UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

CRISTIANE FERNANDES DE SOUZA

UM ESTUDO SOBRE A APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONCEITOS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS

NATAL – RN
2006

CRISTIANE FERNANDES DE SOUZA

UM ESTUDO SOBRE A APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONCEITOS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte para fins de obtenção do grau de Doutor em Educação.

Orientador : Francisco Peregrino Rodrigues Neto, Prof. Dr.

NATAL – RN

2006

Catalogação da Publicação na Fonte. UFRN / Biblioteca Setorial do CCSA
Divisão de Serviços Técnicos

Souza, Cristiane Fernandes de
Um estudo sobre a aprendizagem de alguns conceitos algébricos e geométricos / Cristiane Fernandes de Souza. – Natal, 2006.
241 f. il.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Peregrino Rodrigues neto.
Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Programa de Pós-Graduação em Educação.

1. Educação – Tese. 2. Geometria – Tese. 3. Álgebra – tese. 4. Ensino Fundamental – Tese. 5. Matemática – Tese. I. Rodrigues Neto, Francisco Peregrino. II. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. III. Título.

RN/BS/CCSA CDU 371.13 (043.2)

CRISTIANE FERNANDES DE SOUZA

UM ESTUDO SOBRE A APRENDIZAGEM DE ALGUNS CONCEITOS ALGÉBRICOS E GEOMÉTRICOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte para fins de obtenção do grau de Doutor em Educação.

Aprovado em 20 de Dezembro de 2006.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Francisco Peregrino Rodrigues Neto
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Prof. Dr. Fernando Raul de Assis Neto
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Profª. Dra. Josinalva Estácio Menezes
Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE

John A Fossa

Prof. PhD. John Andrew Fossa

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Iran Abreu Mendes

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Profª. Dra. Maria Gilvanise de Oliveira Pontes

Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. André Ferrer Pinto

Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, João Gomes de Souza e Dalva Maria Fernandes de Souza, aos meus irmãos Carlos Augusto Fernandes de Souza e Catarina Fernandes de Souza e a minha avó, Maria Amália da Silva, pelo seu octogésimo aniversário de nascimento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela força e proteção concedidas durante a caminhada.

À minha família, principalmente aos meus pais e meus irmãos, fica minha eterna gratidão pela compreensão e apoio durante todos esses anos distante do meu lar.

Ao professor Dr. Francisco Peregrino Rodrigues Neto, orientador deste trabalho, fica meu eterno respeito e agradecimento pela paciência e objetividade nas orientações, bem como pelo apoio profissional e pessoal.

Gostaria de agradecer a todos os meus amigos em Natal pelo apoio dado durante a caminhada e, especialmente, a Alexandre Jardim Rocha e, sua esposa, Verbena Nidiane de Moura Ribeiro, pelo acolhimento familiar.

Agradeço à Direção, Supervisão Pedagógica, professor de Matemática e aos alunos da 8ª série da Escola Estadual Floriano Cavalcanti pela colaboração, que foi de grande relevância para a realização deste trabalho.

Agradeço o apoio recebido pelos professores e funcionários que fazem parte do Programa de Pós-Graduação em Educação dessa instituição.

À professora Drª. Gláucia Nascimento da Luz Pires, agradeço a atenciosa colaboração pelas sugestões e realização da correção ortográfica e gramatical do texto deste estudo.

SUMÁRIO

RESUMO

O objetivo do presente trabalho foi desenvolver um estudo sobre a escrita e a manipulação algébrica de expressões simbólicas para o perímetro e a área de alguns polígonos convexos, abordando as propriedades operatórias e da igualdade, estendendo-se para a obtenção das fórmulas do comprimento da circunferência e da área do círculo, essa última a partir da fórmula do perímetro e da área do hexágono regular. Para tanto, foi elaborado e aplicado um módulo de atividades de ensino, com base em ensino construtivo. O estudo consistiu numa intervenção metodológica, realizada pela pesquisadora, e teve como clientela alunos da 8ª série da Escola Estadual Desembargador Floriano Cavalcanti da cidade de Natal, Rio Grande do Norte. A intervenção metodológica foi realizada em três etapas: aplicação de uma avaliação diagnóstica inicial, desenvolvimento do módulo de ensino e aplicação de uma avaliação diagnóstica final, com base no ensino de Matemática de referencial Construtivista. Os dados coletados nas avaliações foram apresentados sob a forma de estatística descritiva. Os resultados da avaliação diagnóstica final foram analisados do ponto de vista qualitativo, mediante critérios estabelecidos segundo a teoria de Richard Skemp sobre a compreensão de conceitos matemáticos. Os resultados gerais sobre os dados observados nas avaliações e na aplicação do módulo de ensino apontaram para uma diferença qualitativa na aprendizagem dos alunos que participaram a intervenção.

ABSTRACT

The objective of the present work was develop a study about the writing and the algebraic manipulation of symbolical expressions for perimeter and area of some convex polygons, approaching the properties of the operations and equality, extending to the obtaining of the formulas of length and area of the circle, this one starting on the formula of the perimeter and area of the regular hexagon. To do so, a module with teaching activities was elaborated based on constructive teaching. The study consisted of a methodological intervention, done by the researcher, and had as subjects students of the 8th grade of the State School Desembargador Floriano Cavalcanti, located on the city of Natal, Rio Grande do Norte. The methodological intervention was done in three stages: applying of a initial diagnostic evaluation, developing of the teaching module, and applying of the final evaluation based on the Mathematics teaching using Constructivist references. The data collected in the evaluations was presented as descriptive statistics. The results of the final diagnostic evaluation were analyzed in the qualitative point of view, using the criteria established by Richard Skemp's second theory about the comprehension of mathematical concepts. The general results about the data from the evaluations and the applying of the teaching module showed a qualitative difference in the learning of the students who participated of the intervention.

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo fue desarrollar un estudio sobre la escritura y la manipulación algébrica de expresiones simbólicas para el perímetro y el área de algunos polígonos convexos, abordando las propiedades operatorias y de la igualdad, extendiéndose para la obtención de las fórmulas de la longitud de la circunferencia y del área del círculo, este ultimo a partir de la fórmula de la longitud y del área del hexágono regular. Para esto, fue elaborado y aplicado un módulo de las actividades de la enseñanza, con base en la enseñanza constructiva. El estudio consistió en una intervención metodológica, realizada por la investigadora, y tuvo como muestra a los alumnos de la "8ª serie" de la Escuela Provincial Desembargador Floriano Cavalcanti de la ciudad de Natal, Rio Grande do Norte. La intervención metodológica fue realizada en tres etapas: aplicación de una evaluación diagnóstica inicial, desarrollo del módulo de la enseñanza y aplicación de una evaluación final, con base en enseñanza de Matemática de referencial Constructivita. Los datos recolectados en las evaluaciones fueron presentados bajo la forma de estadística descriptiva. Los resultados de la evaluación diagnóstica final fueron analizados del punto de vista cualitativo, mediante criterios establecidos según la teoría de Richard Skemp sobre la comprensión de conceptos matemáticos. Los resultados generales sobre los datos observados en las evaluaciones y en la aplicación del módulo de la enseñanza apuntaron para una diferencia cualitativa en el aprendizaje de los alumnos qué participaron de la intervención.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como objetivo geral desenvolver um estudo sobre a obtenção de expressões simbólicas para o perímetro e área dos triângulos e trapézios, bem como a manipulação algébrica da fórmula da área do trapézio qualquer, abordando as propriedades da igualdade e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Além disso, visou obter a fórmula do comprimento da circunferência e da área do círculo, esta última através da dedução da expressão para o perímetro e área do hexágono regular, realizando um estudo sobre as propriedades geométricas desse polígono. O estudo contemplou a obtenção das expressões e fórmulas dos polígonos e do círculo, através da utilização de material concreto, decomposição e recomposição de figuras e manipulações algébricas.

Nesta pesquisa o estudo da obtenção e manipulação de expressões simbólicas para o perímetro e área de polígonos e a dedução da fórmula do comprimento da circunferência e da área do círculo, resulta de um trabalho com atividades de ensino para o aluno sobre conceitos geométricos e conceitos algébricos. Essas atividades consistem, inicialmente, num trabalho sobre o uso das propriedades operatórias como: a propriedade comutativa e a associativa, e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, para o cálculo da área do retângulo, na escrita de expressões simbólicas para o perímetro de retângulos, com o auxílio da malha quadriculada e outros materiais, e na manipulação algébrica da fórmula da área do trapézio. É utilizada a malha quadriculada para obter um valor aproximado da área do círculo. A obtenção da fórmula do perímetro e da área do hexágono regular inscrito numa circunferência é feita a partir das propriedades geométricas desse polígono, utilizando a construção com régua e compasso. A fórmula do comprimento da circunferência é obtida pela razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, por um processo matemático experimental. Por fim, a fórmula para a área do círculo é obtida a partir da generalização da área do polígono regular inscrito numa circunferência. No desenvolvimento do módulo de ensino os assuntos abordados nas atividades requerem conhecimentos, por parte do aluno, sobre alguns conteúdos de Geometria e Álgebra, os quais fazem parte do currículo oficial de Matemática do Ensino Fundamental.

Este trabalho se constitui num estudo metodológico, de caráter qualitativo, com atividades de ensino e se caracteriza como uma pesquisa experimental, do tipo antes-depois, sem grupo de controle, aplicada à Educação, baseado no construtivismo de Jean Piaget para o ensino da Matemática.

Um diagnóstico inicial – Avaliação Diagnóstica Inicial – foi realizado com alunos da 8ª série do Ensino Fundamental e com alunos do 1° ano do Ensino Médio. As escolas com alunos da 8ª série que participaram desse primeiro diagnóstico foram uma de ensino estadual, Escola Estadual Desembargador Floriano Cavalcanti, e outra de ensino particular, que solicitou não ser identificada. Os alunos do 1° ano foram alunos de um curso técnico integrado do Centro Federal de Educação Tecnológica. Todas as instituições estão localizadas na cidade de Natal – Rio Grande do Norte. A aplicação desse diagnóstico teve como objetivo averiguar os conhecimentos prévios dos alunos com relação aos conceitos algébricos e geométricos a serem abordados no módulo de ensino. Os resultados obtidos nessa avaliação inicial subsidiaram a elaboração do módulo de ensino, utilizado na metodologia da pesquisa.

A intervenção metodológica foi realizada em duas turmas de 8ª série da Escola Estadual Desembargador Floriano Cavalcanti e seu desenvolvimento compreendeu a aplicação da avaliação diagnóstica inicial, o módulo de atividades de ensino e a avaliação diagnóstica final. A segunda avaliação – Avaliação Diagnóstica Final – foi usada como um instrumento de avaliação qualitativa que tem por objetivo verificar os resultados da aprendizagem dos conteúdos abordados na pesquisa, em decorrência da metodologia utilizada. Os dados coletados das respostas da segunda avaliação foram apresentados por estatística descritiva e analisados qualitativamente com base numa teoria de compreensão de conceitos matemáticos. Saliente-se que foram realizadas entrevistas de aprofundamento para melhor subsidiar a análise qualitativa das respostas das questões pesquisadas.

A análise dos dados coletados da intervenção metodológica – avaliação inicial, atividades de ensino e avaliação final – de modo geral, mostrou que os alunos assimilaram com relativa compreensão os conceitos abordados no módulo de ensino, apontando para uma diferença qualitativa na aprendizagem com relação às duas fases de avaliação da intervenção.

CAPÍTULO 1

CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O PRESENTE ESTUDO

1.1 Sobre o ensino de Geometria e Álgebra

O estudo dos conceitos geométricos constitui parte importante do ensino-aprendizagem de Matemática, pois propicia aos alunos desenvolver pensamentos que permitem compreender e descrever o mundo onde vivem (BRASIL, 1998) e facilitam a compreensão de questões tanto da matemática como de outras áreas do conhecimento.

Por volta dos anos 20, antes do Movimento da Matemática Moderna, a Geometria era apresentada através de manuais didáticos estanques, nos quais se esgotavam todos os conhecimentos sobre tal área, e caracterizava-se pelo ensino axiomático-dedutivo, com demonstrações rigorosas e sem nenhuma conexão com as outras áreas da Matemática. O ensino dos outros campos da matemática, Aritmética, Álgebra e Trigonometria, também era caracterizado pela sua forma enciclopédica, sem nenhuma articulação entre eles.

Com o advento do Movimento da Matemática Moderna, que no Brasil teve maior destaque por volta dos anos 60/70, a proposta de ensino era a unificação dos quatro campos da Matemática com o objetivo de promover uma maior articulação entre eles. A unificação desses campos se daria através da introdução das estruturas lógica, algébrica e topológica, enfatizando a teoria dos conjuntos. A proposta do movimento de modernização da matemática de algebrizar a Geometria terminou por frustrar-se, por vários motivos, dentre os quais, a própria falta de compreensão e preparação dos professores. Dessa forma, a Geometria, gradativamente, vai deixando de estar presente nos currículos escolares e passa a ser relegada a um segundo plano, havendo uma predominância dos temas algébricos (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992).

Desde o final da década de 70 e início da década de 80, o ensino de Matemática passou a ter novas características. Para a Educação Matemática, além dos aspectos cognitivos, os aspectos sociais, culturais, lingüísticos passaram a ter importância na aprendizagem matemática. Em decorrência desses aspectos, surgiram muitas propostas de "retorno" à Geometria.

No Brasil, a atenção de muitos educadores matemáticos voltou-se para tentar recuperar o ensino de Geometria em todas as séries da educação básica. Isso pode ser observado no número significativo de pesquisas realizadas a partir da década de 80, nas quais o ensino de Geometria é objeto de estudo de vários pesquisadores, bem como nas Propostas Curriculares de diversos estados do país e na reformulação dos livros didáticos de Matemática.

Ao contrário, em detrimento do interesse das pesquisas em Geometria, as pesquisas relacionadas ao ensino de Álgebra, nesse período, foram deixando de se destacar dentre os pesquisadores e educadores matemáticos. O ensino de Álgebra sofreu um "abandono", embora as informações algébricas estivessem fortemente presentes nos livros didáticos; há uma ausência de reflexão crítica sobre o seu ensino. Na maioria das vezes, os professores que trabalham com a Álgebra desenvolvem-na de forma mecânica e automatizada: o professor explica os conteúdos exemplificando os conceitos, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, símbolos e expressões, para depois avaliar os conhecimentos dos alunos, quer dizer, a capacidade de repetição dos alunos. (MIGUEL, FIORENTINI e MIORIM, 1992). Embora se observe que alguns autores de livros didáticos têm apresentado modificações na abordagem dos conceitos algébricos, ainda hoje o ensino de Álgebra é desenvolvido de forma mecanizada.

O ensino de conceitos algébricos é tradicionalmente introduzido, especificamente com o título de Álgebra, na 7ª série do Ensino Fundamental segundo os guias curriculares. Este ensino é iniciado com o estudo de Monômios e Polinômios onde se estabelecem as primeiras regras algébricas para lidar com símbolos. Entretanto, é na 6ª série do Ensino Fundamental que os alunos têm seu primeiro contato com letras para representar números no estudo das Equações do 1° grau. Nesta série os alunos iniciam as operações com letras e números em que estes são incógnitas em sentenças matemáticas que, muitas vezes, não fazem o menor sentido para os alunos.

Dados dos sistemas de avaliação estaduais e nacionais sobre a aprendizagem de conceitos algébricos mostram as dificuldades que os alunos têm em operar com expressões algébricas e sentenças matemáticas, demonstrando que mesmo os alunos concluintes do Ensino Fundamental ainda não têm habilidade com a manipulação de variáveis.

Segundo Mendes (1999) essa dificuldade em manipular expressões algébricas pode estar na própria evolução da notação algébrica. Para esta autora, a definição de Álgebra requer destacar duas fases: a Álgebra Antiga (elementar) que está associada ao estudo de equações e métodos de resolução, e a Álgebra moderna (abstrata), ligada ao estudo das estruturas matemáticas.

Ainda, segundo essa autora, a evolução da notação algébrica passou por três estágios: (i) o estilo retórico (verbal); (ii) o estilo sincopado e (iii) o estilo simbólico. O estilo retórico vem da álgebra babilônica em que os problemas algébricos resolvidos apresentavam os passos enumerados verbalmente. A matemática babilônica apresentava um caráter fortemente algébrico-aritmético, a forma geométrica de um problema era usada, muitas vezes, apenas para representar uma questão algébrica. Muitos dos problemas padrões resolvidos pelos babilônicos foram reestruturados pelos gregos, tendo como base uma interpretação geométrica

(BAUMGART, 1992). A álgebra geométrica grega também estava dentro do estilo retórico em que os passos da resolução eram enumerados verbalmente.

No estilo sincopado eram usadas algumas abreviações das palavras, o que deu início ao simbolismo. Nesse estilo pode-se destacar a principal obra de Diofante de Alexandria, *Arithmetica*, na Grécia por volta do ano 250 d.C., que era originalmente em treze livros, no entanto apenas os seis primeiros se preservaram (BOYER, 2003). Essa obra de Diofante não era um texto de álgebra, mas uma coleção de problemas de aplicação de álgebra. Nos seis livros preservados há um uso sistemático de abreviações para potências de números e para relações e operações. A representação para os sinais usados nas potências de x, x^2, x^3, ..., x^6 nos dias de hoje, eram indicados por símbolos diferentes: um número desconhecido era representado por ξ; o seu quadrado representado por Δ^γ, o cubo como K^γ, a quarta potência, dita quadrado-quadrado, como $\Delta^\gamma\Delta$, a quinta potência, dita quadrado-cubo, como $K\Delta^\gamma$ e a sexta potência ou cubo-cubo como $K^\gamma K$ (BOYER, 2003). A principal diferença entre a sincopação de Diofante e a notação algébrica de hoje se apresenta na falta de símbolos especiais para operações e relações. Os elementos que faltavam foram, em grande parte, a contribuição feita na Europa, do período do fim do século XV ao começo do século XVI.

Na primeira metade do século VXI surgiram na Europa, notadamente na Alemanha, importantes publicações sobre álgebra, sendo a mais importante de todas a *Arithmetica integra* de Michael Stifel (cerca de 1487-1567) por seu tratamento aos números negativos, radicais e potências. Mas, a publicação do livro *Ars magna*, por volta do ano 1545 pelo matemático Gerônimo Cardano (1501-1576) no qual ele apresentava solução para equações cúbicas e quárticas, é tomado como marco do início do período moderno na matemática, o estilo simbólico da álgebra (BOYER, 2003). Quando ele fez essa publicação era considerado o mais competente algebrista da Europa. O matemático François Viète (1540-1603) também fez importantes contribuições à álgebra, além da aritmética, trigonometria e geometria. Nos trabalhos de Viète houve a separação de tarefas manipulativos das resoluções e equações, e se passou a estudar as propriedades teóricas das equações (BAUMGART, 1992). Ele foi o primeiro matemático a introduzir a utilização das letras para representar quantidades conhecidas e desconhecidas.

Retomando a questão do ensino de Álgebra, observa-se que é comum os alunos apresentarem dificuldades na notação algébrica e erros nas operações com os termos. Um dos motivos disso ocorrer é que na notação dos estilos sincopado e simbólico os termos são bem diferenciados, o que não acontece com a simbologia atual (x^2, x^3, x^4, ..., x^6) onde os alunos olham apenas para o *x*, sem uma compreensão diferenciada dos termos com expoentes diferentes.

Outro ponto a ser observado é que, historicamente, o foco do desenvolvimento da álgebra elementar era a resolução de equações a partir de problemas, o que não acontece hoje, pois a introdução formal da Álgebra, como já exposto, se inicia com os estudos de monômios e polinômios na 7ª série, sem nenhuma relação com a resolução de equações, estudadas na série anterior, e muitas vezes sem nenhum recurso geométrico.

O estilo retórico babilônico se assemelha muitas vezes ao modo como alguns alunos resolvem um problema proposto, sem a utilização da representação simbólica da situação. A forma geométrica que os gregos utilizavam para resolver os problemas mostra uma importância da representação geométrica da álgebra, pois contribui para a compreensão do aluno de expressões do tipo x^2 (área de um quadrado de lado x) ou x^3 (volume de um cubo de lado x), de forma que possa evitar erros freqüentes como $3x^2 + x^3 = 4x^5$.

No Brasil, na década de 1980, uma concepção sobre o ensino de Álgebra usa recursos analógicos geométricos, isto é, visuais para justificar as passagens do transformismo algébrico. “Assim, pelo fato de tornar visíveis certas identidades algébricas, essa concepção seria didaticamente superior a outras formas de se ensinar álgebra.” (RODRIGUES NETO, 1998, p.38). Pode-se dizer que essa seria uma maneira de tentar contornar as dificuldades do aluno no transformismo da álgebra, na hora de resolver equações.

No que diz respeito às transformações — ou manipulações algébricas — que são feitas numa fórmula para se determinar o valor de uma variável (ou incógnita), pesquisas têm discutido, por exemplo, os aspectos da sintaxe e da semântica da álgebra. A exemplo desse tipo de pesquisa destaca-se Rodrigues Neto (1998). Outras pesquisas desenvolvidas sobre a aprendizagem de conceitos algébricos foram, por exemplo, Ribeiro (2003) e Nakamura & Franchi (2003). Essas três pesquisas estão apresentadas com mais detalhes no item a seguir.

1.2 Algumas pesquisas sobre a aprendizagem de conceitos algébricos e geométricos

Com relação às manipulações algébricas que são feitas numa fórmula para determinar o valor de uma variável, se pode destacar a pesquisa realizada por Rodrigues Neto (1998). Utilizando o ensino por atividades, com base em teoria construtivista, esse estudo teve como objetivo geral a obtenção de expressões algébricas por meio de um trabalho com figuras geométricas, focalizando o conceito de variável. Dentre os conceitos algébricos abordados destacam-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e os princípios de igualdade. No recurso a figuras geométricas é trabalhada a classificação de polígonos convexos, a escrita de expressões simbólicas para o perímetro de polígonos quaisquer e polígonos regulares, uma expressão para o perímetro do paralelogramo, uma expressão para a área do retângulo e a distributividade abordada através da área do retângulo. O estudo consistiu numa pesquisa experimental, com grupo de controle. A intervenção metodológica foi realizada com a aplicação das atividades de ensino, com fases de avaliação (pré-teste e pós-teste), aplicados a alunos de quatro turmas da 6ª série do Ensino Fundamental de duas escolas de metodologia de ensino tradicional, sendo uma pública e a outra particular, na cidade de Natal/RN.

De um modo geral, os resultados da pesquisa mostraram que, no primeiro momento de avaliação, pré-teste, os alunos apresentavam dificuldades na interpretação do texto das questões; apresentavam um baixo nível de compreensão sobre o processo de mensuração e os conceitos de unidade e a iteração da unidade; possuíam poucas habilidades referentes à classificação de figuras planas, de percepção de padrões e de generalização de regularidades geométricas.

As atividades de ensino compreenderam um estudo com figuras geométricas para obter expressões simbólicas sobre perímetro e área do retângulo. A área do retângulo foi usada como meio para alcançar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Na abordagem das atividades são utilizados vários materiais concretos. Após a aplicação das atividades de ensino, foi realizado o segundo momento de avaliação com a aplicação do pós-teste, cujo objetivo principal foi examinar o entendimento do aluno sobre o conceito de variável algébrica através de questões que abordem expressões simbólicas sobre medição de comprimentos, perímetro de polígonos e área do retângulo. Nas questões sobre perímetro e área do retângulo foram estudadas as operações com variáveis (adição e multiplicação), a distributividade e os princípios da igualdade.

De modo geral, os resultados do pós-teste mostraram que: não houve diferença significativa com relação à aprendizagem dos alunos segundo o tipo de escola; houve uma diferença significativa a favor da metodologia aplicada nos grupos experimentais; os alunos demonstraram habilidade para interpretar e representar simbolicamente perímetro e área de figuras geométricas; que a distributividade foi parcialmente alcançada como conseqüência de interpretação algébrica sobre uma representação geométrica.

Sobre o aspecto da escrita de expressões algébricas a partir da percepção de padrões geométricos, destaca-se a pesquisa de Nakamura & Franchi (2003). As autoras buscaram a compreensão dos procedimentos utilizados pelos alunos no processo de generalização de padrões aritméticos e geométricos, tomados como um meio de construção de expressões algébricas significativas. O estudo consistiu da avaliação de uma proposta de ensino que foi desenvolvida na 8ª série do Ensino Fundamental numa escola particular da cidade de São Paulo/SP. Nessa proposta buscou-se favorecer um processo articulado de composição de diferentes padrões figurativos para uma mesma figura e de construção de expressões aritméticas, que descrevessem esses padrões conduzindo a uma generalização dos padrões em expressões algébricas (NAKAMURA & FRANCHI, 2003). A metodologia baseou-se em questões propostas como problemas a resolver e realizados em grupos. As atividades propostas foram caracterizadas como: (i) atividades introdutórias à generalização de padrões geométricos; (ii) atividades e generalização de padrões geométricos; (iii) atividades de fixação e (iv) uma atividade de verificação de desempenho individual.

Foram utilizadas representações intermediárias para favorecer o processo de generalização de padrões numéricos/geométricos, tais como: construção de padrões geométricos com o uso de peças retangulares de cartolina e tabelas com indicação numérica da posição da figura da seqüência e a expressão aritmética correspondente ao padrão.

Na análise dos dados foram considerados os seguintes veios: (i) percepção de um padrão na formação da seqüência e representação figurativa desse padrão; (ii) passagem da representação figurativa para a representação numérica e construção da expressão algébrica; (iii) produção de expressões algébricas e equivalência entre essas expressões (NAKAMURA & FRANCHI, 2003).

As autoras observaram que na produção dos alunos alguns grupos obtiveram padrões eficazes e padrões ineficazes, em que, neste último, os alunos não conseguiram generalizar por meio de expressões aritméticas. Foram constatados erros de natureza sintática como, por exemplo, o não uso de parênteses na construção das expressões aritméticas que descreviam os padrões figurativos, o que acarretou erros na construção das expressões algébricas. As autoras constataram, também, que alguns erros manifestados no início das atividades se mostraram persistentes, tais como o uso da relação de recorrência como regra geral de formação de seqüências, a não validação das expressões construídas e os erros de natureza sintática.

A respeito dos erros cometidos pelos alunos em questões de Álgebra, destaca-se a pesquisa de Ribeiro (2003). Em sua pesquisa de Mestrado, realizada em 2001, ele analisou o baixo desempenho dos alunos da 8ª série sobre as questões de Álgebra aplicadas no SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, edição 1997). O objetivo de sua pesquisa foi identificar e analisar os procedimentos e estratégias dos alunos e os erros mais freqüentes cometidos por eles, buscando identificar possíveis causas para os erros mais freqüentes.

A metodologia utilizada foi, num primeiro momento, aplicar as mesmas questões sobre Álgebra da avaliação do SARESP 1997 numa amostra de 20 alunos da rede pública estadual de São Paulo. Num segundo momento, os alunos trabalharam em grupos, com a intervenção do pesquisador com questionamentos sobre os procedimentos adotados, para resolver questões abertas semelhantes àquelas aplicadas na etapa anterior.

Nesse artigo (RIBEIRO, 2003) o autor selecionou uma questão do teste do SARESP, correspondente à primeira fase da pesquisa, e duas questões abertas da segunda fase que foram elaboradas a partir da questão da primeira fase. A questão do teste do SARESP consistia em verificar qual das equações dadas nas alternativas tinha como solução o número fornecido no enunciado. As duas questões abertas elaboradas para a segunda fase tinham com o objetivo verificar se os alunos compreendiam o que significa um número ser solução de uma equação e o quanto eles dominavam a técnica de resolução de equações do 1° grau.

Na análise das respostas dos alunos nas duas questões abertas da segunda fase, escolhidas para o referido artigo, Ribeiro identificou, com base na pesquisa de Cortés & Kavafian (1999, *apud* RIBEIRO, 2003) sobre a classificação dos erros que ocorrem no trabalho com álgebra, que os alunos ao resolverem as equações apresentaram erros na escrita de uma nova equação, ou seja, a passagem de uma equação para outra equivalente, utilizando os princípios de equivalência, e erros de cálculos numéricos como, por exemplo, operar com frações de denominadores diferentes e simplificação incorreta de frações.

1.3 Alguns pontos comuns com as abordagens discutidas

As três pesquisas apresentadas acima, apesar de enfoques diferentes, têm pontos em comum entre si e com o presente estudo. Nas duas primeiras pesquisas, Rodrigues Neto (1998) e Nakamura & Franchi (2003) utilizam recursos geométricos para obter expressões simbólicas, sendo na primeira pesquisa expressões para perímetro e área de polígonos, e na segunda, expressões simbólicas para padrões geométricos. Outro ponto comum entre essas duas pesquisas é a abordagem por meio de atividades de ensino e a mediação do pesquisador(a) no processo de aplicação das atividades. Na análise dos dados do estudo, foram observados pelos pesquisadores das duas pesquisas que os alunos cometiam erros na escrita das expressões ou na manipulação algébrica de expressões, erros identificados da sintaxe da álgebra. Alguns desses erros também foram identificados na pesquisa de Ribeiro (2003) sobre a resolução de equações do 1° grau.

O presente estudo tem pontos em comum com essas pesquisas, mas também apresenta diferenças. Um objetivo comum entre as abordagens das duas primeiras pesquisas é o recurso a processos geométricos para a obtenção de expressões simbólicas para o perímetro e área de alguns polígonos convexos. Além disso, o presente estudo estende-se para a obtenção das fórmulas do comprimento da circunferência e da área do círculo, que não são figuras poligonais, o que diferencia das pesquisas citadas. Outros aspectos comuns são as manipulações algébricas da fórmula da área do retângulo e o trabalho com as propriedades da igualdade e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, presentes na pesquisa de Rodrigues Neto (1998); sendo que, no presente estudo, essa manipulação algébrica estende-se à fórmula da área do trapézio para obter outra variável que não seja o valor da área.

Quanto à metodologia empregada, o presente estudo também foi desenvolvido utilizando as atividades de ensino como método para atingir os conteúdos pretendidos, com intervenção direta da pesquisadora, o que também está presente nas duas primeiras pesquisas (RODRIGUES NETO, 1998 e NAKAMURA & FRANCHI, 2003), baseada em teoria construtivista para o ensino de Matemática, a exemplo da pesquisa de Mestrado (SOUZA, 2003).

Um outro aspecto em comum é com relação à pesquisa de Ribeiro (2003) sobre a identificação dos possíveis erros cometidos pelos alunos na resolução de equações do 1° grau; este aspecto poderá ser observado na manipulação algébrica da fórmula da área do trapézio, que não foi objeto da referida pesquisa, pois o pesquisador tratou de equações do 1° grau sem recurso algébrico.

1.4 Delimitação do estudo

No que diz respeito ao Ensino de Geometria e, particularmente, com interesse no estudo sobre área de polígonos convexos, notadamente as deduções das fórmulas, foi desenvolvido um trabalho de Mestrado, na linha de Pesquisa em Educação Matemática do PPGEd da UFRN. Esse trabalho consistiu numa pesquisa metodológica para o ensino-aprendizagem das fórmulas de área desses polígonos com alunos da 8ª série do Ensino

Fundamental de uma escola pública estadual em Natal/RN, com base num ensino construtivo (SOUZA, 2003).

Para proporcionar elementos visando a elaboração do módulo de ensino foi aplicada, inicialmente, uma Avaliação Diagnóstica com o objetivo de investigar os conhecimentos dos alunos sobre assuntos que foram considerados importantes para realizar a abordagem pretendida. Essa avaliação continha perguntas sobre conteúdos de Geometria, que fazem parte do currículo oficial de Matemática para as séries do Ensino Fundamental.

A análise das respostas obtidas na Avaliação Diagnóstica naquela pesquisa mostrou, em resumo, que os alunos não dominavam os conhecimentos básicos sobre propriedades de quadriláteros e triângulos, conceito de perímetro e área e aplicação de fórmulas de área. Foi observado, também, que a maioria dos alunos apresentou dificuldades na interpretação do texto dos problemas e falta de habilidade para resolvê-los.

Nessa pesquisa de Mestrado, foi utilizado o ensino por atividades como opção metodológica, com base num ensino construtivo foi visada, principalmente, a obtenção das fórmulas de área dos principais polígonos convexos (retângulo, quadrado, paralelogramo, losango, trapézio e triângulo). Nesse sentido, foram usados malha quadriculada para percepção de padrões de regularidades, e, os processos de decomposição-composição e completamento de alguns polígonos para obter outras figuras e deduzir as fórmulas pretendidas. Usou-se nas atividades materiais para o ensino de geometria, dentre outros recursos.

Um dos objetivos desse trabalho foi verificar o entendimento do aluno sobre o caráter funcional entre as variáveis da fórmula para a área do retângulo.

As atividades de ensino foram elaboradas tendo em vista: nivelar os conhecimentos dos alunos sobre esses assuntos, detectados como insuficientes na Avaliação Diagnóstica; e, promover o ensino-aprendizagem das fórmulas de área, propriamente dito. O campo numérico das atividades foi o conjunto dos racionais absolutos (Q_+).

Uma análise qualitativa dos dados coletados na intervenção metodológica, os quais foram categorizados segundo a teoria de Skemp (1980) sobre compreensão de conceitos matemáticos pelo sujeito cognoscente, de modo geral, validou a pesquisa quanto aos seus propósitos. Não obstante, novos problemas foram identificados, como discutidos a seguir.

As observações feitas durante a realização da Intervenção Metodológica e a análise dos dados obtidos no Pós-teste, ambas de caráter qualitativo, mostraram que os alunos tiveram dificuldades, ou falta de habilidade:

(i) Na interpretação do texto das atividades;

(ii) No manuseio dos instrumentos de geometria (régua, esquadros e transferidor);

(iii) Na representação simbólica de expressões matemáticas para perímetro e área dos polígonos se, pelo menos, um dos elementos (variável) da fórmula fosse desconhecido.

Outra observação relevante foi o uso incorreto da sintaxe da álgebra como, por exemplo, manipulações algébricas incorretas das fórmulas de área; a falta de parênteses e desconhecimento da utilização das propriedades da igualdade nas fórmulas.

Esse aspecto foi identificado, principalmente, na manipulação da fórmula da área *A* do trapézio, dada por $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$, sendo *B* e *b* as medidas das bases e *h* a medida da altura. Acredita-se que essa fórmula gerou mais dificuldade por apresentar mais variáveis (área *A*, bases *B* e *b* — maior e menor — e altura *h*) do que as fórmulas das áreas do paralelogramo e triângulo, por exemplo, e por possuir, em sua fórmula, duas operações (adição e multiplicação) relacionando as variáveis base e altura.

Nas duas questões do pós-teste relacionadas à fórmula de área do trapézio — cujos objetivos eram, num caso, encontrar o valor da altura (*h*) sendo dadas outras variáveis (*A*, *B* e *b*), e, noutro caso, deduzir a fórmula da área pela decomposição do trapézio em dois triângulos —, foram observados os seguintes erros: escrita incorreta da fórmula da área do trapézio, por exemplo: $\frac{(B\cdot b)\cdot h}{2}$; falta do sinal de igualdade (=) na fórmula; manipulação algébrica incorreta da fórmula para encontrar a altura *h*; e falta do uso dos parênteses no caso da distributividade em $\frac{B+b\cdot h}{2}$. Os erros conferidos demonstram que os alunos têm dificuldades com as regras da álgebra e desconhecem os princípios da igualdade. Além disso, também não demonstraram conhecer a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição que, como outras propriedades, é importante no processo de desenvolvimento da referida fórmula.

As observações acima conferiram ao trabalho de mestrado um caráter de continuidade, pois levantou outras questões sobre o ensino de matemática que vão além dos objetivos das que foram pesquisadas. Este fato exigiu um aprofundamento das discussões acima: do conteúdo matemático passando por propriedades dos números e das regras de operações algébricas, no sentido do formalismo da linguagem, e pela questão do método. Com a idéia de promover alternativas metodológicas para uma relação ensino-aprendizagem que resolva, de modo satisfatório, os problemas acima discutidos, buscando desenvolver no aluno autonomia com problemas de álgebra para o ensino em questão, a discussão foi aprofundada na pesquisa em nível de Doutorado, realizando um estudo sob o ponto de vista das manipulações algébricas, tomando a pesquisa já realizada como ponto de partida. Nesse sentido, são retomadas as fórmulas de área do triângulo e de três quadriláteros: o retângulo, o paralelogramo e o trapézio, também estudados na pesquisa anterior, acrescentando-se a escrita de expressões simbólicas para o perímetro de diferentes retângulos. Além disso, se buscou desenvolver a pesquisa do ponto de vista das manipulações algébricas das fórmulas de área do retângulo de do trapézio, e a obtenção das fórmulas do comprimento da circunferência e do círculo, ampliando seu domínio para o campo numérico dos números reais absolutos ($\Re_+$).

Um trabalho de ensino-aprendizagem sobre obtenção e manipulação de expressões simbólicas compreende, obviamente, o uso do formalismo da álgebra com suas regras de linguagem e seu simbolismo próprio. Para aprender e manobrar expressões algébricas o aluno tem que, de preferência, construí-las com entendimento e dominar suas regras de operação. Em relação às construções de algumas expressões algébricas usando geometria, acredita-se ter alcançado um relativo sucesso no perímetro e área de retângulos e área do triângulo. A parte sobre o manuseio das expressões é um objetivo a ser alcançado nesse estudo. A exemplo do primeiro trabalho, este também comporta o uso de materiais de ensino, embora tenha um caráter mais formal sobre o uso da linguagem simbólica. Assim, o trabalho também se apoiará em Dienes (1974), além das pesquisas de Rodrigues Neto (1998) que abordam o assunto, dentre outros pesquisadores.

Além do trabalho acima discutido, este estudo amplia o campo de interesse na abordagem dos conteúdos matemáticos, e se estende para a obtenção das fórmulas do perímetro e da área de polígonos regulares (notadamente hexágono regular), ultrapassando as limitações do estudo anterior quanto às formas geométricas estudadas, que ficou restrita aos polígonos de três e quatro lados. Os polígonos regulares são figuras geométricas inscritíveis no círculo. Um polígono regular pode ser decomposto em triângulos isósceles e se permite a um tratamento em vários níveis de concreto (físico, representado simbolicamente e abstrato) sobre as grandezas, área e perímetro.

O estudo da área dos polígonos regulares, tanto do ponto de vista prático como teórico, permite obter aproximações para a área do círculo fazendo-se uma adaptação metodológica do processo de Arquimedes para a área dessa figura. Dessa forma seria possível desenvolver processos de cálculo para a área do círculo e, também, para o comprimento da circunferência, em diferentes níveis de dificuldade (ou sofisticação).

O interesse pela realização de um estudo sobre obtenção da fórmula do comprimento da circunferência e da área do círculo, que faz parte do currículo de Matemática para a 8ª série, se justifica pela própria forma geométrica dessa figura, uma vez que o cálculo da sua área apresenta dificuldades de entendimento pelos alunos.

Foram observadas em dois livros didáticos, Sangiorgi (198-) e Imenes e Lellis (2002), as abordagens dadas por esses autores sobre a fórmula do comprimento da circunferência e da área do círculo. A escolha destes livros se justifica pelo fato de, o primeiro, Sangiorgi (198-), ser um livro do final do Movimento da Matemática Moderna e o segundo, Imenes e Lellis (2002), ser um livro mais recente.

Sangiorgi (198-, p. 159), em seu livro de 5ª série, usa um processo experimental para obter a fórmula do comprimento da circunferência, que consiste em obter, na prática, a medida do comprimento do contorno de uma roda de bicicleta, com um barbante e uma régua, e dividir a medida encontrada pela medida do diâmetro da roda, encontrando um quociente aproximado de 3,14... (figura 1).

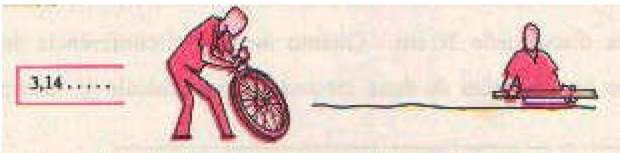


Figura 1

Em seguida, o autor apresenta a fórmula geral (figura 2) e faz algumas considerações sobre o valor de *pi* (3,14) usado na prática (SANGIORGI, 198-, p.159):

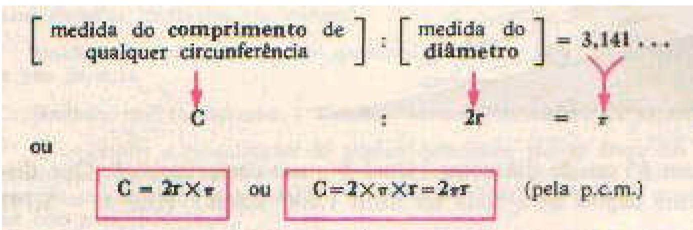


Figura 2

Ainda no livro da 5ª série, o autor usa um processo de aproximação para a área do círculo que consiste no seguinte: inscreve-se um círculo num quadrado, o qual é subdividido em quatro quadrados iguais através dos diâmetros perpendiculares do círculo (figura 3). A idéia é comparar a área do círculo com a dos quatro quadrados, concluindo-se que a área do círculo é, mais ou menos, *3,1...* vezes a área do quadrado menor de lado *r* e pode ser expressa como 3,1...× r² (figura 4). Depois, o autor apresenta a fórmula $A = \pi r^2$ e propõe exercícios como “aplicações práticas” (SANGIORGI, 198-, p. 171).

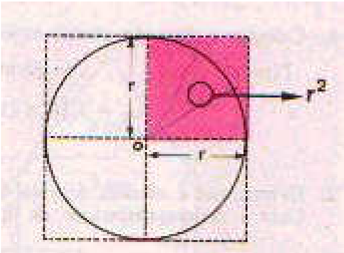


Figura 3

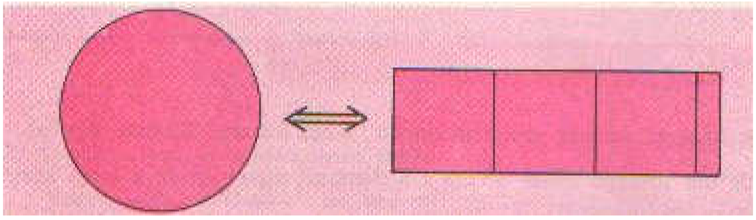


Figura 4

Os autores Imenes e Lellis (2002) tratam do comprimento da circunferência, no livro da 7ª série, por um processo experimental análogo ao abordado por Sangiorgi (198-): contornando com um barbante uma circunferência desenhada, medindo o comprimento do barbante e dividindo esse comprimento pela medida do diâmetro *d*, obtem-se o valor desse quociente, e encontra-se uma fórmula para o perímetro *p* da circunferência, $p \approx 3{,}1 \cdot d$. Estende a validade da fórmula, para toda circunferência, justificando que duas circunferências são sempre semelhantes, dessa forma aumentar o diâmetro faz o perímetro aumentar na mesma proporção. Ressalta que a constante encontrada é denominada de π (*pi*).

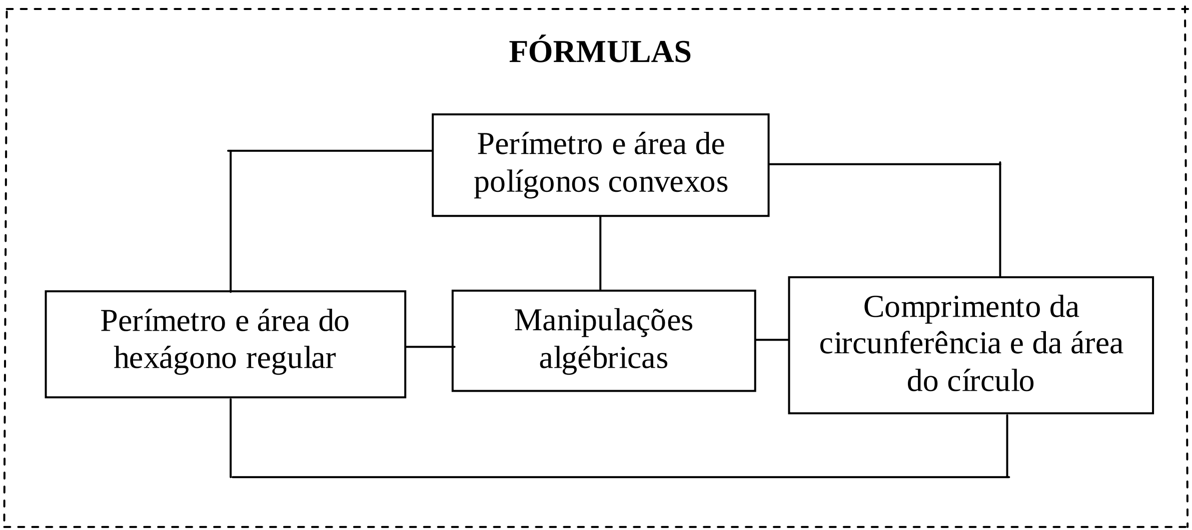
Os procedimentos utilizados pelos autores dos dois livros para obtenção da fórmula do comprimento da circunferência são processos experimentais que nem sempre são viáveis para a generalização de uma situação.

O comprimento da circunferência é retomado no livro da 8ª série juntamente com a fórmula para a área do círculo. É feita uma aproximação do valor de π utilizando o perímetro de hexágonos inscrito e circunscrito a um círculo de diâmetro *d*. Os autores ressaltam que, quanto maior o número de lados do polígono inscrito e circunscrito, melhor será a aproximação de π. Esse mesmo processo é usado para obter a fórmula da área do círculo, partindo de quadrados inscrito e circunscrito a um círculo de raio *r*.

A abordagem adotada pelos autores em seus livros nos permite observar que: para a compreensão da obtenção da fórmula do comprimento da circunferência, a necessidade de recorrer a um processo experimental foi característica dos dois autores, enquanto que para obtenção da fórmula da área do círculo o processo utilizado pelos autores foi mais intuitivo, não recorrendo a um processo experimental. Isso confirma que o tratamento para a área do círculo exige uma maior abstração por parte do aluno para entender o processo de dedução dessa fórmula.

A questão que norteia o presente estudo é “de que maneira a metodologia de ensino por atividades, utilizando princípios da teoria construtivista, pode contribuir com o aluno para chegar a generalizações de forma gradativa e com compreensão?”. Para responder a essa questão, o estudo se inicia pela obtenção e manipulação de fórmulas para perímetro e área de polígonos, até chegar à obtenção do comprimento da circunferência e da área do círculo.

Nesse sentido, a proposta é desenvolver um estudo baseado no ensino por atividades (DIENES, 1974), tendo em vista que, na pesquisa de Mestrado, os resultados mostraram que a metodologia de ensino-aprendizagem utilizada promoveu a construção das fórmulas de área, atingindo os objetivos estabelecidos para a pesquisa, reafirmando os princípios da teoria construtivista. O Esquema 1, a seguir, está apresentando a ligação estabelecida entre os conteúdos abordados nesta pesquisa.



Esquema 1

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo Geral

Desenvolver um estudo sobre a escrita de expressões simbólicas para o perímetro e a área de alguns polígonos convexos, estendendo-se para a obtenção das fórmulas do comprimento da circunferência e da área do círculo, a partir da fórmula do perímetro e da área do hexágono regular, através da aplicação de um módulo de atividades de ensino, com base num ensino construtivo.

1.5.2 Objetivos Específicos

Para que o objetivo geral seja alcançado, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

(i) Identificar possíveis dificuldades apresentadas pelos alunos no manuseio de instrumentos de desenho geométrico na construção do quadrado e do hexágono regular inscritos na circunferência;

(ii) Detectar obstáculos cognitivos à aprendizagem dos conceitos, objetos desse estudo, e possíveis dificuldades de compreensão das atividades propostas;

(iii) Averiguar a aceitação, por parte dos alunos, do método utilizado, ou seja, verificar se o aluno desenvolveu uma afetividade positiva para com o método.

1.6 Pressupostos teóricos

1.6.1 O referencial teórico de ensino

A aplicação e desenvolvimento das atividades de ensino na intervenção metodológica do presente estudo tem como referencial teórico o Construtivismo, o qual tem suas origens nos trabalhos e pesquisas de Jean Piaget (1896-1980) e seus colaboradores.

O Construtivismo, ao contrário do ensino tradicional que se baseia na transmissão direta do conhecimento do professor para o aluno, tem como base que o conhecimento é derivado da experiência, ou seja, que o conhecimento é estruturado pela atividade mental do aluno apoiado nas experiências do trabalho.

A concepção sobre o ensino de matemática que apresenta a supervalorização da teoria em detrimento à prática tem sua origem no pensamento grego, notadamente em Platão (século

IV a.C.). Para Platão o mundo da realidade concreta nada mais era senão um mundo de aparências. Os objetos do mundo físico seriam representações imperfeitas das entidades verdadeiramente reais que estariam no mundo das Formas ou Idéias, estes seriam os modelos ideais dos objetos ou das situações e existiam independentemente da percepção sensível. O homem para alcançar esse mundo das Formas só poderia, para Platão, por meio da razão. O conhecimento do mundo inteligível — onde estaria os verdadeiros objetos — possibilitaria à compreensão de todo o resto. Dessa forma, Platão vê na Matemática um papel fundamental nesse processo, pois para ele os entes matemáticos têm uma existência objetiva, que estão fora da mente dos matemáticos, mas que também não se encontram no mundo empírico (MACHADO, 2001).

Foi com Platão que surgiu a primeira proposta de inserir o estudo da Matemática desde o nível elementar, na educação grega, e não apenas no ensino superior, como acontecia até então.

O estudo da Matemática no nível elementar seguia a idéia das escolas dos escribas egípcios: as crianças deveriam estudar os primeiros conhecimentos matemáticos através de problemas práticos retirados da via e dos negócios. Mas, esses estudos não deveriam ficar apenas na sua aplicação prática, Platão via na Matemática "uma virtude formadora mais profunda" (MARROU, 1975 *apud* MIORIM, 1998). Para os outros níveis seriam feitas seleções dos mais "bem-dotados", que se formariam os futuros filósofos e governantes. Estes estudariam a Matemática profundamente, de modo totalmente racional, sem nenhum vestígio de experiência sensível. Dessa forma, seria a Matemática que definiria os "espíritos mais talentosos", apresentando-se, pela primeira vez, como o elemento fundamental para a "seleção dos melhores" (MIORIM, 1998).

O ensino de Matemática passou por grandes reformas ao longo do tempo, mas ainda privilegiava seu caráter nobre, com todo seu simbolismo. A partir do final da década de 70 e início da década de 80, o ensino de Matemática passou a ter novas características, além dos aspectos cognitivos, os aspectos sociais, culturais, lingüísticos passaram a ter importância na aprendizagem matemática. Surgiu então a Educação Matemática, uma disciplina autônoma que visa contribuir para o ensino da matemática desenvolvendo pesquisas em diversos campos. Uma das preocupações dos educadores matemáticos era, e continua sendo procurar formas de possibilitar que os alunos desenvolvam uma capacidade matemática.

As pesquisas desenvolvidas para o ensino da matemática tiveram forte influência da Psicologia. A Psicologia, na imagem de muitos pesquisadores, procurou conhecimentos que ajudassem a compreender a aprendizagem matemática. Desses estudos se destacaram duas grandes escolas de pensamento: a aprendizagem por *associação*, na qual a aprendizagem matemática efetua-se através de associações ou conexões entre estímulos e respostas; e a aprendizagem *cognitiva*, que vê a aprendizagem como uma reorganização de percepções. A primeira teve como principais representantes Thorndike e Skinner, enquanto que, na segunda o seu maior representante foi Jean Piaget (MATOS & SERRAZINA, 1996).

Piaget aborda o tema **aprendizagem** fazendo uma íntima conexão com o desenvolvimento cognitivo. Ele concebe o desenvolvimento cognitivo como uma sucessão de estágios e sub-estágios caracterizados pela forma em que os esquemas, de ação ou conceptuais, se organizam formando estruturas. Cada um dos estágios marca o início de uma etapa de equilíbrio, uma etapa de organização das ações e operações do sujeito, através de uma estrutura lógico-matemática. O conhecimento é visto como uma estrutura flexível de conceitos e relações entre conceitos, a qual vai evoluindo de acordo com a experiência de vida de cada indivíduo.

Em seus estudos e pesquisas, Piaget estabeleceu uma distinção fundamental entre três tipos de conhecimentos, segundo suas fontes básicas e sua estruturação: conhecimento físico, conhecimento lógico-matemático e conhecimento social (ou convencional) (KAMII, 2002).

O conhecimento físico é o conhecimento dos objetos de uma realidade externa. O tamanho e espessura, por exemplo, são características físicas observáveis nos objetos na realidade externa. Já o conhecimento lógico-matemático consiste na coordenação de relações, feita internamente. Para Piaget, em sua teoria, a abstração da espessura de um dado objeto, que é uma propriedade, é diferente da natureza da abstração de estabelecer relações como igual, diferente ou maior, por exemplo. Por fim, o conhecimento social é o conhecimento transmitido pela sociedade como regras, leis, normas, definições, *etc*. Assim, Piaget reconhecia fontes internas e externas do conhecimento.

Para a abstração das propriedades a partir dos objetos, Piaget utilizou o termo abstração empírica (ou simples), para a construção de relações entre os objetos, ele usou o termo abstração reflexiva.

Nas palavras de Piaget designou-se por **abstração empírica** “a que se apóia sobre os objetos físicos ou sobre os aspectos materiais da própria ação, tais como movimentos, empurrões, etc.”, enquanto que a **abstração reflexiva** “apóia-se sobre as atividades cognitivas do sujeito (esquemas ou coordenações de ações, operações, estruturas, etc.), para delas retirar certos caracteres e utilizá-los para outras finalidades (novas adaptações, novos problemas, etc.)” (PIAGET, 1995). Quando o sujeito está observando um objeto e focaliza certa propriedade desse objeto e a identifica, como a cor verde, por exemplo, ele está abstraindo essa característica que está no objeto; mas quando o sujeito compara um objeto de cor verde com outro de cor amarela, por exemplo, e identifica uma diferença entre eles, esta diferença não está nos objetos, mas na mente do sujeito que estabeleceu a relação entre os dois objetos, quer dizer, a abstração da relação de diferença entre os objetos é interna. É o sujeito quem estabelece as relações. As propriedades sobre as quais se refere a abstração empírica já existiam no objeto antes mesmo de qualquer constatação por parte do sujeito.

Tendo feito a distinção entre esses dois tipos de abstração, Piaget ressalta que, no âmbito da realidade psicológica do sujeito, essas abstrações coexistem, ou seja, não é possível que uma das duas abstrações exista sem a presença da outra. Não é possível, por exemplo, o sujeito estabelecer a relação de "maior que" se não observar essa propriedade de desigualdade entre os objetos. Da mesma forma, o sujeito não poderia construir o conhecimento físico se não tivesse uma estrutura lógico-matemática que lhe possibilitasse estabelecer relações com o conhecimento já existente.

A preocupação de Piaget era com a construção do conhecimento e a formação de habilidades, não com as questões relacionadas à educação de crianças no nível ensino-aprendizagem. No entanto, o resultado de suas pesquisas proporcionou uma ampla resposta, respaldada por um considerável suporte empírico, ao problema de como se constitui o conhecimento científico e suas idéias enriqueceram e renovaram o pensamento pedagógico contemporâneo.

A teoria construtivista na educação teve origem nas idéias dos trabalhos de Piaget. O Construtivismo tem como base dois princípios: (i) que o conhecimento é ativamente construído pelo sujeito cognoscente e não passivamente recebido do meio, e (ii) conhecer é um processo de adaptação que organiza o mundo derivado da experiência do sujeito, e não de um mundo independente, exterior à mente do sujeito. Nesse processo a estrutura lógico-matemática está presente todo o tempo.

Relacionando-se ao ensino-aprendizagem, no ensino tradicional é acentuada a transmissão direta do saber do professor para o aluno, a aprendizagem é tida como uma impressão na mente dos alunos das aulas apresentadas; enquanto que no ensino baseado na teoria construtivista, ensinar é muito diferente de treinar, ou seja, não existe transmissão de conhecimento do professor para o aluno, este último é ator na construção de seu conhecimento. As aulas de matemática, no ensino tradicional, se constituem em explanações sobre temas do programa de matemática, ou qualquer outra disciplina, onde o professor é o detentor do conhecimento e, para ensinar bem, basta dominar a matéria, o erro é tido como uma incapacidade do aluno de assimilar o conteúdo exposto.

Ao contrário do ensino tradicional, as aulas na teoria construtivista mostram uma constante interação entre o conhecimento, o aluno e o professor. Dentro dessa interação, o aluno pode apresentar concepções erradas sobre o conteúdo que está sendo abordado e essas concepções podem fornecer um caminho para o pensamento do aluno, cabendo ao professor saber identificar essas concepções, corrigí-las e usá-las para ajudar o aluno a construir seu próprio conhecimento (FOSSA, 2001). Essa nova postura do professor, enquanto mediador do conhecimento e não seu detentor único, implica que o professor tem apenas o conhecimento indireto sobre as construções do aluno, constatando que cada aluno tem diferentes tempos e ritmos de aprendizagem.

Em relação ao ensino de matemática, as teorias de Piaget sobre a aprendizagem de conceitos matemáticos modificaram toda uma estrutura de concepção sobre seu ensino. Para que o ensino de matemática alcançasse os objetivos propostos pela teoria construtivista, ou seja, uma construção de conceitos com compreensão, dando ao aluno habilidades e conhecimentos úteis que o preparasse para a resolução de problemas diários, foi necessária a utilização de uma metodologia que valorizasse os conhecimentos dos alunos e a ação do professor (MENDES, 2006).

No ensino de matemática, o construtivismo delineia a função do professor como aquele que estabelece o ambiente matemático. Dessa forma, a construção do conhecimento matemático depende das situações que o aluno deve vivenciar para trabalhar suas construções. O uso de materiais manipulativos em atividades estruturadas, principalmente nas séries iniciais, pode gerar um ambiente cognitivo rico, onde os alunos podem estabelecer relações entre o observável e as construções já existentes em suas mentes.

1.6.2 O ensino por atividades

O ensino de Matemática por meio da utilização de tarefas ou instruções que são dadas aos alunos para conduzir à construção de um conceito, vem sendo adotada em alguns livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental como, por exemplo, Bigode (2000), Imenes & Lellis (2002) e Dante (2002). Nestes livros, esse tipo de abordagem é trazida em seções inseridas no texto ou, algumas vezes, separadas do texto após os exercícios, e podem se apresentar como um jogo, ou instruções que levam o aluno, na maioria das vezes, a utilizar material concreto, ou instrumentos de desenho geométrico ou, ainda, levam-no o a observar algumas regularidades em padrões geométricos para que possam chegar, através da atividade, a uma conclusão sobre a aplicação de um conceito ou dedução de alguma fórmula. A maioria das atividades são organizadas para que o aluno trabalhe em grupo com outros colegas, de forma a promover uma discussão sobre a atividade desenvolvida. Segundo esses autores, suas coleções foram elaboradas para contemplar os princípios norteadores dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e promover uma aprendizagem matemática de modo construtivo, levando os alunos a uma reflexão sobre os conceitos aprendidos.

O ensino de Matemática por atividades foi tratado por Dienes (1974), como ensino de conceitos aritméticos, algébricos e geométricos, dando maior enfoque aos conceitos algébricos. A teoria de Dienes defende que o sujeito (aluno) deve vivenciar um número de experiências variadas, que possuam a mesma estrutura conceitual, para que os conceitos matemáticos sejam aprendidos. Na sua teoria de ensino ele defende quatro princípios para o aprendizado da Matemática (DIENES, 1974, p.41):

(i) Princípio Dinâmico – Devem ser apresentados jogos preliminares, estruturados e de prática, como experiências necessárias das quais os conceitos matemáticos poderão ser construídos.

(ii) Princípio da Construtividade – Nos jogos estruturados a construção deve preceder a análise, a qual está ausente nas crianças com menos de 12 anos.

(iii) Princípio da Variabilidade Matemática – Os conceitos que envolvam variáveis devem ser aprendidos por meio de experiências com maior número de variáveis, para que se possa focalizar o que é realmente constante.

(iv) Princípio da Variabilidade Perceptiva – Para se atingir o maior número de diferenças individuais na formação dos conceitos, tanto quanto possível induzir a percepção da criança para a essência matemática de uma abstração, a mesma estrutura conceptual deve ser apresentada em diferentes tipos de situações.

De acordo com tais princípios a criança deve vivenciar uma quantidade de situações concretas por meio de diferentes tarefas, mas que tenham a mesma estrutura conceptual, antes de abstrair as qualidades de uma situação matemática para formar o conceito. Quanto à estrutura das tarefas, essas devem ser montadas construtivamente. As tarefas analíticas devem ser introduzidas gradualmente, contanto que já exista uma construção matemática, por parte do aluno, para que haja o que analisar. Esse pesquisador defende também que não se deve passar de um tipo de tarefa para outro sem que todos os alunos já tenham alcançado os objetivos da primeira.

Toda a teoria desenvolvida e aplicada por Dienes é fundamentada nas pesquisas de Piaget, no trabalho de Bruner e nas obras de Bartlett, pesquisadores que se preocuparam em estudar como se dava a formação do conceito pela criança e como as diferenças individuais interferiam nas situações de aprendizagem.

Outro pesquisador que desenvolveu um modelo de ensino por meio de atividades foi Dokweiller (1992, apud RODRIGUES NETO, 1998, p. 28-29). Segundo o modelo desenvolvido por ele, existem três etapas de aprendizagem das atividades de ensino que devem ser consideradas:

(i) Atividades de desenvolvimento, que se relacionam com o meio físico/visual de representação do conceito matemático. Essas atividades são as que permitem que o aluno entre em contato com um conceito matemático e se familiarize com os termos que descrevem o próprio conceito. De acordo com o autor, "a compreensão básica de um conceito dá início ao processo de abstração mental a partir de sua representação física".

(ii) Atividades de ligação, que têm o objetivo de "conectar" os conceitos matemáticos apreendidos na sua forma de representação física, bem como na sua representação oral, com suas representações simbólicas. Esse tipo de atividade tem, simultaneamente, uma representação física, uma expressão oral e uma forma simbólica.

(iii) Atividades abstratas, que são assim denominadas para expressar a ausência de um modelo físico. As representações oral e simbólica são incorporadas nesse tipo de atividade. Como esse é o mais alto nível de comunicação de idéias matemáticas e, por isso, o mais difícil de ser alcançado, a utilização desse tipo de atividade só deve ocorrer se as formas física e oral de um conceito matemático forem bastante exploradas, com significado, através dos dois primeiros tipos de atividades.

Destaca-se, ainda, um terceiro pesquisador, Fossa (2001), que também aborda o ensino de matemática por meio de atividades. Segundo esse autor, para a utilização das atividades em sala de aula necessita-se, em primeiro lugar, seqüenciar as atividades de maneira adequada de forma que sejam apresentadas várias atividades justapostas, com a mesma estrutura matemática reforçando umas às outras. Outra preocupação é que as atividades devam conter um componente oral, ou seja, proporcionar que o aluno possa verbalizar seu entendimento da atividade e as conclusões a que chegou. Por fim, e não menos importante, as atividades devem apresentar um componente simbólico, isto é, um espaço que permita ao aluno registrar por escrito os resultados e conclusões obtidas da atividade.

Analisando os três autores citados acima, observamos que há uma convergência nas três linhas de pensamento sobre o ensino de matemática por meio da utilização de atividades. A teoria de Dienes, o modelo de Dokweiller e as implicações para a utilização das atividades em sala de aula destacadas por Fossa, permitem observar que a aplicação da metodologia de ensino por atividades na aprendizagem matemática proporciona uma independência do aluno em relação ao professor, bem como permite uma maior reflexão sobre o conceito ou conteúdo que está sendo aprendido. Além disso, esse tipo de metodologia exige do professor uma conscientização de seu papel no processo ensino/aprendizagem, como mediador do conhecimento e não detentor supremo deste. A aplicação de um módulo de atividades de ensino exige uma preparação prévia de todo o instrumento, desde a escolha dos conceitos e conteúdos a serem abordados nas atividades, a forma com que esses conceitos e conteúdos serão abordados, quais os procedimentos que os alunos poderão utilizar para chegar a conclusão, até a aprendizagem propriamente dita do conceito ou conteúdo em questão. Todos os passos, desde a elaboração do instrumento até o fechamento com a conclusão, deverão ser bem planejados pelo professor. As diferenças individuais dos alunos na formação de conceitos matemáticos e na aprendizagem de conteúdos poderão ser levadas em consideração e, de acordo com Dienes, essas diferenças podem ser minimizadas com a elaboração de diferentes atividades que tenham o mesmo tema conceitual.

1.7 Metodologia da pesquisa

A exemplo da pesquisa desenvolvida no mestrado (SOUZA, 2003), no estudo atual é desenvolvida uma metodologia que contempla fases de avaliação e intervenção.

Em linhas gerais, o trabalho desenvolvido nesse estudo caracteriza-se por uma abordagem metodológica qualitativa com intervenção direta da pesquisadora. A intervenção em sala de aula é feita com o objetivo de realizar uma investigação sobre a aprendizagem de conceitos, utilizando um módulo de atividades de ensino com fases de avaliação. Este estudo caracteriza-se como uma pesquisa *experimental*, do tipo antes-depois com estímulo, sem grupo de controle, aplicada à Educação (GIL, 1993; LAVILLE e DIONNE, 1999). Para tanto, as turmas escolhidas são de uma escola da rede de ensino público de Natal/RN, que são os grupos experimentais. Eles foram submetidos à intervenção da pesquisadora, quanto à forma de abordagem proposta, para o ensino-aprendizagem dos conteúdos em questão.

A caracterização deste estudo como uma pesquisa *experimental* se justifica porque demonstra a existência de uma relação de *causa e efeito*, entre duas variáveis, em um determinado grupo (LAVILLE e DIONNE, 1999). Segundo esses autores, esse tipo de pesquisa é importante em ciências humanas, pois "constata-se que ela serve freqüentemente de referência no momento de estabelecer categorias de pesquisas [...]" (LAVILLE e DIONNE, p.139). Nesse tipo de pesquisa, os grupos experimentais são formados aleatoriamente, no entanto, segundo os autores, de todas as exigências para se realizar uma pesquisa experimental, a formação aleatória dos grupos é mais freqüentemente descartada. A explicação para esse fato é que nem sempre se podem formar aleatoriamente os grupos sem descaracterizar o ambiente no qual se efetuará a pesquisa, quando esses grupos já estão formados mesmo antes da presença do pesquisador. Um exemplo desse contexto é o caso do meio escolar em que as experiências se realizam preservando os grupos da sala de aula.

De acordo com Gil (1991), nos experimentos *antes-depois* com um grupo, o estímulo é aplicado apenas no grupo experimental. A mensuração inicial e final é aplicada ao grupo e a diferença entre os resultados constitui a medida da influência do estímulo introduzido.

Na presente metodologia, as fases denominadas *antes-depois* correspondem, respectivamente, a uma Avaliação Diagnóstica Inicial e a uma segunda avaliação, denominada de Avaliação Diagnóstica Final. O estímulo da pesquisa se traduz como sendo a aplicação do módulo de ensino na intervenção em sala de aula.

Nesse sentido, a intervenção metodológica está dividida em três momentos que foram vivenciados nos grupos experimentais: (i) aplicação de uma avaliação diagnóstica inicial para avaliar o nível de conhecimento dos alunos, sobre conteúdos algébricos e geométricos, e para subsidiar a elaboração das atividades de ensino; (ii) aplicação de um módulo de ensino, que compreende um conjunto de atividades elaboradas e estruturadas para os alunos, com o objetivo de promover o estudo dos conteúdos referidos nesta pesquisa, num processo de interação professor-aluno e aluno-aluno; (iii) aplicação de uma segunda avaliação, avaliação diagnóstica final, ao término da intervenção, para a apreciação da aprendizagem dos conteúdos algébricos e geométricos objetos da pesquisa.

Inicialmente, a Avaliação Diagnóstica Inicial foi aplicada a três turmas que não representaram os sujeitos participantes da pesquisa (os grupos experimentais). Foram escolhidas três escolas dos três segmentos de ensino: estadual, privado e federal, todas localizadas na cidade de Natal/RN, para uma coleta preliminar dos dados. As séries escolhidas foram duas turmas de 8ª série, uma da escola estadual e outra da escola particular, ambas do turno matutino, e uma turma de 1° ano da escola federal, do turno vespertino (ver item 3.1). Nessa primeira fase da pesquisa foi investigado um total de 122 alunos.

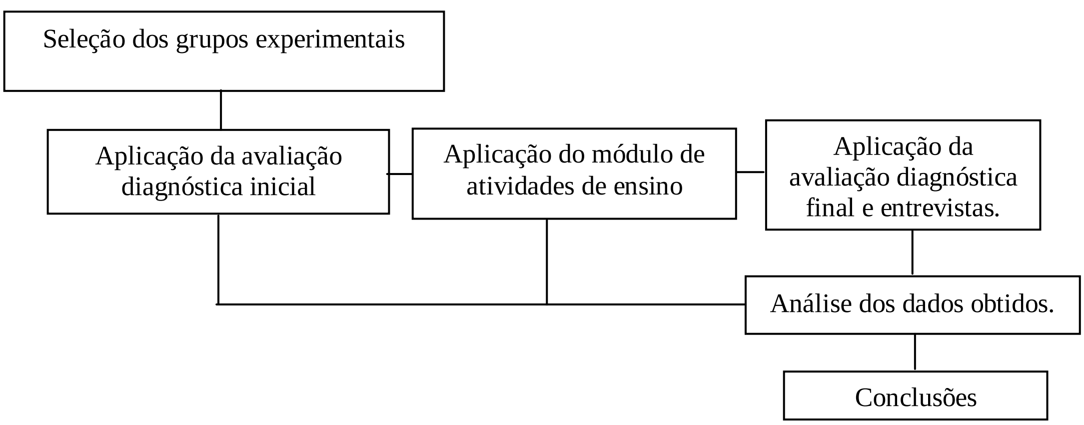
O objetivo principal dessa Avaliação Diagnostica Inicial foi subsidiar a elaboração do módulo de ensino, segundo os conhecimentos dos alunos quanto aos conteúdos de álgebra e geometria da pesquisa.

Como este estudo se refere à aprendizagem de conceitos, foram efetuadas entrevistas com os alunos sobre os cálculos por eles desenvolvidos na avaliação final, para melhor compreender seus procedimentos. As entrevistas foram realizadas com uma amostra de alunos. Esses alunos foram escolhidos através da prévia observação dos cálculos, realizados por eles na avaliação final para obter as respostas. Os cálculos que deixavam dúvidas quanto a sua compreensão foram selecionados para investigação.

Essas entrevistas não foram estruturadas de forma a ter questionamentos fechados e uniformes para todos os alunos. O aluno de posse de sua avaliação era questionado quanto ao procedimento utilizado para obter a resposta. Quando um cálculo não forneceu a resposta esperada, o aluno também era questionado quanto a seu entendimento da questão e domínio do conteúdo abordado. Os alunos ficavam à vontade para responder aos questionamentos e para realizar novos cálculos, quando necessário, para atender ao solicitado na questão.

Foi também aplicado um questionário de identificação dos alunos com o objetivo de traçarmos um perfil desses alunos. Nesse questionário, além de perguntas sobre idade, sexo, se trabalhava (ocupação), se era repetente (ou se já repetiu, no caso dos alunos do 1° ano da escola federal), perguntou-se sobre os assuntos que eles já haviam estudado em Geometria e Álgebra e em qual(is) série(s) ocorreu esse estudo. O último questionamento pedia para que os alunos falassem um pouco de como eram as aulas de Matemática durante sua vida escolar.

O Esquema 2 a seguir mostra a estrutura básica da metodologia da pesquisa.



Esquema 2

Como parte suplementar do estudo desenvolvido, foi elaborado um mini-curso para o XII Seminário de Pesquisa do CCSA-UFRN. Seus participantes foram alunos de graduação dos cursos de Licenciatura em Matemática e de Pedagogia, da UFRN. O curso compreendeu a aplicação de 5 atividades de ensino que abordaram a obtenção do valor da constante π (*pi*) através da utilização do Processo dos Perímetros (Método de Arquimedes), bem como a dedução das fórmulas do comprimento da circunferência e da área do círculo.

Esse mini-curso foi elaborado com o objetivo de verificar os conhecimentos dos futuros professores, notadamente os de Matemática, quanto ao conhecimento e aplicação, junto a alunos do Ensino Fundamental e Médio, desse método para obtenção de pi.

1.7.1 Os sujeitos da pesquisa

A intervenção metodológica foi realizada com alunos de duas turmas da 8ª série do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de ensino da cidade de Natal/RN, Escola Estadual Desembargador Floriano Cavalcanti, totalizando 100 alunos. Essas turmas caracterizaram os grupos experimentais da pesquisa e a intervenção foi realizada separadamente em cada turma.

1.7.2 As Avaliações Diagnósticas Inicial e Final como instrumentos de investigação

Para a organização e seqüenciação de um processo de ensino e aprendizagem sobre um conteúdo matemático, é interessante que o professor obtenha informações sobre os conhecimentos que os alunos já possuem sobre aquele conteúdo, ou dos assuntos inerentes ao conteúdo, antes de iniciar o processo. A avaliação diagnóstica é um teste utilizado com finalidades prognósticas. Esse tipo de avaliação tem a função de proporcionar essa investigação prévia sobre os conhecimentos dos alunos. Segundo Miras e Solé (1996), a avaliação diagnóstica constitui um ponto de partida para o processo de ensino e aprendizagem. De posse dos conhecimentos prévios dos alunos sobre o conteúdo a ser abordado, ou mesmo das dificuldades que os alunos possam ter apresentado na compreensão dos assuntos inerentes ao conteúdo pretendido, o professor pode elaborar com mais objetividade o tipo de abordagem, as atividades e a avaliação desse conteúdo. Como este estudo se constitui na elaboração e aplicação de um módulo de ensino, bem como na análise dos efeitos desse módulo, a avaliação diagnóstica foi um instrumento utilizado para investigar os conhecimentos de alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, sobre certos conceitos geométricos e algébricos importantes para a abordagem pretendida.

Foram aplicados dois tipos de avaliação diagnóstica: a primeira, denominada Avaliação Diagnóstica Inicial, na qual foram investigados os conhecimentos dos alunos sobre os conteúdos objetos da pesquisa e sobre os assuntos inerentes á aprendizagem desses conteúdos, para subsidiar a elaboração do módulo de ensino. Essa primeira avaliação teve, então, o sentido de prognóstico, destacado por Miras e Solé (1996). A segunda avaliação, denominada Avaliação Diagnóstica Final, teve como objetivo principal investigar os efeitos da aplicação do módulo de ensino, ou seja, averiguar a evolução dos conhecimentos, por parte do aluno, sobre os conteúdos abordados nas atividades. Os conteúdos abordados nas duas avaliações, bem como suas questões e objetivos específicos de cada questão, estão apresentados detalhadamente no Capítulo 2 do presente estudo.

1.7.3 O Módulo de Atividades de Ensino num processo interativo de aprendizagem

O módulo de atividades de ensino foi elaborado com o objetivo de promover um estudo sobre o ensino-aprendizagem da obtenção de fórmulas para o perímetro e área de figuras planas. As figuras geométricas planas abordadas no módulo de ensino foram triângulos (retângulos e eqüiláteros), quadriláteros (retângulo, paralelogramo e trapézio), polígonos regulares (quadrado e hexágono regular) e as figuras não-poligonais, circunferência e círculo. Para estas últimas foi estudada a obtenção da fórmula para o comprimento da circunferência e da fórmula para a área do círculo.

As atividades são tarefas que foram executadas pelos alunos em sala de aula, preparadas e orientadas pela pesquisadora.

Foram elaboradas um total de 15 atividades: 10 foram aplicadas aos alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e 5 foram desenvolvidas como mini-curso no XII Seminário de Pesquisa do CCSA/UFRN (SOUZA, 2006), nas quais foi abordada a obtenção do número π pelo Método dos Perímetros (ou Processo de Arquimedes). O mini-curso foi destinado à alunos de graduação de Matemática e Pedagogia da UFRN, como foi mencionado.

As atividades de ensino foram aplicadas num processo de interação professor/aluno e aluno/aluno. O conceito de interação, no âmbito educativo, evoca situações nas em que os sujeitos envolvidos no processo atuam de forma simultânea e recíproca, em um contexto determinado, em torno de uma tarefa ou um determinado conteúdo de aprendizagem, a fim de alcançar alguns objetivos que foram definidos (COLL e SOLÉ, 1996).

A relação de interação estabelecida numa aula de Matemática não só influencia a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também é um fator importante na motivação dos alunos e nas suas crenças sobre a aprendizagem matemática (MATOS & SERRAZINA, 1996).

As relações entre aluno/aluno e entre professor/aluno foram, por muito tempo, consideradas como um fator indesejável e incômodo, que poderiam influenciar negativamente sobre o rendimento escolar, e por isso, mereciam ser limitadas ao máximo ou até mesmo evitadas (JOHNSON, 1981, *apud* COLL e COLOMINA, 1996).

Nas aulas de Matemática do ensino tradicional os padrões de interação estabelecidos são aqueles em que os alunos não precisam estar envolvidos no pensamento matemático para participarem da aula, precisam apenas ser capazes de responder apropriadamente às ações do professor. O objetivo do professor é de perceber se o aluno sabe o conteúdo estudado.

No entanto, o desenvolvimento e a adoção cada vez mais crescente do Construtivismo, na Psicologia da Educação, como meio explicativo do processo ensino-aprendizagem escolar, provocou uma mudança de perspectiva no estudo das relações professor/aluno e das relações entre alunos. É ressaltada a importância do aluno no processo de aprendizagem, com seus conhecimentos e capacidades prévias; suas expectativas e atitudes diante do ensino; motivação, interesses, crenças, *etc*. Passa-se então a considerar que os próprios alunos podem exercer, em determinadas situações, uma influência educativa sobre seus colegas, ou seja, que também podem desempenhar o papel de mediador. Assim, as relações em sala de aula são vistas como um processo altamente dinâmico e reflexivo levando-se a considerar os diferentes padrões e processos de interação que são constituídos pelo professor e pelos alunos (MATOS & SERRAZINA, 1996).

No entanto não basta apenas permitir a interação entre os alunos para se obter, automaticamente, efeitos favoráveis sobre a aprendizagem matemática, cabe ao professor (mediador) proporcionar situações que façam com que os alunos explorem diferentes idéias matemáticas e encorajem-nos a pensar sobre seus processos de pensamento, com o objetivo de facilitar a construção do seu próprio conhecimento.

1.7.4 A análise dos dados coletados

Os dados coletados durante a aplicação do módulo de atividades de ensino e da aplicação da Avaliação Diagnóstica Final merecem um tipo de tratamento que, reconhecidamente, é um tanto subjetivo, pois considera, além de critérios estabelecidos para uma teoria de compreensão de conceitos, a observação e percepção da pesquisadora. Os dados são discutidos sob duas formas: a primeira apresenta os dados numéricos usando uma estatística descritiva, através de categorização e quantificação em números absolutos e porcentagens das respostas dos alunos, do ponto de vista matemático, segundo os parâmetros: respostas certas, respostas erradas e em branco, dispostos em tabelas e gráficos de barras. A segunda é uma análise qualitativa dessas respostas, segundo a teoria de Skemp (1980) que categoriza a aprendizagem dos conceitos matemáticos em "compreensão instrumental" e "compreensão relacional".

Conforme essa teoria, na compreensão instrumental o aluno se limita à simples execução de determinadas tarefas de maneira mecanizada, sem estabelecer relações entre conceitos; já na compreensão relacional, o aluno é capaz de realizar um grande número de atividades com criatividade e inteligência, permitindo relacionar diferentes conceitos em um só esquema.

Segundo Fossa (2001), para um melhor esclarecimento sobre esses dois tipos de compreensão, se teria de fazer uma ligação entre estes e o conceito de esquema. Assim, a compreensão instrumental seria a aquisição do conhecimento sob um esquema relativamente "pobre", enquanto que a compreensão relacional seria a aquisição do conhecimento sob um esquema "rico". Ou seja, o esquema utilizado na compreensão instrumental é muito simples, havendo poucas ligações internas entre seus componentes e poucas ligações externas com outros esquemas. Já o esquema utilizado na compreensão relacional tem uma boa organização, sendo rico, tanto em ligações internas, quanto em ligações externas. Vale, no entanto, ressaltar que nessa caracterização não temos dois tipos disjuntos de compreensão, mas sim uma seqüência gradativa de graus onde a compreensão instrumental se torna relacional.

Skemp (1980, p. 43), designa por *esquema* um termo psicológico geral para uma estrutura mental. O esquema não inclui apenas as complexas estruturas matemáticas, mas, também, as estruturas relacionadas às atividades sensório-motoras. Para Skemp, um esquema tem duas funções principais: (1) a de integrar os conhecimentos existentes e (2) a de funcionar como um instrumento mental para a aquisição de novos conhecimentos.

Em termos funcionais, quando uma pessoa pensa num determinado conceito, ela o associa a outros conceitos que são habitualmente relacionados com aquele. Vê-se, então, que os esquemas são construções individuais e que cada indivíduo tem sua própria "lista" de esquemas (FOSSA, 2001).

Neste estudo pretende-se investigar em que nível de compreensão o aluno se encontra após a intervenção metodológica, baseada na aplicação de atividades de ensino, sob uma perspectiva construtivista de ensino de matemática.

1.8 Contribuições do presente estudo

Como foi exposto no objetivo deste trabalho, desenvolveram-se estratégias para alcançar três aspectos do estudo da Matemática, referentes a conteúdos de Geometria e Álgebra: a escrita de expressões simbólicas para o perímetro de retângulos e da fórmula de área de alguns polígonos convexos (paralelogramo, triângulo e trapézio); a obtenção da fórmula do perímetro e da área do hexágono regular inscrito; e obtenção das fórmulas do comprimento da circunferência e da área do círculo. Para se obter as expressões simbólicas e as fórmulas fez-se uma abordagem por atividades de ensino. A escrita de expressões simbólicas para o perímetro de retângulos passa por um estudo sobre a sintaxe da álgebra, atingindo as propriedades operatórias como a comutativa, a associativa e a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Foi feito, também, um estudo sobre a manipulação algébrica da fórmula da área do trapézio e do retângulo para obter uma das variáveis.

Como recursos didáticos foram utilizados malha quadriculada, manipulação de material concreto (palitos de madeira e quadradinhos de cartolina), decomposição-composição e completamento de polígonos convexos, instrumentos de desenho geométrico, entre outros. De modo geral, essa abordagem proporciona o surgimento de situações que permitem que o aluno possa generalizar padrões e representá-los simbolicamente.

Acredita-se que o recurso à geometria para o alcance de conceitos algébricos possibilitou ao aluno a compreensão de propriedades operatórias aplicadas à Álgebra, corroborando com os resultados de pesquisas já mencionadas.

A abordagem das propriedades dos polígonos regulares inscritos na circunferência, o quadrado e o hexágono regular foi feita por meio da construção com régua e compasso, realizando um trabalho de reconhecimento das propriedades quanto à medida dos lados e ângulos internos de tais polígonos. A utilização de instrumentos de desenho geométrico vem sendo pouco empregada pelos professores de Matemática, não permitindo ao aluno a visualização das propriedades dos polígonos através de sua construção.

O conceito de circunferência, círculo e esfera, mesmo este último não sendo objeto deste estudo, foi construído a partir de observação de objetos concretos com seus formatos, estabelecendo-se a diferenciação entre eles e identificando suas propriedades.

Na dedução da fórmula da área do círculo foram utilizados dois processos: (i) de aproximação por contagem de quadradinhos de malha quadriculada; (ii) e por inscrição do hexágono regular no círculo. Nesta última foi utilizada a noção intuitiva de limite para abstrair e visualizar polígonos regulares inscritos no círculo com o maior número de lados possível.

Foi trabalhado nas atividades do mini-curso o Processo dos Perímetros (Método de Arquimedes) para obtenção do valor da constante π (pi). As atividades visaram introduzir um processo pouco explorado nos livros didáticos de Matemática, mas que podem promover uma maior compreensão e abstração, por parte do aluno, sobre a constante π.

1.9 Limitações do estudo

Em referência ao campo numérico, as medidas de segmentos e lados dos polígonos, trabalhados nas atividades de ensino estão limitadas ao conjunto dos números racionais absolutos (Q_+). Conseqüentemente, os cálculos de perímetro e área das atividades também estão nesse nível de conhecimento matemático. A exceção é para o comprimento da circunferência e a área do círculo, pois contêm o valor de π, que é irracional, mas não é dada muita ênfase à sua irracionalidade, pois não é objeto desse estudo.

Quanto ao conteúdo abordado nessa pesquisa, o trabalho com o paralelogramo e triângulo limita-se a retomar a dedução de suas fórmulas de área, no sentido de expressões simbólicas a serem obtidas.

Os polígonos regulares abordados com suas propriedades foram o quadrado e o hexágono regular, pois são figuras de fácil construção com régua de compasso, e que recorrem à classificação de triângulos quanto à medida dos ângulos internos (triângulos retângulos) e quanto à medida dos lados (triângulos eqüiláteros).

Para a obtenção da área do polígono regular de n lados, o processo limitou-se à construção do hexágono regular inscrito na circunferência e à obtenção de sua fórmula de perímetro e área, para generalização do polígono regular de n lados.

A obtenção do valor de π (*pi*) foi realizada por um processo experimental, através do cálculo da razão entre o comprimento da circunferência de tampas plásticas e o diâmetro de cada uma delas. Nesse processo o valor de π (*pi*) foi encontrado corretamente até a primeira casa decimal, ou seja, $\pi = 3{,}1$. No entanto, no cálculo do comprimento da circunferência e área do círculo, o valor considerado foi $\pi = 3{,}14$.

Sobre à obtenção da fórmula da área do círculo, o processo realizado foi a partir da generalização da fórmula da área de um polígono regular de n lados, inscrito no círculo, utilizando a noção intuitiva de limite. Para tal, a abstração do aluno quanto a essa noção de limite é bastante importante, e isso poderia ser um ponto limitador para compreensão da obtenção dessa fórmula.

Um outro ponto a ser considerado é o tempo utilizado para a intervenção metodológica, que foi um fator de limitação do estudo, pois estava delimitado pelo professor das turmas e pelo calendário escolar. Por tratar-se de uma abordagem que difere das aulas tradicionais, geralmente adotadas nas salas de aula da maioria das escolas brasileiras, houve uma quebra na rotina a que os alunos estavam acostumados. Dessa forma, deve-se levar em consideração que alguns alunos precisariam de mais tempo do que outros para se adaptarem ao processo de ensino adotado na pesquisa, pois já estavam acostumados a atuarem de forma passiva, e terminaram sentindo dificuldades em defender suas idéias, refletir para justificar processos e trabalhar em grupos.

Observa-se, também, que o tipo de análise e avaliação das respostas dos alunos pode vir a ser considerado como um fator de limitação do estudo, já que, por se tratar de uma pesquisa qualitativa, a avaliação é bastante subjetiva, segundo a observação e percepção da pesquisadora, diante de uma situação específica.

CAPÍTULO 2

INSTRUMENTOS DA INTERVENÇÃO METODOLÓGICA

2.1 Os instrumentos de coleta de dados

Para atingir o objetivo geral desse estudo foi elaborado, pela pesquisadora, um módulo de ensino composto por 10 atividades estruturadas para os alunos.

Para a averiguação dos conhecimentos prévios dos alunos sobre os conteúdos objetos da pesquisa e a verificação da compreensão desses conteúdos, por parte dos alunos, após a aplicação das atividades, foram desenvolvidos e aplicados instrumentos de avaliação para a coleta desses dados: a avaliação diagnóstica inicial e a avaliação diagnóstica final, respectivamente.

Além desses, foi aplicado um questionário para a identificação e descrição dos alunos participantes da pesquisa.

Todos os instrumentos utilizados na intervenção metodológica para a coleta de dados estão descritos nos itens a seguir, com seus respectivos objetivos.

2.2 Questionário de identificação

Foi aplicado um questionário de identificação dos alunos da 8ª série e do 1° ano (ver Apêndice A) em todas as turmas investigadas. O objetivo foi traçar um perfil desses alunos. Nesse questionário, além itens dos sobre "nome", "idade", "sexo", se trabalhava ("ocupação"), "se era repetente", no caso dos alunos do CEFET/RN, esse item foi modificado para "se já repetiu alguma série". Em outros dois itens foi perguntado sobre os assuntos que eles já haviam estudado em Geometria e Álgebra e em qual(is) série(s) ocorreu esse estudo. O último questionamento pedia para que os alunos escrevessem um pouco de como eram as aulas de Matemática durante sua vida escolar.

Com relação à última questão, sobre como eram as aulas de Matemática durante a vida escolar dos alunos, o objetivo não era criticar a prática dos professores de matemática; não se pretende tirar conclusões sobre se essa ou aquela prática exercida pelos professores é correta ou incorreta, a partir do depoimento de uma amostra de alunos, e, sim, verificar as impressões dos alunos sobre essas práticas. Certamente sabe-se que existem alunos que têm um maior apreço pelo estudo da matemática e com isso escreverá as melhores impressões sobre as práticas de seus professores; e que, em contra partida, também existem aqueles alunos que declaram não gostar de matemática, e isso influencia diretamente suas impressões sobre a prática de seus professores. Mesmo assim julgou-se importante verificar os depoimentos desses alunos, para que possa possibilitar uma melhor compreensão das respostas da avaliação.

Para os participantes no mini-curso do CCSA-UFRN também foi aplicado um questionário de identificação (ver Apêndice B), mas com itens diferentes do questionário para os alunos. Além dos itens sobre nome, idade, sexo, foi perguntado quanto à formação do participante, se já lecionava e, em caso afirmativo, há quanto tempo, que conteúdo(s) e em que instituição. Outro item questionava sobre se já havia lecionado Geometria e, em caso afirmativo, que conteúdos. E no último item foi questionado qual era o objetivo do participante ao escolher o mini-curso.

Além de conhecer o perfil dos participantes do mini-curso, o objetivo maior era saber o que os havia levado a fazer o mini-curso e se já haviam lecionado algum conteúdo de Geometria.

2.3 A Avaliação Diagnóstica Inicial

A avaliação diagnóstica inicial teve por objetivo principal investigar os conhecimentos dos alunos sobre conceitos geométricos e algébricos referentes ao objeto de estudo da pesquisa para, subsidiar a elaboração das atividades de ensino.

A avaliação contém 8 questões subjetivas, todas ilustradas por figuras (ver Apêndice C). Com referência aos conceitos geométricos, foram investigados os conhecimentos dos alunos sobre medida de segmentos, perímetro e área de polígonos obtidos com suas fórmulas, além do comprimento da circunferência e área do círculo. Sobre os conceitos algébricos, as questões da avaliação tratam da escrita simbólica de expressões matemáticas para perímetro e área de figuras planas, resolução de equações do 1° grau com uma incógnita, propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Algumas questões tratam da obtenção de valores numéricos, outras da obtenção de expressões simbólicas para perímetro e área de polígonos, e em outras o aluno precisa expressar sua opinião de acordo com alguma observação feita como, por exemplo, a comparação entre o comprimento da circunferência e o perímetro do hexágono regular inscrito e circunscrito à mesma circunferência, com base nos cálculos realizados.

Os conteúdos abordados na avaliação diagnóstica inicial estão todos contemplados no currículo oficial para o ensino de matemática de 5ª a 8ª serie do Ensino Fundamental. O critério utilizado para selecionar os conteúdos que constam nesta avaliação foi baseado no objetivo geral da pesquisa, que é realizar um estudo para a obtenção de expressões simbólicas de perímetro e área de figuras planas, manipulações algébricas nas fórmulas de área do retângulo e trapézio, com o trabalho sobre as propriedades da igualdade, e a obtenção da fórmula para o comprimento da circunferência e área do círculo.

2.3.1 A escolha da seqüência das questões

Como já exposto, os conteúdos tratados na avaliação diagnóstica estão relacionados com o objeto de estudo da pesquisa. Os conceitos de perímetro e área, as propriedades da igualdade, a resolução de equações são conteúdos que se encontram implícitos na abordagem pretendida. Assim, foi importante investigar o conhecimento dos alunos sobre tais conteúdos. Dessa forma, as questões foram seqüenciadas de maneira a tratar primeiramente as propriedades da igualdade, juntamente com o estudo das fórmulas de área de polígonos convexos. Em seguida trabalho-se sobre o perímetro e a área de polígonos regulares, especificamente do hexágono regular inscrito, incluindo as relações entre o comprimento da circunferência e o perímetro desse polígono inscrito e circunscrito à circunferência, bem como a relação entre área do círculo e a área do hexágono regular inscrito e circunscrito ao círculo.

2.3.2 Objetivos específicos de cada questão da avaliação

De acordo com o que se quer investigar, cada questão da avaliação diagnóstica tem seu objetivo específico. Abaixo estão apresentados cada um desses objetivos.

A 1ª e 2ª questões tratam da obtenção de valores numéricos para a área de duas figuras geométricas com base em malha quadriculada. Na 1ª questão, o objetivo é fazer com que o aluno escreva, de duas formas diferentes, o cálculo para a área de um retângulo que está desenhado numa malha quadriculada, dividido em dois outros retângulos de áreas diferentes, numa das formas utilizando a distributividade. Nessa questão é explicitado que o aluno utilize a distributividade para realizar os cálculos; dessa forma, se quer investigar se o aluno apresenta o conhecimento sobre área do retângulo e tem domínio na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Na 2ª questão, o aluno deve calcular um valor aproximado (que poderá ser inteiro ou decimal) para a área de um círculo desenhado numa malha quadriculada. O objetivo dessa questão é investigar se o aluno consegue expressar o valor da área da região circular, destacada na malha quadriculada, o mais próximo possível da área do círculo, ou seja, observar quais são os procedimentos utilizados pelos alunos como, por exemplo, o fracionamento dos quadradinhos da malha para melhor aproximar-se da região curva do círculo.

A 3ª questão se diferencia das duas primeiras, pois trata de medida de segmentos. São dados dois casos para o aluno calcular o valor de uma incógnita com base nas informações constantes na figura. No primeiro caso é dado o comprimento total de um segmento e este é decomposto em dois pedaços, dos quais um deles é a incógnita e o outro de comprimento conhecido. No segundo caso, são dados dois segmentos de mesmo comprimento, cada um deles dividido em duas partes diferentes, sendo uma das partes representada por uma incógnita e a outra de comprimento conhecido. Uma das partes do segundo segmento é dada em função da incógnita no primeiro segmento. Nos dois casos dessa questão o aluno deve estabelecer uma relação entre o segmento inteiro e suas partes, escrevendo uma equação do 1° grau, e resolvê-la para encontrar o valor da incógnita. O objetivo, com esse tipo de questão, é investigar os conhecimentos dos alunos sobre o estabelecimento de relações entre segmentos de mesmo comprimento, escrever as equações e resolvê-las.

A 4ª questão incide sobre o conceito de perímetro e o conceito de área do retângulo. Nessa questão é fornecido um retângulo reticulado no qual a altura é um valor conhecido, mas o comprimento é desconhecido, pois alguns quadradinhos da malha foram apagados, propositadamente, de forma a deixar o comprimento como incógnita. É dito na questão que o lado de cada quadradinho da malha mede 1 unidade; foi fornecido, também, o valor da área desse retângulo e destacado que cabe um número inteiro de quadradinhos no retângulo. É pedido ao aluno que encontre o valor do perímetro do retângulo.

Como o valor do comprimento é desconhecido, o aluno terá que representá-lo simbolicamente (por exemplo, por uma letra) e deverá escrever duas expressões matemáticas, sendo uma para a área do retângulo e outra para o perímetro. Sendo o valor da área conhecido, o aluno poderá determinar o valor do comprimento desse retângulo e, dessa forma, poderá encontrar o valor do perímetro. No enunciado do problema é dito que não é permitido completar os quadradinhos que estão faltando, desse modo o objetivo é verificar a compreensão do aluno sobre o problema proposto e a habilidade do mesmo em escrever equações com os dados envolvidos no problema e resolvê-las. Nessa questão está implícito o uso das propriedades da igualdade.

Na 5ª questão é tratada a área do trapézio. É dada a figura de um trapézio na qual estão explicitadas a medida da altura e da base menor desse trapézio, todas em centímetros. É fornecido, também, no enunciado da questão, o valor da área desse trapézio em centímetros quadrados. Nessas condições, salienta-se ao aluno que calcule o valor da outra base do trapézio (na questão, a base maior). Nesse caso, o aluno terá que obter uma equação através da substituição, na fórmula da área do trapézio, dos valores fornecidos e resolver a equação obtida. O objetivo desta questão é verificar o conhecimento do aluno quanto à fórmula da área do trapézio, e seu domínio na manipulação dessa fórmula para encontrar o valor de uma outra variável que não seja a área, no caso a outra base. Nesta questão também estão implícitas as propriedades da igualdade para a resolução da equação.

A 6ª questão mostra três figuras: um paralelogramo, um triângulo escaleno e um círculo. Em todas as figuras, uma das dimensões é uma incógnita. No caso do paralelogramo, a altura é o valor conhecido e a base é expressa como uma incógnita. No triângulo escaleno, a base é um valor conhecido e a altura uma incógnita. No círculo, o raio é uma incógnita. Pede-se ao aluno para escrever uma sentença matemática que expresse a área de cada uma das figuras dadas. Para tanto, o aluno precisa ter conhecimento das fórmulas de área de cada figura. O objetivo é verificar esse conhecimento por parte do aluno, assim como se na escrita das sentenças matemáticas estará explicitado o sinal de igualdade, o qual faz parte da escrita correta da fórmula da área de cada figura.

A 7ª e 8ª questões estão se referindo ao perímetro e área do hexágono regular e a comparação desses valores com o comprimento da circunferência e a área do círculo, respectivamente. Como um dos objetivos do estudo é trabalhar um processo para obter o comprimento da circunferência e a área do círculo, foi considerado pertinente, na avaliação inicial investigar o conhecimento e a compreensão do aluno sobre esse assunto.

A 7ª questão trata do hexágono regular inscrito numa circunferência. É dado um hexágono regular inscrito numa circunferência, dividido em seis triângulos eqüiláteros, com as medidas do apótema do hexágono e o raio da circunferência conhecidos. A medida do apótema é dada como um número irracional. O aluno deve calcular o perímetro e a área do hexágono regular, com base nas informações. Essa questão envolve o conhecimento, por parte do aluno, de que em um hexágono regular, a medida do raio da circunferência que o circunscreve é igual a medida de seu lado e, como o hexágono pode ser decomposto em seis triângulos eqüiláteros, então sua área pode ser expressa como seis vezes a área do triângulo eqüilátero. O objetivo é averiguar esses conhecimentos por parte do aluno, já que os mesmos são importantes para o conhecimento da área do círculo, e os procedimentos matemáticos utilizados para encontrar os valores solicitados.

A 8ª questão aborda o perímetro e a área do hexágono regular circunscrito a uma circunferência, dividido em seis triângulos eqüiláteros, com medida do raio da circunferência conhecida e a medida do lado do hexágono expressa por uma fórmula. A fórmula que expressa a medida do lado do hexágono é dada em função do raio da circunferência. Nos itens (a) e (b) é pedido ao aluno que ele encontre o perímetro e a área, respectivamente, do hexágono regular circunscrito. Para isso, ele vai precisar encontrar o valor da medida do lado do hexágono, utilizando a fórmula fornecida no enunciado da questão. Nesse caso se investiga também a manipulação algébrica dessa fórmula para encontrar o valor da medida do lado, além das propriedades do hexágono.

No item (c), com base nos valores encontrados nessa questão e na 7ª questão, salienta-se ao aluno que estabeleça uma relação matemática entre os perímetros encontrados para os dois hexágonos e o comprimento **C** da circunferência, e que explicite uma conclusão. No item (d), espera-se que o aluno estabeleça uma relação matemática entre os valores das áreas encontradas e a área $\mathbf{A_c}$ do círculo, e que ele também apresente uma conclusão.

Com os itens (c) e (d) dessa 8ª questão o objetivo é que o aluno observe duas relações, respectivamente:

1. A relação existente entre o comprimento da circunferência e o valor do perímetro do hexágono regular inscrito e circunscrito a essa circunferência, encontrados no item (a) a 7ª questão e item (a) da 8ª questão, respectivamente.
2. A relação existente entre a área do círculo, limitado pela circunferência, e o valor da área do hexágono regular inscrito e circunscrito ao círculo, encontradas no item (b) da 7ª questão e no item (b) da 8ª questão, respectivamente.

Além da sondagem quanto à observação do aluno a respeito das relações citadas acima, o objetivo é verificar a habilidade do aluno nos procedimentos aritméticos e algébricos que eles deverão utilizar para chegar às conclusões.

2.3.3 Sobre a análise das respostas dos alunos

A análise das respostas dos alunos na Avaliação Diagnóstica Inicial é feita sob o ponto de vista matemático, segundo os parâmetros certo, errado ou em branco. Para realizar o julgamento por esses parâmetros, foram estabelecidos critérios para as respostas, segundo os cálculos que se espera que os alunos realizem.

Entretanto, a análise não se limita apenas no julgamento das respostas. Dentro de cada julgamento foram observados os procedimentos matemáticos, corretos ou incorretos, que o aluno utilizou para responder a cada questão. Para melhor compreender os procedimentos realizados pelo aluno, foram feitas entrevistas que consistiram em questionar os alunos sobre seus cálculos para chegar às respostas.

Os critérios de análise das respostas dos alunos utilizados para categorizá-las segundo o ponto de vista matemático foram:

Na 1ª questão, o aluno apresentaria uma resposta correta sobre o cálculo da área do referido retângulo e a aplicação da propriedade distributiva, se a resposta dele se apresentasse da seguinte forma:

- 1ª maneira: *área do retângulo = medida da base* $\times$ *medida da altura*, ou seja, *área* $= 9 \times 4 = 36$, utilizando corretamente a fórmula da área do retângulo;
- 2ª maneira (com a distributividade): *área* $= 4 \times (6 + 3) = 4 \times 6 + 4 \times 3 = 24 + 12 = 36$. Nesse caso o aluno estaria demonstrando uma compreensão da propriedade distributiva, visualizando-a no cálculo da área do retângulo dado.

A resposta estaria insuficiente para o objetivo da questão, demonstrando que o aluno estaria apresentando uma falta de compreensão da propriedade distributiva, se:

- Apresentasse o produto $4 \times 9 = 36$, como uma primeira maneira, sem utilizar a distributividade.
- E apresentasse uma contagem dos quadradinhos da malha, como uma segunda forma de calcular a área;

  Nesse caso seria classificada como incorreta.

Na 2ª questão, que trata da área de um círculo numa malha quadriculada, com raio igual a 3 unidades, um valor aproximado para sua área seria de *28 quadradinhos*. Para demonstrar uma compreensão sobre a melhor aproximação de valor para área do círculo apresentando uma resposta correta, o aluno poderia escrever:

- *Área do círculo = 28 quadradinhos*, pois levaria em consideração além dos quadradinhos inteiros, os quadradinhos que estão cortados pela linha curva do círculo, ou seja consideraria frações de quadradinhos.
- Ou se encontrasse um valor entre 20 e 24 quadradinhos, ou seja, $20 \leq$ *área do círculo* ≤ 24, pois nesse caso ele estaria considerando os quadradinhos inteiros e os que estão faltando pedaços muitos pequenos. Isso mostraria que o aluno não considera os quadradinhos faltando pedaços maiores, mas demonstraria que ele compreendeu que o valor da área do círculo seria certo número de quadradinhos mais próximo do círculo.

Não estaria apresentando uma compreensão quanto ao valor aproximado que expresse melhor a área do círculo o aluno que:

- Encontrasse um valor menor ou igual a 16 quadradinhos, ou seja, *área do círculo* ≤ 16, pois nesse caso ele estaria considerando apenas os quadradinhos inteiros. Isso mostraria que o aluno não considera os quadradinhos cortados, logo não conseguiria arranjá-los de forma a fazer parte da contagem.
- A utilização da fórmula para a obtenção da área do círculo também seria julgada como um procedimento incorreto, pois o aluno desconsideraria a malha quadriculada.

Esses procedimentos demonstrariam uma possível dificuldade que o aluno apresenta em encontrar a área de uma figura plana quando esta não tem lados retilíneos. Nesse caso seriam classificados como incorretos.

A 3ª questão aborda relação entre medidas de comprimento e resolução de equações. Uma resposta correta e uma compreensão dos conceitos envolvidos nessa questão se apresentaria se o aluno:

- Escrevesse a relação entre as medidas dadas em cada figura e resolvesse as equações corretamente para encontrar o valor da incógnita, ou seja, $10 = M + 3{,}2$ (1° caso) e $2 + M = \frac{M}{2} + 6$ (2° caso). Dessa forma o aluno estaria demonstrando compreensão e domínio na relação entre medidas de segmentos utilizando linguagem simbólica.
- Encontrasse os valores desconhecidos mesmo sem estabelecer uma relação que explicite a equação do 1° grau, pois estaria compreendendo a relação entre as medidas

dos segmentos, podendo encontrar os valores desconhecidos por uma operação de subtração (no 1° caso) e por tentativa e erro (no 2° caso), apesar de não transferir a relação para uma linguagem simbólica envolvendo a incógnita.

O aluno não apresentaria uma resposta correta se:

- Utilizasse qualquer outro tipo de cálculo, incorreto, não demonstrando a compreensão citada acima.

A 4ª questão envolve os conceitos de perímetro e área de um retângulo, bem como seus cálculos. O retângulo está reticulado, no qual cabe um número inteiro de quadradinhos, mas alguns quadradinhos foram apagados do comprimento, logo somente a dimensão que representa a altura é um número conhecido. A questão fornece o valor da área desse retângulo e pede o perímetro. O aluno apresentaria uma resposta correta se:

- Indicasse a parte apagada do comprimento por uma incógnita e expressasse o comprimento como função dessa incógnita, ou seja, $comprimento = 7 + x$, por exemplo, pois ainda há 7 quadradinhos no comprimento que não foram apagados. Dessa forma, ele obteria a seguinte equação para a área: $77 = 7 \cdot (7 + x)$, encontrando $x = 4$ *unidades*, logo o comprimento do retângulo seria *11 unidades*. Para o cálculo do perímetro seria: $P = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 11$, ou $P = 7 + 7 + 11 + 11$, encontrando $P = 36$ *unidades*.
- Ou um outro procedimento seria expressar todo o comprimento por uma incógnita x, por exemplo, desconsiderando que aparecem os 7 quadradinhos inteiros. Nesse caso a expressão para a área seria: $77 = 7 \cdot x$, encontrando $x = 11$ *unidades*, como comprimento do retângulo. Encontraria o perímetro utilizando o mesmo processo citado anteriormente.

Para essa questão, não estaria correto o procedimento de completar os quadradinhos que estão faltando, já que o mesmo não é permitido. Esse procedimento estaria caracterizando a inobservância do enunciado da questão e a falta de habilidade dos alunos com figuras em malhas quadriculadas.

Na 5ª questão, sobre a área do trapézio, o aluno demonstraria o domínio se:

- Escrevesse corretamente a fórmula para a área do trapézio, $A = \dfrac{(B+b)\cdot h}{2}$, na qual B e b representam as bases e h a altura, substituísse o valor da área, da base menor e da altura corretamente, obtendo uma equação do 1° grau, $66 = \dfrac{(B+4)\cdot 5{,}5}{2}$, e a resolvesse corretamente para obter $B = 20\ cm$. A escrita da fórmula com o sinal de igualdade e a escrita da unidade de medida no resultado, também são observadas nas respostas dos alunos.

As respostas em que os alunos escrevessem a fórmula e substituíssem os valores corretamente, mas não conseguissem resolver a equação, serão consideradas incorretas, pois demonstraria que o aluno não apresenta domínio da resolução de equações. No caso da substituição do valor da área no lugar do valor da base maior, deixando-a como incógnita, ou a não substituição do seu valor, demonstraria que o aluno não tem compreensão sobre a manipulação da fórmula, pois para ele a fórmula de área serviria apenas para encontrar o valor da área e não de outras variáveis da fórmula.

Para a 6ª questão, o aluno escreveria expressões para a área A de cada figura (paralelogramo P, triângulo escaleno T e círculo C), de acordo com as medidas fornecidas em cada caso, em função de uma incógnita. Para obter uma expressão mais simples para as três figuras planas, o aluno teria que simplificar a parte numérica das expressões, nesse caso ele apresentaria uma resposta correta se:

- No caso do paralelogramo obtivesse $A(P) = 3x\cdot 4$ ou $A(P) = 12x$, e do triângulo obtivesse $A(T) = \dfrac{5{,}6\cdot h}{2}$ ou $A(T) = 2{,}8h$, e para o caso do círculo $A(C) = \pi r^2$. Tratando-se do círculo a expressão obtida representaria a sua fórmula de área.
- A indicação da igualdade "*A = ...*" (*área igual a*) é muito importante, pois isso demonstraria que o aluno associou o valor da área como um número que depende de uma variável.

O aluno estaria apresentando falta de compreensão quanto à escrita das expressões e, conseqüentemente, uma resposta incorreta se:

- Na escrita das sentenças matemáticas não apresentassem a indicação do sinal de igualdade, demonstrando que ele não compreende o sentido de uma fórmula, escrevendo somente uma expressão algébrica. Nesse caso seria um erro de sintaxe;

- Ou se o aluno escreve apenas a fórmula de cada figura, $A(P) = b{\cdot}h$ e $A(T) = \dfrac{b \cdot h}{2}$ (no caso do paralelogramo e triângulo, respectivamente), sem relacionar com as medidas fornecidas em cada uma delas.

A 7ª e 8ª questões versam sobre perímetro do hexágono regular inscrito numa circunferência e a área do hexágono regular circunscrito a um círculo, respectivamente.

Na 7ª questão, os procedimentos que demonstrariam que o aluno tem conhecimento sobre as propriedades do hexágono regular inscrito numa circunferência, dando uma resposta correta, seriam:

- O aluno iniciaria a resolução utilizando a propriedade: *a medida do lado do hexágono* (ℓ_6) *é igual a medida do raio da circunferência* (r), ou seja, $\ell_6 = r$, assim para o cálculo do perímetro do hexágono regular $\left(P_{\ell_6}\right)$ ele escreveria:

  $P_{\ell_6} = 6 \times \ell_6 = 6 \times r = 6 \times 6 = 36cm$.

- Para o cálculo da área do hexágono regular $\left(A_{\ell_6}\right)$, o aluno usaria o fato de que, como o hexágono regular pode ser dividido em seis triângulos eqüiláteros, então, sua área seria seis vezes a área do triângulo eqüilátero (A_T), que tem a base (b) igual ao lado do hexágono regular e a altura (h) igual ao apótema do hexágono (a_6). Logo $A_{\ell_6} = 6 \cdot A_T = \dfrac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\ell_6} = 6 \cdot \dfrac{\ell_6 \cdot a_6}{2} = 6 \cdot \dfrac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{108\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$, e como é fornecido que $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, então $A_{\ell_6} = \dfrac{54 \cdot 1{,}73}{2} = 93{,}42\ cm^2$.

Ao realizar o cálculo da área do hexágono regular o aluno estaria demonstrando domínio da fórmula do triângulo, pois estaria associando as variáveis base (b) e altura (h) da fórmula com os segmentos lado do hexágono e apótema do hexágono, mesmo não conhecendo a definição deste último.

O aluno que não mostrasse o conhecimento inicial sobre a propriedade do hexágono inscrito numa circunferência, com relação à medida do seu lado e a medida do raio da circunferência, poderia tentar resolver essa questão utilizando outros procedimentos como, por exemplo, a utilização do teorema de Pitágoras para encontrar a medida do lado do hexágono regular, sendo r a hipotenusa, a_6 um dos catetos e o outro cateto $\dfrac{\ell_6}{2}$, o que não estaria incorreto.

O aluno que não apresentasse algum desses procedimentos estaria demonstrando uma falta de conhecimento das propriedades do hexágono regular inscrito em uma circunferência, bem como das relações métricas em triângulos retângulos, dessa forma impossibilitando o cálculo correto do perímetro e da área do hexágono.

Para a 8ª questão, o hexágono regular está circunscrito à circunferência, os procedimentos corretos utilizados pelo aluno para comprovar conhecimento sobre a utilização das propriedades do hexágono regular circunscrito para calcular seu perímetro e sua área seriam:

- A medida do lado é dada pela expressão $L_6 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \sqrt{3}$, onde r é o raio da circunferência. Substituindo o valor do raio $r = 6\ cm$ e $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, este último fornecido na questão anterior, nessa fórmula, obter-se-ia $L_6 = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{6} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ cm$, ou $L_6 = 6{,}92\ cm$. Com essa medida, o aluno poderia calcular o perímetro e a área do hexágono circunscrito.
- No caso do hexágono circunscrito, o raio da circunferência é a medida do apótema do hexágono, logo a altura do triângulo eqüilátero ($r = a_6 = h$);
- O cálculo do perímetro do hexágono $\left(P_{L_6}\right)$ seria: $P_{L_6} = 6 \cdot L_6 = 6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}cm$ ou $P_{L_6} = 41{,}52cm$. Para o cálculo de sua área $\left(A_{L_6}\right)$ o hexágono poderia ser decomposto em seis triângulos eqüiláteros, dessa forma $A_{L_6} = 6 \cdot A_T$, onde A_T é a área do triângulo eqüilátero, com base L_6 e altura r. Logo, teríamos:
$A_{L_6} = 6 \cdot \frac{L_6 \cdot r}{2} = \frac{P_{L_6} \cdot r}{2} = \frac{24\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 72\sqrt{3}\ cm^2$, ou $A_{L_6} = 124cm^2$.

Qualquer outro procedimento indicaria que o aluno não detém os conhecimentos sobre as propriedades do hexágono regular, resultando em respostas incorretas.

Nos dois outros itens dessa 8ª questão (itens c e d), que interrogam sobre o comprimento da circunferência e a área do círculo em relação aos dois hexágonos (inscrito e circunscrito), o aluno deveria realizar algumas comparações utilizando a linguagem simbólica e escrever uma conclusão.

Para demonstrar uma compreensão sobre os questionamentos:

- No item (c), o aluno compararia o perímetro do hexágono inscrito, o perímetro do hexágono circunscrito e o comprimento C da circunferência, escrevendo uma relação de desigualdade entre eles, ou seja, $P_{\ell_6} < C < P_{L_6}$. Como ele possui o valor desses perímetros, deveria escrever: $36\ cm < C < 24\sqrt{3}\,cm$ ou $36\ cm < C < 41{,}52\ cm$; dividindo os membros dessa desigualdade por $12\ cm$ o aluno obteria a desigualdade $3 < \frac{C}{12} < 3{,}46$. Como $2 \cdot r = 12\ cm = D$, onde D é o diâmetro da circunferência, então, o aluno poderia concluir que, a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro é um valor numérico que está compreendido entre o do perímetro de um polígono regular inscrito nela e o do perímetro de um polígono regular circunscrito a ela.
- No item (d), a comparação deveria ser feita entre a área do hexágono inscrito, a área do hexágono circunscrito e a área do círculo A_C, limitado pela circunferência. A relação obtida seria $A_{\ell_6} < A_C < A_{L_6}$, substituindo os valores da área do hexágono inscrito e do hexágono circunscrito, obter-se-ia: $54\sqrt{3}\ cm^2 < A_C < 72\sqrt{3}\ cm^2$ ou $93{,}42\ cm^2 < A_C < 124\ cm^2$. Nesse caso, o aluno poderia concluir que a área do círculo é um valor que está compreendido entre a área de um polígono regular inscrito nele e a área de um polígono regular circunscrito a ele.

Para o objetivo da Avaliação Diagnóstica Inicial, a conclusão do aluno para esse item (d) da 8ª questão é importante e suficiente, pois nas atividades de ensino será desenvolvido um processo para obter a área do círculo a partir do perímetro e da área do hexágono regular.

A não observação da relação entre o valor do perímetro do hexágono regular, inscrito e circunscrito, e a razão do comprimento da circunferência por seu diâmetro, bem como da relação entre o valor da área do hexágono regular, inscrito e circunscrito, e a área do círculo, demonstraria que o aluno não apresenta entendimento quanto a essas relações, ou mesmo não compreendeu os questionamentos feitos..

Os critérios expostos acima subsidiam a análise das respostas dos alunos na Avaliação Diagnóstica Inicial, sendo utilizadas as entrevistas para melhor compreender os procedimentos adotados pelos alunos.

2.4 As Atividades de Ensino

As atividades de ensino são tarefas a serem executadas pelos alunos em sala de aula, preparadas e orientadas pela pesquisadora. Inicialmente foram elaboradas 15 atividades de ensino para serem aplicadas aos alunos das 8ª séries. Entretanto, devido à limitação do tempo disponível e a alguns fatores que dificultaram o desenvolvimento das atividades junto aos alunos, esse número passou a ser 10 atividades (ver Apêndice D). Para essa redução foram retiradas algumas atividades, entre elas as atividades sobre a obtenção do valor da constante π pelo Processo de Arquimedes. Além dessas, outras atividades foram reelaboradas para melhor atender às circunstâncias.

Das 5 atividades retiradas do módulo de ensino dos alunos das 8ª séries, três foram reelaboradas para serem aplicadas em um mini-curso ministrado no XII Seminário de Pesquisa do CCSA-UFRN. Além dessas três atividades, uma atividade do módulo de ensino dos alunos das 8ª séries também fez parte das atividades do mini-curso, foi a atividade de número 10. Esse mini-curso será discutido no capítulo 5 desse estudo.

As 10 atividades de ensino para os alunos das 8ª séries foram elaboradas com o objetivo de promover um estudo sobre a sintaxe da álgebra, abordando as propriedades da igualdade na escrita simbólica de expressões para o perímetro de retângulos e área de triângulos e quadriláteros, e a construção da fórmula do comprimento da circunferência e da área do círculo, com compreensão.

A elaboração das atividades de ensino desta pesquisa está fundamentada nos três autores já citados no item 1.6.2 (p. 34). Todas as atividades de ensino foram contempladas com o Princípio Dinâmico da teoria de Dienes; não na forma de jogos estruturados ou jogos práticos como ele propõe, mas na forma de utilização de material concreto, que também é defendida por ele, e, nas atividades desta pesquisa, vai desde a utilização de quadradinhos de cartolina, palitos de madeira, fita métrica, tampas circulares de embalagens cilíndricas, até o uso de instrumentos de desenho geométrico.

O Princípio da Construtividade, também, está sendo contemplado nas atividades de ensino, pois toda conclusão do aluno parte de um processo de construção e reflexão realizada por ele. Destaca-se, também, o Princípio da Variabilidade Matemática e o Princípio da Variabilidade Perceptiva, os quais estão contemplados, principalmente, nas atividades que envolvem a aplicação do conceito de área e perímetro de triângulos e quadriláteros.

As conclusões da maioria das atividades partem de uma análise realizada pelo aluno, com base nos procedimentos utilizados para resolver as atividades e nas observações feitas de acordo com esses procedimentos.

A maioria das atividades do módulo de ensino desta pesquisa contempla, ainda o modelo de Dockweiller, relacionando-se com as Atividades de Desenvolvimento, de Ligação e as Abstratas. Os três componentes físico, oral e simbólico, defendidos por esse autor, são vivenciados no decorrer do processo de aplicação das atividades. O registro escrito é um ponto comum em todas as atividades, nas quais é solicitado aos alunos que expressem uma conclusão, seja ela por palavras ou por expressões matemáticas, isto é, na linguagem simbólica.

2.4.1 Objetivos específicos e procedimentos a serem utilizados em cada atividade

A seguir serão apresentados os objetivos específicos, o material utilizado e os procedimentos a serem desenvolvidos pelos alunos, de cada uma das 10 atividades de ensino, direcionadas para os alunos da 8ª série. Os procedimentos apresentados não são uma regra de resolução das atividades, mas são os esperados que os alunos façam no desenvolvimento de cada atividade. Esses procedimentos não constam no instrumento que foi entregue aos alunos, bem como as dimensões das figuras estudadas.

2.4.2 Módulo de ensino para os alunos da 8ª série

<u>Atividade 1:</u> Uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

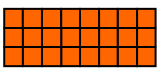
Objetivo: Escrever a área de um retângulo de maneiras diferentes utilizando a distributividade.

Material: Malha quadriculada, quadradinhos de cartolina com 2 cm de lado (representando uma unidade quadrada para medir área), lápis e borracha.

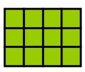
Procedimentos:

- Montar dois retângulos diferentes R_1 e R_2 com os quadradinhos dados, de acordo com o valor das áreas fornecidas, e representá-los na malha quadriculada;

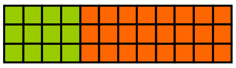
Uma possibilidade para R_1:



Uma possibilidade para R_2:



- Juntar os dois retângulos montados (R_1 e R_2) de forma a obter um terceiro retângulo R_3, cuja área é a soma das áreas dos outros dois, e representá-lo na malha quadriculada. Uma possibilidade para R_3 seria:



- Escrever as medidas das dimensões do novo retângulo obtido.

COMPRIMENTO	*12u*
ALTURA	*3u*

- A partir dos retângulos desenhados na malha quadriculada (R_1, R_2 e R_3), escrever o cálculo da área de cada um deles como o produto de suas dimensões;

ÁREA DE R_1	**ÁREA DE R_2**	**ÁREA DE R_3**
$3u \cdot 8u = 24u^2$ *ou* $8u \cdot 3u = 24u^2$	$3u \cdot 4u = 12u^2$ *ou* $4u \cdot 3u = 12u^2$	$3u \cdot 12u = 36u^2$ *ou* $12u \cdot 3u = 36u^2$

- Calcular a área do retângulo R_3 através da soma dos produtos das dimensões dos outros dois retângulos R_1 e R_2;

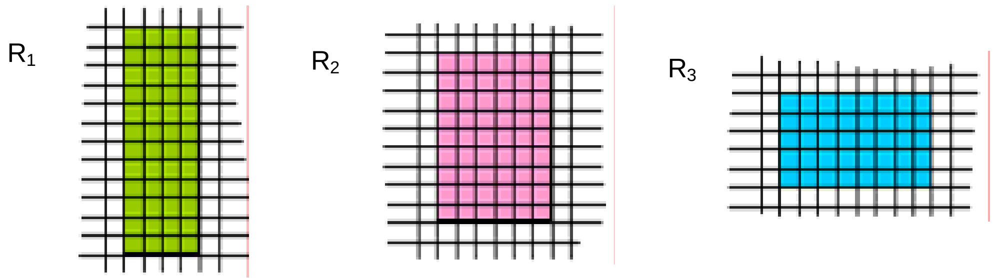
ÁREA DE R_3
$(3u \cdot 8u) + (3u \cdot 4u) = 12u^2 + 24u^2 = 36u^2$ *ou* $(8u \cdot 3u) + (4u \cdot 3u) = 24u^2 + 12u^2 = 36u^2$

- Utilizando as dimensões do terceiro retângulo obtido, calcular sua área (sendo o comprimento, ou a altura, representado por duas medidas);

ÁREA DE R_3
$(8u + 4u) \cdot 3u = 12u \cdot 3u = 36u^2$

- Comparar os dois resultados obtidos e escrever uma nova igualdade a partir das outras duas igualdades (propriedade transitiva da igualdade). Igualdade obtida: $(8u + 4u) \cdot 3u = (8u \cdot 3u) + (4u \cdot 3u) = 24u^2 + 12u^2 = 36u^2$
- Observar que a terceira igualdade obtida é a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição;
- Nos cálculos das áreas dos retângulos é ressaltada a propriedade comutativa da adição e da multiplicação.

- A partir de produtos dados, desenhar retângulos na malha quadriculada e calcular a área de cada um pela propriedade distributiva.



Uma possibilidade para o cálculo da área dos retângulos acima, utilizando a propriedade distributiva:

$A_1 = 4u \cdot 12u = 4u \cdot (7u + 5u) = (4u \cdot 7u) + (4u \cdot 5u) = 28u^2 + 20u^2 = 48u^2$
$A_2 = 6u \cdot 9u = (4u + 2u) \cdot 9u = (4u \cdot 9u) + (4u \cdot 9u) = 36u^2 + 18u^2 = 54u^2$
$A_3 = 8u \cdot 5u = (5u + 3u) \cdot 5u = (5u \cdot 5u) + (3u \cdot 5u) = 25u^2 + 15u^2 = 40u^2$

<u>Atividade 2:</u> Uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição na escrita de expressões matemáticas para perímetro e área do retângulo.

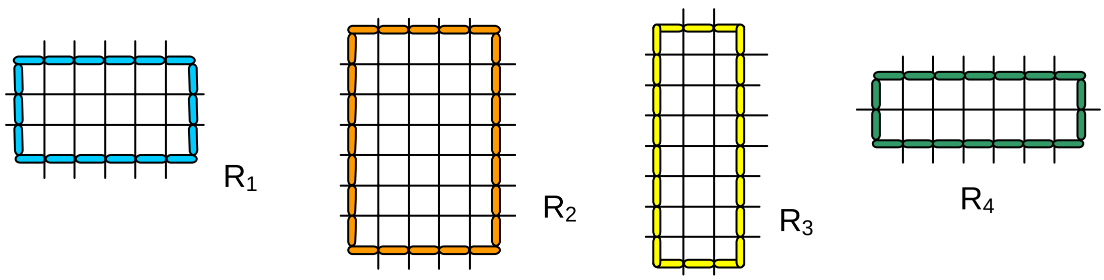
Objetivo: Escrever expressões matemáticas para o perímetro e área de retângulos, com uma dimensão desconhecida, utilizando a propriedade distributiva.

Material: Palitos de madeira, malha quadriculada, lápis e borracha.

Procedimentos:

PARTE I:

- Com os palitos de madeira, montar retângulos com as dimensões fornecidas e calcular a área e o perímetro de cada um, considerando *qp* (quadrado de palitos) para a unidade de área e *p* (palitos) para a unidade de comprimento;



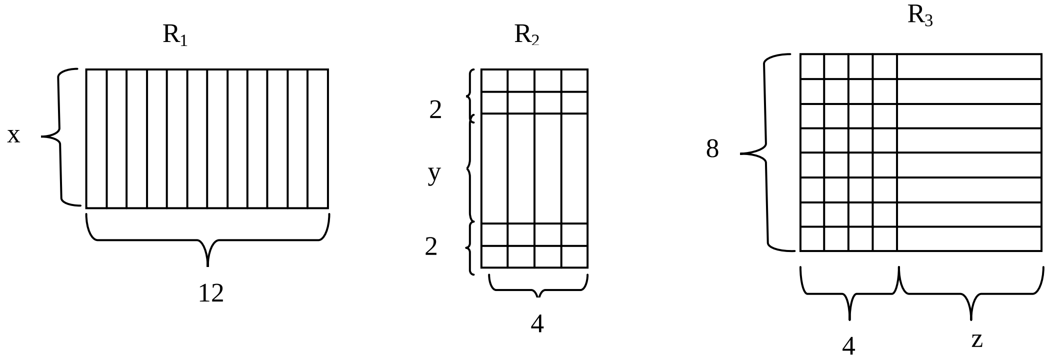
RETÂNGULOS	ÁREA (A)	PERÍMETRO (P)
R_1	$A = 6qp \cdot 3qp$ $A = 18qp^2$	$P = 6p + 3p + 6p + 3p$ $P = 18p$
R_2	$A = 5qp \cdot 7qp$ $A = 35qp^2$	$P = 5p + 7p + 5p + 7p$ $P = 24p$
R_3	$A = 3qp \cdot 8qp$ $A = 24qp^2$	$P = 3p + 8p + 3q + 8p$ $P = 22p$
R_4	$A = 7qp \cdot 2qp$ $A = 14pq^2$	$P = 7p + 2p + 7p + 2p$ $P = 18p$

- Escrever o valor de cada perímetro utilizando a propriedade distributiva, a partir da propriedade associativa da adição.

RETÂNGULO	PERÍMETRO
R_1	$P = 6p + 3p + 6p + 3p = (6p + 6p) + (3p + 3p)$ $P = 2 \cdot 6p + 2 \cdot 3p = 2 \cdot (6p + 3p) = 2 \cdot 9p = 18p$
R_2	$P = 5p + 7p + 5p + 7p = (5p + 5p) + (7p + 7p)$ $P = 2 \cdot 5p + 2 \cdot 7p = 2 \cdot (5p + 7p) = 2 \cdot 12p = 24p$
R_3	$P = 3p + 8p + 3q + 8p = (3p + 3p) + (8p + 8p)$ $P = 2 \cdot 3p + 2 \cdot 8p = 2 \cdot (3p + 8p) = 2 \cdot 11p = 22p$
R_4	$P = 7p + 2p + 7p + 2p = (2p + 2p) + (7p + 7p)$ $P = 2 \cdot 2p + 2 \cdot 7p = 2 \cdot (2p + 7p) = 2 \cdot 9p = 18p$

PARTE II:

- Escrever as medidas que estão implícitas em cada figura e as medidas que podem ser representadas por uma letra; Uma possibilidade para a representação abaixo seria:



- Escrever expressões matemáticas para o perímetro e área de cada retângulo de acordo com a representação feita das dimensões dos retângulos, utilizando as propriedades da adição (associativa) e a propriedade distributiva.

RETÂNGULO	**R_1**	**R_2**	**R_3**
PERÍMETRO	$P = x + x + 12 + 12$ $P = 2 \cdot x + 2 \cdot 12$ $P = 2 \cdot (x + 12)$ $P = 2x + 24$	$P = 4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + y + y$ $P = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot y$ $P = 2 \cdot (4 + 2 + 2 + y) = 2 \cdot (8 + y)$ $P = 16 + 2y$	$P = 8 + 8 + 4 + 4 + z + z$ $P = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot z$ $P = 2 \cdot (8 + 4 + z) = 2 \cdot (12 + z)$ $P = 24 + 2z$
ÁREA	$A = 12 \cdot x = 12x$	$A = 4 \cdot (2 + 2 + y)$ $A = 4 \cdot (4 + y)$ $A = 4 \cdot 4 + 4 \cdot y$ $A = 16 + 4y$	$A = 8 \cdot (4 + z)$ $A = 8 \cdot 4 + 8 \cdot z$ $A = 32 + 8z$

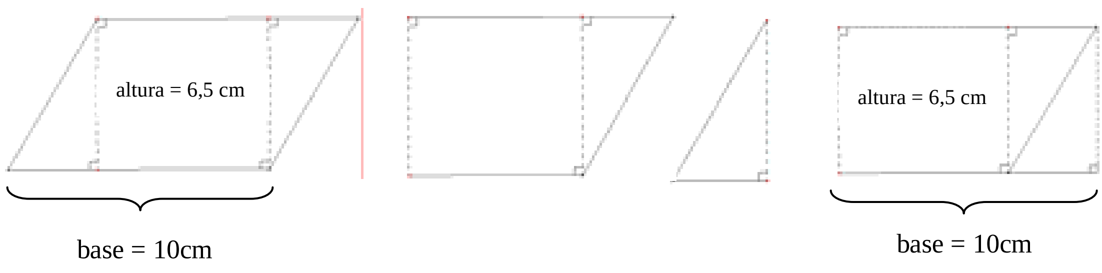
<u>Atividade 3:</u> Área do paralelogramo e do triângulo: obtenção das fórmulas.

Objetivo: Escrever expressões para a área do paralelogramo e do triângulo.

Material: Dois paralelogramos iguais, desenhados numa folha. Régua, lápis, borracha e tesoura.

Procedimentos:

- Com a régua medir a altura e a base dos paralelogramos e anotar as medidas;
- Recortar o Paralelogramo 1 (p. 211) da cartolina e corta-lo pela altura para compor um retângulo. Calcular a área do retângulo e concluir que a área do paralelogramo é igual à área do retângulo;

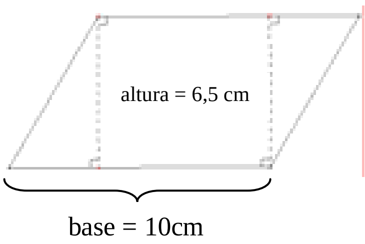


$$\text{área do retângulo} = 10\text{ cm} \cdot 6{,}5\text{ cm} = 65\text{ cm}^2$$

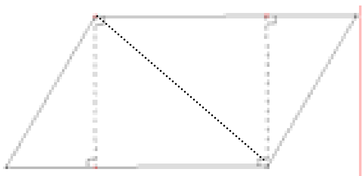
$$\text{área do retângulo} = \text{área do paralelogramo}$$

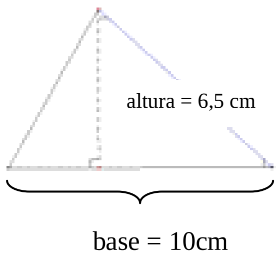
$$\text{área do paralelogramo} = \text{medida da base} \cdot \text{medida da altura}$$

- Da figura que restou do primeiro corte (*um trapézio retângulo*), recortar o triângulo que está nessa figura e compará-lo com triângulo que foi encontrado no primeiro corte, concluir que são congruentes, logo possuem áreas iguais;
- Dizer qual é a classificação desses triângulos (*triângulo retângulo*) e constatar que o paralelogramo pode ser decomposto em dois triângulos retângulos e um retângulo;
- No Paralelogramo 2 (p. 211), igual ao primeiro, cortá-lo de forma a obter dois triângulos congruentes (corte feito pela diagonal do paralelogramo, conservando suas alturas). Encontrar a área de cada triângulo com base na área do paralelogramo e verificar que essa área é a metade da área do paralelogramo;



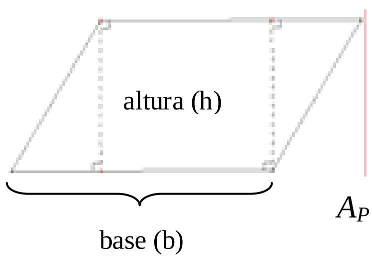
$$\text{área do paral.} = \text{medida da base} \cdot \text{medida da altura}$$
$$A_P = 10\ cm \cdot 6{,}5\ cm$$
$$A_P = 65\ cm^2$$



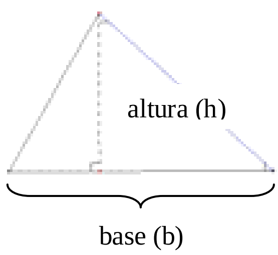


$$\text{área do triângulo} = \frac{\text{área do paralelogramo}}{2}$$
$$A_T = \frac{\text{medida da base} \cdot \text{medida da altura}}{2}$$
$$A_T = \frac{10cm \cdot 6{,}5cm}{2}$$
$$A_T = \frac{65cm^2}{2} = 32{,}5cm^2$$

- Com as figuras obtidas através da decomposição do paralelogramo, representar cada segmento (base e altura) dessas figuras por uma letra, arranjar novamente as figuras para obter o paralelogramo;
- Com base nas letras que foram representadas, escrever uma expressão para a área do paralelogramo e para a área do triângulo, obtido do corte pela diagonal do paralelogramo.



$$A_P = b \cdot h$$



$$A_T = \frac{b \cdot h}{2}$$

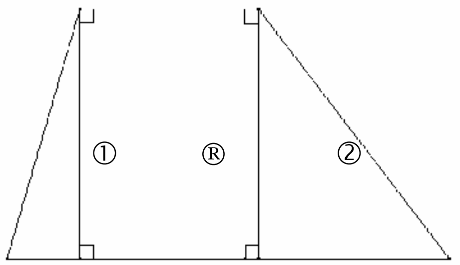
<u>Atividade 4:</u> Perímetro e área do trapézio. Manipulação algébrica da fórmula de área.

Objetivo: Calcular o perímetro e a área do trapézio, obter a fórmula de área e manipulá-la para encontrar uma das varáveis.

Material: Um trapézio escaleno, desenhado numa folha. Régua, lápis, borracha e tesoura.

Procedimentos:

- Com o auxílio da régua, medir todos os lados do trapézio dado (p. 214) e calcular o seu perímetro ($P = 10{,}8\ cm + 4{,}4\ cm + 6{,}4\ cm + 7{,}1\ cm = 28{,}7\ cm$). Saliente-se que as medidas dos lados são valores aproximados, devido a imprecisão da medição;
- Determinar a área desse trapézio calculando a área do retângulo e dos dois triângulos formados pelas alturas. Para tanto é necessário o valor das medidas das bases dos triângulos ① e ②.

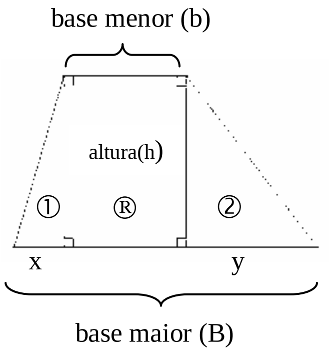


- Com o auxílio da régua as medidas dessas bases seriam: *base do triângulo ① = 1,8 cm* e *base do triângulo ② = 4,6 cm*. Dessa forma, a área de cada um dos polígonos que formam o trapézio seria:

$$A_{①} = \frac{1{,}8cm \cdot 6{,}5cm}{2} = \frac{11{,}7cm^2}{2} \qquad A_{②} = \frac{4{,}6cm \cdot 6{,}5cm}{2} = \frac{29{,}9cm^2}{2} \qquad A_{®} = 4{,}3cm \cdot 6{,}5cm$$

$$A_{①} = 5{,}85\ cm^2 \qquad A_{②} = 14{,}95\ cm^2 \qquad A_{®} = 27{,}95\ cm^2$$

- Logo a área do trapézio seria calculada pela soma das áreas dos polígonos que o compõem: $A_{Trapézio} = 5{,}85\ cm^2 + 14{,}95\ cm^2 + 27{,}95\ cm^2 = 48{,}75\ cm^2$.
- Representar as bases, a altura e as projeções da altura do trapézio sobre a base maior por letras e escrever a expressão para a área do trapézio como a soma das expressões das áreas dos dois triângulos e do retângulo formados, utilizando a propriedade associativa e a fatoração (termo em evidência);



$$A_{®} = b \cdot h \qquad A_{①} = \frac{x \cdot h}{2} \qquad A_{②} = \frac{y \cdot h}{2}$$

$$Área(trapézio) = b \cdot h + \frac{x \cdot h}{2} + \frac{y \cdot h}{2}$$

$$A_T = \frac{2bh + xh + yh}{2} = \frac{h \cdot (2b + x + h)}{2}$$

$$A_T = \frac{h \cdot (b + b + x + y)}{2}, \text{ sendo } b + x + y = B$$

$$A_T = \frac{h \cdot (b + B)}{2} \quad ou \quad A_T = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

- Determinar o valor de uma das bases de um trapézio de área, tendo o valor da altura, da outra base e da área conhecidas, substituindo os valores na fórmula, representando por x o valor da base desconhecida e resolvendo a equação obtida utilizando os princípios de equivalência e a propriedade distributiva. Dessa forma tem-se:

Substituindo os valores na fórmula: $\rightarrow$

$$175cm^2 = \frac{(x + 8cm) \cdot 17{,}5cm}{2}$$

Multiplicando os dois membros por 2: $\rightarrow$

$$175cm^2 \cdot 2 = \frac{(x + 8cm) \cdot 17{,}5cm}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}$$

$$350cm^2 = (x + 8cm) \cdot 17{,}5cm$$

Dividindo-se os dois membros por 17,5 cm: $\rightarrow$

$$\frac{350cm^2}{17{,}5cm} = \frac{(x + 8cm) \cdot 17{,}5cm}{17{,}5cm}$$

$$20cm = x + 8cm$$

Subtraindo 8 cm dos dois membros $\rightarrow$

$$20cm - 8cm = x + 8cm - 8cm$$

$$12cm = x \Rightarrow x = 12cm$$

- Logo, o valor da outra base desse trapézio, que seria a base maior, é $x = B = 12cm$.

<u>**Atividade 5:**</u> **Definição e elementos da circunferência, círculo e esfera.**

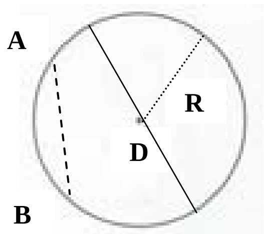
Objetivo: Por meio de comparação entre objetos que representam a circunferência, o círculo e a esfera, distinguir suas características principais e seus elementos.

Material: Uma esfera de isopor, uma tampa de plástico representando o círculo e um aro de plástico representando a circunferência. Uma folha de papel, compasso, régua, lápis e borracha.

Procedimentos:

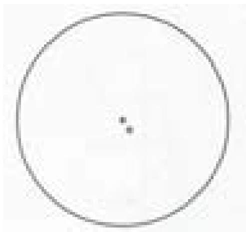
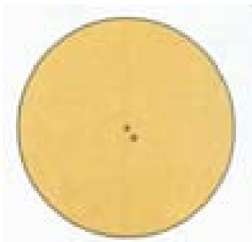
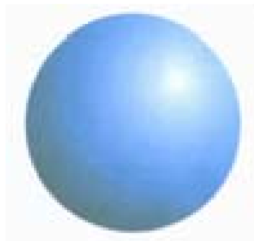
- Observar e comparar os objetos que representam a esfera, o círculo e a circunferência e descrever suas principais diferenças;

- Desenhar uma circunferência de raio dado e observar a propriedade da eqüidistância do centro aos pontos na circunferência;
- Representar os seguintes elementos: raio, arco, diâmetro, corda e reta tangente; Identificar a relação entre o raio e o diâmetro.



Raio **R**
Arco **AB**
Corda **AB**
Diâmetro **D = 2·R**

- Escrever uma definição para circunferência, círculo e esfera.

 **Circunferência**	 **Círculo**	 **Esfera**
Conjunto dos pontos que estão a uma mesma distância de um ponto dado, chamado centro.	*Conjunto dos pontos limitados pela circunferência.*	*Sólido geométrico gerado pela rotação de um semi-círculo em torno do seu (diâmetro).*

<u>Atividade 6:</u> Polígonos regulares inscritos na circunferência: quadrado e hexágono regular.

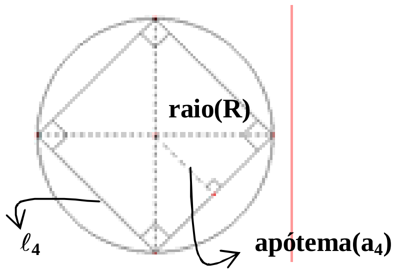
Objetivo: Inscrever o quadrado e o hexágono regular na circunferência e verificar suas propriedades.

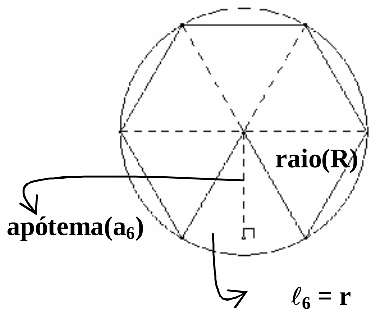
Material: Uma folha de papel, régua, compasso, lápis e borracha.

Procedimentos:

- Desenhar duas circunferências de raio igual a 6 cm;

- Dividir as circunferências em arcos de mesmo comprimento (quatro arcos e seis arcos, respectivamente.);
- Ligar os pontos determinados na circunferência pelos arcos e observar que tipo de polígono foi formado;
- Traçar as diagonais do polígono e observar as propriedades dos triângulos obtidos;





- Medir os lados e concluir que possuem o mesmo comprimento. Descobrir a medida dos ângulos internos do polígono a partir da medida do ângulo central e das propriedades dos triângulos, concluir que os ângulos são congruentes;
- Constatar que, todo polígono que possui lados de mesma medida e ângulos internos congruentes, são polígonos regulares e podem ser inscritos numa circunferência.

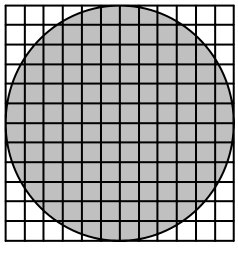
<u>Atividade 7:</u> Área do círculo pelo processo de contagem.

Objetivo: Encontrar a área do círculo por aproximação utilizando o papel milimetrado e verificar as limitações desse tipo de procedimento.

Material: uma folha de papel milimetrado, compasso, lápis e borracha.

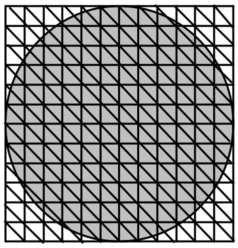
Procedimentos:

- Desenhar na folha de papel milimetrado um círculo de raio 6 cm;
- Expressar a área do círculo, por contagem dos quadradinhos, considerando cada quadradinho de 1 cm^2 como a unidade de área 1 u^2;



área do círculo $\geq 88\ u^2$

- Expressar a área do círculo, por contagem, considerando agora os quadradinhos incompletos, de modo a somar as metades nos quadradinhos incompletos e obter mais unidades quadradas para expressar um outro valor para a área do círculo;



área do círculo $\geq 106\ u^2$

- Observar e comparar os dois valores encontrados e concluir que esse processo fornece somente um valor aproximado para a área do círculo, logo é limitado e laborioso. Então, se necessitaria de um outro processo para obter um valor mais preciso para a área do círculo.

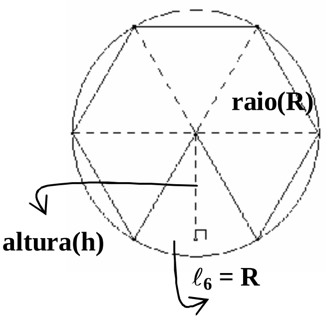
<u>Atividade 8:</u> Obtenção da fórmula do perímetro e da área do hexágono regular inscrito e generalização para um polígono regular de n lados.

Objetivo: Obter a fórmula do perímetro e da área do hexágono regular inscrito e generalizar para a área de um polígono regular de n lados.

Material: Folha de papel ofício, régua, compasso, lápis, borracha.

Procedimentos:

- Desenhar um hexágono regular inscrito num círculo de raio 6 cm. Dividir o hexágono em seis triângulos eqüiláteros.
- Somar as medidas das seis cordas e concluir que o resultado dessa soma é o perímetro do hexágono regular. Escrever a expressão para o cálculo do perímetro.
- Escrever a área do hexágono como seis vezes a área do triângulo eqüilátero de altura h;



$Perímetro(hexágono) \Rightarrow P_H = 6 \cdot \ell_6$

$Área(hexágono) = A_H = 6 \cdot área(triân.\ eqüilátero)$

$A_H = 6 \cdot A_T$

$$A_H = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot h}{2}$$

- Observar que a altura do triângulo eqüilátero é o apótema do hexágono regular. Encontrar a expressão para o apótema do hexágono, em função do raio da circunferência, utilizando o Teorema de Pitágoras: *Apótema(hexágono)* = $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$;
- Obter a fórmula da área do hexágono em função do raio da circunferência e do apótema do hexágono $A_H = 6 \cdot \frac{a_6 \cdot R}{2} = \frac{\cancel{6} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot R}{2} \Rightarrow A_H = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$;
- Escrever a fórmula da área do hexágono de outra maneira, em função do perímetro e do apótema: $A_H = \frac{6 \cdot R \cdot a_6}{2} = \frac{P_H \cdot a_6}{2} \Rightarrow A_H = \frac{n \cdot \ell_6 \cdot a_6}{2}$;
- Concluir que a fórmula para a área de um polígono regular de n lados, em função do perímetro e da medida do apótema, é $A = \frac{n \times \ell \times a}{2}$; sendo $n \times \ell = P$, então: $A = \frac{P \times a}{2}$.

<u>Atividade 9:</u> Cálculo da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Obtenção do valor aproximado de *pi* calculado experimentalmente. Fórmula do comprimento da circunferência.

Objetivo: Obter, experimentalmente, a constante *pi* através da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Escrever a fórmula para calcular o comprimento de uma circunferência.

Material: Tampas plásticas em formato circular com diâmetros diferentes, fita métrica, calculadora, lápis, borracha.

Procedimentos:

- Medir (diretamente), com o auxílio da fita métrica, o comprimento da circunferência e o diâmetro das três tampas plásticas e anotar as medidas;
- Com o auxílio da calculadora, encontrar a razão entre a medida do comprimento da circunferência e seu diâmetro, para cada tampa plástica, com a aproximação de até quatro casas decimais, quando houver;
- Comparar as três razões obtidas e concluir que o valor dessas razões tem a parte inteira com um valor constante 3;

- Representar por π (pi) a razão $\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}} = \frac{C}{D}$, escrevendo a expressão $\frac{C}{D}$ = π.
- A partir da razão $\frac{C}{D}$ = π, escrever a fórmula do comprimento da circunferência em função da medida do raio R: como $D = 2R$, então $\frac{C}{D} = \frac{C}{2R} = \pi$, logo $C = 2 \cdot \pi \cdot R$.
- Ressalta-se que esse é um processo experimental e não se configura como o processo matemático para a obtenção do valor de π. O processo utilizado é o Método de Arquimedes (ou Processo dos Perímetros) que utiliza o perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência.

O Método de Arquimedes para a obtenção do valor de π não foi estudado nas atividades de ensino para os alunos da 8ª série, pois, o tempo cedido para a intervenção metodológica não foi suficiente de modo a permitir essa abordagem.

<u>Atividade 10:</u> Obtenção da fórmula para a área do círculo.

Objetivo: Obter a fórmula para a área do círculo a partir da generalização da fórmula da área do polígono regular de n lados.

Material: Papel ofício, lápis, borracha.

Procedimentos:

- Desenhar um círculo de raio qualquer e inscrever um hexágono regular;
- Retomar o processo para obter a fórmula da área do hexágono em função da medida do apótema e da medida do lado: $A_H = \frac{6 \cdot \ell_6 \cdot a_6}{2}$;
- Considerar um polígono regular de n lados, com lado de medida ℓ e apótema de medida a, inscrito num circulo de raio R. Retomar a fórmula da área do polígono regular: $A = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2}$. Reescrevendo essa fórmula em função do perímetro $P = n \cdot \ell$, obtém-se $A = \frac{P \cdot a}{2}$;
- Observar que, quando o polígono regular tiver um número muito grande de lados a medida de cada lado será muito pequena, isto quer dizer que o perímetro do polígono

se aproxima do comprimento da circunferência e a medida do apótema tende para a medida do raio da circulo. Logo, $A = \frac{P \cdot a}{2} \rightarrow \frac{C \cdot r}{2}$. Como C = 2πR, então a área do círculo fica: $A_C = \frac{\cancel{2}\pi R \cdot R}{\cancel{2}} \Rightarrow A_C = \pi \cdot R^2$.

Nessa atividade foi ressaltada a noção intuitiva de limite.

2.5 A Avaliação Diagnóstica Final

A Avaliação Diagnóstica Final tem por objetivo principal investigar o nível de compreensão dos alunos quanto aos conteúdos estudados no Módulo de Ensino. Essa avaliação foi aplicada aos alunos que participaram da Intervenção Metodológica. A avaliação contém 8 questões subjetivas, todas ilustradas (ver Apêndice E). Essas questões são praticamente as mesmas questões da Avaliação Diagnóstica Inicial, com algumas alterações, nas quais uma questão foi excluída e outra foi desmembrada em duas. Houve mudança, também, no enunciado de algumas questões. A necessidade da mudança no enunciado, a exclusão de uma questão e o desmembramento de outra ocorreu de acordo com o objetivo geral da pesquisa. Os objetivos das questões da Avaliação Diagnóstica Final ficaram semelhantes aos objetivos das questões da Avaliação Diagnóstica Inicial. Houve uma mudança nos critérios de análise das respostas dos alunos, que foram estabelecidos em função das respostas, corretas e/ou incorretas, esperadas dos alunos.

A análise e classificação dos procedimentos dos alunos nessa segunda avaliação estão fundamentadas na teoria de Skemp (1980) quanto à compreensão de conceitos matemáticos — “compreensão instrumental” e “compreensão relacional”.

2.5.1 Objetivos específicos de cada questão da segunda avaliação e os critérios de julgamento do nível de compreensão dos alunos

A seguir são apresentados os objetivos das questões da Avaliação Diagnóstica Final e os critérios para julgamento do nível de compreensão dos alunos quanto ao conteúdo abordado na questão. Os critérios foram elaborados segundo os procedimentos para encontrar as respostas corretas, parcialmente corretas e incorretas para cada questão. Nas respostas parcialmente corretas a categorização será entre compreensão relacional e instrumental, dependendo do objetivo da questão.

A 1ª e 2ª questões são as mesmas questões da Avaliação Diagnóstica Inicial com algumas alterações no enunciado de cada uma. Ambas continuam tratando da obtenção de valores numéricos para a área de duas figuras geométricas com base em malha quadriculada.

Na 1ª questão, o objetivo continua sendo investigar se o aluno apresenta o conhecimento sobre área do retângulo, quando este está quadriculado por uma malha, e se tem domínio na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A mudança feita no enunciado foi trocar a palavra “escreva” para a palavra “calcule”, para determinar o valor da área do retângulo, e especificar a utilização da distributividade no cálculo dessa área.

Nesta questão, o aluno mostraria uma compreensão relacional sobre o cálculo da área do referido retângulo e a aplicação da propriedade distributiva se a resposta dele se apresentasse da seguinte forma:

- 1ª maneira, aplicando corretamente a fórmula da área do retângulo: *área do retângulo = medida da base* $\times$ *medida da altura*, ou seja, *área* $= 9 \cdot 4 = 36$;
- 2ª maneira, aplicando a distributividade: *área do retângulo* $= 4 \cdot (6 + 3) = 4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 = 24 + 12 = 36$. Nesse caso o aluno estaria demonstrando uma compreensão da propriedade distributiva, visualizando-a no cálculo da área do retângulo dado.

O aluno estaria apresentando uma compreensão instrumental se:

- Indicasse uma contagem dos quadradinhos da malha, como uma primeira forma de calcular a área;
- E apresentasse o produto $4 \cdot 9 = 36$, como uma segunda maneira, sem utilizar a distributividade.

Na 2ª questão, a mudança feita no enunciado foi especificar que cada quadradinho da malha é considerado como uma unidade quadrada de área (1 u^2). O objetivo dessa questão continua sendo constatar se o aluno consegue expressar o valor da área da região circular desenhada na malha quadriculada (que poderá ser inteiro ou decimal) o mais próximo possível da área do círculo. Foi realizada uma atividade em que os alunos utilizaram o fracionamento dos quadradinhos para determinar um valor para a área de um círculo desenhado no papel milimetrado. Dessa forma, o objetivo era observar os procedimentos dos alunos quanto ao fracionamento dos quadradinhos da malha para melhor aproximar-se da região curva do círculo.

Para demonstrar uma compreensão relacional sobre um valor aproximado para área desse círculo nessa questão, o aluno poderia escrever:

- *Área do círculo* $\cong$ *28 quadradinhos*, pois levaria em consideração além dos quadradinhos inteiros, os quadradinhos que estão cortados pela linha curva do círculo, ou seja, consideraria frações de quadradinhos.

Estaria em nível de compreensão instrumental o aluno que:

- Encontrasse um valor menor ou igual a 16 quadradinhos, ou seja, $área \leq 16$, pois nesse caso ele estaria considerando apenas os quadradinhos inteiros. Isso mostraria que o aluno não considera os quadradinhos cortados, logo não conseguiria arranjá-los de forma a fazer parte da contagem.
- A utilização da fórmula para a obtenção da área do círculo, apesar de ser um procedimento correto, não o estaria em relação ao objetivo da questão, pois o aluno desconsideraria que a região circular está quadriculada.

Um nível de compreensão entre a relacional e a instrumental seria se:

- O aluno encontrasse um valor entre 16 e 24 quadradinhos, ou seja, $16 <$ *área do círculo* ≤ 24, pois nesse caso ele estaria considerando os quadradinhos inteiros e os que estão faltando pedaços muito pequenos. Isso mostraria que o aluno não atentou para os quadradinhos faltando pedaços maiores, mas demonstraria que ele compreendeu que o valor da área do círculo seria certo número de quadradinhos mais próximo da região circular.

A 3ª questão da primeira avaliação foi excluída em relação à segunda avaliação. Essa questão foi excluída porque como tinha o objetivo principal de observar a resolução das equações obtidas através do estabelecimento de relações entre segmentos, esse objetivo pôde ser contemplado em outras questões da avaliação como, por exemplo, na 4ª questão da segunda avaliação, que trata da área do trapézio.

Com a exclusão de uma questão em relação à primeira avaliação, as demais questões da Avaliação Diagnóstica Final estão com numeração diferente da primeira avaliação.

Para a segunda avaliação, a 3ª questão passou a ser a que foi a 4ª questão da primeira avaliação, que trata do conceito de perímetro e do conceito de área do retângulo. Nessa questão foi fornecido um retângulo reticulado no qual a altura é um valor conhecido, mas o comprimento é desconhecido, pois alguns quadradinhos da malha foram apagados, propositadamente, de forma a deixar o comprimento uma incógnita. O objetivo ainda é verificar a compreensão do aluno sobre o problema proposto e a habilidade do mesmo em escrever equações com os dados envolvidos no problema e resolvê-las. Como nessa questão está implícito o uso das equações e das propriedades da igualdade, justifica a exclusão da 3ª questão em relação à Avaliação Diagnóstica Inicial.

O aluno apresentaria o nível de compreensão relacional se:

- Indicasse a parte apagada na figura, relativa ao comprimento do retângulo, por uma incógnita e expressasse o comprimento como função dessa incógnita, ou seja, *comprimento* $= 7 + x$, por exemplo, pois ainda há 7 quadradinhos no comprimento que não foram apagados. Assim, ele obteria a seguinte equação para a área: $77 = 7 \cdot (7 + x)$, encontrando $x = 4$ *unidades*, logo o comprimento do retângulo seria *11 unidades*. Para o cálculo do perímetro seria $P = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 11$, ou $P = 7 + 7 + 11 + 11$, encontrando $P = 36$ *unidades*.
- Ou um outro procedimento seria expressar todo o comprimento por uma incógnita x, por exemplo, desconsiderando a parte que aparecem os 7 quadradinhos. Nesse caso a expressão para a área seria: $77 = 7 \cdot x$, encontrando $x = 11$ *unidades*, como comprimento do retângulo. Logo, encontraria o perímetro $P = 36$ *unidades*. Em ambos os procedimentos é importante a utilização da igualdade para escrever as sentenças matemáticas.

A informalidade nos cálculos, ou seja, a não representação algébrica da situação demonstraria que o aluno se encontra no nível de compreensão instrumental quanto ao equacionamento de situações geométricas. Um outro procedimento esperado a nível de compreensão instrumental seria o aluno completar os quadradinhos que estavam faltando, mesmo isso não sendo permitido, encontrar o valor do comprimento e, conseqüentemente, encontrar o valor do perímetro, desconsiderando o valor dado para a área do retângulo.

A 4ª questão trata da área do trapézio. É fornecido um trapézio no qual estão explicitadas a medida da altura e de uma de suas bases, todas em centímetros. Pede-se ao aluno que calcule o valor da outra base do trapézio sendo fornecido, também, no enunciado o valor da área desse trapézio, em centímetros quadrados. Nesse caso, o aluno obterá uma equação a partir da substituição na fórmula da área do trapézio dos valores fornecidos e resolvê-la. O objetivo é verificar o domínio do aluno quanto à fórmula da área do trapézio, e na manipulação dessa fórmula para encontrar o valor de uma outra variável que não seja a área. Salienta-se que esse mesmo procedimento foi abordado numa das atividades de ensino.

Nessa questão, sobre a área do trapézio, o aluno demonstraria o nível de compreensão relacional se:

- Escrevesse corretamente a fórmula para a área do trapézio, $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$, na qual B e b representam as bases e h a altura, substituísse o valor da área, da base menor e da altura corretamente, obtendo uma equação do 1° grau, $66 = \frac{(B+4)\cdot 5{,}5}{2}$, resolvendo-a corretamente para obter $B = 20\ cm$. A escrita da fórmula com o sinal de igualdade e a escrita da unidade de medida no resultado, também devem ser observadas nas respostas dos alunos.

Os alunos que escrevessem a fórmula e substituíssem os valores corretamente, mas que cometessem erros na resolução da equação, serão considerados no nível de compreensão instrumental, pois não demonstraria habilidade nas técnicas de resolução de equações, as quais necessitam de uma compreensão das propriedades da igualdade e da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

No caso do não conhecimento da fórmula da área do trapézio, por parte do aluno, ou da substituição do valor da área, fornecido na questão, no lugar do valor da base maior, deixando a área como incógnita, ou a não substituição desse valor, indica que o aluno não está nem no nível de compreensão instrumental, pois para ele a fórmula de área do trapézio serve apenas para encontrar o valor da área, e não de outras variáveis da fórmula.

A 5ª questão é a que mostra três figuras: um paralelogramo, um triângulo escaleno e um círculo. Nessa questão a modificação feita foi na figura do círculo, no qual o raio é um valor conhecido e um número irracional. No caso do paralelogramo, a base continua expressa por uma incógnita e no triângulo escaleno, a altura é uma incógnita. O aluno deve escrever uma expressão matemática que forneça a área de cada uma das figuras dadas, sendo que nas duas primeiras a medida da área fica em função de uma variável, enquanto que no caso do círculo essa expressão seria o valor numérico da área do círculo. Todas as fórmulas de área de cada figura foram exploradas nas atividades de ensino. O objetivo, então, é verificar se o aluno detém o conhecimento das fórmulas, assim como se na escrita das expressões matemáticas estará explicitado o sinal de igualdade, o que também foi estudado nas atividades.

O aluno estaria no nível de compreensão relacional se obtivesse uma expressão correta para cada uma das figuras. É importante observar se essas expressões estão escritas na forma mais simples, embora não esteja explícito no enunciado o pedido de simplificação das expressões, pois isso indicaria que o aluno teria domínio para simplificar a parte numérica de expressões, quando possível. Nesse caso as expressões ficariam:

- Para o paralelogramo: $A(P) = 3x \cdot 4 = 12x$; para o triângulo: $A(T) = \frac{5{,}6 \cdot h}{2} = 2{,}8h$, e para o caso do círculo: $A(C) = \pi\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2\pi$. No caso do círculo, a simplificação seria realizar uma operação, a potenciação, com radicais que representam números irracionais.
- A indicação da igualdade "*A* = ..." (área igual a) é muito importante, pois isso demonstraria que compreendeu o sentido de uma fórmula.

O aluno estaria no nível de compreensão instrumental se:

- Na escrita das sentenças matemáticas não apresentasse a indicação do sinal de igualdade, demonstrando que ele não compreende o sentido de uma fórmula, e sim somente de uma expressão algébrica;
- Ou se ele escreve apenas a fórmula de cada figura: área do paralelogramo $\Rightarrow A(P) = b \cdot h$, área do triângulo $\Rightarrow A(T) = \frac{b \cdot h}{2}$ e área do círculo $\Rightarrow A(C) = \pi r^2$, sem relacionar com as medidas fornecidas em cada uma delas.

Na 6ª e 7ª questões estão tratando do perímetro e a área do hexágono regular. Tal polígono regular foi estudado em duas atividades de ensino. Suas propriedades, quanto à inscrição na circunferência, bem como o cálculo do perímetro e da área, também foram estudadas.

Na 6ª questão há dois itens (a) e (b) que tratam do cálculo do perímetro e área do hexágono regular inscrito numa circunferência, respectivamente. O hexágono regular inscrito na circunferência está dividido em seis triângulos eqüiláteros, com as medidas do apótema do hexágono e do raio da circunferência conhecidos. A medida do apótema é dado como um número irracional. Essa questão envolve o conhecimento, por parte do aluno, das propriedades do hexágono regular e o objetivo é investigar se o aluno detém esses conhecimentos, já que os mesmos foram estudados, bem como os procedimentos matemáticos utilizados para encontrar os valores solicitados.

Os procedimentos que demonstrariam o nível de compreensão relacional do aluno sobre as propriedades do hexágono regular inscrito num círculo seriam:

- O aluno utilizaria a propriedade em que a medida do lado do hexágono é igual a medida do raio da circunferência para calcular o perímetro $P_{\ell_6} = 6 \cdot \ell_6 = 6 \cdot R = 6 \cdot 6 = 36\,cm$.
- Para o cálculo da área, o aluno usaria o fato de que como o hexágono regular está dividido em seis triângulos eqüiláteros, então a área do hexágono seria seis vezes a área do triângulo eqüilátero, que tem altura igual ao apótema do hexágono, logo: $A_{\ell_6} = 6 \cdot \frac{\ell_6 \cdot a_6}{2} = \frac{\cancel{6} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}}{\cancel{2}} = 54\sqrt{3}\,cm^2$, e, como é fornecido que $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, então $A_{\ell_6} \cong 93{,}42\,cm^2$.

O aluno poderia tentar resolver essa questão utilizando outros procedimentos como, por exemplo, a utilização do Teorema de Pitágoras para encontrar o lado do hexágono regular inscrito na circunferência, sendo R a hipotenusa, a_6 um dos catetos e o outro cateto $\frac{\ell_6}{2}$. Esse procedimento está correto, já que ele estaria utilizando uma relação métrica no triângulo retângulo, entretanto, ele não estaria relacionando ℓ_6 com R, por meio de uma propriedade do hexágono regular inscrito numa circunferência. Nesse caso, o aluno se encontraria entre o nível de compreensão relacional e instrumental quanto às propriedades do hexágono.

O aluno que não apresentasse o conhecimento inicial sobre as propriedades do hexágono inscrito numa circunferência e nem sobre o Teorema de Pitágoras, não estaria nem no nível de compreensão instrumental em relação ao cálculo do perímetro do hexágono, pois não estaria demonstrando qualquer compreensão sobre tal polígono.

A 7ª questão aborda o perímetro e a área do hexágono regular circunscrito a uma circunferência. A medida do lado do hexágono é expressa por uma fórmula que é dada em função do raio da circunferência. O hexágono também está dividido em seis triângulos eqüiláteros, com a medida do raio da circunferência conhecida. Nos itens (a) e (b) dessa questão o aluno deve calcular o perímetro e a área, respectivamente, do hexágono regular circunscrito. Para tanto, o aluno vai precisar encontrar o valor da medida do lado do hexágono, utilizando a fórmula fornecida no enunciado da questão. A dedução dessa fórmula não foi tratada nas atividades, mas o conhecimento dela nessa questão é desnecessário. A obtenção dos valores solicitados na questão também requer o conhecimento do aluno quanto às propriedades da igualdade.

Os procedimentos utilizados pelo aluno para demonstrar compreensão relacional sobre o hexágono regular circunscrito à circunferência no cálculo de seu perímetro e de sua área seriam:

- A medida do lado é dada pela expressão $L_6 = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \sqrt{3}$. Substituindo o valor do raio nessa fórmula, obtém-se $L_6 = \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{6} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ cm$, ou seja, $L_6 \cong 6{,}92\ cm$. De posse deste valor, o aluno pode calcular o perímetro e a área do hexágono circunscrito;
- O hexágono mais uma vez está decomposto em seis triângulos eqüiláteros, logo: $P_{L_6} = 6 \cdot L_6 = 6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \cong 41{,}52\ cm$;
- No caso do hexágono regular circunscrito, o raio do círculo é a medida do apótema do hexágono, como a área do hexágono regular circunscrito é seis vezes a área do triângulo eqüilátero, tem-se:
  $$A_{L_6} = 6 \cdot \frac{L_6 \cdot R}{2} = \frac{P_{L_6} \cdot R}{2} = \frac{24\sqrt{3} \cdot 6}{2} = 72\sqrt{3}\ cm^2 \cong 124{,}56\ cm^2.$$

O aluno demonstraria um nível de compreensão instrumental se obtivesse um valor incorreto para a medida do lado do hexágono e com esse valor encontrasse um valor, incorreto, para o perímetro do hexágono regular. Neste caso, apesar de ter encontrado um valor incorreto, ele indicaria que compreendeu o cálculo para o perímetro do hexágono regular circunscrito ao círculo.

A não observância de qualquer um desses procedimentos, que leve a resolução da questão, demonstraria que o aluno não se encontra nem no nível de compreensão instrumental.

A 8ª questão trata da obtenção do comprimento da circunferência e da área do círculo, limitado por essa circunferência, e da comparação dos valores obtidos na 6ª e 7ª questões com o comprimento da circunferência e a área do círculo, respectivamente. No item (a), é pedido que o aluno calcule o comprimento (**C**) da circunferência e a área (**A_C**) do círculo, limitado pela circunferência, vistos nas duas questões anteriores. No item (b), com base nos valores encontrados na 6ª e na 7ª questão sobre o perímetro e área dos hexágonos regulares, é solicitado ao aluno que ele estabeleça uma relação matemática entre os valores dos perímetros encontrados para os dois hexágonos e o valor do comprimento (**C**) da circunferência, e que explicite uma conclusão. Por fim, no item (c), espera-se que o aluno estabeleça uma outra relação, agora entre os valores das áreas encontrados para os dois hexágonos regulares e a área (**A_c**) do círculo, e que ele também explicite um resultado final.

Com os itens (b) e (c) desta 8ª questão o objetivo é verificar se o aluno observa duas relações, respectivamente:

1. Que o valor do comprimento da circunferência está entre o valor do perímetro do hexágono regular inscrito a essa circunferência e o valor do perímetro do hexágono regular circunscrito à circunferência
2. E que o valor da área do círculo está entre o valor da área do hexágono regular inscrito no círculo, delimitado pela circunferência, e o valor da área do hexágono circunscrito a esse círculo.

Para solucionar os itens (a) e (b) dessa questão, bastaria o aluno: (i) encontrar corretamente o valor do comprimento da circunferência e a área do círculo, utilizando a medida do raio e de π fornecidos na questão: $C = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 = 37{,}68\ cm$; (ii) e usar a fórmula $A_C = \pi R^2$ para obter o valor da área do círculo: $A_C = 3{,}14 \cdot 6^2 = 3{,}14 \cdot 36 \Rightarrow A_C = 113{,}04\ cm^2$. Esse procedimento indicaria que o aluno está entre o nível de compreensão instrumental e relacional, pois utilizar corretamente as fórmulas estudadas.

Nos dois outros itens da 8ª questão (b e c), que pedem para estabelecer relações, o aluno precisaria realizar algumas comparações utilizando a linguagem simbólica e escrever uma conclusão, entretanto só poderia resolver esses itens se tivesse calculado o valor do comprimento da circunferência e da área do círculo no item (a).

Para demonstrar um nível de compreensão relacional:

- No item (b), o aluno compararia o perímetro do hexágono inscrito **P_h**, o perímetro do hexágono circunscrito **P_H** e o comprimento **C** da circunferência, escrevendo a seguinte relação de desigualdade entre eles: *36 < 37,68 < 41,52*, ou seja, $P_h < C < P_H$. Nesse caso o aluno poderia concluir que o comprimento da circunferência é um valor que está compreendido entre o perímetro de um polígono regular inscrito nela e o perímetro de um polígono regular circunscrito a ela.

- No item (c), a comparação deveria ser feita entre a área do hexágono inscrito $\mathbf{A_h}$, a área do hexágono circunscrito $\mathbf{A_H}$ e a área do círculo $\mathbf{A_C}$. A relação obtida seria: *93,42 < 113,04 < 124,56*, ou seja, $A_h < A_C < A_H$. Nesse caso o aluno poderia inferir que a área do círculo é um valor que está compreendido entre a área de um polígono regular inscrito nele e a área de um polígono regular circunscrito a ele.

Essas conclusões demonstrariam o possível nível de abstração em que o aluno poderia ter chegado a partir das discussões feitas no momento da aplicação das atividades de ensino. Esse raciocínio não foi trabalhado enquanto representação na linguagem simbólica, mas foi discutido em sala quando foi obtida a fórmula para área do círculo.

Se o aluno não apresentasse nenhum indício de abstração quanto a esses itens demonstraria que está no nível de compreensão instrumental.

CAPÍTULO 3

APRESENTAÇÃO DOS DADOS DA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTIVA INICIAL

3.1 Sobre as avaliações aplicadas em escolas das três redes de ensino

A Avaliação Diagnóstica Inicial e o questionário de identificação foram aplicados em três turmas, duas de 8ª série do Ensino Fundamental e uma de 1° ano do Ensino Médio, de escolas das três redes de ensino (público, particular e federal) de Natal/RN, totalizando 122 alunos investigados. As três turmas pesquisadas não se configuraram como os alunos dos grupos experimentais do presente estudo. O objetivo principal dessa prévia aplicação foi subsidiar a elaboração do Módulo de Atividades de Ensino.

A escolha das três escolas não foi de forma aleatória. Essa escolha foi feita a partir da representatividade de cada escola quanto ao número de alunos, instalações físicas e reconhecimento de sua função, enquanto escola, entre pais, professores e pessoas da sociedade. A escola da rede particular solicitou não ser identificada, mas já possui mais de 65 anos de tradição no estado do Rio Grande do Norte, situada no centro da cidade de Natal/RN. A da rede pública foi a Escola Estadual Desembargador Floriano Cavalcanti, situada na zona sul da cidade, e absorve alunos das quatro zonas da cidade de Natal. A terceira escola é o Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte – CEFET/RN, pois, muitos profissionais que atuam nas mais diversas áreas dessa cidade são egressos da antiga Escola Técnica Federal do Rio Grande do Norte, hoje CEFET/RN.

Nas duas primeiras escolas, a particular e a pública, foram escolhidos alunos de 8ª série do turno matutino, pois os alunos desse nível são os sujeitos da pesquisa em questão. No CEFET/RN a turma escolhida foi uma turma de 1° ano. Foi uma seleção aleatória dentre as sete turmas de cursos técnicos integrados, do turno vespertino. A escolha dos turnos ocorreu de acordo com a disponibilidade da pesquisadora e dos professores de Matemática de cada turma. O CEFET/RN trabalha as disciplinas do ensino médio juntamente com as disciplinas técnicas do curso escolhido pelo aluno. Cada curso tem a duração de quatro anos letivos. Os alunos do CEFET/RN prestam uma seleção para ingressar na instituição. As vagas de cada curso são distribuídas de forma a contemplar alunos oriundos, tanto da rede pública quanto da rede particular de ensino, sendo 50% das vagas destinadas para cada uma dessas duas redes. A seleção é baseada em conteúdos estudados de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental. O objetivo em escolher alunos do CEFET/RN foi investigar os conhecimentos desses alunos quanto aos conteúdos de Geometria e Álgebra, estudados enquanto alunos do Ensino Fundamental.

Antes da efetiva aplicação da avaliação foi exposto, às três turmas, o objetivo da mesma, quais conteúdos ela contemplava e ressaltada a importância da participação dos alunos para o desenvolvimento da pesquisa, assim como a não obrigatoriedade de sua participação nessa etapa da pesquisa. Os objetivos foram bem compreendidos e todos concordaram em participar.

O questionário de identificação dos alunos foi aplicado com o objetivo de obter alguns dados deles quanto à idade, sexo, se trabalhava, e verificar quais assuntos foram estudados em Álgebra e Geometria.

3.1.1 Caracterização dos sujeitos – dados do questionário

A turma de 8ª série da escola particular possuía 52 alunos regularmente matriculados e freqüentando as aulas, dos quais 51 alunos estavam presentes no dia da aplicação da avaliação diagnóstica. Nessa turma a aplicação da avaliação teve duração de 110 minutos, correspondentes a 2 horas/aulas.

Quanto à idade, a faixa etária dos alunos está compreendida entre 13 e 16 anos, no qual a predominância é de alunos com 14 anos. Quanto ao sexo, 47% dos alunos são do sexo feminino. Nenhum dos alunos trabalhava na época. O índice de repetência foi de aproximadamente 8% dos alunos com idades de 15 e 16 anos.

Quanto às perguntas que se relacionavam com o estudo de Geometria e Álgebra, foi observado que, apenas, um aluno não respondeu a essas perguntas. Na pergunta sobre Geometria, os alunos citaram a 5ª, 6ª e 8ª séries como as séries que lembravam ter estudado conteúdos dessa área da Matemática. Foi interessante observar que apenas um aluno citou a 7ª série como uma das séries que estudou Geometria. Os alunos que responderam quais assuntos foram estudados citaram ângulos (medidas e operações), triângulos e quadriláteros (classificação quanto a lados e ângulos, cálculo da medida dos ângulos internos), área e perímetro, circunferência, teorema de Pitágoras, teorema de Tales, triângulos semelhantes. Dois alunos responderam que estavam estudando Geometria pela primeira vez na 8ª série; na entrevista foi observado que esses alunos são novatos na escola. Apenas 3% dos alunos responderam que já estudaram Geometria, mas não lembravam nem da série nem dos assuntos estudados. É importante ressaltar dois pontos: nesse colégio os alunos da 6ª série têm a disciplina Desenho Geométrico na qual são estudados os assuntos de Geometria que estão no livro didático de Matemática adotado e que, há vários anos, o professor desta disciplina é o mesmo professor de Matemática da 8ª série.

Referente ao questionamento sobre os assuntos estudados em Álgebra, 53% dos alunos disseram que já haviam estudado, mas não lembravam dos assuntos. Cerca de 23% dos alunos citaram os seguintes assuntos, entre outros: equações do 1° e 2° graus, expressões algébricas, problemas, inequações, produtos notáveis, polinômios e sistemas de equações. Alguns desses alunos citaram assuntos de Aritmética como sendo assuntos de Álgebra, tais como: racionalização de denominadores, frações, MMC e MDC, conjunto dos números inteiros, racionais e reais e porcentagem. Uma aluna respondeu "*que não estudou Álgebra, pois na escola que estudava antes era muito fraca, e só veio aprender matemática depois que entrou nesse colégio*". Não foi questionado sobre o que ela quis dizer com "muito fraca". E 22% dos alunos não responderam a essa questão.

Com relação à última questão, sobre como eram as aulas de Matemática durante a vida escolar dos alunos, foi observado que cerca de 27% dos alunos responderam que tiveram aulas "*muito boas e divertidas*" e reconheceram que gostavam muito de estudar matemática. Não se investigou o que os alunos quiseram dizer com "aulas divertidas". Aproximadamente 33% dos alunos responderam descrevendo algumas fases da aprendizagem, especificando em quais séries as aulas foram boas e em quais foram mais repetitivas, com assunto, atividade e correção. Alguns desses alunos reconheceram que sentiram dificuldades a partir dos assuntos estudados na 7ª série. Cerca de 25% dos alunos caracterizaram as aulas que já tiveram de matemática como "*chatas*", "*cansativas*" e "*repetitivas*". Muitos desses alunos externaram que não gostavam da disciplina. O restante dos alunos não respondeu ou não lembravam.

Na turma de 8ª série da Escola Est. Des. Floriano Cavalcanti, o número de alunos era 49 regularmente matriculados, mas que raramente havia uma freqüência regular das aulas. Participaram 42 alunos da aplicação da avaliação diagnóstica. Nessa turma a aplicação da avaliação teve duração de 90 minutos, também correspondentes a 2 horas/aulas.

Sobre a faixa etária dos alunos, a idade está compreendida entre 13 e 15 anos, na qual a predominância é 14 anos, aproximadamente 69%. Quanto ao sexo, 71% dos alunos são do sexo feminino. Apenas um dos alunos trabalha e somente um é repetente (não é o mesmo aluno que trabalha).

Sobre a pergunta que se relacionava com o estudo de Geometria, foi observado que só um aluno não respondeu a essas perguntas. Todas as séries foram citadas pelos alunos, com maior predominância a 6ª e 7ª séries. Os assuntos citados pelos alunos foram: ângulos (medidas e operações), figuras planas (triângulos e quadriláteros), área e perímetro, comprimento da circunferência, Teorema de Pitágoras, Teorema de Tales, hexágono e simetria, esses últimos citados apenas por um aluno. Cerca de 9% dos alunos responderam que já estudaram Geometria, mas não lembravam da série e 13% não lembravam dos assuntos estudados. Dois alunos escreveram que só estudaram Geometria no cursinho preparatório para o CEFET/RN. É importante ressaltar que nessa escola os assuntos de Geometria, que estão no livro didático de Matemática adotado pela rede pública de ensino do estado, são estudados quando "dá tempo", segundo o depoimento do professor, pois geralmente ele, como a maioria dos outros da escola, prioriza os assuntos de Aritmética e Álgebra.

Quanto ao questionamento sobre os assuntos estudados em Álgebra, 36% dos alunos disseram que já haviam estudado, mas não lembravam nem da série nem dos assuntos. Apenas um aluno citou a 6ª série. Cerca de 26% dos alunos citaram que haviam estudado expressões algébricas; aproximadamente 12% citaram monômios e polinômios. Outros assuntos citados foram: equações do 1° e 2° graus, inequações, sistemas de equações e produtos notáveis. Dois por cento desses alunos citaram alguns assuntos de Aritmética como sendo assuntos de Álgebra, tais como: potências e porcentagem. Cinco por cento disseram não ter estudado Álgebra e 12% não responderam a essa questão.

Sobre como eram as aulas de Matemática durante a vida escolar dos alunos, constatamos que cerca de 33% responderam que tiveram aulas "*muito boas*". Não se pesquisou o que eles quiseram dizer com "aulas muito boas". Aproximadamente 26% dos alunos responderam descrevendo algumas fases da aprendizagem, especificando em quais séries as aulas foram boas e em quais foram mais repetitivas. Cerca de 21% dos alunos caracterizaram as aulas que já tiveram de matemática como "*chatas*", "*cansativas*" e "*repetitivas*". O restante dos alunos não responderam a essa questão ou não lembravam das aulas.

A última turma investigada foi a do 1° ano do CEFET/RN. Essa turma possui 35 alunos regularmente matriculados no curso Técnico Integrado. Participaram no dia da aplicação da avaliação diagnóstica 29 alunos. Nesta turma a aplicação da avaliação teve uma duração aproximada de 60 minutos.

A idade dos alunos dessa turma está compreendida entre 13 e 19 anos, dos quais 48% têm 15 anos, e somente um aluno tem 19 anos e dois têm 16 anos. Quanto ao sexo, 59% deles são do sexo feminino. Dois alunos trabalham, e um desses alunos já repetiu (é o aluno que possui 19 anos).

Com relação ao questionamento sobre os assuntos estudados em Geometria, foi observado que todas as séries foram citadas pelos alunos, com maior predominância a 7ª e 8ª séries, com aproximadamente 48% e 65%, respectivamente. Os assuntos mais citados pelos alunos foram: perímetro e área (aproximadamente 55%), circunferência (aproximadamente

14%) e volume, dentre outros. Não foram citados o Teorema de Pitágoras e nem o Teorema de Tales. Cerca de 10% dos alunos responderam que já estudaram Geometria, mas não lembravam da série e 24% não lembravam dos assuntos estudados. Apenas dois alunos não responderam essa questão.

Quanto à pergunta que se relacionava com o estudo de Álgebra, 65% dos alunos disseram que já haviam estudado, mas não lembravam da série e 45% não lembravam dos assuntos. Dois alunos citaram a 7ª série e só um citou a 8ª série. Cerca de 24% dos alunos citaram que haviam estudado equações e inequações, e 7% mencionaram expressões algébricas. Outros assuntos referidos foram sistemas de equações, produtos notáveis e frações algébricas. Foram incluídos alguns assuntos de Aritmética como sendo assuntos de Álgebra, tais como: potenciação, radiciação e conjuntos. Vinte e quatro por cento dos alunos não responderam a essa questão.

Em alusão a como eram as aulas de Matemática, constatou-se que cerca de 38% dos alunos responderam que tiveram aulas "*muito boas*". Aproximadamente 24% dos alunos descreveram algumas fases da aprendizagem, especificando em quais séries as aulas foram boas e em quais foram mais repetitivas. Uma aluna chamou a atenção com seu depoimento: "*na 5ª série as aulas de matemática eram terríveis justamente porque tinha muita geometria. Os assuntos da 7ª e 8ª foram ótimos*". Cerca de 14% dos alunos caracterizaram as aulas que já tiveram de matemática como "*chatas*". O restante dos alunos não respondeu a essa questão.

3.2 Apresentação dos dados da Avaliação Diagnóstica inicial

A apresentação dos dados coletados é feita sob a forma de estatística descritiva, através de uma categorização e quantificação em números absolutos e porcentagens das respostas dos alunos, do ponto de vista matemático, segundo os parâmetros: respostas certas, respostas erradas e em branco, de acordo com os critérios descritos no item 2.3.3 (p. 53) deste estudo. Para melhor compreender os procedimentos e respostas encontradas nas avaliações foram entrevistados alguns alunos. Como já exposto, essas entrevistas não possuía perguntas padrão para todos os alunos, ocorria de acordo com o procedimento matemático utilizado pelo aluno para responder às questões da avaliação. Os alunos com sua avaliação em mãos tentavam explicar, por palavras, os cálculos feitos ou o raciocínio que gerou os cálculos.

Os dados a seguir estão apresentados através de tabelas e gráficos. As cinco primeiras questões da avaliação foram agrupadas em uma só tabela e um só gráfico, pois são questões sem alternativas. As 6ª, 7ª e 8ª questões estão separadas em tabelas e gráficos, cada uma, pois têm mais de um item. As porcentagens foram colocadas aproximadas para uma melhor leitura dos dados.

3.2.1 Resultados da 8ª série da escola particular – 51 alunos

Tabela das respostas da 1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª questões

Questões/ Respostas	1ª Questão (%)	2ª Questão (%)	3ª Questão (%)	4ª Questão (%)	5ª Questão (%)
Certas	53	8	24	37	10
Erradas	37	67	56	47	59
Em branco	10	25	20	16	31

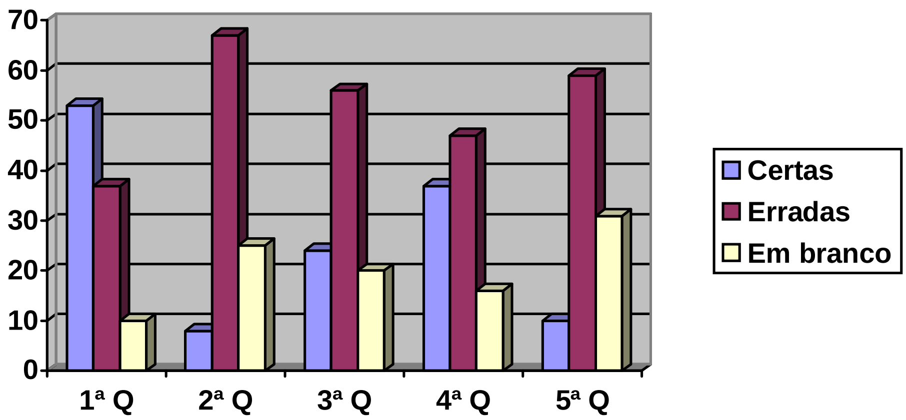


Tabela das respostas da 6ª questão

Figuras/ Respostas	Paralelogramo (%)	Triângulo (%)	Círculo (%)
Certas	30	18	2
Erradas	46	68	51
Em branco	24	14	47

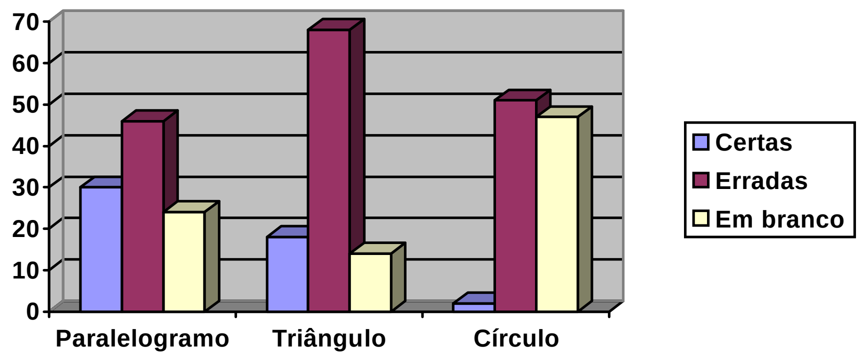


Tabela das respostas da 7ª questão

Itens/ Respostas	Item (a) (%)	Item (b) (%)
Certas	22	0
Erradas	35	45
Em branco	43	55

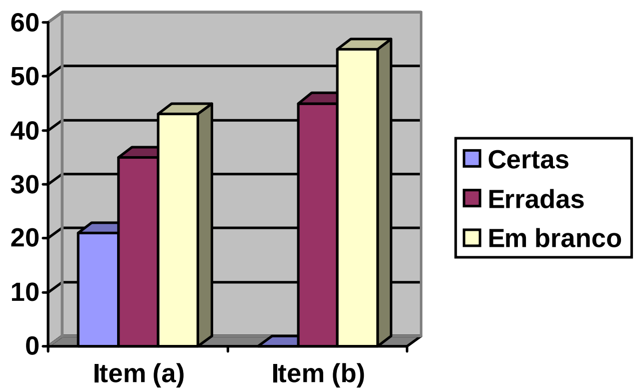
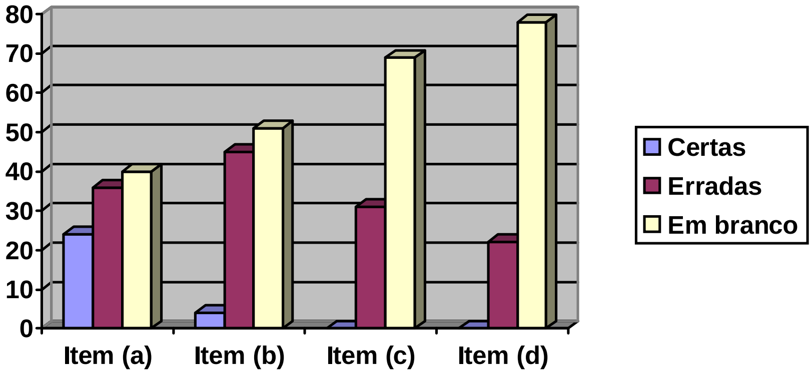


Tabela das respostas da 8ª questão

Itens/ Respostas	Item (a) (%)	Item (b) (%)	Item (c) (%)	Item (d) (%)
Certas	24	4	0	0
Erradas	36	45	31	22
Em branco	40	51	69	78



3.2.2 Resultados da 8ª série da Escola Estadual Des. Floriano Cavalcanti – 42 alunos

Tabela das respostas da 1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª questões

Questões/ Respostas	1ª Questão (%)	2ª Questão (%)	3ª Questão (%)	4ª Questão (%)	5ª Questão (%)
Certas	2	7	24	26	7
Erradas	72	62	48	32	53
Em branco	26	31	28	42	40

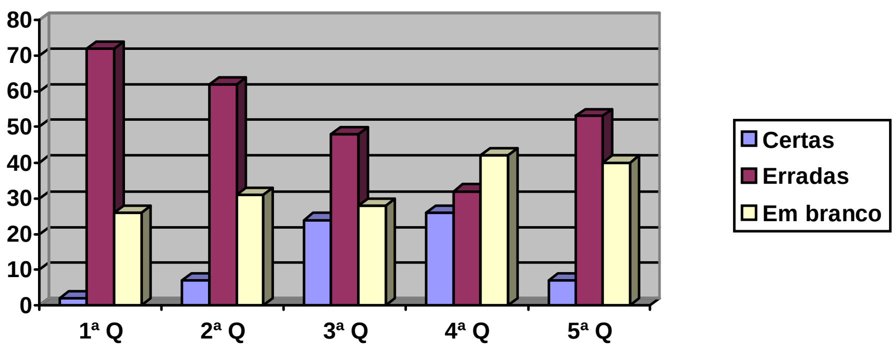


Tabela das respostas da 6ª questão

Figuras/ Respostas	Paralelogramo (%)	Triângulo (%)	Círculo (%)
Certas	6	4	9
Erradas	66	53	58
Em branco	28	43	33

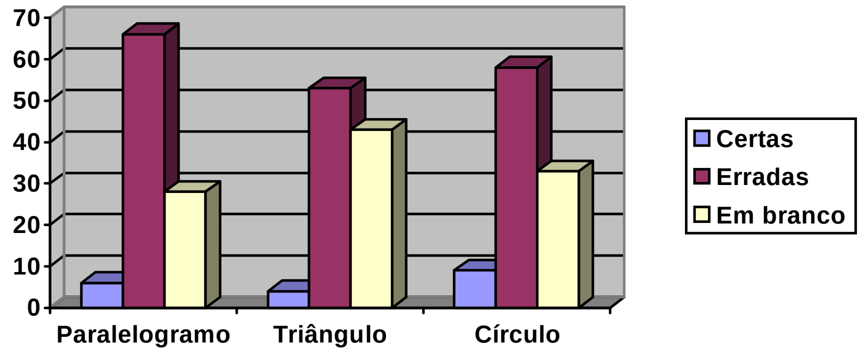


Tabela das respostas da 7ª questão

Itens/ Respostas	Item (a) (%)	Item (b) (%)
Certas	14	2
Erradas	27	36
Em branco	59	62

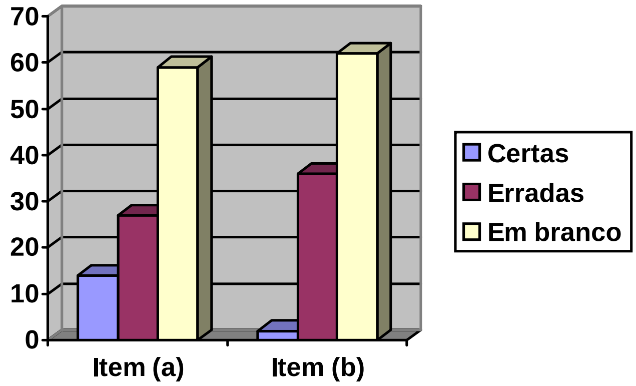
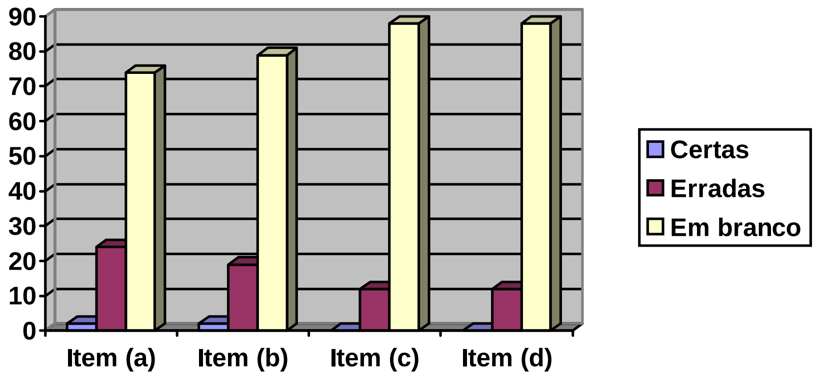


Tabela das respostas da 8ªquestão

Itens/ Respostas	Item (a) (%)	Item (b) (%)	Item (c) (%)	Item (d) (%)
Certas	2	2	0	0
Erradas	24	19	12	12
Em branco	74	79	88	88



3.2.3 Resultados do 1° ano do curso Técnico Integrado do CEFET/RN – 29 alunos

Tabela das respostas da 1ª, 2ª, 3ª, 4ª e 5ª questões

Questões/ Respostas	1ª Questão (%)	2ª Questão (%)	3ª Questão (%)	4ª Questão (%)	5ª Questão (%)
Certas	13	24	38	38	21
Erradas	51	45	24	10	31
Em branco	36	31	38	52	48

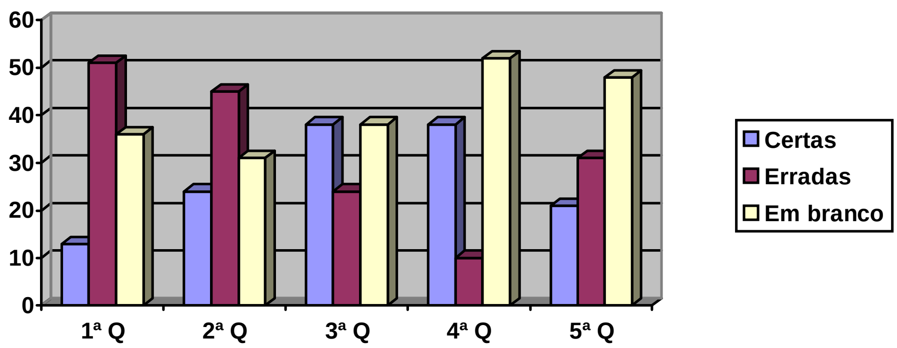


Tabela das respostas da 6ª questão

Figuras/ Respostas	Paralelogramo (%)	Triângulo (%)	Círculo (%)
Certas	21	7	17
Erradas	38	52	42
Em branco	41	41	41

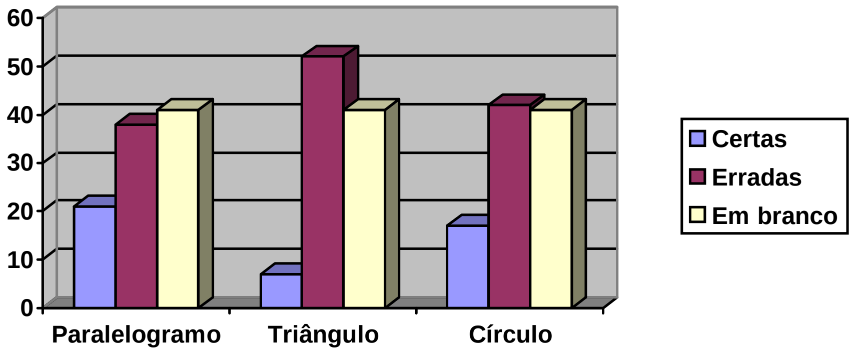


Tabela das respostas da 7ª questão

Itens/ Respostas	Item (a) (%)	Item (b) (%)
Certas	14	7
Erradas	21	24
Em branco	65	69

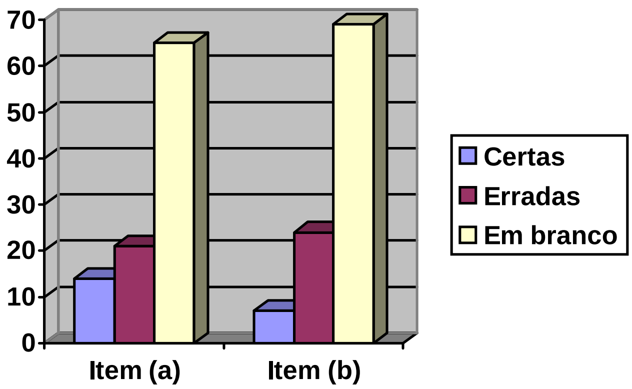
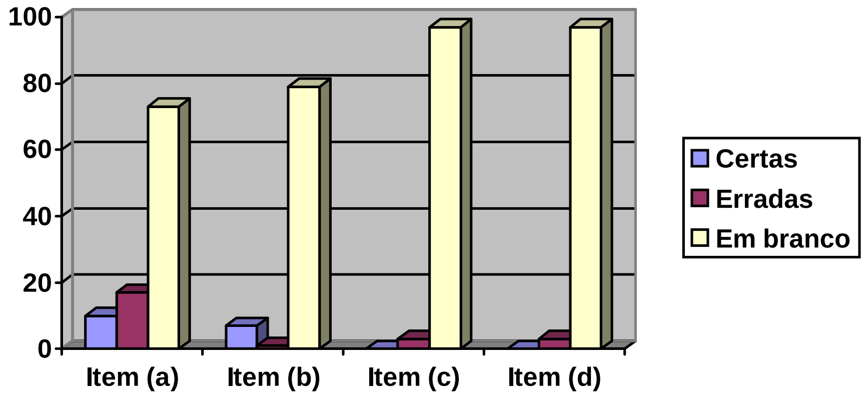


Tabela das respostas da 8ªquestão

Itens/ Respostas	Item (a) (%)	Item (b) (%)	Item (c) (%)	Item (d) (%)
Certas	10	7	0	0
Erradas	17	14	3	3
Em branco	73	79	97	97



3.3 Algumas considerações sobre as respostas dos alunos

De acordo com os dados acima expostos, observa-se que houve um alto índice de respostas erradas em muitas das questões, bem como altos índices de questões em branco. Devido a esse fato, julgou-se importante observar mais de perto algumas dessas respostas incorretas e tentar compreender o porquê delas. Nesse sentido, foram escolhidos alguns cálculos, julgados incorretos, dentre as respostas dos alunos das três escolas. Alguns desses alunos foram entrevistados para tentar justificar os procedimentos adotados. Os alunos serão identificados apenas pelo primeiro nome e em que escola estudavam.

Na 1ª questão destacam-se dois alunos, um da escola particular e outro da escola estadual, para observar os procedimentos adotados por eles para tentar resolver a questão.

Uma resposta interessante foi do aluno André (ver ilustração 1) da escola particular. Foi pedido a ele que explicasse seu procedimento e foi questionado porque ele fez um primeiro cálculo "$A = (6y + 3x) \cdot 4$", ele respondeu que "*usou as letras para representar as medidas dos lados porque viu que tinha dois retângulos diferentes, por isso usou letras diferentes, logo também daria áreas diferentes*". Então foi questionado se não teria como saber a medida dos lados do retângulo maior ou dos dois menores observando a figura, e ele respondeu que "*não*".

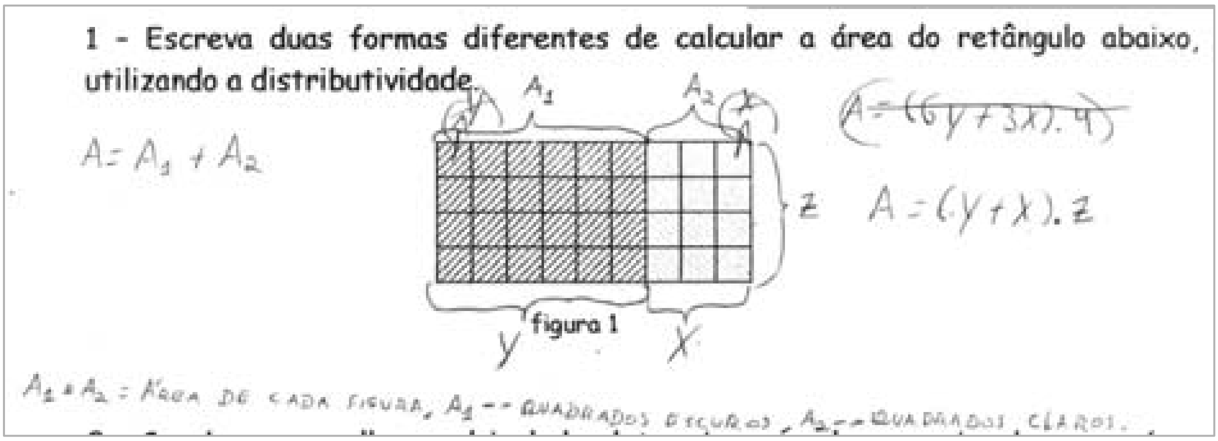


Ilustração 1

Outra resposta incomum foi a da aluna Aionara (ilustração 2) da escola estadual. Ela escreveu uma igualdade de frações. Essa aluna não foi entrevistada, mas percebe-se que os temos da primeira fração são exatamente as dimensões do retângulo mais escuro, e que os termos da segunda fração são as dimensões do retângulo mais claro. Supõe-se que essa aluna tenha se recordado da aprendizagem de frações onde se costuma pintar partes de um todo para representar uma fração desse todo. Ainda assim, a representação correta seria $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$ e $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$. Entretanto, as frações representadas estão se relacionando com a dimensão dos lados do retângulo, estando incorretas.

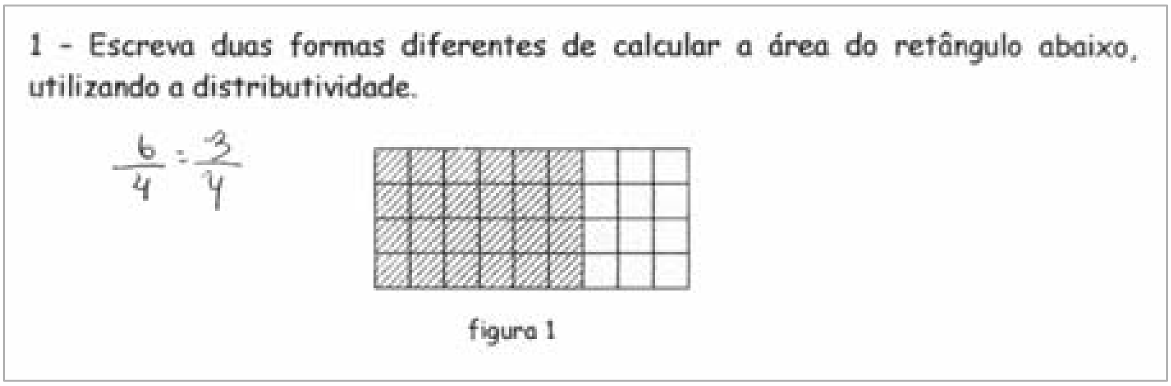


Ilustração 2

Outras respostas foram encontradas, como: contando os quadradinhos dos dois retângulos e somando os resultados; calculando separadamente a área de cada retângulo menor, não somando os resultados; e contando esses cálculos como duas formas diferentes, ou calculando separadamente a área de cada retângulo menor e somando os resultados.

Na 2ª questão observou-se que, na escola estadual, muitos alunos utilizaram a fórmula da área do círculo para encontrar o valor da área do círculo que estava quadriculado. Isso se justifica porque o professor da turma havia acabado de ensinar a fórmula do comprimento da circunferência e da área do círculo. Mesmo não sendo fornecido o valor de π na questão, esses alunos o assumiram como 3,14. Já na escola particular apenas um aluno realizou esse procedimento. A esse aluno foi questionado se não teria outra forma de encontrar o valor sem usar a fórmula e sim utilizando os quadradinhos da malha quadriculada, o aluno respondeu que "*poderia contar os quadradinhos*", então assim o fez e encontrou o valor de *28* quadradinhos, contando os inteiros e juntando os que estavam cortados "pela metade". Foi solicitado que ele comparasse com o valor encontrado usando a fórmula, e o aluno se mostrou surpreso com a aproximação dos valores, pois, utilizando a fórmula o valor da área seria 28,26.

Ainda na escola particular, cerca de 27% dos alunos realizaram o procedimento análogo ao da aluna Círlia (ilustração 3). Outro aluno da mesma escola, Victor Hugo, apresentou o procedimento da ilustração 4.

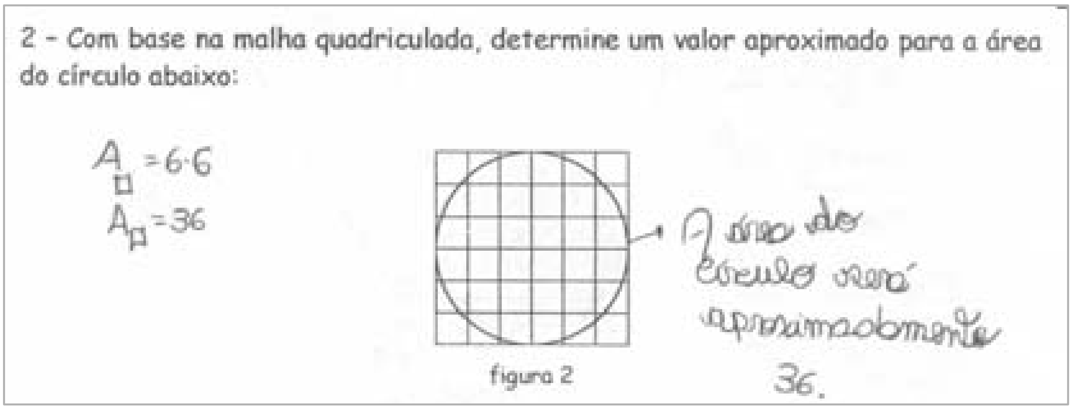


Ilustração 3

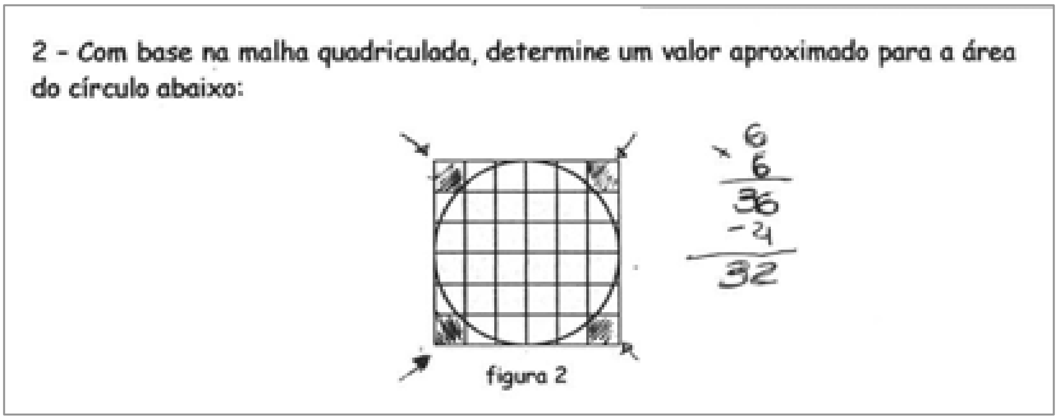


Ilustração 4

Foi questionado a alguns desses alunos se esse valor não era maior que o valor da área do círculo, e a maioria disse que "*sim*"; então foi perguntado se não teria como melhor se aproximar da área do círculo, e eles responderam que "*não, porque não se lembra da fórmula*" ou "*não, pois não dava pra saber quanto vale os quadradinhos cortados*". Há dois aspectos a serem observados nas duas respostas acima citadas na entrevista: o primeiro é que os alunos dão relevante importância à fórmula da área e que não conseguiram ver outra maneira de encontrar esse valor sem necessitar da fórmula. Talvez isso seja um reflexo da importância que o próprio professor destaca na memorização de fórmulas. Outro aspecto observado é que figuras em malha quadriculada ou figuras reticuladas não fazem sentido para os alunos, o que parece, o trabalho com quadriculados para introduzir o conceito de área não é realizado pelos professores.

Para a 3ª questão houve um fato interessante observado nas três turmas das escolas, muitos alunos estabeleceram uma proporção entre os segmentos que se apresentavam na figura. A ilustração 5 corresponde a esse procedimento, bastante detalhado, adotado pela aluna Círlia da escola particular.

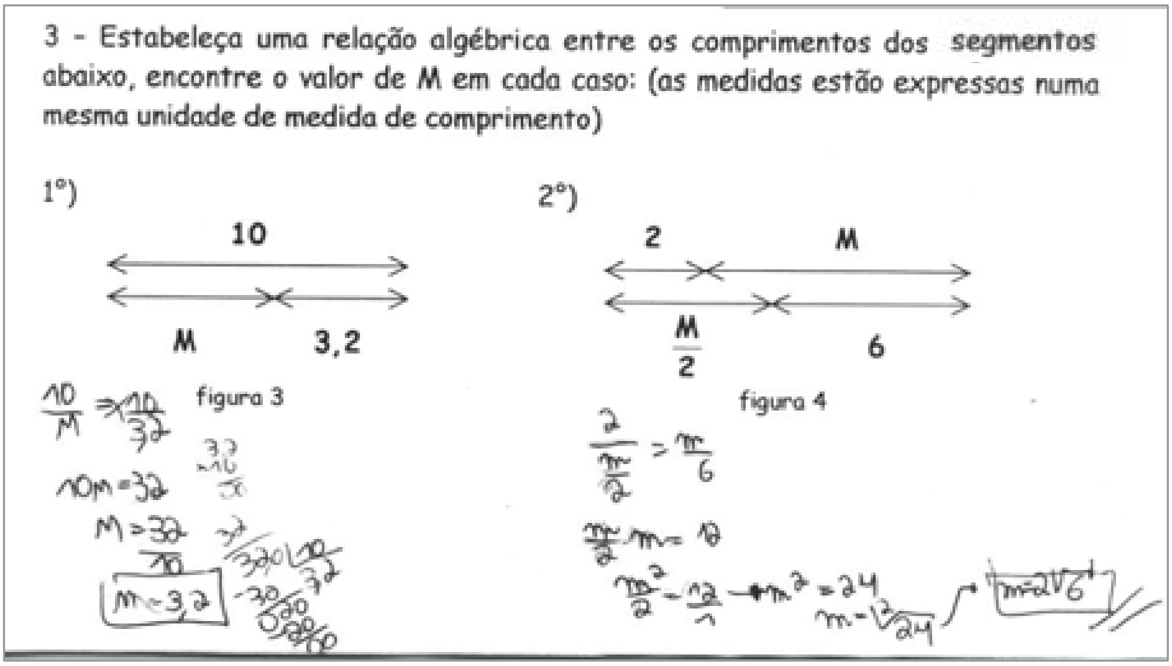


Ilustração 5

Essa aluna foi entrevistada sobre o procedimento utilizado para responder essa questão e ela disse que era “*proporcionalidade entre segmentos e não verificou se os valores encontrados para as incógnitas satisfaziam a relação entre os segmentos*”. Questionada por que era proporcionalidade entre segmentos, e ela respondeu que “*são segmentos paralelos*”.

Outra aluna, Ana Sara (ilustração 6), da escola federal, também utilizou o procedimento de calcular as medidas desconhecidas estabelecendo uma proporção.

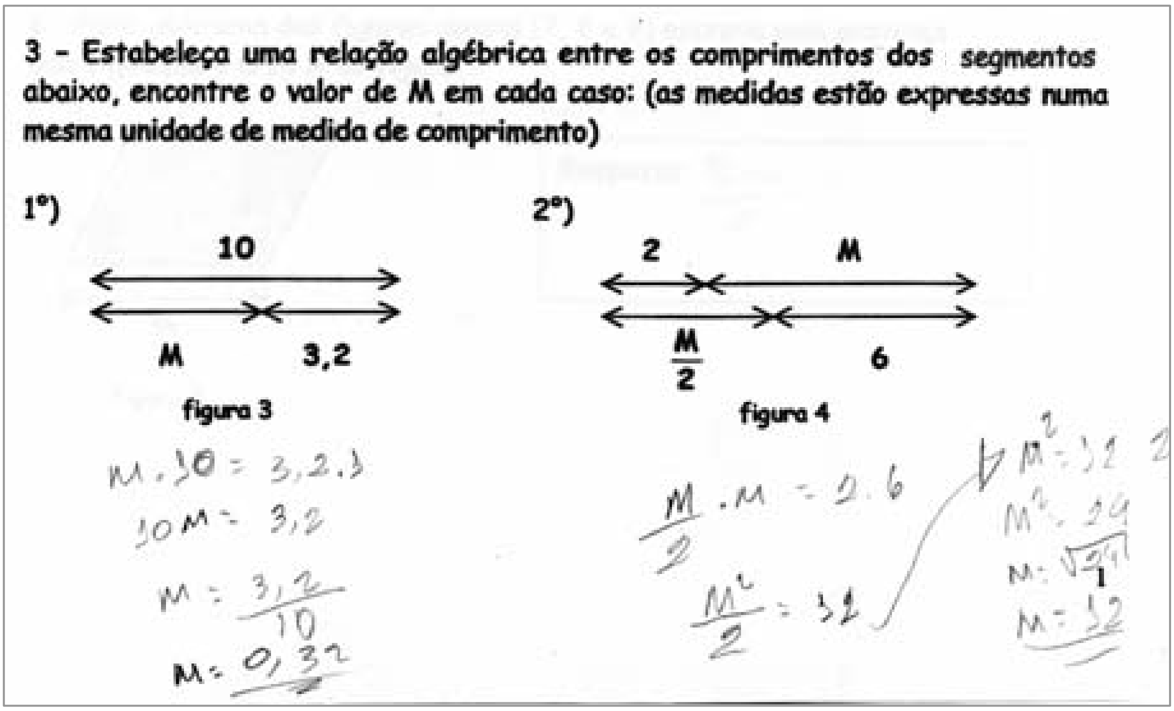


Ilustração 6

Observa-se que nesses dois casos, como em outros, os alunos desenvolveram seus cálculos com segurança, acreditando estarem aplicando o procedimento correto.

Outros procedimentos que não utilizaram a linguagem simbólica se apresentaram nessa questão. No primeiro caso, alguns alunos encontraram o valor da incógnita realizando apenas a subtração *10 – 3,2 = 6,8.* Mesmo não explicitando a equação, esses alunos observaram a relação entre as medidas dos segmentos. No segundo caso, os alunos que não explicitaram a equação disseram que “*fui tentando valores para verificar a igualdade entre a medida total dos dois segmentos*”. Esse processo é de tentativa e erro comumente utilizado pelos alunos em sala de aula. Foi observado também que, no segundo caso, alguns alunos escreveram corretamente a equação, mas não conseguiram resolvê-la.

Na 4ª questão, na escola particular e na estadual, o número de respostas erradas não apresentou muita discrepância em relação ao número de respostas corretas. Já na escola federal esse número foi superior, no entanto houve muitas respostas em branco. Os procedimentos mais comuns foram: (i) estabelecer uma letra para a medida do comprimento do retângulo, encontrando seu valor e calculando o valor do perímetro; (ii) dividir o valor da área pelo valor da altura, encontrando assim o valor do comprimento e calcular o valor do perímetro como, por exemplo, a aluna Gabriela da escola particular (ilustração7).

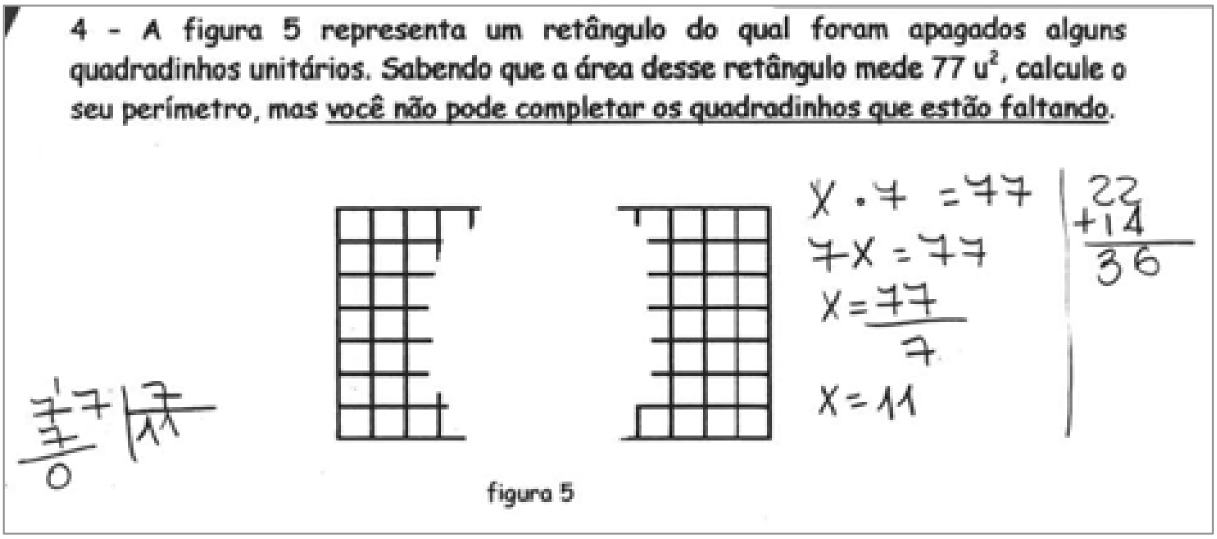


Ilustração 7

Nessa questão foi observado uma informalidade nos cálculos, nem todos os alunos explicitaram em linguagem simbólica a relação entre a área do retângulo, a medida da altura e a medida do comprimento, bem como para o cálculo do perímetro. O símbolo de igualdade (=) não foi usado para estabelecer as relações.

Muitos alunos encontraram o valor do comprimento, mas não souberam encontrar o valor do perímetro. Segundo alguns desses alunos, "*não lembrava o que é perímetro*" ou somaram apenas duas dimensões do retângulo.

Na 5ª questão cerca de 10% dos alunos da escola particular e 7% da escola estadual conseguiram escrever a fórmula para área do trapézio corretamente, substituir os valores fornecidos pela questão e encontrar o valor correto para medida da base maior, resolvendo corretamente a equação obtida. Na escola federal a porcentagem de acerto foi de 21%. Muitos alunos escreveram a fórmula corretamente e realizaram a substituição dos valores, mas resolveram a equação obtida incorretamente. Os erros mais comuns foram na distributividade como, por exemplo, a aluna Larissa da escola particular (ilustração 8), em simplificações indevidas como a do aluno André, também da escola particular (ilustração 9), e na aplicação incorreta das propriedades da igualdade para resolução de equações, conforme ilustração 10 da aluna Patrícia da escola estadual.

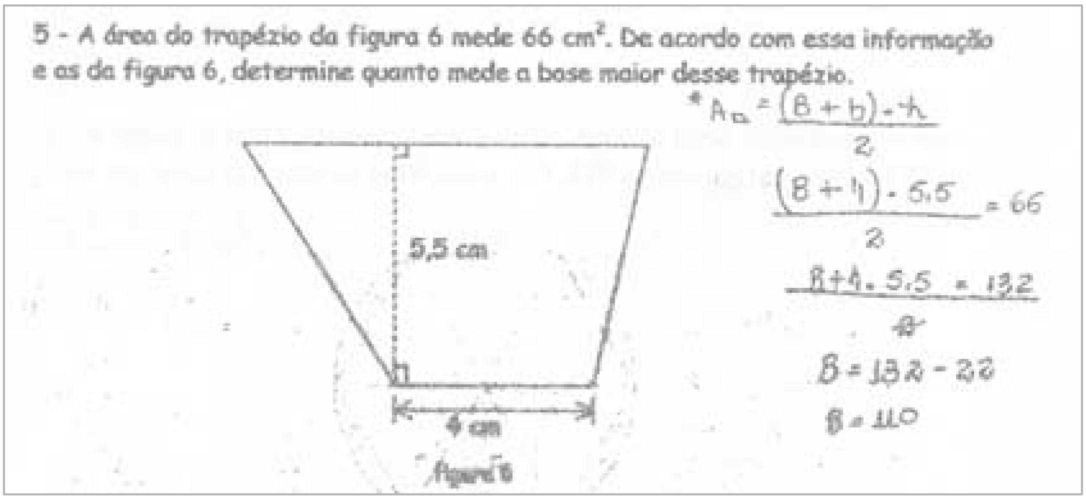


Ilustração 8

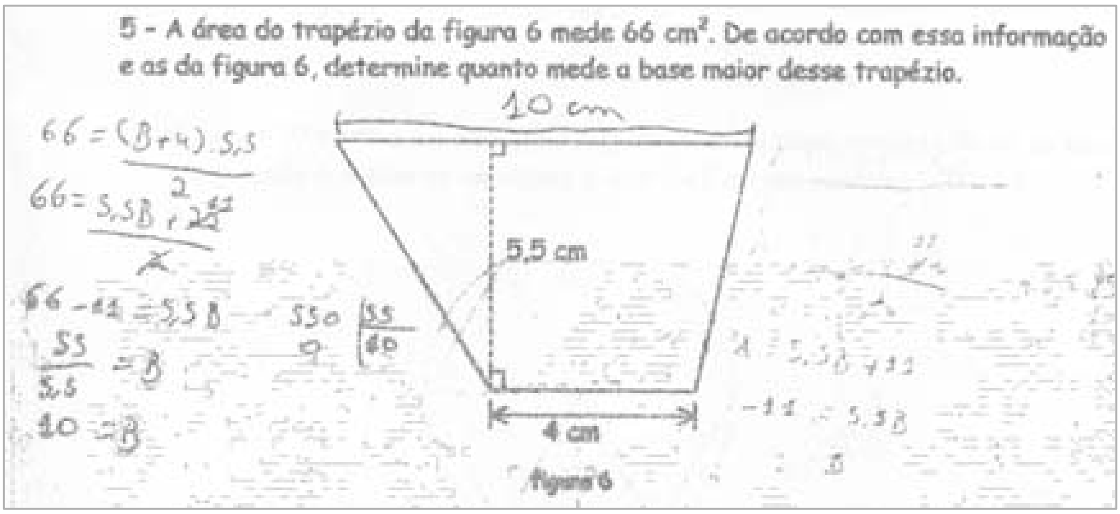


Ilustração 9

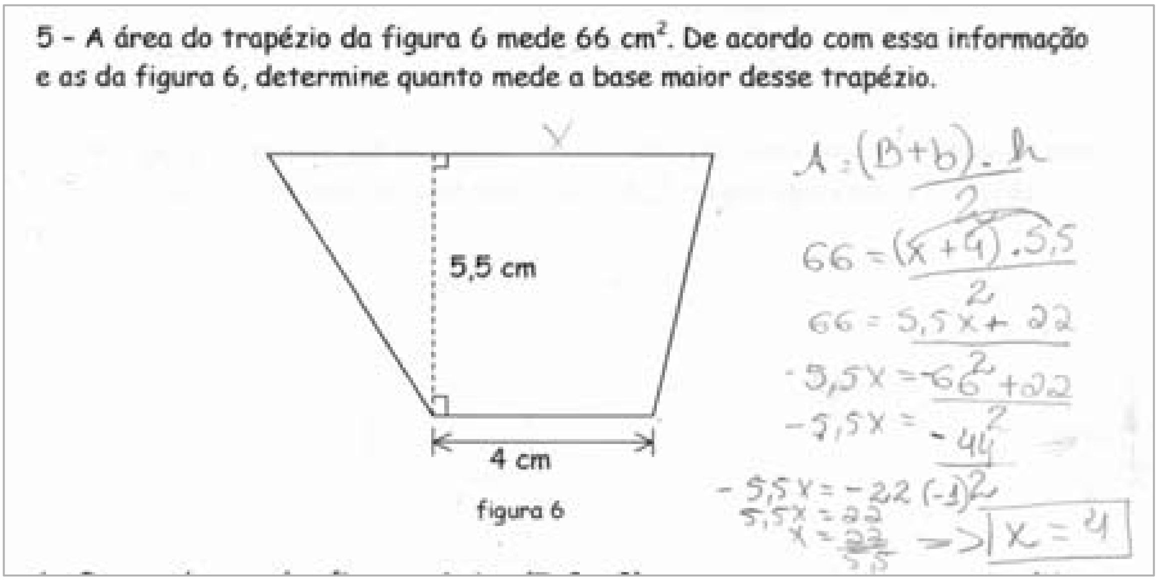


Ilustração 10

O caso desses alunos demonstra que as propriedades operatórias, como a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, bem como os princípios da igualdade, não são de domínio dos alunos, talvez porque sejam pouco explorados pelos professores de Matemática.

Também foram encontradas respostas em que o valor da área não foi substituído, como a resposta de Bruna M. da escola particular (ilustração 11), nesse caso a aluna continuou a "resolução" desconsiderando o fato que a expressão continha duas incógnitas, "encontrando" um valor para a área do trapézio.

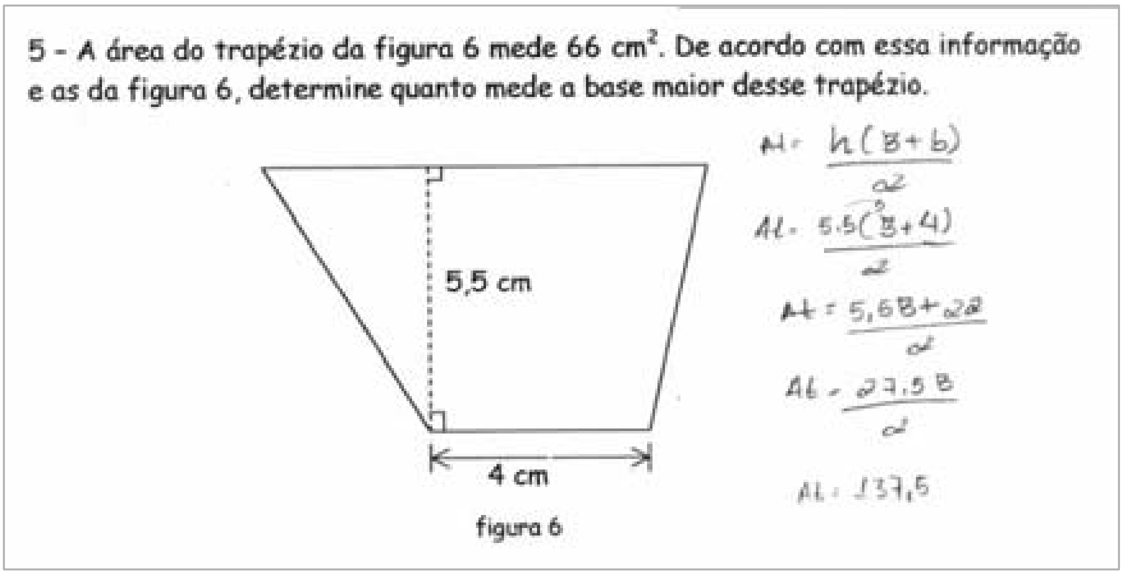


Ilustração 11

Outro exemplo é a aluna Klebia da escola federal (ilustração 12), apesar de ter escrito o valor da área do trapézio, não o substituiu na fórmula, também resolvendo uma expressão sem uma igualdade.

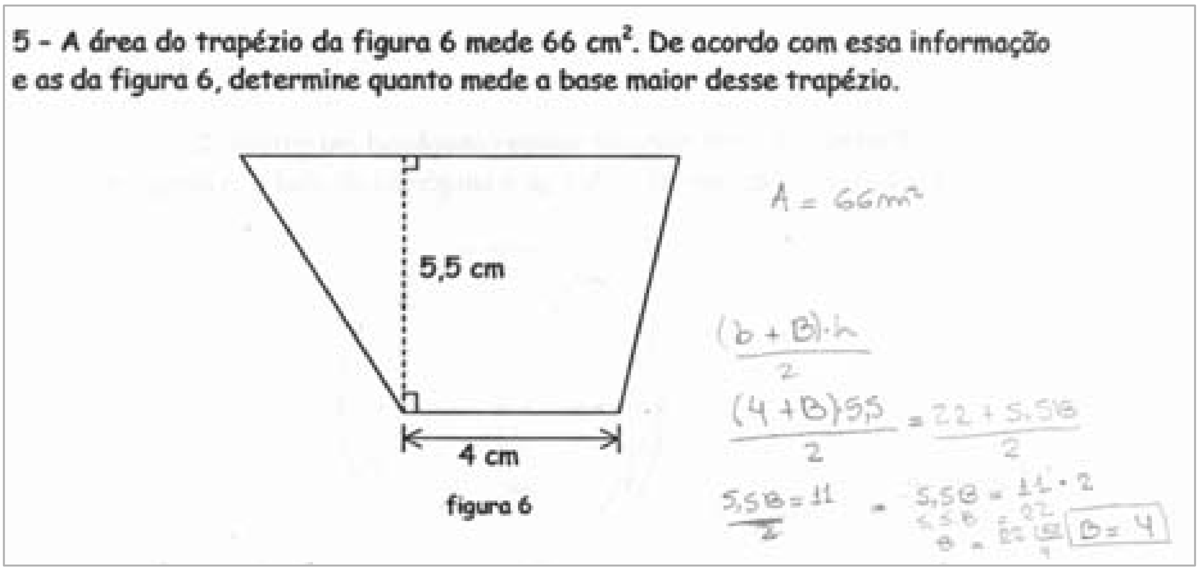


Ilustração 12

Foi observado que a posição do trapézio, diferente ao que é comumente trabalhado pelos professores das escolas, não gerou obstáculos para a resolução dessa questão, pois além de estar explícito no enunciado que se tratava de um trapézio, as respostas incorretas encontradas foram mais por falta de conhecimento da fórmula de área dessa figura. Isso foi claramente notado nas avaliações dos alunos da escola estadual. Os alunos que conheciam esse quadrilátero, ou que lembravam da fórmula de sua área, escrevam corretamente a fórmula e erraram nos cálculos, como exposto acima, não demonstrando dificuldade quanto à posição do trapézio.

Na 6ª questão as respostas mais comuns encontradas para essas sentenças escritas incorretamente foram: (i) a fórmula da área do paralelogramo dividida por dois ou a fórmula para a área do trapézio considerada como a área do paralelogramo, embora nesta última pudesse ser usada considerando as bases de mesmo comprimento, o que não foi feito; (ii) a área do triângulo sem estar dividido por dois; (iii) para o círculo foram, o raio elevado ao quadrado, com ausência do π, ou a fórmula para o comprimento da circunferência. Também houve respostas em que os alunos não escreveram as sentenças na forma mais simples, e respostas em que os valores foram substituídos na fórmula, mas sem expressar a igualdade. Por exemplo, a do aluno Antônio Carlos da escola particular (ilustração 13).

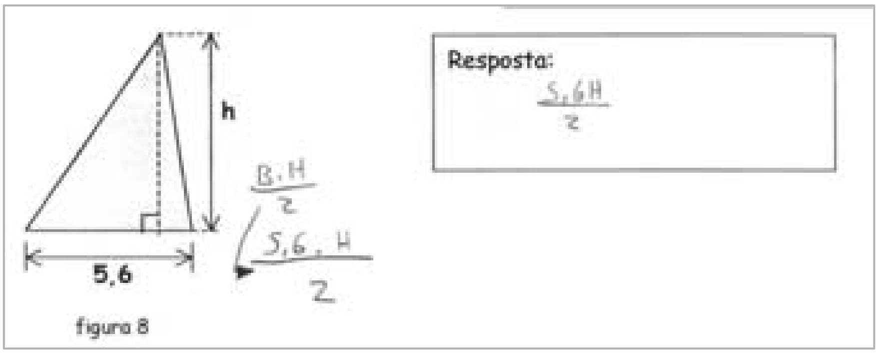


Ilustração 13

Alguns alunos desconsideraram que havia uma incógnita em uma das dimensões de cada figura e encontraram um valor para a área, ou desconsideraram que a área é um valor desconhecido e encontrou um valor para a incógnita. Exemplificando esses dois procedimentos temos a aluna Jullyana da escola estadual (ilustração 14) e da aluna Vanessa da escola particular (ilustração 15).

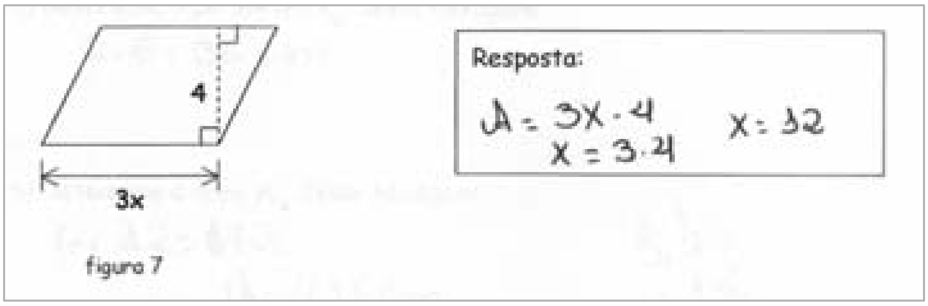


Ilustração 14

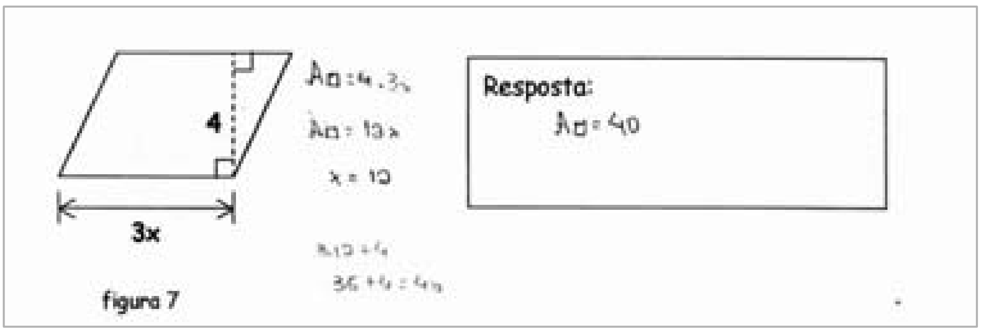


Ilustração 15

Nos procedimentos da aluna Vanessa (ilustração 15), ela substituiu corretamente as dimensões na fórmula e chegou à expressão correta; no entanto, desconsiderou que a área é um valor desconhecido e "encontrou" o valor *12* para variável *x*. De posse desse valor, escreveu uma expressão em que relacionava a dimensão fornecida e a altura do paralelogramo por meio de uma adição. Nessa expressão o valor de *x* na dimensão *3x* foi substituído por *12* que somado com *4* (a altura) forneceu o valor *40*. Então, ela atribuiu ao valor da área do paralelogramo esse número encontrado. A princípio, mesmo tendo escrito a expressa correta para a área do paralelogramo, essa aluna não encontrou um sentido para ela, já que havia duas incógnitas. A adição da dimensão com a altura do paralelogramo revela que a aluna "confundiu" perímetro com área.

O índice expressivo para respostas em branco na área do círculo para a escola particular foi justificado nas entrevistas realizadas com alguns desses alunos. Eles disseram que não lembravam da fórmula para área do círculo ou não haviam estudado.

Na escola estadual o professor de Matemática havia acabado de estudar a fórmula da área do círculo nessa turma, mas, mesmo assim, não foi expressivo o número de respostas corretas. Os erros mais comuns nessa turma foram: a escrita da fórmula do comprimento da circunferência, ao invés da área do círculo, ou uma "mistura" nas duas fórmulas, escrevendo uma fórmula incorreta. Um exemplo é o aluno Dyego da escola estadual (ilustração 16), ele além de "misturar" as duas fórmulas, realizou um cálculo em que encontrou um valor para o raio do círculo.

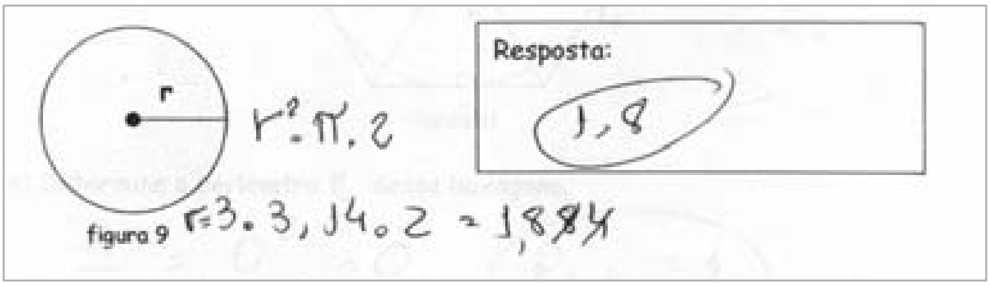


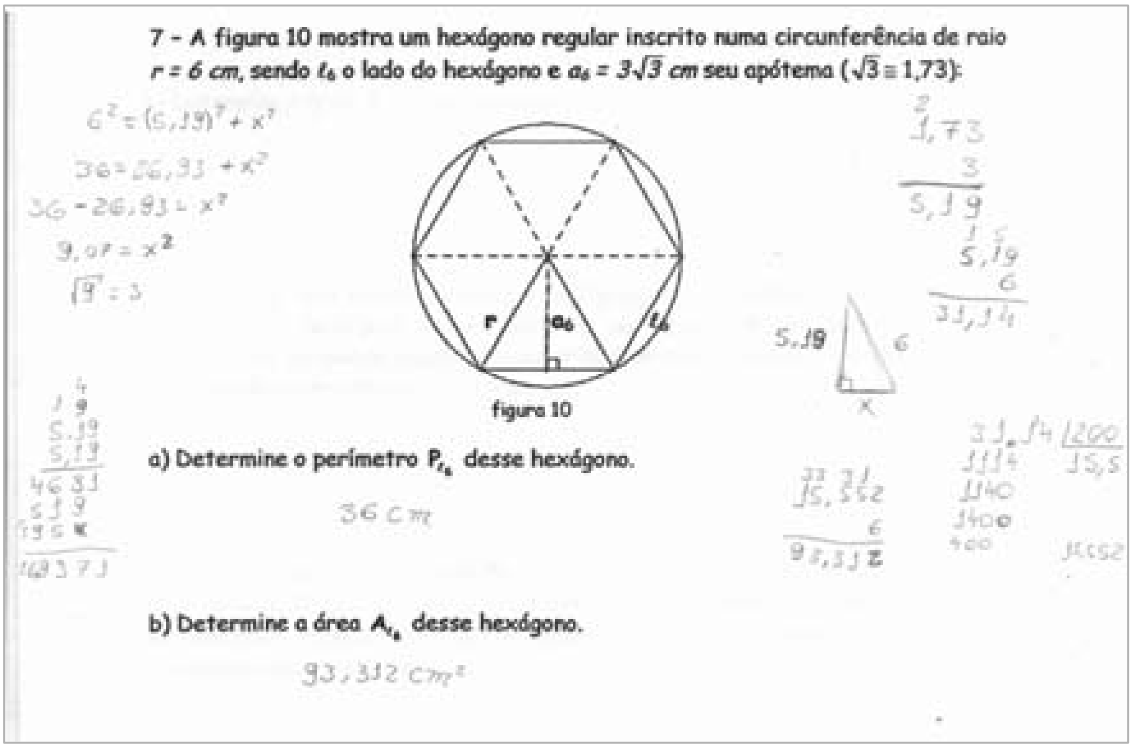
Ilustração 16

Um aluno da escola federal escreveu na figura do círculo que "*nunca estudei isso*" deixando essa figura e o triângulo em branco.

Na 7ª questão, o índice de respostas corretas na escola particular foi encontrado apenas no cálculo do perímetro do hexágono regular. Nenhum dos alunos dessa turma conseguiu encontrar a área do hexágono. Na entrevista com alguns desses alunos, eles disseram que "*não conhecia a fórmula da área do hexágono*", não demonstraram conhecimento sobre como seria possível calcular a área do hexágono regular sem essa fórmula. Apenas dois alunos, Hugo e André, apresentaram um entendimento sobre o cálculo da área do hexágono, mas ambos ao substituir o valor da altura do triângulo escreveram o valor da raiz quadrada de três e não o valor do apótema como deveria ser.

Também nessa escola, um aluno utilizou o Teorema de Pitágoras para encontrar o valor da medida do lado do hexágono e encontrou o perímetro corretamente, entretanto não realizou o cálculo da área do hexágono.

Nas duas escolas públicas, a estadual e a federal, o índice de acertos para essa questão, também foi muito baixo. Um aluno da escola pública, Jefferson, resolveu a questão toda utilizando todos os procedimentos corretos. Esse aluno foi aprovado no processo seletivo do CEFET/RN e está cursando o ensino médio integrado. Na escola federal dois alunos responderam corretamente, Jônatas e Emanuel. Foi interessante observar que esses dois alunos não estabeleceram uma linguagem simbólica formal para resolver a questão, embora tenham utilizado o Teorema de Pitágoras para encontrar o lado do hexágono (ilustrações 17 e 18), enquanto que o aluno da escola estadual o fez (ilustração 19).



7 - A figura 10 mostra um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio $r = 6$ *cm*, sendo ℓ_6 o lado do hexágono e $a_6 = 3\sqrt{3}$ *cm* seu apótema ($\sqrt{3} \cong 1{,}73$):

$6^2 = (5{,}19)^2 + x^2$

$36 = 26{,}93 + x^2$

$36 - 26{,}93 = x^2$

$9{,}07 = x^2$

$\sqrt{9} = 3$

figura 10

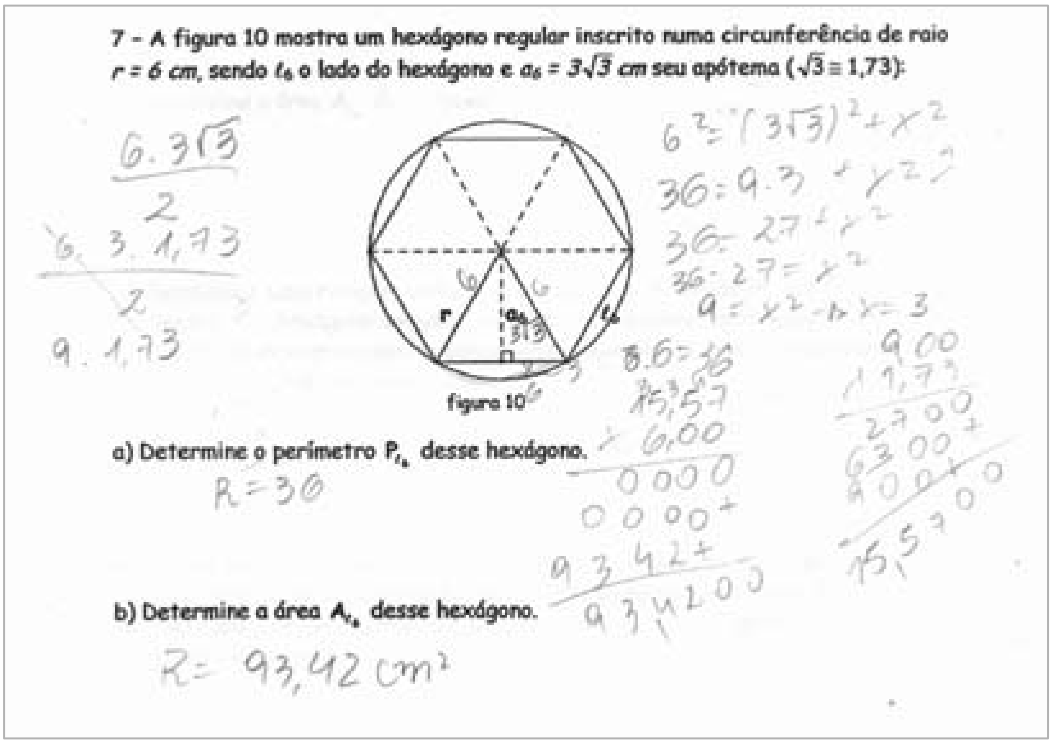
a) Determine o perímetro P_{ℓ_6} desse hexágono.

36 cm

b) Determine a área A_{ℓ_6} desse hexágono.

93,312 cm²

Ilustração 17



7 - A figura 10 mostra um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio $r = 6\ cm$, sendo ℓ_6 o lado do hexágono e $a_6 = 3\sqrt{3}\ cm$ seu apótema ($\sqrt{3} \cong 1{,}73$):

$\frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$

$\frac{6 \cdot 3 \cdot 1{,}73}{2}$

$9 \cdot 1{,}73$

$6^2 = (3\sqrt{3})^2 + x^2$

$36 = 9 \cdot 3 + x^2$

$36 = 27 + x^2$

$36 - 27 = x^2$

$9 = x^2 \rightarrow x = 3$

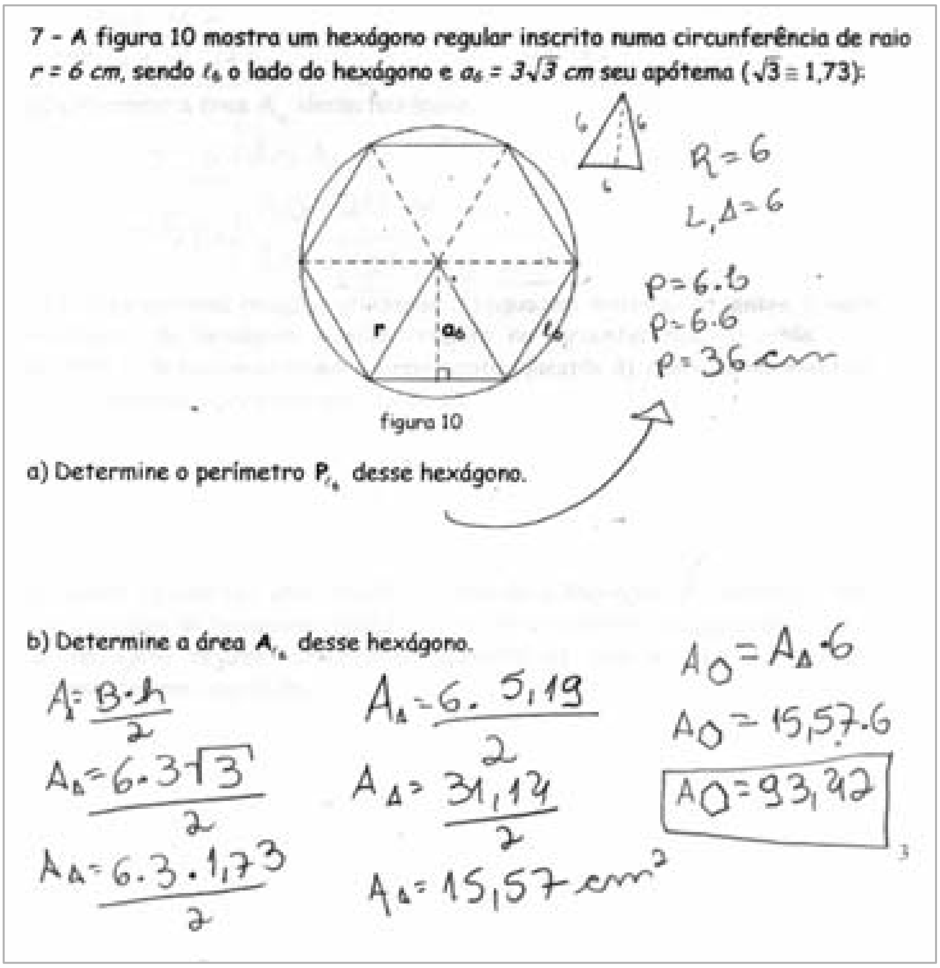
a) Determine o perímetro P_{ℓ_6} desse hexágono.

R = 36

b) Determine a área A_{ℓ_6} desse hexágono.

R = 93,42 cm²

Ilustração 18



7 - A figura 10 mostra um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio $r = 6\ cm$, sendo ℓ_6 o lado do hexágono e $a_6 = 3\sqrt{3}\ cm$ seu apótema ($\sqrt{3} \cong 1{,}73$):

R = 6

L, Δ = 6

p = 6.6

p = 6.6

p = 36 cm

a) Determine o perímetro P_{ℓ_6} desse hexágono.

b) Determine a área A_{ℓ_6} desse hexágono.

$A_\Delta = \frac{B \cdot h}{2}$

$A_\Delta = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$

$A_\Delta = \frac{6 \cdot 3 \cdot 1{,}73}{2}$

$A_\Delta = \frac{6 \cdot 5{,}19}{2}$

$A_\Delta = \frac{31{,}14}{2}$

$A_\Delta = 15{,}57\ cm^2$

$A_⬡ = A_\Delta \cdot 6$

$A_⬡ = 15{,}57 \cdot 6$

$\boxed{A_⬡ = 93{,}42}$

Ilustração 19

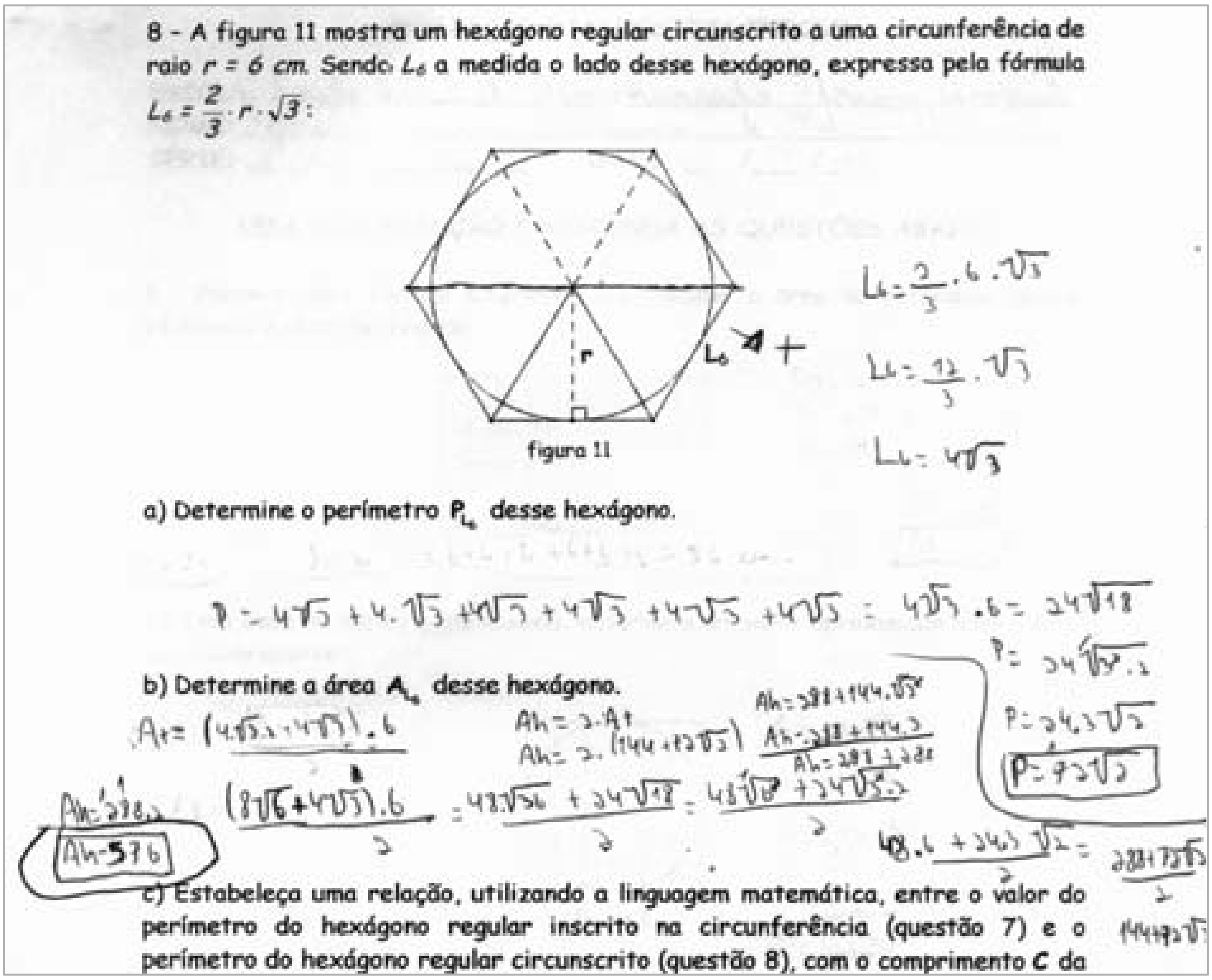
Alguns alunos das três escolas que não resolveram a questão ou que resolveram incorretamente foram entrevistados e, mesmo com a intervenção da pesquisadora na entrevista, poucos desses alunos perceberam que a área do hexágono poderia ser calculada a partir da área de um dos triângulos eqüiláteros e mesmo assim não conseguiram calcular tal área.

Para a 8ª questão, aproximadamente 27% dos alunos da turma da escola particular encontraram a medida do lado do hexágono corretamente. Quanto à área do hexágono, dois alunos encontraram corretamente esse valor. Esses alunos foram os mesmos que apresentaram uma compreensão sobre o cálculo da área do hexágono inscrito na 7ª questão, mas erraram na substituição do valor da altura do triângulo. Dessa vez não erraram o valor da altura do triângulo porque esta é exatamente o raio da circunferência.

Já na escola estadual apenas o aluno Jefferson encontrou a medida do lado do hexágono e resolveu corretamente os itens (a) e (b) dessa questão. Outros dois alunos dessa escola também encontraram o valor do lado do hexágono, entretanto um deles encontrou corretamente a área do hexágono e o outro não acertou os dois itens. É interessante observar os cálculos de um deles, o aluno Rodrigo (ilustração 20). Ele não conseguiu encontrar o valor correto do perímetro porque errou na adição de números irracionais, já que ele encontrou o lado do hexágono em função de $\sqrt{3}$. Já no cálculo da área ele utilizou a base do triângulo multiplicada duas vezes.

Na escola federal, os dois alunos que acertaram a 7ª questão não conseguiram calcular corretamente o lado do hexágono. Entretanto outros dois alunos, que não haviam acertado a 7ª questão, calcularam corretamente o lado do hexágono e os dois itens da 8ª questão.

Quanto aos itens (c) e (d) da 8ª questão, nenhum aluno das três escolas conseguiu responder corretamente esses dois itens. Mesmo os alunos que conseguiram responder aos itens de cálculo do perímetro e da área dos hexágonos inscrito e circunscrito, não conseguiram compreender o que os dois itens (c) e (d) estavam querendo expressar. Nas entrevistas, os alunos relataram que não haviam entendido o que era para ser feito, mesmo depois de questionamentos sobre os valores dos perímetros e das áreas para compararem com o valor do comprimento da circunferência e a área do círculo, respectivamente, esses alunos não expressaram nenhuma conclusão. O aluno Hugo da escola particular ainda tentou escrever alguma conclusão a partir do que ele havia observado (ilustração 21). Alguns alunos chegaram a calcular o comprimento da circunferência e a área do círculo, mas não chegaram a nenhuma conclusão.



8 - A figura 11 mostra um hexágono regular circunscrito a uma circunferência de raio $r = 6$ cm. Sendo L_6 a medida o lado desse hexágono, expressa pela fórmula $L_6 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \sqrt{3}$:

$L_6 = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{3}$

$L_6 = \frac{12}{3} \cdot \sqrt{3}$

$L_6 = 4\sqrt{3}$

a) Determine o perímetro P_{L_6} desse hexágono.

$P = 4\sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot 6 = 24\sqrt{18}$

$P = 24\sqrt{9 \cdot 2}$

$P = 24 \cdot 3\sqrt{2}$

$\boxed{P = 72\sqrt{2}}$

b) Determine a área A_{L_6} desse hexágono.

$A_t = \frac{(4\sqrt{3} \cdot 2 + 4\sqrt{3}) \cdot 6}{2}$

$A_h = 3 \cdot A_t$

$A_h = 3 \cdot (144 + 72\sqrt{2})$

$\frac{(8\sqrt{6} + 4\sqrt{3}) \cdot 6}{2} = \frac{48\sqrt{36} + 24\sqrt{18}}{2} = \frac{48\sqrt{36} + 24\sqrt{9 \cdot 2}}{2}$

$\frac{48 \cdot 6 + 24 \cdot 3\sqrt{2}}{2} = \frac{288 + 72\sqrt{2}}{2}$

$144 + 72\sqrt{2}$

$A_h = 288 + 144 \cdot \sqrt{2}$

$A_h = 288 + 144 \cdot 2$

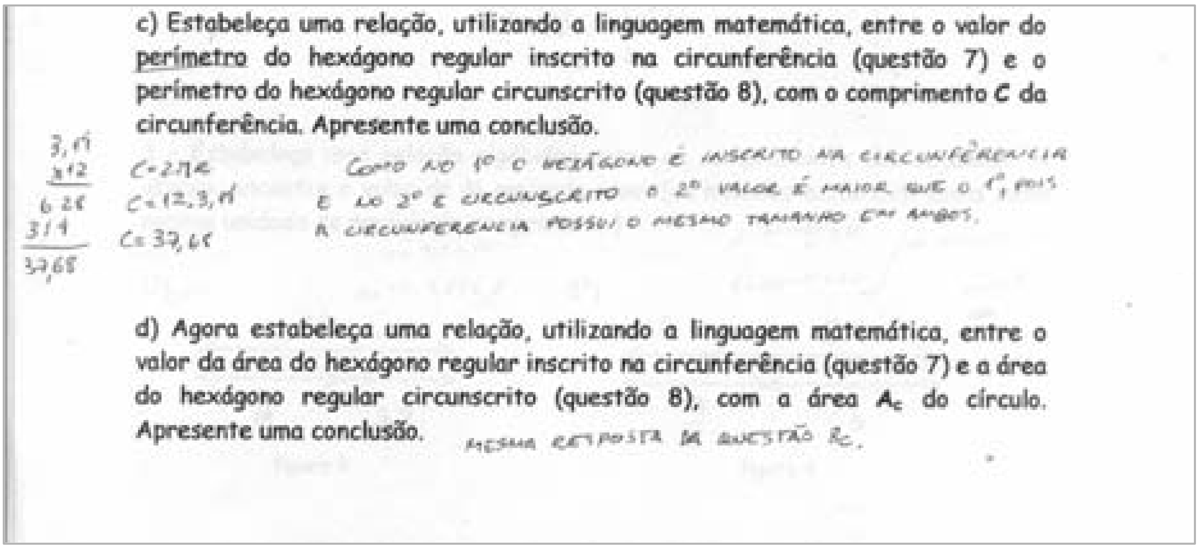
$A_h = 288 + 288$

$A_h = 288 \cdot 2$

$\boxed{A_h = 576}$

c) Estabeleça uma relação, utilizando a linguagem matemática, entre o valor do perímetro do hexágono regular inscrito na circunferência (questão 7) e o perímetro do hexágono regular circunscrito (questão 8), com o comprimento C da

Ilustração 20



c) Estabeleça uma relação, utilizando a linguagem matemática, entre o valor do perímetro do hexágono regular inscrito na circunferência (questão 7) e o perímetro do hexágono regular circunscrito (questão 8), com o comprimento C da circunferência. Apresente uma conclusão.

3,14 × 12 = 6 28 + 314 = 37,68

$C = 2\pi R$

$C = 12 \cdot 3,14$

$C = 37,68$

COMO NO 1º O HEXÁGONO É INSCRITO NA CIRCUNFERÊNCIA E NO 2º É CIRCUNSCRITO O 2º VALOR É MAIOR QUE O 1º, POIS A CIRCUNFERÊNCIA POSSUI O MESMO TAMANHO EM AMBOS.

d) Agora estabeleça uma relação, utilizando a linguagem matemática, entre o valor da área do hexágono regular inscrito na circunferência (questão 7) e a área do hexágono regular circunscrito (questão 8), com a área A_c do círculo. Apresente uma conclusão. MESMA RESPOSTA DA QUESTÃO 8c.

Ilustração 21

Observa-se, nesses itens, que houve, por parte dos alunos, uma falta de entendimento do texto, ou falta de articulação lógica com os elementos do texto.

3.4 Dados do grupo experimental – Escola Estadual Desembargador Floriano Cavalcanti

A escola escolhida para a intervenção metodológica foi a Escola Estadual Desembargador Floriano Cavalcanti, localizada na zona sul da cidade de Natal/RN. A escolha dessa escola foi feita a partir de algumas características: por ser uma escola estadual de grande porte e ser considerada uma das escolas de ensino público de referência em Natal; é uma escola em que muitos professores da UFRN indicam seus alunos das disciplinas de Estágio Supervisionado e Práticas de Ensino para exercerem suas atividades, pois ela se encontra ao lado do campus universitário; e por haver uma receptividade, por parte dos professores e da direção da escola, com relação aos alunos de pós-graduação da UFRN.

As turmas escolhidas foram duas de 8ª série das seis turmas de 8ª do turno matutino, 8ª B e 8ª D. A escolha das turmas foi aleatória de acordo com a disponibilidade do professor de Matemática da escola. As outras quatro turmas continuaram sob a responsabilidade do professor. Os conteúdos abordados pelo professor nas outras turmas foram: comprimento da circunferência, área do círculo, área e volume do cilindro. Esses conteúdos foram estudados ao mesmo tempo em que a pesquisadora utilizava os conteúdos no módulo de ensino.

As turmas 8ª B e 8ª D possuíam 50 alunos matriculados, entretanto a freqüência ficava em torno de 35 a 40 alunos nas duas turmas. Estavam presentes no dia da aplicação da Avaliação Diagnóstica Inicial apenas 30 alunos da 8ª B e 26 alunos da 8ª D. Não há justificativa para o número excessivo de faltosos, pois era início de bimestre letivo e o professor da turma estava entregando os resultados do bimestre anterior.

Para a análise dos dados coletados durante toda a intervenção metodológica foram escolhidos 50 alunos, 27 alunos da 8ª B e 23 alunos da 8ª D. Foi tomado esse procedimento porque a freqüência durante a aplicação das atividades de ensino foi bastante irregular, e no momento da aplicação da Avaliação Diagnóstica Final, muitos alunos fizeram essa segunda avaliação mas não havia participado da primeira, o que prejudicaria uma relação entre os dois resultados obtidos. Esse número de alunos em cada turma representa a quantidade de alunos que freqüentou, aproximadamente 80% do número total de aulas utilizadas para a intervenção. Dessa forma todos os resultados a respeito dos sujeitos participantes da pesquisa estão relacionados a uma amostra de 50 alunos de um total de 100 matriculados.

A seguir serão apresentados dos dados coletados no questionário de identificação e os resultados obtidos na avaliação, com comentários sobre algumas respostas.

3.4.1 Dados das respostas dos alunos no Questionário de Identificação – 50 alunos

Está sendo considerada uma turma de 8ª série, com 50 alunos, que freqüentavam regularmente às aulas. A aplicação do questionário de identificação e da avaliação diagnóstica teve duração média de 90 minutos, correspondentes a 2 horas/aulas.

Sobre a faixa etária desses alunos, a idade está compreendida entre 13 e 15 anos, no qual a predominância é de alunos com 14 anos, aproximadamente 33%. Quanto ao sexo, 28% dos alunos são do sexo feminino. Dois alunos trabalhavam na ocasião e três são repetentes (não são os mesmos alunos que trabalhavam).

Quanto à pergunta que se relacionava com o estudo de Geometria, foi observado que apenas dois alunos não responderam a essa pergunta. Todas as séries foram citadas pelos alunos, com maior predominância a 5ª e 6ª séries. Os assuntos mencionados pelos alunos foram: ângulos, triângulos e polígonos, área e perímetro, congruência e semelhança, esses últimos citados apenas por um aluno. É importante ressaltar que no bimestre anterior ao da intervenção metodológica o professor da turma havia estudado com eles Teorema de Tales, semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo, incluindo o Teorema de Pitágoras, no entanto nenhum aluno citou esses teoremas. Cerca de 24% dos alunos responderam que já estudaram Geometria, mas não lembravam da série e 58% não lembravam dos assuntos estudados. Três alunos escreveram que não haviam estudado Geometria.

Quanto ao questionamento sobre os assuntos estudados em Álgebra, 35% dos alunos disseram que já haviam estudado, mas não lembravam nem da série nem dos assuntos. Apenas quatro alunos mencionaram a série: um aluno citou a 5ª, três a 6ª e 7ª séries, sendo que um deles indicou as duas ao mesmo tempo. A 8ª série não foi citada porque iniciou o ano letivo com Geometria. Um mesmo aluno disse que havia estudado equações do 1° e 2° graus, produtos notáveis, monômios e regra de três, esse foi um dos alunos identificados como repetente. Um aluno citou expressões algébricas e outro a simplificação. Um aluno respondeu questionando "*é o negócio de letras nas contas?*" e outro aluno apenas escreveu "$x + y = a$". Oito por cento disse que não estudou Álgebra, entre essas respostas foi encontrado "*não sei se estudei*" e "*acho que não estudei*" e 10% não responderam a essa questão.

Referindo-se a como eram as aulas de Matemática durante a vida escolar dos alunos, constatamos que cerca de 32% deles responderam que tiveram aulas "*muito boas*", a maioria deles declararou que gostam de matemática. Aproximadamente 52% dos alunos responderam descrevendo algumas fases da aprendizagem, especificando em quais séries as aulas foram boas e em quais foram mais repetitivas. Apenas de 12% dos alunos caracterizaram as aulas que já tiveram de matemática como “*chatas*”, “*cansativas*” e “*repetitivas*” e informaram que não gostavam da disciplina. O restante dos alunos não respondeu a essa questão.

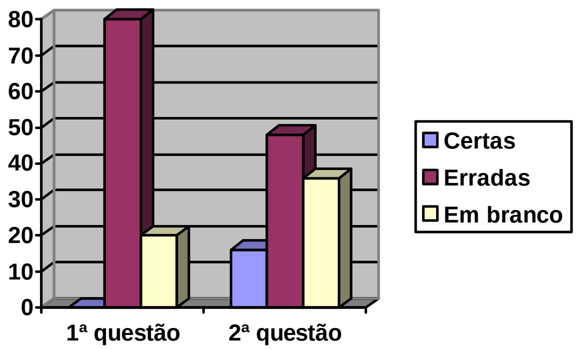
3.4.2 Resultados e comentários das respostas dos alunos na Avaliação Diagnóstica Inicial – 50 alunos

As disposições dos dados das questões estão organizadas nas tabelas e nos gráficos de forma mais detalhada para uma melhor discussão e compreensão do leitor. Os comentários sobre as respostas dos alunos seguirão à apresentação da tabela e do gráfico referente àquela(s) questão(ões).

A 1ª e 2ª questões foram agrupadas em uma única tabela e respectivo gráfico.

Tabela das respostas da 1ª e 2ª questões

Respostas/Questões	1ª Questão (%)	2ª Questão (%)
Certas	0	16
Erradas	80	48
Em branco	20	36



Na 1ª questão foi observado que nenhum aluno acertou a questão. Dentre 40 respostas erradas encontram-se cálculos do tipo “$9 \cdot 4 = 36$” apresentados como reposta, ou respostas como “*contando os quadradinhos*” ou até mesmo a representação em frações, como já foi observado em outra turma, também dessa escola, citada no item 3.3. Para exemplificar este fato destacam-se as respostas de dois alunos, Gabriela e José Luiz (ilustração 22 e 23), que representaram por fração e realizaram um cálculo com essas frações.

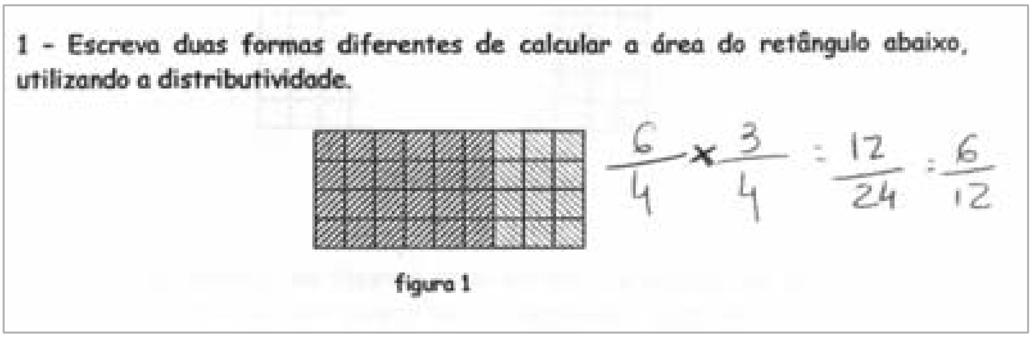


Ilustração 22

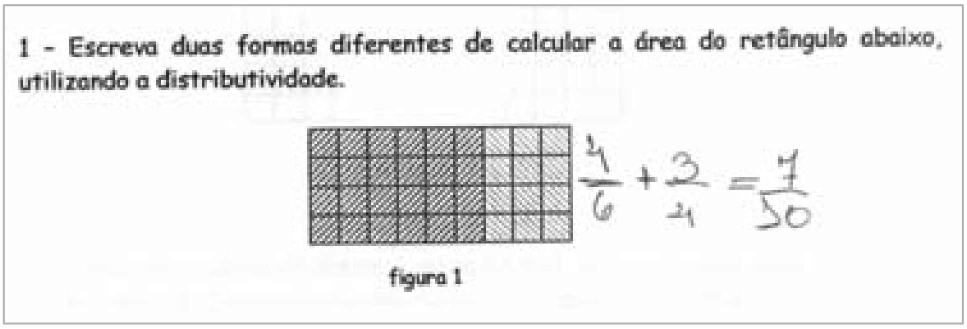


Ilustração 23

Assim como na resposta destacada da aluna Aionara na ilustração 2 da seção 3.3 desse estudo, os alunos Gabriela e José Luiz, que tentaram associar a figura com frações, não sabem interpretar corretamente a relação todo-parte nem efetuar operações com frações. Esse procedimento incorreto também foi identificado em outros alunos do grupo.

Quatro alunos encontraram a área do retângulo de duas maneiras diferentes: "*9 · 4 = 36*" e "*24 + 12 = 36*". As duas maneiras estão corretas, mas não está explícito o uso da propriedade distributiva. Os cálculos do aluno Dante exemplificam esse procedimento (ilustração 24). Ele fez questão de destacar que os dois cálculos resultam no mesmo valor. No entanto, na entrevista ele foi questionado sobre qual dos dois cálculos é a distributividade e respondeu que "*não sei o que é só fiz dois cálculos diferentes como pedia a questão*". Quanto aos outros três alunos, parece que haviam colado do primeiro, pois não souberam explicar exatamente o que significava os cálculos.

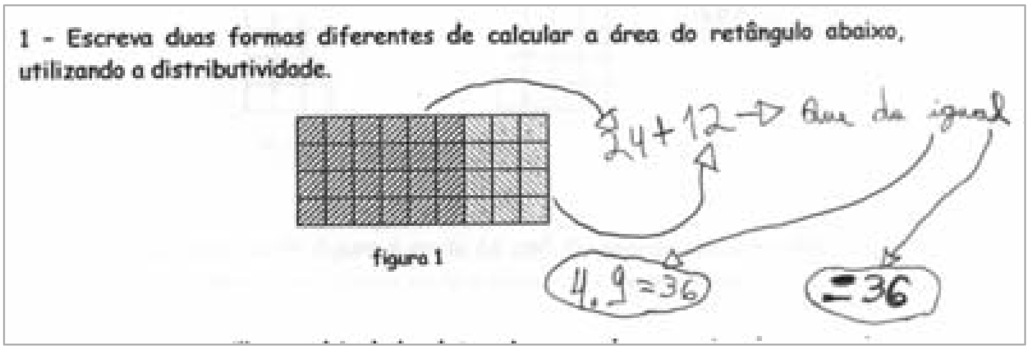


Ilustração 24

Quanto à 2ª questão, foi comum encontrar a multiplicação “$6 \cdot 6=36$” para o cálculo da área do círculo, esse procedimento já foi comentado anteriormente. Dos oitos alunos que responderam corretamente, quatro encontraram exatamente o valor “*28 quadradinhos*” como resposta. O procedimento está exemplificado na ilustração 25 da aluna Whadsar. Ela calculou o total de quadradinhos e subtraiu os quadradinhos aparentemente inteiros, juntando as “metades”, que não faziam parte do círculo.

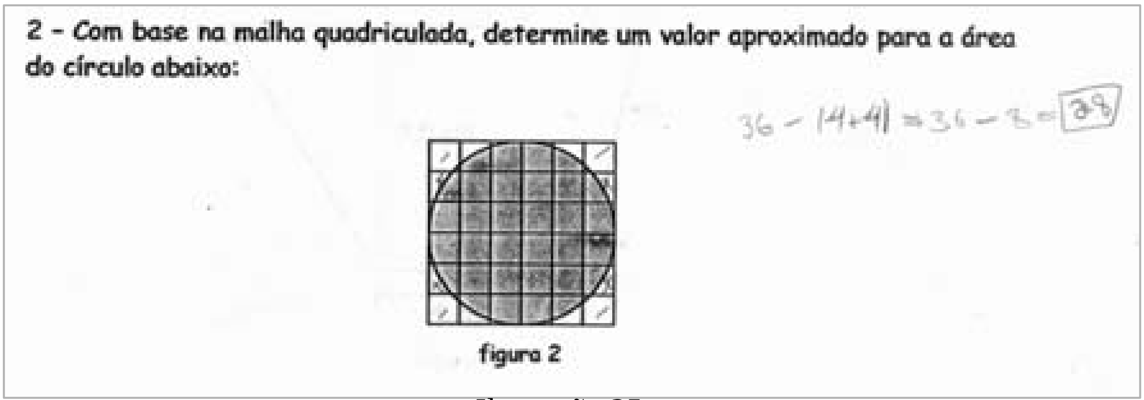


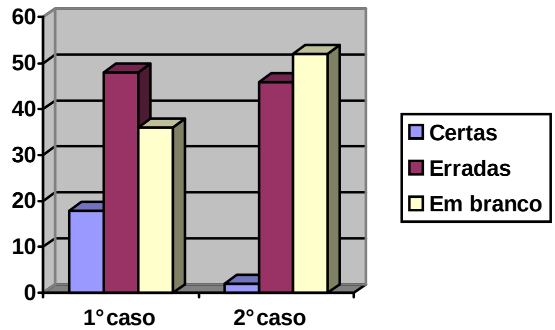
Ilustração 25

Os outros alunos encontraram o valor de 24 quadradinhos, considerando apenas os inteiros e os que estavam faltando pedaços muito pequenos.

Também foi comum encontrar o procedimento “$6 \cdot 6 = 36 \Rightarrow 36 - 4 = 32$”, em que o número 4 representa os quatro quadradinhos das “pontas” da malha quadriculada.

Tabela das respostas da 3ª questão

Respostas/Casos	1° caso (%)	2° caso (%)
Certas	18	2
Erradas	48	46
Em branco	34	52

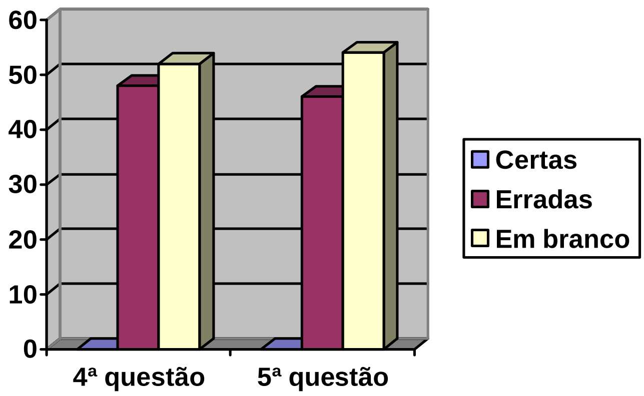


Na 3ª questão, a única resposta correta para os dois casos foi da aluna Whadsar. No 1° caso ela realizou uma subtração, mas explicitou a igualdade para a incógnita M, já no 2° caso ela encontrou o valor por tentativa e erro, foi o que ela explicou na entrevista: "*fui tentando valores até achar o 8, comecei com 10 depois fui baixando*". A maioria dos alunos que acertou a resposta no 1° caso escreveu a equação $M + 3{,}2 = 10$.

Outros cálculos encontrados se assemelham aos já comentados anteriormente no item 3.3. Tentar estabelecer uma relação de proporcionalidade entre os segmentos também foi identificada nessas avaliações.

Tabela das respostas da 4ª e 5ª questões

Respostas/Questões	**4ª Questão**	**5ª Questão**
Certas	0	0
Erradas	48	46
Em branco	52	54



Foi impressionante verificar que nenhum dos alunos acertou a 4ª e a 5ª questão. Na 4ª questão 10% dos alunos, que estão incluídos nas repostas erradas encontraram o valor da base do retângulo (11 quadradinhos), mas não conseguiram ou não realizaram o cálculo do perímetro. No entanto, esse valor não foi encontrado estabelecendo uma equação entre a dimensão desconhecida (o comprimento), o valor da área e o valor da outra dimensão (7 quadradinhos), todos esses alunos apenas realizaram a multiplicação "$7 \cdot 11 = 77$", ou seja, encontraram um número que multiplicado pelo número 7 daria o valor 77 fornecido na questão. Alguns, ao encontrar o número 11 indicaram-no como a resposta, ou seja, o valor do perímetro.

Nessa questão duas respostas interessantes são destacadas: uma do aluno Josiel (ilustração 26), que calculou o numero de quadradinhos que estavam inteiros, subtraiu-o de 77 e encontrou o valor 42, que seria o número de quadradinhos cortados e apagados, mas não soube o que fazer com esse valor; a outra resposta é da aluna Bruna (ilustração 27), ela tentou utilizar a idéia de perímetro, entretanto o que se observa é que ela identificou e somou apenas os segmentos dos quadradinhos inteiros do retângulo, desconsiderando os que estão apagados.

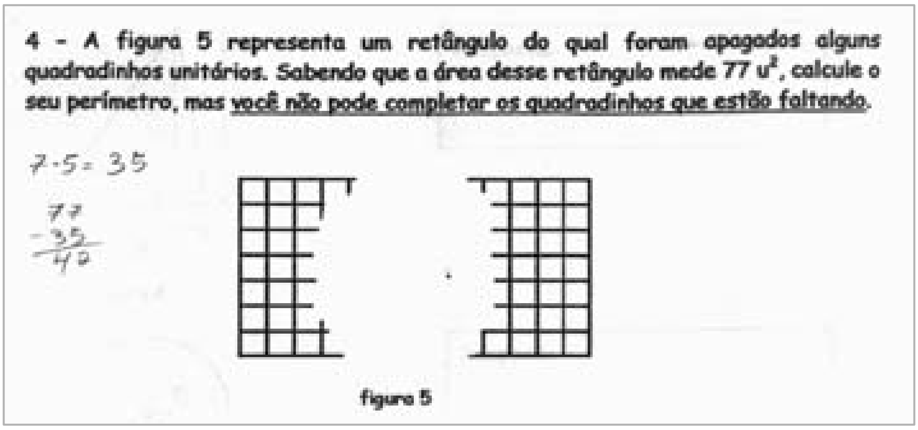


Ilustração 26

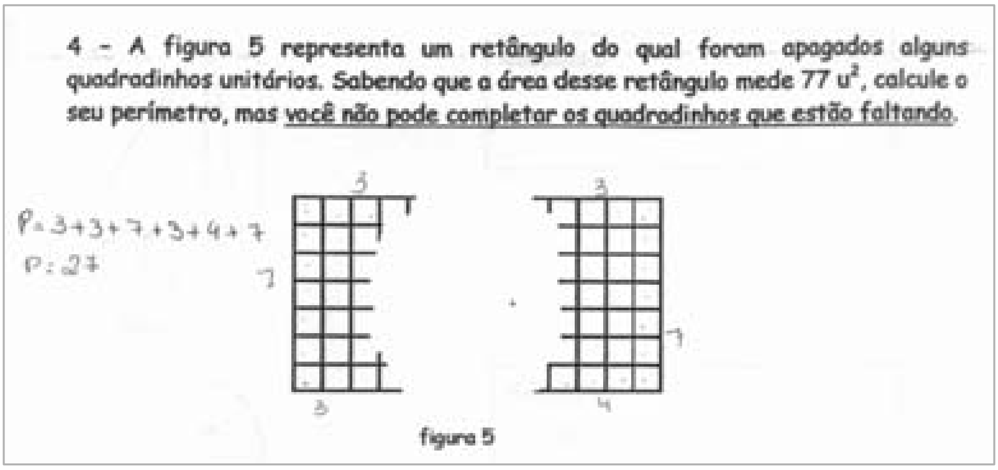


Ilustração 27

Na 5ª questão absolutamente nenhum aluno sequer escreveu corretamente a fórmula da área do trapézio. Dentre vários cálculos sem sentido matemático, encontram-se os de dois alunos, Augusto e Clara, que utilizaram a relação "*base* $\times$ *altura*" para encontrar um valor que não representava o que a questão estava solicitando, entretanto nenhum dos dois alunos se preocupou com isso. A multiplicação realizada foi "$5{,}5 \cdot 4$" e deveriam ter encontrado como resposta o valor 22 cm^2, entretanto os dois alunos encontraram respostas incorretas, como mostram as ilustrações 28 e 29.

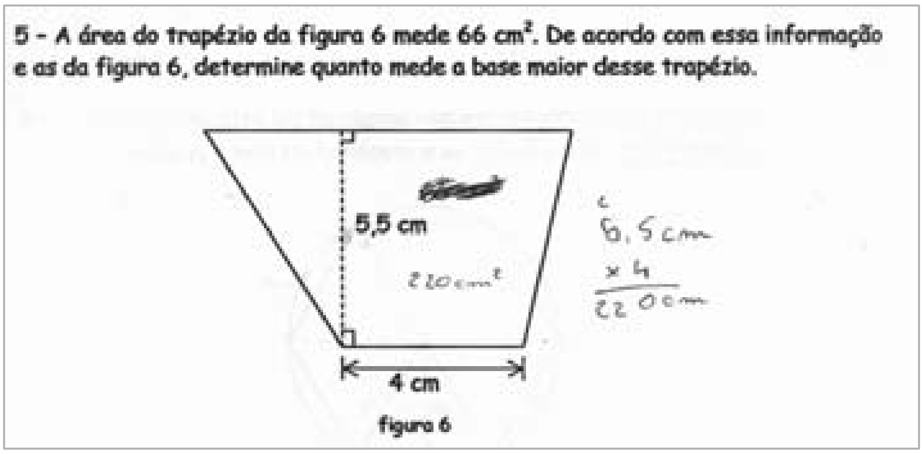


Ilustração 28

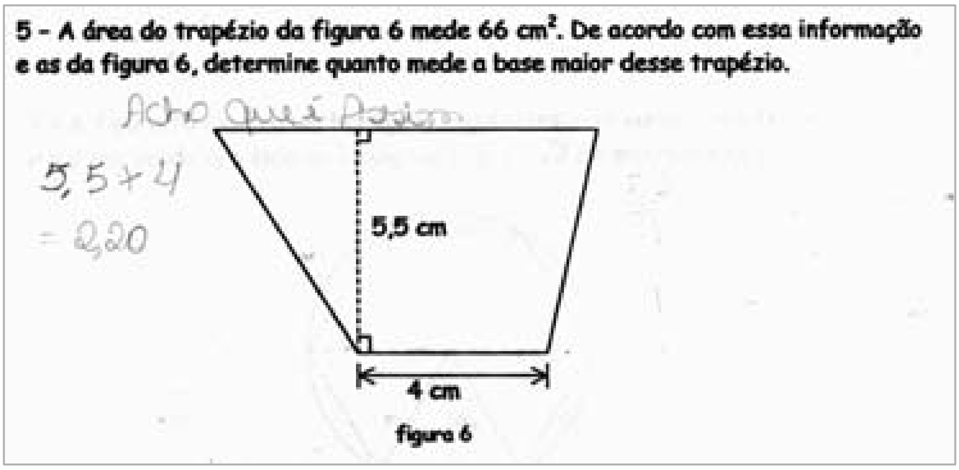
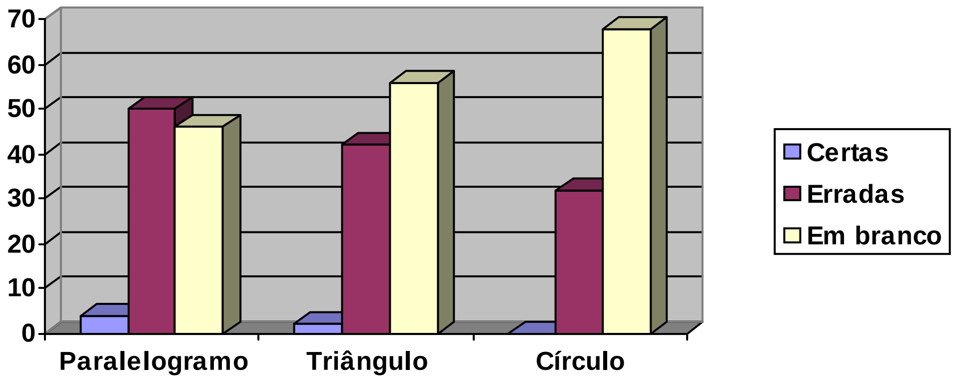


Ilustração 29

É observado que os lados inclinados do trapézio não lhes são importantes, pois identificaram a base e a altura do quadrilátero para aplicar a relação. Além do mais, ambos erraram na multiplicação de um número inteiro por um número decimal, encontrando dois valores que demonstram que esses alunos não apresentam compreensão quanto o valor posicional do número decimal.

Tabela das respostas da 6ª questão

Figuras/Respostas	Paralelogramo (%)	Triângulo (%)	Círculo (%)
Certas	4	2	0
Erradas	50	42	32
Em branco	46	56	68



Essa questão mostrou que poucos são os alunos dessa turma que detêm o conhecimento sobre as fórmulas de área de figuras planas. Na área do círculo, de certa forma se esperava esse resultado, pois nenhum dos alunos citou no questionário que havia estudado essa figura; ainda assim houve dois alunos que escreveram a fórmula do comprimento da circunferência e outro que escreveu "$\pi = R^2 \cdot C$"; não foi possível averiguar o conhecimento desses alunos quanto a essas fórmulas.

Sobre o paralelogramo 8% dos alunos chegaram a escrever a expressão para a área, mas sem expressar a igualdade, o que foi considerado incorreto e um aluno escreveu apenas a própria fórmula da área do paralelogramo, sem substituir pelas variáveis fornecidas na questão. Dentre as respostas incorretas destacam-se as de duas alunas, Bruna e Carolina, ilustrações 30 e 31, respectivamente.

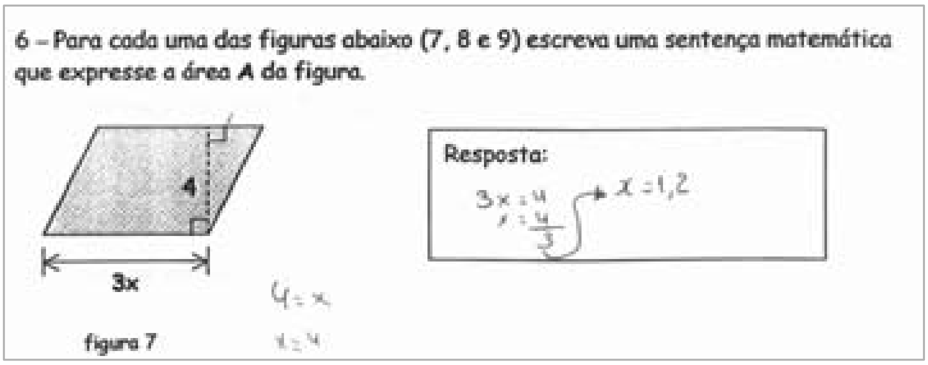


Ilustração 30

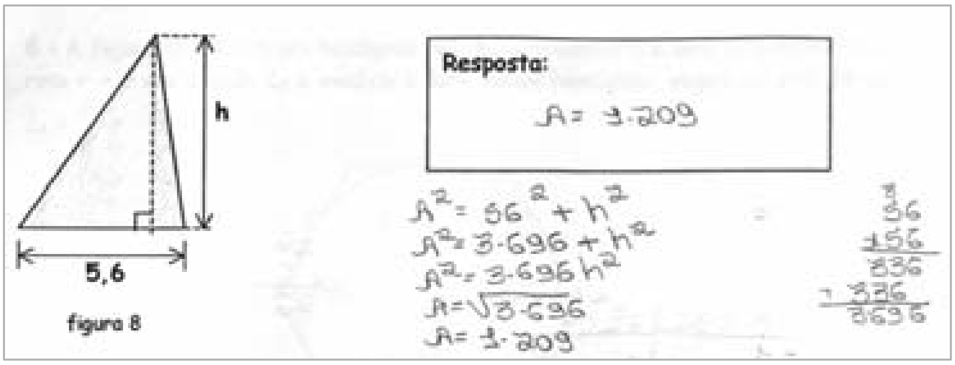
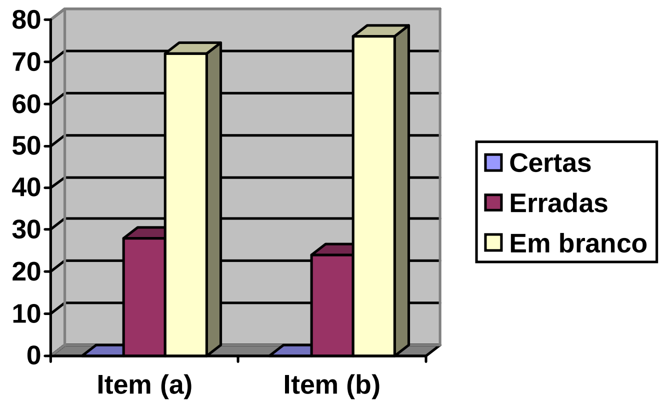


Ilustração 31

A aluna Bruna igualou as variáveis da figura, pois sentiu a necessidade de "*encontrar um valor para x*", ignorando o que o enunciado da questão pedia, enquanto a aluna Carolina viu um ângulo reto no triângulo e "*achei que era para aplicar o Teorema de Pitágoras*". Isso foi o que as duas falaram quando foram questionadas, sobre seus cálculos, na entrevista.

Tabela das respostas da 7ª questão

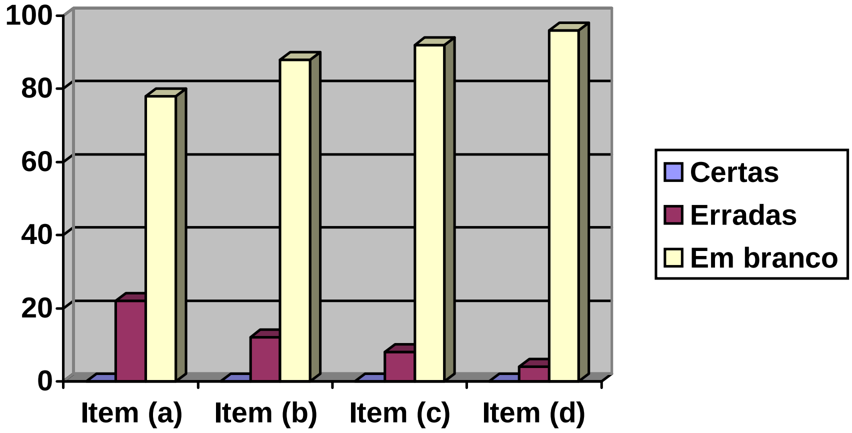
Respostas/Itens	**Item (a)**	**Item (b)**
Certas	0	0
Erradas	28	24
Em branco	72	76



Dois alunos encontraram o valor de $3\sqrt{3}$, mas não avançaram em relação aos itens. Todos os outros cálculos incorretos dessa questão foram cálculos sem sentido matemático, sem relação com perímetro e área do hexágono.

Tabela das respostas da 8ª questão

Respostas/Itens	Item (a) (%)	Item (b) (%)	Item (c) (%)	Item (d) (%)
Certas	0	0	0	0
Erradas	22	12	8	4
Em branco	78	88	92	96



Também nessa questão nenhum aluno conseguiu expressar algum conhecimento sobre a área ou perímetro do hexágono circunscrito à circunferência e nenhum aluno encontrou sequer a medida do lado do hexágono, ou seja, nenhum aluno chegou a substituir corretamente os valores na fórmula fornecida no enunciado.

3.5 Considerações finais

Em relação ao questionário de identificação aplicado um fato interessante que ocorreu nos dados expostos foi que os alunos lembravam mais do que foi estudado em Geometria do que foi estudado em Álgebra. Talvez porque o ensino de Geometria faz uso de desenhos de figuras geométricas.

Com relação à última questão, sobre como eram as aulas de Matemática durante a vida escolar dos alunos, o objetivo não é criticar a prática dos professores de matemática, não se pretende tirar conclusões sobre se uma ou outra prática exercida pelos professores é correta a partir do depoimento de uma amostra de alunos, e sim verificar as impressões dos alunos sobre essas práticas. Certamente sabemos que existem alunos que têm um maior apreço pelo estudo da matemática e com isso escreverá as melhores impressões sobre as práticas dos professores, como, aliás, foi detectado nos questionários; e em contra partida, também existem aqueles alunos que declaram não gostar de matemática, e isso influencia diretamente suas impressões sobre a prática dos professores.

Essa questão foi interessante para observar e corroborar as pesquisas realizadas na área de afetividade e cognição como, por exemplo, Gómez Chacón (2003), que relaciona os afetos na aprendizagem matemática.

Quantos aos resultados apresentados sobre a aprendizagem de conceitos geométricos, estes vêm corroborar com varias pesquisas no ensino de Geometria, em que se dá um maior destaque à memorização de fórmulas e propriedades, sem que haja uma compreensão na aplicação das mesmas. Isso pode ser identificado claramente, por exemplo, em relação à aplicação incorreta do conceito de perímetro na 4ª questão; na utilização incorreta do Teorema de Tales na 3ª questão e do Teorema de Pitágoras no triângulo da 6ª questão. Observa-se que, mesmo os alunos que tiveram contato com conteúdos geométricos, não sabiam aplicá-los ou se limitavam à memorização de fórmulas. Esses dados corroboram ainda com as diversas pesquisas realizadas sobre o abandono do ensino de Geometria nas salas de aula.

Quanto aos ensinos de Álgebra e Aritmética ainda não estão promovendo uma compreensão, por parte dos alunos, sobre propriedades e conceitos importantes para resolução de problemas geométricos como, por exemplo, propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição necessária para a resolução da 1ª questão; a freqüente incidência da falta do sinal de igualdade nas expressões algébricas para torná-las sentenças matemáticas, importante nas questões que envolviam medida de segmento e área de figuras, entre outras questões de sintaxe da álgebra. Outro fator importante identificado foi a falta de formalização nos cálculos matemáticos, ou seja, a falta de representação na linguagem simbólica de situações como, por exemplo, o cálculo da dimensão desconhecida do retângulo da 4ª questão ou na escrita das equações para a resolução da 3ª questão.

Tudo o que foi identificado nessa avaliação inicial sobre alguns conceitos fundamentais da Geometria e Álgebra levam a refletir, principalmente, sobre as práticas pedagógicas dos professores de matemática em relação à metodologia utilizada, que ainda se configura como a tradicional, e em relação a pouca importância dada ao estudo dos conceitos geométricos nas escolas (públicas), por parte dos professores.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÃO DO MÓDULO DE ENSINO E A AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL

4.1 Aplicação e desenvolvimento do módulo de atividades de ensino

O módulo de ensino foi aplicado separadamente a duas turmas de 8ª série do Ensino Fundamental do turno matutino, com 50 alunos matriculados em cada uma delas, na Escola Estadual Desembargador Floriano Cavalcanti, situada na zona sul da cidade de Natal/RN. A referida escola é considerada de grande porte, funcionando os três turnos com os ensinos Fundamental e Médio, este último nos turnos vespertino e noturno. No matutino, em que foi desenvolvida a pesquisa, a escola dispõe de cinco professores de matemática um para cada uma das quatro séries do Ensino Fundamental, sendo a 8ª série com dois professores. A carga horária da disciplina Matemática é de 4 horas/aula por semana, com a duração de 45 minutos cada aula (mas, na prática, esse tempo foi reduzido para em média 30 minutos). A metodologia adotada pelo professor de matemática das turmas de 8ª série segue uma linha tradicional. O livro didático adotado (ANDRINI e ZAMPIRILO, 2002) é o que a Secretaria Estadual de Educação distribui para todas as escolas estaduais. Geralmente o professor segue o livro didático utilizando-o para expor o conteúdo e exercitar. Contou-se plenamente com a colaboração da direção geral, da supervisão pedagógica e do professor de matemática para realizar a pesquisa. A intervenção foi desenvolvida no 1° semestre letivo de 2006. O tempo utilizado para a intervenção metodológica foi disponibilizado pelo professor de acordo com o calendário da escola. Entretanto, houve alguns fatores, expostos abaixo, que reduziram consideravelmente o tempo efetivo em sala de aula.

Segundo já exposto no item 2.4 desse estudo, inicialmente foram elaboradas 15 atividades de ensino para serem aplicadas aos alunos da 8ª série, no entanto, devido à limitação do tempo disponível, esse número passou a ser 10 atividades. As atividades retiradas do módulo de ensino para a 8ª série foram reelaboradas para o mini-curso realizado no XII Seminário de Pesquisa do CCSA-UFRN.

Todas as atividades aplicadas na intervenção metodológica foram desenvolvidas com grupos de três alunos, que sempre eram trocados para não acomodar os alunos em situações de pouca participação. Eventualmente formavam-se duplas por causa da não presença de outros alunos. No desenvolvimento das atividades destacaram-se quatro momentos importantes: (1) um primeiro momento de leitura, feita pela pesquisadora e acompanhada pelos alunos, do objetivo e enunciado de cada atividade; (2) no segundo momento os alunos promoviam uma discussão, entre os componentes de cada grupo, sobre as estratégias de resolução da atividade; (3) o terceiro momento era a resolução, propriamente dita, da atividade; (4) e no último e quarto momento tentava-se realizar uma socialização verbal dos resultados entre os grupos, com a intervenção da pesquisadora, mediando e aprimorando as conclusões alcançadas pelos alunos, com algumas anotações no quadro sempre que necessário. Esse último momento quase sempre foi interrompido pelo término da aula, pois os grupos levavam bastante tempo para resolver as atividades.

Todo esse processo foi bastante trabalhoso por vários motivos: (1) primeiro porque os alunos estavam acostumados a outro tipo de metodologia, na qual eles não precisavam realizar discussões com seus colegas para estabelecer uma estratégia de resolução de uma atividade de ensino; (2) segundo, em conseqüência da falta de familiaridade com alguns termos da matemática e, até mesmo, a falta de conhecimento de conceitos algébricos e geométricos, os alunos passavam muito tempo sem saber por onde iniciar a atividade; nesse momento foi necessário a mediação da pesquisadora para orientá-los nos procedimentos; (3) a indisciplina dos alunos influenciou diretamente no tempo de cada aula e que prejudicou o andamento das atividades, pois as aulas eram de 45 minutos, mas gastava-se muito tempo para organizar os grupos e fazer com que eles se concentrassem na atividade a ser desenvolvida; (4) outro fator relevante era a irregularidade da freqüência dos alunos, em todas as aulas sempre existiam alunos que não haviam comparecido na aula anterior, ou nas aulas anteriores, comprometendo o andamento e a seqüenciação das atividades. Esses foram fatores que se apresentavam dentro da sala de aula, entretanto houve fatores fora da sala de aula que não dependia dos alunos. Algumas vezes, apenas ao chegar na escola é que se ficava sabendo que os tempos de aula ficariam reduzidos a 30 minutos devido a algum evento que ocorreria naquele dia na escola. Em outra ocasião ocorreu que os alunos foram liberados a partir do quarto horário da manhã, o que prejudicava a turma que teria o quinto horário. A realização dos jogos internos no turno em que o aluno estudava também prejudicou o andamento das atividades.

O papel da pesquisadora nesses momentos foi de otimizar o tempo disponível para a realização das atividades, entretanto muitas atividades não eram concluídas na aula em que se iniciou a resolução, deixando-se a conclusão para a aula seguinte.

No desenvolvimento das atividades, observou-se que os alunos demonstraram uma dependência da pesquisadora para lhes orientar nas tarefas a serem cumpridas. Identificou-se que, em vários momentos, havia uma dificuldade real no entendimento das instruções contidas no texto das atividades por parte dos alunos o que, aliás, já havia sido identificado em Souza (2003). Isso se dava pela falta de uma leitura mais atenta do texto e por falta de familiarização dos termos matemáticos e geométricos utilizados, como já exposto. Nesses momentos, a pesquisadora realizava questionamentos de forma a estimular a compreensão e o raciocínio dos alunos como, por exemplo, "do que está falando a atividade?", ou "qual o termo que você não conhece o significado?". Esses questionamentos exigiam que o aluno lesse o texto da atividade mais de uma vez, procurando identificar os termos desconhecidos e entender o que se estava pedindo na atividade.

Foi observado que, nas discussões em grupo, alguns alunos estavam mais preocupados em resolver a atividade individualmente, sem consultar seus colegas do grupo, principalmente aqueles alunos que apresentavam certa facilidade de compreensão da atividade. Dessa forma, foi necessário que a pesquisadora reforçasse a importância e os objetivos do trabalho em grupo, e ressaltasse que essa forma de trabalho permitia aos alunos trocarem idéias, ouvirem sugestões e estabelecerem estratégias para resolver as atividades.

Como a formação dos grupos era mudada sempre que possível isso causava certa resistência de alguns alunos em formar outro grupo com alunos que eram taxados como "fracos" ou "bagunceiros" por seus colegas. Esse fato, às vezes, dificultava o entrosamento do grupo na hora da resolução da atividade, cabendo à pesquisadora contornar essas situações mantendo os alunos engajados na realização das tarefas.

Saliente-se que todos esses obstáculos relativos ao processo ensino-aprendizagem dificultou um desenvolvimento harmonioso da intervenção metodológica, que é necessário, para que o aluno se sinta em condições adequadas para a construção do conhecimento.

Quanto à aprendizagem dos conceitos abordados nas atividades de ensino, houve muita inquietação, por parte dos alunos, no momento de estabelecer as estratégias de resolução ou na compreensão do conteúdo estudado. A utilização de outros materiais concretos, como palitos de madeira, quadradinhos de cartolina, tampas de plástico, ou até mesmo os instrumentos de desenho geométrico e a folha de papel milimetrado, causaram certo impacto nos alunos que não estavam acostumados a manusear esse tipo de material nas aulas de matemática.

Na atividade 1 que trata da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, foram utilizados quadradinhos para montar retângulos de área conhecida e malha quadriculada para representar esses retângulos. No início dessa atividade, a primeira dificuldade encontrada foi sobre o que significava "u^2", foi explicado que seria para expressar a unidade quadrada de área. Após os grupos terem montado os dois primeiros retângulos houve bastante dúvida de como representá-los na malha quadriculada, já que o quadradinho de cartolina fornecido tinha 2cm de lado e os quadradinhos da malha tinham 1cm de lado. Foi esclarecido que a relação seria de 1 para 1, um quadradinho de cartolina para um quadradinho da malha, e não de 1 para 4, como a maioria dos alunos estavam iniciando a fazer. Montar o terceiro retângulo provocou alvoroço em alguns alunos, pois eles não haviam construído o segundo retângulo respeitando uma das dimensões do primeiro, logo eles estavam desmontando os retângulos e montando outro com dimensões diferentes dos retângulos iniciais. Mesmo nos grupos que haviam respeitado a condição da igualdade de uma das dimensões entre os dois primeiros retângulos, o terceiro retângulo foi construído desmontando os outros dois. Após o esclarecimento sobre essa parte da atividade, os grupos realizaram a correção de seus procedimentos.

Na montagem dos dois primeiros retângulos apenas era conhecida o valor da área de cada um, logo o valor das dimensões ficavam por conta dos alunos. Basicamente foram encontrados três tipos de configuração para a construção dos três retângulos, como mostram as ilustrações 32, 33 e 34.

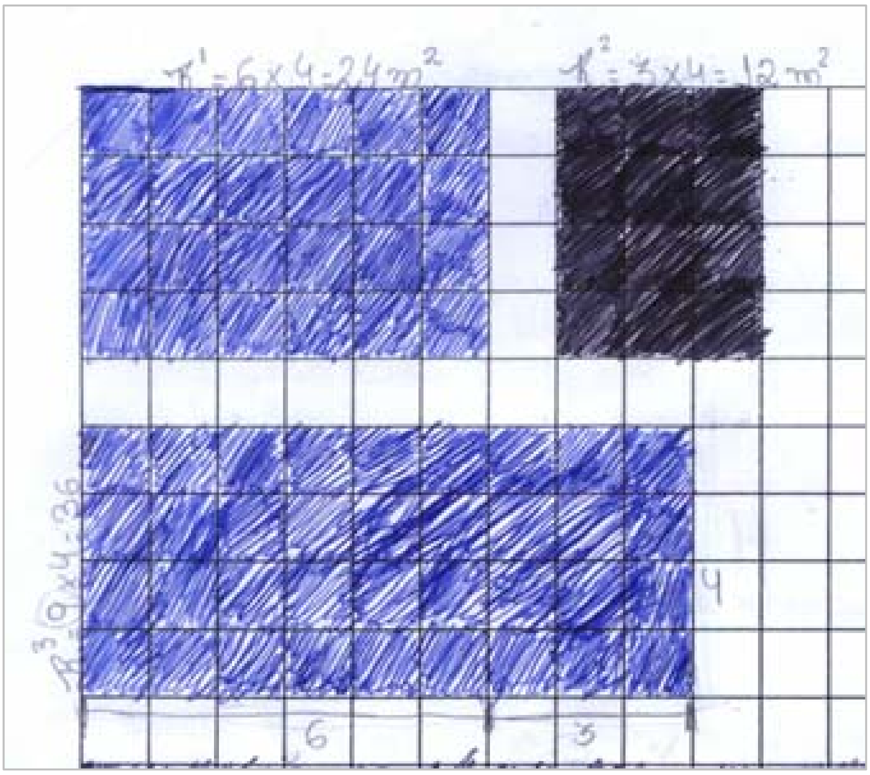


Ilustração 32

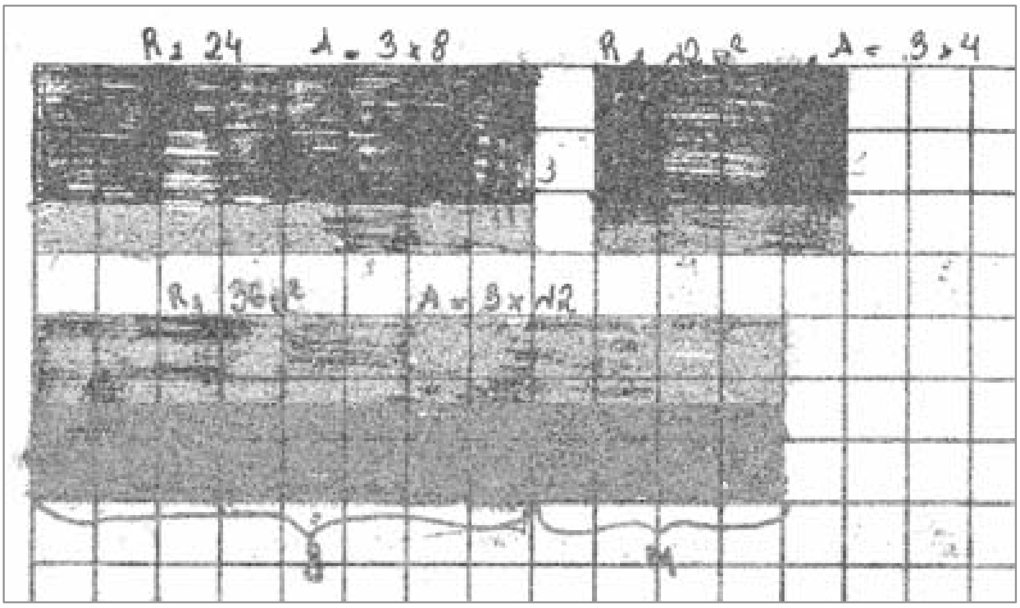


Ilustração 33

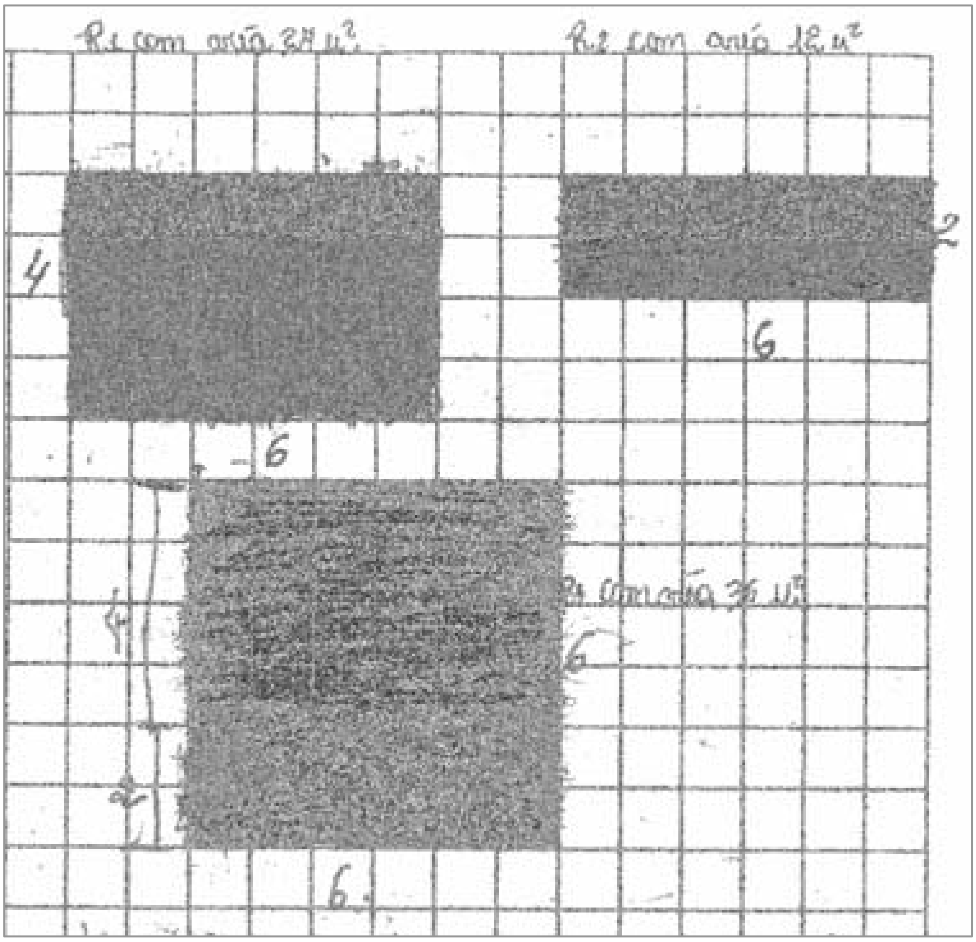


Ilustração 34

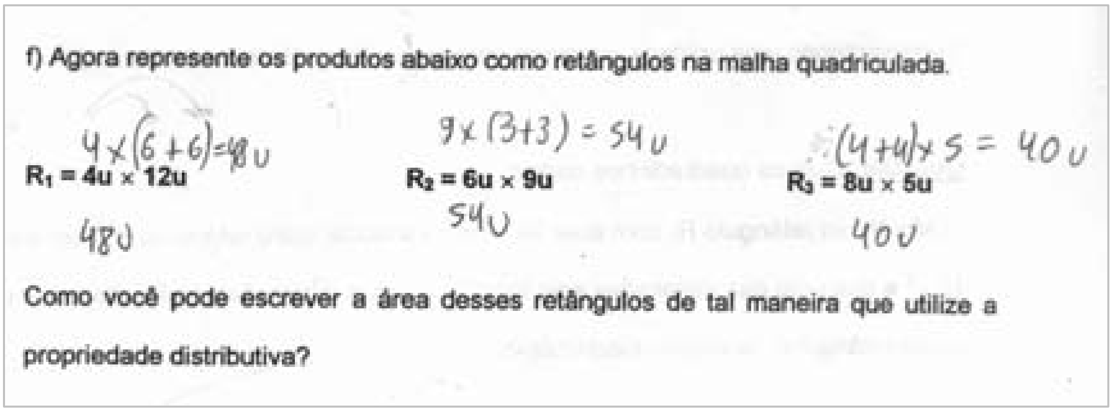
Na ilustração 34 o grupo, ao montar o terceiro retângulo, obteve um quadrado. Os alunos desse grupo perguntaram à pesquisadora se estava correto, pois "*haviam montado um quadrado*", então a pesquisadora questionou "*um quadrado não seria um retângulo?*", e todos os alunos desse grupo demonstraram uma expressão facial de estranhamento. Então foi questionado “*o que é um retângulo e um quadrado*?”, foi observado que as definições que eles possuíam eram incompletas, pois se relacionavam apenas às medidas dos lados. Após a explicação sobre a classificação dos quadriláteros esse grupo concluiu a atividade.

É importante ressaltar que existem ainda outras possibilidades, não utilizadas pelos grupos, para montar os retângulos de área $24u^2$ e $12u^2$ como, por exemplo, $12u \times 2u$ ou $1u \times 24u$ para o retângulo de área $24u^2$ e $12u \times 1u$ para o retângulo de área $12u^2$.

O item (e) da atividade, que era para escrever a área do terceiro retângulo de forma a utilizar a propriedade distributiva, foi o que exigiu mais trabalho dos alunos, pois eles não sabiam o que era propriedade distributiva, logo não conseguiam visualizá-la na área do terceiro retângulo obtido.

Vale salientar que a visualização de uma das dimensões do terceiro retângulo, como a soma das dimensões dos dois outros, não foi imediata para nenhum dos grupos, isso só foi possível após alguns questionamentos realizados pela pesquisadora como, por exemplo, “*qual o valor das dimensões do terceiro retângulo?*”, “*onde estão as dimensões dos dois primeiros retângulos nesse terceiro retângulo*?”, “*como fica o cálculo da área substituindo o valor da dimensão do terceiro retângulo pela soma das dimensões dos outros?*”.

Foi interessante observar, na socialização das respostas, que, após terem compreendido o que seria a propriedade distributiva, o item (f) dessa atividade que seria escrever produtos dados de tal maneira que utilizasse tal propriedade, muitos alunos visualizaram apenas o fator par do produto conforme a soma de parcelas iguais como exemplificado na ilustração 35 de um grupo de alunos.


f) Agora represente os produtos abaixo como retângulos na malha quadriculada.

$4 \times (6+6) = 48u$ $\quad$ $9 \times (3+3) = 54u$ $\quad$ $(4+4) \times 5 = 40u$

$R_1 = 4u \times 12u$ $\quad$ $R_2 = 6u \times 9u$ $\quad$ $R_3 = 8u \times 5u$

48u $\quad$ 54u $\quad$ 40u

Como você pode escrever a área desses retângulos de tal maneira que utilize a propriedade distributiva?

Ilustração 35

Nesse grupo também foi observado o não estabelecimento da igualdade “R_1 *igual a* ...” para explicitar o valor da área de cada retângulo.

Outro grupo escreveu um dos fatores do produto como soma de duas parcelas, mas não realizou a distributividade propriamente dita como mostra a ilustração 36. Ainda nessa ilustração, observa-se que, no cálculo da área do retângulo 2 (R_2), que não foi pedido no enunciado desse item, esse grupo escreveu 64 como resultado da multiplicação 9·6, ao invés de 54, que seria a resposta correta.

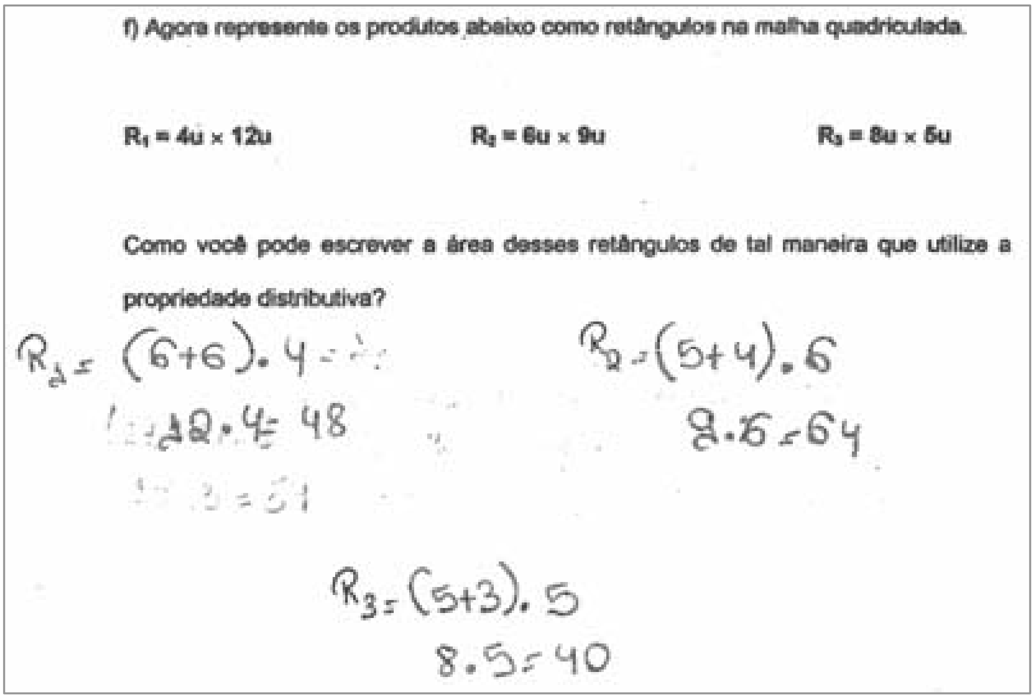


Ilustração 36

O desenvolvimento dessa atividade levou 2 horas/aula.

Na parte I da atividade 2, que consistia em montar retângulos, de dimensões conhecidas, com palitinhos de madeira e calcular seu perímetro e área, aparentemente não provocou dificuldades, pois seguia o raciocínio da atividade anterior, mas o material utilizado foi palitos de madeira cortados todos no mesmo comprimento. No entanto, para o cálculo do perímetro, muitos alunos não sabiam sequer o que era perímetro. Após terem compreendido a definição, os alunos foram deixados bastante livres para responderem aos itens sobre perímetro e a utilização da propriedade distributiva. Na parte II, para escrever expressões matemáticas que representassem o perímetro e a área de cada um dos retângulos dados, utilizando a distributividade, gerou uma inquietação em todos os grupos, primeiro porque muitos alunos não sabiam como representar as medidas desconhecidas dos retângulos e segundo, para reduzir os termos semelhantes nas expressões e escrevê-las na forma mais simples.

Na socialização das respostas foi percebido que na parte II dessa atividade a distributividade não ficou bem compreendida para alguns alunos dos grupos. A ilustração 37 mostra as expressões de um grupo para o perímetro. Observa-se que nos três retângulos os alunos desse grupo identificaram os segmentos iguais dos retângulos e os especificaram no cálculo do perímetro, entretanto eles não utilizaram a distributividade para escrever as expressões. No cálculo da área do segundo e terceiro retângulos o produto das dimensões já encaminhava para a aplicação distributividade, entretanto muitos alunos não a realizaram.

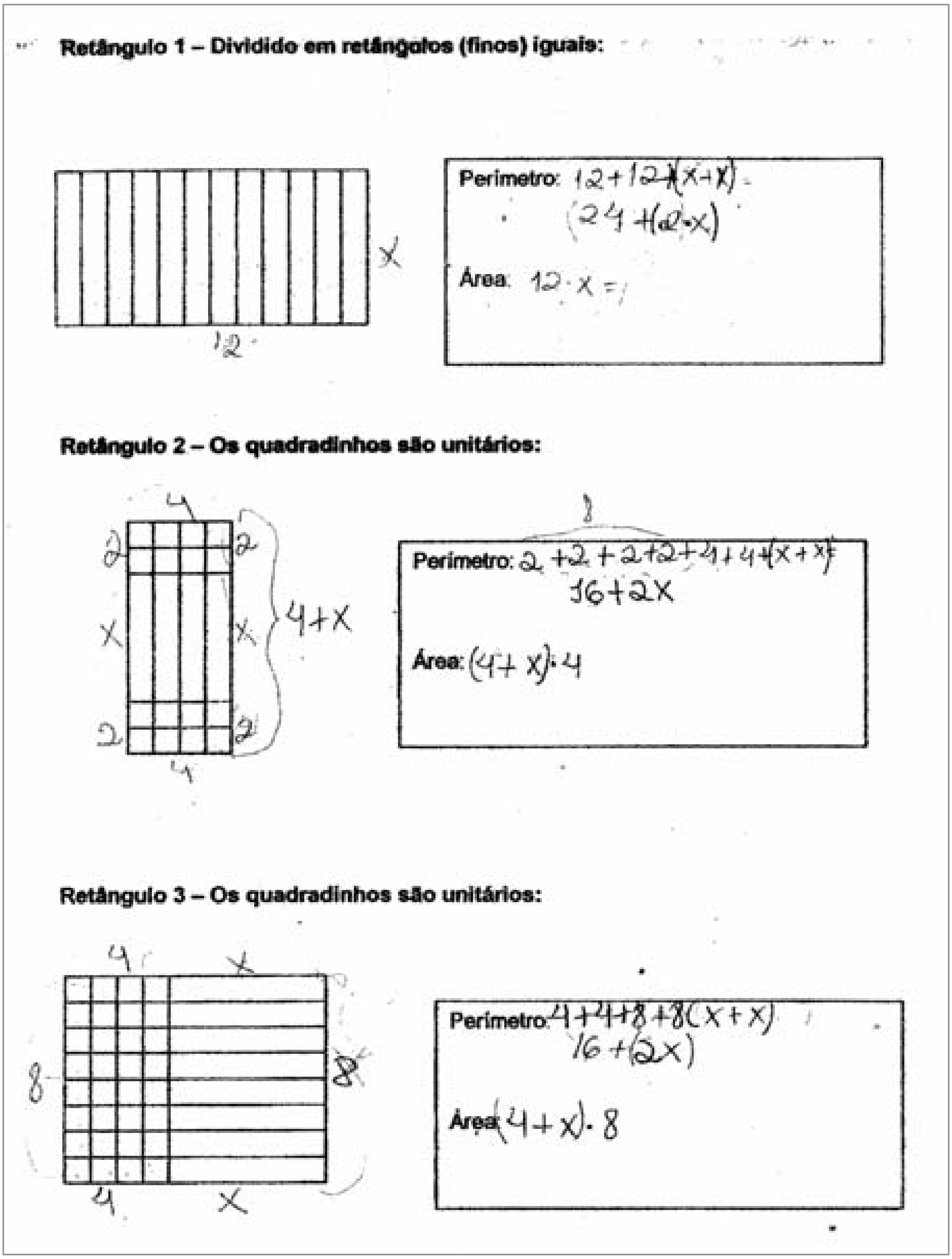


Ilustração 37

A igualdade “P = ...” (perímetro igual a) para o perímetro e “A = ...” (área igual a) para a área não foi especificada praticamente em nenhum dos grupos.

Devido a essas observações na aula posterior às duas atividades, foram retomados os procedimentos da atividade 1 com a utilização de dois retângulos quadriculados em cartolina. Foi destacado que na propriedade distributiva as parcelas da soma não teriam que ser necessariamente iguais, como eles haviam escrito na atividade. Tudo foi feito com registro no quadro a giz. Para a atividade 2 também foi utilizado um retângulo em cartolina semelhante aos trabalhados na atividade. Foram escritas no quadro a giz as expressões para o perímetro e área desse retângulo, ressaltando-se a utilização da igualdade e destacando-se a distributividade.

Os alunos se mostraram bastante satisfeitos com a exposição dos cálculos no quadro a giz e questionaram o porquê deles necessitavam fazer aquelas atividades. Foi ressaltado que seria uma nova forma de aprender matemática sem que o professor estivesse o tempo todo expondo os conteúdos no quadro e o aluno apenas exercitando nas atividades. Nesse início alguns alunos ofereceram resistência à metodologia utilizada, pois estavam bastante acostumados com o tipo de aula expositiva, embora tenham declarado no questionário de identificação que achavam as aulas repetitivas.

Na atividade 3, que trata da escrita da expressão para a área do paralelogramo e para o triângulo, através do processo de decomposição e composição de figuras para encontrar a fórmula da área do paralelogramo, a partir do retângulo e a área do triângulo, a partir do paralelogramo, na utilização da régua para medir a base e a altura do paralelogramo dado, alguns alunos iniciaram a medição pelo marca de 1 cm da régua e não pela marca de 0 cm, o que foi percebido no momento de explicitar o valor da área do retângulo composto pelo paralelogramo. Não houve dificuldades nessa atividade. A introdução das letras para representar a base e a altura das três figuras foi feita na socialização das respostas.

Sobre a atividade 4, que trata do cálculo do perímetro e a área do trapézio e a obtenção de sua fórmula de área e manipulação para encontrar uma das varáveis que não fosse a área, não houve dificuldades nas medições, apenas algumas imprecisões na casa dos décimos. No item (e), para representar os segmentos do trapézio e deduzir sua fórmula de área a partir dos triângulos e do retângulo que compunham o trapézio, nenhum aluno conseguiu deduzir corretamente a fórmula, isso foi observado no acompanhamento dos grupos pela pesquisadora. Então, mais uma vez, foi necessária uma exposição para a dedução dessa fórmula de área, destacando as propriedades operatórias envolvidas. No item (f), no cálculo de uma das bases de um trapézio, os alunos ficaram livres para encontrar esse valor. As atividades foram recolhidas e observadas rapidamente as respostas. Nenhum aluno chegou à resposta correta. Então esse item foi detalhadamente resolvido na aula seguinte, retomando os princípios de equivalência na resolução de equações. Todos os alunos disseram que nunca haviam resolvido uma equação daquela forma, só resolvia "passando" um número ou a letra para o outro lado da igualdade. Isso demonstra que conceitos fundamentais da aritmética para álgebra não estão sendo lecionados pelos professores, mesmo com suas aulas tradicionais.

Erros como a falta de igualdade ou não substituição correta dos valores e até o uso incorreto da propriedade distributiva, que já havia sido estudada há duas atividades atrás, foram observados nos cálculos dos alunos nesse item. Abaixo estão duas ilustrações (38 e 39) dos cálculos de dois grupos.

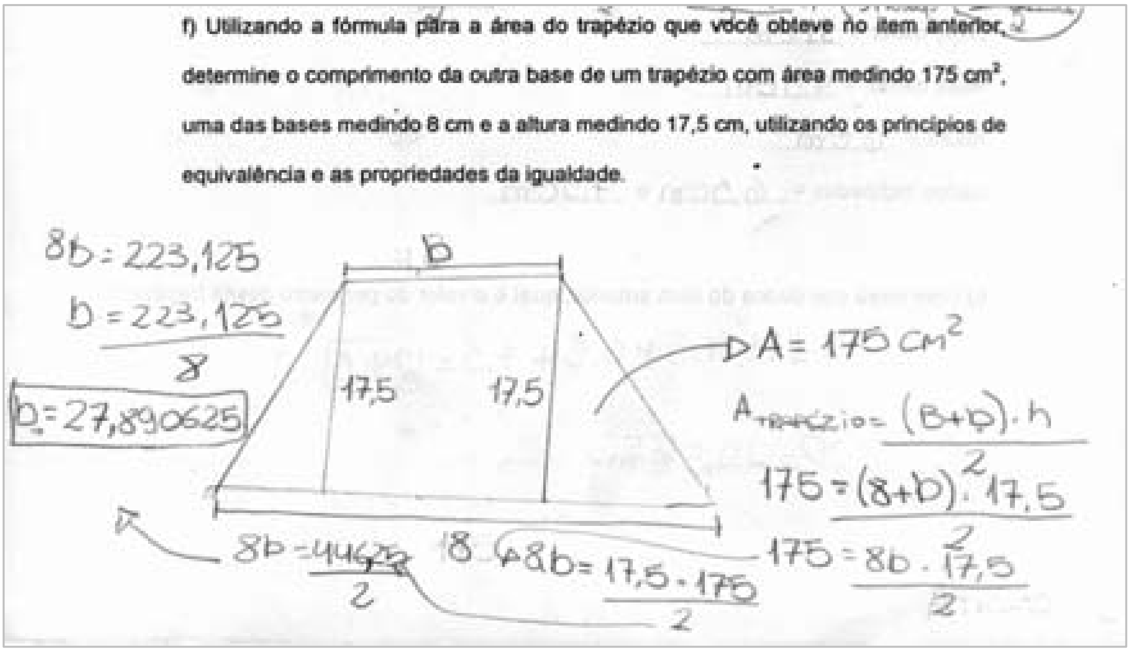
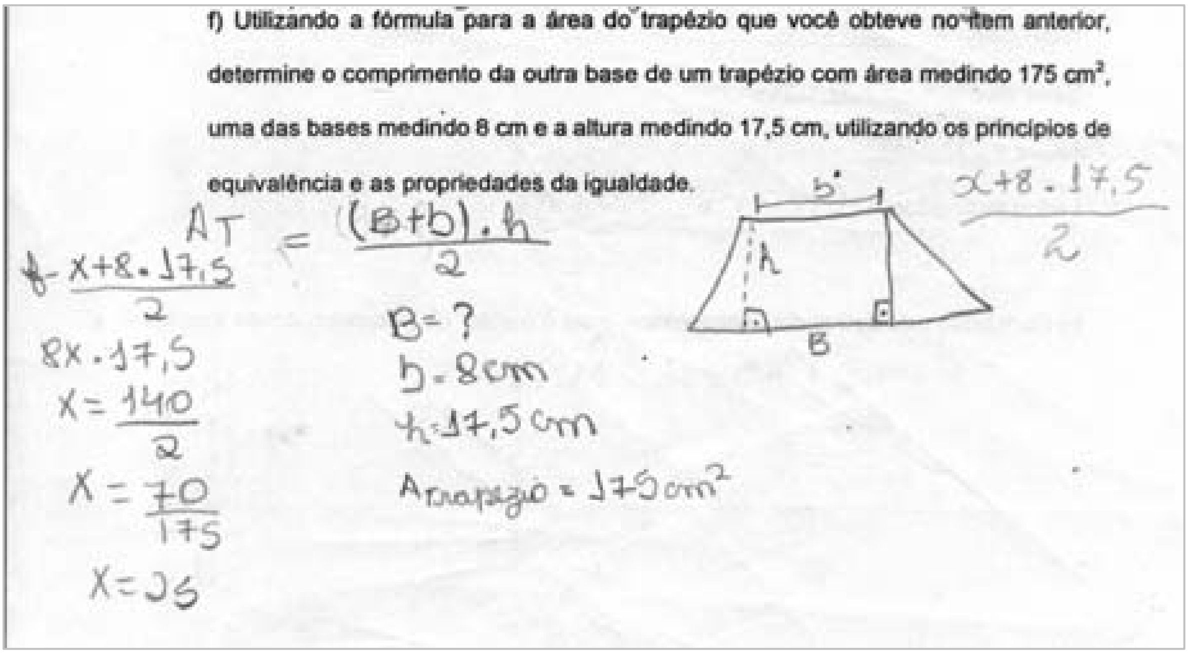


Ilustração 38


f) Utilizando a fórmula para a área do trapézio que você obteve no item anterior, determine o comprimento da outra base de um trapézio com área medindo 175 cm², uma das bases medindo 8 cm e a altura medindo 17,5 cm, utilizando os princípios de equivalência e as propriedades da igualdade.

$$A_T = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$$

$$\frac{x+8 \cdot 17,5}{2}$$

$$8x \cdot 17,5$$

$$x = \frac{140}{2}$$

$$x = \frac{70}{175}$$

$$x = 26$$

B = ?

b = 8cm

h = 17,5 cm

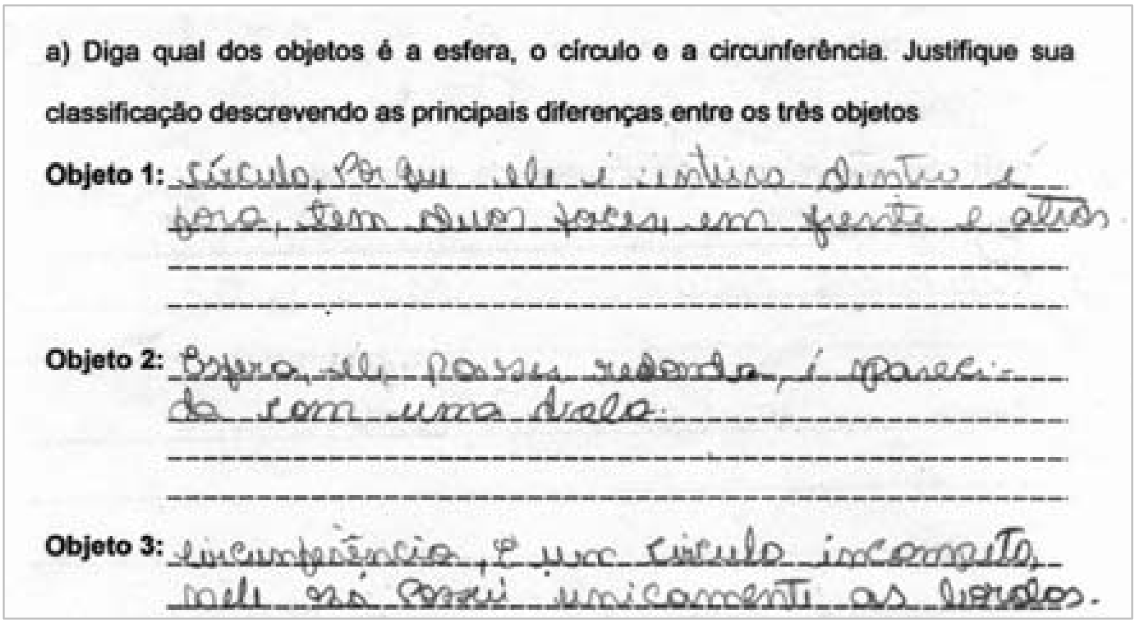
Atrapézio = 175 cm²

Ilustração 39

Essas duas ilustrações mostram erros diferentes nos dois grupos. Na ilustração 38 a escrita da fórmula e a substituição foram feitas corretamente, entretanto, o erro ocorreu na soma algébrica no termo *8 + b*. Esse tipo de erro também foi identificado nos cálculos dos alunos na pesquisa de Rodrigues Neto (1998), em que o aluno não compreende o conceito de variável.

Na ilustração 39, embora o aluno tenha escrito corretamente a fórmula da área do trapézio, o erro ocorreu desde a substituição incorreta dos valores, pois desconsiderou o valor da área do trapézio não estabelecendo a equação a partir da fórmula de área.

A atividade 5 aborda o conceito de circunferência, círculo e esfera. Os alunos observaram três objetos para classificá-los em circunferência, círculo e esfera sem saber a definição de cada um deles, apenas de acordo com as diferenças e semelhanças que se observava em cada figura. Os objetos foram: uma tampa de plástico de lata de leite em pó, um aro de plástico que foi obtido cortando-se a borda de tampas de plástico e uma esfera de isopor. Os objetos estavam numerados da seguinte forma: objeto 1 a tampa de plástico, objeto 2 a esfera de isopor e objeto 3 o aro de plástico. As respostas encontradas foram muito interessantes. Abaixo estão os exemplos de algumas delas.



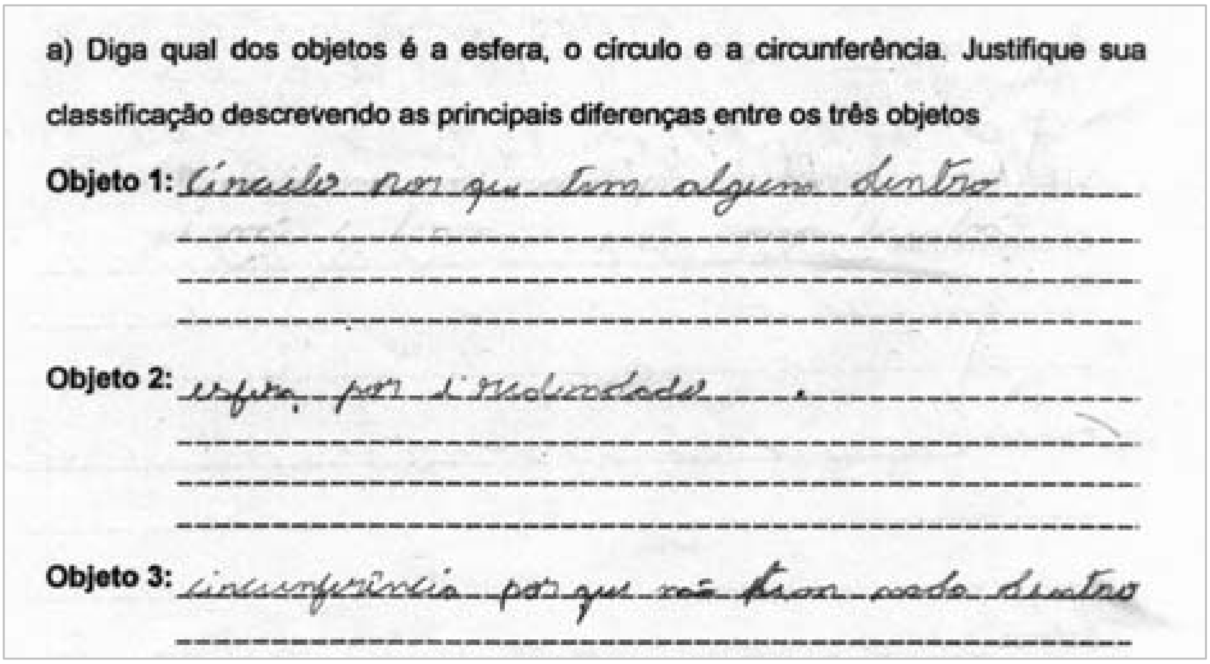
a) Diga qual dos objetos é a esfera, o círculo e a circunferência. Justifique sua classificação descrevendo as principais diferenças entre os três objetos

Objeto 1: círculo, porque ele é inteiro dentro e fora, tem duas faces em frente e atrás

Objeto 2: Esfera, ele possui redondo, é parecida com uma bola.

Objeto 3: circunferência, é um círculo incompleto, pois só possui unicamente as bordas.

Ilustração 40



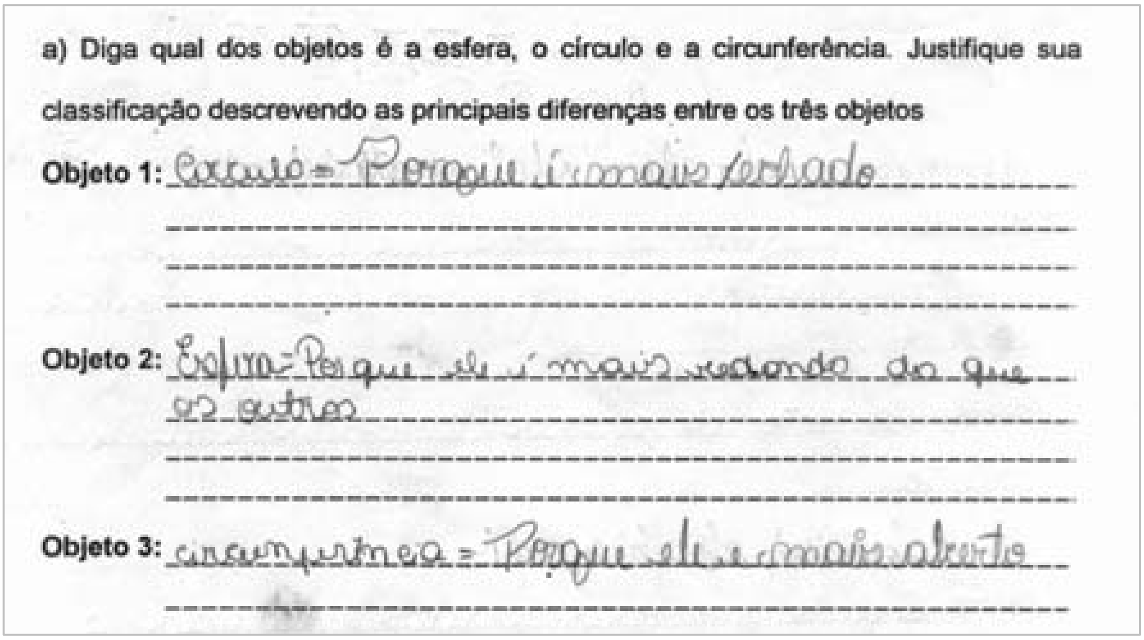
a) Diga qual dos objetos é a esfera, o círculo e a circunferência. Justifique sua classificação descrevendo as principais diferenças entre os três objetos

Objeto 1: círculo por que tem alguma dentro

Objeto 2: esfera por é redondada

Objeto 3: circunferência por que não tem nada dentro

Ilustração 41



a) Diga qual dos objetos é a esfera, o círculo e a circunferência. Justifique sua classificação descrevendo as principais diferenças entre os três objetos

Objeto 1: Circulo = Porque é mais fechado

Objeto 2: Esfera = Porque ele é mais redondo do que os outros

Objeto 3: circunferência = Porque ele é mais aberto

Ilustração 42

Esses três grupos responderam exatamente de acordo com suas impressões sobre os objetos. A menção sobre as características observadas como "*porque não tem nada dentro*" ou "*porque ele é inteiro dentro e fora*" para referir-se à circunferência e ao círculo, respectivamente, ou ainda "*porque é mais redondo que os outros*" para se referir à esfera, demonstra que os alunos, mesmo não sabendo a definição formal de cada figura, conseguem distingui-las por suas características nos objetos. Ou seja, eles detêm o conceito intuitivo, mas não sabem a definição matemática das figuras. Isso corrobora com as pesquisas de Piaget, em que os sujeitos abstraem propriedades dos objetos numa abstração empírica, mas não a faz sem uma reflexão, uma associação do que está sendo visto com o que já tem em seus esquemas mentais.

Depois da socialização da observação das características, feita por cada grupo, sobre cada uma das figuras fornecidas, a definição formal de circunferência, círculo e esfera foram escritas no quadro a giz para todos os alunos.

Na atividade 6, que consiste em inscrever o quadrado e o hexágono regular na circunferência e verificar suas propriedades, a utilização correta dos instrumentos de desenho foi essencial para a realização da atividade. Nenhum aluno demonstrou habilidade no manuseio de tais instrumentos, logo a resolução dessa atividade, na parte de construção do quadrado e do hexágono regular inscritos numa circunferência, foi realizada com a orientação permanente da pesquisadora, desenhando esses polígonos no quadro a giz e os alunos desenhando em suas folhas. Na verificação das propriedades, os alunos apresentaram muita dificuldade para calcular a medida dos ângulos internos dos triângulos que compunham o quadrado e o hexágono regular, bem como na classificação desses triângulos. Dessa forma, essa atividade foi constantemente mediada pela pesquisadora. A seguir está apresentado, como exemplo, a produção de um dos grupos na construção do quadrado e hexágono regular (ilustrações 43 e 44, respectivamente).

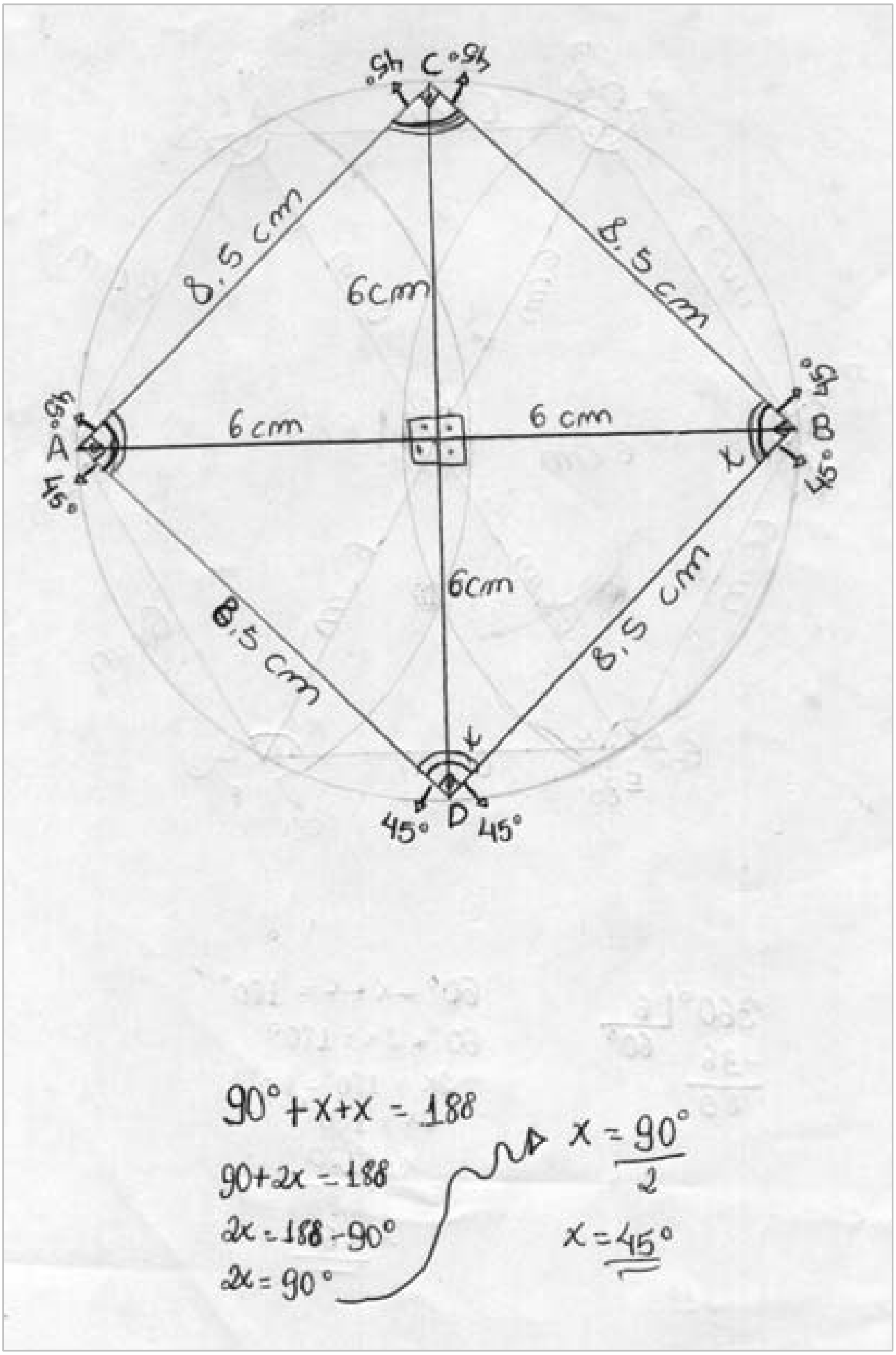


Ilustração 43

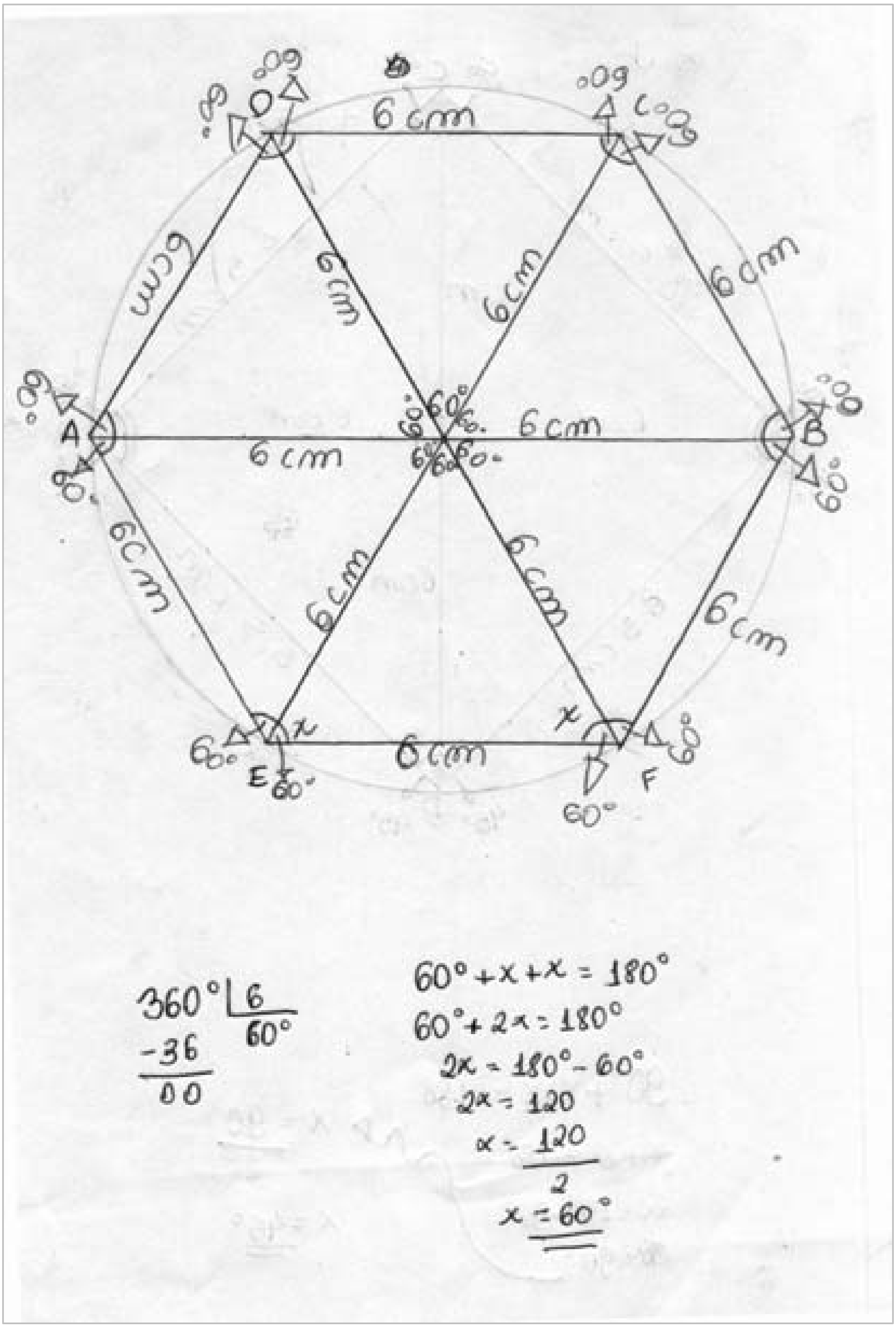


Ilustração 44

Observa-se que nas duas figuras construídas, a notação utilizada pelo grupo para representar a medida do ângulo interno do triângulo retângulo, no quadrado inscrito, e a medida do ângulo interno do triângulo eqüilátero, no hexágono regular inscrito, estão incompletas, pois escreveram ângulo “x” ao invés de ângulo “$\hat{x}$”.

Na atividade 7, os alunos iniciaram um procedimento para o cálculo da área do círculo pelo processo de contagem com o auxílio do papel milimetrado. No começo, ao construir o círculo, com raio igual a 6 cm, no papel milimetrado foi comum observar que muitos grupos estavam desconsiderando que os quadrados da folha poderiam servir na medição do raio. Esses grupos estavam utilizando a régua para estabelecer o comprimento do raio para construir o círculo pedido. Depois de uma discussão com toda a sala sobre a folha de papel milimetrado foi que os alunos iniciaram a atividade. Todos escolheram um centro para o círculo, de forma que esse centro fosse o centro de um quadrado e 1 cm^2 de área. A partir daí desenharam o círculo e iniciaram o processo de contagem, considerando a unidade de área 1 cm^2. Foi orientado que os grupos aproximassem o máximo possível da linha curva do círculo. Abaixo têm duas ilustrações (45 e 46) sobre o procedimento de dois grupos.

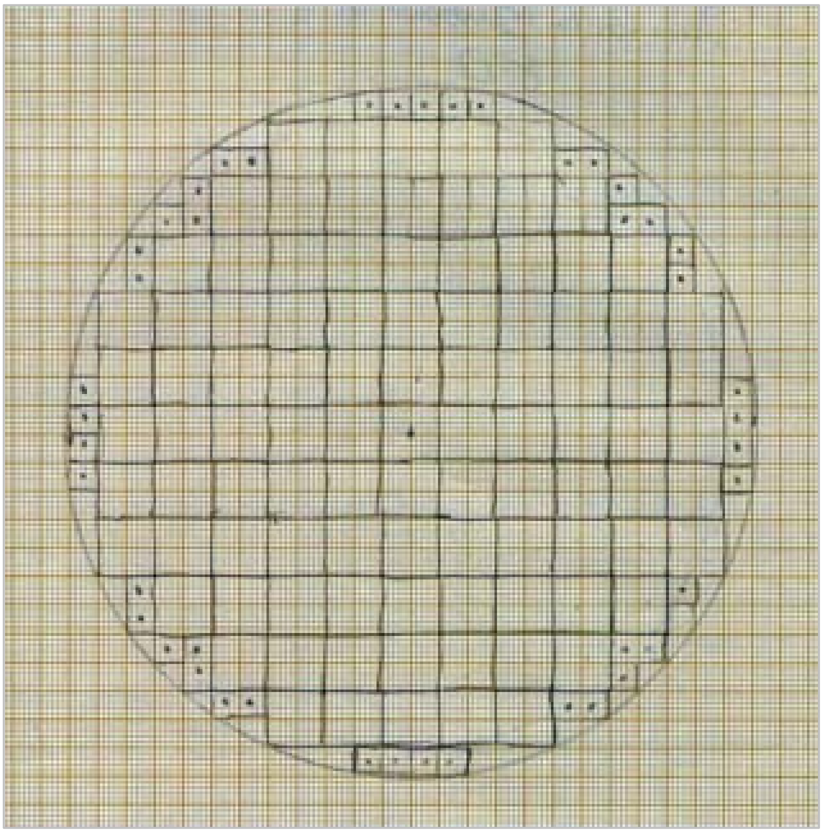


Ilustração 45

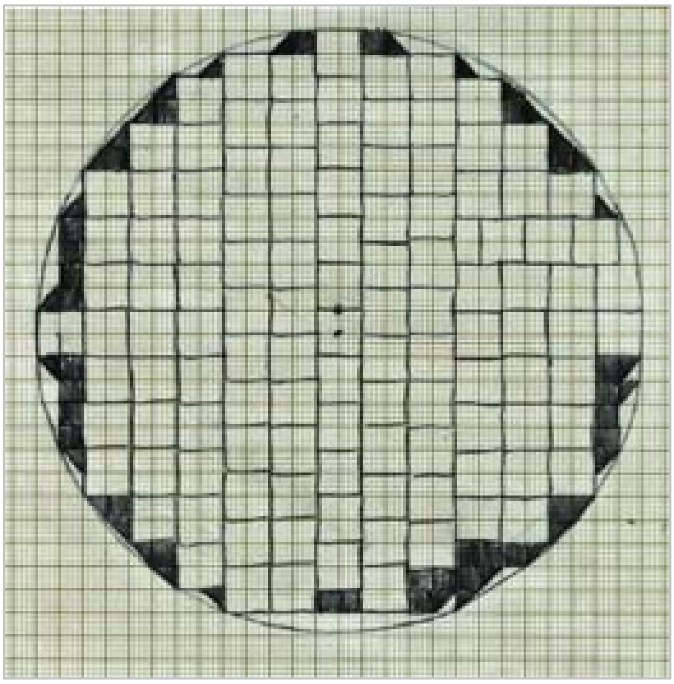


Ilustração 46

Constatou-se que dois grupos se aproximaram de forma diferente da linha curva do círculo. O primeiro (ilustração 42) estava preocupado apenas com os quadradinhos inteiros, mesmo os que representavam $\frac{1}{4}$ da unidade de área estabelecida. Esse grupo encontrou o valor de 108 cm^2 para a área do círculo. Já o segundo grupo achou que cada quadradinho de 1 cm^2 de área poderia ser decomposto em 8 pequenos triângulos retângulos que representavam $\frac{1}{8}$ da unidade de área estabelecida. Dessa forma esse grupo encontrou 114 cm^2 de área para o círculo. O procedimento a ser utilizado pelos grupos foi deixado livre, foi apenas destacado pela pesquisadora que os quadrados de 1cm^2 de área possuíam outras subdivisões que poderiam ajudar no processo de contagem.

Houve grupos que iniciaram a contagem dos quadrados de 1 cm^2 de área de forma aleatória (ilustração 47) sem necessariamente os quadrados estarem com lados em comum. Isso dificultou bastante a contagem do grupo. Esse grupo encontrou 111,5 cm^2 de área para o círculo, considerando os quadradinhos inteiros e $\frac{1}{2}$ unidade de área. Foi observado, também, que esse grupo não utilizou o centro do círculo como o centro de um dos quadrados de 1 cm^2.

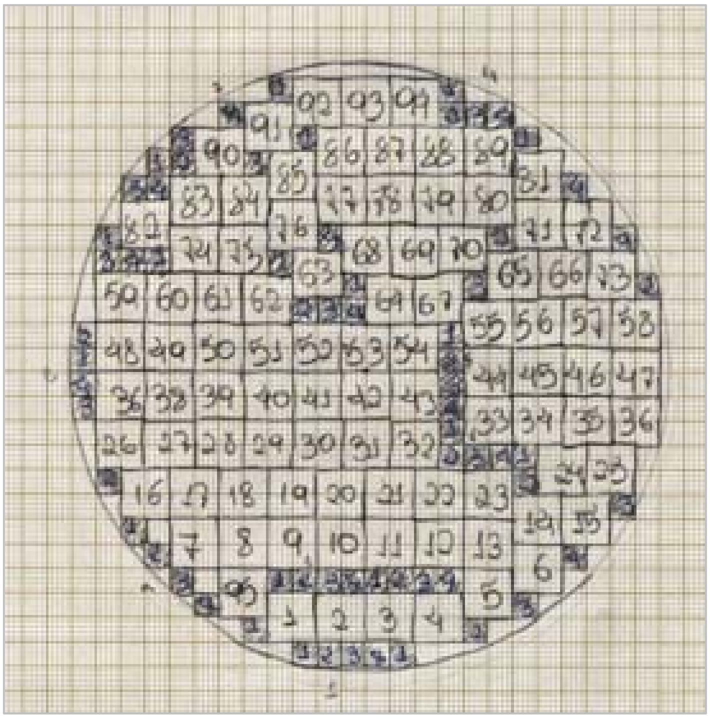


Ilustração 47

No momento da socialização das respostas, os alunos demonstraram uma inquietação quanto a variedade de respostas diferentes para o valor da área do círculo. Essa inquietação gerou a discussão sobre a eficácia do processo; "*quem está correto?*", perguntaram alguns alunos. Foi respondido que todos, mas alguns grupos expressaram melhor o valor da área do círculo. Então veio mais outro questionamento: "*temos que fazer sempre isso para ver a área de um círculo?*", foi respondido que não; existe uma fórmula que dá uma melhor aproximação para a área de qualquer círculo.

Essa atividade foi muito produtiva, os alunos se envolveram para encontrar um valor que ficasse mais próximo do círculo, gerando diferentes processos para alcançá-lo.

A atividade 8, que trata da obtenção da fórmula do perímetro e da área do hexágono regular inscrito e generalizar para a área de um polígono regular de n lados, foi outra atividade em que foi necessária a intervenção constante da pesquisadora na resolução da mesma. Os grupos ficaram bastante tempo tentando resolver sozinhos, no entanto não houve sucesso. Foi necessário encerrar a aula, em uma das turmas, por conta de tanta inquietação gerada pela dificuldade que os alunos apresentaram na identificação de propriedades geométricas e no estabelecimento de relações algébricas. A atividade foi retomada na aula seguinte com a exposição da pesquisadora de todo o processo solicitado na atividade. Na outra turma não foi diferente, mas a atividade foi resolvida na mesma aula, pois era uma aula de 90 minutos, ou seja, 2 horas/aula.

Apesar de estarem na faixa etária correspondente ao nível de operações formais, segundo a teoria de Piaget, foi muito difícil para que os alunos compreendessem todos os procedimentos utilizados para a dedução da fórmula do perímetro e da área do hexágono regular inscrito na circunferência. Até mesmo a aplicação do Teorema de Pitágoras e as operações aritméticas necessárias para chegar à fórmula do apótema e da área do hexágono regular, gerou muito alvoroço nas turmas.

Esse fato só pode ser explicado pela falta de conhecimento de propriedades geométricas e operações aritméticas com números irracionais e, principalmente, a falta de habilidade nas manipulações algébricas, por parte do aluno.

A atividade 9 foi resolvida rapidamente pelos alunos. Ela aborda a obtenção a constante *pi*, por um processo experimental, através da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, e escrever a fórmula para calcular o comprimento de uma circunferência. Os alunos estavam de posse de três tipos de tampas plásticas, de diâmetros diferentes e com o auxílio de uma fita métrica eles mediram o "contorno" de cada tampa e com a régua, o seu diâmetro. Apesar da diferença entre alguns valores de alguns grupos, devido à imprecisão da medida, foi possível chegar a um valor para a constante π com até uma casa décima correta, ou seja, $\pi = 3{,}1$.

Foi destacado que esse processo para obtenção do valor de π não é o processo matemático. Foi esclarecido que o valor para π foi encontrado pelo matemático Arquimedes utilizando o que foi chamado Método dos Perímetros.

A atividade 10 é a última atividade do módulo de ensino para os alunos da 8ª série e trata da obtenção da fórmula para a área do círculo a partir da generalização da fórmula da área do polígono regular de n lados. Assim como a atividade 8, essa também foi uma atividade que gerou certa inquietação entre os alunos, devido à necessidade de se abstrair para visualizar um polígono regular inscrito, numa circunferência, com o maior número de lados possível. Compreender o processo para a obtenção da fórmula da área do círculo não foi um trabalho fácil, na verdade constatou-se que muitos alunos não se convenciam do processo, sendo difícil para eles visualizar em um polígono regular com número de lados tão grande quanto se queira e de comprimentos tão pequenos quanto possível.

Nessa atividade foi abordada a noção intuitiva de limite, mas não com termos matemáticos como "limite de..., quando... tende a...", pois os alunos não estavam apresentando total compreensão sobre o que estava sendo levantado para discussão: quando o número de lados do polígono regular inscrito na circunferência fica muito grande, o comprimento de cada lado se torna muito pequeno, logo o perímetro do polígono vai se aproximar do comprimento da circunferência, e o valor do apótema do polígono se aproxima do valor do raio.

Em conclusão, pode-se dizer que, levando-se em consideração todos os fatores expostos acima, o desempenho dos alunos nas atividades foi positivo, pois eles se depararam com dificuldades que não estavam acostumados, tais como trabalhar em grupo, manusear instrumentos de desenho geométrico e, principalmente, dificuldades quanto ao conhecimento matemático. Essas dificuldades levaram os alunos, salvo algumas exceções, a refletirem sobre sua postura em sala de aula enquanto sujeito ativo de sua aprendizagem.

4.2 Avaliação Diagnóstica Final

A avaliação diagnóstica final foi aplicada nas duas turmas participantes da aplicação e desenvolvimento das atividades, na semana seguinte ao término das atividades de ensino. Essa avaliação serviu também como uma avaliação bimestral para os alunos das duas turmas, pois o professor de Matemática precisava atribuir uma nota aos alunos depois da intervenção metodológica. Compareceram para fazer essa segunda avaliação 49 alunos da turma 8ª B e 44 alunos da 8ª D. A resolução das questões da avaliação teve a duração de 2 horas/aula.

Os resultados obtidos na avaliação diagnóstica final foram analisados quantitativa e, principalmente, qualitativamente de acordo com os objetivos específicos de cada questão e os critérios de julgamento do nível de compreensão dos alunos, discutidos no item 2.6.1 deste trabalho.

4.2.1 Classificação das respostas

A apresentação dos dados coletados na avaliação diagnóstica final foi realizada por meio de estatística descritiva, a qual os dados foram tabulados através de uma categorização e quantificação, do ponto de vista matemático, das respostas dos alunos, em números absolutos e porcentagens segundo os parâmetros: respostas certas, respostas erradas e em branco. Dentro dessa categorização das respostas, foi realizada uma análise qualitativa baseada na compreensão de conceitos matemáticos classificados por Skemp (1980) em “compreensão instrumental” e “compreensão relacional”, discutidos no item 1.7.4 desse estudo.

A classificação das respostas dos alunos, na análise qualitativa, sobre as questões da segunda avaliação obedeceu aos objetivos de cada questão e à categorização estabelecidos no item 2.5.1 (p. 75) desse estudo. São utilizadas as letras “A”, “B”, “C”, “D” e “E” para classificar as respostas dos alunos, conforme já realizado no estudo de Souza (2003).

A classificação quanto ao nível de compreensão do aluno será:

(1) “A” − as respostas em que o aluno realizou os procedimentos corretamente para responder as questões, sendo classificado no nível de compreensão relacional dos conceitos explorados;

(2) “B” − as respostas que sugerem que o aluno obteve algum entendimento da questão, mas não conseguiu realiza-la corretamente, estando num nível de transição entre a compreensão instrumental e a relacional;

(3) “C” − as respostas em que o aluno se limita a realizar apenas casos particulares do conceito em questão, demonstrando estar num nível de compreensão instrumental;

(4) “D” − são aquelas respostas em que o aluno não demonstrou compreensão nem no nível instrumental do conceito investigado;

(5) “E” − são as questões que não foram respondidas, ou seja, deixadas em branco.

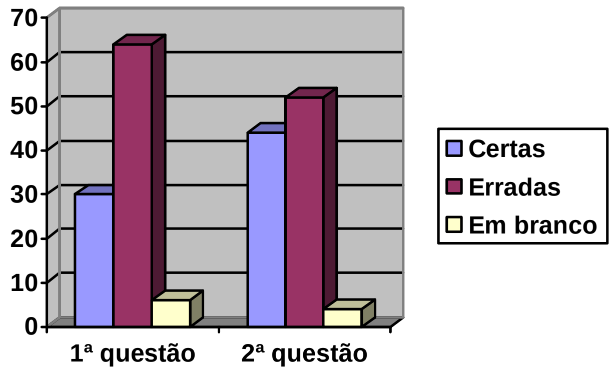
Foram realizadas entrevistas de aprofundamento com 14 alunos para o esclarecimento sobre as algumas respostas da avaliação que não se apresentavam de forma clara para permitir uma interpretação segura por parte da pesquisadora. A seleção desses alunos foi feita a partir de uma prévia observação das suas respostas na avaliação e segundo a sua participação no desenvolvimento das atividades de ensino.

4.2.2 Análise das respostas da avaliação diagnóstica final

Abaixo estão expostos, através de tabelas e gráficos sob a forma de estatística descritiva, os dados das questões da segunda avaliação. Referentes a cada questão estão os comentários dos procedimentos dos alunos, a análise qualitativa das respostas, com algumas ilustrações. Vale salientar que o número de sujeitos que compõe o grupo para a análise dos dados da pesquisa é uma amostra de 50 alunos, dos 100 matriculados nas duas turmas de 8ª série, conforme descrito no item 3.4 deste trabalho.

Tabela dos resultados da 1ª e 2ª questões

Respostas/Questões	1ª Questão (%)	2ª Questão (%)
Certas	30	44
Erradas	64	52
Em branco	6	4



Na 1ª questão observa-se que o índice das respostas certas foi bastante superior em relação à 1ª questão da avaliação diagnóstica inicial desse mesmo grupo de alunos, que foi de 0%. O índice de respostas erradas e em branco foi inferior também em relação à primeira avaliação.

Nos procedimentos dos alunos as duas formas de calcular a área do retângulo dado ficaram bastante evidentes, como mostra a ilustração 48 do aluno Alencar, embora a igualdade "*área* = ..." não tenha sido explicitada nos seus cálculos; outros alunos, como Augusto, por exemplo, escreveu a área do retângulo utilizando o produto do comprimento (soma de duas parcelas) pela altura, mas não realizou efetivamente a distributividade (ilustração 49).

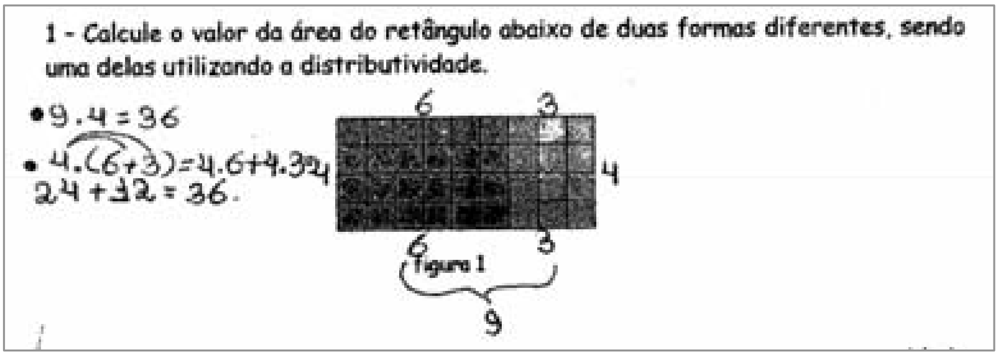


Ilustração 48

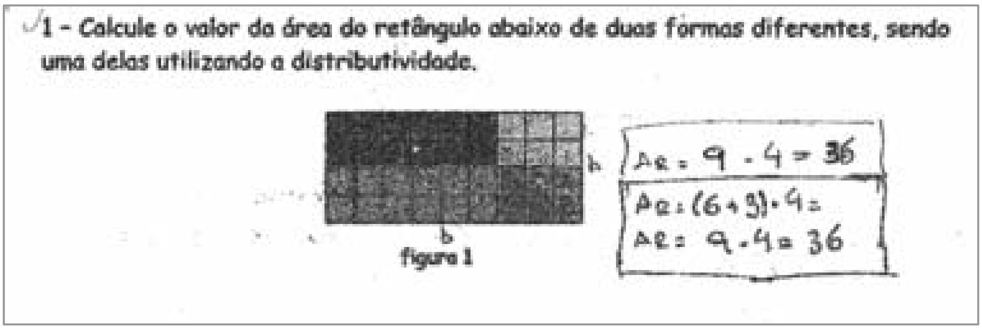


Ilustração 49

Nas respostas corretas foi identificado um aluno, Dante, que aplicou a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição também no cálculo do perímetro, mesmo esse não sendo pedido na questão, como mostra a ilustração 50 dos cálculos desse aluno.

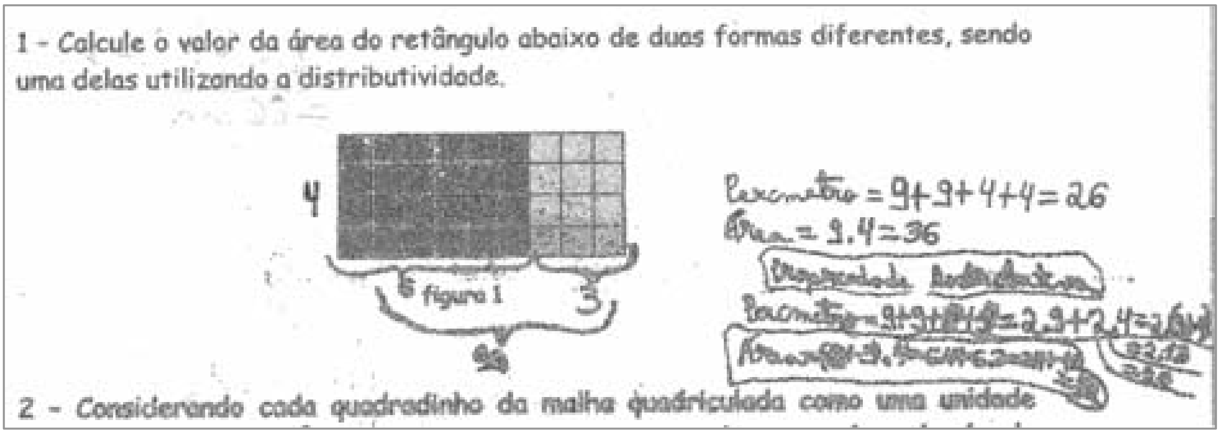


Ilustração 50

Embora o aluno tenha cometido um erro no cálculo da área do retângulo no momento de utilizar a distributividade, provavelmente por falta de atenção, tipo de erro também identificado por Ribeiro (2003) na resolução de equações, ele demonstrou estar no nível de compreensão relacional sobre a aplicação da propriedade distributiva no cálculo do perímetro. Observa-se que as igualdades “*perímetro* = ...” e “*área* = ...” foram corretamente explicitadas em seus procedimentos.

Uma aluna, Carolina, calculou corretamente o perímetro do retângulo utilizando a distributividade, embora não tenha utilizado a igualdade; entretanto ela não calculou a área. Na entrevista, com a mediação da pesquisadora com questionamentos sobre o cálculo da área do retângulo, relembrando a aula expositiva realizada no início da intervenção, essa aluna conseguiu calcular corretamente a área do retângulo, como mostra os cálculos destacados na ilustração 51. Segundo os procedimentos dessa aluna, julgou-se que sua compreensão quanto à propriedade distributiva no cálculo da área do retângulo está entre o nível de compreensão instrumental e o relacional.

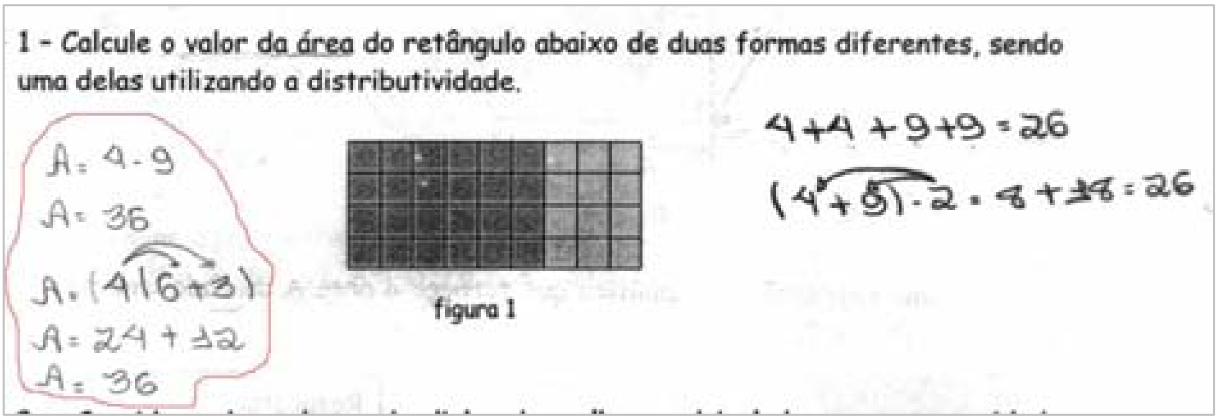


Ilustração 51

Na 2ª questão alguns valores identificados nas respostas dos alunos na avaliação diagnóstica inicial foram reincidentes nessa segunda avaliação como, por exemplo, o valor $16u^2$ para a área da região circular quadriculada. Números entre $16u^2$ e $24u^2$ também foram bastante comuns. Nessa segunda avaliação, do grupo de 50 alunos selecionados para a análise, apenas o aluno Augusto utilizou a fórmula da área do círculo, e mesmo assim realizou o cálculo da potência do raio incorretamente (ilustração 52). Na entrevista o aluno foi questionado quanto ao valor do círculo considerando os quadradinhos, ele se lembrou da atividade realizada no papel milimetrado e contou os quadradinhos inteiros e os que estavam faltando partes muito pequenas; foi questionado novamente se os quadradinhos que estavam “cortados” não poderiam fazer parte da contagem?, então ele juntou “as metades” para formar quadradinhos inteiros e chegou ao valor 28 quadradinhos, como destacado na ilustração 52.

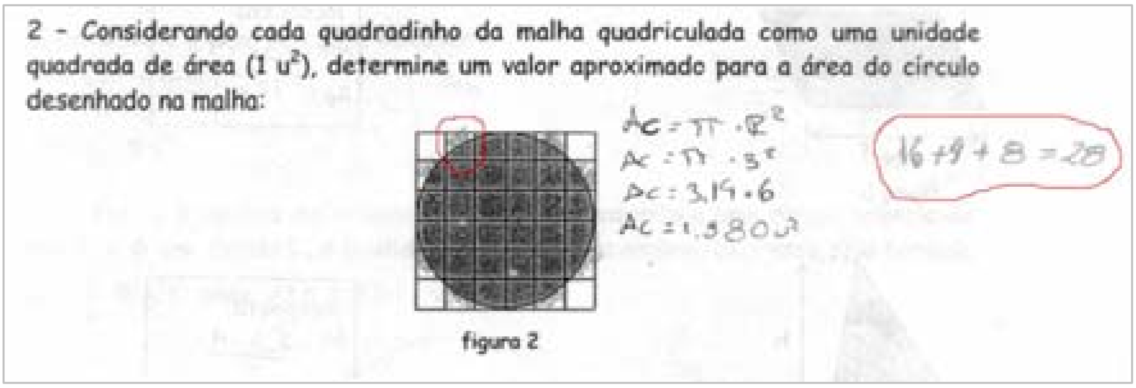


Ilustração 52

A aluna Carolina havia encontrado o valor de $23cm^2$ para a área do círculo. Na entrevista foi perguntado como ela havia encontrado esse valor, no entanto ela disse que foi contando os quadradinhos; então foi pedido que ela contasse novamente para que comprovasse o valor encontrado por ela, entretanto ela não conseguiu chegar ao valor, pois passou a considerar mais quadradinhos incompletos, chegando ao valor 28, como destacado na ilustração 53.

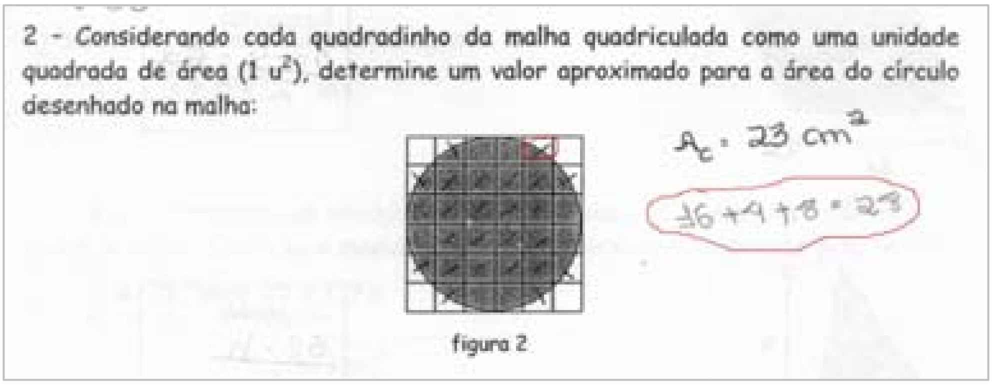
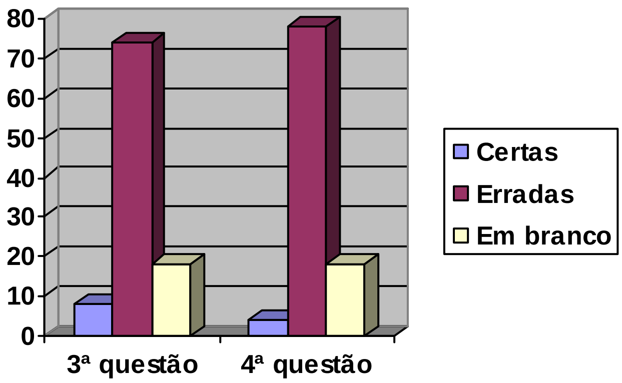


Ilustração 53

Das respostas corretas, quatro alunos encontraram exatamente o valor 28 quadradinhos para a área o círculo.

Tabela das respostas da 3ª e 4ª questões

Respostas/Questões	3ª Questão (%)	4ª Questão (%)
Certas	8	4
Erradas	74	78
Em branco	18	18



Na 3ª questão dessa segunda avaliação em relação aos resultados da avaliação diagnóstica inicial, que corresponde à 4ª questão, o índice de respostas certas e erradas foi superior, enquanto que o índice de repostas em branco foi inferior. A porcentagem de respostas corretas não foi tão expressiva, no entanto nas respostas incorretas foi bastante elevado em relação à primeira avaliação, o que mostra que os alunos tentaram aplicar algum conhecimento adquirido para resolver a questão. Uma das respostas incorretas e que merece destaque é a do aluno Igor (ilustração 54). Ele escreveu uma expressão simbólica para o perímetro do retângulo, mas não soube utilizar a informação sobre o valor da área fornecida no enunciado da questão. Na entrevista ele disse que "*achava que era para escrever uma fórmula para o perímetro*", então foi questionado se não tinha como encontrar o valor de x usando o valor da área, e ele fez mentalmente a divisão 77 por 7 e deu como resposta que x era 11, ficou alguns segundos calculando o valor do perímetro e deu como resposta o valor 36. Esses cálculos não tiveram registro na avaliação.

Observa-se também que na escrita da expressão para o perímetro desse retângulo, o aluno representou todo o comprimento pela incógnita x, não levando em consideração que existiam partes desse comprimento que eram conhecidas, pois nem todos os quadradinhos estavam apagados.

Segundo seus procedimentos, julgou-se que esse aluno está no nível de compreensão instrumental quanto ao conceito de perímetro, pois apenas concluiu a questão com a mediação da pesquisadora.

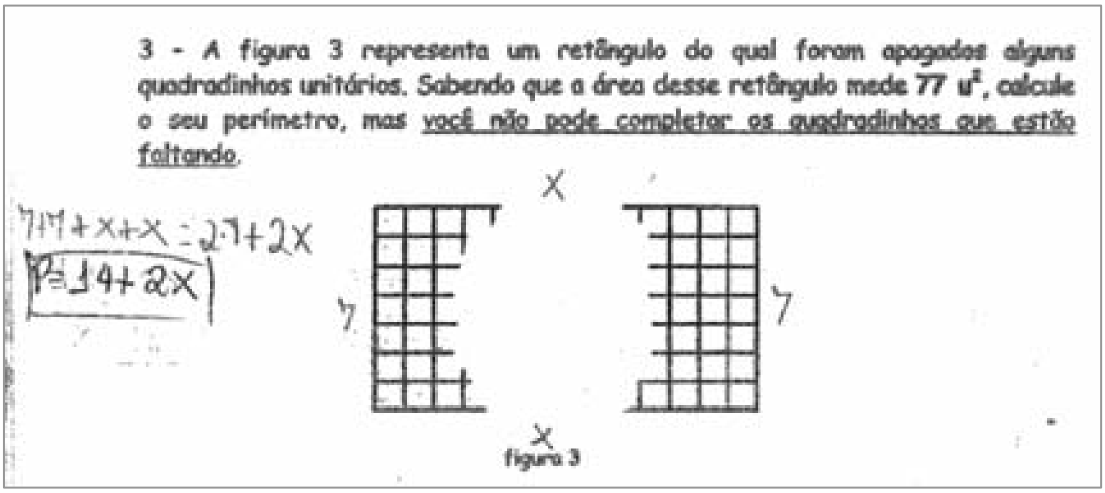


Ilustração 54

Outro procedimento também utilizando a representação simbólica, foi a do aluno Emerson (ilustração 55). Na escrita da expressão para o perímetro ele utilizou o valor da área para estabelecer uma igualdade. Ao resolver a equação ele encontrou que o valor de x, o qual representa a dimensão desconhecida do retângulo, valia $31{,}3u^2$. Tendo encontrado esse valor o aluno julgou ter resolvido a questão, entretanto ele não observou que no enunciado da questão é dito que são quadradinhos unitários, logo não seria possível um valor decimal para o comprimento; outro fato é que o aluno não achou estranho o valor de o comprimento ser mais de quatro vezes o valor da altura, ou seja, ele não verificou se o valor encontrado satisfazia à questão.

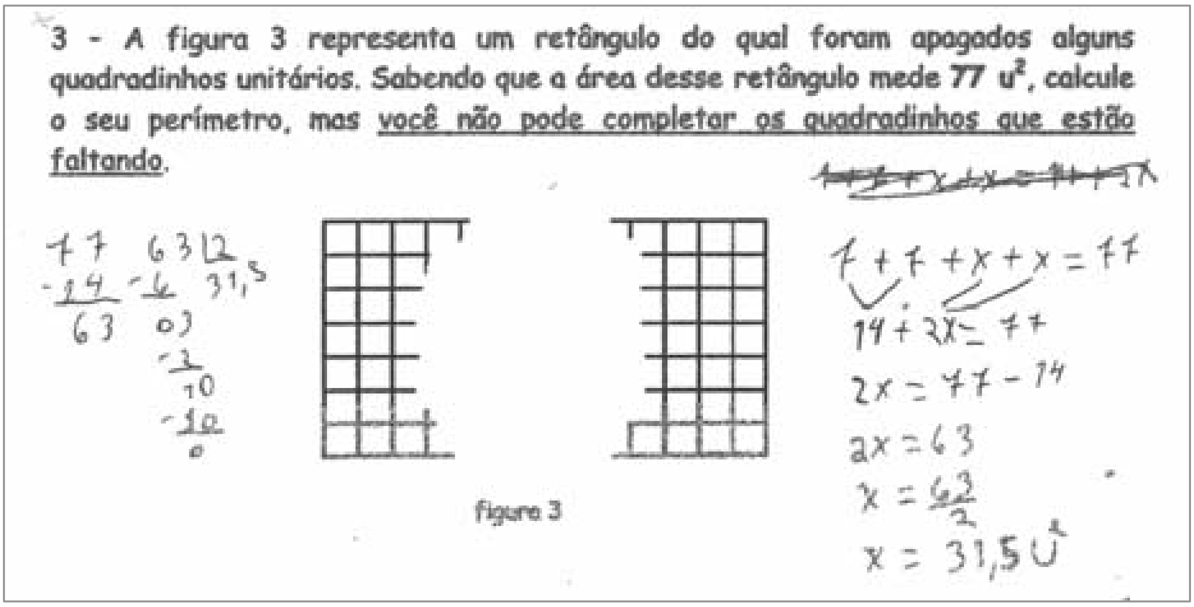


Ilustração 55

Conforme seus cálculos, esse aluno não está nem no nível de compreensão instrumental quanto aos conceitos de perímetro e área do retângulo, pois seu procedimento demonstra a confusão que ele faz entre a aplicação desses conceitos, esse tipo de erro já foi identificado em Souza (2003).

Destaca-se ainda um terceiro procedimento de um aluno, Jadson, que encontrou o valor da base do retângulo realizando mentalmente a divisão 77 por 7, o registro destacado na ilustração 56 foi feito no momento da entrevista quando o aluno foi questionado sobre o valor 11 que aparece nos seus cálculos. A formalidade do registro para o cálculo da dimensão desconhecida do retângulo foi feito com a intervenção da pesquisadora com perguntas como: “*qual é a fórmula da área do retângulo?*”, “*que valores dessa fórmula são fornecidos na questão?*”, com esses questionamentos o aluno desenvolveu o cálculo destacado. Observa-se também que, apesar do aluno ter encontrado o valor correto para o perímetro, ele escreveu a fórmula para o perímetro como $P = b + h$, considerando b e h as duas bases e as duas alturas, respectivamente.

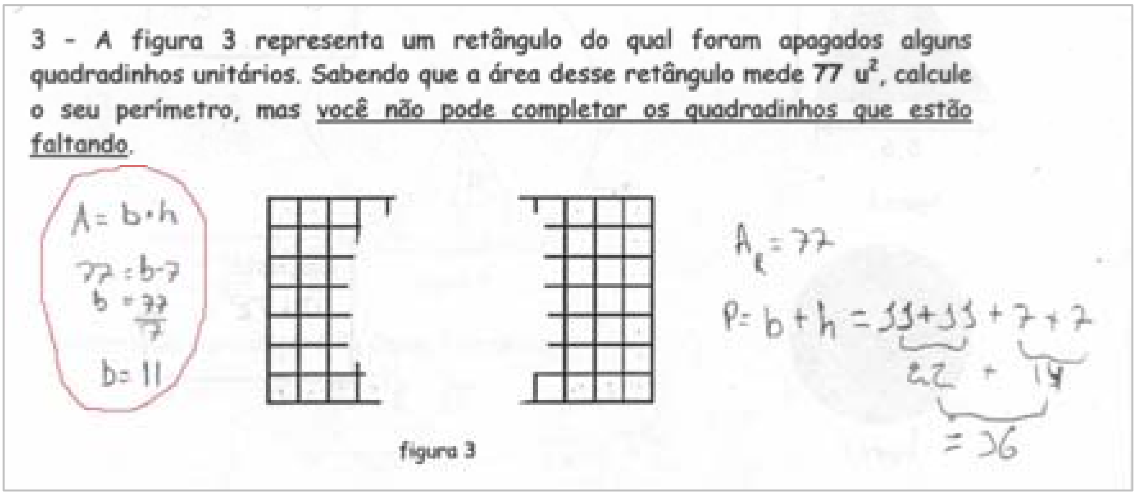


Ilustração 56

Nesse caso o aluno Jadson demonstra estar entre no nível de compreensão instrumental e relacional, pois apresenta domínio sobre os conceitos investigados, mas não apresenta habilidade na representação simbólica de seu raciocínio, pois foi necessária a mediação da pesquisadora, no momento da entrevista, para que isso ocorresse.

Para a 4ª questão observa-se que, embora o índice de acertos não tenha sido expressivo, foi superior ao índice de acertos da questão correspondente na avaliação diagnóstica inicial, nesse caso, 5ª questão. Na primeira avaliação nenhum aluno demonstrou conhecimento sobre a fórmula da área do trapézio, enquanto que, nessa segunda avaliação, algumas das respostas erradas ocorreram devido à escrita incorreta da fórmula, faltava algum elemento, a substituição incorreta dos valores ou resolução incorreta da equação. Em relação a esses erros destacam-se os procedimentos de resolução de alguns alunos como exemplo.

Na ilustração 57 está o procedimento de resolução do aluno Josiel. Ele escreveu a fórmula corretamente e também substituiu os valores corretamente, entretanto ao realizar a multiplicação *4* por *5,5*, proveniente da aplicação da propriedade distributiva, ele encontrou *230* e não *22,0* como seria o valor correto. Outro procedimento incorreto foi na passagem da 2ª linha para a 3ª linha na resolução da equação. Na tentativa de isolar o termo em x o aluno fez a transposição incorreta dos termos na igualdade para escrever uma equação equivalente à anterior. Com o valor do produto incorreto e com a equivalência incorreta entre as equações, o valor para x seria uma dízima periódica, o que causou estranhamento no aluno, por isso não concluiu a questão escrevendo o valor de x.

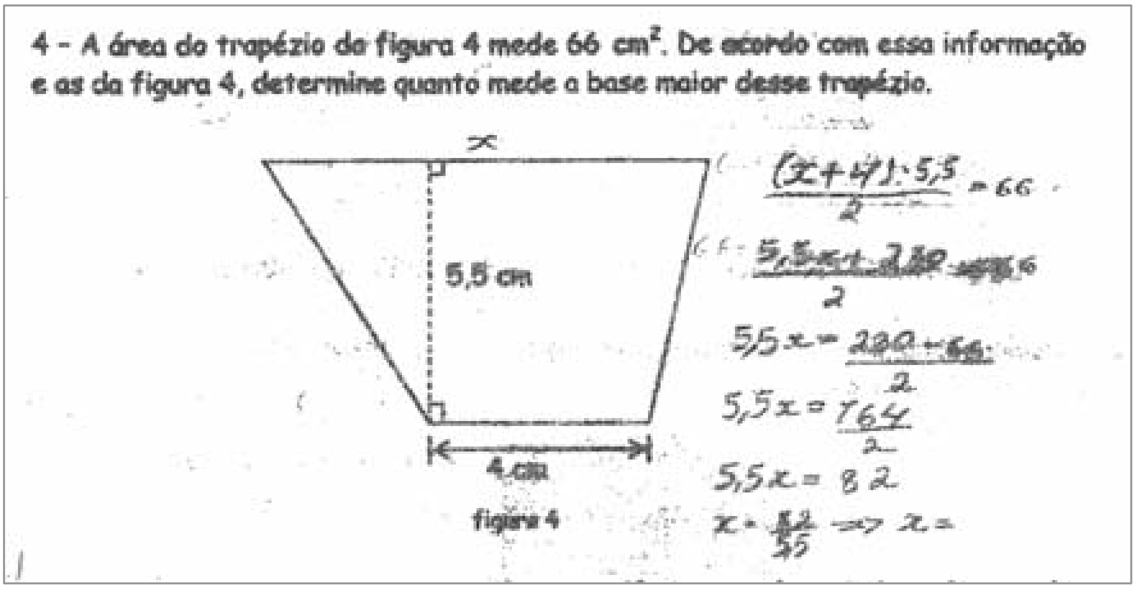


Ilustração 57

No procedimento da aluna Juliana (ilustração 58) ela também escreveu a fórmula corretamente e substituiu os valores indicando a base desconhecida pela letra x, entretanto, na expressão *4 + x* dentro dos parênteses ela reduziu ao termo *4x*, erro comum entre os alunos na resolução de equações. O número decimal *5,5* passou a ser o número *55*, então na multiplicação, incorreta, de *4x* por *55* o resultado encontrado foi *220x*. Observa-se que a aluna também não concluiu a resolução com o resultado para x, pois seu valor seria um número menor que 1.

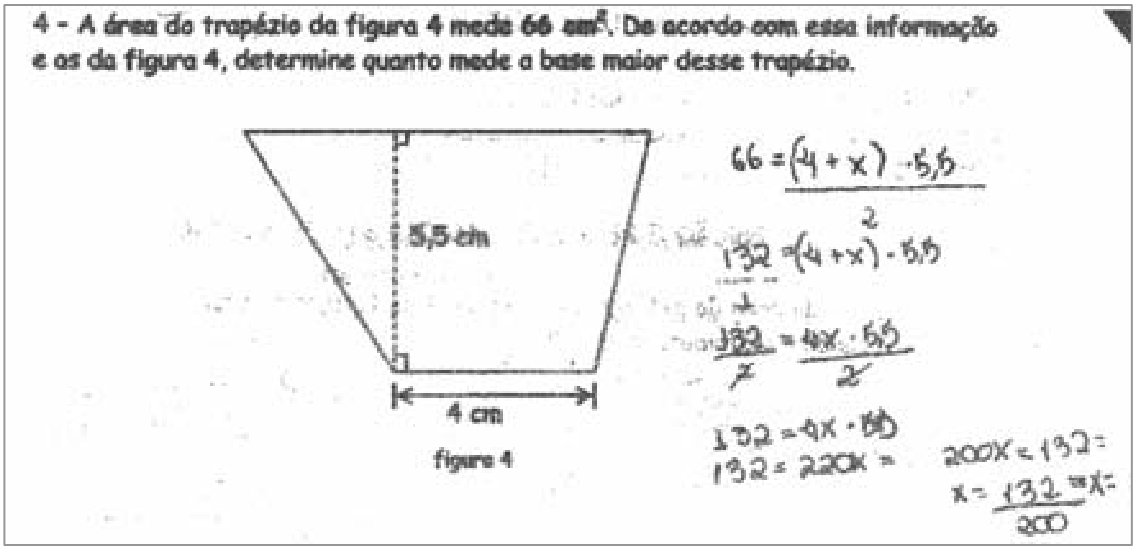


Ilustração 58

Na ilustração 59 está o procedimento da aluna Ana Paula que, apesar de ter escrito corretamente a fórmula da área do trapézio, realizou a substituição omitindo o valor da área fornecido no enunciado. Dessa forma não gerou uma equação e sim uma expressão algébrica, mas, mesmo assim, a aluna prosseguiu com a resolução. Ao realizar a distributividade, não explicitou a vírgula do número *22,0x*, mas ela a considerou, pois na linha seguinte realizou a soma *5,5 + 22,0*, desconsiderando o *x*, resultando em *27,5*. Nesse momento "surgiu" uma igualdade em que a incógnita *x* está no primeiro membro da "equação". Dessa forma ela encontrou o valor de *x* como *13,7...*, o que não é uma dízima e sim um número decimal exato *13,75*, mas a aluna não considerou a casa dos centésimos. Esse procedimento também foi identificado na avaliação de outro aluno.

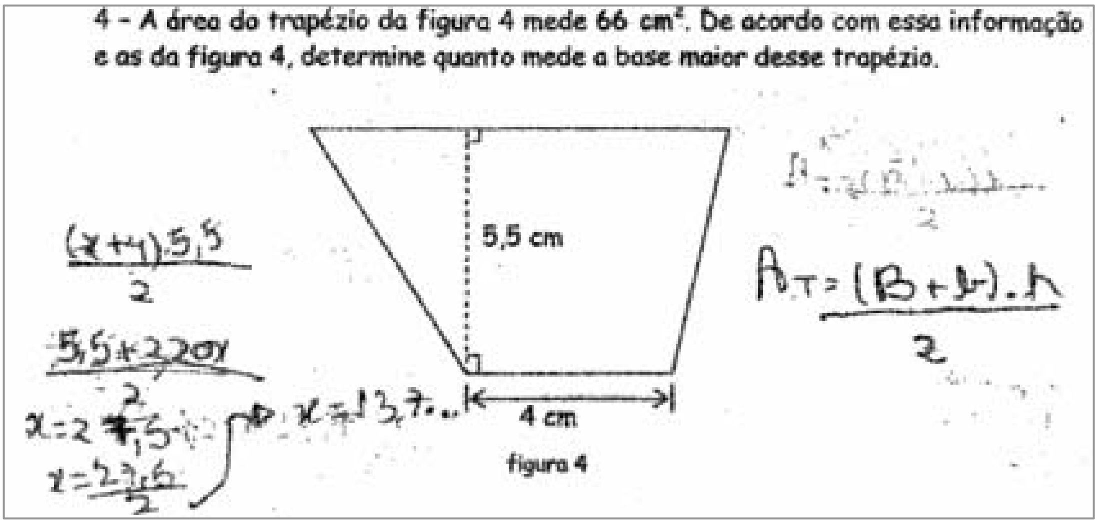
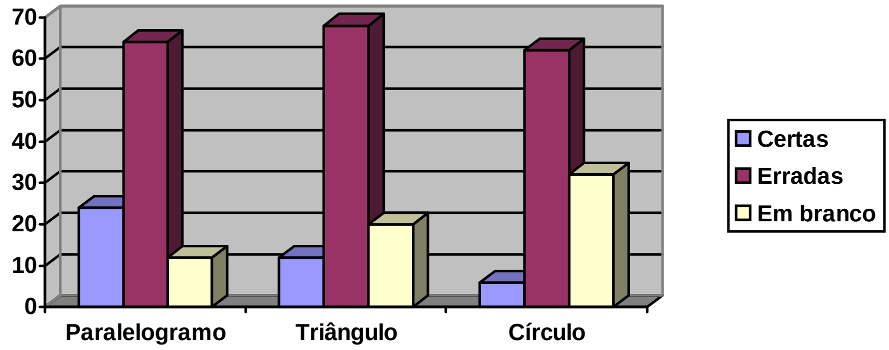


Ilustração 59

Quanto à classificação em relação ao nível de compreensão dos conceitos envolvidos nessa questão, observa-se que os dois primeiros alunos, Josiel e Juliana, estão no nível de compreensão instrumental, pois demonstraram conhecimento quanto à fórmula da área do trapézio e a substituição correta dos valores na fórmula, mas não demonstraram habilidade na resolução de equações do 1° grau. A aluna Ana Paula não se encontra nem no nível de compreensão instrumental, pois apesar de conhecer a fórmula da área do trapézio, não demonstrou domínio da mesma quanto à substituição dos valores e obtenção do valor de uma das variáveis que não seja a área.

Tabela das respostas da 5ª questão

Figuras/Respostas	Paralelogramo (%)	Triângulo (%)	Círculo (%)
Certas	24	12	6
Erradas	64	68	62
Em branco	12	20	32



Comparando os índices de respostas certas e erradas dessa 5ª questão com a questão correspondente na avaliação diagnóstica inicial, 6ª questão, observa-se que houve acréscimo nesses dois números de respostas e um decréscimo nas respostas deixadas em branco. Esse fato pode ser observado, principalmente, em relação à área do círculo que, embora o número de respostas certas para essa figura tenha sido expressivo, o número de respostas deixadas em branco foi bastante inferior aos da primeira avaliação; o número de respostas erradas nessa segunda avaliação foi bem superior ao da primeira avaliação, indicando que os alunos arriscaram mais na resolução desse item da questão. A expressão para a área do paralelogramo continuou sendo a que obteve maior número de acertos. Alguns erros foram repetidos com relação à primeira avaliação como, por exemplo, a falta da igualdade para representar a expressão matemática, desconsiderar que a expressão possui duas variáveis como incógnitas, no caso do paralelogramo e do triângulo, e encontrar um valor para uma das duas variáveis. Outros erros encontrados foram a escrita da fórmula do comprimento da circunferência para representar a área do círculo e o uso da definição de perímetro aplicada ao paralelogramo. As ilustrações (60, 61, 62 e 63) abaixo mostram os procedimentos incorretos de alguns alunos.

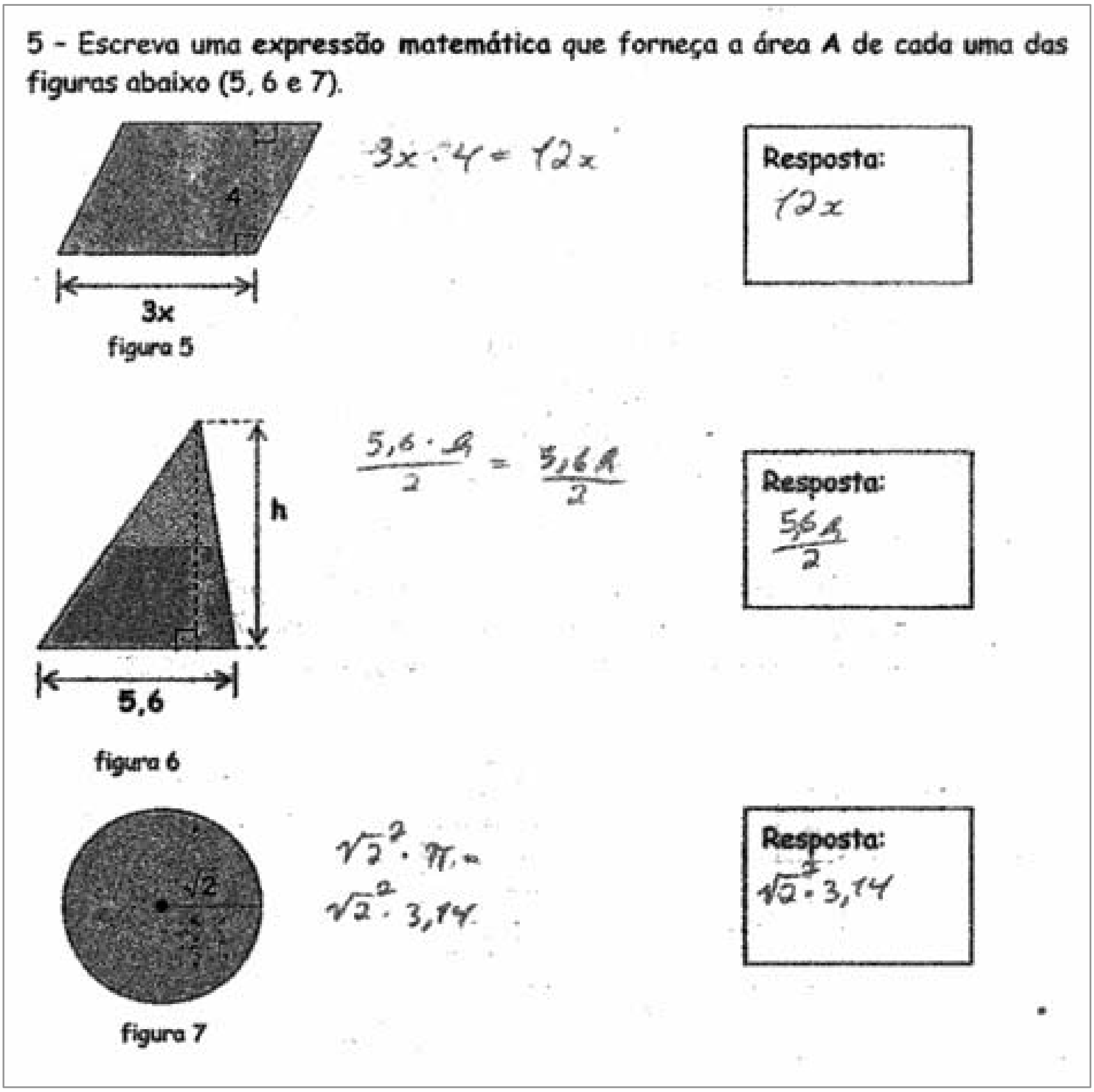


Ilustração 60

A ilustração 60 é do aluno Josiel. Ele substituiu corretamente os segmentos conhecidos das figuras em todas as três fórmulas, entretanto não explicitou a igualdade “*A* = ...” em nenhuma das três expressões, embora tenha explicitado a igualdade quando simplificou a expressão do paralelogramo. Observa-se que na primeira expressão ele efetuou a multiplicação *3x · 4* obtendo *12x*, no entanto não realizou a divisão de *5,6* por *2*, na segunda expressão, nem calculou a potência na terceira expressão. A simplificação das expressões não foi pedida no enunciado da questão, mas o aluno que quisesse poderia simplificá-las. Na entrevista todas essas observações foram questionadas ao aluno. Sobre a igualdade ele respondeu que “*não sabia que era para colocar o A de área*”; com relação às operações não realizadas, ele respondeu que “*achava que não precisava*”.

Ilustração 61

Na ilustração 61 da aluna Paula, observa-se que a aluna tentou resolver a questão utilizando algum conceito estudado nas atividades, ela aplicou a idéia de perímetro adicionando os segmentos que tinham os comprimentos explicitados na figura, mas desconsiderou o *x* em *3x* e o acrescentou após a adição de *3* a *4* obtendo *7x*. Nesse procedimento a aluna demonstrou não ter domínio dos conceitos de perímetro e área, da fórmula para área do paralelogramo e nas operações com expressões em que um dos termos possui uma letra.

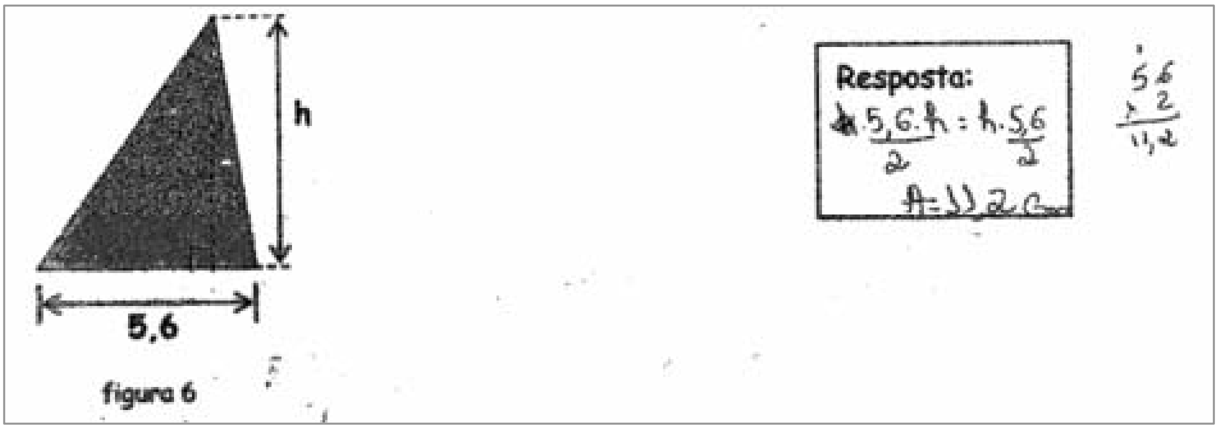


Ilustração 62

Na ilustração 62 a aluna Clara substituiu corretamente os segmentos conhecidos da figura na fórmula da área do triângulo, mas não explicitando a igualdade. Nota-se que ela sentiu a necessidade de "resolver" a expressão e encontrou um valor para a área, não considerando a incógnita *h* e, ao invés de realizar a divisão de *5,6* por *2* ela fez uma multiplicação obtendo a igualdade *A = 11,2cm*. Identifica-se nesse procedimento que a aluna lembrou, em parte, da fórmula da área do triângulo, entretanto não soube utilizá-la em situações em que, não apenas a área é uma incógnita, e que sentiu uma necessidade de expressar uma unidade de medida, embora também incorreta.

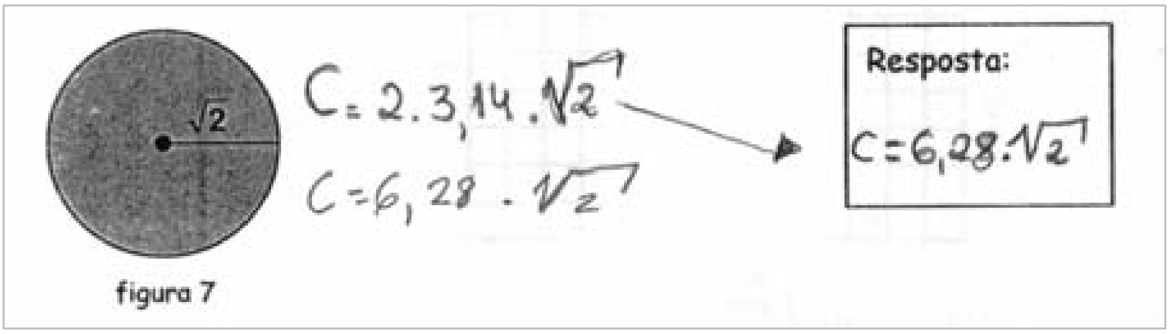
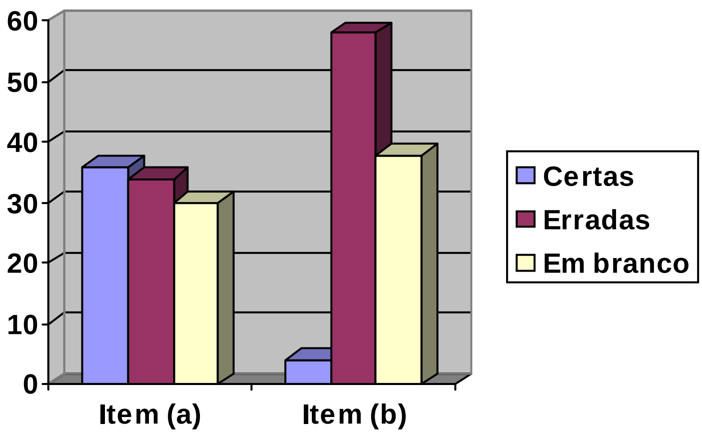


Ilustração 63

Para a área do círculo, o procedimento da aluna Bruna, na ilustração 63, exemplifica a aplicação indevida da fórmula do comprimento da circunferência para cálculo da área do círculo. Observa-se que, mesmo que o valor de π não tenha sido fornecido na questão, a aluna o substituiu por *3,14*, valor esse adotado nas atividades de ensino.

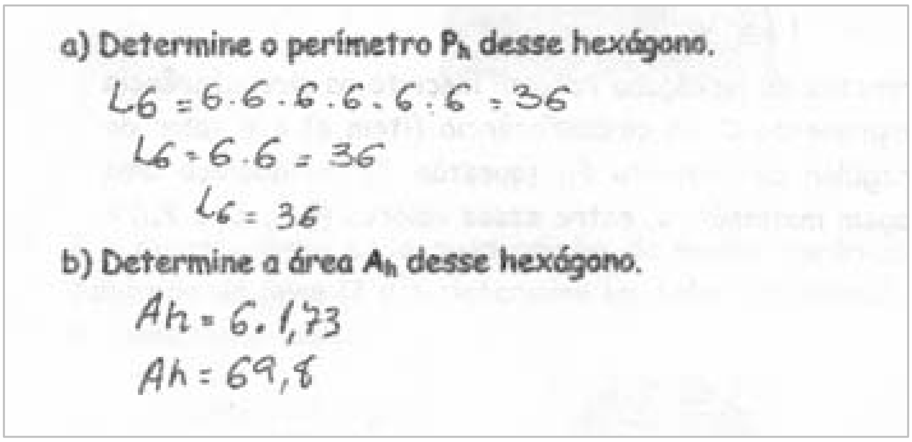
Tabela das respostas da 6ª questão

Respostas/Itens	Item (a) (%)	Item (b) (%)
Certas	36	4
Erradas	34	58
Em branco	30	38



Nessa 6ª questão, que corresponde à 7ª questão da avaliação diagnóstica inicial, o resultado das respostas certas para o perímetro do hexágono regular inscrito na circunferência foi bem superior à primeira avaliação, que foi de 0%. Foi bastante comum encontrar o procedimento "$P_h = 6 \cdot \ell_6$" para o cálculo do perímetro do hexágono. Dois alunos não explicitaram a igualdade "$P_h = ...$". Já para o cálculo da área desse hexágono o resultado foi pouco expressivo, apenas dois alunos chegaram à resposta correta, e um deles deixou o valor da área com o $\sqrt{3}$ sem substituir por *1,73*, obtendo $54\sqrt{3}$. Poucos alunos explicitaram a unidade de medida nas respostas.

No cálculo, tanto do perímetro quanto da área, houve procedimentos em que o aluno estabeleceu relações que sequer demonstravam domínio sobre algum conceito estudado nas atividades de ensino. As ilustrações abaixo exemplificam os procedimentos incorretos de alguns desses alunos.



a) Determine o perímetro P_h desse hexágono.

$L6 = 6.6.6.6.6.6 = 36$

$L6 = 6.6 = 36$

$L6 = 36$

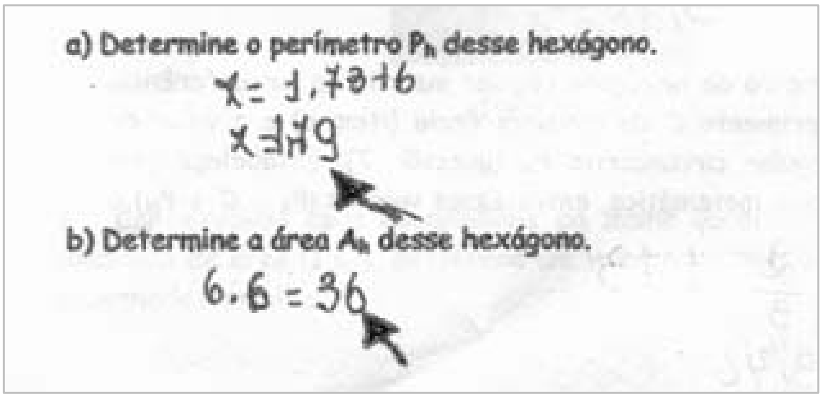
b) Determine a área A_h desse hexágono.

$Ah = 6.1,73$

$Ah = 69,8$

Ilustração 64

A ilustração 64 é da aluna Gabriela. No cálculo do perímetro ela escreveu que o lado do hexágono é um produto de fatores iguais a *6* e o resultado desse produto deu *36*. Observa-se que com esse produto de fatores ela não obteve a potencia 6^6 e sim o produto 6·6, demonstrando que ela não detém sequer o conceito de potenciação. No cálculo da área, ela realizou o produto da medida do raio pelo valor de $\sqrt{3}$ e obteve *69,8* ao invés do valor *10,38*, demonstrando que não tem habilidade na multiplicação de um número inteiro por um número decimal.



a) Determine o perímetro P_h desse hexágono.

$x = 1,73+6$

$x = 179$

b) Determine a área A_h desse hexágono.

$6.6 = 36$

Ilustração 65

Outro procedimento que não demonstra conhecimento sobre os conceitos investigados é o da aluna Karla (ilustração 65). No cálculo do perímetro ela associou um *x*, que deve ser o perímetro, pois não há nenhuma associação na figura dada na questão, à soma da medida do raio com o valor de $\sqrt{3}$, e ainda assim encontrou *1,79* como resposta, ao invés de *7,73*, indicando que não tem habilidade em adicionar número inteiro a número decimal. Para o cálculo da área do hexágono foi realizada uma multiplicação, em que os fatores podem ser associados à medida do lado do hexágono vezes a medida do raio ou o número de lados do hexágono vezes a medida do raio, não foi possível averiguar o sentido dessa multiplicação.

Os dois procedimentos, ilustrados abaixo (ilustração 66 e 67), adotados por dois alunos têm o mesmo princípio, no entanto chegaram a respostas diferentes.

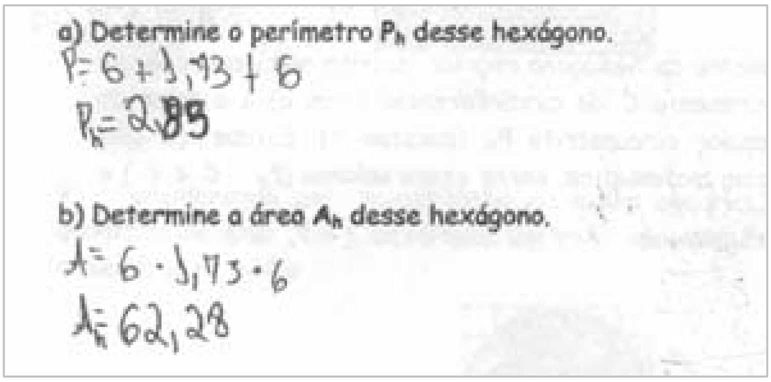

a) Determine o perímetro P_h desse hexágono.
P = 6 + 1,73 + 6
P_h = 2,85
b) Determine a área A_h desse hexágono.
A = 6 · 1,73 · 6
A_h = 62,28

Ilustração 66

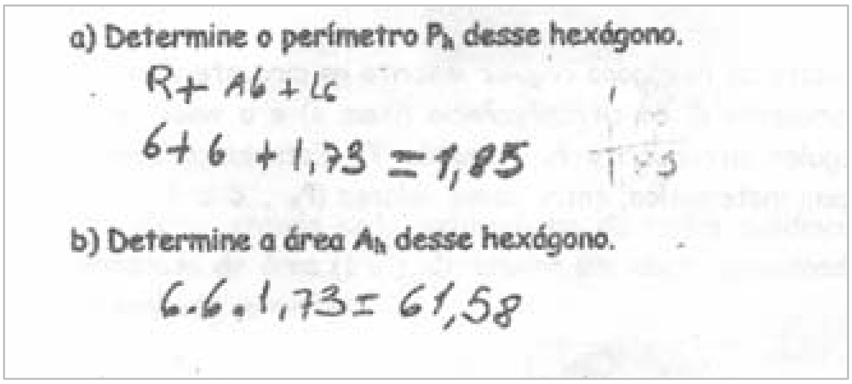

a) Determine o perímetro P_h desse hexágono.
R + A6 + Lc
6 + 6 + 1,73 = 1,85
b) Determine a área A_h desse hexágono.
6.6.1,73 = 61,58

Ilustração 67

Observa-se que os dois alunos utilizaram a mesma idéia para calcular o perímetro e a área do hexágono. No perímetro eles somaram a medida do raio com a medida do lado com o valor de $\sqrt{3}$, mas os dois alunos obtiveram valores errados para o resultado dessa soma. No cálculo da área realizaram a multiplicação dos mesmos números utilizados no item anterior, sendo que o resultado da multiplicação do primeiro aluno foi correto, enquanto que o do segundo aluno foi um valor incorreto.

No entanto, nas respostas incorretas também houve procedimentos em que o aluno visualizou o cálculo correto para a área do hexágono, mas cometeu erros na substituição dos valores ou no estabelecimento de relações na área do triângulo, como mostra as ilustrações 68 e 69. Os dois alunos referidos nessas ilustrações responderam corretamente o item (a).

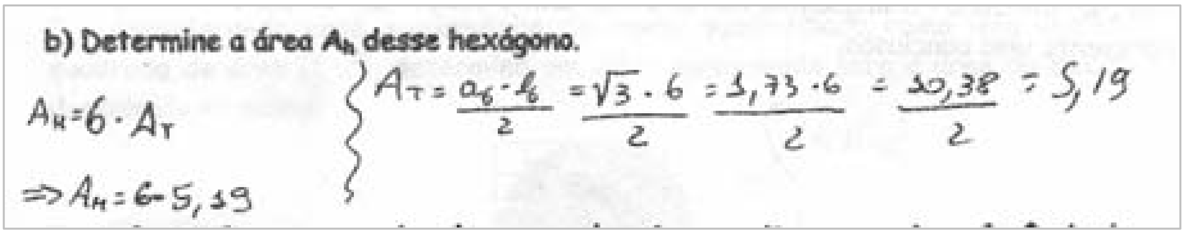


Ilustração 68

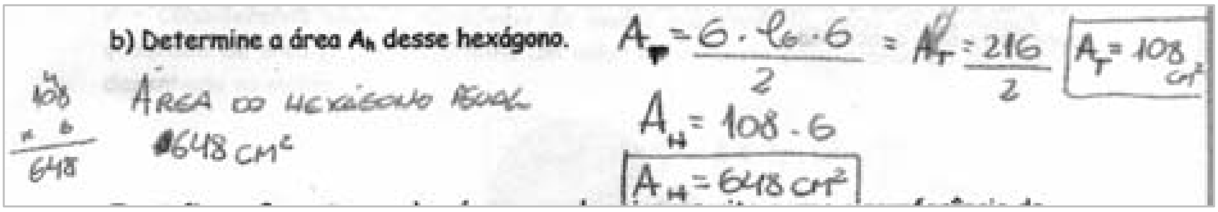


Ilustração 69

Observa-se que os dois alunos compreenderam que o valor da área do hexágono inscrito na circunferência seria obtido por seis vezes a área do triângulo, entretanto os dois alunos cometeram erros no cálculo da área do triângulo. O primeiro aluno ao substituir o valor de a_6 ele escreveu o valor de $\sqrt{3}$ e não de $3\sqrt{3}$, que seria o correto, logo obteve um valor incorreto para a área do triângulo e mesmo assim escreveu $A_H = 6{\cdot}5{,}19$.

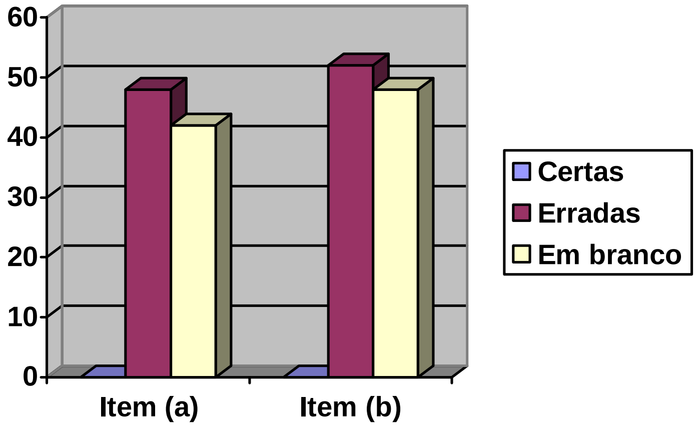
O segundo aluno estabeleceu relações incorretas na área do triângulo, encontrando um valor incorreto para a sua área, mesmo assim esse aluno calculou a área do hexágono como seis vezes o valor da área do triângulo encontrada.

Com esses procedimentos, das ilustrações 68 e 69, verifica-se que esses alunos, dentre outros que também observaram a relação entre a área do triângulo e a área do hexágono, estão entre o nível de compreensão instrumental e o relacional quanto ao conhecimento da área do hexágono regular inscrito na circunferência.

Já os procedimentos dos quatro primeiros alunos (ilustrações 64 a 67) demonstram que esses alunos, dentre outros que realizaram outros procedimentos incorretos, não estão nem no nível de compreensão instrumental quanto aos conceitos avaliados.

Tabela das respostas da 7ª questão

Respostas/Itens	Item (a) (%)	Item (b) (%)
Certas	0	0
Erradas	58	52
Em branco	42	48



A 7ª questão corresponde aos itens (a) e (b) da 8ª questão da avaliação diagnóstica inicial. Observa-se que em relação às respostas certas não houve nenhuma diferença entre as duas avaliações, ambas tiveram de 0% de acertos; no entanto, na segunda avaliação o número de respostas erradas foi superior ao número de respostas em branco, o que não aconteceu na primeira avaliação, na qual o número de respostas em branco foi bastante superior ao de respostas erradas. Esse fato indica que os alunos na segunda avaliação tentaram resolver essa questão, embora não tenham obtido sucesso nas respostas.

Sobre os erros cometidos, alguns alunos utilizaram o procedimento de que o perímetro do hexágono é obtido multiplicando-se a medida do lado por seis, entretanto utilizaram a medida de L_6 (lado do hexágono circunscrito à circunferência) como a mesma medida do lado, o que ocorria quando o hexágono estava inscrito na circunferência.

Outros erros foram na obtenção do valor de L_6 utilizando a fórmula fornecida no enunciado, como mostram as ilustrações 70 e 71 do procedimento de dois alunos.

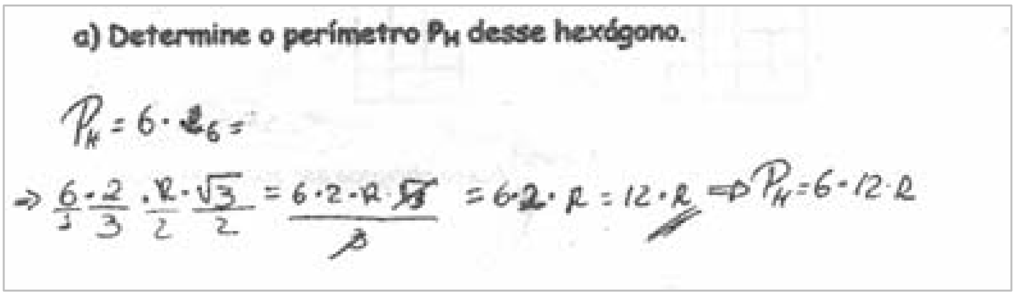


Ilustração 70

Na ilustração 70 o aluno Igor escreveu que o perímetro é seis vezes a medida do lado do hexágono e iniciou a resolução substituindo o L_6 pela fórmula correspondente. No entanto, ao resolver ele não substituiu o valor do raio R e cometeu erros aritméticos de simplificação de termos de uma fração.

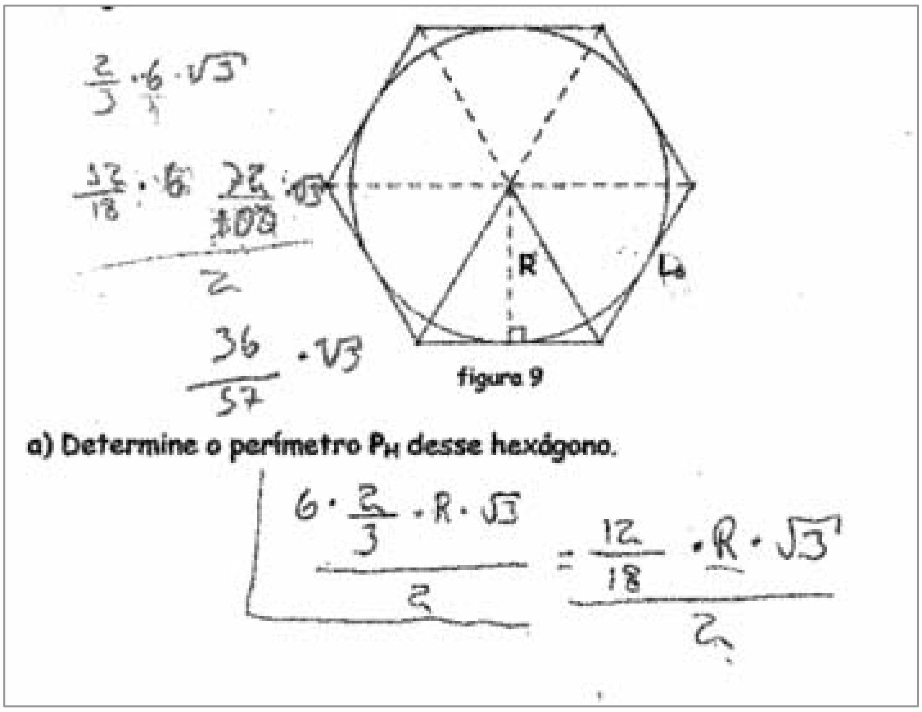


Ilustração 71

Na resolução do aluno Jadson mostrada na ilustração 71, ele primeiramente tentou encontrar o valor da medida de L_6 através da fórmula fornecida no enunciado, entretanto cometeu erros aritméticos na multiplicação de um número inteiro por uma fração. Depois ele tentou calcular o perímetro utilizando seis vezes a medida do lado, que ele substituiu pela fórmula, mas escreveu uma expressão incorreta para o perímetro, dividindo-a por dois e, mais uma vez, cometeu erros aritméticos na multiplicação de um número inteiro por uma fração.

No item (b) dessa questão também nenhum aluno conseguiu responder corretamente. As respostas dos dois alunos citados acima estão nas ilustrações abaixo.

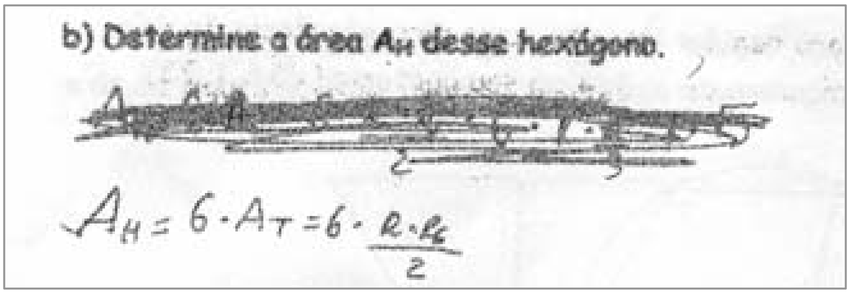


Ilustração 72

A Ilustração 72 corresponde ao procedimento do aluno Igor. Assim como no item (b) da 6ª questão, ele escreveu que a área do hexágono é seis vezes a área do triângulo, no entanto ele não concluiu a questão com a substituição dos valores e a determinação da área, pois não havia encontrado o valor de L_6 no item (a).

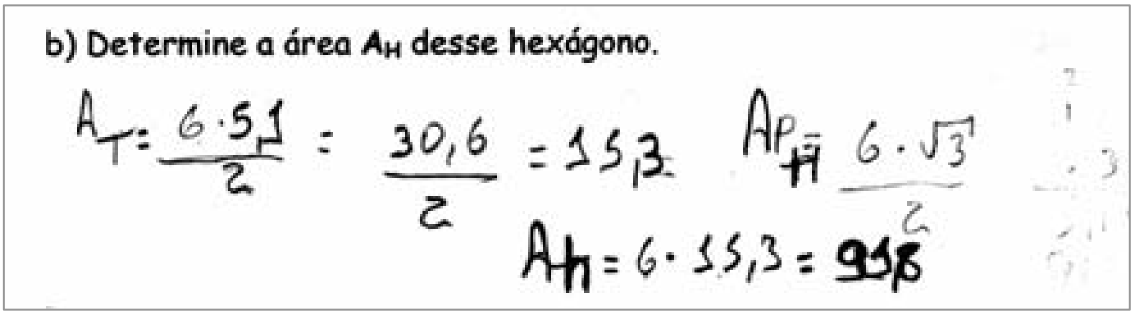


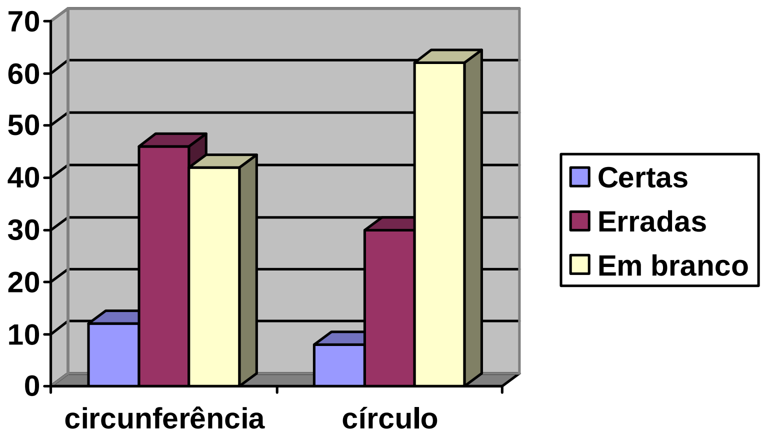
Ilustração 73

Na ilustração 73 está o procedimento do aluno Jadson. Para calcular a área do triângulo ele substituiu o L_6 por *6* e a altura por $3\sqrt{3}$, que é *5,19*, mas ele usou apenas a primeira casa decimal. Após ter calculado o valor da área do triângulo ele encontrou a área do hexágono também como seis vezes a área do triângulo.

Embora esses alunos tenham apresentado algum conhecimento quanto ao perímetro e a área do hexágono regular circunscrito à circunferência, eles não conseguiram aplicá-los com sucesso para a resolução dessa questão. Nessa questão nenhum aluno demonstrou sequer estar no nível de compreensão instrumental quanto aos conceitos avaliados.

Tabela das respostas da 8ª questão – Item (a)

Respostas/Item (a)	Comp. da Circunf. (%)	Área do Círculo (%)
Certas	12	8
Erradas	46	30
Em branco	42	62



O item (a) da 8ª questão não tem um correspondente na avaliação diagnóstica inicial, pois se refere à determinação do comprimento da circunferência abordada na 6ª e 7ª questões e da área do circulo limitado por essa circunferência. Observa-se que o índice das respostas corretas foi pouco expressivo nos dois casos, e que as respostas em branco foram bem significativas no cálculo da área do círculo.

Alguns erros mais comuns foram de multiplicação de número inteiro por decimal e no cálculo do quadrado do raio, como mostram as ilustrações 74, 75 e 76.

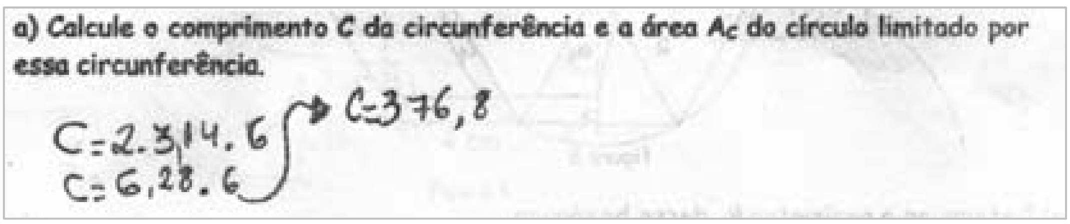


Ilustração 74

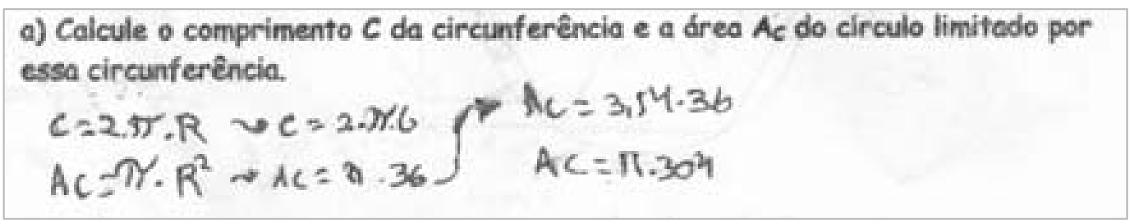


Ilustração 75

As ilustrações 74 e 75 mostram os erros de duas alunas na multiplicação do número decimal por um número inteiro. No caso do comprimento da circunferência o valor correto é 37,68cm, no entanto a aluna colocou a vírgula no lugar incorreto, obtendo 376,8. No cálculo da área o valor correto é 113,04cm^2, entretanto a aluna encontrou 11.304, desconsiderando as casas decimais do valor de π.

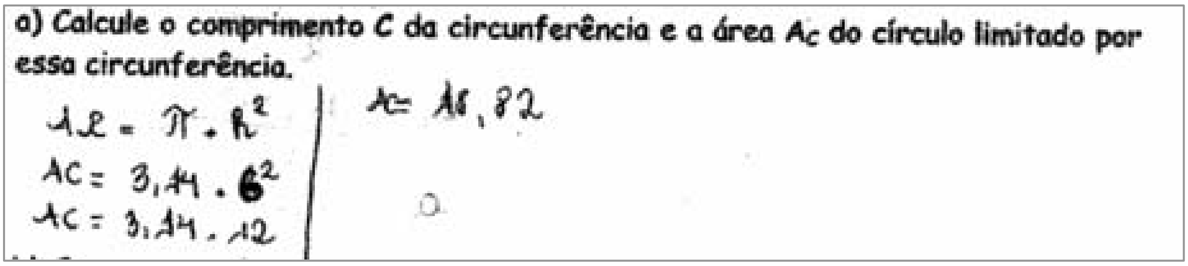


Ilustração 76

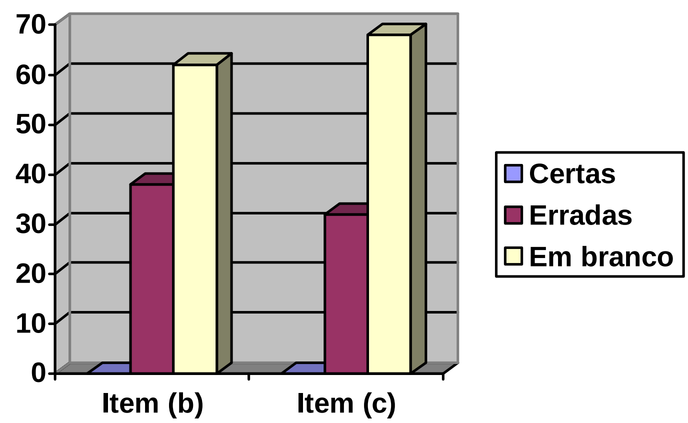
Na ilustração 76 a aluna calculou incorretamente a potência 6^2 obtendo 12 ao invés de $36cm^2$. Dessa forma o resultado da área do círculo ficou incorreto.

Observou-se que nas duas questões 7 e 8 os alunos não explicitaram as unidades de medidas para comprimento e superfície.

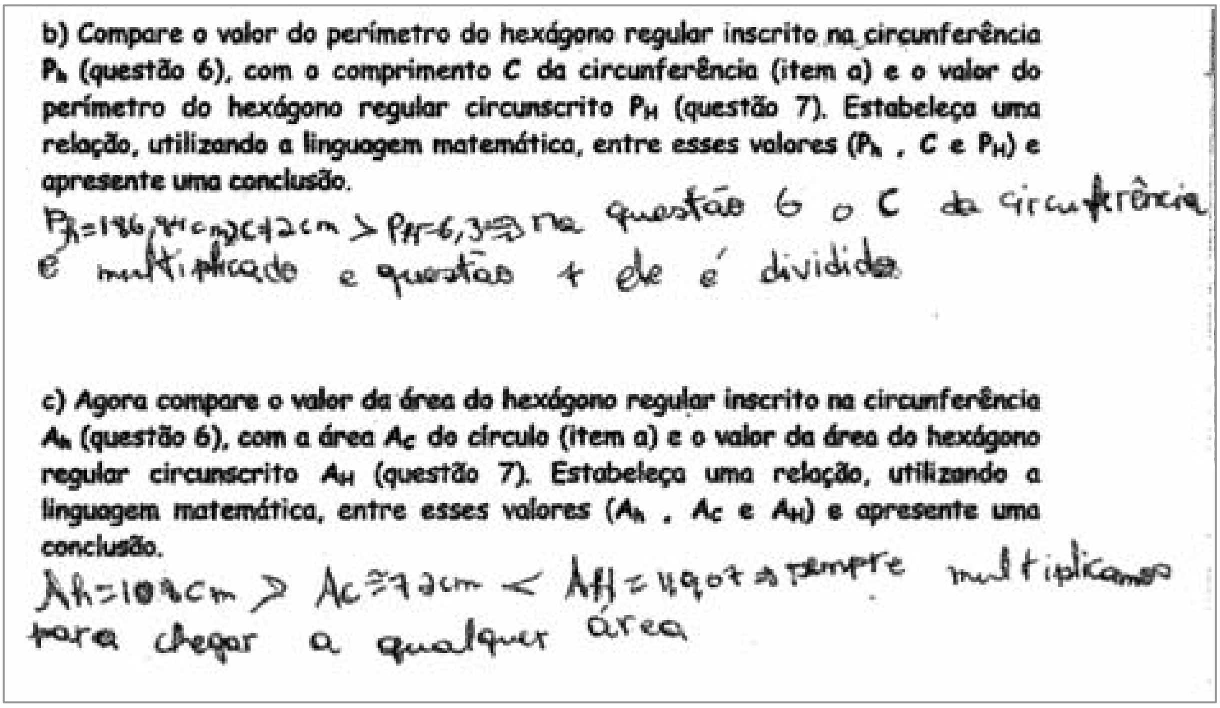
Outros erros foram a omissão do π nas fórmulas ou a falta do expoente 2 na potência do raio.

Tabela das respostas de 8ª questão – Itens (b) e (c)

Respostas/Itens	Item (b) (%)	Item (c) (%)
Certas	0	0
Erradas	38	32
Em branco	62	68



Nessa 8ª questão, que correspondia aos itens (c) e (d) da 7ª questão da avaliação diagnóstica inicial, nenhum aluno chegou à conclusão correta. Das conclusões escritas e consideradas incorretas apenas uma demonstrou alguma relação entre os perímetros dos hexágonos e o comprimento da circunferência, e entre as áreas dos hexágonos e a área do círculo. A ilustração 77 são as conclusões da aluna Whadsar. Essa aluna não acertou nenhum dos itens da 6ª e 7ª questões sobre o cálculo do perímetro e área dos hexágonos, nem o item (a) desta 8ª questão, logo suas comparações foram feitas de acordo com os valores que ela encontrou como resposta.


b) Compare o valor do perímetro do hexágono regular inscrito na circunferência P_h (questão 6), com o comprimento C da circunferência (item a) e o valor do perímetro do hexágono regular circunscrito P_H (questão 7). Estabeleça uma relação, utilizando a linguagem matemática, entre esses valores (P_h , C e P_H) e apresente uma conclusão.

Ph=186,4cm > C=72cm > PH=6,3 na questão 6 o C da circunferência é multiplicado e questão 7 ele é dividido

c) Agora compare o valor da área do hexágono regular inscrito na circunferência A_h (questão 6), com a área A_c do círculo (item a) e o valor da área do hexágono regular circunscrito A_H (questão 7). Estabeleça uma relação, utilizando a linguagem matemática, entre esses valores (A_h , A_c e A_H) e apresente uma conclusão.

Ah=109cm > Ac=72cm < AH=1190 sempre multiplicamos para chegar a qualquer área

Ilustração 77

Constata-se que as desigualdades estabelecidas estão incorretas devido aos valores incorretos encontrados nas outras questões, mas, mesmo assim, foi a única aluna que explicitou os símbolos de < (menor que) e > (maior que) para estabelecer as relações pedidas nos enunciados dos dois itens. Na 6ª e 7ª questões essa aluna não demonstrou ter nenhum conhecimento sobre o perímetro e a área dos hexágonos regulares, nenhum de seus procedimentos indicou que a aluna apresentasse o nível de compreensão instrumental sobre esses cálculos.

4.3 Alguns tipos de erros encontrados nas respostas dos alunos

Na observação, para a análise, das respostas dos alunos nas atividades de ensino e nas questões das duas avaliações aplicadas no grupo experimental, avaliações inicial e final, foram identificados alguns tipos de erros que se repetiam, independente do conteúdo abordado na atividade ou na questão de cada avaliação.

Os erros mais comuns identificados foram categorizados como erros do tipo: (i) operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão); (ii) potenciação de números irracionais; (iii) falta do uso da igualdade; fórmulas (escrita incorreta ou substituição indevida de valores nas variáveis); (iv) sintaxe da álgebra (adição algébrica incorreta, uso indevido das propriedades da igualdade, resolução incorreta de equações do 1° grau).

Durante o desenvolvimento das atividades de ensino foram trabalhadas situações para que esses erros não fossem cometidos, sendo salientado, nas resoluções das atividades, os procedimentos corretos a serem realizados. Como os erros continuaram sendo identificados nas respostas da segunda avaliação, observa-se que as situações trabalhadas pelos professores de matemática no ensino de conceitos algébricos não têm levado os alunos a aplicá-los em outras situações, como no caso do recurso à geometria.

Foi possível perceber, também, que a maioria dos alunos não conseguiu fazer maiores abstrações e resolver os itens que tratavam da relação do comprimento da circunferência e área do círculo com o perímetro e área do hexágono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência. Embora tivesse sido abordado nas atividades e discutido em sala de aula no momento em que se realizava a socialização das respostas, os alunos não conseguiram, na segunda avaliação, apresentar progressos em relação às respostas da primeira avaliação.

Essas observações levam a refletir que os alunos necessitariam de mais atividades, em conseqüência mais tempo, para terem autonomia de pensamento e realizar maiores abstrações. Nesse sentido, entende-se que as atividades elaboradas e aplicadas no presente trabalho são passíveis de modificação e aperfeiçoamento, o que poderia ser feito em outras pesquisas que tratem desses aspectos.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES SOBRE UM MINI-CURSO DE GEOMETRIA EM EVENTO CIENTÍFICO DA UFRN

5.1 Aplicação de mini-curso de geometria no XII Seminário de Pesquisa do CCSA-UFRN

O Seminário de Pesquisa do CCSA é um evento científico anual promovido pelo Centro de Ciências Sociais Aplicadas, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Nesse seminário participam alunos das diferentes áreas de conhecimento das ciências sociais aplicadas - Direito, Economia, Administração, Educação, Serviço Social, Ciências Contábeis, Turismo e Biblioteconomia, no qual a discussão gira em torno de um tema central que em 2006 foi "Universidade, direitos e diversidade".

Durante o seminário são apresentados trabalhos na forma de comunicação oral, de pôster, mesas-redondas e mini-cursos, além de uma mostra de vídeos, de artes e exposições. Esses trabalhos são apresentados por alunos e professores da graduação e pós-graduação oferecidas por aquele Centro.

Os mini-cursos oferecidos têm como público alvo os alunos do CCSA e alunos dos outros centros da própria UFRN, e também abertos à comunidade.

O público alvo do mini-curso ministrado, como parte da metodologia do presente estudo, foram os alunos de graduação do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN. As 5 atividades do mini-curso foram elaboradas a partir das atividades que foram excluídas do módulo de ensino para os alunos das 8ª séries (ver Apêndice F), e tiveram como objetivo principal obter o valor da constante π (pi), utilizando o Método dos Perímetros (ou Processo de Arquimedes) e a fórmula da área do circulo.

O objetivo do mini-curso foi verificar, junto a alunos do curso de Licenciatura em Matemática, o conhecimento deles quanto ao Processo de Arquimedes e a viabilidade da aplicação das atividades sobre esse processo aos alunos do Ensino Fundamental e Médio.

5.2 Objetivos das atividades do mini-curso do CCSA-UFRN

Como exposto no item 1.7 sobre a metodologia desse estudo, foi desenvolvido um mini-curso e ministrado no XII Seminário de Pesquisa do CCSA-UFRN, destinado para alunos de graduação do curso de Licenciatura em Matemática.

Do módulo de atividades de ensino dos alunos das 8ª séries foram excluídas 5 atividades, como já mencionado no item 2.4 desse estudo, das quais três foram reelaboradas para serem aplicadas no mini-curso, são as atividades que tratam da obtenção do número π, que correspondem às atividades 1, 2 e 3 do mini-curso. Além dessas três atividades, uma atividade do módulo de ensino dos alunos das 8ª séries também fez parte das atividades do mini-curso, foi a atividade de número 10, que corresponde à atividade de número 5 do mini-curso. A atividade 4 do mini-curso foi elaborada, exclusivamente, para esse mini-curso. No módulo de atividades de ensino dos alunos das 8ª séries não foi abordado o hexágono regular circunscrito a uma circunferência.

Abaixo seguem as atividades desse mini-curso com seus respectivos objetivos. O desenvolvimento algébrico mostrado nos **Procedimentos** das atividades são os conhecimentos e habilidades algébricas que se esperava do aluno, no entanto, não necessariamente, o que ele deveria ter feito.

Atividade 1: Obtenção da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro

Objetivo: Obter uma aproximação da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro através do cálculo dos perímetros de dois polígonos: um hexágono regular inscrito e um quadrado circunscrito à circunferência.

Material: Papel ofício, par de esquadros, compasso, régua, lápis e borracha.

Procedimentos:

- Desenhar um quadrado **Q**, com régua e esquadros, com lado $L_4 = 10\ cm$. Obter uma expressão para o perímetro do quadrado e determinar o valor desse perímetro:
  $P_Q = 4 \cdot L_4 \Rightarrow P_Q = 4 \cdot 10\ cm \Rightarrow P_Q = 40\ cm$.
- Desenhar uma circunferência, de diâmetro $D = 10\ cm$, inscrita no quadrado **Q**.
- Obter a razão entre o perímetro do quadrado $\mathbf{P_Q}$ e o diâmetro da circunferência **D**:
  $\frac{P_Q}{D} = \frac{40\,cm}{10\,cm}$, logo $\frac{P_Q}{D} = 4$.
- Desenhar um hexágono regular **H**, de lado $L_6 = 5\ cm$, inscrito nessa mesma circunferência. Escrever uma expressão para o perímetro do hexágono regular inscrito e determinar o valor desse perímetro: $P_H = 6 \cdot L_6$; $P_H = 6 \cdot 5\ cm = 30\ cm$.
- Obter a razão entre o perímetro do hexágono regular $\mathbf{P_H}$ e o diâmetro do círculo **D**:
  $\frac{P_H}{D} = \frac{30\,cm}{10\,cm}$, logo $\frac{P_H}{D} = 3$.
- Tomando **C** como o comprimento da circunferência, estabelecer uma relação matemática entre o perímetro do hexágono regular, o comprimento da circunferência e o perímetro do quadrado, concluir que: $P_H < C < P_Q$. Pelos princípios de equivalência

da igualdade, dividir os membros da desigualdade por *D*, obtendo $\frac{P_H}{D} < \frac{C}{D} < \frac{P_Q}{D}$;

como $\frac{P_Q}{D} = 4$ e $\frac{P_H}{D} = 3$, então $3 < \frac{C}{D} < 4$.

- Concluir que a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, $\frac{C}{D}$, é um número que está entre os números 3 e 4.

<u>Atividade 2:</u> Método dos perímetros (Processo de Arquimedes).

Objetivo: Obter o valor de *pi* através do cálculo dos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos ao círculo. Chegar ao Processo de Arquimedes.

Material: Papel ofício, lápis, borracha.

Procedimentos:

- Indicar a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, obtida na atividade 1, pela letra grega π:;
- Escrever a fórmula para o comprimento da circunferência a partir dessa razão e em função da medida de seu raio **R**: $\frac{C}{D} = \pi \Rightarrow \frac{C}{2R} = \pi \Rightarrow C = 2\pi R$;
- Considerar o valor do raio como $R = \frac{1}{2} unidade$ e obter o valor do comprimento da circunferência nesse caso: $C = \cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \pi$. Concluir que π é a medida do comprimento de uma circunferência de raio igual a $\frac{1}{2}$ *unidade*.
- Retomar a desigualdade $P_H < C < P_Q$, obtida na atividade 1, e utilizando o resultado $C = \pi$, reescrever a desigualdade considerando os perímetros dos polígonos regulares inscritos (**P_i**) e circunscritos (**P_c**) à circunferência e π; Concluir que: $P_i < \pi < P_c$.
- Por fim, deduzir que se obtém uma melhor aproximação para π através da média aritmética de P_i e P_c, ou seja: $\pi = \frac{P_i + P_c}{2}$.

<u>Atividade 3:</u> Valor aproximado do número π pelo método dos perímetros (ou de Arquimedes), considerando um quadrado inscrito e circunscrito a uma circunferência.

Objetivo: Obter o valor para *pi* através do cálculo dos perímetros (Processo de Arquimedes) de um quadrado inscrito e circunscrito a uma circunferência de raio igual a $\frac{1}{2}$ *unidade*.

Material: Papel ofício, lápis, borracha, régua, compasso, par de esquadros.

Procedimentos:

- Desenhar uma circunferência de raio **R** e inscrever um quadrado nessa circunferência;
- Obter uma expressão que forneça a medida do lado ℓ_4 do quadrado: aplicando o teorema de Pitágoras: $(\ell_4)^2 = R^2 + R^2 \Rightarrow (\ell_4)^2 = 2R^2 \Rightarrow \ell_4 = \sqrt{2R^2} \Rightarrow \ell_4 = R\sqrt{2}$;
- Calcular seu perímetro, assumindo que $R = \frac{1}{2}\,unidade$ e $\sqrt{2} = 1{,}414$. Então o perímetro do quadrado inscrito será: $p_4 = 4 \cdot \ell_4 = 4 \cdot R\sqrt{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}41 \Rightarrow p_4 = 2{,}828\ u$;
- Desenhar o quadrado circunscrito à circunferência e escrever a expressão para o lado $\mathbf{L_4}$ desse quadrado em função do raio **R**: $L_4 = 2R$;
- Assumindo $R = \frac{1}{2}\,unid$, calcular a medida de L_4 e do perímetro desse quadrado:

  $L_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Como $P_4 = 4 \cdot L_4$, então $P_4 = 4$ *unidades*;
- De posse dos valores dos perímetros, pelo processo de Arquimedes, obter um valor aproximado para π: $\pi = \frac{p_4 + P_4}{2} = \frac{2{,}828 + 4}{2} = 3{,}414$;

<u>Atividade 4:</u> Valor aproximado do número π pelo método dos perímetros (ou de Arquimedes), considerando um hexágono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência.

Objetivo: Obter o valor para *pi* através do cálculo dos perímetros (Processo de Arquimedes) de um hexágono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência de raio igual a $\frac{1}{2}$ *unidade*.

Material: Papel ofício, lápis, borracha, régua, compasso, par de esquadros.

Procedimentos:

- Desenhar uma circunferência de raio **R** qualquer e inscrever um hexágono regular nessa circunferência. Escrever a relação entre a medida do lado $\boldsymbol{\ell_6}$ e o raio **R** da circunferência: $R = \ell_6$;
- Calcular o perímetro do hexágono, admitindo que $R = \frac{1}{2} unid$ e $\sqrt{2} = 1{,}414$:

  $p_6 = 6 \cdot \ell_6 = 6 \cdot R = \cancel{6} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow p_6 = 3\ unidades$;
- Desenhar o hexágono regular circunscrito à circunferência e escrever a expressão para o lado $\mathbf{L_6}$ desse hexágono em função do raio **R**:

  $(L_6)^2 = R^2 + \left(\frac{L_6}{2}\right)^2 \Rightarrow L_6{}^2 = R^2 + \frac{L_6^2}{4} \Rightarrow L_6^2 - \frac{L_6^2}{4} = R^2 \Rightarrow \frac{3L_6^2}{4} = R^2 \Rightarrow L_6 = \frac{2}{3} R\sqrt{3}$;
- Assumindo $R = \frac{1}{2} unid$, calcular a medida de $\mathbf{L_6}$ e do perímetro desse quadrado, sendo $\sqrt{3} = 1{,}732$, então: $L_6 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}732 \Rightarrow L_6 = 0{,}5773\ unid$. Como $P_6 = 6 \cdot L_6$, então:

  $P_6 = 6 \cdot 0{,}5773 \Rightarrow P_6 = 3{,}4638\ unidades$;
- De posse dos valores dos perímetros, pelo processo de Arquimedes, obter um valor aproximado para π: $\pi = \frac{p_6 + P_6}{2} = \frac{3 + 3{,}4638}{2} = 3{,}231$;
- Comparar o resultado obtido na atividade 3 com este da atividade 4 e observar que na atividade 4 a aproximação obtida para *pi* foi melhor do que na atividade 3.
- Concluir que quanto maior for o número de lados dos polígonos inscritos e circunscritos à circunferência melhor será a aproximação do valor para π.

A última atividade do mini-curso (Atividade 5) foi a mesma Atividade 10 do módulo de ensino elaborado para os alunos da 8ª série, com o acréscimo de mais um item no início da atividade.

<u>Atividade 5:</u> Obtenção da fórmula para a área do círculo.

Objetivo: Obter a fórmula para a área do círculo a partir da generalização da fórmula da área do polígono regular de n lados.

Material: Papel ofício, régua, par de esquadros, compasso, lápis, borracha.

Procedimentos:

- Desenhar um círculo de raio qualquer e inscrever um quadrado;
- Obter a expressão para a área desse quadrado (A_Q) em função da medida do seu lado ℓ_4 e do seu apótema a_4, traçando as diagonais do quadrado decompondo-o em quatro triângulos retângulos congruentes, e tomando a base do triângulo como o lado do quadrado, a altura de cada um desses triângulos seria exatamente o apótema do quadrado;
- Dessa forma, a área do quadrado (A_Q) poderia ser escrita como sendo quatro vezes a área do triângulo retângulo (A_T): $A_Q = 4 \cdot A_T \Rightarrow A_Q = 4 \cdot \frac{\ell_4 \cdot a_4}{2}$, ou seja, $A_Q = \frac{4 \cdot \ell_4 \cdot a_4}{2}$.
- Desenhar um círculo de raio qualquer e inscrever um hexágono regular;
- Retomar o processo para obter a fórmula da área do hexágono em função da medida do apótema e da medida do lado: $A_H = \frac{6 \cdot \ell_6 \cdot a_6}{2}$;
- Considerar um polígono regular de n lados, com lado de medida ℓ e apótema de medida a, inscrito num circulo de raio R. Retomar a fórmula da área do polígono regular: $A = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2}$. Reescrevendo essa fórmula em função do perímetro $P = n \cdot \ell$, obtém-se $A = \frac{P \cdot a}{2}$;
- Observar que, quando o polígono regular tiver um número muito grande de lados a medida de cada lado será muito pequena, isto quer dizer que o perímetro do polígono se aproxima do comprimento da circunferência e a medida do apótema tende para a medida do raio da circulo. Logo, $A = \frac{P \cdot a}{2} \to \frac{C \cdot r}{2}$. Como C = 2πR, então a área do círculo fica: $A_C = \frac{\cancel{2}\pi R \cdot R}{\cancel{2}} \Rightarrow A_C = \pi \cdot R^2$.

  Nessa atividade foi ressaltada a noção intuitiva de limite.

5.3 Identificação dos alunos

Para obter informações quanto a formação dos alunos e sua experiência em sala de aula, foi aplicado um questionário de identificação (ver Apêndice B), o qual continha perguntas quanto à idade, sexo, formação, se lecionava e, em caso afirmativo, há quanto tempo, se já lecionou Geometria e qual o objetivo do aluno ao escolher o mini-curso.

Participaram do mini-curso 10 alunos, dos quais 3 eram do sexo feminino e 7 do sexo masculino. Na ocasião do mini-curso, das três alunas participantes, duas eram alunas do curso de Pedagogia da UFRN e uma era doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFRN, da unidade de pesquisa de Educação Matemática. Os sete alunos participantes eram todos graduandos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN. A média de idade dos participantes foi de 30 anos, havendo alunos com 25 anos e 41 anos.

Quanto à experiência em sala de aula, apenas a participante que era doutoranda estava exercendo o magistério e já havia lecionado conteúdos de Geometria nas séries do Ensino Fundamental e Médio. Os outros nove participantes não tinham experiência em sala de aula, mas três alunos do curso de Licenciatura em Matemática afirmaram ter lecionado alguns conteúdos, tais como área de figuras planas, relações métricas em triângulos retângulos, teorema de Pitágoras, teorema de Tales e semelhança de triângulos.

Com relação a qual era o objetivo de fazer o mini-curso, basicamente todos os depoimentos foram em torno da aquisição de novos conhecimentos ou de aprofundar os conhecimentos já adquiridos.

5.4 Aplicação e desenvolvimento das atividades

As atividades foram aplicadas aos 10 alunos para que eles as respondessem individualmente. Todo o material necessário para o desenvolvimento das atividades foram fornecidos: régua, par de esquadros, compasso, folhas de papel ofício.

Abaixo estão algumas respostas dos alunos. Os alunos são citados por um de seus sobrenomes para garantir o sigilo de sua identidade.

No decorrer do desenvolvimento das atividades foram observadas algumas dificuldades que se tornaram fatores limitantes para a plena aprendizagem.

Com exceção da atividade 2, todas as outras atividades exigiam que o aluno participante desenhasse os polígonos regulares, quadrado e hexágono regular — algumas vezes inscritos na circunferência outras vezes circunscritos à circunferência — foi observado que o manuseio dos instrumentos de desenho geométrico foi um fator limitante para o desenvolvimento das atividades. Com exceção da doutoranda, os outros nove alunos não demonstraram habilidade para utilizar as propriedades conhecidas dos polígonos na construção dos mesmos, com régua e compasso. Essa possível falta de habilidade foi um tanto inesperada, já que eram alunos do curso de matemática. Para minimizar essa dificuldade as atividades foram constantemente mediadas pela pesquisadora que realizava no quadro negro, juntamente com os alunos, todas as construções pedidas nos enunciados das atividades, sempre ressaltando as propriedades envolvidas. Entretanto, alguns alunos como, por exemplo, Silva (ilustração 78) não conseguiu desenhar corretamente o hexágono regular inscrito na circunferência e o quadrado circunscrito à circunferência na atividade 1, e Patrício (ilustração 79) que não desenhou corretamente o quadrado inscrito e circunscrito em relação a uma circunferência na atividade 3.

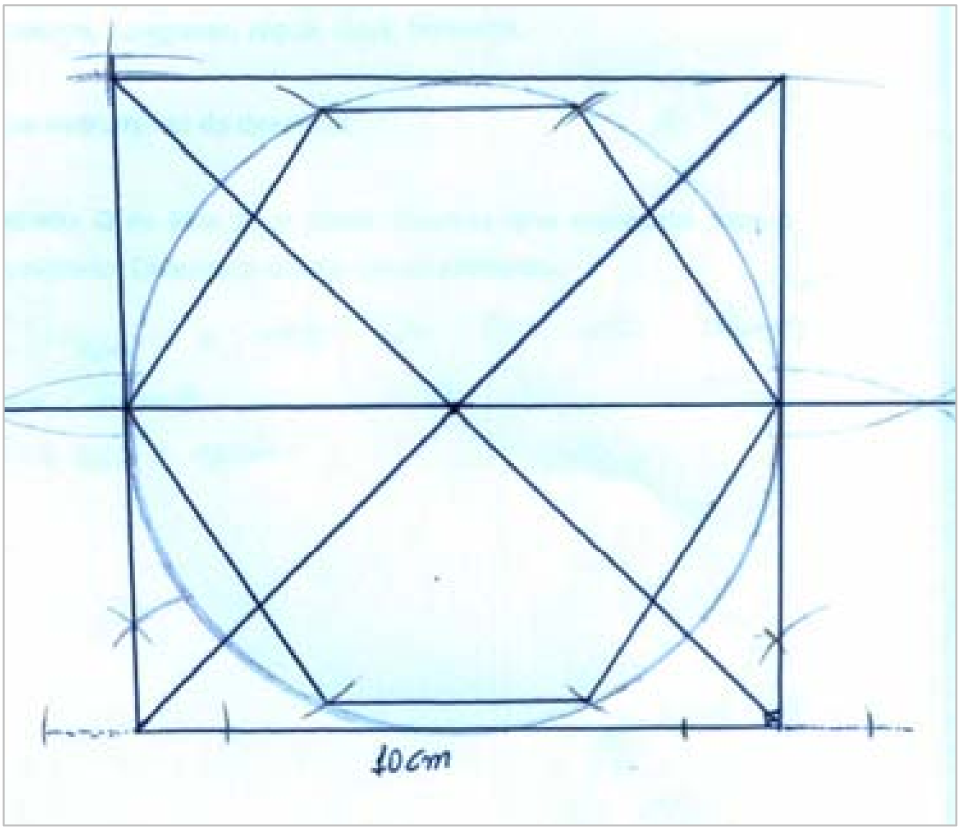


Ilustração 78

No caso de Silva, na atividade 1, os lados do hexágono regular inscrito na circunferência não estão do mesmo comprimento e os lados opostos do quadrado não estão paralelos, logo não formam ângulos de 90° entre si.

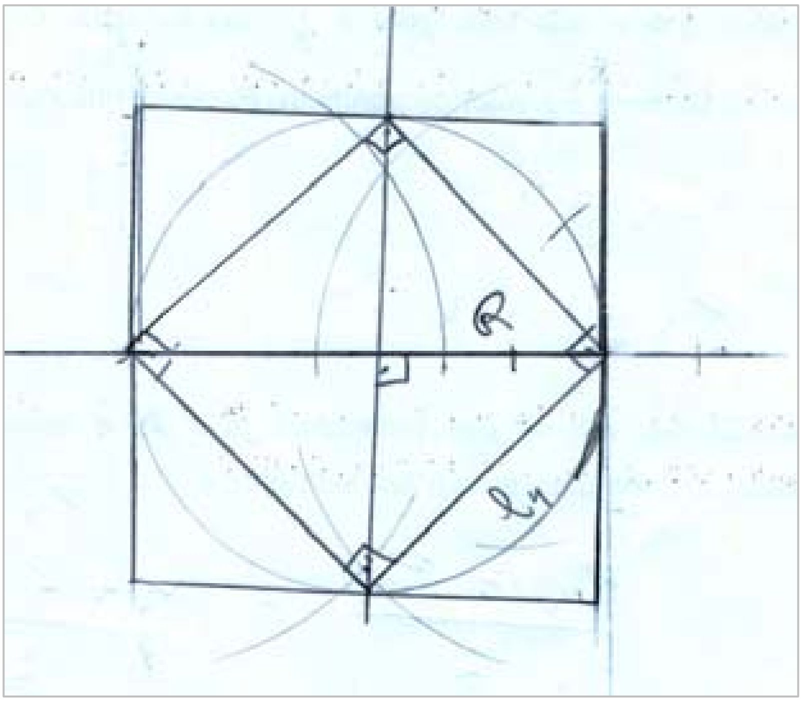


Ilustração 79

Na atividade 3, em que era necessário construir um quadrado inscrito na circunferência e outro quadrado circunscrito à mesma circunferência, o participante Patrício também demonstrou dificuldade com os instrumentos ao desenhá-los.

Nas atividades 4 e 5 a falta de habilidade com os instrumentos, principalmente em relação à imprecisão das figuras, já estavam bastante minimizada, entretanto ainda foi necessária a mediação constante da pesquisadora.

Na atividade 2 que tratava da obtenção o número π pelo Processo de Arquimedes, no item (e) depois de concluírem que o valor de π está entre o valor do perímetro do polígono inscrito na circunferência (P_i) e o valor do perímetro do polígono circunscrito à circunferência (P_c), ou seja, $P_i < \pi < P_c$, constatou-se que **nenhum aluno** participante chegou à conclusão de que uma melhor aproximação para o valor de π seria a média aritmética dos valores dos perímetros: $\pi = \frac{P_i + P_c}{2}$, ou seja, o Processo de Arquimedes. O que também foi inesperado, pois os alunos do curso de matemática deveriam estar acostumados a fazerem estimativas.

Outro fator que, também, se apresentou como uma dificuldade, foi a falta de habilidade dos alunos participantes com relação à escrita de fórmulas para o perímetro e área dos polígonos desenhados. Essa dificuldade foi comum tanto nas alunas do curso de Pedagogia quanto nos alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Enunciados do tipo "*qual é a expressão que fornece a medida do lado L_6 desse hexágono em função do R*?" que se relacionava ao hexágono regular circunscrito à circunferência na atividade 4, resultou em expressões em que o raio é que estava em função do lado do hexágono. Ao ser identificado o erro os alunos participantes refizeram os cálculos, como mostra a ilustração 80 de Duarte.

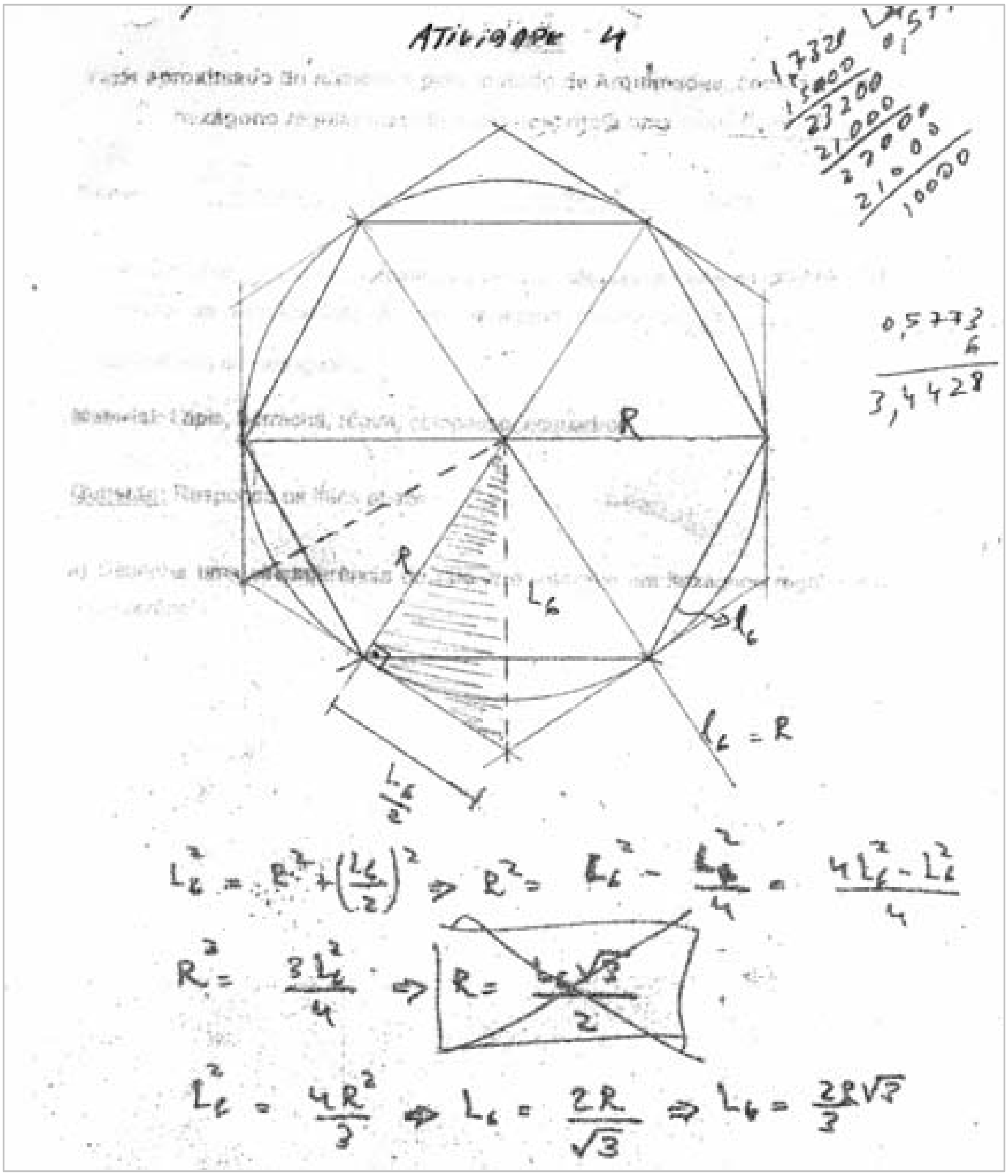


Ilustração 80

5.5 Outras considerações

Com a aplicação dessas atividades constatou-se que mesmo os sete alunos do curso de Licenciatura em Matemática não demonstraram habilidade, inicialmente, no manuseio dos instrumentos de desenho geométrico. Segundo depoimentos de alguns desses alunos, durante o desenvolvimento do mini-curso, eles não tinham estudado ainda na graduação uma disciplina que lhes oferecessem habilidade para manusear tais instrumentos. As propriedades de polígonos são estudadas numa disciplina que aborda a Geometria Plana, mas não voltada para o ensino ou conjuntamente com as construções com régua e compasso, e sim de uma maneira mais axiomática. Mesmo assim, notou-se que esses alunos ainda não têm domínio de tais propriedades, o que é preocupante, pois logo poderão estar nas salas de aula ministrando os conteúdos de Geometria para outros alunos.

Quanto às duas alunas do curso de Pedagogia, foi observado, segundo depoimento delas, que os conceitos de geometria que foram estudados na graduação, em uma disciplina, foi bastante aproveitada nas atividades do mini-curso, mas, reconheceram que necessitavam de mais estudos para que tivessem domínio sobre aquilo que foi estudado no mini-curso.

A aluna participante que era doutoranda da UFRN teve um bom desempenho nas atividades, demonstrou bastante autonomia na construção dos polígonos e reconhecia quando não apresentava o domínio de alguma construção.

De um modo geral, as atividades do mini-curso foram bem aceitas entre os alunos participantes, mas houve uma divergência entre eles sobre as opiniões da viabilidade ou não da aplicação dessas atividades aos alunos da 8ª série. Alguns defendiam que os alunos não teriam "maturidade", termo utilizado por eles, para compreender e desenvolver as atividades, já outros defendiam que se os professores não levarem atividades que "convidem" o aluno a pensar, eles nunca chegarão à "maturidade".

Por fim, todos concordaram que os professores precisam ter mais domínio sobre aquilo que vão ensinar, precisam conhecer mais sobre alguns conceitos geométricos ou a obtenção de algumas constantes, como é o caso do número π, para que possam promover discussões entre os alunos e os auxiliem na construção do conhecimento.

Em conclusão da aplicação deste mini-curso, observou-se que, mesmo os alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN, não demonstraram conhecimento quanto ao Processo de Arquimedes para a obtenção do número π, corroborando com a necessidade de estudar profundamente de tal assunto também junto a futuros professores de Matemática.

CONCLUSÕES DA PESQUISA

Para apresentar as conclusões do presente estudo, sobre a escrita de expressões matemáticas para perímetro e área de polígonos e a obtenção da fórmula do comprimento da circunferência e área do círculo, com a utilização de atividades de ensino, aplicadas a alunos da 8ª série do Ensino Fundamental, relembra-se, resumidamente, os objetivos da pesquisa e as observações feitas sobre análise qualitativa da avaliação diagnóstica inicial, do módulo de atividades de ensino e da avaliação diagnóstica final.

Objetivos

1. O objetivo geral da presente pesquisa foi desenvolver um estudo sobre a escrita de expressões simbólicas para o perímetro do retângulo e obtenção da fórmula de área de alguns polígonos convexos, da fórmula do comprimento da circunferência e da área do círculo, através do uso de um módulo de atividades de ensino, com base num ensino construtivo.

2. Os objetivos específicos da pesquisa foram:

A obtenção das fórmulas de área do paralelogramo, triângulo e trapézio através da decomposição e composição do retângulo.

A escrita de expressões simbólicas para o perímetro de retângulos, utilizando as propriedades operatórias.

Um estudo sobre as manipulações algébricas nas fórmulas de área do retângulo e trapézio, compreendendo a sintaxe da álgebra.

A dedução das fórmulas do perímetro e área do hexágono regular inscrito numa circunferência.

A dedução das fórmulas do comprimento da circunferência e da área do círculo.

Avaliação Diagnóstica Inicial

A análise das respostas dos alunos da avaliação diagnóstica inicial mostrou que:

1. De modo geral, quanto aos conceitos de álgebra, faltam aos alunos conhecimentos elementares sobre propriedades operatórias, como a comutatividade e a distributividade; domínio de técnicas de resolução de equações do 1° grau, inclusive o conhecimento das propriedades da igualdade;

2. Quanto aos conceitos geométricos, como perímetro e área, observou-se que os alunos não demonstraram domínio na aplicação desses conceitos; a maioria dos alunos não conseguiu representar simbolicamente o perímetro de um polígono, assim como, compreender o papel funcional das variáveis (área, base e altura) na fórmula da área do retângulo ($\text{Área}(\text{retângulo}) = \text{base} \cdot \text{altura}$);

3. Em relação ao cálculo de perímetro e área do hexágono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência, decomposto em triângulos eqüiláteros, os alunos demonstraram não conhecer as propriedades do hexágono para utilizá-las no cálculo do perímetro e da área.

Atividades de Ensino

No desenvolvimento da aplicação do módulo de atividades de ensino foi possível fazer as seguintes observações:

1. Dificuldades iniciais, como: a falta de compreensão do texto da atividade e a falta de autonomia para estabelecer estratégias de resolução.

2. Com relação ao uso dos instrumentos de desenho geométrico — esquadros, régua, compasso — a maioria dos alunos demonstraram não ter habilidade na utilização desses instrumentos, o que também foi identificado em Souza (2003);

3. Em referência aos conceitos necessários para a aprendizagem dos conteúdos abordados nas atividades, objetos do estudo, os alunos apresentaram falta de habilidade na resolução de equações do 1° grau, na aplicação do Teorema de Pitágoras e na classificação de triângulos e quadriláteros, além da falta de conhecimento das propriedades de polígonos;

4. Com relação aos materiais concretos — quadradinhos de cartolina, palitinhos de madeira, tampas de plástico, aro de plástico, esfera de isopor, entre outros — utilizados no desenvolvimento das atividades, verificou-se que os alunos, a partir do manuseio desses materiais ou da observação de propriedades extraídas dos objetos, puderam realizar abstrações e chegar a algumas conclusões sobre os conceitos tratados nas atividades que utilizaram esse tipo de recurso;

5. Quanto à aprendizagem da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, abordada nas atividades que tratavam do perímetro do retângulo, após o término dessas atividades os alunos demonstraram relativa habilidade na aplicação da propriedade na escrita de expressões para o perímetro de retângulos com uma das dimensões desconhecida;

6. Quanto à aprendizagem dos conceitos de circunferência, círculo e esfera, abordados nas atividades de ensino com o auxílio de objetos que os representavam, após a formalização de tais conceitos ao final da atividade os alunos demonstraram que assimilaram tais conceitos com compreensão;

7. A respeito da compreensão das propriedades do hexágono regular inscrito na circunferência, tais como: medida do lado igual à medida do raio da circunferência, que o hexágono pode ser decomposto em seis triângulos eqüiláteros, que a altura do triângulo eqüilátero é a medida do apótema do hexágono; ao final das atividades que abordavam essas propriedades, os alunos demonstraram ter-las compreendido;

8. Quanto à dedução da fórmula da área do círculo ($\text{Área(círculo)} = \pi R^2$) a partir da área do hexágono regular inscrito na circunferência, generalizando para um polígono de n lados, foi observado que os alunos obtiveram relativa compreensão em relação à construção essa fórmula.

Avaliação Diagnóstica Final

Os resultados da avaliação diagnóstica final, que refletem a aprendizagem dos alunos, mostraram que:

1. Com referência à aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para o cálculo da área do retângulo reticulado, alguns alunos responderam satisfatoriamente à questão;

2. Quanto à habilidade do aluno de fazer as manipulações algébricas na fórmula da área do trapézio para encontrar o valor de uma das variáveis, por meio da resolução de uma equação, alguns alunos chegaram ao nível de compreensão relacional.

3. Sobre a habilidade do aluno de escrever expressões simbólicas para a área do paralelogramo, triângulo e círculo, alguns alunos chegaram a um bom nível entendimento e conseguiram escrever as expressões de área, indicando estarem no nível intermediário de compreensão relacional e instrumental;

4. Com relação ao cálculo do perímetro de um retângulo com a medida de uma dimensão desconhecida, mas o valor da área conhecida, os resultados indicaram que a compreensão desses aspectos foi parcialmente alcançada pelos alunos, demonstrando que os alunos estão em nível de compreensão instrumental.

5. À respeito do domínio das propriedades do hexágono regular inscrito e circunscrito numa circunferência para o cálculo do seu perímetro e da sua área, os resultados mostraram que poucos alunos alcançaram o nível de compreensão instrumental.

6. Quanto à determinação do comprimento da circunferência e da área do círculo fazendo uso de suas respectivas fórmulas, alguns alunos demonstraram estar no nível de compreensão relacional.

Conclusões

I. A análise qualitativa das respostas, fundamentada na teoria sobre a compreensão de conceitos matemáticos, e a apresentação dos dados por uma estatística descritiva, permite concluir que:

1. A metodologia de ensino-aprendizagem utilizada nesse estudo — que baseou o ensino em atividades para o aluno — atingiu os objetivos estabelecidos para a pesquisa, reafirmando os princípios da teoria construtivista, segundo a qual a aprendizagem se dá através da interação aluno/situação de ensino-aprendizagem com mediação do professor.

2. A opção por trabalhar as atividades em grupos, numa interação aluno/aluno, contribuiu para aprendizagem dos conteúdos em questão.

3. A utilização do material concreto, nas suas diversas formas, nas atividades de ensino foi um fator importante para a construção dos conceitos abordados, mesmo trabalhando com alunos que, de acordo com Piaget, estariam no nível cognitivo das operações formais.

4. Os resultados da análise qualitativa da avaliação diagnóstica final mostraram que a habilidade do aluno em fazer manipulações algébricas nas fórmulas de área do retângulo e do trapézio foi parcialmente alcançada.

5. A construção das fórmulas do comprimento da circunferência e da área do círculo, embora feita com relativa compreensão, foi obtida em conseqüência da metodologia utilizada.

II. Sabe-se que, segundo Piaget, existem dois tipos de abstrações, a abstração empírica, para a abstração das propriedades de um objeto por meio da ação do sujeito sobre o objeto, e a abstração reflexiva, que se apóia nas atividades cognitivas do sujeito. Em todo o processo de abstrações a estrutura lógico-matemática está presente. Entretanto, nem todos os sujeitos atingem a maturidade da inteligência e do estabelecimento de relações entre esquemas de maneira simultânea. Pela faixa etária dos alunos (entre 13 e 15 anos) que participaram da pesquisa, teoricamente, eles já estariam no estágio que Piaget denominou de *estágio das operações formais*, em que o aluno já teria seus esquemas de pensamento reversíveis, raciocinando sobre suas próprias hipóteses e estabelecendo relações entre conceitos. No entanto, no presente estudo observou-se que muitos alunos ainda se encontravam no estágio de transição entre as operações concretas e as operações formais. Dessa forma se procurou respeitar as diferenças de aprendizagem de cada aluno, estimulando, sempre que possível, o raciocínio lógico-dedutivo, utilizando material manipulativo para ajudar a trabalhar melhor os esquemas mentais.

Observou-se que muitos alunos tiveram dificuldade em interpretar corretamente os enunciados das atividades, para entender o que se pedia e resolvê-las, e que alguns alunos chegaram ao final do processo sem desenvolver uma autonomia para o estabelecimento de estratégias de resolução das atividades. Uma provável explicação para esse fato poderia ser o pouco trabalho desenvolvido pelo professor de forma a estimular a leitura e interpretação de textos matemáticos e a autonomia na resolução de problemas, causando uma deficiência tanto na familiarização dos termos matemáticos, quanto no estabelecimento de estratégias de resolução de problemas.

Um aspecto que está relacionado à aprendizagem foi a freqüência irregular dos alunos. Havia uma rotatividade muito grande dos alunos nas duas turmas da intervenção metodológica e isso foi um aspecto que dificultou o desenvolvimento da aprendizagem da turma, pois os alunos que faltavam as atividades anteriores não chegavam a contribuir com seus colegas nas atividades seguintes, já que não haviam participado das discussões.

Em relação ao nível de rendimento obtido pelos alunos na pesquisa, observou-se que este foi muito abaixo do esperado, pois, conforme mostraram os resultados da avaliação diagnóstica inicial, os alunos não tinham os pré-requisitos necessários para a aprendizagem dos conceitos abordados nas atividades de ensino. Certamente se os conteúdos identificados como insuficientes para a aprendizagem dos conceitos objetos da pesquisa, tivessem sido estudados no módulo de ensino, compreendendo atividades de nivelamento, se obteria um melhor resultado em termos de aprendizagem; no entanto, a pesquisa foi desenvolvida de acordo com a situação real de conhecimento de matemática dos alunos, sem apelo a recursos que promovessem resultados mais altos. Como o objetivo foi desenvolver a aprendizagem de matemática mediante aplicação de certa metodologia, os resultados obtidos – ainda que tenham sido apenas razoáveis do ponto de vista numérico − podem ser considerados positivos diante do estado de conhecimento (pré-requisitos) dos alunos pesquisados. De qualquer forma, a pesquisa mostra que o ensino de matemática funciona com a metodologia aplicada, como demonstram outras pesquisas de teor construtivista.

III. Com relação ao mini-curso sobre a obtenção do número π pelo Processo de Arquimedes, ministrado no XII Seminário de Pesquisa do CCSA, observou-se que mesmo os alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN não demonstraram habilidade no manuseio de instrumentos de desenho geométrico — régua, esquadros e compasso — bem como a aplicação das propriedades de polígonos regulares, quadrado e hexágono regular, para a construção desses polígonos inscritos ou circunscritos a uma circunferência.

Segundo depoimentos dos alunos participantes do mini-curso e graduandos do curso de Licenciatura em Matemática, a geometria estudada na graduação está fundamentada no ensino axiomático das propriedades geométricas, o que são extremamente necessárias, mas a falta de conexão com a geometria ensinada nas escolas e a falta da utilização da régua e compasso para construção dos polígonos, aplicando as propriedades estudadas, causou uma lacuna entre o que eles aprenderam nas disciplinas da graduação e sua aplicação em atividades de construção com régua e compasso.

Quanto às alunas do curso de Pedagogia da UFRN, constatou-se que o que foi aprendido em uma disciplina destinada ao ensino de conceitos geométricos, como, por exemplo, propriedades de polígonos, perímetro, área e volume do bloco retangular, foram de extrema importância para as alunas participantes do mini-curso; no entanto, segundo conclusões chegadas por elas, os conceitos geométricos deveriam ser estudados em mais de uma disciplina, pois para muitas das alunas do curso de Pedagogia é a primeira vez que têm contato com conceitos geométricos, e que são abordados de forma que promova a compreensão dos mesmos.

IV. Diante dos resultados da pesquisa realizada com os alunos de 8ª série do Ensino Fundamental e alguns alunos do curso de Licenciatura em Matemática e Pedagogia, observa-se que o atual ensino de Matemática ainda está muito aquém do ideal desejado. Futuros professores ainda estão sendo formados pelos moldes da matemática formal, mas sem fazerem as transposições para a matemática escolar. Os recursos didáticos para o ensino-aprendizagem dos conteúdos matemáticos são vistos, na maioria das vezes, em disciplinas que estão desconectadas com a matemática formal estudada, levando os futuros professores a perpetuarem o ensino através da memorização e repetição sem compreensão.

As escolas públicas, por sua vez, também não oferecem uma ideal condição de trabalho para o professor, dando-lhes muitas turmas numerosas em que o controle da freqüência fica quase inviável, e o trabalho personalizado impossível, dificultando uma possível mudança de metodologia.

Foi observado, também, que o ensino de Geometria ainda se configura no quadro do seu abandono nas salas de aula, corroborando com resultados de várias pesquisas nessa área.

V. Quanto aos conteúdos, observou-se que muitos alunos não conseguiram aplicar as técnicas de resolução de equações do 1° grau para manipular a fórmula de área do trapézio e obter outras variáveis da fórmula, que não seja a área. Esse aspecto, que está relacionado à sintaxe da álgebra, foi abordado no módulo de atividades, na atividade referente à obtenção da fórmula da área do trapézio, entretanto os alunos apresentaram dificuldades na manipulação algébrica dessa fórmula. Esse aspecto também foi identificado em Souza (2003).

Os resultados obtidos nesse trabalho de pesquisa vêm corroborar com os resultados de outras pesquisas realizadas no campo de ensino-aprendizagem de Álgebra, Geometria e Aritmética. Salienta-se que os instrumentos de pesquisa elaborados e aplicados nesse trabalho são passíveis de modificação e aperfeiçoamento, conforme a necessidade de cada professor ou pesquisador e da situação pedagógica vivenciada, permitindo a inserção e observação de novas variáveis no processo ensino-aprendizagem, mediante a utilização da metodologia de ensino por atividades.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAUMGART, J. K. **História da álgebra.** Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. v. 4 (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula).

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim:** 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries. São Paulo: FTD, 2000.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2003. 2 ed.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª a 8ª séries**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

COLL, C.; COLOMINA, R. Interação entre alunos e aprendizagem escola. In: COLL, C.; PALACIOS, J.; MARCHESI, A. **Desenvolvimento psicológico e educação**: psicologia da educação. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1996, v. 2.

COLL, C.; SOLÉ, I. A interação professor/aluno no processo de ensino e aprendizagem. In: COLL, C.; PALACIOS, J.; MARCHESI, A. **Desenvolvimento psicológico e educação**: psicologia da educação. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1996, v.2.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática:** 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries. São Paulo: Ática, 2002.

DIENES, Z. P. **Aprendizado moderno da Matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 1974.

FOSSA, J. A. **Ensaios sobre Educação Matemática.** Belém: EDUEPA, 2001. (Série Educação - n. 2).

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1993.

GÓMEZ CHACÓN, I. Mª. **Matemática emocional**: os afetos na aprendizagem matemática. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Matemática para todos:** 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries. São Paulo: Scipione, 2002.

KAMII, C. **A criança e o número**: implicações da teoria de Piaget para a atuação junto a escolares de 4 a 6 anos. 29. ed. Campinas, SP: Papirus, 2002.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber:** manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

MACHADO, N. J. **Matemática e Realidade:** análise dos pressupostos filosóficos que fundamental o ensino da matemática. São Paulo: Cortez, 2001. 5 ed.

MATOS, J. M.; SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula:** tecendo redes cognitivas na aprendizagem. Natal; Flecha do Tempo, 2006.

MENDES, J. R. Algumas considerações sobre o ensino de Álgebra com base nos estudos da História da Matemática. **Revista Educação e Ensino**. Bragança Paulista: Núcleo de publicação e Divulgação Científica da PROPEP/EDUSF, v. 4, n. 2. p. 49-57, jul.-dez., 1999.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pró-Posições.** São Paulo: Cortez, v. 3, n.1[7], p. 39-54, mar. 1992.

MIORIM, M. A**. Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MIRAS, M. SOLÉ, I. A evolução da aprendizagem e a evolução do processo de ensino-aprendizagem. In: COOL, C.; PALACIOS, J.; MARCHESI, A. **Desenvolvimento psicológico e educação:** psicologia da educação. Tradução: Angélica Mello Alves. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1992, v. 2.

MIRAS, M.; SOLÉ, I. A evolução da aprendizagem e a evolução no processo de ensino aprendizagem. In: COLL, C.; PALACIOS, J.; MARCHESI, A. **Desenvolvimento psicológico e educação**: psicologia da educação. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1996, v. 2.

NAKAMURA, O. Y. A.; FRANCHI, A. Generalização de padrões geométricos: caminho para construção de expressões algébricas no Ensino Fundamental. In: II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, **Anais...** Santos, SP, 2003. 10p. CD-ROM.

PIAGET, J. et al. **Abstração reflexionante:** relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

RIBEIRO, A. J. Um estudo sobre o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra: algumas considerações para um debate teórico. In: II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, **Anais...** Santos, SP, 2003. 8p. CD-ROM.

RODRIGUES NETO, F. P. **Um estudo sobre aprendizagem de conceitos algébricos fundamentais.** 1998. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 1998.

SANGIORGI, O. **Matemática:** 5ª série. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 198-.

SKEMP, R. R. Psicologia del aprendizaje de las Matemáticas. **Madri: Ediciones Moratas, 1980.**

SOUZA, C. F. Obtenção da constante “pi” pelo Método dos Perímetros. In: XII Seminário de Pesquisa do CCSA/UFRN. **Anais...** Natal, 2006. CD-ROM.

SOUZA, C. F. **Um módulo de atividades para o ensino-aprendizagem das fórmulas de área dos principais polígonos convexos.** 2003. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2003.

APÊNDICES

APÊNDICE A

QUESTIONÁRIO DE IDENTIFICAÇÃO DO ALUNO

QUESTIONÁRIO DE IDENTIFICAÇÃO

LEIA E RESPONDA AS PERGUNTAS ABAIXO COM OBJETIVIDADE E CLAREZA

1 – Nome completo: ____

2 – Idade: ______________ Sexo: (___) FEMININO (___) MASCULINO

3 – É repetente? (___) SIM (___) NÃO

4 – Você trabalha? (___) SIM (___) NÃO

5 – Você costuma estudar com um grupo de colegas da sala?

(___) SIM, sempre (___) SIM , às vezes (___) NÃO

6 – Você já estudou Geometria? Em quais séries? Escreva os assuntos que você lembra que estudou em Geometria.

7 – E sobre Álgebra? Escreva os assuntos que você lembra que estudou em Álgebra.

8 – Fale um pouco sobre como eram as aulas de Matemática que você já teve na sua vida escolar.

Muito obrigada por sua colaboração.

APÊNDICE B

QUESTIONÁRIO DE IDENTIFICAÇÃO DO PROFESSOR

QUESTIONÁRIO DE IDENTIFICAÇÃO

1 – Nome completo: ____

2 – Idade: ______ anos   Sexo: (___) FEMININO   (___) MASCULINO

3 – Qual sua formação?

(___) graduando. Curso: _________________________

(___) graduado. Curso: __________________________

(___) pós-graduando. Curso: _______________________

(___) pós-graduado. Curso: ________________________

(___) outros: _______________________________

4 – Você leciona?   (___) SIM   (___) NÃO

Que disciplina(s)? ________________________

5 – Há quanto tempo você leciona?   ________ anos   ______ meses

6 – Se leciona em que rede de ensino você trabalha?

(___) Pública: (___) Municipal   (___) Estadual

(___) Particular

(___) Federal

7 – Já lecionou (ou leciona) Geometria? Que conteúdos?

8 – Qual seu objetivo ao escolher esse mini-curso?

Muito obrigada por sua colaboração.

APÊNDICE C

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL

ESCOLA: ____

NOME: ____

SÉRIE: ____________________ **DATA:** ___ /___ /___.

LEIA COM ATENÇÃO E RESPONDA AS QUESTÕES ABAIXO

1 – Escreva duas formas diferentes de calcular a área do retângulo abaixo, utilizando a distributividade.

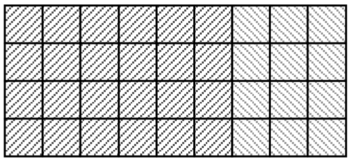


figura 1

2 – Com base na malha quadriculada, determine um valor aproximado para a área do círculo abaixo:

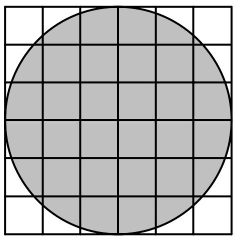


figura 2

3 – Estabeleça uma relação algébrica entre os comprimentos dos segmentos abaixo, encontre o valor de M em cada caso: (as medidas estão expressas numa mesma unidade de medida de comprimento)

1º)

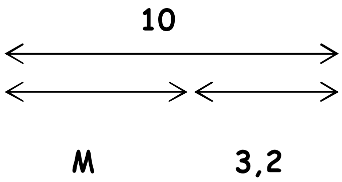


figura 3

2º)

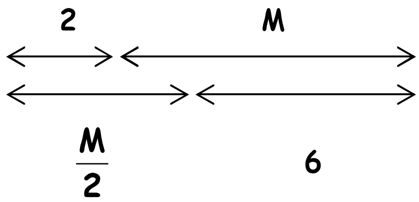


figura 4

4 – A figura 5 representa um retângulo do qual foram apagados alguns quadradinhos unitários. Sabendo que a área desse retângulo mede 77 u^2, calcule o seu perímetro, mas <u>você não pode completar os quadradinhos que estão faltando</u>.

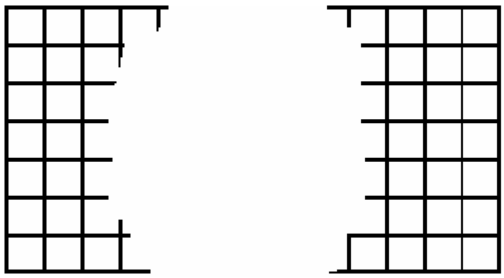


figura 5

5 – A área do trapézio da figura 6 mede 66 cm^2. De acordo com essa informação e as da figura 6, determine quanto mede a base maior desse trapézio.

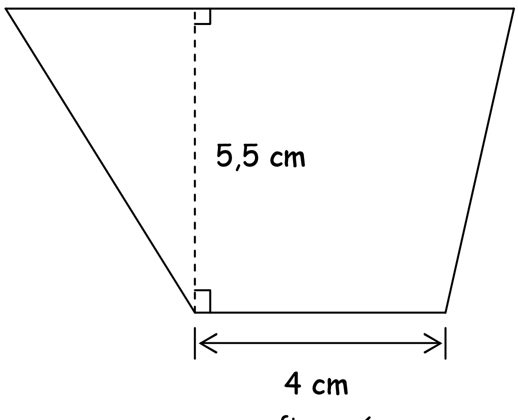


figura 6

6 – Para cada uma das figuras abaixo (7, 8 e 9) escreva uma sentença matemática que expresse a área **A** da figura.

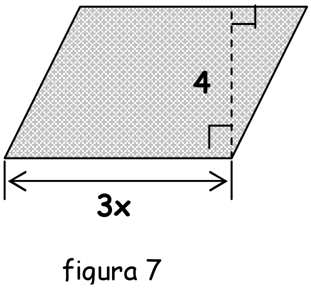


figura 7

Resposta:

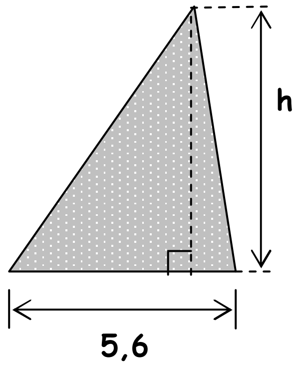


figura 8

Resposta:

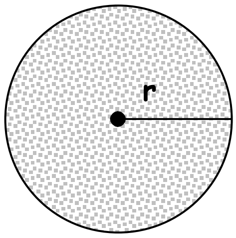


figura 9

Resposta:

7 – A figura 10 mostra um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio $r = 6$ *cm*, sendo ℓ_6 o lado do hexágono e $a_6 = 3\sqrt{3}$ *cm* seu apótema ($\sqrt{3} \cong 1{,}73$):

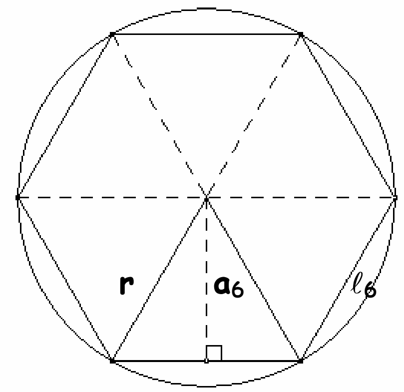


figura 10

a) Determine o perímetro $\mathbf{P}_{\ell_6}$ desse hexágono.

b) Determine a área $\boldsymbol{A}_{\ell_6}$ desse hexágono.

8 – A figura 11 mostra um hexágono regular circunscrito a uma circunferência de raio $r = 6\ cm$. Sendo L_6 a medida o lado desse hexágono, expressa pela fórmula $L_6 = \frac{2}{3} \cdot r \cdot \sqrt{3}$:

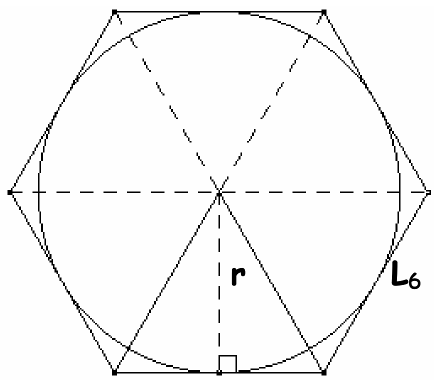


figura 11

a) Determine o perímetro P_{L_6} desse hexágono.

b) Determine a área A_{L_6} desse hexágono.

c) Estabeleça uma relação, utilizando a linguagem matemática, entre o valor do perímetro do hexágono regular inscrito na circunferência (questão 7) e o perímetro do hexágono regular circunscrito (questão 8), com o comprimento **C** da circunferência. Apresente uma conclusão.

d) Agora estabeleça uma relação, utilizando a linguagem matemática, entre o valor da área do hexágono regular inscrito na circunferência (questão 7) e a área do hexágono regular circunscrito (questão 8), com a área A_c do círculo. Apresente uma conclusão.

APÊNDICE D

MÓDULO DE ATIVIDADES DE ENSINO

Atividade 1 – Data: ___/___/___.

Uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição na área do retângulo

Alunos: _
_ _
_ _

Série: _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Turma:** _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Objetivo: Escrever a área de um retângulo de maneiras diferentes utilizando a distributividade.

Material: Malha quadriculada, quadradinhos de cartolina com 2 cm de lado (representando uma unidade quadrada para medir área), lápis, borracha.

Questão: Com os quadradinhos dados:

a) Monte um retângulo R_1 com área 24 u^2. Agora monte outro retângulo R_2 com área 12 u^2 e que uma das dimensões seja igual a uma das dimensões do R_1. Represente esses retângulos na malha quadriculada.

b) Agora junte os dois retângulos de maneira a formar um retângulo R_3 com área 36 u^2. Represente esse retângulo na malha quadriculada e escreva a medida de suas dimensões.

c) Escreva o valor da área de cada retângulo (R_1, R_2 e R_3) na forma de uma multiplicação de suas dimensões.

d) Escreva o valor da área de R_3 através da soma dos produtos das dimensões dos outros dois retângulos R_1 e R_2.

e) De que forma, diferente do item (d), você pode escrever o valor da área de R_3 utilizando suas dimensões? Lembre-se que o comprimento (ou a altura) está representado por duas medidas.

f) Agora represente os produtos abaixo como retângulos na malha quadriculada.

R_1 = 4u × 12u **R_2 = 6u × 9u** **R_3 = 8u × 5u**

Como você pode escrever a área desses retângulos de tal maneira que utilize a propriedade distributiva?

MALHA QUADRICULADA

Atividade 2 – Data: ___/___/___.

Uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição na escrita de expressões matemáticas para perímetro e área do retângulo

Alunos: _____________________________________
____
____

Série: _________ **Turma:** _____________

Objetivo: Escrever expressões matemáticas para o perímetro e área de retângulos, com uma dimensão desconhecida, utilizando a propriedade distributiva.

Material: Palitos de madeira, malha quadriculada, lápis e borracha.

PARTE I:

Questão: Monte os seguintes retângulos com os palitos de madeira e represente-os, com um desenho, na malha quadriculada:

Retângulo 1: Dimensões: 6 palitos e 3 palitos.

Retângulo 2: Dimensões: 5 palitos e 7 palitos.

Retângulo 3: Dimensões:3 palitos e 8 palitos.

Retângulo 4: Dimensões: 7 palitos e 2 palitos.

a) Calcule a área de cada um dos retângulos que você montou (a unidade de medida será um quadrado de palitos, 1 qp).

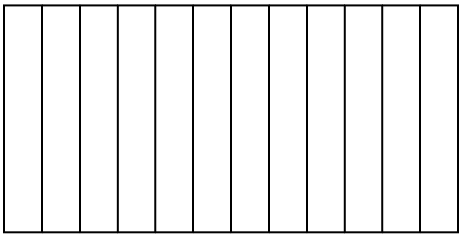
b) Calcule o perímetro de cada um dos retângulos que você montou (a unidade de medida será 1 palito).

c) Como você pode escrever o valor do perímetro de cada retângulo de forma que utilize a propriedade distributiva?

PARTE II:

Questão: Dados os retângulos abaixo, escreva uma expressão matemática para representar o perímetro **P** e outra expressão matemática para representar a área **A** de cada retângulo, utilizando a propriedade distributiva. Mas não é permitido completar as linhas que estão faltando.

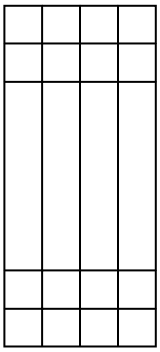
Retângulo 1 – Dividido em retângulos (finos) iguais:



Perímetro:

Área:

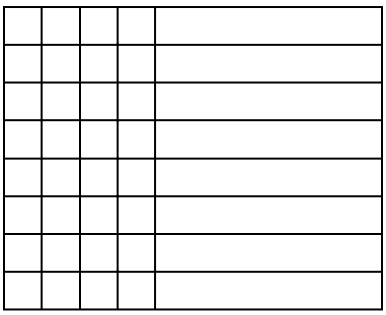
Retângulo 2 – Os quadradinhos são unitários:



Perímetro:

Área:

Retângulo 3 – Os quadradinhos são unitários:



Perímetro:

Área:

MALHA QUADRICULADA

<u>Atividade 3</u> – <u>Data:</u> ___/___/___.

Área do paralelogramo e do triângulo: fórmulas

Alunos: _
_ _
_ _

Série: _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Turma:** _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Objetivo: Escrever expressões para a área do paralelogramo e triângulo.

Material: Dois paralelogramos, desenhados numa folha de 20 cm por 30 cm. Régua, lápis, borracha e tesoura.

<u>Questão:</u> Dados os paralelogramos desenhados na cartolina, com o auxílio da régua meça sua base e sua altura e responda as questões:

a) Recorte o paralelogramo da folha. Apenas com um corte, como é possível cortar esse paralelogramo para montar um retângulo? Realize o corte e monte o paralelogramo.

b) Calcule o valor da área do retângulo que você montou. O que você observa sobre a área desse retângulo e a área do paralelogramo inicial? E quanto vale a área do paralelogramo inicial?

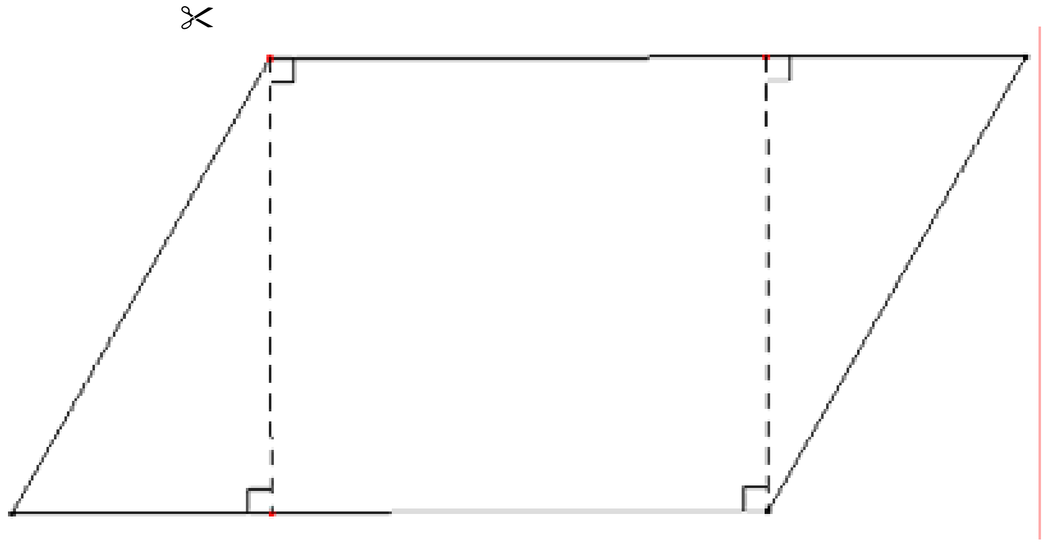
c) Do primeiro corte você obteve dois polígonos, quais são esses polígonos? Do polígono maior, recorte o triângulo. O que você observa sobre esse triângulo e aquele obtido no primeiro corte? Qual é a classificação desses triângulos? E qual a classificação do quadrilátero obtido?

d) Observe os polígonos que você obteve agora, o que você pode concluir em relação a decomposição do paralelogramo?

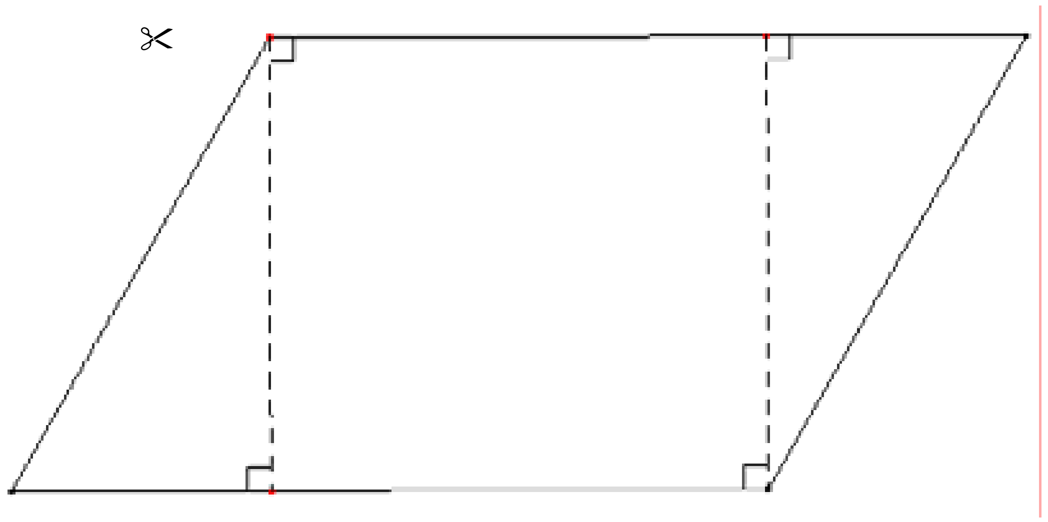
e) Agora no segundo paralelogramo, que corte você pode fazer no paralelogramo para obter apenas dois triângulos iguais, conservando o traçado das alturas? Realize esse corte. Qual é o valor da área dos triângulos obtidos? Explique como você obteve esse valor.

f) Dos dois paralelogramos você realizou alguns cortes e obteve alguns polígonos. Represente os segmentos desses polígonos por letras, mas observe os segmentos iguais e os diferentes. Agora escreva uma expressão para a área do paralelogramo e para área do triângulo utilizando as letras que você colocou.

PARALELOGRAMO 1



PARALELOGRAMO 2



Atividade 4 – Data: ___/___/___.

Perímetro e área do trapézio - Manipulação algébrica da fórmula de área

Alunos: _

_ _

_ _

Série: _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Turma:** _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Objetivo: Calcular o perímetro e a área do trapézio e manipular a fórmula de área para encontrar uma das varáveis.

Material: Um trapézio escaleno, desenhado numa folha. Régua, lápis, borracha e tesoura.

Questão: De posse do trapézio dado, responda:

a) Com o auxílio da régua, meça e escreva todos os comprimentos do trapézio, em cm.

Base maior = ____________

Base menor = ____________

Altura = ___________

Lados inclinados = ___________ e ____________

b) Com base nos dados do item anterior, qual é o valor do perímetro desse trapézio?

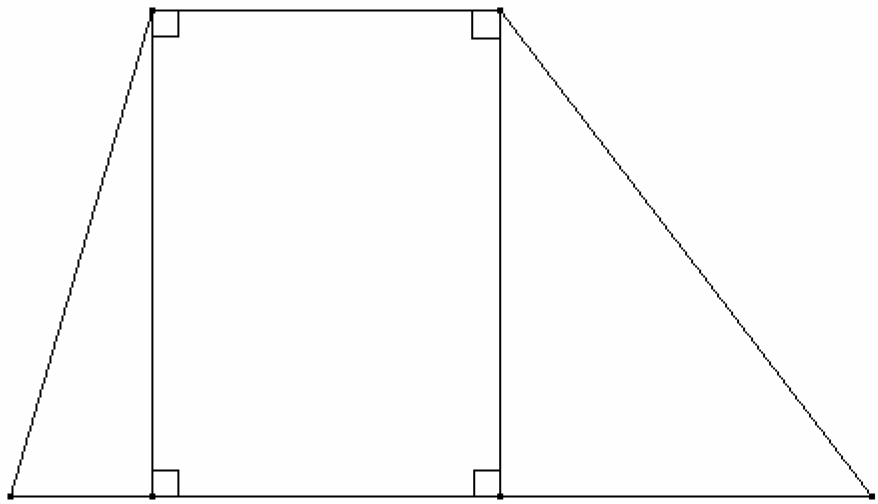
c) Observe o trapézio dado, que figuras são formadas pelo traçado das alturas do trapézio? É possível determinar a área de cada uma dessas figuras? Calcule o valor da área de cada uma das figuras que compõem o trapézio dado.

d) De posse dos valores do item anterior, qual é o valor da área do trapézio dado?

e) Agora represente todos os segmentos do trapézio por uma letra. Escreva para cada uma das figuras que compõem o trapézio uma expressão simbólica que representa sua área. Obtenha a fórmula para a área do trapézio através dessas expressões que você escreveu.

f) Utilizando a fórmula para a área do trapézio que você obteve no item anterior, determine o comprimento da outra base de um trapézio com área medindo 175 cm^2, uma das bases medindo 8 cm e a altura medindo 17,5 cm, utilizando os princípios de equivalência e as propriedades da igualdade.

TRAPÉZIO ESCALENO



Atividade 5 – Data: ___/___/___.

Definição e elementos da circunferência, círculo e esfera

Alunos: _
_ _
_ _

Série: _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Turma:** _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Objetivo: Por meio de comparação entre a circunferência, o círculo e a esfera, distinguir suas características principais e seus elementos.

Material: Uma esfera de isopor, um círculo e uma circunferência de plástico, uma folha de papel, compasso, régua, lápis e borracha.

Questão: De posse dos três objetos, responda:

a) Diga qual dos objetos é a esfera, o círculo e a circunferência. Justifique sua classificação descrevendo as principais diferenças entre os três objetos

Objeto 1: _
_ _
_ _
_ _

Objeto 2: _
_ _
_ _
_ _

Objeto 3: _
_ _
_ _
_ _

b) Com o compasso, desenhe uma circunferência de raio igual a 5 cm. Marque os pontos A, B e C na “borda” da circunferência e o ponto O no centro. Trace um segmento de reta ligando o centro a cada um desses pontos. O que você observa sobre a distância do centro da circunferência para esses pontos?

c) Desenhe na circunferência um segmento de reta passando pelo seu centro e que tenha suas extremidades na circunferência. Identifique as extremidades desse segmento pelas letras D e E. Qual a relação entre o comprimento desse segmento e os comprimento dos segmentos do item (b)?

d) Na circunferência do item anterior represente os seguintes elementos: raio, arco, diâmetro, corda e reta tangente.

e) Escreva uma definição para circunferência, círculo e esfera.

Circunferência: ____

____

____

Circulo: ____

____

____

Esfera: ____

____

____

<u>Atividade 6</u> – <u>Data:</u> ___/___/___.

Polígonos regulares inscritos na circunferência: quadrado e hexágono regular

Alunos: _

_ _

_ _

Série: _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Turma:** _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Objetivo: Inscrever o quadrado e o hexágono regular na circunferência e verificar suas propriedades.

Material: uma folha de papel, régua, compasso, lápis e borracha.

<u>Questão:</u> Desenhe uma circunferência com 6 cm de raio e responda os itens abaixo:

a) Marque um diâmetro dessa circunferência. Com o auxílio do compasso trace a mediatriz desse diâmetro. (Obs: **Mediatriz** é a reta perpendicular a um segmento que passa por seu ponto médio, dividindo-o em duas partes iguais.)

b) Indique as extremidades do diâmetro pelos pontos A e B, e os encontros da mediatriz com a circunferência por C e D. Quantos arcos foram obtidos? Esses arcos possuem mesmo comprimento? Justifique.

c) Trace os segmentos AC, AD, DB e BC. Os segmentos AB e CD representam o que do polígono obtido? Observe os triângulos obtidos, com base no comprimento de seus lados e na medida dos ângulos internos, diga que propriedades eles apresentam.

d) De acordo com as propriedades identificadas no item anterior, qual é a classificação do polígono obtido?

e) Desenhe outra circunferência com 6 cm de raio e trace um diâmetro. Divida a circunferência em seis arcos iguais, utilizando a abertura do compasso com o mesmo comprimento do raio da circunferência. Indique as extremidades do diâmetro pelos pontos A e B e as intersecções obtidas dos arcos com a circunferência pelos pontos C, D, E e F.

f) Trace os segmentos AE, EF, FB, BC, CD e DA. Como é chamado esse polígono de acordo com o seu número de lados? Trace suas diagonais e diga a classificação dos triângulos que foram obtidos (Qual a medida dos lados de cada triângulo? E a medida dos ângulos internos?). De acordo com as propriedades desses triângulos, como pode ser classificado o polígono inscrito?

g) Nos itens anteriores você desenhou dois polígonos inscritos numa circunferência e observou algumas propriedades desses polígonos. Tire uma conclusão para todo polígono que pode ser inscrito numa circunferência.

Atividade 7 – Data: ___/___/___.

Área do círculo pelo processo de contagem

Alunos: ____

____

____

Série: __________ **Turma:** ______________

Objetivo: Encontrar a área do círculo por aproximação e verificar as limitações desse tipo de procedimento.

Material: uma folha de papel milimetrado, compasso, lápis e borracha.

Questão: Na folha de papel milimetrado desenhe um círculo de raio 6 cm :

a) Encontre um valor aproximado para a área desse círculo, considerando cada quadradinho de 1 cm^2 como a unidade de medida de área.

b) Agora considere a unidade de medida de área como $\frac{1}{2}cm^2$ e dê um valor aproximado para a área desse círculo.

c) Dos valores que você encontrou nos itens (a) e (b), qual dos dois melhor expressa a área do círculo? Esses valores fornecem precisamente a área desse círculo? Por que?

<u>Atividade 8</u> – <u>Data:</u> ___/___/___.

Obtenção da fórmula do perímetro e da área do hexágono regular inscrito e generalização para um polígono regular de n lados

Alunos: _
_ _
_ _

Série: _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Turma:** _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Objetivo: Obter a fórmula do perímetro e da área do hexágono regular inscrito e generalizar para a área de um polígono regular de n lados.

Material: Folha de papel ofício, régua, compasso, lápis, borracha.

<u>Questão:</u> Na folha de folha de papel ofício, desenhe um hexágono regular inscrito num círculo de raio igual a 6 cm e divida o hexágono em 6 triângulos eqüiláteros.

a) Se você somar as medidas das 6 cordas sobre o círculo, o que você vai obter em ralação ao hexágono? Seja P_H o perímetro do hexágono. Escreva a expressão para o perímetro do hexágono com ℓ_6 representando a medida do lado.

b) Trace a altura de cada triângulo eqüilátero e represente-a pela letra ***h***. Escreva a expressão para área (A_T) de cada um desses triângulos. Agora expresse a área do hexágono (A_H) em função da área do triângulo eqüilátero.

c) O que a altura (***h***) de cada triângulo representa em relação ao hexágono? Encontre a expressão para esse segmento em função do raio do círculo (***R***).

d) Utilizando as expressões do item (b) e (c), obtenha a fórmula para área do hexágono A_H em função apenas do raio ***R*** da circunferência.

e) Calcule o valor da área do hexágono em questão.

f) Escreva de outra maneira a fórmula para a área do hexágono, obtida no item (e), de modo que fique em função do perímetro (P_H) e do apótema do hexágono (a_p)?

g) De acordo com os procedimentos que você utilizou no item (e), escreva uma fórmula que nos permite calcular a área de qualquer polígono regular com *n lados*.

<u>Atividade 9</u> – <u>Data:</u> ___/___/___.

Cálculo da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro

Obtenção do valor aproximado de pi calculado experimentalmente

Fórmula do comprimento da circunferência

Alunos: _
_ _
_ _

Série: _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Turma:** _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Objetivo: Obter, experimentalmente, a constante pi através da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro. Escrever a fórmula para calcular o comprimento de uma circunferência.

Material: Tampas plásticas em formato circular com diâmetros diferentes, fita métrica, calculadora, lápis, borracha.

<u>Questão:</u> De posse das tampas plásticas:

a) Com o auxílio da fita métrica e uma régua, meça o comprimento da circunferência de cada tampa, seu respectivo diâmetro, e anote essas medidas.

b) Encontre a razão entre a medida do comprimento de cada circunferência e seu respectivo diâmetro, anote o resultado com até quatro casas decimais. O que você observa sobre os valores obtidos?

c) O que a razão $\frac{\textit{comprimento da circunferência}}{\textit{diâmetro}}$ significa? Represente essa razão pela letra grega π (*pi*) e escreva uma expressão simbólica estabelecendo uma relação entre *pi* e essas grandezas: comprimento ***C*** e diâmetro ***D***.

d) A partir da expressão que você escreveu no item anterior, escreva uma fórmula que forneça o comprimento ***C*** da circunferência em função da medida do raio ***R*** dessa circunferência.

<u>Atividade 10</u> – <u>Data:</u> ___/___/___.

Obtenção da fórmula para a área do círculo

Alunos: _

_ _

_ _

Série: _ _ _ _ _ _ _ _ _ **Turma:** - - - - - - - - - - - - -

Objetivo: Obter a fórmula para a área do círculo a partir da generalização da fórmula da área do polígono regular de n lados.

Material: Papel ofício, lápis, borracha.

<u>Questão:</u> Na **atividade 8** realizamos alguns procedimentos e obtivemos a fórmula para a área do polígono regular de n lados. Vamos retomar esses procedimentos a partir do hexágono regular.

a) Desenhe um círculo de raio ***R*** e inscreva um hexágono regular. Escreva a expressão para a área do hexágono em função da medida do lado do hexágono ℓ_6 e da medida do apótema $\boldsymbol{a_6}$.

b) Considere agora um polígono de ***n*** lados, com medida de lado ℓ e medida do apótema $\boldsymbol{a}$. A partir da expressão da área do hexágono, escreva a fórmula para a área ***A*** do polígono regular de n lados.

c) O que acontece com a medida do lado ℓ do polígono regular se o número de lados $\boldsymbol{n}$ do polígono for muito grande? E o que acontece com a medida do apótema $\boldsymbol{a}$ desse polígono?

d) Nesse caso em que o número de lados do polígono regular é muito grande, o que vai acontecer com o valor do perímetro desse polígono em relação a circunferência? Dessa forma, como fica a fórmula para a área do polígono regular?

e) Com base nas conclusões dos itens (c) e (d), escreva uma expressão para a área do círculo $\boldsymbol{A_C}$, em função da medida do raio $\boldsymbol{R}$.

APÊNDICE E

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA FINAL

ESCOLA: ____
NOME: ____
SÉRIE: ___________________ **DATA:** ___ /___ /___.

LEIA COM ATENÇÃO E RESPONDA AS QUESTÕES ABAIXO

1 – Calcule o valor da área do retângulo abaixo de duas formas diferentes, sendo uma delas utilizando a distributividade.

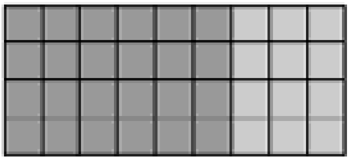


figura 1

2 – Considerando cada quadradinho da malha quadriculada como uma unidade quadrada de área (1 u^2), determine um valor aproximado para a área do círculo desenhado na malha:

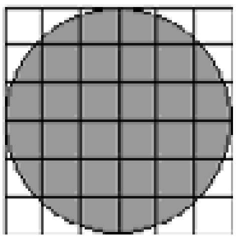
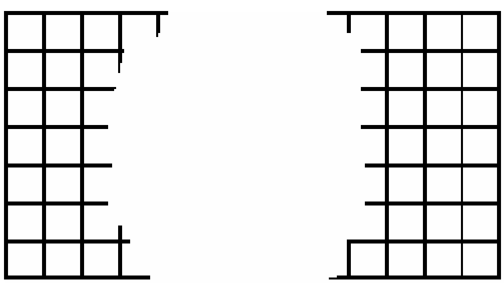


figura 2

3 – A figura 3 representa um retângulo do qual foram apagados alguns quadradinhos unitários. Sabendo que a área desse retângulo mede **77** u^2, calcule o seu perímetro, mas <u>você não pode completar os quadradinhos que estão faltando</u>.



4 – A área do trapézio da figura 4 mede **66 cm^2**. De acordo com essa informação e as da figura 4, determine quanto mede a base maior desse trapézio.

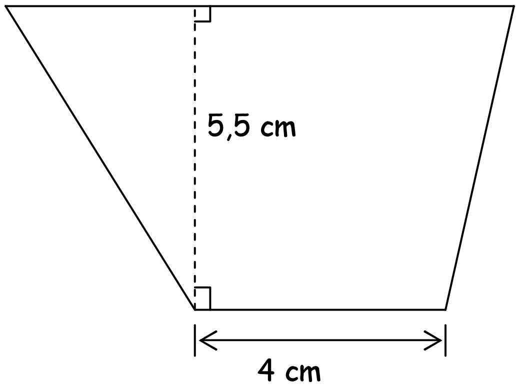


figura 4

5 – Escreva uma **expressão matemática** que forneça a área **A** de cada uma das figuras abaixo (5, 6 e 7).

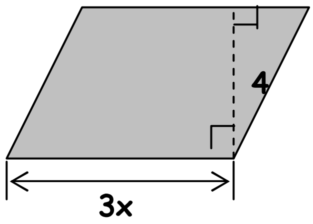


figura 5

Resposta:

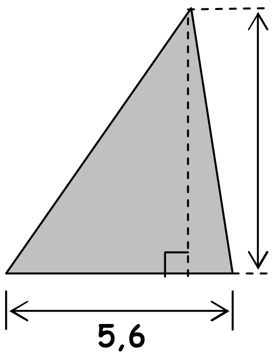


figura 6

Resposta:

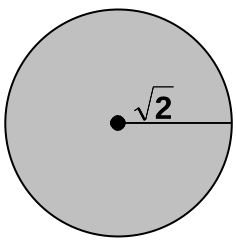


figura 7

Resposta:

6 – A figura 8 mostra um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio **R = 6 cm**, sendo ℓ_6 o lado do hexágono e $\mathbf{a_6} = \mathbf{3\sqrt{3}}$ **cm** seu apótema ($\sqrt{3} \cong 1,73$):

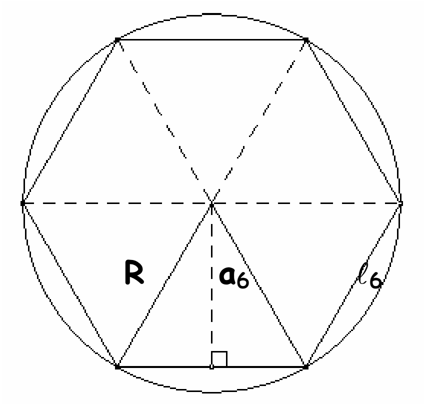


figura 8

a) Determine o perímetro P_h desse hexágono.

b) Determine a área A_h desse hexágono.

7 – A figura 9 mostra um hexágono regular circunscrito a uma circunferência de raio **R = 6 cm**. Sendo L_6 a medida o lado desse hexágono, expressa pela fórmula $L_6 = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \sqrt{3}$, onde $\sqrt{3} \cong 1,73$:

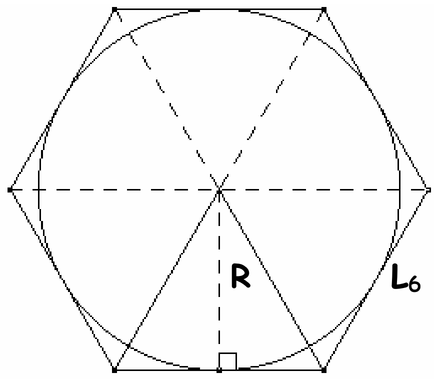


figura 9

a) Determine o perímetro P_H desse hexágono.

b) Determine a área A_H desse hexágono.

8 – As circunferências das questões 6 e 7 possuem a mesma medida de raio (**R = 6 cm**). De acordo com esse dado responda:

a) Calcule o comprimento ***C*** da circunferência e a área $\mathbf{A_C}$ do círculo limitado por essa circunferência (considere π = 3,14).

b) Compare o valor do perímetro do hexágono regular inscrito na circunferência $\mathbf{P_h}$ (questão 6), com o comprimento ***C*** da circunferência (item a) e o valor do perímetro do hexágono regular circunscrito $\mathbf{P_H}$ (questão 7). Estabeleça uma relação, utilizando a linguagem matemática, entre esses valores ($\mathbf{P_h}$, ***C*** e $\mathbf{P_H}$) e apresente uma conclusão.

c) Agora compare o valor da área do hexágono regular inscrito na circunferência $\mathbf{A_h}$ (questão 6), com a área $\mathbf{A_C}$ do círculo (item a) e o valor da área do hexágono regular circunscrito $\mathbf{A_H}$ (questão 7). Estabeleça uma relação, utilizando a linguagem matemática, entre esses valores ($\mathbf{A_h}$, $\mathbf{A_C}$ e $\mathbf{A_H}$) e apresente uma conclusão.

Muito obrigada por sua colaboração!

APÊNDICE F

ATIVIDADES DO MINI-CURSO CCSA-UFRN

Atividade 1

Obtenção da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro

Nome: ____ **Data:** ___/___/___

Objetivo: Obter uma aproximação da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro através do cálculo dos perímetros de dois polígonos: um hexágono regular inscrito e um quadrado circunscrito a circunferência.
Material: Par de esquadros, compasso, régua, lápis, borracha.

Questão: Utilizando os instrumento de desenho:

a) Desenhe um quadrado $\boldsymbol{Q}$ de lado $\boldsymbol{L_4 = 10cm}$. Escreva uma expressão para o perímetro $\boldsymbol{P_Q}$ desse quadrado. Determine o valor desse perímetro.

b) Desenhe agora uma circunferência de diâmetro ***D = 10cm*** inscrita nesse quadrado.

c) Determine a razão entre o perímetro P_Q do quadrado e o diâmetro ***D*** da circunferência.

d) Agora desenhe um hexágono regular inscrito na circunferência. Escreva uma expressão para o perímetro P_H do hexágono regular com a medida do lado igual a L_6. Qual é o valor desse perímetro?

e) Determine a razão entre o perímetro P_H do hexágono regular e o diâmetro ***D*** da circunferência.

f) Seja ***C*** o comprimento da circunferência. Estabeleça uma relação, utilizando a linguagem matemática, entre o perímetro do hexágono regular P_H, o comprimento da circunferência ***C*** e o perímetro do quadrado P_Q.

g) Utilizando os princípios de equivalência, reescreva a relação que você obteve no item anterior de forma que você possa utilizar as razões encontradas nos itens (c) e (e). A que conclusão você pode chegar?

Atividade 2

Método dos perímetros (Processo de Arquimedes)

Nome: ____ **Data:** ___/___/___

Objetivo: Obter o valor de pi através do cálculo dos perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos a circunferência. Chegar ao Processo de Arquimedes.

Material: Lápis, borracha.

Questão: Responda os itens abaixo:

a) Obtemos na **atividade 1** que a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro resulta num número. Indique esse número pela letra grega π (pi). Escreva essa razão e expresse o comprimento ***C*** da circunferência em função da medida de seu raio ***R***.

b) Assuma uma circunferência de raio $\boldsymbol{R = \frac{1}{2}}$ unidade. Qual é o valor do comprimento da circunferência nesse caso?

c) Na **atividade 1**, que relação foi estabelecida entre os perímetros dos polígonos regulares e o comprimento da circunferência?

d) Utilizando o resultado do item (b) e a conclusão do item (c), escreva uma relação, utilizando a linguagem matemática, entre os perímetros dos polígonos regulares inscritos (***P_i***) e circunscritos (***P_c***) a circunferência e π. O que você pode concluir dessa relação?

e) Pense um pouco sobre a relação e a conclusão que você chegou no item anterior. O que poderia ser feito para se ter uma maior aproximação para o valor de π, utilizando os valores dos perímetros dos polígonos regulares?

Atividade 3

Valor aproximado do número π pelo método de Arquimedes, considerando um quadrado inscrito e circunscrito a uma circunferência.

Nome: ____ **Data:** ___/___/___

Objetivo: Obter um valor aproximado para pi através do cálculo dos perímetros (Processo de Arquimedes) de um quadrado inscrito e circunscrito a circunferência de raio igual a $\frac{1}{2}$ unidade.

Material: Par de esquadros, régua, compasso, lápis, borracha.

Questão: Responda os itens abaixo:

a) Desenhe uma circunferência de raio ***R*** e inscreva um quadrado nessa circunferência.

b) Obtenha uma expressão que nos forneça a medida do lado ℓ_4 desse quadrado inscrito, em função da medida do raio ***R*** da circunferência.

c) Assuma que a medida do raio seja igual a $\frac{1}{2}$ unidade. Qual será o valor do perímetro p_4 desse quadrado? (Considere $\sqrt{2} = 1{,}414$).

d) Agora desenhe uma quadrado circunscrito a mesma circunferência de raio R. Qual é a expressão que fornece a medida do lado L_4 desse quadrado em função de R?

e) Admitindo que o raio seja igual a $\frac{1}{2}$ unidade, quanto mede o lado L_4 do quadrado circunscrito? Determine o valor do perímetro P_4 desse quadrado.

f) De posse dos valores dos perímetros p_4 e P_4 e utilizando o processo de Arquimedes obtenha um valor aproximado para π.

Atividade 4

Valor aproximado do número π pelo método de Arquimedes, considerando um hexágono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência

Nome: ____ **Data:** ___/___/___

Objetivo: Obter um valor aproximado para pi através do cálculo dos perímetros (Processo de Arquimedes) de um hexágono regular inscrito e circunscrito a circunferência de raio igual a $\frac{1}{2}$.

Material: Lápis, borracha, régua, compasso, esquadros.

Questão: Responda os itens abaixo:

a) Desenhe uma circunferência de raio ***R*** e inscreva um hexágono regular nessa circunferência.

b) Qual é a relação entre a medida do lado ℓ_6 desse hexágono regular inscrito e a medida do raio ***R*** da circunferência?

c) Assuma que a medida do raio seja igual a $\frac{1}{2}$ unidade. Qual será o valor do perímetro p_6 desse hexágono?

d) Agora desenhe um hexágono regular circunscrito a mesma circunferência de raio R. Qual é a expressão que fornece a medida do lado L_6 desse hexágono em função de R?

e) Admitindo que o raio seja igual a $\frac{1}{2}$ unidade, quanto mede o lado L_6 do hexágono circunscrito? Determine o valor do perímetro P_6 desse hexágono. (Considere $\sqrt{3} = 1{,}732$).

f) De posse dos valores dos perímetros p_6 e P_6 e utilizando o processo de Arquimedes obtenha um valor aproximado para π.

g) Compare o valor de pi obtido nessa atividade com o valor obtido na atividade anterior. O que você observa? A qual conclusão podemos chegar quanto ao número de lados dos polígonos regulares que se inscrevem e circunscrevem a uma circunferência e o valor de pi?

Atividade 5

Obtenção da fórmula para a área do círculo

Nome: ____ **Data:** ___/___/___

Objetivo: Obter a fórmula para a área do círculo a partir da generalização da fórmula da área do polígono regular de n lados.

Material: Lápis, borracha, régua, compasso, esquadros.

Questão: Responda os itens abaixo:

a) Desenhe um círculo de raio ***R*** e inscreva um quadrado. Escreva a expressão para a área do quadrado em função da medida do lado ℓ_4 e da medida do apótema $\boldsymbol{a_4}$.

b) Agora desenhe outro círculo também de raio ***R*** e inscreva um hexágono regular. Escreva a expressão para a área do hexágono em função da medida do lado do ℓ_6 e da medida do apótema $\boldsymbol{a_6}$.

c) Considere agora um polígono de ***n*** lados, com medida de lado ℓ e medida do apótema ***a***. A partir das expressões para a área do quadrado e para a área do hexágono regular, escreva a fórmula para a área de um polígono regular de **n** lados.

d) O que acontece com a medida do lado ℓ do polígono regular se o número de lados ***n*** do polígono for muito grande? E o que acontece com a medida do apótema ***a*** desse polígono?

e) Nesse caso em que o número de lados do polígono regular é muito grande, o que vai acontecer com o valor do perímetro desse polígono? Esse valor vai se aproximar de qual valor em relação à circunferência? Dessa forma, como fica a fórmula para a área do polígono regular?

f) Com base nas conclusões dos itens (d) e (e), escreva uma expressão para a área do círculo A_C, em função da medida do raio ***R***.