PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Luiz Donizeti Ferreira

Provas algébricas: uma investigação sobre as justificativas de alunos da educação básica

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

SÃO PAULO
2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC-SP

Luiz Donizeti Ferreira

Provas algébricas: uma investigação sobre as justificativas de alunos da educação básica

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Trabalho final apresentado à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE PROFISSIONAL** em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação da Prof.(a) Doutora **Sônia Pitta Coelho.**

SÃO PAULO
2008

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: _____________________________Local e Data: __________________

DEDICATÓRIA

Aos meus queridos pais (*In memorian)*, Agenor e Carmelita. Foram eles que me indicaram o caminho do bem.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre presente.

À minha esposa Elisete, pelo amor, carinho e compreensão.

Aos meus queridos filhos, Luiz, Paulo e Carolina pelo incentivo e apoio.

Às minhas irmãs, Lourdes e Isabel, sempre preocupadas com a minha formação.

À Profª Dra. Sônia Pitta Coelho, por sua orientação, carinho, paciência e dedicação.

Às professoras, Dra. Ana Lucia Manrique e Dra. Leila Zardo Puga, por participarem da banca examinadora e pelas contribuições no momento da qualificação desse trabalho.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Ao colega de curso, Amadeu Tunini Doro, sempre disposto a me auxiliar.

À professora de língua portuguesa, Maria Aparecida Sanches, pela sua colaboração ao longo desse trabalho.

Ao Francisco, Analista Acadêmico da PUC-SP.

MUITO OBRIGADO.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo fazer uma investigação sobre a cultura de provas de alunos da Educação Básica, mais especificamente de 8ª série e do 1º ano do Ensino Médio, no domínio da álgebra.

O trabalho faz parte do projeto AprovaMe (Argumentação e Prova na Matemática Escolar), desenvolvido no biênio 2005-2007, que tem como um dos seus objetivos o mapeamento das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes das escolas públicas e particulares do estado de São Paulo.

O instrumento do referido projeto foi um questionário composto por cinco questões de geometria e cinco questões de álgebra, aplicado a 1998 alunos adolescentes na faixa etária entre 14 e 16 anos. Após a tabulação dos dados do grupo de 1998 alunos, extraímos uma amostra com 50 sujeitos, visando uma análise detalhada de suas respostas e justificativas apresentadas a uma das questões integrantes do questionário de álgebra.

Nossa análise examinou as respostas e justificativas dos alunos a essa questão. Fizemos uso do software estatístico e multidimensional CHIC para análise dos dados.

As nossas conclusões apontam para um desempenho dos alunos abaixo do desejado, pois apenas 20,5% dos sujeitos da nossa amostra apresentaram justificativas corretas aos itens da questão investigada, sendo predominante o uso da língua natural, isto é, nenhum aluno utilizou linguagem formal em suas justificativas. Destacamos a preferência pelo uso do cálculo nas justificativas em detrimento do uso das propriedades

Ressaltamos, ainda, que os alunos de 8ª série tiveram desempenho melhor que os alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Palavras-chave: Prova; Álgebra; Educação Básica.

ABSTRACT

This assignment has the objective to investigate the students test culture from regular education, mainly from 8th grade and 1st year from Junior High School on Algebra subject.

The assignment is part of the “Approve Me Project” (Argumentation and Mathematic Test) developed on biennium basis 2005-2007, has the objective to measure the argumentation process and to test teenagers from public and private schools from São Paulo State.

The referred assignment was done through a questionnaire composed by 5 questions of Geometry and 5 of Algebra, applied to 1998 teenagers from ages 14 to 16. After counting the 1998 student’s data, we extracted a sample of 50 individuals, aiming the detailed analysis of its answers and justification presented to one of the algebra member.

Our analysis examined the answers and justifications to these questions. We used the statistics and multidimensional software CHIC to analyze the data.

Our conclusions point out the below average performance, as only 20,5% of the students from our group of sample presented correct justifications to the investigated questions, being predominant the use of the natural language, none of the students used a formal language on their justified answers. We detach the preference for the use of the calculation in the justifications in detriment of the use of the properties

We also emphasize that the students from the 8th grade had better performance than Junior High School.

Keywords: Test, Algebra, Regular Education

SUMÁRIO

Lista de Tabelas:

Lista de Figuras:

Lista de Anexos:

APRESENTAÇÃO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam a necessidade de elevar o nível da educação de toda a população estudantil, pois devido ao avanço tecnológico, o mercado de trabalho exige níveis de formação cada vez mais elevados. Nesse aspecto, a matemática pode dar sua contribuição ao empregar metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativas de resultados.

Mas, como os alunos da educação básica elaboram suas justificativas na aula de matemática? Em sala de aula, os professores demonstram teoremas ou apresentam os passos de uma demonstração?

Com a intenção de dar minha contribuição às respostas para essas questões, ingressei no Projeto AprovaMe (Argumentação e Provas na Matemática Escolar), que teve início em 2005, sob a coordenação da Profª Dra. Lulu Healy e encerrou-se em 2007.

Esse projeto teve por objetivo esboçar um mapa sobre as concepções de prova de alunos adolescentes em escolas do Estado de São Paulo.

Para este fim, foram elaborados dois questionários, sendo um deles composto por questões sobre álgebra e o outro por questões sobre geometria, aplicados a 1998 alunos.

Esta dissertação, composta por cinco capítulos, pretende contribuir para o mapa das concepções dos alunos sobre prova no domínio da álgebra, analisando detalhadamente uma questão de álgebra do questionário.

No capítulo I apresentamos uma visão histórica sobre o tema demonstração, a posição de alguns autores da comunidade matemática e da Educação Matemática, a descrição do Projeto APROVAME e a metodologia utilizada neste trabalho.

No capítulo II apresentamos os resultados da fase I do projeto AprovaMe e também a análise quantitativa e qualitativa dos dados obtidos referentes à amostra de cinqüenta sujeitos obtida entre os 1998 alunos que responderam o questionário, no que diz respeito à questão de álgebra.

A análise multidimensional dos dados obtidos utilizando o software CHIC (Classificação Hierárquica, Implicativa e Coesitiva) compõe o capítulo III. As transcrições de trechos das entrevistas e as respectivas análises constituem o capítulo IV.

Finalizando este trabalho, apresentamos no capítulo V as nossas considerações finais, visando despertar nos professores o interesse por novas pesquisas e pela inclusão do tema prova na aula de matemática.

CAPÍTULO I

PROVAS EM MATEMÁTICA E EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

1.1 UMA VISÃO HISTÓRICA

Por que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais?

Por que o diâmetro de um círculo divide esse círculo ao meio?

Questões como estas começaram a ser formuladas pelo homem nos últimos séculos do 2° milênio a.C. Naquela época houve muitas mudanças econômicas e políticas, algumas civilizações desapareceram, inventou-se o alfabeto, introduziram-se as moedas, o comércio cresceu e ocorreram muitas descobertas geográficas.

Com o declínio de poder do Egito e da Babilônia, outros povos passaram ao primeiro plano, principalmente os gregos. Cidades prosperaram ao longo da costa da Ásia menor e mais tarde, na parte continental da Grécia, na Sicília e no litoral da Itália.

Em uma atmosfera de racionalismo crescente, o homem começou a indagar *como e por quê.*

Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem não se contentava mais com os processos empíricos suficientes o bastante para responder questões na forma de *como* mas que não contemplavam as indagações científicas na forma de *por quê.*

Algumas experiências com o assim chamado “método demonstrativo” foram se consubstanciando e se impondo, e o caráter dedutivo da matemática passou ao primeiro plano. O caminho que levou ao método axiomático em matemática não é, ao que tudo indica, bem conhecido, mas certamente é longo e está intimamente ligado ao desenvolvimento matemático na Grécia. Acredita-se que as primeiras idéias envolvendo demonstrações foram formuladas na Grécia do Séc. VI a. C. Esta crença fundamenta-se em comentários de matemáticos gregos posteriores a essa época, tendo em vista a inexistência de fontes primárias.

Segundo EVES (2002, p. 94-5) "a geometria demonstrativa iniciou-se com Tales de Mileto, um dos sete sábios da antiguidade, durante a primeira metade do século VI a. C. Tales é o primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas". Atribui-se a Tales a prioridade de formular explicitamente, pela primeira vez na história, propriedades das figuras como afirmações gerais. Creditam-se a ele os seguintes teoremas:

1- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
2- Dois ângulos opostos pelo vértice são iguais;
3- Todo diâmetro bissecciona o círculo;
4- Os ângulos inscritos numa semicircunferência são retos.

Ainda, conforme PROCLO (apud DOMINGUES, 2002, p.57):

> Tales foi o primeiro a ir para o Egito e a levar para a Grécia, na volta, o saber [geometria] que encontrou. Ele descobriu muitas proposições e revelou para seus sucessores os princípios subjacentes a muitas outras, valendo-se de métodos gerais em alguns casos e em outros de métodos empíricos.

A veracidade da afirmação "ângulos opostos pelo vértice são iguais" que hoje aparece nos textos de geometria elementar, Tales a obteve mediante alguns raciocínios lógicos e não pela intuição ou experimentalmente.

Por exemplo, para convencer alguém que tenha alguma dúvida de que os ângulos *a* e *b* da figura abaixo são iguais, bastaria recortar os ângulos da fig. 1 e sobrepor um ao outro.

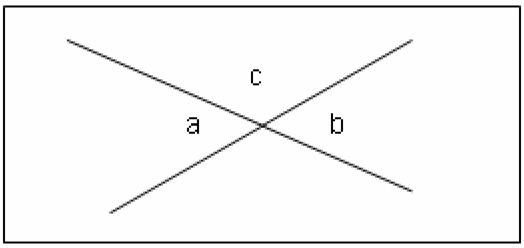


Figura 1: Ângulos opostos pelo vértice

Tales preferiu estabelecer a igualdade dos ângulos *a* e *b* por meio de um raciocínio estruturado, acompanhado de algumas leis gerais conhecidas. Como a conclusão decorre dos dados, dizemos que o raciocínio é dito lógico. Descrevemos, a seguir, esse tipo de raciocínio:

A soma do ângulo *a* com o ângulo *c* é igual a um ângulo raso; o mesmo acontece com a soma dos ângulos *b* e *c*. Como todos os ângulos rasos são iguais, então o ângulo *a* é igual ao ângulo *b*.

Estabeleceu, assim, a igualdade dos ângulos *a* e *b* por uma curta cadeia de raciocínios dedutivos, a partir de princípios mais básicos, tais como o princípio da igualdade, a transitividade e o cancelamento. Esquematizando:

$$\left.\begin{array}{l} a + c = 180° \\ b + c = 180° \end{array}\right\} \quad a + c = b + c = 180° \therefore a = b$$

Começando com os esforços iniciais de Tales por uma geometria demonstrativa (por volta de 600 a. C.) e culminando com os notáveis Elementos de Euclides (por volta de 300 a. C.), os primeiros três séculos da matemática Grega constituem um período de realizações extraordinárias.

Um dos grandes feitos dos matemáticos gregos antigos foi a criação do método postulacional de raciocínio: “seqüência de deduções rigorosas a partir de algumas suposições iniciais explicitamente enunciadas” (EVES, 2002, p. 115).

Para se estabelecer uma afirmação num sistema dedutivo, deve-se mostrar que essa afirmação é uma conseqüência lógica de algumas afirmações previamente estabelecidas. Estas, por sua vez, devem ser estabelecidas a partir de outras também estabelecidas previamente e assim por diante. Como a cadeia não pode recuar indefinidamente, deve-se ao início, aceitar um corpo finito de afirmações não demonstradas - que se denominam postulados ou axiomas - e a partir delas devem decorrer todas as demais afirmações da teoria.

A obra de Euclides explicitou postulados para o sistema dedutivo da chamada Geometria Euclidiana. Desse modo, “Os Elementos se tornou um paradigma de demonstração matemática rigorosa” (EVES, 2002 p. 179)

O método postulacional inspirado em Euclides influenciou quase todos os campos da matemática, a ponto de alguns matemáticos defenderem a tese de que não só o raciocínio matemático é postulacional mas como também, em sentido inverso, o raciocínio postulacional é raciocínio matemático.

Segundo EVES (2002, p.179), uma conseqüência relativamente moderna foi a criação do método axiomático, dedicado ao estudo das propriedades gerais decorrentes de um conjunto de postulados e regras de raciocínio ou de inferência.

1.2 O LUGAR DA DEMONSTRAÇÃO NA COMUNIDADE MATEMÁTICA

São diversos os termos e significados associados às palavras prova e demonstração. O nosso objetivo nesta seção não é o de fazer um estudo aprofundado e sim, ilustrar essa diversidade presente entre alguns autores da comunidade matemática.

O tema "Demonstração" é objeto de estudo em artigos de vários pesquisadores da comunidade matemática. Mas, como esses pesquisadores definem o termo "demonstração"?

Em matemática, "a demonstração é uma cadeia de argumentos convincentes, rigorosos, gerais, completos e resistentes, interligados logicamente". (FONSECA, 2005, p. 3)

O dicionário Aurélio, da língua portuguesa, traz os seguintes significados para os termos demonstrar e provar:

Demonstrar *v.t.d. 1. Provar mediante raciocínio concludente, comprovar. 2. Mostrar, evidenciar.*

Provar *v.t.d. 1.Estabelecer a verdade, a realidade de; dar prova de. 2.Demonstrar.[...] 8.Dar a prova ou a demonstração.*

Conforme o dicionário, os significados usuais são equivalentes. Porém, na comunidade matemática, BICUDO (2002, p. 87), que usa apenas o termo demonstrar, considera que "demonstração matemática tem dois significados: Na prática é uma coisa; em princípio, outra. Os dois significados não são idênticos".

Para BICUDO (2002, p. 87) o significado prático é informal, impreciso. “A demonstração matemática prática é o que fazemos para fazermos o outro crer em nossos teoremas. É o argumento que convence o qualificado, mas cético especialista.[...] Mas, o que é ela, exatamente”? (...)

Quanto ao outro significado, BICUDO (2002, p.87) considera que “a demonstração teórica é formal. É a transformação de certas seqüências de símbolos (sentenças formais) de acordo com certas regras da lógica.”

Segundo HALMOS, (apud BICUDO, 2002, p. 82) “o maior dos passos isolados na lógica dos últimos 200 anos, foi a explicação precisa do conceito de demonstração”.

Ainda, na comunidade matemática, segundo SILVA (2002, p. 68) os dois termos – demonstrar e provar – são usados como sinônimos.

1.3 PROVA E DEMONSTRAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Apesar da idéia comum expressa por SILVA (2002), os termos demonstrar e provar nem sempre são considerados como sinônimos para a Educação Matemática, assumindo variações em função do tempo e do contexto.

Segundo PIETROPAOLO (2005, p. 48), temos:

> Convém assinalar que em artigos sobre a História da Matemática e, em particular, sobre Educação Matemática, são usados variados termos para se referir às *demonstrações*, tais como: demonstrações formais, demonstrações rigorosas, provas rigorosas ou simplesmente provas. E nem sempre essas expressões são utilizadas como sinônimas [...]

Portanto, em Educação Matemática, esses termos não são sinônimos. O termo mais usual é provar e seus correlatos. No contexto da sala de aula, Balacheff (1988), ampliou o termo prova para classificar as justificativas de alunos ao propor três níveis iniciais de sofisticação: explicação, prova e demonstração. A explicação situa-se ao nível do indivíduo locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático. A prova surge subdividida em quatro níveis (empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental), sendo a validade dos raciocínios, em alguns dos níveis, garantida pela exibição de casos particulares em que a proposição se verifica. Já na demonstração, no sentido empregado pela comunidade matemática, a validade dos raciocínios é garantida via dedutiva e é um tipo de prova com forma estritamente codificada e formal. Os níveis de prova introduzidos por BALACHEFF serão detalhados na seção 1.4, na qual também veremos que algumas dessas justificativas de alunos não são provas, no sentido empregado pela comunidade matemática.

A necessidade de pesquisas sobre o tema prova – no sentido amplo dado pela Educação Matemática – foi, recentemente, foco de discussão de dois dos principais congressos internacionais de Educação Matemática: International Congress on Mathematical Education (ICME) e The International Group for the Psycology of Mathematics Education (PME).

No 10º ICME, realizado em Copenhaguen, 2004, dois grupos de trabalho dedicaram-se ao tema: "Reasoning, Proof and Proving in Mathematics Education".

Neste congresso, duas das questões discutidas foram: "Como as pesquisas em Educação Matemática têm tratado o problema da prova no currículo escolar"? "Em particular, é possível superar as dificuldades tão frequentemente descritas pelos professores quando introduzem provas para os alunos"?

Para PIETROPAOLO (2005), são questões desse tipo que têm orientado os trabalhos de pesquisadores em Educação Matemática, em especial, os referentes às dificuldades dos alunos. Segundo esse pesquisador, os autores da área de Educação Matemática concordam sobre a importância em incorporar – nos currículos de matemática – um trabalho envolvendo as provas desde as séries iniciais e, principalmente, todos parecem ser enfáticos quanto a essa necessidade em qualquer nível de ensino. Portanto, acreditamos que a prova deve estar presente no ensino-aprendizagem da matemática não apenas para comprovar a veracidade de uma afirmação, mas também para que o aluno construa conhecimentos suficientes sobre o assunto que esteja estudando.

Porém, pesquisas como as de Gouvea (1998), Leandro (2006) e Doro (2007), comprovam que os alunos não obtêm sucesso no momento de justificarem as suas respostas, sendo seu ensino motivo de frustração para muitos professores.

FONSECA (2005, p.3) afirma que:

> Demonstrar é um processo que serve para validar, esclarecer, sistematizar o conhecimento matemático, por isso tal processo deve ser utilizado com as crianças, desde que começam a aprender matemática. Neste sentido, a demonstração estaria no cerne de toda a educação matemática, sem que envolvesse nos primeiros anos de escolaridade qualquer tentativa de formalismo. Para os alunos desenvolverem apreciação pela demonstração matemática é necessário tempo, muitas e variadas experiências em todos os conteúdos e anos de escolaridade, orientação para construir argumentos válidos e para avaliar os argumentos construídos por si e pelos outros alunos.

Entre as várias funções atribuídas à demonstração, a mais importante sob o ponto de vista do ensino, é a de explicar ou elucidar: “Constrói-se uma demonstração, não só para garantir a verdade de uma afirmação, mas para explicar por que razão é verdadeira”. (FONSECA, 2005, p. 3).

HANNA (apud PIETROPAOLO, 2005, p. 80) procura sintetizar a função da prova na Matemática e na Educação Matemática:

> Enquanto na prática matemática a função da prova é justificação e a verificação, a sua função principal na Educação Matemática é seguramente a de explicação. [...] Para Hanna, uma demonstração deve incentivar a compreensão: “uma boa prova, entretanto, não deveria ser somente correta e explicativa, a mesma poderia também levar em consideração, especialmente em seu nível de detalhe, o contexto da aula e a experiência dos alunos”.

Segundo GRAVINA (2001, p. 69) “a explicação é um dos propósitos da demonstração. No processo de aprendizagem, tal propósito merece destaque especial por evidenciar a necessidade da ação “demonstrar”.

Em nosso trabalho em sala de aula, somos questionados pelos alunos em relação ao conteúdo matemático: por que temos de aprender isso ? ou, por que é necessário demonstrar essa propriedade se estou “vendo” que ela é verdadeira? Para responder essas questões, faz-se necessário saber que funções tem a demonstração, que podem ser utilizadas na sala de aula para torná-la mais significativa para os alunos.

DE VILLIERS (2001) descreve algumas funções importantes da demonstração, discute brevemente algumas implicações para o ensino da demonstração e afirma que os alunos entenderiam melhor a necessidade de demonstrar se esclarecidos sobre as diferentes funções de uma demonstração:

- é explicação quando esclarece porque certa propriedade (mesmo intuitivamente óbvia) é verdadeira;

- é convencimento quando trata-se de garantir a veracidade de uma propriedade que não é óbvia;
- é descoberta quando o processo de demonstração faz emergir novas propriedades; e é sistematização quando ela organiza os resultados obtidos.

Para DE VILLIERS (2001), em vez de enfatizar na prova apenas seu papel de verificação, a função mais fundamental da prova como meio de explicação deve ser explorada, a fim de apresentar a prova como uma atividade significativa para os alunos.

Assim, uma prova – no contexto escolar – não só garante a verdade de uma afirmação, mas também explica por que razão é verdadeira.

Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental, destacam o seguinte:

> [...] A partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. Esse caráter indutivo é, em geral, pouco destacado quando se trata da comunicação ou do ensino do conhecimento matemático. O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino (PCN, 1998, p. 26)

Segundo LIMA (1987), o matemático e educador George Polya (1887 – 1985), nos últimos 40 anos de sua vida dedicou-se ao ensino de matemática. Em um dos cursos ministrados a professores secundários, elaborou dez mandamentos a respeito das atitudes profissionais: o 7º mandamento diz o seguinte: “Faça os alunos aprender a demonstrar. A matemática é uma boa escola para o raciocínio demonstrativo. Os Professores de matemática devem colocar os seus alunos, salvo os das classes mais elementares, em contato com o raciocínio demonstrativo”.

Em níveis elementares, acreditamos que podem ser utilizadas prova informal no sentido de explicar alguns aspectos gerais do tema em estudo. Porém, o tema prova recebe pouquíssima atenção dos professores, pois “raramente é solicitado ao aluno que prove alguma propriedade. Como resultado, muitos aprendizes não sabem o que fazer quando recebem tal tarefa”. (OLIVERO,2002), (apud VAZ, 2004, p. 23).

Ainda, conforme OLIVERO (2002), os alunos têm preferências por argumentos empíricos em detrimento aos dedutivos, inclusive por não saberem como diferenciar ambos.

Essas preferências dos alunos citadas acima ficam evidenciadas no trabalho de GRAVINA (2001, p. 65):

> Na literatura, diversos trabalhos registram comportamento dos alunos, já no final dos estudos secundários e mesmo no início de estudos universitários, no qual: a) a verificação empírica é considerada suficiente para garantir a veracidade de uma propriedade; tais alunos não hesitam em aceitar como verdade, após algumas medições, que “a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180 graus” [...]

Tendo em vista essas dificuldades dos alunos, NASSER e TINOCO (2003, p. 9) afirmam:

> É necessário auxiliar o aluno a desenvolver o seu raciocínio lógico e prepará-lo para dominar o processo dedutivo. A habilidade de demonstrar deve ser construída ao longo dos anos de escolaridade, através de atividades variadas como jogos, problemas desafio, ou simplesmente exigindo-se justificativas para todas as respostas. Portanto, a habilidade de argumentar deve ser trabalhada desde as primeiras séries para que o aluno mais tarde seja capaz de defender um ponto de vista próprio, seja numa conversa informal, seja numa questão de matemática.

Dependendo da experiência e maturidade dos alunos, essas habilidades seriam adquiridas aos poucos e, nesse sentido, Nasser e Tinoco (2003, p. 9 - 10) relacionam algumas estratégias para desenvolver habilidades de justificar dos alunos. Essas estratégias são as seguintes:

- Após tentar resolver uma tarefa individualmente e de ouvir a explicação do professor, os alunos trabalham em grupos, discutindo soluções para o mesmo problema;
- Os alunos avaliam justificativas apresentadas por outros;
- Problemas desafio, que requerem raciocínio lógico, são sempre propostos, independentemente do tópico que esteja sendo abordado;
- O mesmo problema é proposto tanto a estudantes que já aprenderam o conteúdo matemático correspondente, quanto àqueles que ainda não adquiriram esse conhecimento, a fim de evitar o uso de algoritmos ou fórmulas;
- O computador é usado (geometria dinâmica) para verificar se uma afirmativa é verdadeira ou falsa; depois de convencidos da verdade (ou

não), os alunos são levados a justificá-la ou a procurar um contra exemplo;

- Atividades que ajudam a diferenciar a hipótese da tese de uma afirmativa têm sido usadas em cursos de formação de professores e de especialização.

Finalmente observamos que, segundo VELOSO (2003), é necessário a prova estar presente na formação dos alunos devido a sua potencialidade para desenvolver não apenas o raciocínio dedutivo, mas também pela possibilidade de mostrar ao aluno o caminho percorrido pela humanidade na evolução do pensamento matemático.

Nesse trabalho, usaremos o termo prova e seus correlatos nesse sentido amplo, adotado na área de Educação Matemática.

1.4 O PROJETO AprovaME

O presente trabalho faz parte do projeto de pesquisa AprovaMe (Argumentação e Prova na Matemática Escolar), (anexo 1), coordenado pela Profª Dra. Siobhan Victoria Healy e subvencionado pelo CNPQ. Este projeto, composto por duas fases, teve início no segundo semestre de 2005 e se encerrou no primeiro semestre de 2007. Além da equipe de 6 pesquisadores, 27 professores-alunos do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC/SP integraram a equipe como professores-colaboradores, participando de ambas as fases. As fases serão descritas mais adiante.

Tendo em vista a importância da argumentação e prova na formação dos alunos e a falta de levantamentos mostrando as concepções dos alunos brasileiros sobre argumentação e prova, o projeto AprovaMe pretende alcançar os seguintes objetivos:

- Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado de São Paulo.
- Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processo de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.

- Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.
- Avaliar situações de aprendizagem em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.
- Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
- Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.
- Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e a aprendizagem de prova em matemática.

Com duração prevista para dois anos, o projeto AprovaMe foi organizado em duas fases: a primeira, na qual se insere essa dissertação, envolveu um levantamento de concepções de alunos (14 a 16 anos) sobre provas, mediante a aplicação de dois questionários, sendo que o primeiro abordava questões de álgebra (anexo 2), e o segundo questões de geometria (anexo 3). Desse modo, procurou-se fazer um levantamento de suas concepções e se são capazes de construir justificativas válidas para as suas respostas no domínio da álgebra e da geometria.

Os questionários citados acima foram aplicados por cada professor-aluno a três classes de 8ª e/ou 1ª séries do ensino médio, selecionadas aleatoriamente, de seis classes por eles indicadas. A ordem de aplicação (primeiro Álgebra ou Geometria) ficou a critério do professor-aluno. As turmas tiveram 50 minutos para responder cada questionário, sendo que algumas delas responderam no mesmo dia os dois questionários e outras em dias diferentes. Foi solicitado aos alunos que todas as anotações fossem escritas na folha de respostas. Informou-se, ainda, que não eram permitidas consultas e nem o uso de calculadora. No total, 1998 alunos de escolas públicas e particulares do Estado de São Paulo responderam os questionários.

Passamos a descrever os questionários.

Com cinco questões cada um, os questionários diferenciam-se em relação aos temas álgebra e geometria, mas possuem similaridades na apresentação das questões e nas orientações aos alunos. Os resultados subsidiaram a segunda fase, na qual o foco é a elaboração e avaliação de situações de aprendizagem.

Os questionários, elaborados com base em outros concebidos por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizados em outros países, compreendiam itens visando avaliar: em que medida os sujeitos aceitam evidências empíricas como prova; se distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos; se compreendem o domínio da validade de uma prova e se são capazes de justificar as suas respostas. Além disso, pretendeu-se identificar a influência da forma de apresentação de provas (língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc) no desempenho dos alunos As questões estão organizadas em dois blocos:

1. avaliação de vários argumentos apresentados como prova de uma dada afirmação;

2. construção de provas.

Os dados coletados foram organizados e classificados pela equipe de professores colaboradores em uma planilha utilizando critérios inspirados nos níveis de prova de BALACHEFF (1988) serviram como elementos de apoio para o desenvolvimento da fase dois, descrita na seqüência.

A fase dois aborda dois eixos inter-relacionados de investigação: a aprendizagem e o ensino. No eixo da aprendizagem o objetivo é a elaboração e avaliação de situações especificamente destinadas às áreas de dificuldades e limitações de compreensão de prova, identificadas na fase um.

No eixo relativo ao ensino, a atenção se voltou ao professor e sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas em ação, considerando que essas situações devem ser propostas pelos professores em sala de aula. No final da fase dois, foi feita uma comparação entre o mapeamento realizado na fase 1 e os dados levantados em relação ao eixo de aprendizagem na fase 2, visando responder em que medida as principais dificuldades apontadas na fase 1 foram superadas pelos alunos participantes na fase 2 e quais características de prova ainda necessitaram de investimentos numa perspectiva de progressão.

Como foi mencionado anteriormente, o Projeto AprovaMe contou com a participação de 27 professores-alunos cujas dissertações fazem parte do referido projeto. A seguir, descrevemos brevemente os resultados de algumas dissertações já defendidas – todas relativas à fase 1 – que utilizaram como instrumento de pesquisa o questionário de álgebra ou de geometria:

1- Autor: Amadeu Tunini Doro.

Título: Argumentação e Prova: Análise de argumentos geométricos de alunos da Educação Básica (2007). Esta dissertação teve por objetivo investigar as respostas e/ou justificativas apresentadas pelos alunos a duas questões (G4 e G5) do questionário de geometria.

Os resultados dessa pesquisa não foram animadores. Após a análise dos protocolos e das entrevistas, o autor identificou um conjunto de fatores que, em sua opinião, constituíram-se em obstáculos para melhor aproveitamento por parte dos alunos: ausência de conhecimentos geométricos específicos, processos cognitivos insuficientes, em especial a não construção de configurações e a insuficiente utilização de apreensões figurais.

Nas entrevistas foi observada a falta de disposição e de comprometimento dos alunos em realizar as atividades. Nenhum sujeito participante da pesquisa apresentou uma prova formal em sua justificativa, sendo predominante o uso da língua natural e de evidências empíricas tomadas como argumentos.

2- Autor: Júlio César Porfírio de Almeida

Título: Argumentação e Prova na Matemática Escolar do Ensino Básico: A soma das Medidas dos Ângulos Internos de um Triângulo. O objetivo dessa dissertação foi o de analisar o desempenho dos alunos em relação a duas questões (G1 e G2) do questionário de geometria.

De acordo com as respostas dadas pelos alunos aos questionários e análises das entrevistas, o autor considerou ruim o desempenho dos alunos. Entre as causas dos erros cometidos, destaca-se a insuficiência de conhecimentos da Geometria Plana, especialmente aqueles vinculados ao Teorema de Tales, o qual não foi sequer citado nas entrevistas.

Nas justificativas dos alunos está presente o empirismo ingênuo – um dos níveis de prova de Balacheff – processo que toma para validação de uma propriedade a sua verificação em alguns poucos casos, o que é reconhecidamente insuficiente.

3- Autor: Moacir Benvindo de Carvalho

Título: Concepções de Alunos Sobre Provas e Argumentos Matemáticos: Análise de Questionário no Contexto do Projeto AprovaMe. Essa dissertação teve por objetivo a análise quantitativa e qualitativa das questões A1 e A2 do questionário de álgebra.

Os resultados dessa pesquisa, segundo o autor, mostraram que os alunos são muito inconsistentes em suas respostas, apresentando baixo desempenho. A preferência das respostas, na sua maioria, é pelos argumentos empíricos, que correspondem às provas pragmáticas, segundo BALACHEFF (1988).

As análises revelaram que, em geral, os alunos não compreendem todo o conteúdo de um argumento e não são capazes de avaliar a generalidade de forma adequada.

Descrevemos agora sucintamente a metodologia da primeira fase, que se relaciona diretamente com esse trabalho.

Cada professor-aluno participante do projeto indicou, na primeira fase do mesmo, de 3 a 6 turmas de alunos de escolas públicas e particulares do estado de São Paulo, na faixa etária de 14 a 16 anos, cursando a 8ª série do Ensino Fundamental ou a 1ª série do Ensino Médio

A partir daí, uma amostra de turmas foi obtida por meio de seleção aleatória para responder os questionários de álgebra e geometria. Esta amostra que respondeu os questionários contou com 81 turmas de 22 escolas da rede estadual, de 3 escolas da rede municipal e de 6 escolas da rede particular de ensino, situadas em 15 municípios de diferentes regiões geográficas do Estado de São Paulo: Capital (13), Embu Guaçu, Itapecerica da Serra, Itaquaquecetuba, Itupeva, Jacareí, Jacupiranga, Jundiaí (2), Lorena, Osasco, Promissão, Santos, São Bernardo do Campo (3), São Caetano do Sul (2) e São Roque.

No total, 1998 alunos de 31 escolas, distribuídos em 34 turmas da 8ª série do ensino fundamental (897 alunos) e 47 turmas do 1º ano do ensino médio (1101 alunos), responderam os questionários - 1604 alunos pertencem à rede estadual, 117 alunos à rede municipal e 277 alunos à rede particular.

Após a aplicação dos questionários, os professores-alunos reuniram-se com os pesquisadores para classificar as respostas apresentadas pelos alunos. Além dos encontros entre os professores e os pesquisadores, os quais aconteceram quinzenalmente, foi disponibilizado um espaço virtual – TELEDUC (ambiente para realização de cursos à distância via internet) – para facilitar a comunicação entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões a serem tomadas.

Em um primeiro momento, debatemos a categorização apresentada por BALACHEFF (1988), que classifica as provas produzidas por alunos em duas categorias: provas pragmáticas e provas conceituais.

As pragmáticas utilizam recursos de ação, como por exemplo, desenhos, envolvendo habilidades de observação de figuras em que os conhecimentos necessários estão implícitos no pensamento de quem prova. As provas conceituais não envolvem ações, mas formulação de propriedades e as relações estabelecidas entre essas propriedades. Caracterizam-se por seu caráter genérico envolvendo a linguagem, não como meio de comunicação, mas como uma ferramenta para deduções lógicas.

A ascensão de uma categoria a outra ocorre através da passagem entre quatro diferentes níveis identificados por BALACHEFF: o empirismo ingênuo, a experiência crucial, o exemplo genérico e a experiência mental, os quais são descritos, segundo GRAVINA (2001, p. 66 – 7) como:

> - *O empirismo ingênuo (empirism naif*) toma, para validação de uma propriedade, a sua verificação em alguns poucos casos, sem questionamentos quanto a particularidades; este modo de validação rudimentar, reconhecidamente insuficiente, é uma das primeiras formas do processo de generalização, e resiste ao longo do processo de desenvolvimento do pensamento (....);
>
> - *Experiência crucial (expérience cruciale*) é procedimento de validação em que é proposto explicitamente, o problema da generalização; ele intenta verificar a

> propriedade em caso particular mas sem considerá-lo tão particular, de modo a permitir, não mais de forma peremptória, a generalização;
>
> - *O exemplo genérico (exemple genérique*) consiste na explicitação das razões que validam uma propriedade que encerra uma generalidade mesmo, fazendo uso de um representante particular de objeto (...);
>
> - *Experiência mental (expérience mentale*) é a explicação depreendida de concretização em representante particular; a argumentação flui através de pensamentos que controlam toda generalidade da situação, e não mais através de situações particulares, como no exemplo genérico.

Na visão de BALACHEFF, os dois primeiros níveis pertencem à categoria de provas pragmáticas, enquanto que o terceiro nível é uma fase intermediária, ora na categoria de prova pragmática, ora na categoria de prova conceitual, dependendo da natureza efetiva da ação sobre o exemplo. Ainda, segundo BALACHEFF, o nível experiência mental marca claramente a transição da prova pragmática à de prova conceitual. Para melhor compreensão, apresentamos a seguir o relato de uma experiência, extraída de GRAVINA (2001, p. 66 – 7), que ilustra os diferentes níveis, onde o problema proposto é identificar o número de diagonais de um polígono:

No *empirismo ingênuo*, os alunos determinam experimentalmente que o número de diagonais de certo pentágono é 5; modificam a forma do pentágono e conferem novamente a constatação inicial; daí concluem definitivamente que um hexágono tem 6 diagonais.

Na *experiência crucial* os alunos fazem experiência com um polígono de muitos vértices (uma imensa figura), buscando depreender generalização empírica, buscando a validação em outros casos particulares.

No exemplo genérico os alunos utilizam o caso particular do hexágono para explicação, mas desprendem-se de particularidades, o que dá indícios de pensamento dedutivo: " num polígono com 6 vértices, em cada vértice temos 3 diagonais. Assim são 18 diagonais; mas como uma diagonal une dois pontos, o número de diagonais é 9. O mesmo acontece com 7 vértices, 8, 9..."

Finalmente, na *experiência mental*, os alunos se desprendem do caso particular, o que transparece na argumentação: “em cada vértice o número de diagonais é o mesmo de vértices menos os dois vértices vizinhos; é preciso multiplicar isso que encontramos pelo número de vértices, porque em cada vértice parte o mesmo número de diagonais. Mas estamos contando cada diagonal duas vezes; o número de diagonais que procuramos se encontra dividindo por 2 e obtemos uma vez cada diagonal”

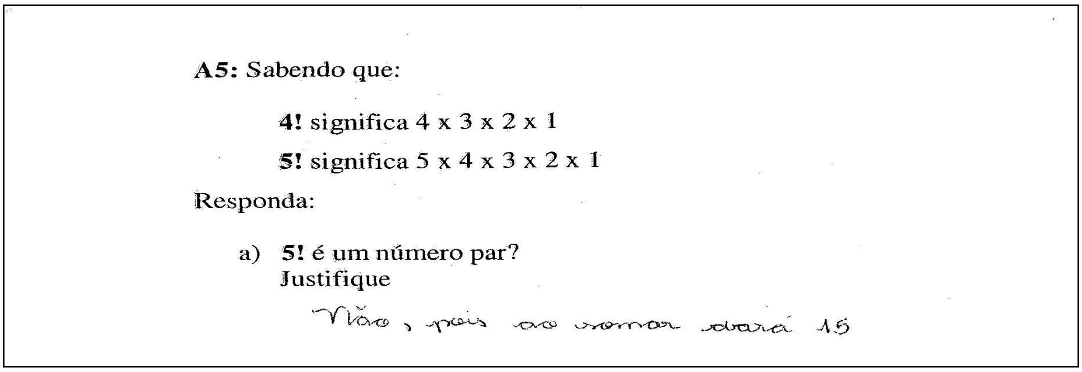
Também debatemos o sistema de classificação utilizado por Healy & Hoyles (1998) inspirado nos níveis de prova de Balacheff e, em acordo fechado com os professores participantes do projeto, o adaptamos a esse trabalho, visando além da classificação das respostas e justificativas dos alunos, o tratamento dos dados para tabulação. Dessa forma, as respostas e justificativas dadas pelos alunos aos questionários de álgebra e geometria foram codificadas como:

Respostas que recebem 0(zero)	Respostas totalmente erradas.
Respostas que recebem 1	Respostas corretas.
Respostas que recebem -1 e -2	Respostas não sei e em branco, respectivamente.
Justificativas que recebem 0 (zero)	Justificativas totalmente erradas ou que repetem o enunciado.
Justificativas que recebem 1	Justificativas corretas com alguma informação pertinente, mas sem dedução ou inferência. Por exemplo, justificativas que são empíricas.
Justificativas que recebem 2a e 2b	Justificativas com alguma dedução/inferência, explicitação de propriedade pertinente ou elemento que evidenciem uma estrutura matemática, sem contudo, trazer todos os passos para uma prova. Justificativa: Falta muito para chegar à prova (mais próximo de 1) : 2a Justificativa: Falta pouco para chegar à prova (mais próximo de 3) : 2b
Justificativas que recebem 3c	Aquelas realizadas totalmente por meio de cálculo
Justificativas que recebem 3p	Aquelas realizadas totalmente com referências a propriedades pertinentes

Antes de aplicarmos a codificação aos questionários dos 1998 alunos, definimos os critérios para codificação e usamos algumas das reuniões quinzenais para codificarmos os protocolos pilotos a afinarmos nossos critérios, tarefa que não foi fácil, pois a análise dos resultados é subjetiva e fazia-se necessário aproximar as avaliações.

Ainda, procurando evitar distorções, a coordenadora do projeto apresentou, como exemplos para essas classificações, resoluções feitas por alunos quando da aplicação do questionário piloto. A seguir, apresentamos um exemplo para cada codificação, todos tirados de respostas das questões de álgebra.

1. CODIFICAÇÃO 0



A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

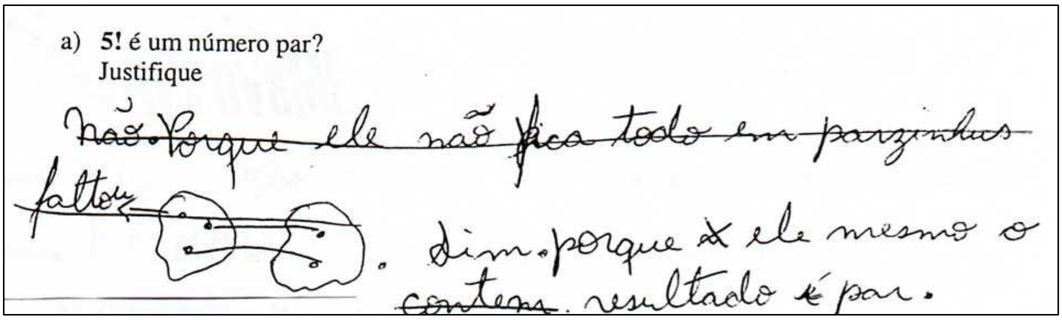
a) 5! é um número par?
Justifique

Não, pois ao somar dará 15

Figura 2: Exemplo para codificação 0

Nesta resposta, tudo indica que o aluno não entendeu o exemplo dado, pois em vez de multiplicar, ele somou os termos do desenvolvimento de 5!. Portanto, a resposta e a justificativa estão erradas.

2. CODIFICAÇÃO 1



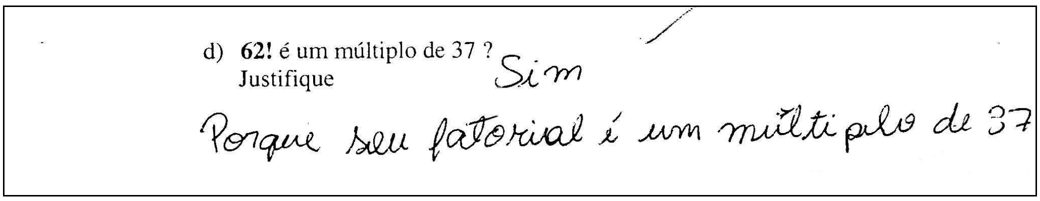
a) 5! é um número par?
Justifique

~~não Porque ele não fica todo em parzinhos faltou~~. Sim. porque ~~x~~ ele mesmo o ~~contem~~. resultado é par.

Figura 3: Exemplo para codificação 1

Em um primeiro momento, o aluno respondeu "não", porém, reconsiderou e respondeu "sim". Mas, não foi claro nos seus argumentos para justificar a resposta. Neste caso, a codificação atribuída foi 1.

3. CODIFICAÇÃO 2a



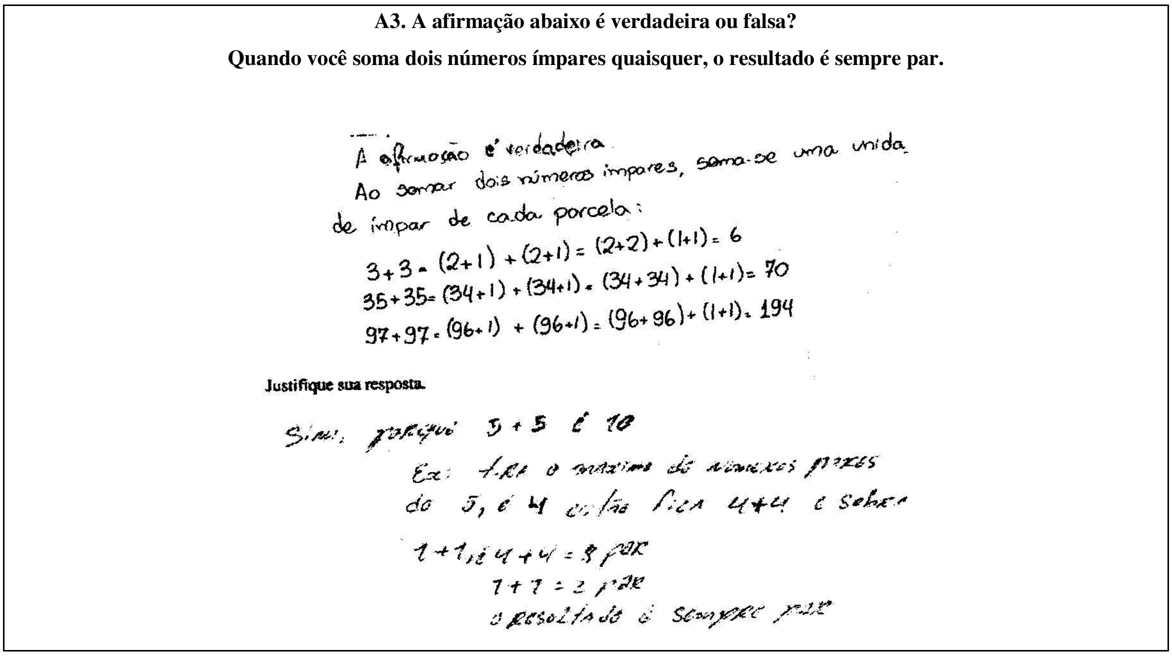
d) 62! é um múltiplo de 37 ? Sim
Justifique

Porque seu fatorial é um multiplo de 37

Figura 4: Exemplo para codificação 2a

Neste exemplo o aluno respondeu corretamente mas não indicou como chegou à conclusão apresentada. Conforme a nossa convenção, faltou muito para provar a afirmação.

4. CODIFICAÇÃO 2b



A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

A afirmação é verdadeira.
Ao somar dois números ímpares, soma-se uma unidade de ímpar de cada parcela:

$3+3 = (2+1) + (2+1) = (2+2)+(1+1) = 6$
$35+35 = (34+1) + (34+1) = (34+34) + (1+1) = 70$
$97+97 = (96+1) + (96+1) = (96+96) + (1+1) = 194$

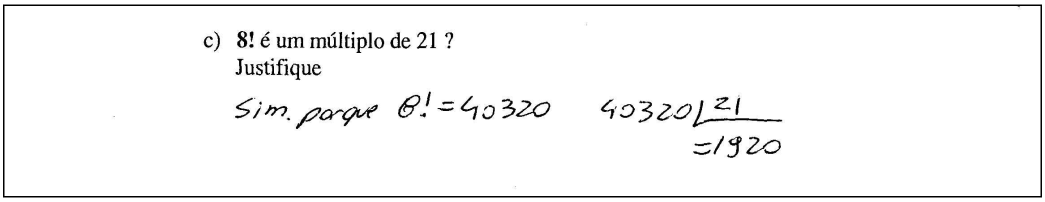
Justifique sua resposta.

Sim, porque 5 + 5 é 10
Ex: tira o máximo de números pares do 5, é 4 então fica 4+4 e sobra
1+1, e 4+4 = 8 par
1+1 = 2 par
o resultado é sempre par

Figura 5: Exemplo para codificação 2b

Na resposta acima o aluno mostra alguns casos particulares e na justificativa utiliza o mesmo número duas vezes, porém ao desmembrar o número 5 em duas parcelas cuja soma é par, aproxima-se da justificativa correta. Portanto, a codificação é 2b.

5. CODIFICAÇÃO 3c



c) 8! é um múltiplo de 21 ?
Justifique

Sim. porque 8! = 40320   40320 | 21
= 1920

Figura 6: Exemplo para codificação 3c

O aluno respondeu corretamente utilizando-se de cálculos. Portanto, a codificação é 3c.

6. CODIFICAÇÃO 3p

c) 8! é um múltiplo de 21 ?
Justifique
Sim, pois no 8! tem o produto de 7 e 3 que dá 21.

Figura 7: Exemplo para codificação 3p

O aluno justificou corretamente por meio de uma propriedade, isto é, no desenvolvimento de 8! está implícito o resultado de multiplicar 7 por 3, que é 21.

Após a análise e codificação das respostas, os dados dos 1998 protocolos foram reunidos em uma planilha eletrônica em que constam nome, série, as codificações de todas as respostas e justificativas de cada aluno, além do nome do aplicador. Abaixo, apresentamos uma pequena parte dessa planilha.

				A5(c)			
				8! Div 21		**Justificativa**	
	Aplicador	**Turma**	**Aluno**	Sim	Não	0	1
1	Alexandre	8C	ANDERSON	0	1	1	0
2	Alexandre	8C	BRUNO C	1	0	1	0
3	Alexandre	8C	BRUNO F	0	1	1	0
4	Alexandre	8C	DIEGO	-1	-1	-1	-1
5	Alexandre	8C	EUDORO	0	1	1	0
6	Alexandre	8C	FELIPE L	-1	-1	-1	-1

1.5 A QUESTÃO DE PESQUISA

Os coordenadores do projeto AprovaMe decidiram que os professores-alunos poderiam desenvolver seus trabalhos individuais de pesquisa para dissertação, inseridos no referido projeto. Tendo em vista essa possibilidade apresentada pelos professores coordenadores, entre os quais se inclui a minha orientadora, resolvemos nos situar na fase 1 do projeto AprovaMe e concentrar a nossa investigação na questão A5 do questionário de álgebra, a qual será apresentada mais adiante. Utilizando como objeto de investigação a questão A5 e as entrevistas realizadas com alguns alunos, pretendemos investigar:

1 - Quais foram as respostas e/ou justificativas apresentadas?

2 - Os alunos apresentam justificativas matematicamente válidas?

3 - Quais as razões que fundamentam as respostas do tipo “não sei” ou “em branco”?

A seguir, apresentamos a questão A5:

A5: *Sabendo que:*

4! *significa 4 x 3 x 2 x 1*

5! *significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1*

Responda:

a) ***5!*** *é um número par?*

Justifique

b) *O que significa* ***8!*** *?*

c) ***8!*** *é um múltiplo de 21 ?*

Justifique

d) ***62!*** *é um múltiplo de 37 ?*

Justifique

e) *Pedro calculou* ***23!***
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

Passamos agora a tratar dos procedimentos metodológicos.

1.6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Pelo fato de a questão A5 abordar o tema fatorial, achamos interessante verificar como esse tema é tratado em livros didáticos.

1.6.1 O FATORIAL EM LIVROS DIDÁTICOS

O tema fatorial é indicado explicitamente pelo PCN+ Ensino Médio (2002) e abordado pelos livros didáticos apenas na segunda série do Ensino Médio. Este assunto é apresentado no capítulo que trata da análise combinatória e precede o estudo de temas como arranjo simples, permutação, combinação simples e número binomial.

Nos livros que pesquisamos, observamos que o fatorial é tratado de forma rápida, isto é, em duas ou três páginas, nas quais são apresentados a definição de fatorial, as propriedades, a extensão da definição de fatorial, exemplos resolvidos e exercícios básicos.

Resumimos, a seguir, a abordagem desse tema que encontramos em PAIVA (1995, p.173 - 4), que acreditamos ilustrar bem como o tema é tratado.

Definição:

Seja n um número natural, $n \geq 2$. Define-se fatorial de n, que indicamos por $n!$, como o produto dos números naturais consecutivos n, (n – 1), (n – 2), ...1, isto é:

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,....\,.1$$

Propriedade fundamental dos fatoriais

Observando a igualdade 7! = 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1, percebemos que 7! = 7 . 6!. Podemos generalizar esse resultado através da seguinte propriedade:

$$\boxed{n! = n\,(n-1)! \text{ Para } n \in \mathbb{N},\ n \geq 3}$$

Extensão da definição de fatorial

Vimos que a propriedade fundamental dos fatoriais é válida para n ≥ 3. E se fizermos n = 2. Vejamos o que acontece:

$$\boxed{2! = 2\,(2-1)! \therefore 2! = 2\,.\,1! \therefore 2\,.\,1 = 2\,.\,1! \therefore 1 = 1!}$$

Desse modo, para que a propriedade fundamental valha para $n = 2$, definimos:

$$\boxed{1! = 1}$$

Atribuindo o valor 1 para n na igualdade n! = n (n – 1)!, temos

$$\boxed{1! = 1\,(1-1)! \therefore 1! = 1\,.\,0! \therefore 1! = 0!}$$

Assim sendo, para estendermos a propriedade fundamental para n = 1, definimos:

$$\boxed{0! = 1}$$

Com essas duas novas definições, 1! = 1 e 0! = 1, temos que

$$\boxed{n! = n\,(n-1)!,\ \forall n,\ n \in \mathbb{N}^*}$$

Em relação aos exercícios resolvidos e básicos, apresentamos a seguir apenas um exemplo para cada item:

Exercícios resolvidos

Calcular:

a) 6! b) 3! + 2! c) $\frac{4!}{0!}$ d) 1! + 0!

Resolução

a) 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720
b) 3! + 2! = 3.2.1 + 2.1 = 6 + 2 = 8
c) $\frac{4!}{0!} = \frac{4.3.2.1}{0!} = 24$
d) 1! + 0! = 1 + 1 = 2

Exercícios básicos

Calcule:

a) 7! b) 3! . 2! c) 4! – 2! d) $\frac{0!}{3!}$

Conforme os exercícios apresentados por este livro didático, observamos que estes são questões que abordam apenas o entendimento da definição de fatorial e suas propriedades e que exigem do aluno para resolvê – los, somente o conhecimento das quatro operações fundamentais da matemática.

Não encontramos nos exercícios do livro questões que solicitam justificativas para as respostas ou que façam relações com outros conteúdos abordados em séries anteriores, tais como o conceito de número par ou de múltiplo. Desta forma, acreditamos que a questão A5, ao abordar o tema fatorial sem utilizar diretamente a definição e termos como “efetue” ou “calcule”, foge ao tratamento tradicional do tema, além de solicitar justificativas para as respostas apresentadas.

1.6.2 NOSSA AMOSTRA

Os principais resultados sobre o desempenho dos 1998 alunos na questão A5 obtidos a partir da planilha, estão apresentados na 1ª seção do capítulo 2. Entretanto, analisar com profundidade as respostas dos 1998 alunos se torna inviável. Portanto, a partir da planilha com o total de dados, obteve-se por meio de uma tabela de números aleatórios um grupo com 50 sujeitos, visando uma análise mais aprofundada que também apresentamos no próximo capítulo.

Esse grupo de 50 sujeitos tem as seguintes características:

- 31 alunos são do sexo feminino e 19 são do sexo masculino;
- 33 alunos estudam no 1º ano do Ensino Médio e 17 alunos na 8ª série;
- 39 alunos são da rede pública e 11 alunos da rede particular;
- a faixa etária desses alunos situa-se entre 14 e 16 anos.

No que segue, esse grupo será chamado de nossa amostra. Construímos uma planilha com as codificações das respostas e justificativas apresentadas pelos 50 alunos (anexo 4) e, a partir dos dados concentrados nessa planilha, elaboramos primeiramente uma tabela em que apresentamos a quantidade e o índice de erros e acertos aos itens da questão A5. Em seguida, numeramos os sujeitos de 1 a 50 e construímos uma tabela para cada item da questão A5 em que cruzamos a resposta e justificativa de cada aluno. A função dessas tabelas é a de orientar uma análise quantitativa aprofundada das respostas e justificativas presentes na nossa amostra, sem perder de vista os sujeitos.

Após essa primeira análise, os 50 sujeitos foram divididos em dois grupos. Para essa divisão, consideramos os alunos que compreenderam e os que não compreenderam a definição de fatorial, o que foi determinado a partir do item b da questão A5. Com a formação desses grupos, fizemos uma análise qualitativa e apresentamos como ilustração alguns protocolos dos alunos visando identificar conhecimentos e procedimentos utilizados, bem como formular conjeturas sobre dificuldades por eles encontradas. As análises permitiram obter elementos para a elaboração das entrevistas.

Para a realização das entrevistas selecionamos cinco alunos. As entrevistas, previamente agendadas, foram realizadas nas escolas de origem dos alunos e gravadas em áudio com objetivo de facilitar as transcrições. Com as análises anteriores e as entrevistas, procuramos determinar elementos consistentes que fundamentassem as nossas conclusões.

1.6.3 ANÁLISE A PRIORI

A questão A5a perguntava se 5! é um número par. Para esclarecer o aluno sobre o termo fatorial, foram colocados, antes desta questão, o desenvolvimento de 4! e 5! O conhecimento básico para resolver essa questão era o conceito de número par. Observando o fator 2 no desenvolvimento de 5! ou fazendo o cálculo para chegar ao resultado 120, o aluno teria condições de responder e justificar essa questão.

A questão A5b perguntava o que significa 8! Esperava-se que os alunos já tivessem compreendido o significado de fatorial devido aos exemplos dados anteriormente.

A questão A5c perguntava se 8! é múltiplo de 21. Além do conceito de múltiplo e de divisibilidade esperava-se que os alunos observassem os fatores 3 e 7 no desenvolvimento de 8! ou que calculassem o resultado de 8! e assim respondessem e justificassem a pergunta.

Semelhante à questão A5c, a questão A5d perguntava se 62! é múltiplo de 37. Nesse caso seria inviável o aluno utilizar cálculo pois além de o resultado ser um “número muito grande”, não era permitido o uso de calculadora. O objetivo da questão era que o aluno identificasse o fator 37 no desenvolvimento de 62! e assim justificasse a resposta.

A questão A5e perguntava qual é o último algarismo de 23! Para responder e justificar, o aluno deveria identificar o fator 10 no desenvolvimento de 23!.

CAPÍTULO II

ANÁLISE DAS QUESTÕES SOBRE FATORIAL

2.1 RESULTADOS DA FASE 1 DO PROJETO AprovaMe

Conforme o que já foi descrito na seção **1.4**, a fase 1 do projeto envolveu a aplicação dos questionários a 1998 alunos por 27 professores-alunos. Ao observar a planilha de dados, verificamos que algumas respostas tabuladas na questão A5 por um dos professores não estavam de acordo com as codificações estabelecidas durante as reuniões com os participantes do projeto. Como as condições não eram favoráveis à correção desses dados, resolvemos excluí-los da planilha.

Desse modo, a amostra maior ficou limitada a 1968 alunos com as seguintes características:

Tabela 1: Distribuição dos alunos por série

Série	Freq.	%
8ª	897	45,58
1ª	1071	54,42
Total	1968	100

Tabela 2: Distribuição dos alunos por rede de ensino

Escola	Freq.	%
Estadual	1574	79,97
Particular	277	14,08
Municipal	117	5,95
Total	1968	100

Tabela 3: Distribuição das escolas por rede de ensino

Escola	Freq.	%
Estadual	22	70,97
Particular	6	19,36
Municipal	3	9,67
Total	31	100

A seguir, apresentamos as tabelas do grupo de 1968 alunos, subdivididos em 8ª série e 1ª série, com as respostas aos itens “a”, “b”, “c”, “d”, "e" da questão A5 do questionário de álgebra. Nessas tabelas, esse grupo de 1968 alunos será denominado como grupo maior. Mais à frente, apresentamos a análise quantitativa e qualitativa da nossa amostra (50 sujeitos), portanto, ressaltamos que não pretendemos realizar uma análise aprofundada sobre o desempenho do grupo maior. Faremos apenas um breve comentário para cada tabela que será apresentada.

Tabela 4: Respostas à questão A5(a)

Respostas	Grupo maior		8ª série		1ª série	
	Freq.	%	Freq.	%	Freq.	%
Sim	1053	53,5	528	58,8	525	49
Não	747	37,96	329	36,7	418	39
Não sei	76	3,86	14	1,6	62	5,8
Em branco	92	4,68	26	2,9	66	6,2
Total	1968	100	897	100	1071	100

Na tabela acima observamos que 1053 sujeitos responderam corretamente a questão A5(a), equivalente a 53,5% do grupo maior. Vale destacar que esse percentual de acertos foi o único acima de 50% obtido pelos alunos nos cinco itens da questão A5. Por outro lado, 46,5% dos alunos apresentaram respostas erradas ou não responderam a questão. Consideramos esse índice preocupante, pois como já foi mencionado anteriormente, o conhecimento necessário nessa questão era o conceito de número par.

Acreditamos que o índice de acertos superior a 50% se deve à possibilidade da utilização do cálculo para responder a questão A5(a), pois conforme a próxima tabela, verificamos que 70,2% dos alunos que acertaram utilizaram o cálculo para justificarem as suas respostas, ao passo que apenas 2,75% dos sujeitos utilizaram justificativas destacando propriedades. Observamos também na tabela acima, que os alunos da 8ª série apresentaram melhor desempenho que os alunos da 1ª série, talvez pelo fato de o conhecimento envolvido na questão A5(a) estar mais presente nas 5ª e 6ª séries, isto é, mais próximos da 8ª série.

Tabela 5: Justificativas apresentadas pelos alunos que acertaram A5(a)

Justificativa	Grupo maior		8ª série		1ª série	
	Freq.	%	Freq.	%	Freq.	%
0	137	13,01	62	11,22	75	15
1	97	9,2	55	9,95	42	8,4
2a	19	1,8	8	1,45	11	2,2
2b	9	0,85	6	1,08	3	0,6
3C	739	70,2	390	70,5	349	69,8
3P	29	2,75	17	3,08	12	2,4
não justificou	23	2,19	15	2,72	8	1,6
Total	1053	100	553	100	500	100

Entre as justificativas apresentadas, observamos que 137 alunos (13,01%), receberam codificação zero e apenas 23 alunos não justificaram a questão A5(a). Assim como na apresentação de respostas corretas, os alunos de 8ª série levaram pequena vantagem nas justificativas, pois nas codificações 1, 2a, 2b, 3c e 3p, os percentuais dos alunos de 8ª série somam 86,6%, ao passo que os percentuais dos alunos de 1ª série para as mesmas codificações somam 83,4%.

Os dados do grupo maior, referentes à questão A5(b), encontram-se na próxima tabela.

Tabela 6: Respostas à questão A5(b)

Respostas	Grupo maior		8ª série		1ª série	
	Freq.	%	Freq.	%	Freq.	%
Corretas	946	48,07	480	53,6	466	43,5
Erradas	757	38,47	326	36,4	431	40,2
Não sei	134	6,81	46	5,1	88	8,2
Em branco	131	6,65	44	4,9	87	8,1
Total	1968	100	897	100	1071	100

Na questão A5(b), consideramos que o percentual de respostas corretas (48,07%) ficou abaixo do desejado pois foram apresentados exemplos de fatorial na questão anterior. Na comparação entre os alunos de 8ª série e de 1ª série temos os seguintes resultados: 46,4% dos alunos de 8ª e 56,5% dos alunos de 1ª série erraram ou não apresentaram respostas, ou seja, percentualmente os alunos de 8ª série erraram menos. Em relação à resposta correta, os alunos de 8ª série tiveram novamente melhor desempenho que os alunos de 1ª série: 53,6% contra 43,5%.

Como a questão A5(b) não pediu justificativa, passemos para a tabela da questão A5(c).

Tabela 7: Respostas à questão A5(c)

Respostas	Grupo maior		8ª série		1ª série	
	Freq.	%	Freq.	%	Freq.	%
Sim	331	16,8	170	18,9	161	15,1
Não	1216	61,8	583	65	633	59,1
Não sei	240	12,2	81	9,1	159	14,8
Em branco	181	9,2	63	7,0	118	11
Total	1968	100	897	100	1071	100

Nesta questão tivemos um grande aumento no número de erros, pois apenas 331 alunos (16,8%) responderam-na corretamente. As respostas erradas e do tipo “não sei” ou “em branco” apresentaram um total de 1637. Em relação às justificativas, podemos constatar na próxima tabela que entre os 331 alunos que acertaram a questão A5(c), 31 sujeitos (9,4%) não justificaram a resposta, 125 alunos (37,8%) apresentaram justificativas consideradas erradas e a utilização do cálculo foi o principal argumento para as justificativas de 129 alunos (38,9%). Tivemos ainda, apenas 16 justificativas (4,8%) com uso de propriedades. Esse fraco desempenho nessa questão é uma forte indicação de que as justificativas não devem fazer parte do dia a dia dos alunos na aula de matemática, pois acreditamos que somente com a prática constante de sua elaboração, os alunos terão condições de justificar as suas respostas. Isso será investigado nas entrevistas.

Tabela 8: Justificativas apresentadas pelos alunos que acertaram A5(c)

Justificativas	Grupo maior		8ª série		1ª série	
	Freq.	%	Freq.	%	Freq.	%
0	125	37,8	61	34,07	64	42,1
1	26	7,9	14	7,82	12	7,9
2a	3	0,9	2	1,1	1	0,65
2b	1	0,3	1	0,55	0	0
3C	129	38,9	71	39,7	58	38,15
3P	16	4,8	11	6,15	5	3,3
Não justificou	31	9,4	19	10,61	12	7,9
Total	331	100	179	100	152	100

Ainda, em relação às justificativas , observamos na tabela 8 que 45,85% dos alunos da 8ª série receberam codificação 3C ou 3P, isto é, utilizaram cálculo ou propriedade para justificar as respostas, enquanto que o percentual de alunos da 1ª série foi de 41,45%.

Na próxima tabela, temos os dados referentes à questão A5(d)

Tabela 9: Respostas à questão A5(d)

Respostas	Grupo maior		8ª série		1ª série	
	Freq.	%	Freq.	%	Freq.	%
Sim	215	10,9	119	13,3	96	8,9
Não	1107	56,3	536	59,7	571	53,3
Não sei	366	18,6	146	16,3	220	20,6
Em branco	280	14,2	96	10,7	184	17,2
Total	1968	100	897	100	1071	100

Apenas 215 alunos (10,9%) acertaram a questão A5(d), o que corresponde ao menor índice de acertos entre todos os itens da questão A5. Consideramos esse índice preocupante, pois o conhecimento necessário para resolver essa questão diz respeito ao conceito de múltiplos e divisibilidade. Quanto ao desempenho, 119 alunos de 8ª série, contra 96 alunos da 1ª série acertaram A5(d). Acreditamos que o pobre desempenho nessa questão, deve-se também ao fato da impossibilidade do cálculo , pois não era permitido o uso de calculadora. Em relação às justificativas, somente 21 alunos justificaram corretamente as suas respostas, 122 alunos apresentaram justificativas erradas e 50 alunos não justificaram as suas respostas, como podemos observar na próxima tabela.

Tabela 10: Justificativas apresentadas pelos alunos que acertaram A5(d)

Justificativas	Grupo maior		8ª série		1ª série	
	Freq.	%	Freq.	%	Freq.	%
0	122	56,75	71	59,67	51	53,13
1	14	6,51	5	4,2	9	9,38
2a	5	2,33	4	3,36	1	1,04
2b	3	1,39	1	0,84	2	2,08
3	21	9,77	13	10,93	8	8,33
Não justificou	50	23,25	25	21	25	26,04
Total	215	100	119	100	96	100

Apresentamos na próxima tabela, o desempenho dos alunos no último item da questão A5.

Tabela 11: Respostas à questão A5(e)

Respostas	Grupo maior		8ª série		1ª série	
	Freq.	%	Freq.	%	Freq.	%
Corretas	297	15,1	190	21,2	107	10
Erradas	805	40,9	354	39,5	451	42,1
Não sei	461	23,4	202	22,5	259	24,2
Em branco	405	20,6	151	16,8	254	23,7
Total	1968	100	897	100	1071	100

Na questão A5(e), os alunos tiveram pequena melhora de desempenho em relação à questão anterior. Foram 297 acertos (15,1%) e 805 respostas consideradas erradas. Respostas "não sei" ou "em branco" somaram 866, o que corresponde a 44%. Novamente observamos desempenho superior dos alunos de 8ª série, pois estes apresentaram 190 respostas corretas ao passo que os alunos de 1ª série conseguiram 107 acertos.

Entre as justificativas apresentadas pelos alunos, 47,8% receberam codificação zero, isto é, estavam totalmente erradas e 96 alunos não justificaram a sua resposta. Na comparação entre os alunos de 8ª série e de 1ª série temos: 99 alunos de 8ª e 43 alunos de 1ª série tiveram as justificativas consideradas erradas, porém, percentualmente os alunos de 8ª série se saíram melhor pois estes apresentaram 47,1% de justificativas erradas contra 49,4% dos alunos de 1ª série. Nas justificativas com codificações 1, 2a e 2b, os percentuais dos alunos de 8ª série (12,2%) foram menores que dos alunos de 1ª série (12,65%) mas, como podemos observar, a diferença em favor dos alunos de 1ª série é muito pequena. No entanto, levando em consideração o percentual de justificativas corretas (codificação 3), podemos dizer que, neste item, o desempenho dos alunos de 8ª série foi, novamente, superior ao dos alunos de 1ª série, como podemos observar na próxima tabela.

Tabela 12: Justificativas apresentadas pelos alunos que acertaram A5(e)

Justificativas	Grupo maior		8ª série		1ª série	
	Freq.	%	Freq.	%	Freq.	%
0	142	47,8	99	47,1	43	49,4
1	20	6,7	12	5,7	8	9,2
2a	10	3,4	8	3,8	2	2,3
2b	6	2,1	5	2,4	1	1,15
3	23	7,7	19	9,1	4	4,6
Não justificou	96	32,3	67	31,9	29	33,35
Total	297	100	210	100	87	100

Após as considerações sobre os resultados do grupo maior, destacamos um baixo aproveitamento dos alunos tanto na apresentação de respostas corretas como de justificativas. As questões A5(a) e A5(b) foram as que apresentaram o melhor desempenho dos alunos: 53,5% e 48,07% de acertos, respectivamente. Nas demais questões, o índice de acertos foi igual ou inferior a 16,8%. Constatamos também melhor aproveitamento dos alunos de 8ª série em relação aos alunos de 1ª série. Nas entrevistas que apresentaremos no capítulo IV, procuraremos indícios que justifiquem a superioridade dos alunos de 8ª série.

2.2 ANÁLISE DE NOSSA AMOSTRA

Na Tabela seguinte apresentamos os primeiros dados sobre o desempenho do grupo de 50 sujeitos.

Tabela 13: Respostas apresentadas pelos 50 sujeitos

	Respostas								
	Corretas		Erradas		Não sei		Em branco		Total
Questões	Quant.	%	Quant.	%	Quant.	%	Quant.	%	
A5(a)	29	58%	19	38%	1	2%	1	2%	50
A5(b)	30	60%	17	34%	3	6%	0	0%	50
A5(c)	16	32%	27	54%	4	8%	3	6%	50
A5(d)	9	18%	31	62%	4	8%	6	12%	50
A5(e)	2	4%	21	42%	13	26%	14	28%	50
Total	85	34%	116	46.4%	25	10%	24	9.6%	250

A tabela 13 mostra o baixo desempenho dos alunos. Note-se o alto índice de respostas para as codificações erradas, não sei ou em branco (66%). Apenas 34% das respostas estão corretas, enquanto que 46,4% estão erradas.

O gráfico a seguir exibe uma visão geral sobre os índices numéricos das respostas apresentadas pela nossa amostra.

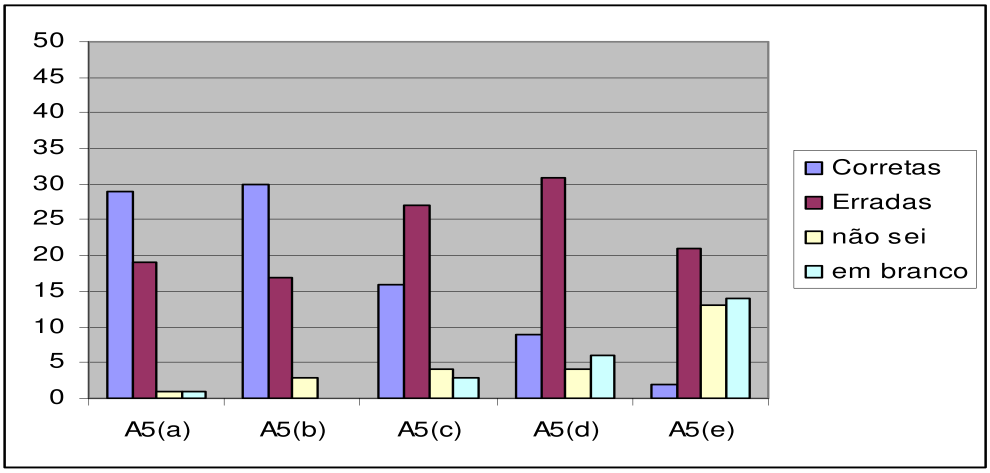


Figura 8: Número de acertos e erros nas questões sobre fatorial

Após a tabulação dos primeiros dados de nossa amostra, comparamos esses resultados com aqueles do grupo maior, no que diz respeito apenas às respostas corretas e erradas aos cinco itens da questão A5. Ao organizar os dados para essa comparação, observamos que os percentuais de acertos e erros apresentados pelo grupo maior e pela nossa amostra nem sempre se aproximavam, como poderá ser visto a partir da tabela 15. Acreditamos que a não aproximação dos resultados pode ter sido causada pela diferença na distribuição dos alunos por série na formação dos dois grupos, como mostra a próxima tabela.

Tabela 14: Distribuição dos alunos por série

Série	Grupo maior		Nossa amostra	
	Freq.	%	Freq.	%
8ª	897	45,58	17	34
1ª	1071	54,42	33	66
Total	1968	100	50	100

Na tabela 14, a diferença entre os alunos de 8ª série e de 1ª série do grupo maior é de 8,84% enquanto que essa diferença na nossa amostra é de

32%, portanto, uma diferença significativa que, conforme já ressaltamos, pode ser um dos motivos da não aproximação dos resultados do grupo maior e da nossa amostra.

A seguir, conforme citado anteriormente, apresentamos para comparação a tabela 15 com as contagens de respostas corretas e erradas do grupo maior e da nossa amostra.

Tabela 15: Respostas aos itens da questão A5

Questões	Grupo maior				Nossa amostra			
	Corretas		Erradas		Corretas		Erradas	
	Freq.	%	Freq.	%	Freq.	%	Freq.	%
A5(a)	1053	53,5	747	38	29	58	19	38
A5(b)	946	48,07	757	37,96	30	60	17	34
A5(c)	331	16,8	1216	61,8	16	32	27	54
A5(d)	215	10,9	1107	56,3	9	18	31	62
A5(e)	297	15,1	805	40,9	2	4	21	42

Observando a tabela acima, notamos que os índices mais próximos de acertos e erros ocorreram no item “a”. Foram 58% de respostas corretas apresentadas pela nossa amostra contra 53,5% do grupo maior. O índice de erros foi o mesmo para os dois grupos (38%). Nos itens “b” e “e” houve aproximação apenas no índice de respostas erradas: 34% e 42% da nossa amostra contra 37,96% e 40,9% do grupo maior, respectivamente. A maior diferença entre os percentuais de acertos encontra-se no item “e”, pois enquanto que a nossa amostra apresentou um índice de apenas 2% de acertos, o grupo maior teve 15,1% de respostas corretas. É interessante destacar que as melhores aproximações aconteceram nos índices de respostas erradas.

2.2.1 ANÁLISES A POSTERIORI POR QUESTÃO

Questão A5(b): O que significa 8! ?

Iniciamos nossa análise pela questão A5(b) (tabela 16), pois trata de investigar a compreensão dos alunos sobre o conceito de fatorial. Constatamos, nesta questão, 30 respostas corretas (60%). Contudo, esperava-se um índice maior de respostas corretas pelo fato de a questão A5 apresentar, logo no início, exemplos do desenvolvimento fatorial de 4 e 5.

Acreditamos que os alunos que não acertaram essa questão não tenham compreendido a definição de fatorial, comprometendo assim o seu desempenho nas outras questões. Esse fato será analisado mais adiante.

Por essa razão, a partir desse ponto vamos nos referir aos 30 alunos que responderam corretamente a questão A5(b) como "os sujeitos que compreenderam a definição de fatorial" e aos 20 alunos que erraram ou escreveram "não sei" como "os sujeitos que não compreenderam a definição de fatorial".

Em todo o texto, os 50 sujeitos foram enumerados de 1 a 50 e estão escrito em negrito nas tabelas que se seguem.

Tabela 16: Respostas dos 50 sujeitos à questão A5(b)

Respostas	Sujeitos	Freqüência
Corretas	**1, 2, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 15, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 41, 42, 44, 45, 48, 49**	30
Erradas	**3, 4, 7, 8, 13, 16, 23, 28, 29, 31, 32, 39, 40, 43, 46, 47, 50**	17
Não sei	**12, 17, 19**	3

Passemos para a questão A5(a).

Questão A5(a): 5! É um número par ? Justifique.

Conforme os dados apresentados na tabela 13, observamos que 58% dos alunos acertaram essa questão, o que corresponde a 29 alunos.

Embora esse índice tenha superado 50%, julgamos que o desempenho dos alunos poderia ter sido melhor pois apresentamos dois exemplos no início da questão e também pelo fato de o conceito de número par ser tema ou tópico de estudo desde as séries iniciais

Dos alunos que responderam corretamente, 25 utilizaram o cálculo para a justificativa, isto é, calcularam o resultado do desenvolvimento de 5!. Apenas 3 alunos justificaram a resposta utilizando propriedades pertinentes. Em resumo, podemos ver na próxima tabela o desempenho por aluno na questão A5(a), no que diz respeito às respostas e justificativas.

Tabela 17: Respostas dos 50 sujeitos à questão A5(a)

		Respostas			
		Sim	Não	Em branco/ não sei	Freqüência
Justificativas	0	**36**	**2, 4, 7, 8, 15, 16, 17, 18, 20, 23, 28, 30, 32, 37, 39, 40, 49, 50**		19
	3C	**3, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 19, 21, 22, 24, 25, 31, 33, 34, 35, 38, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48**			25
	3P	**1, 26, 27**			3
	Em branco/ não sei		**29**	**12, 14**	3
	Freqüência	29	19	2	50

Observando as Tabelas 16 e 17, notamos que dos 29 alunos que responderam sim à questão A5(a), 22 compreenderam a definição de fatorial pois estes responderam corretamente a questão A5(b). Entre os 21 sujeitos que responderam não ou não sei, 8 entenderam a definição de fatorial, pois estes também responderam corretamente a questão A5(b). Observando os protocolos desses 8 sujeitos, verificamos que eles tiveram dificuldades com o conceito de número par.

Questão A5(c): 8! É múltiplo de 21 ? Justifique

A partir desta questão o número de acertos foi diminuindo consideravelmente. Apenas 16 alunos (32%) responderam-na corretamente. Vinte e oito alunos erraram esta questão e respostas “em branco/não sei” somam 6. Entre os alunos que acertaram, 7 deles utilizaram o cálculo para justificar a resposta, (isto é, calcularam o produto de 8x7x6x5x4x3x2x1 e dividiram o resultado por 21), dois sujeitos identificaram 3 e 7 como fatores de 8!(isto é, utilizaram propriedades). Justificativas erradas foram em número de 5 e 8 alunos deixaram a justificativa em branco. A tabela, que sintetiza o desempenho, por sujeito, de respostas e justificativas à questão A5(c) é a seguinte:

Tabela 18: Respostas dos 50 sujeitos à questão A5(c)

		Respostas			
		Sim	Não	Em branco/ não sei	Freqüência
Justificativas	0	**15, 20, 33, 41, 48**	**2, 4, 6, 7, 8, 13, 14, 17, 18, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 36, 38, 39, 40, 44, 45, 46, 49**	**37**	33
	3C	**5, 9, 10, 24, 31, 35, 42**			7
	3P	**1, 11**			2
	Em branco/ não sei	**43, 47**	**3**	**12, 16, 19, 34, 50**	8
	Freqüência	16	28	6	50

Observamos que dos 16 alunos que acertaram esta questão, 13 compreendem a definição de fatorial. Entre os 34 alunos que erraram esta questão, 17 deles compreendem a definição de fatorial. Conjetura-se que esses alunos tiveram dificuldade em compreender o enunciado ou não estão familiarizados com a noção de múltiplo. Por outro lado, os outros 17 alunos não compreendem a definição de fatorial e, compreensivelmente, não acertaram a questão.

Questão A5(d): 62! É múltiplo de 37 ? Justifique.

Semelhantemente à questão anterior, apenas 9 alunos acertaram essa questão. Acreditamos que o alto índice de erros nesta questão pode ter sido causado pelo fato de o conceito de divisibilidade e de múltiplo serem abordados apenas nas 5ª e 6ª séries, conforme os livros didáticos utilizados pelos professores. Apenas 3 alunos justificaram corretamente a resposta, isto é, visualizaram o fator 37 no desenvolvimento de 62!. Dos 9 alunos que responderam corretamente, 4 compreendem a definição de fatorial. Entre eles, estão os 3 sujeitos que justificaram corretamente. Mais à frente, examinaremos algumas justificativas dos demais 6 sujeitos.

É interessante notar que, em conseqüência, há 26 sujeitos que compreendem a definição de fatorial e, entretanto, estão entre os 41 que erraram a questão, provavelmente devido a dificuldades com o conceito de múltiplo. Eis a tabela de desempenho por sujeito:

Tabela 19: Respostas dos 50 sujeitos à questão A5(d)

		Respostas			
		Sim	Não	Em branco/ não sei	Freqüência
Justificativas	0	**17, 20, 28, 40, 47**	**4, 6, 8, 9, 11, 13, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 30, 32, 33, 35, 36, 38, 39, 41, 44, 45, 46, 49**	**5, 37**	32
	2A	**31**			1
	3P	**1, 26, 42**			3
	Em branco/ não sei		**2, 3, 19, 43**	**7,10, 12, 14, 15, 16, 29, 34, 48, 50**	14
	Freqüência	9	29	12	50

Questão A5(e): Pedro calculou 23! Sem calcular, determine o último algarismo encontrado por Pedro. Justifique.

Com apenas 4% de acertos, esta questão apresentou o maior índice de erros. Considerando as respostas em branco e não sei como erradas, tivemos 96% de respostas erradas. Esperava-se que os alunos identificassem o fator 10 no desenvolvimento de 23! e respondessem corretamente a questão. Entre os dois alunos que acertaram esta questão, apenas o sujeito número **1** justificou corretamente, isto é, utilizou o fato de 5! ser igual a 120, portanto, na multiplicação o último algarismo é zero. Estes dois alunos que acertaram estão entre os que compreendem a definição de fatorial. Os demais 28 alunos que conhecem a definição de fatorial erraram a questão por razões que serão investigadas na análise dos protocolos. Na próxima tabela apresentamos as respostas dos 50 sujeitos.

Tabela 20: Respostas dos 50 sujeitos à questão A5(e)

		Respostas									
		Em branco	Não sei	Zero	1	3	6	23	Par	Outros	Freq.
Justificativa	0				**33, 35, 41**	**22, 31, 32, 37, 45**	**6, 21**	**4**	**5, 13, 27**	**36**	15
	-1		**8, 12, 17, 18, 19, 20, 38, 39, 47, 48, 50**								11
	-2	**2, 7, 9, 10, 11, 16, 24, 26, 30, 34, 42, 43, 44**		**49**		**25, 29**	**14, 15**	**23**	**28**	**3, 40, 46**	23
	3P			**1**							1
	Freq.	13	11	2	3	7	4	2	4	4	50

Os dados já analisados mostraram um pobre desempenho dos alunos. Para refinamento da análise, agrupamos os alunos a partir dos dados levantados na seção anterior. Algumas observações acima indicam que é possível agrupar os sujeitos segundo seu desempenho. Descrevemos na próxima seção alguns grupos.

2.3 ANÁLISES DE PROTOCOLOS

2.3.1 O GRUPO DOS QUE NÃO COMPREENDERAM A DEFINIÇÃO DE FATORIAL

A partir desse ponto, designamos por **grupo N** os 20 sujeitos que não compreenderam a noção de fatorial, isto é, aqueles alunos que erraram a questão A5(b). Para investigar o desempenho deles nas outras questões, reagrupamos os sujeitos conforme a quantidade de respostas corretas e erradas às outras questões. Essa análise nos auxiliará também na escolha dos indivíduos para entrevistas. Desse modo, subdividimos o **grupo N** em três mini-grupos:

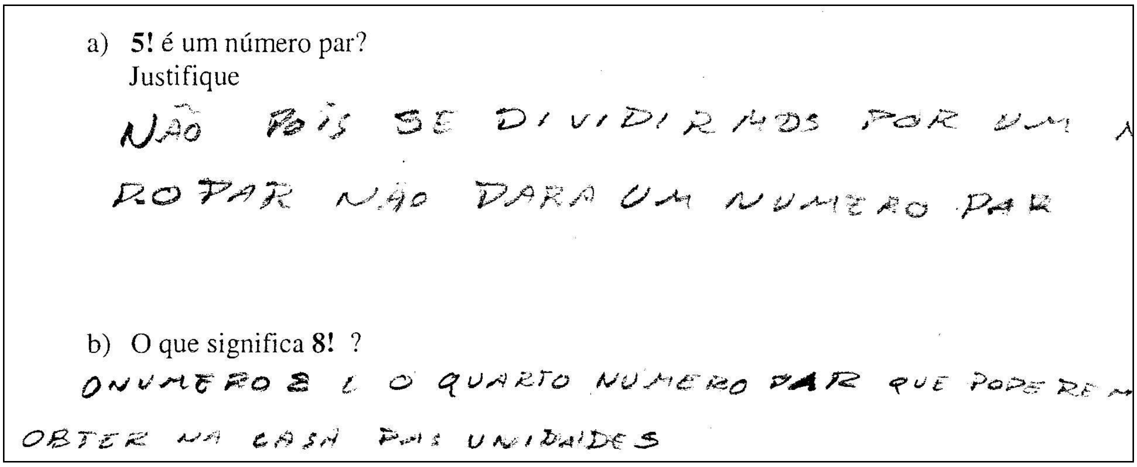
• **Grupo N_1:** Com 10 elementos, formado pelos sujeitos **4, 7, 8, 12, 16, 23, 29, 32, 39, 50** que apresentaram respostas e justificativas erradas a todas as outras questões.

• **Grupo N_2:** Com 7 elementos, formado pelos sujeitos **3, 13, 17, 19, 28, 40, 46** que acertaram exatamente uma questão. Os sujeitos **3, 13, 19, e 46** acertaram apenas a questão A5(a) e os sujeitos **17, 28 e 40** acertaram apenas a questão A5(d).

• **Grupo N_3:** Com 3 elementos, formado pelos sujeitos **31, 43, 47** que acertaram exatamente duas ou três questões. O sujeito **43** acertou A5(a) e A5(c) e os sujeitos **31 e 47** acertaram A5(a), A5(c) e A5(d).

Passemos à análise dos protocolos:

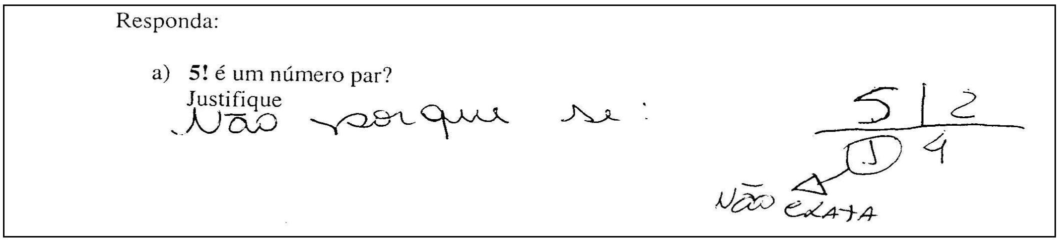
GRUPO N_1: Observando os protocolos dos 10 sujeitos que compõem esse grupo, encontramos muitas respostas do tipo "não sei" e "em branco". Observamos também o fato de eles confundirem a notação de fatorial com um número inteiro, isto é, interpretam 5! como 5, o que nos dá indícios de que eles não compreenderam a definição de fatorial. Como exemplos, destacamos a seguir as respostas do sujeito **32** e a do sujeito **23**:


a) 5! é um número par?
Justifique
NÃO POIS SE DIVIDIRMOS POR UM N
ROPAR NÃO DARA UM NUMERO PAR

b) O que significa 8! ?
O NUMERO 8 É O QUARTO NUMERO PAR QUE PODEREM
OBTER NA CASA DAS UNIDADES

Figura 9: Resposta do sujeito 32

O sujeito **32** demonstra compreender o conceito de número par, conforme as suas respostas, porém confundiu a notação 8! com o número 8.


Responda:

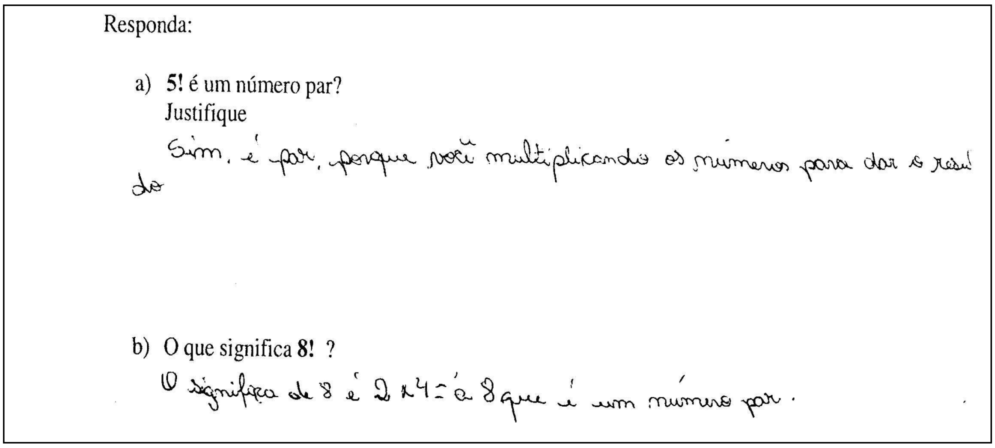
a) 5! é um número par?
Justifique
Não porque se:

NÃO EXATA

Figura 10: Resposta do sujeito 23

Fica claro no protocolo do sujeito **23** a confusão estabelecida entre a notação de fatorial e um número inteiro, pelo fato de dividir cinco por dois para justificar sua resposta. Este aluno também evidencia possuir noção de número par ao destacar que a divisão não é exata.

GRUPO N$_2$: Dos 7 alunos desse grupo que acertaram exatamente uma questão, temos que 04 sujeitos acertaram a questão A5(a) e 03 acertaram a questão A5(d). Entre os alunos que acertaram a questão A5(a), observamos o protocolo do sujeito número **46** e verificamos que ele utilizou os exemplos dados para responder essa questão ; tudo indica que esse sujeito errou a questão A5(b) pelo fato de confundir a notação de fatorial com um número inteiro. Para ilustrar, temos:


Responda:

a) 5! é um número par?
Justifique

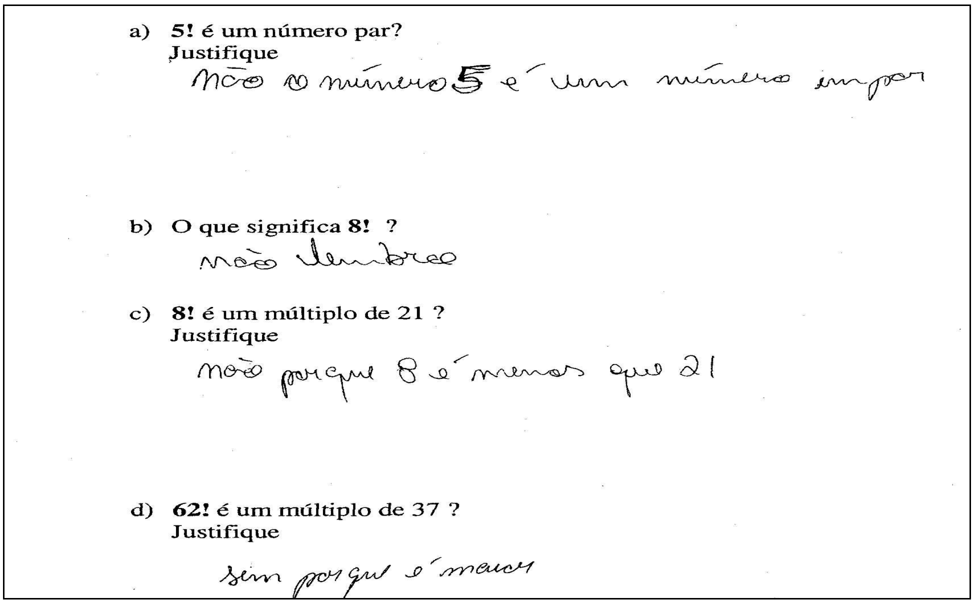
Sim, é par, porque você multiplicando os números para dar o resul do

b) O que significa 8! ?

O significa de 8 é 2x4= a 8 que é um número par.

Figura 11: Resposta do sujeito 46

Esse tipo de confusão também aconteceu com o sujeito **17**, pois este, ao responder as questões A5(a) e A5(c) trocou 5! por 5 e 8! por 8. A resposta desse sujeito para a questão A5(d) foi considerada certa pelo fato de o mesmo responder “sim”. No entanto, o argumento apresentado pelo aluno para justificar a resposta está muito longe de ser considerado uma prova. Acreditamos que esse sujeito não compreendeu os exemplos dados. Abaixo, apresentamos o protocolo do sujeito **17:**



a) **5! é um número par?**
Justifique
Não o número 5 é um número impar

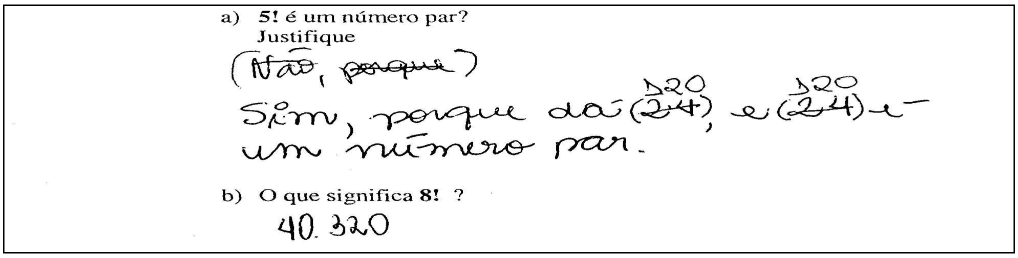
b) **O que significa 8! ?**
não lembro

c) **8! é um múltiplo de 21 ?**
Justifique
não porque 8 é menor que 21

d) **62! é um múltiplo de 37 ?**
Justifique
sim porque é maior

Figura 12: Respostas do sujeito 17

GRUPO N_3: Conforme descrito anteriormente, o sujeito **43** acertou as questões A5(a) e A5(c). Analisando as respostas do protocolo desse aluno, observamos que este conhece o significado de número par. A questão A5(b) foi considerada errada pelo fato de o mesmo ter dado como resposta o produto do desenvolvimento de 8!. Tudo indica que o aluno não levou em conta os exemplos dados. Ilustrando:



a) 5! é um número par?
Justifique
(Não, ~~porque~~)
Sim, porque dá (24) 320, e (24) 320 é um número par.

b) O que significa **8!** ?
40.320

Figura 13: Resposta do sujeito 4

Os sujeitos **31** e **47** acertaram as questões A5(a), A5(c) e A5(d) porém ao responderem à questão A5(b), também não associaram a pergunta com os exemplos dados. Por exemplo, o sujeito 31 ao responder o que significa 8! respondeu apenas “8 fatorial”.

Finalmente, observamos que nenhum aluno do **grupo N** acertou todas as outras questões.

A tabela abaixo resume o desempenho desses alunos.

Tabela 21: Alunos do grupo N que acertaram alguma das outras questões

Questões	Sujeitos	%
A5(a)	**3, 13, 19, 31, 43, 46, 47**	35%
A5(c)	**31, 43, 47**	15%
A5(d)	**17, 28, 31, 40, 47**	25%
A5(e)	Nenhum	0%
Erraram todas	**4, 7, 8, 12, 16, 23, 29, 32, 39, 50**	50%

Após essa primeira análise dos protocolos, observamos nesse grupo uma tendência muito forte de os alunos em justificar as respostas utilizando-se de cálculo. Essa tendência se verifica nos protocolos dos sete sujeitos que acertaram A5(a), pois os mesmos fizeram a conta 5 . 4 . 3 . 2 . 1, chegando ao resultado 120. Desse modo, concluíram que 120 é par.

Em relação às respostas dos sujeitos desse grupo que acertaram alguma das outras questões, com exceção de A5(a), observamos justificativas pouco claras ou justificativas que apresentam conjeturas. Ilustramos, a seguir, com o protocolo do sujeito **47**

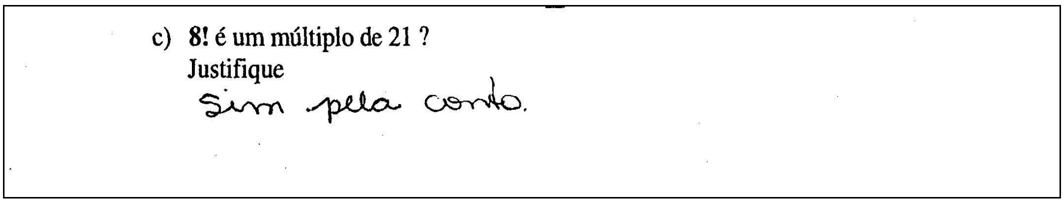

c) 8! é um múltiplo de 21 ?
Justifique
Sim pela conta.

Figura 14: Resposta do sujeito 47

2.3.2 O GRUPO DOS QUE COMPREENDERAM A DEFINIÇÃO DE FATORIAL

Outro grupo que se destaca, é o **Grupo S**, formado pelos 30 alunos que acertaram a questão A5(b) (ver tabela 16) e que, como já observamos, estamos considerando que conhecem a definição de fatorial. Assim como fizemos no **Grupo N**, criamos 6 mini grupos (não necessariamente disjuntos), para investigar o que aconteceu com eles nas outras questões.

- **Grupo S_1:** Com 22 elementos, formado pelos sujeitos **1, 5, 6, 9, 10, 11, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 33, 34, 35, 36, 38, 41, 42, 44, 45 e 48** que acertaram a questão A5(a). Ressaltamos nesse grupo o fato de 19 sujeitos receberem codificação 3c, isto é, calcularam o resultado do desenvolvimento de 5! para justificar a resposta e apenas 2 sujeitos receberem codificação 3p, isto é, identificaram o fator 2 no desenvolvimento de 5!. Os protocolos dos sujeitos **6** e **27** ilustram, respectivamente, essa nossa observação:

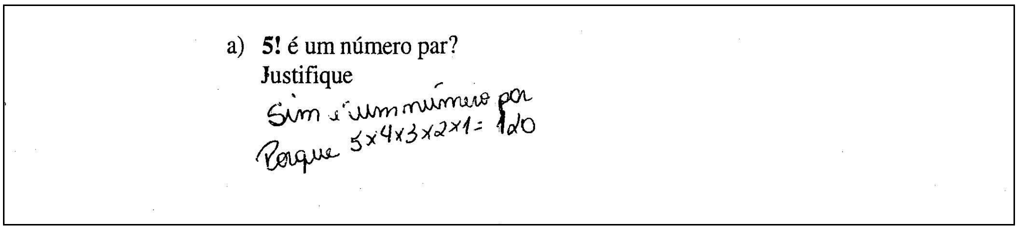

a) 5! é um número par?
Justifique
Sim é um número par
Porque 5x4x3x2x1= 120

Figura 15: Resposta do sujeito 6

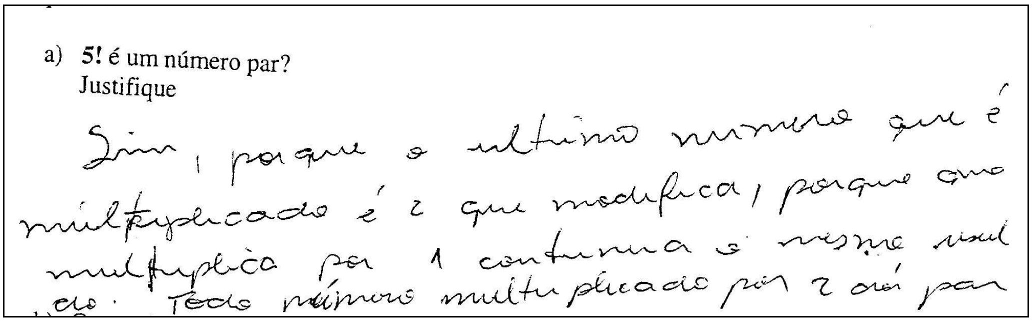
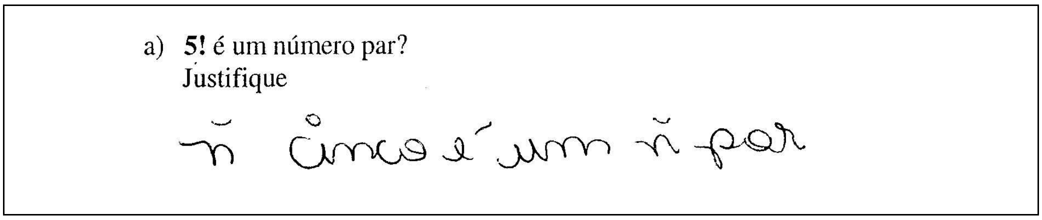

a) 5! é um número par?
Justifique
Sim, porque o último número que é
multiplicado é 2 que modifica, porque o no
multiplica por 1 continua o mesmo val
ele. Todo número multiplicado por 2 ai par

Figura 16: Resposta do sujeito 27

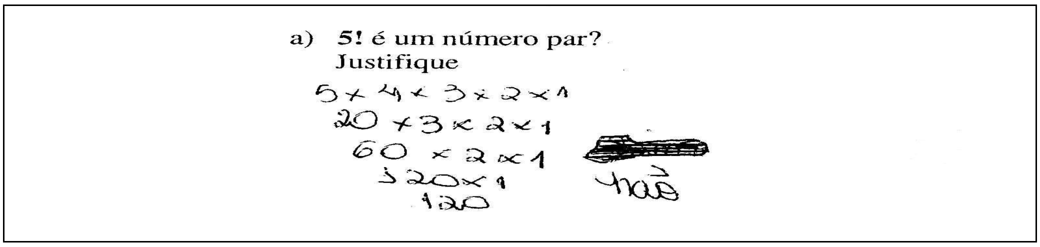
- **Grupo S_2:** Com 8 elementos, formado pelos sujeitos **2, 14, 15, 18, 20, 30, 37** e **49** que erraram a questão A5(a), considerando não sei e em branco como erradas. Investigamos o que provocou o erro desses 08 sujeitos e observamos que a maioria deles não compreendeu a definição de fatorial apresentada, (embora tenham acertado a questão A5b), pois encontramos respostas como a do sujeito **14** que confundiam a notação de fatorial com número inteiro, isto é, este sujeito tomou 5! por 5. Conjeturamos também que os sujeitos desse grupo tiveram dificuldade com o conceito de número par, mas apenas o sujeito **2**, ao concluir que 120 não é par, confirmou a nossa conjetura.



a) 5! é um número par?
Justifique

ñ cinco é um ñ par

Figura 17: Resposta do sujeito 14



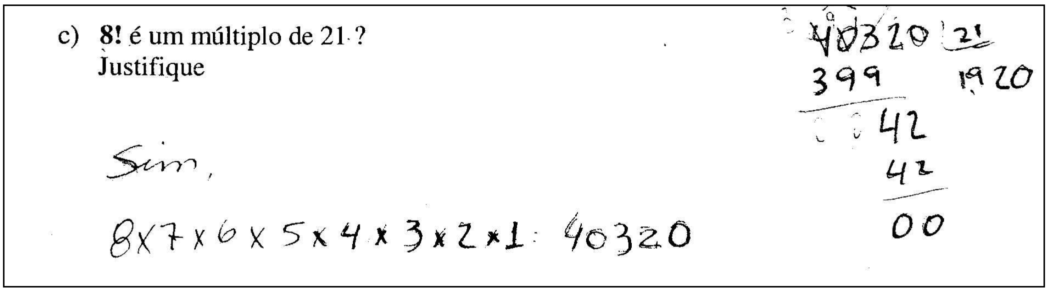
a) 5! é um número par?
Justifique

5×4×3×2×1
20×3×2×1
60×2×1
120×1
120

não

Figura 18: Resposta do sujeito 2

- **Grupo S$_3$:** Com 13 elementos, formado pelos sujeitos **1, 5, 9, 10, 11,15, 20, 24**, **33, 35, 41, 42**, e **48** que acertaram a questão A5(c) dos quais 6 receberam codificação 3C para as justificativas, 2 receberam codificação 3P e 5 alunos receberam codificação 0. Observa-se novamente nesse grupo a preferência pelo uso do cálculo para justificar as respostas, como mostra a seguir, o protocolo do sujeito 10:



c) 8! é um múltiplo de 21 ?
Justifique

Sim,

8×7×6×5×4×3×2×1: 40320

40320 | 21
399 1920
042
42
00

Figura 19: Resposta do sujeito 10

- **Grupo S$_4$:** Com 17 elementos, formado pelos sujeitos **2, 6, 14, 18, 21, 22, 25, 26, 27, 30, 34, 36, 37, 38, 44, 45** e **49** que erraram a questão A5(c). Conforme as respostas desses sujeitos, observamos que eles têm dificuldade com a definição de múltiplo de um número pois encontramos respostas do tipo "8 é múltiplo de 24", quando o correto seria 24 é múltiplo de 8. Acreditamos que o sujeito que forneceu essa resposta também confundiu a notação de fatorial com número inteiro. Ilustramos com o protocolo do sujeito 14:

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

Sim 8 é múltiplo de 24 (anulo do
Sim por que → $21 \,\underline{|\, 8}$ $\quad \begin{array}{r} 8 \\ \times 3 \\ \hline 24 \end{array}$ (anu
8 2!
0

Figura 20: Resposta do sujeito 14

Outro protocolo que achamos interessante destacar desse grupo, é do sujeito **30**, o qual também demonstra dificuldade com a definição de múltiplo e com a notação de fatorial. Para esse sujeito, um número “n” tem apenas um múltiplo, que é n^2. Ilustrando:

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique
não

$8 \cdot 8 = 64$

d) **62!** é um múltiplo de 37 ? não
Justifique

$37 \cdot 37 = 1.369$

Figura 21: Resposta do sujeito 30

Esses protocolos mostram que a assimilação da notação de fatorial não é estável. De fato, as respostas de A5(b) mostram uma compreensão que não permanece em A5(c).

Grupo S_5 Com 4 elementos, formado pelos sujeitos 1, 20, 26 e 42 que acertaram a questão A5(d). Desse grupo 3 alunos receberam 3P pela justificativa e o outro repetiu o enunciado da questão para justificar a resposta, o que caracterizou um ciclo vicioso, portanto, a justificativa foi considerada errada. Ilustramos com o protocolo do sujeito **20**:

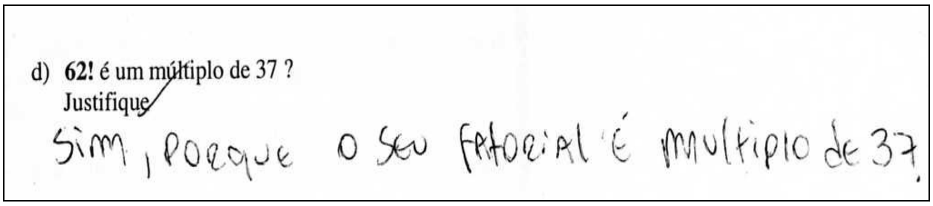

d) 62! é um múltiplo de 37 ?
Justifique
Sim, porque o seu fatorial é multiplo de 37.

Figura 22: Resposta do sujeito 20

- **Grupo S_6:** Com 26 elementos, formado pelos sujeitos **2, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 15, 18, 21, 22, 24, 25, 27, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 41, 44, 45, 48 e 49**, que erraram a questão A5(d). Analisando as respostas desses alunos, observamos novamente a dificuldade na compreensão da definição de múltiplo em algumas respostas. A justificativa do sujeito **36** a seguir constitui um caso semelhante ao ilustrado acima, de instabilidade na compreensão de fatorial:

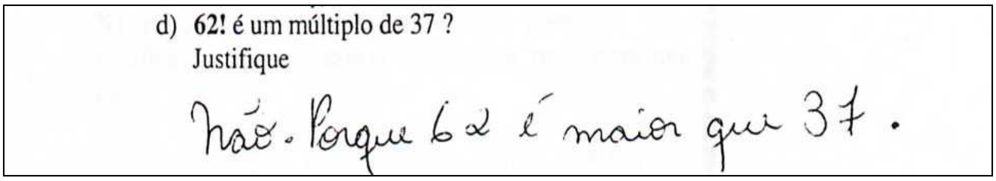

d) 62! é um múltiplo de 37 ?
Justifique
Não. Porque 62 é maior que 37.

Figura 23: Resposta do sujeito 36

Apenas dois alunos do **Grupo S** acertaram a questão A5(e) (sujeitos **1** e **49**) sendo que o sujeito **1** justificou com uso de propriedade e o sujeito **49** não deu qualquer justificativa para a resposta. 28 alunos erraram esta questão. Respostas em branco e não sei foram num total de 15. Embora esses alunos tenham acertado a questão A5(b), tudo indica que eles não identificaram o fator 10 no desenvolvimento de 23!. A resposta do sujeito 35, a seguir, confirma a nossa hipótese.

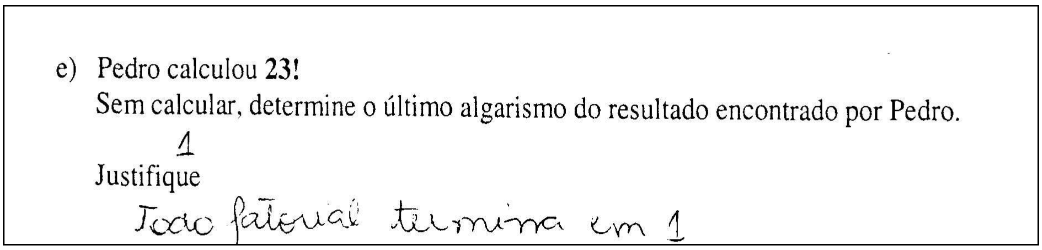

e) Pedro calculou 23!
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.
1
Justifique
Todo fatorial termina em 1

Figura 24: Resposta do sujeito 35

Na tabela abaixo, resumimos o desempenho dos sujeitos do **Grupo S**

Tabela 22: Alunos do Grupo S que acertaram alguma das outras questões

Questões	Sujeitos	%
A5(a)	**1, 5, 6, 9, 10, 11, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 33, 34, 35, 36, 38, 41, 42, 44, 45, 48**	73,30%
A5(c)	**1, 5, 9, 10, 11, 15, 20, 24, 33, 35, 41, 42, 48**	43,30%
A5(d)	**1, 20, 26, 42**	13,30%
A5(e)	**1, 49**	6,60%
Erraram todas	**2, 14, 18, 30, 37, 49**	20%

Após analisarmos os protocolos dos sujeitos do **Grupo S**, observamos também nesse grupo a tendência de os alunos justificarem as respostas utilizando o cálculo em detrimento do uso das propriedades. No total, foram 24 justificativas com o uso de cálculo e apenas 9 justificativas utilizando propriedades, enquanto que no **Grupo N** somente 7 sujeitos utilizaram o cálculo para justificar a resposta. Os demais sujeitos desse grupo apresentaram justificativas incorretas. Acreditamos que a preferência pelo uso do cálculo se deve ao fato de os alunos não conhecerem outra maneira de resolver as questões. Para ilustrar essa nossa observação, apresentamos a seguinte tabela:

Tabela 23: Justificativas apresentadas pelos alunos do Grupo S

	Justificativas/Sujeitos					
Questões	Cálculo	Quant.	%	Propriedade	Quant.	%
A5(a)	**5, 6, 9, 10, 11, 21, 22, 24, 25, 33, 34, 35, 38, 41, 42, 44, 45, 48**	18	60%	**1, 26, 27**	3	10%
A5(c)	**5, 9, 10, 24, 35, 42**	6	20%	**1, 11**	2	6,60%
A5(d)	- - - -	0	0%	**1, 26, 42**	3	10%
A5(e)	- - - -	0	0%	**1**	1	3,30%

Vale ressaltar que as 9 justificativas por propriedade são de autoria de 5 alunos.

2.3.3 COMPARAÇÕES ENTRE OS GRUPOS

Os índices de acerto da tabela 22, mostram, como era esperado, que os alunos do **Grupo S** (aqueles que consideramos compreender a definição de fatorial), tiveram desempenho melhor que os alunos do **Grupo N** (aqueles que consideramos não compreender a definição de fatorial).

Comparando as tabelas 21 e 22, chamou a nossa atenção o desempenho dos alunos do **Grupo N** na questão A5(d). Apenas 13,3% dos sujeitos do **Grupo S** acertaram A5(d), ao passo que o índice de acertos dos alunos do **Grupo N** nessa mesma questão chegou a 25%.

Embora os alunos do **Grupo N** tenham conseguido desempenho melhor em A5(d), observamos que as justificativas desses sujeitos para essa questão não apresentam argumentos claros, isto é, argumentos que possam comprovar a compreensão da definição de múltiplo ou de fatorial, enquanto que os alunos do **Grupo S** apresentaram justificativas que confirmam o entendimento sobre a definição de múltiplo ou de fatorial. Acreditamos que a justificativa do sujeito **47** (**Grupo N**) e a justificativa do sujeito **1** (**Grupo S**) para a questão A5(d), ilustradas a seguir, comprovam a nossa observação:

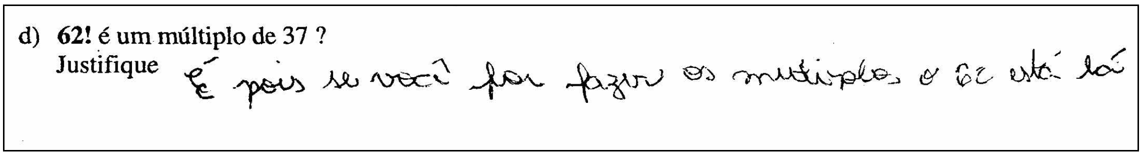

d) 62! é um múltiplo de 37 ?
Justifique É pois se você for fazer os multiplos o 62 está lá

Figura 25: Resposta do sujeito 47 – Grupo N

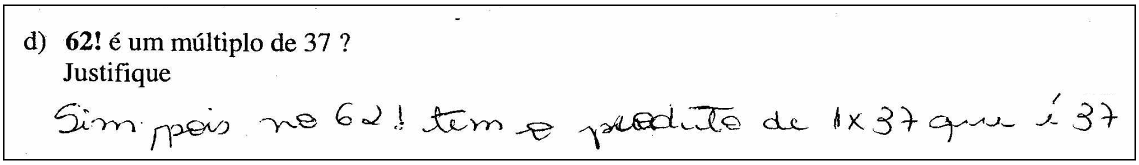

d) 62! é um múltiplo de 37 ?
Justifique
Sim pois no 62! tem o produto de 1x37 que é 37

Figura 26: Resposta do sujeito 1- Grupo S

Após analisarmos as respostas do grupo de 50 sujeitos, constatamos que nenhum aluno apresentou uma prova formal em suas justificativas. Observamos a predominância no uso da língua natural e a utilização do cálculo na maioria das justificativas. A língua natural também foi usada quando os alunos justificaram as suas respostas por meio de propriedades, como podemos ver, a seguir, na resposta do sujeito 1 ao item “e” da questão A5.

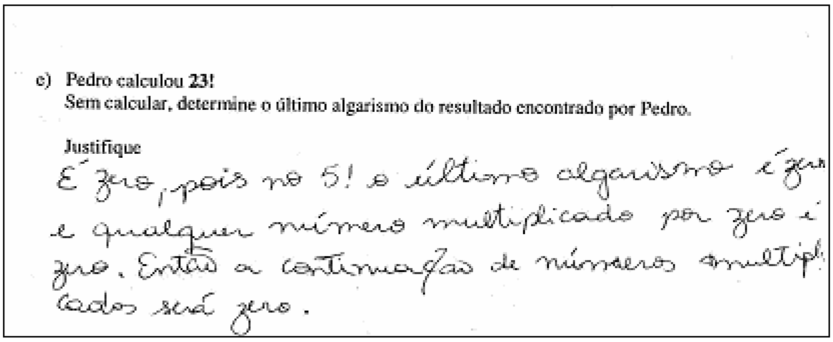

c) Pedro calculou 23!
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.
Justifique
É zero, pois no 5! o último algarismo é zero e qualquer número multiplicado por zero é zero. Então a continuação de números multiplicados será zero.

Figura 27: Justificativa do sujeito 1

No próximo capítulo, apresentamos a análise dos dados da nossa amostra realizada pelo software multidimensional CHIC.

CAPÍTULO III

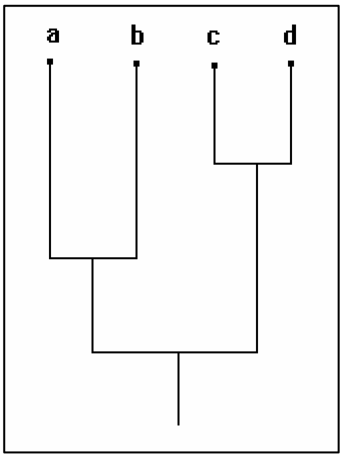
ANÁLISES UTILIZANDO O SOFTWARE CHIC

3.1 O SOFTWARE CHIC

O CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva) é um software estatístico multidimensional, desenvolvido no Instituto de Recherche des Mathématiques de Rennes (IRMAR) da Universidade de Rennes por Régis Gras e seus colaboradores. Ele permite extrair, de um conjunto de dados, relações entre sujeitos e variáveis (ou atributos) e regras de associações entre variáveis. Fornece, ainda, um índice de qualidade dessa associação e uma representação da estruturação das variáveis, segundo essas relações. A análise se dá por meio de gráficos que o programa constrói a partir da introdução dos dados.

O nosso objetivo em utilizar o CHIC é o de verificar se há outras implicações entre os sujeitos, além das informações obtidas na análise anterior e, também pelo fato de o CHIC fornecer o cálculo das contribuições dos alunos de 1ª e 8ª série na formação das classes apresentadas. A análise dos dados se dá por meio de três tipos de tratamento: árvore de similaridades, grafo implicativo e árvore coesitiva. Não pretendemos fazer uma análise completa do funcionamento do CHIC, portanto, apresentamos a seguir, uma breve descrição do tipo de tratamento que exploraremos :

- ***Árvore de similaridade***: produz a análise das proximidades das variáveis, os resultados numéricos e a árvore hierárquica de similaridades. Em ALMOULOUD (1997, p. 166), lemos: *Através da análise hierárquica de similaridade, o pesquisador procura constituir, sob a forma de árvore, o conjunto **V** das variáveis estatísticas, colocando-as de modo ascendente, com um critério de similaridade. Esta análise permite estudar, em termos de tipologia e semelhança decrescente (ou de ausência de semelhança), classes de variáveis, em certos níveis da árvore de classificação.* A análise hierárquica de similaridade mostra-nos, por meio de um gráfico, quais alunos apresentam comportamento semelhante. Exemplificamos a seguir:



Conforme o gráfico ao lado, para as questões **c** e **d**, houve um número significativo de alunos com comportamento semelhante, e para as questões **a** e **b**, a similaridade é mais fraca.

Figura 28: Exemplo de árvore de similaridade

Para analisarmos os dados dos 50 sujeitos, (descritos na seção 1.6.2), com o auxílio do software CHIC, construímos uma tabela binária em uma planilha eletrônica e codificamos as categorias de respostas como variáveis (por exemplo: ARS, AJ3C, etc.), as quais foram colocadas na primeira linha da tabela e os números dos sujeitos (de 1 a 50), foram colocados na primeira coluna. Os valores (0 ou 1) foram lançados nesta tabela, indicando a presença ou ausência da categoria de resposta. O exemplo a seguir mostra pequena parte dessa tabela.

Tabela 24: Tabela binária com as categorias de respostas codificadas

	ARS	ARN	ANR	AJ0	AJ1
1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	1	0
3	1	0	0	0	0
4	0	1	0	1	0
5	1	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0
7	0	1	0	1	0
8	0	1	0	1	0
9	1	0	0	0	0
10	1	0	0	0	0

Assim, a tabela feita em planilha eletrônica (com extensão do arquivo em csv) correspondente às categorias de respostas e ao número dos sujeitos, foi carregada pelo software CHIC, gerando três gráficos relativos a cada tipo de tratamento descrito anteriormente. A nossa análise utilizará apenas a árvore de similaridades, cujos códigos e significados referentes às categorias de respostas dos 50 sujeitos estão apresentados a seguir.

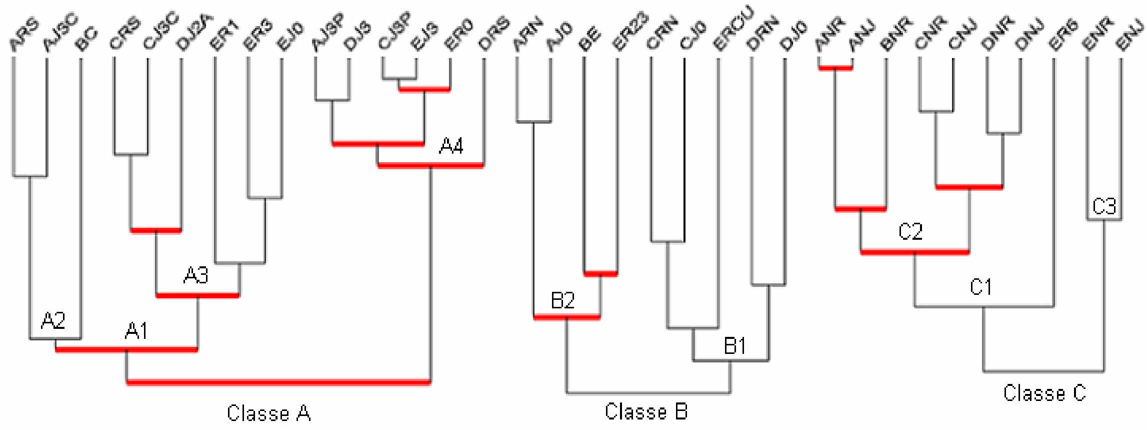
Tabela 25: Códigos e significados das categorias de respostas dos 50 sujeitos

Código	Significado
ARS	Resposta sim para a questão A
ARN	Resposta não para a questão A
ANR	Não respondeu a questão A
ANJ	Não apresentou justificativa para a questão A
AJ0	Justificativa incorreta para a questão A
AJ3C	Utilizou cálculo para justificar a questão A
AJ3P	Utilizou propriedade para justificar a questão A
BC	Resposta correta para a questão B
BE	Resposta incorreta para a questão B
BNR	Não respondeu a questão B
CRS	Resposta sim para a questão C
CRN	Resposta não para a questão C
CNR	Não respondeu a questão C
CNJ	Não apresentou justificativa para a questão C
CJ0	Justificativa incorreta para a questão C
CJ3C	Utilizou cálculo para justificar a questão C
CJ3P	Utilizou propriedade para justificar a questão C
DRS	Resposta sim para a questão D
DRN	Resposta não para a questão D
DNR	Não respondeu a questão D
DNJ	Não justificou a questão D
DJ0	Justificativa incorreta para a questão D
DJ2A	Justificativa com alguma informação pertinente
DJ3	Justificativa correta
ENR	Não respondeu a questão E
EJ0	Respondeu zero como último algarismo de 23!
ER1	Respondeu 1 como último algarismo de 23!
ER3	Respondeu 3 como último algarismo de 23!
ER23	Respondeu 23 como último algarismo de 23!
ERPAR	Respondeu par como último algarismo de 23!
EROU	Outros valores como último algarismo de 23!
ENJ	Não justificou a questão E
EJ0	Justificativa incorreta para a questão E
EJ3	Justificativa correta para a questão E

O software CHIC também apresenta índices informando a contribuição dos sujeitos para a formação de cada classe (anexo 5). Esses índices são apresentados na forma: “com um risco de...”; assim, a variável com menor índice é a que mais contribuiu para a formação da classe.

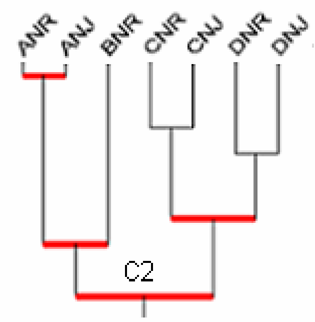
A seguir, apresentamos a árvore de similaridade com sua respectiva análise.

3.2 A ÁRVORE DE SIMILARIDADES



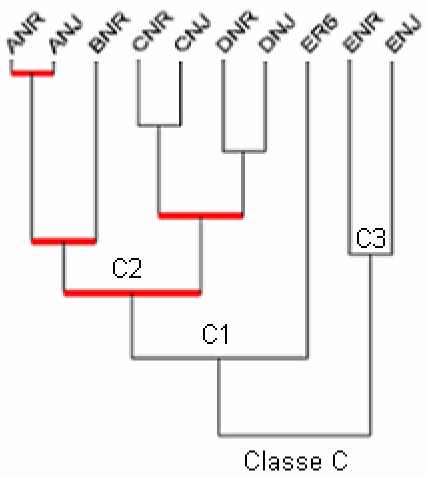
Observamos que a árvore de similaridade é composta por três classes, A, B, e C, segundo os agrupamentos feitos pelo software. A primeira delas é formada por quatro grandes subclasses, A1, A2, A3 e A4 . A classe B apresenta duas grandes subclasses B1 e B2 e a classe C é formada pelas subclasses C1, C2 e C3.

O início da análise refere-se à subclasse com maior índice de similaridade: C2, que apresenta quatro nós significativos. Definimos como um nó significativo *aquelas associações significativas de uma árvore de similaridades, ou seja, as que correspondem a uma classificação com a melhor compatibilidade em relação aos valores obtidos e à qualidade dos valores das similaridades.*(COUTURIER; BODIN; GRAS, p.1 da ajuda do software).

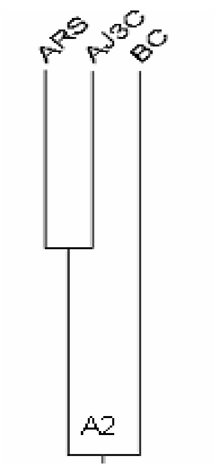


A subclasse C2 se caracteriza pela ausência de respostas e justificativas aos itens a, b, c e d da questão A5, presentes no questionário de álgebra. Desse modo, os alunos desse agrupamento não responderam (ANR) e não justificaram (ANJ) o item a; não responderam (CNR) e não justificaram (CNJ) o item c, não responderam (DNR) e não justificaram (DNJ) o item d e também não responderam (BNR) o item b. Em outras palavras, esses alunos responderam não sei ou deixaram em branco as respostas e justificativas aos itens citados acima. Os alunos da 8ª série são os que mais contribuíram para a formação dessa subclasse, com risco de 0,5. Entende-se como risco a probabilidade de se cometer um erro na afirmação feita. Desse modo, esses alunos são definidos no CHIC como variável típica do agrupamento. Observamos também comportamento semelhante entre os indivíduos desse grupo, pois o índice de similaridade é de 0,963203. Em nossa amostra temos dois indivíduos correspondentes à subclasse C2 que, como vimos, está caracterizada pelos alunos que responderam "não sei" ou deixaram em branco as questões a, b, c, d.

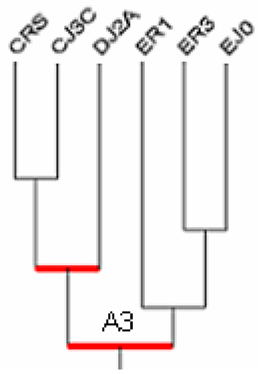
Em seguida, consideremos a classe C1 formada pelos alunos que deram como resposta o algarismo "6" (ER6) para o item e da questão A5. Estes alunos, em número de dois, conforme as informações do CHIC, estão associados à classe C2 com índice de similaridade 0,881455, o que indica grande probabilidade de comportamento semelhante entre os sujeitos que formaram esse agrupamento.



A subclasse C3, composta por 24 alunos, também está caracterizada por respostas e justificativas do tipo "não sei" ou "em branco" ao item e da questão A5. Este grupo se associa à subclasse C1 formando a classe C, com índice de similaridade igual a 0,379991. Baixos índices de similaridade podem ser vistos como índices de dissimilaridade, ou seja, a não semelhança entre os grupos C3 e C1. Neste caso, a análise feita sobre os agrupamentos da classe C indica que o fato de não responder o último item não implica mau desempenho nos itens anteriores. Mas, ainda conforme esses agrupamentos, o aluno que não respondeu o item "a" teve o seu desempenho comprometido nos itens "c" e "d". A variável típica da classe C refere-se aos alunos da 8ª série, com risco de 0,5. Podemos levantar a hipótese de que esse grupo de alunos não compreendeu a definição de fatorial e teve dificuldades com a noção de múltiplos e de número par. Passemos agora à classe A que apresenta o segundo maior índice de similaridade.

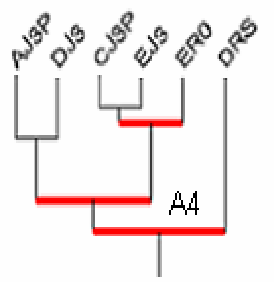


Analisando primeiramente a subclasse A2, constituída por 18 alunos, observamos como características as respostas corretas ao item a (ARS), ao item b (BC) e as justificativas com uso de cálculo ao item a (AJ3C). Portanto, fica evidenciada a preferência pelo uso do cálculo nas justificativas, fato já observado anteriormente nas análises de protocolos. Com risco igual a 0,315, os alunos de 8ª série foram os que mais contribuíram para a formação dessa subclasse.



A próxima subclasse, A3, apresenta dois grupos distintos conforme a figura ao lado. Da esquerda para a direita temos o grupo que se caracteriza por responder corretamente (CRS), justificar utilizando cálculo (CJ3C) o item c e por apresentar justificativa com alguma informação pertinente (DJ2A) ao item d. O outro grupo se caracteriza por respostas e justificativa erradas ao item e. Os dois grupos descritos acima se relacionam formando a subclasse A3, com similaridade 0,907158. A variável típica desse agrupamento refere-se a alunos do 1º ano do Ensino Médio, com risco de 0,487.

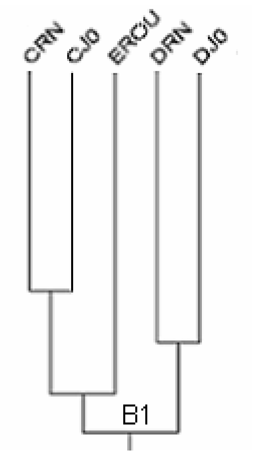
As subclasses A2 e A3, já descritas, se associam formando a subclasse A1, com similaridade 0,570656. Esse índice ainda indica que existe probabilidade de comportamento semelhante entre os sujeitos de A2 e A3. Na subclasse A1, o software CHIC destacou 12 alunos que mais contribuíram para a formação desse agrupamento, típicos do 1º ano do Ensino Médio, com risco de 0,394.



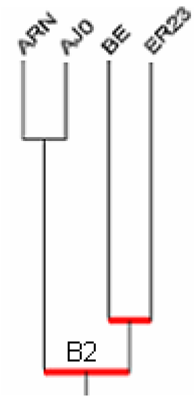
Analisando a subclasse A4, formada por 5 sub-agrupamentos, observamos como característica principal as respostas e justificativas corretas aos itens “a”, “c”, “d”, e “e” da questão A5. É interessante notar a utilização de propriedades para as justificativas da questão “a” (AJ3P) e para a questão “c” (CJ3P), porém, de acordo com os dados do CHIC, apenas 1 aluno, típico de 8ª série e com risco de 0,291, contribuiu para a formação dessa subclasse. Desse modo, conjeturamos que a falta de hábito em justificar as respostas em sala de aula, principalmente no que diz respeito ao uso de propriedades, pode ter provocado o péssimo desempenho nos itens citados acima, o que foi confirmado nas entrevistas

As subclasses A1 e A4 se associam formando a classe A, com índice de 0,232777, indicando efetivamente um grau de dissimilaridade entre elas, em outras palavras, os alunos presentes nessas duas subclasses apresentaram comportamento diferente. Enquanto os alunos de A1 utilizaram cálculo nas justificativas, o uso de propriedades foi predominante na subclasse A4. A variável típica dessa dissimilaridade são os alunos do 1º ano do ensino médio com risco de 0,449.

A última classe a ser analisada, classe B, é formada por duas subclasses, B1 e B2.



Começamos com a subclasse B1 que, de acordo com as informações do software, apresenta 21 alunos que se caracterizam por responderem “não” ao item c (CRN) e ao item D (DRN) e também por apresentarem justificativas consideradas erradas aos itens c e d da questão A5. A variável típica a essa subclasse, com risco de 0,383, é aquela composta por alunos do 1º ano do ensino médio. Os itens citados neste agrupamento tratam da compreensão do conceito de múltiplo, conteúdo abordado na 5ª série, porém, devido ao mau desempenho dos alunos dessa subclasse, conjeturamos que para uma aprendizagem efetiva, esse conceito pode ser trabalhado ao longo do Ensino Fundamental sob vários enfoques e, sempre que se fizer necessário, solicitar justificativas aos alunos.



A subclasse B2, composta por 18 alunos, se caracteriza por respostas "não" (ARN) e justificativas erradas (AJ0) ao item a; respostas erradas ao item b (BE) e por responderem 23 como último algarismo de 23!. A variável típica desse agrupamento também é formada por alunos do 1º ano do ensino médio, com risco de 0,405. As subclasses B1 e B2 se associam formando a classe B, com índice de similaridade 0,189436, o que indica a não semelhança entre os grupos B1 e B2, pois o fato de errar os três últimos itens da questão A5, não implica em mau desempenho nos itens "a" e "b". A variável típica da classe B refere-se aos alunos do 1º ano, com risco de 0,405. Tudo indica que o conhecimento construído por esses alunos no ensino fundamental não se faz presente no ensino médio, em outras palavras, o conhecimento é utilizado num certo momento para resolver problemas e depois é descartado.

Após analisarmos a árvore de similaridades propiciada pelo CHIC, consideramos importante destacar que esse tratamento permite ao professor identificar os grupos de alunos com comportamento semelhante e, ao mesmo tempo, o número de sujeitos presentes em cada classe. Observando a árvore de similaridades, vemos que a classe A apresenta o grupo de alunos que responderam e justificaram corretamente os itens da questão A5; na classe B os alunos que erraram os itens da questão A5 e na classe C temos o grupo de alunos que não responderam ou deixaram em branco os itens referidos acima.

Resumimos a seguir os grupos mais significativos da nossa amostra identificados pelo software CHIC, associados às classes da árvore de similaridades.

- Um grupo de 25 alunos (50%), tipicamente de 8ª série, acertou a questão A5(a), justificando por meio de cálculo;

19 desses alunos pertencem ao **Grupo S**.

- Um grupo de 18 sujeitos (36%), tipicamente de 1ª série, errou a questão A5(a), apresentando justificativas erradas;

12 desses alunos pertencem ao **Grupo N**.

- Um pequeno grupo de 7 alunos (14%), tipicamente de 1ª série, respondeu corretamente a questão A5(c), justificando com uso de cálculo;

6 desses alunos pertencem ao **Grupo S**.

- Um grupo de 27 alunos (54%), tipicamente de 1ª série respondeu 'não" à questão a5(c), acompanhadas de justificativas erradas;

12 desses alunos pertencem ao **Grupo N**

- Um grupo de 25 alunos (50%), com distribuição quase eqüitativa entre alunos de 8ª e 1ª séries, respondeu "não" à questão A5(d), com justificativas erradas;

7 desses alunos pertencem ao **Grupo N**

- Um grupo de 24 alunos (48%), tipicamente de 8ª série, não respondeu e não justificou A5(e);

7 desses alunos pertencem ao **Grupo N**

- Apenas 1 aluno (2%), tipicamente de 8ª série, respondeu e justificou corretamente todas as questões.

Este aluno pertence ao **Grupo S**

As informações obtidas com a árvore de similaridades confirmaram as nossas observações feitas nas tabelas anteriores: baixo índice de respostas e de justificativas corretas; grande número de respostas do tipo "não sei" ou "em branco" e a melhor produção dos alunos de 8ª série.

CAPÍTULO IV

AS ENTREVISTAS

As entrevistas, previamente agendadas, foram realizadas com cinco alunos em suas respectivas escolas, com tempo médio de duração entre 30 e 40 minutos. Os sujeitos selecionados foram os de números **5, 13, 21, 27** e **50**, todos estudantes de Escola Estadual situadas na cidade de São Paulo.

Utilizamos nas entrevistas o seguinte material: uma cópia do protocolo do aluno; um roteiro predefinido, mas com abertura para adequação durante a entrevista e um gravador. A cópia do protocolo serviu para que o aluno relembrasse o que ele fez, o roteiro continha os pontos a serem esclarecidos e o gravador foi utilizado para posterior transcrição da entrevista.

O aluno número **13**, da 8ª série, pertence ao **grupo N** (aqueles que não compreenderam a definição de fatorial) e o aluno **21**, também da 8ª série, pertence ao **grupo S** (aqueles que compreenderam a definição de fatorial). Os alunos números **5** e **27** (**grupo S**) são da 1ª série e o aluno **50** (**grupo N**) também é da 1ª série.

Procuramos investigar com a análise das entrevistas qual é a cultura de justificativas dos alunos em sala de aula, isto é, se os alunos sabem o que é uma prova, se os professores provam os teoremas apresentados e se os alunos são solicitados a apresentarem justificativas em aula. Buscamos também elementos que justificassem o desempenho dos alunos no questionário e se eles tinham compreensão sobre os conceitos de múltiplos, número par e ímpar. Iniciamos com a entrevista do sujeito nº. **50**, o qual deixou de responder todos os itens da questão A5. Para a nossa análise, utilizaremos as respostas dos alunos que julgamos serem mais relevantes. As entrevistas, na íntegra, compõem o anexo 6.

Mostramos o questionário respondido pelo aluno e esperamos que ele olhasse todas as questões.

Professor: – Você ainda se lembra desse questionário?

Aluno: – Sim.

Professor: – As últimas questões desse questionário pedem para justificar as respostas. Você está acostumado a fazer atividades que solicitam justificativas?

Aluno: – Às vezes.

Professor: – O professor de matemática pede para justificar as respostas?

Aluno: – Às vezes pede. De vez em quando.

Professor: – Que tipo de exercícios você faz na aula de matemática?

Aluno: – Exercícios com cálculos, que usam fórmulas.

Professor: – Você se lembra de algum exercício que teve de justificar a resposta? Ou não houve questão desse tipo?

Aluno: – Teve sim.

Professor: – Qual?

Aluno: – O professor deu uma tabela, passou o que tinha que fazer, somar todos os nomes dos países e depois justificar a resposta.

Professor: – E algum exercício que utiliza fórmulas, você se lembra de ter resolvido nos últimos dias e justificado a resposta?

Aluno: – Não, não me lembro.

Conforme as respostas do aluno, observamos que ele não tem o hábito de justificar as respostas das atividades em sala de aula e, ainda pesa o fato de o trabalho com provas ser raramente desenvolvido pelo professor , o que podemos ver com as próximas respostas.

Professor: – O professor de matemática prova, demonstra algum teorema em sala de aula?

Aluno: – Às vezes prova.

Professor: – Então, o professor nem sempre demonstra as fórmulas utilizadas?

Aluno: – Isso mesmo.

Com as próximas perguntas, buscamos indícios que justificassem o mau desempenho do aluno na questão A5.

Professor: – Você sabe o que é uma prova ou demonstração em matemática?

O aluno pensa por alguns segundos e não responde. Para esclarecer, apresentamos um exemplo de teorema e o que fazer para prová-lo.

Professor: Na questão A5, você entendeu o exemplo dado?

Aluno: Não, não entendi.

Você se lembra da definição de múltiplo de um número?

Aluno: Não me lembro.

Professor: Por exemplo, múltiplo do número 3. Diga um número múltiplo de 3.

Aluno: Não me lembro.

Professor: E número par. Você pode dar exemplo de número par?

Aluno: Quatro.

Professor: Você sabe quando um número é par?

Aluno: Não, não sei.

Professor: O número 11 é par?

Aluno: Pensou por alguns instantes e não respondeu.

Professor: E os números 6, 8 e 10. São pares?

Aluno: É

Professor: Mas, a definição de número par e ímpar você não sabe.

Aluno: Não

Antes de iniciarmos a entrevista, explicamos para o aluno o nosso objetivo e procuramos deixá-lo à vontade para responder as questões. Porém, o aluno respondeu a maioria das perguntas com frases curtas e demonstrou sérias dificuldades em relação ao conhecimento básico de matemática (n° par, n° ímpar e múltiplos), como podemos observar nas respostas às últimas questões da entrevista. Tudo indica que a falta de conhecimento matemático do aluno foi um dos motivos para o mau desempenho dele na questão A5.

Passemos agora para a entrevista do sujeito **13**, também do **grupo N**, porém, estudante da 8ª série. Lembramos que as análises anteriores mostraram melhor desempenho dos alunos de 8ª série.

Professor: - Você ainda se lembra desse questionário?

Aluno: - Mais ou menos

Professor: - Esse questionário tem algumas questões que pedem para justificar as respostas. Você está acostumada a fazer esse tipo de atividade em sala de aula?

Aluno: - Fazemos na maioria das vezes.

Professor: - Então, o professor de matemática pede para justificar as respostas?

Aluno: - Sim, na maioria das atividades o professor pede justificativas.

Professor: - Você se lembra de algum exercício que teve de provar a resposta?

Aluno: - Eu me lembro do triângulo. O professor pediu para provar que a soma dos ângulos é 180 graus.

Professor: - Nas justificativas, você utiliza cálculo ou faz de outro modo?

Aluno: - É cálculo. A gente faz a conta e escreve a resposta.

Professor: - E alguma propriedade?

Aluno: - Ás vezes a gente usa, mas é difícil.

Professor: - Então, o professor de matemática trabalha provas em sala de aula?

Aluno: - Sim e também pede para o aluno provar.

Professor: - Mas, o professor prova todos os teoremas que ele ensina?

Aluno: - Todos não, só os mais complicados, aqueles que a gente não entende.

Ao contrário do sujeito **50**, esse aluno disse que está acostumado a justificar e se expressou com mais segurança nas respostas, principalmente no que diz respeito ao trabalho sobre provas em sala de aula por parte do professor. Acreditamos que esse trabalho seja um dos motivos do melhor desempenho dos alunos de 8ª série. Ainda, conforme o aluno, o cálculo é utilizado na maioria das justificativas. Vale lembrar que 70,2% dos alunos do grupo maior e 50% dos alunos da nossa amostra que acertaram A5(a), justificaram-na por meio do cálculo.

Em relação ao conhecimento matemático, o aluno não apresentou dificuldades para responder as próximas questões.

Professor: - Você sabe o que é uma prova em matemática? O que é provar um teorema?

Aluno: - É para ver se está certa a questão, para confirmar a resposta.

Professor: - E múltiplos de um número. Você já aprendeu?

Aluno: - Múltiplos a gente já aprendeu.

Professor: - Pode dar exemplos de múltiplos de 3?

Aluno: - 9, 12 todos os números que multiplica por 3.

Professor: - Por que 9 é múltiplo de 3?

Aluno: - Porque 3 vezes 3 dá 9.

Professor: - Pode dar exemplos de número par?

Aluno: - 2, 4, 6, 8.

Professor: - Por que 4, 6 e 8 são pares?

Aluno: - Porque eles podem ser divisíveis por 2.

Professor: - E exemplos de número ímpar?

Aluno: - 3, 7 e 9.

Ficou claro que o aluno possui conhecimentos básicos de matemática, porém, ele nos disse que acertou apenas o item “a” da questão A5 porque não entendeu os outros itens.

Passemos agora para as entrevistas dos alunos do **grupo S**.

Começamos com a entrevista do aluno nº **27**, do 1º ano do ensino médio. Para esse aluno, as atividades matemáticas se concentram na realização de cálculos sem a necessidade de justificativas, como podemos ver a seguir.

> Professor: - Você se lembra desse questionário? Em algumas questões você utilizou cálculo e em outras deveria justificar as respostas. O seu professor utiliza esse tipo de atividades?
> Aluno: - Lembro do questionário. O professor não utiliza esse tipo de questão. Sempre foram questões que exigiam respostas exatas sem as justificativas.
> Professor: - Então ele não pede para justificar as respostas?
> Aluno: - Não, nunca foi pedido. A gente fazia a conta, colocava a fórmula meio que decorada, colocava em prática e resolvia o problema, nunca colocava a justificativa.
> Professor: - O professor demonstra as fórmulas ou teoremas em sala de aula?
> Aluno: - Normalmente não. Eu fui descobrir o π, porque era o π , no segundo colegial. O único lugar que trabalharam essa fórmula foi no Senai, aqui não.

Observamos uma atitude de omissão do professor, evidenciada pelas respostas do aluno, no que diz respeito à cultura de provas e justificativas em sala de aula. O aluno acredita que um bom aprendizado se realiza quando se entende as fórmulas ou teoremas utilizados em sala de aula, como se constata no trecho abaixo.

> Professor: Você prefere assim, aprender diretamente o teorema e a fórmula prontos para uso ou você gostaria de saber como é que se chegou à fórmula?
> Aluno: Com certeza mostrando como se chegou naquilo, porque normalmente isso aí é que é aprendizado, você descobre o porquê está utilizando aquilo....
> Professor: Então você acha que ajuda a utilizar melhor a fórmula ou teorema se você sabe de onde vem?
> Aluno: Com certeza ajuda. Eu acho que uma das coisas mais óbvias que tem na matemática é uma regra de três. Muitas pessoas têm dificuldade e a partir do momento que você entende o porquê de uma regra de três, você a utiliza pelo resto da vida e nunca mais esquece...

Esse aluno errou os itens “c”, “d” e “e” da questão A5, e, quando questionado a respeito dos erros, ele nos disse que se equivocou na resposta e que teria que fazer o cálculo para responder o item “c”. Essa afirmação do aluno destaca mais uma vez a preferência pelo uso do cálculo, fato que já observamos anteriormente.

Professor: Na questão A5, item c, você respondeu “não, porque 21 é ímpar”. O que você entendeu da pergunta? Poderia explicar a sua resposta?
Aluno: Quando falou que 8 fatorial é múltiplo de 21, ficou complicado determinar e eu me equivoquei na resposta, ela está completamente errada é só calculando para saber se 8 fatorial é múltiplo de 21, é só calculando.

Lembramos que a utilização de propriedades foi o argumento utilizado por apenas 4,8% dos alunos do grupo maior para justificar o item c, conforme exposto na tabela 8.

Quanto ao item “e”, reproduzimos a seguir, a resposta do aluno **27**

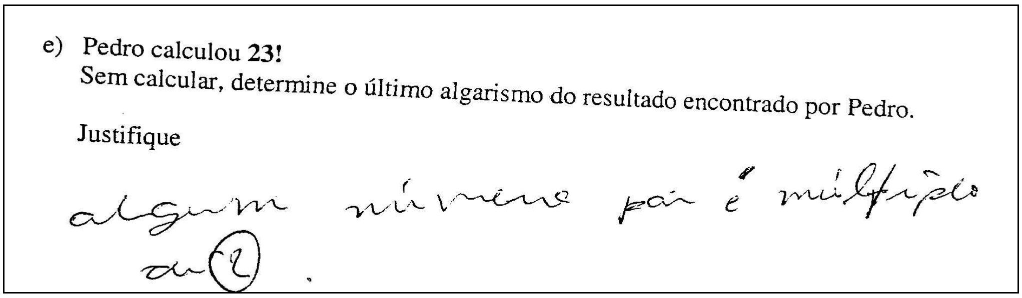

e) Pedro calculou 23!
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.
Justifique
algum número par é múltiplo de 2 .

Figura 29: Resposta do sujeito 27

Na tentativa de esclarecer essa resposta, perguntamos:

Professor: No item “e” da questão A5 você escreveu “algum número par”. O que você quis dizer com “algum número par”?
Aluno: Entre 2, 4, 6 ,8 e final zero é múltiplo de 2.
Professor: Por que múltiplo de 2?
Aluno: Porque no fatorial nós temos, nós multiplicamos e no final é vezes dois, então você deduz que esse número é múltiplo de 2.

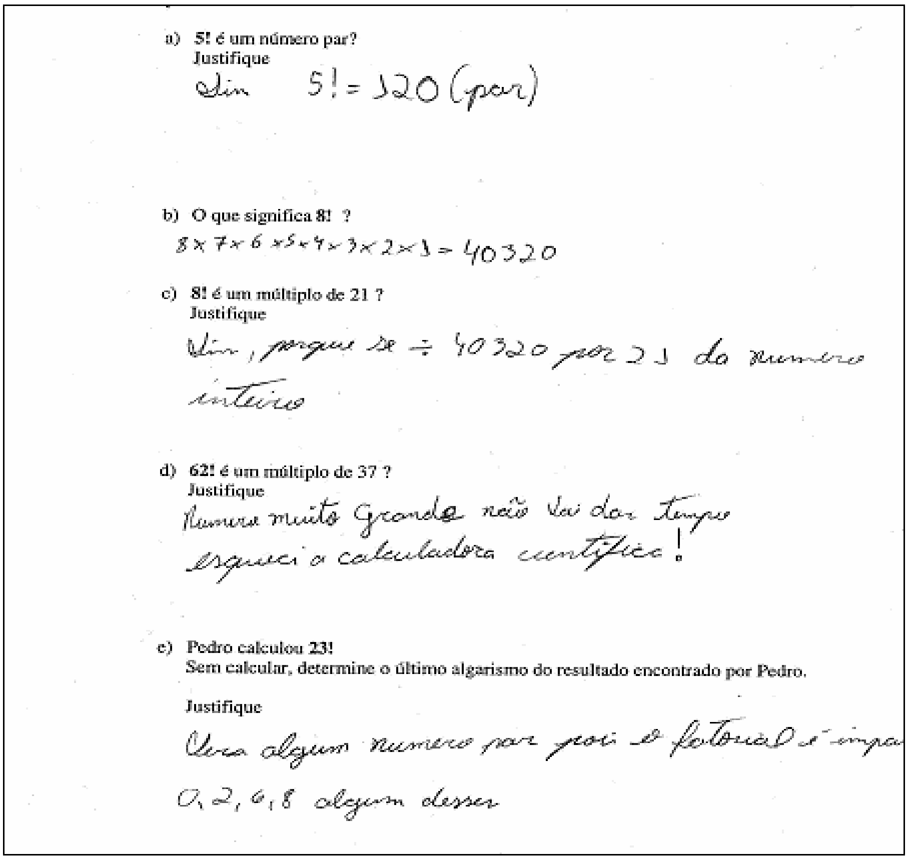
O aluno chegou próximo da resposta correta, porém não conseguiu identificar o fator 10 no desenvolvimento de 23! No entanto, ele mostrou segurança ao responder corretamente as questões sobre conhecimento básico de matemática.

Professor: Qual o cálculo que você faz para saber se um número é múltiplo de outro número?
Aluno: Divido
Professor: Divide o quê?
Aluno: ..eu quero saber se 9 é múltiplo de 3, eu divido 9 por 3 aí eu obtenho o resultado que no caso é 3, esse resultado é inteiro então fica fácil saber se um número é múltiplo de outro.
Professor: E número par? Pode dar exemplos?
Aluno: 2, 4, 6, 8.
Professor: Por que oito é par?
Aluno: Porque quatro vezes dois é oito.

Como na entrevista anterior, o sujeito nº **5**, 1ª série, também não está habituado a fazer atividades em que a justificativa seja necessária, mas, em geral, prefere que o professor faça a demonstração da maioria dos teoremas. Ele nos disse que a demonstração de todas as fórmulas torna a aula cansativa, embora concorde que sem saber como “inventaram aquilo”, o aluno fica num nível mais baixo de conhecimento.

Consideramos bom o desempenho desse aluno na questão A5, pois acertou os itens “a”, “b” e “c”. Quanto ao item “d”, o aluno percebeu que o desenvolvimento de 62! é um número muito “grande” e só poderia ser calculado com uso de calculadora. Desse modo, observamos que o aluno não identificou o fator 37 contido em 62!. Durante a entrevista esse sujeito respondeu o item “e”, porém, não foi claro na justificativa.

No geral, a entrevista mostrou que o aluno tem consciência da importância do trabalho que envolve provas em sala de aula e possui conhecimentos no que diz respeito a números ímpares e múltiplos. Em um primeiro momento, o aluno não soube explicar a definição de número par, mas respondeu corretamente quais são os números pares. A seguir, reproduzimos o protocolo do sujeito **5** e parte da entrevista.



a) 5! é um número par?
Justifique
Sim 5! = 120 (par)

b) O que significa 8! ?
8×7×6×5×4×3×2×1 = 40320

c) 8! é um múltiplo de 21 ?
Justifique
Sim, porque se ÷ 40320 por 21 da numero inteiro

d) 62! é um múltiplo de 37 ?
Justifique
Numero muito Grande não vai dar tempo esqueci a calculadora científica!

e) Pedro calculou 23!
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.
Justifique
Será algum numero par pois o fatorial é impa
0, 2, 6, 8 algum desses

Figura 30: Protocolo do sujeito 5

Professor: Você se lembra desse questionário? Em algumas questões você utilizou cálculo e, em outras, você deveria justificar as respostas. O seu professor utiliza esse tipo de atividades?

Aluno: Têm exercícios que ele pede para justificar e têm exercícios que só pede a resposta, deixar o resultado bem claro e depois o professor vem e dá um visto.

Professor: Os professores demonstram os teoremas ou simplesmente apresentam as fórmulas prontas para uso?

Aluno: Eu tive vários tipos de professores, desde aqueles que mostram o que vocês vão ter que fazer e explica bem assim, olha, isso é o que vocês vão ter que fazer e até aqueles que começam desde lá de trás explicando como chegou passo a passo até aquela fórmula e explica tudo bem detalhado...

Professor: No geral, você prefere com ou sem demonstração?

Aluno: Com demonstração, com certeza.

Professor: Você sabe quando um número é par?

Aluno: É quando a maiorias das vezes, quando os números pares são somados juntos, é uma lógica que eu tenho aqui, número par somado com número par vai dar par.

Professor: Mas para você número par é isso? O número 243 é par ou ímpar?

Aluno: É ímpar

Professor: Por quê?

Aluno: Porque ele termina em 3 e 3 é ímpar. O número que termina em par é par.

Professor: E quais são os números pares?

Aluno: 0, 2, 4, 6, 8.

Professor: Por que você disse no item "e" que 23! É ímpar? Como você chegou à conclusão que o último algarismo pode ser 0, 2, 6 ou 8?

Aluno: Puxa vida, eu não me lembro, mas agora, lembrando umas aulas que eu tive algum tempo atrás, que o número 23, todo número acima de 5, ou fatorial de 10, tipo 2 vezes 5 dá 10, daí ele termina em zero, agora eu estou vendo que termina em zero.

A seguir apresentamos a última entrevista realizada com o sujeito **21**, da oitava série. Para esse aluno, atividades que solicitam justificativas são pouco exploradas em sala de aula.

Professor: Você se lembra desse questionário?

Aluno: Lembro

Professor: Em algumas questões você utilizou cálculo e em outras você deveria justificar as respostas. O seu professor utiliza esse tipo de atividades?

Aluno: Não, não é muito comum. Ela explica vai passando as contas e faz junto com a gente. Se precisar ela vai tirando as dúvidas.

Professor: A professora pede para justificar as respostas?

Aluno: Geralmente não. Ela explica e a gente vai fazendo.

Quanto à demonstração de fórmulas ou teoremas por parte do professor em sala, o aluno foi claro ao responder que esse trabalho foi mais comum na oitava série. (Realizamos a entrevista quando o aluno cursava o 1º ano).

Professor: A professora demonstra teoremas ou fórmulas em sala de aula?

Aluno: Até que esse ano foi um pouco menos. Não foi muito costumeiro fazer isso.

Professor: Nos outros anos foi?

Aluno: Na oitava série foi.

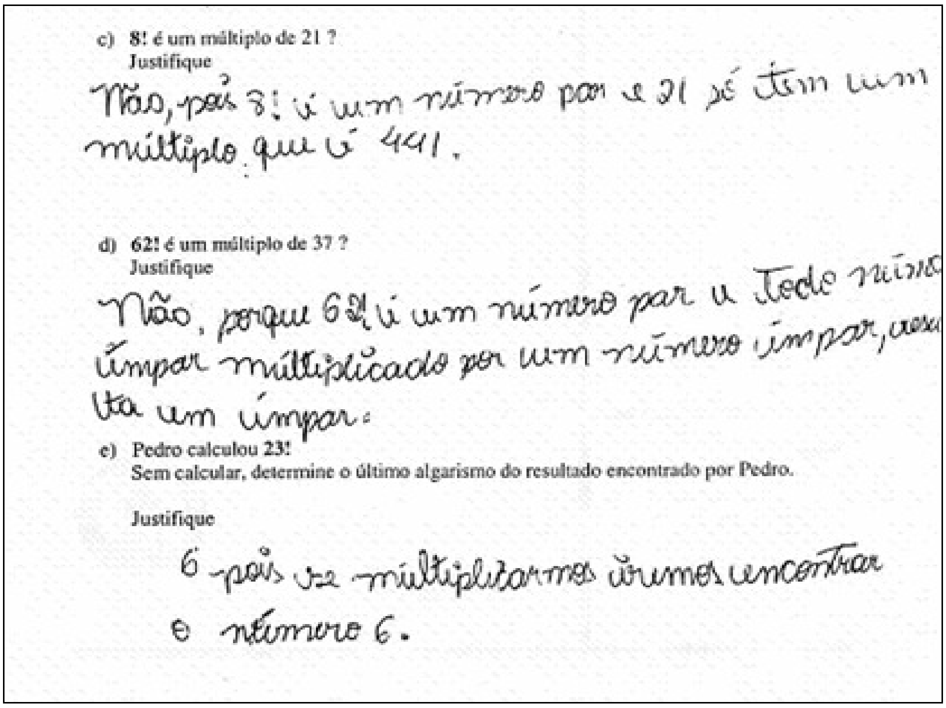
Professor: Qual teorema que ela demonstrou?

Aluno: Ela mostrou como Pitágoras chegou à conclusão.

Professor: Então ela demonstra alguma coisa, mas pouco. Esse ano foi pouco?

Aluno: É. A gente aprendeu várias outras fórmulas. Ela foi mostrando como é que se fazia, como é que se chegou a isso, eu achei que não foi tão detalhado como no ano passado mas deu para aprender.

Procuramos também investigar o motivo dos erros cometidos pelo aluno na questão A5, porém, ele não foi muito claro nas respostas dizendo que não se lembrava muito bem e que devia ter confundido múltiplo com raiz quadrada. Abaixo, reproduzimos parte do protocolo desse aluno.



c) 8! é um múltiplo de 21 ?
Justifique

Não, pois 8! é um número par e 21 só tem um múltiplo que é 441.

d) 62! é um múltiplo de 37 ?
Justifique

Não, porque 62! é um número par e todo número ímpar múltiplicado por um número ímpar, resulta um ímpar.

e) Pedro calculou 23!
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

6 pois se multiplicarmos os números encontrar o número 6.

Figura 31: Protocolo com os erros do sujeito 21

Professor: Por que você afirmou no item “c” que o único múltiplo de 21 é 441?

Aluno: Não lembro muito. Para mim eu confundi 441 que é..... não, 21 que é múltiplo de 441, não me lembro bem, eu acho que eu confundi com a raiz quadrada, agora estou vendo que 21 é raiz quadrada de 441.

Professor: No item “d” você disse que todo número ímpar multiplicado por um número ímpar resulta em ímpar. Você saberia justificar essa resposta? Você fez algum cálculo?

Aluno: Na verdade foi, porque eu já aprendi que número ímpar não é divisível por dois, sempre vai sobrar um.

Professor: O que você entendeu no item “e” da questão A5. Por que você respondeu que o último algarismo é 6?

Aluno: Eu devo ter multiplicado, até mesmo que aqui ta falando sem calcular, eu devo ter calculado.

Professor: O que você calculou?

Aluno: 23 vezes 22 vezes 21 eu devo ter arrumado alguma calculadora por aí.

Professor: Você fez esse cálculo até o final?

Aluno: Pra falar a verdade eu não me lembro muito bem de como eu fiz. Por isso eu estou falando, eu devo ter pego alguma calculadora por aí porque eu não me lembro muito bem, ou então porque 6 é múltiplo de 3 apesar de ter vários múltiplos mas eu devo ter respondido isso.

Conforme as respostas dos sujeitos entrevistados, tudo indica que os professores raramente trabalham provas em sala de aula, o que para nós explica os baixos índices de justificativas apresentados pelos alunos do grupo maior e também da nossa amostra. Nas entrevistas, apenas 1 sujeito foi enfático ao dizer que o professor prova os teoremas e sempre pede para o aluno justificar as respostas.

Procuramos investigar o motivo dessa omissão do professor frente ao tema prova em sala de aula e, encontramos nos resultados da pesquisa de GOUVEA (1998, p. 62), que os professores "acreditam na importância de se demonstrar os teoremas, mas não parece saber como trabalhar de modo significativo a demonstração em sala de aula".

Nós, professores, sabemos que não é uma tarefa fácil incluir o tema "prova" nos currículos de matemática, porém, devemos levar em consideração a seguinte afirmação de MARIOTTI (2001) (apud PIETROPAOLO, 2005, p. 73): "não se pode ensinar matemática sem introduzir a demonstração".

Após as análises realizadas nos capítulos II, III e as entrevistas que compõem o presente capítulo, apresentamos a seguir, os resultados do nosso trabalho.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

O propósito desse trabalho foi investigar a cultura de provas e justificativas em aulas de matemática. A escolha desse tema foi motivada pela nossa participação no projeto AprovaMe e pela carência de pesquisas a respeito do tema "prova" na Matemática escolar. PIETROPAOLO (2005, p. 71), afirma que "no Brasil o número de trabalhos nessa área é ainda bastante reduzido."

Com o intuito de atingir o nosso objetivo, fizemos uma análise quantitativa e qualitativa das respostas e justificativas, de um grupo de 50 sujeitos, dadas à questão A5 – sobre o tema fatorial – integrante do questionário de álgebra, aplicado a 1998 alunos, entre os quais estão nossos 50 sujeitos. Ainda, tomamos o depoimento de cinco alunos para obter informações que nos auxiliassem nas considerações finais.

No que diz respeito à construção de provas, os baixos índices de justificativas apresentadas, tanto pela nossa amostra como do grupo maior, podem indicar que os alunos raramente são solicitados a justificar as suas respostas ou provar alguma propriedade durante as atividades na aula de matemática. De fato, lembramos que o sujeito **27** foi claro ao dizer, na entrevista, que o professor não utiliza esse tipo de atividade: "sempre foram questões que exigiam respostas exatas sem as justificativas".

Em relação ao grupo maior, os índices de ausência de justificativas ou de justificativas com codificação zero (erradas), correspondem a 85,1%, portanto, 14,9% é o índice correspondente às justificativas com codificação 1, 2a, 2b, 3c ou 3p. O melhor desempenho dos alunos desse grupo foi observado no item "a" da questão A5: foram 53,5% de respostas corretas sendo 70,2% justificadas com o uso do cálculo. Lembramos que esse índice de respostas corretas foi o único acima de 50% obtido pelos alunos do grupo maior nos cinco itens da questão A5.

Esse pobre desempenho do grupo maior também foi observado pelos autores de outras dissertações inseridas no projeto AprovaMe, que utilizaram como instrumento de pesquisa algumas das questões do questionário de álgebra ou de geometria.

DORO (2007), investigou, em seu trabalho, as respostas e justificativas apresentadas pelos alunos a duas questões (G4 e G5) do questionário de geometria. Segundo esse autor, 50,6% dos alunos do grupo maior não apresentaram respostas e 50,4% não justificaram a questão G4. Entre as justificativas apresentadas, 40% receberam codificação 0, contra 9,6% das outras codificações. Na questão G5 o desempenho do grupo maior também ficou abaixo do desejado, pois 43,9% dos alunos não responderam a questão G5 e 49% não apresentaram justificativas.

Os resultados de nossa amostra na questão A5, não foram muito diferentes dos resultados do grupo maior, nas demais questões investigadas. Os dados analisados e as informações propiciadas pelo software CHIC apontaram para um desempenho da nossa amostra muito abaixo do desejado.

De fato, das cinco questões respondidas pelos 50 sujeitos da nossa amostra, quatro solicitavam justificativas para as respostas. No entanto, para as 200 justificativas possíveis, tivemos apenas 41 respostas (20,5%) justificadas corretamente, sendo predominante a utilização do cálculo em 32 respostas (16%) e somente 9 justificativas (4,5%) utilizando propriedades.

As informações do CHIC confirmam o pobre desempenho da nossa amostra. Retomemos alguns dados fornecidos pelo software.

- Um pequeno grupo de 7 alunos (14%), tipicamente de 1ª série, respondeu corretamente a questão A5(c), justificando com uso de cálculo;
- Um grupo de 27 alunos (54%), tipicamente de 1ª série, respondeu erradamente ‘não” à questão A5(c), com justificativas erradas;
- Um grupo de 25 alunos (50%), com distribuição quase eqüitativa entre alunos de 8ª e 1ª séries, respondeu “não” à questão A5(d), com justificativas erradas;
- Um grupo de 24 alunos (48%), tipicamente de 8ª série, não respondeu e não justificou A5(e).

Destacamos também a melhor produção dos alunos de 8ª série em relação aos alunos de 1ª série. Conjeturamos nesse caso que os alunos utilizam o conhecimento construído em um determinado momento, o que nos leva a crer que o conteúdo trabalhado em uma série, não é levado em consideração pelo aluno na série seguinte.

Passemos agora a responder as nossas questões de pesquisa.

1- Quais foram as respostas e/ou justificativas apresentadas?

A análise dos dados mostrou um alto índice de respostas erradas. Os sujeitos de nossa pesquisa apresentaram apenas 34% de respostas corretas, enquanto que as respostas erradas (considerando respostas do tipo “não sei” ou “em branco” como erradas), atingiram o índice de 66%. Não tivemos em nossa amostra provas formais apresentadas pelos alunos. Para as justificativas, observamos a predominância do cálculo em detrimento do uso das propriedades. Consideramos importante destacar que as questões que tiveram o maior número de justificativas corretas foram A5(a) e A5(c). Das 28 justificativas corretas apresentadas ao item “a”, 25 fizeram uso do cálculo e apenas 3 justificativas utilizaram propriedades. No item “c” tivemos apenas 9 justificativas consideradas corretas, das quais, apenas duas utilizaram propriedades.

Este pobre desempenho dos alunos nos leva a crer que o trabalho com provas envolvendo a linguagem formal da matemática é pouco ou nunca explorado, pelos professores, em sala de aula. Levantamos essa hipótese pelo fato de encontrarmos no trabalho de Gouvêa (1998, p. 61) – que teve por objetivo propor uma reflexão didática junto aos professores do ensino fundamental sobre o ensino-aprendizagem da geometria com “demonstração”, ajudando-os a restituir a historicidade do conceito de demonstração, de rigor matemático – os seguintes comentários de um professor participante da pesquisa: “Já é tão difícil fazer com que um aluno aprenda a resolver exercícios já comuns, imagine se eu ainda solicitar uma demonstração formal, o que ocorreria”, e “não acho necessário solicitar uma demonstração formal em exercícios”. Talvez esses professores não dominem esse tema e dessa forma se sintam inseguros em ensiná-lo.

2- Os alunos apresentam justificativas matematicamente válidas?

Embora o índice de justificativas corretas de nossa amostra tenha ficado muito abaixo do desejado (20,5%), a análise dos protocolos mostrou que os alunos que apresentaram justificativas corretas possuem alguns conhecimentos sobre conceitos básicos de matemática, tais como os conceitos de número par, número ímpar e múltiplos de um número, e, dessa forma, conseguiram validar as suas afirmações. No entanto, essas justificativas foram construídas utilizando apenas a língua natural. Como exemplo, temos que um dos sujeitos da nossa amostra, ao justificar que 5! é par (item “a” da questão A5) escreveu que “o produto dessa multiplicação resulta em 120 que, por sua vez é par”. Consideramos matematicamente válida essa justificativa pois o aluno foi capaz de identificar um número par. Ressaltamos que esse tipo de justificativa foi predominante entre os sujeitos que justificaram corretamente a questão A5(a).

Outro sujeito de nossa amostra percebeu o fator 2 no desenvolvimento de 5! justificando a sua resposta do seguinte modo: “é multiplicado por 2. Assim, qualquer número multiplicado por um número par é consequentemente par”. Acreditamos que essa justificativa se aproxima da experiência mental, um dos níveis de BALACHEFF, pois o aluno não utiliza apenas uma situação particular, como na justificativa anterior e, sim, a generalidade da situação ao afirmar que todo número multiplicado por um número par é par. Portanto, temos outra justificativa matematicamente válida.

3- Quais as razões que fundamentam as respostas do tipo “não sei” ou “em branco”?

Em nossa amostra, essas respostas atingiram um índice de 19,6%. Consideramos que esse percentual não é assustador, porém, preocupante, pois para responder os itens da questão A5, os alunos necessitavam de conceitos básicos de matemática, citados anteriormente.

As questões que mais contribuíram para a formação desse percentual foram A5(c), A5(d) e A5(e), cujas respostas exigiam o conhecimento sobre o conceito de múltiplos de um número.

Buscamos nas entrevistas elementos para nos auxiliar a responder essa última questão de pesquisa e observamos o seguinte: a maioria dos alunos entrevistados afirmou que não são solicitados a apresentar justificativas para as suas respostas na aula de matemática e que não é comum os professores demonstrarem os teoremas em sala de aula; um dos sujeitos entrevistados não conseguiu responder as questões sobre número par e múltiplos. A análise dos protocolos revelou que os alunos confundiram a notação de fatorial com número inteiro. Portanto, conjeturamos que a falta de atividades que incluam itens semelhantes aos da questão A5, a omissão dos professores frente ao tema “prova” em aulas de matemática e a não compreensão da notação de fatorial contribuíram para as respostas do tipo “não sei” ou “em branco”.

Independentemente das razões do mau desempenho da nossa amostra, acreditamos que no ensino-aprendizagem da matemática a noção de prova deva ser incluída ao longo dos anos de escolaridade do aluno, servindo de apoio para a compreensão dos conceitos matemáticos. Nesse sentido, o papel do professor é de fundamental importância ao propor tarefas que auxiliem o aluno a desenvolver o raciocínio dedutivo. Desse modo, o aluno poderá se sentir mais seguro ao validar as suas conclusões.

Assim como NASSER e TINOCO (2003), nós também apontamos para a necessidade de o professor auxiliar o aluno ao longo do processo de ensino-aprendizagem da demonstração, exigindo justificativas para todas as respostas.

Levando em conta as citações do nosso trabalho e a análise dos protocolos dos alunos da nossa amostra no que diz respeito às justificativas, acreditamos que os currículos de matemática, desde a escola básica, devam contemplar o tema prova na formação do aluno. Para justificar essa nossa posição, citamos algumas linhas do resumo de dois estudos: BALL et al (2000) e DREYFUS (2000), que consideram a “prova” fundamental para a Educação Matemática:

> Prova é fundamental para a matemática de modo que deveria ser um componente chave da Educação Matemática. Esta ênfase pode ser justificada não somente porque a prova é o coração da prática matemática, mas também porque é uma ferramenta essencial para promover o entendimento matemático (BALL et al, 2000, Anais do ICME) (Tradução nossa)
>
> Prova é o coração da matemática e é considerada fundamental em muitos currículos da escola secundária. (DREYFUS, 2000, p. 1) (Tradução nossa)

Acreditamos que o desempenho dos alunos possa melhorar se o tema prova receber maior atenção durante o ensino-aprendizagem da matemática, pois, conforme ARSAC (1987), (Apud Gouvêa, 1998, p. 23), ... “numa situação de aprendizagem, o aluno deve ser levado a aprendê-la [prova], através da prática constante de sua elaboração.

Para finalizar, esperamos que as nossas conclusões incentivem futuras pesquisas a respeito da inclusão do tema “prova” nas aulas de matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Julio C. P. *Argumentação e Prova na Matemática Escolar do Ensino Básico:* a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. 2007. 221f. Dissertação. (mestrado profissional em ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP.

ALMOULOUD, Saddo AG. Metodologias de Análises de Dados Estatísticos Multidimensionais. *Caderno de Educação Matemática.* Programa de Estudos Pós-Graduados no Ensino da Matemática – PUC-SP, São Paulo, Vol. III, p. 164 - 177, 1997.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupil's practice of School mathematics. In: D. Pimm (Ed.) *Mathematics Teachers and Children,* p. 197-236. London: Hodder and Stoughton, 1988.

BALL, D. L.; HOYLES, C.; JANKE, H. N.; HADAR, N. M.:*The Teaching of Proof.* http://www.lettredelapreuve.it/Neusletter/03Printemps/teaching_proof.pdf acesso em 25 jan. 2008. Proceedings of topic group 8, ICME-VIII, 2000 – The 8th International Congress Mathematical Education.

BICUDO, Irineu. Demonstração em Matemática. *Bolema,* Rio Claro, ano 15, n° 18, p.79 - 90, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF. 1998, 148p.

_______. *PCN + Ensino Médio:* Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEMTEC. 2002, 144p.

CARVALHO, Moacir B. *Concepções de Alunos Sobre Provas e argumentos Matemáticos:* análise de questionário no contexto do projeto AprovaMe.

Dissertação. 138f. (mestrado profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. SP.

COUTURIER; BODIN; GRAS, R.. Material de apoio para o uso do software CHIC.

DOMINGUES, Hygino H. A demonstração ao Longo dos Séculos. *Bolema*, Rio Claro, ano 15, nº. 18, p. 55 - 67, 2002

DORO, Amadeu Tunini. *Argumentação e Prova*: análise de argumentos geométricos de alunos da educação básica. 2007. 125f. Dissertação (mestrado profissional em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

DREYFUS, T. Some views on proofs by Teachers and mathematicians. In: Gagatsis, A. (ed.) *Proceedings of the 2nd Mediterranean Conference on Mathematics Education,* Cyprus: The University of Cyprus, v. 1 p. 11 - 25, 2000.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática.* Tradução por Hygino H. Domingues. 3ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2002. 844p.

FONSECA, Lina. *A Demonstração e os Futuros Professores de Matemática da educação Básica.* ESE de Viana Castelo, 2005. Disponível em: <www.mytwt.net/cibem5/myfiles/outros/Lina_Fonseca.pdf> acesso em 10 de out. 2007.

GARNICA, Antonio V. M. As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Bolema*, Rio Claro, ano 15, n° 18, p. 91 - 122, 2002.

GRAVINA, Maria A. *Os ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético Dedutivo.* 2001. 277f. Tese (doutorado em Informática na Educação) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

GOUVEA, Filomena Aparecida Teixeira. *Aprendendo e Ensinando Geometria com a Demonstração:* uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental. 1998. 264f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

HOYLES, L. & HEALY, C. *Justifying and Proving in School Mathematics.* University of London, Institute of Education: Technical Report, Feb. 1998

LEANDRO, Ednaldo José. *Um Panorama da Argumentação de Alunos da Educação Básica* : o caso do fatorial. 2006. 139f. Dissertação (mestrado profissional em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

LIMA, Elon L. Dez Mandamentos para Professores. *Revista do professor de Matemática.* São Paulo, n° 10, p. 2 - 10, 1987.

NASSER, Lílian; TINOCO, Lúcia de A. A. *Argumentação e Provas no Ensino de Matemática.* 2ª ed. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto fundão, 2003. 109p.

PIETROPAOLO, Ruy César. *(Re) Significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação do Professor de Matemática.* 2005. 388f. Tese (doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SILVA, Jairo José da. Demonstração Matemática da Perspectiva da lógica Matemática. *Bolema,* Rio Claro, ano 15, n° 18, p. 68 - 72, 2002.

THURSTON, W. P. On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of American Mathematical Society,* nº 30, p. 161 – 177, 1994.

VAZ, Regina de Lourdes. *O Uso das Isometrias do Software Cabri-Geometre como Recurso no Processo de Prova e Demonstração.* 2004. 216f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de são Paulo, São Paulo.

VELOSO, E. *Educação Matemática dos futuros Professores*. Disponível em: <homepage.mac.com/eduardo.veloso/novohome/textospdf/mateduc.pdf> Acesso em 10 set. 2007.

VILLIERS, M. D. Papel e Funções da Demonstração no Trabalho com o Skethpad. *Educação e Matemática*, nº63, pp. 31 - 35, mar/abr. 2001

ANEXOS

Anexo 1: O projeto AprovaMe

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico

Argumentação e Prova na Matemática Escolar
(AProvaME)

Siobhan Victoria Healy (coord.)

Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática (TecMEM)

Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática

PUC/SP

1. Caracterização do Problema

A prova tem um papel central na Matemática. Tradicionalmente, ela caracteriza-se como ferramenta para distinguir essa disciplina das ciências experimentais, oferecendo um método indubitável de validar conhecimento que contrasta com indução natural de processos empíricos. Prova matemática dedutiva fornece aos seres humanos a forma mais pura de diferenciar o certo do errado (Wu, 1995), sendo este aspecto apontado como uma característica essencial da Matemática no pensamento ocidental (Aleksandrov, 1963).

Em termos educacionais, conforme reconhecido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o currículo de Matemática deve necessariamente contemplar atividades e experiências que possibilitem aos aprendizes o desenvolvimento e a comunicação efetiva de argumentos matematicamente válidos. Entretanto, inúmeras pesquisas mostram que os raciocínios de estudantes freqüentemente não se apresentam conforme as leis da lógica e são influenciados por uma série de fatores além das exigências lógicas (Wason, 1966; Light, Girotto e Legrenzi, 1990). Estudos internacionais em Educação Matemática indicam fortemente que aprendizes tendem a confundir justificativas empíricas com raciocínios dedutivos e analisam argumentos de acordo com aspectos de forma e não de conteúdo (Chazan, 1993; Healy e Hoyles, 2000).

Apesar da existência de consenso quanto às dificuldades associadas ao ensino e à aprendizagem de prova em diversos países, pode-se identificar variações significativas nas concepções dos estudantes relacionadas ao currículo de cada país. A título de ilustração, enquanto alunos da Inglaterra mostram preferência para argumentos empíricos, os de Taiwan são mais propensos a enfatizar argumentos apresentados formalmente, ainda que em nenhum dos grupos os sujeitos demonstrem compreensão consistente desse segundo tipo de argumento (Healy e Hoyles, 2000; Lin, 2000). Ainda que tais estudos possam inspirar conjecturas referentes às concepções de prova de alunos brasileiros, esse contexto carece de um mapeamento preciso de tais concepções, necessário para subsidiar propostas e abordagens de ensino especificamente endereçadas à realidade brasileira.

Além de base sólida sobre as concepções e dificuldades dos alunos, uma abordagem eficiente para o ensino da prova em Matemática requer, não apenas situações de aprendizagem inovadoras no sentido de explorar novos contextos e novas ferramentas para o acesso e construção de argumentos formais, como também a aceitação e apropriação pelos professores de tais situações. Nessa perspectiva, uma investigação na problemática do ensino e aprendizagem da prova pode compreender dois enfoques inter-relacionados: O primeiro refere-se à elaboração de situações de aprendizagem. Neste enfoque, pretendemos investigar as possibilidades oferecidas pelos ambientes computacionais, nos quais os aprendizes precisam explicitar as propriedades e relações na linguagem formal do sistema em particular, enquanto interagem simultaneamente com os dados gerados pelas suas definições. Uma questão que se coloca é, então, como esta experiência com o computador influencia na compreensão da prova, na distinção entre argumentos dedutivos e evidências empíricas e no desenvolvimento de habilidades para lidar com argumentos matemáticos expressos de diferentes formas. O segundo enfoque centra-se no professor. A integração efetiva de uma nova abordagem na sala de aula somente torna-se possível mediante um processo de adaptação, cujo agente principal é o professor. Uma outra questão recai então sobre as condições e suportes que favorecem uma verdadeira apropriação da inovação pelo professor.

2. Objetivos

Os objetivos da pesquisa são:

1. Levantar um mapa das concepções sobre argumentação e prova de alunos adolescentes em escolas do estado da São Paulo.
2. Formar grupos colaborativos compostos por pesquisadores e professores para a elaboração de situações de aprendizagem, visando envolver alunos em processos de construção de conjecturas e provas em contextos integrando ambientes informatizados.

3. Criar um espaço virtual de compartilhamento entre os membros da equipe do projeto e analisar seu papel no desenvolvimento das situações de aprendizagem, assim como na evolução de conhecimentos pedagógicos sobre prova em Matemática.
4. Avaliar situações de aprendizagem, em termos da compreensão dos alunos sobre a natureza e funções de prova em Matemática.
5. Investigar a implementação destas atividades por diferentes professores e assim identificar em que medida sua participação nos grupos colaborativos fornece uma apropriação desta abordagem para o ensino e aprendizagem de prova.
6. Formular recomendações relacionadas ao papel da argumentação e da prova no currículo de Matemática escolar.
7. Contribuir para o debate internacional sobre o ensino e aprendizagem de prova em Matemática.

3. Metodologia e Estratégia de Ação

O projeto será organizado em duas fases, a primeira envolve um levantamento de concepções de alunos (faixa etária 14-16 anos), cujos resultados subsidiarão a segunda fase, na qual o foco será na elaboração e avaliação de situações de aprendizagem. Além da equipe de pesquisadores, 15 estudantes do curso de Mestrado Profissional no Ensino de Matemática da PUC/SP (com população atual de 86 mestrandos) integrarão a equipe como *professores-colaboradores*, devendo participar de ambas as fases.

FASE 1

Nesta fase, o instrumento principal para o mapeamento das concepções dos alunos será um questionário a ser aplicado em um total de 45 turmas do Ensino Fundamental ou Médio, de escolas públicas e particulares do estado da São Paulo. Inicialmente, cada professor-colaborador participante terá a incumbência de indicar de 6 a 10 turmas, e a partir daí, a amostra será determinada por meio de uma seleção aleatória. Um espaço virtual será criado para facilitar as comunicações entre os membros da equipe no compartilhamento das decisões e ações no âmbito do projeto, o que será de responsabilidade de um dos pesquisadores. Além disso, ao longo da Fase 1, serão realizados encontros de trabalho presencial, com freqüência quinzenal, reunindo pesquisadores e professores-colaboradores.

O questionário acima citado (denominado Q1) será elaborado com base naquele concebido por Healy e Hoyles (1998) na Inglaterra e já utilizado em outros países (França, Taiwan, Israel, Austrália). Este questionário compreenderia itens visando avaliar em que medida os sujeitos aceitam evidências empíricas como prova, distinguem evidências empíricas de argumentos matematicamente válidos, compreendem o domínio de validade de uma prova e são capazes de construir argumentos válidos. Além disso, pretende-se identificar a influência da forma de apresentação da prova (língua natural, língua formal, representações visuais ou figurativas, etc.) na compreensão dos argumentos. As questões contemplarão dois domínios matemáticos – Geometria e Álgebra – sendo organizadas em dois blocos, a saber: 1) avaliação de vários argumentos apresentados como provas de uma dada afirmação e, 2) construção de provas. Cabe destacar que o modelo de concepções sobre tipos de prova de Balacheff (1988) fundamenta a definição dos argumentos apresentados nos itens do questionário. Concomitante à aplicação do questionário junto aos alunos, os professores de Matemática de cada turma responderão a um segundo questionário (Q2), que além dos mesmos itens relacionados à prova em Matemática de Q1, compreenderá questões sobre a Escola, sobre o perfil dos alunos da turma e do próprio professor e sobre os materiais didático-pedagógicos utilizados no ensino de Matemática.

Os dados coletados serão organizados e classificados pela equipe de professores-colaboradores, utilizando critérios inspirados em Healy e Hoyles (ibid.). Esse conjunto de dados terá uma estrutura hierárquica – alunos em turmas, em escolas e em regiões – e serão analisados segundo a construção de um modelo multi-nível (*Multi-level Modelling*) para considerar a correlação de respostas entre os sujeitos que compartilham experiências comuns

(Goldstein, 1987). Os resultados dessas análises fornecerão um mapa das concepções dos alunos e como estas variam em relação a fatores individuais e escolares, baseados nos dados obtidos em Q2. Essa análise permitirá uma avaliação das áreas de compreensão de prova dos alunos, tanto aquelas que são contempladas no ensino atual, quanto aquelas que merecem maior atenção. A identificação desse segundo grupo servirá como base para o trabalho na fase 2, descrito na seqüência.

FASE 2

Esta fase contemplará dois eixos inter-relacionados de investigação: a aprendizagem e o ensino. No eixo da aprendizagem, o objetivo principal é a elaboração e avaliação de situações, especificamente destinadas às áreas de dificuldades e limitações de compreensão de prova identificadas com o mapeamento elaborado na fase 1. No eixo relativo ao ensino, a atenção se voltará ao professor, e sua contribuição no processo de elaboração das situações de aprendizagem e nas modificações destas *em ação*, considerando que essas situações serão propostas pelos professores em suas salas de aula.

A metodologia nesta fase carateriza-se como *design-based research* (Cobb et al., 2003). Segundo esses autores, os experimentos de *design* visam contribuir para o desenvolvimento e compreensão de "ecologias de aprendizagem", ou seja, de sistemas complexos que envolvem múltiplos elementos de naturezas distintas. Os elementos de uma ecologia de aprendizagem incluem tipicamente as tarefas e problemas aos quais os aprendizes serão confrontados, as ferramentas e recursos fornecidos para suas resoluções e os meios práticos pelos quais os professores podem orquestrar as relações entre estes elementos em suas salas de aula. O uso da metáfora relativa à ecologia enfatiza a natureza interativa dos contextos investigados e a importância de analisar seus diversos elementos em conjunto e não separadamente.

A estratégia planejada para essa fase compreenderá um desenvolvimento colaborativo e contínuo entre pesquisadores e professores-colaboradores (cf. amostra da Fase 1). Mais precisamente, o desenvolvimento das situações de aprendizagem seguirá um ciclo segundo a organização de 5 grupos com 3 professores-colaboradores e, pelo menos, 2 pesquisadores. Cada grupo deverá desenvolver situações de aprendizagem, envolvendo ou objetos geométricos representados no software Cabri-géomètre ou o uso de planilhas eletrônicas (como por exemplo, o Excel) para explorar problemas algébricos. Estes dois ambientes foram selecionados por serem familiares ao grupo de professores-colaboradores e por seus reconhecidos potenciais no ensino da prova (Healy e Hoyles, 2001; Mariotti, 2001). Ao longo dessa fase, os grupos estarão reunindo-se semanalmente, alternando encontros presenciais e a distância, esta última modalidade possibilitada pelo espaço virtual criado na Fase 1.

1ª Etapa

Na primeira etapa do *design* (etapa intra-grupos), as situações serão elaboradas por cada grupo e, em seguida, testadas/aplicadas em uma pequena amostra de alunos, e por fim, discutidas e reformuladas em cada grupo. Essas discussões e adaptações serão realizadas com base na análise das interações alunos/computadores, considerando quais aspectos de prova são favorecidos, ou ainda, a quais concepções estes aspectos estão relacionados. Para essa análise, serão coletados os seguintes dados: áudio-gravação dos diálogos entre os sujeitos envolvidos (professores, pesquisadores e alunos) e produções escritas e computacionais dos alunos. Além disso, em relação ao eixo de ensino, cada professor-colaborador construirá seu próprio registro do processo, documentando suas perspectivas sobre o desenvolvimento das situações no grupo. Essa documentação elaborada pelos professores fornecerá os dados referentes aos seus conhecimentos pedagógicos do conteúdo (Shulman, 1987), no caso sobre a prova em Matemática, cuja análise buscará identificar transformações nesses conhecimentos.

2ª Etapa

Dando seqüência a esse processo de elaboração das situações, em uma segunda etapa (inter-grupos), as produções de cada grupo serão disponibilizadas no ambiente virtual, de maneira que cada professor-colaborador possa desenvolver, pelo menos, duas atividades elaboradas pelos outros grupos (uma em Geometria e outra em Álgebra), em uma de suas turmas. A aplicação dessa atividade em classe será acompanhada e observada pelos pesquisadores e a sessão será vídeo-gravada para posterior análise. Novamente, as produções (escritas e computacionais) dos alunos serão coletadas. Além de categorizar os aspectos de prova que emergem nas interações alunos/computadores durante essas aplicações, o vídeo permitirá destacar as ações do professor e, em particular, os aspectos de prova privilegiados em suas intervenções. Após cada aplicação, professores-colaboradores e pesquisadores serão incumbidos de um relatório descritivo da sessão, incluindo reflexões sobre os resultados, os objetivos atingidos e as dificuldades ou problemas enfrentados. Esses relatórios serão também disponibilizados no espaço virtual do projeto visando subsidiar um novo ciclo de discussões para reformulações, complementações etc. das situações de aprendizagem.

3ª Etapa

Na terceira e última etapa de *design*, os dados a serem coletados em relação ao eixo de aprendizagem referem-se às respostas dos alunos participantes na Fase 2 ao questionário elaborado na Fase 1 (Q1). Essas respostas serão organizadas e analisadas gerando um mapa, que por sua vez, será comparado àquele resultante da Fase 1. Para tanto, os encontros dos grupos colaborativos nessa etapa serão dedicados à avaliação das situações de aprendizagem tratadas, visando responder em que medida as principais dificuldades apontadas no mapeamento das concepções (Fase 1) foram superadas pelos alunos participantes na Fase 2; quais características de prova que ainda necessitam de investimentos numa perspectiva de progressão.

4. Outros Projetos Financiados Atualmente

A pesquisadora que coordenará esse projeto, assim como os demais pesquisadores do grupo *Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática* (TecMEM) do Programa de Estudos Pós-graduados não cotam, no momento, com projetos financiados por agências de fomento.

5. Principais Referências Bibliográficas

ALEKSANDROV, A. (1963). A General View of mathematics. In A. Aleksandrov, A. Kolmogorov, & M. Lavrent'ev (Eds.) *Mathematics: Its Content, Methods and Meaning* (pp. 1-64). Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

BALACHEFF, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. Pimm (Ed.) *Mathematics Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

BALACHEFF, N. (1999). Apprendre la preuve. In: Sallantin J., Szczeciniarz J. J. (Eds.) *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* (pp.197-236). Paris: PUF.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais.*: *Matemática*. Terceiro e Quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília: SEF.

CHAZAN, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), pp. 359-387.

COBB, P., CONFREY, J., DISESSA, A., LEHRER , R., & SCHAUBLE, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*, 32 (1), pp. 9-13.

GARNICA, A. V. M. (1997). Da literatura sobre a prova rigorosa na Educação Matemática: um levantamento. *Quadrante*. APM-Portugal: 5(1), pp. 29 – 60.

GARNICA, A. V. M. (2002). As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. *Boletim de Educação Matemática Bolema*. Rio Claro (SP): 15(18), pp.91 – 99.

GOLDSTEIN, H. (1987). *Multilevel models in educational and social research.* London: Griffin.

HEALY, S. V. (L.) (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri construction. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International*

Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp. 103-117. Hiroshima: Hiroshima University.

HEALY, S. V. (L.)., & HOYLES, C. (1998) *Justifying and Proving in School Mathematics*. Technical Report , University of London, Institute of Education.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), pp. 396-428.

HEALY, S. V. (L.) & HOYLES, C. (2001). Software Tools for Geometrical Problem Solving: Potentials and Pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, pp. 235-256.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

LIGHT, P., GIROTTO, V., & LEGRENZI, P. (1990). Children's Reasoning on Conditional Promises and Permissions. *Cognitive Development*, 5, pp. 369-383.

LIN, F.-L. (2000). An approach for developing well-tested, validated research of mathematics learning and teaching. . In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 84-89. Hiroshima: Hiroshima University.

MARIOTTI; M. A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6 (3), pp. 283-317.

TALL, D. (2002). Differing Modes of Proof and Belief in Mathematics, *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand*, pp. 91–107. National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan.

THURSTON, W. H. (1994). On Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Monthly*, 30 (2, April), pp. 161-177.

VAZ, R e HEALY, L. (2003) Transformações geométricas do Cabri-géomètre: uma abordagem alternativa para prova? *II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Santos: SBEM.

WASON, P. C. (1966). Reasoning. In B. Foss (Ed.), *New Horizons in Psychology*. Harmondsworth, UK: Penguin Books.

WU, H. (1996). The Role of Euclidean Geometry in High School. *Journal of Mathematical Behaviour*, 13(1).

Anexo 2: Questionário de álgebra

Questionário sobre Prova

Nome: .... Masculino ou Feminino: ....

Escola: .... Turma: ....

Data de nascimento: .... Data de hoje:...............

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Uso exclusivo do projeto

escola id:	
turma id:	
aluno id:	

Projeto AprovaMe

A1: Artur, Beth, Duda, Franklin e Hanna estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Resposta de Artur

a é um número inteiro qualquer
b é um número inteiro qualquer
2*a* e 2*b* são números pares quaisquer
2*a* +2b = 2 (*a* + *b*)

Então Artur diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Beth

2 + 2 = 4   4 + 2 = 6
2 + 4 = 6   4 + 4 = 8
2 + 6 = 8   4 + 6 = 10

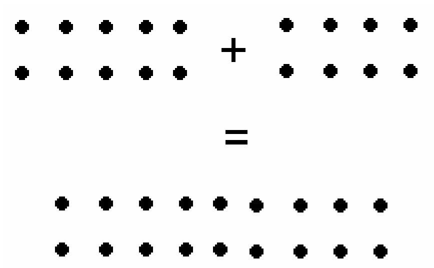
Então Beth diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Duda

Números pares terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8.
Quando você soma dois destes, a resposta vai ainda terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Então Duda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Franklin



Então Franklin diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hanna

8 + 6 = 14

8 = 2 x 4
6 = 2 x 3
14 = 2 x (4 + 3)

8 + 6 = 2 x 7

Então Hanna diz que a afirmação é verdadeira

Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns números pares.		
Resposta de Artur	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Beth:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Duda:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Franklin:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hanna:	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

A2. Suponha que já foi provado que:

Quando você soma dois números pares quaisquer, o resultado é sempre par.

Zé pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma dois números pares maiores que 100, o resultado é sempre par.

Escolha A ou B:

(A) Zé não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

(B) Zé precisa construir uma nova prova. ☐

A3. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma dois números ímpares quaisquer, o resultado é sempre par.

Justifique sua resposta.

A4. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma um múltiplo de três qualquer com um múltiplo de seis qualquer, o resultado é sempre um múltiplo de três.

Justifique sua resposta.

A5: Sabendo que:

4! significa 4 x 3 x 2 x 1

5! significa 5 x 4 x 3 x 2 x 1

Responda:

a) **5!** é um número par?
Justifique

b) O que significa **8!** ?

c) **8!** é um múltiplo de 21 ?
Justifique

d) **62!** é um múltiplo de 37 ?
Justifique

e) Pedro calculou **23!**
Sem calcular, determine o último algarismo do resultado encontrado por Pedro.

Justifique

Anexo 3: Questionário de geometria

APROVAME

Questionário sobre Prova

Nome: ....

Masculino ou Feminino: ....

Escola: ....

Turma:................................

Data de nascimento: ....

Data de hoje:..............................

Você tem 50 minutos para responder estas questões.

Na primeira questão, você deve escolher uma entre as várias respostas. Nas demais questões, você deve produzir suas próprias respostas. Estamos interessados no seu raciocínio e não apenas na resposta. Assim, gostaríamos que você descrevesse como chegou à resposta e não apagasse seus rascunhos.

Na maioria das questões, você deve apresentar uma justificativa. Tente escrever da maneira mais clara que puder.

Use uma caneta e, caso necessário, corrija uma resposta sem apagar (não use corretivo).

Não use calculadora.

Pós-Graduação Educação Matemática 10 Anos 1994-2004

Projeto AprovaMe

Uso exclusivo do projeto

escola id:

turma id:

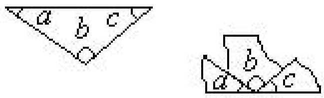
aluno id:

G1: Amanda, Dario Hélia, Cíntia e Edu estavam tentando provar que a seguinte afirmação é verdadeira:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180º.

Resposta de Amanda

Eu recorto os ângulos e junto os três.



Eu obtenho uma linha reta que é 180º.
Eu tentei para um triângulo eqüilátero e também para um isósceles e a mesma coisa acontece.
Então Amanda diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Dario

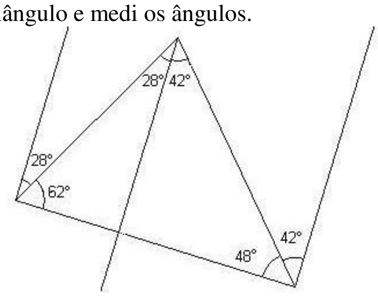
Eu medi cuidadosamente os ângulos de alguns triângulos e fiz uma tabela.

a	b	c	total
110	34	36	180
95	43	42	180
35	72	73	180
10	27	143	180

Em todos eles a soma foi de 180º.
Então Dario diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Hélia

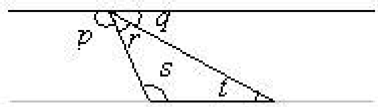
Eu desenhei três retas perpendiculares a um lado do triângulo e medi os ângulos.



$(90^o - 28^o) + 28^o + 42^o + (90^o - 42^o) = 180^o$
Então Hélia diz que a afirmação é verdadeira

Resposta de Cíntia

Eu desenhei uma reta paralela à base do triângulo:



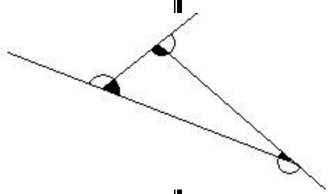
Afirmações	Justificativa
$p = s$.......................... entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$q = t$ .... entre	Ângulos alternos internos duas paralelas são iguais.
$p + q + r = 180^o$..........	Ângulos numa linha reta.

Logo $s + t + r = 180^o$
Então Cíntia diz que a afirmação é verdadeira.

Resposta de Edu

Se você caminhar por toda volta sobre a linha do triângulo e terminar olhando o caminho por onde começou, você deve ter girado um total de 360º. Você pode ver que cada ângulo externo quando somado ao ângulo interno deve dar 180º porque eles formam uma reta. Isso faz um total de 540º. $540^o - 360^o = 180^o$.

Então Edu diz que a afirmação é verdadeira.



Das respostas acima, escolha uma que é a mais parecida com a resposta que você daria se tivesse que resolver esta questão.

Das respostas acima, escolha aquela para a qual você acha que seu professor daria a melhor nota.

A afirmação é:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer, o resultado é sempre 180^{o}

Para cada resposta abaixo, circule SIM, NÃO ou NÃO SEI.

	Mostra que a afirmação é **sempre** verdadeira.			Mostra que a afirmação é verdadeira **apenas** para alguns triângulos.		
Resposta de Amanda	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Dário	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Hélia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Cíntia	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei
Resposta de Edu	Sim	Não	Não sei	Sim	Não	Não sei

G2. Suponha que já foi provado que:

**Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer,
o resultado é sempre 180^{o}.**

Zeca pergunta o que precisa ser feito para provar que:

Quando você soma as medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo qualquer, o resultado é sempre 180^{o}.

Escolha A ou B:

(A) Zeca não precisa fazer nada, pois a afirmação já foi provada. ☐

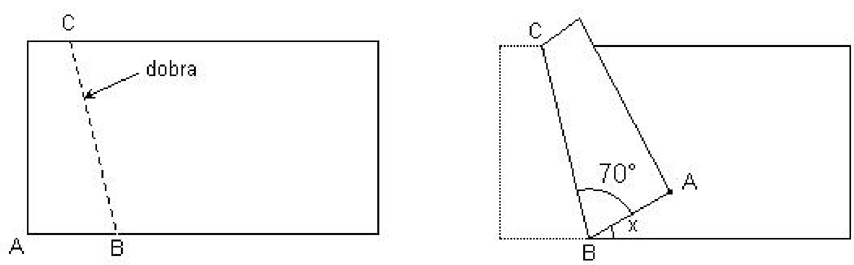
(B) Zeca precisa construir uma nova demonstração. ☐

G3. Um quadrilátero é um polígono de quatro lados. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa?

Quando você soma os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360º.

Justifique sua resposta:

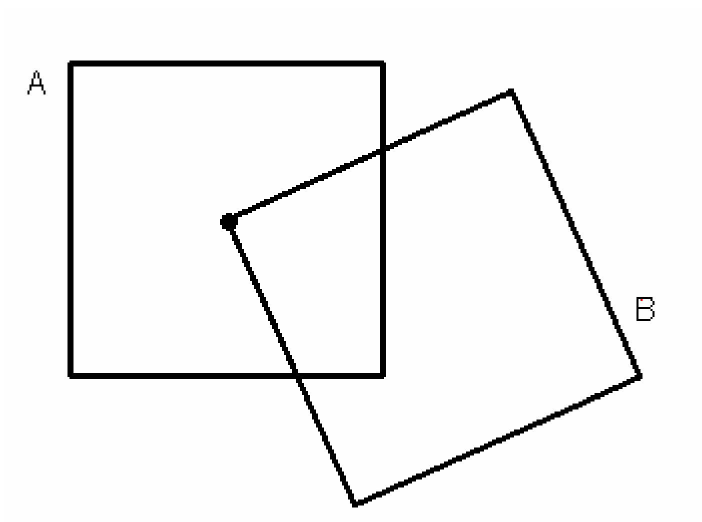
G4: Dobre uma folha de papel, conforme o esquema abaixo. Obter o valor de x.



Justifique sua resposta.

G5: A e B são dois quadrados idênticos. Um vértice do quadrado B está localizado no centro do quadrado A.

Qual fração da área do quadrado A está coberta pelo quadrado B?



Justifique sua resposta

Anexo 4: Tabela com os dados da nossa amostra

		A5(a)					A5(b)		A5(c)					A5(d)					A5(e)						
		Resposta		Justificativa			Resposta		Resposta		Justificativa			Resposta		Justificativa			Resposta				Justificativa		
Nº	Aluno	Sim	Não	0	3c	3p	Correta	Errada	Sim	Não	0	3c	3p	Sim	Não	0	2a	3p	0	3	Par	Outros	0	-2	3p
1	Agnes	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
2	Alyne	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
3	Ana Luiza	1	0	0	1	0	0	1	0	1	-2	-2	-2	0	1	-2	-2	-2	0	0	0	1	-2	-2	-2
4	Anderson	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
5	André	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
6	Angélica	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
7	Bruna	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
8	Bruno	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
9	Caio	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
10	Camila	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
11	Daiane	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
12	Daniela A	-2	-2	-2	-2	-2	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
13	Daniela M	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
14	Daniele	-2	-2	-2	-2	-2	1	0	0	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	1	-2	0	0
15	Daniele M	0	-2	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	0	0	0	1	-2	0	0
16	Débora	0	1	1	0	0	0	1	-2	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
17	Erick	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
18	Felipe	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
19	Flávia	1	0	0	1	0	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	-2	-2	-2	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
20	Gabriel	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
21	Isadora	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
22	Isaias	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
23	Jefferson	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	-2	0	0
24	Joice	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
25	Karina	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	-2	0	0
26	Leandro H	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
27	Leandro B	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
28	Letícia	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	-2	-2	-2
29	Lucas S	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	0	1	0	0	-2	-2	-2
30	Lucas H	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
31	Marcelle	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
32	Marcelo	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
33	Mariana	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
34	Mariana M	1	0	0	1	0	1	0	-2	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
35	Maryann	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
36	Mayara	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
37	Nelson	0	1	1	0	0	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	1	1	0	0	0	1	0		1	0	0
38	Pedro	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
39	Priscilla	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
40	Rebeca	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	-2	-2	-2
41	Renata	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
42	Renato	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
43	Samirah	1	0	0	1	0	0	1	1	0	-2	-2	-2	0	1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
44	Sérgio	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
45	Silene	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
46	Talita	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	-2	-2	-2
47	Tatiane	1	0	0	1	0	0	1	1	0	-2	-2	-2	1	0	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
48	Thaiane	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
49	Vinícius	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
50	Walmir	0	1	1	0	0	0	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Anexo 5: CHIC – Índices de similaridade e contribuição dos indivíduos

Árvore de similaridade

Classificação ao nível: 1 : (ANR ANJ) similaridade : 1

Classificação ao nível: 2 : (CJ3P EJ3) similaridade : 0.999999

Classificação ao nível: 3 : ((CJ3P EJ3) ER0) similaridade : 0.999998

Classificação ao nível: 4 : (AJ3P DJ3) similaridade : 0.999991

Classificação ao nível: 5 : (CNR CNJ) similaridade : 0.999981

Classificação ao nível: 6 : (ARN AJ0) similaridade : 0.99997

Classificação ao nível: 7 : (DNR DNJ) similaridade : 0.999854

Classificação ao nível: 8 : ((AJ3P DJ3) ((CJ3P EJ3) ER0)) similaridade : 0.999627

Classificação ao nível: 9 : (CRS CJ3C) similaridade : 0.999265

Classificação ao nível: 10 : (((AJ3P DJ3) ((CJ3P EJ3) ER0)) DRS) similaridade : 0.997964

Classificação ao nível: 11 : (ARS AJ3C) similaridade : 0.997087

Classificação ao nível: 12 : ((CNR CNJ) (DNR DNJ)) similaridade : 0.997062

Classificação ao nível: 13 : (ER3 EJ0) similaridade : 0.994002

Classificação ao nível: 14 : ((ANR ANJ) BNR) similaridade : 0.988956

Classificação ao nível: 15 : (ENR ENJ) similaridade : 0.979831

Classificação ao nível: 16 : ((CRS CJ3C) DJ2A) similaridade : 0.97858

Classificação ao nível: 17 : (CRN CJ0) similaridade : 0.976257

Classificação ao nível: 18 : (((ANR ANJ) BNR) ((CNR CNJ) (DNR DNJ))) similaridade : 0.963023

Classificação ao nível: 19 : (ER1 (ER3 EJ0)) similaridade : 0.963012

Classificação ao nível: 20 : (BE ER23) similaridade : 0.945282

Classificação ao nível: 21 : (DRN DJ0) similaridade : 0.932523

Classificação ao nível: 22 : (((CRS CJ3C) DJ2A) (ER1 (ER3 EJ0))) similaridade : 0.907158

Classificação ao nível: 23 : ((((ANR ANJ) BNR) ((CNR CNJ) (DNR DNJ))) ER6) similaridade : 0.881455

Classificação ao nível: 24 : ((ARN AJ0) (BE ER23)) similaridade : 0.859905

Classificação ao nível: 25 : ((CRN CJ0) EROU) similaridade : 0.774739

Classificação ao nível: 26 : ((ARS AJ3C) BC) similaridade : 0.748113

Classificação ao nível: 27 : (((ARS AJ3C) BC) (((CRS CJ3C) DJ2A) (ER1 (ER3 EJ0)))) similaridade : 0.570656

Classificação ao nível: 28 : (((CRN CJ0) EROU) (DRN DJ0)) similaridade : 0.468322

Classificação ao nível: 29 : (((((ANR ANJ) BNR) ((CNR CNJ) (DNR DNJ))) ER6) (ENR ENJ)) similaridade : 0.415464

Classificação ao nível: 30 : ((((ARS AJ3C) BC) (((CRS CJ3C) DJ2A) (ER1 (ER3 EJ0)))) (((AJ3P DJ3) ((CJ3P EJ3) ER0)) DRS)) similaridade : 0.232777

Classificação ao nível: 31 : (((ARN AJ0) (BE ER23)) (((CRN CJ0) EROU) (DRN DJ0))) similaridade : 0.189436

Contribuição à classe : ANR,ANJ (1)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.5
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.74

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.5

Contribuição à classe : CJ3P,EJ3 (2)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.291
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 1

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.291

Contribuição à classe : CJ3P,EJ3,ER0 (2,3)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.291
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 1

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.291

Contribuição à classe : AJ3P,DJ3 (4)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.5
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.74

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.5

Contribuição à classe : CNR,CNJ (5)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.518
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.654

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.518

Contribuição à classe : ARN,AJ0 (6)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.791
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.405

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.405

Contribuição à classe : DNR,DNJ (7)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.69
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.5

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.5

Contribuição à classe : AJ3P,DJ3,CJ3P,EJ3,ER0 (2,3,4,8)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.291
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 1

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.291

Contribuição à classe : CRS,CJ3C (9)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.71
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.499

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.499

Contribuição à classe : AJ3P,DJ3,CJ3P,EJ3,ER0,DRS (2,3,4,8,10)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.291
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 1

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.291

Contribuição à classe : ARS,AJ3C (11)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.315
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.757

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.315

Contribuição à classe : CNR,CNJ,DNR,DNJ (5,7,12)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.758
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.498

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.498

Contribuição à classe : ER3,EJ0 (13)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 1
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.198

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.198

Contribuição à classe : ANR,ANJ,BNR (1,14)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.291
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 1

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.291

Contribuição à classe : ENR,ENJ (15)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.128
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.878

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.128

Contribuição à classe : CRS,CJ3C,DJ2A (9,16)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 1
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.487

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.487

Contribuição à classe : CRN,CJ0 (17)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.793
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.408

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.408

Contribuição à classe : ANR,ANJ,BNR,CNR,CNJ,DNR,DNJ (1,5,7,12,14,18)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.291
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 1

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.291

Contribuição à classe : ER1,ER3,EJ0 (13,19)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.838
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.383

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.383

Contribuição à classe : BE,ER23 (20)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.5
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.74

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.5

Contribuição à classe : DRN,DJ0 (21)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.5
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.636

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.5

Contribuição à classe : CRS,CJ3C,DJ2A,ER1,ER3,EJ0 (9,13,16,19,22)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 1
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.487

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.487

Contribuição à classe : ANR,ANJ,BNR,CNR,CNJ,DNR,DNJ,ER6 (1,5,7,12,14,18,23)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.291
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 1

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.291

Contribuição à classe : ARN,AJ0,BE,ER23 (6,20,24)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.5
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.74

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.5

Contribuição à classe : CRN,CJ0,EROU (17,25)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 1
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.318

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.318

Contribuição à classe : ARS,AJ3C,BC (11,26)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.415
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.687

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.415

Contribuição à classe : ARS,AJ3C,BC,CRS,CJ3C,DJ2A,ER1,ER3,EJ0 (9,11,13,16,19,22,26,27)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.812
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.394

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.394

Contribuição à classe : CRN,CJ0,EROU,DRN,DJ0 (17,21,25,28)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 1
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.383

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.383

Contribuição à classe : ANR,ANJ,BNR,CNR,CNJ,DNR,DNJ,ER6,ENR,ENJ (1,5,7,12,14,15,18,23,29)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.518
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.654

A variável que contribui mais a esta classe é 8 com um risco de : 0.518

Contribuição à classe : ARS,AJ3C,BC,CRS,CJ3C,DJ2A,ER1,ER3,EJ0,AJ3P,DJ3,CJ3P,EJ3,ER0,DRS (2,3,4,8,9,10,11,13,16,19,22,26,27,30)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.744
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.449

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.449

Contribuição à classe : ARN,AJ0,BE,ER23,CRN,CJ0,EROU,DRN,DJ0 (6,17,20,21,24,25,28,31)
A variável 8 contribui a esta classe com um risco de : 0.757
A variável 1 contribui a esta classe com um risco de : 0.444

A variável que contribui mais a esta classe é 1 com um risco de : 0.444

Anexo 6: Entrevistas

ENTREVISTA – SUJEITO 50 - GRUPO A – 1ª SÉRIE

P- Você ainda se lembra desse questionário?

R- Sim

P- As últimas questões desse questionário pedem para justificar as respostas. Você está acostumado a fazer atividades que pedem para justificar as respostas?

R- Às vezes.

P- O professor de matemática pede para justificar as respostas?

R- às vezes pede. De vez em quando.

P- Você sabe o que é uma prova ou demonstração em matemática?

O aluno pensa por alguns segundos e não responde. Para esclarecer, dou um exemplo de teorema e o que fazer para demonstrá-lo e passo para a pergunta seguinte.

P- O professor prova, demonstra algum teorema em sala de aula?

R- às vezes prova.

P- Que tipo de exercícios você está acostumado a fazer na aula de matemática?

R- Exercícios com cálculos, que usam fórmulas.

P- Você se lembra de algum exercício que teve de justificar a resposta? Ou não houve exercício desse tipo?

R- Teve sim.

P- Qual?

R- O professor deu uma tabela, passou o que tinha de fazer com a tabela, somar todos os nomes dos países, e depois justificar, dar a resposta.

P- Esse exercício foi na aula sobre estatística?

R- Sim

P- E algum exercício que utiliza fórmulas, você se lembra de ter resolvido nos últimos dias e justificado a resposta?

R-Não, não me lembro.

P- e exercícios sobre geometria?

R- Também não me lembro.

P- Quando você justifica as respostas, você utiliza apenas cálculos ou explica como chegou ao resultado?

R- A gente faz direto.

P- Direto como?

R- A gente faz o cálculo e dá a resposta.

P- Então, o professor nem sempre demonstra as fórmulas utilizadas?

R- Isso mesmo.

P- Você se lembra da definição de múltiplo de um número?

R- Não, não me lembro.

P- Por exemplo, múltiplo do número 3. Diga um número múltiplo de 3.

R- Não me lembro.

P- E número par? Você pode dar exemplo de número par?

R- Quatro.

P- Você sabe quando um número é par?

R- Não, não sei.

P- O número 11 é par?

O aluno pensa um pouco e não responde.

P- E os números 6, 8, 10, são pares?

R- É.

P- Mas, a definição de número par e ímpar você não sabe?

R- Não.

P- Na questão A5, você entendeu o exemplo dado?

R- Não, não entendi.

ENTREVISTA – SUJEITO 13 – 8ª SÉRIE – GRUPO N

P – Você ainda se lembra desse questionário?

R – Mais ou menos.

P – Esse questionário tem algumas questões que pedem para justificar as respostas. Você está acostumada a fazer esse tipo de atividade em sala de aula?

R – Fazemos na maioria das vezes.

P – Mas são questões que pedem para justificar as respostas?

R – Sim, são questões desse tipo.

P – Então, o professor pede justificativas para as respostas?

R – Sim, na maioria das atividades o professor pede para justificar as respostas

P – Você sabe o que é uma prova em matemática? O que é provar um teorema?

R – É para ver se está certa a questão, para confirmar a resposta.

P – Então, o professor de matemática trabalha provas em sala de aula?

R – Sim e sempre pede para o aluno provar.

P – Mas, o professor prova todos os teoremas em sala de aula?

R – Todos não, só os mais complicados, aqueles que a gente não entende.

P – Você se lembra de algum exercício que teve de justificar a resposta?

R – Eu me lembro do triângulo. O professor pediu para provar que a soma dos ângulos é 180 graus.

P – Quando você justifica as respostas, você utiliza cálculo ou faz de outro modo?

R – É cálculo, a gente faz a conta e escreve a resposta.

P – E alguma propriedade, você usa para suas justificativas?

R – Às vezes uso.

P – Você já tinha estudado o tema fatorial na época do questionário?

R – Não, não estudei.

P – E neste ano, já estudou?

R – Ainda não.

P – E múltiplos de um número, você já aprendeu?

R – Múltiplos a gente já aprendeu.

P – Você pode dar exemplos de múltiplo de 3?

R – 9, 12, todos os números que multiplica por 3.

P – Por que 9 é múltiplo de 3?

R – Porque 3 vezes 3 dá nove.

P – E número par. Você sabe o que é número par?

R – Sim

P – Pode dar exemplos?

R – 2, 4, 6, 8

P – Por que 4, 6 e 8 são pares?

R – Porque eles podem ser divisíveis por 2.

P – E número ímpar. Pode dar exemplos?

R – 3, 7, 9.

P – Você acertou apenas o item a da questão A5. E os outros itens. O que aconteceu?

R – Não entendi os outros itens.

ENTREVISTA – SUJEITO 27 – 1ª SÉRIE – GRUPO B

P- Você se lembra desse questionário? Em algumas questões você utilizou cálculo e em outras você deveria justificar as respostas. O seu professor utiliza esse tipo de atividade?

R- Lembro do questionário. O professor não utiliza esse tipo de questão. Sempre foi questões que exigiam respostas exatas sem as justificativas.

P- Ele pede para justificar as respostas?

R- Não. Nunca foi pedido. A gente fazia a conta, colocava a fórmula meio que decorada, colocava em prática e resolvia o problema, nunca colocava a justificativa.

P- O professor demonstra as fórmulas ou teoremas em sala de aula?

R- Normalmente não, eu fui descobrir o π, porque era o π, no segundo colegial. O único lugar que trabalharam essa fórmula foi no Senai. Aqui não.

P- Você prefere assim, aprender diretamente o teorema e a fórmula prontos para uso ou você gostaria de saber como é que se chegou à fórmula?

R- Com certeza mostrando como se chegou naquilo, porque normalmente isso aí é que é aprendizado, você descobre o porquê você está utilizando aquilo, normalmente costuma se falar que um bom profissional é aquele que é um bom técnico, além de competente, isso é outra coisa, mas um bom técnico ele sabe associar tanto a parte lógica quanto a prática, então é por isso que as pessoas aprendem, quando elas associam a parte lógica da prática elas aprendem, isso é aprendizado e não simplesmente pegar uma coisa já decorada e depois você acaba esquecendo e fica no ar.

P- Então você acha que ajuda a utilizar melhor a fórmula ou teorema se você sabe de onde vem?

R- Com certeza ajuda. Eu acho que uma das coisas mais óbvias que tem na matemática é uma regra de três. Muitas pessoas têm dificuldade e a partir do momento que você entende o porquê de uma regra de três, você utiliza ela pelo resto da vida e nunca mais esquece, utiliza até no seu cotidiano e a partir do momento que você tem que decorar uma fórmula aí você não utiliza mais, pois depois de fazer uma prova você esquece a fórmula.

P- Qual o cálculo que você faz para saber se um número é múltiplo de outro número?

R- Divido.

P- divide quem por quem?

R- Divido o segundo número pelo primeiro. E aí você obtém o resultado. Se esse resultado for inteiro significa que ele é múltiplo, por exemplo, eu quero saber se 3 é múltiplo de..... não, se 9 é múltiplo de 3,... não, era dividir o primeiro pelo segundo, eu quero saber se 9 é múltiplo de 3, eu divido 9 por 3 aí eu obtenho o resultado que no caso é 3 , esse resultado é inteiro então fica fácil saber se um número é múltiplo do outro.

P- Você pode dar alguns exemplos dos múltiplos de 3?

R- 3, 6, 9, 12

P- Como você chegou a esses valores?

R- Se você dividir 6, 9, 12 por 3 você vai ter um número inteiro.

P- Na questão A5, item c, você respondeu “não porque 21 é ímpar”. O que você entendeu da pergunta? Poderia explicar a sua resposta?

R- Quando falou que 8 fatorial é múltiplo de 21, ficou complicado determinar e eu me equivoquei na resposta, ela está completamente errada é só calculando para saber se 8 fatorial é múltiplo de 21, é só calculando.

P- No item “e” da questão A5 você escreveu algum número par. O que você quis dizer com algum número par?

R- Entre 2, 4, 6, 8 e final zero é múltiplo de 2.

P- Por que múltiplo de 2?

R- Porque no fatorial nós temos, nós multiplicamos e no final é vezes dois, então você deduz que esse número é múltiplo de 2.

ENTREVISTA – SUJEITO Nº. 5 – 1ª SÉRIE – GRUPO B

P- Você se lembra desse questionário? Em algumas questões você utilizou cálculo e em outras você deveria justificar as respostas. O seu professor utiliza esse tipo de atividade?

R- Têm exercícios que ele pede para fazer e justificar e têm exercícios que só pede a resposta, deixar o resultado bem claro e depois o professor vem e dá um visto.

P- Os professores demonstram os teoremas ou simplesmente apresentam as fórmulas prontas para uso?

R- Eu tive vários tipos de professores, desde aqueles que mostram o que vocês vão ter que fazer e explica bem assim, olha isso é o que vocês vão ter que fazer e até aqueles que começam desde lá de trás explicando como chegou passo a passo até aquela fórmula e explica tudo bem detalhado para depois a gente fazer uso daquilo e nesses últimos anos eu tive todo esse tipo de professor e todos os professores conseguiram passar de um modo geral e demonstrar o que eles queriam.

P- Você disse que têm professores que apresentam e aqueles que não apresentam demonstração. O que você prefere? Aquele professor que deduz desde o início, passo a passo, até chegar à fórmula ou aquele professor que apresenta diretamente as fórmulas para serem usadas?

R- Sinceramente, eu tive aulas em que eu gostei de ter desde o comecinho a demonstração, mais pela curiosidade e poder interagir mais na aula e acabar tendo mais conhecimento naquela matéria, mas tem vez também que acaba cansando porque vir lá de trás acaba ficando aquela aula cansativa e quando chega um professor e fala, olha vocês vão ter que aprender isso aqui e coloca a fórmula lá e você vê e fala, é só isso, então fica mais fácil para resolver o problema, mas você acaba ficando sem um meio de conhecimento daquilo ali e pergunta como é que inventaram aquilo, como é que chegaram naquilo e você acaba ficando num nível mais baixo de conhecimento sobre aquela matéria.

P- No geral, você prefere com ou sem demonstração?

R- Com demonstração, com certeza.

P- Você sabe quando um número é par?

R- É quando.... a maioria das vezes, quando os números pares são somados juntos, é uma lógica que eu tenho aqui, número par somado com número par vai dar par.

P- Mas para você número par é isso? Se eu te der um número agora, por exemplo, 243, é par ou ímpar?

R- É ímpar.

P- Por quê?

R- Porque ele termina em 3 e 3 é ímpar. O número que termina em par é par.

P- E quais são os números pares?

R- 0,2,4,6,8

P- No item a da questão A5 você não justificou. Você saberia justificar agora?

R- Na teoria lá, começaria multiplicando 5 vezes 4 vezes 3 vezes 2 vezes 1.

P- Então, essa é a justificativa?

R- É

P Qual o cálculo que você faz para descobrir os múltiplos do número 3?

R- Eu sinceramente colocaria, ... ia multiplicando ele,.... o número 3, no múltiplo eu jogaria 3, 6, 9.

P- Por que você disse no item e da questão A5 que 23! É ímpar? Como você chegou à conclusão que o último algarismo pode ser 0,2,6, ou 8?

R- Puxa vida, eu não me lembro..... mas agora, lembrando umas aulas que eu tive algum tempo atrás, que o número 23,.....todo número acima de 5, ou fatorial de 10, abaixo, tipo 2 vezes 5 dá 10, daí ele termina em zero, agora eu estou vendo que termina em zero.

P- Você concluiu isso agora, um ano depois, pois você teve essas aulas esse ano. Agora está claro para você?

R- Está, hoje está bem mais claro.

ENTREVISTA – SUJEITO 21 – 8ª SÉRIE – GRUPO B

P- Você se lembra desse questionário?

R- lembro

P- Em algumas questões você utilizou cálculo e em outras você deveria justificar as respostas. O seu professor utiliza esse tipo de atividade?

R- Não, não é muito comum. Ela explica vai passando as contas e faz junto com a gente. Se precisar ela vai tirando as dúvidas.

P- A professora pede para justificar as respostas?

R- Geralmente não. Ela explica e a gente vai fazendo.

P- A professora demonstra teoremas ou fórmulas em sala de aula?

R- Até que esse ano foi um pouco menos. Não foi muito costumeiro fazer isso.

P- Nos outros anos foi?

R – Na oitava série foi.

P- Qual teorema que ela demonstrou?

R- Ela mostrou como Pitágoras chegou à conclusão.

P- Então ela demonstra alguma coisa, mas pouco. Esse ano foi pouco?

R- É. A gente aprendeu várias outras fórmulas. Ela foi mostrando como é que se fazia, como é que se chegou a isso, eu achei que não foi tão detalhado como no ano passado mas deu para aprender.

P- Por que você afirmou no item c da questão A5 que o único múltiplo de 21 é 441?

R- Não lembro muito. Para mim eu confundi. 441 que é... não, 21 que é múltiplo de 441. Não me lembro bem. Eu acho que eu confundi com a raiz quadrada, agora eu estou vendo que 21 é raiz quadrada de 441.

P- Você pode dar alguns exemplos dos múltiplos do número 3?

R- 21, 9

P- E como você chegou a esse resultado?

R- Três multiplicado por algum número chega a esse resultado.

P- Você sabe quando um número inteiro é par?

R- Geralmente quando ele é divisível por 2

P- No item d da questão A5 você disse que todo número ímpar multiplicado por um número ímpar resulta em ímpar. Você saberia justificar essa resposta? Você fez algum cálculo?

R- Na verdade foi. É, porque eu já aprendi que número ímpar não é divisível por dois, sempre vai sobrar 1.

P- O que você entendeu no item e da questão a5? Por que você respondeu que o último algarismo é 6?

R- Eu devo ter multiplicado, até mesmo que aqui tá falando sem calcular, eu devo ter calculado.

P- O que você calculou?

R- 23 vezes 22 vezes 21, eu devo ter arrumado alguma calculadora por aí.

P- Você fez esse cálculo até o final?

R- Pra falar a verdade eu não me lembro muito bem de como eu fiz. Por isso eu estou falando, eu devo ter pego alguma calculadora porque eu não me lembro muito bem. Ou então porque 6 é múltiplo de 3 apesar de ter vários múltiplos mas eu devo ter respondido isso.