



UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS DE CURITIBA
DEPARTAMENTO DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
E DE MATERIAIS - PPGEM

JEFERSON RYUDI MATSUDA

ANÁLISE DE FADIGA EM MATERIAIS DÚCTEIS
ATRAVÉS DE UMA FORMULAÇÃO LOCALMENTE
ACOPLADA DA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

CURITIBA

MARÇO - 2008

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

JEFERSON RYUDI MATSUDA

**ANÁLISE DE FADIGA EM MATERIAIS DÚCTEIS
ATRAVÉS DE UMA FORMULAÇÃO LOCALMENTE
ACOPLADA DA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia, do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Área de Concentração em Mecânica dos Sólidos e Vibrações, do Departamento de Pesquisa e Pós-Graduação, do Campus de Curitiba, da UTFPR.

Orientador: Prof. Jucélio Tomás Pereira, *D.Sc.*

CURITIBA

MARÇO - 2008

TERMO DE APROVAÇÃO

JEFERSON RYUDI MATSUDA

ANÁLISE DE FADIGA EM MATERIAIS DÚCTEIS ATRAVÉS DE UMA FORMULAÇÃO LOCALMENTE ACOPLADA DA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do título de mestre em engenharia, área de concentração em Mecânica dos Sólidos e Vibrações, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais.

Prof. Neri Volpato, *Ph.D.*
Coordenador de Curso

Banca Examinadora

Prof. Rodrigo Rossi, *Dr. Eng. Mec*
(Universidade de Caxias do Sul)

Prof. Marco Antônio Luersen, *D.Sc.*
(UTFPR)

Prof. Carlos Alberto Bavastri, *D. Sc.*
(UTFPR)

Prof. Jucélio Tomás Pereira, *D. Sc.*
(UTFPR)

Curitiba, 17 de março de 2008

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Jucélio Tomás Pereira pela determinação em estudar uma nova área de pesquisa, pela paciência e pelo seu tempo em todas as reuniões e discussões e também por sua amizade e companheirismo.

À CAPES, que disponibilizou uma bolsa de estudos viabilizando assim a realização deste trabalho.

À UTFPR pela oportunidade de desenvolver esse trabalho.

Ao PPGEM – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Materiais que disponibilizou toda sua estrutura para o bom desenvolvimento do trabalho.

Aos meus pais por estar sempre me apoiando.

À minha esposa pela paciência e compreensão em todas as horas.

A todos aqueles, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

MATSUDA, Jeferson Ryudi, **Análise de fadiga em materiais dúcteis através de uma formulação localmente acoplada da Mecânica do Dano Contínuo**, 2008, Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

RESUMO

Os carregamentos variáveis, que se repetem em ciclos, são os principais responsáveis pela maioria das falhas dos componentes mecânicos, as falhas por fadiga. As atuais técnicas de predição de vida em fadiga tais como: tensão-número de ciclos, deformação-número de ciclos, mecânica da fratura e mecânica do dano são pouco eficientes para análises multiaxiais, carregamentos aleatórios e também de difícil implementação computacional. Neste trabalho é desenvolvida uma técnica para auxiliar a análise estrutural de componentes sob carregamentos repetitivos. A ferramenta computacional é baseada na Mecânica do Dano Contínuo (CDM), que é uma sub-área da mecânica do dano, utilizando a sua forma localmente acoplada. Nesta, o material é danificado em uma escala contínua, onde é realizada a divisão em duas escalas: meso e micro. A escala meso está relacionada ao elemento de volume representativo (RVE), que possui propriedades elásticas ou elastoplásticas. A escala micro, na qual o processo de integração das equações constitutivas é realizado, representa um ponto deste RVE e possui propriedades elastoplásticas e danificadas. Na corrente formulação é utilizado o critério de escoamento de von Mises e um encruamento cinemático. A implementação numérica da formulação discutida é realizada no software comercial Matlab. Com o objetivo de reduzir o tempo computacional, quando se aplica um grande número de ciclos, existe uma rotina de saltos em ciclos. Os resultados obtidos são apresentados e validados através de comparações com resultados encontrados na bibliografia. Uma ênfase é dada às análises das influências de alguns parâmetros materiais relacionados à formulação.

Palavras-chave: Mecânica do Dano, Início da Trinca, Fadiga, Salto em Ciclos.

MATSUDA, Jeferson Ryudi, **Análise de fadiga em materiais dúcteis através de uma formulação localmente acoplada da Mecânica do Dano Contínuo**, 2008, Dissertação (Mestrado em Engenharia) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

ABSTRACT

The variable loads, which are repeated in cycles, are the main responsible for most of the failures of mechanical components, the failures by fatigue. The current techniques for predicting fatigue life, such as tension-number of cycles, deformation-number of cycles, the fracture mechanics and damage mechanics, are not effective for multiaxial analysis, random loads and also are difficult for computational implementation. In this work a technique to help the structural analysis of components under repetitive loads is developed. The computational tool is based on Continuum Damage Mechanics (CDM), which is a sub-area of the damage mechanics, using a locally coupled form. In this form, the material is damaged in a continuous scale, where the performed is divided in two scales: meso and micro scales. The mesoscale is related to the representative volume element (RVE), which has the elastic or elastic-plastic properties. The microscale, in which the process of integration of the constitutive equations is performed, represents a point in the RVE which has elastic-plastic properties and damage. The von Mises criterion and a kinematic hardening is used in this formulation. The numerical implementation of the formulation discussed is accomplished in the Matlab software platform. In order to reduce the computational time, when a large number of cycles is applied, a jump-in-cycles routine is used. The results are presented and validated by comparisons with results found in the literature. An emphasis is given to analysis of the influence of some material parameters related to the formulation.

Keywords: Damage Mechanics, Crack Initiation, Fatigue, Jump in Cycles.

SUMÁRIO

RESUMO.....	iv
ABSTRACT	v
LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	xiv
LISTA DE SÍMBOLOS	xv
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Descrição do Problema	2
1.2 Organização do Trabalho.....	4
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1 Fadiga.....	5
2.1.1 Mecanismo de falha por fadiga	7
2.1.2 Modelos de falha por fadiga	9
2.2 Mecânica do Dano em Fadiga	21
2.2.1 Regra do dano linear	22
2.2.2 Teoria de dano não-linear de Marco-Starkey.....	23
2.2.3 Teoria de dano linear em dois estágios	23
2.2.4 Teorias baseadas na modificação da curva de vida S-N.....	23
2.2.5 Abordagens baseadas no crescimento da trinca	24
2.2.6 Mecânica do Dano Contínuo (CDM)	24
2.2.7 Teorias de dano baseadas em energia.....	25
2.2.8 Outras teorias de dano	25
2.3 Objetivos do Trabalho	26
3 ELASTOPLASTICIDADE.....	27
3.1 Critério de Escoamento.....	28
3.2 Carregamento e Descarregamento.....	31
3.3 Tensor de Deformação.....	32
3.4 Determinação do Estado de Carregamento Plástico	32
3.5 Potencial Plástico e Regra de Fluxo	34
3.6 Regra de Encruamento	35
3.6.1 Encruamento isotrópico.....	35
3.6.2 Encruamento cinemático.....	36
3.6.3 Encruamento misto.....	38
3.7 Satisfação da Condição de Consistência Durante um Incremento de Tensão.....	38
4 MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO	40
4.1 Aspectos Fenomenológicos do Dano.....	40

4.1.1	Variável dano.....	41
4.1.2	Tensão efetiva.....	42
4.1.3	Relação constitutiva.....	43
4.1.4	Critério de ruptura.....	44
4.1.5	Início do dano.....	45
4.1.6	Medida do dano.....	45
4.2	Termodinâmica do Dano.....	46
4.2.1	Variáveis de estado.....	46
4.2.2	Potencial de estado.....	47
4.2.3	Função de triaxialidade.....	51
4.2.4	Potencial de dissipação.....	52
4.2.5	Equação constitutiva acoplando deformação e dano.....	54
4.2.6	Análise multiaxial: início do dano e dano crítico.....	61
4.3	Modelo Cinético de Evolução do Dano.....	62
4.4	Análise Numérica do Dano.....	65
4.4.1	Análise desacoplada.....	65
4.4.2	Análise totalmente acoplada.....	66
4.4.3	Análise localmente acoplada.....	66
4.5	Mecânica do Dano Contínuo em Fadiga.....	69
4.5.1	Fadiga de baixo ciclo.....	69
4.5.2	Fadiga de alto ciclo.....	70
4.5.3	Fechamento de trinca.....	71
4.5.4	Salto em ciclos.....	73
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	76
5.1	Carregamento Monotônico.....	77
5.1.1	Simulação numérica para teste de tração uniaxial.....	79
5.1.2	Simulação numérica para teste de cisalhamento puro.....	80
5.1.3	Influência do encruamento cinemático saturado (X_∞).....	81
5.1.4	Influência do encruamento cinemático (γ).....	81
5.1.5	Discussões.....	82
5.2	Carregamento Cíclico sem Fechamento de Trinca.....	83
5.2.1	Resultados.....	84
5.2.2	Influência da energia de resistência ao dano, S	88
5.2.3	Influência do expoente de dano, s	90
5.2.4	Discussões.....	92
5.3	Salto em Ciclos até w_{1D}	92
5.3.1	Resultados.....	93
5.3.2	Discussões.....	94

5.4	Salto em Ciclos até D_c	95
5.4.1	Resultados.....	95
5.4.2	Discussões	97
5.5	Influência da Tensão Alternada.....	97
5.5.1	Resultados.....	97
5.5.2	Discussões	98
5.6	Influência da Seqüência de Carregamento	98
5.6.1	Resultados.....	99
5.6.2	Discussões	102
5.7	Carregamento Cíclico com Fechamento de Trinca.....	102
5.7.1	Resultados.....	103
5.7.2	Influência do parâmetro fechamento de trinca, h	106
5.7.3	Discussões	107
5.8	Influência da Tensão Média	107
5.8.1	Simulação numérica do ensaio de tração-compressão	107
5.8.2	Simulação numérica do ensaio de cisalhamento puro.....	108
5.8.3	Discussões	109
6	Conclusão.....	110
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros.....	111
	REFERÊNCIAS.....	112

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Carregamento harmônico.	1
Figura 1.2 - Carregamento aleatório.	1
Figura 2.1 - Nomenclatura para descrever os parâmetros envolvidos no teste de tensão cíclica (Adaptado de: NORTON, 2004).	6
Figura 2.2 - Relação da vida em fadiga nos estágios de iniciação e propagação (Adaptado de: HERTZBERG, 1996).	7
Figura 2.3 - Banda de deslizamento em fadiga (Adaptado de: ASM HANDBOOK, 1996).	8
Figura 2.4 - Curva $S - N$ característica (Adaptado de: NORTON, 2004).	10
Figura 2.5 - Definição das variáveis de um laço de histerese (Adaptado de: ASM HANDBOOK, 1996).	12
Figura 2.6 - Curvas de resistência à fadiga para ensaio com controle de deformação, ou seja, $\Delta\varepsilon$ constante (Adaptado de: ASM HANDBOOK, 1996).	13
Figura 2.7 - Modos de carregamento sobre uma trinca.	14
Figura 2.8 - Comprimento da trinca em fadiga x ciclos aplicados. Fratura é indicada por "x" (Adaptado de: FUCHS e STEPHENS, 1980).	15
Figura 2.9 - Curva de crescimento da trinca da/dN x ΔK (Adaptado de: HERTZBERG, 1996).	16
Figura 2.10 - Processo de crescimento da trinca (Adaptado de: IPIÑA, 2004).	17
Figura 2.11 - Curva de resistência ao crescimento da trinca (Adaptado de: IPIÑA, 2004).	18
Figura 2.12 - Método CTOD (modelo de Dugdale) (Adaptado de: IPIÑA, 2004).	19
Figura 2.13 - Contorno para o cálculo da integral J (Fonte: MIRANDA, 2003).	19
Figura 2.14 - Regra do dano linear e não linear (Adaptado de: FATEMI e YANG, 1998).	22
Figura 3.1 - Superfícies de escoamento de Tresca e de von Mises.	30

Figura 3.2 - Carregamento e descarregamento para um encruamento positivo.	31
Figura 3.3 - Ilustração esquemática do processo de carregamento elastoplástico (Fonte: PEREIRA, 1994).....	33
Figura 3.4 - Encruamento isotrópico (Fonte: PEREIRA, 1994).	36
Figura 3.5 - Encruamento cinemático (Fonte: PEREIRA, 1994).....	37
Figura 3.6 - Trajetória do ponto de tensão e incremento de tensão para satisfação da condição de consistência (Fonte: PEREIRA, 1994).	39
Figura 4.1 - Elemento de volume representativo em estado danificado (Fonte: GRUNWALD, 1996).	41
Figura 4.2 - Deformação equivalente (Adaptado de: LEMAITRE e CHABOCHE, 1990).	43
Figura 4.3 - Ensaio de tração monotônico, demonstrando as características dos encruamentos cinemático e isotrópico. (Adaptado de: LEMAITRE, 1996).....	54
Figura 4.4 - Modelo em 2 escalas (Adaptado de: LEMAITRE e DOGHRI, 1994).....	67
Figura 5.1 - Fluxograma com a descrição esquemática da corrente formulação.	77
Figura 5.2 - Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ experimental e analítico do Ferro Fundido em tração uniaxial. a) Fonte: HAYAKAWA <i>et al.</i> , 1998 b) Formulação corrente.....	79
Figura 5.3 - Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ experimental e analítico do Ferro Fundido em cisalhamento puro. a) Fonte: HAYAKAWA <i>et al.</i> , 1998 b) Formulação corrente.	80
Figura 5.4 - Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ do Ferro Fundido em tração uniaxial, mostrando a influência do parâmetro material X_{∞}	81
Figura 5.5 - Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ do Ferro Fundido em tração uniaxial, mostrando a influência do parâmetro material γ	82
Figura 5.6 - Histórico da deformação aplicada (ε_{11}) (Fonte: LEMAITRE e DOGHRI, 1994).	84
Figura 5.7 - Histórico da tensão equivalente de von Mises. a) Fonte: LEMAITRE e DOGHRI, 1994 b) Formulação corrente.....	85

Figura 5.8 - Gráfico $\sigma \times \varepsilon$. a) Fonte: LEMAITRE e DOGHRI, 1994 b) Formulação corrente.....	86
Figura 5.9 - Gráfico da deformação plástica acumulada (p) x número de ciclos e Dano (D) x número de ciclos. a) Fonte: LEMAITRE e DOGHRI, 1994 b) Formulação corrente.....	87
Figura 5.10 - Amplitude da deformação aplicada.....	88
Figura 5.11 - a) Influência de S na deformação plástica acumulada. b) Influência de S no número de ciclos para atingir o dano crítico ($s = 1$)	89
Figura 5.12 - a) Influência de S na deformação plástica acumulada. b) Influência de S no número de ciclos para atingir o dano crítico ($s = 1,5$)	90
Figura 5.13 - a) Influência de s na deformação plástica acumulada b) Influência de s no número de ciclos para atingir o dano crítico.....	91
Figura 5.14 - Amplitude da deformação aplicada.....	93
Figura 5.15 - Estabilização da variação da energia armazenada (w_s) em cada ciclo.	93
Figura 5.16 - Estabilização da deformação plástica acumulada (p) em cada ciclo.	94
Figura 5.17 - Estabilização da razão de dano (R_D)	95
Figura 5.18 - Estabilização da razão de deformação plástica acumulada (R_p).....	96
Figura 5.19 - Influência da tensão alternada na evolução do dano.....	98
Figura 5.20 - Influência da seqüência de carregamentos (485 MPa e 400 MPa). a) Fonte: DATTOMA <i>et al.</i> , 2006 b) Formulação corrente.....	100
Figura 5.21 - Influência da seqüência de carregamentos (450 MPa e 420 MPa) a) Fonte: DATTOMA <i>et al.</i> , 2006 (b) Formulação corrente.	101
Figura 5.22 - Amplitude da deformação aplicada.....	102

Figura 5.23 - Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ numérico sem fechamento de trinca ($h=1$). a) Fonte: GANCZARSKI e BARWACZ, 2007 b) Formulação corrente.	104
Figura 5.24 - Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ numérico e experimental, com fechamento de trinca ($h=0,2$). a) Fonte: GANCZARSKI e BARWACZ, 2007 b) Formulação corrente.	105
Figura 5.25 - a) Influência de h na deformação plástica acumulada. b) Influência de h no número de ciclos para atingir o dano crítico.	106
Figura 5.26 - Influência da tensão média em tração-compressão.	108
Figura 5.27 - Influência da tensão média em cisalhamento.	109

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Variáveis termodinâmicas (Adaptado de: BONORA, 1997).	47
Tabela 5.1 - Propriedades mecânicas do Ferro Fundido.	78
Tabela 5.2 - Propriedades mecânicas do Alumínio.	83
Tabela 5.3 - Comparativo de alguns resultados de simulações com diferentes valores de S , para $s = 1$	88
Tabela 5.4 - Comparativo de alguns resultados de simulações com diferentes valores de S , para $s = 1,5$	89
Tabela 5.5 - Comparativo de simulações com diferentes valores de s	91
Tabela 5.6 - Influência do número de saltos até w_{1D}	94
Tabela 5.7 - Influência do número de saltos até D_c	96
Tabela 5.8 - Influência da deformação alternada no número de ciclos para início da trinca.	97
Tabela 5.9 - Propriedades mecânicas da liga 30NiCrMoV12.	99
Tabela 5.10 - Propriedades mecânicas do aço Inox 316L.	103
Tabela 5.11 - Comparativo de simulações com diferentes valores de h	106
Tabela 5.12 - Número de ciclos (N) para atingir o dano crítico (D_c), em diferentes tensões alternadas (σ_a) e tensões médias (σ_m)	108
Tabela 5.13 - Número de ciclos (N) para atingir o dano crítico (D_c), em diferentes tensões alternadas (τ_a) e tensões médias (τ_m).	109

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- CDM - Mecânica do Dano Contínuo (*Continuum Damage Mechanics*)
- CTOD - Deslocamento de Abertura na Ponta da Trinca (*Crack Tip Opening Displacement*)
- FEA - Análise por Elementos Finitos (*Finite Element Analysis*)
- FEM - Método dos Elementos Finitos (*Finite Element Method*)
- MFLE - Mecânica da Fratura Linear Elástica
- MFEP - Mecânica da Fratura Elastoplástica
- RVE - Elemento de Volume Representativo (*Representative Volume Element*)

LISTA DE SÍMBOLOS

- $f(x)$ - Função da variável (x)
 $g(x)$ - Função da variável (x)
 $\dot{(x)}$ - Incremento infinitesimal da variável (x) no tempo
- a - Tamanho da trinca
 b - Parâmetro material da relação de Coffin-Manson
 b - Parâmetro material do encruamento isotrópico
 B - Parâmetro material da relação de Coffin-Manson
 c - Parâmetro material da relação de Coffin-Manson
 C - Parâmetro material da Lei de Paris
 C_{ijkl}^e - Componentes do tensor de rigidez constitutiva elástica
 da/dN - Taxa de crescimento da trinca
 ds - Elemento infinitesimal de arco
 d - Dimensão da micro trinca
 D - Dano isotrópico
 D_{int} - Dano da interação dos carregamentos
 D_n - Dano associado à direção normal n
 D_{pa} - Dano de pequenas amplitudes cíclicas
 D_{salto} - Valor do dano no final da rotina de salto em ciclos
 D_{sc} - Dano de sobrecarga
 D_0 - Dano inicial
 D_{1c} - Dano crítico unidimensional
 E - Módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young
 \tilde{E} - Módulo de elasticidade longitudinal efetivo
 f - Função de falha por escoamento
 F - Função potencial de dissipação
 F_a - Amplitude do carregamento
 F_D - Função potencial de dissipação do dano
 G - Módulo de elasticidade transversal
 G_c - Tenacidade do material

- G_Y - Taxa de liberação da energia de deformação (*strain energy release rate*)
 h - Parâmetro material de fechamento de trinca
 H - Função passo de Heaviside
 I_1 - Primeiro invariante do tensor de tensão
 J - Integral J
 J_C - Parâmetro material da integral J crítico
 J_2 - Segundo invariante do tensor desviador de tensão
 J_3 - Terceiro invariante do tensor desviador de tensão
 k_i - Parâmetro material na plasticidade
 K - Fator intensificador de tensão
 K_c - Fator intensificador de tensão crítico
 K_{th} - Fator intensificador de tensão limiar
 m - Parâmetro material da Lei de Paris
 M - Fator de escalonamento
 M - Parâmetro material da relação de Coffin-Manson
 n_{dano} - Número total de saltos até D_c , na rotina salto em ciclos
 n_i - Número de ciclos aplicados
 n_{pd} - Número total de saltos até ε_{pD} ou w_s , na rotina salto em ciclos
 N - Número de ciclos
 N_D - Número de ciclos para o dano atingir o dano crítico
 N_{estab} - Número do ciclo estabilizado
 N_0 - Número de ciclos para início do dano
 N_R - Número de ciclos para falha em fadiga
 N_{salto} - Número de ciclos a serem saltados
 N_{tr} - Número de ciclos de transição
 P - Deformação plástica acumulada
 P_{estab} - Deformação plástica acumulada no ciclo estabilizado
 P_{salto} - Valor da deformação plástica acumulada no final do salto
 p_i^k - Autovetores normalizados
 P_0 - Deformação plástica acumulada inicial
 r_t - Fator de carregamento
 r - Deformação plástica acumulada de dano

r_i	- Razão entre número de ciclos aplicados e totais
R	- Encruamento isotrópico
R_D	- Razão de dano
R_p	- Razão de deformação plástica acumulada
R_v	- Função de triaxialidade
R_∞	- Parâmetro material saturado do encruamento isotrópico
s_e	- Entropia
s_k	- Autovalores
s	- Expoente de dano
S	- Tensão no gráfico $S - N$
S	- Área da seção do elemento de volume
S	- Energia de resistência ao dano
S_D	- Área da seção do elemento de volume danificada
S_e	- Limite de fadiga do material
S_m	- Resistência à fadiga média
S_{UTS}	- Tensão última
\tilde{S}	- Área efetiva de resistência da seção do elemento de volume
t	- Tempo
T	- Temperatura
\vec{T}	- Vetor tração
\vec{u}	- Vetor deslocamento
w_e	- Densidade de energia de deformação elástica
w_s	- Energia armazenada
w_{1D}	- Energia armazenada de início de dano uniaxial
W	- Densidade de energia de deformação
X^D	- Tensor de tensão de retorno
X_∞	- Parâmetro material saturado do encruamento cinemático
Y	- Taxa de liberação da densidade de energia de deformação
Y_c	- Taxa de liberação da densidade de energia de deformação crítico
α	- Tensor de deformação de retorno (<i>back strain tensor</i>)
α_i	- Expoente da teoria de dano não-linear de Marco-Starkey

β	- Parâmetro material da Lei de Eshelby-Kröner
Γ	- Trajetória de integração
δ	- Abertura da ponta da trinca na MFEP
δ_c	- Abertura da ponta da trinca na MFEP crítico
δ_{ij}	- Tensor delta de Kronecker
ε	- Tensor de deformação total
ε_H^e	- Tensor de deformação elástica hidrostática
ε_{ij}	- Componentes do tensor de deformação
ε_{ij}^e	- Componentes do tensor de deformação elástica
ε_{ij}^{eD}	- Componentes do tensor de deformação elástica desviadora
ε_{ij}^p	- Componentes do tensor de deformação plástica
ε_{pD}	- Deformação plástica para início do dano uniaxial
γ	- Parâmetro material do encruamento cinemático
λ	- Multiplicador plástico
ν	- Coeficiente de Poisson
σ_a	- Tensão aplicada
σ_{eq}	- Tensão equivalente
σ_f	- Tensão limite de fadiga
σ_H	- Tensão hidrostática
σ_i	- Tensões principais
σ_{ij}	- Componentes do tensor de tensão de Cauchy
σ_{ij}^D	- Componentes do tensor de tensão desviador
σ_{ij}^e	- Componentes do tensor de tensão elástico
σ_m	- Tensão média
$\sigma_{m\acute{a}x}$	- Tensão máxima
$\sigma_{m\acute{i}n}$	- Tensão mínima
σ_R	- Tensão de ruptura
σ_S	- Tensão da camada superficial
σ_{Tr}	- Tensão equivalente de Tresca
σ_{uts}	- Tensão última
σ_{VM}	- Tensão equivalente de von Mises
σ_y	- Tensão de escoamento

- σ_{∞} - Tensão máxima para falha na meso-escala
- $\tilde{\sigma}_{ij}$ - Componentes do tensor de tensão efetiva
- τ_{oct} - Tensão cisalhante octaédrica
- ψ - Energia livre específica de Helmholtz
- $\frac{\partial p}{\partial N}$ - Incremento da deformação plástica acumulada no ciclo
- $\frac{\partial D}{\partial N}$ - Incremento de dano no ciclo

1 INTRODUÇÃO

Os carregamentos variáveis estão presentes em muitas estruturas, desde máquinas rotativas caracterizadas essencialmente por uma função de carregamento quase harmônico (Figura 1.1), com frequência e amplitude relativamente constantes, até equipamentos de serviço que apresentam um carregamento aleatório (Figura 1.2). Estes carregamentos variáveis no tempo são os principais responsáveis pela maioria das falhas dos componentes mecânicos, as falhas por fadiga. O termo fadiga foi criado entre 1840 e 1850 para descrever quebras que ocorriam por carregamentos repetitivos e é utilizado até hoje com este mesmo significado.

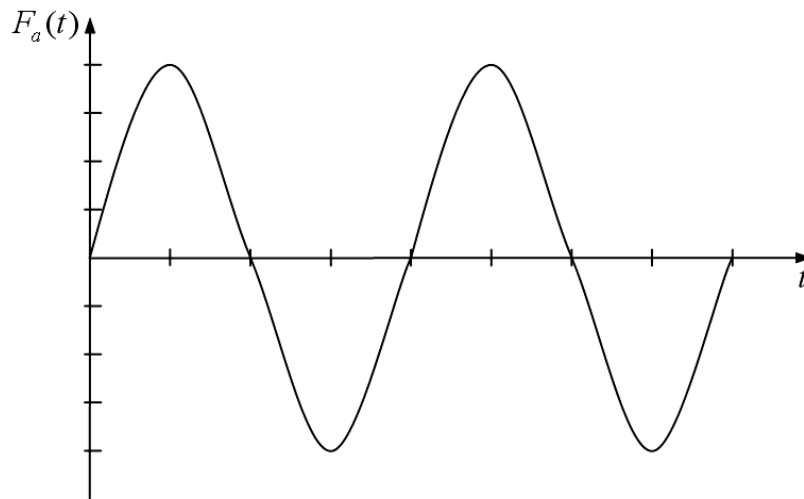


Figura 1.1 - Carregamento harmônico.

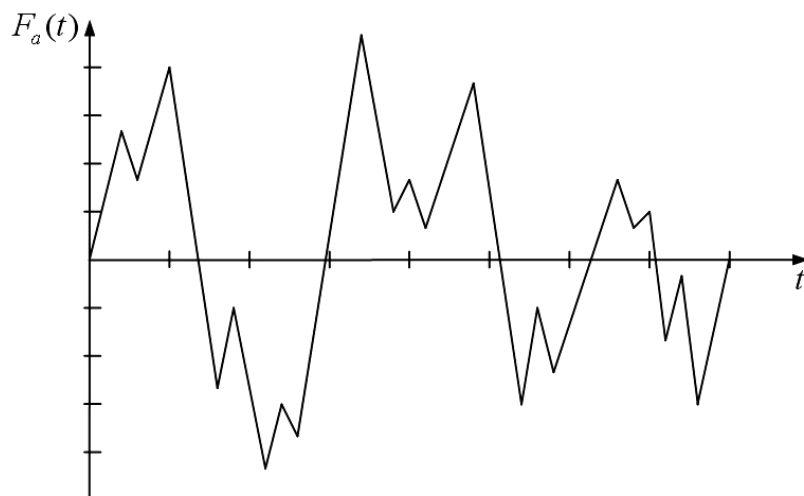


Figura 1.2 - Carregamento aleatório.

A partir de meados do século XIX, foram iniciados os desenvolvimentos na área de fadiga. Por volta de 1860, o engenheiro alemão A. Wohler sugeriu uma forma de dimensionar uma estrutura para resistir a esforços repetitivos, tendo como base uma combinação entre tensão e número de ciclos e criando o conceito de fadiga de alto ciclo. Posteriormente, J. Goodman elaborou metodologias que descreviam a influência da tensão média sobre a fadiga.

Por volta de 1945, M. A. Miner descreveu a regra do dano acumulado e, em 1954, surgiu o conceito de fadiga de baixo ciclo, descrita pelos pesquisadores L. F. Coffin e S. S. Manson e cujos modelos relacionam a deformação com o número de ciclos.

Os dados dos modelos, citados anteriormente, são gerados para carregamentos harmônicos, o que nem sempre acontece na prática. Isso, pois, muitas estruturas podem estar sujeitas a carregamentos não harmônicos, não periódicos ou ainda aleatórios. Nessas situações, é comum o emprego de métodos de contagem de ciclos cujo objetivo principal é comparar, de uma forma aproximada, o efeito dos carregamentos irregulares com as curvas obtidas com cargas simples e repetidas uniformemente. Os principais métodos de contagem são: Método *Range Pair*, Método *Rainflow* e o Método *Racetrack* (FUCHS e STEPHENS, 1980).

Uma outra abordagem para o estudo de carregamentos não harmônicos, é através das teorias da mecânica do dano, as quais contabilizam o dano gerado por cada uma das partes do carregamento, e descreve a relativa importância da interação dos carregamentos com o dano mecânico.

1.1 Descrição do Problema

Com base no fato de que a maioria das falhas acontecem não devido a carregamentos estáticos, mas sim por carregamentos variáveis no tempo, é de grande importância para o projeto de uma máquina ou componente, que se leve em consideração estes carregamentos com a maior precisão possível.

Atualmente são mais utilizados os seguintes modelos de falha por fadigas:

- O modelo tensão-número de ciclos ($S - N$);
- O modelo deformação-número de ciclos ($\varepsilon - N$);

- Os modelos da mecânica da fratura;
- Os modelos da mecânica do dano.

As abordagens com tensão e/ou deformação controlados estudam a falha por fadiga de uma maneira geral, onde a vida N de um componente refere-se ao número de ciclos de carregamento aplicado nos processos de iniciação e propagação da trinca. A mecânica da fratura estuda apenas a fase de propagação da trinca e é empregada, geralmente, nas análises de ensaios não destrutivos. Estas técnicas são melhor apresentadas no Capítulo 2 e em textos clássicos como NORTON (2004), SHIGLEY *et al.* (2005) e ASM HANDBOOK (1996).

Atualmente existem muitas teorias de dano, sendo que a mais utilizada, apesar das suas limitações, é a regra linear de Palmgren-Miner. Esta regra se constitui em uma boa aproximação quando se têm vários carregamentos com diferentes amplitudes.

Os modelos acima citados são largamente utilizados para estimar falhas em materiais homogêneos, elásticos e elastoplásticos, e considerando carregamento unidimensional e harmônico. Porém, para analisar os problemas encontrados freqüentemente na engenharia como, por exemplo, análise da dinâmica estrutural em veículos, máquinas e equipamentos em geral, nos quais os carregamentos precisam levar em consideração outros efeitos fenomenológicos como a multiaxialidade do estado de tensões, ou o fato das amplitudes serem variadas, existe a necessidade de uma outra abordagem.

Uma abordagem recente foi proposta por KACHANOV (1986) e é denominada Mecânica do Dano Contínuo. Naquela, é construída uma função escalar (ou tensorial) que contabiliza o dano mecânico do material e é distribuída continuamente sobre o domínio. A forma de contabilização do dano é fortemente dependente das características do material e do carregamento. Têm-se, assim, formulações para dano dúctil, frágil, quase-frágil, fadiga e fluência (LEMAITRE e CHABOCHE, 1990, LEMAITRE e DESMORAT, 2005).

Segundo KRAJCINOVIC (2000), é crescente o interesse pelo estudo nesta área e, apesar de não ser ainda freqüentemente utilizado na indústria, já existem alguns resultados significativos. Para o autor citado, existem alguns pontos que precisam ser melhor explorados, como por exemplo: a caracterização experimental do dano, a validação das funções e seus potenciais. Com isso, após a Mecânica do

Dano demonstrar a sua confiabilidade, é possível mostrar para os setores de projeto da comunidade industrial o seu real valor.

1.2 Organização do Trabalho

Este trabalho é baseado nos conceitos da Mecânica do Dano Contínuo, e apresenta como objetivo a implementação numérica de uma técnica de análise de falha por fadiga em componentes mecânicos, aplicável a carregamentos multiaxiais e com amplitudes e freqüências variadas. Uma descrição mais detalhada dos objetivos do trabalho é apresentada no final do Capítulo de revisão bibliográfica.

Para se alcançar os objetivos, esse texto busca apresentar as bases do desenvolvimento do trabalho em questão.

O Capítulo 2 descreve inicialmente a falha por fadiga dos materiais, e é composto também de uma revisão dos principais mecanismos que estudam este tipo de falha.

Devido a grande influência da plasticidade na Mecânica do Dano, o Capítulo 3 mostra, de uma maneira detalhada, os principais pontos desta análise.

O Capítulo 4 aborda a Mecânica do Dano Contínuo, descrevendo seus aspectos fenomenológicos, as leis de evolução das variáveis envolvidas e, especialmente, a Mecânica do Dano Contínuo em fadiga.

No Capítulo 5 são apresentados e discutidos alguns resultados obtidos, e no Capítulo 6, apresentam-se as conclusões finais.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Fadiga

Fadiga é um processo de degradação estrutural, característica de componentes submetidos a carregamentos variáveis com o tempo. Como muitas vezes a falha ocorre abaixo dos limites elásticos de resistência, o estudo de fadiga é de grande importância a fim de não comprometer a integridade estrutural.

Quando o número de ciclos que causa a falha do material é superior a 10^5 (LEMAITRE, 1996, SHIGLEY *et al.* 2005), a fadiga é denominada fadiga de alto ciclo. Quando o número de ciclos é inferior a estes valores tem-se a fadiga de baixo ciclo. Este valor é adotado apenas como uma referência, existindo uma variação para cada material, pois depende das deformações elásticas e plásticas envolvidas no processo.

Entre os principais fatores que devem ser levados em consideração em um carregamento dinâmico para a análise de fadiga, pode-se citar:

- **DEPENDÊNCIA DO CARREGAMENTO:** Assim como nos carregamentos estáticos (monotônicos), a amplitude do carregamento (F_a) está diretamente ligada a vida em fadiga dos materiais. Quanto menor a amplitude, maior será a vida do componente. Além disso, o tipo de carregamento, se ele é uniaxial ou multiaxial também é de grande influência na vida do componente.
- **MÚLTIPLOS ESTÁGIOS DE DANO:** Geralmente, a amplitude dos carregamentos é alterada com o passar do tempo, pois os componentes vão estar sujeitos a diferentes carregamentos durante sua vida. Isso caracteriza múltiplos estágios de carregamento, os quais irão danificar a estrutura diferentemente.
- **SEQÜÊNCIA DE CARREGAMENTOS E EFEITOS DE INTERAÇÃO:** Estes dois fatores estão fortemente relacionados pois, num carregamento de múltiplos estágios, as seqüências de carregamento de menor amplitude para maior, ou vice-versa, terão resultados diferentes, devido aos efeitos de interação destes carregamentos.

• TENSÕES MÉDIAS (σ_m): Considerando um carregamento cíclico padrão (Figura 2.1), esta tensão é a média entre os valores máximo ($\sigma_{máx}$) e mínimo ($\sigma_{mín}$) de tensões. A tensão média está diretamente relacionada com o tipo de carregamento que, de uma forma geral, pode ser:

- Alternado, quando a tensão média é nula;
- Pulsante, quando a tensão média é diferente de zero e a tensão mínima é zero;
- Flutuante, quando a tensão média é diferente de zero e a tensão mínima é maior do que zero.

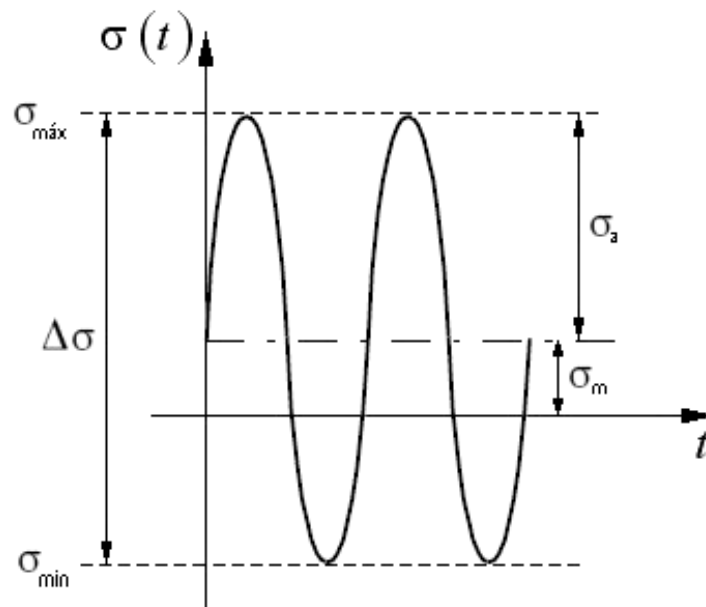


Figura 2.1 - Nomenclatura para descrever os parâmetros envolvidos no teste de tensão cíclica (Adaptado de: NORTON, 2004).

As tensões médias influenciam na vida em fadiga, pois alteram significativamente o tipo de carregamento. Por exemplo, quando uma componente de tensão média de tração é somada à componente alternada, o material apresenta falhas com tensões alternadas inferiores às ocorridas sob um carregamento puramente alternado (NORTON, 2004).

Além destes fatores também existem: evolução do dano não-linear, efeitos de sobre-carga, pequenas amplitudes cíclicas e outros.

2.1.1 Mecanismo de falha por fadiga

As falhas por fadiga têm o seu processo dividido basicamente em três estágios: início da trinca, propagação da trinca e ruptura repentina, sendo que o último estágio apresenta apenas uma parte muito pequena da vida da peça, o que pode ser observado na Figura 2.2. Esta figura é apenas esquemática, onde N_p é o número de ciclos para propagação, e N_i o número de ciclos para iniciação da trinca.

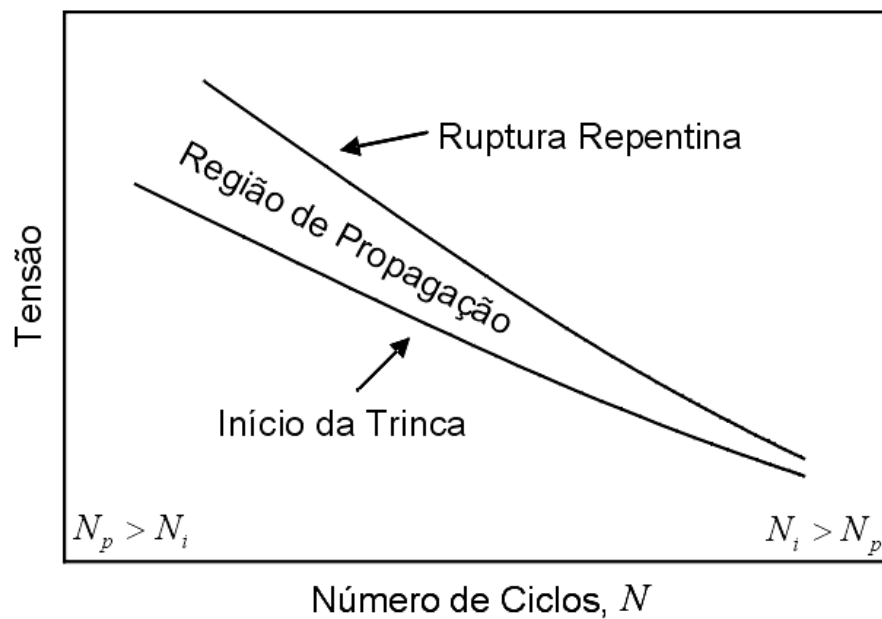


Figura 2.2 - Relação da vida em fadiga nos estágios de iniciação e propagação (Adaptado de: HERTZBERG, 1996).

O processo de início da trinca pode ainda ser dividido em iniciação das micro-trincas, crescimento destas micro-trincas e formação da macro-trinca. O início das micro-trincas, que ocorre na superfície do material, geralmente se desenvolve através de irregularidades presentes devido ao processo de fabricação ou de manufatura, ou através de micro-partículas, inclusões, vazios ou poros, que agem como micro-concentradores de tensão geométricos. Conforme as tensões nos concentradores oscilam, ocorre escoamento localizado, pois as tensões nestes pontos são mais elevadas que a tensão nominal da seção. A deformação plástica causa distorções e cria bandas de deslizamento, com intrusões e extrusões da ordem de $0,1 \mu m$ (FUCHS e STEPHENS, 1980), ao longo dos contornos dos cristais (Figura 2.3).

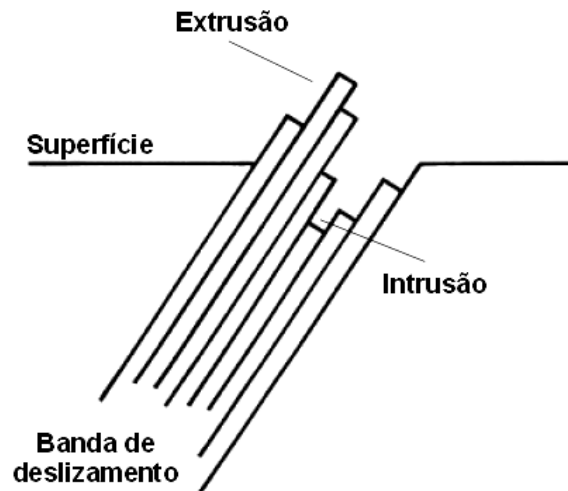


Figura 2.3 - Banda de deslizamento em fadiga (Adaptado de: ASM HANDBOOK, 1996).

A medida que os ciclos de tensão ocorrem, novas bandas aparecem agrupando-se em trincas microscópicas. Se as condições continuarem, as micro-trincas tenderão a crescer e formarão as macro-trincas, capazes de serem visualizadas pelos ensaios não destrutivos.

Existindo as macro-trincas, os mecanismos de fratura entram em funcionamento. As trincas mais pontiagudas criam concentradores de tensões maiores, desenvolvendo assim uma zona plástica em sua extremidade (ponta da trinca) e a cada ciclo de tensão poderá ocorrer um aumento do tamanho da mesma.

A trinca tende a crescer até tornar-se grande o suficiente e atingir um valor crítico. Quando isso ocorre, a falha vai ocorrer quase instantaneamente.

Segundo LEMAITRE e CHABOCHE (1990), VOYIADJIS e KATTAN (2005), o estudo da fadiga pode ser dividido em duas grandes áreas: Mecânica do Dano, que analisa a fase de iniciação das macro-trincas, e a Mecânica da Fratura, que estuda o processo de propagação das mesmas.

Como observado na Figura 2.2, o nível de carregamento pode influenciar no número de ciclos das fases de uma fratura por fadiga. Além deste fator existem outros, dos quais pode-se citar os defeitos metalúrgicos preexistentes, que podem reduzir drasticamente o estágio de iniciação (HERTZBERG, 1996).

2.1.2 Modelos de falha por fadiga

Nesta seção são apresentados os principais métodos existentes de análise de falha por fadiga. Os métodos são descritos de uma forma resumida, apenas com a finalidade de expor a sua existência e o seu funcionamento. Para uma descrição mais detalhada, recomendam-se alguns textos como: ASM HANDBOOK (1996), FUCKS e STEPHENS (1980), HERTZBERG (1996), IPIÑA (2004), LEMAITRE e DESMORAT (2005), NORTON (2004), SHIGLEY *et al.* (2005) entre outros.

2.1.2.1. Modelo de falha tensão-número de ciclos

Adequada em aplicações de fadiga de alto ciclo, proporcionando bons resultados quando a amplitude das solicitações é conhecida. O modelo tem como base o valor da tensão e busca determinar a resistência à fadiga e/ou o limite de fadiga.

O modelo citado, proposto por Wöhler, relaciona a resistência à fadiga do corpo de prova (S) e o número de ciclos aplicados (N) da seguinte forma

$$S = \frac{C}{N^\beta}, \quad (2.1)$$

sendo C e β parâmetros característicos do material.

Em uma escala logarítmica, a Equação 2.1 é escrita na forma

$$\log S = \log \frac{C}{N^\beta} = \log C - \beta \log N, \quad (2.2)$$

a qual descreve uma relação linear entre S e N . A Equação (2.2) pode ser representada graficamente, como na Figura 2.4, e é conhecida como diagrama $S-N$ ou curva de Wöhler. Esta forma de diagrama é válida somente para materiais ferrosos, pois estes possuem um limite em fadiga definido (NORTON, 2004). Para materiais não-ferrosos a curva de Wöhler também é válida, porém não existe um limite de fadiga.

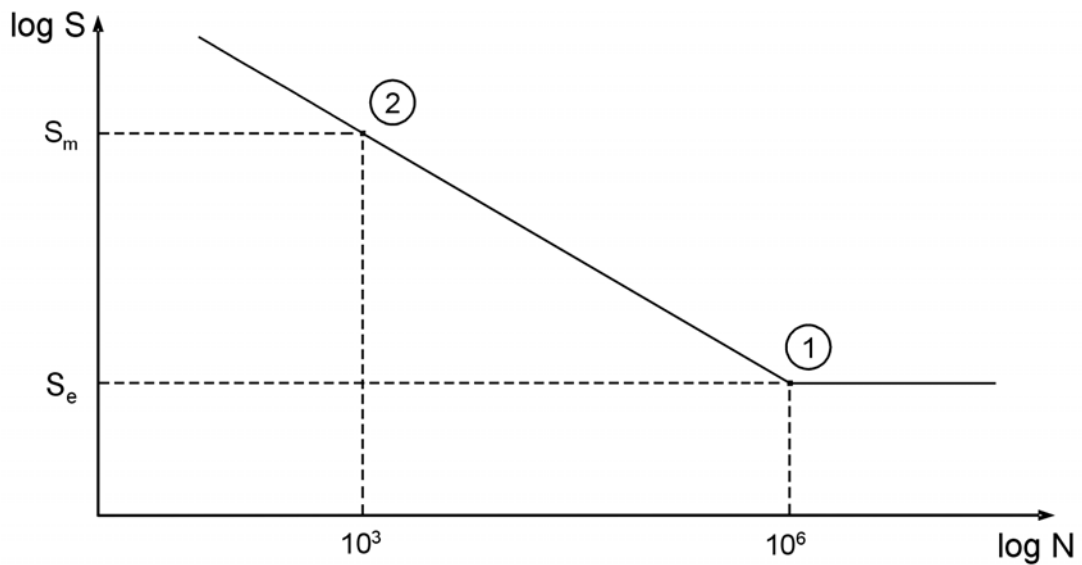


Figura 2.4 - Curva $S - N$ característica (Adaptado de: NORTON, 2004).

Para os aços, a obtenção dessa curva exige a marcação de dois pontos característicos:

- Ponto 1: $(N = 10^6) \times (S = S_e)$.

Conhecendo o tipo de carregamento e através de ensaios de medição obtém-se o limite de fadiga do material S_e , que é a máxima tensão que o corpo de prova resiste a 10^6 ciclos de carregamentos sem ocorrer fratura. Se não for possível obter estes dados experimentalmente, pode-se fazer uma estimativa. NORTON (2004) propõe utilizar:

$$S_e = 0,5 S_{UTS} \quad \text{para } S_{UTS} \leq 1400\text{MPa}$$

$$\text{e } S_e = 700\text{MPa} \quad \text{para } S_{UTS} > 1400\text{MPa},$$

sendo S_{UTS} a tensão última do material.

- Ponto 2: $(N = 10^3) \times (S = S_m)$.

O segundo ponto a ser calculado é o valor médio da resistência à fadiga em baixos ciclos S_m . Estes valores também podem ser estimados por NORTON (2004):

$$\text{Flexão:} \quad S_m = 0,9 S_{UTS},$$

$$\text{Força Normal:} \quad S_m = 0,75 S_{UTS}.$$

Com estes 2 pontos é possível obter o valor dos parâmetros C e β (Equação (2.3)), traçar o gráfico $S - N$ e estimar a vida em fadiga (N) de um componente para uma dada tensão (S).

As resistências à fadiga obtidas em ensaios com corpos de prova padrão ou de estimativas baseadas em testes estáticos devem ser modificadas para considerar, em seus valores finais, diferenças entre o ensaio padrão e a peça real. As principais diferenças são: acabamento superficial, tamanho, confiabilidade, temperatura, geometria e carga. A modificação é feita através da multiplicação do limite em fadiga S_e por coeficientes que contabilizam cada uma das diferenças (SHIGLEY *et al.*, 2005).

Quando existem tensões médias envolvidas, aquele modelo pode ser adaptado através de várias curvas. Dentre estas, a mais utilizada é o diagrama de Goodman, o qual fornece o valor da tensão puramente alternada que produz o mesmo efeito que a tensão aplicada (σ_a) e a tensão média (σ_m) combinadas.

Por outro lado, para estados multiaxiais não existe uma função escalar das componentes de tensão, para comparar com o limite em fadiga em tração S_e . Nesses casos, pode-se fazer uma aproximação considerando alguns dos vários critérios difundidos na literatura: critério de Sines (ASM HANDBOOK, 1996, FUCKS e STEPHENS, 1980), critério de Dang Van (ASM HANDBOOK, 1996), critério da Tensão Equivalente de Dano (LEMAITRE e DESMORAT, 2005), entre outros (PAPADOPOULOS *et al.*, 1996, GONÇALVES, 2006).

2.1.2.2. Modelo de falha deformação-número de ciclos

Nos casos de carregamento relativamente elevados, a iniciação da trinca envolve escoamento. Nesses casos, um modelo baseado em deformação fornece uma visão mais precisa do estágio de iniciação da trinca. O modelo deformação-número de ciclos é aplicado com maior frequência nos regimes de baixo ciclo e em problemas de vida finita.

A resistência à fadiga de zonas plásticas confinadas pode ser estimada pelo ensaio de corpos de prova sob níveis controlados de deformação. Neste tipo de

ensaio, a deformação cíclica é mantida constante, sendo medida por extensômetros instalados no corpo de prova.

Conhecidos a faixa de deformação total aplicada ($\Delta\varepsilon$), a tensão máxima do ciclo (σ_a) e o limite de escoamento do material, é possível decompor essa deformação em suas parcelas elástica (ε_e) e plástica (ε_p). Estes valores são obtidos a partir do laço de histerese estabilizado (Figura 2.5). Com isso, pode-se correlacionar cada uma dessas parcelas com a vida do corpo de prova.

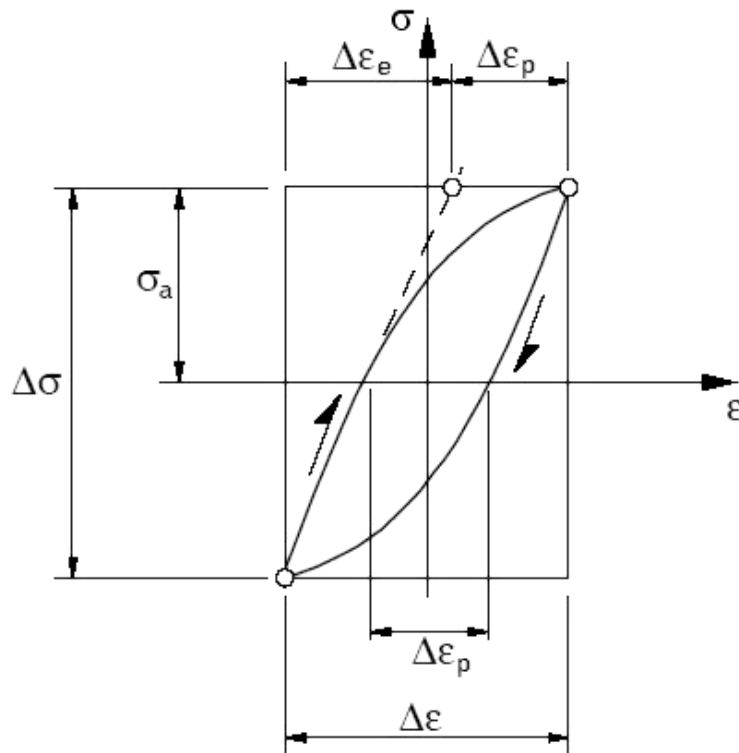


Figura 2.5 - Definição das variáveis de um laço de histerese (Adaptado de: ASM HANDBOOK, 1996).

As curvas típicas do modelo descrito estão ilustradas na Figura 2.6. Nota-se que, em um gráfico log-log, estas curvas são aproximadamente linhas retas. A curva correspondente à faixa de deformação total é a soma das curvas da deformação elástica e plástica.

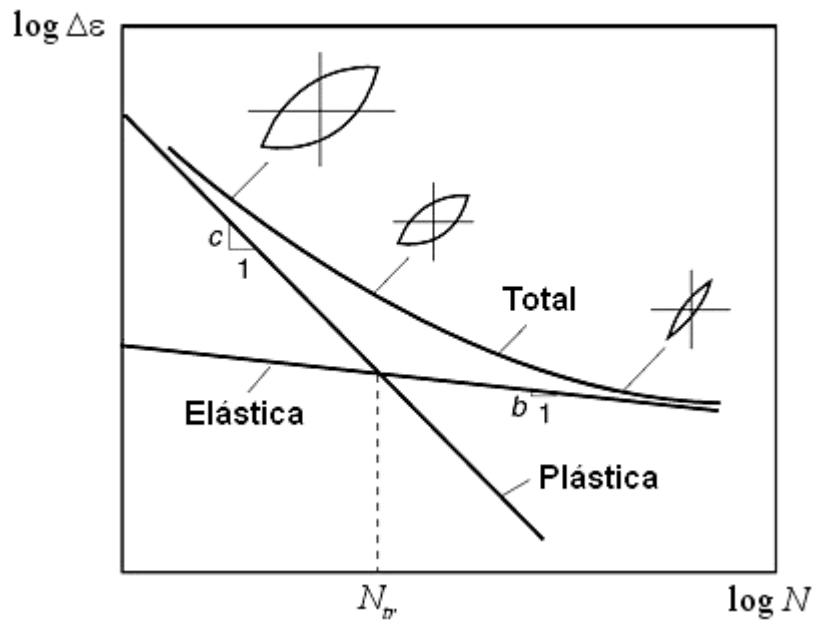


Figura 2.6 - Curvas de resistência à fadiga para ensaio com controle de deformação, ou seja, $\Delta\varepsilon$ constante (Adaptado de: ASM HANDBOOK, 1996).

A dependência da vida do material (N_R) com a faixa de deformação plástica ($\Delta\varepsilon_p$), proposta separadamente por L. F. Coffin e S. S. Manson, chamada posteriormente de relação de Coffin-Manson, é relacionada por (SHIGLEY *et al.*, 2005):

$$\Delta\varepsilon_p = MN_R^c. \tag{2.4}$$

Nesse caso N_R é o número de ciclos para a falha e M e c são constantes que dependem essencialmente do material. A equação (2.4) é uma reta em escala logarítmica, como mostra a Figura 2.6.

Quanto à componente elástica ($\Delta\varepsilon_e$) da faixa de deformação total, uma equação similar à anterior ajusta-se adequadamente aos dados experimentais:

$$\Delta\varepsilon_e = BN_R^b, \tag{2.5}$$

sendo B e b também parâmetros materiais.

A faixa de deformação total é obtida somando-se as duas parcelas ($\Delta\varepsilon_e$ e $\Delta\varepsilon_p$).

Ou seja,

$$\Delta\varepsilon = BN_R^b + MN_R^c. \tag{2.6}$$

O ponto no qual $\Delta\varepsilon_e = \Delta\varepsilon_p$ é denominado ponto de transição para os regimes de fadiga de baixo ciclo e fadiga de alto ciclo, e a partir deste se define o número de ciclos de transição N_{tr} (Figura 2.6).

A obtenção dos parâmetros M , c , B e b das Equações (2.4) e (2.5), via de regra, é realizada pelo Método das Inclinações Universais, proposto por Manson (FUCHS e STEPHENS, 1980).

2.1.2.3. Mecânica da fratura linear elástica (MFLE)

A MFLE estuda o fenômeno da propagação das trincas, a partir de uma trinca pré-existente. Sua formulação utiliza apenas o fator intensificador de tensões K e seus valores críticos e limites para estudo. O modelo de falha da MFLE é empregado quando não existe deformação plástica apreciável acompanhando à fratura.

Segundo Irwin (IPIÑA, 2004), o fator intensificador de tensão (K) é função da configuração da trinca (tamanho e localização) e da maneira com que as forças são aplicadas sobre esta, que caracteriza os modos de carregamento (Figura 2.7):

- Modo I: Abertura da ponta da trinca.
- Modo II: Cisalhamento.
- Modo III: Rasgamento.

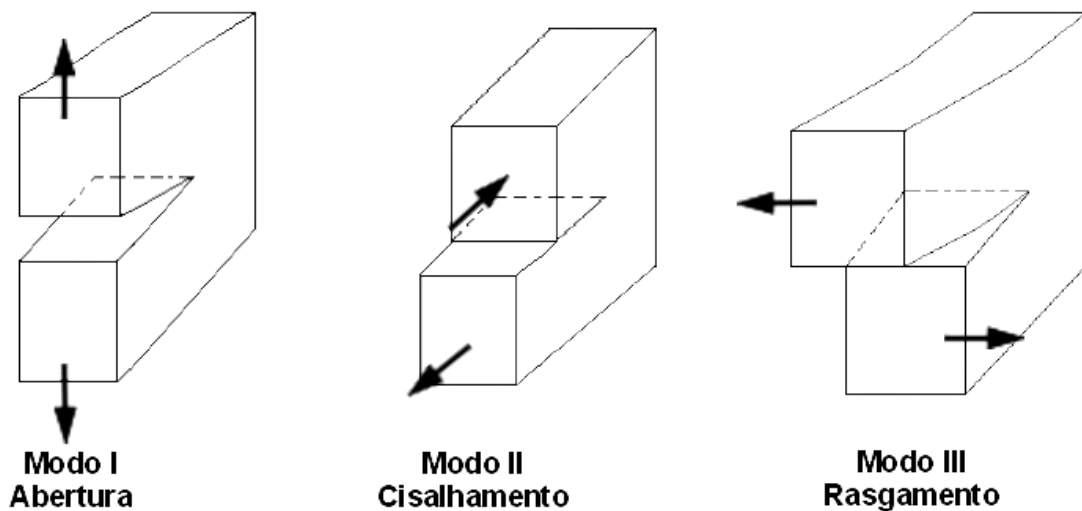


Figura 2.7 - Modos de carregamento sobre uma trinca.

Na prática o modo I é o mais estudado, e por conseqüência o mais encontrado na literatura (IPIÑA, 2004).

Para utilizar a MFLE em fadiga, deve-se quantificar o crescimento de uma trinca em relação ao número de ciclos aplicados. Com isso, obtém-se a Figura 2.8 que é um gráfico número de ciclos (N) x tamanho da trinca (a) e mostra três curvas do mesmo material com diferentes níveis de tensões $S_1 > S_2 > S_3$. Todos os corpos de prova contêm o mesmo comprimento de trinca inicial e o nível mínimo de tensão igual a zero. É consenso na bibliografia que a vida em fadiga depende do tamanho da trinca inicial, da magnitude da tensão e da resistência à fratura do material (HERTZBERG, 1996, GDOUTOS, 1993).

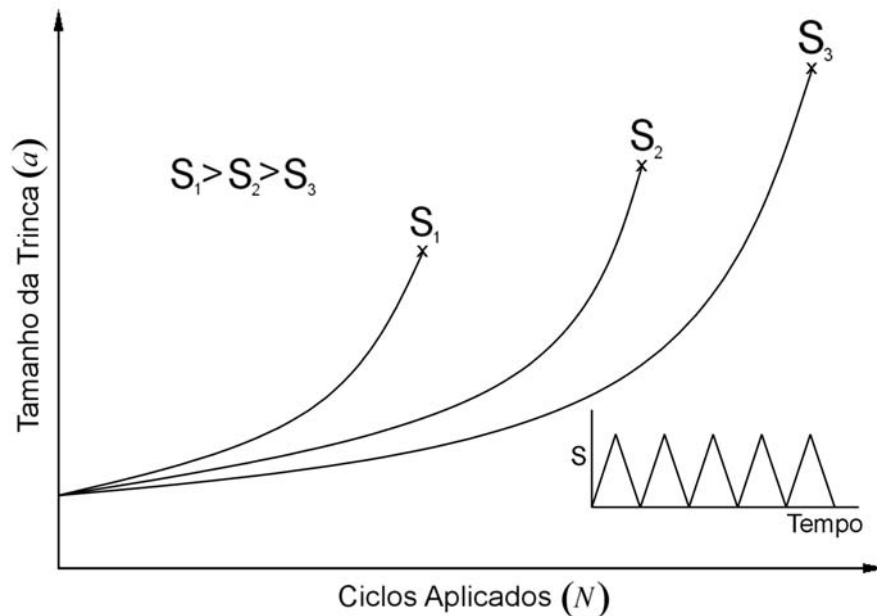


Figura 2.8 - Comprimento da trinca em fadiga x ciclos aplicados. Fratura é indicada por "x" (Adaptado de: FUCHS e STEPHENS, 1980).

Os dados da Figura 2.8 não podem ser facilmente utilizados na MFLE, exceto para a mesma condição obtida dos dados. Para isso, é mais interessante a obtenção do gráfico taxa do crescimento da trinca (da/dN) x variação do fator intensificador de tensão (ΔK), apresentado na Figura 2.9. Neste gráfico, notam-se três regiões distintas:

- Região I: Não existe propagação da trinca para valores de ΔK menores do que ΔK_{th} (valor limiar). Isto indica que é necessário um certo valor do fator intensidade de tensão para que a trinca se propague.

- Região II: Apresenta uma relação linear entre $\log(\Delta K) \times \log(da/dN)$, no qual P. C. Paris propôs a seguinte relação

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m, \tag{2.7}$$

que é conhecida como Lei de Paris. As constantes C e m são características de cada material.

- Região III: Crescimento instável da trinca. A partir de um parâmetro material K_c , denominado fator intensificador de tensão crítico, ocorre a fratura final.

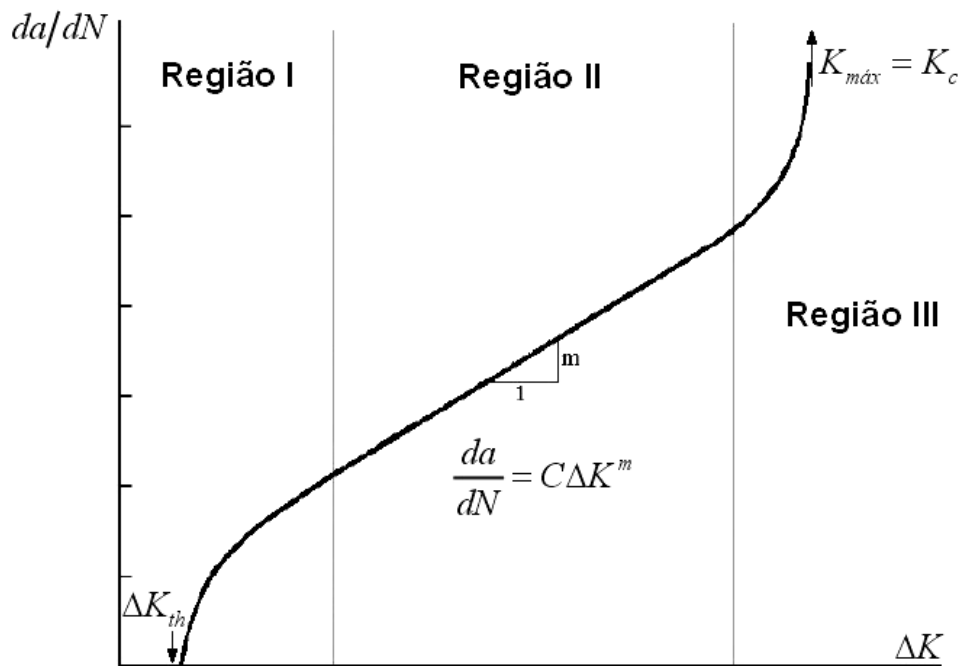


Figura 2.9 - Curva de crescimento da trinca $da/dN \times \Delta K$ (Adaptado de: HERTZBERG, 1996).

2.1.2.4. Mecânica da fratura elastoplástica (MFEP)

A mecânica da fratura elastoplástica estuda situações onde a fratura ocorre depois de uma deformação plástica significativa, relacionando para tal a tensão nominal, o tamanho da trinca e a tenacidade do material, independentemente da geometria do componente. Tomando-se como base a Figura 2.10, o processo de desenvolvimento de uma fratura dúctil se divide nos seguintes passos (IPIÑA, 2004):

- Criação da trinca pontiaguda;
- Arredondamento da ponta desta trinca.
- Desenvolvimento de uma nova ponta aguda.
- Crescimento estável desta trinca.
- Crescimento instável da trinca até a fratura.

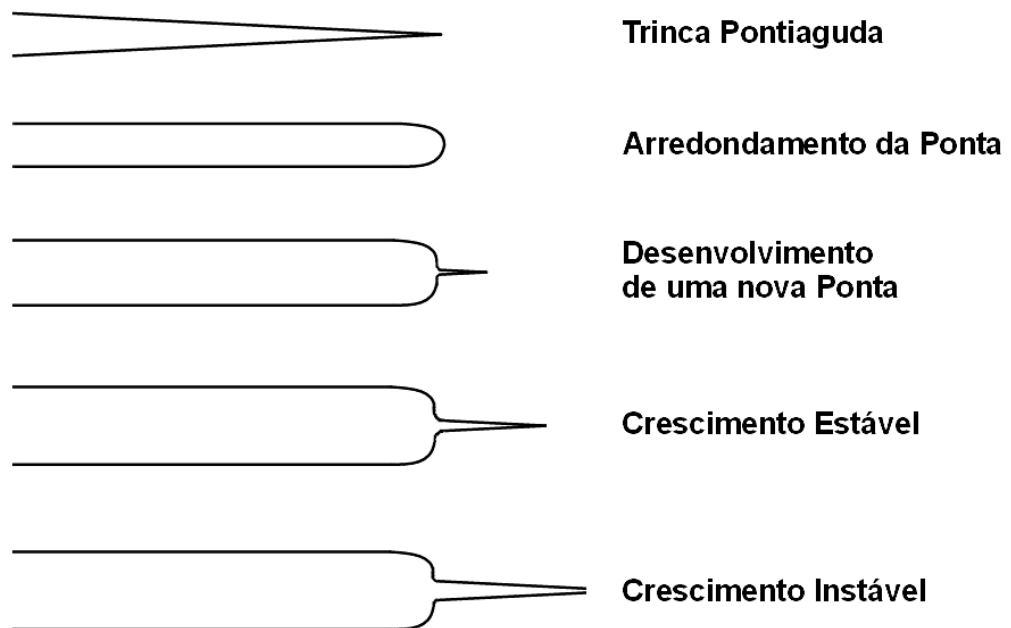


Figura 2.10 - Processo de crescimento da trinca (Adaptado de: IPIÑA, 2004).

Este processo pode ser representado por uma curva de resistência ao crescimento da trinca, que representa a tenacidade como função do crescimento dúctil da trinca (Figura 2.11).

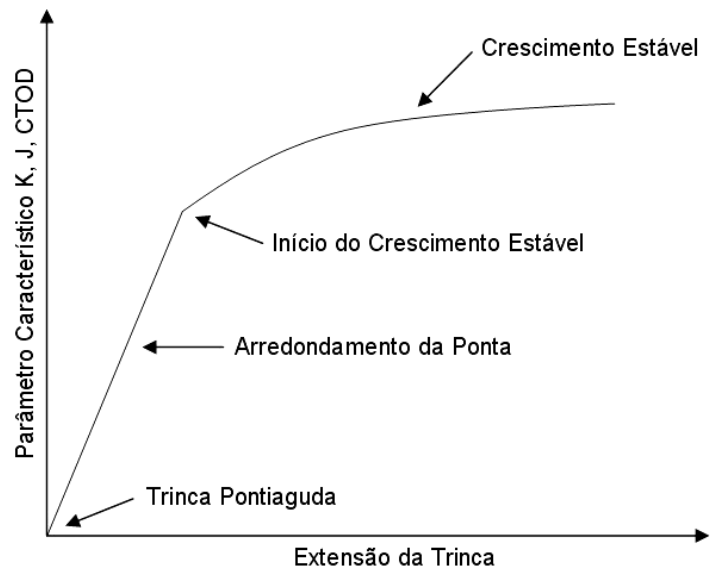


Figura 2.11 - Curva de resistência ao crescimento da trinca (Adaptado de: IPIÑA, 2004).

A MFEP pode ser categorizada em duas correntes distintas: o método CTOD (*Crack Tip Opening Displacement*) e a integral J. Em ASM HANDBOOK (1996) pode ser encontrado uma relação matemática entre estas duas correntes.

O método CTOD mede a abertura da ponta da trinca δ (Figura 2.12), comparando-o com um valor crítico δ_c , característico do material. Da mesma maneira que o fator intensificador de tensões K na MFLE (GDOUTOS, 1993), a partir deste valor crítico haverá propagação instável da trinca.

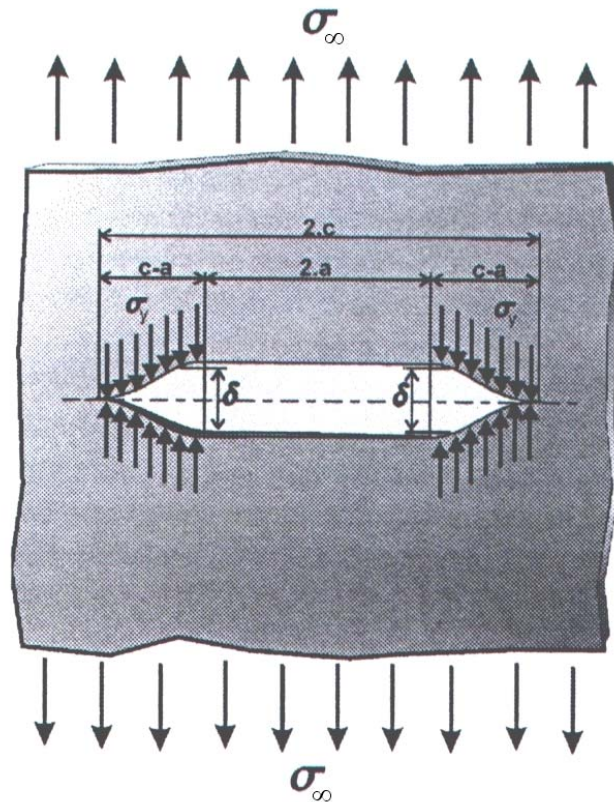


Figura 2.12 - Método CTOD (modelo de Dugdale) (Adaptado de: IPIÑA, 2004).

A integral J pode ser interpretada como a energia disponível para a extensão da trinca e é uma integral de linha em torno da ponta desta. Seu valor é invariante em relação ao percurso utilizado desde que se inicie na face inferior da trinca e termine na face superior da trinca (MIRANDA, 2003). Sua representação gráfica pode ser observada na Figura 2.13.

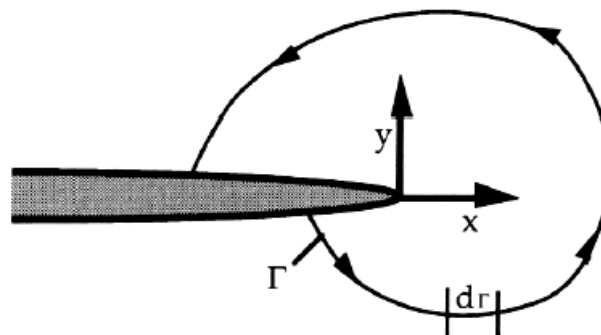


Figura 2.13 - Contorno para o cálculo da integral J (Fonte: MIRANDA, 2003).

Esta integral é dada por (ASM HANDBOOK; 1996 e IPIÑA, 2004)

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - \vec{T} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} ds \right), \quad (2.8)$$

sendo:

- Γ : qualquer trajetória de integração que ligue a face inferior à face superior da trinca.

- \vec{T} : vetor tração em qualquer ponto de Γ e dado por $T_i = \sigma_{ij} n_j$, onde n_j é a j -ésima componente do vetor unitário normal a Γ .

- \vec{u} : vetor deslocamento.

- ds : elemento infinitesimal de arco ao longo de Γ .

- W : densidade de energia de deformação, dada por $W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$.

Como citado anteriormente para a MFLE e o método CTOD, a integral J também possui um parâmetro material crítico J_C , que corresponde ao início da fratura elastoplástica. Assim, quando

$$J \geq J_C$$

haverá propagação instável desta trinca.

2.1.2.5. Mecânica do Dano

A teoria de dano em metais possibilita analisar o processo de iniciação e crescimento das micro-trincas e cavidades, ou seja, a evolução do fenômeno entre o estado virgem (sem qualquer dano) e a iniciação das macro-trincas.

A Mecânica do Dano pode ser utilizada nas seguintes aplicações:

- Dano frágil: quando a deformação plástica é desprezável.

- Dano quase-frágil: quando o crescimento do dano é localizado, ou seja, as deformações plásticas são pontuais.

- Dano dúctil: acompanha grandes deformações plásticas.

- Dano em fluência: caracterizado pela forte dependência do tempo e é utilizado, via de regra, para metais em grandes temperaturas sofrendo deformações viscoplásticas (KACHANOV, 1986).

- Dano em fadiga de baixo ciclo (BONORA, 1998).
- Dano em fadiga de alto ciclo (LEMAITRE *et al.*, 1999).

Como o objetivo do corrente trabalho é a modelagem do comportamento do material devido às tensões variáveis, será dada maior atenção à Mecânica do Dano em fadiga na próxima seção.

2.2 Mecânica do Dano em Fadiga

A ocorrência de dano em fadiga é um problema antigo, mas ainda não bem resolvido. Segundo FATEMI e YANG (1998), em 1924 A. Palmgren foi um dos primeiros autores a introduzir o conceito de soma linear de dano. Adicionalmente, por volta do ano de 1945, M. A. Miner expressou o modelo matematicamente, gerando assim a abordagem conhecida como regra do dano linear, dado por:

$$D = \sum \left(\frac{n}{N_f} \right)_i, \quad (2.9)$$

sendo D o dano acumulado e n e N_f os números de ciclos aplicado e total para a falha sobre o i -ésimo nível de carregamento constante.

Desde então, o dano acumulativo em fadiga tem recebido maior atenção. Atualmente, as abordagens para seu estudo podem ser divididas em 7 principais grupos (FATEMI e YANG, 1998):

- Regra de dano linear;
- Curva de dano não-linear e processos de dano em 2 estágios: iniciação e propagação da trinca;
- Métodos de modificação da curva de vida;
- Abordagens baseadas no crescimento da trinca;
- Mecânica do Dano Contínuo;
- Teorias baseadas na energia;
- Outras teorias.

A seguir, as abordagens citadas são descritas de uma forma resumida, apenas realçando suas principais características e aplicações.

2.2.1 Regra do dano linear

Como citado anteriormente, a regra do dano linear foi uma das primeiras teorias de acumulação de dano proposta. Em um gráfico $D-r$ (Figura 2.14), onde D é o dano e $r_i = (n/N_f)_i$ é a razão entre os ciclos aplicados e ciclos totais para a falha, esta regra é simplesmente uma linha reta.

A falha acontece quando $D = 1$, ou seja, existe apenas uma dependência linear entre D e r , ocasionando uma acumulação do dano independente dos níveis de carregamento.

Evidências experimentais sob carregamentos reversos indicam que $\sum r > 1$ para uma seqüência de carregamento na forma baixo-alto e $\sum r < 1$ para uma seqüência alto-baixo, o que não pode ser computado pela regra linear.

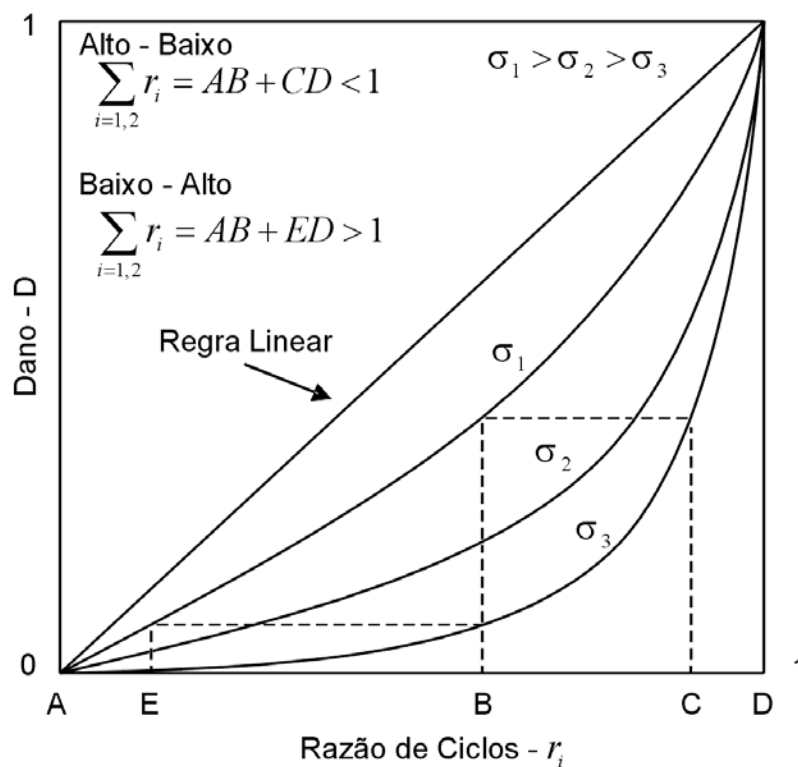


Figura 2.14 - Regra do dano linear e não linear (Adaptado de: FATEMI e YANG, 1998).

2.2.2 Teoria de dano não-linear de Marco-Starkey

Para minimizar as deficiências da teoria linear, em 1954 (MARCO e STARKEY, 1954), S. M. Marco e W. L. Starkey propuseram a primeira teoria de dano não-linear, expressada pela relação de potência $D = \sum r_i^{\alpha_i}$, α_i sendo uma variável que relata o i -ésimo nível de carregamento.

Como mostra a Figura 2.14, para um dano igual a 1, obtém-se $\sum r_i > 1$ para uma seqüência de carregamentos baixo-alto, ou seja, aplicando um carregamento de baixa amplitude (σ_3) com uma razão r de comprimento AB , seguido por um carregamento de maior amplitude (σ_1), tem-se uma razão r restante de comprimento ED , ocasionando uma $\sum r_i > 1$ ($AB + ED > 1$). Para uma seqüência de carregamentos alto-baixo tem-se $\sum r_i < 1$, pois aplicando inicialmente um carregamento de alta amplitude (σ_1) com uma razão r com comprimento AB , seguido por um carregamento com menor amplitude (σ_3), resultando numa razão r restante de comprimento CD , ou seja, $\sum r_i < 1$ ($AB + CD < 1$).

2.2.3 Teoria de dano linear em dois estágios

Em 1937, B. F. Langer (LANGER, 1937) propôs a separação do processo de dano em fadiga em dois estágios:

- Dano na iniciação da trinca;
- Dano na propagação da trinca.

Entretanto, somente em 1966, H. J. Grover (FATEMI e YANG, 1998) propôs a dupla regra linear de dano, onde a regra linear é aplicada em cada um dos dois estágios.

2.2.4 Teorias baseadas na modificação da curva de vida S-N

Desde 1970, várias regras de dano têm sido desenvolvidas com base na modificação da curva tensão – números de ciclos ($S - N$), das quais podem-se citar (FATEMI e YANG, 1998):

- Ponto de Inflexão de Subramanyan;
- Modelo de Hashin-Rotem;
- Teoria do Contorno de Bem-Amoz;
- Abordagem de Leipholz.

Os modelos citados são modificações na curva de vida $S-N$ para se levar em consideração os efeitos da seqüência dos carregamentos.

2.2.5 Abordagens baseadas no crescimento da trinca

Os conceitos de crescimento de trinca têm como base o fato de que o tamanho das trincas está diretamente relacionado ao dano acumulado. Vários modelos baseados nos conceitos da MFLE foram desenvolvidos para levar em consideração o efeito da interação dos carregamentos na fase de propagação da trinca. Os modelos citados tentam explicar a retardação do crescimento da trinca após sobrecargas.

2.2.6 Mecânica do Dano Contínuo (CDM)

Mecânica do Dano Contínuo é uma abordagem relativamente nova e trata de uma característica mecânica da deterioração do meio numa escala contínua. Esta teoria teve seu início em 1958, quando L. M. Kachanov publicou o seu primeiro artigo científico, que tratava de problemas de dano em fluência (KACHANOV, 1986).

Para o caso unidimensional, J. L. Chaboche postulou que a evolução do dano em fadiga é uma função da condição de carregamento e do estado atual do dano. Testes conduzidos sob condições de deformação controlada reversa, comprovam esta informação (LEMAITRE e CHABOCHE, 1990).

O modelo CDM é altamente não-linear, apresentando assim algumas vantagens:

- Permite computar os diferentes efeitos de várias faixas de tensão;
- O modelo pode levar em consideração influências do endurecimento inicial, isto pela introdução de um valor de deformação plástica na história dos carregamentos;
- Os efeitos da tensão média são diretamente incorporados no modelo.

Na metodologia CDM, a deterioração do meio é computada através de uma variável denominada dano, que pode ser um tensor se o dano for anisotrópico, ou simplificada para um escalar quando se trata de dano isotrópico. Ela é abordada mais detalhadamente no Capítulo 4.

2.2.7 Teorias de dano baseadas em energia

Desde que surgiram as conexões entre as histereses de energia e as características de fadiga, inicialmente propostas por N. P. Inglis (INGLIS, 1927), muitos estudos foram desenvolvidos nos métodos baseados na energia. Entretanto, as teorias de dano acumulativo foram desenvolvidas principalmente nas duas últimas décadas (JAHED *et al.*, 2007).

O parâmetro do dano relacionado com a energia pode contabilizar diferentes tipos de dano, como o causado por forças térmicas, fluência e fadiga. É capaz também de incluir efeitos causados por tensões médias e carregamentos multiaxiais.

2.2.8 Outras teorias de dano

- MODELO DAS TENSÕES DAS CAMADAS SUPERFICIAIS DE KRAMER:

Considerando que a superfície de um material sob fadiga possui importantes informações da análise do dano, I. R. Kramer (KRAMER, 1974) postulou que as camadas superficiais endurecem devido a uma maior densidade de discordâncias que o interior.

Conseqüentemente para atingir uma dada deformação plástica, mais tensão deve ser imposta do que se o endurecimento por camadas fosse desprezado. Kramer definiu esta tensão como a tensão das camadas superficiais, σ_s . Sobre um ciclo de amplitude constante, esta tensão aumenta linearmente com os ciclos aplicados e atinge um valor crítico quando uma trinca é formada.

Depois de observações experimentais, Kramer desenvolveu um modelo de dano sobre dois níveis de carregamento com evolução linear, acumulação não-linear e levando em consideração efeitos de interação dos carregamentos.

- MODELO DE DANO DE SOBRECARGA:

Sobrecargas de tração e compressão são geralmente encontrados em carregamentos reais. Brose *et al.* (1974) *apud* (FATEMI e YANG, 1998) conduziram um estudo dos efeitos de sobrecarga nas propriedades de fadiga, realizando testes de deformação controlada reversa com sobre-deformação. Por volta de 1991, D. L. DuQuesnay (DUQUESNAY, 1991) fez um estudo intensivo em pequenos corpos de prova sujeitos a tensões uniaxiais de repetidos blocos, estes contendo uma sobrecarga e uma subcarga e um número fixo de pequenos ciclos reversos. Nesse trabalho, o dano foi modelado da seguinte forma:

$$D = \sum D_{sc} + \sum D_{pa} + \sum D_{int} . \quad (2.10)$$

Assim, $D=1$ indica a falha completa da região e

$\sum D_{sc}$: é o dano causado pelas sobrecargas.

$\sum D_{pa}$: é o dano causado por pequenas amplitudes cíclicas.

$\sum D_{int}$: é o dano adicional causado pela interação dos carregamentos.

2.3 Objetivos do Trabalho

Após uma revisão dos principais modelos existentes para análises de fadiga, pode-se descrever mais especificadamente os objetivos do corrente trabalho.

O objetivo principal é a implementação numérica da técnica localmente acoplada da Mecânica do Dano Contínuo aplicada a fadiga. Esta implementação é realizada no programa comercial Matlab e busca estudar carregamentos com amplitudes e freqüências variadas.

Como objetivos secundários podem-se citar o estudo da influência dos parâmetros materiais envolvidos e a análise dos fatores fenomenológicos sobre a vida em fadiga. E também a composição de um texto que aborde temas relacionados a fadiga e a mecânica do dano, possibilitando assim estudos futuros nestas áreas.

3 ELASTOPLASTICIDADE

Na Mecânica do Dano Contínuo a plasticidade está fortemente relacionada com o acúmulo do dano. Essa relação se dá desde o início do processo, com a deformação plástica de início do dano (ε_{pD}) ou energia armazenada (w_{1D}), até o processo de evolução do dano, que depende da evolução da deformação plástica. Com isto, existe a necessidade de um estudo mais aprofundado sobre elastoelasticidade, a qual é abordada neste capítulo.

Para uma análise de relação entre tensões-deformações, buscando a solução do problema elastoplástico através de um processo incremental, algumas considerações importantes devem ser feitas (PEREIRA, 1994):

- 1) Existência de uma relação entre tensões e deformações que descreva o comportamento do material no Regime Elástico.
- 2) Existência de uma superfície de escoamento, definindo o Limite Elástico do material em qualquer estado multiaxial de tensões.
- 3) Regra de escoamento, relacionando a função potencial plástico e o vetor de deformações plásticas incrementais.
- 4) Regra de encruamento, mostrando a evolução da superfície de escoamento, durante o processo elastoplástico.
- 5) Relação Constitutiva Elastoplástica Incremental baseada nas leis de encruamento e escoamento.

As relações constitutivas incrementais para material elástico e linear podem ser colocadas, de forma geral, como $\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\varepsilon}_{kl}$, onde C_{ijkl}^e é um tensor de quarta ordem, denominado tensor constitutivo elástico.

Para materiais elásticos, lineares e isotrópicos, esta relação é conhecida como Lei de Hooke generalizada e é descrita como (MALVERN, 1969)

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G \left[\dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} \right], \quad (3.1)$$

onde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o módulo de elasticidade transversal,

E o módulo de elasticidade longitudinal e

ν o coeficiente de Poisson.

As demais considerações estão apresentadas nas próximas seções, e são desenvolvidas com maiores detalhes apenas para a situação de elastoplasticidade acoplada ao dano (Seção 4.2.5).

3.1 Critério de Escoamento

O critério de escoamento define o limite elástico do material sob um estado de tensão. Como é conhecido, para um simples teste de tração, o limite elástico, no caso de materiais dúcteis, é a tensão de escoamento (σ_y). Em geral, o limite elástico do material é uma função do estado de tensão (σ_{ij}) e de constantes materiais (k_1, k_2, \dots) determinadas experimentalmente. Essa função pode ser posta de forma genérica como

$$f(\sigma_{ij}, k_1, k_2, \dots) = 0. \quad (3.2)$$

Para materiais isotrópicos, os valores das três tensões principais são suficientes para descrever o estado de tensão de uma forma única. Com isso, o critério de escoamento se torna

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k_1, k_2, \dots) = 0. \quad (3.3)$$

Por outro lado, as tensões principais (σ_1, σ_2 e σ_3) podem ser expressas em termos da combinação dos três invariantes I_1, J_2 e J_3 , onde I_1 é o primeiro

invariante do tensor de tensão (σ_{ij}) e, J_2 e J_3 são o segundo e o terceiro invariantes do tensor tensão desviador σ_{ij}^D .

Um dos primeiros critérios de escoamento, para um estado combinado de tensão para os metais, foi proposto em 1864 por H. Tresca (CHEN e HAN, 1988), que sugeriu que o escoamento ocorre quando a tensão cisalhante máxima atinge o valor crítico k . Em termos das tensões principais, a tensão cisalhante máxima é dada pela metade do maior valor absoluto entre as diferenças das tensões. Ou seja,

$$\tau_{max} = \max \left\{ \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|, \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| \right\} = k. \quad (3.4)$$

Nesse caso, a constante material k pode ser designada como a metade da tensão de escoamento (σ_y) , que é obtida experimentalmente pelo ensaio de tração, resultando em

$$\max \left\{ \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|, \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3| \right\} = \frac{\sigma_y}{2}. \quad (3.5)$$

Desta forma, a função de escoamento segundo Tresca pode ser posta como

$$f(\sigma, k) = \sigma_{Tr} - \sigma_y = \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \} - \sigma_y = 0. \quad (3.6)$$

Atualmente, um dos critério mais utilizados para análise de escoamento de materiais dúcteis é o Critério de von Mises, o qual foi postulado inicialmente em 1913, e é baseado na tensão cisalhante octaédrica ou na densidade de energia de distorção, as quais possuem valores proporcionais.

A partir da equação da tensão cisalhante octaédrica, CHEN e HAN (1988) propuseram que o escoamento tem o seu início quando esta tensão atinge um valor crítico e característico do material k' , ou seja

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2 = k'. \quad (3.7)$$

Realizando algumas simplificações e definindo um parâmetro material k como

$\sqrt{\frac{2}{3}} k'$, pode-se escrever

$$\sqrt{J_2} = k, \tag{3.8}$$

onde $J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D$, $\sigma_{ij}^D = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij}$ e $k = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}}$.

Realizando as devidas substituições na Equação (3.8), obtém-se a função de escoamento de von Mises

$$f(\sigma, k) = \sigma_{VM} - \sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D} - \sigma_y = 0. \tag{3.9}$$

Este critério modela melhor a falha por escoamento de materiais dúcteis do que o critério de Tresca, e também apresenta uma implementação mais simples, pois a superfície de escoamento no espaço de tensões (Figura 3.1) não apresenta pontos sem unicidade no vetor normal.

Os critérios de Tresca e von Mises podem ser representados no espaço de tensões principais (σ_1, σ_2 e σ_3), resultando em duas superfícies prismáticas infinitas (superfície de escoamento) com eixos coincidentes com o eixo hidrostático ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$). Estas superfícies são observadas na Figura 3.1.

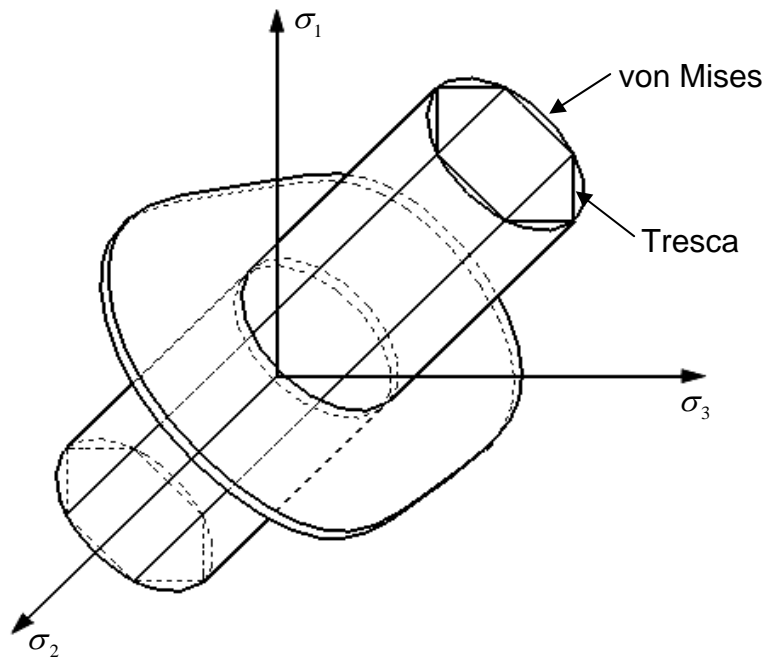


Figura 3.1 - Superfícies de escoamento de Tresca e de von Mises.

Além destes critérios de escoamento, podem-se citar vários outros. Por exemplo, o critério de Coulomb-Mohr, o critério de Drücker-Prager e o critério de Rankine, estes mais utilizados para materiais frágeis (CHEN e HAN, 1988). Como o objetivo do atual trabalho é analisar materiais dúcteis, homogêneos e isotrópicos, e devido às vantagens deste critério, a partir deste ponto, todo o estudo é desenvolvido utilizando o critério de escoamento de von Mises.

3.2 Carregamento e Descarregamento

A deformação plástica ocorre somente se duas condições são satisfeitas simultaneamente (Figura 3.2):

1) O ponto do estado de tensão deve estar situado na superfície de escoamento ($f = 0$) e, portanto, no estado limite do material;

2) A estrutura da plasticidade clássica requer que o ponto representativo do estado de tensão nunca deixe a superfície, então $f > 0$ é impossível. Por isto, durante o fluxo plástico a condição de consistência $df = 0$ deve ser satisfeita. Isso implica que o ponto representativo de tensão ($\sigma + \Delta\sigma$) continue sobre a superfície de carregamento.

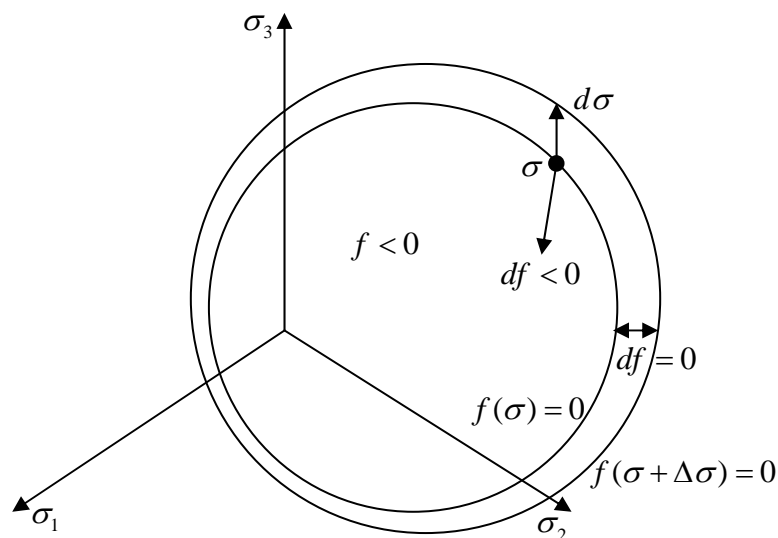


Figura 3.2 - Carregamento e descarregamento para um encruamento positivo.

Por outro lado, variações de tensão permitem que o ponto de tensão retorne para o interior da superfície. Este é o caso de descarregamento, caracterizado por $df < 0$. Desta maneira, nenhum fluxo plástico pode ocorrer durante o descarregamento e o comportamento se torna elástico. Em resumo:

- $f < 0$: comportamento elástico.
- $f = 0$ e $df = 0$: fluxo plástico.
- $f = 0$ e $df < 0$: descarregamento elástico.

3.3 Tensor de Deformação

Como a magnitude da deformação plástica pode ser ilimitada durante o fluxo, é mais conveniente utilizar as taxas de deformação, ou seus incrementos. O incremento do tensor de deformação total ($\Delta \varepsilon_{ij}$) é assumido como sendo a soma da parcela elástica ($\Delta \varepsilon_{ij}^e$) mais a plástica ($\Delta \varepsilon_{ij}^p$) (COOK *et al.*, 2002). Ou seja,

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij}^e + \Delta \varepsilon_{ij}^p. \quad (3.10)$$

Ambas as parcelas são obtidas através de relações constitutivas. A parcela elástica já foi apresentada anteriormente e a parcela plástica está descrita nas próximas seções.

3.4 Determinação do Estado de Carregamento Plástico

Considerando um processo numérico com incrementos finitos, durante o carregamento, um ponto material sofrerá um acréscimo de tensões e, a menos que ocorra plastificação, este incremento de tensões será elástico. Supondo que o incremento seja elastoplástico e que o estado de tensões no final do incremento anterior era elástico, há a necessidade de encontrar a parcela do incremento de carga (incremento de tensões) que é puramente elástica e a parcela que é elastoplástica.

Portanto, é possível inferir a existência de um fator r_t ($0 \leq r_t \leq 1$), aqui denominado de fator de carregamento, tal que o ponto do estado de tensão inicie o processo de plastificação, ou seja, $f(\sigma_{ij} + r_t \Delta \sigma_{ij}^e, k) = 0$. Esse processo pode ser visualizado graficamente na Figura 3.3.

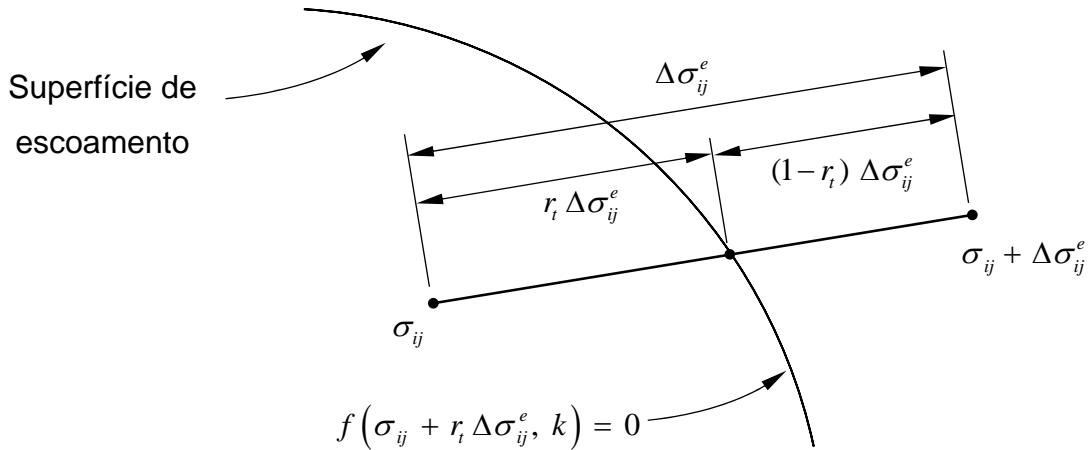


Figura 3.3 - Ilustração esquemática do processo de carregamento elastoplástico (Fonte: PEREIRA, 1994).

Realizando uma expansão em série de Taylor de primeira ordem, da função de escoamento descrita acima, tem-se

$$f(\sigma_{ij} + r_t \Delta \sigma_{ij}^e, k) \cong f(\sigma_{ij}, k) + \frac{\partial f(\sigma_{kl}, k)}{\partial \sigma_{ij}} r_t \Delta \sigma_{ij}^e = 0 \quad (3.11)$$

Resolvendo a equação acima para a incógnita r_t , tem-se

$$r_t = -f(\sigma_{ij}, k) / \left[\frac{\partial f(\sigma_{kl}, k)}{\partial \sigma_{ij}} \Delta \sigma_{ij}^e \right] \quad (3.12)$$

Uma variação do procedimento descrito acima consiste em reter os termos de ordem superior na expansão de Taylor. Com isso, a solução do problema recairia em encontrar as raízes de um polinômio de grau dois ou superior. Convém citar que o procedimento acima consiste em encontrar a raiz de um polinômio de grau 1 (um). No trabalho corrente optou-se por utilizar a primeira aproximação de Taylor visto

que, segundo CHEN e HAN (1988), para incrementos de tensões relativamente pequenos, os resultados obtidos são suficientemente precisos.

3.5 Potencial Plástico e Regra de Fluxo

Em 1938, von Mises propôs o conceito de função potencial plástico, relacionando o gradiente desta função escalar ao incremento de deformações plásticas (CHEN e HAN, 1988). Tal relação é análoga a aquela existente entre deformação elástica e o diferencial da função potencial elástico. Portanto, a regra de escoamento é uma consideração cinemática e postula que o incremento de deformações plásticas é proporcional ao gradiente da função potencial plástico ($g(\sigma_{ij})$), na forma

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta \lambda \frac{\partial g(\sigma_{kl})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3.13)$$

sendo $\Delta \lambda$ um escalar denominado multiplicador plástico.

A função potencial plástico ($g(\Delta \varepsilon_{ij}^p) = \text{constante}$) define uma hipersuperfície no espaço de tensões e, normalmente, não pode ser determinada em sua forma mais geral. Entretanto, quando a função potencial plástico é identicamente igual à função de escoamento, tem-se um caso especial da teoria da elastoplasticidade. Assim, obtém-se a regra associada de escoamento, dada por

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \Delta \lambda \frac{\partial f(\sigma_{kl})}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (3.14)$$

Por outro lado, quando não ocorre a igualdade entre as duas funções ($f(\sigma_{ij}) \neq g(\sigma_{ij})$), tem-se uma regra não-associada de escoamento.

3.6 Regra de Encruamento

Após o escoamento inicial, a superfície de escoamento sofre mudanças durante o processo incremental de carregamento. Este fenômeno é denominado encruamento material.

Matematicamente, o desenvolvimento progressivo da superfície de escoamento é relacionado com a tensão de escoamento (σ_y) e o incremento da deformação plástica ($\Delta \varepsilon^p$). Assim, a superfície de escoamento é expressa como uma função do estado corrente de tensão e das variáveis que definem o encruamento, podendo ser escrita na forma

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \sigma_y) = 0. \quad (3.15)$$

A resposta material após o escoamento inicial é consideravelmente diferente para as várias regras de encruamento. Entretanto, as mais utilizadas atualmente são: encruamento isotrópico, encruamento cinemático e a combinação destes, o encruamento misto. A seguir, estas três regras são descritas mais detalhadamente.

De acordo com CHEN e HAN (1988), pode-se colocar a função de escoamento numa forma geral:

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) - k^2(\varepsilon_{ij}^p), \quad (3.16)$$

onde as parcelas $F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p)$ e $k^2(\varepsilon_{ij}^p)$ representam, respectivamente, a forma e o tamanho da superfície de escoamento descritos no espaço de tensões.

3.6.1 Encruamento isotrópico

É a regra de encruamento mais simples e baseia-se no fato de que a superfície apresenta uma expansão uniforme, sem distorção nem translação. Assim, a superfície possui o seu tamanho controlado pelo parâmetro de encruamento k e é dada por

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = F(\sigma_{ij}) - k^2(\varepsilon_{ij}^p) = 0. \quad (3.17)$$

Como pode ser observado na Figura 3.4, a aplicação do modelo de encruamento isotrópico para materiais que sofrem descarregamento, (trajetória B-C-D) não é aconselhável. Neste tipo de encruamento não se consegue representar o efeito Bauschinger (LEMAITRE e CHABOCHE, 1990), comum a um grande número de materiais. Este efeito está relacionado a um tipo de anisotropia induzida pela deformação plástica.

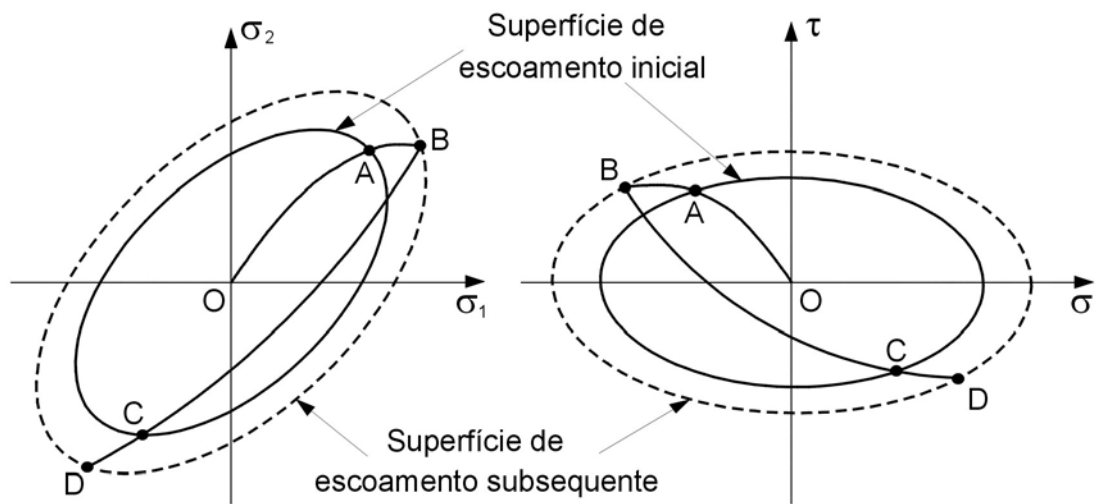


Figura 3.4 - Encruamento isotrópico (Fonte: PEREIRA, 1994).

3.6.2 Encruamento cinemático

A regra de encruamento cinemático é a maneira mais simples de considerar o efeito Bauschinger, que é muito importante quando se considera carregamentos de tração-compressão. Esta regra supõe que a superfície apenas translada como um corpo rígido no espaço de tensões. A translação é caracterizada por desenvolver-se sem variação da forma, tamanho e orientação da superfície inicial.

Devido à importância do efeito Bauschinger na análise em fadiga, a corrente formulação é desenvolvida considerando apenas o encruamento cinemático, descrito com maiores detalhes nesta seção.

Como ilustrado na Figura 3.5, o ponto de tensão durante a ocorrência de plastificação, move-se da posição P_0 para a posição P_1 . Assim, o centro da

superfície também se move da posição inicial O_0 para a posição O'_1 . Esta nova posição, característica principal do encruamento cinemático, é representada pelas coordenadas do centro da superfície, aqui denotadas X_{ij} . Pode-se notar que, no processo de descarregamento (trajetória $(P_1 P_2)$), o ponto material irá sofrer escoamento em um nível de tensão inferior ao inicial, caracterizando o efeito Bauschinger.

Para o encruamento cinemático, a equação da superfície de carga subsequente é dada por

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) - k^2 = F(\sigma_{ij} - X_{ij}) - k^2 = 0. \quad (3.18)$$

Na equação (3.18), k é um parâmetro material e constante. Assim, neste ponto, definem-se as componentes do tensor de tensão reduzido $(\sigma_{ij} - X_{ij})$, que é utilizado para a análise de escoamento.

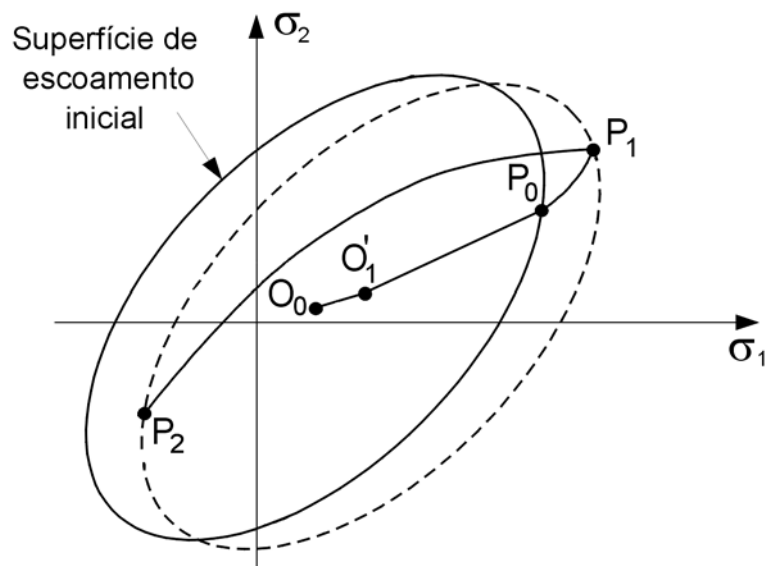


Figura 3.5 - Encruamento cinemático (Fonte: PEREIRA, 1994).

Existem duas regras mais comuns de encruamento cinemático, que são devidas a Prager e Ziegler (CHEN e HAN, 1998). O corrente trabalho é baseado na teoria de Prager, na qual a mudança do centro da superfície de escoamento é dependente dos incrementos de deformação plástica.

3.6.3 Encruamento misto

Proposto por Hodge em 1957 (CHEN e HAN, 1998), o encruamento misto é uma combinação dos encruamentos isotrópico e cinemático. Assim, a superfície subsequente está sujeita a uma translação, definida por X_{ij} , e uma expansão uniforme, definida por k . A forma geral da regra de encruamento misto é

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) - k^2(\varepsilon_{ij}^p) = F(\sigma_{ij} - X_{ij}) - k^2(\varepsilon_{ij}^p) = 0, \quad (3.19)$$

ou seja, uma superfície sendo influenciada pelos dois encruamentos.

3.7 Satisfação da Condição de Consistência Durante um Incremento de Tensão

Em geral, após um incremento finito de tensão elastoplástica, o ponto do estado de tensão não se encontra exatamente sobre a superfície de escoamento. Ou seja, o valor da função de escoamento não é exatamente nula (condição de consistência),

$$f(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}, \varepsilon_p) \neq 0. \quad (3.20)$$

Essa discrepância, decorrentes de erros numéricos, pode ser eliminada à medida que o incremento de carga seja suficientemente pequeno. Entretanto, com o objetivo de dar maior estabilidade numérica ao algoritmo, tornando-o independente o máximo possível do tamanho do incremento, é necessário realizar uma correção do valor da função de escoamento.

Nesse trabalho, a metodologia empregada baseia-se na sugerida por CHEN e HAN (1988), onde o vetor incremento de tensão para correção ($\delta\sigma_{ij}^c$), representado na Figura 3.6, é proporcional ao vetor gradiente da superfície de escoamento. Ou seja, dado por

$$\delta\sigma_{ij}^c = M \frac{\partial f(\sigma_{kl}, \varepsilon_p)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (3.21)$$

sendo que o escalar M é determinado através da satisfação da condição de consistência no ponto de tensão corrigido.

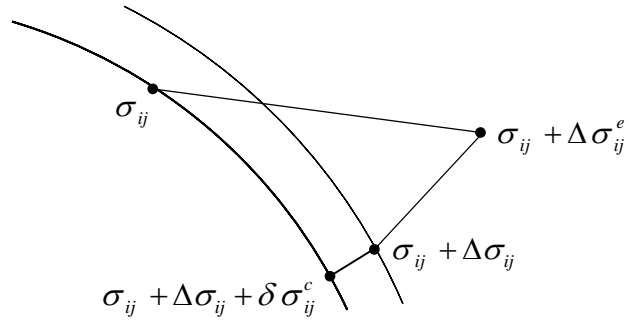


Figura 3.6 - Trajetória do ponto de tensão e incremento de tensão para satisfação da condição de consistência (Fonte: PEREIRA, 1994).

Assim, a função de falha por escoamento se torna

$$f(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}^c, \varepsilon_p) = f\left(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij} + M \frac{\partial f(\sigma_{kl}, \varepsilon_p)}{\partial \sigma_{ij}}, \varepsilon_p\right) = 0. \quad (3.22)$$

A equação (3.22) é não-linear no escalar M e pode ser resolvida tanto analítica (se possível) quanto numericamente. Para isso, o valor da função de escoamento na posição subsequente (após o incremento de tensão de correção) pode ser escrito em termos de uma expansão em série de Taylor e truncada no primeiro termo diferencial. Nesse caso, a função de escoamento resulta em

$$f(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}^c, \varepsilon_p) = f(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}, \varepsilon_p) + \frac{\partial f(\sigma_{kl}, \varepsilon_p)}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij}^c, \quad (3.23)$$

ou ainda, substituindo a equação (3.21), obtém-se

$$f(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}^c, \varepsilon_p) = f(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}, \varepsilon_p) + M \frac{\partial f(\sigma_{kl}, \varepsilon_p)}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f(\sigma_{kl}, \varepsilon_p)}{\partial \sigma_{ij}} = 0. \quad (3.24)$$

Ao isolar o fator de escalonamento M , resulta

$$M = -f(\sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij}, \varepsilon_p) / \left[\frac{\partial f(\sigma_{kl}, \varepsilon_p)}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f(\sigma_{kl}, \varepsilon_p)}{\partial \sigma_{ij}} \right] \quad (3.25)$$

e a tensão de correção pode ser obtida pela equação (3.21).

4 MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

Das abordagens citadas no Capítulo 2, este texto volta sua atenção para a Mecânica do Dano Contínuo, visto que esta é uma teoria que se enquadra nos objetivos do corrente trabalho, permitindo a consideração de carregamentos multiaxiais com frequências e amplitudes variadas. Nesse sentido, o principal objetivo deste Capítulo é discutir a abordagem e apresentar sua formulação matemática.

4.1 Aspectos Fenomenológicos do Dano

Uma forma de abordar o dano material é a divisão do meio contínuo em três escalas:

Macro: escala relativa à dimensão física do componente.

Meso: relacionada à dimensão física do elemento de volume.

Micro: relativa a micro-estrutura do material.

Considerando estas 3 escalas, existe uma grande dificuldade em se quantificar a evolução do dano em uma escala macroscópica. Isso, pois não há qualquer característica que distinga o material em estado virgem (sem dano) do material na região altamente danificada. Há várias possibilidades de quantificação do dano material (LEMAITRE e CHABOCHE, 1990):

- Em uma escala microscópica, pode-se medir a densidade das micro-trincas ou cavidades e, com o auxílio de uma técnica de homogeneização, tratar o elemento de volume com uma escala macroscópica;

- Medidas físicas globais (densidade, resistividade *etc.*), as quais requerem algumas definições de um modelo global para convertê-las em propriedades que caracterizam resistência mecânica;

- Medidas de dano relacionadas com o tempo de vida restante. Entretanto, este conceito não aponta diretamente para uma lei constitutiva;

- Medidas mecânicas globais (modificação da elasticidade, plasticidade ou viscoplasticidade), as quais são fáceis de interpretar em termos da variável dano usando o conceito de tensão efetiva.

4.1.1 Variável dano

Considere um elemento de volume finito de um sólido danificado, o qual é suficientemente grande para que seja considerado homogêneo (Figura 4.1). Para exemplificar, este elemento de volume representativo RVE (*Representative Volume Element*) possui, em média, as seguintes magnitudes para os materiais (GRUNWALD, 1996):

- Metais e Cerâmicos: $0,1mm^3$;
- Polímeros e Compósitos: $1mm^3$;
- Madeira: $10mm^3$;
- Concreto: $100mm^3$.

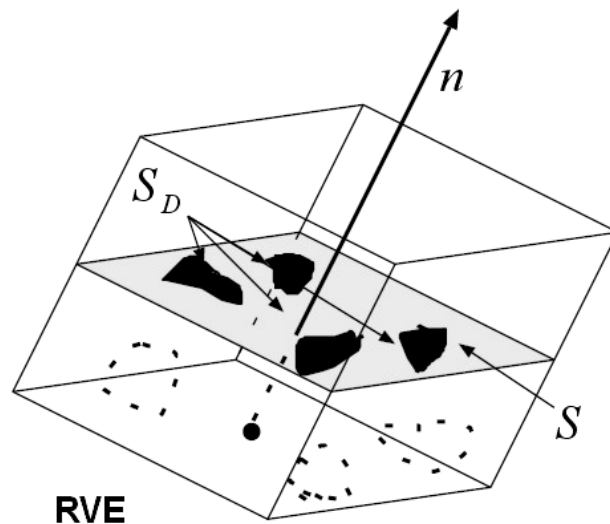


Figura 4.1 - Elemento de volume representativo em estado danificado (Fonte: GRUNWALD, 1996).

Para auxiliar a definição matemática de uma variável que quantifique o dano, toma-se como referência a Figura 4.1, onde S representa a área da seção do elemento de volume e é identificada por sua direção normal n . Nesta seção, é suposto existirem trincas que caracterizam o nível de dano. Considerando a área efetiva de resistência \tilde{S} , sendo $\tilde{S} < S$, onde existem as trincas, concentradores de tensão e as interações entre os defeitos, pode-se definir a área total danificada (com defeitos) como

$$S_D = S - \tilde{S}. \quad (4.1)$$

Deve-se frisar que a obtenção experimental dos valores das áreas S_D ou \tilde{S} é extremamente difícil.

Pode-se também definir a razão $S_D/S = D_n$ como uma medida mecânica local do dano relativo à direção n . Do ponto de vista físico, a variável dano é a área relativa das trincas e cavidades que cortam o plano cuja direção normal é n . Do ponto de vista matemático, quando S tende a zero, a variável dano D_n tende à densidade das descontinuidades da matéria no plano cuja normal é n .

Em resumo, $D_n = 0$ corresponde ao estado do material não danificado ou virgem. Por outro lado, $D_n = 1$ corresponde à situação limite de quebra (separação total) do elemento de volume em duas partes ao longo do plano normal n . Além disso, $0 < D_n < 1$ caracteriza estados intermediários de material danificado.

No caso do dano isotrópico, as trincas e cavidades são orientadas uniformemente em todas as direções. Dessa forma, a variável dano não depende da orientação n e o estado danificado é caracterizado por um campo escalar D , dependente unicamente da posição no sólido. Esta simplificação numérica, de dano isotrópico, é adotada neste trabalho, sem perdas consideráveis de informação quantitativa (LEMAITRE e DESMORAT, 2005).

4.1.2 Tensão efetiva

A introdução da variável dano, leva ao conceito de tensão efetiva, que é a tensão calculada sobre a seção que efetivamente resiste às forças.

No caso unidimensional, considerando F como a força aplicada na seção do elemento de volume, $\sigma = F/S$ é a tensão aparente que satisfaz o equilíbrio na presença do dano. Considerando a definição de dano isotrópico ($D = S_D/S$) e a equação (4.1) para a área total danificada S_D , tem-se o valor da área que efetivamente resiste ao carregamento \tilde{S} , dada por

$$\tilde{S} = S - S_D = S(1 - D). \quad (4.2)$$

Assim, como o RVE está em equilíbrio estático, este pode ser posto que

$$F = S\sigma = \tilde{S}\tilde{\sigma},$$

onde $\tilde{\sigma}$ é a tensão efetiva que atua na seção resistente ao carregamento \tilde{S} e que pode ser explicitada como

$$\tilde{\sigma} = \sigma S / \tilde{S}$$

ou

$$\tilde{\sigma} = \sigma / (1 - D). \tag{4.3}$$

4.1.3 Relação constitutiva

As características de deformação do material são representadas pelas leis constitutivas do material virgem em que a tensão (σ) é substituída pela tensão efetiva ($\tilde{\sigma}$) (Figura 4.2). Nesse caso ε é a deformação total na escala macroscópica.

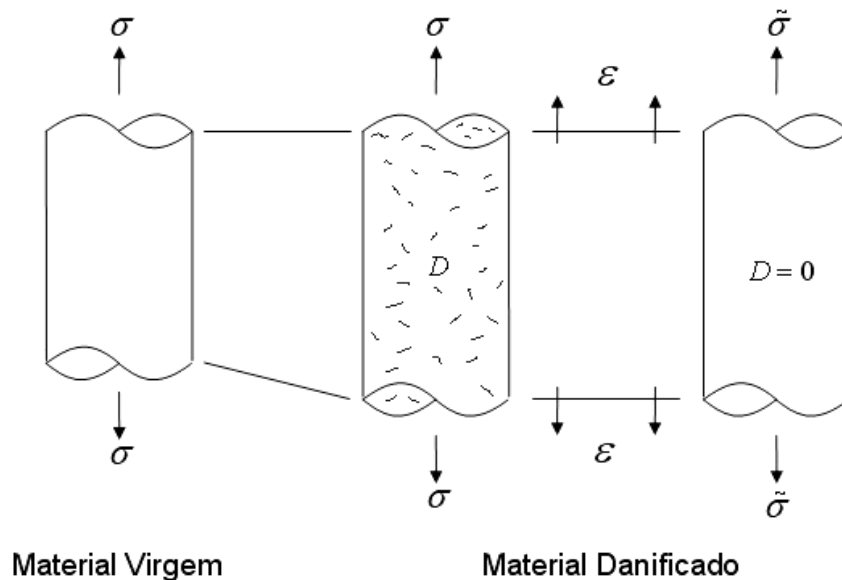


Figura 4.2 - Deformação equivalente (Adaptado de: LEMAITRE e CHABOCHE, 1990).

A relação constitutiva uniaxial para material elástico e linear, com uma quantidade de dano D acumulado é escrita por

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} = \frac{\sigma}{\tilde{E}}, \quad (4.4)$$

sendo E o módulo de elasticidade longitudinal do material virgem e $\tilde{E} = (1-D)E$ o módulo de elasticidade longitudinal efetivo.

Esta é uma hipótese que assume que todas as diferentes características (elasticidade, plasticidade e viscoplasticidade) são afetadas da mesma forma pela densidade dos defeitos de dano.

4.1.4 Critério de ruptura

A ruptura da meso-escala é definida como o instante em que a trinca ocupa a superfície total do RVE, ou seja, quando $D = 1$. Em muitos casos, isto é causado por um processo de instabilidade que subitamente induz a cisão dos átomos na área restante. Isso corresponde a um valor crítico de dano D_c , inferior ao dano total unitário, e que depende do material e das condições de carregamento.

A cisão final dos átomos é caracterizada por um valor crítico da tensão efetiva atuando na área resistente. Denotando por σ_∞ a tensão máxima que poderia ser aplicada no material, tem-se que no caso limite para falha

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} = \sigma_\infty. \quad (4.5)$$

Uma aproximação para o limite superior (*upper bound*) da tensão máxima σ_∞ é a tensão última do material (σ_{uts}). Valor, este, de fácil obtenção experimental.

Esta relação aplicada ao teste de tração monotônico puro, que é uma referência, define o dano crítico unidimensional D_{1c} , considerado como uma característica material, que ocorre quando $\sigma = \sigma_R$. Portanto,

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_R}{1-D_{1c}} = \sigma_{uts}$$

ou

$$D_{1c} = 1 - \frac{\sigma_R}{\sigma_{uts}}, \quad (4.6)$$

onde σ_R é a tensão de ruptura.

4.1.5 Início do dano

O processo de iniciação das micro-trincas é caracterizado, pela nucleação decorrente da acumulação de micro-tensões acompanhadas de micro-deformações, ou pela acumulação de discordâncias em metais (BONORA, 1997), estando relacionado à quantidade de energia que é armazenada no material. Para um caso uniaxial, este processo só tem início quando um determinado nível de deformação plástica acumulada é atingido, aqui denominado deformação plástica acumulada para início do dano (ε_{pD}). Assim, abaixo deste valor, nenhum dano acontece, ou seja, se

$$\varepsilon_p < \varepsilon_{pD} \rightarrow D = 0,$$

onde ε_{pD} é um parâmetro material, que pode ser obtido através do ensaio de tração monotônico (LEMAITRE, 1996).

4.1.6 Medida do dano

A caracterização da variação do dano é um problema complexo, pois envolve características microscópicas e macroscópicas. Dos vários métodos empregados para sua quantificação, pode-se dividi-los em diretos ou indiretos.

Os métodos diretos permitem a avaliação da área danificada e com isso a medição direta da variável dano. Para esta classe de métodos podem ser citados: medição da densidade dos micro-defeitos por microscopia, medição da porosidade pela mudança da densidade e difração de raios-X (GEERS, 1997, LEMAITRE, 1996).

Entre os métodos indiretos, que são baseados em modificações nas propriedades do material na escala macroscópica, podem ser citados: variação do módulo de elasticidade, variação da micro-dureza (PANIS, 2004), métodos magnéticos (MANSUR *et al.*, 2005) e outros menos utilizados (LEMAITRE, 1996) como variação da resistência elétrica e emissão acústica.

4.2 Termodinâmica do Dano

Em processos irreversíveis, as diferentes características do material são modeladas seguindo 3 passos:

- Definição das variáveis de estado, que caracterizam o material no estado corrente de deformação;
- Definição do potencial de estado, a partir do qual são obtidas as leis de estado e que definem as variáveis associadas com as variáveis internas;
- Definição do potencial de dissipação, que fornece as leis de evolução das variáveis de estados associadas ao mecanismo de dissipação.

4.2.1 Variáveis de estado

Considerando um processo de deformação na Mecânica dos Sólidos e com a hipótese de pequenas deformações e pequenos deslocamentos, as variáveis de estado podem ser divididas em:

a) Variáveis observáveis:

T , a temperatura associada à densidade de entropia s_e .

ε , o tensor de deformação total associado ao tensor de tensão de Cauchy σ .

b) Variáveis internas:

ε^e , o tensor de deformação elástica associado ao tensor de tensão σ .

ε^p , o tensor de deformação plástica associado ao tensor de tensão $-\sigma$.

r , a deformação plástica acumulada de dano, cuja variável associada é o encruamento isotrópico R , que mede a expansão da superfície de escoamento no espaço de tensão.

α , tensor de deformação de retorno (*back strain tensor*), cuja variável associada é a tensão de retorno X^D , que representa a translação do centro da superfície de escoamento no espaço de tensões e é responsável pela simulação do encruamento cinemático.

D , a variável dano que, como citado anteriormente para o caso isotrópico, possui o mesmo valor em todas as direções. Assim, o escalar $D = \delta S_D / \delta S$ caracteriza completamente o estado de dano tridimensional. Nesse caso, \bar{Y} é a

variável associada com D , sendo obtida a partir do potencial de estado. O produto $\bar{Y} \dot{D}$ é a potência envolvida no processo de dano.

Supondo o desacoplamento entre as deformações elástica e plástica (Seção 3.3), a deformação total pode ser decomposta em uma forma aditiva como

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p. \tag{4.7}$$

A Tabela 4.1 é um resumo das variáveis envolvidas na mecânica do contínuo da termoelasticidade, plasticidade e dano.

Tabela 4.1 - Variáveis termodinâmicas (Adaptado de: BONORA, 1997).

	Variáveis de Estado		Variáveis Associadas
	Observável	Interna	
Termo-elasticidade	T	---	s_e
	ε	---	σ
Plasticidade	---	ε^p	$-\sigma$
	---	r	R
	---	α	X^D
Dano	---	D	\bar{Y}

4.2.2 Potencial de estado

Uma vez definidas as variáveis de estado, postula-se a existência de uma função potencial termodinamicamente consistente, a partir da qual as leis de estado podem ser obtidas. Este potencial é uma função escalar e contínua, convexa com as variáveis e contendo a origem. Aqui é escolhido a energia livre específica de Helmholtz como potencial de estado do material (LEMAITRE e CHABOCHE, 1990):

$$\psi = \psi(\varepsilon, T, \varepsilon^e, \varepsilon^p, r, \alpha, D). \tag{4.8}$$

Apesar do potencial depender do estado corrente de deformações (ε) e deformações plásticas residuais (ε^p), apenas a diferença entre elas $\varepsilon - \varepsilon^p = \varepsilon^e$ é necessária para descrever o estado de deformação, ou seja

$$\psi = \psi([\varepsilon - \varepsilon^p], T, r, \alpha, D) = \psi(\varepsilon^e, T, r, \alpha, D), \tag{4.9}$$

sendo ε^e o tensor de deformações elásticas.

Como proposto por LEMAITRE (1996), a expressão analítica para ψ é escolhida através de observações experimentais e resultados micro-mecânicos da chamada Teoria do Estado Cinético Acoplado (*State Kinetic Coupling Theory*) caracterizada por:

- Elasticidade isotrópica linear;
- O estado acoplado do dano com a deformação elástica $\tilde{E} = E(1-D)$;
- O princípio da deformação equivalente, em conjunto com o conceito de tensão efetiva (Equação (4.3)).
- Desacoplamento entre plasticidade e elasticidade e entre dano e plasticidade;
- Expressão clássica para os encruamentos isotrópico e cinemático possibilitando saturação dos encruamentos para grandes deformações plásticas;
- Processo isotérmico.

A partir dessas premissas, a energia livre específica de Helmholtz pode ser explicitada como

$$\psi = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{2} C_{ijkl}^e \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e (1-D) + R_\infty \left[r + \frac{1}{b} e^{-br} \right] + \frac{X_\infty \gamma}{3} \alpha_{ij} \alpha_{ij} \right]. \quad (4.10)$$

A partir deste potencial, as leis de estado da termoelasticidade podem ser obtidas como

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^e} \quad \text{ou também} \quad \sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon^p}, \quad (4.11)$$

resultando em

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = C_{ijkl}^e \varepsilon_{kl}^e (1-D), \quad (4.12)$$

sendo C_{ijkl}^e , o tensor de rigidez constitutiva elástica descrito no Capítulo 3.

Considerando material isotrópico e invertendo essa relação tem-se

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma_{ij}}{1-D} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{kk}}{1-D} \delta_{ij}, \quad (4.13)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, ν o coeficiente de Poisson e δ o tensor delta de Kronecker. A Equação (4.13) é a mesma equação da elasticidade,

apenas com a substituição do estado de tensão (σ_{ij}) pela tensão efetiva

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / (1 - D).$$

Esta equação pode ser reescrita na forma

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E(1-D)} \left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij} \right], \quad (4.14)$$

o que demonstra a influência do dano sobre a deformação elástica, ou seja, diretamente sobre o módulo de elasticidade.

A tensão escalar relacionada ao encruamento isotrópico é expressa por

$$R = \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} = R_\infty \left[1 - e^{-br} \right]. \quad (4.15)$$

Da mesma forma, o tensor de tensões associado ao encruamento cinemático pode ser obtido como

$$X_{ij}^D = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}} = \frac{2}{3} X_\infty \gamma \alpha_{ij}. \quad (4.16)$$

Nesse caso R_∞ , b , X_∞ e γ são parâmetros materiais que caracterizam os encruamentos isotrópico e cinemático.

Ainda considerando o potencial termodinâmico definido anteriormente, a variável associada ao dano (\bar{Y}) pode ser expressa como

$$\bar{Y} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = -\frac{1}{2} C_{ijkl}^e \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e, \quad (4.17)$$

podendo ser escrita na forma positiva por

$$Y = -\bar{Y}. \quad (4.18)$$

Pode-se relacionar esta variável com a densidade de energia de deformação elástica (w_e). Partindo da definição

$$dw_e = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e, \quad (4.19)$$

e integrando com a relação constitutiva de elasticidade (Equação (4.12)), considerando nenhuma variação do dano ($D = cte$), segue

$$w_e = \int_0^{\varepsilon_{ij}^e} dw_e = \int_0^{\varepsilon_{ij}^e} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e = \int_0^{\varepsilon_{ij}^e} (1-D) C_{ijkl}^e \varepsilon_{kl}^e d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2} C_{ijkl}^e \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e (1-D). \quad (4.20)$$

Assim, substituindo na Equação (4.17) e considerando a Equação (4.18) tem-se

$$Y = \frac{w_e}{1-D}. \quad (4.21)$$

Partindo novamente da relação constitutiva da elasticidade (Equação (4.12)), pode-se demonstrar que Y é também igual a metade da variação da densidade de energia de deformação, correspondente a uma variação de dano em tensão constante: $d\sigma_{ij} = 0$, ou seja,

$$d\sigma_{ij} = \left(\frac{d\sigma_{ij}}{dD} \right) dD = C_{ijkl}^e \left[(1-D) d\varepsilon_{kl}^e - \varepsilon_{kl}^e dD \right] = 0. \quad (4.22)$$

Ocasionalmente assim

$$d\varepsilon_{kl}^e = \varepsilon_{kl}^e \frac{dD}{1-D}. \quad (4.23)$$

Retornando a Equação (4.19) tem-se

$$dw_e = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^e \frac{dD}{1-D} = C_{ijkl}^e \varepsilon_{ij}^e (1-D) \varepsilon_{kl}^e \frac{dD}{1-D}, \text{ com } \sigma_{ij} = cte, \quad (4.24)$$

resultando em

$$\frac{dw_e}{dD} = C_{ijkl}^e \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e, \quad (4.25)$$

e, pela definição anterior da Equação (4.17),

$$Y = \frac{1}{2} \frac{dw_e}{dD}. \quad (4.26)$$

Dessa forma, Y pode ser denominado de taxa de liberação da densidade de energia de deformação (*strain energy density release rate*) (IBIJOLA, 2002), ou seja, a taxa de energia por unidade de volume liberada pela perda de rigidez do RVE quando o dano D é acrescido de um valor dD .

4.2.3 Função de triaxialidade

A taxa de liberação da densidade de energia de deformação Y , é a principal variável que governa o fenômeno do dano.

Partindo da Equação (4.21) e decompondo a densidade de energia de deformação elástica total w_e em duas partes (IBIJOLA, 2002): as energias desviadora e hidrostática, as quais correspondem às partes desviadora (ou distorcional) e hidrostática (ou volumétrica) dos tensores de tensão e deformação, respectivamente,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^D + \sigma_H \delta_{ij} \quad (4.27)$$

e

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^{eD} + \varepsilon_H^e \delta_{ij} \quad (4.28)$$

tem-se

$$w_e = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e = \int \sigma_{ij}^D d\varepsilon_{ij}^D + \delta_{ij} \delta_{ij} \int \sigma_H d\varepsilon_H^e. \quad (4.29)$$

A partir da relação constitutiva da elasticidade isotrópica linear acoplada com o dano obtém-se

$$\varepsilon_{ij}^{eD} = \frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma_{ij}^D}{1-D} \quad \text{e} \quad \varepsilon_H^e = \frac{1-2\nu}{E} \frac{\sigma_H}{1-D}.$$

Substituindo estas expressões em (4.29) e lembrando que $\delta_{ij} \delta_{ij} = 3$,

$$w_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\nu}{E} \frac{\sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D}{1-D} + 3 \frac{1-2\nu}{E} \frac{\sigma_H^2}{1-D} \right). \quad (4.30)$$

Introduzindo a tensão equivalente de von Mises (Equação (3.9)), a variável associada ao dano (Y) pode ser posta explicitamente em termos do estado de tensões e do estado corrente de dano, como

$$Y = \frac{w_e}{1-D} = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2} \left[\frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right]. \quad (4.31)$$

A razão de triaxialidade, definida pela expressão σ_H / σ_{eq} , possui um importante papel na ruptura dos materiais (LEMAITRE, 1996). Por exemplo, a ductilidade à fratura diminui com o aumento daquela relação. Introduzindo a definição

$$R_v = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}} \right)^2 \quad (4.32)$$

como a função de triaxialidade, tem-se

$$Y = \frac{\tilde{\sigma}_{eq}^2}{2E} R_v. \quad (4.33)$$

4.2.4 Potencial de dissipação

Tendo sido definidas todas as variáveis de estado e suas variáveis associadas, um segundo potencial pode fornecer as relações constitutivas cinéticas que possibilitam descrever a evolução do fenômeno.

Inicialmente, deve-se escrever o segundo princípio da termodinâmica com o objetivo de validar o modelo escolhido. Inicia-se com a inequação de Clausius-Duhem (LEMAITRE, 1996 e MALVERN, 1969)

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \left(\dot{\psi} + s_e \dot{T} \right) - q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0, \quad (4.34)$$

sendo q_i as componentes do vetor fluxo de calor associado com o gradiente de temperatura, para um processo não isotérmico.

A energia livre é uma função de todas as variáveis de estado e sua taxa pode escrita como

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D}. \quad (4.35)$$

Considerando a decomposição aditiva do tensor taxa de deformação $\left(\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right)$ e a Equação (4.35), a Inequação (4.34) se torna

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \rho \left(s_e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial r} \dot{r} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} - q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0. \quad (4.36)$$

Adicionalmente, com a definição das variáveis associadas descritas nas Equações (4.11), (4.15), (4.16) e (4.17), esta desigualdade pode ser posta como

$$-\rho \left(s_e + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \right) \dot{T} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - R \dot{r} - X_{ij}^D \dot{\alpha}_{ij} - \bar{Y} \dot{D} - q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0. \quad (4.37)$$

Para sempre satisfazer esta inequação da dissipação positiva e particularmente para um processo isotérmico $\left(\dot{T} = 0 \text{ e } T_{,i} = 0 \right)$, onde a dissipação plástica é desprezável $\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0, \dot{r} = 0, \dot{\alpha}_{ij} = 0 \right)$, é necessário satisfazer

$$-\bar{Y} \dot{D} \geq 0. \quad (4.38)$$

Como $-\bar{Y}$ é uma função quadrática e positiva, ou seja, $-\bar{Y} \geq 0$, a taxa de dano \dot{D} deve ser uma função não negativa. Portanto, a variável dano pode contabilizar somente deterioração do material e nunca uma recuperação da resistência.

As leis cinéticas são obtidas a partir de um potencial de dissipação F , o qual é um escalar contínuo e convexo e que, para o caso isotérmico, é expresso como

$$F\left((\sigma, R, X^D, Y); (\varepsilon^e, r, \alpha, D)\right), \quad (4.39)$$

onde σ, R, X^D e Y são variáveis associadas e ε^e, r, α e D são variáveis de estado internas.

As leis de plasticidade acoplada com o dano são obtidas a partir de um potencial por meio de um multiplicador escalar que é sempre positivo. Estas relações de potencial são dadas por (LEMAITRE e DESMORAT, 2005):

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\partial F}{\partial \sigma} \dot{\lambda}, \quad (4.40)$$

$$\dot{r} = -\frac{\partial F}{\partial R} \dot{\lambda}, \quad (4.41)$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{\partial F}{\partial X^D} \dot{\lambda}, \quad (4.42)$$

$$\dot{D} = \frac{\partial F}{\partial Y} \dot{\lambda}, \quad (4.43)$$

O detalhamento da obtenção do potencial F e das evoluções das variáveis estão descritas na próxima seção.

4.2.5 Equação constitutiva acoplando deformação e dano

Da mesma maneira que no potencial de estado, a obtenção da expressão analítica do potencial de dissipação F é realizada através de observações experimentais.

ANÁLISE UNIAXIAL

Iniciando o estudo a partir de uma análise do problema de tração uniaxial (Figura 4.3), é possível fazer algumas considerações:

- 1) Como já mencionado, abaixo de um certo valor de deformação plástica, o limite ε_{pD} , nenhum dano ocorre. Isso permite que as equações constitutivas plásticas permaneçam as mesmas, já que o dano é nulo.
- 2) A partir do início do dano, o módulo de elasticidade E começa a sofrer alterações, sendo representado por seu valor efetivo \tilde{E} .

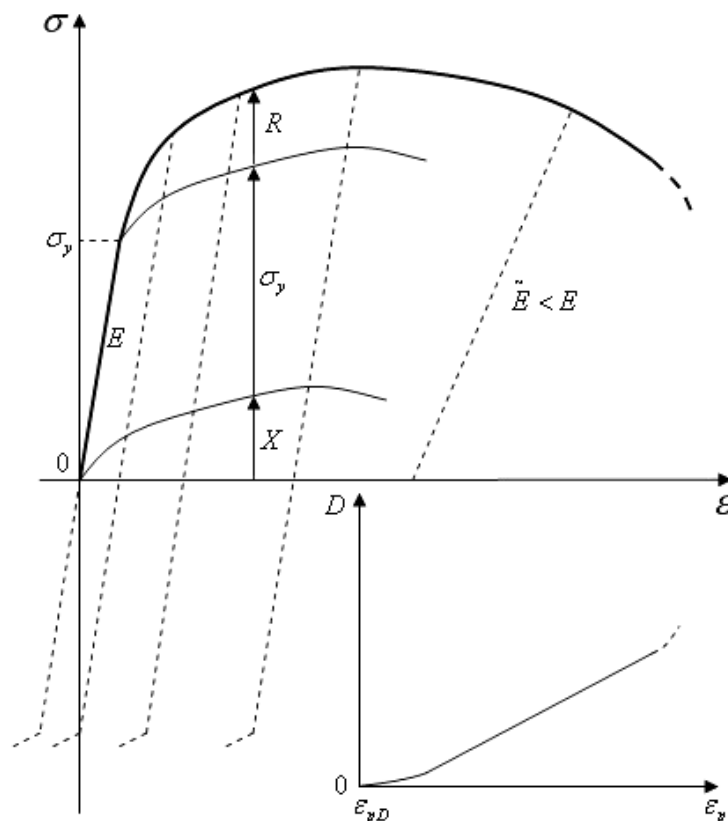


Figura 4.3 - Ensaio de tração monotônica, demonstrando as características dos encruamentos cinemático e isotrópico. (Adaptado de: LEMAITRE, 1996).

3) A tensão cinemática de retorno X , é definida como o centro do domínio elástico e possui as seguintes características:

- Aumenta com a deformação plástica;
- É não-linear com a deformação plástica;
- Tende a um valor saturado X_∞ .

Isto permite escolher uma expressão de evolução de X , na forma:

$$X = X_\infty \left(1 - e^{-\gamma \epsilon_p}\right), \quad (4.44)$$

a qual pode ser justificada por considerações físicas e micro-mecânicas. X_∞ e γ são parâmetros a serem definidos para cada material em cada temperatura.

4) Tendo como referência o teste de tração uniaxial, a tensão de encruamento isotrópico é definida como

$$R = \sigma - \sigma_y - X. \quad (4.45)$$

Esta tensão tem como principais características:

- Aumenta com a deformação plástica;
- É não-linear com a deformação plástica;
- Tende a um valor saturado R_∞ .

Como já descrito na Equação (4.15), a expressão de R pode ser posta como

$$R = R_\infty \left(1 - e^{-br}\right).$$

ANÁLISE MULTIAXIAL

Com base nestas equações válidas para tração uniaxial, que servem de guia para escrever o potencial de dissipação tridimensional, e também na Teoria do Estado Acoplado Cinético (Seção 4.2.2), LEMAITRE (1996) apresenta o potencial de dissipação da seguinte maneira:

$$F = \left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq} - R - \sigma_y + \frac{3}{4X_\infty} X_{ij}^D X_{ij}^D + F_D. \quad (4.46)$$

Os três primeiros termos correspondem a função de carregamento f . O quarto termo $\frac{3}{4X_\infty} X_{ij}^D X_{ij}^D$ é responsável pelo encruamento não-linear cinemático. O último

termo F_D é a parcela do potencial parte responsável pela lei cinética de evolução do dano, cuja expressão analítica é discutida na Seção 4.3.

Através da Equação (4.46), é possível deduzir as equações constitutivas gerais válidas para elastoplasticidade, assim:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{\partial \left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \\ &= \frac{3 \left(\tilde{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D \right)}{2 \left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq}} \frac{\dot{\lambda}}{1-D}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Uma variável importante na elastoplasticidade é a deformação plástica acumulada p , que estabelece uma relação entre os estados multiaxial e o uniaxial.

Sua taxa (\dot{p}) é definida, para o critério de escoamento de von Mises (CHEN e HAN 1988), como

$$\dot{p} = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right)^{1/2}. \quad (4.48)$$

Calculando \dot{p} a partir da expressão de $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ (Equação (4.47)) tem-se

$$\dot{p} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D}. \quad (4.49)$$

Ou seja, esta equação relaciona diretamente o multiplicador plástico à deformação plástica acumulada para um valor de dano corrente. Resta, ainda, obter esses dois valores tal que, em um incremento de carregamento, a condição de consistência seja satisfeita.

Considerando o potencial de dissipação, a equação constitutiva para o encruamento isotrópico pode ser escrita como

$$\dot{r} = -\frac{\partial F}{\partial R} \dot{\lambda} = \dot{\lambda},$$

sendo que, substituindo a Equação (4.49), obtém-se

$$\dot{r} = \dot{\lambda} = \dot{p}(1-D). \quad (4.50)$$

Quando nenhum dano ocorre, a variável de estado para o encruamento isotrópico é a deformação plástica acumulada. Portanto,

$$D=0 \rightarrow r=p.$$

Para o cálculo incremental, é mais conveniente utilizar uma equação constitutiva para a variável associada. Nesse caso, a partir da Equação (4.15), tem-se sua taxa representada por

$$\dot{R} = R_{\infty} b e^{-br} \dot{r} = b(R_{\infty} - R) \dot{\lambda}. \quad (4.51)$$

Para o encruamento cinemático, considerando o potencial de dissipação (4.46), tem-se

$$\dot{\alpha}_{ij} = -\frac{\partial F}{\partial X_{ij}^D} \dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial \left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq}}{\partial X_{ij}^D} + \frac{3}{2X_{\infty}} X_{ij}^D \right) \dot{\lambda}.$$

Expandido essa expressão aliada a Equação (4.47) tem-se

$$\dot{\alpha}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^p (1-D) - \frac{3}{2X_{\infty}} X_{ij}^D \dot{\lambda}. \quad (4.52)$$

Considerando a definição de X^D do potencial de estado (Equação (4.16)) tem-se sua taxa representada por

$$\dot{X}_{ij}^D = \frac{2}{3} X_{\infty} \gamma \dot{\alpha}_{ij},$$

e substituindo a Equação (4.52), para $\dot{\alpha}_{ij}$, resulta em

$$\dot{X}_{ij}^D = \gamma \left[\frac{2}{3} X_{\infty} \dot{\varepsilon}_{ij}^p (1-D) - X_{ij}^D \dot{\lambda} \right]. \quad (4.53)$$

OBTENÇÃO DO MULTIPLICADOR PLÁSTICO

Após a caracterização das equações que fornecem o comportamento material considerando dano e elastoplasticidade, falta obter a expressão explícita para a taxa

do multiplicador plástico $\dot{\lambda}$. Para tanto, considerando as duas condições da plasticidade (Seção 3.2)

$$f = 0 \quad \text{e} \quad f + df = 0,$$

obtêm-se as equações

$$f = \left(\frac{\sigma^D}{1-D} - X^D \right)_{eq} - R - \sigma_y = 0,$$

e

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial X_{ij}^D} \dot{X}_{ij}^D + \frac{\partial f}{\partial D} \dot{D} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0. \quad (4.54)$$

O objetivo, neste ponto, é explicitar cada um dos termos da Equação (4.54) para se obter $\dot{\lambda}$. No caso dos termos diferenciais tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \left(\frac{\sigma^D}{1-D} - X^D \right)_{eq}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3 \left(\tilde{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D \right)}{2 \left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq}} \frac{1}{1-D},$$

$$\frac{\partial f}{\partial X_{ij}^D} = \frac{\partial \left(\frac{\sigma^D}{1-D} - X^D \right)_{eq}}{\partial X_{ij}^D} = -\frac{3 \left(\tilde{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D \right)}{2 \left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial D} = \frac{\partial \left(\frac{\sigma^D}{1-D} - X^D \right)_{eq}}{\partial D} = \frac{\frac{3}{2} \left(\tilde{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D \right) \sigma_{ij}^D}{\left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq} (1-D)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial R} = -1.$$

Substituindo estas expressões na taxa diferencial total da função de escoamento \dot{f} (Equação (4.54)), obtêm-se

$$\dot{f} = \frac{3}{2} \frac{\left(\tilde{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D \right)}{\left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq}} \left(\frac{\dot{\sigma}_{ij}}{1-D} - \dot{X}_{ij}^D + \frac{\sigma_{ij}^D \dot{D}}{(1-D)^2} \right) - \dot{R} = 0. \quad (4.55)$$

Faltando ainda nesta equação, explicitar os termos referentes às taxas.

Iniciando pela taxa do tensor total de tensão $\dot{\sigma}_{ij}$, que pode ser decomposta na parte elástica ($\dot{\sigma}_{ij}^e$) e na parte plástica ($\dot{\sigma}_{ij}^p$), como descrito na Seção 3.3

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e - \dot{\sigma}_{ij}^p, \quad (4.56)$$

resultando em

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e - \dot{\sigma}_{ij}^p = C_{ijkl}^e \left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\lambda} \right).$$

Os demais termos \dot{X}_{ij}^D , \dot{D} e \dot{R} são postos na forma incremental como

$$\dot{X}_{ij}^D = \frac{2}{3} X_{\infty} \gamma \dot{\varepsilon}_{ij}^p (1-D) - \gamma X_{ij}^D \dot{\lambda} = X_{\infty} \gamma \frac{\left(\tilde{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D \right)}{\left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq}} \dot{\lambda} - \gamma X_{ij}^D \dot{\lambda},$$

$$\dot{D} = -\frac{\partial F_D}{\partial \bar{Y}} \dot{\lambda} = \frac{\partial F_D}{\partial Y} \dot{\lambda},$$

$$\dot{R} = b(R_{\infty} - R) \dot{\lambda}.$$

Possibilitando assim a obtenção de $\dot{\lambda}$, através da substituição dos termos na Equação (4.55)

$$\dot{f} = \frac{3}{2} \frac{\left(\tilde{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D \right)}{\left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq}}$$

$$\left[\frac{\dot{\sigma}_{ij}^e}{(1-D)} - \frac{C_{ijkl}^e}{(1-D)} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\lambda} - X_{\infty} \gamma \frac{\left(\tilde{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D \right)}{\left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq}} \dot{\lambda} + \gamma X_{ij}^D \dot{\lambda} + \frac{\sigma_{ij}^D}{(1-D)^2} \frac{\partial F_D}{\partial Y} \dot{\lambda} - b(R_{\infty} - R) \dot{\lambda} \right] = 0.$$

Para simplificar a notação, pode-se definir o tensor auxiliar de 2ª ordem N_{ij} como

$$N_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\left(\tilde{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D \right)}{\left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq}} \quad (4.57)$$

Com isso, o diferencial total \dot{f} pode ser reescrito como

$$\dot{f} = N_{ij} \frac{\dot{\sigma}_{ij}^e}{(1-D)} - N_{ij} \frac{C_{ijkl}^e}{(1-D)} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\lambda} - N_{ij} X_{\infty} \gamma \frac{\left(\tilde{\sigma}_{ij}^D - X_{ij}^D \right)}{\left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq}} \dot{\lambda} + N_{ij} \gamma X_{ij}^D \dot{\lambda} +$$

$$+ N_{ij} \frac{\sigma_{ij}^D}{(1-D)^2} \frac{\partial F_D}{\partial Y} \dot{\lambda} - b(R_{\infty} - R) \dot{\lambda} = 0.$$

Assim, isolando $\dot{\lambda}$, obtém-se a expressão final para o multiplicador plástico na forma

$$\dot{\lambda} = \frac{N_{ij} \dot{\sigma}_{ij}^e}{\left\{ (1-D) \cdot \left[N_{ij} \left(\frac{C_{ijkl}^e}{(1-D)} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} - \gamma X_{ij}^D - \frac{\sigma_{ij}^D}{(1-D)^2} \frac{\partial F_D}{\partial Y} \right) + X_{\infty} \gamma - b(R_{\infty} - R) \right] \right\}}. \quad (4.58)$$

O dano influencia a plasticidade pela tensão desviadora efetiva $\tilde{\sigma}_{ij}^D$ em N_{ij} e pela derivada parcial do potencial de dano $\frac{\partial F_D}{\partial Y}$.

4.2.6 Análise multiaxial: início do dano e dano crítico

Para um caso multiaxial, o início do dano é melhor computado através da energia armazenada (w_s) (LEMAITRE, 1996), e não mais apenas pela deformação plástica acumulada (Seção 4.1.5). Esta energia é obtida através da diferença entre a energia de deformação plástica total $\left(\int_0^t \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt \right)$ e a energia dissipada na forma de calor, dada pela inequação de Clausius-Duhem (Inequação (4.37)). Neste caso, considerando uma transformação isotérmica ($\bar{q}=0$) de um material tendo encruamentos cinemático e isotrópico e nenhum dano $\left(\dot{D}=0 \rightarrow \dot{r}=\dot{p} \right)$, a potência dissipada se torna

$$\phi = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - R \dot{p} - X_{ij}^D \dot{\alpha}_{ij} \geq 0, \quad (4.59)$$

e que está relacionado a:

- potencial de dissipação (Equação (4.46)):

$$F = \left(\tilde{\sigma}^D - X^D \right)_{eq} - R - \sigma_y + \frac{3}{4X_\infty} X_{ij}^D X_{ij}^D + F_D$$

- regras de fluxo associadas (Equações (4.40) a (4.43)):

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{(\sigma_{ij}^D - X_{ij}^D)}{(\sigma^D - X^D)_{eq}} \dot{\lambda};$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial F}{\partial R} \dot{\lambda} = \dot{\lambda};$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = -\frac{\partial F}{\partial X_{ij}^D} \dot{\lambda} = \left(\frac{3}{2} \frac{(\sigma_{ij}^D - X_{ij}^D)}{(\sigma^D - X^D)_{eq}} + \frac{3}{2X_\infty} X_{ij}^D \right) \dot{\lambda}.$$

- critério de escoamento (Equação (3.9)):

$$f = (\sigma^D - X^D)_{eq} - R - \sigma_y = 0.$$

Substituindo estes resultando na Equação (4.59) obtém-se

$$\phi = \left(\sigma_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + R \frac{\partial F}{\partial R} + X_{ij}^D \frac{\partial F}{\partial X_{ij}^D} \right) \dot{p} \geq 0$$

e que resulta em

$$\begin{aligned}
 \phi &= \left(\sigma_{ij} \frac{3 (\sigma_{ij}^D - X_{ij}^D)}{2 (\sigma^D - X^D)_{eq}} - R + X_{ij}^D \left(-\frac{3 (\sigma_{ij}^D - X_{ij}^D)}{2 (\sigma^D - X^D)_{eq}} + \frac{3}{2X_\infty} X_{ij}^D \right) \right) \dot{p} = \\
 &= \left((\sigma^D - X^D)_{eq} - R + \frac{3}{2X_\infty} X_{ij}^D X_{ij}^D \right) \dot{p} = \\
 &= \left(\sigma_y + \frac{3}{2X_\infty} X_{ij}^D X_{ij}^D \right) \dot{p} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Assim, a energia total armazenada como função do tempo pode ser escrita como

$$w_s = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt - \int_0^t \left(\sigma_y + \frac{3}{2X_\infty} X_{ij}^D X_{ij}^D \right) \dot{p} dt \quad (4.60)$$

a qual é comparada com a energia armazenada de início de dano (w_{1D}), uma característica material obtida experimentalmente.

Por outro lado, no final da evolução do dano, o valor do dano crítico multiaxial (D_c), pode ser aproximado com o valor do dano crítico uniaxial (D_{1c}) (Seção 4.1.4) LEMAITRE e DESMORAT (2005), tornando-se uma propriedade do material. Ou seja,

$$D_c = D_{1c}. \quad (4.61)$$

4.3 Modelo Cinético de Evolução do Dano

Nas seções anteriores, foram citados os modelos de evolução das variáveis envolvidas, restando somente aquele que rege a evolução do dano. Para isso é necessário uma expressão analítica do termo do potencial de dissipação relacionado

ao dano F_D , do qual a taxa de dano \dot{D} é obtida

$$\dot{D} = -\frac{\partial F}{\partial \bar{Y}} \dot{\lambda} = \frac{\partial F_D}{\partial Y} \dot{\lambda}, \quad (4.62)$$

com $\dot{\lambda} = \dot{p}(1-D)$.

A escolha desta função F_D é a chave da representação da evolução do dano, sendo obtida a partir das principais propriedades do dano:

• O dano está sempre relacionado com algum processo irreversível de deformação. Esta propriedade é levada em consideração através do multiplicador plástico $\dot{\lambda}$, que é proporcional a deformação plástica acumulada. Quando dano ocorre tem-se

$$\dot{D} = \frac{\partial F_D}{\partial Y} (1-D) \dot{p}.$$

A variável \dot{p} , que governa a evolução do dano, caracteriza a natureza irreversível do dano, pois \dot{p} é sempre positiva ou zero.

• O dano permanece igual a zero durante a nucleação das micro-trincas, ou seja,

$$\dot{D} = \begin{cases} \frac{\partial F_D}{\partial Y} (1-D) \dot{p} & \text{se } w_s \geq w_{1D} \\ 0 & \text{se } w_s < w_{1D} \end{cases},$$

que pode ser substituída pela função passo de Heaviside:

$$H(w_s - w_{1D}) = \begin{cases} 1 & \text{se } w_s \geq w_{1D} \\ 0 & \text{se } w_s < w_{1D} \end{cases},$$

resultando em

$$\dot{D} = \frac{\partial F_D}{\partial Y} (1-D) \dot{p} H(w_s - w_{1D}).$$

• Com base na análise termodinâmica, a principal variável do dano é a taxa de liberação da densidade de energia de deformação Y , sendo ela a variável dual do fluxo \dot{D} . Assim F_D deve ser uma função de Y , na forma

$$F_D = F_D(Y \dots).$$

• Outra importante característica da fratura é a influência da razão de triaxialidade σ_H / σ_{eq} . Este efeito é introduzido através da expressão de Y (Equação (4.33)) e pelo fator de triaxialidade R_v (Equação (4.32)).

Através de resultados experimentais, LEMAITRE (1996) concluiu que \dot{D} é proporcional a Y , que é função de σ_H/σ_{eq} e \dot{p} . Portanto

$$\dot{D} = \dot{D}(Y, \dot{p})$$

ou

$$F_D = F_D(Y^2).$$

Concluindo também a existência de um fator escalar S , denominado energia de resistência ao dano e que também é uma constante material.

• Vários outros experimentos (LEMAITRE, 1996) mostraram que a taxa de dano não diminui quando Y e \dot{p} são constantes, existindo assim a necessidade de incluir um termo $(1-D)$, que será cancelado com o $(1-D)$ vindo de $\dot{\lambda} = \dot{p}(1-D)$. Assim,

$$F_D = F_D\left(\frac{Y^2}{S(1-D)}\right).$$

Finalmente, de acordo com as propriedades quantitativas listadas acima, o potencial de dano pode ser escrito como

$$F_D = \frac{Y^2}{2S(1-D)} H(w_s - w_{1D}). \quad (4.63)$$

O fator $1/2$ é utilizado para simplificações na derivação. Nesse caso,

$$\dot{D} = \frac{\partial F_D}{\partial Y} \dot{\lambda} = \frac{Y}{S(1-D)} \dot{p}(1-D) H(w_s - w_{1D}), \quad (4.64)$$

ou ainda

$$\dot{D} = \frac{Y}{S} \dot{p} H(w_s - w_{1D}). \quad (4.65)$$

Posteriormente, LEMAITRE *et al.* (1999) incluíram um expoente para representar a não-linearidade da evolução do dano. Assim, a equação (4.65) passou a ser expressa como

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{S}\right)^s \dot{p} H(w_s - w_{1D}), \quad (4.66)$$

onde Y é obtido da equação (4.31) e outros dois parâmetros materiais são introduzidos para caracterizar a evolução do dano:

- $S \rightarrow$ energia de resistência ao dano;
- $s \rightarrow$ expoente de dano.

4.4 Análise Numérica do Dano

Dano é um fenômeno não-linear geralmente acoplado com plasticidade, um fenômeno também não-linear. Desta forma não se pode esperar uma solução simples para problemas de iniciação de trincas, exceto para casos onde são aplicadas aproximações grosseiras.

Para aproximações iniciais de projetos de componentes, o acoplamento das deformações com o dano pode ser desconsiderado e um pós-processamento da evolução do dano é feita depois de uma análise estrutural clássica. Esta abordagem é denominada ANÁLISE DESACOPLADA.

Para aplicações precisas de engenharia e quando o acoplamento entre as deformações e o dano é forte, é necessária uma ANÁLISE TOTALMENTE ACOPLADA. Este caso é realizado com o auxílio de códigos computacionais de elementos finitos e é mais utilizada para dano dúctil e fadiga de baixo ciclo.

Quando o dano é localizado, ou seja, ocupa um pequeno volume quando comparado com o componente na macro-escala, existe a possibilidade de se analisar apenas a micro-escala, utilizando o modelo de dano em duas escalas (LEMAITRE *et al.*, 1999). Esta análise é chamada de ANÁLISE LOCALMENTE ACOPLADA, sendo utilizada para o dano quase frágil e fadiga de alto ciclo.

4.4.1 Análise desacoplada

Consiste em calcular a evolução do dano em um pós-processamento, ou seja, a partir do histórico das deformações plásticas acumuladas p e das taxas de liberação da densidade de energia Y , obtém-se o histórico no tempo do dano.

Este histórico é avaliado através de uma integração no tempo da lei de evolução do dano (Equação (4.66)) como

$$D = \int_{t_D}^t \left(\frac{Y(t)}{S} \right)^s \dot{p}(t) dt, \quad (4.67)$$

sendo t_D o tempo para a iniciação do dano.

Pode-se resumir a análise desacoplada da seguinte maneira:

- Identificação dos pontos mais solicitados.
- Realização do cálculo estrutural para obter as histórias de Y e p .
- Avaliação do dano D através da integração no tempo.
- Estimar o tempo correspondente para se obter o dano crítico D_c .
- Definir as margens de segurança dos parâmetros desejados.

A análise desacoplada possui um tempo computacional baixo, por outro lado apresenta uma aproximação grosseira.

4.4.2 Análise totalmente acoplada

Para carregamentos complexos, tais como não-proporcionais, anisotérmicos ou que envolvam grandes deformações plásticas, os estados de tensões e de dano devem ser determinados de uma maneira acoplada. É necessário então resolver as leis elastoplásticas juntamente com a lei de dano, o que requer um maior custo computacional.

Baseados nas discretizações do tempo e espaço, a análise de elementos finitos (FEA) é comumente utilizada. Uma maneira clássica de se fazer estes cálculos é implementar as equações constitutivas da Seção 4.2.6 e as leis cinéticas de dano em um código de elementos finitos, analisando assim o problema de uma forma acoplada. Nesse caso, o problema global (por FEA) é resolvido incrementalmente e considerando as alterações constitutivas em cada incremento.

4.4.3 Análise localmente acoplada

Nesta análise, o RVE possui características elásticas ou elastoplásticas na meso-escala e elastoplástica e danificada na micro-escala (Figura 4.4). Uma característica material que é diferente nas duas escalas, é a tensão de escoamento na inclusão σ_y^μ (o índice μ será utilizado para descrever propriedades na micro-

escala), que é assumida como igual ao limite a fadiga do material σ_f . Adicionalmente, o limite a fadiga na micro-escala σ_f^μ é reduzido na mesma proporção. Ou seja:

$$\sigma_y^\mu = \sigma_f, \tag{4.68}$$

$$\sigma_f^\mu = \sigma_f \frac{\sigma_f}{\sigma_y} = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_y}. \tag{4.69}$$

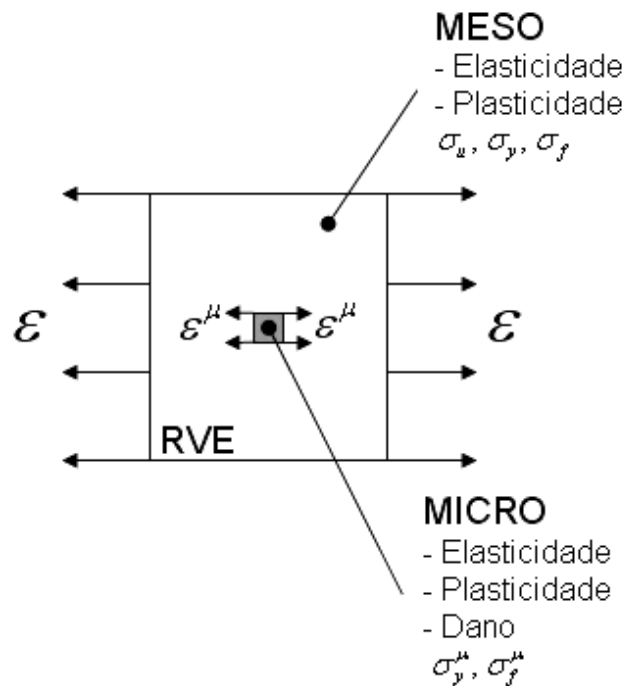


Figura 4.4 - Modelo em 2 escalas (Adaptado de: LEMAITRE e DOGHRI, 1994).

Como o limite a fadiga é menor do que a tensão de escoamento ($\sigma_f < \sigma_y$), isto permite que seja criado dano na micro-escala, mantendo a matriz elástica ou elastoplástica e não danificada no mesmo carregamento.

Uma segunda hipótese que relaciona os campos de tensões e deformações nas duas escalas é a lei de localização, que são baseados em processos de homogeneização clássicos. Pode-se citar a lei de Eshelby-Kröner (LEMAITRE e DESMORAT, 2005):

$$\varepsilon_{ij}^\mu = \varepsilon_{ij} + \beta (\varepsilon_{ij}^{\mu p} - \varepsilon_{ij}^p) \tag{4.70}$$

ou
$$\sigma_{ij}^\mu = \sigma_{ij} - 2G(1 - \beta) \varepsilon_{ij}^{\mu p} \tag{4.71}$$

sendo $\beta = \frac{2}{15} \frac{4-5\nu}{1-\nu}$. Esta lei de localização fornece melhor modelamento do efeito de triaxialidade do que o uso da hipótese de Lin-Taylor, na qual as deformações na meso-escala e na micro-escala são consideradas iguais ($\varepsilon_{ij}^{\mu} = \varepsilon_{ij}$).

Outro ponto que deve ser considerado é o critério de iniciação da meso-trinca, pois os resultados com a análise localmente acoplada indicariam uma iniciação da trinca apenas na micro-escala.

Considerando a taxa de liberação da energia de deformação na meso-escala G_Y (*strain energy release rate*), que pode ser calculada a partir da variação da energia de deformação W em tensão constante como (LEMAITRE e DOGHI, 1994)

$$G_Y = -\frac{1}{2} \frac{\delta W}{\delta A} \Big|_{\sigma=cte},$$

onde δA é a área de ocupação da trinca, que possui uma dimensão d^2 . O termo $-\frac{1}{2} \delta W \Big|_{\sigma=cte}$ é também igual a energia dissipada na inclusão pelo processo de dano, ou seja

$$-\frac{1}{2} \delta W \Big|_{\sigma=cte} = d^3 \int_0^{D_c} Y dD,$$

resultando em

$$G_{Y(\delta A)} = \frac{d^3 \int_0^{D_c} Y dD}{\delta A}.$$

Assumindo uma taxa de liberação da densidade de energia de deformação constante $Y = Y_c$, obtém-se

$$G_{Y(\delta A)} = Y_c D_c d. \tag{4.72}$$

Uma outra relação surge da comparação entre a mecânica do dano e a mecânica da fratura. Esta relação pode ser obtida escrevendo-se a igualdade entre a energia dissipada pelo dano na iniciação da micro-trinca e a energia dissipada pela criação da mesma trinca pelo processo da mecânica da fratura frágil,

$$Y_c D_c d^3 = G_c d^2,$$

sendo G_c a tenacidade do material, resultando em

$$Y_c D_c d = G_c. \quad (4.73)$$

A comparação das duas relações de $Y_c D_c d$ (Equações (4.72) e (4.73)) mostra que $G_{Y(\delta A)} = G_c$ é a instabilidade do RVE na meso-escala. Então o critério de iniciação da micro-trinca é também o critério para a instabilidade frágil da meso-escala.

4.5 Mecânica do Dano Contínuo em Fadiga

O processo de dano em fadiga é assim chamado quando o carregamento é repetido um grande número de vezes com a mesma amplitude ou com amplitudes variadas, que podem ser unidimensional, em tração ou tração-compressão ou ainda tridimensionais.

4.5.1 Fadiga de baixo ciclo

O caso de fadiga de baixo ciclo ocorre quando o carregamento é grande o suficiente para produzir deformações plásticas, da mesma ordem das deformações elásticas. Isto significa que o número de ciclos para falha N_R é baixo e sua ordem de magnitude é

$$N_R < 100000 \text{ ciclos.}$$

O número de ciclos para falha é composto de duas partes: o número de ciclos N_0 de nucleação das micro-trincas, ou seja, para atingir ε_{pD} ou w_{1D} , e o número de ciclos N_D durante o qual o dano ocorre e inicia a trinca na meso-escala:

$$N_R = N_0 + N_D. \quad (4.74)$$

Nesse caso, N_0 é calculado pela equação constitutiva elastoplástica clássica sem qualquer acoplamento com o dano, pois durante este período $D = 0$.

Seja um carregamento periódico de deformação controlada e amplitude constante $\Delta\varepsilon$. Após a ocorrência de alguns ciclos, o processo elastoplástico se estabiliza a uma amplitude de tensão $\Delta\sigma$ que continua constante até $p = p_D$. Em resumo, para um caso uniaxial (LEMAITRE, 1996):

$$\Delta\varepsilon = cte \rightarrow \Delta\sigma = cte,$$

como $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p$ e $\Delta\varepsilon^e = \Delta\sigma/E$,

$$\Delta\varepsilon^p = cte.$$

A deformação plástica acumulada depois de um único ciclo pode ser escrita como

$$\frac{\delta p}{\delta N} = \int_{1\text{ciclo}} \left| \dot{\varepsilon}_p \right| dt = 2\Delta\varepsilon^p, \quad (4.75)$$

e para N ciclos após a estabilização

$$p_{(n)} = 2N\Delta\varepsilon^p. \quad (4.76)$$

Assim, para um caso uniaxial, o número de ciclos para o início do dano é

$$N_0 = \frac{\varepsilon_{pD}}{2\Delta\varepsilon^p}. \quad (4.77)$$

O cálculo de N_D necessita da integração da lei cinética de dano sobre um único ciclo e posteriormente sobre N ciclos:

$$\frac{\delta D}{\delta N} = \int_{1\text{ciclo}} \dot{D} dt, \quad (4.78)$$

sendo

$$\dot{D} = \left(\frac{Y}{S} \right)^s \dot{p}. \quad (4.79)$$

4.5.2 Fadiga de alto ciclo

Se a amplitude do carregamento é baixa, a amplitude das deformações plásticas é muito pequena na meso-escala e pode ser negligenciada, porém as deformações plásticas na micro-escala devem ser consideradas. Para isto é utilizada a análise localmente acoplada, ou método das duas escalas como também é conhecido.

Geralmente o número de ciclos para falha é muito grande, da ordem de

$$N_R > 100000 \text{ ciclos.}$$

A análise é semelhante a fadiga baixo ciclo, a grande diferença é a necessidade de se analisar o fenômeno na micro-escala. O número de ciclos para falha N_R continua sendo composto pelas duas partes N_0 e N_D (Equação (4.74)). Assim,

$$N_R = N_0 + N_D,$$

e N_0 é calculado de maneira semelhante, porém para fadiga de alto ciclo é mais comum de se encontrar tensão controlada, ou seja, $\Delta\sigma = cte$, resultando em (LEMAITRE, 1996)

$$N_0 = \frac{\varepsilon_{pD}}{2\Delta\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{pD}}{2} \frac{E}{\Delta\sigma}. \quad (4.80)$$

O cálculo de N_D também necessita da integração sobre um único ciclo e posteriormente sobre N ciclos, porém a lei cinética de evolução do dano na micro-escala é

$$\dot{D} = \left(\frac{Y^\mu}{S} \right)^s \dot{p}. \quad (4.81)$$

4.5.3 Fechamento de trinca

Sob condições de compressão, em muitos materiais os micro defeitos podem fechar. Aumentando assim a área resistente descrita na Seção 4.1.1. Isso implica em tensões efetivas menores, influenciando de modo desigual a taxa de evolução do dano em tração e em compressão.

Ou seja, em compressão a área efetiva de resistência definida como \tilde{S} , passa a ser

$$\tilde{S} = S - hS_D, \quad (4.82)$$

onde apenas uma parcela da área danificada S_D é subtraída da área total S , através do parâmetro de fechamento de trinca h , sendo ($0 \leq h \leq 1$) dependente do material. Ou ainda, da mesma maneira que a Equação (4.2)

$$\tilde{S} = S(1 - hD).$$

Assim, a tensão efetiva em compressão $\tilde{\sigma} = \sigma S / \tilde{S}$ resulta em

$$\tilde{\sigma} = \sigma / (1 - hD). \quad (4.83)$$

Para carregamentos multiaxiais, a grande dificuldade é diferenciar o que é tração do que é compressão. Com base nos trabalhos de ABDUL-LATIF (1999), LEMAITRE e DESMORAT (2005), divide-se o tensor de tensão (σ_{ij}) na parte positiva (σ_{ij}^+) e parte negativa (σ_{ij}^-) utilizando os 3 autovalores (tensões principais) do tensor de tensões.

Segundo ABDUL-LATIF (1999), a parte positiva do tensor simétrico é construída a partir dos seus autovalores (s_k) , e seus correspondentes autovetores normalizados (p_i^k) , resultando em

$$\sigma_{ij}^+ = \sum_{k=1}^3 \langle s_k \rangle p_i^k p_j^k \quad \text{e} \quad (4.84)$$

$$\sigma_{ij}^- = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^+, \quad (4.85)$$

onde $\langle . \rangle$ representa apenas a parte positiva do escalar, ou seja,

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Para a condição de dano isotrópico, o parâmetro h opera por $(1 - hD)^{-1}$ na parte negativa e a parte positiva continua sendo alterada por $(1 - D)^{-1}$. O potencial de estado isotérmico (Equação (4.10)), agora dependente de h , passa a ser definido como

$$\begin{aligned} \rho\psi = & \frac{1+\nu}{2E} \left[\frac{\langle \sigma_{ij}^+ \rangle \langle \sigma_{ij}^+ \rangle}{1-D} + \frac{\langle \sigma_{ij}^- \rangle \langle \sigma_{ij}^- \rangle}{1-hD} \right] - \frac{\nu}{2E} \left[\frac{\langle \sigma_{kk} \rangle^2}{1-D} + \frac{\langle \sigma_{kk} \rangle^2}{1-hD} \right] \\ & + R_\infty \left(r + \frac{1}{b} e^{-br} \right) + \frac{X_\infty \gamma}{3} \alpha_{ij} \alpha_{ij} \end{aligned} \quad (4.86)$$

e a variável $Y = \rho \partial \psi / \partial D$ se torna

$$Y = \frac{1+\nu}{2E} \left[\frac{\langle \sigma_{ij}^+ \rangle \langle \sigma_{ij}^+ \rangle}{(1-D)^2} + h \frac{\langle \sigma_{ij}^- \rangle \langle \sigma_{ij}^- \rangle}{(1-hD)^2} \right] - \frac{\nu}{2E} \left[\frac{\langle \sigma_{kk} \rangle^2}{(1-D)^2} + h \frac{\langle -\sigma_{kk} \rangle^2}{(1-hD)^2} \right]. \quad (4.87)$$

A abordagem com fechamento de trinca resulta em uma taxa de evolução de dano (\dot{D}) diferente em tração e em compressão, fortemente influenciada pelo parâmetro h .

Nos trabalhos de PIRONDI e BONORA (2003), PIRONDI *et al.* (2006), é adotado que na compressão não existe evolução do dano, pois a rigidez do material não é afetada e não existe mudança da área resistente. Ou seja, o parâmetro h é nulo.

Para desconsiderar o fechamento de trinca, onde a evolução do dano será igual em tração e em compressão, basta considerar o parâmetro h igual a 1.

4.5.4 Salto em ciclos

A análise de fadiga envolvendo carregamentos periódicos, via de regra, resulta em um tempo computacional para a realização incremento por incremento muito elevado. Isto se torna muito caro computacionalmente, quando se trata de um número de ciclos muito alto, por exemplo, da ordem de 10^5 a 10^8 ciclos.

Uma maneira de simplificar o processo, é utilizando uma rotina de salto, na qual espera-se até a estabilização das variáveis e salta um número de ciclos (N_{salto}), replicando os valores das variáveis N_{salto} vezes (LEMAITRE e DOGHRI, 1994).

Este processo de salto em ciclos pode ser aplicado em duas etapas: i) antes do início do dano e ii) após o início do dano. A seguir, essas situações são discutidas.

i) Salto em ciclos ANTES do início do dano.

Esta etapa é caracterizada por ocorrência de deformação plástica na micro-escala e pela contabilização de deformação plástica acumulada (p) ou de energia armazenada (w_s).

Para a realização deste processo, é necessário a estabilização do incremento da deformação plástica acumulada $\frac{\partial p}{\partial N}$ em um determinado ciclo (N_{estab}). Assumindo então que p continua linear com o número de ciclos N , realiza-se um salto até um determinado valor de deformação plástica acumulada (p_{salto}), calculado por

$$P_{salto} = \frac{\varepsilon_{pD}}{n_{pd}}, \quad (4.88)$$

sendo ε_{pD} a deformação plástica para início do dano (parâmetro material).

n_{pd} o número total de saltos a serem realizados (valor arbitrado).

Então calcula-se o número de ciclos N_{salto} que são saltados como

$$N_{salto} = \frac{P_{salto}}{\frac{\partial p}{\partial N}}. \quad (4.89)$$

Após a contabilização de N_{salto} , as variáveis são atualizadas, por exemplo:

$$p(N_{estab} + N_{salto}) = p(N_{estab}) + P_{salto}. \quad (4.90)$$

Repete-se os processos até p atingir ε_{pD} .

O mesmo processo pode ser aplicado quando utiliza-se a energia armazenada w_s .

ii) Salto em ciclos APÓS o início do dano.

Essa etapa é caracterizada pelos acúmulos de deformação plástica e dano. Após novamente a estabilização do processo em um determinado ciclo (N_{estab}), calcula-se o incremento da deformação plástica acumulada $\frac{\partial p}{\partial N}$ e o incremento de dano $\frac{\partial D}{\partial N}$ sobre este ciclo.

Em uma ANÁLISE DESACOPLADA, pode-se assumir novamente que p e D são lineares com o número de ciclos N (LEMAITRE e DESMORAT (2005)), e o salto ocorre até um determinado valor de dano (D_{salto}), calculado por

$$D_{salto} = \frac{D_c}{n_{dano}}, \quad (4.91)$$

sendo D_c o dano para início da trinca (parâmetro material).

n_{dano} o número total de saltos a serem realizados (valor arbitrado).

Calcula-se então o número de ciclos a serem saltados como

$$N_{salto} = \frac{D_{salto}}{\frac{\partial D}{\partial N}} \quad (4.92)$$

Paralelamente, a deformação plástica no final do salto é dada por

$$P_{salto} = P_{estab} * N_{salto},$$

onde P_{estab} é a deformação plástica acumulada no ciclo estabilizado.

Após a contabilização de N_{salto} , as variáveis são atualizadas, por exemplo

$$p(N_{estab} + N_{salto}) = p(N_{estab}) + P_{salto} \quad (4.93)$$

$$D(N_{estab} + N_{salto}) = D(N_{estab}) + D_{salto}. \quad (4.94)$$

Após, repete-se os processos até o dano D atingir o dano crítico D_c .

Quando se trata de uma ANÁLISE LOCALMENTE ACOPLADA, o salto em ciclos após o início do dano é mais complexo, pois o dano passa a ter uma evolução não linear. Nesta análise, a razão de deformação plástica acumulada R_p e a razão de dano R_D é que são lineares com o número de ciclos N , e são calculadas por:

$$R_p = \frac{p(N_{estab})}{p(N_{estab} - 1)}, \quad (4.95)$$

$$R_D = \frac{D(N_{estab})}{D(N_{estab} - 1)}. \quad (4.96)$$

Com isso, as atualizações passam a ser feita da seguinte forma

$$p(N_{estab} + n) = p(N_{estab} + n - 1) + \frac{\partial p}{\partial N}(N_{estab} + n - 1) * R_p, \quad (4.97)$$

$$D(N_{estab} + n) = D(N_{estab} + n - 1) + \frac{\partial D}{\partial N}(N_{estab} + n - 1) * R_D, \quad (4.98)$$

onde n varia de 1 até N_{salto} .

Então, repete-se o processo até que o dano atinja o dano crítico.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O objetivo deste capítulo é apresentar a validação da formulação corrente, através da comparação com resultados encontrados na literatura.

Para situar o leitor, a formulação é composta por:

- PARA A ELASTOPLASTICIDADE: utilização do critério de von Mises, juntamente com o encruamento cinemático.

- PARA O DANO: modelo de dano isotrópico e análise localmente acoplada.

Apresentam-se os resultados para carregamento monotônico na meso-escala, mostrando a influência dos parâmetros materiais X_{∞} (encruamento cinemático saturado) e γ (encruamento cinemático).

Adicionalmente são mostrados os resultados para carregamentos cíclicos na micro-escala, sem a consideração de fechamento de trinca. A influência dos parâmetros materiais energia de resistência ao dano (S) e expoente de dano (s) são discutidas e, também é demonstrado o efeito de se utilizar o salto em ciclo. É simulada também a influência dos seguintes fatores: amplitude da tensão alternada, seqüência dos carregamento e tensão média.

Além desses, apresenta-se os resultados de carregamentos cíclicos também na micro-escala, mas agora com fechamento de trinca, apresentando também uma análise sobre o parâmetro h .

Devido a pequena quantidade de dados experimentais encontrados na literatura, foi necessário o ajuste de alguns parâmetros materiais para o emprego da corrente metodologia. Estes ajustes foram realizados através de modificações em seus valores com o objetivo de obter uma maior aproximação dos resultados de referência e, posteriormente, feita a análise da influência do parâmetro.

A implementação numérica foi realizada no programa comercial Matlab®, e um fluxograma com esta metodologia pode ser visto na Figura 5.1.

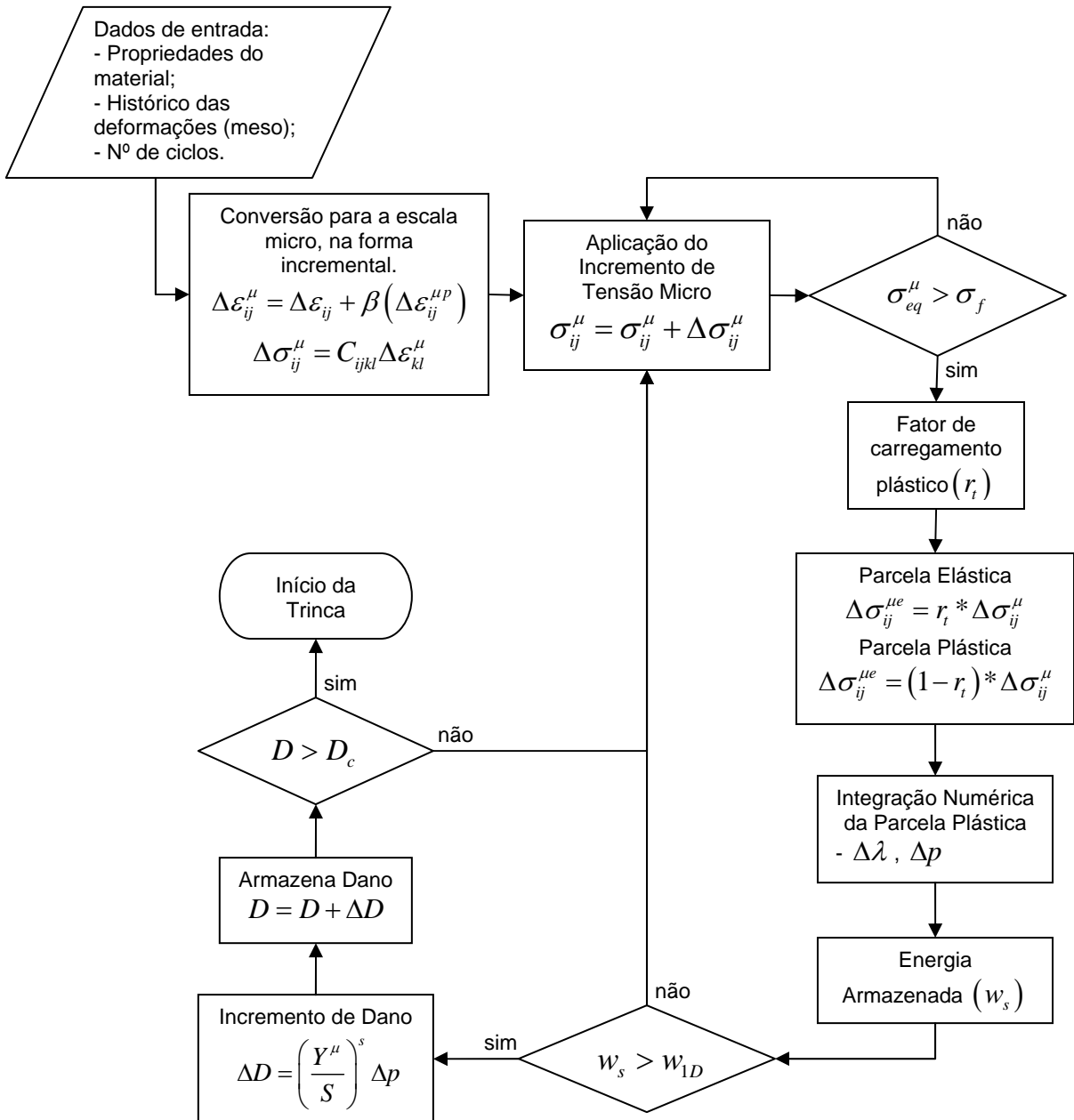


Figura 5.1 - Fluxograma com a descrição esquemática da corrente formulação.

5.1 Carregamento Monotônico

Esta seção apresenta alguns resultados para um Ferro Fundido dúctil (HAYAKAWA *et al.*, 1998). Foram realizadas simulações de tração uniaxial e cisalhamento puro na meso-escala e são analisadas as influências dos parâmetros materiais X_∞ (encruamento cinemático saturado) e γ (encruamento cinemático).

As propriedades do Ferro Fundido utilizadas neste conjunto de simulações estão apresentadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Propriedades mecânicas do Ferro Fundido.

Propriedade	Valor	Unidade	Fonte*
Módulo de Elasticidade Longitudinal (E)	169000	MPa	1
Coefficiente de Poisson (ν)	0,285	---	1
Dano Crítico (D_c)	0,99	---	Ajustado
Deformação Plástica de Dano (ε_{pd})	0,15	---	Ajustado
Energia Acumulada de Dano (w_{1D})	3,2214	---	Ajustado
Tensão de Ruptura (σ_R)	500	MPa	Ajustado
Tensão de Escoamento (σ_y)	293	MPa	1
Tensão Limite de Fadiga (σ_f)	200	MPa	Ajustado
Dano Inicial (D_0)	0**	---	---
Deformação Plástica Inicial (p_0)	0**	---	---
Energia de Resistência ao Dano (S)	6	MPa	Ajustado
Expoente de Dano (s)	1	---	Ajustado
Encruamento Cinemático Saturado (X_∞)	200	MPa	Ajustado
Encruamento Cinemático (γ)	30	---	Ajustado
Fechamento de Trinca (h)	1	---	Ajustado

* Fonte: 1) HAYAKAWA *et al.*, 1998

** Valor arbitrado, supondo que o material não possui deformação plástica acumulada nem dano acumulado no início do processo.

5.1.1 Simulação numérica para teste de tração uniaxial

A Figura 5.2 apresenta a simulação de tração uniaxial da referência que é experimental e analítica e da formulação corrente.

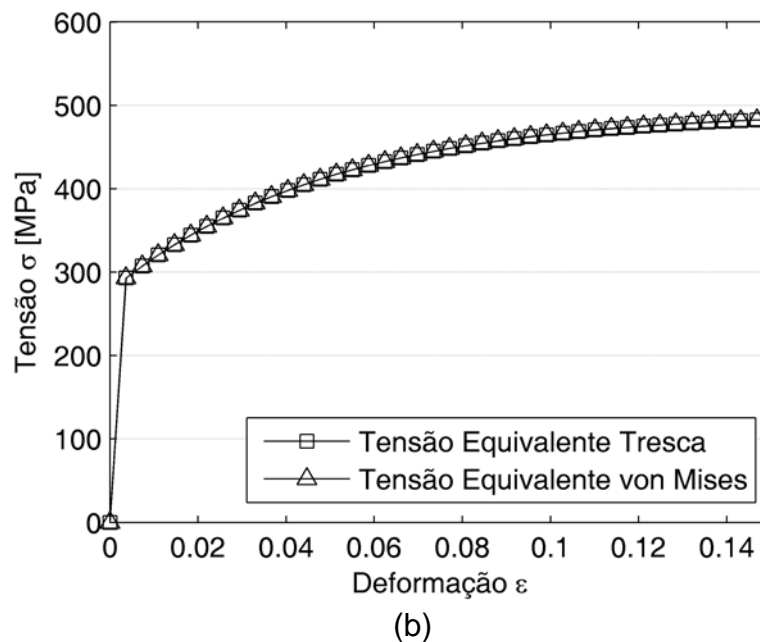
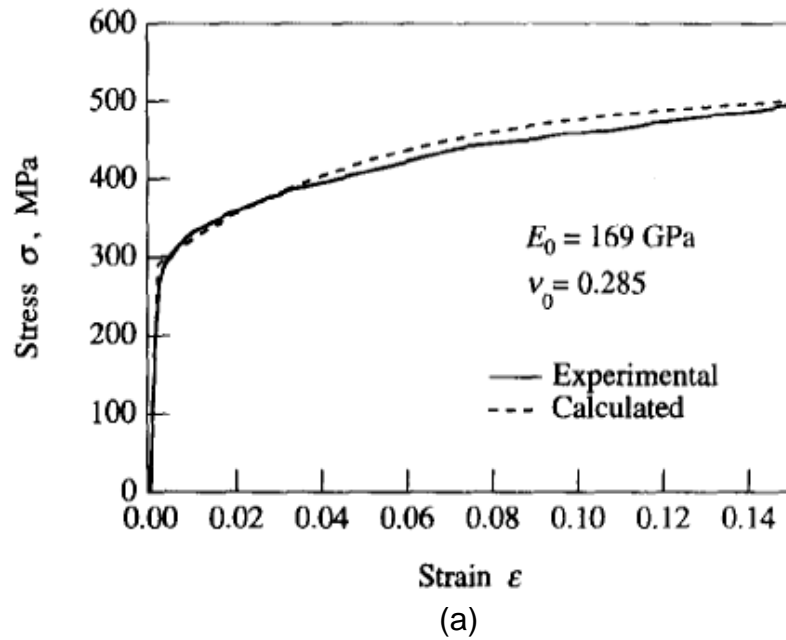
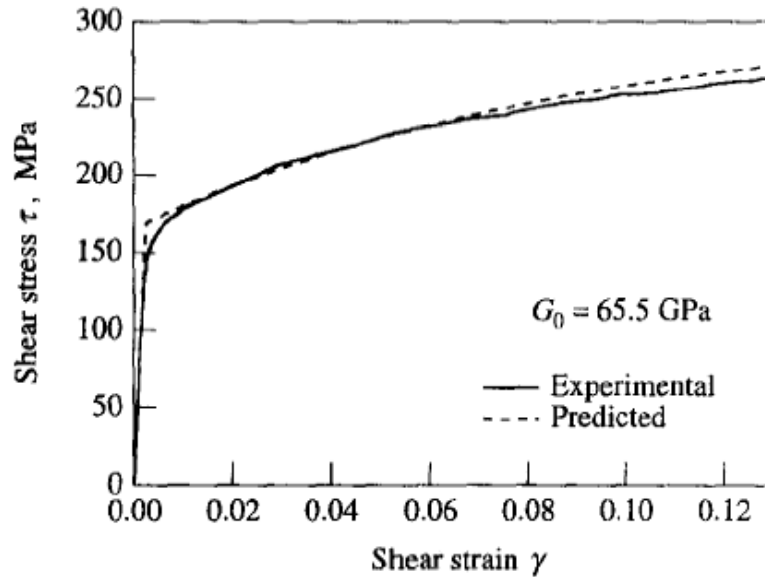


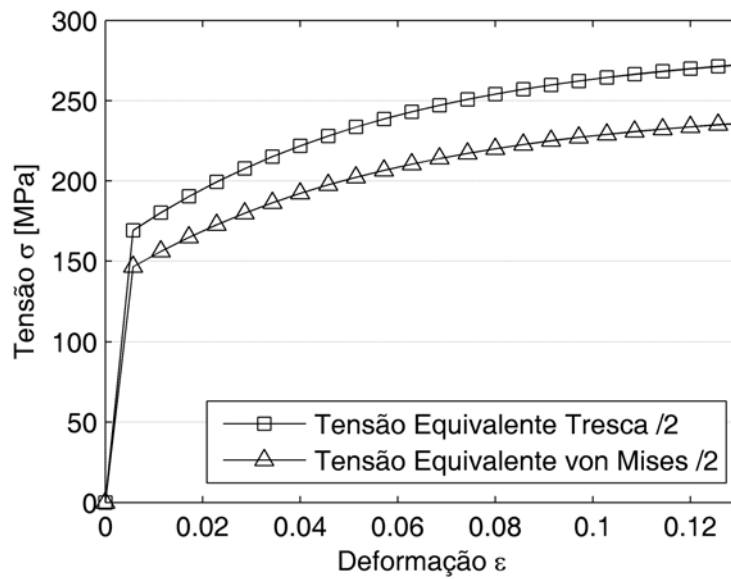
Figura 5.2 - Gráfico $\sigma \times \epsilon$ experimental e analítico do Ferro Fundido em tração uniaxial. a) Fonte: HAYAKAWA *et al.*, 1998 b) Formulação corrente.

5.1.2 Simulação numérica para teste de cisalhamento puro

Após o ajuste dos parâmetros para obtenção do resultado em tração uniaxial, realizou-se a simulação do cisalhamento puro (Figura 5.3).



(a)



(b)

Figura 5.3 - Gráfico $\sigma \times \epsilon$ experimental e analítico do Ferro Fundido em cisalhamento puro. a) Fonte: HAYAKAWA *et al.*, 1998 b) Formulação corrente.

5.1.3 Influência do encruamento cinemático saturado (X_∞)

Este resultado foi obtido com a variação do parâmetro em 50 MPa para mais e para menos, ou seja, a simulação foi feita com os seguintes valores: 150 MPa, 200 MPa e 250 MPa. Os resultados obtidos para a curva $\sigma \times \varepsilon$ em tração uniaxial podem ser observados na Figura 5.4

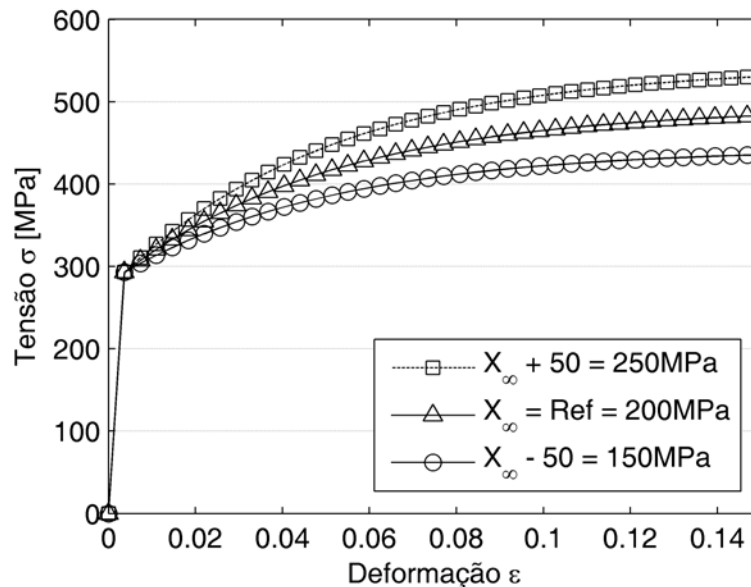


Figura 5.4 - Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ do Ferro Fundido em tração uniaxial, mostrando a influência do parâmetro material X_∞ .

5.1.4 Influência do encruamento cinemático (γ)

Da mesma maneira que na Seção 5.1.3, foi feita a variação em 20 unidades sobre o valor de referência. Ou seja, a simulação foi realizada com os seguintes valores: 10, 30 e 50. Os resultados estão apresentados na Figura 5.5.

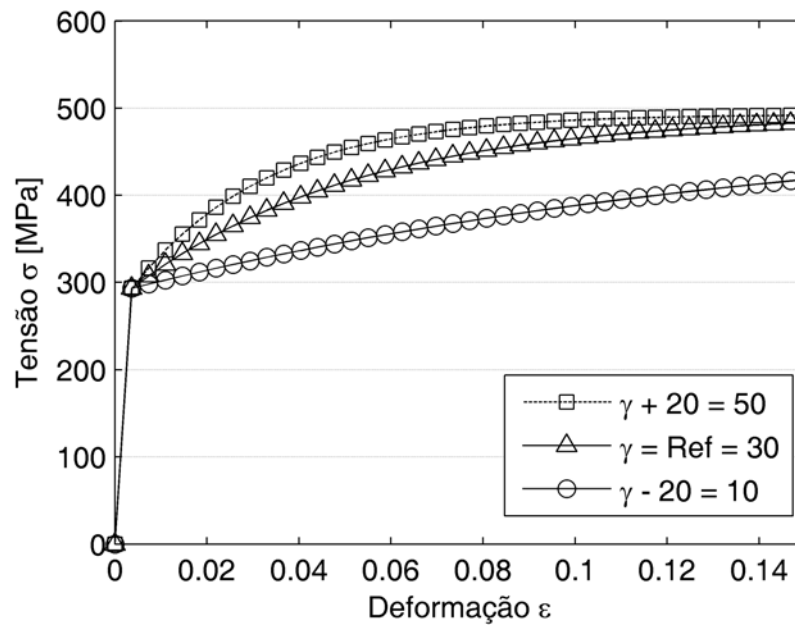


Figura 5.5 - Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ do Ferro Fundido em tração uniaxial, mostrando a influência do parâmetro material γ .

5.1.5 Discussões

Nota-se, através das Figuras 5.2 e 5.3, a obtenção de resultados muito próximos daqueles encontrados na referência, apenas com a variação dos parâmetros materiais. Isso comprova a aplicabilidade da corrente formulação em carregamentos monotônicos.

Observa-se também a possibilidade de simular vários tipos de materiais, apenas adaptando corretamente os parâmetros.

O parâmetro material X_{∞} altera o valor da máxima tensão na curva $\sigma \times \varepsilon$ (Figura 5.4). Já o parâmetro material γ aumenta a não-linearidade da curva $\sigma \times \varepsilon$ (Figura 5.5).

Através da Figura 5.2 comprova-se que em tração, as tensões equivalentes de von Mises e de Tresca são iguais.

5.2 Carregamento Cíclico sem Fechamento de Trinca

Nesta seção são apresentados os resultados para carregamento cíclico sem consideração de fechamento de trinca. O material utilizado é o alumínio (LEMAITRE e DOGHRI, 1994), cujas propriedades estão descritas na Tabela 5.2. Os resultados são validados através da comparação com a referência (Seção 5.2.1). Mostra-se também a influência dos parâmetros energia de resistência ao dano (S) e expoente de dano (s).

A deformação de tração-compressão uniaxial aplicada está descrita na Figura 5.6, cuja amplitude é de 3,5%.

Tabela 5.2 - Propriedades mecânicas do Alumínio.

Propriedade	Valor	Unidade	Fonte*
Módulo de Elasticidade Longitudinal (E)	72000	MPa	1
Coefficiente de Poisson (ν)	0,32	---	1
Dano Crítico (D_c)	0,99	---	1
Deformação Plástica de Dano (ε_{pd})	0,10	---	1
Energia Acumulada de Dano (w_{1D})	0,7855	---	Ajustado
Tensão de Ruptura (σ_R)	500	MPa	1
Tensão de Escoamento (σ_y)	306	MPa	1
Tensão Limite de Fadiga (σ_f)	303	MPa	1
Dano Inicial (D_0)	0**	---	---
Deformação Plástica Inicial (p_0)	0**	---	---
Energia de Resistência ao Dano (S)	6	MPa	1
Expoente de Dano (s)	1	---	Ajustado
Encruamento Cinemático Saturado (X_∞)	200	MPa	Ajustado
Encruamento Cinemático (γ)	120	---	Ajustado
Fechamento de Trinca (h)	1	---	Ajustado

* Fonte: 1) LEMAITRE e DOGHRI, 1994

** Valor arbitrado, supondo que o material não possui deformação plástica acumulada nem dano acumulado no início do processo.

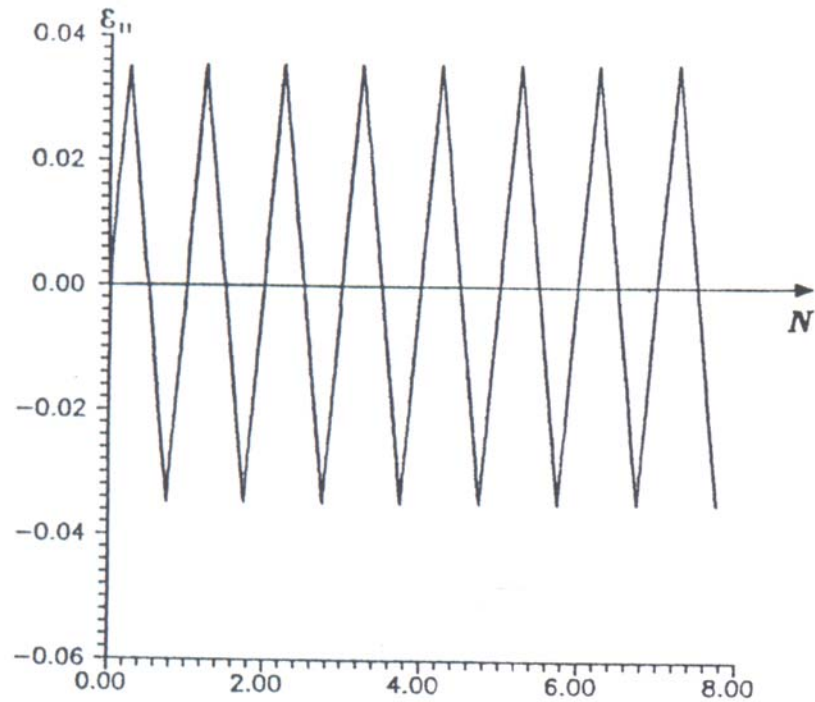


Figura 5.6 - Histórico da deformação aplicada (ε_{11}) (Fonte: LEMAITRE e DOGHRI, 1994).

5.2.1 Resultados

Através dos resultados analíticos presentes na referência, buscou-se realizar as mesmas simulações e compará-los.

A Figura 5.7 mostra o histórico da tensão equivalente de von Mises nos ciclos aplicados, apresentando o comportamento do encruamento cinemático desta formulação.

A Figura 5.8 representa o gráfico Tensão x Deformação da componente axial, evidenciando o fato da deformação ser controlada.

A Figura 5.9 apresenta as evoluções da deformação plástica acumulada e do dano em cada ciclo.

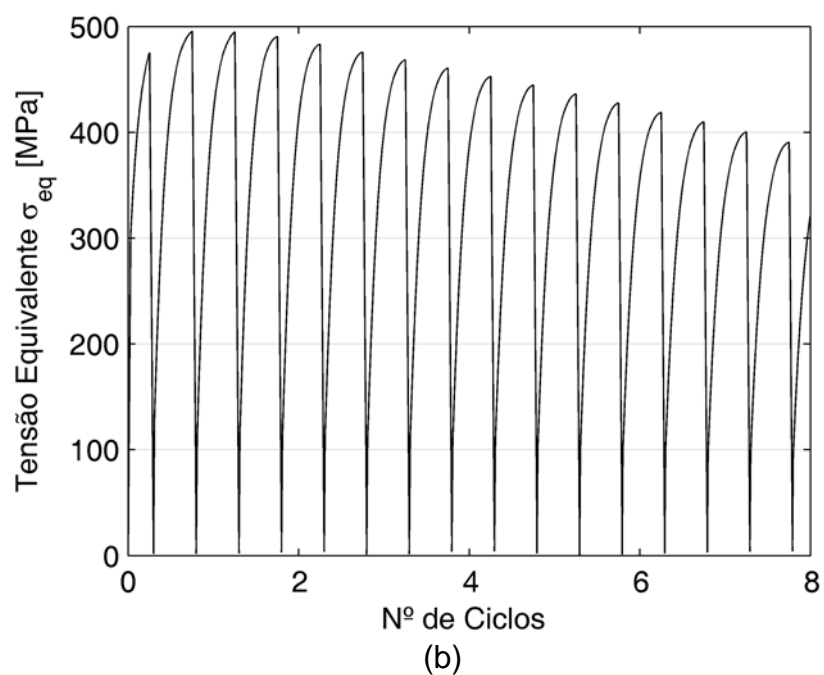
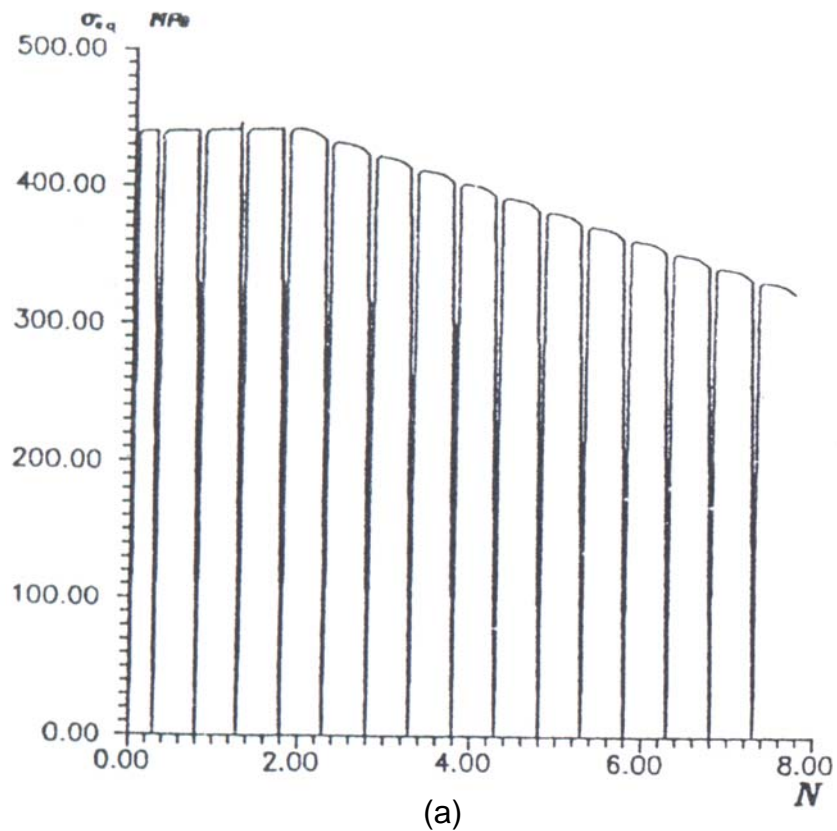


Figura 5.7 - Histórico da tensão equivalente de von Mises. a) Fonte: LEMAITRE e DOGHRI, 1994 b) Formulação corrente.

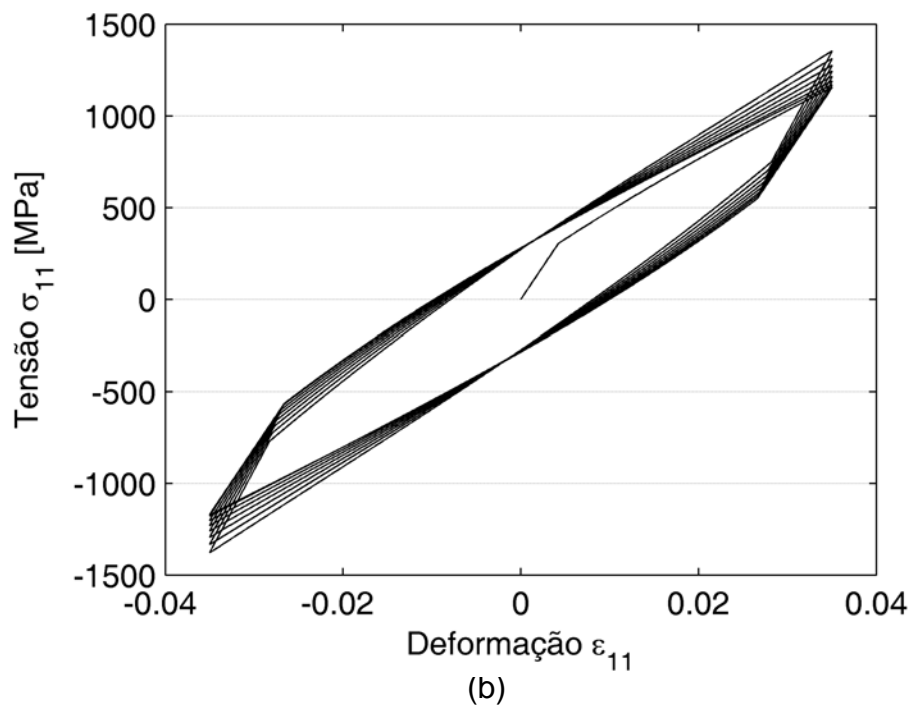
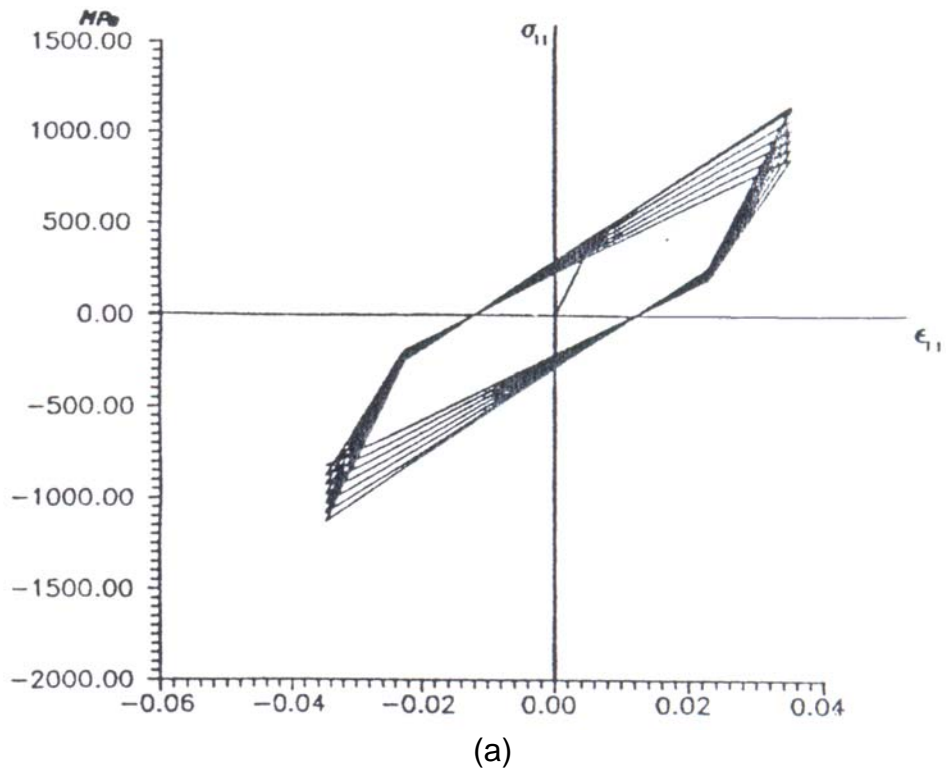


Figura 5.8 - Gráfico $\sigma \times \varepsilon$. a) Fonte: LEMAITRE e DOGHRI, 1994 b) Formulação corrente.

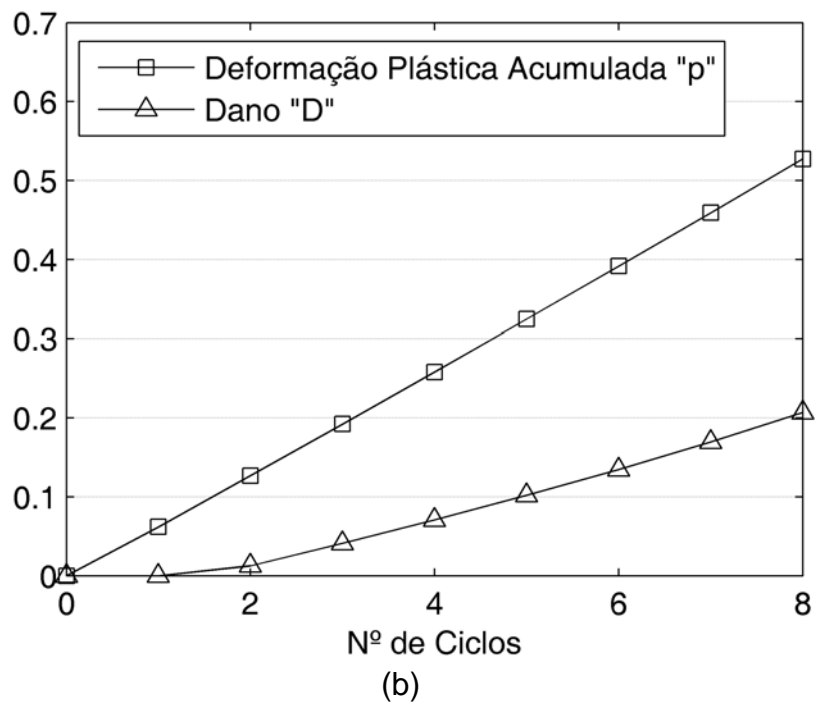
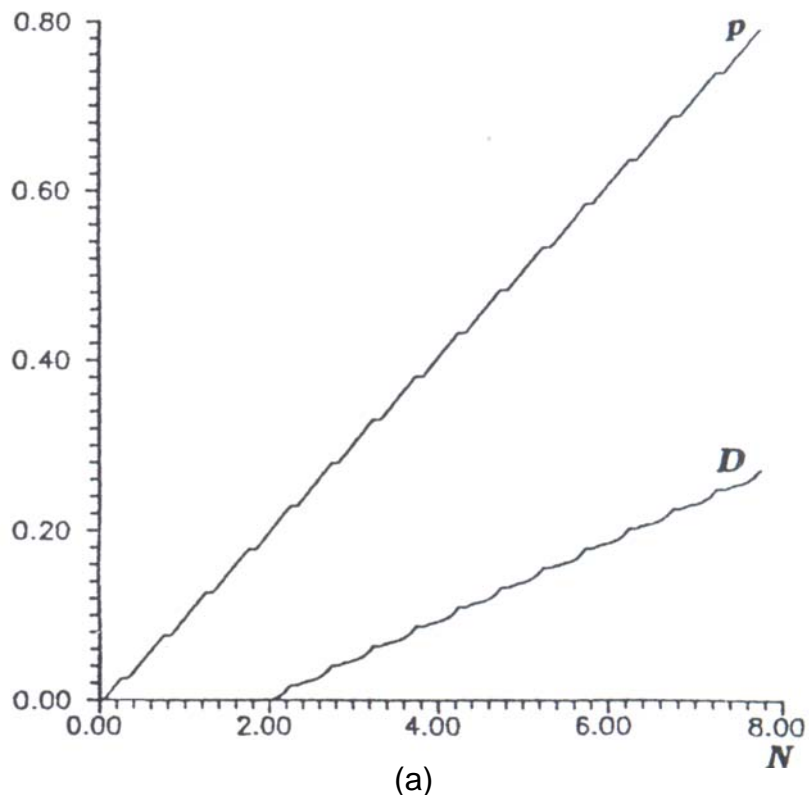


Figura 5.9 - Gráfico da deformação plástica acumulada (p) x número de ciclos e

Dano (D) x número de ciclos. a) Fonte: LEMAITRE e DOGHRI, 1994

b) Formulação corrente.

5.2.2 Influência da energia de resistência ao dano, S

Apresenta-se, nessa Seção, uma análise da influência do parâmetro material S , cujos resultados estão descritos nas Tabelas 5.3 e 5.4, e Figuras 5.11 e 5.12. Nesse caso, os valores da energia de resistência ao dano S são variados entre 3 e 9 MPa. A deformação uniaxial aplicada é descrita na Figura 5.10, cuja amplitude é de 0,47%.

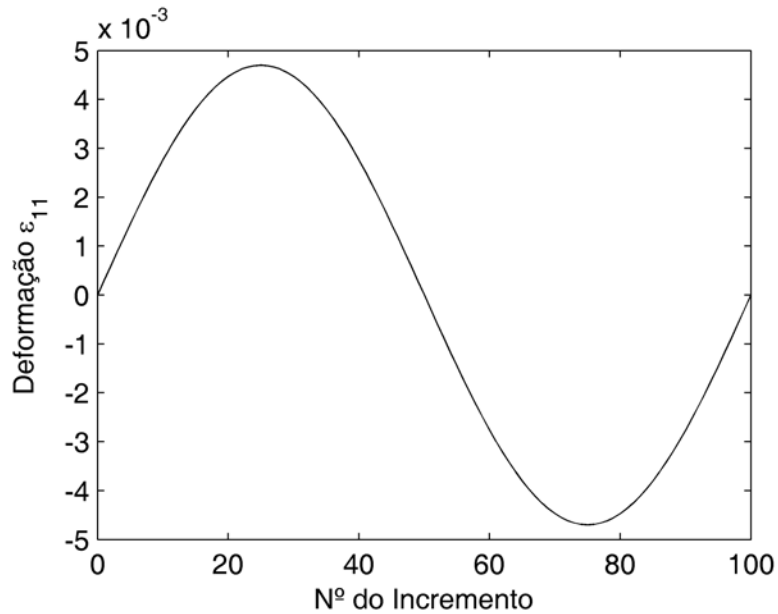


Figura 5.10 - Amplitude da deformação aplicada.

Tabela 5.3 - Comparativo de alguns resultados de simulações com diferentes valores de S , para $s = 1$.

Valor de S	Deformação Plástica Acumulada (p^u)	Número de ciclos para Dano Crítico
3 MPa	4,7425709	2251
4 MPa	5,9511188	2611
5 MPa	7,1602343	2971
6 MPa	8,3706896	3331
7 MPa	9,5789054	3690
8 MPa	10,788354	4050
9 MPa	11,998811	4410

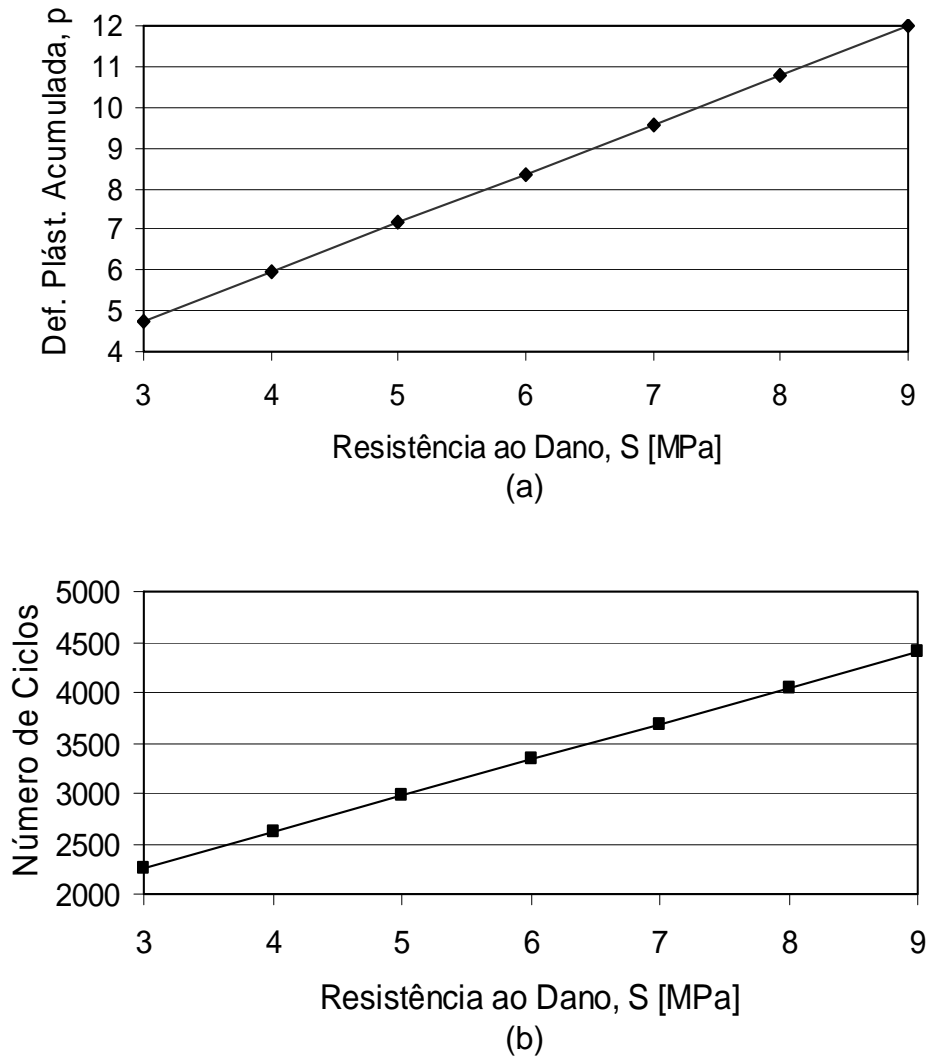


Figura 5.11 - a) Influência de S na deformação plástica acumulada. b) Influência de S no número de ciclos para atingir o dano crítico ($s = 1$).

Tabela 5.4 - Comparativo de alguns resultados de simulações com diferentes valores de S , para $s = 1,5$.

Valor de S	Deformação Plástica Acumulada (p^u)	Número de ciclos para Dano Crítico
3 MPa	8,3414356	3420
4 MPa	12,237865	4632
5 MPa	16,662525	6010
6 MPa	21,551398	7531
7 MPa	26,868820	9186
8 MPa	32,578556	10963
9 MPa	38,661504	12855

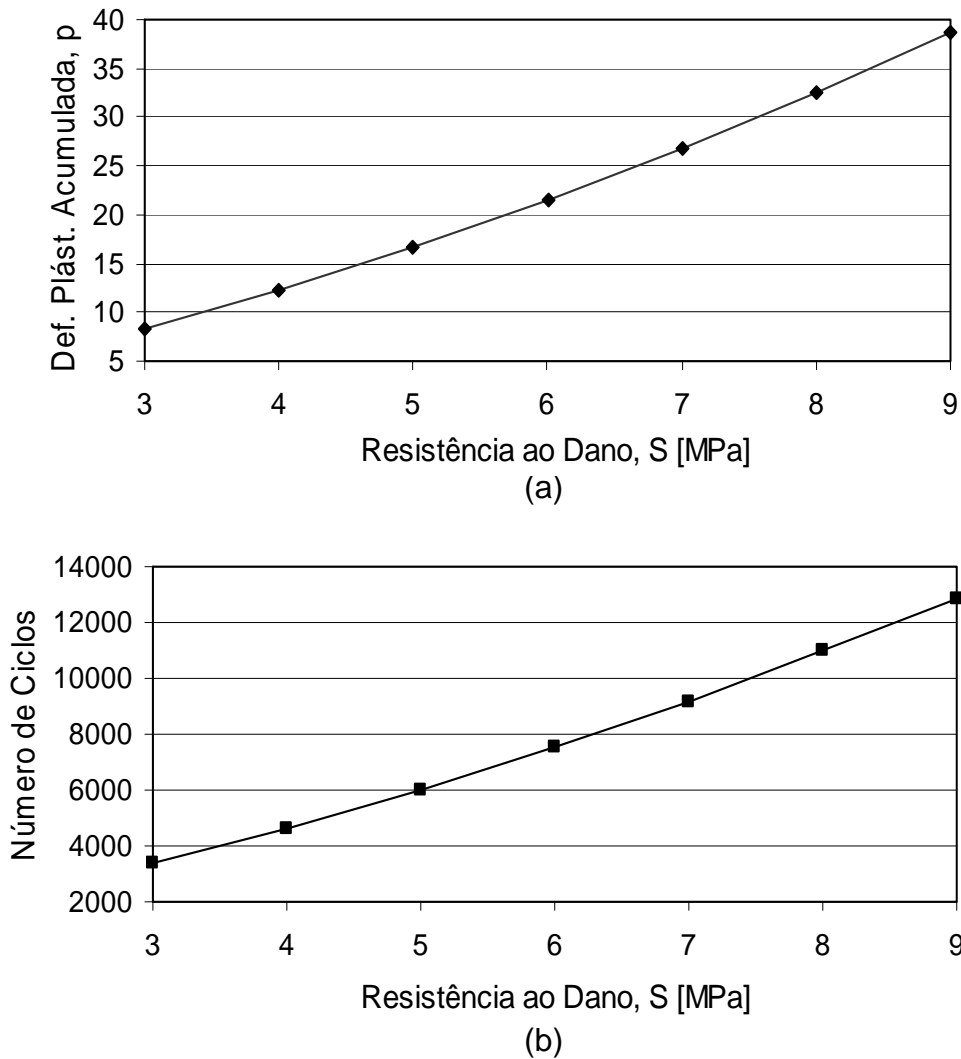


Figura 5.12 - a) Influência de S na deformação plástica acumulada. b) Influência de S no número de ciclos para atingir o dano crítico ($s = 1,5$).

Quando o expoente de dano s é igual a 1, nota-se uma influência praticamente linear do parâmetro S . Porém, para os resultados de $s = 1,5$, já observa-se uma curvatura na linha de S .

5.2.3 Influência do expoente de dano, s

Aplicando o mesmo histórico de deformação do item 5.2.2, porém agora modificando o parâmetro material s , obtém-se os resultados descritos na Tabela 5.5

e na Figura 5.13. Neste caso o valor da energia de resistência ao dano (S) é mantido fixo e igual a 6 MPa.

Tabela 5.5 - Comparativo de simulações com diferentes valores de s .

Valor de s	Deformação Plástica Acumulada (p^u)	Número de ciclos para Dano Crítico
0,1	2,3098767	1487
0,5	3,7352276	1909
1,0	8,3706896	3331
1,5	21,551398	7531
2,0	59,121017	19942
2,5	139,67544	46718

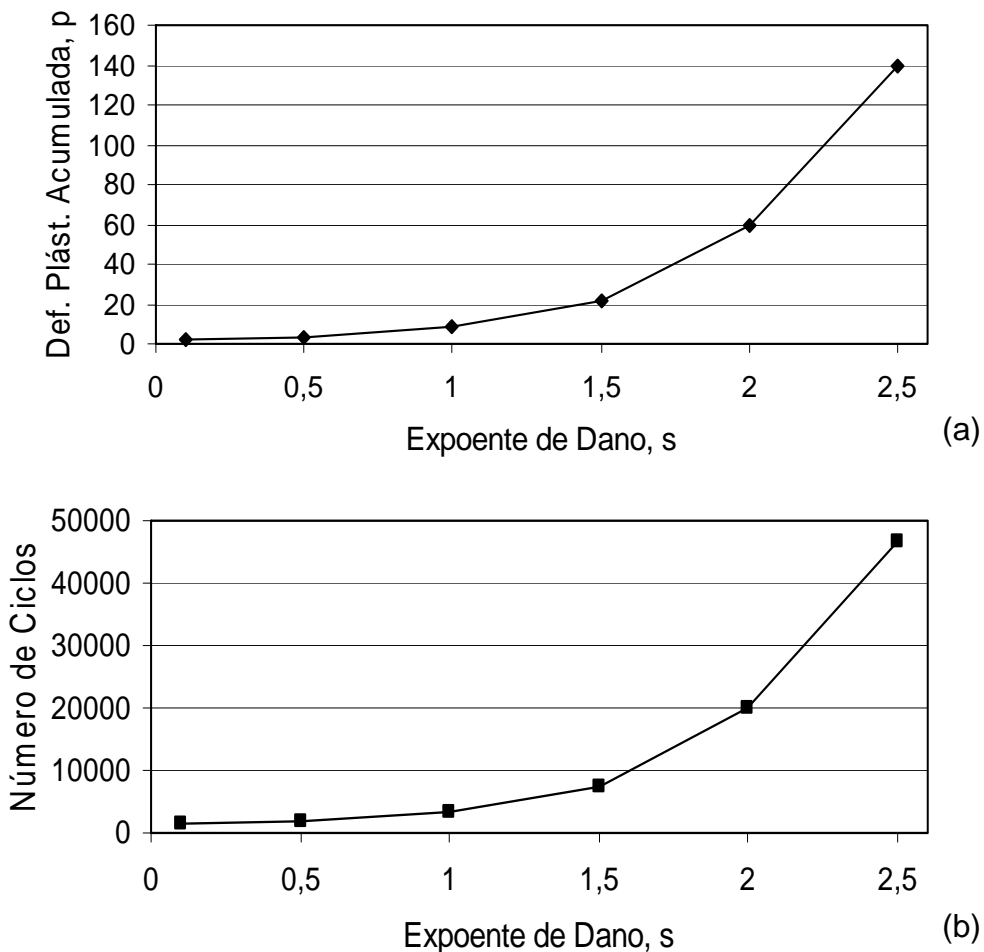


Figura 5.13 - a) Influência de s na deformação plástica acumulada b) Influência de s no número de ciclos para atingir o dano crítico.

5.2.4 Discussões

Em uma análise comparativa entre os gráficos da Figura 5.9, observa-se uma diferença na deformação plástica acumulada (p) de 0,52, para a referência (LEMAITRE e DOGHRI, 1994) que é de aproximadamente 0,8. Isto é consequência das seguintes modificações:

- Métodos de encruamento empregados, a referência utiliza um encruamento escalonado (constante por partes). Na corrente formulação é empregado o encruamento cinemático, que varia continuamente e na forma exponencial.

- Tipo de acoplamento, emprega-se para a simulação a análise localmente acoplada, o que implica numa evolução do dano não linear. Na referência utiliza-se a análise desacoplada, gerando uma evolução linear do dano com o número de ciclos.

Como observado na Seção 5.2.2, a medida que a energia de resistência ao dano S é aumentada, diminui-se a taxa de evolução do dano (Equação (4.66)) e por consequência aumenta-se o número de ciclos para início da trinca, ou seja, aumenta-se a resistência do material ao dano. Esta influência torna-se maior ainda quando $s = 1,5$.

Aumentando o expoente de dano s , aumenta-se a não-linearidade da evolução do dano, e como observado na Seção 5.2.3, este parâmetro apresenta uma influência muito mais significativa nos resultados do que o parâmetro material S .

5.3 Salto em Ciclos até w_{1D}

Esta seção procura validar a rotina de salto em ciclos até a Energia Armazenada atingir w_{1D} , ou seja, até o início do dano. Mostram-se na Tabela 5.6 os erros acumulados nesta rotina, juntamente com a economia computacional.

O material a ser analisado continua sendo o alumínio (Tabela 5.2)

A deformação de tração-compressão uniaxial aplicada é descrita na Figura 5.14, cuja amplitude é de 0,7%.

Nº de ciclos aplicados: 75.

Nº de incrementos por ciclo: 100.

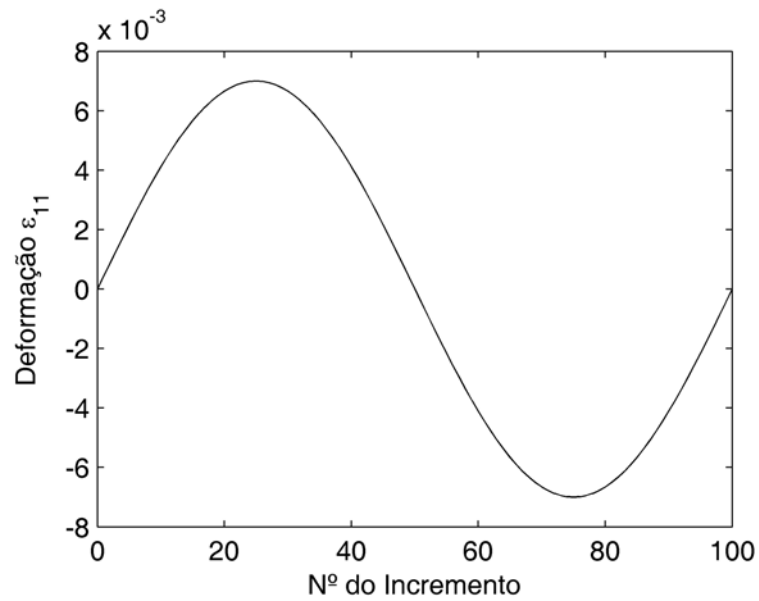


Figura 5.14 - Amplitude da deformação aplicada.

5.3.1 Resultados

Como observado na Figura 5.15, após um determinado número de ciclos ocorre a estabilização da energia armazenada em cada ciclo, neste caso a estabilização ocorre no ciclo 7 e permanece até o início do dano (ciclo 70), onde $w_s = w_{1D}$.

O mesmo ocorre na deformação plástica acumulada (Figura 5.16), a partir do segundo ciclo, permanecendo até o início do dano, onde volta a aumentar.

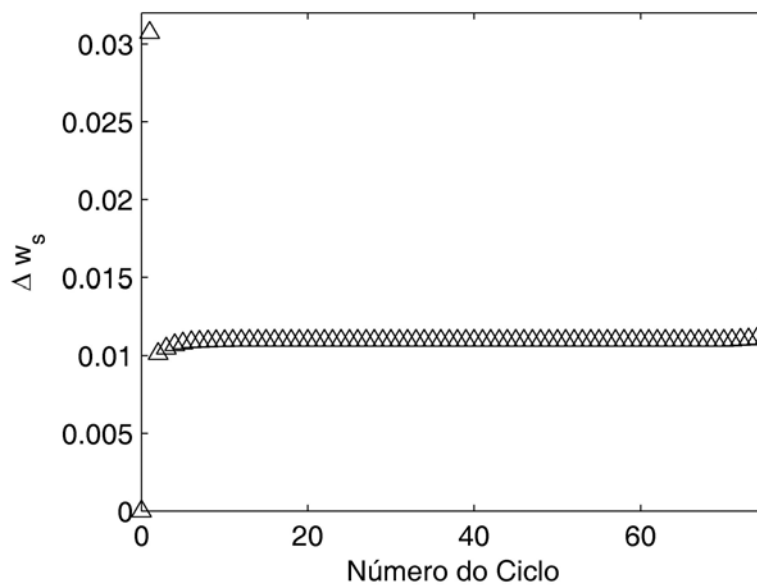


Figura 5.15 - Estabilização da variação da energia armazenada (w_s) em cada ciclo.

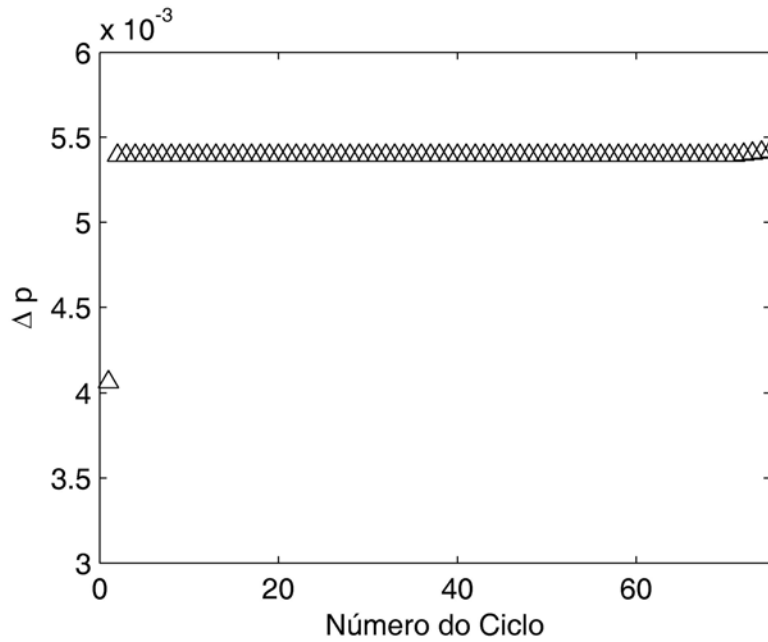


Figura 5.16 - Estabilização da deformação plástica acumulada (p) em cada ciclo.

Com estas observações, justifica-se no intervalo do ciclo 7 ao 70 o uso do salto em ciclos, pois as variáveis estão estabilizadas, sem comprometer os resultados (Tabela 5.6).

Tabela 5.6 - Influência do número de saltos até w_{1D} .

Nº de saltos	Def. Plást. Acumulada		Energia Acumulada		Nº de Incrementos	
	Obtida	Variação	Obtida	Variação	Realizado	Redução
0	0,4032710	Ref.	0,840540	Ref.	7500	Ref.
1	0,4032674	$9,07 \cdot 10^{-4}\%$	0,837169	0,401%	1200	84,0%
5	0,4032701	$2,38 \cdot 10^{-4}\%$	0,839390	0,136%	1600	78,7%
10	0,4032707	$0,73 \cdot 10^{-4}\%$	0,840155	0,045%	2100	72,0%
15	0,4032709	$0,32 \cdot 10^{-4}\%$	0,840391	0,017%	2600	65,3%

5.3.2 Discussões

Observa-se uma variação desprezável quando se aplica a rotina de salto em ciclos, por outro lado, existe uma grande economia computacional.

5.4 Salto em Ciclos até D_c

5.4.1 Resultados

Continuando a análise anterior, até o dano atingir o seu valor crítico, nota-se também a possibilidade da utilização de uma rotina de saltos.

Como citado na Seção 4.5.4, para uma análise localmente acoplada a evolução do dano não é linear, ou seja, não existe a estabilização da sua variação por ciclo. Entretanto, o que se observa é uma estabilização em etapas da razão de dano, que ocorre entre os ciclos 70 (início do dano) e 671, iniciando em 1,001 até 1,004 (Figura 5.17).

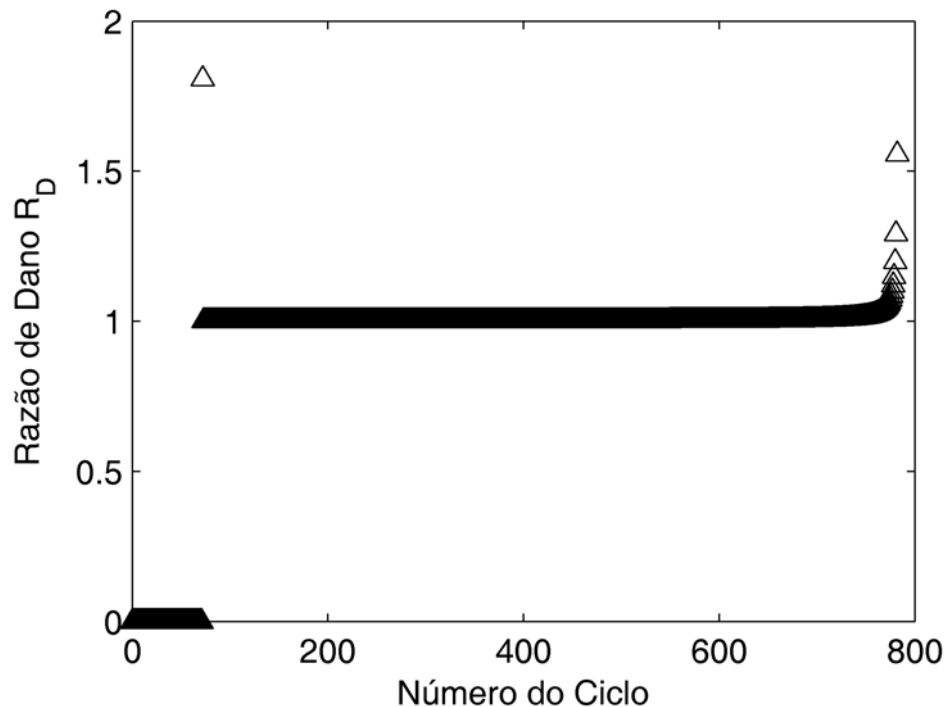


Figura 5.17 - Estabilização da razão de dano (R_D).

O mesmo ocorre com a deformação plástica acumulada, que possui uma razão estabilizada (Figura 5.18). Esta estabilização ocorre em duas etapas:

- Antes do início do dano, pois como já foi citado, existe a estabilização do incremento da deformação plástica acumulada, ou seja a taxa de aumento está estável e vale 1.
- Dois ciclos após o início do dano, ela se estabiliza em um valor de 1,001 até o valor de 1,002 no ciclo 671.

Justificando a aplicação do salto em ciclos neste intervalo, sem comprometer os resultados. (Tabela 5.7)

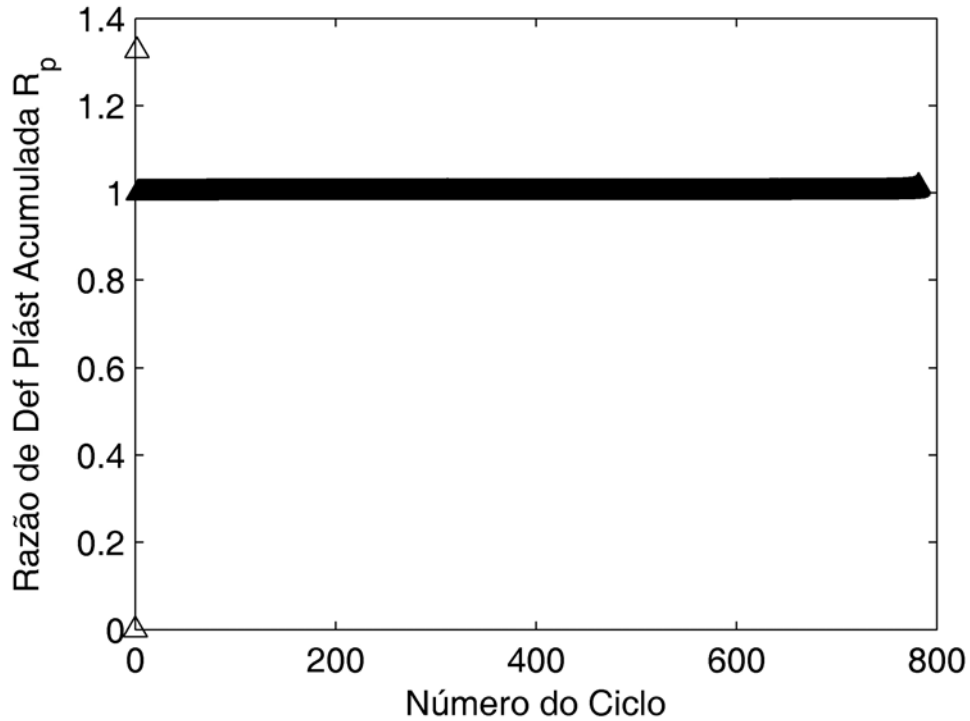


Figura 5.18 - Estabilização da razão de deformação plástica acumulada (R_p).

Tabela 5.7 - Influência do número de saltos até D_c .

Nº de saltos	Def. Plást. Acumulada		Nº de ciclo para D_c		Nº de Incrementos	
	Obtida	Variação	Realizado	Redução	Realizado	Redução
0	6,5650243	Ref	783	Ref	78300	Ref
1	8,874719	-35,18%	986	-25,92%	7301	90,67%
5	6,2595869	4,65%	763	2,55%	17419	77,75%
10	6,3952899	2,58%	767	2,04%	18260	76,67%
15	6,4700284	1,44%	775	1,02%	19039	75,68%
20	6,5048854	0,91%	779	0,51%	22435	71,34%

5.4.2 Discussões

Devido ao fato da evolução do dano não ser linear, quando são aplicados menos do que 10 saltos em ciclos, nota-se um erro acima de 2%. Entretanto, existe novamente uma economia computacional significativa.

5.5 Influência da Tensão Alternada

Com base nos estudos em fadiga descritos no capítulo 2, a medida que a deformação alternada é aumentada e por consequência a tensão alternada, existe uma diminuição no número de ciclos para início do dano e também para início da trinca. Esta seção procura avaliar a afirmação acima.

5.5.1 Resultados

A Tabela 5.8 descreve as amplitudes das deformações alternadas uniaxiais aplicadas, juntamente com os resultados da deformação plástica acumulada e o número do ciclo para se atingir o dano crítico.

Tabela 5.8 - Influência da deformação alternada no número de ciclos para início da trinca.

Caso	Deformação Alternada	Tensão Alternada	Def Plást Acumulada (p^{μ})	Nº de ciclos para Dano Crítico
1	$\pm 0,48\%$	$\pm 345,6\text{MPa}$	8,2118676	2856
2	$\pm 0,47\%$	$\pm 338,4\text{MPa}$	8,3706896	3331
3	$\pm 0,46\%$	$\pm 331,2\text{MPa}$	8,5616240	4048

A Figura 5.19 apresenta na forma gráfica os resultados contidos na Tabela 5.8.

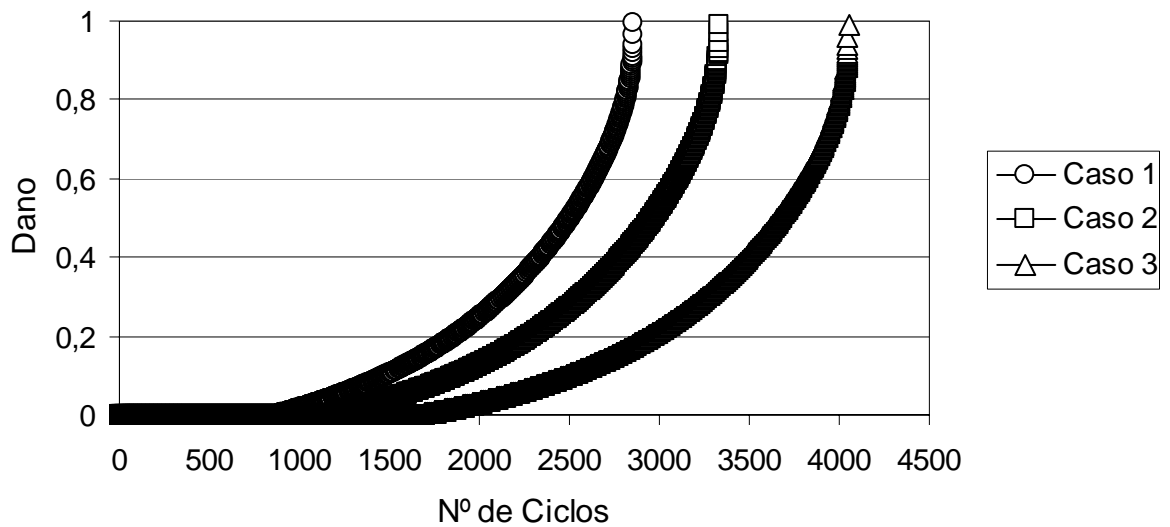


Figura 5.19 - Influência da tensão alternada na evolução do dano.

5.5.2 Discussões

Como esperado, a tensão alternada possui uma influência diretamente proporcional à evolução do dano, quanto maior a tensão menor será o número de ciclos para início do dano, e de início da trinca.

5.6 Influência da Seqüência de Carregamento

Conforme a teoria não-linear de Marco-Starkey (Seção 2.2.2), os trabalhos de DATTOMA *et al.* (2006) e LEMAITRE (1996), que contrariam a lei de acumulação linear de Palmgreen-Miner, propõem que a seqüência de aplicação dos carregamentos possui uma grande influência no número de ciclos para início da trinca. Esta seção possui o objetivo de validar esta influência, e o conjunto de resultados apresentados são analisados para a liga 30NiCrMoV12 (Tabela 5.9).

Tabela 5.9 - Propriedades mecânicas da liga 30NiCrMoV12.

Propriedade	Valor	Unidade	Fonte*
Módulo de Elasticidade Longitudinal (E)	200000	MPa	1
Coefficiente de Poisson (ν)	0,3	---	1
Dano Crítico (D_c)	0,50	---	Ajustado
Deformação Plástica de Dano (ε_{pd})	0,032	---	Ajustado
Energia Acumulada de Dano (w_{1D})	0,5035	---	Ajustado
Tensão de Ruptura (σ_R)	1035	MPa	1
Tensão de Escoamento (σ_y)	755	MPa	1
Tensão Limite de Fadiga (σ_f)	391	MPa	1
Dano Inicial (D_0)	0**	---	---
Deformação Plástica Inicial (p_0)	0**	---	---
Energia de Resistência ao Dano (S)	7	MPa	1
Expoente de Dano (s)	1	---	Ajustado
Encruamento Cinemático Saturado (X_∞)	280	MPa	Ajustado
Encruamento Cinemático (γ)	255	---	Ajustado
Fechamento de Trinca (h)	1	---	Ajustado

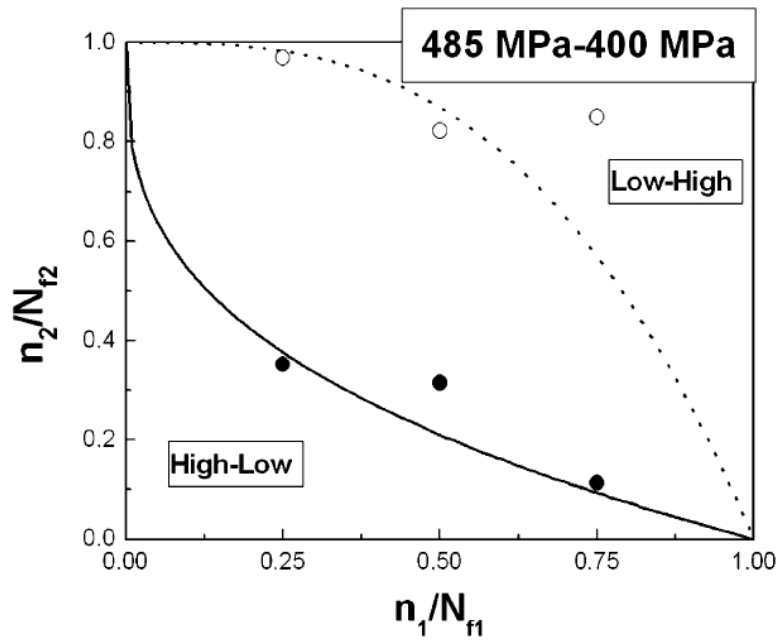
* Fonte: 1) DATTOMA *et al.*, 2006

** Valor arbitrado, supondo que o material não possui deformação plástica acumulada nem dano acumulado no início do processo.

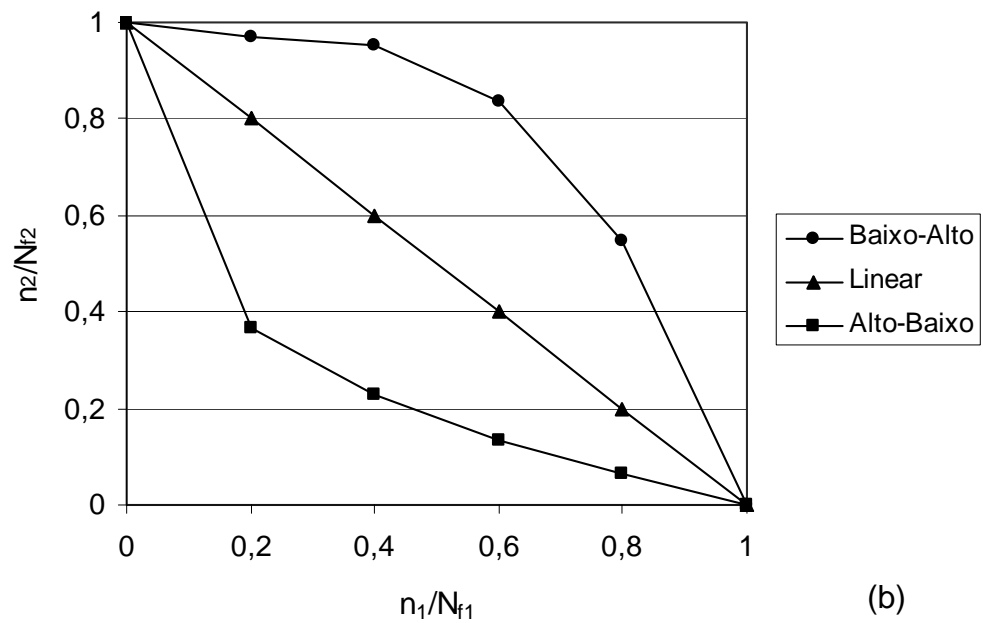
5.6.1 Resultados

Aplicando a seqüência de carregamentos com amplitudes de 485 MPa e 400 MPa (Alto-Baixo), observa-se $\sum r < 1$, sendo $r = \frac{n_i}{N_{fi}}$ a razão entre o número de ciclos aplicados (n) e número de ciclos totais para o início da trinca (N_f). Por outro lado, aplicando a seqüência de carregamentos com amplitudes de 400 MPa e 485 MPa (Baixo-Alto), observa-se $\sum r > 1$ (Figura 5.20).

Os resultados apresentados na referência são numéricos (linhas contínuas) e experimentais (círculos).



(a)

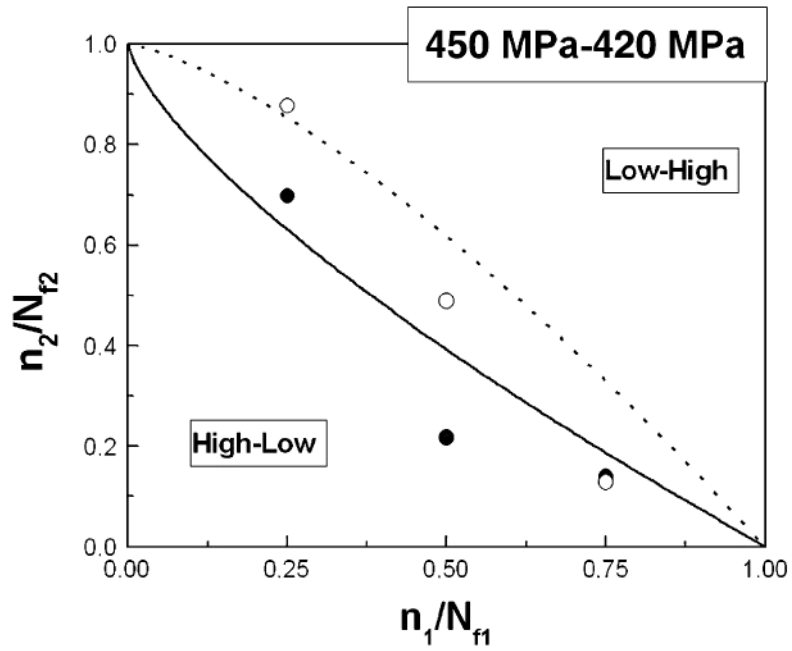


(b)

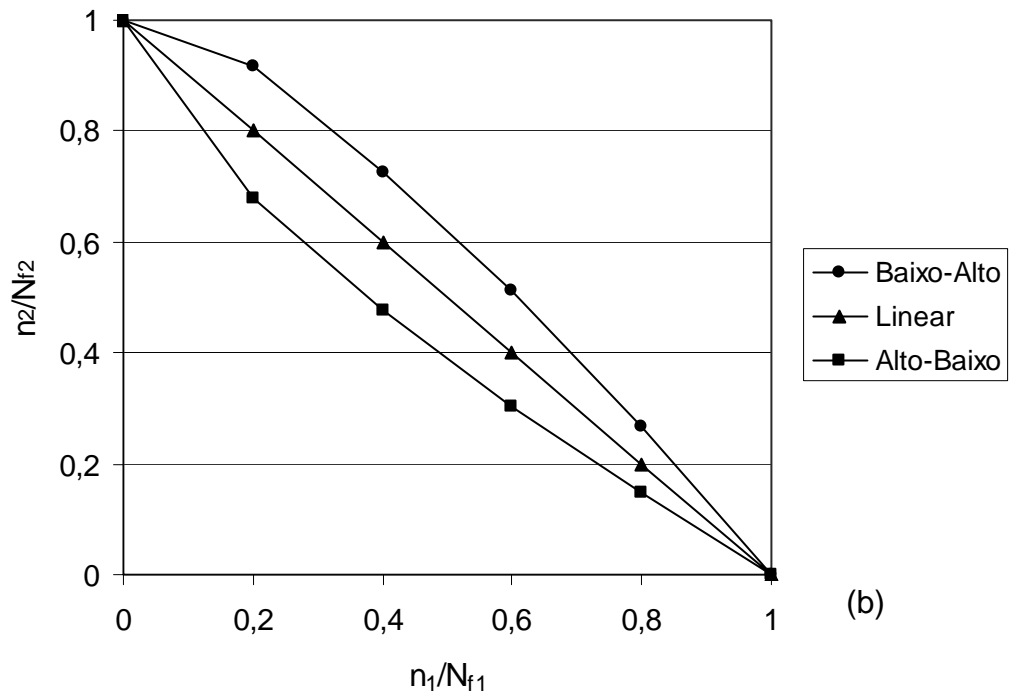
Figura 5.20 - Influência da seqüência de carregamentos (485 MPa e 400 MPa).

a) Fonte: DATTOMA *et al.*, 2006 b) Formulação corrente.

Da mesma forma, é aplicado uma outra seqüência de carregamentos de amplitude de 450 MPa e 420 MPa (Alto-Baixo), e depois uma seqüência Baixo-Alto de 420 MPa e 450 MPa (Figura 5.21).



(a)



(b)

Figura 5.21 - Influência da seqüência de carregamentos (450 MPa e 420 MPa)

a) Fonte: DATTOMA *et al.*, 2006 (b) Formulação corrente.

5.6.2 Discussões

Como observado, independente das amplitudes dos carregamentos, sempre existe a influência da seqüência dos carregamentos. A seqüência alto-baixo apresenta um número de ciclos para a falha menor, do que se a seqüência for aplicada inversamente.

5.7 Carregamento Cíclico com Fechamento de Trinca

Com objetivo de validar a formulação apresentada na Seção 4.5.3, apresentam-se aqui os resultados para carregamento cíclico com fechamento de trinca, que são comparados com o trabalho de GANCZARSKI e BARWARCZ (2007), no qual o material analisado é o Aço Inox 316L (Tabela 5.10). Posteriormente mostra-se também a influência do parâmetro material h .

A deformação uniaxial aplicada é descrita na Figura 5.22, cuja amplitude é de 0,21%.

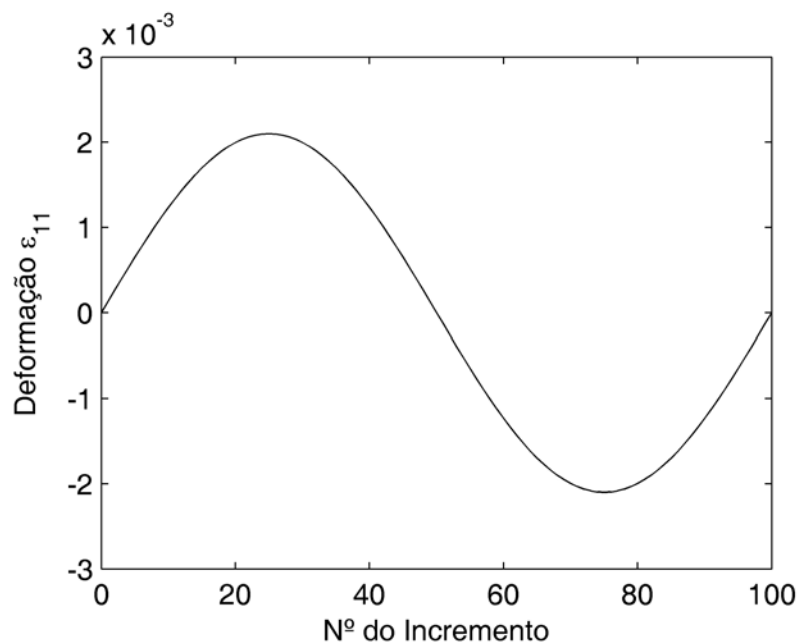


Figura 5.22 - Amplitude da deformação aplicada.

Tabela 5.10 - Propriedades mecânicas do aço Inox 316L.

Propriedade	Valor	Unidade	Fonte*
Módulo de Elasticidade Longitudinal (E)	200000	MPa	1
Coefficiente de Poisson (ν)	0,3	---	1
Dano Crítico (D_c)	0,5	---	2
Deformação Plástica de Dano (ε_{pd})	0,032	---	1
Energia Acumulada de Dano (w_{1D})	0,1401	---	Ajustado
Tensão de Ruptura (σ_R)	700	MPa	2
Tensão de Escoamento (σ_y)	260	MPa	2
Tensão Limite de Fadiga (σ_f)	180	MPa	2
Dano Inicial (D_0)	0**	---	---
Deformação Plástica Inicial (p_0)	0**	---	---
Energia de Resistência ao Dano (S)	7	MPa	2
Expoente de Dano (s)	0,67	---	Ajustado
Encruamento Cinemático Saturado (X_∞)	200	MPa	Ajustado
Encruamento Cinemático (γ)	160	---	Ajustado
Fechamento de Trinca (h)	0,2	---	1

* Fonte: 1) GANCZARSKI e BARWACZ, 2007.

2) LEMAITRE, 1996.

** Valor arbitrado, supondo que o material não possui deformação plástica acumulada nem dano acumulado no início do processo.

5.7.1 Resultados

As Figura 5.23 e 5.24 apresentam gráficos $\sigma \times \varepsilon$ com $h=1$ e $h=0$ respectivamente, e os gráficos apresentam as diferenças em compressão na tensão.

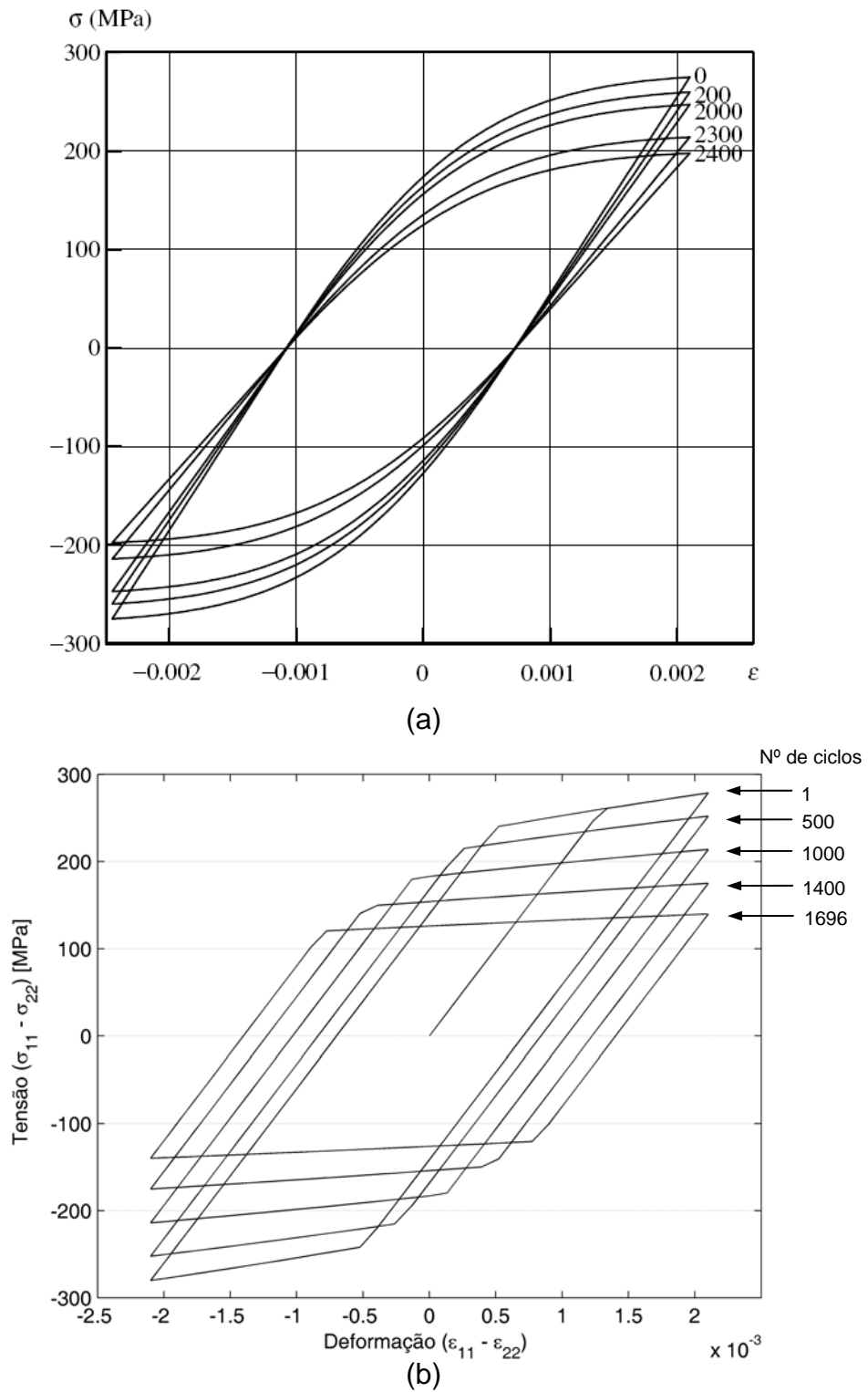
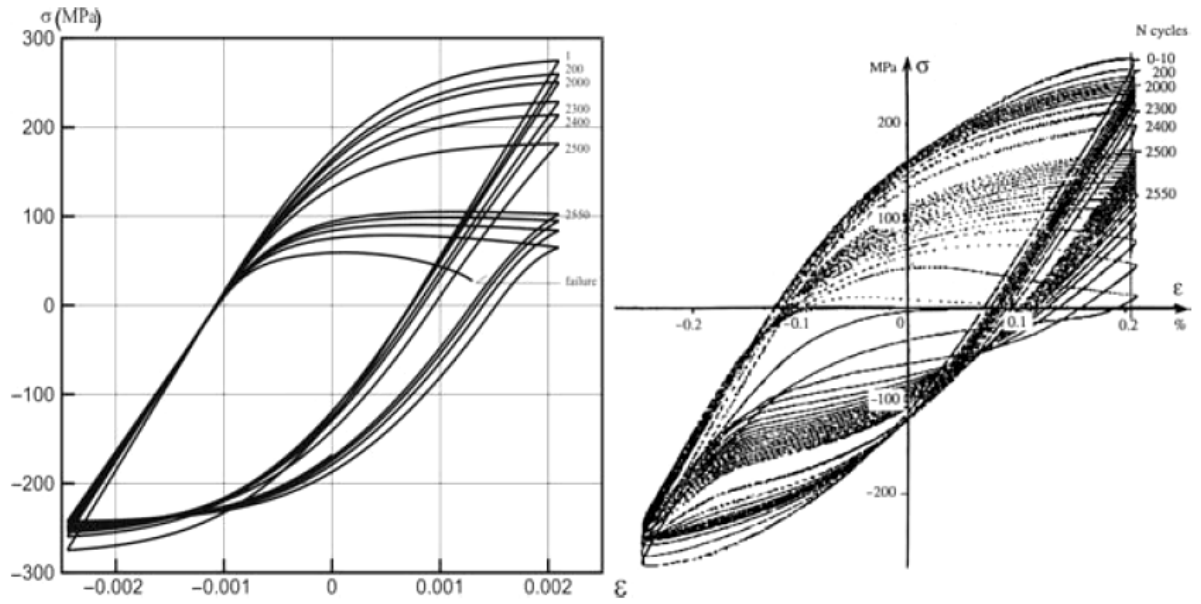
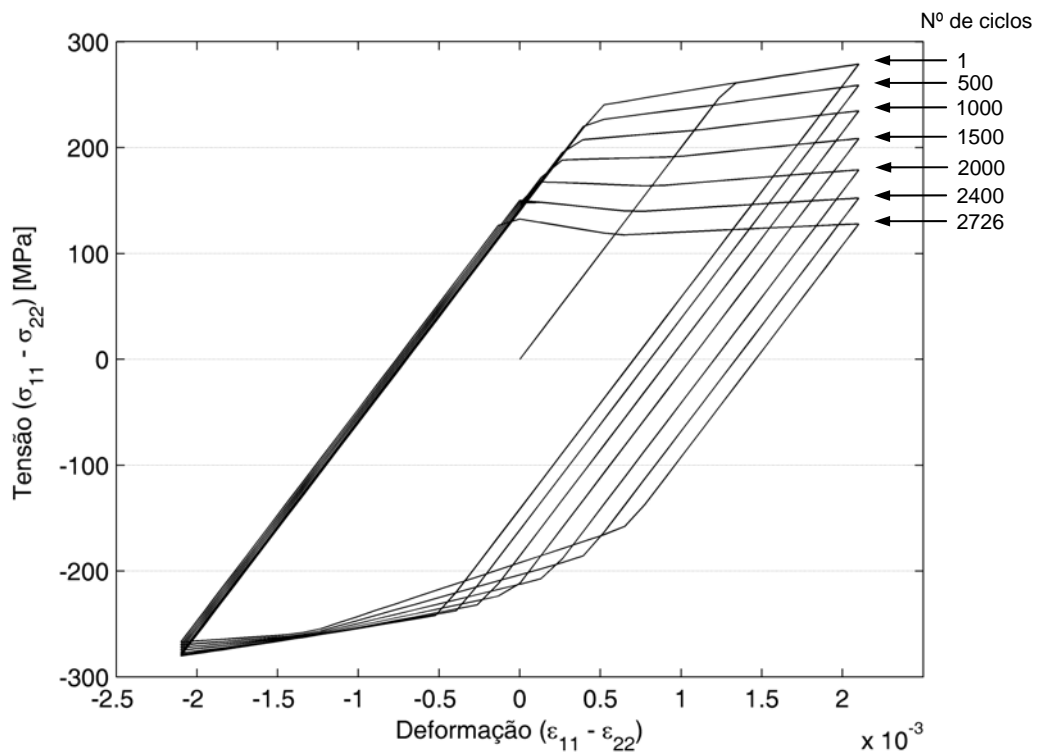


Figura 5.23 - Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ numérico sem fechamento de trinca ($h=1$). a) Fonte: GANCZARSKI e BARWACZ, 2007 b) Formulação corrente.



(a)



(b)

Figura 5.24 - Gráfico $\sigma \times \epsilon$ numérico e experimental, com fechamento de trinca ($h = 0,2$). a) Fonte: GANCZARSKI e BARWACZ, 2007 b) Formulação corrente.

5.7.2 Influência do parâmetro fechamento de trinca, h

Nesta seção, são realizadas simulações com os mesmos parâmetros que a seção anterior, mas modificando somente o parâmetro material h . Os resultados estão apresentados na Tabela 5.11 e Figura 5.25.

Tabela 5.11 - Comparativo de simulações com diferentes valores de h .

Valor de h	Def Plást Acumulada (p^u)	Ciclo para Dano Crítico
0	10,7280440	3531
0,2	8,5284873	2726
0,4	7,5224560	2343
0,6	6,8269712	2075
0,8	6,2873951	1867
1,0	5,8330599	1696

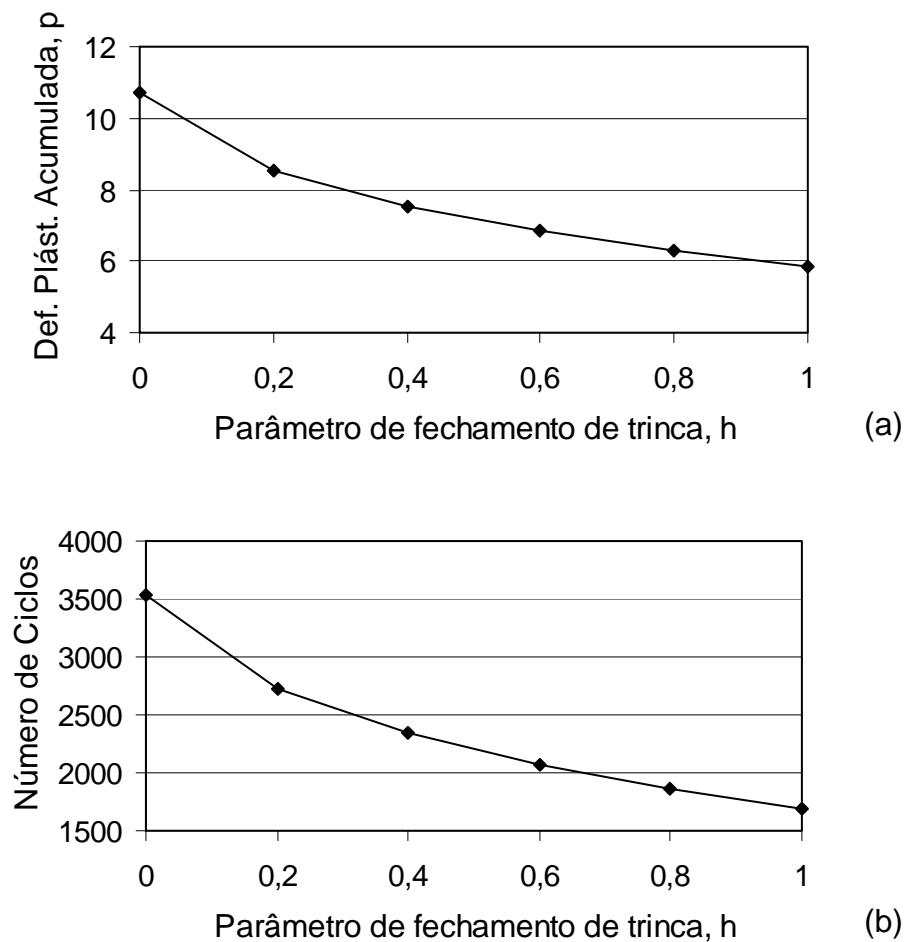


Figura 5.25 - a) Influência de h na deformação plástica acumulada. b) Influência de h no número de ciclos para atingir o dano crítico.

5.7.3 Discussões

Quando se observa a Figura 5.23, nota-se diferenças entre a referência e a corrente formulação. Isto é causado por alguns fatores:

- Diferença de encruamento, pois a referência possui um encruamento mais suave ocasionando diferença na deformação plástica e por consequência na evolução do dano.

- Ajuste nos parâmetros materiais, uma vez que os mesmos foram ajustados para a simulação considerando o fechamento de trinca.

Observa-se na Figura 5.24 ($h < 1$), que as tensões efetivas em compressão são menores do que em tração. Isto se deve a influência do parâmetro h , o que ocasiona em um número de ciclos maior para o dano crítico, já que em compressão existe uma menor taxa de danificação.

Esta menor taxa é observada na Figura 5.25, pois quanto menor o parâmetro h , maior será o número de ciclos para atingir o dano crítico.

5.8 Influência da Tensão Média

Após a implementação do fechamento de trinca, é possível demonstrar a influência de tensões médias diferentes de zero. A partir do mesmo material da seção anterior (aço Inox 316L), foram realizados 2 tipos de simulações com carregamentos de tração-compressão e de cisalhamento.

5.8.1 Simulação numérica do ensaio de tração-compressão

A Tabela 5.12 e a Figura 5.26 mostram alguns resultados de experimentos numéricos considerando diferentes combinações de tensão alternada e tensão média, obtendo variações no número de ciclos para o dano crítico ser atingido. Os carregamentos analisados são do tipo tensão variável uniaxial.

Tabela 5.12 - Número de ciclos (N) para atingir o dano crítico (D_c), em diferentes tensões alternadas (σ_a) e tensões médias (σ_m).

	$\sigma_m = -50 MPa$	$\sigma_m = 0$	$\sigma_m = +50 MPa$
$\sigma_a = 400 MPa$	3262 ciclos	3080 ciclos	2878 ciclos
$\sigma_a = 450 MPa$	2462 ciclos	2316 ciclos	2163 ciclos
$\sigma_a = 500 MPa$	1957 ciclos	1836 ciclos	1716 ciclos

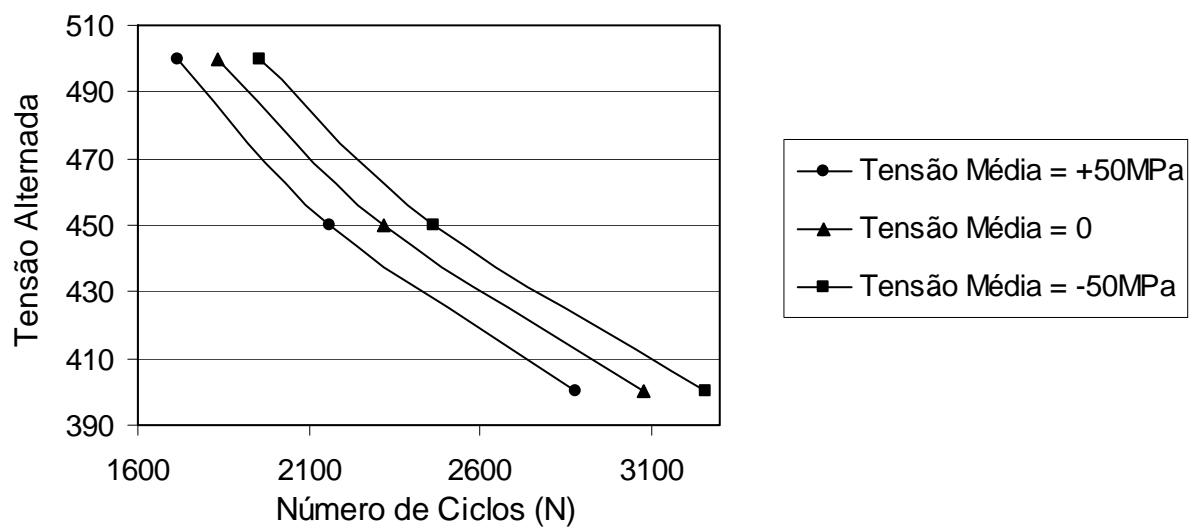


Figura 5.26 - Influência da tensão média em tração-compressão.

5.8.2 Simulação numérica do ensaio de cisalhamento puro

Da mesma maneira que em tração, apresentam-se a Tabela 5.13 e a Figura 5.27, as quais mostram os resultados para diferentes combinações de tensão alternada e tensão média em ensaio de cisalhamento puro.

Tabela 5.13 - Número de ciclos (N) para atingir o dano crítico (D_c), em diferentes tensões alternadas (τ_a) e tensões médias (τ_m).

	$\tau_m = -50 \text{ MPa}$	$\tau_m = 0$	$\tau_m = +50 \text{ MPa}$
$\tau_a = 400 \text{ MPa}$	3092 ciclos	3092 ciclos	3092 ciclos
$\tau_a = 450 \text{ MPa}$	2378 ciclos	2378 ciclos	2378 ciclos
$\tau_a = 500 \text{ MPa}$	1930 ciclos	1930 ciclos	1930 ciclos

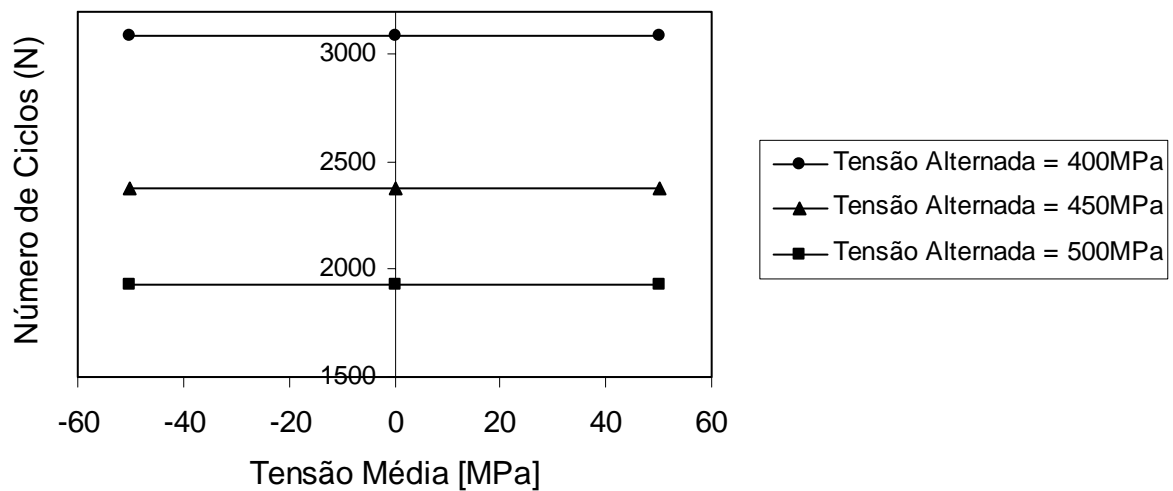


Figura 5.27 - Influência da tensão média em cisalhamento.

5.8.3 Discussões

Em tração-compressão, a tensão média apresenta uma grande influência sobre número de ciclos para início da trinca. Ou seja, para uma mesma tensão alternada, quando se diminui a tensão média, o número de ciclos é aumentado. E para um mesmo número de ciclos, a tensão alternada pode ser aumentada a medida que a tensão média é diminuída.

Igualmente ao trabalho de LEMAITRE *et al.* (1999), a tensão média não apresentou nenhuma influência em cisalhamento.

6 CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho é a implementação numérica da técnica de análise de fadiga, baseada na mecânica do Dano Contínuo, na sua forma localmente acoplada.

Para tanto, foi necessário o estudo de várias áreas do conhecimento, entre elas: fadiga, fratura, mecânica do dano, mecânica do contínuo e elastoplasticidade. Pode-se incluir também um estudo para a implementação no programa comercial Matlab®.

A rotina implementada possui aproximadamente 850 linhas, além das sub-rotinas de leitura dos dados de entrada: histórico da deformação, propriedade do material e número de ciclos aplicados. Este número de linhas não inclui também as sub-rotinas de cálculos secundários como: tensão equivalente, tensão desviadora, produto de tensores entre outras.

Observa-se através dos resultados, suas respectivas comparações e discussões, que a formulação discutida neste trabalho apresenta resultados numéricos que possuem boa concordância com resultados experimentais e numéricos apresentados na bibliografia. Isso permite sua aplicação em muitos tipos de análises, levando em consideração os fatores fenomenológicos de maior importância na análise de fadiga: tensão média, amplitude da tensão alternada e seqüência dos carregamentos.

Com relação aos parâmetros materiais:

- A medida que aumenta-se o encruamento cinemático saturado (X_{∞}), aumenta-se o valor da máxima tensão na curva $\sigma \times \varepsilon$.

- O parâmetro encruamento cinemático (γ), altera a não linearidade da curva $\sigma \times \varepsilon$.

- Aumentando o parâmetro energia de resistência ao dano (S), aumenta-se a resistência do material ao dano, e com isto diminui-se a taxa de evolução do dano.

- O parâmetro expoente de dano (s), altera a não linearidade da curva de evolução do dano.

- O parâmetro fechamento de trinca (h), modifica a parcela das tensões em compressão, ocasionando uma taxa de danificação diferenciada.

Através da rotina de salto em ciclos, é possível obter uma grande economia computacional, sem comprometer os resultados.

Uma limitação da formulação implementada é análise de situações de carregamentos com grandes tensões médias e com tensões alternadas de baixa amplitude. Isto é causado, pois a tensão equivalente obrigatoriamente necessita ser superior à tensão limite de fadiga, sendo esta última a tensão de escoamento na micro-escala, e a Mecânica do Dano Contínuo estando diretamente relacionada com a ocorrência da plasticidade. Ou seja, após uma plastificação no primeiro carregamento, só haveriam carregamentos elásticos ocorrendo na micro-escala, sem uma evolução do dano.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

- Implementação da análise localmente acoplada não somente em um ponto, mas em toda a malha de elementos finitos, obtendo assim um mapa de dano na estrutura;

- Através do Método de Elementos Finitos (FEM), implementar a corrente metodologia em todos os pontos de um componente, ou seja, uma análise totalmente acoplada. A grande desvantagem é que esta análise é muito mais onerosa do ponto de vista computacional;

- Formulação de uma metodologia que considere os efeitos da tensão média, quando a amplitude da tensão alternada estiver abaixo do limite de fadiga;

- Implementação do encruamento misto na plasticidade, sendo necessária primeiramente a implementação do encruamento isotrópico;

- Extensão para materiais frágeis, como por exemplo o concreto, material empregado em estruturas da construção civil;

- Desenvolvimento de uma metodologia capaz de identificar os parâmetros materiais;

- Validação através de experimentos da quantificação do dano e início da trinca para a corrente formulação;

- Análise numérica e validação experimental de situações de carregamentos multiaxiais e aleatórios, por exemplo, componentes automobilísticos, esforços de ventos, abalos sísmicos e outros.

REFERÊNCIAS

- ABDUL-LATIF A.; 1999 Unilateral Effect in Plastic Fatigue with Micromechanical Approach. **International Journal of Damage Mechanics**. Vol 8, pág 316-338.
- ASM HANDBOOK; 1996 **Fatigue and Fracture**. Vol 19. 2ª Edição, Estados Unidos.
- BONORA, N.; 1997 A Nonlinear CDM Model for Ductile Failure. **Engineering Fracture Mechanics**. Vol 58 N°1/2, pág 11-28.
- BONORA, N.; 1998 Low Cycle Fatigue Life Estimation for Ductile Metals Using a Nonlinear Continuum Damage Mechanicis Model. **International Journal of Solids and Structures**. Vol 35 N°16, pág 1881-1894.
- CHEN, W. F., HAN, D. J.; 1988 **Plasticity for Structural Engineers**. Editora Springer-Verlag, Estados Unidos.
- COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., WITT, T. J.; 2002 **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4ª Edição. John Wiley & Sons, Inc., Nova York, Estados Unidos.
- DATTOMA, V., GIANCANE, S., NOBILE, R., PANELLA F. W.; 2006 Fatigue Life Prediction under Variable loading based on a new non-linear continuum damage mechanics model. **International Journal of Fatigue**. Vol. 28, pág 89-95.
- DUQUESNAY, D. L.; 1991 **Fatigue Damage Accumulation in Metals Subject to High Mean Stress and Overload Cycles**. Tese de Doutorado. Universidade de Waterloo, Canadá.
- FATEMI, A., YANG, L.; 1998 Cumulative Fatigue Damage and Life Prediction Theoris: a Survey of the State of Art for Homogeneous Materials. **International Journal of Fatigue**. Vol 20 N° 1, pág 9-34.
- FUCKS, H. O., STEPHENS, R. I.; 1980 **Metal Fadigue in Engineering**. John Wiley & Sons Inc., Nova York, Estados Unidos.
- GDOUTOS, E. E.; 1993 **Fracture Mechanics: An Introduction**. Kluwer Academic Publishers, Holanda.

- GEERS, M. G. D.; 1997 **Experimental Analysis and Computational Modelling of Damage and Fracture**. Tese de Doutorado. Technische Universiteit Eindhoven. Holanda.
- GANCZARSKI, A., BARWACZ, L.; 2007 Low Cycle Fatigue on Unilateral Damage Evolution. **International Journal of Damage Mechanics**. Vol 16, pág 159-177.
- GONÇALVES, C. A.; 2006 **Fadiga Multiaxial Policíclica: Modelagem e Simulação**. Dissertação de Mestrado. Departamento de Engenharia Mecânica. Universidade de Brasília, Brasil.
- GRUNWALD, J.; 1996 **A Fatigue Model for Shape Optimization Based on Continuum Damage Mechanics**. Tese de Doutorado. Universität Karlsruhe, Alemanha.
- HAYAWAKA, K., MURAKAMI, S, LIU, Y.; 1998 An irreversible thermodynamics theory for elastic-plastic-damage materials. **European Journal of Mechanics A/Solids**. Vol 17, nº 1, pág 13-32.
- HERTZBERG, R. W.; 1996 **Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials**. 4ª Edição. John Wiley & Sons, Inc., Nova York, Estados Unidos.
- IBIJOLA, E. A.; 2002 On Some Fundamental Concepts of Continuum Damage Mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. Vol. 191 pág 1505-1520.
- INGLIS, N. P., 1927 Hysteresis and Fatigue of Wohler Rotating Cantilever Specimen. **The Metallurgist**. Pág 23-27.
- IPIÑA, J. E. P.; 2004 **Mecánica de Fractura**. Librería y Editorial Alsina, Buenos Aires, Argentina.
- JAHED, H., VARVANI-FARAHANI, A., NOBAN, M., KHALAJI, I.; 2007 An Energy-Based Fatigue Life Assessment Model for Various Metallic Materials under Proportional and Non-proportional Loading Conditions. **Internacional Journal of Fatigue**. Vol. 29, pág 647-655.
- KACHANOV, L. M.; 1986 **Introduction to Continuum Damage Mechanics**. Martinus Nijhoff Publishers, Holanda.

- KRAJCINOVIC, D.; 2000 Damage Mechanics: Accomplishments, Trends and Needs. **International Journal of Solids and Structures**. Vol. 37 pág 267-277.
- KRAMER, I. R.; 1974 A Mechanism of Fatigue Failure. **Metallurgical and Materials Transactions**. 5, pág. 1735-1742.
- LANGER, B. F.; 1937 Fatigue Failure from Stress Cycles of Varying Amplitude. **ASME Journal of Applied Mechanics**. Vol. 59 pág. A160-A162.
- LEE, Y., PAN. J., HATHAWAY, R. B., BARKEY, M. E.; 2005 **Fatigue Testing and Analysis**. Elsevier, Estados Unidos.
- LEMAITRE, J.; 1996 **A Course on Damage Mechanics**. 2ª Edição. Springer-Verlag, Berlin, Alemanha.
- LEMAITRE, J., CHABOCHE J.; 1990 **Mechanics of Solid Materials**. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra.
- LEMAITRE, J., DESMORAT, R.; 2005 **Engineering Damage Mechanics**. Springer-Verlag, Holanda.
- LEMAITRE, J., DOGHRI, I.; 1994 Damage 90: a Post Processor for Crack Initiation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. Vol. 115 pág 197-232.
- LEMAITRE, J., SERMAGE, J. P., DESMORAT, R.; 1999 A Two Scale Damage Concept Applied to Fatigue. **Internacional Journal of Fracture**. Vol 97 pág 67-81.
- MALVERN, L. E.; 1969. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. Editora Prentice-Hall, Estados Unidos.
- MANSUR, T. R., PALMA, E. S., DA SILVA JÚNIOR, S. F.; 2005 Damage Assessment of AISI 8620 Steel Submitted to Axial Fatigue. **Anais do 18º Internacional Congress of Mechanical Engineering**. Proceedings of COBEM 2005. Ouro Preto, Brasil.
- MARCO, S. M., STARKEY, W. L.; 1954 A Concept of Fatigue Damage. **Transactions of the ASME**. Vol 76 pág. 627-632.

MIRANDA, A. C. O.; 2003 **Propagação de Trincas por Fadiga em Geometrias 2D Complexas sob Cargas Cíclicas Variáveis**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

NORTON, R. L.; 2004 **Projeto de Máquinas**. 2ª Edição. Editora Bookman, Porto Alegre, Brasil.

PANIS, M. W.; 2004 **Experimental Identification of a Damage Evolution Law for Steel**. Relatório Interno. Faculdade de Engenharia Mecânica, Grupo de Tecnologia dos Materiais, Eindhoven, Holanda.

PAPADOPOULOS, I. V., DAVOLI, P., GORLA, C., FILIPPINI, M., BERNASCONI, A.; 1996 A Comparative Study of Multiaxial High-Cycle Fatigue Criteria for Metals. **Internacional Journal of Fatigue**. Vol. 19 Nº 3, pág 219-235.

PEREIRA, J. T.; 1994 **Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Solução de Problemas Elastoplásticos Bidimensionais**. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, Brasil.

PIRONDI, A., BONORA, N.; 2003 Modeling Ductile Damage under Fully Reversed Cycling. **Computational Materials Science** Vol. 26 Pág 129-141.

PIRONDI, A., BONORA, N., STEGLICH, D., BROCKS, W., HELLMANN, D.; 2006 Simulation of Failure under Cyclic Plastic Loading by Damage Models. **International Journal of Plasticity**. Vol. 22 Pág 2146-2170.

SHIGLEY, J. E., MISCHKE, C. R., BUDYNAS, R. G.; 2005 **Projeto de Engenharia Mecânica**. 7ª Edição. Editora Bookman, Porto Alegre, Brasil.

VOYIADJIS, G. Z., KATTAN, P. I.; 2005 **Damage Mechanics**. Editora Taylor & Francis, Estados Unidos.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)