

ROBERTO JOSÉ MEDEIROS JUNIOR

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E AÇÃO DIDÁTICA EM MATEMÁTICA NO
ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação, Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Profa. Dra. Ettiène Guérios

CURITIBA

2007

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

EPÍGRAFE

"Acima de tudo, devemos duvidar de tudo. (...) rejeitar como absolutamente falso o que quer que pudesse conter, ao meu juízo, a menor parcela de incerteza (...) E já que todos os pensamentos e imaginações que nos acodem quando acordados são os mesmos que podem acudir-nos enquanto dormimos, sem que nenhum deles seja, ao mesmo tempo, verdadeiro, determinei estabelecer que tudo quanto jamais entrara em meu espírito não era mais verdadeiro que as ilusões dos meus sonhos."

DESCARTES

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria Clodete Azolin e Roberto José Medeiros, minha filha Melissa e aos meus irmãos Fabiola e Bruno por terem alimentado *meus dois* corações de esperança, decoro e sabedoria.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe **Maria Clodete Azzolin**,
pelo constante exemplo de força e superação das dificuldades da vida. Por ter me
ensinado que, acima da razão, existe a humildade e a vontade de fazer o bem
insistentemente; amo você!

A meu pai **Roberto José Medeiros**, por ter me emprestado todo o tempo que dispunha
para me confortar, orientar e dar ânimo nos momentos mais difíceis; amo você!

À minha filha amada, **Melissa**, cujo sorriso profundo e envolvente renovou-me
constantemente as forças. Papai ama você e dedica este e tantos outros trabalhos à sua
geração!

Aos meus irmãos, **Bruno e Fabiola**, queridos, presentes e amáveis, impecáveis
pesquisadores e estudiosos; amo vocês!

À **Micheli** pelas madrugadas e compreensão nos momentos de trabalho e estudo.

Aos meus amigos, **Everaldo, César e Rudinei**, pelas sugestões, indicações, apoio e
amizade. Valeu!

À minha orientadora e amiga, **Ettiène Guérios**, pela possibilidade de me fazer crescer academicamente, permitindo que *viajasse* por tudo o que sonhei. Em especial por ter compartilhado definições e pesquisas desenvolvidas no laboratório de ensino e aprendizagem e pelos ensinamentos tão preciosos sobre a Resolução de Problemas em Matemática e em Didática. Tenho muito a lhe agradecer; este trabalho é muito seu também. Já estou com **saudades!**

Aos Professores **Ademir Donizeti Caldeira** (o Mirão), **Joana Paulin Romanowski** e **Emerson Rolkouski**, pelas críticas e sugestões tanto na qualificação como na defesa desta dissertação. Muito obrigado!

Às minhas amigas, colegas de trabalho e pesquisa **Flávia Dias Ribeiro** e **Tânia T. Bruns Zimer**, pelo exemplo de seriedade, competência e dedicação. Muito obrigado!

Às **Irmãs Apóstolas do CIESC** – Sagrado, que, em consonância plena com sua filosofia de vida e missão solidária, viabilizaram parte da realização deste trabalho. Profundamente grato!

Ao Professor **José Augusto**, que com muita paciência me ajudou com a revisão de linguagem em cada página escrita e reescrita. Obrigado!

Às Professoras **Lourdes de la Rosa Onuchic** e **Norma Suely Gomes Allevato**, pela atenção, e-mails com artigos e carinho desde que iniciei a presente pesquisa. Muito Obrigado!

Ao Professor **Carlos Roberto Vianna**, por ter me emprestado a *Arte* de resolver os
mais diversos problemas. Eternamente grato!

Aos **Professores** da linha de **Educação Matemática** da Universidade Federal do
Paraná, pelas brilhantes reflexões e exemplo de competência acadêmica. Muito
Obrigado!

A **todos** que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização e divulgação deste
trabalho e àqueles que tornaram meu caminho mais difícil, colocando inúmeros
obstáculos a serem vencidos. Saibam que os obstáculos só fizeram crescer e transformar
o fraco em forte.

Meu especial agradecimento!

SUMÁRIO

EPÍGRAFE.....	ii
DEDICATÓRIA.....	iii
AGRADECIMENTOS.....	iv
SUMÁRIO.....	vii
RESUMO.....	ix
ABSTRACT.....	x
INTRODUÇÃO.....	01
JUSTIFICATIVA.....	06
PROBLEMA DA PESQUISA.....	13
OBJETIVOS.....	16
PERCURSO METODOLÓGICO.....	17
CARACTERIZAÇÃO DA ESCOLA, PROFESSORES E ALUNOS.....	20
CAPÍTULO 1 - ELUCUBRAÇÕES SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM AULAS DE MATEMÁTICA.....	32
CAPÍTULO 2 - APORTES TEÓRICOS SOBRE HEURÍSTICA EM UM CONTEXTO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	39
2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: PRIMEIRAS APROXIMAÇÕES.....	42
2.1.1 Situando historicamente a Resolução de Problemas em um contexto escolar.....	42
2.1.2 Heurística em Descartes.....	47
2.1.3 Heurística em Polya.....	52
2.1.4 Heurística em Arquimedes.....	66
2.1.5 Heurística em Pappus.....	70

CAPÍTULO 3 - APORTES TEÓRICOS SOBRE DIDÁTICA EM UM CONTEXTO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	74
3.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: DIDÁTICA TEÓRICA x DIDÁTICA FRANCESA	77
3.1.1 A Didática na prática segundo Guy Brousseau e a noção de <i>contrato didático</i>	79
3.1.2 Principais termos da teoria didática de Brousseau: situação didática, a-didática e interação aluno x meio.....	83
3.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E DIDÁTICA PRÁTICA.....	87
CAPÍTULO 4 - OS PROBLEMAS: INTENCIONALIDADE NA ELABORAÇÃO E RESPOSTAS DOS ALUNOS.....	89
4.1 ESBOÇO DA CLASSIFICAÇÃO ANALÍTICA DOS DADOS EMPÍRICOS.....	96
CAPITULO 5 - INTERPRETAÇÃO DOS DADOS OBITIDOS NAS ENTREVISTAS.....	107
5.1 APORTES TEÓRICOS DA DIDÁTICA, DIALÉTICA E SUAS IMPLICAÇÕES NA PRÁTICA.....	107
5.2 A QUESTÃO DOS ENUNCIADOS CURTOS E LONGO NOS FUNDAMENTOS HEURÍSTICOS PRESENTES NO DISCURSO DO ALUNO E DO PROFESSOR.....	119
5.3 EXPLORAÇÃO E DECODIFICAÇÃO HEURÍSTICA DOS PROTOCOLOS INTERPRETADOS.....	127
5.4 O PROFESSOR DE MATEMÁTICA: ANSEIOS E AS CONTRADIÇÕES NA PRÁTICA...	137
5.5 OLHANDO OS DADOS EMPÍRICOS À LUZ DE POLYA E A HEURÍSTICA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.....	139
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	145
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	151
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR E DE PESQUISA.....	159

RESUMO

Esta pesquisa, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Federal do Paraná, contemplada na linha de Educação Matemática, identificou relações didáticas estabelecidas na tríade *aluno-professor-conhecimento matemático* como um processo de ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas. Estudou-se o modo como alunos das 5^a. e 6^a. séries resolvem exercícios e problemas, estes com enunciados curtos ou longos. A pesquisa alicerça-se a três teorias fortemente fundamentadas no conhecimento sobre a resolução de problemas enquanto atividade matemática e modalidade de ensino para alunos do Ensino Fundamental: a Didática teórica e prática, a Heurística e a Resolução de Problemas. Os teóricos escolhidos foram: George Polya e Allan Schoenfeld, por fundamentarem a atividade heurística da resolução de problemas sob a ótica pedagógica; Brousseau, no que tange à Didática da Matemática; e Pura Lucia Oliver Martins e Lílian Wachowicz, para fundamentar a Didática em Matemática. Interpreta-se a Resolução de Problemas no âmbito da Didática, relacionando-as à análise crítica do discurso do professor de como *pensa que faz* e de como, seus alunos, na prática, *fazem e relatam como fazem* a resolução de problemas com enunciados longos e curtos.

Palavras-chave: Educação Matemática, Ensino Fundamental, Resolução de Problemas, Formação de Professores e Didática em Matemática.

ABSTRACT

This research was presented to the Post-graduation Program in Mathematical Education of the Federal University of Paraná. The aim of the project was to evaluate the didactic relationships in the triad *student-teacher-mathematical learning* as a mean to teach Mathematics by using Problem Solving. The study was based on how 5th and 6th grade students perform on mathematical exercises with short or long question heads. Three theories address Problem Solving and teaching modalities for Elementary and Middle School students: theoretical and practical Didactics, Heuristics and Problem Solving. The authors selected were George Polya e Allan Schoenfeld, for their contribution in heuristic activities of Problem Solving with a pedagogic view; and Brousseau, Pura Lucia Oliver Martins and Lílian Wachowicz on Mathematics Didactics. Problem Solving was interpreted in association with Didactics and correlated to the critical analysis of the teacher's speech on how they think they perform and how their students, in practice, perform and report their performance in Problem Solving with long and short question heads.

Key-words: Mathematical Education, Elementary School Teaching, Problem Solving, Training of Educators in Mathematics Didactics.

INTRODUÇÃO

A presente pesquisa nasceu da inquietação deste pesquisador com relação ao ensino de Matemática para alunos recém-chegados do Ensino Fundamental (1^a. a 4^a. séries). Tal inquietude foi gerada ao longo de dez anos de ininterrupta atuação em salas de aula, lecionando Matemática para alunos de 5^a. e 6^a. séries do Ensino Fundamental.

Foi a experiência docente com estes alunos que motivou à escolha do Mestrado em Educação, bem como à escolha pelas séries em questão.

A pesquisa tem como foco identificar relações didáticas que se estabelecem na tríade formada pelo conhecimento matemático escolar desenvolvido em sala de aula, pelo professor de Matemática e por seus alunos, de 5^a. e 6^a. séries, por meio da resolução de problemas. Para tanto, percorreu-se o caminho descrito a seguir:

No capítulo um, apresentam-se algumas elucubrações sobre a resolução de problemas em aulas de Matemática e a interpretação adotada por este pesquisador para o que vem a ser **problema**, tanto os ditos da vida real quanto em Matemática.

No capítulo dois, desenvolvem-se alguns aportes teóricos sobre Heurística em um contexto de Resolução de Problemas¹ e faz-se um breve histórico sobre a Resolução de Problemas para situar o leitor quanto às escolhas dos caminhos trilhados para esta pesquisa e pelos respectivos teóricos.

Tornou-se necessário pesquisar sobre os indícios da Heurística em Descartes, Polya, Arquimedes e Pappus, em especial Polya, por ter sido responsável por estruturar didaticamente o processo de resolução de problemas, resgatando o senso lógico das respostas dos problemas em Matemática.

¹ Optamos por escrever “Resolução de Problemas” com as iniciais maiúsculas quando estivermos nos referindo aos seus aspectos teóricos e “resolução de problemas”, com minúsculas, para referenciar o ato de resolver problemas.

No capítulo três, circunstancia-se a Didática no âmbito da resolução de problemas, buscando focar aspectos teóricos tanto da Didática Teórica quanto da Prática para fundamentar suas relações na sala de aula.

No capítulo quatro, analisa-se a intencionalidade metodológica do pesquisador, manifestada na elaboração dos enunciados dos problemas como também as respostas dos alunos.

No capítulo cinco, interpretam-se os protocolos de entrevistas com os professores e com os alunos para circunstanciar a Didática com a lente da Heurística e dos teóricos sobre Didática Prática e Teórica.

Ao finalizar esta pesquisa, acredita-se poder contribuir para que professores tenham uma diferente visão sobre sua prática pedagógica por meio da Resolução de Problemas; não só os propostos pelos livros didáticos, mas também os que motivam diferentes tipos de situações-problema, utilizando o potencial heurístico da resolução de problemas em Matemática.

No percurso da formação profissional do autor e no decorrer das leituras que fez, percebeu que a preocupação com a forma como são conduzidos os conteúdos de Matemática, no tocante a Resolução de Problemas, aparecem enfaticamente nos trabalhos da pesquisadora Onuchic (1999 e 2004), do NCTM (1989), do pesquisador brasileiro D'Ambrosio (1989), dos pesquisadores americanos Lester & Silver (1989), Schoenfeld (1979 e 1996) e do precursor de um modo de conceber e fazer a resolução de problemas, Polya (1957). Estas idéias e singularidades em resolver problemas, somadas à constante preocupação em melhorar a prática docente, motivaram o autor a escolher este tema.

Para os pesquisadores anteriormente citados, cabe ao professor propiciar aos seus alunos oportunidades para deixar de ser apenas memorizadores e reprodutores de conhecimentos matemáticos. Há necessidade de que sejam transformadores e críticos, capazes de elaborar de forma concreta suas próprias definições em benefício de suas atividades como cidadãos. Acreditam também que o aluno se sente mais motivado em aprender Matemática quando é incitado a resolver problemas de variados tipos e é capaz de resolvê-los de

diferentes maneiras. Tais entendimentos dão margem a algumas questões que abordamos nesta dissertação, tais como:

- Um bom problema é aquele que desafia?
- Existe diferença entre exercício e problema?
- Alunos e professores preferem problemas com enunciados longos ou curtos?
- Qual a importância das descobertas que os alunos fazem sozinhos quando resolvem problemas em Matemática?
- Resolução de problemas é o ponto de partida de toda atividade matemática?

Resolução de Problemas, encarada como modo didático para transmitir conhecimentos matemáticos, pode ser um estopim para provocar mudanças na postura do professor, no que tange a sua compreensão sobre o que vem a ser um problema matemático e as diferentes formas de resolvê-lo, em vários contextos.

Nesta pesquisa procura-se expor idéias sobre a resolução de problemas matemáticos, tendo como foco a atividade heurística² - a ação didática do professor quando faz uso da resolução de problemas em suas aulas, problematizando-as e compreendendo seu movimento didático enquanto metodologia de ensino.

Para Carraher (1995, p. 85), "... a aprendizagem de matemática e a resolução de problemas, se não estão diretamente relacionadas com a solução de problemas práticos, não são facilmente transferidas para a prática".

De certo modo, oferecer ao aluno oportunidades de resolver problemas em contextos práticos poderá ajudá-lo a lidar mais efetivamente com problemas na vida real. Não acredito ser a solução das dificuldades quando professores e

² O vocábulo heurístico deriva do grego *heuritiko* e significa *que serve para descobrir*. Esse método é também chamado *método da redescoberta*, *método interrogatório* ou *método socrático*.

alunos enfrentam diferentes problemas em diferentes contextos, não só cotidianos, mas aqueles que são inerentes à própria Matemática.

Onuchic (2004) resgata que no início do século XX o ensino de Matemática estava profundamente ligado à concepção de que Matemática de qualidade era aquela caracterizada pelo trabalho de repetição e memorização de tabuadas, bem como de algoritmos pré-definidos pelo livro didático e/ou professor. Anos depois, numa outra concepção, percebeu-se que os alunos deveriam aprender *compreendendo*, ou seja, além da técnica; deveriam entender o que faziam e por que faziam.

De acordo com Onuchic (2004 apud SCHOROEDER & LESTER, 1989), existem três abordagens que ajudam a refletir sobre estas concepções: teorizar sobre Resolução de Problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar Matemática através da Resolução de Problemas. Para a presente pesquisa optou-se por desenvolver e aplicar atividades de resolução de problemas com alunos de 5^a. e 6^a. séries, trilhando o caminho de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, tendo como pano de fundo pressupostos teóricos sobre Didática e Heurística.

Uma considerável parte de professores entende que resolver problemas é chegar a uma única resposta correta, independentemente do modo (processo) de chegada à determinada solução. Em contrapartida, pesquisas³ em Educação Matemática apontam a Resolução de Problemas como sendo um processo, ou seja, o olhar no potencial didático de ensinar Matemática a partir de situações-problema.

Tendo em vista os aspectos anteriormente citados, interessa aqui aprofundar aspectos práticos e didático-práticos relacionados à possível diferenciação entre exercício e problema, bem como conhecer as descobertas que os alunos fazem sozinhos quando se deparam com problemas em aulas de Matemática, seja com enunciados longos ou curtos.

³ KRULIK, S.; REYES, R. **Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. DOMINGUES, H. H. & CORBO O. (Trads.). São Paulo: Ed. Atual, 1997. POZO, J. I. (org.) **A Solução de Problemas - Aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Editora Artmed, 1998. ONUCHIC, L.R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo, Editora Unesp, 1999.

Para tanto, trilhou-se um estudo com autores que versam sobre ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas, tendo como pano de fundo teorizar sobre a Didática, em especial a Didática Prática.

JUSTIFICATIVA

Van de Walle (2001) afirma que os professores de Matemática, para serem realmente eficientes, devem desenvolver quatro componentes básicos em suas atividades:

“Gostar da disciplina Matemática; compreender como os alunos aprendem e constroem suas idéias; ter habilidade em planejar e selecionar tarefas e, assim, fazer com que os alunos aprendam Matemática num ambiente de resolução de problemas; ter habilidade em interagir diariamente a avaliação com o processo de ensino a fim de melhorar esse processo e aumentar a aprendizagem”. (WALLE, 2001, p. 55.)

Entende-se que determinados formalismos matemáticos podem ser melhor ensinados através da Resolução de Problemas. Ao iniciar *matéria nova* para um grupo de alunos, é muito interessante fazê-lo com uma pergunta, um problema perturbador, não simplesmente com a definição pronta e fora de qualquer contexto. Exercícios e problemas podem e devem ser dados de modo a engajar os alunos no *pensar sobre* e no desenvolvimento da criatividade dos alunos em aulas de Matemática. Estes são tão importantes quanto os formalismos e algoritmos do cálculo que eles precisam aprender.

Este autor acredita que ensinar Matemática é fazendo com que o aluno resolva mecanicamente uma série infindável de problemas, sem a necessidade de compreensão das etapas envolvidas, traz conseqüências danosas. Tal prática pode parecer suficiente, mas, ao se deparar com um problema semelhante em outra situação, ou outro momento que não o do treinamento, o aluno se mostra incapaz de resolvê-lo por não compreender sua aplicabilidade, nem mesmo em situações deste contexto.

Varizo (1993) observou que:

“Os alunos, ao desenvolverem operações matemáticas pela imitação e pela memorização, sem compreensão, têm poucas possibilidades de estabelecer relações, de fazer conjecturas e analogias, e de desenvolver um raciocínio lógico-dedutivo. Desta forma, os alunos têm poucas possibilidades de se apropriarem do conhecimento matemático

como uma de suas ferramentas para atuar no mundo e, muito menos, como ciência". (VARIZO,1993, p. 3.)

Acredita-se aqui que nem sempre há simultaneidade entre o momento em que os conteúdos são ensinados nas aulas de Matemática e o momento do aluno estabelecer relações matemáticas. Mas ao estabelecê-las, os compreende; ao compreendê-los, os relaciona em outros contextos em que a Matemática dá conta de resolver problemas.

O que se vivencia fora da escola não se relaciona diretamente com o que se ensina dentro da sala de aula. Esse distanciamento entre o conteúdo curricular e a aplicação prática no cotidiano mostra que:

"... ao que parece, não há muita continuidade entre o que se aprende na escola e o conhecimento que existe fora dela. Há crescente evidência de que a escolarização está contribuindo muito pouco para o desempenho fora da escola. Dificilmente se mostra para o aluno a relação direta e óbvia que há entre a escola e a vida" (MOYSES, 1997, p. 60.)

Contudo a Resolução de Problemas pode ser um meio de os alunos aprenderem Matemática ao interpretarem situações geradas em diferentes contextos. Uma intenção é que a prática com a resolução de problemas possa contribuir para uma maior conscientização do papel da Matemática na escola e na interpretação das questões sociais para o exercício da cidadania.

Entender a Resolução de Problemas como modo de se fazer matemática está muito mais próximo da efetiva ação didática referente à resolução de problemas, em que o foco está na atividade de produção de conhecimento matemático pelo aluno com a mediação do professor.

O que se quer observar é se a metodologia de Resolução de Problemas pode ligar intrinsecamente personagens da ação didática, de modo que a sala de aula se torne um palco no qual a dramatização acontece quando tais personagens, no processo ensino e aprendizagem, formam uma tríade ativa (aluno/professor/conhecimento) movimentada pela resolução de problemas, em um ambiente de construção de saberes.

Compreender a resolução de problemas como uma possibilidade metodológica nos leva a voltar a atenção para as estratégias, métodos, procedimentos e heurísticas utilizadas para chegar à solução de um problema. Para tal, nesta pesquisa, faz-se mister observar os seguintes aspectos:

1. O raciocínio elaborado pelo aluno na solução dos problemas;
2. As etapas resolutivas, onde aparecem enfaticamente os passos da descoberta, a estratégia do aluno, não somente a resposta final encontrada;
3. O modo como o professor faz e pensa que faz um exercício ou problema nas aulas de Matemática;
4. O modo como o aluno recebe, entende e interpreta o problema matemático.

O capítulo dois desta dissertação tratará da Heurística com maior aprofundamento.

Ressalta-se que, a nosso ver, o problema central enfrentado no ensino da Matemática não é apenas um problema pedagógico, mas, também, um problema inerente à concepção de Matemática que é veiculada e reproduzida na formação inicial daqueles que a ensinam nos cursos de Licenciatura de Matemática e em Pedagogia.

Encontramos interessante contribuição em Batisti (1999) quando ao focar a Resolução de Problemas em seus estudos sobre o “método da análise”, observou que a atividade de produção do saber matemático deu lugar ao processo de reprodução que conduz a uma “visão da matemática como ente abstrato, ininteligível, extraterrestre, sem sentido e utilidade, que por muitas vezes é conceituada como uma coleção de dados desvinculados da sua própria raiz histórica, atribuindo *status* de total independência com relação às demais ciências”. (BATISTI, 1999, p. 2.) Em sua obra fica evidente que as regras matemáticas são apresentadas nas escolas como verdadeiros *macetes* e que desvinculadas dos conceitos que representam, acabam sendo simplesmente apresentadas como prontas e acabadas, sem discussão alguma e sem fazer recurso à metodologia da problematização. Diz o autor que “Esse procedimento expositivo e probatório, chamado de sintético, vai de encontro ao

método da análise, responsável pelo momento da descoberta e da invenção...”
(BATISTI, 1999, p. 7.)

O'Brien (2000) complementa o que encontramos nos autores até aqui. Diz ele que aprender Matemática não é saber memorizar grande parte do conteúdo proposto durante as aulas. E mais, que saber repetir sempre que o professor necessitar é uma postura desconexa do momento atual, distante das preconizadas pelos educadores matemáticos preocupados com uma efetiva aprendizagem. “O princípio é ao mesmo tempo básico e desprezível: empurrar conceitos que devem ser lembrados toda vez que o professor desejar. É mais ou menos o mesmo processo adotado com os papagaios ensinados”
(O'BRIEN, 2000, p. 3.)

Por outro lado, é outra a concepção de matemática escolar quando se ensina a partir do foco na resolução de problemas com possibilidades heurísticas. Cabe aqui ressaltar a importância em conhecer e fundamentar-se teoricamente na Resolução de Problemas, pois somente a solução de questões e os caminhos percorridos não são suficientes para recuperar a capacidade criativa que é própria dos alunos.

A visão aqui apresentada é a de que, conforme o PCN de Matemática (1998):

“A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.” (PCN – Matemática, 1998, p. 40.)

Aceita-se *a priori* que o ponto de partida da atividade matemática possa ser um problema, não aquilo que já está definido e imposto didaticamente, pois não há garantia de que um conceito foi aprendido ou definido simplesmente observando a resolução do problema proposto. Tais situações serão melhor discutidas nas interpretações dos protocolos referentes à aplicação dos problemas, no capítulo cinco.

Dentre os autores de diferentes áreas do conhecimento que versam sobre a Resolução de Problemas, ressaltamos o que Saviani (2002) afirma: “a essência do problema é a necessidade, uma questão em si não caracteriza um problema, nem mesmo aquele cuja resposta é desconhecida, mas uma questão cuja resposta se desconhece e se necessita conhecer. Eis aí um problema” (SAVIANI, 2002, p. 14.)

Um problema só é didaticamente um problema quando se deseja encontrar uma solução. Um bom problema é aquele cujo enunciado possibilita compreender o contexto em que está inserido (seja ele social, matemático, utilitário) sendo importante que o aluno esteja situado nesse contexto como personagem da ação-didática e não como mero receptor. O ato de encontrar soluções pode provocar o desenvolvimento de estratégias de resolução, da linguagem e a interpretação de dados dos problemas. O processo, o registro escrito e oral feito pelo aluno, deve ter igual ou maior importância que a resposta final do problema. Encontrar a resposta faz parte do processo. E a melhor estratégia durante a resolução do problema pode determinar, em melhor tempo, uma solução criativa e plausível. Embora não seja pauta neste momento discorrer sobre a ação do professor, não podemos perder de vista seu posicionamento nesta perspectiva didática.

Os problemas que favorecem os processos heurísticos contribuem para uma melhora do potencial criativo dos alunos. Além disso, proporcionam a aprendizagem mais significativa de conceitos, algoritmos e determinados formalismos em Matemática. O raciocínio e os processos heurísticos incluem estratégias de resolução de problemas. A capacidade de comunicar-se matematicamente e o desenvolvimento de métodos de raciocínio e provas são elementos essenciais da Matemática, para que os atuais e futuros professores de Matemática tomem consciência de que:

“Se ele (a) não sabe explicar as regras que utiliza, se não é capaz de as desmontar para dar respostas a uma situação nova, se os seus conceitos não são sólidos ou se não tem hábitos de raciocínio, reflexão, comunicação e de resolução de problemas, então, não poderá providenciar actividades (sic) e tarefas de aprendizagem que conduzam os seus alunos a um poder matemático como se tem enfatizado nos documentos mais recentes sobre educação matemática”. (MONTEIRO *et. al.* 2004, p. 185.)

Nesse sentido, Carpenter *et al.* (1976) afirma ser desagradável o fato de que muitos alunos têm poucas oportunidades de aprender a resolver os problemas do mundo real. Os resultados das avaliações⁴ municipais, estaduais e federais são tão fracos que é importante saber se não é o caso: “da necessidade de que professores e alunos assumam o compromisso de trabalhar com problemas, de refletir sobre problemas”. (CARPENTER *et al.* 1976, p. 13.)

Ensinar Matemática exige do professor esforço e planejamento. Uma boa situação-problema envolve diversas formas de resolvê-la. As tarefas, exercícios complementares e avaliações precisam ser planejadas ou selecionadas de forma contínua, considerando a compreensão dos alunos e as necessidades do currículo. Conforme enfatiza Onuchic (2004), há boas razões para se fazer esse esforço:

1. “Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre idéias e sobre o 'dar sentido'. Ao resolver problemas, os alunos necessitam refletir sobre as idéias que estão inerentes e/ou ligadas ao problema”;
2. “Resolução de Problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que Matemática faz sentido. Cada vez que o professor propõe uma tarefa com problemas e espera pela solução, ele diz aos estudantes: 'Eu acredito que vocês podem fazer isso!' Cada vez que a classe resolve um problema, a compreensão, a confiança e a autovalorização dos estudantes são desenvolvidas”;
3. “É gostoso! Professores que experimentam ensinar dessa maneira nunca voltam a ensinar do modo 'ensinar dizendo'. A excitação de desenvolver a compreensão dos alunos através de seu próprio raciocínio vale todo esforço e, de fato, é divertida; também para os alunos a formalização de toda teoria Matemática pertinente a cada tópico construído, dentro de um programa assumido, feito pelo professor no final da atividade, faz mais sentido.” (ONUCHIC, 2004, pp. 223 - 224.)

A proposta de se ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas - em que o *ensinar Matemática* está direcionado à compreensão dos métodos, de encarar Matemática como atividade, pelos seus próprios contextos, por meio de situações-problema - sugere ser uma das alternativas para possibilitar ao aluno melhor compreensão e apreensão de conceitos,

⁴ Sobre avaliações institucionais, ver: SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), AVA, INAF (Indicador de Alfabetismo Funcional), ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e PISA (Programme for International Student Assessment).

representando, portanto, uma tendência necessária para o ensino de Matemática.

Para que se tenha um entendimento mais aprofundado da pretensão em responder quando optou-se por desenvolver e aplicar atividades de resolução de problemas com alunos de 5^{a.} e 6^{a.} séries, tornou-se fundamental compreender e estruturar as idéias no campo da Didática, da Heurística e da Resolução de Problemas em Educação Matemática.

Trilhando o caminho de ensinar Matemática através da Resolução de Problemas, tendo como pano de fundo teorizar sobre a Didática e a Heurística na resolução de problemas, entendendo como alunos, professores e o conhecimento matemático se articulam em aulas de Matemática, é importante, portanto, evitar o processo imitação-memorização.

Também é importante considerar a necessidade de fazer com que os alunos aprendam a construir suas idéias e desenvolvam habilidades heurísticas em resolução de problemas.

Mas fazer com que alunos gostem de Matemática, compreendam e validem as soluções encontradas na resolução de problemas, será vazio de significado se não for levada em consideração a didática do professor para bem planejar e selecionar exercícios ou problemas.

Por sua vez o professor também deve gostar de Matemática, compreender como os alunos aprendem e descobrem a solução de um problema em um ambiente de Resolução de Problemas.

Para, a seguir, anunciar nosso problema de pesquisa, resgatemos que a experiência docente deste pesquisador em sala de aula do Ensino Fundamental provocou inquietação quanto aos diferentes modos de ensinar Matemática, em que a Resolução de Problemas foi adquirindo status de desencadeador do próprio processo. Foi a experiência docente deste pesquisador, que, associada a estudos teóricos, que levaram a desconfiar que a ação do professor possa ser um elemento desencadeador de relações didáticas produtivas, quando envolvem a Resolução de Problemas.

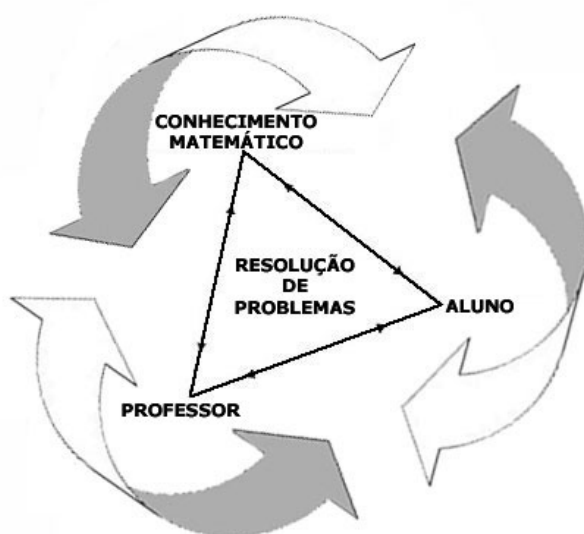
PROBLEMA DA PESQUISA

Dada a justificativa, pretende-se aprofundar as reflexões acerca da Resolução de Problemas na matemática escolar, atuando junto a dois professores do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública, situada em um bairro central de Curitiba.

Desta forma, acredita-se poder realizar um estudo sobre as relações estabelecidas frente às propostas do ensino de Matemática, por meio de Resolução de Problemas e ação didática. Sendo assim, investiga-se a questão:

Que relações didáticas são estabelecidas na tríade professor, aluno e conhecimento matemático no processo de ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas?

Observe-se a figura:



A tríade formulada no problema enunciado é configurada alegoricamente como algo rígido (três elementos triangulados); porém, não estática. Acredita-se que, por se tratar de algo em movimento permanente, não exista um começo nem um fim do ciclo. A resolução de problemas é concebida como o eixo que dá sustentação a esse movimento.

O demonstrado é uma tentativa de representar como se percebe o movimento didático que ocorre quando o professor de Matemática faz uso da Resolução de Problemas em aulas de Matemática.

A tríade, na figura, pode ser vista também como um caleidoscópio. Acredita-se este, enquanto prisma de bases triangulares, pode ajudar a ilustrar o que se pretende demonstrar.

Entendo a sala de aula como um organismo vivo, que se movimenta e se desequilibra constantemente; daí a idéia do triângulo que sustenta a tríade não estar, como convencionalmente se apresenta, apoiado em uma base. As flechas dão a idéia de dinamismo, que, centralizado na Resolução de Problemas, produz a rotação em sentido horário e anti-horário. A idéia do caleidoscópio surgiu para ilustrar como os conceitos que estão presentes durante a aula estariam *escorregando* constantemente para um de seus vértices.

Dessa forma conteúdos de Matemática do Ensino Fundamental estariam passando pelos três vértices do triângulo, ora concentrados no professor, ora concentrados no aluno, ora em ambos, mostrando, analogamente, o momento de uma aula expositiva ou alguma outra modalidade didática pré-determinada pelo professor.

Quando o professor faz uma pergunta que desafia, o aluno expõe, então, que conceito(s) conhece e qual ou quais convém aplicar na solução do problema; sente-se provocado, desafiado a responder a pergunta do professor, ou quem sabe de um colega.

Esse movimento pode ser feito em diferentes contextos, uma vez que o professor já deve deter o conhecimento dos conceitos que ensina.

Por fim, na resolução de um problema, aqui entendido como eixo de rotação da tríade formada, existe mais uma passagem, mas não a última, dos

conceitos. Agora vamos em direção ao conhecimento matemático propriamente dito, em que o aluno e professor discutem as diferentes formas de resolver o problema.

Neste momento, o vértice conhecimento matemático é o ponto de destaque e a base está formando a via do diálogo entre o professor e o aluno, quando discutem a forma como resolveram determinado problema.

Ao investigar as relações didáticas que estão estabelecidas na tríade professor-aluno-conhecimento matemático na ação de ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas, concebendo-a como eixo que dá sustentação a esse movimento, espera-se, ao final desta pesquisa, responder quais são tais relações didáticas e como podem ser dinamizadas em aulas de Matemática por meio de Resolução de Problemas.

OBJETIVOS

Esta pesquisa pretende oferecer subsídios para que professores envolvidos com a prática escolar possam aprimorar seus métodos para ensinar Matemática de modo relevante, tendo em vista o aprimoramento de sua ação didática por meio da Resolução de Problemas. Os resultados não satisfatórios alcançados por alunos do Ensino Fundamental, em Matemática, mostram que é vital promover situações em sala de aula que primem pelo desenvolvimento do aluno na ampliação de sua autonomia e na aproximação de sua realidade com a Matemática.

Nesse sentido, “ao professor cabe desenvolver metodologias de ensino alicerçadas no processo de construção do conhecimento, neste caso específico, na construção de conceitos fundamentais que priorizem a capacidade de raciocínio do aluno, e não que enfatizem sua capacidade de memorização ou de reproduções de modelos prontos”. (DOMENICO, 1999, p. 27.)

Com a finalidade de ampliar a compreensão sobre o que se deseja investigar, faz-se necessário ponderar sobre:

1. Alguns usos e interpretações da Resolução de Problemas em Matemática;
2. As concepções dos professores entrevistados em relação à Resolução de Problemas na matemática escolar;
3. A didática, em especial a didática prática;
4. O significado de contexto, na resolução de problemas;
5. O registro escrito versus o registro oral dos alunos que resolveram os problemas propostos.

Procura-se destacar o fato de que as concepções dos professores sobre a Resolução de Problemas refletem suas concepções sobre a Matemática e sobre o ensino e se encontram condicionadas a fatores externos, como a estrutura da escola, da sala de aula, dos alunos que compõem a classe, entre outros.

PERCURSO METODOLÓGICO

Esta é uma pesquisa qualitativa de natureza interpretativa. Para a coleta de dados, adotou-se documento escrito em que alunos resolveram problemas organizados pelo pesquisador e entrevista semi-estruturada com os professores dos alunos e com alguns alunos, os quais foram selecionados em função das resoluções que apresentaram aos problemas propostos.

Primeiramente, procurou-se fazer um percurso histórico da Resolução de Problemas e das suas contribuições na Matemática escolar em teses e dissertações que versam sobre a Resolução de Problemas. Buscou-se compreender as convergências e as divergências aparentes nas diferentes concepções que se tem em Resolução de Problemas.

Para contribuir com a interpretação dos dados obtidos nas entrevistas, fez-se necessário organizar em itens a estrutura da escola, a formação dos professores, as falas dos alunos e seus anseios frente à Matemática escolar. Neste momento, a didática enquanto teoria necessária à continuidade desta pesquisa, estava implícita nas relações didáticas que se pretendia estabelecer; em especial a Didática prática enquanto fundamento teórico específico para as relações didáticas estabelecidas na tríade aluno-professor-conhecimento matemático.

Em um segundo momento, a Didática teórica e prática foram confrontadas com a heurística presente na resolução dos problemas e nas entrevistas feitas com os alunos após a aplicação das fichas com problemas e exercícios. O material empírico foi fundamental para responder quais relações são estabelecidas na tríade que se pretende explicar.

Os procedimentos técnicos para a produção do material empírico são os seguintes:

1. O pesquisador elaborou uma lista de problemas (aqui entendidos como situações matemáticas apresentadas com enunciados curtos e longos que, *a priori*, fariam com que os alunos tivessem que descobrir uma

estratégia coerente com a pergunta do problema) e exercícios (apresentados como algoritmos do tipo *arme e efetue*) para servir à pesquisa, observando o planejamento desenvolvido pelo professor para a série em questão.

2. Em seguida, o professor aplicou a lista com os problemas e exercícios aos seus alunos de 5^a. e 6^a. séries. Estes resolveram, registrando como os devidos problemas e exercícios foram resolvidos.
3. Professor retornou ao pesquisador os problemas e exercícios organizados, por uma análise prévia, qualitativa, dos modos de resolução dos problemas e exercícios apresentados pelos seus alunos. Conduziu-se da seguinte forma: os professores escolheram seis alunos (onze ao todo, nesta pesquisa) de cada série que, de alguma forma, chamaram-lhes a atenção por qualquer motivo; poderia ser a resolução correta do problema ou exercício proposto de uma maneira diferente, inovadora; poderia ser também uma resolução errada, mas, que, de alguma forma, despertou a curiosidade do professor. Estes fizeram as observações no topo das fichas, destacando o porquê da escolha.
4. Em horários previamente marcados, pesquisador e professor discutiram as resoluções dos alunos apresentadas pelos professores sob o ponto de vista das interpretações feitas por eles.
5. Professor separou das demais resoluções os alunos que lhe chamaram a atenção para futura entrevista. Pesquisador pediu que se esclarecesse o porquê da escolha.
6. Professor e o pesquisador entrevistaram os alunos. O pesquisador esclareceu que os alunos foram escolhidos para falar sobre as resoluções dos problemas e exercícios apresentados a eles pelo professor.
7. Pesquisador entrevistou o professor com o intuito de verificar se as questões iniciais apontadas por ele foram contempladas.

Em um terceiro momento, baseado nas transcrições feitas com os alunos selecionados e os professores, estruturou-se o capítulo cinco da presente dissertação, que contempla o momento da descoberta do aluno, a Didática prática e as concepções dos professores sobre a Resolução de Problemas, bem como a interpretação deste pesquisador sobre o movimento estabelecido

na tríade *aluno-professor-conhecimento matemático* quando se ensina Matemática por meio da resolução de problemas.

Por fim, as considerações finais retomam as interpretações dos protocolos circunstanciando as contribuições da Didática, Heurística e Resolução de Problemas respondendo articuladamente ao problema da pesquisa.

CARACTERIZAÇÃO DA ESCOLA, PROFESSORES E ALUNOS

Aqui fazemos uma breve descrição da escola e do perfil dos professores e alunos participantes da pesquisa. Para tanto descreve-se um panorama geral da estrutura escolar, dos professores e sua formação e dos alunos, em especial os alunos em suas turmas buscando tabular os dados recolhidos, para conhecer seus anseios e dificuldades em Matemática.

A escola

Para preservar o anonimato da instituição escolar participante desta pesquisa, a denominaremos de C. E. XXX.

Trata-se de um colégio estadual que dispõe de salas ocupadas por alunos do Ensino Fundamental e Médio, nas modalidades de Ensino Regular e Educação de Jovens e Adultos (EJA). Está localizado no Alto da XV, um bairro central e de classe média da cidade de Curitiba.

O C.E. XXX funciona em três períodos (manhã, tarde e noite), num total de 21 turmas e em torno de 700 alunos. Possui uma área de aproximadamente 400 m², onde se distribui um prédio de aproximadamente 70 anos, uma quadra poliesportiva, biblioteca, refeitório, laboratórios de Física, Química e Biologia e Informática bem equipados e área de recreação coberta.

Possui biblioteca com aproximadamente 6000 livros e periódicos para consulta e empréstimo.

Da mesma forma que muitas escolas da rede pública do Estado, o C.E. XXX não tem o quadro de servidores completo. Faltam servidores para a cozinha, serviços gerais e inspetoria. Em 2005, o colégio dispunha de três secretários, quatro auxiliares de serviços gerais e duas pedagogas responsáveis pelo Serviço de Orientação Educacional (SOE). A diretora é efetiva, permanece no cargo há 12 anos e tem como assistente a vice-diretora, professora concursada no período da manhã.

A sala de aula

As turmas escolhidas para esta pesquisa foram a 5^a. B e a 6^a. B de 2006, com 25 e 21 alunos respectivamente; e a 5^a. B, 6^a. B e 6^a. C de 2007, com 30, 24 e 22 alunos respectivamente. Possuem bom mobiliário. Além da mesa e da cadeira do professor, dispõem de 35 jogos de mesa e cadeira individuais para os alunos.

As salas de aula estão localizadas no pavimento superior, a forma é retangular, a área é de 54,28 m² e a capacidade física é de 45 alunos. Possuem três janelas com cortinas e boa circulação de ar, além de excelente iluminação por luz fria.

As salas de aula são usadas nos três períodos em que o colégio funciona. Em 2006, no turno vespertino, as turmas 5^a. B e 6^a. B ficavam uma ao lado da outra. A noite era ocupada pelos alunos do 3^o. B, turma da terceira etapa da EJA (Educação de Jovens e Adultos).

Em 2007, no turno vespertino, as turmas 5^a. B, 6^a. B e 6^a. C estariam localizadas no mesmo andar e dispostas duas (5^a. B e 6^a. B) a direita do corredor e a 6^a. B no lado esquerdo. No período noturno, a sala da 5^a. B esteve sendo ocupada por alunos da EJA (Educação de Jovens e Adultos) – modalidade individual.

Os professores

A professora (ano 2006)

A professora é formada em Matemática (Licenciatura Plena) pela Faculdade Estadual de Paranavaí no estado do Paraná. Possui duas especializações em Educação Matemática, uma pelo Instituto Brasileiro de Pesquisa e Extensão de Londrina (INBRAPE) – PR e outra pelo Instituto de Ação Social do Paraná – Londrina (ISAP). O interesse pela carreira docente em

Matemática, segundo a professora, surgiu pelo fato de ter formação em magistério superior, possuir facilidade em Matemática e desejar mudar o mito de que a Matemática é difícil.

A professora busca a formação continuada na área da Educação, fato que se torna evidente pela recente participação como ouvinte da disciplina Concepções e Tendências em Educação Matemática, ofertada pelo Programa de Pós-graduação em Educação, da Universidade Federal do Paraná, na linha de pesquisa Educação Matemática.

Tem 27 anos de idade, sete deles dedicados ao magistério.

Em 2006 a professora assumiu, no Colégio Estadual XXX, lotada no núcleo de Curitiba – PR, o cargo efetivo do Quadro Próprio do Magistério (QPM), com um total de 12 aulas no período da tarde e as demais em outros dois colégios, também públicos, para completar um total de 32 aulas semanais que, somadas às 8 horas atividade, fecham dois padrões, o máximo permitido pela Secretaria Estadual de Educação (SEED – PR) ao funcionalismo público.

Ainda no ano de 2006, no segundo semestre, foi convidada a fazer parte da Secretaria de Estado da Educação (SEED – PR) para compor a equipe do Departamento de Ensino Fundamental (DEF), cargo que permanecia ocupando até o ano do término desta pesquisa, em 2007.

O professor (ano 2007)

O professor é formado em Matemática (Licenciatura Plena) pela Universidade Tuiuti do Paraná. Possui especialização em Educação Matemática, pela PUC-PR, em 2004.

O interesse pela carreira docente em Matemática surgiu pelo fato de gostar de ensinar e ter interesse por entender mais a “ciência matemática”, além de ter facilidade em Matemática e desejar mudar o estilo tradicional de se ensinar Matemática.

O professor busca a formação continuada na área da Educação, por meio de palestras, oficinas e leituras sobre Educação Matemática. Tem

interesse em participar como aluno ouvinte da disciplina Concepções e Tendências em Educação Matemática, ofertada pelo Programa de Pós-graduação em Educação, da Universidade Federal do Paraná, na linha de pesquisa Educação Matemática.

Tem 36 anos de idade, seis deles dedicados ao magistério.

Em 2002 o professor assumiu, no Colégio Estadual XXX, lotado no núcleo de Curitiba – PR, o cargo efetivo do Quadro Próprio do Magistério, com um total de 12 aulas no período da tarde e as demais no período da manhã, com turmas do Ensino Médio.

Os alunos (anos de 2006 e 2007)

No início do ano letivo de 2006 eram 25 alunos matriculados na 5^a. B e 21 na 6^a. B. Em 2007 eram 30 alunos matriculados na 5^a. B, 24 na 6^a. B e 22 na 6^a. C, todas funcionando no período da tarde.

Depois de três semanas de aula, período compreendido entre fevereiro e março de 2006, na 5^a. B, dois alunos foram transferidos para outras escolas, dois ainda não haviam freqüentado e outro foi transferido para o período da manhã. Na 6^a. B três alunos foram transferidos de turno. Em 2007 houve um caso na 6^a. B de transferência de aluno para o turno da noite.

Para a presente pesquisa trabalhamos, em 2006, com 18 alunos, regularmente freqüentando as aulas da 6^a. série, sendo nove do sexo feminino e nove do sexo masculino, cujas idades variam de 11 a 16 anos. Em 2007 participaram da pesquisa 46 alunos de 6^a. séries, totalizando um universo de 64 alunos com idades entre 11 e 16 anos, conforme quadro a seguir:

Tabela 1: alunos matriculados na 6^a. série em 2006 e 2007.

Idade	11	12	13	14	15	16
Nº. de alunos	30	13	10	4	4	3

Fonte: pesquisa do autor, 2007.

No caso da 5ª. B, trabalhamos, em 2006, com 17 alunos regularmente freqüentando as aulas, sendo oito do sexo masculino e nove do sexo feminino, cujas idades variam de 11 a 15 anos. Em 2007 trabalhamos com 24 alunos de 5ª. série, formando um universo de 41 alunos, com idades entre 11 e 15 anos, conforme quadro que segue:

Tabela 2: alunos matriculados na 5ª série em 2006 e 2007.

Idade	11	12	13	14	15
Nº. de alunos	7	3	5	1	1

Fonte: pesquisa do autor, 2007.

Em meados de março de 2006 e 2007 foi entregue aos alunos das 5ªs. 6ªs. um pequeno questionário com as seguintes perguntas:

1. Qual a sua idade?
2. Já reprovou algum ano? Qual?
3. Onde você mora? Quanto tempo demora para chegar à escola?
4. Em que seus pais trabalham?
5. Seus pais participam das lições de casa?
6. Qual o grau de escolaridade dos seus pais?
7. Você gosta de Matemática?
8. Qual é a sua maior dificuldade em Matemática?
9. Você trabalha? Onde?

As perguntas tiveram como objetivo traçar um perfil das turmas e, de certa forma, um perfil de cada aluno pesquisado, pretendendo assim, enriquecer o aspecto qualitativo da pesquisa.

O que os alunos das 5^{as}. séries têm a nos dizer?

A aplicação dos questionários nas 5^{as}. séries foi realizada apenas em 2006. Não consideramos ser necessária nova aplicação do questionário, porque já tínhamos conhecimento dos alunos. A maioria estava matriculada na mesma escola e turno. Para a aplicação do questionário, escolhemos um dia ao acaso. Responderam ao questionário os 34 alunos que estavam presentes neste dia.

Com relação à reprovação, os resultados foram: 13 alunos reprovaram alguma série. Dentre eles, cinco reprovaram duas vezes a 5^a. série; quatro reprovaram uma vez a 5^a. série e quatro reprovaram a 4^a. série.

A maioria dos alunos reside em bairros próximos ao colégio ou na região metropolitana de Curitiba, e vai ao colégio de ônibus, levando, em média, 30 minutos para chegar até a escola.

Com relação à presença dos pais na residência em que vivem, 25 residem com os pais (seis moram com a mãe e o padrasto), sete somente com a mãe e duas com a avó materna. A maioria dos pais trabalha em período integral.

Sobre a escolaridade dos pais: um pai tem o Ensino Superior completo, 12 possuem o Ensino Médio completo, seis tem o Ensino Fundamental completo, nove têm o Ensino Fundamental incompleto e os demais alunos não souberam responder.

Com relação ao acompanhamento do estudo em casa, 12 alunos responderam que os pais participam das lições de casa, 14 disseram que participam às vezes e seis afirmaram não haver participação.

A maioria dos alunos respondeu positivamente à pergunta "Você gosta de matemática?". São doze contra cinco respostas negativas.

O que chamou a atenção foi o fato de que os que responderam negativamente reiteraram dizendo que, apesar de não gostarem de Matemática, gostam da professora, ou que não gostavam no ano passado, mas, este ano, passaram a gostar. Fato que reforça a idéia de que existe um grande peso na relação: "Gosto de matemática porque gosto do meu professor de Matemática."

A maioria almeja um curso superior; profissões como as de arquiteto, médico, veterinário, engenheiro, matemático, enfermeiro, entre outras que se fazem presentes nas respostas.

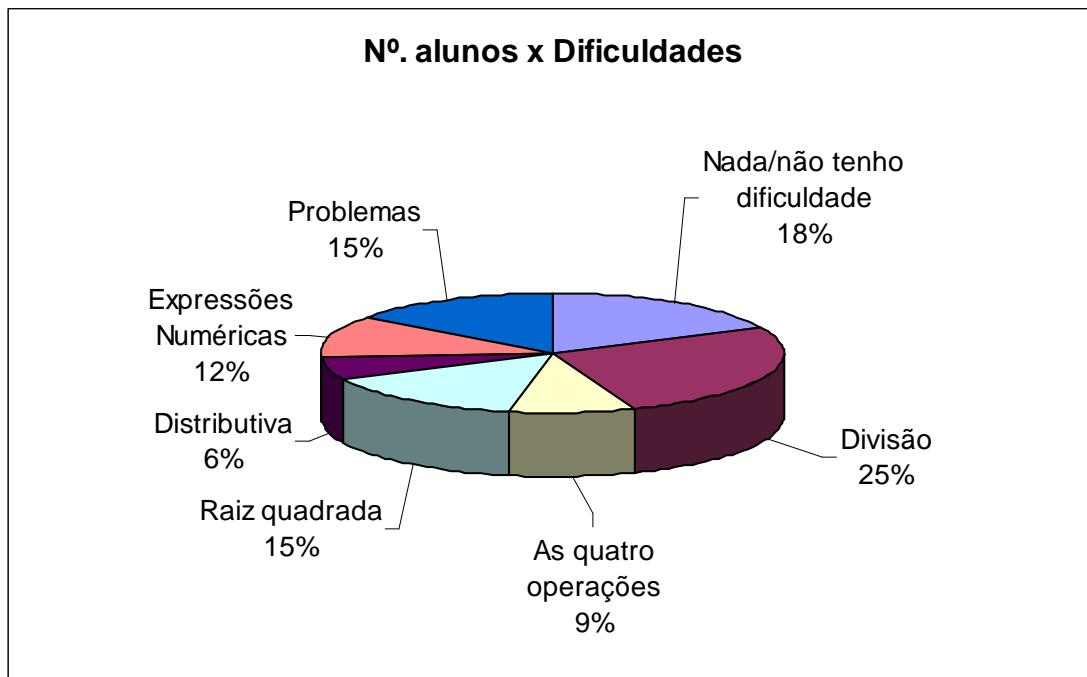
Quanto aos conteúdos em que mais apresentam dificuldade, tivemos respostas diversas, conforme tabela e gráfico a seguir:

Tabela 3: dificuldades dos alunos da 5ª. série em Matemática em 2006.

Dificuldade	Nada/não tenho dificuldade	Divisão	As quatro operações	Raiz quadrada	Distributiva	Expressões Numéricas	*Problemas
Nº. alunos	6	9	3	5	2	4	5

Fonte: pesquisa do autor, 2006.

***Problemas** são analisados na página seguinte.



Fonte: pesquisa do autor, 2007.

Destaca-se a tabela com as dificuldades dos alunos apenas do ano de 2006, por conter dados mais expressivos à pesquisa, conforme análise feita a seguir.

De acordo com a tabela anterior, ***problemas** são vistos como um conteúdo com o qual os alunos têm dificuldade. Tal informação é relevante à pesquisa, pois os alunos entendem que *problemas* são conteúdo de Matemática. Questiona-se como esse entendimento pode ser observado em alunos desta série. Ao observar o Projeto Pedagógico do Colégio Estadual XXX (para preservar a identidade do Colégio, optamos por destacar alguns trechos do Projeto Político Pedagógico), nota-se que resolução de problemas aparece em diversos itens, como: pressupostos teóricos, objetivo, encaminhamento metodológico, avaliação, competências e habilidades e conteúdo. A seguir, retiramos alguns trechos do PPP do Colégio Estadual XXX para ilustrar o observado.

1. “Pressupostos teóricos - é importante que a Matemática desempenhe seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio do aluno, na sua aplicação a

problemas da vida cotidiana em atividades do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos em outras áreas curriculares.”

2. “Objetivos - Perceber o caráter de jogo intelectual, característico da matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, a investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.”
“Resolver situações problemas.”; “Trabalhar coletivamente na busca de soluções para problemas propostos.”

3. “Encaminhamentos metodológicos (...) Para garantia de que os conteúdos sejam trabalhados em total harmonia, visando às competências e habilidades, esses serão sempre apresentados através de situações-problema que levem os alunos a propor soluções, fazer tentativas para resolução e analisar os resultados, considerando desta forma os conhecimentos trazidos da vida diária.”

4. “CONTEÚDOS DE 5ª a 8ª SÉRIES”

5ª SÉRIE

- Resolução de problemas.

6ª SÉRIE

- Resolução de Problemas.

- Resolvendo Problemas.

5. “Competências e Habilidades”

“- Utilizar a capacidade do raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas em conjuntos numéricos nas operações fundamentais e auxiliares.”

“- Utilizar a capacidade de medir, representar medidas e resolver problemas envolvendo vários tipos de medidas.”

6. “Avaliação”

“Os resultados expressos pelos instrumentos de avaliação, sejam eles provas, trabalhos, registros de atitudes dos alunos, devem fornecer ao professor informações sobre as competências de cada aluno em resolver problemas, em utilizar a linguagem matemática adequadamente para comunicar suas idéias, em desenvolver raciocínio e análises e em integrar todos esses aspectos no seu conhecimento matemático.”

“Para esse processo de avaliação, técnicas e instrumentos serão utilizados, tais como: participação efetiva nas aulas, com questionamento demonstrando interesse pelos assuntos abordados; resolução de problemas e exercícios propostos; provas objetivas e subjetivas; trabalhos individuais e / ou em grupo.”

De fato não há clareza quanto a situar a Resolução de Problemas no projeto político pedagógico, sendo que o entendimento que professores têm sobre a Resolução de Problemas interfere no modo como os alunos percebem a utilidade de *problemas* em aulas de Matemática.

O que os alunos das 6^{as}. séries têm a nos dizer?

A pesquisa de 2006 para a 6.^a série foi realizada no mesmo dia da coleta da 5.^a. B. Três alunos haviam faltado, o que representou um total de 15 fichas analisadas. Em 2007 tivemos cinco ausências, representando um total de 41 fichas respondidas.

Sobre a reprovação, os resultados são mais animadores que os das 5.^{as}. séries: 40 nunca reprovaram nenhuma série; 13 alunos reprovaram uma vez (a maioria a 5.^a. série), dois reprovaram três vezes a 5.^a série e um estudante reprovou quatro vezes (duas a 5.^a. série e duas a 6.^a. série).

A maioria vai ao colégio a pé ou de ônibus. Levam, em média, 20 minutos para chegar até a escola. Residem em bairros próximos ou na região metropolitana de Curitiba.

Com relação à presença dos pais na residência em que vivem, 28 residem com os pais (seis moram com a mãe e o padrasto), sete somente com a mãe e dois com o pai. A maioria dos pais trabalha em período integral. Oito têm o Ensino Superior completo, 15 possuem o Ensino Médio completo, 20 têm o Ensino Fundamental completo, 11 têm o Ensino Fundamental incompleto e dois alunos não souberam responder.

Com relação ao acompanhamento do estudo em casa, 28 alunos responderam que os pais participam das lições de casa, 17 disseram que participam às vezes e 11 afirmaram não haver participação.

A maioria dos alunos respondeu positivamente à pergunta: “Você gosta de matemática?”. São 42 contra 14 respostas negativas.

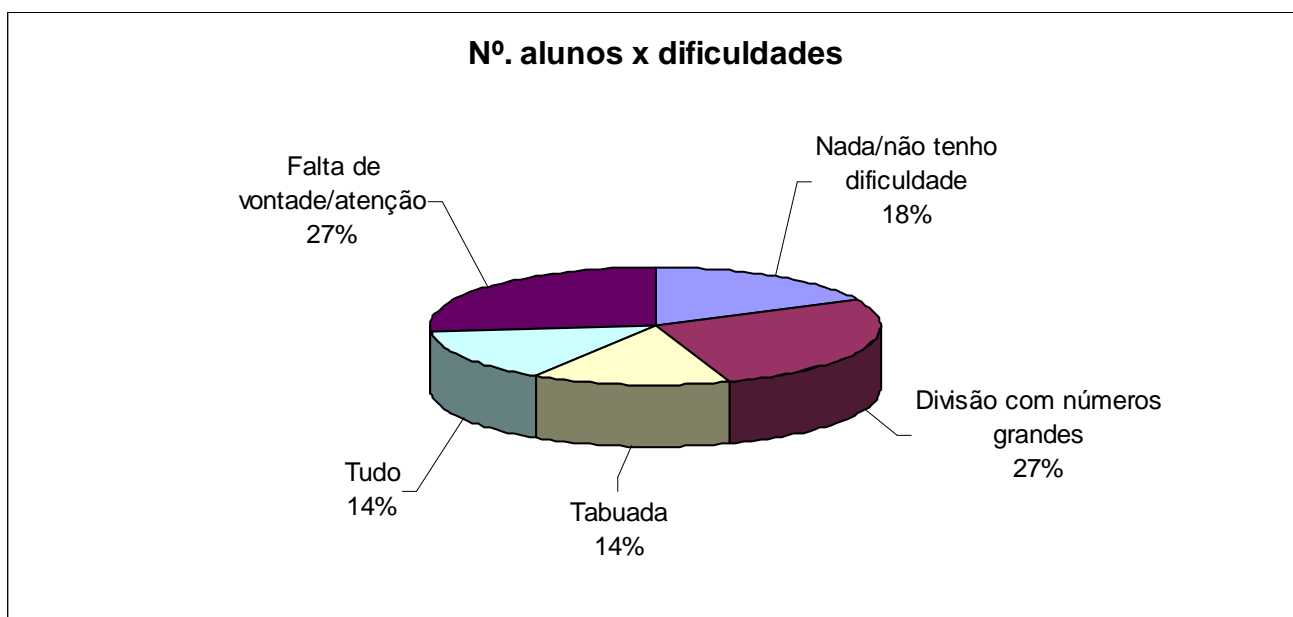
O que novamente nos chamou a atenção foi o fato de que os que responderam negativamente reiteraram dizendo que, apesar de não gostarem de Matemática, gostam do professor.

Quanto aos que disseram ter mais dificuldade em Matemática, tivemos respostas diversas, conforme tabela e gráfico a seguir:

Tabela 4: dificuldade dos alunos da 6ª. série em Matemática

Fonte: pesquisa do autor, 2006.

Dificuldade	Nada/não tenho dificuldade	Divisão com números grandes	Tabuada	Tudo	Falta de vontade/atenção
Nº. alunos	10	15	8	8	15



Fonte: pesquisa do autor, 2006.

A maioria almeja um curso superior, profissões como as de advogado, economista, arqueólogo, engenheiro, designer, entre outras. Apenas dois alunos responderam “nada”.

Percebe-se, na tabela, que 14% dos alunos responderam “tudo” em relação às dificuldades em matemática. Sendo assim, levantamos a seguinte questão reflexiva: esses mesmos alunos, ao resolverem a lista de problemas propostos na pesquisa, teriam dificuldades em “tudo” que estava sendo proposto?

Nas considerações finais, abordamos possíveis entendimentos a respeito da metodologia da Resolução de Problemas como possibilidade de motivar os alunos no aprendizado de Matemática.

CAPÍTULO 1

ELUCUBRAÇÕES SOBRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM AULAS DE MATEMÁTICA

Este capítulo apresenta algumas elucubrações sobre o que vem a ser “problema” em aulas de Matemática. Considera-se que, antes de se ensinar/aprender a resolver problemas, deve-se saber o que é problema em aulas de Matemática e, principalmente, o que é problema para nós.

Em um trabalho recente, Vila e Callejo (2006) escreveram o livro *Matemática para aprender a pensar*. Concorde-se com o modo dos autores definirem problema:

“Reservaremos, pois, o termo *problema* para designar uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova”. (VILA & CALLEJO, 2006, p. 29.)

Segundo Kantowski (1997), “um indivíduo está diante de um problema quando se confronta com uma questão que não pode dar a resposta ou com uma situação que não sabe resolver, usando os conhecimentos imediatamente disponíveis”.

Já para Charles & Lester (1982, p. 12), “um problema é uma tarefa para a qual”:

1. O indivíduo, que com ela se confronta, quer e precisa encontrar uma solução;
2. O indivíduo não tem procedimento prontamente disponível para achar a solução;
3. O indivíduo deve fazer uma tentativa para encontrar a solução.

Analisando cada ponto, percebe-se que não há desejo de resolver um problema se este não provoca no indivíduo algum tipo de provocação. Todos têm problemas, o tempo todo. Cada novo problema remete a algum tipo de estratégia que possa ser criada ou fazer uso de algum conhecimento já utilizado em alguma situação análoga.

Quem quer resolver o problema precisa escolher uma estratégia (inventada ou pré-concebida) para iniciar um plano de tentativas. Aquelas que não resolvem o problema são deixadas de lado, mas não eliminadas do processo de resolução do problema; aquelas que resolvem o problema podem ser aperfeiçoadas, podendo ser úteis a outros problemas mais complexos.

Quando o professor afirma: “Ok, terminamos a explicação, agora vamos resolver alguns problemas para fixar o assunto...”, o que o professor está entendendo por problema? O que é problema para ele é problema para o aluno?

Para que se possa pensar em uma situação como situação-problema é preciso ter consciência dela, é preciso existir a necessidade de responder às questões provocadas por esta situação. Para tentar exemplificar, eis uma anedota pedagógica: durante a aula, um professor de matemática está elaborando problemas com a turma, preocupado em contextualizá-los para que tenham significado junto aos alunos. Ele escolhe uma menina, Melissa, e menciona um mercado do bairro, elaborando o seguinte enunciado: “Melissa foi ao Mercado para comprar uma dúzia de ovos. Na volta, encontrou-se com Fernanda (outra aluna da turma), com a qual ficou brincando. Durante a brincadeira, quebraram-se quatro ovos. Com quantos ovos inteiros a Melissa chegou em casa?”. A turma permanece em completo silêncio... Até que timidamente uma garotinha do fundo da sala perguntou: “Professora, a Melissa apanhou quando chegou em casa?” (adaptado de Vianna, 2002).

Parece bastante evidente que o problema da aluna não é o problema do professor. O que é problema para um matemático pode não ser do interesse de um aluno de Matemática. Quando se pensa em contextos, em “matemática contextualizada”, está-se muito mais inclinado a conceber que um problema só é problema para o aluno quando provoca, instiga, desafia, motiva.

Em sala de aula, cabe ao professor planejar e deflagrar as ações, de modo que situações como esta se tornem problemáticas para seus alunos. Nesse sentido, um problema que apresente apenas algoritmos pode vir a ser interessante para os alunos, desde que as circunstâncias sejam planejadas de modo a levar em conta sua relação com diferentes contextos.

Tendo em vista essas questões iniciais, pode-se tentar algumas aproximações para a questão: o que é **problema** em aulas de Matemática?

Delinear-se-á algumas aproximações acerca do que entende-se ser e não ser “problema” a ser resolvido em aulas de Matemática. O que entende-se como “não-problema” será chamado daqui em diante de **exercício**.

Uma das aproximações é a de que **problema**, em aulas de Matemática, envolve uma situação com enunciado longo, além de o resolvidor necessariamente haver de identificar as situações matemáticas que resolvem a situação apresentada.

Outra aproximação cabe também em situações com enunciados curtos, de poucas linhas, mas que necessariamente provoque o resolvidor a identificar as situações matemáticas que as resolva.

Problemas não são chamados de “problemas” se o resolvidor não necessita identificar situações matemáticas, ou seja, se ele pode resolver o “problema” utilizando um simples modelo de resolução de outro já resolvido. Tais problemas não passam de meros **exercícios**, já que podem ser numerosos, não necessitam da interpretação do enunciado e envolvem um único conteúdo e uma única metodologia. Esses proliferam em muitos livros didáticos. Trata-se de uma abordagem que se tem de Resolução de Problemas em Matemática.

Pode-se entender a Resolução de Problemas como uma importante ferramenta para o aluno enfrentar problemas dos mais diversos, em que o não conhecimento de determinadas formalidades matemáticas pode atrapalhar suas ações cotidianas. Pode-se ainda pensar em ensinar Matemática a partir da resolução dos mais diversos problemas nas mais diferentes situações, encarando a resolução de problemas como objetivo no processo ensino-aprendizagem.

Segundo Vianna (2002), apresentar idéias matemáticas com significado é uma maneira de responder à pergunta: “para que serve isso?”. Na verdade, com as novas idéias sendo apresentadas “em ação”, dificilmente ocorrerá aos alunos essa pergunta; ou seja, os problemas já são uma situação de “aplicação” do conteúdo matemático e mostram, de forma a não deixar dúvidas, “para que ele serve”. (VIANNA, 2002, p. 4.)

Volte-se ao contexto da pesquisa. Procurou-se levar em consideração dois pontos relevantes no processo de elaboração das atividades que os alunos resolveriam: o contexto do aluno e a aproximação deste com o planejamento (conteúdo) da série. Ao pousar o olhar no processo avaliativo da correção de problemas propostos, o fez-se entendendo que não faz muito sentido considerar somente os resultados finais apresentados pelos alunos. Por isto, procurou-se olhar além do registro escrito do aluno. Interessou, também, saber como o professor poderia enxergar o modo como o aluno pensou em resolver as atividades tendo posse apenas o registro escrito.

Para tal, a estratégia foi entrevistar os alunos e questionar o porquê da solução e o modo como chegou a ela. Algo como não considerar apenas a existência de um *gabarito* (uma só forma de resolver o problema) e só estabelecer uma postura avaliativa quando feitas as entrevistas.

Olhar apenas para o modo como os alunos resolveram as atividades, ainda não pareceu suficiente. Entendeu-se ser necessário levar em conta fatores como: a capacidade de interpretar perguntas, de fazer conjecturas, de usar diferentes estratégias, deduzir, intuir, ter a preocupação de interpretar e validar os resultados e, também, verificar a possibilidade de fazer generalizações.

Conforme resultados foram sendo obtidos, fomos percebendo que o propósito de desenvolver a habilidade em resolver exercícios de aplicação direta de algoritmos é mais fácil de ser atingida e, também, é a metodologia mais apreciada pelos alunos e, na opinião deste autor, mais cômoda ao professor, pois, tem resultados quase sempre satisfatórios e atinge uma grande quantidade de alunos.

Para Polya (1945), dentro da perspectiva de Resolução de Problemas, o que se exige é que, além de formular e pedir que se resolva determinado problema, deve-se:

- Questionar as respostas obtidas;
- Questionar a própria questão original;
- Questionar a estratégia (plano de resolução);
- Aproximar os resultados aos contextos em questão;
- Verificar o sentido matemático da resposta.

Daqui, depreende-se a noção de que resolver um problema em aulas de Matemática não pressupõe apenas cumprir com a exigência de simples aplicação de técnicas ou fórmulas pré-estabelecidas e a conseqüente obtenção da resposta correta. Além disso, pressupõe desenvolver uma atitude investigativa em relação àquilo que está pronto, discutindo a solução do problema, os dados do problema e o próprio problema dado.

A postura investigativa faz diminuir o valor dado à simples obtenção da resposta correta. A ênfase será dada ao processo de resolução, permitindo o aparecimento de diferentes soluções, instigando a criatividade e oportunizando vários momentos de avaliação.

Vianna (2002) diz que:

“O aspecto subjetivo é muito forte na determinação do que venha a ser um problema, mas há um outro lado: cada problema é colocado em uma situação determinada, há um lado objetivo que consiste exatamente nessa circunstância. Em sala de aula, cabe ao professor planejar e deflagrar as ações de modo que essas circunstâncias se tornem problemáticas para seus alunos. Nesse sentido, um problema de ‘prestações’ pode vir a ser interessante para os mesmos alunos desde que as circunstâncias sejam planejadas de modo a levar em conta sua subjetividade”. (VIANNA, 2002, p. 1.)

Tendo em vista essas questões iniciais, tentam-se algumas aproximações para uma possível significação de **problema** em aulas de Matemática.

Problema em aulas de Matemática ocorre quando o estudante necessita identificar quais situações matemáticas podem dar solução ao problema, levando em consideração a ausência de palavras-chave na identificação de tais situações, como por exemplo: “juntar, repartir, diminuir etc”.

Um **problema** em aulas de Matemática pode ter enunciado longo (várias linhas) ou enunciado curto (poucas linhas); o cerne do problema é a elucubração necessária às etapas resolutivas do problema acerca das situações matemáticas.

Destaca-se o fato de que não estabeleceu-se enunciado longo e curto como categorias de análise *a posteriori*, ou mesmo, uma tipologia de problemas a ser considerada. A intenção foi verificar aspectos didáticos do professor e aluno em relação a problemas que necessitavam de um tempo maior de leitura e busca de dados, e outros que não apresentavam muitas linhas, mas faziam o aluno elaborar, ou mesmo resgatar seus conhecimentos matemáticos.

Um aspecto essencial a ser observado para que um enunciado de problema seja um problema para o aluno é a necessidade de se conhecer alguns conceitos para iniciá-lo. Por exemplo, pedir para uma criança de 1ª. série calcular a área e o perímetro de um retângulo não é um problema, porque ela não tem a menor idéia do que seja área ou do que seja perímetro.

Vianna (2002) diz que “É problema tudo o que, de uma maneira ou de outra, implica da parte do aluno a construção de uma resposta ou de uma ação que produza certo efeito. A noção de problema não tem sentido se o aluno não puder aplicar um sistema de respostas inteiramente constituído”. (VIANNA, 2002, p. 2.)

Um bom problema depende de muitos fatores. O fato de o resolvidor já conhecer os procedimentos para encontrar a resposta torna-o um simples **exercício**.

Questões rotineiras⁵ não podem ser consideradas como problemas. Tais questões são meros exercícios. Além disso, existe um aspecto muito

⁵ Entende-se aqui como rotineiras as questões que já são freqüentes às aulas de Matemática e acabam por estar integradas à rotina de exercícios de repetição e imitação, geralmente de aplicação direta de algum algoritmo ou regra pré-estabelecida.

importante que é comum a todas as aproximações citadas, e que nada tem a ver com o conteúdo de uma determinada disciplina. Trata-se do *desejo*: o aluno precisa ter interesse, precisa estar seduzido pela questão, precisa ter necessidade de chegar a uma resposta. De alguma forma, o problema deve lhe parecer familiar ou ao menos o desafiar.

CAPÍTULO 2

APORTES TEÓRICOS SOBRE HEURÍSTICA EM UM CONTEXTO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Conforme nos mostra a história da Matemática, o homem buscou de todas as maneiras modos de facilitar seus processos de contagem e de produção. Até que ponto seus (nossos) problemas e o progresso da humanidade podem ser atribuídos a essa capacidade do homem de resolver problemas das mais diversas situações diárias? Muitas vezes, em tais situações, a solução não é imediata. O que faz o homem resolver problemas é a **necessidade**.

Existe um senso comum de que **todos têm problemas**. Deste modo, todos os seres vivos têm problemas, pois problemas surgem como um caminho à evolução. Todos os seres vivos enfrentam um problema comum: a necessidade de encontrar, a todo e qualquer custo, uma maneira de sobreviver. Na tentativa natural de solucionar esses problemas, por exemplo, movimentam-se as folhas de uma planta pela necessidade de receber os raios solares. Já na tentativa estratégica para resolver um problema, alguém pode mudar a posição de um guarda-sol na praia, para evitar que os raios causem queimaduras e danifiquem a pele.

Problemas, sejam eles práticos ou teóricos, mesmo tendo muita experiência, pode-se chegar a soluções mal sucedidas. Então, num processo de descobrir pelos seus próprios meios, o homem se sente provocado. Por necessidade, cria, elabora estratégias e planos de ação. Para resolver seus problemas, descobre um método que até então era desconhecido, útil à situação-problema. A esse esquema de descobrir pelos seus próprios meios dá-se o nome de *atividade heurística*, conforme salienta Puchkin:

“Acontece que, na vida cotidiana, (...), freqüentemente surgem diante do homem situações que geram conflitos entre as circunstâncias e as exigências do exercício de uma atividade. Precisa o homem executar uma série de ações e solucionar este ou aquele problema. Contudo, as

condições reinantes não lhe propiciam meios para solucionar esses problemas. E mesmo todo o seu arsenal de experiências passadas não lhe apresenta qualquer esquema completo adequado às condições emergentes. A fim de descobrir uma saída para a situação, deve o homem criar uma nova estratégia de ação, isto é, concretizar um ato de criação. Contingência como esta é, normalmente, denominada um problema ou uma situação problemática, ao passo que o processo psíquico que, ao auxiliar sua solução elabora uma nova estratégia que se mostra como algo inédito é designado como pensamento criador ou, para usarmos terminologia que nos vem de Arquimedes, **atividade heurística.**” (PUCHKIN, 1969, p. 8, grifo meu.)

Lexicalmente, o termo *heurística*, em um contexto pedagógico, é definido como: “método educacional que consiste em fazer descobrir pelo aluno o que se lhe quer ensinar”. (HOUAISS, 2001) Percebe-se, portanto, que falar em heurística na resolução de problemas é falar sobre “métodos e regras que conduzem à descoberta, inovação, investigação e resolução de problemas”. (VILANOVA, 2000)

Foi este o método usado pelo grande filósofo grego, da Antigüidade, Sócrates, do qual deriva o termo *socrático*, e que pode desdobrar-se em dois ramos:

- “*Método negativo* ou *irônico*: o professor finge-se ignorante e faz sucessivas perguntas aos alunos, como se desejasse aprender.”
- “*Método positivo* ou *maiêutica*: o professor parte das respostas dadas pelo aluno para fazer outras perguntas, seguindo do concreto para o abstrato, do particular para o geral.” (TAHAN, 1961, p. 67.)

De acordo com as considerações feitas em relação ao processo da atividade heurística, justifica-se a possível inserção desta relacionada à Resolução de Problemas e as contribuições favoráveis para o ensino da Matemática, pois, como salienta Polya (1945):

A Heurística moderna esforça-se por compreender o processo de resolução de problemas, especialmente as operações mentais, tipicamente úteis nesse processo. Dispõe de várias fontes de informação, nenhuma das quais deve ser desprezada. Um estudo sério da heurística deve levar em conta tanto as suas bases lógicas quanto as psicológicas, não deveria negligenciar aquilo que autores antigos como Pappus, Descartes, Leibnitz e Bolzano disseram sobre o assunto, mas muito menos deveria negligenciar a experiência

imparcial. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros devem ser a base em que a heurística é construída. Nesse estudo, não deveríamos descurar de nenhum tipo de problema, e deveríamos buscar os aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda a sorte: deveríamos visar aos aspectos gerais, independentemente do assunto do problema. O estudo da heurística tem objetivos “práticos”: uma melhor compreensão das operações mentais tipicamente úteis na resolução de problemas poderia exercer uma influência benéfica sobre o ensino, especialmente sobre o ensino da Matemática. (POLYA, 1945, p.129-130.)

Conforme indicou Polya, muitos matemáticos se propuseram a refletir sobre a Resolução de Problemas com o enfoque na Heurística. Pappus, matemático grego que viveu por volta do ano 300, escreveu um livro cujo título pode ser traduzido como *O Tesouro da Análise* (Arte de Resolver Problemas) ou *Heurística*, onde procurava sistematizar um método para resolver problemas.

As mais famosas tentativas de sistematização da Heurística foram feitas pelos matemáticos Descartes e Leibnitz, bem como pelo filósofo Bernardo Bolzano. Não se pode deixar de mencionar também os trabalhos de Poincaré (1854-1912), notável matemático francês. Segundo Puchkin (1969), Poincaré apresentou, em suas *Memórias sobre as Funções de Fuchs*, uma das mais expressivas descrições da atividade heurística.

Neste capítulo, apresenta-se um breve relato dos indícios heurísticos de quatro fundadores da chamada *heurística* na Resolução de Problemas: Pappus, Arquimedes, Descartes e Polya. Este último é responsável por organizar didaticamente os princípios da heurística e terá, nesta dissertação, maior aprofundamento.

Pretende-se apresentar alguns aportes sobre a heurística, presentes nas obras *Regras para a Direção do Espírito* e *Discurso do Método*, de Descartes. Procurou-se estabelecer relação com a sistematização da atividade heurística, intuição e dedução propostas por George Polya nas obras *A arte de Resolver Problemas* e *Matemática e Raciocínio Plausível*. Especialmente, devido ao seu método de análise em processos heurísticos, algumas idéias de Descartes serão elucidadas.

2.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: PRIMEIRAS APROXIMAÇÕES

2.1.1 Situando historicamente a Resolução de Problemas em um contexto escolar

Apresenta-se a seguir ‘historicamente’ algo sobre a representatividade da Resolução de Problemas, partindo da década de 70, e a partir daí trazendo modificações mais significativas ao processo de construção teórica da pesquisa.

Década de 70

Educadores matemáticos iniciam uma mudança de direção em suas pesquisas, no sentido de dar mais ênfase aos processos de resolução utilizados por seus alunos na solução de um problema. Esse movimento ficou conhecido como *back to basics*, tendo, no entanto, pouca influência na prática de ensino da Educação Matemática.

Década de 80

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)⁶ (Conselho Nacional de Professores de Matemática) elabora o documento *An Agenda for Action*, com diretrizes para o progresso da Matemática nos anos 80, e mais tarde o *Professional Standards for Teaching Mathematics*, com normas⁷ diretivas para o ensino de matemática.

⁶ O NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) é uma organização não governamental, fundada em 1920, sem fins lucrativos, que conta com mais de 125 000 sócios responsáveis pelas orientações para ensino de Matemática nos EUA.

⁷ Com efeito, pode-se destacar a Norma nº. 5, das “Normas para a Avaliação do Ensino da Matemática”, que trata “A matemática como resolução de problemas, raciocínio e comunicação”.

O NCTM, assim como fez os PCN⁸ de Matemática, concebe que se deve ensinar Matemática por meio de resolução de problemas, enfatizando essa estratégia como metodologia de ensino, como modo de se ensinar Matemática de forma criativa. Contudo, ensinar Matemática vai além desta concepção.

Quando o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) iniciou a publicação, em três volumes, dos chamados *Standards*⁹ (padrões) para a Educação Matemática, houve modificações no que se entendia por ensinar Matemática para além do que o Movimento da Matemática Moderna¹⁰ (M.M.M.) propunha. Como se era de esperar, concepções e crenças foram colocadas em debate, mudanças radicais ocorreram, em duplo sentido.

No sentido favorável à Educação Matemática, destaque aos inúmeros exemplos práticos de como aplicar as teorias descritas nos *Standards* e estudos de casos presentes no material como um todo. Os episódios relatados sobre aulas de matemática por professores em diferentes níveis contribuem para uma leitura mais informativa. Existem ainda protocolos sobre provas com materiais manipuláveis, calculadoras gráficas e jogos, que, de certa forma, contribuem para uma reflexão sobre a própria prática.

Em sentido contrário, chama a atenção a pouca Matemática presente nos *Standards*. O aspecto mais notável dos *Standards* é a ausência da Matemática como um sistema. Encontram-se vários episódios matemáticos bem conhecidos e problemas úteis, nada cotidianos, mas todos fora do contexto natural. Por exemplo, o teorema de Pitágoras é mencionado nos *Standards* (traduzido pela Associação Professores de Matemática – Portugal, p. 119), junto com uma figura bem conhecida que pode ser usada para demonstrá-lo; no entanto, propõe-se o uso da figura apenas para “descobrir a relação através de exploração” e ainda “O professor ajuda os alunos a ampliar a compreensão do teorema”. (NCTM, 1994, p. 119.)

⁸ Parâmetros Curriculares Nacionais, 1998, MEC – Brasil.

⁹ *Standards: Curriculum and evaluation Standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, março 1989. Uma nova versão on-line dos *Standards* do NCTM já está publicada como *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, 2000, mas ela não anula os *Standards* de 1989.

¹⁰ O Movimento da Matemática Moderna (M.M.M.) surgiu em 1959, na Conferência Internacional em Royalmont. A forte ligação com a teoria dos conjuntos, o alto nível de generalidade e o maior rigor lógico são características deste movimento.

Infelizmente, diz o que deve ser feito, mas não mostra matematicamente como fazer. Qualquer semelhança com o PCN (1998) de Matemática não é mera coincidência. A possibilidade de se demonstrar¹¹ e discutir as diferentes maneiras de se obter esse importante teorema não são mencionados em lugar algum do documento.

Outra característica dos *Standards* é a de excluir praticamente todo o algoritmo que seja somente operatório, conforme a citação de um relatório¹², feito por uma comissão formada pela American Mathematical Society, (AMS¹³) com o propósito de apresentar suas opiniões ao NCTM:

“Gostaríamos de enfatizar que os algoritmos - padrão da aritmética - são mais do que apenas ‘meios de obter a resposta’, isto é, eles têm um significado teórico além do prático. Todos os algoritmos da aritmética são preparatórios para a álgebra, pois existe (não por acidente, mas em virtude da construção do sistema decimal) uma forte analogia entre a aritmética dos números ordinários e a aritmética dos polinômios”. (AMS, 1998, p. 275.)

Fica a impressão de que o professor ao trabalhar com a repetição de padrões e analogias estará trabalhando o fundamental da Matemática. Na Rússia, por exemplo, cálculos mentais e com papel e lápis foram sempre recomendados para todas as idades e considerados essenciais para a compreensão das operações.

Os episódios relatados nos *Standards* parecem excluir problemas verbais¹⁴ em prol dos “problemas do mundo real”. A intenção, apresentada na

¹¹ Neste capítulo, apresenta-se uma demonstração do Teorema de Pitágoras feita pelo matemático húngaro George Polya.

¹² American Mathematical Society NCTM-2000, Association Research Group Second Report. June, 1997. Notices of the AMS, February 1998.

¹³ A lista dos membros do AMS e relatórios com o painel de peritos encontra-se em:

<<http://www.ed.gov/offices/OERI/ORAD/KAD/expert\panel/mathmemb.html>>

<<http://www.nctm.org/rileystatement.htm>>

<<http://www.ed.gov/News/Letters/>>

<<http://www.edweek.org/ew/1994/20lein.h13>>

<<http://www.house.gov/edworkforce/hearings/166th/ecyf/fuzzymath2200/2200.htm>>

<<http://www.ams.org/notices/199802/comm-amsarg.pdf>>

¹⁴ Problemas verbais apresentam-se com um predomínio de termos da língua materna nos enunciados e podem, além disso, referir-se ou não a contextos reais. Para a presente pesquisa, entende-se como “problemas verbais” aquelas situações-problema particulares que têm a característica de apresentar um predomínio de termos e expressões da língua materna e que se encontram ou não inseridas em contextos reais.

presente pesquisa, é a de não retirar conteúdos dos currículos escolares em prol da resolução de problemas. A resolução de problemas deve ser encarada como metodologia, uma ação didática, não como conteúdo do programa de matemática, como pode-se constatar em significativo número deles.

Os livros de problemas russos¹⁵ estão repletos, principalmente, de problemas verbais. A característica desses problemas é o uso de palavras que não são termos matemáticos, como carros e trens; distância, tempo e velocidade; barcos e correntezas; aviões e vento; caixas, latas e bolas; canos, bombas e piscinas; massa e misturas; horas, minutos e hora do dia; ponteiros do relógio, anos e idade; dinheiro, preço, juros e descontos etc.

Nos problemas de matemática russos, a insistência de problemas verbais na Educação Matemática sempre foi normal, mas nos Estados Unidos é muito diferente. Apesar de educadores americanos referenciarem George Polya na maioria de seus trabalhos, muitas vezes ignoram suas opiniões. Polya escreveu:

“Por que problemas verbais? Espero chocar algumas pessoas ao afirmar que, por si só, a tarefa mais importante da instrução nas escolas médias é o ensino da montagem de equações para resolver problemas verbais. Existe um argumento forte a favor dessa opinião. Ao resolver problemas verbais, armando equações, o estudante traduz uma situação real em termos matemáticos; ele tem uma oportunidade de vivenciar que conceitos matemáticos podem estar relacionados com realidades, mas que tais relações precisam ser trabalhadas cuidadosamente.” (POLYA, 1981, p. 59.)

Uma outra consideração a ser feita, e que está muito presente nos PCN de Matemática e que, por conseguinte, está presente na década de 90, é o clichê da contextualização. Uma leitura rápida destes documentos pode fazer o leitor imaginar que “problemas do mundo real” são aqueles que mencionavam nomes de marcas registradas. Alguns livros texto¹⁶ incluíam problemas como este: “O biscoito Oreo é o mais vendido dos biscoitos em embalagens... o

¹⁵ Por exemplo, a coleção russa da editora MIR: *Lecciones populares de matemáticas. Acerca de la geometría de Lobachevski. Smogorzhevski A.S.* 80 pp. Algunas aplicaciones de la mecánica a las matemáticas. Uspenski V.A. 60 pp.

¹⁶ “Livros texto de Matemática temperados com marcas registradas levanta novo alerta”, de Constance L. Hays. New York Times, 21 de março, 1999.

diâmetro de um biscoito Oreo é 1,75 polegadas. Expresse o diâmetro do biscoito Oreo como fração na sua forma mais simples”. Um típico exemplo de problema que pode ser encontrado em livros didáticos brasileiros e que não contribui com a elevação do potencial criativo do aluno.

Década de 90

Em 1989, o NCTM publicou os primeiros *Standards*¹⁷ para o currículo de matemática, o que, mais tarde, em 1997, levou à criação dos PCN's de Matemática, no Brasil, para as turmas de 1^a. a 4^a. e de 5^a. a 8^a. séries do Ensino Fundamental e para os 1^o., 2^o. e 3^o. anos do Ensino Médio.

Os PCN's de Matemática apontam para algumas reflexões no campo da Educação Matemática, por exemplo, a formação do cidadão e o fato de que o professor não pode mais restringir a transmissão do conhecimento sem relacionar os fatos de sua prática escolar com os acontecimentos globais, uma vez que “nas sociedades modernas, uma boa parte da informação é veiculada em linguagem matemática”, e porque “vivemos num mundo de taxas percentuais, coeficientes multiplicativos, diagramas, gráficos e verdades estatísticas”. (IMENES & LELLIS, 1994, p. 10.)

Segundo os PCN's de Matemática (1997) a resolução de problemas na matemática escolar deve ser entendida como um “recurso” ou “ponto de partida” para a atividade matemática, mas o que se tem praticado nos diferentes níveis de ensino é uma matemática “formalista”, axiomática (euclidiana), sintética, que privilegia excessivamente os processos de demonstrações e a repetição de conceitos definidos *a priori*, onde a necessidade do pré-requisito está fortemente ligada a axiomas e signos de um mundo distante da realidade escolar. (BATISTI, 1999.)

¹⁷ Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, 1989; Professional Standards for Teaching Mathematics, 1991; Assessment Standards for School Mathematics, 1995.

2.1.2 Heurística em Descartes

Nunca nos tornaremos matemáticos, mesmo que a nossa memória domine todas as demonstrações feitas por outros, se o nosso espírito não for capaz de resolver todas as espécies de problemas.

(Descartes)

René Descartes nasceu na França em 31 de março de 1596, na pequena cidade de La Haye (agora “Descartes”). Foi criado por sua avó materna e, quando tinha oito anos, mandaram-no para o recém fundado colégio jesuíta de La Flèche, em Anjou, onde permaneceu como aluno interno por nove anos.

Deixou a escola dos jesuítas aos dezesseis anos rumo a Paris. Conheceu rapazes frívolos da sua idade. Aprendeu a beber e a jogar. Era especialmente feliz no jogo, uma vez que baseava seus palpites mais em princípios matemáticos do que em leis do azar.

Deixara para trás o estigma da tuberculose que sucumbiu sua mãe poucos dias após seu nascimento. Na primavera de 1617 (com a idade de vinte e um anos) alistou-se no exército do príncipe Maurício de Orange, nos Países Baixos.

Quando tinha vinte e dois anos, tendo se diplomado em Direito em Poitiers, Descartes partiu para uma série de viagens pela Europa, “decidido a buscar somente o conhecimento que pudesse ser encontrado em mim mesmo ou no grande livro do mundo”. (ADAM & TANNERY, 1964-76, p. 378, apud COTTINGHAM 1995, p. 10.)

A influência mais importante desse período inicial foi a amizade de Descartes com o holandês Isaac Beeckman, que reacendeu seu forte interesse pela matemática.

No curso de suas viagens, em 10 de novembro de 1619, Descartes, morador de uma cidade no sul da Alemanha, depois de um dia de intensa meditação, teve uma série de sonhos vívidos que o convenceram de sua missão de fundar um novo sistema filosófico e científico. Em linhas gerais, o sistema definido por Descartes está exposto em uma obra inacabada, escrita no final da segunda década do século XVII, as *Regulae ad directionem ingenii* (Regras para a direção da inteligência natural). Descartes define, ali, o “conhecimento” (*scientia*).

A regra II das *Regulae* define *scientia* como a “cognição certa e evidente”, baseada na apreensão mental direta das verdades imediatamente evidentes (que Descartes denomina “intuição”), aconselha-nos a rejeitar toda a crença que é apenas provável e a decidirmo-nos “a crer somente no que é perfeitamente conhecido e do que não se pode duvidar”. (ADAM & TANNERY, 1964-76, p. 378, apud COTTINGHAM, 1995, p. 13.)

Esboça, além disso, o plano para uma “ciência universal”, que envolveria todos os ramos do conhecimento humano: “Percebi que a matemática interessa-se exclusivamente por questões de ordem ou medida. O que é irrelevante se a medida em questão envolve números, forma, estrelas, sons ou qualquer outro objeto; isso me fez entender que deve haver, necessariamente, uma ciência geral que explique todos os pontos passíveis de serem levantados em relação à ordem e à medida. Qualquer que seja o assunto.” (ADAM & TANNERY, 1964-76, p. 378, apud COTTINGHAM 1995, p. 13.)

Neste mesmo período, Descartes, munido de intenso ceticismo, afirma em suas *Meditações*:

“Acima de tudo, devemos duvidar de tudo. Como eu desejasse entregar-me inteiramente à procura da Verdade, cuidei que me fosse necessário (...) rejeitar como absolutamente falso o que quer que pudesse conter, ao meu juízo, a menor parcela de incerteza (...) E já que todos os pensamentos e imaginações que nos acodem quando acordados são os mesmos que podem acudir-nos enquanto dormimos, sem que nenhum deles seja, ao mesmo tempo, verdadeiro, determinei estabelecer que tudo quanto jamais entrara em meu espírito não era mais verdadeiro que as ilusões dos meus sonhos.” (DESCARTES, apud NASSETTI, 2005, p. 10.)

O “sonhar”, descrito por Descartes, leva-o à sua primeira realidade: **Cogito, ergo sum (Penso, logo existo).**

Em meados de 1620, Descartes começou a escrever um tratado sobre regras para a direção do espírito; para descobrir a ciência universal. Segundo ele, teríamos inicialmente de adotar um método adequado de reflexão, que consistia na adoção de duas regras de operação mental: intuição e dedução.

Definia intuição como “a concepção inequívoca de um espírito claro e formado exclusivamente pela luz da razão”, e dedução como a “necessária inferência a partir de outros fatos tidos como certos”. (STRATHERN, 1997) O celebrado método de Descartes - que veio a ser conhecido como método cartesiano - baseava-se na aplicação correta dessas duas regras de pensamento.

De acordo com as biografias lidas no decorrer desta pesquisa (STRATHERN, 1997 e NASSETTI, 2005) as coordenadas cartesianas foram denominadas por Leibniz, retiradas do tratado escrito por Descartes, *Tratado sobre o Universo*, onde lançou os fundamentos da geometria analítica.

Em 1628, Descartes trabalhou em definitivo na obra *Règles pour la Direction de L'Esprit (Regras para a Direção do Espírito)*, em que pretendia apresentar um método universal para a resolução de problemas. Esta obra ficou incompleta. Fragmentos dela apareceram depois, entre 1633 e 1637, no *Discours de la Méthode de Bien Conduire as Raison et Chercher la Vérité dans les Sciences (Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências)*.

Descartes define seu método geral lançando mão das operações algébricas e a resolução de funções quadráticas por meio de interpretações geométricas. Para tal, enuncia:

“Se, pois, queremos resolver qualquer problema, primeiro supomos a solução efetuada e damos nomes a todos os segmentos que parecem necessários à construção – aos que são desconhecidos e aos que são conhecidos. Então, sem fazer distinção entre segmentos conhecidos e desconhecidos, devemos esclarecer a dificuldade de modo que mostre mais naturalmente as relações entre esses segmentos, até conseguirmos exprimir uma mesma quantidade de dois modos. Isso constituirá uma equação (numa única incógnita), pois os termos de

uma dessas expressões são juntas iguais aos termos da outra.” (DESCARTES apud BOYER, 1996.)

Descartes vê o processo de resolução de problemas em três fases:

1. Reduzir todo problema algébrico a um problema contendo apenas equações;
2. Reduzir todo problema matemático a um problema algébrico e
3. Reduzir qualquer problema a um problema matemático.

Observa-se que Descartes objetiva reduzir todo problema que existe no mundo a um problema matemático; mais que isso, a idéia de Descartes era completar o projeto de resolver problemas citado acima e ainda usufruir de seus benefícios.

Segundo Nasseti (2005):

“Descartes, filósofo racionalista do século XVII, revelou em suas obras que a intuição específica da percepção criativa não tem base lógica no raciocínio, mas numa peculiar e súbita (*insight*) visão intelectual (...) considerava a concepção intuitiva do real uma forma superior de criação. Nela, a mente raciocina e, simultaneamente, medita nas três dimensões conhecidas do conhecimento: profundidade, abrangência e atualidade”. (NASSETTI, 2005, p. 12.)

Não obstante, Descartes no livro: “Regras para a orientação do espírito”, apresenta algumas idéias de valor e relevância relacionadas ao ensino e que podem ser aplicadas à resolução de problemas. Como exemplo, podemos citar as regras III, IV, V, VI e VII:

- Regra III: “No que tange aos objetos considerados, não é o que pensa outrem ou o que nós mesmos conjecturamos que se deve investigar, mas o que podemos ver por intuição com clareza e evidência, ou o que podemos deduzir com certeza: não é de outro modo, de fato, que se adquire a ciência”. (p. 11.) Revela-se a importância da argumentação, intuição e da dedução ao invés do uso da autoridade.
- Regra IV: “O método é necessário para a busca da verdade”. (p. 19.) Ressalta-se a importância da sistematização e do formalismo.

- Regra V: “O método todo consiste na ordem e na organização dos objetos sobre os quais se deve fazer incidir a penetração da inteligência para descobrir alguma verdade. Nós lhe ficaremos ciosamente fiéis se reduzirmos gradualmente as proposições complicadas e obscuras a proposições mais simples e, em seguida, se, partindo da intuição daquelas que são as mais simples de todas, procurarmos elevar-nos pelas mesmas etapas ao conhecimento de todas as outras”. (p. 29.) Descartes critica veementemente aqueles que examinam os problemas com tal falta de ordem que lhe parecem querer atingir com um salto, da parte de baixo de um edifício, o topo, desprezando os degraus da escada.
- Regra VI: “Para distinguir as coisas mais simples daquelas que são complicadas e pôr ordem em sua investigação, cumpre, em cada série de coisas em que deduzimos diretamente algumas verdades umas das outras, observar o que é mais simples e como se distancia, mais ou menos, ou igualmente, o resto”. (p. 41.) Alerta-se que, para se constituir uma definição formal, deve-se partir do problema mais simples para o mais elaborado. (DESCARTES, 1999, p. 29.)

Descartes (1999, p. 44) cita, como exemplo, uma relação entre números “o número 6 é o dobro do número 3, procuraria em seguida o dobro do número 6, ou seja, 12; em seguida procuraria, igualmente, o dobro do último número, ou seja, 24, e também o dobro deste, ou seja, 48, etc. Daí, deduziria que a relação entre 3 e 6 é igual àquela entre 6 e 12, assim como entre 12 e 24, etc, e que, por conseguinte, os números 3, 6, 12, 24, 48, ... são continuamente proporcionais.” A etapa final seria definir a seqüência anterior como sendo uma progressão geométrica de razão 2.

- Regra VII: “Para o acabamento da ciência, é preciso passar em revista, uma por uma, todas as coisas que se relacionam com a nossa meta por um movimento de pensamento contínuo e sem nenhuma interrupção, e é preciso abarcá-las numa enumeração suficiente e metódica”, mostrando que é importante mantermos controle sobre o que estamos

fazendo, sob pena de se perder em um trabalho infrutífero.
(DESCARTES, 1999, p. 23.)

É importante observar Descartes, pois suas sugestões para o ensino e a resolução de problemas antecipam idéias de um importante pesquisador da Resolução de Problemas, George Polya.

2.1.3 Heurística em Polya

*Si tomas una conclusión heurística como una certeza,
podrás equivocarte y sentirte engañado;
pero si rechazas totalmente las conclusiones heurísticas,
no harás ningún progreso.*

(POLYA, 1945)

George Polya (1897-1985) nasceu em Budapest, capital da Hungria. Viveu boa parte de sua vida nos Estados Unidos, onde fez seus estudos e pesquisas. Inicialmente, Polya ingressou na faculdade de Direito, provavelmente seguindo os caminhos de seu pai, mas abandonou o curso, passando para o estudo de Línguas e Literatura. Mais tarde focou seus estudos em Latim, Filosofia, Física e, finalmente, optou pela Matemática, em meados de 1912, quando concluiu seu doutoramento. Foi professor em Zurique, de 1914 a 1940, e depois em Stanford, Estados Unidos, onde se aposentou em 1953.

Alguns de seus trabalhos, como a classificação dos 17 grupos de simetria bidimensional, acabaram por inspirar o pintor M. S. Escher. Em 1925, Polya escreveu juntamente com seu compatriota, Gabor Szegő, um trabalho intitulado *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (Berlim, 1924), depois

traduzido para o inglês com o título *Problems and Theorems in Analysis*. (Berlim, 1972.) Neste trabalho, apresentado em dois volumes, os autores mostram como o ensino da Análise Matemática pode ser gradativamente desenvolvido, dos fundamentos até algumas fronteiras do conhecimento, através de uma acertada seqüência de exercícios e problemas, alguns dotados de apurada estética¹⁸.

Polya tratou de apresentar problemas matemáticos de forma intuitiva, fazendo uso da arte/técnica com que os conceitos matemáticos eram formados, sendo responsável por organizar didaticamente os princípios da Heurística. Para isso, elaborou um pequeno dicionário de Heurística, presente na parte três do livro *How to Solve It* (traduzido para o português como *A Arte de Resolver Problemas*).

Polya também escreveu *Mathematics and Plausible Reasoning*, editado pela Princeton University Press, em 1954 (traduzido para o espanhol como *Matemáticas y Razonamiento Plausible*) e o *Mathematical Discovery* (2 vol., WILEY, 1962 e 1965).

O modo como é difundido o trabalho de Polya, em seu livro *A Arte de Resolver Problemas*, parece um tanto simplista. Entende-se que os passos (quais sejam: primeiro, é preciso compreender o problema; segundo, procure encontrar a conexão entre os dados e a incógnita – é preciso chegar afinal a um plano para a resolução; terceiro, execute seu plano; quarto, examine a solução obtida), aplicados à resolução de problemas da matemática, podem ser suficientes, reduzindo toda a sua teoria a uma “receita” para que se aprenda a ser um bom “resolvedor de problemas”. O que sabemos, no campo de atuação da didática, não é verdade. Haja vista que a Arte está aqui sendo entendida como uma profunda intuição e dedução matemáticas, abordada brilhantemente por Polya em seus escritos.

Para Polya (1995):

“Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser

¹⁸

Aqui entendida como estética do conhecimento.

em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver, por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.” (POLYA, 1995 p. 20.)

É de se esperar que o modo com que Polya abordava, de forma intuitiva e analítica, os problemas de matemática, por meio de uma regra prática que fosse capaz de resolver qualquer tipo de problema, fosse bem antigo.

Polya dizia que o ensino da Matemática deve ser ativo e que não se deve suprimir as atividades informais de produzir e extrair conceitos matemáticos do mundo que nos rodeia.

Está presente nos trabalhos de Polya forte argumentação heurística e natureza quase empírica da matemática.

“A Matemática não é um esporte para espectadores; não se pode desfrutar dela nem aprendê-la sem a participação ativa; por isso o princípio da aprendizagem ativa é particularmente importante para nós, professores de matemática, especialmente se considerarmos como nosso principal objetivo, o primeiro de nossos objetivos, o de ensinar o estudante a pensar.” (POLYA, 1995, p.10.)

E prossegue em outra parte:

“A primeira obrigação de um professor de matemática é usar essa grande oportunidade; ele deveria fazer o máximo possível para desenvolver a habilidade de resolver problemas em seus alunos. Primeiro, ele deveria estabelecer a classe certa de problemas para os seus alunos: não muito difíceis, nem fáceis demais, naturais e interessantes que desafiem sua curiosidade, adequados a seu conhecimento. (...) Depois, o professor deveria ajudar seus alunos convenientemente. Não muito pouco, senão não há progresso. Não demais, senão o aluno não terá o que fazer. Não ostensivamente, senão os alunos adquirem aversão ao problema, em cuja solução o professor ficou com a maior parte.” (POLYA, 1995, p. 23.)

Polya obteve destaque com seus trabalhos ao circunstanciar Matemática como Resolução de Problemas, colocando-a como o foco principal do saber matemático. Para ele, a gênese dos conceitos matemáticos está na ação didática proveniente da resolução de problemas.

Mas o que é ser bom “resolvedor de problemas”? Como se adquire o que Polya chamou de *know-how* em Matemática? *Know-how* é aqui entendido como a habilidade para resolver problemas, não apenas os que são rotineiros, mas, também, aqueles que exigem algum grau de independência, julgamento, originalidade e criatividade.

Polya percebe a Matemática como uma disciplina dependente da intuição, da imaginação e da descoberta, defendendo que se deve imaginar a idéia da prova de um teorema antes de prová-lo.

Há muito tempo, as propostas de ensino da Matemática que envolvem resolução de problemas vêm sendo discutidas e avaliadas. As perguntas são as mais diversas: até que ponto a resolução de problemas, da forma como é entendida e aplicada, pode vir a contribuir para a solução dos problemas no Ensino de Matemática? A resolução de problemas deve ser entendida como recurso ou ponto de partida? Ou ainda, deve-se pensar a resolução de problemas como um objetivo ou um processo?

Polya em um artigo¹⁹ sintetiza suas conclusões em dez mandamentos, talvez como uma resposta um pouco rude àqueles que buscavam em seus livros a fórmula ideal para se resolver problemas em Matemática:

Para ser um bom professor de Matemática, você tem que vibrar com a sua matéria, conhecer bem o que vai ensinar, ter um bom relacionamento com os alunos para entender os problemas deles e dar a esses alunos a oportunidade de (pelo menos algumas vezes) descobrir as coisas por si mesmos. Deve ainda entender que know-how é mais importante do que informação. E, para treinar professores a fim de que possam cumprir sua tarefa, o melhor a fazer é praticar com ele a arte de resolver problemas. Estou certo de que a leitura do artigo que se segue e, mais ainda, a releitura seguidas vezes, a meditação sobre o mesmo e a adoção dos princípios nele expostos, muito contribuirão para melhorar a qualidade das nossas aulas de Matemática.

Nos últimos cinco períodos letivos, todas as minhas aulas foram dirigidas a professores secundários que, após alguns anos de prática, voltaram à Universidade para mais treinamento. Eles desejavam, segundo entendi, um curso que fosse de uso prático imediato nas suas tarefas diárias. Tentei planejar um tal curso no qual, inevitavelmente, eu teria de expressar repetidas vezes minhas opiniões sobre o dia-a-dia do professor. Meus comentários foram

¹⁹ Artigo publicado no "Journal of Education", University of British Columbia, Vancouver and Victoria (3) 1959, p. 61-69. Reproduzido nos "Collected Papers" de George Pólya, vol. IV, pp. 525-533, MIT Press 1984. Traduzido por Maria Celano Maia.

aos poucos assumindo uma forma condensada e finalmente fui levado a enunciá-los como dez regras, ou mandamentos.

*Para tornar claro o significado dos mandamentos deveria ter acrescentado exemplos ilustrativos, mas, em vista da exigüidade de espaço, isso ficou fora de cogitação. Alguns pontos são ilustrados em meus livros *A Arte de Resolver Problemas e Matemática e Raciocínio Plausível*, e outros serão discutidos noutro livro ao qual este artigo, ou seu conteúdo sob outra forma, será incorporado.*

Dez mandamentos para professores:

- 1. Tenha interesse por sua matéria.*
- 2. Conheça sua matéria.*
- 3. Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades; ponha-se no lugar deles.*
- 4. Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo.*
- 5. Dê aos seus alunos não apenas informação, mas know-how, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.*
- 6. Faça-os aprender a dar palpites.*
- 7. Faça-os aprender a demonstrar.*
- 8. Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão — procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta.*
- 9. Não desvende o segredo de uma vez — deixe os alunos darem palpites antes — deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível.*
- 10. Sugira; não os faça engolir à força.*

Ao formular os mandamentos, ou regras, acima, tive em mente os participantes das minhas classes, professores secundários de Matemática. Entretanto, essas regras se aplicam a qualquer situação de ensino, a qualquer matéria ensinada em qualquer nível. Todavia, o professor de Matemática tem mais e melhores oportunidades de aplicar algumas delas do que o professor de outras matérias.

A seguir, seguem comentários dos dez mandamentos, um a um, sob o ponto de vista didático, o que se acredita ser significativo à tarefa diária do professor de Matemática.

1. Tenha interesse por sua matéria.

Existem inúmeras metodologias e tendências educacionais ocupadas em nortear a ação docente. Torna-se muito difícil prever com garantia o sucesso ou fracasso de um método de ensino. Mas existe chance de o professor não estar contente com suas próprias aulas se esta o aborrece. O que nos parece não ser passível de muitas opções, uma vez que nenhum

interesse, ou pouco, fará com que o professor não explique claramente os conteúdos a seus alunos.

2. Conheça a sua matéria.

De que adiantaria ter interesse na dinâmica da sala de aula, na matemática como atividade, se não se é capaz de demonstrar o que ensina e fazer analogias? Fica a questão: será mesmo preciso forjar situações para que se encontre utilidade para tudo em Matemática?

3. Procure ler o semblante dos seus alunos. Ponha-se no lugar deles.

A relação ensino-aprendizagem acontece quando existe uma espécie de contato ou conexão entre professor e aluno. É de competência do professor saber se localizar nos diferentes níveis de ensino. Saber ler o semblante dos alunos é saber se colocar no lugar deles, procurando colocar-se mais como espectador do que mestre; neste caso há a impressão de que o professor de matemática é detentor do conhecimento e de que o aluno é incapaz de reconhecer procedimentos matemáticos sem a sua imediata intervenção.

É comum dizer que o aluno aprende melhor quando participa ativamente da aula. Quanto mais ativa, melhor é a aprendizagem. Com o passar dos anos em sala de aula, o professor adquire mais experiência com a efetiva ação didática e, conseqüentemente, maior aproximação com seus alunos.

4. Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo.

Eis aqui uma contribuição, de fato, própria da intuição, bem ao estilo Polya. Numa situação ideal, o professor seria somente uma espécie de assistente; ele daria oportunidade aos alunos de descobrirem por si mesmos as coisas a serem aprendidas.

5. Dê aos seus alunos não apenas informações, mas *know-how*, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.

A dinâmica da sala de aula consiste em: possuir a informação correta (de competência do professor) e alunos capazes de saber fazer pelos próprios meios (para Polya, o chamado *know-how*). *Know-how* é destreza, é a habilidade em lidar, metodicamente, com informações adquiridas.

Know-how é mais importante em Matemática do que a informação repassada pelo professor. A maneira como se trabalha a resolução de problemas está diretamente relacionada à capacidade de os alunos fazerem analogias e deduções.

6. Faça-os aprender a dar palpites.

Aqui se acrescenta o aprender a intuir, a conjecturar e depois provar. Assim procede a descoberta na maioria dos casos. Partimos do pressuposto de que, também, o professor de Matemática tem excelentes oportunidades de mostrar o papel da conjectura no processo de descoberta e assim pode imprimir em seus alunos uma atitude mental fundamentalmente importante.

Aprender a dar palpites razoáveis exige um trabalho contínuo do professor em encorajar os alunos a responder problemas em diferentes contextos e de diferentes tipos. O uso ponderado da evidência indutiva da analogia engloba, em última análise, todos os procedimentos do raciocínio plausível, o qual exerce um papel fundamental no método científico.

7. Faça-os aprender a demonstrar.

Saber como e por que se faz é a parte mais valiosa da resolução de um problema matemático, muito mais valioso que a mera posse da definição, teorema, axioma entre outros. Mas como podemos ensinar o “*como?*” Os alunos só podem aprender através de simples imitação e trabalho mecânico?

Quando se trabalha a solução de um problema, deve-se enfatizar convenientemente os aspectos instrutivos desta. Um aspecto é instrutivo se for possível ser usado não somente na solução do presente problema, mas também na solução de outros problemas — quanto mais puder ser usado, mais instrutivo. Nesse caso, um dos passos da *Arte de Resolver Problemas* (retrospecto: é possível utilizar o resultado em algum outro problema?) estaria bem empregado.

“Enfatize os aspectos instrutivos!” afirma Polya (1995). Um aspecto bem enfatizado pode converter a sua solução em uma solução-modelo, em um padrão marcante; imitando-o por meio de analogias e análise de padrões, os alunos resolverão muitos outros problemas.

8. Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão — procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta.

Analisar padrões pode ser muito útil para as etapas do transformismo algébrico²⁰. Um padrão pode ser generalizado, transformando-se em uma fórmula, que poderá ser utilizada em diferentes contextos. Se o aluno der um palpite incoerente, ou criar uma falsa regra ou padrão, deverá testá-lo e comprovar se a recíproca é verdadeira. Ele tem que seguir o desenvolvimento da solução para ver se o seu palpite estava certo ou não. Ele não pode permanecer desatento.

9. Não desvende o segredo de uma vez - deixe os alunos darem palpites antes - deixe-os descobrirem por si próprios, na medida do possível.

A expectativa do professor pode ser frustrada se um aluno apresenta um longo cálculo que ocupa várias linhas e, ao questionar os passos da resolução, percebe que em nenhum momento foi utilizada a resolução padrão esperada pelo professor.

Se o aluno acerta, é provável que o professor deseje apresentar tal resolução para os demais, retirando do aluno a chance de trabalhar a própria resolução do problema. Ou, se erra, expõe o erro à turma e apresenta, logo, sua brilhante resolução.

É preferível acompanhar o cálculo com o aluno, linha por linha. Pode-se incentivá-lo por meio de diálogos, provocados por expressões como, por exemplo: “Você começou bem, sua primeira linha está correta. A linha seguinte também está correta, você fez isto e aquilo. A próxima linha está boa. Agora, o que você acha desta linha?”; “Você foi desatento aqui nesta linha”. Se o aluno

²⁰ De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), há três concepções de educação algébrica que, historicamente, vêm exercendo maior influência no ensino de matemática elementar. A primeira, chamada de lingüístico-pragmática, foi predominante durante o século XIX e estendeu-se até a metade do século XX. A segunda concepção, a fundamentalista-estrutural, predominante nas décadas de 1970 e 1980, trouxe consigo uma nova forma de interpretar a álgebra no ensino, tendo por base as propriedades estruturais, que serviam para fundamentar e justificar as passagens do chamado transformismo algébrico. A terceira concepção - a fundamentalista-analógica - procura fazer uma síntese entre as duas anteriores, através do uso de modelos analógicos geométricos (blocos de madeira ou mesmo figuras geométricas) ou físicos (como a balança) que visualizam ou justificam as passagens do transformismo algébrico.

descobre o erro por si mesmo, ele tem uma chance de aprender algo. Se, no entanto, dizemos logo "Isto está errado", o aluno poderá se ofender e aí não ouvirá o que queiramos dizer depois. E se é dito "Isto está errado" a todo instante, o aluno pode execrar o professor e a Matemática, e todos os esforços estarão perdidos em relação a ele.

Em vez de dizer "Está tudo errado", deve-se dizer: "Você está certo, mas, aqui neste ponto tem um erro". Se proceder assim, podemos tirar um pouco do medo que muitos de nossos alunos têm de apresentar sua solução.

10. Sugira; não os faça engolir à força.

Os mandamentos acima nos parecem bastante óbvios, mas nem sempre é fácil segui-los no dia-a-dia. Durante a formação inicial no curso de licenciatura, muito pouco se discute sobre como se dá a relação entre professor/aluno dentro das quatro paredes, porque há pouco espaço curricular para isto.

Sugerir envolve muito dos aspectos já apontados anteriormente. Pode acontecer também, mais freqüentemente do que seria de se desejar, que um professor de Matemática competente e bem intencionado não perceba a Matemática ensinada na escola de modo a responder à freqüente pergunta: "Mas, professor, para que me serve isso?". Deixa-se esta pergunta para que o leitor reflita.

Percebe-se muito fortemente que a intuição e o trabalho com a descoberta deveriam estar presentes na formação do professor de Matemática. Mais ainda, ele deve encorajar seus alunos à originalidade e ao trabalho criativo, ele deve fazê-los experimentar a tensão e o triunfo da descoberta assim como Polya pretendia.

O uso das teorias de Polya torna-se simplista se não houver um problema para se verificar, por exemplo, sua profunda preocupação com a indução e analogias.

Como exemplo, podemos analisar o seguinte problema, retirado do livro *Matemática e Raciocínio Plausível*, de George Polya (1995), página 41, especificamente o cap. 01, *Generalização, Especialização e Analogia*:

“Consideremos um triângulo retângulo de lados a , b e c , dos quais o último, c , é a hipotenusa. Propomos-nos a mostrar que $c^2 = a^2 + b^2$ ”.

Para tal, Polya baseia-se na proposição: “Se duas figuras são semelhantes, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança”, ou, de forma simplificada: $\frac{F'}{F''} = \frac{b^2}{a^2}$

Tendo ainda que: “Se F , F' e F'' são figuras semelhantes construídas respectivamente sobre a hipotenusa c e sobre os catetos a e b de um triângulo retângulo, então a área de F é igual à soma das áreas de F' e F'' ”.

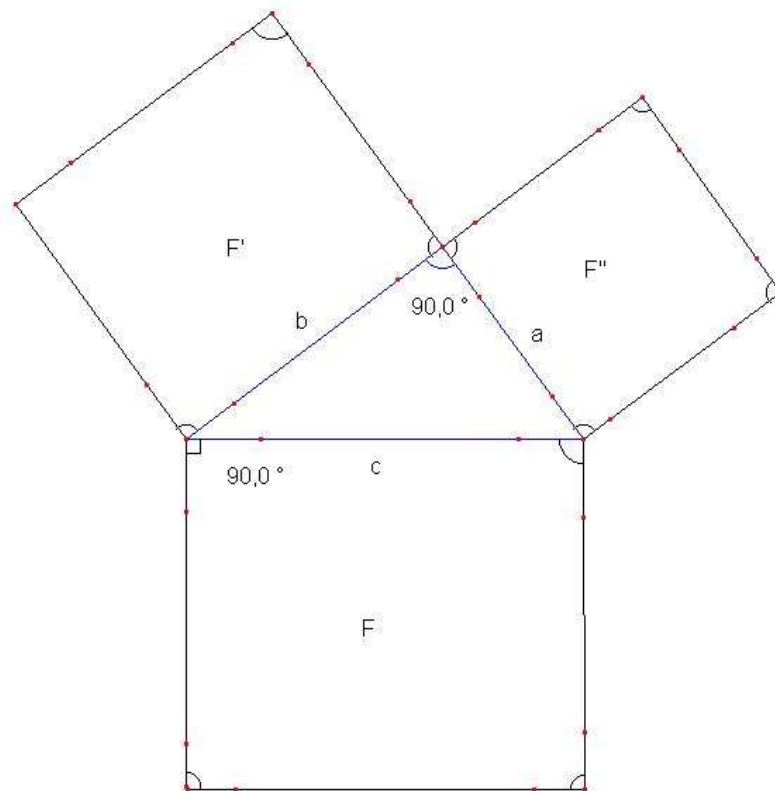


Figura I

Algebricamente, as relações podem ser escritas como: $c^2 = a^2 + b^2$ e com soma das áreas representadas por $F = F' + F''$.

Se for considerada a existência de qualquer outra figura semelhante (G , G' e G''), construídas sobre a hipotenusa e catetos do triângulo retângulo da figura I, tem-se:

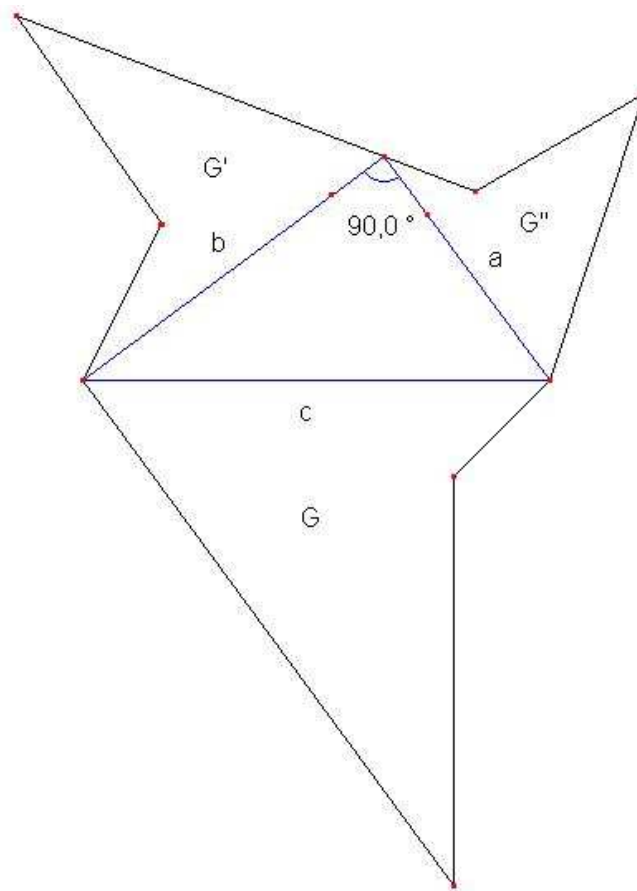


Figura II

De forma análoga, se G , G' e G'' são outras figuras semelhantes, construídas, respectivamente, sobre a hipotenusa e catetos, tem-se:

$$\frac{G'}{G''} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{F'}{F''}, \text{ logo } \frac{G'}{F'} = \frac{G''}{F''}.$$

Analogamente, $\frac{G'}{F'} = \frac{G}{F} \therefore \frac{G}{F} = \frac{G'}{F'} = \frac{G''}{F''} = k$, sendo assim:

$$G = k \cdot F; G' = k \cdot F'; G'' = k \cdot F''$$

Dessa forma, tem-se $ka^2 = kb^2 + kc^2$, que representa uma generalização do teorema original de Pitágoras, que diz: “se três polígonos semelhantes são descritos sobre os três lados de um triângulo retângulo, a área descrita sobre a hipotenusa é igual a da soma dos outros dois lados”.

$$\text{De fato } G = k \cdot F; G' = k \cdot F'; G'' = k \cdot F''$$

Então:

$$G + G' = k \cdot F' + k \cdot F'' \Rightarrow k \cdot (F' + F'') = k \cdot F = G \therefore G' + G'' = G$$

O teorema geral $ka^2 = kb^2 + kc^2$ é equivalente não só no caso particular $a^2 = b^2 + c^2$, mas sim em qualquer outro caso particular. Portanto, se um caso particular resultasse em ser óbvio, o caso geral estaria demonstrado.

Tais casos particulares provêm de um triângulo retângulo ABC , determinado pela altura do segmento CD sobre a hipotenusa AB . A figura H for o próprio triângulo ABC , H' será ADC e H'' será o triângulo BCD .

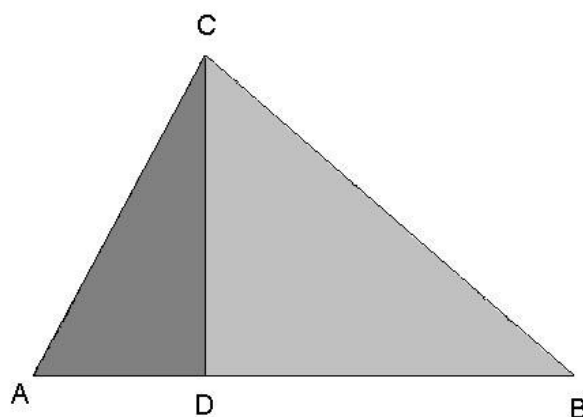


Figura III

H , H' e H'' são semelhantes e $H = H' + H''$, logo, $G = G' + G''$.

Tal raciocínio é muito instrutivo. Todo caso em que aprendemos algo aplicável a outros casos resulta instrutivo, e torna-se mais instrutivo quanto mais amplo o campo de aplicações possíveis.

Do exemplo anterior, é notável o uso de operações, como a generalização e a percepção de analogias. Não há, provavelmente, nenhum descobrimento, nem em Matemática avançada ou elementar, nem em qualquer outro tema, que se possa fazer sem estas operações, sobretudo a analogia.

Polya diz que o ensino da Matemática deve ser ativo e que não se deve suprimir as atividades informais de produzir e extrair conceitos matemáticos do mundo que nos rodeia.

Ele obteve sucesso e destaque junto à comunidade matemática, com seus trabalhos, ao conceitualizar Matemática como Resolução de Problemas, colocando-a como o foco principal da instrução matemática. Para ele, a epistemologia Matemática e a pedagogia Matemática estão profundamente imbricadas.

Para Polya, a abstração de conceitos matemáticos, a partir de situações matemáticas, no ensino superior, por exemplo, podem ser o centro do ensino de Matemática.

Partamos do estudo do que Polya chamou de *Heurística*, *Heurética* ou *ars inveniendi* como o nome de certo ramo de estudo pertencente à Lógica, Filosofia ou Psicologia. O objetivo da Heurística, segundo Polya, é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. Tais métodos foram usados por matemáticos como: Bolzano, Lakatos, Descartes, Leibnitz e Poincaré na resolução de problemas, Polya elaborou o que chamou de “as quatro fases da Resolução de Problemas” como no livro *How to solve it?*, cuja primeira edição data de 1944, fundamentando praticamente todos os estudos e pesquisas neste campo da Educação Matemática.

Polya utiliza quatro fases para a resolução de problemas. Como primeira fase, deve-se compreender o enunciado, buscar e organizar dados e incógnitas, conhecer a pergunta do problema. A segunda fase consiste em estabelecer planos para solucioná-lo. Tais planos devem ser procurados em problemas semelhantes (para Polya, correlatos). Se não há nada semelhante, deve-se procurar reformular o problema. Reformular pode ser entendido como fazer uma nova interpretação do problema, uma atitude que enriquece o aspecto intuitivo do problema.

Após isso, vem a aplicação dos planos com a verificação passo a passo e, por fim, o retrospecto com a validação do resultado enquanto problema de solução compatível com a pergunta do problema. Nesse ponto acredita-se ocorrer a grande contribuição de Polya no âmbito da Educação Matemática.

Polya concebe a Matemática não como uma disciplina formal, mas enfatiza a sua correlação com a intuição, a imaginação e a descoberta, defendendo que se deve imaginar a idéia da prova de um teorema antes de prová-lo. Pode-se, dessa maneira, perceber que muitas vezes erra-se e tem-se que descobrir outras saídas, o que acaba contribuindo para melhorar nossa capacidade de imaginar soluções: “O resultado do trabalho criativo do matemático é o raciocínio demonstrativo, a prova, mas a prova é descoberta por raciocínio plausível, pela imaginação” (POLYA, apud SCHOENFELD, 1992, p. 341.)

Sendo assim, Polya estabelece em seu trabalho não apenas o hábito de resolver problemas. Chama-nos a atenção para o potencial das descobertas

em Matemática, do trabalho criativo dos alunos e da heurística na resolução de problemas.

2.1.4 Heurística em Arquimedes

...aqueles que afirmam descobrir tudo, mas não produzem provas de suas afirmações, podem estar enganados fingindo descobrir o impossível.

(Arquimedes)

Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) foi um matemático e inventor grego, nascido na cidade-estado grega de Siracusa, na ilha da Sicília. Foi um dos mais importantes matemáticos da Antiguidade. Criou notáveis aparatos bélicos para a 2ª. Guerra Púnica, contra o poderoso exército e marinha romanos, comandados pelo Cônsul Marcelo, além de demonstrar um método para calcular o número π (3,1415926535...; razão entre o perímetro de uma circunferência e seu diâmetro) com aproximação tão grande quanto se queira.

Em Física, no seu *Tratado dos Corpos Flutuantes*, estabeleceu as leis fundamentais da estática e da hidrostática. Um dos princípios fundamentais da hidrostática é assim enunciado: "todo corpo mergulhado total ou parcialmente em um fluido sofre uma impulsão vertical, dirigido de baixo para cima, igual ao peso do volume do fluido deslocado, e aplicado no centro de impulsão." Isto quer dizer que, para o objeto flutuar, o peso da água deslocada pelo objeto tem de ser maior que o próprio peso do objeto.

Rege a lenda²¹ que certa vez, Hierão, rei de Siracusa, no século III a.C., havia encomendado uma coroa de ouro para homenagear uma divindade que

²¹ Esta história pode ser atribuída a Marcus Vitruvius Pollio, um arquiteto romano do século I a.C., que em sua obra *De architectura* apresenta tal fato. Vitruvius não viveu na época de Arquimedes e sim dois séculos depois, portanto as suas palavras não constituem relato de primeira mão, e não se sabe em que tipo de fonte ele se baseou. Galileu Galilei comentou sobre os possíveis erros e imperfeições do método utilizado por Arquimedes no seu trabalho chamado *La bilancetta* (A balancinha). Galileu suspeitava que Arquimedes teria utilizado outro método, empregando pesagens (balança hidrostática) e não medidas de líquido derramado.

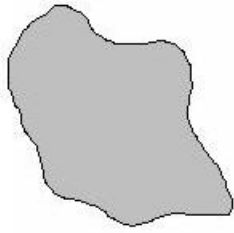
supostamente o protegera em suas conquistas, mas foi levantada a acusação de que o ourives o enganara, misturando o ouro maciço com prata em sua confecção. Para descobrir, sem danificar o objeto, se o seu interior continha uma parte feita de prata, Hierão pediu a ajuda de Arquimedes.

Arquimedes se deparou com este problema e buscou uma solução coerente e de simples demonstração, a qual, dizem, lhe ocorreu durante um banho. A lenda afirma que Arquimedes teria notado que uma quantidade de água correspondente ao seu próprio volume transbordava da banheira quando ele entrava nela e que, utilizando um método semelhante, poderia comparar o volume da coroa com os volumes de iguais pesos de prata e ouro: bastava colocá-los em um recipiente cheio de água, e medir a quantidade de líquido derramado. Feliz com essa fantástica descoberta, Arquimedes teria saído à rua despido, gritando: *Eureka! Eureka!* (Descobri! Descobri!). Assim, podemos aproximar o termo Heurística de *Eureka*, ou seja, uma grande descoberta.

Aportes da Heurística são encontrados no trabalho *O Método*, de Arquimedes. *O Método* encontra-se na forma de uma carta endereçada a Eratóstenes e é importante devido às informações que fornece sobre o método que Arquimedes usava para descobrir muitos de seus teoremas. O notável matemático o usava de maneira experimental para descobrir resultados que ele então tratava de colocar em termos rigorosos mediante o Método de Exaustão.

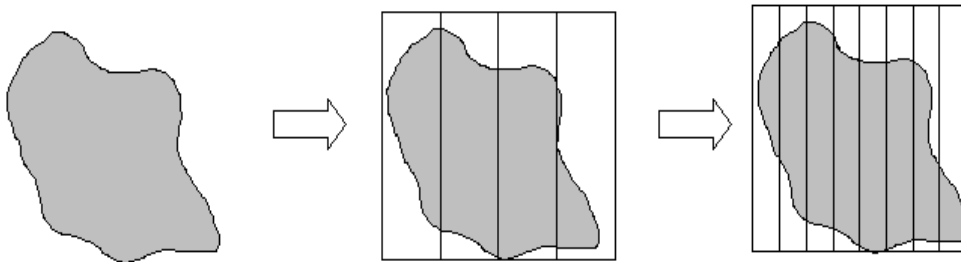
O Método de Exaustão²² é basicamente um método que permite calcular áreas e volumes, por aproximação, de figuras menores de área conhecida. Por exemplo, como calcular a área da seguinte curva fechada simples:

²² Conforme Boyer (1996): “Esta proposição, que chamaremos de ‘propriedade de exaustão’, equivale à formulação moderna seguinte: Se M é uma grandeza dada, ε uma grandeza prefixada de mesma espécie e r é uma razão tal que, $\frac{1}{2} \leq r < 1$, então podemos achar um inteiro N tal que $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n > N$. Isto é, a propriedade de exaustão equivalente a dizer que $\lim_{n \rightarrow \infty} M(1-r)^n = 0$. Ainda mais, os gregos usaram essa propriedade para provar teoremas sobre as áreas e volumes de figuras curvilíneas.” (BOYER, 1996, p. 67.)



Área da figura = ?

O método consiste basicamente em aproximar sucessivamente a área a calcular a uma soma de áreas poligonais, que constituem dela uma aproximação. À medida que se vão considerando aproximações contendo mais polígonos, obtêm-se aproximações melhores e uma idéia de qual será o valor da área, estimando o "limite" dessas somas. Assim, temos:



À medida que o número de lados dos polígonos aumenta, a área A_n fica cada vez maior, enquanto que a área B_n fica cada vez menor, e ambas mais próximas do valor da área do círculo. Na linguagem atual, dizemos que "a área do círculo é o limite das áreas dos polígonos regulares a ele inscritos, quando n tende a infinito" (e também é igual ao limite das áreas dos polígonos circunscritos). Escrevemos:

$$A = \lim A_n = \lim B_n.$$

O professor Inocêncio Fernandes Balieiro Filho (2004) nos relata que:

“Com relação ao método de exaustão, convém salientar, segundo Babini, que não se trata de um método para se realizar descobertas, mas de um método para se fazer demonstrações, isto é, é necessário ter-se um conhecimento prévio do resultado que se quer demonstrar para que seja possível realizar uma demonstração rigorosa.” (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 41.)

Partindo do pressuposto de que Arquimedes utilizava o Método da Exaustão ao apresentar demonstrações elegantes e rigorosas para suas descobertas matemáticas e não para ensinar um método de descobertas que conduzisse a atividade heurística, considera-se o modo como Babini (1966) define o Método de Arquimedes:

“A primeira observação importante que se formula é que não se trata de um método de descobrimento, mas de demonstração, isto é, que supõe conhecido de alguma maneira o resultado, e oferece um procedimento rigoroso para demonstrá-lo. Além disso, observamos como, já na época de Eudoxo, a matemática refletia sua característica fundamental de ter por acento o processo dedutivo, a demonstração, e não o resultado. Conhecido, pois, de antemão, o resultado, a demonstração pelo método de Eudoxo de que, por exemplo, uma certa figura A é equivalente a uma figura conhecida B, consiste numa dupla redução ao absurdo provando que os supostos de A maior ou menor que B conduzem à contradições, de maneira que não fica outra alternativa senão a de que A seja equivalente a B. E é nessa demonstração que joga seu papel o postulado, já que a demonstração exige que se possa decompor a figura em partes tais que uma delas seja inferior a uma figura dada, e isso se obtém precisamente em virtude do postulado. Essa decomposição da figura em partes cada vez menores foi a causa pela qual um matemático renascentista deu ao método o nome de ‘método de exaustão’, embora na verdade tal decomposição não ‘esgote’ a figura, mas que só chega ao ponto em que certa figura é menor que uma figura dada.” (BABINI, 1966, p.16-17, apud BALIEIRO, 2004.)

Arquimedes é o precursor da atividade heurística. Tal fato é de relevância para a presente pesquisa porque pretende-se observar a heurística na resolução de problemas em Matemática. Na busca dos antecessores de George Polya e deparou-se (este autor) com a Heurística sendo utilizada com grande rigor matemático.

A importância do método da exaustão proposto por Arquimedes está na possibilidade de se descobrir utilizando-se demonstrações matemáticas

rigorosas. A descoberta (Heurística) não é um processo didático para a resolução de problemas baseado no método da exaustão. O indivíduo que precisasse descobrir o modo como Arquimedes fez sua demonstração necessitaria conhecer a solução final do problema. A resposta estaria pronta, a demonstração seria replicada, o que não contribui para o que abordou-se nas interpretações das entrevistas com os alunos.

2.1.5 Heurística em Pappus

O chamado "Tesouro da Análise", meu filho Hermodoro, em resumo, é uma matéria particular para os que querem, depois da produção dos elementos comuns, tomar a si a faculdade inventiva, (de resolver) nas linhas, os problemas apresentados a eles, e sendo estabelecida útil para isso apenas.

(Pappus)

Pappus, grande matemático grego (300 d.C), organizou uma obra importante, composta originalmente por oito livros, chamada *A Coleção Matemática*, onde procurava sistematizar um método para resolver problemas. No livro VII das suas *Collectiones*, Pappus descreve um ramo de estudo que ele chamou de *Analyomenos*, que pode ser traduzido como *Tesouro da Análise*, ou *Arte de Resolver Problemas*, ou mesmo, *Heurística*.

Considerando o intuito deste item, dentre os livros de *A Coleção Matemática*, foca-se a *análise* no livro VII, por seu valor do ponto de vista histórico, e, em particular, por abordar e conceituar os aspectos referentes à *análise* e *síntese*, que fornecem subsídios à atividade heurística.

Dentre os trabalhos a que se recorre para o estudo da Heurística, George Polya atribui um sentido moderno a ela, chamando-a de "heurística moderna". Para tal, se refere a uma obra fundamental intitulada "Collectio", do matemático grego Pappus (320 d.C.).

O professor Inocêncio Fernandes Balieiro Filho (2004) informa que:

“Pappus descreve em detalhes o método analítico dos antigos geômetras gregos na demonstração de teoremas ou na construção de figuras geométricas. Esse procedimento consistia em um duplo movimento: análise, na qual se buscavam os antecedentes das proposições a serem provadas ou as condições que tornassem possíveis a construção de figuras geométricas, e a síntese, na qual, a partir das condições descobertas na análise, apresentava-se ou a prova do teorema na seqüência lógica usual ou a construção efetiva da figura geométrica. A análise se subdividia em transformação (busca das condições para a solução do problema) e resolução (legitimação das condições descobertas). A síntese se subdividia, por sua vez, em construção (dos dados do problema) e prova.” (BALIEIRO FILHO, VII EPEM, 2004.)

Apesar de que não se tenha amplo conhecimento de muitas de suas obras e um comentário feito sobre o livro X dos *Elementos* só seja conhecido através de uma tradução árabe feita pelo Prof. Dr. Irineu Bicudo, deve-se a Pappus a organização de uma obra importante composta por oito livros, chamada *A Coleção Matemática*, que sintetiza alguns dos conhecimentos anteriores, acrescido de interessantes comentários e novas hipóteses, com indicações, correções e críticas.

Em especial o livro VII, dedicado ao seu filho *Hermodoro*, é composto por uma série de obras de autores gregos²³, com a finalidade de disponibilizar artifícios que pudessem ser úteis na resolução dos problemas geométricos, àqueles alunos que já haviam alcançado o domínio da geometria, através do estudo de seu *Elementos*.

Em termos atuais, um problema matemático pode ser caracterizado, em um contexto pedagógico, como uma situação a qual o “aluno-resolvedor” requer um ou vários procedimentos mentais e/ou algorítmicos para se encontrar a solução adequada ao problema; entretanto, o que ocorre é que a solução encontrada, em significativo número de ocorrências, não é coerente com a pergunta do problema.

²³ Apolônio de Perga (250-170 a.C.), Hiparco (aprox. 160 a.C.), Gémino de Rodas (cerca de 70 a.C.), Herão de Alexandria (aprox. 100 a.C.), Nicômaco de Gerasa (50-110 d.C.), Menelau (100 d.C.), Cláudio Ptolomeu (100-168 d.C.), que tentaram dar continuidade às tradições geométricas gregas estabelecidas pelos matemáticos da primeira fase da Escola de Alexandria (300 a 30 a.C.).

Com relação à solução de um problema, é bastante comum poder-se *adivinhá-la*, utilizando intuições, inferências, induções e baseando-se em analogias com outros problemas resolvidos (POLYA, 1995) e não se pode negar que, talvez por esses fatos, foram alcançados resultados importantes, como se verifica no desenvolvimento das idéias matemáticas; mas, apesar de parecer uma prática comum em problemas de matemática, tal adivinhação não é um método científico propriamente dito.

Entrando no âmbito da demonstração e da análise, interessante observar o que dizem Pappus e Polya:

“Duplo é o gênero da análise, um a pesquisa do verdadeiro, o qual é chamado teórico, o outro capaz de dizer o que foi proposto, o qual é chamado problemático. Enquanto que, no gênero teórico, tendo estabelecido o que é procurado como existente e verdadeiro, em seguida, por meio das conseqüências sucessivas como verdadeiras, e como existem segundo a hipótese, tendo avançado até algo admitido, caso, por um lado, fosse verdadeiro aquilo admitido, será verdadeiro também o procurado, e a demonstração é uma inversão da análise; caso, por outro lado, encontramos falso o admitido, falso será também o procurado. No gênero problemático, tendo estabelecido o que foi proposto como conhecido, em seguida, por meio das conseqüências sucessivas, como verdadeiras, tendo avançado até algo admitido, caso, por um lado, o admitido seja possível é obtível, o que os matemáticos chamam dados, possível também será o proposto, e, de novo, a demonstração é uma inversão à análise; caso, por outro lado, encontramos impossível o admitido, impossível será também o problema.” (PAPPUS, 1982, apud BALIEIRO, 2004.)

A análise, proposta por Pappus, consiste em resolver um problema admitindo o resultado que se quer demonstrar como verdadeiro, buscando, em seguida, um antecedente do qual seja possível deduzir o resultado que se quer demonstrar e que foi admitido como verdadeiro. Repetindo esse processo de regressão (ou raciocínio regressivo) sucessivamente busca-se chegar a algum resultado que já se conhece ou admite-se como válido.

Polya, partindo dos ensinamentos de Pappus, afirmou:

“Na análise, começamos por aquilo de que se precisa e que admitimos como certo e extraímos conseqüências disso e conseqüência das conseqüências até chegarmos a um ponto que podemos usar como de partida da síntese. Porque na análise admitimos que o que precisa ser feito já o foi (o que se procura já foi encontrado, o que se tem a demonstrar é verdadeiro). Indagamos de qual antecedente poderá ser

deduzido o resultado desejado; em seguida, indagamos de novo qual poderá ser o antecedente desse antecedente e assim por diante, até chegarmos finalmente a algo que já conhecemos ou que admitimos como verdadeiro. A este procedimento chamamos análise, ou regressão ou raciocínio regressivo.” (POLYA, 1995, p.104.)

A etapa conclusiva é a *síntese* e consiste em verificar esta solução, isto é, um raciocínio progressivo; em seguida, é necessário mostrar que as condições primitivamente postas são, também, satisfeitas.

Pappus utilizava os procedimentos heurísticos para solucionar seus problemas matemáticos, criando modelos matemáticos que utilizava a *análise* para encontrar a solução de um problema ou a demonstração de um teorema e, em seguida, a *síntese* para expor o que se encontrou para solucionar o problema ou a demonstração de um teorema.

Em relação à *síntese*, Polya (1995) concluiu que:

“... na síntese, invertendo o processo, partimos do último ponto a que chegamos na análise, daquilo que já sabemos ou admitimos como verdadeiro. Disso deduzimos o que o procedeu na análise e continuamos a fazer deduções até que, percorrendo o mesmo caminho no outro sentido, conseguimos finalmente chegar aonde queríamos. A este procedimento chamamos síntese, ou resolução construtiva ou raciocínio progressivo.” (POLYA, 1995, p. 104.)

A *análise* e a *síntese* foram os procedimentos utilizados por Pappus para a solução de problemas geométricos. Esses procedimentos fazem uso da atividade heurística no raciocínio regressivo, porém, ao partir de soluções prontas e verdadeiras *a priori*, perde-se o potencial criativo próprio dos alunos quando resolvem problemas da forma que se pretende observar nesta pesquisa.

A atividade heurística pode demonstrar cunho pedagógico, podendo ser tratada como uma heurística pedagógica e entende-se que a etapa da *síntese*, presente no método de Pappus, vai ao encontro da dedução e intuição necessárias à resolução de problemas potencialmente heurísticos.

Objetivamos citar tais autores para esclarecer aspectos históricos da heurística na resolução de problemas.

CAPÍTULO 3

APORTES TEÓRICOS SOBRE DIDÁTICA EM UM CONTEXTO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Em uma revisão histórica sobre o papel da Resolução de Problemas no currículo escolar, Stanic e Kilpatrick afirmam que: “Problemas têm ocupado um lugar central nos currículos da Matemática escolar desde a Antigüidade, mas o mesmo não acontece com a Resolução de Problemas. Só recentemente os educadores matemáticos aceitaram a idéia de que o desenvolvimento de habilidades para a Resolução de Problemas merece especial atenção”. (STANIC & KILPATRICK apud SCHOENFELD, 1989, p. 33.)

Há consentimento geral na idéia de que o principal objetivo da matemática escolar deveria ser o de preparar os alunos para serem competentes em resolver problemas em diversos contextos. Os PCN/EM indicam como objetivos do ensino da Matemática:

- Desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo.
- Utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos. (PCN/EM, 1998, p. 85.)

Stanic e Kilpatrick (1989) apresentam alguns usos tradicionais da Resolução de Problemas:

1 - Como contexto (em que são apresentados em cinco papéis)

- Como justificativa para ensinar Matemática, com o objetivo de convencer professores e alunos sobre o valor da Matemática.
- Como motivação para introduzir novos tópicos com o argumento explícito ou implícito: quando você tiver aprendido a lição que se segue, você será capaz de resolver problemas desse tipo.
- Como recreação para mostrar que a Matemática pode ser divertida e que há alguns usos matemáticos que servem como entretenimento.

- Como uma forma de desenvolver novas habilidades; problemas podem introduzir os alunos a um novo assunto e providenciar um contexto para a discussão.
- Como prática com o objetivo de praticar técnicas.

Em todos esses cinco papéis relacionados ao contexto, os problemas são usados não como um objetivo próprio, mas como facilitador para atingir outros objetivos.

2 - Como uma habilidade: os alunos aprendem a resolver problemas depois que lhes são fornecidas as regras e as ferramentas para que consigam desempenhar eficazmente a tarefa.

3 - Como arte: esta concepção contrasta com as outras duas; a Resolução de Problemas é o coração da Matemática, se não a Matemática propriamente dita. (SCHOENFELD, 1992, p. 341.)

Pozo (1998) apresenta alguns mitos típicos dos alunos sobre a natureza da Matemática. Parece um tanto oportuno lançar mão da visão de que os alunos têm, de modo geral, de que a Matemática e a solução de problemas matemáticos constituem um conhecimento descontextualizado, cuja aprendizagem não possui outros objetivos a não ser o de obter boas notas na escola.

O leitor define a questão: qual será a contribuição do professor de Matemática para a criação dos mitos citados abaixo?

“Mitos típicos dos estudantes sobre a natureza da Matemática:

- Os problemas matemáticos têm uma e somente uma resposta correta.
- Existe somente uma forma correta de resolver um problema matemático e, normalmente, o correto é seguir a última regra demonstrada em aula pelo professor.
- Os estudantes “normais” não são capazes de entender Matemática; somente podem esperar memorizá-la e aplicar mecanicamente aquilo que aprenderam sem entender.
- Os estudantes que entenderam Matemática devem ser capazes de resolver qualquer problema em cinco minutos ou menos.
- A Matemática ensinada na escola não tem nada a ver com o mundo real.
- As regras formais da Matemática são irrelevantes para os processos de descobrimento e de invenção.” (POZO, 1998, p. 46.)

Para Dario Fiorentini,

“Ao passar de uma perspectiva de Ensino de Resolução de Problemas em Matemática para outra de Ensino da Matemática por meio da Resolução de Problemas, passa-se a questões pedagógicas mais amplas como: concepções, finalidades e aspectos epistemológicos e sócio-culturais do ensino e da aprendizagem da Matemática e do currículo escolar” (FIORENTINI, 1994, p. 229.)

Este autor fez um estudo detalhado sobre Resolução de Problemas e uma pesquisa em dissertações e teses²⁴ produzidas sobre o assunto nas últimas décadas. Analisando esses trabalhos, percebeu que a maioria dos professores afirma trabalhar com Resolução de Problemas, mas a forma de trabalhar e os objetivos que visam alcançar são muito variados.

Lester (1988) afirma que “a incorporação de problemas heurísticos no ensino da Matemática desenvolve nos alunos a habilidade de elaborar uma hipótese sobre o método de solução a ser usado e testar essa hipótese, além de permitir que o aluno use sua intuição sobre possíveis soluções dentre várias estratégias que ele conhece”. (LESTER, 1988, p. 22.)

De acordo com Onuchic (1999): “Ao invés de fazer da Resolução de Problemas o foco do ensino da Matemática, professores, autores de livros, promotores de currículos e avaliadores de aprendizagem deveriam fazer da compreensão seu ponto central e seu objetivo”. (ONUCHIC, 1999, p. 208.)

Nessa concepção, a pesquisadora toma como o objetivo da Resolução de Problemas a compreensão, o que nos leva à noção de Problematização, ou seja, a Resolução de Problemas seria uma oportunidade para o diálogo mediado pelo professor e pelos pares, facilitando ao aluno a apreensão do conhecimento matemático.

Essas concepções são muito variadas, como são vários os objetivos atribuídos à resolução de problemas em Matemática. A forma como o professor concebe a Matemática guia as decisões, muitas vezes inconscientes, na sala de aula, influenciando decisivamente o modo como o aluno se apropria do conhecimento matemático.

²⁴ Revista *Zetetike*, ano 3, n.º 4, 1995 – CEMPEM – UNICAMP.

3.1 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: DIDÁTICA TEÓRICA x DIDÁTICA FRANCESA

Apresenta-se a seguir alguns aspectos teóricos da Didática francesa, baseados em uma análise crítica²⁵ sobre as situações ou relações didáticas definidas por Brousseau²⁶ e do grupo TEM²⁷ (Teoria da Educação Matemática).

A Didática da Matemática estuda as atividades didáticas, ou seja, as atividades que têm como objeto de pesquisa as relações desta com o ensino, mais especificamente naquilo que tem de peculiar a Matemática.

Por sua vez, no mundo anglo-saxão se emprega a expressão *Mathematics Education* para referir-se à área de conhecimento que na França, Alemanha e Espanha se denomina Didática da Matemática.

Neste campo de atuação, é possível subdividir e reclassificar diversas pesquisas. A maioria procura estudar os aspectos cognitivos das relações didáticas estabelecidas em sala de aula, o que ficou conhecido no meio acadêmico como *Didática francesa*. Demonstra-se aqui uma inversão. Aprofundou-se em um campo não menos distante da teoria, mas muito mais próximo da prática, a Didática na prática, aquela que está muito mais presente nas aulas de Matemática.

Como base teórica desta pesquisa, buscou-se abordar as produções de dois grupos preocupados com as relações da Didática na prática: um grupo alemão, o grupo TEM (Teoria da Educação Matemática); o outro, um subgrupo deste, que é espanhol, o *Teoria y Metodología de Investigación en Educación Matemática*, coordenado pelo professor Godino²⁸.

²⁵ Aula da disciplina Seminário Especial de Educação Matemática I, ofertada aos alunos do Mestrado em Educação, da Universidade Federal do Paraná, ocorrida no dia 17 de Agosto de 2006. Disciplina esta que foi ministrada, simultaneamente, pelos Professores Carlos Roberto Vianna e José Carlos Cifuentes.

²⁶ Guy Brousseau introduziu, inicialmente, o conceito de contrato didático em 1978; tinha a intenção de entender as possíveis causas do fracasso escolar em Matemática, com alunos que não gostavam de Matemática e ao mesmo tempo eram bem sucedidos em outras disciplinas. Para o autor, o fracasso estaria no não esclarecimento deste contrato.

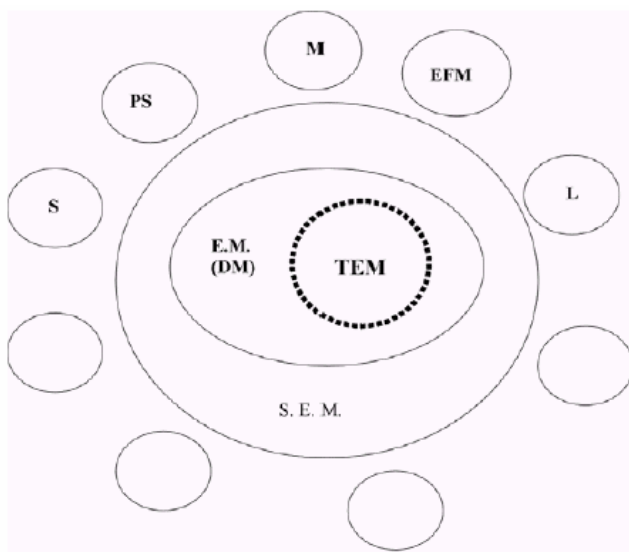
²⁷ Ou TME - Theory of Mathematical Education. Grupo de trabalho criado durante a realização do 5º ICME (International Congress on Mathematical Education), em 1984, com a tarefa de proceder a uma avaliação global e fundamental da Educação Matemática, indagando-se acerca da natureza de seus objetos de estudo, de seus objetivos, de seus métodos de investigação e de validação e de sua significação e relevância sociais.

²⁸ Juan D. Godino. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

O grupo TEM foi criado por Steiner²⁹ e fundamenta-se na filosofia com estudos fortemente epistemológicos, diferentemente da já mencionada Didática francesa, cujos fundamentos provêm da Psicologia. A maior preocupação deste grupo é analisar e fundamentar estudos empíricos.

Em relação ao grupo TEM, podemos dizer que a intenção do professor Steiner no “V Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME)”, celebrado em 1984, foi precisamente convocar os pesquisadores interessados em uma teoria de contraponto à forte influência da epistemologia genética em Piaget.

A atividade de teorização em Educação Matemática é vista por Steiner como um componente da Educação Matemática, e por um sistema³⁰ mais amplo denominado SEM, que constitui o Sistema de Ensino de Matemática. O esquema seguinte demonstra a posição do TEM diante do Sistema de Ensino de Matemática.



Para saber mais sobre este grupo: <http://www.ugr.es/~jgodino/>

²⁹ Hans George Steiner. Para saber mais sobre Steiner e o TEM: [http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/sampletext1.pdf#search=%22Theory%20of%20mathematics%20education%](http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/sampletext1.pdf#search=%22Theory%20of%20mathematics%20education%20), acessado em 20/04/07.

³⁰ "Teoría de la Educación Matemática". Disponível em: <http://www.ugr.es/local/jgodino/>

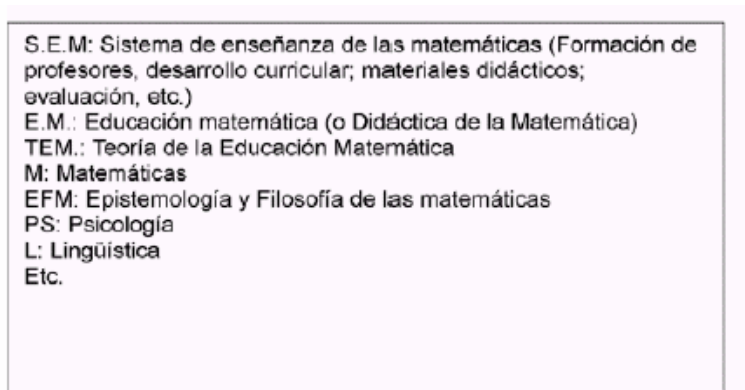


Figura 4: Relações da Didática da Matemática com outras disciplinas e sistemas (STEINER, 1990.) Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/01_PerspectivaDM.pdf acessado em 20/04/07.

Pela figura nota-se que o SEM³¹ engloba a Educação Matemática, ou como preferem os autores, a Didática da Matemática, sendo a teoria da educação matemática o núcleo central do sistema. Ao seu redor, contendo núcleos próprios e independentes do sistema, aparecem Sociologia, Filosofia, Epistemologia, Psicologia, Lingüística, entre outras.

3.1.1 A Didática na prática segundo Guy Brousseau e a noção de *contrato didático*

O professor Brousseau teve como principal contribuição teórica a elaboração da teoria das situações didáticas, em um momento em que a visão dominante era cognitiva, graças às pesquisas no campo da psicologia atribuídas à Didática francesa.

Brousseau apostou em outra teoria (empírica) que permitisse compreender as interações sociais desenvolvidas na sala de aula entre alunos, professor e o saber que condicionam o que os alunos aprendem e como pode ser aprendido. A essas relações chamou de *contrato didático*.

Surgiu o conceito de *contrato didático* em 1978, no I IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) realizado na Universidade de Bordeaux, como uma das causas possíveis do fracasso eletivo ao ensino de

³¹ SEM (Sistema de Enseñanza de las Matemáticas)

Matemática. Tratava-se de alunos que apresentavam dificuldades em Matemática e não tinham o gosto em aprendê-la, mas, ao mesmo tempo, obtinham sucessos em outras disciplinas.

A dimensão do ensino e da aprendizagem em sala de aula está marcada por um tipo especial de relação, a qual envolve o professor e aluno na mediação e apropriação do saber. É importante enfatizar essa posição do professor na relação: trata-se de um mediador e não de um detentor do saber. No entanto, igualmente importante é reconhecer que existe uma assimetria de concepção em relação ao saber: o aluno tem uma relação com o saber que não é a mesma do professor.

Nesse movimento dinâmico das relações didáticas, é interessante destacar os comportamentos e atitudes adotadas pelos alunos, denominados *atores*, em torno de regras mais ou menos consolidadas, como uma espécie de contrato didático.

Isso significa que, no cotidiano da sala de aula, há um conjunto de expectativas e regras, nem sempre explícitas (que traduzem o jogo de relações), com obrigações de papéis que são desempenhados pelo professor e pelos alunos mediante o processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, a noção de contrato didático pode indicar alguns caminhos para melhor compreender esse “jogo de relações” em torno do saber.

Para Brousseau, o contrato didático consiste em um:

“... conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos dos alunos que são esperados pelo professor. (...) Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente, mas, sobretudo, implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá que prestar conta perante o outro.” (BROUSSEAU , 1980, apud SARRAZI, 1996, p. 86.)

Alguns elementos são inerentes ao contrato didático, e, excluídos os problemas de lógica, interpretação, compreensão etc. Muitos dos erros manifestados em respostas de alunos têm a sua origem na não clareza da metodologia de resolução de problemas.

Na ânsia de responder ao que o professor deseja ouvir, verifica-se uma busca incessante por parte dos alunos para encontrar uma resposta

matemática a um dado problema, partindo do princípio de que todo problema em Matemática sempre requer uma solução e que esta deve ser numérica.

Por exemplo:

Na seqüência {2, 10, 12, 16, 17, 18, 19, 200, [?]} qual é o próximo número?

A maioria dos alunos procura algum tipo de padrão numérico que ajude no cálculo algorítmico do valor numérico referente ao próximo elemento. Passadas algumas horas tentando, sem sucesso, desistem, recorrendo ao professor que lhes dê a solução do problema.

A revolta é geral quando se anuncia que o próximo número é o 201, pois é o próximo número com a inicial *d*, **duzentos** e um.

A seqüência {**dois**, **dez**, **doze**,..., **duzentos**, **duzentos e um**, **duzentos e dois**,...} “não é matemática”, bravejam os alunos.

Dada a freqüência com que são apresentados aos alunos problemas com respostas e procedimentos essencialmente numéricos, sua resposta passa a ser vista como uma necessidade de utilizar sempre processos aritméticos. Respostas puramente numéricas passam a ser uma *regra*, um *contrato* em Matemática.

As convenções didáticas passam, então, a fazer parte do contrato didático e podem ser identificadas como um conjunto de obrigações. Por exemplo, no caso dos alunos: obrigação de responder ao professor, de fornecer uma resposta a um problema, de destacar o resultado de outra cor, de escrever os cálculos de forma sistematizada etc.

Esse amontoado de regras passa a fixar uma conduta por parte do professor e do aluno em relação ao saber, descaracterizando a beleza inerente da Matemática, resumindo seu ensino a regras, técnicas e convenções, que, em algum momento, farão com que alguém se pergunte: *Onde eu vou usar isso, afinal?*

Para ilustrar a obrigação que o aluno tem de dar resposta numérica a um dado problema, apresenta-se o famigerado problema *da idade do capitão*, retirado de JOSHUA & DUPIN (1993). Os autores aplicaram um problema de enunciado curto a 97 alunos de uma escola elementar francesa, cujo enunciado é “Sobre um barco há 26 carneiros e 10 cabras. Qual é a idade do capitão?”.

Os autores apontam que das 97 crianças, 78,33 % dos alunos deram a idade do capitão utilizando os dados apresentados no enunciado. Alguns dos depoimentos dos alunos apontam para uma característica que considera-se cláusula de um contrato didático: um problema possui uma resposta e somente uma e, para chegar a ela, deve-se utilizar todas as informações que estão no problema, nenhuma informação extra se faz necessária, tudo está explicitado, basta manejar os dados e apresentar a solução.

Brousseau denomina por “Didática da Matemática” uma ciência experimental que vai estudar fenômenos ligados à sala de aula. O autor amplia esse estudo para além do saber, envolvendo o ambiente, a sala de aula, a escola, o aluno, entre outros.

Sobre isso, Brousseau identificou, na relação didática, uma série de comportamentos do professor e dos alunos na mediação do saber, permeados de normas e procedimentos nem sempre explícitos, próprios do contrato didático.

Tal instrumento representa uma importante teoria que se desenvolveu na “Didática da Matemática”, numa tentativa de elucidar as causas de fracassos no ensino-aprendizagem e pretendia conhecer melhor os segmentos que formam o triângulo didático: professor - saber (conhecimento) – aluno.

A compreensão das intenções que permeiam o universo escolar, em especial as da sala de aula, pode ser o caminho para refletir o *jogo das relações* que envolvem professor e aluno com objetivos didáticos, em torno do processo de ensino e aprendizagem. O *jogo das relações* permite circunscrever certos fenômenos do ensino e trazer uma visão diferenciada para a dinâmica da sala de aula, além de interrogar-se de modo novo sobre a complexidade da relação didática.

3.1.2 Principais termos da teoria didática de Brousseau: situação didática, a-didática e interação aluno x meio

Para melhor compreensão do *contrato didático*, abordam-se alguns termos presentes nos trabalhos de Brousseau que servem para uma posterior interpretação do que entendemos por contrato nas relações didáticas.

Segundo Brousseau (1978), a interação entre aluno e meio se descreve através de um conceito teórico do que chamou de *situação a-didática*. Na *situação a-didática*, o aluno não precisa de tantas interferências para a aprendizagem, pois ele já consegue caminhar sozinho. A Resolução de Problemas, a nosso ver, favorece a ocorrência de situações *a-didáticas* e possibilita que o aluno, por si, desenvolva estratégias próprias de resolução. O fato de o aluno não depender da ação direta do professor para adquirir determinado conhecimento remete à *maiêutica socrática* ou, conforme o dicionário de Polya: “heurística moderna” (POLYA, 1995).

Para Brousseau (1978) a interação entre professor e aluno, em relação à forma aluno x meio, envolve uma regulação da produção, o professor acrescenta mecanismos e vai validando as situações do contrato didático, por exemplo, através da resolução de um problema.

As relações que envolvem professores, alunos e conhecimento na sala de aula são muito complexas, não se restringem aos métodos de ensino ou aos processos de aprendizagem. Na sala de aula, o conhecimento não é apenas transmitido pelo professor e apropriado pelos alunos. Ele é disputado, aceito, rejeitado, elaborado e reelaborado no processo concreto de interlocução. Nesse espaço, entrecruzam-se diversas vozes e diferentes significados, influenciando no curso do ensino e da aprendizagem.

Na ação didática que entendemos a atividade do professor, se dá de forma menos interferente e mais em termos de orientação, à resposta esperada, exigindo, assim, da parte do aluno a mobilização de conhecimentos, sejam estes em processo de aprendizagem ou já consolidados. O professor efetua não a comunicação de um conhecimento, mas a devolução de um bom problema que viabilize a construção do conhecimento por parte do aluno.

Para Brousseau (1978), a relação didática é potencialmente conflitiva, pois nela se busca propiciar interações do aluno com o objeto de conhecimento, aprofundando e ampliando as relações e significações acerca desse objeto. Daí emergem questões para uma reflexão, embora breve, mas importante, sobre as *situações didáticas e a-didáticas*.

Para Brousseau (1978) as situações didáticas se enquadram em um sistema: *Aluno – meio*

Aluno – professor

Aqui fica entendido que a *situação a-didática* prima por não conduzir o aluno por *trilhos*, propõe que ele próprio descubra (heurísticamente) e *entre nos trilhos*, o que pode ferir profundamente o sentido pedagógico, que, em primeira instância, vem do grego e significa *conduzir*.

A Didática possibilita ir-se além da aquisição do conhecimento matemático, pois possibilita construir conceitos, não só pela atividade, mas, por excepcional experimentação.

A noção de contrato didático ajuda muito a entender as aplicações das diferentes teorias da Resolução de Problemas, pois, em situações nas quais aponta-se para a reflexão, trata do ensino de exercícios nas séries iniciais do ensino fundamental, em que a utilização da estratégia *arme e efetue* é muito comum, estabelecendo um determinado tipo de contrato com regras visíveis e já incorporado para além da sala de aula. Nessa estratégia, tudo está bem definido e passível de resposta: “Se vou à venda comprar 10 balas e ganho mais 3, então fico com_____.” “Oras, fico com **tente**.” (grifo nosso para indicar ênfase oral) Neste exemplo a expectativa, ou o gabarito da resposta, era 13, mas para o aluno a felicidade está acima da aritmética. Parece bem claro que é um exercício de única resposta para o professor, mas para o aluno existe uma variedade de descobertas a serem feitas.

No ambiente escolar – espaço legitimado socialmente para a aquisição do saber – não é diferente: as práticas e ações de professores e alunos são incorporadas a um conjunto de regras, de normas e representações que condicionam a relação professor-aluno, na qual ocorrem o ensino e a aprendizagem.

A ação de *professar* o saber, como por vezes é rotulado o papel desempenhado pelo professor, sofre ainda a influência de diferentes agentes sociais ligados a essa prática (pais, direção escolar, sistema governamental), assim como a ação de *aprendiz* também está condicionada a uma influência desses mesmos agentes. E é pelo fato de ambas as partes vestirem essa roupagem – de um lado o detentor do saber e de outro o receptor aprendiz – que essa relação é tão cautelosamente supervisionada por agentes externos.

No triângulo didático professor-saber-aluno há pressões externas à sala de aula, pois as expectativas emergem e se manifestam oriundas dos diversos fatores que condicionam a atividade do professor.

Se a função primeira de uma relação didática é permitir que o aluno modifique a sua relação com o saber durante o processo de construção do conhecimento, cabe ao professor dinamizar essa relação. Esse dinamismo se explica pelas múltiplas mudanças nas relações com os saberes e os conhecimentos que subsidiem o processo de aprendizagem.

Outro aspecto importante numa relação didática é aquilo que não é explicitado. O implícito desempenha um papel fundamental para a aprendizagem. Ao explicitar tudo, o professor não permite que o aluno se posicione frente a uma situação nova. Para TOMIO (2002, p. 132), “é a ‘curiosidade’ que desafia a intencionalidade do corpo aprendente, que gera o desejo de querer saber/sentir, de querer aprender” e é neste momento que culmina o processo avaliativo: a atitude diante do novo; como o aluno utiliza o conhecimento em uma situação não explicitada pelo professor é o que caracteriza a sua aprendizagem.

Na relação didática, “certas coisas são ditas, outras são murmuradas; outras, enfim, ficam sob o silêncio, sejam do fato em evidência ou sejam aquelas que não podem ser ditas” (SARRAZI, 1996, p.101) e isto é o que caracteriza a vida na sala de aula, essa constante interação entre aquilo que é informado ao aluno e aquilo que por ele será construído.

Durante o processo de ensino-aprendizagem, que consiste nessa permuta entre o explícito e o implícito, surge outra característica marcante à presença do contrato didático, que ocorre quando um dos alunos transgride algumas de suas *regras*, em função do encaminhamento da prática

pedagógica. Nesse momento, há uma ruptura no contrato que precisa ser (re) discutido para ocorrer o avanço da aprendizagem.

São as rupturas e constantes negociações no contrato didático que viabilizam o processo de aprendizagem. “Um bom contrato didático é, em geral, aquele que mais rapidamente se torna obsoleto” (JONNAERT & BORGHT, 2002, p. 167), pois, como observa BROUSSEAU (1986, p. 4), “a aprendizagem repousa não sobre o bom funcionamento do contrato, mas sobre as suas rupturas”. Nesse sentido, o contrato não se reduz a um *costume*, pois se revela exatamente na hora em que esse costume (ou hábito), não é mais suficientemente útil, resultando na sua ruptura.

“Se no decorrer da relação didática, as relações com o saber mudam, modificam-se, o próprio contrato didático muda, modifica-se até o ponto de, em um determinado momento, tornar-se inútil. Quando o aluno inverte sua relação com o saber e desenvolve novos conhecimentos, o contrato didático torna-se precário (...)” (JONNAERT & BORGHT, 2002, p. 166.)

Quando o professor se afasta da condição de detentor do saber também provoca uma ruptura no contrato didático, o que ocorre como algo positivo para a aprendizagem, quando se considera a dinamicidade com que as interações são construídas em sala de aula.

As concepções dos alunos e as do professor interagem constantemente, embora muitas vezes esse processo seja silenciado e reprimido. Os alunos precisam ter oportunidade e serem estimulados a explicar suas concepções, a tomar consciência delas, confrontando-as com novas informações, avançando para um saber mais elaborado, dando lugar a um processo de ajuste cognitivo que se efetiva na aprendizagem.

3.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E DIDÁTICA PRÁTICA

Conforme mencionado em capítulos anteriores, a Didática em Matemática estuda as atividades didáticas, ou seja, as atividades que têm como objeto de pesquisa as relações desta com o ensino, mais especificamente naquilo que tem de peculiar: a Matemática.

Por sua vez, optou-se nesta pesquisa por estudar a Didática em Matemática como algo mais específico, além do ponto de vista teórico que, por vezes, fez perguntar se era esse realmente o caminho para tentar explicitar os tipos de relações didáticas que busca-se estabelecer. Para tal, espelhou-se nos trabalhos de (MARTINS, 1993) & (WACHOWICZ, 1989) no campo da Didática prática e da Didática na prática.

Nos trabalhos de (MARTINS, 1993) & (WACHOWICZ, 1989), destaca-se a existência de um personagem da ação didática que, para alguns, fica afastado do palco da sala de aula; muitas vezes lhe é oferecida a vaga de espectador, isto quando não é ignorado por completo: o *aluno*.

A didática por vezes é atribuída somente ao professor, por muitos rotulado como aquele que tem uma boa didática, razoável didática ou que não tem didática. No magistério, é ele quem planeja, elenca os conteúdos a serem ministrados, dirige e supervisiona a atuação dos seus alunos. Questiona-se: existe didática do aluno? Seria a didática uma tarefa atribuída exclusivamente ao professor?

Entende-se que desconsiderar a participação do aluno como personagem principal da ação didática, ou anular a diversidade de soluções que apresenta quando está frente a um problema, pode ocasionar uma série de distorções dos resultados esperados.

Para entender melhor o movimento presente nas relações estabelecidas na tríade abordada nesta pesquisa, analisam-se os chamados personagens da ação didática, quais sejam, o professor, o aluno e o conhecimento matemático. Para tanto, são necessários dados acerca do que efetivamente modifica e dá movimento à tríade quando o professor faz uso da resolução de problemas em aulas de Matemática.

Para isso, elaboramos fichas com exercícios e problemas (presentes no percurso metodológico) selecionados de acordo com o que se entende por exercício, mera repetição de algoritmos e instruções prontas e acabadas. Quanto aos problemas, com enunciados ora curtos ora longos, necessariamente instigaram o *aluno-resolvedor* a uma interpretação mais aprimorada do enunciado, fazendo com que lançasse mão de artifícios matemáticos.

Questionou-se quais exercícios e que tipos de problemas seriam ideais para o recorte que se buscou na resolução de problemas e na ação didática. A escolha partiu da vivência do pesquisador, atuante por mais de onze anos no terceiro ciclo do Ensino Fundamental, bem como da conversa com a orientadora.

Demonstra-se, a seguir, a intencionalidade manifestada na elaboração de cada atividade e quais seriam as expectativas criadas sobre elas. Em seguida, apresenta-se a tabulação geral dos dados obtidos com a aplicação das atividades em tabelas separadas por atividades e por séries (5ª. e 6ª. séries).

CAPÍTULO 4

OS PROBLEMAS: INTENCIONALIDADE NA ELABORAÇÃO E RESPOSTAS DOS ALUNOS

Atividades 5^{as}. séries:

Atividade 01.

A direção do colégio quer participar com mais entusiasmo da “Campanha da Fraternidade”, promovida pela CNBB (Comissão Nacional dos Bispos do Brasil), cujo tema desse ano é a “Fraternidade e pessoas com deficiência”. Para isso resolveu comprar uma máquina de escrita em braile, (tipo de escrita em relevo para cegos). O problema é que uma máquina nova é muito cara! Pagar à vista... Nem pensar, uma opção é comprar a prazo. A loja onde a direção da escola pretende comprar a máquina calculou o preço a prazo com juros, o que fez o preço subir para R\$ 2.466,00 em 12 prestações iguais. A escola recebe uma média de R\$ 960,00 como recurso do Estado, só que a Escola tem despesas fixas de aproximadamente R\$ 800,00. Comprar o aparelho em 12 vezes é viável ou não para o escola? Por quê? Se não for, o que a direção pode fazer para comprar a máquina?

Em um primeiro momento, pesquisador e orientadora se reuniram para discutir o formato das questões, aqui definidas como sendo exercícios, problemas de enunciado curto e problemas de enunciado longo.

Os primeiros ensaios mostraram uma das dificuldades que professores de uma forma geral apresentariam ao elaborar um problema: qual seria o contexto do problema? Em princípio, os problemas não estavam levando em consideração contexto algum, eram adaptados de outras situações já tradicionais nos livros didáticos de Matemática.

As perguntas finais do texto: (...) *é viável ou não para o colégio? Por quê? Se não for, o que a direção pode fazer para comprar a máquina?*, tinham a intenção de garantir que o problema havia sido todo lido e situado em um

contexto real, da escola e do aluno como personagem, ajudando a comprar a máquina.

Outro aspecto a ser considerado é que o resultado da divisão também dependia de uma interpretação, algorítmica, pois R\$ 2 466,00 divididos em 12 prestações dá R\$ 205,50. O zero do quociente causou bastante “confusão” nos alunos, além de que parte deles não continuou a divisão por não considerar que o resto da divisão deveria ser considerado na formação dos cinqüenta centavos restantes. Impressiona o fato de que, na maioria das divisões, o resto foi ignorado como se $12 \times 0,50$, que dá R\$ 6,00, pudesse ser esquecido na dívida. Mais uma amostra de que os alunos não entenderam o contexto do problema.

Já na segunda reunião, optou-se por melhorar o contexto, tornar o problema mais próximo da realidade dos alunos, ou seja, imaginou-se que problemas da escola seriam apreciados pelos alunos, seriam vistos como uma situação onde o aluno ajudaria a escola na compra da máquina; não foi o que aconteceu. O que era problema para *nós* não foi problema para *o aluno*, mesmo observando o contexto da escola. Fica a questão: e se, ao invés de escola, fosse utilizado um problema específico para os meninos e outro para as meninas, teríamos melhores resultados em se tratando de contextos?

Atividade 02.

A escola produziu uma apostila para seus alunos de 5ª ao 2º ano do Ensino Médio e produziu 3.400 cópias dela. Para serem transportadas, as apostilas devem ser acomodadas em caixas. A escola dispõe de dois tipos de caixas de tamanhos diferentes: caixas grandes, cada uma contendo 50 apostilas, e caixas pequenas, cada uma contendo 10 apostilas. Depois de serem usadas 45 caixas grandes e 53 caixas pequenas, elas acabaram. Quantas apostilas ficaram fora das caixas?

Da mesma forma que a atividade anterior, buscava-se situar os alunos no contexto da escola, mas principalmente verificar se eles validavam a solução encontrada, ou seja, se verificavam que as apostilas que ficaram fora das caixas também seriam colocadas em caixas incompletas para transportar.

Atividade 03.

Efetue da maneira que preferir:

a) $32.452 \div 23 =$

b) $423 \times 13 =$

c) $25 + 45 \times 12 =$

d) $235 + 423 =$

e) $1.235 - 459 =$

f) $45 - 20 \div 10 =$

Esse é um clássico exercício de aprendizado de algoritmo da divisão e de expressões numéricas. Note que o enunciado, apesar de curto, permite diferentes interpretações quando se analisa o contexto matemático das expressões numéricas. Tradicionalmente, utiliza-se a clássica receita: “Seguindo-se a ordem: primeiro as divisões e multiplicações; depois, adição e subtração, na ordem em que aparecem. Vai resolvendo o que estiver dentro e repetindo/copiando de novo o que não estiver sendo efetuado. Um de cada vez...”.

O tradicional entendimento que se tem do enunciado *efetue do modo que preferir* é de que, a resolução dos algoritmos específicos necessários às soluções das expressões, pode ser efetuada mentalmente ou com contas *armadas* pelo processo longo da divisão ou qualquer outro que satisfaça a operação em questão.

Uma outra interpretação poderia ser a de que: “Já que posso *efetuar do modo que preferir*, então posso esquecer que existe uma ordem a seguir e criar meus próprios passos para a resolução”. O interessante é que este enunciado não foi em momento algum questionado pelo professor, nem pelos alunos quanto à forma como seriam conduzidas as resoluções. Percebe-se o fato de que, para o professor, é bastante óbvio que existe uma ordem e que o aluno deveria ter conhecimento desta. Mas, para o aluno, esta “receita” nunca foi aprendida, somente decorada, o que leva a crer que, independente do enunciado, os alunos não tiveram a preocupação de que contas fariam primeiro; resolveram as que apareceram, na ordem que foram propostas.

Atividade 04.

Quanto é a metade de dois, mais dois?

Essa é uma clássica *pegadinha* de concursos públicos e de exames de equivalência. Tivemos a intenção de verificar a habilidade dos alunos em resolver problemas com enunciados curtos que dependiam integralmente da interpretação dos operadores e da linguagem matemática em questão.

Como primeira discussão, decidimos manter a vírgula no enunciado da atividade, pois garantiria a pausa necessária à estruturação da expressão numérica pretendida ao problema, conforme a que segue:

Quanto é a metade de dois, linguagem textual, que em linguagem matemática, seria $\frac{2}{2}$; *mais dois* ficaria $\frac{2}{2} + 2$, o que resulta três.

Caso não houvesse a vírgula, ou seja, sem a pausa, a situação torna-se a seguinte:

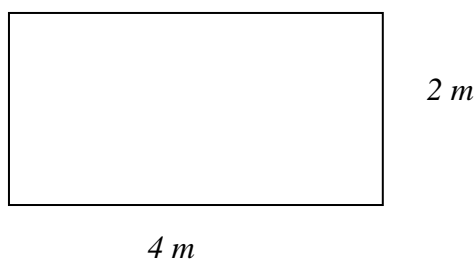
Quanto é a metade de dois mais dois?, linguagem textual, que em linguagem matemática, seria $\frac{2+2}{2}$, o que resulta dois. Se o resolvidor tiver “decorado” a regra, qualquer que seja o enunciado, responderia sempre três. Afinal teria decorado que em uma expressão numérica resolve-se primeiro a divisão e depois a adição.

Atividades 6^{as}. séries:

Atividade 01.

De acordo com o texto, responda cada pergunta de forma clara e objetiva.

Depois de vários acidentes com comida, bebida, cola e água no chão da sala da 6ª série, o diretor da escola resolveu trocar o piso de taco de madeira por piso cerâmico (ladrilhos). Para isso precisaremos ajudá-lo com o cálculo da quantidade de ladrilhos a serem comprados. A sala tem as seguintes dimensões:



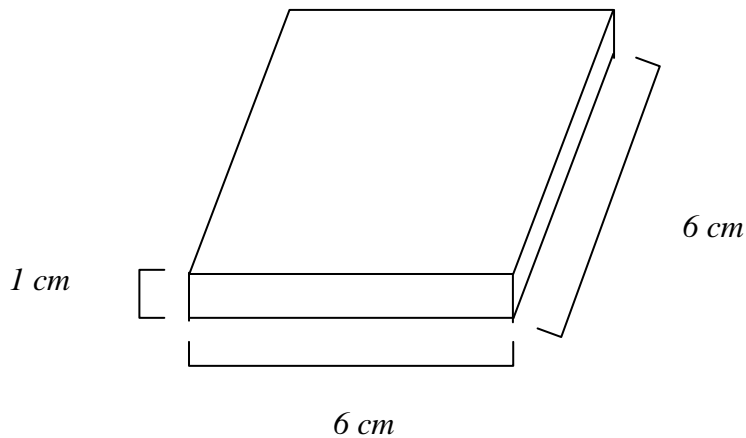
- Qual é a área total a ser coberta?
- Quantos ladrilhos serão usados para cobrir todo o chão da sala?
- Existe uma promoção de ladrilhos em uma loja de materiais de construção, o em que m^2 do ladrilho custa R\$ 17,90. A escola dispõe de R\$ 150,00 para trocar o piso da sala. Será que é suficiente? Justifique sua resposta.

Da mesma forma que nas atividades da 5ª. série, procura-se situar os alunos em um contexto da escola. A principal intenção era verificar a habilidade que os alunos teriam em lidar com unidades de medida despadronizadas, como por exemplo, a área do ladrilho estar em cm^2 e a área da sala estar em m^2 . Em tempo, as unidades de área pareciam não existir, haja vista que nenhum dos alunos respondeu ou se preocupou em terminar o problema com a unidade padrão de área.

O problema foi dividido em três perguntas que estavam inter-relacionadas e, em especial, a última pergunta *Será que é suficiente? Justifique sua resposta* visava garantir que o problema havia sido todo lido e situado em um contexto real, da escola e do aluno como personagem, ajudando a comprar os ladrilhos e verificar se o que havia em caixa era suficiente.

Atividade 02.

O bloco retangular abaixo tem somente uma camada:



- a) Qual é o volume da figura acima?*
- b) Quantas dessas camadas devo colocar para obter um cubo?*
- c) Qual é o volume desse cubo em cm^3 ?*
- d) Observe que a maioria das embalagens tem a forma de um bloco retangular. Por quê?*

Esse é um típico problema que não possui palavras-chave para a sua solução. As operações matemáticas envolvidas só aparecem quando há um amplo entendimento acerca da situação exemplificada. Nossa intenção era verificar a habilidade dos alunos em situações não tradicionais envolvendo volume de figuras espaciais e operações algóritmicas como a potenciação, além de verificar o entendimento de termos específicos da geometria espacial, como cubo e bloco retangular.

Em tempo, as unidades de volume, da mesma forma que nas atividades envolvendo área, pareciam não existir, posto que nenhum dos alunos respondeu ou se preocupou em terminar o problema com a unidade padrão de volume ou de capacidade.

Em especial, o que esperava-se causar certo repúdio, ou no mínimo desconforto por parte dos alunos e professores, foi a última pergunta da atividade: *Observe que a maioria das embalagens tem a forma de um bloco*

retangular. Por quê?. A maioria não respondeu a questão. Mesmo os alunos entrevistados, depois de discutido o que era um bloco retangular, depois de ter sido definido como um objeto com as faces retangulares, como uma caixa de sapatos, uma caixa de leite etc. Não conseguiram elaborar uma frase que relacionasse o formato da caixa, a capacidade e a estocagem em caixas de formato equivalente para transporte.

Outro fato observado foi o de que os alunos entrevistados tinham amplo entendimento da aplicação direta da fórmula $V = \ell \times a \times c$, que aponta para o volume de uma caixa de faces retangulares. Mas, ao serem questionados sobre o que de fato é volume, nada foi obtido, nenhum dos entrevistados soube explicar com suas palavras o que entendia por volume.

Atividade 03.

Encontre o volume de cada objeto, dadas as respectivas medidas dos lados, sendo $L =$ largura, $a =$ altura e $c =$ comprimento.

- a) $L = 10$ cm, $a = 5$ cm e $c = 5$ cm.*
- b) $L = 20$ cm, $a = 5$ cm e $c = 1$ cm.*
- c) $L = 10$ cm, $a = 10$ cm e $c = 10$ cm.*
- d) $L = 10$ cm, $a = 5$ cm e $c = 10$ cm.*

Esse é um típico exercício de aplicação de algoritmo, ou melhor, da fórmula do volume. Nesse exercício, obteve-se um número bastante generoso de acertos. Afinal, está legendado com as respectivas medidas dos lados do objeto. Todavia, é preocupante o número de alunos que respondeu corretamente a questão acompanhando o resultado do algoritmo da respectiva unidade padrão de volume, no caso, cm^3 . Conforme a tabela que segue, zero alunos tiveram respostas acompanhadas da unidade de medida correta para volume.

As análises dos dados obtidos na aplicação das atividades foram transformadas em tabelas conforme as que seguem.

4.1 ESBOÇO DA CLASSIFICAÇÃO ANALÍTICA DOS DADOS EMPÍRICOS

As tabelas levam em consideração um universo de 28 alunos de 5ª série e 41 de 6ª série.

Os dados coletados em cada problema estão organizados na tabelas seguintes, as categorias de análise foram discutidas com os professores pesquisados; os dados foram tabulados e interpretados pelo pesquisador. Algumas observações relevantes são feitas em cada tabela, bem como os respectivos enunciados e classificações analíticas.

Os dados nos mostraram que a aplicação direta de algoritmos para a solução dos problemas é a mais utilizada pelos alunos pesquisados, seguida do método da tentativa-erro e estimativa. Apenas quatro alunos fizeram uso do que pode-se chamar de “idéia intuitiva de função”, que difere substancialmente da aplicação de algoritmos.

O que chamou a atenção é que a aplicação de algoritmos para a resolução dos problemas não garantiu a solução correta do mesmo. No entanto, aqueles que fizeram uso da “idéia intuitiva de funções” garantiram a solução dos problemas.

Atividades e tabelas referentes à análise das resoluções feitas pelos alunos da 5ª. série do C.E. XXX:

Atividade 01.

A direção da escola quer participar com mais entusiasmo da “Campanha da Fraternidade”, promovida pela CNBB (Comissão Nacional dos Bispos do Brasil), cujo tema desse ano é a “Fraternidade e pessoas com deficiência”. Para isso resolveu comprar uma máquina de escrita em braile, (tipo de escrita em relevo para cegos). O problema é que nova a máquina é muito cara! Pagar à vista... Nem pensar, uma opção é comprar a prazo. A loja onde a direção do colégio pretende comprar a máquina calculou o preço a prazo com juros, o que fez o preço subir para R\$ 2.466,00 em 12 prestações iguais. A escola recebe uma média de R\$ 960,00 como recurso do Estado, só que a escola tem despesas

fixas de aproximadamente R\$ 800,00. Comprar o aparelho em 12 vezes é viável ou não para a escola? Por quê? Se não for, o que a direção pode fazer para comprar a máquina?

Tabela 5: Atividade 01 - 5ª. série 2006 e 2007

Classificação analítica	Aplicação direta de algoritmos	*Por tentativa-erro	**Por estimativa	Usando idéia intuitiva de função
Nº. de alunos	15	6	0	0

Fonte: pesquisa do autor 2007.

*Por tentativa-erro, leia-se *chute*.

**As classificações “Por estimativa” e “Usando idéia intuitiva de função” foram mantidas por terem sido sugeridas pela professora A durante a entrevista.

Tabela 6: Avaliação da atividade 01 - 5ª. série 2006 e 2007

Avaliação quantitativa/parcial	Errou	Acerto parcial	Respondeu todas as questões corretamente	Não resolveu
Nº. de alunos	20*	2**	0	6

Fonte: pesquisa do autor 2007.

*Erraram o resultado da divisão.

**Acertou o resultado da divisão.

Atividade 02.

A escola produziu uma apostila para seus alunos de 5ª ao 2º ano do Ensino Médio, produziu 3.400 cópias da apostila. Para serem transportadas, essas apostilas devem ser acomodadas em caixas. A escola dispõe de dois tipos de caixas de tamanhos diferentes: caixas grandes, cada uma contendo 50 apostilas, e caixas pequenas, cada uma

contendo 10 apostilas. Depois de serem usadas 45 caixas grandes e 53 caixas pequenas, elas acabaram. Quantas apostilas ficaram fora das caixas?

Tabela 7: Atividade 02 - 5ª. série 2006 e 2007

Classificação analítica	Aplicação direta de algoritmos	Por tentativa - erro	Por estimativa	Usando idéia intuitiva de função
Nº. de alunos	17	8	0	0

Fonte: pesquisa do autor 2007.

Tabela 8: Avaliação da atividade 02 - 5ª. série 2006 e 2007

Avaliação quantitativa/parcial	Errou	Respondeu todas as questões corretamente	Não resolveu
Nº. de alunos	23	2	3

Fonte: pesquisa do autor 2007.

Atividade 03.

Efetue da maneira que preferir:

a) $32.452 \div 23 =$

b) $423 \times 13 =$

c) $25 + 45 \times 12 =$

d) $235 + 423 =$

e) $1.235 - 459 =$

f) $45 - 20 \div 10 =$

Tabela 9: Atividade 03 - 5ª. série 2006 e 2007

Classificação analítica	Aplicação direta de algoritmos	Por tentativa - erro	Por estimativa	Usando idéia intuitiva de função
Nº. de alunos	23	5	0	0

Fonte: pesquisa do autor 2007.

Tabela 10: Avaliação da atividade 03 - 5ª. série 2006 e 2007

Avaliação	Errou	Acerto parcial	Respondeu todas as questões corretamente	Não resolveu
Nº. de alunos	21*	6**	0	1

Fonte: pesquisa do autor 2007.

*Erraram o resultado de algum dos algoritmos / mais que 50% de erro.

**Acertaram o resultado de algum dos algoritmos / maior ou igual a 50% de acerto.

Atividade 04.

Quanto é a metade de dois, mais dois?

Tabela 11: Atividade 04 - 5ª. série 2006 e 2007

Classificação analítica	Aplicação direta de algoritmos	Por tentativa - erro	Por estimativa	Usando idéia intuitiva de função
Nº. de alunos	6	0	7	*1

Fonte: pesquisa do autor 2007.

*Uma das alunas apresentou uma forma bem diferente das convencionais para resolver a questão. Ela riscou o *dois*, mostrando ser a metade e riscou novamente outro *dois* para representar a soma, que dá três. Durante a conversa com a professora, entendeu-se que poderia se tratar de uma manifestação da idéia intuitiva de função composta.

Tabela 12: Avaliação da atividade 04 - 5ª. série 2006 e 2007

Avaliação	Errou	Respondeu a questão corretamente	Não resolveu
Nº. de alunos	2	24	2

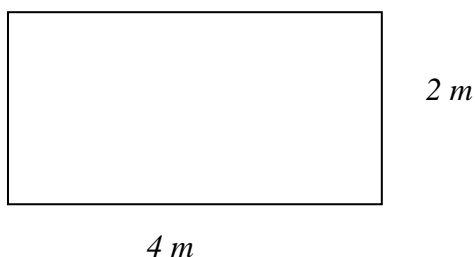
Fonte: pesquisa do autor 2007.

Atividades e tabelas referentes à análise das resoluções feitas pelos alunos da 6ª. série do C.Estadual XXX:

Atividade 01.

De acordo com o texto, responda cada pergunta de forma clara e objetiva.

Depois de vários acidentes com comida, bebida, cola e água no chão da sala da 6ªsérie, o diretor da escola resolveu trocar o piso de taco de madeira por piso cerâmico (ladrilhos). Para isso precisaremos ajudá-lo com o cálculo da quantidade de ladrilhos a serem comprados. A sala tem as seguintes dimensões:



- Qual é a área total a ser coberta?*
- Quantos ladrilhos serão usados para cobrir todo o chão da sala?*
- Existe uma promoção de ladrilhos em uma loja de materiais de construção, o m^2 do ladrilho custa R\$ 17,90. A escola dispõe de R\$ 150,00 para trocar o piso da sala. Será que é suficiente? Justifique sua resposta.*

Tabela 13: Atividade 01 - 6ª. série 2006 e 2007

Classificação analítica	Aplicação direta de algoritmos	Por tentativa - erro	Por estimativa	Usando idéia intuitiva de função e estimativa
Nº. de alunos	25	10	0	1

Fonte: pesquisa do autor 2007.

Tabela 14: Avaliação da atividade 01 - 6ª. série 2006 e 2007

Avaliação	Errou	Acerto parcial	Respondeu todas as questões corretamente	Não resolveu
Nº. de alunos	26*	15**	0	0

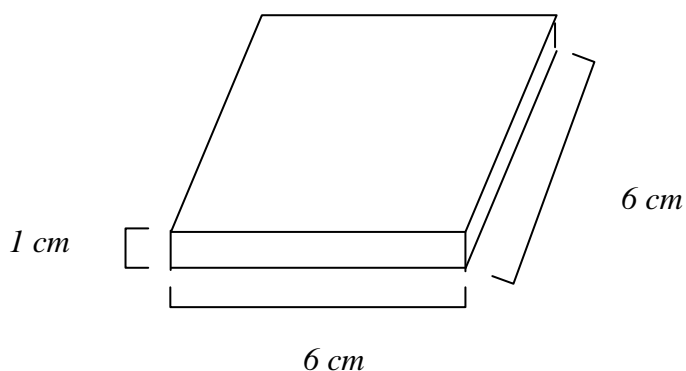
Fonte: pesquisa do autor 2007.

*Erraram o resultado de alguma das alternativas / mais que 50% de erro.

**Acertaram o resultado de alguma das alternativas / maior ou igual a 50% de acerto.

Atividade 02.

O bloco retangular abaixo tem somente uma camada:



- Qual é o volume da figura acima?*
- Quantas dessas camadas devo colocar para obter um cubo?*
- Qual é o volume desse cubo em cm^3 ?*

d) Observe que a maioria das embalagens tem a forma de um bloco retangular? Por quê?

Tabela 15: Atividade 02 - 6ª. série 2006 e 2007

Classificação analítica, alternativa “(a)”.	Aplicação direta de algoritmos (fórmula para calcular volume).	Por tentativa - erro	Por estimativa	Usando idéia intuitiva de função
Nº. de alunos	21	14	4	0

Fonte: pesquisa do autor 2007.

Tabela 16: Avaliação da atividade 02 - 6ª. série 2006 e 2007

Avaliação, alternativa “(a)”.	Errou a unidade de medida volumétrica da figura	Errou	Acertou somente o resultado do algoritmo da letra “(a)”.	Respondeu todas as questões corretamente	Não resolveu
Nº. de alunos	39	4	35	0	2

Fonte: pesquisa do autor 2007.

Classificação analítica, alternativa “(b)”.	Aplicação direta de algum tipo de algoritmo	Por tentativa - erro	Por estimativa	Usando idéia intuitiva de função
Nº. de alunos	8	10	23	0

Fonte: pesquisa do autor 2007.

Avaliação, alternativa “(b)”.	Errou	Acertou	Não resolveu
Nº. de alunos	27	13	1

Classificação analítica, alternativa “(c)”.	Aplicação direta de algoritmos (fórmula para calcular volume).	Por tentativa - erro	Por estimativa	Usando idéia intuitiva de função
Nº. de alunos	6	29	1	0

Fonte: pesquisa do autor 2007.

Avaliação, alternativa “(c)”.	Errou a unidade de medida volumétrica da figura	Acertou somente o resultado do algoritmo da letra “(c)”.	Respondeu a alternativa corretamente	Não resolveu
Nº. de alunos	34	2	2	5

Fonte: pesquisa do autor 2007.

Avaliação, alternativa “(d)”.	Errou	Acertou	Não resolveu
Nº. de alunos	16	12	13

Fonte: pesquisa do autor 2007.

Atividade 03.

Encontre o volume de cada objeto, dadas as respectivas medidas dos lados, sendo L = largura, a = altura e c = comprimento.

e) $L = 10\text{ cm}$, $a = 5\text{ cm}$ e $c = 5\text{ cm}$.

f) $L = 20\text{ cm}$, $a = 5\text{ cm}$ e $c = 1\text{ cm}$.

g) $L = 10\text{ cm}$, $a = 10\text{ cm}$ e $c = 10\text{ cm}$.

h) $L = 10\text{ cm}$, $a = 5\text{ cm}$ e $c = 10\text{ cm}$.

Tabela 17: Atividade 03 - 6ª. série 2006 e 2007

Classificação analítica	Aplicação direta de algoritmos	Por tentativa - erro	Por estimativa	*Usando idéia intuitiva de função e volume de prisma
Nº. de alunos	37	3	0	1

Fonte: pesquisa do autor 2007.

*Neste caso, o aluno calculou mentalmente o valor da área da base e depois multiplicou pela altura do prisma em questão.

Tabela 18: Avaliação da atividade 03 - 6ª. série 2006 e 2007

Avaliação	Errou	Acertou o algoritmo, mas não representou a unidade de medida correta.	Respondeu corretamente acompanhado da medida correta de volume.	Não resolveu
Nº. de alunos	1	37	0	3

Fonte: pesquisa do autor 2007.

Comentários gerais:

Os resultados da aplicação das fichas com exercícios e problemas foram divididos em dois momentos cruciais da avaliação e da análise empírica da resolução dos problemas. Em um primeiro momento foram aplicadas as fichas de exercícios/problemas, cujas respostas foram quantificadas de acordo com alguns aspectos estruturais e metodológicos, definidos pelo professor (a) e pelo pesquisador. Em um segundo momento, os alunos selecionados pelo professor (a) foram entrevistados, o que, decisivamente, deu origem a uma leitura diferenciada dos dados.

Ao observar as resoluções dos exercícios e problemas, quantificou-se as soluções encontradas, obtendo-se um número bem mais expressivo de erros do que de acertos; porém, após as entrevistas, observou-se algumas situações que tornam ambíguas determinadas crenças sobre a resolução de problemas. Por exemplo, de que todo o problema matemático tem solução e que o professor pode deter o controle total sobre a solução do problema, solução esta que pode ser determinada no gabarito do problema, mas o modo com que o aluno interpreta e responde o problema está muito distante daquilo que o professor esperava que seu aluno respondesse.

Outra crença é a de que a repetição de algoritmos em exercícios garante, ao menos em partes, a aprendizagem de determinado conceito matemático. Verificou-se que o aluno demonstrou habilidades em algoritmos, porém ao ser questionado quanto ao *porquê* de estar fazendo assim e como chegou à determinada solução, não soube responder ao certo.

A postura didática que o professor assume quando priva seus alunos de demonstrações e explicações para os porquês de alguns formalismos em matemática pode não ser correta. Não situar os alunos didaticamente, utilizando diferentes contextos para diferentes situações, quando faz uso da resolução de problemas, pode desencadear certa aversão em resolver problemas. Não só aqueles de matemática, mas também da vida.

Também não faz sentido problemas contextualizados com excessiva preocupação em valorizar, ou até mesmo forçar, o contexto para a aplicação do problema. A diversidade de situações, que é própria da matemática, não deve ser ignorada. O ideal é ter *jogo de cintura* para passar por diferentes contextos e, ao mesmo tempo, tratar dos formalismos e definições matemáticas.

Um grande momento da interpretação dos dados foi quando se percebeu que a simples *correção* dos exercícios e problemas não era suficiente para entender o modo como os alunos resolvem problemas.

Mesmo nas respostas certas, os alunos considerados *bons resolvedores*, pelos acertos, quando questionados sobre o modo como resolveram, ou mesmo, por que não responderam às perguntas dos problemas que necessitavam da interpretação do resultado do algoritmo, deixaram claro que não havia garantia de que o conceito matemático havia sido entendido por completo, nem o conceito tampouco o contexto do problema enquanto situação cotidiana.

CAPÍTULO 5

INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

5.1 APORTES TEÓRICOS DA DIDÁTICA, DIALÉTICA E SUAS IMPLICAÇÕES

A interpretação dos protocolos foi feita, estudando e categorizando as respostas dadas pelos alunos. Em seguida, foram identificadas as concepções manifestadas pelos professores sobre a resolução de problemas e o modo como o aluno pensa e faz (o registro escrito do aluno) e explica como faz (o registro oral do aluno). Com este procedimento buscou-se de que modo o aluno resolve os problemas na prática e como explica o modo como resolveu o problema quando questionado oralmente nas entrevistas.

Adotou-se para esta interpretação a seguinte metodologia: destacou-se trechos das entrevistas feitas pelos alunos que chamaram a atenção por estarem impregnadas do que é chamado de “contradição na prática³²” e que, por sua vez, esclareceram o modo didático com que os alunos resolvem problemas matemáticos. Houve reuniões em que, orientador e orientadora discutiram as relações entre a didática do aluno e a do professor. Fundamentou-se teoricamente a análise na Didática prática com foco na heurística na Resolução de Problemas.

Como etapa pré-conclusiva, fez-se o cruzamento dos dados empíricos e teóricos, embasado na didática prática e no potencial heurístico dos alunos. Em seguida algumas considerações sobre esses dados aparecem no corpo da interpretação.

Algumas questões nos intrigam quando se faz uso de problemas em aulas de Matemática no Ensino Fundamental. A principal é: por que alunos de 5^{a.} e 6^{a.} série resolvem problemas de matemática sem grande comprometimento? Observou-se que alguns alunos resolveram *de qualquer maneira*; mas ao serem entrevistados sobre o modo com chegaram a determinado solução, assumiram um papel mais investigativo e deixaram transparecer o real entendimento que tiveram acerca dos problemas. Este fato

³² A expressão “contradição na prática” é utilizada pela pesquisadora Pura Lúcia Oliver Martins e está presente na sua obra “A didática e as contradições da prática” do ano de 1998. Busca fazer relações entre a *Didática prática*, *Didática na prática* e a *Didática teórica*.

fez refletir sobre o processo de avaliação em Matemática, principalmente quando se trata de resolução de problemas.

Observou-se, nas entrevistas e nos demais dados empíricos à luz do referencial teórico, um enriquecimento do que se acreditava encontrar sob a ótica qualitativa da pesquisa. Percebeu-se que, sem as entrevistas, não haveria clareza do **momento didático-heurístico** do aluno e, sem o cruzamento com o referencial adotado, cair-se-ia no senso comum, por estar pautado na prática de sala de aula, no discurso de professor, não apenas no de pesquisador.

Neste momento, em que o aluno foi convidado a dizer o que pensa sem a interferência dos colegas de sala e controle direto da dinâmica do professor, é que percebeu-se propriamente o que chama-se aqui de **didática do aluno**, ou seja, uma didática própria que aparece quando o aluno se manifesta no sentido de reestruturar e/ou responder o questionamento do professor. Ou seja, ela se manifestou quando o aluno esteve frente a frente com o professor, e foi convidado por ele a justificar suas escolhas e procedimentos na resolução de um problema.

Todavia, entende-se que a didática do aluno poderia se manifestar coletivamente, como acontece em sala quando este se manifesta em relação a um problema determinado pelo professor, mas, nesse caso, pelo fato de o aluno poder ser intimidado pela turma, seus questionamentos muitas vezes acabam por ficar esquecidos. As dúvidas e lacunas em conhecimentos matemáticos cerceiam profundamente a aproximação do aluno com a Matemática.

Quando o professor avalia, anota, corrige uma atividade de resolução de problemas, pela prática, tende a optar por situações-problema que forneçam uma solução numérica de simples representação, em que um só número seria suficiente para validar o problema. Dessa forma, pode tornar mais rápida a correção das questões em uma turma com muitos alunos.

O fato é que tal prática parece bastante comum e confiável, mas ao perguntar ao *resolvedor* do problema o porquê de determinada solução, percebemos que avaliar em resolução de problemas está muito além do C de certo, X ou E para as questões erradas. Trata-se de questionar a didática (estratégia) estabelecida pelo aluno para a resolução do problema proposto

pelo professor. O diálogo entre *professor-elaborador* do problema e o *aluno-resolvedor* do problema mostrou que existem várias contradições na prática de se ensinar por meio de resolução de problemas.

Uma das contradições aparece no tipo de questões que professores gostam de elaborar e as que os alunos gostam de fazer. Ficou claro que problemas com enunciados longos são considerados pelos alunos como sendo muito *difíceis* de resolver. A justificativa para este fato é que *problema com muita informação* pode atrapalhar a busca por dados que resolvam-no. Houve ainda situações em que alunos afirmaram que *problema com muita informação* seria adequado para as séries iniciais, ou seja, estes colocariam em dúvida a capacidade de interpretação *versus* busca pela solução do problema.

Já os professores entrevistados afirmaram que procuram fazer um misto de atividades em suas aulas e avaliações, propondo alguns problemas com enunciados longos e outros com enunciados curtos. Para eles o importante é que as atividades façam o aluno pensar e contribuam para o desenvolvimento da autonomia na busca pela solução. Ao mesmo tempo disseram que problemas com enunciados longos não são muito utilizados por conta da dificuldade em resolvê-los e do repúdio que os alunos têm pela interpretação de textos.

Outra contradição aparece no posicionamento frente aos problemas com possibilidades heurísticas. Para o professor, bom problema é aquele que o aluno resolve sozinho. É aquele que desenvolve a autonomia e faz o aluno parar para pensar na solução. Para o aluno bom problema é aquele que ao mesmo tempo *faz pensar*, é objetivo e *não é complexo*.

Na berlinda está o conhecimento que se deseja estar aprendido. O que ocorre, de fato, é que professor e aluno não se entendem quanto à forma do problema. Falta diálogo e interatividade na questão: *o que é problema para mim é problema para você?*

Tendo em vista que esta pesquisa quer compreender o processo ensino-aprendizagem em Matemática por meio de Resolução de Problemas focado na heurística da resolução de problemas *versus* conhecimento matemático desejado, analisou-se detalhadamente as entrevistas com o professor, aluno e o modo com que o conhecimento matemático perpassa as relações didáticas e

a-didáticas (BROUSSEAU, 1992). A seguir apontam-se algumas das lacunas, contradições e contribuições desta pesquisa.

A heurística na resolução de problemas, no entendimento deste autor, baseada nas interpretações feitas a partir das entrevistas com alunos de 5ª. e 6ª. série do Ensino Fundamental, pôde ser observada quando foi permitido ao aluno relatar oralmente ao professor suas estratégias e procedimentos na descoberta das soluções dos problemas. Além de ser relatado oralmente, percebeu-se que o momento heurístico só seria autêntico se fosse discutido entre aluno e professor. Caso contrário, a simples observação da resolução do aluno pode ser insuficiente para qualificar como está *C* (certo) ou *E* (errado).

O que garante que a resposta *C* (certa) foi amplamente entendida no seu contexto de aplicação? Perguntas que fogem do contexto estritamente numérico do problema como: “(...) *o que a direção pode fazer para comprar a máquina?*” mostra que o contexto lingüístico do problema foi ignorado quando:

1. Os alunos resolveram a maioria dos problemas com a aplicação direta de um algoritmo. Entendeu-se que tal atitude metodológica está definida como uma crença de que um problema de matemática só pudesse ser resolvido com algum tipo de cálculo ou algoritmo estruturado. Ou seja, uma ficha com exercícios/problemas de matemática não poderia ter questões sem cálculos, o que nos leva à hipótese de que os alunos imaginam ser desnecessário responder a perguntas de interpretação de texto, uma vez que a ficha era de matemática.

2. Ao questionar os alunos sobre suas resoluções e escolha do procedimento algorítmico em determinados problemas, foram enfáticos em dizer que o diferencial estava no fato de ser possível, mesmo em enunciados longos, buscar por palavras-chave que façam alguma relação com a pergunta do problema. Dessa forma, a solução do problema seria algum tipo de *conta* com os números expostos no problema.

3. Palavras como: *prestação, repartiu, juntou, perdeu*, entre outras, são procuradas pelos alunos para tornar possível elaborar um plano de ação, que necessariamente envolve algum tipo de operador matemático. Há uma crença de que, se determinado dado numérico do problema não foi utilizado, então algo não vai bem na resolução, se não, *por que este dado estaria lá?* O fato apontado refuta a suposição de que um bom problema é aquele que tem

enunciado longo. Afinal, se o aluno *garimpar* as palavras-chave que necessita, solucionará o problema.

Situações onde uma pergunta simples, como: “por que você resolveu assim?”, deram margem para repetir a aplicação das fichas de problemas/exercícios com alunos de outras turmas. Percebe-se que os professores entrevistados tinham nítido *pré-conceito* com relação ao que estava certo e ao que estava errado nas resoluções dos problemas. Para essa situação, pediu-se aos professores que levassem em conta a questão do erro como fator de aprendizagem.

Surpreendentemente, ao questionar os alunos escolhidos pelos professores quanto à forma como chegaram a determinada situação, aparentemente errada, percebeu-se uma didática até então escondida e abafada no monólogo professor-aluno. Chegou-se então a um personagem atuante da ação didática: *o aluno com didática própria*.

A resolução dos problemas nesta pesquisa pode ser conduzida por diferentes caminhos:

1. Problemas com enunciados curtos foram os mais apreciados pelos alunos, mas, em contrapartida, professores entendem que uma boa avaliação deveria ter problemas com enunciados curtos e longos. A justificativa estaria no fato que avaliações institucionais³³ cobram dos alunos questões de interpretação de texto, o que, segundo os professores entrevistados, necessitam de boa interpretação de texto.

2. Problemas com aplicação direta de algum algoritmo são *preferência nacional*. O que de fato é uma contradição é o professor primar por problemas que ensinem o aluno o pensar autônomo, mas, na prática, dar aulas com exercícios de aplicação direta de algoritmos, que tem seus méritos por também conduzir a dedução e a lógica em situações específicas.

3. Professor e aluno entendem cada qual a sua forma de resolver um problema em Matemática; são diferentes opiniões com diferentes pontos de vista. Por que não afirmar que professor e aluno necessitam situar-se nos

³³ ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) – Ministério da Educação MEC/ Brasil, SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), promovido nacionalmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) e PISA (Programa Internacional de Avaliação de Alunos), promovido pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE).

contextos apresentados? Percebemos que a inquietação em resolver determinados problemas está na falta de valorização/entendimento da situação envolvida. Daí a mediação do professor torna-se fundamental para a resolução do problema.

Os protocolos seguintes não estão em ordem cronológica de aplicação. A idéia inicial era fazer uma aplicação dos problemas e exercícios. Porém, devido ao fato dos dados iniciais apontarem circunstâncias que geraram o desejo de ver se as mesmas se mantinham em outro contexto, houve uma nova aplicação de problemas e exercícios em turmas do mesmo colégio, no ano seguinte. Partindo dos resultados das primeiras interpretações, optou-se por manter o formato, o número de atividades e as perguntas feitas nas entrevistas anteriores.

Em cada passagem, interpretou-se as *falas* extraídas das entrevistas, garantindo clareza aos fatos observados. Também foram analisadas as situações didáticas³⁴ manifestadas durante a resolução do problema e, posteriormente, a justificativa dada a determinada resolução no momento da entrevista.

Pesquisas³⁵ têm evidenciado haver dicotomia entre teoria e prática, provocando reflexões acerca destas duas concepções. Ou seja, entre teoria estabelecida e prática desenvolvida, levando-nos a refletir sobre o fato exposto.

Para a exposição e interpretação dos dados desta pesquisa, fez-se uso de duas concepções que primam pelo debate dialético entre a produção de conhecimentos teóricos e conhecimentos práticos. Neste sentido, aborda-se a *Didática teórica* (rotulada como Didática francesa) embasada em (Brousseau, 1986) e *Didática técnica* (ou prática) apoiada em (Martins, 1998): a primeira seria a disciplina acadêmica que se interessa por descrever e explicar os estados e evoluções dos sistemas didáticos e cognitivos, enquanto que a segunda se interessa pela problemática da tomada de decisões na aula, pela ação reflexiva em um lugar e tempo específicos.

³⁴ Segundo Brousseau (1986), uma situação didática é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre professor, alunos e o conhecimento, com a finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico.

³⁵ Os trabalhos de Pura Lúcia Oliver Martins (1998), Lílian Wachowicz (1989) e Maria Rita Neto Sales Oliveira (1993), foram dedicados a analisar teoricamente a dicotomia existente entre teoria e prática escolar.

Outra expressão utilizada para fundamentar as interpretações dos protocolos é o de **movimento didático**, em contraponto ao contrato didático, definido por Brousseau (1986), como:

“(...) uma relação que determina, explicitamente por uma pequena parte, mas, sobretudo implicitamente, o que cada parceiro, professor e aluno tem a responsabilidade de gerir e da qual ele será responsável, de uma maneira ou de outra, em frente ao outro. Este sistema de obrigações recíprocas se assemelha a um contrato. O que nos interessa é o contrato didático, quer dizer, a parte do contrato que é específica ao conteúdo.” (BROUSSEAU, 1986, p. 33.)

Ou seja, a função do contrato didático é possibilitar a dinamização das interações que se estabelecem pelo professor e pelo aluno com o conhecimento matemático em questão, o que ocorre em movimento, em ação, algo que já é dinâmico por natureza. O movimento é garantido pelas situações em que o aluno é desafiado a descobrir, pelos seus próprios meios, novos conhecimentos.

Na interpretação do que seja contrato didático, da concepção de Brousseau, cabe uma reflexão sobre a palavra *contrato*. Para a presente pesquisa, aceita-se o compromisso de lidar teoricamente com o contrato didático, mas, acima de tudo, expõe-se a interpretação de *contrato* no âmbito das relações didáticas na prática.

Contrato sugere algo que pode ser rompido, esquecido, substituído, destituído. Muitas vezes, o rompimento se dá sem que as partes estejam em acordo. Em virtude da situação anteriormente citada, preferiu-se substituir a palavra *contrato* por outra que não a de *convênio*, *acordo*. Reflete-se sobre qual seria a palavra que melhor se ajustaria à situação pesquisada nesta pesquisa. Uma pesquisa a um site de busca mostra que contrato é: “... um negócio jurídico estabelecido entre duas ou mais partes (pessoas físicas ou pessoas jurídicas), obrigando-as a cumprir suas cláusulas³⁶”. Ou ainda: “Ato pelo qual uma parte se obriga para com outra a dar, fazer ou não fazer alguma coisa³⁷”.

³⁶ Retirado de: pt.wikipedia.org/wiki/Contrato, acessado em 06/06/07.

³⁷ Retirado de: www.gruposantander.com/pagina/indice/0,,667_2_2,00.html, acessado em 06/06/07.

O fato é: na dinâmica da sala de aula, não há um contrato padrão a ser preenchido e assinado pelas partes (aluno, professor e conhecimento matemático). O que existe é um jogo de relações didáticas, ou **movimento didático**. Esse movimento é responsável por dinamizar a sala de aula ou os espaços destinados a essa prática pedagógica. Movimento este que determina o momento da aprendizagem do aluno e que, por vezes, modifica também a ação didática do professor.

Embora *dificuldades de aprendizagem* sejam usuais e recorrentemente relatadas como fruto de práticas didáticas frustradas, no decorrer do diálogo entre os dados empíricos com a teoria adotada, percebe-se sinalizadores de que há elementos facilitadores para a promoção de aprendizagem efetiva em Matemática.

A tríade professor-aluno-conhecimento matemático, objeto desta pesquisa, não é estática. Os seus vértices estão em movimento contínuo, ora sendo representados na figura do aluno, ora na do professor permeando as reflexões elencadas pelas partes no momento da ação didática. Lamentável não poder representar dinamicamente em uma folha de papel o movimento como um todo e com todas as suas partes. Na página 12 desta pesquisa tentou-se uma representação parcial.

A maior parte das dificuldades encontradas pelos alunos nas resoluções dos problemas, e que certamente só puderam ser analisadas após as entrevistas, diz respeito ao fato de que eles têm dificuldade de entrar no movimento didático. Não compreendem termos que o professor domina, não sabem o que o professor espera deles, não integram as supostas *regras do jogo*. A parte implícita do movimento é um obstáculo epistemológico para eles.

Em 1938, Bachelard publica *A formação do espírito científico*, na qual aborda o que intitulou de *obstáculos epistemológicos*. Segundo ele, os obstáculos devem ser superados para que se estabeleça e se desenvolva uma nova mentalidade.

Tais obstáculos estariam presentes, por exemplo, quando o aluno se depara com um conceito já visto em Matemática, mas que, em um momento ou situação nova, lhe é apresentado diferente do que conhecia. No conjunto dos números naturais, $n + 1$, indica que o próximo número é maior que o seu

antecessor, mas, no conjunto dos números racionais, representados por uma razão do tipo $\frac{a}{b}$, $\frac{1}{n+1}$, configura um número menor que seu antecessor.

Destaca-se que existe a necessidade de olhar teoricamente os obstáculos epistemológicos, pois a rotina didática constantemente é rompida. O professor que não reconhece a existência dos obstáculos e não se apropria dos fundamentos da disciplina pode estar convertendo os obstáculos epistemológicos em obstáculos didáticos para si e para seus alunos.

Lembramos que em 1978, Guy Brousseau relacionou, inicialmente, o conceito do *contrato didático* e os obstáculos epistemológicos como uma das causas possíveis do fracasso atribuído ao ensino de Matemática. Tratava-se de alunos que apresentavam dificuldades em Matemática e não tinham o gosto em aprendê-la, mas, ao mesmo tempo, obtinham sucessos em outras disciplinas. (IREM/Bordeaux, 1978).

Ao relacionar contrato didático e obstáculos epistemológicos, Brousseau (1988) aponta para o que seria ter *jogo de cintura* nas relações entre professor - aluno - conhecimento, defendendo que o professor tenha:

- idéia da divisão de responsabilidades: a relação didática não é controlada exclusivamente por ele; o aluno deve cumprir também seu papel, envolvendo-se com a ação do professor;
- conscientização do movimento oculto: o movimento didático funciona mais sob um conjunto de orientações implícitas do que aquelas formuladas e explicitadas; o movimento se torna mais dinâmico por essas regras implícitas do que por aquelas explícitas. De todo modo, é em torno de tais orientações, implícitas e explícitas, que o professor e aluno estão ligados;
- consciência da relação com o conhecimento matemático: o que é característico do movimento didático é a consideração da relação que cada um dos parceiros tem com o conhecimento; devemos, portanto, levar em conta a assimetria das relações com o saber em jogo na relação didática;

Segundo Brousseau (1988), o movimento didático estabelecido na sala de aula, por meio da resolução de problemas, acontece de forma bastante clara e significativa quando as partes estão em comum acordo e didaticamente trocam suas experiências e conhecimentos, estabelecendo uma relação dialética de ensino.

Embora no decorrer do processo de teorização do movimento didático, com vistas à relação dialética de ensino, tenham sido percorridos vários autores e a Prof^a. Lílian Wachowicz tenha sido o referencial principal, apreciou-se muito os trabalhos de (DILTHEY, 1859-1911), (KLAFKI, 1969) e (KOWARZIK, 1974), contribuições importantes para a reflexão em relação à dialética.

A concepção de dialética utilizada nesta pesquisa está, também, presente nas obras de (DILTHEY, 1859-1911), em especial no seu trabalho intitulado: *A Fundamentação das Ciências do Espírito*. Trata-se de uma *dialética compreensiva*, uma *análise descritiva de situações pedagógicas* a partir do horizonte de atuação do educador. Essa análise descritiva deve tornar visível o movimento didático da tríade aluno - professor – conhecimento matemático, de modo a tornar o professor consciente da complexidade dinâmica das inter-relações e conexões em que sua própria atuação está compreendida.

Nas palavras de Kowarzik (1974), o pensar dialeticamente revela que:

“... nas situações educacionais, os momentos dialéticos não são fatos imobilizáveis, mas conexões de sentido em que a ação educacional precisa se mover enquanto determinada pedagogicamente; da mesma forma, a teoria pedagógica não é apenas uma análise que retrata a realidade educacional, mas um guia para o educador se tornar consciente da responsabilidade de sua atividade educativa.” (KOWARZIK, 1974, p.13.)

Wolfgang Klafki (1969) esclarece que a dialética é responsável por: “... proporcionar ao educador uma visão dos pressupostos freqüentemente ocultos de sua atividade com uma sempre renovada consciência de si mesmo”. (KLAFKI , 1969 apud SARRAZI, 1996, p. 86.)

Wachowicz (1989)³⁸ desenvolveu seu estudo propondo uma didática cujo núcleo central é o método dialético aplicado na sala de aula. Como pano de fundo, Wachowicz faz uso dos passos metodológicos³⁹ recomendados por Saviani (1984) a propósito dos métodos de ensino, na qual o autor sugere uma seqüência de trabalho composta de cinco passos que se articulam. Estes

³⁸ O trabalho docente em didática e prática de ensino numa abordagem dialética [mimeo] apresentado no V Encontro Nacional de Didática, Belo Horizonte, 1989.

³⁹ Os passos sugeridos pela autora são: *a prática social, a problematização, a instrumentalização, a catarse e a prática social*.

passos, sem serem encarados como fórmula ou orientação rígida, podem fornecer um importante subsídio para uma direção do processo pedagógico, na perspectiva do desenvolvimento pleno de alunos e professores. A seqüência dos passos tem servido de referência tanto na elaboração de propostas para o ensino dos conteúdos escolares, quanto para a orientação do trabalho formativo com os professores.

A proposta de Wachowicz (1989) tem como fundamentos considerar a possibilidade de contrapor uma prática revolucionária de educação através da ação didática, na qual o conteúdo do trabalho didaticamente está intrínseco à prática social e a forma ao diálogo, entendido como a relação estabelecida pela tríade aluno - professor - conhecimento. Esse conhecimento é selecionado à luz de problemas colocados na prática pela prática social e do conteúdo produzido socialmente.

Oliveira (1993) caracteriza muito bem o momento em que se define o método dialético defendido por Wachowicz:

“... a partir da discussão das diferenças entre método de ensinar e método científico de apreensão da realidade, Wachowicz (1989) distingue metodologia científica de metodologia do ensino, caracterizando método didático como método dialético. Dentro disso, a autora se propõe relacionar a Didática à lógica e não à Psicologia.” (OLIVEIRA, 1993, p.116.)

E continua em outro momento:

“... Afirmamos que existe um método didático, que não é o método de pesquisa nem é o método de ensino próprio de cada área do conhecimento. (...) A este método, que não é um método geral ‘capaz de ensinar tudo a todos’, como queria Comenius na sua Didática Magna, mas a forma pela qual trabalha o pensamento ao se apropriar da realidade, chamaremos de método dialético.” (WACHOWICZ, 1989, pp. 2-3)

Para a presente análise, buscou-se um recorte teórico em relação à dialética. Pretende-se esclarecer como o movimento didático-dialético aparece, na prática, quando se faz uso da Resolução de Problemas com a lente da heurística.

Para tal, classificou-se os problemas apresentados aos alunos de 5ª. e 6ª. séries em relação ao tipo de enunciado apresentado: problemas com

enunciados longos e problemas com enunciados curtos. Objetiva-se compreender o momento didático do aluno, ou ainda, o **potencial heurístico** do aluno quando faz uso da resolução de problemas didaticamente, mesmo quando se deparara com problemas de diferentes contextos, com diferentes quantidades de linhas nos enunciados.

Foram estabelecidos problemas com enunciados longos e curtos, do tipo problema-problema (problemas em que não aparece explicitamente a palavra-chave que o soluciona) e exercícios de aplicação direta de algoritmos (os tradicionais exercícios que são amplamente difundidos nos livros didáticos de Matemática, que não assumiram uma postura metodológica compatível com a Educação Matemática).

Cabe aqui ressaltar que, em momento algum, pretende-se atrair o leitor com a metodologia da resolução de problemas como sendo o carro-chefe da atividade matemática. Os exercícios de aplicação de algoritmos, em certa dose, são tão importantes quanto a resolução de problemas em diferentes contextos e de diferentes tipos de enunciados.

O que não se percebe como sendo uma metodologia adequada é a excessiva aplicação de exercícios e técnicas vazias de compreensão e significado. Uma boa técnica remete a uma boa significação acerca dos procedimentos que conduziram à chegada dos formalismos e absolutismos constantemente atribuídos à Matemática.

5.2 A QUESTÃO DOS ENUNCIADOS CURTO E LONGO NOS FUNDAMENTOS HEURÍSTICOS PRESENTES NO DISCURSO DO ALUNO E DO PROFESSOR

Em relação ao objetivo inicial desta pesquisa, percebeu-se contradições entre as falas dos professores e dos alunos quando verificou-se os entendimentos que têm sobre o que é um problema com enunciado longo. As entrevistas mostraram elementos fundamentais ao processo de compreensão do movimento didático. A forma como resolveram e o modo como disseram que resolveram um problema com enunciado longo, são extremamente contraditórios.

Referente aos exercícios de aplicação direta de algoritmos, com enunciados curtos, identificou-se um discurso coerente com a prática, não contraditório. Afinal, atividades deste tipo são largamente ensinadas, exercitadas e repetidas nas aulas de Matemática.

Os problemas com enunciados curtos apresentados nas fichas e entregues aos alunos foram praticamente todos resolvidos, sem grandes contestações ou *sombra de dúvidas* pelos alunos, o que pôde ser observado nas entrevistas de modo geral.

Quando questionou-se o aluno R da 6.^a série em 2006, sobre que atividades mais gostou de resolver, percebeu-se que problemas com enunciados curtos são mais fáceis de serem entendidos:

(...)

P – “Primeiro você R, qual foi o exercício que você mais gostou de resolver?”

R – **“A atividade 03.”**⁴⁰

P – “Por quê?”

R – **“Porque eu entendi mais fácil...”**

P – “O que você entendeu mais fácil?”

⁴⁰ Atividade 03.

Encontre o volume de cada objeto, dadas as respectivas medidas dos lados, sendo $L = largura$, $a = altura$ e $c = comprimento$.

- a) $L = 10$ cm, $a = 5$ cm e $c = 5$ cm.
- b) $L = 20$ cm, $a = 5$ cm e $c = 1$ cm.
- c) $L = 10$ cm, $a = 10$ cm e $c = 10$ cm.
- d) $L = 10$ cm, $a = 5$ cm e $c = 10$ cm.

R – **“As contas eu entendo mais fácil.”**

(...)

Pode-se observar em outra resposta, dada por D1, aluno da 5ª. série, que deixa clara a preferência por atividades do tipo *arme e efetue*:

(...)

P – “Qual foi a atividade que você mais gostou de resolver?”

D1 – **“Aquela das continhas.”**⁴¹

P – “Por quê?”

D1 – **“Era a mais fácil.”**

(...)

Outro aluno L, da 5ª. série, também demonstrou maior afinidade com os exercícios de aplicação de algoritmos da ficha:

(...)

P – “L., qual a atividade de que você mais gostou?”

L – **“Ah, a de fazer continhas, gosto de fazer continhas...”**

(...)

Um fato que não se pode deixar de assinalar, neste momento, é que as atividades de aplicação direta de algoritmos estavam estritamente relacionadas às atividades que tinham enunciados curtos, com uma exceção: a atividade 04⁴² da ficha da 5ª. série tinha enunciado curto, demandava a aplicação de um algoritmo, porém, sua solução não se dava na simples aplicação de um algoritmo relacionado a uma palavra-chave, ou instrução pré-instituída.

Quando foram elaborados os enunciados das atividades para as 5ª. e 6ª. séries, optou-se por apresentar os algoritmos, aqueles chamados de exercícios, com enunciado mais curto possível, apenas com as informações suficientes à solução do problema, e bastante objetivo. Notou-se que, ao serem entrevistados, os alunos perceberam que as tradicionais *continhas* estavam sendo representados por esse tipo de enunciado.

⁴¹ Atividade 03.

Efetue da maneira que preferir:

a) $32.452 \div 23 =$

b) $423 \times 13 =$

c) $25 + 45 \times 12 =$

d) $235 + 423 =$

e) $1.235 - 459 =$

f) $45 - 20 \div 10 =$

⁴² Atividade 04.

Quanto é a metade de dois, mais dois?

A justificativa do porquê da preferência por enunciados curtos pareceu semelhante à dada em relação aos exercícios de *continhas*: “mais fáceis de ler, entender e resolver”. Infere-se que os conteúdos são mais bem fixados, os alunos se sentem mais seguros e fica mais fácil e agradável trabalhar Matemática. Essas respostas provocaram a seguinte indagação no tocante à ação didática do professor: quando o aluno gosta do que está fazendo, a aprendizagem necessariamente acontece?

Faça-se, então, a seguinte reflexão: se o aluno aprende mais quando gosta do professor de Matemática, então, gostaria mais ainda de Matemática se gostasse também da metodologia do professor; como visto, os alunos parecem não apreciar problemas com enunciados longos; decorrência disso seria inferir que professores ao trabalharem exclusivamente problemas com enunciados longos estarão fadados ao fracasso.

As falas de H, C, L e R elucidam a situação exposta:

(...)

P – “Ok, e você H, gostou mais de enunciados grandes ou pequenos?”

H – **“Dos pequenos também, porque vai direto ao assunto!”**

(...)

P – “Ok, e você C, gostou mais de enunciados grandes ou pequenos?”

C – **“Dos pequenos.”**

P – “Por quê?”

C – **“Porque nos enunciados pequenos você pode, sei lá, entende mais.”**

P – “Quer dizer que quanto menos informação, mais entende?”

C – **“É isso.”**

P – “Então, quando tem muita informação confunde mais, atrapalha.”

C – **“É, embaralha tudo!”**

(...)

P – “Teve alguma atividade que você não gostou muito?”

L – **“A primeira, muita coisa para ler.”**

(...)

P – “Sobre a atividade 01, você gostou?” ⁴³

⁴³ Atividade 01.

De acordo com o texto, responda cada pergunta de forma clara e objetiva.

R – **“É... mais ou menos.”**

P – “Mais ou menos?”

R – **“Menos.”**

P – “Por quê?”

R – **“Porque é mais difícil, não consegui fazer.”**

P – “Por que você não conseguiu fazer?”

R – **“Porque não consegui me achar no problema.”**

(...)

P – “Qual foi a atividade que você mais gostou de resolver?”

D1 – **“Aquela das continhas.”**⁴⁴

(...)

De fato, a maioria dos alunos preferiu e resolveu as questões de aplicação direta de algoritmos. Percebe-se que a preferência por exercícios desse tipo está muito vinculada a um estilo tradicional de se ensinar Matemática, por meio de repetição de algoritmos.

Tendo em vista que a presente pesquisa interpreta as situações didáticas estabelecidas por meio da resolução de problemas, buscou-se saber que tipos de problemas eram trabalhados pela professora nas aulas de Matemática.

Analisando a transcrição da professora A, percebeu-se um discurso contraditório:

(...)

P – “Como você define seu estilo de ensinar Matemática?”

Depois de vários acidentes com comida, bebida, cola e água no chão da sala da 6ª. série, o diretor do colégio resolveu trocar o piso de taco de madeira por piso cerâmico (ladrilhos). Para isso precisaremos ajudá-lo com o cálculo da quantidade de ladrilhos a serem comprados. A sala tem as seguintes dimensões:

(...)

- Qual é a área total a ser coberta?
- Quantos ladrilhos serão usados para cobrir todo o chão da sala?
- Existe uma promoção de ladrilhos em uma loja de materiais de construção. O m² do ladrilho custa R\$ 17,90. A escola dispõe de R\$ 150,00 para trocar o piso da sala. Será que é suficiente? Justifique sua resposta.

⁴⁴ Atividade 03.

Efetue da maneira que preferir:

a) $32.452 \div 23 =$

b) $423 \times 13 =$

c) $25 + 45 \times 12 =$

d) $235 + 423 =$

e) $1.235 - 459 =$

f) $45 - 20 \div 10 =$

A – **“Gosto de ensinar coisas relevantes, me preocupo com a dúvida do aluno, gosto de dar aplicação aos conteúdos de matemática, bem contextualizada, sabe...”**

(...)

Entretanto, o fato de um de seus alunos ter respondido a atividade 01⁴⁵ da ficha, sem registrar cálculo algum, incomodou a professora:

(...)

P – “Algo mais a acrescentar?”

A – **“Sim, L respondeu que seriam necessários quatro meses de economias para comprar a máquina, só que não fez nenhum cálculo que comprovasse sua resposta.”**

P – “Qual foi a justificativa que ele deu?”

A – **“Disse que se distraiu, não sabia que precisava deixar a conta...”**

(...)

De acordo com o discurso, a professora prima por atividades contextualizadas (no sentido mais amplo da palavra), mas, na prática, os alunos que foram entrevistados nos mostraram uma prática diferente da que a professora julgava ensinar; preferiram e resolveram melhor os exercícios de aplicação direta de algoritmos.

Percebe-se que a inclinação por exercícios de aplicação direta de algoritmos ocorre com muita frequência porque é um método mais fácil de ser ensinado, conseqüentemente, mais fácil de ser aprendido e, sem dúvida, facilita muito o trabalho diário do professor.

O que se pode observar, baseado nos questionamentos feitos aos alunos, nas análises críticas feitas nos documentos institucionais referenciados e presentes no plano pedagógico do colégio em questão, os quais, *a priori*, pareciam ao autor completos do ponto de vista da aplicabilidade, é que: mesmo

⁴⁵ Atividade 01.

A direção do colégio quer participar com mais entusiasmo da “Campanha da Fraternidade”, promovida pela CNBB (Comissão Nacional dos Bispos do Brasil), cujo tema desse ano é a “Fraternidade e pessoas com deficiência”. Para isso resolveu comprar uma máquina de escrita em braille, (tipo de escrita em relevo para cegos). O problema é que uma máquina nova é muito cara! Pagar à vista... Nem pensar, uma opção é comprar a prazo. A loja onde a direção do colégio pretende comprar a máquina calculou o preço a prazo com juros, o que fez o preço subir para R\$ 2.466,00 em 12 prestações iguais. A escola recebe uma média de R\$ 960,00 como recurso do Estado, só que o Colégio tem despesas fixas de aproximadamente R\$ 800,00. Comprar o aparelho em 12 vezes é viável ou não para o colégio? Por quê? Se não for, o que a direção pode fazer para comprar a máquina?

empregando uma quantidade significativa de algoritmos por repetição, não há garantia de que o significado, a definição matemática, esperada pelo professor, apareça.

Ao questionar o aluno R da 6^a. série, sobre: *o que é volume?* respondeu:

(...)

P – “Então, o que é volume?”

P – “Você pode imaginar e me contar o que você entende por volume?”

R – **“hummm”**

P – “Final todas as atividades que você disse que gostou falavam de volume.”

R – **“Sim”**

P – “Por exemplo, um copo tem volume?”

R – **“Não”**

P – “Uma garrafa mineral tem volume?”

R – **“Não”**

P – “Uma geladeira tem volume?”

R – **“Tem”**

P – “Por que a geladeira tem volume?”

P – “O quê você está entendendo por volume?”

R – **“Ah, sei lá.”**

P – “E se fosse uma pergunta de prova mesmo, o que você responderia?”

R – **“Ah, sei lá... é...”**

R – **“A parte de alguma coisa.”**

(...)

Conforme observado, para R a definição de volume é a forma do objeto com as medidas das três dimensões, altura, largura e comprimento, apesar de ter sido exposta como sendo a aplicação da fórmula do volume $V = \ell \times a \times c$. O aluno R não conseguiu relacionar as dimensões apresentadas na fórmula com algum tipo de explicação das três dimensões de um objeto espacial com faces retangulares.

No discurso, a prática de algoritmização e formulário sem significação são condenados pelos professores, mas, de alguma forma, pelo próprio movimento didático da aula de Matemática, ocorre com maior frequência do que entende-se como razoável. Em momento algum este autor desaprova o ensino de técnicas algorítmicas.

Pode ser interessante muito apresentar um novo conceito ao aluno. Este poderia ser apresentado formalmente após um bom entendimento de como o conteúdo, o conhecimento, aparece historicamente em diferentes contextos, principalmente àqueles matemáticos.

“**Fórmula** de Bháskara”, “**lei** dos senos”, “**regra** de três”, “passa pra lá, muda de sinal”, “o de baixo divide e o de cima multiplica”, entre outras, são gerais e simples de serem memorizadas. Entretanto, se professor ou aluno forem questionados sobre os porquês da *fórmula*, *lei*, *regra*, não se encontrará razão para a aplicação senão a de *cálculo pelo cálculo*. O que é mais fácil? Apresentar a fórmula, regra, lei, ou deduzi-la junto com os alunos? O que é mais fácil? Explicar os porquês ou responder “é assim porque é fórmula, é absoluta, não precisa aprender como se chega a ela, só precisa saber usar.”

(...)

P – “Qual foi a atividade que você mais gostou de resolver?”

D1 – “**Aquela das continhas.**”⁴⁶

P – “Por quê?”

D1 – “**Era a mais fácil.**”

(...)

O que é *mais fácil* para o professor é o *mais fácil* para o aluno?

Quando se elabora um problema para o aluno, este pode ser facilmente resolvido pelo professor, que é o detentor da resposta e de alguns possíveis modos de resolução. O que esperar de uma situação onde o *professor é pego de surpresa*, não sabe a resposta ao certo e não ensaiou algum tipo de resolução prévia do problema? A questão é: o professor de Matemática é sempre bom resolvidor de problemas e domina as diferentes formas de resolvê-lo?

A fala dos alunos entrevistados nos mostrou acreditarem que problemas *fáceis* são aqueles com enunciados curtos e com pouca informação, da mesma forma que os exercícios de aplicação direta de algoritmos, sendo que estes mesmos, segundo os alunos e os professores entrevistados, não favorecem o

⁴⁶ Atividade 03.

Efetue da maneira que preferir:

a) $32.452 \div 23 =$

b) $423 \times 13 =$

c) $25 + 45 \times 12 =$

d) $235 + 423 =$

e) $1.235 - 459 =$

f) $45 - 20 \div 10 =$

pensar matematicamente, mas são muito utilizados, pois são mais *fáceis* de aprender.

Resolver algoritmos também é fazer matemática. No entanto, trabalhar **apenas** com exercícios algorítmicos pode não ser o ideal para movimentar, de fato, a tríade: aluno-professor-conhecimento matemático.

Conforme pode-se observar, os entendimentos sobre o que vem a ser problemas e exercícios também é ponto conflitante:

(...)

P – “Qual atividade você mais gostou de resolver?”

D2 – **“Ah, aquela do volume”**⁴⁷

P – “Foi fácil.”

(...)

Aqui aparece um ponto contraditório da ação docente na prática pedagógica. Em um primeiro momento, alunos e professores projetam os exercícios de aplicação direta de algoritmos como sendo desprovidos de informações (leia-se de conteúdos), ruins e sem fundamento, ou *fáceis* de serem resolvidos por ter enunciado curto. Se o aluno entendeu bem a aplicação das técnicas algorítmicas transmitidas pelo professor, não haverá dificuldade para resolver os exercícios. No entanto, percebe-se que o entendimento acerca do que é um problema matemático *fácil de resolver* transcende a prática de sala de aula.

Em um problema cabe um contexto, uma ação didática que permita abstrair conceitos e técnicas necessárias à sua resolução. A incoerência fica aparente quando se questiona conceitos, como por exemplo, o de volume.

Após uma vasta lista de exercícios com aplicação da fórmula do volume, se questionássemos os alunos assim: “Ok, agora que encontramos as respostas dos exercícios, me respondam: O que é mesmo volume?”, silenciaria boa parte dos que *devoraram* a lista de exercícios.

⁴⁷ Atividade 02.

O bloco retangular abaixo tem somente uma camada:

(...)

- Qual é o volume da figura acima?
- Quantas dessas camadas devo colocar para obter um cubo?
- Qual é o volume desse cubo em cm^3 ?
- Observe que a maioria das embalagens tem a forma de um bloco retangular? Por quê?

Nas entrevistas, nenhum dos alunos foi capaz de responder com clareza o que é volume, mesmo resolvendo problemas significativos do ponto de vista da resolução de problemas que, de certa forma, não continham a simples aplicação da fórmula do volume do bloco retangular.

De início acreditava-se ser a resolução de problemas o “ponto de partida da atividade matemática”. Melhor analisando a aplicação de diferentes tipos de problemas com enunciados longos e curtos, percebeu-se que, dependendo do movimento didático estabelecido pela tríade aluno-professor-conhecimento matemático, as definições não aparecem, nem são criadas. Nem mesmo servem de ponto de partida para a atividade matemática.

5.3 EXPLORAÇÃO E DECODIFICAÇÃO HEURÍSTICA DOS PROTOCOLOS ANALISADOS

Analisar heurísticamente a resolução de problemas e exercícios dos alunos exige do professor demasiada dose de tempo. Entende-se que o dia-a-dia da sala de aula, as rotinas pedagógicas, os freqüentes registros das avaliações, contínuas fazem com que o trabalho de pesquisa do professor de sala de aula seja distante do pesquisador acadêmico.

Contudo, espera-se que as interpretações apontadas a seguir sirvam de embasamento teórico-prático para uma diferente visão sobre a Resolução de Problemas na Matemática escolar.

Analisar heurísticamente consiste em olhar para as descobertas que os alunos fazem sozinhos, descobertas que parecem *brotar* no melhor sentido da célebre frase de Arquimedes - *Eureka! (Descobri)*. Muitas vezes, o potencial de descobertas que o aluno faz sozinho, tal qual chamamos anteriormente de *potencial heurístico*, fica inócuo à presença do professor. Neste caso, o professor de Matemática prefere mostrar-se como o único personagem em condições de resolver os problemas que propôs.

A fala de J1, aluno da 5ª. série, faz refletir sobre o papel da descoberta feita pelo aluno na resolução de um problema:

(...)

P – “J1, sobre a atividade 01, você tem alguma coisa que gostaria de mudar nela?”⁴⁸

J1 – **“Tipo o quê?”**

P – “Procure rever as respostas que você deu”

J1 – **“Ok...”**

J1 – **“Hum, era para continuar a divisão?”**

(...)

A situação destacada provoca reflexões sobre o papel da aplicação de algoritmos sem significado para os alunos. Se o aluno J1 estava resolvendo um problema que envolvia valores monetários reais, a divisão até resto zero passaria a ser necessidade, pois os centavos também interessariam. A atividade heurística ficou comprometida pela falta de significação da divisão de números inteiros com quociente decimal.

Durante as entrevistas com os alunos, percebeu-se a riqueza de pensamentos e modos de resolver um mesmo problema.

A atividade heurística na resolução de problemas da Matemática escolar é encontrada, como vimos anteriormente, em George Polya e sua *Arte de Resolver Problemas*. A Arte tratada por Polya em seus escritos é entendida como meta-resolutiva. A Arte está muito mais ligada à técnica de *como, do modo* com que o aluno se envolve com problemas em Matemática.

Mas, qual seria a técnica adotada por Polya na resolução de problemas em Matemática?

Mais que uma técnica, Polya tratava problemas de Matemática com forte apelo à indução e dedução; estas, a nosso ver, são as chaves da atividade heurística.

No prefácio da edição francesa⁴⁹ de seu livro *Matemática e raciocínio plausível*, Polya diz:

⁴⁸ Atividade 01.

A direção do colégio quer participar com mais entusiasmo da “Campanha da Fraternidade”, promovida pela CNBB (Comissão Nacional dos Bispos do Brasil), cujo tema desse ano é a “Fraternidade e pessoas com deficiência”. Para isso resolveu comprar uma máquina de escrita em braille, (tipo de escrita em relevo para cegos). O problema é que nova é muito cara! Pagar à vista... Nem pensar, uma opção é comprar a prazo. A loja onde a direção do colégio pretende comprar a máquina calculou o preço a prazo com juros, o que fez o preço subir para R\$ 2.466,00 em 12 prestações iguais. A escola recebe uma média de R\$ 960,00 como recurso do Estado, só que o Colégio tem despesas fixas de aproximadamente R\$ 800,00. Comprar o aparelho em 12 vezes é viável ou não para o colégio? Por quê? Se não for, o que a direção pode fazer para comprar a máquina?

“No domínio científico como na vida cotidiana, quando alguém se encontra diante de uma situação nova, começa fazendo uma hipótese. A primeira hipótese pode não se adaptar a realidade, mas, experimenta-se e, conforme o resultado obtido, modifica-se mais ou menos. Após alguns ensaios e algumas modificações, ajudado pelas observações e levado pela analogia, pode ser que se chegue a uma hipótese mais satisfatória. (...)

O resultado do trabalho criador do matemático é um raciocínio demonstrativo, uma experimentação, mas essa experimentação é descoberta mediante um raciocínio plausível, tentando adivinhar. Se é assim, e eu acho que é, deveria haver lugar no ensino da Matemática para a arte de adivinhar”. (POLYA, 1957, p. ix-x.)

Um exemplo do que dizia Polya, seria o do aluno S, da 6^a. série. Ele resolveu a atividade 01⁵⁰ de um modo muito peculiar. Utilizou-se de artifícios não algorítmicos para chegar à solução. Foi o que este pesquisador e professora da turma chamaram de *idéia intuitiva de função*. Ao entrevistar S, percebemos o *modo* como foi descobrindo as operações e, passo-a-passo foi desvendando a solução do problema:

(...)

P – “S, você pode nos contar como fez para resolver a atividade 01 da folha?”

S – **“Então, eu tinha que saber quanto tinha de... como é mesmo, de área a sala, daí fiz a conta de vezes para descobrir a resposta. Depois, deixa eu ver aqui, calculei quantos ladrilhos por metro...”**

P – “Essas contas aqui, você foi calculando metro por metro?”

S – **“É, fiz um por um para não me perder nos cálculos, eram muitos.”**

S – **“Daí, fiz essa conta de vezes para calcular quantos ia usar na sala toda.”**

P – “E, para calcular o preço da troca do piso... como você fez?”

⁴⁹ A versão espanhola é do ano de 1969 e a francesa de 1958, posterior quatro anos à versão original em inglês, que é de 1954.

⁵⁰ Atividade 01.

De acordo com o texto, responda cada pergunta de forma clara e objetiva.

Depois de vários acidentes com comida, bebida, cola e água no chão da sala da 6^a. série, o diretor do colégio resolveu trocar o piso de taco de madeira por piso cerâmico (ladrilhos).

Para isso precisaremos ajudá-lo com o cálculo da quantidade de ladrilhos a serem comprados. A sala tem as seguintes dimensões:

(...)

- Qual é a área total a ser coberta?
- Quantos ladrilhos serão usados para cobrir todo o chão da sala?
- Existe uma promoção de ladrilhos em uma loja de materiais de construção, o m² do ladrilho custa R\$ 17,90. A escola dispõe de R\$ 150,00 para trocar o piso da sala. Será que é suficiente? Justifique sua resposta.

S – **“Ah, sabia quanto era 1 metro, daí fui somando até chegar no 8, quando vi que passou do tanto que a escola tinha, parei.”**

(...)

O potencial heurístico do aluno S chamou atenção pela disparidade com que se deu em relação às turmas de 6ª. série da mesma professora e mesmo colégio que estava matriculado. Os demais colegas buscaram insistentemente a *conta* (algoritmo) que responderia ao problema. O aluno S, por sua vez, resolveu o problema utilizando uma técnica diferente da sua professora e de seus colegas.

O problema estaria completamente resolvido, não fosse à pergunta final: “Será que é suficiente? Justifique sua resposta.”

(...)

P – “Aí parou, daí você voltou para conferir as respostas?” (A atividade 01 questionava se o total em R\$ que a escola possuía era suficiente para a troca do piso, o que S fez foi apenas registrar os cálculos e um valor final, em R\$, para uma sala de 8 m²).

S – **“Não... precisava?”** (olha para a professora)

(...)

Retomando o último passo da resolução de problemas proposto por Polya, *validar o problema*, questiona-se até que ponto é conhecido e até que ponto é efetivamente trabalhada esta metodologia nos problemas de Matemática propostos a alunos do Ensino Fundamental.

Observa-se que existe uma questão conflitante e até mesmo incongruente na relação didática: o professor quer que o aluno produza respostas adequadas aos problemas manifestando o êxito obtido na aprendizagem. Mas adequada a quem? A ele ou ao aluno? – se for adequada ao professor deveria, também, estar adequada ao aluno.

Diante dessa incongruência, o professor pode movimentar a tríade de duas maneiras diferentes: dizer ao aluno exatamente o que ele desejaria obter como resposta, deixando de lado o peso da mudança da postura didática, ou, ao contrário, não fornecer nenhuma ferramenta nova, dica ou guia para o aluno enfrentar a situação-problema.

Na primeira maneira, o professor vê-se diante de um paradoxo: ao fornecer todas as informações que a situação requer para ser resolvida, ele

retira do aluno as possibilidades necessárias à compreensão e à aprendizagem do conteúdo pretendido. Na segunda maneira, lança à mão do aluno um desafio: o de enfrentar a situação-problema com o que tem de ferramental matemático e o que desenvolveu potencialmente de matemática durante o período letivo.

O anúncio do *como fazer* implica para o aluno a não ultrapassagem dos obstáculos epistemológicos decorrentes da sua trajetória de aprendiz e a não construção de seu próprio conhecimento.

Entretanto, na segunda maneira, o aluno vê-se numa situação desafiadora: ao não receber prontamente as respostas, encaminhamentos, dicas para a resolução do problema, a relação didática é desequilibrada. Desequilíbrio este que otimiza o movimento didático na tríade que pesquisamos. O aluno busca didaticamente uma solução, utilizando seus conhecimentos, como também, as relações possíveis de se estabelecer entre os outros problemas e o problema que está resolvendo.

Aprender e descobrir implica em que o aluno aceite o movimento didático e ao mesmo tempo o considere provisório, fazendo um esforço para rejeitá-lo, desequilibrando ainda mais a tríade que estará sempre permeada pela heurística.

Outro fator foi a justificativa do aluno J2 em relação ao por que deixou tantas atividades em branco, sem ao menos arriscar a resposta do problema:

(...)

P – “J2, Algumas atividades ficaram em branco... Qual foi o motivo?”

J2 – **“Não gosto muito de prova.”** (bastante tímido).

P – “Essas atividades lhe pareciam prova de alguma coisa?”

J2 – **“Sim”**

(...)

Um obstáculo didático seria provocado, por exemplo, ao definir volume conforme apresentado nas fichas. No caso do aluno J2 ocorre um bloqueio vivencial em relação a provas no modelo tradicional, formal.

Durante as entrevistas, percebeu-se duas situações instigantes: na primeira aplicação da lista com problemas e exercícios, a professora A nos afirmou que aplicou a lista com certo peso avaliativo, algo como *vale nota*, atribuindo, assim, um caráter mais formal à lista, afinal, estava com duas

turmas e primou pela disciplina e seriedade nas resoluções dos problemas e exercícios. De fato, considerar a lista de problemas como avaliação dos alunos, poderia “mascarar” os resultados esperados. Por isso, optamos por uma nova aplicação da lista no ano seguinte (2007). Assim, pedimos para que o professor escolhido não mencionasse aos seus alunos que a lista era avaliativa, e sim, uma lista de problemas a ser resolvida sem que *valesse nota*.

Para alguns alunos, em especial para J2, ocorreu um bloqueio, um obstáculo talvez criado pela fala da professora ao atribuir peso de avaliação à lista de problemas. Para efeito da interpretação específica da situação apresentada, o momento de avaliação formal cria barreiras à maioria dos alunos, mascarando os resultados apresentados pelas escolas como sendo média, seja ela bimestral/trimestral etc.

Por outro lado, retirando o peso de avaliação formal atribuída à lista de problemas, as atividades com enunciados longos, que necessariamente faziam com que os alunos lançassem mão de artifícios matemáticos não apresentados no corpo do problema, promoveram uma discussão em sentido inverso àqueles apresentados anteriormente.

O pensar matematicamente foi muito bem-vindo pelos alunos. Neste caso eram desafiados e motivados a encontrar a solução do problema. Seria uma superação de si mesmos, mais ainda, uma competição saudável em que o prêmio é aprender de fato, respeitando seu tempo e escolhas. Ou seja, independente do discurso inicialmente apontado pelo professor (a) a seus alunos, a lista de problemas foi resolvida com certo comprometimento.

As transcrições a seguir são dos alunos R e P1, da 6ª. série. Eles mostraram muito mais do que se imaginava a respeito da resolução de problemas na prática.

Cabe aqui ressaltar que a visão está voltada para o *potencial heurístico dos alunos*, o momento da descoberta, desmascarando o pré-entendimento sobre as resoluções escritas, não explicadas oralmente pelos alunos. Aqui o que está realmente em questão é provocar o aluno com perguntas direcionadas à sua heurística, que é mais fácil de ser observada numa conversa informal.

(...)

P – “Ok, do que mais você gostou?”

R – **“Daquela atividade... 02. Aquela do bloco retangular.”**⁵¹

P – “Por que você gostou desta atividade?”

R – **“Porque é difícil, assim, quer dizer, não é difícil de resolver as contas, mas tem que pensar muito.”**

P – “Quer dizer que é difícil não porque tem muitas contas, mas porque faz pensar muito sobre o mesmo problema.”

R – **“É isso! Mas é bom, é bom ter que pensar, é bom porque vai desenvolvendo o raciocínio...”**

(...)

Um dos objetivos da Matemática é desenvolver o raciocínio, segundo o senso-comum. Mas de que forma o professor de Matemática pode cumprir com tal objetivo? A resolução de problemas dá conta de desenvolver o raciocínio dos alunos? – quando o aluno R anuncia que “... é bom ter que pensar, é bom porque vai desenvolvendo o raciocínio”, reforça-se que existe a possibilidade do professor de Matemática elaborar problemas que sejam potencialmente heurísticos para seus alunos; além disso, pode aprimorar a capacidade de fazer analogias e trabalhar a intuição e dedução por meio da Resolução de Problemas.

(...)

P – “Ok, agora passaremos a palavra para a aluna P1 da 6ª. B.”

P – “P1, qual foi a questão de que você mais gostou?”

P1 – **“Foi a 03 e a 02”**⁵²

P – “Por quê?”

P1 – **“Porque a gente entrou numa discussão assim, legal.”**

⁵¹ Atividade 02.

O bloco retangular abaixo tem somente uma camada:

(...)

- Qual é o volume da figura acima?
- Quantas dessas camadas devo colocar para obter um cubo?
- Qual é o volume desse cubo em cm^3 ?
- Observe que a maioria das embalagens tem a forma de um bloco retangular? Por quê?

⁵² Atividade 03.

Encontre o volume de cada objeto, dadas as respectivas medidas dos lados, sendo $L = \text{largura}$, $a = \text{altura}$ e $c = \text{comprimento}$.

- $L = 10 \text{ cm}$, $a = 5 \text{ cm}$ e $c = 5 \text{ cm}$.
- $L = 20 \text{ cm}$, $a = 5 \text{ cm}$ e $c = 1 \text{ cm}$.
- $L = 10 \text{ cm}$, $a = 10 \text{ cm}$ e $c = 10 \text{ cm}$.
- $L = 10 \text{ cm}$, $a = 5 \text{ cm}$ e $c = 10 \text{ cm}$.

P – “O que foi discutido?”

P1 – **“Como cada um resolveu os problemas, foi legal discutir.”**

(...)

A resposta da aluna P1 é habilidosa, afinal P1 apontou que “... foi legal discutir” a forma com que cada um resolveu seus problemas. O potencial heurístico dos alunos é estimulado por problemas que provoquem a busca da solução por estratégias inovadoras, particulares, cada qual com suas descobertas.

(...)

P – “Ok, na atividade 02, na alternativa a), a pergunta era: ‘Qual é o volume da figura?’ Você respondeu: ‘Não tem volume’. Por quê?”⁵³

R – **“... é, eu até apaguei porque está errado.”**

P – “Por que você acha que está errado?”

R – **“Porque em volume olha aqui, ó...”** (aponta para a figura).

P – “Como você fez para calcular o volume?”

R – **“Não lembro.”**

P – “R., você acha que existe figura sem volume?”

R – **“Não”**

(...)

Entretanto, nem todas as descobertas podem ser feitas sozinhas pelos alunos. O professor de Matemática é responsável por instigar os alunos e proporcionar uma aprendizagem efetiva quando faz uso da Resolução de Problemas.

(...)

P – “Qual foi a atividade de que você gostou menos?”

P1 – **“Ah, a atividade 01.”**⁵⁴

⁵³ Atividade 02.

O bloco retangular abaixo tem somente uma camada:

(...)

a) Qual é o volume da figura acima?

(...)

⁵⁴ Atividade 01.

De acordo com o texto, responda cada pergunta de forma clara e objetiva.

Depois de vários acidentes com comida, bebida, cola e água no chão da sala da 6ª. série, o diretor do colégio resolveu trocar o piso de taco de madeira por piso cerâmico (ladrilhos). Para isso precisaremos ajudá-lo com o cálculo da quantidade de ladrilhos a serem comprados. A sala tem as seguintes dimensões: (...)

P – “Por quê?”

P1 – **“Porque eu não sabia a medida do ladrilho.”**

P – “Você conseguiria resolver o problema sem a medida?”

P1 – **“Não, faltava essa medida.”**

P – “Por que você acha que não tinha essa informação no problema?”

P1 – **“Ah, poderia ser de propósito, tipo pegadinha, pra gente tipo, supor.”**

(...)

Um dos objetivos de ensinar Matemática pode ser tornar alunos habilidosos em descobrirem sozinhos. A aluna P1 se sentiu incomodada com a ausência de dados no problema. Tal descoberta só foi possível porque P1 já havia estabelecido um plano de estratégias para resolver o problema, ou até mesmo já havia resolvido um problema parecido. Como exemplo, a ausência da medida *do ladrilho* é uma necessidade e passa a ser um problema para a aluna.

(...)

P – “Ok. Mais uma pergunta: vocês dois não responderam a letra d) da atividade 02, que dizia o seguinte: ‘Observe que a maioria dos objetos tem a forma de um bloco retangular, por quê?’. Vocês gostariam de tentar responder agora? Primeiro você R.”

R – **“Bom, isso aí eu não sei responder.”**

P – “Olha só essa caixa de giz aqui. Ela tem o formato de um bloco retangular, este MP4 também tem. Por que as embalagens têm geralmente esse formato?”

R – **“Bem, de repente porque é o formato melhor que cabem as coisas.”**

(...)

Observa-se que o aluno R, quando instigado, provocado a responder sobre o porquê do formato retangular das embalagens, na entrevista, respondeu corretamente a pergunta do problema. Esta só ocorreu com a interferência deste pesquisador, utilizando-se uma situação análoga.

(...)

P – “Ok, por que será que as caixas não são feitas com o formato de estrelas, triangulares,...?”

R – **“Porque, digamos assim, se eu tenho um Ipod e coloco numa caixa de estrela ele vai ficar errado, não vai ficar bem direitinho dentro.”**

P – “Ele vai ficar balançando dentro?”

R – **“Não, é que tipo depende do formato da...”**

P – “E se eu te dissesse que existe um *Ipod* estrelado, a caixa para guardar ele também seria estrelada?”

R – **“Não, poderia ser uma caixa assim, só que um pouquinho maior.”**

(...)

De posse da informação sobre o porquê das caixas terem o formato retangular, o aluno R se arrisca mais e promove grande riqueza de informações na entrevista. O aluno R, que inicialmente se mostrou incapaz de responder a pergunta do problema, depois que lhe foi apresentado um exemplo análogo nos pareceu estar mais seguro de suas definições.

(...)

P – “Ok, e você P1, o que acha?”

P1 – **“Eu acho que o formato de dentro deveria ser de estrela.”**

P – “E o formato de fora?”

P1 – **“Poderia ser retangular.”**

P – “Ok, e por que vocês não responderam isso na prova?”

R – **“Ah, porque na hora da prova deu um branco e também eu achei que poderia estar errado, não sei, é meio complicado de escrever assim, uma coisa que não tem certeza.”**

P – “Ok, então você não tinha certeza da resposta, daí preferiu não responder.”

R – **“É”**

P – “E você P1?”

P1 – **“Eu não parei para pensar, agora que você reformulou a pergunta, ficou mais claro.”**

P – “Quer dizer, explicando mais um pouquinho a pergunta ficou mais fácil, mais clara para responder.”

P1 – **“É, bem mais fácil.”**

(...)

De acordo com o que se observa, os alunos ainda dependem de instruções e analogias feitas pelo professor quando se deparam com problemas em Matemática. Eles podem ser habituados pelo professor a resolver problemas que valorizem as possibilidades de fazer descobertas, analogias e deduções sozinhos.

5.4 O PROFESSOR DE MATEMÁTICA: ANSEIOS E AS CONTRADIÇÕES NA PRÁTICA.

Observou-se que o trabalho do aluno deveria, ao menos em parte, reproduzir características constitutivas do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes. As situações apresentadas pelo professor aos alunos seriam situações-problemas, tendo em vista provocar a necessidade da construção pelo aluno de conhecimentos novos.

Segundo Brousseau (1998): “O professor deve assim efetuar não a comunicação de um conhecimento, mas a devolução de um bom problema. Se esta devolução se opera, o aluno entra no jogo e acaba por ganhar, a aprendizagem acontece”. (BROUSSEAU, 1998, p. 73.)

Conforme se observou, enunciados longos são problema para os alunos. Nas transcrições, as justificativas convergiam para: “fiquei perdido”, “confuso”, “não consegui me achar no problema”. Percebe-se que, para os professores, problemas com enunciados longos podem se configurar, também, como difíceis de ensinar; afinal, notamos nas entrevistas com os professores A e PP que existe certa culpa por não trabalhar mais com problemas desse tipo.

O professor PP assume tal falta e aponta como possível causa sua formação acadêmica.

P – “Então é o seguinte: após entrevistar os alunos, eu e o professor PP. iniciamos uma discussão sobre as razões dos alunos não gostarem de enunciados longos. (...) foram muito claros e objetivos em dizer que preferem enunciados curtos, porque são mais fáceis de resolver, de entender, as perguntas estão mais claras com os enunciados pequenos. Professor PP, o que você acha disso?”

(...)

PP – **“... eu creio que já é um problema nosso como educadores, eu tenho uma formação daquele professor supertradicional e, agora, através dos cursos, tenho visto que este tipo de método está superultrapassado e precisamos inovar. Então, nós professores mesmos, não temos esse**

hábito de fazer problemas longos, nós damos problemas curtos, bem objetivos para os nossos alunos. Então os alunos estão acostumados com este tipo de problemas, bastante curtos, e quando o professor começa a querer inovar ou começa a trabalhar com situações-problemas, os alunos tendem a ter uma certa... resistência para o novo. Veja que resolução de problemas com enunciados longos é novo.”

P – “Você encara a resolução de problemas longos como uma tendência em educação matemática?”

PP – ***“(...) Mas, a maior dificuldade do aluno em resolver problemas com enunciado grande é... nós somos culpados, porque nós, professores, não trabalhamos isso com os alunos, mas nós estamos começando essa tendência.”***

(...)

O diálogo que acabamos de apresentar nos mostra o quanto o aluno está impregnado da metodologia do professor de Matemática. Por isto prefere problemas com enunciados mais curtos, por serem mais fáceis de ler e resolver.

O aluno D1 expõe que:

(...)

D1 – ***“O enunciado era muito grande. Aí resolvi as menores primeiro.”***

(...)

Percebeu-se na fala do aluno D1 que problemas com enunciado longos causam desconforto, sendo, portanto, *deixados de lado*. De acordo com o que foi pesquisado para um universo de 11 alunos selecionados para as entrevistas, apenas um, o aluno D da 6ª. série, demonstrou interesse em resolver enunciados longos.

P – “D, você gostou mais de resolver os problemas com enunciados longos ou curtos?”

D – ***“Gosto de resolver problemas com enunciados longos.”***

P – “Você gosta de ler bastante, D?”

D – ***“Sim, gosto!”***

A quantidade significativa de linhas e conseqüente inchaço de informações provocam certo repúdio em relação à resolução do problema; parece, para o aluno, muito difícil de ser lida, interpretada e,

conseqüentemente, resolvida. Não se descartou a possibilidade de que alunos que lêem com freqüência teriam menos dificuldades em resolver problemas com enunciados longos.

Nota-se que os procedimentos heurísticos, que significam ter a arte de descobrir, ou procedimentos através dos quais os alunos são induzidos a encontrar as soluções dos problemas por si próprios, ficariam anulados, haja vista que problemas com enunciados longos não seriam lidos com o comprometimento necessário à compreensão do problema.

Questiona-se se, em problemas desse tipo, os passos descritos por Polya, necessários à descoberta da solução do problema, seriam abordados pelo aluno. Para tal, estabelecemos um diálogo entre os questionamentos de Polya, focado na heurística e no que entendemos ser a heurística do aluno.

Para Polya, a solução heurística de um problema se dá por meio de quatro passos. Utilizaram-se os quatro passos como base da interpretação. No corpo do texto desta dissertação estamos fazendo inserções que procuram relacionar e fundamentar as teorias em que buscamos nos aprofundar, quais sejam, a heurística, a Didática Teórica e a Didática Prática. A seguir, procura-se estabelecer uma relação intrínseca do movimento didático e os passos descritos por Polya para a solução de um problema com o foco na heurística.

5.5 OLHANDO OS DADOS EMPÍRICOS A LUZ DE POLYA E A HEURÍSTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Na seqüência, apresentam-se os quatro passos⁵⁵ (etapas) propostos por Polya (1995) em sua *Arte de resolver problemas* e as relações que observamos entre estes e os dados empíricos à luz da heurística.

1º. COMPREENSÃO DO PROBLEMA

⁵⁵ O modelo proposto por Polya (1995), para a resolução de problemas, tem quatro passos: (i) compreensão; (ii) elaboração do plano; (iii) execução do plano; (iv) avaliação (validação).

Qual é a incógnita?

Segundo Polya, um momento fundamental da atividade heurística é a compreensão do enunciado do problema. Percebeu-se que o tamanho do enunciado do problema é fator determinante na busca pela solução. A pergunta “Qual é a incógnita?” de Polya poderia ser dificilmente feita em um enunciado com muitas linhas, aumentando as possibilidades de abandonar a resolução do problema. A busca do aluno passa a ser por palavras-chave e de algum tipo de algoritmo que satisfaça matematicamente o problema.

Tal fato pode ser observado na fala de R, aluno da 6^a. série:

(...)

R – **“Por que é mais difícil, não consegui fazer.”**

P – “Por que você não conseguiu fazer?”

R – **“Porque não consegui me achar no problema.”**

P – “Por quê? Leva muito tempo para ler?”

R – **“Não, não é isso... É que é mais complicada essa parte aqui, você tem que dividir, não sei... É... como posso explicar...”**

(...)

Da mesma forma, L., aluna da 5^a. série, explicitou-nos o que imaginávamos ser um problema para o aluno quando se depara com enunciados longos:

(...)

P – “... teve alguma atividade de que você não gostou muito?”

L – **“A primeira, muita coisa para ler.”**

(...)

Ao se deparar com um problema, em um primeiro momento os alunos entrevistados demonstraram menos dificuldade em responder a problemas de aplicação direta de algoritmos, por estes serem de fácil compreensão do ponto de vista de como encontrar os dados necessários à solução. A condição estabelecida pelo problema estaria muito próxima do algoritmo necessário à solução do mesmo em termos mais gerais. Fato observado minimamente, pois a maioria dos alunos sequer resolveu os problemas de enunciados longos.

2º. ESTABELECIMENTO DE UM PLANO

Nas palavras de Polya (1945), neste passo é momento para que o resolvidor “encontre a conexão entre os dados e a incógnita”. Pois bem, pelo que se observou, os alunos tiveram dificuldades em *se encontrar no problema*. Faltou-lhes, já de início, a conexão entre os dados do problema e o valor ou situação a ser descoberta. Ao questionar sobre se o resolvidor já viu este problema antes, Polya pretende que o aluno resgate seus conhecimentos, seus saberes constituídos, na melhor acepção do concreto, como sendo aqueles saberes que foram interiorizados pelo indivíduo por meio de operações mentais.

Esse fato pareceu melhor esclarecido quando o pesquisador questionou o aluno R da 6ª. série sobre o que seria volume:

(...)

P – “Então, o que é volume?”

(...)

P – “Por exemplo, um copo tem volume?”

R – **“Não.”**

P – “Uma garrafa mineral tem volume?”

R – **“Não.”**

P – “Uma geladeira tem volume?”

R – **“Tem.”**

P – “Por que a geladeira tem volume?”

P – “O que você está entendendo por volume?”

R – **“Ah, sei lá.”**

P – “E se fosse uma pergunta de prova mesmo, o que você responderia?”

R – **“Ah, sei lá... é... a parte de alguma coisa.”**

(...)

Verificou-se que, mesmo induzindo o aluno a responder questões que de alguma maneira remeteriam à idéia de volume, não houve sucesso na solução do problema. Não houve relação entre os dados fornecidos e a pergunta do problema, a heurística do aluno ficou ofuscada pela sua falta de conhecimento.

Tendo em vista esta constatação, percebeu-se que para ter sucesso na resolução de problemas não é suficiente remeter a conhecimento anterior, que

para o professor, devesse estar pronto e acabado. Nas falas dos professores pesquisados está bastante claro que a definição de volume não seria necessária à resolução dos exercícios, ou a dos problemas, pois a aplicação direta da fórmula do volume resolveria as alternativas, exceto a letra “d)” da atividade 02, onde, conforme tabulação dos dados, foi a questão em que encontrou-se maior ocorrência de respostas em branco.

Com relação às perguntas “... já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?” ou “Conhece um problema relacionado?”, parece-nos que Polya já pretendia que seus discípulos tivessem a preocupação em buscar na memória, seja pela intuição ou pela dedução, problemas outros que ajudem a organização dos dados e a descoberta do algoritmo ou procedimento adequado à nova situação.

Mais uma vez, em relação às respostas que alguns alunos deram aos problemas, não pareceu que buscaram um problema correlato, simplesmente os resolveram como lhes veio à mente. Para nós, no caso em que o aluno não busque resolução por analogia, o professor poderá levá-lo a elaborar um plano que propicie o desenvolvimento de outras estratégias de resolução em que o potencial heurístico do aluno prevaleça.

3º. EXECUÇÃO DO PLANO

É chegada a hora da resolução do problema. As elucubrações, hipóteses, conjecturas, encaminham o resolvidor para que se “Execute o seu plano!”

Como o próprio Polya deixa claro afirmando que, “ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo, é possível verificar claramente que cada passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?”, este passo é o mais importante de toda a sua *Arte*. Se o resolvidor acredita ser desnecessária a validação da sua execução no contexto apresentado, corre riscos de aceitar como solução um absurdo na resposta final do problema. Observa-se que quando o aluno C foi questionado sobre a resposta de um dos problemas:

(...)

PP – “Ok, agora com você C, eu achei bem legal que você não teve preguiça de ler o problema e deu a resposta correta. Por exemplo, o seguinte. Aqui, você respondeu: “o colégio não pode fazer a prestação”. Como você chegou a essa resposta?”

C – **“Ah, eu pensei assim: se o colégio tivesse cheio de coisas pesadas, né, que nem agora a escola tem computadores, daí ia ter mais uma conta para pagar.”**

PP – “Foi por causa do que o colégio tinha em caixa, ele tinha R\$ 800,00 de dívida e dispõe de R\$ 900, 00, daí ia ficar muito apertado. Por isso?”

C – **“Sim, isso!”**

(...)

O aluno C retoma a pergunta do problema para validar sua resposta. Entendemos que C realmente leu, interpretou, entendeu o problema em questão. Uma prática que é pertinente a ele. Lamentável não poder dizer o mesmo da maioria de seus colegas de sala, que não se preocuparam em validar e fazer a retrospectiva do problema.

4º. RETROSPECTIVA

Para Polya, este é o passo decisivo da sua *Arte*. Sua contribuição é de fato didática, pois, ao examinar a solução obtida, o aluno tem condições de, sozinho, adequar seus cálculos ao contexto do problema, tendo assim mais chances de resolvê-lo.

Tratar de validar os passos e a resposta do problema é uma atitude que parte do professor, é um hábito que entende-se como parte da metodologia, da ação didática do professor.

Retomando a fala de J1, aluno da 5ª. série, temos o seguinte:

(...)

P – “J1, sobre a atividade 01, você tem alguma coisa que gostaria de mudar nela?”

J1 – **“Tipo o quê?”**

P – “Procure rever as respostas que você deu.”

J1 – **“Ok... Hum, era para continuar a divisão?”**

(...)

Essa pergunta fica para uma reflexão sobre o papel da resolução de problemas na matemática escolar.

A idéia que tem sido difundida é de que tais passos apresentados por Polya servem para qualquer tipo de problema em qualquer tipo de contexto. Algo como apresentá-los para dar sustentação teórica à resolução de problemas que se deseja aplicar. Percebeu-se que existe uma distância entre o método *pedagógico* apontado por Polya e a prática da resolução de problemas em sala de aula.

Quer-se aceitar que “os passos pelos passos” da teoria de Polya, podem garantir as interpretações, elucubrações e validação de todo e qualquer tipo de problema em Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Costuma-se justificar, tradicionalmente, a presença da Matemática no currículo escolar dizendo que esta “desenvolve o raciocínio” ou “ensina a pensar”. Porém, as falas dos professores, bem como os enunciados dos exercícios propostos, (“siga o modelo”, “resolva”, “preste atenção no exemplo porque vou pedir igual na prova”, “arme e efetue”, por exemplo) demonstravam um ensinar matemática dependente de instruções programadas pelo professor, o que nos leva a questionar se, de fato, a Matemática “desenvolve o raciocínio” e “ensina a pensar”.

“Aprender a pensar” tem ocupado lugar de destaque ao longo da história para justificar *o porquê* ensinar Matemática no Ensino Fundamental. O que se sabe é que a atividade do *pensar* não é patrimônio exclusivo da Matemática. Tem que se pensar em geopolítica, história crítica, química orgânica, biologia molecular etc.

A Matemática oferece ferramentas adequadas à obtenção de resultados corretos por métodos mais eficazes e diretos e a Resolução de Problemas estimula os alunos a abordarem, sem medo, novas situações matemáticas, a desenvolver a intuição e a dedução, a questionarem resultados obtidos mecanicamente.

Segundo Mendonça (1999), no Brasil, e talvez no mundo, tem-se pensado a Resolução de Problemas de três maneiras diferentes quanto ao campo de atuação e importância no ensino de Matemática.

A primeira delas é entender resolução de problemas como uma importante ferramenta para o aluno enfrentar os problemas mais diversos, em que o não conhecimento de determinadas formalidades matemáticas pode atrapalhar a descoberta de soluções em problemas de Matemática.

De fato, quando o professor de Matemática faz uso apenas da repetição e memorização de técnicas algorítmicas, não dá conta de trabalhar a formação do cidadão crítico, que resolve os mais diversos problemas, nos mais diversos contextos.

Uma segunda maneira seria considerar que uma tarefa primordial da Matemática é possibilitar o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas de qualquer natureza, inclusive aqueles não cotidianos, que só existem nos livros de Matemática. Tal habilidade é requisitada nos exames vestibulares e concursos públicos das mais diversas áreas, e que conforme pode-se observar, não dão garantia de que o conceito matemático foi aprendido.

Quanto à terceira, poder-se-ia pensar em ensinar Matemática a partir da resolução dos mais diversos problemas, nas mais diferentes situações, encarando a resolução de problemas como objetivo no processo ensino-aprendizagem. A competência seria ser *bom resolvedor de problemas*, algo como ser melhor resolvedor por resolver problemas em menor tempo.

Contudo, existem divergências nas interpretações dessas idéias. Parte dos professores pesquisados pareceu entender que, ao resolver problemas, o aluno deve chegar a uma única resposta correta, por meio de uma determinada solução que ele conhece e acredita ser a ideal.

As intermináveis listas de exercícios ocupam um lugar de destaque no processo ensino-aprendizagem de Matemática. Pesquisadores em Educação Matemática (JACOBSON, 1980; KANTOWSKI, 1981 e LESTER, 1988), apontam para a necessidade de considerar a **Resolução de Problemas como um processo em que o aluno se envolve na atividade de fazer Matemática**, um processo semelhante ao do matemático durante sua atividade profissional.

Nas aulas de matemática, tal prática pode parecer suficiente, ao menos momentaneamente, afinal, uma grande quantidade de exercícios com algoritmos pré-estabelecidos, pode ser feita sem um preparo prévio da aula. Bastaria um livro didático, quadro de giz, lápis, papel, caneta e borracha.

Observou-se que os diferentes contextos, modalidades didáticas, tempo de aplicação, mediação do professor e tipo de enunciado do problema interferem, e muito, nos resultados esperados tanto pelos alunos quanto pelos professores quando há aplicação de problemas.

Ainda sobre os enunciados, cabe uma reflexão sobre o **tempo** despendido pelos alunos para a devida resolução. Os problemas com

enunciados longos demandaram mais tempo para serem lidos, interpretados e resolvidos pelos alunos. Percebeu-se que um dos motivos de os alunos preferirem os problemas com enunciados curtos foi por causa do tempo menor para leitura e resolução. Tempos diferentes de ensino de Matemática foram destacados nas conversas com alunos e professores. De fato, o tempo do aluno é outro em relação ao do professor. Dificilmente os interesses do professor e do aluno são coincidentes. O tempo em que o professor aprendeu Matemática é diferente do tempo em que o professor ensina Matemática. Este choque fica evidente quando confrontou-se as respostas do que é problema para o aluno e o que é problema para o professor de Matemática.

Nas entrevistas percebeu-se também que a não motivação em relação aos problemas com enunciados longos residia no fato de que estes se pareciam com os problemas da “1^a. a 4^a. séries” . Sendo assim, traziam consigo uma quantidade muito grande de informações, o que para eles seria uma forma de dar instruções que já sabiam. Ou seja, para os alunos seria desnecessário um problema ser demasiadamente instrutivo.

O que se percebe nas interpretações dos protocolos presentes no capítulo cinco da presente pesquisa, é que os alunos que aprendem Matemática por repetição e memorização de *fórmulas* e *macetes* têm dificuldades em responder problemas com enunciados longos. Os alunos se mostram incapazes, em algumas situações, de resolvê-los por não identificar as regularidades das situações matemáticas presentes nos diferentes problemas.

Conforme já mencionado nesta pesquisa, na opinião de Polya (1995), “a primeira obrigação de um professor de matemática é usar essa grande oportunidade de descobertas; ele deveria fazer o máximo possível para desenvolver a habilidade de resolver problemas em seus alunos”. (POLYA, 1995, p. 23.)

Acredita-se aqui não ser ideal a postura didática que o professor assume quando priva seus alunos de demonstrações e explicações para os porquês de alguns formalismos em Matemática. Não situar os alunos didaticamente, utilizando diferentes contextos, para diferentes situações, quando faz uso da

resolução de problemas, pode desencadear certa aversão em resolver problemas. Não só aqueles de Matemática, mas, também da vida.

Também não faz sentido problemas ditos contextualizados com excessiva preocupação em valorizar, ou até mesmo forçar, o contexto para a aplicação do problema. A diversidade de situações, que é própria da Matemática, não deve ser ignorada.

Este autor concorda com Polya que valoriza a Resolução de Problemas como a chave da Heurística (momento da descoberta). Pode-se perceber tal valorização no momento em que analisamos o registro escrito sobre a explanação do aluno de como resolveu suas atividades. Foi no momento da entrevista que percebeu-se a importância da oralidade nos processos heurísticos. Percebeu-se que ouvir como determinadas “resoluções” foram feitas, ajuda o professor a compreender o pensamento do aluno, ao mesmo tempo em que permite ao aluno escutar-se na sua própria voz. Ao “escutar-se” e ao “fazer-se escutar” estabelece-se uma relação didática, pois, tem-se a mediação do professor potencializando a ocorrência dos processos heurísticos a que refere-se aqui. Como decorrência didática, o **potencial heurístico** se dá de modo mais efetivo na conversa entre professor e aluno quando resolvem problemas. É salutar, portanto, investir didaticamente no diálogo, provocando-os com perguntas.

Esse momento da descoberta pelo aluno proporcionou ao autor uma reflexão sobre o que ele chama de *didática do aluno*, ou *heurística do aluno*. Percebeu-se que se o professor não oportuniza à seus alunos descobertas e, principalmente, não os ouve, perde a oportunidade de trabalhar procedimentos heurísticos com maior aprofundamento.

Não se trata de atribuir aos problemas a perspectiva reducionista atribuída à contextualização forçada. Determinados contextos forçados em resolução de problemas reduzem o aluno a seu espaço.

Tendo em vista as aproximações feitas, torna-se emergencial compreender o espaço do aluno para formar os alicerces do pensamento matemático. Dessa forma, há a necessidade de localizar os alunos no contexto do problema, tornando-o personagem partícipe da ação didática. Retoma-se os dizeres de Saviani (2002, p. 14), quando afirma que “a essência de um

problema é a necessidade”. A necessidade é a chave da descoberta do aluno. Se não é necessário, pode não ser resolvido naquele momento da aula, por exemplo.

Polya pretendia que seus discípulos se tornassem exímios *resolvedores* de problemas, para isso elaborou passos didáticos, para que todos os que desejassem tratar da *Arte de resolver problemas* tivessem a oportunidade de resolver problemas de Matemática avançada. Entende-se que a contribuição de Polya não foi ensinar a resolver todo tipo de problema utilizando um único método, mas o seu grande avanço foi o último passo de sua *Arte*: “validar a resposta”.

Fazer uso do bom senso lógico na resolução de um problema é verificar, ao término desse, se a solução é viável naquele contexto. Esse trabalho metodológico é de competência do professor. Afinal, conforme observou-se na pesquisa, os alunos não trabalham com a validação do problema se o professor não tratar explicitamente a importância dela na resposta final do problema.

O modo como o aluno pensa que faz, chama-se de Didática Prática⁵⁶ do aluno. Para a presente pesquisa, encontrou-se o termo que melhor se aproxima das relações estabelecidas no movimento didático estudado pela via da Resolução de Problemas. Neste momento apresenta-se a chave da atividade heurística como sendo **didática prática do aluno** percebida na manifestação oral feita pelo aluno na entrevista, explicitando o modo como chegou a determinada solução, bem como o movimento didático-heurístico estabelecido por ele quando se depara com um problema.

Em relação aos entendimentos manifestados sobre a resolução de problemas, em especial o modo como o aluno pensa como faz e faz na prática, a chamada **didática prática do aluno**, conclui-se que se aproxima muito daquela Didática Prática explicitada em (MARTINS, 1998) e (WARCHOVICZ, 1989).

Descobriu-se com a pesquisa que os alunos de 5^a. e 6^a. séries têm uma didática própria na organização de um pensamento matemático coerente e

⁵⁶ O termo “Didática Prática” é atribuído à pesquisadora Pura Lúcia Oliver Martins e está presente na sua obra “A didática e as contradições da prática” do ano de 1998.

lógico. Concluiu-se que o desenvolvimento desta didática própria do aluno deve ser um objetivo prioritário da ação didática em Matemática a ser pretendido pelos professores, principalmente ao fazer uso da Resolução de Problemas como metodologia.

Finalmente, é ponto pacífico que a atividade heurística é inerente a cada um. Sem imaginação, criatividade, vontade de conhecer e descobrir, não há garantia de aprendizado. O potencial heurístico pode ser desenvolvido nos alunos e melhorado por meio da Resolução de Problemas.

Sendo assim, conclui-se que as relações didáticas estabelecidas na tríade *professor, aluno e conhecimento matemático* no processo de ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas são: **potencialmente heurísticas**: por mobilizarem a descoberta, o desenvolvimento da autonomia e a criação de diferentes estratégias para um mesmo problema; **criadoras**: por serem capazes de modificar e transformar conceitos vazios de significado em situações-problema com a valorização do senso-lógico das respostas; e **motivadoras**: por dar sentido aos diversos problemas que a Matemática da conta de resolver. E o eixo que dá sustentação ao movimento didático, que torna notável não só a didática do professor, mas, principalmente a **didática do aluno**, é a Resolução de Problemas, responsável por, dialeticamente, aproximar os vértices da tríade em *prol* da dinamização do processo ensino-aprendizagem em Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMS, **American Mathematical Society**. NCTM 2000, Association Research Group Second Report. June 1997. Notices of the AMS, February 1998, p. 275.

BABINI, J. **El Metodo**. Buenos Aires: Eudeba, 1966.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALIEIRO FILHO, I. F. **Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya – Quatro episódios da história da heurística**. Tese de Doutorado em Educação Matemática – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

BATISTTI, C. A. **O método de análise em Descartes. Da resolução de problemas à constituição do sistema do conhecimento**. Cascavel, PR: EDUNIOESTE, 2002.

BATISTTI, C. A. **Resolução de problemas: um recurso de ensino ou a essência do fazer matemático?** Incursões na História da Matemática, Londrina, 1999.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide – 2ª. ed. – São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 1º. e 2º. ciclos: Matemática**. Brasília, 1998.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 3º. e 4º. ciclos: Matemática**. Brasília, 1998.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – Ensino Médio: Matemática**. Brasília, 1999.

BROUSSEAU, G. **L'observation des activités didactiques**. Revue française de pédagogie, nº. 45, 1978, pp. 130-140.

_____. Problèmes d'enseignement des décimaux. In: **revue Recherche en didactique des mathématiques**, 1980, vol.1.1. pp. 11-59. La pensée sauvage. Grenoble.

_____. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol. 7, n° 2, 1986, pp. 33-115.

_____. **La tour de Babel. Etudes en Didactique des Mathématiques.** Article occasionnel n° 2, 1989, IREM de Bordeaux.

_____. **Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques**, Vol. 4, n° 2, 1983, pp. 165-198.

_____. **Théorie des situations didactiques.** Grenoble: Pensée Sauvage, 1998.

_____. “didactique”: what it can do for the teacher. In: **Recherches en didactique des mathématiques**, 1992, vol. 7 pp. 7-40 (traduction de 1989).

_____. **Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège.** Petit x, n° 21, 1988, pp. 47 - 68. [Traducción castellana en la revista Suma, n° 4 y 5].

_____. **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 7, n° 2, pp. 33-115. Grenoble, 1986. [Adaptação e tradução livre de Mérciles T. Moretti e Claudia R. Flores (versão preliminar – 2002)].

_____. **Le contrat didactique: le milieu.** Tradução de Mérciles Thadeu Moretti. RDM, Bordeaux, v. 9, n° 3, p. 309-336, 1988.

BUTTS, T. Formulando Problemas Adequadamente. In: KRULIK, S.; REYES, R. **Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** DOMINGUES, H. H. & CORBO O. (Trads.). São Paulo: Ed. Atual, 1997.

CARPENTER, T. **Notes from National Assessment: Words Problems.** – Arithmetic Teacher, 1976, p. 389-393.

CARRAHER, T. N. et al. **Na vida dez, na escola zero** – 10 ed. – São Paulo: Ed. Cortez, 1995, p. 69-83.

CHARLES, R. & LESTER, F. K. **Teaching Problem Solving: What, Why and Hown,** Palo Alto, Dale Seymour Publications, 1982.

CHEVALLARD, Y. & JOHSUA, M. A. **Un exemple d'analyse de latransposition didactique - la notion de distance.** Recherches en didactique des mathématiques, Paris, v. 1, n° 3, p. 159-239, 1 982.

COTTINGHAM, J. **Dicionário de Descartes.** Tradução, Helena Martins. – Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1995.

CURRICULUM AND EVALUATION STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS (NCTM, 1989; Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, tradução APM - Portugal, 1991).

DESCARTES, R. **Discurso do método;** Regras para a direção do espírito: texto integral. Tradução: Pietro Nassetti. São Paulo: Martin Claret, 2005. 144 p. (Coleção a obra-prima de cada autor).

DESCARTES, R., **Regras para a orientação do espírito.** Tradução: Maria Ermantina Galvão. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

DOMENICO, E. G. de **Perspectivas atuais em educação: para um mundo interpretado contemporaneamente: contribuição para um debate.** In Seminários em Revista, revisão de pós-graduação da Universidade Regional de Blumenau, Mestrado em Educação: Ensino Superior, Ed. FURB, v.2, n° 5, maio 1999, p. 25-44.

FIorentini, D. **Teses e dissertações de mestrado ou doutorado, relativas à Educação Matemática, produzidas/defendidas no Brasil de 1991 a 1995.** Revista Zetetike, Campinas, ano 3, n° 4, 1995, p.1 03-116.

GODINO, J. D. La consolidación de la educación matemática como disciplina científica. In: MARTINÓN A. **Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos,** 2000, Madrid: Nívola.

GODINO, J. D. **Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en Didáctica de las Matemáticas.** Revista Cuadrante, 2 (1), 1993, pp. 9-22.

GODINO, J. D. y LLINARES, S. El interaccionismo simbólico en educación matemática. Educación Matemática, 2000, pp. 70-92.

HAYS, C. L. **Livros texto de Matemática temperados com marcas registradas levantam novo alarma.** New York Times, 21 de março, 1999.

HOUAISS, A. **Dicionário da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro Instituto. Ed. Objetiva, 2001.

JONNAERT, P.h. & BORGHT, C. V. **Criar condições para aprender: o sócio construtivismo na formação de professores**. Porto Alegre: Artmed, 2002.

JOSHUA, S.; DUPIN, J. J. **La introduction à la didactique des sciences et des mathématiques**. Paris: Presses Universitaires de France, 1993.

KANTOWSKI, M. G. **Processes involved in mathematical problem solving**, Journal for Research in Mathematics Education, vol. 8, nº. 3, 1997, p. 163-180.

KLAFKI, W. O pensamento dialético na pedagogia. In: **Formas do pensamento e métodos de pesquisa da ciência da educação**, vol. 1, ed. S. Oppolzer, Munique, 1969.

KOWARZIK, W. S. **Pedagogia Dialética de Aristóteles a Paulo Freire**, São Paulo: ed. Brasiliense, 1974, tradução de Wolfgang Leo Maar.

KOWARZIK, W. S. **Dialektische Paedagogik**. Muenchen, 1974.

KRULIK, S.; REYES, R. **Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. DOMINGUES, H. H. & CORBO O. (Trads.). São Paulo: Ed. Atual, 1997.

LESTER, F. K. & D'AMBROSIO, B. S. **Tipos de Problemas para a Instrução Matemática no Primeiro Grau**. Bolema – Boletim de Educação Matemática, Universidade do Estado de São Paulo, Rio Claro, nº. 4, 1988, p. 33-40.

MARTINS, P. L. O. **Didática teórica / didática prática: para além do confronto**. São Paulo: Edições Loyola, 1993.

MARTINS, P. L. O. **A Didática e as Contradições da Prática**. São Paulo: Papyrus Editora, 1998.

MENDONÇA, M. C. D. Resolução de Problemas Pede (Re) Formulação. In: ABRANTES, P. et al (Org.). **Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo**. Lisboa: APM, 1999. p.15-33.

MONTEIRO, C. et al. Competências Matemáticas à Saída da Formação Inicial. In: BORRALHO, A. (org.) **A Matemática na Formação do Professor**. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática, p. 169-96, 2004.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**. Campinas - SP: Papirus, 1997.

NAPOLI, R. B. di. **Ética e compreensão do outro: a ética de W. Dilthey sob a perspectiva do encontro interétnico**. Porto Alegre: Edipucrs, 2000.

NCTM. **Professional Standards for Teaching Mathematics**. National Council of Teachers of Mathematics, Virginia, 1991. Normas Profissionais para o Ensino de Matemática. Tradução da Associação de professores de Matemática, Portugal, 1994.

O'BRIEN, T. **Desafios e Investigações** – São Paulo: Ed. Calls, 2000.

OLIVEIRA, M. R. N. **A reconstrução da didática: elementos teóricos e metodológicos**. Campinas: Papirus, 1992.

ONUICHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Ed. Unesp, p.199-220, 1999.

_____. L. R. **Um problema gerador de novo conteúdo**. Revista de Educação Matemática, São Catanduva-SP, nº. 8, p. 27 -30. 2003.

_____. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, A. V. & BORBA, M. C. (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Ed. Cortez, p. 213-224, 2004.

PAPPUS, A. **La Collection Mathématique**, 2v. Trad. P. V. Eecke. Paris: Albert Blanchard, 1982.

POLYA, G. **A Arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Ed. Interciência, 1995.

_____. **How to solve it - a new aspect of mathematical method**, (2nd ed.). New Jersey: Princeton University Press, 1945.

_____. **Mathematical Discovery: on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving**, 2 vols. New York: John Wiley, 1962-65.

_____. **Mathematics and Plausible Reasoning**, 2 vols., Princeton: Univ. Press, 1954.

_____. **Can Heuristics Be Taught?** In: Cognitive Process Instruction, eds. John Lochhead, pp. 315 - 318. Filadélfia: Franklin Institute Press, 1979.

_____. **Handbook for Ressearch on Mathematics Teaching and Learning.** D. Grouws, Ed. New York. MacMillan, 1992.

_____. **How to Solve It?** 2ª. ed. New York, Double Anchor Book, 1957.

_____. **Matemáticas y razonamiento plausible.** Tradução de Jose Luis Abellan. Madrid, 1966, Ed. Tecnos.

_____. **Mathematical Discovery.** John Wiley & Sons, New York, 1981. AMS, American Mathematical Society, NCTM 2000, Association Research Group Second Report. June 1997. Notices of the AMS, February 1998, p. 275.

POZO, J. I. (org.) **A Solução de Problemas - Aprender a resolver, resolver para aprender.** Porto Alegre: Editora Artmed, 1998.

PUCHKIN, V. N. **Heurística: a ciência do pensamento criador.** Rio de Janeiro, Zahar Ed., 1969.

SARRAZI, B. **La sensibilité au contrat didactique: rôle des Arrière-plans dans la résolution de problèmes d'arithmétique qu' cycle trois** (Thèse de doctorat – Université de Bordeaux II), 1996.

SAVIANI, D. **Escola e democracia.** São Paulo, Cortez, 1984.

_____. **Educação do senso comum à consciência filosófica - 14 ed. -** Campinas, SP: Ed. Autores Associados, 2002. – (Coleção educação contemporânea), p. 9-24.

SCHOENFELD, H. A. **Mathematical Problem Solving.** Academic Press. Orlando, 1985.

_____. Problem Solving in context(s). In: CHARLES, R. & SILVER, E. (Orgs.): **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.** LEA e NCTM, Reston, 1989.

_____. **Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics,** Handbook for Research

on Mathematics Teaching and Learning (D. Grouws, Ed.), New York: MacMillan, 1992.

SCHROEDER, T. L. & LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R., & SHULTE, A. P. (Eds.) **New directions for elementary school mathematics**. 1989 yearbook. Reston, VA: NCTM.

STANIC, G. & KILPATRICK, J. (1989). 'Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum'. In: CHARLES, R. I. & SILVER, E. A. (Eds), **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**, (pp.1-22). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

STEINER, H. G. **Needed cooperation between science education and mathematics education**. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik n. 6, pp. 194-197, 1990.

STRATHERN, P. **Descartes em 90 minutos**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1997. Tradução: Maria Helena Geordane.

TAHAN, M. **Didática da Matemática**. São Paulo: Saraiva, 1961.

THOMPSON, A. **Teacher's Conceptions os Mathematics and the Teaching of Problem Solving**. In: SILVER E. (Ed.), **Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiples Research Perspectives**. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.

TOMIO, D. **De corpo praticante a corpo aprendente: o professor de ciências nos seus espaços de aprender**. Itajaí: UNIVALI, 2002. 144 p.

TOPICS AND PROBLEM SOLVING, Mir, Moscou, 1973.

VALE, M. I. P. Desempenhos e Concepções de futuros professores de Matemática na resolução de problemas. In: FERNANDES, D., LESTER, F., BORRALHO, A. e VALE, I. (Orgs.), **Resolução de Problemas na Formação Inicial de Professores de Matemática. Múltiplos Contextos e Perspectivas**. 1ª. edição, Aveiro: GIRP, 1997.

VALE, M. I. P., CARDOSO, M. T. P. Resolução de problemas. In: PALHARES, P. (Coord.). **Elementos de Matemática**. Lisboa: Lidel, 2004. p. 7-51.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics**. New York: Longman, 2001.

VARIZO, Z. C. M. O Ensino da Matemática e a Resolução de Problemas. In: **Revista Inter-Ação, revista da Faculdade de Educação da UFG**, nº. 17 jan/dez. Goiânia – GO, 1993.

VIANNA, C. R. Resolução de Problemas. In: **Futuro Congressos e Eventos. (Org.). Temas em Educação I - Livro das Jornadas 2002**. Curitiba: Futuro Congressos e Eventos, 2002.

VILA, A. & CALLEJO, M. L. **Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas**. Tradução: Erani Porto. Alegre: Editora Artmed, 2006.

VILANOVA, SILVIA; *et al.* **Concepciones y creencias sobre la matemática. Una experiencia con docentes de 3er. Ciclo de la Educación General Básica**. Revista Iberoamericana de Educación, Argentina, 2000.

WACHOWICZ, L. A. **O Método Dialético na Didática**. 2. ed. Campinas/SP: Papyrus, 1989.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR E DE PESQUISA

ABRANTES, P. **Um (bom) problema (não) é (só)...** Revista Educação e Matemática, Lisboa: Associação de Professores de Matemática, n.º8, 1.º trim / 1989, p. 7-10 e p. 35.

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados: Análise de uma Experiência.** 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. **A resolução de problemas e o uso do computador na construção do conceito de Taxa Média de Variação.** Revista de Educação Matemática, Catanduva/SP, ano 8, n.8, p.37- 42. 2003.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. **A Resolução de um Problema de Divisibilidade através da Linguagem Java Promovendo Reflexões sobre a Utilização dos Computadores no Ensino de Matemática.** Revista Interciência – Ciências Exatas, Catanduva/SP, ano 4, n. 2, p. 15-20, 2004.

AMARAL, M. N. d. C. P. **Dilthey: um conceito de vida e uma Pedagogia.** São Paulo: Perspectiva/EdUSP, 1987.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Decodificação de Problemas e a Multicontextualidade da Sala de Aula.** 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1998.

AZEVEDO, E. Q. **Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas.** 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2002.

AZEVEDO, L. L. **Uma proposta de mudança na Licenciatura em Matemática ICLMA.** 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1998.

BLANCO, L. J., **Concepciones y creencias sobre la resolucion de problemas de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares.** In: Quadrante, Revista Teórica e de Investigação, 1997, v. 6, n.º 2.

BOAVIDA, M. A. **Concepções sobre resolução de problemas.** In: *Actas do PROFMAT 91*, vol. 1, Porto. Associação de Professores de Matemática de Portugal, 1991.

BOERO, M. L. **A introdução da disciplina Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas no Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Biológicas, Exatas e Experimentais da Universidade Presbiteriana Mackenzie.** 1999. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1999.

BORRALHO, A., **Formação de professores de Matemática e resolução de problemas.** In: MELADO, V. & BLANCO, L. J. (Org.), *La Formación del profesorado de Ciencias y Matematica em España y portugal*, Badjoz: Dpto Dca, Ex. y de las Matemáticas, 1995.

CARVALHO, M. **Problemas? Mas que problemas?! Estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula.** Petrópolis - RJ: Vozes, 2005.

CHARNAY, R. Aprendendo (com) a resolução de problemas In: PARRA, C & SAIZ, I. (org.). **Didática da Matemática – Reflexões Psicopedagógicas.** Porto Alegre, Artes Médicas, 1996.

CONTRERAS, L. C. **Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.** Universidad de Huelva, 1999.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar Matemática hoje?** Temas & Debates. N.º 2, p. 15-19, 1989.

ERNEST, P. Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In: ABRANTES, P. et al (Org.). **Investigar para Aprender Matemática.** Lisboa: APM, 1996. p. 25-48.

FALZETTA, R. **Cinco Tabus em Resolução de Problemas.** Revista Nova Escola, São Paulo: Ed. Abril, março / 2003, p. 44-47.

FERNÁNDEZ, H. H., RUBI, J. R. D. & ALÁIZA, B. F. **Cuestiones de didáctica de la Matemática – Conceptos y procedimientos en la educacion polimodal y superior.** Serie educacion, ed. Homos Sapeins 2001.

GAZIRE, E. S. **Perspectivas da Resolução de Problemas em Educação Matemática**. 1988. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1988.

KILPATRICK, J. **Research on mathematical learning and thinking in the United States**. Research en Didactiques des Mathématiques, 1981 (2), 363-379.

_____. **Reflection and recursion**. Educational Studies in Mathematics, 1985pp. 1-26.

_____. **What constructivism might be in mathematics education**. Proc. 11th Conference PME. Montreal, 1987, p. 3-23.

_____. **Change and stability in research in mathematics education**. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 1988, vol. 5: 202-204.

KOWARZIK, W. S. **Filosofia prática e pedagogia**. Espaço pedagógico, Passo Fundo: v. 10, n. 1, p. 11-31, 2003.

LELLIS, M.; IMENES, L. M. P. **O ensino de matemática e a formação do cidadão**. In: Temas & Debates, Blumenau: FURB e SBEM, nº.5, ano VII, 1994, p. 9-13.

PENTEADO SILVA, M. G. **Resolução de problemas - uma perspectiva de trabalho em sala de aula**. 1989. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.

PEREIRA, M. **O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas no 3º ciclo do ensino fundamental**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2004.

REALE, G. & ANTISERI, D. **História da Filosofia**. Volume II, Ed. Paulis, São Paulo, 1990.

SANTOS, M. C. **Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática**. Educação Matemática em Revista, São Paulo. v.9, n.12, p.11-15, 2002.

SCHOENFELD, H. A. Por quê toda essa agitação acerca da Resolução de Problemas? In: ABRANTES, P. *et al* (Org.). **Investigar para Aprender Matemática**. Lisboa: APM, 1996. pp.61-71.

SOARES, M. Mestrado em Educação Científica e Tecnológica. Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Brasil. Título: **Projetos de trabalho e avaliação por competências: encontros, desencontros e contribuições à Educação Matemática**, 2004. Orientador: Mérciles Thadeu Moretti.

STEINER, H. G.; BATANERO, M. C.; GODINO, J. D. y WENZELBURGER, E. **Preparation of researchers in mathematics education: an international survey (preliminary report)**. 5-TME Conference, Paderno del Grappa (Italia),1991.

_____. BALACHEFF, N. y otros. (Eds.) **Theory of mathematics education (TME)**. ICME 5. Occasional paper 54. Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld, 1984.

_____. **Theory of mathematics education (TME): an introduction**. For the Learning of Mathematics, Vol 5. n° 2, pp. 11-17,19 85.

_____. VERMANDEL, A. (Eds). **Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education (Didactics of Mathematics)**. Proc. 2nd TME Conference. Antwerp and Bielefeld: Dpt of Didactics and Criticism Antwerp, Univ. and IDM,1988.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)