



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

PPGF-M.05/06

**Formação de Estruturas em Cosmologia no
Regime Não-Linear: Uma Aproximação por
Sistemas Dinâmicos.**

Carlos Pereira Leta

Orientador: Dr. Henrique Pereira de Oliveira

Rio de Janeiro, junho de 2006.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Pós-Graduação em Física

Dissertação de Mestrado

PPGF-M.05/06

**Formação de Estruturas em Cosmologia no
Regime Não-Linear: Uma Aproximação por
Sistemas Dinâmicos.**

Carlos Pereira Leta

Banca Examinadora:

Dr. Henrique Pereira de Oliveira (Presidente - UERJ)

Dr. Reinaldo Roberto Rosa (membro externo - LAC - INPE)

Dr. James Ewan Faskin Skea (membro interno - UERJ)

Dra. Maria Auxiliadora Delgado Machado (membro suplente - UERJ)

Rio de Janeiro 13 de julho de 2006

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	v
1 Introdução	1
2 Análise de Jeans - Uma revisão	10
2.1 Mecanismo de Jeans: fluido estático	10
2.2 Mecanismo de Jeans: fluido em expansão	13
2.3 Escoamento Irrotacional e Vorticidade	22
2.4 Matéria Escura e Bariônica	23
3 Regime não-linear	26
3.1 Equações Básicas	26
3.2 Introdução da Viscosidade: equação de Navier-Stokes em coordenadas comóveis	29
3.2.1 Efeitos da viscosidade na fase linear	32
4 Implementando o Método de Galerkin	34
4.1 Breve descrição do método de Galerkin	34
4.2 Aplicando o Método	36
5 Resultados numéricos	43
5.1 Condições iniciais	43
5.2 Dinâmica dos coeficientes modais	46
5.3 Formação de estruturas e virialização	57

Agradecimentos

- Agradeço em primeiro lugar, a Deus o Pai Eterno, por suas ”(...) maravilhas extraordinárias”. (atos 19:11).
- Agradeço imensamente ao Dr. Henrique Pereira de Oliveira, orientador, professor e amigo, pela orientação, paciência, constante motivação e amizade que foram indispensáveis para a realização e conclusão deste trabalho.
- Agradeço à minha amada mãe, por ter se sacrificado durante toda sua vida para que eu pudesse concluir não só este, mas todos os trabalhos que empreendi durante minha vida.
- Aos meus amigos da Pós-Graduação: Érika Cabral, Mônica Borges, Rodrigo Vartuli, Ricardo PM, Marcelo Antônio e Luciano.
- Aos meus grandes amigos: Idália Santos, Márcia Regina, Rômulo Brito, Dr. Márcio Carvalho e Raphael Oliveira.
- Aos professores: Dr. Henrique Pereira de Oliveira, Dr. Marcelo Chiapparini, Dr. José Roberto P. Mahon , Dr. Nilson Antunes de Oliveira, Dr. Jaime Villas da Rocha e Dra. Lilian Pantoja Sosman.
- À Laurimar Gomes da Costa e ao Rogério Teixeira, secretários da pós-graduação, pela imensa ajuda com os procedimentos administrativos e no dia-a-dia da pós-graduação.
- Ao CNPQ pelo apoio financeiro.
- A todos aqueles que, direta ou indiretamente, possibilitaram a realização deste trabalho.

Resumo

Formação de estruturas em larga escala é um problema em aberto em Cosmologia. Há um consenso de que a variedade de estruturas observadas tais como galáxias e aglomerados de galáxias tiveram origem a partir de pequenas flutuações do fluido cósmico - possivelmente geradas durante a época inflacionária - na era dominada pela matéria. Os estágios iniciais da evolução destas flutuações são descritas pela teoria de Jeans resultante da aproximação linear das equações hidrodinâmicas. Basicamente, a instabilidade devido à ação do campo gravitacional induz à existência de dois tipos de modos perturbativos: os modos instáveis que crescem, e o estáveis que oscilam como ondas sonoras. A distinção entre estes modos depende se o comprimento de onda de um determinado modo perturbativo é maior ou menor que um comprimento de onda típico conhecido como o comprimento de Jeans. Eventualmente, o crescimento dos modos instáveis quebra a aproximação e efeitos não-lineares tornam-se cruciais para a formação de estruturas. Neste sentido, nosso objetivo é estudar o problema não-linear de formação de estruturas em um Universo em expansão dominado pela matéria considerando uma extensão consistente da teoria linear de Jeans. Uma aproximação por sistema dinâmico é fornecida pelo método de Galerkin usado para integrar as equações dinâmicas do fluido auto-graviante. Conseqüentemente, é exibido o comportamento dos modos perturbativos instáveis e estáveis do fluido cósmico além do regime linear anterior à formação de estruturas. Nós também consideramos consistentemente a influência da viscosidade ao invés de introduzi-la de um modo artificial como no modelo de Adesão.

Abstract

The formation of large scale structure is an outstanding problem in Cosmology. It is a consensus that the observed variety of structures such as galaxies and clusters of galaxies have originated from small fluctuations of the cosmic fluid - possibly generated during the inflationary epoch - in the matter dominated era. The early stages of evolution of these fluctuations are described by the Jeans theory resulting from the linear approximation of the hydrodynamical equations. Basically, the instabilities due the action of the gravitational field induce the existence of two types of perturbative modes: the unstable modes that grow, and the stable one that oscillate as sound waves. The distinction between these modes depends on whether the wavelength of a given perturbative mode is greater or smaller than a typical wavelength known as the Jeans length. Eventually, the growth of the unstable modes breaks the linear approximation and nonlinear effects turn out to be crucial for the formation of structures. In this vein, our objective here is to study the problem of nonlinear structure formation in a matter dominated expanding universe considering a consistent extension of the linear Jeans theory. A dynamical system approach is provided by the Galerkin method used to integrate the self-gravitating fluid dynamical equations. Therefore, the behavior of the unstable and stable perturbative modes of the cosmic fluid are exhibited beyond the linear regime prior the formation of structures. We have also considered the influence of viscosity consistently rather than introducing it in a artificial way as in the Adhesion Model.

Lista de Figuras

- 1.1 Comportamento do raio de Hubble em cosmologia inflacionária.
- 1.2 Espectro de fundo de microondas medido pelo satélite COBE.
- 1.3 Competição entre a pressão interna e a força gravitacional.
- 2.1 Comparação entre os modos estáveis e instáveis na teoria linear em um Universo estático.
- 2.2 Análise da equação de Friedman.
- 2.3 Várias descrições da dinâmica das partículas do fluido num Universo em expansão.
- 2.4 Ilustração da solução da Eq. (2.45).
- 2.5 Comportamento após um longo tempo do modo estável.
- 3.1 Comportamento do modo estável no caso viscoso.
- 3.2 Comportamento do modo instável no caso viscoso.
- 4.1 Domínio espacial: caixa de lado L com condições de contorno periódicas.
- 5.1 Distribuição inicial da densidade de contraste $1 + \delta(x, y, 0)$ para os casos $N = 3$ e $N = 5$.
- 5.2 Distribuição inicial das curvas de nível de $1 + \delta(x, y, 0)$ juntamente com os vetores $\vec{\mu}(x, y, 0)$, para os casos $N = 3$ e $N = 5$.
- 5.3 Espectros de potências $\ln \mathcal{P}(k) \times \ln k$ no instante inicial para as truncagens $N = 3$ e $N = 5$.
- 5.4 Comportamento do modo instável c_{01}^R para diferentes ordens de truncagem ($N = 2, 3, 5$) e o comportamento linear do mesmo.
- 5.5 Comportamento dos modos instáveis c_{21}^R e c_{12}^R .
- 5.6 Comportamento dos modos instáveis b_{21}^R e b_{12}^R .

- 5.7 Variâncias $\langle \delta^2 \rangle$ e $\langle \mu^2 \rangle$ para uma truncagem $N = 3$ no caso sem viscosidade nas situações, $l = l_{crit} = 44,41883612704$, $l = 44,40 < l_{crit}$ e $l = 44,43 > l_{crit}$.
- 5.8 Distribuição da densidade de contraste, curvas de nível e o campo de velocidades para $N = 3$, no instante $\Gamma = 96$ com $l = l_{crit} = 44,4188361270483$.
- 5.9 Distribuição da densidade de contraste, curvas de nível e o campo de velocidades para $N = 3$, no instante $\Gamma = 41$ com $l = 44,43 > l_{crit}$.
- 5.10 Distribuição da densidade de contraste, curvas de nível e o campo de velocidades para $N = 5$, no instante $\Gamma = 55$ com $l = 41,0593064482651 = l_{crit}$.
- 5.11 Distribuição da densidade de contraste, curvas de nível e o campo de velocidades para $N = 5$, no instante $\Gamma = 28$ com $l = 41,1 > l_{crit}$.
- 5.12 Distribuição da densidade de contraste, curvas de nível e o campo de velocidades para um novo conjunto de condições iniciais.
- 5.13 Evolução dos coeficientes modais c_{11}^R e b_{10}^R no caso viscoso.
- 5.14 Comportamento dos coeficientes modais c_{11}^R e b_{10}^R no caso viscoso.
- 5.15 Distribuição da densidade de contraste e as curvas de nível no caso viscoso para uma truncagem $N = 3$.
- 5.16 Distribuição da densidade de contraste e as curvas de nível no caso viscoso para uma truncagem $N = 5$.
- 5.17 Variâncias $\langle \delta^2 \rangle$ e $\langle \mu^2 \rangle$ no caso viscoso, para uma truncagem $N = 3$ e $N = 5$.
- 5.18 Comportamentos para R em função do tempo t .
- 5.19 Gráfico de $|2E_c/E_p|$ em função do tempo, no caso $N = 3$, para $l = 44,43 > l_{crit}$, calculada somente para a região onde a matéria se aglomera.
- 5.20 Gráfico de $|2E_c/E_p|$ em função do tempo, no caso $N = 3$, para $l = 44,4188361270483 \simeq l_{crit}$, calculada para todo o domínio espacial.
- 5.21 Espectros de potência $\ln \mathcal{P}(k) \times \ln k$ nos instantes $\Gamma = 96$ e $\Gamma = 96$ para as truncagens $N = 3$ e $N = 5$, com $l = 44,4188361270483 = l_{crit}$ e $l = l_{crit} = 41,0593064482651$ respectivamente.
- 5.22 Espectro de potência $\mathcal{P}(k) \times k$ distribuição dos aglomerados de galáxias CfA 145 e CfA 100 obtido pelo *LCRS redshift survey*.
- 5.23 Espectros de potência $\ln \mathcal{P}(k) \times \ln k$ para as truncagens $N = 3$ e $N = 5$, com $l = 44,43 > l_{crit}$ e $l = 41,1 > l_{crit}$ respectivamente.

5.24 Espectros de potência $\ln \mathcal{P}(k) \times \ln k$ no caso viscoso para as truncagens $N = 3$ e $N = 5$.

Capítulo 1

Introdução

A origem e evolução das estruturas em larga escala no Universo constitui um problema de fundamental importância atualmente em Cosmologia [1]. Formação de estruturas, ou formação de galáxias como algumas vezes se faz referência, é sem dúvida, uma das mais importantes e ricas áreas de investigação possuindo várias questões que necessitam de soluções mais satisfatórias [2].

Para acomodar as estruturas que observamos hoje, dentro de uma teoria minimamente consistente com a realidade, é necessário introduzir um pequeno grau de inhomogeneidade inicial na distribuição de matéria do Universo. Isso torna-se necessário pois no modelo padrão [3], o Universo é homogêneo e isotrópico e portanto não haveria possibilidade de haver formação de estruturas. Já durante a era dominada pela matéria, pequenas inhomogeneidades de matéria presentes no Universo começaram a crescer devido à instabilidade do campo gravitacional e o processo básico é conhecido como mecanismo de Jeans [4, 5], tendo sido proposto pelo físico James Jeans no início do século XX afim de explicar a formação de planetas e galáxias. Tal mecanismo baseia-se na competição entre a força gravitacional e forças de repulsão associadas à pressão do meio. O cenário padrão para a formação das grandes estruturas no Universo é então baseado na instabilidade gravitacional, que é a maneira pela qual flutuações de tamanho maior que uma determinada escala de comprimento (o comprimento de Jeans) podem aumentar em razão da própria gravidade.

Assumiremos *a priori*, a existência de pequenas inhomogeneidades em algum momento inicial do Universo primordial [6], e o modelo de Inflação [7, 8, 9], parece ser a melhor opção para explicar a origem das pequenas inhomogeneidades [10]. De acordo com o modelo inflacionário, inicialmente flutuações na densidade de matéria são produzidas em escala microscópica menor que o horizonte [11] - região observável do Universo limitada em extensão pela distância que a luz percorreu durante o tempo decorrido desde a singularidade - e então a flutuação evolui durante a inflação até que se torna tão grande que atravessa o horizonte. A partir daí, a física causal não pode ser usada e a flutuação congela no valor que tinha quando atravessou o horizonte.

Mais tarde, a flutuação reentra no horizonte, já durante o período pós-inflacionário. Esta situação pode ser sumarizada [12] na Fig. 1.1 abaixo.

Figura 1.1: A figura mostra o comportamento do raio de Hubble em cosmologia inflacionária. Destacamos que é possível para o comprimento de onda da perturbação ser menor do que o raio de Hubble em duas diferentes épocas.

A Cosmologia vive um período muito fértil, onde deixou definitivamente de ser uma atividade quase que em sua totalidade especulativa devido à falta crônica de dados observacionais, para entrar na era da precisão. Destacamos as mais recentes observações obtidas pelo satélite COBE (*COsmic Background Explorer*) [13] que confirmaram de forma inequívoca o caráter de radiação de corpo negro da radiação cósmica de fundo como predito pelo modelo padrão, ou comumente conhecido como *Big-Bang*. Também temos medidas mais precisas das flutuações da radiação de fundo: COBE, MAXIMA [14], BOOMERANG [15], WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*), etc, cuja origem está em processos que ocorreram em fases primordiais da história do Universo.

Graças às observações da Radiação Cós mica de Fundo [16], sabemos que o Universo era altamente homogêneo na época do desacoplamento [17], ou seja, quando a radiação se desacoplou da matéria, cerca de 3×10^5 anos após o *Big-Bang*. Por outro lado, em pequenas escalas, o Universo hoje se apresenta com uma distribuição de matéria muito irregular. Por exemplo, a densidade no interior de uma galáxia $\delta\rho$ é da ordem de 10^5 vezes a densidade média do Universo ρ_0 , e no interior de um aglomerado de galáxias da ordem de 10^2 a 10^3 vezes a densidade média do Universo [18], ou seja:

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)_{gal} \simeq 10^5,$$

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho_0}\right)_{aglom} \simeq 10^2 - 10^3.$$

Essa razão vai diminuindo à medida que observam-se estruturas de maiores dimensões, até chegar próximo da densidade média do Universo [19]. Em largas escalas, digamos em escalas muito maiores do que 100 Mpc^1 , o Universo é homogêneo e isotrópico, como é evidenciado pela isotropia da radiação cósmica de fundo [11] e pela observação da distribuição homogênea de galáxias e rádio-galáxias em largas escalas. Os resultados obtidos pelo COBE mostraram que os desvios no espectro da radiação cósmica de fundo são de apenas 0,03% e que as flutuações de temperatura são $\delta T/T_0 \approx 10^{-5}$ em escalas de 10° a 90° . Essas flutuações correspondem a pequenas heterogeneidades na distribuição de matéria, que acabaram originando as estruturas em larga escala.

Além da medida da anisotropia na radiação cósmica de fundo [20], o satélite COBE foi capaz de demonstrar que este fundo de microondas segue com absoluta precisão uma distribuição de corpo negro, com desvios muito pequenos ($< 0,03\%$), e apresenta uma temperatura de aproximadamente $2,726 \pm 0,010 \text{ K}$ [18]. A descoberta deste fundo de radiação de microondas talvez seja a peça de informação mais importante para confirmar que no passado o Universo era muito quente, e que matéria e radiação se encontravam em equilíbrio termodinâmico, resultando no espectro de corpo negro como é mostrado na Fig. 1.2 da próxima página.

¹1 pc (parsec) = $3,086 \times 10^{16} \text{ m}$

Figura 1.2: O espectro de fundo de microondas medido pelo satélite COBE é tão bem descrito pela curva de corpo negro que neste gráfico, no qual estão representadas as medidas, torna-se impossível detectar qualquer sinal de desvio. Esses dados indicam que o fundo de radiação apresenta uma temperatura de $2,726 \pm 0,010$ K com 95% de confiança. No eixo vertical está representado o brilho (10^{-4} ergs/s/cm²/esterorradianos/cm⁻¹). (Reproduzido de Mather *et. al.*, 1990, *ApJ*, 354, L37.)

Uma vez que a descoberta do fundo de microondas confirma que o Universo foi muito mais quente no passado e que matéria e radiação coexistiam nesta fase, denominamos tal fase como era da radiação, que tem início no momento da aniquilação dos pares elétron-pósitron ($e^+ - e^-$). Isso ocorreu a uma temperatura de 5×10^9 K e após esse evento, o conteúdo material do Universo era composto por fótons e neutrinos e matéria, essencialmente constituída de prótons, elétrons e núcleos de hélio [21]. Por sua vez, os fótons estavam impossibilitados de percorrer grandes distâncias sem colidir constantemente com os elétrons livres. Esse acoplamento impedia na prática a ocorrência de qualquer tipo de colapso gravitacional que pudesse levar à formação dos primeiros objetos. Portanto, nessa fase, a despeito da enorme densidade volumétrica, os objetos astronômicos ainda não estavam formados. Não existiam ainda os mecanismos para que o conteúdo material do Universo pudesse esfriar e colapsar. Um longo caminho ainda deveria ser percorrido antes que a gravitação pudesse induzir o colapso e conseqüentemente a formação das primeiras estruturas. A partir da época do desacoplamento a matéria estava finalmente livre para colapsar e formar as primeiras estruturas, que de alguma forma geraram posteriormente os objetos que observamos hoje. Por volta da mesma época do desacoplamento matéria-radiação, foram formados os primeiros átomos, num processo chamado de recombinação ($T = 10^3$ K, $t = 10^{13}$ s) [18]. Dessa forma o Universo

deixou de ser um plasma e passou a ser transparente à radiação. No entanto, inhomogeneidades bariônicas não puderam crescer antes do desacoplamento, pois até então, os bárions estão fortemente acoplados aos fótons. Após o desacoplamento, quando o Universo passa a ser dominado pela matéria e os bárions estavam livres da pressão causada pelos fótons, inhomogeneidades de bárions e de outros tipos de componentes de matéria crescem como:

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} \propto \begin{cases} a & \delta\rho/\rho_0 \lesssim 1 \quad (\text{regime linear}) \\ a^n \quad (n \gtrsim 3) & \delta\rho/\rho_0 \gtrsim 1 \quad (\text{regime não-linear}), \end{cases}$$

onde a é o fator de escala do Universo. Aproximadamente 80% da massa que se aglomera para formar estruturas é composta pela matéria escura, que interage somente através da gravitação. Cerca de 10% correspondem à matéria bariônica e o restante é composto por neutrinos [3]. No cenário cosmológico padrão, a matéria escura é a maior responsável pela formação das estruturas em grandes escalas (veja seção 2.4).

Mas quais teriam sido as primeiras estruturas com possibilidades concretas de se formarem logo no início da fase do desacoplamento? A única força conhecida com capacidade de aglutinar a matéria na escala de estrelas e galáxias é a gravitação. Para que ocorra o colapso é preciso que a gravitação consiga vencer a pressão interna do fluido, que tende naturalmente a oferecer uma resistência contrária ao colapso. Esta pressão interna, que age no sentido de expandir o fluido, pode ser expressa na forma

$$p = \rho v_s^2, \quad (1.1)$$

onde v_s^2 representa a velocidade adiabática do som no meio e ρ a densidade de matéria. Após o desacoplamento temos praticamente um gás ideal composto por partículas que interagem pouco entre si. Assim, podemos aplicar a lei dos gases perfeitos

$$pV = NkT, \quad (1.2)$$

sendo k a constante dos gases perfeitos e $N = m/m_H$ é o número de partículas para uma massa m e volume V do fluido, composta de hidrogênio. A onda de compressão sonora introduz uma variação de energia interna $\delta\left(\frac{3}{2}NkT\right) = \frac{3}{2}\delta(pV)$ ao passar pelo volume considerado. Esta variação de energia interna deve ser compensada pelo trabalho realizado $-p\delta V$. Portanto concluímos que $\frac{3}{2}p\delta V + \frac{3}{2}V\delta p = -p\delta V$, ou seja

$$\frac{dp}{dV} = \frac{5p}{3V}, \quad (1.3)$$

ou ainda

$$v_s^2 = \frac{5}{3} \frac{kT}{m_H}, \quad (1.4)$$

para um gás ideal composto basicamente de hidrogênio. Mas, antes do desacoplamento, o suporte de pressão vem quase que exclusivamente dos fótons, ainda acoplados à matéria, e nesse caso $v_s^2 = c^2/3$, onde c representa a velocidade da luz no vácuo.

Esta diferença no suporte de pressão provocou uma enorme variação nas condições necessárias para a ocorrência do colapso gravitacional quando o Universo ultrapassou a barreira da era do desacoplamento. Para entender o motivo desta drástica diferença entre as duas fases vamos considerar uma região de dimensão L e densidade de massa ρ . Para que essa região possa colapsar é necessário que a sua pressão interna não consiga resistir à pressão aglutinadora gerada pela força gravitacional

$$p_g \simeq \frac{GM^2/L^2}{L^2} \simeq G\rho^2 L^2, \quad (1.5)$$

onde 2G é a constante gravitacional e tal força age no sentido de comprimir a massa do fluido Fig. 1.3.

Figura 1.3: Competição entre a pressão interna do fluido e a força gravitacional.

Portanto, a condição de prevalência da força de aglutinação gravitacional pode ser expressa na forma:

$$G\rho^2 L^2 > \rho v_s^2, \quad (1.6)$$

indicando que quanto maior a região mais importante será a contribuição da compressão gravitacional. Em conseqüência, o colapso só pode ocorrer se a dimensão for superior a um limite mínimo crítico L_c , dado por:

$$L_c = \frac{v_s}{\sqrt{{}^2G\rho}}. \quad (1.7)$$

Por exemplo, se a densidade do meio é 3×10^{-22} g/cm³ e a velocidade do som neste meio for de 6×10^3 m/s (estas eram as condições no universo durante a época do desacoplamento), então o comprimento crítico é igual a $L_c = 2 \times 10^{22}$ cm. Uma área de tais dimensões contém uma massa aproximadamente igual a um milhão de massas solares M_\odot ³ [11].

Muitas das modernas idéias da cosmologia podem ser discutidas sem a necessidade da teoria da Relatividade Geral. Assim, neste trabalho, utilizaremos a teoria

² $G = 6,672 \times 10^{-8}$ cm³ g⁻¹s⁻²

³ $1 M_\odot = 1,989 \times 10^{30}$ kg

newtoniana da gravitação para descrever a evolução das perturbações, uma vez que o tamanho destas é muito menor do que o horizonte e os campos gravitacionais envolvidos são fracos. Sendo assim, precisamos estabelecer a escala de tempo acima da qual quantidades físicas mudarão num universo em expansão. Esta escala de tempo corresponde a uma escala de comprimento $d_H(t)$ chamada raio de Hubble [12] definido como

$$d_H(t) \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^{-1}, \quad (1.8)$$

onde *ponto* significa a derivada com relação ao tempo cosmológico t . Este comprimento é tipicamente o tamanho acima do qual os processos físicos ocorrem coerentemente. Esta, é também, a escala acima da qual os efeitos relativísticos tornam-se importantes. Desta forma, para $L \ll d_H$, a gravitação newtoniana é adequada [12].

A teoria de Jeans é essencialmente linear, ou seja, se $\delta\rho$ é a densidade de matéria perturbada, então $\delta\rho/\rho_0 \ll 1$, sendo ρ_0 a densidade de matéria não-perturbada ou de fundo. Neste sentido, nossa ferramenta básica para o estudo do mecanismo de Jeans é a teoria de perturbação de primeira ordem, ou teoria linear de perturbação. No entanto, ocorre que à medida que uma dada perturbação cresce via instabilidade gravitacional, $\delta\rho/\rho_0 \sim 1$, implicando que a partir daí a teoria linear deixa de ser válida [2], e conseqüentemente efeitos não-lineares na evolução das perturbações deverão ser levados em conta. Porém, a análise linear das perturbações ajuda a compreender as primeiras fases de formação de estruturas cosmológicas. O ponto de fundamental importância na teoria da origem e evolução de estruturas em larga escala, é que as estruturas presentes hoje no Universo correspondem a uma densidade muitas ordens de grandeza maior do que a densidade média do Universo. Enquanto que o crescimento de flutuações de densidade num Universo em expansão pode ser entendido analiticamente via teoria de perturbação linear, caso a flutuação seja pequena, não há uma solução exata geral para o regime não-linear. Entretanto, nos últimos anos, tem havido um grande interesse por métodos analíticos para resolver este complicado problema.

Na literatura existem vários modelos analíticos e semi-analíticos que descrevem aproximadamente os estágios não-lineares da evolução das perturbações. Podemos citar dois destes modelos analíticos que são conhecidos por modelo de Zeldovich [2, 22] e de Adesão [23, 24, 25]. O primeiro foi proposto por Zeldovich [26] em 1970, e consiste numa extrapolação do regime linear de instabilidade gravitacional para o regime não-linear. Apesar de se apresentar como uma formulação lagrangiana simples, ele descreve a evolução de flutuações de densidade melhor do que a aproximação euleriana. O modelo de Zeldovich [3, 26, 28, 29] foi o primeiro a apontar para a existência de estruturas do tipo filamentos de galáxias envolvidas por grandes vazios (“*voids*”). Mais de uma década se passou para que os primeiros resultados de observações do *CfA redshift survey* [30] viessem a mostrar estruturas muito parecidas com aquelas preditas pelo modelo de Zeldovich. Contudo, este modelo, fornece uma descrição exata até revelar-se o regime quase-linear e, a partir daí, tal aproximação

não pode descrever o modelo após a formação de regiões chamadas de (“*cáusticas*”) [31], ou panquecas⁴ de Zeldovich [10], pois a densidade em tais regiões se torna infinita [3]. No sentido de prosseguir com uma descrição hidrodinâmica na qual não há formação das panquecas de Zeldovich, o modelo de Adesão [24, 25] foi proposto baseado no modelo da equação de Burgers [32, 33, 34] usada na teoria de turbulência em fluidos e cuja solução analítica exata é conhecida [24]. Tal equação é dada por

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \nu \nabla^2 \vec{V}, \quad (1.9)$$

onde \vec{V} é o campo de velocidades do fluido e ν a viscosidade. No modelo de adesão o termo de viscosidade ν é introduzido artificialmente na aproximação de Zeldovich [23]. Isso é feito à fim de que a matéria se mantenha unida e para imitar os efeitos gravitacionais não-lineares em pequenas escalas. Ainda neste modelo, o termo de viscosidade ν é assumido como constante, o que resulta na violação da conservação do momento linear das partículas, e neste sentido tal modelo não representa nenhuma física [35]. Tem-se encontrado aplicações interessantes para a equação de Burgers em Cosmologia [32, 33, 36], onde ela é conhecida como a “aproximação de Zeldovich” [26], e por outro lado como o “modelo de Adesão” [27], conforme o caso de $\nu = 0$ e $\nu \neq 0$, respectivamente. Em cosmologia o modelo de adesão tem sido usado de duas formas: uns assumem um valor pequeno porém finito do parâmetro de viscosidade ν e outros assumem um valor infinitesimal, $\nu \rightarrow 0$ [29].

Outros modelos hidrodinâmicos foram propostos tendo como ponto de partida os modelos de Zeldovich e Adesão. Iremos aqui apenas citá-los: a aproximação de Zeldovich modificada [22], do tensor de deformação [37] e a aproximação completa de Zeldovich [38].

Devido à inexistência de soluções exatas que descrevam a evolução não-linear de estruturas, as simulações numéricas figuram como sendo a alternativa mais viável, ou talvez a única para uma investigação mais detalhada dos estágios mais avançados da formação de estruturas. Por outro lado, as simulações numéricas têm suas desvantagens: ocupam muito tempo de cálculo, o que limita a varredura de condições iniciais e a resolução espacial. Além disso, elas não fornecem uma compreensão física transparente do problema, pois ser capaz de reproduzir uma propriedade particular de uma aglomeração de matéria não é o mesmo que entendê-la.

Existem duas estratégias computacionais para o estudo de estágios não-lineares da formação de estruturas. Citamos a simulação de N-corpos [39, 40, 41], onde técnicas eficientes de integração das equações de movimento têm sido empregadas nesta estratégia.

Temos por outro lado, a integração numérica das equações hidrodinâmicas, que apesar de serem bem mais realistas são muito mais complicadas. Neste contexto é que desenvolvemos o presente trabalho. Nosso objetivo é integrar numericamente as equações hidrodinâmicas correspondentes a um fluido auto-gravitante num universo

⁴superfícies planas de alta densidade formadas num colapso gravitacional genérico.

em expansão. Para isso, utilizaremos o método de Galerkin [42], que é um dos chamados métodos espectrais [43] utilizados para a integração numérica de equações diferenciais não-lineares.

O presente trabalho será dividido como mostrado a seguir. No capítulo 2 faremos uma revisão do mecanismo de Jeans no caso de um fluido estático e posteriormente para um fluido em expansão. Isso significa que abordaremos somente a dinâmica linear das inhomogeneidades do fluido. No capítulo 3 estabeleceremos as equações hidrodinâmicas que governam a evolução não-linear das inhomogeneidades num universo em expansão. No capítulo 4 apresentaremos e implementaremos o método de Galerkin para a integração das equações do capítulo anterior. Os resultados mais importantes serão apresentados no capítulo 5. E, por fim, no capítulo 6 apresentaremos as conclusões e perspectivas para o presente trabalho.

Capítulo 2

Análise de Jeans - Uma revisão

Neste capítulo, faremos uma revisão do mecanismo de Jeans, que descreve os estágios iniciais da formação de estruturas via mecanismo de instabilidade gravitacional. Na primeira seção, apresentaremos o modelo original de Jeans com a introdução do comprimento de onda de Jeans (λ_J). Na seção 1.2 estenderemos o tratamento de Jeans para um fluido em expansão e mostraremos que o mecanismo de instabilidade permanece inalterado. Deve-se destacar que as equações deste capítulo só são válidas para flutuações com dimensões menores que o raio de Hubble d_H .

2.1 Mecanismo de Jeans: fluido estático

Em 1902, Jeans [4] procurando estudar o mecanismo de formação de planetas e galáxias, mostrou que uma distribuição homogênea e isotrópica de fluido pode ser instável sob pequenas perturbações. Assim, há a possibilidade de uma crescente atração de matéria para a região onde teve início o crescimento. Desde que Jeans demonstrou primeiramente a natureza desta instabilidade, ela é tida como a razão básica pela qual a matéria no Universo não é distribuída uniformemente. Acredita-se que estruturas tais como planetas, estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias, etc, são os produtos finais das perturbações que começaram inicialmente a crescer devido à instabilidade gravitacional.

Começaremos introduzindo as equações que governam a dinâmica de um fluido não relativista auto-gravitante a fim de reproduzir a análise de Jeans. Tais equações são:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \varphi = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \rho, \quad (2.3)$$

ou seja, a equação da continuidade, de Euler e de Poisson, respectivamente. Em tais equações, ρ é a densidade de matéria, p a pressão, \vec{V} o campo de velocidades do fluido e φ o potencial gravitacional. As três quantidades físicas de interesse para o entendimento de estruturas em larga escala - o campo de velocidade \vec{V} , a densidade ρ e o potencial gravitacional φ - estão conectadas uma a outra no regime linear através da equação de Euler e de Poisson.

A solução mais simples das Eqs. (2.1) - (2.3) seria uma solução estática, onde a matéria está em repouso ($\vec{V} = \vec{V}_0 = 0$) e uniformemente distribuída no espaço ($\rho = \rho_0 = cte$, $p = p_0 = 0$). No entanto, devido ao fato de que $\vec{\nabla}\varphi_0 = 0$, como pode ser inferido da Eq. (2.2), fica claro que isto contradiz a equação de Poisson (2.3). Mesmo assim, Jeans estudou a evolução de pequenas perturbações em torno da “configuração estática” (o truque de Jeans) [45]. Tendo descrito algumas propriedades das equações de evolução que governam a expansão de um Universo homogêneo e isotrópico, passemos a considerar pequenos desvios de homogeneidade que eventualmente crescem e se tornam galáxias e outras estruturas cósmicas. Desse modo, podemos escrever para a densidade de matéria, para o campo de velocidades do fluido e para o potencial gravitacional, respectivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\vec{r}, t) = \rho_0(t) + \delta\rho(\vec{r}, t) \\ \vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{V}_0(t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \\ \varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(\vec{r}, t) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

onde ρ_0 , \vec{V}_0 e φ_0 denotam as quantidades homogêneas de fundo ou de ordem zero e $\delta\rho$, \vec{v} e $\delta\varphi$ são as correspondentes perturbações inhomogêneas na densidade, na velocidade e no potencial gravitacional, respectivamente.

No regime linear as quantidades perturbadas, assim como seus gradientes, são muito menores que as correspondentes delas de ordem zero, isto é, $\delta\rho \ll \rho_0$, $|\vec{v}| \ll |\vec{V}_0|$, etc. Durante esta fase, termos de ordem superior, por exemplo, o produto $\delta\rho \delta\varphi$ é ignorado. Introduzindo a decomposição dada pela Eq. (2.4) nas Eqs. (2.1) - (2.3), obtemos as seguintes equações para as perturbações no regime linear:

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{v}) = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{v_s^2}{\rho_0} \vec{\nabla} \delta\rho + \vec{\nabla} \delta\varphi = 0, \quad (2.6)$$

$$\nabla^2 \delta\varphi = 4\pi G \delta\rho, \quad (2.7)$$

onde, nessas equações, v_s é a velocidade do som definida como

$$v_s^2 \equiv \frac{\delta p}{\delta \rho}. \quad (2.8)$$

Com o intuito de desacoplar as Eqs. (2.5) e (2.6), podemos combiná-las numa única equação diferencial de segunda ordem para $\delta\rho$ por exemplo. Derivando a Eq. (2.5) com relação a t , obtemos

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.9)$$

e combinando esta equação com a divergência da Eq. (2.6) vem

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \delta\rho - 4\pi G \rho_0 \delta\rho = 0, \quad (2.10)$$

que envolve somente $\delta\rho$ e suas derivadas temporais e espaciais. Essa equação admite uma solução na forma de ondas planas dada por

$$\delta\rho(\vec{r}, t) = A \exp\left(-i \vec{k} \cdot \vec{r} + i\omega t\right), \quad (2.11)$$

onde A é uma constante, \vec{k} é o vetor de onda e ω a frequência angular de oscilação. Substituindo a expressão acima na Eq. (2.10), obtemos a seguinte relação de dispersão para ω e k :

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0, \quad (2.12)$$

onde $k = \left| \vec{k} \right|$ é o módulo do vetor de onda.

A Eq. (2.12), admite dois tipos de soluções, de acordo com o comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ ser maior ou menor que

$$\lambda_J \equiv v_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}. \quad (2.13)$$

Observemos que a expressão acima é idêntica à Eq. (1.7), a menos de uma constante, e que foi obtida no primeiro capítulo unicamente por considerações termodinâmicas. Na Eq. (2.13), λ_J é o comprimento de onda de Jeans [21, 46], que representa o comprimento de onda crítico acima do qual as perturbações tornam-se gravitacionalmente instáveis. Mais especificamente, se $v_s^2 k^2 < 4\pi G \rho_0$ ou $\lambda > \lambda_J$, implica que a frequência angular ω será imaginária uma vez que a relação de dispersão pode ser reescrita como

$$\omega = \pm (4\pi G \rho_0)^{1/2} \left[\left(\frac{\lambda_J}{\lambda} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (2.14)$$

Então, para $\lambda > \lambda_J$, a perturbação irá crescer exponencialmente. Por outro lado, caso $\lambda < \lambda_J$, ω será real e a perturbação irá oscilar como uma onda acústica. A Fig. 2.1 abaixo resume as duas situações descritas acima.

Figura 2.1: Comparação entre os modos estáveis e instáveis na teoria linear em um Universo estático.

Há uma explicação física simples para o fato da escala λ_J separar os modos de estabilidade ($\lambda < \lambda_J$) gravitacional da instabilidade ($\lambda > \lambda_J$) gravitacional [11]. A escala de tempo para o colapso gravitacional é dada por $\tau_{grav} \simeq (G\rho_0)^{-1/2}$, que é justamente a escala de tempo dinâmica. Por outro lado, a escala de tempo para a “pressão de resposta” é dada pelo tamanho da perturbação dividido pela velocidade do som: $\tau_{pressão} \sim \lambda/v_s$. Se $\tau_{pressão}$ exceder ao τ_{grav} , o colapso gravitacional da perturbação poderá ocorrer antes que a força da pressão possa responder para restaurar o equilíbrio hidrostático; $\tau_{pressão} \gtrsim \tau_{grav}$ ocorre para $\lambda \gtrsim v_s/(G\rho_0)^{-1/2} \sim \lambda_J$.

Uma forma alternativa de especificar a escala física apropriada para a instabilidade gravitacional é definir uma escala de massa. Por esta razão, é útil definir a massa de Jeans, que consiste na massa total contida em uma esfera de raio $R = \lambda_J/2$ através de

$$M_J = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 \rho_0. \quad (2.16)$$

Desse modo a massa de Jeans, ou massa crítica correspondente é reescrita como

$$M_J = \frac{\pi^{5/2}}{6} \frac{v_s^3}{\rho_0^{1/2} G^{3/2}}, \quad (2.17)$$

e perturbações de massa menor do que M_J serão estáveis diante do colapso gravitacional, enquanto que essas de massa maior que M_J serão instáveis.

2.2 Mecanismo de Jeans: fluido em expansão

A teoria original de Jeans para a instabilidade gravitacional, formulada para um Universo estático, não pode ser aplicada num modelo cosmológico em expansão. O próximo passo consiste em considerar o mecanismo de Jeans para um fluido em expansão [47], sem pressão e que representa com boa aproximação o nosso Universo

durante a era dominada pela matéria [12]. Nesta situação, não há a necessidade de uma solução de fundo fictícia, uma vez que as Eqs. (2.1) - (2.3) admitem a seguinte configuração [11]:

$$\rho_0(t) = \rho_0(t_0) \frac{a_0^3}{a^3(t)}, \quad (2.18)$$

$$\vec{V}_0 = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}, \quad (2.19)$$

$$\vec{\nabla} \varphi_0 = \frac{4\pi G \rho_0}{3} \vec{r}. \quad (2.20)$$

Nas equações acima $a(t)$ é o fator de escala que descreve a expansão homogênea do Universo, \dot{a} é sua derivada com relação ao tempo cosmológico t e $a_0 = a(t_0)$ é o fator de escala num instante t_0 inicial. As três equações acima são as chamadas soluções de fundo para um fluido em expansão esfericamente simétrico, onde o fator de escala $a(t)$ satisfaz a equação de Friedman [12]

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4\pi G \rho_0}{3} = 0, \quad (2.21)$$

que é obtida ao substituirmos as Eqs. (2.18) - (2.20) na Eq. (2.2) e que descreve a evolução dinâmica do Universo. Podemos utilizar a expressão para ρ_0 dada por (2.18) e integrar a Eq. (2.21), obtendo

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G \rho_0(t_0) a_0^3}{3a^3} = -\frac{\mathcal{C}}{a^2}, \quad (2.22)$$

sendo \mathcal{C} uma constante de integração. A equação de Friedman (2.21) é idêntica à obtida em Cosmologia relativista [48]. A constante \mathcal{C} está relacionada com a curvatura do espaço-tempo, podendo assumir os valores -1 , 0 e $+1$, que caracterizam universos ‘abertos’, ‘chatos’ e ‘fechados’ respectivamente. Reescrevendo a expressão acima como

$$\dot{a}^2 + V(a) = 'E',$$

podemos interpretar os termos anteriores como a energia efetiva total ‘ E ’ do sistema, dada por ‘ E ’ = $-\mathcal{C}$, onde \dot{a}^2 é a energia cinética e $V(a) = 8\pi G \rho_0(t_0) a_0^3/3a$ o potencial efetivo.

Uma análise da equação (2.22) para os casos $\mathcal{C} = -1, 0$ e $+1$, é mostrada na Fig. 2.2 a seguir:

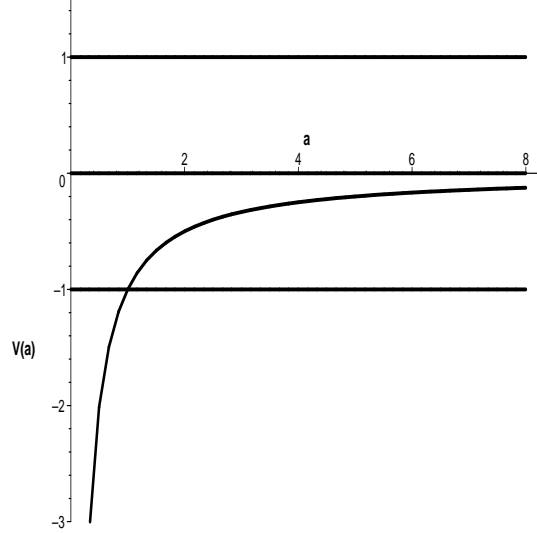


Figura 2.2: Gráfico de $V(a) \times a$. Observemos que para o caso $\mathcal{C} = +1$ (energia total negativa) o Universo se expande até $a = 8\pi G a_0^3 \rho_0(t_0) / 3$ e após isso recolapsa. O caso $\mathcal{C} = 0$ caracteriza um Universo que expande infinitamente, ou seja, a expansão cessa em $t \rightarrow \infty$. Para $\mathcal{C} = -1$ a energia total é positiva e assim a expansão nunca tem fim.

A Eq. (2.22) pode ser integrada facilmente no caso $\mathcal{C} = 0$, o que caracterizará o modelo de Einstein - de Sitter [9, 24], que representa bem o comportamento do fator de escala no início de formação das estruturas, ou seja, na fase do Universo dominada pela matéria. Desse modo temos

$$a(t) = a_0 \left(1 + \sqrt{6\pi G \rho_0(t_0)} t \right)^{2/3}, \quad (2.23)$$

onde escolheremos $t_0 = 0$, que corresponde a um instante inicial da era de domínio da matéria. Para escalas nas quais $|\vec{r}| \geq d_H$, onde d_H é o raio de Hubble Eq. (1.8), a velocidade $|\vec{v}|$ excede a velocidade da luz como pode ser inferido da Eq. (2.19). Isso implica que, na era dominada pela radiação, as flutuações não podem evoluir pois estas têm uma velocidade próxima a velocidade da luz e portanto um comprimento maior que o raio de Hubble.

Antes de obtermos as equações que descrevem a dinâmica de pequenas perturbações em torno da solução de Einstein-de Sitter, será conveniente introduzirmos a quantidade adimensional $\delta(\vec{r}, t)$ denominada campo de densidade de contraste e definida como:

$$\delta(\vec{r}, t) \equiv \frac{\rho(\vec{r}, t) - \rho_0(t)}{\rho_0(t)} = \frac{\delta\rho(\vec{r}, t)}{\rho_0(t)}. \quad (2.24)$$

Prosseguindo, vamos substituir a decomposição dada por (2.4) nas Eqs. (2.1) - (2.3) levando em conta a definição acima, bem como as expressões (2.18) - (2.20) para

as quantidades que caracterizam a solução de fundo. Após algumas passagens, as equações linearizadas da continuidade, de Euler e de Poisson ficam sendo dadas por:

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \frac{\dot{a}}{a} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \delta = 0, \quad (2.25)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{r}} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v} + \frac{\dot{a}}{a} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + v_s^2 \vec{\nabla} \delta + \vec{\nabla} \delta \varphi = 0, \quad (2.26)$$

$$\nabla^2 \delta \varphi = 4\pi G \rho_0 \delta, \quad (2.27)$$

onde o índice \vec{r} nas derivadas temporais das equações acima indica que tais derivadas são feitas numa posição \vec{r} fixa. Seguindo Peebles [9], será mais conveniente introduzir nas equações acima coordenadas comóveis com a expansão, isto é, coordenadas cujos valores correspondentes a um objeto particular estacionário, não são alteradas pela expansão do Universo. Desta forma definimos

$$\vec{x}(t) \equiv \frac{\vec{r}(t)}{a(t)}, \quad (2.28)$$

como sendo a coordenada Euleriana espacial comóvel. Da relação acima, segue automaticamente que

$$\vec{r}(t) = a(t) \vec{x}(t),$$

e, levando em conta que a velocidade \vec{V} do fluido relativamente à origem é

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

segue, então:

$$\vec{V} = \dot{a} \vec{x} + a \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r} + a \frac{d\vec{x}}{dt}. \quad (2.29)$$

Note que esta expressão é idêntica à decomposição

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{v},$$

sendo \vec{V}_0 dado pela Eq. (2.19). A equação acima é obtida naturalmente ao utilizarmos coordenadas comóveis. A velocidade \vec{v} é conhecida como sendo o campo de velocidades peculiar do fluido, ou seja, a velocidade medida por um observador na posição da partícula e em \vec{x} fixo, que resulta do movimento relativamente ao referencial comóvel. Um sistema de coordenadas comóveis tem inúmeras vantagens. Entre elas, destacamos o fato de ele permitir distinguir entre velocidades de expansão ou de recessão e velocidades peculiares, uma vez que os movimentos peculiares de determinado objeto podem ser detectados e medidos relativamente ao sistema de coordenadas comóveis.

A Fig. 2.3 abaixo, extraída de [49], ilustra as várias descrições da dinâmica das partículas do fluido num Universo em expansão.

Figura 2.3: Descrição da dinâmica de partículas em um Universo em expansão. Em algum instante t_0 existe um conjunto de partículas distribuídas em uma rede uniforme, como mostrado à esquerda. Em algum instante posterior, a expansão afasta as partículas umas das outras, mas a atração gravitacional realça o grau de irregularidade. Este é o ponto de vista da descrição euleriana. Alternativamente, a descrição lagrangiana utiliza coordenadas que não mudam com o tempo. Coordenadas comóveis são uma conciliação entre as duas descrições alternativas acima.

Afim de escrevermos as Eqs. (2.25) - (2.27) em coordenadas comóveis, será necessário estabelecermos a taxa de variação temporal calculada em \vec{x} constante [21]. Consideremos uma função escalar $f(\vec{x}, t) = f(\vec{r}/a, t)$. Então, aplicando a regra da cadeia para derivação parcial, vem

$$\left(\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_j}{\partial t}\right)_{\vec{r}}.$$

Note que

$$\left(\frac{\partial x_j}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \left(\frac{\partial (r_j a^{-1})}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = -r_j \frac{\dot{a}}{a^2} = -x_j \frac{\dot{a}}{a}.$$

Logo

$$\left(\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t}\right)_{\vec{r}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\vec{x}} - \frac{\dot{a}}{a} (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}) f, \quad (2.30)$$

onde $\vec{\nabla}_{\vec{x}} = a \vec{\nabla}$ é calculado com respeito à coordenada espacial comóvel \vec{x} . A relação acima, portanto, relaciona as taxas de variação temporal calculadas, respectivamente, com respeito a \vec{r} e \vec{x} constantes. Cabe ainda ressaltar que os operadores $(\frac{\partial}{\partial t})_{\vec{x}}$ e $\vec{\nabla}_{\vec{x}}$ comutam assim como $(\frac{\partial}{\partial t})_{\vec{r}}$ e $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$.

Estamos agora em condições de reescrever as Eqs. (2.25) - (2.27) em coordenadas comóveis, onde levaremos em conta a taxa de variação temporal definida por (2.30). Após algumas passagens, temos

$$\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_x \cdot \vec{v} = 0, \quad (2.31)$$

$$\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + H\vec{v} + \frac{v_s^2}{a}\vec{\nabla}_x\delta + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_x\delta\varphi = 0, \quad (2.32)$$

$$\nabla_x^2\delta\varphi = 4\pi Ga^2\rho_0(t)\delta, \quad (2.33)$$

onde

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.34)$$

é o parâmetro de Hubble. As Eqs. (2.31) - (2.33) constituem nosso sistema de equações básicas para o caso de um fluido em expansão.

Inspicionando as Eqs. (2.31) e (2.33), podemos escrever o campo de velocidades \vec{v} como

$$|\vec{v}| \propto \left| \vec{\nabla}_x\delta\varphi \right| + \frac{1}{a(t)}.$$

A equação acima nos mostra que o modo crescente associado ao campo de velocidades peculiar no regime linear é potencial, ou seja, $|\vec{v}| \propto \left| \vec{\nabla}_x\delta\varphi \right|$ e tal fato é utilizado com grande vantagem em aproximações não-lineares para a aglomeração gravitacional, como por exemplo, na aproximação de Zeldovich [22] e em métodos de reconstrução tais como POTENT [50, 51, 52], que utiliza informações acerca do campo de velocidades peculiar [53]. No caso de ausência da força gravitacional $\vec{\nabla}_x\delta\varphi = 0$, a velocidade peculiar num Universo em expansão decai cinematicamente como $|\vec{v}| \propto a(t)^{-1}$ [9].

Assim como fizemos na seção anterior, nosso próximo passo será obter uma equação somente para a densidade de contraste δ . Para tal, vamos desacoplar as Eqs. (2.31) e (2.32) combinando-as numa única equação diferencial para δ . A derivada temporal da Eq. (2.31) é dada por

$$\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}\right)_{\vec{x}} - \frac{\dot{a}}{a^2}\vec{\nabla}_x \cdot \vec{v} + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}_x \cdot \vec{v}\right)_{\vec{x}} = 0, \quad (2.35)$$

e, substituindo a Eq. (2.31) na expressão acima, obtemos

$$\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}\right)_{\vec{x}} + H\left(\frac{\partial\delta}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}_x \cdot \vec{v}\right)_{\vec{x}} = 0. \quad (2.36)$$

O último termo do membro esquerdo dessa equação pode ser expresso em termos de $\delta(\vec{x}, t)$ se calcularmos a divergência da Eq. (2.32) e levarmos em conta a própria

Eq. (2.32) e a Eq. (2.33). O resultado final é:

$$\left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}\right)_{\vec{x}} + 2H \left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_{\vec{x}} - \frac{v_s^2}{a^2} \nabla_x^2 \delta - 4\pi G \rho_0 \delta = 0. \quad (2.37)$$

Notemos que, tal como a Eq. (2.10), a equação acima envolve somente δ , suas derivadas temporais e espaciais.

A solução analítica para $\delta(\vec{x}, t)$ é expressa em termos de ondas planas, ou seja:

$$\delta(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}}(t) \exp(i \vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (2.38)$$

Após introduzirmos a expressão acima na Eq. (2.37), teremos

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} + 2H \frac{d\delta_{\vec{k}}}{dt} + \frac{v_s^2}{a^2} (k^2 - k_J^2) \delta_{\vec{k}} = 0, \quad (2.39)$$

onde k_J é o número de onda de Jeans comóvel dado por

$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi a^2 G \rho_0(t)}{v_s^2}}, \quad (2.40)$$

e note que a dependência de $\delta_{\vec{k}}$ em \vec{k} se dá apenas em termos de $k = |\vec{k}|$, o que é uma consequência de isotropia do espaço. Naturalmente, associado à k_J , temos o comprimento de onda de Jeans $\lambda_J = 2\pi/k_J$. Tal comprimento de onda separa os modos gravitacionais estáveis dos modos instáveis e define a escala para a qual temos o balanço entre o termo de gravidade ($4\pi G \rho_0$) e de pressão ($v_s^2 k^2/a^2$). Notemos que quando a expansão do universo não é levada em conta, ou seja, $H = 0$, a Eq. (2.39) adquire a forma:

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dt^2} + \left(\frac{v_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \rho_0\right) \delta_{\vec{k}} = 0, \quad (2.41)$$

onde a é agora uma constante e cuja solução para $\delta_{\vec{k}}$ é oscilatória caso $v_s^2 k^2/a^2 > 4\pi G \rho_0$ e exponencial no caso contrário reproduzindo assim o mecanismo de Jeans para o caso de um fluido estático Eq. (2.10). A diferença entre a amplificação dada por (2.39) e a dada por (2.41) está no fato de que a expansão do Universo acaba por amortecer o crescimento das perturbações devido à presença do termo $2H d\delta_{\vec{k}}/dt$ que funciona como espécie de “termo de fricção”, em analogia com um oscilador harmônico amortecido. Isso implica numa redução da velocidade de crescimento exponencial dos modos instáveis resultando em um crescimento do tipo potência como será mostrado à frente.

A solução da equação (2.39) depende do modelo de fundo no qual as perturbações são definidas. Afim de obtermos a solução analítica da Eq. (2.39), vamos substituir o fator de escala dado pela Eq. (2.23) na Eq. (2.18) para o campo de densidade de matéria $\rho_0(t)$. Desta forma, teremos

$$\rho_0(t) = \rho_0(0) \left(1 + \sqrt{6\pi G \rho_0(0)} t\right)^{-2}, \quad (2.42)$$

e o parâmetro de Hubble será dado por

$$H = \frac{2\sqrt{6\pi G\rho_0(0)}}{3\left(1 + \sqrt{6\pi G\rho_0(0)t}\right)}. \quad (2.43)$$

Vamos introduzir a quantidade temporal adimensional T , tal que

$$T = \sqrt{6\pi G\rho_0(0)t}.$$

Assim, a Eq. (2.39) nas variáveis adimensionais é escrita como:

$$\frac{d^2\delta_{\vec{k}}}{dT^2} + \frac{4}{3(1+T)}\frac{d\delta_{\vec{k}}}{dT} + \left[\frac{v_s^2 k^2}{6\pi G\rho_0(0)a_0^2} (1+T)^{-4/3} - \frac{2}{3(1+T)^2} \right] \delta_{\vec{k}} = 0. \quad (2.44)$$

Para um comprimento de onda λ muito grande, temos que $k \ll k_J$, de modo que o termo do gradiente de pressão pode ser desprezado em (2.39) que, na versão adimensional, se reduz a:

$$\frac{d^2\delta_{\vec{k}}}{dT^2} + \frac{4}{3(1+T)}\frac{d\delta_{\vec{k}}}{dT} - \frac{2}{3(1+T)^2}\delta_{\vec{k}} = 0, \quad (2.45)$$

e define o chamado modo instável. A solução geral da equação acima é

$$\delta_{\vec{k}} = A_{\vec{k}}(1+T)^{-1} + B_{\vec{k}}(1+T)^{2/3}, \quad (2.46)$$

onde $A_{\vec{k}}$ e $B_{\vec{k}}$ são constantes de integração. O modo $\delta_{\vec{k}}^- = A_{\vec{k}}(1+T)^{-1}$ é chamado de modo decrescente e $\delta_{\vec{k}}^+ = B_{\vec{k}}(1+T)^{2/3}$ de modo crescente. Uma ilustração da solução da Eq. (2.45) e a integração da Eq. (2.44) é mostrada na Fig. 2.4 da próxima página.

Deve-se destacar neste ponto, que o número de onda de Jeans, dado pela Eq. (2.40), não é mais constante como na Eq. (2.13), mas decresce com o tempo. Isso implica que ao integrar a Eq. (2.39), mesmo que inicialmente o termo gravitacional seja dominante, a medida que o Universo se expande, k_J diminui e os termos de pressão passam a dominar após algum tempo. Assim, ainda que $\delta_{\vec{k}}$ inicialmente cresça como uma potência de T , a expansão do Universo faz com que acabe oscilando como uma onda sonora com amplitudes decrescentes, conforme pode ser visto na Fig. 2.4 abaixo:

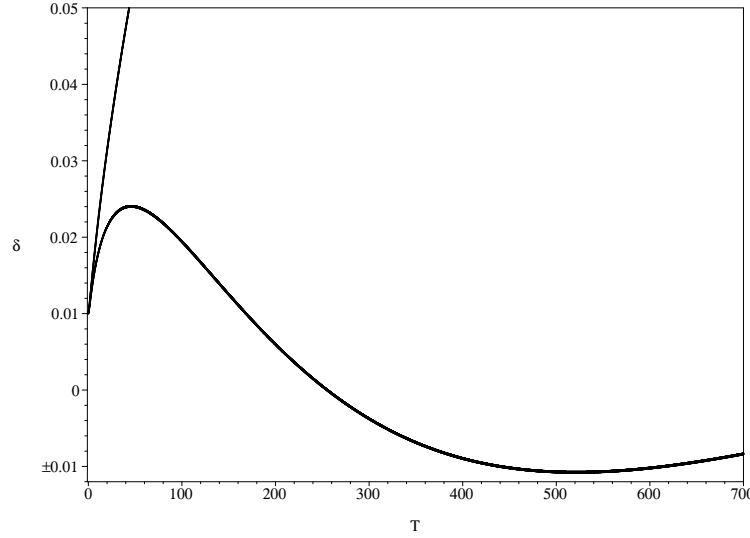


Figura 2.4: Ilustração da solução da Eq. (2.45) para o modo instável $\lambda > \lambda_J$ e a integração da Eq. (2.44). Podemos observar que inicialmente a gravitação é a força que predomina e determina a dinâmica das perturbações. Porém, a partir de algum instante, a expansão do Universo faz com que os termos de pressão sejam acionados e passem a dominar fazendo com que a perturbação oscile com amplitudes decrescentes ao invés de crescer como uma potência de T .

Já para um comprimento de onda λ muito pequeno, k se torna grande e os termos de pressão passam a dominar e determinar a dinâmica de $\delta_{\vec{k}}$. Sendo assim, para $k \gg k_J$ a Eq. (2.39) toma a forma adimensional:

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dT^2} + \frac{4}{3(1+T)} \frac{d\delta_{\vec{k}}}{dT} + \frac{v_s^2 k^2}{6\pi G \rho_0(0) a_0^2} (1+T)^{-4/3} \delta_{\vec{k}} = 0, \quad (2.47)$$

definindo o modo estável e cuja solução geral é

$$\delta_{\vec{k}} = C_{\vec{k}} \frac{\text{sen} [(3(1+T)^{1/3})]}{(1+T)^{1/3}} + D_{\vec{k}} \frac{\text{cos} [(3(1+T)^{1/3})]}{(1+T)^{1/3}}, \quad (2.48)$$

onde escolhemos por simplicidade $v_s^2 k^2 / 6\pi G \rho_0(0) a_0^2 = 1$ e $C_{\vec{k}}$ e $D_{\vec{k}}$ são constantes de integração.

Vemos assim que a solução para a Eq. (2.39) quando $k \gg k_J$ é tal que $\delta_{\vec{k}}$ oscila como uma onda sonora com amplitudes decrescentes, devido à expansão do universo, conforme ilustrado na Fig. 2.5 abaixo:

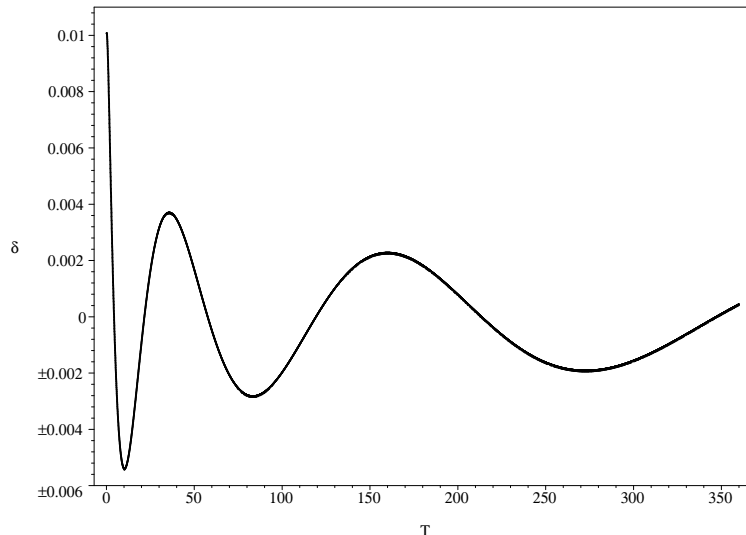


Figura 2.5: Comportamento após um longo tempo do modo estável $\lambda < \lambda_J$, Eq. (2.47).

Num primeiro estágio, o processo de formação de estruturas pode ser investigado utilizando-se a teoria de perturbação linear. As equações de movimento linearizadas fornecem uma excelente descrição da instabilidade gravitacional durante os instantes primordiais de formação de estruturas quando as flutuações de densidade são pequenas $\delta \ll 1$. Entretanto, vemos que a aproximação linear não fornece um cenário satisfatório pois, após algum tempo, os modos de $\delta_{\vec{k}}$ acabam por oscilar e se dispersar. Sendo assim, torna-se necessária uma investigação além do regime linear afim de verificarmos os efeitos que as não-linearidades têm na evolução de tais perturbações, o que será feito no próximo capítulo.

2.3 Escoamento Irrotacional e Vorticidade

Até este momento nada foi dito acerca da natureza do campo de velocidades peculiar \vec{v} . Em nossa discussão anterior sobre a evolução de perturbações, consideramos implicitamente apenas a parte irrotacional do campo de velocidades. Iremos agora fazer um estudo da evolução dos dois modos: rotacional e irrotacional. Deve-se destacar neste ponto, que ao tomarmos a divergência da equação de Euler, a contribuição do modo rotacional do vetor \vec{v} foi perdida.

Pelo teorema de Helmholtz [54], qualquer campo vetorial diferenciável, pode ser escrito como a soma de suas partes escalar e vetorial. A parte escalar recebe esse nome pois pode ser escrita como o gradiente de um escalar ϕ (o potencial velocidade), enquanto que a parte rotacional não pode. Sendo assim, é útil decompor o campo

de velocidades peculiar \vec{v} do fluido em um modo rotacional \vec{v}_\perp perpendicular ao vetor de onda \vec{k} , e outro irrotacional \vec{v}_\parallel com divergência nula e que é paralelo a \vec{k} :

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp(\vec{k}) + \vec{v}_\parallel(\vec{k}).$$

O rotacional da expressão acima nos fornece

$$\vec{\nabla}_x \times \vec{v} = \vec{\nabla}_x \times \vec{v}_\perp + \vec{\nabla}_x \times (\vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla}_x \times \vec{v}_\perp,$$

onde definiremos $\vec{\omega}$ como a quantidade denominada vorticidade comóvel [21], dada por

$$\vec{\omega} \equiv \vec{\nabla}_x \times \vec{v}. \quad (2.49)$$

Podemos obter uma equação relativamente simples para $\vec{\omega}$. Calculando o rotacional da equação de Euler (2.32), temos que

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + H \vec{\omega} = 0, \quad (2.50)$$

de modo que

$$\omega \propto a^{-1}, \quad (2.51)$$

onde ω é o módulo do vetor $\vec{\omega}$. A expressão acima nos mostra imediatamente que os modos rotacionais não são acoplados às perturbações de densidade e que a vorticidade comóvel decai com o inverso do fator de escala. Assim, se o campo de velocidades peculiar pode inicialmente ser decomposto num modo irrotacional e noutro rotacional, somente o modo irrotacional será relevante na análise da evolução de pequenas perturbações. Vemos assim que se $\vec{\omega} = 0$ inicialmente em todo o espaço, então $\vec{\omega}$ permanece nulo. Dessa forma, mesmo que se tenha inicialmente $\vec{\omega} \neq 0$, a vorticidade não terá nenhuma influência na evolução linear, mas decairá à medida que o Universo se expande. No entanto, no regime não-linear, o mesmo pode não ocorrer, pois a vorticidade pode se acoplar a outros modos.

2.4 Matéria Escura e Bariônica

Na seção precedente estudamos a densidade total de matéria e não fizemos nenhuma distinção entre matéria bariônica e matéria escura. Nesta seção trataremos da matéria escura e bariônica separadamente.

Como dissemos no capítulo 1, num Universo composto apenas por matéria bariônica, não teria havido tempo para formar as estruturas observadas [12]. Se $\lambda \ll d_H$, então as perturbações podem ser analisadas pela teoria Newtoniana e a Eq. (2.39) pode ser generalizada para várias componentes de matéria. Nesse caso o termo gravitacional contém as contribuições de todas as componentes de matéria. A equação (2.39), para a era dominada pela radiação [55], fica sendo dada por:

$$\frac{d^2\delta_A}{dt^2} + 2H\frac{d\delta_A}{dt} + \frac{v_s^2 k^2}{a^2}\delta_A = 4\pi G \sum_B \bar{\rho}_B \delta_B, \quad (2.52)$$

de modo que o fundo do Universo é governado pela equação

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_R + \rho_{ME}),$$

onde ρ_R e ρ_{ME} representam as densidades de radiação e matéria escura respectivamente. Os índices A e B foram introduzidos para diferenciar o termo gravitacional dos demais termos e substituímos ρ_0 por $\bar{\rho}$ afim de simplificar a notação.

Um exemplo importante é o sistema matéria escura + bárions, logo após o desacoplamento [36]. Para $k \ll k_J$ a evolução desse sistema será governada pelas equações:

$$\frac{d^2\delta_{ME}}{dt^2} + 2H\frac{d\delta_{ME}}{dt} = 4\pi G(\bar{\rho}_b\delta_b + \bar{\rho}_{ME}\delta_{ME}),$$

e

$$\frac{d^2\delta_b}{dt^2} + 2H\frac{d\delta_b}{dt} = 4\pi G(\bar{\rho}_b\delta_b + \bar{\rho}_{ME}\delta_{ME}),$$

onde δ_{ME} é a densidade de contraste de matéria escura e δ_b de matéria bariônica. Antes do desacoplamento as flutuações na componente bariônica não evoluem, pois tal componente está interagindo fortemente com a radiação [46]. Já as perturbações de matéria escura podem evoluir livremente na era dominada pela matéria [12]. Por isso, logo após o desacoplamento, temos $\bar{\rho}_{ME}\delta_{ME} \gg \bar{\rho}_b\delta_b$, de modo que as equações acima podem ser aproximadas por:

$$\frac{d^2\delta_{ME}}{dt^2} + 2H\frac{d\delta_{ME}}{dt} \simeq 4\pi G\bar{\rho}_{ME}\delta_{ME}, \quad (2.53)$$

e

$$\frac{d^2\delta_b}{dt^2} + 2H\frac{d\delta_b}{dt} \simeq 4\pi G\bar{\rho}_{ME}\delta_{ME}. \quad (2.54)$$

A Eq. (2.53) representa o crescimento de perturbações na componente de matéria escura.

Como estamos utilizando o modelo de Einstein-de Sitter, onde $a \propto t^{2/3}$ e $\rho \propto t^{-2}$, segue que para o modo crescente da Eq. (2.53):

$$\delta_{ME} \propto a = Ct^{2/3},$$

onde \mathcal{C} é uma constante. Substituindo a relação acima na Eq. (2.54) podemos escrever

$$a^{3/2} \frac{d}{da} \left(\frac{1}{a^{1/2}} \frac{d\delta_b}{da} \right) + 2 \frac{d\delta_b}{da} = \frac{3}{2} \mathcal{C},$$

cuja solução do modo crescente é:

$$\delta_b = \mathcal{C} [a(t) - \mathcal{B}] = \delta_{ME}(a) \left(1 - \frac{\mathcal{B}}{a} \right), \quad (2.55)$$

onde \mathcal{B} é uma constante. A solução acima mostra que $\delta_b \rightarrow \delta_{ME}$ para $a(t) \gg \mathcal{B}$ e que as perturbações na matéria bariônica são induzidas pelas flutuações da matéria escura após o desacoplamento [12]. Vemos assim que a matéria escura é a principal responsável pela formação das primeiras estruturas em larga escala. Sem ela, as flutuações seriam muito menores e não haveria tempo de haver a produção de estruturas em larga escala que são observadas hoje.

Capítulo 3

Regime não-linear

Ao estudarmos o processo de formação de estruturas, a teoria linear de perturbação pode ser usada quando a densidade de contraste δ é pequena [3], ou seja, durante a fase onde $\delta \ll 1$. No entanto, à medida que as perturbações crescem via instabilidade gravitacional, ocorre que em um dado momento $\delta \gtrsim 1$, implicando que a partir daí, a teoria linear deixa de ser válida, e portanto devemos levar em conta os efeitos não-lineares na evolução das perturbações. Neste sentido, estaremos lançando mão de um modelo hidrodinâmico para tratar o problema de formação de estruturas além do regime linear. Na seção 3.1 reobteremos as equações do capítulo 2 na versão não-linear. O próximo passo será estenderemos, na seção 3.2, o tratamento não-linear para o caso de um fluido em expansão auto-gravitante com viscosidade.

3.1 Equações Básicas

Nosso ponto de partida será obter as versões não-lineares da equação da continuidade (2.31) e da equação de Euler (2.32) em coordenadas comóveis. Começando pela equação da continuidade. Aplicando a relação (2.30) na Eq. (2.1) e, levando em conta a decomposição do campo de velocidades Eq. (2.29), teremos

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + 3H\rho + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.1)$$

que é a equação da continuidade em coordenadas em expansão. Vamos então perturbar a equação acima, em torno da solução de Einstein - de Sitter, utilizando a decomposição dada por (2.4) e a expressão para a densidade de contraste (2.24). Após algumas passagens, a versão não-linear da Eq. (2.31) fica sendo escrita como

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{v} + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot (\vec{v} \delta) = 0. \quad (3.2)$$

Procedendo do mesmo modo como fizemos para chegar na equação acima, vamos então obter a versão não-linear da Eq. de Euler (2.32). Desta maneira, segue que a

Eq. (2.2) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \vec{r} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{\vec{r}} + H^2 \right] + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + H \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \vec{v} + \frac{1}{a\rho} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta p + \\ \frac{4\pi G \rho_0}{3} a \vec{x} + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta \varphi = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde levamos em conta a expressão para a componente de fundo do potencial gravitacional (2.20) e a expressão (2.30) que relaciona a taxa de variação temporal calculada, respectivamente, com respeito a \vec{r} e \vec{x} constantes. Observando que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \ddot{a} - H^2,$$

podemos então reescrever a Eq. (3.3) da seguinte maneira:

$$\vec{r} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{4\pi G \rho_0}{3} \right) + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + H \vec{v} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}) \vec{v} + \frac{1}{a\rho} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta p + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta \varphi = 0.$$

O primeiro termo do membro esquerdo da expressão acima é identicamente zero de acordo com a equação de Friedman (2.21). Então, obtemos a equação de Euler em coordenadas em expansão, que é dada por

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}) \vec{v} + H \vec{v} + \frac{v_s^2}{a(1+\delta)} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta \varphi = 0. \quad (3.4)$$

Para a equação de Poisson em coordenadas em expansão temos:

$$\nabla_{\vec{x}}^2 \delta \varphi - 4\pi a^2 G \rho_0(t) \delta = 0. \quad (3.5)$$

Nosso modelo consiste em fazer uma aproximação adicional de segunda ordem [?] em δ , uma vez que é muito complicado trabalhar com o termo $\vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta / (1 + \delta)$. Nossa aproximação de segunda ordem é escrita da seguinte maneira

$$\frac{v_s^2}{a(1+\delta)} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta \approx \frac{(1-\delta) v_s^2}{a} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta, \quad (3.6)$$

o que irá basicamente modificar a equação de Euler (3.4). A rigor, essa aproximação permitirá estudar a influência não-linear da força oriunda do gradiente de pressão, que é importante em estágios mais avançados de formação de estruturas [3]. Sumarizando, as equações básicas que iremos estudar são:

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{v} + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot (\vec{v} \delta) = 0, \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + H \vec{v} + \frac{v_s^2}{a} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta \varphi + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}) \vec{v} - \frac{v_s^2}{a} \delta \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta = 0, \quad (3.8)$$

$$\nabla_x^2 \delta\varphi - 4\pi G a^2 \rho_0(t) \delta = 0. \quad (3.9)$$

Vamos agora introduzir variáveis adimensionais o que tornará mais apropriado o tratamento numérico das equações (3.7) - (3.9). O campo de velocidades peculiar adimensional $\vec{\mu}$ será definido como

$$\vec{\mu} \equiv \frac{\vec{v}}{v_s}, \quad (3.10)$$

onde v_s é a velocidade do som dada pela Eq. (2.8). A variável temporal adimensional τ é escrita como

$$\tau \equiv v_s k_{0J} t, \quad (3.11)$$

onde k_{0J} é o número de onda de Jeans calculado no instante inicial $t = 0$ e dado por:

$$k_{0J} \equiv \frac{\sqrt{4\pi G \rho_0(0)}}{v_s}. \quad (3.12)$$

Por fim, a coordenada espacial comóvel adimensional $\vec{\xi}$ será definida por:

$$\vec{\xi} \equiv k_{0J} \vec{x}. \quad (3.13)$$

Conseqüentemente, o operador $\vec{\nabla}$, em coordenadas comóveis adimensionais, será escrito como

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} = k_{0J} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}}. \quad (3.14)$$

Assim as equações (3.7), (3.8) e (3.9), na versão adimensional, podem ser resumidas da seguinte maneira

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial \tau} \right)_{\vec{\xi}} + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \cdot \vec{\mu} + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \cdot (\vec{\mu} \delta) = 0, \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial \tau} \right)_{\vec{\xi}} + h \vec{\mu} + \frac{1}{a} \vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \vec{\mu} + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \delta + \frac{1}{a v_s^2} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \delta \varphi - \frac{1}{a} \delta \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \delta = 0, \quad (3.16)$$

$$\nabla_{\vec{\xi}}^2 \delta \varphi - a^2 v_s^2 \frac{\rho_0(\tau)}{\rho_0(0)} \delta = 0, \quad (3.17)$$

onde h é o parâmetro de Hubble adimensional definido como

$$h \equiv \frac{H}{v_s k_{0J}} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau}. \quad (3.18)$$

Faremos a hipótese adicional, de que o campo de velocidades peculiar $\vec{\mu}$ seja irrotacional, conforme descrito na seção 2.3. Desta forma, temos que $\vec{\nabla} \times \vec{\mu} = 0$ e neste caso, $\vec{\mu}$ poderá ser expresso como o gradiente de alguma função escalar, ou seja

$$\vec{\mu} \equiv \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \beta, \quad (3.19)$$

sendo β o potencial adimensional do campo de velocidades $\vec{\mu}$.

Reescrevendo a Eq. (3.15) em termos da Eq. (3.19) teremos

$$\left(\frac{\partial\delta}{\partial\tau}\right)_{\vec{\xi}} + \frac{1}{a}\nabla_{\vec{\xi}}^2\beta + \frac{1}{a}\left(\nabla_{\vec{\xi}}^2\beta\right)\delta + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{\xi}}\beta\cdot\vec{\nabla}_{\vec{\xi}}\delta = 0. \quad (3.20)$$

Vamos agora acoplar as Eqs. (3.16) e (3.17) numa única equação diferencial. Para tal, calculemos a divergência da equação de Euler (3.16) e substituamos a equação de Poisson (3.17). Desta forma escrevemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\nabla_{\vec{\xi}}^2\beta\right)_{\vec{\xi}} + h\nabla_{\vec{\xi}}^2\beta + \frac{1}{a}\nabla_{\vec{\xi}}^2\delta + \frac{a\rho_0(\tau)}{\rho_0(0)}\delta + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{\xi}}\cdot\left(\vec{\mu}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{\xi}}\vec{\mu}\right) - \\ \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{\xi}}\cdot\left(\delta\vec{\nabla}_{\vec{\xi}}\delta\right) = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Neste sentido a dinâmica de pequenas perturbações no regime não-linear será regida pelas equações (3.20) e (3.21).

3.2 Introdução da Viscosidade: equação de Navier-Stokes em coordenadas comóveis

Nesta seção estenderemos o tratamento da seção anterior para o caso de um fluido em expansão auto-gravitante que possua viscosidade. No contexto de modelos hidrodinâmicos para a formação de estruturas, a viscosidade é introduzida no modelo de Adesão [23] artificialmente para imitar o papel de efeitos gravitacionais não-lineares em pequenas escalas [35]. Nossa estratégia, por outro lado, consiste em considerarmos a equação de Navier-Stokes [54] para um fluido auto-gravitante, ou seja:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V}\right] + \vec{\nabla}p - \eta\left[\nabla^2\vec{V} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right)\right] + \rho\vec{\nabla}\varphi = 0, \quad (3.22)$$

onde η é a viscosidade dinâmica que assumiremos constante por simplicidade (aqui nós ignoramos os segundo termo de viscosidade). A equação de Navier-Stokes conserva o momento linear automaticamente mas não possui uma solução analítica num caso geral [35]. Afim de obtermos a equação correspondente para o campo de velocidades peculiar \vec{v} , vamos substituir $\vec{V} = H\vec{r} + \vec{v}$ na Eq. (3.22) e introduzir as coordenadas comóveis com a expansão da solução de fundo. Após algumas passagens diretas, porém trabalhosas, a exemplo do que fizemos para a equação de Euler, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + H\vec{v} + \frac{1}{a}\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}}\right)\vec{v} + \frac{1}{a\rho}\vec{\nabla}_{\vec{x}}p - \frac{\eta}{a^2\rho}\left[\nabla_{\vec{x}}^2\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{\nabla}_{\vec{x}}\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}}\cdot\vec{v}\right)\right] + \\ \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{x}}\delta\varphi = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por uma questão de conveniência, podemos reescrever a equação anterior de uma forma mais compacta da seguinte maneira

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + H v_j + \frac{1}{a} \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}\right) v_j - \frac{1}{a\rho} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \frac{1}{a} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x_j} = 0, \quad (3.24)$$

onde σ_{jk} é o tensor das tensões [54] escrito nas coordenadas em expansão como

$$\sigma_{jk} = -p\delta_{jk} + \frac{\eta}{a} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\delta_{jk} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{v}\right). \quad (3.25)$$

No caso de um fluido perfeito, temos que σ_{jk} se reduz ao tensor das pressões

$$\sigma_{jk} = -p\delta_{jk}.$$

Seguindo o procedimento da seção anterior, vamos considerar a seguinte aproximação adicional de segunda ordem

$$\frac{1}{a\rho} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} \approx \frac{1}{a\rho_0(t)} (1 - \delta) \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k},$$

de modo que a Eq. (3.22) fica sendo reescrita como

$$\left(\frac{\partial v_j}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + H v_j + \frac{1}{a} \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}\right) v_j - \frac{1}{a\rho_0} (1 - \delta) \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \frac{1}{a} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x_j} = 0. \quad (3.26)$$

A forma final adimensional da equação de Navier-Stokes acima, é obtida ao assumirmos a aproximação adicional de segunda ordem

$$\frac{1}{a\rho} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} \approx \frac{1}{a\rho_0(t)} (1 - \delta) \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k},$$

mais as Eqs. (3.10) e (3.11). Desta forma, escrevemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \vec{\mu}}{\partial \tau}\right)_{\vec{\xi}} + h \vec{\mu} + \frac{1}{a} (1 - \delta) \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \delta + \frac{1}{a} \left(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\xi}}\right) \vec{\mu} + \frac{1}{av_s^2} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \delta \varphi - \\ \frac{\nu \rho_0(0)}{a^2 \rho_0} (1 - \delta) \left[\nabla_{\vec{\xi}}^2 \vec{\mu} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \left(\vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \cdot \vec{\mu}\right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Procedendo do mesmo modo como fizemos com a equação de Euler, levando em conta as Eqs. (3.17) e (3.19), teremos para a divergência da equação de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \nabla_{\vec{\xi}}^2 \beta\right)_{\vec{\xi}} + h \nabla_{\vec{\xi}}^2 \beta + \frac{1}{a} \nabla_{\vec{\xi}}^2 \delta + \frac{a\rho_0(\tau)}{\rho_0(0)} \delta + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \cdot \left(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \vec{\mu}\right) - \frac{1}{a} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \cdot \left(\delta \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \delta\right) - \\ \frac{\nu \rho_0(0)}{a^2 \rho_0} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \cdot \left\{ (1 - \delta) \left[\nabla_{\vec{\xi}}^2 \vec{\mu} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \left(\vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \cdot \vec{\mu}\right) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde h é dado pela Eq. (3.18) e ν é a viscosidade dinâmica adimensional definida como

$$\nu \equiv \frac{\eta k_{0J}}{v_s \rho_0(0)}.$$

Nosso sistema de equações básicas, no caso não-linear viscoso, pode ser resumido na equação da continuidade (3.20) e de Navier-Stokes (3.28).

Um dos maiores obstáculos ao entendimento da evolução de perturbações no estágio não-linear, quando tipicamente a amplitude da densidade de contrastes torna-se maior que a densidade do meio no Universo: $\delta\rho/\rho_0 \gtrsim 1$, é a falta de resultados analíticos nesta fase. Uma das maneiras mais diretas de tratar o problema de evolução não-linear é fazer uma simulação tridimensional gravitacional de N-corpos [3, 39, 41, 49]. A simulação de N-corpos recebeu grande atenção devido a técnicas eficientes de integração das equações de movimento. Usualmente, em simulações deste tipo, o meio consiste em partículas sem colisão, em concordância com a popular hipótese de que a maior parte da matéria do Universo está sob a forma de partículas que interagem fracamente, ou seja, matéria escura [36]. A trajetória de cada partícula é calculada no campo gravitacional gerado por todas as outras partículas que formam o meio. As condições de contorno são assumidas como sendo periódicas. Existem também, alguns modelos populares hidrodinâmicos e técnicas de simulação numérica [3] utilizados quando se leva em conta os efeitos oriundos das forças de pressão do fluido. Isso significa resolver a equação de Euler (3.4). Porém, o campo da Cosmologia hidrodinâmica está num estágio inicial de desenvolvimento e podemos dizer que não há uma solução analítica. A única esperança realista de progresso num futuro próximo reside nos métodos numéricos. Uma das técnicas mais populares, conhecida como *Smoothed-Particle Hydrodynamics* (SPH) [3], tipicamente descreve um fluido como um conjunto de partículas da mesma maneira como na simulação de N-corpos. Outras aproximações analíticas e métodos semi-analíticos são discutidos por Shani e Coles num excelente artigo de revisão [29].

Entretanto, uma engenhosa aproximação analítica formulada por Zeldovich em 1970 [26] dá conta de alguns aspectos do processo de formação de estruturas. Existem vários esquemas de aproximações para analisar diferentes aspectos da aglomeração não-linear, incluindo extensões da aproximação de Zeldovich [29]. Entre elas, estão as aproximações locais, que foram introduzidas mais recentemente, a aproximação de Zeldovich modificada [22], a aproximação do tensor de deformação [37], aproximação completa de Zeldovich [38] e a aproximação do campo de maré. O modelo de Adesão [23, 25, 28] é uma outra aproximação, onde um termo de viscosidade é introduzido artificialmente nas equações que governam a aproximação de Zeldovich afim de que a matéria se mantenha unida. Os detalhes da fase não-linear de formação de estruturas são extremamente importantes já que é aí onde está a ligação entre as condições iniciais e o Universo que observamos em escalas intermediárias.

3.2.1 Efeitos da viscosidade na fase linear

Nesta seção investigaremos o que ocorre quando levamos em conta a presença da viscosidade na teoria linear. A idéia é obter uma expressão idêntica à Eq. (2.37), exceto pela adição de um termo de viscosidade e analisar a evolução da densidade de contraste $\delta_{\vec{k}}$.

Vamos então linearizar a Eq. (3.21). Desta forma, escrevemos, após reter os termos de primeira ordem

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + H\vec{v} - \frac{\eta}{a^2\rho_0} \left[\nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{v} \right) \right] + \frac{v_s^2}{a} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \delta \varphi = 0. \quad (3.29)$$

Combinando a expressão acima com as Eqs. (2.31) e (2.35), obtemos, após algumas passagens simples

$$\left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}\right)_{\vec{x}} + 2H \left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_{\vec{x}} - \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho_0 a^2} \nabla_x^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_{\vec{x}} - \frac{v_s^2}{a^2} \nabla_x^2 \delta - 4\pi G \rho_0 \delta = 0. \quad (3.30)$$

Introduzindo a decomposição para $\delta_{\vec{k}}$, o parâmetro de Hubble - Eqs. (2.38) e (2.43) respectivamente - e a variável temporal adimensional $T = \sqrt{6\pi G \rho_0(0)} t$, na expressão acima, obtemos:

$$\frac{d^2 \delta_{\vec{k}}}{dT^2} + \frac{4}{3} \left[\frac{1}{(1+T)} + \frac{\eta k^2}{\rho_0(0) a_0^2} (1+T)^{2/3} \right] \frac{d\delta_{\vec{k}}}{dT} + \frac{v_s^2 k^2}{6\pi G \rho_0(0) a_0^2} (1+T)^{-4/3} \delta_{\vec{k}} - \frac{2}{3(1+T)^2} \delta_{\vec{k}} = 0. \quad (3.31)$$

Uma ilustração da solução da equação diferencial acima, para os casos $k \gg k_J$ e $k \ll k_J$ é mostrada nas Figs 3.1 e 3.2 da próxima página, onde fizemos $\eta = 10^{-3}$ e escolhemos por simplicidade $v_s^2 k^2 / 6\pi G \rho_0(0) a_0^2 = 1$ e $k^2 / \rho_0(0) a_0^2 = 1$.

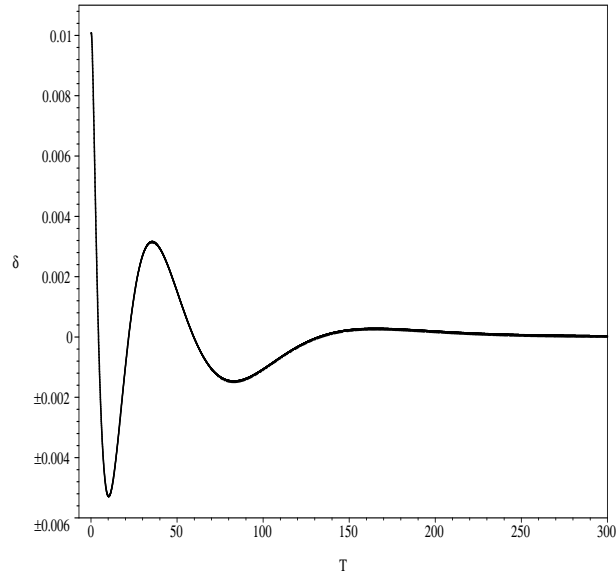


Figura 3.1: Modo estável $\lambda < \lambda_J$. Inicialmente o termo de pressão faz com que $\delta_{\vec{k}}$ oscile. Porém, devido à presença da viscosidade, após algum tempo, há um estabilização.

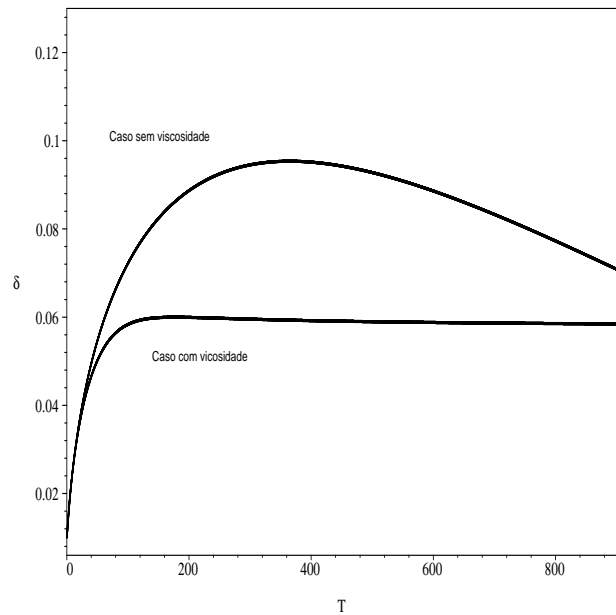


Figura 3.2: Para o modo instável, no caso viscoso, inicialmente o termo de gravitação faz com que $\delta_{\vec{k}}$ cresça como uma potência de T , porém devido à presença da viscosidade após algum tempo, há um estabilização do crescimento. No caso sem viscosidade vemos que inicialmente $\delta_{\vec{k}}$ se comporta como uma potência de T e a expansão do Universo faz com que acabe oscilando como uma onda sonora com amplitudes decrescentes.

Capítulo 4

Implementando o Método de Galerkin

Neste capítulo apresentaremos o método de Galerkin, que consiste numa técnica matemática para a resolução de equações diferenciais. Na seção 4.2 aplicaremos o método ao problema de formação de estruturas em Cosmologia a partir de uma abordagem hidrodinâmica. Após a aplicação do método obteremos o sistema dinâmico equivalente que poderá então ser integrado.

4.1 Breve descrição do método de Galerkin

O método de Galerkin [42] é uma técnica matemática poderosa que tem sido usada para resolver problemas de escoamento de fluidos, acústica, transferência de calor, colapso gravitacional [57], etc. Problemas governados por equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais lineares e não-lineares e equações íntegro-diferenciais têm sido investigados via método de Galerkin[58]. Essencialmente, qualquer problema que seja governado por equações diferenciais pode ser tratado pelo método de Galerkin.

A origem do método é geralmente associada a um artigo [59] publicado pelo próprio Galerkin (1915), um engenheiro russo, nascido em 1871. Uma das qualidades mais notáveis do método, é fornecer um conhecimento satisfatório dos aspectos físicos básicos do sistema e das estruturas básicas da dinâmica em consideração com um esforço computacional mínimo e prover soluções de significativa acurácia.

Basicamente o método consiste em transformar uma equação diferencial parcial, ou um sistema de equações diferenciais parciais, num conjunto finito de equações diferenciais ordinárias, ou num sistema dinâmico finito. Resumidamente, podemos ilustrar a aplicação do método, por exemplo, com um problema em uma dimensão,

governado pela equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right), \quad (4.1)$$

onde L é um operador geralmente não-linear, que envolve a função $u(x, t)$ e suas derivadas.

As condições de contorno são esquematicamente representadas por:

$$S(u) = 0$$

em $\partial\mathcal{D}$, a fronteira do domínio espacial $\mathcal{D}(x)$. O método de Galerkin assume que $u(x, t)$ pode ser representada por uma solução aproximada (decomposição de Galerkin)

$$u_a(x, t) = \sum_{j=0}^N a_j(t) \psi_j(x), \quad (4.2)$$

e N é a ordem de truncagem. À medida que o número de termos aumenta, ou seja, se $N \rightarrow \infty$, observa-se geralmente a convergência dos resultados obtidos e portanto, nos aproximamos da solução real do problema. Na expressão acima, $a_j(t)$ são os diversos coeficientes modais a serem determinados e $\psi_j(x)$, $j = 0, \dots, N$, são funções analíticas conhecidas (funções de base). No método de Galerkin, as funções de base $\psi_j(x)$ devem satisfazer as condições de contorno, ou seja, $S(\psi_j(x)) = 0$. A rigor, as condições de contorno são o critério para a escolha das funções de base, além das propriedades de convergência das mesmas. Nesse sentido, Boyd [43] estabeleceu algumas regras simples e úteis que podemos sumarizar como sendo: use sempre as funções de Chebyshev a menos que as condições de contorno sejam periódicas. Neste caso bases de Fourier (senos e co-senos) torna-se a escolha certa.

Em geral, o conjunto de funções de base $\{\psi_j(x)\}$, constitui-se em uma base ortonormal [44] segundo a seguinte operação de produto interno

$$\langle \psi_k, \psi_j \rangle \equiv \int_{\mathcal{D}} \psi_k(x) \psi_j^*(x) w(x) dx = \delta_{kj},$$

onde ψ_j^* é o complexo conjugado de ψ_j e $w(x)$ é a função peso não-negativa cuja expressão dependerá da escolha das funções de base.

Substituindo a decomposição (4.2) na equação diferencial (4.1), obtemos uma equação residual:

$$\text{Res}(a_0, a_1 \dots a_N, x, t) = \sum_{j=1}^N \dot{a}_j(t) \psi_j(x) - L \left(u_a, \frac{\partial u_a}{\partial x}, \dots \right). \quad (4.3)$$

O método de Galerkin estabelece que a projeção da equação residual com respeito

a todas as $N + 1$ funções de base $\psi_j(x)$ deve ser nula. Em outras palavras

$$\begin{aligned} \langle \text{Res} , \psi_k(x) \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^N \dot{a}_j(t) \psi_j(x) , \psi_k(x) \right\rangle - \\ &\left\langle L \left(u_a , \frac{\partial u_a}{\partial x} , \dots \right) , \psi_k(x) \right\rangle \equiv 0 , k = 0, 1, \dots , N. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Tais operações eliminam a dependência espacial e dão origem a um conjunto finito de equações diferenciais para os coeficientes modais $a_j(t)$, dadas por:

$$\dot{a}_j(t) = \left\langle L \left(u_a , \frac{\partial u_a}{\partial x} , \dots \right) , \psi_j(x) \right\rangle , j = 0, 1, \dots , N. \quad (4.5)$$

Vale mencionar mais uma vez que mesmo para uma truncagem baixa o método de Galerkin demonstra ser preciso.

4.2 Aplicando o Método

Conforme mencionamos na seção anterior, temos de conhecer as condições de contorno para o problema de formação de estruturas governado pelas equações (3.15), (3.16), (3.17) e (3.28). Consideremos um cubo de lado $L \gg l_s$, sendo l_s o máximo comprimento associado a um dado modo perturbativo. Podemos, então, imaginar o volume cúbico como sendo uma boa amostra do Universo. Uma modelagem fiel será imaginar o Universo dividido em cubos de volume $V = L^3$ com condições periódicas nas fronteiras de cada cubo. Tendo em vista esta informação, vamos considerar a amostra do Universo como sendo uma caixa plana ao invés de um cubo Fig. 4.1, com condições de contorno periódicas nos lados da caixa.

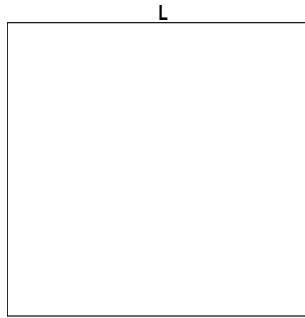


Figura 4.1: Domínio espacial: caixa plana de lado L com condições de contorno periódicas para representar um Universo infinito.

De imediato, podemos selecionar as funções de base $\psi_{\vec{k}}(\vec{x})$ como sendo

$$\psi_{\vec{k}}(\xi_j) = \exp \left(\frac{2\pi i}{l} \vec{k} \cdot \vec{\xi} \right) , \quad (4.6)$$

e que constitui uma base de ondas planas. Utilizaremos coordenadas comóveis e as variáveis adimensionais \vec{k} e l , onde \vec{k} é o vetor de onda adimensional e l o comprimento adimensional da caixa plana que se relaciona com L via

$$l = L k_{0J}. \quad (4.7)$$

Nesse sentido, a densidade de contraste, o campo de velocidades peculiar adimensional e o potencial newtoniano, são expressos respectivamente pelas seguintes decomposições:

$$\delta(\xi_j, \tau) = \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}}(\tau) \psi_{\vec{k}}(\xi_j), \quad (4.8)$$

$$\vec{\mu}(\xi_j, \tau) = \sum_{\vec{k}} \vec{\mu}_{\vec{k}}(\tau) \psi_{\vec{k}}(\xi_j), \quad (4.9)$$

$$\delta\varphi(\xi_j, \tau) = \sum_{\vec{k}} \delta\varphi_{\vec{k}}(\tau) \psi_{\vec{k}}(\xi_j). \quad (4.10)$$

Como estamos assumindo que $\vec{\mu}$ é um campo irrotacional, teremos de acordo com a Eq. (3.19), que o potencial adimensional do campo de velocidades, será:

$$\beta(\xi_j, \tau) = \sum_{\vec{k}} b_{\vec{k}}(\tau) \psi_{\vec{k}}(\xi_j). \quad (4.11)$$

As decomposições de $\delta(\xi_j, \tau)$, $\vec{\mu}(\xi_j, \tau)$ e $\delta\varphi(\xi_j, \tau)$, Eqs. (4.8) - (4.10) respectivamente, serão consideradas as peças fundamentais da nossa estratégia para aplicar o método de Galerkin ao problema de formação de estruturas, governado pelas Eqs. (3.15), (3.16) e (3.17), para o caso sem viscosidade.

As funções de base $\psi_{\vec{k}}$ e $\psi_{\vec{j}}$, satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade

$$\langle \psi_{\vec{k}}, \psi_{\vec{j}} \rangle \equiv \int_{\mathcal{D}} \psi_{\vec{k}} \psi_{\vec{j}}^* d^D \vec{\xi} = l^D \delta_{\vec{k}\vec{j}}, \quad (4.12)$$

onde D é a dimensão do domínio espacial \mathcal{D} . Na expressão acima, $\psi_{\vec{j}}^*$ indica o complexo conjugado de $\psi_{\vec{j}}$ e $\delta_{\vec{k}\vec{j}}$ é tal que

$$\delta_{\vec{k}\vec{j}} = \begin{cases} 0, & \text{se } \vec{k} \neq \vec{j} \\ 1, & \text{se } \vec{k} = \vec{j} \end{cases}.$$

Notemos que nem todos os coeficientes modais $c_{\vec{k}}$, $b_{\vec{k}}$ e $\delta\varphi_{\vec{k}}$ são independentes. Isto ocorre devido à consequência do requerimento de que $\delta(\xi_j, \tau)$, $\beta(\xi_j, \tau)$ e $\delta\varphi(\xi_j, \tau)$

sejam quantidades reais pois as funções de base $\psi_{\vec{k}}(\xi_j)$ utilizadas são imaginárias. Isso implica em $\delta = \delta^*$, $\beta = \beta^*$ e $\delta\varphi = \delta\varphi^*$. Assim teremos para $\delta(\xi_j, \tau)$

$$\sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} \exp\left(\frac{2\pi i}{l} \vec{k} \cdot \vec{\xi}\right) = \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}}^* \exp\left(-\frac{2\pi i}{l} \vec{k} \cdot \vec{\xi}\right),$$

e podemos escrever

$$\sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} c_{-\vec{k}}^* \psi_{\vec{k}}.$$

Portanto, para que δ seja real, é necessário que

$$c_{\vec{k}} = c_{-\vec{k}}^*. \quad (4.13)$$

Repetindo o procedimento para as funções $\beta(\xi_j, \tau)$ e $\delta\varphi(\xi_j, \tau)$ obtemos, de forma análoga, respectivamente

$$b_{\vec{k}} = b_{-\vec{k}}^*, \quad \delta\varphi_{\vec{k}} = \delta\varphi_{-\vec{k}}^*. \quad (4.14)$$

Podemos ainda decompor $c_{\vec{k}}$, $b_{\vec{k}}$ e $\delta\varphi_{\vec{k}}$ nas suas partes real e imaginária da seguinte maneira

$$c_{\vec{k}} = c_{\vec{k}}^R + ic_{\vec{k}}^I, \quad b_{\vec{k}} = b_{\vec{k}}^R + ib_{\vec{k}}^I \quad (4.15)$$

e

$$\delta\varphi_{\vec{k}} = \delta\varphi_{\vec{k}}^R + i\delta\varphi_{\vec{k}}^I. \quad (4.16)$$

Daí, utilizando as relações de simetria (4.13) e (4.14), imposta aos coeficientes modais, segue que

$$\begin{aligned} c_{\vec{k}}^R &= c_{-\vec{k}}^R, \quad c_{\vec{k}}^I = -c_{-\vec{k}}^I, \quad b_{\vec{k}}^R = b_{-\vec{k}}^R, \quad b_{\vec{k}}^I = -b_{-\vec{k}}^I \\ &\text{e } \delta\varphi_{\vec{k}}^R = \delta\varphi_{-\vec{k}}^R, \quad \delta\varphi_{\vec{k}}^I = -\delta\varphi_{-\vec{k}}^I. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Como conseqüência $c_0^I = 0$, $b_0^I = 0$ e $\delta\varphi_0^I = 0$. O mesmo vale para $c_0^R = 0$, $b_0^R = 0$ e $\delta\varphi_0^R = 0$, pois se referem à componente inhomogênea da densidade de contraste δ , do campo de velocidades peculiar adimensional $\vec{\mu}$ e do potencial gravitacional $\delta\varphi$, respectivamente.

Nosso objetivo agora é projetar as equações da continuidade (3.20) e Euler (3.21) em cada uma das bases $\psi_{\vec{n}}(\xi_j)$ o que eliminará a dependência espacial e dará origem a um conjunto equações dinâmicas para os coeficientes $b_{\vec{n}}$ e $c_{\vec{n}}$ no caso sem viscosidade. Quanto à equação de Poisson (3.17), ela já foi utilizada para obter a equação (3.21). Utilizando a decomposição dada por (4.10) e projetando a equação de Poisson em cada uma das bases $\psi_{\vec{n}}$, obtemos a relação entre o campo de densidade de matéria e o potencial gravitacional, ou seja:

$$\delta\varphi_{\vec{n}} = -\frac{l^2 \rho_0(\tau) a^2 v_s^2}{4\pi^2 n^2 \rho_0(0)} c_{\vec{n}}, \quad (4.18)$$

onde $\delta\varphi_{\vec{n}}$ vem da decomposição de Galerkin do potencial Newtoniano. A projeção da equação de Navier-Stokes (3.28), em cada uma das bases $\psi_{\vec{n}}(\xi_j)$, dará origem às equações de evolução dos coeficientes modais $b_{\vec{n}}$ no caso viscoso. Começaremos pela equação da continuidade (3.20). Antes, porém, destacamos as quantidades abaixo, que serão necessárias para efetuar a projeção da mesma:

$$\vec{\nabla}_{\vec{\xi}}\delta = \frac{2\pi i}{l} \sum_{\vec{k}} \vec{k} c_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}, \quad \vec{\nabla}_{\vec{\xi}}\beta = \frac{2\pi i}{l} \sum_{\vec{k}} \vec{k} b_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}, \quad (4.19)$$

e

$$\nabla_{\vec{\xi}}^2\beta = -\frac{4\pi^2}{l^2} \sum_{\vec{k}} k^2 b_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}. \quad (4.20)$$

Substituindo as relações dadas acima na equação da continuidade e agrupando os termos lineares e não-lineares nos coeficientes modais separadamente, teremos:

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{dc_{\vec{k}}}{d\tau} - \frac{4\pi^2}{al^2} k^2 b_{\vec{k}} \right) \psi_{\vec{k}} - \frac{4\pi^2}{al^2} \sum_{\vec{k}, \vec{j}} k^2 b_{\vec{k}} c_{\vec{j}} \psi_{\vec{k}} \psi_{\vec{j}} - \\ \frac{4\pi^2}{al^2} \sum_{\vec{k}, \vec{j}} \vec{k} \cdot \vec{j} b_{\vec{k}} c_{\vec{j}} \psi_{\vec{k}} \psi_{\vec{j}} = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Chamamos a atenção que os vetores \vec{k} e \vec{j} serão designados respectivamente por:

$$\vec{k} = (k_x, k_y), \quad \vec{j} = (j_x, j_y),$$

para um domínio bidimensional. Desse modo, a soma $\sum_{\vec{k}}$ será:

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \sum_{k_x=-N}^N \sum_{k_y=-N}^N,$$

o mesmo valendo para a soma em \vec{j} . As funções de base $\psi_{\vec{k}}(\xi_j)$, serão dadas por:

$$\psi_{k_x k_y}(x, y) = \cos \left[\frac{2\pi}{l} (k_x x + k_y y) \right] + i \sin \left[\frac{2\pi}{l} (k_x x + k_y y) \right],$$

onde as coordenadas ξ_x e ξ_y do vetor $\vec{\xi} = (\xi_x, \xi_y)$ serão, por conveniência, substituídas por $\vec{\xi} = (x, y)$. Aplicando a definição da operação de projeção, dada pela Eq. (4.12), em nosso domínio bidimensional, segue que:

$$\left\langle \psi_{\vec{k}} \psi_{\vec{j}}, \psi_{\vec{n}} \right\rangle = \int_0^l \int_0^l \psi_{\vec{k}} \psi_{\vec{j}} \psi_{\vec{n}}^* dx dy = l^2 \delta_{\vec{k}+\vec{j}, \vec{n}}. \quad (4.22)$$

A projeção da equação (4.21) em cada base $\psi_{\vec{n}}(\xi_j)$, utilizando a expressão (4.22), fornece os seguintes termos:

$$\left\langle \sum_{\vec{k}} \left(\frac{dc_{\vec{k}}}{d\tau} - \frac{4\pi^2}{al^2} k^2 b_{\vec{k}} \right) \psi_{\vec{k}}, \psi_{\vec{n}} \right\rangle = l^2 \frac{dc_{\vec{n}}}{d\tau} - \frac{4\pi^2}{a} n^2 b_{\vec{n}},$$

$$\left\langle \frac{4\pi^2}{al^2} \sum_{\vec{k}, \vec{j}} k^2 b_{\vec{k}} c_{\vec{j}} \psi_{\vec{k}} \psi_{\vec{j}}, \psi_{\vec{n}} \right\rangle = \frac{4\pi^2}{a} \sum_{\vec{k}} k^2 b_{\vec{k}} c_{\vec{n}-\vec{k}},$$

e

$$\left\langle \frac{4\pi^2}{al^2} \sum_{\vec{k}, \vec{j}} \vec{k} \cdot \vec{j} b_{\vec{k}} c_{\vec{j}} \psi_{\vec{k}} \psi_{\vec{j}}, \psi_{\vec{n}} \right\rangle = \frac{4\pi^2}{a} \sum_{\vec{k}} \vec{k} \cdot (\vec{n} - \vec{k}) b_{\vec{k}} c_{\vec{n}-\vec{k}}.$$

Sendo assim, combinando os resultados acima, obtemos a equação da continuidade projetada em cada base $\psi_{\vec{n}}$:

$$\frac{dc_{\vec{n}}}{d\tau} - \frac{4\pi^2}{al^2} n^2 b_{\vec{n}} - \frac{4\pi^2}{al^2} \sum_{\vec{k}} k^2 b_{\vec{k}} c_{\vec{n}-\vec{k}} - \frac{4\pi^2}{al^2} \sum_{\vec{k}} \vec{k} \cdot (\vec{n} - \vec{k}) b_{\vec{k}} c_{\vec{n}-\vec{k}} = 0. \quad (4.23)$$

Procedendo de modo análogo, o como fizemos para a equação da continuidade, a equação de Euler (3.21) projetada em cada base $\psi_{\vec{n}}$ será escrita como

$$\begin{aligned} \frac{db_{\vec{n}}}{d\tau} + \frac{c_{\vec{n}}}{a} + hb_{\vec{n}} - \frac{al^2 \rho_0(\tau)}{4\pi^2 n^2 \rho_0(0)} c_{\vec{n}} - \frac{1}{an^2} \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} c_{\vec{n}-\vec{k}} \vec{n} \cdot (\vec{n} - \vec{k}) - \\ \frac{4\pi^2}{an^2 l^2} \sum_{\vec{k}} b_{\vec{k}} b_{\vec{n}-\vec{k}} \vec{k} \cdot (\vec{n} - \vec{k}) \vec{n} \cdot (\vec{n} - \vec{k}) = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde $n = |\vec{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}$ e $k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

Enfim, por conveniência, definiremos a coordenada temporal adimensional τ

$$d\tau \equiv ad\Gamma, \quad (4.25)$$

onde Γ é o tempo conforme. Tal mudança de variável mostra-se útil uma vez que nos permite fazer uma economia no tempo de integração das equações para os coeficientes $b_{\vec{n}}$ e $c_{\vec{k}}$.

Podemos facilmente obter $\rho_0(\Gamma)$, combinando as Eqs. (2.18) e (2.23) e aplicando sucessivamente as relações (3.11) e (4.25). Procedendo como descrito, obtemos a expressão para $\rho_0(\Gamma)$, ou seja

$$\rho_0(\Gamma) = \frac{\rho_0(0)}{\left(1 + \frac{a_0}{\sqrt{6}}\Gamma\right)^6}. \quad (4.26)$$

Introduzindo as mudanças de variáveis propostas acima nas Eqs. (4.23) e (4.24), obtemos

$$\frac{dc_{\vec{n}}}{d\Gamma} = \frac{4\pi^2}{l^2} n^2 b_{\vec{n}} + \frac{4\pi^2}{l^2} \sum_{\vec{k}} b_{\vec{k}} c_{\vec{n}-\vec{k}} \left(\vec{k} \cdot \vec{n} \right) \quad (4.27)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{db_{\vec{n}}}{d\Gamma} = & -c_{\vec{n}} - \mathcal{H}b_{\vec{n}} + \frac{a^2 l^2}{4\pi^2 n^2} \left(1 + \frac{a_0}{\sqrt{6}} \Gamma \right)^{-6} c_{\vec{n}} + \frac{1}{n^2} \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} c_{\vec{n}-\vec{k}} \vec{n} \cdot \left(\vec{n} - \vec{k} \right) + \\ & \frac{4\pi^2}{n^2 l^2} \sum_{\vec{k}} b_{\vec{k}} b_{\vec{n}-\vec{k}} \vec{k} \cdot \left(\vec{n} - \vec{k} \right) \vec{n} \cdot \left(\vec{n} - \vec{k} \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde \mathcal{H} é definido como

$$\mathcal{H} \equiv ah = \frac{a'}{a}. \quad (4.29)$$

Na expressão acima, ' significa derivada com relação ao tempo conforme Γ , e o número de equações para os coeficientes $b_{\vec{n}}$ e $c_{\vec{n}}$ é definido pela ordem de truncagem N . O número de coeficientes modais independentes $b_{\vec{n}}$ e $c_{\vec{n}}$ pode ser obtido pela relação: $(2N + 1)^2 - 1$. Por exemplo, para uma truncagem baixa, digamos $N = 2$, obtemos um total de 48 equações diferenciais para os coeficientes modais independentes. Sendo 24 para $b_{\vec{n}}$ e mais 24 para $c_{\vec{n}}$.

Vamos proceder de forma semelhante como fizemos para a equação de Euler para projetar ainda a equação de Navier-Stokes (3.28). Sendo assim, obtemos no caso viscoso

$$\begin{aligned} \frac{db_{\vec{n}}}{d\Gamma} = & -c_{\vec{n}} - \mathcal{H}b_{\vec{n}} + \frac{a^2 l^2}{4\pi^2 n^2} \left(1 + \frac{a_0}{\sqrt{6}} \Gamma \right)^{-6} c_{\vec{n}} + \frac{1}{n^2} \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} c_{\vec{n}-\vec{k}} \vec{n} \cdot \left(\vec{n} - \vec{k} \right) + \\ & \frac{4\pi^2}{n^2 l^2} \sum_{\vec{k}} b_{\vec{k}} b_{\vec{n}-\vec{k}} \vec{k} \cdot \left(\vec{n} - \vec{k} \right) \vec{n} \cdot \left(\vec{n} - \vec{k} \right) + \\ & \frac{\nu \rho_0(0)}{a^2 \rho_0(\Gamma)} \left\langle \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \cdot \left\{ (1 - \delta) \left[\nabla_{\vec{\xi}}^2 \vec{\mu} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \left(\vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \cdot \vec{\mu} \right) \right] \right\}, \psi_{\vec{n}} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde foi omitida a apresentação completa do último termo projetado em favor de uma notação mais compacta. Sua projeção é dada por

$$\begin{aligned} & \frac{\nu \rho_0(0)}{a^2 \rho_0(\Gamma)} \left\langle \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \cdot \left\{ (1 - \delta) \left[\nabla_{\vec{\xi}}^2 \vec{\mu} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \left(\vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \cdot \vec{\mu} \right) \right] \right\}, \psi_{\vec{n}} \right\rangle = \\ & - \frac{16\pi^2 n^2 \rho_0(0) \nu}{3a\rho_0(\Gamma) l^2} b_{\vec{n}} + \frac{16\pi^2 \rho_0(0) \nu}{3a\rho_0(\Gamma) l^2 n^2} \sum_{\vec{k}} b_{\vec{n}-\vec{k}} c_{\vec{k}} \vec{n} \cdot \left(\vec{n} - \vec{k} \right) \left(\vec{n} - \vec{k} \right) \cdot \left(\vec{n} - \vec{k} \right). \end{aligned}$$

Observemos que, se fizermos $\nu = 0$ na Eq. (4.30), obtemos a equação de Euler projetada (4.28).

Uma vez conhecidos os coeficientes modais $c_{\vec{n}}$ e $b_{\vec{n}}$, seja analítica ou numericamente, o comportamento da densidade de contraste e do campo de velocidades fica completamente determinado. O próximo passo será escolher a ordem de truncagem N e introduzir as simetrias para os coeficientes $b_{\vec{n}}$ e $c_{\vec{n}}$. Então, escolhendo-se condições iniciais aleatórias muito pequenas, ou seja, da ordem de 10^{-4} a 10^{-3} , podemos realizar a integração do sistema dinâmico resultante. Por exemplo, para uma truncagem $N = 2$, temos que gerar 48 condições iniciais aleatórias muito pequenas, ou seja, 12 para cada coeficiente modal $b_{k_x k_y}^R$, $b_{k_x k_y}^I$, $c_{k_x k_y}^R$ e $c_{k_x k_y}^I$.

Os resultados de interesse no estudo de formação de estruturas serão fornecidos pela integração do sistema dinâmico Eqs. (4.27), (4.28) e (4.30) e os mostraremos no próximo capítulo.

Capítulo 5

Resultados numéricos

Neste capítulo apresentaremos os resultados da integração do sistema dinâmico que governa a evolução dos coeficientes modais $b_{\vec{k}}$ e $c_{\vec{k}}$ associados à densidade de contraste e ao campo de velocidades, respectivamente. Dividimos o capítulo em três seções. A primeira, diz respeito às condições iniciais para as inhomogeneidades de matéria, do campo de velocidades e onde tratamos de seu caráter aleatório. Na seção seguinte discutiremos como a teoria de Jeans é estendida, ou seja, apresentaremos os resultados numéricos do colapso da componente bariônica de matéria que evidenciam a influência dos termos não-lineares na dinâmica dos coeficientes modais. Ainda nessa seção, iremos mostrar quais as conseqüências da introdução da viscosidade mesmo via um coeficiente ν muito pequeno ($\nu \ll 1$). Por fim, na última seção, focaremos as estruturas formadas e em algumas evidências de virialização, apesar do modelo utilizado ser bem simplificado.

5.1 Condições iniciais

Um dos métodos mais comuns para trabalhar com a complexa dinâmica nos estágios não-lineares é utilizar a simulação de N-corpos gerando as condições iniciais a partir de um processo aleatório Gaussiano [63]. Iniciaremos com a escolha das condições iniciais para os coeficientes modais $b_{\vec{k}}$ e $c_{\vec{k}}$ que irá satisfazer dois requerimentos básicos:

- Os módulos dos coeficientes $|b_{\vec{k}}|$ e $|c_{\vec{k}}|$ devem ser muito pequenos, ou seja, estaremos escolhendo as amplitudes entre 10^{-4} - 10^{-3} , de modo a caracterizar pequenas flutuações na densidade de massa e no campo de velocidades peculiar.
- Serão escolhidas aleatoriamente para representar flutuações genéricas nos campos de matéria e de velocidade peculiar.

Nas Figs. 5.1, mostramos a distribuição inicial de $1 + \delta(x, y, 0)$ para as truncagens $N = 3$ e $N = 5$.

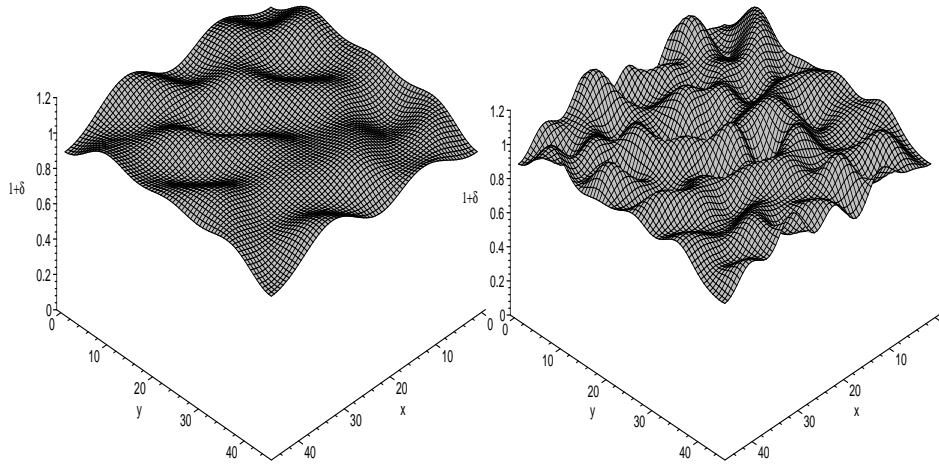


Figura 5.1: Distribuição inicial da densidade de contraste $1 + \delta(x, y, 0)$ para os casos $N = 3$ e $N = 5$. Cada coeficiente modal $|c_k| \sim 10^{-4} - 10^{-3}$.

Em todos os casos apresentados acima, as condições iniciais para os coeficientes modais em comum, para diferentes ordens de truncagem, são as mesmas. Uma outra maneira de se visualizar as distribuições iniciais na densidade de massa e no campo de velocidades é mostrada nas Figs. 5.2, através das curvas de nível de $1 + \delta(x, y, 0)$ juntamente com os vetores $\vec{\mu}(x, y, 0)$. Fica claro que ao aumentarmos a truncagem, um número maior de modos perturbativos é incluído e conseqüentemente, as curvas de nível apresentam mais detalhes.

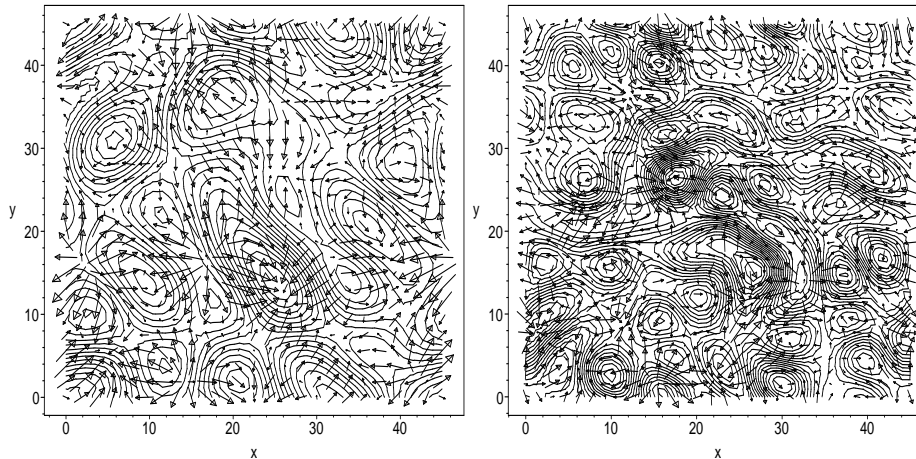


Figura 5.2: Distribuição inicial das curvas de nível de $1 + \delta(x, y, 0)$ juntamente com os vetores $\vec{\mu}(x, y, 0)$, para os casos $N = 3$ e $N = 5$. É importante salientar que o comprimento de um dado vetor velocidade está associado com seu módulo.

A segunda condição, juntamente com o fato de que

$$\delta(x, y, 0) = \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}}(0) \psi_{\vec{k}}(x, y), \quad (5.1)$$

garante que temos um campo aleatório Gaussiano [3]. Como as flutuações iniciais são aleatórias, torna-se necessário introduzir algumas propriedades estatísticas que podem ser utilizadas para descrever as flutuações de densidade. Uma delas, a variância $\langle \delta^2 \rangle$ do campo δ , é definida por

$$\langle \delta^2 \rangle \equiv \sum_{\vec{k}} |c_{\vec{k}}|^2, \quad (5.2)$$

onde $\langle \dots \rangle$ significa integração no domínio espacial. Se assumirmos que o campo de densidade de contraste é estatisticamente homogêneo e isotrópico, ou seja, que não há dependência na direção de \vec{k} , mas somente em $k = |\vec{k}|$, obtemos:

$$\langle \delta^2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \mathcal{P}(k) k^2 dk, \quad (5.3)$$

onde por simplicidade fizemos

$$\mathcal{P}(k) = |c_{\vec{k}}|^2. \quad (5.4)$$

A quantidade $\mathcal{P}(k)$ é chamada de espectro de potência, que nos permite descrever as magnitudes de δ_k em termos do número de onda adimensional k . Toda a informação estatística do campo δ está contida em $\mathcal{P}(k)$ [3, 10].

Convém aqui mencionar, que uma predição geral dos modelos inflacionários, é que as perturbações primordiais de densidade são geradas por flutuações quânticas Gaussianas do campo escalar durante a época inflacionária [3]. Neste caso, o espectro de potências será do tipo $\mathcal{P}(k) = Ak^n$, onde o expoente n (índice espectral) pode assumir os valores -2 , -1 , 0 e 1 . Caso $n \neq 1$, o espectro é chamado de “inclinado”. Um espectro “inclinado” é chamado vermelho, se $n < 1$ (mais estruturas em larga escala), e azul (mais estruturas em pequenas escalas). No entanto, há uma preferência, em alguns casos, pela forma de Harrison-Zeldovich [10] com $n = 1$, mas no presente trabalho escolheremos $n = 0$. No caso de espectro de potências constante

$$\mathcal{P}(k) = \text{const},$$

dizemos que o espectro é invariante de escala, ou espectro de Harrison-Zeldovich [60, 61]. Na Fig. 5.3, ilustramos os gráficos em escala $\log - \log$ do espectro de potências $\mathcal{P}(k)$ do campo δ no instante inicial, para as truncagens $N = 3$ e $N = 5$, onde fica evidente a escolha mencionada para n .

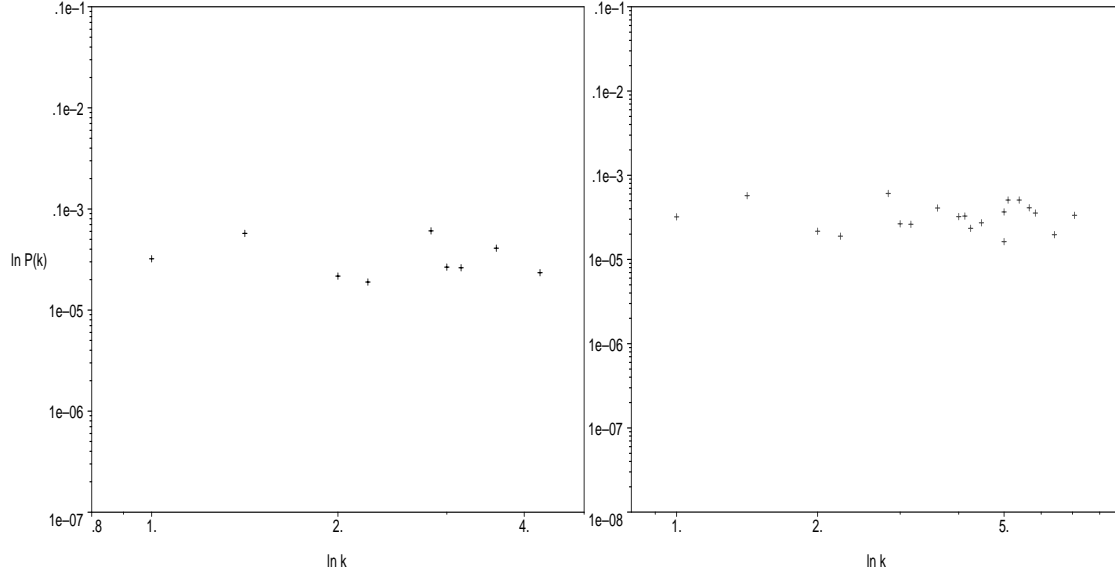


Figura 5.3: Espectro de potências $\ln \mathcal{P}(k) \times \ln k$ no instante inicial para as truncagens $N = 3$ e $N = 5$. Note que a disposição dos pontos é aproximadamente descrita por $\mathcal{P}(k) = \text{const}$, ou, equivalentemente $n = 0$.

5.2 Dinâmica dos coeficientes modais

Antes de apresentarmos a evolução dos coeficientes modais, assim como suas implicações para a dinâmica do sistema, vamos recuperar os resultados da teoria de Jeans e ao mesmo tempo apresentar explicitamente algumas correções não-lineares presentes no sistema dinâmico dado pelas Eqs. (4.27) e (4.28). Para tal, tomemos a derivada temporal conforme da Eq. (4.27) e combinemos com a equação de Euler (4.28) (por conveniência estamos considerando $\nu = 0$). Após algumas passagens obtemos:

$$\frac{d^2 c_{\vec{n}}}{d\Gamma^2} + \mathcal{H} \frac{dc_{\vec{n}}}{d\Gamma} + \left(\frac{4\pi^2 n^2}{l^2} - \frac{a_0^3}{a} \right) c_{\vec{n}} + \frac{4\pi^2}{l^2} \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} c_{\vec{n}-\vec{k}} \vec{n} \cdot (\vec{n} - \vec{k}) + \dots = 0. \quad (5.5)$$

Como esperado, os termos lineares são exatamente aqueles previstos pela teoria de Jeans. Sendo as condições iniciais muito pequenas, da ordem de 10^{-4} - 10^{-3} , os resultados da teoria linear são dominantes nos estágios iniciais da dinâmica dos coeficientes modais. Caso tenhamos alguns modos perturbativos instáveis, então essa fase linear irá durar até que os termos não-lineares passem a ser relevantes, ou seja, quando $|c_{\vec{k}}| \sim \mathcal{O}(1)$. O que irá determinar quais destes modos serão inicialmente instáveis é o fato de $4\pi^2 n^2 / l^2 - a_0^3 < 0$, que é obtido para um valor de l suficientemente grande. Então, considerando, por exemplo que $c_{\vec{k}}$ seja instável, este modo irá crescer na fase linear como $\Gamma^{2/3}$, e após isso, como mostraremos a seguir, os termos não-lineares passam a atuar.

Com o objetivo de ilustrar como as não-linearidades afetam a dinâmica de um dado modo perturbativo instável, mostramos na Fig. 5.4 o comportamento de c_{01}^R

descrito pelo sistema dinâmico e pela teoria linear de Jeans. Ainda nesta figura, aproveitamos para incluir os resultados referentes a várias ordens de truncagem, mais especificamente $N = 2, 3$ e 5 . Cabe ressaltar mais uma vez que as condições iniciais para os coeficientes modais em comum, para as truncagens $N = 2, 3$ e 5 , são as mesmas. Notemos que o comportamento previsto pela aproximação linear vale até $\Gamma \sim 16$ para as truncagens escolhidas e após este instante os termos não-lineares passam a afetar a dinâmica do coeficiente modal c_{01}^R . Neste caso, podemos afirmar que esse fato deve ser válido para qualquer ordem de truncagem. No entanto, o primeiro resultado importante é que para um dado valor de l , os termos não-lineares tendem a prolongar o crescimento de c_{01}^R antes que este passe para a fase oscilatória com amplitudes decrescentes, que nesta situação, deve-se à expansão do Universo.

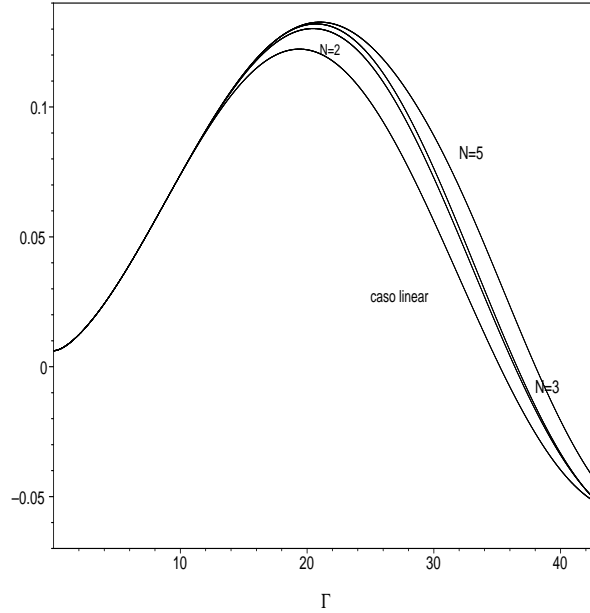


Figura 5.4: Comportamento do modo instável c_{01}^R para diferentes ordens de truncagem ($N = 2, 3, 5$) e o comportamento linear. Neste caso temos $l = 41,05930$. Podemos observar que no caso linear o modo cresce um pouco menos que no caso não-linear.

Nos experimentos numéricos fixamos $a_0 = 1$, restando l como sendo o único parâmetro livre. Lembrando que estamos impondo $l \gg \lambda_{\max}$, onde λ_{\max} é o máximo comprimento de onda associado a um dado modo perturbativo, temos que $4\pi^2 n^2 / l^2 - a_0^2 < 0$. Isso significa que inicialmente todos os modos perturbativos serão instáveis. Os experimentos numéricos realizados com distintos conjuntos de condições iniciais, bem como diferentes ordens de truncagem N , mostraram a existência de três possíveis comportamentos dependendo da relação entre l e um valor crítico l_{crit} :

- Se $l < l_{crit}$ observamos que todos os coeficientes modais tendem a zero oscilatoriamente após a fase de crescimento inicial. Isso significa que a força oriunda do gradiente de pressão sobrepõe-se à força de atração gravitacional e ao final estruturas não são formadas.

- Por outro lado, se $l > l_{crit}$, os coeficientes modais crescem indefinidamente. Neste caso a força gravitacional domina a dinâmica e estruturas são formadas. Cabe ressaltar que a integração numérica é interrompida antes que os coeficientes modais diverjam. A rigor, o colapso que resulta numa singularidade não ocorre na prática, pois a medida que o colapso ocorre, outros processos físicos como por exemplo, a “relaxação violenta” [12], passam a atuar fazendo com que o estado de equilíbrio virial seja atingido numa densidade finita e portanto estruturas estáveis sejam formadas.
- Finalmente $l = l_{crit}$ representa uma interessante fase onde os coeficientes modais oscilam em torno de um valor aproximadamente constante. Esse comportamento é oriundo da competição não-linear entre as forças de pressão e gravitacional.

Nas Figs. 5.5 e 5.6 ilustramos essas três situações. As oscilações não-lineares mencionadas para $l = l_{crit} = 44,4188361270483$ são mostradas na Fig. 5.5 com os coeficientes modais c_{21}^R e c_{12}^R associados com o campo de densidade de contraste. Já na Fig. 5.6 é mostrado o comportamento dos coeficientes modais b_{21}^R e b_{12}^R associados ao campo de velocidades peculiar. É interessante notar na Fig. 5.6 que os modos b_{21}^R e b_{12}^R oscilam de modo similar durante a fase compreendida entre $50 \leq \Gamma \leq 90$ nas situações $l < l_{crit}$ e $l \simeq l_{crit}$. Em todos os casos temos uma truncagem $N = 3$.

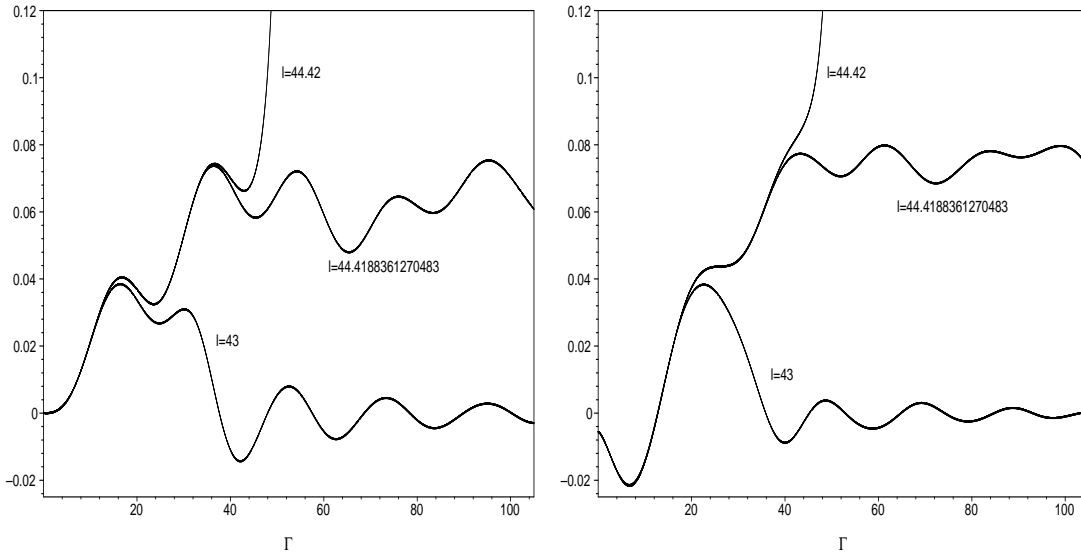


Figura 5.5: Comportamento dos modos instáveis c_{21}^R e c_{12}^R associados ao campo de densidade de contraste, para diferentes valores de l e uma truncagem $N = 3$. As figuras mostram que à medida que l cresce, mais tempo o modo permanece na fase instável de crescimento. Observamos ainda que o modo atinge valores cada vez maiores, crescendo indefinidamente para $l = 44,42 > l_{crit}$.

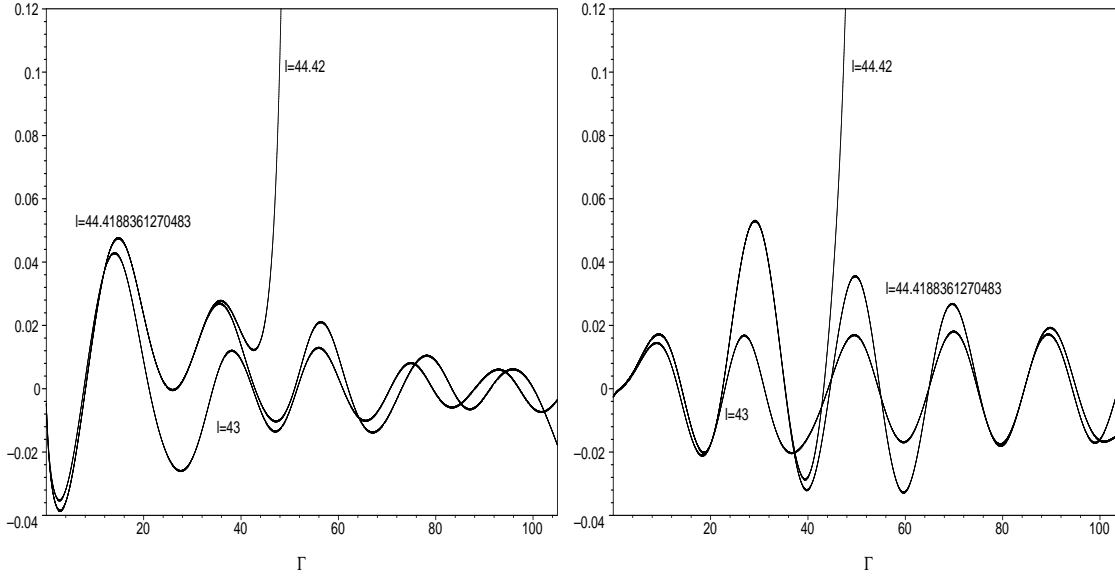


Figura 5.6: Comportamento dos modos instáveis b_{21}^R e b_{12}^R associados ao campo de velocidades peculiar para diferentes valores de l e $N = 3$.

Podemos observar que de um modo geral para $l \gtrsim l_{crit}$ fica claro que a evolução dos coeficientes modais $c_{\vec{k}}$ fica desconectada do efeito de expansão do universo. Para $l < l_{crit}$ temos que após o crescimento dos modos instáveis, mesmo incluindo a influência dos termos não-lineares, os coeficientes modais tendem a oscilar com amplitudes decrescentes devido à expansão do universo. Como mencionamos, nesse caso, estruturas não são formadas. Com relação aos coeficientes modais $b_{\vec{k}}$ associados ao campo de velocidades, notamos de acordo com a Fig. 5.6, que para $l \simeq l_{crit}$ a fase de oscilação não-linear é muito similar ao que ocorre para $l > l_{crit}$.

Uma outra maneira de visualizar a dinâmica do sistema levando-se em conta a contribuição de todos os coeficientes modais, é exibir a evolução das variâncias associadas à densidade de contraste e ao campo de velocidades. As expressões correspondentes são:

$$\langle \delta^2 \rangle = \sum_{\vec{k}} |c_{\vec{k}}|^2, \quad (5.6)$$

e

$$\langle \mu^2 \rangle = \sum_{\vec{k}} |\vec{\mu}_{\vec{k}}|^2 = \frac{4\pi^2}{l^2} \sum_{\vec{k}} k^2 |b_{\vec{k}}|^2. \quad (5.7)$$

As Figs. 5.7 mostram as variâncias $\langle \delta^2 \rangle$ e $\langle \mu^2 \rangle$ em função do tempo Γ , para os casos $l = 44,41883612704 = l_{crit}$, $l = 44,40 < l_{crit}$ e $l = 44,43 > l_{crit}$ respectivamente. É interessante notar que em todos os casos sempre que $\langle \delta^2 \rangle$ passa por uma fase de máxima amplitude, $\langle \mu^2 \rangle$ assume valores mínimos.

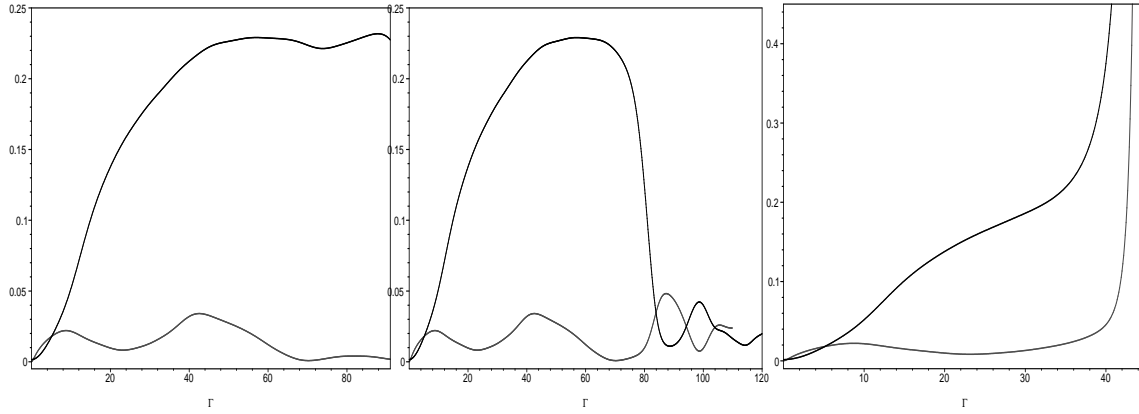


Figura 5.7: Variâncias $\langle \delta^2 \rangle$ e $\langle \mu^2 \rangle$ em função do tempo Γ nos casos $l = l_{crit} = 44.41883612704$, $l = 44.40 < l_{crit}$ e $l = 44.43 > l_{crit}$ para uma truncagem $N = 3$.

Uma vez que exibimos a evolução dos coeficientes modais, suas implicações para a dinâmica do sistema e algumas propriedades estatísticas, passaremos para a descrição do comportamento do campo $1 + \delta(x, y, \Gamma)$ após um longo tempo. Por conveniência, exibimos nas Figs. 5.8 e 5.9 o aspecto de $1 + \delta(x, y, \Gamma)$, nos instantes $\Gamma = 96$ e $\Gamma = 41$, como resultado da integração numérica do sistema dinâmico (4.27) e (4.28). Também apresentamos nas mesmas figuras, as respectivas curvas de nível além do campo de velocidades para $l = 44,4188361270483 = l_{crit}$ e $l = 44,43 > l_{crit}$. Em ambos os casos, temos uma truncagem $N = 3$.

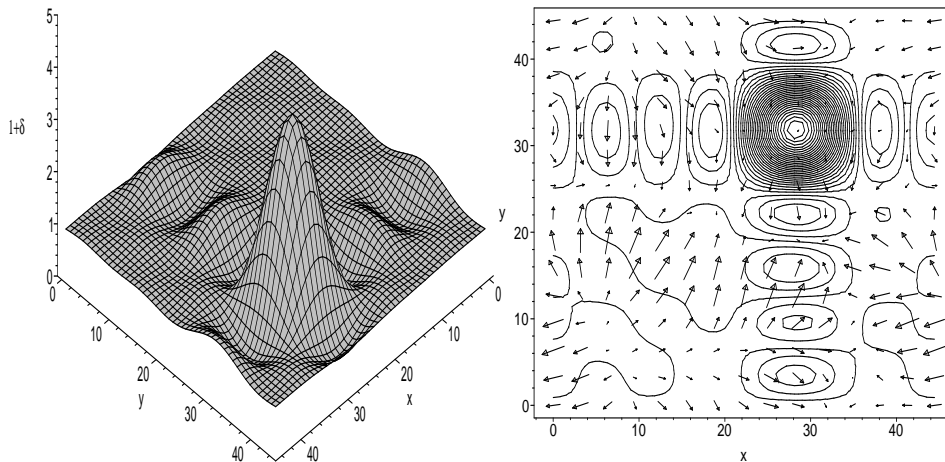


Figura 5.8: Distribuição de $1 + \delta(x, y, \Gamma)$ e das curvas de nível juntamente com o campo de velocidades para $N = 3$ no instante $\Gamma = 96$ com $l = l_{crit} = 44.4188361270483$.

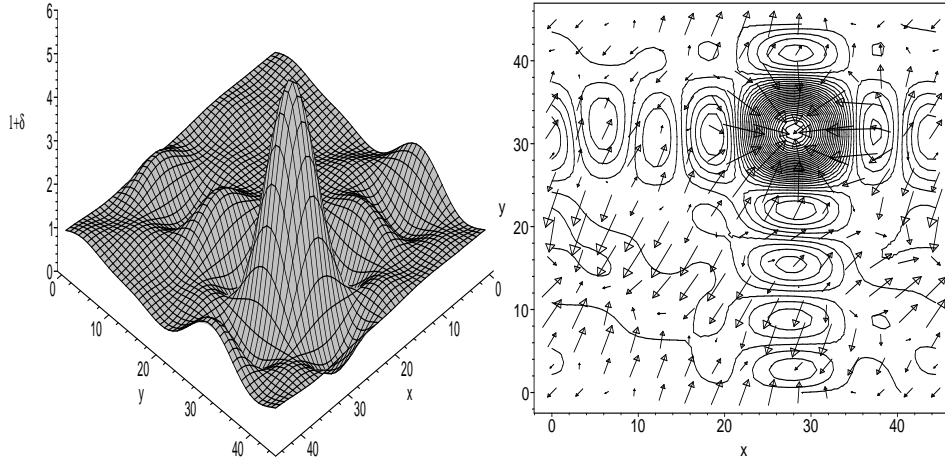


Figura 5.9: Distribuição de $1 + \delta(x, y, \Gamma)$ e das curvas de nível juntamente com o campo de velocidades para $N = 3$ no instante $\Gamma = 41$ com $l = 44.43 > l_{crit}$.

Analisando as Figs. 5.8 e 5.9, observamos que no caso $l = 44, 43 > l_{crit}$, o campo δ cresce mais do que no caso $l = 44, 4188361270483 = l_{crit}$ e a integração é interrompida em $\Gamma = 41$, ou seja, antes que os coeficientes modais cresçam indefinidamente. No instante $\Gamma = 41$, há uma evidência de que estruturas são formadas, pois há uma região determinada aproximadamente por $x_{min} = 22, x_{max} = 32, y_{min} = 28$ e $y_{max} = 38$ que ficou realçada pela aglomeração de matéria e outras regiões onde houve uma supressão de matéria. Vemos ainda que o tempo de integração diminui quase que pela metade, a saber, de 96 para 41, uma vez que aumentamos o valor de $l = 44, 4188361270483$ de para $l = 44, 43$, ou seja, o colapso ocorre num intervalo de tempo bem menor.

Vejam agora qual é o efeito do aumento da ordem de truncagem para o comportamento do campo $1 + \delta(x, y, \Gamma)$ e para o campo de velocidades peculiar. Vamos considerar uma truncagem $N = 5$ e as mesmas condições iniciais comuns ao caso $N = 3$. Um primeiro efeito do aumento da ordem de truncagem é que o valor de l_{crit} depende de N , ou seja, a medida que aumentamos o valor de N , observamos uma convergência do valor de l_{crit} , como pode ser observado a seguir. Para uma truncagem $N = 2$ temos $l_{crit} = 56, 3563429357864$, $N = 3$ fornece um valor $l_{crit} = 44, 4188361270483$ e $N = 5$ um $l_{crit} = 41, 0593064482651$.

Nas Figs. 5.10 e 5.11 exibimos a distribuição final de $1 + \delta(x, y, \Gamma)$, suas respectivas curvas de nível e o campo de velocidades para os instantes $\Gamma = 50$ e $\Gamma = 28$. Em ambos os casos temos uma truncagem $N = 5$. A Fig. 5.10 corresponde a $l = l_{crit} = 41,0593064482651$ e a Fig. 5.11 a $l = 41,1 > l_{crit}$. O comportamento de $1 + \delta(x, y, \Gamma)$, para uma truncagem $N = 3$, (Figs. 5.8 e 5.9), é semelhante ao comportamento para $N = 5$, (Figs. 5.10 e 5.11). A diferença entre as estruturas nas situações acima, está no fato de que a estrutura formada no caso $N = 5$ é mais rica em detalhes devido ao número de coeficientes modais ser maior no caso $N = 5$, ou seja, 96 no caso $N = 3$ e 240 no caso $N = 5$.

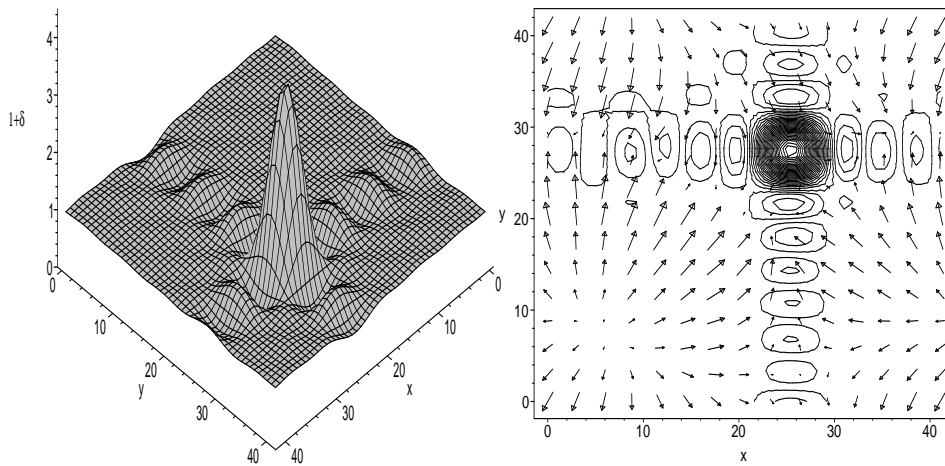


Figura 5.10: Distribuição de $1 + \delta(x, y, \Gamma)$, das curvas de nível e do campo de velocidades no instante $\Gamma = 55$ para uma truncagem $N = 5$ e $l = l_{crit} = 41.0593064482651$.

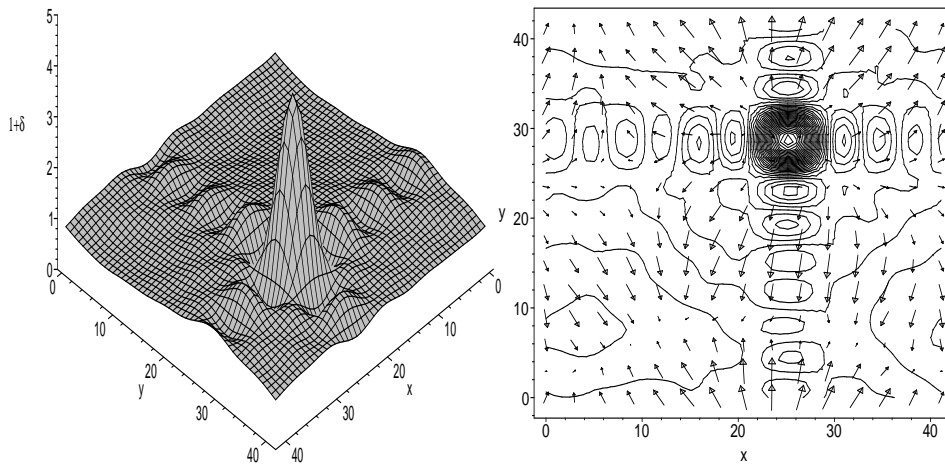


Figura 5.11: Distribuição de $1 + \delta(x, y, \Gamma)$, das curvas de nível e do campo de velocidades no instante $\Gamma = 28$ para uma truncagem $N = 5$ e $l = 41.1 > l_{crit}$.

Como as condições iniciais para os coeficientes modais $b_{\vec{k}}$ e $c_{\vec{k}}$ são escolhidas aleatoriamente para representar flutuações genéricas no campo de matéria e no campo de velocidade peculiar, torna-se interessante verificar qual a influência para a formação de estruturas de um novo conjunto de condições iniciais. As Figs. 5.12 exibem a distribuição de $1 + \delta(x, y, \Gamma)$, das curvas de nível e do campo de velocidades no instante $\Gamma = 48$ para um novo conjunto de condições iniciais distinto do utilizado anteriormente. Neste caso, temos uma truncagem $N = 3$. Consideramos ainda, um valor $l = 46,17 > l_{crit}$, sendo que agora $l_{crit} = 46,1673296587453$ para o novo conjunto de condições iniciais.

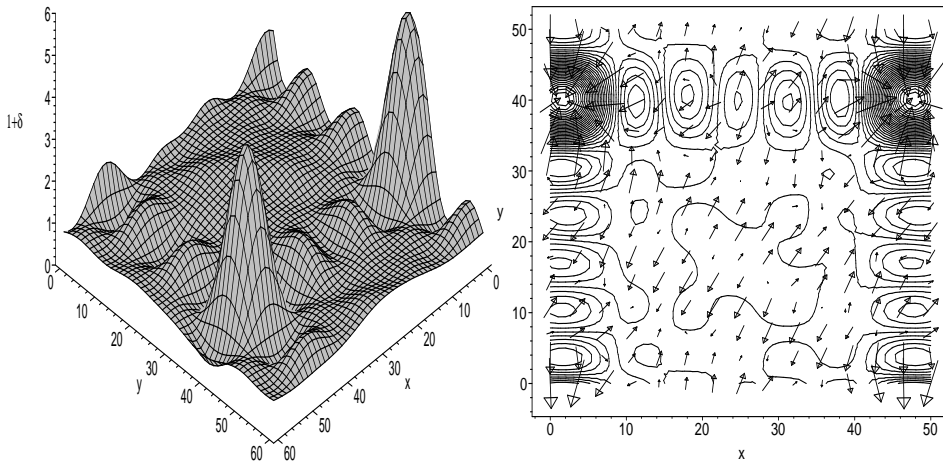


Figura 5.12: Distribuição de $1 + \delta(x, y, \Gamma)$ e das curvas de nível juntamente com o campo de velocidades para um novo conjunto de condições iniciais e uma truncagem $N = 3$ no instante $\Gamma = 48$ com $l = 46.17 > l_{crit}$.

Cabe ressaltar, que o novo conjunto de condições iniciais, continua a satisfazer os dois requerimentos básicos citados no início deste capítulo, sendo suas amplitudes da ordem de 10^{-4} - 10^{-3} . Destacamos ainda, que com este novo conjunto de condições iniciais, o valor de l_{crit} sofreu uma mudança, mostrando-nos que o mesmo depende da escolha de condições iniciais particulares.

Como já havíamos explicado, o colapso continuado e sem fim para $l > l_{crit}$, é uma consequência da ausência de outros processos físicos que estariam presentes no colapso. Mencionamos anteriormente a “relaxação violenta” que é o processo pelo qual a componente de densidade de matéria sem colisão, a matéria escura, alcança o equilíbrio virial. Mas também devemos incluir efeitos de dissipação. Neste caso, introduzimos a viscosidade de uma maneira consistente via equação de Navier-Stokes para que sua influência possa ser conhecida a partir das simulações numéricas. Conforme citamos no capítulo 1, a viscosidade foi considerada artificialmente pela primeira vez em modelos hidrodinâmicos, no modelo de Adesão [24] afim de fazer com as estruturas formadas permanecessem “coladas”, corrigindo assim uma deficiência da aproximação de Zeldovich. Nosso próximo passo, portanto, é verificar os efeitos da viscosidade na evolução dos coeficientes modais.

Enquanto que no caso sem viscosidade, os coeficientes modais oscilam em torno de um valor aproximadamente constante para $l = l_{crit}$, no caso viscoso não há l_{crit} . Observamos de acordo com as Figs. 5.13 que há apenas dois tipos de comportamentos a saber, ou os modos associados ao campo de matéria divergem ou estabilizam num valor constante após a fase de crescimento não-linear. Na mesma figura, observamos que após a fase de crescimento não-linear os modos associados ao campo de velocidades tendem assintoticamente a zero. Um outro efeito interessante da viscosidade pode ser visualizado nas Figs. 5.14, onde percebemos que uma viscosidade ν ligeiramente menor faz com que os modos associados ao campo de matéria se estabilizem num patamar mais alto, enquanto que os modos associados ao campo de velocidades tendem a zero após algum tempo, independente do valor de ν escolhido.

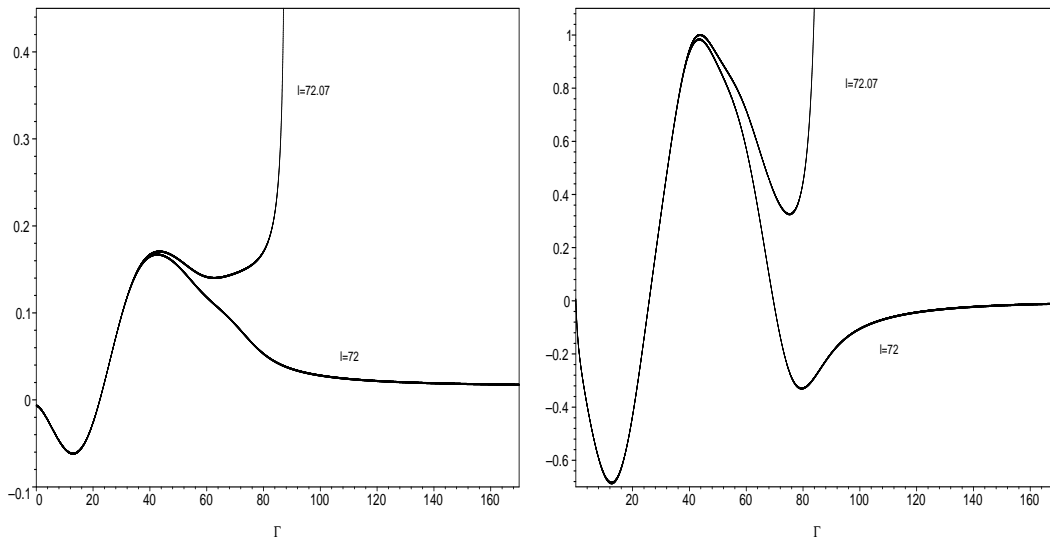


Figura 5.13: Evolução de dois coeficientes modais c_{11}^R e b_{10}^R , associados ao campo de densidade de contraste e ao campo de velocidades peculiar, respectivamente. Neste caso temos $N = 2$, $\nu = 2 \times 10^{-5}$ e diferentes valores de l .

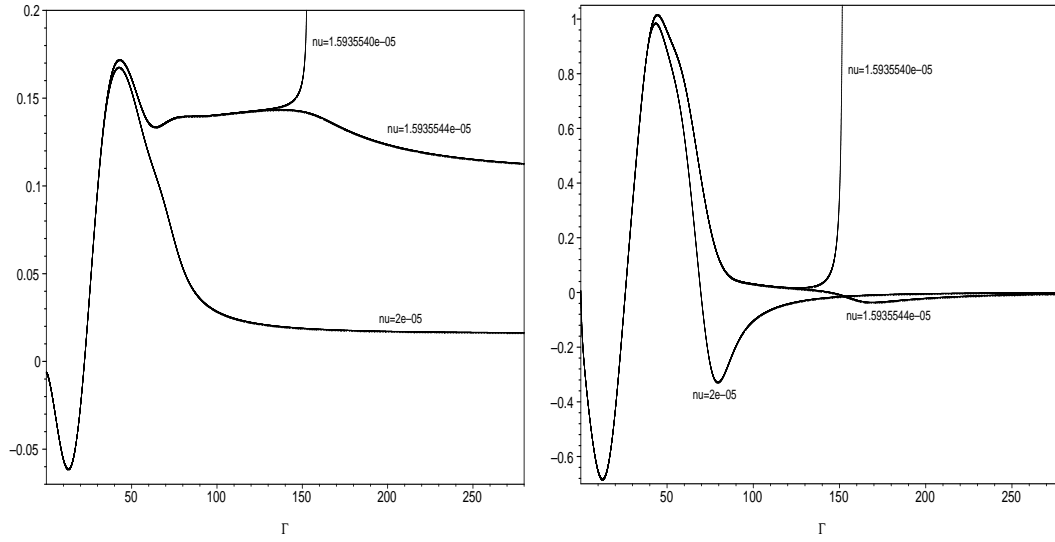


Figura 5.14: Comportamento dos coeficientes modais c_{11}^R e b_{10}^R no caso viscoso para diferentes valores de ν ($1,5935540 \times 10^{-5}$, $1,5935544 \times 10^{-5}$ e 2×10^{-5}) para um mesmo valor de $l = 72$ e uma truncagem $N = 2$.

Do mesmo modo como fizemos no caso sem viscosidade ($\nu = 0$), é interessante verificar o aspecto do campo $1 + \delta(x, y, \Gamma)$ após algum tempo quando levamos em conta a presença de um termo de viscosidade ν muito pequeno. Neste sentido, apresentamos o resultado da integração do sistema dinâmico (4.27) e (4.30) através das Figs. 5.15 para a situação $N = 3$, no instante $\Gamma = 22$, com um coeficiente de viscosidade $\nu = 0,009$, e $l = 58,3$. Já nas Figs. 5.16 vemos o comportamento do campo $1 + \delta(x, y, \Gamma)$ no instante $\Gamma = 23$, para uma truncagem $N = 5$, $l = 48,8$ e com um coeficiente de viscosidade $\nu = 0,007$. Cabe ressaltar que, no caso viscoso, foram utilizadas as mesmas condições iniciais do caso sem viscosidade, ou seja, aquelas usadas para gerar as Figs. (5.8, 5.9, 5.10 e 5.11).

Analisando as Figs. 5.15 e 5.16 e comparando com os resultados do caso $\nu = 0$, Figs. (5.8, 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12), vemos que as estruturas formadas no caso viscoso, apresentam um aspecto diferente, pois a introdução do termo de viscosidade via equação de Navier-Stokes, modifica o sistema dinâmico, Eqs. (4.27) e (4.28), e portanto novas estruturas são formadas.

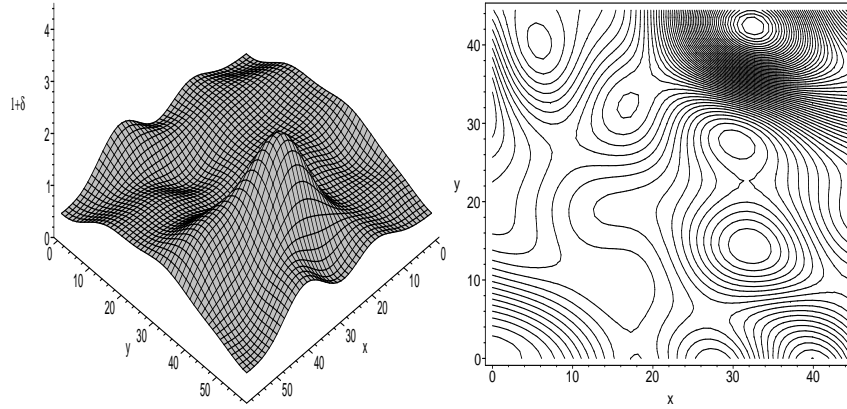


Figura 5.15: Distribuição final da densidade de contraste $1 + \delta(x, y, \Gamma)$ no instante $\Gamma = 22$ para uma truncagem $N = 3$ no caso viscoso com $\nu = 0,009$, $l = 58,3$ e suas curvas de nível.

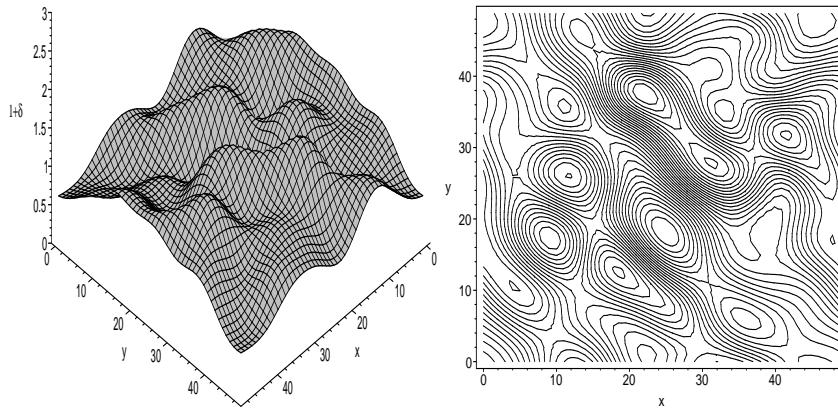


Figura 5.16: Distribuição final da densidade de contraste $1 + \delta(x, y, \Gamma)$ no instante $\Gamma = 23$ para uma truncagem $N = 5$ no caso viscoso com $\nu = 0,007$, $l = 48,8$ e suas curvas de nível.

Nas figuras 5.17 exibimos as variâncias $\langle \delta^2 \rangle$ e $\langle \mu^2 \rangle$ no caso viscoso para as truncagens $N = 3$ e $N = 5$, respectivamente. É interessante notar que uma vez que $\langle \delta^2 \rangle$ se estabiliza, $\langle \mu^2 \rangle$ tende a zero assintoticamente.

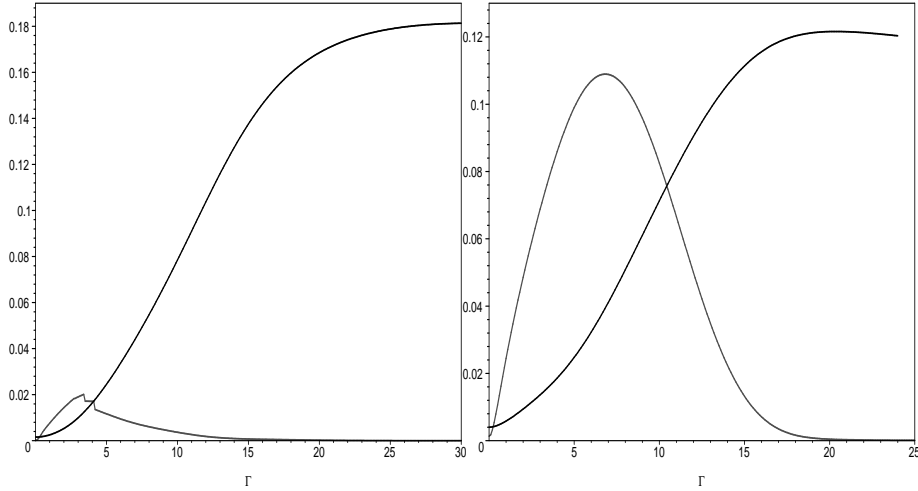


Figura 5.17: Gráfico das variâncias $\langle \delta^2 \rangle$ e $\langle \mu^2 \rangle$ em função do tempo Γ , no caso viscoso. Para uma truncagem $N = 3$ temos $l = 58,3$, $\nu = 0,009$ e uma para truncagem $N = 5$, temos $l = 48,8$ e $\nu = 0,007$.

5.3 Formação de estruturas e virialização

Em modelos simplificados que tentam descrever estágios da evolução não-linear das perturbações, tal como o de considerar numa região mais densa com simetria esférica [12, 49], costuma-se estabelecer três estágios para a formação de estruturas[2]. Inicialmente, essa região mais densa expande-se conjuntamente com o universo, mas à medida que o tempo passa a expansão torna-se mais lenta até parar. Nesse momento, que é conhecido por instante da volta t_{turn} ou “*turn around*”, a região possui um raio máximo R_{max} . A partir daí, a região esférica colapsa sem parar até formar um buraco negro. No entanto, exatamente como mencionamos anteriormente, em um modelo mais realista, esperamos que o colapso resulte numa estrutura estável, ou simplesmente virialize, significando que o raio da região não está mais contraindo. Neste caso, podem ocorrer ricochetes (“*bounces*”), ou seja, a região pode oscilar tendendo para um raio bem definido R_{vir} , que caracteriza o estágio de virialização conforme esquematizado na Fig. 5.18. As oscilações ocorrem devido a diversos fatores tais como a presença de processos dissipativos, momento angular, dentre outros. As simulações apresentadas na seção anterior, mais especificamente as distribuições da densidade de contraste mostradas nas Figs. (5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.15 e 5.16) evidenciam fortemente a agregação de matéria em certas regiões, e portanto a formação de estruturas. Devido à simplicidade do modelo hidrodinâmico, somente as forças oriundas do gradiente de pressão e da viscosidade poderão se contrapor à atração gravitacional no regime não-linear para a formação de estruturas estáveis. Na ausência de viscosidade o estágio de “*bounces*” que ocorre para $l \simeq l_{crit}$, significa um equilíbrio não-linear entre as forças gravitacional e de pressão. Caso uma pequena viscosidade seja acrescentada, ocorre que a energia cinética cessa e estruturas estáveis são formadas.

Figura 5.18: Possíveis comportamentos para R em função do tempo t . Uma região mais densa com simetria esférica irá colapsar para uma densidade infinita em $2 t_{turn}$ e irá formar um buraco negro.

Nesta seção faremos uma abordagem simplista para a caracterização de uma possível fase de virialização no modelo que estamos considerando. O fato é que o estágio da virialização é descrito pelo teorema do virial [64]. Esse teorema estabelece, que num sistema auto-gravitante constituído de uma única partícula ou de um sistema de partículas, o estado de equilíbrio dinâmico será caracterizado pela igualdade, em valores absolutos, da energia cinética E_c com metade da energia potencial E_p do sistema. A razão dessa relação, reside que no equilíbrio dinâmico do sistema auto-gravitante, ou seja, que o momento de inércia do sistema é estacionário¹.

A extensão do teorema do virial para fluidos é um pouco mais elaborada [66], mas o resultado que nos interessa é que a razão entre o dobro da energia cinética e a energia potencial, $|2E_c/E_p|$, pode ser distinto da unidade devido à contribuição dos termos de pressão nos limites do sistema [65]. Desse modo, consideremos as energias cinética e potencial de uma certa região \mathcal{R} , que são dadas respectivamente, por:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \int \rho_0 (1 + \delta) \vec{\mu}^2 dx dy, \quad (5.8)$$

e

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \int \rho_0 (1 + \delta) \delta \varphi dx dy. \quad (5.9)$$

Tais expressões podem ser escritas como função dos coeficientes modais $b_{\vec{k}}$ e $c_{\vec{k}}$,

¹a rigor $|2E_c/E_p| = 1$ é tomado numa média temporal.

através da decomposição da densidade de contraste

$$\delta(x, y, \Gamma) = \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}(x, y), \quad (5.10)$$

do campo de velocidades

$$\vec{\mu}(x, y, \Gamma) = \frac{2\pi i}{l} \sum_{\vec{k}} \vec{k} b_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}(x, y), \quad (5.11)$$

e do potencial gravitacional

$$\delta\varphi(x, y, \Gamma) = -\frac{l^2 a^2 v_s^2}{4\pi^2 n^2} \left(1 + \frac{a_0}{\sqrt{6}} \Gamma\right)^{-6} \sum_{\vec{k}} c_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}(x, y). \quad (5.12)$$

A última relação é proveniente da equação de Poisson Eq.(3.17).

Vamos agora calcular a $|2E_c/E_p|$ e esperamos, de acordo com extensão do teorema do virial para fluidos, encontrar $|2E_c/E_p| \neq 1$. Consideraremos uma truncagem $N = 3$, $\nu = 0$, assim como $l = 44, 43 > l_{crit}$. Como havíamos mencionado, interrompemos a integração numérica antes que os coeficientes modais cresçam indefinidamente. Na Fig. 5.19 a integração para o cálculo de $|2E_c/E_p|$ é feita para a região onde a matéria se concentra na Fig. 5.9, ou seja, a região de interesse, será determinada por $x_{min} = 22$, $x_{max} = 32$, $y_{min} = 28$ e $y_{max} = 38$, que serão os limites de integração utilizados para o cálculo das energias cinética e potencial. As expressões resultantes de E_c e E_p em função dos coeficientes modais é muito extensa e não as exibiremos aqui. O resultado que nos interessa é então mostrado na Fig. 5.19 com o gráfico da razão $|2E_c/E_p|$ versus o tempo Γ . Vemos na Fig. 5.19 que no intervalo aproximado $16 \leq \Gamma \leq 25$, a razão $|2E_c/E_p| \simeq 0,4$, sendo uma indicação de que as estruturas virializam.

Na Fig. 5.20, temos $N = 3$, $\nu = 0$ e $l = 44,4188361270483 \simeq l_{crit}$. O cálculo de $|2E_c/E_p|$ é feito em todo o domínio espacial mostrado na Fig. 5.9. Observamos na Fig. 5.20, que há uma fase não-linear oscilatória até $\Gamma \sim 94$, a partir desse instante, até aproximadamente $\Gamma \sim 100$, temos que $|2E_c/E_p| \simeq 0,4$, podendo ser uma indicação de haver virialização do sistema.

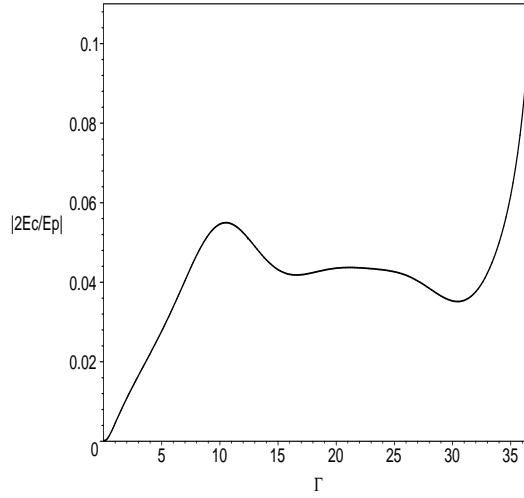


Figura 5.19: Gráfico de $|2E_c/E_p|$ em função do tempo, no caso $N = 3$, para $l = 44, 43 > l_{crit}$. A razão entre as energias cinética e potencial é calculada somente para a região onde a matéria se concentra na Fig. 5.9.

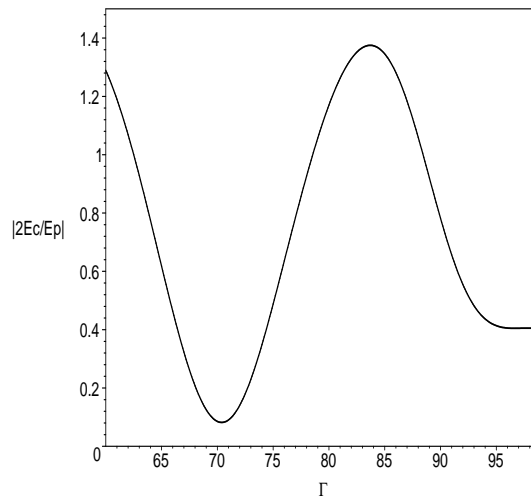


Figura 5.20: Gráfico de $|2E_c/E_p|$ em função do tempo, no caso $N = 3$, para o intervalo $60 \leq \Gamma \leq 100$. Nesta situação temos, $l = 44,4188361270483 \simeq l_{crit}$. A razão entre as energias cinética e potencial é calculada para toda a região mostrada na Fig. 5.9.

Uma vez que mostramos que estruturas são formadas, vamos agora determinar seus espectros de potência. Pode-se tentar construir um espectro de potência de um aglomerado de galáxias como função da escala de comprimento. Isto produz um conjunto de funções de correlação que essencialmente definem a probabilidade de encontramos uma outra galáxia no interior de um raio X a partir de uma galáxia. Em largas escalas, as observações do satélite COBE[13], mostraram que o índice espectral n é da ordem de $n = 1,1 \pm 0,1$, onde $n = 1$ é uma predição dos modelos inflacionários. De acordo com as presentes observações da Radiação Cósmica de Fundo e de dados de estruturas em larga escala, a amplitude do espectro de potência primordial é da ordem de $\mathcal{P}(k)^{1/2} \approx 5 \times 10^{-5}$. Mas como o espectro de potências é alterado através da evolução não-linear? Com o intuito de responder esta questão exibimos as Figs. 5.21, 5.22 e 5.23 que evidenciam uma aglomeração de matéria no regime não-linear em algumas fases de interesse. Nas Figs. 5.21 mostramos os gráficos em escala $\log - \log$ do espectro de potência $\mathcal{P}(k)$ nos casos $N = 3$ e $N = 5$, para os instantes $\Gamma = 96$ e $\Gamma = 55$, $l = 44,4188361270483 = l_{crit}$ e $l = l_{crit} = 41,0593064482651$, respectivamente. Tais espectros, referem-se às estruturas formadas, mostradas nas Figs. 5.8 e 5.10. É interessante notar com os espectros da Fig. 5.21 são qualitativamente muito semelhantes aos espectros obtidos pela observação da distribuição de aglomerados de galáxias Fig. 5.22.

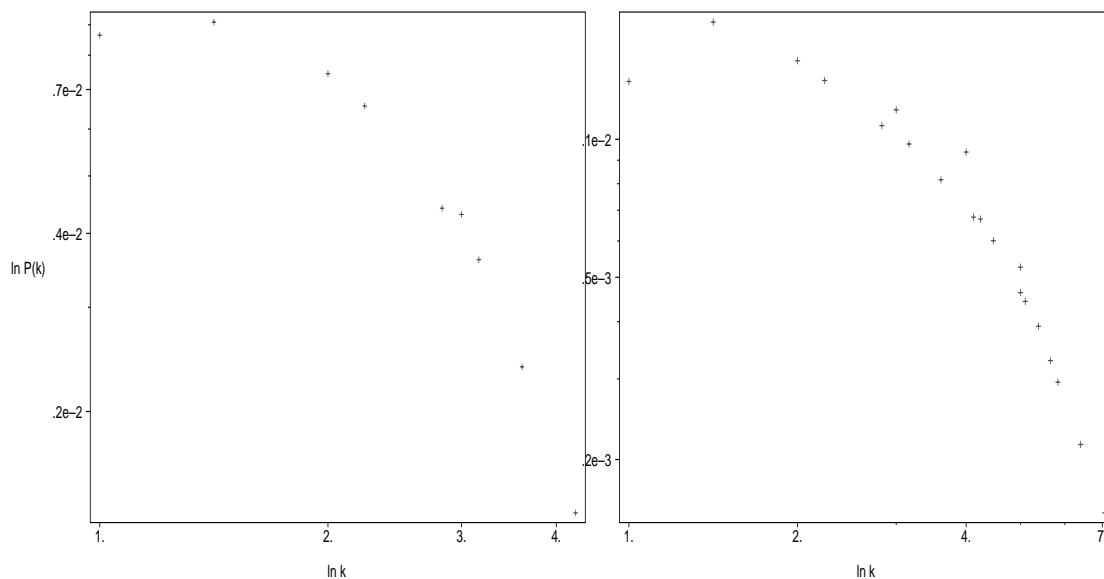


Figura 5.21: Espectros de potência $\ln P(k) \times \ln k$ nos instantes $\Gamma = 96$ e $\Gamma = 55$ para as truncagens $N = 3$ e $N = 5$, com $l = 44,4188361270483 = l_{crit}$ e $l = l_{crit} = 41,0593064482651$ respectivamente.

Figura 5.22: Espectro de potência $\ln P(k) \times \ln k$ da distribuição dos aglomerados de galáxias CfA 145 e CfA 100 obtido pelo *LCRS redshift survey*.

Já nas Figs. 5.23 temos os espectros de potência $\mathcal{P}(k)$ em escala $\log - \log$ nos casos $N = 3$ e $N = 5$, para os instantes $\Gamma = 23$ e $\Gamma = 21$, $l = 44, 43 > l_{crit}$ e $l = 41, 1 > l_{crit}$, respectivamente. Tais espectros foram calculados nos instantes em que verificamos haver virialização do sistema. Particularmente, no caso $N = 3$, o espectro refere-se à fase onde $|2E_c/E_p| \simeq 0,4$, mostrada na Fig. 5.19. Nesses casos parece haver uma forte correlação linear indicando um espectro do tipo lei de potências.

Ainda nas figuras 5.24 vemos os espectros de potência no caso viscoso, para $l = 58, 3$ e $l = 48, 8$, para as truncagens $N = 3$ e $N = 5$, respectivamente.

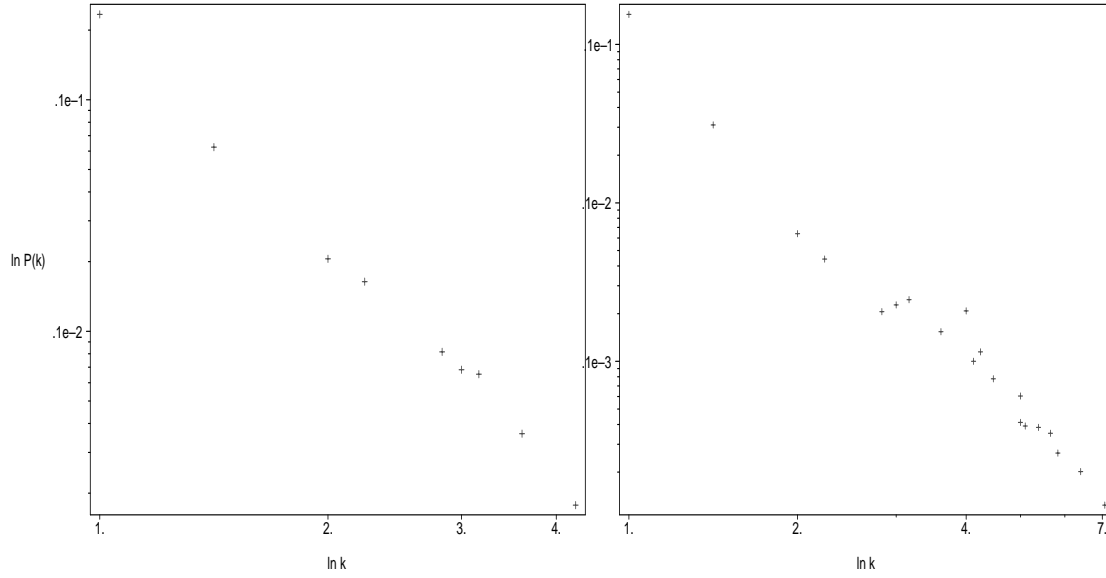


Figura 5.23: Espectros de potência $\ln \mathcal{P}(k) \times \ln k$ nos instantes $\Gamma = 23$ e $\Gamma = 21$ para as truncagens $N = 3$ e $N = 5$, com $l = 44, 43 > l_{crit}$ e $l = 41, 1 > l_{crit}$ respectivamente.

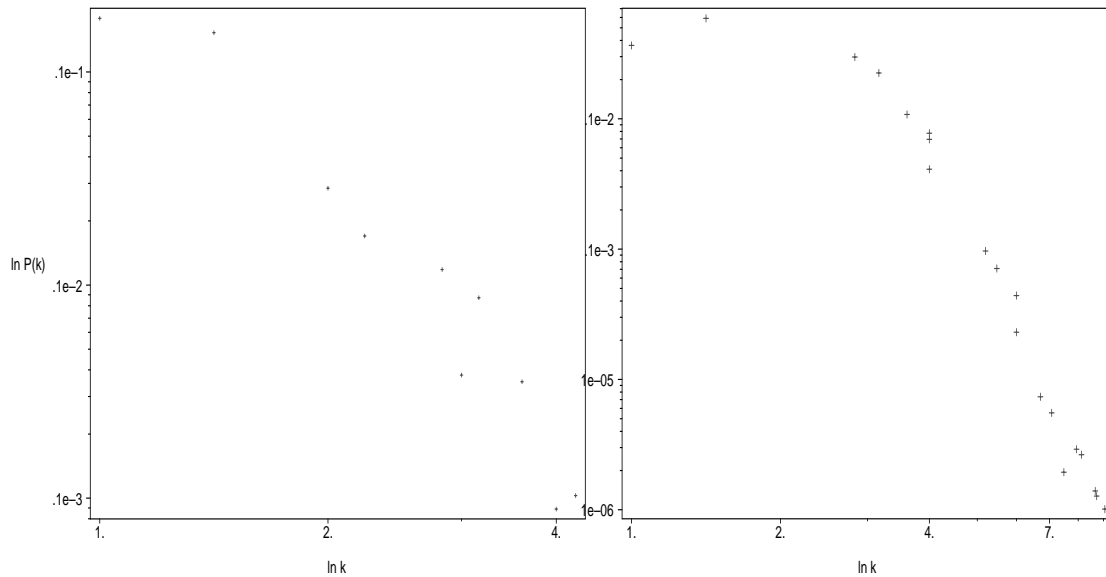


Figura 5.24: Espectro de potência $\ln \mathcal{P}(k) \times \ln k$ no caso viscoso para as truncagens $N = 3$ e $N = 5$ nos instantes $\Gamma = 22$ e $\Gamma = 23$, respectivamente.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho estudamos o problema de formação de estruturas em Cosmologia newtoniana através de uma modelagem hidrodinâmica. Inicialmente, revisamos no capítulo 2, o mecanismo originalmente proposto por Jeans, ou seja, consideramos um fluido auto-gravitante estático. Posteriormente, ainda no mesmo capítulo, estendemos o tratamento de Jeans para o caso de um fluido auto-gravitante em expansão, onde introduzimos por conveniência as coordenadas comóveis e observamos que a expansão do Universo, para $\lambda > \lambda_J$, acaba por amortecer o crescimento das perturbações implicando numa redução da velocidade de crescimento exponencial da instabilidade e resultando num crescimento do tipo potência. Caso $\lambda < \lambda_J$, a perturbação oscilava como uma onda sonora com amplitudes decrescentes.

No entanto, vimos que a teoria linear não é capaz de seguir a evolução das perturbações, pois, a partir de um dado instante, $\delta \gtrsim 1$, implicando que a partir daí, a teoria linear deixava de ser válida, e efeitos não-lineares na evolução das perturbações passavam a ser relevantes e deveriam ser levados em conta. Desta forma, afim de incluir os efeitos não-lineares na evolução das perturbações, no capítulo 3, reobtivemos as equações do caso linear com suas correções não-lineares de segunda ordem. Ainda nesse mesmo capítulo, introduzimos a viscosidade consistentemente via equação de Navier-Stokes, Eq. (3.22) e finalmente obtivemos as equações não-lineares que governam a dinâmica de um fluido auto-gravitante viscoso num Universo em expansão.

Após a obtenção das equações que governam a evolução das pequenas inogeneidades, utilizamos no capítulo 4, o método de Galerkin para integrar as equações do fluido auto-gravitante e obtivemos o sistema dinâmico equivalente. Uma vez escolhidas as condições iniciais do sistema dinâmico procedemos à integração numérica do mesmo e apresentamos no capítulo 5 os resultados de interesse em formação de estruturas.

Os experimentos numéricos realizados mostraram a existência de três possíveis comportamentos dependendo da relação entre l e um valor crítico l_{crit} enquanto que no caso viscoso identificamos apenas dois comportamentos possíveis. Nossos

resultados numéricos, mostrados nas Figs. (5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.15 e 5.16), sugerem fortemente a formação de estruturas nos casos $l \simeq l_{crit}$ e $l \gtrsim l_{crit}$.

Também observamos que a introdução de um termo de viscosidade, ainda que muito pequeno, faz com que os coeficientes modais associados com o campo de matéria se estabilizem num certo valor após a fase de oscilação não-linear e que o campo de velocidades tenda assintoticamente a zero independente do valor de ν escolhido, Figs. 5.13 e 5.14. Já nas Figs. 5.17, confirmamos os resultados anteriores do caso viscoso levando em conta a contribuição de todos os coeficientes modais, onde exibimos a evolução das variâncias associadas à densidade de contraste e ao campo de velocidades.

Os gráficos mostrados nas Figs. 5.19 e 5.20 sinalizam para uma possível virialização do sistema, onde vemos que existe um período tal que $|2E_c/E_p| \neq 1$. No caso onde calculamos a razão $|2E_c/E_p|$ considerando apenas a região onde a matéria se concentra, vemos que $|2E_c/E_p| \simeq 0,04$. Ainda no caso, onde levamos em conta todo o domínio espacial, vemos que $|2E_c/E_p| \simeq 0,4$, sendo portanto, nos dois casos, uma indicação de virialização.

Por fim, citamos alguns desdobramentos do presente trabalho:

- Uma extensão natural seria considerar o domínio espacial com três dimensões em vez daquele bidimensional que utilizamos. Conseqüentemente, o número de termos na expansão de Galerkin aumentaria consideravelmente, implicando em uma descrição mais realista e precisa da evolução do fluido auto-gravitante.
- Apesar da evolução linear da vorticidade decair com o inverso do fator de escala a^{-1} , é possível que os termos não-lineares juntamente com a presença da viscosidade produzam algum comportamento interessante.
- Para um tratamento que possa incluir matéria escura juntamente com a matéria bariônica, vamos nos inspirar nas simulações de N-corpos e introduzir as seguintes quantidades adimensionais:

1. nova coordenada espacial $\vec{\xi}$:

$$\vec{\xi} \equiv \frac{\vec{x}}{L},$$

onde \vec{x} é a coordenada espacial comóvel e L é o comprimento de um dos lados da caixa;

2. nova velocidade adimensional \vec{u} :

$$\vec{u} \equiv \frac{\vec{v}}{HL},$$

onde H é o parâmetro de Hubble, e \vec{v} o campo de velocidades peculiar.

Dessa maneira, a velocidade do som v_s^2 aparecerá explicitamente nas equações e poderá ser ajustada tão pequena quanto se queira, além do termo de viscosidade ν .

Referências Bibliográficas

- [1] Zeldovich Y. B., Novikov i. D., *The Structure and Evolution of The Universe*. Relativistic Astrophysics, Chicago University Press (1983).
- [2] V. Sahni, P. Coles., *Approximation Methods for Non-linear Gravitational Clustering*. Preprint gr-qc/9505005, v1 2 May 1995.
- [3] Coles P., Lucchin F., *Cosmology: the Origin and Evolution of Cosmic Structures*, J. Wiley and sons, Chichester, (1995).
- [4] Jeans J., Phil Trans. 199A, 49 (1902).
- [5] Jeans J.: *Astronomy and Cosmology*, Cambridge University Press (1928).
- [6] Guth, A. H., Pi S-Y., *Fluctuations in the New Inflationary Universe*. Phys. Rev. Lett. (1982) 49, 1110–1113.
- [7] Guth, A. H., *Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problem*. Phys. Rev. (1981) D23, 347–356.
- [8] A. D. Linde., Phys. Rev. Lett. B **108**, 389 (1982).
- [9] Peebles P. J. E., *The large scale structure of the Universe*, Cambridge University Press (1980).
- [10] Andrew R. Linddle, David H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge (2000).
- [11] Kolb E. W., Turner M. S., *The Early Universe*. Addison-Wesley, Reading, MA (1990).
- [12] Padmanabhan T., *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press (1995).
- [13] G. Smoot et al., Astrophys. J. 396 (1992) L1; E. L. Wright, Astrophys. J. 396 (1992) L3; Krauss, M. White, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 869.
- [14] Hannay et al., Astrophys. J. Lett. 545 (2000) 5.
- [15] P. D. Mauskopft et al., Astrophys. Lett. 536 (2000), L59-L62.

- [16] Coles, Peter & Ellis, George F. R. *Is the Universe Open or Closed?* Cambridge University Press (1997).
- [17] Dekel, Avshai & Ostriker, Jeremiah P. *Formation of Structure in the Universe.* Cambridge University Press (1999).
- [18] Liddle A., *An introduction to Modern Cosmology.* Wiley and sons.
- [19] K. S. Wu, O. Lahav & M. J. Rees, *The large-scale smoothness of the Universe,* Nature, 397 (1999).
- [20] Kaiser N., Silk J., *Cosmic microwave background anisotropy.* Nature 324, 529–537 (1987).
- [21] Bernard J. T. Jones, *The Origin of Galaxies: A review of recent theoretical developments and their confrontation with observation.*
- [22] Reisenegger, A., Miralda-Escudé, J., *The Gunn-Peterson Effect forms Underdense Regions in a Photoionized Intergalactic Medium,* ApJ, 449, 476 (1995), preprint gr-qc/9502063.
- [23] Kofman, L., Pogosyan D., Shandarin S. F., *Structure of the Universe in the two-dimensional model of adhesion,* MNRAS, 242, 200 (1990).
- [24] Gurbatov S. N., Saichev A. I., Shandarin S. F., *The large-scale structure of the Universe in the frame of the model equation of non-linear diffusion,* Mon. Not. R. astr. Soc (1989) 236, 385-402.
- [25] S.N. Gurbatov, A.I. Saichev and S.F. Shandarin, Sov. Phys. Dokl., 30 (1985) 921.
- [26] Zeldovich Y. B., *Gravitational Instability: an approximate theory for large density perturbations,* Astron. Astrophysics. 5 (1970), 84-89.
- [27] Gurbatov S. N., Saichev A. I., *Probability distribution and spectra of potential hydrodynamics turbulence,* Radiophys. Quant. Electr. 27 (1984).
- [28] Shandarin S. F., Zeldovich Ya. B., *The large-scale structure of the Universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium,* Reviews of modern Physics, vol 61, No.2 (1989).
- [29] Sahni, V., Coles, P., *Approximation methods for non-linear gravitational clustering,* Phys. Rep., 262, 1-135 (1995).
- [30] Lapperant, V., Geller, M. J., Huchra J. P., *A Slice of the Universe,* ApJ, **302**, L1 (1986).
- [31] L.A. Kofman, in: K. Sato (ed), Proc. IUAP *Proceedings on Nucleosynthesis in the Universe* (Kluwer, Dordrecht, 1991) 495.

- [32] Vergassola M., Dubrulle B., Frisch U., Noullez A., *Burgers' equation, Devil's staircases and the mass distribution for large-scale structures*, *Astron. Astrophys.* 289 (1994), 325-356.
- [33] J.M. Burgers, *The Non-linear Diffusion Equation* (Reidel, Dordrecht, 1974).
- [34] G.B. Whitham, *Linear and Non-linear Waves*, (Wiley, New York, 1974).
- [35] Shandarin S. F., Sathyaprakash B. S., *Modeling Gravitational Clustering Without Computing Gravitational Force*, *Astrophys. J.*, 467: L25-L28 (1996).
- [36] Peebles P. J. E., *Principles of physical Cosmology*, Princeton University Press (1993).
- [37] E. Audit, J.-M. Alimi, *Gravitational Lagrangian dynamics of cold matter using the deformation tensor*, *Astron. Astrophysics.*, 315, 11 (1996), astro-ph/9609156.
- [38] Betancort-Rijo J., López-Corredoira M., *Complete Zeldovich Approximation*, *ApJ*, 534, 2, L 117 (2000), astro-ph/0003482.
- [39] Efstathiou G. , Frenk C.S., White S.D.M., Davis M., *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 235 (1988) 715.
- [40] Efstathiou G. and Rees M.J., *High redshift quasars in the CDM cosmogony*. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 230 (1988) 5P -11P.
- [41] M. Gramann, *Astrophys. J.*, 405 (1993) 449.
- [42] Fletcher C. A. J., *Computational Galerkin Methods*, Springer-Verlag (1984).
- [43] Boyd P. J., *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Dover Publications, NC, New York (2001).
- [44] Byron F. W., Fuller R. W., *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Dover Publications, Inc. New York (1992).
- [45] Michael K., H. Kiessling, *Mathematical Vindications of The "Jeans Swindle"*, preprint gr-qc/9910247 (1999).
- [46] Tsagas C. G. , *Cosmological Perturbations*. arXiv:astro-ph/0201405 v1, (2001).
- [47] Lifshitz E. M., *On the gravitational instability of the expanding universe*. *Sov. Phys. JETP* 10, 116–122 (1946).
- [48] Peacock J. A., *Cosmological Physics*, Cambridge University Press (1980).
- [49] Peacock J. A., *Inflationary cosmology and structure formation*, preprint gr-qc/9601135 (1996).

- [50] A. Dekel, E. Bertschinger and S.M. Faber, *Astrophys. J.*, 364 (1990) 349.
- [51] A. Dekel, E. Bertschinger, A. Yahil, M.A. Strauss, M. Davis and J.P. Huchra, *IRAS galaxies vs POTENT mass-density fields, biasing and Omega*. *Astrophys. J.*, 412, 1-21 (1993).
- [52] E. Bertschinger and A. Dekel, *Astrophys. J.*, 336 (1989) L5.
- [53] A. Dekel, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 32 (1994) 371.
- [54] Batchelor G. K., *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge Mathematical library (1973).
- [55] P. Mészáros, (1975), *Astron. Ap.*, 38, 5.
- [56] Peebles P.J.E., *Principles of Physical Cosmology*. Cambridge University Press (1993).
- [57] H. P. de Oliveira.; I. D. Soares, *Galerkin Method in the Gravitational Collapse: A Dynamical System Approach*, *Physical Review D*, v. 65, p. 64029, 2002.
- [58] P. Holmes, J. L. Lumley and G. Berkooz, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge Monographs in Mechanics (Cambridge, 1988).
- [59] Galerkin, B. G., *Vestnik Inzhenerov Tech.* 19, 897-908 (1915).
- [60] Harrison E. R., *Fluctuations at the threshold of classical cosmology*. *Phys. Rev. D.* 1 (1970) 2726–2730.
- [61] Ya.B. Zeldovich, *Mon. Not. R. astr. Soc.*, 160 (1972) 1P.
- [62] Sergei S. F., *Three-dimensional Burgers' Equation as a Model for the Large-Scale Structure Formation in the Universe*, preprint gr-qc/9507082 (1995).
- [63] Klypin, A. A., Shandarin S. F., *MNRAS*, 20, 891 (1981).
- [64] Goldstein, H. (1959), *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, Mass. , pp. 69-71.
- [65] Shapiro, R. P., Iliev I. T., Martel H., Alvarez M. A., *The Equilibrium Structure of CDM Halos*, preprint gr-qc/0409173, v1 7 Sept 2004.
- [66] Peebles, P. J. E., *Previrialization*, *The Astrophysical Journal*, **365**:27-36, (1990).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)