

Tese de
Mestrado

**Renormalização a dois laços
do modelo $\frac{\lambda}{4!} \varphi^4$ sem massa
com condições de fronteira**

Martin Jesus Aparicio Alcalde

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Rio de Janeiro, Maio de 2006.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Resumo

Nesta tese estudamos o modelo $\lambda\phi^4$ associado a um campo escalar sem massa, definido num espaço Euclidiano onde assumimos que existe quebra de invariância translacional no domínio onde o campo está definido. Desta forma consideramos a presença de dois hiperplanos onde o campo escalar satisfaz condições de contorno de Dirichlet. A renormalização perturbativa ao nível de dois laços foi implementada. Primeiramente analisamos as funções de Schwinger de dois e quatro pontos ao nível de um laço, e mostramos que os contra termos usuais de volume são suficientes para tornar a teoria finita. Em seguida, analisamos o modelo ao nível de dois laços e mostramos que existe a necessidade de se introduzir contra termos de superfície para tornar a teoria finita.

Abstract

We study the $\frac{\lambda}{4!}\varphi^4$ massless scalar field theory in a four-dimensional Euclidean space, where all but one of the coordinates are unbounded. We are considering Dirichlet boundary conditions in two hyperplanes, breaking the translation invariance of the system. We study the perturbative renormalization up to two-loop level of the theory. First, analyzing the full two and four-point Schwinger functions at the one-loop level, we shown that the bulk counterterms are sufficient to render the theory finite. Second, at the two-loop level, we have to introduce surface counterterms only in the full two-point Schwinger function. To render the four-point Schwinger functions finite, it is sufficient to introduce bulk counterterms in the bare action.

Aos meu país

Agradecimentos

- Em primeiro lugar eu gostaria de agradecer ao CBPF pelas condições de trabalho concedidas e ao CNPq e FAPERJ pelo apoio financeiro.
- Ao meu orientador, Nami Fux Svaiter pela orientação e o estímulo constante para o trabalho.
- Ao meu co-orientador, Gabriel Flores, pelas discussões e o total apoio nesta tese.
- Agradeço também aos meus colegas , especialmente, Victor Vasquez, Aldo Arroyo, Manuel Eleuterio, Carlos Zarro, Gabriel Menezes e Marcela Campista que me acompanharam e estimularam durante todo este tempo enquanto a tese foi feita.
- A minha família, pelo amor e companhia espiritual.
- A todas as outras pessoas do CBPF que me ajudaram direta ou indiretamente.

Índice

1	Introdução	1
2	Condições de fronteira para os campos e algumas propriedades do propagador livre	5
2.1	As condições de fronteira para os campos	5
2.2	As funções de Green da teoria livre	7
2.3	Propriedades do propagador livre	8
3	Regularização das funções de Green de dois e quatro pontos a um laço	11
3.1	As funções de dois pontos a um laço	11
3.2	As funções de quatro pontos a um laço	14
4	Regularização das funções de Green de dois e quatro pontos a dois laços	19
4.1	As funções de dois pontos a dois laços	19
4.2	As funções de Green de quatro pontos a dois laços	23
5	Conclusões	42
A		44
B		46
B.1	Teorema I	46
B.2	Teorema II	47
B.3	Teorema III	48
B.4	Teorema IV	49

Capítulo 1

Introdução

Na mecânica estatística iniciamos as investigações sempre com sistemas definidos num volume finito, e o volume infinito é considerado posteriormente. Este procedimento é chamado na literatura de limite termodinâmico. Por outro lado, a teoria quântica de campos deve ser descrita por um número infinito de graus de liberdade. Uma linha de pesquisa que tem sido bastante investigada recentemente, é o estudo de campos quantizados definidos num volume finito, desde que tenhamos um mecanismo consistente de confinar o campo. Por exemplo, podemos assumir a presença de objetos macroscópicos onde os campos devem satisfazer determinadas condições de contorno. Se não levarmos em conta condições de contorno periódicas, que não nos trazem nada de novo do ponto de vista da renormalização, vemos que existe uma necessidade fundamental de se entender a dinâmica de campos quantizados na presença de objetos macroscópicos, de forma tal que a invariância translacional da teoria tenha sido perdida. Desta forma a questão que se coloca é a seguinte: como se implementa a renormalização perturbativa em modelos que são perturbativamente renormalizáveis, numa situação onde existe invariância translacional, se agora assumimos que temos quebra de invariância translacional. Lembremos que uma teoria é perturbativamente renormalizável se apenas um número finito

de parâmetros da teoria necessitam ser renormalizados [1].

Existem varios trabalhos na literatura discutindo a teoria quântica de campos na presença de fronteiras ou estruturas macroscópicas [2] [3]. Um modelo bastante estudado onde existe quebra de invariância translacional é o modelo de sacola do MIT (“MIT bag model”) [4]. Neste modelo, os campos associados aos quarks e gluons estão confinados ao interior de uma sacola. Sistemas onde existem efeitos de tamanho finito (“Finite size effects”) e não há quebra de invariância translacional também já foram bastante estudados na literatura [5]. Nestes trabalhos aparece a idéia de geração topológica de massa. Um trabalho seminal sobre a renormalização perturbativa associada a um campo escalar na presença de fronteiras foi realizado por Symanzik [6] a bastante tempo atrás.

Seguindo esta linha de pesquisa, Fosco e Svaiter [7], investigaram um modelo escalar anisotrópico num espaço Euclidiano d -dimensional, onde uma das dimensões foi compactificada, com perda de invariância translacional. Nesta situação, para se implementar o programa de renormalização, dentro da teoria de perturbações, estes autores encontraram uma dificuldade que não aparece quando trabalhamos num espaço sem fronteiras. A presença de restrições geométricas tornam a avaliação dos diagramas de Feynman muito mais complicada do que aqueles calculados num espaço sem fronteiras. Para sistemas onde temos a invariância translacional, podemos passar de uma representação de coordenadas para uma representação de momenta, onde fica mais simples a análise das divergências ultravioletas da teoria. Como neste modelo estudado por Fosco e Svaiter perdeu-se a invariância translacional numa das direções, deve-se trabalhar com as funções de Schwinger de n -pontos numa representação mista. Neste trabalho de Fosco e Svaiter o programa de renormalização foi implementado ao nível de um laço para a função de dois pontos

associada a campos que satisfazem condições de contorno de Dirichlet e Neumann respectivamente. A estrutura das divergências foi cuidadosamente analisada e foi mostrado que para estas duas condições de contorno temos apenas uma troca de sinal, na parte polar, na vizinhança das placas. O programa de renormalização implementado a nível de um laço para as funções de dois pontos e quatro pontos associadas a campos que satisfazem condições de contorno de Dirichlet foi finalizado por Caicedo e Svaiter [8]. A introdução de temperatura não apresenta nenhuma dificuldade. Recentemente Svaiter [9] investigou modelos escalares da teoria quântica de campos a temperatura finita e também efeitos de superfície. Sendo mais específico, foi estudado um campo escalar num espaço Euclidiano d -dimensional, onde uma das dimensões foi compactificada, com perda de invariância translacional. Na verdade foram generalizados parte dos resultados anteriores, pois foi suposto uma teoria escalar $\lambda\varphi^4$ em equilíbrio com um reservatório térmico. Nesta situação, como já discutimos, a presença de restrições geométricas torna a avaliação dos diagramas de Feynman muito mais trabalhosas do que aqueles calculados num espaço sem fronteiras, com o agravante que temos também que somar sobre as frequências de Matsubara. O programa de renormalização pode ser implementado sem dificuldade ao nível de um laço para a função de dois pontos e de quatro pontos, e a estrutura das divergências também pode ser analisada.

A pergunta que naturalmente se coloca, é se estes cálculos podem ser generalizados para dois laços ou até ir além desta aproximação. Nesta tese estudamos o modelo $\lambda\phi^4/4!$ associado a um campo escalar sem massa onde existe quebra de invariância translacional. Desta forma consideramos a presença de dois hiperplanos onde o campo escalar satisfaz condições de contorno de Dirichlet. A renormalização perturbativa ao nível de dois laços

foi implementada. Primeiramente analisamos as funções de Schwinger de dois e quatro pontos ao nível de um laço, e mostramos que os contra termos usuais de volume são suficientes para tornar a teoria finita. Em seguida, analisamos um modelo ao nível de dois laços e mostramos que existe a necessidade de se introduzir contra termos de superfície para tornar a teoria finita [10]. A questão se estes cálculos podem ser generalizados após uma resomação onde resultados não perturbativos seriam obtidos é ainda aberta na literatura. Ao longo desta tese usamos unidades naturais $c = \hbar = 1$.

Capítulo 2

Condições de fronteira para os campos e algumas propriedades do propagador livre

2.1 As condições de fronteira para os campos

O objetivo desta tese é mostrar como se implementa a renormalização perturbativa associada a um campo escalar quantizado na presença de estruturas macroscópicas onde o campo satisfaz condições de contorno clássicas. Por simplicidade vamos assumir que a constante de acoplamento que define a auto-interação é pequena, de forma que podemos utilizar a expansão perturbativa desenvolvida por Dyson, Feynman e outros. Como o algoritmo da teoria de perturbações está baseado nas funções de Green da teoria livre começaremos estudando campos escalares livres.

Vamos considerar um campo escalar neutro com massa $\phi(x)$ definido num espaço Euclidiano d -dimensional cuja ação Euclidiana livre é dada por

$$S_0(\phi) = \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) \right). \quad (2.1)$$

Apesar de a princípio iniciarmos o nosso estudo numa dimensão arbitrária d e também trabalharmos com o campo com massa m , posteriormente passaremos ao caso sem massa

e os restringiremos ao caso quadridimensional, cujo interesse físico é evidente. Queremos ressaltar que as dificuldades adicionais que aparecerão devido a perda de invariância translacional não dependem do campo ter massa ou ser um campo sem massa. Na verdade, no caso quadridimensional, assumindo que o campo é sem massa os cálculos simplificam bastante. Utilizando o princípio variacional obtemos a equação clássica de movimento deste campo, dada por

$$(-\Delta + m^2)\phi(x) = 0, \quad (2.2)$$

onde $(-\Delta)$ é o Laplaciano d -dimensional. Neste momento vamos assumir que o campo interage com duas hiperplacas $(d-1)$ dimensionais separadas por uma distância L , satisfazendo as condições de Dirichlet nestas, ou seja,

$$\phi(\vec{r}, z)|_{z=0} = \phi(\vec{r}, z)|_{z=L} = 0. \quad (2.3)$$

Nesta tese usaremos a seguinte notação: chamaremos as condições de contorno nas duas hiperplacas Dirichlet-Dirichlet por (D-D). Como ainda mantemos a invariância translacional em $(d-1)$ dimensões, vamos definir o vetor \vec{r} paralelo as placas e chamaremos de z a coordenada perpendicular as placas. Usando o método de separação de variáveis para resolver a equação de Klein-Gordon Eq.(2.2) satisfazendo as condições de fronteira definidas pela Eq.(2.3), obtemos que a solução geral é dada por

$$\phi(\vec{r}, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} \int d^{d-1}p \sum_n \phi_n(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} u_n(z), \quad (2.4)$$

onde $u_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi z}{L})$ é um conjunto completo de autofunções que satisfazem as seguintes equações de autovalores $(-\frac{d}{dz^2}u_n(z) = k_n^2 u_n(z))$, $k_n = \frac{n\pi}{L}$, $n = 1, 2, \dots$ e as condições de fronteira $u_n(0) = u_n(L) = 0$. Na equação acima a função $\phi_n(\vec{p})$ depende dos momentos \vec{p} e dos valores discretos n . Gostaríamos de salientar que a expansão do campo

é uma mistura de integrais de Fourier e série de Fourier, devido a quebra da simetria de traslação na direção z . Neste caso a função de Green da teoria livre deve satisfazer

$$(-\Delta + m^2)G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\delta(z_1 - z_2). \quad (2.5)$$

Ainda utilizando uma representação de Fourier, temos que as funções de Green da teoria são dadas por

$$G_0^{(2)}(\vec{r}, z, z') = \frac{1}{(2\pi)^{d-1}} \int d^{d-1}p \sum_n e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}} u_n(z) u_n^*(z') G_{0,n}(\vec{p}), \quad (2.6)$$

onde $G_{0,n}(\vec{p})$ é dado por

$$G_{0,n}(\vec{p}) = (\vec{p}^2 + k_n^2 + m^2)^{-1}. \quad (2.7)$$

2.2 As funções de Green da teoria livre

Nesta seção apresentamos duas representações distintas das funções de Green da teoria livre que serão muito úteis para implementarmos um procedimento de regularização.

Substituindo $u_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi z}{L})$ e também a Eq.(2.7) na Eq.(2.6) obtemos que a função de Green de dois pontos pode ser escrita como

$$G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z_1}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z_2}{L}\right) \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}}{(\vec{p}^2 + (\frac{n\pi}{L})^2 + m^2)}. \quad (2.8)$$

Para obtermos uma expressão que pode ser manipulada com mais facilidade vamos assumir $m = 0$, $d = 4$, e finalmente efetuar a soma em n e também a integral nos momentos. É fácil mostrar que $G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2)$ (ver apêndice A) pode ser escrita como

$$G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) = \frac{1}{16\pi^2 L^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\left(k - \frac{|z_1^- - z_2^-|}{2}\right)^2 + \left(\frac{r_{12}}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(k - \frac{z_{12}^+}{2}\right)^2 + \left(\frac{r_{12}}{2}\right)^2} \right], \quad (2.9)$$

onde $r_{12} = \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{L}$, $z_{12}^- = \frac{z_1 - z_2}{L}$ e $z_{12}^+ = \frac{z_1 + z_2}{L}$. Esta expressão acima também foi obtida a bastante tempo atrás por Lukosz, que utilizou o método das imagens [11]. Uma outra

forma de expressar a função de dois pontos $G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2)$ que também será utilizada durante a tese é

$$G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) = \frac{\sinh(\pi r_{12})}{16\pi L^2 r_{12}} \left[\frac{\sin(\frac{\pi z_1}{L}) \sin(\frac{\pi z_2}{L})}{\left[\sinh^2(\frac{\pi r_{12}}{2}) + \sin^2(\frac{\pi z_{12}^-}{2}) \right] \left[\sinh^2(\frac{\pi r_{12}}{2}) + \sin^2(\frac{\pi z_{12}^+}{2}) \right]} \right]. \quad (2.10)$$

2.3 Propriedades do propagador livre

Como já discutimos anteriormente, o objetivo desta tese é mostrarmos como se implementa a renormalização perturbativa da teoria $\lambda\phi^4/4!$ na aproximação de dois laços se assumimos a presença de estruturas macroscópicas. Como o método da expansão perturbativa para o acoplamento fraco basea-se no fato de que as funções de Green de n-pontos devem ser expressas em termos do propagador livre, é importante portanto nesta seção apresentamos algumas propriedades do propagador livre, as quais servirão para entendimento do procedimento de regularização que será implementado nos seguintes capítulos.

(i) O propagador livre é maior ou igual que zero no todo o domínio onde está definido, isso é, $G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) \geq 0$ para $z_1, z_2 \in [0, L]$ e $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \in \mathcal{R}^3$.

(ii) O propagador livre é zero quando a extremidade de alguma das suas patas está sobre as placas, isso é,

$$G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, 0, z_2) = G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, L, z_2) = 0$$

ou

$$G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, 0) = G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, L) = 0.$$

Este resultado está associado às condições de contorno (D-D) que impomos sobre o campo escalar.

(iii) Da Eq.(2.9) podemos identificar os termos do propagador livre que são responsáveis pelas divergências ultravioletas nas funções de Green. Desta forma vamos expressar a Eq.(2.9) na forma

$$G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2 L^2} \left[\frac{1}{(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2} - \frac{1}{(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2} - \frac{1}{(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2} \right] + \frac{1}{4\pi^2 L^2} h(r_{12}, z_1, z_2), \quad (2.11)$$

onde o último termo do lado direito $h(r_{12}, z_1, z_2)$ é dado por

$$h(r_{12}, z_1, z_2) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2k - |z_{12}^-|)^2 + r_{12}^2} - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0,1}}^{\infty} \frac{1}{(2k - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2}. \quad (2.12)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq.(2.11) é singular quando $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ e $z_1 = z_2$. Esta singularidade é responsável pelas divergências de volume (“bulk”) nas funções de Green. O segundo termo é singular apenas quando $z_1 = z_2 = 0$ e $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$. O terceiro termo é singular quando $z_1 = z_2 = L$ e quando $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$. Estes dois termos, o segundo e terceiro termo, são aqueles que criam as divergências ultravioletas de superfície nas funções de Green. Finalmente o último termo, que na verdade é uma função zeta generalizada é uma quantidade finita, pois esta sendo definida no domínio de analiticidade da zeta.

(iv) Quando os dois pontos do propagador livre estão muito afastados, isto é, $\frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{L} \gg 1$, da Eq.(2.10) obtemos que o propagador livre tem o comportamento do tipo

$$G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi L^2} \frac{e^{-\pi r_{12}}}{r_{12}} \sin\left(\frac{\pi z_1}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi z_2}{L}\right), \quad (2.13)$$

o qual mostra um decaimento exponencial em função da distância dos pontos.

(v) A integral das variáveis $\{\vec{r}, z\}$ numa vizinhança R em torno do ponto $\{\vec{r}', z'\}$ do propagador livre $G_0^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}', z, z')$ é finita, isto é $\int_R d^3 r dz G_0^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}', z, z') < \infty$. Para se certificar disto, veja por exemplo a Fig.(2.1). Um resultado importante que obtemos desta

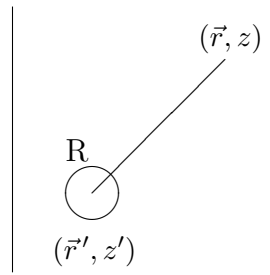


Figura 2.1:

propriedade é que as patas externas dos diagramas de Feynman não criam divergências ultravioletas adicionais. Por exemplo vamos supor que temos a seguinte integral correspondente a um diagrama de Feynman

$$\int_R d^3r dz G_0^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}', z, z') F(\vec{r}', z'), \quad (2.14)$$

onde $G_0^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}', z, z')$ é alguma pata externa e $F(\vec{r}', z')$ corresponde ao resto do diagrama. Usando o teorema I do apêndice B podemos verificar que a integral Eq.(2.14) é finita. Note que para lançarmos mão deste teorema temos que usar o fato de que em geral as funções $F(\vec{r}', z')$ são finitas na região R .

Capítulo 3

Regularização das funções de Green de dois e quatro pontos a um laço

3.1 As funções de dois pontos a um laço

Neste capítulo identificaremos as divergências ultravioletas que aparecem nas funções de Green de dois e quatro pontos a um laço. Trabalharemos sempre no espaço de coordenadas onde usaremos o propagador livre definido pela Eq.(2.11). Alguns teoremas apresentados no apêndice B também serão utilizados.

Desta forma vamos iniciar analisando a função que corresponde ao diagrama de Feynman de dois pontos a um laço $G_1^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2)$, que pode ser escrita na seguinte forma

$$G_1^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) = -\frac{\lambda}{2} \int d^3r dz G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}, z_1, z) G_0^{(2)}(0, z, z) G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}, z_2, z). \quad (3.1)$$

Esta expressão acima corresponde ao diagrama da Fig.(3.1). Este diagrama é conhecido na literatura como girino (“Tadpole”). Todas as divergências desta expressão Eq.(3.1) estão contidas no termo $G_0^{(2)}(0, z, z)$. Utilizando a Eq.(2.11) podemos expressar $G_0^{(2)}(0, z, z)$ da

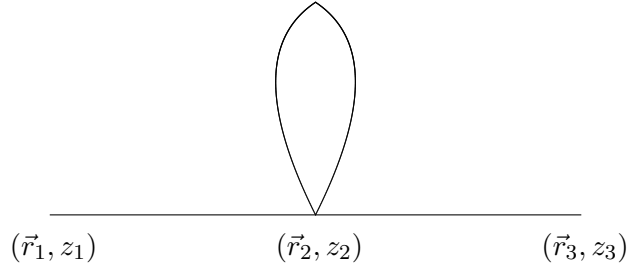


Figura 3.1: A função de dois pontos a um laço

seguinte forma:

$$G_0^{(2)}(0, z, z) = \frac{1}{4\pi^2 L^2} \left[A - \frac{1}{(2z/L)^2} - \frac{1}{(2 - 2z/L)^2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0,1}}^{\infty} \frac{1}{(2k - 2z/L)^2} \right], \quad (3.2)$$

onde a quantidade A é definida por

$$\begin{aligned} A &= \lim_{(z_1, \vec{r}_1) \rightarrow (z_2, \vec{r}_2)} \frac{L^2}{(z_1 - z_2)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{L^2 S_4}{8\pi^2} \Lambda^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Na expressão acima S_4 é um caso particular de $S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$, e Λ é um corte (“cut-off”) ultravioleta. Após efetuarmos os somatórios existentes na Eq.(3.2) obtemos

$$G_0^{(2)}(0, z, z) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{S_4}{32\pi^4} \Lambda^2 + \frac{1}{48L^2} - \frac{1}{16L^2} \frac{1}{\sin^2(\pi z/L)}. \quad (3.4)$$

Substituindo a Eq.(3.4) na Eq.(3.1) finalmente obtemos

$$\begin{aligned} G_1^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{S_4}{32\pi^4} \Lambda^2 \int_R d^3 r dz G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}, z_1, z) G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}, z_2, z) \\ &\quad + \frac{1}{48L^2} \int_R d^3 r dz G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}, z_1, z) G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}, z_2, z) \\ &\quad - \frac{1}{16L^2} \int_R d^3 r dz \frac{G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}, z_1, z) G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}, z_2, z)}{\sin^2(\pi z/L)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq.(3.5) contém uma divergência de volume. Esta divergência também aparece na teoria com auto-interação sem a presença das placas.

Não é difícil mostrar que o segundo e o terceiro termo da Eq.(3.5) são finitos. Para isso devemos analisar as integrais da Eq.(3.5) por setores, i.e,

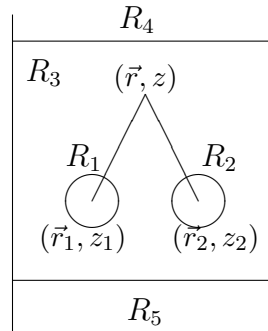


Figura 3.2: Regiões de integração R_i .

$$\int_R d^3r dz G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}, z_1, z) G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}, z_2, z) = \int_{R_1} + \int_{R_2} + \int_{R_3} + \int_{R_4} + \int_{R_5} . \quad (3.6)$$

As integrais do lado direito da Eq.(3.6) estão definidas em diferentes regiões, as quais são mostradas na Fig.(3.2). Nesta figura os pontos (\vec{r}_1, z_1) e (\vec{r}_2, z_2) são os centros das regiões R_1 e R_2 respectivamente. Usando a propriedade (v), já discutida anteriormente, temos que as integrais sobre os domínios R_1 e R_2 são finitas. Note que os propagadores livres $G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}, z_1, z)$ e $G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}, z_2, z)$ presentes na Eq.(3.6) não tem divergências em R_3 . Além disso esta região é compacta, conseqüentemente a integral sobre esta região é finita. As integrais definidas nas regiões R_4 e R_5 são também finitas, devido ao decaimento exponencial do propagador para dois pontos sobre patas externas afastados propriedade (iv). Portanto todas as integrais definidas na Eq.(3.6) são finitas. Finalmente temos que estudar a última integral do lado direito da Eq.(3.5). Observe que o termo $\frac{1}{\sin^2(\pi z/L)}$ diverge quando z se aproxima nas fronteiras. Entretanto a integral é convergente, devido ao fato de que os termos $G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}, z_1, z)$ e $G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}, z_2, z)$ cancelam a divergência contida em $\frac{1}{\sin^2(\pi z/L)}$. Portanto a função de Green de dois pontos a um laço tem somente divergências de volume.

3.2 As funções de quatro pontos a um laço

Vamos analisar agora a função de Green de quatro pontos a um laço. Seguindo o mesmo procedimento anterior, analisaremos as integrais por setores. A função de Green a um laço, Fig.(3.3), é dada por:

$$\begin{aligned}
 G_1^{(4)}(\vec{r}_1, z_1, \vec{r}_2, z_2, \vec{r}_3, z_3, \vec{r}_4, z_4) = \\
 \frac{1}{2} \int d^{d-1}r \int d^{d-1}r' \int_0^L dz \int_0^L dz' G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}, z_1, z) G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}, z_2, z) \\
 \left[G_0^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}', z, z') \right]^2 G_0^{(2)}(\vec{r}_3 - \vec{r}', z_3, z') G_0^{(2)}(\vec{r}_4 - \vec{r}', z_4, z'). \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Já tínhamos enfatizado que as funções de Green livres apresentam divergências quando suas duas patas são avaliadas no mesmo ponto ou quando ambas as patas avaliadas no mesmo ponto são avaliadas nas fronteiras. Estas funções de Green livres estão presentes na integral da Eq.(3.7) de forma que ao se efetuar a integral as funções de Green livres presentes aparecerão estas divergências. Conseqüentemente devemos analisar a integral da Eq.(3.7) em regiões que são vizinhanças dos pontos onde as funções de Green livres apresentam divergências. Desta forma, podemos descobrir se estas divergências são responsáveis pelas divergências na integral definida pela Eq.(3.7). As regiões de integração

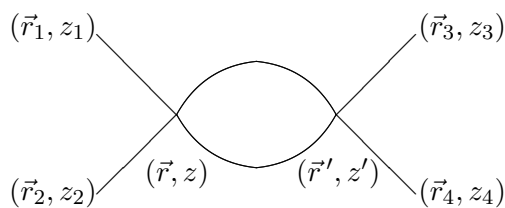


Figura 3.3: Função de quatro pontos a um laço

são mostradas na Fig.(3.4). Na região R_1 se o ponto $\{\vec{r}', z'\}$ se aproxima do ponto $\{\vec{r}, z\}$, o termo $\left[G_0^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}', z, z') \right]^2$ é singular. Na região R_2 ($z, z' \rightarrow 0$ and $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}$) o termo

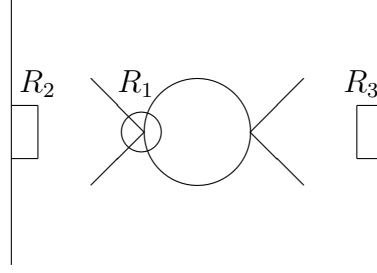


Figura 3.4: Regiões de integração para a função de quatro pontos a um laço

$[G_0^{(2)}(\vec{r} - \vec{r}', z, z')]^2$ também é divergente. Veremos mais adiante que esta divergência desaparece quando calculamos a função de Green de quatro pontos a um laço. Na região R_3 ($z, z' \rightarrow L$ e $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}$) a situação é similar ao caso da região R_2 . Já havíamos comentado que as patas externas não criam divergências adicionais (ver Eq.(2.14)). Então temos somente que analisar a integral $\int d^3rdzd^3r'dz' [G_0^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}, z', z)]^2$. Substituindo a Eq.(2.11) na equação anteriormente citada temos:

$$\int d^3rdzd^3r'dz' [G_0^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}, z', z)]^2 = \frac{1}{(4\pi^2L^2)^2} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) + \text{parte-finita} \quad (3.8)$$

onde as integrais I_i , $i = 1, 2, \dots$ são dadas respectivamente por

$$I_1 = \int d^3rdzd^3r'dz' \frac{1}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2]^2}, \quad (3.9)$$

$$I_2 = \int d^3rdzd^3r'dz' \left[\frac{1}{[(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^2} + \frac{1}{[(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^2} \right], \quad (3.10)$$

$$I_3 = - \int d^3rdzd^3r'dz' \left[\frac{2}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2] [(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]} + \frac{2}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2] [(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]} \right], \quad (3.11)$$

$$I_4 = \int d^3rdzd^3r'dz' \frac{2}{[(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2] [(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]}, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \int d^3 r dz d^3 r' dz' \\
 &\left[\frac{1}{(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2} - \frac{1}{(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2} - \frac{1}{(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2} \right] h(r_{12}, z_1, z_2), \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

respectivamente. Vamos analisar cada termo do lado direito da Eq.(3.8). A integral I_1 deve ser analisada somente na região R_1 , então

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{R_1} d^3 r' dz' \frac{1}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2]^2} = \int_{\bar{r}-\bar{\epsilon}}^{\bar{r}+\bar{\epsilon}} d^3 r' \int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon} dz' \frac{1}{[(z - z')^2 + |\bar{r} - \bar{r}'|^2]^2}, \\
 &= \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} \frac{d^4 w}{w^4}. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Utilizando o teorema II do apêndice B obtemos que

$$I_1 = S_4 \int_{-\bar{\epsilon}'}^{\bar{\epsilon}'} dw \frac{w^3}{w^4} = S_4 \ln w \Big|_0^{\bar{\epsilon}'} = \infty. \quad (3.15)$$

Portanto a integral I_1 é divergente. Esta divergência é exatamente uma divergência de volume (“bulk”) que aparece na teoria sem fronteiras. Portanto podemos usar os mesmos contratermos nesta teoria com fronteiras daqueles utilizados na teoria sem fronteiras para eliminarmos estas divergências. Com relação a contribuição devida a integral I_2 queremos enfatizar que o primeiro termo $1/[(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^2$ não é divergente na região R_1 , mas sim na região R_2 . Desta forma devemos analisar a integral deste termo (que é a primeira parte da integral I_2) na região R_2 , i.e.

$$\begin{aligned}
 &\int_{R_2} d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{1}{[(z + z')^2 + |\bar{r} - \bar{r}'|^2]^2} \\
 &< \int d^3 r \int_{\bar{r}-\bar{\epsilon}}^{\bar{r}+\bar{\epsilon}} d^3 r' \int_0^\epsilon \int_0^\epsilon dz dz' \frac{1}{[z^2 + z'^2 + |\bar{r} - \bar{r}'|^2]^2} \\
 &< \frac{1}{4} \int d^3 r \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^5 w \frac{1}{w^2}. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Novamente usando o teorema II do apêndice B obtemos que

$$\begin{aligned}
 &\int_{R_2} d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{1}{[(z + z')^2 + |\bar{r} - \bar{r}'|^2]^2} \\
 &< \frac{1}{12} S_5 \epsilon'^3 \int_{R'} d^3 r. \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

como a região R' ($\subset R_2$) é finita, a integral anterior é convergente. Vamos agora analisar o segundo termo $1/[(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^2$ de I_2 na região onde tem singularidade, isto é na região R_3 . Como o comportamento do sistema em ambas as placas é semelhante, analisar a integral do termo $1/[(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^2$ na região R_3 é equivalente a analisar o termo $1/[(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^2$ na região R_2 . Entretanto, já mostramos anteriormente que a contribuição deste termo é finita. Com relação ao primeiro termo de I_3 , dada respectivamente por $2/[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2][(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]$, devemos analisá-lo nas regiões R_1 e R_2 . Em R_1 podemos ver que a convergência de

$$\int_{R_1} d^3r dz d^3r' dz' \frac{1}{\underbrace{[(z - z')^2 + |\vec{r} - \vec{r}'|^2] [(z + z')^2 + |\vec{r} - \vec{r}'|^2]}_{\text{finita em } R_1}}, \quad (3.18)$$

depende da convergência da integral, isto pelo teorema I do apêndice B

$$\int_{R_1} d^3r dz d^3r' dz' \frac{1}{(z - z')^2 + |\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d^4w}{w^2} = S_4 \int_0^{\epsilon'} dw w = \frac{S_4 \epsilon'^2}{2}, \quad (3.19)$$

a qual é finita. Na região R_2 temos que a integral é dada por

$$\begin{aligned}
 & \int d^3r \int_0^\epsilon dz \int_z^{z+\epsilon} dz' \int_{\vec{r}-\vec{\epsilon}}^{\vec{r}+\vec{\epsilon}} d^3r' \frac{1}{((z - z')^2 + |\vec{r} - \vec{r}'|^2)((z + z')^2 + |\vec{r} - \vec{r}'|^2)} \\
 & < \int d^3r \int_0^\epsilon dz \int_0^\epsilon du \int_{-\vec{\epsilon}}^{\vec{\epsilon}} d^3v \frac{1}{(u^2 + v^2)(z^2 + u^2 + v^2)}. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Usando o teorema III do apêndice B obtemos que

$$\begin{aligned}
 & \int d^3r \int_0^\epsilon dz \int_z^{z+\epsilon} dz' \int_{\vec{r}-\vec{\epsilon}}^{\vec{r}+\vec{\epsilon}} d^3r' \frac{1}{((z - z')^2 + |\vec{r} - \vec{r}'|^2)((z + z')^2 + |\vec{r} - \vec{r}'|^2)} \\
 & < \frac{1}{4} S_4 \int d^3r \int_0^\epsilon dz \int_0^{\epsilon'} dw \frac{w}{(z^2 + w^2)} = \frac{S_3 S_4}{2 S_1 S_2} \epsilon''. \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Portanto a integral do primeiro termo de I_3 é finita em R_2 . A integral do segundo termo de I_3 , dada respectivamente por $2/[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2][(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]$, deve ser analisada nas regiões R_1 e R_3 . Entretanto o comportamento nesta situação é semelhante ao caso

anterior devido ao fato de que o sistema físico se comporta da mesma forma em ambos os lados das placas. Então I_3 é finita. Para analisarmos a integral I_4 , observe que $2/\left[\left((z_{12}^+)^2 + r_{12}^2\right)\left((2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2\right)\right]$ tem que ser estudado nas regiões R_2 e R_3 . Começando com a região R_2 , temos que a convergência da integral I_4 nesta região depende da integral

$$\begin{aligned} & \int_{R_2} d^3r dz d^3r' dz' \frac{2}{(z + z')^2 + |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \\ & < \int_0^\epsilon \int_0^\epsilon dz dz' \int_{\vec{r}-\vec{e}}^{\vec{r}+\vec{e}} d^3r' \frac{1}{z^2 + z'^2 + |\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{S_5}{4} \int_0^{\epsilon'} dw \frac{w^4}{w^2} = \frac{S_5}{12} \epsilon'^3, \quad (3.22) \end{aligned}$$

a qual é finita. Na região R_3 a integral é do mesmo tipo do cálculo anterior, portanto também é finita.

Usando os argumentos já usados até agora, não é difícil demonstrar que a contribuição do I_5 também é finita. Desta forma a função de Green de quatro pontos a um laço tem somente divergências de volume (veja Eq.(3.7)). Deste modo podemos concluir que ao nível de um laço os contratermos de volume são suficientes para tornar as funções de Green de dois e quatro pontos finitas.

Capítulo 4

Regularização das funções de Green de dois e quatro pontos a dois laços

4.1 As funções de dois pontos a dois laços

Neste capítulo identificamos as contribuições divergentes provenientes das funções de Green de dois e quatro pontos na aproximação de dois laços. Desta forma vamos iniciar analisando a função de Green de dois pontos a dois laços. Os graficos de Feynman irreduzíveis a uma partícula (1PI) correspondentes a esta função são mostrados na Fig.(4.1) A expressão

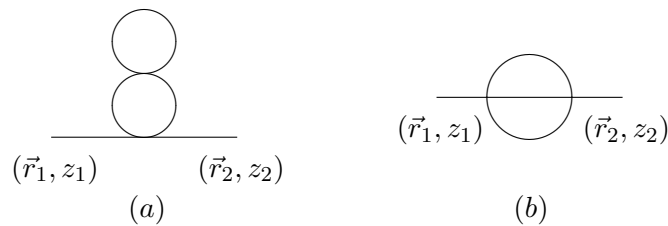


Figura 4.1: Função de dois pontos a dois laços

correspondente ao gráfico Fig.(4.1-a) está dada por

$$\frac{\lambda^2}{4} \int d^3r' dz' d^3r dz G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}', z_1, z') \left[G_0^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}, z', z) \right]^2 G_0^{(2)}(0, z, z) G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}', z_2, z'). \quad (4.1)$$

Como as patas externas não geram divergências vamos analisar a Eq.(4.1) com as patas externas amputadas. Isto é vamos analisar a expressão

$$\int d^3rdz \left[G_0^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}, z', z) \right]^2 G_0^{(2)}(0, z, z). \quad (4.2)$$

Substituindo a Eq.(3.4) na Eq.(4.2) obtemos

$$\begin{aligned} & \int d^3rdz \left[G_0^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}, z', z) \right]^2 G_0^{(2)}(0, z, z) = \\ & \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{S_4}{32\pi^4} \Lambda^2 \int d^3rdz \left[G_0^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}, z', z) \right]^2 + \frac{1}{48L^2} \int d^3rdz \left[G_0^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}, z', z) \right]^2 \\ & - \frac{1}{16L^2} \int d^3rdz \left[G_0^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}, z', z) \right]^2 \frac{1}{\sin^2(\pi z/L)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

O primeiro e segundo termo do lado direito da Eq.(4.3) podem ser renormalizados introduzindo-se os mesmos contratermos de volume da teoria sem fronteiras. Uma situação bastante interessante coloca-se quando analisamos o último termo. Observe que este termo contém somente divergências de volume, pois a contribuição proveniente de $\left[G_0^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}, z', z) \right]^2$ cancela as divergências geradas pelo termo $\frac{1}{\sin^2(\pi z/L)}$ nas fronteiras. Não obstante, depois de introduzir o contratermo de volume para tornar finito o termo $\left[G_0^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}, z', z) \right]^2$, as divergências de fronteiras geradas pelo termo $\frac{1}{\sin^2(\pi z/L)}$ não mais se cancelam, aparecendo assim divergências de superfície. É evidente que estas divergências de superfície devem ser renormalizadas. Introduzindo os contratermos de volume e de superfície, a expressão renormalizada associada ao último termo da Eq.(4.3) é dado por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16L^2} \int d^3rdz \left[\frac{1}{\sin^2(\pi z/L)} - \frac{L^2}{(\pi z)^2} - \frac{L^2}{\pi^2(L-z)^2} \right] \\ & \left[\left(G_0^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}, z', z) \right)^2 - \frac{1}{(4\pi^2 L^2)^2} \frac{1}{((z_{12}^-)^2 + r_{12}^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Queremos ressaltar que a expressão acima contém uma mistura de contratermos de volume e contratermos de superfície.

Neste momento podemos passar a análise do diagrama do sol-poente (“sunset”) o qual corresponde a Fig.(4.1-b). A expressão associada a este diagrama é dada por

$$\frac{\lambda^2}{6} \int d^3 r' dz' d^3 r dz G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}', z_1, z') \left[G_0^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}, z', z) \right]^3 G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}', z_2, z'). \quad (4.5)$$

Novamente, as patas externas não contribuem para gerar divergências, portanto analisaremos o diagrama referente a Fig.(4.1-b) amputado, isto é, sem patas externas. Temos então

$$\int d^3 r dz d^3 r' dz' \left[G_0^{(2)}(\vec{r}' - \vec{r}, z', z) \right]^3 = \frac{1}{(4\pi^2 L^2)^3} (I_1 + I_2 + \dots + I_{12}) + \text{parte-finita}, \quad (4.6)$$

onde cada uma das integrais que aparecem na Eq.(4.6) são dadas respectivamente por

$$I_1 = \int d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{1}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2]^3}, \quad (4.7)$$

$$I_2 = \int d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{1}{[(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^3}, \quad (4.8)$$

$$I_3 = \int d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{1}{[(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^3}, \quad (4.9)$$

$$I_4 = \int d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{2}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2]^2 [(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]}, \quad (4.10)$$

$$I_5 = \int d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{2}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2]^2 [(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]}, \quad (4.11)$$

$$I_6 = \int d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{2}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2] [(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^2}, \quad (4.12)$$

$$I_7 = \int d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{2}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2] [(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^2}, \quad (4.13)$$

$$I_8 = \int d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{2}{[(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^2 [(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]}, \quad (4.14)$$

$$I_9 = \int d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{2}{[(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2] [(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^2}, \quad (4.15)$$

$$I_{10} = \int d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{6}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2] [(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2] [(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]}, \quad (4.16)$$

$$I_{11} = \int d^3 r dz d^3 r' dz' \left[\frac{1}{(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2} - \frac{1}{(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2} - \frac{1}{(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2} \right]^2 h(r_{12}, z_1, z_2), \quad (4.17)$$

$$I_{12} = \int d^3 r dz d^3 r' dz' \left[\frac{1}{(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2} - \frac{1}{(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2} - \frac{1}{(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2} \right] h^2(r_{12}, z_1, z_2). \quad (4.18)$$

Analisaremos cada integral da Eq.(4.6) em separado. A primeira integral I_1 , dada pela Eq.(4.7) é divergente em R_1 , isto é, tem divergência de volume. Em geral podemos mostrar que

$$\int_{R_1} d^3 r' dz' \frac{1}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2]^n} = \begin{cases} \text{finita} & n < 2 \\ \infty & n \geq 2. \end{cases} \quad (4.19)$$

Usando este resultado podemos ver que as integrais I_4 , I_5 e a primeira integral de I_{11} são divergentes e estas divergências são de volume. Agora analisemos a contribuição proveniente da integral I_2 na região R_2 . Esta integral é divergente, mas devemos calcular o gráfico total, isto é, com as patas externas (ver Eq.(4.5)). Portanto a integral I_2 , considerando as patas externas na região R_2 , fica dada por

$$\int_{R_2} d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{zz'}{[(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^3} < \int d^3 r \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} \int_0^{\epsilon} \int_0^{\epsilon} d^3 w dz dz' \frac{zz'}{(z^2 + z'^2 + w^2)^3}. \quad (4.20)$$

Usando o teorema III do apêndice B obtemos

$$\int d^3 r \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} \int_0^{\epsilon} \int_0^{\epsilon} d^3 w dz dz' \frac{zz'}{(z^2 + z'^2 + w^2)^3} < \int d^3 r \frac{S_7}{S_2^2} \int_0^{\epsilon'} dy \frac{y^6}{y^6} = \frac{S_7}{S_2^2} \epsilon' \int d^3 r. \quad (4.21)$$

Resultando que esta integral I_2 é finita na região R_2 . A integral I_3 deve ser analisada na região R_3 . A análise nesta região é do mesmo tipo do caso anterior, então também é finita. A contribuição da integral I_6 deve ser estudada na região R_2 . Neste caso também consideraremos as patas externas, então a integral I_6 na região R_2 é dada por

$$\int_{R_2} d^3 r dz d^3 r' dz' \frac{zz'}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2][(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^2}$$

$$< 2 \int d^3r \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3w \int_0^\epsilon dz \int_0^\epsilon du \frac{z(z+u)}{(u^2+w^2)(u^2+z^2+w^2)^2}. \quad (4.22)$$

Usando o teorema IV do apêndice B obtemos que a expressão anterior é menor que

$$\begin{aligned} & S_4 \int d^3r \int_0^\epsilon dz \int_0^{\epsilon'} ds \frac{z^2 s}{(s^2+z^2)^2} + 2S_3 \int d^3r \int_0^\epsilon dz \int_0^\epsilon du \int_0^{\epsilon'} ds \frac{z u s^2}{(u^2+s^2)(u^2+s^2+z^2)^2} \\ & < \frac{S_4 S_5}{S_2 S_3} \epsilon'' \int d^3r + 2 \frac{(S_5)^2}{(S_2)^2 S_3} \int d^3r \int_0^{\epsilon'''} dw \frac{w^4}{w^4} < \left(\frac{S_4 S_5}{S_2 S_3} \epsilon'' + 2 \frac{(S_5)^2}{(S_2)^2 S_3} \epsilon''' \right) \int d^3r, \end{aligned} \quad (4.23)$$

então I_6 é finita. A integral I_7 deve ser analisada na região R_3 . Esta análise é semelhante aquela efetuada para o estudo de I_6 na região R_2 , então concluímos que I_7 é finita.

Integrando a contribuição do termo I_8 sobre R_2 temos

$$\int_{R_2} d^3r dz d^3r' dz' \frac{1}{[(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^2 \underbrace{[(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]}_{\text{finita}}}. \quad (4.24)$$

Usando o fato que a integral $\int_{R_2} d^3r dz d^3r' dz' \frac{1}{[(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]^2}$ é finita, então temos que a integral I_8 é finita na região R_2 . O mesmo é o caso para I_9 em R_3 . A contribuição do termo I_{10} em R_2 esta dada por

$$\int_{R_2} d^3r dz d^3r' dz' \frac{1}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2] [(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2] \underbrace{[(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]}_{\text{finita}}}. \quad (4.25)$$

Como a integral $\int_{R_2} d^3r dz d^3r' dz' \frac{1}{[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2] [(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2]}$ é finita, então a integral da Eq.(4.25) é convergente. A integral I_{11} somente contém divergências de volume e o termo I_{12} é finita. Então concluímos que o gráfico do sol-poente (ver Eq.(4.5)) somente possui divergências de volume.

4.2 As funções de Green de quatro pontos a dois laços

Nesta seção analisamos os três gráficos que correspondem as funções de Green de quatro pontos a dois laços. Uma destas funções corresponde a Fig.(4.2). Analisando as integrais

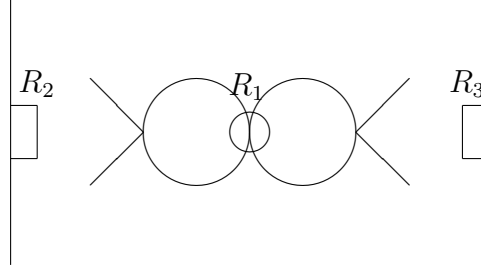


Figura 4.2: Região de integração de uma função de Green de quatro pontos a dois laços

sem patas externas, temos

$$\begin{aligned} & \int d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, z_1, z_2) \right]^2 \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_3 - \vec{r}_2, z_2, z_3) \right]^2 = \\ & \frac{1}{(4\pi^2 L^2)^4} \int d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 [A_1 + A_2 + \dots + A_8] [B_1 + B_2 + \dots + B_8] \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde

$$A_1 = \frac{1}{\left[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2 \right]^2}, \quad (4.27)$$

$$A_2 = \frac{1}{\left[(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2 \right]^2}, \quad (4.28)$$

$$A_3 = \frac{1}{\left[(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2 \right]^2}, \quad (4.29)$$

$$A_4 = -\frac{2}{\left[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2 \right] \left[(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2 \right]}, \quad (4.30)$$

$$A_5 = -\frac{2}{\left[(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2 \right] \left[(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2 \right]}, \quad (4.31)$$

$$A_6 = \frac{2}{\left[(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2 \right] \left[(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2 \right]}, \quad (4.32)$$

$$A_7 = \left[\frac{1}{(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2} - \frac{1}{(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2} - \frac{1}{(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2} \right] h(r_{12}, z_1, z_2), \quad (4.33)$$

$$A_8 = [h(r_{12}, z_1, z_2)]^2. \quad (4.34)$$

e

$$B_1 = \frac{1}{[(z_{23}^-)^2 + r_{23}^2]^2}, \quad (4.35)$$

$$B_2 = \frac{1}{[(z_{23}^+)^2 + r_{23}^2]^2}, \quad (4.36)$$

$$B_3 = \frac{1}{[(2 - z_{23}^+)^2 + r_{23}^2]^2}, \quad (4.37)$$

$$B_4 = -\frac{2}{[(z_{23}^-)^2 + r_{23}^2][(z_{23}^+)^2 + r_{23}^2]}, \quad (4.38)$$

$$B_5 = -\frac{2}{[(z_{23}^-)^2 + r_{23}^2][(2 - z_{23}^+)^2 + r_{23}^2]}, \quad (4.39)$$

$$B_6 = \frac{2}{[(z_{23}^+)^2 + r_{23}^2][(2 - z_{23}^+)^2 + r_{23}^2]}, \quad (4.40)$$

$$B_7 = \left[\frac{1}{(z_{23}^-)^2 + r_{23}^2} - \frac{1}{(z_{23}^+)^2 + r_{23}^2} - \frac{1}{(2 - z_{23}^+)^2 + r_{23}^2} \right] h(r_{23}, z_2, z_3), \quad (4.41)$$

$$B_8 = [h(r_{23}, z_2, z_3)]^2. \quad (4.42)$$

Se integramos o termo A_1 , com respeito a variável $\{\vec{r}_1, z_1\}$ em torno da variável $\{\vec{r}_2, z_2\}$, isto é, na região R_1 , encontramos uma divergência de volume. Isto é semelhante ao comportamento da integral da função de Green de quatro pontos a um laço. O mesmo acontece com o termo B_1 após integrarmos a variável $\{\vec{r}_3, z_3\}$ na região R_1 . Então os termos A_1 e B_1 devem ser eliminados. Agora analisando a integral do produto de termos A_2 e B_2 temos

$$\begin{aligned} & \int d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \frac{1}{[(z_1 + z_2)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2]^2 [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2]^2} \\ & < \int d^3 r_2 \int_{\vec{r}_2 - \vec{\epsilon}}^{\vec{r}_2 + \vec{\epsilon}} d^3 r_1 d^3 r_3 \int_0^\epsilon dz_1 dz_2 dz_3 \frac{1}{[z_1^2 + z_2^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2]^2 [z_2^2 + z_3^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2]^2} \\ & < \int d^3 r_2 \int_{-\vec{\epsilon}}^{\vec{\epsilon}} d^3 w_1 d^3 w_2 \int_0^\epsilon dz_1 dz_2 dz_3 \frac{1}{[z_1^2 + z_2^2 + w_1^2]^2 [z_2^2 + z_3^2 + w_2^2]^2} \\ & < \frac{1}{4} \int d^3 r_2 \int_0^\epsilon dz_2 \int_{-\vec{\epsilon}}^{\vec{\epsilon}} d^3 w_1 dz_1 \frac{1}{[z_1^2 + w_1^2 + z_2^2]^2} \int_{-\vec{\epsilon}}^{\vec{\epsilon}} d^3 w_2 dz_3 \frac{1}{[z_3^2 + w_2^2 + z_2^2]^2} \end{aligned}$$

$$< \frac{S_4^2}{4} \int d^3 r_2 \int_0^\epsilon dz_2 \left[\int_0^{\epsilon'} dw \frac{w^3}{[z_2^2 + w^2]^2} \right]^2, \quad (4.43)$$

efetuando a integral na variável w temos que

$$\begin{aligned} & \int d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \frac{1}{[(z_1 + z_2)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2]^2 [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2]^2} \\ & < \frac{S_4^2}{4} \int d^3 r_2 \int_0^\epsilon dz_2 \left[\ln^2 \left(\frac{z_2^2 + \epsilon'^2}{z_2^2} \right) - \frac{2\epsilon'^2}{z_2^2 + \epsilon'^2} \ln \left(1 + \frac{\epsilon'^2}{z_2^2} \right) + \frac{\epsilon'^4}{(z_2^2 + \epsilon'^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde a integral anterior é finita. Portanto a integral correspondente ao produto de A_2 com B_2 é finita. Prosseguindo, iremos analisar a integral do produto de A_2 com B_3 na região R_2 , i.e.,

$$\int_{R_2} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \frac{1}{[(z_1 + z_2)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2]^2 [(2 - (z_2 + z_3))^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2]^2}. \quad (4.45)$$

Na região R_2 , as variáveis z_1 e z_2 tendem a zero. Então, segundo o teorema I do apêndice B, a convergência da integral anterior dependerá da convergência da integral

$$\int_{R_2} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \frac{1}{[(z_1 + z_2)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2]^2}. \quad (4.46)$$

Entretanto esta integral já foi estudada anteriormente (ao estudarmos a função de quatro pontos a um laço) a qual resulta ser finita. O mesmo tipo de análise procede na região R_3 .

A integral correspondente ao produto de A_3 com B_2 e similar a integral correspondente ao produto de A_2 com B_3 a qual já foi estudada no caso anterior. A integral correspondente ao produto de A_2 com B_4 é dada por

$$\begin{aligned} I = & \int d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \\ & \frac{1}{[(z_1 + z_2)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2]^2 [(z_2 - z_3)^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2] [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2]}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Usando o teorema IV do apêndice B temos que

$$\begin{aligned}
 I < \int d^3 r_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^\epsilon dz_1 \int_0^\epsilon dz_3 \int_{z_3}^{z_3+\epsilon} dz_2 \\
 & \frac{1}{[(z_1 + z_2)^2 + w_2^2]^2 [(z_2 - z_3)^2 + w_3^2] [(z_2 + z_3)^2 + w_3^2]} + \\
 & \int d^3 r_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^\epsilon dz_1 \int_0^\epsilon dz_2 \int_{z_2}^{z_2+\epsilon} dz_3 \\
 & \frac{1}{[(z_1 + z_2)^2 + w_2^2]^2 [(z_2 - z_3)^2 + w_3^2] [(z_2 + z_3)^2 + w_3^2]} . \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $v_2 = z_2 - z_3$ no primeiro termo do lado direito da equação anterior, e a seguinte mudança de variável $v_3 = z_3 - z_2$ no segundo termo do lado direito da equação anterior, temos

$$\begin{aligned}
 I < \int d^3 r_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^\epsilon dz_1 \int_0^\epsilon \int_0^\epsilon dv_2 dz_3 \\
 & \frac{1}{[z_1^2 + z_3^2 + v_2^2 + w_2^2]^2 [v_2^2 + w_3^2] [v_2^2 + z_3^2 + w_3^2]} \\
 & + \int d^3 r_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^\epsilon dz_1 \int_0^\epsilon \int_0^\epsilon dv_3 dz_2 \frac{1}{[z_1^2 + z_2^2 + w_2^2]^2 [v_3^2 + w_3^2] [v_3^2 + z_1^2 + w_3^2]} \\
 & < 2 \int d^3 r_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^\epsilon dz_1 dz_2 dv_3 \frac{1}{[z_1^2 + z_2^2 + w_2^2]^2 [v_3^2 + w_3^2] [z_1^2 + v_3^2 + w_3^2]} . \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

Integrando a parte angular das variáveis $\{z_2, w_2\}$ e $\{z_3, w_3\}$ obtemos

$$I < \frac{S_4^2}{2} \int_0^\epsilon dz_1 du_1 du_2 \frac{u_1^3 u_2^3}{(u_1^2 + z_1^2)^2 u_2^2 (u_2^2 + z_1^2)} . \quad (4.50)$$

Integrando nas variáveis u_1 e u_2 temos

$$I < \frac{S_4^2}{8} \int_0^\epsilon dz_1 \left[\ln \left(\frac{\epsilon^2 + z_1^2}{z_1^2} \right) - \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + z_1^2} \right] \ln \left(\frac{\epsilon^2 + z_1^2}{z_1^2} \right) , \quad (4.51)$$

onde a quantidade que devemos integrar no intervalo $z_1 \in [0, \epsilon]$ é finita. Conseqüentemente a integral é finita. A integral do produto de A_2 com B_5 na região R_2 é dada por

$$\frac{\int_{R_2} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3}{[(z_1 + z_2)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2]^2 [(z_2 - z_3)^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2] [(2 - (z_2 + z_3))^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2]} \cdot \quad (4.52)$$

Usando o teorema I do apêndice B, temos que a convergência da integral anterior, depende da convergência da integral

$$\int_{R_2} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \frac{1}{[(z_1 + z_2)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2]^2 [(z_2 - z_3)^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2]} \cdot \quad (4.53)$$

Para analisar a integral anterior vamos compará-la com a integral definida pela Eq.(4.47).

Como esta integral é finita temos então que a integral dada pela Eq.(4.53) também é finita. A integral correspondente ao produto de A_2 com B_6 na região R_2 é

$$\frac{\int_{R_2} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3}{[(z_1 + z_2)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2]^2 [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2] [(2 - (z_2 + z_3))^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2]} \cdot \quad (4.54)$$

Usando o teorema I do apêndice B temos que a convergência da integral anterior depende da convergência da seguinte integral

$$\begin{aligned} & \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_1 d^3 w_2 \int_0^\epsilon dz_1 dz_2 dz_3 \frac{1}{[z_1^2 + z_2^2 + w_1^2]^2 [z_2^2 + z_3^2 + w_2^2]} , \\ & < \frac{S_4^2}{4} \int_0^\epsilon du_1 du_2 dz_2 \frac{u_1^3 u_2^3}{[u_1^2 + z_2^2]^2 [u_2^2 + z_2^2]} , \\ & < \frac{S_4^2}{16} \int_0^\epsilon dz_2 \left[\int_0^\epsilon du_1^2 \frac{u_1^2}{[u_1^2 + z_2^2]^2} \right] \left[\int_0^\epsilon du_2^2 \frac{u_2^2}{[u_2^2 + z_2^2]} \right] . \end{aligned} \quad (4.55)$$

efetuando as integrais em u_1 e u_2 obtemos uma desigualdade para a Eq.(4.55), a saber:

$$< \frac{S_4^2}{16} \int_0^\epsilon dz_2 z_2^2 \left[\ln \left(\frac{\epsilon^2 + z_2^2}{z_2^2} \right) - \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + z_2^2} \right] \left[1 - \ln \left(\frac{\epsilon^2 + z_2^2}{z_2^2} \right) \right] , \quad (4.56)$$

cuja integral é finita. A integral correspondente ao produto A_2 com B_7 é finita, resultado que pode ser facilmente obtido seguindo-se os mesmos passos feitos anteriormente. As integrais correspondentes aos produtos de A_3 com (B_2, B_3, \dots, B_8) são do mesmo tipo que as integrais correspondentes aos produtos de A_2 com (B_2, B_3, \dots, B_8) , já analisadas anteriormente. A integral correspondente ao produto A_4 com B_4 é dada por

$$\begin{aligned}
& \int d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2] [(z_1 + z_2)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2]} \times \\
& \frac{1}{[(z_2 - z_3)^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2] [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2]} \\
& = \int d^3 r_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^\epsilon dz_1 dz_2 dz_3 \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + w_2^2] [(z_1 + z_2)^2 + w_2^2]} \times \\
& \frac{1}{[(z_2 - z_3)^2 + w_3^2] [(z_2 + z_3)^2 + w_3^2]}. \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Do teorema IV do apêndice B obtemos que a integral anterior está limitada superiormente por

$$\begin{aligned}
& < \int d^3 r_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^\epsilon dz_1 \\
& \left[\int_0^\epsilon dz_2 \int_{z_2}^{z_2+\epsilon} dz_3 \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + w_2^2] [(z_1 + z_2)^2 + w_2^2] [(z_2 - z_3)^2 + w_3^2] [(z_2 + z_3)^2 + w_3^2]} \right. \\
& \left. + \int_0^\epsilon dz_3 \int_{z_3}^{z_3+\epsilon} dz_2 \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + w_2^2] [(z_1 + z_2)^2 + w_2^2] [(z_2 - z_3)^2 + w_3^2] [(z_2 + z_3)^2 + w_3^2]} \right]. \tag{4.58}
\end{aligned}$$

Efetuando as seguintes mudanças de variáveis na primeira e na segunda integral da expressão anterior respectivamente, $v_3 = z_3 - z_2$ e $v'_3 = z_2 - z_3$, obtemos que a expressão anterior pode ser escrita por

$$\begin{aligned}
& \int d^3 r_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^\epsilon dz_1 \\
& \left[\int_0^\epsilon dz_2 dv_3 \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + w_2^2] [(z_1 + z_2)^2 + w_2^2] [v_3^2 + w_3^2] [z_2^2 + v_3^2 + w_3^2]} \right. \\
& \left. + \int_0^\epsilon dz_3 dv'_3 \frac{1}{[(z_1 - z_2 - v'_3)^2 + w_2^2] [(z_1 + z_2 + v'_3)^2 + w_2^2] [v_3'^2 + w_3^2] [v_3'^2 + z_3^2 + w_3^2]} \right].
\end{aligned}$$

(4.59)

Utilizando o teorema IV do apêndice B chegamos a que a integral anterior é superiormente limitada por

$$\frac{5}{16} \int_0^\epsilon dz_2 \ln^2 \left(\frac{\epsilon^2 + z_2^2}{z_2^2} \right). \quad (4.60)$$

Desta forma a integral dada pela Eq.(4.60) é finita. As integrais dos produtos A_4 com B_5 , A_4 com B_6 , A_4 com B_7 e de A_5 com (B_2, B_3, \dots) podem ser calculadas seguindo-se os mesmos passos já utilizados anteriormente. Encontramos que estas integrais são finitas. A integral correspondente ao termo A_6 com B_6 é dada por

$$\int d^3r_1 dz_1 d^3r_2 dz_2 d^3r_3 dz_3 \frac{1}{[(z_1 + z_2)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2]} \times \frac{1}{[(2 - (z_1 + z_2))^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2] [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2] [(2 - (z_2 + z_3))^2 + |\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^2]}. \quad (4.61)$$

Estamos interessados em estudar esta integral na região R_2 . Desta forma podemos usar o teorema I do apêndice B. Obtemos que a convergência da integral anterior dependerá da convergência da seguinte integral

$$\int d^3r_2 \int_{-\vec{\epsilon}}^{\vec{\epsilon}} d^3w_1 d^3w_2 \int_0^\epsilon dz_1 dz_2 dz_3 \frac{1}{[z_1^2 + z_2^2 + w_1^2] [z_2^2 + z_3^2 + w_2^2]} < \frac{S_4^2}{4} \int_0^\epsilon dz_2 \int_0^\epsilon du_1 du_2 \frac{u_1^3 u_2^3}{[z_2^2 + u_1^2] [z_2^2 + u_2^2]}. \quad (4.62)$$

Efetuada as integrais nas variáveis u_1 e u_2 obtemos que a integral anterior é dada por

$$\frac{S_4^2}{16} \int_0^\epsilon dz_2 \left[\epsilon^2 - z_2^2 \ln \left(\frac{\epsilon^2 + z_2^2}{z_2^2} \right) \right]^2, \quad (4.63)$$

a qual é finita. Podemos mostrar que as integrais restantes são finitas. De toda esta discussão tiramos que a expressão correspondente ao diagrama de Feynman que estamos

estudando (ver Eq.(4.26)) somente contém divergências de volume as quais podem ser eliminadas com os contratermos usuais da teoria sem fronteiras.

O diagrama de Feynman correspondente a Fig.(4.3) é dada pela seguinte equação

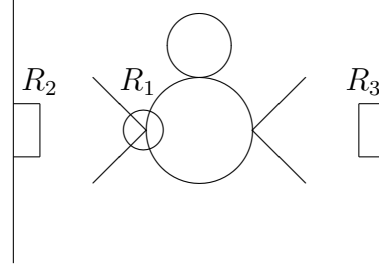


Figura 4.3: Diagrama de Feynman correspondente a função de quatro pontos a dois laços

$$\int d^3r_1 dz_1 d^3r_2 dz_2 d^3r_3 dz_3 \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) \right] \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, z_2, z_3) \right] \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3, z_1, z_3) \right] \left[\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{S_4}{32\pi^4} \Lambda^2 + \frac{1}{48L^2} - \frac{1}{16L^2} \frac{1}{\sin^2(\pi z/L)} \right]. \quad (4.64)$$

O último termo da equação anterior contém as quantidades $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{S_4}{32\pi^4} \Lambda^2 + \frac{1}{48L^2}$, que são independentes das variáveis de integração. Então analisando a integral correspondente a este termo, esta é dada por

$$\int d^3r_1 dz_1 d^3r_2 dz_2 d^3r_3 dz_3 \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) \right] \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, z_2, z_3) \right] \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3, z_1, z_3) \right]. \quad (4.65)$$

Substituindo a expressão do propagador livre dada pela Eq.(2.11), obtemos que a integral anterior é dada por

$$\int d^3r_1 dz_1 d^3r_2 dz_2 d^3r_3 dz_3 \left[A_1 - A_2 - A_3 + A_4 \right] \left[B_1 - B_2 - B_3 + B_4 \right] \left[C_1 - C_2 - C_3 + C_4 \right], \quad (4.66)$$

onde cada um dos termos A's, B's e C's são dadas respectivamente por

$$A_1 = \frac{1}{(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2}, \quad (4.67)$$

$$A_2 = \frac{1}{(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2}, \quad (4.68)$$

$$A_3 = \frac{1}{(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2}, \quad (4.69)$$

$$A_4 = h(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2), \quad (4.70)$$

$$B_1 = \frac{1}{(z_{13}^-)^2 + r_{13}^2}, \quad (4.71)$$

$$B_2 = \frac{1}{(z_{13}^+)^2 + r_{13}^2}, \quad (4.72)$$

$$B_3 = \frac{1}{(2 - z_{13}^+)^2 + r_{13}^2}, \quad (4.73)$$

$$B_4 = h(\vec{r}_1 - \vec{r}_3, z_1, z_3), \quad (4.74)$$

$$C_1 = \frac{1}{(z_{23}^-)^2 + r_{23}^2}, \quad (4.75)$$

$$C_2 = \frac{1}{(z_{23}^+)^2 + r_{23}^2}, \quad (4.76)$$

$$C_3 = \frac{1}{(2 - z_{23}^+)^2 + r_{23}^2}, \quad (4.77)$$

$$C_4 = h(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, z_2, z_3), \quad (4.78)$$

A primeira integral correspondente ao produto de A_1 com B_1 e com C_1 , será analisada na região R_1 na qual $\vec{r}_3 \rightarrow \vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_1$ e $z_3 \rightarrow z_2 \rightarrow z_1$. A integral é dada por

$$\begin{aligned} & \int_{R_1} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \\ & \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2] [(z_2 - z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2] [(z_1 - z_3)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2]} \\ & = \int d^3 r_1 dz_1 \int_{\vec{r}_1 - \vec{\epsilon}}^{\vec{r}_1 + \vec{\epsilon}} d^3 r_2 d^3 r_3 \int_{z_1 - \epsilon}^{z_1 + \epsilon} dz_2 dz_3 \\ & \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2] [(z_2 - z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2] [(z_1 - z_3)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2]}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Usando uma troca de variáveis adequada, temos que a integral anterior pode ser escrita como

$$\int d^3 r_1 dz_1 \int_{-\vec{\epsilon}}^{\vec{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dz_2 dz_3 \frac{1}{[v_2^2 + w_2^2] [v_3^2 + w_3^2] [(v_2 - v_3)^2 + |\vec{w}_3 + \vec{w}_2|^2]}$$

$$\begin{aligned}
 &< \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^4 u_2 d^4 u_3 \frac{1}{u_2^2 u_3^2 [u_2^2 + u_3^2]} \\
 &< S_4^2 \frac{\epsilon''^2}{2}, \tag{4.80}
 \end{aligned}$$

onde ϵ'' é um parâmetro finito que se obtém de usar os teoremas II e III do apêndice B. Portanto a integral anterior é finita. A integral correspondente ao produto de A_2 com B_2 e com C_2 , será analisada na região R_2 na qual $\vec{r}_3 \rightarrow \vec{r}_2 \rightarrow \vec{r}_1$ e $z_3 \rightarrow z_2 \rightarrow z_1 \rightarrow 0$. A integral é dada por

$$\begin{aligned}
 &\int_{R_2} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \\
 &\frac{1}{[(z_1 + z_2)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2] [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2] [(z_1 + z_3)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2]} \\
 &< \int d^3 r_1 \int_{\vec{r}_1 - \bar{\epsilon}}^{\vec{r}_1 + \bar{\epsilon}} d^3 r_2 d^3 r_3 \int_0^\epsilon dz_1 dz_2 dz_3 \\
 &\frac{1}{[z_1^2 + z_2^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2] [z_2^2 + z_3^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2] [z_1^2 + z_3^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2]} \\
 &< \int d^3 r_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^\epsilon dz_1 dz_2 dz_3 \frac{1}{[z_1^2 + z_2^2 + w_2^2] [z_2^2 + z_3^2 + w_3^2] [z_1^2 + z_3^2 + w_2^2 + w_3^2]} \\
 &< \frac{1}{4} \int d^3 r_1 \int_0^\epsilon dz_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^4 u_2 d^4 u_3 \frac{1}{[z_1^2 + u_2^2] [z_1^2 + u_3^2] [u_2^2 + u_3^2]} \\
 &< \frac{S_4^2}{4} \int d^3 r_1 \int_0^\epsilon dz_1 \int_0^{\epsilon'} du_2 du_3 \frac{u_2^3 u_3^3}{[z_1^2 + u_2^2] [z_1^2 + u_3^2] [u_2^2 + u_3^2]}. \tag{4.81}
 \end{aligned}$$

Primeiramente integrando em z_1 temos que a integral anterior transforma-se em

$$\frac{S_4^2}{8} \int d^3 r_1 \int_0^{\epsilon'} du_2 du_3 \frac{u_2 \sqrt{u_3}}{[u_2 + u_3] [u_2 - u_3]} \arctan \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{u_3}} \right). \tag{4.82}$$

Devido ao fato que a função $\arctan \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{u_3}} \right)$ é finita no domínio de integração da integral anterior, temos que a convergência desta integral depende da convergência da seguinte integral

$$\frac{S_4^2}{8} \int d^3 r_1 \int_0^{\epsilon'} du_2 du_3 \frac{u_2 \sqrt{u_3}}{[u_2 + u_3] [u_2 - u_3]}, \tag{4.83}$$

onde o integrando da expressão anterior é finito, portanto a integral resulta ser finita. A integral correspondente ao produto de A_1 com B_2 e com C_2 , deve ser analisada na região

R_2 , onde temos que a integral é dada por

$$\begin{aligned}
 & \int_{R_2} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \\
 & \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2] [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2] [(z_1 + z_3)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2]} \\
 & < \int d^3 r_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^\epsilon dz_1 dz_2 dz_3 \\
 & \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + w_2^2] [(z_2 + z_3)^2 + w_3^2] [(z_1 + z_3)^2 + w_2^2 + w_3^2]}. \tag{4.84}
 \end{aligned}$$

Usando o teorema IV do apêndice B temos que a integral anterior está limitada superiormente por

$$\begin{aligned}
 & \int d^3 r_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^\epsilon dz_2 \\
 & \left[\int_0^\epsilon dz_1 \int_0^\epsilon dv \frac{1}{[v^2 + w_3^2] [(z_1 + z_2)^2 + w_2^2] [(z_1 + z_2 + v)^2 + w_2^2 + w_3^2]} + \right. \\
 & \left. \int_0^\epsilon dz_3 \int_0^\epsilon dv \frac{1}{[v^2 + w_3^2] [(v + z_2 + z_3)^2 + w_2^2] [(z_2 + z_3)^2 + w_2^2 + w_3^2]} \right] \\
 & < \frac{1}{8} \int d^3 r \left[\int_{-\epsilon}^\epsilon dz_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^4 u_2 d^4 u_3 \frac{1}{u_3^2 [z_1^2 + u_2^2] [z_1^2 + u_2^2 + u_3^2]} + \right. \\
 & \left. \int_{-\epsilon}^\epsilon dv \int_{-\epsilon}^\epsilon d^3 u_3 \int_{-\epsilon}^\epsilon d^5 w_2 \frac{1}{[v^2 + u_3^2] [v^2 + w_2^2] [w_2^2 + u_3^2]} \right]. \tag{4.85}
 \end{aligned}$$

Usando os teoremas II e III do apêndice B obtemos que a integral anterior está limitada superiormente por

$$\frac{1}{8} \int d^3 r \left[\frac{S_4 S_5}{3} \epsilon^3 + \frac{S_3 S_5}{2} \epsilon^2 \right]. \tag{4.86}$$

Assim obtivemos que esta integral é finita. A integral correspondente ao produto de A_1 com B_1 e com C_2 , deve ser analisada na região R_2 , onde se tem que a integral é

$$\begin{aligned}
 & \int_{R_2} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \\
 & \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2] [(z_2 - z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2] [(z_1 + z_3)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2]}. \tag{4.87}
 \end{aligned}$$

Usando o teorema IV do apêndice B temos que a integral anterior é limitada superiormente por

$$\int d^3 r_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^\epsilon dz_2 \left[\int_0^\epsilon dz_1 \int_0^\epsilon dv \frac{1}{[v^2 + w_3^2] [(z_1 - z_2)^2 + w_2^2] [z_1^2 + z_2^2 + v^2 + w_2^2 + w_3^2]} + \int_0^\epsilon dz_3 \int_0^\epsilon dv \frac{1}{[v^2 + w_3^2] [(v + z_3 - z_2)^2 + w_2^2] [z_2^2 + z_3^2 + w_2^2 + w_3^2]} \right]. \quad (4.88)$$

Note que nesta última expressão existem termos da forma $z_1 - z_2$ e $z_3 - z_2$ de forma que devemos usar novamente o teorema IV do apêndice B. Um cálculo direto mostra que esta integral é finita. As integrais dos produtos restantes são similares a integrais analisadas anteriormente resultando ser finitas, então temos que a expressão da Eq.(4.65) é finita. Agora temos que estudar o último termo da Eq.(4.64) que é dado por

$$\frac{1}{16L^2} \int d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) \right] \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, z_2, z_3) \right] \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3, z_1, z_3) \right] \frac{1}{\sin^2(\pi z_2/L)}. \quad (4.89)$$

Note que esta última expressão sem o termo $\frac{1}{\sin^2(\pi z_2/L)}$ já foi estudado anteriormente ao estudar a expressão da Eq.(4.65). O termo $\frac{1}{\sin^2(\pi z_2/L)}$ diverge quando a variável z_2 aproxima-se das placas, entretanto como as funções de dois pontos $G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2)$ e $G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, z_2, z_3)$ tendem a zero quando z_2 aproxima-se das placas, a divergência anterior anula-se. Portanto o diagrama correspondente a Fig.(4.3) somente contém divergências de volume.

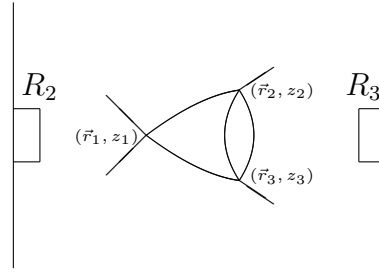


Figura 4.4: Diagrama de Feynman correspondente a função de quatro pontos a dois laços

A integral correspondente ao diagrama da Fig.(4.4) com as patas amputadas, é dada por

$$\int d^3r_1 dz_1 d^3r_2 dz_2 d^3r_3 dz_3 \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) \right] \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3, z_1, z_3) \right] \left[G_0^{(2)}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3, z_2, z_3) \right]^2, \quad (4.90)$$

onde substituindo a expressão do propagador livre dada pela Eq.(2.11) obtemos que a integral anterior é dada por

$$\int d^3r_1 dz_1 d^3r_2 dz_2 d^3r_3 dz_3 [A_1 - A_2 - A_3 + A_4] [B_1 - B_2 - B_3 + B_4] [C_1 + C_2 + C_3 - C_4 - C_5 + C_6 + C_7 + C_8], \quad (4.91)$$

onde

$$A_1 = \frac{1}{(z_{12}^-)^2 + r_{12}^2}, \quad (4.92)$$

$$A_2 = \frac{1}{(z_{12}^+)^2 + r_{12}^2}, \quad (4.93)$$

$$A_3 = \frac{1}{(2 - z_{12}^+)^2 + r_{12}^2}, \quad (4.94)$$

$$A_4 = h(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2), \quad (4.95)$$

$$B_1 = \frac{1}{(z_{13}^-)^2 + r_{13}^2}, \quad (4.96)$$

$$B_2 = \frac{1}{(z_{13}^+)^2 + r_{13}^2}, \quad (4.97)$$

$$B_3 = \frac{1}{(2 - z_{13}^+)^2 + r_{13}^2}, \quad (4.98)$$

$$B_4 = h(\vec{r}_1 - \vec{r}_3, z_1, z_3), \quad (4.99)$$

$$C_1 = \frac{1}{[(z_{23}^-)^2 + r_{23}^2]^2}, \quad (4.100)$$

$$C_2 = \frac{1}{[(z_{23}^+)^2 + r_{23}^2]^2}, \quad (4.101)$$

$$C_3 = \frac{1}{[(2 - z_{23}^+)^2 + r_{23}^2]^2}, \quad (4.102)$$

$$C_4 = \frac{2}{[(z_{23}^-)^2 + r_{23}^2] [(z_{23}^+)^2 + r_{23}^2]}, \quad (4.103)$$

$$C_5 = \frac{2}{[(z_{23}^-)^2 + r_{23}^2] [(2 - z_{23}^+)^2 + r_{23}^2]}, \quad (4.104)$$

$$C_6 = \frac{2}{[(z_{23}^+)^2 + r_{23}^2] [(2 - z_{23}^+)^2 + r_{23}^2]}, \quad (4.105)$$

$$C_7 =$$

$$\left[\frac{1}{(z_{23}^-)^2 + r_{23}^2} - \frac{1}{(z_{23}^+)^2 + r_{23}^2} - \frac{1}{(2 - z_{23}^+)^2 + r_{23}^2} \right] h(r_{23}, z_2, z_3), \quad (4.106)$$

$$C_8 = [h(r_{23}, z_2, z_3)]^2. \quad (4.107)$$

O termo C_1 ao se integrar na variável (\vec{r}_2, z_2) numa vizinhança em torno de (\vec{r}_3, z_3) contém uma divergência de volume. Então este termo pode ser eliminado com o contratermo de volume que corresponde a este diagrama de Feynman na teoria sem fronteiras. A integral do produto A_1 com B_1 e com C_2 na região R_2 , é dado por

$$\begin{aligned} & \int_{R_2} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \\ & \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2] [(z_1 - z_3)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2] [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2]^2} \\ & < \int d^3 r_1 \int_{-\epsilon}^{\epsilon} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^{\epsilon} dz_3 \\ & \left[\int_0^{\epsilon} dz_1 \int_0^{\epsilon} dv_2 \frac{1}{[v_2^2 + w_2^2] [(z_1 - z_3)^2 + w_3^2] [(z_1 + z_3 + v_2)^2 + |\vec{w}_2 + \vec{w}_3|^2]^2} \right]^+ \end{aligned}$$

$$\int_0^\epsilon dz_2 \int_0^\epsilon dv_1 \frac{1}{[v_1^2 + w_2^2] [(v_1 + z_2 - z_3)^2 + w_3^2] [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{w}_2 + \vec{w}_3|^2]^2} \Big]. \quad (4.108)$$

Para chegarmos a esta expressão usamos o teorema IV do apêndice B e a seguinte mudança de variável: $v_2 = z_2 - z_1$ para a primeira integral e $v_1 = z_1 - z_2$ para a segunda integral respectivamente. Novamente usando o teorema IV do apêndice B e fazendo a mudanças de variável $v_2 = z_2 - z_1$ e $v_1 = z_1 - z_2$ temos que a integral anterior fica limitada superiormente por

$$\begin{aligned} & \int d^3 r_1 \int_{-\vec{\epsilon}}^{\vec{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \\ & \left[\int_0^\epsilon dz_1 dv_1 dv_2 \frac{1}{[v_2^2 + w_2^2] [v_1^2 + w_3^2] [z_1^2 + v_2^2 + w_2^2 + w_3^2]^2} + \right. \\ & \int_0^\epsilon dz_2 dv_1 dv_2 \frac{1}{[v_1^2 + w_2^2] [(v_1 - v_2)^2 + w_3^2] [(2z_2 + v_3)^2 + w_2^2 + w_3^2]^2} + \\ & \left. \int_0^\epsilon dz_3 dv_1 dv_2 \frac{1}{[v_1^2 + w_2^2] [v_1^2 + v_2^2 + w_3^2] [(2z_3 + v_3)^2 + w_2^2 + w_3^2]^2} \right]. \quad (4.109) \end{aligned}$$

Usando mais uma vez o teorema IV do apêndice B na segunda integral do lado direito da última equação e resolvendo as integrais obtemos que a integral do produto A_1 com B_1 e com C_2 na região R_2 , é finita. A integral do produto A_1 com B_1 e com C_4 na região R_2 , é dado por

$$\begin{aligned} & \int_{R_2} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2]} \\ & \frac{1}{[(z_1 - z_3)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2] [(z_2 - z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2] [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2]} \\ & < \int d^3 r_1 \int_{-\vec{\epsilon}}^{\vec{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \\ & \left[\int_0^\epsilon dz_1 dv_1 dv_2 \frac{1}{[v_2^2 + w_2^2] [v_1^2 + v_2^2 + w_3^2] [v_1^2 + w_2^2 + w_3^2] [z_1^2 + v_1^2 + v_2^2 + w_2^2 + w_3^2]^2} + \right. \\ & \left. \int_0^\epsilon dz_2 dv_1 dv_2 \frac{1}{[v^2 + u^2 + w_2^2] [u^2 + w_3^2] [v^2 + w_2^2 + w_3^2] [v^2 + z_2^2 + w_2^2 + w_3^2]^2} \right] \end{aligned}$$

$$\int_0^\epsilon dz_2 dv du \frac{1}{[v^2 + w_2^2] [u^2 + w_3^2] [v^2 + u^2 + w_2^2 + w_3^2] [v^2 + u^2 + z_2^2 + w_2^2 + w_3^2]} \Bigg]. \quad (4.110)$$

Para chegar a esta última desigualdade usamos o teorema IV do apêndice B. Lançando mão dos teoremas II e III podemos mostrar que as integrais da Eq.(4.110) são finitas. Portanto a integral do produto A_1 com B_1 e com C_4 na região R_2 é finita. A integral do produto A_1 com B_1 e com C_6 na região R_2 , é dado por

$$\int_{R_2} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2]} \frac{1}{[(z_1 - z_3)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2] [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2] \underbrace{[(2 - (z_2 + z_3))^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2]}_{\text{finita em } R_2}} \Bigg]. \quad (4.111)$$

Usando o teorema I do apêndice B obtemos que a convergência da integral anterior depende da convergência da mesma integral mas sem a parte finita na região R_2 . Esta integral já foi analisada no gráfico de Feynman anterior, resultando ser finita. O mesmo acontece com a integral correspondente ao produto A_1 com B_1 e com C_7 na região R_2 . A integral do produto A_1 com B_2 e com C_2 na região R_2 , é dado por

$$\int_{R_2} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2] [(z_1 + z_3)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2] [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2]^2} < \int d^3 r_1 \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \left[\int_0^\epsilon dz_1 dz_3 dv \frac{1}{[v^2 + w_2^2] [z_1^2 + z_3^2 + w_3^2] [v^2 + z_1^2 + z_3^2 + w_2^2 + w_3^2]^2} + \int_0^\epsilon dz_2 dz_3 dv \frac{1}{[v^2 + w_2^2] [v^2 + z_2^2 + z_3^2 + w_3^2] [z_2^2 + z_3^2 + w_2^2 + w_3^2]^2} \right], \quad (4.112)$$

onde estas integrais são finitas. Desta forma a integral do produto A_1 com B_2 e com C_2 na região R_2 , é finita. A integral do produto A_1 com B_2 e com C_4 na região R_2 , é dada por

$$\begin{aligned}
& \int_{R_2} d^3r_1 dz_1 d^3r_2 dz_2 d^3r_3 dz_3 \frac{1}{[(z_1 - z_2)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2]} \\
& \frac{1}{[(z_1 + z_3)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2] [(z_2 - z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2] [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2]} \\
& < \int d^3r_1 \int_{-\vec{\epsilon}}^{\vec{\epsilon}} d^3w_2 d^3w_3 \\
& \left[\int_0^\epsilon dz_1 dv_1 dv_2 \frac{1}{[v_1^2 + w_2^2] [z_1^2 + v_1^2 + v_2^2 + w_3^2] [v_2^2 + w_2^2 + w_3^2] [z_1^2 + v_1^2 + v_2^2 + w_2^2 + w_3^2]} + \right. \\
& \int_0^\epsilon dz_1 dv_1 dv_2 \frac{1}{[v_1^2 + v_2^2 + w_2^2] [z_1^2 + v_1^2 + w_3^2] [v_2^2 + w_2^2 + w_3^2] [z_1^2 + v_1^2 + v_2^2 + w_2^2 + w_3^2]} + \\
& \int_0^\epsilon dz_3 dv_1 dv_2 \frac{1}{[v_1^2 + w_2^2] [z_3^2 + v_2^2 + w_3^2] [v_1^2 + v_2^2 + w_2^2 + w_3^2] [z_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + w_2^2 + w_3^2]} + \\
& \left. \int_0^\epsilon dz_3 dv_1 dv_2 \frac{1}{[v_1^2 + w_2^2] [z_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + w_3^2] [v_1^2 + w_2^2 + w_3^2] [z_3^2 + v_1^2 + w_2^2 + w_3^2]} \right], \tag{4.113}
\end{aligned}$$

onde estas integrais são finitas. Conseqüentemente a integral do produto A_1 com B_2 e com C_4 na região R_2 , é finita. Usaremos o teorema I do apêndice B para analisar as integrais do produto A_1 com B_2 e com C_6 e o caso da integral do produto A_1 com B_2 e com C_7 na região R_2 , onde se chegam a integrais idênticas as integrais analisadas no gráfico de Feynman anterior. Estas integrais são finitas. As integrais dos produtos A_2 com B_1 e com $(C_2, C_3 \dots C_7)$ são equivalentes as integrais dos produtos A_1 com B_2 e com $(C_2, C_3 \dots C_7)$ as quais já foram analisadas anteriormente resultando serem finitas. A integral do produto A_2 com B_2 e com C_2 na região R_2 , é dado por

$$\begin{aligned}
& \int_{R_2} d^3r_1 dz_1 d^3r_2 dz_2 d^3r_3 dz_3 \\
& \frac{1}{[(z_1 + z_2)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2] [(z_1 + z_3)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2] [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2]^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \int d^3 r_1 \int_{-\vec{\epsilon}}^{\vec{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \\
&\left[\int_0^\epsilon dz_1 dz_3 dz_3 \frac{1}{[z_1^2 + z_2^2 + w_2^2] [z_1^2 + z_3^2 + w_3^2] [z_2^2 + z_3^2 + w_2^2 + w_3^2]^2} \right], \quad (4.114)
\end{aligned}$$

sendo esta última integral finita. Portanto a integral correspondente ao produto A_2 com B_2 e com C_2 na região R_2 é finita. A integral do produto A_2 com B_2 e com C_4 na região R_2 , é dada por

$$\begin{aligned}
&\int_{R_2} d^3 r_1 dz_1 d^3 r_2 dz_2 d^3 r_3 dz_3 \frac{1}{[(z_1 + z_2)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2]} \\
&\frac{1}{[(z_1 + z_3)^2 + |\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^2] [(z_2 - z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2] [(z_2 + z_3)^2 + |\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^2]} \\
&< 2 \int d^3 r_1 \int_{-\vec{\epsilon}}^{\vec{\epsilon}} d^3 w_2 d^3 w_3 \int_0^\epsilon dz_1 dz_2 dv \\
&\frac{1}{[z_1^2 + z_2^2 + w_2^2] [z_1^2 + z_2^2 + v^2 + v^2 + w_2^2 + w_3^2] [v^2 + w_2^2 + w_3^2] [z_2^2 + v^2 + w_2^2 + w_3^2]}, \quad (4.115)
\end{aligned}$$

resultando esta última integral finita. Portanto a integral do produto A_2 com B_2 e com C_4 na região R_2 é finita. O resto dos produtos já foram analisados anteriormente resultando ser finitos. Então podemos concluir que o grafico de Feynman dados pela Fig.(4.4) e Eq(4.90) contém somente divergências de volume, a qual é renormalizada com os mesmos contratermos da teoria sem fronteiras.

Capítulo 5

Conclusões

Nesta tese estudamos como se implementa a renormalização perturbativa ao nível de dois laços de uma teoria escalar $\lambda\phi^4$ onde assumimos a presença de dois hiperplanos onde o campo satisfaz condições de contorno de Dirichlet. Desta forma na teoria existe quebra da invariância translacional. Mostramos que ao nível de um laço os contratermos usuais de volume são suficientes para tornar a teoria finita. Entretanto ao nível de dois laços, são necessários os contratermos de superfície para tornar a teoria finita.

Existem varias continuidões naturais para o tema desenvolvido na tese. A primeira é o estudo de QCD num volume finito e a segunda é o estudo de fenomenos críticos onde efeitos de tamanho finito são levados em consideração. Com relação ao primeiro assunto gostaríamos de discutir rapidamente porque estamos enfatizando o estudo de QCD onde aparece efeitos de tamanho finito. A cromodinâmica quântica é uma teoria não-abeliana com grupo de calibre SU(3). Os férmions da teoria transformam-se de acordo com a representação fundamental do grupo de calibre, i.e., cada sabor dos quarks é um tripleto de cor SU(3). Os bosons de gauge transformam-se de acordo com a representação adjunta. A interação entre os quarks é mediada pelos glúons. Devido a estrutura não-abeliana da teoria, os glúons acoplam-se entre si. Apesar de não existir a baixas temperaturas

cor livre, i.e., os prótons são singletos de cor (confinamento), existem vários trabalhos mostrando que existe possibilidade de acontecer uma transição de fase confinamento-desconfinamento. Por exemplo [13] [14] [15], no choque de íons pesados espera-se que se produza o plasma de quarks e glúons. Nestas circunstâncias efeitos de tamanho finito devem ser levados em consideração.

No início dos anos setenta, foi desenvolvida toda uma teoria de fenômenos críticos onde aparece um comprimento fundamental [16]. Da mesma forma do caso onde não exista um comprimento fundamental, a teoria crítica de sistemas com um comprimento finito é baseada no grupo de renormalização, onde propriedades universais dependem não apenas da forma do sistema, mas também das condições de contorno. Um dos fatores que estimularam o estudo de efeitos de tamanho finito em fenômenos críticos, é que as observações experimentais são feitas em sistemas finitos. Desta forma nossos estudos são bastantes relevantes nesta linha de pesquisa.

Apêndice A

Neste apêndice acharemos representações úteis para o propagador livre. Partindo da Eq.(2.8), temos que o propagador livre $G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2)$ é dado por

$$G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) = \frac{2}{(2\pi)^{d-1}L} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^{d-1}p \sin\left(\frac{n\pi z_1}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi z_2}{L}\right) \frac{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}}{[\vec{p}^2 + (\frac{n\pi}{L})^2 + m^2]}, \quad (\text{A.1})$$

onde as variáveis $u = \frac{z_1 - z_2}{L}$ e $v = \frac{z_1 + z_2}{L}$ são definidas nas regiões $u \in [-1, 1]$ e $v \in [0, 2]$ respectivamente. Também usando uma identidade trigonométrica e desenvolvendo a soma que aparece na Eq.(A.1), (Ref.[12]), obtemos

$$G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) = \frac{1}{2} \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{i\vec{p}\cdot(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}}{(\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\cosh\left(L(1 - |u|)(\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}\right)}{\sinh\left(L(\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}\right)} - \frac{\cosh\left(L(1 - v)(\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}\right)}{\sinh\left(L(\vec{p}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}\right)} \right]. \quad (\text{A.2})$$

Tomando $m = 0$, $d = 4$, e integrando a parte angular é possível mostrar que o propagador livre $G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2)$ pode-se escrever como

$$G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) = \frac{-i}{2(2\pi)^2 r' L^2} \int_0^{\infty} dx \left(e^{ixr'} - e^{-ixr'} \right) \left[\frac{\cosh\left((1 - |u|)x\right)}{\sinh x} - \frac{\cosh\left((1 - v)x\right)}{\sinh x} \right], \quad (\text{A.3})$$

onde a variável r' é definida por $r' \equiv \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{L}$. Usando a seguinte representação integral do produto da função Gamma e a função zeta de Riemann [12]

$$\int_0^{\infty} dx \frac{x^{z-1} e^{-\beta x}}{e^{px} - 1} = \frac{\Gamma(z)}{p^z} \zeta\left(z, \frac{\beta}{p} + 1\right), \quad (\text{A.4})$$

onde $Re(z) > 1$, $Re(\frac{\beta}{p}) > -1$, e a função zeta de Riemann $\zeta(z, q)$ é definida por

$$\zeta(z, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+q)^z}, \quad q \neq 0, -1, -2.. \quad (\text{A.5})$$

então, é possível escrever $G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2)$ da forma

$$G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) = \frac{1}{16\pi^2 L^2} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k - \frac{|u|}{2})^2 + (\frac{r'}{2})^2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k - \frac{v}{2})^2 + (\frac{r'}{2})^2} \right]. \quad (\text{A.6})$$

Finalmente usando a seguinte identidade

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k-z)^2 + r^2} = \frac{\pi}{2r} \frac{\sinh(2\pi r)}{\sinh^2(\pi r) + \sin^2(\pi z)}, \quad (\text{A.7})$$

obtemos uma expressão do propagador livre que necessitamos para prosseguir nossa análise. Usando a equação anterior Eq.(A.7) na Eq.(A.6) temos

$$G_0^{(2)}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, z_1, z_2) = \frac{\sinh(\pi r')}{16\pi L^2 r'} \left[\frac{\sin(\frac{\pi z_1}{L}) \sin(\frac{\pi z_2}{L})}{\left[\sinh^2(\frac{\pi r'}{2}) + \sin^2(\frac{\pi u}{2}) \right] \left[\sinh^2(\frac{\pi r'}{2}) + \sin^2(\frac{\pi v}{2}) \right]} \right]. \quad (\text{A.8})$$

Apêndice B

B.1 Teorema I

Sejam duas funções $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$ positiva-definidas numa região finita R . Estas funções são finitas exceto $f(\vec{x})$ no ponto \vec{x}_1 , então a integral

$$I = \int_R d^d x f(\vec{x})g(\vec{x}), \quad (\text{B.1})$$

é finita somente se

$$I' = \int_V d^d x f(\vec{x}), \quad (\text{B.2})$$

é finita numa vizinhança V ao redor do ponto \vec{x}_1 .

Para demonstrar a afirmação anterior analisemos a integral I em duas regiões, V e $R - V$, onde $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$ são finitas em $R - V$, então $\int_{R-V} d^d x f(\vec{x})g(\vec{x})$ é finita, portanto I será finita somente se $\int_V d^d x f(\vec{x})g(\vec{x})$ é finita. Devido a que $g(\vec{x})$ é positiva-definida em R , temos então que

$$g_{\min V} \leq g(\vec{x}) \leq g_{\max V} \quad \forall \vec{x} \in V, \quad (\text{B.3})$$

onde $g_{\min V}$ ($g_{\max V}$) é o mínimo (máximo) valor de $g(x)$ no V . Logo integrando temos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_V d^d x f(\vec{x})g_{\min V} &\leq \int_V d^d x f(\vec{x})g(x) \leq \int_V d^d x f(\vec{x})g_{\max V}, \\ 0 \leq g_{\min V} \int_V d^d x f(\vec{x}) &\leq \int_V d^d x f(\vec{x})g(x) \leq g_{\max V} \int_V d^d x f(\vec{x}). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Desta última expressão podemos ver que I dá um limite superior para I' e I' dá um limite superior para I .

B.2 Teorema II

Seja uma função $f(x)$ positiva a qual não tem singularidades exceto no ponto $x = 0$, e

$$M = \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^d x f(w^2), \quad (\text{B.5})$$

onde $w^2 = |\vec{w}|^2$, então

$$\exists \epsilon' / M = S_d \int_0^{\epsilon'} dw w^{d-1} f(w^2), \quad (\text{B.6})$$

onde $\epsilon < \epsilon' < \sqrt{d} \epsilon$, e $S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$.

Para demonstrar a afirmação anterior vamos proceder da seguinte forma: A integral M

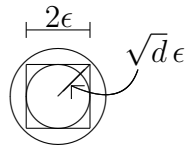


Figura B.1:

é definida no hipercubo d dimensional cujo lado tem comprimento 2ϵ Fig.(B.1). Devido a que $f(w^2) > 0$ a integral M tem um limite tanto inferior como superior pela integral sobre a hipersfera de raio ϵ e $\sqrt{d} \epsilon$, i.e.,

$$S_d \int_0^{\epsilon} dw w^{d-1} f(w^2) < M < S_d \int_0^{\sqrt{d}\epsilon} dw w^{d-1} f(w^2), \quad (\text{B.7})$$

vamos definir $g(x) = S_d \int_0^x d^d w w^{d-1} f(w^2)$. Como $f(w^2) > 0$ e continua, então $g(x)$ é continua e crescente, portanto existe ϵ' , onde $\epsilon < \epsilon' < \sqrt{d} \epsilon$ e $M = S_d \int_0^{\epsilon'} d^d w w^{d-1} f(w^2)$.

B.3 Teorema III

Seja uma função $f(x)$ positiva a qual não tem singularidades exceto para $x = 0$, e

$$N = \int_0^{\bar{\epsilon}} \int_0^{\bar{\epsilon}} d^l y d^m z f(y^2 + z^2), \quad (\text{B.8})$$

então

$$\exists \epsilon' > 0 / N = \frac{S_{l+m+2}}{S_{l+1} S_{m+1}} \int_0^{\epsilon'} dw w^{l+m+1} f(w^2), \quad (\text{B.9})$$

Para demonstrar a afirmação anterior vamos proceder da seguinte forma. Temos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{S_{l+1}} \frac{1}{S_{m+1}} \int_{-\frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{l+1}}}^{\frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{l+1}}} d^{l+1} y \int_{-\frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{m+1}}}^{\frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{m+1}}} d^{m+1} z f(y^2 + z^2) < N \\ & < \frac{1}{S_{l+1}} \frac{1}{S_{m+1}} \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^{l+1} y \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^{m+1} z f(y^2 + z^2), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

podemos verificar esta relação usando a desigualdade mostrada na Fig.(B.2) para cada

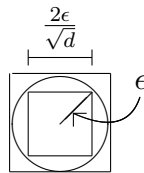


Figura B.2:

variável \vec{y} e \vec{z} mais o fato que $f(y^2 + z^2) > 0$. Consideremos $l \geq m$ (o caso contrário temos somente que trocar a ordem de integração), então

$$\frac{\epsilon}{\sqrt{l+1}} \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{m+1}}$$

e

$$\frac{1}{S_{l+1}} \frac{1}{S_{m+1}} \int_{-\frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{l+1}}}^{\frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{l+1}}} d^{l+1} y \int_{-\frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{l+1}}}^{\frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{l+1}}} d^{m+1} z f(y^2 + z^2) < N$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{1}{S_{l+1}} \frac{1}{S_{m+1}} \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^{l+1}y \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^{m+1}z f(y^2 + z^2), \\
&\frac{1}{S_{l+1}} \frac{1}{S_{m+1}} \int_{-\frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{l+1}}}^{\frac{\bar{\epsilon}}{\sqrt{l+1}}} d^{l+m+2}w f(w^2) < N < \frac{1}{S_{l+1}} \frac{1}{S_{m+1}} \int_{-\bar{\epsilon}}^{\bar{\epsilon}} d^{l+m+2}w f(w^2), \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

Usando o teorema anterior, existem ϵ'' e ϵ''' tal que

$$\frac{S_{m+l+2}}{S_{l+1}S_{m+1}} \int_0^{\epsilon''} dw w^{m+l+1} f(w^2) < N < \frac{S_{m+l+2}}{S_{l+1}S_{m+1}} \int_0^{\epsilon'''} dw w^{m+l+1} f(w^2), \quad (\text{B.12})$$

similarmente a demonstração anterior $\exists \epsilon' / \epsilon'' < \epsilon' < \epsilon'''$ e

$$N = \frac{S_{l+m+2}}{S_{l+1}S_{m+1}} \int_0^{\epsilon'} dw w^{l+m+1} f(w^2). \quad (\text{B.13})$$

B.4 Teorema IV

Seja uma função $f(x, y)$ positiva a qual não tem singularidades exceto para $(x, y) = (0, 0)$,

e

$$I = \int_0^\epsilon \int_0^\epsilon dx dy f(x, y), \quad (\text{B.14})$$

então,

$$I < \int_0^\epsilon dx \int_x^{x+\epsilon} dy f(x, y) + \int_0^\epsilon dy \int_y^{y+\epsilon} dx f(x, y), \quad (\text{B.15})$$

Referências

- [1] C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, Cambridge (1980).
- [2] H. W. Diehl and S. Dietrich, Z. Phys. **B42**, 65 (1981), H. W. Diehl, S. Dietrich and E. Eiseriegler, Phys. Rev. **B27**, 2937 (1983), M. Huhn and V. Dohm, Phys. Rev. Lett. **61**, 1368 (1988), A. N. Nemirovsky and K. F. Freed, J. Phys. **A18**, L319 (1985), A. M. Nemirovsky and K. F. Freed, Nucl. Phys. **B270**, 423, (1986), M. Krech and S. Dietrich, Phys. Rev. Lett. **66**, 345 (1991), M. Krech and S. Dietrich, Phys. Rev. **A46**, 1886 (1992).
- [3] E. Brezin and J. Zinn-Justin, Nucl. Phys. **B257**, 867 (1985).
- [4] A. Chodos, R. L. Jaffe, C. B. Thorn and V. F. Weisskopf, Phys. Rev. **D9**, 3471 (1974), T. H. Hansson and K. Johnson and C. Peterson, Phys. Rev. **D26**, 915 (1982); T. H. Hansson and R. L. Jaffe, Phys. Rev. **D28**, 882 (1983), T. H. Hansson and R. L. Jaffe, Ann. Phys. **151**, 204 (1983).
- [5] N. D. Birrell and L. H. Ford, Phys. Rev. **D22**, 330 (1980), L. H. Ford, Phys. Rev. **D21**, 933 (1980); D. J. Toms, Phys. Rev. **D21**, 928 (1980); D. J. Toms, Ann. Phys. **129**, 334 (1980); L. H. Ford and N. F. Svaiter, Phys. Rev. **D51**, 6981 (1995).
- [6] K. Symanzik, Nucl. Phys. **B190**, 1 (1980).

- [7] C. D. Fosco and N. F. Svaiter, *J. Math. Phys.* **42**, 5185 (2001).
- [8] M. Caicedo and N. F. Svaiter, *J. Math. Phys.* **45**, 179 (2004).
- [9] N. F. Svaiter, *J. Math. Phys.* **45**, 4524 (2004).
- [10] M. Aparicio Alcalde, G. Flores Hidalgo, N. F. Svaiter, CBPF preprint CBPF-NF-024/05 hep-th/0512100. Aceito para publicação no *Journal of Mathematical Physics* (2006).
- [11] W. Lukosz, *Z. Phys.* **258**, 99 (1973).
- [12] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press Inc., New York (1980).
- [13] E. V. Shuryak, *Phys. Rep.* **61**, 71 (1980).
- [14] L. McLerran, *Rev. Mod. Phys.* **58**, 1021 (1986).
- [15] D. Gross, R. Pisarski and L. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 43 (1981).
- [16] J. G. Brankov, D. M. Danchev, N. S. Tonchev, *Theory of Critical Phenomena in Finite-Size Systems*, World Scientific (2000).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)