-mola discreto com o controlador PRCBI.	70
FIG.4.12	Espaço paramétrico do sistema massa-mola contínuo com o controlador PRCBI.	71
FIG.4.13	Resposta ao degrau do sistema massa-mola contínuo com os controladores LQG e PRCBI.	72
FIG.4.14	Resposta ao degrau do sistema massa-mola discreto com o controlador PRCBI.	72
FIG.4.15	Diagrama de sensibilidade dos pólos do sistema massa-mola contínuo com o controlador PRCBI.	73
FIG.4.16	Diagrama físico do míssil ar-ar.	73
FIG.4.17	Espaço paramétrico do míssil ar-ar com o controlador LQG.	77
FIG.4.18	Detalhe da FIG. 4.17.	78
FIG.4.19	Resposta ao degrau para variações aleatórias limitadas a 1,5% com o controlador LQG.	78
FIG.4.20	Diagrama de sensibilidade dos pólos do míssil ar-ar com o controlador LQG.	79
FIG.4.21	Detalhe do diagrama de sensibilidade dos pólos do míssil ar-ar com o controlador LQG.	79
FIG.4.22	Espaço paramétrico do míssil ar-ar com o controlador PRCBI.	80
FIG.4.23	Resposta ao degrau para variações aleatórias limitadas a 1,5% no míssil ar-ar com o controlador PRCBI.	81
FIG.4.24	Diagrama de sensibilidade dos pólos do míssil ar-ar com o controlador PRCBI.	82
FIG.4.25	Detalhe da FIG. 4.24.	82
FIG.4.26	Detalhe do diagrama de sensibilidade dos pólos do míssil ar-ar com o	

	controlador PRCBI para perturbações maiores.	83
FIG.4.27	Helicóptero Yamaha R-50.	83
FIG.4.28	Espaço paramétrico do helicóptero com o controlador LQG e M_a e L_b como parâmetros sensíveis.	88
FIG.4.29	Resposta ao impulso na entrada δ_{lat} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a e L_b	88
FIG.4.30	Resposta ao impulso na entrada δ_{lon} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a e L_b	89
FIG.4.31	Resposta ao impulso na entrada δ_{ped} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a e L_b	89
FIG.4.32	Resposta ao impulso na entrada δ_{col} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a e L_b	90
FIG.4.33	Diagrama de sensibilidade dos pólos do helicóptero com o controlador LQG com perturbações em M_a e L_b	91
FIG.4.34	Detalhe do diagrama da FIG. 4.33.	91
FIG.4.35	Resposta ao impulso na entrada δ_{lat} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s	92
FIG.4.36	Resposta ao impulso na entrada δ_{lon} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s	93
FIG.4.37	Resposta ao impulso na entrada δ_{ped} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s	93
FIG.4.38	Resposta ao impulso na entrada δ_{col} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s	94
FIG.4.39	Diagrama de sensibilidade dos pólos do helicóptero com o controlador LQG com perturbações em M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s	95
FIG.4.40	Detalhe da FIG. 4.40.	95

FIG.4.41	Espaço paramétrico do helicóptero com o controlador PRCBI e M_a e L_b como parâmetros sensíveis.	97
FIG.4.42	Resposta ao impulso na entrada δ_{lat} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a e L_b	98
FIG.4.43	Resposta ao impulso na entrada δ_{lon} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a e L_b	98
FIG.4.44	Resposta ao impulso na entrada δ_{ped} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a e L_b	99
FIG.4.45	Resposta ao impulso na entrada δ_{col} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a e L_b	99
FIG.4.46	Diagrama de sensibilidade dos pólos do helicóptero com o controlador PRCBI com perturbações em M_a e L_b	100
FIG.4.47	Detalhe da FIG. 4.40.	100
FIG.4.48	Resposta ao impulso na entrada δ_{lat} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a, L_b, B_d, A_c e τ_s	102
FIG.4.49	Resposta ao impulso na entrada δ_{lon} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a, L_b, B_d, A_c e τ_s	102
FIG.4.50	Resposta ao impulso na entrada δ_{ped} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a, L_b, B_d, A_c e τ_s	103
FIG.4.51	Resposta ao impulso na entrada δ_{col} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a, L_b, B_d, A_c e τ_s	103
FIG.4.52	Diagrama de sensibilidade dos pólos do helicóptero com o controlador PRCBI com perturbações em M_a, L_b, B_d, A_c e τ_s	104
FIG.4.53	Detalhe da FIG. 4.40.	104

LISTA DE TABELAS

TAB.2.1	Matrizes de covariância do erro de estimação da saída.	27
TAB.3.1	Autovalores e autovetores associados da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$	47
TAB.3.2	Autovalores e autovetores associados da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ utilizando o espaço paramétrico modificado.	50
TAB.4.1	Significado físico dos estados do modelo massa-mola.	63
TAB.4.2	Valores nominais dos parâmetros.	63
TAB.4.3	Parâmetros identificados em vôo pairado - Yamaha R-50.	86
TAB.4.4	Custos de robustez paramétrica em desempenho.	105

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

ABREVIATURAS

LMI	-	<i>Linear Matrix Inequality</i>
SISO	-	<i>Single Input Single Output</i>
SIMO	-	<i>Single Input Multiple Output</i>
MIMO	-	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
LQR	-	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
PRCBI	-	<i>Parameter Robust Control by Bayesian Identification</i>
PRABI	-	<i>Parameter Robust Analysis by Bayesian Identification</i>
EPP	-	Espaço Paramétrico da Planta
EPC	-	Espaço Paramétrico do controlador
DSMAX	-	Direção de Máxima Sensibilidade
LQG	-	<i>Linear Quadratic Gaussian</i>
DSMIN	-	Direção de Mínima Sensibilidade

SÍMBOLOS

\mathbf{x}_k	-	vetor de estados discreto no instante k
\mathbf{y}_k	-	vetor de medidas discreto no instante k
\mathbf{u}_k	-	vetor de entradas discreto no instante k
A	-	matriz da dinâmica
B	-	matriz de entrada
C	-	matriz de saída
E	-	matriz de transmissão direta
D	-	matriz de entrada de ruído
ξ	-	vetor de ruído da planta
η	-	vetor de ruído do sensor de medidas
$E[\cdot]$	-	espectância ou esperança matemática
$[M]^T$	-	transposta da matriz M
$\delta_{i,j}$	-	delta de Dirac
Q	-	matriz de covariância do ruído da planta
R	-	matriz de covariância do ruído de medidas
θ	-	vetor de parâmetros sensíveis

T	-	período de amostragem
\bar{y}_k	-	predição da variável y no instante k
Y^{k-1}	-	conjunto de medidas da saída do sistema até o instante $k - 1$
M_k	-	matriz de covariância do erro de predição de saída no instante k
$\hat{\theta}$	-	estimação da variável θ
$\Delta\theta$	-	variação da variável θ
$Tr(A)$	-	traço da matriz A
P'_{P_k}	-	matriz de covariância do erro de predição dos estados
G_{θ_0}	-	matriz de covariância do erro de estimação de θ_0
β	-	vetor de parâmetros do controlador
u_k	-	sinal de entrada discreto no instante k
K	-	ganho do filtro de Kalman
λ_i	-	i-ésimo autovalor

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTROLE ROBUSTO

Estabilidade e desempenho são características fundamentais de sistemas de controle. Estabilidade significa que, sem um sinal de excitação, dentro de um certo intervalo de tempo, todos os sinais do sistema decaem para zero (BHATTACHARYYA et al., 1995). A estabilidade de um sistema em malha fechada é condição obrigatória para seu funcionamento. Quando o sistema em malha fechada deixa de ser estável, sinais crescem sem limite causando a saturação e até, eventualmente, danificando a planta. Este fenômeno ocorre por exemplo, quando um avião cai, quando as rotações de um satélite perdem o controle ou quando um reator nuclear superaquece, chegando a derreter. Em muitas aplicações de sistemas de controle, a planta é instável em malha aberta e o trabalho do controlador é estabilizá-la em malha fechada. É de fundamental importância que o sistema de controle seja projetado de maneira que a estabilidade seja preservada diante das várias classes de incertezas da planta. E esta característica é denominada *robustez em estabilidade*.

O desempenho de um sistema usualmente refere-se a sua habilidade de seguir sinais de referência e rejeitar distúrbios. O sistema controlado deve ser capaz de acompanhar todos os sinais de referência de uma determinada classe, sem existir um erro excessivo, mesmo diante de incertezas. O pior caso deve ser aceitável para os padrões de desempenho definidos. Esta característica é denominada *robustez em desempenho*.

Modelos matemáticos lineares e invariantes no tempo são utilizados para facilitar a análise e o projeto envolvendo plantas físicas simples ou complexas, onde é comum a presença de não linearidades, incerteza de parâmetros, variação temporal da dinâmica, distúrbios externos entre outros fenômenos de natureza aleatória. Estes modelos são obtidos por métodos de identificação ou fixando-se um ponto de operação e linearizando o sistema em torno deste. Assim, quando alguns parâmetros da planta ou o seu ponto de operação são alterados, o modelo do sistema linearizado correspondente deverá ser corrigido. Modelos lineares invariantes no tempo são quase sempre aproximações dos comportamentos dinâmicos de sistemas físicos reais. Entretanto, esta classe de modelos é largamente utilizada para suprir as necessidades e acompanhar esta vasta teoria que envolve projeto e análise de sistemas de controle.

Sendo o modelo uma aproximação da planta física, antes da implementação de um controlador é necessário testar a validade do projeto medindo o seu desempenho quando o modelo

é significativamente diferente do nominal. As técnicas de controle robusto procuram projetar controladores que atendam a esta necessidade. Em outras palavras, partindo de um controlador previamente projetado, procura-se recalcular seus parâmetros ou estrutura de forma a torná-lo mais robusto. Além de funcionar satisfatoriamente diante de condições de operação distintas da nominal, sistemas de controle robustos podem ser aplicados com o objetivo de utilizar intencionalmente um modelo simplificado visando não só facilitar a análise, como também reduzir o impacto da complexidade do controlador resultante (CRUZ, 1996).

1.2 HISTÓRICO DA SÍNTESE PRCBI

A robustez em sistemas de controle é desejada por pelo menos duas razões. Primeiramente, deve-se preocupar com o funcionamento satisfatório do controlador mesmo em condições distintas das condições nominais. A outra razão é a possibilidade de utilizar um modelo intencionalmente simplificado que facilite a análise e permita um controlador menos complexo, baseando-se nas condições de robustez (CRUZ, 1996).

Um sistema de controle robusto deve atender a uma boa rejeição de distúrbios e ter uma baixa sensibilidade a variações paramétricas (FRANKLIN et al., 1997). O controlador robusto deve manter a estabilidade e garantir o desempenho do sistema sujeito a perturbações. Quando estas perturbações são provenientes de dinâmicas não modeladas, retardos, modos de alta frequência ignorados, ..., são ditas *não estruturadas* e quando provenientes de variações paramétricas são ditas *estruturadas* (ADES, 1994). A técnica em que este trabalho será fundamentado, *Parameter Robust Control by Bayesian Identification* (PRCBI), trata das perturbações estruturadas.

A técnica PRCBI foi desenvolvida por GOMES (1991), baseada no trabalho de GAUVRIT (1982) sobre o comportamento assintótico dos estimadores bayesianos. “A robustez é obtida pela exploração do fato de que uma má qualidade de identificação paramétrica em malha fechada é obtida sempre que um sistema apresenta excelentes qualidades em desempenho e estabilidade.” (GOMES & GAUVRIT, 1991, p. 8).

Em PELLANDA (1993) a técnica PRCBI foi aplicada em um modelo de sistema elétrico de potência para projetar controladores parametricamente robustos. Pequenas adaptações foram introduzidas no método PRCBI para atender a perturbações implícitas e generalizadas das matrizes do modelo do sistema de potência. Foram projetados vários controladores para um sistema máquina-barras infinita, usando técnicas de resposta em frequência, controle ótimo e PRCBI. Foi feita uma comparação da robustez dos vários projetos, considerando incertezas na carga do sistema, utilizando a medida de robustez PRCBI.

Em ADES (1994) foi realizado um estudo na área de controle robusto paramétrico, baseado na síntese PRCBI. Utilizando métodos de otimização numérica, foi desenvolvida uma metodologia de robustecimento de controladores buscando conciliar a robustez paramétrica em estabilidade com um bom desempenho do sistema. A técnica desenvolvida neste trabalho, denominada “Técnica das Liberações”, consiste na minimização de uma função objetivo que utiliza o custo LQR para garantir o desempenho desejado do sistema. Foram projetados controladores robustos em estabilidade para exemplos acadêmicos baseados no sistema massa-mola e para um modelo real de um helicóptero.

Em MANCEAUX-CUMER (1998) foram dadas duas abordagens na análise e síntese de controladores robustos. A primeira abordagem foi baseada na teoria de multiplicadores, para tratamento de problemas de síntese μ (ou \mathcal{H}_∞), expressas em termos de problemas de otimização convexa LMI. A segunda abordagem utilizou a aproximação da inversa da matriz de covariância dos erros de estimação dos parâmetros sensíveis, dada pela síntese PRCBI, para definir direções de máxima e mínima sensibilidade no espaço paramétrico e com isso projetar controladores robustos mantendo um bom desempenho. O método de análise, denominado PRABI, foi testado em exemplos acadêmicos e em aplicações aeronáuticas.

Várias outras abordagens da síntese PRCBI foram realizadas em diversas plantas: aplicação na pilotagem de mísseis (SOUZA, 1996), manipulador robótico plano (IMAI, 1997), levitador magnético (MENDES, 1998), modelo acoplado de um míssil solo-ar (GONZALEZ, 1998), sistemas elétricos de potência (TITO, 1998), central eletrônica PWR (ARNAUT, 2000), esfera sobre plataforma (CAINELLI, 2005).

Em CÔRTE-REAL (2003) o enfoque principal foi mostrar que o método PRABI permite aumentar o domínio de estabilidade dentro do espaço paramétrico, sem comprometer o desempenho do sistema, atuando na direção de mínima sensibilidade paramétrica. Foram feitas melhorias na técnica PRABI e o método foi aplicado a uma suspensão ativa automotiva.

Em DELMOND (2005) foram estudadas várias formas de ajuste de controladores, como problemas multi-objetivos. Neste trabalho foi desenvolvida a síntese PRCBI para sistemas contínuos, baseada na síntese PRCBI discreta. A teoria desenvolvida foi aplicada em modelos aeronáuticos.

1.3 OBJETIVOS

O presente trabalho, situado na área de controle robusto paramétrico, busca implementar a síntese PRCBI para sistemas contínuos, aperfeiçoar as técnicas de robustecimento de controladores baseadas na síntese PRCBI e aplicá-las em exemplos que validem sua eficácia. Estes

objetivos são descritos com mais detalhes abaixo:

- Implementar a síntese PRCBI contínua, recentemente desenvolvida no trabalho de DELMOND (2005), e aplicar a técnica de análise PRABI em sistemas contínuos. Testar no modelo massa-mola de oito estados, utilizado em ADES (1994) para validar as técnicas discretas. Analisar os resultados obtidos e verificar se estão em concordância com os resultados da síntese discreta.
- Identificar possíveis limitações ou pontos que possam ser explorados para melhorar os resultados. Aperfeiçoar a síntese PRCBI e a técnica de análise PRABI na dessensibilização paramétrica de sistemas controlados e no cálculo do raio da hipersfera de estabilidade.
- Aplicar as técnicas PRCBI e PRABI utilizando a abordagem contínua em sistemas monovariáveis e multivariáveis.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O trabalho está estruturado em 5 capítulos e um apêndice. Este primeiro capítulo introdutório tratou dos objetivos do trabalho, do histórico da síntese PRCBI e da definição de controle robusto. Os capítulos seguintes são descritos abaixo:

- *Capítulo 2:* trata da base teórica da síntese PRCBI. Inicialmente é apresentada com detalhes a abordagem discreta e em seguida a abordagem contínua. É descrito o processo de síntese de controladores utilizando estas técnicas e a técnica das liberações, que concilia a robustez paramétrica em estabilidade com o bom desempenho do sistema controlado. Finalmente é apresentada a técnica de análise PRABI, sua interpretação geométrica e o processo de robustecimento de controladores utilizando a síntese PRCBI associada à técnica PRABI.
- *Capítulo 3:* são definidos alguns conceitos relativos ao espaço paramétrico. É analisada a influência dos valores nominais dos parâmetros sensíveis nos autovalores e autovetores da aproximação da inversa da matriz de covariância do erro de estimação dos parâmetros sensíveis. Com base nesta análise, é proposta uma modificação do espaço paramétrico. Discute-se o método para o cálculo do raio da hipersfera de estabilidade utilizando a técnica PRABI. É apresentada a hipersuperfície gerada pelo traço da aproximação da inversa da matriz de covariância do erro de estimação dos parâmetros sensíveis, em função do espaço paramétrico. A influência da geometria desta hipersuperfície no desempenho

da técnica PRABI é analisada e então propõe-se um novo algoritmo para o cálculo do raio da hipersfera, associando a técnica PRABI com valores aleatórios para aumentar sua eficiência. Finalmente, é proposta uma modificação no processo de robustecimento de controladores utilizando a síntese PRCBI associada à técnica PRABI.

- *Capítulo 4:* são aplicadas as técnicas propostas no trabalho em três modelos: sistema massa-mola de 8 estados (SISO), míssil ar-ar de 4 estados (SIMO) e helicóptero de pequena escala com 13 estados (MIMO). Em cada modelo foram utilizados dois parâmetros sensíveis para possibilitar a visualização do espaço paramétrico. No último modelo foram utilizados primeiro dois parâmetros sensíveis e, em seguida, 5 parâmetros sensíveis para comprovar que o número de parâmetros sensíveis não é uma limitação da técnica. Para o primeiro modelo, que foi utilizado em trabalhos anteriores baseados na abordagem discreta, são projetados controladores robustos utilizando a abordagem discreta e contínua. Para os outros modelos são projetados controladores robustos utilizando a abordagem contínua. Ao final do capítulo, é feita uma análise quantitativa da robustez paramétrica em desempenho dos controladores baseada no custo LQR.
- *Capítulo 5:* são feitas as conclusões destacando os pontos relevantes do trabalho e as considerações finais. Discute-se as perspectivas para trabalhos futuros.
- *Apêndice:* é apresentado o cálculo detalhado da matriz ΔM na abordagem discreta, que é fundamental na síntese PRCBI. Este apêndice destina-se ao leitor que desejar se aprofundar nas técnicas apresentadas. Compreendendo a dedução utilizada, pode-se estendê-la para o caso contínuo.

2 ROBUSTEZ PARAMÉTRICA BASEADA NA QUALIDADE DE IDENTIFICAÇÃO BAYESIANA - PRCBI

Este capítulo trata do método para obter controladores robustos com base na qualidade de identificação bayesiana, denominado “*Parameter Robust Control by Bayesian Identification*” (PRCBI). O método se baseia na relação existente entre a qualidade de identificação de um conjunto de parâmetros e a sensibilidade do sistema em relação a esses parâmetros, ou seja, com o fato de uma má qualidade de identificação estar relacionada a uma baixa sensibilidade (maior robustez paramétrica).

2.1 INTRODUÇÃO

A síntese PRCBI obtém um controlador parametricamente robusto através de um processo de otimização que minimiza um critério explorando a vinculação da qualidade de identificação com a robustez paramétrica.

Como os estudos iniciais sobre a identificação bayesiana apresentados em (GAUVRIT, 1982) foram concebidos para modelos discretos do sistema, a síntese PRCBI também foi considerada para modelos discretos. O trabalho de DELMOND (2005) estudou a aplicação da síntese PRCBI diretamente a sistemas contínuos. Entretanto, os conceitos fundamentais da síntese PRCBI discreta foram mantidos na abordagem da síntese contínua.

O critério estabelecido para a síntese PRCBI foi concebido a partir de uma formulação matemática que procurou explorar a teoria bayesiana voltada para a identificação de um conjunto de parâmetros contidos no modelo de um sistema. Partindo-se de uma sequência discreta de medidas, conhecendo-se a natureza estocástica dos ruídos presentes no modelo e nos sensores e utilizando filtros de Kalman, é possível obter uma estimação do conjunto de parâmetros selecionado e medir a covariância do erro de estimação. Esta covariância é uma medida da qualidade de identificação. A síntese procurou então estipular um critério capaz de tornar o sistema mais robusto às variações paramétricas, reduzindo a qualidade da identificação através da minimização de um custo obtido a partir desta teoria.

A Síntese PRCBI se aplica a qualquer estrutura de controle que possua um conjunto de parâmetros independentes. Para robustecer uma estrutura “*Linear Quadratic Gaussian*” (LQG), por exemplo, pode-se variar a matriz de entrada de ruído da planta ou o ganho de realimentação dos estados estimados, minimizando uma função custo que represente a qualidade da

identificação paramétrica. Em uma estrutura Proporcional, Integral e Derivativa (PID) pode-se usar as constantes relacionadas aos termos proporcional, integral e derivativo, como variáveis livres no processo de otimização. Portanto, a grande contribuição do método é relacionar a má qualidade de identificação com boas características de robustez; e fornecer uma medida escalar da qualidade de identificação paramétrica para ser utilizada em uma função custo.

2.2 TEORIA GERAL - ABORDAGEM DISCRETA

Considere o seguinte sistema Linear Invariante no Tempo (LTI), estocástico e discreto:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = A(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_k + B(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}_k + D\xi_k \\ \mathbf{y}_k = C(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_k + E(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}_k + \eta_k \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{array}{cccc} A \in \mathbb{R}^{n \times n} & B, D \in \mathbb{R}^{n \times p} & C \in \mathbb{R}^{q \times n} & E \in \mathbb{R}^{q \times p} \\ \mathbf{y}_k, \boldsymbol{\eta}_k \in \mathbb{R}^{q \times 1} & \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n \times 1} & \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\xi}_k \in \mathbb{R}^{p \times 1} & \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{r \times 1} \end{array}$$

sendo:

- \mathbf{x}_k é o vetor de estados discreto no instante k ;
- \mathbf{y}_k é o vetor de medidas discreto no instante k ;
- \mathbf{u}_k é o vetor de entradas discreto no instante k ;
- n é a ordem do sistema;
- p é o número de entradas;
- q é o número de saídas;
- r é o número de parâmetros sensíveis da planta;
- $\boldsymbol{\theta} = [\theta^1 \ \theta^2 \ \dots \ \theta^r]^T$ é o vetor de parâmetros sensíveis;
- A, B, C e E são as matrizes que representam a dinâmica do sistema;
- D é a matriz de entrada de ruído na planta.
- $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ são ruídos brancos, gaussianos, independentes, de média nula e com as seguintes propriedades estatísticas:

$$\begin{aligned}
E[\xi_k] &= E[\eta_k] = E[\xi_k \eta_j^T] = 0 \\
E[\xi_k \xi_j^T] &= Q \delta_{jk} \quad e \quad E[\eta_k \eta_j^T] = R \delta_{jk} \quad \forall j, k
\end{aligned} \tag{2.2}$$

onde o operador $E[\cdot]$ representa a expectância ou esperança matemática, $[M]^T$ representa a transposta da matriz M e o operador $\delta_{i,j}$ representa o delta de Dirac, que idealmente é nulo quando $i \neq j$ e igual a um quando $i = j$. A matriz de covariância do ruído da planta Q é simétrica e positiva semidefinida. A matriz de covariância do ruído de medidas R é simétrica e positiva definida.

A identificação bayesiana consiste em determinar a densidade de probabilidade condicional $p(\theta/Y^k)$, onde $Y^k = \{y_0 \ y_1 \ \dots \ y_k\}$ é o conjunto de medidas da saída do sistema até o instante k , a partir de uma densidade de probabilidade inicial conhecida $p_0(\theta)$:

$$\begin{aligned}
p(\theta/Y^k) &= p(\theta/y_k, Y^{k-1}) = \frac{p(\theta, y_k/Y^{k-1})}{p(y_k/Y^{k-1})} \\
p(\theta, y_k/Y^{k-1}) &= p(y_k/\theta, Y^{k-1})p(\theta/Y^{k-1})
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$p(\theta, y_k/Y^{k-1}) = p(\theta/Y^k)p(y_k/Y^{k-1}) \tag{2.4}$$

igualando a EQ. 2.3 com a EQ. 2.4:

$$p(\theta/Y^k) = \frac{p(\theta/Y^{k-1})p(y_k/\theta, Y^{k-1})}{p(y_k/Y^{k-1})} \tag{2.5}$$

A EQ. 2.5 representa a função densidade de probabilidade condicional do vetor θ , conhecido o conjunto de todas as medidas desde o instante $t = 0$ até o instante $t = kT$, sendo T o período de amostragem das medidas. É importante notar que esta é uma equação recursiva onde os termos:

- $p(\theta/Y^{k-1})$ é a função densidade de probabilidade condicional no instante anterior;
- $p(y_k/\theta, Y^{k-1})$ representa a função densidade de probabilidade da medida y_k , conhecidos o vetor paramétrico θ e o conjunto de medidas até o instante $k - 1$;
- $p(y_k/Y^{k-1})$ é a função densidade de probabilidade da medida y_k , conhecido o conjunto de medidas até o instante $k - 1$ que, por não depender de θ , poderá ser considerada uma constante em relação a ele.

Assim define-se a constante:

$$\Gamma'_k \triangleq p(y_k/Y^{k-1}) \tag{2.6}$$

A identificação bayesiana utiliza a filtragem de Kalman para a predição ótima de $\hat{y}_{k/k-1}$ (representada por \bar{y}_k por simplicidade de notação), que consiste na predição da variável de

saída no instante k , conhecendo-se o conjunto dos valores Y^{k-1} . As equações do filtro permitem calcular a matriz de covariância M_k do erro de previsão de saída definida por:

$$M_k = E[(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)^T] \quad (2.7)$$

Como a densidade de probabilidade $p(\mathbf{y}_k/\boldsymbol{\theta}, Y^{k-1})$ é gaussiana, de média $\bar{\mathbf{y}}_k$ e covariância M_k , representada por $N\{\bar{\mathbf{y}}_k, M_k\}$, pode-se escrever a seguinte relação:

$$p(\mathbf{y}_k/\boldsymbol{\theta}, Y^{k-1}) = \frac{\Gamma}{\sqrt{|M_k|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)^T M_k^{-1}(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)\right] \quad (2.8)$$

onde Γ é uma constante e M_k depende do vetor paramétrico $\boldsymbol{\theta}$. Como a EQ. 2.5 é recursiva, inserindo a EQ. 2.8, pode-se reescrevê-la em função de $\mathbf{v}_k = \mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k$ como:

$$p(\boldsymbol{\theta}/Y^k) = \Lambda_0 \prod_{i=1}^k \left[\frac{1}{\sqrt{|M_i|}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{v}_i^T M_i^{-1}\mathbf{v}_i\right) \right] \quad (2.9)$$

onde Λ_0 é uma constante em relação a $\boldsymbol{\theta}$ e depende de Γ'_k , Γ e da densidade de probabilidade inicial $p_0(\boldsymbol{\theta})$, considerada uniforme e conhecida em todo o domínio de variação do vetor paramétrico $\boldsymbol{\theta}$.

A técnica de Identificação Bayesiana propriamente dita e que serve apenas de base para a síntese PRCBI, não é objeto de estudo deste trabalho. Baseia-se na discretização do vetor paramétrico dentro de um intervalo predefinido e usa um banco de filtros de Kalman, onde cada filtro é sintonizado no valor nominal de cada ponto do domínio de variação de $\boldsymbol{\theta}$, fornecendo uma quantificação discreta da densidade de probabilidade $p(\boldsymbol{\theta}/Y^k)$. O valor estimado $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é dado pelo valor médio entre as probabilidades condicionais obtidas para cada ponto de discretização, após a convergência do processo de identificação. Quanto maior o número de pontos do domínio de variação do vetor paramétrico utilizado no processo, mais preciso será o valor estimado $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Uma precisa identificação em tempo real do vetor paramétrico, dependendo da dimensão de $p(\boldsymbol{\theta}/Y^k)$, demandaria muito tempo de processamento, o que inviabilizaria sua aplicação em tempo real. Como já foi dito anteriormente, o interesse deste trabalho é medir a qualidade da identificação em regime assintótico, considerando conhecido seu valor nominal.

Supondo que o filtro de Kalman, projetado sobre $\boldsymbol{\theta}_0$, disponha de um conjunto de medidas muito grande para efetuar o cálculo de M_k , assim, assintoticamente M_k tenderá para um valor constante dado por:

$$M_f(\boldsymbol{\theta}_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} M_k(\boldsymbol{\theta}_0) \quad (2.10)$$

A EQ. 2.9, em regime assintótico, assume a seguinte expressão:

$$p(\boldsymbol{\theta}_0/Y^k) = \frac{\Lambda}{|M_f(\boldsymbol{\theta}_0)|^{\frac{k}{2}}} \exp \left\{ \sum_{i=1}^k \left[-\frac{1}{2} \mathbf{v}_i^T M_f(\boldsymbol{\theta}_0)^{-1} \mathbf{v}_i \right] \right\} \quad (2.11)$$

A partir da EQ. 2.11, procura-se investigar como varia a densidade de probabilidade $p(\boldsymbol{\theta}_0/Y^k)$ quando o vetor paramétrico é ligeiramente desviado de seu valor nominal. Fazendo algumas simplificações, será calculada analiticamente a densidade de probabilidade para $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}$.

A sequência $\mathbf{v}_i(\boldsymbol{\theta})$ é ergódica para qualquer valor de $\boldsymbol{\theta}$, desde que o filtro de Kalman considere este mesmo valor. A primeira aproximação será supor a variação $\Delta\boldsymbol{\theta}$ suficientemente pequena para ainda considerar a ergodicidade da sequência dos erros do vetor de medidas, mesmo não estando o filtro rigorosamente ajustado sobre $\boldsymbol{\theta}_0$. Desta forma, para qualquer valor de $\boldsymbol{\theta}_0$, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^k \left[-\frac{1}{2} \mathbf{v}_i^T M_f^{-1} \mathbf{v}_i \right] \cong -\frac{k}{2} E \left[\mathbf{v}_k^T M_f^{-1} \mathbf{v}_k \right] \quad (2.12)$$

com $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}$.

Assim a EQ. 2.11 pode ser escrita como:

$$p(\boldsymbol{\theta}/Y^k) = \Lambda |M_f|^{-\frac{k}{2}} \exp \left\{ -\frac{k}{2} E \left[\mathbf{v}_k^T M_f^{-1} \mathbf{v}_k \right] \right\} \quad (2.13)$$

onde:

$$M_f = M_f(\boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}) = M_0 + \Delta M_f \quad (2.14)$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} E \left[\mathbf{v}_i^T M_f^{-1} \mathbf{v}_i \right] &= E \left[\text{Tr}(\mathbf{v}_i^T M_f^{-1} \mathbf{v}_i) \right] \\ &= E \left[\text{Tr}(M_f^{-1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T) \right] \\ &= \text{Tr} \left[M_f^{-1} E(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T) \right] \\ &= \text{Tr} \left[M_f^{-1} M \right] \end{aligned}$$

onde o operador $\text{Tr}(A)$ representa o traço da matriz A . $M = E(\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T)$ é a matriz de covariância do erro de saída quando o filtro de Kalman não está sintonizado com o sistema nominal ($\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}_0$). Nesta situação, M é diferente de M_f . A TAB. 2.1 ilustra a diferença entre M , M_f e M_0 para as três situações possíveis.

TAB.2.1: Matrizes de covariância do erro de estimação da saída.

Sistema	Filtro	Matriz de Covariância
$\boldsymbol{\theta}_0$	$\boldsymbol{\theta}_0$	$M_0 = M_f(\boldsymbol{\theta}_0)$
$\boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}$	$M_f = M_f(\boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}) = M_0 + \Delta M_f$
$\boldsymbol{\theta}_0$	$\boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}$	$M = M_0 + \Delta M$

ΔM e ΔM_f representam a variação da matriz de covariância do erro de medidas, para uma dada variação do vetor paramétrico ($\Delta\theta$) em torno do valor nominal.

Se M_0^{-1} existe, pode-se escrever:

$$Tr[M_f^{-1}M] = Tr\left[(I + M_0^{-1}\Delta M_f)^{-1}(I + M_0^{-1}\Delta M)\right] \quad (2.15)$$

Supondo uma variação $\Delta\theta$ muito pequena, pode-se desprezar os termos de segunda ordem em Δ na EQ. 2.15 e obter:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}_i^T M_f^{-1} \mathbf{v}_i] &= Tr[M_f^{-1}M] = Tr\left[(I - M_0^{-1}\Delta M_f)(I + M_0^{-1}\Delta M)\right] \\ &= q - Tr(M_0^{-1}\Delta M_f) + Tr(M_0^{-1}\Delta M) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Substituindo na EQ. 2.13:

$$p(\theta_0 + \Delta\theta/Y^k) = \frac{\Lambda \exp\left(-\frac{qk}{2}\right) \exp\left[\frac{k}{2}Tr(M_0^{-1}\Delta M_f)\right] \exp\left[-\frac{k}{2}Tr(M_0^{-1}\Delta M)\right]}{|M_0|^{\frac{k}{2}} |I + M_0^{-1}\Delta M_f|^{\frac{k}{2}}} \quad (2.17)$$

Considerando as seguintes simplificações em primeira ordem:

$$|I + M_0^{-1}\Delta M_f|^{\frac{k}{2}} \cong [1 + Tr(M_0^{-1}\Delta M_f)]^{\frac{k}{2}} \quad (2.18)$$

onde $|A|$ representa o determinante da matriz A, e:

$$\frac{\exp\left[\frac{k}{2}Tr(M_0^{-1}\Delta M_f)\right]}{[1 + Tr(M_0^{-1}\Delta M_f)]^{\frac{k}{2}}} \cong 1 \quad (2.19)$$

finalmente obtém-se:

$$p(\theta_0 + \Delta\theta/Y^k) = \Lambda_c \exp\left[-\frac{k}{2}Tr(M_0^{-1}\Delta M)\right] \quad (2.20)$$

onde:

$$\Lambda_c = \frac{\Lambda \exp\left[-\frac{qk}{2}\right]}{|M_0|^{\frac{k}{2}}}$$

A EQ. 2.20 mostra que, em regime assintótico, a densidade de probabilidade $p(\theta_0 + \Delta\theta/Y^k)$ descreve uma lei gaussiana, cuja matriz de covariância é função de M_0 e ΔM . Para completar o cálculo é necessário fazer a ligação de ΔM com $\Delta\theta$ e deduzir a matriz de covariância da estimação paramétrica.

2.2.1 CÁLCULO DE ΔM

Na FIG. 2.1 é apresentado o diagrama em blocos da conexão de uma planta com o filtro de Kalman. Para calcular a matriz de covariância do erro de estimação dos parâmetros sensíveis

na síntese PRCBI, utiliza-se esta estrutura projetando o filtro em pontos dentro do domínio de variação do vetor paramétrico. Observando este diagrama pode-se verificar que as matrizes B e E alteram o sistema apenas se houver um sinal de entrada, que pode ser retirado sem nenhum prejuízo para a análise da dinâmica do sistema. Conclui-se então que, para a análise da planta pelo método PRCBI, as matrizes B e E podem ser omitidas e, como consequência, os cálculos serão simplificados. Isto não significa que as variações na matriz de entrada da planta e na matriz de transmissão direta não causam efeito. Estas matrizes influirão na dinâmica, pois são utilizadas na síntese PRCBI sobre o sistema em malha fechada com uma estrutura de controle qualquer.

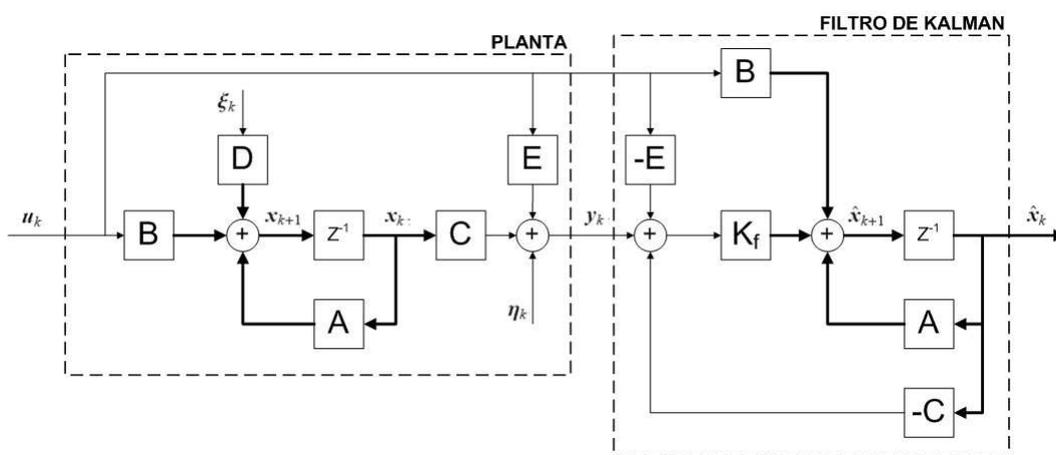


FIG.2.1: Diagrama em blocos da conexão da planta com o filtro de Kalman.

Considere o sistema discreto da EQ. 2.1 com apenas $\{A, C\}$ operando em condições nominais ($\theta = \theta_0$), considerando $u_k = 0$, representado na EQ. 2.21.

$$\begin{cases} x_k &= A_0 x_{k-1} + D \xi_{k-1} \\ y_{k-1} &= C_0 x_{k-1} + \eta_{k-1} \end{cases} \quad (2.21)$$

sendo $A_0 = A(\theta_0)$ e $C_0 = C(\theta_0)$. O Filtro de Kalman associado ao processo de identificação, projetado sobre $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ será:

$$\begin{cases} \bar{x}_k &= A_p \hat{x}_{k-1} \\ \hat{x}_{k-1} &= \bar{x}_{k-1} + K_p (y_{k-1} - \bar{y}_{k-1}) \\ \bar{y}_{k-1} &= C_p \bar{x}_{k-1} \end{cases} \quad (2.22)$$

onde:

\bar{x}_k é o vetor de estado predito no instante k ;

\hat{x}_k é o vetor de estado estimado no instante k ;

\bar{y}_k é a predição da medida no instante k ;

$$A_p = A_0 + \Delta A;$$

$$C_p = C_0 + \Delta C;$$

$$K_p = K_0 + \Delta K.$$

Sendo ΔA e ΔC perturbações no modelo da planta e ΔK a conseqüente variação do ganho do filtro de Kalman, todas obtidas em função da variação $\Delta\theta$ nos parâmetros do modelo do filtro. A matriz de covariância do erro de predição dos estados P'_{P_k} é dada por:

$$P'_{P_k} = E[(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T] \quad (2.23)$$

Desenvolvendo os sistemas da EQ. 2.21 e da EQ. 2.22 para obter $\bar{\mathbf{x}}_k$:

$$\bar{\mathbf{x}}_k = A_p(I - K_p C_p)\bar{\mathbf{x}}_{k-1} + A_p K_p C_0 \mathbf{x}_{k-1} + A_p K_p \boldsymbol{\eta}_{k-1} \quad (2.24)$$

Subtraindo a EQ. 2.24 de \mathbf{x}_k na EQ. 2.21:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k &= (A_0 - A_p K_p C_0)(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) + (A_p K_p \Delta C - \Delta A)\bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \\ &+ D\xi_{k-1} - A_p K_p \boldsymbol{\eta}_{k-1} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Transpondo a EQ. 2.25:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T &= (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^T (A_0 - A_p K_p C_0)^T + \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T (A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T + \\ &+ \xi_{k-1}^T D^T - \boldsymbol{\eta}_{k-1}^T (A_p K_p)^T \end{aligned} \quad (2.26)$$

Substituindo a EQ. 2.25 e a EQ. 2.26 na EQ. 2.23, considerando que os ruídos são independentes entre si e entre os estados da planta e os estados estimados:

$$\begin{aligned} P'_{P_k} &= (A_0 - A_p K_p C_0)P'_{P_{k-1}}(A_0 - A_p K_p C_0)^T + (A_0 - A_p K_p C_0)N_{k-1}^T (A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T + \\ &+ (A_p K_p \Delta C - \Delta A)N_{k-1}(A_0 - A_p K_p C_0)^T + (A_p K_p \Delta C - \Delta A)L_{k-1}(A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T + \\ &+ DQD^T + (A_p K_p)R(A_p K_p)^T \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde:

$$\begin{cases} N_k = E[\bar{\mathbf{x}}_k(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T] \\ L_k = E[\bar{\mathbf{x}}_k \bar{\mathbf{x}}_k^T] \end{cases} \quad (2.28)$$

Considerando a estacionariedade das esperanças matemáticas, $\lim_{k \rightarrow \infty} P'_{P_k} = P'_p$, $\lim_{k \rightarrow \infty} N_k = N$

e $\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = L$:

$$\begin{aligned}
\Delta P' = P'_P - P'_0 = & [A_0 - (A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)C_0](P'_0 + \Delta P')[A_0 - (A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)C_0]^T + \\
& + [A_0 - (A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)C_0]N^T[(A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)\Delta C - \Delta A]^T + \\
& + [(A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)\Delta C - \Delta A]N[A_0 - (A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)C_0]^T + \\
& + [(A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)\Delta C - \Delta A]L[(A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)\Delta C - \Delta A]^T - \\
& - DQD^T + (A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)R[(A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)]^T - \\
& - \underbrace{(A_0 - A_0K_0C_0)P'_0(A_0 - A_0K_0C_0)^T + DQD^T - A_0K_0R(A_0K_0)^T}_{-P'_0} \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Sendo P'_0 obtido da EQ. 2.27, anulando as perturbações. P'_0 é a matriz de covariância do erro de predição dos estados estimados pelo Filtro de Kalman projetado com $\theta = \theta_0$. Em regime assintótico são válidas as seguintes relações (ANDERSON & MOORE, 1979):

$$\begin{cases} P'_0 = A_0P'_0A_0^T - A_0K_0C_0P'_0A_0^T + DQD^T \text{ (Equação Algébrica de Ricatti)} \\ K_0 = P'_0C_0^T(C_0P'_0C_0^T + R)^{-1} \text{ (Ganho de Kalman)} \\ M_0 = C_0P'_0C_0^T + R \text{ (Covariância do erro de predição da saída)} \end{cases} \quad (2.30)$$

Portanto, por se tratarem de matrizes simétricas, $M_0^T = M_0$ e $P'_0{}^T = P'_0$:

$$K_0M_0 - P'_0C_0^T = 0 \therefore M_0K_0^T - C_0P'_0 = 0 \quad (2.31)$$

Assim, a partir da EQ. 2.29 usando a EQ. 2.30 e a EQ. 2.31, chega-se a seguinte expressão para $\Delta P'^1$.

$$\begin{aligned}
\Delta P' = & (A_0\Delta K + \Delta AK_0)M_0(A_0\Delta K + \Delta AK_0)^T + \\
& + (A_0 - A_0K_0C_0)\Delta P'(A_0 - A_0K_0C_0 - A_0\Delta KC_0 - \Delta AK_0C_0)^T - \\
& - (A_0\Delta KC_0 + \Delta AK_0C_0)\Delta P'(A_0 - A_0K_0C_0)^T + (A_0 - A_0K_0C_0)N^T(A_0K_0\Delta C - \Delta A)^T + \\
& + (A_0K_0\Delta C - \Delta A)N(A_0 - A_0K_0C_0)^T + (A_0K_0\Delta C - \Delta A)L(A_0K_0\Delta C - \Delta A)^T \quad (2.32)
\end{aligned}$$

A Matriz de covariância do erro de predição da saída é dada por:

$$M_p(k) = E\{[y_k - \bar{y}_k][y_k - \bar{y}_k]^T\} \quad (2.33)$$

Substituindo y_k e \bar{y}_k da EQ. 2.21 e da EQ. 2.22, respectivamente, na EQ. 2.33 e considerando o ruído das medidas estatisticamente independente dos estados e de seus valores

¹Para maiores detalhes dos desenvolvimentos desta seção, verificar o Apêndice 7.1.

preditos, considerando também a estacionariedade das esperanças matemáticas quando k tende para o infinito:

$$M_0 + \Delta M = C_0(P'_0 + \Delta P')C_0^T - C_0N^T\Delta C^T - \Delta CNC_0^T + \Delta CL\Delta C^T + R \quad (2.34)$$

Utilizando a relação da covariância do erro de predição da saída da EQ. 2.30:

$$\begin{aligned} \Delta M &= M_0 - R + C_0\Delta P'C_0^T - C_0N^T\Delta C^T - \Delta CNC_0^T + \Delta CL\Delta C^T + R - M_0 \\ &= C_0\Delta P'C_0^T - C_0N^T\Delta C^T - \Delta CNC_0^T + \Delta CL\Delta C^T \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.2.1.1 CÁLCULO DE L E N

Substituindo a EQ. 2.24 na equação de L da EQ. 2.28, chega-se a seguinte expressão para L :

$$L = A_0LA_0^T + A_0N(A_0K_0C_0)^T + A_0K_0C_0N^TA_0^T + A_0K_0M_0(A_0K_0)^T \quad (2.36)$$

e substituindo a EQ. 2.24 e a EQ. 2.26 na equação de N da EQ. 2.28, chega-se a seguinte expressão para N :

$$N = A_0N(A_0 - A_0K_0C_0)^T - A_0K_0M_0(A_0\Delta K + \Delta AK_0)^T + A_0L(A_0K_0\Delta C - \Delta A)^T \quad (2.37)$$

2.2.1.2 SIMPLIFICAÇÕES DEVIDAS AO GRAU DE N EM Δ

A denominação de grau em relação a Δ será utilizada no texto. Por exemplo, a representação de uma variação na matriz A é representada por ΔA e na matriz C por ΔC . O termo $\Delta A\Delta C$ possui grau em relação a Δ igual a dois pois possui dois termos que são variações.

Neste ponto, conhecendo a equação de N , pode-se simplificar as equações de $\Delta P'$ e L partindo da hipótese que os termos de ordem igual ou maior do que 3 em relação a Δ serão desprezados. Sendo N de primeira ordem em Δ , conclui-se pela EQ. 2.32 que $\Delta P'$ é de segunda ordem e sua equação pode ser simplificada para:

$$\begin{aligned} \Delta P' &= (A_0 - A_0K_0C_0)\Delta P'(A_0 - A_0K_0C_0)^T + (A_0\Delta K + \Delta AK_0)M_0(A_0\Delta K + \Delta AK_0)^T + \\ &+ (A_0 - A_0K_0C_0)N^T(A_0K_0\Delta C - \Delta A)^T + (A_0K_0\Delta C - \Delta A)N(A_0 - A_0K_0C_0)^T + \\ &+ (A_0K_0\Delta C - \Delta A)L(A_0K_0\Delta C - \Delta A)^T \end{aligned} \quad (2.38)$$

Sendo N de primeira ordem em Δ e como L não deve possuir termos em Δ (devido a todos os termos que multiplicam L na equação de $\Delta P'$ serem de segunda ordem em Δ), tem-se pela EQ. 2.36 que L será:

$$L = A_0LA_0^T + A_0K_0M_0(A_0K_0)^T \quad (2.39)$$

2.2.2 A MATRIZ $G_{\theta_0}^{-1}$

Obtida a equação para ΔM e conhecida M_0 , pode-se voltar à EQ. 2.20 e definir a relação entre ΔM e $\Delta \theta$. Pela equação de $\Delta P'$ é possível verificar que a expressão $Tr(M_0^{-1} \Delta M)$ é de segunda ordem em relação a $\Delta \theta$. Pode-se então introduzir a matriz $G_{\theta_0}^{-1} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, positiva definida, que será a base da medida da qualidade da identificação e estabelece a seguinte relação:

$$Tr(M_0^{-1} \Delta M) = \Delta \theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta \theta \quad (2.40)$$

Pode-se agora reescrever a EQ. 2.20 como:

$$p(\theta_0 + \Delta \theta / Y^k) = \Lambda_c \exp\left(-\frac{k}{2} \Delta \theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta \theta\right) \quad (2.41)$$

Esta é a equação fundamental que permite definir a medida da qualidade de identificação bayesiana em regime assintótico. A equação mostra que a densidade de probabilidade condicional descreve uma lei gaussiana, de média θ_0 e matriz de covariância:

$$P_{\theta_0} = \frac{G_{\theta_0}}{k} \quad (2.42)$$

Pela EQ. 2.42 verifica-se que a matriz G_{θ_0} é proporcional à matriz de covariância da estimação paramétrica em regime assintótico P_{θ_0} . Desta forma a matriz G_{θ_0} , calculada para pequenas variações em torno do vetor paramétrico nominal θ_0 , possui informação referente à qualidade da identificação, que é a covariância da estimação paramétrica.

O objetivo agora é definir uma grandeza escalar, extraída da matriz G_{θ_0} , que melhor represente a qualidade de identificação paramétrica. A partir desta grandeza escalar, torna-se possível desenvolver um procedimento para a síntese de controladores robustos baseada na qualidade de identificação paramétrica.

Entre as diversas grandezas a serem extraídas da matriz G_{θ_0} , foi escolhido o traço de sua inversa como melhor medida escalar para quantificar a qualidade de identificação. Esta escolha foi baseada no trabalho de GOMES & GAUVRIT (1991), onde foram investigadas as vantagens e desvantagens de algumas medidas.

A função objetivo estabelecida foi definida como:

$$J_{rob} = Tr(G_{\theta_0}^{-1}) \quad (2.43)$$

que é inversamente proporcional ao valor das variâncias dos parâmetros. Desta forma, a minimização do custo J_{rob} conduz à maximização das variâncias do conjunto de parâmetros, reduzindo, desta forma, a qualidade da identificação dos parâmetros sensíveis e aumentando a robustez paramétrica.

Para prosseguir com o cálculo da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ é necessário definir:

$$\Delta\theta = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \cdots \ \epsilon_i \ \cdots \ \epsilon_r]^T, \quad |\epsilon_i| \ll |\theta_0^i| \quad (2.44)$$

$$\Delta\theta^{ii} = \Delta\theta^i = [0 \ 0 \ \cdots \ \epsilon_i \ \cdots \ 0]^T, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.45)$$

$$\Delta\theta^{ij} = [0 \ 0 \ \cdots \ \epsilon_i \ \cdots \ \epsilon_j \ \cdots \ 0]^T, \quad i \neq j \quad (2.46)$$

Definindo também $Tr(M_0^{-1}\Delta M)_{\Delta\theta^{ij}}$ como sendo o valor calculado em função da perturbação $\Delta\theta^{ij}$, pode-se escrever a partir da EQ. 2.40:

$$g_{ii} = G_{\theta_0}^{-1}(i, i) = \frac{Tr(M_0^{-1}\Delta M)_{\Delta\theta^i}}{\epsilon_i^2} \quad (2.47)$$

$$g_{ij} = G_{\theta_0}^{-1}(i, j) = \frac{Tr(M_0^{-1}\Delta M)_{\Delta\theta^{ij}} - (\epsilon_i^2 g_{ii} + \epsilon_j^2 g_{jj})}{2\epsilon_i\epsilon_j}, \quad i \neq j \quad (2.48)$$

É válido observar que para o cálculo do custo J_{rob} , estabelecido na EQ. 2.43, é necessário apenas calcular os elementos da diagonal principal, utilizando-se somente a EQ. 2.47.

2.3 TEORIA GERAL - ABORDAGEM CONTÍNUA

Considere o seguinte sistema Linear Invariante no Tempo (LTI), estocástico e contínuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) + D\xi(t) \\ y(t) = C(\theta)x(t) + E(\theta)u(t) + \eta(t) \end{cases} \quad (2.49)$$

$$\begin{array}{llll} A \in \mathbb{R}^{n \times n} & B, D \in \mathbb{R}^{n \times p} & C \in \mathbb{R}^{q \times n} & E \in \mathbb{R}^{q \times p} \\ y(t), \eta(t) \in \mathbb{R}^{q \times 1} & x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1} & u(t), \xi(t) \in \mathbb{R}^{p \times 1} & \theta \in \mathbb{R}^{r \times 1} \end{array}$$

onde $x(t)$ é o vetor de estados contínuo e $\dot{x}(t)$ sua derivada em relação ao tempo, n é a ordem do sistema, p o número de entradas, q o número de saídas, r o número de parâmetros sensíveis da planta, $\theta = [\theta^1 \ \theta^2 \ \cdots \ \theta^r]^T$ é o vetor de parâmetros sensíveis e as matrizes A , B , C e E representam a dinâmica do sistema, e D a matriz de entrada de ruído na planta. Os sinais $\xi(t)$ e $\eta(t)$ são ruídos brancos, gaussianos, independentes, de média nula e com as seguintes propriedades estatísticas:

$$\begin{aligned} E[\xi(t)] &= E[\eta(t)] = E[\xi(t)\eta(t-\tau)^T] = 0 \\ E[\xi(t)\xi(t-\tau)^T] &= Q\delta(\tau) \quad e \quad E[\eta(t)\eta(t-\tau)^T] = R\delta(\tau) \end{aligned} \quad (2.50)$$

em que a função $\delta(\tau)$ é aproximada por uma função triângulo, centrada em 0, com largura $2\Delta t$, altura $1/\Delta t$ e área unitária. Quando Δt tende para zero, a função $\delta(\tau)$ tende para o impulso unitário.

Finalmente, $\mathbf{y}(t)$ é o vetor de medidas no instante t . Como a teoria de identificação bayesiana é baseada em um conjunto de medidas discretas, faz-se a seguinte discretização do vetor de medidas:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(k\Delta t) \quad (2.51)$$

Todo o desenvolvimento apresentado na seção 2.2 para o caso discreto é válido para a abordagem contínua. O vetor de medidas discreto obtido do vetor de medidas contínuo, apresentado na EQ. 2.51, permite esta equivalência. Portanto a função densidade de probabilidade condicional do vetor $\boldsymbol{\theta}$, conhecido o conjunto de todas as medidas, é igual para a síntese discreta e para a síntese contínua. A diferença entre as duas abordagens está no cálculo dos termos da EQ. 2.20.

2.3.1 CÁLCULO DO TRAÇO DE $M_0^{-1}\Delta M$

Para o cálculo de M_0 , o filtro de Kalman é ajustado para o valor nominal do sistema ($\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$) e M_0 é definida como:

$$M_0 = E[(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)^T] \quad (2.52)$$

Para o sistema contínuo, não existe diferença entre o vetor de estados estimado e predito. A matriz P_0 é dada por:

$$P_0 = E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T] \quad (2.53)$$

As equações do Filtro de Kalman para o sistema da EQ. 2.49, considerando as matrizes nominais e $B_0 = E_0 = 0$, são as seguintes (BROWN, 1983)²:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= A_0\hat{\mathbf{x}} + K_0C_0(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + K_0\boldsymbol{\eta} \\ K_0 &= P_0C_0^TR^{-1} \\ 0 &= P_0A_0^T + A_0P_0 - P_0C_0^TR^{-1}CP_0 + Q \end{aligned} \quad (2.54)$$

Integrando o sistema da EQ. 2.49, considerando $B_0 = E_0 = 0$ e utilizando a fórmula dos retângulos (DELMOND, 2005):

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \Delta t(A_0\mathbf{x}_{k-1} + \boldsymbol{\xi}_{k-1}) \\ \mathbf{y}_k = C_0\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k \\ \mathbf{y}_k = C_0[(I + \Delta tA_0)\mathbf{x}_{k-1} + \Delta t\boldsymbol{\xi}_{k-1}] + \boldsymbol{\eta}_k \end{cases} \quad (2.55)$$

²Foi simplificada a notação usando $Q = DQ_{old}D^T$. Esta simplificação também elimina a matriz D no sistema da EQ. 2.55

Aplicando o mesmo método nas equações do Filtro de Kalman (EQ. 2.54):

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_k \approx \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \Delta t[A_0\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + K_0C_0(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + K_0\boldsymbol{\eta}_{k-1}] \\ \hat{\mathbf{y}}_k = C_0\hat{\mathbf{x}}_k \\ \bar{\mathbf{y}}_k = C_0\{[I + \Delta t(A_0 - K_0C_0)]\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \Delta tK_0(C_0\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \boldsymbol{\eta}_{k-1})\} \end{cases} \quad (2.56)$$

Para simplificar as equações é definido o vetor $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$, que após a discretização torna-se $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$. Dos sistemas da EQ. 2.55 e da EQ. 2.56, é obtido o erro de predição da saída:

$$\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k = C_0[I + \Delta t(A_0 - K_0C_0)]\mathbf{e}_{k-1} + \Delta tC_0(\boldsymbol{\xi}_{k-1} - K_0\boldsymbol{\eta}_{k-1}) + \boldsymbol{\eta}_k \quad (2.57)$$

Definindo $\mathcal{A} = A_0 - K_0C_0$, $\mathcal{B} = [I \ -K_0]$ e $\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\xi}_{k-1}^T \ \boldsymbol{\eta}_{k-1}^T]^T$, pode-se escrever a EQ. 2.57 como:

$$\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k = C_0(I + \Delta t\mathcal{A})\mathbf{e}_{k-1} + \Delta tC_0\mathcal{B}\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\eta}_k \quad (2.58)$$

Transpondo a EQ. 2.58:

$$(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)^T = \mathbf{e}_{k-1}^T(I + \Delta t\mathcal{A}^T)C_0^T + \Delta t\boldsymbol{\psi}^T\mathcal{B}^TC_0^T + \boldsymbol{\eta}_k^T \quad (2.59)$$

Das especificações dos ruídos (EQ. 2.50), considerando a aproximação da função delta de Dirac por uma função triângulo, são obtidas as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{\xi}_k^T) &= 0 & E(\boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{\xi}_{k-1}^T) &= 0 & E(\boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{\eta}_{k-1}^T) &= 0 & E(\mathbf{e}_{k-1}\boldsymbol{\eta}_k^T) &= 0 \\ E(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_k^T) &= P_0 & E(\boldsymbol{\xi}_k\boldsymbol{\xi}_k^T) &= \frac{1}{\Delta t}Q & E(\boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{\eta}_k^T) &= \frac{1}{\Delta t}R \end{aligned} \quad (2.60)$$

Da EQ. 2.58 e da EQ. 2.59, considerando a estacionariedade do sistema, e usando as igualdades da EQ. 2.60, é obtida a equação para M_0 de ordem 0 em relação a Δt :

$$\begin{aligned} M_0 &= E[(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k)^T] = E[C_0\mathbf{e}_{k-1}\mathbf{e}_{k-1}^TC_0^T + C_0\mathbf{e}_{k-1}\boldsymbol{\eta}_k^T + \boldsymbol{\eta}_k\mathbf{e}_{k-1}^TC_0^T + \boldsymbol{\eta}_k\boldsymbol{\eta}_k^T] \\ M_0 &= C_0P_0C_0^T + \frac{R}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Para o cálculo de ΔM , o filtro é ajustado para $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \Delta\boldsymbol{\theta}$. Assim o ganho do filtro será:

$$\begin{aligned} K_p &= P_p(C_0 + \Delta C)^TR^{-1} \\ P_p(A_0 + \Delta A)^T + (A_0 + \Delta A)P_p - P_p(C_0 + \Delta C)^TR^{-1}(C_0 + \Delta C)P_p + Q &= 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

O sistema é considerado em seu valor nominal, que é diferente do valor em que o filtro de Kalman é ajustado. Então as equações do sistema e do filtro de Kalman são:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_0\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} = (A - K_p\Delta C)\hat{\mathbf{x}} + K_pC_0(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) + K_p\boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{y} = C_0\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta} \\ \hat{\mathbf{y}} = C\hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (2.63)$$

Integrando o sistema da EQ. 2.63, utilizando a fórmula dos retângulos:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_k = C_0 \mathbf{x}_{k-1} + \boldsymbol{\eta}_k + \Delta t(C_0 A_0 \mathbf{x}_{k-1} + C_0 \boldsymbol{\xi}_{k-1}) \\ \bar{\mathbf{y}}_k = C \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \Delta t[C(A - K_p C) \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + K_p (C \mathbf{x}_{k-1} + \boldsymbol{\eta}_{k-1})] \end{cases} \quad (2.64)$$

O erro de predição da saída, de ordem 0 em Δt , será portanto:

$$\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}}_k = C_0(\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) - \Delta C \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \boldsymbol{\eta}_k \quad (2.65)$$

Transpondo a EQ. 2.65:

$$(\mathbf{y}_k - \bar{\mathbf{y}})^T = (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T C_0^T - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^T \Delta C^T + \boldsymbol{\eta}_k^T \quad (2.66)$$

e a matriz de covariância do erro de predição da saída M :

$$M = C_0 P C_0^T + \frac{R}{\Delta t} - C_0 E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^T] \Delta C^T - \Delta C E[\hat{\mathbf{x}}_{k-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T] C_0^T + \Delta C E[\hat{\mathbf{x}}_{k-1} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^T] \Delta C^T \quad (2.67)$$

Fazendo $N = E[\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T]$ e $L = E[\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^T]$, lembrando que as grandezas discretas são iguais as contínuas no mesmo instante de tempo, obtém-se da EQ. 2.61 e da EQ. 2.67 a expressão de ΔM :

$$\Delta M = M - M_0 = C_0 \Delta P C_0^T - C_0 N^T \Delta C^T - \Delta C N C_0^T + \Delta C L \Delta C^T \quad (2.68)$$

2.3.1.1 CÁLCULO DE L E N

Define-se as seguintes variáveis:

$$\begin{aligned} X^T &= [\mathbf{x}^T \ (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T] & \Psi^T &= [\boldsymbol{\xi}^T \ \boldsymbol{\eta}^T] \\ \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ -\Delta A + K_p \Delta C & A - K_p C \end{bmatrix} & \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -K_p \end{bmatrix} \\ \mathcal{P} = E[XX^T] &= \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P \end{bmatrix} & \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.69)$$

O vetor X atende à seguinte equação diferencial:

$$\dot{X} = \mathcal{A}X + \mathcal{B}\Psi \quad (2.70)$$

E ainda:

$$\dot{\mathcal{P}} = E(\dot{X}X^T) + E(X\dot{X}^T) = \mathcal{A}\mathcal{P} + \mathcal{B}E(\Psi X^T) + \mathcal{P}\mathcal{A}^T + E(X\Psi^T)\mathcal{B}^T \quad (2.71)$$

Considerando a estacionaridade do sistema³:

$$0 = \mathcal{A}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{A}^T + \mathcal{B}\mathcal{Q}\mathcal{B}^T \quad (2.72)$$

³Relação obtida em DELMOND (2005). Verificar a igualdade $\mathcal{B}\mathcal{Q}\mathcal{B}^T = \mathcal{B}E(\Psi X^T) + [\mathcal{B}E(\Psi X^T)]^T$.

As matrizes L e N , definidas em função de \mathcal{P} , são apresentadas abaixo:

$$L = P_{11} - P_{12} - P_{12}^T - P = \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix} \mathcal{P} \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}$$

$$N = P_{12} - P = \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix} \mathcal{P} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Portanto o cálculo de \mathcal{P} é suficiente para obter ΔM . Como $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, o cálculo de \mathcal{P} necessita da resolução de uma equação de Lyapunov (EQ. 2.72) de dimensão $2n \times 2n$. \mathcal{P} possui também elementos de ordem maior que dois em Δ . O termo $\Delta C L \Delta C^T$ na EQ. 2.68 é de segunda ordem em Δ , assim L deverá ser de ordem zero ($L = L_0$).

Fazendo as devidas considerações relativas a ordem em Δ no sistema apresentado na EQ. 2.72, a equação de coordenada (1,1) permite obter o valor de L_0 , pela equação de coordenada (2,1) obtém-se a equação de N e a equação de ΔP é obtida da equação de coordenada (2,2)⁴:

$$0 = A_0 L_0 + L_0 A_0^T + K_0 R K_0^T \quad (2.73)$$

$$0 = A_0 N + N (A_0 - K_0 C_0)^T - L_0 (\Delta A - K_0 \Delta C)^T - K_0 R \Delta K^T \quad (2.74)$$

$$0 = (A_0 - K_0 C_0) \Delta P + \Delta P (A_0 - K_0 C_0)^T + \Delta K R \Delta K^T - \quad (2.75)$$

$$(\Delta A - K_0 \Delta C) N - N^T (\Delta A - K_0 \Delta C)^T \quad (2.76)$$

2.3.2 RELAÇÃO ENTRE ΔM E $\Delta \theta$

A relação entre ΔM e $\Delta \theta$ para o caso contínuo difere da relação definida para o caso discreto, apresentada na EQ. 2.40, devido a discretização do sistema contínuo. A nova relação é definida na EQ. 2.77.

$$\frac{1}{\Delta t} \text{Tr}[M_0^{-1} \Delta M] = \Delta \theta^T G_{\theta_0}^{-1} \Delta \theta \quad (2.77)$$

Analisando a EQ. 2.61, sendo Δt um período de discretização muito pequeno, verifica-se que a matriz M_0 pode ser aproximada por:

$$M_0 \approx \frac{R}{\Delta t} \quad (2.78)$$

Assim, para o cálculo da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$, tem-se que:

⁴Verificar as considerações feitas em DELMOND (2005) para obter as equações.

$$g_{ii} = G_{\theta_0}^{-1}(i, i) = \frac{Tr(R^{-1}\Delta M)_{\Delta\theta^i}}{\epsilon_i^2} \quad (2.79)$$

$$g_{ij} = G_{\theta_0}^{-1}(i, j) = \frac{Tr(R^{-1}\Delta M)_{\Delta\theta^{ij}} - (\epsilon_i^2 g_{ii} + \epsilon_j^2 g_{jj})}{2\epsilon_i\epsilon_j}, \quad i \neq j \quad (2.80)$$

que difere das equações para o caso discreto, EQ. 2.47 e EQ. 2.48, substituindo M_0^{-1} por R^{-1} .

2.4 SÍNTESE PRCBI

Considere o sistema apresentado na FIG. 2.2 onde as equações dinâmicas da planta dependem do vetor paramétrico θ e o controlador depende do vetor β que será a variável de ajuste.

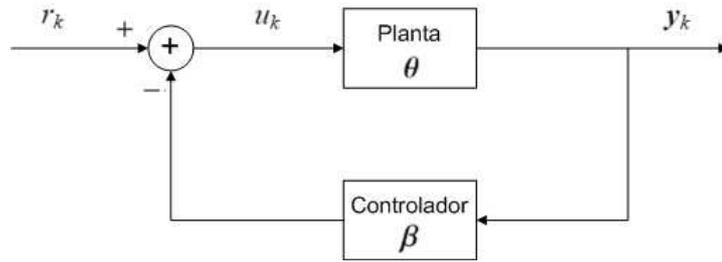


FIG.2.2: Estrutura de controle em malha fechada.

O objetivo da síntese PRCBI é alterar o controlador, modificando o vetor β , de forma a robustecer o sistema em malha fechada às variações do vetor paramétrico θ . Trata-se da robustez em estabilidade do sistema.

Deve-se inicialmente obter uma realização que represente o sistema em malha fechada, que irá depender dos vetores θ e β . Considera-se a entrada de referência nula e minimiza-se a função custo (EQ. 2.43) utilizando o vetor β como variável de projeto.

O controlador na FIG. 2.2 eventualmente pode incluir também um estimador de estados, como na estrutura LQG, e depender do sinal u_k , ou também incluir uma estrutura de controle qualquer, que possua parâmetros livres para serem utilizados como variáveis de projeto no processo de minimização do custo. Esta estrutura pode ser representada por um sistema em malha aberta contendo as características de malha fechada. Desta forma, aplica-se a síntese PRCBI para um sistema em malha fechada como se malha aberta fosse.

A síntese PRCBI permite projetar controladores com excelentes qualidades de robustez paramétrica, mas nada se garante em relação ao desempenho do sistema. Todo o seu desenvolvimento teórico foi baseado na identificação bayesiana do vetor paramétrico, tornando o sistema menos sensível às suas variações. Diminuir a sensibilidade do sistema corresponde a aumentar suas margens de estabilidade relativas às variações paramétricas. Quanto mais

próximo da instabilidade o sistema estiver, mais fácil será possível identificar as variações paramétricas e melhor será a qualidade da identificação. Portanto, ao se minimizar a função custo na EQ. 2.43, aumenta-se a robustez em estabilidade, mas nada é considerado em relação ao desempenho.

Por este motivo, os controladores obtidos pela síntese PRCBI normalmente estão associados a um mau desempenho do sistema em malha fechada. Diante disto surge a necessidade de se utilizar artifícios que tornem possível conciliar as características de robustez em estabilidade e de desempenho.

2.5 TÉCNICA DAS LIBERAÇÕES

Em ADES (1994) desenvolveu-se uma técnica que obtém a robustez em estabilidade, perdendo um pouco do desempenho, utilizando a função custo (EQ. 2.43) com restrições. A técnica consiste em estabelecer um valor de custo ótimo em desempenho J_{oti} , obtido de um sistema que tenha o melhor desempenho possível. Este valor ótimo corresponde ao valor obtido pela otimização de uma função custo J_{des} que mede o desempenho do sistema. É estabelecida então uma tolerância em relação ao custo ótimo para o valor que o custo de desempenho do sistema possa ter. Assim, é possível definir uma nova função custo, inserindo restrições de desempenho, de modo a tratar o problema como uma minimização de uma função custo sem restrições:

$$J_{lib} = J_{rob} + K \sup[0, J_{des} - (1 + \mu)J_{oti}] \quad (2.81)$$

onde K é uma constante de penalidade de valor elevado, μ é a tolerância em relação ao custo ótimo para o custo de desempenho que o sistema possa ter e $\sup(a, b)$ retorna o maior valor entre a e b .

Desta maneira, o processo de síntese é feito de forma semelhante à síntese PRCBI, alterando-se apenas a função custo a ser minimizada.

2.6 TÉCNICA DE ANÁLISE DA ROBUSTEZ PARAMÉTRICA BASEADA NA IDENTIFICAÇÃO BAYESIANA - PRABI

A síntese PRCBI utiliza o traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ para quantificar a qualidade da identificação paramétrica e, baseado nesta medida, projetar um sistema de controle robusto. Nenhuma outra informação além do traço é utilizada, embora a matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ seja inversamente proporcional à matriz de covariância da estimação paramétrica em regime assintótico P_{θ_0} .

No mesmo trabalho em que foi desenvolvida a técnica PRCBI (GOMES, 1991), são analisadas as direções de máxima e mínima robustez no espaço paramétrico com base nos autovalores e autovetores de $G_{\theta_0}^{-1}$. O assunto também é abordado nos trabalhos de BOURRET (1993) e LAVIGNE (1994). Em MANCEAUX-CUMER (1998) utilizou-se pela primeira vez a informação das direções de máxima e mínima robustez para tentar ajustar o compromisso robustez em estabilidade com o desempenho da melhor forma possível. Esta técnica recebeu o nome de “*Parameter Robust Analysis by Bayesian Identification*” (PRABI).

Sendo a matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ inversamente proporcional à matriz P_{θ_0} , a direção do autovetor associado ao seu maior autovalor será a direção em que o inverso da variância dos parâmetros cresce mais rapidamente. O que é equivalente a dizer que esta é a direção de mínima robustez ou máxima sensibilidade no espaço paramétrico, pois é a direção em que a variância dos parâmetros diminui mais rapidamente, melhorando a identificação e piorando a robustez paramétrica.

Uma análise semelhante pode ser feita para o autovetor associado ao menor autovalor da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$. Neste caso, a direção no espaço paramétrico será de máxima robustez e mínima sensibilidade.

2.6.1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Pelo fato da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ ser positiva definida, pode-se afirmar que a superfície:

$$H = \Delta \theta G_{\theta_0}^{-1} \Delta \theta^T \quad (2.82)$$

representa um hiperelipsóide. Através de uma mudança de base da variação do vetor paramétrico $\Delta \theta$:

$$\Delta \theta^T = \Omega \tilde{\theta}^T \quad (2.83)$$

onde Ω é a matriz dos autovetores de $G_{\theta_0}^{-1}$, pode-se reescrever a EQ. 2.82 como:

$$H = \tilde{\theta} \Omega^T G_{\theta_0}^{-1} \Omega \tilde{\theta}^T = \tilde{\theta} \Lambda_D \tilde{\theta}^T \quad (2.84)$$

onde Λ_D é uma matriz diagonal contendo os autovalores de $G_{\theta_0}^{-1}$. Sendo os autovalores reais, a equação do hiperelipsóide será:

$$H = \lambda_1 \tilde{\theta}_1^2 + \lambda_2 \tilde{\theta}_2^2 + \dots + \lambda_r \tilde{\theta}_r^2 \quad (2.85)$$

onde λ_i são os autovalores que compõe a matriz diagonal Λ_D . Define-se:

$$\lambda_m = \min[\lambda_i] \text{ para } i = 1, 2, \dots, r$$

$$\lambda_M = \max[\lambda_i] \text{ para } i = 1, 2, \dots, r$$

A interseção dos $r - 1$ hiperplanos da equação $\Delta\tilde{\theta}_i = 0 \quad \forall i \neq M$ corresponde à direção do autovetor associado ao autovalor λ_M , que é a direção de mínima robustez ou máxima sensibilidade. Em princípio, variando os parâmetros do vetor θ nesta direção dentro do espaço paramétrico, a saída sofrerá mais alterações do que variando os parâmetros em qualquer outra direção.

Por outro lado, a interseção dos $r - 1$ hiperplanos da equação $\Delta\tilde{\theta}_i = 0 \quad \forall i \neq m$ corresponde à direção do autovetor associado ao autovalor λ_m , que é a direção de máxima robustez ou mínima sensibilidade. Em princípio, variações do vetor θ nesta direção causam perturbações na saída menores do que variando θ em qualquer outra direção.

Quando a relação $\frac{\lambda_M}{\lambda_m}$ se aproxima da unidade, o hiperelipsóide se aproxima de uma hipersfera e variações em qualquer direção causam o mesmo efeito na saída. Assim, não existem direções diferenciadas dentro do espaço paramétrico.

2.7 ROBUSTECIMENTO DE CONTROLADORES UTILIZANDO A SÍNTESE PRCBI ASSOCIADA À TÉCNICA PRABI

Conforme apresentado na seção 2.4, a síntese PRCBI permite obter sistemas em malha fechada com excelentes índices de robustez paramétrica em estabilidade mas com péssimo desempenho. Um novo procedimento para tornar os controladores mais robustos sem perder muito o desempenho, baseado nas direções de máxima e mínima sensibilidade, foi proposto por MANCEAUX-CUMER (1998). O algoritmo proposto procura atuar nas direções de máxima robustez dos parâmetros de um controlador de bom desempenho para robustecer o sistema em relação aos parâmetros sensíveis da planta. Desta forma, controladores robustos com bom desempenho podem ser obtidos.

O procedimento de síntese de controladores robustos, que utiliza a síntese PRCBI associada à técnica de análise PRABI, é realizado utilizando dois espaços paramétricos diferentes: o Espaço Paramétrico da Planta (EPP) e o Espaço Paramétrico do Controlador (EPC). O primeiro é definido pelos parâmetros sensíveis da planta (θ) e o segundo é definido pelos parâmetros do controlador (β).

A DSMIN do EPC é a direção de variação dos parâmetros do controlador que menos interfere na saída do sistema. O procedimento utiliza esta informação no processo de minimização do traço de $G_{\theta_0}^{-1}$, variando os parâmetros do controlador (variáveis de projeto) na DSMIN do EPC. Portanto a busca no EPP com r dimensões, se torna unidimensional. Partindo de um controlador com desempenho satisfatório, o método permite obter um outro controlador com melhor robustez paramétrica em estabilidade e desempenho semelhante.

3 ESPAÇO PARAMÉTRICO MODIFICADO

Neste capítulo analisa-se a influência dos valores nominais do vetor de parâmetros sensíveis da planta nos resultados das técnicas PRCBI e PRABI. Quando os valores nominais do vetor paramétrico são diferentes pode ocorrer uma distorção nas direções de máxima robustez e máxima sensibilidade, devido a relação entre a variância do erro de estimação dos parâmetros com seus respectivos valores nominais. Neste capítulo, mostra-se uma proposta para compensar esta distorção. É feita uma alteração nas técnicas, modificando o espaço paramétrico, visando eliminar a influência dos valores nominais dos parâmetros sensíveis.

3.1 INTRODUÇÃO

A matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ que, em regime estacionário, é uma aproximação da inversa da matriz de covariância do erro de estimação do vetor de parâmetros sensíveis, é calculada perturbando-se os valores nominais do vetor paramétrico e medindo a variação causada na saída. Cada autovalor desta matriz está associado ao inverso da variância do erro de estimação de cada parâmetro do vetor paramétrico. Como a variância depende do valor médio da variável, dois parâmetros com a mesma qualidade de identificação terão diferentes variâncias para o erro de estimação se possuírem valores nominais diferentes. Esta diferença pode afetar os resultados em aplicações das técnicas PRCBI e PRABI e este efeito não foi abordado nas formulações originais da síntese PRCBI.

Na síntese PRCBI, durante o processo de otimização para minimizar o traço de $G_{\theta_0}^{-1}$, as variâncias dos parâmetros com valores nominais menores predominarão sobre as variâncias dos outros parâmetros. Sendo o traço de uma matriz igual a soma de seus autovalores (STRANG, 1988), o autovalor correspondente ao inverso da covariância do parâmetro de menor valor nominal influenciará mais no valor do traço. Desta forma, a dessensibilização será mais efetiva nestes parâmetros do que nos parâmetros com valores nominais maiores.

Na técnica de análise PRABI as direções de máxima e mínima robustez, que são dadas pelos autovetores associados ao menor e ao maior autovalor da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$, respectivamente, serão distorcidas pela discrepância entre os valores das variâncias devido aos valores nominais dos parâmetros terem grandezas diferentes.

Este trabalho introduz uma modificação nos métodos PRCBI e PRABI destinada a compensar o efeito acima citado. Para esta modificação, argumenta-se o seguinte:

1. Sendo a matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ destinada para análise da robustez paramétrica, uma maneira de eliminar as distorções, causadas pelos valores nominais dos parâmetros, é a modificação do espaço paramétrico através de uma transformação linear;
2. Esta transformação linear deverá ser feita de maneira a transformar o vetor paramétrico nominal em um vetor onde todas as componentes são iguais a unidade;
3. Uma vez obtido este espaço paramétrico modificado, os elementos do vetor θ_0 serão todos iguais a um e, neste caso, a matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ não sofrerá nenhuma influência causada pelas discrepâncias entre os valores nominais dos parâmetros;
4. Assim sendo, por exemplo, dois parâmetros com a mesma qualidade de identificação terão valores numéricos iguais para as variâncias de seus erros de estimação.

3.2 DEFINIÇÕES RELATIVAS AO ESPAÇO PARAMÉTRICO

O *espaço paramétrico* de um sistema com incertezas é definido como um espaço linear (ou espaço vetorial) de dimensão igual ao número de parâmetros sensíveis, cada um representado por uma coordenada. Este espaço é gerado por um conjunto de vetores linearmente independentes, obtidos tomando-se as linhas ou as colunas de uma matriz identidade de dimensão igual ao espaço linear. Cada valor que o vetor de parâmetros sensíveis pode assumir é representado por um ponto no espaço paramétrico.

O *domínio de estabilidade* é a região que contém todos os pontos que garantem a estabilidade do sistema.

A *direção de mínima robustez* (ou máxima sensibilidade) é definida como a direção no espaço paramétrico em que as perturbações causam, localmente, mais efeito na saída do sistema do que perturbações em qualquer outra direção.

O *raio da hipersfera de estabilidade* é definido como a distância entre o ponto que representa o valor nominal do vetor paramétrico e o ponto mais próximo da fronteira do domínio de estabilidade. Esta distância é uma medida da mínima perturbação percentual do valor nominal dos parâmetros sensíveis necessária para levar o sistema à instabilidade. Sendo este valor uma combinação das variações percentuais de cada parâmetro da seguinte forma:

$$R(\%) = \sqrt{\Delta\theta_1^2(\%) + \Delta\theta_2^2(\%) + \dots + \Delta\theta_p^2(\%)} \quad (3.1)$$

onde $\Delta\theta_i(\%)$ representa a variação percentual do parâmetro θ_i . Um valor constante de $R(\%)$ é representado por uma hipersfera no espaço paramétrico.

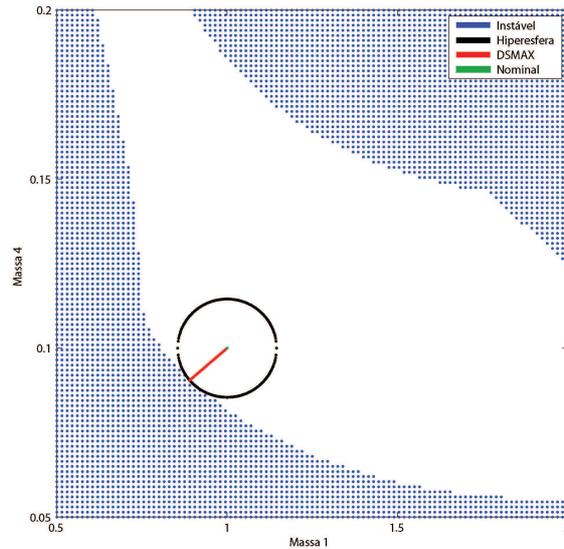


FIG3.1: Espaço paramétrico do sistema massa-mola de 8 estados com o controlador LQG.

A FIG. 3.1 representa um espaço paramétrico de duas dimensões de um sistema massa-mola, onde duas massas constituem os parâmetros a serem analisados. Este exemplo será detalhado no capítulo 4, sendo apresentado neste contexto apenas como ilustração. O domínio de estabilidade é a área branca do gráfico, a direção de robustez mínima (ou sensibilidade máxima - DSMAX) está representada em vermelho e os pontos instáveis em azul. Na cor preta estão representados o valor nominal do vetor paramétrico e a hipersfera de estabilidade, no caso de duas dimensões, a hipersfera degenera-se em uma circunferência.

3.3 INFLUÊNCIA DOS VALORES NOMINAIS DO VETOR PARAMÉTRICO NOS AUTOVALORES E AUTOVETORES DE $G_{\theta_0}^{-1}$

A seguir será apresentado de forma sucinta o modelo do sistema massa-mola de 8 estados. Da mesma forma que na seção anterior, este modelo será utilizado para ilustrar os conceitos apresentados neste capítulo.

O sistema massa-mola de 8 estados utilizado é composto por quatro massas conectadas por molas e amortecedores. O sistema possui uma entrada (força aplicada na massa 1) e uma saída (posição da massa 4). As matrizes de uma realização em espaço de estados do modelo é apresentada na EQ. 3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{b}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{2k}{m_2} & -\frac{2b}{m_2} & \frac{k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m_3} & \frac{b}{m_3} & -\frac{2k}{m_3} & -\frac{2b}{m_3} & \frac{k}{m_3} & \frac{b}{m_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{m_4} & \frac{b}{m_4} & -\frac{k}{m_4} & -\frac{b}{m_4} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

O significado físico dos estados e dos parâmetros, bem como maiores detalhes do modelo, serão apresentados no capítulo 4.

Na grande maioria dos sistemas com incertezas paramétricas, os parâmetros sensíveis possuem valores nominais numericamente discrepantes, pois representam grandezas físicas diferentes. Em um pêndulo invertido, por exemplo, os parâmetros sensíveis podem ser os coeficientes de atrito, o comprimento da haste e a sua massa. Os valores numéricos nominais destes parâmetros terão diferenças significativas, inclusive em função das unidades adotadas. Em um circuito eletrônico, capacitâncias e resistências podem fazer parte do vetor de parâmetros sensíveis do modelo. Neste caso a diferença entre os valores nominais é ainda mais acentuada.

A matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ possui informação da qualidade da identificação dos parâmetros sensíveis, obtida da variância do erro de estimação destes parâmetros. Por outro lado, a ordem de grandeza da variância está diretamente relacionada com o valor médio da variável. Sendo assim, a medida direta da variância do erro de estimação não é uma boa indicação da qualidade de identificação dos parâmetros quando houver diferença entre seus valores nominais. O valor médio do parâmetro identificado será aproximadamente o valor nominal do parâmetro.

Para demonstrar a influência dos valores nominais dos parâmetros sensíveis da planta nos autovalores e autovetores da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$, que fornecem as direções de máxima e mínima robustez, será usado o modelo do sistema massa-mola de oito estados, onde é aplicado um controlador LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) com quatro parâmetros sensíveis de mesma

natureza. Neste caso, serão consideradas as quatro massas do sistema.

Calculando os autovalores e autovetores associados da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ para os parâmetros sensíveis com o mesmo valor nominal e com valores nominais diferentes, obtém-se a TAB. 3.1.

TAB.3.1: Autovalores e autovetores associados da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$.

Vetor Paramétrico θ	Autovalor	Autovetor
[1,00 1,00 1,00 1,00]	0,0174	[-0,0051 0,7063 -0,7079 0,0067]
	0,2423	[0,7136 0,0535 0,0417 -0,6973]
	1,3321	[-0,5795 0,4366 0,4347 -0,5335]
	5,9125	[0,3937 0,5547 0,5551 0,4786]
[1,00 0,25 0,10 0,10]	0,5527	[0,9163 0,2872 0,1299 -0,2471]
	12,0207	[0,3774 -0,5690 -0,5935 0,4262]
	30,9755	[0,1225 -0,6073 0,7699 0,1529]
	640,750	[0,0547 0,4743 0,1953 0,8567]
[1,00 1,00 1,00 0,10]	0,3029	[0,6850 -0,01423 -0,7283 -0,0061]
	1,1729	[0,6075 -0,5305 0,5808 0,1100]
	8,6823	[0,3536 0,8169 0,3138 0,3304]
	35,060	[-0,1914 -0,2257 -0,1835 0,9374]
[0,10 1,00 1,00 1,00]	-0,0008	[0,0020 0,7406 0,0468 -0,6703]
	1,4361	[0,0566 0,5452 -0,6221 0,5591]
	2,2784	[-0,0998 -0,3863 -0,7804 -0,4815]
	69,624	[-0,9934 0,0713 0,0430 0,0789]

Os dados da TAB. 3.1 deixam claro a influência dos valores nominais dos parâmetros sensíveis nos autovalores e autovetores da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$. O modelo obtido a partir do primeiro vetor paramétrico $\theta = [1,00 1,00 1,00 1,00]$ possui as direções de máxima e mínima robustez como uma combinação linear com contribuições significativas de todas as coordenadas do espaço paramétrico. A DSMIN (Direção de Mínima Sensibilidade), dado pelo autovetor associado ao menor autovalor da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$, mostra que o sistema é mais robusto às variações das grandezas associadas à segunda e terceira coordenadas do espaço paramétrico. Já a DSMAX é uma combinação linear equilibrada de todas as quatro coordenadas.

No modelo obtido a partir do vetor paramétrico $\theta = [1,00 0,25 0,10 0,10]$, valores originais do modelo, é possível perceber a influência do primeiro parâmetro nas direções DSMAX e DSMIN. A componente da DSMIN referente ao primeiro parâmetro é a que possui o maior valor, indicando ser este o parâmetro sensível o mais robusto do sistema. Por ser o parâmetro com o maior valor nominal, o valor de sua variância tende a ser maior, caracterizando uma baixa qualidade de identificação. Já na DSMAX a componente referente a este parâmetro é a menor delas, pelo mesmo motivo.

Nos dois últimos casos, o comportamento observado anteriormente ocorre da mesma

forma. Foram mantidos três parâmetros iguais e alterado um deles para um valor nominal menor. A diferença entre eles é a troca do parâmetro de menor valor, para ilustrar que a distorção ocorre independente da dinâmica do sistema. As características dinâmicas do modelo podem mascarar as distorções, acentuando ou amenizando seus efeitos, mas elas sempre ocorrerem. No sistema obtido do vetor paramétrico $\theta = [0, 10 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00]$, a distorção é mais evidente para a mesma diferença entre os valores nominais.

Deve ficar claro que o valor da variância do erro de estimação de um parâmetro é muito influenciado pelo seu valor médio, ou seja, a alteração do seu valor nominal. Mas esta alteração também pode influenciar profundamente na dinâmica do sistema. A redução do valor do primeiro parâmetro do sistema acima ($\theta = [0, 10 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00]$) gerou um autovalor muito pequeno, mostrando o robustecimento em relação a um dos parâmetros. Nota-se que este resultado não é de maneira nenhuma consequência da relação entre o valor nominal dos parâmetros e suas variâncias. Pois se assim fosse, o autovalor, neste caso, deveria aumentar e não diminuir.

3.4 MODIFICAÇÃO DO ESPAÇO PARAMÉTRICO

Visando eliminar a influência dos valores nominais dos parâmetros sensíveis nas técnicas PRCBI e PRABI, é proposto neste trabalho uma modificação do espaço paramétrico. Esta modificação é feita através de uma transformação linear que produz um novo vetor paramétrico, onde todos os parâmetros têm valores nominais iguais a um. No espaço paramétrico modificado as distorções devidas aos valores nominais diferentes dos parâmetros sensíveis serão eliminadas. Desta forma, a nova matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ terá uma informação mais equilibrada sobre a qualidade de identificação dos parâmetros.

As matrizes A , B , C e E do modelo da EQ. 2.49 dependem do vetor paramétrico θ . É possível encontrar uma outra representação de estados, designada pelo conjunto de matrizes A_N , B_N , C_N e E_N que representem o mesmo sistema, mas dependendo de um novo vetor θ_N . As novas matrizes podem ser facilmente obtidas substituindo-se os parâmetros θ_i das antigas matrizes por $\frac{\theta_{0_i}}{\theta_{N_{0_i}}} \theta_{N_i}$, onde θ_{0_i} e $\theta_{N_{0_i}}$ são valores nominais constantes. Fazendo todos os elementos de θ_{N_0} iguais a unidade, chega-se a um conjunto de matrizes que possui o espaço paramétrico modificado desejado. Outros espaços paramétricos podem ser obtidos variando o vetor θ_N , que não é o interesse neste momento.

Esta troca de matrizes representa uma operação linear no espaço paramétrico que transforma o espaço original em um novo espaço modificado. Portanto pode-se definir um operador linear para interpretar os resultados obtidos no espaço modificado, fazendo sua transformação

para o espaço original.

$$\boldsymbol{\theta}_N = \mathcal{T}\boldsymbol{\theta} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\theta} = \mathcal{T}^{-1}\boldsymbol{\theta}_N \quad (3.3)$$

O operador linear \mathcal{T} é assim definido:

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} \frac{\theta_{N_1}}{\theta_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\theta_{N_2}}{\theta_2} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\theta_{N_p}}{\theta_p} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

O cálculo da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ é realizado perturbando os valores nominais dos parâmetros. Como o vetor de parâmetros sensíveis do novo sistema possui todas as componentes iguais a unidade, as variâncias do erro de estimação de cada parâmetro irão diferenciar-se apenas pela qualidade da identificação.

Devido à medida de robustez no espaço paramétrico modificado estar livre das distorções causadas pelos valores nominais, a minimização do traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ na síntese PRCBI deve ocorrer neste espaço. Nenhuma transformação para o espaço paramétrico original é necessária.

Por outro lado, as direções DSMAX e DSMIN da técnica PRABI, obtidas no espaço modificado, precisam ser transformadas para o espaço original usando o operador linear \mathcal{T} . Desta forma as direções passam a ter uma interpretação física.

Na TAB. 3.2 os mesmos valores nominais dos parâmetros sensíveis usados na TAB. 3.1 são utilizados e os autovalores e autovetores associados são calculados no espaço paramétrico modificado. Em seguida os autovetores são transformados para o espaço paramétrico original.

Com a modificação do espaço paramétrico o efeito das distorções é reduzido. Nota-se, como era esperado, que para o vetor paramétrico $\boldsymbol{\theta} = [1,00 \ 1,00 \ 1,00 \ 1,00]$ os resultados são os mesmos. Isto se deve ao vetor paramétrico ser o mesmo nos espaços original e modificado. Percebe-se a eliminação das distorções nos outros três casos. A relação entre o valor nominal dos parâmetros com as direções DSMAX e DSMIN deixam de existir. Os autovalores e autovetores da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ dependem apenas da qualidade de identificação dos parâmetros. Desta forma a matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ obtida do espaço paramétrico modificado é mais apropriada para o uso nas técnicas PRCBI e PRABI. O autovalor negativo obtido no último caso deve-se a erros numéricos no cálculo da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$.

TAB.3.2: Autovalores e autovetores associados da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ utilizando o espaço paramétrico modificado.

Vetor Paramétrico θ	Autovalor	Autovetor
[1,00 1,00 1,00 1,00]	0,0174	[-0,0051 0,7063 -0,7079 0,0067]
	0,2423	[0,7136 0,0535 0,0417 -0,6973]
	1,3321	[-0,5795 0,4366 0,4347 -0,5335]
	5,9125	[0,3937 0,5547 0,5551 0,4786]
[1,00 0,25 0,10 0,10]	0,0456	[-0,2272 -0,0873 -0,0514 0,0750]
	0,3425	[0,2332 0,0715 -0,0849 -0,0378]
	3,2832	[0,8768 -0,1181 0,0047 0,0078]
	16,056	[0,3540 0,1893 0,0113 0,0537]
[1,00 1,00 1,00 0,10]	0,1986	[0,0711 -0,0636 0,2202 0,0971]
	0,3048	[0,7078 -0,0271 -0,6981 0,0105]
	1,5209	[-0,5425 0,6078 -0,5432 0,0203]
	11,742	[-0,4468 -0,7911 -0,4111 0,0074]
[0,10 1,00 1,00 1,00]	-0,0008	[0,0020 0,7404 0,0468 -0,6702]
	0,4412	[0,0948 0,1972 0,0255 0,2479]
	1,5794	[-0,0150 0,3815 -0,8386 0,3585]
	3,2703	[-0,0279 0,5170 0,5421 0,6007]

3.5 CÁLCULO DO RAIOS DA HIPERESFERA DE ESTABILIDADE

O raio da hiperesfera de estabilidade é uma boa medida da robustez paramétrica do modelo. Sendo conhecido o ponto no espaço paramétrico mais próximo do valor nominal, que torna o sistema instável, o cálculo do raio da hiperesfera é elementar. O problema é localizar este ponto.

Uma maneira eficaz, mas computacionalmente custosa, de encontrar este ponto da fronteira de estabilidade é utilizando o método do *grid*. Define-se um intervalo de variação para cada parâmetro sensível e o número de pontos a serem testados nesta região. Então é verificada a estabilidade em cada ponto da região do espaço paramétrico delimitada. Em seguida, verifica-se entre os pontos da fronteira qual é o mais próximo do valor nominal.

Outra forma de localizar este ponto é definir raios fixos para a hiperesfera, e testar de forma aleatória a estabilidade dos pontos sobre a superfície da hiperesfera definida por este raio. Caso haja algum ponto instável, reduz-se o valor do raio e repete-se o teste. Caso sejam todos os pontos estáveis, aumenta-se o valor do raio e efetua-se o teste novamente. Este procedimento é repetido até que se alcance a precisão desejada para o valor do raio de hiperesfera (GOMES, 1991). Este método é mais eficiente do que o método *grid*, mas ainda muito custoso computacionalmente. Principalmente em espaços paramétricos com muitas dimensões. Também conforme o raio aumenta, um número maior de pontos é necessário para testar a estabilidade

em toda superfície da hiperesfera.

A técnica de análise PRABI permite encontrar com boa precisão este ponto do espaço paramétrico com um esforço computacional muito menor do que os métodos descritos anteriormente. Partindo do ponto nominal e se deslocando sobre a DS MAX é possível obter uma trajetória que permite encontrar o ponto da fronteira mais próximo do ponto nominal e, assim, medir o raio da hiperesfera. Devido a matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ ser uma aproximação da inversa da matriz de covariância do erro de estimação dos parâmetros sensíveis e não o valor exato, a distância calculada sobre a DS MAX pelo método PRABI é uma aproximação do raio da hiperesfera. Uma melhora significativa na precisão deste cálculo é obtida atualizando a DS MAX a cada iteração do processo de busca. Procede-se da seguinte maneira:

- 1- Calcular a *DS MAX* no valor nominal do vetor de parâmetros sensíveis (θ_0);
- 2- Definir um valor constante α , que especifica o passo de evolução;
- 3- Verificar a estabilidade do sistema nos dois sentidos da direção, ou seja, para os pontos $\lambda_p = \theta_0 + \alpha DS MAX$ e $\lambda_n = \theta_0 - \alpha DS MAX$;
- 4- Se os dois pontos tornarem o sistema instável, reduzir o valor de α e voltar para o passo 3;
- 5- Se λ_p for instável ou o traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ em λ_p for maior do que em λ_n e λ_n for estável, fazer $\gamma \leftarrow \alpha$. Senão, fazer $\gamma \leftarrow -\alpha$;
- 6- Calcular $\theta_1 = \theta_0 + \gamma DS MAX$. Se θ_1 for estável, calcular a *DS MAX*₁ no ponto θ_1 e passar para o passo 7. Se θ_1 for instável, finalizar a busca, sendo θ_1 o ponto encontrado;
- 7- Fazer $\theta_0 \leftarrow \theta_1$ e *DS MAX* $\leftarrow DS MAX_1$ e retornar para o passo 6.

Quanto menor o valor de α , mais preciso será o ponto encontrado. Ao encontrar um valor de θ_1 no passo 6 que torna o sistema instável, pode-se reduzir o valor de γ e calcular um novo θ_1 para melhorar a precisão. A FIG. 3.2 mostra o raio da hiperesfera de estabilidade, em um espaço paramétrico bidimensional, calculado utilizando o método *grid* e a técnica PRABI. O tempo gasto pelo método *grid* foi de 455,4s e pelo método PRABI foi de 4,391s. Os raios encontrados pelos métodos *grid* e PRABI foram 23,600% e 23,597%, respectivamente.

A FIG. 3.3 mostra o mesmo espaço paramétrico, mas com os valores nominais dos parâmetros sensíveis diferentes. A distorção da direção DS MAX devido aos valores nominais dos parâmetros causa um erro grosseiro no raio da hiperesfera de estabilidade calculado. Utilizando o espaço paramétrico modificado para calcular a DS MAX e, em seguida, projetando no

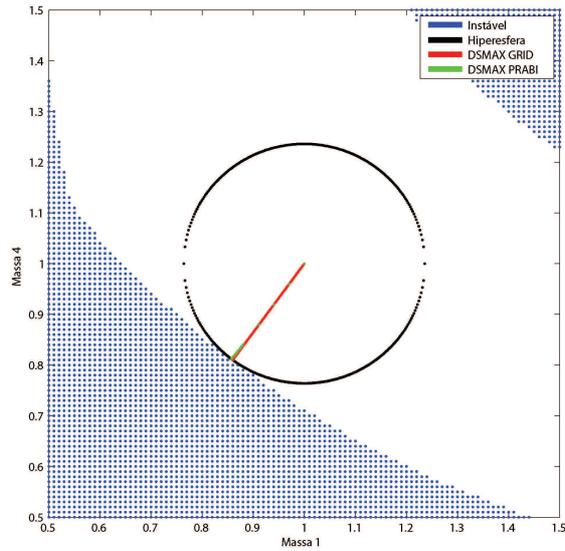


FIG.3.2: Raio da hiperesfera calculado com os métodos grid e PRABI, utilizando parâmetros nominais com valores iguais.

espaço paramétrico original, o erro é eliminado como pode ser observado na FIG. 3.4. O tempo gasto pelo método *grid* foi 954s e pelo método PRABI modificado foi 4, 82s, sendo o aumento do tempo gasto no método *grid* devido à necessidade de aumentar o número de pontos do *grid* para encontrar a DSMAX correta. Nestes exemplos, o valor de γ foi reduzido ao encontrar um valor de θ_1 instável no passo 6, visando melhorar a precisão do cálculo.

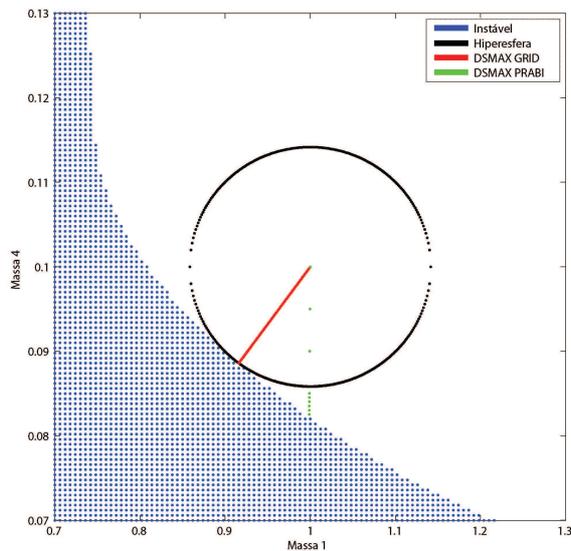


FIG.3.3: Raio da hiperesfera calculado com os métodos grid e PRABI, utilizando parâmetros nominais com valores diferentes.

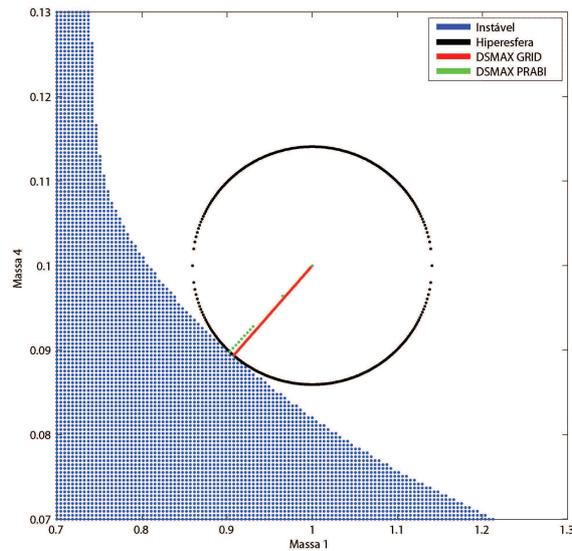


FIG.3.4: Raio da hipersfera calculado com os métodos grid e PRABI modificado, utilizando parâmetros nominais com valores diferentes.

3.6 HIPERSUPERFÍCIE GERADA PELO TRAÇO DA MATRIZ $G_{\theta_0}^{-1}$ EM FUNÇÃO DO ESPAÇO PARAMÉTRICO

Se para cada ponto do espaço paramétrico for calculado o traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$, será obtida uma hipersuperfície representando as variações do traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ ao longo do espaço paramétrico. Para um espaço paramétrico bidimensional, uma superfície é gerada e pode ser visualizada num gráfico tridimensional.

A FIG. 3.5 mostra a superfície do traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ referente ao sistema massa-mola de 8 estados com dois parâmetros sensíveis utilizando um controlador LQG. Nota-se uma superfície suave em todo o espaço paramétrico e percebe-se que próximo à fronteira do domínio de estabilidade o traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ tende para infinito, como é esperado pois o sistema está muito sensível às variações paramétricas nestes pontos. Em uma hipersuperfície suave, o uso da técnica de análise PRABI para calcular o raio da hipersfera é muito eficiente.

Alterando-se o vetor de ganhos de realimentação dos estados estimados do controlador LQG do sistema massa-mola, percebe-se uma mudança na hipersuperfície. Dependendo do valor do vetor de ganhos escolhido, a hipersuperfície pode se tornar muito irregular e apresentar picos que dificultam o desempenho do algoritmo usado pela técnica PRABI no cálculo do raio da hipersfera de estabilidade. A FIG. 3.6 ilustra uma superfície para o sistema massa-mola utilizando um vetor de ganhos de realimentação de estados estimados otimizado pela técnica PRABI no trabalho de ADES (1994).

A primeira diferença que se observa entre as superfícies do sistema com o controlador LQG e a gerada com o controlador PRCBI é o domínio de estabilidade, que foi expandido com o controlador PRCBI. Outra diferença é que a superfície PRCBI deixou de ser suave,

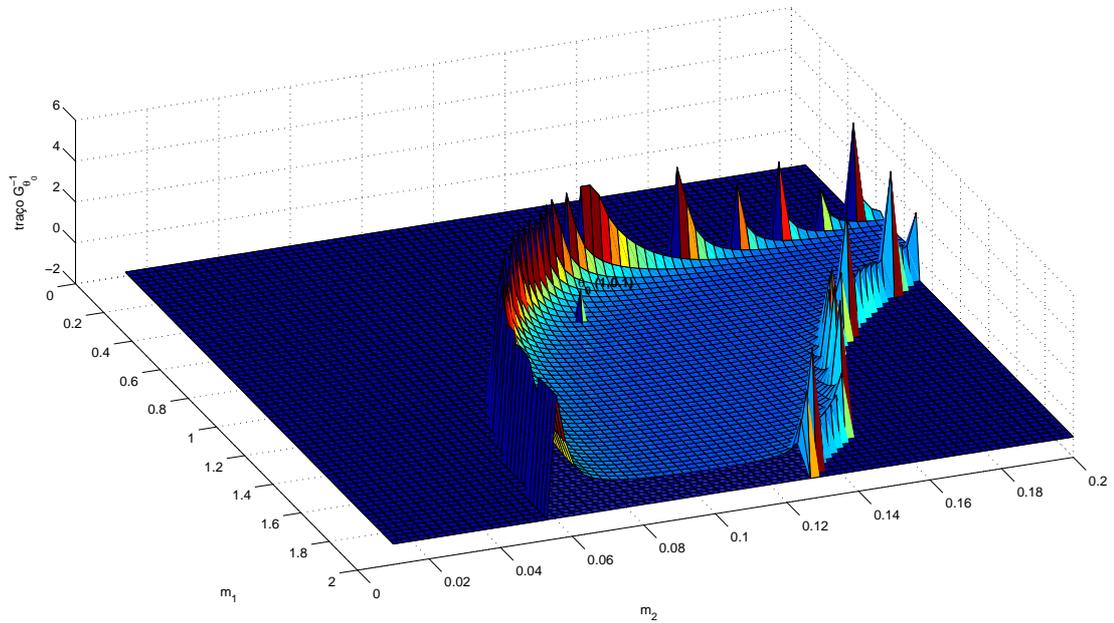


FIG3.5: Superfície do traço de $G_{\theta_0}^{-1}$ do sistema massa-mola de 8 estados com o controlador LQG.

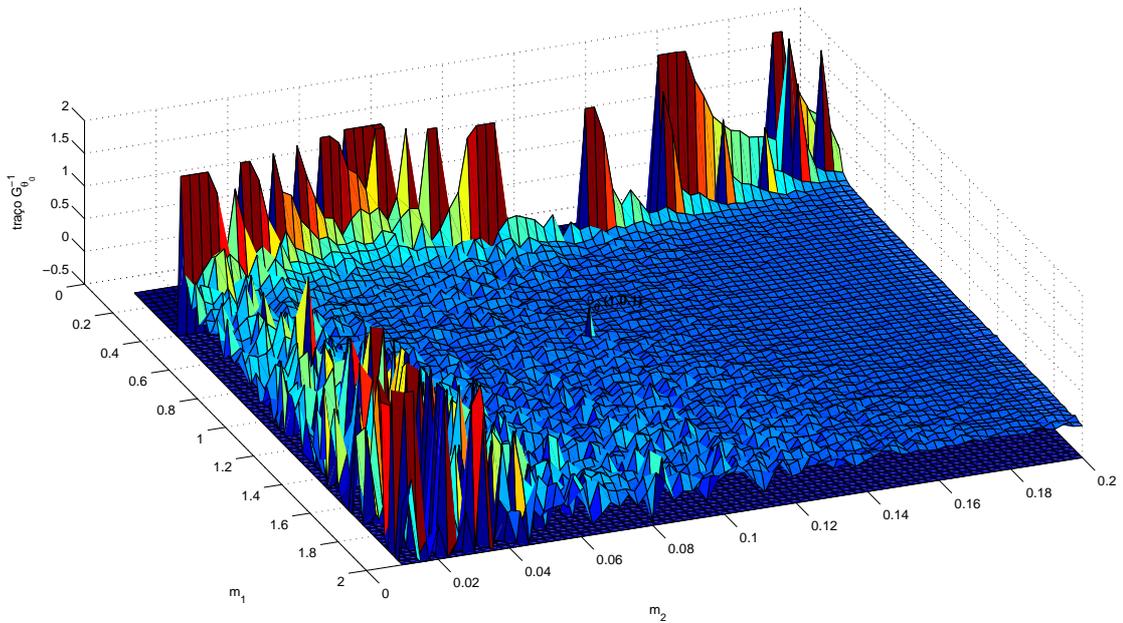


FIG3.6: Superfície do traço de $G_{\theta_0}^{-1}$ do sistema massa-mola de 8 estados com o controlador PRCBI.

apresentando picos e uma região muito irregular para valores pequenos da massa 2. A presença de uma região muito irregular para valores pequenos da massa 2 está novamente relacionado à influência do valor nominal do parâmetro no valor da variância do erro de estimação. Portanto, é natural que seja feita a modificação do espaço paramétrico, nivelando todos os parâmetros à unidade, antes do cálculo da hipersuperfície. A FIG. 3.7 apresenta a superfície criada em função do espaço paramétrico modificado.

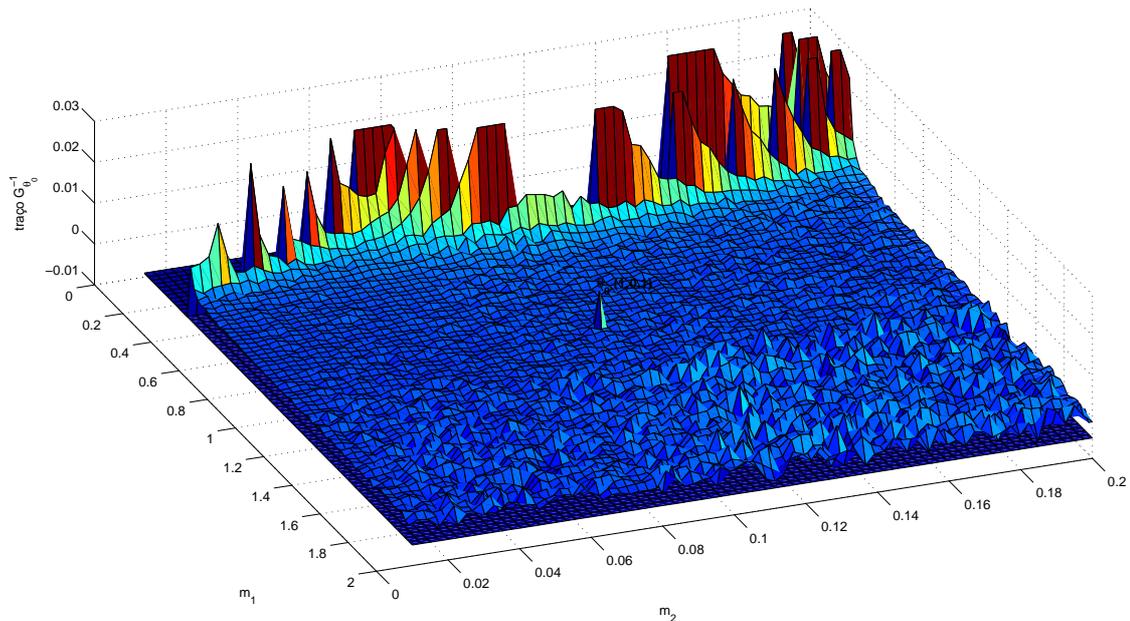


FIG.3.7: Superfície do traço de $G_{\theta_0}^{-1}$ em função do espaço paramétrico modificado do sistema massa-mola de 8 estados com o controlador PRCBI.

A modificação suavizou a superfície, principalmente na região de pequenos valores da massa 2. Ainda assim a superfície possui muitas irregularidades e um conjunto de picos na região de valores grandes dos parâmetros sensíveis. Utilizando a técnica PRABI para encontrar o raio da hiperesfera de estabilidade deste sistema, chega-se ao resultado apresentado na FIG. 3.8.

Nota-se que o fato da superfície apresentar irregularidades levou a um desempenho não satisfatório da técnica PRABI para o cálculo do raio da hiperesfera. Na FIG. 3.7, a hipersuperfície do sistema apresenta um conjunto de picos na região de grandes valores dos parâmetros sensíveis. Estes picos estão mais próximos do ponto nominal do que a fronteira do domínio de estabilidade. Desta forma a direção DS MAX calculada no ponto nominal aponta para os picos, justificando a direção tomada no início da busca pela fronteira. E a cada novo ponto em que é calculada a DS MAX, os picos de sua vizinhança contribuem para determinar sua direção.

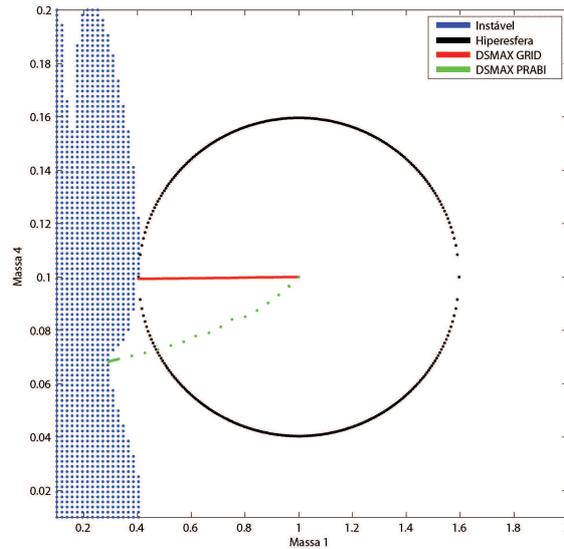


FIG3.8: Raio da hiperesfera do sistema massa-mola de 8 estados com o controlador PRCBI utilizando os métodos grid e PRABI modificado.

Outro efeito das irregularidades da hypersuperfície é a escolha errada do sentido de busca na DSMAX. Ao se escolher dois pontos em torno do valor nominal sobre a DSMAX, pode ser detectado um vale no sentido do ponto mais próximo da fronteira da região de estabilidade e um pico no sentido oposto. Se isto ocorrer, o ponto com o maior valor do traço de $G_{\theta_0}^{-1}$ será o mais afastado da fronteira e será escolhido um sentido incorreto para a busca. Para contornar este problema, o algoritmo foi modificado e será apresentado a seguir, tomando-se vários pontos em cada sentido e não apenas um. O sentido de busca na DSMAX é escolhido pelo maior valor do somatório dos traços da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ dos pontos de cada sentido.

3.7 TÉCNICA PRABI ASSOCIADA A VALORES ALEATÓRIOS PARA DETERMINAÇÃO DO RAIOS DA HIPERESFERA

Para contornar o problema apresentado na seção anterior, em que a geometria da hypersuperfície interfere no cálculo da DSMAX, é proposto um método que concilia a eficiência computacional do método PRABI com a eficácia do método que testa a estabilidade em pontos equidistantes e a frente do ponto de partida. Neste novo método, é explorada a relação entre o aumento do traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ e a proximidade da região de instabilidade no espaço paramétrico. Para cada passo da busca são calculados os valores do traço de $G_{\theta_0}^{-1}$ em pontos aleatórios, em torno do ponto sobre a DSMAX, com o mesmo raio. Então, é escolhido o ponto com o maior valor do traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ como ponto inicial no próximo passo. O novo

algoritmo passa a ser o seguinte:

- 1- Calcular a $DS MAX$ no valor nominal do vetor de parâmetros sensíveis (θ_0);
- 2- Definir um valor constante α que especifica o passo de evolução;
- 3- Verificar a estabilidade do sistema nos dois sentidos da direção, ou seja, para os pontos $\lambda_p = \theta_0 + \alpha DS MAX$ e $\lambda_n = \theta_0 - \alpha DS MAX$;
- 4- Se os dois pontos tornarem o sistema instável, reduzir o valor de α e voltar para o passo 3;
- 5- Se λ_p for instável, fazer $\gamma \leftarrow \alpha$. Se λ_n for instável, fazer $\gamma \leftarrow -\alpha$. Se λ_p e λ_n forem estáveis, arbitrar o número de pontos k a serem testados e calcular:

$$\Lambda_P = \sum_{i=1}^k Tr(G_{\lambda_{pi}}^{-1})$$

onde $\lambda_{pi} = \theta_0 + \frac{i}{k} \alpha DS MAX$, e:

$$\Lambda_N = \sum_{i=1}^k Tr(G_{\lambda_{ni}}^{-1})$$

onde $\lambda_{ni} = \theta_0 - \frac{i}{k} \alpha DS MAX$.

- 6- Se $\Lambda_P > \Lambda_N$, fazer $\gamma \leftarrow \alpha$. Senão fazer $\gamma \leftarrow -\alpha$;
- 7- Se $\theta_1 = \theta_0 + \gamma DS MAX$ for estável, arbitrar um número de pontos aleatórios m . Calcular os m pontos aleatórios em torno da $DS MAX$ e com a mesma distância do ponto nominal que θ_1 . Escolher entre os m pontos aquele que possuir o maior traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ para ser o novo vetor θ_1 . Se θ_1 ou algum ponto aleatório for instável, reduzir o valor de γ e repetir este passo se for necessário melhorar a precisão, ou finalizar a busca, sendo θ_1 ou o ponto aleatório instável o ponto desejado;
- 8- Calcular a $DS MAX_1$ no ponto θ_1 .
- 9- Calcular o produto escalar⁵ de $DS MAX_1$ e $DS MAX$. Caso o resultado seja menor do que zero, fazer $DS MAX_1 \leftarrow -DS MAX_1$.

⁵Rigorosamente, como o objetivo é calcular o valor do ângulo entre dois vetores, o produto interno deveria ser usado. Mas como o sistema de coordenadas do espaço paramétrico é ortogonal, o valor do produto escalar coincide com o valor do produto interno. Então optou-se pelo uso do produto escalar pela facilidade de implementação.

10- Fazer $\theta_0 \leftarrow \theta_1$ e $DSMAX \leftarrow DSMAX_1$. Retornar para o passo 7.

O passo 9 foi acrescentado para evitar a inversão do sentido de busca. Como um múltiplo escalar de um autovetor é também um autovetor, não há impedimento para que o sentido da DSMAX (autovetor associado ao maior autovalor da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$) seja invertido entre passos sucessivos. O produto escalar permite verificar se o novo valor da DSMAX causará inversão no sentido da busca.

A FIG. 3.9 foi obtida aplicando este método no sistema massa-mola de 8 estados com o controlador PRCBI e espaço paramétrico modificado, cuja hipersuperfície gerada pelo traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ foi apresentada na FIG. 3.7. Apesar da irregularidade da hipersuperfície, o método proposto obteve sucesso no cálculo do raio da hiperesfera. O raio encontrado pelo método grid foi 59,92% e pelo método proposto foi 59,45% e os tempos de processamento foram 893s e 116s, respectivamente.

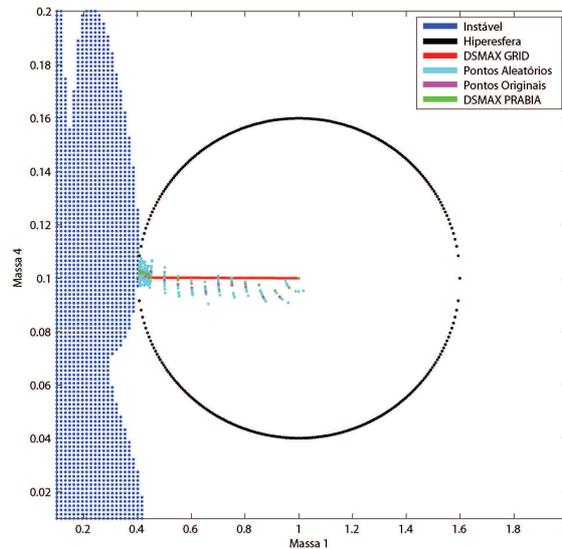


FIG.3.9: Raio da hiperesfera do sistema massa-mola de 8 estados com o controlador PRCBI utilizando os métodos grid e PRABI modificado com pontos aleatórios.

3.8 ROBUSTECIMENTO DE CONTROLADORES UTILIZANDO A SÍNTESE PRCBI ASSOCIADA À TÉCNICA PRABI

Na seção 2.7 foi apresentado o método de robustecimento de controladores proposto por MANCEAUX-CUMER (1998), onde a técnica PRABI é associada à síntese PRCBI para obter um controlador robusto com boas características de desempenho. Visando melhorar os resultados, eliminando as distorções causadas pelo valor nominal dos parâmetros na matriz $G_{\theta_0}^{-1}$,

propõe-se modificar os espaços paramétricos da planta e do controlador da forma apresentada na seção 3.4.

Outra modificação proposta é na forma de minimizar o traço de $G_{\theta_0}^{-1}$, que na seção 2.7 é tratada como um problema de otimização unidimensional na direção DSMIN do EPC. As direções de máxima e mínima sensibilidade, obtidas da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$, são aproximações das direções exatas. Desta forma um ponto θ_1 próximo à reta definida pelo vetor $\vec{d} = \theta_0 + \alpha \text{DSMIN}$, como mostra a FIG. 3.10, está em uma direção próxima da DSMIN calculada pelo método PRABI. Para permitir que o ponto θ_1 seja utilizado no processo de otimização, é criada uma matriz P que projeta o vetor $\vec{b} = \theta_1 - \theta_0$ na reta que passa pelo ponto nominal na DSMIN. A matriz de projeção é definida na EQ. 3.5 (STRANG, 1988).

$$P = \frac{\vec{d}\vec{d}^T}{\vec{d}^T\vec{d}} \quad (3.5)$$

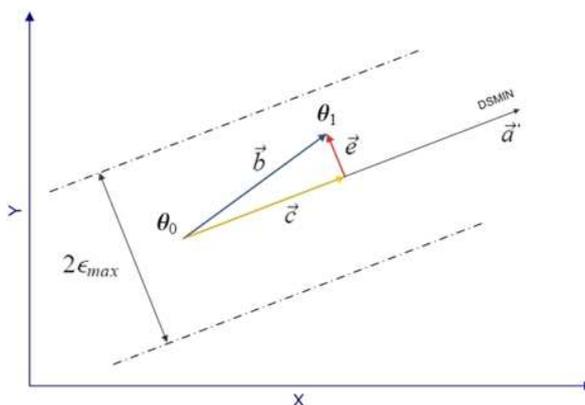


FIG.3.10: Limite em torno da DSMIN para pontos usados na otimização.

E a projeção do vetor \vec{b} na reta definida pelo vetor \vec{d} será $\vec{c} = P\vec{b}$. Então a norma euclidiana do vetor $\vec{e} = \vec{b} - \vec{c}$ fornece uma medida da distância entre o ponto θ_1 e a reta definida pelo vetor \vec{d} . Define-se um valor máximo ϵ_{max} e modifica-se a função custo para a forma apresentada na EQ. 3.6.

$$J = J_{rob} + K \sup [0, (\|\vec{e}\|_2 - \epsilon_{max})] \quad (3.6)$$

onde J_{rob} é definido na EQ. 2.43 e K é uma constante de penalidade de valor elevado.

Permitindo valores do vetor paramétrico fora da reta da DSMIN, a minimização do traço de $G_{\theta_0}^{-1}$ deixa de ser unidimensional. Ela torna-se um problema de otimização de dimensão r com restrições, sendo r o número de parâmetros sensíveis. Com a inclusão da restrição na função custo, conforme a EQ. 3.6, torna-se o problema tratável por métodos de otimização sem restrições como o método de Powell (BAZARAA & SHETTY, 1993), por exemplo.

Esta modificação facilita o processo de otimização, aumentando o número de graus de liberdade. O valor do parâmetro ϵ_{max} pode ser variado permitindo uma ponderação entre robustez e desempenho. Sendo que quanto menor o valor de ϵ_{max} escolhido, maior será o compromisso com o desempenho e aumentando o seu valor, é facilitada a obtenção de controladores mais robustos, com pior desempenho.

Finalmente, propõe-se alterar a forma de calcular a DSMIN no EPC. No método proposto por MANCEAUX-CUMER (1998) o sistema em malha fechada é utilizado para obter a matriz $G_{\beta_0}^{-1}$ ⁶. Neste caso são medidas as variações na saída do sistema em malha fechada para seu cálculo. Como o objetivo é alterar o mínimo possível o comportamento do controlador para manter o desempenho satisfatório, a modificação proposta é utilizar o modelo do controlador, desconectado da planta, para o cálculo da matriz $G_{\beta_0}^{-1}$. Assim variações na saída do controlador, e não do sistema em malha fechada, serão medidas para o cálculo.

Utilizando o método de Powell verificou-se que nas primeiras iterações, a cada nova DSMIN do EPC, é que ocorre a maior redução do valor da função custo. Assim, sugere-se utilizar um número de iterações pequeno em cada direção. Sendo N o número de parâmetros livres do controlador, sugere-se fazer um número n de iterações tal que $N < n < 2N$.

⁶Implicitamente $G_{\beta_0}^{-1}(\theta_0)$

4 APLICAÇÕES DA SÍNTESE E ANÁLISE DA ROBUSTEZ EM ESTABILIDADE E DESEMPENHO

Este capítulo tem por objetivo ilustrar, com exemplos e aplicações, as técnicas apresentadas nos capítulos anteriores, onde será aplicada a técnica de robustecimento e análise nos modelos de um sistema massa-mola de 8 estados, de um míssil ar-ar e de um helicóptero de pequena escala. Análises qualitativas e quantitativas da robustez paramétrica em estabilidade e análises qualitativas da robustez paramétrica em desempenho dos sistemas controlados serão feitas ao longo do capítulo. Ao final do capítulo será feita uma análise quantitativa da robustez paramétrica em desempenho baseada na função custo LQR. Para a otimização dos controladores será utilizado o método de Powell (BAZARAA & SHETTY, 1993) variando os seus parâmetros e o valor da variável ϵ_{max} , definida na seção 3.8, buscando robustecer o sistema mantendo um bom desempenho.

4.1 SISTEMA MASSA-MOLA DE 8 ESTADOS

O sistema massa-mola de 8 estados, ilustrado pela FIG. 4.1, é composto por quatro massas conectadas por molas e amortecedores. Trata-se de um sistema flexível e altamente oscilatório. Devido a entrada e a saída do sistema não estarem na mesma massa, o sistema é dito *não colocado*.

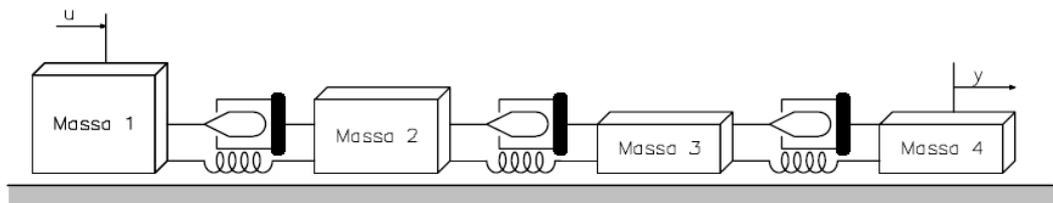


FIG4.1: Sistema massa-mola de 8 estados (ADES, 1994).

A obtenção do modelo analítico do sistema é particularmente simples. Analisando-se as forças que atuam em cada massa, sendo r_i o deslocamento da massa m_i em relação ao seu ponto

de equilíbrio, obtém-se as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{r}_1 &= u + k_{12}(r_2 - r_1) + b_{12}(\dot{r}_2 - \dot{r}_1) \\
 m_2 \ddot{r}_2 &= -k_{12}(r_2 - r_1) - b_{12}(\dot{r}_2 - \dot{r}_1) + k_{23}(r_3 - r_2) + b_{23}(\dot{r}_3 - \dot{r}_2) \\
 m_3 \ddot{r}_3 &= -k_{23}(r_3 - r_2) - b_{23}(\dot{r}_3 - \dot{r}_2) + k_{34}(r_4 - r_3) + b_{34}(\dot{r}_4 - \dot{r}_3) \\
 m_4 \ddot{r}_4 &= -k_{34}(r_4 - r_3) - b_{34}(\dot{r}_4 - \dot{r}_3)
 \end{aligned}$$

onde k_{ij} e b_{ij} são, respectivamente, a constante da mola e do amortecedor que conectam as massas m_i e m_j . Define-se os estados como estão apresentados na TAB. 4.1 e considerando que as molas e amortecedores possuem as mesmas características ($k_{ij} = k$ e $b_{ij} = b$), obtém-se as matrizes da representação em espaço de estados (EQ. 4.1). Na TAB. 4.2 são dados os valores numéricos nominais dos parâmetro do sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{b}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{2k}{m_2} & -\frac{2b}{m_2} & \frac{k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{m_3} & \frac{b}{m_3} & -\frac{2k}{m_3} & -\frac{2b}{m_3} & \frac{k}{m_3} & \frac{b}{m_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k}{m_4} & \frac{b}{m_4} & -\frac{k}{m_4} & -\frac{b}{m_4} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

4.1.1 CONTROLADOR ÓTIMO NO SISTEMA CONTÍNUO

Inicialmente será projetado um controlador ótimo com estrutura LQG para controlar o sistema da EQ. 4.1 em tempo contínuo. A entrada de ruído é a mesma da planta. As matrizes de ponderação Q_1 e Q_2 serão definidas como matrizes identidade. A matriz de covariância dos ruídos da planta será definida como $Q = 0,01BB^T$ e, tendo apenas uma saída, a covariância do ruído do sensor será definida como $R = 0,0001$. Nos outros exemplos deste capítulo os valores

TAB.4.1: Significado físico dos estados do modelo massa-mola.

Estado	Variável	Significado Físico
x_1	r_1	Posição da massa 1 (m)
x_2	\dot{r}_1	Velocidade da massa 1 ($\frac{m}{s}$)
x_3	r_2	Posição da massa 2 (m)
x_4	\dot{r}_2	Velocidade da massa 2 ($\frac{m}{s}$)
x_5	r_3	Posição da massa 3 (m)
x_6	\dot{r}_3	Velocidade da massa 3 ($\frac{m}{s}$)
x_7	r_4	Posição da massa 4 (m)
x_8	\dot{r}_4	Velocidade da massa 4 ($\frac{m}{s}$)

TAB.4.2: Valores nominais dos parâmetros.

Parâmetro	Valor
m_1	1,00Kg
m_2	0,25Kg
m_3	0,10Kg
m_4	0,10Kg
k	0,145 $\frac{N}{m}$
b	0,04875 $\frac{N \cdot s}{m}$

das matrizes de ponderação e de covariância dos ruídos serão mantidas, modificando apenas suas dimensões quando necessário.

O vetor de ganho de realimentação dos estados estimados obtido pela síntese LQR com os dados apresentados acima é:

$$K_{LQRc} = \left[2,0392 \quad 2,3626 \quad 0,0523 \quad 1,8814 \quad -0,0406 \quad 0,8700 \quad -0,0508 \quad 0,9232 \right] \quad (4.2)$$

A robustez paramétrica desta estrutura LQG será analisada tendo como parâmetros sensíveis do sistema as massas m_1 e m_4 . O espaço paramétrico do sistema é apresentado na FIG. 4.2. A figura mostra a área em branco que corresponde ao domínio de estabilidade e o círculo traçado, tendo como raio a menor distância do ponto nominal à fronteira de estabilidade. Este raio corresponde, para o caso geral (mais de três parâmetros) ao *raio da hiperesfera de estabilidade*, usada como principal medida de robustez em estabilidade. Em vermelho está traçada a DSMAX, que é definida como a direção no espaço paramétrico em que as perturbações causam mais efeito na saída do sistema do que perturbações em qualquer outra direção. Em azul é mostrada a região do espaço paramétrico em que o sistema é instável.

Para este exemplo, o raio da hiperesfera de sensibilidade do sistema é igual a 14,05%. Este resultado mostra a baixa robustez paramétrica em estabilidade apresentada pelo controlador

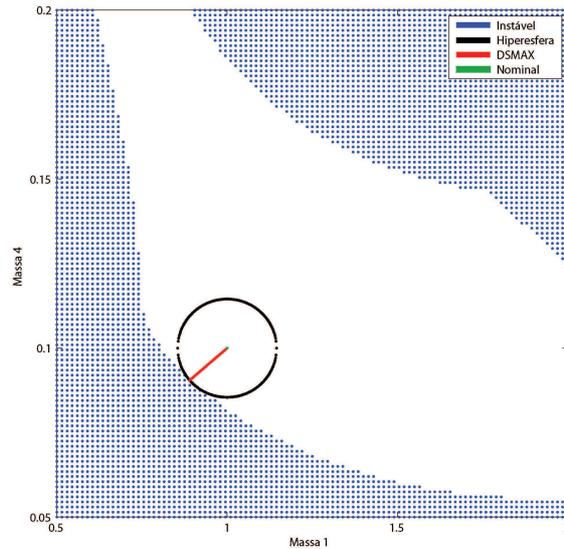


FIG.4.2: Espaço paramétrico do sistema massa-mola de 8 estados contínuo com o controlador LQG.

LQG. Além disso, como pode ser visto na FIG. 4.3, que mostra a resposta ao degrau, pequenas variações nos parâmetros nominais causam grandes perturbações no desempenho temporal do sistema. Para obter a FIG 4.3 foram traçadas as respostas ao degrau para 50 modelos criados aleatoriamente. Os parâmetros sensíveis são gerados com variações máximas de 12% em cada parâmetro. É possível verificar que uma das respostas apresenta oscilações crescentes, caracterizando um sistema instável. Considerando uma variação de aproximadamente 12% nos valores aleatórios dos dois parâmetros sensíveis para gerar uma planta aleatória, o ponto no espaço paramétrico estará fora da hipersfera de estabilidade ($R = \sqrt{12^2 + 12^2} = 16,97$, este valor é maior do que o raio de 14,05% medido anteriormente, possibilitando a ocorrência de um sistema instável).

Conclui-se que, para o sistema massa-mola apresentado, considerando as massas m_1 e m_4 como parâmetros sensíveis, o controlador LQG apresenta um fraco desempenho diante das variações paramétricas e uma baixa robustez em estabilidade. Apesar disso, sabe-se que a estrutura LQG apresenta um excelente desempenho quando os valores são nominais.

Outra forma de visualizar a robustez em desempenho e em estabilidade do sistema é através do diagrama de sensibilidade dos pólos. O diagrama é obtido calculando os pólos do sistema em malha fechada para variações dos parâmetros sobre raios determinados e traçando-os no plano s . Na FIG. 4.4 é apresentado o diagrama do sistema para variações paramétricas sobre os círculos com raio de 1%, 7,5% e 15%. O traçado, no caso de dois parâmetros sensíveis, apresenta contornos fechados envolventes para cada nível de perturbação. Os diagramas

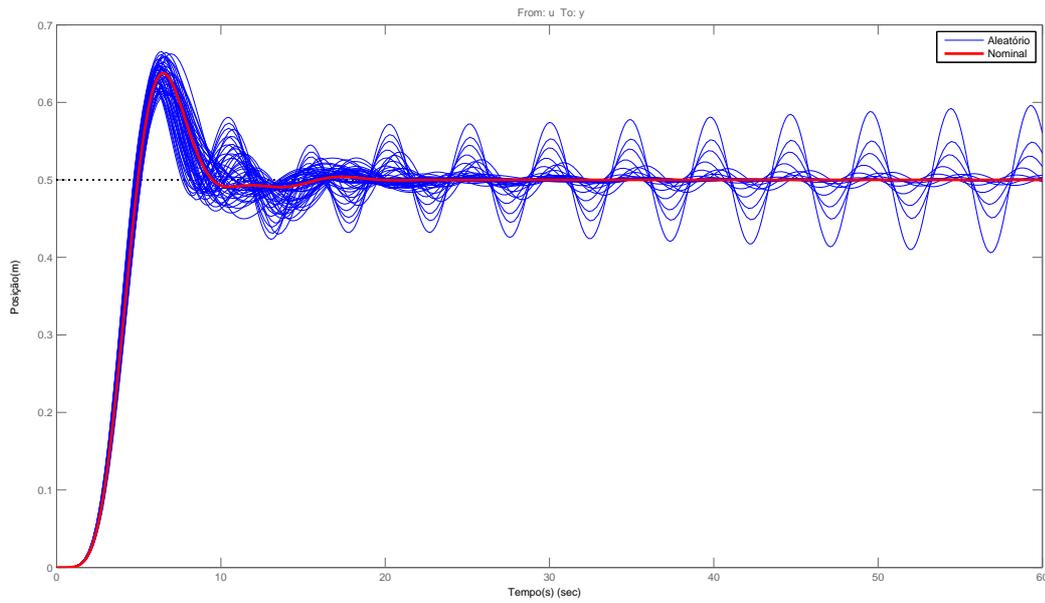


FIG4.3: Resposta ao degrau do sistema massa-mola contínuo com o controlador LQG.

de sensibilidade dos pólos apresentados neste trabalho, devido à simetria em relação ao eixo real, mostram apenas a área correspondente a valores positivos do eixo imaginário.

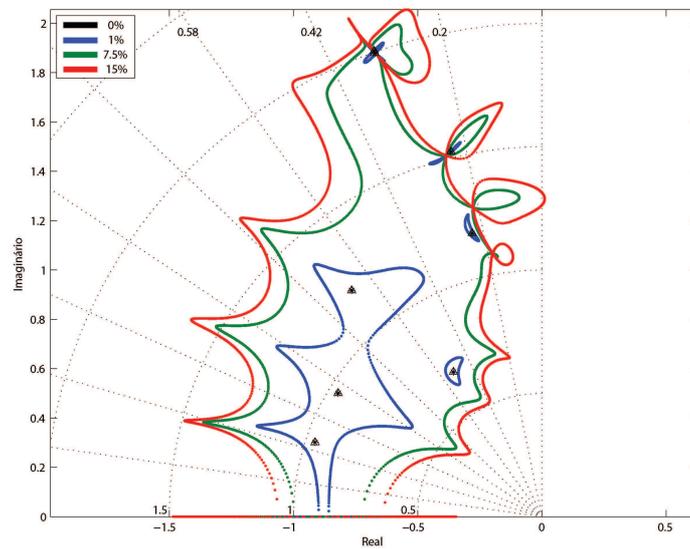


FIG4.4: Diagrama de sensibilidade dos pólos do sistema massa-mola contínuo com o controlador LQG

Observa-se uma grande sensibilidade dos pólos, mesmo para variações de 1%. Como os pólos nominais, em preto na figura, possuem um desempenho ótimo, o grande distanciamento

dos pólos dos sistemas perturbados representam uma baixa robustez em desempenho. A pequena robustez em estabilidade é visualizada observando-se os pólos dos sistemas perturbados em 15% que atravessam para o semiplano direito do plano complexo (s) em determinadas direções de perturbação.

4.1.2 CONTROLADOR ÓTIMO NO SISTEMA DISCRETO

Esta seção analisará o controlador LQG do sistema apresentado na seção 4.1, discretizado com período de amostragem de 0,1s. Serão feitas as mesmas considerações sobre os parâmetros sensíveis e utilizados os mesmos valores do caso contínuo.

O vetor de realimentação de estados estimados obtido pela síntese LQR é:

$$K_{LQR_d} = \begin{bmatrix} 1,8461 & 2,2058 & 0,0203 & 1,6646 & -0,0404 & 0,7697 & -0,0487 & 0,8168 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Na FIG. 4.5 pode-se verificar que o espaço paramétrico do sistema discreto é muito semelhante ao espaço paramétrico do sistema contínuo e o raio da hipersfera obtido foi 14,05%, idêntico ao caso contínuo. Este fato mostra que o período de amostragem igual a 0,1s está bem adaptado à dinâmica do sistema em malha fechada. Pode-se supor que esta semelhança desaparecerá quanto maior for o período.

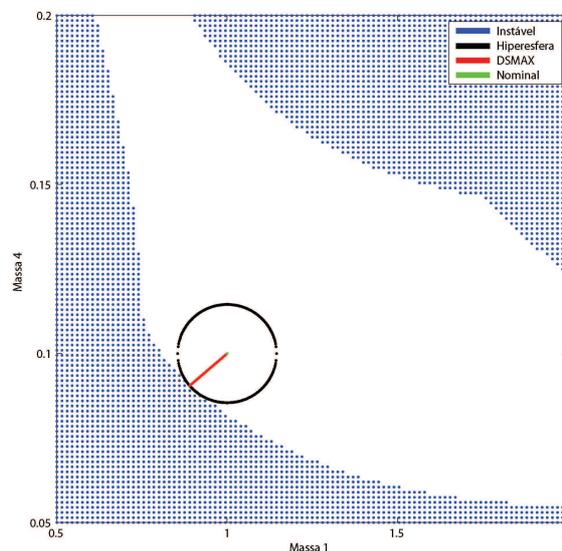


FIG4.5: Espaço paramétrico do sistema massa-mola com o controlador LQG.

A FIG. 4.6 apresenta a resposta ao degrau para o sistema discreto e contínuo (seção 4.1.1) com o controlador LQG. Foi efetuado um ajuste na saída utilizando um ganho estático, de modo

a tornar a resposta em estado estacionário dos dois sistemas iguais e facilitar a comparação das curvas. Observa-se o mesmo comportamento da resposta para os dois sistemas.

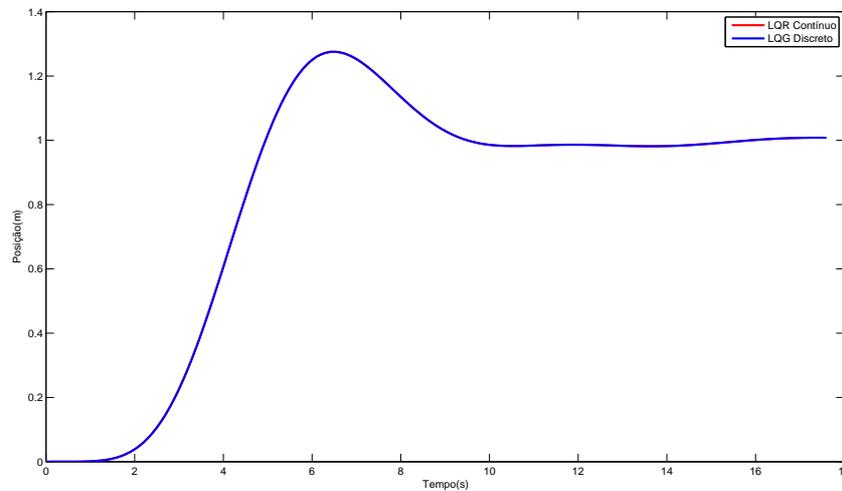


FIG.4.6: Resposta ao degrau do sistema massa-mola com os controlares LQG contínuo e discreto.

O diagrama de sensibilidade dos pólos, na FIG. 4.7, também é semelhante ao diagrama do sistema contínuo. Quando o período de amostragem tende para zero, o ponto $(1, 0)$ do plano complexo z no domínio discreto é equivalente à origem do plano s complexo no domínio contínuo. O círculo unitário no plano z é equivalente ao eixo imaginário do plano s . Como o período de amostragem utilizado é muito pequeno em relação às frequências do sistema, observa-se uma tendência para a equivalência descrita entre os planos z e s quando o período de amostragem tende para zero.

4.1.3 CONTROLADOR ROBUSTECIDO NO SISTEMA DISCRETO

O controlador LQG para o sistema massa-mola não garante a estabilidade para variações, nos parâmetros sensíveis m_1 e m_4 , em um raio maior do que 14,05% e variações nestes parâmetros causam uma grande perda de desempenho como visto na FIG. 4.3.

Será aplicada a técnica de robustecimento de controladores do método PRCBI, apresentada na seção 3.8, ao sistema massa mola com um controlador LQG. O vetor β de parâmetros livres do controlador será o vetor de ganhos de realimentação dos estados estimados. O valor inicial do vetor β será o próprio vetor K_{LQR_d} . Do ponto de vista do custo LQR, trata-se de um bom ponto inicial para robustecer o controlador mantendo um bom desempenho.

O vetor de ganhos de realimentação dos estados estimados foi obtido otimizando-se o

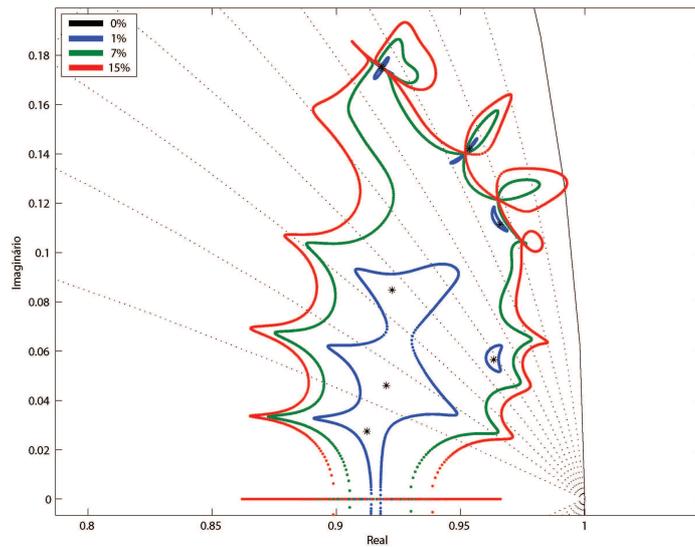


FIG.4.7: Diagrama de sensibilidade dos pólos no sistema massa-mola discreto com o controlador LQG.

critério PRCBI até o raio da hipersfera ser maior do que 40%. O seu valor é:

$$K_{PRCBI_d} = \begin{bmatrix} 0,3977 & 1,9566 & -0,0100 & 0,0139 & -0,0010 & -0,3730 & -0,0019 & 0,4068 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Na FIG. 4.8 é apresentado o espaço paramétrico obtido utilizando o vetor da EQ. 4.4. O raio da hipersfera de estabilidade foi calculado utilizando os métodos do *GRID* e *PRABI*, apresentado na seção 3.7, tendo sido obtidos os valores de 44,22% e 44,00%, respectivamente.

Um detalhe da FIG. 4.8 é ampliado na FIG. 4.9, permitindo visualizar a busca pela fronteira da instabilidade. Pode-se notar a correção da direção de busca, devido aos pontos aleatórios testados pelo método. Na primeira iteração a *DSMAX* calculada (em verde) está incorreta e o ponto escolhido (em vermelho), entre os pontos aleatórios (em ciano), é uma melhor aproximação. O erro na *DSMAX* calculada é causado por irregularidades na hipersuperfície do traço de $G_{\theta_0}^{-1}$ em função do espaço paramétrico, como apresentado na seção 3.6. O objetivo aqui é perceber que a trajetória obtida pelo algoritmo de busca da *DSMAX*, desenvolvido neste trabalho, se aproxima bastante do verdadeiro raio da hipersfera, resultado este, que tem sido o principal alvo do método de análise *PRABI*.

A FIG. 4.10 apresenta a resposta ao degrau do sistema com o controlador ótimo e robustecido em estabilidade. Verifica-se que o desempenho do controlador robustecido é inferior, embora o raio da hipersfera de estabilidade seja 213% maior.

No diagrama de sensibilidade dos pólos, apresentado na FIG. 4.11, verifica-se uma menor sensibilidade às variações dos parâmetros. Na FIG. 4.7 que apresenta o mesmo diagrama para

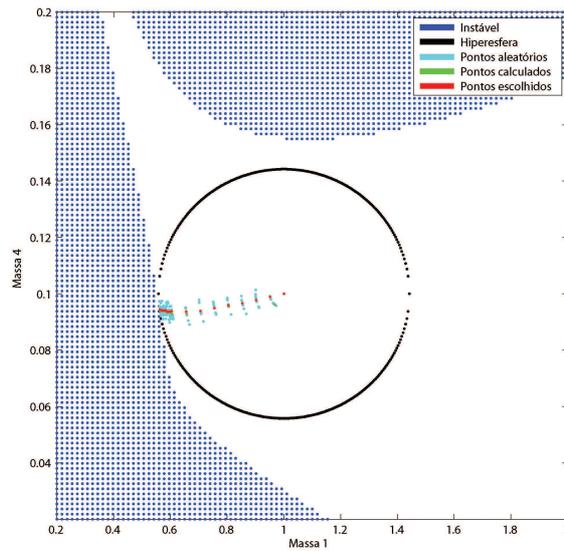


FIG.4.8: Espaço paramétrico do sistema massa-mola discreto com o controlador PRCBI.

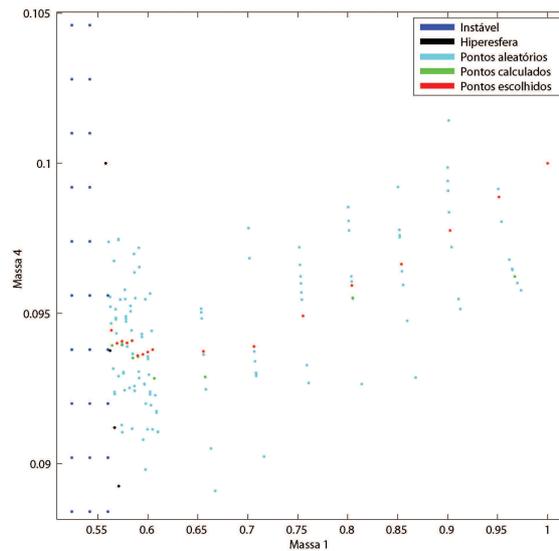


FIG.4.9: Ampliação de parte da FIG. 4.8

o controlador LQG, as perturbações causam uma maior movimentação dos pólos. A pequena movimentação caracteriza uma maior robustez em desempenho do sistema. E a robustez em estabilidade é caracterizada pela perturbação de 15%, com os pólos permanecendo no interior do círculo unitário.

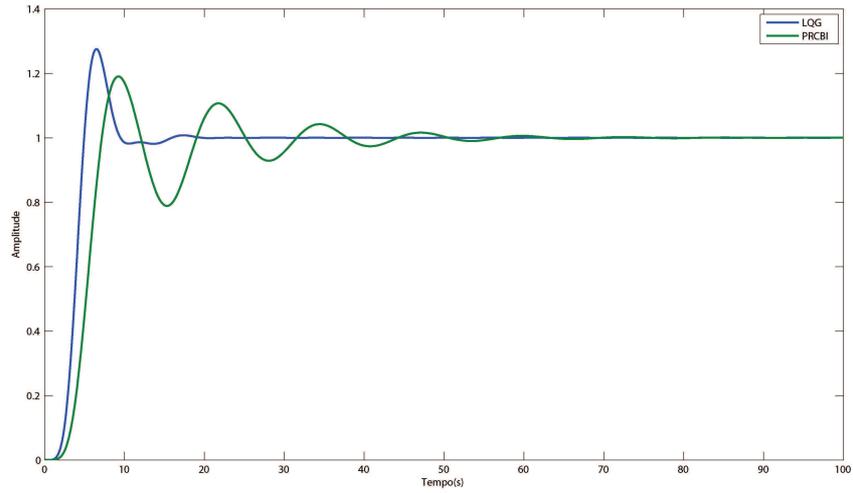


FIG4.10: Resposta ao degrau do sistema massa-mola discreto com os controladores LQG e PRCBI.

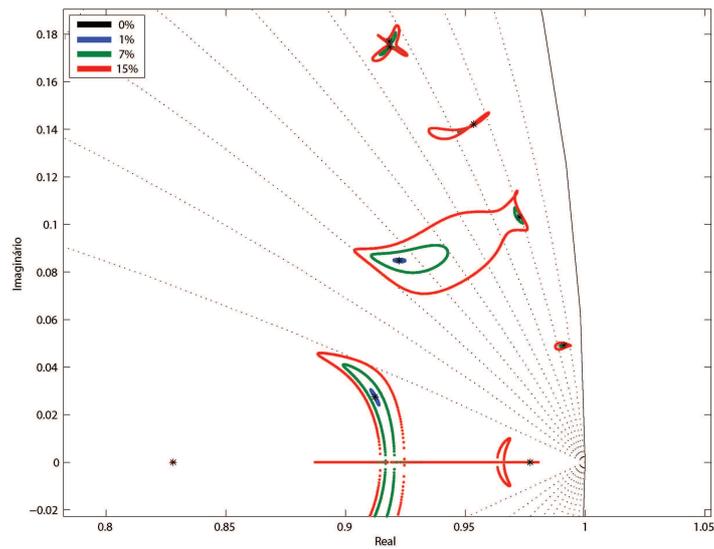


FIG4.11: Diagrama de sensibilidade dos pólos do sistema massa-mola discreto com o controlador PRCBI.

4.1.4 CONTROLADOR ROBUSTECIDO NO SISTEMA CONTÍNUO

Aplicando a técnica de robustecimento ao sistema contínuo, foi obtido o vetor de ganhos da realimentação dos estados estimados da EQ. 4.5.

$$K_{PRCBI_c} = \begin{bmatrix} 0,1071 & 1,3684 & -0,0085 & 0,0483 & -0,0011 & -0,6043 & -0,0022 & -0,0316 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

O espaço paramétrico é apresentado na FIG. 4.12. O raio da hipersfera de estabilidade obtido pelo método *GRID* foi 42,45% e pelo método *PRABI* 42,31%. Este resultado é semelhante ao resultado obtido para o caso discreto, apesar da mudança das regiões de estabilidade do espaço paramétrico.

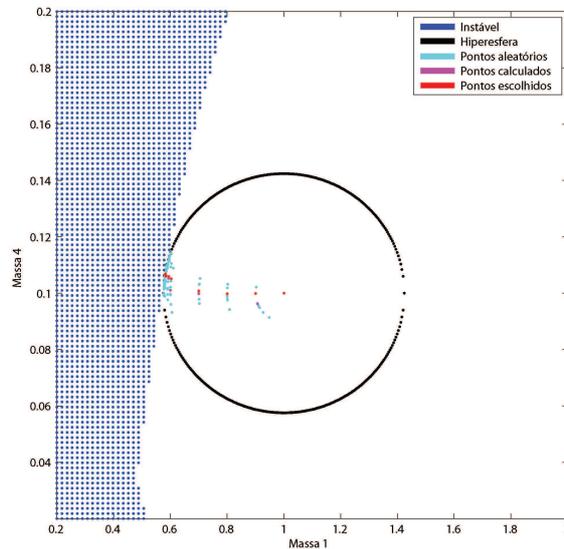


FIG.4.12: Espaço paramétrico do sistema massa-mola contínuo com o controlador PRCBI.

A resposta ao degrau do sistema com o controlador robustecido é apresentada na FIG. 4.13 junto com a resposta obtida com o controlador ótimo. O desempenho do controlador robustecido é inferior ao desempenho do controlador ótimo, mas o aumento da robustez em estabilidade obtido garante a estabilidade do sistema para maiores perturbações dos parâmetros sensíveis.

Foram obtidos 50 sistemas aleatórios perturbando os parâmetros sensíveis em até 12% em torno dos seus valores nominais, e as repostas ao degrau são apresentadas na FIG. 4.14. Os desempenhos dos sistemas perturbados são semelhantes ao desempenho do sistema nominal, mostrando uma melhora na robustez paramétrica em desempenho em relação às respostas obtidas com o controlador LQG.

Na FIG. 4.15 é apresentado o diagrama de sensibilidade dos pólos do sistema. Verifica-se que não há grandes variações nas posições dos pólos. Comparando com o controlador LQG, o controlador PRCBI apresentou menores variações nos pólos, caracterizando uma melhor robustez paramétrica em desempenho e para todas as perturbações aplicadas o sistema permaneceu estável, caracterizando a melhora na robustez paramétrica em estabilidade.

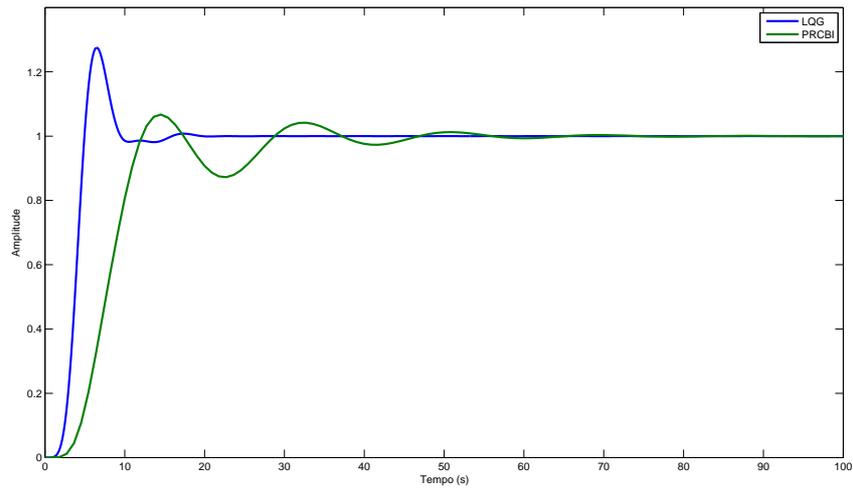


FIG4.13: Resposta ao degrau do sistema massa-mola contínuo com os controladores LQG e PRCBI.

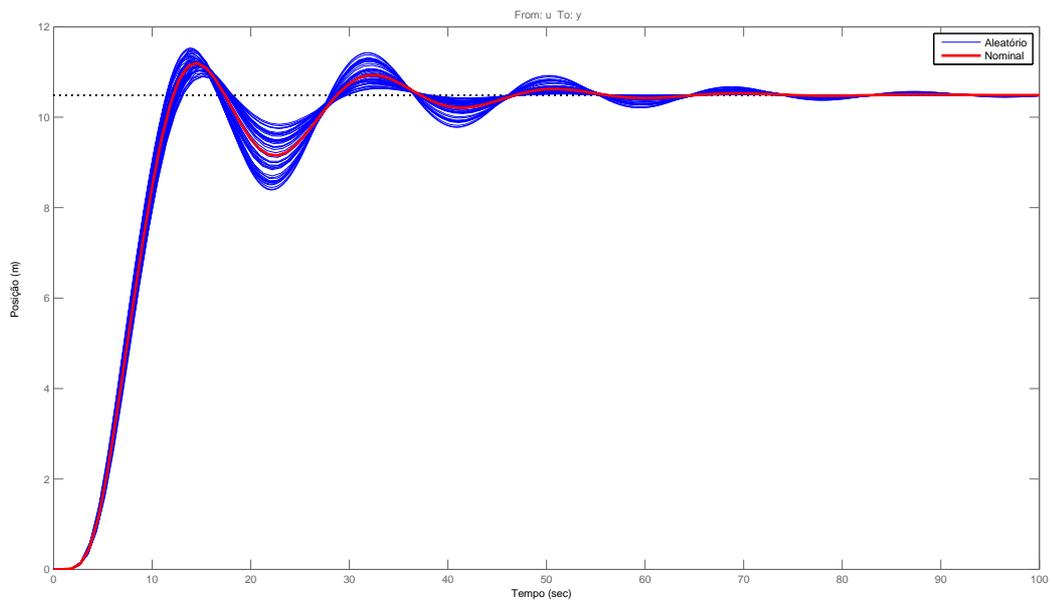


FIG4.14: Resposta ao degrau do sistema massa-mola discreto com o controlador PRCBI.

4.2 SÍNTESE DE UM CONTROLADOR ROBUSTO PARA O MODELO DE UM MÍSSIL AR-AR

Nesta seção será aplicada a técnica de robustecimento de controladores no modelo de um míssil ar-ar. O sinal de controle atuará no ângulo do profundor para controlar os movimentos de arfagem em torno do seu centro de gravidade. O diagrama físico do míssil é apresentado na

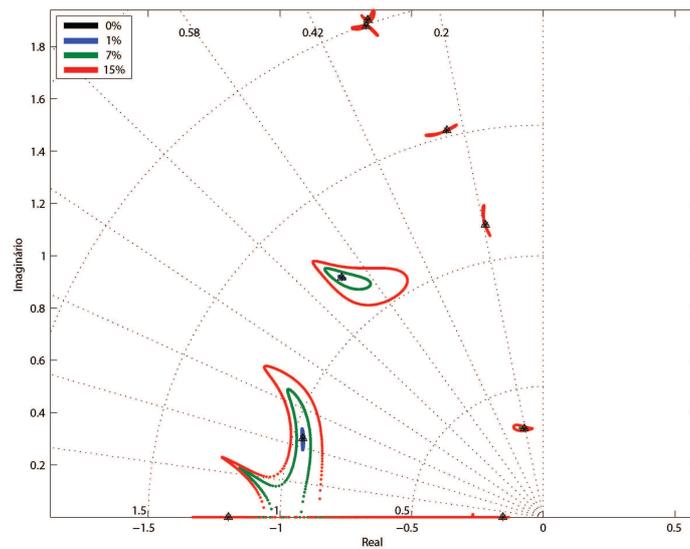


FIG4.15: Diagrama de sensibilidade dos pólos do sistema massa-mola contínuo com o controlador PRCBI.

FIG. 4.16.

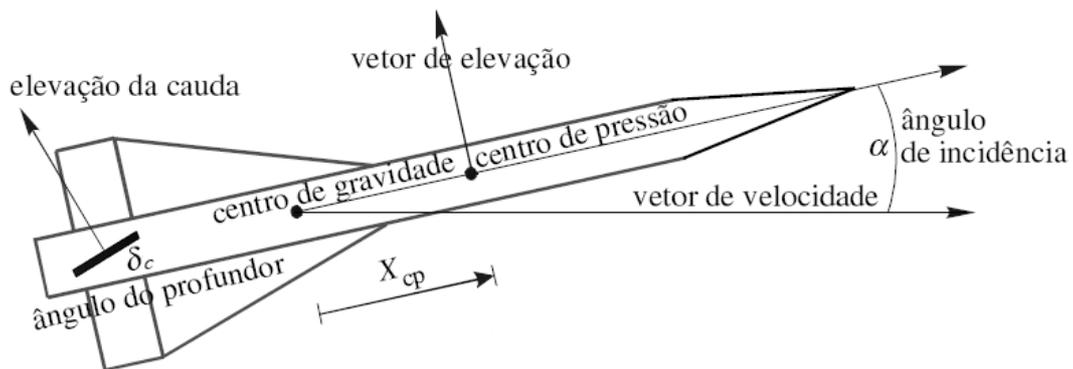


FIG4.16: Diagrama físico do míssil ar-ar.

Uma descrição não-linear da dinâmica do míssil e do atuador no plano longitudinal ⁷ é apresentada na EQ. 4.6 (REICHERT, 1992; NICHOLS et al., 1993).

⁷Supõe-se verdadeiro o desacoplamento dos eixos de rumo e de rolagem.

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 & Z_\delta & 0 \\ M_\alpha & 0 & M_\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 & -2\zeta\omega_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_a^2 \end{bmatrix} \delta_c \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} \eta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_\alpha & 0 & N_\delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix},$$

onde:

$$\begin{aligned}
Z_\alpha &= K_\alpha M \cos \alpha [a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n (2 - M/3)] \\
Z_\delta &= K_\alpha M d_n \cos \alpha \\
M_\alpha &= K_q M^2 [a_m \alpha^2 + b_m |\alpha| + c_m (-7 + 8M/3)] \\
M_\delta &= K_q M^2 d_m \\
N_\alpha &= K_z M^2 [a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n (2 - M/3)] \\
N_\delta &= K_z M^2 d_n,
\end{aligned} \quad (4.7)$$

e os estados $\alpha(t)$, $q(t)$, $\delta(t)$ e $\dot{\delta}(t)$ correspondem respectivamente ao ângulo de ataque (em $^\circ$), a velocidade angular em arfagem (em $^\circ/s$), o ângulo do profundor (em $^\circ$) e sua derivada (em $^\circ/s$). A aceleração vertical $\eta(t)$ (em g) e a velocidade angular em arfagem são as medidas, enquanto que $\delta_c(t)$ representa o ângulo comandado (em $^\circ$).

Para as simulações não estacionárias a velocidade variável, a trajetória do número de Mach $M(t)$ no tempo é gerada pela EQ. 4.8.

$$\dot{M} = \frac{1}{v_s} [-|\eta|g \sin(|\alpha|) + A_x M^2 \cos(\alpha)] \quad (4.8)$$

que dá um perfil de velocidade bastante realista.

O modelo não-linear da EQ. 4.6 representa um míssil que voa a uma altitude de 20000 pés. Deve-se observar que ele é completamente caracterizado pela variável exógena $M(t)$ e pelo ângulo de ataque $\alpha(t)$, que é responsável pela não linearidade. Esse modelo é também simétrico em relação a $\alpha = 0$. As descrições e os valores numéricos das constantes são fornecidas abaixo:

$$\begin{aligned}
K_\alpha &= 0,7P_0 \frac{180S}{\pi m v_s} \\
K_q &= 0,7P_0 \frac{180Sd}{\pi I_y} \\
K_z &= 0,7P_0 \frac{S}{mg} \\
A_x &= 0,7P_0 \frac{SC_a}{m} \\
P_0 &= 973,3 \text{ lbs/ft}^2 && \text{- pressão estática à 20 000 pés} \\
S &= 0,44 \text{ ft}^2 && \text{- superfície de referência} \\
m &= 13,98 \text{ slugs} && \text{- massa} \\
v_s &= 1036,4 \text{ ft/s} && \text{- velocidade do som a 20 000 pés} \\
d &= 0,75 \text{ ft} && \text{- diâmetro} \\
I_y &= 182,5 \text{ slug.ft}^2 && \text{- momento de inércia em arfagem} \\
C_a &= -0,3 && \text{- coeficiente de arrasto} \\
\zeta &= 0,7 && \text{- fator de amortecimento do atuador} \\
\omega_a &= 150 \text{ rad/s} && \text{- frequência natural não-amortecida do atuador} \\
g &= 32,2 \text{ ft/s}^2 && \text{- aceleração da gravidade} \\
a_n &= 0,000103 \text{ grau}^{-3} && a_m = 0,000215 \text{ grau}^{-3} \\
b_n &= -0,00945 \text{ grau}^{-2} && b_m = -0,0195 \text{ grau}^{-2} \\
c_n &= -0,1696 \text{ grau}^{-1} && c_m = 0,051 \text{ grau}^{-1} \\
d_n &= -0,034 \text{ grau}^{-1} && d_m = -0,206 \text{ grau}^{-1}
\end{aligned}$$

Para a linearização do modelo do sistema em torno de um ponto de equilíbrio dado:

$$\begin{aligned}
x_0 &= [\alpha_0, q_0, \delta_0, \dot{\delta}_0]^T, \\
u_0 &= \delta_{c0} = \delta_0,
\end{aligned}$$

desenvolvem-se as equações não-lineares da EQ. 4.6 em séries de Taylor:

$$\dot{\alpha} = \mathbf{f}(\alpha, q, \delta, M) = \alpha Z_\alpha + \delta Z_\delta + q, \quad (4.9)$$

$$\dot{q} = \mathbf{g}(\alpha, \delta, M) = \alpha M_\alpha + \delta M_\delta, \quad (4.10)$$

$$\eta = \mathbf{h}(\alpha, \delta, M) = \alpha N_\alpha + \delta N_\delta, \quad (4.11)$$

Desprezando-se os termos de ordem maior ou igual a 2 e considerando que $\dot{q}_0 = 0$ e, por conseguinte, que ⁸:

$$\delta_0 = \frac{-1}{d_m} \left[a_m \alpha_0^3 + \text{sign}(\alpha_0) b_m \alpha_0^2 + c_m (-7 + 8M/3) \alpha_0 \right], \quad (4.12)$$

⁸Note que δ_0 é uma função de α_0 e de M e seu valor é obtido a partir da EQ. 4.10 considerando-se a condição de regime permanente, $\dot{q}_0 = 0$.

obtm-se a representao de estado linear:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta &= \begin{bmatrix} A_{11} & 1 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 & -2\zeta\omega_a \end{bmatrix} x_\delta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_a^2 \end{bmatrix} \delta_c \\ y_\delta &= \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_\delta. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Nesse modelo, as novas variveis, x_δ e y_δ , traduzem variaes relativas:

$$x_\delta = \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_0 \\ q - q_0 \\ \delta - \delta_0 \\ \dot{\delta} - \dot{\delta}_0 \end{bmatrix} = x - x_0, \quad y_\delta = \begin{bmatrix} \eta - \eta_0 \\ q - q_0 \end{bmatrix} = y - y_0,$$

e os elementos das matrizes so unicamente determinados por α_0 e M :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \right]_{x_0, u_0} = K_\alpha M \cos \alpha_0 \left[3a_n \alpha_0^2 + 2b_n |\alpha_0| + c_n (2 - M/3) \right] - \\ &\quad K_\alpha M \frac{\pi}{180} \sin \alpha_0 \left[a_n \alpha_0^3 + \text{sign}(\alpha_0) b_n \alpha_0^2 + c_n (2 - M/3) \alpha_0 \right] + \\ &\quad K_\alpha M \frac{\pi}{180} \sin \alpha_0 \frac{d_n}{d_m} \left[a_m \alpha_0^3 + \text{sign}(\alpha_0) b_m \alpha_0^2 + c_m (-7 + 8M/3) \alpha_0 \right], \\ A_{13} &= \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \delta} \right]_{x_0, u_0} = K_\alpha M d_n \cos \alpha_0, \\ A_{21} &= \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha} \right]_{x_0, u_0} = K_q M^2 \left[3a_m \alpha_0^2 + 2b_m |\alpha_0| + c_m (-7 + 8M/3) \right], \\ A_{23} &= \left[\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \delta} \right]_{x_0, u_0} = K_q M^2 d_m, \\ C_{11} &= \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \alpha} \right]_{x_0, u_0} = K_z M^2 \left[3a_n \alpha_0^2 + 2b_n |\alpha_0| + c_n (2 - M/3) \right], \\ C_{13} &= \left[\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \delta} \right]_{x_0, u_0} = K_z M^2 d_n. \end{aligned}$$

Serao considerados os valores $M = 2$ e $\alpha_0 = 15^\circ$.

4.2.1 CONTROLADOR OTIMO

Será calculado e analisado um controlador LQG para o míssil com o objetivo de ser referência em relao ao desempenho e fornecer um ponto de partida para a síntese do controlador

robusto à variações paramétricas. Como parâmetros sensíveis do modelo, serão definidos a pressão estática P_0 e o número de Mach M por serem parâmetros normalmente sujeitos a variações.

O ganho ótimo, calculado pela síntese LQR para o modelo nominal, é apresentado na EQ. 4.14.

$$K_{LQR} = \begin{bmatrix} 9,6539 & -0,2293 & 4,2181 & 0,9909 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

O espaço paramétrico do sistema, apresentado na FIG. 4.17, evidencia a grande sensibilidade do sistema aos parâmetros escolhidos. A FIG. 4.18 exibe um detalhe da FIG. 4.17, evidenciando a hiperesfera de sensibilidade. O raio da hiperesfera de estabilidade foi calculado em 1,27%.

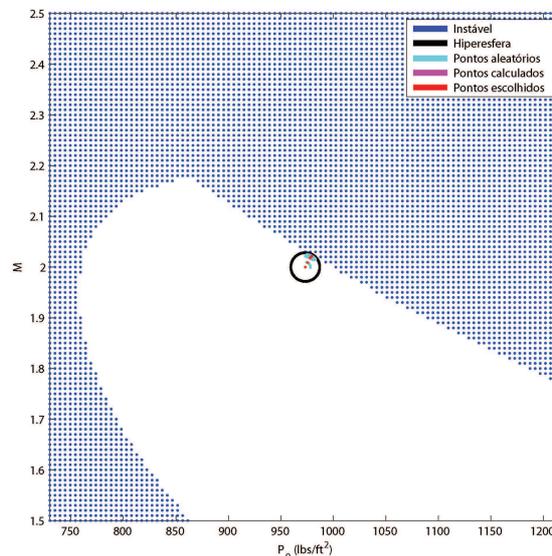


FIG4.17: Espaço paramétrico do míssil ar-ar com o controlador LQG.

A FIG. 4.19 apresenta a resposta ao impulso para o sistema nominal e para 50 sistemas com variações aleatórias nos parâmetros sensíveis, considerando variações máximas de 1,5% em torno dos seus valores nominais. Nota-se na resposta uma pequena robustez em desempenho do sistema, além da presença de sistemas instáveis pois o limite das variações é superior ao raio da hiperesfera de estabilidade.

Devido o sistema possuir um pólo real negativo e muito afastado, com módulo muito maior do que os outros pólos, o diagrama de sensibilidade não permite avaliar a sensibilidade de todos os pólos em um mesmo gráfico. A FIG. 4.20 mostra o diagrama com todos os pólos e a FIG. 4.21 mostra um detalhe contendo o pólo que torna o sistema instável com perturbações de 2%,

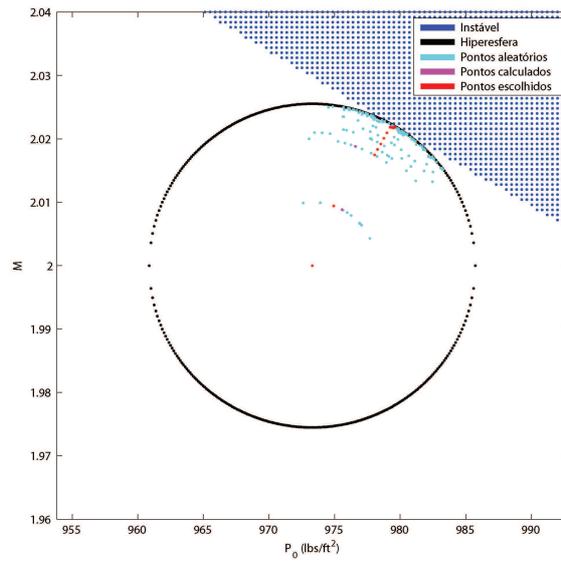


FIG.4.18: Detalhe da FIG. 4.17.

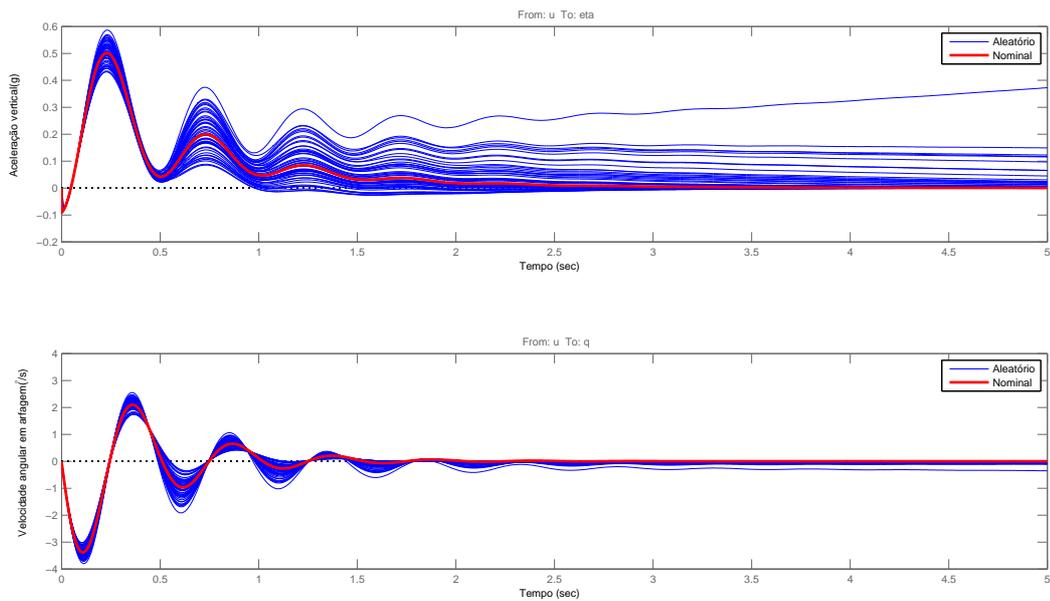


FIG.4.19: Resposta ao degrau para variações aleatórias limitadas a 1,5% com o controlador LQG.

o que caracteriza uma pequena robustez paramétrica em estabilidade. Verifica-se também no gráfico uma grande sensibilidade dos pólos, pois os mesmos se movimentam com pequenas perturbações de 0,5%.

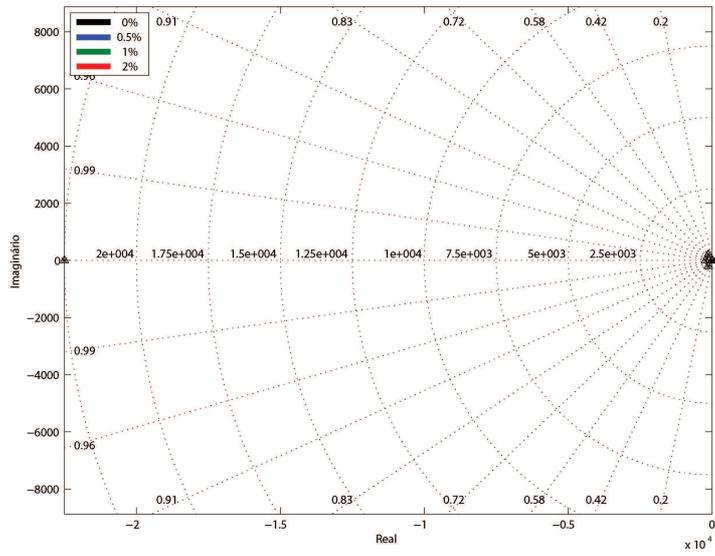


FIG.4.20: Diagrama de sensibilidade dos pólos do míssil ar-ar com o controlador LQG.

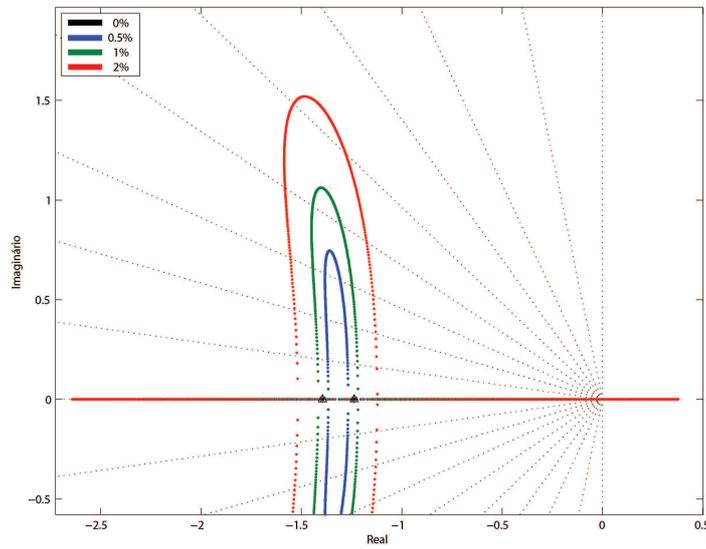


FIG.4.21: Detalhe do diagrama de sensibilidade dos pólos do míssil ar-ar com o controlador LQG.

4.2.2 CONTROLADOR ROBUSTO

Como visto na seção 4.2.1, o míssil ar-ar com o controlador LQG é um sistema muito pouco robusto às variações paramétricas analisadas. Como P_0 e M são parâmetros sensíveis, o controlador LQG não é aplicável e torna-se necessário sintetizar um controlador robusto para o sistema.

O modelo do sistema, apresentado na seção 4.2, possui duas saídas. A síntese estudada neste trabalho não apresenta nenhuma limitação quanto à dimensão do sistema e é aplicada normalmente neste exemplo. O vetor de ganhos de realimentação dos estados estimados obtido é apresentado na EQ. 4.15.

$$K_{PRCBI} = \begin{bmatrix} 9,9242 & -18,3935 & 3,2232 & 0,1914 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

O espaço paramétrico do sistema robustecido, apresentado na FIG. 4.22, mostra uma melhora significativa da robustez paramétrica em estabilidade. O raio da hipersfera de estabilidade obtido foi de 18,23%, 1335% maior do que o raio obtido para o controlador LQG.

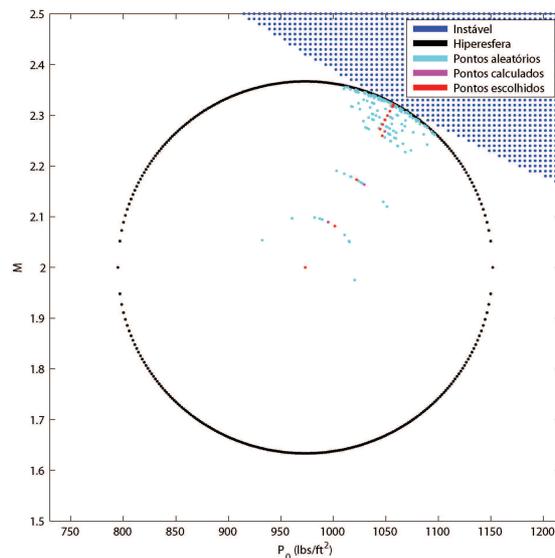


FIG4.22: Espaço paramétrico do míssil ar-ar com o controlador PRCBI.

Variando os parâmetros sensíveis em até 1,5% de seus valores nominais, como feito na FIG. 4.19, a FIG. 4.23 mostra uma melhora significativa da robustez em desempenho do sistema. Os sistemas perturbados apresentam um comportamento muito semelhante ao sistema nominal.

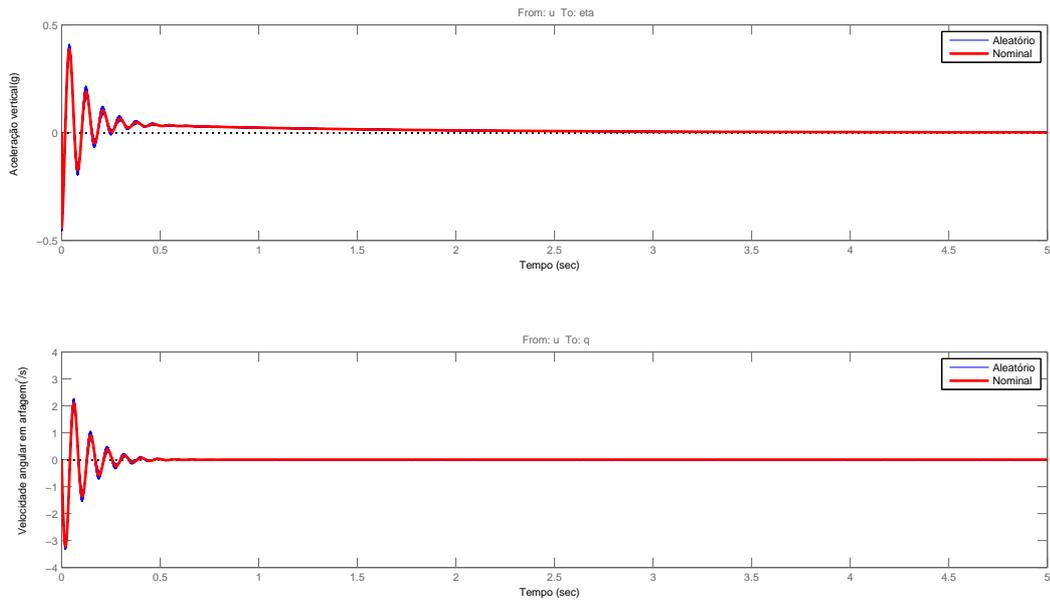
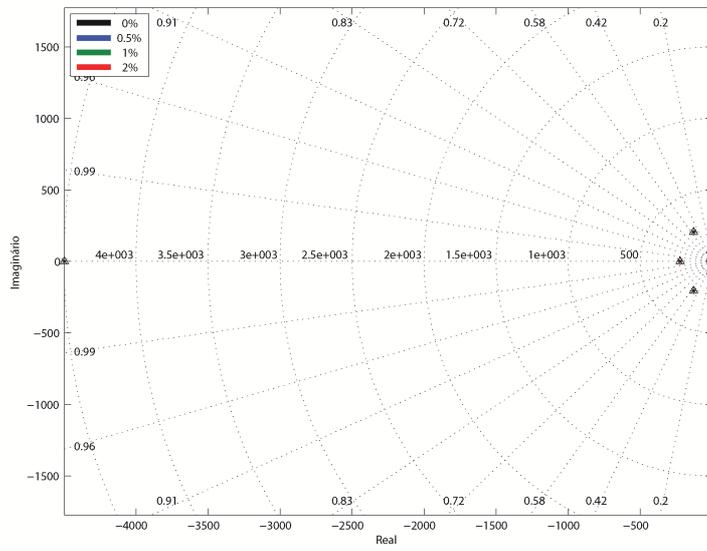


FIG.4.23: Resposta ao degrau para variações aleatórias limitadas a 1,5% no míssil ar-ar com o controlador PRCBI.

Na FIG. 4.24 o diagrama de sensibilidade do sistema robustecido também apresenta um pólo real muito maior do que os outros pólos. Então é mostrado na FIG. 4.25 um detalhe do pólo que tornava o sistema instável utilizando o controlador LQG. Comparando com o diagrama da FIG. 4.21 pode-se verificar a melhora da robustez em desempenho e estabilidade. Na FIG. 4.26 é apresentado um detalhe de um dos dois pólos complexos conjugados que tornam o sistema instável com o controlador robusto, para perturbações nos parâmetros sensíveis de 20%. Neste diagrama são feitas perturbações de 5%, 10%, 15% e 20%.



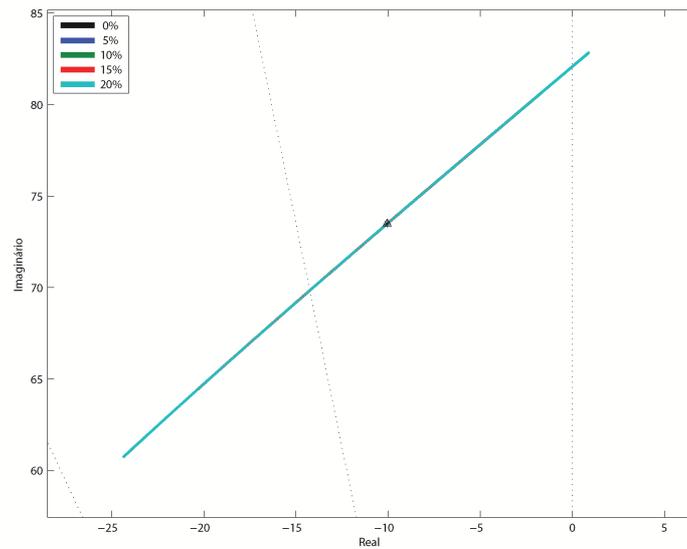


FIG.4.26: Detalhe do diagrama de sensibilidade dos pólos do míssil ar-ar com o controlador PRCBI para perturbações maiores.

4.3 SÍNTESE DE CONTROLADOR ROBUSTO PARA UM HELICÓPTERO DE PEQUENA ESCALA EM VÔO PAIRADO

Nesta seção, a técnica de robustecimento de controladores será aplicada ao modelo de um helicóptero de pequena escala, utilizando os parâmetros do helimodelo Yamaha R-50 na condição de vôo pairado. O modelo utilizado com 13 estados e 4 entradas é apresentado na EQ. 4.16 (METTLER, 2003).



FIG.4.27: Helicóptero Yamaha R-50.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \tau_f \dot{a} \\ \tau_f \dot{b} \\ \dot{w} \\ \dot{r} \\ \dot{r}_{fb} \\ \tau_s \dot{c} \\ \tau_s \dot{d} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_u & 0 & 0 & 0 & 0 & -g & X_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_v & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & Y_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_u & L_v & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_b & L_w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_u & M_v & 0 & 0 & 0 & 0 & M_a & 0 & M_w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau_f & 0 & 0 & -1 & A_b & 0 & 0 & 0 & A_c & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_f & 0 & 0 & 0 & B_a & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_a & Z_b & Z_w & Z_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_v & N_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_w & N_r & N_{r_{fb}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_r & K_{r_{fb}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tau_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ q \\ \phi \\ \theta \\ a \\ b \\ w \\ r \\ r_{fb} \\ c \\ d \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{lat} & B_{lat} & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{lat} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{lon} & B_{lon} & 0 & 0 & 0 & C_{lon} & 0 \\ 0 & Y_{ped} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{ped} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{col} & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{col} & N_{col} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta_{lat} \\ \delta_{lon} \\ \delta_{ped} \\ \delta_{col} \end{bmatrix} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

onde os estados representam:

- u, v e w : velocidades nas coordenadas da fuselagem;
- p, q e r : taxas angulares de rolagem, arfagem e guinada;
- ϕ e θ : ângulos de atitude de rolagem e arfagem;
- a, b (c, d): ângulos de batimento longitudinal e lateral do rotor principal (barra estabilizadora);
- r_{bf} : estado adicional usado para o sistema de amortecimento da guinada.

As entradas do modelo são descritas abaixo (SILVEIRA, 2006):

- δ_{lat} : variação no cíclico lateral (u_{lat}). Comanda o plano de rotação do rotor principal lateralmente, em torno do eixo longitudinal (rolagem);
- δ_{lon} : variação no cíclico longitudinal (u_{lon}). Comanda o plano de ação do rotor principal longitudinalmente, em torno do eixo lateral (arfagem);

- δ_{ped} : variação no pedal ou coletivo do rotor de cauda (u_{ped}). Varia o ângulo das pás do rotor de cauda e controla o movimento em torno do eixo vertical (guinada);
- δ_{col} : variação no passo coletivo (u_{col}). Varia o ângulo das pás do rotor principal e relaciona-se à potência consumida pelo rotor e à força de sustentação.

As saídas escolhidas foram as taxas angulares de rolagem, arfagem e guinada: p , q e r . O modelo parte das equações básicas de um corpo rígido e é incrementado com uma dinâmica adicional, visando obter modelos mais precisos. A dinâmica adicional considera os acoplamentos do rotor principal e fuselagem, rotor principal e barra estabilizadora e também um sistema de amortecimento de guinada. Os detalhes da modelagem e o significado de cada parâmetro são apresentados em METTLER (2003). A TAB. 4.3 apresenta os parâmetros identificados em METTLER et al. (2002) para a condição de vôo pairado, bem como duas métricas estatísticas que quantificam a qualidade da identificação: o percentual de Cramer-Rao ($CR\%$) e a insensibilidade ($Insens.\%$).

A escolha dos parâmetros sensíveis, sendo que o controlador deverá ser robusto a suas variações, foi feita com base nos valores das métricas estatísticas apresentados na TAB 4.3. Serão projetados dois controladores robustos. O primeiro será robusto a variações em dois parâmetros, de maneira a permitir a visualização do espaço paramétrico. Em seguida será projetado um controlador robusto a variações em cinco parâmetros, com a finalidade de demonstrar que a técnica é aplicável em casos onde haja mais do que dois parâmetros sensíveis.

4.3.1 CONTROLADOR LQG

De acordo com a TAB. 4.3, os cinco parâmetros que apresentam a menor insensibilidade são M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s , onde M_a e L_b são derivadas de batimento representando os momentos do rotor, B_d e A_c são constantes relacionadas aos movimentos de batimento lateral e longitudinal da barra estabilizadora e τ_s é a constante de tempo da barra estabilizadora. Como o sistema é muito sensível às variações nestes parâmetros, que os tornam fáceis de identificar, espera-se que um controlador LQG seja pouco robusto às suas variações.

TAB.4.3: Parâmetros identificados em vôo pairado - Yamaha R-50.

Parâmetro	Valor	CR%	Insens.%
τ_f	0,04631	10,87	1,64
hcg	-0,4109	6,249	1,775
τ_s	-0,3415	7,346	0,8280
X_u	-0,05046	62,25	29,60
X_θ, X_a	-32,20	limitado a g	
Y_v	-0,1539	22,92	10,90
Y_ϕ, Y_b	32,20	limitado a g	
L_u	-0,1437	12,30	3,071
L_v	0,1432	19,49	6,541
L_w	—	—	—
L_b	166,1	1,865	0,5996
M_u	-0,05611	20,19	5,626
M_v	-0,05850	14,49	4,230
M_w	—	—	—
M_a	82,57	6,283	0,5918
B_a	0,3681	10,48	1,125
B_d	0,7103	4,110	0,7824
A_b	-0,1892	11,67	4,469
A_c	0,6439	9,486	0,8188
Z_b	-131,2	2,765	1,619
Z_a	-9,748	19,86	8,256
Z_w	-0,6141	10,50	4,465
Z_r	0,9303	8,151	2,754
N_p	-3,525	14,22	3,664
N_v	0,03013	32,51	9,082
N_w	0,08568	14,14	5,091
N_r	-4,129	9,708	2,785
N_{rfb}	-33,07	$N_{rfb} = N_{ped}$	
K_r	2,163	4,417	1,736
K_{rfb}	-8,258	$K_{rfb} = 2N_r$	
B_{lat}	0,1398	7,060	1,612
B_{lon}	0,01380	13,35	4,214
A_{lat}	0,03127	7,886	2,064
A_{lon}	-0,1004	9,205	1,175
Z_{col}	-45,84	4,315	1,1839
M_{col}	—	—	—
N_{col}	-3,329	10,63	3,667
N_{ped}	33,07	5,453	1,916
D_{lat}	0,2731	12,24	1,858
C_{lon}	-0,2587	10,73	1,622
Y_{ped}	—	—	—
τ_{ped}	0,09910	13,21	6,086

A matriz de ganhos de realimentação dos estados estimados obtida pela técnica LQR para o sistema nominal é apresentada na EQ. 4.17.

$$K_{LQR} = \begin{bmatrix} -0,0360 & 0,9850 & 0,0008 & 0,0048 \\ 0,9540 & 0,0340 & 0,0018 & -0,0781 \\ 1,0110 & -0,0714 & -0,0765 & -0,1286 \\ -0,0086 & -1,0974 & -0,0011 & -0,0061 \\ 9,4425 & 0,3581 & -0,0073 & -0,8256 \\ 0,2639 & -10,4189 & -0,0072 & -0,0403 \\ 1,3755 & -4,5211 & -0,0025 & 0,1909 \\ 6,4530 & 0,3035 & -0,1041 & 1,1846 \\ -0,0814 & 0,0015 & -0,0255 & -0,9829 \\ -0,0097 & -0,0008 & 0,8475 & -0,0500 \\ 0,0218 & 0,0003 & -0,5046 & -0,0028 \\ 0,5506 & -4,4512 & 0,0008 & 0,0060 \\ 3,8918 & 0,8258 & -0,0041 & 0,0731 \end{bmatrix}^T \quad (4.17)$$

4.3.1.1 CASO DE 2 PARÂMETROS SENSÍVEIS

Na FIG. 4.28 o espaço paramétrico do sistema, utilizando um controlador LQG e considerando apenas M_a e L_b como parâmetros sensíveis, confirma a baixa robustez do sistema à variações paramétricas. O raio da hipersfera obtido foi de 2,59%.

As FIGs. 4.29, 4.30, 4.31 e 4.32 apresentam as respostas ao impulso para os 50 sistemas aleatórios, variando em 3,00% do valor nominal os parâmetros M_a e L_b . Como as perturbação são maiores do que o raio da hipersfera, pode-se verificar a resposta de sistemas instáveis. Outra observação é a degradação do desempenho dos sistemas perturbados em relação ao sistema nominal.

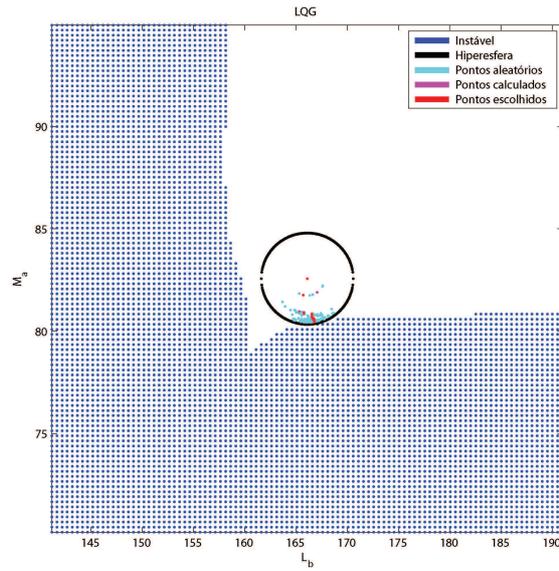


FIG.4.28: Espaço paramétrico do helicóptero com o controlador LQG e M_a e L_b como parâmetros sensíveis.

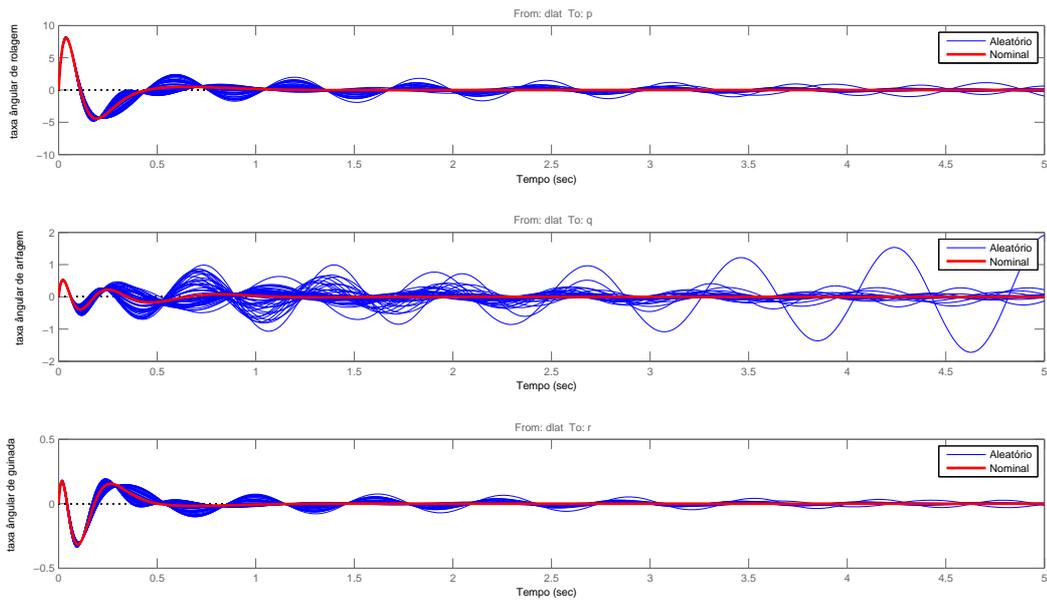


FIG.4.29: Resposta ao impulso na entrada δ_{lat} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a e L_b .

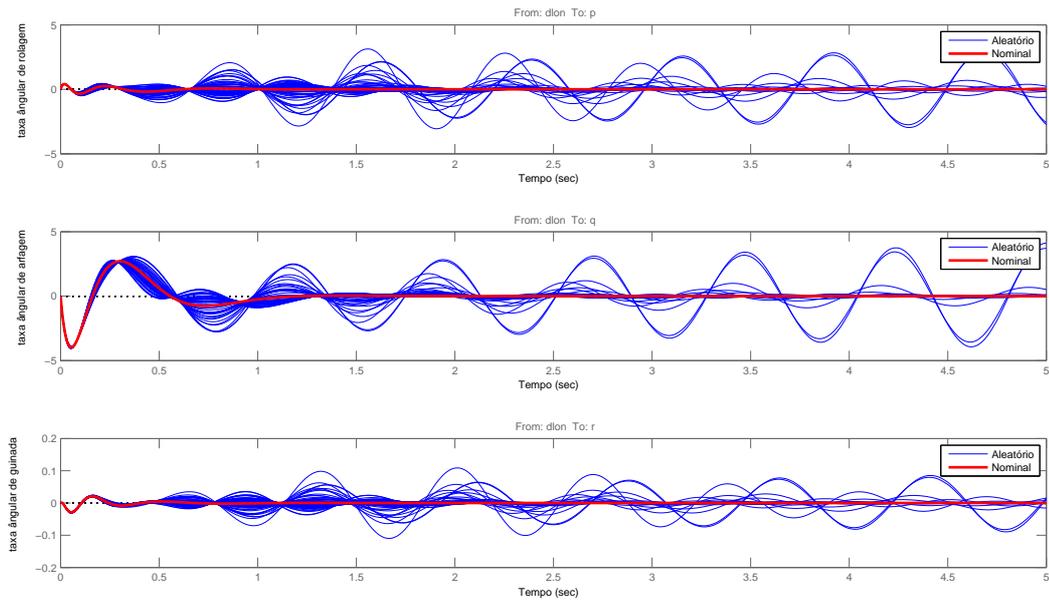


FIG.4.30: Resposta ao impulso na entrada δ_{lon} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a e L_b .

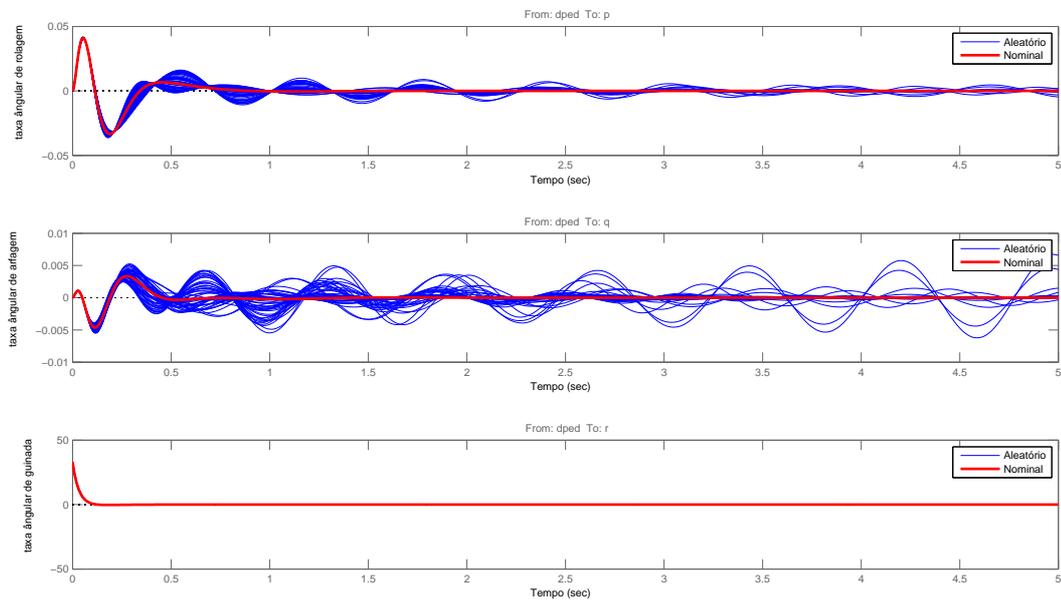


FIG.4.31: Resposta ao impulso na entrada δ_{ped} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a e L_b .

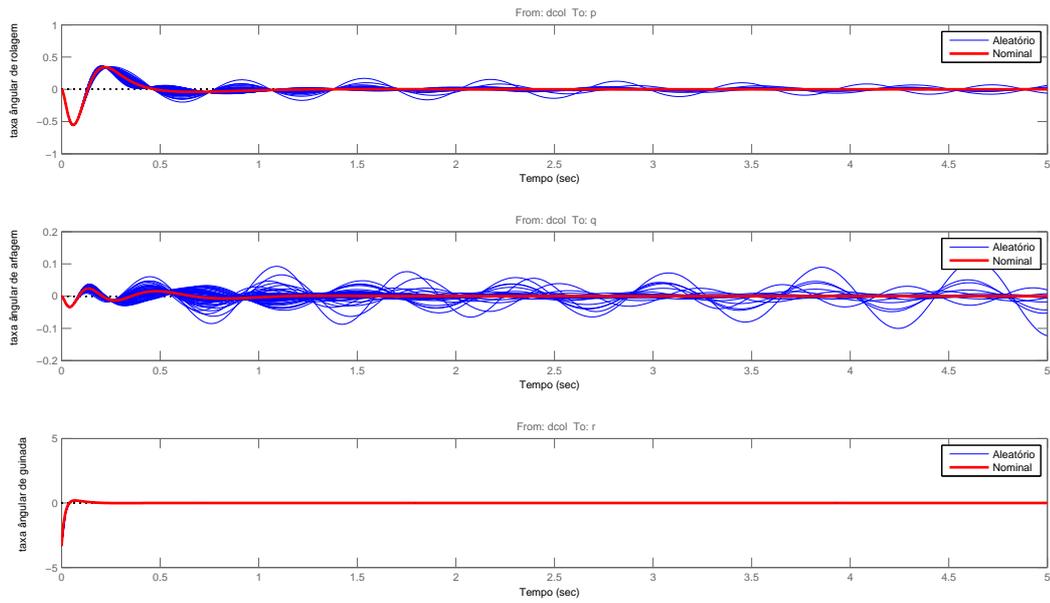


FIG.4.32: Resposta ao impulso na entrada δ_{col} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a e L_b .

O diagrama de sensibilidade dos pólos do sistema é apresentado na FIG. 4.33 e um detalhe dos pólos mais próximos do eixo imaginário é apresentado na FIG. 4.34. Para perturbações de 1,00% e 2,50% o sistema se mantém estável, embora a sensibilidade dos pólos seja grande. Para a perturbação de 5,00%, maior do que o raio da hipersfera, o sistema torna-se instável. A baixa robustez em desempenho, como apresentado na resposta ao impulso dos sistemas perturbados, e a baixa robustez em estabilidade, evidente no diagrama de sensibilidade dos pólos, torna necessário o robustecimento do controlador.

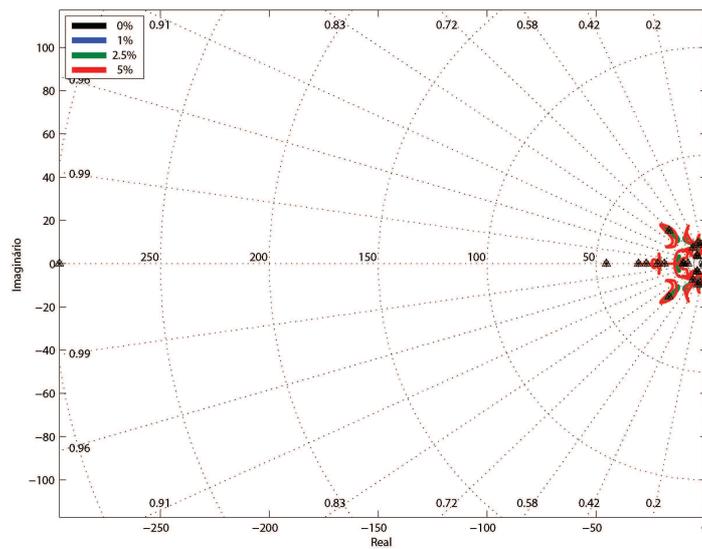


FIG.4.33: Diagrama de sensibilidade dos pólos do helicóptero com o controlador LQG com perturbações em M_a e L_b .

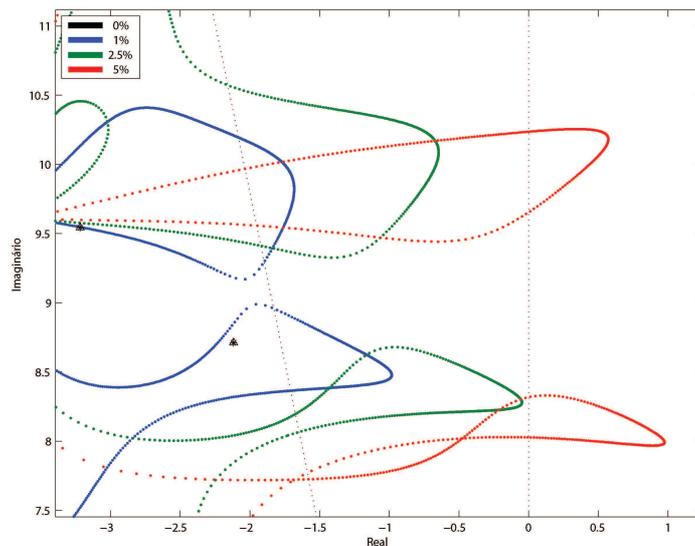


FIG.4.34: Detalhe do diagrama da FIG. 4.33.

4.3.1.2 CASO DE 5 PARÂMETROS SENSÍVEIS

Admitindo 5 parâmetros sensíveis no sistema, o espaço paramétrico não pode mais ser visualizado. A visualização do espaço paramétrico permitiria verificar se o ponto instável encontrado pelo algoritmo de cálculo do raio da hipersfera é realmente o ponto instável mais

próximo do ponto nominal. O método do *GRID*, apresentado na seção 3.5, foi utilizado até agora para ilustrar as regiões estáveis e instáveis do espaço paramétrico e servir de referência para verificar se o raio da hipersfera de estabilidade calculado com a técnica PRABI está coerente.

No caso de 5 parâmetros sensíveis, o uso do método *GRID* torna-se inviável para obter o raio da hipersfera devido ao tempo de processamento necessário para obter uma boa precisão. Será então utilizado o método que testa a estabilidade de pontos no espaço paramétrico com raios fixos, apresentado na seção 3.5, até obter o valor do raio da hipersfera com a precisão desejada.

O valor obtido para o raio da hipersfera de estabilidade, com o controlador LQG e variando os cinco parâmetros (M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s), utilizando a técnica PRABI foi de 2,23%. Utilizando o método dos raios fixos, o valor obtido foi de 2,27%.

As respostas ao impulso para 50 sistemas aleatórios, obtidos variando os 5 parâmetros sensíveis até o limite de 3%, são apresentadas nas FIGs. 4.35, 4.36, 4.37, 4.38. Pode-se verificar a baixa robustez paramétrica em desempenho e estabilidade, com respostas apresentando oscilações crescentes e com comportamento mais oscilatório do que o sistema nominal.

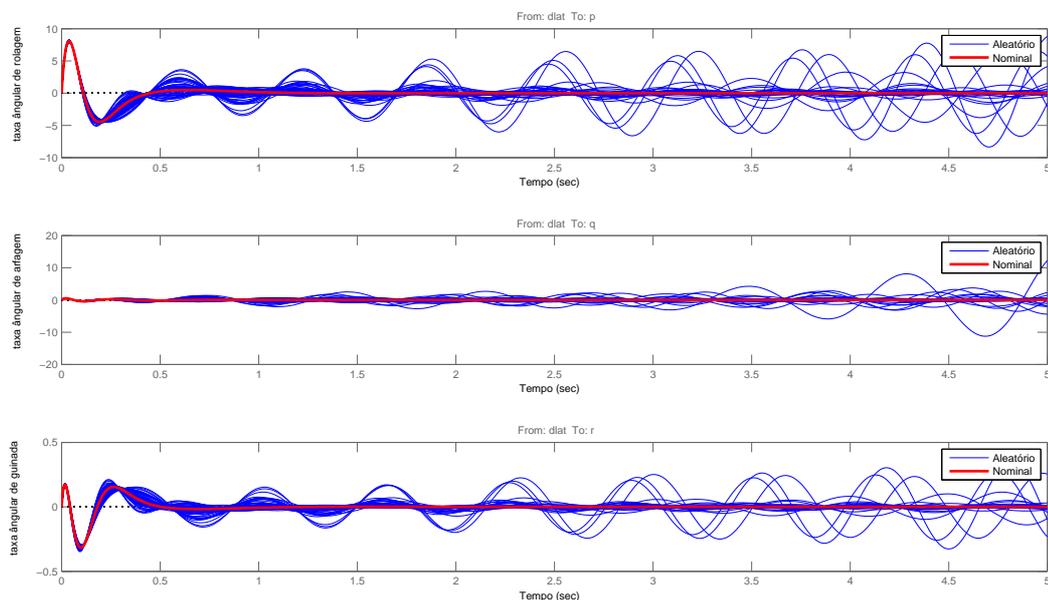


FIG.4.35: Resposta ao impulso na entrada δ_{lat} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s .

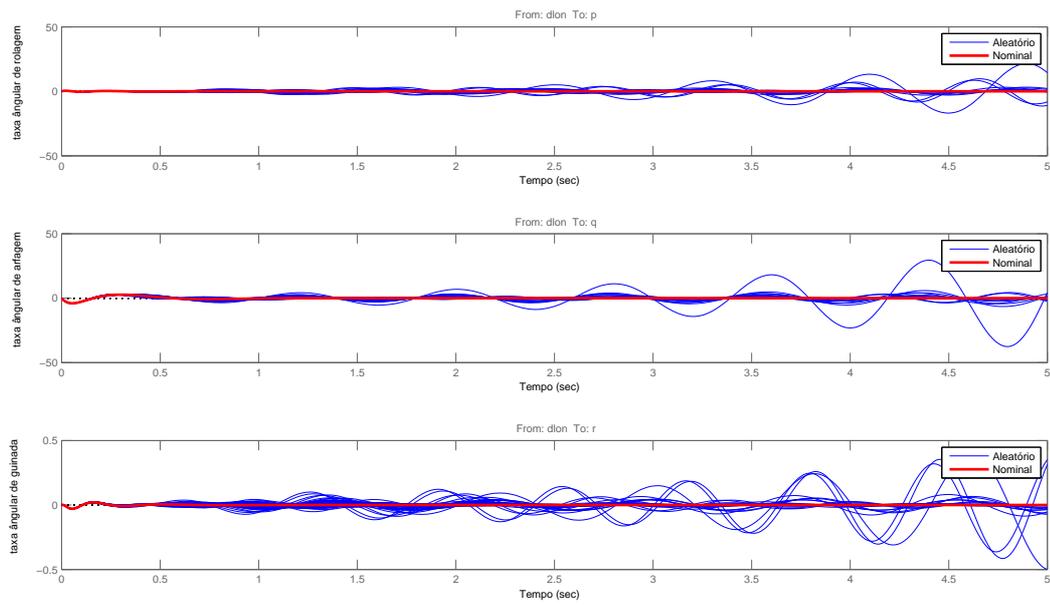


FIG.4.36: Resposta ao impulso na entrada δ_{lon} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s .

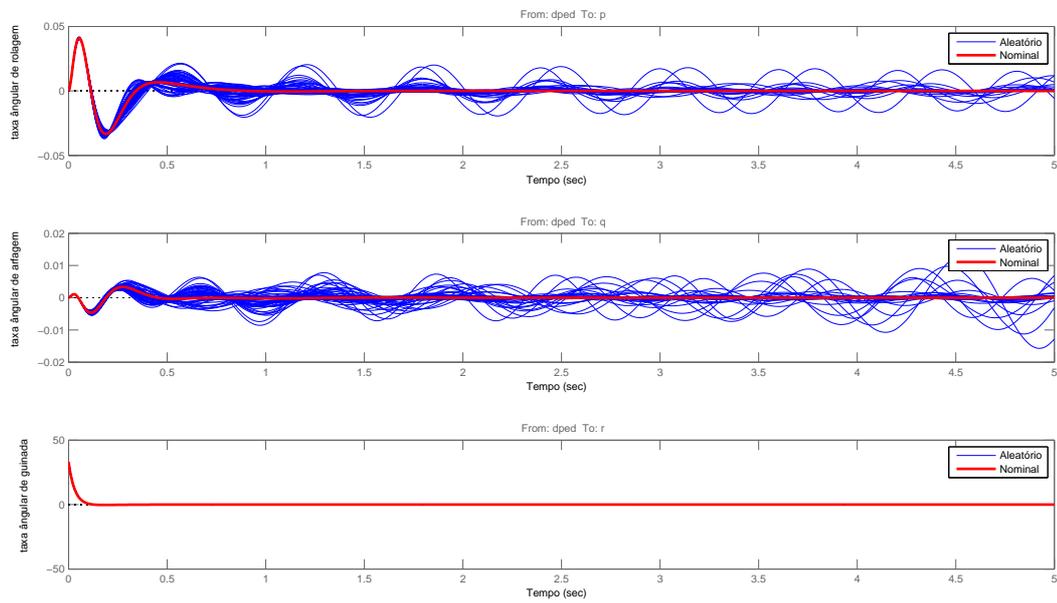


FIG.4.37: Resposta ao impulso na entrada δ_{ped} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s .

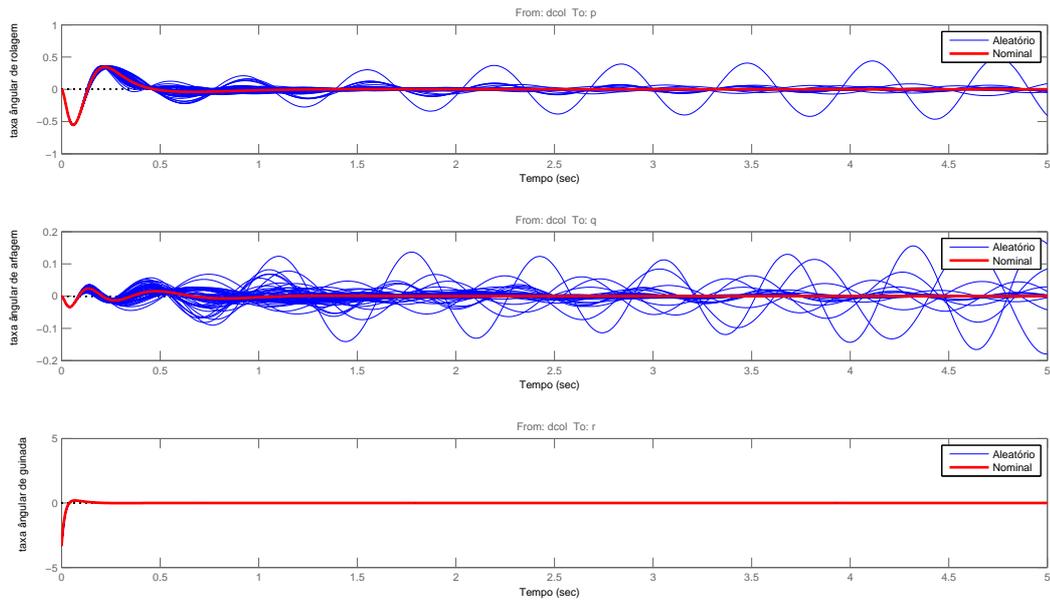


FIG.4.38: Resposta ao impulso na entrada δ_{col} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador LQG e perturbações nos parâmetros M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s .

Na FIG. 4.39 é apresentado o diagrama de sensibilidade dos pólos do sistema utilizando o controlador LQG, e na FIG. 4.40 um detalhe próximo ao eixo imaginário. Este diagrama foi obtido perturbando-se os 5 parâmetros sensíveis em raios fixos no espaço paramétrico. Comparando com o diagrama da FIG. 4.33, percebe-se uma dispersão maior dos pólos quando são perturbados 5 parâmetros, caracterizando uma pior robustez em desempenho.

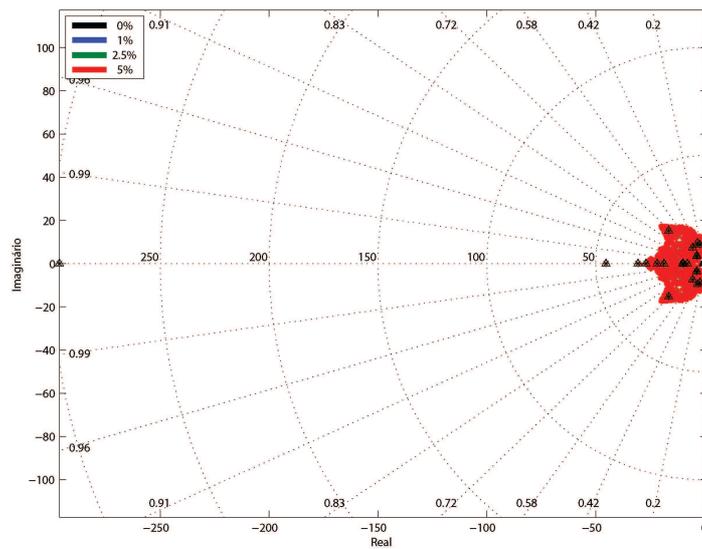


FIG.4.39: Diagrama de sensibilidade dos pólos do helicóptero com o controlador LQG com perturbações em M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s .

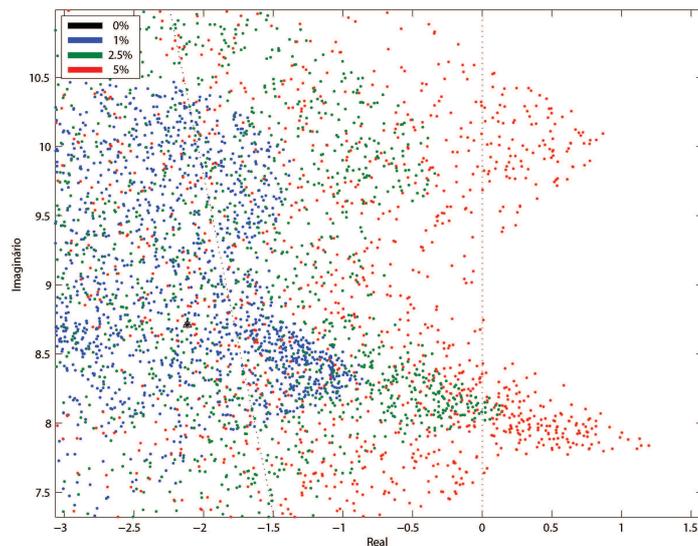


FIG.4.40: Detalhe da FIG. 4.40.

4.3.2 ROBUSTECIMENTO DO CONTROLADOR LQG COM 2 PARÂMETROS SENSÍVEIS

Nesta seção será tratado o caso de dois parâmetros sensíveis da planta, M_a e L_b . Aplicando-se a técnica proposta, será obtido um controlador com características de boa ro-

bustez paramétrica em desempenho e estabilidade.

A matriz de ganhos de realimentação dos estados estimados obtida com a técnica proposta é apresentada na EQ. 4.18.

$$K_{PRCBI_2} = \begin{bmatrix} -0.0380 & 0.0179 & 0.0008 & 0.0048 \\ -0.0521 & 0.0330 & 0.0017 & -0.0872 \\ 1.6104 & -0.0749 & -0.0621 & -0.0898 \\ -0.0086 & -1.8705 & -0.0011 & -0.0060 \\ 11.1278 & 0.3618 & -0.0073 & -0.9410 \\ 0.2667 & -5.0849 & -0.0072 & -0.0406 \\ 1.3161 & -2.5918 & -0.0026 & 0.1725 \\ 9.9661 & 0.3074 & -0.1112 & 0.7288 \\ -0.0875 & 0.0015 & -0.0231 & -1.2798 \\ -0.0096 & -0.0008 & 1.9723 & -0.0459 \\ 0.0219 & 0.0003 & -0.7215 & -0.0028 \\ 0.5587 & -5.6488 & 0.0008 & 0.0060 \\ 4.4303 & 0.8054 & -0.0041 & 0.0735 \end{bmatrix}^T \quad (4.18)$$

O espaço paramétrico do sistema com o controlador robustecido para perturbações em dois parâmetros é apresentado na FIG. 4.41. O novo raio da hiperesfera de estabilidade obtido foi 41,10% que representa um aumento de 1487% em relação ao raio da hiperesfera de estabilidade do controlador LQG.

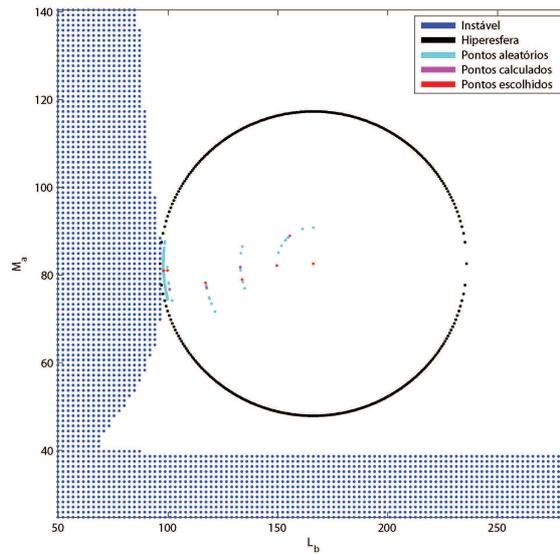


FIG.4.41: Espaço paramétrico do helicóptero com o controlador PRCBI e M_a e L_b como parâmetros sensíveis.

Variando os parâmetros em até 3%, em torno de seus valores nominais, foram obtidos 50 sistemas aleatórios. As FIGs. 4.42, 4.43, 4.44 e 4.45 mostram a resposta ao degrau para estes sistemas. Verifica-se uma maior robustez em desempenho utilizando o controlador robustecido, em comparação com a resposta dos sistemas aleatórios com o controlador LQG. Para a entrada δ_{lon} houve uma degradação maior no desempenho em relação às outras entradas, mas ainda assim muito menor do que a degradação observada com o controlador LQG. Para as outras entradas o comportamento dos sistemas perturbados é muito próximo do comportamento do sistema nominal.

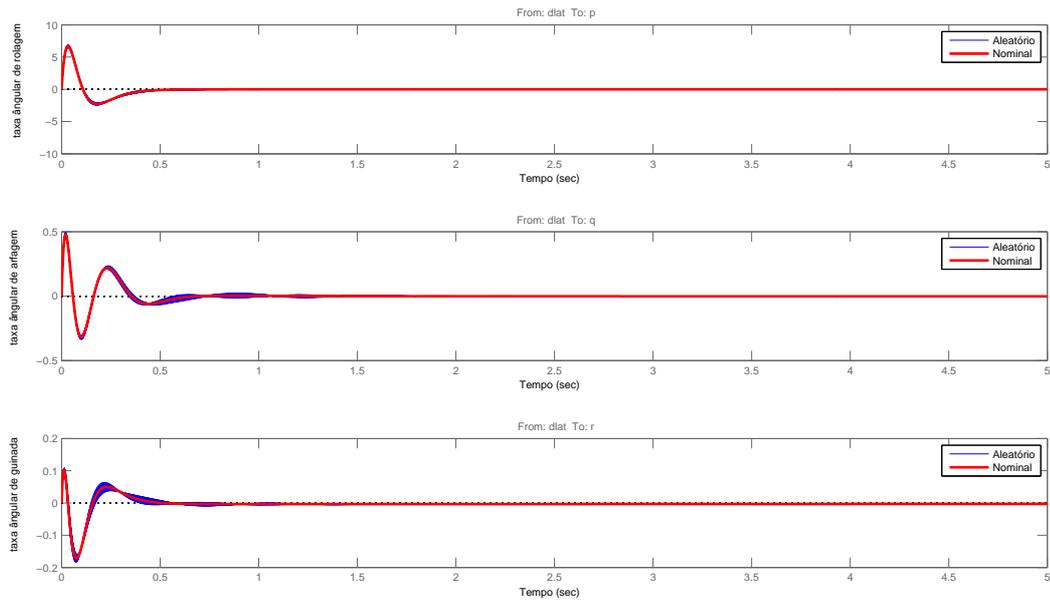


FIG.4.42: Resposta ao impulso na entrada δ_{lat} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a e L_b .

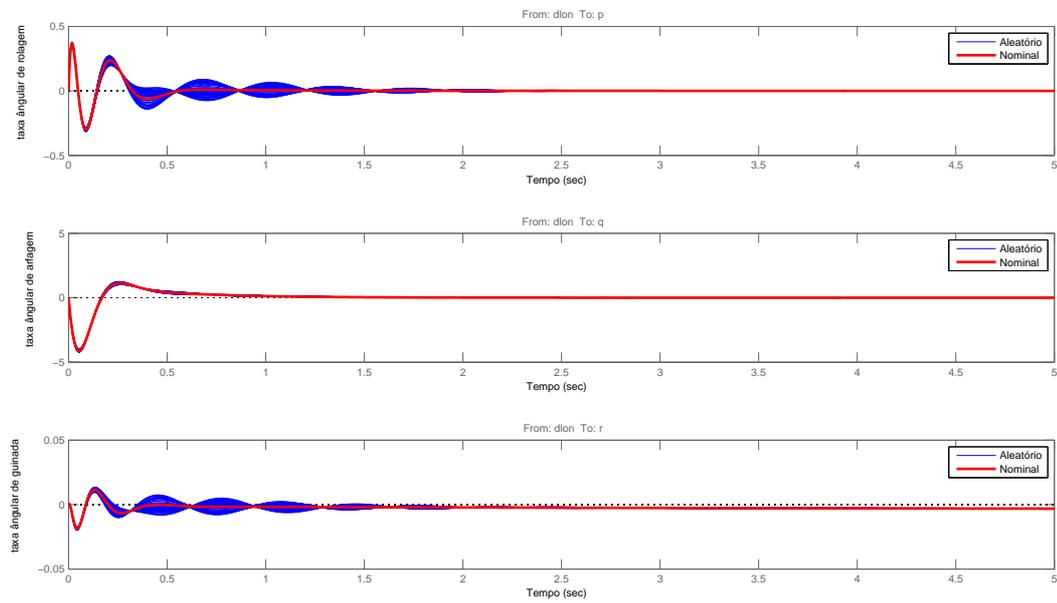


FIG.4.43: Resposta ao impulso na entrada δ_{lon} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a e L_b .

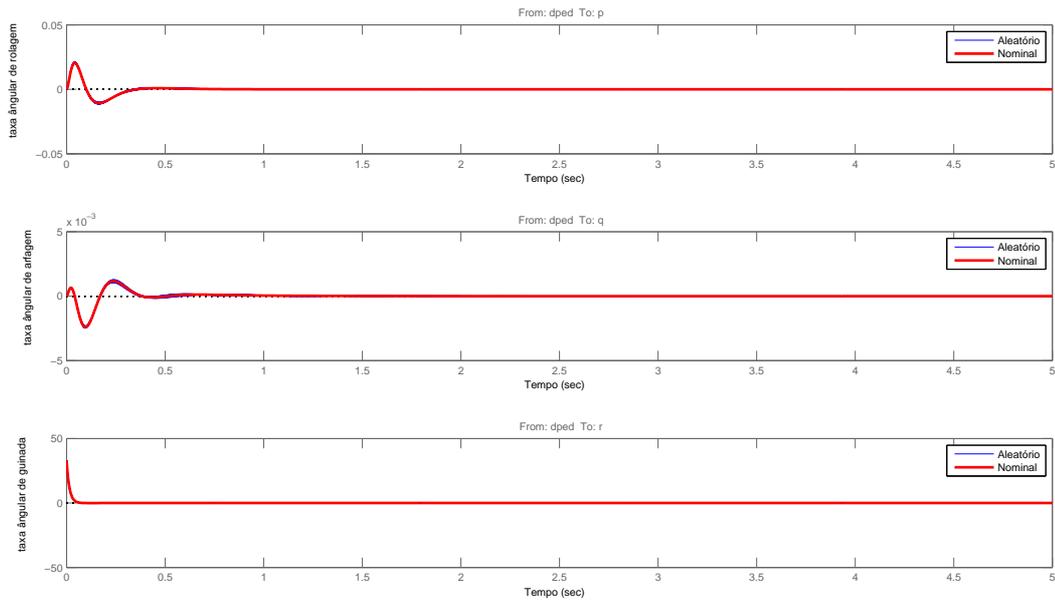


FIG.4.44: Resposta ao impulso na entrada δ_{ped} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a e L_b .

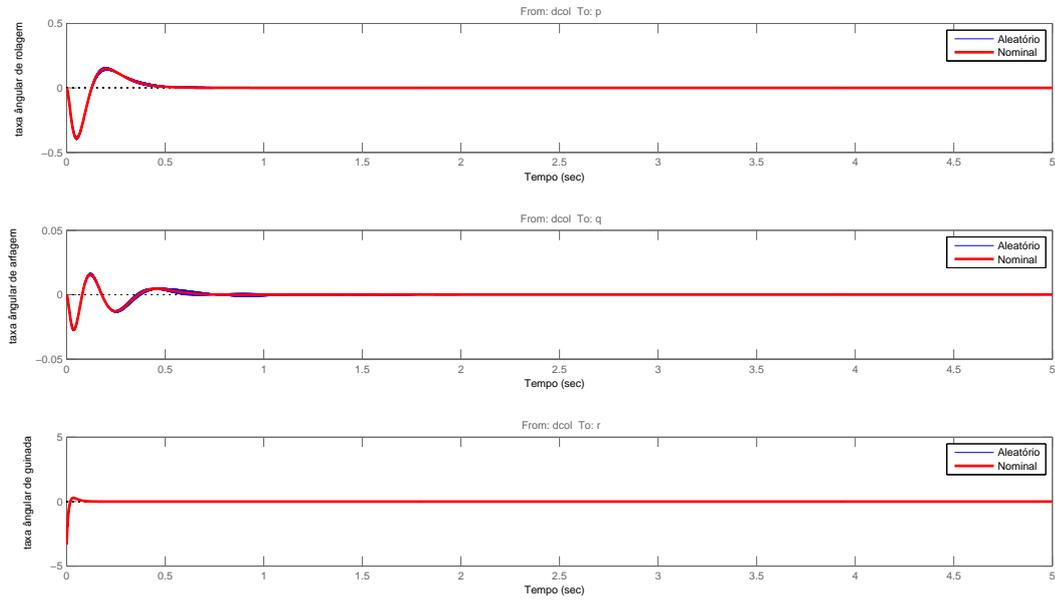


FIG.4.45: Resposta ao impulso na entrada δ_{col} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a e L_b .

O diagrama de sensibilidade dos pólos para o sistema robustecido à variações em dois parâmetros é apresentado na FIG. 4.46 e um detalhe próximo ao eixo imaginário na FIG. 4.47.

No diagrama pode-se verificar que a posição dos pólos sofre pouca variação, em comparação com o diagrama do sistema com o controlador LQG apresentado na FIG. 4.39. A menor sensibilidade dos pólos caracteriza uma maior robustez paramétrica em desempenho.

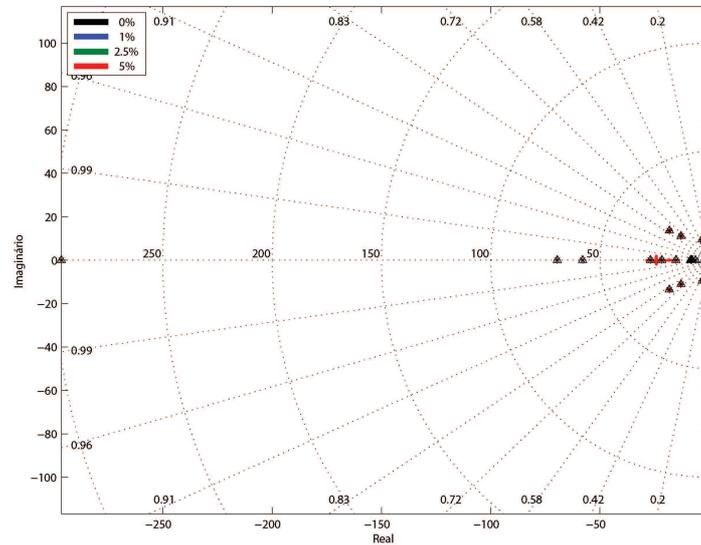


FIG.4.46: Diagrama de sensibilidade dos pólos do helicóptero com o controlador PRCBI com perturbações em M_a e L_b .

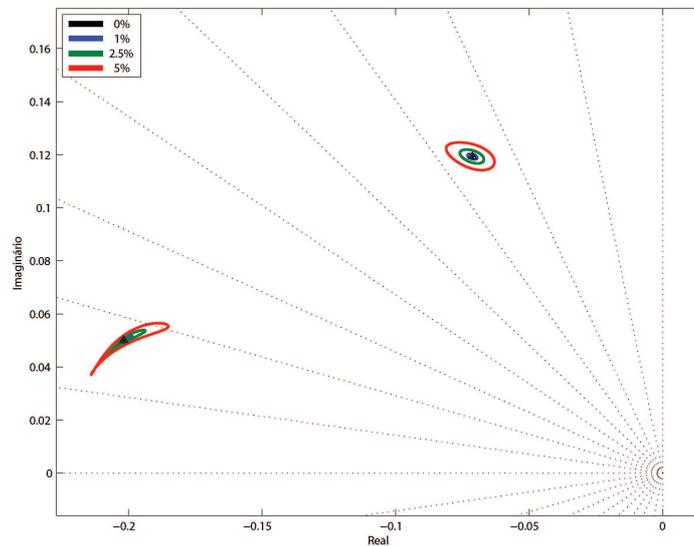


FIG.4.47: Detalhe da FIG. 4.40.

4.3.3 ROBUSTECIMENTO DO CONTROLADOR LQG COM 5 PARÂMETROS SENSÍVEIS

A matriz de ganhos de realimentação dos estados estimados obtida aplicando a técnica proposta no sistema com 5 parâmetros sensíveis (M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s) é apresentada na EQ. 4.19.

$$K_{PRCBI_s} = \begin{bmatrix} -0.0368 & 0.0099 & 0.0008 & 0.0046 \\ -0.0401 & 0.0267 & 0.0015 & -0.1073 \\ 1.5456 & -0.0770 & -0.0817 & -0.0862 \\ -0.0086 & -2.0766 & -0.0012 & -0.0060 \\ 6.6484 & 0.3521 & -0.0073 & -0.9569 \\ 0.2630 & -10.3750 & -0.0071 & -0.0405 \\ 1.1989 & -2.6579 & -0.0026 & 0.1671 \\ 4.5895 & 0.2899 & -0.1027 & 0.6554 \\ -0.0698 & 0.0015 & -0.0210 & -0.5938 \\ -0.0096 & -0.0008 & 0.2968 & -0.0459 \\ 0.0214 & 0.0003 & 0.0430 & -0.0028 \\ 0.6822 & -3.9952 & 0.0008 & 0.0060 \\ 6.3068 & 0.7871 & -0.0041 & 0.0738 \end{bmatrix}^T \quad (4.19)$$

O raio da hipersfera de estabilidade obtido utilizando a técnica PRABI foi de 32,74% e pelo método dos raios fixos foi de 36,56%, que representa um aumento de 1368% em relação ao controlador LQG. Por ter encontrado um ponto instável com uma perturbação menor, o método PRABI foi mais preciso no cálculo do raio da hipersfera.

Perturbando os parâmetros sensíveis de forma aleatória até o limite de 3% em torno de seus valores nominais, foram obtidos 50 modelos cujas respostas ao impulso encontram-se nas FIGs. 4.48, 4.49, 4.50 e 4.51. Para a entrada δ_{lon} , a saída referente à taxa angular de guinada apresentou uma maior deterioração no desempenho quando os parâmetros sensíveis foram perturbados, embora muito menor do que a deterioração no desempenho ocorrida com o controlador LQG. Todas as saídas apresentam melhoras na robustez em desempenho, se comparadas às respostas utilizando o controlador LQG, para todas as entradas.

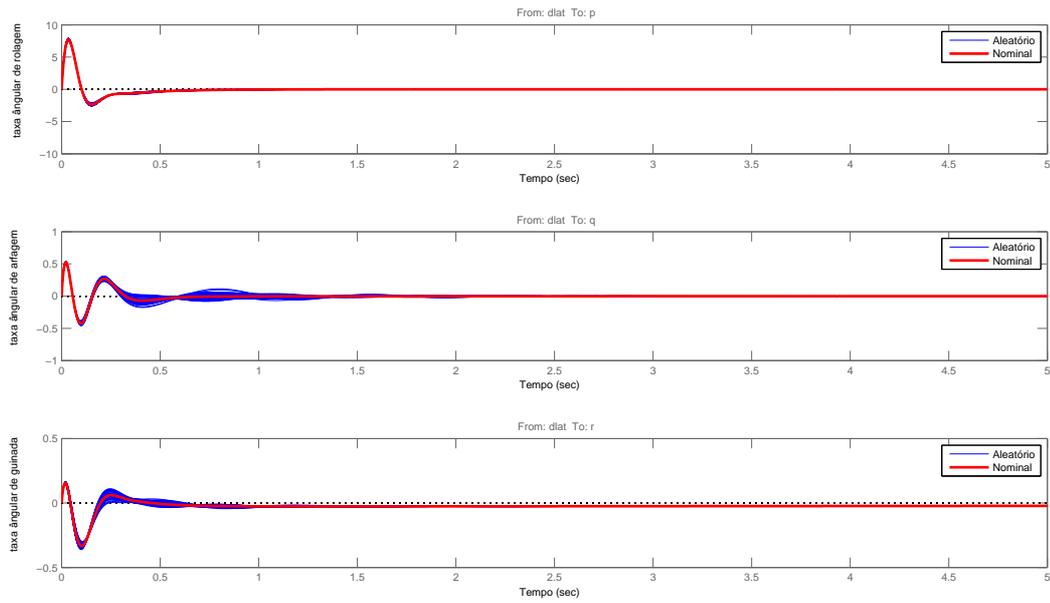


FIG.4.48: Resposta ao impulso na entrada δ_{lat} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s .

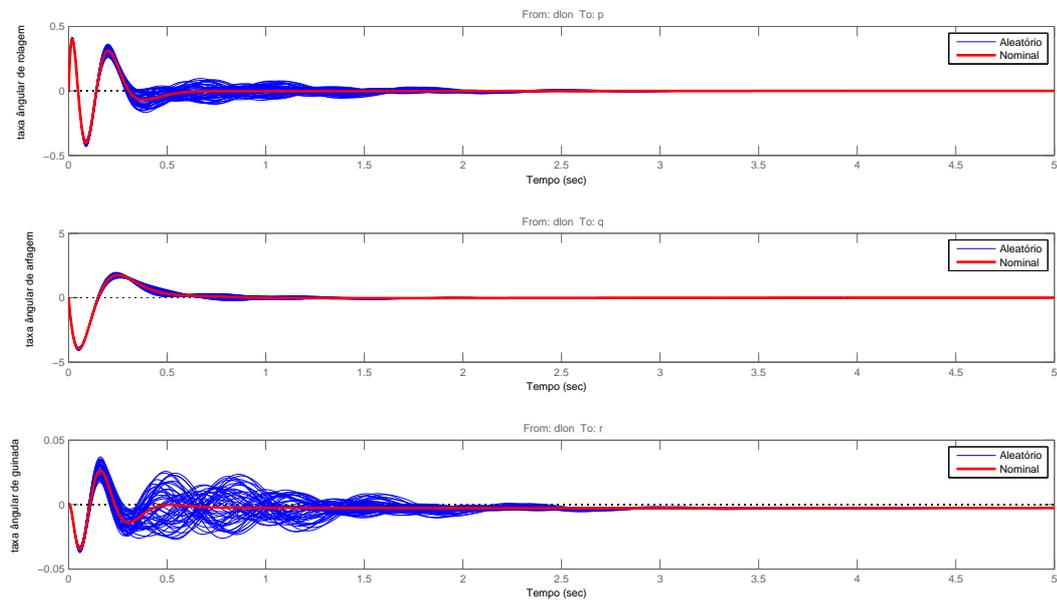


FIG.4.49: Resposta ao impulso na entrada δ_{lon} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s .

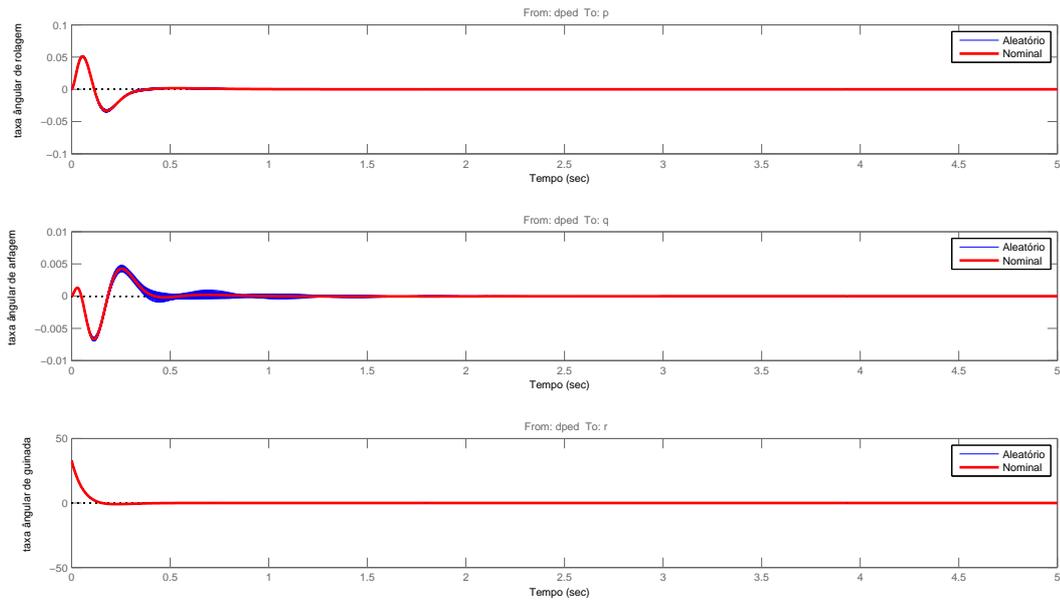


FIG.4.50: Resposta ao impulso na entrada δ_{ped} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s .

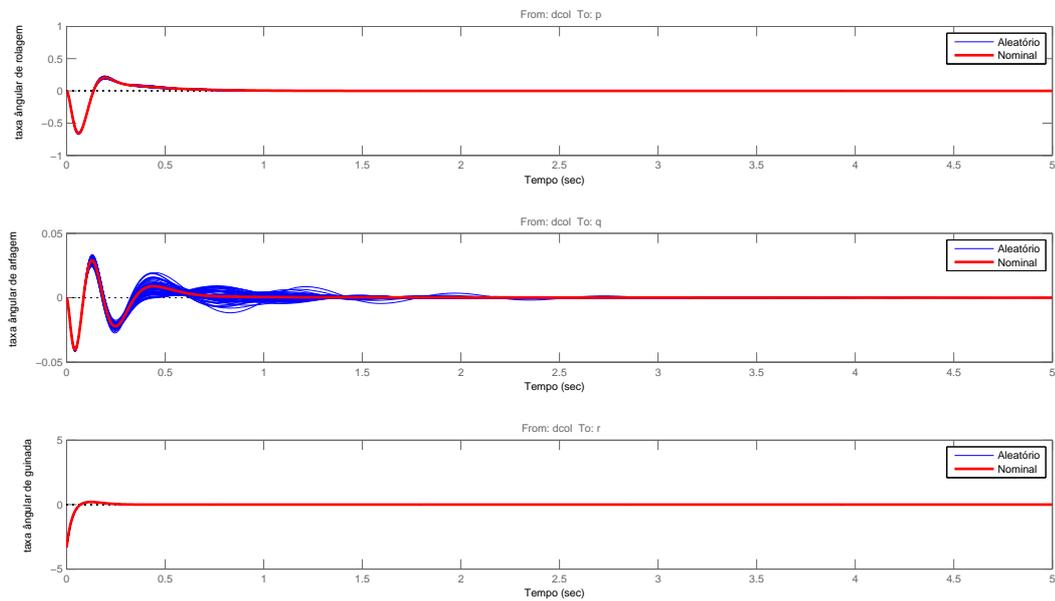


FIG.4.51: Resposta ao impulso na entrada δ_{col} para 50 sistemas aleatórios do helicóptero com o controlador PRCBI e perturbações nos parâmetros M_a , L_b , B_d , A_c e τ_s .

O diagrama de sensibilidade dos pólos do sistema é apresentado na FIG. 4.52, e um detalhe próximo ao eixo imaginário é mostrado na FIG. 4.53. Comparando com o diagrama

da FIG. 4.39, obtido com o controlador LQG, verifica-se uma menor sensibilidade dos pólos carecterizando a melhor robustez do sistema às variações paramétricas.

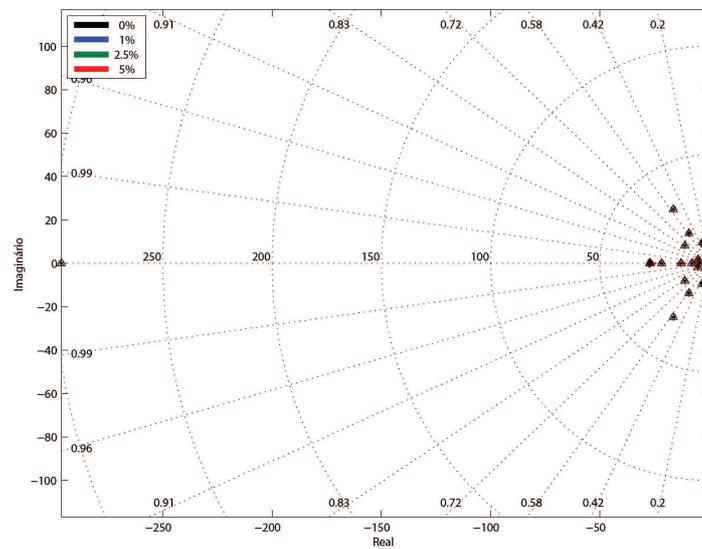


FIG.4.52: Diagrama de sensibilidade dos pólos do helicóptero com o controlador PRCBI com perturbações em M_d , L_b , B_d , A_c e τ_s .

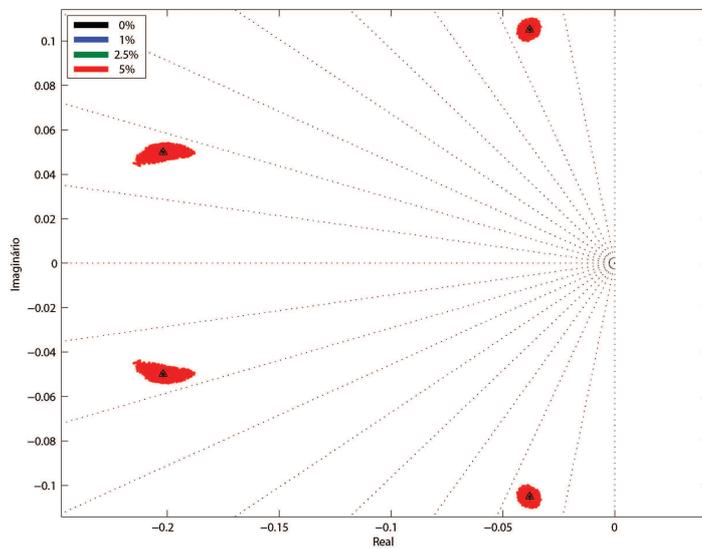


FIG.4.53: Detalhe da FIG. 4.40.

4.3.4 COMPARAÇÃO QUANTITATIVA DA ROBUSTEZ PARAMÉTRICA EM DESEMPENHO

Para obter uma medida quantitativa da robustez paramétrica em desempenho⁹ será utilizado o custo do Regulador Quadrático Linear, apresentado na EQ. 4.20, com as matrizes de ponderação iguais a identidade.

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_1 \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{Q}_2 \mathbf{u}) dt \quad (4.20)$$

Como o interesse é verificar o desempenho diante das perturbações paramétricas, serão gerados em cada modelo sistemas aleatórios obtidos de perturbações dos parâmetros sensíveis dentro de uma hiperesfera no espaço paramétrico menor do que a hiperesfera de estabilidade do controlador LQG. Então será calculado o custo LQR médio dos sistemas aleatórios e o custo LQR do sistema nominal. Será usada diferença percentual entre eles para obter o valor do custo de robustez paramétrica em desempenho J_{rpd} . Por não ser possível implementar computacionalmente as integrais até o tempo infinito, será definido um valor limite para o tempo de simulação no qual todos os estados sejam nulos. Uma condição inicial para cada modelo será gerada aplicando um degrau em todas as entradas do sistema em malha aberta e recuperando os estados em um instante posterior adequado para cada modelo. Os resultados obtidos são apresentados na TAB. 4.4.

TAB.4.4: Custos de robustez paramétrica em desempenho.

Modelo	Controlador	Sistemas Aleatórios	Raio Hiperesfera LQG (%)	Limite de Pertubação (%)	Custo
Massa-Mola	LQG	1000	14,05	9	1,059
Massa-Mola	PRCBI	1000	14,05	9	0,226
Míssil Ar-Ar	LQG	500	1,27	0,8	7,272
Míssil Ar-Ar	PRCBI	500	1,27	0,8	0,362
Helicóptero 2	LQG	500	2,59	1,8	3,448
Helicóptero 2	PRCBI	500	2,59	1,8	0,071
Helicóptero 5	LQG	300	2,23	0,9	1,576
Helicóptero 5	PRCBI	300	2,23	0,9	0,034

A tabela 4.4 mostra o custo de robustez paramétrica em desempenho obtida com os controladores ótimos (LQG) e com os controladores robustecidos utilizando as técnicas estudadas neste trabalho (PRCBI). Em todos os sistemas a redução do custo de robustez em desempenho

⁹A robustez paramétrica em desempenho medida nesta seção se refere à capacidade do sistema manter o desempenho obtido com os parâmetros nominais quando estes são perturbados.

obtida com o controlador PRCBI, em relação ao controlador LQG, foi superior a 75%. Esta análise mostra que os controladores calculados com as técnicas apresentadas neste trabalho, além de possuírem boa robustez paramétrica em estabilidade, como mostrado nas seções anteriores, possuem boa robustez paramétrica em desempenho.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO

O estudo conduzido neste trabalho sobre controle robusto paramétrico mostrou que podem ser obtidos controladores robustos com boas características de desempenho utilizando as técnicas PRCBI e PRABI. Discutiu-se também a eficiência da técnica PRABI na determinação do raio da hipersfera de estabilidade. Considerou-se que as plantas a serem controladas pudessem ser representadas por sistemas estocásticos lineares invariantes no tempo, podendo ser multivariáveis e com vários parâmetros sensíveis.

O foco principal do trabalho foi o estudo, aplicação e aperfeiçoamento das técnicas PRCBI e PRABI. O estudo iniciou-se com a abordagem tradicional discreta e em seguida foi estudada a nova abordagem contínua. As aplicações escolhidas e apresentadas permitiram identificar limitações ao perceber resultados diferentes dos esperados. A partir da análise das causas de alguns resultados incoerentes, foi possível aperfeiçoar as técnicas, eliminando ou minimizando os erros observados.

Conclui-se também que a implementação computacional exige cuidados principalmente na solução das equações de Sylvester e Lyapunov (LU, 1986; BRYSON & HO, 1975; PENZL, 1996), na garantia da convergência dos filtros de Kalman e na determinação dos parâmetros dos algoritmos. Além disso, o robustecimento dos controladores necessita de otimização numérica que tem seu resultado afetado por vários parâmetros. Foram testados durante as aplicações os métodos de otimização de Powell aperfeiçoado (BAZARAA & SHETTY, 1993), simplex (LAGARIAS et al., 1998) e algoritmos genéticos (CONN et al., 1991; GOLDBERG, 1989). As otimizações necessárias nas aplicações apresentadas neste trabalho utilizaram o método de Powell aperfeiçoado. Ele apresentou a melhor relação entre o tempo de processamento e os resultados obtidos, embora não tenha sido feita uma comparação criteriosa entre os diversos métodos, pois fugiria dos objetivos desta dissertação.

As aplicações tiveram como objetivo, além de identificar limitações nas técnicas já estabelecidas, testar os aperfeiçoamentos propostos e a eficácia em obter controladores robustos e com bom desempenho. Procurou-se selecionar modelos que ilustrassem com clareza os resultados a serem obtidos, tanto em modelos monovariáveis quanto em multivariáveis.

A primeira aplicação, utilizando o modelo de um sistema massa-mola de 8 estados, mostrou que tanto a abordagem discreta quanto a contínua permitem obter controladores que melhoram a robustez paramétrica em estabilidade e em desempenho, quando comparado com o

controlador LQG aplicado a sistemas com características bem flexíveis como é o massa-mola. Nesta aplicação foi verificado que a abordagem contínua obtém resultados muito semelhantes à abordagem discreta quando o período de amostragem utilizado é bem adaptado à dinâmica da planta. Não foram testados outros períodos de amostragem. A pequena diferença entre os resultados tem explicação no processo de otimização numérica, onde foram utilizados parâmetros apropriados para cada caso.

O modelo linearizado de um míssil ar-ar foi utilizado na segunda aplicação. Apesar de possuir uma dinâmica mais simples do que o sistema massa-mola, o sistema possui duas saídas. Para o controlador LQG aplicado neste exemplo obteve-se um raio da hipersfera de estabilidade muito pequeno, caracterizando uma grande sensibilidade do sistema às variações dos parâmetros incertos e tornando este controlador inviável para uma aplicação prática. O controlador robusto obtido pelo método PRCBI aumentou o raio da hipersfera de estabilidade em 1335% e, embora a resposta tenha ficado um pouco mais oscilatória, o tempo de acomodação foi reduzido.

O modelo do helicóptero de pequena escala em vôo pairado utilizado na terceira aplicação apresentou uma dinâmica mais complexa do que a dos modelos utilizados nas aplicações anteriores e permitiu aplicar as técnicas em um sistema MIMO com quatro entradas e três saídas. Ficou claro neste exemplo a forte relação entre a alta sensibilidade do sistema a um determinado parâmetro e sua pequena robustez a variações neste mesmo parâmetro, que é o fundamento da síntese PRCBI. Na escolha dos parâmetros sensíveis do modelo, o menor raio da hipersfera de estabilidade com o controlador LQG sempre foi obtido quando os parâmetros com a menor insensibilidade percentual eram utilizados. Analisou-se também neste exemplo o caso em que o modelo possui mais do que dois parâmetros sensíveis. Foi possível verificar neste exemplo, como era esperado, que as limitações na aplicação das técnicas estudadas em relação ao número de entradas, número de saídas ou número de parâmetros sensíveis do modelo, não foram determinantes.

Em todos os exemplos o raio da hipersfera de estabilidade foi calculado utilizando a técnica PRABI com as modificações propostas. O método *GRID* (ou o método dos raios fixos) foi utilizado para certificar que o resultado obtido estivesse correto. Como o raio calculado pelo método PRABI sempre foi menor, e o tempo de processamento também foi muito reduzido, conclui-se que este método é mais eficiente. Lembrando que o raio da hipersfera de estabilidade é definido pela distância (norma euclidiana) percentual no espaço paramétrico entre o ponto nominal e o ponto instável mais próximo, quanto menor o raio obtido maior a precisão do algoritmo. Para alcançar a mesma precisão obtida com o método PRABI, o método *GRID*

ou o método dos raios fixos precisaria testar um número muito grande de pontos no espaço paramétrico (principalmente para espaços paramétricos de maior dimensão), necessitando de um tempo de processamento computacional relativamente maior.

A definição de uma função custo para a robustez paramétrica em desempenho, definida no final do capítulo 4, permitiu verificar que os controladores obtidos, além de mais robustos em estabilidade, apresentaram melhoras na robustez em desempenho.

Outras observações e conclusões obtidas ao longo do trabalho, além das citadas anteriormente, são:

- A formulação matemática da abordagem contínua da síntese PRCBI é muito semelhante à abordagem discreta. Como a teoria de identificação bayesiana, base da síntese PRCBI, é baseada em um conjunto de medidas discretas, faz-se a discretização do vetor de medidas do sistema contínuo ao invés de fazer a discretização do sistema. Este vetor de medidas discreto é obtido da integração numérica das equações de estado. Portanto a fundamentação teórica da abordagem contínua é a mesma da abordagem discreta;
- A modificação do espaço paramétrico, igualando as componentes do vetor paramétrico nominal, permitiu o uso da técnica PRABI em sistemas onde os valores nominais dos parâmetros sensíveis não eram iguais. Esta modificação tem grande impacto nos resultados das análises, que ficavam distorcidas devido a relação existente entre o valor médio de uma variável e sua variância. Sem a modificação do espaço paramétrico o autovetor associado ao maior autovalor da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ não correspondia necessariamente à direção de mínima robustez, mas a uma composição da direção de mínima robustez com a direção do parâmetro de maior valor nominal. Se as diferenças entre os valores nominais eram muito grandes, a contribuição da direção de mínima robustez no autovetor tornava-se desprezível e este coincidia com a direção do parâmetro de maior valor nominal. Por ser comum aparecer aplicações com parâmetros sensíveis de diferentes valores nominais, a modificação do espaço paramétrico trouxe vantagens para a técnica;
- Outra implicação da modificação do espaço paramétrico, é na dessensibilização de controladores utilizando a técnica PRCBI. Sem a modificação, a dessensibilização será mais efetiva nos parâmetros com valores nominais menores porque a função custo utilizada na otimização é o traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$. Os parâmetros de menor valor nominal, possuindo menor valor de variância, contribuem mais para o valor do traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ do que os parâmetros com maior valor nominal;

- A hipersuperfície gerada pelo traço da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ em função do espaço paramétrico mostrou-se uma importante ferramenta na análise da técnica PRABI. Com ela foi possível visualizar graficamente as dificuldades encontradas pela técnica e possíveis aperfeiçoamentos;
- A inclusão de pontos em torno da DSMIN no processo de otimização, quando é utilizada a técnica PRCBI associada à técnica PRABI para o robustecimento de controladores, permitiu uma flexibilidade maior na minimização, aumentando o número de graus de liberdade. A distância máxima dos pontos permitidos, definida pela constante ϵ_{max} , permite uma ponderação entre robustez e desempenho útil no processo de síntese;
- Outros controladores podem ser obtidos para os modelos utilizados nas aplicações, visando melhor desempenho ou maior robustez em estabilidade. Os controladores apresentados foram obtidos procurando um desempenho aceitável com boa robustez paramétrica;
- Foi verificado no terceiro exemplo que, aumentando-se o número de saídas do sistema, a robustez também aumenta. Isto se deve à estrutura de controle utilizada que possui um estimador de estados. Quanto mais estados forem medidos, mais precisa será a estimação. Naturalmente o controlador LQR é mais robusto do que o controlador LQG, logo, aumentando o número de estados medidos na arquitetura LQG, seu comportamento será mais semelhante ao comportamento de um controlador LQR. Portanto uma maneira de aumentar a robustez é aumentar o número de estados medidos;
- Na aplicação do helicóptero de pequena escala, o aumento do número de parâmetros sensíveis causou uma redução no raio da hiperesfera de estabilidade utilizando o controlador LQG. O raio obtido com os controladores robustecidos para dois e 5 parâmetros sensíveis foram diferentes. Necessariamente, ao adicionar parâmetros sensíveis no sistema, o raio da hiperesfera de estabilidade deverá se manter ou reduzir. No melhor caso, em que os parâmetros sensíveis adicionais não interfiram na estabilidade do sistema, seria como se eles não fossem considerados e o raio não se alteraria. Assim, sistemas com mais parâmetros sensíveis tendem a ser menos robustos.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Tendo em vista o que foi apresentado e discutido no presente trabalho, algumas possibilidades futuras de investigação podem ser estabelecidas:

- Modificar o espaço paramétrico de forma a favorecer o robustecimento de algum parâmetro, fazendo seu valor nominal no espaço paramétrico modificado menor do que os demais;
- Utilizar a DSMAX para determinar os valores nominais no espaço paramétrico modificado, de forma a favorecer a DSMAX no processo de robustecimento. Esta abordagem pode vir a facilitar o aumento do raio da hipersfera de estabilidade;
- Investigar a relação entre o valor percentual das perturbações utilizadas no cálculo da matriz $G_{\theta_0}^{-1}$ com o raio da hipersfera de estabilidade. Foi observado que as perturbações devem estar dentro da hipersfera de estabilidade, mas não foi observado um limite inferior para as perturbações. Caso não existam problemas com perturbações muito pequenas em relação ao raio da hipersfera, propõe-se adotar um valor fixo para as perturbações que atenda a sistemas com pouca robustez paramétrica em estabilidade;
- Obter um método sistemático para definição dos parâmetros do algoritmo de cálculo do raio da hipersfera de estabilidade utilizando o método PRABI associado a valores aleatórios e do algoritmo de robustecimento de controladores utilizando a síntese PRCBI associada à técnica PRABI.
- Fazer um estudo comparativo entre as técnicas aperfeiçoadas neste trabalho e outras técnicas de robustecimento de controladores, bem como analisar os efeitos do espaço paramétrico modificado no desempenho da síntese PRCBI.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADES, R. **Síntese de Controle Robusto Paramétrico - Otimização de Um Critério Combinando Estabilidade e Desempenho**. Tese Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 1994.
- ANDERSON, B. D. O. e MOORE, J. B. **Optimal Filtering**. Prentice Hall, 1979.
- ARNAUT, B. M. **Modelagem e Controle Robusto PRCBI de uma Central Eletronuclear PWR**. Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2000.
- BAZARAA, M. S. e SHETTY, C. M. **Nonlinear Programming: Theory and Algorithms**. John Wiley & Sons, 2 edition, 1993.
- BHATTACHARYYA, S. P., CHAPPELLAT, H. e KEEL, L. H. **Robust Control: The Parametric Approach**. Prentice Hall, 1995.
- BOURRET, T. **Commande Robuste Des Systemes Multivariables Discrets Soumis A Des Perturbations Para riques. Application Au Pilote Automatique D'Un Avion De Type Airbus**. Tese de Doutorado, L'Ecole Nationale Superieure De L'Aeronautique Et De L'Espace, 1993.
- BROWN, R. G. **Introduction To Randon Signal Analysis And Kalman Filtering**. John Wiley & Sons, 1983.
- BRYSON, A. E. e HO, Y. C. **Applied Optimal Control**. Blaisdell, Waltham, MA, USA, second edition, 1975.
- CAINELLI, G. T. F. **Modelagem, Implementação e Controle com vídeo-sensoriamento de uma esfera sobre plataforma**. Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2005.
- CONN, A. R., GOULD, N. I. M. e TOINT, P. L. A globally convergent augmented Lagrangian algorithm for optimization with general constraints and simple bounds. **SIAM J. Numer. Anal.**, 28(2):545-572, 1991. ISSN 0036-1429.
- CÔRTE-REAL, E. W. **Dessensibilização da Estrutura de Controle LQG Aplicada ao Modelo de uma Suspensão Ativa Utilizando a Técnica PRABI**. Tese Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2003.
- CRUZ, J. J. **Controle Robusto Multivariável: O Método LQG/LTR**. Editora EDUSP, São Paulo, 1996.
- DELMOND, F. **Alternatives À La Synthèse Multi-objectifs: Forme Standard De Passage Et Ajustements De Loi De Commande**. Tese de Doutorado, L'Ecole Nationale Superieure De L'Aeronautique Et De L'Espace, 2005.
- FRANKLIN, G. F., WORKMAN, M. L. e POWELL, D. **Digital Control of Dynamic Systems**. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1997. ISBN 0201820544.

- GAUVRIT, M. **Performances des Estimateurs Bayesiens en Boucle Ouverte et Fermée.** Tese de Doutorado, Université Paul Sabatier, 1982.
- GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning.** Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1989. ISBN 0201157675.
- GOMES, G. M. P. **Synthese D'Une Commande Robuste Liee A La Qualite de L'Identification Bayesienne.** Tese Doutorado, ENSAE - Ecole Nationale Superieure de L'Aeronautique Et de L'Espace, 1991.
- GOMES, G. M. P. e GAUVRIT, M. Síntese de um Controle Robusto Baseado na Qualidade de identificação Paramétrica. **Revista Militar de Ciência e Tecnologia**, VIII(1):8–27, Jan/Mar 1991.
- GONZALEZ, J. C. **Controle Robusto aplicado no modelo acoplado de um míssil solo-ar e análise de desempenho do sistema de guiamento.** Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 1998.
- IMAI, A. K. **Modelagem Simulação e Controle Robusto de um manipulador robótico plano.** Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 1997.
- LAGARIAS, J. C., REEDS, J. A., WRIGHT, M. H. e WRIGHT, P. E. Convergence properties of the Nelder-Mead simplex algorithm in low dimensions. **SIAM Journal on Optimization**, 9: 112–147, 1998. Disponível: citeseer.ist.psu.edu/lagarias96convergence.html.
- LAVIGNE, G. **Dualité: Qualité De L'Identification - Insensibilité De La Commande Application À La Synthèse De Commandes Robustes Aux Incertitudes Paramétriques.** Tese de Doutorado, L'Ecole Nationale Superieure De L'Aeronautique Et De L'Espace, 1994.
- LU, T. Solution of the matrix equation $AX - XB = C$. **Computing**, 37(4):351–355, 1986. ISSN 0010-485X.
- MANCEAUX-CUMER, C. **Thechniques De Commande Robuste: Approche Par Multipliateurs Et Approche Stochastique.** Tese de Doutorado, L'Ecole Nationale Superieure De L'Aeronautique Et De L'Espace, 1998.
- MENDES, I. S. **Aplicação em tempo real de Controle Robusto Paramétrico em um levitador magnético.** Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 1998.
- METTLER, B. **Identification modeling and characteristics of miniature rotorcraft.** Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, USA, 2003.
- METTLER, B., TISCHLER, M. B. e KANADE, T. System identification modeling of a small-scale unmanned rotorcraft for flight control design. **Journal of the American Helicopter Society**, 47:50–63, Janeiro 2002.
- NICHOLS, R. A., REICHERT, R. T. e RUGH, W. J. Gain Scheduling for H_∞ Controllers: a Flight Control Example. **IEEE Trans. Contr. Systems Technology**, 1(2):69–79, 1993.
- PELLANDA, P. C. **Controle Robusto Aplicado na Estabilização de Sistemas Elétricos de Potência.** Tese Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 1993.

- PENZL, T. Numerical solution of generalized Lyapunov equations, 1996. Disponível: citeseer.ist.psu.edu/penzl96numerical.html.
- REICHERT, R. T. Dynamic Scheduling of Modern-Robust-Control Autopilot Designs for Missiles. **IEEE Control Systems Magazine**, 12(5):35–42, 1992.
- SILVEIRA, B. P. **Identificação de sistemas no domínio da frequência para aplicação em veículos aéreos não-tripulados**. Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 2006.
- SOUZA, J. V. M. **Formulação Estendida da Síntese de Controle Robusto PRCBI - aplicação na pilotagem de mísseis**. Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 1996.
- STRANG, G. **Linear Algebra and Its Applications**. Thomson Learning, 3 edition, 1988.
- TITO, F. L. **Controle Robusto de Sistemas Elétricos de Potência combinando Identificação de Sistemas e Algoritmos Genéticos**. Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 1998.

7 APÊNDICES

7.1 APÊNDICE 1: CÁLCULO DETALHADO DE ΔM

Considere o sistema discreto da EQ. 2.1, com $\{A, C\}$, operando em condições nominais ($\theta = \theta_0$), considerando $u_k = 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k &= A_0 \mathbf{x}_{k-1} + D \xi_{k-1} \\ \mathbf{y}_{k-1} &= C_0 \mathbf{x}_{k-1} + \eta_{k-1} \end{cases} \quad (7.1)$$

onde $A_0 = A(\theta_0)$ e $C_0 = C(\theta_0)$. O Filtro de Kalman associado ao processo de identificação, projetado sobre $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$ será:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}_k &= A_p \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{k-1} &= \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + K_p (\mathbf{y}_{k-1} - \bar{\mathbf{y}}_{k-1}) \\ \bar{\mathbf{y}}_{k-1} &= C_p \bar{\mathbf{x}}_{k-1} \end{cases} \quad (7.2)$$

onde:

$\bar{\mathbf{x}}_k$ é o vetor de estado predito no instante k ;

$\hat{\mathbf{x}}_k$ é o vetor de estado estimado no instante k ;

$\bar{\mathbf{y}}_k$ é a predição da medida no instante k ;

$A_p = A_0 + \Delta A$;

$C_p = C_0 + \Delta C$;

$K_p = K_0 + \Delta K$.

Sendo ΔA e ΔC perturbações no modelo da planta e ΔK a consequente perturbação no filtro de Kalman. A matriz de covariância do erro de predição dos estados P'_p é dada por:

$$P'_{P_k} = E[(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T] \quad (7.3)$$

Desenvolvendo os sistemas da EQ. 7.1 e da EQ. 7.2 para obter $\bar{\mathbf{x}}_k$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_k &= A_p [\bar{\mathbf{x}}_{k-1} + K_p (C_0 \mathbf{x}_{k-1} + \eta_{k-1} - C_p \bar{\mathbf{x}}_{k-1})] \\ \bar{\mathbf{x}}_k &= A_p (I - K_p C_p) \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + A_p K_p C_0 \mathbf{x}_{k-1} + A_p K_p \eta_{k-1} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Subtraindo a EQ. 7.4 de \mathbf{x}_k no sistema da EQ. 7.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k &= (A_0 - A_p K_p C_p) \mathbf{x}_{k-1} + A_p (K_p C_p - 1) \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + D \xi_{k-1} - A_p K_p \eta_{k-1} \\ \mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k &= (A_0 - A_p K_p C_p) (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1}) + (A_p K_p \Delta C - \Delta A) \bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \\ &\quad + D \xi_{k-1} - A_p K_p \eta_{k-1} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Transpondo a EQ. 7.5:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T &= (\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^T (A_0 - A_p K_p C_0)^T + \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T (A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T + \\ &\quad + \xi_{k-1}^T D^T - \eta_{k-1}^T (A_p K_p)^T \end{aligned} \quad (7.6)$$

Substituindo a EQ. 7.5 e a EQ. 7.6 na EQ. 7.3, considerando que os ruídos são independentes entre si e entre os estados da planta e os estados estimados:

$$\begin{aligned} P'_{P_k} &= (A_0 - A_p K_p C_0) P'_{P_{k-1}} (A_0 - A_p K_p C_0)^T + (A_0 - A_p K_p C_0) N_{k-1}^T (A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T + \\ &\quad + (A_p K_p \Delta C - \Delta A) N_{k-1} (A_0 - A_p K_p C_0)^T + (A_p K_p \Delta C - \Delta A) L_{k-1} (A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T + \\ &\quad + D Q D^T + (A_p K_p) R (A_p K_p)^T \end{aligned} \quad (7.7)$$

Onde:

$$\begin{cases} N_k = E[\bar{\mathbf{x}}_k (\mathbf{x}_k - \bar{\mathbf{x}}_k)^T] \\ L_k = E[\bar{\mathbf{x}}_k \bar{\mathbf{x}}_k^T] \end{cases} \quad (7.8)$$

Considerando a estacionariedade das esperanças matemáticas, $\lim_{k \rightarrow \infty} P'_{P_k} = P'_P$, $\lim_{k \rightarrow \infty} N_k = N$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = L$:

$$\begin{aligned} \Delta P' = P'_P - P'_0 &= [A_0 - (A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)C_0] (P'_0 + \Delta P') [A_0 - (A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)C_0]^T + \\ &\quad + [A_0 - (A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)C_0] N^T [(A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)\Delta C - \Delta A]^T + \\ &\quad + [(A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)\Delta C - \Delta A] N [A_0 - (A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)C_0]^T + \\ &\quad + [(A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)\Delta C - \Delta A] L [(A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)\Delta C - \Delta A]^T - \\ &\quad - D Q D^T + (A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K) R [(A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)]^T - \\ &\quad - \underbrace{(A_0 - A_0 K_0 C_0) P'_0 (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T + D Q D^T - A_0 K_0 R (A_0 K_0)^T}_{-P'_0} \end{aligned} \quad (7.9)$$

Onde P'_0 é obtido da EQ. 7.7, desprezando as perturbações. P'_0 é a matriz de covariância do erro de predição dos estados estimados pelo Filtro de Kalman projetado com $\theta = \theta_0$. Em regime assintótico são válidas as seguintes relações (ANDERSON & MOORE, 1979):

$$\begin{cases} P'_0 = A_0 P'_0 A_0^T - A_0 K_0 C_0 P'_0 A_0^T + D Q D^T \text{ (Equação Algébrica de Ricatti)} \\ K_0 = P'_0 C_0^T \underbrace{(C_0 P'_0 C_0^T + R)}_{M_0}^{-1} \text{ (Ganho de Kalman)} \\ M_0 = C_0 P'_0 C_0^T + R \text{ (Covariância do erro de predição da saída)} \end{cases} \quad (7.10)$$

Portanto, por se tratarem de matrizes simétricas, $M_0^T = M_0$ e $P_0^T = P_0$:

$$K_0 M_0 - P'_0 C_0^T = 0 \therefore M_0 K_0^T - C_0 P'_0 = 0 \quad (7.11)$$

Pode-se escrever, a partir da EQ. 7.10:

$$\begin{aligned}
P'_0 &= A_0 P'_0 A_0^T - A_0 K_0 C_0 P'_0 A_0^T + D Q D^T + \cancel{A_0 P'_0 (A_0 K_0 C_0)^T} - \cancel{A_0 P'_0 (A_0 K_0 C_0)^T} + \\
&\quad + (A_0 K_0 C_0) P'_0 (A_0 K_0 C_0)^T - (A_0 K_0) \underbrace{C_0 P'_0 C_0^T}_{M_0-R} (A_0 K_0)^T \\
P'_0 &= (A_0 - A_0 K_0 C_0) P'_0 (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T + D Q D^T + \underbrace{A_0 (P'_0 C_0^T) (A_0 K_0)^T - A_0 (K_0 M_0) (A_0 K_0)^T}_{A_0 (P'_0 C_0^T - K_0 M_0) (A_0 K_0)^T} + \\
&\quad + (A_0 K_0) R (A_0 K_0)^T \tag{7.12}
\end{aligned}$$

Utilizando a EQ. 7.11 obtém-se:

$$P'_0 = (A_0 - A_0 K_0 C_0) P'_0 (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T + (A_0 K_0) R (A_0 K_0)^T + D Q D^T \tag{7.13}$$

que é a expressão de P'_0 utilizada na EQ. 7.9. Expandindo a EQ. 7.9:

$$\begin{aligned}
\Delta P' &= (A_0 - A_0 K_0 C_0 - A_0 \Delta K C_0 - \Delta A K_0 C_0 - \Delta A \Delta K C_0) (P'_0 + \Delta P') (A_0 - A_0 K_0 C_0 - A_0 \Delta K C_0 - \\
&\quad - \Delta A K_0 C_0 - \Delta A \Delta K C_0)^T + (A_0 - A_0 K_0 C_0 - A_0 \Delta K C_0 - \Delta A K_0 C_0 - \Delta A \Delta K C_0) N^T (A_0 K_0 \Delta C + \\
&\quad + A_0 \Delta K \Delta C + \Delta A K_0 \Delta C + \Delta A \Delta K \Delta C - \Delta A)^T + (A_0 K_0 \Delta C + A_0 \Delta K \Delta C + \Delta A K_0 \Delta C + \\
&\quad + \Delta A \Delta K \Delta C - \Delta A) N (A_0 - A_0 K_0 C_0 - A_0 \Delta K C_0 - \Delta A K_0 C_0 - \Delta A \Delta K C_0)^T + (A_0 K_0 \Delta C + \\
&\quad + A_0 \Delta K \Delta C + \Delta A K_0 \Delta C + \Delta A \Delta K \Delta C - \Delta A) L (A_0 K_0 \Delta C + A_0 \Delta K \Delta C + \Delta A K_0 \Delta C + \\
&\quad + \Delta A \Delta K \Delta C - \Delta A)^T + (A_0 K_0 + A_0 \Delta K + \Delta A K_0 + \Delta A \Delta K) R (A_0 K_0 + A_0 \Delta K + \Delta A K_0 + \Delta A \Delta K)^T - \\
&\quad - (A_0 - A_0 K_0 C_0) P'_0 (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T - A_0 K_0 R (A_0 K_0)^T \tag{7.14}
\end{aligned}$$

Analisando a EQ. 7.14 pode-se verificar que os termos que multiplicam N são no mínimo de 1ª ordem e aqueles que multiplicam L , no mínimo de 2ª ordem em Δ . Serão desprezados os termos de ordem igual ou maior do que 3, em Δ , na EQ. 7.14. Desta forma os termos em Δ de ordem igual ou maior a 2 de N e maior ou igual a 1 de L serão desprezados e assim N será de 1ª ordem em relação a Δ e L não dependerá de Δ . Portanto os termos de ordem 2 ou maior em relação a Δ que multiplicam N e todos os termos de ordem 3 ou maior em Δ na EQ. 7.14 podem ser desconsiderados:

$$\begin{aligned}
\Delta P' &= (A_0 - A_0 K_0 C_0 - A_0 \Delta K C_0 - \Delta A K_0 C_0 - \Delta A \Delta K C_0) (P'_0 + \Delta P') (A_0 - A_0 K_0 C_0 - A_0 \Delta K C_0 - \\
&\quad - \Delta A K_0 C_0 - \Delta A \Delta K C_0)^T + (A_0 - A_0 K_0 C_0 - A_0 \Delta K C_0 - \Delta A K_0 C_0) N^T (A_0 K_0 \Delta C - \Delta A)^T + \\
&\quad + (A_0 K_0 \Delta C - \Delta A) N (A_0 - A_0 K_0 C_0 - A_0 \Delta K C_0 - \Delta A K_0 C_0)^T + (A_0 K_0 \Delta C + A_0 \Delta K \Delta C + \\
&\quad + \Delta A K_0 \Delta C - \Delta A) L (A_0 K_0 \Delta C + A_0 \Delta K \Delta C + \Delta A K_0 \Delta C - \Delta A)^T + (A_0 K_0 + A_0 \Delta K + \\
&\quad + \Delta A K_0 + \Delta A \Delta K) R (A_0 K_0 + A_0 \Delta K + \Delta A K_0 + \Delta A \Delta K)^T - (A_0 - A_0 K_0 C_0) P'_0 (A_0 - \\
&\quad - A_0 K_0 C_0)^T - A_0 K_0 R (A_0 K_0)^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta P' = & (A_0 - A_0 K_0 C_0) P'_0 (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T - (A_0 - A_0 K_0 C_0) P'_0 (A_0 \Delta K C_0)^T - (A_0 - \\
& - A_0 K_0 C_0) P'_0 (\Delta A K_0 C_0)^T - (A_0 - A_0 K_0 C_0) P'_0 (\Delta A \Delta K C_0)^T - (A_0 \Delta K C_0) P'_0 (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T + \\
& + (A_0 \Delta K C_0) P'_0 (A_0 \Delta K C_0)^T + (A_0 \Delta K C_0) P'_0 (\Delta A K_0 C_0)^T - (\Delta A K_0 C_0) P'_0 (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T + \\
& + (\Delta A K_0 C_0) P'_0 (A_0 \Delta K C_0)^T + (\Delta A K_0 C_0) P'_0 (\Delta A K_0 C_0)^T - (\Delta A \Delta K C_0) P'_0 (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T + \\
& + (A_0 - A_0 K_0 C_0) \Delta P' (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T - (A_0 - A_0 K_0 C_0) \Delta P' (A_0 \Delta K C_0)^T - (A_0 - \\
& - A_0 K_0 C_0) \Delta P' (\Delta A K_0 C_0)^T - (A_0 \Delta K C_0) \Delta P' (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T - (\Delta A K_0 C_0) \Delta P' (A_0 - \\
& - A_0 K_0 C_0)^T + (A_0 - A_0 K_0 C_0) N^T (A_0 K_0 \Delta C)^T - (A_0 - A_0 K_0 C_0) N^T \Delta A^T + (A_0 K_0 \Delta C) N (A_0 - \\
& - A_0 K_0 C_0)^T - \Delta A N (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T + (A_0 K_0 \Delta C) L (A_0 K_0 \Delta C)^T - (A_0 K_0 \Delta C) L \Delta A^T - \\
& - \Delta A L (A_0 K_0 \Delta C)^T + \Delta A L \Delta A^T + (A_0 K_0) R (A_0 K_0)^T + (A_0 K_0) R (A_0 \Delta K)^T + (A_0 K_0) R (\Delta A K_0)^T + \\
& + (A_0 K_0) R (\Delta A \Delta K)^T + (A_0 \Delta K) R (A_0 K_0)^T + (A_0 \Delta K) R (A_0 \Delta K)^T + (A_0 \Delta K) R (\Delta A K_0)^T + \\
& + (\Delta A K_0) R (A_0 K_0)^T + (\Delta A K_0) R (A_0 \Delta K)^T + (\Delta A K_0) R (\Delta A K_0)^T + (\Delta A \Delta K) R (A_0 K_0)^T - \\
& - (A_0 - A_0 K_0 C_0) P'_0 (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T - A_0 K_0 R (A_0 K_0)^T
\end{aligned}$$

Utilizando a relação $C_0 P'_0 C_0^T = M_0 - R$ da EQ. 7.10:

$$\begin{aligned}
\Delta P' = & (A_0 - A_0 K_0 C_0) P'_0 (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T - A_0 P'_0 (A_0 \Delta K C_0)^T + \\
& + A_0 K_0 (M_0 \xrightarrow{2} R) (A_0 \Delta K)^T - A_0 P'_0 (\Delta A K_0 C_0)^T + A_0 K_0 (M_0 \xrightarrow{3} R) (\Delta A K_0)^T - A_0 P'_0 (\Delta A \Delta K C_0)^T + \\
& + A_0 K_0 (M_0 \xrightarrow{4} R) (\Delta A \Delta K)^T - A_0 \Delta K C_0 P'_0 A_0^T + A_0 \Delta K (M_0 \xrightarrow{5} R) (A_0 K_0)^T + A_0 \Delta K (M_0 - \\
& - R) (A_0 \Delta K)^T + A_0 \Delta K (M_0 \xrightarrow{7} R) (\Delta A K_0)^T - \Delta A K_0 C_0 P'_0 A_0^T + \Delta A K_0 (M_0 \xrightarrow{8} R) (A_0 K_0)^T + \\
& + \Delta A K_0 (M_0 \xrightarrow{9} R) (A_0 \Delta K)^T + \Delta A K_0 (M_0 \xrightarrow{10} R) (\Delta A K_0)^T - \Delta A \Delta K C_0 P'_0 A_0^T + \Delta A \Delta K (M_0 - \\
& - R) (A_0 K_0)^T + (A_0 - A_0 K_0 C_0) \Delta P' (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T - (A_0 - A_0 K_0 C_0) \Delta P' (A_0 \Delta K C_0)^T - (A_0 - \\
& - A_0 K_0 C_0) \Delta P' (\Delta A K_0 C_0)^T - (A_0 \Delta K C_0) \Delta P' (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T - (\Delta A K_0 C_0) \Delta P' (A_0 - \\
& - A_0 K_0 C_0)^T + (A_0 - A_0 K_0 C_0) N^T (A_0 K_0 \Delta C)^T - (A_0 - A_0 K_0 C_0) N^T \Delta A^T + (A_0 K_0 \Delta C) N (A_0 - \\
& - A_0 K_0 C_0)^T - \Delta A N (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T + (A_0 K_0 \Delta C) L (A_0 K_0 \Delta C)^T - (A_0 K_0 \Delta C) L \Delta A^T - \\
& - \Delta A L (A_0 K_0 \Delta C)^T + \Delta A L \Delta A^T + (A_0 K_0) R (A_0 K_0)^T + (A_0 K_0) R (A_0 \Delta K)^T + (A_0 K_0) R (\Delta A K_0)^T + \\
& + (A_0 K_0) R (\Delta A \Delta K)^T + (A_0 \Delta K) R (A_0 K_0)^T + (A_0 \Delta K) R (A_0 \Delta K)^T + (A_0 \Delta K) R (\Delta A K_0)^T + \\
& + (\Delta A K_0) R (A_0 K_0)^T + (\Delta A K_0) R (A_0 \Delta K)^T + (\Delta A K_0) R (\Delta A K_0)^T + (\Delta A \Delta K) R (A_0 K_0)^T - \\
& - (A_0 - A_0 K_0 C_0) P'_0 (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T - A_0 K_0 R (A_0 K_0)^T
\end{aligned}$$

Utilizando a EQ. 7.11:

$$\begin{aligned}
\Delta P' = & \cancel{-A_0 K_0 M_0 (A_0 \Delta K)^T} \xrightarrow{1} - A_0 K_0 M_0 (\Delta A K_0)^T \xrightarrow{2} - A_0 K_0 M_0 (\Delta A \Delta K)^T \xrightarrow{3} - A_0 \Delta K M_0 K_0^T A_0^T \xrightarrow{4} - \\
& \cancel{\Delta A K_0 M_0 K_0^T A_0^T} \xrightarrow{5} - \cancel{\Delta A \Delta K M_0 K_0^T A_0^T} \xrightarrow{6} + A_0 K_0 M_0 (\Delta A \Delta K)^T \xrightarrow{3} + A_0 \Delta K M_0 (A_0 K_0)^T \xrightarrow{4} + \\
& + A_0 \Delta K M_0 (A_0 \Delta K)^T \xrightarrow{1} + A_0 \Delta K M_0 (\Delta A K_0)^T \xrightarrow{5} + A_0 K_0 M_0 (A_0 \Delta K)^T \xrightarrow{1} + \Delta A K_0 M_0 (A_0 K_0)^T \xrightarrow{5} + \\
& + \Delta A K_0 M_0 (A_0 \Delta K)^T \xrightarrow{2} + \Delta A K_0 M_0 (\Delta A K_0)^T \xrightarrow{6} + A_0 K_0 M_0 (\Delta A K_0)^T \xrightarrow{2} + \Delta A \Delta K M_0 (A_0 K_0)^T \xrightarrow{6} + \\
& + (A_0 - A_0 K_0 C_0) \Delta P' (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T - (A_0 - A_0 K_0 C_0) \Delta P' (A_0 \Delta K C_0)^T - \\
& - (A_0 - A_0 K_0 C_0) \Delta P' (\Delta A K_0 C_0)^T - (A_0 \Delta K C_0) \Delta P' (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T - \\
& - (\Delta A K_0 C_0) \Delta P' (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T + (A_0 - A_0 K_0 C_0) N^T (A_0 K_0 \Delta C)^T - \\
& - (A_0 - A_0 K_0 C_0) N^T \Delta A^T + (A_0 K_0 \Delta C) N (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T - \Delta A N (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T + \\
& + (A_0 K_0 \Delta C) L (A_0 K_0 \Delta C)^T - (A_0 K_0 \Delta C) L \Delta A^T - \Delta A L (A_0 K_0 \Delta C)^T + \Delta A L \Delta A^T
\end{aligned}$$

Chega-se a seguinte expressão para $\Delta P'$:

$$\begin{aligned}
\Delta P' = & (A_0 \Delta K + \Delta A K_0) M_0 (A_0 \Delta K + \Delta A K_0)^T + \\
& + (A_0 - A_0 K_0 C_0) \Delta P' (A_0 - A_0 K_0 C_0 - A_0 \Delta K C_0 - \Delta A K_0 C_0)^T - \\
& - (A_0 \Delta K C_0 + \Delta A K_0 C_0) \Delta P' (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T + (A_0 - A_0 K_0 C_0) N^T (A_0 K_0 \Delta C - \Delta A)^T + \\
& + (A_0 K_0 \Delta C - \Delta A) N (A_0 - A_0 K_0 C_0)^T + (A_0 K_0 \Delta C - \Delta A) L (A_0 K_0 \Delta C - \Delta A)^T \quad (7.15)
\end{aligned}$$

A Matriz de covariância do erro de predição da saída é dada por:

$$M_p(k) = E\{[y_k - \bar{y}_k][y_k - \bar{y}_k]^T\} \quad (7.16)$$

Substituindo y_k e \bar{y}_k da EQ. 7.1 e da EQ.7.2, respectivamente, na EQ. 7.16 e considerando o ruído das medidas estatisticamente independente dos estados e de seus valores preditos, considerando também a estacionariedade das esperanças matemáticas quando k tende para o infinito:

$$M_0 + \Delta M = C_0 (P'_0 + \Delta P') C_0^T - C_0 N^T \Delta C^T - \Delta C N C_0^T + \Delta C L \Delta C^T + R \quad (7.17)$$

Utilizando a relação da covariância do erro de predição da saída da EQ. 7.10:

$$\begin{aligned}
\Delta M = & M_0 - R + C_0 \Delta P' C_0^T - C_0 N^T \Delta C^T - \Delta C N C_0^T + \Delta C L \Delta C^T + R - M_0 \\
= & C_0 \Delta P' C_0^T - C_0 N^T \Delta C^T - \Delta C N C_0^T + \Delta C L \Delta C^T \quad (7.18)
\end{aligned}$$

7.1.1 CÁLCULO DE L

Substituindo a EQ. 7.4 na equação de L da EQ. 7.8:

$$\begin{aligned}
L &= E\{[A_p(I - K_p C_p)\bar{\mathbf{x}}_{k-1} + A_p K_p C_0 \mathbf{x}_{k-1} + A_p K_p \boldsymbol{\eta}_{k-1}][A_p(I - K_p C_p)\bar{\mathbf{x}}_{k-1} + \\
&\quad + A_p K_p C_0 \mathbf{x}_{k-1} + A_p K_p \boldsymbol{\eta}_{k-1}]^T\} = \\
&= (A_p - A_p K_p C_p)L(A_p - A_p K_p C_p)^T + (A_p - A_p K_p C_p)E(\bar{\mathbf{x}}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T)(A_p K_p C_0)^T + \\
&\quad + A_p K_p C_0 E(\mathbf{x}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T)(A_p - A_p K_p C_p)^T + A_p K_p C_0 E(\mathbf{x}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T)(A_p K_p C_0)^T + \\
&\quad + A_p K_p R(A_p K_p)^T \\
&= A_p L A_p^T - A_p L (A_p K_p C_p)^T - A_p K_p C_p L A_p^T + A_p K_p C_p L (A_p K_p C_p)^T + \\
&\quad + A_p E(\bar{\mathbf{x}}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T)(A_p K_p C_0)^T - A_p K_p C_p E(\bar{\mathbf{x}}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T)(A_p K_p C_0)^T + A_p K_p C_0 E(\mathbf{x}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T) A_p^T - \\
&\quad - A_p K_p C_0 E(\mathbf{x}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T)(A_p K_p C_p)^T + A_p K_p C_0 E(\mathbf{x}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T)(A_p K_p C_0)^T + A_p K_p R(A_p K_p)^T
\end{aligned}$$

De acordo com a EQ. 7.14 os termos de ordem em Δ maior ou igual a 1 de L podem ser desconsiderados, assim:

$$\begin{aligned}
L &= A_0 L A_0^T - A_0 L (A_0 K_0 C_0)^T - A_0 K_0 C_0 L A_0^T + A_0 K_0 C_0 L (A_0 K_0 C_0)^T + \\
&\quad + A_0 E(\bar{\mathbf{x}}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T)(A_0 K_0 C_0)^T - A_0 K_0 C_0 E(\bar{\mathbf{x}}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T)(A_0 K_0 C_0)^T + A_0 K_0 C_0 E(\mathbf{x}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T) A_0^T - \\
&\quad - A_0 K_0 C_0 E(\mathbf{x}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T)(A_0 K_0 C_0)^T + A_0 K_0 C_0 E(\mathbf{x}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T)(A_0 K_0 C_0)^T + A_0 K_0 R(A_0 K_0)^T \\
&= A_0 L A_0^T + A_0 \underbrace{[-L + E(\bar{\mathbf{x}}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T)]}_N (A_0 K_0 C_0)^T + A_0 K_0 C_0 \underbrace{[-L + E(\mathbf{x}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T)]}_{N^T} A_0^T + \\
&\quad + A_0 K_0 C_0 \underbrace{[L + E(\bar{\mathbf{x}}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T) - E(\mathbf{x}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T) + E(\mathbf{x}_{k-1} \mathbf{x}_{k-1}^T)]}_{P'_p = P'_0 + \Delta P'_p} (A_0 K_0 C_0)^T + A_0 K_0 R(A_0 K_0)^T \\
&= A_0 L A_0^T + A_0 N (A_0 K_0 C_0)^T + A_0 K_0 C_0 N^T A_0^T + A_0 K_0 C_0 P'_0 (A_0 K_0 C_0)^T + A_0 K_0 R(A_0 K_0)^T \\
&= A_0 L A_0^T + A_0 N (A_0 K_0 C_0)^T + A_0 K_0 C_0 N^T A_0^T + \underbrace{A_0 K_0 C_0 P'_0 C_0^T (A_0 K_0)^T}_{A_0 K_0 (M_0 - R) (A_0 K_0)^T} + A_0 K_0 R(A_0 K_0)^T \\
&= A_0 L A_0^T + A_0 N (A_0 K_0 C_0)^T + A_0 K_0 C_0 N^T A_0^T + A_0 K_0 M_0 (A_0 K_0)^T \tag{7.19}
\end{aligned}$$

7.1.2 CÁLCULO DE N

Substituindo a EQ. 7.4 e a EQ. 7.6 na equação de N da EQ. 7.8:

$$\begin{aligned}
N &= E\{[A_p(I - K_p C_p)\bar{\mathbf{x}}_{k-1} + A_p K_p C_0 \mathbf{x}_{k-1} + A_p K_p \boldsymbol{\eta}_{k-1}][(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^T (A_0 - A_p K_p C_0)^T + \\
&\quad + \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T (A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T + \boldsymbol{\xi}_{k-1}^T D^T - \boldsymbol{\eta}_{k-1}^T (A_p K_p)^T]\} \\
&= A_p(I - K_p C_p) \underbrace{E[\bar{\mathbf{x}}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^T]}_N (A_0 - A_p K_p C_0)^T + A_p(I - K_p C_p) \underbrace{E[\bar{\mathbf{x}}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T]}_L (A_p K_p \Delta C - \\
&\quad - \Delta A)^T + A_p K_p C_0 E[\mathbf{x}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^T] (A_0 - A_p K_p C_0)^T + A_p K_p C_0 E[\mathbf{x}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T] (A_p K_p \Delta C - \\
&\quad - \Delta A)^T - A_p K_p \underbrace{E[\boldsymbol{\eta}_{k-1} \boldsymbol{\eta}_{k-1}^T]}_R (A_p K_p)^T \\
&= A_p N (A_0 - A_p K_p C_0)^T - A_p K_p C_0 N (A_0 - A_p K_p C_0)^T - A_p K_p \Delta C N (A_0 - A_p K_p C_0)^T + \\
&\quad + A_p L (A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T - A_p K_p C_0 L (A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T - A_p K_p \Delta C L (A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T + \\
&\quad + A_p K_p C_0 E[\mathbf{x}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^T] (A_0 - A_p K_p C_0)^T + A_p K_p C_0 E[\mathbf{x}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T] (A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T - \\
&\quad - A_p K_p R (A_p K_p)^T \\
&= A_p N (A_0 - A_p K_p C_0)^T + A_p K_p C_0 \underbrace{\{-N + E[\mathbf{x}_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1} - \bar{\mathbf{x}}_{k-1})^T]\}}_{P'_p = P'_0 + \Delta P'_p} (A_0 - A_p K_p C_0)^T - \\
&\quad - A_p K_p \Delta C N (A_0 - A_p K_p C_0)^T + A_p L (A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T + \\
&\quad + A_p K_p C_0 \underbrace{\{-L + E[\mathbf{x}_{k-1} \bar{\mathbf{x}}_{k-1}^T]\}}_{N^T} (A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T - A_p K_p \Delta C L (A_p K_p \Delta C - \Delta A)^T - \\
&\quad - A_p K_p R (A_p K_p)^T
\end{aligned}$$

De acordo com a EQ. 7.14 os termos de ordem em Δ maior ou igual a 2 de N podem ser desconsiderados, assim:

$$\begin{aligned}
N &= A_0N(A_0 - A_0K_0C_0)^T + A_pK_pC_0P'_0(A_0 - A_pK_pC_0)^T + A_0L(A_0K_0\Delta C - \Delta A)^T - \\
&\quad - A_pK_pR(A_pK_p)^T \\
&= A_0N(A_0 - A_0K_0C_0)^T + (A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)C_0P'_0[A_0 - (A_0 + \Delta A)(K_0 + \Delta K)C_0]^T \\
&\quad - A_0L(A_0K_0\Delta C - \Delta A)^T - A_pK_pR(A_pK_p)^T \\
&= A_0N(A_0 - A_0K_0C_0)^T + A_0K_0C_0P'_0A_0^T - A_0K_0 \underbrace{C_0P'_0C_0^T}_{M_0-R}(A_0K_0)^T - A_0K_0 \underbrace{C_0P'_0C_0^T}_{M_0-R}(\Delta AK_0)^T - \\
&\quad - A_0K_0 \underbrace{C_0P'_0C_0^T}_{M_0-R}(A_0\Delta K)^T + A_0\Delta KC_0P'_0A_0^T - A_0\Delta K \underbrace{C_0P'_0C_0^T}_{M_0-R}(A_0K_0)^T + \Delta AK_0C_0P'_0A_0^T - \\
&\quad - \Delta AK_0 \underbrace{C_0P'_0C_0^T}_{M_0-R}(A_0K_0)^T + A_0L(A_0K_0\Delta C - \Delta A)^T - A_pK_pR(A_pK_p)^T \\
&= A_0N(A_0 - A_0K_0C_0)^T + A_0K_0 \underbrace{(C_0P'_0 - M_0K_0^T)}_0 A_0^T + A_0K_0R(A_0K_0)^T - A_0K_0M_0(\Delta AK_0)^T + \\
&\quad + A_0K_0R(\Delta AK_0)^T - A_0K_0M_0(A_0\Delta K)^T + A_0K_0R(A_0\Delta K)^T + A_0\Delta K \underbrace{(C_0P'_0 - M_0K_0^T)}_0 A_0^T + \\
&\quad + A_0\Delta KR(A_0K_0)^T + \Delta AK_0 \underbrace{(C_0P'_0 - M_0K_0^T)}_0 A_0^T + \Delta AK_0R(A_0K_0)^T + A_0L(A_0K_0\Delta C - \Delta A)^T - \\
&\quad - A_pK_pR(A_pK_p)^T \\
&= A_0N(A_0 - A_0K_0C_0)^T - A_0K_0M_0(A_0\Delta K + \Delta AK_0)^T + A_0L(A_0K_0\Delta C - \Delta A)^T \tag{7.20}
\end{aligned}$$

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)