PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

JULIANA GRASSMANN DOS SANTOS

OBSERVAÇÃO E GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES: um tema para a investigação de professores sobre sua própria prática

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

São Paulo

2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

JULIANA GRASSMANN DOS SANTOS

OBSERVAÇÃO E GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES: um tema para a investigação de professores sobre sua própria prática

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação da* ***Profa. Dra. Sílvia Dias Alcântara Machado.***

São Paulo
2008

Banca Examinadora

Dedico este trabalho ao professor *Ivanildo Gomes do Prado,* que influenciou minha carreira e minha visão de mundo. Ensinou-me que o melhor modo de se aprender é com os outros.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, que me proporcionou saúde, força e perseverança em todos os momentos desse trabalho.

A trajetória que percorri nem sempre foi fácil, mas pude contar com pessoas e instituições que me ajudaram a alcançar meu objetivo.

Meus agradecimentos então a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização desta pesquisa. Em especial, a toda minha família pelo estímulo, amparo e por compreender a importância dessa conquista para mim. A Thiago N. Fabbrini pelo apoio, paciência e companheirismo e a sua família pelo incentivo. À professora Dra. Sílvia Dias Alcântara Machado, minha orientadora, pelos ensinamentos e auxílio tanto na concretização desse trabalho quanto no meu crescimento pessoal e profissional. Às professoras Dra. Marilene Ribeiro Resende e Dra. Célia Carolino Pires pelas sugestões no exame de qualificação, como membros da banca examinadora. Ao grupo de professores do Curso de Matemática II e a coordenadora do PROVE. Em especial, à Maurina Izabel e Doroti de Oliveira Santos, que permitiram que eu realizasse este estudo ao compartilharmos momentos de aprendizagem. Aos professores da PUC-SP e aos colegas de mestrado, especialmente aos amigos César Augusto Sverberi Carvalho e Marcelo Cordeiro da Silva, que me trouxeram serenidade em fases difíceis. Aos colegas da Escola Estadual Profa. Beatriz de Quadros Leme. Em especial à Maria de Fátima de Souto Santana pelo carinho e atenção especial dispensados a mim e à Neide Maria dos Santos pela ajuda na revisão desse trabalho.

Por fim, agradeço à Secretaria da Educação do Estado pela concessão da bolsa de estudos.

RESUMO

O presente estudo investigou quais as mudanças de percepção dos professores sobre o tema observação e generalização de padrões ao vivenciarem um processo de pesquisa em sua própria sala de aula. Os dados da pesquisa foram obtidos a partir da observação e intervenção nos processos de pesquisa-ação de duas professoras. Essas professoras participaram de um curso de formação continuada proposto pelo Projeto de Valorização do Educador e Melhoria da Qualidade de Ensino da rede municipal de São Paulo e realizaram pesquisas em sua própria sala de aula a respeito de atividades de observação e generalização de padrões. Os dados coletados apontam para uma variedade de aprendizagens, algumas diretamente relacionadas com a temática do grupo, a observação e generalização de padrões, e outras relacionadas com os métodos de pesquisa privilegiados no grupo, a pesquisa sobre a própria prática utilizando a metodologia inspirada na engenharia didática. Os professores notaram a importância do tema e passaram a localizar questões que envolvem padrões dentro de sua sala, reconhecendo-os como parte de sua rotina escolar. Há depoimentos em que os professores citam o grande interesse mostrado pelos alunos ao resolverem tais atividades e sua opção por indicarem questões do livro que antes eram ignoradas. Houve uma notável mudança no olhar dos professores durante a análise dos protocolos, que deixaram de classificar em certo e errado e passaram a observar e compreender qual o raciocínio que os alunos utilizavam. A investigação de padrões em seqüências revelou ser um tema abrangente e estimulante para os professores e a pesquisa-ação realizada por professores lado a lado com pesquisadores por um período de tempo revelou ser um ambiente favorável a mudanças e ao aperfeiçoamento profissional de todos os envolvidos.

Palavras-chave: Educação Algébrica, observação e generalização de padrões, formação continuada.

ABSTRACT

The present study investigated which are the changes in the teachers' perception about the theme "Observation and Generalization of Patterns" when living a research process in his/her own classroom. The data of the research were obtained from the observation and intervention in the processes of research-action of two teachers. These teachers participated in a course of continuous formation proposed by the Project of Valorization of the Educator and Improvement of the Quality of Teaching of the municipal net of schools of São Paulo and they have conducted researches in their own classroom referring to observation activities and generalization of patterns. The collected data point to a variety of learning methods, some of them directly related to the theme of the group, the observation and generalization of patterns, and others related to the research methods privileged in the group, the research into the own practice using the methodology inspired in the didactic engineering. The teachers noticed the importance of the theme and they started locating subjects that involve patterns inside of their class, regarding them as part of their school routine. There are statements in which the teachers mention the great interest shown by the students when solving such activities and their willingness to indicate subjects of the book that were previously unknown by them. There was a visible change in the teachers' viewpoint during the analysis of the protocols, since they have stopped classifying the students as being right or wrong and have started to observe and to understand the reasoning that was being used by the students. The investigation of patterns in sequences revealed to be an including and stimulant theme to the teachers. Furthermore, the research-action accomplished by teachers side-by-side with researchers for a period of time revealed to be a favorable atmosphere to changes and to the professional improvement of all the involved.

Keywords: Algebraic Education, observation and generalization of patterns, continuous formation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Círculos divididos em regiões 22
Figura 2: Seis pontos sobre a circunferência.. 23
Figura 3: Fases da pesquisa-ação em espiral.. 44
Figura 4: Quadro do material disponibilizado aos alunos-professores 50
Figura 5: Esquema do processo de pesquisa de Maurina.. 57
Figura 6: Atividade desenvolvida por uma aluna-professora 61
Figura 7: Instrumento de pesquisa de Maurina 69
Figura 8: Rascunho de um dos alunos 69
Figura 9: Protocolo de Thiago 72
Figura 10: Rascunho de Thiago 72
Figura 11: Protocolo de Rodrigo... 73
Figura 12: Protocolo de aluno a ser entrevistado 74
Figura 13: Seqüência cíclica 75
Figura 14: Protocolo de Bárbara 77
Figura 15: Protocolo de Cátia 78
Figura 16: Raciocínio explicitado por Cátia 78
Figura 17: Protocolo de Everton 79
Figura 18: Protocolo de Daniela 80
Figura 19: Instrumento de pesquisa do aluno-professor 84
Figura 20: Protocolo.. 85
Figura 21: Questão inicial do aluno-professor 86
Figura 22: Esquema do processo de Doroti 87
Figura 23: Questão criada por um aluno-professor em 2006 90
Figura 24: Instrumento de pesquisa de Doroti 94
Figura 25: Protocolo de dupla que classificou os fios em “pares” e “ímpares”.............. 96
Figura 26: Protocolo da pesquisa de Doroti. 96
Figura 27: Tabela encontrada em um protocolo de Doroti 97
Figura 28: Instrumento de pesquisa de Maurina 104

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 11

JUSTIFICATIVA 13

FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS: LEITURAS E ESCOLHAS 16

- **Observação e generalização de padrões: sua importância para a Educação Algébrica** 16
- **Reflexões sobre a observação e generalização de padrões** 21
- **Resultados de pesquisas sobre a observação e generalização de padrões** 26
- **Formação continuada: a pesquisa-ação como um caminho para a formação docente** 30
- **Pesquisa colaborativa: uma estratégia para investigar a própria prática** 32
- **Pesquisa-ação** 39
  - ***O que significa mudar*** 40
  - ***Pesquisa-ação: auxílio na formação profissional*** 41
  - ***A legitimidade da pesquisa-ação*** 45
- **Procedimentos metodológicos** 48

SOBRE O PROCESSO DE PESQUISA-AÇÃO DOS PROFESSORES 52

- **Sobre o PROVE** 52
- **Concepção do Curso de Matemática II** 53
  - ***Como o tema observação e generalização de padrões surgiu no grupo*** 54
  - ***A pesquisa-ação como metodologia do curso*** 56
- **2006 – Pesquisa-ação de Maurina** 56
- **2007 – Pesquisa-ação de Doroti** 87

CONSIDERAÇÕES FINAIS 108

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 117

ANEXOS 121

INTRODUÇÃO

O homem sempre foi levado a procurar as regularidades em sua vida. Seja nos astros quando o calendário lunar foi criado, nas estampas de tecidos ao buscar formas harmônicas ou nas notas musicais ao compor melodias. Essas situações revelam um padrão.

Além dos padrões nas artes, os homens também buscaram padrões na natureza. Johanes Kepler (1571-1630), por exemplo, concluiu que a órbita de Marte é uma elipse. Apoiando-se nas medições feitas por Tycho Brahe (1546-1601), ele pôde observar regularidades que o levaram a concluir que Marte descreve uma trajetória elíptica com o Sol posicionado sobre um dos focos. Muitos fenômenos físicos eram explicados através da observação de padrões e de sua generalização.

Há autores que defendem que descobrir e revelar padrões é o foco da atividade matemática. Segundo Devlin (2002, p. 9), "o que o matemático faz é examinar padrões abstratos - padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc."

Muitos pesquisadores, dentre eles Vale & Pimentel (2005), acreditam que se a Matemática for olhada como a ciência dos padrões, é possível contribuir para uma nova visão desta disciplina por parte dos professores, proporcionando uma aprendizagem rica e motivadora para os estudantes.

Se observarmos as orientações dos PCN do Ensino Fundamental (1998, p. 76), podemos notar que elas recomendam que o professor utilize padrões como forma de encaminhamento à Álgebra. Para o terceiro ciclo (5ª e 6ª séries/ 6° e 7° anos), são sugeridas seqüências numéricas com o objetivo de capacitar o aluno a utilizar representações algébricas para expressar generalizações.

Para que as atividades de observação e generalização de padrões sejam utilizadas pelo professor, é necessário antes sensibilizá-los sobre a importância desse tema. Desse modo, o presente trabalho contribuiu para a investigação de como o tema se constitui no nível docente.

Este estudo investigou as mudanças de percepção de duas professoras sobre a observação e generalização de padrões ao vivenciarem um processo de pesquisa em sua própria sala de aula. As duas professoras foram impelidas a realizar investigações acerca de sua prática ao participarem de um curso de formação continuada nomeado Curso de Matemática II, proposto pelo Projeto de Valorização do Educador e Melhoria da Qualidade de Ensino (PROVE).

Os dados da pesquisa foram obtidos a partir da observação dos processos de pesquisa-ação a respeito do tema observação e generalização de padrões e da intervenção nesses mesmos processos.

No capítulo I, estão descritas as condições que surgiram para que eu pudesse realizar uma pesquisa sobre o tema observação e generalização de padrões junto a um grupo de formação continuada. Há também a justificativa da relevância deste estudo que investiga como a generalização de padrões se constitui no nível docente.

No capítulo II, apresento as leituras e escolhas que fundamentam teórica e metodologicamente o presente trabalho. As contribuições não se restringem a trabalhos sobre a Educação Algébrica - Miguel *et al*. (1992, 1993) - e observação e generalização de padrões - Vale & Pimentel (2005), Mason (1996), Lee (1996), Radford (1996). Há também leituras referentes à formação continuada de professores - Fiorentini *et al.* (2002).

Minha inserção no grupo de formação continuada me impôs uma metodologia. Os professores inscritos no curso deveriam realizar uma investigação sobre sua própria prática, o que me levou a pesquisar sobre a pesquisa-ação - Barbier (2004), Zeichner & Diniz-Pereira (2005), Zeichner (1998), Fiorentini & Lorenzato (2006). Por se tratar de um trabalho coletivo, busquei leituras também sobre a pesquisa colaborativa - Fiorentini (2004), Boavida & Ponte (2002), Ponte & Serrazina (2003).

No capítulo III, comento sobre o PROVE, a concepção do Curso de Matemática II e como o tema observação e generalização de padrões surgiu. Em seguida, relato os processos de pesquisa-ação vivenciados por duas professoras nos cursos de 2006 e 2007.

No capítulo IV, apresento algumas conclusões acerca da questão que norteou minha pesquisa: quais as mudanças de percepção dos professores sobre o tema observação e generalização de padrões ao vivenciarem um processo de pesquisa em sua própria sala de aula?

JUSTIFICATIVA

Participo, desde o primeiro semestre de 2006, do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA) certificado pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo no Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Este é um dos grupos do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.

O projeto principal do GPEA, intitulado *Qual a álgebra a ser ensinada na formação de professores que ensinam matemática?*[1], é chamado de projeto guarda-chuva, pois abriga projetos menores que tratam dos tópicos em que a Educação Algébrica se divide. O projeto guarda-chuva direciona as pesquisas realizadas pelo grupo, as quais buscam "investigar o ensino da Álgebra nos níveis de educação: infantil, básica; universitária e pós-universitária" por meio de uma abordagem que "envolve estudos em planos paralelos e superpostos, através de análises multidimensionais de interação entre estudantes, professores e programas", formulando pesquisas de cunho documental, diagnóstica e interventiva. (COELHO *et al.*, 2003)

Sobre observação e generalização de padrões: uma atividade matemática transversal é um dos projetos abrigados sob o dito guarda-chuva. A importância do tema desse projeto pode ser constatada no trabalho de vários pesquisadores de Matemática, como Davis & Hersh (1995), e de Educação Matemática, como Miguel *et al.* (1993), Mason (1996), Becker e Rivera (2006). O reflexo da importância e atualidade do tema aparece em vários documentos oficiais nacionais, como os *Parâmetros Curriculares Nacionais* (PCN) (1998), e estrangeiros, como *Principles and Standards for School Mathematics*, publicados pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM).

O projeto *Sobre observação e generalização de padrões: uma atividade matemática transversal* busca investigar como a generalização de padrões se constitui no nível institucional (PCN, programas curriculares, etc.), no nível docente (professores de todos os níveis e modalidades de ensino, do infantil ao superior) e no nível discente (alunos de todos os segmentos).

[1] Este também é o título do artigo escrito por Sônia P. Coelho, Sílvia D. A. Machado e Maria Cristina S. A. Maranhão, no qual o projeto do grupo é apresentado.

Os resultados das investigações realizadas dentro desse projeto têm um objetivo maior que é “contribuir para a sensibilização da comunidade escolar sobre a importância do desenvolvimento de habilidades e competências propiciadas por atividades da observação e generalização de padrões no equacionamento de problemas”, segundo relatório elaborado pelo Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP (1996).

Ao iniciar o curso de mestrado, minha orientadora me convidou a acompanhá-la, como auxiliar, em um curso de formação continuada para professores da rede municipal de ensino de São Paulo. Tal curso, denominado Curso de Matemática II, é oferecido pelo PROVE. Aceitei o convite, pois, como professora do ensino público estadual há mais de cinco anos, tinha interesse em conhecer as condições que a rede municipal de ensino oferece a seus professores, condições materiais como biblioteca, laboratório, e outras como organização, permanência do quadro dos professores, valorização dos alunos e da comunidade através de projetos, todas tão exaltadas pela orientadora.

Iniciei minha participação no curso, em seu terceiro encontro, com a intenção de observar e anotar suas ocorrências. Nos dois primeiros encontros do Curso de Matemática II, os alunos-professores[2] analisaram textos relacionados à Educação Algébrica em geral e outros especificamente sobre pesquisas que tratavam da observação e generalização de padrões. Nesse terceiro encontro, os professores apresentaram e discutiram atividades pesquisadas sobre o tema e outras construídas por eles. Após esse encontro, influenciada pela observação dos trabalhos do curso e refletindo sobre meu trabalho como professora do Ensino Médio, comecei a propor diferentes atividades envolvendo a generalização de padrões para meus alunos.

Assim a participação no Curso de Matemática II levou-me naturalmente a despertar interesse pelo tema e integrar o projeto *Sobre observação e generalização de padrões: uma atividade matemática transversal*. Nas reuniões do GPEA, tive a oportunidade de estudar e discutir as investigações de cada um dos integrantes do grupo, além de tomar conhecimento de vários trabalhos de pesquisadores em Educação Matemática sobre o tema dos padrões.

Se, por um lado, vários pesquisadores defendiam a eficácia da abordagem da álgebra no ensino através da generalização de padrões, por outro, os alunos-professores

---

[2] Utilizarei o termo aluno-professor para designar os professores que se inscreveram em cursos oferecidos pelo PROVE, por considerar que são alunos participantes de um curso, mas que o são por atuarem como professores da rede municipal.

do Curso de Matemática II dividiam-se entre aqueles que nunca tinham ouvido falar sobre “tal conteúdo” e outros que davam atividades sobre o tema esporadicamente, apenas como desafios, sendo uma tarefa de casa nunca corrigida.

Dada essa constatação e a intenção de minha orientadora em tratar do assunto no Curso de Matemática II, questionei-me sobre a possibilidade de sensibilizar aqueles alunos-professores acerca da importância do tema observação e generalização de padrões no ensino, pois aparentavam certo desconforto quando tratavam sobre o tema.

Ao longo da minha participação no grupo de pesquisa e no Curso de Matemática II, fui refinando meu objetivo de pesquisa que, por fim, estabeleci como sendo o de *investigar quais as mudanças de percepção dos professores sobre o tema observação e generalização de padrões ao vivenciarem um processo de pesquisa em sua própria sala de aula.*

De acordo com Ferreira (1975), em seu *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*, mudança é uma alteração, o ato de dar outra direção a algo; percepção é o ato de adquirir conhecimentos, formar a idéia, entender, compreender. Desse modo, utilizo o termo “mudança de percepção” no sentido de alteração do entendimento ou compreensão que, em meu estudo, refere-se ao tema padrões.

Recorro à seguinte reflexão do projeto guarda-chuva:

> [...] entendemos serem necessários atualmente estudos integrados nesse novo quadro teórico, que – por conceberem o conhecimento como processo de contínua (re)construção – exigem investigações não apenas entre licenciandos e entre estudantes do ensino infantil e básico, mas também entre professores em formação continuada. (COELHO *et al.*, 2003, p. 6)

para indicar a pertinência e necessidade de investigar quais mudanças nas reflexões e experiências dos professores em formação continuada podem auxiliá-los em sua atuação na sala de aula.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS: LEITURAS E ESCOLHAS

Este capítulo apresenta as leituras que fundamentam teórica e metodologicamente o presente estudo. As contribuições não se restringem a trabalhos sobre a Educação Algébrica e observação e generalização de padrões. Há também leituras referentes à formação continuada de professores, pesquisa-ação e pesquisa colaborativa.

Observação e generalização de padrões: sua importância para a Educação Algébrica

É comum ouvir relatos nas aulas de Matemática que desabonam a álgebra. Falo isto não apenas pela experiência como professora, mas pelas recordações como aluna. O pesquisador John Mason (1996, p. 65, tradução nossa) afirma "que quando a consciência da generalidade penetrar na sala de aula, a álgebra deixará de ser um mar de lágrimas para a maioria das pessoas"[3].

Coelho *et al.* (2003, p. 4) propõem discutir um modo de aumentar o acesso e o sucesso da aprendizagem matemática, questionando a respeito do ensino da álgebra: "Quais mudanças no montante e na natureza do que é ensinado em álgebra são adequadas para torná-la acessível a mais estudantes?".

Mudanças no que concerne à Educação Algébrica são descritas no artigo de Miguel *et al.* (1992). Eles discutem o movimento pendular que ocorreu entre o ensino da álgebra e o ensino da geometria, antes, durante e depois do Movimento da Matemática Moderna no Brasil, sendo ora a geometria priorizada, ora a álgebra.

Antes do Movimento da Matemática Moderna, os professores trabalhavam a álgebra "de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica" (MIGUEL *et al.*, 1992, p. 40). Sendo assim, não havia uma reflexão crítica sobre esse ensino. Se, por um lado, o ensino da geometria era axiomático dedutivo, por outro, o ensino da aritmética e da álgebra quase sempre ocorria de forma mecânica e

[3] […] that when awareness of generality permeates the classroom, algebra will cease to be a watershed for most people.

automatizada. Aos alunos era possível a compreensão da geometria de forma racional, com demonstrações de seus objetivos, já a álgebra era aceita sem justificativas, apenas com a finalidade de resolver problemas. A geometria estava em ascensão.

Com o objetivo de unificar os campos fundamentais da Matemática, surge, na década de 1960, o Movimento da Matemática Moderna. Elementos como a teoria dos conjuntos e estruturas algébricas são inseridos no currículo de modo que antes de as crianças iniciarem os cálculos aritméticos, elas devem aprender conceitos abstratos das propriedades estruturais dos conjuntos numéricos.

Miguel *et al.* (1992, p. 46) relatam que a álgebra elementar deixou de ser a “aplicação cega de regras aritméticas”, mas não chegou à “teoria puramente abstrata de grupos, anéis e corpos”, concordando com Dieudonné. A abordagem da geometria foi substituída por outras abordagens mais rigorosas e atualizadas, mas era inacessível aos professores ensinarem, e aos alunos aprenderem, geometria através de espaços vetoriais ou transformações. Deste modo, a geometria moderna foi sendo abandonada e a álgebra ganhou lugar de destaque.

O movimento modernista enfraqueceu a concepção do valor cultural e instrumental dos conteúdos da Matemática e a contradição na ênfase tecnicista e na ênfase estruturalista gerou questionamento pelos matemáticos e educadores matemáticos.

A geometria volta a ter lugar de destaque na década de 1980. Miguel *et al.* (1992) relatam que a geometria euclidiana privilegia os aspectos intuitivos e experimentais e por isso começa a desempenhar papel subsidiário na construção de conceitos e na visualização de propriedades algébricas e aritméticas, sustentando a metodologia do ensino da aritmética e da álgebra.

O ensino da álgebra perde as características atribuídas pela Matemática Moderna, voltando à condição de ferramenta na resolução de problemas, mas sem o excesso de algebrismo.

Miguel *et al.* (1992) sugerem que é necessário procurar novas diretrizes pedagógicas que possam atualizar e subsidiar o ensino da álgebra. Não incentivam uma nova posição de destaque para a álgebra, mas um impulso para que deixe o estado de inércia e, junto à geometria, contribua para o ensino de Matemática.

Em 1993, Miguel *et al.* publicam um novo artigo intitulado *Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar*. Os autores fazem uma análise comparativa entre as diferentes concepções de Educação Algébrica ao longo da história do ensino de Matemática.

A primeira concepção que o artigo descreve é a lingüístico-pragmática, na qual a álgebra é um instrumento de resolução de problemas e a aquisição, mesmo que mecânica, de técnicas seria necessária e suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas.

Com o Movimento da Matemática Moderna, surge a concepção fundamentalista-estrutural. Nessa concepção, o papel pedagógico da álgebra é o de fundamentador dos outros campos da Matemática. A descrição das propriedades que justificassem cada passagem do transformismo algébrico seria suficiente para capacitar os alunos.

A concepção fundamentalista-analógica sintetiza as duas concepções anteriores de Educação Algébrica e o papel pedagógico da álgebra volta a ser o de uma ferramenta para a resolução de problemas, mas mantém seu caráter fundamentalista.

Os pesquisadores apontam que a característica comum às três concepções é a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica, por isso o ensino-aprendizagem da álgebra acaba sendo apenas um "transformismo algébrico". A linguagem é priorizada em detrimento do pensamento.

Miguel *et al.* (1993) descrevem três etapas da Educação Algébrica: chegar a expressões algébricas a partir de situações concretas (problemas), partir de expressões algébricas e atribuir-lhe algumas significações e finalmente trabalhar com procedimentos que transformem uma expressão algébrica em outra equivalente. Eles aconselham que essas etapas se mesclem durante o processo de ensino-aprendizagem, possibilitando a construção de uma álgebra significativa para o estudante.

Para repensar a Educação Algébrica, é necessário repensar a relação entre o pensamento e a linguagem. Os autores acreditam que há uma relação de natureza dialética entre o pensamento algébrico e a linguagem algébrica. Segundo Miguel *et al.* (1993, p. 88), o pensamento algébrico é um tipo especial de pensamento que

> [...] pode expressar-se através da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica ou através da criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica.

Os pesquisadores apontam a percepção de regularidades, a tentativa de expressar uma situação-problema e o processo de generalização como alguns dos elementos caracterizadores do pensamento algébrico. Relatam que o pensamento algébrico pode ser introduzido nas séries iniciais (pois esse tipo de pensamento prescinde uma linguagem estritamente formal) e que a linguagem simbólica deve ser inserida gradativamente junto ao pensamento algébrico, devendo ser articulado com a ciência contemporânea.

Há pesquisadores que defendem a percepção e generalização de regularidades como um caminho para a o trabalho com símbolos e expressões algébricas.

Vale & Pimentel (2005, p. 15) relatam que “as tarefas com padrões são manifestamente úteis na introdução à álgebra”. As pesquisadoras acreditam que, se a Matemática for olhada como a ciência dos padrões, é possível contribuir para uma nova visão dessa disciplina por parte dos professores, proporcionando uma aprendizagem rica e motivadora para os estudantes. Elas fazem referência à Goldenberg, para quem a procura de regularidades deve ser o apoio do ensino da Matemática.

John Mason (1996), em seu trabalho intitulado *Expressão da generalidade e origens da álgebra* (tradução nossa)[4], apresenta a generalização de padrões numéricos e geométricos e das leis que governam as relações numéricas como uma abordagem eficiente para a introdução à álgebra. Seu texto mostra que essa abordagem faz com que o aprendizado da álgebra torne-se mais significativo para os estudantes. A importância dada ao tema pelo autor é tanta que ele descreve a generalização como os batimentos cardíacos da Matemática: “generalization is the heartbeat of mathematics”. (MASON, 1996, p.65)

Entre as várias fontes de inspiração para seu trabalho, baseou-se nas quatro principais raízes da álgebra, as quais identificou como:

> Expressão da generalidade, possibilidades e restrições (apoiando a consciência de variável), reorganização e manipulação (vendo porque as expressões aparentemente diferentes para a mesma coisa dão ao fato dado as mesmas respostas), aritmética generalizada (letras tradicionais no lugar de números para expressar a regra da aritmética).[5] (MASON, 1996, p. 66, tradução nossa)

O autor apresenta um significado para a álgebra na escola: o uso de símbolos para expressar e manipular generalidades em contextos numéricos. Ele explica que a generalidade não é uma noção única e que o que é abstrato ou simbólico para uma pessoa pode não ser para outra.

---

[4] Expressing generality and roots of algebra.

[5] Expressing Generality
Possibilities and Constraints (supporting awareness of variable)
Rearranging and Manipulating (seeing why apparently different expressions for the same thing do in fact give the same answers)
Generalized Arithmetic (traditional letters in place to express the rules of arithmetic)

Lesley Lee (1996) também discute sobre o tema. Ela considera que a álgebra é uma cultura e que as atividades de generalização de padrões são extremamente eficazes para a iniciação dos estudantes nessa área.

Há também documentos oficiais que reforçam a importância da generalização de padrões na Educação. O artigo de Vale & Pimentel (2005) apresenta os padrões matemáticos como um tema que permeia todo o currículo de Matemática.

As pesquisadoras expõem recortes do *Currículo Nacional do Ensino Básico* de Portugal, nos quais podemos notar o incentivo ao estudo de padrões desde o Ensino Básico até o Secundário, que correspondem respectivamente ao Ensino Fundamental e Médio no Brasil. O currículo estimula a procura e exploração de padrões (numéricos e geométricos) e regularidades para que seja possível a formulação de generalizações, contribuindo, desse modo, para o desenvolvimento das competências matemáticas no domínio da álgebra e das funções.

Vale & Pimentel (2005) também mencionam os *Principles and Standards for School Mathematics* (propostos pelo NCTM), segundo os quais os estudantes devem passar por experiências com padrões, pois são as bases para a compreensão do conceito de função e dos símbolos das expressões algébricas.

No Brasil, temos os PCN (1998, p. 68), que também mencionam a observação e generalização de padrões como um recurso para a exploração das primeiras noções da álgebra:

> No decorrer do trabalho com os números, é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em seqüências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra.

O currículo brasileiro também cita que o encaminhamento dado à álgebra a partir de generalização de padrões possibilita a exploração de função nas séries seguintes (PNC, 1998, p. 51). O aluno deve ser capaz, segundo os PCN (1998, p. 76), de reconhecer que generalizar padrões numéricos é uma das funções da álgebra e de

> [...] utilizar representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas seqüências numéricas, assim como construir procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples.

Reflexões sobre a observação e generalização de padrões

Segundo Lee (1996), as atividades de generalização requerem dos estudantes ver, dizer, registrar e testar o padrão. Nisto a pesquisadora se apóia em Mason, Graham, Pimm & Gowar, autores do livro *Routes to / Roots of Algebra*.

A observação é a primeira fase da generalização. Para Zazkis & Liljedahl (2002), a habilidade de ver um padrão precede a habilidade de descrever um termo geral. Vale & Pimentel citam Orton para explicar o significado de "ver", utilizado neste estudo com o mesmo significado de observar:

> No caminho para a álgebra, descrita como uma expressão da generalidade, a primeira fase pela qual o aluno passa é sempre "ver" e isto significa compreender mentalmente um padrão ou uma relação. (ORTON apud VALE & PIMENTEL, 2005, p. 15)

De acordo com Lee (1996), esse primeiro estágio de percepção do padrão é importante para que o aluno obtenha sucesso na atividade. Ele exige certa flexibilidade dos estudantes, mais do que observar um padrão é necessário perceber um padrão algebricamente útil.

Vale & Pimentel (2005) relatam que essa primeira fase de "ver" um mesmo padrão pode dar-se de maneiras distintas, porém equivalentes, para cada indivíduo. O aluno deve perceber que há diferentes representações para uma mesma situação e que pode passar de uma representação para outra, compreendendo que as regras são equivalentes.

As autoras apresentam um exemplo inspirador para a minha participação no Curso de Matemática II. Análises parecidas foram realizadas junto ao grupo de alunos-professores, sujeitos de minha pesquisa. Vale & Pimentel (2005) apresentam uma análise anterior à aplicação de uma atividade proposta para estudantes, prevendo e descrevendo as estratégias que os alunos poderiam utilizar para solucionar a atividade.

Exemplo 1: Considere a seguinte seqüência:

O	O O O O	O O O O O O O O O
figura 1	figura 2	figura 3

1. Desenhe os dois termos seguintes da seqüência.
2. Descubra o número de pintas da figura de ordem 30. Explique seu raciocínio.

A seguir estão as estratégias levantadas pelas autoras:

E_1: observar quantos pontos há em cada figura e ver as “diferenças” na seqüência (entre as figuras 1 e 2, existe uma diferença de três pontos; entre as figuras 2 e 3, existe uma diferença de cinco pontos;...).

E_2: contar quantos pontos há em cada figura, convertendo numa seqüência numérica.

E_3: descobrir o que há de regular nas figuras (nesse caso, a forma) e continuar a seqüência desenhando ou mentalmente antes de convertê-la em números.

As diferentes estratégias que os alunos podem elaborar, ao observarem uma mesma seqüência, sugerem riqueza para esse tipo de atividade, mas é necessário dar atenção a alguns “perigos”. Vale & Pimentel (2005) apresentam um exemplo:

> Exemplo 2: Marque “*n*” pontos sobre uma circunferência de modo que, depois de desenharem todas as cordas possíveis que os unem dois a dois, não haja três cordas concorrentes no mesmo ponto no interior da circunferência.
> Em quantas regiões é que estas cordas dividem o círculo?
> (Adaptado de Guzmán, 1990)

A resolução desse exercício pode ser facilitada com a utilização de desenhos para alguns casos, conforme mostra a figura seguinte:

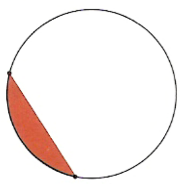
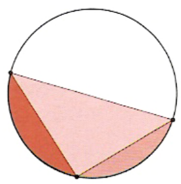
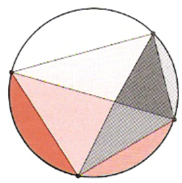
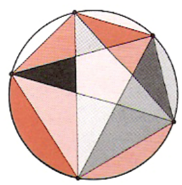
nº pontos	2	3	4	5
				
nº regiões	2	4	8	16

Figura 1: Círculos divididos em regiões

Observando a tabela, é possível chegar à seguinte conjectura: para n pontos sobre a circunferência, teremos 2^{n-1} regiões. Mas a observação da figura seguinte, com seis pontos sobre a circunferência, apresenta um contra-exemplo:

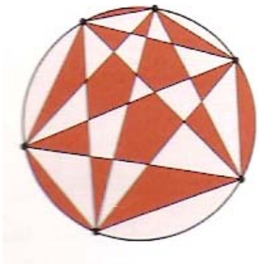


Figura 2: Seis pontos sobre a circunferência

Há 31 regiões, contradizendo a conjectura, pois a sexta figura deveria ter $2^{6-1} = 2^5 = 32$ regiões. A conjectura é falsa. Esse exemplo mostra um dos perigos da generalização ao se procurar um padrão a partir de um número pequeno de casos.

Mason distingue o "olhar através" e o "olhar em". Ele explica que

> Um modo de trabalhar no desenvolvimento da consciência de generalidade deve ser sensibilizado pela distinção entre *olhar através* e *olhar em*, que conduz às primeiras experiências de abstração e de concretização, a saber *vendo uma generalidade através do particular* e *vendo o particular no geral*.[6] (MASON, 1996, p. 65, grifo do autor, tradução nossa)

Para o autor, muitos casos particulares podem ser usados como uma janela para olhar através ao invés de uma parede para ser olhada. A analogia é utilizada com a intenção de mostrar que é possível olhar através de um caso particular, buscando uma generalidade. O pesquisador relata ainda que, para Davydov, o maior erro pedagógico foi criar "programas" que levassem o aluno a olhar o particular, pois assim desviaram o olhar dos alunos do geral. Algumas vezes, os programas enfatizam o particular de tal forma que mais prejudicam do que melhoram a apreciação do geral.

Ainda sobre a particularidade e a generalidade, complementa que, para o professor, o exemplo é um caso particular de uma noção mais geral. No entanto, para o estudante, um exemplo é uma totalidade, ele não ilustra um caso geral, é completo por si só. O fato de o professor estar consciente de que é possível ver a generalidade através do particular não significa que seus alunos possuam a mesma consciência. Mas se o professor não estiver consciente disso, provavelmente seus alunos também não estarão.

É interessante a afirmação de Mason (1996, p. 70, tradução nossa) de que "nem a ação nem a declaração sozinhas são garantia de generalidade percebida, meramente

---

[6] One way to work at developing awareness of generality is to be sensitized by the distinction between *looking through* and *looking at*, which leads to the primal abstraction and concretization experiences, namely *seeing a generality through the particular* and *seeing the particular in the general*.

indicadores”[7], mostrando que a verificação de que um aluno percebeu a generalidade de uma dada atividade não é tarefa trivial.

Os alunos progridem em atividades nas quais se faz necessário expressar a generalidade à medida que assumem a responsabilidade de reconhecer, expressar e verificar as conjecturas associadas. Nem sempre o mais importante é resolver uma atividade, pois a vivência com esse tipo de exercício amplia a experiência do aluno, fazendo-o refletir em formas úteis e não-úteis de pensar, como preparação para o futuro.

O estudo de Mason (1996) trata ainda das perspectivas teóricas do processo da ação até a expressão da generalidade. Acredito serem importantes as três fases que traduzi como manipulação, assimilação e articulação[8], citadas pelo autor. Elas se desenvolvem em espiral e cada fase serve de base para a outra, de modo que, cada vez que o aluno manipula, assimila e articula, ele retém experiências que servirão para um próximo ciclo.

Radford (1996) escreveu um capítulo intitulado *Algumas reflexões sobre o ensino de álgebra através de generalização*[9] (tradução nossa), no qual comenta assuntos sugeridos por Mason (1996) e Lee (1996).

Ele sugere algumas questões de interesse como: qual é o significado da generalização na Matemática? E mais especificamente: quais os tipos e as características da generalização envolvida na álgebra? Quais são as concepções algébricas que se pode obter através das generalizações numéricas?

Radford (1996) acredita que as respostas às perguntas acima dependem do modo como se interpreta o desenvolvimento da Matemática e da forma como se concebe o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Do ponto de vista didático, a generalização depende do objeto matemático que está sendo generalizado e de seu contexto. O autor apresenta dois tipos de elementos específicos da generalização de padrões geométricos e numéricos: o primeiro lida com o aspecto lógico e o segundo está relacionado ao papel das representações externas.

Em concordância com os capítulos de Mason (1996) e Lee (1996), declara que o processo de generalização depende do conhecimento do observador e esse pode ser diferente para cada indivíduo: “A lógica subjacente da generalização pode ser muito

---

[7] Neither action nor utterances alone are guarantors of perceived generality, merely indicators.
[8] Manipulating, getting-a-sense-of, and articulating.
[9] Some reflections on teaching algebra through generalization.

diferente, dependendo do pensamento matemático do estudante"[10] (RADFORD, 1996, p. 109, tradução nossa). Ele ressalta a importância da natureza lógica como uma das características mais significantes da generalização. Apresenta alguns pontos a serem ponderados, quando se lida com o aspecto lógico:

> A generalização como uma intervenção didática não evita o problema de validade, e a validade é por si só uma idéia muito complexa. Isto não significa que a generalização não possa ser uma ponte útil para a álgebra. Eu quero mostrar que usar a generalização supõe que nós deveríamos estar preparados para trabalhar com esse elemento adicional (lógica) na sala de aula.[11] (RADFORD, 1996, p. 109, tradução nossa)

Mais uma vez Radford (1996) concorda com Mason (1996) e Lee (1996) ao declarar que o simbolismo algébrico não é a primeira meta de generalização, no entanto é óbvio que ele é um recurso necessário para as atividades relacionadas a ela.

Outra questão levantada pelo autor indaga sobre os conceitos algébricos que podem ser alcançados através da generalização numérica. Ele relata que o conceito de variável pode ser preconcebido através da generalização, pois sua meta é encontrar uma expressão que represente um padrão, ou seja, construir uma fórmula na qual os números possuem a idéia de um número geral.

Ao considerar que o objetivo da resolução de problemas algébricos é encontrar um valor numérico através de uma equação e não uma fórmula, Radford (1996) mostra que a resolução de problemas é uma situação inversa à generalização de padrões. Essa diferença é também conceitual. A discussão do autor sugere que os conceitos algébricos de incógnitas e equações parecem estar vinculados à abordagem através da resolução de problemas, enquanto os conceitos de variável e fórmula parecem estar vinculados à abordagem da generalização de padrões.

Radford (1996) conclui que o raciocínio utilizado na generalização e o raciocínio utilizado na resolução de problemas algébricos são formas estruturadas de pensamento algébrico independentes e irredutíveis. Sendo assim, essas duas abordagens parecem se complementar no campo da Educação Algébrica.

---

[10] The underlying logic of generalization can be very different, depending on the student's mathematical thinking.

[11] Generalization as a didactic device cannot avoid the problem of validity, and validity is in itself a very complex idea. This does not mean that generalization cannot be a useful bridge o algebra. I want to point out that using generalization supposes that should be prepared to work with this additional (logical) element in the classroom.

Resultados de pesquisas sobre a observação e generalização de padrões

Há muitos resultados divulgados sobre as pesquisas que envolvem o tema padrões. Zazkis & Liljedahl (2002) discorrem sobre a tensão entre o pensamento algébrico e a notação algébrica na generalização de padrões. Seus resultados indicam que a habilidade dos estudantes em expressar verbalmente generalidades não foi acompanhada pela, e não depende da, notação algébrica. Entretanto os participantes julgavam suas soluções como inadequadas quando não envolviam o formalismo algébrico, apesar de completas e exatas. Esses pesquisadores constataram que existe um vão entre a habilidade de expressar generalidades verbalmente e a habilidade em empregar confortavelmente a notação algébrica.

Perez (2006) investigou se e como alunos do Ensino Médio resolvem situações-problema que envolvem generalização de padrões. Seus dados foram coletados a partir de cinco atividades aplicadas em duas sessões a nove alunos de escola pública pertencentes às três séries do Ensino Médio.

Entre seus resultados, destaco os que mostram que os alunos não apenas são capazes de resolver tais atividades, como utilizam diversas estratégias para isso, mesmo alegando que não haviam trabalhado com atividades semelhantes. Em algumas das atividades, os alunos mostraram dificuldade em expressar uma regra geral na linguagem matemática (algebricamente ou simbolicamente), apesar de terem feito isso diversas vezes na linguagem natural. A pesquisadora considera que os alunos estavam desenvolvendo o pensamento algébrico ao responderem as atividades. Ela sustenta a pertinência desse resultado, apoiando-se no artigo de Miguel *et al.* (1993) já apresentado, pois o pensamento algébrico pode ser expresso "através da linguagem natural, ou aritmética, ou geométrica, ou através de uma linguagem específica para este fim, uma linguagem algébrica de natureza estritamente simbólica". (PEREZ, 2006, p. 114)

Há pesquisas que indicam resultados satisfatórios também no Ensino Fundamental. A pesquisa realizada por Becker & Rivera (2006) discute como os alunos da 5ª série adquirem a habilidade de estabelecer e justificar generalizações na álgebra. O trabalho, publicado no Psychology of Mathematics Educacion (PME) de 2006, intitulado *Estabelecendo e justificando generalização algébrica na quinta série*[12] (tradução nossa), relata o estudo de caso de dois alunos da 5ª série numa atividade envolvendo uma tarefa de generalização de padrão. O problema central que os autores discutem é como os alunos da 5ª série adquirem a habilidade de estabelecer e justificar generalizações na álgebra. Para tanto, foram realizadas uma pré e uma pós-entrevista com tarefas envolvendo padrões algébricos, separadas por três meses de instrução, nos quais foram trabalhados três tópicos: operações, construindo fórmulas, expressões e fórmulas.

Becker & Rivera (2006) utilizam duas modalidades para classificar o tipo de generalização: há indivíduos predominantemente *generalizadores numéricos* e os indivíduos predominantemente *generalizadores figurais*. Há ainda indivíduos que manifestam estratégias numéricas e figurais na generalização de padrões. Os generalizadores numéricos estabelecem suas fórmulas a partir de sugestões numéricas disponíveis e empregam freqüentemente a estratégia de tentativa e erro. Segundo Becker & Rivera (2006), esses indivíduos não parecem ser consistentemente capazes de justificar suas generalizações através de uma maneira não-indutiva. Já os generalizadores figurais são capazes de justificar suas generalizações de maneira não-indutiva. Estes não vêem a necessidade de ajustar uma tabela de valores para definir uma fórmula geral, mas dão atenção às estruturas invariáveis de uma seqüência figural.

Outra observação relevante que os pesquisadores trazem em seu artigo é sobre a visão que os alunos têm das variáveis: grande parte dos generalizadores numéricos tende a ver as variáveis como “suportes” sem significados, exceto como gerador de seqüências numéricas; já os generalizadores figurais tendem a ver as variáveis não como um simples “suporte”, mas como possuidores de uma relação funcional dentro de um contexto.

Os autores defendem que o sucesso em desenvolver e justificar as generalizações de padrões algébricos envolve ter facilidade na habilidade figural e na fluência do uso de variáveis.

Becker & Rivera (2006) relataram que muitos alunos predominantemente numéricos eram bem-sucedidos na tarefa de encontrar uma fórmula, mas tinham dificuldade em justificá-la. Ainda assim, ao final da pesquisa, os estudantes

[12] Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level.

demonstraram um crescimento na habilidade de generalizar padrões e na fluência com variáveis.

O estudo de caso relatado no artigo traz alguns resultados importantes para meu trabalho, que foram inclusive utilizados em discussões durante a pesquisa junto com os alunos-professores. Um exemplo é o resultado de que alguns estudantes são capazes de encontrar os termos próximos de uma seqüência com facilidade, mas com o distanciamento desses termos (o centésimo termo, por exemplo), a tarefa torna-se mais difícil.

Vale & Pimentel (2005) expõem algumas observações quanto à postura dos alunos frente a essas tarefas. Uma delas é a predileção pela abordagem numérica nas atividades que envolvem generalização. Também notaram que os alunos têm mais sucesso em atividades exclusivamente geométricas ou mistas, levando as autoras a recomendarem atividades que mobilizem tanto os conhecimentos de natureza geométrica, como os de natureza numérica.

As pesquisadoras acrescentam que atividades que permitem aos alunos construírem novas figuras, compararem, discutirem e procurarem uma regra geral para descrever o padrão, abrem caminho para a introdução do conceito de variável e de equivalência de expressões numéricas e algébricas. Essa proposta pode apresentar alguma dificuldade aos alunos, em especial àqueles que não estiverem familiarizados com o trabalho com padrões. Por isso Vale & Pimentel (2005) aconselham que seja feito um trabalho prévio com atividades básicas de reconhecimento de padrões.

Lee (1996) relata uma pesquisa que utiliza atividades de generalização. O objetivo da pesquisa é encontrar similaridades e diferenças nos resultados dessas atividades entre duas populações: alunos de High Schools (Ensino Médio) em Montreal e adultos no curso de álgebra elementar oferecido pela Concórdia University.

Dentre seus resultados, a pesquisadora notou que as respostas dos adultos eram tão variadas quanto as respostas dos estudantes mais jovens, havendo apenas uma leve diferença nas entrevistas. Os adultos não utilizaram manipulações algébricas sem sentido como alguns estudantes e mostraram uma preocupação menor em fazer registros algébricos em seus protocolos. Também demonstraram inabilidade ao usar a álgebra, se não maior, similar a dos estudantes mais jovens. Os adultos pareciam ter mais dificuldades nas tarefas de generalização.

Em sua pesquisa, Lee (1996) notou que o problema principal não estava em “ver um padrão”, mas sim em perceber um padrão algebricamente útil. Esse primeiro estágio exige certa flexibilidade dos estudantes e uma vez que eles tinham fixado uma percepção inicial de padrão, era difícil fazê-los abandoná-la.

A investigação da pesquisadora sugere que a introdução à álgebra através de padrões não apenas é possível, como também possui vantagens para professores e alunos. Os alunos mostraram grande envolvimento com as atividades e foram muito criativos, apesar da frágil habilidade com a álgebra. Além disso, sentiram-se valorizados por se verem parte da comunidade matemática e responsáveis por descobertas significantes.

A autora também observou que os estudantes desenvolveram habilidades na comunicação e nas técnicas algébricas com notável rapidez, por serem necessárias para a cultura em que estavam inserindo-se.

Essa abordagem da álgebra através da generalização possibilita que os estudantes utilizem letras como variáveis imediatamente e os exercícios ainda podem ser adaptados facilmente para os estudantes trabalhem com incógnitas. As atividades também se mostraram vantajosas como ferramenta para dar significado às expressões algébricas equivalentes.

Lee (1996) não acredita que essa abordagem esteja isenta de dificuldades ou retificações. Pode ser um pouco mais difícil permanecer nela quando a intenção do professor está voltada para a resolução de equações e realização de provas.

A pesquisadora também encontrou alguns obstáculos no nível da observação, no nível da verbalização (expressão clara de um padrão) e no nível da simbolização, com a necessidade da utilização de uma letra para simbolizar um padrão.

Seu texto conclui que a generalização de padrões é um caminho eficaz para a inserção do aluno dentro da cultura chamada álgebra:

> Como uma introdução para a álgebra, uma entrada na cultura, eu penso que uma abordagem de generalização está fundamentada historicamente, filosoficamente e psicologicamente e tem provado seu mérito pedagógico onde quer que ela tenha sido tentada.[13] (LEE, 1996, p. 106, tradução nossa)

A observação e generalização de padrões também oferecem vantagens para os professores, como sugere Lee (1996). Almeida (2006) realizou uma pesquisa diagnóstica com o objetivo de investigar se professores do Ensino Fundamental da rede pública do Estado de São Paulo trabalham com atividades que envolvem a observação

---

[13] As an introduction to algebra, an entry into the culture, I think a generalizing approach is grounded historically, philosophically, and psychologically and has proven its merits pedagogically where it has been tried.

de regularidades e a generalização de padrões e, em caso positivo, verificar quais eram as estratégias que esses professores esperavam de seus alunos.

Seus dados foram coletados a partir de entrevistas semi-estruturadas feitas a cinco professores da rede estadual no interior de São Paulo. Ela obteve evidências de que os professores trabalham esporadicamente com tais atividades e que esperam que seus alunos utilizem estratégias de desenho e contagem prioritariamente, apesar de sugerirem que trabalhariam com seus alunos estratégias algebricamente mais formais.

Outros resultados que obteve em sua pesquisa sugerem que as questões propostas nas Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) exercem ou podem exercer um papel estimulador para certas tendências e assuntos a serem trabalhados pelos professores. A pesquisadora também verificou que os professores que participavam de cursos de formação continuada ("Teia do saber" e "Construindo sempre matemática") se mostraram mais sensibilizados em relação à utilização de atividades que envolvem a observação e generalização de padrões em sala de aula.

Um resultado inquietante em sua pesquisa partiu de uma entrevista na qual o professor declarou que trabalha com atividades semelhantes na escola privada, mas não na escola pública, pois essa última não oferece os recursos necessários como livro didático ou fotocópias de tais atividades.

A observação de um dos professores entrevistados de que essas atividades podem ser discutidas na HTPC (Hora de Trabalho Pedagógico Coletivo: horário de reunião semanal de professores da rede estadual) e outros relatos obtidos pela pesquisa sugerem que observação e generalização de padrões é um tema interessante para ser explorado em cursos de formação continuada de professores.

Formação continuada: a pesquisa-ação como um caminho para a formação docente

A presente investigação ocorreu em um curso de formação continuada cuja proposta era incentivar os participantes a pesquisarem colaborativamente sua própria sala de aula. Por este motivo, busquei fundamentar minha pesquisa com esses temas.

Um artigo publicado por Fiorentini *et al***.** (2002), intitulado *Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos de pesquisa brasileira,* apresenta o estado da arte da pesquisa brasileira sobre a formação de professores no período de 1978 a 2002. Para isto, foram consideradas as dissertações e teses defendidas até fevereiro de 2002 nos programas de Pós-Graduação em Educação Matemática ou Educação.

Os trabalhos levantados a partir do Banco de Teses EduMat do Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática (Cempem), do CD-ROM da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (Anped), do Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e de informações diretas de programas de pós-graduação do Brasil foram fichados e deles foram extraídas informações gerais (autor, título, instituição, ano de defesa, orientador e título acadêmico obtido), foco temático, problema ou questão de investigação, objetivos, procedimentos metodológicos de pesquisa e os principais resultados.

Os dados obtidos indicam um crescimento na produção acadêmica sobre formação de professores que ensinam Matemática. E, mesmo considerando que o número de programas de pós-graduação cresceu nos últimos anos, os autores relatam que esse fenômeno parece “refletir uma tendência mundial que reconhece o professor como elemento fundamental nos processos de mudança educacional e curricular”. (FIORENTINI *et al*., 2002, p. 139)

Outro resultado apresentado no artigo é o crescimento de pesquisas que investigam grupos e práticas colaborativas.

Entre outros, o artigo apresenta um estudo sobre os trabalhos de formação continuada. Estes têm apresentado a atualização ou o desenvolvimento dos professores como preocupação. O artigo traz uma síntese da mudança da relação entre pesquisador/formador e professores nos programas de formação continuada:

> [...] é possível perceber mudança de uma concepção de formação continuada marcada pelo treinamento, reciclagem ou capacitação dos professores a partir de modelos idealizados pelo formador, baseados ou não em uma teoria de aprendizagem (décadas de 70 e 80), para uma concepção, a partir dos anos 90, de estudos sobre influências e contribuições de programas oficiais e institucionais de formação continuada ou de desenvolvimento de projeto de construção conjunta de propostas e alternativas de formação continuada e de mudanças da prática docente. (FIORENTINI *et al*., 2002, p. 149)

O artigo aponta catorze pesquisas relacionadas a grupos ou práticas colaborativas que investigam o processo de formação continuada ou desenvolvimento profissional. Fiorentini *et al.* (2002, p. 150) relatam que “há fortes indícios de que o trabalho colaborativo é fundamental para o desenvolvimento profissional dos professores”.

Uma das vantagens apontadas por Costa (2006), ao se constituírem grupos colaborativos num ambiente educacional, são os múltiplos olhares sobre uma dada situação, permitindo quadros interpretativos consistentes.

As principais mudanças observadas no estudo de Fiorentini *et al*. (2002) indicam que os professores tornaram-se mais reflexivos, produtores de seus próprios materiais, além de gerarem novas práticas e promoverem mudanças na concepção da Matemática.

Ao longo de 25 anos, as pesquisas associadas à formação continuada passaram de uma concepção de pesquisar *sobre* professores para uma concepção de pesquisar *com* professores.

O curso de formação continuada descrito no presente estudo segue a concepção de pesquisar *com* professores. E, por concordar com Fiorentini *et al.* (2002), que conclui que o professor se forma e se constitui profissionalmente através de um processo reflexivo e investigativo sempre inacabado, acredito que este trabalho contribui para o desafio dos professores e dos formadores de professores de desenvolver um modelo teórico-metodológico que permita investigar a própria prática.

Pesquisa colaborativa: uma estratégia para investigar a própria prática

De acordo com Boavida & Ponte (2002, p. 12), “a colaboração é uma importante estratégia para a realização de investigações sobre a prática”. Fiorentini (2004, p. 47), em seu artigo intitulado *Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente?*, citando Nacarato *et al*., menciona um estudo realizado pelo grupo GEPFPM[14], o qual mostra que, nas pesquisas acadêmicas brasileiras em Educação Matemática que têm como objeto de estudo práticas e grupos colaborativos, existe uma dispersão semântica, envolvendo termos como trabalho coletivo, trabalho colaborativo, trabalho cooperativo, pesquisa colaborativa, colegialidade artificial, pesquisa-ação, pesquisa-ação colaborativa, comunidade de prática, etc. Desse modo, é necessário

[14] Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Formação de Professores de Matemática associado ao Centro de Estudos Memória e Pesquisa/Prática Pedagógica em Matemática (Cempem/Prapem) da FE/Unicamp.

esclarecer o que é colaboração e trazer algumas contribuições que ajudem a minimizar essa dispersão semântica.

Fiorentini (2004, p. 49) cita Andy Hargreaves, que discute sobre o significado de colaboração. Para isso, Andy Hargreaves faz uma "distinção entre quatro formas gerais de cultura docente: o individualismo, a colaboração, a colegialidade artificial e a balcanização". A colegialidade artificial é um trabalho coletivo no qual a colaboração não é nem espontânea nem voluntária, ela é "compulsória, burocrática, regulada administrativamente e orientada para objetivos estabelecidos em instâncias de poder, sendo previsível e fixa no tempo e espaço". A balcanização é caracterizada por uma divisão do corpo docente em subgrupos que interagem muito pouco entre si, podendo até ser adversários. Mesmo assim, os subgrupos podem ser colaborativos internamente.

A cultura docente balcanizada possui desvantagens, pois pode gerar conformismo em algumas pessoas que, ao formarem grupos cômodos nos quais não há discussões, deixam de produzir suas idéias e próprios caminhos. Além disso, a formação de grupos burocráticos e controlados administrativamente pode ser um artifício utilizado para defender interesses particulares.

O autor relata que, segundo Hargreaves, voluntariedade, identidade e espontaneidade são os primeiros princípios das culturas de colaboração. Desse modo, um grupo colaborativo deve ser constituído por pessoas voluntárias e suas relações internas devem ser espontâneas, ou seja, não reguladas externamente, embora possam ser mediadas por agentes externos. Quando os professores são obrigados a fazerem parte de grupos de trabalhos, pode surgir o que Hargreaves chama de colegialidade artificial ou de balcanização.

Fiorentini (2004, p. 50) também cita Hall e Wallace. Estes apresentam outros tipos de trabalho colaborativo, explicando que o mesmo caracteriza-se como "um *continuum* que vai do conflito à colaboração, passando por fases intermediárias de competição, coordenação e cooperação".

Outra referência citada por Fiorentini (2004) é Boavida & Ponte (2002), que se apoiaram em Wagner e Day. Aqueles apresentam um estudo lingüístico sobre o significado de colaboração e cooperação. Observam que apesar de os dois termos terem "*co*" como prefixo, que significa ação conjunta, eles têm significados diferentes: derivados do latim, *operare* significa operar, executar, fazer funcionar de acordo com o sistema, enquanto *laborare* significa trabalhar, produzir, desenvolver atividades tendo em vista determinado fim.

Boavida & Ponte (2002, p. 4) explicam mais claramente a visão de Wagner e Day sobre a distinção entre colaboração e cooperação:

> Para Wagner a colaboração representa uma forma particular de cooperação que envolve trabalho conjuntamente realizado de modo a que os actores envolvidos aprofundem mutuamente o seu conhecimento. [...] Day refere que enquanto na cooperação as relações de poder e os papéis dos participantes no trabalho cooperativo não são questionados, a colaboração envolve negociação cuidadosa, tomada conjunta de decisões, comunicação efectiva e aprendizagem mútua num empreendimento que se foca na promoção do diálogo profissional.

Desse modo, na cooperação, os participantes do grupo podem ajudar uns aos outros, mas buscam atingir objetivos que não foram negociados junto com eles, geralmente impostos por uma liderança. Já no trabalho colaborativo todos os envolvidos atuam conjuntamente a fim de atingir objetivos comuns, negociados pelo grupo. É necessário existir comprometimento e um compartilhamento de decisões entre os integrantes. Não há hierarquia entre os participantes, ainda que esses exerçam papéis diferenciados. As responsabilidades e a liderança são divididas entre os integrantes.

O trabalho num grupo colaborativo oferece aprendizagem não apenas para os novatos, mas também para os veteranos, que aprendem com os principiantes. Há ainda outros motivos para estimular os professores a trabalharem em grupo:

> [...] buscar apoio e parceiros para compreender e enfrentar os problemas complexos da prática profissional; enfrentar colaborativamente os desafios da inovação tecnológica como, por exemplo, incorporar as tecnologias de informação – TIC – (computador, Internet, vídeos...) na prática escolar; buscar o próprio desenvolvimento profissional; desenvolver pesquisa sobre a própria prática, entre outros. (FIORENTINI, 2004, p. 54)

Para Fiorentini (2004), os professores buscam o trabalho em grupo por um sentimento de incompletude, por perceberem que será difícil solucionar determinado problema sozinhos. A escolha de determinado grupo é influenciada pela “identificação com os integrantes do grupo e pela possibilidade de compartilhar problemas, experiências e objetivos comuns” (FIORENTINI, 2004, p. 54). Isto não significa encontrar um grupo de sujeitos iguais, mas sim pessoas abertas a compartilhar espontaneamente as experiências comuns ao grupo, contribuindo, dessa forma, com diferentes visões de um mesmo problema.

Fortalecendo a idéia de que um grupo colaborativo não precisa necessariamente possuir “integrantes iguais”, segundo Boavida & Ponte (2002, p. 3), a colaboração ocorre em grupos nos quais os integrantes podem exercer funções diferentes, mas “trabalham conjuntamente [...] numa base de igualdade de modo a haver ajuda mútua e a atingir objectivos que a todos beneficiem”.

As responsabilidades devem ser negociadas já no início de um projeto coletivo. É comum inicialmente ouvir perguntas que buscam confirmar se o trabalho está satisfatório ou não, por exemplo, “é assim que vocês querem (ou esperam)?”. Tal indagação indica que ainda não há colaboração no trabalho, apenas uma cooperação, pois é possível notar que existe uma relação de subserviência no grupo. Quando o próprio grupo define quem coordenará as atividades do grupo, mesmo que haja um rodízio entre os membros, Fiorentini (2004) diz que essa é uma liderança compartilhada.

De acordo com Boavida & Ponte (2002), o processo de colaboração exige abertura dos integrantes e deve haver um interesse ou objetivo comum, o processo é imprevisível e possui vários momentos de negociações.

Ponte & Serrazina (2003, p. 57) afirmam que para que o grupo seja coeso, além dos objetivos comuns, é importante que existam “objectivos individuais, ligados à sua função profissional, à sua personalidade, aos seus projectos, pois isso reforça naturalmente o seu envolvimento no trabalho e o seu sentido de realização pessoal”.

A forma de trabalho também deve propiciar o desenvolvimento conjunto. Deve-se ponderar sobre as questões de relacionamento entre os membros da equipe, “todos têm algo a dar e algo a receber do trabalho conjunto”. (BOAVIDA & PONTE, 2002, p. 6)

Fiorentini (2004) concorda que o objetivo de um projeto ou do trabalho em grupo deve ser resultado do entendimento mútuo de todos os membros, o que torna o processo um pouco demorado, pois o entendimento necessita de uma relação de pertencimento e de compromisso compartilhado tanto com o projeto quanto com o trabalho em grupo. A necessidade de tempo para a evolução do trabalho colaborativo é também conclusão do estudo de Ponte & Serrazina (2003).

Ferreira, citado por Fiorentini (2004, p. 56), constatou em seus estudos que num grupo realmente colaborativo, todos os membros têm vez, voz e são ouvidos e que cada um sente-se “membro de algo que só funciona porque todos se empenham e constroem coletivamente o caminho para alcançar seus objetivos”.

É importante que o grupo colaborativo esteja aberto e preparado para rever acordos, sendo flexível. Segundo Fiorentini (2004, p. 56), “o êxito e o fracasso dos empreendimentos do grupo dependem, em grande parte, de como [todos] enfrentam juntos os percalços e contradições do mundo da prática”.

Para o mesmo autor, muitos estudos brasileiros mostram que auxílio recíproco entre os participantes do grupo colaborativo é fundamental para seu sucesso e sobrevivência. Nos grupos colaborativos, os professores acabam levando experiências, dificuldades, possíveis falhas e os membros dão apoio afetivo, tentando encontrar colaborativamente soluções para os problemas. Isto contribui para o aumento de confiança, auto-estima e respeito mútuo dos professores. Mesmo assim, não significa que o grupo chegue sempre a consensos, é possível existir compreensões e conceitos divergentes.

Ponte & Serrazina (2003, p. 57) citam três aspectos para que o trabalho coletivo se desenvolva em meio a um ambiente de confiança e boas relações interpessoais: *diálogo* a fim de estabelecer uma comunicação entre todos os membros do grupo, *negociação* de objetivos e procedimentos que viabilizem o trabalho conjunto e *cuidado* que envolve uma verdadeira atenção aos problemas e necessidades dos outros.

O estudo de Ponte & Serrazina (2003, p. 51) conclui ainda que

> [...] o aproveitamento das capacidades individuais a favor do trabalho do grupo e das potencialidades do grupo para o desenvolvimento dos seus membros constitui um elemento decisivo num trabalho colaborativo conjunto.

Algumas dificuldades bastante comuns no trabalho de colaboração são apontadas por Boavida & Ponte (2002, p. 58): “o saber gerir a diferença, lidar com a imprevisibilidade, saber avaliar os potenciais custos e benefícios e estar atento à auto-satisfação confortável e ao conformismo”.

O artigo de Boavida & Ponte (2002) também aponta para dificuldades com circunstâncias externas como, por exemplo, compromissos que diminuíam o tempo para o trabalho coletivo, e de natureza pessoal como, por exemplo, o sentimento de receio em não corresponder à qualidade desejada.

Fiorentini (2004, p. 59) apresenta os resultados de um estudo com o que poderia ser concebido como um conjunto de características do trabalho colaborativo:

- participação voluntária e desejo de crescimento e autonomia profissional;
- desejo de participar do grupo e de, inclusive, reservar um tempo para isso;
- momentos de conversa informal durante os encontros, onde são trocadas ou comentadas experiências ocorridas no intervalo entre as reuniões;
- liberdade para expressar o que se pensa e o que se sente e disposição para ouvir críticas e realizar mudanças;
- cada participante pode ter interesses e pontos de vista diferentes;
- os encontros são planejados e organizados a fim de garantir que esses sejam produtivos;

- existe confiança e respeito entre os integrantes do grupo;
- as metas e objetivos são negociados pelo grupo e cada integrante se co-responsabiliza em alcançá-los;
- os integrantes compartilham significados durante o processo;
- existe espaço para que os participantes produzam e sistematizem conhecimentos através de investigações sobre a prática de cada um, produzindo textos escritos que podem ser publicados ou socializados com outros professores;
- todos os integrantes do grupo aprendem uns com os outros.

O ambiente colaborativo é um meio rico para o desenvolvimento de pesquisas, que podem ser desenvolvidas de diferentes modos. Segundo Boavida & Ponte (2002, p. 3), “a colaboração não é um fim em si mesmo, mas sim um meio de atingir certos objectivos”. É possível aceitar a colaboração como uma estratégia para a investigação.

Boavida & Ponte (2002) relatam que a colaboração auxilia a investigação sobre a prática por vários motivos: o empenho de várias pessoas num objetivo comum possui mais energia e determinação em agir do que num trabalho individual; a reunião de diversas experiências, competências e perspectivas inspira maior segurança ao promover mudanças e iniciar inovações no ambiente; um trabalho coletivo no qual há interação entre os integrantes e reflexão promove um ambiente rico para a aprendizagem mútua, permitindo que as incertezas e obstáculos sejam superados.

Fiorentini (2004) trata da diferença entre a pesquisa colaborativa e a pesquisa sobre grupos colaborativos. Nesta última, os grupos colaborativos aparecem como objeto de estudo e seu objetivo é investigar questões relacionadas ao processo de trabalho ou pesquisa do grupo.

Fiorentini & Lorenzato (2006, p. 116, grifo do autor) sintetizam de modo claro que

> [...] uma *pesquisa é dita colaborativa* se um grupo de duas ou mais pessoas trabalharem co-laborativamente ao longo de todo o processo investigativo, passando por todas as fases, as quais vão desde a concepção, planejamento e desenvolvimento da pesquisa, incluindo a coleta e análise de dados, e a escrita conjunta do relatório final, sendo, portanto, todos pesquisadores e autores do estudo.

Fiorentini (2004, p. 66) defende que uma tese ou dissertação nunca será caracterizada como colaborativa, visto que “numa pesquisa colaborativa, não basta que o projeto e a pesquisa de campo sejam compartilhados com todo o grupo. É preciso que a escrita e a autoria do relatório final também sejam compartilhadas”.

Nos grupos colaborativos constituídos por professores e pesquisadores, os pesquisadores acadêmicos podem oferecer conhecimentos teórico-científicos, sugestões de textos, material didático, entre outros. Fiorentini (2004) tem verificado junto a outros pesquisadores que à medida que o grupo colaborativo vai se consolidando, os professores vão adquirindo maior autonomia e a ajuda metodológica dos pesquisadores reduz-se sensivelmente.

Algumas vantagens desse tipo de pesquisa são apontadas por Fiorentini (2004). Ele cita, por exemplo, o ganho de tempo e os múltiplos olhares no processo de análise e interpretação dos dados. O autor aponta também algumas dificuldades que podem surgir com a necessidade de cumprimento de prazos individuais e coletivos e com a escrita de um relatório final do estudo a muitas mãos.

O artigo de Boavida & Ponte (2002, p. 7) relata que, em um processo de investigação colaborativa, os participantes devem assumir uma postura de protagonista, diferente da de um simples fornecedor de dados. É necessário existir confiança entre os participantes e se, de um lado, "é fundamental que se aceite a voz pessoal, decorrente da experiência, [...] por outro lado, é necessário ter sempre presente que nenhuma idéia é definitiva". Os autores falam que o diálogo é "um instrumento de confronto de idéias e de construção de novas compreensões".

Mesmo com as dificuldades de negociação e trabalho em grupo, parece existir um consenso de que uma "estratégia colaborativa" oferece vantagens por ajudar a superar obstáculos e possibilitar momentos de reflexão e oportunidades de aprendizagem mútua.

Acredito ser aceitável desejar que uma pesquisa seja colaborativa, mas não seria apropriado impor essa condição à pesquisa, seria inclusive contraditório. Não basta desejar para que um trabalho coletivo se torne colaborativo, no entanto Fiorentini (2004, p. 53) defende que um grupo pode tornar-se colaborativo

> [...] à medida que seus integrantes vão se conhecendo e adquirem e produzem conjuntamente conhecimentos, os participantes adquirem autonomia e passam a auto-regular-se e a fazer valer seus próprios interesses, tornando-se, assim, grupos efetivamente colaborativos.

Boavida & Ponte (2002, p. 9) citam Reason, explicitando os passos lógicos de uma investigação colaborativa: identificação do problema, estabelecimento e implementação de um plano de ação e reflexão sobre a experiência. Eles explicam que "as formas de trabalho têm de ser negociadas e re-inventadas em cada momento".

Os passos lógicos explicitados acima parecem ter estreita relação com a pesquisa-ação. Porém Fiorentini (2004) afirma ser um equívoco entender a pesquisa-ação como sinônimo de pesquisa cooperativa ou pesquisa colaborativa. Desse modo, faz-se necessária uma descrição sobre o que é pesquisa-ação.

Pesquisa-ação

Para Fiorentini (2004, p. 70), a pesquisa-ação pode ser considerada como uma técnica de coleta de informações ou como uma modalidade de pesquisa que "torna o participante da ação um pesquisador de sua própria prática e o pesquisador um participante que intervém nos rumos da ação, orientado pela pesquisa que realiza". O autor relata ainda que a pesquisa-ação também pode ser concebida como um processo de investigação da prática intencional e planejado

> [...] em que caminham juntas a prática investigativa, a prática reflexiva e a prática educativa. Ou seja, a prática educativa, ao ser investigada, produz compreensões e orientações que são imediatamente utilizadas na transformação dessa mesma prática, gerando novas situações de investigação. (FIORENTINI, 2004, p. 69)

No artigo de Zeichner & Diniz-Pereira (2005, p. 65), os autores utilizam o termo pesquisa-ação com o significado de "uma pesquisa sistemática feita por profissionais sobre as suas próprias práticas".

Apoiada na leitura de Thiollent, Costa compara a pesquisa-ação com a pesquisa participante, afirmando que toda pesquisa-ação é participante, mas a recíproca não é verdadeira. Diz ainda que

> Para que uma pesquisa participante possa ser classificada de pesquisa-ação, é necessário que, primeiro, exista uma forte interação entre os pesquisadores e os indivíduos implicados na situação investigada; segundo, que o objeto de investigação advenha da situação; e terceiro, que a pesquisa não seja só uma forma de ação, mas que produza conhecimento e conscientize os envolvidos quanto à situação investigada. (COSTA, 2004, p. 119)

A autora discorre sobre os três tipos de pesquisa-ação que costumam se apresentar na escola, baseando-se em Cohen e Manion, dois estudiosos da metodologia da pesquisa no campo educacional:

> [...] um professor isolado empreende uma investigação em sua própria prática de sala de aula, ou um grupo de professores desenvolve de forma colaborativa um trabalho pedagógico conjunto, ou, ainda, o que tem sido mais freqüente nos últimos anos, os professores trabalham lado a lado, de forma contínua, com um investigador ou com um grupo de pesquisadores durante um período de tempo. (COSTA, 2004, p. 120)

Acredito que o último tipo de pesquisa-ação descrito acima é o que mais se ajusta ao processo de pesquisa das alunas-professoras sujeitos desse estudo.

Numa visão mais ampla dentro da área educacional, a finalidade da pesquisa-ação "é servir de instrumento de mudança social" (BARBIER, 2004, p.53). Ainda que o objetivo do pesquisador seja algum progresso ou melhora, os resultados de sua intervenção não são previsíveis ou totalmente controláveis. O pesquisador exerce o papel de ator, ou seja, ele deixa de participar como um observador neutro e passa a dirigir uma pesquisa de modo a compartilhar sua responsabilidade pela investigação.

O que significa mudar

Segundo Barbier (2004, p. 48), "mudar é aquilo por meio do qual o reprimido sai de seu ciclo de repetições". Saraiva & Ponte (2003, p. 4) entendem que a reflexão é parte fundamental da mudança, "o desenvolvimento profissional envolve sempre alguma aprendizagem e, por conseqüência, alguma mudança".

Apoiados em Christiansen e Walther, Saraiva & Ponte (2003, p. 4) relatam que "a aprendizagem do professor sobre o ensino ocorre quando ele adquire a capacidade de ver, ouvir e fazer coisas que não fazia antes".

Esse mesmo trabalho afirma, apoiado nos pesquisadores Fullan, Hargreaves e Thompson, que a mudança não pode ser imposta a alguém e que ela só ocorre quando desejada pela própria pessoa. Saraiva & Ponte citam, apoiados em Day, três motivos que justificam por que a mudança não pode ser forçada: 1) é o professor que se desenvolve e não quem é desenvolvido; 2) uma mudança não interiorizada é apenas temporária; 3) a mudança "é pouco provável se o professor não se sentir dentro das situações e com sentido de posse dos processos de tomada de decisão". (DAY apud SARAIVA & PONTE, 2003, p. 4)

Para que seja possível ocorrer uma verdadeira mudança, Saraiva & Ponte (2003) sugerem que é necessário apoiar os professores em suas ansiedades e dificuldades e dar tempo para que possam refletir. Esses mesmos pesquisadores descrevem alguns obstáculos à mudança: a insegurança pessoal, a opinião dos outros professores e o conhecimento sobre conteúdos matemáticos e métodos de ensino.

Apoiados em Day, Saraiva & Ponte (2003, p. 6) concluem que

> [...] a mudança é um processo que leva o seu tempo e que passa pela alteração das crenças, conhecimentos e formas de trabalhar do professor – o que só acontece se ele experimentar o novo face ao velho e reflectir sobre os respectivos méritos.

Segundo Zeichner & Diniz-Pereira (2005), nem toda mudança pode ser considerada positiva. Os autores enfatizam “a necessidade da pesquisa-ação ir além da retórica de *dar voz aos profissionais* para a definição e melhoria de seu próprio trabalho”. (ZEICHNER & DINIZ-PEREIRA, 2005, p. 77)

Apesar de existir um sentimento de recompensa pessoal para os professores que investigam sua própria prática, é complexo associá-la à melhoria da qualidade de ensino e aprendizado. Zeichner & Diniz-Pereira (2005, p. 70) se referem à afirmação de Ellwood, segundo o qual “a pesquisa-ação pode em alguns casos dar maior legitimidade a práticas educacionais que reforçam e fomentam iniqüidades sociais”.

Segundo Zeichner & Diniz-Pereira (2005, p. 67), há evidências que “indicam fortemente que a pesquisa-ação tem sim auxiliado a formação de diferentes profissionais”. Esses mesmos pesquisadores relatam que, desde as experiências de John Eliott, “tem-se defendido a idéia da pesquisa dos educadores como uma das formas disponíveis e, talvez, uma das mais eficientes para a formação profissional” (ZEICHNER & DINIZ-PEREIRA, 2005, p. 67). Entendo aqui que a formação profissional não se restringe à graduação, por acreditar, assim como Fiorentini *et al*. (2002), que o professor se forma e se constitui profissionalmente através de um processo sempre inacabado.

Pesquisa-ação: auxílio na formação profissional

Pesquisadores como Serrazina & Ponte (2003) e Zeichner & Diniz-Pereira (2005) dizem que os professores valorizam os resultados e o processo de pesquisa quando a vivenciam na pesquisa-ação. Ela tem sido um meio de transformação na sala de aula.

Fiorentini & Lorenzato (2006, p. 112) descrevem os percursos teóricos e metodológicos da investigação em Educação Matemática e relatam que a pesquisa-ação, segundo Thiollent, “se tem constituído como um procedimento voltado para a resolução de problemas práticos e que envolve uma ação conjunta ou cooperativa dos pesquisadores com os envolvidos nos problemas”.

Pereira (1998, p. 154), que, em seu texto, contextualiza as contribuições de Elliott, cita o empenho deste em trazer para professores e formadores de professores “a dimensão da pesquisa-ação como um meio de produzir conhecimento sobre os problemas vividos pelo profissional, com vista a atingir uma melhora da atuação, de si mesmo e da coletividade”.

Segundo o próprio Elliott (1998, p. 143), o principal objetivo da forma de pesquisa-ação que ele descreve é desenvolver mais a prática que o praticante.

Uma análise das características da pesquisa-ação como um procedimento desenvolvido pelos professores no exercício de sua profissão é feita por Pereira (1998, p. 166) que conclui

> [...] que se pode definir a pesquisa-ação como um estudo de uma situação social para tratar de melhorar a qualidade da ação que nela intervém. Seu objetivo consiste em proporcionar elementos que sirvam para facilitar o juízo prático em situações concretas e a validez das teorias e hipóteses que geram não depende de provas científicas de verdade, mas de sua utilidade para ajudar os professores a atuar de modo mais inteligente e acertado. Na pesquisa-ação as teorias não se validam de forma independente para aplicá-las logo mais à prática, senão através da prática.

Saraiva & Ponte (2003, p. 5) citam Kelchtermans que afirma

> [...] que o professor legitima uma teoria quando verifica que ela funciona na sua prática. Tal legitimidade desenvolve-se sobretudo pela reflexão sobre a prática da sala de aula, sendo essa reflexão o processo-chave do desenvolvimento profissional.

Zeichner e Diniz-Pereira (2005, p. 68) citam o estudo de Zeichner, que concluiu, depois de analisar quatro programas de pesquisa-ação desenvolvidos por professores do ensino fundamental dos Estados Unidos, que sob certas circunstâncias

> [...] a pesquisa dos professores parece promover aprendizagens específicas de professores e de alunos que muitos docentes consideram válidas e transformadoras. A experiência de se envolver em pesquisas do tipo “auto-estudo” (self-study research) ajuda ainda os professores a se tornarem mais confiantes em suas habilidades de ensinar, mais ativos e independentes ao lidarem com situações difíceis que surgem durante as aulas, assim como mais seguros ao adquirirem hábitos e habilidades de pesquisa que utilizam para analisar mais a fundo suas estratégias de ensino. A pesquisa dos professores parece também desenvolver neles motivação e entusiasmo em relação ao ensino, além de revalidar a importância de seu trabalho. Há ainda evidências da relação entre a pesquisa-ação e melhorias no aprendizado, comportamento e atitude dos estudantes. Os professores envolvidos na pesquisa de suas próprias práticas parecem ainda adotar modelos de ensino mais centrados nos alunos e se convencem da importância de ouvir, observar e procurar entender os alunos. Finalmente, os estudos de Zeichner levam-no a acreditar no poder da pesquisa dos professores para promover melhorias mais amplas nas escolas e nos sistemas de ensino do qual fazem parte.

O texto de Ponte & Serrazina (2003, p. 63) também cita que a investigação sobre a prática é uma atividade que, além de despertar o interesse dos atores, proporciona significativas implicações para sua prática profissional.

Zeichner & Diniz-Pereira (2005, p. 68) falam que as circunstâncias e “contextos em que a pesquisa dos educadores se desenvolve podem fazer bastante diferença”. Os professores-pesquisadores devem ter controle sobre as decisões em cada etapa da pesquisa, seu conhecimento e opinião devem ser respeitados durante todo o processo, deve existir um tempo substancial para o trabalho em grupo (para Zeichner o ambiente deve ser seguro e colaborativo) e condições estruturais (recursos como a redução de carga horária didática, acesso a materiais para leitura e apoio para publicação e apresentação de trabalhos).

Para Zeichner e Diniz-Pereira (2005, p. 66), o movimento internacional de pesquisa-ação significa o reconhecimento de que as teorias produzidas pelos professores são um auxílio para sua prática. Também é “uma rejeição às reformas ‘de cima para baixo’ que concebem os profissionais apenas como participantes passivos” vistos como simples técnicos que executam o que lhes é pedido.

Verifiquei que duas das principais características da pesquisa-ação são a intervenção e a ação, características essas descritas em outras obras, como a de Lüdke & Andre (2005). Neste tipo especial de pesquisa participante, Fiorentini & Lorenzato (2006, p. 112) explicam que “o pesquisador se introduz no ambiente a ser estudado não só para observá-lo e compreendê-lo, mas sobretudo para mudá-lo em direções que permitam a melhoria das práticas e maior liberdade de ação e de aprendizagem dos participantes”. Existe uma intenção inicial de interferir no desenvolvimento da pesquisa e criar condições de reflexão para todos os participantes desse processo.

De acordo com Pereira (1998, p. 162), os aspectos inovadores da pesquisa-ação para Kurt Lewin foram: “o caráter participativo, o impulso democrático e a contribuição à mudança social”.

Fiorentini & Lorenzato (2006) relatam que o método da pesquisa-ação inspirado em Lewin é comparado a uma espiral auto-reflexiva e propõe as fases de planejamento, ação, observação, registros, sistematização/reflexão/análise, avaliação e depois um novo planejamento, uma nova ação, nova observação e assim por diante.

Momentos de reflexão são constantemente inseridos nesse tipo de pesquisa. Fiorentini & Lorenzato (2006) ressaltam a relevância da reflexão, imprescindível para a pesquisa-ação.

Assim como Fiorentini & Lorenzato (2006), Barbier (2004) relata as fases da pesquisa-ação inspiradas em Lewin, descrevendo-as como planejamento, ação, observação, reflexão, um novo planejamento e assim por diante. Essas fases apresentam-se num movimento em espiral, de modo que cada fase que se repete é vista de forma mais profunda, ou seja, o segundo planejamento está mais consolidado que o planejamento inicial.

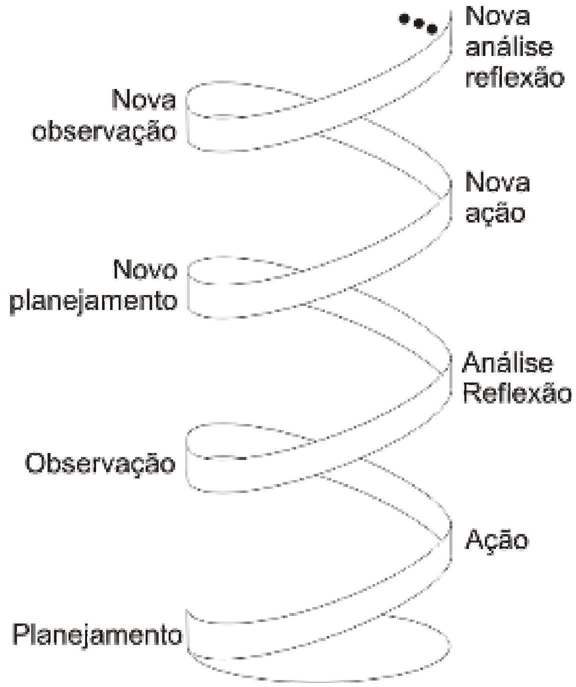


Figura 3: Fases da pesquisa-ação em espiral

Pereira (1998, p. 162) define como a característica mais marcante da pesquisa-ação o fato

> [...] de ser um processo que se modifica continuamente em espirais de reflexão e ação, onde cada espiral inclui:
>
> - Aclarar e diagnosticar uma situação prática ou um problema prático que se quer melhorar ou resolver;
>
> - Formular estratégias de ação;
>
> - Desenvolver essas estratégias e avaliar sua eficiência;
>
> - Ampliar a compreensão da nova situação (situação resultante); proceder os mesmos passos para a nova situação prática.

Cada descrição do movimento espiral da pesquisa-ação começa com a detecção de um problema a ser solucionado, presente na fase do planejamento. Segundo Barbier (2004, p. 54), esses problemas não são impostos pelo pesquisador:

> O pesquisador não o provoca [o problema a ser pesquisado], mas constata-o, e seu papel consiste em ajudar a coletividade a determinar todos os detalhes mais cruciais ligados ao problema, por uma tomada de consciência dos atores do problema numa ação coletiva.

Ao relatar, mais adiante, o processo de pesquisa-ação dos professores, descrevo como o tema observação e generalização de padrões surgiu no Curso de Matemática II.

Barbier (2004, p. 54) também relata que os instrumentos da pesquisa-ação são semelhantes aos utilizados em outros métodos, no entanto “são mais interativos e implicativos”. O autor cita como exemplos as discussões de grupo, o desempenho de papéis e conversas aprofundadas.

Os dados obtidos através desses instrumentos são retransmitidos ao coletivo e “a interpretação e a análise são o produto de discussões do grupo” (BARBIER, 2004, p.55). Barbier (2004, p. 105) também relata que a pesquisa pode ser finalizada com um relatório a ser escrito por todos os atores da investigação e defende que “faz parte da credibilidade da pesquisa-ação que a escrita seja coletiva”.

A redação de um texto final não auxilia apenas o grupo. Segundo Zeichner e Diniz-Pereira (2005), que citam uma característica da pesquisa-ação educacional defendida por Lawrence Stenhouse, a publicação de uma pesquisa de educadores pode beneficiar outros profissionais.

É verdade que o trabalho coletivo traz conflitos e desencontros, devido à diversidade de experiências e características dos sujeitos que participam do grupo, mas Barbier (2004, p. 110) diz que “a negociação é primordial e permanente ao longo da pesquisa-ação”. No entanto esse autor também fala que o “consenso deve ser criticado se ele não levantar mais questões; o conflito é inerente à pesquisa-ação”, pois isto é necessário para o efeito recursivo da pesquisa-ação que busca a reflexão permanente sobre a ação.

A legitimidade da pesquisa-ação

A legitimidade da pesquisa-ação no contexto acadêmico é defendida por Elliott (1998) e Zeichner (1998). Mas Zeichner & Diniz-Pereira (2005) chamam atenção à glorificação acrítica da pesquisa-ação dos últimos anos.

Zeichner diz existir uma divisão entre professores-pesquisadores e pesquisadores acadêmicos. Se, por um lado, “muitos professores sentem que a pesquisa educacional conduzida pelos acadêmicos é irrelevante para suas vidas nas escolas” (ZEICHNER, 1998, p. 207), por outro, “[...] muitos acadêmicos nas universidades rejeitam a pesquisa dos professores das escolas por considerá-la trivial, ateórica e irrelevante para seus trabalhos”. (ZEICHNER, 1998, p. 208)

O pesquisador cita algumas razões para a descrença dos professores na pesquisa educacional: “o uso de uma linguagem especializada no meio dos acadêmicos, que faz sentido somente para os membros de subcomunidades particulares de pesquisadores acadêmicos” (ZEICHNER, 1998, p. 209), “a freqüência com que eles [os professores] se vêem descritos de forma negativa”. (ZEICHNER, 1998, p. 210)

Zeichner & Diniz-Pereira (2005, p. 71) sugerem três estratégias para diminuir a segmentação entre esses dois mundos:

> [...] por meio do envolvimento dos profissionais das escolas em discussões sobre o significado e a importância das investigações desenvolvidas nas universidades e demais instituições de pesquisa; por intermédio do desenvolvimento de projetos de pesquisa em colaboração com os professores nas escolas em que velhos modelos hierárquicos são realmente superados; e, finalmente, por meio do apoio a projetos de pesquisa-ação desenvolvidos pelos educadores, levando muito a sério o conhecimento produzido nesse processo.

Zeichner & Diniz-Pereira (2005, p. 66) acreditam que a participação de educadores em projetos de pesquisa-ação “pode transformá-los também em ‘consumidores’ mais críticos do conhecimento educacional gerado nas universidades”. Explicam ainda que a ocorrência desse fato pode ser devido à melhor compreensão dos educadores sobre como o conhecimento é produzido nos meios acadêmicos.

No entanto, “os esforços para usar os produtos da pesquisa de professores dentro da academia não deverão ser interpretados como uma glorificação acrítica do conhecimento dos professores, pois tanto quanto na academia pode haver bons e maus trabalhos de professores”. (ZEICHNER, 1998, p. 227)

Segundo Zeichner & Diniz-Pereira (2005), ainda há discrepância entre as relações de poder entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico quando se define o que é válido como pesquisa educacional.

Ponte & Serrazina (2003, p. 54) apresentam três condições para que uma atividade possa ser considerada uma investigação. Sugeridas por Beillerot, são elas: “(i) produzir conhecimentos novos, (ii) ter uma metodologia rigorosa e (iii) ser pública”.

Zeichner e Diniz-Pereira (2005, p. 64) criticam pessoas “que vêem a pesquisa-ação e o seu potencial para fomentar o trabalho dos profissionais como um fim em si mesmo, sem qualquer conexão com objetivos e lutas mais amplas na sociedade”. Relatam que freqüentemente se assume que um educador que investiga sua própria prática se torna mais reflexivo, transformando-se em um profissional melhor e que o conhecimento produzido por meio das investigações desse educador é de grande importância, independente de sua natureza ou qualidade.

Após refletir sobre os diversos autores apresentados acima, concordo com Elliott, que descreve a tarefa do pesquisador acadêmico no âmbito da pesquisa-ação:

> [...] a tarefa do pesquisador acadêmico seria a de estabelecer uma forma de pesquisa colaborativa que fosse transformadora da prática curricular e que, no processo, favorecesse uma forma particular de desenvolvimento do professor, sobretudo o desenvolvimento de capacidades para transformar reflexivamente e discursivamente sua própria prática ou o que era anteriormente chamado, pela literatura relativa à pesquisa-ação, de *automonitoramento.* (ELLIOTT, 1998, p. 142, grifo do autor)

Procedimentos metodológicos

A seguir, descrevo os passos dados neste estudo para alcançar o objetivo de *investigar quais as mudanças de percepção dos professores sobre o tema observação e generalização de padrões ao vivenciarem um processo de pesquisa em sua própria sala de aula.*

Ainda que a meta deste estudo seja buscar resultados de como a observação e generalização de padrões se constituem no nível docente, essa investigação ocorreu em meio a um curso de formação continuada. Mais do que sensibilizar os professores sobre a importância do tema, foi necessário coletar dados pertinentes à percepção inicial e às mudanças mostradas. A investigação preocupa-se com a compreensão de fenômenos humanos e sociais onde o contexto particular em que ocorre e a perspectiva dos participantes são elementos essenciais para a análise dos dados. Esta descrição, por si só, já justifica a abordagem qualitativa da pesquisa.

A minha própria inserção no ambiente em que se dá a investigação aponta para a realização de uma pesquisa-ação na qual os alunos-professores trabalham lado a lado com pesquisadores durante um período de tempo. Além de servir como instrumento de mudança, a responsabilidade pela investigação é compartilhada com o grupo de alunos-professores, assim como o planejamento, a ação, a análise e outras fases da pesquisa. Entretanto, apesar de atuar intencionalmente intervindo no grupo, não considero que essa investigação seja classificada como pesquisa-ação, já que o objetivo do estudo não indaga sobre minha própria prática.

Durante a participação junto ao grupo, atuei observando e intervindo no processo de pesquisa-ação vivenciado pelos professores. Estes sim investigavam sua própria prática.

No início, as informações sobre o que já ocorrera no Curso de Matemática II foram colhidas por meio de atas escritas pela professora do curso Sílvia Machado e por informações verbais desta.

Ao começar a freqüentar os encontros do Curso de Matemática II, a coleta de dados se restringiu à observação e ao relato dos acontecimentos. Acredito que a observação permite um contato pessoal e estreito do pesquisador com o fenômeno pesquisado, sendo uma de suas vantagens a possibilidade de o observador aproximar-se da "perspectiva dos sujeitos". Na medida em que o observador acompanha as experiências dos sujeitos, é possível "apreender a sua visão de mundo, isto é, o significado que eles atribuem à realidade que os cerca e às suas próprias ações”. (LÜDKE & ANDRÉ, 1986, p.26)

Os dados coletados nas observações foram organizados em “diários de campo”. Em cada diário, há um registro do que ocorreu no encontro do curso, oficina ou reunião com alunos-professores, desde a descrição de pessoas até a descrição de episódios e diálogos. Esses diários foram escritos segundo as duas perspectivas, descritiva e interpretativa, apresentadas por Fiorentini & Lorenzato (2006, p. 119):

> A perspectiva descritiva atém-se à descrição de tarefas e atividades, de eventos, de diálogos, de gestos e atitudes, de procedimentos didáticos, do ambiente e da dinâmica da prática, do próprio comportamento do observador etc. A perspectiva interpretativa, por sua vez, tenta olhar para a escola e a sala de aula como espaços socioculturais produzidos por seres humanos concretos, isto é, por sujeitos que participam de uma trama social com seus sentimentos, idéias, sonhos, decepções, intuições, experiências, reflexões e relações inter-pessoais [sic].

Alguns elementos foram definidos para fazerem parte da estrutura do diário de campo: a data da reunião, professores e pesquisadores que estavam presentes, o local da reunião (sala de aula, laboratório ou biblioteca), o horário de início e término e, em seguida, o relato dos fatos ocorridos na reunião.

A principal limitação do diário de campo é o alto grau de subjetividade do pesquisador. Ainda assim, Fiorentini (2006, p. 118) declara que este é “um dos instrumentos mais ricos de coleta de informações durante o trabalho de campo”.

Há outros documentos diferentes do diário de campo, que são utilizados como instrumento de pesquisa como, por exemplo, as atividades que os alunos-professores sugerem e levam para a discussão em grupo e textos que os alunos-professores escrevem com reflexões individuais. Certamente muitos itens desses documentos estão presentes no próprio diário de campo por fazerem parte das discussões.

Algumas atividades envolvendo o tema observação e generalização de padrões, mais especificamente seqüências numéricas ou figurativas, foram propostas pelos alunos-professores. Aquelas relevantes para o presente estudo estão descritas no capítulo seguinte.

Outro instrumento de pesquisa é o material disponibilizado para os alunos-professores durante o curso. Esses materiais contêm resultados de pesquisas acadêmicas que foram apresentadas aos alunos-professores não como última palavra, mas como instrumento para iniciar uma conversa sobre as questões investigadas e sobre a relevância e pertinência do tema (observação e generalização de padrões).

Segue um quadro com a data e a descrição dos textos disponibilizados.

	Textos disponibilizados
1º encontro – 30 de novembro de 2005.	-
2º encontro – 17 de março de 2006.	- Artigo de Miguel, Fiorentini e Miorim (1993) intitulado *Contribuição para um repensar a Educação Algébrica Elementar*, mais especificamente o trecho *Repensando a educação algébrica*, p. 85 – 87.
3º encontro – 28 de abril de 2006.	- Livro didático de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis (2002) intitulado *Matemática paratodos da 5ª série*. - Adaptação do texto escrito para a dissertação de Perez (2006) com a tipologia dos padrões de seqüências e a análise a priori da primeira atividade. (Anexo A)
4º encontro – 12 de maio de 2006.	-
5º encontro – 09 de junho de 2006.	- Livro de Maria Cecília Costa e Sílvia Carvalho (1997) intitulado *Padrões Numéricos e Seqüências*. - Livro didático de Adilson Longen (1999) intitulado *Matemática em Movimento 6ª série*, mais especificamente p. 83-89.
Reunião extra – 28 de agosto de 2006.	-
6º encontro – 1º de setembro de 2006.	- Artigo de Vale & Pimentel (2005) intitulado *Padrões: um tema transversal do currículo*. - Introdução da dissertação de Perez (2006) intitulada *Alunos do Ensino Médio e a generalização de padrão*, mais especificamente p. 14-15.
Reunião extra – 04 de setembro de 2006.	-
Reunião extra – 07 de setembro de 2006.	-
7º encontro – 15 de setembro de 2006.	- Questões retiradas de REEVES, Charles A. Problem-solving techniques helpful in mathematics and science. Virginia: NCTM, 1987. (Anexo B)
8º encontro – 20 de outubro de 2006.	- Artigo sobre a pesquisa desenvolvida por Maurina. Escrito por Sílvia, Maurina e por mim, publicado na Revista PROVE com crédito principal de Machado (2006). (Anexo C)
Reunião extra – 06 de novembro de 2006.	-
Oficina – 10 de novembro de 2006.	-
Reunião extra – 1º de dezembro de 2006.	-
10º encontro – 16 de março de 2007.	- Questões da OBMEP de 2006. (Disponível em <http://www.obmep.org.br/provas2006/provas1fase.html>. Acesso em: 1º fev. 2008.)
11º encontro – 13 de abril de 2007.	- Folha com quesitos para a pesquisa (descritos na página 82).
12º encontro – 04 de maio de 2007.	-
13º encontro – 15 de junho de 2007.	-
14º encontro – 24 de agosto de 2007.	-
Reunião extra – 28 de agosto de 2007.	-
Reunião extra – 04 de setembro de 2007.	- Folha com as questões desenvolvidas na pesquisa de Almeida (2006). (Anexo D)
15º encontro – 28 de setembro de 2007.	-
16º encontro – 19 de outubro de 2007.	- Artigo sobre a pesquisa desenvolvida por Doroti Santos (2007) intitulado *Uma professora de matemática faz pesquisa na oitava série* na Revista PROVE. (Anexo E)
Oficina – 19 de novembro de 2007.	-

Figura 4: Quadro do material disponibilizado aos alunos-professores

É importante ressaltar que não pude participar de alguns poucos encontros do grupo e obtive informações sobre os mesmos através das atas e de conversa com Sílvia Machado. Essas informações foram incorporadas, pois explicavam de alguma maneira a seqüência dos acontecimentos.

No processo de pesquisa-ação, as alunas-professoras e eu utilizamos recursos da engenharia didática, segundo Machado (1999), tanto para a avaliação do instrumento de pesquisa elaborado, quanto para a análise dos protocolos. Fizemos análises *a priori* sobre cada atividade, explicitando o objetivo de cada questão, levantando as variáveis didáticas[15] e prevendo as estratégias de resolução dos alunos. Depois da experimentação, utilizamos a análise *a posteriori* de cada questão para validar o instrumento de pesquisa. As discussões e reflexões que ocorriam durante o Curso de Matemática II também eram inspiradas nessa metodologia.

Em certo momento, fui instada por uma das alunas-professoras a entrevistar alguns de seus alunos. Lancei mão então de uma entrevista semi-estruturada porque ela possibilita maior liberdade de percurso e adaptações quando necessárias, além de garantir as informações que se quer obter.

Foram escolhidas duas professoras que se envolveram com a proposta do Curso de Matemática II. O caminho percorrido por elas foi descrito e analisado nesse estudo. Ambas foram escolhidas porque faziam parte do grupo e passaram por todas as fases da pesquisa-ação, desde o planejamento da pesquisa à elaboração do relato final.

[15] São escolhas feitas pelo professor ou pesquisador, por exemplo, pedir o próximo termo ou o 121º termo de uma seqüência. Uma característica importante é que a escolha, ou não, de determinada variável deve provocar algum efeito ou mudança no aprendizado do aluno.

SOBRE O PROCESSO DE PESQUISA-AÇÃO DOS PROFESSORES

Este capítulo tem por objetivo relatar dois processos de pesquisa-ação. O primeiro processo foi vivenciado pela aluna-professora Maurina e por mim. Investigamos a reação dos alunos de uma sala de 5ª série do Ensino Fundamental frente a atividades que envolvem a observação e generalização de padrões e as vantagens deste tipo de tarefa. O segundo processo de pesquisa-ação contava com a participação da aluna-professora Doroti e com a minha. Neste, mudamos os sujeitos da pesquisa. Escolhemos alunos da oitava série do Ensino Fundamental e mantivemos o tema de observação e generalização de padrões.

Ambas as professoras participaram do Curso de Matemática II oferecido pelo Projeto PROVE, o qual descrevo com mais detalhes a seguir. Esse curso foi oferecido em 2006 e em 2007. Maurina esteve presente desde a primeira reunião, enquanto Doroti iniciou sua participação no segundo encontro do curso de 2007, após participar da oficina apresentada por Maurina e outros colegas como finalização do Curso de Matemática II de 2006. Por esse motivo, o relato do primeiro processo de pesquisa-ação conta com a presença de Maurina, enquanto que no relato do segundo processo, as duas professoras estão presentes, ainda que o foco principal seja Doroti.

Sobre o PROVE

Em 1998, o Projeto de Valorização do Educador e Melhoria da Qualidade de Ensino (PROVE) teve início formalmente. Trata-se de um projeto de formação do educador, organizado e desenvolvido por iniciativa de um grupo de oito escolas públicas municipais, hoje pertencentes à Coordenadoria de Educação do Campo Limpo. São elas: Profa. Anna Silveira Pedreira, Bel. Mário Moura e Albuquerque, Carolina Rennó Ribeiro Oliveira, Mauro Faccio Gonçalves Zacaria, Dezoito do Forte, Otoniel Mota, Mário Marques Oliveira e Pracinhas da FEB.

Nesse projeto, diferentes cursos foram desenvolvidos: Metodologia de Ensino de EJA[16], Orientação Didática para Módulos de Literatura, Informática Educacional, Música, Avaliação Inteligente, Filosofia, entre outros. Cada curso é composto por oito encontros anuais com cerca de três horas de duração, de modo que o último deles é uma oficina aberta a todos os professores. A oficina funciona como um encerramento no final do ano e é ministrada pelos alunos que participaram do curso. Os cursos são oferecidos igualmente aos professores e os interessados se inscrevem voluntariamente.

Para que o aluno-professor possa freqüentar o curso, ele deixa de ministrar as aulas do período do encontro, sem que sofra ônus algum. Nesses dias, o aluno-professor é substituído por outro professor da escola e, desse modo, os alunos também não são prejudicados.

O Projeto de Valorização do Educador tem por objetivo melhorar a prática do professor na sala de aula, ou seja, trazer mudanças. Para isso, busca aliar a prática cotidiana e o conhecimento teórico e promover a troca de saberes. A prática cotidiana é trazida pelos alunos-professores e o conhecimento teórico é uma contribuição dos professores convidados para assessorar o curso.

A troca de saberes não ocorre apenas durante o curso, o grupo de escolas municipais publica anualmente uma revista com o nome do projeto. Em 2007, quando o PROVE comemorou 10 anos de projeto, foi publicada a revista de número 6. Essas revistas são compostas por artigos que podem ser redigidos tanto pelos professores convidados para ministrar os cursos, quanto pelos alunos-professores inscritos.

Concepção do Curso de Matemática II

A pesquisadora Sílvia Machado, minha orientadora, foi chamada no final do ano de 2005 pela coordenadora de uma das escolas integrantes do grupo PROVE para assessorar um curso de matemática para os professores de 5ª série/ 6º ano a 8ª série/ 9º ano a ser iniciado em 2006. Na época, já havia um curso de Matemática voltado para professores do ciclo I do Ensino Fundamental (1ª série/ 2º ano a 4ª série/ 5º ano), chamado Curso de Matemática I, dirigido por outra professora convidada.

[16] Educação de Jovens e Adultos.

Segundo declaração de Sílvia, ela aceitou o encargo por julgar que seria uma ocasião interessante para realizar uma pesquisa colaborativa junto aos professores. Apesar de existir a intenção de realizar uma pesquisa colaborativa, esta característica não esteve presente no início do curso e também não era previsível que a pesquisa assim se caracterizasse.

Utilizarei o termo "curso" para designar os encontros com o grupo de Matemática II, pois era este o nome que os alunos-professores e outros membros do PROVE utilizavam. No entanto a proposta do curso não atende ao significado atribuído ao termo pelo dicionário[17], pois esse curso possui uma dinâmica diferente da habitual. Ainda que Sílvia Machado recebesse o título de professora do curso, sua intenção não era discursar sobre um tema, mas sim auxiliar os professores numa investigação em sua própria sala de aula.

Depois de a proposta ter sido discutida, a coordenadora do PROVE avaliou que a experiência seria pertinente e desejável. O curso teve início com um grupo de professores num trabalho coletivo, a princípio com aspectos de um grupo cooperativo, mas que poderia evoluir para colaborativo.

Como o tema observação e generalização de padrões surgiu no grupo

Antes de relatar os processos de pesquisa-ação vivenciados em 2006 e em 2007, relatarei alguns acontecimentos iniciais do curso que acredito serem importantes para a compreensão do leitor sobre o surgimento do tema e a forma como o processo se constituiu.

O primeiro encontro com os alunos-professores foi marcado para o dia 30 de novembro de 2005, com o objetivo de conhecer e ouvir os anseios daqueles inscritos no curso. Ele ocorreu na escola Mauro Faccio Gonçalves Zacaria, que nomearei apenas por Zacaria de agora em diante.

Nesse dia, havia oito alunos-professores inscritos e duas pesquisadoras, Sílvia Machado e Cristina Maranhão[18]. Durante o encontro, cada aluno-professor se

[17] "série de aulas, conferências ou palestras sobre um tema, ou vários temas, conexo ou não" - retirado do *Novo Dicionário da Língua Portuguesa* de Aurélio Buarque de Holanda Ferreira.
[18] Cristina Maranhão é uma das pesquisadoras que participam do GPEA.

apresentou e relatou os problemas que enfrentava ao ministrar as aulas, assim como as dificuldades que seus alunos demonstravam.

Os alunos-professores mostraram descrença nas pesquisas acadêmicas publicadas em revistas ou outros meios, pois, de acordo com eles, os pesquisadores "escolhem os melhores alunos para participar" e conseqüentemente alcançam bons resultados. Mas a dificuldade consensual apontada pelos alunos-professores era fazer com que seus alunos compreendessem o enunciado dos problemas e os solucionassem.

Maurina estava entre os oito alunos-professores presentes na primeira reunião. Ela relatou que é formada em Biologia e lecionava Ciências e Matemática na escola municipal Zacaria há dez anos.

Durante sua apresentação, falou que mesmo os alunos que são "bons" em Ciências têm dificuldades em Matemática. A aluna-professora citou um exemplo: disse que quando "dá" a equação da velocidade, o aluno não reconhece as incógnitas da equação e não faz a ligação da Matemática com as outras Ciências. Ela também falou que insiste com seus alunos, ao fazerem cálculos, para que expliquem todos os passos utilizados para chegar ao resultado e que tem o hábito de olhar o caderno dos estudantes.

Um fato me chamou a atenção. Maurina enfatizou que o aluno chega à 5ª série com "zero de conhecimento". Ela também sugeriu que o aluno "investe" mais no professor que ele tem certeza de que é mais estável na escola, isto é, que permanecerá na escola no ano seguinte. Comentou ainda que para incentivar seus alunos, que em geral têm baixa auto-estima, ela conta para eles que é moradora da região e que conseguiu fazer faculdade, de modo que hoje é professora da escola.

Após o primeiro encontro, Sílvia imaginou ser interessante propor a elaboração de uma pesquisa junto a esses professores sobre o tema generalização de padrões em cada uma das quatro séries do ciclo II do Ensino Fundamental (5ª à 8ª série/ 6º ao 9º ano). Esta prática poderia motivar a criação de estratégias de resolução de problemas para os alunos-professores e para seus alunos, pois, de acordo com o que afirmou Radford (1996, p.111), as abordagens da generalização e da resolução de problemas parecem se complementar mutuamente no campo do ensino da álgebra.

A pesquisa-ação como metodologia do curso

A proposta de elaborar uma pesquisa conjuntamente com professores possui um duplo objetivo: trazer mudanças à realidade e produzir conhecimentos sobre essas mudanças.

Acredito que o duplo objetivo da pesquisa conjunta proposta aos alunos-professores é adequado à metodologia da pesquisa-ação, pois segundo Barbier (2004, p.53), a finalidade da pesquisa-ação "é servir de instrumento de mudança social". Para esse mesmo autor, "mudar é aquilo por meio do qual o reprimido sai de seu ciclo de repetições". (BARBIER, 2004, p.48)

Entendo que o aluno-professor buscou esse curso de formação continuada por sentir necessidade de se adequar às novas demandas nas salas de aula e que "mudar a realidade" para o professor é fazer com que ele saia de seu ciclo de repetições. Essa mudança da realidade implica uma mudança de postura do professor na observação que faz de cada aluno, na avaliação e na reflexão sobre sua própria prática.

Outra característica da pesquisa-ação é o "mutualismo". Aqui utilizei o termo da Biologia por acreditar que define bem essa qualidade. Mutualismo é a associação de dois seres vivos, na qual ambos recebem benefícios.

É importante observar que o Projeto de Valorização do Educador buscou pesquisadores acadêmicos para auxiliar os alunos-professores por meio de uma reflexão mais teórica sobre sua prática. Já as pesquisadoras acadêmicas notaram aí uma boa oportunidade de investigação, visto que os alunos-professores do grupo estão em melhores condições de conhecer a realidade devido à sua experiência com a prática cotidiana.

2006 – Pesquisa-ação de Maurina

Em 2006, houve oito encontros programados, dos quais o último foi uma oficina, e cinco reuniões extras. Com exceção de uma das reuniões extras, que ocorreu no prédio de exatas PUC-SP, todos os encontros foram realizados na escola Zacaria.

Vou relatar o processo da pesquisa de Maurina durante o ano de 2006: o contato com o tema observação e generalização de padrões, o planejamento da pesquisa, a ação, a observação dos dados, o registro, a sistematização, a reflexão, a análise, a avaliação e o relato final. É importante que fique claro que as fases descritas acima não ocorreram de forma linear e que, por se tratar de um processo de intervenção com resultados imprevisíveis, o planejamento da pesquisa não estava estático ou engessado. As entrevistas com alunos e as reuniões extras, por exemplo, não estavam previstas no início do ano. Durante a execução da pesquisa, sentimos necessidade de mais encontros, a fim de refletir e analisar mais profundamente a pesquisa para que pudéssemos escrever juntas, Maurina, Sílvia e eu, um artigo final, descrevendo a pesquisa e reflexões a partir de seus resultados. Esse artigo foi divulgado pela revista PROVE número 5 e compartilhado com os alunos-professores que participaram do Curso de Matemática II de 2007.

O esquema abaixo mostra a seqüência de encontros e reuniões durante o ano de 2006, o desenrolar do processo de pesquisa de Maurina (do planejamento da pesquisa ao artigo final) e a introdução de diferentes materiais de apoio (artigos, questões e outros materiais de leitura). O momento em que Maurina aplicou o instrumento de pesquisa em sua sala ocorreu entre o terceiro encontro e o quarto.

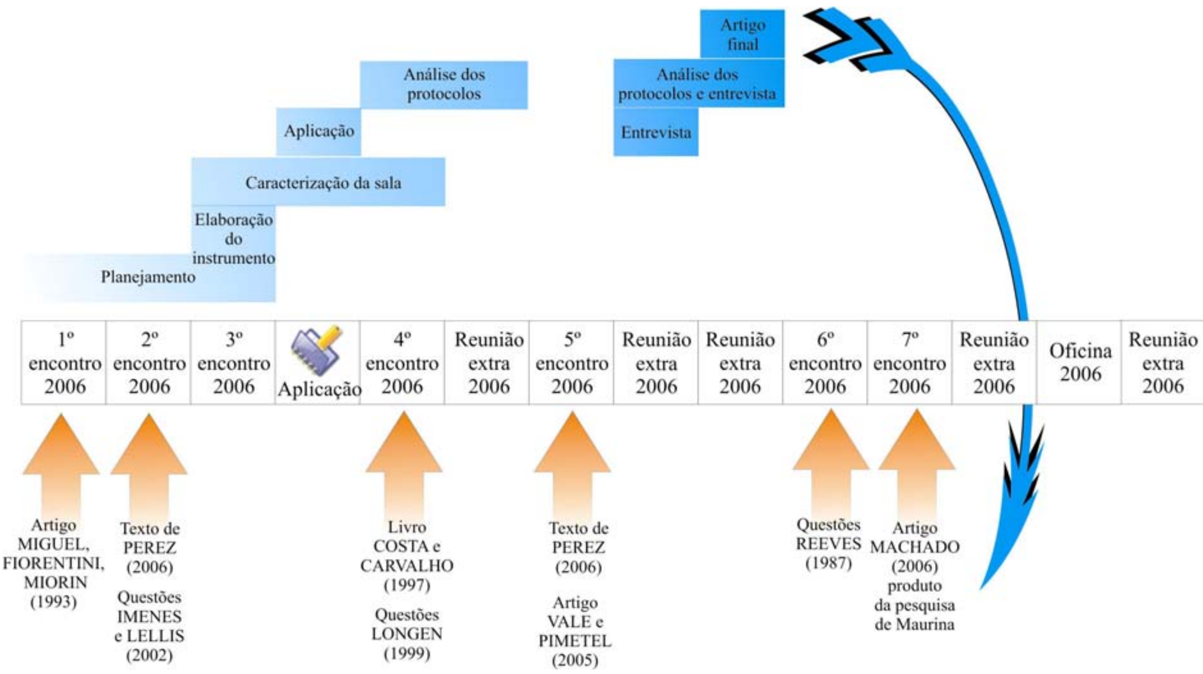


Figura 5: Esquema do processo de pesquisa de Maurina

É possível observar que, durante a pesquisa-ação, Maurina foi exposta a diferentes materiais e que, mais tarde, o produto de sua própria pesquisa se tornou um material para o grupo de alunos-professores.

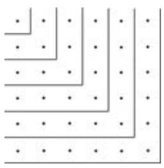
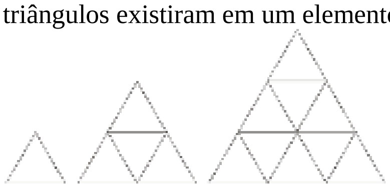
A descrição a seguir apresenta uma seleção de fatos que justificam a mudança de percepção da aluna-professora Maurina sobre o tema observação e generalização de padrões.

Sílvia iniciou o curso de 2006 com a proposta de realizar uma pesquisa conjunta com os alunos-professores sobre o tema observação e generalização de padrões, que foi aceita pelo grupo.

Tomei conhecimento, por meio do relato da professora Sílvia, de que os alunos-professores inscritos no Curso de Matemática II não tinham o costume de trabalhar com observação e generalização de padrões via seqüências. Eles dividiam-se entre aqueles que nunca tinham ouvido falar sobre "tal conteúdo" e outros que esporadicamente davam atividades sobre o tema, apenas como desafios. Estes últimos afirmaram ainda que tal tarefa nem mesmo era corrigida em sala de aula. O uso esporádico de atividades envolvendo padrões é corroborado pela pesquisa de Almeida (2006).

Antes que os alunos-professores iniciassem o planejamento da investigação, eles tiveram contato com artigos que tratavam do tema e os discutiram. O grupo discutiu trechos do artigo *Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar,* escrito por Antônio Miguel, Dario Fiorentini e Maria Ângela Miorim, mais especificamente o item *Repensando a Educação Algébrica* das páginas 85-87.

Nesse mesmo encontro, a professora Sílvia sugeriu que os alunos-professores terminassem de ler todo o artigo para contextualizar as duas situações apresentadas abaixo, retiradas da página 86:

> 4ª situação. Com base na figura abaixo, explique como se pode calcular a soma de uma quantidade qualquer de números ímpares consecutivos, começando por um.
>
> 
>
> 5ª situação. Coloque mais dois elementos na série da figura abaixo e diga como saber quantos triângulos existiram em um elemento qualquer da série.
>
> 
>
> (MIGUEL *et al*., 1993, p. 86)

O planejamento para as pesquisas de cada aluno-professor também foi iniciado nesse mesmo encontro. A professora Sílvia orientou-os para que escolhessem uma de suas classes, sem privilegiar a "melhor classe", para aplicar o instrumento de pesquisa (que ainda não estava definido). Como os alunos-professores falaram que as pesquisas eram realizadas com os melhores alunos, a professora pediu que a classe escolhida representasse uma classe comum, compartilhando o máximo de características do público das escolas municipais da região. Além disso, os alunos-professores ficaram encarregados de buscar atividades com seqüências a serem observadas pelos alunos em livros paradidáticos e didáticos da série em que lecionam e que escolheram para aplicar o instrumento de pesquisa. Essas seqüências poderiam ser numéricas ou figurativas.

Iniciei minha participação no Curso de Matemática II no terceiro encontro, mais precisamente o segundo encontro de 2006. Nesse dia, Sílvia fez uma rápida apresentação sobre mim como aluna de mestrado e explicou que minha função era acompanhar os alunos-professores e auxiliá-los no que julgasse necessário.

No início, apresentei uma postura tímida, escutando mais do que falando. Poderia até afirmar que não falava.

Devo ressaltar que a freqüência dos alunos-professores não era regular. Este foi um dos motivos que me levaram a escolher Maurina, e depois Doroti, para uma descrição mais detalhada. Elas mostraram-se mais envolvidas com o curso, participando dos encontros previstos e das reuniões extras negociadas com a professora Sílvia.

Durante as reuniões, reflexões sobre o tema padrões eram levantadas. A professora Sílvia já havia comentado com o grupo que, segundo pesquisadores relevantes como Mason, por exemplo, as atividades de generalização de padrões são um caminho para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Também disse que antes a Matemática era vista como um "dom" e que a pessoa que não nascesse com esse "dom" não conseguiria se desenvolver. Mas, por não acreditar nisso, ela defende que a generalização deve ser exercitada na sala de aula, assim como outras atividades, a fim de tornar os alunos aptos a resolverem tais questões.

Sílvia também falou sobre a fase da observação. Enfatizou a necessidade de criar espaço para a observação dentro da sala de aula: "no início eles vão ter dificuldade, pois os alunos não foram educados pra isso, não é comum dar tempo ao aluno para que ele tenha um momento de concentração e observação".

Maurina expôs que os alunos não têm disciplina para se concentrarem, "falta disciplina para horários: hora de comer, hora de dormir, etc". Sílvia retomou a idéia inicial de que o aluno não foi educado para isso e que é necessário criar um espaço na aula. Mais uma vez disse acreditar ser possível fazer o aluno adquirir a capacidade de concentração. A professora também comentou que o tempo de ensinar é diferente do tempo de aprender, explicando que o tempo que o professor gasta para ensinar é diferente do tempo que o aluno precisa para aprender.

Sílvia questionou os alunos-professores sobre o que é transmitir conhecimento. Um deles falou que, em sua época, o conhecimento era transmitido e não construído, ele repetia até aprender. Maurina comentou que “se entrarmos na sala para dar aula deste jeito, somos linchados!”, indicando concordar que o método utilizado antigamente no ensino já não é adequado para a realidade de hoje.

Retomando o texto de Miguel *et al*. (1993), sobre repensar a Educação Algébrica, Sílvia propôs aos alunos-professores desenvolverem atividades sobre a observação e generalização de padrões e aplicá-las em suas aulas: “Construir, pesquisar e ver os frutos”. Sua proposta não era apenas aplicar uma atividade, mas realizar uma pesquisa. Apresentou exemplos de questões que podem ser desvendadas baseadas nas próprias indagações que o grupo levantou durante o encontro: “Será que a generalização de padrões ajuda no desenvolvimento do aluno? Quanto tempo é necessário trabalhar estas atividades?”.

A professora Sílvia citou elementos importantes da pesquisa: a metodologia, a construção, a aplicação, a análise, etc. Explicou que as pesquisas necessitam de hipóteses que podem ser encontradas em estudos que outras pessoas já escreveram, por exemplo, no artigo de Miguel *et al*. (1993).

Como os alunos-professores não levaram as atividades que deveriam ter sido pesquisadas nos livros (tarefa do primeiro encontro), Sílvia mostrou o livro de Imenes & Lellis (2002) da 5ª série/ 6° ano. Esse livro possui um capítulo inteiro que trata apenas de padrões.

Na discussão sobre o instrumento de pesquisa, a professora Sílvia defendeu a escolha de questões que não fariam os alunos desistirem logo no início, a atividade deveria ser estimulante para os estudantes.

Uma das alunas-professoras indagou o que fazer se existissem alunos com necessidades especiais (síndrome de Down ou sem acuidade visual). Sílvia explicou que a pesquisa desenvolvida seria uma pesquisa qualitativa e, sendo assim, os professores deveriam descrever essas situações, se houvesse.

A mesma aluna-professora que fez o questionamento acima levou uma atividade já desenvolvida com os alunos, apesar de não ter sido combinado. Tratava-se de um desenho numa tira de papel.

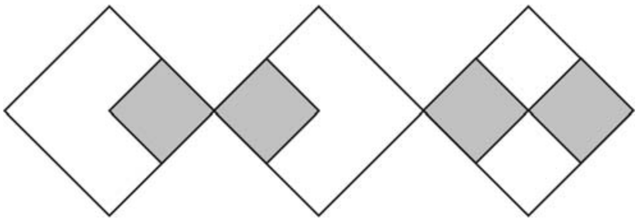


Figura 6: Atividade desenvolvida por uma aluna-professora

O grupo observou que a atividade consistia num padrão aberto, ou seja, não era possível, através dela, estabelecer um único padrão. Ao final, o grupo concluiu que seria melhor optar por seqüências que originassem um único padrão, ao menos inicialmente.

Outra aluna-professora contou sobre uma seqüência encontrada num livro de 3ª série/ 4° ano do Ensino Fundamental. Ao ouvirmos a descrição de sua história, descobrimos que se tratava da seqüência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8,... A aluna-professora contou que ela não respondeu qual era o próximo termo da seqüência antes do auxílio de um de seus alunos.

O comentário da aluna-professora estava coerente com o artigo de Vale & Pimentel (2005), que sugere que a observação e generalização de padrões é um tema transversal do currículo.

Nessa reunião, a professora Sílvia comentou as diversas etapas de uma pesquisa. Também explicou sobre duas opções de investigação: a primeira consiste na aplicação de um pré-teste aos alunos sem se mencionar nada de padrões, o desenvolvimento de uma seqüência didática e depois a aplicação de um pós-teste para analisar se o desempenho dos estudantes é melhor ou não; a segunda opção, que Sílvia deixa claro preferir, é baseada na metodologia de pesquisa da engenharia didática[19], cujo processo experimental é composto por quatro fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori* das situações didáticas, experimentação e, por fim, análise *a posteriori* e validação. A professora Sílvia explicou que, na análise *a priori*, deve-se levantar as formas de solução (estratégias), prever o tempo que a atividade necessita para ser

[19] Machado apresenta uma citação de Artigue que caracteriza a engenharia didática "[...] como um esquema experimental baseado sobre 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de ensino". (ARTIGUE apud MACHADO, 1999, p. 199).

resolvida, as variáveis envolvidas, planejar se o trabalho se desenvolverá em duplas ou individualmente, entre outros. Ela também comentou que é necessário justificar a escolha de determinada atividade e deixá-la atraente ao aluno. A atividade deveria ser agradável, se possível colorida, para motivá-los a participarem.

Para encerrar, recolheu os e-mails e enviou uma adaptação do texto escrito para a dissertação de uma de suas orientandas (Anexo A), como exemplo de análise *a priori* desenvolvida por Perez (2006). O material foi disponibilizado com a intenção de inspirar e auxiliar os alunos-professores a criarem uma atividade sobre observação e generalização de padrões.

A questão cuja análise *a priori* foi oferecida para os alunos-professores segue abaixo:

Um aluno ao observar a seguinte seqüência:

1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, ...

Diz que encontrou o próximo termo e que também foi capaz de encontrar o 127º termo.

Como você responderia as seguintes questões:

a) Qual é o próximo termo dessa seqüência?

b) Qual é o 127º termo da seqüência?

Maurina apresentou a Sílvia um texto com seu projeto de pesquisa sobre o uso de padrões, influenciada por esse encontro. Havia três tópicos: hipótese, o que observar e metodologia. Sua hipótese inicial era de que “a utilização de padrões com alunos do Ensino Fundamental auxilia o desenvolvimento da concentração e facilita a aprendizagem”. Inicialmente Maurina pretendia observar “o nível de concentração” e o “aproveitamento” dos alunos no início e no final da aplicação desse “projeto”, além da “capacidade de generalizar dos alunos”. Ela escolheu trabalhar com uma sala de 5ª série/ 6º ano por acreditar que, nessa fase, os alunos estão “começando a desenvolver o raciocínio abstrato”. Também relatou que seria mais fácil observar as influências do estudo de padrões, pois acreditava que tais alunos não tinham sido expostos a esse tema. No projeto, indicou que pretendia alternar o trabalho em grupo e individual a fim de “verificar o desenvolvimento do raciocínio e a capacidade de concentração individual”. Também optou por utilizar “múltiplos e divisores como padrão”.

No terceiro encontro do ano de 2006, a aluna-professora Maurina chegou um pouco mais tarde, porque teve de participar de uma reunião a serviço da escola. Mais tarde me comunicaram que ela estava auxiliando uma aluna que participaria de um concurso. Ainda assim, ela foi a única aluna-professora que elaborou e apresentou uma atividade.

Sílvia repetiu a proposta de os professores trabalharem com uma pesquisa sobre observação e generalização de padrões em sua própria sala de aula.

Como os alunos-professores presentes não levaram atividades que pudessem ser utilizadas como instrumento de pesquisa, Sílvia apresentou dois exemplos de questões sobre generalização, um deles já apresentado ao grupo. As questões haviam sido trabalhadas por Perez (2006), na época uma de suas orientandas, que realizou uma pesquisa cujos sujeitos de estudo eram alunos do Ensino Médio. A professora explicou que, apesar de a atividade ter sido elaborada para esse público, as questões poderiam ser aplicadas na 3ª série/ 4º ano do Ensino Fundamental depois de algumas adaptações.

O primeiro exemplo apresentado trazia a seguinte seqüência:

1, 6, 1, 6, 1, 6,...

Depois de observar a seqüência, os alunos-professores foram instigados por Sílvia a refletir sobre a resposta da questão: “qual é o próximo número da seqüência?”. A intenção era fazer com que os alunos-professores previssem qual seria o comportamento dos alunos nessa atividade e quais as estratégias que eles poderiam utilizar para responder a questão. Os alunos-professores falaram que os alunos responderiam 1.

A professora comentou mais uma vez sobre a importância de se escolher um exercício que motive o aluno a resolver o próximo item, de não se colocar um desafio tão grande que desestimule o estudante. A primeira questão da atividade deveria fazer com que o aluno adquirisse confiança.

Sílvia apresentou a próxima questão da atividade, ela pede o 127º elemento da seqüência. A professora sugeriu que se a atividade fosse proposta para a 3ª série/ 4° ano, poderíamos adaptar o exercício e pedir o décimo elemento. Nesse caso, os alunos poderiam utilizar uma estratégia mais simples, resolvendo a questão por contagem, isto é, desenhando até o décimo elemento e verificando o resultado.

A professora aproveitou essa atividade para falar sobre as escolhas das variáveis. Ela explicou que há vários níveis de resolução para uma atividade. No exemplo que trouxe, pede-se o 127º elemento com a intenção de que o aluno desista da idéia de escrever toda a seqüência e utilize outra estratégia de resolução.

O segundo exemplo apresentado por Sílvia também foi retirado da pesquisa em andamento de Perez. Ele trazia formas geométricas:

△, ○, □, △, ○, □, △, ○, □, △,...

Sílvia provoca os professores a prever as possíveis estratégias que o aluno poderia utilizar para descobrir qual é a figura que ocupa a 127ª posição.

Os alunos-professores perceberam que há três figuras que são repetidas na seqüência. Sílvia explicou que se tratava de uma seqüência cíclica[20]. A discussão do grupo instigada pelas questões de Sílvia resultou numa estratégia: dividir 127 por três e analisar o resto dessa divisão.

A professora explicou que essa questão possibilita verificar se o aluno de 6ª ou 7ª série/ 7° ou 8° ano construiu o conceito de divisão de forma significante. Nesse encontro, Sílvia falou mais uma vez da importância de se utilizar exercícios que não deixem os alunos frustrados.

Uma das alunas-professoras da 3ª série/ 4° ano comentou que passou para seus alunos um exercício parecido com esse. Ele estava proposto no livro didático adotado pela escola. À medida que o curso desenvolvia-se, os alunos-professores passavam a localizar questões que envolviam o tema observação e generalização dentro de sua sala, reconhecendo-os como parte de sua rotina escolar.

Com o objetivo de elaborar uma atividade que servisse de instrumento de pesquisa, o grupo analisou a proposta de atividade que Maurina deixou. A folha na qual a atividade foi escrita e entregue a Sílvia também continha outra seqüência numérica que não foi discutida no encontro. Tratava-se de uma progressão aritmética: 3, 8, 13, 18,...

Segue a proposta analisada no encontro.

Seqüência 2, 4, 6, 8,... 1. Qual o próximo número? 2. Como está organizada a seqüência? 3. Crie uma nova seqüência com a mesma organização.

O grupo estudou se a seqüência era compreensível para crianças pequenas e previu as estratégias dos alunos. Os alunos-professores comentavam que bastaria “somar 2 ao resultado” e que “os alunos vão dizer que está indo de 2 em 2”. Todo o grupo concordou que essa primeira questão estava clara e acessível.

---

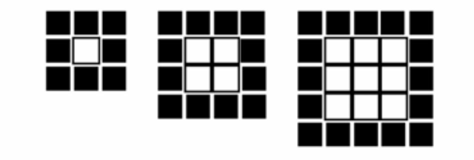
[20] Seqüências cíclicas são aquelas em que se pode reconhecer uma repetição cíclica de elementos, por exemplo: A, B, C, A, B, C, A, B,... Note-se que há uma unidade de repetição (A, B, C) dentro de um padrão geral.

Ao examinar a segunda questão da atividade, os alunos-professores encontraram dificuldades com a palavra "*organizada*", pois ela gera várias interpretações para o exercício. Eles estavam confusos, pois falaram que a resposta poderia ser "em ordem crescente" ou explicar que "aumenta de 2 em 2". Sílvia sugeriu substituir a segunda questão por "Como você encontrou esse número?". Assim os alunos poderiam compreender mais facilmente o que se pede e a pesquisa ainda teria indicações do raciocínio utilizado pelo estudante.

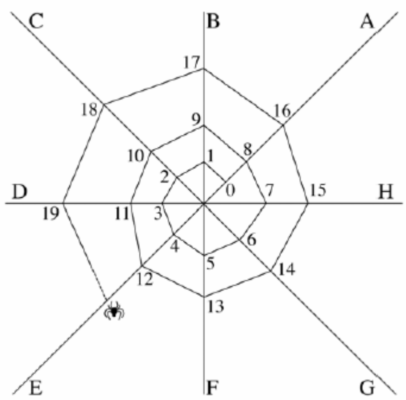
A professora Sílvia também sugeriu ao grupo que inserisse outra questão antes da terceira: "Qual será o 36º elemento?". Essa questão poderia provocar os alunos a criarem estratégias diferentes da contagem. Apesar dessa intenção, os alunos-professores não se mostraram muito crédulos de que os estudantes optariam por uma estratégia mais eficaz. Por fim, a última questão, que pedia para que o aluno criasse uma nova seqüência, foi apenas reescrita.

Sílvia falou que seria interessante se a segunda atividade possuísse elementos visuais, exemplificou com as atividades do "ladrilho" e da "aranha", retirados da dissertação de Almeida (2006, p. 42 e p. 44):

> Uma seqüência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, como se segue: o primeiro é formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos, o segundo de quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos, e assim sucessivamente, como indica a figura. Nos dois primeiros elementos da seqüência apresentam 20 azulejos pretos e 5 azulejos brancos. Se numa seqüência de mosaicos formada de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados?



> A,B,C,D,E,F,G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?



A professora falou sobre a possibilidade de adaptação das atividades para as séries em que os alunos-professores ministram aulas.

Sílvia explicou que, depois de se aplicar uma atividade, é preciso levantar as estratégias que os alunos utilizaram e discutir com eles qual delas é melhor. Essa seria a fase da institucionalização dentro de uma situação didática[21] proposta por Guy Brousseau. Nessa fase, o professor fixa explicitamente um novo conhecimento. Segundo a professora, a riqueza de tais atividades é fazer os alunos refletirem sobre as diferentes estratégias de solução para um mesmo problema.

A seguir, as falas do grupo se dirigiram à postura adotada por alguns professores que inibem o aprendizado do aluno. Esses professores fazem com que o aluno passe a ignorar a Matemática depois de assumirem determinadas atitudes. Uma das alunas-professoras comentou sobre sua experiência. Disse ter começado a gostar de Matemática apenas no Ensino Médio com um professor que explicava tudo de uma maneira simples. “Puxa, era só isso e eu não entendia antes!”.

Durante a exposição e discussão dos exemplos, as alunas-professoras que ministravam aulas para a 3ª série/ 4° ano do ciclo I (professoras polivalentes) mostravam insegurança: “Faz tempo que a gente não vê isso”. Não tive a mesma percepção dos outros integrantes do grupo, pareciam mais confortáveis durante a discussão do tema.

Sílvia falou da vantagem de se aplicar a atividade em dupla, pois dá ao professor oportunidade de observar a conversa dos alunos.

A professora propõe aos alunos-professores escreverem sobre a atividade que serviria de instrumento de pesquisa e que iriam aplicar em uma sala já escolhida, fazerem a caracterização da classe, descreverem os alunos, entre outros. Como os alunos-professores não se manifestaram, Sílvia falou para eles começarem naquele momento, a fim de avançar na pesquisa.

Assim individualmente os professores começam a escrever o perfil da classe, o modo como pretendiam propor a primeira atividade, as estratégias que o aluno poderia utilizar para resolver a questão, o tempo que seria disponibilizado para a atividade, se a aplicação seria em dupla ou individual,...

---

[21] José Luiz Magalhães de Freitas, citando Machado (1999, p. 67), apresenta uma definição dada por Brousseau: *“Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição.”*

Os alunos-professores demonstravam certa insegurança, perguntavam freqüentemente para Sílvia se o que estavam fazendo estava certo ou se estava bom. Essas questões, segundo Fiorentini (2004), indicam que ainda existia, no grupo, hierarquia e que, apesar de existir cooperação, por enquanto o trabalho que vinha se desenvolvendo coletivamente não poderia ser chamado de colaborativo.

Cada aluno-professor expôs para o grupo a sua descrição. Sílvia sugeriu que se algum aluno-professor julgasse necessário, poderia requisitar meu auxílio na aplicação. Apesar de trocarmos telefones, não recebi o pedido de nenhum deles.

Quando Sílvia foi questionada se os alunos teriam as respostas depois, ela respondeu que sim e ressaltou que os alunos-professores deveriam explicar para os estudantes que a atividade faz parte de uma pesquisa e que não vale nota. Também falou que os alunos-professores deveriam guardar todos os rascunhos e pedir para que os alunos não apagassem as respostas que julgassem erradas, pois elas seriam uma forma de compreender o raciocínio utilizado.

Maurina chegou ao final do encontro, quando combinamos que, no encontro seguinte, cada aluno-professor traria as atividades feitas (questões e folhas de rascunho quando utilizadas), que de agora em diante chamarei de protocolos, para fazer a análise conjunta dos dados coletados.

O quarto encontro de 2006 ocorreu sem a presença da professora Sílvia. Ela não compareceu por ordens médicas, mas havia combinado comigo o que eu deveria fazer, tranqüilizando-me inclusive. Como foi combinado que os professores levariam seus protocolos, minha função seria ajudá-los na análise, além de auxiliá-los na escrita da caracterização da sala que escolheram para aplicar o instrumento da pesquisa e dos procedimentos adotados na aplicação.

Perguntei à Sílvia o que eu deveria fazer caso nenhum aluno-professor levasse os protocolos. Ela me orientou a finalizar o encontro depois de explicar aos presentes que não havia como prosseguir na pesquisa sem esse material.

Apenas dois alunos-professores estavam presentes, entre eles Maurina. Ambos aplicaram o instrumento de pesquisa e levaram os protocolos, como o combinado. Pareciam ansiosos para fazer a análise dos dados coletados. As duas alunas-professoras da 3ª série/ 4° ano, que mantinham assiduidade durante o curso, não puderam comparecer, pois, segundo colegas, estavam ocupadas com uma programação de festa junina. No entanto as duas alunas-professoras não retornaram aos encontros que se seguiram. A coordenadora pedagógica do PROVE explicou que sugeriu a elas freqüentarem o Curso de Matemática I devido aos comentários dos outros alunos-professores.

Penso que comecei a interferir e expor minhas opiniões nessa reunião, participando realmente do grupo. Acredito ainda que isso ocorreu principalmente por causa da ausência da professora Sílvia, algo imposto pelo contexto e que definitivamente não fazia parte de meus planos.

Expliquei para Maurina que Sílvia não poderia participar do encontro, mas que ela havia me dado instruções sobre o que deveria ser feito. Iniciamos a reunião falando sobre a caracterização da classe feita antes da aplicação da pesquisa. A aluna-professora explicou que havia combinado com a sala o dia da aplicação da pesquisa e explicado que esta era uma atividade que precisava fazer para o curso. Também aproveitou para justificar aos alunos sua ausência nos dias do curso. Os estudantes perguntaram à Maurina o que aconteceria se eles não participassem, questionaram se ela "ficaria sem nota". Depois de responder sim, os alunos se sensibilizaram e resolveram ajudá-la.

A pesquisa foi feita numa sala de 5ª série/ 6º ano, na última aula do terceiro período (18h15min às 19h). A aluna-professora disponibilizou vinte minutos para a atividade, que foi aplicada individualmente. No dia combinado por Maurina, 33 alunos participaram da pesquisa. Não estavam presentes todos os alunos da classe, pois, no dia seguinte, haveria um jogo de campeonato e alguns se ausentaram para participar do treino.

Todos os protocolos, de ambos os alunos-professores, foram observados, mas descreverei aqui apenas os dados obtidos da pesquisa de Maurina ou que possuem alguma relação com ela.

No início, os dois alunos-professores começaram a separar os protocolos em respostas certas e erradas. Interferi, falando que o objetivo não era verificar se os alunos respondiam corretamente ou não, mas qual a estratégia utilizada para responderem a questão.

Maurina comentou algumas dificuldades na aplicação de seu instrumento de pesquisa. Entre elas, comentou que os alunos não compreenderam o que significava a palavra "termo", interrogando-a em vários momentos. Para não interferir nos resultados, Maurina decidiu não responder nenhuma questão e pediu aos alunos que respondessem da forma que tivessem entendido.

Observamos alguns resultados através dos protocolos. Para que fiquem claros, segue o instrumento de pesquisa como aplicado. Além da folha com a questão abaixo, Maurina distribuiu uma folha de rascunho a cada aluno.

Instruções

Você participará de uma pesquisa, para o sucesso da pesquisa é importante que você não apague os cálculos.
Se você precisar e outra folha peça para a professora.
Não converse com seus colegas durante a resolução.
Você terá a aula toda para resolver, mas não poderá entregar antes de 20 minutos no inicio.

Observe a seqüência numérica: 2,4,6,8,10,...........
Responda:

a) Qual é o próximo número?
b) Qual será o 36ª termo ou elemento da seqüência?
c) Explique como você encontrou esse número
d) Crie uma outra seqüência diferente dessa.

Figura 7: Instrumento de pesquisa de Maurina

Os protocolos mostraram que a maior parte dos alunos não teve dificuldades para responder qual o próximo número da seqüência.

O item ‘b’ da questão gerou uma diversidade de respostas. Como alguns alunos responderam que o 36º termo da seqüência era 18, concluímos, Maurina e eu, que eles confundiram a posição do termo com o valor do termo. Note-se que o termo 36 está na 18ª posição.

Em dois outros protocolos, os alunos responderam que o 36º termo era 40. No rascunho, pudemos observar que havia uma seqüência escrita e ao contarmos o número de algarismos, percebemos que existiam exatamente 36.

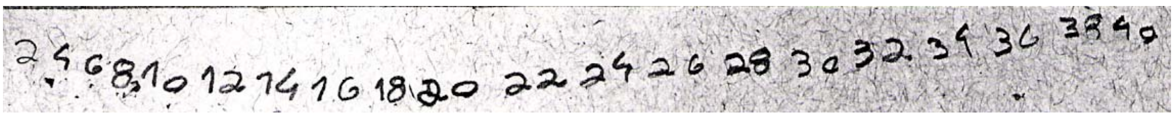


Figura 8: Rascunho de um dos alunos

Em outros protocolos, os alunos responderam 82. Através dos rascunhos, verificamos que eles começaram a contar os termos a partir do número 12 e não do 2, como foi apresentado na atividade.

Analisamos o terceiro item da questão, no qual pedimos aos alunos para explicarem como obtiveram os resultados. Observamos alunos que responderam que foram “contando”, que “dividiram por 2”, que era “a tabuada do 2” ou que eram os números pares.

A maior parte das seqüências “inventadas” que os protocolos apresentavam eram os números ímpares ou os múltiplos de 3, 4 ou 5.

Uma das recomendações da professora Sílvia feitas a mim era fazer com que os alunos-professores escrevessem algo durante o encontro. Propus a eles que escrevessem sobre as discussões feitas, então começaram novamente a dividir as respostas em “certas e erradas” e contabilizá-las. Interferi, falando que o que eles estavam fazendo era uma análise quantitativa e que poderiam pensar também na análise qualitativa, que é um meio melhor para compreender o raciocínio dos alunos.

O aluno-professor falou que faria isso, mas que antes precisava ver os tipos de respostas e contar para depois começar a pensar. Essa era a forma como ele organizava seus pensamentos.

Enquanto isso, Maurina observava seus protocolos, tentando compreender a estratégia que os alunos escolheram. Ela disponibilizou folhas de rascunho e pediu que os alunos não apagassem nada. Desse modo, obteve mais informações sobre o raciocínio utilizado pelos alunos.

Acredito ser importante mencionar um fato ocorrido durante nosso encontro: a sala onde estávamos fica na entrada da escola e é, portanto, passagem de muitos professores. Deixamos a porta aberta por causa do calor. Uma professora passou lá para cumprimentar os colegas e comentou que era bom trabalhar um pouco sem alunos. Neste momento, Maurina apenas baixou a cabeça sem responder.

Em muitos momentos, os alunos-professores falaram de experiências vivenciadas na sala de aula. Um protocolo obtido por Maurina indicou que uma de suas alunas não era alfabetizada. Segundo a própria aluna-professora, o caderno da menina era lindo, bem organizado, mas a aluna é copista. Contou que a menina tinha atitudes agressivas quando ela procurava intervir. Já havia perguntado quem tinha sido a professora do ano anterior e quando Maurina foi conversar com a antiga professora, ela explicou que a aluna estava fazendo a 4ª série/ 5° ano pela terceira vez, justificando sua promoção para a 5ª série/ 6º ano.

Senti-me aflita ao dirigir a reunião, pois os assuntos eram desviados a todo momento. Outro fato que me deixava insegura era nunca ter feito uma análise de protocolos antes e deixei isso claro ao grupo, que se mostrou compreensivo, me auxiliando inclusive (mesmo sendo uma nova experiência para eles também).

No final da reunião, mostrei aos alunos-professores o livro *Padrões Numéricos e Seqüências*, de Costa e Carvalho, e o livro *Matemática em Movimento 6ª série*, de Longen, que possui um capítulo de introdução à álgebra com vários exercícios de observação e generalização de padrões. Depois, seguindo instruções deixadas pela professora Sílvia, sugeri a eles que criassem novas atividades sobre o tema.

Os alunos-professores olharam mais detalhadamente os números triangulares, quadrados e pentagonais no livro. Também comentaram sobre a seqüência de Fibonacci, olhando e buscando compreender como ela era formada a partir do exemplo da contagem de casais de coelhos. Disseram que os exercícios explorados nas referências que eu tinha levado são complicados para os alunos com quem trabalham.

Comentei que só comecei a perceber esse tipo de atividades depois de participar das reuniões do grupo. Maurina concordou e falou de um exercício que tinha aplicado em sala, mas que só "conheceu" como uma atividade de generalização depois dos encontros.

Ao final do encontro, combinamos de enviar um esboço da análise dos protocolos por e-mail à professora Sílvia.

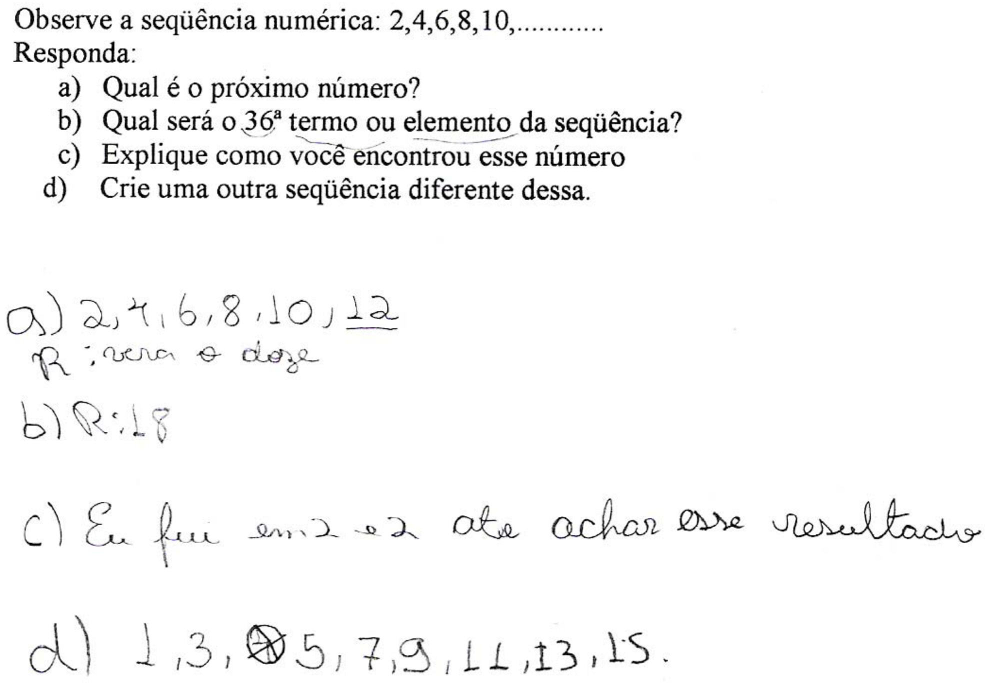
Depois de quatro encontros, Sílvia contou que a coordenadora do PROVE precisava de um artigo para publicar na revista do projeto e a professora imaginou que a pesquisa realizada por Maurina seria uma boa opção. Por esse motivo, realizamos a primeira reunião extra, na qual estavam presentes apenas Maurina, Sílvia e eu. Nosso objetivo era realizar uma análise mais profunda dos protocolos. A discussão já tinha sido iniciada no encontro anterior sem a presença de Sílvia, mas sentimos necessidade, Maurina e eu, de uma pessoa com mais experiência para auxiliar-nos.

Falamos com Sílvia sobre o fato de os alunos não saberem o significado da palavra "termo". A professora levantou a hipótese de que essa dificuldade pode derivar da ambigüidade dessa palavra: ela pode significar fim, um vocábulo ou ainda um elemento de uma expressão matemática.

A professora também falou da importância de não se vincular nota à atividade, senão os alunos iriam se preocupar em dar a resposta certa e não a resposta própria.

Maurina mostrou três protocolos que não soubemos interpretar ou que deixaram dúvida no encontro anterior. Acredito que as discussões sobre os protocolos de Maurina são relevantes para observar algumas mudanças de postura da aluna-professora. Utilizarei nomes fictícios para seus alunos.

Primeiro aluno: Thiago.



Observe a seqüência numérica: 2,4,6,8,10,...........

Responda:

a) Qual é o próximo número?
b) Qual será o 36ª termo ou elemento da seqüência?
c) Explique como você encontrou esse número
d) Crie uma outra seqüência diferente dessa.

a) 2, 4, 6, 8, 10, 12
R: sera o doze

b) R: 18

c) Eu fui em 2 e 2 ate achar esse resultado

d) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

Figura 9: Protocolo de Thiago

Ele respondeu que o próximo número da seqüência "será o doze". A partir dessa resposta, concluímos que o aluno observou e percebeu o padrão dessa seqüência numérica.

O segundo item pedia ao aluno o 36º termo ou elemento da seqüência. Comentamos que esse item ficou confuso para o aluno, confirmado o fato com o depoimento de Maurina, que relatou que os alunos faziam muitas perguntas sobre o item b. Thiago respondeu 18 para esse item, ele escreveu no rascunho a seqüência dos números pares:

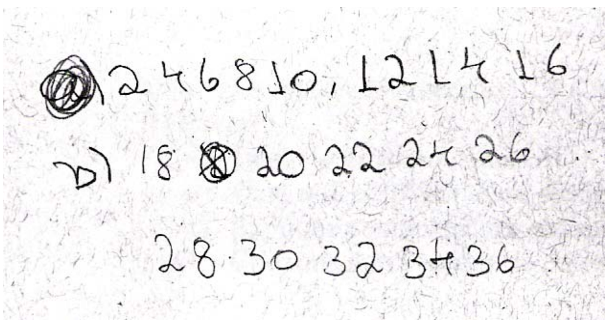


Figura 10: Rascunho de Thiago

Note-se que há 18 termos na seqüência e que o último termo é o número 36. Sílvia, Maurina e eu concluímos que o aluno confundiu o termo com a posição que ele ocupa.

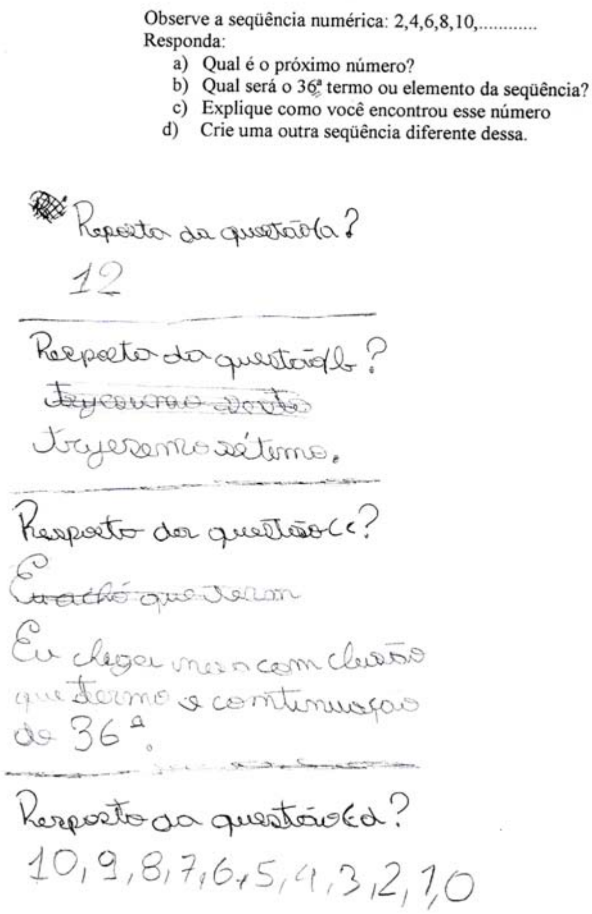
Quando questionado sobre o modo como encontrou a resposta, Thiago respondeu que “eu fui em 2 e 2 até achar esse resultado”. O protocolo mostrou que ele percebeu um padrão matematicamente útil ao observar a seqüência.

No quarto e último item, Thiago criou uma seqüência finita dos números ímpares.

Depois de analisarmos a resposta de cada item do primeiro protocolo proposto, concluímos que o aluno foi capaz de observar e generalizar uma seqüência numérica. Mas a análise junto à Sílvia levantou uma outra questão: será que o aluno sabe ou conhece o que é um número ordinal?

Em seguida, Maurina escolheu o protocolo de um aluno que julgava não ser capaz de realizar a atividade.

Segundo aluno: Rodrigo.


Observe a seqüência numérica: 2,4,6,8,10,............
Responda:
a) Qual é o próximo número?
b) Qual será o 36ª termo ou elemento da seqüência?
c) Explique como você encontrou esse número
d) Crie uma outra seqüência diferente dessa.

Reposta da questão a?
12

Resposta da questão b?
Trigésimo sétimo.

Resposta da questão c?
Eu cheguei nessa conclusão que termo é continuação de 36ª.

Resposta da questão d?
10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0

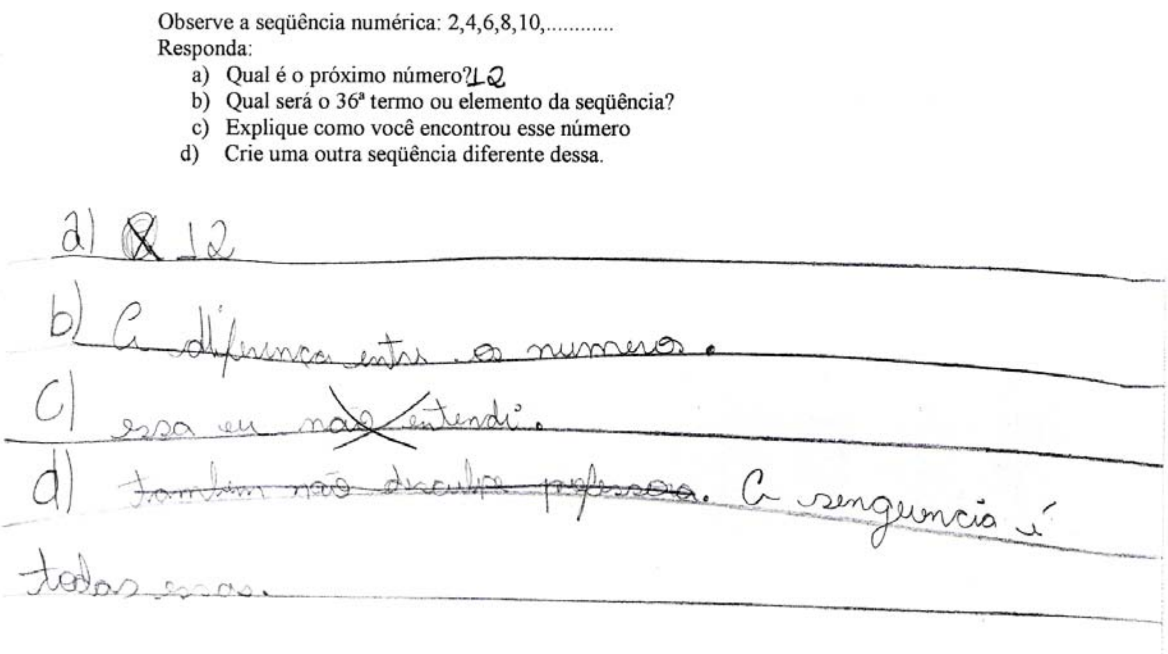
Figura 11: Protocolo de Rodrigo

O estudante respondeu que o próximo termo da seqüência é 12. Concluímos que o aluno observou e percebeu um padrão nessa seqüência numérica.

No item ‘b’, acreditamos que Rodrigo entendeu que a pergunta pedia qual o próximo termo após o 36º e por isso respondeu “trigésimo sétimo”. Ele argumentou coerentemente no terceiro item: “eu cheguei nessa conclusão que o termo é continuação de 36º”.

Rodrigo foi o único aluno da sala que criou uma seqüência numérica decrescente: “10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0”. Maurina explicou que esse aluno era ansioso e ficou surpresa quando o resultado da análise indicou que o aluno pensara algebricamente.

Depois de observar o terceiro protocolo sugerido por Maurina, Sílvia falou que a análise só seria possível depois de uma entrevista. A professora sugeriu que os protocolos que não possuíssem dados suficientes fossem separados e que os alunos que os preencheram fossem entrevistados.



Observe a seqüência numérica: 2,4,6,8,10,............
Responda:
a) Qual é o próximo número? 12
b) Qual será o 36ª termo ou elemento da seqüência?
c) Explique como você encontrou esse número
d) Crie uma outra seqüência diferente dessa.

a) 12
b) a diferença entre os numeros.
c) essa eu não entendi.
d) ~~também não desculpe professora~~. a sequencia é todas essas.

Figura 12: Protocolo de aluno a ser entrevistado

Sílvia dividiu os protocolos em duas partes, entregando metade para Maurina e a outra metade para mim. Combinou que nós faríamos a análise individualmente e depois, num próximo encontro, poderíamos discutir alguma dúvida e trocar hipóteses.

No final da reunião, uma grande surpresa: Maurina convidou Sílvia para apresentar-se para os alunos que participaram da pesquisa. Eles estavam curiosos para conhecer “a professora de sua professora” e a aula de Matemática já iria começar. Sílvia não pôde recusar a proposta e entrou na classe.

Os alunos estavam chegando para a primeira aula e mostravam-se curiosos pelas novas pessoas na sala. Se pudesse descrever a postura de Maurina na sala de aula, esta seria firme e, ao mesmo tempo, afetuosa, mostrava-se rígida e afável.

Depois de os alunos acomodarem-se, Maurina apresentou-nos e falou que Sílvia faria uma nova pesquisa com eles.

Sílvia desenhou uma seqüência cíclica figurativa no quadro:

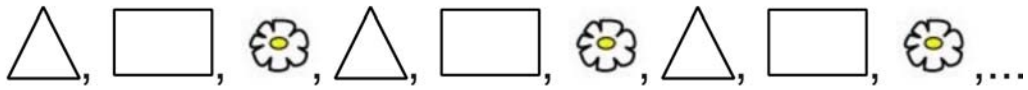


Figura 13: Seqüência cíclica

Um aluno na sala já se adiantou e falou que era uma seqüência.

Sílvia numerou abaixo das figuras: 1º 2º 3º 4º 5º 6º 7º 8º 9º e depois perguntou qual seria o 13º termo. Os alunos responderam prontamente.

Quando perguntou qual seria o 1348º termo, os alunos se mostraram surpresos. Afinal era um número muito grande para eles. Um aluno respondeu que seria um “quadrado”, pois era um número par. Outro que era um “quadrado”, pois o 1348º terminava em 8 e o 8° termo é um “quadrado”. Mas perceberam depois que o 18º termo termina em 8 e é uma flor, invalidando a conjectura.

Quando um dos alunos percebeu que a flor é a “tabuada do 3”, Sílvia explicou que iríamos chamá-los de múltiplos de 3. Então ela propôs que os alunos fizessem a conta 1348:3 (armada na lousa). Os alunos chegaram ao quociente 449 e resto 1 e com ajuda de Sílvia, chegaram à figura de um triângulo.

Muitos alunos estavam empolgados em dar respostas, levantavam as mãos e falavam antes mesmo de pedir. A professora Maurina também se mostrou muito feliz com a visita de sua professora. Parecia querer mostrar como seus alunos se motivaram com as atividades sobre padrões.

A cada reunião e encontro do curso, as relações de confiança e cumplicidade se intensificavam. Vejo o convite para participar de uma aula como, mais do que uma apresentação de seu trabalho, uma demonstração de segurança e autonomia dentro do grupo.

No segundo semestre de 2006, os encontros do curso mudaram para o período matutino a fim de atender mais professores. Não pude freqüentar todos os encontros que ocorreram nesse período, mas busquei dados em conversas com a professora Sílvia e em suas atas. Apesar de não estarem diretamente vinculados à escrita do artigo, acredito que esses momentos tiveram influência nas mudanças mostradas por Maurina e, portanto, fazem parte do processo que é minha intenção relatar. Nesses encontros, muitas discussões feitas durante o primeiro semestre com Maurina eram retomadas.

No quinto encontro de 2006, havia um novo grupo de trabalho formado por sete alunos-professores, entre eles Maurina, e Sílvia. Os outros alunos-professores que participaram do primeiro semestre não voltaram a freqüentar o grupo depois do recesso de julho. A professora Sílvia expôs o programa a ser trabalhado no semestre e entregou dois textos sobre o tema generalização de padrões: o artigo de Vale & Pimentel (2005) e o primeiro capítulo da dissertação de Perez (2006).

Depois de ler e discutir parte do texto de Perez (2006), o grupo decidiu que, para o próximo encontro, cada um traria uma proposta de atividade sobre o tema para ser aplicada aos seus alunos. Com um grupo maior de alunos-professores, foi possível ampliar a pesquisa, escolhendo cada uma das classes de 5ª à 8ª série/ 6º ao 9º ano.

A segunda reunião extra foi realizada três dias depois do quinto encontro. Maurina e eu nos encontramos para comparar os resultados da análise que fizemos individualmente, lembrando que cada uma possuía metade dos protocolos. Alguns protocolos deixavam dúvidas sobre o raciocínio utilizado pelos alunos e decidimos que era necessário realizar entrevistas com eles. Maurina falou que eu poderia fazer isso, pois ela teria a primeira aula com a sala na qual realizou a pesquisa. Ela sugeriu que enquanto dava aula para a turma, eu poderia conversar com os alunos e obter as informações necessárias.

Esse momento foi de grande importância para a pesquisa, pois acredito que ele deixa claro que a pesquisa se tornou colaborativa. A incumbência dada a mim por Maurina mostra que o fato de eu ser aluna do mestrado não a diminuía e que a relação de confiança entre nós estava estabelecida.

Maurina explicou aos alunos que precisava de mais informações sobre suas respostas e pediu que eles descessem a uma sala reservada um a um para conversar comigo.

Dentre os protocolos, cinco apresentavam pontos que necessitavam da explicação do autor. A seguir, descrevo a entrevista realizada com quatro alunos, pois um deles, justamente o aluno que Sílvia também indicara para entrevista na última reunião extra, estava ausente no dia.

As entrevistas ocorreram em uma sala reservada, individualmente, para não expor os alunos aos colegas. Elas foram do tipo semi-estruturada. Com cada aluno, adotei o seguinte procedimento:

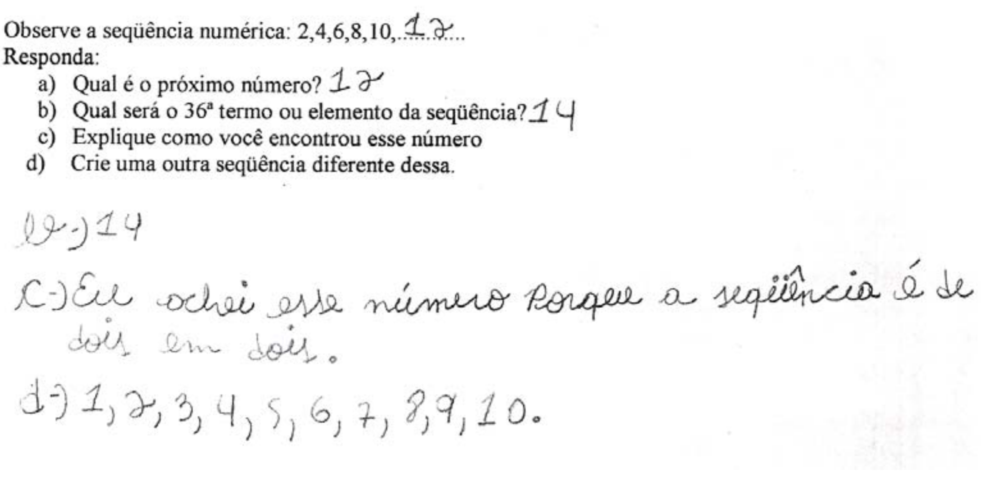
1) expliquei que estava fazendo a entrevista, pois tinha ficado interessada na resolução da questão e precisava entender melhor seu raciocínio;

2) mostrei a folha de respostas entregue pelo aluno, perguntando se lembrava de como havia pensado ao responder as questões do instrumento de pesquisa;

3) após obter informações sobre os registros apresentados no protocolo, eu apresentei outra seqüência numérica e fiz três perguntas: a primeira solicitava ao aluno o próximo termo; a segunda, uma justificativa para o resultado dado; e a terceira, uma nova seqüência criada pelo próprio aluno. Essas questões eram similares às apresentadas na atividade.

Utilizarei novamente nomes fictícios.

Primeira entrevistada: Bárbara. Maurina escolheu essa aluna, alegando que ela deveria ter copiado suas respostas. Explicou que há, nas salas de aulas, os números de 1 a 10 pintados na parede. A aluna-professora mostrou-se desconfiada, acreditando que a aluna havia copiado a seqüência da parede sem compreender a questão. Para que fiquem claros os dados obtidos na entrevista, incluirei os protocolos desses alunos.



Observe a seqüência numérica: 2,4,6,8,10, 12...
Responda:
a) Qual é o próximo número? 12
b) Qual será o 36ª termo ou elemento da seqüência? 14
c) Explique como você encontrou esse número
d) Crie uma outra seqüência diferente dessa.

b-) 14

c-) Eu achei esse número porque a seqüência é de dois em dois.

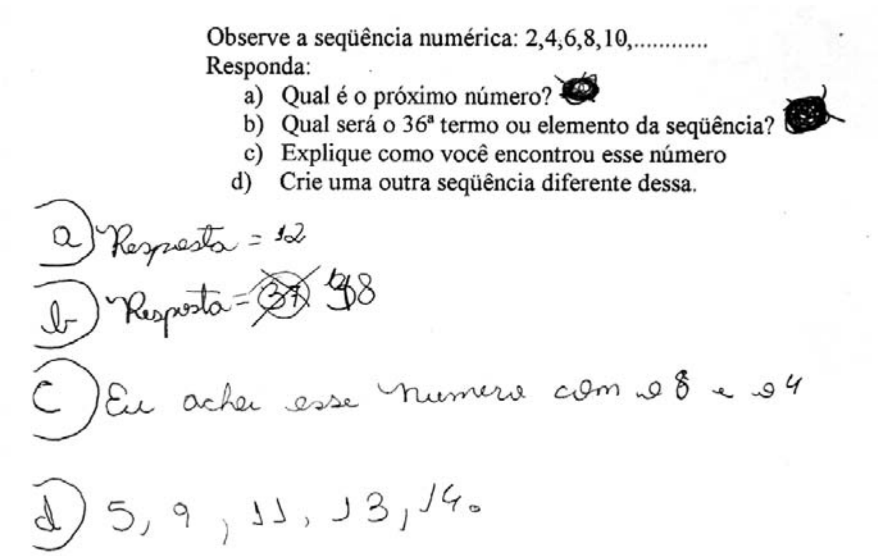
d-) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Figura 14: Protocolo de Bárbara

Mostrei à Bárbara seu protocolo e pedi que explicasse como encontrou suas respostas. Ela respondeu que achou 14 para o item b porque “vai aumentando de 2”, mas não soube explicar por que criou a seqüência “1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10”.

Depois escrevi a seqüência “7, 10, 13, 16,...” num papel e perguntei qual seria o próximo número. A aluna rapidamente respondeu que o próximo número “é 19 porque vai aumentando de 3”. Bárbara também criou a seqüência “4, 8, 12, 16”, justificando que ela “aumenta de 4”. Dessa forma, essa aluna explicitou ter observado a regularidade das seqüências e, mais especificamente, associou seqüência à progressão aritmética.

Segunda entrevistada: Cátia. A segunda aluna foi escolhida por ter escrito em seu protocolo que o 36º termo da seqüência era o número 48, ainda que inicialmente tivesse respondido 37.


Observe a seqüência numérica: 2,4,6,8,10,...........
Responda:
a) Qual é o próximo número?
b) Qual será o 36ª termo ou elemento da seqüência?
c) Explique como você encontrou esse número
d) Crie uma outra seqüência diferente dessa.

a) Resposta = 12
b) Resposta = ~~37~~ 48
c) Eu achei esse numero com o 8 e o 4
d) 5, 9, 11, 13, 14.

Figura 15: Protocolo de Cátia

Ela explicou que encontrou essa resposta, juntando os números 4 e 8, que são, respectivamente, o segundo e o quarto termo da seqüência. Essa explicação me fez voltar à primeira questão. Perguntei por que a aluna tinha respondido que o próximo termo da seqüência era 12 e ela respondeu que “juntou” o primeiro e o último termo da seqüência:

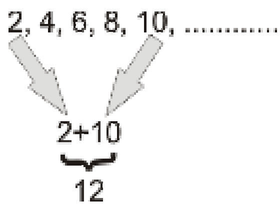


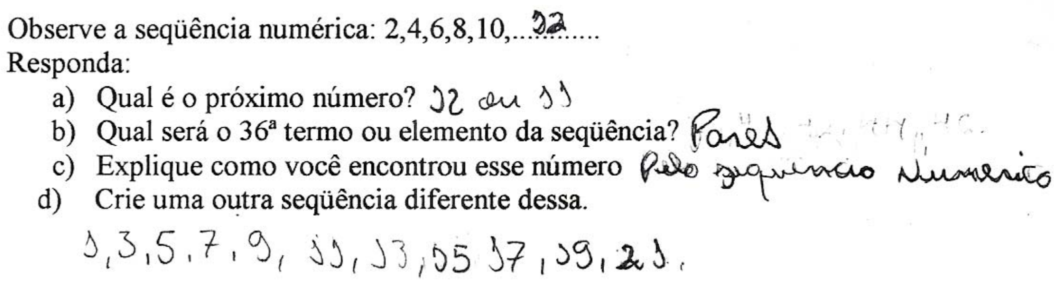
Figura 16: Raciocínio explicitado por Cátia

Mais tarde, Sílvia, Maurina e eu pudemos discutir sobre o raciocínio da aluna. Sílvia levantou a hipótese de que aquela resposta era influenciada pelo contrato didático[22]. A aluna poderia estar habituada a resolver problemas matemáticos, utilizando todos os dados numéricos do problema em alguma operação (pode ser a soma, multiplicação ou outra). Assim ela confiava que o professor ofereceria os dados necessários, apresentados numericamente, e que estes seriam necessários e suficientes para encontrar a resposta que o professor esperava.

Durante a entrevista, a aluna disse que não se lembrava de como criou a seqüência "5, 9, 11, 13, 14". Observa-se que os valores da seqüência são crescentes, ou seja, apresentam alguma regularidade.

Questionei qual era o próximo termo da seqüência "5, 8, 11, 14,..." escrita numa outra folha. A aluna disse que o próximo termo era o 15, pois vem depois do 14. Esta resposta revela mais uma vez que a aluna observou apenas o crescimento da seqüência, ignorando a regularidade entre os termos. Ao ser solicitada a criar uma seqüência, ela escreveu: "6, 9, 18, 23". Nota-se novamente que a seqüência criada é crescente.

Terceiro entrevistado: Everton. Este protocolo foi escolhido porque o aluno se mostrava indeciso sobre qual era o próximo número da seqüência, "11 ou 12", conforme mostra o protocolo a seguir.


Observe a seqüência numérica: 2,4,6,8,10,...12....

Responda:

a) Qual é o próximo número? 12 ou 11

b) Qual será o 36ª termo ou elemento da seqüência? Pares

c) Explique como você encontrou esse número Pelo sequência Numérica

d) Crie uma outra seqüência diferente dessa.

1,3,5,7,9, 11, 13, 15 17, 19, 21.

Figura 17: Protocolo de Everton

Everton disse que não se lembrava de como havia pensado no momento da pesquisa e que tinha "chutado" os valores. Também explicou que criou a seqüência dos números ímpares, porque observou que a seqüência apresentada na atividade era composta de números pares.

[22] Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor... Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro. (BROUSSEAU apud SILVA, 1999, p. 43-44)

Quando propus a seqüência “7, 10, 13, 16,...”, o aluno respondeu que o próximo termo seria o 19 e que encontrou esse valor “contando de 3 em 3”. Ele criou a seqüência dos múltiplos de 5: “5, 10, 15, 20, 25”. Esse aluno, da mesma maneira que Bárbara, pareceu observar a regularidade das seqüências e, mais especificamente, associou seqüência à progressão aritmética.

Quarta entrevistada: Daniela. O protocolo de Daniela apresenta diversas frases, mas Maurina e eu não compreendíamos o que significavam. Também observamos que a aluna continuou a seqüência até o número 16 e efetuou vários cálculos, inclusive uma multiplicação de 36 por 2. Por este motivo, resolvemos investigar melhor qual o raciocínio utilizado por Daniela através da entrevista.

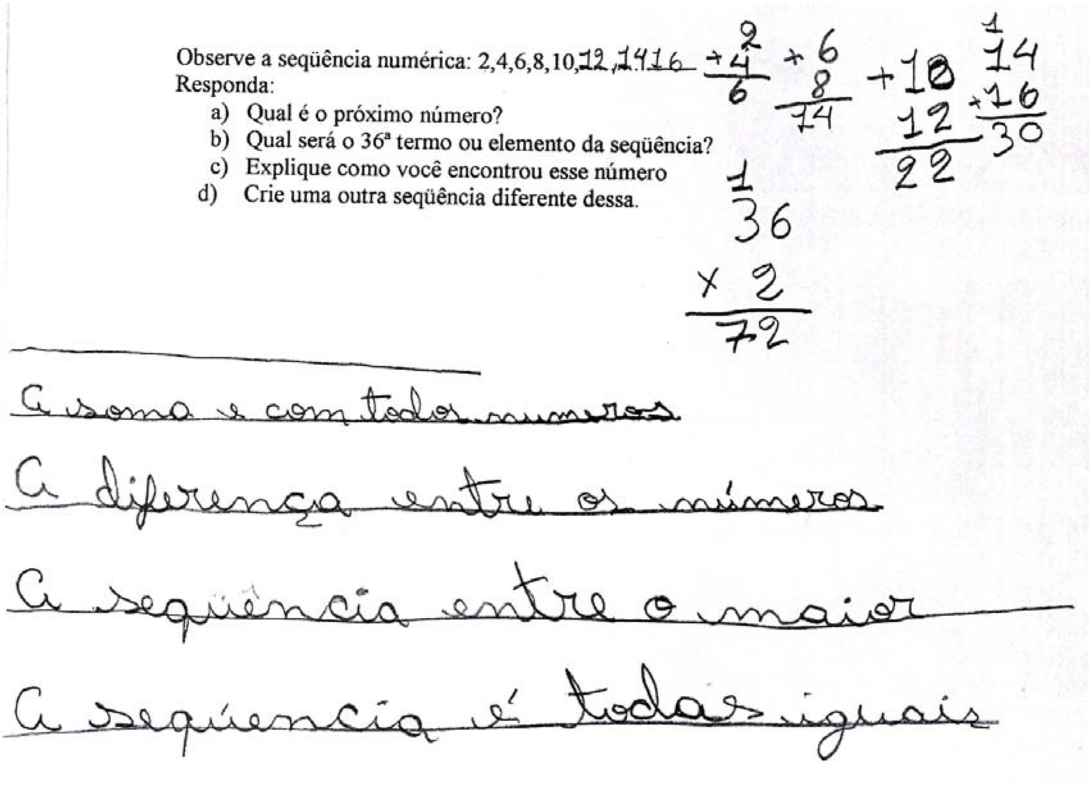


Figura 18: Protocolo de Daniela

No início da entrevista, Daniela disse que não queria responder, pois estava com vergonha. Explicou que não sabia o que tinha de fazer quando recebeu a atividade de pesquisa, porque tinha faltado no dia anterior.

Perguntei qual era o próximo termo da seqüência “5, 8, 11, 14,...”. A aluna observou um tempo e disse que era o número 16. Quando pedi que explicasse por que, ela justificou dizendo que “depois do 11 não tem o 12, então depois do 14 não pode ter o 15, então é o 16”.

Solicitei que a aluna criasse uma nova seqüência e ela escreveu os múltiplos de 5: “5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50”. Quando perguntei por que tinha escolhido essa seqüência, a aluna respondeu que “eu acho a do 2 e a do 5 mais fácil”, relacionando seqüência aos valores da tabuada.

Com os dados dos protocolos e das entrevistas em mãos, Sílvia, Maurina e eu nos reunimos na semana seguinte na PUC-SP, a fim de concluir o artigo para a Revista PROVE. O encontro ocorreu na sala da professora Sílvia. Maurina chegou um pouco mais tarde por complicações no trânsito.

Os protocolos foram copiados e o artigo foi escrito a três mãos. Maurina trouxe uma caracterização da sala e alguns resultados da pesquisa organizados em tópicos. Devo expor a dificuldade em fazer com que os alunos-professores registrassem suas reflexões em documentos escritos.

No texto com a caracterização que fez da sala, justificou sua escolha escrevendo que, ao escolher uma sala de 5ª série, obteríamos melhores resultados por entender que esses alunos estão no início do processo de abstração. Descreveu que a sala escolhida possuía “crianças ativas e falantes, sendo muito difícil mantê-los calados por muito tempo, são rápidos”. Maurina também relatou que decidiu aplicar a pesquisa na última aula, pois eram “alunos inquietos” e “para que não atrapalhassem os colegas, ao terminar [de responder a atividade] poderiam sair”.

Noutra folha escrita por Maurina com os resultados organizados, havia uma pequena conclusão: “Penso que os alunos tiveram dificuldade com a palavra ‘termo’ e identificar 36ª como um número ordinal. Alguns chegaram a perguntar durante o teste e eu não respondi, para não interferir no resultado. Apesar das dificuldades de entendimento a maioria percebeu que a seqüência era de dois em dois e não teve dificuldade de criar outra seqüência”.

Sílvia teve uma colaboração maior na escrita do artigo, já que possui maior experiência. O artigo intitulado *O aluno de quinta série é capaz de perceber e descrever regularidade em um padrão?* (ver anexo C) foi publicado na Revista PROVE em novembro de 2006.

Nos encontros seguintes, Maurina participava compartilhando experiências com os colegas, mostrando-se confortável com a proposta do curso. A aluna-professora continuava sendo exposta a artigos e textos que tratavam de padrões.

No sexto encontro de 2006, a professora Sílvia entregou três páginas com exemplos de atividades sobre observação de padrões retirados do livro *Problem-solving* *techniques helpful in mathematics and science* de Charles A., publicado pelo NCTM (ver anexo B). O grupo discutiu as estratégias para as atividades e a possibilidade de adaptá-las a cada série do Ensino Fundamental.

Foi decidido que, no encontro seguinte, todos os alunos-professores trariam suas propostas de atividades para o instrumento de pesquisa, a fim de analisá-las em grupo.

Uma cópia do artigo publicado na Revista PROVE sobre a pesquisa realizada por Maurina foi entregue a cada integrante do grupo no sétimo encontro, além de uma folha com os quesitos a serem determinados para a aplicação do instrumento de pesquisa.

Quesitos a serem determinados para a aplicação da atividade:

1. A atividade será aplicada aos alunos em horário de aula ou fora.
2. Os alunos serão voluntários ou não.
3. Os alunos farão a atividade individualmente ou em duplas, trios etc.
4. Os alunos serão avisados anteriormente? Um dia, uma aula?
5. Se for em dupla, alguma ou quantas delas serão gravadas?
6. A atividade será escrita na lousa ou será entregue cópia em sulfite a cada um, cada dupla etc...
7. O que exatamente está escrito no quadro ou na folha?
8. Quais as regras que vão estabelecer: Podem apagar as respostas? Podem trocar idéias com os outros? Com quais outros? O professor vai responder as perguntas? O professor vai dizer que não pode falar mais do que o que está escrito?
9. O aluno colocará o nome na folha que vai entregar?

Foram discutidas atividades para 6ª, 7ª e 8ª séries (7º, 8º e 9º anos). Maurina contribuiu com observações e descrições sobre sua experiência ao investigar a sala de 5ª série (6º ano). A um dos alunos-professores inclusive sugeriu que aplicasse o instrumento de pesquisa a duplas. Em tom de brincadeira, justificou dizendo “Você não imagina o trabalho que dá fazer a análise!”.

Finalizamos a reunião, combinando que as pesquisas deveriam ser aplicadas pelos alunos-professores até o final da semana seguinte, depois que cada aluno-professor escrevesse sobre os quesitos indicados para a pesquisa, caracterizando-a. Como haveria apenas mais um encontro até findar o ano, marcamos uma outra reunião extra. Nessa reunião, fiquei responsável por copiar os protocolos e ajudar os alunos-professores numa primeira análise.

No dia 10 de novembro, antes da última reunião extra de 2006, ocorreram diversas oficinas oferecidas no encerramento anual do PROVE. Cada curso abrigado pelo projeto era responsável por uma apresentação. Combinamos que a oficina de padrões seria realizada por Maurina e outro aluno-professor, utilizando a pesquisa já divulgada.

Maurina e outro aluno-professor que se dispôs a auxiliá-la apresentaram um roteiro para a oficina. Resolveram iniciar a apresentação falando sobre os padrões na Matemática, dando alguns exemplos simples. Depois planejaram falar sobre a importância de se trabalhar com atividades que envolvem padrões, mostrando alguns exemplos encontrados em livros didáticos.

Seu planejamento também envolvia mostrar o progresso do curso e apresentar as pesquisas já realizadas pelo grupo, explorando o processo de elaboração dos instrumentos de pesquisa. O roteiro proposto pelos alunos-professores terminava com um espaço para perguntas dos ouvintes após a explanação sobre o processo de análise conjunta dos protocolos feita por Sílvia, Maurina e por mim.

Sílvia olhou o roteiro antes e sugeriu que o instrumento de pesquisa utilizado por Maurina na 5ª série/6º ano fosse entregue para os ouvintes para que pudessem analisar, em duplas, como os alunos responderiam cada questão. Ela também sugeriu que depois disso fizessem um painel, mostrando como as duplas de ouvintes responderam cada questão, compartilhando as reflexões de cada dupla com o grupo.

A professora afirmou ser interessante mostrar cópias de três protocolos respondidos pelos alunos, entre eles poderiam colocar o protocolo de Cátia, que, na resposta ao segundo item, "juntou o 4 e o 8". Depois as duplas poderiam ser estimuladas para analisarem as respostas e compararem com o que eles esperavam dos alunos. Essa tarefa poderia ser concluída com um outro painel, introduzindo a análise feita por Maurina.

Os alunos-professores elaboraram uma apostila[23] com exemplos de atividades envolvendo padrões retirados de sites da internet, mais precisamente de http://www.apm.pt/recursos/ciclos2/des_falta/desfalta.html, e do livro de 5ª série de

---

[23] O anexo F é a apostila oferecida na oficina de 2007, a qual possuía apenas duas folhas a mais (uma com a questão da "aranha" e outra com a questão dos "ladrilhos") que a apostila oferecida na oficina de 2006.

Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga, intitulado *Matemática: Idéias e Desafios*. Também havia quatro atividades desenvolvidas pelos alunos-professores durante o curso de 2006, uma para cada série do ciclo II do Ensino Fundamental.

A professora Doroti, que em 2007 inscreveu-se no Curso de Matemática II, esteve presente na oficina de 2006.

Na última reunião extra de 2006, estavam presentes, no grupo, Sílvia, Maurina, outros dois alunos-professores e eu. Maurina mostrava-se ainda mais participativa no grupo. O fato de os outros dois alunos-professores trabalharem na mesma escola em que ela pode ter contribuído para sua desinibição. No entanto acredito que Maurina se sentiu valorizada e mais confiante depois de dirigir a oficina de 2006 e escrever um artigo.

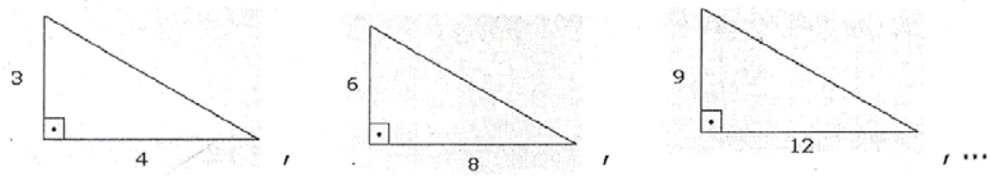
Nessa reunião, o grupo analisou os protocolos obtidos por dois alunos-professores. Relatarei apenas os episódios nos quais notei interferência de Maurina.

Os primeiros protocolos foram obtidos a partir do seguinte instrumento de pesquisa.

INSTRUÇÕES:

- ✓ Você participará de uma pesquisa. Para o sucesso da mesma é importante que você não apague os cálculos.
- ✓ Se você precisar de outra folha peça ao professor.
- ✓ Não converse com colegas de outras duplas durante a resolução.
- ✓ Você terá a aula toda, mas não poderá entregar antes de 25 minutos do início.

Observe os triângulos:



Responda:

a) Como será o próximo triângulo?
b) Qual o perímetro desse triângulo que você descreveu?
c) Qual o perímetro do 15° triângulo da seqüência?
d) Crie uma seqüência.

Figura 19: Instrumento de pesquisa do aluno-professor

Ao observar um dos protocolos, o grupo comentou sobre o cuidado que a dupla teve em responder, notado pela organização e formato das respostas. A dupla escreveu a lei geral, mas teve dificuldade em expressar-se, utilizando "lado menor do cateto" no lugar de cateto menor do triângulo.

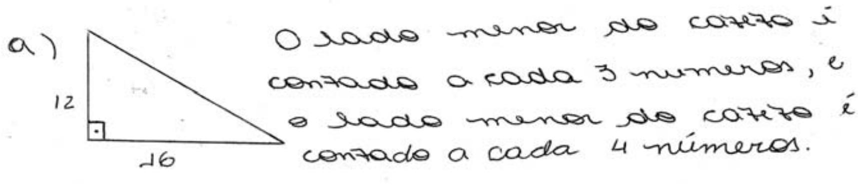


Figura 20: Protocolo

Maurina comentou sobre a dificuldade que os alunos têm em escrever, citando uma experiência que vivenciou em sala. Sílvia falou que "há muitas coisas que escrevemos que os alunos não são capazes de ler".

Mais uma vez Maurina expôs sua opinião, dizendo que os alunos da 8ª série/9° ano têm dificuldade em equacionar um problema. A professora Sílvia interferiu falando que há muitas pesquisas que apontam para esse resultado e que a observação e a generalização de padrões são um meio para superar o problema. Acrescentou dizendo que é preciso percorrer um longo caminho para que o aluno equacione um problema.

Outros resultados foram encontrados a partir dos protocolos obtidos na pesquisa do aluno-professor. Entre eles, o fato de todas as duplas terem sido capazes de encontrar o próximo termo, o que auxilia a pesquisa, pois fazer o primeiro item deve ser algo motivador.

Surge uma discussão sobre o uso da calculadora. O aluno-professor mostra-se contrário a essa idéia. Sílvia defende o uso da calculadora dizendo que estamos no século 21. O aluno-professor se defende dizendo que é antigo: "Eu fazia meus cálculos na régua de cálculo". Achei interessante ele utilizar o termo "mestre" para se referir ao professor da faculdade. Pareceu-me que para ele há uma grande diferença, hierarquicamente definida, entre o professor da faculdade e o aluno.

Sílvia falou que os alunos não vêem relação entre a escola e o "mundo lá fora", pois "lá fora" podem utilizar a calculadora. "Mas é preciso saber estimar os resultados", ela completa. O aluno-professor reflete um pouco mais relatando: "Nunca trabalhei com calculadora. Nunca deixei".

Maurina comentou o assunto e disse que tinha feito um curso ministrado por Imenes sobre a calculadora na sala de aula. Sílvia falou que ele é um grande amigo dela e o grupo mostrou interesse. Quando Sílvia falou que poderia convidar o amigo para visitar a escola, todos mostraram entusiasmo.

O outro aluno-professor, que aguardava sua vez na análise dos protocolos, comentou sobre o que já tinha aprendido no curso, referindo-se à prática de alguns professores que vêem apenas o resultado final e outros que vêem todo o processo e detalhes das respostas. Sílvia explicou que há dois olhares diferentes: ver o que o aluno sabe e ver o que o aluno não sabe.

O aluno-professor explicou como tinha pensado ao formular o instrumento de pesquisa para a 8ª série: “Vou complicar. Coloquei, além do Pitágoras, o perímetro. Para complicar um pouco mais, eu rotacionei o triângulo”. Sílvia falou, rindo, que ele “é o professor de Matemática típico. Tem que chegar no nosso século!”. Mas retificou dizendo que é um bom professor.

Na proposta original desse aluno-professor, cada triângulo retângulo de sua seqüência sofria uma rotação de 90º, conforme mostra a figura seguinte.

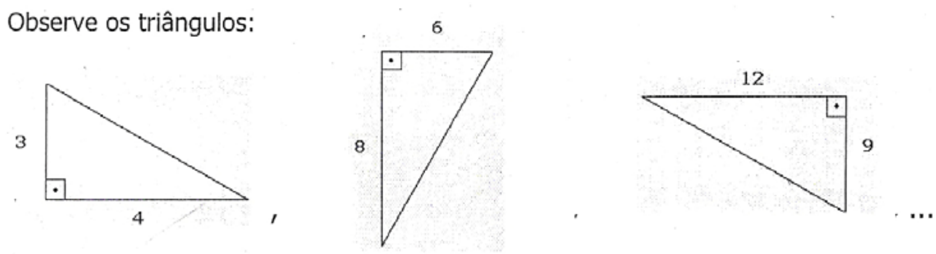


Figura 21: Questão inicial do aluno-professor

Maurina participou das discussões, levando alguns de seus resultados para a reflexão no grupo: “Talvez o aluno tenha dificuldade com o número ordinal...”.

Quando discutimos sobre as questões em que se pede a criação de uma nova seqüência, percebemos que os alunos criam sempre seqüências baseadas no exemplo que eles têm, provavelmente porque os professores nunca falaram em seqüências antes.

A professora explicou que os alunos-professores poderiam “trabalhar com a classe, na aula, aproveitando a idéia de cada um”. Exemplificou com a aula dada na sala de Maurina depois de a pesquisa ser aplicada e analisada.

Sílvia falou da importância de se ter um objetivo para as propostas de sala de aula e disse que atividades de observação e generalização de padrões são necessárias, mas não suficientes. A professora também lançou a idéia de se produzir um material não apenas para os participantes do grupo, mas para outros professores e pediu para que cada professor realizasse uma “tarefa”: analisasse o objetivo de cada questão da atividade proposta no instrumento de pesquisa, verificasse se atingiu o objetivo e pensasse em outras atividades que poderiam ser formuladas. A intenção era de desenvolver esse projeto em 2007.

2007 – Pesquisa-ação de Doroti

O Curso de Matemática II, ocorrido em 2007, contou com 8 encontros programados, sendo o oitavo uma oficina, e duas reuniões extras. Todos os encontros e a oficina aconteceram na escola Zacaria. Uma reunião extra ocorreu no prédio de exatas da PUC-SP e a outra ocorreu na escola Mário Marques.

Vou relatar o processo vivenciado pela aluna-professora Doroti, que iniciou sua participação no segundo encontro do curso de 2007. O esquema abaixo mostra a seqüência de encontros e reuniões durante o ano, o desenrolar do processo de pesquisa de Doroti (do planejamento da pesquisa ao artigo final) e a introdução de diferentes materiais de apoio (artigos, questões e outros materiais de leitura). Ainda que não esteja representado no esquema abaixo, Doroti recebeu um exemplar da Revista PROVE ao participar da oficina de 2006 e, portanto, teve acesso ao artigo que descreve a pesquisa de Maurina. Doroti aplicou a pesquisa entre o terceiro e o quarto encontro.

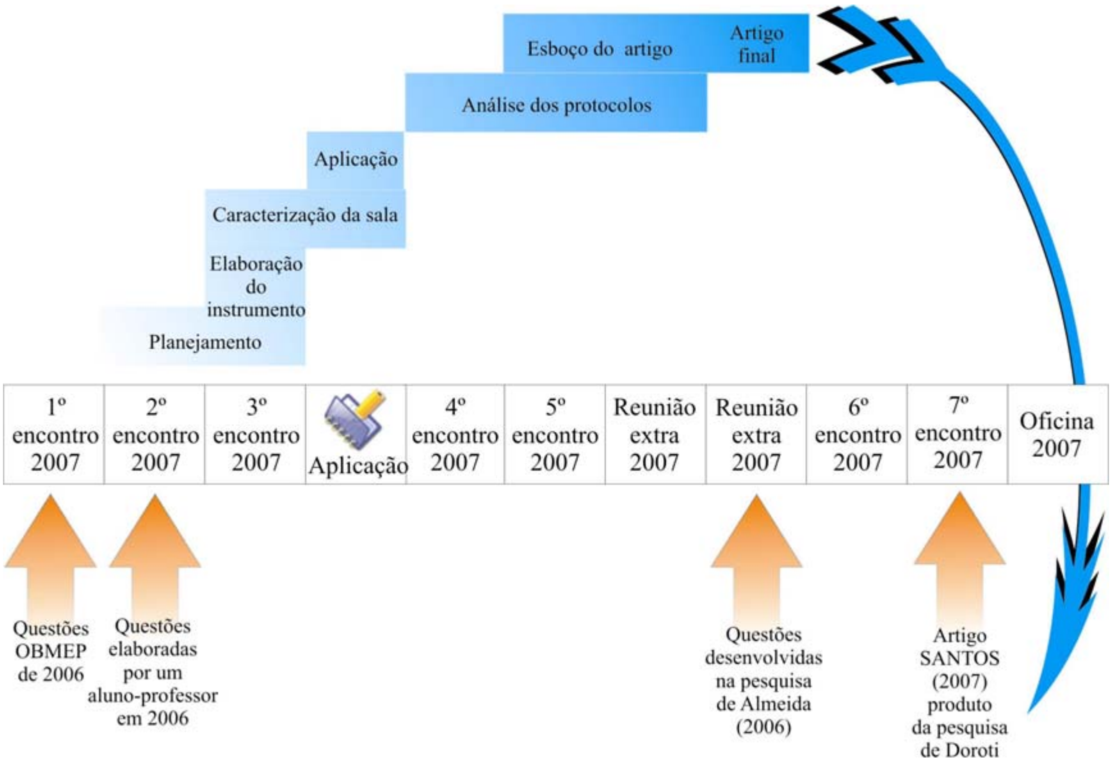


Figura 22: Esquema do processo de Doroti

Ainda que o foco principal desse relato seja esclarecer o processo de Doroti, algumas intervenções da aluna-professora Maurina também foram incluídas, já que esta estava mais uma vez inscrita no curso. De fato, a proposta dinâmica desse curso permite isso.

O ano de 2007 iniciou com um novo grupo de alunos-professores. No primeiro encontro do ano, estavam presentes Sílvia, Maurina, um aluno-professor que freqüentou o segundo semestre de 2006, outros três alunos-professores e eu.

Os novos alunos-professores apresentaram-se. O grupo era formado por professores de diferentes séries e escolas. Havia um professor formado em Física que lecionava Matemática para a 7ª série/8º ano, uma professora que lecionava Ciências para a 8ª série/9º ano e outro professor que lecionava Matemática para a 6ª série/7º ano. A nova aluna-professora contou que mesmo na 8ª série/9° ano encontrava alunos que não conheciam o algoritmo da divisão e isso a preocupava, porque ela não sabia como ensiná-los.

Durante o encontro, os alunos-professores foram expostos aos dez primeiros exercícios do nível 1 (5ª e 6ª séries/ 6º e 7º ano) da OBMEP[24] de 2006. Discutimos sobre eles, observando o que o aluno necessitava saber ou fazer para resolver cada questão.

Comparamos os três exercícios abaixo, retirados das provas da OBMEP, um de cada nível. O nível 1 corresponde a 5ª e 6ª séries/6º e 7º anos do Ensino Fundamental, o nível 2 a 7ª e 8ª séries/8º e 9º anos do Ensino Fundamental e o nível 3, ao Ensino Médio. O grupo observou como as dificuldades dos exercícios cresciam conforme o nível.

Atividade 10 da prova da OBMEP nível 1:

10. Rosa preencheu com os algarismos 1, 2, 3 e 4 as oito casas que estão sem algarismo na tabela, de modo que em nenhuma linha e em nenhuma coluna aparecessem dois algarismos iguais. Qual a soma dos números que Rosa colocou nas casas marcadas com bolinhas pretas?

•	2		1
1	•	2	
2		•	3
	4	1	•

(A) 10
(B) 11
(C) 12
(D) 13
(E) 14

[24] Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

Atividade 2 da prova da OBMEP nível 2:

2. Bruno preencheu com os algarismos 1, 2, 3 e 4 as dez casas que estão sem algarismo na tabela, de modo que em nenhuma linha e em nenhuma coluna aparecessem dois algarismos iguais. Qual a soma dos números que Bruno colocou nas casas marcadas com bolinhas pretas?

•	**2**		**1**
1	•		
2		•	**3**
		1	•

(A) 10
(B) 11
(C) 12
(D) 13
(E) 14

Atividade 9 da prova da OBMEP nível 3:

9. Vera preencheu com os algarismos 1, 2, 3 e 4 as onze casas que estão sem algarismo na tabela, de modo que em nenhuma linha e em nenhuma coluna apareces-sem dois algarismos iguais. Qual a soma dos números que Vera colocou nas casas marcadas com bolinhas pretas?

•	**2**		
1	•		
2		•	**3**
		1	•

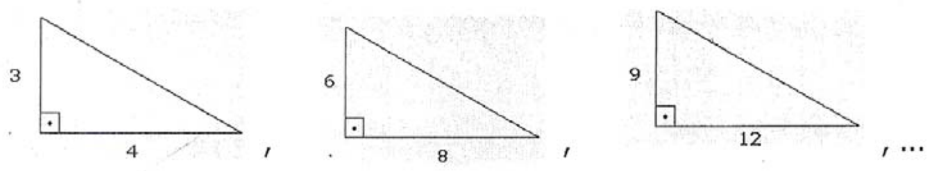
(A) 10
(B) 11
(C) 12
(D) 13
(E) 14

Ao final do encontro, combinamos que os alunos-professores presentes em 2006 trariam suas tarefas, a análise escrita dos protocolos e os objetivos de cada questão do instrumento de pesquisa que elaboraram. Os novos integrantes do grupo deveriam escolher uma de suas classes, sem privilegiar a melhor, e trazer sugestões de atividades com padrões para serem aplicadas.

Doroti iniciou sua participação no curso a partir do segundo encontro de 2007. Ela apresentou-se e relatou que fez Licenciatura Curta em Ciências e Matemática, tendo realizado posteriormente a complementação de Licenciatura Plena em Matemática. Contou que trabalhava na escola Mário Marques com 8^{as} séries/ 9^{os} anos e na escola estadual com as 7^{as} séries/ 8^{os} anos do Ensino Fundamental e com o Ensino Médio. Como Doroti não possui e-mail, sua colega se prontificou a transmitir o conteúdo das mensagens do curso.

Discutimos a atividade proposta por um aluno-professor aplicada, no ano de 2006, numa classe de 8^a série/ 9^o ano. Essa atividade serviu de exemplo para os novos participantes.

Observe os triângulos:



Responda:

a) Como será o próximo triângulo?
b) Qual o perímetro desse triângulo que você descreveu?
c) Qual o perímetro do 15° triângulo da seqüência?
d) Crie uma seqüência.

Figura 23: Questão criada por um aluno-professor em 2006

Sílvia comentou sobre o primeiro item dessa atividade, o qual acredita ter uma resposta acessível aos alunos. Na pesquisa desse aluno-professor, todos os alunos foram capazes de oferecer uma resposta coerente.

Estudamos o conhecimento que cada uma das questões propostas para essa seqüência envolvia e também as estratégias de resolução para cada questão. O grupo observou que os alunos precisavam conhecer o significado de perímetro e algum método para encontrar o valor da hipotenusa do triângulo (o teorema de Pitágoras ou conhecer, de antemão, as ternas pitagóricas).

Os alunos-professores notaram que o cálculo da hipotenusa não precisaria ser feito para todos os triângulos, desde que o aluno observasse que os catetos se comportavam como múltiplos (um deles como múltiplo de 3 e o outro como múltiplo de 4). Sendo assim, bastava que o aluno percebesse que os valores da hipotenusa são múltiplos de 5.

Com o objetivo de elaborar um material com atividades sobre a generalização de padrões que permeasse todas as séries do ciclo II do Ensino Fundamental (5ª à 8ª série/ 6º ao 9º ano), cada professor determinou a classe na qual iria realizar a pesquisa. Maurina escolheu uma classe de 5ª série/ 6º ano especial, que recebe o nome de SAP (Sala de Apoio Pedagógico), e Doroti escolheu a 8ª série/ 9º ano.

Para o encontro seguinte, combinamos que cada aluno-professor traria por escrito a descrição de dia e hora previstos para a aplicação da pesquisa, forma de organização da sala (individual ou duplas) e a atividade com alguma seqüência a ser aplicada na classe.

No mês seguinte, no terceiro encontro de 2007, estavam presentes Sílvia, Maurina, Doroti, outros três alunos-professores e eu.

Sílvia iniciou a reunião falando sobre o papel do pesquisador. Explicou que é necessário entender os erros e que esses são conhecimentos mal aplicados. Falou também sobre a diferença do olhar do pesquisador e do professor.

Era natural que Maurina estivesse mais confortável nos encontros com Sílvia do que os outros alunos-professores. Pude constatar isso em vários momentos, observando a crescente segurança e liberdade que assumiu ao expor suas idéias ao grupo.

Sílvia perguntou a Doroti sobre a atividade que ela tinha elaborado. A aluna-professora explicou que tinha feito duas questões, mas que a primeira era melhor, pois era mais fácil.

Doroti ainda não tinha decidido se faria a pesquisa em duplas ou individualmente. Sílvia falou que trabalhar em duplas é mais vantajoso, inclusive cognitivamente. A colega de Doroti falou que também não tinha decidido e que tinha pensado em fazer individualmente, “pra ver cada aluno mesmo”. Explicou que se ela optasse pelas duplas, os alunos iriam ajudar um ao outro. A professora Sílvia falou que era esse o objetivo e uma das vantagens é que eles fariam um esforço cognitivo maior ao explicar o que estão pensando.

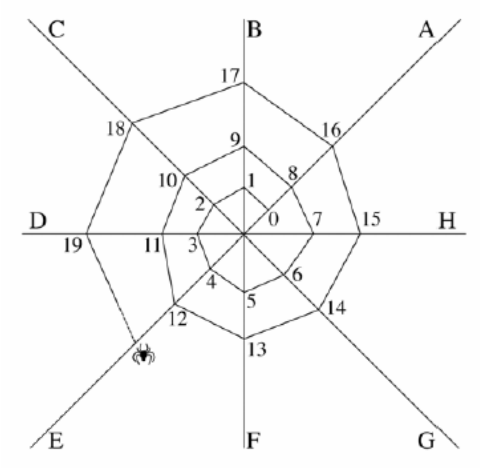
Doroti argumentou que se a pesquisa fosse em duplas, os alunos escolheriam duplas que ela não gostaria que fossem feitas. E perguntou se poderia ela mesma montar as duplas, relatando que nunca tinha feito isso antes.

Maurina sugeriu gravar a pesquisa, mas Doroti ainda estava refletindo se deveria mesmo realizar a atividade em duplas. Falou que quando os alunos fazem as atividades em grupo, ela sabe que foi apenas um deles que as fez, os outros não contribuem da mesma forma.

Quando a professora foi questionada por Maurina sobre o trabalho em trios, relatou que não é mais vantajoso, pois em geral um dos alunos fica fora da discussão. Além disso, é mais difícil realizar uma pesquisa quando se decide fazer as gravações.

A discussão sobre a atividade proposta como instrumento de pesquisa foi iniciada com Doroti. Ela escolheu a questão também utilizada por Almeida (2006, p.44), retirada da página 56 do caderno intitulado *Banco de Questões da 2ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas de 2006* (também disponível em: <http://www.obmep.org.br/obmepcontent/banco_de_questoes/mainColumnParagraphs/011/document/16nivel2.pdf>, acesso em: 20 fev. 2008). Doroti planejava aplicar a atividade em uma classe de 8ª série/ 9º ano e por isso escolheu uma atividade do nível 2, ou seja, proposta para 7ª e 8ª séries (8º e 9º anos).

A,B,C,D,E,F,G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?



a) B b) D c) E d) G e) H

O grupo analisou as possíveis estratégias de resolução dos alunos. A primeira estratégia levantada no grupo foi dividir 118 por 8 e ver o resto. Ela exige que o aluno perceba que em cada ramo há uma progressão aritmética de razão 8, que ele faça a divisão e que conte 6 ramos a partir do ramo B (pois $118 = 14.8 + 6$).

A segunda estratégia foi contar os fios até 118, nomeada como ensaio e erro. Ela exige apenas que o aluno saiba contar. Doroti contou que utilizaria essa estratégia: “Eu sou assim”. Comentou que muitos professores resolveram as questões dos concursos desse modo, “na raça”, pois “dava um branco na hora”.

Outra estratégia sugerida por Sílvia e utilizada por um dos participantes na pesquisa de Almeida (2006) foi verificar que 118 é um número par. Essa observação indica que o número não está no ramo H, B, D ou F, ou seja, está em A, C, E ou G. Assim, após excluir alguns ramos, basta encontrar um valor próximo de 118 que esteja sobre o ramo A (por exemplo, 14.8 = 112) e contar até chegar ao ramo certo.

Existe ainda outra estratégia que utiliza a classe de restos. Apesar de não se esperar que os alunos cheguem a essa generalização, é preciso levantar todas as estratégias.

Houve uma grande discussão sobre o número 118. Alguns alunos-professores acreditavam que o aluno resolveria a atividade apenas contando, inclusive Doroti, que disse: “Com certeza, todos os alunos fariam contando”. Então Sílvia explicou que seria mais interessante se a questão fizesse com que o aluno desenvolvesse um caminho mais rápido e sugeriu aumentar o valor.

Doroti sugeriu colocar um valor pequeno, 11, por exemplo, e um bem maior. Sua intenção era verificar se o aluno utilizaria a estratégia da contagem e depois desenvolveria outro caminho. A professora Sílvia explicou que, desse modo, estaríamos induzindo o aluno a contar e não era esse o objetivo.

Maurina questionou, pois deveria haver uma questão simples para que os alunos não desistissem do problema. As discussões experimentadas por Maurina, quando por diversas vezes foi dito que a questão teria de envolver o aluno e que não poderia desestimulá-lo, tinham sido assimiladas.

A segunda proposta de Doroti envolvia a seqüência numérica "1, 2, 3, 5, 8, 13,..." e pedia para que fosse determinado o 7º elemento. O grupo decidiu trocar a palavra "termo" por elemento, pois um dos resultados da pesquisa de Maurina indicou que os alunos têm dificuldade em compreender o significado de "termo" dentro desse contexto.

O grupo verificou que essa atividade exige do aluno apenas observação. Doroti sugeriu perguntar qual seria o 20º termo, mas ainda assim o aluno teria de escrever toda a seqüência. Comparada à questão da aranha, essa questão possuía menor riqueza.

As atividades propostas pelos outros alunos-professores também foram analisadas e tiveram contribuições de Doroti e dos outros colegas.

Ao encerrar o encontro, Sílvia sugeriu que Maurina utilizasse a atividade proposta pela colega de Doroti. No entanto Maurina utilizou uma questão idêntica ao instrumento de sua pesquisa em 2006.

Mais uma vez troquei telefone com os professores, para o caso de quererem ajuda na aplicação da atividade. Doroti explicou que poderia chamar a coordenadora da escola para ajudá-la.

Durante o encontro, sem que perguntássemos a Maurina, ela contou no grupo que, com o curso, começou a testar os desafios. Falou que antes "pulava" esses exercícios, mas que os alunos gostam de resolvê-los. Percebeu que os alunos deixam de fazer algumas tarefas, mas sempre fazem os desafios. Maurina disse inclusive que agora os alunos perguntam para ela a resposta e pedem que ela faça as correções.

Doroti aplicou seu instrumento de pesquisa entre o terceiro e o quarto encontro em uma sala de 8ª série/ 9º ano. Avisou os alunos de que eles participariam de uma pesquisa sem definir uma data.

O instrumento de pesquisa foi modificado. Doroti decidiu aumentar o valor 118 para 1773 para inibir a estratégia de contagem. Também optou por retirar as alternativas para que os alunos explorassem a questão. Desse modo, não seriam tentados a escolher um valor aleatoriamente e os registros dos alunos poderiam oferecer mais informações sobre o raciocínio utilizado. Segue o instrumento de pesquisa de Doroti.

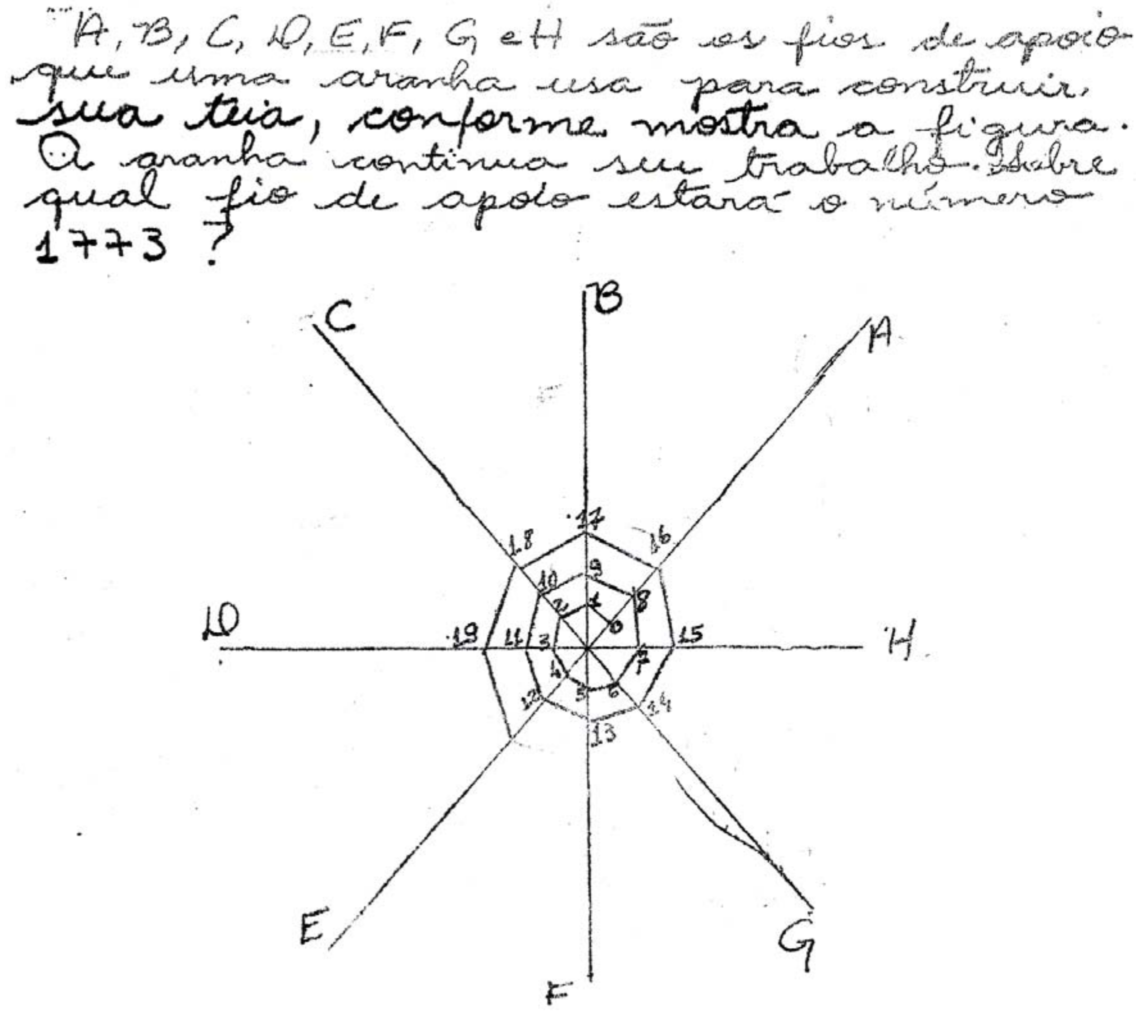


Figura 24: Instrumento de pesquisa de Doroti

No dia da aplicação da pesquisa, estavam presentes 25 alunos de uma classe de 34. Os alunos foram divididos em duplas, sendo que um deles preferiu fazer sozinho. Doroti distribuiu folhas mimeografadas com a questão, além de oferecer folhas de rascunho para quem necessitasse.

A aluna-professora disponibilizou 30 minutos para a realização da atividade. Esse tempo não foi suficiente para que todos os alunos a terminassem. Doroti foi auxiliada pela coordenadora pedagógica de sua escola durante a aplicação.

Iniciamos a análise dos protocolos de Doroti no quarto encontro. O estudo foi realizado em grupo e estavam presentes Maurina, Doroti, Sílvia, outros dois alunos-professores e eu.

Cada participante do grupo possuía uma cópia dos protocolos dos outros colegas. A intenção não era apenas que os alunos-professores investigassem sua própria sala de aula, mas que compartilhassem os resultados com os colegas.

Antes de olharmos cada um dos treze protocolos, doze respondidos em dupla e um individualmente, Doroti contou que já tinha "dado uma olhada" e adiantou que poucos alunos conseguiram resolver. Da mesma forma que ocorreu com Maurina, seu olhar foi mudando durante a análise. Se antes Doroti observava o que os alunos deixaram de responder, passou a olhar para os protocolos procurando o que o aluno soube responder.

Doroti expunha muitas observações, não apenas sobre os protocolos, mas também sobre a aplicação da atividade. Relatou que, em uma dupla que utilizava a estratégia de contagem, ouviu um dos alunos falar para o colega continuar a contar, pois ele já havia cansado.

Observamos que os alunos continuaram o desenho da teia da aranha em onze dos treze protocolos. Esse fato trouxe ao grupo elementos para refletir sobre a importância que a figura desempenhou no papel da observação dos alunos.

A estratégia de contagem foi muito utilizada. Em onze protocolos, pudemos observar evidências dessa estratégia. No entanto apenas quatro duplas permaneceram nessa estratégia, sem procurar uma estratégia mais refinada para solucionar a questão. Quando Doroti questionou as duplas, depois de nossa primeira análise, alguns alunos relataram que "tinham chutado" um dos fios como resposta, pois o tempo havia se esgotado.

Há evidências de que, em um dos protocolos, a dupla observou que existe uma seqüência de valores numéricos em cada fio, anotando inclusive uma classificação "par" para os fios A, C, E e G e "ímpar" para os fios B, D, F e H, conforme a figura seguinte.

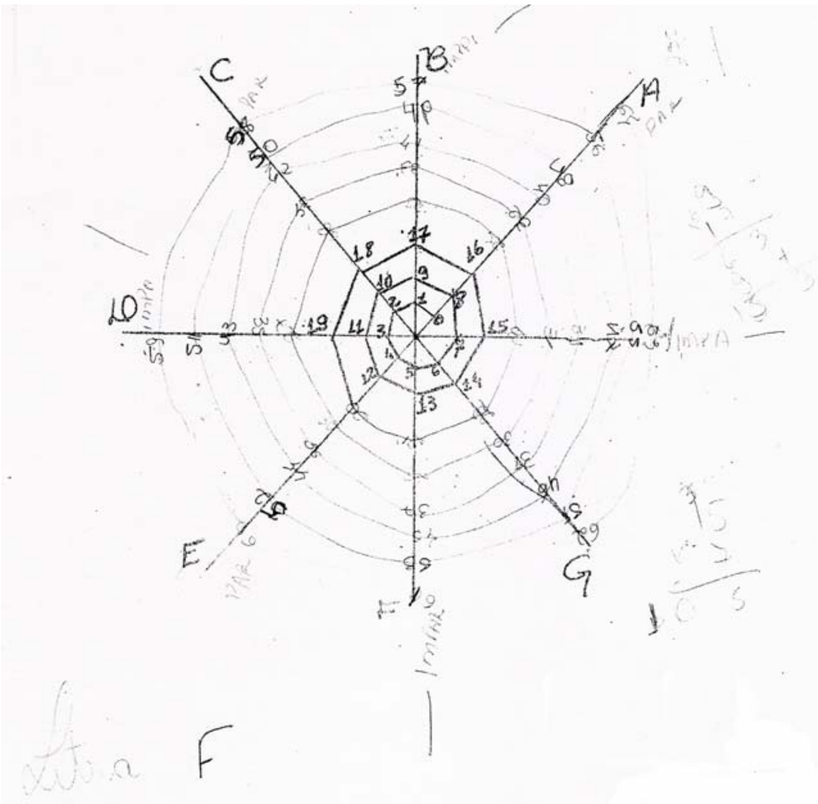


Figura 25: Protocolo de dupla que classificou os fios em "pares" e "ímpares"

Outra dupla observou que a seqüência numérica sobre o fio aumentava oito unidades a cada novo valor. Esses alunos escolheram o fio C e escreveram seus valores, como pode ser observado abaixo.

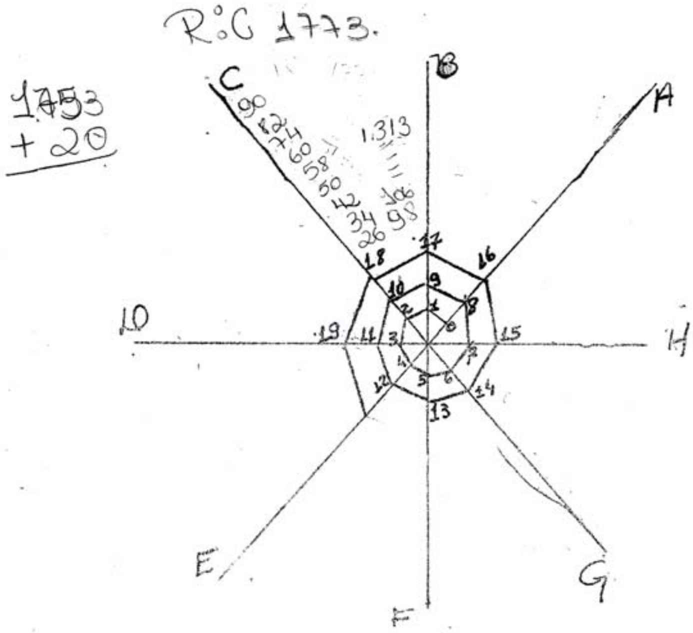


Figura 26: Protocolo da pesquisa de Doroti.

Um dos protocolos mostrou que a dupla iniciou a resolução do problema com a estratégia de contagem, mas depois adotou uma estratégia mais refinada: utilizou o último número da figura (o 19) como referência e o multiplicou por 70. Como o resultado não se aproximava de 1773, continuou a multiplicar 19, por 72, por 85, por 90 e por 93. Sua última conta tinha 1767 como resultado, valor mais próximo de 1773. Ainda que tenha feito uso de uma estratégia mais refinada, a dupla não percebeu que uma volta completa contém 8 fios de apoio.

A análise de dois protocolos - um onde os alunos somaram os valores das seqüências sobre os fios e outro onde multiplicaram os valores de um fio pelo fio seguinte - trouxe ao grupo uma discussão sobre o que os alunos esperam das questões de Matemática, refletindo sobre o contrato didático. Este é um fenômeno comum em sala de aula: para o aluno, está implícito que, num problema de Matemática, a solução está no resultado de alguma conta onde todos os dados numéricos apresentados no enunciado devem ser utilizados. Maurina e Doroti concordaram, afirmando que freqüentemente vivenciam esse fato em sala de aula.

Encontramos três protocolos com a divisão de 1773 por 8. Duas duplas obtiveram quociente 221 e resto 5, o que indica que a aranha completaria 221 voltas e andaria sobre mais 5 fios de apoio. Porém, apesar da estratégia adequada, não sabiam o que fazer com o resto, como verificado numa conversa após a aplicação da atividade. A outra dupla que utilizou a estratégia da divisão deu um significado adequado à divisão e ao seu resto, respondendo que “o fio vai dar 221 voltas mais 5 fios”. Apesar disso, Doroti falou que a dupla tinha errado ao responder que 1773 estaria sobre o fio E: “Que pena, eles contaram os fios errado! Em vez de começar no B eles começaram no A”.

Uma dupla utilizou um importante recurso matemático. Ela representou os dados da figura em uma tabela, como segue abaixo.

A	16	8	0
B	17	9	1
C	18	10	2
D	19	11	3
E	12	4	
F	13	5	
G	14	6	
H	15	7	

Figura 27: Tabela encontrada em um protocolo de Doroti

Durante a análise, muitos assuntos foram levantados, contribuindo com elementos de reflexão para os participantes. Um exemplo foi o significado, para o aluno, do resto de uma divisão, assunto que deve ser rediscutido em sala. O olhar do professor, no momento de avaliar, também parece ter sido relevante, principalmente para Doroti, que citou sua importância em encontros seguintes. Em especial na oficina de 2007, que descrevo adiante, Doroti explicou que alguns alunos “chutaram” e acertaram o fio correto, mas outros desenvolveram um raciocínio para encontrar a solução da questão e, apesar de não responderem corretamente sobre o fio de apoio, mostraram maior competência nessa atividade.

Sílvia propôs que Doroti escrevesse os resultados que levantamos no grupo e ela mostrou espanto. A aluna-professora argumentou que era melhor escrever no próximo encontro, com todo o grupo.

Durante o intervalo para o café, Maurina contava sobre sua experiência ao escrever o artigo junto com Sílvia e comigo. Enquanto Maurina oferecia auxílio e tentava convencer Doroti, esta justificava ter escolhido Matemática porque queria “fugir de escrever”. Sílvia sugeriu que, se Doroti quisesse, eu poderia ajudá-la a escrever.

As discussões no grupo surgiam mais espontaneamente e todos os alunos-professores expunham suas hipóteses e idéias.

O quinto encontro, que contou com a participação de Maurina, Doroti, Sílvia, um aluno-professor e eu, começou com a leitura do relato da pesquisa realizada por Doroti, um esboço para o texto que se tornou artigo da Revista PROVE. Ela havia escrito um texto sobre sua pesquisa, contando como ocorreu, alguns resultados e inclusive algumas conclusões. Entre vários comentários do grupo sobre as possibilidades que a questão escolhida permitiu, Doroti conclui que “a questão dissertativa é melhor, pois a gente pode ver o caminho que o aluno fez”.

Sílvia sugeriu que Doroti fizesse a institucionalização dessa atividade em sua aula. Ela poderia construir um exemplo mais simples e levar o aluno a um determinado tipo de observação.

Simulando a situação, Sílvia explicou no quadro como faria. Escolheu um número pequeno de fios, quatro fios de apoio: A, B, C e D. Também mudou o número procurado: ao invés de 1773, escolheu o número 25. Então falou que apresentaria as três estratégias utilizadas pelos alunos na realização da atividade da aranha: primeiro, a estratégia da contagem; segundo, a estratégia em que os alunos escrevem as seqüências de cada fio; e terceiro, a estratégia em que os alunos dividem 25 por 4 e verificam o resto. Depois questionaria os alunos sobre qual a melhor estratégia. Se alguém respondesse que a contagem é a melhor estratégia, ela perguntaria se a opinião continuaria a mesma quando o número é 1773. Doroti comenta que seus alunos preferirão a estratégia da contagem, pois "gostam de fazer contas".

Sílvia falou mais uma vez nos efeitos do contrato didático, enfatizando que eles ocorrem em toda sala de aula. Exemplificou com uma pesquisa sobre a "idade do capitão" [25], citada por Chevallard *et al*. (2001).

No intervalo do café, Doroti disse que gosta de desafios e por isso escolhia sempre as 8ªs séries, mudando de aluno a cada ano. Diferentemente, Maurina afirmou gostar de acompanhar uma mesma turma da 5ª à 8ª série/ 6º ao 9º ano, o que lhe possibilita conhecer melhor o aluno e criar vínculo com ele. Doroti contestou-a, contando que, quando aluna, ficava decepcionada ao não encontrar um novo professor no início do ano. Disse ainda que tem facilidade em aprender o nome dos alunos e que, com uma semana de aula, já conhecia todos.

Após o intervalo, Maurina e Sílvia contribuíram com sugestões para uma atividade elaborada para a 5ª série/ 6º ano, auxiliando um aluno-professor do grupo. Maurina e Doroti falaram de suas experiências como pesquisadoras. Argumentaram que os alunos valorizam o curso que estavam fazendo e os professores que participam desses cursos. Atestaram essa valorização citando a disposição dos alunos em ajudar na pesquisa.

Ao final do encontro, Doroti, Sílvia e eu combinamos que nos reuniríamos na PUC para elaborarmos o texto de Doroti na forma de artigo para a Revista PROVE. Essa reunião não estava prevista nos encontros do curso.

No dia marcado, Doroti e eu fomos juntas à PUC. No trajeto, conversamos sobre fatos ocorridos na escola. Ela contou que trabalha nas redes municipal e estadual de ensino e que agora tem mais tempo para participar dos encontros, pois está de "licença-prêmio" na rede estadual. São noventa dias de licença remunerada que o professor pode ter se, durante cinco anos, não ultrapassar trinta faltas. Também falou que falta pouco tempo para se aposentar e que, no próximo ano, fará o pedido de aposentadoria para o

[25] Um grupo de pesquisadores franceses da Educação Matemática (dito na França didática da matemática), propôs, por volta da década de 1980, o seguinte problema para várias classes de alunos de 7 a 10 anos:
Em um barco, há 7 cabras e 5 ovelhas. Qual a idade do capitão?
Os pesquisadores notaram que a maioria dos alunos dava uma resposta do tipo: "7 x 5 = 35. O capitão tem 35 anos".

cargo da escola estadual. Segundo Doroti, só foi possível participar da pesquisa porque, naquele período, ela tinha mais tempo livre.

Ao chegarmos à PUC, expliquei que iríamos iniciar o trabalho sem a professora Sílvia. Doroti falou que então não "adiantava" nada, pois teríamos de esperar pela professora. Expliquei que Sílvia já havia dado algumas orientações e iniciamos a redação do texto.

Ao texto entregue por Doroti no quinto encontro, acrescentamos e organizamos informações sobre a aplicação da pesquisa. Assim que começamos a ver os protocolos para escrever sobre os resultados, Sílvia chegou. Após tirar cópias dos protocolos, voltamos à análise dos mesmos. Doroti explicava algumas falas de seus alunos em "entrevistas" que se assemelhavam a um questionamento sobre como os alunos tinham respondido as questões.

Olhamos todos os protocolos e fizemos as anotações do que Sílvia falava. Não houve muitos debates, em geral acatamos as falas de Sílvia. Combinamos que eu iria à escola de Doroti no dia 04 de setembro para auxiliá-la a escrever os resultados.

Terminada a reunião, no caminho de volta, Doroti comentou que os professores de Matemática não estão acostumados a escrever e que ela escolheu a faculdade de Matemática, porque não queria redigir textos. Comentou que se hoje escolhesse outra faculdade, faria Letras só para aprender a escrever.

Doroti falou que esse Curso de Matemática II do PROVE é bom, pois lida diretamente com os alunos. Falou que nele o professor tem oportunidade de ver como avaliar, ver o material produzido pelos alunos e analisá-lo profundamente. A professora-aluna valorizou o curso em razão da análise dos protocolos: "Isso que é uma avaliação de verdade, não o que a gente faz na sala de aula".

Quando perguntei sobre o curso, se eram obrigados a fazer ou se ganhavam alguma coisa, ela respondeu que não eram obrigados, mas que era um "incentivo obrigatório". Explicou que mesmo assim ela gostava, pois ela podia escolher qualquer curso do projeto. Já havia feito outros cursos e resolveu fazer o de Matemática agora. Houve um momento em que estava cansada de "tanta Matemática" e "queria coisas diferentes". Ela mostrou estar bastante empolgada com o curso atual.

Doroti e eu nos reunimos na data marcada na escola municipal Mário Marques, onde a aluna-professora trabalha. Entreguei uma folha com as atividades utilizadas na pesquisa de Almeida (2006) para Doroti a pedido de Sílvia.

Com a discussão feita na última reunião, pude redigir alguns resultados para o artigo. Li, com Doroti, o que havia acrescentado. A aluna-professora mostrou-se à vontade para aceitar ou não minhas opiniões. Falava que era melhor tirar ou mudar determinado trecho no texto sem acanhamento.

Durante a análise feita junto com Sílvia, encontramos dez protocolos com evidências de que os alunos utilizaram a estratégia de contagem. Não houve contestações naquele momento. Porém fiquei intrigada com um protocolo e levei minha dúvida para refletir com Doroti. Ela comentou que concordava comigo, mas como tinha sido a professora Sílvia quem havia dito, não se opôs. Ao final, consideramos que, em onze dos treze protocolos, havia evidências da estratégia de contagem.

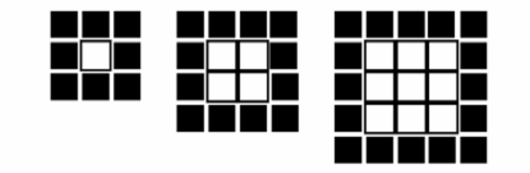
Depois de concordarmos em relação aos resultados que deveriam ser descritos no artigo, começamos a escrever as considerações finais. Discutimos um pouco sobre os itens que deveriam constar e redigimos juntas a finalização do texto.

Combinamos que eu enviaria o relatório final à Sílvia por e-mail. O artigo foi publicado na Revista PROVE de número 6 com o título *Uma professora de Matemática faz pesquisa na oitava série*.[26]

É importante notar que não havia hierarquia entre Doroti e mim. Ao mesmo tempo em que ela precisava de auxílio para redigir o relato final de sua pesquisa, eu necessitava das informações e resultados que obteve. Era uma troca de aprendizados.

No sexto encontro, Sílvia, Maurina, Doroti, outro professor-aluno e eu nos reunimos na escola Zacaria. Discutimos sobre a “questão dos ladrilhos” que estava na folha com as atividades utilizadas na pesquisa de Almeida (2006), com a intenção de elaborar um novo instrumento de pesquisa para a 8ª série/ 9º ano.

> Uma seqüência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, como se segue: o primeiro é formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos, o segundo de quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos, e assim sucessivamente, como indica a figura. Nos dois primeiros elementos da seqüência apresentam 20 azulejos pretos e 5 azulejos brancos. Se numa seqüência de mosaicos formada de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados?



(ALMEIDA, 2006, p.42)

---

[26] Ver anexo E.

Ao analisarmos o enunciado da questão, concluímos que este não era suficientemente claro para o aluno. Doroti sugeriu colocar outras questões para direcionar os alunos e esclarecer o problema.

Sílvia propôs inserir uma questão solicitando ao aluno a próxima figura e outra pedindo que completasse a seguinte tabela abaixo das figuras:

	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4
Nº azulejos brancos	$1 = 1^2$			
Nº azulejos pretos	8			
Total de azulejos	$9 = 3^2$			

A intenção dessa tabela era dar condições para que os alunos percebessem que o número de azulejos brancos pode ser escrito como uma potência de expoente 2, já que não é natural pensar que o 1 é o mesmo que o quadrado de 1.

Quando a professora Sílvia sugeriu que a terceira questão poderia ser “Quantos azulejos pretos são necessários para construir a oitava figura?”, Doroti palpitou que poderia pedir logo a décima figura. Maurina, em tom de brincadeira, comentou que ela era uma professora má.

O grupo decidiu que a quarta questão seria dada do seguinte modo: “Nas duas primeiras figuras, utilizei 20 azulejos. Se utilizar 80 azulejos pretos, quantos azulejos brancos serão necessários?”.

Ao refletir sobre os preparativos para essa nova pesquisa, Doroti comentou a dificuldade que teve em obter os registros dos alunos. Contou que, mesmo depois de retirar os lápis, eles acabavam retirando uma folha do caderno para fazer seu rascunho.

Nesse mesmo encontro, analisamos os protocolos da segunda pesquisa de Maurina. Dessa vez, ela aplicou as atividades em duplas, na última aula, numa sala de 5ª série/ 6º ano especial, com 33 alunos entre 12 e 16 anos que já haviam repetido um ano ao menos. Ela se mostrou aflita com os resultados e contou sobre sua dificuldade. Apesar de ter organizado os dados e os analisados previamente, não os valorizava, pois os alunos conversavam com outras duplas e andavam pela sala.

Maurina relatou que leu a questão com os alunos e explicou o que era número ordinal. Segue a questão aplicada:

> Observe a seqüência 0,2,4,6,8,.........
>
> Responda:
>
> 1) Qual é o próximo número da seqüência?
>
> 2) Que número ocupa a 32ª posição?
>
> 3) Crie uma nova seqüência.

Ao olhar a terceira questão dos protocolos, Sílvia observou que as respostas criadas com a seqüência de números ímpares eram muito freqüentes. Doroti falou que os alunos provavelmente olharam que os números aumentavam de dois em dois e imaginaram uma seqüência que aumenta duas unidades a cada novo termo diferente dos números pares.

Maurina explicou sua angústia. A intenção dela com essa pesquisa era mostrar que mesmo uma sala "diferenciada" conseguia realizar a atividade de observação. No entanto a aplicação ocorreu em meio a muita bagunça e a pesquisa tinha perdido o valor para ela.

Sílvia retomou o percurso do grupo desde seu início, levantou as pesquisas já realizadas e fez a proposta de se escrever um livro paradidático com experiências de ensino de 5ª a 8ª série (6º ao 9º ano). Para tanto era necessário pensar em atividades para as 7as e 6as séries/ 8os e 7os anos.

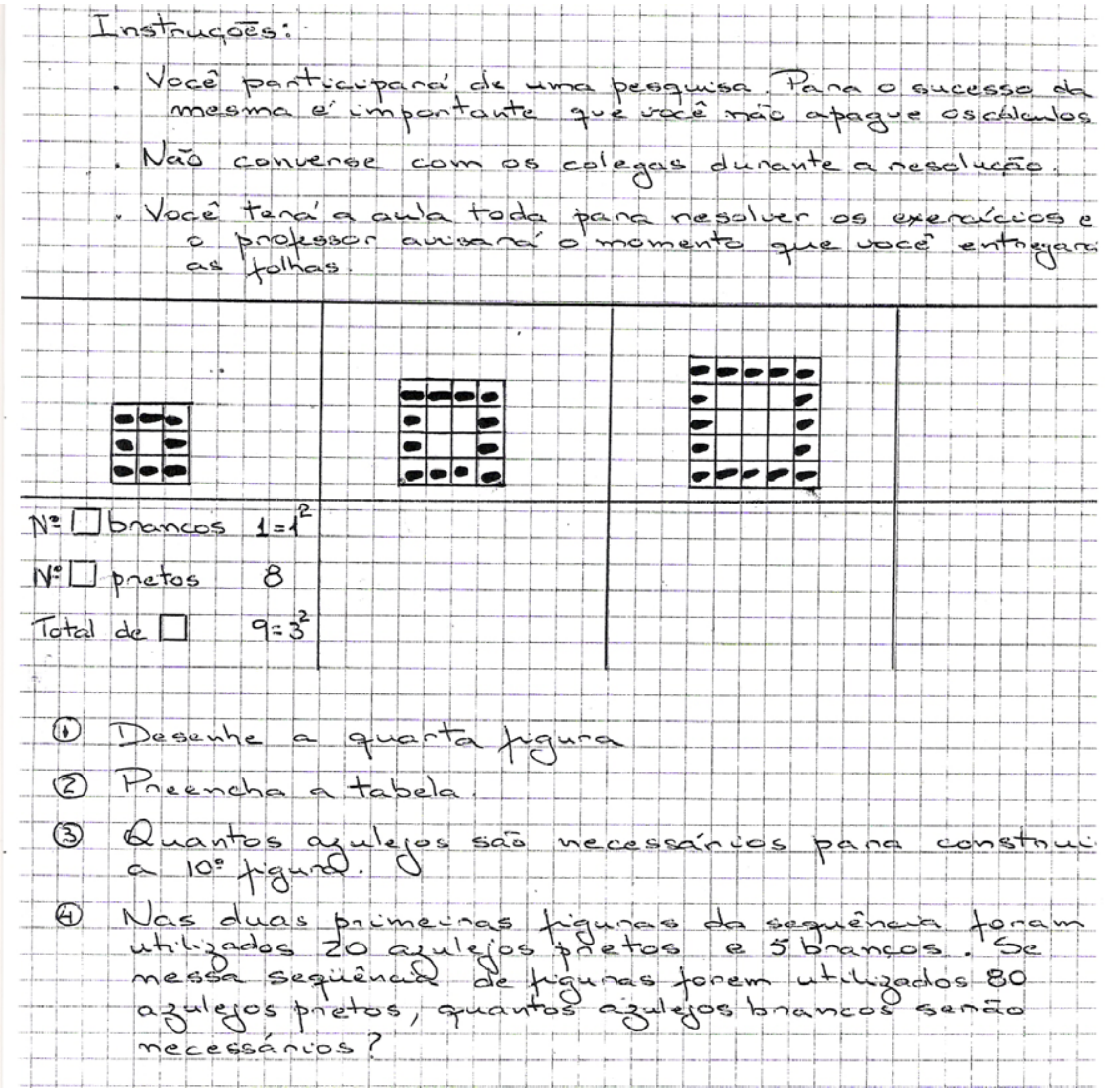
Doroti sugeriu que a atividade dos ladrilhos também fosse aplicada na 7ª série/ 8° ano. O aluno-professor contestou-a, explicando que seria muito difícil para os alunos e sugeriu que talvez devesse tirar a última questão. No entanto Doroti falou para deixar, "pra ver o que eles iriam responder".

Elaboramos uma atividade para a 6ª série/ 7º ano e combinamos o próximo encontro.

No sétimo encontro, Doroti, Maurina, Sílvia e eu recebemos uma cópia do artigo publicado na Revista Prove, resultado do Curso de Matemática II de 2007.

Maurina e Doroti aplicaram a questão dos ladrilhos em duplas. Maurina obteve dez protocolos da pesquisa realizada numa sala de 7ª série/ 8º ano e Doroti obteve catorze protocolos da pesquisa realizada numa sala de 8ª série/ 9º ano. Ambas obtiveram resultados similares.

Apesar de cada aluna-professora produzir seu instrumento de pesquisa "a mão", ambas apresentaram a mesma questão. Segue o instrumento de pesquisa de Maurina como aplicado.



Instruções:

- Você participará de uma pesquisa. Para o sucesso da mesma é importante que você não apague os cálculos.
- Não converse com os colegas durante a resolução.
- Você terá a aula toda para resolver os exercícios e o professor avisará o momento que você entregará as folhas.

Nº □ brancos	$1=1^2$			
Nº □ pretos	8			
Total de □	$9=3^2$			

1. Desenhe a quarta figura
2. Preencha a tabela.
3. Quantos azulejos são necessários para construir a 10º figura.
4. Nas duas primeiras figuras da sequência foram utilizados 20 azulejos pretos e 5 brancos. Se nessa sequência de figuras forem utilizados 80 azulejos pretos, quantos azulejos brancos serão necessários?

Figura 28: Instrumento de pesquisa de Maurina

Doroti comentou que os alunos se confundiram quando completaram a tabela. Como foi escrito que $1 = 1^2$, os alunos escreveram $4 = 4^2$. A aluna-professora falou que esse é o “problema do modelo, o aluno não sai daquilo, não pensa”. Para superar essa dificuldade, imaginamos que a questão poderia ser melhorada se fornecêssemos os dados da primeira e segunda figuras na tabela, completando a segunda coluna também.

Nas duas salas pesquisadas, notamos que os alunos têm dificuldade com a potenciação. Essa dificuldade ainda angustiava Doroti, que pedia “um remédio pra isso!”.

Ao analisarmos um dos protocolos em que a dupla riscou a resposta e respondeu novamente, Maurina levantou a hipótese de que um dos alunos da dupla devia ter percebido e avisou o colega. Doroti e Maurina concordaram sobre a importância de se realizar a atividade em dupla.

Os instrumentos de pesquisa não tinham o enunciado. Maurina e Doroti optaram por iniciar a questão com a seqüência, sem apresentar o enunciado com a explicação dos ladrilhos. Sílvia comentou que propor enunciados claros é importante e completou afirmando que o professor deve prever o que o aluno entende do enunciado. Maurina falou que essa é uma das dificuldades dos professores da área de exatas e comentou da dificuldade em fazer com que os alunos leiam, por exemplo, as questões da OBMEP. Doroti sugeriu que nosso grupo também poderia trabalhar com enunciado de problemas.

Finalizamos o encontro, ajustando o planejamento da oficina. Inicialmente Doroti disse que não estava disposta a falar "lá na frente para um monte de professores". Depois de negociarmos, ficou combinado que Maurina e eu nos comunicaríamos melhor através de e-mails. Como Doroti não possui um e-mail particular, entraríamos em contato com ela através do e-mail da escola. Apesar de Doroti dizer que não queria falar na oficina, ela pediu para ser informada: "Eu também quero saber o que vai acontecer!".

A oficina de 2007 não era apenas um fechamento do ano, era também uma comemoração pelo décimo aniversário do Projeto PROVE. Ocorreram diversas oficinas dirigidas por cada curso que o Projeto PROVE promoveu durante 2007.

A proposta da oficina segue a mesma do ano de 2006. Havia, para cada professor inscrito na oficina, uma cópia do artigo de Vale & Pimentel (2005) intitulado "Padrões: um tema transversal" e uma apostila com as questões que foram desenvolvidas durante os dois anos de curso (ver anexo F). Eram poucos os inscritos na oficina de Matemática. Doroti comentou que a maior parte dos professores foge dessa matéria.

Maurina organizou o material destinado à oficina de Matemática II cujo título era *Matemática: a ciência dos padrões*. Explicou que incluiu duas questões, a questão da aranha e a questão dos ladrilhos, na mesma apostila utilizada em 2006.

Entre os ouvintes, havia uma moça que acompanhava Doroti. Essa moça declarou que não entendia nada de Matemática, que "era muito complicado" e estava lá apenas para acompanhar e fotografar Doroti.

Maurina iniciou a oficina falando um pouco sobre a dinâmica do curso e sobre a Matemática como ciência dos padrões. Comentou que ela era formada em Ciências e que o professor de Matemática e o professor de Ciências têm uma visão diferente da

Matemática. Não havíamos definido nada quanto à fala e, como no curso, Maurina, Doroti e eu nos revezávamos naturalmente em exemplos e opiniões.

Apesar de Doroti ter dito que ficaria na oficina, mas que não falaria nada, após a fala inicial de Maurina, levantou-se e citou um exemplo sobre padrões, mais especificamente uma seqüência numérica. Maurina e Doroti concordaram comigo quando comentei que a observação era uma etapa muito importante para essas atividades.

Maurina falou que problemas que envolvem padrões são mais interessantes para os alunos. Contou que, em sua sala, os estudantes deixam de fazer os exercícios de casa, mas não deixam de tentar responder os “desafios”.

Maurina pediu aos ouvintes que tentassem responder a atividade dos números pares, a qual tinha proposto para seus alunos de 5ª série. Depois de algum tempo, solucionou a questão no quadro, comentando alguns resultados de sua pesquisa.

Em seguida, Doroti propôs a atividade da aranha. Uma pequena ouvinte, filha de uma professora de Geografia também presente na oficina, comentou no início que “vai dar muito trabalho se eu escrever”. Doroti e Maurina olharam-se rindo.

Após algum tempo, Doroti foi à lousa e fez um painel a partir das respostas e estratégias que os ouvintes deram. Quando uma ouvinte perguntou a Doroti por que o resto era tão importante, Doroti deu um exemplo: “Se eu tenho 115 alunos que vão a uma excursão, de quantos ônibus eu preciso? Bom, 115 dividido por 50 dá 2. Daí muita gente vai falar que precisa de 2 ônibus, mas tem 15 alunos que sobraram.”

Doroti também enriqueceu sua exposição mencionando dados de sua pesquisa, inclusive as falas de alunos que ficavam “cansados de contar”. Ela explorou o tema sobre o olhar do professor avaliar a resposta final ou o raciocínio do aluno. Explicou que uma dupla que participou de sua pesquisa fez a divisão corretamente, mas confundiu-se na contagem dos fios restantes. Então questionou os ouvintes se essa dupla mereceria “certo ou errado”.

Acredito ser uma colocação interessante, pois ela falou que o aluno só errou na contagem, mas que desenvolveu uma estratégia inteligente para resolver a questão. Diversas vezes Doroti mencionou que a contagem não era uma boa estratégia, justificando que era muito fácil se errar na conta.

Por fim, propusemos a última questão com o enunciado dos ladrilhos. A menina entusiasmada foi logo respondendo e riscando a folha, enquanto a enfermeira estava buscando outra vez algo que fora dito na oficina para ser aplicado nessa questão. Ao criar expressões algébricas que definissem o número de azulejos, Maurina pediu que eu conferisse se estava correto. Apesar de ela estar explicando a questão aos ouvintes, não se constrangeu em requisitar meu auxílio.

Ao encerrar a oficina, os ouvintes disseram que estavam satisfeitos. Em especial, a professora de Geografia justificou que gostou da oficina porque todos tinham tido oportunidade de se colocar no lugar do aluno: “A gente passa pelas mesmas dificuldades”.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia deste estudo foi imposta pelo próprio contexto. Através do contato com o grupo de alunos-professores que participavam de Curso de Matemática II ocorrido em 2006 e 2007, foi possível, além de observar, intervir intencionalmente no processo de pesquisa-ação de duas alunas-professoras. A metodologia proporcionou um estreito contato com os sujeitos da pesquisa, possibilitando a obtenção de dados capazes de responder ao objetivo do presente estudo: *investigar quais as mudanças de percepção dos professores sobre o tema observação e generalização de padrões ao vivenciarem um processo de pesquisa em sua própria sala de aula.*

Segundo Saraiva & Ponte (2003, p. 4), “o desenvolvimento profissional envolve sempre alguma aprendizagem e, por conseqüência, alguma mudança”. O processo de formação continuada descrito nesse estudo instigou mudanças na percepção de Maurina e Doroti sobre o tema observação e generalização de padrões, mudanças que só se justificam por terem sido desejadas pelas participantes.

É possível notar a aprendizagem, e portanto alguma mudança, de Maurina ocorrida durante o processo, quando esta adquiriu a capacidade de ver, ouvir e fazer coisas que não fazia antes. Já no processo de Doroti nota-se que a mudança só ocorreu porque a aluna-professora se sentia dentro da situação e de posse do processo de tomada de decisão.

Os dados obtidos apontam uma variedade de aprendizagens, algumas diretamente relacionadas com a temática do grupo – a observação e generalização de padrões – e outras relacionadas com os métodos de pesquisa privilegiados no grupo – a pesquisa sobre a própria prática utilizando a metodologia inspirada na engenharia didática.

O presente trabalho traz ainda contribuições para o estudo de condições que promovam um posicionamento diferente dos professores em sua atividade profissional. Segundo Saraiva e Ponte (2002, p. 3),

> Mais do que falar em promover a mudança das concepções e práticas dos professores, faz sentido estudar as condições que promovam um posicionamento diferente na sua actividade profissional, tomando iniciativas para equacionar e resolver os problemas que se lhes colocam no dia-a-dia.

No início do curso os alunos-professores presentes relataram que trabalhavam esporadicamente ou não trabalhavam com a observação e generalização de padrões via seqüências, resultado este também obtido na pesquisa de Almeida (2006). No entanto, decorridos alguns encontros do curso, os alunos-professores passaram a localizar questões que envolvem o tema dentro de sua sala, reconhecendo-os como parte de sua rotina escolar. Há registros de alunos-professores que citavam exercícios trabalhados em sala envolvendo o tema observação e generalização de padrões durante as reflexões do grupo.

Não há elementos que me dêem condições de afirmar que todos os alunos-professores passaram a utilizar atividades sobre a observação e generalização de padrões em suas aulas. Porém não se pode descartar tal possibilidade já que Maurina disse ter notado o grande interesse dos alunos em resolver os desafios presentes no livro didático. A aluna-professora explicou que começou a indicar aos alunos tais questões antes ignoradas. Devemos atentar para a denominação utilizada por Maurina. A análise de seu depoimento indica que as atividades de generalização são para ela desafios, e que merecem valor.

O material apresentado aos alunos-professores foram indutores de reflexão. Os diversos tipos de seqüências – figurativas, numéricas, mistas – expostos no material parecem ter inspirado os participantes na elaboração de atividades que serviram como instrumento de pesquisa para a investigação em sua própria sala de aula. Notamos que Maurina utilizou uma seqüência numérica em seu instrumento de pesquisa que pode ter sido inspirada na adaptação do texto de Perez (2006). Outro aluno-professor criou uma questão para a 7ª série, também apresentada na oficina de 2006 e 2007 (ver Anexo F), que pode ter sido inspirada na quinta situação apresentada no artigo de Miguel *et al.* (1993).

Os resultados das pesquisas dos alunos-professores indicam que é possível desenvolver atividades de observação e generalização de padrões na sala de aula e que esse trabalho oferece vantagens para professores e alunos. Alguns desses resultados são corroborados por pesquisadores citados no referencial teórico. As pesquisas mostraram, por exemplo, que os alunos não apresentam dificuldades em responder qual o próximo termo de uma seqüência, resultado também mencionado no artigo de Becker & Rivera (2006).

Quando solicitada uma nova seqüência, notamos que a maior parte dos alunos cria seqüências baseadas no enunciado que a questão apresenta. Quando apresentada uma seqüência numérica, os alunos criavam uma seqüência numérica. Quando apresentada uma seqüência figurativa, os alunos criavam uma seqüência figurativa. Dos 32 protocolos obtidos por Maurina, vimos que 27 apresentavam uma seqüência numérica. Dessas seqüências, 16 eram formadas pelos números ímpares.

Como apontado por Zaskis & Liljedahl (2002, p. 400), "existe um vão entre a habilidade para expressar generalidades verbalmente dos estudantes e sua habilidade para empregar notação algébrica confortavelmente"[27]. Muitos alunos mostraram pensar algebricamente, mas nenhum deles empregou uma notação algébrica formal. Os estudantes explicitavam, por meio da língua natural, uma generalização.

A investigação de Maurina mostrou que os alunos da 5ª série/ 6º ano possuem dificuldade com o vocábulo "termo". Essa observação alertou e auxiliou o grupo na elaboração de enunciados de problemas de outras pesquisas realizadas posteriormente.

A figura do instrumento de pesquisa de Doroti desempenhou um papel importante para a primeira fase da generalização: a observação. Ela permitiu ao aluno interagir com a questão e manipular os dados.

As pesquisas realizadas pelos professores apontam para a predileção dos alunos pela estratégia de contagem. Desse modo, o grupo passou a investir mais esforços em propor situações que levassem o aluno a desistir dessa estratégia e a procurar novos caminhos mais eficientes.

As pesquisas trouxeram reflexões tanto sobre o tema observação e generalização de padrões, quanto sobre temas relacionados à prática das professoras em sala de aula. Maurina percebeu a importância de retomar os números ordinais, enquanto Doroti notou uma oportunidade de dar significado ao resto de uma divisão.

O envolvimento com a pesquisa também ofereceu ao grupo oportunidade para refletir sobre o contrato didático, a postura e o papel do professor na sala de aula.

A metodologia de pesquisa utilizada pelos alunos-professores, baseada na engenharia didática também foi geradora de aprendizagens. Inicialmente Maurina e Doroti mostraram preocupação com a ordem e a disciplina dos alunos na sala de aula. Maurina, por exemplo, no planejamento de sua pesquisa já previa a dificuldade que os alunos teriam em se concentrar para a primeira fase da generalização: a observação.

Acredito que a decisão de aplicar o instrumento de pesquisa individualmente seja uma evidência dessa preocupação. Maurina optou por aplicar sua pesquisa

---

[27] There is a gap between students´ ability to express generality verbally and their ability to employ algebraic notation comfortably.

individualmente justificando que eram “alunos inquietos”, “crianças ativas e falantes”. E mesmo depois de Sílvia comentar sobre as vantagens de aplicar o instrumento de pesquisa em duplas, Maurina manteve sua decisão. No ano seguinte, Doroti também mostrou preocupação com a aplicação da atividade em duplas. Ela perguntou se não poderia escolher os alunos que formariam tais duplas, pois sabia que alguns alunos não contribuem da mesma forma em trabalhos em grupo.

A preocupação em se optar pelo trabalho em dupla não era exclusiva de Maurina e Doroti. Parecia existir uma preocupação em saber individualmente do que cada aluno é capaz. Outra aluna-professora comentou inclusive que se aplicasse a pesquisa em dupla, os alunos iriam ajudar um ao outro, numa conotação negativa para os resultados da pesquisa.

Após o primeiro semestre de curso, houve uma mudança no planejamento das pesquisas na decisão de trabalhar em duplas. Se, no primeiro semestre, os alunos-professores optaram pelo trabalho individual, nas pesquisas seguintes, todos optaram pela aplicação em duplas.

Os alunos-professores notaram que os dados obtidos nas pesquisas em duplas eram mais ricos. Em vários momentos, Doroti mencionou empolgada, os comentários de seus alunos durante a aplicação da pesquisa. A aluna-professora concluiu também que as questões dissertativas contribuem para que o professor compreenda a estratégia utilizada pelo aluno. Maurina cogitou a gravação do trabalho de algumas duplas para auxiliar na compreensão e análise dos dados de novas pesquisas.

Havia uma preocupação sobre o nível de dificuldade na escolha da questão para o instrumento da primeira pesquisa das alunas-professoras que diminuiu nas pesquisas seguintes. Entre as duas seqüências numéricas[28] propostas para a primeira pesquisa por Maurina, a seqüência dos números pares foi escolhida. Doroti também elaborou duas propostas para o instrumento de pesquisa e, antes de discutir sobre elas no grupo, já antecipou sua escolha, justificando que a questão era mais fácil.

Em vários momentos, Maurina questionou sobre a dificuldade das questões. Ela argumentava que as questões não poderiam ser complicadas a ponto de desestimular os alunos.

Houve uma notável mudança no olhar de Maurina e Doroti durante a análise dos protocolos. Inicialmente elas procuravam a resposta para a questão, classificando os

[28] Maurina propôs a seqüência numérica 3, 8, 13, 18,... e a seqüência numérica 2, 4, 6, 8,...

protocolos em corretos e errados. Em conseqüência as duas alunas-professoras concluíram que os resultados da pesquisa não foram bons. Após nossa intervenção, de Sílvia e minha, as alunas-professoras mostraram maior esforço em compreender a estratégia que os alunos utilizavam.

É interessante notar que no primeiro encontro do curso a mudança de Maurina foi em parte influenciada por intervenções de Sílvia e minhas, enquanto que, no ano seguinte, Maurina contribuiu muito para a mudança de Doroti. Isso me faz refletir sobre a importância da reflexão entre pares para a ocorrência de mudanças significativas.

As reflexões sobre os diferentes olhares na análise dos protocolos foram tão marcantes para Doroti que, na oficina de 2007, ela julgou importante explicitar aos colegas o que aprendeu sobre como avaliar o trabalho dos alunos.

Pode-se notar uma mudança de postura de Doroti em sua relação com a pesquisa. Na discussão sobre o instrumento de pesquisa, quando um dos alunos-professores disse que a questão era demasiadamente difícil para os alunos, ela se opôs, argumentando que a pergunta deveria ser mantida a fim de “ver o que aconteceria”. Mostrando que Doroti não possuía mais a mesma preocupação de que os alunos respondessem corretamente.

Houve uma crescente autonomia das alunas-professoras no desenvolvimento do curso. E apesar da atenção dada à aplicação dos instrumentos nas pesquisas seguintes, não houve o mesmo empenho no planejamento.

Transformar as pesquisas de Maurina e Doroti em artigos contribuiu para a credibilidade das pesquisas acadêmicas. Se antes os professores mostraram aversão aos resultados dos pesquisadores, agora eles estavam compreendendo e atuando nesse processo. Maurina e Doroti concluíram que é possível trabalhar com atividades de observação e generalização de padrões em sala de aula e que essa prática oferece diversas vantagens.

Zeichner & Diniz-Pereira (2005) apontam a valorização dos resultados de pesquisa quando os professores vivenciam-a na pesquisa-ação. Segundo Saraiva & Ponte (2003, p. 5) “o professor legitima uma teoria quando verifica que ela funciona na sua prática”. Acredito que o Curso de Matemática II contribuiu para diminuir a segmentação entre o meio acadêmico e a escola, sendo possível inclusive ver algumas estratégias propostas por Zeichner & Diniz-Pereira (2005): discussão sobre o significado e a importâncias das investigações acadêmicas, desenvolvimento de projetos de pesquisa em colaboração com os professores de escolas e o apoio a projetos de pesquisa-ação desenvolvidos pelos educadores.

Maurina e Doroti citaram o reconhecimento dos alunos como um ganho pessoal. Explicaram que os alunos valorizam os professores que participam de cursos de atualização e estão dispostos a ajudar tais professores.

No início do grupo, havia um trabalho cooperativo estabelecido. Em relação à professora Sílvia, acredito que existiu sempre uma relação de hierarquia, por isso suas opiniões tinham grande relevância e direcionavam o grupo. Porém há indicações de que, com o andamento do curso, os outros participantes desenvolveram um trabalho colaborativo, ainda que existissem momentos de conflito. Segundo Boavida & Ponte (2002, p. 4), "para Wagner a colaboração representa uma forma particular de cooperação que envolve trabalho conjuntamente realizado de modo a que os actores envolvidos aprofundem mutuamente o seu conhecimento".

Fiorentini (2004) apresenta tópicos do que poderia ser concebido por como trabalho colaborativo. Alguns deles estão presentes no Curso de Matemática II e são apontados a seguir.

Maurina e Doroti participaram voluntariamente, ambas com o objetivo de obter respostas a dificuldades da prática docente. Apesar de Doroti ter mencionado que era uma "participação obrigatória", ela poderia ter se inscrito em outros cursos, como já havia feito anteriormente. De fato, Doroti optou pelo Curso de Matemática II depois de assistir à oficina de 2006.

Apesar da grande dificuldade em reservar um tempo para as atividades do grupo, as professoras se adequaram às tarefas. Doroti comentou que a licença prêmio obtida na escola estadual foi de grande importância para a realização de sua pesquisa.

Houve momentos de conversa informal durante o encontro, principalmente nos intervalos para o café. Cada participante do grupo tinha liberdade para falar e ouvir. Liberdade esta conquistada a cada etapa do crescimento de sua pesquisa. Os participantes possuíam pontos de vista diferentes e nem por isso a confiança e respeito deixaram de existir.

Os encontros eram organizados e as metas e objetivos negociados pelo grupo. As pesquisas, do planejamento à análise dos protocolos, eram socializadas com o grupo e os artigos escritos para a revista PROVE eram publicados, estando disponíveis também para aqueles que não integravam o Curso de Matemática II.

Auxiliei Maurina na pesquisa-ação realizada por ela. Existiram alguns episódios que justificam a classificação desse trabalho como colaborativo. O convite de Maurina para que eu realizasse a entrevista com seus alunos é uma indicação de que existia uma relação de confiança entre nós. Uma demonstração de autonomia da aluna-professora e de segurança dentro do grupo. Na oficina de 2007, Maurina não se constrangeu ao pedir minha opinião sobre a forma de escrever algebricamente um padrão em meio a outros professores que não integravam o curso.

É possível notar uma diferença hierárquica entre Sílvia e Doroti, quando a aluna-professora não se opõe às observações dos protocolos de sua pesquisa. Diferentemente do que ocorreu quando do encontro entre Doroti e mim, no qual a aluna-professora apontava abertamente sobre as observações que deveriam constar ou ser retiradas do artigo.

No entanto deve ficar claro que durante as análises dos protocolos, as orientações da professora Sílvia nem sempre foram aceitas sem debate. O conflito de idéias faz parte da natureza de uma pesquisa coletiva e sua existência não implica que a pesquisa seja não-colaborativa.

Havia maior cumplicidade entre os alunos-professores que trabalhavam na mesma escola. Eles mostravam maior autonomia para se organizar e ofereciam ajuda aos colegas. Os professores que possuíam maior "domínio" dos conteúdos matemáticos também pareciam mais confortáveis para participar das discussões do grupo.

O ambiente de colaboração, no qual foram reunidas diversas experiências, competências e perspectivas, inspirou maior segurança ao promover mudanças e iniciar inovações nos métodos de trabalho em sala de aula. Ponte & Serrazina (2003, p. 57) afirmam que para que o grupo seja coeso, além dos objetivos comuns, é importante que existam "objectivos individuais, ligados à sua função profissional, à sua personalidade, aos seus projectos, pois isso reforça naturalmente o seu [do professor] envolvimento no trabalho e o seu sentido de realização pessoal".

A dinâmica do curso foi enriquecedora, mas como no trabalho colaborativo de Ponte & Serrazina (2003), não foi isenta de problemas e percalços. Houve uma alta rotatividade dos integrantes do grupo, principalmente no primeiro semestre de 2006. Embora o curso fosse previsto para professores da 5ª a 8ª séries (6º ao 9º ano) do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, no primeiro semestre de 2006 participaram também duas professoras da 3ª série (4º ano) do Ensino Fundamental. Essa heterogeneidade pode ter contribuído para a inibição ou desinteresse de alguns participantes.

O artigo de Boavida & Ponte (2002) aponta para dificuldades com circunstâncias externas como, por exemplo, compromissos que diminuíam o tempo para o trabalho coletivo. Tais circunstâncias também estiveram presentes nesta investigação: greves de professores, assembléias e manifestações atrapalharam a organização de um calendário para o curso.

O comprometimento dos professores foi a principal dificuldade no início do curso. As propostas fixadas e assumidas pelo próprio grupo para cada encontro eram muitas vezes esquecidas ou feitas às pressas momentos antes de serem apresentadas, apesar de existir um intervalo entre os encontros de cerca de um mês. Esse fato me levou a questionar se a periodicidade estabelecida, uma reunião por mês, é adequada a um curso com essa proposta.

Os alunos-professores muitas vezes mostraram falta de iniciativa para redigir o planejamento ou a análise dos protocolos. Não significa que eles não tivessem elaborado um roteiro para aplicar seu instrumento de pesquisa ou que não refletissem sobre a análise dos protocolos, relatando inclusive alguns resultados. Nas discussões, os alunos-professores expunham oralmente muitas reflexões, mas havia uma grande dificuldade para a obtenção destes dados na forma escrita. Doroti comentava inclusive sua aversão em escrever e cita isso como uma característica dos professores da área de Matemática.

Algumas medidas ajudaram o crescimento do grupo. Escolher a pesquisa de Maurina para a publicação do artigo do grupo aumentou sua auto-estima. Nos encontros que se seguiram, ela parecia mais confiante e não se amedrontava em expor suas opiniões ou compartilhar suas experiências. Doroti também sentiu-se valorizada e reconhecida por seu trabalho.

O respeito aos conhecimentos dos professores sobre a prática quotidiana foi importante para a manutenção da confiança no grupo. Ainda que tenha sido apresentada uma metodologia de pesquisa inspirada na engenharia didática, os professores puderam recorrer a experiências anteriores. Maurina elaborou um planejamento inicial bem estruturado, com a hipótese a ser investigada, o que deveria observar e a metodologia, que pode ter sido inspirado pela experiência em outros cursos ou em sua formação inicial em Biologia.

Nesse curso, os professores foram tratados como profissionais que pensam, têm autonomia para decidir como relacionar o conhecimento atual do aluno com o novo conhecimento e como fazer uso desse conhecimento em classe.

A investigação de padrões em seqüências revelou-se um tema abrangente e estimulante para os professores. E a pesquisa-ação realizada por professores lado a lado com pesquisadores por um período de tempo revelou ser um ambiente favorável a mudanças e ao aperfeiçoamento profissional.

As reflexões apresentadas nesse estudo sugerem novas questões a serem investigadas. Uma delas questiona qual o tempo necessário para que o professor seja sensibilizado sobre a importância do desenvolvimento de habilidades e competências propiciadas pelas atividades de observação e generalização de padrões no equacionamento de problemas.

Os pesquisadores Zazkis & Liljedahl (2002) notaram que soluções que não envolvem o formalismo algébrico são consideradas inadequadas pelos estudantes. Não notei o mesmo fato nos professores do curso. Eles procuravam apenas as respostas mais adequadas. Será que os professores não estão preocupados com a notação algébrica? Qual a importância que eles dão ao formalismo?

Há diferentes tipos de seqüências; numéricas, figurativas e geométricas. Será que existe maior vantagem em utilizar determinado tipo de seqüência em atividades de observação e generalização de padrões? Qual tipo de seqüência contribui mais para a observação e para o desenvolvimento da habilidade do aluno em empregar a notação algébrica confortavelmente?

Durante o Curso de Matemática II, alguns alunos-professores utilizaram instrumentos de pesquisa com seqüências numéricas e outros com seqüências figurativas. Segundo Becker & Rivera (2006), há indivíduos predominantemente generalizadores numéricos, indivíduos predominantemente generalizadores geométricos e outros mistos. Questiono se existe alguma preferência por parte dos docentes e se essa preferência pela generalização numérica ou pela generalização geométrica interfere no desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno.

Finalizo concluindo que o presente trabalho contribui na investigação de como a observação e generalização de padrões se constitui no nível docente além de oferecer elementos para a reflexão sobre qual a álgebra a ser ensinada na formação de professores que ensinam Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M. M. M. de. *Estratégias de generalização de padrões de alunos do ensino fundamental do ponto de vista de seus professores.* 2006. 97f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da matemática.* Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BARBIER, R. *A pesquisa-ação*. Tradução por Lucie Didio. Brasília: Líber Livro Editora, 2004. (Série Pesquisas em Educação).

BIGODE, A. J. L. *Matemática hoje é feita assim.* 5ª série. São Paulo: FTD, 2000.

BOAVIDA, A. M.; PONTE, J. P. *Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas.* 2002. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Boavida-Ponte(GTI).pdf>. Acesso em: 15 out. 2006.

BECKER, J. R.; RIVERA, F. Establishing and justifying algebraic generalization at the sixth grade level. In: NOVOTNÁ, J.; MORAOVÁ, H.; KRÁTKÁ, M.; STEHLIKOVÁ, N. (Org.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, v. 4, p. 465-472. Prague: PME. 2006.

BOOTH, W.C. et al**.** *A arte da pesquisa.* São Paulo: Martins Fontes, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: MEC/SEF, 1998. 3v.

CHEVALLARD,Y; BOSCH,M; GASCON, J. *Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.* Tradução por Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COELHO, S. P.; MARANHÃO, M.; MACHADO, S. D. A. Projeto: qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática?. In: *Anais do II SIPEM.* Santos, SP, 2003. CD-Rom.

COSTA, M. C.; CARVALHO, S.; *Padrões Numéricos e Seqüências*. São Paulo, Editora Moderna, 1997.

COSTA, N. M. L. da. *Formação de professores para o ensino da matemática com a informática integrada à prática pedagógica: exploração e análise de dados em bancos computacionais.* 2004. Tese (Doutorado em Educação (Currículo), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC/SP, São Paulo. p. 96-131.

______. da. Formação continuada de professores: uma experiência de trabalho colaborativo com matemática e tecnologia. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Org.). *A formação de professor que ensina matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 167-196.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A experiência matemática.* Tradução por Fernando Miguel Louro e Ruy Miguel Ribeiro. 1. ed. Lisboa: Gradiva Publicações, 1995.

DEVLIN, K. *Matemática: a ciência dos padrões.* Tradução por Alda Maria Durães. Portugal: Porto Editora, 2002.

ELLIOTT, J. Recolocando a pesquisa-ação em seu lugar original e próprio. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. de A. (Org.). *Cartografias do trabalho docente: professor(a) – pesquisador(a).* Campinas: Mercado de Letras, 1998. p.137-152. (Coleção Leituras no Brasil).

FERREIRA, A. B. H. *Novo Dicionário da Língua Portuguesa.* 1. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1975.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. de C.; ARAUJO, J. de L. (Org.). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p.47-76. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

FIORENTINI, D. *et al*. Formação de professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. *Educação em revista – Dossiê: Educação Matemática,* Belo Horizonte, UFMG, n.36, p.137-160, 2002.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos.* Campinas: Autores associados, 2006. (Coleção Formação de Professores).

FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Org.) *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática.* São Paulo: Musa Editora, 2005.

GARBI, Gilberto Geraldo. *A rainha das ciências: um passeio históricos pelo maravilhoso mundo da matemática.* São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

GARCIA, O. G. O projeto valorização do educador e os resultados da Prova Brasil. *Revista PROVE,* São Paulo, n.5, p. 02-03, nov. 2006. (Revista anual do Projeto de Valorização e Melhoria da Qualidade de Ensino).

IMENES, L. M.; LELLIS, Marcelo. *Matemática paratodos.* 5ª série. São Paulo: Scipione, 2002.

LATOUR, B. *Ciência em ação: como seguir cientistas e engenheiros sociedade afora.* São Paulo: Martins Fontes, 2000.

LEE, L. An initiation into algebraic culture through generalization activities. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Org.). *Approaches to Álgebra; perspectives for Research and Teaching.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. cap. 6. p.87-106.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.* Campinas, Papirus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática)

LONGEN, A. *Matemática em Movimento* 6ª série. São Paulo, Editora Moderna, 1999. p. 83-89.

LÜDKE, M.; ANDRE, M. E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, S. D. A. *Educação Matemática: uma introdução.* São Paulo: EDUC, 1999.

______. O aluno de quinta série é capaz de perceber e descrever regularidade em um padrão? *Revista PROVE,* São Paulo, n.5, p. 17-19, nov. 2006. (Revista anual do Projeto de Valorização e Melhoria da Qualidade de Ensino).

MASON, J. Expressing generality and roots of algebra. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Org.). *Approaches to Algebra; perspectives for Research and Teaching.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. cap. 5. p.65-86.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? *Pro-posições,* São Paulo, v.3, n.1, p. 39-54, mar. 1992. (Revista quadrimestral da Faculdade de Educação da UNICAMP).

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. *Pro-posições,* São Paulo, v.4, n.1, p. 78-91, mar. 1993. (Revista quadrimestral da Faculdade de Educação da UNICAMP).

PEREIRA, E. M. de A. Professor como pesquisador: o enfoque da pesquisa-ação na prática docente. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. de A. (Org.). *Cartografias do trabalho docente: professor(a) – pesquisador(a).* Campinas: Mercado de Letras, 1998. p.153-181. (Coleção Leituras no Brasil).

PEREZ, E. P. Z. *Alunos do ensino médio e a generalização de padrão.* 2006. 126f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, L. Professores e formadores investigam a sua própria prática: o papel da colaboração. *Zetetiké,* Campinas, v. 11, n. 20, p. 51-84, jul./dez. 2003.

RADFORD, L. Some Reflections on teaching algebra through generalization. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. (Org.). *Approaches to Álgebra; perspectives for Research and Teaching.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. cap. 7. p.107-111.

REEVES, C. A. *Problem-solving techniques helpful in mathematics and science.* Virginia: NCTM, 1987.

SANTOS, D. de O. Uma professora de matemática faz pesquisa na oitava série. *Revista PROVE,* São Paulo, n. 6, p. 19-20, nov. 2007. (Revista anual do Projeto de Valorização e Melhoria da Qualidade de Ensino).

SARAIVA, M.; PONTE, J. P. *O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática.* 2003. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Saraiva-Ponte(Quadrante).doc> Acesso em: 22 jan. 2008.

SILVA, B. A. da. Contrato Didático. In: *Educação Matemática: uma introdução.* MACHADO, S. D. A. (Org.). São Paulo: EDUC, 1999, p. 43-64.

VALE, I; PIMENTEL,T. Padrões: um tema transversal do currículo. *Revista da Associação de Professores de Matemática***,** Portugal, n. 85, p.14-21, nov./dez., 2005.

ZAZKIS, R; LILJEDAHL, P. Generalization of patters: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, Holanda, v. 49, n. 3, p. 379-402, 2002.

ZEICHNER, K. Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico. Tradução por Elisabete Monteiro de Aguiar Pereira. In: GERALDI, C. M. G.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. M. de A. (Org.). *Cartografias do trabalho docente: professor(a) – pesquisador(a).* Campinas: Mercado de Letras, 1998. p. 207-236. (Coleção Leituras no Brasil).

ZEICHNER, K. M.; DINIZ-PEREIRA, J. E. *Pesquisa dos educadores e formação docente voltada para a transformação social.* 2005. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/cp/v35n125/a0535125.pdf>. Acesso em: 22 jan. 2008.

ANEXO A

<u>Adaptação do texto da dissertação de Perez (2006) com introdução dada aos professores</u>

Retirei este texto do trabalho de um aluno do mestrado, só para vocês terem um exemplo. Essa aluna trabalhou com alunos do 1º ano do Ensino Médio, e naturalmente deu outras seqüências mais complicadas. Quem for trabalhar com alunos do Ensino Fundamental naturalmente terá de adaptar as estratégias a aquilo que julgarem próprio para essa idade. Isto é só um exemplo...

<u>Procedimentos metodológicos</u>

Para minha pesquisa, decidi selecionar alunos de uma escola pública, por ter maior concentração de alunos e também por esse tipo de ensino ser mais carente de subsídios, podendo de uma certa forma com os resultados da pesquisa, contribuir para o trabalho dos professores, visando assim melhoria do ensino.

A escola se localiza em Monte Mor, cidade próxima de Campinas. A opção por essa escola se deu pelo fato de que moro nessa cidade e trabalho nessa escola. Esses fatos acrescido ao fato de que a diretora tem boa vontade com a realização de pesquisas que possam colaborar para a melhoria do ensino, justificam a escolha feita.

Em conversa com a diretora da escola selecionada, ela se disse muito honrada por ter escolhido sua escola para realização da pesquisa, na mesma conversa após a obtenção de sua permissão expliquei como desenvolveria a parte empírica: em que então o nível , período, sala, e também disse das providencias que tomaria em relação a aquiescência dos pais doa alunos.

Conforme combinado anteriormente com a diretora, durante o horário de trabalho coletivo, conversei com os dois professores, que lecionam nas séries dos alunos com os quais pretendia trabalhara (1ª ano - professor A e no 2º e 3º ano - professor B), pedindo permissão para convidar alunos voluntários que pudessem contribuir para o desenvolvimento de minha pesquisa.

Após a autorização dos professores, estive nas classes explicando que precisaria de alunos voluntários para participar de minha pesquisa, cujos resultados visam contribuir para o ensino de Matemática, e que o estudo seria realizado na escola, em período contrário ao horário de aula. Eles foram notificados antecipadamente, de que a pesquisa não será avaliativa, nem terão uma nota no bimestre, a escolha será de forma aleatória, levando em conta somente o fato de que seria necessário que os mesmos fossem comprometidos e gostassem de participar de atividades extra-classes, pois esta será desenvolvida fora do horário de aula, provavelmente no período da tarde, (pois é quando a escola disponibiliza uma sala de aula ociosa já que as aulas normais desenvolvem-se no período da manhã), e que seriam duas ou três sessões de aproximadamente 50 minutos cada.

Elaborei uma carta aos pais, garantindo o anonimato dos alunos.

Para iniciar as atividades propostas, foram escolhidas 3 classes do ensino médio do período da manhã, uma do 1º, 2º e 3º, contando com uma ou duas dupla de cada classe. As salas foram propositalmente escolhidas por se tratarem de séries nas quais não leciono, motivo principal da escolha, e pela disponibilidade do aluno, que em geral estuda no período da manhã e não trabalha, podendo comparecer à escola em período contrário.

Conforme já citado acima, para garantir o empenho dos pais no comparecimento dos alunos voluntários, foram notificados através de uma carta onde contávamos de uma autorização e uma carta explicativa garantindo o anonimato de seu filho.

Após a conversa com os alunos, solicitarei que colocassem seus nomes, e o horário de disponibilidade em uma planilha para que eu, em seguida agrupe-os em horários próximos uns dos outros. Não levarei em consideração o sexo do aluno, podendo montar duplas de meninas, meninos ou menino e menina.

Dependendo o número de alunos voluntários, se ultrapassasse duas duplas por sala, faria uma seleção, analisando as fichas individuais de cada um, documento este, fornecido pela escola, que constam seu rendimento, principais dificuldades e relacionamento em sala de aula (participação). Dessa forma, optarei pelo aluno que apresentar melhor rendimento.

Conforme já citado, as atividades serão feitas em dupla para facilitar a observação de como o aluno está pensando, pois para realizá-las terão que, necessariamente, conversar sobre o problema facilitando a filmagem e/ou gravação e a observação, para depois realizar a entrevista.

Minha opção por dupla, foi também com a intenção de praticar a expressão oral e escrita, o convívio em grupo, a troca de informação, a discussão sobre os procedimentos e estratégias para a resolução das atividades, levantamento de conjecturas e hipóteses, para que façam comentários e chegue a conclusões comuns, visando com isso, o enriquecimento de cada um deles.

Material utilizado

O material usado na coleta de dados foi um instrumento diagnóstico impresso em folha A4, constituído de 4 páginas e um gravador portátil para cada dupla. Na 1ª sessão foram proposta 4 atividades com 2 questões em cada página que chamei de a) e b), totalizando 4 páginas, após o término de cada atividade, a dupla /tríade solicitava a próxima.

Na 2ª sessão foi proposta uma atividade, constando 6 questões. Cada questão impressa em folha A4 seguindo os mesmos procedimentos da 1ª sessão. O tempo máximo de resolução para cada sessão foi de 60 minutos.

Os alunos foram orientados a resolver as questões a caneta; em caso de engano recomendei que passassem um risco sobre o que haviam feito e fizessem o que achassem certo em outro espaço em branco, e que não iriam usar borracha e nem corretor, pois suas dúvidas eram importantes para a minha pesquisa.

Atividade I

Objetivo: O objetivo principal dessa primeira atividade é o de apresentar uma seqüência que seja facilmente perceptível, via observação da seqüência para não correr o risco de intimidar o aluno com um problema de difícil resolução. É por esse motivo que a seqüência numérica repetitiva admite somente duas possibilidades, facilitando a percepção da correspondência entre a posição do elemento na seqüência e número que representa essa posição.

Um aluno ao observar a seguinte seqüência:

1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, ...

Diz que encontrou o próximo termo e que também foi capaz de encontrar o 127º termo.

Como você responderia as seguintes questões:

a) Qual é o próximo termo dessa seqüência?

b) Qual é o 127º termo da seqüência?

<u>Possíveis estratégias de resolução:</u>

(Questão a)

E1.[29] O aluno observa a seqüência e verifica que o próximo termo da seqüência é 1.

(Questão b)

E1. O aluno faz a relação entre as posições pares e impares, e observará que o número 1 se relaciona com as posições impares e o número 6 com as pares, logo o número que está na 127ª posição é impar, concluindo que será o nº 1. O aluno faz essa relação dependência implicitamente.

Posições impares $\rightarrow 1$

Posições pares $\rightarrow$ 6

E2. O aluno continua descrevendo a seqüência até o 127º termo. Concluindo que o 127º termo corresponde ao número -1.

E3. A seqüência pode ser escrita como uma função f: N$\rightarrow$A, dessa forma o aluno poderia escrever, de forma explicita a função

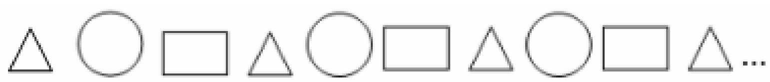
$$f(x) = \begin{cases} -1, se\ x\ for\ ímpar \\ 6, se\ x\ for\ par \end{cases}$$

Concluindo que a 127ª posição é par, correspondendo ao número -1.

<u>Atividade II</u>

<u>Objetivo:</u> Apresentar uma seqüência geométrica, não numérica, que apresente um pouco mais de dificuldade que a atividade anterior. Tal seqüência deve exigir que o aluno perceba um padrão com a alternação de 3 elementos, e a visualização não seja imediata, pois os elementos apresentados devem se iniciar e terminar com a mesma forma geométrica, o que pode dificultar um pouco mais a percepção do padrão.

Um aluno ao observar a seguinte seqüência:



Diz que encontrou o próximo termo e que também foi capaz de encontrar o 127º termo.

Como você responderia as seguintes questões:

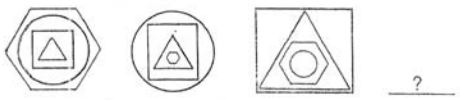
a) Qual é o próximo termo dessa seqüência?

b) Qual é o 127º termo da seqüência?

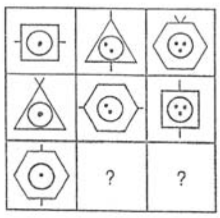
[29] Para efeito de compreensão, chamarei de E1- Estratégia 1, E2 - Estratégia 2, assim sucessivamente.

ANEXO B

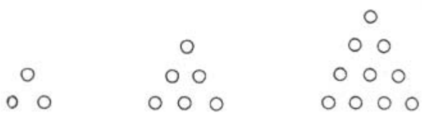
Questões retiradas de *Problem-solving techniques helpful in mathematics and science.*



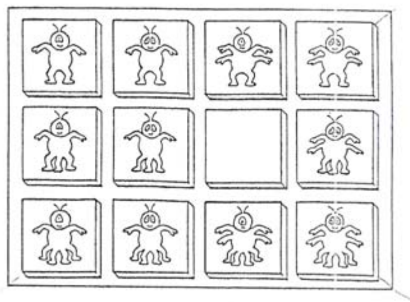
2. Draw the next two shapes around the question marks in the figure.



3. What is the next shape in this pattern?



4. Frances Lettieri made some space creatures called Zorkles—11 of the 12 creatures are shown below. Draw in the one that's missing by noticing the patterns.



Adapted from the *Arithmetic Teacher*, September 1978, pp. 36–39.

ANEXO C

Artigo que relata a pesquisa de Maurina

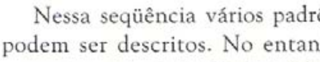
O aluno de quinta serie é capaz de perceber e descrever regularidade em um padrão?

Sílvia D. A. Machado[1]

A importância do tema

Em todos os aspectos da vida o homem é levado a procurar as regularidades para interpretar situações, dessa forma o fato de que os objetos caem em direção ao solo levou à idéia da força da gravidade, o fato de que a água aquecida se transforma de liquido em vapor levou à determinação do ponto de ebulição da água e assim por diante. Essas situações revelam um padrão. Mas não é só no mundo físico que encontramos padrões; Keith Devlin (2002) lembra que eles também existem no mundo das idéias e dos pensamentos. Segundo ele, estes padrões podem ser reais ou imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou recreativos. Em matemática a procura de regularidades para descrever padrões é tão importante que levou Devlin a colocar como título de seu livro a frase: "Matemática: A ciência dos padrões".

Em matemática, podemos descobrir padrões na geometria, como o apresentado pela seguinte seqüência[2]:



...

Nessa seqüência vários padrões podem ser descritos. No entanto, mesmo na natureza, podemos vislumbrar regularidades que podem ser descritas geometricamente como a da flor a seguir:

Para alguns matemáticos o interesse está em um tipo de padrão, cuja característica é de se repetir de forma regular até preencherem completamente uma figura geométrica, como o seguinte desenho do famoso artista holandês M.C.Escher:

Os padrões representados por números exigem uma observação mais "acurada", pois como disse Devlin estão no mundo das idéias. Na matemática escolar são estudadas as progressões aritméticas e geométricas, que não passam de seqüências onde se podem descrever algebricamente um padrão. No entanto existem outros tipos de padrões de números, mais simples ou mais complexos, como por exemplo: padrões de igualdade e desigualdade, padrões relacionados com o fato dos números serem primos ou compostos, de serem quadrados perfeitos, de satisfazerem várias equações etc.

Os PCN do Ensino Fundamental de 1998 confirmam a importância da aprendizagem algébrica, argumentando que o estudo da álgebra permite que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de ser uma poderosa ferramenta para resolver problemas e sugerem o trabalho com padrões desde a 6ª série do Ensino Fundamental. Nisso são tímidos, pois em outros países como nos E.U.A. sugere-se iniciar esse trabalho desde a 2ª série do ensino fundamental.

Vários pesquisadores como Mason e outros (1985) indicam o uso de padrões como assunto capaz de levar o aluno a conceber a álgebra como uma linguagem adequada para expressar regularidades, onde a generalização de padrão tem um papel importante.

A conversão do específico para o geral está presente em diferentes graus, em toda tarefa da matemática escolar, porque a generalidade e consequentemente a generalização permeiam todo o fazer e a aprendizagem matemática.

O artigo de Mason e outros, citado anteriormente, apresenta o "ciclo da generalização", isto é, da conversão do específico para o geral, como sendo: primeiro a percepção da generalidade, segundo, a expressão da generalidade, terceiro, a expressão simbólica da generalidade para finalmente atingir a manipulação da generalidade para resolver um problema.

A pesquisa

A professora Maurina despertada pela percepção da importância do assunto tratado no curso, decidiu elaborar um instrumento de pesquisa para verificar como seus alunos, de uma 5ª série da EMEF Zacarias, reagiriam, quando defrontados por uma situação que envolvesse a observação e generalização de padrão.

A classe de 5ª série selecionada possui 42 alunos, que freqüentam as aulas durante o terceiro período, das 15h às 19h. As crianças têm idades entre 11 e 12 anos, sendo que apenas três deles têm idade acima dessa faixa.

A professora avisou, um dia antes de aplicar o instrumento, o horário em que o iria realizar, dizendo que estavam livres de participar. É interessante narrar, que um dos alunos lhe perguntou o que lhe aconteceria se não fizesse a "tarefa" proposta, se ela ficaria sem nota, e ela respondeu, que se nenhum aluno "topasse", sim, ela não teria nota. Depois de mais algumas explicações os alunos lhe disseram que então, estavam dispostos a contribuir com sua participação na experiência.

O dia escolhido para a investigação foi um dia em que a classe tinha aula de matemática no último horário. Nesse dia compareceram 33 alunos. A professora entregou a cada um, duas folhas de papel sulfite, uma em branco para rascunho e outra com o seguinte texto:

A professora Maurina explicou aos alunos que não deviam apagar nada na folha, pois se errassem deviam passar um traço e começar novamente. Esta instrução foi dada para que fosse possível interpretar e acompanhar o raciocínio utilizado pelo aluno.

Após 20 minutos do início da atividade, os alunos que a concluíram puderam ser dispensados, pois era a última aula e assim, saindo da sala, não perturbaram os outros que ainda estavam trabalhando.

Descrição e análise dos dados

Dos 33 protocolos recolhidos, analisamos 32, pois um deles mostrou que o aluno tem problema de alfabetização, não tendo feito nada além de tentar copiar o enunciado escrito na folha.

Juliana entrevistou 4 dos 32 alunos, que participaram da pesquisa, pois a professora Maurina e Juliana julgaram que seus protocolos apresentavam alguns pontos, que valiam à pena explorar, para compreender melhor, com a explicação do próprio autor.

As descrições a seguir levaram em conta tanto os protocolos quanto os resultados das entrevistas.

Analisamos os dados de acordo com o "ciclo da generalização" de Mason e outros, adaptado e ampliado para o caso da seqüência numérica apresentada aos alunos. Dessa forma, o ciclo ficou conforme segue no quadro abaixo:

Essa descrição não supõe que essas etapas se dão de forma linear e estanque, ela foi feita pensando no que um aluno da 5ª série teria condições e alcance de fazer.

Em relação à **1ª pergunta**, que solicitava o próximo número da seqüência: 2, 4, 6, 8, 10,..., trinta alunos afirmaram corretamente que o próximo seria o número 12, mostrando que observaram que para encontrar o número bastava somar 2 ao último número apresentado na seqüência que era o 10.

Um aluno afirmou que o próximo era 12 ou 11, mostrando que observou que a seqüência é crescente, mas não estava certo sobre a pertinência de responder pela regularidade observada, ou pela seqüência dos números naturais. E outro aluno explicou na entrevista que encontrou o 12 "juntando o 2 do início da seqüência com o 10 do fim", neste caso parece que o aluno observou a seqüência como sendo números avulsos.

Dessa forma podemos afirmar que a maioria dos alunos, 30 em 32, observou a regularidade da seqüência apresentada, o que constitui um primeiro passo para a percepção da generalidade.

As **2ª e 3ª perguntas**: Qual o 36º

Você participará de uma pesquisa, para o sucesso da pesquisa é importante que você não apague os cálculos.

Se você precisar de outra folha peça a professora.

Não converse com seus colegas durante a resolução.

Você terá toda a aula para resolver, mas não poderá entregar antes de 20 minutos do início.

Observe a seqüência numérica: 2, 4, 6, 8, 10,...
Responda:

a) Qual o próximo número?

b) Qual será o 36º termo ou elemento da seqüência?

c) Explique como você encontrou esse número.

d) Crie uma outra seqüência diferente dessa.

- Observação e análise da(s) regularidade(s) da seqüência (crescente ou decrescente, como os números estão dispostos, a existência de vírgula entre eles, o que quer dizer os três pontinhos no final, etc.)
- Percepção da generalidade (reconhecendo que o próximo número é o 12)
- Expressão da generalidade (elucidando uma regra geral, verbal ou numérica, para gerar uma seqüência, como dizer que se trata da seqüência de números pares, ou a seqüência segue de dois em dois)
- Expressão simbólica da generalidade (obtendo uma fórmula correspondente a uma regra geral, em nosso caso implícita ou explicitamente, como por exemplo, para saber qual o numero se encontra em um determinado lugar basta multiplicar o número ordinal do lugar por 2 que se obtém o número cardinal do lugar).
- Manipulação da generalidade (resolvendo qual o termo que está no 36º lugar da seqüência).

termo ou elemento da seqüência? E explique como você encontrou esse número, serão analisadas em conjunto, pois uma depende da outra.

A professora Maurina observou que ao ler a questão, vários alunos perguntaram o significado da palavra termo. Outros perguntaram o que significava **36º**, isto é o número ordinal 36. Ao elaborar o instrumento ela não se deu conta dessa dificuldade.

Esta dificuldade pode ser resultado de uma ambigüidade da palavra, pois notamos que é possível entender "termo", como uma palavra que indica o fim ou como parte de uma expressão algébrica. Na questão proposta, o 36º termo correspondia ao número que ocupa a trigésima sexta posição na seqüência.

Apesar das perguntas feitas sobre o significado de termo e de 36º, não terem sido respondidas pela professora, alguns entenderam corretamente a pergunta: 3 disseram que multiplicaram 36 por 2 obtendo 72 e 4 desenharam a seqüência até obter o 36º termo que era o 72. Quatro alunos desenharam a seqüência, porém por erro de contagem ou por terem pulado um número par da seqüência, chegaram ao número errado (64,82 ou 84). Um outro aluno disse que depois do 36º viria o trigésimo sétimo termo da seqüência. Assim consideramos que doze alunos dos 32, não só observaram a regularidade como perceberam a generalidade, o que constitui a primeira etapa da generalização de padrão, segundo Mason. Sete alunos não perceberam que 36º é um número ordinal que indicava o lugar do elemento na seqüência e responderam, conforme a solicitação da 1ª questão, dando o número que segue o 36 na seqüência dos pares, que é o 38. Isto indica a necessidade de retomar com eles a questão dos números ordinais e seu significado.

Dos alunos que apresentaram outro tipo de resposta destacamos quatro deles, que desenharam a seqüência até o 36 e daí contaram os números ou simplesmente dividiram 36 por 2 e deram, em ambos os casos, a resposta como sendo 18. Isso mostra a confusão de interpretação de lugar com termo.

Um aluno respondeu que o 36º termo era o 40, e seu rascunho mostra, que ele escreveu a seqüência dos pares, de 2 até o 40, e contou os algarismos concluindo que até o zero do número 40 havia 36 algarismos. Neste caso houve uma confusão de contagem entre os números 10, 12,..., 40 e o total de 32 algarismos que os representam.

Vinte e sete alunos criaram seqüências com regularidade, como a solicitada pela **4ª questão** da atividade. Dezoito alunos criaram seqüências infinitas crescentes e nove criaram seqüências finitas, sendo que oito eram crescentes e apenas uma era decrescente.

Dos cinco restantes, quatro alunos criaram seqüências crescentes sem regularidades, duas finitas e duas infinitas e apenas um não respondeu a questão.

A professora Maurina notou que a atividade foi estimulante para os alunos que a realizaram mostrando interesse. Na aula seguinte quiseram saber o resultado e declararam ter gostado da experiência.

Considerações finais

É interessante notar que uma atividade aparentemente tão simples quanto esta deu oportunidade ao professor de perceber, que não todos, mas grande parte de seus alunos pareciam desconhecer ou ter esquecido da notação de números ordinais. Além disso, a atividade permitiu verificar que alguns dos alunos estavam confundindo número com os algarismos que o compõem, pois contaram, por exemplo, o número 32 como sendo dois números!

Essas revelações dão oportunidade ao professor de retomar esses assuntos, esclarecendo e aprofundando a compreensão sobre essas noções, que não tem a ver diretamente com o tema tratado, mas estão subjacentes aos conhecimentos que os alunos estão estudando na 5ª serie.

Outro comentário interessante é de que ao se solicitar que o aluno explique com suas palavras como pensou, deu se oportunidade a ele de retomar o exercício e expressar sua compreensão da atividade, levando-o a refletir sobre sua ação.

Finalmente queremos também comentar a riqueza da variedade, tanto de estratégias utilizadas pelos alunos, quanto da diversidade de seqüências criadas por eles.

Assim, finalizamos este artigo respondendo à questão de seu título: sim, o aluno de quinta série é capaz de observar e reconhecer um padrão além de em alguns casos expressar verbalmente ou por escrito uma regra que lhe permite indicar um termo qualquer da seqüência. E, se isso foi feito com alunos que nunca trabalharam esse tipo de atividade, imagine o que não conseguiriam se seus professores tratassem do tema em sala de aula!

Referências bibliográficas

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasil: SEF, 1998.

DEVLIN, K. *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto, Porto Editora, 2002.

MASON, J. e outros. *Routes to/Roots of Algebra*. The Open University Press, Great Britain, 1985.

PEREZ, E *Alunos do Ensino Médio e a generalização de padrão*. Dissertação de Mestrado defendida na PUC-SP, 2006.

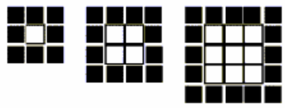
[1] Silvia D. A. Machado; *silviaam@pucsp.br*, do Programa de Estudos Pós-graduados em Ensino da Matemática na PUC de São Paulo, coordena o curso de Matemática II. Este artigo foi produzido com a pesuisa e participação de Maurina Izabel; *maurinaizabel@uol.com.br*, professora na EMEF Mauro Faccio Gonçalves - Zacaria e Juliana Grassmann; *jugrassmann@terra.com.br* aluna do Pós-graduação em educação matemática na PUCSP

[2] As figuras foram copiadas da dissertação de Elisângela Perez defendida na PUCSP em 2006.

ANEXO D

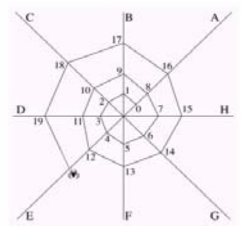
Questões desenvolvidas na pesquisa de Almeida (2006)

1. Uma seqüência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, como se segue: o primeiro é formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos, o segundo de quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos, e assim sucessivamente, como indica a figura. **Nos dois primeiros elementos da seqüência apresentam 20 azulejos pretos e 5 azulejos brancos.** Se numa seqüência de mosaicos formada de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados?



a)55; b) 65; c) 75; d) 85; e)100.

2. A,B,C,D,E,F,G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?

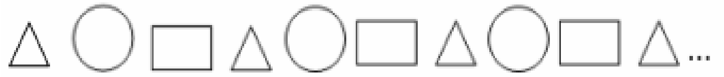


I)B; II) D; III) E; IV) G; V) H; VI) A; VII) C; (VIII) F.

3. Joana escreve a seqüência de números naturais 1, 6, 11, ... onde cada número, com exceção do primeiro, é igual ao anterior mais cinco. Joana pára quando encontra o primeiro número de três algarismos. Esse número é:
a)100 ; b) 104; c) 101; d) 103; e) 102

4. Um aluno diz que encontrou o próximo termo e que também foi capaz de encontrar o 127º termo. E você encontraria? Qual seria sua resposta?
1, 6, 1, 6, 1, 6, 1, 6,...

5. Um aluno diz que encontrou o próximo termo e que também foi capaz de encontrar o 127º termo. Como você responderia essas questões?



ANEXO E

Artigo que relata a pesquisa de Doroti

Uma professora de matemática faz pesquisa na oitava série

Doroti de Oliveira Santos[1]

Introdução

Participando de um curso de Matemática do Projeto de Valorização do Educador de escolas municipais de Campo Limpo, fui motivada a elaborar uma pesquisa sobre observação e generalização de padrões a uma de minhas salas de aula. Após estudar e analisar pesquisas sobre o assunto cada um dos professores-alunos do curso preparou e aplicou seu instrumento de investigação. A seguir descrevo como foi essa minha experiência com pesquisa.

Preparação da pesquisa:

- **Seleção dos sujeitos:**

Decidi aplicar a pesquisa a alunos de uma das 5 classes de 8ª serie de uma escola municipal da qual sou professora de matemática. Escolhi minha classe de coordenação.

Avisei os alunos da classe escolhida que faria uma pesquisa com eles sem dizer o dia em que isso ocorreria.

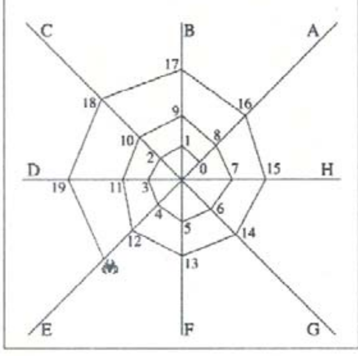
- **Elaboração do instrumento de pesquisa:**

A atividade proposta foi inspirada em uma questão da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas públicas destinada a alunos de 7ª e 8ª séries.

Após discussão com o grupo do curso, fiz algumas alterações na proposta original das Olimpíadas: 1º transformei a questão de múltipla escolha em uma pergunta mais aberta, com a finalidade de evitar "chutes" e obter dos alunos informações de como estavam pensando e quais as estratégias utilizadas; 2º aumentei o número do fio de apoio de 118 para 1773 com a intenção de que os alunos tentassem outra estratégia que a da simples contagem porque, o número sendo "grande", dificultaria essa estratégia.

A questão da pesquisa aplicada aos alunos foi a seguinte:

A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua. Com teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de fio de apoio estará o número 1773?



Instrumento da pesquisa

- **Aplicação do instrumento de pesquisa:**

Apliquei a pesquisa no dia 12 de junho das 10h20min às 10h50min.

Estavam presentes 25 alunos de uma classe de 34 da 8ª série selecionada. A coordenadora pedagógica da escola permaneceu juntamente comigo na sala, a fim de auxiliar na observação do desenvolvimento da atividade.

No dia da realização da atividade, disse aos alunos que o que fariam resultaria em uma contribuição para a melhoria do ensino de matemática. Contei a eles também que estava participando do curso e que os resultados da pesquisa ajudariam a melhorar não só nossa forma de ensinar, como a de outros professores de matemática.

Pedi aos alunos que se organizassem em duplas. Após entregar a cada dupla o instrumento de pesquisa pedi a eles que fizessem todos os registros dos cálculos e raciocínios na folha entregue para que eu pudesse analisar as estratégias empregadas.

Durante a aplicação o clima foi tranqüilo, todos os alunos presentes responderam a atividade voluntariamente, mostrando grande empenho.

Estabeleci 30 minutos para a feitura da atividade. Alguns alunos terminaram dentro do prazo dado e outros não, necessitando de um tempo maior.

- **Descrição e análise dos protocolos:**

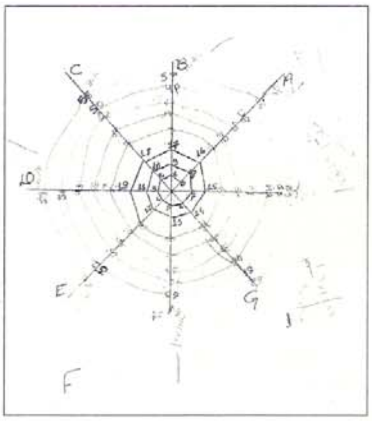
Após uma primeira observação dos protocolos sentimos necessidade de esclarecer algumas contas ou comentários neles presentes, para isso decidimos argüir alguns alunos. Durante a conversa com os alunos marquei em seus protocolos o que eles me explicaram.

A seguir passo a narrar os resultados e análises dos 13 protocolos, 12 respondidos em duplas, e um individualmente,

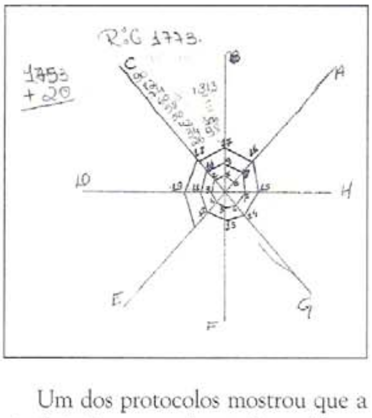
Observamos que em 11 protocolos os alunos continuaram o desenho da teia da aranha esboçando os fios de um ramo a outro. Isto mostra que a figura teve um papel importante na resolução dos alunos que tiveram que observá-la e em alguns casos até mesmo "completá-la".

Em 11 protocolos há evidências de que os alunos utilizaram como uma das estratégias a contagem. Desses apenas 4 não apresentam evidências da procura de uma outra estratégia. Em alguns casos, os alunos relataram que o tempo não foi suficiente para chegar a uma resposta, por isso "chutaram" um dos fios como solução.

Encontramos evidências claras de que, num dos protocolos os alunos da dupla observaram, depois de continuar o desenho da teia, que os fios A, C, E e G continham números pares e que os fios B, D, F e H números ímpares:



Em outro protocolo, a dupla marcou no fio C os números 2, 10, 18, 26, 34, mostrando ter percebido que os números aumentavam de oito unidades a partir do numero 2.



Um dos protocolos mostrou que a dupla iniciou a resolução do problema com a estratégia de contagem, e depois adotou outra estratégia: utilizou o maior número da figura, o 19 do fio D, como referência e o multiplicou por 70. Como o resultado não se aproximava de 1773, continuou a fazer contas de multiplicação, por 72, por 85, por 90 e por 93. Sua última conta deu 1767 como resultado, valor mais próximo de 1773. Mesmo fazendo uso de uma estratégia mais refinada, a dupla não percebeu que uma volta completa contém 8 fios de apoio.

É possível verificar um fenômeno comum em sala de aula em dois dos protocolos. Ambos iniciaram a resolução da atividade a partir da estratégia de contagem, num deles podemos verificar que somaram os valores das seqüências sobre os fios, enquanto no outro observamos multiplicações dos valores de um fio pelo fio seguinte. Está implícito que, num problema de matemática, a solução está no resultado de alguma conta onde todos os dados numéricos apresentados no enunciado devem ser utilizados.

Em dois protocolos observamos que as duplas, após verificar que a estratégia da contagem demandaria muito tempo, decidiram dividir 1773 por oito. Em ambas as contas obtiveram quociente 221 e resto 5, indicando que a aranha daria 221 voltas e andaria sobre mais 5 fios de apoio. Apesar de terem escolhido uma estratégia adequada, os alunos na entrevista declararam que não sabiam o que fazer com o resto. Isso parece indicar que o resto da divisão de números inteiros não tem significado para esses alunos.

Outra dupla também utilizou a estratégia da divisão por oito, sem nem mesmo ter continuado o desenho da teia. Esta dupla deu um significado adequado à divisão e ao seu resto respondendo que "o fio vai dar 221 voltas mais 5 fios".

A dupla descrita acima não deu mostras de que tenha utilizado a estratégia de contagem em seu protocolo. Do mesmo modo, outra dupla não fez uso da estratégia de contagem, mas utilizou um importante recurso matemático. A dupla representou os dados da figura em uma tabela, como segue.

A	16	8	0
B	17	9	1
C	18	10	2
D	19	11	3
E	12	4	
F	13	5	
G	14	6	
H	15	7	

Mesmo depois de utilizar diferentes representações para o problema, a dupla somou todos os valores disponíveis na tabela obtendo como resultado o 188.

Considerações finais

É necessário a aplicação deste tipo de atividade, levando à abstração e generalização. A estratégia da contagem é adequada para valores baixos, mas para valores altos, este procedimento se torna passível de erros.

A pesquisa mostrou que 75% dos alunos perceberam que a contagem demandaria muito tempo e recorreram a diferentes estratégias, mais elaboradas.

Todos os alunos foram capazes de observar padrões; alguns perceberam que em parte dos fios havia números pares e enquanto na outra parte havia números ímpares, outros perceberam que a seqüência sobre o fio de apoio aumentava de 8 em 8.

Metade dos alunos pesquisados mostrou algum tipo de generalização, sendo que metade destes elaboraram uma estratégia que determinaria o fio de apoio para um número qualquer.

Esta atividade mostrou-se um instrumento útil na prática cotidiana para verificar tanto conceitos matemáticos a serem rediscutidos em sala de aula quanto os diferentes olhares no momento de avaliar. Também foi observado que, para que haja uma melhor compreensão da estratégia utilizada pelo aluno, é necessário verificar todos os seus registros.

Deste modo, mostra-se importante tratar da divisão de números inteiros em sala de aula para que os alunos, revendo o assunto, passem a dar significado ao resto.

Foi possível constatar vantagens na aplicação desta atividade, que explora a observação e a generalização de padrões.

[1] Profa. da EMEF Mário Marques

ANEXO F

Apostila oferecida na oficina de 2007.

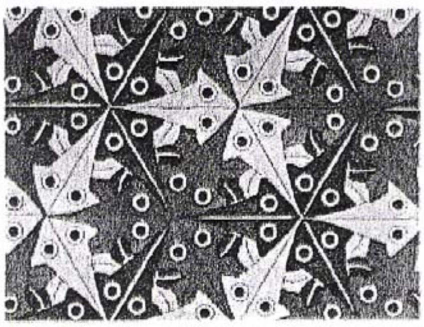
X Seminário

Inter-Escolas

Oficina de Matemática

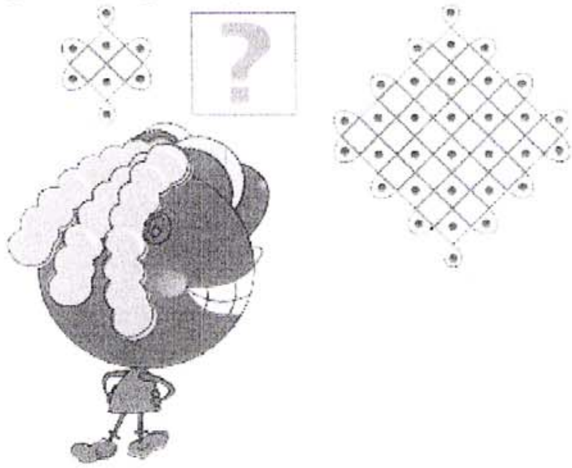
Ciclo II

Padrões



"Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens."
Descartes

Qual é a figura que falta?



Os dois desenhos aqui representados são típicos dos sona, desenhos na areia característicos da alguns povos africanos, como os Quiocos (Tchokwe) do nordeste de Angola (um dos Países Africanos de Língua Oficial Portuguesa – PALOP)

1. Imaginando um padrão que aumenta de tamanho, faz um esquema do desenho que logicamente estaria entre estes dois.

Sugestão

Procura padrões no desenho, incluindo o número e o arranjo de pontos, quadrados, ...
Observa como os pontos estão dispostos. Em filas?
E os arcos?
Consegues ver alguma relação entre os pontos, os arcos e os quadrados?
Quantos serão os pontos da figura que falta?

2. Se o padrão fosse aumentado para uma quarta figura, qual seria o arranjo dos pontos?

Esta actividade destina-se principalmente a alunos dos 5º, 6º e 7º anos de escolaridade.
Envolve o conceito de padrão.

Finalidades

Aplicar a noção de padrão a situações concretas.
Valorizar diferentes formas de conhecimento, comunicação e expressão.

Competências que contêm aspectos que podem ser desenvolvidos

Competências gerais

- Mobilizar saberes culturais, científicos e tecnológicos para compreender a realidade e para abordar situações e problemas do quotidiano;
- Usar adequadamente linguagens das diferentes áreas do saber cultural, científico e tecnológico para se expressar;
- Usar correctamente a língua portuguesa para comunicar de forma adequada e para estruturar pensamento próprio;
- Adoptar metodologias personalizadas de trabalho e de aprendizagem adequadas a objectivos visados;
- Pesquisar, seleccionar e organizar informação para a transformar em conhecimento mobilizável;
- Adoptar estratégias adequadas à resolução de problemas e à tomada de decisões;
- Realizar actividades de forma autónoma, responsável e criativa;
- Cooperar com outros em tarefas e projectos comuns.

Fonte: http://www.apm.pt/recursos/ciclo2/des_falta/desfalta.html

Seção livre

Quantas garrafas?

Júlia arrumou algumas garrafas de plástico, formando uma pilha com 4 garrafas na base e uma a menos em cada camada seguinte até ficar apenas **uma** no topo. Observe, na figura ao lado, como isso ocorreu.

4 garrafas

- Quantas garrafas ela empilhou? 10 garrafas.

O total de garrafas é **4 + 3 + 2 + 1**, ou seja, que pode ser também calculado escrevendo-se a **soma duas vezes**: do **4** ao **1** e do **1** ao **4**. Em seguida calculamos a soma e dividimos o resultado por **2**.

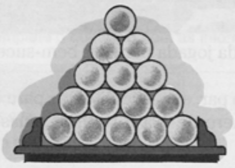
$$\begin{array}{r} 4 + 3 + 2 + 1 \\ + 1 + 2 + 3 + 4 \\ \hline \underbrace{5 + 5 + 5 + 5}_{20} \end{array}$$

4 × 5

É o **dobro** do **número de garrafas**.

dividimos por 2 → **20 : 2 = 10**

- A pilha abaixo tem **5 garrafas na base**. Quantas garrafas ela terá quando for colocada uma no topo? 15 garrafas.



6 garrafas

- Na pilha ao lado, a **base tem 6 garrafas**. Quantas garrafas terá essa pilha, quando ela estiver completa, como as anteriores? 21 garrafas.
- E se a pilha tivesse 20 garrafas na base, quantas garrafas ela teria ao todo? 210 garrafas.

Exemplos retirados do livro "Matemática: Idéias e Desafios" – 5ª. Série.
Profªs. Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga

Atividades desenvolvidas pelos professores do curso

5ª. e 6ª. Série

I) △ **A** , ▭ **B** , △ **AB** , ▭ **C** , △ **ABC** , ▭ **D** , ...

a) Qual o próximo elemento?

b) Qual o 10º elemento?

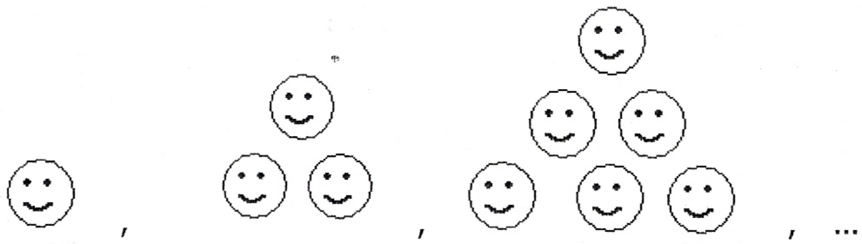
c) Qual o 13º elemento?

d) Crie uma seqüência diferente dessa.

7ª. Série

I - Observe a seqüência de figuras (carinhas) abaixo.

a) Indique a quantidade de "carinhas" de cada figura.



b) Desenhe as duas próximas figuras. Indique também o número de "carinhas" em cada uma delas.

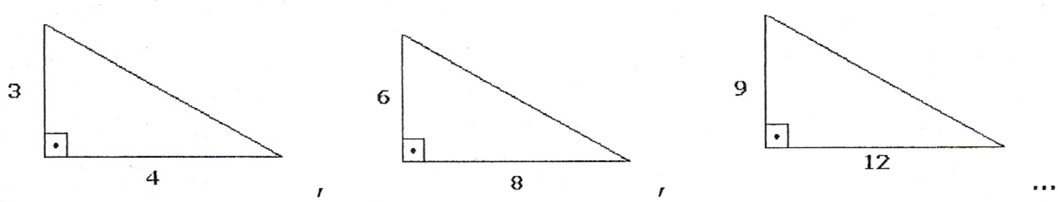
c) Quantas "carinhas" haverá na 10ª. Figura?

d) E a centésima figura, quantas "carinhas" terá?

e) Crie uma seqüência diferente dessa.

8ª. Série

II) Observe os triângulos:



Responda:

a) Como será o próximo triângulo?

b) Qual o perímetro desse triângulo que você descreveu?

c) Qual o perímetro do 15° triângulo da seqüência?

d) Crie uma seqüência.

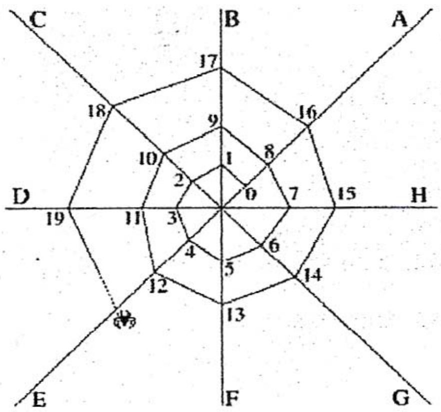
Instruções

Você participará de uma pesquisa, para o sucesso da pesquisa é importante que você não apague os cálculos.
Se você precisar e outra folha peça para a professora.
Não converse com seus colegas durante a resolução.
Você terá a aula toda para resolver, mas não poderá entregar antes de 20 minutos no inicio.

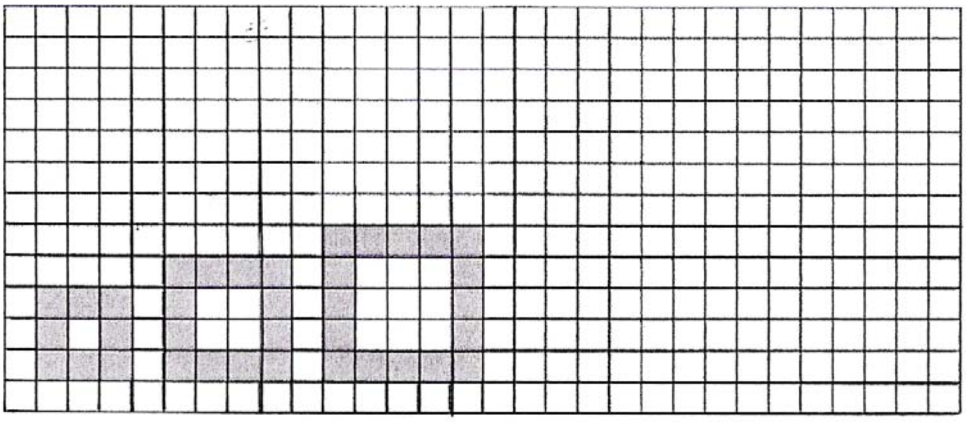
Observe a seqüência numérica: 2,4,6,8,10,...........
Responda:

a) Qual é o próximo número?
b) Qual será o 36ª termo ou elemento da seqüência?
c) Explique como você encontrou esse número
d) Crie uma outra seqüência diferente dessa.

A,B,C,D,E,F,G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 1773?



Uma seqüência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do mesmo tamanho, como se segue: o primeiro é formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos, o segundo de quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos, e assim sucessivamente. Observe a figura.



Número de azulejos brancos	$1 = 1^2$			
Número de azulejos pretos	8			
Total de quadradinhos	$9 = 3^2$			

1) Desenhe a quarta figura.
2) Preencha a tabela abaixo da seqüência.
3) Quantos azulejos pretos são necessários para construir a décima figura?
4) Nas duas primeiras figuras da seqüência, foram utilizados 20 azulejos pretos e 5 azulejos brancos. Se nessa seqüência de figuras forem utilizados 80 azulejos pretos, quantos azulejos brancos serão necessários?