



**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ  
CAMPUS CURITIBA**

**GERÊNCIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA E INFORMÁTICA INDUSTRIAL - CPGEI**

**PAULO DE TARSO NEVES JUNIOR**

**ANÁLISE TEMPORAL DO ESPECTRO ÓPTICO  
EM REDES DE BRAGG EM FIBRA**

**TESE DE DOUTORADO**

**CURITIBA  
MAIO -2008.**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ**  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática  
Industrial

---

**TESE**  
apresentada à UTFPR  
para obtenção do título de

**DOUTOR EM CIÊNCIAS**

por

**PAULO DE TARSO NEVES JUNIOR**

---

**ANÁLISE TEMPORAL DO ESPECTRO ÓPTICO EM  
REDES DE BRAGG EM FIBRA**

---

Banca Examinadora:

Presidente e Orientador:

**PROF. DR. ALEXANDRE DE A. PRADO POHL**

**UTFPR**

Examinadores:

**PROF. DR. ARTHUR MARTINS B. BRAGA**

**PUC-RIO**

**PROF. DR. HYPOLITO JOSÉ KALINOWSKI**

**UTFPR**

**PROF. DR. MARCELO E. VIEIRA SEGATTO**

**UFES**

**PROF<sup>a</sup>. DR. MILDRED BALLIN HECKE**

**UFPR**

Curitiba, Maio de 2008.

**PAULO DE TARSO NEVES JUNIOR**

**ANÁLISE TEMPORAL DO ESPECTRO ÓPTICO EM REDES DE  
BRAGG EM FIBRA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial do Universidade Tecnológica Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de “Doutor em Ciências” – Área de Concentração: Telemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre de A. Prado Pohl

Curitiba

2008

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca da UTFPR – Campus Curitiba

N511a Neves Junior, Paulo de Tarso

Análise temporal do espectro óptico em redes de Bragg em fibra / Paulo de Tarso Neves Junior. Curitiba. UTFPR, 2008

XVI, 137 p. il. ; 30 cm

Orientador: Prof. Dr. Alexandre de Almeida Prado Pohl

Tese (Doutorado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial. Curitiba, 2008

Bibliografia: p. 128 – 137

1. Redes de longa distância. 2. Redes de Bragg. 3. Dispositivos piezoelétricos. Dispositivos de armazenamento óptico. I. Pohl, Alexandre de Almeida Prado, orient. II. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Informática Industrial. III. Título.

CDD: 004.67

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a minha esposa Dora Urban pelos anos de privações suportados estoicamente, ao meu orientador Prof. Dr. Alexandre de Almeida Prado Pohl, ao meu amigo Roberson Assis Oliveira pelo auxílio na usinagem das peças e aos professores do PPGEM (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Materiais) Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira, Prof. Dr. Paulo André de C. Beltrão, Prof. Dr. Marco Antônio Luersen e, especialmente, ao Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri por me apresentar o extenso e fascinante universo das vibrações mecânicas, pelas suas sugestões e seu apoio de extrema importância para a realização de parte deste trabalho.

*Timeo hominem unius libri*

Tomás de Aquino

(Temo o homem de um só livro)

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	viii
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	xii
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	xii
<b>RESUMO</b> .....	xv
<b>ABSTRACT</b> .....	xvi
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1 MOTIVAÇÕES.....	1
1.2 OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DO TRABALHO.....	3
<b>2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS</b> .....	5
2.1 INTRODUÇÃO.....	5
2.2 DEFINIÇÃO DE TENSÃO .....	5
2.2.1 Estado de tensão.....	6
2.3 DEFINIÇÃO DE DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO.....	8
2.3.1 Estado de deformação.....	8
2.4 LEI DE HOOKE, MÓDULO DE YOUNG E RAZÃO DE POISSON.....	9
2.5 CONSTANTES ELÁSTICAS.....	11
2.6 REDES DE BRAGG EM FIBRA ÓPTICA.....	13
2.7 A FIBRA ÓPTICA SOB TRAÇÃO E COMPRESSÃO.....	16
2.8 SENSIBILIDADE À PRESSÃO HIDROSTÁTICA.....	24
2.9 SENSIBILIDADE À TEMPERATURA.....	24
<b>3 EQUAÇÕES DA ELASTODINÂMICA LINEAR E PRINCÍPIOS DA VISCOELASTICIDADE LINEAR APLICADOS EM FBG</b> .....	27
3.1 INTRODUÇÃO.....	27
3.2 DESLOCAMENTO DO COMPRIMENTO DE ONDA DE BRAGG EM UMA FBG SUBMETIDA À DEFORMAÇÃO LONGITUDINAL.....	27
3.3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE NAVIER-CAUCHY.....	28
3.4 MOVIMENTOS EM 1-D (UMA DIMENSÃO).....	31
3.5 CAMADA FINITA ENGASTADA SOB TRAÇÃO DINÂMICA.....	33
3.6 BARRA UNIFORME SUBMETIDA À TRAÇÃO LONGITUDINAL.....	36
3.7 OSCILAÇÃO LIVRE DA FIBRA COM DESLOCAMENTO INICIAL.....	37
3.8 FIBRA SUBMETIDA A UMA TRAÇÃO DEGRAU.....	42
3.9 PRINCÍPIOS DA VISCOELASTICIDADE LINEAR E MODELOS	



VISCOELÁSTICOS.....	45
3.9.1 Modelo de Kelvin.....	47
3.10 OSCILAÇÃO LIVRE DA FIBRA COM DESLOCAMENTO INICIAL CONSIDERANDO O AMORTECIMENTO.....	48
3.11 FIBRA SUBMETIDA A UMA TRAÇÃO DEGRAU CONSIDERANDO O AMORTECIMENTO.....	51
3.12 FIBRAS POLIMÉRICAS.....	54
<b>4 COMBINAÇÃO DOS MÉTODOS MODOS ASSUMIDOS E MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA APLICADA EM FBG.....</b>	<b>57</b>
4.1 INTRODUÇÃO.....	57
4.2 COORDENADAS GENERALIZADAS E EQUAÇÕES DE LAGRANGE.....	57
4.3 EQUAÇÕES DE LAGRANGE PARA SISTEMAS LINEARES.....	59
4.3.1 Espaço de estado e ponto de equilíbrio.....	60
4.3.2 Pequenos deslocamentos.....	61
4.4 O MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS.....	63
4.5 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO MATRICIAL DE MOVIMENTO COM AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL.....	66
4.6 RESPOSTA GERAL PARA UMA FONTE DE EXCITAÇÃO HARMÔNICA.....	72
4.6.1 Resposta em regime permanente.....	72
4.6.2 Resposta em regime transiente (oscilação livre).....	73
4.6.3 Aplicação das condições iniciais.....	74
4.7 O MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS EM UMA FIBRA ENGASTADA- LIVRE.....	74
4.7.1 Fibra engastada-livre com amortecimento concentrado.....	79
4.7.2 Fibra engastada-livre com amortecimento distribuído.....	81
4.8 O MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS APLICADO EM MODULADORES ACUSTO-ÓPTICOS.....	82
4.9 O MÉTODO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA.....	85
4.10 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS MODOS ASSUMIDOS E MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA COMBINADOS.....	89
<b>5 SINTONIZAÇÃO COM MOLA DE ENTALHE.....</b>	<b>93</b>
5.1 INTRODUÇÃO.....	93
5.2 A MOLA DE ENTALHE.....	94

5.3 O ATUADOR PIEZOELÉTRICO.....	97
5.3.1 Capacidade de carga.....	98
5.3.2 Força gerada.....	99
5.4 CONSIDERAÇÕES PARA O PROJETO DE UMA MOLA DE ENTALHE EM UM SINTONIZADOR DE FBG.....	101
5.5 O APARATO EXPERIMENTAL.....	105
5.5.1 Funcionamento do sistema.....	107
5.5.2 Características da FBG utilizada.....	108
5.6 COMPORTAMENTO DO SINTONIZADOR SUBMETIDO A UMA CARGA LENTA.....	110
5.7 SINTONIZADOR SUBMETIDO A UMA CARGA DEGRAU.....	113
5.8 AMORTECIMENTO POR MOLA DE ABSORÇÃO.....	114
5.9 MODIFICAÇÃO DO SINAL POR FILTRO ELETRÔNICO.....	117
5.10 LIGAÇÃO VISCOELÁSTICA.....	121
<b>CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>125</b>
CONCLUSÃO.....	125
TRABALHOS FUTUROS.....	126
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>128</b>
<b>PUBLICAÇÕES RELACIONADAS COM ESTA TESE.....</b>	<b>135</b>
<b>ANEXO 1 – ESTADO DE DEFORMAÇÃO</b>	
A2.1 ESTADO DE DEFORMAÇÃO	
<b>ANEXO 2 – MÉTODO DA EXPANSÃO DAS AUTOFUNÇÕES</b>	
A3.1 SOLUÇÃO PARA AS EQUAÇÕES DA ELASTODINÂMICA	
<b>ANEXO 3 – MODELO DE MAXWELL E MODELO GENERALIZADO DE MAXWELL</b>	
A3.1 MODELO DE MAXWELL	
A3.2 MODELO GENERALIZADO DE MAXWELL	
<b>ANEXO 4 - EQUAÇÕES DE LAGRANGE</b>	
A4.1 PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL, DE D’ALEMBERT E DE HAMILTON	

## LISTA DE FIGURAS

2.1	A tensão age no interior dos sólidos.....	6
2.2	Volume infinitesimal destacado do corpo.....	7
2.3	Deslocamento total do ponto $P$ após a deformação do corpo.....	8
2.4	Alongamento da barra com o aumento do comprimento e a diminuição das demais dimensões.....	9
2.5	Gravação com máscara de fase.....	15
2.6	Incidência e reflexão em uma rede de Bragg.....	15
2.7	Tipos mais comuns de variação do índice efetivo.....	16
2.8	Alongamento da fibra óptica com o aumento do comprimento e a diminuição das demais dimensões. Os eixos cartesianos seguem a notação indicial.....	17
2.9	Deslocamento do comprimento de onda de Bragg em função da deformação longitudinal para um comprimento de onda de Bragg inicial de 1550 nm.....	20
2.10	Deslocamento do comprimento de onda de Bragg em função da força aplicada com um comprimento de onda de Bragg inicial de 1550 nm.....	21
2.11	Fibra revestida biengastada sob compressão apresentando deflexão global (a) e deflexão local (b). .....	23
3.1	Gráfico $C_p/C_s$ versus Razão de Poisson.....	31
3.2	Movimento generalizado do plano.....	32
3.3	Camada finita engastada sob tração dinâmica.....	33
3.4	Função $F(x,t)$ .....	35
3.5	FBG modelada como barra engastada. ....	37
3.6	Deslocamento e deformação na fibra no instante inicial $t = 0$ . ....	38
3.7	Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante $t = 1$ ns. ....	40
3.8	Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante $t = 1$ $\mu$ s. ....	40
3.9	Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante $t = 3$ $\mu$ s. ....	41
3.10	Comportamento temporal comprimento de onda de Bragg.....	41
3.11	Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante $t = 1$ ns para a fibra submetida a uma tração degrau.....	43
3.12	Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante $t = 1$ $\mu$ s para a fibra submetida a uma tração degrau.....	43
3.13	Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante $t = 3$ $\mu$ s	

	para a fibra submetida a uma tração degrau.....	44
3.14	Comportamento temporal do comprimento de onda para a fibra submetida a uma tração degrau.....	44
3.15	Modelo de Kelvin. ....	47
3.16	Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante $t = 1\mu s$ considerando o amortecimento.....	50
3.17	Comportamento temporal do comprimento de onda de Bragg levando em conta o amortecimento.....	51
3.18	Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante $t = 1\mu s$ considerando o amortecimento.....	52
3.19	Comportamento temporal do comprimento de onda de para a fibra submetida a uma tração degrau levando em conta o amortecimento.....	52
3.20	Deslocamento de um ponto da extremidade livre ( $x = L$ ) para diferentes valores de amortecimento.....	53
3.20	Comparação entre a deformação nas fibras de sílica e polimérica no instante $t = 1\mu s$ desprezando o amortecimento.....	55
3.21	Comparação entre o tempo de estabilização do comprimento de onda de Bragg nas fibras de sílica e polimérica usando o tempo de retardo $t_r = 1\mu s$ .....	56
4.1	a) Viga engastada de seção transversal variável. b) Modelo discretizado de viga, representado por 4 elementos e 4 graus de liberdade.	58
4.2	a) Barra contínua engastada-livre com massa e rigidez concentradas. b) Barra contínua engastada-livre com amortecimento concentrado.	65
4.3	Espaços utilizados para encontrar as soluções para o modelo de amortecimento não proporcional.....	71
4.4	a) Erro (em porcentagem) entre as 20 primeiras frequências naturais exatas e aproximadas calculadas pelo método dos modos assumidos.....	75
4.5	Campos de deformação máxima em regime permanente para uma fonte senoidal com amplitude de 1 N e frequências de a) 1 Hz e b) 100 Hz.....	76
4.6	Detalhe da Figura 4.5a, sendo a linha tracejada indicando o valor de deformação de 0,1124%.....	77
4.7	Campos de deformação máxima em regime permanente para uma fonte senoidal com amplitude de 1 N e frequências de 0,5 MHz, 1 MHz, 1,0044 MHz e 1,5 MHz.....	78

4.8	Campo de deformação máxima para 1,5 MHz calculado com um número máximo de 6 modos (tracejada) e 10 modos (linha cheia).....	79
4.9	Campo de deslocamento e deformação ao longo da fibra no instante $t = 0,87 \mu\text{s}$ ....	79
4.10	a) Comportamento temporal do ponto central da fibra na ausência de amortecimento. b) Comportamento temporal do ponto central da fibra para uma constante de amortecimento viscoso $\alpha = 1 \text{ N.m/s}$ .....	80
4.11	Comportamento temporal do ponto central da fibra para uma constante de amortecimento viscoso $\alpha = 1 \text{ N.m/s}$ e frequências de excitação de 500 kHz e 1MHz. O tempo de duração do regime transiente é o mesmo.....	81
4.12	Campo de deformação máxima para uma constante de amortecimento distribuído $\alpha = 10 \text{ N.m/s}$ e $\alpha = 5 \text{ N.m/s}$ .....	82
4.13	Montagem típica de um modulador acusto-óptico com rede de Bragg.....	83
4.14	Dimensões do modulador acusto-óptico.....	83
4.15	Campo de deformação ao longo do modulador acusto-óptico com corneta acústica.....	84
4.16	Esquema da rede de Bragg como um quadripolo.....	87
4.17	Campo de deformação máxima para ao longo da rede.....	90
4.18	a) Espectro resultante da combinação dos métodos modos assumidos e matriz de transferência. b) Espectro obtido experimentalmente.....	91
4.19	a) Transiente da deformação para um ponto localizado em $x = L/2$ e amortecimento $\alpha = 0,1 \text{ N.s/m}$ .....	92
5.1	Molas de entalhe utilizadas como alavanca.....	95
5.2	Dobradiça monolítica.....	96
5.3	Atuação do PZT sob carga constante.....	98
5.4	Atuação do PZT sob carga variável.....	99
5.5	Trabalho efetuado pelo PZT.....	100
5.6	Esquema do atuador.....	101
5.7	Mola de entalhe como alavanca de terceira classe.....	101
5.8	Dimensões da mola de entalhe.....	102
5.9	Simulação da mola de entalhe com a fibra colada a 1 cm da sua extremidade e uma força de 100 N aplicada na base do suporte livre.....	103
5.10	Detalhe da Figura 5.9. A barra inferior mostra a escala do deslocamento em milímetros.....	104

5.11	O sintonizador montado.....	104
5.12	Aparato usado no experimento.....	105
5.13	Circuito de fotodeteção.....	106
5.14	Comprimento de onda de Bragg variável controlado pela deformação.....	108
5.15	Modelo equivalente da fibra revestida.....	108
5.16	Espectro refletido da rede.....	110
5.17	a) Tensão na saída do circuito de fotodeteção. b) Tensão na entrada do atuador PZT para uma frequência $f = 1$ Hz.....	111
5.18	a) Tensão na saída do circuito de fotodeteção. b) Tensão na entrada do atuador PZT para uma frequência $f = 35$ Hz.....	112
5.19	a) Comprimento de onda sintonizado em função da tensão na entrada do atuador PZT para um trecho de fibra fixado de 12 mm.....	113
5.20	Sintonização com sinal degrau com tempo de subida de 3 ms - a) De C2 para C4. b) De C2 para C4. c) Tensão de entrada do atuador PZT.....	114
5.21	Sistema amortecido por mola.....	115
5.22	Sintonização dos lasers C1 – C2 com e sem mola de absorção.....	115
5.23	Detalhe da sintonização de C2 para C1 sem mola.....	116
5.24	Deslocamento assimétrico do braço em relação à posição de estabilização causando a filtragem de níveis distintos de potência.....	117
5.25	Filtro passa-baixas de primeira ordem.....	118
5.26	Resposta ao degrau de um filtro eletrônico passa-baixas de primeira ordem, de ganho unitário e frequência de corte $f_c = 35$ Hz.....	118
5.27	Relação resistência versus frequência de corte.....	119
5.28	Sintonização dos lasers C1 - C6 usando resistores de 39 k $\Omega$ e 47 k $\Omega$ .....	119
5.29	Sintonização dos lasers C6 para C1 e C2 para C1 usando resistores $R = 56$ k $\Omega$ .....	120
5.30	Ligação viscoelástica aplicada na mola de entalhe.....	121
5.31	Sintonização dos lasers C1 - C6 e C4 – C6 com amortecimento causado pela ligação viscoelástica.....	122
5.32	Sintonização dos lasers C1 e C1 e entre os lasers C2 para C1 com amortecimento causado pela ligação viscoelástica.....	123
5.33	Subida e descida da onda quadrada aplicada ao PZT na sintonização dos lasers C1 – C6.....	123

## LISTA DE TABELAS

2.1	Características encontradas para materiais baseados em sílica.....	19
2.2	Sensibilidade da FBG para as principais técnicas de deslocamento do comprimento de onda de Bragg.....	26
3.1	Características das fibras.....	51
4.1	Freqüências naturais para os 6 primeiros modos de oscilação.	76
5.1	Intervalo, velocidade e mecanismo de sintonização de alguns trabalhos.....	93
5.2	Comprimento de onda dos lasers DFBS.....	107
5.3	Velocidade de sintonização entre os canais usando resistores de 56 k $\Omega$ .....	121

## LISTA DE SÍMBOLOS

$b_i$	Componentes das forças por unidade de massa (N/kg).
$B$	Contorno da região $R$ ocupada pelo corpo em estudo.
$c_{ac}$	Velocidade da onda longitudinal (m/s).
$C$	Matriz de amortecimento.
$C_p$	Velocidade da onda longitudinal (m/s).
$C_s$	Velocidade da onda transversal (m/s).
$d$	Diâmetro (m).
$E$	Módulo de Young ou módulo de elasticidade de primeira ordem (Pa).
$f$	Freqüência ( $s^{-1}$ ).
$f_{in}$	Força interna de volume ( $N/m^3$ ).
$F$	Força (N).
$G$	Módulo de cisalhamento ou módulo de elasticidade transversal ou segunda constante de Lamé (Pa).
$H(t)$	Função degrau unitário de Heaveside.
$i$	Grau de giração (m).
$I$	Segundo momento de área ( $m^4$ ).
$k$	Rigidez (N/m).
$K$	Módulo de compressibilidade (Pa).
$K$	Matriz de rigidez.

$L$	Comprimento (m), Operador Lagrangeano.
$m$	Massa (kg).
$M$	Momento (N.m).
$\mathbf{M}$	Matriz de massa.
$\vec{n}$	Vetor normal à superfície.
$n_{eff}$	Índice de refração efetivo.
$p_{ij}$	Componentes do tensor fotoelástico.
$p_e$	Constante fotoelástica efetiva.
$P$	Carga, pressão (N/m <sup>2</sup> ).
$q$	Coordenada generalizada.
$r(\lambda)$	Potência refletida normalizada.
$\vec{r}$	Vetor posição (m).
$R$	Região do espaço ocupada pelo corpo em estudo.
$S$	Área (m <sup>2</sup> ).
$t$	Tempo (s).
$t(\lambda)$	Potência transmitida normalizada.
$t_r$	Tempo de retardo (s).
$T$	Temperatura (K), Energia cinética (J).
$T_j$	Períodos de oscilação (s).
$u$	Deslocamento (m).
$U$	Potencial dinâmico (J).
$v$	Visibilidade das franjas.
$V$	Energia potencial (J)
$\alpha$	Coefficiente de expansão térmica (K <sup>-1</sup> ), Coefficiente de amortecimento viscoso (N.m/s)
$\beta_j$	Modo de amortecimento (rad/s).
$\gamma$	Frequência natural amortecida (rad/s).
$\delta$	Delta de Dirac.
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker.
$\varepsilon_{ij}$	Deformação.
$\zeta$	Coefficiente termo-óptico (K <sup>-1</sup> ).



$\eta$	Coeficiente de amortecimento (Pa.s).
$\Theta$	Matriz modal.
$\kappa$	Coeficiente de acoplamento “ac” ( $\text{m}^{-1}$ ).
$\lambda$	Primeira constante de Lamé (Pa), Comprimento de onda (m).
$\lambda_B$	Comprimento de onda de Bragg (m).
$\lambda_D$	Comprimento de onda de projeto (m).
$\Lambda$	Período da rede (m)
$\Lambda$	Matriz espectral.
$\mu$	Coeficiente de Poisson.
$\xi$	Relação de amortecimento modal.
$\rho$	Densidade ( $\text{N/m}^3$ ).
$\sigma_{ij}$	Tensão (Pa).
$\sigma$	Coeficiente de acoplamento “dc” ( $\text{m}^{-1}$ ).
$\hat{\sigma}$	Coeficiente de autoacoplamento ( $\text{m}^{-1}$ ).
$\phi_j$	Modos assumidos.
$\psi_j$	Autofunções ( $\text{m}^{-1/2}$ )
$\omega$	Frequência angular (rad/s).
$\omega_j$	Frequências naturais, autovalores (rad/s)

## RESUMO

Este trabalho apresenta a análise temporal do deslocamento do comprimento de onda de Bragg baseada na teoria da elastodinâmica linear e na teoria viscoelástica. As soluções exatas para o modelo de uma fibra engastada são encontradas a fim de estimar a máxima velocidade de sintonização quando forças de tração são aplicadas na extremidade livre da fibra. É feita a comparação entre a fibra monomodo de sílica e a fibra monomodo polimérica mostrando as diferenças do tempo de resposta, velocidade de sintonização e deslocamento de onda de Bragg quando a mesma carga longitudinal é aplicada.

Também apresenta a resposta transiente e permanente para o método Modos Assumidos, com aplicação potencial em estruturas submetidas a cargas harmônicas longitudinais, com massa e rigidez concentradas e seção transversal variável. Usando a combinação entre os métodos modos assumidos e matriz de transferência, simulações foram feitas para um modulador acusto-óptico, baseado em redes de Bragg em fibra, quando uma carga harmônica é aplicada. O espectro resultante e a duração o regime transiente são calculados e comparados com resultados experimentais relatados na literatura.

Além disso, este trabalho apresenta um sintonizador de redes de Bragg, baseado no princípio da mola de entalhe, que permite a magnificação do deslocamento provocado por um atuador piezoelétrico através da tração em um pedaço de fibra. O tempo de resposta é encontrado experimentalmente para diferentes casos de amortecimento.

**Palavras-chave:** Redes de Bragg em Fibra, Elastodinâmica, Método dos Modos Assumidos, Método da Matriz de Transferência, Dispositivos Ópticos.

## ABSTRACT

### **Time Analysis of Optical Spectrum in Fiber Bragg Grating**

This work presents the time analysis of the Bragg wavelength shift in fiber gratings based on the elastodynamics theory and viscoelastic theory. The model is valuable for estimating the maximum tuning speed when traction forces are applied to the free end of the grating. A comparison between single mode silica optical fiber and polymer optical fiber is performed showing the differences of time response, tuning speed and Bragg wavelength shift when the same longitudinal load is applied on both types of fibers.

Also presents the transient and steady state solutions for Assumed Modes method, with potential application on general structures under harmonic longitudinal loads, with mass and stiffness concentrated and variable cross section. Using the combined Assumed Modes and Matrix Transfer method, simulations results were performed on a Bragg grating acousto-optic modulator when a harmonic load is applied. The resulting spectrum and the transient duration were calculated and compared with experimental results related by literature.

Furthermore, this work presents a mechanism tuning FBGs, based on a notch type spring principle, which magnifies the displacement of a piezoelectric element stretching a piece of fiber optic. Time response is experimentally accessed for different damping situations of the notch type spring.

**Keyword:** Fiber Bragg Gratings, Elastodynamics, Assumed Modes Method, Transfer Matrix Method, Optic devices.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 MOTIVAÇÕES.

A capacidade de transmissão em sistemas de comunicação por fibra ótica tem crescido significativamente graças ao desenvolvimento da técnica de multiplexação em comprimento de onda (*WDM – Wavelength Division Multiplexing*), que utiliza comprimentos de onda distintos para trafegar taxas de bits que podem chegar atualmente a 40 Gbit/s por portadora em sistemas comerciais. A quantidade de canais ópticos que podem ser inseridos em uma fibra e o alcance dos enlaces de comunicação dependem de uma série de fatores, entre os quais podem ser citados a atenuação na fibra, o alargamento temporal dos pulsos ópticos, a seletividade em comprimento de onda dos componentes utilizados, efeitos não-lineares e, não menos importante, o custo do sistema.

Para além dessa alta capacidade de transmissão ponto a ponto, o desenvolvimento de novos componentes ópticos, como matrizes de chaveamento e dispositivos para inserção e retirada de comprimentos de onda, tem contribuído para a implementação de diversas funcionalidades que tornam um conjunto de enlaces ópticos, originalmente isolados, em uma rede de transporte de complexidade crescente. Esse fato cria a necessidade de se adequar e expandir características de componentes existentes como também de se criar novas funções que permitam uma reconfiguração dinâmica da rede óptica.

A rede de Bragg em fibra óptica, também denominada FBG (*Fiber Bragg Grating*) pode ser encarada como um filtro óptico rejeita-banda (na transmissão) e passa-banda (na reflexão) que possui a propriedade de modificar suas características de filtragem através de perturbações externas como pressão, temperatura ou deformação. Devido a essa propriedade a FBG apresenta larga aplicação em telecomunicações. Como exemplo pode-se citar: compensadores de dispersão (DAI, CHEN, SUN *et al*, 2006; HAN e LEE, 2005; HILL, BILODEAU, MALO *et al*, 1994), multiplexadores/demultiplexadores ópticos (ANDRÉ, PINTO, PINTO *et al*, 2001; BAUMANN, SEIFERT, NOWAK *et al*, 1996), filtros rejeita-banda (VENGSARKAR, LEMAIRE, BUDKINS *et al*, 1995) e lasers em fibra (FENG, TAM e WAI, 2006; BALL, MOREY e GLENN, 1992).

A literatura também apresenta inúmeras aplicações para as FBGs na área de sensores, entre os quais incluem-se dispositivos para monitoração do estado de estruturas utilizados em

aplicações que abrangem uma vasta área que vai da engenharia civil à indústria aeroespacial (BETZ, THURSBY, CULSHAW *et al*, 2003). Como exemplo dessas aplicações, pode-se citar as técnicas de ensaios não destrutivos utilizando ondas acústicas ultra-sônicas (ROSE, 1999), empregada em estruturas longas. Nessa técnica, ondas acústicas são excitadas em um determinado ponto da estrutura através de um transdutor ultra-sônico e são propagadas por uma distância considerável até um ponto de captação onde se localiza um sensor. Analisando a onda transmitida e recebida é possível determinar danos na estrutura comparando-se o desvio dos resultados em relação a um sinal de referência obtido em uma estrutura sem falhas (ALLEYNE e CAWLEY, 1992).

O uso de FBGs como sensores ultra-sônicos em monitoração apresenta muitas vantagens em relação às soluções eletro-eletrônicas como os extensômetros. As FBGs têm tamanho reduzido, são imunes às interferências eletromagnéticas, podem ser facilmente integradas às estruturas, além de apresentarem uma larga banda de detecção e excelente capacidade de multiplexação (OTHONOS e KALLI, 1999).

A análise do comportamento temporal do espectro refletido pelas FBGs pode ser de grande utilidade na prevenção de abalos sísmicos e atividades vulcânicas substituindo com sucesso os acelerômetros (LAUDATTI, MENELLA, GIORDANO *et al*, 2007), na estimativa do tempo de resposta em moduladores acusto-ópticos (DELGADO-PINAR, ZALVIDEA, DÍEZ *et al*, 2006) e, principalmente, na sintonização rápida de FBGs, onde o tempo de sintonização entre dois comprimentos de onda distintos é da ordem de milissegundos. Por sua vez, a sintonização rápida de FBGs pode ser aplicada tanto na área de telecomunicações quanto na de sensores. Como exemplo, o padrão SDH/SONET (Synchronous Digital Hierarchy/ Synchronous Optical NETWORK) estabelece um tempo máximo de chaveamento de 50 ms. Em sistemas WDM a sintonização de uma FBG em um tempo abaixo desse limite poderia ser de grande utilidade na seleção de canais por multiplexadores/demultiplexadores ópticos, já que diminuiria o número de componentes ópticos e, conseqüentemente, as perdas de potência causadas pela inserção de componentes e conexões.

Como será visto no próximo capítulo, a FBG apresenta sensibilidade às perturbações mecânicas. Porém, há poucas referências na literatura sobre o uso de métodos numéricos usados para cálculos mecânicos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF ou *FEM – Finite elements Method*) ou o Método dos Modos Assumidos, aplicados em dispositivos ópticos baseados em redes de Bragg em fibra. Não foi encontrado na literatura nenhum trabalho sobre a simulação do comportamento temporal do espectro refletido por uma FBG sob tensão mecânica.

Há relatos sobre o uso combinado do MEF com o Método da Matriz de Transferência a fim de simular as respostas mecânicas e ópticas, respectivamente, de um modulador acusto-óptico (OLIVEIRA, NEVES, POHL *et al*, 2007). Uma abordagem análoga foi utilizada para simular a sensibilidade de uma FBG revestida por materiais compósitos e submetida à carga transversal estimando as deformações do espectro óptico (PRAGBHUGOUD e PETERS, 2006) e, usando apenas o MEF sem levar em conta a deformação do espectro, para simular a sensibilidade de redes de Bragg gravadas em vários tipos de fibra sob efeito de cargas transversais e térmicas (PRAGBHUGOUD e PETERS, 2007).

Outros trabalhos combinando MEF e Matriz de Transferências para redes de Bragg são encontrados na literatura, mas são direcionados à óptica integrada e não à FBG (SHAH, SHANMUGAN, CHOWDHURY *et al*, 2005).

Todos os trabalhos citados acima apresentam resultados em regime permanente. Também não foi encontrado nenhum trabalho usando a combinação do método dos Modos Assumidos, analisado neste trabalho, e Matriz de Transferência para estimar o comportamento de dispositivos ópticos em regime transiente.

## 1.2 OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DO TRABALHO.

O objetivo deste trabalho é propor modelos que permitam analisar e estimar a resposta temporal das FBGs, cuja excitação é provocada através da aplicação de tensões mecânicas longitudinais na fibra. Para isso, recorre-se à combinação das teorias e métodos utilizados na área da mecânica e da óptica a fim de desenvolver uma abordagem numérica flexível e que demande baixo esforço computacional para projetar e construir dispositivos ópticos mais rápidos utilizados em telecomunicações e sensores.

O presente trabalho também propõe um tipo de sintonizador baseado no princípio da mola de entalhe, de fácil fabricação e baixo custo, analisando seu tempo de resposta e mostrando suas limitações.

Os fundamentos teóricos sobre redes de Bragg e mecânica dos sólidos serão abordados no Capítulo 2. Será feita uma breve descrição sobre a fabricação e as propriedades das redes de Bragg submetida às variações de temperatura, pressão hidrostática e deformação longitudinal (tanto para tração quanto para compressão). Além disso, serão apresentadas as definições de tração e deformação, bem como as constantes elásticas citadas nos capítulos posteriores.

O Capítulo 3 apresenta as equações de movimento de Navier-Cauchy que são a base para a teoria da elastodinâmica. Utilizando a teoria da elastodinâmica, assumindo a fibra como sendo uma barra elástica com a rede de Bragg concentrada em um único ponto, pretende-se encontrar as soluções exatas para casos particulares de carga e determinar teoricamente o comportamento temporal da deformação longitudinal no interior na fibra, o comportamento temporal do comprimento de onda de Bragg e o tempo mínimo teórico para a sintonização de uma rede de Bragg submetida à variação mais rápida possível de tensão (uma função degrau). São mostrados os resultados das simulações usando a teoria da elastodinâmica linear e da viscoelasticidade linear levando em conta o amortecimento.

O Capítulo 4 apresenta os fundamentos do método Modos Assumidos, partindo das equações de Lagrange e chegando às soluções aproximadas para o movimento longitudinal em um sistema submetido a uma carga harmônica. O método é aplicado a uma fibra engastada e a um modulador acusto-óptico. Também apresenta os fundamentos do método da Matriz de Transferência, usados para a estimar a forma dos espectros transmitido e refletido pela FBG. A combinação dos métodos Modos Assumidos e Matriz de Transferência é aplicada a um modulador acusto-óptico e, para validação, comparada com resultados experimentais disponíveis na literatura.

O Capítulo 5 apresenta uma proposta de sintonizador, de custo relativamente baixo, acionado por um atuador piezoelétrico de baixa tensão. Suas limitações são apresentadas através de resultados obtidos experimentalmente com sugestões para minimizá-las utilizando algumas técnicas de amortecimento, sendo os desempenhos de algumas dessas técnicas comparados.

Por fim, são apresentadas as principais conclusões e a perspectiva para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

### CONCEITOS FUNDAMENTAIS

#### 2.1 INTRODUÇÃO.

Este trabalho trata a fibra óptica (e os dispositivos baseados em fibra óptica) como um corpo submetido a forças externas. Para uma análise mais completa das forças externas e internas que agem em um corpo, alguns conceitos básicos são necessários para o estudo de seus efeitos. São eles: a tensão, o deslocamento e deformação.

Este capítulo trata dos fundamentos da mecânica dos sólidos e como tais fundamentos são usados para determinar a expressão que governa a sensibilidade da FBG à deformação longitudinal. Noções básicas sobre tensão, deslocamento e deformação são apresentadas, derivando as expressões das constantes elásticas usadas nos próximos capítulos.

Os parâmetros vistos neste capítulo serão usados para derivar, posteriormente, as equações temporais do deslocamento do comprimento de onda de Bragg em FBGs submetidas à deformação longitudinal. Também será tratada de maneira superficial, já que não é o assunto principal do presente trabalho, a sensibilidade da rede de Bragg à pressão hidrostática e temperatura.

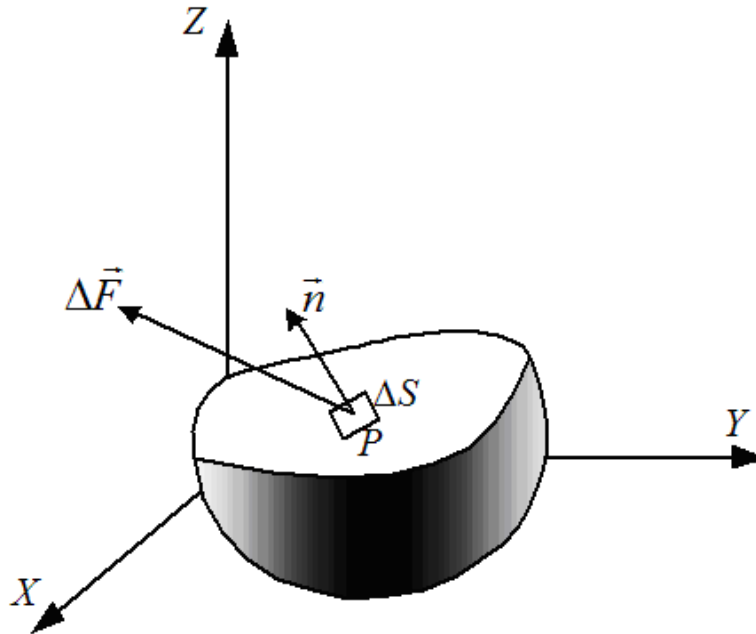
#### 2.2 DEFINIÇÃO DE TENSÃO.

Assumindo um ponto  $P$  em um determinado plano interno de um corpo e escolhendo uma área infinitesimal  $\Delta S$  em torno desse ponto onde atua uma força interna  $\Delta \vec{F}$ , define-se a tensão resultante como

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS}. \quad (2.1)$$

A grandeza vetorial  $\vec{\sigma}$  será a tensão total aplicada no ponto  $P$  no plano. O vetor  $\vec{\sigma}$  pode ser decomposto em três componentes, sendo que uma delas está no eixo perpendicular ao plano da seção na direção de  $\vec{n}$ , como mostra a Figura 2.1. Essa projeção é denominada tensão normal ou tensão direta.





**Figura 2.1:** A tensão age no interior dos sólidos.

As componentes situadas no plano da seção são denominadas tensões tangenciais ou tensões de cisalhamento.

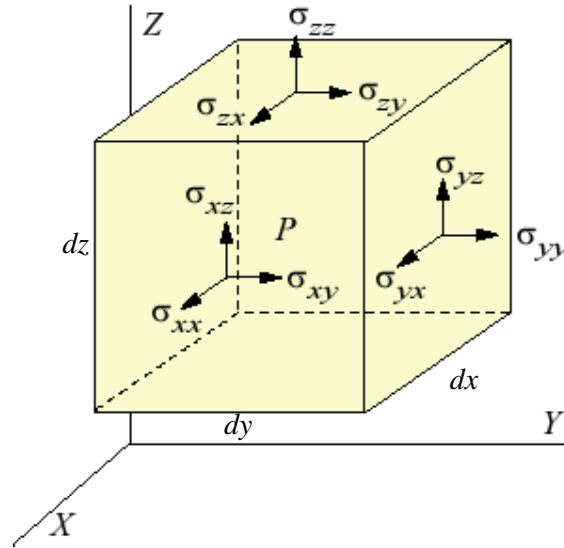
Se outro plano de seção passando pelo ponto  $P$  for analisado, a tensão nesse ponto será, de um modo geral, diferente.

Em suma, a tensão pode ser interpretada como o resultado de forças internas por unidade de área que agem em um determinado plano interno de seção. Não se pode medir a tensão sem especificar um plano.

### 2.2.1 Estado de tensão.

O conjunto de tensões para os vários planos de seção que passam por um ponto é denominado estado de tensão.

Para caracterizar o estado de tensão no ponto  $P$  destaca-se um volume infinitesimal gerado por um paralelepípedo cujas arestas possuem comprimentos  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  como mostra a Figura 2.2.



**Figura 2.2:** Volume infinitesimal destacado do corpo.

Fazendo o volume tender a zero, todas as faces do paralelepípedo passarão pelo ponto  $P$ . Para um sólido em equilíbrio, a resultante das forças no ponto  $P$  deve ser nula. De forma explícita, as forças normais às faces opostas são orientadas em sentido contrário, fazendo com que a soma das componentes nos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  sejam igual a zero.

A notação de cada componente segue a regra:

$$\sigma_{ij} = \text{Tensão no plano normal ao eixo } i \text{ e agindo na direção do eixo } j. \quad (2.2)$$

Portanto, o estado de tensão será um tensor de segunda ordem já que é uma medida associada a duas direções (dois índices são necessários para descrever suas componentes).

Dessa forma, o tensor de tensões será representado por

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

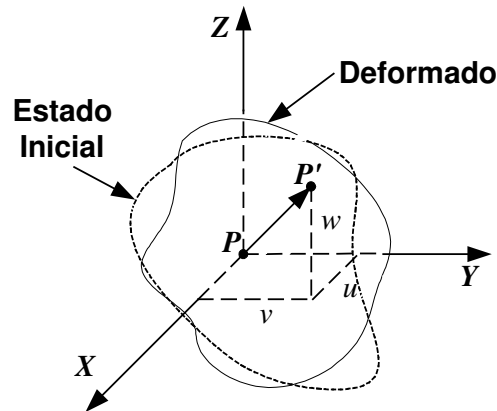
Há diferenças importantes entre os efeitos das tensões normais e tangenciais. Em materiais isotrópicos (e em planos de simetria específicos de alguns materiais anisotrópicos) as tensões normais tendem a alterar o volume do corpo sem modificar seu formato enquanto as tensões tangenciais tendem a alterar o formato do corpo sem modificar seu volume.

A deformação do corpo exerce uma influência considerável sobre as distribuições das forças internas como será visto na próxima seção.

### 2.3 DEFINIÇÃO DE DESLOCAMENTO E DEFORMAÇÃO.

As forças externas causam as mudanças de posição dos diferentes pontos de um corpo. A distância entre as posições de um certo ponto  $P$ , antes e depois da variação da forma do corpo, é denominada deslocamento total. A Figura 2.3 mostra o deslocamento do ponto  $P$ , no estado inicial posicionado na origem, para o ponto  $P'$  cujas coordenadas são  $(u, v, w)$  que correspondem às componentes dos vetores do deslocamento total.

A deformação de um corpo está relacionada aos deslocamentos relativos dos seus pontos.



**Figura 2.3:** Deslocamento total do ponto  $P$  após a deformação do corpo.

#### 2.3.1 Estado de deformação.

Análogo ao estado de tensão, o estado de deformação é definido como o conjunto das deformações que aparecem na direção de diversos eixos e em diversos planos. O tensor de deformações (ou matriz de deformações) será representado por (ver Anexo 1)

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Analogamente à lei de paridade de tensões ocorre simetria no tensor de deformações, ou seja,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ .

Pode-se escrever sistemas de equações de uma forma concisa usando a notação indicial. Em tal notação  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  correspondem respectivamente às coordenadas cartesianas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , ou de forma simplificada  $x_i$  com  $i = 1, 2, 3$ . Dessa forma, uma equação geral para as componentes do tensor de deformações definido em (2.4) pode ser escrita na forma

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.5)$$

onde  $i, j = 1, 2, 3$  e o conjunto  $(u_1, u_2, u_3)$  representa as componentes do vetor deslocamento  $(u, v, w)$ .

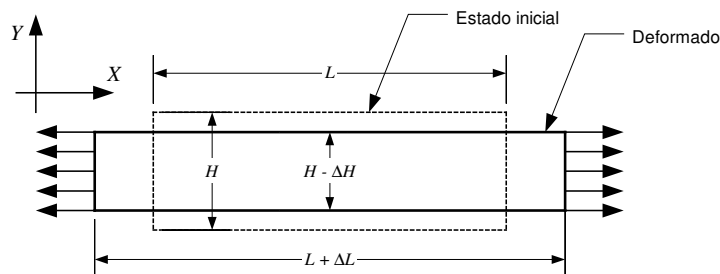
#### 2.4 LEI DE HOOKE, MÓDULO DE YOUNG E COEFICIENTE DE POISSON.

A Lei de Hooke estabelece que, para alongamentos pequenos, a deformação é diretamente proporcional à tensão aplicada no ponto. Dessa forma, no caso de um corpo em estado uniaxial de tensão, submetido à tensão normal no eixo  $X$ , por exemplo, a relação entre a tensão e a deformação é dada por:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}, \quad (2.6)$$

onde  $E$  é o coeficiente de proporcionalidade denominado módulo de Young ou módulo de elasticidade de primeiro gênero. Observa-se que o módulo de Young tem a mesma dimensão que a tensão. No SI (Sistema Internacional) ambos são medidos em  $\text{N/m}^2$  ou Pa.

Submetendo uma barra a uma força externa longitudinal, conseqüentemente à tensão normal, o alongamento longitudinal é acompanhado pela diminuição das dimensões transversais como mostra a Figura 2.4.



**Figura 2.4:** Alongamento da barra com o aumento do comprimento e a diminuição das demais dimensões.

Dentro dos limites de aplicação da lei de Hooke, a deformação transversal é proporcional à deformação longitudinal e segue a razão

$$\mu = \frac{\varepsilon_{trans}}{\varepsilon_{long}}, \quad (2.7)$$

sendo  $\mu$  denominado coeficiente de Poisson. Observa-se que o coeficiente de Poisson é adimensional.

Portanto, na barra deformada representada na Figura 2.4 pode-se chegar à relação entre as deformações nos eixo  $X$  e  $Y$  e  $Z$ , de forma que  $\varepsilon_{11} = -\mu\varepsilon_{22} = -\mu\varepsilon_{33}$ , sendo o sinal negativo o indicativo de que houve uma diminuição das dimensões no sentido transversal.

A relação entre as componentes do estado de tensão e as do estado de deformação é chamada Lei de Hooke Generalizada. Uma expressão geral para a relação entre tensão e deformação, usando a notação indicial, é dada por

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\mu} \varepsilon_{ij} + \frac{E\nu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (2.8)$$

onde  $i, j, k = 1, 2, 3$  e  $\delta_{ij}$  é a função Delta de Kronecker definida por

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{para } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & \text{para } i = j \end{cases} \quad (2.9)$$

ou na forma matricial

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Em certas ocasiões é conveniente a representação dos componentes das matrizes de tensões e deformações em forma vetorial. No caso da Lei de Hooke Generalizada para materiais isotrópicos, quando as deformações são conhecidas, essa relação pode ser obtida usando a Matriz de Elasticidade representada abaixo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Da mesma forma, quando as tensões são conhecidas pode-se usar a Matriz de Flexibilidade, inversa da Matriz de Elasticidade e que está representada abaixo:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

## 2.5 CONSTANTES ELÁSTICAS

Supondo que o volume infinitesimal representado na Figura 2.2 sofra apenas deformação de cisalhamento sob a ação de tensões tangenciais no plano XY, sua forma será modificada sem alterar seu volume, além disso, a tensão  $\sigma_{12}$  será a única componente não nula do tensor de tensões.

Usando a Matriz de Flexibilidade chega-se a

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Dessa forma, as únicas componentes do tensor de deformações não nulas serão

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{(1+\mu)\sigma_{12}}{E}. \quad (2.14)$$

É possível demonstrar (FÉODOSIEV, 1977) que a deformação de cisalhamento é proporcional à tensão tangencial que age no mesmo plano. Essa proporcionalidade segue a razão:

$$G = \frac{\sigma_{ij}}{2\varepsilon_{ij}}, \quad (2.15)$$

sendo  $G$  denominado Módulo de Cisalhamento ou Módulo de Elasticidade de Segundo Gênero. Substituindo (2.15) em (2.14) chega-se ao valor de  $G$  igual a

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (2.16)$$

O mesmo raciocínio pode ser feito para os outros planos chegando-se ao mesmo valor de  $G$ .

A definição dos módulos de cisalhamento e compressibilidade é deduzida como corolário da Lei de Hooke para tensão normal apresentada como postulado em (2.6).

Analogamente, em um corpo submetido a uma pressão hidrostática, de valor  $-P$  (compressão), em todas as direções, as únicas componentes não nulas serão:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{(1-2\mu)P}{E} \quad (2.17)$$

A resistência à compressão é quantificada através do Módulo de Compressibilidade (*Bulk Modulus*) que é definido como:

$$K = \frac{P}{\Delta V/V} = \frac{P}{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}} \quad (2.18)$$

sendo  $V$  o volume inicial e  $\Delta V$  a variação de volume.

Substituindo (2.17) em (2.18) chega-se a:

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad (2.19)$$

Teoricamente, os limites de  $E$ ,  $K$ ,  $G$  e  $\mu$  para todos os materiais isotrópicos são

$$E > 0, \quad (20.a)$$

$$K > 0, \quad (20.b)$$

$$G > 0, \quad (20.c)$$

$$-1 < \mu \leq \frac{1}{2}. \quad (20.d)$$

Um corpo com  $\mu = 0,5$  é teoricamente incompressível já que sua resistência à compressão, quantificada por  $K$ , será infinita. Por outro lado, é raro encontrar materiais usados na engenharia que possuem coeficiente de Poisson negativo, tais como os materiais auxéticos, sendo o grafite pirolítico e os cristais de  $Ni_3Al$  exemplos de materiais com essa característica. Para a maioria dos materiais o coeficiente de Poisson apresenta um valor no intervalo  $0 < \mu < 0,5$ .

Outra constante, denominada Primeira Constante de Lamé, é representada por

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}. \quad (2.21)$$

Essa constante, introduzida nos cálculos, simplifica muitas equações na teoria da elastodinâmica. O módulo  $G$  também é conhecido como a segunda constante de Lamé e junto com  $\lambda$  e a densidade do material determinam as velocidades de propagação das ondas elásticas que serão vistas no próximo capítulo.

As constantes  $E$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $G$  e  $K$  são denominadas Constantes Elásticas. Observa-se que elas são independentes duas a duas, ou seja, conhecendo duas das constantes as demais podem ser calculadas. Duas constantes elásticas mais a densidade caracterizam um material isotrópico. Além disso, com apenas duas constantes é possível descrever a Lei de Hooke Generalizada.

## 2.6 REDES DE BRAGG EM FIBRA ÓPTICA.

Quando luz ultravioleta (UV) com uma fluência adequada incide sobre a fibra óptica seu índice de refração sofre alteração devido a um efeito denominado fotossensibilidade. Se tal alteração for espacialmente periódica ocorre a formação de redes na fibra.

Acredita-se que mais de um processo esteja envolvido na fotossensibilidade. Resultados experimentais obtidos em vários tipos de fibra indicaram que a fotossensibilidade está relacionada a diferentes mecanismos como o fotoquímico e o acusto-óptico. A contribuição de cada um desses mecanismos depende do material da fibra, além do comprimento de onda e da intensidade da luz ultravioleta incidente (OTHONOS e KALLI, 1999).

No caso das fibras de germano-silicato a mudança do índice de refração ocorre, entre outros fatores, por modificação na estrutura eletrônica de defeitos pontuais denominados “centros de cor” explicados pelo modelo de Kramers-Kronig. Inicialmente os defeitos nesse tipo de fibra aparecem no processo de fabricação; quando a fibra é fabricada usando a técnica



MCVD (*Modified Chemical Vapor Deposition*) aparecem centros de germânio deficitários em oxigênio, conhecidos como GODC (*Germanium Oxygen Defect Center*), a sensibilidade à radiação UV é determinada pela concentração desses centros deficitários em oxigênio (OTHONOS, 1997).

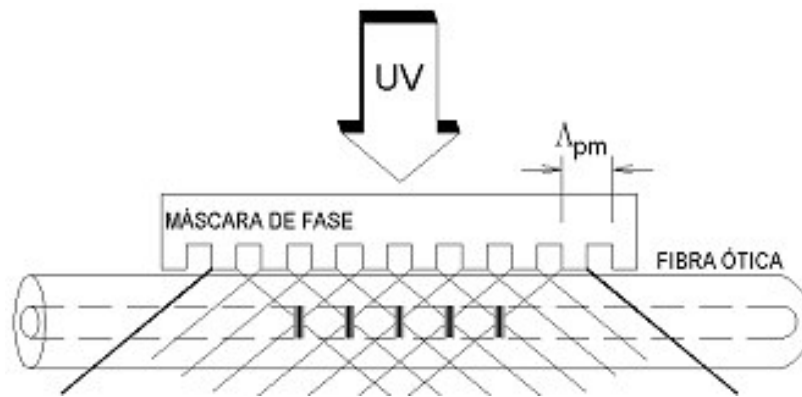
Além do modelo de Kramers-Kronig, a mudança de índice também pode ser explicada pelo modelo de dipolo (OTHONOS, 1997), pelo modelo de densificação (FIORI e DEVINE, 1986) ou pelo modelo de relaxação por tensão (SCEATS e POOLE, 1991).

A formação de uma rede permanente foi inicialmente demonstrada por Hill *et al* em 1978 (HILL, FUJII, JOHNSON *et al*, 1978; KAWASAKI, HILL, JOHNSON, *et al*, 1978). As redes em fibra podem ser divididas em redes de Bragg (FBG, também denominada rede de reflexão ou rede de período curto), na qual ocorre acoplamento entre os modos que se propagam em sentidos opostos e em redes de período longo (*LPG- Long Period Grating*, também denominada rede de transmissão), na qual modos de casca e de núcleo que se propagam no mesmo sentido são acoplados.

Dessa forma, a FBG é uma perturbação periódica do índice de refração do núcleo ao longo do comprimento da fibra, gerada pela exposição da mesma a um padrão intenso de interferência (HILL e MELTZ, 1997). Há dois conjuntos principais de técnicas de gravação de redes de Bragg em fibra: o que envolve técnicas interferométricas e o que envolve técnicas não-interferométricas.

O exemplo mais comum de uma técnica interferométrica é a holográfica (MELTZ, MOREY e GLENN, 1989) que consiste na modulação espacial de intensidade da luz ultravioleta através da interferência de dois feixes coerentes. Para essa técnica é necessária uma fonte UV com coerências temporal e espacial tais que tornem possível a construção de um interferômetro (SILVA, 2005). As características da rede gravada com essa técnica estão fortemente relacionadas com as características da fonte de luz.

Por sua vez, a técnica não-interferométrica mais difundida é baseada no uso da máscara de fase. Essa técnica tem inúmeras vantagens como uma relativa simplicidade na montagem para a gravação, boa reprodutibilidade e ser menos dependente da coerência da fonte UV usada na gravação (HILL, MALO, BILODEAU *et al*, 1993). A máscara de fase geralmente é mantida junto à superfície da fibra durante a gravação, como mostra a Figura 2.5, e o período da rede será a metade do período da máscara de fase  $\Lambda_{pm}$ .



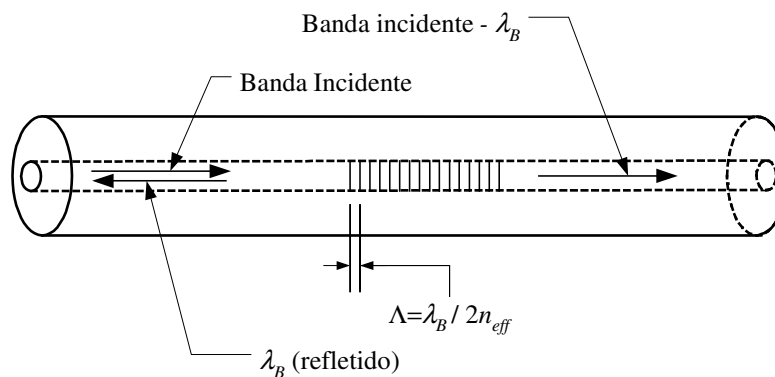
**Figura 2.5:** Gravação com máscara de fase.

A perturbação periódica que ocorre no núcleo da fibra é análoga a uma rede cristalina e age como um filtro rejeita-banda. Uma banda estreita do campo óptico incidente é refletida, sendo que a interação mais forte ou acoplamento de modo ocorre no comprimento de onda de Bragg  $\lambda_B$  dado por (KASHYAP, 1999)

$$\lambda_B = 2n_{eff} \Lambda, \quad (2.22)$$

onde  $n_{eff}$  é o índice modal ou índice de refração efetivo e  $\Lambda$  é o período da rede.

A Figura 2.6 mostra o esquema de incidência e a reflexão de um campo óptico em uma rede de Bragg.

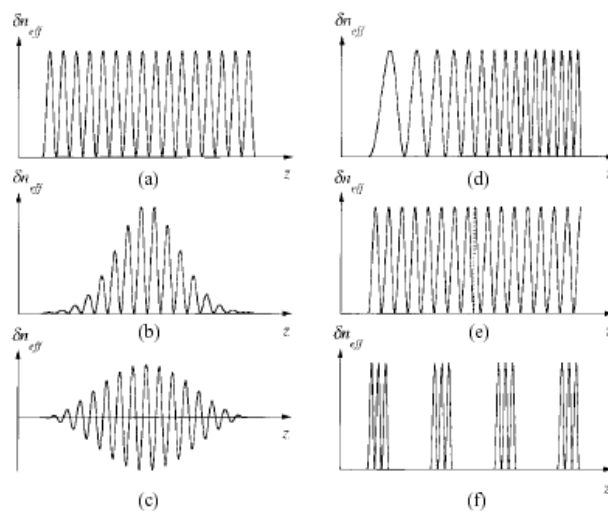


**Figura 2.6:** Incidência e reflexão em uma rede de Bragg.

As características de filtragem da rede podem ser entendidas e modeladas através de várias abordagens como o Método da Matriz de Transferência, também denominado Método da Matriz Fundamental e detalhado no Capítulo 4 deste trabalho (YAMADA e SAKUDA, 1987, ERDOGAN, 1997) e o método de Rouard, onde cada período da rede é tratado como

uma camada de filme fino (WELLER-BROPHY e HALL, 1985; WANG, PENG e CHU, 2000), sendo a Teoria dos Modos Acoplados o fundamento dessas abordagens (KOGELNIK, 1990).

Qualquer mudança que venha a causar variação no índice efetivo, representada aqui por  $\delta n_{eff}$ , ou no período da rede na fibra, também modificará o comprimento de onda de Bragg. A sensibilidade das FBGs a essa mudança é governada pelas propriedades elástica, fotoelástica, termo-óptica da fibra e pela natureza da carga ou tensão aplicada à estrutura em que a fibra está anexada ou imersa. As propriedades ópticas da FBG são determinadas pelos diferentes tipos de variação do índice efetivo ao longo da fibra; a Figura 2.7 mostra os tipos mais comuns de  $\delta n_{eff}$ . A escolha de cada tipo depende da aplicação para o dispositivo a ser construído.



**Figura 2.7:** Tipos mais comuns de variação do índice efetivo: (a) Uniforme com mudança positiva de índice, (b) Gaussiana apodizada, (c) Cosseno levantado apodizada com mudança de índice “dc” nula, (d) Com gorjeio, (e) Com deslocamento discreto de fase (de  $\pi$ ) e (f) Superstruturada. (ERDOGAN , 1997).

A vantagem principal das redes em fibra é a flexibilidade que essas oferecem na aquisição das características espectrais desejadas. Vários parâmetros podem ser alterados como mudança induzida de índice, comprimento, apodização e período do gorjeio. Outras vantagens em relação a outras tecnologias são a baixa perda de inserção, alta perda de retorno ou extinção e baixo custo (ERDOGAN , 1997).

A expressão geral para o deslocamento do comprimento de Bragg em função da variação do comprimento da rede e da variação da temperatura é obtida diferenciando (2.22) e

desprezando os termos de ordem superior, resultando em (KASHYAP, 1999; OTHONOS e KALLI, 1999)

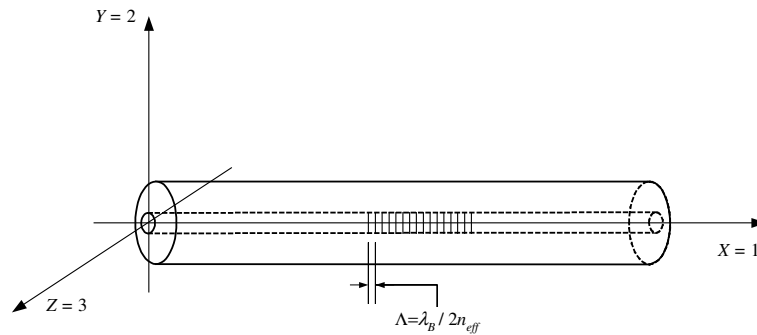
$$\Delta\lambda_B = 2\left(\Lambda \frac{\partial n_{eff}}{\partial L} + n_{eff} \frac{\partial \Lambda}{\partial L}\right)\Delta L + 2\left(\Lambda \frac{\partial n_{eff}}{\partial T} + n_{eff} \frac{\partial \Lambda}{\partial T}\right)\Delta T, \quad (2.23)$$

onde  $\Delta L$  é a variação do comprimento da rede e  $\Delta T$  é a variação da temperatura.

## 2.7 A FIBRA ÓPTICA SOB TRAÇÃO E COMPRESSÃO.

Quando uma onda elástica se propaga em um meio, ocorre um campo de deformação associado a tal propagação (como será visto no próximo capítulo). A deformação resulta em uma mudança de índice de refração. Há, portanto, uma interação entre a onda elástica e a onda eletromagnética no meio.

Assumindo a temperatura constante em (2.23) a segunda parcela do termo da direita, relacionada à variação de temperatura, será nula. O efeito da deformação na rede de Bragg pode ser analisado tratando a fibra óptica, com a rede de Bragg gravada, como uma barra homogênea e isotrópica com uma carga longitudinal aplicada na direção  $X$  (1 na notação indicial), onde a rede de Bragg possui comprimento  $L$  e está localizada em alguma região da fibra, como mostra a Figura 2.8.



**Figura 2.8:** Alongamento da fibra óptica com o aumento do comprimento e a diminuição das demais dimensões. Na figura, os eixos cartesianos seguem a notação indicial.

Uma vez que (IOCCO, 1999)

$$\Delta\left(\frac{1}{n_{eff}^2}\right) = -\frac{2\Delta n_{eff}}{n_{eff}^3} \quad \therefore \quad \Delta n_{eff} = n_{eff} \left[ -\frac{n_{eff}^2}{2} \Delta\left(\frac{1}{n_{eff}^2}\right) \right] \quad (2.24)$$

e assumindo

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial L} = \frac{\Lambda}{L} = \frac{\Delta L}{L}, \quad (2.25)$$

para uma variação do comprimento da rede ( $\Delta L$ ) muito pequena, substituindo (2.24) em (2.23) obtém-se

$$\Delta \lambda_B = 2n_{eff} \Lambda \left[ -\frac{n_{eff}^2}{2} \Delta \left( \frac{1}{n_{eff}^2} \right) \right] + 2n_{eff} \frac{\partial \Lambda}{\partial L} \Delta L. \quad (2.26)$$

Substituindo (2.25) em (2.26) e levando em conta que  $\varepsilon_{xx} = \Delta L / L$  e  $\lambda_B = 2n_{eff}\Lambda$ , obtém-se

$$\frac{\Delta \lambda_B}{\lambda_B} = \varepsilon_{xx} - \frac{n_{eff}^2}{2} \Delta \left( \frac{1}{n_{eff}^2} \right). \quad (2.27)$$

Na teoria fotoelástica o parâmetro  $(1/n_{eff}^2)$  faz parte do tensor de impermeabilidade óptica responsável pela geração do elipsóide de índice, ou indicatrix óptico, usado largamente no estudo da propagação de ondas planas em meios periódicos (YARIV e YEH, 1984). A variação da impermeabilidade óptica pode ser descrita como uma relação de proporcionalidade entre as componentes do tensor fotoelástico,  $p_{ij}$ , e o tensor de deformações na forma

$$\Delta \left( \frac{1}{n_{eff}^2} \right)_i = \sum_{j=1}^6 p_{ij} \varepsilon_j \quad i, j = 1, 2, 3 \dots 6, \quad (2.28)$$

onde  $\varepsilon_j$  determina a posição das componentes  $\varepsilon$  no vetor de deformação na forma generalizada (2.12).

No caso de um corpo cilíndrico formado por um material isotrópico e homogêneo, tal como a fibra óptica, o número de componentes do tensor fotoelástico pode ser reduzido de 36 para 9, resultando em (YARIV e YEH, 1984):

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{11} & \text{se } i = j \\ p_{12} & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \therefore \quad p_{ij} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{12} \\ p_{12} & p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{12} & p_{11} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

No caso da aplicação da carga longitudinal na direção  $X$ , não há componentes de deformação de cisalhamento no tensor de deformações (2.13), além disso, a deformação na direção  $Y$  e  $Z$  será a mesma e igual a  $-\mu \varepsilon_{11}$ . Logo, usando a notação indicial, a deformação em cada direção é dada por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\mu \\ -\mu \end{bmatrix} \varepsilon_{11}. \quad (2.30)$$

A relação (2.28) pode ser obtida diretamente multiplicando (2.30) por (2.29) com  $i, j = 1, 2$  e  $3$ , resultando em

$$\Delta \left( \frac{1}{n_{eff}^2} \right)_{X=1} = \varepsilon_{11} [p_{11} - 2\mu p_{12}] \quad (2.31)$$

e

$$\Delta \left( \frac{1}{n_{eff}^2} \right)_{Y,Z=2,3} = \varepsilon_{11} [p_{12} - \mu(p_{11} + p_{12})]. \quad (2.32)$$

Assumindo que o campo elétrico na fibra óptica é transversal à direção de propagação  $X$ , pode-se desprezar (2.31). Finalmente, substituindo (2.32) em (2.27) chega-se à expressão geral para a sensibilidade à deformação longitudinal:

$$\frac{\Delta \lambda_B}{\lambda_B} = \varepsilon_{11} \left[ 1 - \frac{n_{eff}^2}{2} [p_{12} - \mu(p_{12} + p_{11})] \right]. \quad (2.33)$$

Essa equação governa a sensibilidade à deformação longitudinal em uma rede de Bragg.

A Tabela 2.1 mostra os valores dos parâmetros encontrados para materiais baseados em sílica e os comprimentos de onda usados nos respectivos experimentos.

**Tabela 2.1:** Características encontradas para materiais baseados em sílica.

Referência	$\lambda$ (nm)	$n_{eff}$	$p_{11}$	$p_{12}$	$\mu$	Material
YARIV e YEH, 1984.	630	1,46	0,121	0,27	0,21	Sílica fundida
PRIMAK e POST, 1959.	589,2	1,458	0,121	0,27	0,164	Sílica vítrea
BERTHOLDS e DÄNDLIKER, 1988.	633	1,458	0,113	0,252	0,16	Fibra óptica
BORELLI e MILLER, 1968.	632,8	1,457	0,126	0,26	0,168	Sílica fundida
XU, REEKIE, CHOW <i>et al</i> , 1993	1533,3	1,465	0,121	0,27	0,17	Fibra óptica
HOCKER, 1979.	633	1,456	0,121	0,27	0,17	Fibra óptica

Nas simulações e cálculos do presente trabalho foram usados  $\mu = 0,165$ ,  $n_{eff} = 1,458$ ,  $p_{11} = 0,121$  e  $p_{12} = 0,27$ , valores geralmente usados na literatura recente. Além disso, como o módulo de Young relatado na literatura varia entre 70 GPa e 75 GPa para a fibra de sílica, foi usado o valor médio para  $E = 72,5$  GPa (MOHAMMAD, SZYSZKOWSKI, ZHANG *et al*, 2004).

A sensibilidade à deformação longitudinal, tanto para tração quanto para compressão, geralmente é apresentada na literatura através da equação (2.33) simplificada na forma (HILL e MELTZ, 1997):

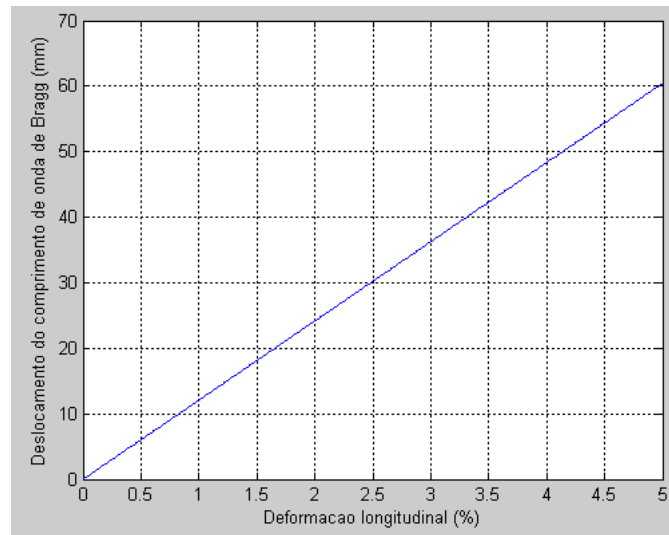
$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_B} = (1 - p_e)\epsilon_{11}, \quad (2.34)$$

onde  $\epsilon_{xx}$  é a deformação longitudinal e  $p_e$  a constante fotoelástica efetiva dada por

$$p_e = \frac{n_{eff}^2}{2} [p_{12} - \mu(p_{12} + p_{11})], \quad (2.35)$$

cujo valor para  $\mu = 0,165$ ,  $n_{eff} = 1,458$ ,  $p_{11} = 0,121$  e  $p_{12} = 0,27$  é de 0,22.

Com (2.34) é possível obter o gráfico, representado na Figura 2.9, do deslocamento do comprimento de onda de Bragg em função da deformação longitudinal para um comprimento de onda de Bragg inicial de 1550 nm. Observa-se que para um deslocamento de comprimento de onda de Bragg de 20 nm é necessária uma deformação de aproximadamente 1,65% (ou  $16500\mu\epsilon$ ). A sensibilidade à deformação longitudinal nesse caso é de  $1,2 \text{ pm}/\mu\epsilon$ .



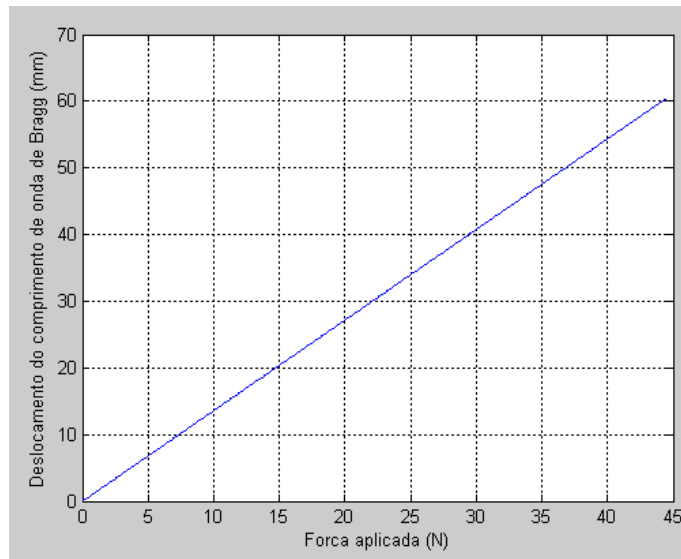
**Figura 2.9:** Deslocamento do comprimento de onda de Bragg em função da deformação longitudinal para um comprimento de onda de Bragg inicial de 1550 nm.

De acordo com (2.6), em uma fibra cilíndrica, a força externa longitudinal (no sentido do eixo  $X$ ) em função da deformação é dada por

$$F = E\varepsilon_{11} \frac{d^2}{4} \pi, \quad (2.36)$$

onde  $d$  é o diâmetro, que para uma fibra monomodo padrão de sílica é igual a  $125 \mu\text{m}$ .

A Figura 2.10 mostra o gráfico, obtido com (2.36) e (2.34), do deslocamento do comprimento de onda de Bragg, para uma fibra monomodo padrão de sílica, em função da força aplicada com um comprimento de onda de Bragg inicial de  $1550 \text{ nm}$ . Observa-se que para um deslocamento do comprimento de onda de Bragg de  $20 \text{ nm}$  (o que causa uma deformação de aproximadamente  $1,65\%$ ) é necessária uma força externa de aproximadamente  $14,6 \text{ N}$ . Forças dessa ordem de grandeza são facilmente conseguidas usando motores de passo ou atuadores piezoelétricos (PZTs).



**Figura 2.10:** Deslocamento do comprimento de onda de Bragg em função da força aplicada com um comprimento de onda de Bragg inicial de  $1550 \text{ nm}$ .

Porém, a tensão de ruptura da fibra de sílica sem gravação da rede é de aproximadamente  $6000 \text{ MPa}$ , mas diminui significativamente para aproximadamente  $700 \text{ MPa}$  quando a rede de Bragg é gravada usando técnicas convencionais (MENCIK, 1992; CARMAN e SENDECKYJ, 1995; STARUDUBOV, GRUBSKY e FEINBERG, 1999). Isso corresponde a uma deformação de aproximadamente  $1\%$ , que é obtida com a aplicação de uma força de tração de  $8,9 \text{ N}$ , o suficiente para se obter um deslocamento de  $12 \text{ nm}$  no comprimento de onda de Bragg. É importante ressaltar que a tensão de ruptura da fibra depende do processo de gravação. Essa é uma grave limitação para a obtenção de grandes



intervalos de sintonização apenas por tração, sendo a compressão utilizada quando se deseja intervalos maiores.

A fibra óptica de sílica é tipicamente 20 vezes mais resistente à compressão que à tração. A relação tensão-deformação tem comportamento linear até uma tensão de compressão de 3500 MPa, o que corresponde a uma deformação de  $-5\%$  (MENCIK, 1992; BALL e MOREY, 1994). A literatura relata intervalos de comprimento de onda até 110 nm atingidos por compressão da fibra (MOKHTAR, GOH, BUTLER *et al.*, 2003).

Para analisar o comportamento da fibra óptica sob uma carga de compressão considera-se a fibra como um pilar esbelto e linearmente elástico.

Aplicando uma carga mínima de compressão o pilar permanece reto sofrendo deformação apenas no seu eixo longitudinal, essa situação é chamada de equilíbrio estável. Nesse caso, aplicando uma força lateral o pilar sofrerá uma pequena deflexão que desaparecerá assim que a força for removida, fazendo o pilar voltar à sua posição reta inicial.

Aumentando gradativamente a carga até atingir um valor denominado carga crítica,  $P_{cr}$ , alcança-se a condição de equilíbrio neutro. Nesse caso o pilar apresentará uma pequena deflexão de forma que, aplicando uma força lateral, a deflexão aumentará e não desaparecerá com a remoção de tal força.

Aumentando ainda mais a carga, o pilar entrará na condição de instabilidade. A deflexão aumentará cada vez mais enquanto a carga estiver presente. Esse fenômeno é conhecido como flambagem.

Aplicando uma carga de compressão exatamente no eixo do pilar de área transversal  $S$  (excentricidade nula), a tensão crítica, a partir da qual ocorre a flambagem, dependerá das condições de extremidades e pode ser calculada usando o conceito de Comprimento Efetivo (TIMOSHENKO e GERE, 1998) através da equação

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(nL/i)^2}, \quad (2.37)$$

sendo  $nL$  o comprimento efetivo, onde  $n$  é o fator de comprimento efetivo.

O fator  $n$  vale 2 no caso de pilares engastados, 0,5 para pilares biengastados, 0,7 para pilares engastado e articulado e 1 para pilares biarticulados.

Conhecendo a tensão crítica é possível encontrar a deformação crítica usando (2.6)

$$\varepsilon_{cr} = \frac{\sigma_{cr}}{E} = \frac{\pi^2}{(nL/i)^2}, \quad (2.38)$$

onde

$$i = \sqrt{\frac{I}{S}}, \quad (2.39)$$

sendo  $S$  a área transversal do pilar.

O parâmetro  $i$  é denominado raio de giração da seção transversal e  $L/i$  é chamado de coeficiente de esbeltez ou grau de esbeltez.

Supondo a fibra de sílica perfeitamente cilíndrica, seu momento de inércia será

$$I = \frac{d^4 \pi}{64}. \quad (2.40)$$

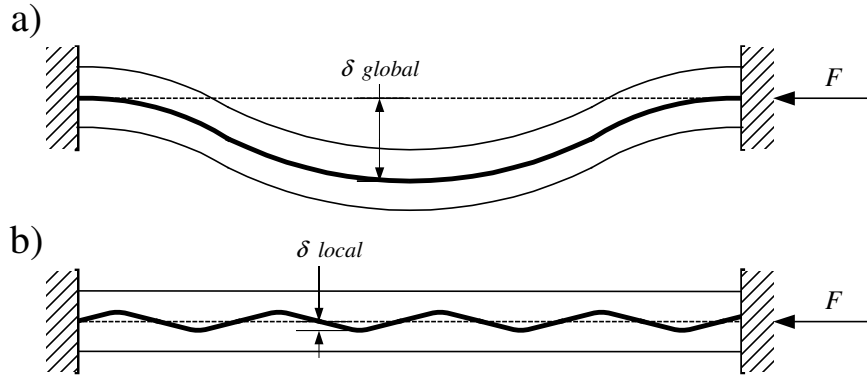
Substituindo (2.40) em (2.39), e esta em (2.38) chega-se a

$$\varepsilon_{cr} = -\left(\frac{\pi d}{4nL}\right)^2. \quad (2.41)$$

Como exemplo, para uma fibra monomodo padrão, sem revestimento, com comprimento de 10 mm e em condição de extremidade biengastada (com  $n = 0,5$ ), ocorre a flambagem para uma deformação de apenas -0,04%. Caso seja requerida uma deformação de -4% sem a ocorrência da flambagem o comprimento da fibra deve ser de apenas 0,5 mm.

De (2.41) percebe-se pela deformação crítica que a ocorrência de flambagem depende, além do comprimento, do diâmetro da fibra. Só é possível aumentar a deformação crítica aumentando o diâmetro ou diminuindo o comprimento. Observa-se que, ao contrário da tensão crítica, a deformação crítica não depende do módulo de Young. Em outras palavras, mantendo-se o coeficiente de esbeltez fixo, pode-se aumentar a tensão crítica aumentando o módulo de Young, mas seu efeito na deformação crítica será nulo. Essa constatação é importante no caso particular da sintonização da rede de Bragg por compressão, quando se reveste a fibra com outros materiais visando aumentar o diâmetro e evitar a flambagem.

É importante escolher o material do revestimento com um módulo de Young de baixo valor para se conseguir deformações menores que a crítica sem o uso de grandes forças de compressão. Porém, da mesma forma que o diâmetro é responsável pela deflexão global, um módulo de Young muito baixo pode ser responsável por um fenômeno denominado deflexão local mostrado na Figura 2.11.



**Figura 2.11:** Fibra revestida biengastada sob compressão apresentando (a) deflexão global e (b) deflexão local.

Dessa forma, um processo de otimização deve ser feito para se encontrar o melhor compromisso entre o diâmetro e o módulo de Young.

Além do revestimento com materiais de baixo módulo de Young, outras técnicas de guiamento para evitar a flambagem podem ser utilizadas como o uso de ferrolho ou o apoio da fibra por lâminas (MOHAMMAD, SZYSZKOWSKI, ZHANG *et al*, 2004).

## 2.8 SENSIBILIDADE À PRESSÃO HIDROSTÁTICA.

A sensibilidade à pressão hidrostática, quando toda a superfície da FBG é submetida a uma pressão constante, é estimada em aproximadamente 4 pm/MPa; em experimentos realizados conseguiu-se um deslocamento de apenas 0,22 nm para uma pressão hidrostática de 70 MPa (XU, REEKIE, CHOW *et al*, 1993). A FBG não suporta pressões acima de 3,5 GPa (MOHAMMAD, SZYSZKOWSKI, ZHANG *et al*, 2004), o que limita o deslocamento do comprimento de onda de Bragg a aproximadamente -15 nm para  $\lambda_B = 1550$  nm (nota-se que o deslocamento é negativo com o aumento da pressão).

Teoricamente, a sensibilidade à pressão hidrostática é dada por (XU, REEKIE, CHOW *et al*, 1993)

$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_B} = \left[ \frac{n_{eff}^2}{2E} (1-2\mu)(2p_{12} + p_{11}) - \frac{(1-2\mu)}{E} \right] \Delta P, \quad (2.42)$$

onde  $\Delta P$  é a variação da pressão hidrostática,  $p_{11}$  e  $p_{12}$  são as componentes do tensor fotoelástico,  $E$  é o módulo de Young e  $\mu$  é a coeficiente de Poisson.

## 2.9 SENSIBILIDADE À TEMPERATURA.

A sensibilidade à temperatura é provocada pelo efeito termo-óptico. Mantendo a fibra livre de forças externas, a expressão que governa a temperatura é dada por (OTHONOS e KALLI, 1999)

$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_B} = (\alpha + \zeta)\Delta T, \quad (2.43)$$

onde  $\lambda_B$  é o comprimento de onda de Bragg inicial,  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica dado por  $\alpha = (1/\Lambda)(\partial\Lambda/\partial T)$  e  $\zeta$  é o coeficiente termo-óptico dado por  $\zeta = (1/n_{eff})(\partial n_{eff}/\partial T)$ .

Para a fibra de sílica os valores de  $\alpha$  e  $\zeta$  estão em torno de  $0,55 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  e  $8,6 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , respectivamente. Esses valores, quando aplicados em (2.43), resultam em uma sensibilidade de  $14,2 \text{ pm}/^\circ\text{C}$  para um comprimento de onda de Bragg inicial de  $1550 \text{ nm}$ . Porém, os valores de  $\alpha$  e  $\zeta$  dependem dos elementos que compõem a fibra. Como exemplos, resultados experimentais mostraram que para uma rede gravada em uma fibra monomodo padrão (*SMF – Single Mode Fiber*) hidrogenada em um intervalo de  $60^\circ\text{C}$ , observa-se que para esse tipo de fibra a sensibilidade à temperatura é de  $11,5 \text{ pm}/^\circ\text{C}$ ; já para uma rede gravada em uma fibra SMF com alta dopagem de germânio, também em um intervalo de  $60^\circ\text{C}$ , a sensibilidade à temperatura é de  $12,2 \text{ pm}/^\circ\text{C}$  (SILVA, 2005).

Apenas FBGs especiais, denominadas CCGs (*Chemical Composition Gratings*), podem resistir a temperaturas superiores a  $1000^\circ\text{C}$ , o que resulta em um deslocamento do comprimento de onda de Bragg superior a  $15 \text{ nm}$  (FOKINE, 2002). Para FBGs convencionais, temperaturas acima de  $500^\circ\text{C}$  reduzem significativamente a refletividade da rede e podem até mesmo apagá-la (ERDOGAN, MIZRAHI, LEMAIRE *et al*, 1994); portanto, sua faixa de deslocamento do comprimento de onda de Bragg está restrita a aproximadamente  $7 \text{ nm}$ . Outra desvantagem da utilização do efeito térmico como elemento provocador do deslocamento de onda de Bragg é a lentidão ( $< 1 \text{ nm/s}$ ) (ROGERS, KUO, AHUJA *et al*, 2000). Como vantagens pode-se citar a alta repetibilidade e a baixa histerese.

A Tabela 2.2 mostra a sensibilidade de uma FBG convencional para tensão longitudinal, pressão hidrostática e temperatura.

**Tabela 2.2:** Sensibilidade da FBG para as principais técnicas de deslocamento do comprimento de onda de Bragg.

<b>Técnica</b>	<b>Sensibilidade</b>	<b>Intervalo de comprimento de onda de Bragg</b>
Deformação longitudinal	1,2 pm/ $\mu\epsilon$	12 nm (tração) -110 nm (compressão)
Pressão hidrostática	4pm/MPa	-15 nm
Temperatura	14,2 pm/ $^{\circ}\text{C}$	7 nm

Portanto, comparando a sensibilidade da FBG à deformação longitudinal, pressão hidrostática e temperatura, conclui-se que a grande vantagem do processo de aplicação de forças externas longitudinais, gerando tração ou compressão, é a possibilidade de se atingir uma grande faixa de deslocamento do comprimento de onda de Bragg, além da rapidez com que a sintonização é alcançada como será visto nos próximos capítulos.

## CAPÍTULO 3

### EQUAÇÕES DA ELASTODINÂMICA LINEAR E PRINCÍPIOS DA VISCOELASTICIDADE LINEAR APLICADOS EM FBG

#### 3.1 INTRODUÇÃO.

Este capítulo apresenta as equações da elastodinâmica linear, a partir das quais as equações de movimento de Navier-Cauchy e a determinação da velocidade das ondas elásticas longitudinais e transversais são obtidas.

Casos particulares, solucionados pelas equações de Navier-Cauchy, são demonstrados utilizando a técnica da expansão das autofunções (o Anexo 2 apresenta em detalhes essa técnica) visando encontrar as soluções exatas para a função deslocamento em uma fibra, tratada como uma barra.

São apresentados os princípios básicos da viscoelasticidade linear, bem como alguns modelos viscoelásticos. Também é apresentada a solução para o deslocamento de uma barra uniforme submetida à tração, levando em conta o amortecimento e os parâmetros que compõem a equação do deslocamento.

Esses princípios teóricos são aplicados em uma fibra engastada visando a observação, através de simulações, do comportamento temporal do comprimento de onda de Bragg e a obtenção do limite mínimo para o tempo de atraso da resposta da rede, ou seja, do tempo mínimo para o comprimento de onda de Bragg iniciar seu deslocamento.

Todas as simulações deste trabalho foram feitas usando o software proprietário MATLAB<sup>TM</sup>.

#### 3.2 DESLOCAMENTO DO COMPRIMENTO DE ONDA DE BRAGG EM UMA FBG SUBMETIDA À DEFORMAÇÃO LONGITUDINAL.

O deslocamento do comprimento de onda de Bragg em função do tempo pode ser relacionado com a deformação longitudinal  $\varepsilon_{11}$  (também variável no tempo) usando a expressão (2.33). Dessa forma, o comportamento do deslocamento do comprimento de onda de Bragg será governado por:

$$\Delta\lambda_B(t) = \left( \varepsilon_{11}(t) \left( 1 - \left( \frac{n_{eff}^2}{2} \right) (p_{12} - \mu(p_{11} + p_{12})) \right) \right) \lambda_B \quad (3.1)$$

A deformação em cada segmento infinitesimal da fibra se dá pela propagação no sentido longitudinal de uma onda elástica. O comportamento temporal da deformação depende da natureza da carga aplicada à fibra. Supondo os demais parâmetros de (3.1) constantes, a fibra pode ser tratada como uma barra homogênea e isotrópica. Define-se a velocidade de sintonização como sendo a razão entre o intervalo de sintonização, ou seja, o deslocamento máximo do comprimento de onda de Bragg, e o tempo necessário para realizar esse deslocamento. Aplicando os princípios da elastodinâmica é possível estimar a velocidade e o intervalo de sintonização através da resposta transiente. O comportamento temporal das ondas elásticas e da deformação será visto nas próximas seções.

### 3.3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO DE NAVIER-CAUCHY

As equações de movimento de Navier-Cauchy constituem um sistema de equações diferenciais para um corpo sólido, homogêneo, isotrópico e elástico linear (VERA-TUDELA, 2003). Na definição das equações de movimento, a seguir, considera-se implícito que as variáveis dependem do tempo e do espaço.

A equação da lei de Hooke generalizada definida em (2.8) pode ser escrita em função das duas constantes de Lamé definidas em (2.16) e (2.21) na forma

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \quad (3.2)$$

com  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

Repetindo, por conveniência, a equação (2.5) geradora do tensor de deformação

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.3)$$

e substituindo (3.3) em (3.2) obtém-se as componentes do tensor de tensões em função das derivadas do deslocamento

$$\sigma_{ij} = G \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}. \quad (3.4)$$

A equação de equilíbrio de um corpo leva em conta todas as forças que atuam sobre o mesmo. Um corpo finito (com pelo menos uma dimensão delimitada) pode ser deslocado ou deformado pela ação de dois tipos de forças externas. O primeiro tipo é a força superficial que atua em áreas definidas da superfície do corpo, também chamada de força de contato; o segundo tipo é a força volumétrica, também chamada na literatura de força de volume, que é

distribuída ao longo do corpo e caracterizada por uma densidade de força definida por unidade de volume (CURNIER, 1994).

A força de volume mais comum é a força gravitacional que pode ser definida como  $b_G = \rho g$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\rho$  a densidade do material. Essa força deve ser levada em consideração em barras verticais e colunas quando seus pesos forem significativos.

A combinação dessas forças resulta nas tensões internas; além disso, em regime transiente, o movimento do corpo encontra resistências devido às forças inerciais, também consideradas forças volumétricas. Essas também são distribuídas ao longo do corpo e definida por unidade de volume na forma

$$f_{in} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (3.5)$$

Dessa forma, a equação de equilíbrio dinâmico, denominada Equação de movimento de Cauchy, pode ser definida como (KOBAYASHI, 1987)

$$\nabla \cdot \sigma_{ij} + \rho b_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (3.6)$$

onde  $b_i$  são as componentes das forças por unidade de massa, sendo então  $\rho b_i$  as componentes das forças de volume.

Finalmente, substituindo (3.4) em (3.6) chega-se às equações de movimento de Navier-Cauchy que, escritas na forma vetorial, são representadas por (FREUND, 1998)

$$G \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \rho \vec{b} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (3.7)$$

Usando a identidade  $\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla^2 \vec{u}$ , após algumas operações algébricas, chega-se a uma nova representação para (3.7) na forma

$$C_p^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) - C_s^2 \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) + \vec{b} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (3.8)$$

onde

$$C_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (3.9)$$

e

$$C_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (3.10)$$

Assumindo  $\vec{b}$  nula ao longo do tempo e aplicando o operador divergente  $\nabla \cdot$  na equação (3.8), uma vez que  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$  (sendo  $\vec{F}$  um vetor qualquer), chega-se a



$$C_p^2 \nabla^2 (\nabla \cdot \vec{u}) = \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \vec{u})}{\partial t^2}. \quad (3.11)$$

Essa é a expressão homogênea escalar da propagação de uma onda longitudinal com velocidade  $C_p$ .

Aplicando agora em (3.8) o operador rotacional  $\nabla \times$ , uma vez que  $\nabla \times \nabla \vec{F} = 0$  (sendo  $\vec{F}$  um vetor qualquer), obtém-se

$$C_s^2 \nabla^2 (\nabla \times \vec{u}) = \frac{\partial^2 (\nabla \times \vec{u})}{\partial t^2}. \quad (3.12)$$

Sendo essa a expressão homogênea vetorial da propagação de uma onda transversal com velocidade  $C_s$ .

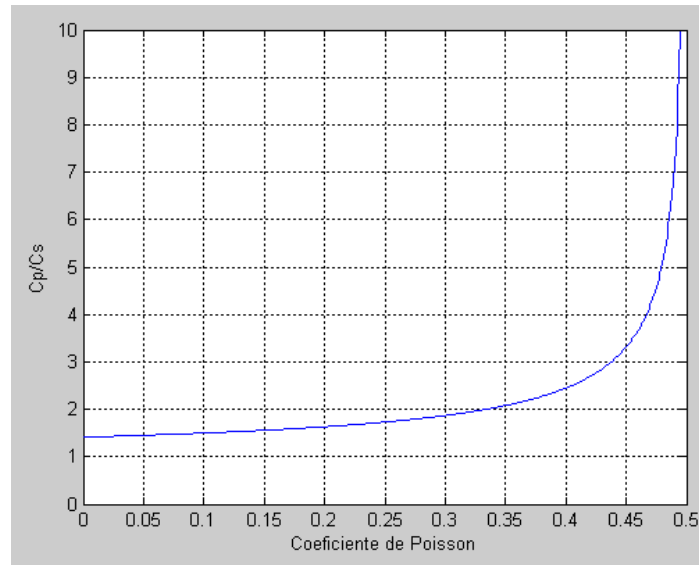
Portanto  $C_p$  representa a velocidade de uma onda longitudinal enquanto  $C_s$  representa a velocidade de uma onda transversal que se propaga no corpo. Tais ondas são independentes no interior do sólido, porém, elas interagem entre si em falhas estruturais, como nas superfícies das trincas (ACHENBACH, 1973), bem como em qualquer superfície de contorno dos corpos elásticos.

Em corpos elásticos isotrópicos a onda longitudinal causa dilatação e compressão alternadamente, modificando o volume do corpo, enquanto a onda transversal não causa mudança de volume mas modifica a forma do corpo. As velocidades  $C_p$  e  $C_s$  também são chamadas na literatura de velocidades de onda irrotacional e equivolumental, respectivamente.

Dividindo o valor das duas velocidades conclui-se que a onda longitudinal é mais rápida que a transversal já que

$$\frac{C_p}{C_s} = \sqrt{\frac{\lambda}{G} + 2} > 1. \quad (3.13)$$

A Figura 3.1 mostra a razão entre as velocidades em função do coeficiente de Poisson. Quanto maior o coeficiente de Poisson mais rápida é a onda longitudinal em relação à onda transversal.



**Figura 3.1:** Gráfico  $C_p/C_s$  versus coeficiente de Poisson.

Para se obter soluções para as Equações de Movimento de Navier-Cauchy é necessário determinar as condições de contorno e as condições iniciais que são o deslocamento e a velocidade no instante inicial  $t_0$ . Soluções analíticas só são possíveis em casos particulares, por isso métodos computacionais como o MEC - Método de elemento de contorno (*BEM – Boundary Element Method*), são usados para encontrar soluções numéricas (KOBAYASHY, 1987).

Neste trabalho optou-se pela técnica da Expansão das Autofunções (ver Anexo 2) já que essa técnica usa conceitos comuns às engenharias (como as frequências naturais de oscilação) e, também, pela natureza mecânica dos problemas a serem resolvidos.

### 3.4 MOVIMENTOS EM 1-D (UMA DIMENSÃO).

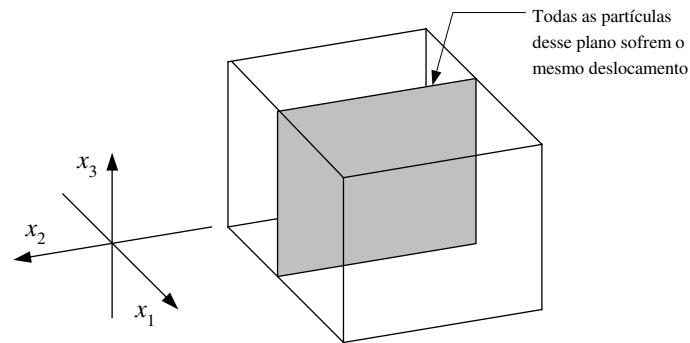
Considerando um caso particular, onde as três componentes do vetor deslocamento dependem apenas da variável espacial  $x_1$  (usando a notação indicial), as equações de Navier-Cauchy, expressas em (3.8), se reduzirão a (ERINGEN e SUHUBI, 1975)

$$C_p^2 \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} + b_1 = \frac{\partial^2 u_1(x_1, t)}{\partial t^2} \quad (3.14)$$

$$C_s^2 \frac{\partial^2 u_2(x_1, t)}{\partial x_1^2} + b_2 = \frac{\partial^2 u_2(x_1, t)}{\partial t^2} \quad (3.15)$$

$$C_s^2 \frac{\partial^2 u_3(x_1, t)}{\partial x_1^2} + b_3 = \frac{\partial^2 u_3(x_1, t)}{\partial t^2} \quad (3.16)$$

Essas equações só podem ser satisfeitas se as três componentes do vetor  $\vec{b}$  também dependerem apenas da variável espacial  $x_1$ . Observa-se que as três equações representam a propagação de ondas na direção do eixo  $X$  com velocidades  $C_p$  e  $C_s$ . É importante notar que todas as componentes do vetor deslocamento são desacopladas. Além disso, todas as partículas que pertencem a um plano com  $x_1$  constante sofrerão o mesmo deslocamento como mostra a Figura 3.2. Esse fenômeno é chamado movimento generalizado do plano.



**Figura 3.2:** Movimento generalizado do plano.

De (3.4), o tensor de tensões correspondente ao movimento será dado por:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2G) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & G \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & G \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ G \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 \\ G \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & 0 & \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

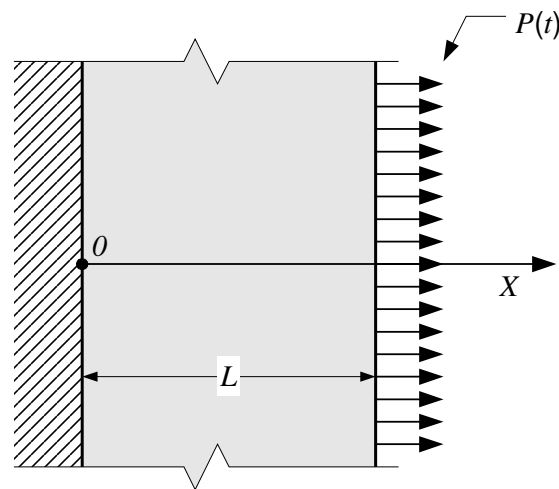
As equações do deslocamento transversal (3.15) e (3.16) são resolvidas da mesma maneira que a do deslocamento longitudinal (3.14). Dessa forma, apenas será tratada a

equação (3.14) já que suas soluções podem ser aplicadas com apenas algumas modificações em (3.15) e (3.16).

Ao se restringir o movimento em 1-D, toma-se uma camada material de espessura  $L$  e altura e profundidade infinitas, denominada simplesmente de camada finita. As soluções deste caso podem ser facilmente adaptadas para uma barra ou para uma fibra óptica.

### 3.5 CAMADA FINITA ENGASTADA SOB TRAÇÃO DINÂMICA.

Seja uma camada de espessura finita de comprimento  $L$  na direção  $X$ , e dimensões infinitas nas direções  $Y$  e  $Z$ , engastada em uma das extremidades e submetida a uma carga dinâmica  $P(t)$  na extremidade livre, como mostra a Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Camada finita engastada sob tração dinâmica.

Como a camada está engastada não há deslocamento em  $x = 0$ . Além disso, como a superfície de ação da carga  $P(t)$  é plana, em  $x = L$  tal carga pode ser interpretada como uma tensão direta. Logo, há uma relação entre a carga e a deformação causada por ela segundo (3.17).

Esse problema pode ser resolvido através da equação (3.14) usando a técnica da expansão das autofunções (ver Anexo 2). Por conveniência, substitui-se  $u_1$  por  $u$  e  $C_p$  por  $c_{ac}$ . As condições de contorno são dadas por

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = \frac{P(t)}{\lambda + 2G} \quad (3.18)$$

e as condições iniciais por  $u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$ .

Como pode ser visto no Anexo 2, no método da expansão das autofunções as funções  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  estão relacionadas ao deslocamento inicial e à velocidade inicial. Uma vez que as condições iniciais são iguais a zero, chega-se a  $\alpha_j = \beta_j = 0$  e o deslocamento será dado por

$$u(x,t) = -\sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \psi_j(x) \int_0^t \Phi_j(\tau) \text{sen}[\omega_j(t-\tau)] d\tau. \quad (3.19)$$

Para determinar  $\Phi_j(t)$  é necessário encontrar a solução quasiestática que satisfaça

$$\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \phi(0,t) = 0, \quad \frac{\partial \phi(L,t)}{\partial x} = \frac{P(t)}{\lambda + 2G}. \quad (3.20)$$

Obviamente tal solução é

$$\phi(x,t) = \frac{xP(t)}{\lambda + 2G}. \quad (3.21)$$

Assim,  $\Phi_j$  pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \Phi_j &= -\int_0^L \phi(x,t) \psi_j(x) dx = -\frac{P(t)}{\lambda + 2G} \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L x \text{sen}\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2L}\right) dx \\ &= \frac{(-1)^j}{(2j-1)^2} \frac{P(t) 4L \sqrt{2L}}{(\lambda + 2G) \pi^2} = \frac{(-1)^j}{(2j-1)} \frac{P(t) 2\sqrt{2L}}{\pi \rho c_{ac} \omega_j}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde as frequências naturais são  $\omega_j = \frac{(2j-1)\pi c_{ac}}{2L}$ .

A substituição de (3.22) em (3.19) resultará em

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi \rho c_{ac}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} \text{sen}\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2L}\right) \left[ \int_0^t P(\tau) \text{sen}\left(\frac{(2j-1)(t-\tau)\pi c_{ac}}{2L}\right) d\tau \right]. \quad (3.23)$$

Porém, se for definida:

$$U(x,t) = \frac{4}{\pi \rho c_{ac}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi c_{ac} t}{2L}\right), \quad (3.24)$$

pode-se escrever (3.23) como uma convolução na forma

$$u(x,t) = \int_0^t P(\tau) U(x,t-\tau) d\tau = P(t) * U(x,t). \quad (3.25)$$

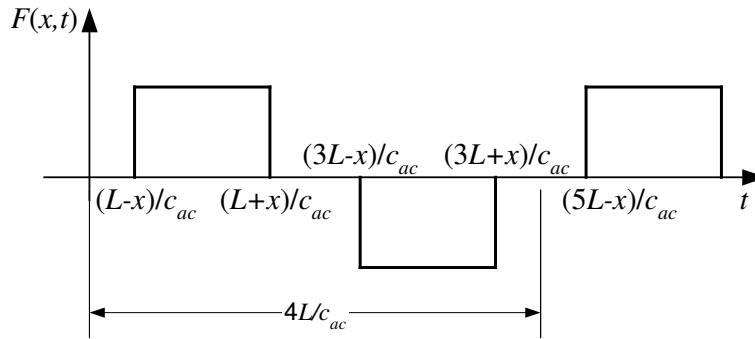
$U(x,t)$  corresponde à função de deslocamento causada pela aplicação de uma carga impulsiva  $P(t)=\delta(t)$ , onde  $\delta(t)$  é a função Delta de Dirac, em  $x = L$ .

A equação (3.24) pode ainda ser simplificada assumindo uma função periódica  $F(x,t)$  com período  $4L/c_{ac}$ , representada na Figura 3.4, cuja série de Fourier é dada por:

$$F(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \text{sen}\left(\frac{m\pi c_{ac} t}{4L}\right) \quad (3.26)$$

onde

$$a_m = \left(\frac{c_{ac}}{2L}\right) \int_0^{4L/c_{ac}} F(x,t) \text{sen}\left(\frac{m\pi c_{ac} t}{4L}\right) dt \quad (3.27)$$



**Figura 3.4:** Função  $F(x,t)$ .

Pode-se escrever (3.27) na forma

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{c_{ac}}{2L} \left[ \int_{(L-x)/c_{ac}}^{(L+x)/c_{ac}} \text{sen}\left(\frac{m\pi c_{ac} t}{4L}\right) dt - \int_{(3L-x)/c_{ac}}^{(3L+x)/c_{ac}} \text{sen}\left(\frac{m\pi c_{ac} t}{4L}\right) dt \right] \\ &= \frac{4}{m\pi} \left[ 1 + (-1)^m \right] \text{sen}\left(\frac{m\pi}{4}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi c}{4L}\right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Os coeficientes  $a_m$  só serão diferentes de zero se e somente se  $m = 2(j-1)$ . Dessa forma,

$$F(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} \text{sen}\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2L}\right) \text{sen}\left(\frac{(2j-1)\pi c_{ac} t}{2L}\right). \quad (3.29)$$

Portanto,  $U(x,t)$  pode ser escrito na forma

$$U(x,t) = \frac{1}{\rho c_{ac}} F(x,t) = \frac{1}{\rho c_{ac}} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \left\{ H\left[t - \frac{(2j-1)L-x}{c_{ac}}\right] - H\left[t - \frac{(2j-1)L+x}{c_{ac}}\right] \right\}, \quad (3.30)$$

onde  $H(t)$  é a função degrau unitário de Heaveside.

Finalmente, substituindo (3.30) em (3.25) chega-se a

$$u(x,t) = \frac{1}{\rho c_{ac}} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \left\{ H \left[ t - \frac{(2j-1)L-x}{c_{ac}} \right] \int_0^{t-[(2j-1)L-x]/c_{ac}} P(\tau) d\tau \right. \\ \left. - H \left[ t - \frac{(2j-1)L+x}{c_{ac}} \right] \int_0^{t-[(2j-1)L+x]/c_{ac}} P(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.31)$$

A equação (3.31) facilita a obtenção da função de deslocamento para algumas cargas particulares, já que a integração da função temporal  $P(t)$  da carga pode ser feita diretamente.

É importante salientar que essa equação só é válida para um corpo perfeitamente elástico, ou seja, sem nenhum tipo de amortecimento ou dissipação de energia. Uma vez submetida à tração, uma fibra óptica não ficará em movimento eternamente já que ocorrerá absorção da energia pelo sistema e seu movimento será amortecido.

### 3.6 BARRA UNIFORME SUBMETIDA À TRAÇÃO LONGITUDINAL.

Assumindo uma barra uniforme de área de seção reta  $S$ , densidade  $\rho$  e módulo de Young  $E$ , supõe-se que a barra é submetida à uma tração  $P(t)$  tal que  $P(t) = F(t)/S$ .

Como no caso da camada infinita submetida à tração, cada unidade de volume será submetida a uma força de volume  $f(x,t)$ , que terá o mesmo valor em todo o plano e em cada plano da seção reta devido ao movimento generalizado do plano. Ignorando o deslocamento nos eixos  $Y$  e  $Z$ , cada plano se deslocará seguindo a função deslocamento  $u(x,t)$ . Assim, os tensores de deformações e tensões serão, respectivamente

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu \frac{\partial u}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} (\lambda + G) \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

A denominada teoria elementar de vibração longitudinal é uma simplificação da teoria da elastodinâmica e é amplamente utilizada na engenharia quando o comprimento de onda longitudinal é muito maior que as dimensões da seção transversal do corpo analisado,

produzindo resultados aceitáveis principalmente para barras finas, como é o caso da fibra óptica. Tal teoria ignora o deslocamento nas direções  $Y$  e  $Z$ . Para isso, o coeficiente de Poisson é arbitrariamente tomado como nulo nos cálculos e o efeito da velocidade transversal definida em (3.10) é desprezado.

Com  $\mu = 0$ , a velocidade da onda elástica longitudinal, definida em (3.9), assume o valor  $C_p = c_{ac} = \sqrt{E/\rho}$ .

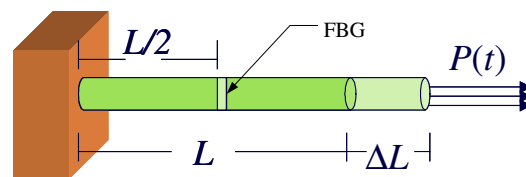
Além da teoria elementar para as barras, geralmente são usadas outras duas teorias denominadas Teoria de Rayleigh e Teoria de Bishop.

A teoria de Rayleigh considera a rigidez axial, mas ignora a rigidez à torção nos cálculos da equação de movimento (a rigidez axial é dada pelo produto  $ES$  enquanto a rigidez à torção é dada pelo produto  $GI$ , onde  $I$  é o momento de inércia da barra). Por sua vez, a teoria de Bishop considera tanto a rigidez axial quanto a rigidez à torção.

Nesse trabalho não serão desenvolvidas as teorias de Rayleigh e Bishop, tais desenvolvimentos, que são longos e tediosos, são encontrados em (RAO, 1992).

### 3.7 OSCILAÇÃO LIVRE DA FIBRA COM DESLOCAMENTO INICIAL.

Experimentalmente uma forma comum para se obter o deslocamento do comprimento de onda de Bragg é prender uma extremidade da fibra em um bloco fixo aplicando uma tração na outra extremidade, como pode ser visto a Figura 3.5.



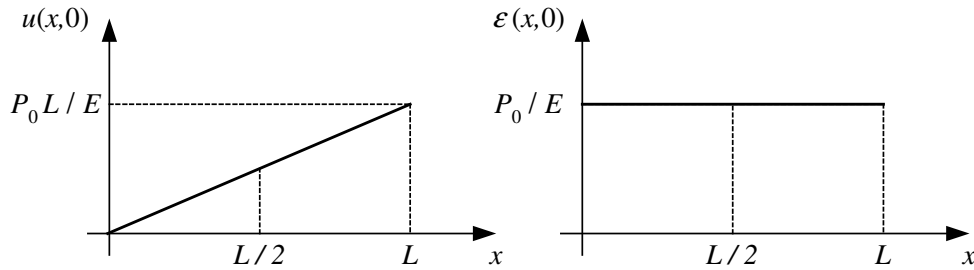
**Figura 3.5:** Fibra modelada como barra engastada.

Como primeira análise, supõe-se a fibra de sílica como uma barra engastada, perfeitamente elástica e submetida a uma tração em sua extremidade no sentido longitudinal. Assume-se a rede inteiramente concentrada em um ponto no meio da fibra de acordo com a Figura 3.5.

Assumindo que a tração  $P(t) = P_0$  constante seja suficiente para causar uma deformação global de 1%, o deslocamento global da fibra será  $\Delta L = 0,01L$ . Nesse estado



estacionário, pela teoria da elastostática, o deslocamento e a deformação são distribuídos ao longo da fibra de acordo com a Figura 3.6, supondo a origem no ponto de engastamento.



**Figura 3.6:** Deslocamento e deformação na fibra no instante inicial  $t = 0$ .

Observa-se que a deformação é constante em toda a fibra, inclusive no ponto de localização da rede em  $L/2$ .

Assumindo que a carga seja instantaneamente anulada, a fibra iniciará seu movimento oscilatório governado pela equação de onda homogênea (3.14)

$$c_{ac}^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \quad (3.33)$$

Usando a teoria elementar assume-se  $c_{ac}^2 = E/\rho$ . Como os valores do módulo de Young e da densidade são 72.5 GPa e 2001 Kg/m<sup>3</sup>, respectivamente, para a fibra de sílica, então  $c_{ac} = 5740$  m/s.

Essa situação apresenta as seguintes condições de contorno:

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0, \quad (3.34)$$

e as seguintes condições iniciais

$$u_0 = u(x,0) = \frac{P_0}{E} x, \quad v_0 = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0. \quad (3.35)$$

Resolvendo (3.33) através da expansão das autofunções, a equação do deslocamento será dada por

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \alpha_j \cos(\omega_j t) + \left( \frac{1}{\omega_j} \right) \beta_j \text{sen}(\omega_j t) \right) \psi_j(x). \quad (3.36)$$

A condição inicial  $v_0 = 0$  implica em  $\beta_j = 0$ , sendo  $\alpha_j$  dado por:

$$\alpha_j = \int_0^L \frac{P_0}{E} x \psi_j(x) dx, \quad (3.37)$$

com as autofunções representadas por

$$\psi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2L}\right) \quad (3.38)$$

e as frequências naturais representadas por

$$\omega_j = \frac{(2j-1)\pi c_{ac}}{2L}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.39)$$

Portanto, os períodos das oscilações naturais serão:

$$T_j = \frac{4L}{c_{ac}} \frac{1}{(2j-1)} = \frac{4L}{2j-1} \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \quad (3.40)$$

onde  $j$  representa o modo de oscilação. Fazendo  $j = 1$  obtém-se o modo fundamental, resultando em um período fundamental  $T_1 = 4L/c_{ac}$ .

A solução geral para o deslocamento será

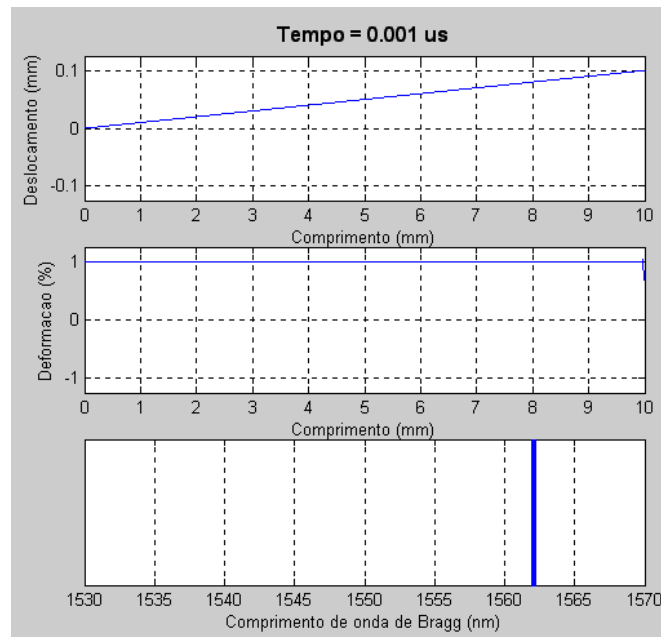
$$u(x,t) = \frac{8P_0L}{\pi^2 E} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^2} \operatorname{sen}\left[\frac{(2j-1)\pi}{2L}x\right] \cos\left[\frac{(2j-1)\pi c_{ac}}{2L}t\right]. \quad (3.41)$$

Assumindo arbitrariamente um comprimento para a fibra  $L = 10$  mm e o comprimento de onda de Bragg em repouso  $\lambda_B = 1550$  nm, foi feita a simulação com  $j_{\max} = n = 500$  (quinhentos modos de vibração) usando (3.41), obtendo-se o comportamento do deslocamento e da deformação. A escolha de 500 modos foi feita arbitrariamente devido ao baixo esforço computacional exigido para o código implementado em MATLAB; usando um PC com *clock* de 2,66 GHz e 1GB de RAM, em apenas alguns segundos de processamento é possível obter as soluções. Como pode ser visto nas Figuras 3.7 e 3.8, esse número de modos é suficiente para indicar que nos instantes iniciais uma onda degrau de deformação se propaga ao longo da fibra.

Por sua vez, conhecendo o comportamento da deformação, a variação do comprimento de onda de Bragg é obtida através de (3.1). Para esse valor de  $L$  o período fundamental será:

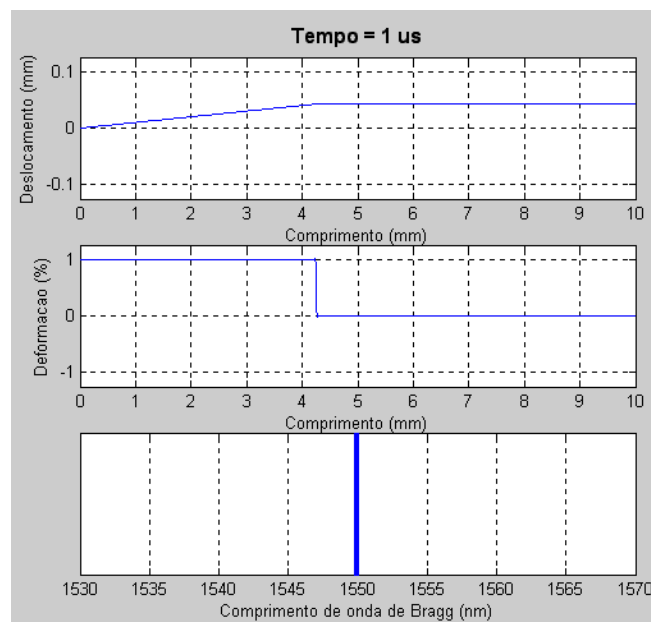
$$T_1 = \frac{4L}{c_{ac}} = 6,97 \mu s \quad (3.42)$$

A Figura 3.7 mostra tal comportamento no instante  $t = 1$  ns após a força ser anulada. Como no ponto onde se localiza a rede ( $L/2 = 5$  mm) a deformação é de 1%, de acordo com (2.36) conclui-se que o comprimento de onda de Bragg sofre uma variação de 12 nm. Dessa forma, observa-se o comprimento de onda de Bragg em 1562 nm.



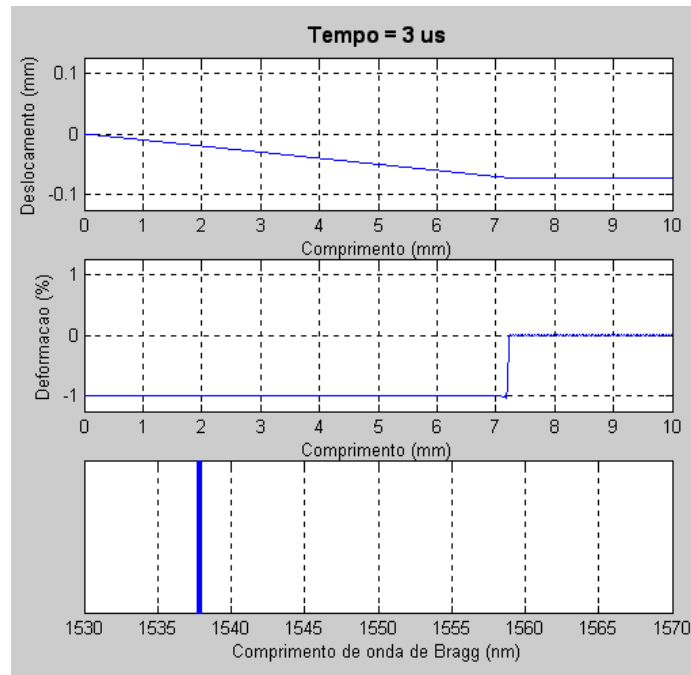
**Figura 3.7:** Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante  $t = 1$  ns.

A Figura 3.8 mostra a situação no instante  $t = 1 \mu\text{s}$ . Observa-se que a deformação cai para zero ao longo da fibra com uma velocidade igual à da onda elástica ( $c_{ac} = 5740$  m/s). Nesse instante o ponto onde a rede se localiza já sofreu o efeito da deformação e o comprimento de onda de Bragg está em 1550 nm.



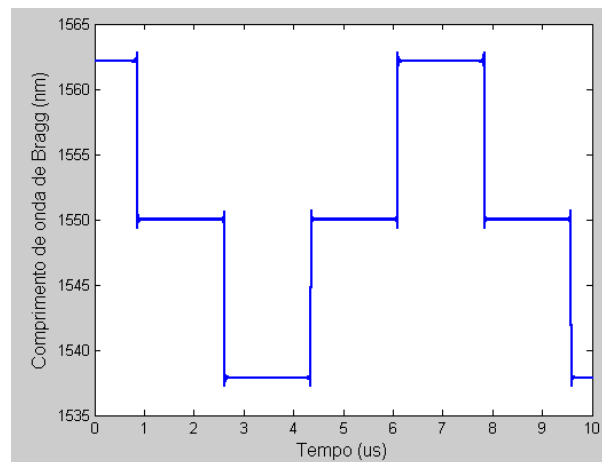
**Figura 3.8:** Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante  $t = 1 \mu\text{s}$ .

A Figura 3.9 mostra a situação no instante  $t = 3 \mu\text{s}$ . Nesse instante o deslocamento e a deformação são negativos, sendo que o ponto onde se encontra a rede sofre uma deformação de  $-1\%$  causando um deslocamento do comprimento de onda de Bragg para 1538 nm.



**Figura 3.9:** Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante  $t = 3 \mu\text{s}$ .

A Figura 3.10 mostra o comportamento temporal do comprimento de onda de Bragg no intervalo de  $t = 0$  a  $t = 10 \mu\text{s}$ . Observa-se o caráter periódico do comprimento de onda de Bragg e seu deslocamento instantâneo, já que a deformação na rede também ocorre instantaneamente.



**Figura 3.10:** Comportamento temporal comprimento de onda de Bragg.

### 3.8 FIBRA SUBMETIDA A UMA TRAÇÃO DEGRAU.

A tração degrau aplicada a uma FBG simula um atuador ideal, já que a tração aplicada varia instantaneamente de zero para um valor constante. Isso equivale, por exemplo, à aplicação de uma onda quadrada de baixa frequência em um atuador PZT. O objetivo dessa simulação é encontrar o tempo mínimo de atraso entre a aplicação da tração e o deslocamento do comprimento de onda de Bragg.

Supondo a fibra de sílica inicialmente em repouso e aplicando uma tração dependente do tempo cuja função é:

$$P(t) = P_0 H(t), \quad (3.43)$$

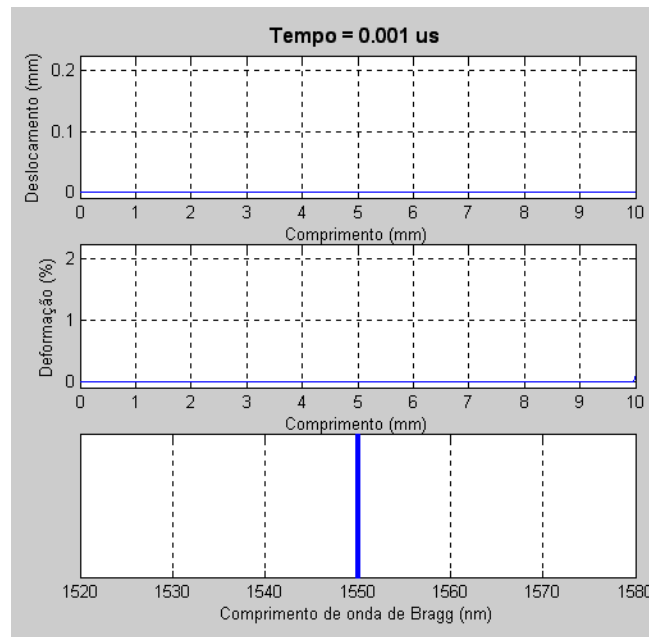
onde  $H(t)$  é a função degrau unitário de Heaveside e  $P_0$  uma tração constante.

Utilizando a técnica da expansão dos autovalores e substituindo (3.43) em (3.23) resultará em.

$$u(x,t) = \frac{8P_0L}{\pi^2 E} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^2} \left\{ 1 - \text{sen} \left[ \frac{(2j-1)\pi}{2L} x \right] \cos \left[ \frac{(2j-1)\pi c_{ac}}{2L} t \right] \right\}. \quad (3.44)$$

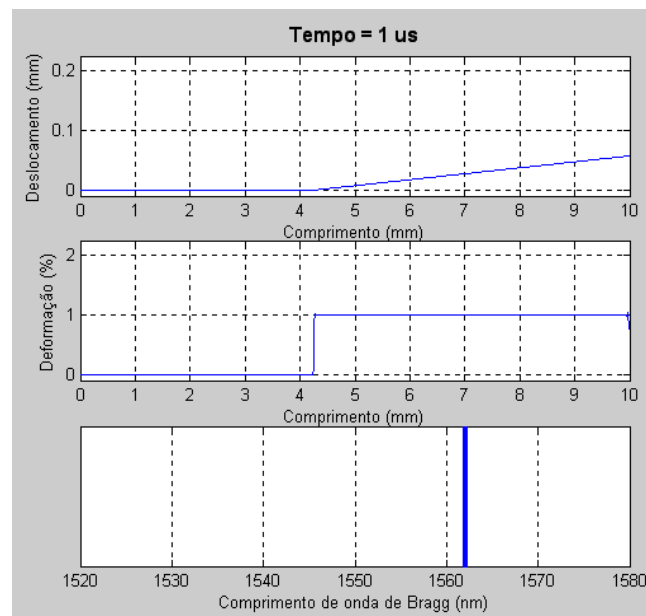
Na extremidade da barra, quando  $x=L$ , o deslocamento máximo será igual a  $u_{\max} = 2P_0L/\rho c^2 = 2P_0L/E$ , o dobro do que prediz a elastostática (quando a força é aplicada lentamente) como mostra a Figura 3.6.

A Figura 3.11 mostra o comportamento do deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante  $t=1$  ns após a tração ser aplicada. Percebe-se que no ponto onde se localiza a rede ( $L/2 = 5$  mm) a deformação é nula. Dessa forma, observa-se que o comprimento de onda de Bragg permanece em 1550 nm.



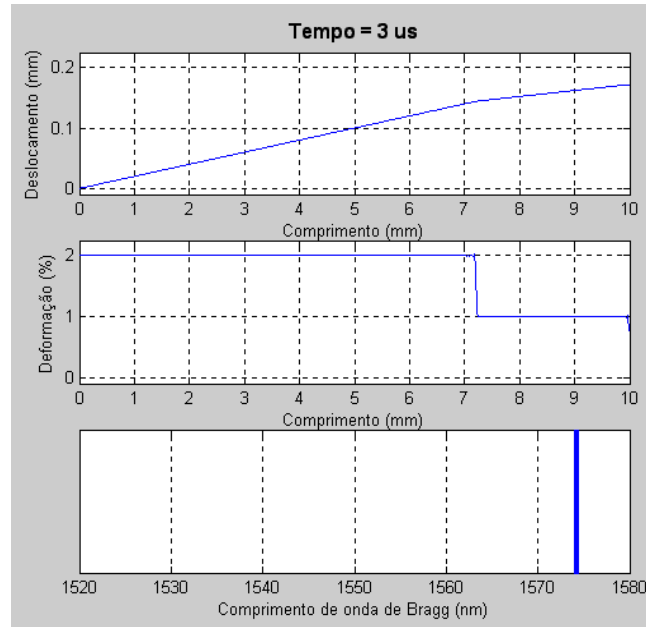
**Figura 3.11:** Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante  $t = 1\text{ ns}$  para a fibra submetida a uma tração degrau.

A Figura 3.12 mostra a situação no instante  $t = 1\ \mu\text{s}$ . Com a aplicação da tração degrau a deformação ao longo da fibra aumenta para 1% também com uma velocidade igual à da onda elástica ( $c_{ac} = 5740\ \text{m/s}$ ). Nesse instante, o ponto onde a rede se localiza já sofreu o efeito da deformação e o comprimento de onda de Bragg está em 1562 nm.



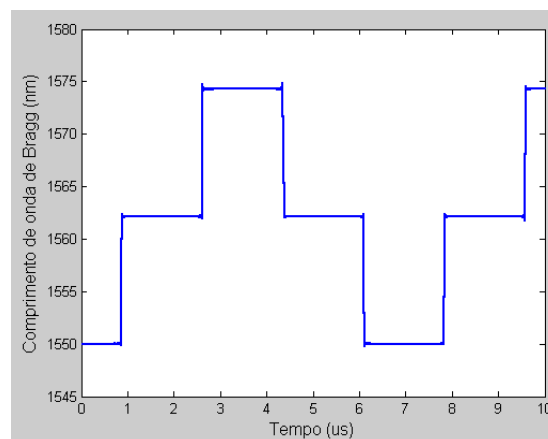
**Figura 3.12:** Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante  $t = 1\ \mu\text{s}$  para a fibra submetida a uma tração degrau.

A Figura 3.13 mostra a situação no instante  $t = 3 \mu\text{s}$ . Nesse instante a deformação no ponto de localização da rede está em 2% e o comprimento de onda de Bragg se encontra em 1574 nm.



**Figura 3.13:** Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante  $t = 3 \mu\text{s}$  para a fibra submetida a uma tração degrau.

A Figura 3.14 mostra o comportamento temporal do comprimento de onda de Bragg no intervalo de  $t = 0$  a  $t = 8 \mu\text{s}$ . Como no item anterior, observa-se o caráter periódico do comprimento de onda de Bragg.



**Figura 3.14:** Comportamento temporal do comprimento de onda para a fibra submetida a uma tração degrau.

É importante salientar que, como foi usada a teoria da elastodinâmica linear, o princípio da superposição é válido na aplicação da tração. Em outras palavras, ao aplicar funções temporais de tração mais complexas, é possível decompor suas componentes e aplicá-las isoladamente somando os resultados.

Para um modelo mais detalhado é necessário levar em conta o amortecimento já que uma fibra óptica não é perfeitamente elástica. Assim, é pertinente o estudo da teoria da viscoelasticidade linear. Quase todos os polímeros apresentam comportamento viscoelástico. Essa teoria pode ser utilizada no caso do revestimento da fibra por um material polimérico, de menor módulo de Young, visando aumentar a tensão crítica e a deformação crítica (pelo aumento do diâmetro do conjunto) no processo de compressão. Além disso, tal teoria é aplicável para fibras puramente poliméricas, citadas no último item deste capítulo, que apresentam algumas vantagens em relação às fibras de sílica.

### 3.9 PRINCÍPIOS DA VISCOELASTICIDADE LINEAR E MODELOS VISCOELÁSTICOS.

A teoria da viscoelasticidade linear leva em conta a absorção de energia em um sistema contínuo (RAO, 1992), sendo válida para pequenas deformações (para grandes deformações usa-se a teoria não-linear da viscoelasticidade)

Na teoria clássica da elasticidade a relação entre a tensão e a deformação é considerada constante e independente do tempo. Porém, para certos materiais, como a borracha, a deformação aumenta com o tempo mesmo que a força aplicada se mantenha constante.

Os modelos viscoelásticos podem ser construídos através dos modelos mecânicos mola-amortecedor. O uso do melhor modelo depende das características do material a ser estudado. Há três modelos viscoelásticos básicos: o Modelo de Kelvin, o Modelo de Maxwell e o Modelo Generalizado de Maxwell. Exemplos de materiais que seguem o modelo de Maxwell são os metais, alguns materiais compósitos e fluidos viscoelásticos; Polímeros sintéticos (como o nylon) geralmente seguem o modelo de Kelvin.

Duas funções são importantes na teoria da viscosidade: a função de arraste, usada quando a entrada é uma função de tensão conhecida e a função de relaxação, usada quando a entrada é uma função de deformação conhecida.



Considerando uma barra onde um plano específico da sua seção transversal esteja submetido a uma tensão direta longitudinal devido a uma força constante, verifica-se que no instante  $t = 0$  o plano estará sob uma tensão  $\sigma_0$ . Assumindo a deformação dependente do tempo, a função de arraste é definida como

$$\gamma(t, \sigma_0) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}. \quad (3.45)$$

Imediatamente após a aplicação da força, a deformação será

$$\varepsilon(t = 0^+) = \frac{\sigma_0}{E}. \quad (3.46)$$

Ao longo do tempo a deformação pode ser escrita como

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0^+) + \varepsilon_i(t) = \sigma_0 \left( \frac{1}{E} + \alpha(t) \right). \quad (3.47)$$

Portanto, comparando (3.47) com (3.45), observa-se que a função de arraste será dada por

$$\gamma(t, \sigma_0) = \frac{1}{E} + \alpha(t). \quad (3.48)$$

Da mesma forma, considerando uma barra onde um plano específico da sua seção transversal esteja submetido a uma deformação direta longitudinal; verifica-se que no instante  $t = 0$  o plano estará sob uma deformação  $\varepsilon_0$ . Assumindo a tensão dependente do tempo, a função de relaxação é definida como

$$\chi(t, \varepsilon_0) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}. \quad (3.49)$$

Com um raciocínio análogo à função de arraste, chega-se a

$$\chi(t, \varepsilon_0) = E + \beta(t). \quad (3.50)$$

As funções  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  governam o comportamento temporal da deformação e da tensão, respectivamente, e dependem do modelo adotado.

Considerando a função tensão dependente do tempo e contínua no intervalo  $-\infty < \tau < t$ , é possível escrever

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} \gamma(t - \tau) d\tau. \quad (3.51)$$

Analogamente

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} \chi(t - \tau) d\tau. \quad (3.52)$$

Observa-se que se  $\alpha(t) = \beta(t) = 0$  a Lei de Hooke representada por (2.6) será obtida.

No caso particular em que a função tensão é  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ , onde  $H(t)$  é a função degrau unitário de Heaveside, a equação (3.51) pode ser escrita na forma

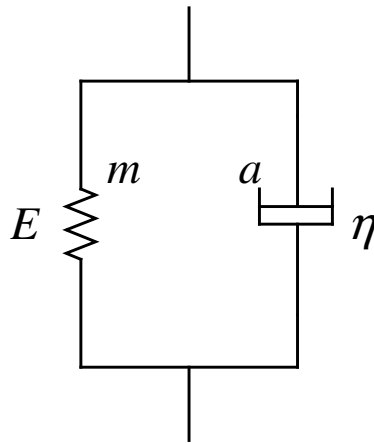
$$\frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \int_0^t \frac{dH(\tau)}{d\tau} \gamma(t-\tau) d\tau = \int_0^t \delta(\tau) \gamma(t-\tau) d\tau = \gamma(t). \quad (3.53)$$

Como em um corpo sólido espera-se que a deformação se estabilize quando tal corpo é submetido a uma tensão constante. Nas simulações deste trabalho foi usado o modelo de Kelvin devido ao seu comportamento assintótico para a função de arraste, cujos detalhes serão vistos a seguir. Detalhes sobre o modelo de Maxwell e o modelo generalizado de Maxwell podem ser vistos no Anexo 3.

### 3.9.1 Modelo de Kelvin

Para os casos tratados neste capítulo a função de entrada é a de tensão, por isso usou-se a função de arraste no modelo de Kelvin para estimar o comportamento da deformação na fibra.

Esse modelo é formado pela associação em paralelo de uma mola de constante elástica  $E$  (equivalente ao módulo de Young) com um amortecedor de coeficiente de viscosidade  $\eta$ , como mostra a Figura 3.15. As deformações da mola e do amortecedor são iguais; porém, a tensão total será a soma das tensões individuais dos dois elementos.



**Figura 3.15:** Modelo de Kelvin.

Dessa forma:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \varepsilon_m(t) = \varepsilon_a(t) \\ \sigma(t) &= \sigma_m(t) + \sigma_a(t).\end{aligned}\quad (3.54)$$

Da lei de Hooke obtém-se para a mola

$$\sigma_m(t) = E\varepsilon_m(t) = E\varepsilon(t). \quad (3.55)$$

E da segunda lei de Newton obtém-se para o amortecedor

$$\sigma_a(t) = \eta \frac{\partial \varepsilon_a(t)}{\partial t} = \eta \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t}. \quad (3.56)$$

Substituindo (3.55) e (3.576) em (3.54) resultará em

$$\sigma(t) = E \left( \varepsilon(t) + t_r \frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} \right), \quad (3.57)$$

onde  $t_r = \eta/E$  é denominado tempo de retardo.

Supondo o corpo no estado livre para  $t \leq 0$ , encontra-se  $\varepsilon(t)$  resolvendo (3.57), o que resulta em

$$\varepsilon(t) = \frac{H(t)}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) e^{-\frac{(t-\tau)}{t_r}} d\tau. \quad (3.58)$$

De (3.53) percebe-se que é possível calcular a função de arraste usando  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$  em (3.58). Dessa forma:

$$\frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} = \gamma(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-t/t_r}) \quad (3.59)$$

Portanto, comparando (3.59) com (3.48), conclui-se que no modelo de Kelvin tem-se a função  $\alpha(t) = -e^{-t/t_r}$ .

Observa-se que o comportamento da deformação é assintótico. Quanto  $t$  tende a infinito a deformação estabiliza em  $\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma_0}{E}$ , ao contrário do modelo de Maxwell onde a deformação aumenta continuamente com o tempo (ver Anexo 3).

### 3.10 OSCILAÇÃO LIVRE DA FIBRA COM DESLOCAMENTO INICIAL CONSIDERANDO O AMORTECIMENTO.

Aplicando a teoria elementar, a oscilação da fibra engastada-livre com um deslocamento inicial causado por uma carga  $P_0$ , levando em conta o amortecimento e usando o modelo de Kelvin, é governada pela equação de deslocamento (RAO, 1992):

$$u(x,t) = \frac{2P_0}{L\rho} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(\gamma_j^2 + \beta_j^2)} \left\{ e^{-\beta_j t} \left[ \cos(\gamma_j t) + \frac{\beta_j}{\gamma_j} \sin(\gamma_j t) \right] \right\} \sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{2L}x\right). \quad (3.60)$$

Também é usada a técnica da expansão das autofunções para chegar a (3.61), sendo os parâmetros definidos como:

- $\beta_j$  é denominado modo de amortecimento dado por

$$\beta_j = \frac{t_r}{2} \left[ \frac{(2j-1)\pi c_{ac}}{2L} \right]^2. \quad (3.61)$$

- $\gamma_j$  é a frequência natural amortecida dada por:

$$\gamma_j = \sqrt{\left[ \frac{(2j-1)\pi c_{ac}}{2L} \right]^2 - \beta_j^2}. \quad (3.62)$$

O tempo de relaxação  $t_r$  é levantado experimentalmente. De (3.62) percebe-se que cada modo pode ter um amortecimento diferente fazendo com que a barra tenha uma dinâmica complexa dependendo da função de tração aplicada. Além disso, de (3.60) percebe-se que o decaimento da amplitude do deslocamento depende de  $\beta_j$ , portanto, quanto maior a ordem do modo maior será seu amortecimento. Adota-se o seguinte critério para classificar o amortecimento para cada modo.

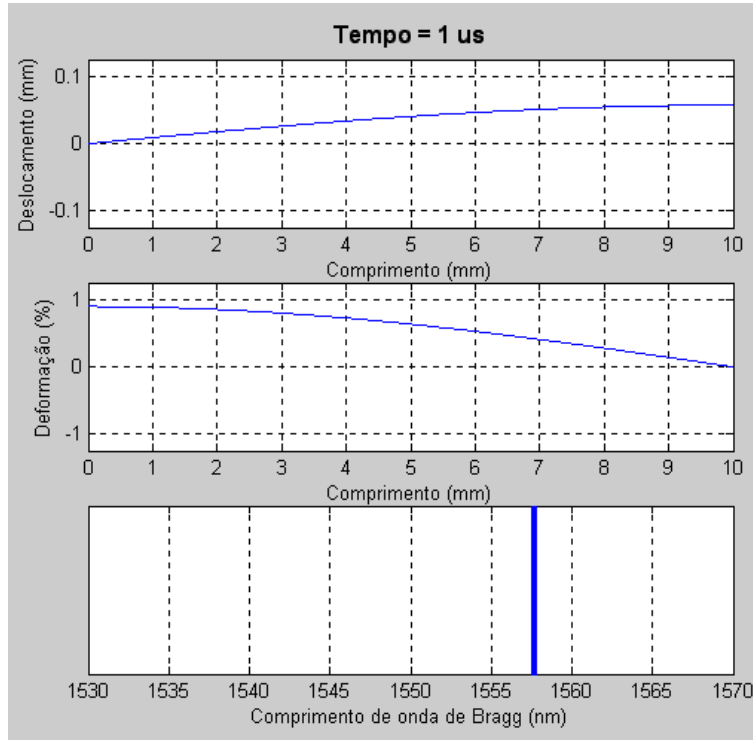
- Se  $t_r > \frac{4L}{[(2j-1)\pi c_{ac}]}$  o modo é considerado sobre-amortecido.
- Se  $t_{r-cr} = \frac{4L}{[(2j-1)\pi c_{ac}]}$  o modo é considerado criticamente amortecido.
- Se  $t_r < \frac{4L}{[(2j-1)\pi c_{ac}]}$  o modo é considerado subamortecido.

Nota-se que, assumindo  $\beta_j = t_r = 0$  em (3.62),  $\gamma_j$  será igual à frequência natural sem amortecimento dada por (3.39).

Com os mesmos parâmetros usados no item anterior foi feita a simulação usando um tempo de relaxação  $t_r = 1 \mu s$ . Esse tempo é menor que o tempo crítico de retardo ( $t_{r-cr} = 2,219 \mu s$ ) para o modo fundamental. Como o modo fundamental é dominante, apresentando menor amortecimento que os demais, assume-se o sistema subamortecido.

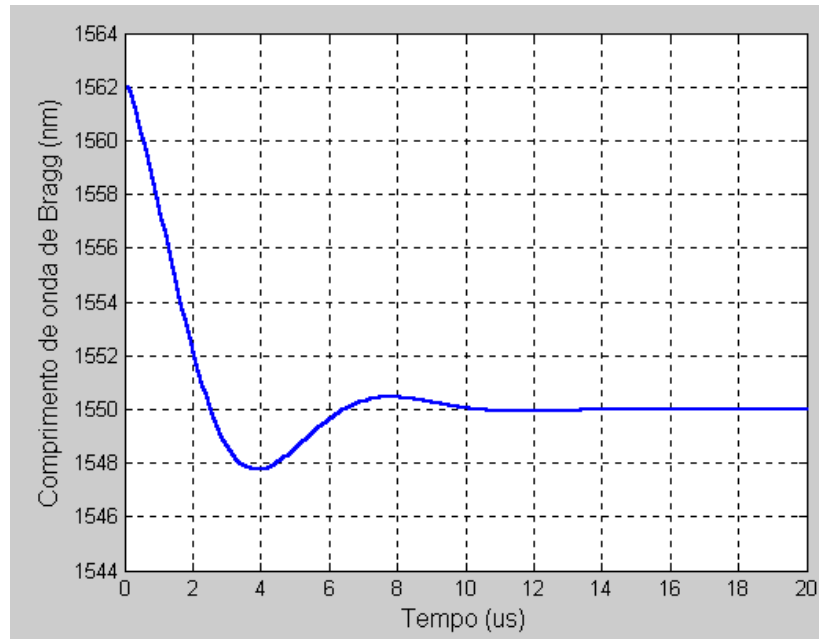
A Figura 3.16 mostra essa situação no instante  $t = 1 \mu s$ . Observa-se a diferença de comportamento do deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg em relação

ao caso anterior comparando a Figura 3.16 com a Figura 3.8. Nesse instante o comprimento de onda de Bragg já se encontra em 1550 nm no caso sem amortecimento. Contudo, o comprimento de onda ainda se encontra em 1558 nm considerando o amortecimento.



**Figura 3.16:** Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante  $t = 1 \mu\text{s}$  considerando o amortecimento.

A Figura 3.17 mostra o comportamento temporal do comprimento de onda de Bragg no intervalo de  $t = 0$  a  $t = 20 \mu\text{s}$ . O comprimento de onda de Bragg, inicialmente em 1562 nm, no estado estacionário o comprimento de onda de Bragg estará estabilizado na situação de equilíbrio em 1550 nm. Portanto, sofre um deslocamento de 12 nm depois de aproximadamente  $14 \mu\text{s}$ , o que resulta em uma velocidade de sintonização de aproximadamente 857 nm/ms.



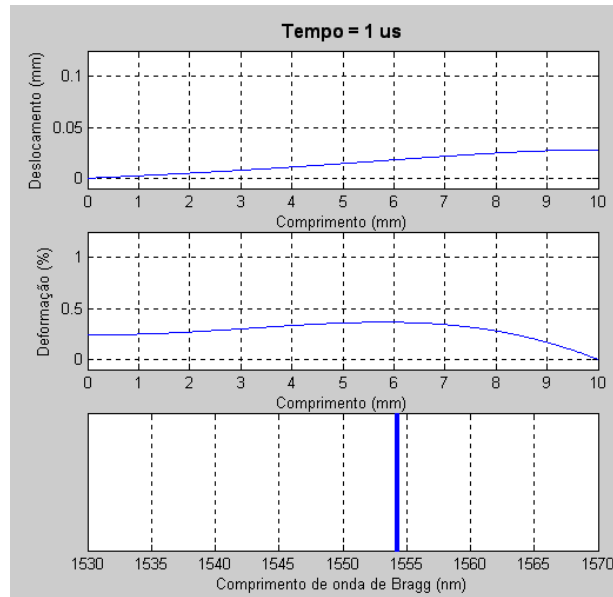
**Figura 3.17:** Comportamento temporal comprimento de onda de Bragg considerando o amortecimento.

### 3.11 FIBRA SUBMETIDA A UMA TRAÇÃO DEGRAU CONSIDERANDO O AMORTECIMENTO.

Para esse caso usa-se a equação geral do deslocamento, também desenvolvida em (RAO, 1992), para uma barra engastada-livre, com amortecimento usando o modelo de Kelvin e submetida a uma tração que segue a função degrau  $P_0H(t)$ :

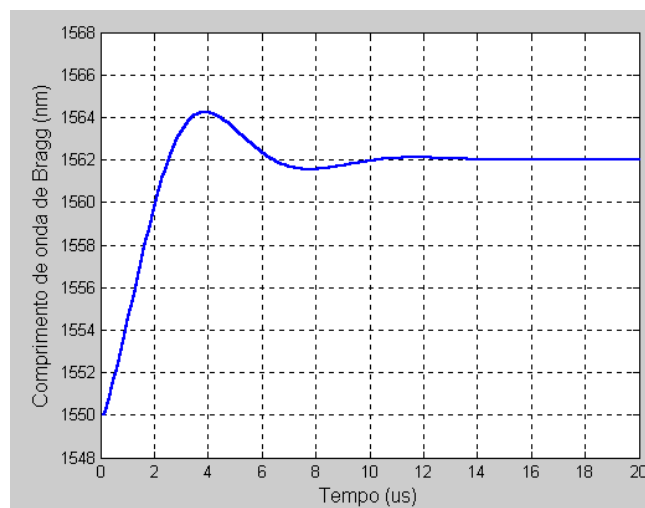
$$u(x,t) = \frac{2P_0}{L\rho} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(\gamma_j^2 + \beta_j^2)} \left\{ 1 - e^{-\beta_j t} \left[ \cos(\gamma_j t) + \frac{\beta_j}{\gamma_j} \text{sen}(\gamma_j t) \right] \right\} \text{sen} \left( \frac{(2j-1)\pi}{2L} x \right) \quad (3.63)$$

A Figura 3.18 mostra a situação no instante  $t = 1 \mu\text{s}$ . Comparando com a Figura 3.12 percebe-se que a deformação no ponto de localização da rede é menor. Nesse instante, enquanto o comprimento de onda de Bragg já se encontra em 1562 nm no caso sem amortecimento, tal comprimento de onda ainda está em 1554,9 nm considerando o amortecimento.



**Figura 3.18:** Deslocamento, deformação e comprimento de onda de Bragg no instante  $t = 1\mu\text{s}$  considerando o amortecimento.

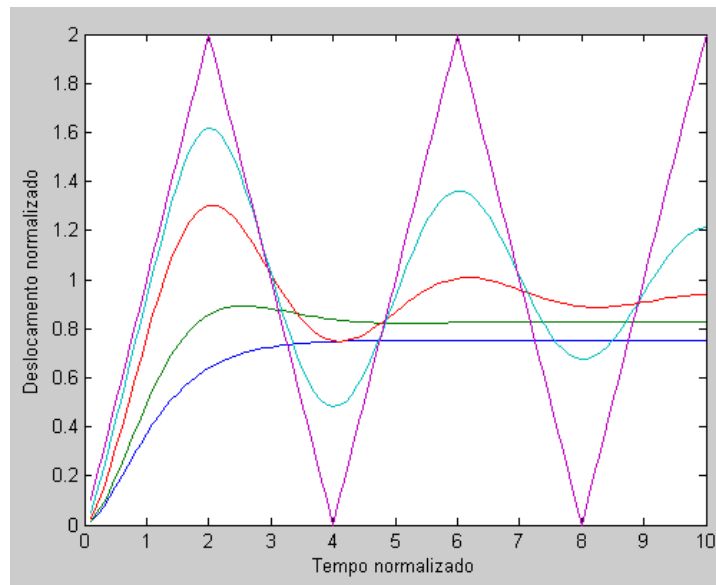
A Figura 3.19 mostra o comportamento do comprimento de onda de Bragg no intervalo de 0 a  $t = 20\mu\text{s}$ . Observa-se que no estado estacionário o comprimento de onda de Bragg estabilizará em 1562 nm como prevê (2.33); além disso, o tempo e a velocidade de sintonização são iguais aos da oscilação livre com deslocamento inicial analisada anteriormente.



**Figura 3.19:** Comportamento temporal do comprimento de onda de para a fibra submetida a uma tração degrau levando em conta o amortecimento.

Para efeito comparativo, a Figura 3.20 mostra o gráfico que descreve o deslocamento normalizado em relação a  $P_0L/E$ , obtido pela Teoria Elementar, de um ponto na extremidade da barra ( $x=L$ ) em função do tempo normalizado em relação a  $L/c_{ac}$ .

A função triangular representa o caso de amortecimento nulo, com  $t_r = 0$ . À medida que o amortecimento aumenta, o deslocamento (e a deformação) de estabilização diminui devido à dissipação de energia pelo sistema, sendo necessário aumentar a força para um sistema mais amortecido caso se deseje obter o mesmo deslocamento de um sistema menos amortecido. Observa-se que a função sem amortecimento serve de envoltória para as demais e sua derivada em relação ao tempo (velocidade) também tem valor maior que as demais.



**Figura 3.20:** Deslocamento de um ponto da extremidade livre ( $x = L$ ) para diferentes valores de amortecimento.

Da seção 3.7 e 3.8 pode-se concluir que, teoricamente, o tempo mínimo de atraso para a resposta de uma rede de Bragg em um sistema sem amortecimento é dado por  $T_1/8$ , sendo  $T_1$  o período fundamental de oscilação do trecho de fibra submetida à tração. Observa-se, analisando as Figuras 3.11 e 3.16, que, desprezando o amortecimento para a fibra de sílica, a velocidade de sintonização para um intervalo  $\Delta\lambda_B = 24$  nm é de  $v_s = 8\Delta\lambda_B/3T_1 = 9182$  nm/ms tanto para o caso da seção 3.7 quanto para a seção 3.8. Esse valor é muito superior aos valores relatados na literatura e conseguidos nos experimentos (que serão mostrados no Capítulo 5), salientando que o maior valor para a velocidade de sintonização relatado na prática foi de 21 nm/ms (IOCCO, LIMBERGER, SALATHÉ *et al*, 1999). Porém, para um sintonizador real o



comprimento de onda de Bragg precisa se estabilizar em um valor fixo, o que não acontece em um sistema sem amortecimento.

Mesmo considerando o amortecimento, as velocidades de sintonização simuladas para a fibra de sílica também são muito superiores aos valores encontrados na literatura. Simulações para um sistema criticamente amortecido para o modo fundamental ( $t_{r-cr} = 2,219 \mu s$ ) resultaram em uma velocidade de sintonização de 1950 nm/ms; essa foi a maior velocidade obtida variando o tempo de retardo e pode ser considerado o limite teórico para esse modelo. Para um sistema subamortecido, com  $t_r = 1 \mu s$ , foi obtida uma velocidade de sintonização de 857 nm/ms. Isso ocorre porque nos modelos analisados neste capítulo assumiu-se um atuador ideal, sem massa, aplicando a força diretamente na extremidade livre da fibra. Em sistemas reais as limitações em frequência dos atuadores, as oscilações, forças de atrito e inércia dos componentes do aparato experimental diminuem consideravelmente a velocidade de sintonização.

### 3.12 FIBRAS POLIMÉRICAS.

Fibras ópticas fabricadas com materiais diferentes da sílica apresentam características que podem ser interessantes para a obtenção de intervalos maiores de sintonização. As fibras poliméricas, baseadas principalmente em polimetilmetacrilato (PMMA), foram desenvolvidas no início da década de 1980. As PMMAs apresentam algumas vantagens em relação às fibras de sílica no que concerne à sintonização por tração longitudinal.

Experimentos foram feitos esticando uma PMMA (já com a rede de Bragg gravada) até a sua ruptura, o deslocamento de comprimento de onda de Bragg conseguido foi de 73 nm (XIONG, PENG, WU *et al*, 1999), seis vezes maior que o obtido com a fibra de sílica.

O coeficiente de deformação das PMMAs é de aproximadamente  $1,48 \text{ pm}/\mu\epsilon$ , maior que o da fibra de sílica ( $1,2 \text{ pm}/\mu\epsilon$ ). Experimentos realizados aplicando uma deformação de 1,3% resultou em um deslocamento do comprimento de onda de Bragg de 20 nm (XIONG, PENG, WU *et al*, 1999). A fibra de sílica possui um módulo de Young trinta vezes maior que o da PMMA. Além disso, a PMMA possui alto coeficiente de perda (150 dB/km) e alta não-linearidade o que torna seu uso viável apenas em pequenos comprimentos (CHU, 2005).

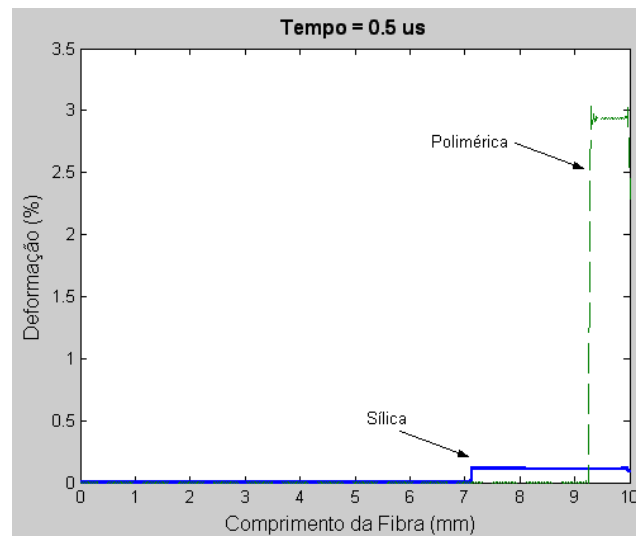
A deformação de ruptura da fibra polimérica ocorre em aproximadamente 5%. Porém, quando a deformação ultrapassa 2,2% ocorre uma diminuição significativa na refletividade da rede de Bragg, além de um alargamento do espectro refletido (LIU, LIU e PENG, 2005).

A Tabela 3.1 mostra a comparação entre as características da fibra monomodo de sílica e a fibra monomodo polimérica.

**Tabela 3.1:** Características das fibras

Descrição	Parâmetro	Fibra monomodo polimérica	Fibra monomodo de sílica
Diâmetro externo	$d$	133 $\mu\text{m}$	125 $\mu\text{m}$
Densidade	$\rho$	1190 $\text{kg/m}^3$	2200 $\text{kg/m}^3$
Módulo de Young	$E$	2.45 GPa	72.5 GPa
Constante fotoelástica efetiva	$p_e$	0.05	0.22
Velocidade da onda elástica longitudinal	$c_{ac}$	1435 m/s	5740 m/s
Período fundamental de oscilação livre (comprimento $L=10$ mm)	$T_1$	27,379 $\mu\text{s}$	6,970 $\mu\text{s}$

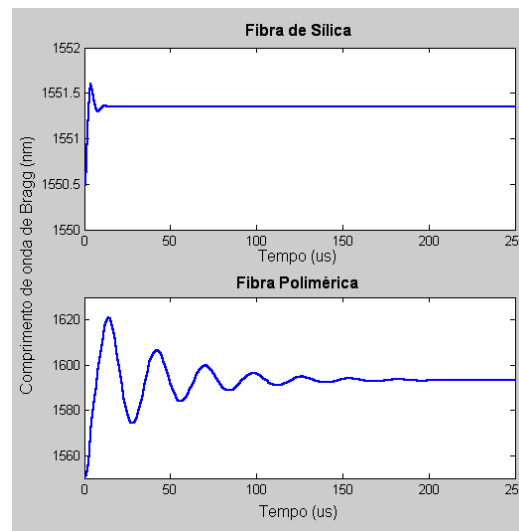
Simulando a aplicação de tração degrau sem amortecimento, com uma força  $F = 1\text{N}$  e as características dadas pela Tabela 3.1 para cada tipo de fibra, obtém-se para um tempo  $t = 0,5 \mu\text{s}$  os campos de deformação mostrado na Figura 3.21. Observa-se que a onda de deformação se propaga mais rápido na fibra de sílica devido ao módulo de Young aproximadamente 30 vezes maior que o da fibra polimérica. Porém, a amplitude da deformação na fibra polimérica é 27 vezes maior justamente devido ao seu menor módulo de Young.



**Figura 3.21:** Comparação entre a deformação nas fibras de sílica e polimérica no instante  $t = 1\mu\text{s}$  desprezando o amortecimento.

Assumindo o mesmo tempo de retardo para as duas fibras, simulou-se o tempo de sintonização também aplicando uma tração degrau de amplitude  $F = 1\text{N}$ . Os resultados obtidos, apresentados na Figura 3.22, mostram que o tempo de estabilização do comprimento de onda de Bragg está em torno de  $14\ \mu\text{s}$  para a fibra de sílica e  $200\ \mu\text{s}$  para a fibra polimérica. Novamente, os módulos de Young dos dois tipos de fibra têm uma influência fundamental nessa diferença de tempo. Nesse caso as velocidades de sintonização para as fibras de sílica e polimérica são aproximadamente  $96\ \text{nm/ms}$  e  $215\ \text{nm/ms}$ , respectivamente. Observa-se que, apesar de apresentar um tempo de sintonização menor, o intervalo de sintonização também é menor na fibra de sílica ( $1,35\ \text{nm}$ ), para a mesma carga aplicada, quando comparado com o da fibra polimérica ( $43\ \text{nm}$ ). Por isso a fibra de sílica apresenta menor velocidade de sintonização.

É importante notar que o tempo de estabilização do comprimento de onda de Bragg na fibra de sílica para uma força aplicada de  $1\ \text{N}$  é o mesmo obtido no item 3.11 (ver Figura 3.19), onde foi utilizada uma força de  $8,9\ \text{N}$ , devido à linearidade do sistema.



**Figura 3.21:** Comparação entre o tempo de estabilização do comprimento de onda de Bragg nas fibras de sílica e polimérica usando o tempo de retardo  $t_r = 1\ \mu\text{s}$ .

Mesmo aplicando uma força de  $1\ \text{N}$  à fibra de sílica, a velocidade de sintonização encontrada foi superior ao maior valor experimental encontrado de  $21\ \text{nm/ms}$ .

Uma vez que o limite teórico para ainda está longe de ser atingido, as análises relatadas neste capítulo indicam que é possível, através do aperfeiçoamento das técnicas existentes, chegar a velocidades de sintonização superiores às já conseguidas experimentalmente.

## CAPÍTULO 4

### COMBINAÇÃO DOS MÉTODOS MODOS ASSUMIDOS E MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA APLICADA EM FBG

#### 4.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior foram mostradas as soluções exatas para casos particulares de cargas aplicadas, com e sem amortecimento, em uma FBG; além disso, assumiu-se a rede concentrada em um único ponto da fibra. Quando o campo de deformação não é constante no interior da rede e outros elementos são adicionados ao sistema (como massas, amortecedores e molas) é possível encontrar soluções aproximadas através de métodos numéricos. Este capítulo apresenta uma abordagem para simular o comportamento temporal do espectro refletido da rede de Bragg combinando dois métodos numéricos denominados modos assumidos e matriz de transferência. Essa abordagem consiste em calcular a variação espaço-temporal do campo de deslocamento e, conseqüentemente, o campo de deformação no interior da rede através dos modos assumidos e usar esse campo como entrada para o método da matriz de transferência calculando, finalmente, o comportamento temporal do espectro refletido (e/ou transmitido) da rede de Bragg.

A escolha do método dos modos assumidos, em detrimento do método dos elementos finitos foi feita porque ao se trabalhar em uma faixa elevada de frequências o método dos elementos finitos pode exigir um enorme esforço computacional; além disso, a resposta temporal já está naturalmente inclusa na formulação do método dos modos assumidos e os movimentos a serem tratados são em apenas uma dimensão, diminuindo sensivelmente o esforço computacional.

Assim como o método dos elementos finitos, a teoria do método dos modos assumidos deriva das equações de Lagrange cujos fundamentos são tratados nos próximos itens.

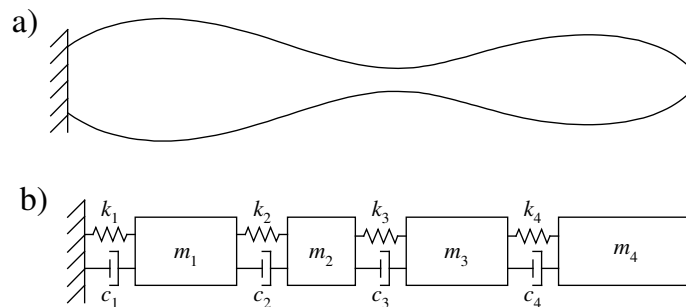
Neste capítulo todas as matrizes numéricas serão representadas entre colchetes ou por letras em negrito enquanto os vetores serão representados entre chaves por letras minúsculas.

#### 4.2 COORDENADAS GENERALIZADAS E EQUAÇÕES DE LAGRANGE.

Para sistemas mecânicos geometricamente complexos a análise dinâmica torna-se muito difícil através das relações vetoriais estabelecidas pelas Leis de Newton; por isso, soluções aproximadas podem ser encontradas usando métodos numéricos provenientes das

Equações de Lagrange através de uma formulação escalar. As Equações de Lagrange têm a vantagem de desprezar completamente as forças internas do sistema e são baseadas nas relações escalares existentes entre a energia cinética  $T$ , a energia potencial  $V$  e o trabalho  $W$  realizado pelas forças externas não conservativas.

Em um sistema contínuo, por exemplo, a estrutura pode ser discretizada com  $n$  graus de liberdade em  $N$  elementos (ou partículas) concentrados, de forma que cada elemento tenha características próprias de massa ( $m$ ), rigidez ( $k$ ) e amortecimento ( $c$ ), como mostra a Figura 4.1. O número de graus de liberdade será igual ao número de coordenadas independentes, denominadas coordenadas generalizadas  $q_j$ , necessárias para descrever o movimento do sistema. O número de elementos e o número de graus de liberdade nem sempre são iguais, já que um elemento pode ter mais de um grau de liberdade.



**Figura 4.1:** a) Viga engastada de seção transversal variável. b) Modelo discretizado de viga, representado por 4 elementos e 4 graus de liberdade.

Dessa forma, um sistema contínuo com infinitos graus de liberdade, cujos parâmetros físicos (massa rigidez e amortecimento) estão distribuídos ao longo da estrutura, pode ser analisado através de um sistema com um número finito de graus de liberdade. A escolha do número de graus de liberdade depende das informações que se pretende obter do sistema real. É importante salientar que, dependendo do método usado para obter as soluções, conjuntos de coordenadas generalizadas sem nenhum significado físico podem ser obtidos de outros conjuntos através de transformações lineares. Encontrando-se a solução no espaço final (mesmo que não tenha sentido físico algum) é possível recuperar o conjunto de coordenadas originais através das transformadas inversas.

Define-se o operador Lagrangeano como sendo

$$L = T - V, \quad (4.1)$$

onde  $T$  e  $V$  são as energias cinética e potencial, respectivamente.

A transição entre o método vetorial Newtoniano e o método escalar-energético Lagrangeano é desenvolvida usando o Princípio do Trabalho Virtual, o Princípio de D'Alembert e o Princípio de Hamilton (MEIROVITCH, 1986; ESPÍNDOLA, 2000). Neste trabalho esse desenvolvimento é tratado em detalhes no Anexo 4. Com estes três princípios chega-se às equações de Lagrange em coordenadas generalizadas, a partir das quais é possível derivar as equações de movimento do sistema

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \quad (4.2)$$

onde  $Q_j$  representa as forças generalizadas não conservativas.

#### 4.3 EQUAÇÕES DE LAGRANGE PARA SISTEMAS LINEARES.

Para se obter as equações de movimento na forma matricial em coordenadas generalizadas, podem ser usadas, como ponto de partida, as equações de Lagrange.

Assumindo o vetor posição  $\vec{r}_k$  como função de coordenadas generalizadas e do tempo  $\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$ , onde o índice  $k$  está relacionado ao número de elementos e  $n$  é o número de graus de liberdade assumidos, sua derivada será

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t}, \quad (4.3)$$

onde o sobrescrito  $(\cdot)$  indica  $\partial/\partial t$ , ou seja, a velocidade generalizada.

A energia cinética pode ser escrita da seguinte forma (MEIROVITCH, 1990)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt}. \quad (4.4)$$

Substituindo (4.3) em (4.4) e efetuando o produto interno resulta em

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_l} \right) \dot{q}_j \dot{q}_l. \quad (4.5)$$

Essa energia pode ser dividida em três partes:

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (4.6)$$

onde

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \quad (4.7)$$

representa o enrijecimento estrutural devido a campos longitudinais de forças, como as forças centrífugas em corpos girantes. Nota-se que  $T_0$ , da mesma forma que a energia potencial  $V$ , não depende das velocidades generalizada  $\dot{q}_j$ .

A segunda parcela de (4.6) será

$$T_1 = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n f_j \dot{q}_j, \quad (4.8)$$

uma função linear da velocidade generalizada dependente das coordenadas generalizadas e das velocidades generalizadas.

A terceira parcela de (4.6) é expressa por

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_l} \right) \dot{q}_j \dot{q}_l = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n m_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l, \quad (4.9)$$

uma função quadrática também dependente da velocidade generalizada onde

$$m_{jl} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_l} \quad (4.10)$$

são os coeficientes de massa (que formarão a matriz de massa), também denominados coeficientes de inércia, em função das coordenadas generalizadas.

O Lagrangeano definido em (4.1) será, em sua forma mais geral, escrito na forma

$$L = T - V = T_2 + T_1 - U \quad (4.11)$$

sendo  $U = V - T_0$  denominado potencial dinâmico. A razão da inclusão de  $T_0$  no mesmo grupo da energia potencial é porque ambas são funções das coordenadas generalizadas e independentes da velocidade.

A parcela de energia  $T_1$  ocorre em sistemas giratórios devido ao efeito giroscópico (resistência de um corpo girante em modificar a sua direção), efeito esse que está presente, por exemplo, em uma bicicleta em movimento, em um pião ou em helicópteros. Por sua vez, a parcela  $T_0$  está associada ao aumento da rigidez por forças centrífugas. Como o presente trabalho não abrange esses tipos de sistema, ambas serão desconsideradas.

#### 4.3.1 Espaço de estado e ponto de equilíbrio.

Assumindo que no espaço de configurações as coordenadas generalizadas também são dependentes do tempo e representadas pelo vetor

$$\{q(t)\} = \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)\}_{n \times 1}^T \quad (4.12)$$

com a variação de  $t$  ocorrerá também uma variação de  $q(t)$  em uma trajetória denominada Trajetória Dinâmica. Para representar totalmente o estado do sistema deve-se obter, além da informação de posição, informações sobre a velocidade  $\dot{q}_j(t)$ . Determina-se assim um vetor  $y$  de  $2n$  elementos, conhecido como vetor de estado, onde  $q(t)$  preenche os  $n$  primeiros elementos e  $\dot{q}(t)$  preenche os elementos  $n+1$  até  $2n$ .

$$\{y(t)\} = \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dot{q}_n(t)\}_{2n \times 1}^T = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}_{2n \times 1}. \quad (4.13)$$

Esse espaço vetorial é conhecido como Espaço de Estado.

Quando o sistema está em equilíbrio o espaço de estado é caracterizado por  $q(t) = q_e = cte$  e  $\dot{q}(t) = \dot{q}_e = 0$  para todos os instantes de tempo e para todos os elementos. Para isto acontecer, todas as forças dinâmicas devem ser nulas ou constantes no tempo, ou seja,

$$Q_j = 0 \quad (4.14)$$

com  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Como as velocidades generalizadas são nulas não haverá energia cinética no sistema e o Lagrangeano se reduzirá a

$$L = -U. \quad (4.15)$$

Como  $U$  é independente das velocidades generalizadas  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$ , logo, substituindo (4.14) e (4.15) em (4.2) resultará no Princípio de Mínimo Potencial Dinâmico:

$$\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0, \quad (4.16)$$

com  $j = 1, 2, \dots, n$ .

#### 4.3.2 Pequenos deslocamentos.

Assumindo que as componentes  $m_{jl}$  de (4.10) não são funções explícitas do tempo e cada elemento do sistema sofra deslocamentos tão pequenos que as variações temporais de  $q_j(t)$  ocorrerão na vizinhança do ponto de equilíbrio, pode-se afirmar que os elementos quadráticos  $m_{jl}$  serão constantes.

Expandindo a energia potencial dinâmica em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio  $q_e$  resultará em



$$U = U(q_e) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_j} q_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_l} q_j q_l + \dots \quad (4.17)$$

onde  $U(q_e)$  é um ponto de referência geralmente considerado nulo ou constante e não tem influência sobre as equações de Lagrange. A segunda parcela também será nula de acordo com (4.16) e os termos além do terceiro são desprezados. Dessa forma, a energia potencial dinâmica se reduz a

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n k_{jl} q_j q_l, \quad (4.18)$$

onde  $k_{jl} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_l}$  também será constante e formarão a matriz de rigidez.

As forças não conservativas generalizadas (externas e dissipativas) são representadas pela força de contato  $Q_j$  de (4.2) e pelas forças de reação devido ao amortecimento viscoso de Rayleigh que podem ser escritas (desprezando as forças circulatorias) como

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n c_{jl} \dot{q}_j \dot{q}_l, \quad (4.19)$$

onde  $c_{jl}$  formarão a matriz de amortecimento.

Dessa forma, assumindo  $L = T_2 - U$ , com  $T_2$  e  $U$  representados por (4.9) e (4.18), respectivamente, as equações de Lagrange se reduzem a

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = Q_j. \quad (4.20)$$

A equação (4.20) leva a um sistema de equações diferenciais cuja forma matricial é dada por:

$$\mathbf{M}_{n \times n} \{\ddot{q}(t)\}_{n \times 1} + \mathbf{C}_{n \times n} \{\dot{q}(t)\}_{n \times 1} + \mathbf{K}_{n \times n} \{q(t)\}_{n \times 1} = \{f(t)\}_{n \times 1}, \quad (4.21)$$

onde

- $\mathbf{M} = [m_{jl}]$  é a matriz de massa.
- $\mathbf{C} = [c_{jl}]$  é a matriz de amortecimento viscoso.
- $\mathbf{K} = [k_{jl}]$  é a matriz de rigidez.
- $\{f(t)\}$  = é o vetor de excitação em coordenadas generalizadas.
- $\{q(t)\}$  = é o vetor de coordenadas generalizadas.

As matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são simétricas e reais, e são fundamentais na aplicação do método dos modos assumidos.

#### 4.4 O MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS.

O método dos modos assumidos é baseado na discretização do sistema em  $N$  elementos e  $n$  graus de liberdade com o intuito de encontrar soluções aproximadas através de séries numéricas. Por esse método, no caso do movimento em apenas uma direção, como os movimentos longitudinais, assume-se que a solução real de um problema com condições de contorno conhecidas será encontrada através do produto de uma função espacial, convenientemente escolhida, com uma função temporal (denominada coordenada generalizada). Assim, a solução pode ser encontrada por

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) q_j(t), \quad (4.22)$$

onde  $\phi_j(x)$  é denominada função teste ou modos assumidos.

A equação (4.22) significa que a solução do problema pode ser encontrada como uma combinação linear de uma base em um espaço  $n$ -dimensional.

A escolha da função teste não é arbitrária; para um sistema de  $n$  graus de liberdade ela deve satisfazer todas as condições geométricas e de contorno do problema e ser diferenciável em um número de vezes que seja pelo menos a metade da ordem do sistema. Isso significa que no problema de deslocamento longitudinal, cujas soluções são obtidas resolvendo uma equação diferencial de segunda ordem, a função teste deve ser diferenciável pelo menos uma vez; no problema de flexão de vigas envolvendo uma equação diferencial de quarta ordem, a função teste deve ser diferenciável pelo menos duas vezes. Como exemplo, uma função teste apropriada para o problema de uma barra engastada-livre com seção transversal não-uniforme, como mostra a Figura 4.1, poderia ser  $\phi_j(x) = \text{sen}\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2L}\right)$ , idêntica às autofunções de uma barra engastada-livre de seção uniforme.

Após a escolha de uma função teste apropriada o próximo passo é o preenchimento das matrizes de massa, amortecimento e rigidez, além do vetor de excitação externa.

Para o caso do movimento longitudinal em uma barra, se o objetivo for encontrar o comportamento espaço-temporal do deslocamento, a função deslocamento  $u(x,t)$  será obtida resolvendo

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) q_j(t). \quad (4.23)$$

Para resolver (4.23) é necessário primeiramente conhecer a função de densidade  $\rho(x)$ , a função de área  $S(x)$  e a função de massa  $m(x) = \rho(x)S(x)$  ao longo da barra.

Assumindo uma barra homogênea de comprimento  $L$ , com funções de área e de massa conhecidas, a energia cinética  $T_2$ , por conveniência representada aqui por  $T$ , será

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L m(x) \left[ \sum_{j=1}^n \phi_j(x) \dot{q}_j(t) \right] \left[ \sum_{l=1}^n \phi_l(x) \dot{q}_l(t) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \dot{q}_j(t) \dot{q}_l(t) \left[ \int_0^L m(x) \phi_j(x) \phi_l(x) dx \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

Comparando (4.24) com (4.9) conclui-se que as componentes da matriz de massa serão encontradas através da expressão

$$m_{jl} = \int_0^L m(x) \phi_j(x) \phi_l(x) dx. \quad (4.25)$$

Por sua vez, a energia potencial será

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^L ES(x) \left[ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} E \int_0^L S(x) \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} q_j(t) \right] \left[ \sum_{l=1}^n \frac{\partial \phi_l(x)}{\partial x} q_l(t) \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n q_j(t) q_l(t) \left[ E \int_0^L S(x) \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_l(x)}{\partial x} dx \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Analogamente, comparando (4.26) com (4.18) conclui-se que os componentes da matriz de rigidez serão encontrados através da expressão

$$k_{jl} = E \int_0^L S(x) \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_l(x)}{\partial x} dx. \quad (4.27)$$

Observa-se que a expressão referente ao amortecimento viscoso (4.19) é idêntica à energia cinética (4.9). Dessa forma, assumindo um amortecimento não-proporcional distribuído de forma homogênea ao longo da barra, por analogia a (4.24) conclui-se que os coeficientes da matriz de amortecimento serão dados por

$$c_{jl} = \int_0^L \alpha \phi_j(x) \phi_l(x) dx. \quad (4.28)$$

onde  $\alpha$  é uma constante de amortecimento viscoso.

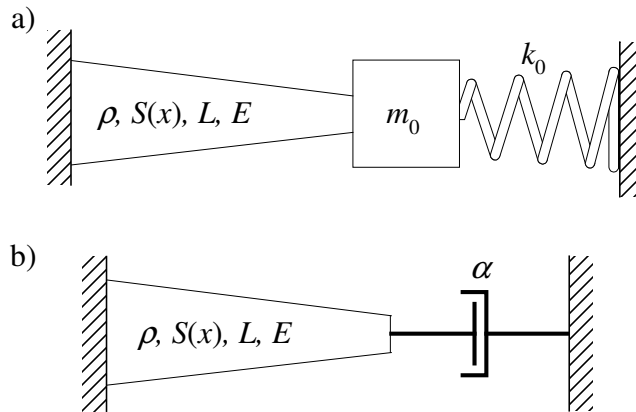
Uma grande vantagem do método dos modos assumidos é a sua versatilidade para encontrar soluções em sistemas que misturam elementos contínuos e concentrados. Caso haja algum elemento concentrado no sistema, ele será inserido na matriz desde que seja conhecida sua coordenada real. Por exemplo, para uma barra engastada-livre de comprimento  $L$  com uma massa  $m_0$  e uma mola de constante elástica  $k_0$  em sua extremidade livre, como mostra a Figura 4.2a, as matrizes de massa e rigidez serão preenchidas seguindo, respectivamente,

$$m_{jl} = \int_0^L m(x)\phi_j(x)\phi_l(x)dx + m_0\phi_j(L)\phi_l(L) \quad (4.29)$$

$$k_{jl} = E \int_0^L S(x) \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_l(x)}{\partial x} dx + k_0\phi_j(L)\phi_l(L) \quad (4.30)$$

e no caso de uma barra engastada-livre com um amortecedor com constante de amortecimento viscoso  $\alpha$  acoplado na extremidade livre, como mostra a Figura 4.2b, a matriz de amortecimento será expressa por

$$c_{jl} = \alpha\phi_j(L)\phi_l(L). \quad (4.31)$$



**Figura 4.2:** a) Barra contínua engastada-livre com massa e rigidez concentradas. b) Barra contínua engastada-livre com amortecimento concentrado.

As forças de excitação generalizadas também podem ser escritas como distribuídas e concentradas através do modelo matemático  $F(x,t) + F_l(t)\delta(x-x_l)$ , onde  $l = 1, 2, \dots, p$ , onde  $p$  é o número total de forças concentradas e  $\delta(x-x_l)$  a função Delta de Dirac definida como

$$\delta(x-x_l) = \begin{cases} 1, & x = x_l \\ 0, & x \neq x_l \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\int_0^L \delta(x-x_l) dx = 1$$

Uma vez que o trabalho virtual das forças não-conservativas é dado por (ver Anexo 4)

$$\begin{aligned}
 \delta \overline{W}_{nc} &= \int_0^L [F(x,t) + F_l(t)\delta(x-x_l)] \delta u(x,t) dx \\
 &= \int_0^L [F(x,t) + F_l(t)\delta(x-x_l)] \sum_{j=1}^n \phi_j(x) \delta q_j(t) dx \\
 &= \sum_{j=1}^n \left\{ \int_0^L [F(x,t)\phi_j(x) dx + \sum_{l=1}^p F_l(t)\phi_l(x_l)] q_j(t) \right\} \\
 &= \sum_{j=1}^n Q_j(t) \delta q_j(t).
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Dessa forma, se  $p$  excitações são aplicadas ao sistema, além da força distribuída, as forças generalizadas podem ser obtidas através da seguinte equação:

$$Q_j(t) = \int_0^L F(x,t)\phi_j(x) dx + \sum_{l=1}^p F_l(t)\phi_l(x_l). \tag{4.34}$$

Portanto, com (4.25), (4.27), (4.28) e (4.34) a equação de movimento (4.21) na sua forma matricial estará completamente definida.

#### 4.5 SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO MATRICIAL DE MOVIMENTO COM AMORTECIMENTO NÃO-PROPORCIONAL.

Como já citado anteriormente, as soluções de um problema real podem ser obtidas através de transformadas que levarão a vários espaços, sendo necessário aplicar as transformadas inversas para obter a solução do sistema real.

Há dois modelos básicos para o amortecimento viscoso: o amortecimento proporcional e o não-proporcional. No caso do amortecimento proporcional assume-se a matriz de amortecimento como sendo uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, ou seja,  $C = \alpha M + \beta K$ . Experimentalmente é muito difícil encontrar os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  (BANERJEE e BHASKAR, 2007), porém, o processo de obtenção das soluções do sistema é simplificado significativamente já que não é necessário entrar no espaço de estado (tratado nesse item). Por sua vez, no modelo para o amortecimento não-proporcional há apenas um tipo de coeficiente a ser encontrado, sendo a matriz de amortecimento preenchida conforme (4.28).

Levando em conta o amortecimento não-proporcional, as soluções serão encontradas trabalhando nos espaços de configuração, de estado, modal e no domínio da frequência como será visto a seguir.

Partindo do problema real, a solução no espaço de configurações é dada através de (4.23), repetida aqui por conveniência.

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) q_j(t). \quad (4.35)$$

É importante salientar que  $u$  é uma função real de deslocamento longitudinal no ponto  $x$  para o instante de tempo  $t$ .

Supondo que as matrizes de massa, amortecimento e rigidez são conhecidas, repetindo aqui por conveniência (4.21)

$$\mathbf{M}\{\ddot{q}(t)\} + \mathbf{C}\{\dot{q}(t)\} + \mathbf{K}\{q(t)\} = \{f(t)\}. \quad (4.36)$$

Define-se a variável de estado como

$$y(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}_{2n \times 1} \quad (4.37)$$

onde o vetor  $q(t)$  corresponde aos primeiros  $n$  elementos do vetor  $y$  e  $\dot{q}(t)$  aos elementos de  $n+1$  a  $2n$ .

Reescrevendo (4.36) na forma

$$[\mathbf{C} \mid \mathbf{M}]_{n \times 2n} \{\dot{y}(t)\}_{2n \times 1} + [\mathbf{K} \mid \mathbf{0}]_{n \times 2n} \{y(t)\}_{2n \times 1} = \{f(t)\}_{n \times 1}, \quad (4.38)$$

chega-se a um sistema de  $n$  equações e  $2n$  incógnitas onde  $[\mathbf{C} \mid \mathbf{M}]$  é a matriz formada pelo acoplamento das matrizes de amortecimento e massa ( $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{M}$ , respectivamente) e  $[\mathbf{K} \mid \mathbf{0}]$  a matriz formada pelo acoplamento da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  e uma matriz de dimensões  $n \times n$  formada apenas por zeros, representada simplesmente por  $\mathbf{0}$  em (4.38). Em outras palavras, o equacionamento em variável de estado permite resolver o problema de  $2n$  autovalores devido ao modelo viscoso não proporcional.

Para transformar (4.38) em um sistema de  $2n$  equações e  $2n$  incógnitas a seguinte tautologia é introduzida

$$[\mathbf{M} \mid \mathbf{0}]_{n \times 2n} \{\dot{y}(t)\}_{2n \times 1} + [\mathbf{0} \mid -\mathbf{M}]_{n \times 2n} \{y(t)\}_{2n \times 1} = \{\mathbf{0}\}_{n \times 1}. \quad (4.39)$$

A equação (4.39) é verdadeira uma vez que

$$\dot{y}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{Bmatrix}_{2n \times 1}, \quad (4.40)$$

ou seja, os primeiros  $n$  elementos de  $\dot{y}(t)$  são iguais aos últimos  $n$  elementos de  $y(t)$ .

Dessa forma, acoplando (4.39) em (4.38) chega-se a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \{\dot{y}(t)\}_{2n \times 1} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \{y(t)\}_{2n \times 1} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n \times 1}, \quad (4.41)$$

podendo ser escrita na forma

$$\mathbf{A}\{\dot{y}(t)\}_{2n \times 1} + \mathbf{B}\{y(t)\}_{2n \times 1} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n \times 1}. \quad (4.42)$$

Fazendo  $\{f(t)\} = 0$ , assume-se a solução homogênea na forma

$$y(t) = \{\theta\}_{2n \times 1} e^{st}. \quad (4.43)$$

As  $n$  primeiras linhas de  $\{\theta\}_{2n \times 1}$  formarão o autovetor  $\psi$  no espaço de configurações e as linhas restantes, de  $n+1$  a  $2n$ , formarão a matriz  $\dot{\psi} = s\psi$ , resultando então em

$$\{\theta\}_{2n \times 1} = \begin{Bmatrix} \psi \\ s\psi \end{Bmatrix}_{2n \times 1}. \quad (4.44)$$

Portanto, a equação (4.42) pode ser escrita na forma

$$[s\mathbf{A} + \mathbf{B}]\{\theta\}_{2n \times 1} = 0 \quad \therefore \quad \mathbf{B}\{\theta\}_j = \lambda_j \mathbf{A}\{\theta\}_j, \quad (4.45)$$

onde  $\{\theta\}_j = \{\psi_j \quad s\psi_j\}_{1 \times 2n}^T$ , com  $j = 1, 2, \dots, 2n$ , e

$$\lambda_j = -s_j. \quad (4.46)$$

Nota-se que equação (4.45) representa um problema de autovalor cuja solução resultará em  $2n$  autovalores  $\lambda$ , além de um conjunto de  $2n$  autovetores  $\theta$  (de dimensões  $2n \times 1$ ) que forma a matriz  $\Theta_{2n \times 2n}$  denominada Matriz Modal. As matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  são reais e simétricas enquanto a matriz  $\Theta$  é complexa e não simétrica.

As propriedades dos autovetores encontrados são análogas às das autofunções, seguindo o Teorema 3 da Expansão das Autofunções (ver Anexo 3) e mantendo as propriedades de ortogonalidade. Essas propriedades permitem a formação de uma base.

Pelas propriedades de ortogonalidade a seguinte relação é satisfeita

$$\tilde{\mathbf{A}} = \Theta^T \mathbf{A} \Theta = \begin{bmatrix} . & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{a}_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & . \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Da mesma forma que as autofunções, os autovetores podem ser normalizados através da matriz diagonal  $\tilde{\mathbf{A}}$  formando um conjunto ortonormal representado pela matriz  $\hat{\Theta}$  cujos componentes são encontrados seguindo a expressão

$$\hat{\theta}_{jk} = \frac{\theta_{jk}}{\sqrt{\tilde{a}_{kk}}}, \quad (4.48)$$

sendo  $\hat{\theta}$ ,  $\theta$  e  $\tilde{a}$  os componentes das matrizes  $\hat{\Theta}$ ,  $\Theta$  e  $\tilde{A}$ , respectivamente, e  $j, k = 1, 2, \dots, 2n$ .

A matriz  $\hat{\Theta}$  é conhecida como Matriz Modal Ortonormalizada e, por sua vez, satisfaz a seguinte relação

$$\hat{\Theta}^T B \hat{\Theta} = A \quad (4.49)$$

$$\hat{\Theta}^T A \hat{\Theta} = I \quad (4.50)$$

A matriz  $I$  é a matriz identidade, de dimensões  $2n \times 2n$ , e  $A$  é denominada Matriz Espectral, apresentando o seguinte formato

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^* & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2^* & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_n^* \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

onde  $\lambda_j^*$  é o complexo conjugado de  $\lambda_j$ .

De (4.46), assumindo  $\lambda_j = -s_j = -(\beta_j + i\gamma_j)$ , é possível demonstrar através das relações de ortogonalidade (ESPÍNDOLA, 2000; EWINS, 2000) que  $\gamma_j$  é a frequência natural amortecida para cada modo. Além disso, as frequências naturais  $\omega_j$  do sistema amortecido serão dadas pelo módulo de  $\lambda_j$ , ou seja

$$\omega_j = \sqrt{\beta_j^2 + \gamma_j^2}, \quad (4.52)$$

e a relação de amortecimento modal  $\xi_j$  para cada modo será dada por

$$\xi_j = -\frac{\beta_j}{\omega_j}. \quad (4.53)$$

Assim como no modelo viscoelástico visto no capítulo anterior (ver equação (3.63)), quando não houver amortecimento,  $\beta_j$  será nulo e o módulo de  $\gamma_j$  será igual à frequência natural sem amortecimento. Observa-se, então, que a presença do amortecimento desloca as frequências naturais devido ao parâmetro  $\beta_j$  (EWINS, 2000).

Com a matriz  $\hat{\Theta}$  é possível passar para o espaço modal através da seguinte transformação de variáveis



$$y(t) = \hat{\Theta} \{p(t)\}_{2n \times 1}. \quad (4.54)$$

Como  $y(t)$  é real e  $\hat{\Theta}$  é uma matriz complexa,  $p$  também deve ser um vetor complexo. denominado Coordenada Generalizada Principal. A função  $p$  é dependente do tempo da mesma forma que  $q$  e  $f$ .

Substituindo (4.54) em (4.42) resultará em

$$A \hat{\Theta} \{\dot{p}\}_{2n \times 1} + B \hat{\Theta} \{p\}_{2n \times 1} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n \times 1}. \quad (4.55)$$

Multiplicando os dois lados da equação (4.55) por  $\hat{\Theta}^T$  e aplicando as relações de ortogonalidade (4.49) e (4.50) finalmente chega-se a

$$\hat{\Theta}^T (A \hat{\Theta} \dot{p} + B \hat{\Theta} p) = \hat{\Theta}^T \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix} \therefore I \dot{p} + A p = \hat{\Theta}^T \begin{Bmatrix} f \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.56)$$

Observa-se que (4.56) é uma equação diferencial matricial de primeira ordem onde  $A$  é a matriz espectral e  $\hat{\Theta}^T$  a matriz modal transposta; geralmente, para encontrar a solução em regime permanente é conveniente passar para o domínio da frequência o seguinte sistema de equações

$$\{\dot{p}(t)\}_{2n \times 1} + A_{2n \times 2n} \{p(t)\}_{2n \times 1} = \hat{\Theta}^T_{2n \times 2n} \{g(t)\}_{2n \times 1}, \quad (4.57)$$

onde  $\{g(t)\}_{2n \times 1} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n \times 1}$ .

Como o sistema (4.57) está desacoplado, isso equivale a representar o sistema total por  $n$  elementos discretos com apenas 1 grau de liberdade (com massa, rigidez e amortecimento característicos), sendo cada elemento excitado por uma frequência  $\Omega$  própria.

Transformando (4.57) para o domínio da frequência:

$$(i\Omega I + A) \{P(\Omega)\} = \hat{\Theta}^T \{G(\Omega)\}. \quad (4.58)$$

Como  $y(t) = \hat{\Theta} \{p(t)\}$  a resposta no domínio da frequência será

$$Y(\Omega) = \hat{\Theta} D^{-1} \hat{\Theta}^T \{G(\Omega)\}, \quad (4.59)$$

onde  $D = i\Omega I + A$ .

Eventualmente a matriz  $D$  pode se tornar singular (para um amortecimento pequeno, por exemplo); nesse caso, é possível encontrar  $Y(\Omega)$  calculando a pseudo-inversa de  $D$  (BAVASTRI, 1997).

De (4.40) conclui-se que

$$Y(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} Q(\Omega) \\ i\Omega Q(\Omega) \end{array} \right\}. \quad (4.60)$$

As matrizes  $\hat{\theta}$ ,  $D$ , e  $\hat{\theta}^T$  podem ser particionadas em 4 submatrizes possibilitando (4.59) ser escrita na forma

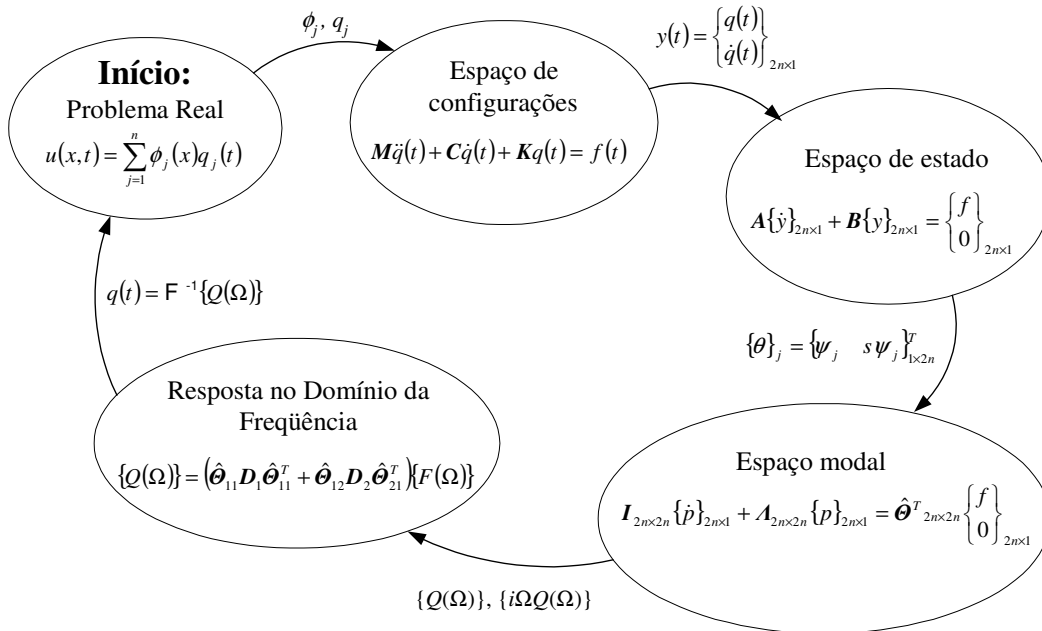
$$Y(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} Q(\Omega) \\ i\Omega Q(\Omega) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{11} & \hat{\theta}_{12} \\ \hat{\theta}_{21} & \hat{\theta}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_{11}^T & \hat{\theta}_{12}^T \\ \hat{\theta}_{21}^T & \hat{\theta}_{22}^T \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} F(\Omega) \\ 0 \end{array} \right\}. \quad (4.61)$$

Quando só há interesse em encontrar o vetor  $\{Q(\Omega)\}_{n \times 1}$ , a solução final é encontrada reduzindo (4.61) para

$$\{Q(\Omega)\} = (\hat{\theta}_{11} D_1 \hat{\theta}_{11}^T + \hat{\theta}_{12} D_2 \hat{\theta}_{21}^T) \{F(\Omega)\}. \quad (4.62)$$

Passando para o domínio do tempo através da transformada inversa de Fourier, finalmente encontra-se o vetor  $\{q(t)\}_{n \times 1}$ , que aplicado em (4.35) dará a função deslocamento do sistema.

A Figura 4.3 mostra o esquema dos passos a serem seguidos para encontrar  $q(t)$ .



**Figura 4.3:** Espaços utilizados para encontrar as soluções para o modelo de amortecimento não proporcional.

Nos próximos itens será apresentada a resposta de um sistema do tipo barra engastada-livre excitado por uma fonte de excitação harmônica na extremidade livre, obtendo-se as

soluções para os regimes transiente e permanente. Posteriormente esse tipo de sistema será usado para modelar um dispositivo acusto-óptico.

#### 4.6 RESPOSTA GERAL PARA UMA FONTE DE EXCITAÇÃO HARMÔNICA.

Matematicamente a resposta de um sistema é dividida em resposta transiente e resposta em regime permanente ou de estado estacionário. Para encontrar a resposta transiente do sistema é necessário obter a solução da equação homogênea de (4.57) fazendo  $f(t) = 0$ . Obtendo as expressões do transiente e de regime permanente as condições iniciais do sistema são aplicadas para se obter a solução completa.

##### 4.6.1 Resposta em regime permanente.

Assume-se o sistema formado por uma barra-engastada livre, de comprimento  $L$  sendo excitado em sua extremidade livre por uma fonte harmônica dependente do tempo. O modelo matemático dessa excitação pode ser representado através das exponenciais complexas na forma

$$f_0(t) = F(\Omega)e^{i\Omega_0 t} + F^*(\Omega)e^{-i\Omega_0 t}, \quad (4.63)$$

onde  $F(\Omega)$  e  $F^*(\Omega)$  são as amplitudes complexa e complexa conjugada, respectivamente, e  $\Omega_0$  a frequência angular do sinal.

Uma função de teste apropriada para esse sistema pode ser  $\phi_j(x) = \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$ , a partir da qual é possível encontrar a força generalizada

$$f_j(t) = (F(\Omega)_j e^{i\Omega_0 t} + F^*(\Omega)_j e^{-i\Omega_0 t}) \text{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi L}{2L}\right) = (-1)^{j-1} (F(\Omega)_j e^{i\Omega_0 t} + F^*(\Omega)_j e^{-i\Omega_0 t}), \quad (4.64)$$

sendo  $j$  usado para definir o ponto de excitação da função harmônica.

Supondo a amplitude complexa na forma

$$F(\Omega) = \frac{F_0 - iF_0}{2} \quad (4.65)$$

e substituindo (4.65) em (4.63) conclui-se que

$$\text{se } f(t) = F_0 \cos(\Omega_0 t) \Rightarrow F(\Omega) = \frac{F_0}{2} \quad (4.66)$$

$$\text{e se } f(t) = F_0 \text{sen}(\Omega_0 t) \Rightarrow F(\Omega) = -i \frac{F_0}{2}. \quad (4.67)$$

Assumindo a fonte senoidal, a solução em regime permanente no espaço de estado será dada por

$$\begin{Bmatrix} q^p(t) \\ \dot{q}^p(t) \end{Bmatrix}_{2n \times 1} = \begin{Bmatrix} \mathcal{Q}_0(\Omega) \\ i\Omega_0 \mathcal{Q}_0(\Omega) \end{Bmatrix}_{2n \times 1} e^{i\Omega_0 t} + \begin{Bmatrix} \mathcal{Q}_0^*(\Omega) \\ i\Omega_0 \mathcal{Q}_0^*(\Omega) \end{Bmatrix}_{2n \times 1} e^{-i\Omega_0 t}, \quad (4.68)$$

onde o vetor de amplitude complexa é dado pela expressão

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{Q}_0(\Omega) \\ i\Omega_0 \mathcal{Q}_0(\Omega) \end{Bmatrix}_{2n \times 1} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{D}^{-1} \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \begin{Bmatrix} -i \frac{F_0}{2} (-1)^{j-1} \\ 0 \end{Bmatrix}_{2n \times 1}, \quad (4.69)$$

com  $\mathbf{D} = i\Omega_0 \mathbf{I} + \mathbf{A}$ .

Portanto, a função deslocamento em regime permanente será dada por

$$u^p(u, t) = \sum_{j=1}^n \text{sen}\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2L}\right) q_j^p(t), \quad (4.70)$$

onde  $q_j^p(t)$  são os componentes do vetor

$$\{q^p(t)\}_{n \times 1} = \{\mathcal{Q}_0(\Omega)\}_{n \times 1} e^{i\Omega_0 t} + \{\mathcal{Q}_0^*(\Omega)\}_{n \times 1} e^{-i\Omega_0 t}. \quad (4.71)$$

Para uma fonte cossenoidal basta substituir  $-i \frac{F_0}{2} (-1)^{j-1}$  por  $\frac{F_0}{2} (-1)^{j-1}$  em (4.69).

#### 4.6.2 Resposta em regime transiente (oscilação livre).

O transiente é obtido resolvendo o sistema de equações

$$\dot{p}_j + \lambda_j p_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n. \quad (4.72)$$

As soluções para cada equação do sistema seguem a expressão

$$p_j = b_j e^{-\lambda_j t} = b_j e^{s_j t}, \quad (4.73)$$

com  $s = -\lambda$  e onde  $b_j$  são componentes do vetor  $b$  relacionado às condições iniciais.

Como  $y = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix}_{2n \times 1}$  e  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ s \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$ , substituindo (4.73) em (4.54) conclui-se que,

na forma matricial, a solução da homogênea no espaço de estado será dada por

$$\begin{Bmatrix} q^h(t) \\ \dot{q}^h(t) \end{Bmatrix}_{2n \times 1} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ s \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_j t} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \{b\}_{2n \times 1} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \begin{bmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_j t} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \{b\}_{2n \times 1}. \quad (4.74)$$

Logo, o deslocamento é obtido segundo

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) q_j^p(t) + \sum_{j=1}^n \phi_j(x) q_j^h(t), \quad (4.75)$$

onde  $q_j^h(t)$  são os componentes do vetor

$$\{q^h(t)\}_{n \times 1} = [\hat{\theta}]_{n \times 2n} \begin{bmatrix} \cdot & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_j t} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \{b\}_{2n \times 1}. \quad (4.76)$$

Para determinar os componentes do vetor  $b$  e definir totalmente a função deslocamento, é necessário aplicar as condições iniciais.

#### 4.6.3 Aplicação das condições iniciais

Assumindo que o deslocamento é nulo ao longo de toda a barra quando  $t = 0$ , o que resulta em  $e^{i\Omega_0 \cdot 0} = 1$ , a função deslocamento pode ser escrita como

$$u(x, t) = 0 = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) (\{Q_0(\Omega)\}_{n \times 1} + \{Q_0^*(\Omega)\}_{n \times 1}) + \sum_{j=1}^n \phi_j(x) ([\hat{\theta}]_{n \times 2n} \{b\}_{2n \times 1}) \quad (4.77)$$

Portanto, conclui-se que

$$[\hat{\theta}]_{n \times 2n} \{b\}_{2n \times 1} = -(\{Q_0(\Omega)\}_{n \times 1} + \{Q_0^*(\Omega)\}_{n \times 1}) \quad (4.78)$$

Expandindo (4.78) no espaço de estado, o lado esquerdo dessa equação pode ser substituído por (4.74) a menos da matriz temporal. Analogamente, o lado direito pode ser substituído por (4.68), que por sua vez pode ser simplificada obtendo-se

$$\hat{\theta} \{b\}_{2n \times 1} = \left\{ \frac{-2\Re\{Q_0(\Omega)\}}{2\Omega_0 \Im\{Q_0(\Omega)\}} \right\}_{2n \times 1} \quad \therefore \quad \{b\}_{2n \times 1} = \hat{\theta}^{-1} \left\{ \frac{-2\Re\{Q_0(\Omega)\}}{2\Omega_0 \Im\{Q_0(\Omega)\}} \right\}_{2n \times 1}. \quad (4.79)$$

Usando a propriedade de (4.50) é possível mostrar que  $\hat{\theta}^{-1} = \hat{\theta}^T A$  que, por sua vez, aplicada em (4.79) resultará em

$$\{b\}_{2n \times 1} = \hat{\theta}^T A \left\{ \frac{-2\Re\{Q_0(\Omega)\}}{2\Omega_0 \Im\{Q_0(\Omega)\}} \right\}_{2n \times 1}, \quad (4.80)$$

definindo totalmente a função deslocamento.

### 4.7 O MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS EM UMA FIBRA ENGASTADA-LIVRE.

Para analisar a precisão do método dos modos assumidos no cálculo das frequências naturais de oscilação  $\omega_h$  tomou-se como exemplo uma fibra engastada-livre com as mesmas dimensões e características usadas no capítulo anterior ( $L = 10$  mm e diâmetro de  $125 \mu\text{m}$ ) já que suas soluções exatas são conhecidas.

As frequências naturais exatas, usando a mecânica do contínuo, para essa condição de extremidade e sem amortecimento são dadas por

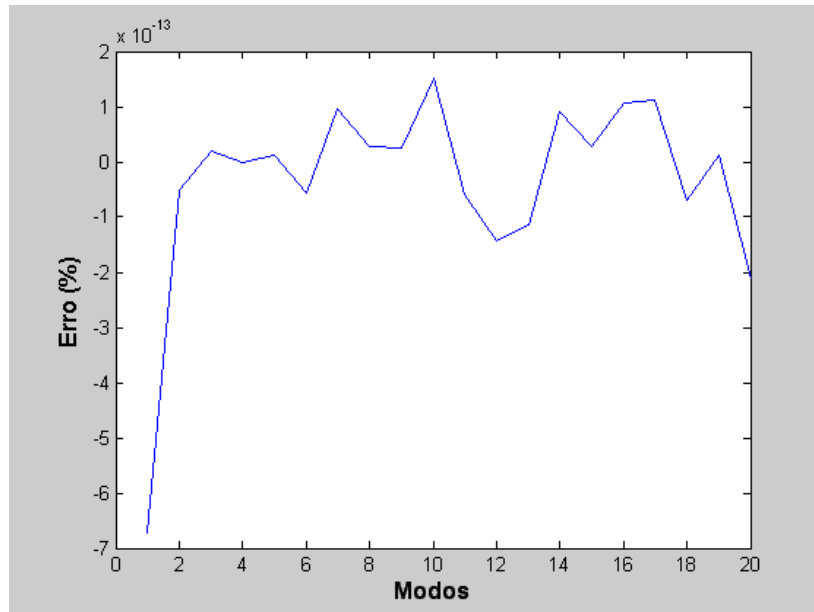
$$\omega_j^{exato} = \frac{(2j-1)\pi c_{ac}}{2L}. \quad (4.81)$$

A Figura 4.4 mostra o erro em porcentagem para os 20 primeiros modos calculados através da expressão

$$\%erro_j = 100 \frac{\omega_j^{exato} - \omega_j^{aprox}}{\omega_j^{exato}} \quad (4.82)$$

onde  $\omega_j^{aprox}$  é calculado através da matriz (4.51) aplicando (4.52) com amortecimento nulo ( $c_{jl} = 0$ ).

Levando-se em conta que a menor frequência (a fundamental) é  $\omega_1^{exato} = 9,1053 \times 10^5$  rad/s, conclui-se que o método dos modos assumidos mostrou-se extremamente preciso no cálculo das frequências naturais de oscilação.



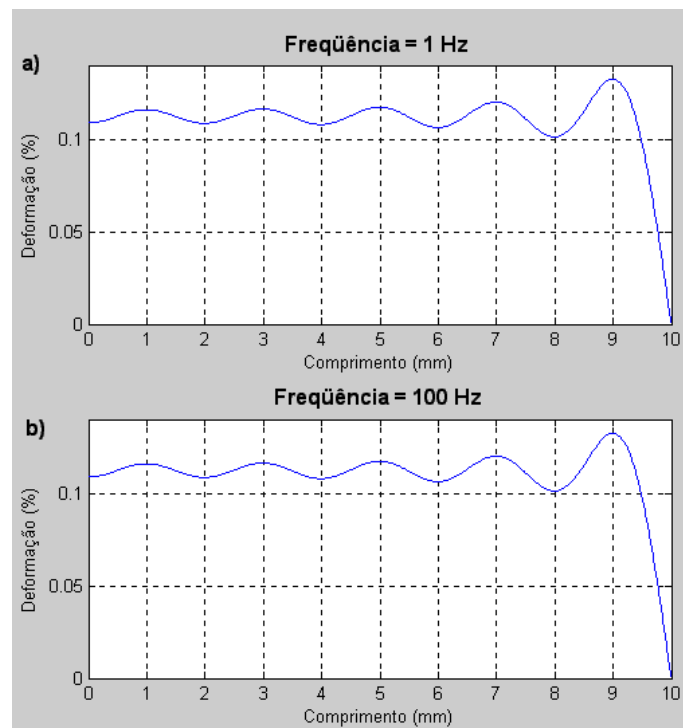
**Figura 4.4:** a) Erro (em porcentagem) entre as 20 primeiras frequências naturais exatas e aproximadas calculadas pelo método dos modos assumidos.

A Tabela 4.1 mostra as 6 primeiras frequências naturais calculadas pelo método dos modos assumidos desprezando o amortecimento. Essas também são as 6 primeiras frequências de ressonância do sistema fibra engastada-livre.

**Tabela 4.1:** Frequências naturais para os 6 primeiros modos de oscilação.

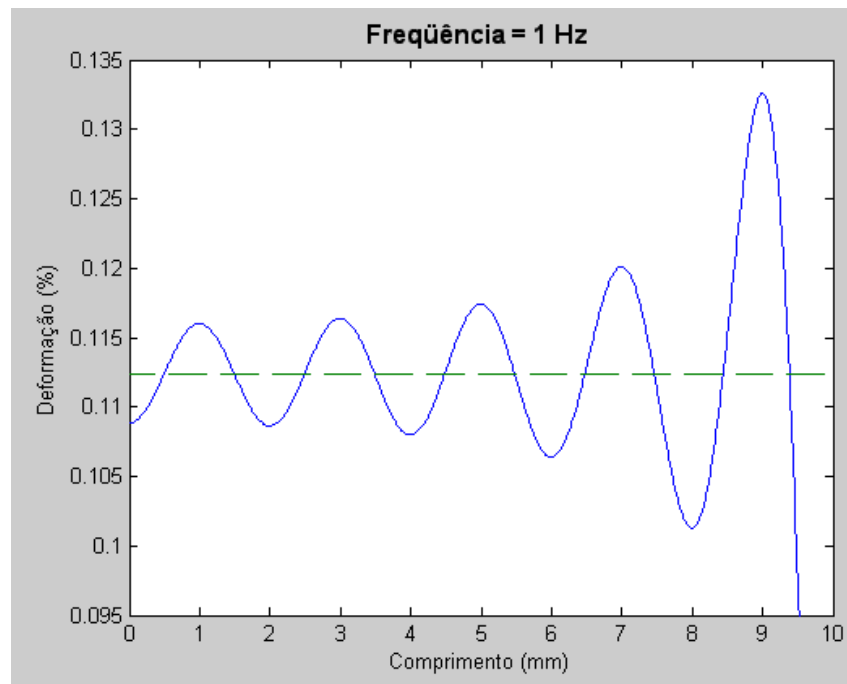
Modos	Frequências (MHz)
1	0,1435
2	0,4304
3	0,7174
4	1,0044
5	1,2913
6	1,5783

De acordo com (2.6), aplicando lentamente uma força que se estabiliza em 1 N, em regime estacionário a deformação ao longo da fibra será de 0,1124% (ver Figura 3.6). Desprezando o amortecimento, simulações numéricas foram feitas usando como entrada uma força senoidal com amplitude de 1 N. A Figura 4.5 mostra os campos de deformação máxima para 1 Hz e 100 Hz, frequências muito menores que a primeira frequência natural de oscilação.



**Figura 4.5:** Campos de deformação máxima em regime permanente para uma fonte senoidal com amplitude de 1 N e frequências de a) 1 Hz e b) 100 Hz.

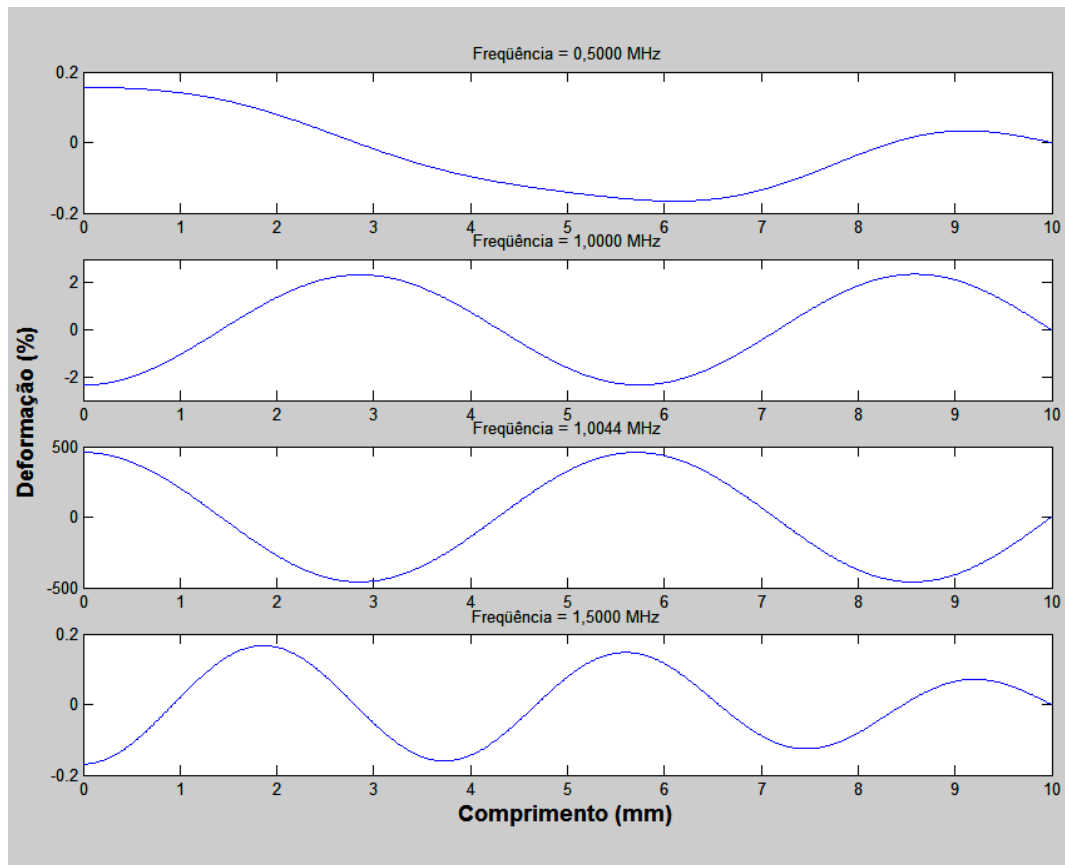
Observa-se que as duas respostas obtidas são exatamente iguais e os campos de deformação apresentam oscilações ao longo da fibra em torno de um valor de deformação constante de 0,1124% representado pela linha tracejada na Figura 4.6. Esses resultados indicam que, para frequências muito menores que a primeira frequência natural de oscilação, o valor da deformação ao longo de toda a fibra pode ser estimado com boa aproximação como sendo proporcional ao valor da força aplicada em cada instante de tempo de acordo com a lei de Hooke (2.6).



**Figura 4.6:** Detalhe da Figura 4.5a, sendo a linha tracejada indicando o valor de deformação de 0,1124%.

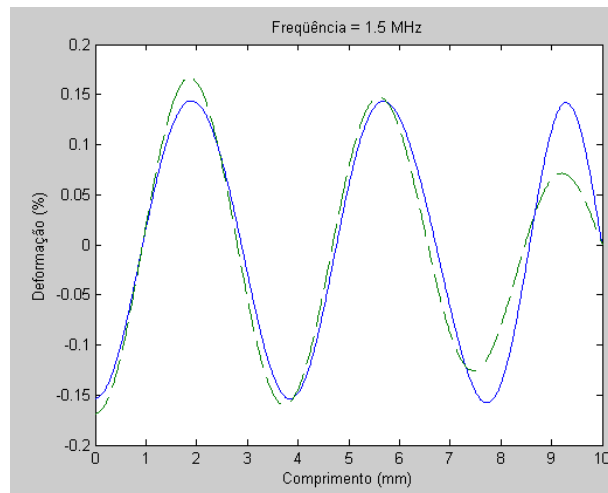
Quando a frequência da fonte de excitação mecânica se aproxima de cada frequência natural de oscilação aumenta-se consideravelmente a amplitude máxima do campo de deformação. A Figura 4.7 mostram os campos de deformação máxima em regime permanente ao longo da fibra para uma fonte senoidal com amplitude de 1 N e frequências de 0,5 MHz, 1 MHz, 1,0044 MHz e 1,5 MHz. Observa-se um grande aumento na deformação para a frequência de 1 MHz já que essa está bem próxima da quarta frequência de ressonância 1,0044 MHz. Obviamente a fibra se romperia se trabalhasse nessa frequência, bem como nas frequências de ressonâncias já que a deformação seria extremamente elevada.





**Figura 4.7:** Campos de deformação máxima em regime permanente para uma fonte senoidal com amplitude de 1 N e frequências de 0,5 MHz, 1 MHz, 1,0044 MHz e 1,5 MHz.

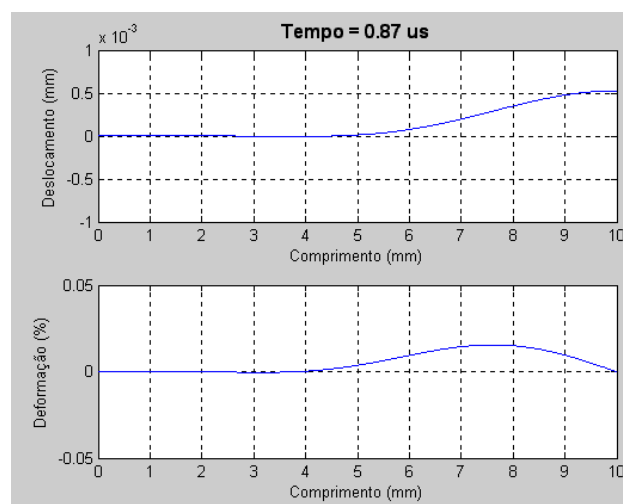
Observa-se também a diferença entre as amplitudes dos picos de deformação para as frequências de 0,5 MHz e 1,5 MHz; no primeiro caso não há erro significativo uma vez que esse campo está bem próximo do perfil de deformação do terceiro modo, porém, no caso de 1,5 MHz indica a escolha de um número máximo insuficiente de modos, já que eram esperados picos de deformação de mesma amplitude ao longo da fibra. A Figura 4.8 mostra o campo de deformação máxima para 1,5 MHz calculado com um número máximo de 6 modos (tracejada) e 10 modos (linha cheia), mostrando que a escolha equivocada para o número máximo de modos pode fornecer resultados insatisfatórios. A máxima frequência do sinal de excitação determinará o número de modos que deverá ser escolhido para se obter uma boa precisão. Não é aconselhável escolher um número de modos muito maior que o necessário, além de aumentar o esforço computacional, erros numéricos significativos podem ocorrer já que no algoritmo de solução estão previstas integrações numéricas e inversões de matrizes.



**Figura 4.8:** Campo de deformação máxima para 1,5 MHz calculado com um número máximo de 6 modos (tracejada) e 10 modos (linha cheia).

#### 4.7.1 Fibra engastada-livre com amortecimento concentrado.

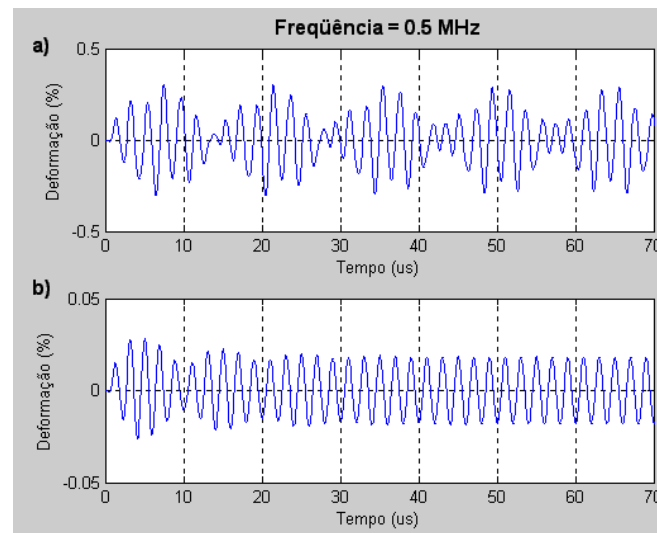
Assumindo a fibra engastada-livre como um corpo elástico com um amortecimento concentrado  $\alpha = 1$  N.s/m em sua extremidade livre (ver Figura 4.2b) e aplicando na extremidade livre uma força senoidal com amplitude de 1 N e frequência de 500 kHz, da mesma forma que no capítulo anterior em regime transiente, observa-se uma onda de deformação viajando ao encontro da extremidade engastada. A Figura 4.9 mostra os campos de deslocamento e deformação  $0,87 \mu\text{s}$  após o instante inicial (aproximadamente  $1/8$  do período fundamental da fibra engastada-livre sem amortecimento concentrado). Nesse instante a onda acústica já chegou ao meio da fibra.



**Figura 4.9:** Campo de deslocamento e deformação ao longo da fibra no instante  $t = 0,87 \mu\text{s}$ .

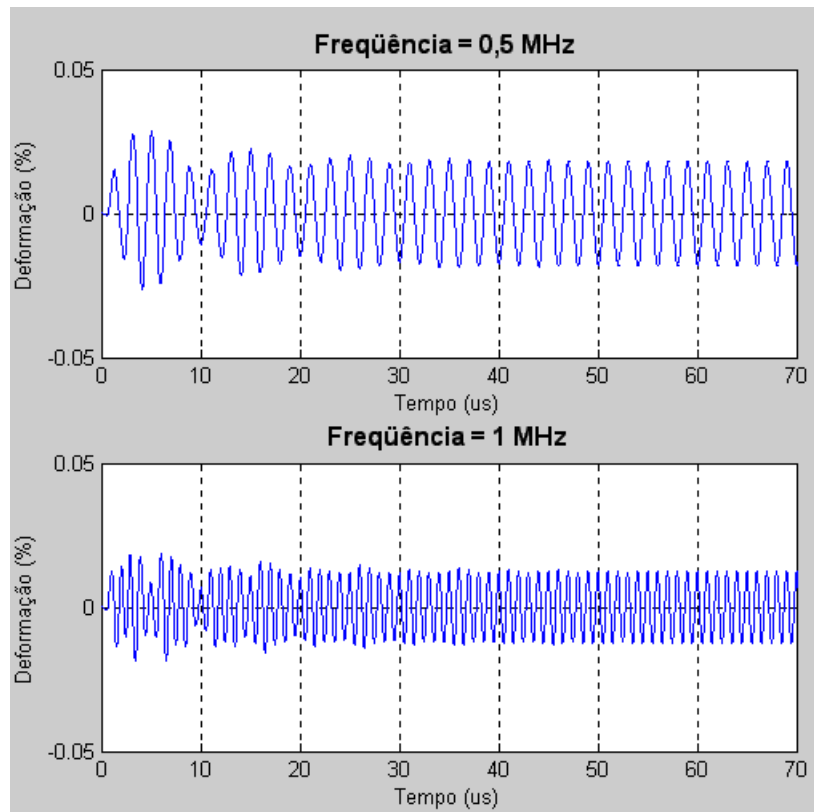
Nota-se a concordância entre o transiente nos primeiros instantes de tempo para o caso da função degrau, analisado no capítulo anterior com as soluções exatas, e a função senoidal com o método dos modos assumidos. Como no modelo do capítulo anterior, ao chegar à extremidade engastada a onda de deformação sofrerá reflexão e, devido à presença do amortecedor concentrado, após o regime transiente cada segmento da fibra oscilará com uma amplitude máxima constante ao longo do tempo, levando à formação de uma onda estacionária ao longo da fibra.

A Figura 4.10.a mostra o comportamento temporal do ponto central da fibra sem amortecimento e a Figura 4.10.b para uma constante de amortecimento viscoso  $\alpha = 1 \text{ N.s/m}$ , ambas com frequência de excitação de 500 kHz. Quando não há amortecimento não há formação de onda estacionária com amplitude máxima constante ao longo do tempo.



**Figura 4.10:** a) Comportamento temporal do ponto central da fibra na ausência de amortecimento. b) Comportamento temporal do ponto central da fibra para uma constante de amortecimento viscoso  $\alpha = 1 \text{ N.s/m}$ .

Para o modelo de amortecimento viscoso, mantendo-se as características geométricas do sistema, o tempo de duração do regime transiente é independente da frequência da fonte de excitação. A Figura 4.11 mostra o comportamento temporal do ponto central da fibra para uma constante de amortecimento viscoso  $\alpha = 1 \text{ N.s/m}$  e frequência de excitação de 500 kHz e 1 MHz. Observa-se que ambas possuem o mesmo tempo de duração do regime transiente que é de aproximadamente  $40 \mu\text{s}$ .

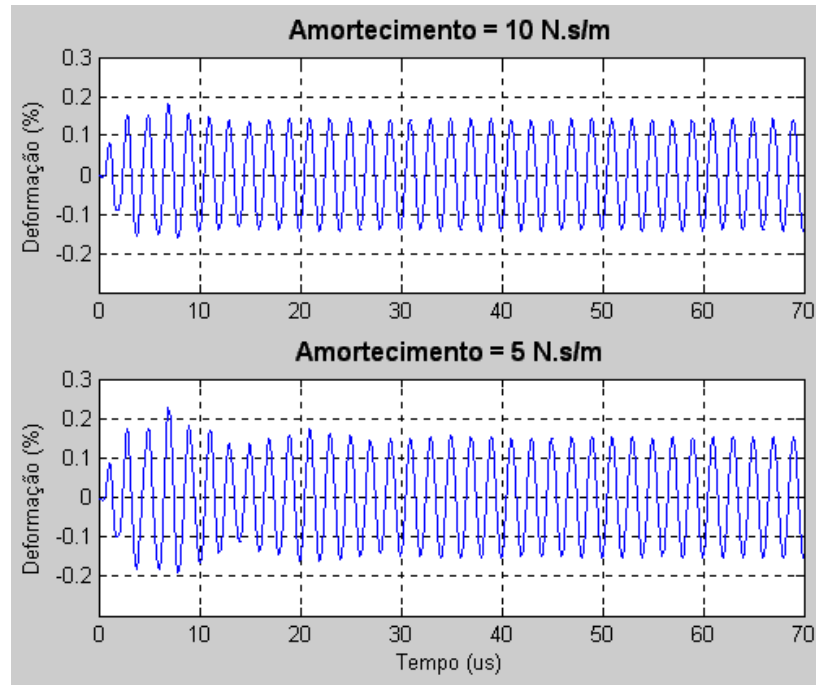


**Figura 4.11:** Comportamento temporal do ponto central da fibra para uma constante de amortecimento viscoso  $\alpha = 1 \text{ N.s/m}$  e frequências de excitação de 500 kHz e 1MHz. O tempo de duração do regime transiente é o mesmo.

#### 4.7.2 Fibra engastada-livre com amortecimento distribuído.

Como já visto na seção 4.4, para um amortecimento não-proporcional distribuído de forma homogênea ao longo da barra usa-se (4.28) para preencher a matriz de amortecimento. Esse modelo pode ser usado ao se revestir a fibra de sílica com um material viscoso. Nesse caso, o conjunto fibra-revestimento deve ser tratado como uma barra homogênea com densidade e módulo de Young próprios. As expressões para calcular a densidade e o módulo de Young desse conjunto serão apresentadas no próximo capítulo.

A Figura 4.12 mostra o comportamento temporal do ponto central para uma frequência de excitação de 500 kHz e constantes de amortecimento de 10 N.s/m e 5 N.s/m. Nota-se que a duração do regime transiente é inversamente proporcional ao amortecimento, porém a amplitude máxima em regime permanente será menor com um maior amortecimento.

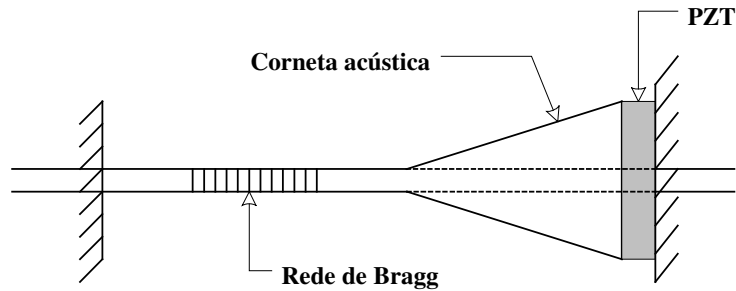


**Figura 4.12:** Campo de deformação máxima para uma constante de amortecimento distribuído  $\alpha = 10 \text{ N.s/m}$  e  $\alpha = 5 \text{ N.s/m}$ .

#### 4.8 O MÉTODO DOS MODOS ASSUMIDOS APLICADO EM MODULADORES ACUSTO-ÓPTICOS.

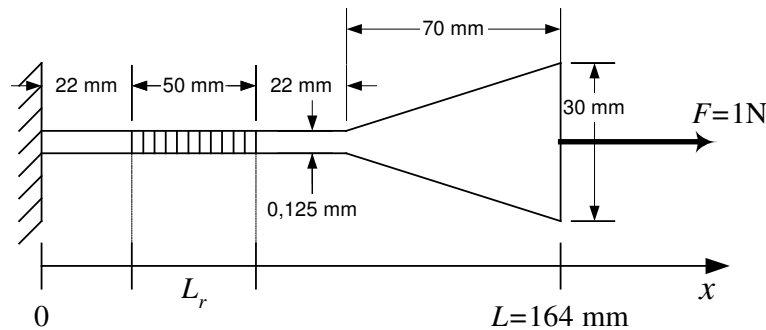
A modulação acusto-óptica em FBGs é baseada na propagação de uma onda elástica pela rede de Bragg, produzindo uma modulação de índice de refração induzida e modificando, por deformação, o período ao longo da rede. Essa técnica é usada em lasers sintonizáveis à fibra, deslocadores de frequência, chaves ópticas e atenuadores (DELGADO-PINAR, MORA, DÍEZ *et al*, 2005; KIM, BLAKE, ENGAN *et al*, 1986; KIM, YUN, KWANG *et al*, 1997; BIRKS, RUSSEL e CULVERHOUSE, 1996).

Geralmente o modulador por deformação longitudinal é acionado por atuadores PZTs, excitados por um sinal harmônico com frequências na ordem de MHz e sua montagem é similar à mostrada na Figura 4.13. A corneta acústica otimiza o acoplamento das ondas elásticas geradas pelo PZT para a fibra. Também é comum desgastar a casca da fibra, diminuindo o diâmetro da mesma na região da rede de Bragg a fim de se obter uma melhor interação acusto-óptica.



**Figura 4.13:** Montagem típica de um modulador acusto-óptico com rede de Bragg.

A rigor o PZT deve ser modelado como uma mola ou um sistema massa-mola concentrado (BEADLE e WEIS, 1998). Porém, neste trabalho o sistema da Figura 4.13 foi modelado com boa aproximação como uma barra de seção transversal não-uniforme engastada-livre com as mesmas dimensões usadas por (LIU, RUSSEL e LONG, 1998) e (DELGADO-PINAR, ZALVIDEA, DÍEZ *et al*, 2006). As dimensões desse sistema são mostradas na Figura 4.14.



**Figura 4.14:** Dimensões do modulador acusto-óptico (LIU, RUSSEL e LONG, 1998).

Assumiu-se como força externa aplicada um sinal senoidal com amplitude de 1 N e frequência de 1 MHz. Esse corpo pode ser dividido em duas partes, sendo a primeira de área constante, relativa à fibra, e a segunda com área não uniforme relativa à corneta acústica. Define-se então a função de área como sendo

$$S(x) = \begin{cases} (125 \times 10^{-6})^2 \frac{\pi}{4} & \text{se } 0 \leq x \leq 0,094 \\ (a + bx)^2 \frac{\pi}{4} & \text{se } 0,094 < x \leq 0,164 \end{cases}, \quad (4.83)$$

onde

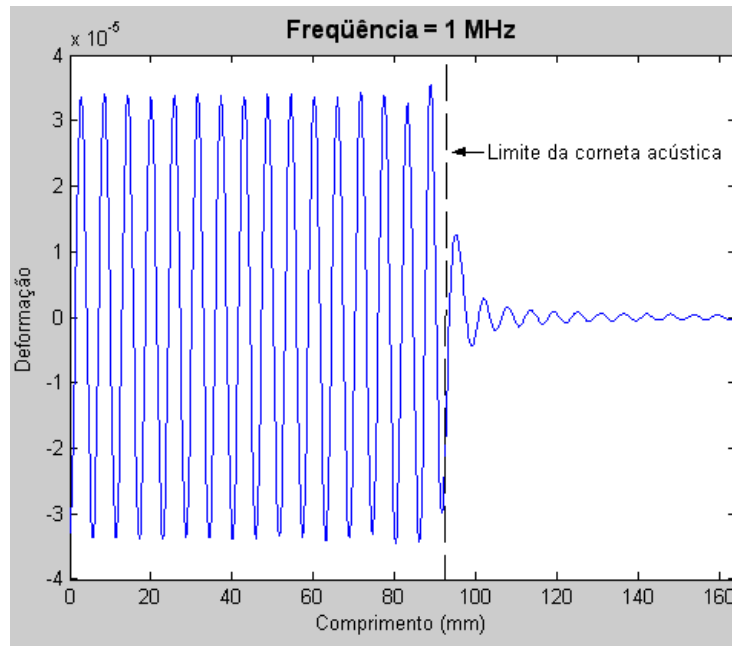
$$a = 125 \times 10^{-6} - \frac{30 - 0,125}{164 - 94} 94 \times 10^{-3} \quad (4.84)$$

e

$$b = \frac{30 - 0,125}{164 - 94}. \quad (4.85)$$

Como se supõe que a corneta acústica é fabricada em sílica, a função de massa será dada por  $m(x) = \rho S(x)$ , onde  $\rho$  é a densidade da sílica.

Desta forma, os elementos das matrizes de massa e rigidez são definidos usando (4.25) e (4.27), respectivamente. A Figura 4.15 mostra o campo máximo de deformação em regime estacionário ao longo do modulador obtido com 100 modos ( $n = 100$ ). Observa-se que a deformação aumenta com a diminuição do diâmetro, por isso um afinilamento na região da rede (desgastando a casca) causa um ganho no campo de deformação.



**Figura 4.15:** Campo de deformação ao longo do modulador acusto-óptico com corneta acústica.

Como há variação de deformação ao longo da rede o modelo utilizado no capítulo anterior, que consistia em concentrar a rede em apenas um ponto, já não é mais válido. Nesse caso, para calcular o espectro resultante recorre-se ao Método da Matriz de Transferência utilizando o campo de deformação ao longo da rede como entrada.

#### 4.9 O MÉTODO DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA.

No modelo apresentado no capítulo anterior de barra engastada-livre assumiu-se a rede de Bragg concentrada em um único ponto da fibra; esse modelo só é adequado quando o comprimento da rede é muito menor que o da fibra e quando o campo de deformação pode ser considerado constante ao longo da rede. Para casos onde o campo de deformação varia espacialmente o espectro óptico resultante pode ser obtido através do Método da Matriz de Transferência baseado na Teoria dos Modos Acoplados (ERDOGAN, 1997).

Para uma rede sem gorjeio, a perturbação do índice efetivo dos modos guiados pode ser descrita como:

$$\delta n_{eff} = \delta \bar{n}_{eff}(x) \left[ 1 + v \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda}\right) \right] \quad (4.86)$$

onde  $\delta \bar{n}_{eff}$ , denominado índice de modulação, é a mudança do índice de refração médio em um período da rede,  $v$  é a visibilidade das franjas e  $\Lambda$  o período da rede.

Assumindo que a componente transversal do campo elétrico possa ser escrita como uma superposição de  $j$ -ésimos modos propagantes em um guia sem perturbação de índice (ou seja, sem a rede), tal componente pode ser escrita na forma (YARIV, 1973; KOGELNIK, 1990; KASHYAP, 1999)

$$\vec{E}^t(x, y, z, t) = \sum_j \left[ A_j(x) \exp(i\beta_j x) + B_j(x) \exp(-i\beta_j x) \right] \vec{e}_j^t(y, z) \exp(-i\omega t) \quad (4.87)$$

onde  $A_j(x)$  e  $B_j(x)$  são amplitudes de variação lenta dos  $j$ -ésimo modo que se propaga no sentido  $+x$  e  $-x$ , respectivamente;  $\beta_j$  é a constante de propagação do  $j$ -ésimo modo,  $\omega$  é a frequência angular do campo elétrico e  $\vec{e}_j^t$  representa o campo modal transversal correspondente aos modos propagantes confinados no núcleo (por exemplo, os modos LP) ou os modos de casca.

Por serem ortogonais os modos descritos em (4.87) não trocam energia, porém, quando há perturbações de índice ocasionadas pela presença da rede de Bragg ocorrem acoplamentos de modos que afetarão as amplitudes  $A_j(x)$  e  $B_j(x)$ . Dessa forma, a variação de tais amplitudes ao longo do eixo  $x$  pode ser descrita como:

$$\frac{dA_j}{dx} = i \sum_k A_k (K_{kj}^t + K_{kj}^x) e^{i(\beta_k - \beta_j)x} + i \sum_k B_k (K_{kj}^t - K_{kj}^x) e^{-i(\beta_k + \beta_j)x} \quad (4.88)$$



$$\frac{dB_j}{dx} = -i \sum_k A_k (K_{kj}^t - K_{kj}^x) e^{i(\beta_k + \beta_j)x} - i \sum_k B_k (K_{kj}^t + K_{kj}^x) e^{-i(\beta_k - \beta_j)x}, \quad (4.89)$$

onde  $K_{kj}(x)$  é o coeficiente de acoplamento entre os modos  $j$  e  $k$ , e os sobrescritos  $t$  e  $x$  se referem aos modos transversais e longitudinais, respectivamente. Por sua vez, o coeficiente de acoplamento é dado por

$$K_{kj}^t(x) = \frac{\omega}{4} \iint_{\infty} \Delta \xi(x, y, z) \vec{e}_j^t(y, z) \cdot \vec{e}_j^{t*}(y, z) dy dz, \quad (4.90)$$

onde  $\Delta \xi$  é a perturbação da permissividade elétrica cujo valor aproximado é  $\Delta \xi \cong 2n\delta n$  quando  $\delta n \ll n$ . Uma vez que para os modos propagantes em uma fibra óptica, geralmente  $K_{kj}^x(x) \ll K_{kj}^t(x)$ , o coeficiente de acoplamento longitudinal será desprezado.

Assumindo que a mudança induzida de índice de refração  $\delta n(x, y, z)$  ocorra apenas no núcleo e seja aproximadamente uniforme, escreve-se (4.86) com  $\delta \bar{n}_{co}(x)$  substituindo  $\delta \bar{n}_{eff}(x)$ . Define-se dois novos coeficientes:

$$\sigma_{kj}(x) = \frac{\omega n_{co}}{2} \delta \bar{n}_{co}(x) \iint_{\text{núcleo}} \vec{e}_j^t(y, z) \cdot \vec{e}_j^{t*}(y, z) dx dy \quad (4.91)$$

$$\kappa_{kj}(x) = \frac{\nu}{2} \sigma_{kj}(x), \quad (4.92)$$

sendo  $\sigma$  o coeficiente de acoplamento “dc” e  $\kappa$  é o coeficiente de acoplamento “ac”. Portanto, (4.90) pode ser escrito como:

$$K_{kj}^t(x) = \sigma_{kj}(x) + 2\kappa_{kj}(x) \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} x\right). \quad (4.93)$$

As equações (4.88) e (4.89) são as equações dos modos acoplados cujas soluções fornecerão as características de transferência da rede de Bragg. Essas soluções são encontradas através da “aproximação síncrona” relatada em (KOGELNIK, 1990; KASHYAP, 1999) através da substituição das amplitudes  $A$  e  $B$  pelas amplitudes  $R$  e  $S$ , respectivamente, que são definidas como

$$R(x) \equiv A(x) \exp(i\delta x - \phi/2) \quad (4.94)$$

$$S(x) \equiv B(x) \exp(-i\delta x + \phi/2). \quad (4.95)$$

Diferenciando (4.94) e (4.95) e substituindo em (4.88) e (4.89) as equações resultantes podem ser escritas como

$$\frac{dR}{dx} = i\delta R(x) + i\kappa S(x) \quad (4.96)$$

$$\frac{dS}{dx} = -i\hat{\sigma}S(x) - i\kappa^* R(x), \quad (4.97)$$

onde  $\kappa$  é dado por (4.92) e  $\hat{\sigma}$  é o coeficiente de auto-acoplamento definido como

$$\hat{\sigma} = \delta + \sigma. \quad (4.98)$$

O termo  $\delta$ , por sua vez, é definido como

$$\delta = 2\pi n_{eff} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_D} \right), \quad (4.99)$$

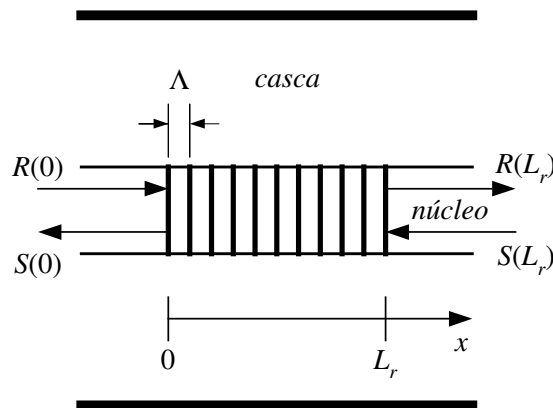
onde  $\lambda_D \equiv 2n_{eff}\Lambda$  é o “comprimento de onda de projeto” para uma rede de Bragg com mudança de índice infinitamente pequena ( $\delta n_{eff} \rightarrow 0$ ) e período  $\Lambda$  (MILER, ASKINS e FRIEBELE, 2006).

Dessa forma, a seguinte relação é estabelecida

$$\sigma = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \bar{n}_{eff} \quad (4.100)$$

$$\kappa = v \frac{\pi}{\lambda} \delta \bar{n}_{eff} = v \frac{\sigma}{2}. \quad (4.101)$$

As equações diferenciais acopladas (4.96) e (4.97) são resolvidas usando técnicas convencionais para problemas de autovalores (KREYSZIG, 1992). Soluciona-se a equação característica igualando o determinante a zero. O resultado, que geralmente é um polinômio, possibilita encontrar os autovalores. Sendo um dispositivo passivo, uma rede de comprimento  $L_r$  pode ser tratada como um quadripolo, podendo ser modelada matricialmente. Arbitrando a origem espacial no ponto de incidência da onda na rede, como mostra a Figura 4.16, por conveniência normaliza-se a amplitude do campo incidente  $R(0)$  de forma tal que seu valor máximo seja igual à unidade.



**Figura 4.16:** Esquema da rede de Bragg como um quadripolo.

Para encontrar as condições de contorno assume-se uma onda incidente proveniente de  $x = -\infty$ ; no início da rede a transmissão normalizada será máxima ( $R(0)=1$ ) e como não há reflexão além da rede, ou seja, para  $x \geq L_r$ , isso implicará em  $S(L_r)=0$ . Discretizando a rede em  $M$  seções uniformes e definindo  $R_j$  e  $S_j$  como as amplitudes do campo após atravessar cada seção  $j$ , a propagação em cada seção é obtida através da expressão

$$\begin{bmatrix} R_j \\ S_j \end{bmatrix} = \mathbf{F}_j^B \begin{bmatrix} R_{j-1} \\ S_{j-1} \end{bmatrix}, \quad (4.102)$$

sendo a matriz  $\mathbf{F}_j^B$  dada por

$$\mathbf{F}_j^B = \begin{bmatrix} \cosh(\gamma_B \Delta x) - i \frac{\hat{\sigma}}{\gamma_B} \sinh(\gamma_B \Delta x) & -i \frac{\kappa}{\gamma_B} \sinh(\gamma_B \Delta x) \\ i \frac{\kappa}{\gamma_B} \sinh(\gamma_B \Delta x) & \cosh(\gamma_B \Delta x) + i \frac{\hat{\sigma}}{\gamma_B} \sinh(\gamma_B \Delta x) \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

onde  $\Delta x$  é o comprimento da  $j$ -ésima seção e  $\gamma_B \equiv \sqrt{\kappa^2 - \hat{\sigma}^2}$ .

Conhecendo as matrizes para cada seção, aplica-se as condições de contorno ( $R(0)=1$  e  $S(L_r)=0$ ) chegando à solução final através de

$$\begin{bmatrix} R(0) \\ S(0) \end{bmatrix} = \mathbf{F}^B \begin{bmatrix} R(L_r) \\ S(L_r) \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \begin{bmatrix} 1 \\ S(0) \end{bmatrix} = \mathbf{F}^B \begin{bmatrix} R(L_r) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.104)$$

sendo

$$\mathbf{F}^B = \prod_{j=1}^M \mathbf{F}_j^B. \quad (4.105)$$

Escrevendo  $\mathbf{F}^B$  na forma

$$\mathbf{F}^B = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.106)$$

e substituindo em (4.104), resultará em

$$\begin{bmatrix} 1 \\ S(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} R(L_r) \\ f_{21} R(L_r) \end{bmatrix}. \quad (4.107)$$

De (4.107) conclui-se que  $R(L_r)=1/f_{11}$ . Portanto, a amplitude refletida para cada comprimento de onda pode ser encontrada através de

$$r(\lambda) = \frac{S(0)}{R(0)} = \frac{S(0)}{1} = \frac{f_{21}}{f_{11}}, \quad (4.108)$$

sendo a potência refletida dada por  $P_r(\lambda) = |r(\lambda)|^2$ .

Analogamente, a amplitude transmitida será dada por

$$t(\lambda) = \frac{R(L_r)}{R(0)} = \frac{R(L_r)}{1} = \frac{1}{f_{11}} \quad (4.109)$$

e a potência transmitida dada por  $P_r(\lambda) = |t(\lambda)|^2$ .

O número de seções  $M$  não deve ser arbitrariamente grande porque as aproximações feitas na Teoria dos Modos Acoplados, que permitiram a derivação das equações (4.96) e (4.97) não são válidas quando o comprimento da seção  $\Delta x$  é da mesma ordem de grandeza do período da rede  $\Lambda$  (YAMADA e SAKUDA, 1987). Portanto, para se obter uma boa precisão deve-se fazer  $\Delta x \gg \Lambda$ , o que implica em

$$M \ll \frac{2n_{eff}}{\lambda_D}. \quad (4.110)$$

Dessa forma, é possível obter a transmissão e a reflexão para cada comprimento de onda em um intervalo de interesse obtendo-se assim o espectro de transmissão e reflexão da rede de Bragg.

Simula-se o efeito da variação do período da rede, causada pela deformação em seu interior, através do comprimento de onda de projeto; para isso, aplica-se (2.34) substituindo o comprimento de onda de Bragg pelo comprimento de onda projeto resultando em

$$\frac{\Delta\lambda_D}{\lambda_D} = \frac{\lambda_{Df} - \lambda_{D0}}{\lambda_{D0}} = (1 - p_e)\mathcal{E} \quad \therefore \quad \lambda_{Df} = \lambda_{D0}[1 + (1 - p_e)\mathcal{E}], \quad (4.111)$$

onde  $\lambda_{D0}$  é uma constante representando o comprimento de onda de projeto quando a rede está em repouso e  $\lambda_{Df}$  é o comprimento de onda de projeto em um determinado ponto da rede e em um determinado instante de tempo. Como  $\lambda_{Df}$  depende da deformação, pode-se escrever (4.111) como

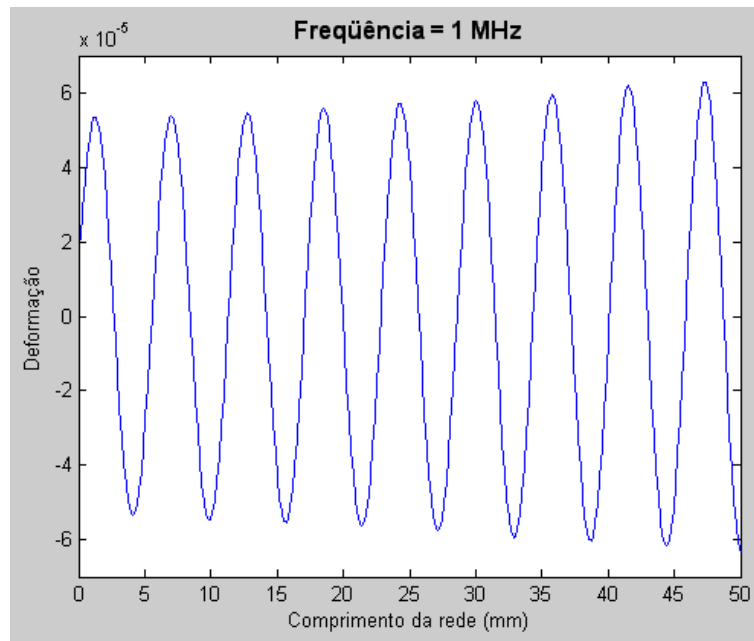
$$\lambda_D(\mathcal{E}(x, t)) = \lambda_{D0}[1 + (1 - p_e)\mathcal{E}(x, t)]. \quad (4.112)$$

Portanto, substituindo (4.112) em (4.99), e esta em (4.98), obtém-se  $\hat{\sigma}$  que será usado no cálculo dos elementos da matriz de transferência em cada instante de tempo.

#### 4.10 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS MODOS ASSUMIDOS E MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA COMBINADOS.

Para validar a combinação dos dois métodos optou-se por usar os resultados do trabalho experimental relatado em (DELGADO-PINAR, ZALVIDEA, DÍEZ *et al*, 2006). No trabalho citado usou-se uma rede de Bragg de comprimento  $L_r = 50$  mm gravada no

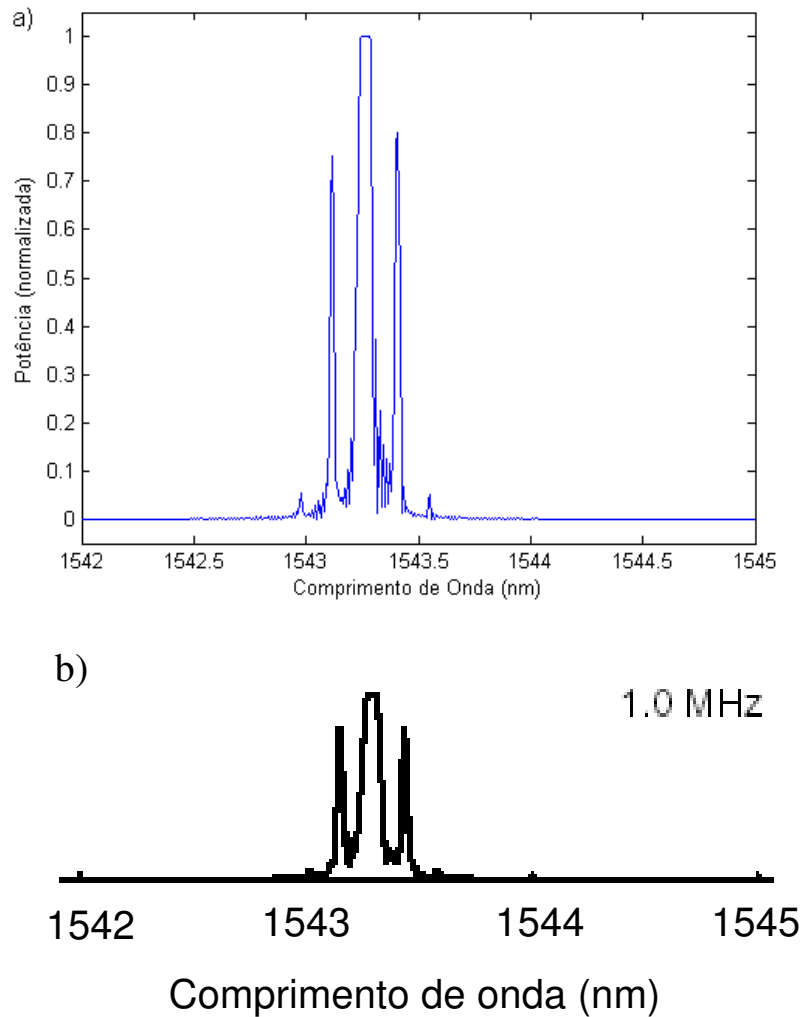
modulador acusto-óptico descrito na seção 4.7. As dimensões são as mesmas mostradas na Figura 4.14, porém, no trabalho citado, foi feito o desgaste da casca reduzindo o diâmetro da fibra a 100  $\mu\text{m}$  na região da rede de Bragg. A Figura 4.17 mostra o campo de deformação resultante na região da rede aplicando uma força externa senoidal com amplitude de 4 N, frequência de 1 MHz com uma constante de amortecimento distribuído de  $\alpha = 1 \text{ N.m/s}$ . Apesar dessa região ter seção transversal constante, observa-se a diminuição da amplitude do campo de deformação à medida que se aproxima a extremidade engastada (à esquerda da estrutura) e se afasta do ponto de aplicação da força (à direita da estrutura), essa diminuição é devido à dissipação de energia causada pelo amortecimento distribuído.



**Figura 4.17:** Campo de deformação máxima para ao longo da rede.

Não há informações sobre o índice de modulação da rede utilizada nos experimentos, porém é relatado uma estimativa para o fator  $\kappa L_r$ , o produto entre o comprimento da rede e o coeficiente de acoplamento “ac”, como sendo  $\kappa L_r = 6$ . Assumindo a visibilidade das franjas unitária ( $\nu = 1$ ), o coeficiente de acoplamento “dc” será dado por  $\sigma = 2\kappa$  (ver (4.101)), tornando possível encontrar todos os elementos da matriz de transferência.

Estimando um comprimento de onda de projeto  $\lambda_{D0} = 1473.2 \text{ nm}$ , o campo de deformação mostrado pela Figura 4.16 foi usado como entrada no método da matriz de transferência resultando o espectro refletido mostrado pela Figura 4.18-a.



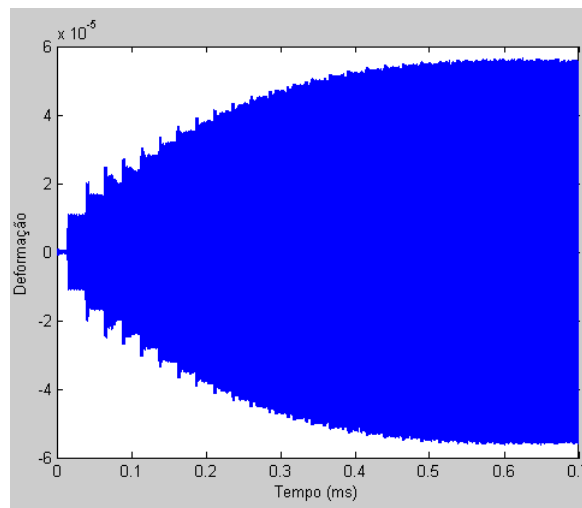
**Figura 4.18:** a) Espectro resultante da combinação dos métodos modos assumidos e matriz de transferência. b) Espectro obtido experimentalmente (DELGADO-PINAR, ZALVIDEA, DÍEZ *et al*, 2006).

Comparando com o espectro obtido experimentalmente, mostrado Na Figura 4.18-b, observa-se uma grande concordância no formato, largura de banda (60 pm) e separação entre os picos laterais de maior potência (300 pm). Indicando que a combinação dos dois métodos apresenta uma boa precisão. Dessa forma, é possível simular o espectro resultante variando a frequência, as dimensões do dispositivo, o comprimento e as características da rede e até mesmo o material da corneta acústica projetando um dispositivo que atenda as especificações desejadas e minimize as possíveis limitações do atuador PZT.

A Figura 4.19 mostra a deformação em regime transiente de um ponto do dispositivo localizado em  $x = L/2$  para uma constante de amortecimento distribuído  $\alpha = 1$  N.s/m. Assume-se que o regime transiente terá a mesma duração para todos os pontos da estrutura.

Nota-se que o regime estacionário acontece a partir de aproximadamente 550  $\mu$ s. Esse tempo está próximo da duração do regime transiente para a emissão do laser construído com um modulador idêntico relatado como sendo 500  $\mu$ s em (DELGADO-PINAR, ZALVIDEA, DIÉZ *et al*, 2005) e permanece fixo independente da frequência e da força aplicada.

Como no capítulo anterior, a duração do transiente pode ser diminuída aumentando o amortecimento, porém, será necessária uma força maior para a obtenção do mesmo valor de deformação. Usando os métodos apresentados neste capítulo é possível realizar um estudo mais detalhado sobre a influência das dimensões do dispositivo (principalmente da corneta) e do material na duração do regime transiente, a fim de se obter a otimização do tempo de resposta e do desempenho geral do dispositivo.



**Figura 4.19:** Transiente da deformação para um ponto localizado em  $x = L/2$  e amortecimento  $\alpha = 1$  N.s/m.

A combinação de métodos relatados neste capítulo pode ser expandida facilmente para diferentes condições de extremidade bastando escolher a função teste apropriada. Para o modelo da fibra livre-livre, por exemplo, a função teste seria  $\phi_j(x) = \cos\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$  e para o modelo engastada-engastada,  $\phi_j(x) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$ .

## CAPÍTULO 5

### SINTONIZAÇÃO COM MOLA DE ENTALHE

#### 5.1 INTRODUÇÃO.

Uma das principais características desejáveis para um sintonizador eficiente é um controle preciso para atingir qualquer comprimento de onda de forma estável. O sistema também deve apresentar o mesmo desempenho na sintonização tanto em pequenos intervalos como em grandes intervalos. A grande maioria dos trabalhos sobre sintonização de redes de Bragg não relata detalhes sobre a velocidade de sintonização, mostrando apenas o intervalo de sintonização alcançado.

Na literatura há relatos de grandes intervalos de sintonização da ordem de 70 nm (GOH, MOKHTAR, BUTLER *et al*, 2002), 90 nm (GOH, MOKHTAR, BUTLER *et al*, 2003) e 110 nm (MOKHTAR, GOH, BUTLER *et al*, 2003), tais intervalos foram atingidos por compressão da FBG. Porém, nesses trabalhos foi usado um bloco móvel deslocado por parafuso tornando o sistema lento.

Várias técnicas têm sido empregadas em filtros sintonizáveis baseados em deformação de FBGs, usando PZTs (LIMBERGER, IOCCO, SALATHÉ *et al*, 1999; BALL e MOREY, 1992; IOCCO, LIMBERGER, SALATHÉ *et al*, 1999), motores de passo (BALL e MOREY, 1994), e atuadores magnéticos (MAVOORI, JIN, ESPINDOLA *et al*, 1999; JIN, MAVOORI, ESPINDOLA *et al*, 1999). A Tabela 5.1 mostra o intervalo, a velocidade e o mecanismo de sintonização de alguns trabalhos.

**Tabela 5.1:** Intervalo, velocidade e mecanismo de sintonização de alguns trabalhos.

Referência	Intervalo de sintonização (nm)	Velocidade de sintonização (nm/ms)	Princípio utilizado
LIMBERGER <i>et al</i> , 1998.	2,5	$6,5 \cdot 10^{-3}$	Temperatura
XU <i>et al</i> , 1993.	0,22	0,44	Pressão hidrostática
JIN <i>et al</i> , 1999.	16	0,5	Deformação longitudinal por tração (atuador magnético)



BALL <i>et al</i> , 1994.	32	$3,2 \cdot 10^{-2}$	Deformação longitudinal por compressão (motor de passo)
IOCCO <i>et al</i> , 1999.	45	19	Deformação longitudinal por tração e compressão (PZT)
XU e GU, 2006	13,7	0,79	Deformação longitudinal por compressão (PZT)

Resultados obtidos por (HU, YANG, WANG *et al*, 2001) demonstraram a viabilidade de aplicação de tensão puramente mecânica para obter chaveamentos rápidos. No trabalho citado, a aplicação da tensão foi realizada através de uma mola presa em uma de suas extremidades a uma estrutura bimetálica com baixo coeficiente de expansão térmica sobre a qual a rede de Bragg se apóia. A utilização desse material permite a construção de um dispositivo de sintonização com as vantagens citadas, aliada à estabilidade térmica na região de operação. Porém, esse sistema é caro, de difícil implementação e, apesar de conseguir um tempo de sintonização menor que 8 ms, seu intervalo de sintonização é menor que 2 nm.

Os PZTs multicamadas são viáveis para sintonização de resposta rápida em uma extensa largura de banda. Os filtros apresentados em (IOCCO, LIMBERGER, SALATHÉ *et al*, 1999) podem atingir uma banda de sintonização de 45 nm, porém é aplicada uma tensão de 1000 V. Em (INUI, KOMUKAI e NAKAZAWA, 2001) é usado um PZT multicamadas (*MLP-Multilayer PZT*) usando até 50 V para a obtenção de um deslocamento do comprimento de onda de Bragg de 10 nm, porém com a utilização de FBGs não linear com gorgoeio.

Observa-se que os melhores resultados são conseguidos através da deformação longitudinal aplicando forças externas na fibra óptica.

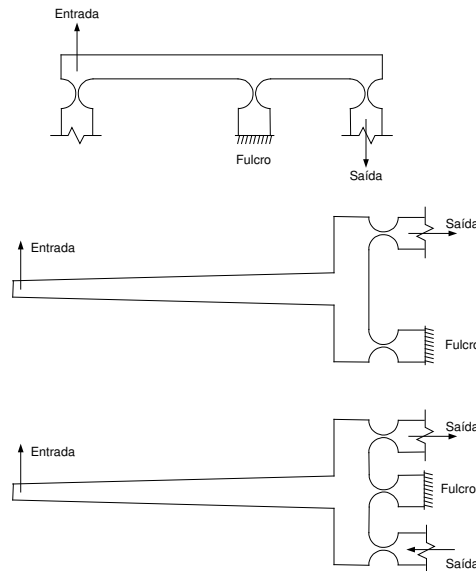
Este capítulo apresenta uma proposta de um dispositivo de sintonização por tração longitudinal usando o princípio da mola de entalhe. São apresentados o método de medição do tempo de resposta, as características do dispositivo, suas limitações e as possíveis soluções para diminuir o tempo de sintonização.

## 5.2 A MOLA DE ENTALHE.

A mola de entalhe é um dispositivo flexível monobloco (SMITH e CHETWYND, 2005) fabricado em um material sólido, no qual são entalhados furos circulares ou elípticos separados por uma pequena distância. Tais furos trabalham como elementos flexíveis

(TSEYTLIN, 2002); dessa forma, evita-se o uso de juntas, articulações e a necessidade de lubrificação, já que não há desgaste de material por atrito.

Trabalhando como uma alavanca linear, esse tipo de dispositivo geralmente é usado como nanoposicionador devido às suas características de repetibilidade, pequena histerese e alta precisão. A Figura 5.1 mostra algumas configurações das molas de entalhe como alavanca linear, onde “Entrada” significa o sentido da carga aplicada e “Saída” o sentido do deslocamento resultante.



**Figura 5.1:** Molas de entalhe utilizadas como alavanca.

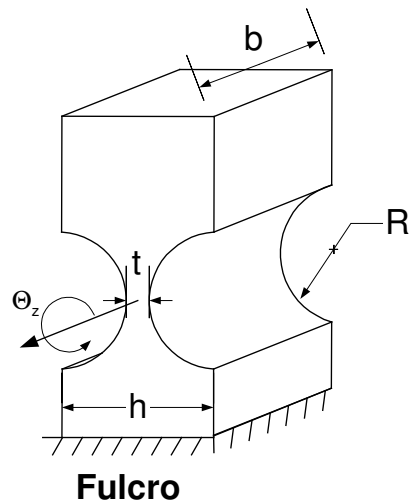
As vantagens adicionais desse tipo de dispositivo são:

- Por ser fabricado em um único bloco de material, são eliminados instabilidades e pontos de tensão concentrada causados por soldas.
- Os deslocamentos em cada ponto do dispositivo são contínuos e suaves.
- Os deslocamentos podem ser estimados com precisão, dada uma força conhecida. Por outro lado, as forças geradas por um deslocamento conhecido também podem ser estimadas com precisão.
- Quando ocorre fadiga de material ou sobrecarga é possível detectar facilmente a iminência de colapso.

Como desvantagens pode-se citar:

- Esse tipo de dispositivo apresenta uma pequena histerese no seu deslocamento. A magnitude de tal histerese depende do nível de tensão aplicada, da temperatura e do material utilizado na sua fabricação.
- Seu uso é restrito a pequenos deslocamentos.
- Não suporta cargas elevadas.
- Sobrecargas acidentais podem causar fadiga e eventual colapso. Sobrecargas moderadas podem causar deformação plástica; o dispositivo continua trabalhando como um mecanismo linear, porém, com as características iniciais alteradas.

O mecanismo básico de funcionamento desse dispositivo consiste no movimento de rotação em torno do eixo situado entre dois semicírculos entalhados como mostra a Figura 5.2. Dessa forma, essa parte do dispositivo pode ser considerada como uma dobradiça monolítica.



**Figura 5.2:** Dobradiça monolítica.

Para  $t < R < 5t$ , uma aproximação para o ângulo de rotação  $\Theta_z$ , obtida através do método dos elementos finitos (SMITH *et al.*, 1988) assumindo entalhes circulares e um momento aplicado  $M$ , é dada por

$$\Theta_z = \frac{2KRM}{EI} = \frac{24KRM}{Ebt^3}, \quad (5.1)$$

onde  $I$  é o segundo momento de área para a seção retangular entre os dois entalhes e  $K$  o fator de correção dado por

$$K = 0,565 \frac{t}{R} + 0,166 . \quad (5.2)$$

O momento máximo permitido para a dobradiça é dado por

$$M_{\max} = \frac{bt^2}{6K_t} \sigma_{\max} , \quad (5.3)$$

onde  $\sigma_{\max}$  é a tensão de escoamento do material (a partir da qual o material deixa o regime elástico) utilizado e  $K_t$  o fator de tensão concentrada dado por

$$K_t = \frac{2,7t + 5,4R}{8R + t} + 0,325 . \quad (5.4)$$

Substituindo (5.3) em (5.1) chega-se à expressão do ângulo máximo de rotação da dobradiça dada por

$$\Theta_{\max} = \frac{4KR}{K_t Et} \sigma_{\max} . \quad (5.5)$$

O ângulo máximo de rotação é um dado de projeto importante para uma escolha adequada do material, porém, é importante salientar que, dependendo do material e das características geométricas do projeto, ele não garante o funcionamento do dispositivo no regime elástico.

Como esse dispositivo é projetado para pequenos deslocamentos, geralmente são utilizados atuadores piezoelétricos como gerador de força externa.

### 5.3 O ATUADOR PIEZOELÉTRICO.

O atuador piezoelétrico (nome proveniente da palavra grega para pressão “πιεση”) é um dispositivo que sofre deformações quando submetido a uma tensão elétrica, sendo essas deformações dependentes do campo elétrico aplicado.

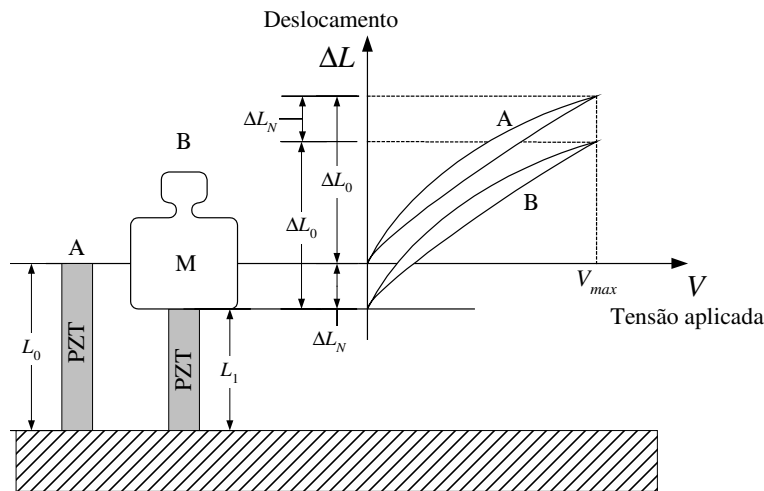
O efeito piezoelétrico é encontrado naturalmente em materiais monocristalinos como quartzo e turmalina; porém, nesses materiais o efeito é de pequena intensidade. Os atuadores fabricados com estruturas policristalinas, como os materiais cerâmicos baseados em zirconato titanato de chumbo ( $Pb(Zr,Ti)O_3$ ) (também chamados de PZTs), podem sofrer deformações consideráveis e movimentar massas significativas (até várias toneladas em um intervalo de nanômetros a milímetros).

Há dois parâmetros distintos que devem ser considerados na atuação dos PZTs: a capacidade de carga e a força gerada.

### 5.3.1 Capacidade de carga.

A capacidade de carga determina a máxima força que pode atuar sobre o PZT para que este efetue o deslocamento máximo sob a aplicação da tensão máxima.

Quando o PZT é submetido a uma carga constante de compressão longitudinal, ocorre um decréscimo em seu comprimento como mostra a Figura 5.3. Geralmente o PZT é modelado como uma mola de constante de rigidez  $k_T$ . Assumindo a força de compressão que age no PZT (na situação B) definida por  $F = Mg$ , onde  $M$  é a massa do corpo de bloqueio sobre o PZT e  $g$  a gravidade, a deformação global do PZT será  $\Delta L_N = F / k_T$ . Se a força  $F$  for menor ou igual à capacidade de carga do PZT, ocorrerá o máximo deslocamento  $\Delta L_0$  quando o PZT estiver sob a máxima tensão  $V_{max}$ .



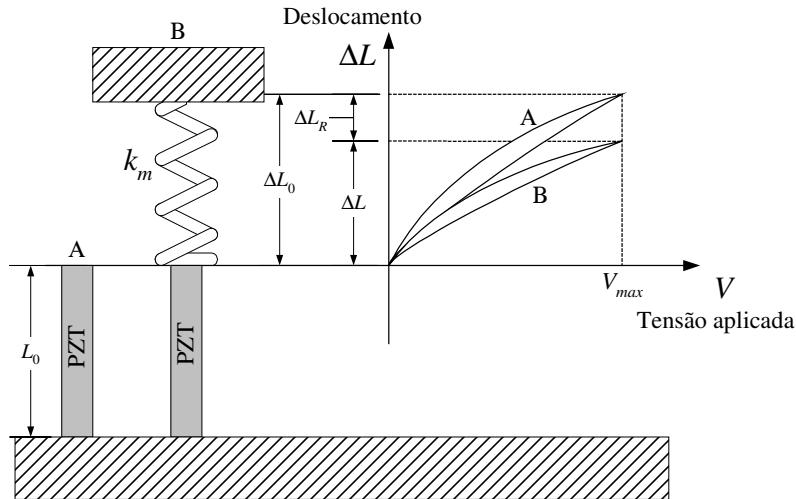
**Figura 5.3:** Atuação do PZT sob carga constante.

Se um PZT com constante de rigidez  $k_T$  é submetido a uma carga variável dependente do deslocamento na forma  $F(x) = k_m x$ , o corpo gerador da carga pode ser modelado como uma mola com constante de rigidez  $k_m$ , como mostra a Figura 5.4. O deslocamento máximo nessa situação será dado por

$$\Delta L = \Delta L_0 \left( \frac{k_T}{k_T + k_m} \right). \quad (5.6)$$

Há um decréscimo no deslocamento gerado pelo PZT, sendo a redução do deslocamento dada por

$$\Delta L_R = \Delta L_0 \left( 1 - \frac{k_T}{k_T + k_m} \right). \quad (5.7)$$



**Figura 5.4:** Atuação do PZT sob carga variável.

### 5.3.2 Força gerada.

A geração de força pelo PZT está sempre relacionada com a redução do deslocamento. A força máxima que um PZT pode gerar (força de bloqueio) depende da tensão elétrica, da sua rigidez e do seu deslocamento máximo. Dessa forma, desprezando o efeito da tensão, a força máxima será dada por

$$F_{\max} = k_T \Delta L_0, \quad (5.8)$$

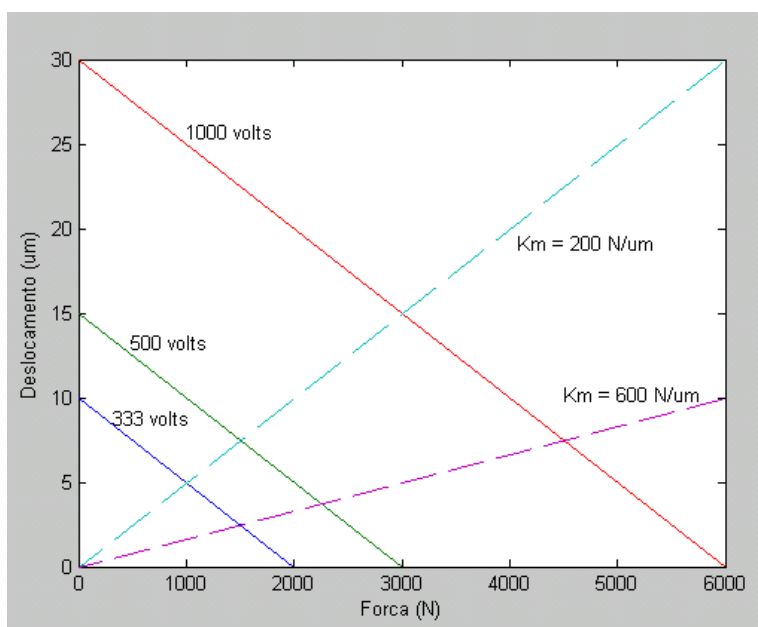
onde  $\Delta L_0$  é o deslocamento do PZT sem nenhuma carga de bloqueio.

Com carga de bloqueio, a força máxima, expressa em (5.8), ocorre quando o deslocamento tende a zero. A força gerada é diminuída na razão inversa de  $k_T$  até o PZT atingir o deslocamento máximo (desde que a carga de bloqueio seja menor ou igual à capacidade de carga do PZT).

Em sistemas reais o corpo de bloqueio pode ter uma constante de rigidez,  $k_m$ , maior ou menor que a do PZT. A força máxima efetiva será dada por

$$F_{\max \text{ eff}} = k_T \Delta L_0 \left( 1 - \frac{k_T}{k_m + k_T} \right). \quad (5.9)$$

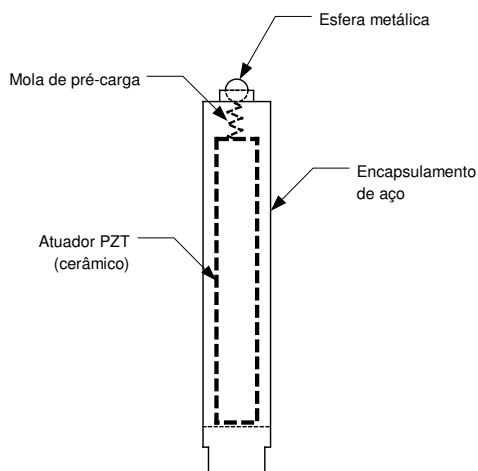
A Figura 5.5 mostra a geração de força por um PZT de  $k_T = 200 \text{ N}/\mu\text{m}$  para várias tensões elétricas (linhas cheias). Pela intersecção das retas, observa-se o deslocamento máximo realizado para dois corpos de bloqueio com constantes de rigidez de  $200 \text{ N}/\text{m}$  e  $600 \text{ N}/\text{m}$  (linhas tracejadas). Quando  $k_T = k_m$  obtém-se trabalho máximo realizado pelo PZT.



**Figura 5.5:** Trabalho efetuado pelo PZT.

Os PZTs possuem tempo de resposta da ordem de microssegundos a milissegundos, sendo esse tempo de resposta um fator limitante para uma sintonização rápida. Esse tempo de resposta está fortemente relacionado à frequência de ressonância do PZT e à sua capacitância intrínseca. Geralmente PZTs de alta tensão (HVPZT) são mais rápidos que os de baixa tensão (LVPZT), porém são mais caros. Além disso, para uma mesma classe de PZTs, a capacitância intrínseca é diretamente proporcional ao deslocamento máximo.

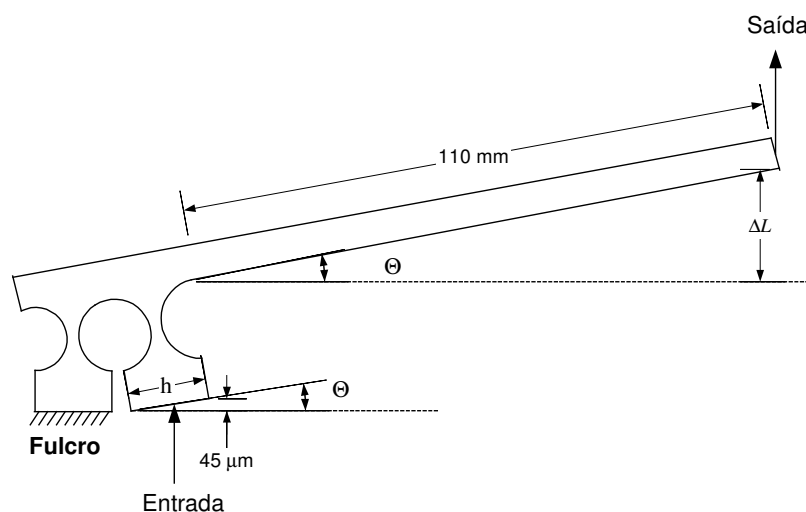
Neste trabalho o PZT atua sob carga variável (ver Figura 5.4). Foi utilizado um atuador PZT, construído pela Physik Instrumente, de baixa tensão ( $V_{\max} = 120$  volts), com constante de rigidez  $k_T = 19$  N/µm, capacitância de  $4,5$  µF, gerando um deslocamento de  $45$  µm a  $100$  volts com capacidade de força máxima  $F_{\max} = 1000$  N. Como o atuador é cerâmico, ele é montado em um encapsulamento de aço inoxidável com uma esfera em seu topo (como mostra a Figura 5.6) para atenuar componentes de forças laterais evitando possíveis danos. Além disso, entre o atuador e a esfera metálica há uma mola interna de pré-carga recomendada para aplicações dinâmicas. Tal mola apresenta uma constante de rigidez cujo valor é aproximadamente 10% da constante de rigidez do PZT.



**Figura 5.6:** Esquema do atuador.

#### 5.4 CONSIDERAÇÕES PARA O PROJETO DE UMA MOLA DE ENTALHE EM UM SINTONIZADOR DE FBG.

Para se obter uma deformação de 1% em um trecho de fibra (com a rede gravada) de 10 mm é necessário projetar um dispositivo que permita um deslocamento mínimo  $\Delta L = 100 \mu\text{m}$ . Como o atuador PZT fornece um deslocamento máximo em torno de  $45 \mu\text{m}$ , para obter deslocamentos maiores projetou-se uma mola de entalhe para trabalhar como uma alavanca linear de terceira classe, como mostra a Figura 5.7.



**Figura 5.7:** Mola de entalhe como alavanca de terceira classe.

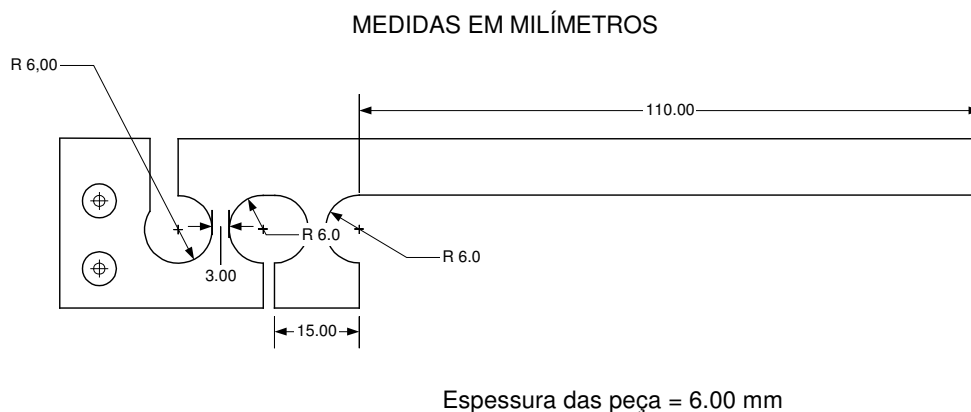
Esse dispositivo pode ser visto como um braço de alavanca apoiado por dois suportes, sendo um deles engastado funcionando como fulcro. O segundo suporte, livre, faz contato



com o atuador PZT. O atuador gera um deslocamento que será magnificado pelo braço de alavanca e transferido para a FBG fixada em sua extremidade. Escolheu-se arbitrariamente um comprimento de 110 mm para o braço de alavanca, medido a partir do centro do semicírculo do suporte livre. Com esses parâmetros, assumindo que o ponto de aplicação da força é a extremidade direita do suporte livre levando-se em conta o deslocamento máximo permitido pelo PZT, o ângulo máximo de inclinação da base do suporte livre terá um valor muito próximo do ângulo de rotação da dobradiça do suporte engastado, podendo ser escrito como (ver Figura 5.7)

$$\Theta = \arcsen\left(\frac{45 \times 10^{-6}}{h}\right). \quad (5.10)$$

A Figura 5.8 mostra as dimensões da mola de entalhe projetada. Para essas dimensões, aplicando (5.10) obtém-se um ângulo de rotação de  $3,2 \cdot 10^{-3}$  rad. Para esse ângulo o deslocamento na extremidade do braço de alavanca será  $\Delta L = 293 \mu\text{m}$  (ver Figura 5.7); como esse deslocamento é maior que  $100 \mu\text{m}$ , tais dimensões satisfazem essa especificação do projeto. As características do material escolhido devem garantir que o ângulo máximo de rotação da dobradiça engastada, obtida através da equação (5.5), seja maior do que o calculado por (5.3). Portanto, foi escolhido aço SAE/AISI 1045, com módulo de Young  $E = 210 \text{ GPa}$  e tensão de escoamento  $\sigma_{\text{max}} = 530 \text{ MPa}$ , resultando em  $\Theta_{\text{max}} = 9,9 \cdot 10^{-3}$  rad.



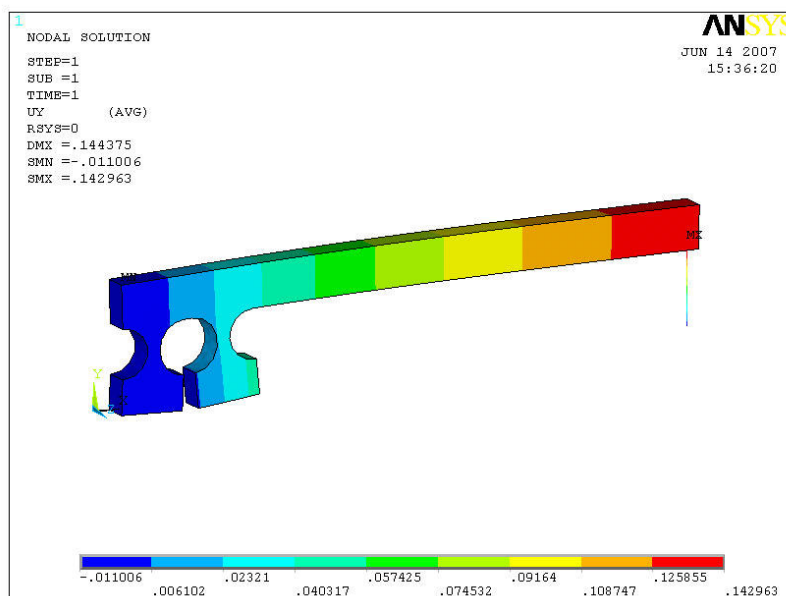
**Figura 5.8:** Dimensões da mola de entalhe.

Devido à alta rigidez da fibra, quando esta é fixada no braço ocorre uma deflexão no braço da alavanca diminuindo o deslocamento máximo na sua extremidade. Essa deflexão também é um fator importante na escolha do material e das dimensões para a fabricação da mola de entalhe. Analisando a Figura 3.6 observa-se que, para a aplicação de forças lentas, a

fibra pode ser modelada como uma mola. Assumindo a tração constante representada por  $P = F/S$ , onde  $F$  é a força de tração, a força restauradora será dada por  $F_r = -ESu/L = -ku$ , onde  $k = ES/L$  e  $u$  é o deslocamento.

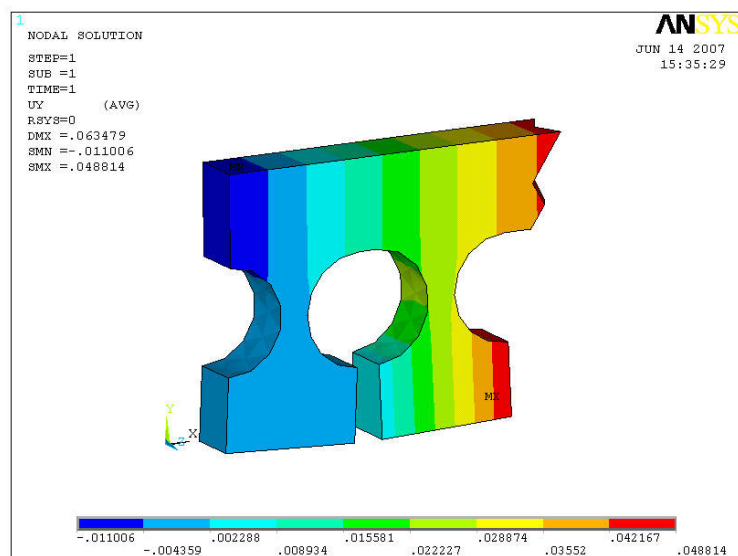
Foram feitas simulações usando o programa ANSYS para estimar o deslocamento máximo na ponta do braço de alavanca com a fibra óptica fixada; para isso, usando o módulo de Young e a área transversal de uma fibra monomodo padrão, a fibra foi modelada como uma mola com comprimento  $L = 10$  mm (fixada na face frontal do braço de alavanca a 5 mm de sua extremidade) e constante de rigidez  $k = 0,089$  N/ $\mu$ m, muito menor que a do atuador PZT.

A Figura 5.9 mostra os resultados simulando uma força de 100 N (10% da força de bloqueio do PZT) concentrada na extremidade direita do suporte livre. Nota-se que essa força gera um deslocamento  $\Delta L = 143$   $\mu$ m, ou seja, 43% maior que o desejado.



**Figura 5.9:** Simulação da mola de entalhe com a fibra colada a 5 mm da sua extremidade e uma força de 100 N aplicada na base do suporte livre.

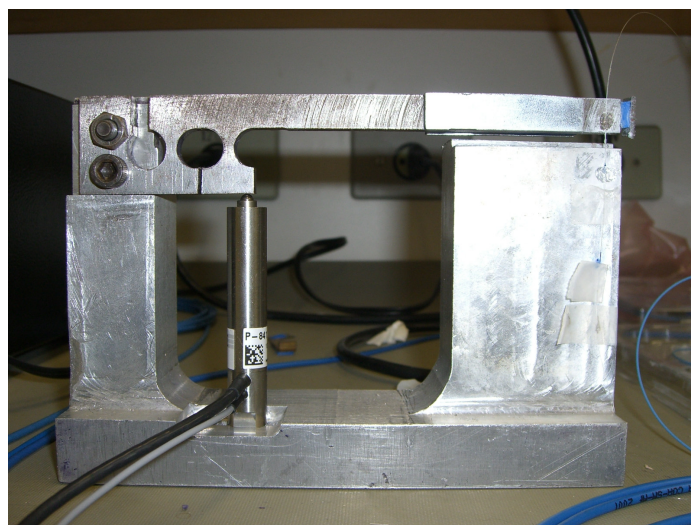
A Figura 5.10 mostra detalhes do suporte livre, indicando um deslocamento na sua extremidade direita de aproximadamente 49  $\mu$ m, pouco maior que o máximo fornecido pelo PZT a 100 volts. Sem a fibra a aplicação da força de 100 N resulta em  $\Delta L = 631$   $\mu$ m e um deslocamento de 190  $\mu$ m na extremidade do suporte livre, indicando que a fibra causa uma deflexão significativa no braço de alavanca, além de limitar o deslocamento no ponto de aplicação da força.



**Figura 5.10:** Detalhe da Figura 5.9. A barra inferior mostra a escala do deslocamento em milímetros.

Como o ponto de contato do PZT não será exatamente a extremidade do suporte livre, simulações foram feitas com a força de 100 N distribuída pela base do suporte e os resultados mostraram que as dimensões e o material escolhido satisfazem as especificações de projeto.

Para sustentar a alavanca foi fabricada uma base em alumínio para a montagem do sistema mola de entalhe-PZT como mostra a Figura 5.11. A torre esquerda contém dois pontos de fixação por parafusos para a mola de entalhe. A face frontal da torre direita está no mesmo nível da face frontal da mola de entalhe. A fibra é fixada com cola à base de éster de cianoacrilato a 5 mm da extremidade do braço e da torre direita.

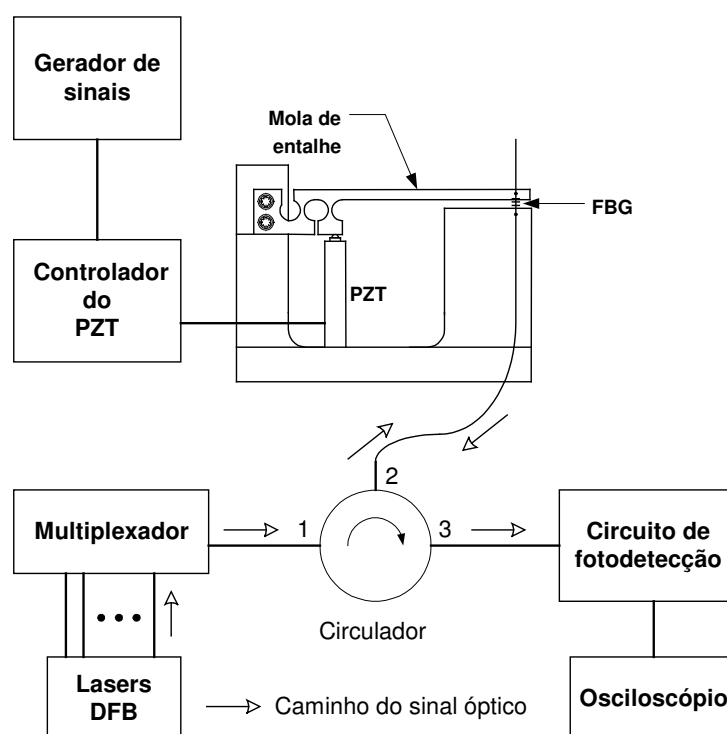


**Figura 5.11:** O sintonizador montado.

Depois de montado o dispositivo, o deslocamento na extremidade do braço de alavanca foi medido com um comparador, resultando em  $350\mu\text{m}$  sem a fibra e  $120\mu\text{m}$  com um trecho de fibra fixado de  $10\text{mm}$ . Esses valores são menores que os simulados ( $631\mu\text{m}$  e  $143\mu\text{m}$ , respectivamente); essa diferença é devido ao fato do ponto de aplicação do PZT não ser exatamente na extremidade do suporte livre, além de possíveis erros de fabricação e do deslocamento máximo fornecido pelo PZT de  $45\mu\text{m}$ .

### 5.5 O APARATO EXPERIMENTAL.

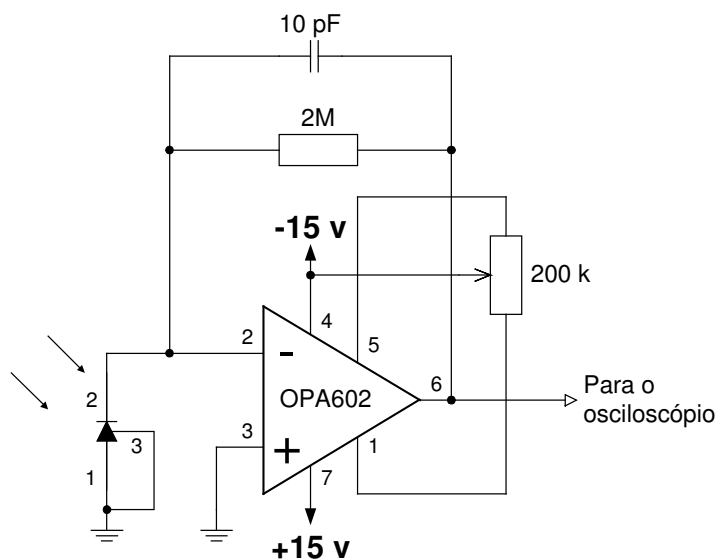
Os experimentos para estimar a velocidade de sintonização foram realizados usando o aparato mostrado na Figura 5.12. O parâmetro a ser encontrado é o tempo decorrido para a sintonização entre dois comprimentos de onda discretos e estabilizados, fornecidos por um banco de lasers DFBs (*Distributed Feedback Lasers*). Dividindo o deslocamento do comprimento de onda de Bragg por esse tempo obtém-se a velocidade de sintonização.



**Figura 5.12:** Aparato usado no experimento.

Foram utilizados um gerador de sinal com uma faixa de frequência de 2 MHz (modelo MFG-4201, fabricado pela Minipa), um circulador óptico de três portas, um multiplexador óptico 8x1, um osciloscópio de 1GS/s, além dos seguintes equipamentos:

- Controlador do PZT - Modelo E-610, fabricado e calibrado pelo mesmo fabricante do atuador PZT, consistindo basicamente em um amplificador de ganho 10 e filtros internos para limitar o tempo de subida do sinal entregue ao atuador e rejeitar frequências de ressonâncias que podem danificar o atuador, além de proteções contra sobre-tensão.
- Circuito de fotodetecção – Composto por um fotodetector e apenas um estágio de amplificação, como mostra a Figura 5.13, para introduzir o mínimo de atrasos na resposta. Nesse circuito foi usado um amplificador operacional de alta velocidade OPA602.



**Figura 5.13:** Circuito de fotodetecção.

- Lasers DFB – Devido à indisponibilidade de um laser sintonizável, optou-se por utilizar comprimentos de onda discretos como referência, espaçados por aproximadamente 1,6 nm (200 GHz), para a sintonização. Essas referências foram obtidas através de oito lasers DFBs, cujos comprimentos de onda são mostrados na Tabela 5.2. Tais comprimentos de onda são usados em sistemas WDM, padronizados pela ITU-T (*International Telecommunication Union – Standardization sector*) através da norma G.692, e correspondem aos canais ímpares do intervalo 23 a 37 da banda C.

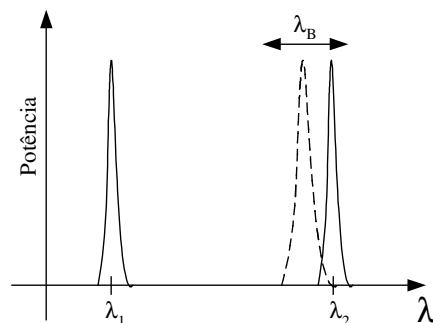
Tabela 5.2. Comprimento de onda dos lasers DFBs.

<b>Lasers</b>	<b>Comprimento de onda (nm)</b>	<b>Canal ITU (Banda C)</b>
C1	1547,72	37
C2	1549,32	35
C3	1550,92	33
C4	1552,52	31
C5	1554,13	29
C6	1555,75	27
C7	1557,36	25
C8	1558,98	23

### 5.5.1 Funcionamento do sistema.

Para simular uma função degrau aplica-se na entrada do controlador do PZT uma onda quadrada, através do gerador de sinal, com frequência menor que 0,3 Hz. Como o gerador de sinal não tem capacidade para oferecer 120 volts ao atuador PZT, a onda quadrada é amplificada e aplicada na entrada do PZT pelo controlador. Por sua vez, o PZT aciona a mola de entalhe causando uma deformação na FBG proporcional à tensão de pico da onda quadrada.

Apenas dois lasers são ligados por vez criando um ponto de referência de partida e um de chegada. Os sinais dos dois lasers são multiplexados, aplicados à porta 1 do circulador (ver Figura 5.12) e direcionados para a FBG pela porta 2. À medida que a FBG se deforma, seu comprimento de onda de Bragg se aproxima de um dos comprimentos de onda fixos dos lasers, como mostra a Figura 5.14; entre os dois comprimentos de onda dos lasers a potência refletida pela FBG será próxima de zero, porém, quando a deformação da FBG resultar em um comprimento de onda de Bragg que case com um dos comprimentos de onda dos lasers a potência refletida será máxima, retornará para a porta 2 do circulador e será transferida para o circuito de fotodeteção pela porta 3. O circuito de fotodeteção transformará a potência óptica recebida em um sinal elétrico que será entregue ao osciloscópio. Calibrando a tensão da onda quadrada para que haja o casamento do comprimento de onda de Bragg com os dois comprimentos de onda dos lasers, na subida e na descida do braço de alavanca, é possível a observação do tempo de sintonização já que a frequência da onda quadrada é baixa o suficiente para permitir a estabilização mecânica do braço de alavanca.

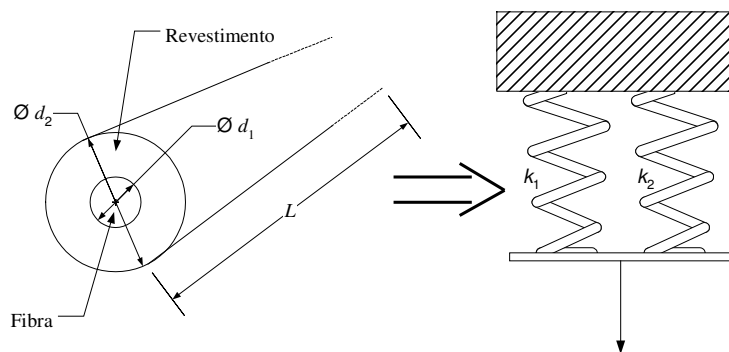


**Figura 5.14:** Comprimento de onda de Bragg variável controlado pela deformação. Quando há casamento entre o comprimento de onda de Bragg e um dos comprimentos de onda dos lasers a potência refletida é máxima.

### 5.5.2 Características da FBG utilizada.

Devido ao método de fabricação, as redes de Bragg fabricadas usando o interferômetro existente no laboratório LASER da UTFPR não apresentam uma grande resistência à tração, ocorrendo sua ruptura com uma deformação de apenas 0,4 %. Por isso foi usado nos experimentos um tipo especial de FBG denominada DTG (*Draw Tower Grating*) que suporta cargas maiores que 50 N, o suficiente para causar uma deformação de 5%. Tal DTG é formada por um núcleo de sílica com 6  $\mu\text{m}$  de diâmetro, uma casca com diâmetro externo de 125  $\mu\text{m}$  de diâmetro e é revestida com uma camada de ORMOCER (*Organic Ceramic*) totalizando 187  $\mu\text{m}$  de diâmetro externo. O ORMOCER apresenta um módulo de Young de 1 GPa e densidade 1200  $\text{kg}/\text{m}^3$ .

O revestimento de uma fibra óptica altera significativamente as características físicas do conjunto; dessa forma, uma fibra revestida de comprimento  $L$  pode ser modelada como um sistema de molas em paralelo como mostra a Figura 5.15.



**Figura 5.15:** Modelo equivalente da fibra revestida.

Calculando as constantes de rigidez individuais, as características físicas do conjunto são obtidas através da constante de rigidez equivalente. Obtém-se então

$$k_{eq} = k_1 + k_2 = \frac{1}{L}(E_1 S_1 + E_2 S_2), \quad (5.11)$$

sendo o índice 1 referente à fibra e o índice 2 referente ao material de revestimento.

Supondo o conjunto fibra-revestimento uma barra homogênea e assumindo a constante de rigidez dessa barra igual à (5.11),  $k_{eq} = k_{barra} = \frac{1}{L}(S_1 + S_2)E$ , obtém-se

$$E = E_1 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 + E_2 \left[ 1 - \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \right], \quad (5.12)$$

sendo  $d_1$  e  $d_2$  o diâmetro da fibra e do revestimento respectivamente.

De forma análoga, a densidade do conjunto é encontrada igualando  $m_{eq} = L(\rho_1 S_1 + \rho_2 S_2)$  à  $m_{barra} = L\rho(S_1 + S_2)$ , resultando em

$$\rho = \rho_1 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 + \rho_2 \left[ 1 - \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \right]. \quad (5.13)$$

Obtém-se resultados aceitáveis usando a constante de Young (5.12) e a densidade (5.13) nos cálculos envolvendo fibras revestidas (BEADLE e WEIS, 1998).

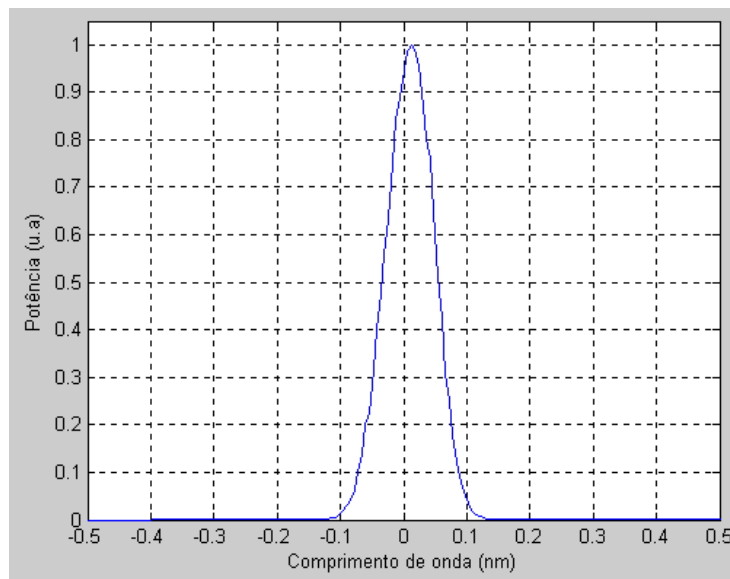
Aplicando (5.11) a (5.13) em uma DTG revestida com ORMOCER com comprimento  $L = 10$  mm, resulta em um  $k_{eq} = 0,131$  N/ $\mu$ m,  $E = 33$  GPa e  $\rho = 1309$  kg/m<sup>3</sup>. Nota-se que, apesar do módulo de Young ser menor que o de uma fibra sem revestimento, a constante de rigidez é maior; isso significa que será necessária uma força de 13,1 N para obter uma deformação de 1%.

Além disso, a DTG utilizada apresenta, em repouso, um comprimento  $L_r = 8$  mm, um comprimento de onda central de 1547,05 nm, FWHM de 100 pm, refletividade de 15,2% e sensibilidade de 1,2 pm/ $\mu$ E a um comprimento de onda de 1550 nm.

A Figura 5.16 mostra o espectro refletido da rede medido por um analisador de espectro óptico com uma resolução de 0,06 nm. A largura de banda do laser DFB é menor que 30 MHz; isso significa uma FWHM muito menor que a da rede de Bragg e abaixo da resolução do analisador de espectro óptico. Levando em conta a sensibilidade da rede à deformação (1,2 pm/ $\mu$ E) e assumindo uma FWHM infinitesimal para os lasers em relação à FWHM da rede de Bragg, é possível estimar que, se a rede de Bragg e o laser DFB estiverem casados, um deslocamento do comprimento de onda de 50 pm (metade da FWHM da rede de Bragg) ocasionará uma queda de 3 dB na potência refletida. Esse deslocamento de



comprimento de onda corresponde a uma deformação de apenas  $60 \mu\epsilon$  (equivalente a 0,006%), o que indica uma boa precisão nas medidas de tempo obtidas pelo sistema.



**Figura 5.16:** Espectro refletido da rede.

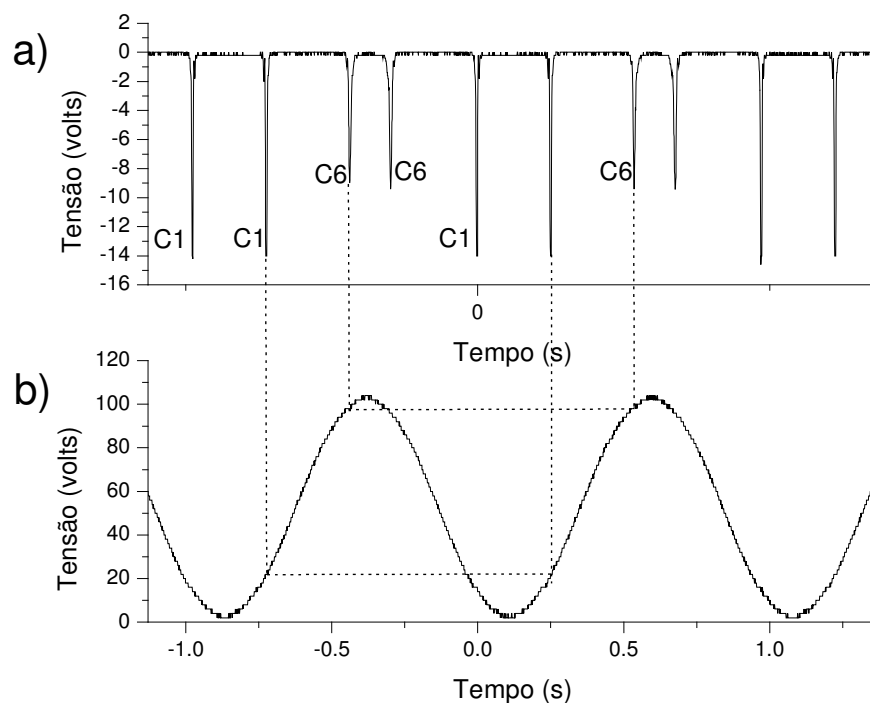
## 5.6 COMPORTAMENTO DO SINTONIZADOR SUBMETIDO A UMA CARGA LENTA.

Apesar de ser capaz de atingir o comprimento de onda do laser C8 (1558,98 nm), depois de algumas centenas de ciclos a cola utilizada não suporta a tensão aplicada perdendo a aderência na fibra. Um problema semelhante foi relatado por (ROCHA, BORIN, MONTEIRO *et al*, 2005), onde foram testados três tipos de cola epoxy sem resultados satisfatórios; a solução encontrada por aqueles autores foi a metalização de dois pontos da FBG soldando-a, posteriormente, em uma superfície metálica. Portanto, por conveniência, todos os experimentos foram realizados usando C6 (1555,75 nm) como último ponto de referência e um comprimento de fibra  $L = 12$  mm, ressaltando que o comprimento da rede é  $L_r = 8$  mm. Para esses valores, o sistema se mostrou repetitivo durante todo o tempo de ensaio.

A fim de investigar a repetitibilidade do sistema e encontrar experimentalmente a primeira frequência de ressonância foi aplicado ao PZT um sinal senoidal de baixa frequência. Para cargas lentas o movimento da mola de entalhe mostrou-se diretamente em concordância com o sinal aplicado ao PZT. A Figura 5.17 mostra a repetitibilidade do sistema, através das linhas pontilhadas, para um sinal com frequência  $f = 1$  Hz aplicado ao PZT. Observa-se na Figura 5.17-a o sinal de tensão na saída do circuito de fotodeteção e na Figura 5.17-b o sinal de tensão na entrada do PZT.

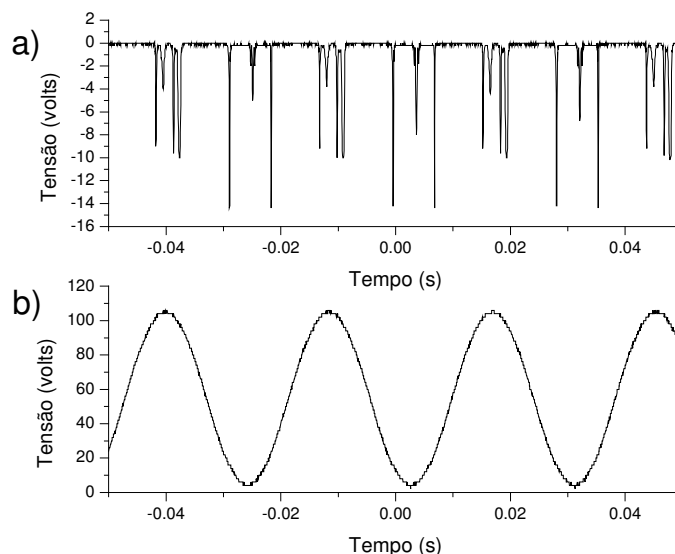
Para diferenciar os lasers na visualização pelo osciloscópio, o laser C6 foi ajustado para fornecer um nível de potência 1dB menor que C1; pelas características do circuito de fotodeteção quanto maior for a potência refletida pela FBG mais negativa será a tensão resultante.

Como o comprimento de onda de Bragg da rede em repouso é menor que o do laser C1, quando a tensão de entrada do atuador é nula nenhum laser está sintonizado e a tensão de saída do circuito de fotodeteção também é nula. Para uma tensão de entrada no PZT de 22 volts o laser C1 é sintonizado e ocorre um pico de tensão de -14 volts na saída do circuito de fotodeteção. À medida que a tensão muda de acordo com a forma de onda, ocorre a região de tensão nula na Figura 5.17-a, onde nenhum comprimento de onda é sintonizado. Quando a tensão no PZT alcança 98 volts o laser C6 é sintonizado ocorrendo um pico de tensão de -9 volts no fotodetector. No valor máximo de tensão, 104 volts, o comprimento de onda de Bragg da rede ultrapassou o do laser C6 ocasionando novamente uma região de tensão nula; a partir desse ponto quando a tensão no PZT diminui passa novamente por 98 volts sintonizando C6 e continuando o ciclo.



**Figura 5.17:** a) Tensão na saída do circuito de fotodeteção. b) Tensão na entrada do atuador PZT para uma frequência  $f = 1$  Hz.

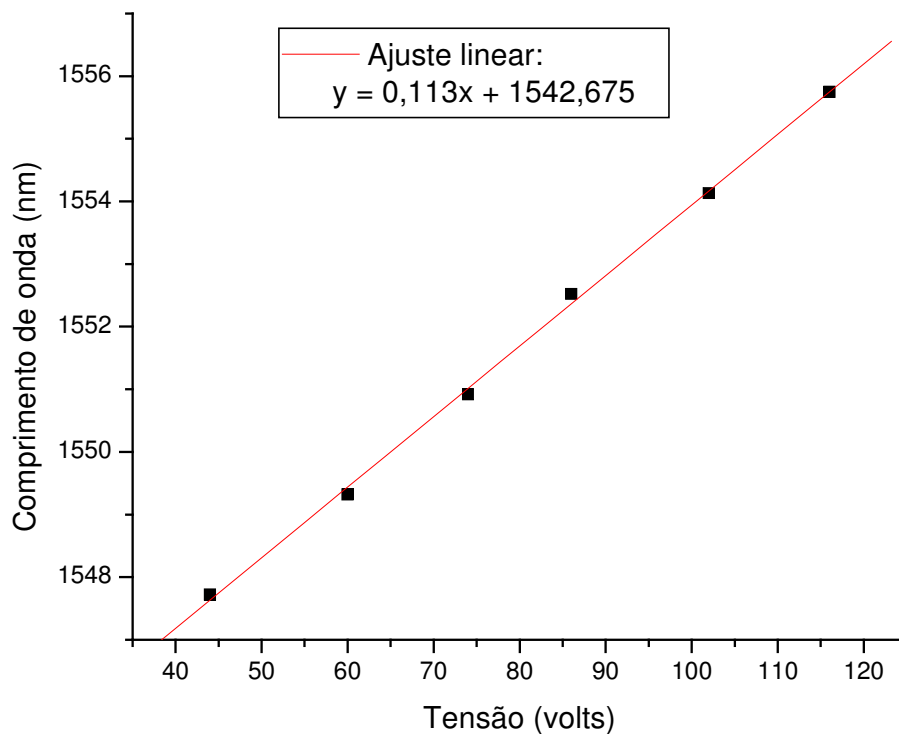
A Figura 5.18 mostra a mesma situação, porém, com uma frequência  $f = 35$  Hz. A partir dessa frequência observa-se picos espúrios de tensão negativa devido às vibrações do braço de alavanca. Essas vibrações se mostraram o principal limitante no tempo de sintonização do dispositivo. Com uma frequência  $f = 40$  Hz o sistema entra em ressonância.



**Figura 5.18:** a) Tensão na saída do circuito de fotodeteção. b) Tensão na entrada do atuador PZT para uma frequência  $f = 35$  Hz.

Os experimentos cujos resultados foram mostrados pelas Figuras 5.17 e 5.18 foram realizados com um trecho de fibra fixado de 10mm.

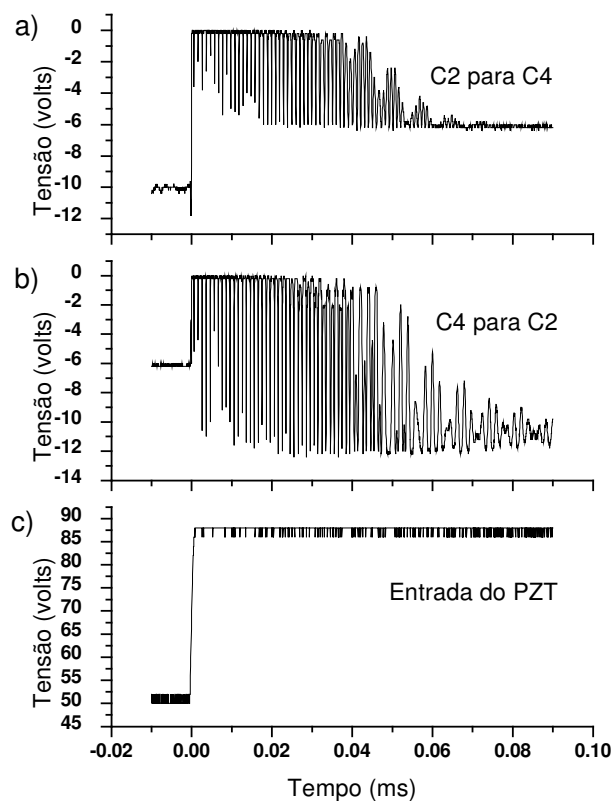
A Figura 5.19 mostra o comprimento de onda sintonizado em função da tensão de entrada do PZT para um trecho de fibra fixado de 12 mm, indicando uma linearidade no comportamento do dispositivo apesar da deflexão no braço de alavanca causada pela alta rigidez da fibra. Percebe-se que, nesse caso, é necessária uma tensão de 116 volts para sintonizar C6, maior que 98 volts dos experimentos anteriores, já que para um mesmo deslocamento obtém-se uma deformação menor devido ao maior comprimento fixado da fibra. Obviamente para cada tipo de fibra e para cada fixação da fibra no braço de alavanca a inclinação dessa curva será modificada já que o comprimento fixado será diferente, bem como a pré-carga na fibra depois da fixação. Mesmo usando diferentes comprimentos de fibra na fixação a relação comprimento de onda sintonizado versus tensão de entrada do PZT continuou linear em todos os experimentos realizados neste trabalho.



**Figura 5.19:** a) Comprimento de onda sintonizado em função da tensão na entrada do atuador PZT para um trecho de fibra fixado de 12 mm.

### 5.7 SINTONIZADOR SUBMETIDO A UMA CARGA DEGRAU.

Apesar do tempo de subida da onda quadrada, fornecida pelo gerador de sinais, ser da ordem de microssegundos para uma tensão de 0 a 100 volts, o sinal entregue ao atuador PZT pelo controlador apresenta um tempo de subida mínimo de 3 ms devido aos seus filtros internos já citados anteriormente (todos os tempos de subida nesse trabalho foram medidos considerando-se um intervalo de tensão de 0 a 100 volts na entrada do PZT). Para esse tempo de subida o sintonizador apresenta vibrações em níveis indesejáveis para todos os intervalos de sintonização. A Figura 5.20 mostra o comportamento do sintonizador para a sintonização de C2 para C4, e vice-versa.

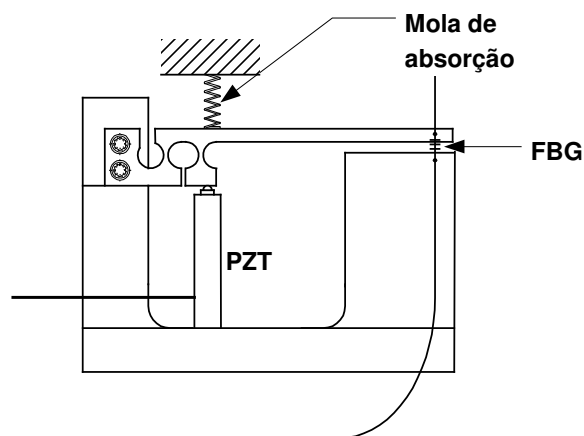


**Figura 5.20:** Sintonização com sinal degrau com tempo de subida de 3 ms - a) De C2 para C4. b) De C4 para C2. c) Tensão de entrada do atuador PZT.

Observa-se que o tempo de duração das vibrações, maior que 60 ms, é muito maior que o tempo de sintonização. Para diminuir a duração das vibrações foram usadas algumas técnicas de amortecimento detalhadas nas próximas seções.

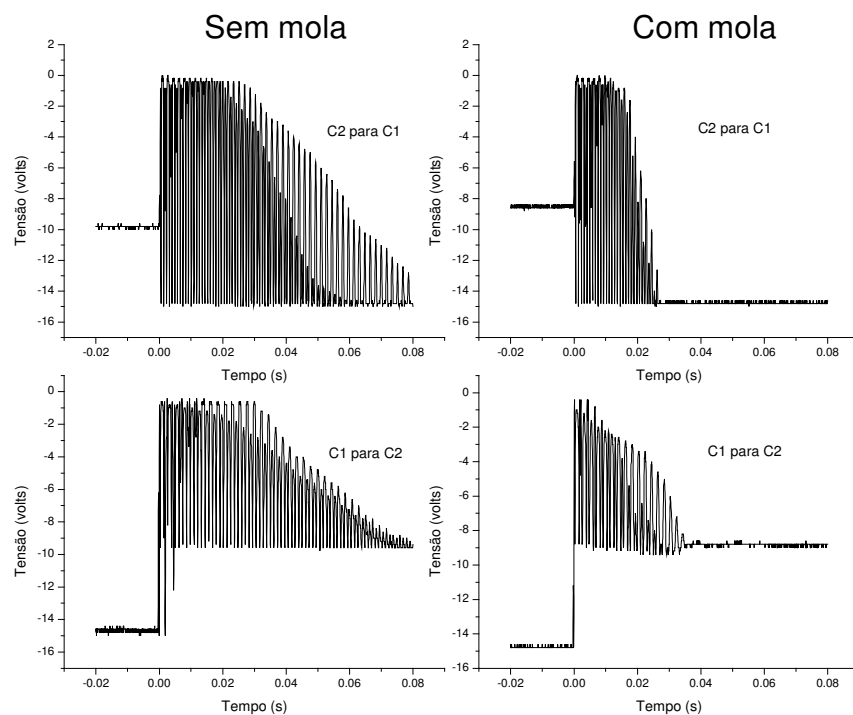
### 5.8 AMORTECIMENTO POR MOLAS DE ABSORÇÃO.

Uma mola com constante de rigidez  $k = 150 \text{ N/m}$  foi posicionada no topo da mola de entalhe, como mostra a Figura 5.21, absorvendo parte da energia do dispositivo e diminuindo o tempo de estabilização do braço de alavanca. A melhor posição para a mola foi encontrada empiricamente tendo como referência a sintonização dos lasers C1 - C2.



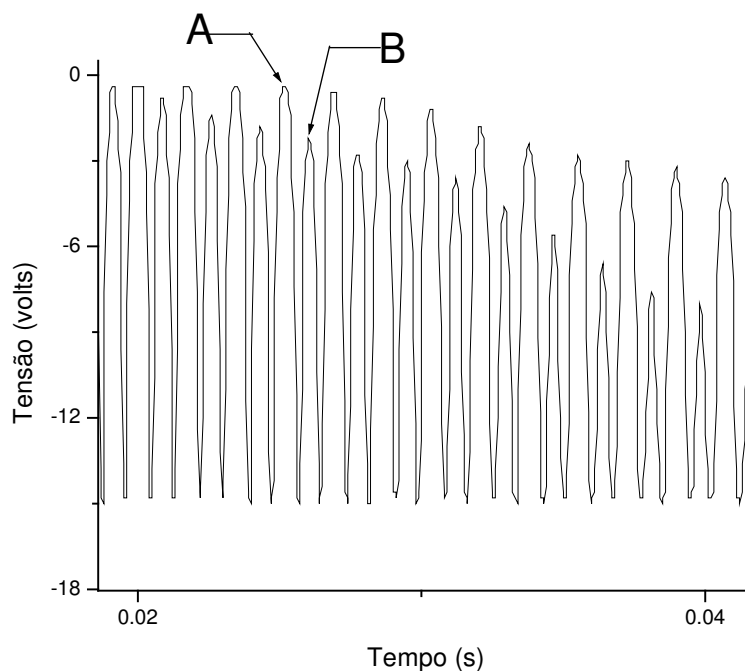
**Figura 5.21:** Sistema amortecido por mola.

A Figura 5.22 mostra a sintonização dos lasers C1 - C2 com a presença e a ausência da mola de absorção. Observa-se que há uma diminuição do tempo de sintonização, porém, a mola limitou o deslocamento máximo do braço de tal forma que o último comprimento de onda alcançado foi o do laser C5. Além disso, essa técnica não mostrou a mesma eficiência na sintonização dos demais canais em termos de tempo de sintonização, pois o posicionamento ótimo da mola não é o mesmo para os demais intervalos de sintonização.



**Figura 5.22:** Sintonização dos lasers C1 – C2 com e sem mola de absorção.

Observando em detalhes a sintonização de C2 para C1 sem mola, mostrado na Figura 5.23, distingue-se durante um determinado intervalo dois níveis intercalados de tensão decaindo com o tempo. O nível A significa menor potência filtrada enquanto o nível B significa maior potência filtrada.

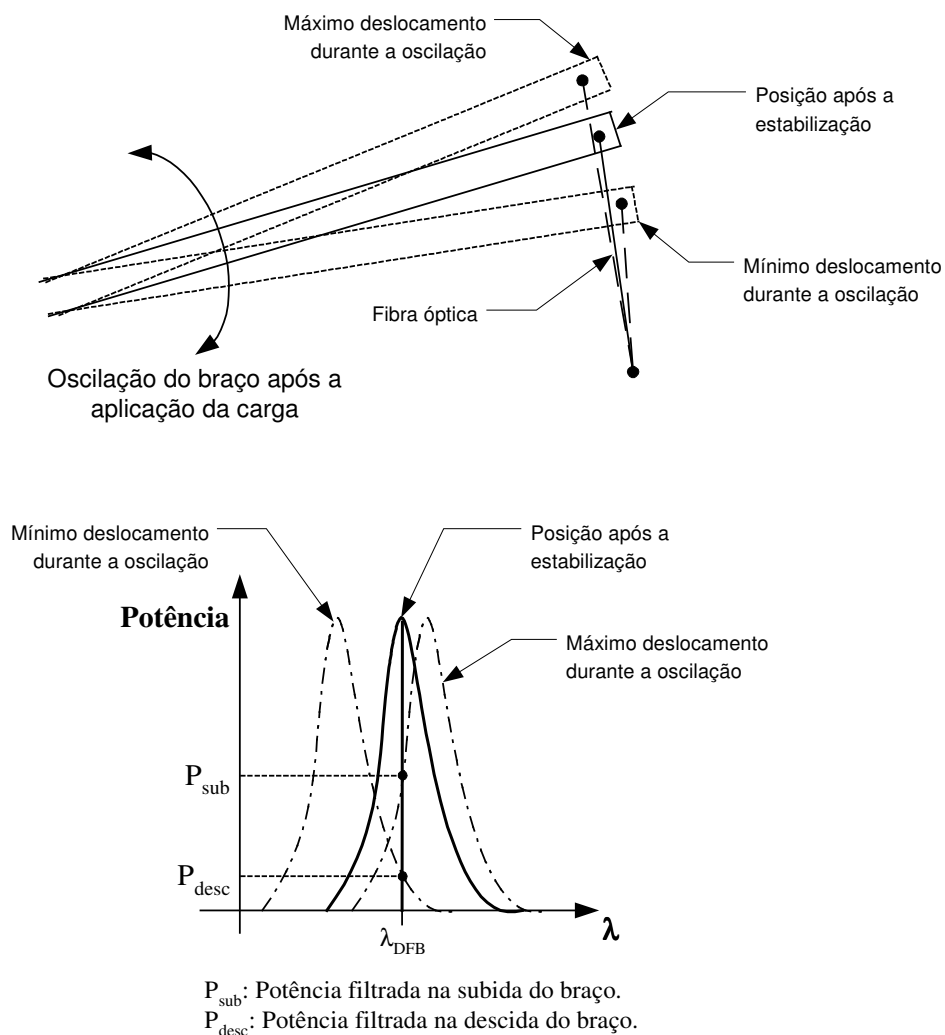


**Figura 5.23:** Detalhe da sintonização de C2 para C1 sem mola.

Isso acontece porque, após a aplicação da carga pelo PZT, o deslocamento da extremidade do braço de alavanca durante a oscilação não é simétrico em relação à posição de estabilização. Como a força restauradora da fibra óptica é proporcional à sua deformação, assumindo que após a estabilização ocorrerá o casamento entre comprimento de onda de Bragg e o do laser DFB, na descida do braço o módulo do deslocamento do comprimento de Bragg é maior do que na subida, tomando como referência o comprimento de onda do laser DFB.

A Figura 5.24 mostra esquematicamente como os níveis de potência filtrada pela rede são distintos acompanhando o movimento do braço de alavanca durante a oscilação.

Esse mesmo fenômeno ocorre quando a mola é usada como absorvedora de energia e também quando são utilizadas outras técnicas de amortecimento, como será visto adiante.

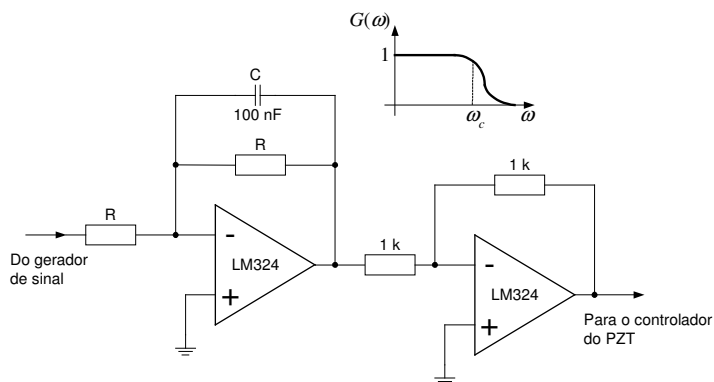


**Figura 5.24:** Deslocamento assimétrico do braço em relação à posição de estabilização causando a filtragem de níveis distintos de potência.

### 5.9 MODIFICAÇÃO DO SINAL POR FILTRO ELETRÔNICO.

Como foi visto na seção 5.4, as vibrações do braço de alavanca estão diretamente relacionadas com o sinal de entrada do PZT. Dessa forma, para modificar a onda quadrada entregue ao PZT foi projetado um filtro eletrônico, esquematizado na Figura 5.25, que foi inserido entre o gerador de sinal e o controlador do PZT (ver Figura 5.12) a fim de rejeitar frequências maiores que 35 Hz.





**Figura 5.25:** Filtro passa-baixas de primeira ordem.

Esse é um filtro passa-baixas de primeira ordem, com ganho de unitário e, assumindo  $C = 100 \text{ nF}$ , uma frequência de corte dada por

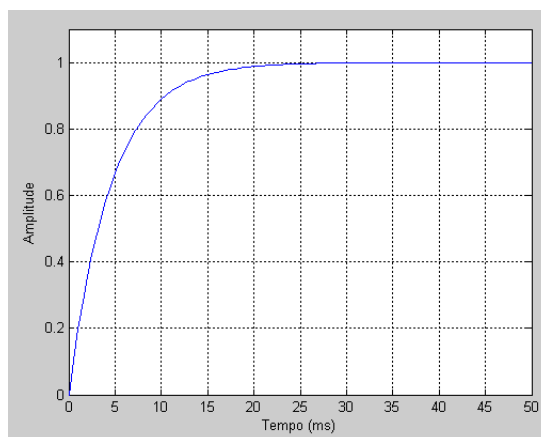
$$CR = \frac{1}{\omega_c} \quad \therefore \quad f_c = \frac{10^7}{2\pi R} \quad (5.14)$$

Variando os resistores  $R$  é possível variar a frequência de corte e, conseqüentemente, o tempo de subida da onda quadrada. A função de transferência desse filtro é dada por

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \quad (5.15)$$

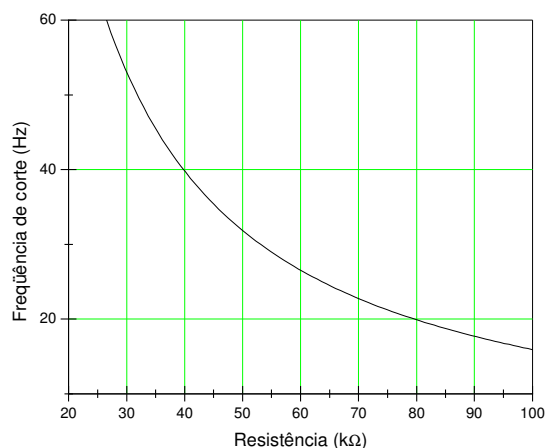
A Figura 5.26 mostra a resposta ao degrau para uma frequência de corte  $f_c = 35 \text{ Hz}$  ( $\omega_c = 220 \text{ rad/s}$ ). Essa escolha foi feita por ser a menor frequência capaz de causar oscilações espúrias no braço de alavanca, como foi mostrado na seção 5.6.

Se esse sinal for aplicado ao sintonizador o tempo de estabilização do braço de alavanca será maior que 20 ms.



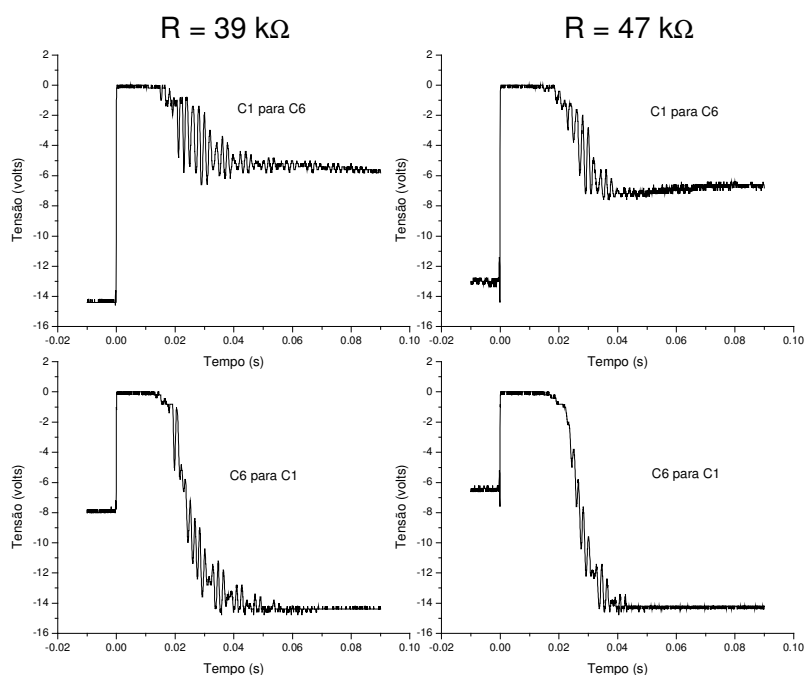
**Figura 5.26:** Resposta ao degrau de um filtro eletrônico passa-baixas de primeira ordem, de ganho unitário e frequência de corte  $f_c = 35 \text{ Hz}$ .

A Figura 5.27 mostra a relação entre os resistores  $R$  e a frequência de corte  $f_c$ , indicando que o resistor deve ser maior que  $45 \text{ k}\Omega$  para a obtenção de uma banda passante menor que  $35 \text{ Hz}$ .



**Figura 5.27:** Relação resistência versus frequência de corte.

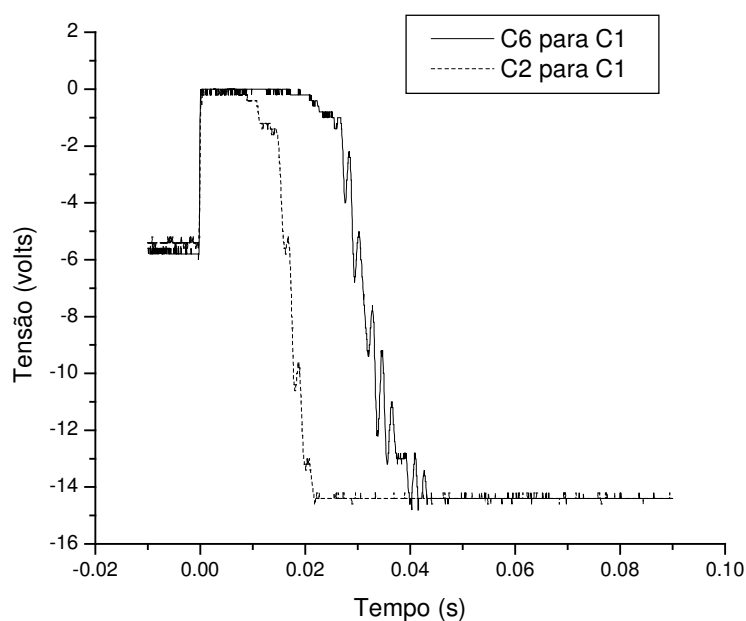
A Figura 5.28 mostra a sintonização dos lasers C1 - C6 usando resistores  $R = 39 \text{ k}\Omega$  e  $R = 47 \text{ k}\Omega$ . Observa-se que o tempo de estabilização é maior que  $20 \text{ ms}$  como o previsto; apesar do tempo de subida e descida do braço de alavanca ser menor para  $R = 39 \text{ k}\Omega$ , o tempo de sintonização é ligeiramente menor para  $R = 47 \text{ k}\Omega$  devido à diminuição das oscilações.



**Figura 5.28:** Sintonização dos lasers C1 - C6 usando resistores de  $39 \text{ k}\Omega$  e  $47 \text{ k}\Omega$ .

O melhor valor encontrado para os resistores levando em conta o tempo de sintonização entre todos os canais foi  $R = 56 \text{ k}\Omega$ . A maior velocidade de sintonização encontrada foi de aproximadamente  $0,2 \text{ nm/ms}$  e o maior tempo de estabilização do braço de alavanca foi de aproximadamente  $40 \text{ ms}$ . A Figura 5.29 mostra a sintonização entre os canais C6 para C1 e C2 para C1, respectivamente a maior e o menor velocidade de sintonização obtida.

Experimentos realizados fixando um comprimento de fibra  $L = 10 \text{ mm}$  permitiram atingir o comprimento de onda do laser C8 ( $1558,98 \text{ nm}$ ). O tempo de sintonização de C1 para C8, um intervalo de comprimento de onda de  $11,26 \text{ nm}$ , também foi aproximadamente de  $40 \text{ ms}$ , indicando que o tempo de sintonização e as vibrações apresentam uma forte relação com o deslocamento do braço de alavanca. O máximo comprimento de onda atingido com  $L = 10 \text{ mm}$  foi  $1560,02 \text{ nm}$  aplicando a tensão máxima permitida para o PZT ( $120 \text{ volts}$ ), o que indica uma velocidade de sintonização de aproximadamente  $0,3 \text{ nm/ms}$ . Porém, como já dito anteriormente, depois de algumas centenas de ciclos a cola perde sua aderência na fibra, inviabilizando a operação do dispositivo.



**Figura 5.29:** Sintonização dos lasers C6 para C1 e C2 para C1 usando resistores  $R = 56 \text{ k}\Omega$ .

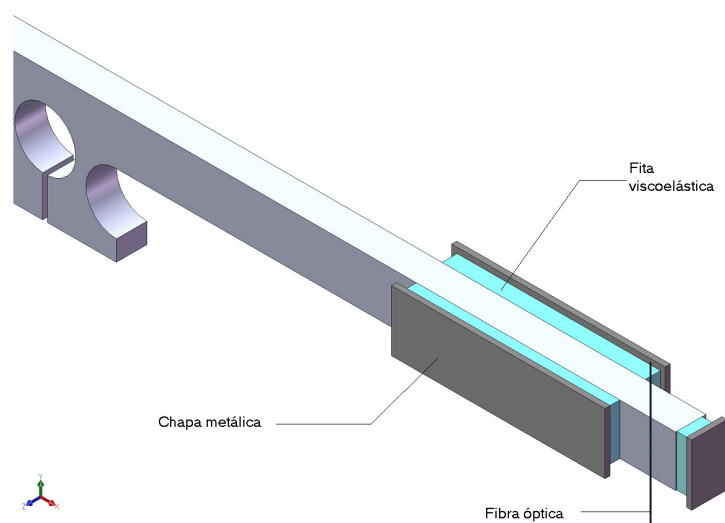
A Tabela 5.3 mostra os valores encontrados para o tempo e a velocidade de sintonização entre os canais usando resistores de  $56 \text{ k}\Omega$ .

Tabela 5.3. Velocidade de sintonização entre os canais usando resistores de 56 k $\Omega$ .

Canais	Tempo de sintonização (ms)	Velocidade de sintonização (nm/ms)
C1-C2	22	0,072
C2-C1	21	0,076
C1-C6	44	0,183
C6-C1	42	0,191
C2-C4	36	0,089
C4-C2	33	0,096
C4-C6	34	0,094
C6-C4	32	0,100

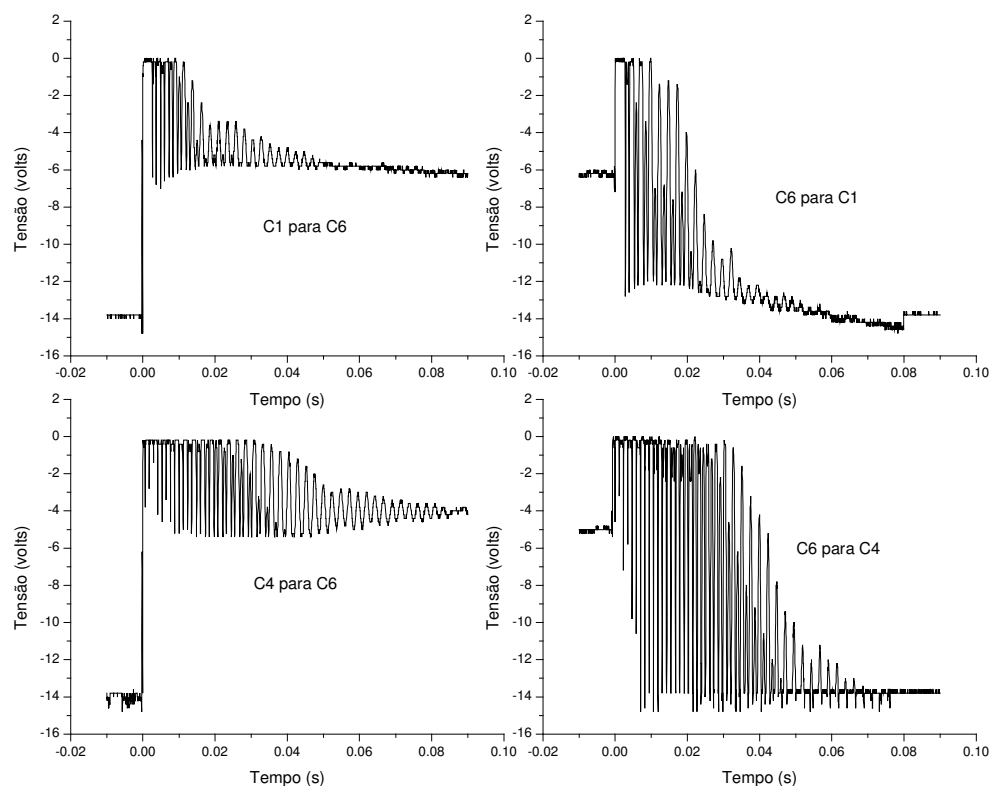
### 5.10 LIGAÇÃO VISCOELÁSTICA.

Nesse trabalho a técnica da ligação viscoelástica consiste em fixar à mola de entalhe um material viscoelástico entre as faces da alavanca e uma chapa metálica como mostra a Figura 5.30. O amortecimento ocorre devido às propriedades do material viscoelástico e à inércia das massas adicionadas ao sistema, com a vantagem de não limitar o deslocamento máximo do braço de alavanca, ao contrário da mola de absorção, já que o material adicionado acompanha o movimento sem nenhum tipo de atrito. Essa técnica geralmente é empregada para amortecimentos dinâmicos.



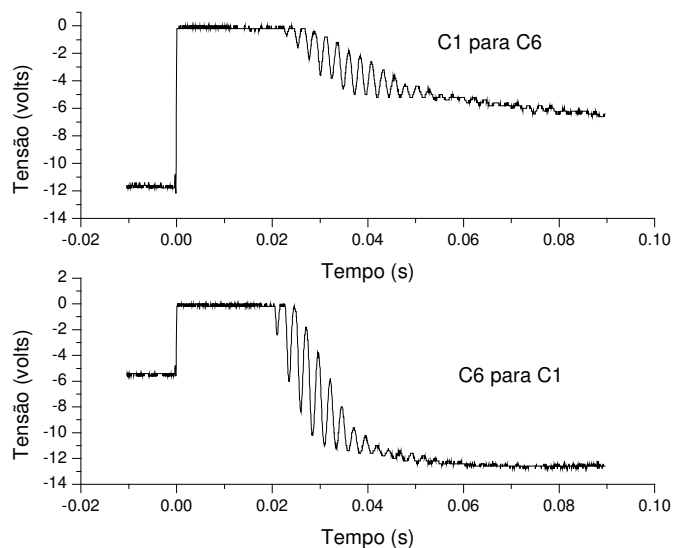
**Figura 5.30:** Ligação viscoelástica aplicada na mola de entalhe.

A fita viscoelástica utilizada foi a ISODAMP C-1002 (shore A durometer 56). O amortecimento causado pela ligação viscoelástica é proporcional à velocidade do corpo em movimento, por isso essa técnica se mostrou mais eficiente para grandes deslocamentos. Nota-se, observando a Figura 5.31, que o tempo de sintonização é menor na sintonização dos lasers C1 - C6; mesmo com um intervalo de frequência maior, esse tempo foi menor que o da sintonização dos lasers C4 - C6.



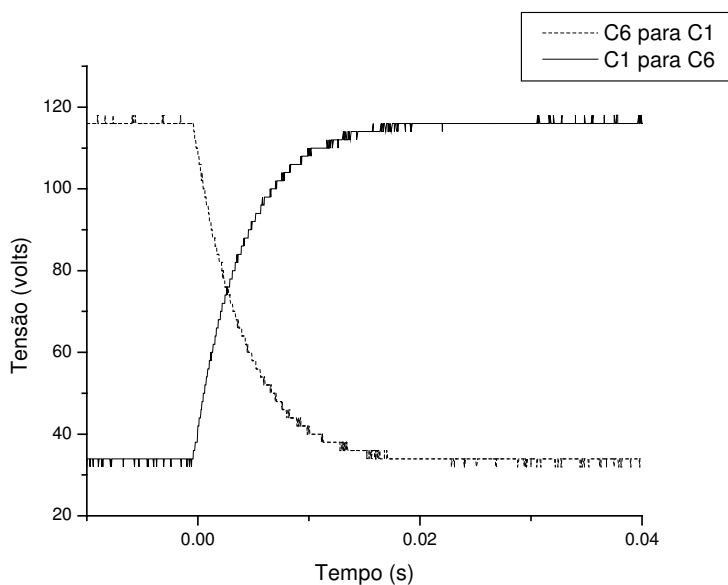
**Figura 5.31:** Sintonização dos lasers C1 - C6 e C4 - C6 com amortecimento causado pela ligação viscoelástica.

A associação entre o filtro eletrônico e a ligação viscoelástica também não se mostrou melhor. Observou-se que o efeito do filtro eletrônico é dominante tanto para grandes quanto para pequenos deslocamentos do comprimento de onda de Bragg. A Figura 5.32 mostra a sintonização dos lasers C1-C6 usando resistores  $R = 47 \text{ k}\Omega$ . Nota-se que o período das vibrações aumenta, mas as amplitudes não são atenuadas e não ocorre uma diminuição significativa do tempo de sintonização.



**Figura 5.32:** Sintonização dos lasers C1 - C6 para a ligação viscoelástica associada ao filtro eletrônico.

Isso acontece porque, tanto na subida quanto na descida, a onda quadrada é mais suave perto da tensão final, o que faz o braço de alavanca ter velocidade menor perto do fim do seu percurso. A subida e a descida da onda quadrada aplicada ao PZT são mostradas pela Figura 5.33 para o filtro com o resistor  $R = 47 \text{ k}\Omega$



**Figura 5.33:** Subida e descida da onda quadrada aplicada ao PZT na sintonização dos lasers C1 - C6.

Como as oscilações começam quando a frequência se aproxima da ressonância, em 40 Hz, uma das soluções para diminuir o tempo de sintonização seria o uso de neutralizadores viscoelásticos (BAVASTRI, 1997). Com essa técnica seria possível reduzir o ganho significativamente nessa frequência permitindo, inclusive, o uso de atuadores PZTs mais rápidos. Porém, essa técnica exigiria um estudo mais detalhado do dispositivo para otimizar a atuação do neutralizador.

## CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

### CONCLUSÃO

Devido às limitações físicas das FBGs convencionais, não é possível um grande intervalo de sintonização apenas através da tração. Somente realizando a compressão consegue-se intervalos maiores que 12 nm.

Pelas equações da elastodinâmica linear foram encontradas soluções teóricas exatas para prever o comportamento temporal do comprimento de onda de Bragg através do comportamento temporal da deformação. Casos especiais foram analisados utilizando o maior intervalo de sintonização possível (12 nm) para uma FBG convencional com a aplicação de uma tração dependente do tempo e com o tempo de subida mais rápido possível (função degrau). Assumindo a fibra perfeitamente elástica encontrou-se um tempo mínimo de atraso para a resposta da rede de Bragg de  $T_1/8$  aplicando uma carga degrau, sendo  $T_1$  o período fundamental da barra engastada.

Simulando a aplicação de tração degrau sem amortecimento na fibra polimérica e comparando com os resultados obtidos com a fibra de sílica, concluiu-se que:

- Aplicando a mesma força de tração, a deformação será 27 vezes maior na fibra polimérica.
- O comprimento de onda de Bragg sofrerá um deslocamento 31 vezes maior na fibra polimérica.
- Porém, o tempo de atraso referente ao deslocamento do comprimento de onda de Bragg será 4 vezes menor na fibra de sílica (NEVES JR. e POHL, 2006).

Levando em conta o amortecimento a velocidade máxima de sintonização encontrada (1950 nm/ms para o sistema criticamente amortecido) foi muito superior às relatadas pela literatura, indicando que o limite teórico baseado nas constantes viscoelásticas utilizadas está longe de ser alcançado e mostrando que é possível aumentar significativamente a velocidade de sintonização aperfeiçoando as técnicas existentes.

O método Modos Assumidos mostrou-se eficiente na análise do comportamento temporal do comprimento de onda de Bragg em sistemas mais complexos para movimentos unidimensionais, permitindo estimar a duração do regime transiente. As simulações aplicando uma carga senoidal indicaram que, para o mesmo amortecimento não proporcional distribuído, a duração do transiente é independente da frequência. Além disso, aumentando o



amortecimento e mantendo a carga de excitação fixa, ocorre a diminuição do tempo de transiente, porém, a amplitude da deformação também diminui.

Os resultados obtidos pela combinação dos métodos Modos Assumidos e Matriz de Transferência mostraram grande concordância com experimentos já realizados com um modulador acusto-óptico, podendo ser uma boa ferramenta para projetar tais dispositivos.

O sintonizador proposto, baseado no princípio da mola de entalhe, apresentou boa repetibilidade, custo relativamente baixo e tem como maior limitação às oscilações provocadas pelo tempo de subida da carga aplicada. Quanto menor esse tempo menor será a velocidade de sintonização. Como a primeira frequência de ressonância encontrada foi de 40 Hz, sinais que contenham frequências próximas ou maiores que essa, provocarão as oscilações aumentando o tempo de sintonização. Técnicas de neutralização de vibrações precisam ser aplicadas para melhorar o desempenho do dispositivo.

Usando uma rede de Bragg especial (DTG) conseguiu-se um intervalo de sintonização maior que 12 nm e uma velocidade de sintonização em torno de 0,3 nm/ms. Porém, devido à técnica de fixação da fibra (com cola à base de éster de cianoacrilato) o intervalo efetivo de sintonização foi de 8,03 nm com uma velocidade máxima de aproximadamente 0,2 nm/ms.

Concluiu-se que, das técnicas de amortecimento utilizadas, a melhor forma para evitar as oscilações mecânicas do dispositivo, mantendo o compromisso “maior intervalo de sintonização e maior velocidade de sintonização”, é a aplicação de um sinal adequado na entrada do atuador PZT. As técnicas de amortecimento por mola de absorção e ligação viscoelástica não mostraram resultados satisfatórios em termos de tempo de sintonização para todos os canais.

O tempo de sintonização máximo foi aproximadamente 40 ms, abaixo do máximo permitido para o padrão SDH/SONET (Synchronous Digital Hierarchy/ Synchronous Optical Network), que estabelece um tempo máximo de chaveamento de 50 ms. O dispositivo em seu estado atual apresenta uma velocidade de sintonização menor que as relatadas na literatura para sintonizadores baseados em deformação longitudinal, sendo o maior valor encontrado na literatura de 21 nm/ms, mas a simplicidade de construção, seu tamanho compacto, e o baixo custo pode ser interessante para uso em sistemas WDM.

## TRABALHOS FUTUROS

O método Modos Assumidos poderá ser desenvolvido para modelos viscoelásticos (mais completos que os viscosos) e, combinado com o método Matriz de Transferência,

poderá ser utilizado em projetos de dispositivos acusto-ópticos, possibilitando a determinação de suas dimensões, sua região de atuação no espectro óptico e agregando eficiência e rapidez no tempo de resposta.

O dispositivo de sintonização baseado no princípio da mola de entalhe poderá ser mais rápido projetando um neutralizador viscoelástico otimizado na tentativa de se obter maiores intervalo e velocidade de sintonização que os obtidos nesse trabalho. Um sistema de controle poderá ser projetado para automatizar seu funcionamento.

Um dispositivo, também baseado no princípio da mola de entalhe, poderá ser construído para trabalhar na compressão da fibra, obtendo assim maior intervalo de sintonização com o atuador PZT apropriado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACHENBACH, J. D., **Wave Propagation in Elastic Solids**. Amsterdam: North-Holland, 1973.
- ANDRÉ, P. S., PINTO, A. N., PINTO, J. L., ALMEIDA, T., POUSA, M., Tunable transparent and cost effective optical add-drop multiplexer based on fiber Bragg grating for DWDM networks, **Proc. 2001 IEEE/LEOS Summer Topical Meetings**, Copper Mountain, Colorado, EUA, pp. 27-28, 2001.
- ALLEYNE, D. N. and CAWLEY, P., The interaction of Lamb waves with defects, **IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control**, v. 39, p. 381–97, 1992.
- BALL, G. A., MOREY, W. W., Continuously tunable single-mode erbium fiber laser, **Opt. Lett.**, v. 17, p. 420-422, 1992.
- BALL, G. A., MOREY, W. W., Compression-tuned single-frequency Bragg grating fiber laser, **Opt. Lett.**, v. 19, p. 1979–1981, 1994.
- BALL, G. A., MOREY, W. W., GLENN, W. H., Standing-wave monomode erbium fiber laser utilizing Bragg reflectors, **J. Lightwave Technol.**, v. 10, p. 1338-1343, 1992.
- BANERJEE, S., BHASKAR, A., The use and limitations of continuum modes for response calculations of cellular structures, **J. Sound and Vibration**, v. 302, p. 457-470, 2007.
- BAUMANN, I., SEIFERT, J., NOWAK, W., SAUER, M., Compact all-fiber add-drop-multiplexer using fiber Bragg gratings, **IEEE Photon. Technol. Lett.**, v. 8, p. 1331-1333, 1996.
- BAVASTRI, C. A., **Redução de Vibrações de Banda Larga em Estruturas Complexas por Neutralizadores Viscoelásticos**, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1997.
- BEADLE, B. M., WEIS, R. S., Longitudinal vibration of a silica fiber segment characterized using a fiber Bragg grating, **IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control**, v. 45, n. 5, p. 1100-1104, 1998.
- BETZ, D. C., THURSBY, G., CULSHAW, B., STASZEWSKI, W. J., Acousto-ultrasonic sensing using fiber Bragg gratings, **Smart Materials and Structures**, v. 12, p. 122-128, 2003.
- BERTHOLDS, A., DÄNDLIKER, R., Determination of the individual strain-optic coefficients in single-mode optical fiber, **J. Lightwave Technol.**, v. 6, n. 1, p. 17-20, 1988.
- BIRKS, T. A., RUSSEL, P. St., CULVERHOUSE, D. O, The acousto-optic effect in a single mode fiber tapers and couplers, **J. Lightwave Technol.**, v. 14, p. 2519-2529, 1996.
- BORELLI, N.F., MILLER, R.A., Determination of the individual strain-optic coefficients of glass by an ultrasonic technique, **Applied Optics**, v. 7, n. 5, p. 745-750, 1968.

CARMAN, G. P., SENDECKYJ, G. P., Review of the mechanics of the embedded optical sensors, **J. Composites Technology Research**, v. 17, n. 3, p. 183-193, 1995.

CHAN, C. -K, TONG, F., CHEN, L. -K, SONG, J., LAM, D., A practical passive surveillance scheme for optically amplified passive branched network”, **IEEE Photonics Tech. Letters**, v. 9, p. 526-528, 1997.

CHU, P. L, Polymer optical fiber Bragg gratings, **Optics & Photonics News**, v. 16, n. 17, p. 52-56, 2005.

CURNIER, A., **Computational Methods in Solid Mechanics**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1994.

DAI, Y., CHEN, X., SUN, J., YAO, Y., XIE, S., Dispersion compensation based on sampled fiber Bragg gratings fabricated with reconstruction equivalent-chirp method, **IEEE Photonics Technol. Letters**, v. 18, n. 8, p. 941-943, 2006

DELGADO-PINAR, M., MORA, J., DIÉZ, A., CRUZ, J. L., ANDRÉS, M. V., Wavelength-switchable fiber laser using acoustic waves, **IEEE Photonics Technol. Letters**, v. 17, p. 552-554, 2005.

DELGADO-PINAR, M., ZALVIDEA, D., DIÉZ, A., PÉRES-MILLÁN, P., ANDRÉS, M. V., Q-switching of an all-fiber laser by acoustic modulation of a fiber Bragg grating, **Opt. Express**, v. 14, p. 1106-1112, 2006.

ERDOGAN, T., Fiber grating spectra, **J. Lightwave Technol.**, v. 15, n. 8, p. 1277-1294, 1997.

ERDOGAN, T., MIZRAHI, V., LEMAIRE, P. J., MONROE, D, Decay of ultra-violet-induced fiber Bragg gratings, **J. Appl. Phys.**, v. 76, n. 1, p. 73-80, 1994.

ERINGEN, A. C., SUHUBI, E. S., **Elastodynamics: Linear Theory**, v. 2, New York: Academic Press, 1975.

ESPÍNDOLA, J. J., **Fundamentos de Vibrações**, apostila em formato de livro, UFSC, Brasil, 2000.

EWINS, D. J., **Modal Testing: Theory, Practice and Application**, Exeter: Research Studies Press LTD., Reino Unido, 2000.

FENG, X., TAM, H., WAI, P. K. A., Switchable multiwavelength erbium-doped fiber laser with a multimode fiber Bragg grating and photonic crystal fiber, **IEEE Photonics Tech. Letters**, v. 18, n. 9, p. 1088-1090, 2006.

FÉODOSIEV, V., **Resistência dos Materiais**, Porto: Lopes da Silva Editora, Portugal, 1977.

FICHERA, G., Existence theorem in elasticity in **Handbuch der Physik**, Berlin: Springer-Verlag, 1972.

FIORI, C., DEVINE, R. A. B., Ultraviolet irradiation induced compaction and photoetching in amorphous, thermal SiO<sub>2</sub>, **Mat. Res. Soc. Symp.**, 61, 187-195, 1986.

FOKINE, M., **Photosensitivity, chemical composition gratings and optical fiber based components**, Tese de Doutorado, KTH (Sveriges Största Tekniska Universiteit), 2002.

FREUND, L. B., **Dynamic Fracture Mechanics**, New York: Cambridge University Press, 1998.

GOH, C. S., MOKHTAR, M. R., BUTLER, S. A., SET, S. Y., KIKUCHI, K. and IBSEN, M., Over 70 nm Wideband Tuning of Fiber Bragg Gratings Using a Compressive Bending Technique, **Proc. OECC**, Tokyo, Japan, paper PD-2-1 (Postdeadline), 2002.

GOH, C. S., MOKHTAR, M. R., BUTLER, S. A., SET, S. Y., KIKUCHI, K. and IBSEN, M., Accurate Tuning of Fiber Bragg Gratings over 90 nm Using a Simple Set-and-Forget Package Configuration, **IEEE Photon. Technol. Lett.**, v. 15, n. 4, p. 557-559, 2003.

GRIFFIOEN, W., Effect of nonlinear elasticity on measured fatigue data and lifetime estimations of optical fibers, **Journal of American Ceramics Society**, v. 75, n. 10, p. 2692-2696, 1992.

GURTIN, M. E., The linear theory of elasticity in **Handbuch der Physik**, Berlin: Springer-Verlag, 1972.

HAN, Y., LEE, S., Tunable dispersion compensator based on uniform fiber Bragg grating and its application to tunable pulse repetition-rate multiplication, **Optics Express**, v. 13, n. 23, p. 9224-9229, 2005.

HILL, K. O., BILODEAU, F., MALO, B., KITAGAWA, T., THÉRIAULT, S., JOHNSON, D. C., ALBERT, J., TAKIGUSHI, K., Aperiodic in-fiber Bragg gratings for optical fiber dispersion compensation, **Conf. Optic. Fiber Commun. - OFC'94**, San Jose, CA, 1994.

HILL, K. O., MALO, B., BILODEAU, F., JOHNSON, D. C., ALBERT, J., Bragg gratings fabricated in monomode photosensitive optical fiber by UV exposure through a phase mask, **Appl. Phys. Lett.**, v. 62, p. 1035-1037, 1993.

HILL, K. O., MELTZ, G., Fiber Bragg grating technology fundamentals and overview, **J. Light. Technol.**, v. 15, n. 8, p. 1263-1276, 1997.

HILL, K. O., FUJII, Y., JOHNSON, D. C., KAWASAKI, B. S., Photosensitivity in optical fiber waveguides: Application to reflection filter fabrication, **Appl. Phys. Lett.**, v. 32, p. 647-649, 1978.

HOCKER, G. B., Fiber-optic sensing of pressure and temperature, **Appl. Opt.**, v. 18, n. 9, p. 1445-1445, 1979.

HU, C., YANG, S.M., WANG, Y.C., WU, J.S., LAI, Y., Passive athermal-packaged tunable fiber Bragg grating for OADM's, **Paper TuE3-2 CLEO/Pacific Rim**, 2001.

- INMAN, D. J., **Engineering Vibration**, Englewood Cliff, NJ: Prentice Hall, 1996.
- IOCCO, A., **Tunable fiber Bragg grating filters**, Tese de Doutorado, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1999.
- IOCCO, A., LIMBERGER, H. G., SALATHÉ, R. P., EVERALL, L. A., CHISHOLM, K. E., WILLIAMS, J. A. R., BENNION, I., Bragg Grating Fast Tunable Filter for Wavelength Division Multiplexing, **OSA/IEEE J. Lightwave Technol.**, v. 7, p. 1217-1221, 1999.
- JIN, S., MAVOORI, H., ESPINDOLA, R.P., ADAMS, L.E., STRASSER, T.A., Magnetically tunable fiber Bragg gratings, **Proceedings of OFC**, paper number ThJ2, p. 135-137, San Diego, USA, 1999.
- KASHYAP, R., **Fiber Bragg Gratings**, San Diego, CA: Academic, 1999.
- KAVASAKI, B. S., HILL, K. O., JOHNSON, D. C., FUJII, Y., Narrow-band Bragg reflectors in optical fibers, **Opt. Lett.**, v. 3, p. 66-68, 1978.
- KIM, B.Y, BLAKE, J. N., ENGAN, H. E., SHAW, H. J., All fiber acousto-optic frequency shifter, **Opt. Express**, v. 11, p. 389-391, 1986.
- KIM, H.S, YUN, S. H., KWANG, I. K., KIM, B. Y., All fiber acousto-optic tunable notch filter with electronically controllable spectral profile, **Opt. Lett.**, v. 22, p. 1476-1478, 1997.
- KOBAYASHI, S., **Computational Methods in Mechanics**, Amsterdam: North Holland, v. 3, 1987.
- KOGELNICK, H., Theory of optical waveguides, in **Guided-Wave Optoelectronics**, T. Tamir, Ed. New York: Springer-Verlag, 1990.
- KREYSZIG, E., **Advanced Engineering Mathematics**, New York: Wiley, 1992.
- LAUDATI, A., MENNELLA, F., GIORDANO, M., D'ALTRUI, G., TASSINI, C. C., CUSANO, A., A fiber-optic Bragg grating seismic sensor, **Photonics Technol. Letters**, v. 19, n. 24, p. 1991-1993, 2007.
- LIMBERGER, H. G, IOCCO, A., SALATHÉ, R. P., EVERAL, L., CHISHOLM, K., BENNION, I., Wideband tunable fiber Bragg grating filters, **ECOC'99**, v. 1, p. 156-159, 1999.
- LIU, H. Y., LIU, H. B., PENG, G. D., Tensile strain characterization of polymer optical fibre Bragg gratings, **Optics Communications**, v. 251, p. 37-43, 2005.
- LIU, W. F., RUSSEL, P. St., DONG, L., 100% efficient narrow-band acoustooptic tunable reflector using fiber Bragg grating, **J. Lightwave Technol.**, v. 16, n. 11, p. 2006-2009, 1998.
- LOVE, A. E. H, **A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**, 4<sup>th</sup> ed., New York: Dover, 1944.

MALLINDER, F. P., PROCTOR, B. A., Elastic constants of fused silica as a function of large tensile strain, **Physics and Chemistry of Glasses**, v. 5, n. 4, p. 91-103, 1964.

MAVOORI, H., JIN, S., ESPINDOLA, R. P., STRASSER, T. A., Enhanced thermal and magnetic actuations for broad-range tuning of fiber Bragg grating based reconfigurable add drop devices”, **Opt. Lett.**, v. 24, p. 714-716, 1999.

MEIROVITCH, L., **Elements of Vibration Analysis**, Singapore: McGraw-Hill, 1986.

MEIROVITCH, L., **Dynamic and Control of Structures**, New York: Wiley-Interscience, 1990.

MENCIK, J., **Strength and Fracture of Glass and Ceramics**, New York: Elsevier, 1992.

MELTZ, G., MOREY, W. W., GLENN, W. H., Formation of Bragg gratings in optical fibers by a transverse holographic method, **Opt. Lett.**, v. 14, n. 15, p. 823-825, 1989.

MILER, G. A., ASKINS, C. G., FRIEBELE, E. J., Modified F-Matrix calculation of Bragg grating spectra and its use with a novel nonlinear index growth law, **J. Lightwave Technol.**, v. 24, n. 6, p. 2416-2427, 2006.

MOHAMMAD, N., SZYSZKOWSKI, W., ZHANG, W. J., HADDAD, E. I., ZOU, J., JAMROZ, W., KRUCZELECKY, R., Analysis and development of a tunable fiber Bragg grating filter based on axial tension/compression”, **J. Lightwave Technol.**, v. 22, n. 8, p. 2001-2013, 2004.

MOKHTAR, M. R., GOH, C. S., BUTLER, S. A., SET, S. Y., KIKUCHI, K., RICHARDSON, D. J. and IBSEN, M., Fibre Bragg grating compression-tuned over 110 nm, **IEE Electron. Lett.**, v. 39, n. 6, p. 509-511, 2003.

NEVES JR., P. T., POHL, A. A. P., A Comparison Study of Fiber Bragg Gratings in Silica and Polymer Optical Fibers using Elastodynamics, **WorkPoF 2006**, Rio de Janeiro, Brazil, 2006.

OLIVEIRA, R. A., NEVES JR., P. T., POHL, A. A. P., PEREIRA, J. T., Spectrum behavior of a BG-AOM under variation of design and driving parameters, **IMOC 2007**, p. 716-719, 2007.

OTHONOS, A., “Fiber Bragg Gratings”, **Review Sciences Instrument**, vol.68, pp. 4309-4241, 1997.

OTHONOS, R., KALLI, K., **Fiber Bragg Gratings- Fundamentals and Applications in Telecommunications and Sensing**, Norwood, MA: Artech House, 1999.

PRABHUGOUD, M., PETERS, K., Finite element model for embedded fiber Bragg grating sensor, **Smart Material and Structures**, v. 15, p. 550-562, 2006.

PRABHUGOUD, M., PETERS, K., Finite element analysis of multi-axis strain sensitivities of Bragg gratings in PM fibers, **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, v. 18, p. 861-873, 2007.

PRIMAK, W., POST, D., Photoelastic constants of vitreous silica and its elastic coefficient of refractive index, **Journal of Applied Physics**, v. 30, n. 5, p. 779-788, 1959.

RAO, J. S., **Advanced Theory of Vibration**, New Delhi: John Wiley & Sons, India, 1992.

ROCHA, M. L., BORIN, F., MONTEIRO, H. C. L., HORIUCHI, M. R., BARROS, M. R. X., SANTOS, M. A. D., OLIVEIRA, F. L., SIMÕES, F. D., Mechanical tuning of a fiber Bragg grating for optical networking application, **Journal of Microwave and Optoelectronics**, v. 4, n. 1, p. 1-11, 2005.

ROGERS, J., KUO, P., AHUJA, A., EGGLETON, B. J., JACKMAN, R. J., Characteristic of heat flow in optical fiber devices that use integrated thin-film heaters, **Applied Optics**, v. 39, n. 28, p. 5109-5116, 2000.

ROSE, J. L., **Ultrasonic Waves in Solid Media**, Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

SCEATS, M. G., POOLE, S. B., Stress-Relief – The mechanism of photorefractive index control in fiber cores, **16<sup>th</sup> Australian Conference of Optical Fiber Technology**, p.302-305, 1991.

SHAH, M. A., SHANMUGAN, V., CHOWDHURY, G. K., AKKIPPEDI, A., Optomechanical design of tunable InP-based Fabry-Perot filters for wavelength division multiplexing applications, **Journal of Microlithography, Microfabrication, and Microsystems**, v. 4, n. 4, 2005.

SILVA, J. C. C., **Monitoração de vibrações de estruturas com o emprego de sensores em fibra ótica**, Ph.D. thesis, Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná, 2005.

SMITH, S. T., CHETWYND, D. G., **Foundations of Ultra-Precision Mechanism Design**, Taylor & Francis Group, 2005.

STARUDUBOV, D. S., GRUBSKY, V., FEINBERG, J., Ultrastrong fiber gratings and their applications, in **Optical Fiber Reliability and Testing (Proc. SPIE 3848)**, p. 178-185, 1999.

TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. M., **Mecânica dos Sólidos**, Rio de Janeiro: LTC-Livros Técnicos e Científicos, v. 2, 1998.

TSEYTLIN, Y. M., Notch Flexure Hinges: An effective theory, **Review of Scientific Instruments**, n. 73, p. 3365-3368, 2002.

VERA-TUDELA, C. A. N., **Formulações alternativas do MEC para problemas elastodinâmicos de mecânica da fratura com o uso da função de Green numérica**, Tese de Doutorado, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2003.

WANG, Z. H., PENG, G., CHU, P. L., Improved Rouard's method for fiber and waveguide gratings, **Optics Commun.**, v. 177, p. 245-250, 2000.



WELLER-BROPHY, L. A., HALL, D. G., Analysis of waveguide gratings: Application of Rouard's method, **J. Opt. Soc. Amer.**, v. 2, p. 863-871, 1985.

VENGSAKAR, A. M., LEMAIRE, P. J., BUDKINS, J. B., BHATIA, V., ERDOGAN, T. and SIPE, J. E., Long-period fiber gratings as band-rejection filters, **Conf. Opt. Fiber Comm. - OFC'95**, San Diego, CA, 1995.

XIONG, Z., PENG, G.D., WU, B., CHU, P.L., 73 nm wavelength tuning in polymer optical fiber Bragg gratings, **24th Australian Conference Optical Fiber Technology (ACOFT'99)**, p. 135-138, 1999.

XIONG, Z., PENG, G.D., WU, B., CHU, P.L., Highly tunable Bragg gratings in single-mode polymer optical fibers", **IEEE Photonics Technol. Lett.**, v. 11, n. 3, p. 352-354, 1999.

XU, M.G., REEKIE, L., CHOW, Y. T., DAKIN, J. P., Optical in-fiber grating high pressure sensor, **Electron. Lett.**, v. 29, n. 4, p. 398-399, 1993.

YAMADA, M., SAKUDA, K., Analysis of almost-periodic distributed feedback slab waveguides via a fundamental matrix approach, **Appl. Opt.**, v. 26, p. 3474-3478, 1987.

YARIV, A., Coupled-mode theory for guided-wave optics, **IEEE J. Quantum Electron.** v. 9, n. 9, p. 919-933, 1973.

YARIV, A., YEH, P., **Optical Waves in Crystals**, New York: John Wiley & Sons, 1984.

## PUBLICAÇÕES RELACIONADAS COM ESTA TESE

### 1- PERIÓDICOS:

NEVES JUNIOR, P. T., POHL, A. A. P., Time Analysis of the Wavelength Shift in Fiber Bragg Gratings, **Journal of Lightwave Technology**, v. 25, p. 3580-3588, 2007.

OLIVEIRA, R. A., NEVES JUNIOR, P. T., PEREIRA, J. T, POHL, A. A. P, Numerical Approach for Designing a Bragg Grating Acousto-Optic Modulator using the Combined Finite Element and Transfer Matrix Methods, **Optics Communications**, 2008. (submetido)

### 2- CONFERÊNCIAS:

NEVES JUNIOR, P. T., BAVASTRI, C. A., OLIVEIRA, R. A., POHL, A. A. P., Combinação dos métodos dos modos assumidos e matriz de transferência em dispositivos ópticos baseados em redes de Bragg sob deformação longitudinal, **XXVI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT 2008)**, Rio de Janeiro, 2008.

NEVES JUNIOR, P. T., OLIVEIRA, R. A., POHL, A. A. P., BELTRÃO, P. A. C., LUERSEN, M. A., BAVASTRI, C. A., Sintonização de redes de Bragg usando Mola de Entalhe, **13º SBMO - Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica (MOMAG 2008)**, Florianópolis, 2008. (submetido)

OLIVEIRA, R. A., NEVES JUNIOR, P. T., POHL, A. A. P., MAIA, J. M., CANNING, J., Modulação da refletividade de redes de Bragg usando interação acusto-óptica de baixa frequência, **13º SBMO - Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica (MOMAG 2008)**, Florianópolis, 2008. (submetido)

POHL, A. A. P., CANNING, J., STEVENSON, M., GROOTHOFF, NEVES JUNIOR, P. T., OLIVEIRA, R. A., Technique for estimating the tuning speed of fiber Bragg gratings, **19<sup>th</sup> Optical Fiber Sensors (OFS-19)**, Perth, Austrália, 2008.

NEVES JUNIOR, P. T., POHL, A. A. P., On the Damping of the Bragg Wavelength Shift in FBG, **7<sup>th</sup> Pacific Rim Conference on Lasers and Eletro-Optics (CLEO / Pacific Rim 2007)**, Seul, Coréia do Sul, 2007. p. 94-95, 2007.

OLIVEIRA, R. A., NEVES JUNIOR, P. T., POHL, A. A. P., PEREIRA, J. T., Design of a BG-AOM based on the Combined Finite Elements and Transfer Matrix Method, **7<sup>th</sup> Pacific Rim Conference on Lasers and Eletro-Optics (CLEO / Pacific Rim 2007)**, 2007, Seul, Coréia do Sul, p. 820-821, 2007

OLIVEIRA, R. A., NEVES JUNIOR, P. T., POHL, A. A. P., PEREIRA, J. T., Spectrum Behavior of a BG-AOM under Variation of Design and Driving Parameters, **2007 SBMO/IEEE MTT-S International Microwave & Optoelectronics Conference (IMOC 2007)**, Salvador, p. 716-719, 2007.

NEVES JUNIOR, P. T., POHL, A. A. P., A Comparison Study of Fiber Bragg Gratings in Silica and Polymer Optical Fibers using Elastodynamics, **International Workshop on Polymer Optical Fibers and International Workshop on Micro-Structured Polymer Optical Fibers (WorkPoF 2006)**, Campinas - Rio de Janeiro, p. 225-228, 2006.

NEVES JUNIOR, P. T., POHL, A. A. P., A Study of the Tuning Speed of Fiber Bragg Gratings Based on the Elastodynamic Theory, **III Symposium On Enabling Optical Networks (SEON 2005)**, Aveiro, Portugal, v. 1. p. 54-58, 2005.

### **3- OUTROS TRABALHOS PUBLICADOS DURANTE O PERÍODO DE ELABORAÇÃO DESTE TRABALHO:**

NEVES JUNIOR, P. T., COSMO, P. V., KULLER, F., POHL, A. A. P., KALINOWSKI, H. J., FABRIS, J. L., 4-Channel Reconfigurable CWDM OADM Based on FBG Gratings, **6<sup>th</sup> Conference on Telecommunications**, Peniche, Portugal, p. 173-176, 2007.

NEVES JUNIOR, P. T., KULLER, F., KALINOWSKI, H. J., FABRIS, J. L., POHL, A. A. P., Two-Channel CWDM OADM Based on Large Bandwidth Fibre Bragg Gratings, **8<sup>th</sup>**

**International Conference on Transparent Optical Network (ICTON 2006)**, Nottingham, Grã-Bretanha, v. 1., p. 198-201, 2006 .

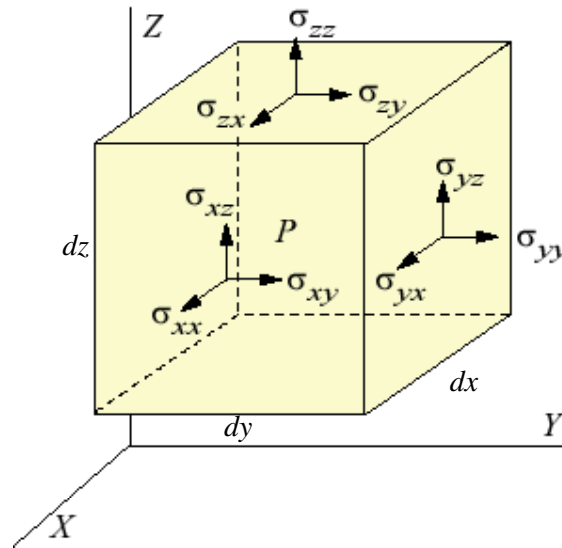
NEVES JUNIOR, P. T., KULLER, F., MARCONCIN, C., KALINOWSKI, H. J., FABRIS, J. L., POHL, A. A. P., Experimental and Simulation Analysis of unbalanced Mach-Zehnder Fiber Bragg Grating OADM, **International Microwave & Optoelectronics Conference (IMOC 2005)**, Brasília, 2005.

## ANEXO 1

### ESTADO DE DEFORMAÇÃO

#### A1.1 ESTADO DE DEFORMAÇÃO

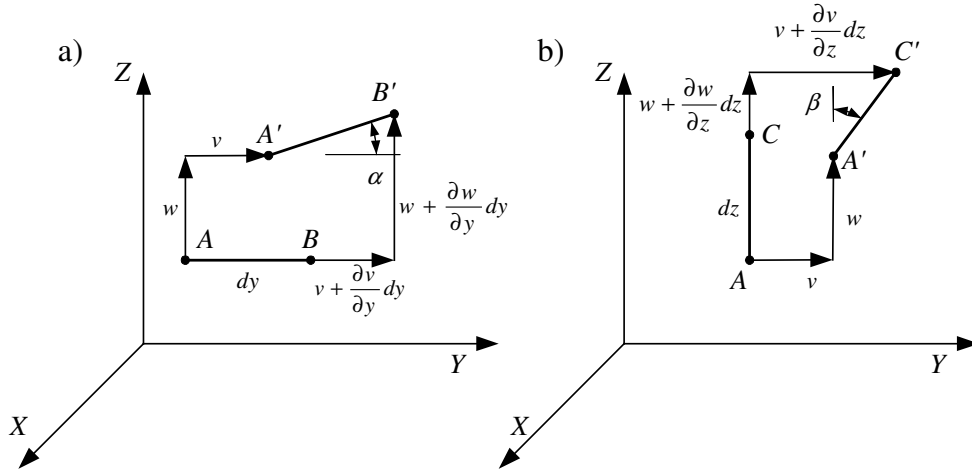
O estado de deformação pode ser definido tomando o paralelepípedo de volume infinitesimal da Figura A1.1, fazendo o volume tender a zero (de forma que todas as faces do paralelepípedo passem pelo ponto  $P$ ) e analisando a deformação do paralelepípedo em 3D (três dimensões).



**Figura A1.1:** Volume infinitesimal destacado do corpo.

Usando como referência inicial a face do paralelepípedo no plano  $YZ$ , cujas arestas têm comprimento  $dy$  e  $dz$ , é conveniente analisar separadamente a deformação de cada aresta. Dessa forma, a aresta paralela ao eixo  $Y$  será representada pelo segmento  $AB$  enquanto a aresta paralela ao eixo  $Z$  será representada pelo segmento  $AC$ .

Na Figura A1.2-a observa-se o segmento  $AB$ , paralelo ao eixo  $Y$ , com comprimento infinitesimal  $dy$ . Se o ponto  $A$  se deslocar a uma distância  $w$  ao longo do eixo  $Z$ , o deslocamento do ponto  $B$  pode ser expresso usando a expansão por série de Taylor em torno do ponto  $A$  e truncando a partir do termo de segunda ordem. Logo, o ponto  $B$  se deslocará a uma distância de  $w + \frac{\partial w}{\partial y} dy$ . O mesmo se aplica aos deslocamentos ao longo do eixo  $Y$ .



**Figura A1.2:** Análise do deslocamento e da deformação da aresta paralela ao eixo Y (a) e paralela ao eixo Z (b).

Dessa forma, no eixo  $Y$  o segmento  $AB$  sofreu um incremento de  $\frac{\partial v}{\partial y} dy$  sendo que a deformação relativa a tal eixo será  $\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$ . Observa-se que a deformação relativa é adimensional. Geralmente é medida em porcentagem (%) ou strain ( $\epsilon$ ).

Generalizando para os outros eixos chega-se ao conjunto:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A1.1})$$

O ângulo de giro  $\alpha$  do segmento  $AB$  no plano  $YZ$  é igual à razão entre a diferença dos deslocamentos dos pontos  $B$  e  $A$  na direção do eixo  $Z$  e o comprimento  $dy$ , ou seja:

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{A1.2})$$

No caso do segmento  $AC$  na Figura A1.2-b, o ângulo de giro  $\beta$  no plano  $YZ$  será:

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{A1.3})$$

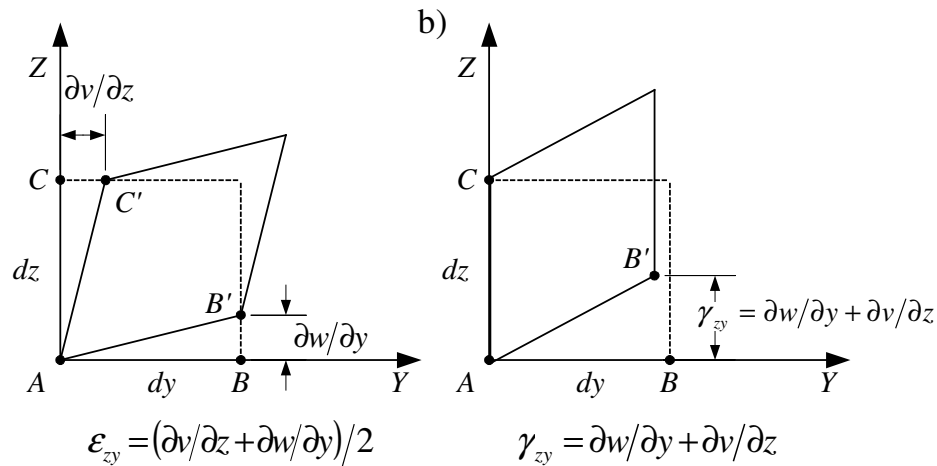
A soma de  $\alpha$  e  $\beta$  será igual ao ângulo de giro da face do paralelepípedo, ou seja, do ângulo reto  $BAC$ :

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{A1.4})$$

Esse ângulo de giro representa a deformação angular ou deformação de cisalhamento.

A literatura relata dois tipos de deformação de cisalhamento: a deformação de cisalhamento de engenharia (*engineering shear strain*) e a deformação de cisalhamento (*shear strain*) propriamente dita.

A diferença entre os dois tipos pode ser observada analisando a Figura A1.3, onde o ponto *A* permanece fixo e acontece apenas a deformação da face do paralelepípedo infinitesimal (linha pontilhada) de lados *dy* e *dz*. A deformação de cisalhamento (Figura A1.3-a) é a média entre os dois ângulos de giro enquanto a deformação de cisalhamento de engenharia (Figura A1.3-b) representa a soma de tais ângulos.



**Figura A1.3:** Diferença entre a deformação de cisalhamento (a) e a deformação de cisalhamento de engenharia (b).

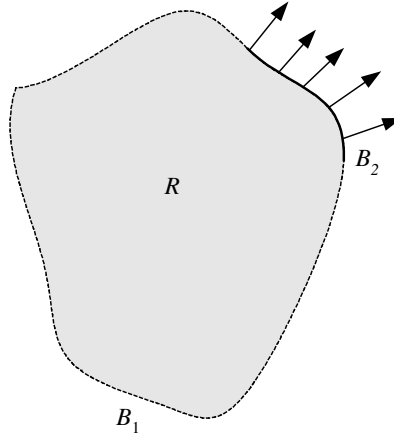
Usando o mesmo raciocínio nos outros planos chega-se ao conjunto que representa a relação entre o deslocamento e a deformação do ponto *P*.

## ANEXO 2

### MÉTODO DA EXPANSÃO DAS AUTOFUNÇÕES

#### A2.1 SOLUÇÃO PARA AS EQUAÇÕES DA ELASTODINÂMICA

Seja uma região  $R$ , limitada por uma superfície  $B$  e submetida à tração apenas na superfície  $B_2$ , parte de  $B$ , como mostra a Figura A2.1.



**Figura A2.1:** Corpo submetido à tração.

Sejam as equações de movimento de Navier-Cauchy (ver item 3.3 do Capítulo 3):

$$C_p^2 \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - C_s^2 \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) + \vec{b} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (\text{A2.1})$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \hat{u}(\vec{x}, t), \quad \text{sobre } B_1 \times T^+ \quad (\text{A2.2})$$

onde  $\hat{u}(\vec{x}, t)$  é um campo de deslocamento em uma superfície  $B_1$ , parte de  $B$ .

$$\vec{p}_{(n)} = \hat{p}(\vec{x}, t) = \vec{p}\vec{n} = \lambda \vec{n} \nabla \cdot \vec{u} + 2G \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} \right) + G \vec{n} \times (\nabla \times \vec{u}), \quad \text{sobre } B_2 \times T^+ \quad (\text{A2.3})$$

onde  $\hat{p}(\vec{x}, t) = \vec{p}\vec{n}$  é uma tração em uma superfície  $B_2$ , parte de  $B$ , sendo o vetor  $\vec{n}$  um vetor unitário normal à superfície. O penúltimo termo de (A2.3), onde  $\partial/\partial n$  é a derivada parcial na direção do vetor unitário normal, é proveniente de (3.2).

Além disso,  $B_1 \cup B_2 = B$ ,  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  e  $T^+$  é o intervalo de tempo definido como  $T^+ = [0, \infty)$



Sejam também as condições iniciais:

$$\bar{u}(\bar{x},0) = \bar{u}_0(\bar{x}), \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(\bar{x},0) = \bar{v}_0(\bar{x}), \quad em \ R \quad (A2.4)$$

Pela técnica da expansão das autofunções inicia-se a busca das soluções para (A2.1) resolvendo o seguinte problema de autovalores:

$$G\nabla^2 \bar{\psi} + (\lambda + G)\nabla(\nabla \cdot \bar{\psi}) + \rho\omega \bar{\psi} = 0 \quad em \ R \quad (A2.5)$$

sendo  $\bar{\psi} = \bar{\psi}(\bar{x})$  que satisfaz as seguintes condições de contorno homogêneas:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\bar{x}) &= 0, \quad sobre \ B_1 \\ \bar{\sigma}_{(n)} &= \lambda \bar{n} \nabla \cdot \bar{\psi} + 2G \left( \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial n} \right) + G \bar{n} \times (\nabla \times \bar{\psi}), \quad sobre \ B_2, \quad B_1 \cup B_2 = B \end{aligned} \quad (A2.6)$$

A função  $\bar{\psi}(\bar{x})e^{-\alpha t}$  corresponde às oscilações livres do corpo que ocupa a região  $R$  e tem condições de contorno de deslocamento homogêneas na parte  $B_1$  de  $B$  e condições de contorno de tração homogêneas na parte  $B_2$  de  $B$ . O autovalor  $\omega$  é chamado frequência natural do sistema. Como o sistema é contínuo, a solução de (A2.5) usando (A2.6) leva a um conjunto de infinitos autovalores  $\omega_j, j = 1, 2, \dots$

Cada modo particular de oscilação  $\bar{\psi}_j(\bar{x})$  é associado à uma frequência natural  $\omega_j$ . Por isso, denomina-se  $\bar{\psi}_j(\bar{x})$  como uma autofunção associada ao autovalor  $\omega_j$ .

Três teoremas podem ser demonstrados a respeito de  $\omega$  as demonstrações se encontram em (ERINGEN e SUHUBI, 1975):

- Teorema 1: Todos os autovalores  $\omega^2$  são reais.
- Teorema 2: Todos os autovalores  $\omega^2$  são não negativos.
- Teorema 3: As autofunções  $\bar{\psi}_j(\bar{x})$  constituem um conjunto ortonormal (LOVE, 1944; FICHERA, 1972; GURTIN, 1972).

Uma conclusão imediata do Teorema 3 é que, considerando duas autofunções  $\psi_i(\bar{x})$  e  $\psi_j(\bar{x})$  relacionadas a dois autovalores distintos  $\omega_i$  e  $\omega_j$ , a integral sobre  $R$  do produto das autofunções será nula, ou seja:

$$\int_R \bar{\psi}_i(\bar{x}) \cdot \bar{\psi}_j(\bar{x}) dV = 0 \quad se \ i \neq j \quad (A2.7)$$

Além disso, as autofunções podem ser normalizadas, de modo que:

$$\int_R [\psi_j(\bar{x})]^2 dv = 1 \quad (\text{A2.8})$$

Voltando ao problema inicial, o primeiro passo para encontrar soluções para (A2.1) é resolver o caso quasiestático, ou seja, assumindo que a força inercial tende a zero:

$$C_p^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{\phi}(\bar{x}, t)) - C_s^2 \nabla \times (\nabla \times \vec{\phi}(\bar{x}, t)) + \vec{b}(\bar{x}, t) = 0 \quad \text{em } R \quad (\text{A2.9})$$

Dessa forma, as condições de contorno para (A3.9) podem ser escritas como:

$$\vec{\phi}(\bar{x}, t) = \vec{u}(\bar{x}, t), \quad \text{sobre } B_1 \quad (\text{A2.10})$$

$$\vec{\sigma}_{(n)}(\bar{x}, t) = \vec{p}(\bar{x}, t), \quad \text{sobre } B_2$$

onde  $\vec{\sigma}_{(n)}$  é a tração em  $B_2$  devido ao campo de deslocamento quasiestático  $\vec{\phi}(\bar{x}, t)$ .

Uma proposta para uma solução geral pode ser representada por:

$$\vec{u}(\bar{x}, t) = \vec{\phi}(\bar{x}, t) + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(t) \vec{\psi}_j(\bar{x}) \quad (\text{A2.11})$$

onde  $\phi(t)$  é uma função escalar desconhecida dependente apenas do tempo.

Substituindo (A2.11) em (A2.1) usando (A2.5) obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\partial^2 \phi_j(t)}{\partial t^2} + \omega_j^2(t) \right) \vec{\psi}_j(\bar{x}) = - \frac{\partial^2 \vec{\phi}(\bar{x}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{A2.12})$$

Multiplicando os dois lados por  $\psi_i(\bar{x})$  e integrando sobre  $R$  usando (A2.7) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \phi_i(t)}{\partial t^2} + \omega_i^2 \phi_i(t) = \frac{\partial^2 \Phi_i(t)}{\partial t^2} \quad (\text{A2.13})$$

onde

$$\Phi_i(t) = - \int_R \vec{\phi}(\bar{x}, t) \cdot \vec{\psi}_i(\bar{x}) dv$$

De (A2.11) obtém-se as condições iniciais:

$$\vec{u}(\bar{x}, 0) = \vec{u}_0(\bar{x}) = \vec{\phi}(\bar{x}, 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(0) \vec{\psi}_j(\bar{x}) \quad (\text{A2.14})$$

$$\frac{\partial \vec{u}(\bar{x}, 0)}{\partial t} = \vec{v}_0(\bar{x}) = \frac{\partial \vec{\phi}(\bar{x}, 0)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial \phi_j(0)}{\partial t} \vec{\psi}_j(\bar{x})$$

Que multiplicadas por  $\psi_i(\bar{x})$  e integradas sobre  $R$  usando as condições de ortonormalidade resulta em:

$$\phi_i(0) = \int_R \bar{u}_0(\bar{x}) \bar{\psi}_i(\bar{x}) dv + \Phi_i(0) \quad (\text{A2.15})$$

$$\frac{\partial \phi_i(0)}{\partial t} = \int_R \bar{v}_0(\bar{x}) \bar{\psi}_i(\bar{x}) dv + \frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial t}$$

Dessa forma, a solução para (A2.13) com as condições iniciais (A2.15) será:

$$\begin{aligned} \phi_i(t) &= \phi_i(0) \cos(\omega_i t) + \left( \frac{1}{\omega_i} \right) \frac{\partial \phi_i(0)}{\partial t} \text{sen}(\omega_i t) + \left( \frac{1}{\omega_i} \right) \int_0^t \frac{\partial^2 \Phi_i(\tau)}{\partial \tau^2} \text{sen}(\omega_i(t-\tau)) d\tau \\ &= [\phi_i(0) - \Phi_i(0)] \cos(\omega_i t) + \left( \frac{1}{\omega_i} \right) \left[ \frac{\partial \phi_i(0)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_i(0)}{\partial t} \right] \text{sen}(\omega_i t) + \\ &\quad + \Phi_i(t) - \omega_i \int_0^t \Phi_i(\tau) \text{sen}(\omega_i(t-\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A2.16})$$

Finalmente, substituindo (A2.16) em (A2.11), chega-se à solução final:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{x}, t) &= \bar{\phi}(\bar{x}, t) + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(t) \psi_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \alpha_i \cos(\omega_i t) + (1/\omega_i) \beta_i \text{sen}(\omega_i t) - \right. \\ &\quad \left. - \omega_i \int_0^t \Phi_i(\tau) \text{sen}(\omega_i(t-\tau)) d\tau \right] \bar{\psi}_i(\bar{x}) \end{aligned} \quad (\text{A2.17})$$

onde

$$\alpha_i = \int_R \bar{u}_0(\bar{x}) \bar{\psi}_i(\bar{x}) dv \quad (\text{A2.18})$$

$$\beta_i = \int_R \bar{v}_0(\bar{x}) \bar{\psi}_i(\bar{x}) dv$$

Como o conjunto  $\{\bar{\psi}_i\}$  é completo em  $R$ , os dois primeiros termos se cancelam restando:

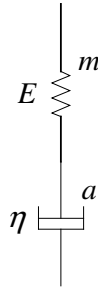
$$\bar{u}(\bar{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \alpha_i \cos(\omega_i t) + \frac{1}{\omega_i} \beta_i \text{sen}(\omega_i t) - \omega_i \int_0^t \Phi_i(\tau) \text{sen}(\omega_i(t-\tau)) d\tau \right] \bar{\psi}_i(\bar{x}) \quad (\text{A2.19})$$

## ANEXO 3

### MODELO DE MAXWELL E MODELO GENERALIZADO DE MAXWELL

#### A3.1 MODELO DE MAXWELL

Esse modelo é formado pela associação em série de uma mola de constante elástica  $E$  com um amortecedor de coeficiente de viscosidade  $\eta$ , como mostra a Figura A3.1.



**Figura A3.1:** Modelo de Maxwell.

Dessa forma

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \varepsilon_m(t) + \varepsilon_a(t) \\ \sigma(t) &= \sigma_m(t) = \sigma_a(t)\end{aligned}\tag{A3.1}$$

Para encontrar a função de relaxação usa-se o mesmo raciocínio que o modelo de Kelvin (ver Capítulo 3) resultando em

$$\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} = \frac{1}{E} \left( \frac{\sigma(t)}{t_{rel}} + \frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} \right),\tag{A3.2}$$

onde  $t_{rel} = \eta/E$  é denominado tempo de relaxação. Observa-se que o tempo de relaxação é o mesmo que o tempo de retardo do modelo de Kelvin.

Novamente, supondo o corpo no estado livre para  $t \leq 0$ , encontra-se  $\sigma(t)$  na forma

$$\sigma(t) = H(t) E \int_0^t \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} e^{-\frac{(t-\tau)}{t_{rel}}} d\tau,\tag{A3.3}$$

e usando  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$  em (A3.3) resultará em

$$\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \chi(t) = E e^{-t/t_{rel}}.\tag{A3.4}$$

Para encontrar a função de arraste para uma tensão degrau com amplitude  $\sigma_0$  como entrada leva-se em conta que o deslocamento total será a soma do deslocamento na mola e no amortecedor

$$u_{total} = u_m + u_a. \quad (A3.5)$$

Diferenciando (A3.5) em relação ao tempo resultará em

$$\frac{\partial u_{total}}{\partial t} = \frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\partial u_a}{\partial t}. \quad (A3.6)$$

Para o amortecedor é válida a relação

$$\frac{\partial u_a}{\partial t} = \frac{F_a}{\eta}, \quad (A3.7)$$

e para a mola

$$u_m = \frac{F_m}{E}, \quad (A3.8)$$

sendo  $F_a$  e  $F_m$  a força aplicada no amortecedor e na mola, respectivamente.

Portanto, (A3.6) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial u_{total}}{\partial t} = \frac{\partial F_m}{\partial t} \frac{1}{E} + \frac{F_a}{\eta}. \quad (A3.9)$$

Normalizando o deslocamento em relação ao comprimento e a força em relação à área chega-se a

$$\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} = \frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} \frac{1}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta}, \quad (A3.10)$$

Resolvendo (A3.10) com  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$  chega-se a

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} t + C_1, \quad (A3.11)$$

sendo  $C_1$  uma constante de integração determinada pela condição inicial  $\varepsilon(t=0^+) = \frac{\sigma_0}{E}$ .

Logo, (A3.10) será escrita na forma

$$\varepsilon(t) = \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \right) \sigma_0, \quad (A3.12)$$

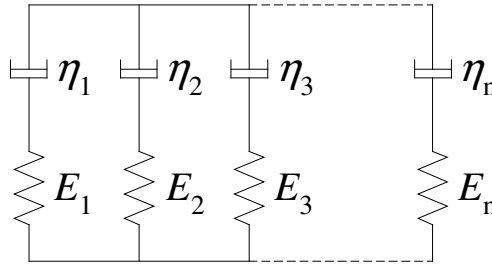
sendo a função de arraste determinada por

$$\gamma(t) = \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{\eta} t \right). \quad (A3.13)$$

Observa-se que, para esse modelo, o comportamento da deformação não é apropriado para corpos sólidos já que a deformação aumenta linearmente e indefinidamente com o tempo, não sendo assintótico como o modelo de Kelvin. Por isso o modelo de Maxwell geralmente é usado para fluidos viscoelásticos.

### A3.2 MODELO GENERALIZADO DE MAXWELL

Esse modelo é formado pela associação em paralelo de  $n$  modelos de Maxwell, como mostra a Figura A3.2.



**Figura A3.2:** Modelo Generalizado de Maxwell.

Cada célula unitária do modelo, formada por uma mola em série com um amortecedor de mesmo índice, apresenta um tempo de relaxação individual

$$t_j = \frac{\eta_j}{E_j}. \quad (\text{A3.14})$$

A deformação do sistema será

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_j(t) \quad (\text{A3.15})$$

e a tensão será a somatória das tensões de cada célula unitária

$$\sigma(t) = \sum_{j=1}^n \sigma_j(t). \quad (\text{A3.16})$$

Para cada célula unitária é válida a relação

$$\frac{\partial \varepsilon(t)}{\partial t} = \frac{1}{E_j} \left( \frac{\sigma_j(t)}{t_j} + \frac{\partial \sigma_j(t)}{\partial t} \right). \quad (\text{A3.17})$$

Supondo o corpo no estado livre para  $t \leq 0$ , encontra-se  $\sigma(t)$  através de

$$\sigma(t) = H(t) E_j \int_0^t \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} \chi(t - \tau) d\tau, \quad (\text{A3.18})$$

onde a função de relaxação é dada por

$$\chi(t) = \sum_{j=1}^n E_j e^{-t/t_j} . \quad (\text{A3.19})$$

## ANEXO 4

### EQUAÇÕES DE LAGRANGE

#### A4.1 PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL, DE D'ALEMBERT E DE HAMILTON.

O Princípio do Trabalho Virtual foi formulado por Johann Bernouilli e permite definir as condições do equilíbrio estático de um sistema. Esse princípio parte de algumas considerações sobre um conceito denominado Deslocamento Virtual. Os deslocamentos virtuais, por definição, apresentam as seguintes características:

- São infinitesimais.
- São diferenciáveis, ou seja, satisfazem as regras de diferenciação.
- Devem respeitar as condições de contorno do sistema.
- Não há variações de tempo relacionadas a esse deslocamento. Por isso não podem ser considerados deslocamentos reais.

Assumindo um sistema de  $N$  elementos, sendo  $\vec{R}_k$  a força resultante de cada elemento  $k$ , no equilíbrio essas resultantes serão nulas. Supondo que um elemento  $k$  sofra um deslocamento virtual  $\delta\vec{r}_k$ , o trabalho virtual realizado pelo elemento será

$$\delta\bar{W}_k = \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0, \quad (\text{A4.1})$$

sendo o ponto entre os dois vetores o símbolo usado para representar o produto interno.

Portanto, o trabalho virtual total do sistema será

$$\delta\bar{W} = \sum_{k=1}^N \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0. \quad (\text{A4.2})$$

O símbolo  $\delta$  relacionado ao trabalho virtual foi proposto por Lagrange para enfatizar o caráter de variação instantânea e distingui-lo do símbolo de derivada  $d$  que em várias ocasiões aparece nas equações, designando uma diferenciação convencional de uma coordenada de posição em relação a um intervalo de tempo  $dt$ .

Considerando todas as forças aplicadas em cada elemento, a resultante será a soma das forças externas e internas (também chamadas de forças de vínculo ou forças de restrição). Dessa forma,  $R_k$  pode ser escrito como

$$\vec{R}_k = \vec{F}_k + \vec{F}'_k, \quad (\text{A4.3})$$

onde  $F$  representa as forças externas e  $F'$  as forças internas ou de vínculo.

Pode-se, então, escrever (A4.2) na forma



$$\delta\bar{W} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \sum_{k=1}^N \vec{F}'_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0. \quad (\text{A4.4})$$

Como as forças internas não realizam trabalho (MEIROVITCH, 1986), (A4.4) se reduz a

$$\delta\bar{W} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0. \quad (\text{A4.5})$$

A equação (A4.5) é conhecida como o Princípio do Trabalho Virtual em um sistema de partículas, mostrando que, se um sistema está em equilíbrio estático, o trabalho virtual precisa ser nulo.

A formulação em coordenadas generalizadas é feita assumindo um sistema de coordenadas que descreve a configuração do sistema real. Assumindo um sistema de coordenadas expresso por

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n), \quad (\text{A4.6})$$

o deslocamento virtual pode ser escrito como

$$\delta\vec{r}_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (\text{A4.7})$$

com  $k = 1, \dots, N$  (número de elementos) e  $j = 1, \dots, n$  (número de graus de liberdade).

Substituindo (A4.7) em (A4.5) o trabalho virtual, em função das coordenadas generalizadas, pode ser representado por:

$$\delta\bar{W} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n f_j \delta q_j = 0, \quad (\text{A4.8})$$

onde  $f_j$  são as Forças Generalizadas.

Como as variações  $\delta q_j$  são arbitrárias, para que  $\delta\bar{W} = 0$  seja sempre válido, é necessário que seus coeficientes, representados por  $f_j$ , sejam sempre nulos. Assim, (A4.8) se reduz a

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} = 0, \quad (\text{A4.9})$$

representando um sistema de  $N$  equações cuja solução resultará na equação de equilíbrio do sistema de partículas em função das coordenadas generalizadas.

Pode-se expandir o princípio do trabalho virtual (equilíbrio estático) para o equilíbrio dinâmico. Pela segunda lei de Newton, um elemento de massa  $m_k$  em equilíbrio dinâmico é governado pela seguinte expressão:

$$\vec{F}_k + \vec{F}'_k - m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = 0. \quad (\text{A4.10})$$

Pelo princípio do trabalho virtual:

$$\delta \vec{r} \overline{W} = \sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k + \vec{F}'_k - m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} \right) \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (\text{A4.11})$$

Como  $\sum_{k=1}^N \vec{F}'_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0$ , chega-se ao Princípio de D'Alembert:

$$\sum_{k=1}^N \left( \vec{F}_k - m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} \right) \cdot \delta \vec{r}_k = 0. \quad (\text{A4.12})$$

De (A4.12) percebe-se que o trabalho virtual realizado apenas pelas forças externas não será zero uma vez que

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^N m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} \cdot \delta \vec{r}_k \quad (\text{A4.13})$$

Sabendo que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \delta \vec{r}_k \right) = \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} \cdot \delta \vec{r}_k + \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \delta \left( \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} \cdot \delta \vec{r}_k + \delta \left( \frac{1}{2} \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right) \quad (\text{A4.14})$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} \cdot \delta \vec{r}_k = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \delta \vec{r}_k \right) - \delta \left( \frac{1}{2} \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right) \quad (\text{A4.15})$$

multiplicando (A4.15) por  $m_k$  e aplicando-se o somatório chega-se a

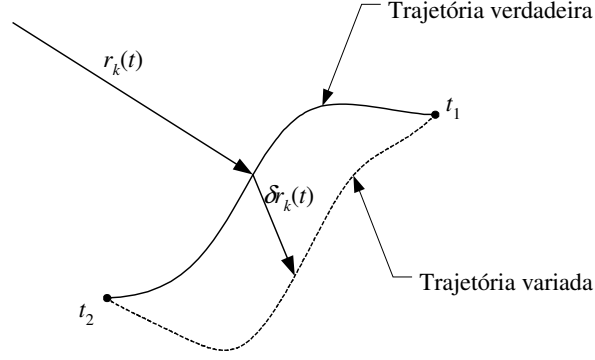
$$\sum_{k=1}^N m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} \cdot \delta \vec{r}_k = \sum_{k=1}^N m_k \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \delta \vec{r}_k \right) - \delta T, \quad (\text{A4.16})$$

onde  $T$  representa a energia cinética do sistema.

Substituindo (A4.16) em (A4.13) obtém-se

$$\delta T - \delta \overline{W} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}_k}{dt} \cdot \delta \vec{r}_k \right). \quad (\text{A4.17})$$

A solução  $\vec{r}_k = \vec{r}_k(t)$  no espaço de configuração equivale à trajetória verdadeira do sistema. Imaginando que o sistema se movimenta no intervalo de tempo compreendido entre o instante  $t_1$  e  $t_2$  ao longo de uma trajetória variada, representada por  $\vec{r}_k(t) + \delta \vec{r}_k(t)$  na Figura A4.1, se a trajetória variada (ou trajetória virtual) coincidir com a trajetória verdadeira implicará em  $\delta \vec{r}_k(t_1) = \delta \vec{r}_k(t_2) = 0$ .



**Figura A4.1:** Trajetória verdadeira e trajetória variada de um sistema de partículas.

Integrando (A4.17) no tempo entre  $t_1$  e  $t_2$  chega-se a

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \bar{W}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^N m_k \frac{d}{dt} \left( \frac{d\bar{r}_k}{dt} \cdot \delta \bar{r}_k \right) dt = \sum_{k=1}^N m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} \cdot \delta \bar{r}_k \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (\text{A4.18})$$

Quando a trajetória variada coincidir com a verdadeira, uma vez que  $\delta \bar{r}_k(t_1) = \delta \bar{r}_k(t_2) = 0$ , chega-se ao princípio de Hamilton com (3.18) resultando em

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \bar{W}) dt = 0. \quad (\text{A4.19})$$

O princípio de Hamilton pode ser escrito de forma mais conveniente dividindo o trabalho virtual em duas partes

$$\delta \bar{W} = \delta \bar{W}_c - \delta \bar{W}_{nc}, \quad (\text{A4.20})$$

onde  $\delta \bar{W}_c$  está relacionada às forças conservativas e  $\delta \bar{W}_{nc}$  às forças não conservativas.

Por sua vez, o trabalho realizado pelas forças conservativas está relacionado à energia potencial. Dessa forma, é possível demonstrar que (MEIROVITCH, 1986)

$$\delta \bar{W}_c = -\delta V, \quad (\text{A4.21})$$

sendo  $V$  a energia potencial.

Define-se, então, o operador Lagrangeano como sendo

$$L = T - V. \quad (\text{A4.22})$$

Dessa forma, se  $\delta \bar{r}_k(t_1) = \delta \bar{r}_k(t_2) = 0$ , o princípio de Hamilton será

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L - \delta \bar{W}_{nc}) dt = 0. \quad (\text{A4.23})$$

O trabalho virtual realizado por forças não conservativas pode ser escrito como

$$\delta\bar{W}_{nc} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta\bar{r}_k, \quad (\text{A4.24})$$

sendo  $\bar{F}_k$  as forças não conservativas.

Usando as coordenadas generalizadas e substituindo (A4.7) em (A4.24) chega-se a

$$\delta\bar{W}_{nc} = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \quad (\text{A4.25})$$

sendo  $Q_j$  as forças generalizadas (ver (A4.8)) não conservativas.

Assumindo que o Lagrangeano também é função das coordenadas generalizadas

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_n), \quad (\text{A4.26})$$

onde  $\dot{q}_j$  indica diferenciação em relação ao tempo,  $\delta L$  poderá ser escrito como

$$\delta L = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right). \quad (\text{A4.27})$$

Substituindo (A4.25) e (A4.27) em (A4.23) obtém-se

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \delta L + \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j dt = 0. \quad (\text{A4.28})$$

Como os deslocamentos virtuais são arbitrários, seus coeficientes serão nulos e, finalmente, chega-se às equações de Lagrange que permitem derivar as equações de movimento do sistema

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j. \quad (\text{A4.29})$$

## **RESUMO:**

Este trabalho apresenta a análise temporal do deslocamento do comprimento de onda de Bragg baseada na teoria da elastodinâmica linear e na teoria viscoelástica. As soluções exatas para o modelo de uma fibra engastada são encontradas a fim de estimar a máxima velocidade de sintonização quando forças de tração são aplicadas na extremidade livre da fibra. É feita a comparação entre a fibra monomodo de sílica e a fibra monomodo polimérica mostrando as diferenças do tempo de resposta, velocidade de sintonização e deslocamento de onda de Bragg quando a mesma carga longitudinal é aplicada.

Também apresenta a resposta transiente e permanente para o método Modos Assumidos, com aplicação potencial em estruturas submetidas a cargas harmônicas longitudinais, com massa e rigidez concentradas e seção transversal variável. Usando a combinação entre os métodos modos assumidos e matriz de transferência, simulações foram feitas para um modulador acusto-óptico, baseado em redes de Bragg em fibra, quando uma carga harmônica é aplicada. O espectro resultante e a duração o regime transiente são calculados e comparados com resultados experimentais relatados na literatura.

Além disso, este trabalho apresenta um sintonizador de redes de Bragg, baseado no princípio da mola de entalhe, que permite a magnificação do deslocamento provocado por um atuador piezoelétrico através da tração em um pedaço de fibra. O tempo de resposta é encontrado experimentalmente para diferentes casos de amortecimento.

## PALAVRAS-CHAVE

Redes de Bragg em Fibra, Elastodinâmica, Método dos Modos Assumidos, Método da Matriz de Transferência, Dispositivos Ópticos.

## ÁREA/SUB-ÁREA DE CONHECIMENTO

3.04.06.03 – 0 Sistemas de Telecomunicações

3.05.01.04 – 0 Princípios Variacionais e Métodos Numéricos

3.05.03.00 – 0 Mecânica dos Sólidos

2008

Nº: 35

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)