Resumo

Neste trabalho são estudados dois sistemas de equações diferenciais parciais parabólicas sujeitas a condições iniciais e de contorno. O primeiro sistema tratado representa um modelo de solidificação envolvendo uma função campo de fase. O segundo problema tratado é uma simplificação de um modelo com duas funções campo de fase para solidificação de ligas. São estudados resultados sobre existência (via Método de Ponto Fixo), regularidade, continuidade em relação aos dados iniciais e ao termo forçante e unicidade de solução dos sistemas citados.

Abstract

In this work we study two parabolic partial differential equations systems subject to initial and boundary conditions. The first system treated here represents a model for solidification with a phase field function. The second system is a simplification of a two-phase field model for alloy solidification. We study results concerning existence (by Fixed Point Method), regularity and uniqueness of solution for mentioned systems.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Análise Matemática de Modelos de Campo de Fase para Solidificação.

por

Damião Júnio Gonçalves Araújo †

sob orientação da

Profa. Dra. Bianca Morelli Calsavara Caretta

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes.

Análise Matemática de Modelos de Campo de Fase para Solidificação.

por

Damião Júnio Gonçalves Araújo

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada por:

Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Prof. Dr. Aparecido Jesuíno

Profa. Dra. Bianca Morelli Calsavara Caretta

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Abril/2008

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela força e perseverança que tem me dado para que eu pudesse concluir mais uma etapa da minha vida.

Aos meus Pais, Júlio e Lourdes pelo amor, carinho e educação dados ao longo dos anos. A minhas irmãs Jane Kelly e Janielly e a todos os meus tios e tias.

A minha noiva Oslenne, pelo apoio, incentivo, confiança, paciência e acima de tudo pelo amor recebido.

A minha orientadora e amiga Bianca, pela paciência, pelos conselhos e ensinamentos passados.

Ao Departamento de Matemática da UFCG através do PPGMAT; à ANP, o projeto PRH-25; ao CNPQ através do projeto Instituto do Milênio em Matemática - IM/AGIMB e do projeto Casadinho, pelo apoio de infraestrutura; e a CAPES pela concessão da bolsa de mestrado.

A todos os professores do DM-UFC e DME-UFCG, e em especial a professora Bianca e o professor Sergio Mota, como também os Professores Antônio Caminha, Abdênago Barros, pelas disciplinas que lecionaram e que muito contribuíram para minha formação.

Aos Professores Boldrini e Aparecido, pelas sugestões dadas, e pela disponibilidade ao participarem da banca examinadora.

Aos meus professores de graduação da URCA, que apesar das dificuldades nunca deixaram de incetivar a minha ida ao mestrado.

A todos os colegas do curso de mestrado, aos funcionários do DME-UFCG, e aos amigos de Juazeiro, como também aos amigos de Campina Grande e de Fortaleza.

A Jocel, Flávio, Vinicius, Rodrigo e Rawlilson com os quais convivi momentos bons e difíceis durante essa caminhada. A Juscelino, Allana, Júnior, Cícero, Erasmo, Edilberto, Marcelo e Paulo pelo apoio e incentivo dado durante o mestrado.

Por fim, agradeço a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Dedicatória

Aos meus pais, e a Oslenne.

Conteúdo

Introdução

Os modelos de campo de fase são, de um modo geral, modelos que incorporam complexos fenômenos físicos de solidificação em certas ligas metálicas.

Um dos primeiros enfoques para o estudo de mudanças de fase consiste no uso de interfaces tipo "sharp"para separar as fases, os quais são conhecidos por problemas do tipo Stefan. Posteriormente foram introduzidos modelos utilizando o conceito de funções campo de fase. Os quais formam uma importante ferramenta no estudo de mudança de fase, pois permitem incorporar naturalmente vários fenômenos não descritos pelos modelos tipo Stefan. Nos modelos de campo de fase também ocorrem naturalmente zonas de transição (chamadas zonas de "mushy"). Além disso, para tais modelos, simulações numéricas são possíveis mesmo no caso de formações geométricas complexas, como dendrites, nas interfaces de separação de diferentes fases.

Um dos primeiros trabalhos a considerar tais modelos, dando origem a vários outros, foi Fix [8]. Destacamos aqui os trabalhos de Caginalp e outros [3], [4], [5] e [6]. Nos trabalhos anteriormente citados, Caginalp e outros utilizaram o funcional de energia livre como argumento para obtenção da equação para o campo de fase, analisaram matematicamente tais modelos e também suas relações com modelos utilizando interface tipo "sharp".

Neste trabalho estudamos dois sistemas de equações diferenciais parciais sujeitas a condições iniciais e de contorno. O primeiro problema representa o modelo de solidificação envolvendo uma função campo de fase tratado por Hoffman e Jiang em [10]. O segundo problema tratado é uma simplificação do modelo de solidificação envolvendo duas funções campo de fase tratado por Boldrini e outros em [2]. Para tais problemas serão estudados resultados sobre existência, regularidade, estabilidade em relação ao termo forçante e aos dados iniciais e unicidade de solução. Estes modelos estão também relacionados ao modelo de solidificação envolvendo três funções campos de fase apresentado em [14] e [15], por Steinbach e outros.

Este trabalho é dividido em duas partes. Em cada uma destas partes são discutidos os resultados mencionados para um dos sistemas citados.

O primeiro sistema de equações diferenciais parciais, que representa o modelo tratado por Hoffman e Jiang em [10], é dado por

$$(P_1)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -l\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + f & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi = a\phi + b\phi^2 - \phi^3 + u & \text{em } Q, \\ \partial u/\partial n = \partial \phi/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T], \\ u = u_0, \phi = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto limitado e $Q := \Omega \times (0,T]$. A função u está associada à temperatura, a função ϕ é chamada campo de fase e distingue entre os estados líquido e sólido. Aqui $l > 0$ é uma constante relacionada ao calor latente do material e a, b e f são funções dadas. O vetor n denota o vetor normal exterior a $\partial\Omega$ e os dados iniciais u_0, ϕ_0 serão tomados adequadamente.

Quando mencionarmos o sistema dado por (P_1) o chamaremos de Modelo de Solidificação 1.

Com as mesmas notações, o segundo sistema de equações diferenciais parciais, que representa a simplificação do modelo tratado por Boldrini e outros em [2], é dado por

$$(P_2)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -l\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + f & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi = -a\phi(1-\phi)\,(b - \phi + cu) & \text{em } Q, \\ \partial u/\partial n = \partial \phi/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T], \\ u = u_0, \phi = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

Embora o sistema dado por (P_2) seja uma simplificação do modelo de solidificação tratado por Boldrini e outros em [2], vale salientar que os resultados obtidos neste trabalho em relação a esse sistema não são encontrados em nossa literatura.

Quando o mencionarmos o chamaremos simplesmente de Modelo de Solidificação 2 ou Modelo 2.

Observe que na segunda equação do problema (P_1) a função temperatura aparece de forma linear, enquanto que na segunda equação do problema (P_2) a função temperatura aparece de forma não-linear, mais especificamente multiplicando a função campo de fase e sua potência quadrática. Tal diferença é significativa, pois esta influencia o método de obtenção de estimativas a priori necessárias para a obtenção da existência de solução destes problemas.

Este trabalho é organizado do seguinte modo:

No **Capítulo 1**, baseados em referências clássicas, citamos algumas definições e alguns resultados que serão utilizados no restante do trabalho. No **Capítulo 2**, serão discutidos resultados sobre existência, regularidade, estabilidade e unicidade de soluções para um problema auxiliar. Tais resultados serão utilizados no estudo dos sistemas dados acima. Nos **Capítulos 3** e **4** serão estudados os resultados citados para os problemas (P_1) e (P_2), respectivamente.

Capítulo 1

Preliminares

Aqui vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio aberto, limitado e de classe C^2, $0 < T < \infty$ e $Q = \Omega \times (0,T)$.

O resultado abaixo encontrado em Evans [7], será usado diversas vezes em nosso trabalho.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Young) *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ não negativos e $1 \leq p, q < \infty$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,*

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Teorema 1.2 (Desigualdade de Young com ε) *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ não negativos. Então para cada $\varepsilon > 0$ existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$a \cdot b \leq \varepsilon a^2 + \eta(\varepsilon) b^2.$$

Teorema 1.3 (Lema de Gronwall) *Seja $\xi(t)$ uma função não-negativa integrável em $[0,T]$ que satisfaz a desigualdade*

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2$$

q.t.p. em $[0,T]$, para constantes $C_1, C_2 \geq 0$. Então,

$$\xi(t) \leq C_2 e^{C_1 t}$$

q.t.p. em $[0,T]$.

Para os resultados seguintes definiremos os seguintes espaços,

Definição 1.4 *Seja $1 \leq p \leq \infty$, definimos o espaço*

$$L_p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} |\ u \text{ é Lebesgue mensurável, } \|u\|_{L_p(\Omega)} < \infty \right\},$$

onde

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_\Omega |u| & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Observação 1.1 *Se $\Omega \in \mathbb{R}^n$ é limitado, temos para $1 \leq p \leq q \leq \infty$ a seguinte inclusão*

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Teorema 1.5 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$, tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $u \in L_p(\Omega)$ e $v \in L_q(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}.$$

Teorema 1.6 (Desigualdade de Hölder generalizada) *Sejam $1 \leq p_1, \cdots, p_m \leq \infty$, tais que $\dfrac{1}{p_1} + \cdots + \dfrac{1}{p_m} = 1$. Se para cada $k = 1, \cdots, m$ temos $u_k \in L_{p_k}(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega |u_1 ... u_m| dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u\|_{L_{p_k}(\Omega)}.$$

Definição 1.7 (Espaços de Sobolev) *Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos o espaço de Sobolev*

$$W_p^k(\Omega) = \left\{ u \in L_p(\Omega) | D^\alpha u \in L_p(\Omega), \ \forall\ \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq k \right\},$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é um multi-índice com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$, $D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}$ são derivadas no sentido fraco e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Este espaço está munido da seguinte norma:

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \left(\text{ess sup}_\Omega |D^\alpha u| \right) & \text{se } p = \infty. \end{cases}$$

Sejam X, Y espaços de Banach. Denotamos por $X \hookrightarrow Y$, quando X está *imerso continuamente* em Y, e $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ quando X está *imerso compactamente* em Y.

Usaremos o seguinte teorema de imersão encontrado em Adams [1],

Proposição 1.8 *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto. Sejam j e m inteiros não negativos e $p \in \mathbb{R}$ satisfazendo $1 \leq p < \infty$. Se Ω satisfaz a propriedade do cone, então para $q \in \mathbb{R}$ valem as seguintes imersões contínuas:*

(i) Se $0 < n - mp < n$, *então* $W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow W_q^j(\Omega)$, *para todo* $p \leq q \leq np/(n-mp)$*;*

(ii) Se $mp = n$, *então* $W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow W_q^j(\Omega)$, *para todo* $p \leq q \leq \infty$*;*

(iii) Se $mp > n$, *então* $W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$.

Observação 1.2 *Para que um domínio* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *satisfaça a propriedade do cone é suficiente que este seja Lipschitz, o que é satisfeito por todo* Ω *de classe* C^k*, para qualquer* $k \geq 1$.

Fazendo na proposição anterior $n = 3$, $m = 2/p$, $j = 2 - 2/p$ e $3p/5$ no lugar de p, obtemos o seguinte resultado, que usaremos várias vezes durante o trabalho:

Corolário 1.9 *Seja* $\Omega \in \mathbb{R}^3$ *um domínio aberto, limitado e satisfazendo a propriedade do cone e seja* $1 \leq 3p/5 < \infty$*, então vale a seguinte imersão contínua*

$$W_{3p/5}^2(\Omega) \hookrightarrow W_q^{2-2/p}(\Omega),$$

para todo $3p/5 \leq q \leq p$.

Definição 1.10 *Seja* $1 \leq q \leq \infty$*, definimos o espaço de Sobolev dependente do tempo*

$$W_q^{2,1}(Q) = \left\{ u \in L_q(Q) : D^\alpha u \in L_q(Q), \ \textit{para}\ 1 \leq |\alpha| \leq 2, \ e\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L_q(Q) \right\}.$$

Munido da norma

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |u_t|^2 dx + \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2} & \textit{se}\ 1 \leq p < \infty, \\ \textit{ess sup}_\Omega |u_t| + \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} (\textit{ess sup}_\Omega |D^\alpha u|) & \textit{se}\ p = \infty. \end{cases}$$

onde $u_t := \dfrac{\partial u}{\partial t}$ *no sentido fraco.*

Por um Teorema de imersão de Lions-Peetre [12], temos o seguinte resultado:

Teorema 1.11 *Seja* Ω *um domínio aberto, limitado e de classe* C^2*. Então, temos* $W_q^{2,1}(Q) \subset L_p(Q)$ *com inclusão contínua para* $p \geq 1$ *satisfazendo:*

$$p = \begin{cases} \left(\frac{1}{q} - \frac{2}{5} \right)^{-1} & \textit{se} \quad 2 \leq q < 5/2, \\ \textit{qualquer número positivo} & \textit{se} \quad q = 5/2, \\ \infty & \textit{se} \quad q > 5/2. \end{cases}$$

Além disso, a inclusão $W_q^{2,1}(Q) \subset L_{\bar{p}}(Q)$ *é contínua e compacta para todo* $2 \leq \bar{p} < p$*, com* p *dado acima. No caso* $p = \infty$ *a inclusão* $W_q^{2,1}(Q) \subset L_\infty(Q)$ *é contínua e compacta.*

Um caso particular do Teorema acima que será usado em nosso trabalho, é o seguinte:

Corolário 1.12 *Seja Ω um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então a inclusão $W_p^{2,1}(Q) \subset L_p(Q)$ é contínua e compacta, para todo $p \geq 1$.*

Para obter o corolário acima, basta notar que em todos os casos do Teorema 1.11 temos $q < p$.

Em algumas demonstrações sobre existência e regularidade de solução de sistemas de equações diferenciais parciais com condições iniciais e de fronteira, usaremos o seguinte Teorema sobre equações parabólicas encontrado em Ladyzhenskaya[11] (Teorema 9.1, pág.341).

Teorema 1.13 *Seja Ω um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Então, para todo $f \in L_q(Q)$ e $v_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$, com $q > 1$, satisfazendo a condição de compatibilidade $\partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, o problema*

$$\begin{cases} \partial v/\partial t - k\Delta v = f(x,t) & em \quad Q, \\ \partial v/\partial n = 0 & em \quad \partial\Omega \times (0,T], \\ v = v_0 & em \quad \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

possui única solução $v \in W_q^{2,1}(Q)$. Além disso, esta solução satisfaz a seguinte estimativa

$$\|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|f\|_{L_q(Q)} + \|v_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)}\right), \tag{1.1}$$

onde C depende de Ω, T e k.

Para demonstrarmos a existência de solução de sistemas de equações parciais lineares com condições inicial e de fronteira usaremos o Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder (veja Friedman[9]) enuciado abaixo.

Teorema 1.14 (Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder) *Sejam B um espaço de Banach e $T : B \times [0,1] \to B$ uma transformação tal que $y = T_\lambda x$ com $x, y \in B$ e $\lambda \in [0,1]$. Suponha que:*

a) *T_λ está bem definido para todo $\lambda \in [0,1]$.*
b) *Para todo $\lambda \in [0,1]$ fixo, $T_\lambda : B \to B$ é uma transformação contínua e compacta.*
c) *Para todo $A \subset B$ limitado $T_{(\cdot)}x : [0,1] \to B$ é contínua com respeito a λ e uniformemente com respeito a $x \in A$.*
d) *T_0 possui único ponto fixo em B.*

e) *Existe constante* $K > 0$ *finita tal que toda possível solução de* $x = T_\lambda x$ *para algum* $\lambda \in [0,1]$ *satisfaz* $\|x\|_B \leq K$.

Então existe $x \in B$ *solução da equação* $x = T_1 x$.

O resultado seguinte pode ser encontrado em Simon [13].

Teorema 1.15 *Sejam* X, B *e* Y *espaços de Banach tal que* X *está imerso compactamente em* B *e* B *está imerso continuamente em* Y. *Então dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $\eta > 0$ *tal que para todo* $x \in X$

$$\|x\|_B \leq \varepsilon \|x\|_X + \eta \|x\|_Y.$$

Capítulo 2

Um Problema Auxiliar

Para e estudo dos problemas que serão abordados adiante nesse trabalho, iremos estabelecer alguns resultados sobre o problema com condições inicial e de bordo, descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

$$(P_{aux}) \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = (av + bv^2 - v^3) + g & \text{em } Q, \\ \partial v / \partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\ v = v_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

onde a, b, g e v_0, são funções dadas, o qual denominamos de Problema auxiliar.

2.1 Existência de Solução do Problema Auxiliar

Mostremos agora um resultado que nos dá a existência de solução para o problema auxiliar.

Teorema 2.1 *Seja Ω um domínio limitado de classe C^2. Assuma $a, b \in L_\infty(Q)$, $g \in L_q(Q)$, com $q \geq 2$ e $v_0 \in W_2^2(\Omega)$, tal que $\partial v_0 / \partial n|_{\partial\Omega} = 0$. Então o problema (P_{aux}) possui solução $v \in W_2^{2,1}(Q)$ e esta satisfaz a seguinte estimativa:*

$$\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left(\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(Q)} \right), \tag{2.1}$$

onde C depende de $\|a\|_{L_\infty(Q)}$,$\|b\|_{L_\infty(Q)}$ e Ω.

Demonstração:

Iremos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Leray-Schauder (Teorema 1.14). Para isso consideramos o operador $T_\lambda : B \to B$, para cada $\lambda \in [0,1]$, no espaço de Banach $B := L_9(Q)$, definido por $T_\lambda(w) = v$ se, e somente se, v satisfaz ao problema

$$(P^\lambda_{aux}) \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \lambda(aw + bw^2 - w^3) + \lambda g & \text{em } Q, \\ \partial v/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T], \\ v = v_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Vamos agora verificar que o operador acima satisfaz as hipóteses do Teorema de Leray-Schauder.

a) Primeiramente vamos mostrar que T_λ está bem definido para todo $\lambda \in [0,1]$.

Para isto, definimos $G_\lambda := \lambda(aw + bw^2 - w^3 + g)$. Como $w \in L_9(Q)$ e $g \in L_q(Q)$, então $G_\lambda \in L_{\bar{q}}(Q)$, onde $\bar{q} = min\{3, q\}$. Do Teorema 1.13 temos que existe uma única solução v do problema (P^λ_{aux}) em $W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)$, e devido ao Teorema 1.11, como $\bar{q} \geq 2$ temos que $v \in L_{10}(Q)$, pois:

- Se $2 \leq \bar{q} < 5/2$, então $v \in L_\mu(Q)$, onde $\mu = (\frac{1}{\bar{q}} - \frac{2}{5})^{-1}$. Mas $10 = (\frac{1}{2} - \frac{2}{5})^{-1} \leq (\frac{1}{\bar{q}} - \frac{2}{5})^{-1} = \mu$, de onde, $v \in L_\mu(Q) \subset L_{10}(Q)$.

- Quando, $\bar{q} = 5/2$, temos que $v \in L_p(Q)$ para todo p positivo, então, em particular, $v \in L_{10}(Q)$.

- E no caso $\bar{q} > 5/2$, temos $v \in L_\infty(Q) \subset L_{10}(Q)$.

Além disso, $L_{10}(Q) \subset L_9(Q)$. Então $T_\lambda w \in L_9(Q)$ para todo $w \in L_9(Q)$ e todo $\lambda \in [0,1]$, como queríamos.

b) Agora vamos mostrar que, para cada $\lambda \in [0,1]$, $T_\lambda : B \to B$ é contínuo e compacto.

Para isto, fixemos $\lambda \in [0,1]$ e consideramos $w_1, w_2 \in L_9(Q)$. Definamos $v_i := T_\lambda w_i$, para $i = 1,2$, e $v := v_1 - v_2$ e $w := w_1 - w_2$. Mostraremos que para v a seguinte estimativa é verdadeira:

$$\|v\|^2_{W^{2,1}_2(Q)} \leq C \int\int_Q |h(x,t)|^2 |w(x,t)|^2 dxdt,$$

para alguma constante C, onde

$$h := a + b(w_1 + w_2) - (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) \in L_{9/2}(Q).$$

De fato, pelo problema (P_{aux}^{λ}), obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \lambda(a(w_1 - w_2) + b(w_1^2 - w_2^2) - (w_1^3 - w_2^3)) & em \quad Q, \\ \partial v / \partial n = 0 & em \quad \partial\Omega \times (0, T], \\ v = 0 & em \quad \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \lambda w h & em \quad Q, \\ \partial v / \partial n = 0 & em \quad \partial\Omega \times (0, T], \\ v = 0 & em \quad \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Multiplicando a primeira equação do problema (2.2) por v e integrando em $\Omega \times (0, t)$, para $t \in (0, T]$, temos

$$\int_0^t \int_\Omega v v_t \, dx dt - \int_0^t \int_\Omega v \Delta v \, dx dt = \lambda \int_0^t \int_\Omega v w h \, dx dt. \tag{2.3}$$

Observe que usando a condição inicial, temos

$$\int_0^t \int_\Omega v v_t dx dt = \int_\Omega \int_0^t \frac{1}{2}(v^2)_t \, dx dt = \frac{1}{2} \int_\Omega (v^2(t) - v^2(0)) dx = \frac{1}{2} \int_\Omega v^2(t) dx,$$

e portanto,

$$\int_0^t \int_\Omega v v_t \, dx dt = \frac{1}{2} \int_\Omega v^2(t) dx. \tag{2.4}$$

Como também, usando as identidades de Green e a condição de bordo,

$$\int_0^t \int_\Omega v \Delta v \, dx dt = \int_0^t \left(- \int_\Omega |Dv|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} v dS \right) dt = - \int_0^t \int_\Omega |Dv|^2 dx dt,$$

ou seja,

$$\int_0^t \int_\Omega v \Delta v \, dx dt = - \int_0^t \int_\Omega |Dv|^2 dx dt. \tag{2.5}$$

Então substituindo as identidades (2.4), (2.5) em (2.3), temos

$$\frac{1}{2} \int_\Omega v^2(t) dx + \int_0^t \int_\Omega |Dv|^2 dx dt = \lambda \int_0^t \int_\Omega v w h \, dx dt \le \int_0^t \int_\Omega |v w h| \, dx dt.$$

Usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_\Omega v^2(t) dx + \int_0^t \int_\Omega |Dv|^2 \, dx dt \le \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega (v^2 + w^2 h^2) dx dt. \tag{2.6}$$

Agora, usando o Lema de Gronwall na desigualdade

$$\int_\Omega v^2(t)dx \leq \int_0^t \int_\Omega v^2 dxdt + \int_0^T \int_\Omega w^2h^2 dxdt,$$

com $\xi(t) = \int_\Omega v^2(t)dx$, $C_1 = 1$ e $C_2 = \int_0^T \int_\Omega w^2h^2 dxdt$, temos

$$\int_\Omega v^2(t)dx \leq e^t \int_0^T \int_\Omega w^2h^2 dxdt \leq e^T \int_0^T \int_\Omega w^2h^2 dxdt,$$

para todo $t \in (0, T]$. Integrando em $[0, T]$ cada membro da desigualdade acima temos,

$$\iint_Q v^2 dxdt \leq Te^T \iint_Q w^2h^2 dxdt \leq C \iint_Q w^2h^2 dxdt, \tag{2.7}$$

onde $C > 0$ é constante.

Tomando $t = T$ e substituindo a última desigualdade em (2.6), obtemos

$$\iint_Q |Dv|^2 dxdt \leq C \iint_Q w^2h^2 dxdt \tag{2.8}$$

onde $C > 0$ é constante.

Agora multiplicando a primeira equação do problema (2.2) por v_t e integrando em $\Omega \times (0, t)$, com $t \in (0, T]$, temos

$$\int_0^t \int_\Omega v_t^2 \, dxdt - \int_0^t \int_\Omega v_t \Delta v dxdt = \lambda \int_0^t \int_\Omega v_t wh \, dxdt.$$

Por outro lado, multiplicando a mesma equação por $-\Delta v$ e integrando em $(0, t) \times \Omega$, com $t \in (0, T]$, obtemos

$$\int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt - \int_0^t \int_\Omega v_t \Delta v dxdt = -\lambda \int_0^t \int_\Omega wh \Delta v dxdt.$$

Somando as duas últimas igualdades, e usando o fato de que v satisfaz ao problema (2.2) obtemos

$$\int_0^t \int_\Omega v_t^2 \, dxdt + \int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 \, dxdt - 2\int_0^t \int_\Omega v_t \Delta v \, dxdt = \lambda^2 \int_0^t \int_\Omega w^2h^2 \, dxdt.$$

Usando as identidades de Green, assim como as condições inicial e de bordo do problema (2.2), na terceira integral acima obtemos

$$\int_0^t \int_\Omega v_t \Delta v dxdt = -\frac{1}{2} \int_\Omega |Dv(t)|^2 dx.$$

Então substituindo a última igualdade na equação anterior, temos que

$$\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dxdt + \int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt + \int_\Omega |Dv(t)|^2 dx = \lambda^2 \int_0^t \int_\Omega w^2 h^2 dxdt$$

$$\leq \int_0^t \int_\Omega w^2 h^2 dxdt,$$

para todo $t \in (0,T]$. Como a estimativa acima vale em particular para $t = T$, temos,

$$\iint_Q v_t^2 dxdt + \iint_Q (\Delta v)^2 dxdt + \iint_Q |Dv(t)|^2 dxdt \leq \iint_Q w^2 h^2 dxdt. \tag{2.9}$$

Então, das desigualdades de (2.7) a (2.9), temos

$$[v]^2_{W_2^{2,1}(Q)} = \|v\|^2_{L_2(Q)} + \|Dv\|^2_{L_2(Q)} + \|\Delta v\|^2_{L_2(Q)} + \|v_t\|^2_{L_2(Q)}$$

$$\leq C \iint_Q w^2 h^2 dxdt,$$

onde $C > 0$ é uma constante e $[\ .\ ]_{W_2^{2,1}(Q)}$ é uma norma em $W_2^{2,1}(Q)$ equivalente à norma usual. Portanto, vale a seguinte estimativa:

$$\|v\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \iint_Q |w(x,t)|^2 |h(x,t)|^2 dxdt. \tag{2.10}$$

Como $h^2 \in L_{9/2}(Q) \subset L_{9/7}(Q)$ e $w^2 \in L_{9/2}(Q)$, usando a desigualdade de Hölder temos:

$$\iint_Q |w(x,t)|^2 |h(x,t)|^2 dxdt \leq \|h^2\|_{L_{9/7}(Q)} \|w_2^2\|_{L_{9/2}(Q)} = \|h^2\|_{L_{9/7}(Q)} \|w\|^2_{L_9(Q)}.$$

Então das duas últimas desigualdades, segue que

$$\|v\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \|h^2\|_{L_{9/7}(Q)} \|w\|^2_{L_9(Q)}.$$

Assim, para cada $\lambda \in [0,1]$, temos que $T_\lambda : B \to W_2^{2,1}(Q)$ é um operador contínuo. Usando novamente o Teorema 1.11, temos uma imersão contínua e compacta de $W_2^{2,1}(Q)$ em $L_9(Q)$. Logo, para cada $\lambda \in [0,1]$, o operador $T_\lambda : B \to B$, é contínuo e compacto, como queríamos.

c) Vamos mostrar que dado $A \subset B$ limitado, então para todo $w \in B$, $T_\lambda w$ é um operador contínuo em λ e uniformemente com respeito a $w \in A$.

De fato, consideremos $A \subset B$ limitado e $w \in A$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \in [0,1]$, $v_i := T_{\lambda_i} w$, para $i = 1, 2$, e $v = v_1 - v_2$. De (P^{λ}_{aux}) temos que v satisfaz ao seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = (\lambda_1 - \lambda_2) h & em \quad Q, \\ \partial v / \partial n = 0 & em \quad \partial\Omega \times (0, T], \\ v = 0 & em \quad \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{2.11}$$

onde $h := aw + bw^2 - w^3 + g$.

Note que se multiplicarmos a equação do problema acima por v e integrarmos em $\Omega \times (0, t)$, para $t \in (0, T]$, temos

$$\int_0^t \int_\Omega v v_t \, dxdt - \int_0^t \int_\Omega v \Delta v \, dxdt = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^t \int_\Omega vh \, dxdt.$$

Procedendo como na obtenção das desigualdades (2.4) e (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_\Omega v^2(t) dx + \int_0^t \int_\Omega |Dv|^2 \, dxdt &= (\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^t \int_\Omega vh \, dxdt \\ &\leq |\lambda_1 - \lambda_2| \int_0^t \int_\Omega |v||h| \, dxdt. \end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Young, na inequação acima,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_\Omega v^2(t) dx + \int_0^t \int_\Omega |Dv|^2 dxdt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega v^2 dxdt + \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|^2}{2} \int_0^t \int_\Omega h^2 dxdt. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Antes de tudo note que a última integral acima é finita. De fato, defina $h := aw + bw^2 - w^3$. Usando a Desigualdade de Young temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega h^2 dxdt = \int_0^T \int_\Omega (d + g)^2 dxdt &= \int_0^T \int_\Omega (d^2 + 2dg + g^2) dxdt \\ &\leq 2 \int_0^T \int_\Omega d^2 dxdt + 2 \int_0^T \int_\Omega g^2 dxdt \\ &\leq C \int_0^T \int_\Omega (w^2 + w^6) dxdt + 2\|g\|^2_{L_2(Q)} \leq M < \infty, \end{aligned}$$

onde M depende de $\|a\|_{L_\infty(Q)}, \|b\|_{L_\infty(Q)}, \|g\|_{L_2(Q)}$ e $\|w\|_{L_9(Q)}$, pois $w \in A$ e $A \subset L^9(Q)$ é limitado.

Da equação (2.12), temos que

$$\int_\Omega v^2(t) dx \leq \int_0^t \int_\Omega v^2 dxdt + |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \int_0^t \int_\Omega h^2 dxdt$$

$$\leq \int_0^t \int_\Omega v^2 dxdt + |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \int_0^T \int_\Omega h^2 dxdt. \tag{2.13}$$

Portanto, usando o Lema de Gronwall com $C_1 = 1$, $C_2 = |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \int_0^T \int_\Omega h^2 dxdt$ e $\xi(t) = \int_\Omega v^2(t)dx$, obtemos

$$\int_\Omega v^2(t)dx \leq e^T |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \int_0^T \int_\Omega h^2 dxdt$$

para todo $t \in (0, T]$. Integrando em $[0, T]$ cada membro da desigualdade acima temos,

$$\iint_Q v^2 dxdt \leq Te^T |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \iint_Q h^2 dxdt \leq C \iint_Q h^2 dxdt,$$

onde $C > 0$ é constante.

Tomando $t = T$ e substituindo a última desigualdade em (2.13), obtemos

$$\int\int_Q v^2 dxdt + \int\int_Q |Dv|^2 dxdt \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|^2, \tag{2.14}$$

onde $C > 0$ é constante.

Multiplicando a primeira equação de (2.11) por $-\Delta v$ e integrando em $\Omega \times (0, t)$ com $0 \leq t \leq T$, como também multiplicando a primeira equação por v_t, e integrando em $\Omega \times (0, t)$ com $0 \leq t \leq T$ e procedendo de modo análogo a obtenção da desigualdade (2.9), temos que

$$\iint_Q v_t^2 dxdt + \iint_Q (\Delta v)^2 dxdt \leq |\lambda_1 - \lambda_2|^2 \iint_Q h^2 dxdt.$$

De onde,

$$\int\int_Q v_t^2 dxdt + \int\int_Q (\Delta v)^2 dxdt \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|^2,$$

onde $C > 0$ é constante.

Pelo Teorema (1.11), pela desigualdade (2.14) e pela desigualdade anterior, temos

$$\|v\|^2_{L_9(Q)} \leq \bar{C}\|v\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \bar{C}|\lambda_1 - \lambda_2|^2,$$

daí,

$$\|v\|_{L_9(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|,$$

onde $C > 0$ não depende de λ_1 e λ_2.

Assim temos que $T_{(.)}w : [0, 1] \to B$ é contínua em λ e uniformemente com respeito a $w \in A$, como queríamos mostrar.

d) A seguir mostraremos que o operador T_0 possui único ponto fixo em B.

De fato, se $\lambda = 0$, para todo $w \in L_9(Q)$ temos que o problema (P_{aux}^{λ}) se torna,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 & em \quad Q, \\ \partial v / \partial n = 0 & em \quad \partial\Omega \times (0,T], \\ v = v_0 & em \quad \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Pelo Teorema 1.13 existe única solução $v \in W_2^{2,1}(Q)$ do problema acima. Logo $T_0(w) = v$, para todo $w \in L_9(Q)$. Então v é o único ponto fixo de T_0.

e) Finalmente mostremos que existe uma constante $K > 0$ tal que todo possível ponto fixo $v \in L_9(Q)$ de T_λ, para algum $\lambda \in [0,1]$, satisfaz $\|v\|_{L_9(Q)} \leq K$.

Para isso iremos estimar a norma de um possível ponto fixo v de T_λ. Consideremos $v \in L_9(Q)$ ponto fixo de T_λ para algum $\lambda \in [0,1]$, então v satisfaz ao seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \lambda(av + bv^2 - v^3 + g) & em \quad Q, \\ \partial v / \partial n = 0 & em \quad \partial/\Omega \times (0,T], \\ v = v_0 & em \quad \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Multiplicando a primeira equação do problema acima por v e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $t \in (0,T]$, temos

$$\int_0^t \int_\Omega v v_t dxdt - \int_0^t \int_\Omega v \Delta v dxdt = \lambda \int_0^t \int_\Omega (av^2 + bv^3 - v^4 + vg) dxdt. \tag{2.16}$$

Usando a condição inicial e a de bordo do último problema, bem como as identidades de Green, na equação acima, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v^2(t)dx + \int_0^t \int_\Omega |Dv|^2 dxdt + \lambda \int_0^t \int_\Omega v^4 dxdt$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega v_0^2 dx + \lambda \int_0^t \int_\Omega \left(av^2 + bv^3\right) dxdt + \lambda \int_0^t \int_\Omega vg\, dxdt.$$

Usando as desigualdades de Hölder e de Young na ultima integral, observando que $v^3 \leq |v|^3 = |v|v^2 \leq C_\varepsilon v^2 + \varepsilon v^4$, para todo $\varepsilon > 0$ e que $0 \leq \lambda \leq 1$, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v^2(t)dx + \int_0^t \int_\Omega |Dv|^2 dxdt + \lambda \int_0^t \int_\Omega v^4 dxdt$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega v_0^2 dx + \|a\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \int_\Omega v^2 dxdt + \|b\|_{L^\infty(Q)} \int_0^t \int_\Omega |v|^3 dxdt$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_0^t\int_\Omega v^2dxdt+\frac{\lambda}{2}\int_0^t\int_\Omega g^2dxdt$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_\Omega v_0^2dx+\|a\|_{L^\infty(Q)}\int_0^t\int_\Omega v^2dxdt+\|b\|_{L^\infty(Q)}\int_0^t\int_\Omega(C_\varepsilon v^2+\varepsilon v^4)dxdt$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_0^t\int_\Omega v^2dxdt+\frac{\lambda}{2}\int_0^t\int_\Omega g^2dxdt$$

Tomando $\varepsilon>0$ tal que $\varepsilon\|b\|_{L_\infty(Q)}\geq\lambda/2$, temos da desigualdade acima que,

$$\int_\Omega v^2(t)dx+\int_0^t\int_\Omega|Dv|^2dxdt+\frac{\lambda}{2}\int_0^t\int_\Omega v^4dxdt$$

$$\leq C\left(\|v_0\|^2_{L_2(\Omega)}+\|g\|^2_{L_2(Q)}+\int_0^t\int_\Omega v^2dxdt\right). \tag{2.17}$$

Da desigualdade acima temos,

$$\int_\Omega v^2(t)dx\leq C\left(\|v_0\|^2_{L_2(\Omega)}+\|g\|^2_{L_2(Q)}\right)+C\int_0^t\int_\Omega v^2dxdt.$$

Usando o Lema de Gronwall segue

$$\int_\Omega v^2(t)dx\leq Ce^{CT}\left(\|v_0\|^2_{L_2(\Omega)}+\|g\|^2_{L_2(Q)}\right),$$

para todo $t\in(0,T)$.

Integrando ambos os membros em $(0,t)$, com $t\in(0,T)$,

$$\int_0^t\int_\Omega v^2(t)dxdt\leq C\left(\|v_0\|^2_{L_2(\Omega)}+\|g\|^2_{L_2(Q)}\right).$$

Portanto, da desigualdade acima e de (2.17), temos

$$\int_\Omega v^2(t)dx+\int_0^t\int_\Omega|Dv|^2dxdt+\lambda\int_0^t\int_\Omega v^4dxdt\leq C\left(\|v_0\|^2_{L_2(\Omega)}+\|g\|^2_{L_2(Q)}\right), \tag{2.18}$$

para todo $t\in(0,T]$, onde $C>0$ depende apenas de $\|a\|_{L_\infty(Q)},\|b\|_{L_\infty(Q)},\Omega$ e T.

Multiplicando a primeira equação do problema (2.15) por v_t e integrando em $\Omega\times(0,t)$, para $t\in(0,T]$, temos

$$\int_0^t\int_\Omega(v_t)^2dxdt-\int_0^t\int_\Omega v_t\Delta vdxdt=\lambda\int_0^t\int_\Omega -v_tv^3dxdt+\lambda\int_0^t\int_\Omega(av_tv+bv_tv^2+v_tg)dxdt. \tag{2.19}$$

Usando as identidades de Green, bem como as condições de bordo do problema (2.15), temos

$$\int_0^t\int_\Omega v_t\Delta vdxdt=\int_0^t\left[\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial n}v_tdS-\int_\Omega D(v_t(t)).Dv(t)dxdt\right]dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\int_\Omega |Dv(t)|^2 dxdt = -\frac{1}{2}\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv_0|^2 dx. \tag{2.20}$$

Agora, aplicando as desigualdades de Hölder e Young em cada parcela, da última integral em (2.19), obtemos

$$\int_0^t \int_\Omega (av_t v + bv_t v^2 + v_t g) dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \left(C_\varepsilon |a| v^2 + \varepsilon |a| v_t^2 + \varepsilon |b| v_t^2 + C_\varepsilon |b| v^4 + C_\varepsilon g^2 + \varepsilon v_t^2 \right) dxdt \tag{2.21}$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Além disso,

$$\int_0^t \int_\Omega v_t v^3 dxdt = \frac{1}{4}\int_0^t \int_\Omega (v^4)_t dxdt = \frac{1}{4}\int_\Omega v^4(t) dx - \frac{1}{4}\int_\Omega v_0^4 dx,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Substituindo (2.20), (2.21) e a igualdade acima em (2.19), obtemos

$$\int_0^t \int_\Omega (v_t)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx + \frac{\lambda}{4}\int_\Omega v^4(t) dx$$

$$\leq C_\varepsilon \|a\|_{L_\infty(Q)} \int_0^t \int_\Omega v^2 dxdt + \varepsilon \left(\|a\|_{L_\infty(Q)} + \|b\|_{L_\infty(Q)} + 1 \right) \int_0^t \int_\Omega (v_t)^2 dxdt$$

$$+ C_\varepsilon \|b\|_{L_\infty(Q)} \int_0^t \int_\Omega v^4 dxdt + C_\varepsilon \int_0^t \int_\Omega g^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv_0|^2 dx + \frac{1}{4}\int_\Omega v_0^4 dx.$$

Na desigualdade acima, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon \left(\|a\|_{L_\infty(Q)} + \|b\|_{L_\infty(Q)} + 1 \right) \leq 1/2$, temos que

$$\frac{1}{4}\int_0^t \int_\Omega (v_t)^2 dxdt + \frac{1}{4}\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx + \frac{\lambda}{4}\int_\Omega v^4(t) dx \leq C\|a\|_{L_\infty(Q)} \int_0^t \int_\Omega v^2 dxdt$$

$$+ C\|b\|_{L_\infty(Q)} \int_0^t \int_\Omega v^4 dxdt + C\int_0^t \int_\Omega g^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv_0|^2 dx + \frac{1}{4}\int_\Omega v_0^4 dx.$$

Usando a desigualdade (2.18) nas duas primeiras integrais do segundo membro da desigualdade anterior

$$\int_0^t \int_\Omega (v_t)^2 dxdt + \int_\Omega |Dv(t)|^2 dx + \lambda \int_\Omega v^4(t) dx \leq \bar{C} \left(\|v_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|g\|^2_{L_2(Q)} \right)$$

$$+ C(\|g\|^2_{L_2(Q)} + \|Dv_0\|^2_{L_2(Q)} + \|v_0\|^4_{L_4(Q)}),$$

para todo $t \in (0, t]$.

Portanto, como $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L_4(Q)$, temos

$$\int_0^t \int_\Omega (v_t)^2 dxdt + \int_\Omega |Dv(t)|^2 dx + \lambda \int_\Omega v^4(t) dx$$
$$\leq C\left(\|g\|^2_{L_2(Q)} + \|Dv_0\|^2_{L_2(Q)} + \|v_0\|^4_{W_2^2(Q)} \right), \tag{2.22}$$

para todo $t \in (0,t]$, onde $C > 0$ depende somente de $\|a\|_{L_\infty(Q)}, \|b\|_{L_\infty(Q)}, \Omega$ e T.

Finalmente, multiplicando por $-\Delta v$ a primeira equação do problema (2.15) e integrando em $\Omega \times (0,t)$, para $t \in (0,T]$, temos

$$-\int_0^t \int_\Omega v_t \Delta v dxdt + \int_0^t \int_\Omega |\Delta v|^2 dxdt = \lambda \int_0^t \int_\Omega (-av\Delta v - bv^2 \Delta v + v^3 \Delta v - g\Delta v) dxdt. \tag{2.23}$$

Utilizando as identidades de Green na primeira integral e no terceiro termos da última integral da desigualdade acima, como também usando as desigualdades de Hölder e Young nos demais termos da última integral, temos

$$\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx - \int_\Omega |Dv_0|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt + 3\lambda \int_0^t \int_\Omega v^2 |Dv|^2 dxdt$$

$$\leq \|a\|^2_{L_\infty} C_\varepsilon \int_0^t \int_\Omega v^2 dxdt + \|b\|^2_{L_\infty} C_\varepsilon \int_0^t \int_\Omega v^4 dxdt + C_\varepsilon \int_0^t \int_\Omega g^2 dxdt + 3\varepsilon \int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt.$$

Tomando $0 < \varepsilon < 1/3$,

$$\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt + \lambda \int_0^t \int_\Omega v^2 |Dv|^2 dxdt$$
$$\leq C\left(\|v\|^2_{L_2(Q)} + \|v\|^4_{L_4(Q)} + \|g\|^2_{L_2(Q)} + \|Dv_0\|^2_{L_2(\Omega)} \right).$$

Substituindo a desigualdade (2.18), na desigualdade anterior, temos

$$\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt + \lambda \int_0^t \int_\Omega v^2 |Dv|^2 dxdt$$
$$\leq C\left(\|v_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|g\|^2_{L_2(Q)} + \|Dv_0\|^2_{L_2(\Omega)} \right),$$

para todo $t \in (0,T]$. Portanto,

$$\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt + \lambda \int_0^t \int_\Omega v^2 |Dv|^2 dxdt$$
$$\leq C\left(\|v_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|g\|^2_{L_2(Q)} + \|Dv_0\|^2_{L_2(\Omega)} \right),$$

para todo $t \in (0,T]$, onde $C > 0$ depende apenas de $\|a\|_{L_\infty(Q)}, \|b\|_{L_\infty(Q)}, T$ e Ω.

Por fim, pelas desigualdades (2.18), (2.22) e pela última desigualdade

$$\|v\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|v_0\|^4_{W_2^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L_2(Q)} + \|v_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|Dv_0\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$

$$\leq C\left(\|v_0\|^4_{W_2^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L_2(Q)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}\right).$$

Portanto, pelo teorema 1.11 e pela desigualdade acima temos

$$\|v\|_{L_9(Q)} \leq \bar{C}\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(Q)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right), \tag{2.24}$$

onde $\bar{C}, C > 0$ dependem somente de $\|a\|_{L_\infty}, \|b\|_{L_\infty}, T$ e Ω, como queríamos mostrar.

Como as hipóteses **(a)** a **(e)** são satisfeitas, pelo Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder (Teorema 1.14), temos que existe um ponto fixo do operador T_1 isto é $v = T_1 v$, com $v \in L_9(Q) \cap W_2^{2,1}(Q)$. Logo v é solução do problema (P_{aux}) e satisfaz a estimativa (2.1).

■

Observação 2.1 *Tomando o termo $-cv^3$ com $c > 0$ constante, no lugar de $-v^3$ no problema (P_{aux}), podemos observar que os resultados obtidos nesse capítulo continuam válidos.*

2.2 Regularidade do Problema Auxiliar

Mostraremos um resultado que nos dá a regularidade de solução do problema auxiliar.

Teorema 2.2 *Assuma $a, b \in L_\infty(Q)$, $g \in L_q(Q)$ com $q \geq 2$ e $v_0 \in W_2^2(\Omega)$, tal que $\partial v_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$. Seja Ω um domínio limitado de classe C^2. Se $v \in W_2^{2,1}(Q)$ é a solução do problema (P_{aux}) dada pelo Teorema 2.1, então $v \in W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)$, onde $\widetilde{q} = \min\{q, 10/3\}$ e satisfaz a seguinte estimativa:*

$$\|v\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^6_{W_2^2(\Omega)} + \|g\|_{L_q(Q)} + \|g\|^3_{L_q(Q)}\right), \tag{2.25}$$

onde C depende de $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|b\|_{L_\infty(Q)}$, T e Ω.

Se, além disso, $v_0 \in W^2_{3q/5}(\Omega)$, com $q \geq 10/3$, então $v \in W_q^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|v_0\|_{W^2_{3q/5}(\Omega)} + \|v_0\|^{18}_{W^2_{3q/5}(\Omega)} + \|g\|_{L_q(Q)} + \|g\|^9_{L_q(Q)}\right), \tag{2.26}$$

onde C depende de $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|b\|_{L_\infty(Q)}$, T e Ω.

Demonstração:

Defina $G := av + bv^2 - v^3 + g$. Como $v \in W_2^{2,1}(Q)$ e $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L_{10}(Q)$, temos que $G \in L_{\widetilde{q}}(Q)$ onde $\widetilde{q} = \min\{10/3, q\}$. Note que $q \geq \widetilde{q} \geq 2$. Então, pelo Teorema 1.13, $v \in W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)$, e satisfaz a estimativa

$$\|v\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|G\|_{L_{\widetilde{q}}(Q)} + \|v_0\|_{W_{\widetilde{q}}^{2-2/\widetilde{q}}(\Omega)}\right). \tag{2.27}$$

Tomando $p = 10/3$ no Corolário 1.9, temos $W_2^2(\Omega) \hookrightarrow W_{\widetilde{q}}^{2-2/\frac{10}{3}}(\Omega) \hookrightarrow W_{\widetilde{q}}^{2-2/\widetilde{q}}(\Omega)$, pois $\widetilde{q} \leq 10/3$. Logo, segue da última desigualdade que

$$\|v\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|G\|_{L_{\widetilde{q}}(Q)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right).$$

De onde,

$$\begin{aligned}\|v\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} &\leq C\,(\|a\|_{L_\infty(Q)}\|v\|_{L_{\widetilde{q}}(Q)} + \|b\|_{L_\infty(Q)}\|v^2\|_{L_{\widetilde{q}}(Q)} + \|v^3\|_{L_{\widetilde{q}}(Q)} + \|g\|_{L_{\widetilde{q}}(Q)} \\ &+\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}\Big) \leq C\left(\|v\|_{L_{\widetilde{q}}(Q)} + \|v\|^2_{L_{2\widetilde{q}}(Q)} + \|v\|^3_{L_{3\widetilde{q}}(Q)} + \|g\|_{L_{\widetilde{q}}(Q)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right) \\ &\leq C\left(\|v\|_{L_{3\widetilde{q}}(Q)} + \|v\|^2_{L_{3\widetilde{q}}(Q)} + \|v\|^3_{L_{3\widetilde{q}}(Q)} + \|g\|_{L_{\widetilde{q}}(Q)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right).\end{aligned} \tag{2.28}$$

Note que para $0 \leq \theta \leq 1$, temos $\theta^3 \leq \theta^2 \leq \theta$, e para $1 < \theta < \infty$, temos $\theta \leq \theta^2 \leq \theta^3$. Então para todo $\theta > 0$,

$$\theta^2 \leq \theta + \theta^3.$$

Com isso, da desigualdade (2.28), obtemos

$$\|v\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|v\|_{L_{3\widetilde{q}}(Q)} + \|v\|^3_{L_{3\widetilde{q}}(Q)} + \|g\|_{L_{\widetilde{q}}(Q)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right). \tag{2.29}$$

Além disso, temos $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L_{3\widetilde{q}}(Q)$, então da última desigualdade e da inequação (2.24), segue

$$\|v\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|^3_{W_2^{2,1}(Q)} + \|g\|_{L_{\widetilde{q}}(Q)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right]$$

$$\leq C\left[\left(\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(Q)}\right) + \left(\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(Q)}\right)^3\right.$$
$$\left.+\|g\|_{L_{\widetilde{q}}(Q)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right].$$

Desenvolvendo o termo de potência cúbica, usando a desigualdade de Young em cada termo desse desenvolvimento, e procedendo de modo analálogo como na obtenção da desigualdade (2.29), obtemos

$$\|v\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|^6_{W_2^2(\Omega)} + \|g\|_{L_{\widetilde{q}}(Q)} + \|g\|^3_{L_{\widetilde{q}}(Q)}\right].$$

Portanto,

$$\|v\|_{W_{\tilde{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left[\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}^6 + \|g\|_{L_q(Q)} + \|g\|_{L_q(Q)}^3\right].$$

Agora, se $10/3 < q$ e $v_0 \in W_{3q/5}^2(\Omega)$, temos que $G \in L_{10/3}(Q)$ e pelo teorema 1.13 temos que $v \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|G\|_{L_{10/3}(Q)} + \|v_0\|_{W_{10/3}^{2-6/10}(\Omega)}\right).$$

Tomando $p = q$ no Corolário 1.9, temos para $q \geq 10/3$ que $W_{3q/5}^2(\Omega) \hookrightarrow W_q^{2-2/q}(\Omega)$. Em particular, pela estimativa anterior,

$$\|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|G\|_{L_{10/3}(Q)} + \|v_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)}\right).$$

De onde,

$$\begin{aligned}\|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} &\leq C\left(\|v\|_{L_{10}(Q)} + \|v\|_{L_{10}(Q)}^3 + \|g\|_{L_{10/3}(Q)} + \|v_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)}\right)\\ &\leq C\left(\|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)}^3 + \|g\|_{L_{10/3}(Q)} + \|v_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)}\right),\end{aligned}$$

pois $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L_{10}(Q)$.

Pela última desigualdade e pela inequação (2.24), temos

$$\begin{aligned}\|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} &\leq C\left[\left(\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(Q)}\right)\right.\\ &\left.+\left(\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(Q)}\right)^3 + \|g\|_{L_{10/3}(Q)} + \|v_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)}\right]\\ &\leq C\left[\|v_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}^6 + \|g\|_{L_{10/3}(Q)} + \|g\|_{L_{10/3}(Q)}^3\right]. \qquad (2.30)\end{aligned}$$

Por outro lado, $W_{10/3}^{2,1}(Q) \hookrightarrow L_\infty(Q)$, então $G \in L_q(Q)$. Com isso pelo Teorema 1.13, temos que $v \in W_q^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\begin{aligned}\|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C\left(\|G\|_{L_q(Q)} + \|v_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)}\right)\\ &\leq C\left(\|v\|_{L_{3q}(Q)} + \|v\|_{L_{3q}(Q)}^3 + \|v_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)} + \|g\|_{L_q(Q)}\right)\\ &\leq C\left(\|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|v\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)}^3 + \|v_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)} + \|g\|_{L_q(Q)}\right).\end{aligned}$$

Da desigualdade (2.30), temos

$$\begin{aligned}\|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C\left(\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_2^2(\Omega)}^{18} + \|g\|_{L_3(Q)} + \|g\|_{L_3(Q)}^9 + \|g\|_{L_q(Q)} + \|v_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)}\right)\\ &\leq C\left(\|v_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)} + \|v_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)}^{18} + \|g\|_{L_q(Q)} + \|g\|_{L_q(Q)}^9\right).\end{aligned}$$

■

2.3 Continuidade e Unicidade de Solução do Problema Auxiliar

Agora iremos demonstrar resultados sobre a continuidade de solução do problema auxiliar (P_{aux}) em relação ao termo forçante e aos dados iniciais. Estes resultados tem como consequência a unicidade da solução do problema auxiliar.

Teorema 2.3 *Sejam g_1 e $g_2 \in L_q(Q)$, com $q \geq 2$, v_0^1 e $v_0^2 \in W_2^2(\Omega)$ e sejam v_1, $v_2 \in W_2^{2,1}(Q)$ as soluções correspondentes do problema (P_{aux}), com (v_0^1, g_1) e com (v_0^2, g_2), respectivamente. Sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.1, v_1 e v_2 satisfazem a seguinte estimativa*

$$\|v_1 - v_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|v_0^1 - v_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|g_1 - g_2\|_{L_2(Q)}\right),$$

onde $C > 0$ depende de $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|b\|_{L_\infty(Q)}$, T e Ω.

Demonstração:

Considere $v := v_1 - v_2$ e $v_0 := v_0^1 - v_0^2$, então do problema (P_1) temos o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = Bv + (g_1 - g_2) & \text{em } Q, \\ \partial v/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\ v = v_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{2.31}$$

onde $B := a + b(v_1 + v_2) - (v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2)$.

Observe que, usando a Desigualdade de Young,

$$B \leq a + \frac{b^2}{2} + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)^2 - (v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2) = a + \frac{b^2}{2} - \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2}\right) \leq a + \frac{b^2}{2}, \tag{2.32}$$

Então, $B \in L_\infty(Q)$ e satisfaz

$$\max_{\bar{Q}} B \leq \max_{\bar{Q}}\left(a + \frac{b^2}{2}\right) := M.$$

Multiplicando a primeira equação do problema (2.31), por ve^{-2Mt} e integrando em $(0, t) \times \Omega$, com $0 < t \leq T$, temos

$$\int_0^t \int_\Omega v_t v e^{-2Mt} dx dt - \int_0^t \int_\Omega v \Delta v e^{-2Mt} dx dt = \int_0^t \int_\Omega B v^2 e^{-2Mt} dx dt$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2) v e^{-2Mt} dx dt. \tag{2.33}$$

Por outro lado, observe que

$$v_t v e^{-2Mt} = \frac{1}{2}(v^2)_t e^{-2Mt} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(v^2 e^{-2Mt})_t = \frac{1}{2}(v^2)_t e^{-2Mt} - v^2 M e^{-2Mt}.$$

De onde,

$$v_t v e^{-2Mt} = \frac{1}{2}(v^2)_t e^{-2Mt} + v^2 M e^{-2Mt}.$$

Então substituindo a última igualdade em (2.33), temos

$$\int_0^t \int_\Omega \left(\frac{1}{2}(v^2 e^{-2Mt})_t + v^2 M e^{-2Mt}\right) dxdt + \int_0^t \int_\Omega e^{-2Mt}|Dv|^2 dxdt$$
$$= \int_0^t \int_\Omega B v^2 e^{-2Mt} dxdt + \int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2) v e^{-2Mt} dxdt,$$

de onde,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v(t)^2 e^{-2Mt} dx + \int_0^t \int_\Omega e^{-2Mt}|Dv|^2 dxdt$$
$$= \int_0^t \int_\Omega (B - M) v^2 e^{-2Mt} dxdt + \int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2) v e^{-2Mt} dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega v_0^2 dx.$$

Portanto, usando a Desigualdade de Young, e o fato que $B - M \leq 0$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v(t)^2 e^{-2Mt} dx + \int_0^t \int_\Omega e^{-2Mt}|Dv|^2 dxdt$$
$$\leq \int_0^t \int_\Omega (B - M) v^2 e^{-2Mt} dxdt + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 e^{-2Mt} dxdt + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega v^2 e^{-2Mt} dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\int_\Omega v_0^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 e^{-2Mt} dxdt + \frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega v^2 e^{-2Mt} dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega v_0^2 dx. \quad (2.34)$$

Logo,

$$\int_\Omega v(t)^2 e^{-2Mt} dx \leq \int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 e^{-2Mt} dxdt + \int_0^t \int_\Omega v^2 e^{-2Mt} dxdt + \int_\Omega v_0^2 dx$$
$$\leq \int_0^T \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 e^{-2Mt} dxdt + \int_0^t \int_\Omega v^2 e^{-2Mt} dxdt + \int_\Omega v_0^2 dx$$

Aplicando o Lema de Gronwall, temos

$$e^{-2Mt}\int_\Omega v(t)^2 dx \leq e^t \left(\int_0^T \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 e^{-2Mt} dxdt + \int_\Omega v_0^2 dx\right),$$

e portanto,

$$\int_\Omega v(t)^2 dx \leq C \left(\int_0^T \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 e^{-2Mt} dxdt + \int_\Omega v_0^2 dx\right)$$

$$\leq C\left(\int_0^T\int_\Omega(g_1-g_2)^2dxdt+\int_\Omega v_0^2dx\right), \tag{2.35}$$

onde $C>0$ depende somente de T.

Da desigualdade (2.34), podemos ter também

$$\int_0^t\int_\Omega e^{-2Mt}|Dv|^2dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega(g_1-g_2)^2e^{-2Mt}dxdt+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega v^2e^{-2Mt}dxdt+\int_\Omega v_0^2dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega(g_1-g_2)^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega v^2dxdt+\int_\Omega v_0^2dx$$

Então pela desigualdade (2.35), aplicada ao seguindo termo acima, temos

$$e^{-2MT}\int_0^t\int_\Omega|Dv|^2dxdt\leq\int_0^t\int_\Omega e^{-2Mt}|Dv|^2dxdt$$
$$\leq C\left(\int_0^t\int_\Omega(g_1-g_2)^2dxdt+\int_\Omega v_0^2dx\right),$$

onde $C>0$ depende somente de T.

Com isso, da última desigualdade e de (2.35) obtemos,

$$\int_\Omega v(t)^2dx+\int_0^t\int_\Omega|Dv|^2dxdt\leq C\left(\int_0^T\int_\Omega(g_1-g_2)^2dxdt+\int_\Omega v_0^2dx\right). \tag{2.36}$$

Agora multiplicando a primeira equação do problema acima por v_t e integrando em $(0,t)\times\Omega$, com $0\leq t\leq T$, temos

$$\int_0^t\int_\Omega v_t^2dxdt-\int_0^t\int_\Omega v_t\Delta v\,dxdt=\int_0^t\int_\Omega(Bv+(g_1-g_2))v_tdxdt.$$

Usando integração por partes, e as condições inicial e de bordo do problema (2.31), segue

$$\int_0^t\int_\Omega v_t^2dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega|Dv(t)|^2dx=\int_0^t\int_\Omega(Bv+(g_1-g_2))v_tdxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega|Dv_0|^2dx. \tag{2.37}$$

Pela Desigualdade de Young, temos

$$\int_0^t\int_\Omega(g_1-g_2)v_tdxdt=\int_0^t\int_\Omega\sqrt{2}(g_1-g_2)\frac{1}{\sqrt{2}}v_t\,dxdt$$
$$\leq\int_0^t\int_\Omega(g_1-g_2)^2dxdt+\frac{1}{4}\int_0^t\int_\Omega v_t^2dxdt.$$

E pela Desigualdade de Hölder generalizada temos,

$$\int_0^t Bvv_tdxdt\leq\left(\int_0^t\int_\Omega v_t^2dxdt\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_\Omega v^{10/3}dxdt\right)^{3/10}\left(\int_0^t\int_\Omega B^5dxdt\right)^{1/5}$$

$$\leq \left(\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dxdt\right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_\Omega v^{10/3} dxdt\right)^{3/10} \|B\|_{L_5(Q)}$$

Portanto, substituindo estas duas últimas desigualdades em (2.37), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx \leq \int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 dxdt + \frac{1}{4}\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dxdt \\ + \left(\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dxdt\right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_\Omega v^{10/3} dxdt\right)^{3/10} \|B\|_{L_5(Q)} + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv_0|^2 dx.\end{aligned} \tag{2.38}$$

De acordo com a desigualdade (2.32), temos

$$\|B\|_{L_5(Q)} \leq \left\|a + \frac{b^2}{2}\right\|_{L_5(Q)} \leq C\left\|a + \frac{b^2}{2}\right\|_{L_\infty(Q)} \leq C,$$

onde $C > 0$ depende somente de $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|b\|_{L_\infty(Q)}$, Ω e T.

Então, usando a última desigualdade em (2.38),

$$\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx \leq \int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 dxdt + \frac{1}{4}\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dxdt$$

$$+C\left(\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dxdt\right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_\Omega v^{10/3} dxdt\right)^{3/10} + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv_0|^2 dx \leq \int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 dxdt$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dxdt + C\left[\varepsilon\left(\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dxdt\right) + C_\varepsilon\left(\int_0^t \int_\Omega v^{10/3} dxdt\right)^{3/5}\right] + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv_0|^2 dx.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que, $(1/4 + C.\varepsilon) < 1/2$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega v_t^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx$$

$$\leq C\left[\int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 dxdt + \left(\int_0^t \int_\Omega v^{10/3} dxdt\right)^{3/5} + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv_0|^2 dx\right]. \tag{2.39}$$

Desta vez, multiplicando por $-\Delta v$, a primeira equação do problema (2.31) e integrando em $(0,t) \times \Omega$, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt$$

$$= -\int_0^t \int_\Omega Bv\Delta v\, dxdt - \int_0^t \int_\Omega \Delta v(g_1 - g_2) dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv_0|^2 dx.$$

Usando as Desigualdades de Hölder e Young, no segundo membro da igualdade acima, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|B\|_{L_5(Q)} \left(\int_0^t \int_\Omega v^{10/3} dxdt\right)^{3/10} \left(\int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt\right)^{1/2} + \frac{1}{4}\int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt \\
&\quad + \int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv_0|^2 dx \\
&\leq C \left(\int_0^t \int_\Omega v^{10/3} dxdt\right)^{3/10} \left(\int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt\right)^{1/2} + \frac{1}{4}\int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt \\
&\quad + \int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv_0|^2 dx \\
&\leq C \left[C_\varepsilon \left(\int_0^t \int_\Omega v^{10/3} dxdt\right)^{3/5} + \varepsilon \left(\int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 dxdt + \int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv_0|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que, $(C.\varepsilon + 1/4) < 1/2$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta v)^2 \\
&\leq C \left[\left(\int_0^t \int_\Omega v^{10/3} dxdt\right)^{3/5} + \int_0^t \int_\Omega (g_1 - g_2)^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Dv_0|^2 dx \right],
\end{aligned}
$$

com $C > 0$ dependendo somente de $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|b\|_{L_\infty(Q)}$, Ω e T.

Somando as estimativas (2.36), (2.39) e a estimativa acima, temos

$$
\|v\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left(\|v\|^2_{L_{10/3}(Q)} + \|g_1 - g_2\|^2_{L_2(Q)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} \right). \tag{2.40}
$$

Como $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow\hookrightarrow L_{10/3}(Q) \hookrightarrow L_2(Q)$, então pelo Teorema 1.15, temos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\eta(\varepsilon) > 0$ tal que a seguinte estimativa é válida

$$
\|v\|^2_{L_{10/3}(Q)} \leq \varepsilon \|v\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} + \eta(\varepsilon)\|v\|^2_{L_2(Q)}.
$$

Logo, tomando $\varepsilon > 0$ tal que, $C.\varepsilon < 1/2$, na desigualdade acima e substituindo-a em (2.40), temos pela desigualdade (2.36),

$$
\|v\|^2_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left(\|v\|^2_{L_2(Q)} + \|g_1 - g_2\|^2_{L_2(Q)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} \right) \leq C \left(\|g_1 - g_2\|^2_{L_2(Q)} + \|v_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} \right), \tag{2.41}
$$

Onde $C > 0$ depende somente de $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|b\|_{L_\infty(Q)}$, Ω e T.

O que prova o teorema.

$\blacksquare$

Corolário 2.4 *Sejam* g_1 *e* $g_2 \in L_q(Q)$, *com* $q \geq 2$, v_0^1 *e* $v_0^2 \in W_2^2(\Omega)$ *e sejam* $v_1, v_2 \in W_2^{2,1}(Q)$ *as soluções correspondentes do problema* (P_{aux}), *com* (v_0^1, g_1) *e com* (v_0^2, g_2), *respectivamente. Sob as mesmas hipóteses do Teorema 2.1, temos* $v_1, v_2 \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)$, *onde* $\bar{q} = \min\{q, 10/3\}$, *e satisfazem a seguinte estimativa*

$$\|v_1 - v_2\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|v_0^1 - v_0^1\|_{W_2^2(\Omega)} + \|g_1 - g_2\|_{L_q(Q)}\right),$$

onde $C > 0$ *depende de* $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|b\|_{L_\infty(Q)}$, T *e* Ω.

Se além disso, $v_0^i \in W_{3q/5}^2(\Omega)$, *com* $2 \leq 3q/5 < \infty$, *para* $i = 1, 2$, *então* $v_1, v_2 \in W_p^{2,1}(Q)$, *e satisfazem a seguinte estimativa*

$$\|v_1 - v_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|v_0^1 - v_0^2\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)} + \|g_1 - g_2\|_{L_q(Q)}\right),$$

onde $C > 0$ *depende de* $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|b\|_{L_\infty(Q)}$, T *e* Ω.

Demonstração:

Sejam v e v_0 como na demostração do teorema anterior.

Observe que $Bv + (g_1 - g_2) \in L_{\bar{q}}(Q)$, onde $\bar{q} = \min\{q, 10/3\}$. Como $v_0 \in W_2^2(\Omega) \hookrightarrow W_{10/3}^{2-2/\frac{10}{3}}(\Omega) \hookrightarrow W_{\bar{q}}^{2-2/\bar{q}}(\Omega)$, então pelo Teorema 1.13 temos que $v \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)$ satisfazendo

$$\|v\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|v_0\|_{W_{\bar{q}}^{2-2/\bar{q}}(\Omega)} + \|Bv + (g_1 - g_2)\|_{L_{\bar{q}}}\right).$$

Usando a desigualdade triangular e a de Hölder,

$$\|v\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v\|_{L_{\bar{q}}(Q)} + \|g_1 - g_2\|_{L_q(Q)}\right).$$

Pelo Teorema 1.11 temos que $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L_{\bar{q}}(Q)$, então segue da desigualdade (2.41) que

$$\begin{aligned}\|v\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} &\leq C\left(\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|v\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|g_1 - g_2\|_{L_q(Q)}\right)\\ &\leq C\left(\|v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|g_1 - g_2\|_{L_q(Q)}\right).\end{aligned} \tag{2.42}$$

Suponha agora $v_0 \in W_{3q/5}^2(\Omega)$. Então pelo Corolário 1.9 temos que $v_0 \in W_{3q/5}^2(\Omega) \hookrightarrow W_q^{2-2/q}(\Omega)$, com $2 \leq 3q/5 \leq \infty$, o que implica que $\bar{q} = 10/3$. Assim, temos que $v \in W_{10/3}^{2,1}(Q) \subset L_\infty(Q)$, de onde $Bv + (g_1 - g_2) \in L_q(Q)$. Então, pelo Teorema 1.13, $v \in W_q^{2,1}(Q)$ e satisfaz a seguinte estimativa

$$\|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|v_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|Bv + (g_1 - g_2)\|_{L_q(Q)}\right),$$

$$\leq C\left(\|v_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)} + \|v\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}} + \|g_1 - g_2\|_{L_q(Q)}\right).$$

Segue da última desigualdade e de (2.42), que v satisfaz

$$\|v\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|v_0\|_{W^2_{3q/5}(\Omega)} + \|g_1 - g_2\|_{L_q(Q)}\right).$$

■

Corolário 2.5 *Sob as hipóteses do Teorema* 2.1, *a solução do problema* (P_{aux}) *é única.*

Demonstração:

Considere v_1 e v_2 soluções do problema (P_{aux}), então pelo teorema anterior, temos a seguinte estimativa,

$$\|v_1 - v_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|v_0 - v_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|g - g\|_{L_q(Q)}\right) = 0,$$

portanto $v_1 = v_2$. Assim, o problema (P_{aux}) possui única solução.

■

Capítulo 3

O Modelo de Solidificação 1

Neste capítulo, discutiremos resultados envolvendo o problema do modelo de Campo de Fase:

$$(P_1)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + f & \text{em } Q,\\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi = a\phi + b\phi^2 - \phi^3 + u & \text{em } Q,\\ \partial u/\partial n = \partial \phi/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T],\\ u = u_0, \phi = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t=0\}. \end{cases}$$

3.1 Existência de Solução para o Modelo de Solidificação 1

Teorema 3.1 *Assuma que* a, $b \in L_\infty(Q)$, l *uma constante,* $f \in L_q(Q)$, *com* $q \geq 2$, *e* u_0, $\phi_0 \in W_2^2(\Omega)$ *satisfazem* $\partial u_0/\partial n = \partial \phi_0/\partial n = 0$. *Além disso, seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *um domínio limitado de classe* C^2. *Então existe uma solução* $(u,\phi) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ *do problema* (P_1). *Além disso, vale a seguinte estimativa,*

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|\phi_0\|_{W_2^2(Q)} + \|\phi_0\|^2_{W_2^2(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(Q)} + \|f\|_{L_q(Q)}\right), \quad (3.1)$$

onde $C > 0$ *dependendo apenas de* $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|b\|_{L_\infty(Q)}$, l, T *e de* Ω.

Demonstração:

Iremos aplicar o Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder no espaço de Banach

$$B := \{(u,\phi) : u \in L_3(Q), \phi \in L_9(Q)\}.$$

Para isso consideramos a família de operadores $T_\lambda : B \to B$, com $\lambda \in [0,1]$, definida por $(u,\phi) = T_\lambda(v,\psi)$ se, e somente se, v é solução do problema

$$
(P_1^\lambda)\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda\left(-l\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + f\right) & \text{em } Q,\\
\dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi = a\phi + b\phi^2 - \phi^3 + \lambda v & \text{em } Q,\\
\partial u/\partial n = \partial \phi/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T],\\
u = u_0, \phi = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t=0\}.
\end{cases}
$$

Iremos mostrar que o operador acima satisfaz as condições do Teorema de Leray-Schauder.

a) Primeiramente vamos mostrar que T_λ está bem definido para todo $\lambda \in [0,1]$.

De acordo com o Teorema 2.1, como $v \in L_3(Q)$, a segunda equação do problema (P_1^λ) possui solução $\phi \in W_3^{2,1}(Q)$. Do Teorema 1.11 com $q=3$, temos que $\phi \in L_\infty(Q) \subset L_9(Q)$. Em relação a primeira equação do problema acima, como $-l\phi_t + f \in L_{\bar{q}}(Q)$ onde $\bar{q} = \min\{3, q\} \geq 2$, temos que os teoremas 1.11 e 1.13 garantem a existência de uma solução $u \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \cap L_{10}(Q)$. Portanto, temos que a aplicação $T_\lambda : B \to B$, está bem definida.

b) Agora vamos mostrar que para cada $\lambda \in [0,1]$, $T_\lambda : B \to B$ é contínuo e compacto.

Sejam $(v_i, \psi_i) \in B$, e $(u_i, \phi_i) = T_\lambda(v_i, \psi_i)$, para $i = 1, 2$. Pelo Corolário 2.4, temos que a seguinte estimativa é satisfeita

$$
\|\phi_1 - \phi_2\|_{W_3^{2,1}(Q)} \leq C\lambda \|v_1 - v_2\|_{L_3(Q)} \leq C\|v_1 - v_2\|_{L_3(Q)},
$$

pois $0 \leq \lambda \leq 1$.

Considerando $\phi := \phi_1 - \phi_2$ e $u := u_1 - u_2$, pela primeira equação do problema (P_1^λ), temos que u e ϕ satisfazem ao problema

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\lambda l \dfrac{\partial \phi}{\partial t} & \text{em } Q,\\
\partial u/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T],\\
u = 0 & \text{em } \Omega \times \{t=0\}.
\end{cases}
$$

Como $\phi_t \in L_3(Q)$, aplicando o Teorema 1.13, à este problema obtemos

$$
\|u_1 - u_2\|_{W_3^{2,1}(Q)} \leq C\lambda l \|(\phi_1 - \phi_2)_t\|_{L_3(Q)} \leq C\|\phi_1 - \phi_2\|_{W_3^{2,1}(Q)},
$$

pois $0 \leq \lambda \leq 1$.

Então, pelas duas últimas desigualdades,

$$\begin{aligned}
&\|u_1 - u_2\|_{W_3^{2,1}(Q)} + \|\phi_1 - \phi_2\|_{W_3^{2,1}(Q)} \\
\leq C &\left(\|\phi_1 - \phi_2\|_{W_3^{2,1}(Q)} + \|v_1 - v_2\|_{L_3(Q)}\right) \leq C\|v_1 - v_2\|_{L_3(Q)} \\
&\leq C\|(v_1, \psi_1) - (v_2, \psi_2)\|_B.
\end{aligned}$$

Assim, para cada $\lambda \in [0,1]$, temos que $T_\lambda : B \to W_3^{2,1}(Q) \times W_3^{2,1}(Q)$ é um operador contínuo. Novamente pelo Teorema 1.11, temos a imersão contínua e compacta $W_3^{2,1}(Q) \times W_3^{2,1}(Q) \hookrightarrow\hookrightarrow B$. Logo, para cada $\lambda \in [0,1]$, o operador $T_\lambda : B \to B$, é contínuo e compacto, como queríamos.

c) Vamos mostrar que dado $A \subset B$ limitado, então para todo $(v, \psi) \in A$, $T_\lambda w$ é um operador contínuo em λ e uniformemente com respeito a $w \in A$.

De fato, considere $A \subset B$ limitado e $(v, \psi) \in A$. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \in [0,1]$, e para cada $i = 1, 2$ tomemos $(u_i, \phi_i) := T_{\lambda_i}(v, \psi)$. Então para cada $i = 1, 2$, (u_i, ϕ_i) satisfaz ao seguinte problema,

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta u_i = \lambda_i \left(-l\dfrac{\partial \phi_i}{\partial t} + f\right) & \text{em } Q, \\
\dfrac{\partial \phi_i}{\partial t} - \Delta \phi_i = a\phi_i + b\phi_i^2 - \phi_i^3 + \lambda_i v & \text{em } Q, \\
\partial u_i/\partial n = \partial \phi_i/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\
u_i = u_0,\ \phi_i = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}.
\end{cases} \tag{3.2}$$

Pelo Teorema 2.3 aplicado à segunda equação do problema acima que

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_{W_3^{2,1}(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|\,\|v\|_{L_3(Q)}. \tag{3.3}$$

Agora, considerando $u := u_1 - u_2$, da primeira equação do problema (P_1) temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -l\left(\lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t}\right) + (\lambda_1 - \lambda_2) f.$$

De onde,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \left[-l(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - l\lambda_2\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2}{\partial t}\right) + (\lambda_1 - \lambda_2) f\right].$$

Logo u satisfaz ao problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -l(\lambda_1 - \lambda_2)\dfrac{\partial \phi_1}{\partial t} - l\lambda_2\left(\dfrac{\partial \phi_1}{\partial t} - \dfrac{\partial \phi_2}{\partial t}\right) + (\lambda_1 - \lambda_2)f & \text{em } Q, \\ \partial u/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T], \\ u = 0 & \text{em } \Omega \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Como o segundo membro da equação do problema anterior pertence a $W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)$, onde $\bar{q} = \min\{q, 10/3\}$, então pelo Teorema 1.13,

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)} = \|u\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)}$$

$$\leq C\left\| -l(\lambda_1-\lambda_2)\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - l\lambda_2\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi_2}{\partial t}\right) + (\lambda_1-\lambda_2)f\right\|_{L_{\bar{q}}(Q)}$$

$$\leq C\left[l|\lambda_1-\lambda_2| \left\|\frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right\|_{L_{\bar{q}}(Q)} + l\lambda_2\left\|\frac{\partial}{\partial t}(\phi_1-\phi_2)\right\|_{L_{\bar{q}}(Q)} + |\lambda_1-\lambda_2|\,\|f\|_{L_{\bar{q}}(Q)}\right]. \quad (3.4)$$

Aplicando o Teorema 2.2 à segunda equação do problema (3.2),

$$\left\|\frac{\partial \phi_1}{\partial t}\right\|_{L_{\bar{q}}(Q)} \leq \|\phi_1\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)} \leq C.$$

E pela desigualdade (3.3), temos

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}(\phi_1-\phi_2)\right\|_{L_{\bar{q}}(Q)} \leq \left\|\frac{\partial}{\partial t}(\phi_1-\phi_2)\right\|_{L_3(Q)} \leq \|\phi_1-\phi_2\|_{W^{2,1}_3(Q)} \leq C|\lambda_1-\lambda_2|\,\|v\|_{L_3(Q)}.$$

Substituindo as duas últimas desigualdades em (3.4), obtemos,

$$\|u_1-u_2\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)} \leq C|\lambda_1-\lambda_2|.$$

Pelo Teorema (1.11), por (3.3) e pela desigualdade anterior, segue

$$\|u_1-u_2\|_{L_3(Q)} + \|\phi_1-\phi_2\|_{L_9(Q)} \leq \|u_1-u_2\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)} + \|\phi_1-\phi_2\|_{W^{2,1}_3(Q)} \leq C|\lambda_1-\lambda_2|.$$

Logo,

$$\|u_1-u_2\|_{L_3(Q)} + \|\phi_1-\phi_2\|_{L_9(Q)} \leq C|\lambda_1-\lambda_2|,$$

onde $C > 0$ não depende de λ_1 e λ_2.

Assim temos que $T_{(.)}w : [0,1] \to B$ é contínua em λ e uniformemente com respeito a $w \in A$, como queríamos mostrar.

d) A seguir mostraremos que o operador T_0 possui único ponto fixo em B.

De fato, para $\lambda = 0$ o problema (P_1^λ) se torna,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi = a\phi + b\phi^2 - \phi^3 & \text{em } Q, \\ \partial u/\partial n = \partial \phi/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T], \\ u = u_0,\ \phi = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Aplicando o Teorema 1.13 na primeira equação do problema acima, temos que existe única solução $u \in W_q^{2,1}(Q) \subset L_3(Q)$ desta equação. E aplicando os teoremas 2.3 e 2.1, na segunda equação, temos que existe única solução $\phi \in W_q^{2,1}(Q) \subset L_9(Q)$ desta equação. Portanto, (u, ϕ) é a única solução do problema anterior, logo $(u, \phi) \in B$ é o único ponto fixo de T_0.

e) Finalmente, mostraremos que existe uma constante $K > 0$ tal que todo possível ponto fixo $(u, \phi) \in B$ de T_λ, para algum $\lambda \in [0, 1]$, satisfaz a estimativa,

$$\|(u, \phi)\|_B \leq K.$$

Para isso iremos estimar a norma de um possível ponto fixo (u, ϕ) de T_λ. Considere $(u, \phi) \in B$ ponto fixo de T_λ para algum $\lambda \in [0, 1]$. Então, (u, ϕ) satisfaz ao seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda \left(-l\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + f \right) & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi = a\phi + b\phi^2 - \phi^3 + \lambda u & \text{em } Q, \\ \partial u/\partial n = \partial \phi/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T], \\ u = u_0,\ \phi = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Multiplicando a primeira equação do problema acima por $(u + \lambda l \phi)$ e integrando em $\Omega \times (0, t)$, com $0 \leq t \leq T$, temos

$$\int_0^t \int_\Omega u_t u \, dxdt + \lambda l \int_0^t \int_\Omega \phi u_t \, dxdt - \int_0^t \int_\Omega u \Delta u \, dxdt - \lambda l \int_0^t \int_\Omega \phi \Delta u \, dxdt$$

$$= \lambda \int_0^t \int_\Omega (u + \lambda l \phi) f \, dxdt - \lambda l \int_0^t \int_\Omega \phi_t u \, dxdt - \lambda^2 l^2 \int_0^t \int_\Omega \phi_t \phi \, dxdt.$$

Como

$$\lambda l \int_0^t \int_\Omega (\phi u_t + \phi_t u) dxdt = \lambda l \left(\int_\Omega \phi(t) u(t) \, dx - \int_\Omega \phi_0 u_0 \, dx \right),$$

então,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u(t)^2dx+\lambda l\int_\Omega \phi(t)u(t)\,dx+\frac{\lambda^2l^2}{2}\int_\Omega \phi(t)^2dx+\int_0^t\int_\Omega |Du|^2dxdt-\lambda l\int_0^t\int_\Omega \phi\Delta u\,dxdt$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2dx+\lambda l\int_\Omega \phi_0u_0\,dx+\frac{\lambda^2l^2}{2}\int_\Omega \phi_0^2dx+\lambda\int_0^t\int_\Omega (u+\lambda l\phi)f\,dxdt.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u(t)+\lambda l\phi(t))^2\,dx+\int_0^t\int_\Omega |Du|^2dxdt+\lambda l\int_0^t\int_\Omega D\phi Du\,dxdt$$

$$=\frac{1}{2}\int_\Omega (u_0+\lambda l\phi_0)^2\,dx+\lambda\int_0^t\int_\Omega (u+\lambda l\phi)f\,dxdt. \tag{3.6}$$

Multiplicando a segunda equação do problema (3.5) por ϕ, e integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $0<t\leq T$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \phi(t)^2dx+\int_0^t\int_\Omega |D\phi|^2dxdt=\frac{1}{2}\int_\Omega \phi_0^2dx$$

$$+\int_0^t\int_\Omega (a\phi^2+b\phi^3-\phi^4)dxdt+\lambda\int_0^t\int_\Omega u\phi\,dxdt.$$

Como $|\phi^3|=\phi^2|\phi|\leq C_\varepsilon\phi^2+\varepsilon\phi^4$ e pela desigualdade de Hölder e de Young, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \phi(t)^2dx+\int_0^t\int_\Omega |D\phi|^2dxdt$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_\Omega \phi_0^2dx+\|a\|_{L_\infty(Q)}\int_0^t\int_\Omega \phi^2dxdt+\|b\|_{L_\infty(Q)}\int_0^t\int_\Omega \phi^3dxdt-\int_0^t\int_\Omega \phi^4dxdt$$

$$+\lambda\int_0^t\int_\Omega u\phi\,dxdt\leq(\|a\|_{L_\infty(Q)}+C_\varepsilon\|b\|_{L_\infty(Q)})\int_0^t\int_\Omega \phi^2dxdt$$

$$+(\varepsilon\|b\|_{L_\infty(Q)}-1)\int_0^t\int_\Omega \phi^4dxdt+\lambda\int_0^t\int_\Omega u\phi\,dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega \phi_0^2dx.$$

Tomando $\varepsilon>0$, tal que $\varepsilon\|b\|_{L_\infty(Q)}\leq 1/2$, usando a desigualdade de Young na última integral da desigualdade acima e que $0\leq\lambda\leq 1$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \phi(t)^2dx+\int_0^t\int_\Omega |D\phi|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \phi^4dxdt$$

$$\leq C\int_0^t\int_\Omega \phi^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega u^2\,dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega \phi_0^2dx.$$

Multiplicando a última desigualdade por $(1+\lambda^2l^2)$ e somando à equação (3.6), obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[(u(t)+\lambda l\phi(t))^2+(1+\lambda^2l^2)\phi(t)^2\right]\,dx$$

$$+\int_0^t\int_\Omega(|Du|^2+\lambda l\,D\phi Du+(1+\lambda^2l^2)|D\phi|^2)dxdt+\frac{1}{2}(1+\lambda^2l^2)\int_0^t\int_\Omega\phi^4\,dxdt$$
$$\leq\frac{1}{2}\int_\Omega(u_0+\lambda l\phi_0)^2\,dx+\lambda\int_0^t\int_\Omega(u+\lambda l\phi)f\,dxdt$$
$$+\frac{1}{2}(1+\lambda^2l^2)\int_\Omega\phi_0^2dx+C(1+\lambda^2l^2)\int_0^t\int_\Omega\phi^2dxdt+\frac{1+\lambda^2l^2}{2}\int_0^t\int_\Omega u^2\,dxdt.$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young na equação acima,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\left[(u(t)+\lambda l\phi(t))^2+(1+\lambda^2l^2)\phi(t)^2\right]\,dx$$
$$+\int_0^t\int_\Omega(|Du|^2+\lambda l\,D\phi Du+(1+\lambda^2l^2)|D\phi|^2)dxdt+\frac{1}{2}(1+\lambda^2l^2)\int_0^t\int_\Omega\phi^4\,dxdt$$
$$\leq C\left(\int_\Omega\phi_0^2dx+\int_\Omega u_0^2dx+\int_0^t\int_\Omega f^2dxdt+\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt+\int_0^t\int_\Omega\phi^2dxdt\right).\tag{3.7}$$

Por outro lado, observe que

$$\int_\Omega\left(\frac{1}{2}u^2+\phi^2\right)dx\leq\int_\Omega\left[\frac{1}{2}u^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u+\sqrt{2}\lambda l\phi\right)^2+\phi^2\right]dx$$
$$=\int_\Omega\left[(u+\lambda l\phi)^2+\left(1+\lambda^2l^2\right)\phi^2\right]dx$$

e também,

$$\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|Du|^2+\left(1+\frac{\lambda^2l^2}{2}\right)|D\phi|^2\right)dxdt$$
$$\leq\int_0^t\int_\Omega\left(\frac{1}{2}|Du|^2+\frac{1}{2}|D(u+\lambda l\phi)|^2+\left(1+\frac{\lambda^2l^2}{2}\right)|D\phi|^2\right)dxdt$$
$$=\int_0^t\int_\Omega\left(|Du|^2+\lambda l\,D\phi Du+(1+\lambda^2l^2)|D\phi|^2\right)dxdt.$$

Substituindo as duas últimas desigualdades em (3.7), obtemos

$$\int_\Omega\left(u^2(t)+\phi^2(t)\right)dx+\int_0^t\int_\Omega\left(|Du|^2+|D\phi|^2+\phi^4\right)dxdt$$
$$\leq C\left(\int_\Omega\phi_0^2dx+\int_\Omega u_0^2dx+\int_0^t\int_\Omega f^2dxdt\right)+C\left(\int_0^t\int_\Omega\left(u^2+\phi^2\right)dxdt\right).$$

Utilizando a Desigualdade de Gronwall, temos

$$\int_\Omega\left(u^2(t)+\phi^2(t)\right)dx\leq C\left(\int_\Omega\phi_0^2dx+\int_\Omega u_0^2dx+\int_0^t\int_\Omega f^2dxdt\right).$$

Logo, pelas duas últimas desigualdades,

$$\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt+\int_0^t\int_\Omega\phi^2dxdt+\int_0^t\int_\Omega|Du|^2\,dxdt+\int_0^t\int_\Omega|D\phi|^2dxdt+\int_0^t\int_\Omega\phi^4\,dxdt$$

$$\leq C\left(\int_\Omega \phi_0^2 dx + \int_\Omega u_0^2 dx + \int_0^t\int_\Omega f^2 dxdt\right).$$

De onde,

$$\int_0^t\int_\Omega u^2 dxdt + \int_0^t\int_\Omega \phi^2 dxdt + \int_0^t\int_\Omega |Du|^2\, dxdt + \int_0^t\int_\Omega |D\phi|^2 dxdt + \int_0^t\int_\Omega \phi^4\, dxdt$$

$$\leq C\left(\|\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\right) \leq C\left(\|\phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\right), \tag{3.8}$$

onde $C > 0$ depende somente de $\|a\|_{L_\infty(Q)}, \|b\|_{L_\infty(Q)}, \Omega$ e T.

Multiplicando a segunda equação do problema (3.5) por ϕ_t e integrando em $\Omega \times (0, t)$, com $0 < t \leq T$, temos

$$\int_0^t\int_\Omega \phi_t^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi(t)|^2\, dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi_0|^2\, dxdt$$

$$+\int_0^t\int_\Omega a\phi\phi_t\, dxdt + \int_0^t\int_\Omega b\phi^2\phi_t dxdt - \int_0^t\int_\Omega \phi^3\phi_t dxdt + \lambda\int_0^t\int_\Omega u\phi_t\, dxdt.$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young e que $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\int_0^t\int_\Omega \phi_t^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi(t)|^2\, dxdt \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi_0|^2\, dxdt + C_\varepsilon\|a\|_{L_\infty(Q)}\int_0^t\int_\Omega \phi^2 dxdt$$

$$+\varepsilon\|a\|_{L_\infty(Q)}\int_0^t\int_\Omega \phi_t^2 dxdt + C_\varepsilon\|b\|_{L_\infty(Q)}\int_0^t\int_\Omega \phi^4 dxdt + \varepsilon\|b\|_{L_\infty(Q)}\int_0^t\int_\Omega \phi_t^2 dxdt$$

$$-\frac{1}{4}\int_\Omega \phi(t)^4 dx + \frac{1}{4}\int_\Omega \phi_0^4 dx + \varepsilon\int_0^t\int_\Omega \phi_t^2 dxdt + C_\varepsilon\int_0^t\int_\Omega u^2 dxdt.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon\left(1 + \|a\|_{L_\infty(Q)} + \|b\|_{L_\infty(Q)}\right) < 1/2$,

$$\int_0^t\int_\Omega \phi_t^2\, dxdt + \int_\Omega |D\phi(t)|^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega \phi(t)^4 dx \leq C\left(\int_\Omega |D\phi_0|^2\, dxdt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\int_\Omega \phi_0^4 dx + \int_0^t\int_\Omega \phi^2 dxdt + \int_0^t\int_\Omega \phi^4 dxd + \int_0^t\int_\Omega u^2 dxdt\right).$$

De onde,

$$\int_0^t\int_\Omega \phi_t^2\, dxdt + \int_\Omega |D\phi(t)|^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega \phi(t)^4 dx \leq C\left(\|D\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\phi_0\|^4_{L_4(\Omega)}\right.$$

$$\left.+\int_0^t\int_\Omega \phi^2 dxdt + \int_0^t\int_\Omega \phi^4 dxdt + \int_0^t\int_\Omega u^2 dxdt\right).$$

Pela desigualdade (3.8) temos,

$$\int_0^t\int_\Omega \phi_t^2\, dxdt + \int_\Omega |D\phi(t)|^2\, dxdt + \int_\Omega \phi(t)^4 dx$$

$$\leq C\left(\|\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|D\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\phi_0\|^4_{L_4(\Omega)} + \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\right)$$

$$\leq C\left(\|\phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|^4_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\right), \tag{3.9}$$

onde $C > 0$ depende somente de $l, \|a\|_{L_\infty(Q)}, \|b\|_{L_\infty(Q)}, \Omega$ e T.

Agora, multiplicando a primeira equação do problema anterior por u_t e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 < t \leq T$,

$$\int_0^t \int_\Omega u_t^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Du(t)|^2 dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du_0|^2 dx - l\lambda \int_0^t \int_\Omega \phi_t u_t\, dxdt + \lambda \int_0^t \int_\Omega f u_t\, dxdt.$$

Usando a Desigualdade de Young, para $\varepsilon > 0$ temos

$$\int_0^t \int_\Omega u_t^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Du(t)|^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du_0|^2 dx$$

$$+ C_\varepsilon l^2 \int_0^t \int_\Omega \phi_t^2 dxdt + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega u_t^2 dxdt + C_\varepsilon \int_0^t \int_\Omega f^2 dxdt + \varepsilon \int_0^t \int_\Omega u_t^2 dxdt.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < 1/4$, segue

$$\int_0^t \int_\Omega u_t^2 dxdt + \int_\Omega |Du(t)|^2 dx \leq C\left(\|Du_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(Q)} + \int_0^t \int_\Omega \phi_t^2 dxdt\right).$$

Logo, pela desigualdade (3.9),

$$\int_0^t \int_\Omega u_t^2 dxdt + \int_\Omega |Du(t)|^2 dx \leq C\left(\|\phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|^4_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\right), \tag{3.10}$$

onde $C > 0$ depende somente de $l, \|a\|_{L_\infty(Q)}, \|b\|_{L_\infty(Q)}, \Omega$ e T.

Multiplicando a primeira equação do problema 3.5 por $-\Delta u$ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 < t \leq T$, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |Du(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta u)^2 dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |Du_0|^2 dx + l\lambda \int_0^t \int_\Omega \phi_t \Delta v\, dxdt - \lambda \int_0^t \int_\Omega f \Delta u\, dxdt.$$

Procedendo de modo análogo ao que foi feito para obtermos a desigualdade (3.10), temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |Dv(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta u)^2 dxdt$$

$$\leq C\left(\|\phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|^4_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\right), \tag{3.11}$$

onde $C > 0$ depende somente de $l, \|a\|_{L_\infty(Q)}, \|b\|_{L_\infty(Q)}, \Omega$ e T.

Finalmente, multiplicando segunda equação do problema anterior por $-\Delta\phi$ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 < t \leq T$, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta\phi)^2 dxdt$$
$$= -\int_0^t \int_\Omega a\phi\Delta\phi\, dxdt - \int_0^t \int_\Omega b\phi^2\Delta\phi\, dxdt - \lambda\int_0^t \int_\Omega u\Delta\phi\, dxdt + \int_0^t \int_\Omega \phi^3\Delta\phi\, dxdt.$$

Como,

$$\int_0^t \int_\Omega \phi^3\Delta\phi\, dxdt = -\int_0^t \int_\Omega D\phi^3 \cdot D\phi\, dxdt = -3\int_0^t \int_\Omega \phi D\phi\, dxdt.$$

Temos das duas últimas equações,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta\phi)^2 dxdt + 3\int_0^t \int_\Omega |D\phi|^2\phi^2\, dxdt$$
$$= -\int_0^t \int_\Omega a\phi\Delta\phi\, dxdt - \int_0^t \int_\Omega b\phi^2\Delta\phi\, dxdt - \lambda\int_0^t \int_\Omega u\Delta\phi\, dxdt.$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta\phi)^2 dxdt + \int_0^t \int_\Omega |D\phi|^2\phi^2\, dxdt$$
$$\leq C\left(\int_0^t \int_\Omega \phi^2 dxdt + \int_0^t \int_\Omega \phi^4 dxdt + \int_0^t \int_\Omega u^2 dxdt\right).$$

Da última desigualdade e pela desigualdade (3.8), temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta\phi)^2 dxdt + \int_0^t \int_\Omega |D\phi|^2\phi^2\, dxdt$$
$$\leq C\left(\|\phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\right),$$

onde $C > 0$ depende apenas de $l, \|a\|_{L_\infty(Q)}, \|b\|_{L_\infty(Q)}, \Omega$ e T.

De acordo com as desigualdades (3.8) a (3.11) obtemos,

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)}\right), \quad (3.12)$$

onde $C > 0$ depende apenas de $l, \|a\|_{L_\infty(Q)}, \|b\|_{L_\infty(Q)}, \Omega$ e T.

Logo temos pelo Teorema (1.11),

$$\|(u,\phi)\|_B \leq c\left(\|u\|_{L_3(Q)} + \|\phi\|_{L_9(Q)}\right) \leq C\left(\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_2^{2,1}(Q)}\right) \leq K,$$

onde $K > 0$ é uma constante.

Como as hipóteses **(a)** a **(e)** são satisfeitas, pelo Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder (Teorema 1.14), temos que existe um ponto fixo do operador T_1 isto é $(u,\phi) = T_1(u,\phi)$, com $(u,\phi) \in B \bigcap \left(W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)\right)$, logo (u,ϕ) é solução do problema (P_1). A estimativa (3.12) completa a demonstração.

■

3.2 Regularidade de Solução para o Modelo de Solidificação 1

Teorema 3.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado de classe C^2. Assuma que a, $b \in L_\infty(Q)$, l uma constante, $f \in L_q(Q)$, com $q \geq 2$, e que $u_0, \phi_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial \phi_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$. Se $(u,\phi) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ é a solução do problema (P_1), então $(u,\phi) \in W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, onde $\widetilde{q} = \min\{q, 10/3\}$ e satisfaz a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{W_{\widetilde{q}}^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)}$$
$$\leq C\left(\|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|^6_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f\|^3_{L_q(Q)}\right), \tag{3.13}$$

onde C depende de $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|b\|_{L_\infty(Q)}$, l, T e Ω.

Se, além disso, $u_0 \in W_{3q/5}^2(\Omega)$ e $\phi_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega)$, onde

$$p = \begin{cases} \left(\frac{1}{q} - \frac{2}{5}\right)^{-1} & \textit{se} \quad 2 \leq q < 5/2, \\ \textit{qualquer número positivo maior ou igual a } 1 & \textit{se} \quad q \leq 5/2. \end{cases} \tag{3.14}$$

Então, $(u,\phi) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ satisfaz a seguinte estimativa

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)}$$
$$\leq C\left(\|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|\phi_0\|^{18}_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|^9_{W_{3q/5}^2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f\|^9_{L_q(Q)}\right). \tag{3.15}$$

Demonstração:

Procedendo como na parte final da demonstração do Teorema 3.1 temos que u, $\phi \in W_2^{2,1}(Q)$ e satisfazem à estimativa (3.1), isto é,

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|\phi_0\|_{W_2^2(Q)} + \|\phi_0\|^2_{W_2^2(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(Q)} + \|f\|_{L_q(Q)}\right).$$

Como $u, \phi \in W_2^{2,1}(Q)$, temos do Teorema 1.11 que $u, \phi \in L_{10}(Q)$. Então aplicando o Teorema 2.2, na segunda equação do problema (P_1), temos que $\phi \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$, como também a seguinte estimativa,

$$\|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \le C\left(\|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|^6_{W^2_2(\Omega)} + \|u\|_{L_{10}(Q)} + \|u\|^3_{L_{10}(Q)}\right).$$

Pela desigualdade (3.1) e pela desigualdade acima, segue

$$\|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}$$
$$\le C\left(\|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|^6_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f\|^3_{L_q(Q)}\right). \tag{3.16}$$

Por outro lado, como $-l\phi_t+f \in L_{\bar{q}}(Q)$, onde $\bar{q} := \min\{q, 10/3\}$, e como $W^2_2(\Omega) \hookrightarrow W^{2-2/\bar{q}}_{\bar{q}}(\Omega)$, então pelo Teorema 1.13, temos que $u \in W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)$ e satisfaz

$$\|u\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)} \le C\left(\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_t\|_{L_{10/3}(Q)} + \|f\|_{L_q(Q)}\right).$$

Segue das duas últimas desigualdades que,

$$\|u\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)}$$
$$\le C\left(\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|^6_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f\|^3_{L_q(Q)}\right).$$

Portanto, da desigualdade acima e de (3.16), temos que $(u, \phi) \in W^{2,1}_{\bar{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e satisfaz

$$\|u\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)} + \|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}$$
$$\le C\left(\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|^6_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f\|^3_{L_q(Q)}\right),$$

isto é, (u, ϕ) satisfaz à desigualdade (3.13).

Para finalizar a demonstração vamos considerar 2 casos: $2 \le q \le 10/3$ e $q > 10/3$.

Primeiramente consideremos o caso $2 \le q \le 10/3$. Neste caso, $\bar{q} = q$, logo $u \in W^{2,1}_q(Q) \subset L^p$, com p dado por (3.14). Além disso, $\phi \in W^{2,1}_{10/3}(Q) \subset L_\infty(Q)$, e portanto, $a\phi + b\phi^2 - \phi^3 + u \in L_p(Q)$. Agora observemos que se $2 \le q \le 5/2$, então $p = (\frac{1}{q} - \frac{2}{5})^{-1} > 10/3$, e observamos que se $q > 5/2$, então p é um número qualquer maior que 1. Logo podemos considerar $p > 10/3$. Portanto, $\phi_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega) \hookrightarrow$

$W_p^{2-2/p}(\Omega)$ e aplicando o Teorema 1.13 à segunda equação do problema (P_1) junto com a desigualdade (3.13), temos que $\phi \in W_p^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} &\leq C\left(\|\phi_0\|_{W_p^{2-2/p}(Q)} + \|a\phi + b\phi^2 - \phi^3\|_{L_p(Q)} + \|u\|_{L_p(Q)}\right)\\
&\leq C\left(\|\phi_0\|_{W^2_{3p/5}(Q)} + \|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|\phi\|^3_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|u\|_{W_q^{2,1}(Q)}\right)\\
&\leq C\left(\|\phi_0\|_{W^2_{3p/5}(Q)} + \|\phi_0\|^{18}_{W^2_{3p/5}(Q)} + \|u_0\|_{W^2_2(Q)} + \|u_0\|^9_{W^2_2(Q)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f\|^9_{L_q(Q)}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, $(u,\phi) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ e satisfaz à desigualdade (3.15), isto é,

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)}\\
&C\left(\|\phi_0\|_{W^2_{3p/5}(Q)} + \|\phi_0\|^{18}_{W^2_{3p/5}(Q)} + \|u_0\|_{W^2_2(Q)} + \|u_0\|^9_{W^2_2(Q)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f\|^9_{L_q(Q)}\right).
\end{aligned}$$

Finalmente consideremos o caso $q > 10/3$. Neste caso $(u,\phi) \in W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \subset L_\infty(Q) \times L_\infty(Q)$. Logo $a\phi + b\phi^2 - \phi^3 + u \in L_\infty(Q) \subset L_p(Q)$. Como $\phi_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega) \hookrightarrow W_p^{2-2/p}(\Omega)$, então aplicando o Teorema 1.13 à segunda equação do problema (P_1) e usando a desigualdade (3.13), obtemos que $\phi \in W_p^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} &\leq C\left(\|\phi_0\|_{W_p^{2-2/p}(Q)} + \|a\phi + b\phi^2 - \phi^3\|_{L_p(Q)} + \|u\|_{L_p(Q)}\right)\\
&\leq C\left(\|\phi_0\|_{W^2_{\overline{p}}(Q)} + \|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|\phi\|^3_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|u\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}\right)\\
&\leq C\left(\|\phi_0\|_{W^2_{3p/5}(Q)} + \|\phi_0\|^{18}_{W^2_{3p/5}(Q)} + \|u_0\|_{W^2_2(Q)} + \|u_0\|^9_{W^2_2(Q)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f\|^9_{L_q(Q)}\right).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Agora, como $p \geq q$, temos que $\phi \in W_p^{2,1}(Q) \subset W_q^{2,1}(Q)$, de onde $\phi_t \in L_q(Q)$, e com isso $-l\phi + f \in L_q(Q)$. Além disso, como $u_0 \in W^2_{3q/5}(\Omega)$ aplicando o Teorema 1.13 à primeira equação do problema (P_1) e usando a desigualdade (3.13), temos que $u \in W_q^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} &\leq C\left(\|u_0\|_{W^2_{3q/5}(Q)} + \|\phi_t\|_{L_q(Q)} + \|f\|_{L_q(Q)}\right)\\
&\leq C\left(\|u_0\|_{W^2_{3q/5}(Q)} + \|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|f\|_{L_q(Q)}\right)\\
&\leq C\left(\|u_0\|_{W^2_{3q/5}(Q)} + \|u_0\|^3_{W^2_{3q/5}(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|^6_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f\|^3_{L_q(Q)}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, da última desigualdade e de (3.17) segue que (u,ϕ) satisfaz à estimativa (3.15), isto é,

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)}\\
&\leq C\left(\|\phi_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|\phi_0\|^{18}_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|u_0\|_{W^2_{3q/5}(\Omega)} + \|u_0\|^9_{W^2_{3q/5}(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f\|^9_{L_q(Q)}\right).
\end{aligned}$$

Como queríamos.

■

3.3 Continuidade e Unicidade de Solução para o Modelo de Solidificação 1

A seguir iremos exibir demonstrações de resultados sobre a continuidade de solução do problema (P_1) em relação ao termo forçante e aos dados iniciais. Estes resultados tem como consequência, em particular, a unicidade da solução do problema (P_1).

Teorema 3.3 *Sejam f_1 e $f_2 \in L_q(Q)$, com $q \geq 2$, (u_0^1, ϕ_0^1) e $(u_0^2, \phi_0^2) \in W_2^2(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$ e sejam $(u_1, \phi_1), (u_2, \phi_2) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ as soluções correspondentes do problema (P_1), com (u_0^1, ϕ_0^1, f_1) e com (u_0^2, ϕ_0^2, f_2), respectivamente. Assuma as mesmas condições do Teorema* 3.1. *Então, temos a seguinte estimativa*

$$\begin{aligned}&\|u_1 - u_2\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} + \|\phi_1 - \phi_2\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)}\\ &\leq C\left(\|u_0^1 - u_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0^1 - \phi_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(Q)}\right),\end{aligned}$$

onde $C > 0$ depende apenas de $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|b\|_{L_\infty(Q)}$, ϕ_1, ϕ_2, T e Ω.

Além disso, se $u_0 \in W_{3q/5}^2(\Omega)$ e $\phi_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega)$, temos $(u, \phi) \in W_q^{2,1}(\Omega) \times W_p^{2,1}(\Omega)$ satisfazendo

$$\begin{aligned}&\|u_1 - u_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\phi_1 - \phi_2\|_{W_p^{2,1}(Q)}\\ &\leq C\left(\|u_0^1 - u_0^2\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)} + \|\phi_0^1 - \phi_0^2\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)}\right),\end{aligned} \tag{3.18}$$

onde,

$$p = \begin{cases} \left(\frac{1}{q} - \frac{2}{5}\right)^{-1} & \text{se} \quad 2 \leq q < 5/2, \\ \text{qualquer número positivo maior ou igual a } 2 & \text{se} \quad q \geq 5/2, \end{cases} \tag{3.19}$$

e $C > 0$ depende apenas de $\|a\|_{L_\infty(Q)}$, $\|b\|_{L_\infty(Q)}$, ϕ_1, ϕ_2, T e Ω.

Demonstração:

Sejam $u := u_1 - u_2$, $\phi := \phi_1 - \phi_2$, $u_0 := u_0^1 - u_0^2$ e $\phi_0 := \phi_0^1 - \phi_0^2$. Então $(u, \phi) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ e satisfaz ao seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -l\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + (f_1 - f_2) & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi = A\phi + u & \text{em } Q, \\ \partial u/\partial n = \partial \phi/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\ u = u_0,\ \phi = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{3.20}$$

onde $A := a + b(\phi_1 + \phi_2) - (\phi_1^2 + \phi_1\phi_2 + \phi_2^2)$.

Observemos que de modo análogo ao que vimos na demonstração do Teorema 2.3, temos que $A \leq \|a + b^2\|_{L_\infty(Q)} \leq M$, sendo que $0 \leq M < \infty$, pois $a, b \in L_\infty(Q)$.

Observe que pelo Teorema 3.2, $u_1, u_2 \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)$, onde $\bar{q} = \min\{q, 10/3\}$. Então, pelo Teorema 2.2 temos $\phi_1, \phi_2 \in W_q^{2,1}(Q)$, em particular $\phi_t = (\phi_1 - \phi_2)_t \in L_q(Q)$, logo usando o Teorema 1.13 na primeira equação do problema (3.20), obtemos

$$\|u\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \leq C(\|\phi_t\|_{L_{\bar{q}}(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L_{\bar{q}}(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)})$$

$$\leq C(\|\phi\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}).$$

Por outro lado, pelo Corolário 2.4, temos que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\|\phi\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|u\|_{L_{\bar{q}}(Q)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right).$$

Do Teorema 1.11 temos $W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \hookrightarrow\hookrightarrow L_{\bar{q}}(Q) \hookrightarrow L_2(Q)$, então pelo Teorema 1.15, segue que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tal que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\|u\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \leq \varepsilon\|u\|_{L_{\bar{q}}(Q)} + \eta\|u\|_{L_2(Q)}.$$

Portanto pelas três últimas desigualdades, temos

$$\|u\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \leq C(\varepsilon\|u\|_{L_{\bar{q}}(Q)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \eta\|u\|_{L_2(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)}).$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $C.\varepsilon \leq 1/2$, obtemos

$$\|u\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} \leq C(\|u\|_{L_2(Q)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)}). \tag{3.21}$$

Como $W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \hookrightarrow L_p(Q) \hookrightarrow L_{10/3}(Q)$, temos $u \in L_{10/3}(Q)$, com isso, novamente pela segunda equação de (3.20), temos do Corolário 2.4 e pela última desigualdade que,

$$\|\phi\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|u\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right)$$

$$\leq C\left(\|u\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right) \leq C(\|u\|_{L_2(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)}). \tag{3.22}$$

Da última desigualdade e de (3.21) segue

$$\|\phi\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C(\|u\|_{L_2(Q)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)}).$$

Vamos agora estimar $\|u\|_{L_2(Q)}$. Para isso, multiplicando a primeira equação de (3.20) por $u+l\phi$, integrando em $\Omega\times(0,t)$, para $0\le t\le T$, e procedendo analogamente como no ítem e) da demonstração do Teorema 3.1 temos,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u(t)+l\phi(t))^2dx+\int_0^t\int_\Omega |Du|^2dxdt+l\int_0^t\int_\Omega DuD\phi dxdt$$
$$=\int_0^t\int_\Omega (f_1-f_2)(u+l\phi)dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega (u_0+l\phi_0)^2dx. \tag{3.23}$$

Por outro lado, multiplicando a segunda equação de (3.20) por ϕ e integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $0\le t\le T$, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \phi(t)^2dx+\int_0^t\int_\Omega |D\phi|^2dxdt=\int_0^t\int_\Omega (A\phi^2+u\phi)dxdt.+\frac{1}{2}\int_\Omega \phi_0^2dx.$$

Multiplicando a igualdade acima por (l^2+1) e somando com (3.23), e usando a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega ((u(t)+l\phi(t))^2+(l^2+1)\phi(t)^2)dx+\int_0^t\int_\Omega (|Du|^2+lDuD\phi+(l^2+1)|D\phi|^2)dxdt$$
$$\le C\left(\int_0^t\int_\Omega (u^2+\phi^2)dxdt+\int_0^t\int_\Omega A\phi^2dxdt+\int_0^t\int_\Omega (f_1-f_2)^2dxdt+\int_\Omega u_0^2dx+\int_\Omega \phi_0^2dx\right)$$
$$\le C\left(\int_0^t\int_\Omega (u^2+\phi^2)dxdt+\int_0^t\int_\Omega (f_1-f_2)^2dxdt+\int_\Omega u_0^2dx+\int_\Omega \phi_0^2dx\right).$$

De onde,

$$\frac{1}{4}\int_\Omega u(t)^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega\left(\frac{u(t)}{\sqrt{2}}+l\sqrt{2}\phi(t)\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega \phi(t)^2dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega |Du|^2dxdt+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega |D(u+l\phi)|^2dxdt+\left(1+\frac{l^2}{2}\right)\int_0^t\int_\Omega |D\phi|^2dxdt$$
$$=\frac{1}{2}\int_\Omega ((u(t)+l\phi(t))^2+(l^2+1)\phi(t)^2)dx+\int_0^t\int_\Omega (|Du|^2+lDuD\phi+(l^2+1)|D\phi|^2)dxdt$$
$$\le C\left(\int_0^t\int_\Omega (u^2+\phi^2)dxdt+\int_0^t\int_\Omega (f_1-f_2)^2dxdt+\int_\Omega u_0^2dx+\int_\Omega \phi_0^2dx\right).$$

Usando o Lema de Gronwall, obtemos

$$\int_\Omega (u(t)^2+\phi(t)^2)dx\le C\left(\|f_1-f_2\|^2_{L_2(Q)}+\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}+\|\phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}\right),$$

Segue da última desigualdade e das desigualdades (3.21) e (3.22), que

$$\|u\|_{W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q)}+\|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}\le C\left(\|f_1-f_2\|_{L_q(Q)}+\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}+\|\phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}\right). \tag{3.24}$$

Considere agora $u_0\in W^2_{3q/5}(\Omega)$ e $\phi_0\in W^2_{3p/5}(\Omega)$, onde p é dado em (3.19).

Se $2 \le q \le 5/2$, então $\bar{q} = q$, daí $(u, \phi) \in W_q^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \hookrightarrow L_p(Q) \times L_\infty(Q)$, logo, $A\phi + u \in L_p(Q)$. Além disso, $\phi_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega) \hookrightarrow W_p^{2-2/p}(\Omega)$. Então aplicando o Teorema (1.13) à segunda equação de (3.20), temos

$$\|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} \le C\left(\|A\phi + u\|_{L_p(Q)} + \|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)}\right)$$
$$\le C\left(\|\phi\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} + \|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)}\right).$$

Segue das duas últimas desigualdades que,

$$\|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} \le C\left(\|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)} + \|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right). \tag{3.25}$$

Como neste caso temos $p > q$, então $\phi_t \in L_q$. Pelo fato de $u_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega) \hookrightarrow W_p^{2-2/p}(\Omega)$, segue do Teorema 1.13 aplicado à primeira equação de (3.20), que $u \in W_q^{2,1}(Q)$ e vale a seguinte estimativa,

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} \le C\left(\|\phi_t\|_{L_q(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)} + \|u_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)}\right).$$

Pelo fato de que $\|\phi_t\|_{L_q(Q)} \le \|\phi_t\|_{L_p(Q)} \le \|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)}$, segue da desigualdade (3.25) e da desigualdade anterior que

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} \le C\left(\|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)} + \|u_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)}\right).$$

Portanto, a desigualdade (3.18) é válida, isto é,

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} \le C\left(\|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)} + \|u_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)}\right).$$

Se $q > 5/2$, então $\bar{q} = 10/3$. Daí $(u, \phi) \in W_{10/3}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q) \hookrightarrow L_\infty(Q) \times L_\infty(Q)$, logo, $B\phi + u \in L_p(Q)$. Além disso, $\phi_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega) \hookrightarrow W_p^{2-2/p}(\Omega)$, então aplicando o Teorema (1.13) à segunda equação de (3.20), temos

$$\|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} \le C\left(\|\phi\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} + \|u\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} + \|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)}\right).$$

Então pela última desigualdade e pela desigualdade (3.24), obtemos

$$\|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} \le C\left(\|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)} + \|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right). \tag{3.26}$$

Por outro lado, tomando $p = q$, temos $\phi_t \in L_q(Q)$. Como $u_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega) \hookrightarrow W_p^{2-2/p}(\Omega)$, segue que, aplicando o Teorema 1.13 à primeira equação de (3.20), temos que $u \in W_q^{2,1}(Q)$ e satisfaz à estimativa,

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} \le C\left(\|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)} + \|u_0\|_{W_{3q/5}^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)}\right).$$

Portanto, a desigualdade (3.18) é válida, isto é,

$$\|u\|_{W_q^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)} + \|u_0\|_{W^2_{3q/5}(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)}\right).$$

■

Segue do Teorema anterior o seguinte corolário:

Corolário 3.4 *Assuma $a, b \in L_\infty(Q)$, l constante, $f \in L_q(Q)$, com $q \geq 2$, e $u_0, \phi_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazendo $\partial u_0/\partial n = \partial \phi_0/\partial n = 0$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado de classe C^2. Então, a solução $(u, \phi) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ do problema (P_1) é única.*

■

Capítulo 4

O Modelo de Solidificação 2

Neste capítulo iremos demonstrar alguns resultados envolvendo uma simplificação do modelo tratado por Boldrini e outros em [2], dada por

$$(P_2)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -l\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + f & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi = -a\phi(1-\phi)\,(b - \phi + cu) & \text{em } Q, \\ \partial u/\partial n = \partial \phi/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T], \\ u = u_0, \phi = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

4.1 Um Problema Auxiliar

Diferentemente do problema (P_1), no problema (P_2) no segundo membro de sua segunda equação, a função temperatura u aparece multiplicando potências da função campo de fase ϕ.

Consequentemente, os métodos que foram aplicados para a obtenção dos resultados referente ao problema (P_1) não podem ser utilizados diretamente para o problema (P_2). Para isso, faremos as seguinte considerações:

Definição 4.1 *Seja $M > 0$ uma constante que será tomada adequadamente. Para tal constante M, definimos a **função de truncamento** π, por*

$$\pi(\phi)(x,t) = \begin{cases} 0 & se \quad \phi(x,t) < 0, \\ \phi(x,t) & se \quad 0 \leq \phi(x,t) \leq M, \\ M & se \quad \phi(x,t) > M, \end{cases}$$

para cada função $\phi : Q \to \mathbb{R}$ dada.

Agora consideremos o seguinte problema auxiliar contendo a função de truncamento dada acima.

$$(P_t)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -l\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + f & \text{em } Q,\\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta\phi & \\ = -a\phi(1-\phi)\left(b - \dfrac{\phi}{2}\right) - a\pi(\phi)\left(1-\pi(\phi)\right)\left(cu - \dfrac{\pi(\phi)}{2}\right) & \text{em } Q,\\ \partial u/\partial n = \partial\phi/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T],\\ u = u_0, \phi = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Observação 4.1 *Ao contrário do problema (P_2), no problema (P_t) a função campo de fase u se encontra somada a potências da função temperatura ϕ.*

Observação 4.2 *Note que o lado direito da segunda equação de (P_t) coincide com o respectivo termo de (P_2), para $0 \le \phi(x,t) \le M$.*

Proposição 4.2 *Suponha l, a, b, c constantes, com $a > 0$, $f \in L_q(Q)$ onde $q > 5/2$ e $u_0, \phi_0 \in W_2^2(\Omega)$, satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial\phi_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \le \phi_0 \le M$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado de classe C^2. Então, o problema (P_t) possui solução $(u,\phi) \in W_{\bar q}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, onde $\bar q = \min\{10/3, q\}$ e satisfaz as seguintes estimativas,*

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_2^{2,1}(Q)}$$
$$\le C\left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L_2(Q)}\right)$$

e

$$\|u\|_{W_{\bar q}^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)}$$
$$\le C\left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}^3 + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)}^6 + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f\|_{L_2(Q)}^3\right),$$

onde C depende apenas de Ω, T, M e das constantes do problema (P_c).

Demonstração:

Vamos mostrar a existência de solução do problema (P_t), utilizando o Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder, no espaço de Banach

$$B := \{(u,\phi)/u \in L_\infty(Q), \phi \in L_9(Q)\}.$$

Para isto, considere a família de operadores $T_\lambda : B \to B$, dado por $T_\lambda(v,\theta) = (u,\phi)$, para cada $(v,\theta) \in B$ e $0 \le \lambda \le 1$ se, e somente se, (u,ϕ) é solução do problema

$$(P_\lambda) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -l\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + f & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi & \\ = -a\phi(1-\phi)\left(b - \dfrac{\phi}{2}\right) - a\lambda\pi(\theta)\left(1-\pi(\theta)\right)\left(cv - \dfrac{\pi(\theta)}{2}\right) & \text{em } Q, \\ \partial u/\partial n = \partial\phi/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T], \\ u = u_0, \phi = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t=0\}. \end{cases}$$

a) Primeiramente vamos mostrar que T_λ está bem definido para todo $\lambda \in [0,1]$.

De fato, como $v, \pi(\theta) \in L_\infty(Q)$, temos na segunda equação do problema (P_λ) que $-a\lambda\pi(\theta)\left(1-\pi(\theta)\right)\left(cv - \pi(\theta)/2\right) \in L_\infty(Q)$. Logo, pelos teoremas 2.2 e 2.3, existe uma única solução $\phi \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ da equação citada e pelo Teorema 1.11 temos que $\phi \in L_{infty}(Q) \subset L_9(Q)$.

Por outro lado, $\phi_t \in L_{10/3}(Q)$, com isso temos na primeira equação de (P_λ) que $-l\phi_t + f \ \in L_{\tilde{q}}(Q)$, onde $\tilde{q} = \min\{10/3, q\} > 5/2$. Então pelos teoremas 1.11 e 1.13, existe única solução $u \in W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q) \hookrightarrow L_\infty(Q)$.

Assim temos que existe único $(u,\phi) \in B$ solução de (P_λ).

b) Agora vamos mostrar que para cada $\lambda \in [0,1]$, $T_\lambda : B \to B$ é contínuo e compacto.

Para isso, fixemos $\lambda \in [0,1]$. Sejam $(v_1,\theta_1), (v_2,\theta_2) \in B$ e $(u_i,\phi_i) = T_\lambda(v_i,\theta_i)$, para $i = 1,2$. Em relação à segunda equação de (P_λ) temos que ϕ_i satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_i}{\partial t} - \Delta \phi_i & \\ = -a\phi_i(1-\phi_i)\left(b - \dfrac{\phi_i}{2}\right) - a\lambda\pi(\theta_i)\left(1-\pi(\theta_i)\right)\left(cv_i - \dfrac{\pi(\theta_i)}{2}\right) & \text{em } Q, \\ \partial\phi_i/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T], \\ \phi_i = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t=0\}. \end{cases}$$

Pelo Teorema 2.2, temos que $\phi_1, \phi_2 \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e pelo Teorema 2.3 a seguinte estimativa é satisfeita:

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}$$
$$\le C\left\|-a\lambda\pi(\theta_1)\left(1-\pi(\theta_1)\right)\left(cv_1 - \frac{\pi(\theta_1)}{2}\right) + a\lambda\pi(\theta_2)\left(1-\pi(\theta_2)\right)\left(cv_2 - \frac{\pi(\theta_2)}{2}\right)\right\|_{L_{10/3}(Q)}$$

$$= C \left\| ac\lambda(-\pi(\theta_1)v_1 + \pi(\theta_2)v_2) + \frac{a\lambda}{2}(\pi(\theta_1)^2 - \pi(\theta_2)^2) \right.$$

$$\left. + ac\lambda(\pi(\theta_1)^2 v_1 - \pi(\theta_2)^2 v_2) + \frac{a\lambda}{2}(-\pi(\theta_1)^3 + \pi(\theta_2)^3) \right\|_{L_{10/3}(Q)}$$

$$\leq C \Big(\|\pi(\theta_1)v_1 - \pi(\theta_2)v_2\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\pi(\theta_1)^2 - \pi(\theta_2)^2\|_{L_{10/3}(Q)}$$

$$+ \|\pi(\theta_1)^2 v_1 - \pi(\theta_2)^2 v_2\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\pi(\theta_1)^3 - \pi(\theta_2)^3\|_{L_{10/3}(Q)} \Big). \quad (4.1)$$

Agora, para cada potência $j = 1, 2$, usando a desigualdade triangular e a de Hölder, obtemos

$$\|\pi(\theta_1)^j v_1 - \pi(\theta_2)^j v_2\|_{L_{10/3}(Q)}$$

$$\leq \|\pi(\theta_1)^j v_1 - \pi(\theta_1)^j v_2 + \pi(\theta_1)^j v_2 - \pi(\theta_2)^j v_2\|_{L_{10/3}(Q)}$$

$$\leq \|\pi(\theta_1)^j v_1 - \pi(\theta_1)^j v_2\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\pi(\theta_1)^j v_2 - \pi(\theta_2)^j v_2\|_{L_{10/3}(Q)}$$

$$\leq \|\pi(\theta_1)^j\|_{L_\infty(Q)} \|v_1 - v_2\|_{L_{10/3}(Q)} + \|v_2\|_{L_\infty(Q)} \|\pi(\theta_1)^j - \pi(\theta_2)^j\|_{L_{10/3}(Q)}.$$

Como $|\pi(\theta_1) - \pi(\theta_2)| \leq |\theta_2 - \theta_2|$, então da desigualdade acima temos,

$$\|\pi(\theta_1)^j v_1 - \pi(\theta_2)^j v_2\|_{L_{10/3}(Q)} \leq C \Big(\|v_1 - v_2\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\theta_1 - \theta_2\|_{L_{10/3}(Q)} \Big),$$

onde para cada $j = 1, 2$, temos que C depende de $\|v_2\|_{L_\infty(Q)}, T, \Omega$ e das constantes a, b, c e de M.

Da desigualdade (4.1) e da desigualdade acima, temos

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}$$

$$\leq C \Big(\|v_1 - v_2\|_{L_\infty(Q)} + \|\theta_1 - \theta_2\|_{L_{10/3}(Q)} \Big) \leq C \left(\|v_1 - v_2\|_{L_\infty(Q)} + \|\theta_1 - \theta_2\|_{L_9(Q)} \right)$$

$$\leq C \|(v_1, \theta_1) - (v_2, \theta_2)\|_B. \quad (4.2)$$

Desta vez, da primeira equação de (P_λ), temos que $(u_1 - u_2)$ satisfaz ao seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2) - \Delta(u_1 - u_2) = -l \dfrac{\partial}{\partial t}(\phi_1 - \phi_2) & \text{em } Q, \\ \partial(u_1 - u_2)/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\ (u_1 - u_2) = 0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Então pelo Teorema (1.13), $u_1 - u_2 \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ e satisfaz a seguinte estimativa

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C \|(\phi_1 - \phi_2)_t\|_{L_{10/3}(Q)} \leq C \|\phi_1 - \phi_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}.$$

Da última desigualdade e de (4.2) segue,

$$\|(u_1, \phi_1) - (u_2, \phi_2)\|_B$$

$$\leq C \left(\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|\phi_1 - \phi_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \right) \leq C\|(v_1, \theta_1) - (v_2, \theta_2)\|_B,$$

onde C depende de $\|v_2\|_{L_\infty(Q)}, T, \Omega$ e das constantes a, b, c e de M.

Logo $T_\lambda : B \to W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$ é contínua. Como as inclusões $W^{2,1}_{10/3}(Q) \hookrightarrow L_\infty(Q)$ e $W^{2,1}_{10/3}(Q) \hookrightarrow L_9(Q)$ são compactas, então a inclusão $W^{2,1}_{10/3}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \hookrightarrow B$ é contínua e compacta. Logo $T_\lambda : B \to B$ é um operador contínuo e compacto para todo $\lambda \in [0, 1]$.

c) Vamos mostrar que dado $A \subset B$ limitado, então para todo $(v, \psi) \in A$, $T_\lambda(v, \psi)$ é um operador contínuo em λ e uniformemente com respeito a $(v, \psi) \in A$.

Fixando $(v, \phi) \in A$, onde $A \subset B$ é limitado, considere $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ e $(u_i, \phi_i) = T_{\lambda_i}(v, \theta)$, para $i = 1, 2$. Da segunda equação de (P_λ), temos ϕ_i satisfaz ao seguinte problema,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi_i}{\partial t} - \Delta \phi_i & \\ = -a\phi_i(1 - \phi_i)\left(b - \dfrac{\phi_i}{2}\right) - a\lambda_i \pi(\theta)\left(1 - \pi(\theta)\right)\left(cv - \dfrac{\pi(\theta)}{2}\right) & \text{em } Q, \\ \partial \phi_i / \partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\ \phi_i = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

para $i = 1, 2$.

Então pelo Corolário 2.4, obtemos a seguinte desigualdade

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}$$

$$\leq C|\lambda_1 - \lambda_2| \left\| a\pi(\theta)\left(1 - \pi(\theta)\right)\left(cv - \frac{\pi(\theta)}{2}\right) \right\|_{L_{10/3}(Q)}.$$

Como $0 \leq \pi(\phi) \leq M$ e $v \in A$, onde A é limitado, temos da última desigualdade que,

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|, \tag{4.3}$$

onde $C > 0$ é finito.

Da primeira equação de (P_λ), temos que $(u_1 - u_2)$ satisfaz o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(u_1 - u_2) - \Delta(u_1 - u_2) = -l\dfrac{\partial}{\partial t}(\phi_1 - \phi_2) & \text{em } Q, \\ \partial(u_1 - u_2)/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\ u_1 - u_2 = 0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Então pelo Teorema 1.13, temos que

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\|(\phi_1 - \phi_2)_t\|_{L_{10/3}(Q)} \leq C\|\phi_1 - \phi_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}.$$

Portanto, da desigualdade (4.3), segue

$$\|u_1 - u_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|\phi_1 - \phi_2\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C|\lambda_1 - \lambda_2|,$$

onde $C < \infty$ depende de $\|v_i\|_{L_\infty(Q)}$ para $i = 1, 2$.

Assim temos que $T_{(.)}(v, \theta) : [0, 1] \to B$ é contínua em λ e uniformemente com respeito a $(v, \theta) \in A$, como queríamos mostrar.

d) A seguir mostraremos que o operador T_0 possui único ponto fixo em B.

Para $\lambda = 0$, o problema (P_λ) se torna

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -l\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + f & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta\phi = -a\phi(1 - \phi)\left(b - \dfrac{\phi}{2}\right) & \text{em } Q, \\ \partial u/\partial n = \partial\phi/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\ u = u_0, \phi = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

para todo $(v, \theta) \in B$.

Aplicando os teoremas 2.3 e 2.2 na segunda equação do problema acima, temos que exite único $\phi \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ solução dessa equação, satisfazendo as condições iniciais e de bordo do problema acima. Como $\phi_t \in L_{10/3}(Q)$, então pelo Teorema 1.13 temos único $u \in W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q)$, onde $\tilde{q} = \min\{10/3, q\} > 5/2$, solução da primeira equação satisfazendo os dados iniciais e de bordo do problema acima. Portanto existe $(u, \phi) \in W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$, única solução do problema acima. Logo pelo Teorema 1.11, temos que existe único $(u, \phi) \in B$ ponto fixo de $T_0 : B \to B$.

e) Finalmente, mostraremos que existe uma constante $K > 0$ tal que todo possível ponto fixo $(u, \phi) \in B$ de T_λ para algum $\lambda \in [0, 1]$ satisfaz a estimativa

$$\|(u, \phi)\|_B \leq K.$$

Para isso, seja $(u,\phi) \in B$ um possível ponto fixo de $T_\lambda : B \to B$ para algum $\lambda \in [0,1]$. Então (u,ϕ) satisfaz ao seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -l\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + f & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta\phi & \\ = -a\phi(1-\phi)\left(b - \dfrac{\phi}{2}\right) - a\lambda\pi(\phi)\left(1-\pi(\phi)\right)\left(cu - \dfrac{\pi(\phi)}{2}\right) & \text{em } Q, \\ \partial u/\partial n = \partial\phi/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0,T], \\ u = u_0, \phi = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t=0\}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Multiplicando a segunda equação do problema acima por ϕ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $t \in (0,T]$, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \phi(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |D\phi|^2 dxdt$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \phi_0^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left(-ab\phi^2 + \frac{a}{2}\phi^3 + ab\phi^3 - \frac{a}{2}\phi^4\right) dxdt$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega -a\lambda\pi(\phi)\left(1-\pi(\phi)\right)\left(c\phi u - \frac{1}{2}\phi\pi(\phi)\right) dxdt.$$

Pela Desigualdade de Young temos que, $\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 \leq |\phi|\phi^2 \leq C_\varepsilon\phi^2 + \varepsilon\phi^4$ onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Logo

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \phi(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |D\phi|^2 dxdt$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \phi_0^2 dx + a\int_0^t \int_\Omega \left[\left(|b| + \frac{C_\varepsilon}{2} + |b|C_\varepsilon\right)\phi^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2} + |b|\varepsilon - \frac{1}{2}\right)\phi^4\right] dxdt$$
$$+\lambda a \int_0^t \int_\Omega \pi(\phi)(1+\pi(\phi))|\phi|\pi(\phi) dxdt + \lambda a|c| \int_0^t \int_\Omega \pi(\phi)(1+\pi(\phi))|\phi||u|\ dxdt.$$

Tomando na desigualdade acima $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon(1/2+|b|) = 1/4$, e como $|\phi|\pi(\phi) \leq \phi^2$, $\pi(\phi) \leq M$ e novamente aplicando a Desigualdade de Young na última integral, segue que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \phi(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |D\phi|^2 dxdt + \frac{1}{4}\int_0^t \int_\Omega \phi^4\ dxdt$$
$$\leq \frac{1}{2}\|\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)} dx + C\int_0^t \int_\Omega (\phi^2 + u^2) dxdt, \tag{4.5}$$

para todo $t \in (0,T]$.

Multiplicando a primeira equação do problema (4.4) por $(u+l\phi)$ e integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $t\in(0,T]$, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[u(t)^2+2l\phi(t)u(t)+l^2\phi(t)^2\right]dx+\int_0^t\int_\Omega\left[\,|Du|^2+lDu.D\phi\,\right]dxdt$$

$$=l\int_\Omega u_0\phi_0dx+\frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2dx+\frac{1}{2}\int_\Omega \phi_0^2dx+\int_0^t\int_\Omega fu\,dxdt+\int_0^t\int_\Omega f\phi\,dxdt.$$

Usando a Desigualdade de Young no segundo membro, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[u(t)^2+2l\phi(t)u(t)+l^2\phi(t)^2\right]dx+\int_0^t\int_\Omega\left[\,|Du|^2+lDu.D\phi\,\right]dxdt$$

$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)}+\|f\|^2_{L_2(Q)}+\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt+\int_0^t\int_\Omega\phi^2dxdt\right).$$

Multiplicando a desigualdade (4.5) por $(1+l^2)$ e somando com a útima desigualdade, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\left[(u(t)+l\phi(t))^2+(1+l^2)\phi^2(t)\right]dx$$

$$+\int_0^t\int_\Omega\left[\,|Du|^2+lDu.D\phi+(1+l^2)|D\phi|^2\,\right]dxdt+\frac{(1+l^2)}{4}\int_0^t\int_\Omega\phi^4dxdt$$

$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)}+\|f\|^2_{L_2(Q)}\right)+C\int_0^t\int_\Omega(u^2+\phi^2)dxdt.$$

Por outro lado, observe que

$$\int_\Omega\left[\frac{1}{2}u(t)^2+\phi(t)^2\right]dx\leq\int_\Omega\left[\frac{1}{2}u(t)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u(t)+\sqrt{2}l\phi(t)\right)^2+\phi(t)^2\right]dx$$

$$=\int_\Omega\left[(u(t)+l\phi(t))^2+(1+l^2)\phi^2(t)\right]dx,$$

e que

$$\int_0^t\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|Du|^2+\left(1+\frac{l^2}{2}\right)|D\phi|^2\right]dxdt$$

$$\leq\int_0^t\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|Du|^2+\frac{1}{2}|D(u+l\phi)|^2+\left(1+\frac{l^2}{2}\right)|D\phi|^2\right]dxdt$$

$$=\int_0^t\int_\Omega\left[\,|Du|^2+lDu.D\phi+(1+l^2)|D\phi|^2\right].$$

Então, das três últimas desigualdades, segue

$$\int_\Omega(u(t)^2+\phi(t)^2)dx+\int_0^t\int_\Omega(|Du|^2+|D\phi|^2)dxdt+\int_0^t\int_\Omega\phi^4dxdt$$

$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)}+\|f\|^2_{L_2(Q)}\right)+C\int_0^t\int_\Omega(u^2+\phi^2)dxdt,$$

para todo $t \in (0,T]$.

Usando o Lema de Gronwall na desigualdade satisfeita pela primeira integral acima, temos

$$\int_\Omega (u(t)^2 + \phi(t)^2)dx + \int_0^t \int_\Omega (|Du|^2 + |D\phi|^2)dxdt + \int_0^t \int_\Omega \phi^4 dxdt$$

$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\right), \tag{4.6}$$

para todo $t \in (0,T]$.

Agora, multiplicando a segunda equação do problema (4.4) por ϕ_t e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $t \in (0,T]$, temos

$$\int_0^t \int_\Omega \phi_t^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi(t)|^2 dxdt + \frac{a}{2}\int_0^t \int_\Omega \phi_t \phi^3 dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi_0|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left[-ab\phi_t\phi + \left(ab + \frac{a}{2}\right)\phi_t\phi^2\right] dxdt$$

$$- \int_0^t \int_\Omega \lambda a \pi(\phi)(1-\pi(\phi))\left(c\phi_t u - \frac{1}{2}\phi_t \pi(\phi)\right) dxdt.$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi_0|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left[a|b||\phi_t||\phi| + \left|ab + \frac{a}{2}\right| |\phi_t||\phi^2|\right] dxdt$$

$$+ \int_0^t \int_\Omega \lambda a \pi(\phi)(1+\pi(\phi))\left(|c||\phi_t||u| + \frac{1}{2}|\phi_t|\pi(\phi)\right) dxdt.$$

Usando a Desigualdade de Young e o fato de $\pi(\phi) \leq M$, temos

$$\int_0^t \int_\Omega \phi_t^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi(t)|^2 dxdt + \frac{a}{2}\int_0^t \int_\Omega \phi_t \phi^3 dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi_0|^2 dx + \varepsilon a\left(|b| + \left|b + \frac{1}{2}\right|\right)\int_0^t \int_\Omega \phi_t^2 dxdt + C_\varepsilon a|b|\int_0^t \int_\Omega \phi^2 dxdt$$

$$+ C_\varepsilon a\left|b + \frac{1}{2}\right|\int_0^t \int_\Omega \phi^4 dxdt + \varepsilon M(1+M)a\int_0^t \int_\Omega \phi_t^2 dxdt$$

$$+ C_\varepsilon M(1+M)a|c|\int_0^t \int_\Omega u^2 dxdt + \varepsilon M(1+M)a|c|\int_0^t \int_\Omega \phi_t^2 dxdt$$

$$+ C_\varepsilon M(1+M)a\int_0^t \int_\Omega \pi(\phi)^2 dxdt.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que, $\varepsilon a\,[\ |b| + |b+1/2| + M(1+M)(|c|+1)\ ] = 1/2$, e usando o fato de que $\phi_t\phi^3 = (\phi^4)_t/4$, obtemos

$$\int_0^t \int_\Omega \phi_t^2 dxdt + \int_\Omega |D\phi(t)|^2 dxdt + \int_\Omega \phi(t)^4 dx$$

$$\leq C\left(\int_\Omega |D\phi_0|^2dx + \int_\Omega \phi_0^4\, dx + \int_0^t\int_\Omega u^2dxdt + \int_0^t\int_\Omega \pi(\phi)^2dxdt\right.$$
$$\left.+\int_0^t\int_\Omega \phi^2dxdt + \int_0^t\int_\Omega \phi^4dxdt\right).$$

Como $0 \leq \phi_0 \leq M$, então usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega \phi_0^4\, dx \leq \|\phi_0^2\|_{L_\infty(\Omega)}\|\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C\|\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Observando que $\pi(\phi)^2 \leq \phi^2$, então da penúltima desigualdade e da desigualdade (4.6), segue

$$\int_0^t\int_\Omega \phi_t^2dxdt + \int_\Omega |D\phi(t)|^2dxdt + \int_\Omega \phi(t)^4dx$$
$$\leq C\left(\|D\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega u^2dxdt + \int_0^t\int_\Omega \pi(\phi)^2dxdt\right.$$
$$\left.+\int_0^t\int_\Omega \phi^2dxdt + \int_0^t\int_\Omega \phi^4dxdt\right)$$
$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|D\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\right).$$

Logo,

$$\int_0^t\int_\Omega \phi_t^2dxdt + \int_\Omega |D\phi(t)|^2dxdt + \int_\Omega \phi(t)^4dx$$
$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\right), \tag{4.7}$$

para todo $t \in (0, T]$.

Multiplicando a primeira equação do problema (4.4) por u_t, e integrando em $\Omega \times (0, t)$, com $t \in (0, T]$, obtemos

$$\int_0^t\int_\Omega u_t^2dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Du(t)|^2dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du_0|^2dx - l\int_0^t\int_\Omega u_t\phi_tdxdt + \int_0^t\int_\Omega u_tf\, dxdt.$$

Pela Desigualdade de Young no segundo membro, temos

$$\int_0^t\int_\Omega u_t^2dxdt + \frac{1}{2}\int_\Omega |Du(t)|^2dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du_0|^2dx + \varepsilon(|l|+1)\int_0^t\int_\Omega u_t^2dxdt + C_\varepsilon|l|\int_0^t\int_\Omega \phi_t^2dxdt + C_\varepsilon\int_0^t\int_\Omega f^2dxdt.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que, $\varepsilon(|l|+1) = 1/2$, e usando a desigualdade (4.7), temos

$$\int_0^t\int_\Omega u_t^2dxdt + \int_\Omega |Du(t)|^2dx \leq C\left(\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\right), \tag{4.8}$$

para todo $t \in (0,T]$.

Desta vez, multiplicando a primeira equação do problema (4.4) por $-\Delta u$ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $t \in (0,T]$, e em seguida, usando a Desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |Du(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta u)^2 dxdt$$
$$\leq \int_\Omega |Du_0|^2 dx + \varepsilon(|l|+1)\int_0^t \int_\Omega (\Delta u)^2 dxdt + C_\varepsilon |l| \int_0^t \int_\Omega \phi_t^2 dxdt + C_\varepsilon \int_0^t \int_\Omega f^2 dxdt.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que, $\varepsilon(|l|+1) = 1/2$ e usando a desigualdade (4.7), temos

$$\int_\Omega |Du(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta u)^2 dxdt \leq C\left(\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\right), \qquad (4.9)$$

para todo $t \in (0,T]$.

Finalmente, multiplicando a segunda equação do último problema por $-\Delta\phi$ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $t \in (0,T]$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta \phi)^2 dxdt$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi_0|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left(ab\phi\Delta\phi - \left(ab + \frac{a}{2}\right)\phi^2\Delta\phi\right) dxdt + \frac{a}{2}\int_0^t \int_\Omega \phi^3 \Delta\phi \; dxdt$$
$$+\lambda ac \int_0^t \int_\Omega \pi(\phi)\left(1-\pi(\phi)\right) u\Delta\phi \; dxdt - \frac{\lambda a}{2}\int_0^t \int_\Omega \pi(\phi)\left(1-\pi(\phi)\right)\pi(\phi)\Delta\phi \; dxdt.$$

Usando as Fórmulas de Green na terceira integral do segundo membro, segue

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta \phi)^2 dxdt + \frac{3a}{2}\int_0^t \int_\Omega \phi^2 |D\phi|^2 \; dxdt$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi_0|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left(ab\phi\Delta\phi - \left(ab + \frac{a}{2}\right)\phi^2\Delta\phi\right) dxdt$$
$$+\lambda ac \int_0^t \int_\Omega \pi(\phi)\left(1-\pi(\phi)\right) u\Delta\phi \; dxdt - \frac{\lambda a}{2}\int_0^t \int_\Omega \pi(\phi)\left(1-\pi(\phi)\right)\pi(\phi)\Delta\phi \; dxdt$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi_0|^2 dx + a|b|\int_0^t \int_\Omega |\phi||\Delta\phi| \; dxdt + a\left|b + \frac{1}{2}\right|\int_0^t \int_\Omega \phi^2|\Delta\phi| \, dxdt$$
$$+a|c|M\left(1+M\right)\int_0^t \int_\Omega |u||\Delta\phi| \; dxdt + aM\left(1+M\right)\int_0^t \int_\Omega \pi(\phi)|\Delta\phi| dxdt.$$

Agora usando a desigualdade de Young

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta \phi)^2 dxdt + \frac{3a}{2}\int_0^t \int_\Omega \phi^2 |D\phi|^2 \; dxdt$$
$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi_0|^2 dx + C_\varepsilon a|b|\int_0^t \int_\Omega \phi^2 dxdt + \varepsilon a\left(|b| + \left|b + \frac{1}{2}\right|\right)\int_0^t \int_\Omega (\Delta\phi)^2 dxdt$$

$$+\varepsilon a(|c|+1)M(1+M)\int_0^t\int_\Omega(\Delta\phi)^2dxdt+C_\varepsilon a\left|b+\frac{1}{2}\right|\int_0^t\int_\Omega\phi^4dxdt$$
$$+C_\varepsilon a|c|M\left(1+M\right)\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt+C_\varepsilon aM\left(1+M\right)\int_0^t\int_\Omega\pi(\phi)^2dxdt.$$

Tomando $\varepsilon>0$ tal que, $\varepsilon a\left[\,|b|+|b+1/2|+M(1+M)(|c|+1)\,\right]=1/2$, segue que

$$\int_\Omega|D\phi(t)|^2dx+\int_0^t\int_\Omega(\Delta\phi)^2dxdt+\int_0^t\int_\Omega\phi^2|D\phi|^2\,dxdt$$
$$\leq C\left(\|D\phi_0\|^2_{L_2(\Omega)}+\int_0^t\int_\Omega\phi^2dxdt+\int_0^t\int_\Omega\phi^4dxdt+\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt\right),$$

portanto, de (4.6) temos

$$\int_\Omega|D\phi(t)|^2dx+\int_0^t\int_\Omega(\Delta\phi)^2dxdt+\int_0^t\int_\Omega\phi^2|D\phi|^2\,dxdt$$
$$\leq C\left(\|u_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}+\|\phi_0\|^2_{W_2^2(\Omega)}+\|f\|^2_{L_2(Q)}\right), \tag{4.10}$$

para todo $t\in(0,T]$.

Então, pelas desigualdades (4.6) a (4.10), obtemos a seguinte estimativa

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)}+\|\phi\|_{W_2^{2,1}(Q)}\leq C\left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}+\|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)}+\|f\|_{L_2(Q)}\right),$$

e como $W_2^{2,1}(Q)\hookrightarrow L_{10}(Q)$, então

$$\|u\|_{L_{10}(Q)}+\|\phi\|_{L_{10}(Q)}\leq C\left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}+\|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)}+\|f\|_{L_2(Q)}\right). \tag{4.11}$$

Como $\phi\in L_{10}(Q)$, temos que o segundo membro da segunda equação do último problema pertence a $L_{10/3}(Q)$, e como $\phi_0\in W_2^2(\Omega)\hookrightarrow W_{10/3}^{2-2/\frac{10}{3}}(\Omega)$, então pelo Teorema 1.13, temos que $\phi\in W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\|\phi\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)}$$
$$\leq C\left(\left\|-a\phi(1-\phi)\left(b-\frac{\phi}{2}\right)-a\lambda\pi(\phi)\left(1-\pi(\phi)\right)\left(cv-\frac{\pi(\phi)}{2}\right)\right\|_{L_{10/3}(Q)}+\|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right).$$

Como $\pi(\phi)\leq M$, segue que

$$\|\phi\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)}$$
$$\leq C\left(\|\phi\|_{L_{10}(Q)}+\|\phi\|^3_{L_{10}(Q)}+\|u\|^3_{L_{10/3}(Q)}+\|\pi(\phi)\|_{L_{10/3}(Q)}+\|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right),$$

logo, como $\pi(\phi) \leq |\phi|$, usando a desigualdade (4.11), temos

$$\|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}$$

$$\leq C\left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)} + \|f\|^3_{L_2(Q)}\right). \tag{4.12}$$

Por outro lado, como $\phi \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$, temos em particular que $\phi_t \in L_{10/3}(Q)$. Logo o segundo membro da primeira equação do último problema pertence a $L_{\tilde{q}}(Q)$ onde $\tilde{q} = \min\{10/3, q\} > 5/2$, como também temos $u_0 \in W_2^2(\Omega) \hookrightarrow W^{2-2/\frac{10}{3}}_{10/3}(\Omega) \hookrightarrow W^{2-2/\tilde{q}}_{\tilde{q}}(\Omega)$, pelo Teorema 1.13 temos que $u \in W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q)$ e usando a desigualdade (4.12) obtemos

$$\|u\|_{W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q)} \leq C\left(\|\phi_t\|_{L_{\tilde{q}}(Q)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right)$$

$$\leq C\left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f\|^3_{L_2(Q)}\right).$$

Pelo Teorema 1.11 temos, $W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q) \hookrightarrow L_\infty(Q)$ e $W^{2,1}_{10/3}(Q) \hookrightarrow L_9(Q)$, então pela última desigualdade e por (4.12), temos que

$$\|(u,\phi)\|_B \leq C\left(\|u\|_{L_\infty(Q)} + \|\phi\|_{L_9(Q)}\right) \leq C\left(\|u\|_{W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q)} + \|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}\right)$$

$$\leq C\left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|u_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|^3_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)} + \|f\|^3_{L_2(Q)}\right) := \tilde{K}. \tag{4.13}$$

Como as hipóteses **(a)** a **(e)** do Teorema de Ponto Fixo de Leray-Schauder são satisfeitas, temos que existe $(u,\phi) \in B \bigcap W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$, onde $\tilde{q} = \min\{10/3, q\}$, solução do problema (P_t).

$\blacksquare$

4.2 Existência de Solução para o Modelo de Solidificação 2

Fixemos $M > max\{1 + 2|b|, \|\phi_0\|_{L_\infty(\Omega)}\}$. Então, $\tilde{K} = \tilde{K}(M)$ dada por (4.13) é um valor fixado, e tomamos $|c|$ tão pequeno de modo que tenhamos $M \geq 1 + 2\left(|b| + |c|\tilde{K}(M)\right)$.

À partir dessas considerações, vale o seguinte resultado:

Teorema 4.3 *Suponha l, a, b e c constantes com $a > 0$, como também $f \in L_q(Q)$ com $q > 5/2$, e $u_0, \phi_0 \in W_2^2(\Omega)$ satisfazendo $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial\phi_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$. Além disso suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado de classe C^2. Se $|c|$ é suficientemente pequeno, então o problema (P_2) possui solução $(u, \phi) \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, onde $\bar{q} = \min\{10/3, q\}$ e satisfaz as seguintes estimativas,*

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)}\right) \tag{4.14}$$

e

$$\|u\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)}\right), \tag{4.15}$$

onde C depende apenas de Ω, T, M e das constantes do problema (P_2).

Demonstração:

Agora, com tal M, podemos considerar o operador de truncamento π e o problema (P_t).

Pelo Teorema anterior, existe $(u, \phi) \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, solução de (P_t). Agora, observemos que se mostrarmos que (u, ϕ) satisfaz, $0 \leq \phi \leq M$ q.t.p. em Q, então teremos $\pi(\phi) = \phi$ e (u, ϕ) a solução procurada. Suponhamos que isto já tenha sido demonstrado e passemos a obter as desigualdade enuciadas.

Como, $(u, \phi) \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$ é uma solução do problema (P_2) e, portanto, satisfaz as desigualdades do Teorema 4.2, a desigualdade (4.14) é satisfeita.

Para verificarmos que (4.15) é satisfeita considerando $0 \leq \phi \leq M$, observemos que, como $W_2^{2,1}(Q) \hookrightarrow L_{10}(Q)$ da desiguadade (4.14) temos

$$\|u\|_{L_{10}(Q)} + \|\phi\|_{L_{10}(Q)} \leq C\left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)}\right). \tag{4.16}$$

Como $u, \phi \in L_{10}(Q)$, temos que o segundo membro da segunda equação do problema (P_t) pertence a $L_{10/3}(Q)$. Temos também que $\phi_0 \in W_2^2(\Omega) \hookrightarrow W_{10/3}^{2-2/\frac{10}{3}}(\Omega)$. Então aplicando o Teorema 1.13 a esta equação, obtemos que $\phi \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e satisfaz a estimativa

$$\|\phi\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)}$$

$$\leq C\left(\left\|-a\phi(1-\phi)\left(b - \frac{\phi}{2}\right) - a\pi(\phi)\left(1 - \pi(\phi)\right)\left(cu - \frac{\pi(\phi)}{2}\right)\right\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)}\right).$$

De onde, usando a desigualdade triangular,

$$\|\phi\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)}$$

$$\leq C\Big(\|\phi\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\phi\cdot\phi\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\phi^2\cdot\phi\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\pi(\phi)\cdot u\|_{L_{10/3}(Q)}$$
$$+\|\pi(\phi)\cdot\pi(\phi)\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\pi(\phi)^2\cdot u\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\pi(\phi)^2\cdot\pi(\phi)\|_{L_{10/3}(Q)}\Big).$$

Se $0 \leq \phi \leq M$, então aplicando a desigualdade de Hölder em cada termo da última desigualdade, segue que

$$\|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\Big(\|\phi\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\pi(\phi)\|_{L_{10/3}(Q)} + \|u\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)}\Big),$$
$$\leq C\Big(\|\phi\|_{L_{10/3}(Q)} + \|u\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)}\Big).$$

Daí, pela desigualdade (4.16), temos

$$\|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\Big(\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)}\Big). \tag{4.17}$$

Como $\phi \in W^{2,1}_{10/3}(Q)$ então $\phi_t \in L_{10/3}(Q)$, daí o segundo membro da primeira equação de (P_c) pertence a $L_{\bar{q}}(Q)$, onde $\bar{q} = \min\{10/3, q\} > 5/2$. Como $u_0 \in W^2_2(\Omega) \hookrightarrow W^{2-2/\frac{10}{3}}_{10/3}(\Omega) \hookrightarrow W^{2-2/\bar{q}}_{\bar{q}}(\Omega)$, então aplicando o Teorema 1.13 à primeira equação do problema (P_c), temos que $u \in W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)$, e satisfaz

$$\|u\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)} \leq C\Big(\|\phi_t\|_{L_{\bar{q}}(Q)} + \|f\|_{L_{\bar{q}}(Q)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}\Big)$$
$$\leq C\Big(\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)}\Big),$$

por (4.17).

De onde,

$$\|u\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)} + \|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\Big(\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)}\Big).$$

Falta mostrar então que se (u,ϕ) é solução do problema (P_t) dada pelo Teorema 4.2 satisfaz $0 \leq \phi \leq M$.

Para isso consideremos uma solução (u,ϕ) do problema (P_t) dada pelo Teorema 4.2. Vamos dividir essa demonstração em duas partes.

1) Mostremos que $\phi \geq 0$ q.t.p. em Q.

Para isto, considere a função

$$-(\phi_-)(x,t) = \begin{cases} \phi(x,t) & \text{se} \quad \phi(x,t) \leq 0 \\ 0 & \text{se} \quad \phi(x,t) > 0 \end{cases}.$$

Observe que

$$\frac{\partial(-\phi_-)}{\partial t}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) & \text{se } \phi(x,t) \leq 0 \\ 0 & \text{se } \phi(x,t) > 0 \end{cases} \quad e$$

$$\Delta(-\phi_-)(x,t) = \begin{cases} \Delta\phi(x,t) & \text{se } \phi(x,t) \leq 0 \\ 0 & \text{se } \phi(x,t) > 0 \end{cases}.$$

Multiplicando a segunda equação de (P_t) por $-(\phi_-)$ e integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, temos

$$\int_0^t \int_\Omega -(\phi_-)\phi_t dxdt + \int_0^t \int_\Omega D\left(-\phi_-\right) D\phi \; dxdt$$

$$= \int_0^t \int_\Omega a(\phi_-)\phi(1-\phi)\left(b - \frac{\phi}{2}\right) dxdt - \int_0^t \int_\Omega a(\phi_-)\pi(\phi)(1-\pi(\phi))\left(cu - \frac{\pi(\phi)}{2}\right) dxdt.$$

Note que,

$$\int_0^t \int_\Omega -\phi_-\phi_t dxdt = \int_0^t \int_\Omega \phi_-(\phi_-)_t dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega (\phi_-)(t)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (\phi_-)(0)^2 dx,$$

e que,

$$\int_0^t \int_\Omega -(\phi_-)\Delta\phi \; dxdt = \int_0^t \int_\Omega D\left(-\phi_-\right) D\phi \; dxdt = \int_0^t \int_\Omega |D\left(-\phi_-\right)|^2 dxdt.$$

Então, das três últimas igualdades,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\phi_-)(t)^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (\phi_-)(0)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |D\phi_-|^2 dxdt$$

$$= a\int_0^t \int_\Omega \left[b(-\phi)\left(-\phi_-\right) + \frac{1}{2}\phi^2\left(-\phi_-\right) + b\phi^2\left(-\phi_-\right) - \frac{1}{2}\phi^3\left(-\phi_-\right)\right] dxdt$$

$$-a\int_0^t \int_\Omega a(\phi_-)\pi(\phi)(1-\pi(\phi))\left(cu - \frac{\pi(\phi)}{2}\right) dxdt.$$

Como por hipótese $\phi_0 \geq 0$, então $(\phi_-)(0) \equiv (\phi_0)_- \equiv 0$. Observe também que $\pi(\phi)(-\phi_-) \equiv 0$, com isso

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\phi_-)(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |D\phi_-|^2 dxdt$$

$$= a\int_0^t \int_\Omega \left[b(-\phi)\left(-\phi_-\right) + \frac{1}{2}\phi^2\left(-\phi_-\right) + b\phi^2\left(-\phi_-\right) - \frac{1}{2}\phi^3\left(-\phi_-\right)\right] dxdt$$

$$= a\int_0^t \int_\Omega \left[-b(\phi_-)^2 - \frac{1}{2}(\phi_-)^3 - b(\phi_-)^3 - \frac{1}{2}(\phi_-)^4\right] dxdt.$$

Então, usando na última integral acima que, $-(\phi_-)^3 = \phi^2(-\phi_-) \leq 0$ e usando a desigualdade de Young no termo $-b(\phi_-)^3$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (\phi_-)(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |D\phi_-|^2 dxdt$$

$$= a\int_0^t \int_\Omega \left[-b(\phi_-)^2 + C_\varepsilon |b|(\phi_-)^2 + \varepsilon|b|(\phi_-)^4 - \frac{1}{2}(\phi_-)^4\right] dxdt.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que, $\varepsilon|b| - 1 \leq 0$, segue que

$$\int_\Omega (\phi_-)(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |D\phi_-|^2 dxdt \leq C\int_0^t \int_\Omega (\phi_-)^2 dxdt.$$

Agora, usando o Lema de Gronwall na desigualdade satisfeita pela primeira integral acima , obtemos

$$\int_\Omega (\phi_-)(t)^2 dx = 0,$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Portanto, $(\phi_-) = 0$ q.t.p. em Ω, para todo $0 \leq t \leq T$. Com isso, mostramos que $\phi(x,t) \geq 0$ q.t.p. em Q.

2) Mostremos que $\phi \leq M$ q.t.p. em Q.

Para isto, considere a função

$$(M-\phi)_-(x,t) = \begin{cases} \phi(x,t) - M & \text{se} \quad \phi(x,t) \geq M \\ 0 & \text{se} \quad \phi(x,t) < M. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação do problema (P_t) por $(M-\phi)_-$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e observando que

$$\int_0^t \int_\Omega (M-\phi)_- \phi_t dxdt = \int_0^t \int_\Omega (M-\phi)_-(\phi - M)_t \, dxdt = \int_0^t \int_\Omega \frac{d}{dt}(M-\phi)_-^2 dxdt$$

e

$$\int_0^t \int_\Omega (M-\phi)_- \Delta\phi \; dxdt = \int_0^t \int_\Omega (M-\phi)_- \Delta(\phi - M) \; dxdt = -\int_0^t \int_\Omega |D(M-\phi)_-|^2 dxdt,$$

temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (M-\phi)_-(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |D(M-\phi)_-|^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega (M-\phi)_-(0)^2 dx$$

$$+a\int_0^t \int_\Omega \left[-\phi(1-\phi)\left(b - \frac{\phi}{2}\right)(M-\phi)_-\right] dxdt$$

$$+a\int_0^t\int_\Omega\left[-\pi(\phi)(1-\pi(\phi))\left(cu-\frac{\pi(\phi)}{2}\right)(M-\phi)_-\right]dxdt.$$

Considerando $Q_1(t) := \{(x,s);\ x\in\Omega,\ 0\le s\le t,\ \phi(x,s)<M\}$ como também, $Q_2(t) := \{(x,s);\ x\in\Omega,\ 0\le s\le t,\ \phi(x,s)\ge M\}$, temos da igualdade acima,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega(M-\phi)_-(t)^2dx+\int_0^t\int_\Omega|D(M-\phi)_-|^2dxdt=\frac{1}{2}\int_\Omega(M-\phi)_-(0)^2dx$$
$$+a\int\int_{Q_1(t)}\left[-\phi(1-\phi)\left(b-\frac{\phi}{2}\right)(M-\phi)_-\right]dxdt$$
$$+a\int\int_{Q_2(t)}\left[-\phi(1-\phi)\left(b-\frac{\phi}{2}\right)(M-\phi)_-\right]dxdt$$
$$+a\int\int_{Q_1(t)}\left[-\pi(\phi)(1-\pi(\phi))\left(cu-\frac{\pi(\phi)}{2}\right)(M-\phi)_-\right]dxdt$$
$$+a\int\int_{Q_2(t)}\left[-\pi(\phi)(1-\pi(\phi))\left(cu-\frac{\pi(\phi)}{2}\right)(M-\phi)_-\right]dxdt.$$

Em $Q_1(t)$, temos $(M-\phi)_-\equiv 0$, pois $\phi\equiv 0$ em $Q_1(t)$, logo a primeira e a terceira integrais do segundo membro da igualdade acima são nulas.

Em $Q_2(t)$, temos $\phi\ge M\ge 1+2|b|+2|c|\tilde{K}>0$. Logo, $-\phi<0$, $(1-\phi)\le 0$, pois $(b-\phi/2)<0$, pois $\phi\ge 2|b|>2b$ e $(M-\phi)_-\ge 0$. Portanto a segunda integral do segundo membro é não-positiva.

Finalmente, em $Q_2(t)$ temos $-\pi(\phi)=-M<0$, $(1-\pi(\phi))=(1-M)\le 0$. Além disso, por (4.13), temos que $cu\le|c|\|u\|_{L_\infty(Q)}\le|c|\tilde{K}\le\frac{1}{2}M$. Então $(cu-\pi(\phi)/2)=(cu-M/2)\le 0$. Logo temos que a última integral do segundo membro é não-positiva.

Então segue que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega(M-\phi)_-(t)^2dx+\int_0^t\int_\Omega|D(M-\phi)_-|^2dxdt\le\frac{1}{2}\int_\Omega(M-\phi)_-(0)^2dx.$$

Como por hipótese $\phi_0\le M$, então $(M-\phi)_-(0)\equiv(M-\phi_0)_-\equiv 0$. O que implica em $(M-\phi)_-(t)=0$ q.t.p em Ω, para todo $0<t\le T$.

De onde, concluimos que $\phi(x,t)\le M$ q.t.p. em Q.

O que demonstra o teorema.

■

Observação 4.3 *Na demonstração do teorema anterior, além dos resultados obtidos do respectivo teorema, também é provado que* $0\le\phi\le M$ *q.t.p. em* Q.

4.3 Continuidade, Unicidade e Regularidade de Solução para o Modelo 2

Agora iremos demonstrar resultados sobre a continuidade de solução do problema (P_2) em relação ao termo forçante e aos dados iniciais. Uma consequência destes resultados é a unicidade da solução deste problema. Posteriormente veremos um resultado sobre regularidade de solução do mesmo problema.

Teorema 4.4 *Sejam $f_1, f_2 \in L_q(Q)$, com $q > 5/2$, $(u_0^1, \phi_0^1), (u_0^2, \phi_0^2) \in W_2^2(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$ e sejam $(u_1, \phi_1), (u_2, \phi_2) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ as soluções correspondentes do problema (P_2), com (u_0^1, ϕ_0^1, f_1) e com (u_0^2, ϕ_0^2, f_2), respectivamente. Suponha que a, b, c e l são constantes, com $a > 0$ e suponha que u_0^i, ϕ_0^i satisfazem $\partial u_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial \phi_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ e $0 \leq \phi_0^i \leq M$, para $i = 1, 2$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio limitado e de classe C^2. Então (u_1, ϕ_1) e (u_2, ϕ_2) satisfazem a seguinte estimativa*

$$\|u_1 - u_2\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\phi_1 - \phi_2\|_{W_2^{2,1}(Q)}$$

$$\leq C \left(\|u_0^1 - u_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0^1 - \phi_0^2\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(Q)} \right),$$

onde C depende somente de Ω, T, M, das constantes do problema (P_2) e de u_1, u_2, ϕ_1 e ϕ_2.

Demonstração:

De acordo com as hipóteses, temos para cada $i = 1, 2$ que, (u_i, ϕ_i) é solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta u_i = -l\dfrac{\partial \phi_i}{\partial t} + f_i & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial \phi_i}{\partial t} - \Delta \phi_i = -a\phi_i(1-\phi_i)\left(b - \phi_i + cu_i\right) & \text{em } Q, \\ \partial u_i/\partial n = \partial \phi_i/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\ u_i = u_0^i, \phi_i = \phi_0^i & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Agora observemos que

$$-a\phi_1(1-\phi_1)\left(b - \phi_1 + cu_1\right) + a\phi_2(1-\phi_2)\left(b - \phi_2 + cu_2\right)$$

$$= -a\phi_1(1-\phi_1)\left(b - \phi_1 + cu_1\right) + a\phi_2(1-\phi_2)\left(b - \phi_2 + cu_2\right)$$

$$+ac\left(\phi_2^2 - \phi_2\right)u_1 - ac\left(\phi_2^2 - \phi_2\right)u_1$$

$$= A_1(u_1 - u_2) + A_2(\phi_1 - \phi_2),$$

onde,

$A_1 := a\left[-b + (b+1)(\phi_1 + \phi_2) - (\phi_1^2 + \phi_1\phi_2 + \phi_2^2) - cu_1 + cu_1(\phi_1 + \phi_2)\right]$ e

$A_2 := ac\,(\phi_2^2 - \phi_2)$.

Portanto, definindo $u := u_1 - u_2$, $\phi := \phi_1 - \phi_2$, $u_0 := u_0^1 - u_0^2$ e $\phi_0 := \phi_0^1 - \phi_0^2$, temos que (u, ϕ) satisfaz ao seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -l\dfrac{\partial \phi}{\partial t} + (f_1 - f_2) & \text{em } Q, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \Delta \phi = A_1\phi + A_2 u & \text{em } Q, \\ \partial u/\partial n = \partial \phi/\partial n = 0 & \text{em } \partial\Omega \times (0, T], \\ u = u_0, \phi = \phi_0 & \text{em } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{4.18}$$

Multiplicando a segunda equação do problema acima por ϕ, integrando em $\Omega \times (0, t]$, com $0 < t \leq T$, e utilizando a desigualdade de Young, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \phi(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |D\phi|^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega \phi_0^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left(A_1\phi^2 + A_2 u\phi\right) dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \phi_0^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left(A_1 + \frac{|A_2|}{2}\right) \phi^2 dxdt + \int_0^t \int_\Omega \frac{|A_2|}{2} u^2 dxdt.$$

Como $u_1, u_2, \phi_1, \phi_2 \in L_\infty(Q)$, temos que $A_1, A_2 \in L_\infty(Q)$. Logo, usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \phi(t)^2 dx + \int_0^t \int_\Omega |D\phi|^2 dxdt \leq C\left(\int_\Omega \phi_0^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \phi^2 dxdt + \int_0^t \int_\Omega u^2 dxdt\right).$$

Agora, multiplicando a primeira equação do problema (4.18) por $(u + l\phi)$, integrando em $\Omega \times (0, t]$, com $0 < t \leq T$, e novamente ultilizando a desigualdade de Young, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[u(t)^2 + lu(t)\phi(t) + \phi(t)^2\right] dx + \int_0^t \int_\Omega \left(|Du|^2 + lDuD\phi\right) dxdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u_0^2 + lu_0\phi_0 + \phi_0^2\right) dx + l\int_0^t \int_\Omega (f_1 - f_2)\,\phi\, dxdt + \int_0^t \int_\Omega (f_1 - f_2)\, u\, dxdt$$

$$\leq C\left(\int_\Omega u_0^2 dx + \int_\Omega \phi_0^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \phi^2 dxdt + \int_0^t \int_\Omega u^2 dxdt + \int_0^t \int_\Omega (f_1 - f_2)^2\, dxdt\right).$$

Multiplicando a primeira desigualdade pela constante $(1 + l^2) > 0$, e somando à segunda desigualdade obtida, segue que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[u(t)^2 + lu(t)\phi(t) + \phi(t)^2 + (1 + l^2)\phi(t)^2\right] dx$$

$$+\int_0^t\int_\Omega\left(|Du|^2+lDuD\phi+(1+l^2)|D\phi|^2\right)dxdt$$

$$\leq C\left(\int_\Omega u_0^2dx+\int_\Omega\phi_0^2dx+\int_0^t\int_\Omega\phi^2dxdt+\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt+\int_0^t\int_\Omega(f_1-f_2)^2\,dxdt\right).$$

Procedendo como no ítem **e)** da demonstração do Teorema 4.2, temos a seguinte desigualdade

$$\int_\Omega\left(u(t)^2+\phi(t)^2\right)dxdt+\int_0^t\int_\Omega\left(|Du|^2+|D\phi|^2\right)dxdt$$

$$\leq C\left(\int_\Omega u_0^2dx+\int_\Omega\phi_0^2dx+\int_0^t\int_\Omega\left(u^2+\phi^2\right)dxdt+\int_0^t\int_\Omega(f_1-f_2)^2\,dxdt\right).$$

Usando o Lema de Gronwall na desigualdade satisfeita pela primeira integral acima, obtemos

$$\int_\Omega\left(u(t)^2+\phi(t)^2\right)dxdt+\int_0^t\int_\Omega\left(|Du|^2+|D\phi|^2\right)dxdt$$

$$\leq C\left(\int_\Omega u_0^2dx+\int_\Omega\phi_0^2dx+\int_0^t\int_\Omega(f_1-f_2)^2\,dxdt\right). \tag{4.19}$$

Agora, multiplicando a segunda equação de (4.18) por ϕ_t, integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $0\leq t\leq T$, e utilizando a desigualdade de Young, temos

$$\int_0^t\int_\Omega\phi_t^2dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega|D\phi(t)|^2dx$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_\Omega|D\phi_0|^2dx+\int_0^t\int_\Omega\left(C_\varepsilon|A_1|\phi^2+\varepsilon|A_1|\phi_t^2+C_\varepsilon|A_2|u^2+\varepsilon|A_2|\phi_t^2\right)dxdt.$$

Como $q>5/2$, temos que $u_i\in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)\hookrightarrow L_\infty(Q)$ e $\phi_i\in L_\infty(Q)$ para cada $i=1,2$. Então $A_1,A_2\in L_\infty(Q)$, daí temos que existe $\varepsilon>0$ tão pequeno que, $\varepsilon|A_1|+\varepsilon|A_2|\leq 1/2$, q.t.p. em Q. Tomando tal ε, e usando o desigualdade (4.19), temos

$$\int_0^t\int_\Omega\phi_t^2dxdt+\int_\Omega|D\phi(t)|^2dx$$

$$\leq C\left(\int_\Omega|D\phi_0|^2dx+\int_\Omega u_0^2dx+\int_\Omega\phi_0^2dx+\int_0^t\int_\Omega(f_1-f_2)^2\,dxdt\right). \tag{4.20}$$

Multiplicando a primeira equação de (4.18) por u_t, integrando em $\Omega\times(0,t)$, com $0\leq t\leq T$, e utilizando a desigualdade de Young, obtemos

$$\int_0^t\int_\Omega u_t^2dxdt+\frac{1}{2}\int_\Omega|Du(t)|^2dx$$

$$\leq\frac{1}{2}\int_\Omega|Du_0|^2dx+\int_0^t\int_\Omega\left(C_\varepsilon|l|\phi_t^2+\varepsilon|l|u_t^2+C_\varepsilon(f_1-f_2)^2+\varepsilon u_t^2\right)dxdt.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que, $\varepsilon(|l|+1) \leq 1/2$ e utilizando a desigualdade (4.20), temos

$$\int_0^t \int_\Omega u_t^2 dxdt + \int_\Omega |Du(t)|^2 dx$$

$$\leq C\left(\int_\Omega |Du_0|^2 dx + \int_\Omega |D\phi_0|^2 dx + \int_\Omega u_0^2 dx + \int_\Omega \phi_0^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (f_1 - f_2)^2 \, dxdt\right). \tag{4.21}$$

Multiplicando a segunda equação de (4.18) por $-\Delta\phi$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e utilizando a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta\phi)^2 \, dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |D\phi_0|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left(C_\varepsilon |A_1|\phi^2 + \varepsilon|A_1|(\Delta\phi)^2 + C_\varepsilon|A_2|u^2 + \varepsilon|A_2|(\Delta\phi)^2\right) dxdt.$$

Como $A_1, A_2 \in L_\infty(Q)$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que, $\varepsilon(|A_1| + |A_2|) \leq 1/2$, q.t.p. em Q, e usando a desigualdade (4.19), obtemos

$$\int_\Omega |D\phi(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta\phi)^2 \, dxdt$$

$$\leq C\left(\int_\Omega |D\phi_0|^2 dx + \int_\Omega u_0^2 dx + \int_\Omega \phi_0^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (f_1 - f_2)^2 \, dxdt\right). \tag{4.22}$$

Finalmente, Multiplicando a primeira equação de (4.18) por $-\Delta u$, integrando em $\Omega \times (0,t)$, com $0 \leq t \leq T$, e utilizando a desigualdade de Young, temos

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |Du(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta u)^2 \, dxdt$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du_0|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega \left(C_\varepsilon |l|\phi_t^2 + \varepsilon|l|(\Delta u)^2 + C_\varepsilon(f_1 - f_2)^2 + \varepsilon(\Delta u)^2\right) dxdt.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que, $\varepsilon(|l|+1) \leq 1/2$, e usando (4.20), segue que

$$\int_\Omega |Du(t)|^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (\Delta u)^2 \, dxdt$$

$$\leq C\left(\int_\Omega |Du_0|^2 dx + \int_\Omega |D\phi_0|^2 dx + \int_\Omega u_0^2 dx + \int_\Omega \phi_0^2 dx + \int_0^t \int_\Omega (f_1 - f_2)^2 \, dxdt\right). \tag{4.23}$$

Portanto, das desigualdades (4.19) a (4.23), obtemos a seguinte estimativa,

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq \left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(Q)}\right).$$

O que prova o teorema.

■

Corolário 4.5 *Sejam* $f_1, f_2 \in L_q(Q)$, *com* $q > 5/2$, $(u_0^1, \phi_0^1), (u_0^2, \phi_0^2) \in W_2^2(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$ *e sejam* $(u_1, \phi_1), (u_2, \phi_2) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ *as soluções correspondentes do problema* (P_2), *com* (u_0^1, ϕ_0^1, f_1) *e com* (u_0^2, ϕ_0^2, f_2), *respectivamente. Suponha que* a, b, c *e* l *são constantes, com* $a > 0$,*e suponha que* u_0^i, ϕ_0^i *satisfazem* $\partial u_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial \phi_0^i/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$ *e* $0 \leq \phi_0^i \leq M$, *para* $i = 1, 2$. *Além disso, suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *é um domínio limitado e de classe* C^2. *Então* $(u_1, \phi_1), (u_2, \phi_2) \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, *onde* $\bar{q} = \min\{q, 10/3\}$ *e satisfaz a seguinte estimativa de estabilidade*

$$\|u_1 - u_2\|_{W_{\bar{q}}^{2,1}(Q)} + \|\phi_1 - \phi_2\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)}$$

$$\leq C \left(\|u_0^1 - u_0^1\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0^1 - \phi_0^1\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)} \right),$$

onde C *depende somente de* Ω, T, M, *das constantes do problema* (P_2) *e de* u_1, u_2, ϕ_1 *e* ϕ_2.

Se além disso, $u_0^i, \phi_0^i \in W_{3p/5}^2(\Omega)$, *com* $2 \leq 3p/5 < \infty$, *para* $i = 1, 2$, *então* $(u_1, \phi_1), (u_2, \phi_2) \in W_{\tilde{q}}^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$, *onde* $\tilde{q} = \min\{q, p\}$, *e satisfazem a seguinte estimativa de estabilidade*

$$\|u_1 - u_2\|_{W_{\tilde{q}}^{2,1}(Q)} + \|\phi_1 - \phi_2\|_{W_p^{2,1}(Q)}$$

$$\leq C \left(\|u_0^1 - u_0^1\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|\phi_0^1 - \phi_0^1\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)} \right),$$

onde C *depende somente de* Ω, T, M, *das constantes do problema* (P_2) *e de* u_1, u_2, ϕ_1 *e* ϕ_2.

Demonstração:

Sejam u, ϕ, u_0 e ϕ_0 como na demosntração do Teorema anterior.

Temos pelo Teorema 4.4, que $(u, \phi) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ e satisfaz a estimativa

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_2^{2,1}(Q)}$$

$$\leq C \left(\|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(Q)} \right). \tag{4.24}$$

Como $A_1, A_2 \in L_\infty(Q)$, temos $A_1\phi + A_2 u \in L_{10/3}(Q)$. Além disso, $\phi_0 \in W_2^2(\Omega)$ e, pelo Corolário 1.9, $W_2^2(\Omega) \hookrightarrow W_{10/3}^{2-2/\frac{10}{3}}(\Omega)$. Então, aplicando o Teorema 1.13 à segunda equação do problema (4.18), temos que $\phi \in W_{10/3}^{2,1}(Q)$ e satisfaz

$$\|\phi\|_{W_{10/3}^{2,1}(Q)} \leq C \left(\|A_1\phi\|_{L_{10/3}(Q)} + \|A_2 u\|_{L_{10/3}(Q)} + \|\phi_0\|_{W_{10/3}^{2-2/\frac{10}{3}}(\Omega)} \right).$$

Usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq \left(\|\phi\|_{W^{2,1}_2(Q)} + \|u\|_{W^{2,1}_2(Q)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)}\right).$$

Da última desigualdade e de (4.24), segue que

$$\|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\left(\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(Q)}\right). \qquad (4.25)$$

Agora, como $\phi_t \in L_{10/3}(Q)$ e $(f_1 - f_2) \in L_q(Q)$, temos que o segundo membro da primeira equação do problema (4.18) pertence a $L_{\bar{q}}(Q)$, onde $\bar{q} = \min\{q, 10/3\}$. Além disso, $u_0 \in W^2_2(\Omega) \hookrightarrow W^{2-2/\frac{10}{3}}_{10/3}(\Omega) \hookrightarrow W^{2-2/\bar{q}}_{\bar{q}}(\Omega)$. Então aplicando Teorema 1.13 à primeira equação equação mencionada acima, obtemos $u \in W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)$ e satisfaz

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)} &\leq C\left(\|\phi_t\|_{L_{\bar{q}}(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L_{\bar{q}}(Q)} + \|u_0\|_{W^{2-2/\bar{q}}_{\bar{q}}(\Omega)}\right) \\
&\leq C\left(\|\phi_t\|_{L_{10/3}(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}\right) \\
&\leq C\left(\|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} + \|f_1 - f_2\|_{L_q(Q)} + \|u_0\|_{W^2_2(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

Pela última desigualdade e por (4.24) temos

$$\|u\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)} \leq C\left(\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(Q)}\right).$$

De onde,

$$\|u\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)} + \|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)} \leq C\left(\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(Q)}\right),$$

como queríamos.

Suponha agora que $u_0, \phi_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$. Como $(u, \phi) \in W^{2,1}_{\bar{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q) \subset L_\infty(Q) \times L_\infty(Q)$, temos $A_1\phi + A_2 u \in L_p(Q)$. Além disso, pelo Corolário 1.9, temos $\phi_0 \in W^{2-2/p}_p(\Omega)$. Então aplicando o Teorema 1.13 à segunda equação de (4.18) e usando a última desigualdade, temos que $\phi \in W^{2,1}_p(Q)$ e satisfaz

$$\|\phi\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\left(\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(Q)}\right).$$

Finalmente, como $\phi_t \in L_p(Q)$ e $(f_1 - f_2) \in L_q(Q)$, então o segundo membro da primeira equação de (4.18) pertence a $L_{\tilde{q}}(Q)$, onde $\tilde{q} = \min\{q, p\}$. Além disso, $u_0 \in W^{2-2/q}_q(\Omega)$. Então, aplicando o Teorema 1.13 na primeira equação do probelma (4.18) temos que $u \in W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q)$, e procedendo de modo análogo ao que foi feito na obtenção da estimativa anterior, temos

$$\|u\|_{W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q)} \leq C\left(\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(Q)}\right).$$

Pelas duas últimas desigualdades, obtemos

$$\|u\|_{W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q)} + \|\phi\|_{W^{2,1}_p(Q)} \leq C\left(\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|f_1 - f_2\|_{L_2(Q)}\right).$$

Com isso, demonstramos o teorema.

■

Segue do Teorema 4.4 o seguinte resultado:

Corolário 4.6 *Suponha l, a, b e c constantes, com $a > 0$, $f \in L_q(Q)$, com $q > 5/2$, e $u_0, \phi_0 \in W^2_2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n|_{\partial\Omega} = \partial\phi_0/\partial n|_{\partial\Omega} = 0$, onde $0 \leq \phi_0 \leq M$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado de classe C^2. Então a solução $(u, \phi) \in W^{2,1}_2(Q) \times W^{2,1}_2(Q)$ do problema (P_2) é única.*

Pelo corolário anterior, temos que existe única solução do problema (P_2). Segue então que esta é a solução dada pelo teorema 4.3, daí obtemos o seguinte Teorema de regularidade do Modelo de solidificação 2:

Teorema 4.7 *Suponha que a, b, c, l são constantes, com $a > 0$, $f \in L_q(Q)$, com $q > 5/2$, e $u_0, \phi_0 \in W^2_2(\Omega)$ satisfazem $\partial u_0/\partial n = \partial\phi_0/\partial n = 0$ e $0 \leq \phi_0 \leq M$. Além disso, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio aberto, limitado e de classe C^2. Se $(u, \phi) \in W^{2,1}_2(Q) \times W^{2,1}_2(Q)$ é uma solução de (P_2), então $(u, \phi) \in W^{2,1}_{\bar{q}}(Q) \times W^{2,1}_{10/3}(Q)$, onde $\bar{q} = \min\{q, 10/3\}$ e satisfaz a seguinte estimativa*

$$\|u\|_{W^{2,1}_{\bar{q}}(Q)} + \|\phi\|_{W^{2,1}_{10/3}(Q)}$$
$$\leq C\left(\|u_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)}\right).$$

onde C depende somente de Ω, T, M, das constantes do problema (P_2) e de u_1, u_2, ϕ_1 e ϕ_2.

Se, além disso $u_0, \phi_0 \in W^2_{3p/5}(\Omega)$, com $2 \leq 3p/5 < \infty$, então $(u, \phi) \in W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q) \times W^{2,1}_p(Q)$, com $\tilde{q} = \min\{q, p\}$, e satisfaz a seguinte estimativa

$$\|u\|_{W^{2,1}_{\tilde{q}}(Q)} + \|\phi\|_{W^{2,1}_p(Q)}$$
$$\leq C\left(\|u_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|\phi_0\|_{W^2_{3p/5}(\Omega)} + \|f\|_{L_q(Q)}\right),$$

onde C depende somente de Ω, T, M, das constantes do problema (P_2) e de u_1, u_2, ϕ_1 e ϕ_2.

Demonstração:

Seja $(u,\phi) \in W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$ uma solução do problema (P_2). Como a solução desse problema é única temos que esta é dada pelo Teorema 4.3. Então $(u,\phi) \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \times W_{10/3}^{2,1}(Q)$, onde $\bar{q} = \min\{q, 10/3\}$, e (u,ϕ) satisfaz as estimativas (4.14) e (4.15).

Como $\phi \in W_{10/3}^{2,1}(Q) \hookrightarrow L_\infty(Q)$ e $u \in W_{\bar{q}}^{2,1}(Q) \hookrightarrow L_\infty(Q)$, temos que o segundo membro da segunda equação de (P_2) pertence a $L_\infty(Q) \hookrightarrow L_p(Q)$. Além disso, como $\phi_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega) \hookrightarrow W_p^{2-2/p}(\Omega)$, então aplicando o Teorema 1.13 à segunda equação da (P_2), obtemos $\phi \in W_p^{2,1}(Q)$ e vale o seguinte,

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} &\leq C\left(\|-a\phi(1-\phi)(b-\phi-cu)\|_{L_p(Q)} + \|\phi_0\|_{W_p^{2-2/p}(\Omega)}\right)\\ &\leq C\left(\|-ac\phi(1-\phi)u - a(1-\phi)(b-\phi)\phi\|_{L_p(Q)} + \|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Pelas desigualdades triangular e de Hölder e como $0 \leq \phi \leq M$, pelo Teorema 4.3, temos que

$$\begin{aligned}&\|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)}\\ &\leq C\left(\|-ac\phi(1-\phi)\|_{L_\infty(Q)}\|u\|_{L_p(Q)} + \|-a(1-\phi)(b-\phi)\|_{L_\infty(Q)}\|\phi\|_{L_p(Q)} + \|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)}\right)\\ &\leq C\left(\|u\|_{L_p(Q)} + \|\phi\|_{L_p(Q)} + \|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Segue da última desigualdade e da desigualdade 4.15, que

$$\|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(\Omega)}\right).$$

Agora, como $\phi_t \in L_p(Q)$, temos que o segundo membro da primeira equação de (P_2) pertence a $L_{\tilde{q}}(Q)$, onde $\tilde{q} = \min\{q,p\}$. Além disso, $u_0 \in W_{3p/5}^2(\Omega) \hookrightarrow W_p^{2-2/p}(\Omega) \hookrightarrow W_{\tilde{q}}^{2-2/\tilde{q}}(\Omega)$. Então, pelo Teorema 1.13 e pela última desigualdade, temos $u \in W_{\tilde{q}}^{2,1}(Q)$ satisfazendo

$$\begin{aligned}\|u\|_{W_{\tilde{q}}^{2,1}(Q)} &\leq C\left(\|\phi_t\|_{L_p(Q)} + \|f\|_{L_p(Q)} + \|u_0\|_{W_{\tilde{q}}^{2-2/\tilde{q}}(\Omega)}\right)\\ &\leq C\left(\|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\|_{W_{\tilde{q}}^{2,1}(Q)} + \|\phi\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leq C\left(\|\phi_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_{3p/5}^2(\Omega)} + \|f\|_{L_q(\Omega)}\right).$$

Logo temos $(u,\phi) \in W_{\tilde{q}}^{2,1}(Q) \times W_p^{2,1}(Q)$ e a estimativa desejada.

■

Bibliografia

[1] Adams, R., *Sobolev Spaces*, Academic Press (1975).

[2] Boldrini, J. L., Caretta, B. M. C. e Fernández-Cara, E., *Analysis of a three-phase field of the solidification of an alloy*, pre-print.

[3] G. Caginalp, An analysis of phase field model of a free boundary, Arch. Rat. Mech. Anal. 92, pág.205-245, 1986.

[4] G. Caginalp, Phase field computations of single-needle crystals, crystal growth and motion by mean curvature, SIAM J. Sci. Comput. 15 (1), pág. 106-126, 1994.

[5] G. Caginalp e J. Jones, A derivation and analisys of phase field models of thermal alloys, Annal. Phys. 237, pág. 66-107, 1995.

[6] G. Caginalp, Stefan and Hele-Shaw type models as asymption limits of the phase-field equations, Phys. Rev. A 39 (11), pág. 5887-5896, 1989.

[7] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Rhode Island, Volume 19, 1980.

[8] G. J. Fix, Phase field meyhods for free boundary problems em A. Fasano, M. Primicerio (Eds) Free Boundary Problems: Theory and Applications, Pitman, Boston, pág. 580-589, 1983.

[9] Friedman, A., *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prencite Hall (1992).

[10] Hoffman, K. e Jiang, L., *Optimal Control of a Phase Model for Solidification*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 13(1&2), 11-27 (1992).

[11] Ladyzhenskaya, O. A., Solonnikov, V. A. e Ural'ceva N. N., *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Volume 23, 1968.

[12] Lions, J. L., *Control of Distributed Singular Sistems*, Gauthier-Villars, 1981.

[13] Simon, J., *Compact Sets in the Space* $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica pura ed Aplicata, Serie Quarta, Volume CXLVI, Nicola Zanichelli Editore - Bologna, 65-96 (1987).

[14] I. Steinbach, F. Pezzolla, B. Nestler, M. SeeBelger, R. Prieler, G.J. Schimitz, J.L.L. Rezende, A phase field concept for multiphase systems. Physica D, vol.94, 1996, pp.135-147.

[15] I. Steinbach, F. Pezzolla, A generalized field method for multiphase transformations using interface fields. Physica D, vol.134, 1999, pp.385-393.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo