PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Adilson Oliveira da Costa

Proposta de uma oficina para a prática docente no Ensino Fundamental: Utilizando o Cabri na Investigação de Quadriláteros

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

São Paulo

2008

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DE SÃO PAULO
PUC/SP

Adilson Oliveira da Costa

Proposta de uma oficina para a prática docente no Ensino Fundamental: Utilizando o Cabri na Investigação de Quadriláteros

Dissertação apresentada à Banca Examinadora como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação da Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.

São Paulo

2008

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial deste Trabalho por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura:_______________________________Local e Data:_____________________

Dedico este trabalho a Mary, minha esposa e ao meu filho Vitor. Por fazer e ser parte de mim.

Pelo incondicional apoio.

Agradecimentos

- *À Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, pela primorosa orientação e essenciais contribuições.*
- *Ao Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni, pelas valiosas contribuições e por ser referência desde a graduação.*
- *Ao Prof. Dr. Luiz Gonzaga Xavier Barros pelos comentários e sugestões.*
- *À Profa. Maria José Ferreira da Silva pela participação da Banca Examinadora.*
- *À Profa. Serli Carvalho Rodrigues, Dirigente Regional de Ensino – São Vicente, pela compreensão.*
- *À Profa. Ms. Mutsu-ko Kobashigawa, pelas discussões e trocas durante o mestrado.*
- *Ao corpo docente do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, em especial ao Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio, pelo exemplo.*
- *Aos colegas Supervisores de Ensino da Diretoria de Ensino – Região São Vicente: Ariadeney, Cássia, Eliana, Flávio, Iracema, Jesuíno, João Bosco, José Milton, José Rodrigues, Mariza, Matilde, Paulo, Regina, Silvio e Teresinha.*
- *Aos supervisores de ensino responsáveis pela Bolsa Mestrado nas Diretorias de Ensino de Diadema, Admir Barbosa e de São Vicente, Sandra Seccato, pela dedicação.*
- *Às Professoras Maria Rita Paixão, Rita Carboneze e Sonia Geraldini, pela colaboração na busca de material para a pesquisa.*
- *Aos professores que participaram da oficina "Utilizando o Cabri na Investigação de Quadriláteros".*
- *Aos colegas do Mestrado Profissional, Roberto, Luis, Claudemir, Aloísio e Sérgio, pelo companheirismo.*
- *Aos professores da EM São Francisco de Assis em Praia Grande, Elpídio, Nobel, Homero, Diná, Jacira, Roberta e Jusani pela longa convivência no trabalho.*
- *Aos amigos, Antonio Campineiro, Nora, César Casasco, Zélia Virginia, pelo incentivo e pelas palavras de apoio.*
- *Aos cunhados Mário e Maria Luiza, às sobrinhas Mariana e Marcela, e em especial à minha afilhada Ariani, pelo apoio familiar necessário.*
- *À minha família, em especial a meus pais Vicente e Valdice, por tudo.*

A Deus, acima de tudo.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo propor uma oficina para a prática docente de professores que atuam no Ensino Fundamental para que investiguem as propriedades dos quadriláteros com auxílio da geometria dinâmica proporcionada pelo *software* Cabri Géomètre. A questão investigada foi: em que medida a Geometria Dinâmica pode favorecer a criação de um ambiente de aprendizagem no estudo dos quadriláteros notáveis? Tínhamos como hipótese que o desenvolvimento de atividades com auxílio do computador como ferramenta de ensino e com o uso do programa escolhido, contribuiria para uma revisitação ou até mesmo para a aquisição de conteúdos novos, por meio da exploração das figuras construídas, pelo levantamento de conjecturas e pela interação com o grupo. Com esta proposta de oficina esperávamos que os professores abordassem com maior segurança assuntos relacionados às propriedades dos quadriláteros estudadas e que adquirissem autonomia na sua formação de forma constante. Com o apoio da Pesquisa-Projeto, também denominada Experimento de Ensino, adotada como metodologia de pesquisa, elaboramos uma oficina que foi aplicada aos professores (fase 1 da pesquisa), que deu subsídios como fonte de observação para realizarmos uma análise de cada atividade trabalhada. Após as análises, considerações e retificações, sugerimos, no final deste trabalho, uma nova versão da oficina para ser aplicada a outros professores interessados (fase 2 da pesquisa). As atividades foram analisadas segundo os níveis de compreensão de Van Hiele (1957). Concluímos nesta primeira fase, que a Geometria Dinâmica favoreceu a criação de um ambiente de aprendizagem, pois permitiu trabalhar de maneira diferenciada para que os professores percebessem propriedades dos quadriláteros notáveis cuja observação pelo modo tradicional (papel e lápis), seria dificultada. Outro aspecto fundamental dessa oficina foi permitir a troca de experiência entre os participantes e a interação entre todos, que são elementos essenciais a um Experimento de Ensino.

Palavras-chave: Prática docente, Geometria Dinâmica, quadriláteros, aprendizagem, Cabri Géomètre.

Abstract

The objective of this study is to suggest a workshop about learning practice to basic education teachers using the dynamic Geometry provided by Cabri Géomètre software. The main investigation was: how would Dynamic Geometry create a learning atmosphere for the study of notable quadrilateral? The hypothesis was that the development of the activities with the help of a computer as a learning instrument and the use of the chosen program would bring a contribution to a review or even to the acquisition of new subject through the built figurers exploration, supposition survey and by the interaction of the group. The workshop was proposed with the expectation that teachers would be more secure when they approach subjects related to the quadrilateral proprieties and also to give them instruments to improve their formation. Using a research-project also named teaching experimentation as research methodology, it was organized a workshop to teachers (research-phase 1) as source of observation to each activity developed. After analysis, considerations and corrections, at the end of this study it is proposed a new version of this workshop to be used to others interested teachers (research- phase 2). The activities were studied according to the comprehension levels from Van Hiele (1957). The conclusion for this first phase was that Dynamic Geometry promoted the creation of a learning atmosphere once it allows a different way of work; teachers noticed the proprieties of notable quadrilateral, this observation would be more difficult in a traditional way (paper and pencil). Others fundamental aspects of the workshop were the experience exchange among the participants and the interaction of all involved, essentials aspects for a teaching experiment.

Key Words: learning practice, Dynamic Geometry, quadrilateral, learning, Cabri Géomètre.

Sumário

Índice de Gráficos

Índice de Quadros

Índice de Figuras

CAPÍTULO I

1 - Introdução

1.1 - Trajetória

Em nossa trajetória profissional, o contato com o estudo da geometria utilizando ambientes computadorizados, mais especificamente o *software* Cabri Géomètre, ocorreu a partir do ano 2000, quando participamos do curso "Cabrincando com a Geometria".

Cabrincando com a Geometria foi um curso de trinta horas de duração oferecido aos professores de matemática pela Secretaria de Estado da Educação como continuidade do Programa **A Escola de Cara Nova na Era da Informática**, cujo objetivo, na área pedagógica, era de implementar e colocar em uso as salas ambientes de informática nas escolas estaduais. Não foi nosso primeiro contato com o *software*, que se deu por iniciativa própria quando as escolas estaduais, a partir do ano de 1997, começaram a receber os primeiros computadores para montar as salas de informática, posteriormente chamadas de Sala Ambiente de Informática - SAI. Acompanhava os computadores um conjunto de *softwares* e dentre eles havia uma versão do Cabri II.

Ao explorar esse *software*, percebemos que seria um grande facilitador, além de um aliado no desenvolvimento de atividades para o ensino da geometria uma vez que poderíamos fazer simulações de diversas situações, o que facilitaria o processo de ensino-aprendizagem.

Na internet encontramos, na época, algumas propostas de atividades para o uso do Cabri. Dessa forma, iniciamos o contato com essa poderosa ferramenta de aprendizagem.

A escola onde trabalhávamos recebeu em 1998 cinco computadores. A pergunta de então e, ainda de hoje, era: como trabalhar na sala ambiente de informática com uma classe de quarenta alunos, em média, com apenas cinco computadores?

Propusemos nessa escola a seguinte experiência: dois alunos dos dois primeiros anos do ensino médio seriam selecionados e capacitados para o uso do Cabri por meio de algumas atividades a fim de que conhecessem o *software*. Após esse treinamento eles seriam monitores das aulas de matemática na sala de informática. Essa capacitação ocorria após as aulas regulares duas vezes por semana. De posse de atividades propostas na aula, os alunos iam resolvê-las na sala de informática, dez alunos por vez, enquanto os demais ficavam na sala convencional. Essa tarefa demandava grande esforço, pois tínhamos que nos deslocar diversas vezes da sala convencional para a sala de informática, para acompanhar as atividades desenvolvidas nos dois ambientes. Quando os alunos terminavam a tarefa na SAI, fazíamos a discussão em conjunto para fechar aquela atividade. Essa experiência deu certo por um breve período, pois esbarramos na falta de manutenção dos computadores – isso ocorre ainda hoje – e, por ser uma escola pública de periferia, a maioria dos alunos na época não tinham contato com essa tecnologia. Muitos estavam tendo sua iniciação na informática ali na escola, que, aliás, era um dos objetivos do programa proposto pela Secretaria de Educação quando enviou os computadores para as escolas. Assim, o tempo gasto para realizar as atividades era maior do que o previsto, o que dificultava a participação da classe na sala de informática.

Após a conclusão do curso *Cabrincando com Geometria* no ano 2000, fomos convidados a participar de uma formação com a finalidade de sermos um dos multiplicadores da Oficina "*Um X em Questão*", proposta pela Secretaria de Educação no ano de 2001. Foi um curso de 36 horas de duração que ocorreu no município de Águas de Lindóia em junho daquele ano. A Oficina *Um X em Questão* foi elaborada com a preocupação de possibilitar uma reflexão metodológica e não centrada no desenvolvimento de conteúdos. Embora as atividades propostas a partir de situações contextualizadas que possibilitassem construir conceitos não eram centradas em conteúdos específicos, elas contribuíram para identificar, perceber propriedades e estabelecer relações entre as situações apresentadas e alguns conteúdos do Ensino Médio: *funções, trigonometria, geometria, plana e espacial*. Essa oficina utilizou os *softwares* disponíveis nas escolas estaduais, tais como: Cabri II, TABS+, Supermáticas, Graphmática, além dos aplicativos do Office. A Oficina foi destinada aos professores da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias do Ensino Médio.

O diferencial dessas oficinas é que elas seriam multiplicadas pelos próprios professores da rede pública estadual, o que permitiu uma parceria e uma boa sintonia no desenvolvimento dos trabalhos.

O interesse dos professores em participar dos cursos foi muito grande e após a realização, teve ótima avaliação. Na Diretoria de Ensino de São Vicente, conseguimos realizar seis oficinas *"Um X em Questão"* no ano de 2002, com uma média de vinte professores em cada turma.

No início do ano de 2003, passamos a integrar o Núcleo Regional de Tecnologia Educacional da Diretoria de Ensino – Região São Vicente - NRTE – SV, que tem por finalidade acompanhar o desenvolvimento das atividades nas SAI das escolas jurisdicionadas a esta

Diretoria de Ensino e capacitar professores e alunos que seriam futuros “Alunos Monitores”. Esse outro projeto da Secretaria de Educação teve por objetivo capacitar três alunos de cada escola que dispunha de SAI, para auxiliar os professores na aplicação de atividades com os demais alunos. O projeto estava baseado no Protagonismo Juvenil.

FERRETTI, C. J. et. al., utilizam o termo protagonismo para designar a participação de adolescentes no enfrentamento de situações reais na escola, na comunidade e na vida social mais ampla, concebendo-o como um método de trabalho cooperativo fundamentado na pedagogia ativa “cujo foco é a criação de espaços e condições que propiciem ao adolescente empreender ele próprio à construção de seu ser em termos pessoais e sociais” (2004, p. 414).

No decorrer desse trabalho, além dos alunos, tivemos contato também com os professores que, na escola, seriam responsáveis pelo acompanhamento dos monitores. Nesses contatos muitos professores solicitaram novas capacitações como as que eram oferecidas pela Secretaria de Educação, a maioria não conhecia o Cabri e por isso constantemente pediam alguma orientação de como utilizá-lo. Na medida do possível dávamos atendimento a esses professores de maneira quase que individual e dessa forma não tínhamos condições de abranger um maior número de professores. Desde então pensávamos em como poderíamos oferecer uma oficina mais detalhada da utilização do Cabri.

Em junho de 2005, ingressamos na Diretoria de Ensino – Região de Diadema, no cargo de Supervisor de Ensino. Em junho de 2007, fomos removidos para a Diretoria de Ensino – Região São Vicente, onde já atuávamos desde o início de 2006. Uma das atribuições da supervisão de ensino é atuar junto às escolas para que estas coloquem em prática sua proposta pedagógica.

Na mesma época em que ingressamos na supervisão de ensino, também iniciamos o Mestrado Profissional do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática na PUC – SP. No início não tínhamos noção do trabalho que desenvolveríamos, mas não demorou muito para saber que seria relacionado à tecnologia, dada nossa experiência no assunto. Por isso passamos a participar do Grupo de Pesquisa Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática – TecMEM (G3), que tem por objetivo formar uma cultura de investigação e pesquisa, envolvendo questões sobre as relações recíprocas entre práticas matemáticas, aprendizagem e tecnologias. Por meio da plataforma de ensino a distância Teleduc[1] passamos a acompanhar as atividades do

[1] **TelEduc** é um ambiente para realização de cursos a distância através da Internet. É desenvolvido pelo **Nied** (Núcleo de Informática Aplicada a Educação) do **Instituto de Computação** da **Unicamp** (Universidade Estadual de Campinas).

grupo e isso nos levou a pensar no trabalho utilizando um meio dinâmico para estudar conceitos geométricos.

1.2 - Problema de pesquisa.

Reconhecendo a importância e a necessidade da formação continuada de professores e, mediante o acesso à informação cada vez mais rápido e da evolução dos conhecimentos produzidos, não mais restritos à esfera de poucos, mas cada vez mais disponíveis para todos, torna-se necessário o desenvolvimento de competências que permitam, ao maior número de pessoas, acessar essas informações tornado-as significativas.

Inserida nesse contexto há uma questão de abrangência maior que merece ser objeto de reflexão: em que medida a utilização das tecnologias da informação e comunicação pode auxiliar no ensino/aprendizado de matemática? Outra questão diz respeito mais especificamente à utilização da Geometria Dinâmica. Será que ela pode favorecer a criação de um ambiente de aprendizagem reflexiva?

Estas são questões a serem pesquisadas e possivelmente não chegaremos a respostas com essa abrangência. Esperamos, no entanto, apontar alguma direção que contribua para o estudo desse tema. Para isso temos que buscar respostas em questões mais específicas no que se refere ao uso das tecnologias para o ensino de matemática. Diante disso, direcionaremos nosso trabalho para a investigação das propriedades dos quadriláteros notáveis, ou seja: **Em que medida a Geometria Dinâmica pode favorecer a criação de um ambiente de aprendizagem no estudo dos quadriláteros notáveis?**

Para tentar encontrar uma resposta a este questionamento, propusemos uma oficina (curso de pequena duração) aos professores de matemática da Rede Estadual que atuam, preferencialmente no ensino fundamental, a fim de auxiliá-los na aquisição de novos conceitos, além de revisitar outros assuntos menos trabalhados em suas aulas. Com isso esperamos que os professores possam abordar com maior constância e segurança assuntos relacionados às propriedades dos quadriláteros. Esperamos também que os professores possam dar continuidade a sua formação de modo autônomo e contínuo, visando o aprendizado de seus alunos.

O trabalho com quadriláteros foi eleito pela possibilidade de explorar diversas propriedades geométricas, tais como: retas paralelas, congruência e semelhança de triângulos, além de situações que envolvem construções com régua e compasso permitindo a proposta de conjecturas, enunciar e demonstrar teoremas. Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais –

PCN indicam o ensino de quadriláteros desde o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental e é um assunto que, com muita freqüência, aparece nos diversos tipos de avaliação institucional como o Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo - SARESP[2], Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB[3], Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM[4], dentre outras. Por isso fizemos a opção por quadriláteros.

Deste modo, desenvolvemos uma oficina de acordo com a metodologia Pesquisa Projeto denominada também Experimento de Ensino, em DOERR, WOOD (2006). Uma característica essencial das atividades desta oficina é permitir observar como os professores se comportam diante das tarefas propostas para que suas estratégias possam ser testadas, revisadas e refinadas. Com apoio desta metodologia elaboramos uma oficina que será apresentada em duas fases. A primeira, desenvolvida diretamente com os professores no curso, servirá como fonte de observação para que possamos elaborar um esboço da análise de cada atividade. A segunda, após considerações e possíveis retificações, pretendemos que seja uma versão mais próxima do desejável a fim de que ela possa ser aplicada para um número maior de professores.

1.3 - A informática educacional nas escolas estaduais do estado de São Paulo

Inserido no objetivo da proposta de uma oficina para professores de matemática, preferencialmente aos que atuam no ensino fundamental, pretendemos mostrar que ações como esta vêm sendo desenvolvidas há alguns anos pela Secretaria de Educação. Consideramos importante mostrar um pouco da história da implantação da informática educacional nas escolas estaduais do estado de São Paulo.

Apresentamos, então, um breve histórico da experiência com a Informática Educacional, na rede pública estadual de ensino, conforme consulta ao portal do Pátio Paulista da Secretaria de Estado da Educação[5].

---

[2] O propósito do SARESP é obter indicadores educacionais que possam subsidiar a elaboração de propostas de intervenção técnico-pedagógica no sistema de ensino.

[3] O SAEB é composto por dois processos: a Avaliação Nacional da Educação Básica (Aneb) é realizada por amostragem das Redes de Ensino, em cada unidade da Federação e tem foco nas gestões dos sistemas educacionais; e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Anresc) é mais extensa e detalhada que a Aneb e tem foco em cada unidade escolar. Por seu caráter universal, recebe o nome de Prova Brasil em suas divulgações.

[4] O Enem é um exame individual, de caráter voluntário, oferecido anualmente aos estudantes que estão concluindo ou que já concluíram o ensino médio em anos anteriores. Seu objetivo principal é possibilitar uma referência para auto-avaliação, a partir das competências e habilidades que estruturam o Exame.

[5] : http://www.patiopaulista.sp.gov.br

A Informática Educacional teve início, na rede estadual de ensino, em 1986 através do LIE -Laboratório de Informática Educacional da Fundação para o Livro Escolar - FLE, criada em 1985 pela Secretaria da Educação do Estado - SEE de São Paulo. Em 1987, o MEC criou os Centros de Informática Educacional - CIED vinculados as Secretarias Estaduais de Educação de quase todo o Brasil para promover e difundir a aplicação de novas tecnologias à educação. Em São Paulo, o CIED foi incorporado, com estatuto de Gerência, na estrutura da Fundação Para o Desenvolvimento Escolar - FDE com a instalação de laboratórios com equipamentos MSX da Gradiente, enviados pelo Ministério da Educação - MEC para início das atividades de capacitação de professores dos Ensinos Fundamental e Médio.

Em 1993/1994, a SEE/FDE deu início a instalação de 07 Centros Regionais de Informática Educacional, para descentralizar as capacitações de professores que contavam com 03 professores de diferentes áreas do currículo, todos capacitados pela equipe do CIED.

Em 1995, a Secretaria de Educação à Distância - SEED/MEC e a SEE implantaram, através do CIED/FDE a TV Escola para a capacitação de professores a distância. Apesar de todo o processo de informática educacional ter tido início em 1985, os computadores começaram a chegar nas escolas apenas em 1997, com a criação do Programa Nacional de Informática - PROINFO do Ministério da Educação que teve como meta a instalação de Núcleos de Tecnologia Educacional em todo o país e levar os computadores as escolas em parceria com as Secretarias de Educação dos Estados. Em São Paulo foram instalados, entre 1997 e 1999, 36 NRTE´s *(sic)* - Núcleo Regional de Tecnologia Educacional ao mesmo tempo em que a SEE implantava o Programa **A Escola de Cara Nova na Informática** em 1.000 escolas de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental e Médio. Este número foi ampliado no período de 1997 a 2003 atingindo quase a totalidade das escolas que oferecem ensino das séries do Ciclo II do Ensino Fundamental e as escolas do Ensino Médio.

NRTE

Os NRTE são estruturas descentralizadas de apoio permanente ao processo de introdução da tecnologia nas escolas públicas. Cada Diretoria de Ensino conta com um NRTE para atender sua área de abrangência. Para essa função, são recrutados 03 professores da rede estadual do Ensino Fundamental ou Médio que são capacitados através de cursos de especialização.

Os Assistentes Técnicos Pedagógicos - ATP desenvolvem atividades de introdução aos recursos da informática na educação, capacitação e reciclagem de professores e equipes administrativas, apoio às escolas na elaboração de projetos de informatização, suporte técnico para os computadores da área pedagógica e estabelecem vínculos de parceria para facilitar a troca de informação entre escola e NRTE.

Capacitações

Com a instalação dos laboratórios de informática nas escolas, foi necessário um plano de ação para capacitar professores no sentido de incentivá-los a desenvolver projetos e utilizar essa nova ferramenta em suas aulas.

SAI

As Salas Ambientes de Informática foram implantadas a partir de 1997 nas escolas da rede que atendiam aos pré-requisitos determinados pela SEE: a escola deveria ter 500 ou

> mais alunos no Ciclo II do Ensino Fundamental e Médio e espaço físico para a instalação dos equipamentos, além do interesse em usar as novas tecnologias no desenvolvimento de atividades pedagógicas junto aos alunos.

1.4 - Estrutura do trabalho

Este trabalho está organizado em cinco capítulos.

No Capítulo I, como introdução, descrevemos um breve relato de nossa trajetória profissional, justificamos a escolha do tema, o problema de pesquisa e a revisão bibliográfica relacionada ao assunto e uma breve história da implantação da informática educacional nas escolas da rede estadual de ensino.

No Capítulo II apresentamos o suporte teórico que permitiu tratar da formação de professores, do uso da tecnologia (utilização de *softwares* que possibilitam trabalhar a geometria de forma dinâmica), dos níveis de compreensão de VAN HIELE (1957) e das propostas para o ensino de geometria contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, para o Ensino Fundamental.

No Capítulo III tratamos da escolha dos sujeitos de pesquisa, ou seja, do perfil do público alvo selecionado para participar da oficina e da metodologia adotada para este trabalho.

O Capítulo IV é destinado à apresentação das atividades da oficina. Contemplamos, em maiores detalhes, alguns comentários de como essas atividades foram realizadas pelos professores. Um esboço de análise dos resultados dessas atividades será apresentado, para atender a proposta da segunda fase da pesquisa.

O Capítulo V é destinado à reformulação e ao aprimoramento das atividades para que as futuras oficinas contemplem, em especial, aqueles professores que não têm conhecimento do Cabri ou que o conhecem apenas superficialmente.

1.5 - Revisão Bibliográfica

ABRANTES (1999), num projeto que realizou investigações matemáticas na sala de aula pelo Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, considera que a geometria parece ser, dentro da Matemática escolar, uma área particularmente propícia à realização de atividades de natureza exploratória e investigativa. Porém, alguns pressupostos implícitos sobre o que é a geometria e qual é o seu papel na aprendizagem da Matemática precisam ser trazidos para o primeiro plano.

Diz ainda que, a importância da geometria não é independente desses pressupostos e mais:

> Que a partir de uma análise da história recente do ensino da Matemática em Portugal, Eduardo Veloso (1998) mostra como, nos anos 70 e 80, a generalização da chamada Matemática Moderna relegou a geometria para um lugar muito secundário. Numa abordagem formal da Matemática, a geometria tornou-se um "parente pobre" da álgebra linear, as atividades envolvendo construções geométricas foram consideradas matéria de outras disciplinas, como a Educação Visual, a "importância prática" da geometria reduzia-se ao teorema de Pitágoras e a umas quantas fórmulas para o cálculo de áreas e volumes. Nesta abordagem, a intuição e a visualização desempenham um papel menor no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. ABRANTES (1999, p. 3).

Aqui no Brasil, PUTNOKI (1988), afirmou que há muito o Desenho Geométrico está abandonado nas escolas nos ensinos fundamental e médio, principalmente nas públicas. Para ele isso não era apenas uma coincidência, mas sim, em parte, uma conseqüência, pois o desenho geométrico deveria ser desenvolvido de forma naturalmente incorporada à Geometria Plana, pelo próprio professor de Matemática. O que vinha sendo praticado até a primeira metade dos anos 1990, pelo menos na rede estadual de ensino, eram os professores de Educação Artística que trabalhavam em algumas séries com construções geométricas. De lá para cá nem isso tem ocorrido.

Daí a importância de resgatar o ensino dessas construções por meio da geometria dinâmica.

Segundo PIRES (2000), algumas marcas da implantação do Movimento da Matemática Moderna – MMM, como o trabalho com conjuntos no início de quase todas as séries, de forma desvinculada do restante, a predominância dos temas algébricos sobre os geométricos, o tratamento da geometria como um tema ilustrativo dos conjuntos ou da álgebra, têm diminuído nos últimos anos. No entanto, parece não haver entre os educadores uma consciência profunda do significado dessas mudanças (p. 34).

De fato, podemos supor que isso ocorre em grande parte porque os professores que estão atualmente em atividade tiveram toda sua formação sob a ótica do movimento da matemática moderna. Não queremos afirmar com isso que esse movimento foi totalmente responsável pelo abandono da geometria.

Reflexões para o processo de elaboração das chamadas Propostas Curriculares para o ensino de 1° e 2° graus em 1985 diagnosticaram alguns problemas, dentre eles: "*a priorização dos temas algébricos e a redução ou, muitas vezes, eliminação de um trabalho envolvendo tópicos de geometria*", constantes nos Guias Curriculares de 1971 (PIRES, 2000, p. 50).

MAIOLI (2002), num estudo que visou contribuir para a formação de professores, tanto na aquisição de conteúdos, quanto no aprimoramento de conhecimentos que os auxiliassem na elaboração de estratégias adequadas para seu trabalho com geometria em sala de aula, observou que o trabalho possibilitou aos professores vivenciar a posição do aluno e refletir sobre pesquisas sobre o ensino/aprendizagem. Chamou atenção para a necessidade de aprimorar alguns conceitos. Mostrou que é possível contemplar em um projeto de formação, tanto os aspectos conceituais quanto os didáticos da geometria. Trabalhou com quadriláteros pela escassez de pesquisas relacionadas ao tema na formação de professores.

GRAVINA (1996), via emergir uma nova forma de ensinar e aprender geometria a partir de uma exploração experimental viável somente em ambientes informatizados, os alunos fazem conjecturas com o constante retorno oferecido pela máquina e daí aprimoram ou corrigem suas conjecturas, chegando a resultados que resistem ao "desenho em movimento" (p. 2).

SILVA (1997), num trabalho que investigou a aplicação do Teorema de Tales, utilizando novas metodologias que possibilitem o ensino-aprendizagem de geometria, bem como a necessidade de capacitação aos professores nessa área, afirma que o *software* Cabri cumpriu o papel de auxiliador no desenvolvimento das atividades de investigação, através do trabalho de uma geometria dinâmica e na integração dos conceitos matemáticos (p. 133-134).

Segundo KOBASHIGAWA, muitos professores já passaram por diversos processos de formação e não percebem que os conhecimentos disponibilizados nestas ocasiões tenham lhes ajudado. Nos processos de formação de professores, o papel da teoria necessita, também, ser mais equacionado. Assim, grande parte dos professores encontra dificuldades em estabelecer pontes entre teoria e prática. Desta forma, o espaço existente entre elas se transforma em um fosso, muitas vezes, intransponível (2006, p. 42).

Diante disso, podemos inferir, então, que a priorização dos temas algébricos sobre os geométricos teve influência nos cursos de formação de professores e por isso a Geometria não é ensinada como poderia ou deveria ser? A resposta a esta questão está longe de ser definitiva. No entanto, o trabalho aqui proposto pretende colaborar para dar ao ensino da Geometria um tratamento mais ameno e prazeroso com o auxílio das Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC.

No próximo capítulo, apresentaremos o suporte teórico utilizado quanto à formação de professores e ao ensino da geometria.

CAPÍTULO II

2 - Suporte teórico

Neste capítulo, apresentamos o suporte teórico que embasará os estudos em relação à formação de professores, ao uso da tecnologia e aos níveis de compreensão de VAN HIELE (1957). As propostas contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, mais especificamente quanto ao ensino da geometria, também serão aqui observadas.

2.1 - Formação Profissional

Segundo PONTE (1998), o desenvolvimento profissional permanente é uma necessidade e deve ser encarado de modo positivo: *a finalidade do desenvolvimento profissional é tornar os professores mais aptos a conduzir um ensino da Matemática adaptado às necessidades e interesses de cada aluno e a contribuir para a melhoria das instituições educativas, realizando-se pessoal e profissionalmente.*

Sem uma formação adequada para lecionar as disciplinas de que estão incumbidos e sem um conjunto de conhecimentos e capacidades profissionais para sua prática pedagógica, conforme Ponte, há que continuar a valorizar a formação didática, que apóia o ensino de saberes específicos. É importante fazê-lo de modo convergente com os restantes domínios e objetivos da formação e com o que se sabe acerca do desenvolvimento profissional dos professores. (PONTE, 1999, p. 1).

SHULMAN, chama a atenção para a necessidade que o professor tem de conhecer bem os conteúdos que ensina. De fato, é necessário estabelecer uma relação muito próxima com os alunos para dentro de uma linguagem acessível, conseguir tornar significativo o conhecimento a ser ensinado. Para ele, o professor não tem de conhecer estes conteúdos do mesmo modo que o cientista, mas de um modo diferente. Em especial tem de conhecer as boas maneiras de os tornar compreensíveis e relevantes para os alunos (SHULMAN, 1986, *apud* PONTE, 1999, p. 3).

FIORENTINI, LORENZATO (2006), afirmam que parece haver uma crença entre os responsáveis pelas políticas educacionais que as novas tecnologias são uma panacéia para solucionar os males da educação atual. Equipar as escolas com equipamentos tecnológicos pode ser relativamente simples, porém de nada adianta se não contarmos com profissionais aptos a fazer uso desses recursos. Não basta capacitar os profissionais, é preciso, no entanto, dar-lhes condições para que apliquem na escola o que vivenciaram nas capacitações (p.46).

Deste modo, esta oficina visa contribuir para a formação continuada dos professores que atuam preferencialmente no ensino fundamental, para que se apropriem cada vez mais do uso das tecnologias aplicadas no ensino de geometria, em especial, no estudo dos quadriláteros notáveis. Isto é, introduzir e estimular o uso das tecnologias para melhorar as situações de ensino-aprendizagem.

2.2 - O modelo dos Van Hiele

O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico desenvolvido pelo casal van Hiele originou-se dos trabalhos de doutorado dos mesmos. Este casal holandês, Dina van Hiele e Pierre Marie van Hiele, em meados da década de 50, desenvolveram seus estudos na Universidade de Utrecht, sob a orientação de Hans Freudenthal[6], idealizando uma nova forma de enfocar o desenvolvimento do raciocínio em Geometria. Tal teoria foi produzida no meio de mudanças no campo da Educação Matemática em que a comunidade internacional estava a discutir novos métodos de ensino e novos tópicos curriculares (MATOS, 1985 *apud* PEREIRA et. al, 2005, p. 22).

---

[6] Hans Freudenthal nasceu em 1905 na cidade alemã de Luckenwal. Em 1923 entrou na universidade de Berlim onde estudou matemática e física, em 1927 foi a Paris complementar seus estudos teóricos. Em 1946 Freudenthal se tornou professor em Utrecht, designado para ocupar uma cadeira para lecionar matemáticas puras e aplicadas e os fundamentos da matemática. Como matemático destacou-se em sua época pelas contribuições significativas que deu à topologia, geometria e teoria de grupos de Lie. Aposentou-se nesta cátedra em 1975. Mas bem antes disto já despontava como uma das principais lideranças da comunidade internacional de Educação Matemática. Como professor adquiriu fama internacional como o fundador da Educação Matemática Realística que está baseada na resolução de problemas reais, factíveis e significativos a partir de experiências. A figura de Freudenthal foi determinante para que a educação holandesa não fosse contaminada pelo Movimento da Matemática Moderna que se espalhou pelo mundo através dos EUA nos anos 60. Freudenthal preferiu levar os estudantes para uma viagem pelo mundo da matemática a partir da descoberta. Um de seus lemas era que você aprende melhor matemática reinventando tudo isto. Freudenthal defende que a matemática é uma atividade e que a melhor forma de aprender uma atividade é executá-la. Em seus estudos e ações mostrou que os estudantes podem desenvolver compreensão matemática gradualmente a partir de problemas práticos bem escolhidos da vida diária, da exploração e resolução destes problemas atingiam níveis cada vez mais complexos de pensamento matemático atingindo a abstração numa etapa adequada a seu desenvolvimento cognitivo, social e cultural. Uma das conseqüências é que os alunos tendem a se interessar automaticamente pela matemática propriamente dita, adquirindo hábitos de pensar matematicamente frente a situações diversas e extra-escolares. Hans Freudenthal, o reformador de educação, morreu no dia 13 de outubro 1990.

Fonte: http://www.matematicahoje.com.br/telas/cultura/historia/educadores.asp?aux=K acesso em 17/12/2007.

Na década de 1960 a antiga União Soviética, após reformulação do currículo de geometria em suas escolas, adotou esse modelo que se tornou conhecido no ocidente após a publicação do livro "*Mathematicals an Educational Task*" por Freudenthal em 1973 que citou o trabalho dos Van Hiele.

Os VAN HIELE (1957), descrevem quatro processos de formação da compreensão em geometria:

i. primeiro se produz uma estruturação do campo perceptivo. Caso esta estruturação não apareça naturalmente, não tem muita importância uma vez que ela não desempenha um papel determinante no processo de aprendizagem;
ii. a estruturação do campo perceptivo acompanha palavras distintas;
iii. o processo mental sobre as figuras vai se desenvolvendo cada vez mais no campo verbal, a estruturação perceptiva vai se convertendo paulatinamente em estruturação lingüística.
iv. cria-se certa autonomia na estruturação lingüística. Alguns agrupamentos de premissas levam automaticamente a determinadas conclusões, ou ao contrário, a busca de certas conclusões leva automaticamente à busca de certas premissas.

Quando se chega aos três primeiros momentos dizemos que há compreensão. Quando se chega ao quarto, chegou o momento de levar a uma maior estruturação, a uma compreensão maior. As palavras agora são convertidas em bem comum e podem servir de pontos de partida (p. 29. Tradução nossa).

A seguir apresentamos considerações de Van Hiele que ajudam a interpretar a evolução do raciocínio geométrico, a partir de um trabalho para orientar os professores da educação básica acerca do porquê se deve ensinar geometria na escola, com que concepção da geometria se deve trabalhar nesse nível de ensino, qual é seu valor e que importantes habilidades deve desenvolver o estudo deste ramo da matemática nesses anos de escolaridade, segundo BRESSAN, A. M. et. al. (2006).

> O modelo de Van Hiele detalha cinco níveis de raciocínio (compreensão) geométrico:
>
> Segundo Van Hiele, cada nível se caracteriza por habilidades de raciocínio específicas e um aluno não poderá avançar de um nível para outro sem possuir essas habilidades, já que em um determinado nível se explicitam e tomam como

objeto de estudo os conceitos, as relações e o vocabulário usados no nível anterior, incrementando-se assim a compreensão dos mesmos.

Ainda, segundo Van Hiele, mesmo que um aluno chegue a um nível de raciocínio em um conteúdo geométrico não assegura que, diante de outro conteúdo novo, poderá estar no mesmo nível. Provavelmente terá que recorrer a formas de raciocínio dos mesmos níveis anteriores seguindo uma ordem de complexidade crescente.

A teoria de Van Hiele diz que para se saber em que nível de raciocínio se encontra um aluno é preciso entender suas estratégias de resolução de problemas como sua forma de se expressar e o significado do vocabulário que ele ouve, vê ou utiliza para expressar seus conhecimentos. Deste ponto de vista é importante atentar para a compreensão que os alunos têm dos termos "definir" e "demonstrar". A concepção dos alunos sobre os significados desses termos são pistas importantes para que o professor saiba com que nível de raciocínio matemático os alunos estão trabalhando.

A seguir descrevemos sinteticamente cada nível proposto por Van Hiele:

Nível 0 – de reconhecimento

Nesse nível o aluno trabalha só com informação visual. Possui percepção geral dos objetos como unidades separadas. Compara e classifica objetos conforme sua aparência, utilizando expressões como "se parece com...", "tem a mesma forma de ...", "é pontudo, redondo, ...", etc. Pode aprender vocabulário geométrico, mas em geral não usa de forma apropriada.

As propriedades geométricas são confundidas com suas propriedades físicas e não desempenham um papel relevante no reconhecimento do objeto. Não define, apenas busca identificar o objeto baseando-se em atributos como cor, textura, posição, etc.

A palavra demonstrar não tem sentido para ele e não chega a estabelecer generalizações.

Nível 1 – de análise

O aluno reconhece a presença de propriedades matemáticas nos objetos, se bem que a compreensão continua se baseando na percepção física. Pode considerar elementos como representantes de classes, mas não relaciona as classes entre si.

Não compreende o valor nem a necessidade da definição e, geralmente, enumera propriedades necessárias para identificar os objetos geométricos em vez de determinar propriedades necessárias e suficientes.

Desconsidera as definições dadas pelo professor ou pelos livros, busca estabelecer "definições" próprias.

Não compreende o que é uma demonstração matemática. Em contrapartida pode fazer conjecturas e generalizações que exemplifiquem e comprovem empiricamente. Reconhece propriedades matemáticas mediante a observação e pode deduzir propriedades através da experimentação usando outras propriedades conhecidas.

Nível 2 – de ordenamento e abstração

O aluno começa a estabelecer relações. As propriedades não mais se apresentam separadas, mas vinculadas por relações de dependência entre elementos e entre conjuntos. Por exemplo: "ao maior lado de um triângulo corresponde o maior ângulo" ou "todo quadrado é um retângulo".

Começa a compreender o papel da definição que estabelece inter relações entre, por exemplo, uma figura e suas partes constituintes. Constrói definições corretas e compreende seu papel, define classes por suas propriedades específicas. É capaz de aceitar formas equivalentes de uma definição.

Pode usar a transitividade na dedução (se **p** implica **q** e **q** implica **r**, então **p** implica **r**). No entanto, pode não compreender a dedução como método ou o papel dos axiomas que tende a confundir com teoremas.

Ainda assim, muitos de seus raciocínios continuam se apoiando na manipulação. Utiliza as representações das figuras mais como uma forma de verificar suas deduções que como um meio para chegar a elas.

Pode entender uma demonstração explicada pelo professor ou de um livro, mas não é capaz de construí-la por si só.

Não vê como poderia se alterar a ordem lógica de uma demonstração, nem sabe como construir uma demonstração a partir de premissas diferentes das que já tenha visto.

Nível 3 – de dedução

O aluno neste nível completa o desenvolvimento do raciocínio lógico formal. Reconhece o valor da dedução em matemática como único meio para verificar a validade de uma afirmação.

Define corretamente utilizando vocabulário específico e aceita a existência de definições equivalentes do mesmo conceito e é capaz de demonstrar sua equivalência, pois compreende as inter relações entre as condições necessárias e as suficientes e distingue entre uma explicação e sua recíproca.

Pode entender e realizar raciocínios lógicos formais e aceita a necessidade das demonstrações como único meio para verificar a veracidade de uma afirmação. Vê a possibilidade de desenvolver uma demonstração de maneiras diferentes.

Nível 4 – de rigor

O estudante pode trabalhar com vários sistemas axiomáticos. Pode estudar a geometria euclidiana e comparar diferentes sistemas. Utiliza a abstração para ver a geometria, sem a necessidade de recorrer a modelos concretos. Este nível não corresponde ao nível escolar, por isso não foi muito investigado. (BRESSAN, A. M. et. al. 2006, pp. 76-80, tradução nossa).

Utilizaremos a teoria de Van Hiele neste trabalho para observar o desenvolvimento do pensamento geométrico dos professores ao realizar as atividades propostas. Esperamos que cheguem, ao final da oficina, por meio da exploração possibilitada pela geometria dinâmica, ao nível 3 – de dedução proposta por Van Hiele.

2.3 - Uso da tecnologia

Em um ambiente social cujas bases tecnológicas sofrem mudanças contínuas a maneira como as pessoas vêem o mundo é fortemente influenciada pelas tecnologias da informação e comunicação, que quando incorporadas ao processo de ensino e aprendizagem podem trazer avanços significativos aos envolvidos nesse processo.

Pesquisas em Educação Matemática mostram que, no processo ensino-aprendizagem, tanto o aluno quanto o professor se apropriam de novos conhecimentos quando participam ativamente na construção destes. O uso de ferramentas diversificadas é um dos caminhos possíveis para o envolvimento do aluno com a construção do seu saber. A ferramenta computador aliada a uma escolha adequada tem mostrado resultados positivos nesse aspecto.

Dentre os *softwares* educacionais disponíveis nas escolas estaduais, o Cabri-Géomètre tem sido objeto de estudo por possibilitar o ensino da Geometria por meio de construções geométricas e vice-versa, permitindo minimizar a dissociação freqüente entre o Desenho Geométrico e a Geometria.

Há alguns anos o termo "**Geometria Dinâmica**"[7] vem sendo utilizado por diversos pesquisadores em Educação Matemática. BRAVIANO e RODRIGUES (2002), destacam que:

> ... geometria dinâmica não se trata de uma nova geometria. [...] Trata-se da possibilidade de fazer construções eletrônicas como aquelas com régua e compasso e outras mais. Além disso, elementos básicos podem ser manipulados através do teclado ou do mouse, deslocando-se na tela e trazendo atrelados a si os elementos construídos a partir deles, ou seja, não alterando a posição relativa entre eles. Nessa mudança automática de posição está o dinamismo, cuja grande vantagem é preservar relações entre os elementos da figura (pp. 22,23).

Existem outros *softwares* que possibilitam o trabalho com o dinamismo na geometria, tais como: The Geometer's Sketchpad, Cinderella, Cabri-Géomètre, Geogebra e outros.

Algumas informações sobre esses *softwares* são apresentadas a seguir, como os locais da internet onde se obtém versões demonstrativas ou gratuitas.

- **The Geometer´s Sketchpad**[8] desenvolvido como parte de um Projeto de Geometria Visual, tem funcionalidades muito próximas às do Cabri.
- **Cinderella**[9] desenvolvido por e para pesquisadores matemáticos, permitindo o trabalho com as Geometrias euclidiana, hiperbólica e elíptica. Criado na Alemanha pode ser executado em qualquer plataforma.
- **Cabri-Géomètre**[10]**:** *software* destinado ao estudo da geometria. Foi desenvolvido na França durante a década dos anos 80 no Instituto de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Joseph Fourier de Genoble, por um grupo formado por matemáticos, psicólogos e cientistas da computação.

  Cabri vem da expressão **Ca**hier de **Br**ouillon **I**nteractif, que significa caderno de rascunho interativo.

[7] O termo "Dynamic Geometry" é marca registrada da Key Curriculum Press, responsável pela comercialização do Geometer's Sketchpad.

[8] http://www.keypress.com/sketchpad

[9] http://cinderella.de/tiki-index.php

[10] http://www.cabri.com.br/index.php

- **GeoGebra**[11] é um *software* gratuito que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo, possui todas as ferramentas tradicionais de um *software* de geometria dinâmica: pontos, segmentos, retas e seções cônicas.

  A interatividade é uma característica marcante em todos os programas aqui citados, pois permitem a criação de objetos matemáticos que podem ser manipulados diretamente na tela do computador.

  Tudo que se faz com lápis, régua e compasso num papel pode ser feito com esses *softwares*. A preservação das propriedades de uma figura é uma característica da construção geométrica, não basta desenhar a figura, é preciso que ela mantenha as propriedades quando movimentado algum se seus elementos de base.

  Esses programas possibilitam ao aluno construir seu próprio conhecimento por meio de construção, exploração, formação de conjecturas, bem como sua verificação, validação e posterior demonstração.

Segundo ALMEIDA (2000), os computadores possibilitam representar e testar idéias ou hipóteses que levam à criação de um mundo abstrato e simbólico, ao mesmo tempo em que introduzem diferentes formas de educação e de intervenção entre as pessoas.

Ao introduzir novas e diferentes formas de intervenção entre as pessoas, o papel da escola sofre uma alteração profunda, pois deixa de ser o de apenas ensinar para ser um espaço de criação de condições de aprendizagem. Para tanto é necessário formar professores para que utilizem os recursos da computação de forma reflexiva de maneira que se apropriem do conhecimento, não de forma mecânica nem repetitiva (p.12).

Escolhemos trabalhar com o Cabri pela possibilidade de associação de diversos desenhos à mesma figura, pela manipulação direta do desenho, pela sua funcionalidade através dos menus de fácil compreensão e, também, por estar disponível nas escolas desde o início do Programa "A Escola de Cara Nova na Era da Informática".

2.4 - Os Parâmetros Curriculares Nacionais e as tecnologias

Conforme nos diz os PCN, o recurso às tecnologias da informação e comunicação constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade, pelas modificações que exercem nos meios de produção e por suas conseqüências no cotidiano das pessoas.

---

[11] http://www.professores.uff.br/hjbortol/geogebra/geogebra.overview.html

É fato que os computadores e outros elementos tecnológicos estão cada vez mais presentes nas diferentes atividades da população.

O uso desses recursos traz significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática à medida que:

- relativiza a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
- evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
- possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
- permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo.

(PCN 1998, p. 43).

Os computadores podem ser usados nas aulas de matemática com diversas finalidades, dentre elas destacamos:

- como auxiliar no processo de construção de conhecimento;
- como meio para desenvolver autonomia pelo uso de *softwares* que possibilitem pensar, refletir e criar soluções;

A escolha do *software* em função dos objetivos que se quer atingir é que vai determinar o uso adequado do computador na sala de aula.

Os PCN apontam ainda para que nas aulas de Matemática se possa oferecer uma educação tecnológica, que não signifique apenas uma formação especializada, mas, antes, uma sensibilização para o conhecimento dos recursos da tecnologia, pela aprendizagem de alguns conteúdos sobre sua estrutura, funcionamento e linguagem e pelo reconhecimento das diferentes aplicações da informática, em particular nas situações de aprendizagem, e valorização da forma como ela vem sendo incorporada nas práticas sociais. (PCN, 1998, p. 46).

2.5 - Os Parâmetros Curriculares Nacionais e o ensino de geometria

De acordo as Orientações Curriculares para o Ensino Fundamental – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias do Ministério da Educação, o estudo da *Geometria* deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida.

Os PCN apontam que a geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Também é fato que as questões geométricas costumam despertar o interesse dos adolescentes e jovens de modo natural e espontâneo. Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações. (PCN, p. 122)

Sabe-se que grande parte dos alunos ao saírem da educação básica, principalmente da escola pública, não têm os conhecimentos básicos de geometria esperados para esse nível de ensino.

Diante disso, nosso propósito é oferecer uma oficina aos professores que atuam prioritariamente no segundo ciclo ensino fundamental (5ª. à 8ª. série). Investigar algumas propriedades dos quadriláteros por meio da geometria dinâmica, com uso do Cabri-Géomètre é o objetivo principal deste trabalho.

Desta forma, queremos investigar se a Geometria Dinâmica pode favorecer a criação de um ambiente de aprendizagem no estudo dos quadriláteros notáveis e na prática docente.

No próximo capítulo abordaremos o público alvo da oficina e a metodologia utilizada.

CAPÍTULO III

Neste capítulo, descreveremos os sujeitos de pesquisa (público alvo), o perfil desse público e o dos professores selecionados para participar da oficina. A metodologia de pesquisa também será apresentada neste capítulo.

3 - Concepção da Oficina

3.1 - Planejamento da Oficina

Para planejar a oficina contamos com a colaboração das ATP do NRTE e da Oficina Pedagógica da Diretoria de Ensino – Região São Vicente - DERSV. Inicialmente encaminhamos, sob a anuência da Sra. Dirigente Regional de Ensino, proposta à Coordenadoria de Ensino e Normas Pedagógicas – CENP da SEE/SP solicitando autorização visando à certificação aos participantes do curso. A autorização foi publicada no Diário Oficial do Estado de São Paulo – DOESP, pela Portaria CENP de 25, publicada em 26/05/2007. Após a realização da Oficina, a Dirigente Regional de Ensino homologou o curso por meio da Portaria publicada no DOESP em 31 de julho de 2007, cujo recorte colocamos a seguir:

> **Portaria do Dirigente Regional de Ensino, de 30-7-2007**
>
> **Homologando**, à vista do Parecer favorável emitido pela Comissão responsável pelo acompanhamento e avaliação do curso, nos termos da alínea "a", do inciso II, do artigo 3º da Resolução SE-62/2005, o Curso de Atualização: "**Utilizando o Cabri na Investigação dos Quadriláteros**", realizado no período de 16/06 a 07/07/2007, com carga horária de 30 horas, autorizado por Portaria CENP de 25, publicada a 26/05/2007.

3.2 - Caracterização dos sujeitos de pesquisa

Após a publicação da autorização, enviamos às escolas jurisdicionadas à DERSV um questionário (ANEXO 2) a fim de identificar o perfil profissional dos professores, seus conhecimentos a respeito dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, bem como suas concepções acerca do ensino de geometria e do uso das Tecnologias da Informação e da Comunicação – TIC, além de noções elementares do *software* Cabri. Procurou ainda identificar o interesse e a disponibilidade para participar de um curso que aplicaria o Cabri no ensino da geometria para o segundo ciclo (5ª. à 8ª. série) do ensino fundamental.

Dos questionários enviados, via e-mail, às escolas, retornaram para análise 138 (cento e trinta e oito), dos quais 87 (oitenta e sete) eram de professores efetivos e 51 (cinqüenta e um) de Ocupantes de Função Atividade – OFA. Os que têm formação em Matemática são 121 (cento e vinte e um), em Ciências, 11 (onze) e 6 (seis) declararam ter outra formação (engenharia, contabilidade, etc). Em relação ao conhecimento das TIC, os resultados apontaram que apenas quatro professores declararam ter conhecimento avançado, 77 (setenta e sete) afirmam que conhecem o básico e 44 (quarenta e quatro) têm pouco conhecimento de informática, não encontramos respostas para essa questão em 13 (treze) questionários. Responderam que conhecem o Cabri, 80 (oitenta) professores. Demonstraram interesse em fazer o curso, 108 (cento e oito) docentes. Desses, 73 (setenta e três) preferiam fazer o curso aos sábados.

Apresentamos a seguir os gráficos obtidos da tabulação dos questionários enviados aos professores, quanto à situação profissional, à formação, ao conhecimento de informática, do Cabri e do interesse em participar da oficina.

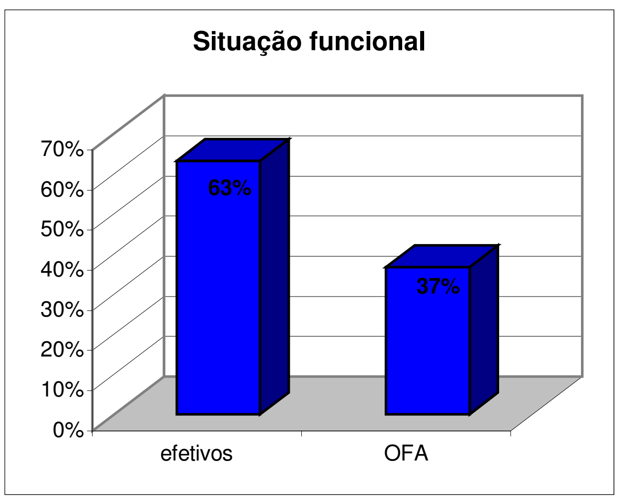


Gráfico 1 - situação funcional dos professores.
Fonte: questionário aplicado aos professores

Observamos que os professores que se interessam mais pela participação nas atividades de formação continuada são, em sua maioria, titulares de cargo (efetivados por meio de concurso público).

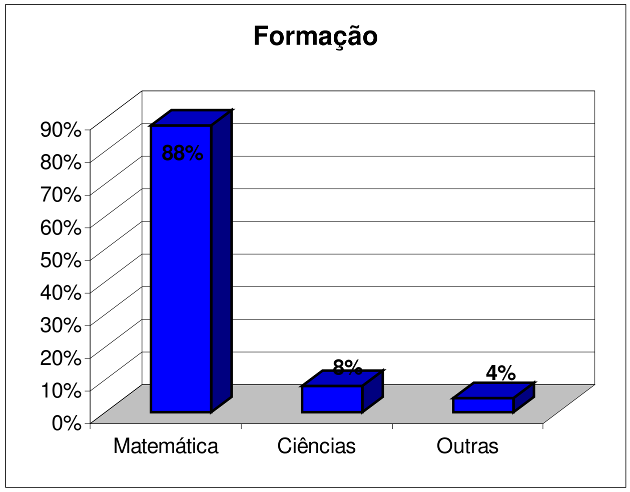


Gráfico 2 - quanto à formação dos professores
Fonte: questionário aplicado aos professores

O resultado dessa questão está relacionado ao anterior que apontou 63% de professores efetivos. Assim, já esperávamos que a grande maioria dos professores fossem graduados em Matemática. Apenas 4% possuem outras graduações e, por isso, fizeram uma complementação pedagógica em matemática.

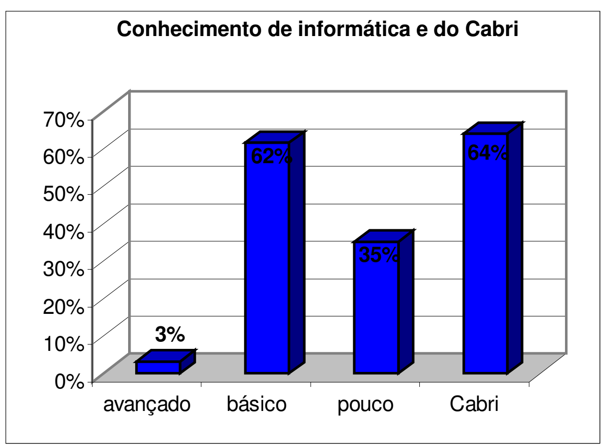


Gráfico 3 - quanto ao conhecimento de informática e do Cabri
Fonte: questionário aplicado aos professores

Consideramos que têm conhecimento avançado aqueles que, além de conhecer os recursos de editores de textos, de planilhas eletrônicas e de apresentações multimídia, conhecem o sistema operacional e sabem instalar e configurar *softwares* e hardwares. Apenas 3% se declararam nessa situação. Consideramos um índice baixo, pois os professores, de alguns anos para cá, vêm recebendo incentivos da Secretaria de Educação, para participar de cursos de informática e até para comprar computadores.

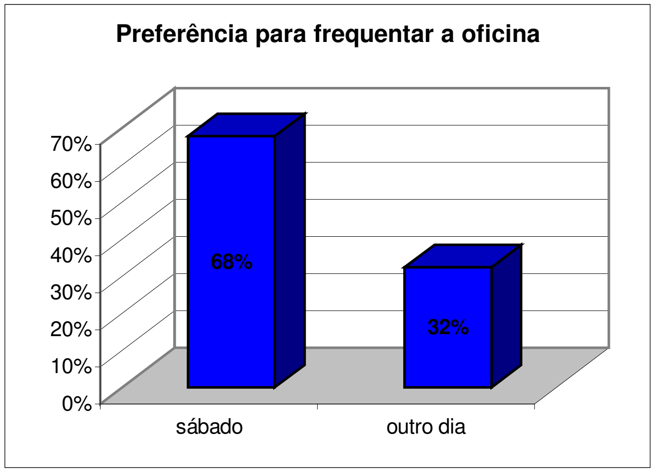


Gráfico 4 - da preferência pelo dia da semana para freqüentar a oficina
Fonte: questionário aplicado aos professores

A oficina foi oferecida de forma que os professores participassem fora de seu período de aula na escola. Consideramos muito satisfatório o interesse e a disponibilidade em freqüentar a oficina aos sábados, como aponta o gráfico acima.

Diante do grande número de interessados e na impossibilidade de atender a todos nesse primeiro momento, filtramos, com base nas informações obtidas dos questionários, trinta e nove professores que atendiam aos seguintes critérios: (a) ter conhecimento básico de informática; (b) ter noções elementares do Cabri; (c) atuar prioritariamente no ensino fundamental; (d) ter disponibilidade para freqüentar o curso aos sábados.

Elaboramos uma lista com os nomes desses professores e a divulgamos na página da Diretoria de Ensino[12] na internet, com o objetivo de que os vinte primeiros professores que enviassem suas confirmações de participação seriam selecionados para o curso. Como dissemos a procura foi grande e, por isso, diversos docentes ficaram para fazer o curso numa próxima oportunidade.

De posse desses resultados, e segundo a metodologia adotada, desenhamos uma oficina de forma a ser realizada em quatro sábados, sendo três encontros de oito horas e um de quatro, além de mais duas horas em local livre para a elaboração de atividade a ser apresentada no final do curso.

[12] http://www.dersv.com

3.3 - Caracterização dos sujeitos de pesquisa após a participação na oficina

Após a realização da oficina, solicitamos aos 17 (dezessete) professores que respondessem o questionário (ANEXO 3), para identificar, resumidamente, o perfil dos professores que efetivamente fizeram o curso. Ressaltamos que dos vinte inscritos, apenas uma professora não terminou o curso por problemas particulares. Dois se ausentaram antes do término do último módulo e por isso não responderam às questões propostas.

Ao coligirmos as informações apresentadas pelos dezessete docentes que responderam o questionário, observamos o seguinte:

Dezesseis desses são professores titulares de cargo, a média de idade deles é de aproximadamente trinta e oito anos, têm em torno de onze anos e meio de tempo de magistério. No entanto, observamos que uma professora tem apenas um ano na profissão e duas têm vinte e dois anos de experiência docente. Esses professores atuam em média por trinta e duas horas aulas semanais com os alunos, sendo que uma professora tem cinqüenta aulas por semana.

Mostraremos a seguir os gráficos relativos às idades, ao tempo de magistério dos professores que participaram efetivamente da oficina.

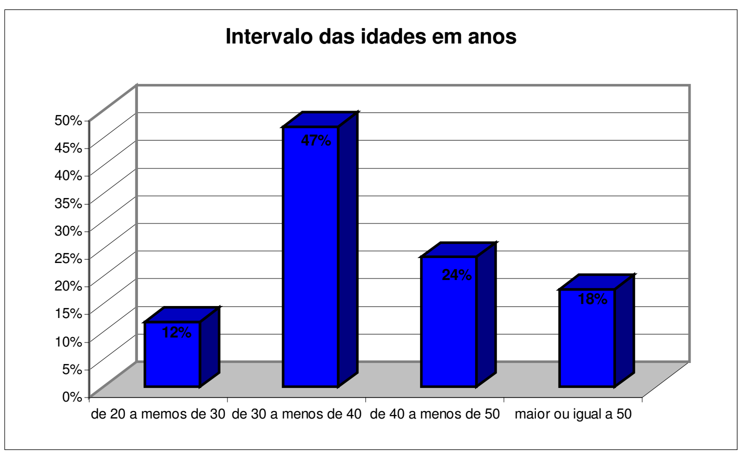


Gráfico 5 - quanto às faixas de idade em anos.
Fonte: questionário aplicado aos professores

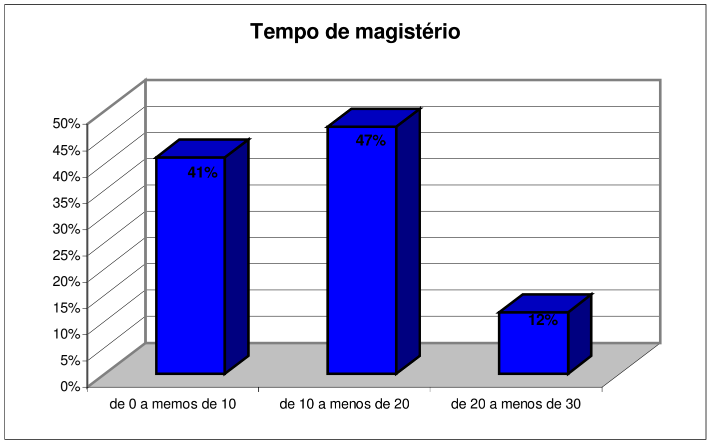


Gráfico 6 - quanto ao tempo de magistério em anos
Fonte: questionário aplicado aos professores

Continuando a análise dos dados colhidos, observamos que seis dos professores atuam exclusivamente no ensino fundamental e apenas um trabalha somente no ensino médio, os demais trabalham nos dois níveis de ensino.

Quanto à formação acadêmica, quinze responderam que são graduados em Matemática, uma professora tem curso de Pós-graduação (especialização), três têm outras formações (Tecnologia em Processamento de Dados, Biologia e Pedagogia e Administração de Empresas), além de dois que fizeram Complementação Pedagógica em Matemática e que não mencionaram quais eram suas formações iniciais.

Em relação a como lhes foi ensinada a geometria em suas trajetórias escolares, verificamos o seguinte:

No ensino fundamental (antigo 1° grau), um afirmou que não teve geometria, três tiveram muito pouco, pois os professores davam preferência ao ensino da álgebra, sete responderam que tiveram geometria pelo método tradicional, com aulas teóricas – não explicaram como aconteciam essas aulas e seis professores mencionaram que tiveram geometria associada ao desenho geométrico, duas responderam que viram desenho geométrico nas aulas de Educação Artística.

Quadro semelhante se repete no ensino médio (antigo 2° grau), no entanto, gostaríamos de ressaltar que uma professora cursou o magistério e suas aulas de geometria eram voltadas apenas para a identificação de figuras geométricas; um outro professor não teve geometria, pois fez o curso de Técnico em Processamento de Dados em nível médio.

No ensino superior, a maioria respondeu que a geometria era estudada com ênfase na teoria (sem construções) e associada à Geometria Analítica. Uma professora disse ter visto um pouco de geometria com auxílio do Cabri na universidade.

Quanto ao uso do livro didático, dois professores deixaram de responder essa questão, quinze deles afirmam fazer uso do livro didático, mas alguns não seguem apenas um único livro, procuram intercalar atividades de outras fontes.

Perguntados se se preocupam em tomar ciência das análises e indicações do MEC a respeito dos livros didáticos, nove responderam que sempre tomam conhecimento, seis ocasionalmente lêem as indicações e um deles não conhece as orientações contidas no guia do Plano Nacional do Livro Didático – PNLD[13]

Os Parâmetros Curriculares Nacionais em relação ao Ensino de Geometria são conhecidos suficientemente para aplicação cotidiana por onze professores, apenas um não conhece o teor dos PCN, declarou que nunca teve a curiosidade de ler, que agora foi despertado para o assunto e vai procurar ler esse referencial.

Todos os professores responderam que acham importante ensinar geometria, dois deles acham que a geometria deve estar presente a partir da educação infantil, dois entendem que o ensino da geometria deve acontecer a partir da 5ª. série e os demais (treze) professores, entendem que deve ser iniciado o ensino da geometria a partir das séries iniciais do ensino fundamental.

Antes de participarem desse curso, onze professores já tinham conhecimento do Cabri, o restante apenas ouviu falar do *software* e nunca tiveram a oportunidade de participar de nenhuma formação específica do Cabri ou de outras que fizessem uso dessa ferramenta. Esses professores, de alguma forma, mencionaram em suas respostas aos questionários que já conheciam o Cabri, e atendiam aos outros requisitos, por isso foram selecionados.

Perguntados se já desenvolveram alguma atividade com os alunos utilizando alguma tecnologia, oito responderam que desenvolveram atividades utilizando planilhas eletrônicas, apresentações e editores de texto. Um dos professores afirmou que já trabalhou com o Graphmatica[14], nove professores nunca desenvolveram nenhuma atividade com os alunos utilizando qualquer tecnologia.

A oficina que desenhamos tem por objetivo contribuir para a formação continuada dos professores, tanto no aprimoramento de conhecimentos, quanto na revisitação de conteúdos que

[13] Programa do Governo Federal cujo objetivo é o de prover as escolas das redes federal, estadual e municipal com obras didáticas.
[14] *Software* para construção de gráficos a partir de funções elementares.

os auxiliem na elaboração e aplicação de estratégias adequadas para seu trabalho em geometria na sala de aula, com auxílio da geometria dinâmica e com foco nos quadriláteros.

3.4 - Elaboração da Oficina

A Oficina foi dividida em sete módulos com quatro horas cada um e mais duas horas destinadas à preparação das atividades, socializadas ao término do curso, perfazendo uma carga horária de 30 horas.

O quadro a seguir resume a previsão, antes da realização da oficina, de distribuição das atividades nos respectivos módulos, a data e o horário de realização de cada um deles.

MÓDULO	DATA	HORÁRIO	ASSUNTO
I	16/06	8h às 12h	Dinâmica: Mapa Conceitual Exploração do Cabri
II	16/06	13h às 17h	Atividades 1 a 4
III	23/06	8h às 12h	Atividades 5 a 11
IV	23/06	13h às 17h	Atividades 12 a 17
V	30/06	8h às 12h	Atividades 18 a 21
VI	30/06	13h às 17h	Atividades 22 a 27
VII	07/06	8h às 12h	Apresentação das propostas de atividades elaboradas pelos participantes. Fechamento da Oficina

Quadro 1 - distribuição dos módulos da oficina

Conforme Portaria da Dirigente Regional de Ensino, de 30-7-2007 anteriormente citada, a oficina foi autorizada por Portaria CENP de 25, publicada em 26/05/2007 e realizada no período de 16/06 a 07/07/2007.

Cada módulo foi planejado de acordo com o objetivo geral das atividades. No Módulo I e durante o desenvolvimento da oficina faremos uma avaliação diagnóstica com base na dinâmica dos *mapas conceituais*[15] a fim de detectar quais visões o professor tem a respeito do assunto estudado.

[15] Um mapa conceitual é um recurso esquemático para representar um conjunto de significados conceituais incluídos numa estrutura de proposições. Os mapas conceituais têm por objetivo representar relações significativas na forma de proposições. Uma proposição consiste em dois ou mais termos conceituais ligados por palavras de modo a formar uma unidade semântica. (NOVAK & GOWIN, 1984).

Eventuais adaptações ou alterações na seqüência das atividades poderiam ser feitas conforme necessidade dos cursistas e do tempo disponível para realizá-las, segundo a metodologia adotada. No entanto, devido ao tempo destinado às discussões após a realização das atividades, as de números 24, 25, 26 e 27 deixaram de ser feitas.

Cada participante recebeu material impresso com as atividades referentes aos módulos.

Após o término da Oficina, o quadro resumo da distribuição dos módulos foi alterado conforme segue. Essa alteração de deveu a uma reestruturação, já prevista, durante o transcorrer das atividades, porque algumas delas demandaram discussão mais alongada de seus resultados ou até mesmo um tempo maior do que o previsto para suas realizações. Acreditamos, porém, que o objetivo da oficina não ficou prejudicado pela não realização das últimas atividades propostas.

MÓDULO	DATA	HORÁRIO	ASSUNTO
I	16/06	8h às 12h	Dinâmica: Mapa Conceitual Exploração do Cabri
II	16/06	13h às 17h	Atividades 1 a 4
III	23/06	8h às 12h	Atividades 5 a 9
IV	23/06	13h às 17h	Atividades 10 a 14
V	30/06	8h às 12h	Atividades 15 a 18
VI	30/06	13h às 17h	Atividades 19 a 23
VII	07/06	8h às 12h	Apresentação das propostas de atividades elaboradas pelos participantes. Fechamento da Oficina

Quadro 2 - distribuição dos módulos após a realização da oficina

3.5 - Metodologia – Pesquisa Projeto (Experimento de Ensino)

Os experimentos de ensino vieram à tona como metodologia de pesquisa pela necessidade de preencher uma lacuna entre a prática de pesquisa e a prática de ensino. Essa metodologia caracteriza-se por procedimentos padronizados, devendo o pesquisador criar estratégias que visem explorar a matemática dos estudantes (em nosso caso os professores que participaram da oficina), por meio de uma seqüência de atividades e um contexto de situações de ensino e de aprendizagem. (STEFFE, THOMPSON, 2000 *apud* MIRANDA*, 2006*).

DOERR, WOOD (2006), apresentam alguns problemas práticos na pesquisa sobre o ensino. O primeiro está associado ao desenho da pesquisa, à metodologia e aos quadros teóricos analíticos produzidos empiricamente para elencar os resultados que, freqüentemente, são relatados de forma que se torna difícil agrupá-los a outros projetos e também para outros profissionais compreenderem resultados que possam ser utilizados na transformação de sua própria prática pedagógica. Um segundo problema é o número relativamente alto de pesquisas que envolvem apenas um sujeito ou o auto-estudo, pela dificuldade de generalizar os resultados desses estudos a situações que envolvem um número maior de professores. O desenvolvimento de intervenções para o aprimoramento da pedagogia, forma uma terceira problemática. Há sempre alguma intervenção baseada em pesquisa corrente que fundamenta o estudo desenvolvido, sendo que essas intervenções deveriam contribuir para os programas de desenvolvimento profissional.

A Pesquisa Projeto também denominada "Experimento de Ensino" vem focalizar essas problemáticas numa categoria mais abrangente que visa investigar o repertório de conhecimento, além do desenvolvimento dos professores.

ARAÚJO (2007), cita que Experimentos de ensino nem sempre foram um método aceito para fazer pesquisa em Educação Matemática e que teve origem nos Estados Unidos por volta de 1970 (p.72).

Segundo MIRANDA (2006), os Experimentos de Ensino possuem duas fases complementares: uma pragmática, que visa à criação de ambientes propícios de aprendizagem e uma outra teórica, que tem por objetivo o uso de ferramentas teóricas para interpretar e explicar os processos de aprendizagem que os sustentam (p. 67).

DOERR, WOOD (2006), apontam duas características importantes da pesquisa-projeto. A primeira é a intenção de desenvolver um produto que aprimore interpretações, além das aprendizagens, que os docentes utilizam para dar sentido a seu ensino.

A segunda característica é que a pesquisa-projeto requer vários ciclos de análise para aprimorar esse produto, ou seja: a coleta e interpretação dos dados não acontecem ao término do experimento.

Um dos desafios da aplicação da pesquisa está em articular as interpretações em cada nível de maneira que sejam testadas, revisadas e generalizadas para que possam ser implementadas em outras situações.

A tabela a seguir, criada por LESH e KELLY, citada por DOERR e WOOD (2006), mostra o experimento de ensino em multicamadas ou seja: níveis de interação, interpretação e análise.

Nível 3 Pesquisadores	Com a ajuda de estudantes e professores, os pesquisadores desenvolvem modelos que dão sentido à aprendizagem de alunos e professores, e reinterpretam e estendem suas teorias
Nível 2 Professores	Os professores trabalham com colegas e pesquisadores para descrever, explicar e dar sentido à aprendizagem do aluno.
Nível 1 Estudantes	Equipes de estudantes resolvem, com a ajuda de professores, atividades matemáticas por meio das quais eles constroem, revisam e treinam sua interpretação de uma situação-problema.

Quadro 3 - o experimento de ensino multicamadas

Como pode ser observado no Quadro 3, a atividade visa engajar os professores no trabalho entre si enquanto desenvolvem modos de interpretar os eventos ocorridos na oficina.

Desta forma, um experimento de ensino não consiste em apenas aplicar uma atividade ou seqüência de atividades, mas observar tanto os resultados como as interações entre professores e pesquisadores e com base nessas análises buscar um aperfeiçoamento, propondo alterações para melhorar a atividade de forma constante.

COBB et. al *apud* ARAUJO (2007), identificam cinco características da metodologia Experimento de Ensino:

- Primeiro, a finalidade de um experimento de ensino é desenvolver uma classe de teorias acerca, tanto do processo de aprendizagem como sobre os significados que são desenhados para dar suporte à aprendizagem.
- Segundo, é uma metodologia altamente intervencionista, procurando sempre a inovação.
- A terceira característica menciona que na condução do experimento, são realizadas e testadas conjecturas mais generalizadas, e se uma conjectura inicial é refutada, podem ser geradas e testadas novas conjecturas alternativas.
- A quarta característica diz que como conjecturas são geradas e talvez refutadas, novas conjecturas são desenvolvidas e sujeitas a teste. Esta característica se foca nos ciclos de intervenção e revisão para desenvolver a pesquisa.

- A quinta está relacionada com suas raízes pragmáticas, reivindicando que a teoria usada deve fazer "trabalho real".

O que diferencia essa metodologia das demais é o fato de que os papéis de professor e pesquisador são insolúveis, mas por vezes, durante um experimento, há uma reconfiguração desses papéis, de modo a permitir a atuação do pesquisador como professor ou mesmo como co-aprendiz (KELLY e LESH, *apud* ARAÚJO, 2007).

A metodologia de experimento de ensino auxiliará no processo de desenvolvimento das atividades da oficina sobre a utilização do Cabri na investigação de quadriláteros e permitirá o aprimoramento tendo por base a versão anterior, que é uma de suas características principais.

Este trabalho, seguindo as fases da metodologia experimento de ensino, foi realizado com a colaboração de uma professora que ocupa a função de Assistente Técnico Pedagógico (ATP) do quadro da Oficina Pedagógica da Diretoria de Ensino de São Vicente, que atuou como observadora do grupo.

Para registro das atividades desenvolvidas pelos professores, foi utilizada a ferramenta **Comentários** da caixa **Exibir** contida no próprio *software*. Cada participante criou uma pasta onde depositaram suas atividades com as respectivas observações. Esses registros foram resgatados para que pudéssemos analisar o desempenho dos professores em cada uma, já que não contamos com outras formas de registro.

Diante disso, nosso trabalho visa apresentar como produto final uma oficina para a prática docente no ensino fundamental, de acordo com as fases da pesquisa-projeto adotada como metodologia de estudo.

No próximo capítulo mostraremos as atividades desenvolvidas pelos professores participantes e suas respectivas análises.

CAPÍTULO IV

Neste capítulo mostraremos as atividades aplicadas na oficina. Contemplaremos, em maiores detalhes, alguns comentários de como essas atividades foram realizadas. Suas expectativas de aprendizagem com cada uma e a análise dos resultados dessas atividades. Diante disso, atenderemos a proposta da segunda fase da pesquisa. Buscaremos observar também se, e como a participação dos professores nessa oficina, modificou ou gerou expectativa de mudança de suas práticas docentes.

4 – As atividades

4.1 - Módulo I

4.1.1 - Objetivo do módulo:

Apresentar o curso de maneira geral, possibilitar a integração dos participantes, trabalhar com mapas conceituais e explorar as ferramentas do Cabri.

4.1.2 - Expectativa

Esperamos que após o término desse módulo os professores estejam familiarizados com o conceito de geometria dinâmica, com a aplicação do mapa conceitual para diagnosticar conhecimentos prévios sobre um determinado assunto e com as ferramentas do Cabri.

4.1.3 - Desenvolvimento do módulo

Inicialmente fizemos uma apresentação do curso e dos ATP que auxiliaram nos trabalhos. Após as apresentações iniciais, cada cursista se apresentou para o grupo indicando qual ou quais níveis de ensino está atuando atualmente, se têm conhecimento de informática e do Cabri, se a escola em que trabalham dispõe de Sala de Informática, entre outras informações.

Num segundo momento, propusemos a leitura do texto **Geometria Dinâmica: Uma nova Geometria**[16] (ANEXO 4) para que tivessem um contato inicial com o termo Geometria Dinâmica e com seu significado. Após a leitura do artigo, os professores fizeram comentários

[16] Braviano & Rodrigues (RPM – 49)

sobre seu conteúdo. A maioria ainda não conhecia o termo “Geometria Dinâmica” nem sua utilização em sala de aula, embora quase todos conheciam, mesmo que superficialmente, o Cabri.

Uma professora comentou que não se trata de uma geometria nova, mas a forma de como trabalhar a geometria utilizando um *software* como o Cabri. Outra, que a geometria dinâmica permite a interação do aluno com o assunto estudado através do computador.

Logo após a discussão da atividade anterior, solicitamos aos professores que se dividissem em quatro grupos de cinco elementos cada um para que elaborassem um mapa conceitual tendo a palavra “GEOMETRIA” como idéia central.

> Os mapas conceituais servem para tornar claro, tanto aos professores como aos alunos, o pequeno número de idéias chave em que eles se devem focar para uma tarefa de aprendizagem específica. Um mapa conceitual também pode funcionar como um mapa rodoviário visual, mostrando alguns dos trajetos que se podem seguir para ligar os significados de conceitos de forma a que resultem proposições. Depois de terminada uma tarefa de aprendizagem, os mapas conceituais mostram um resumo esquemático do que foi aprendido (NOVAK, GOWIN, 1999, P.31).

Antes, porém, explicamos aos professores que um mapa conceitual pode ser uma estratégia de ensino, de aprendizagem e de avaliação possibilitada por meio de uma representação visual através de palavras, desenhos e outros símbolos sobre um conceito que se tem de um determinado tema ou assunto. Da palavra central saem outras palavras ou frases relacionadas ao tema, formando um encadeamento que será convertido num pequeno texto que expresse as idéias principais que se tem do assunto ou do tema.

Cada grupo deveria identificar pelo menos dez palavras relacionadas com o tema central e formar frases para depois construir um breve texto sobre o assunto.

Dois grupos seguiram as instruções para a construção do mapa fazendo a ligação entre a idéia central e as demais palavras. Elaboraram frases associando os conceitos e por último fizeram um pequeno texto. Dois outros grupos selecionaram as palavras já pensando no texto a ser criado. Nesse contexto, os grupos compreenderam a idéia de mapa conceitual e produziram textos significativos.

Após a conclusão, cada grupo socializou seu mapa com os demais.

A seguir apresentaremos os mapas feitos pelos grupos denominados por G1, G2, G3 e G4:

G1:
Geometria⇒ espaço, perímetro, formas, paralelamente, direção, sentido, ponto, reta, círculo, geometria, objetos e figuras.

O espaço da nova geometria

> *"Hoje, estamos aqui neste **espaço**, localizado num **perímetro** urbano de fácil acesso, buscando **formas** de enriquecer nossos conhecimentos, ao ponto que andemos **paralelamente** na mesma **direção** e mesmo **sentido**, pois temos o objetivo de alcançar um determinado **ponto** no final dessa **reta.** Através desse encontro que possamos darmos as mãos formando um grande **círculo** que nos leve ao conhecimento da nova **geometria** que estuda a representação de **objetos** e a dinâmica facilita a exploração de diversas **figuras"**.*

A geometria para este grupo está associada ao espaço ocupado pelo homem.

G2:

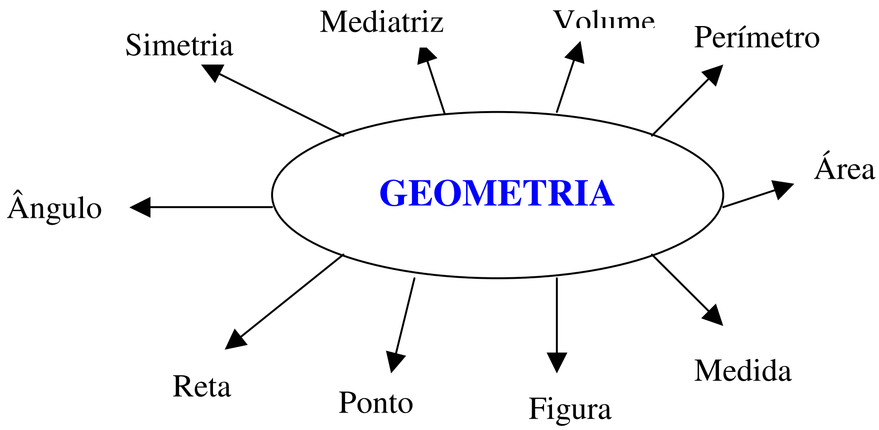
Geometria

Pontos, retas, paralelas, linhas poligonais, figuras planas, formas tridimensionais, poliedros, regulares, não-regulares, convexo, não-convexo, vértices, arestas e faces.

> *"Os **pontos** formam **retas**, o encontro das retas não **paralelas** formam **linhas poligonais,** originando **figuras planas**. A associação de figuras planas podem construir **formas tridimensionais** como **poliedros regulares e não-regulares, convexos e não-convexos** constituídos por **vértices, arestas e faces"**.*

Este grupo declarou que primeiro construíram o texto depois retiraram algumas palavras relacionadas à geometria.

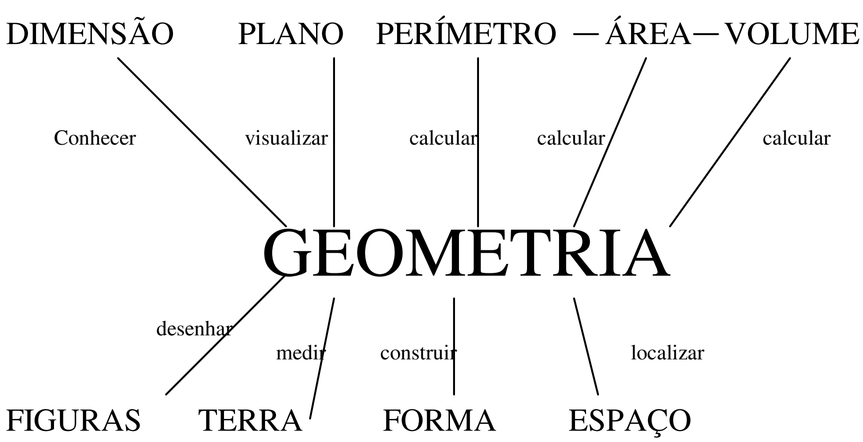
G3



"Construir retas a partir de pontos formando ângulos e criando figuras. A partir das figuras, podemos medir ou calcular seu perímetro, sua área e seu volume. Traçando sua mediatriz, observa-se a sua simetria".

Podemos observar que para esse grupo a geometria está relacionada às construções e ao cálculo de suas medidas.

G4



Construir formas geométricas, se localizar no espaço e calcular medidas.

> *"A geometria nasceu da necessidade do homem medir suas terras, permitindo a construção de formas geométricas, localizando-as no espaço, calculando perímetros, áreas e volumes de acordo com suas formas visualizadas no plano e no espaço dimensional".*

O mapa feito por esse grupo aponta também para a ênfase no cálculo das medidas, agora partindo da necessidade do homem.

Para finalizar o módulo I, propusemos uma exploração livre das ferramentas do Cabri.

Os professores, em sua maioria, declararam já ter conhecimento do Cabri, mas pela falta de contato com o *software* não se lembravam de como utilizar algumas ferramentas. Dos professores presentes, dois disseram que nunca trabalharam com o Cabri. Fizemos, então, uma apresentação das ferramentas do *software* utilizando um projetor multimídia para que todos pudessem acompanhar ao mesmo tempo algumas construções.

Apresentaremos a seguir os elementos da janela do Cabri para familiarização e reconhecimento do *software*

A janela do Cabri Geometry II (Guia de Utilização para Windows® - Texas Instruments)

A ilustração abaixo mostra a janela do Cabri Geometry II. Esta janela contém os elementos essenciais do *software* Cabri Geometry II. Uma descrição de cada elemento segue na ilustração abaixo.

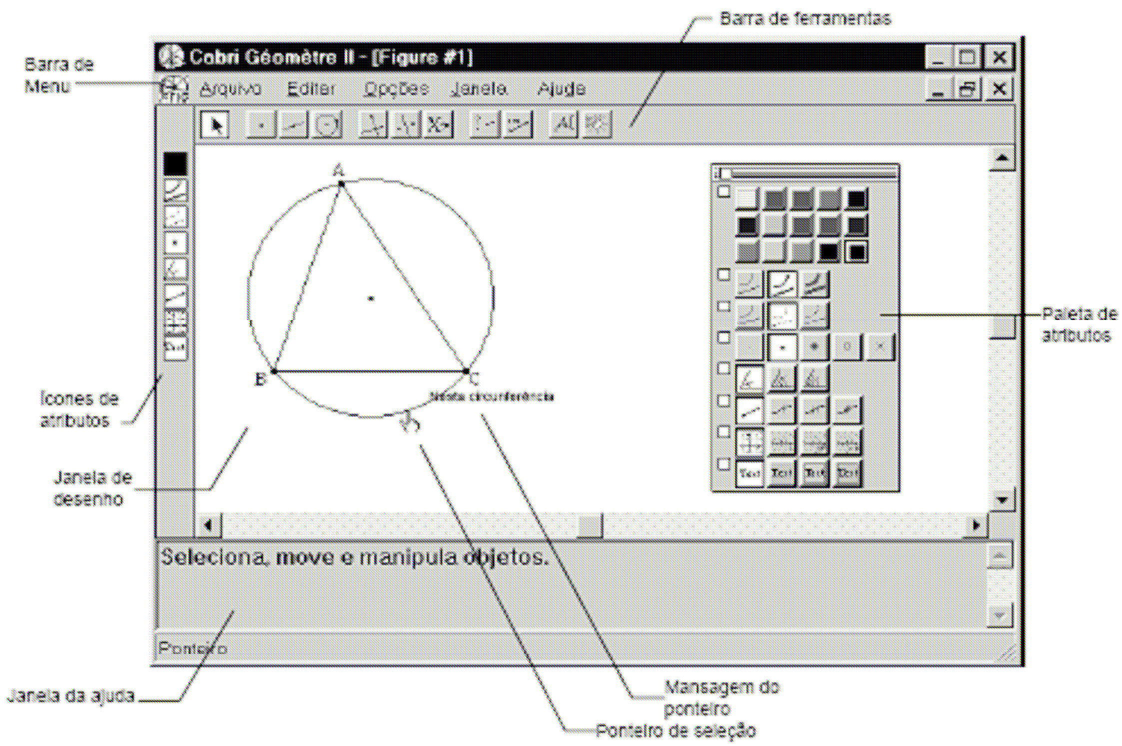


Figura 1 - a janela do Cabri Geometry II

Elementos da janela do Cabri Geometry II

Janela de desenho	Esta região é onde se fazem as construções geométricas.
Barra de menu	A barra de menu contém menus de interface gráfica comuns para o usuário para o gerenciamento e edição de arquivos, em conjunto com as opções do Cabri Geometry II.
Barra de Ferramentas	A barra de ferramentas contém as ferramentas de construção. Onze caixas de ferramentas são residentes na barra de ferramentas (ver Fig. 2). Para acessar uma caixa de ferramenta, pressione e mantenha pressionado o botão do mouse sobre o ícone. Aparecem os itens desta caixa de ferramenta.

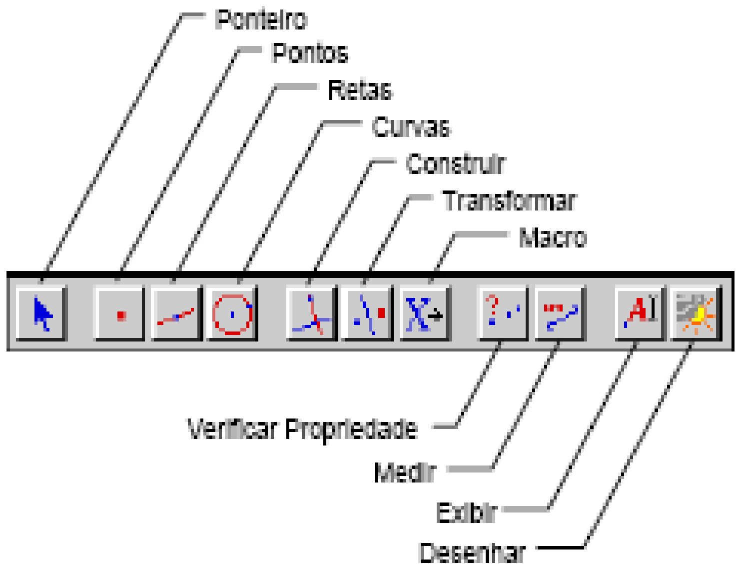


Figura 2 - elementos da janela do Cabri

Ícones de atributos	Os Ícones de atributos não são exibidos exceto se selecionar o comando
Mostrar Atributos	No menu **Opções** da barra de menu. Estes permitem modificar a aparência de objetos. Você pode criar uma paleta de atributo (menu de divisão) arrastando um ícone dos Ícones de atributos para a janela de desenho.
Opção do menu Ajuda	Clicando na opção de menu **Ajuda** e selecionando **Ajuda** ou pressionando a tecla **F1** irá alternar a janela de ajuda entre ATIVADA e DESATIVADA.
Ponteiro de seleção	O ponteiro de seleção é a ferramenta primária para selecionar menus e para construir. A forma do ponteiro modifica de acordo com a operação e a localização atuais.
Caixa fechar	A caixa fechar fecha a janela e cria a caixa de diálogo que lhe permite salvar seu trabalho se ainda não o tiver feito.
Caixa de zoom	A caixa de zoom alterna o tamanho da janela entre o atual e o tamanho tela cheia.

Caixa tamanho	Arrastando a *caixa tamanho* para um novo local redimensiona a janela de desenho.

Barras de rolagem	Ao clicar nas barras de rolagem e nas setas de rolagem move o conteúdo da janela de desenho verticalmente ou horizontalmente.

Sobre menus e caixas de ferramentas

As operações são agrupadas por tipo nos sub-menus localizados na barra de menu e na barra de ferramentas. Depois que uma ferramenta é selecionada, ela permanece ativa até você selecionar uma outra ferramenta. Se o ícone da ferramenta que deseja está mostrado na barra de ferramentas, selecione-o clicando uma vez no ícone. Os comandos na barra de menu devem ser selecionados cada vez que forem utilizados.

A seguir as descrições dos menus e caixas de ferramentas do Cabri Geometry II:

MENUS	
Arquivo	Comandos para abrir, fechar, salvar ou imprimir construções.
Editar	Comandos para selecionar ou copiar objetos, atualizar a janela de desenho ou exibir novamente as construções.
Janela	Opções padrão para exibição no Windows.
Ajuda	Opções de Ajuda.

CAIXAS DE FERRAMENTAS	Ferramentas para ...
Ponteiro	Seleção ou transformações a mão livre.
Pontos	Construindo pontos.
Retas	Construindo objetos retilíneos.
Curvas	Construindo circunferências, arcos ou cônicas.
Construir	Construções da geometria Euclidiana.
Transformar	Geometria de transformação.
Macro	Montando macros. As novas macros passam a fazer parte desta caixa de ferramenta.
Verificar Propriedade	Verificação de propriedades das construções baseando-se na geometria Euclidiana.
Medir	Medidas ou cálculos.
Desenhar	Modificar a aparência de objetos ou mostrar o sistema de coordenadas.

Acessar ajuda on-line

- Acesse a ajuda on-line clicando na opção de menu Ajuda menu na barra de menu da janela de desenho do Cabri Geometry II e selecionando **Ajuda**.
- Aparece uma janela na base do desenho que contém informações sobre a ferramenta atualmente selecionada.
- Selecione ferramentas adicionais para ver as informações da ajuda.
- Remova a janela de ajuda clicando no ícone da ajuda novamente.

4.2 - Módulo II

4.2.1 - Objetivo do módulo:

Construir figuras geométricas para familiarização com o Cabri.

4.2.2 – Expectativa

A intenção com as atividades propostas para esse módulo é que os professores se familiarizem com as ferramentas do Cabri fazendo algumas construções geométricas que envolvam conhecimentos básicos de geometria, que compreendam a diferença entre desenhar e construir para identificar uma *figura robusta*[17].

4.2.3 - Desenvolvimento do módulo

Os participantes desenvolveram as atividades de 1 a 4 nesse módulo. Solicitamos aos professores que registrassem os passos de suas construções e de suas observações no próprio Cabri utilizando a ferramenta "*comentários*" para que pudessem ser recuperados futuramente se necessário, pois ao final do curso pretendemos entregar juntamente com o certificado um CD com as atividades desenvolvidas na oficina. Reproduziremos alguns desses registros feitos pelos professores, utilizaremos as iniciais de seus nomes para que suas identidades sejam preservadas.

Após a realização de cada atividade foi aberta uma discussão sobre os assuntos trabalhados.

1. Atividades de 1 a 4 envolvendo conhecimentos básicos do Cabri e dos entes geométricos. Para a realização dessas atividades apresentamos a diferenciação entre desenhar e construir no contexto da geometria:

> ***Desenhar*** é reproduzir a imagem mental que temos de um objeto geométrico. É uma das representações de um objeto geométrico teórico. É um traçado material cuja validade é apenas para uma posição particular dos objetos iniciais.
> ***Construir*** é utilizar as propriedades do objeto geométrico para obter a sua representação. A construção, quando realizada num *software* de geometria dinâmica, preserva, quando do deslocamento de um de seus pontos, as propriedades ligadas ao objeto geométrico que representa. Podemos dizer que, nesse caso, a construção é um desenho dinâmico que não perde as suas propriedades quando do deslocamento de um de seus pontos de base. (BONGIOVANNI, 2006, p. 4).

[17] Definiremos figura robusta como sendo aquela que ao ser movimentada não perde suas características/propriedades geométricas.

ATIVIDADE 1 – adaptada de SILVA (1997, p. 61)

Objetivo:

- Reconhecer a diferenciação entre os três tipos de pontos existentes no Cabri:

a) o ponto qualquer é um ponto de movimentação totalmente livre (pela tela toda);

b) o ponto sobre o objeto é um ponto que se movimenta apenas sobre o objeto, tendo uma movimentação limitada;

c) o ponto de intersecção de dois objetos é um ponto que não se movimenta quando manipulado.

1. Crie dois segmentos e nomeie-os de AB e PQ.
2. Crie um ponto C e coloque-o sobre o segmento AB.
3. Crie um ponto (**ponto sobre objeto**) sobre o segmento PQ. Nomeie esse ponto de R.
4. Movimente o segmento PQ até que “corte” o segmento AB. Determine, utilizando o ponto de intersecção dos segmentos AB e PQ. Nomeie-o de X.
5. Movimente os pontos C, R e X e um dos segmentos AB ou PQ. O que você observa após esses movimentos?

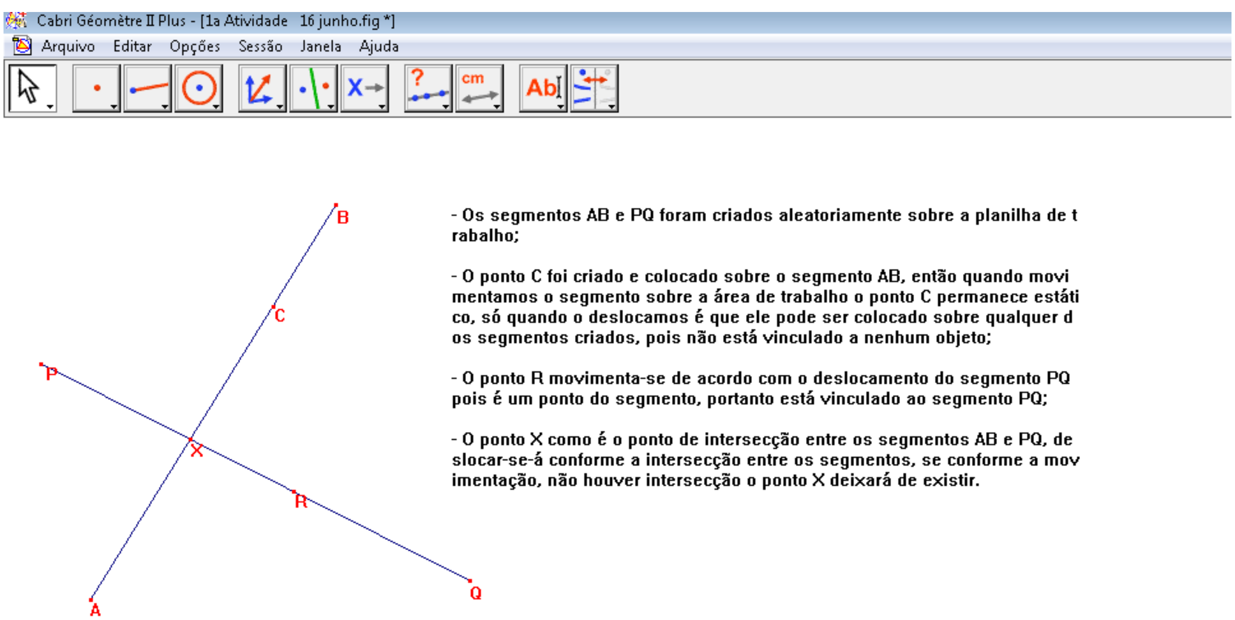


Figura 3 - tipos diferentes de pontos do Cabri
Fonte: professor (R.E.B.)

Essa atividade foi realizada sem muitas dificuldades, os professores reconheceram a diferença entre os três tipos de pontos existentes nas ferramentas do Cabri. Anotaram suas observações numa caixa de texto do próprio *software*.

ATIVIDADE 2 - adaptada de SILVA (1997, p. 61)

Objetivos

- Construir um triângulo no Cabri.
- Utilizar a construção de retas paralelas.
- Identificar os diferentes pontos da figura.
- Aprender a medir os segmentos e os ângulos.

i. Construa um triângulo ABC.

ii. Construa um ponto F sobre AB. Construa uma reta passando por F paralela a BC.

iii. Marque a intersecção dessa paralela com AC e nomeie-a de G.

iv. Meça os segmentos AB, AC, BC, AF, AG e FG.

v. Meça os ângulos: AFG, ABC, AGF, ACB e BAC.

vi. Movimente os pontos A, B, C e F.

vii. O que você observa com esses movimentos?

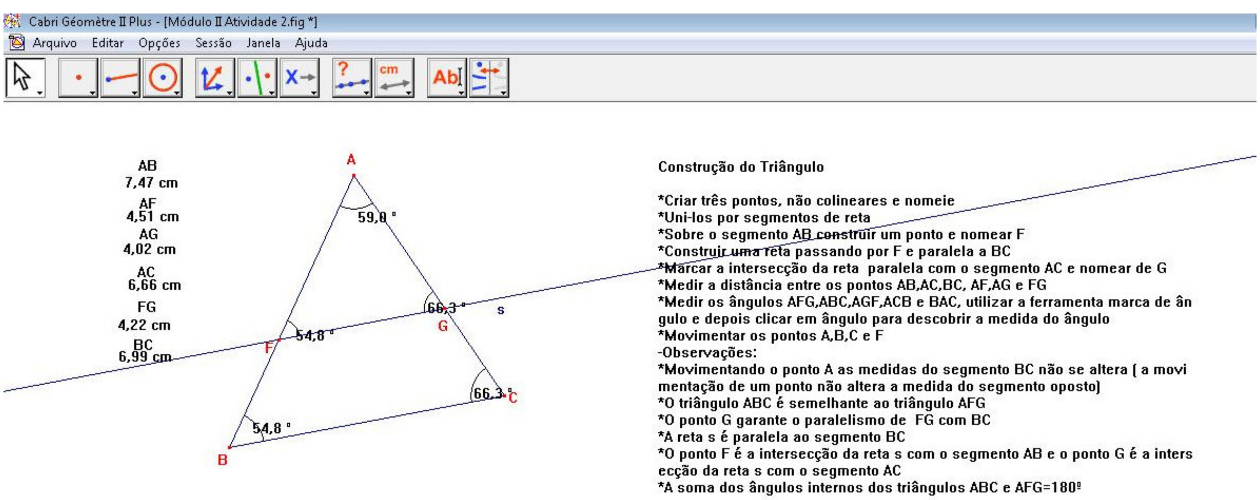


Figura 4- construção de um triângulo para observar as medidas de seus lados e ângulos
Fonte: professor (I.S.Q.)

Na construção de um triângulo dados três pontos não colineares, alguns tentaram registrar na caixa de texto as medidas dos segmentos e dos ângulos observados no triângulo, perceberam depois que essas medidas se alteravam conforme um dos pontos era movimentado.

Esta atividade está no nível 1 (de análise) de Van Hiele, pois permite deduzir propriedades através da experimentação. Não há uma preocupação em demonstrar, por exemplo, que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo AFG, nem que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, apenas faz uma verificação pela soma dos valores indicados como sendo as medidas dos ângulos dos triângulos ABC e AFG.

ATIVIDADE 3 - adaptada de SILVA (1997, p. 62)

Objetivos:

- Entender a diferença entre as duas circunferências existentes no Cabri:
- Aprender a construir reta definida por dois pontos.
- Utilizar os diferentes pontos.
- Observar a conservação das propriedades através do movimento da figura.

1. Construa duas circunferências: uma com a opção do menu *circunferência* e outra construída a partir de dois pontos (centro e raio da circunferência).
2. Movimente ambas. O que você observa ao movimentar a figura?

Apenas um professor não construiu as circunferências conforme solicitado. Os demais perceberam a diferença entre uma circunferência criada com a ferramenta “circunferência” e outra criada a partir de dois pontos.

No geral as anotações foram no seguinte sentido:

Na circunferência criada com a ferramenta “circunferência”, ao arrastar o centro mudamos sua localização, porém sem alterar o raio. Quando movimentamos um ponto qualquer da circunferência, seu raio é alterado.

Para a circunferência criada por dois pontos (centro) e um ponto da circunferência, quando um desses pontos é movimentado, o raio é alterado e quando movimentamos um outro ponto qualquer da circunferência, ela é arrastada para outra posição.

3. Considere a circunferência construída a partir de dois pontos. Construa uma reta que passa pelo centro e por um ponto da circunferência. Marque a intersecção da reta com a circunferência, obtendo o diâmetro QR.
4. Construa um ponto P sobre a circunferência e crie o triângulo PQR. Meça o ângulo QPR e movimente o ponto P.
5. O que você observa?

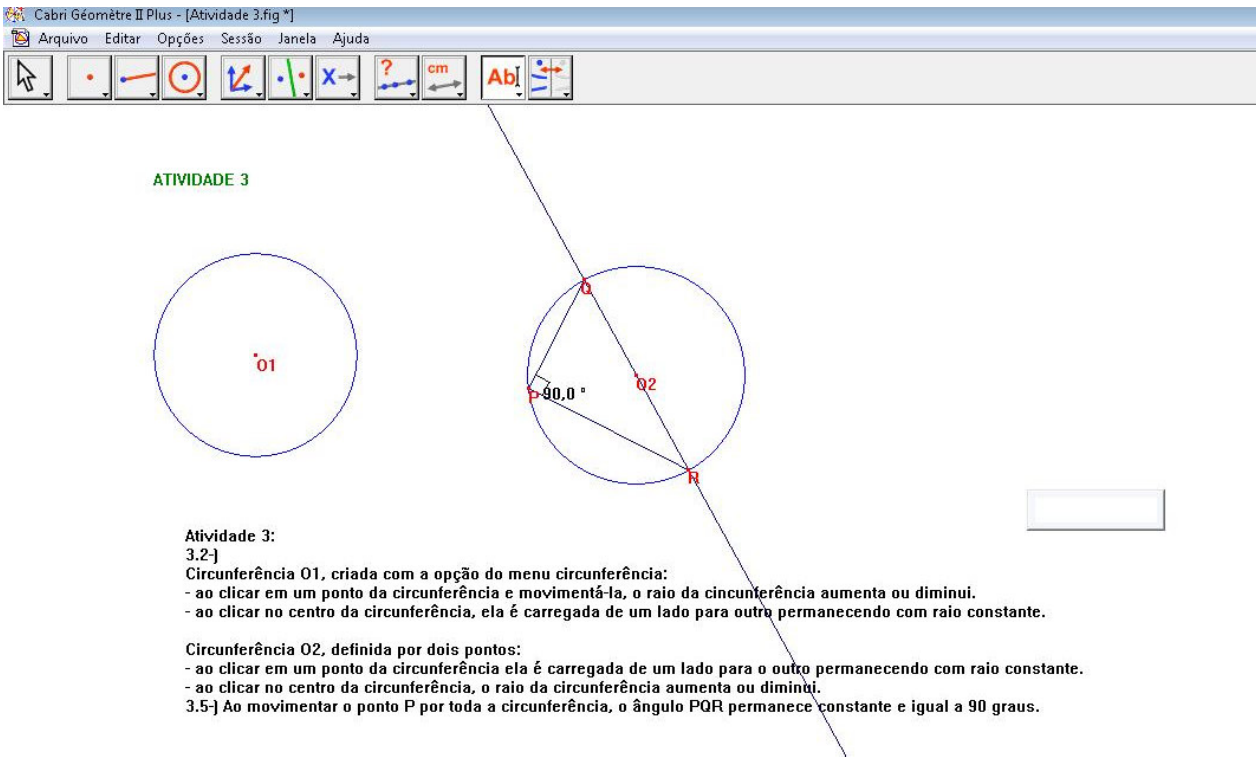


Figura 5 - construção das circunferências
Fonte: professor (A.N.G.)

A observação de todos foi que o triângulo obtido é retângulo.

A professora E.L.V. registrou o seguinte:

> *O ângulo RPQ mede 90° e ao movimentarmos o ponto P o triângulo continua sendo retângulo. Todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo.*

Esta atividade está no nível 2, de ordenamento e abstração, segundo Van Hiele. Há preocupação em elaborar uma definição que estabeleça relação de dependência: “todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo”. Mesmo assim continua se apoiando na manipulação, pois utiliza a representação física da figura para verificar sua dedução.

ATIVIDADE 4 - adaptada de SILVA (1997, p. 63)

Objetivos:

- Construir um triângulo eqüilátero utilizando suas propriedades.
- Compreender que o compasso do Cabri pode ser a circunferência obtida a partir de dois pontos.

PARTE A

1. Construa um triângulo eqüilátero dado um lado. Utilize a ferramenta circunferência como compasso.
2. Meça os ângulos internos e movimente sua figura. Sua construção é robusta?

A seguir reproduziremos as construções e comentários registrados pela professora S.S.T. para esta atividade:

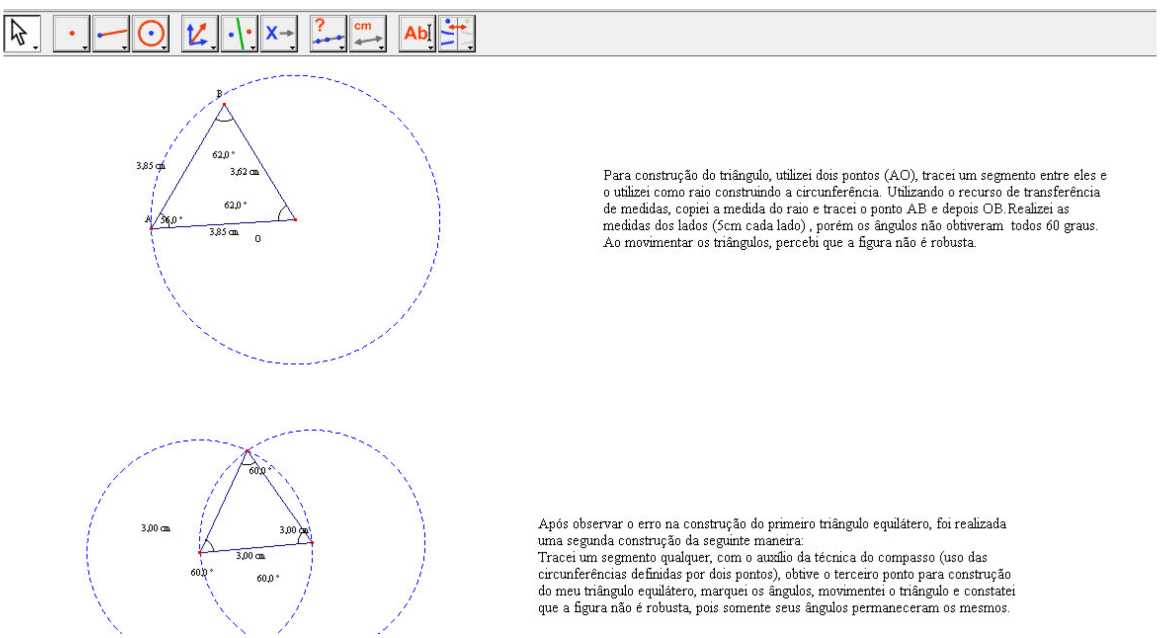


Figura 6 - construção de um triângulo eqüilátero.
Fonte: professor (S.S.T.)

A professora com este registro mostrou estar no primeiro processo de formação da compreensão em geometria, segundo Van Hiele. Primeiro se produz uma estruturação no campo perceptivo. Essa estruturação não apareceu naturalmente e isso não afetou seu processo de realização da atividade. As propriedades geométricas foram confundidas com as físicas, por isso não tiveram relevância no reconhecimento da figura (triângulo eqüilátero). Desta forma, em Van Hiele, essa atividade foi realizada no nível 0 (de reconhecimento).

Os professores, em geral, tiveram alguma dificuldade inicial para construir esse triângulo. Após fazerem uma leitura mais atenciosa da instrução: “utilize a ferramenta circunferência como compasso”, alguns chegaram à construção, outros continuaram com dificuldade. Alegaram não estar acostumados a trabalhar com construção e embora saibam definir um triângulo eqüilátero, não se lembravam como construir.

Esta atividade indica que a ausência do Desenho Geométrico dificulta o aprendizado da geometria, principalmente no que diz respeito ao estudo das propriedades de algumas figuras geométricas, como foi o caso aqui do triângulo eqüilátero.

Alguns professores, da mesma forma que a professora S.S.T., ainda não compreenderam o significado de “figura robusta”, para eles uma figura é robusta quando preserva suas medidas.

Quando uma figura é movimentada sem perder suas características dizemos que é uma construção **robusta**.

PARTE B

1. Construa um triângulo eqüilátero cujo lado mede 5 cm.
2. Escreva os passos de sua construção

Os professores ao tentarem construir esse triângulo partiram de um segmento de cinco centímetros conseguido apenas visualmente após arrastar uma de suas extremidades. Seguiram os mesmos passos para construir um triângulo eqüilátero dados no item 1 da parte A. Após o término da construção solicitamos que movimentassem uma das extremidades do segmento inicial. Com essa movimentação perceberam que o lado perdeu sua medida de 5 cm, pois foi conseguida apenas com o recurso visual. Indicamos, então, que utilizassem uma semi-reta para, em seguida, transferir a medida de 5 cm a partir da *ferramenta* edição numérica do Cabri. Para a realização desta atividade os professores precisariam de um conhecimento mais aprofundado do *software*.

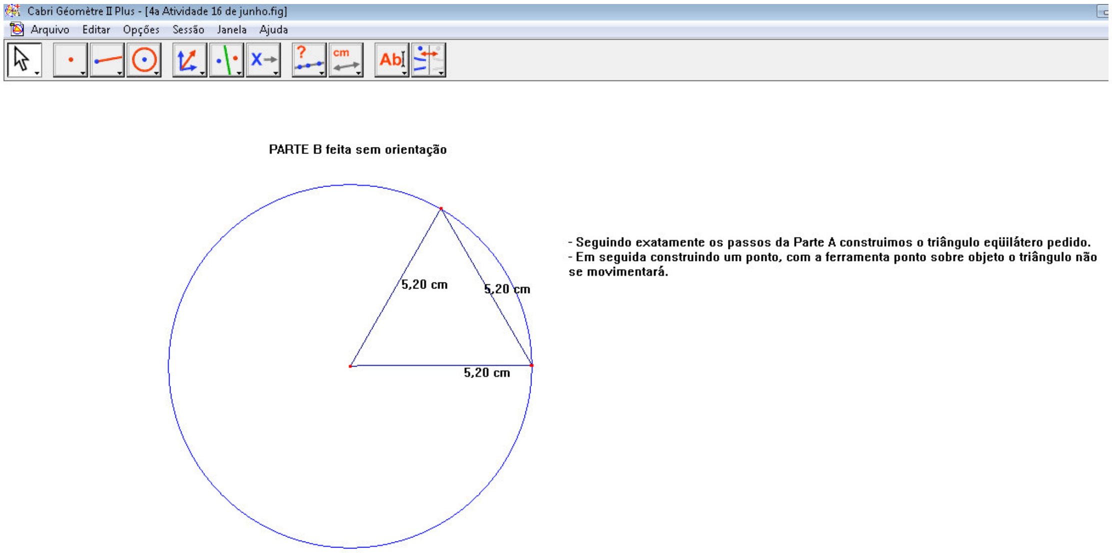


Figura 7 - construção de um triângulo eqüilátero de lado medindo 5 cm sem orientação.
Fonte: professor (R.E.B.)

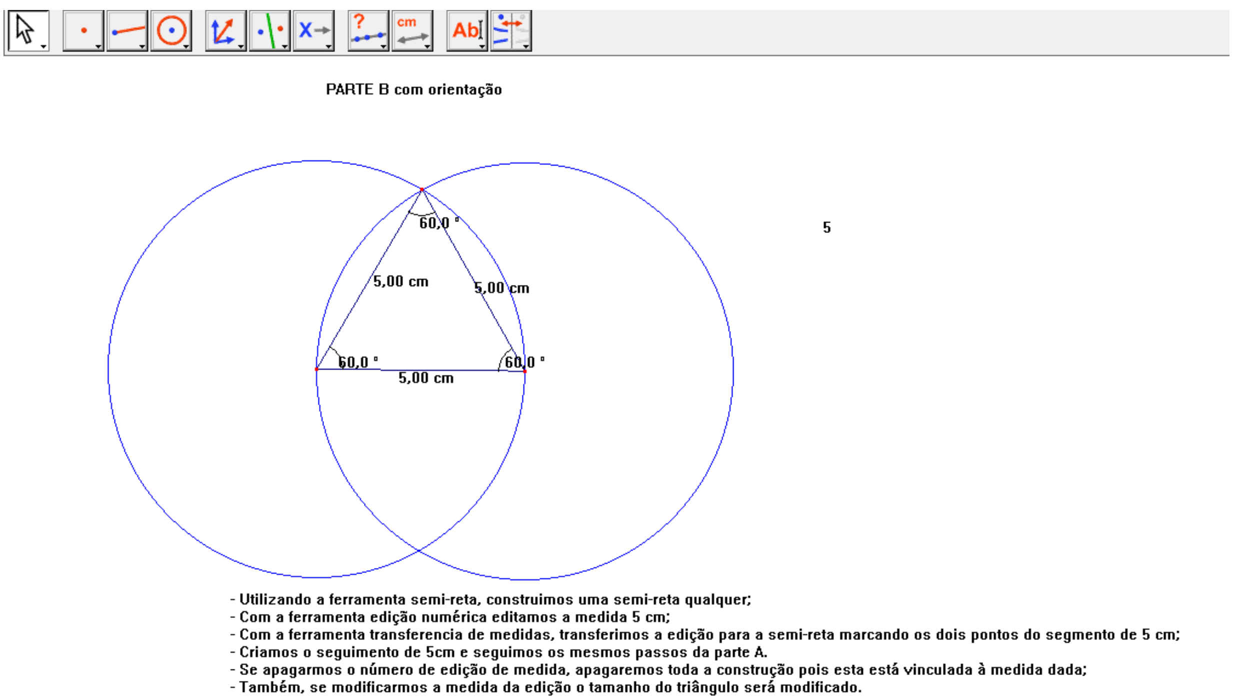


Figura 8 - construção de um triângulo eqüilátero de lado medindo 5 cm após orientação.
Fonte: professor (R.E.B.)

Na segunda parte do Módulo II, apresentamos uma proposta de trabalho em que cada grupo deveria elaborar uma proposta de atividade para qualquer série do ciclo II do ensino fundamental a fim de ser socializada no final do curso.

Essas atividades não serão objetos de análise neste trabalho, servirão apenas como fonte de socialização dos exercícios construídos pelos professores entre o próprio grupo.

Ao final deste módulo fizemos um fechamento das atividades propostas para enfatizar o conceito de geometria dinâmica, de mapa conceitual e o uso das ferramentas do Cabri. Pelas discussões, percebemos que os professores começam a se familiarizar com o *software*, quando adquirem certa autonomia para construir figuras. Observamos também que se apropriaram do conceito de geometria dinâmica. Compreenderam, ainda, que a aplicação de um mapa conceitual pode ser útil para fazer uma avaliação diagnóstica dos conhecimentos prévios dos alunos.

4.3 - Módulo III

4.3.1 - Objetivo do módulo:

Investigar propriedades dos quadriláteros.

4.3.2 – Expectativa

Esperamos que ao final desse módulo os professores estejam familiarizados com as definições e propriedades dos quadriláteros notáveis (paralelogramo, retângulo, losango e quadrado).

Leitura do texto: "*As diferentes definições dos quadriláteros notáveis*" (ANEXO 5).

Após a leitura do texto, solicitamos aos professores que fizessem uma representação em um diagrama de Venn dos conjuntos dos quadriláteros notáveis definidos por Euclides e Hadamard.

Alguns professores acharam a atividade difícil por não estarem acostumados a fazerem representações geométricas utilizando a linguagem dos conjuntos pelo diagrama de Venn.

Euclides definiu quadriláteros da seguinte forma:

> **Quadrado** é uma figura quadrilátera de quatro lados iguais com ângulos retos.
>
> **Oblongo** é uma figura quadrilátera com ângulos retos, mas **que não tem quatro lados iguais**.
>
> **Rombo** é uma figura quadrilátera com quatro lados iguais, mas **não com ângulos retos**.

> **Rombóide** é uma figura quadrilátera que tem lados e ângulos opostos iguais entre si, mas **não tem quatro lados iguais e nem ângulos retos**. BONGIOVANNI (2004).

Em relação ao conjunto dos quadriláteros definidos por Euclides, obtivemos a seguinte representação:

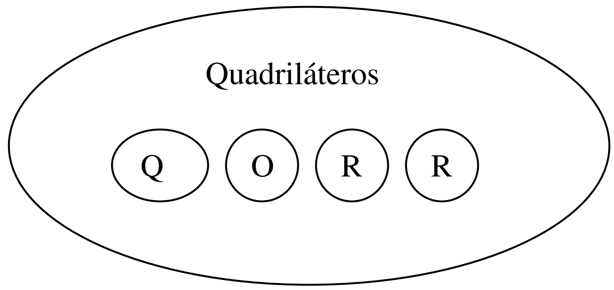


Figura 9 - quadriláteros notáveis de Euclides
Fonte: professor (S.S.T.)

Com esta representação os professores incluíram o quadrado, o oblongo, o rombo e o rombóide na classe dos quadriláteros conforme a definição dada por Euclides.

Quanto ao conjunto dos quadriláteros definidos por Legendre, não fizeram um diagrama pois, segundo eles "todos são iguais aos de Euclides, mudando apenas os nomes".

Não perceberam que houve uma ampliação do conceito, o paralelogramo agora apresenta os lados opostos paralelos.

A seguir as definições dadas por Legendre:

> **Quadrado** tem seus lados iguais e seus ângulos retos.
>
> **Retângulo** tem os ângulos retos **sem ter os lados iguais**.
>
> **Losango** tem os lados iguais **sem que os ângulos sejam retos**.
>
> **Paralelogramo** tem os lados opostos paralelos.
>
> BONGIOVANNI (2004).

As definições dadas por Hadamard provocaram, no início, em alguns professores, uma certa resistência em aceitar a ampliação dada aos conceitos dos quadriláteros, uma vez que suas concepções em relação às definições dos quadriláteros notáveis estão muito ligadas às de Euclides e Legendre.

As definições dos quadriláteros dadas por Hadamard:

> **Quadrado** é um quadrilátero que tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais.

> **Retângulo** é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais, e conseqüentemente retos.
> **Losango** é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais.
> **Paralelogramo** é o quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois. BONGIOVANNI (2004).

De acordo com BONGIOVANNI (2004), há uma dificuldade natural em assimilar as definições mais amplas de Hadamard, que faz corresponder a um único nome (retângulo, por exemplo) objetos matemáticos representados por formas diferentes: retângulo e quadrado.

Dois professores chegaram à representação que consideramos mais adequada para as definições dos quadriláteros dadas por Hadamard:

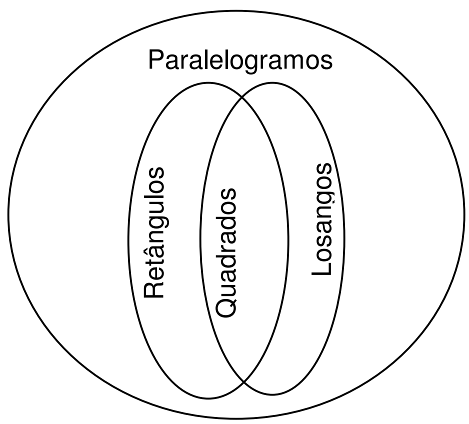


Figura 10 - quadriláteros notáveis definidos por Hadamard
Fonte: professor (R.E.B.)

Esta atividade colocou os professores no terceiro processo de formação da compreensão descrito por Van Hiele. Segundo ele nesse estágio o processo mental sobre as figuras vai se desenvolvendo cada vez mais no campo verbal, a estruturação perceptiva vai se convertendo paulatinamente em estruturação lingüística. (VAN HIELE, 1957, p. 29).

ATIVIDADE 5 – adaptada de *Cabrincando com Geometria (2000),* p. 13

Objetivos:

- Construir um paralelogramo tendo por base suas propriedades geométricas.
- Traçar sua altura.

- Notar a diferença entre um segmento e uma reta, a partir do movimento da figura.

- Construção de um paralelogramo:

1. Construa três pontos quaisquer A, B, C não alinhados e a seguir os segmentos AB e BC.
2. Construa, pelo ponto C, uma reta **r** paralela ao segmento AB.
3. Construa, pelo ponto A, uma reta **s** paralela ao segmento BC.
4. Nomeie a intersecção das retas **r** e **s** de D.
5. Construa os segmentos AD e CD e esconder as duas retas.
6. Medir os segmentos AB, BC, CD e AD;
7. Movimentar um dos pontos A, B ou C e observar as medidas dos quatro lados do paralelogramo;
8. O que você pode concluir?
9. Medir os ângulos internos do paralelogramo;
10. O que se pode observar?

Ao movimentar os lados do paralelogramo os ângulos se alteram, mas os ângulos opostos permanecem sempre com medidas congruentes.

Comentário da professora R.M.V.:

"Os ângulos opostos são congruentes, mesmo ao movimentar-se os pontos, as características do paralelogramo permanecem".

11. Construir os segmentos BD e AC e obter a intersecção M desses segmentos;
12. Medir os segmentos AM, MC, BM e MD;
13. Movimentar um dos pontos A, B ou C. O que você observa?

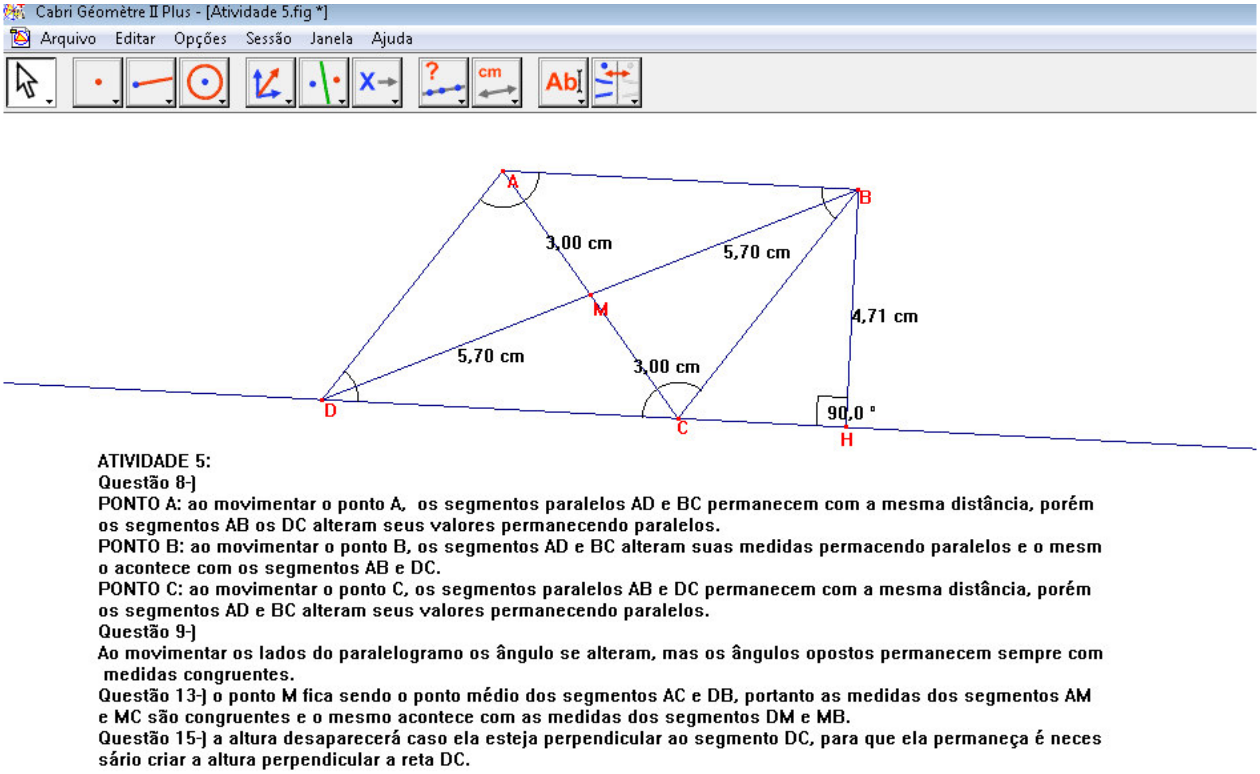


Figura 11 - paralelogramo e a medida de seus lados
Fonte: professores (A.N.G.)

14. Construa a altura BH.
15. Movimente a figura de modo que o ângulo BÂD seja obtuso. A sua altura permanece?
    Obs.: Caso a altura tenha desaparecido você sabe por que? Justifique.

Os professores realizaram essa atividade de certa forma sem maiores dificuldades. No entanto, observamos que alguns deles, ao traçarem a altura do paralelogramo, consideraram como suporte uma das diagonais, isso se deve ao fato de que a construção inicial do paralelogramo estar numa posição fora da habitual, ou seja: com um dos lados paralelo à horizontal. Conforme a representação mudou, mudou também o referencial para traçar a altura desse paralelogramo.

Esta atividade foi realizada, segundo Van Hiele, no nível 2 – de ordenamento e abstração, pois estabeleceram inter-relações entre a figura do paralelogramo e suas partes (lados, ângulos e diagonais). As verificações foram feitas a partir da manipulação da figura por meio do Cabri, assim seu raciocínio se apoiou na representação física da figura.

ATIVIDADE 6 – adaptada de *Cabrincando com Geometria (2000),* p. 13

Objetivos:

- Construir um retângulo preservando suas características.
- Descrever os passos da construção.

- **Construção de um retângulo**

1. Construa um retângulo, sabendo-se que ele é um quadrilátero que tem os quatro ângulos retos.
2. Descreva os passos de sua construção e verifique se a figura é **robusta.**

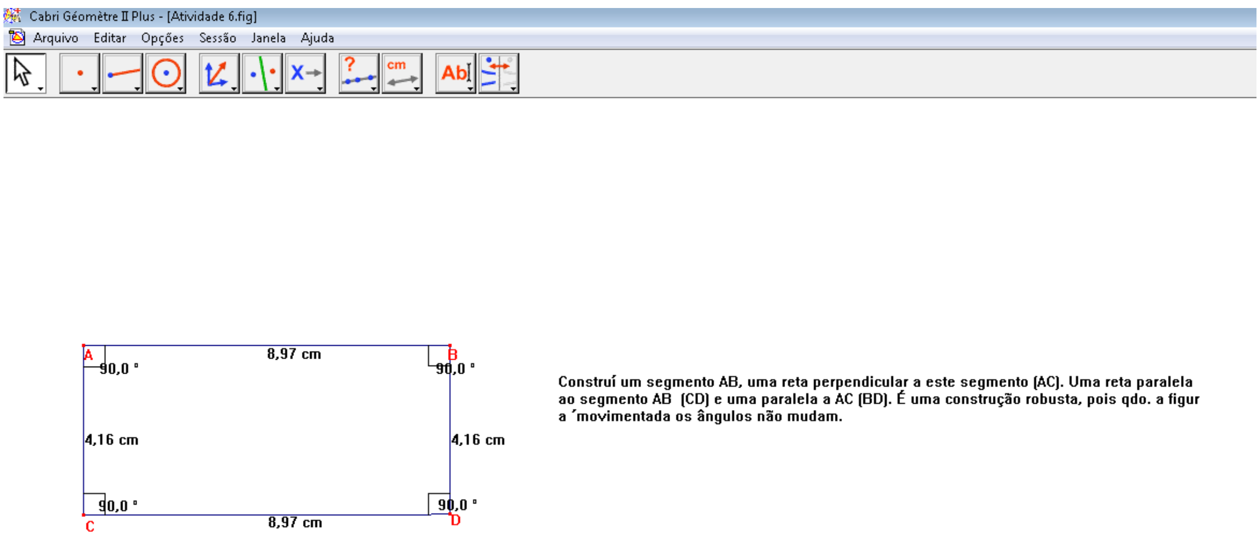


Figura 12 - construção do retângulo
Fonte: professor (S.S.T.)

Esta atividade foi desenvolvida satisfatoriamente por todos. Aqui já dominam com mais propriedade as ferramentas do Cabri, o que torna a realização das atividades com mais autonomia. Essa atividade foi realizada no nível 2 de Van Hiele.

ATIVIDADE 7 – adaptada de *Cabrincando com Geometria (2000),* p. 13.

Objetivos:

- Construir um losango preservando suas características e descrever os passos da construção.

- Construção de um losango:

1. Construa um losango ABCD (que não seja quadrado), sabendo-se que ele é um quadrilátero que tem os quatro lados da mesma medida.
2. Descreva os passos de sua construção e verifique se a figura é robusta.

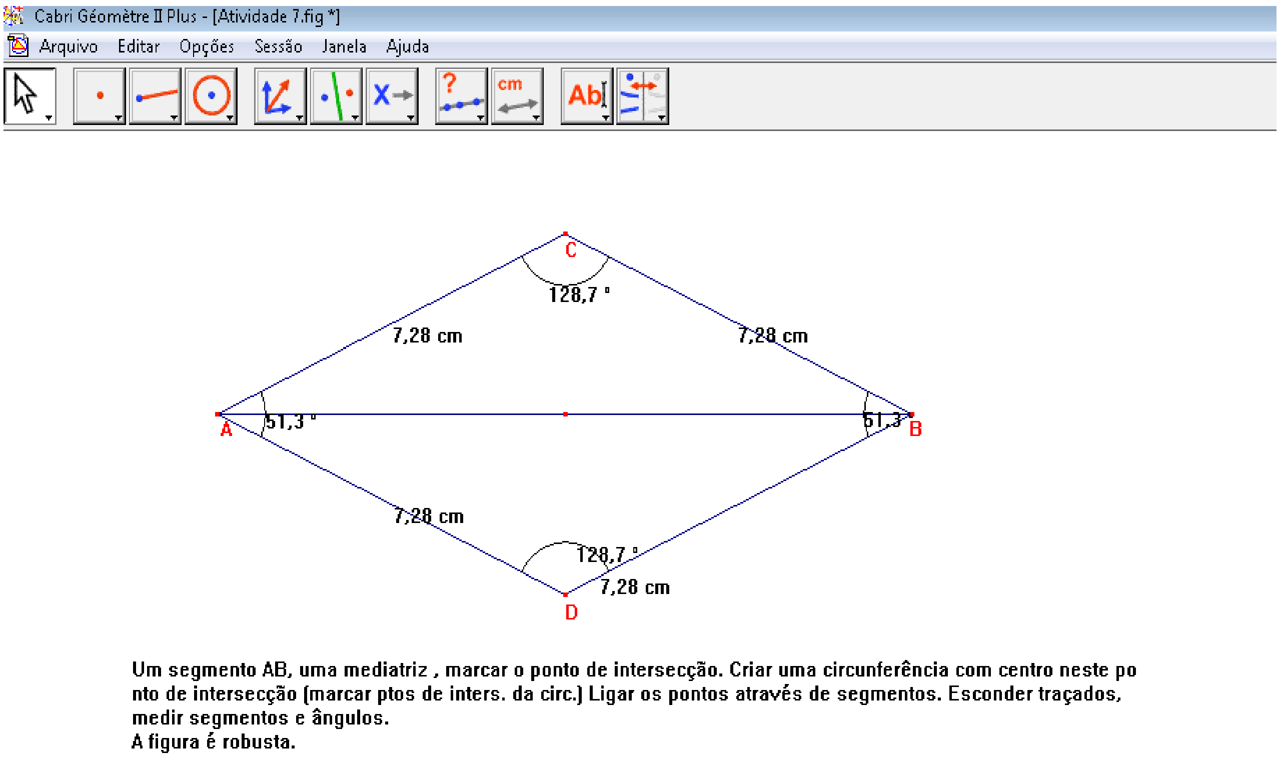


Figura 13 - construção do losango**.**
Fonte: professor (A.N.G.)

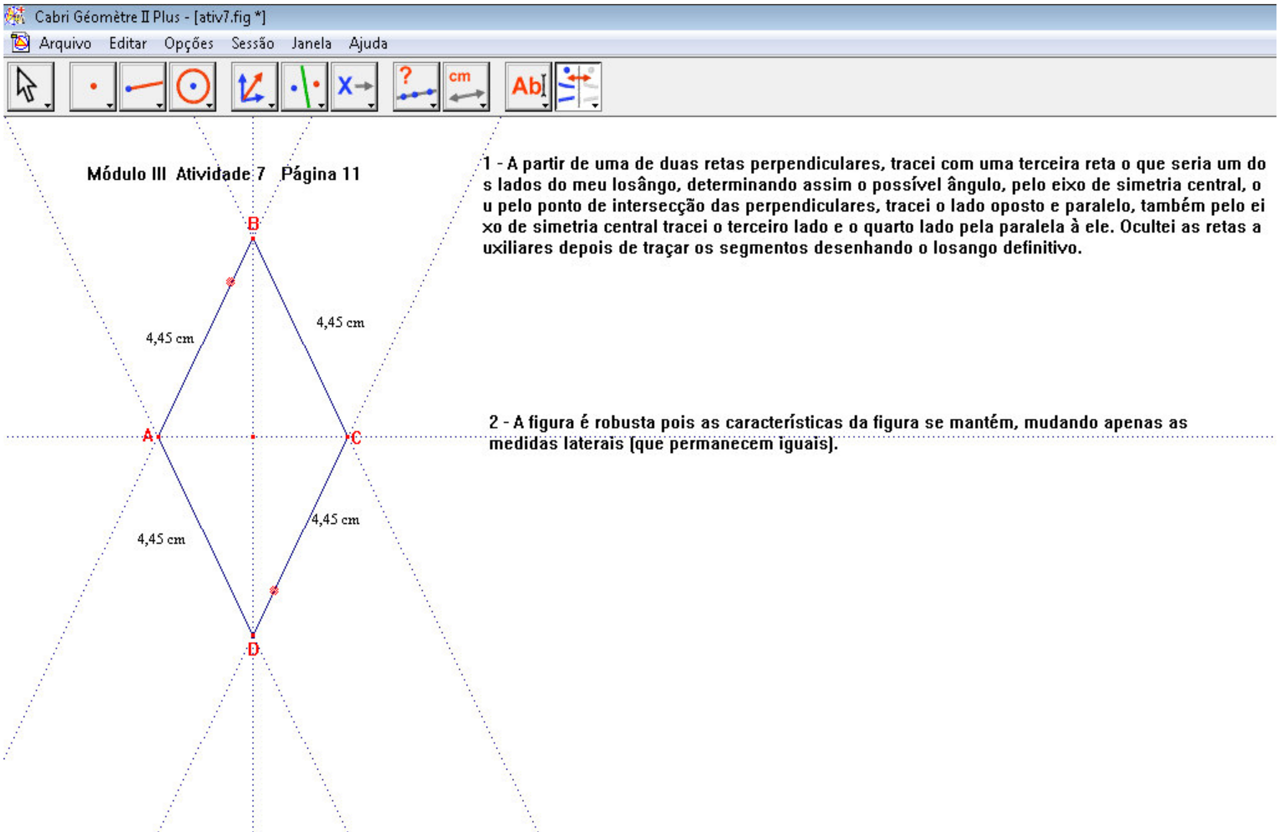


Figura 14 - construção do losango
Fonte: professor (R.M.V.)

Após a construção indicada pela professora R.M.V., a movimentação da figura só foi possível pelo vértice "B", pois os demais estavam "presos" pelas intersecções das retas suportes dos lados do losango.

Em ambas as construções as propriedades das figuras eram conhecidas e não estão separadas, por exemplo: na construção da figura 13 ficou claro que a professora sabia que as diagonais do losango são perpendiculares, pois traçou a mediatriz do segmento que seria uma das diagonais; na construção da figura 14 além do conceito de perpendicular as professoras utilizaram o conceito de simetria central para encontrar os vértices do losango. Assim colocamos a realização dessa atividade também no nível 2 de Van Hiele.

ATIVIDADE 8 – adaptada de *Cabrincando com Geometria (2000),* p. 13.

Objetivo:

- Construir um quadrado preservando suas características e descrever os passos da construção.

- Construção de um quadrado:

1. Construa um quadrado sabendo-se que ele é um quadrilátero que tem os quatro ângulos retos e os quatro lados da mesma medida.
2. Descreva os passos de sua construção e verifique se a figura é robusta.

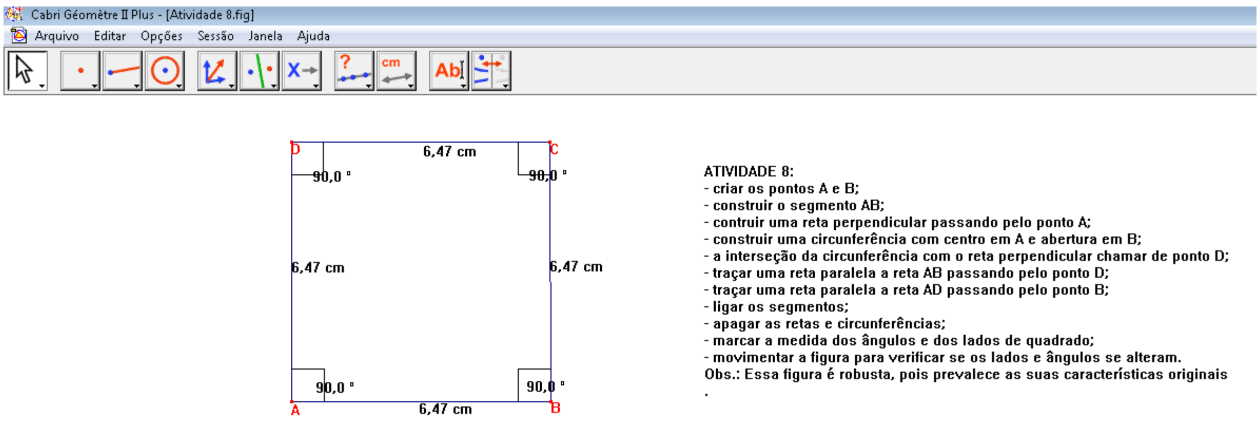


Figura 15 - construção do quadrado
Fonte: professor (A.N.G.)

Essa atividade também foi realizada no Nível 2 de Van Hiele (de ordenamento), os participantes conheciam as propriedades do quadrado e estabeleceram inter-relações entre a figura do quadrado e suas propriedades.

ATIVIDADE 9 – retirada de notas de aula de BONGIOVANNI (2006), p. 38,39.

Objetivo:

- Construir quadriláteros dadas as diagonais e classificar cada um deles quanto às propriedades verificadas.

a) Desenhe um quadrilátero conhecendo suas diagonais, sabendo que elas têm medidas iguais, são perpendiculares entre si e que se interceptam nos respectivos pontos médios. Qual foi o quadrilátero obtido?

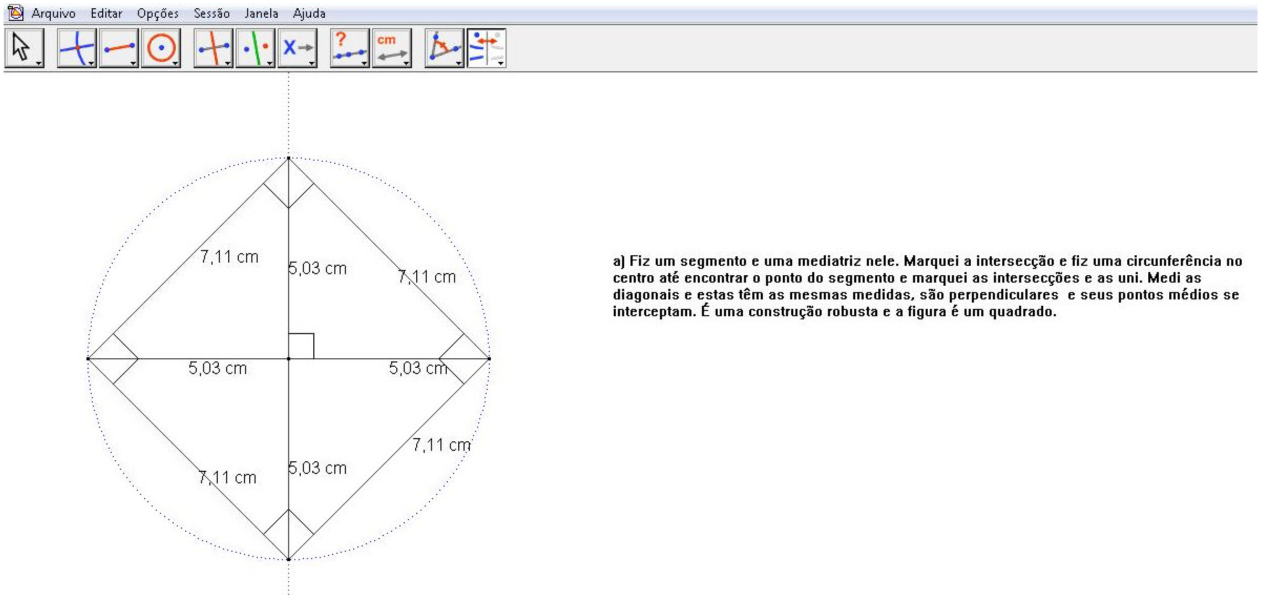


Figura 16 - quadrilátero obtido a partir das diagonais (quadrado).
Fonte: professor (S.S.T.)

b) Desenhe um quadrilátero conhecendo suas diagonais, sabendo que elas têm medidas iguais, não são perpendiculares entre si e que se interceptam nos respectivos pontos médios. Qual foi o quadrilátero obtido?

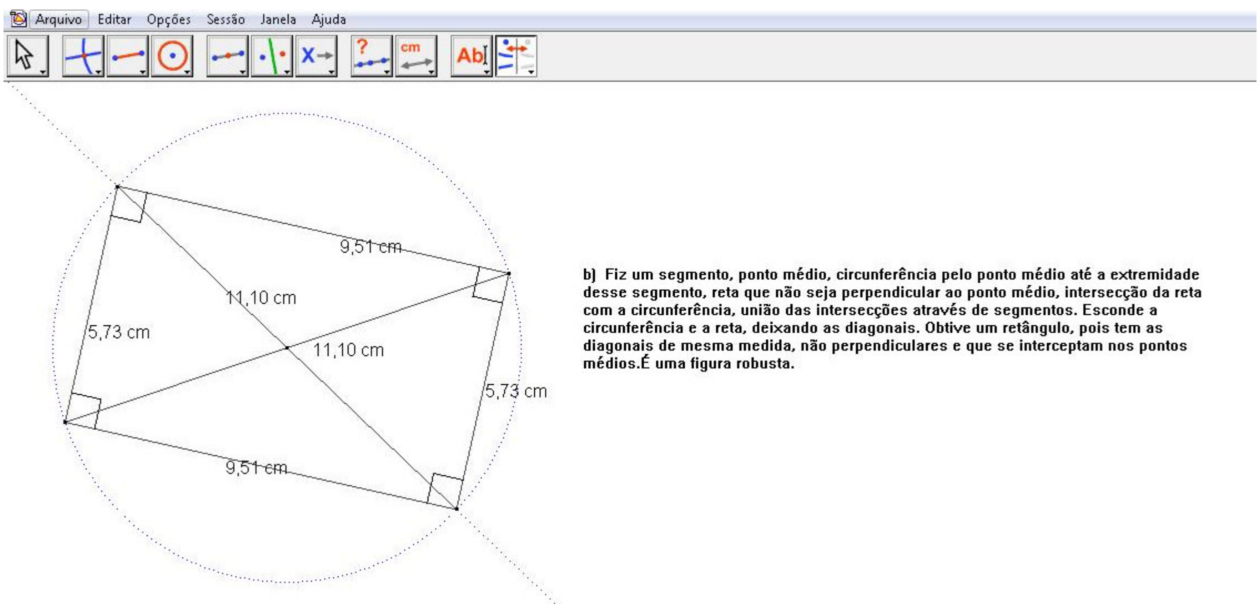


Figura 17 - quadrilátero obtido a partir das diagonais (retângulo).
Fonte: professor (S.S.T.)

c) Desenhe um quadrilátero conhecendo suas diagonais, sabendo que elas não têm medidas iguais, são perpendiculares entre si e se interceptam nos respectivos pontos médios. Qual foi o quadrilátero obtido?

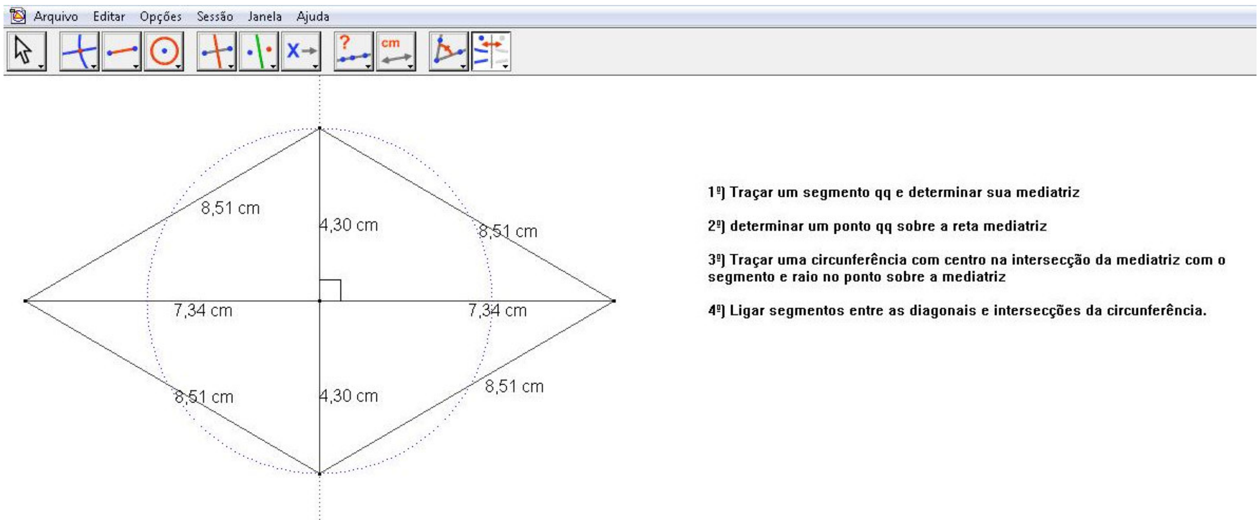


Figura 18 - quadrilátero obtido a partir das diagonais (losango).
Fonte: professor (R.E. B.)

d) Desenhe um quadrilátero conhecendo suas diagonais, sabendo que elas não têm medidas iguais, não são perpendiculares entre si e se interceptam nos respectivos pontos médios. Qual foi o quadrilátero obtido?

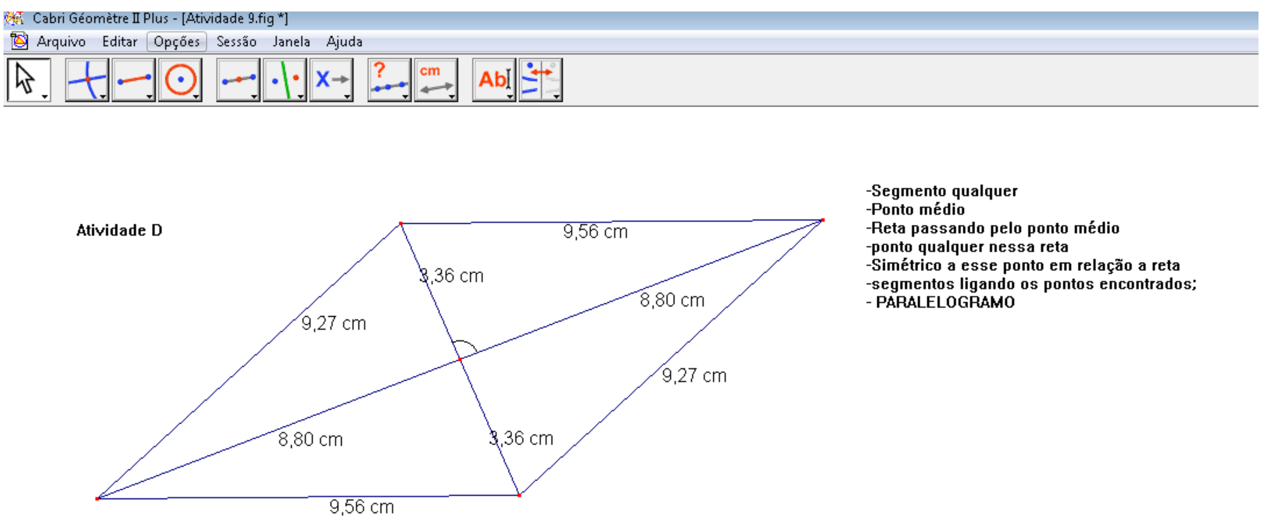


Figura 19 - quadrilátero obtido a partir das diagonais (paralelogramo).
Fonte: professor (R.E.B.)

A professora R.E.B., embora tenha realizado a atividade de forma correta, registrou indevidamente a referência do simétrico ao ponto considerado, a simetria é em relação ao ponto de intersecção do segmento com a reta (simetria central), não em relação à reta como foi registrado.

Com base nos resultados da atividade anterior, registramos as definições dadas pela professora I.S.Q. para os quadriláteros estudados a partir de suas diagonais:

QUADRADO: quadrilátero com diagonais iguais, perpendiculares entre si e se interceptam nos seus respectivos pontos médios.

RETANGULO: quadrilátero com diagonais iguais e se interceptam nos seus pontos médios.

LOSANGO: quadrilátero com diagonais perpendiculares entre si em seus pontos médios.

PARALELOGRAMO: quadrilátero com diagonais que se interceptam nos seus pontos médios.

Nessa atividade os professores começam a estabelecer definições equivalentes a partir das propriedades das diagonais dos quadriláteros. Embora sejam capazes de compreender uma demonstração, não têm a preocupação de provar as propriedades observadas. Por isso classificamos essa atividade no nível 2 de Van Hiele.

As atividades 10 e 11 foram feitas a partir de uma figura pré-construída e gravada num arquivo do Cabri. Os professores deveriam abrir esses arquivos e, inicialmente, sem movimentá-las, descrever as características de cada uma. Após registrar suas observações, movimentar as figuras e comparar essas novas observações com as iniciais.

A este tipo de construção, denominamos **caixa-preta**. As etapas da construção são escondidas para que os alunos tentem descobrir como foi elaborada e, assim, explorarem as propriedades estudadas.

ATIVIDADE 10 – retirada de CAMPOS, JAHN (2002) p. 38

Objetivo:

- Rever as propriedades do paralelogramo e do retângulo.
- Investigar uma relação entre os dois quadriláteros.

Expectativa:

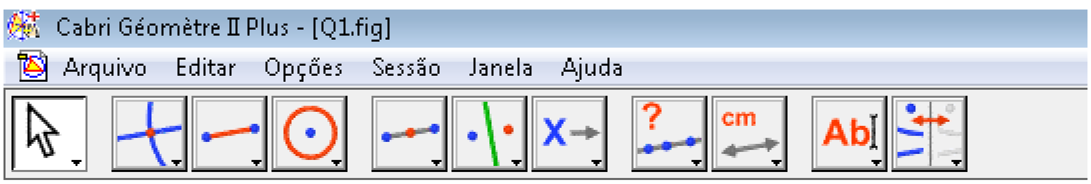
Esperamos que os participantes cheguem a observações com o seguinte sentido:

Pela posição da figura temos a idéia de que o quadrilátero LOVE é um retângulo e o quadrilátero TUCA aparenta ser um losango ou um quadrado. Por isso pedimos inicialmente que descrevessem as características desses quadriláteros sem movimentar a figura.

Após movimentar a figura e observar suas propriedades, verificamos que LOVE é um paralelogramo e TUCA um retângulo. As propriedades desses quadriláteros estudadas anteriormente são revistas durante essa investigação.

Ao relacionar esses quadriláteros e tentar descobrir como a construção foi feita, devem observar que os vértices de TUCA são as intersecções das bissetrizes dos ângulos internos do paralelogramo LOVE. É importante destacar que as intersecções das bissetrizes de um paralelogramo são sempre os vértices de um retângulo. Podemos justificar usando a soma os ângulos internos de um triângulo e as propriedades do paralelogramo.

a) Abra o arquivo Q1.FIG.



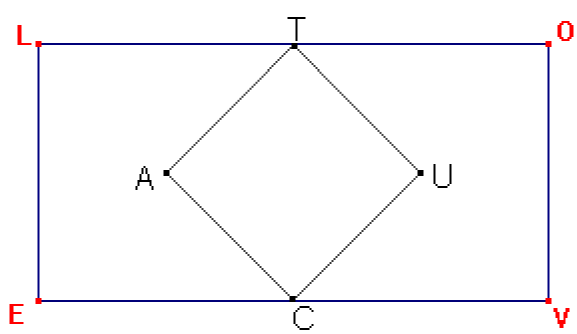


Figura 20 - arquivo Q1.fig
Fonte: CAMPOS, JAHN

b) Sem movimentar a figura escreva as características do quadrilátero LOVE;

Quadrilátero LOVE: Aparentemente formado por dois pares de segmentos paralelos LE e OV (segmentos congruentes entre si); LO e EV (segmentos congruentes entre si), também perpendiculares, formando um retângulo. (Profa. S.S.T.).

c) Sem movimentar a figura escreva as características do quadrilátero TUCA;

Quadrilátero TUCA: Aparentemente formado por quatro segmentos congruentes, perpendiculares entre si, com ângulos retos. (Profa. S.S.T.).

d) Movimente a figura. Investigue as propriedades do quadrilátero LOVE. O que você observa com relação aos lados desse quadrilátero? E quanto aos ângulos?

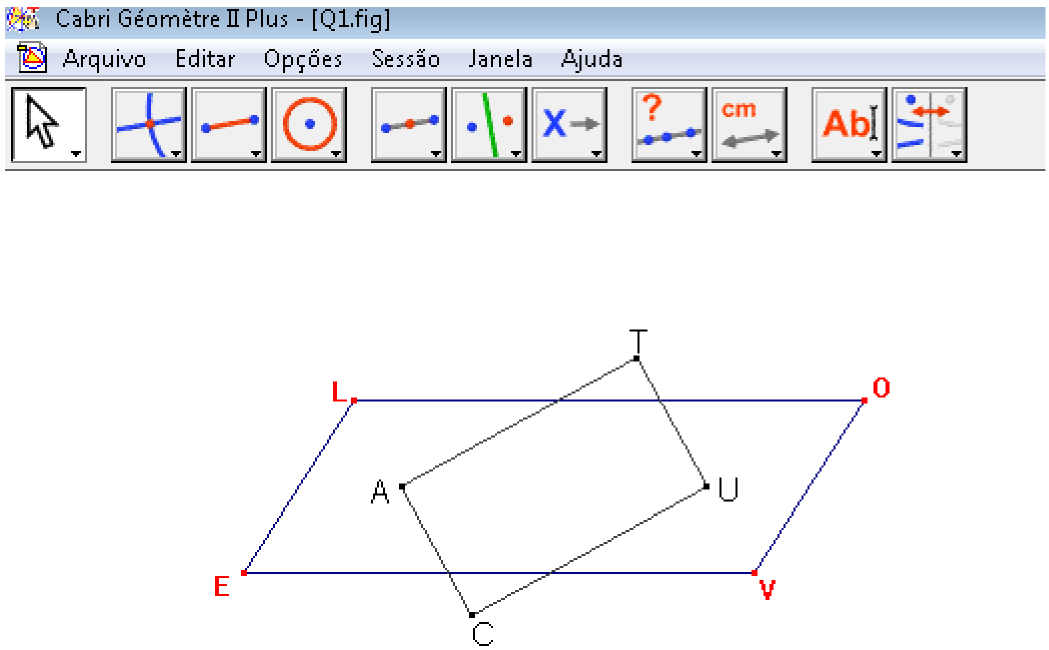


Figura 21 - arquivo Q1.fig após ser movimentado**.**
Fonte: professor (A.N.G.)

e) Investigue as propriedades do quadrilátero TUCA.

f) O que você observa com relação aos lados desse quadrilátero? E quanto aos ângulos?

Os lados opostos são iguais; os ângulos são iguais e correspondentes a 90 graus. (Profa. A.N.G.)

g) Você confirma as respostas dadas nos itens (b) e (c)?

Não, pois ao movimentá-los suas propriedades foram perdidas, ou seja, a figura não é robusta. (Profa. A.N.G.)

Aqui a professora assumiu as propriedades observadas inicialmente sem movimentar a figura. Por isso, diz que a construção não é robusta. A força do visual prevaleceu sobre as propriedades, mesmo após movimentar a figura. Para ela o retângulo observado perdeu suas características ao se transformar num paralelogramo. Não observou que se tratava de um paralelogramo com as característica de um retângulo.

h) Como você classificaria o quadrilátero LOVE?

O quadrilátero LOVE é um paralelogramo, possui segmentos paralelos dois a dois. (Profa. S.S.T.)

i) Como você classificaria o quadrilátero TUCA?

O quadrilátero TUCA é um retângulo, possui os quatro ângulos retos e lados sempre dois a dois iguais. (Profa. S.S.T.).

ATIVIDADE 11 - retirada de CAMPOS, JAHN (2002) p. 44

Objetivo:

- Explorar as propriedades das diagonais nos quadriláteros: trapézio, paralelogramo, retângulo e quadrado.

Expectativa:

Esperamos que os participantes cheguem a observações com o seguinte sentido:

O quadrilátero JOSE é um trapézio; portanto suas diagonais têm como característica se interceptarem. O quadrilátero XICA é um paralelogramo, assim suas diagonais têm como característica se interceptarem no ponto médio. Na posição em que XICA é um retângulo, suas diagonais se interceptam nos pontos médios e são congruentes. Quando XICA é um losango, suas diagonais são perpendiculares, além de se interceptarem nos pontos médios. Na posição em que XICA é um quadrado, suas diagonais satisfazem as propriedades das diagonais do retângulo e do losango ao mesmo tempo.

a) Abra o arquivo Q2.FIG.

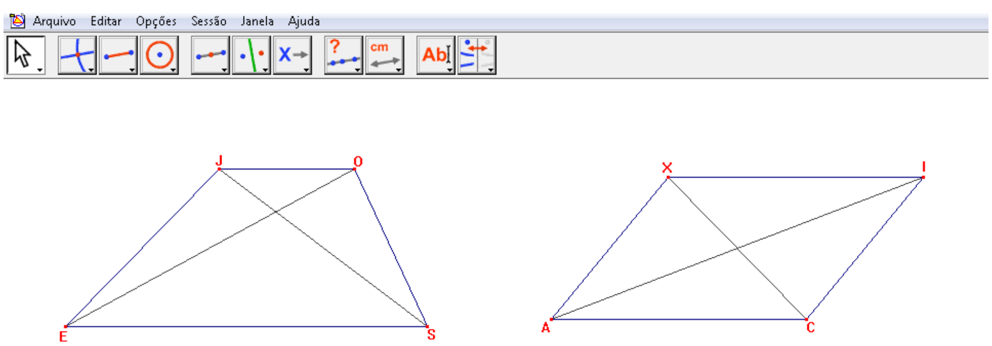


Figura 22 - arquivo Q2.fig
Fonte: CAMPOS, JAHN

b) Movimentando os quadriláteros JOSE e XICA, o que você observa?

JOSE - Segmentos JO e ES são paralelos. Ângulos com medidas diferentes. Diagonais com medidas diferentes.

XICA - Lados opostos paralelos. Ângulos opostos congruentes. M é ponto médio das diagonais XC e AI. (Profa. A.J.A.).

c) Os dois quadriláteros pertencem a uma mesma classe de figuras? Qual classe?

Não, pois JOSE não tem ponto médio em suas diagonais e XICA possui. O que faz com que suas propriedades sejam diferentes. (Profa. M.C.)

d) Meça os ângulos e os lados dos dois quadriláteros.

e) Quais as características das diagonais do quadrilátero JOSE?

JOSÉ: diagonais não têm mesma medida, não se encontram no ponto médio. (Profa. E.L.V.).

f) Quais as características das diagonais do quadrilátero XICA?

XICA: diagonais se encontram no ponto médio. (Profa. E.L.V.).

g) Movimente XICA até que pareça um retângulo. Quais as características das diagonais nesse caso particular?

Têm a mesma medida e se cruzam no ponto médio. (Profa. E.L.V.).

h) Movimente XICA até que pareça um losango. Quais as características das diagonais nesse caso particular?

As diagonais são perpendiculares e se encontram no ponto médio. (Profa. M.C.).

i) Movimente XICA até que pareça um quadrado. Quais as características das diagonais nesse caso particular?

As diagonais se interceptam no ponto médio e formam ângulos de 90 graus. (Profa. M.C.).

Os participantes desenvolveram essa atividade dentro das expectativas iniciais. Até aqui não haviam estudado as propriedades dos trapézios. Por isso, não incluíram os dois quadriláteros na mesma classe de figuras por não considerarem um paralelogramo como um caso particular do trapézio.

As propriedades e a definição de trapézio serão tratadas nas próximas atividades.

Ao final deste módulo fizemos a sistematização das atividades para que os professores institucionalizem as definições e as propriedades dos quadriláteros notáveis (paralelogramo, retângulo, losango e quadrado).

4.4 - Módulo IV

4.4.1 - Objetivo do módulo:

- Investigar e validar algumas propriedades dos quadriláteros.

4.4.2 - Expectativa

Esperamos que ao final desse módulo os professores construam uma definição para trapézio, façam conjecturas sobre suas observações, justifiquem propriedades dos quadriláteros e escrevam essas propriedades na forma: “Se **H** então **T**”. Nesse caso, **H** chama-se hipótese e **T** chama-se tese.

ATIVIDADE 12 – adaptada de MAIOLI (2002 p. 88)

Esta atividade tem como objetivo fazer com que os professores participantes discutam e busquem uma definição para trapézio a partir das propriedades observadas na figura construída. Esperamos que cheguem a pelo menos duas definições: uma que considera o paralelogramo como um caso particular do trapézio, “quadrilátero que possui dois lados paralelos” e outra que particulariza o trapézio, “quadrilátero que possui **apenas** dois lados paralelos”.

Essa discussão tende a dividir opiniões. Alguns professores podem não aceitar incluir o paralelogramo como um caso particular dos trapézios, pois trazem gravados os modelos de trapézios apresentados nos livros, isto é, se atêm mais ao figural do que nas definições e nas propriedades do quadrilátero.

Para a realização dessas atividades os participantes precisam conhecer as propriedades de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal e os casos de congruência de triângulos.

Objetivo:

- Investigar propriedades dos quadriláteros.

- Construção de um quadrilátero de lados paralelos:

a) Construir um quadrilátero LMNO cujos lados LM e NO são paralelos;

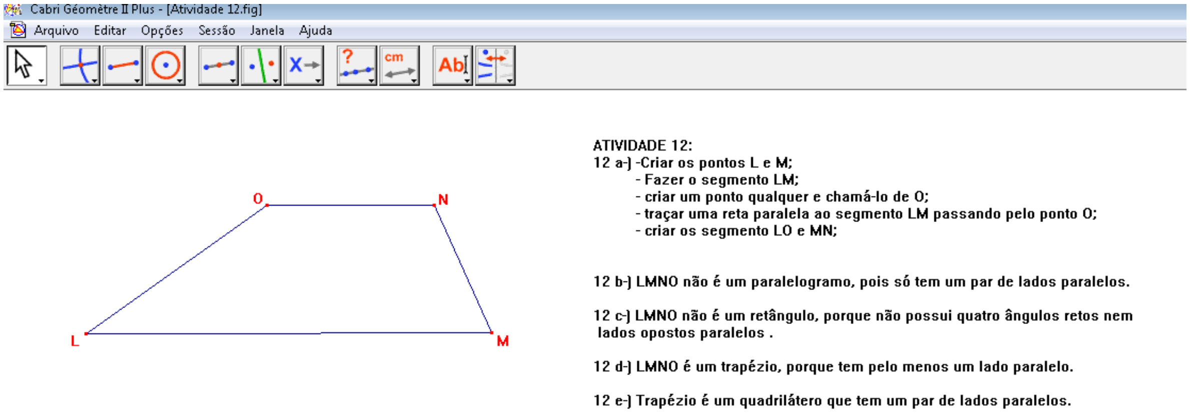


Figura 23 - quadrilátero LMNO
Fonte: professor (S.S.T.)

b) Podemos afirmar que LMNO é um paralelogramo? Por quê?

Não podemos afirmar que seja um paralelogramo, pois possui apenas um par de lados paralelos. (Profa. S.S.T.).

c) Podemos afirmar que LMNO é um retângulo? Por quê?

Não, pois seus ângulos não são retos, e os seus lados opostos não são paralelos. (Profa. R.)

d) Podemos afirmar que LMNO é um trapézio? Por quê?

Apresentaremos alguns registros feitos a partir das observações da figura construída.

i. *Podemos, pois um trapézio tem dois lados paralelos e dois não paralelos que é o que observamos na figura proposta. (Profa. R.E.B.)*

ii. *Sim, pois a figura possui dois lados paralelos. (Profa. A.J.A.)*

iii. *LMNO é um trapézio, porque tem pelo menos um lado paralelo. (Profa. A.N.G.).*

iv. *Sim, pois LM e NO são paralelos. (Profa. E.L.V.)*

v. *Sim é um trapézio, pois ele não é um paralelogramo mas é um quadrilátero. (Profa. R.M.V.).*

vi. *A figura pode ser um trapézio, porque possui um par de lados paralelos. (Profa. S.S.T.).*

Os professores aqui já começam a construir uma definição para trapézio. A professora. R.M.V. associa o fato de ser trapézio com não ser paralelogramo, mas um quadrilátero.

A partir dessas observações houve grande discussão acerca das definições do trapézio, alguns incluíram os demais quadriláteros estudados como sendo casos particulares de trapézios, outros resistiram muito em aceitar uma definição mais abrangente para trapézio.

e) Como você define um trapézio?

Alguns professores definiram trapézio da seguinte maneira:

i. *Trapézio é o quadrilátero em que dois lados são paralelos. Os lados paralelos são as bases, sendo uma a base maior e outra a base menor. (Profa. S.S.T.).*

ii. *Quadrilátero com dois lados opostos paralelos e dois lados opostos não paralelos.*

iii. *Quadrilátero de dois lados paralelos. (Profa. R.M.V.).*

iv. *Trapézio é um quadrilátero que tem um par de lados paralelos. (Profa. M.C.).*

v. *Trapézio é um quadrilátero com um par de lados paralelos. (Profa. I.S.Q.).*

As definições registradas pelos professores foram elaboradas a partir das observações da figura LMNO, esta atividade está no nível 2 de Van Hiele.

Concordamos com MAIOLI (2002), quando diz que não há vantagem nem desvantagem em adotar uma ou outra definição para trapézio, por isso não há consenso entre os autores em adotar uma ou outra definição (p. 87).

ATIVIDADE 13 - adaptada de MAIOLI (2002 p. 96).

Objetivo:

- Construir, definir, identificar e enunciar propriedades de um trapézio isósceles.

Vamos considerar a seguinte definição para trapézio:

Trapézio é um quadrilátero que tem pelo menos um par de lados paralelos.

Parte A

a) Construir um trapézio qualquer de bases AB e CD;

b) Medir os ângulos internos desse trapézio $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$. Qual o valor das somas das medidas dos ângulos $\hat{A} + \hat{D}$ e de $\hat{B} + \hat{C}$?

c) O que você pode observar em relação a essas medidas?

d) Você acredita que esse resultado valha para qualquer trapézio? Por quê?

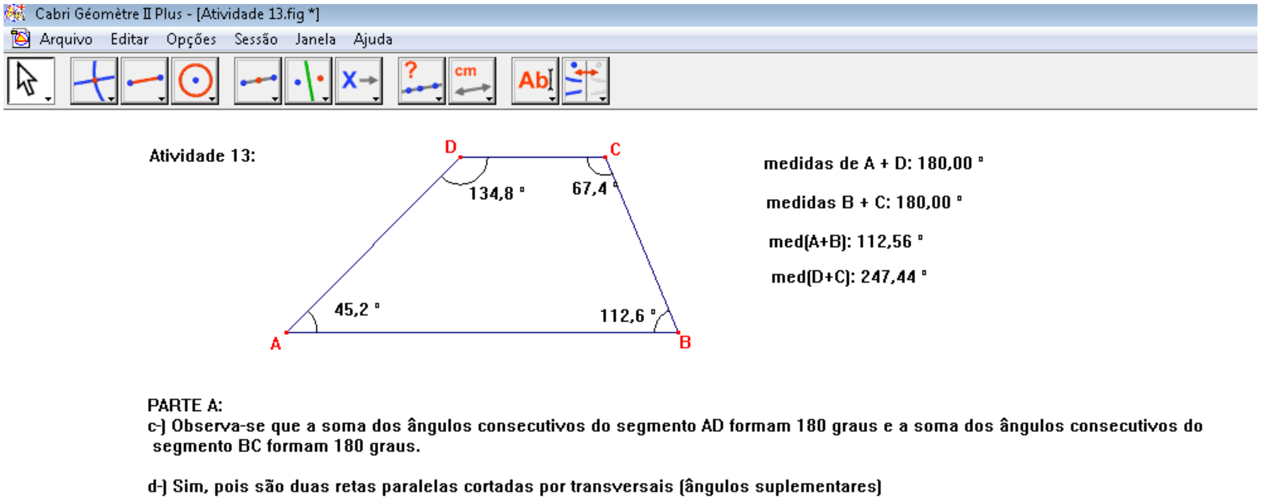


Figura 24 - trapézio qualquer
Fonte: professor (A.J.A.)

Parte B

a) Construa e defina um trapézio isósceles ABCD de bases AB (menor) e CD (maior).

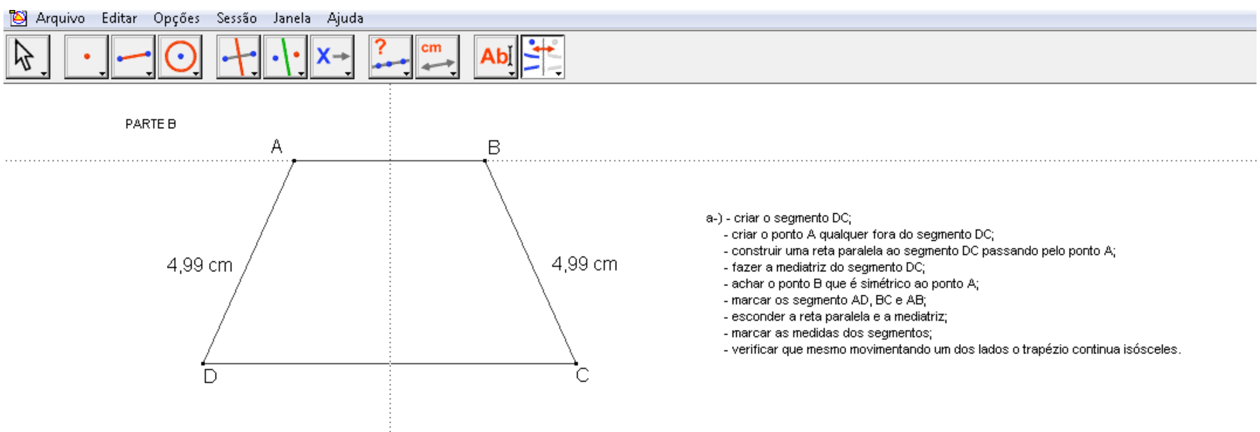


Figura 25 - trapézio isósceles
Fonte: professor (A.JA.)

A professora não registrou qual o eixo de simetria utilizou para encontrar o ponto B, nem deu uma definição para trapézio.

Definição de trapézio isósceles dada pela professora A.J.A.:

TRAPÉZIO ISÓSCELES *: aquele que os lados não paralelos são congruentes.*

Esta definição é aceita sem maiores questionamentos, pois se entende que as bases do trapézio são os lados paralelos. A definição que não inclui o paralelogramo como um caso particular do trapézio, ou seja: um trapézio tem **apenas** um par de lados paralelos, é aceita com mais naturalidade. No entanto, esses lados não paralelos poderiam ser uma das bases e um dos outros lados, por exemplo: AB e AD que não são paralelos, mas poderiam ser congruentes. Diante disso, a definição apresentada careceria de uma complementação para dirimir essa dúvida. Assim, poderíamos chegar a uma definição de trapézio isósceles no seguinte sentido:

Considere um trapézio que possui apenas dois lados paralelos que são as bases. Se os outros dois lados são congruentes, o trapézio é isósceles.

Podemos recorrer ainda que um trapézio isósceles pode ser obtido fazendo um corte paralelo à base de um triângulo isósceles.

b) Construir as perpendiculares às bases pelos vértices A e B da base menor, obtendo os pontos A’ e B’ na base maior CD.

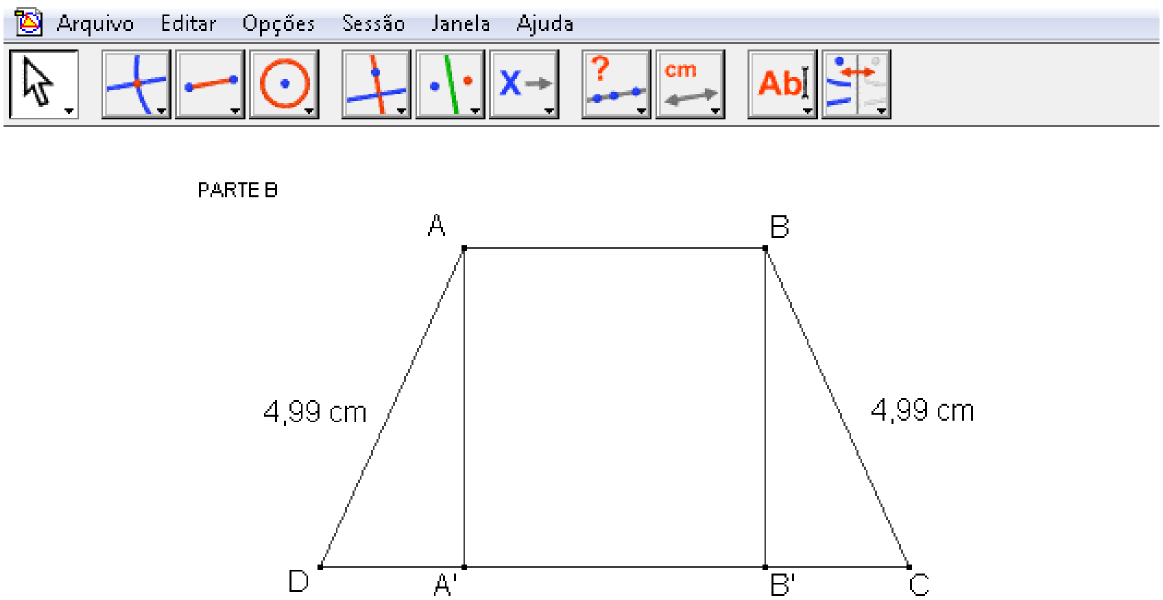


Figura 26 - altura do trapézio
Fonte: professor (R.E.B.)

i. AA’ = BB’? Por quê?

Sim, pois se trata da distância entre as bases paralelas. (Profa. R.E.B.).

ii. Os triângulos AA’D e BB’C são congruentes? Por quê?

Sim caso LAL. (Profa. I.S.Q.)

A professora, como os demais, não informou quais lados e qual ângulo são congruentes para justificar o caso de congruência apontado.

iii. As medidas dos ângulos A e B são iguais? Por quê?

Sim, por congruência de triângulos caso LAL.

- o triângulo ABC é congruente ao ABD;

- lado BC é igual ao lado AD;

- ângulo $\hat{A}$ é congruente ao $\hat{B}$;

- lado AB tem nos dois triângulos. (Profa. A.N.G.).

Esta atividade foi desenvolvida usando o raciocínio lógico formal, embora a linguagem esteja aquém do esperado para esse nível, entendemos que estão na passagem para o nível 3 (de dedução), proposto por Van Hiele.

c) Construir as diagonais AC e BD do trapézio ABCD.

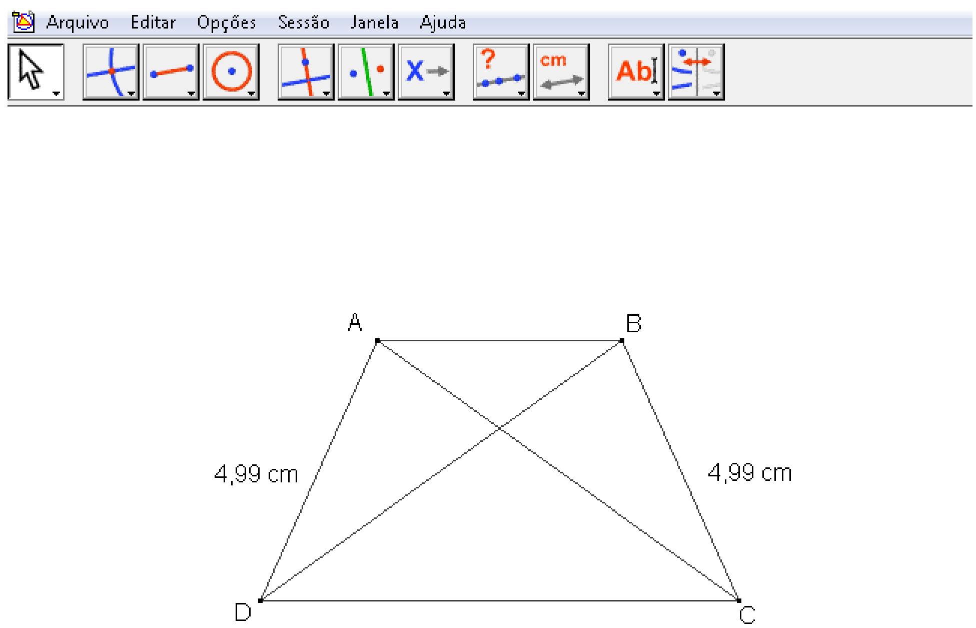


Figura 27 - diagonais do trapézio
Fonte: professor (S.S.T.)

AC = BD? Por quê?

As diagonais AC e BD são iguais, porque dividem em dois triângulos congruentes: LAL. (Profa. S.S.T.).

d) Escreva um enunciado para as propriedades que você observou.

Em um trapézio isósceles as diagonais e as medidas dos ângulos da mesma base são congruentes. (Profa. S.S.T.).

Até agora, essas conclusões são apenas provas empíricas, ou seja: justificativas feitas a partir de visualização das figuras.

Como provar essas justificativas de um modo mais formal? Para isso precisamos demonstrar um teorema.

Teorema *é uma propriedade matemática verdadeira, mas que precisa ser demonstrada. Uma vez demonstrado, o teorema pode se utilizado como ferramenta de resoluções de problemas em outras situações.*

Todo teorema pode ser escrito na forma: se **H** então **T**. Nesse caso, **H** chama-se **hipótese** e **T** chama-se **tese.**

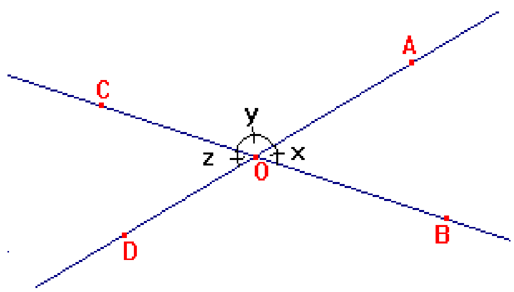
Teorema 1:

Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então suas medidas são iguais.

Hipótese: Dois ângulos são opostos pelo vértice.

Tese: Suas medidas são iguais.

Demonstração:



Considere duas retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ que se interceptam no ponto O. Chamaremos de opostos pelo vértice (o.p.v.) os ângulos AÔB e CÔD.

Sejam x, y e z as medidas dos ângulos AÔB, AÔC e CÔD, respectivamente. Teremos:

$x + y = 180º$ e $y + z = 180º$.

Então $x + y = y + z$, daí decorre que $x = z$.

Por hipótese, **x** é o.p.v. a **z.**

Logo **AÔB = CÔD.**

Figura 28 - ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.).
Fonte: autor

Teorema 2:

Num quadrilátero ABCD, se o lado AB é paralelo ao lado CD, então as somas das medidas dos ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ é igual à soma das medidas dos ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Além disso, essa soma é 180°.

Identifique nesse teorema a hipótese e a tese.

Hipótese: *ABCD é um quadrilátero* e *AB é paralelo à CD.*

Tese: $\hat{A}+\hat{D}=\hat{B}+\hat{C}=180°$. *(Profa. A.J.A.)*

Utilizando o Cabri como recurso visual, verifique esse teorema. A seguir, faça uma demonstração desse teorema.

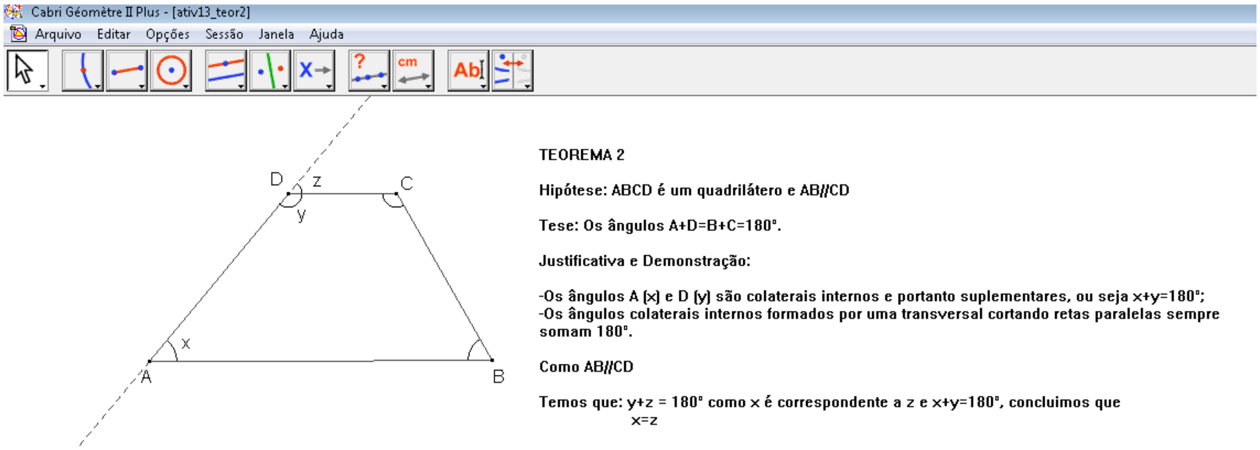


Figura 29 - teorema 2: ângulos consecutivos de um trapézio
Professor (R.E.B.)

Nessa atividade a linguagem está mais específica, foi utilizado o raciocínio lógico dedutivo para estabelecer relações entre as retas paralelas e os ângulos formados por uma transversal. Está no nível 3 de Van Hiele.

No entanto, esperávamos uma justificativa que se aproximasse da apresentada a seguir:

Sejam x e y respectivamente as medidas dos ângulos internos BÂD e $A\hat{D}C$, do quadrilátero ABCD e seja z a medida do ângulo externo $\hat{D}$, obtido pelo prolongamento do lado AD com o lado CD desse quadrilátero.

Como o ângulo interno $A\hat{D}C$ e o ângulo externo $\hat{D}$ são adjacente e suplementares, temos que y+z = 180°.

Por hipótese, AB//CD então os ângulos BÂD e $\hat{D}$ são congruentes (colaterais externos), em decorrência disso, x = z. Mas y+z = 180°. Portanto, x + y = 180°.

Analogamente para os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Logo, $\hat{A}+\hat{D}=\hat{B}+\hat{C}=180°$.

ATIVIDADE 14 – retirada de MAIOLI (2002, p. 109).

Objetivo:

Fazer conjecturas e justificar propriedades entre os ângulos opostos de um paralelogramo.

a) Construa um paralelogramo EFGH. Comparar os seus ângulos opostos. O que você observa?

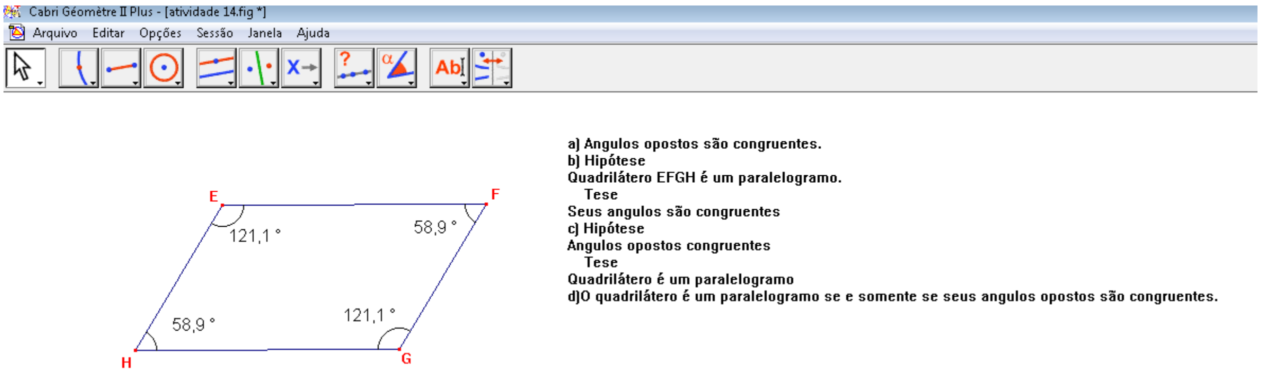


Figura 30 - ângulos do paralelogramo
Fonte: professor (I.S.Q.)

Todos os professores fizeram a mesma observação, com variações apenas no registro, alguns escreveram: “*ângulos opostos congruentes*”; outros, *“ângulos opostos iguais”*.

b) Enuncie os resultados observados no item (a) e dê uma justificativa para esse enunciado.

Se o quadrilátero EFGH é um paralelogramo, então os ângulos opostos são iguais. (Profa. I.S.Q.).

Hipótese: *EFGH é um paralelogramo*.

Tese: *os ângulos apostos são congruentes*.

Não encontramos registros dos professores para justificar esse teorema.

c) Enuncie a recíproca dessa propriedade. Verifique se é verdadeira.

Se os ângulos opostos de um quadrilátero são iguais, então o quadrilátero é um paralelogramo. (Profa. I.S.Q.).

Hipótese*: Os ângulos opostos de um quadrilátero são iguais*

Tese*: o quadrilátero é um paralelogramo*

Os professores não justificaram a propriedade observada.

d) Tente escrever os itens (b) e (c) em um único enunciado. Justifique.

EFGH é um paralelogramo, então os ângulos opostos são congruentes, equivale dizer que como os ângulos opostos são congruentes o polígono é um paralelogramo. (Profa. A.N.G.).

Definição mais adequada: O quadrilátero é um paralelogramo se e somente se seus ângulos opostos forem iguais.

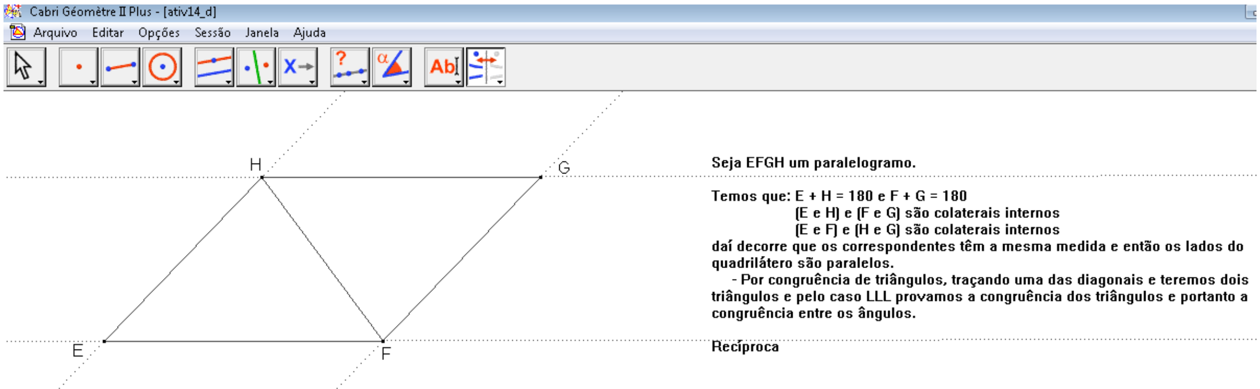


Figura 31 - ângulos consecutivos de um paralelogramo
Fonte: professor (R.E.B.)

A profa. R.E.B. esboçou uma justificativa, mas não chegou a concluí-la, conforme podemos observar na figura 31.

Segundo Van Hiele, quando a validade de uma afirmação é feita por uma dedução matemática e quando faz uma distinção entre uma explicação e sua recíproca, o nível de raciocínio matemático (geométrico) é o de dedução, isto é nível 3.

No Capítulo V apresentaremos uma sugestão de justificativa para cada propriedade observada e enunciada.

ATIVIDADE 15 – adaptada de notas de aula, BONGIOVANNI (2006, p. 33)

Objetivo:

- Identificar e enunciar a propriedade do quadrilátero inscrito numa circunferência.

1. Construa uma circunferência de centro **O**.
2. Coloque quatro pontos sobre a circunferência (no sentido horário) e a seguir obtenha o quadrilátero ABCD.
3. Meça dois ângulos opostos desse quadrilátero.
4. Movimente um dos vértices e anote suas observações.

Ao movimentar um dos vértices do quadrilátero inscrito na circunferência os valores dos ângulos se alteram.

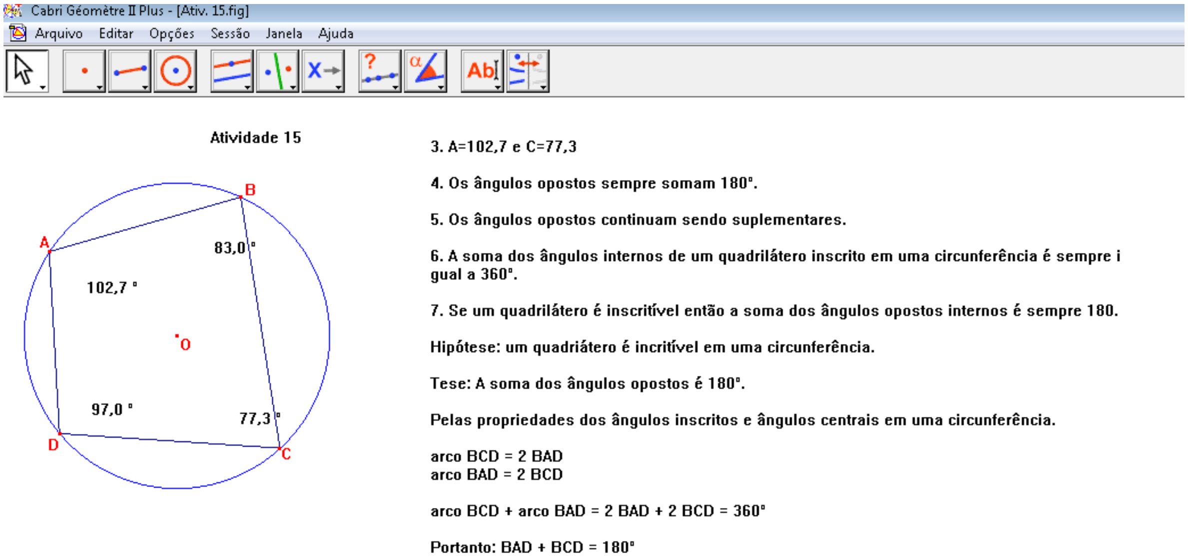


Figura 32 - ângulos opostos do quadrilátero inscrito
Fonte: professor (R.E.B.)

5. Relacione as medidas desses ângulos.

A soma dos ângulos opostos do quadrilátero é igual a 180°.

6. Justifique sua resposta.

Justificativa dada pela profa. A.N.G.:

- O arco DCB é igual a 2 vezes o ângulo $\hat{A}$

- O arco DAB é igual a 2 vezes o ângulo $\hat{C}$

- A circunferência toda é igual a 360°

- *então o arco DCB + DAB = 360°*
- *substituindo o arco DCB por $2\hat{A}$ e o arco DAB por $2\hat{C}$*
- *temos: $2\hat{A}+2\hat{C}=360°$*
- *colocando o 2 em evidência: $2(\hat{A}+\hat{C}) = 360°$*

- multiplicando ambos os lados por 1/2:

$$\hat{A}+\hat{C} = 180°$$

Essa atividade caracteriza uma propriedade geométrica que costuma ser chamada de **teorema do quadrilátero inscritível.** Tente enunciar esse teorema.

Todo quadrilátero inscrito na circunferência tem ângulos opostos suplementares. (Profa. E.L.V.).

Os professores ao desenvolverem esta atividade estavam no nível 3 (de dedução) de Van Hiele. Embora, por força de linguagem, confundem arcos com ângulos.

ATIVIDADE 16 – elaboração nossa a partir de SERRÃO (1967, p. 102).

Objetivo:

- Verificar a propriedade do ângulo formado pelas bissetrizes de ângulos consecutivos de um paralelogramo e validar essa conjectura.

1. Construa um paralelogramo ABCD.
2. Trace as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$.
3. Marque a intersecção dessas bissetrizes e nomeie de M.
4. Meça os ângulos internos do triângulo AMD.
5. Movimente os vértices A, B C ou D.
6. Anote suas observações e conjecturas.

   Movimentando-se os vértices notamos que o ângulo formado pelas bissetrizes se mantém igual a 90°. As bissetrizes de dois ângulos consecutivos são perpendiculares. (Profa. A.J.A.)

7. Faça uma validação para suas conjecturas.

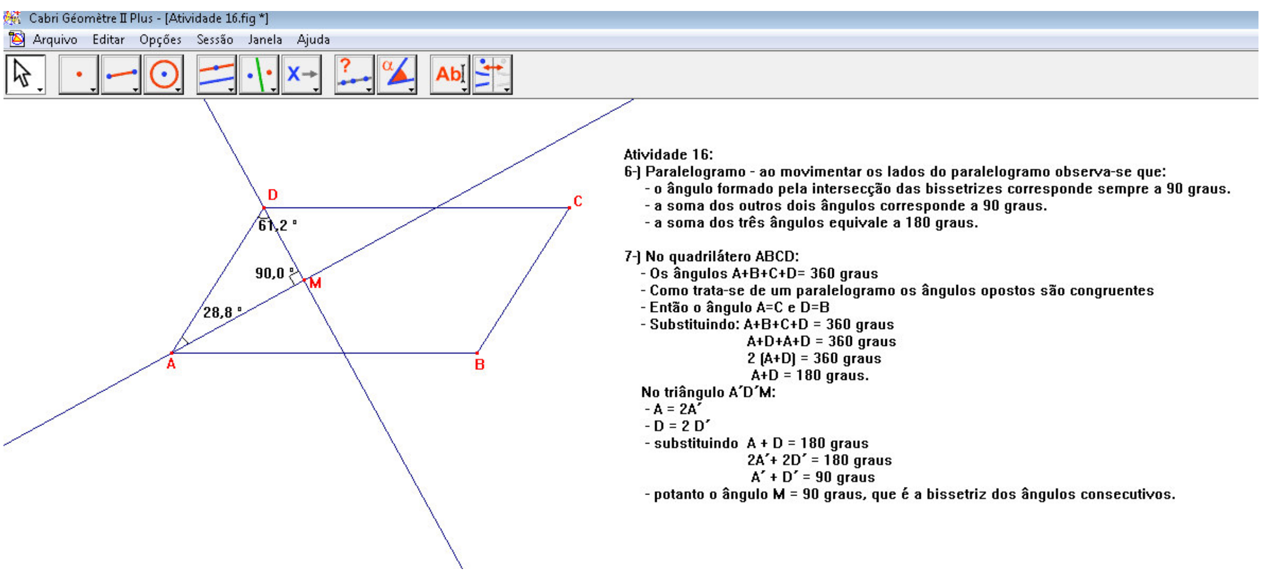


Figura 33 - ângulo formado pelas bissetrizes de ângulos consecutivos de um paralelogramo
Fonte: professor (A.N.G.)

Embora a simbologia utilizada esteja um pouco confusa (não indicou quais são os ângulos A' e D'), o raciocínio lógico e as propriedades utilizadas permitiram a demonstração da propriedade observada na construção conforme figura 33.

ATIVIDADE 17 – elaboração nossa a partir de SERRÃO, (1967, p. 102).

Objetivo:

- Verificar a propriedade do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos opostos de um paralelogramo e validar sua conjectura.

1. Construa um paralelogramo ABCD.
2. Trace as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$.
3. Movimente um dos vértices e anote suas observações.
4. Que posições assumem as retas das bissetrizes uma em relação à outra?

   Bissetrizes de lados opostos são paralelas entre si.(Profa. S.S.T.)

5. Valide sua conjectura.

   Não encontramos registros dos professores para validação da propriedade observada.

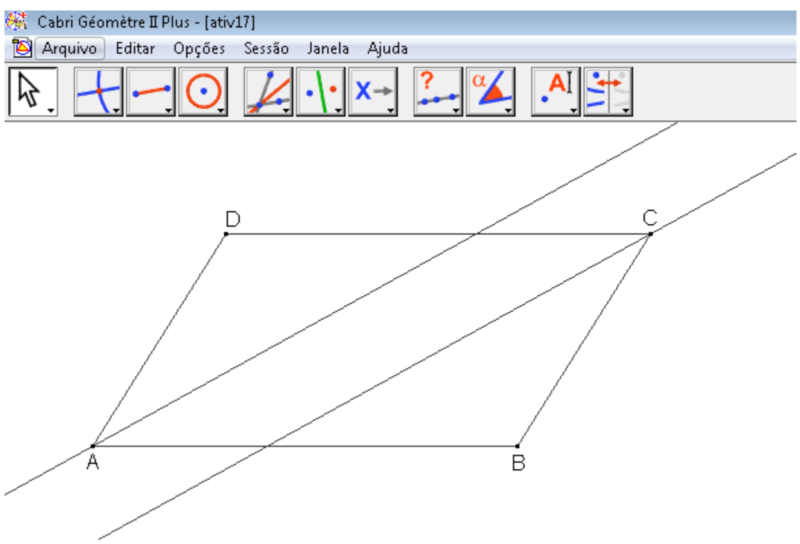


Figura 34 - posição de paralelas de ângulos opostos de um paralelogramo
Fonte: professor (S.S.T.)

Nas discussões para fechar este módulo, notamos que os professores já estavam familiarizados com a linguagem para enunciar propriedades na forma: "Se **H** então **T**". Em que, **H** chama-se hipótese e **T** chama-se tese. Com relação à definição de trapézio, uma professora, embora afirmasse que tenha entendido, não concordava em colocar o paralelogramo como um caso particular do trapézio, por que sempre trabalhou com a definição que um trapézio possui apenas dois lados paralelos.

Interferimos dizendo que não se trata de uma definição ser certa e a outra errada, mas que a utilização de uma ou outra, depende somente do que será estudado. É preciso, no entanto, deixar claro qual definição será adotada para a situação que está sendo estudada.

As justificativas foram feitas oralmente pelo grupo.

4.5 - Módulo V

4.5.1 - Objetivo do módulo:

- Investigar e validar algumas propriedades dos quadriláteros.

4.5.2 - Expectativa

Ao final desses módulos esperamos que os professores desenvolvam com autonomia as justificativas para as propriedades verificadas envolvendo os quadriláteros, quanto aos ângulos, aos lados e às diagonais.

ATIVIDADE 18 – elaboração nossa a partir de SERRÃO (1967), p. 103.

Objetivo:

- Identificar e justificar propriedades do paralelogramo.

Expectativa:

Para esta atividade esperamos que os participantes desenvolvam suas justificativas no seguinte sentido:

Inicialmente mostrar que os triângulos retângulos APD e BMC (Fig. 35), são congruentes pelo caso LAA_o: hipotenusas AD e BC de mesma medida, ângulos DAP e MCB congruentes (alternos internos) e os ângulos DPA e BMC retos.

Logo BM é congruente a DP.

Em seguida, mostrar que os segmentos DP e BM são congruentes (mostrado no item a) e paralelos, pois têm como suporte duas perpendiculares à diagonal AC.

Por congruência de triângulos, caso LAL os triângulos DPM e BMP são congruentes. O lado MP é comum aos dois triângulos; os ângulos MPD e PMB são alternos internos portanto, congruentes e assim os lados DP e BM são congruentes. Diante disso, DM é congruente a PB.

Logo, o quadrilátero DMPB é um paralelogramo.

Dos vértices B e D de um paralelogramo traçam-se os segmentos BM e DP perpendiculares, sobre a diagonal AC que une os ângulos agudos.

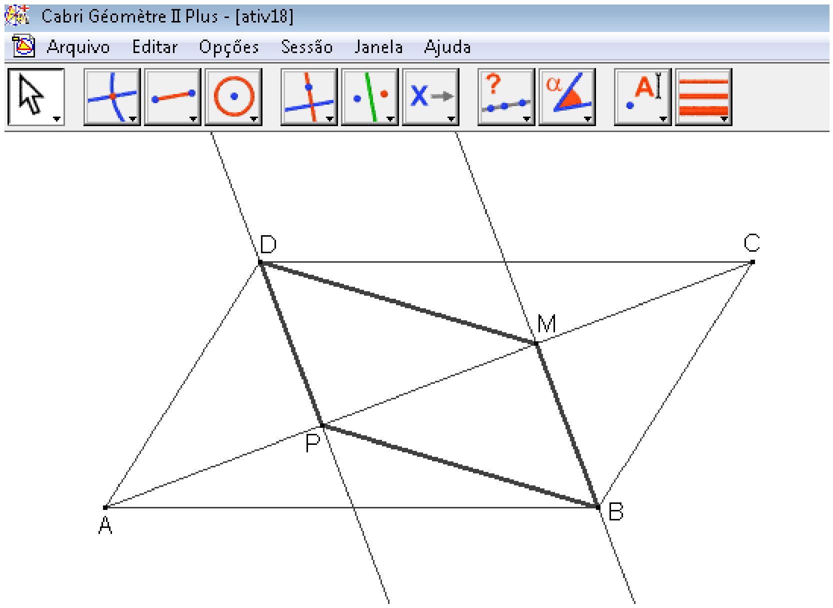


Figura 35 - perpendiculares sobre a diagonal de um paralelogramo
Fonte: professor (A.N.G.)

a) Mostrar que BM = DP.

O triângulo APD é semelhante ao BMC, caso (LAAo) (Profa. A.N.G.)

A professora nesta questão confundiu semelhança com congruência e não citou os lados e os ângulos congruentes nos triângulos mencionados.

AB e DC têm a mesma medida. BM e DP são perpendiculares sobre uma mesma reta, portanto paralelas, então DP = BM. (Profa. M.L.M.).

b) Demonstrar que o quadrilátero DPBM é um paralelogramo.

Possuem lados opostos paralelos e ângulos opostos congruentes. (Profa. M.L.M.)

A professora apenas citou as propriedades do paralelogramo, não fez a demonstração solicitada, conforme expectativa inicial.

ATIVIDADE 19 – elaboração nossa a partir de SERRÃO (1967), p. 104.

Objetivo:

- Observar que as bissetrizes dos ângulos internos de um paralelogramo ABCD se cortam formando um retângulo.

1. Construa um paralelogramo ABCD.
2. Trace as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e $\hat{D}$.
3. Marque a intersecção dessas bissetrizes e nomeie de M, S, R e P.

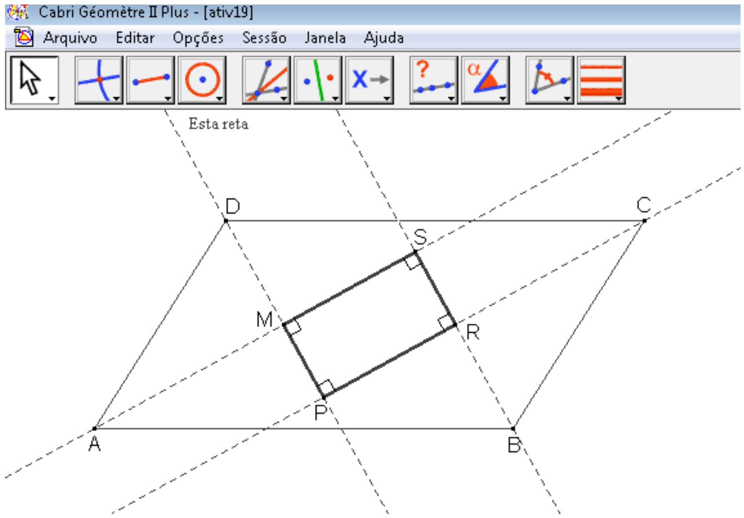


Figura 36 - bissetrizes dos ângulos internos de um paralelogramo
Fonte: professor (A.N.G.)

4. Movimente um dos vértices e registre suas conjecturas.

   Movimentando os vértices a figura MSRP não se altera, os ângulos da figura formada com a intersecção das bissetrizes de um paralelogramo são de 90°. (Profa. I.S.Q.).

5. Qual a natureza do quadrilátero MSRP?

   A natureza do quadrilátero MSRP é um retângulo. (Profa. I.S.Q.).

6. Apresente uma validação para suas conjecturas.

   Como AB é paralela a DC

   $\hat{A}=\hat{A}'$, pois são ângulos correspondentes; sendo assim $\hat{D}+\hat{A}' = 180°$;

   como $\hat{A}=\hat{A}'$ daí decorre que $\hat{D}+\hat{A}=180°$.

   (Profa. A.N.G.).

Faltou especificar na figura 36 qual é o ângulo Â' e concluir que os ângulos formados pela intersecção das bissetrizes são retos.

A validação dessa propriedade poderia ser efetuada conforme sugestão a seguir:

O quadrilátero ABCD é um paralelogramo.

Temos, então que $\hat{A}+\hat{D} = 180°$ ou $\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{D}}{2} = 90°$.

Portanto $\hat{S} = 90°$.

Analogamente, concluímos que as medidas dos ângulos $\hat{M}, \hat{P}, \hat{R}$ são iguais a 90°.

Logo, o quadrilátero MPRS é retângulo.

ATIVIDADE 20 – elaboração nossa a partir de SERRÃO (1967, p. 114).

Objetivo:

- Identificar uma propriedade da diagonal do paralelogramo e validar a conjectura observada.

- Divisão da diagonal de um paralelogramo:

1. Construa o paralelogramo ABCD.
2. Trace a diagonal AC.
3. Marque os pontos médios M e P dos lados AD e BC respectivamente.
4. Trace os segmentos BM e DP.
5. Marque as intersecções E e F de BM e DP com a diagonal AC, respectivamente.
6. Meça os segmentos AE, EF e FC.

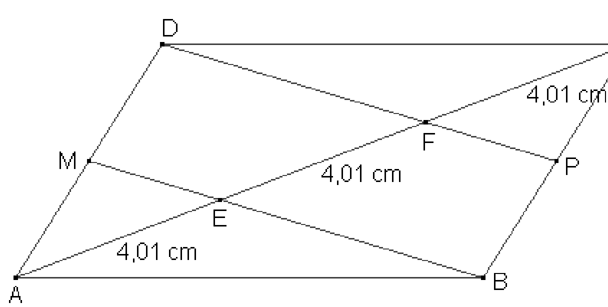


Figura 37 - diagonal dividida em três partes de medidas iguais
Fonte: professor (M.L.M.)

7. Movimente um dos vértices. O que você observou em relação à diagonal AC?

Os segmentos AE, EF, e FC têm as mesmas medidas. A diagonal AC ficou dividida em três partes iguais. (Profa. M.L.M.).

8. Valide sua conjectura.

Não houve registro para da validação desta atividade.

Esperávamos que os professores encaminhassem suas validações no seguinte sentido:

> Temos que BM é paralelo a DP, pois os triângulos AMB e CPD (Fig. 37), são congruentes pelo caso LAL (são congruentes AB e CD, AM e CP e os ângulos BAM e PCD). Logo, DP é congruente a BM. Como BP e MD são congruentes, concluímos que o quadrilátero BPDM é um paralelogramo. Portanto BM//DP.
>
> Sendo AM congruente a MD, teremos os segmentos AE e EF com medidas iguais. Os triângulos AME e ADF são semelhantes cuja razão de semelhança é de um para dois, ou seja: $\frac{1}{2}$. Analogamente para os triângulos CPF e CBE.
>
> Conseqüentemente, os segmentos AE, EF e FC têm as mesmas medidas.

ATIVIDADE 21 – elaboração nossa a partir de SERRÃO (1967, p. 104).

Objetivo:

- Observar e justificar que as bissetrizes dos ângulos internos de um retângulo ABCD se cortam formando um quadrado.

1. Construa o retângulo ABCD.
2. Trace as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e $\hat{D}$.
3. Marque as intersecções dessas bissetrizes e nomeie-as de M, S, R e P.

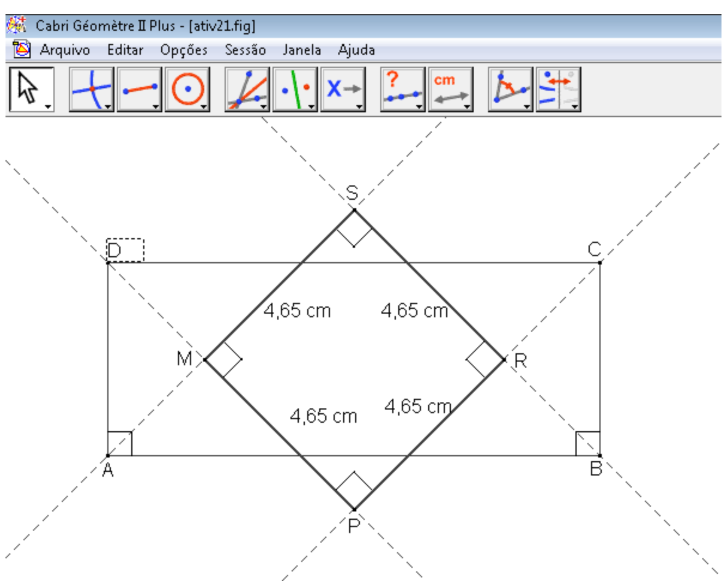


Figura 38 - quadrilátero determinado pelas bissetrizes internas de um retângulo
Fonte: professor (S.S.T.)

4. Movimente um dos vértices e registre suas conjecturas.
5. Qual a natureza do quadrilátero MSRP?
6. Apresente uma validação para suas conjecturas.

Pela semelhança com a Atividade 19, solicitamos que os professores fizessem em outro ambiente uma vez que já estávamos no final do terceiro módulo e não disporíamos de mais tempo para discuti-la. Entendemos que esta atividade poderia ser um item ou vir em seguida da Atividade 19.

Esperávamos que os professores encaminhassem suas validações no seguinte sentido:

No quadrilátero PQRS, temos que $\hat{P} = \hat{Q} = \hat{R} = \hat{S} = 90°$ (ver Atividade 19).

Os triângulos AMD e BRC (Fig. 38), são congruentes pelo caso ALA, pois AD e BC são congruentes. Os ângulos MAD e MDA têm medidas iguais a 45° (bissetriz do ângulo interno do retângulo). Pelo mesmo motivo também são congruentes os ângulos RBC e RCB.

Portanto, os segmentos AP, PD, BR e RC são congruentes.

O triângulo ASB é isósceles, pois os ângulos da base AB têm medidas iguais (45°). Então, AS e BS são congruentes.

Fazendo AS – AM = MS = BS – BR = SR ====> MS = SR

Analogamente, para os outros lados.

Logo, o quadrilátero MSRP é um quadrado.

No fechamento deste módulo observamos pelas discussões que os professores identificaram e enunciaram propriedades relacionadas aos lados e aos ângulos de quadriláteros. Porém, os registros ficaram prejudicados. Isso não significa que deixaram de ter autonomia para justificar as propriedades observadas, pois o fizeram em grupo oralmente.

4.6 - Módulo VI

4.6.1 - Objetivo do módulo:

- Investigar e validar algumas propriedades dos quadriláteros.

4.6.2 - Expectativa

Ao final desses módulos esperamos que os professores desenvolvam com autonomia as justificativas para as propriedades verificadas envolvendo os quadriláteros, quanto aos ângulos, lados e diagonais.

ATIVIDADE 22 – elaboração nossa a partir de SERRÃO (1967) p. 106.

Objetivo:

- Construir um losango obtido a partir de um triângulo isósceles.

1. Construa um triângulo isósceles ABC de base BC.
2. Encontre o ponto médio de BC e nomeie-o de M.
3. Trace as paralelas ME ao lado AB e MD ao lado AC.
4. Movimente os vértices do triângulo e anote suas observações.

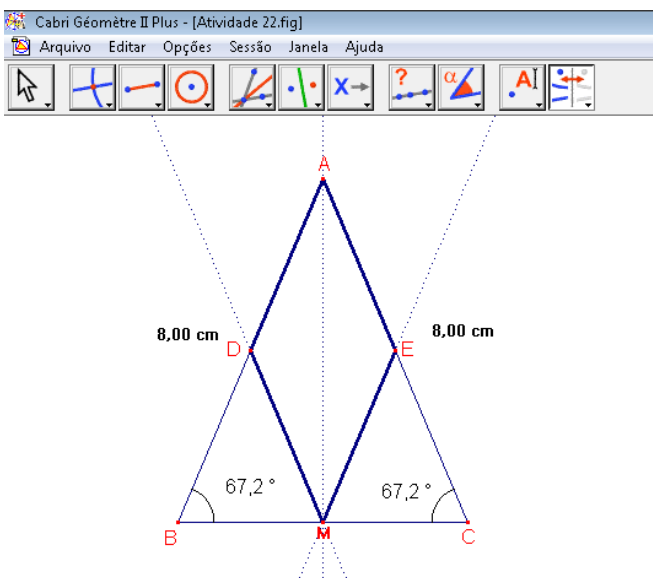


Figura 39 - losango obtido a partir de um triângulo isósceles
Fonte: professor (A.N.G.)

5. Qual a natureza do quadrilátero ADME?

   O quadrilátero ADME é um losango. (Profa. M.L.M.)

6. Justifique sua resposta.

   Um losango possui os quatro lados congruentes e ângulos opostos congruentes. (Profa. M.L.M.).

A professora nesta atividade descreveu as propriedades do losango, mas não apresentou uma justificativa para ela.

Esperávamos que dessem uma justificativa semelhante à apresentada a seguir:

O quadrilátero ADME é um paralelogramo.

Os triângulos DBM e EMC são isósceles e congruentes pelo caso ALA.

Portanto, DM e EC são congruentes.

Logo, o paralelogramo é um losango

ATIVIDADE 23 – elaboração nossa a partir de SERRÃO (1967, p.116).

Objetivo:

- Observar a natureza de um quadrilátero obtido da intersecção das bissetrizes dos ângulos formados por um par de retas paralelas cortadas por uma transversal.
- Justificar essa propriedade.

1. Trace duas retas ***r*** e ***s***, paralelas entre si cortadas por uma transversal ***t***.
2. Marque os pontos de intersecção das retas ***r*** e ***s*** com a reta ***t*** e nomeie-os de P e Q, respectivamente.
3. Trace as bissetrizes dos ângulos interiores a essas paralelas, que vão se cortar nos pontos R e S.
4. Determine a natureza do quadrilátero PQRS.
5. Compare as diagonais PQ e RS.

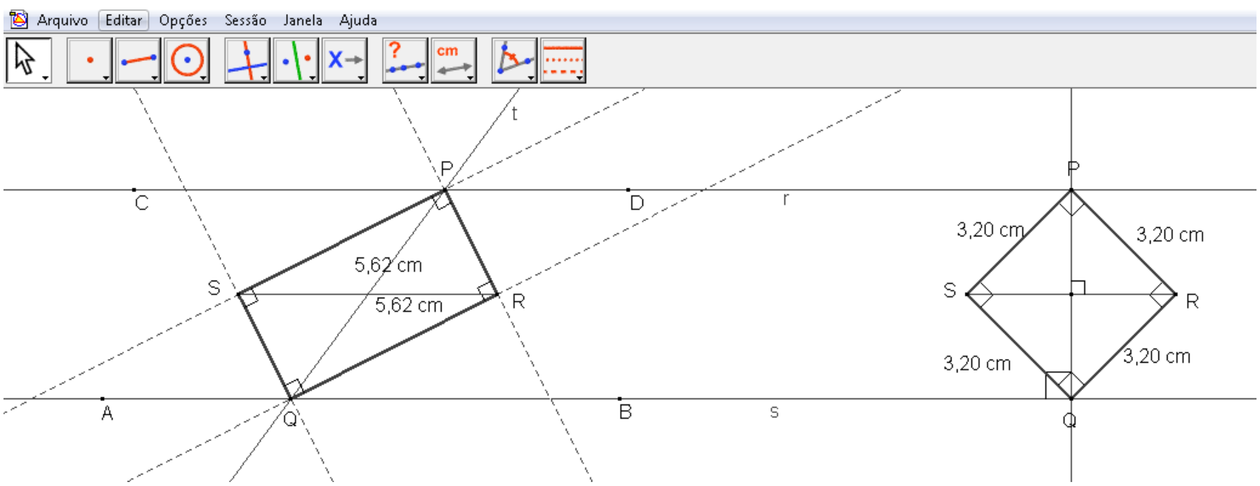


Figura 40 - quadrilátero obtido pelas bissetrizes dos ângulos interiores de duas paralelas cortadas por uma transversal

Fonte: autor

6. Verifique se o quadrilátero PQRS pode ser transformado num quadrado. Justifique sua resposta.

Os professores começaram a fazer esta atividade, porém não foi possível concluí-la, pois a oficina se aproximava do final.

Esperávamos que fizessem uma justificativa para esta atividade no seguinte sentido:

O quadrilátero PQRS (Fig. 40) é retângulo, pois $\hat{R} = 180 - \dfrac{B\hat{Q}P + D\hat{P}Q}{2} = 90°$.

Analogamente, mostramos que $\hat{Q} = \hat{P} = \hat{S} = 90°$.

As diagonais são congruentes.

Esse quadrilátero será um quadrado se as diagonais se cortarem em ângulo reto, isto é, PQ será perpendicular às retas r e s e, conseqüentemente ao segmento RS.

4.7 - Módulo VII

4.7.1 - Objetivo do módulo:

Socializar as atividades propostas pelos grupos para serem aplicadas nas séries do Ciclo II do Ensino Fundamental.

4.7.2 - Expectativa

Ao final desse módulo esperamos que os professores apresentem algumas atividades para serem socializadas com os demais grupos.

As atividades conforme foram apresentadas pelos grupos estão no ANEXO 6.

Inicialmente tínhamos quatro grupos com cinco componentes cada um. Porém, para realização dessa atividade, um dos grupos se separou em dois, um com dois e outro com três componentes. A alegação para essa separação foi o fato de residirem em cidades diferentes, o que dificultaria o encontro para elaborar a atividade.

Essas atividades foram propostas e resolvidas pelos participantes sem maiores dificuldades, apenas a atividade apresentada pelo GRUPO 2, teve que contar com maior interferência, pois para desenvolve-la, teriam que conseguir um ângulo de 15° e nem todos se recordavam de como fazer essa construção.

O formato da próxima oficina, após as modificações e ou adaptações das atividades, está no ANEXO 1.

O próximo capítulo será destinado às modificações e adaptações na oficina para atender a metodologia adotada, à análise do acompanhamento pós-curso e às considerações finais.

CAPÍTULO V

Neste capítulo apresentamos uma reformulação das atividades para que a oficina seja aperfeiçoada, pois conforme a metodologia adotada neste trabalho, um experimento de ensino visa à exploração e explanação da atividade matemática dos participantes.

5 - Considerações

A primeira oficina ocorreu, seguindo essa metodologia, como um teste experimental e sua reconstrução forma um ciclo que tem por base a experiência anterior.

A oficina precisa ser reorganizada no sentido de rever algumas atividades a fim de melhorar sua aplicação, alterar aquelas que precisam ser retificadas e até mesmo suprimir algumas, para que sejam desenvolvidas por completo.

Inicialmente a oficina foi concebida com 27 atividades. No entanto, não foi possível aplicar todas, pois as discussões sobre os assuntos abordados em cada atividade demandaram um tempo maior do que o previsto. Por entender que essas discussões são importantes para o desenvolvimento dos trabalhos e por considerarmos que se aumentarmos a duração do curso sua aplicação poderia ficar prejudicada devido ao seu prolongamento. A caracterização apontou que os professores, em sua maioria, preferiram o curso aos sábados, por não terem horário disponível para freqüentá-lo durante a semana.

Por isso decidimos retirar algumas atividades cujas propriedades que seriam estudadas poderiam aparecer em outras. Dentre as atividades que não foram trabalhadas, decidimos contemplar uma que explora as propriedades dos quadriláteros utilizando o plano cartesiano no Cabri. Em nossa proposta atual será a atividade 23, conforme Anexo 1.

A Atividade 11 foi retirada porque as propriedades do quadrilátero estudado (trapézio) foram tratadas nas Atividades 12 e 13.

Descreveremos cada atividade com suas respectivas instruções de construção e as possíveis justificativas para as conjecturas observadas. Omitiremos as figuras que já apareceram na análise das atividades no Capítulo IV.

Com isso a aplicação dessas atividades por um professor com conhecimentos básicos do *software* Cabri, mesmo que não tenha participado da elaboração da oficina, será facilitada.

5.1 - Avaliação do curso pelos professores participantes

O curso se realizou na sede da Diretoria de Ensino no município de São Vicente no período de 16/06 a 07/07/2007 e contou com a participação efetiva do Núcleo Regional de Tecnologia Educacional e da Oficina Pedagógica.

Os professores que concluíram a oficina tiveram direito a um Certificado, ela foi autorizada pela CENP e homologada pela Diretoria de Ensino. Por isso, ao término dos trabalhos, solicitamos que avaliassem a oficina nos seguintes aspectos: conteúdo, material de apoio, duração, atividades/dinâmicas e desempenho do capacitador. Essa avaliação foi encaminhada à CENP junto com um relatório circunstanciado da realização da oficina, como uma exigência interna.

Com base nessa avaliação, coletamos as seguintes informações: como aspectos positivos foram citados o material de apoio, as atividades bem elaboradas, a possibilidade de trabalhar de maneira diferenciada com os alunos, a interação com outros colegas, a ampliação dos conhecimentos, o curso acrescentou muito, o desempenho do capacitador e da equipe, entre outros. Como negativos apontaram principalmente a não previsão de continuidade do curso e que não deu para resolver todas as atividades. Apontaram também que oito horas seguidas tornam-se cansativas. Como sugestão alguns indicaram que o curso tivesse uma seqüência ou mesmo outras capacitações mesmo que fossem aos sábados.

A tabela a seguir mostra o resultado da avaliação do curso pelos participantes.

Itens avaliados	Classificação		
	Ótimo	Bom	Regular
Conteúdo	75%	25%	0%
Material de apoio	82%	18%	0%
Duração	29%	53%	18%
Atividades/Dinâmicas	76%	24%	0%
Desempenho do Capacitador	94%	6%	0%

Quadro 4 - avaliação da oficina pelo participante

5.2 - Acompanhamento pós-curso

Alguns dias após o término da oficina elaboramos uma pequena pesquisa a fim sabermos se os professores continuaram tendo contato com o Cabri; se utilizaram algumas dessas atividades com os alunos; se tiveram dificuldade para utilizar a SAI em suas escolas, além de outras informações e ou sugestões que julgassem importantes para aprimorar a oficina.

Diante disso, enviamos correspondência aos professores, via correio eletrônico, solicitando que relatassem suas experiências na escola em relação ao estudado durante a oficina, mediante as seguintes questões:

1. Após o término do curso você continuou trabalhando no Cabri? De que forma? Foi para uso próprio, com os alunos ou com colegas?
2. Utilizou alguma atividade com os alunos? Se sim, qual ou quais? Para que série?
3. Teve dificuldade para utilizar a SAI? De que ordem?
4. Se tiver outras informações ou sugestões não deixe de responder. Sua opinião e suas informações serão importantes para futuros cursos.

Até o momento dessa análise, quatro professores retornaram respostas. Desses, apenas uma professora deu continuidade aos contatos e, efetivamente, tem trabalhado com os alunos na escola.

Apresentamos, a seguir, os relatos de alguns professores que se prontificaram em responder a mensagem.

Profa. M.C.:

> *Só treinei um pouco ainda não me sinto segura para utilizar com alunos, prometo que logo farei. Muito obrigada. 27/08/07*

Profa. R.E.B.:

> *Respondendo ao seu pedido, tenho trabalhado com o Cabri para meu uso próprio, fiz algumas demonstrações para os colegas que não puderam participar e usei com alunos de fora da rede pública.*
> *Nossa SAI está com problemas na rede para gravar e imprimir as atividades.*

Profa. R.M.V.:

Relato 1

> *... trabalhei com os meus alunos da oitava série, na construção de quadriláteros para posteriormente analisarmos as medidas dos mesmos, incluindo perímetro e área.*
> *Na sala de informática da escola V. B., onde trabalho existem 9 computadores funcionando no momento, todos com o Cabri para serem utilizados pelos alunos.*
> *Eles estão adoraaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaando!!!*
> *Tem sido muito bom, estou ansiosa por novos cursos ministrados como esse que tivemos!!!!!!!!!!!!!!!!!*

Relato 2

... vamos ver se eu consigo detalhar o tipo de aula que estou trabalhando.

Como a sala de informática que utilizo tem disponíveis só 9 computadores, tenho que fazer revezamento com os alunos: ora uma parte da turma, ora outra, já que a média de alunos por sala é de 40, portanto o desenvolvimento deles é mais lento do que eu gostaria, mas tudo bem, vamos lá!

Comecei pedindo aos alunos que copiassem em seus cadernos os ícones e suas funções. (Para terem conhecimento dos comandos do programa Cabri).

Depois pedi que desenhassem um quadrilátero qualquer, (nesse momento revimos o conceito de quadrilátero, em forma de debate e utilizando dicionários e livros de matemática). Também fui explicando a necessidade de ser detalhado no caderno, por escrito, o passo-a-passo da construção do quadrilátero e os ícones utilizados. Comentei a importância do diálogo que o programa tem com eles, como por exemplo: quando o programa indica "este ponto", "este segmento", "esta intersecção", etc.

Feito isso pedi que medissem cada segmento do quadrilátero desenhado, depois que transformassem os seus quadriláteros em retângulos e posteriormente com as características somente de um quadrado. Nesse momento já havíamos relembrado todos os conceitos e características próprias de cada um deles.

Na transformação citada, foram utilizados alguns recursos como: medição de ângulos dos desenhos, variação das medidas, entre outros.

Finalmente trabalhamos com o perímetro e a área de cada quadrilátero, e movimentando-os podemos observar e anotar mais algumas características das figuras construídas.

Os alunos que não estão na sala de informática, ficam acomodados próximos a mim (mas fora da sala de informática), fazendo atividades do livro adotado. Sabem que preciso da cooperação deles para que as aulas de informática aconteçam, e me parece que compreenderam a importância disso, pois não tenho tido problemas de indisciplina, até o momento.

Acredito ter conseguido descrever as aulas.

P.S. Não pude responder antes, pois tudo isso foi interrompido pela Feira de Ciências que ocorreu lá na escola, absorvendo todo o meu tempo.

Bom, acredito que isso é tudo. Espero ter podido ajudar, acho muito legal mantermos contado em relação ao software Cabri.

Fico à disposição e aceito sugestões, para conseguirmos melhorar sempre o desenvolvimento dos nossos alunos. Afinal esse é o objetivo final do nosso trabalho!!!!!!

Um abraço e até mais,

Relato 3

Olá Prof. Adilson!

Desculpe-me pela demora na resposta, tive alguns problemas com o meu computador.

Respondendo ao seu e-mail:

Os alunos aprendem com uma facilidade muito maior.

Já contei aos outros professores o quanto gratificante está sendo trabalhar na informática, nenhum mostrou interesse em fazer o mesmo. Então fiquei "na minha".

Quanto a repassar a minha experiência aos demais colegas, por mim tudo bem, se eu puder ser útil de alguma maneira.

A sala de informática da minha escola está desativada a quase duas semanas, pois com a verba que o governo mandou, a diretora pintou a sala, e mandou um técnico colocar todos os computadores com a mesma qualidade de processamento para então deixá-los em rede e com a internet funcionando. Portanto estou no aguardo para voltar a utilizá-la.

Falei para os alunos que não existe a obrigação de comprar nada, mas seria muito interessante, se cada um deles adquirissem o seu próprio disquete. Pois ao terminarem os seus trabalhos, poderiam armazená-los para a próxima aula de informática, já que trabalhamos muito na continuidade dos exercícios.

Enfatizei que não era obrigatório, mas seria um material muito importante para o armazenamento do que foi estudado, assim como o caderno é para a aula em sala tradicional.

Bom, acredito que é tudo.

Agradeço o incentivo, e ficarei em contato assim que voltar para a sala de informática. (Espero que em breve).

P.S. Comprei com o meu dinheiro, um kit (45 esquadros de 30 e 45 esquadros de 45 graus, 45 réguas, 45 transferidores, e os 45 compassos a escola me forneceu, assim que percebeu o meu empenho em ter um kit onde só eu seria responsável pela sua utilização com os meus alunos). Comecei nesta sexta -feira a trabalhar em sala de aula a congruência de triângulos e posteriormente o Teorema de Tales (adiantei um pouco a matéria do meu plano de ensino, com a autorização da minha coordenadora, devido ao SARESP p/ oitava série). Desse modo estamos começando através da construção geométrica a trabalhar com esses instrumentos o que viabilizará bastante o aprendizado na geometria construída e posteriormente na construção com o Cabri. (Quando os alunos perceberam que foi um investimento meu, no material que eles estão utilizando, não apresentam problemas na devolução, cuidados e controle do material emprestado por mim).

Esse procedimento é novo para mim espero que os resultados sejam positivos.

O trabalho dessa professora mostra que a experiência escolar com o computador pode levar ao estabelecimento de uma nova relação professor-aluno, marcada por uma maior proximidade, interação e colaboração. Isso define uma nova visão do professor, que longe de considerar-se um profissional pronto, ao final de sua formação acadêmica, tem de continuar em formação permanente ao longo de sua vida profissional. (PCN, p. 44)

Concordamos com PONTE (1999), ao dizer que os professores têm de dominar as matérias que ensinam, que uma boa relação com os conteúdos de ensino não se consegue, segundo ele, com “muita” matéria, mas com “boa” matéria. É preciso, no entanto, que o trabalho de formação não destrua o gosto pela disciplina, antes o desenvolva e o ajude a amadurecer. (p.14)

Nesse sentido, a professora R.M.V., em seus relatos, mostra que, apesar de todas as dificuldades, é possível trabalhar de forma diferenciada visando a um ensino/aprendizagem de geometria mais eficiente.

A geometria dinâmica com auxílio do Cabri, propiciou, nesse caso, uma mudança da prática docente como esperávamos inicialmente.

Segundo DOERR, WOOD (2006):

> Uma característica importante da *pesquisa-projeto* é que ela requer vários ciclos de análise para aprimorar o produto e a interpretação em múltiplos níveis. [...] a coleta e a interpretação dos dados não acontecem ao término do experimento, mas a própria coleta em desenvolvimento e a interpretação de dados em todos os níveis devem gerar e refinar princípios, propriedades e produtos que sejam cada vez mais úteis [...].Um dos desafios na implementação de uma pesquisa está em articular as interpretações em cada nível de modo que sejam testadas, revisadas e progressivamente compartilhadas, e generalizadas a novos participantes e novos contextos (p. 117).

5.3 - Quanto ao aspecto do *software*

Desde o início da utilização dos computadores para o ensino de matemática, diversos *softwares* foram desenvolvidos visando elevar os processos de ensino e de aprendizagem. Os programas que possibilitam a exploração de propriedades geométricas por meio da geometria dinâmica são facilitadores do processo de ensino e de aprendizagem. Neste trabalho utilizamos o Cabri como poderíamos ter utilizado outro software de geometria dinâmica. Pela sua própria natureza esses programas "dialogam" com quem o está utilizando. Em um trecho do relato 2, destacado a seguir, a professora R.M.V. conversa com seus alunos sobre o Cabri:

> *Comentei a importância do diálogo que o programa tem com eles, como por exemplo: quando o programa indica "este ponto", "este segmento", "esta intersecção".*

Esse diálogo citado pela professora é de extrema importância para o uso do *software*, esta observação é tão original que passa despercebida por muitos usuários do Cabri. Por meio desse diálogo “conversamos” com o programa no momento em que construímos as figuras a fim de explorar suas propriedades.

Os alunos vão percebendo aos poucos que o *software* não reproduz apenas a imagem que temos do ente geométrico (desenho), mas que constrói figuras geométricas utilizando suas propriedades (construção), por isso quando deslocamos um de seus pontos a figura construída não perde essas propriedades.

Quando fazemos uso da geometria dinâmica, ao contrário de quando utilizamos papel e lápis, a movimentação das figuras possibilita uma observação mais fácil de propriedades e de relações geométricas nos quadriláteros notáveis aqui estudados.

Ao propiciar a generalização de propriedades o *software* contribui para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Segundo Van Hiele (1957), quando os alunos fazem uma generalização por meio de experimentação, estão na passagem para o Nível 2 (de análise) ou nele já estão.

Podemos inferir, então, que o uso da geometria dinâmica, neste estudo proporcionado pelo Cabri, permitiu construir e aprofundar os conhecimentos relacionados às propriedades dos quadriláteros, pela possibilidade de movimento e de repetição da figura construída. Assim possibilitou experimentar, conjecturar, testar hipóteses, argumentar e deduzir.

5.4 - Quanto ao aspecto do computador

O computador deve ser usado para construir o conhecimento, para ser um recurso com o qual o aluno possa criar, pensar e manipular a informação. Deve incentivar mudanças nas práticas de ensino, não apenas auxiliar o professor na transmissão de conhecimento ou agilizar algum procedimento repetitivo.

O mundo atualmente exige um profissional crítico, criativo, com capacidade de pensar, de aprender a aprender, de trabalhar em grupo, que tenha capacidade de se atualizar constantemente. Essas atitudes não podem ser transmitidas simplesmente, mas devem ser construídas por cada um, ou seja, deve sair de um processo educacional em que o aluno passe por situações que lhe permitam construir e aplicar essas competências. Entendemos que o computador pode ser um instrumento que auxilie nesse processo.

Para trabalhar nesse sentido é necessário um profissional que compreenda os potenciais do computador para que assim possa atuar como mediador da interação do aluno com a máquina.

É preciso, essencialmente, conhecer e compreender o conteúdo que será trabalhado pelo aluno, para que o professor possa entender suas idéias e assim contribuir de forma apropriada para a construção do conhecimento por parte do educando.

Nesse sentido, destacamos um trecho do relato 3 da professora M.R.V. colocando a importância dos alunos começarem a se apropriar das possibilidades apresentadas pelo computador em seu processo de aprendizado:

> *Falei para os alunos que não existe a obrigação de comprar nada, mas seria muito interessante, se cada um deles adquirissem o seu próprio disquete. Pois ao terminarem os seus trabalhos, poderiam armazená-los para a próxima aula de informática, já que trabalhamos muito na continuidade dos exercícios.*
>
> *Enfatizei que não era obrigatório, mas seria um material muito importante para o armazenamento do que foi estudado, assim como o caderno é para a aula em sala tradicional.*

A professora estabelece uma relação direta do estudo com o computador e uma forma de armazenamento possibilitada por ele (disquete), com uma aula tradicional (caderno).

Esse relato mostra que o computador propicia uma nova forma de educação e de interação entre as pessoas, de modo a interferir no papel de cada uma dentro do ambiente escolar. Com seu trabalho essa professora movimentou tanto a direção da escola, como a coordenação e principalmente fez com que os alunos colaborassem para a realização do estudo proposto.

Diante disso, e conforme indica os PCN, o uso das tecnologias da informação e comunicação possibilita repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem, pois nesse caso, permitiu que os alunos construíssem uma visão mais abrangente da atividade matemática, adotando atitudes positivas diante de seu estudo.

5.5 - Quanto ao aspecto da formação

Entendemos que a formação continuada é uma necessidade permanente para o desenvolvimento profissional, de forma a permitir que os professores encaminhem o ensino de matemática para o interesse do aluno. Isto é, devem apontar um significado para o que está sendo ensinado. É preciso que, além de conhecimentos sobre a tecnologia, os professores dominem também os conteúdos que serão ensinados.

Acreditamos que a oficina contribuiu para a formação continuada dos professores que dela participaram. Tanto no aspecto tecnológico do uso do *software*, quanto na apropriação das propriedades dos quadriláteros notáveis e que pode contribuir para a capacitação de outros professores.

5.6 - Considerações finais

Este trabalho procurou salientar o papel desempenhado pelo uso da geometria dinâmica proporcionado pelo Cabri, quer na construção das figuras, quer na observação de suas propriedades.

Nesse meio, os conceitos geométricos são estabelecidos pela possibilidade de exploração e manipulação dos objetos construídos, pelo levantamento de conjecturas e pela validação de propriedades observadas.

Ao propor a aplicação de uma oficina que auxiliasse os professores na aquisição de novos conceitos e que contribuísse para revisitar os que não são trabalhados com regularidade nas aulas de matemática, mais especificamente em geometria, pretendíamos que, a partir daí, eles pudessem dar continuidade em seu aprendizado de forma autônoma. Após a realização da oficina, conforme depoimentos dos professores, inferimos que houve uma mudança na forma de trabalhar a geometria com auxílio do computador.

Ao término de cada módulo, abrimos uma discussão a respeito das atividades desenvolvidas e nessas discussões percebemos que algumas alterações precisavam ser feitas na redação ou na ordem em que apareciam. Também em relação ao tempo destinado a cada uma, observamos que, pelo menos no início da oficina, os participantes demoravam além do previsto para realizar as construções. Apesar de já terem trabalhado com o Cabri, alguns não se lembravam de como utilizar as ferramentas ou até mesmo de como construir uma figura como se estivessem trabalhando com régua e compasso. Sem falar nos que apenas conheciam o *software*, mas nunca haviam trabalhado com ele.

Segundo a metodologia escolhida, a oficina originalmente planejada deve passar por algumas fases para ser aprimorada constantemente, tendo por base a versão anterior.

Diante disso, na segunda fase, para atender a metodologia, fizemos adaptações e correções para chegar a uma proposta de oficina melhorada de modo a ser compartilhada a outros professores, além de ser viável à prática docente no ensino fundamental.

Ao trazermos à tona nossa questão de pesquisa: "**Em que medida a Geometria Dinâmica pode favorecer a criação de um ambiente de aprendizagem no estudo dos quadriláteros notáveis?**", Observamos que o programa de geometria dinâmica escolhido, em nosso caso o Cabri, foi uma importante ferramenta para superar obstáculos de aprendizagem como os encontrados quando trabalhamos as construções geométricas com lápis e papel.

Concordamos com (GRAVINA, 1996), quando afirma que com o auxílio da geometria dinâmica proporcionado pelo Cabri:

> [...] conceitos geométricos são construídos com equilíbrio conceitual e figural; a habilidade em perceber representações diferentes de uma mesma configuração se desenvolve; controle sobre configurações geométricas levam a descoberta de propriedades novas e interessantes. Quanto às atitudes dos alunos/professores frente ao processo de aprender: experimentam; criam estratégias; fazem conjeturas; argumentam e deduzem propriedades matemáticas. A partir de manipulação concreta, "o desenho em movimento", passam para manipulação abstrata atingindo níveis mentais superiores da dedução e rigor, e desta forma entendem a natureza do raciocínio matemático.

Diante do exposto, acreditamos que a geometria dinâmica favoreceu a criação de um ambiente de aprendizagem no estudo dos quadriláteros notáveis porque permitiu trabalhar de maneira diferenciada de modo que percebessem propriedades dos quadriláteros cuja observação pelo modo tradicional (papel e lápis), seria dificultada. Além disso, permitiu experimentar, criar estratégias de construção das figuras, estabelecer conjecturas, enunciar teoremas e fazer sua justificativa (prova), com auxílio do dinamismo dado pelo Cabri. Outro aspecto fundamental dessa oficina foi que possibilitou a troca de experiência entre os participantes e a interação com o capacitador/pesquisador, que são elementos essenciais de em experimento de ensino.

Esse assunto, naturalmente, não se encerra com este estudo. Esperamos, no entanto, que tenha contribuído para conduzir a novas questões que possam ser pesquisadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, P. Investigações em Geometria na Sala de Aula. In: _____ (Org.) *O Ensino da Geometria no Virar do Milênio*. Lisboa: DEFCUL, 1999. p. 1-15.

ALMEIDA, M. E. B. Informática e Formação de Professores. Brasília: Ministério da Educação, Seed. 2000. 2v. (Série de Estudos Educação à Distância).

ARAÚJO, I. B. *Uma abordagem para a prova com construções geométricas e Cabri Géomètre.* 2007. 291p. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

BONGIOVANNI, V. *As diferentes definições dos quadriláteros notáveis*. RPM - Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 55, p. 29-32, 3° quadrimestre de 2004. SBM (Sociedade Brasileira de Matemática).

_____ *Revisitando a Geometria Plana* - Notas de aula. São Paulo: 2006. 98 p.

BRAVIANO, G., RODRIGUES, M. H. W. L. *Geometria Dinâmica: Uma nova Geometria?* RPM - Revista do Professor de Matemática, São Paulo n. 49, p. 22-26, 2° quadrimestre de 2002. SBM (Sociedade Brasileira de Matemática).

BRESSAN, A. M., et. al. *Raziones para Ensenar Geometria em la Educación Básica*: mirar, construir, decir y pensar. Buenos Aires: Centro de Publicaciones Educativas y Material Didático, 2006. 128 p.

Cabrincando com Geometria. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO/Gerência de Informática Pedagógica.. 2000. 54 p.

CAMPOS, T. M. M., JAHN, A. P. (Coord.) *Explorando Geometria Elementar com o Dinamismo do Cabri Gèomètre.* 2. ed. São Paulo: PROEM, 2002.110 p.

DOERR, H.M., WOOD, T. Pesquisa-Projeto (*design research*): aprendendo a ensinar Matemática. In: BORBA, M. C. (Org.). *Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática.* Tradução por Antonio Olímpio Jr. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 113-130.

FERRETTI, C. J. et. al. *Protagonismo Juvenil na Literatura Especializada e na Reforma do Ensino Médio.* Cadernos de Pesquisa, v. 34, n. 122, maio/ago. 2004. Disponível em http://www.scielo.br/pdf/cp/v34n122/22511.pdf . Acesso em 20/09/2007.

FIORENTINI, D., LORENZATO, S. *Investigação em Educação Matemática*: Percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. 226 p. (Coleção Formação de Professores).

GRAVINA, M.A. *Os Ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético- dedutivo.* 2001. 260 p. Tese de Doutorado (Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.

_____ *Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria,* Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 1996. p. 1-13. Belo Horizonte, MG. Disponível em: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/artigos_index.php Acesso em 27/09/2007.

GRAVINA, M.A. SANTARR., L. M. *A Aprendizagem Matemática em Ambientes Informatizados*. IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998. p. 1-22. Disponível em: http://euler.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos/a1.pdf . Acesso em 27/09/2007.

KAMPFF, A. J. C., MACHADO, J. C., CAVEDINI, P. *Novas Tecnologias e Educação Matemática*. X Workshop de Informática na Escola, XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação da Bahia.. CINTED-UFRGS. v. 2, n. 2, p. 1-11, nov. 2004.

KOBASHIGAWA, M. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental*: das prescrições ao currículo praticado pelos professores. 2006. 200 f. Dissertação de Mestrado. (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MAIOLI, M. *Uma Oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros*. 2002. 165 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MANRIQUE, A. L. *Processo de Formação de Professores em Geometria*: Mudanças em Concepções e Prática. 2003. 168 f. Tese de Doutorado (Doutorado em Educação: Psicologia da Educação). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Brasil. Secretaria de Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1998.

MIRANDA, S. S. *O Papel da Geometria Descritiva nos Problemas de Geometria Espacial: Um Estudo das Secções de um Cubo. 2006.* 184 f. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

NOVAK, J. D., GOWIN, D. B. *Aprender a aprender***.** Tradução por Carla Valadares. Lisboa: Plátano Ed. Técnicas, 1999. p. 31-70.

PEREIRA, G. A.et.al. O modelo de van Hiele de Ensino de Geometria aplicado às 5ª. e 6ª. séries do Ensino Fundamental. FAMAT em Revista, Universidade Federal de Uberlândia – MG, n. 5. p. 21-50, set. 2005.

PIRES, C. M. C. *Currículos de Matemática*: da Organização Linear à Idéia de Rede. São Paulo: FTD, 2000. 223 p.

PONTE, J. P. *Da formação ao desenvolvimento profissional*. Atas do Encontro Nacional de Professores de Matemática, 1998. Lisboa: APM. p. 27-44. Disponível em: http://www.educ.fc.pt/docentes/jponte/docs-pt/98-Ponte(Profmat).doc
Acesso em 27/09/2007.

____ *Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional*. In TAVARES et. Al. (Org.). Investigar e formar em educação: Atas do IV Congresso da SPCE . 1999. Porto: SPCE. p. 59-72. Disponível em:
http://www.educ.fc.pt/docentes/jponte/docs-pt/99-Ponte(Aveiro).pdf Acesso em 27/09/2007.

_____ *A Formação Matemática do Professor:* Uma agenda com questões para reflexão e investigação. Painel "A Matemática e diferentes modelos de formação". XII Encontro de Educação Matemática. 2003. Évora: SPCE. p. 1-4. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Evora%20SPCE).pdf
Acesso em 20/09/2007.

PUTNOKI, J. C. *Que devolvam a Euclides a régua e o compasso.* RPM - Revista do Professor de Matemática, São Paulo n. 13, p. 13-17, 2° semestre de 1988. SBM (Sociedade Brasileira de Matemática).

SANTOS, V. M. P. dos. *Avaliação da Aprendizagem e Raciocínio em Matemática*: Métodos Alternativos (Coord.) – 1995 – Projeto Fundão – Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro.

SERRÃO, A. N. *Exercícios e Problemas Geometria no Plano* — Parte A. 2 ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1967. 154 p.

SILVA, M. C. L. *Teorema de Tales:* Uma Engenharia Didática utilizando o Cabri Géomètre. 1997. 174 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino da Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

TEXAS INSTRUMENTS INCORPORATED – Guia de utilização para Windows®. Cabri Geometry II. 1999.

VAN HIELE, P. M. *El Problema de la Comprensión*: En Conexión con la Compresnsión de los Escolares en el Aprendizaje de la Geometría. 1957. 151 f. Tese de Doutorado (Doctor em Matemáticas y Ciências Naturales). Universidad Real de Utrecht.

Anexo 1 – PROPOSTA DE UMA OFICINA PARA A PRÁTICA DOCENE NO ENSINO FUNDAMENTAL:

Utilizando o Cabri na Investigação de Quadriláteros

Objetivos da Oficina

Contribuir para a formação continuada dos professores, tanto no aprimoramento de conhecimentos, quanto na revisitação de conteúdos que os auxiliem na elaboração e na aplicação de estratégias adequadas para seu trabalho com geometria em sala de aula, com auxílio da geometria dinâmica e foco nos quadriláteros.

Desenvolvimento

Esta Oficina será dividida em sete módulos de quatro horas cada, mais duas horas destinadas à preparação da atividade a ser socializada ao término do curso, perfazendo uma carga horária de 30 horas.

Cada módulo está planejado conforme o objetivo geral das atividades e ao final de cada um faremos uma avaliação com base na dinâmica dos *mapas conceituais* a fim de avaliar os conceitos abordados nas atividades do respectivo módulo.

Eventuais adaptações ou alterações na seqüência das atividades poderão ser feitas conforme necessidade dos cursistas.

A seguir um quadro com sugestão para distribuição das atividades durante a oficina.

MÓDULO	DATA	DURAÇÃO	ASSUNTO
I	--	4 horas	Dinâmica: Mapa Conceitual Exploração do Cabri
II	--	4 horas	Atividades 1 a 4
III	--	4 horas	Atividades 5 a 9
IV	--	4 horas	Atividades 10 a 14
V	--	4 horas	Atividades 15 a 18
VI	--	4 horas	Atividades 19 a 23
VII	--	4 horas	Apresentação das propostas de atividades elaboradas pelos participantes. Fechamento da Oficina

Quadro 5 - sugestão de distribuição das atividades nos módulos

Módulo I

Objetivo do módulo:

Apresentar o curso de maneira geral, possibilitar a integração dos participantes, trabalhar com mapas conceituais e explorar as ferramentas do Cabri.

1. Apresentação dos participantes e do curso;
2. Discussão do texto "*Geometria Dinâmica: Uma nova Geometria*" (ANEX0 4)
3. Dinâmica de grupo: Mapas Conceituais.

Um mapa conceitual é uma representação visual em que o individuo (ou um grupo de pessoas) demonstra através do uso de palavras, desenhos e outros símbolos o que percebe sobre um determinado tema ou assunto central.

Os Mapas Conceituais podem ser utilizados como estratégia de ensino, de aprendizagem e de avaliação. São úteis para fazer uma diagnose, um resumo das idéias principais de um texto, organizar as idéias sobre um assunto. Os mapas conceituais, acompanhados de um pequeno texto explicativo, ajudam a quem o faz a: organizar as idéias, sistematizar, estudar e detectar idéias que ainda não estão claras em sua mente.

Os Mapas Conceituais servem para o individuo registrar em poucos minutos o que mais lhe marca sobre um assunto e que acha interessante ou desagradável sobre o mesmo. Auxiliam o desenvolvimento de metacognição (conhecimento sobre o próprio conhecimento) de quem confeccionou o mapa". (SANTOS, 1995).

1. Atividade

b) Dividir os participantes em grupos de quatro componentes.
c) Escrever no meio de uma folha de papel a palavra GEOMETRIA (idéia central).
d) Identificar de 8 a 12 palavras ou conceitos significativos relacionados à idéia central, escrevendo-as ao redor da palavra GEOMETRIA.
e) Construir o mapa conceitual relacionando esses elementos por meio de verbos significativos, traçando linhas unindo estas palavras ou conceitos.
f) Elaborar, a partir do mapa, frases significativas associando os conceitos.
g) Elaborar um pequeno texto a partir das frases obtidas.
h) Socializar o texto com os demais grupos.

2. Exploração das ferramentas do Cabri

O Cabri-Géomètre

Cabri-Géomètre é um *software* destinado ao estudo da geometria. Foi desenvolvido na França durante a década dos anos 80 no Instituto de Informática e Matemática Aplicada da Universidade Joseph Fourier de Genoble, por um grupo formado por matemáticos, psicólogos e cientistas da computação.

Cabri vem da expressão **Ca**hier de **Br**ouillon **I**nteractif, que significa caderno de rascunho interativo. A interatividade é sua maior característica, permitindo a criação de objetos matemáticos que podem ser manipulados diretamente na tela do computador.

Tudo que se faz com lápis, régua e compasso num papel pode ser feito no Cabri. A preservação das propriedades de uma figura é uma característica da construção geométrica, não basta desenhar a figura, é preciso que ela mantenha as propriedades quando movimentado algum se seus elementos de base.

O Cabri possibilita ao aluno construir seu próprio conhecimento por meio de construção, exploração, formação de conjecturas, bem como sua verificação, validação e posterior demonstração.

Adriana Justin Cerveira Kampff; José Carlos Machado; Patrícia Cavedini.
Novas Tecnologias e Educação Matemática – X Workshop de Informática na Escola no XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, Bahia, julho de 2004.

Módulo II

Objetivo do módulo:

- Construir figuras geométricas para familiarização com o Cabri.

Desenhar e Construir

Desenhar é reproduzir a imagem mental que temos de um objeto geométrico. É uma das representações de um objeto geométrico teórico. É um traçado material cuja validade é apenas para uma posição particular dos objetos iniciais.

Construir é utilizar as propriedades do objeto geométrico para obter a sua representação. A construção, quando realizada num *software* de geometria dinâmica, preserva, quando do deslocamento de um de seus pontos, as propriedades ligadas ao objeto geométrico que representa. Podemos dizer que, nesse caso, a construção é um desenho dinâmico que não perde as suas propriedades quando do deslocamento de um de seus pontos de base. BONGIOVANNI (2006).

As atividades de 1 a 4 destinam-se à familiarização dos professores com o Cabri.

ATIVIDADE 1

Objetivo:

Reconhecer a diferenciação entre os três tipos de pontos existentes no Cabri:

1. Crie dois segmentos e nomeie-os de AB e PQ.

- Para criar o segmento AB no Cabri:

i. Selecione **Segmento** na caixa de ferramentas **Retas**.
ii. Clique para criar ou selecionar o ponto da extremidade do segmento.
iii. Mova o ponteiro para o ponto da extremidade final do segmento e clique para criar ou selecionar o ponto da extremidade final.

- Para nomear as extremidades AB:

iv. Selecione **Rótulo** na caixa de ferramentas **Mostrar**.
v. Clique para selecionar um ponto da extremidade do segmento. Aparece uma caixa de edição. Digite “A” para denominar esse ponto.
vi. Faça o mesmo para a outra extremidade digitando “B”. Analogamente para o segmento PQ.

2. Crie um ponto C e coloque-o sobre o segmento AB.

- Para criar o ponto C:

i. Selecione **Ponto** na caixa de ferramentas **Ponto**.
ii. Clique em um ponto qualquer da tela.

- Para movimentar o ponto:

iii. Selecione **Ponteiro** na caixa de ferramentas **Ponteiro**.
iv. Clique sobre o ponto, mantenha pressionado o botão esquerdo do mouse e arraste-o até que fique sobre o segmento.

3. Crie um ponto sobre o segmento PQ. Nomeie-o de R.

i. Selecione **Ponto** na caixa de ferramentas **Ponto.**

ii. Mova o cursor para o segmento PQ, quando aparecer a mensagem de cursor "*Neste segmento*", clique uma vez para criar o ponto sobre o segmento. Esta criação pode ser feita também com a ferramenta **Ponto sobre Objeto**.

4. Movimente o segmento PQ até que "corte" o segmento AB. Marque o ponto de intersecção dos segmentos AB e PQ. Nomeie-o de X.

i. Selecione Ponteiro na caixa de ferramentas Ponteiro.

ii. Movimente o segmento PQ até "cortar" o segmento AB. Para isso, clique sobre o segmento, mantenha pressionado o botão do mouse e "arraste" até a posição desejada. Caso esses segmentos sejam paralelos, clique numa das extremidades de um deles e arraste para modificar sua posição.

iii. Selecione **Ponto de intersecção** na caixa de ferramentas **Ponto**.

iv. Selecione os segmentos PQ e AB que se interceptam criando assim o ponto de intersecção X.

Outra maneira de criar o ponto de intersecção é apontar para o local onde os segmentos se cruzam com a caixa de ferramentas **Ponto** selecionada e clicar quando aparecer a mensagem "Ponto nesta intersecção".

5. Movimente os pontos C, R e X e um dos segmentos AB ou PQ. O que você observa após esses movimentos?

Após esta atividade esperamos que os participantes observem que:

- o ponto qualquer é um ponto de movimentação totalmente livre (pela tela toda);
- o ponto sobre o objeto é um ponto que se movimenta apenas sobre o objeto, tendo uma movimentação limitada;
- o ponto de intersecção de dois objetos é um ponto que não se movimenta quando manipulado.

ATIVIDADE 2

Objetivos

- Construir um triângulo no Cabri.
- Utilizar a construção de retas paralelas.
- Identificar os diferentes pontos da figura.
- Medir segmentos e ângulos.

1. Construa um triângulo ABC.

- Construção do triângulo:

i. Selecione **Triângulo** na caixa de ferramentas **Retas**.

ii. Clique para criar ou selecionar o vértice inicial.

iii. Mova o cursor do vértice inicial e, em seguida, clique para criar o segundo vértice. Repita para criar ou selecionar o terceiro vértice.

iv. Selecione **Rótulo** na caixa de ferramentas **Mostrar** para nomear de ABC os vértices do triângulo.

2. Construa um ponto F sobre AB. Construa uma reta passando por F paralela a BC.

- Construção de uma reta paralela:

i. Selecione Reta Paralela na caixa de ferramentas Construir.

ii. Leve o cursor até o ponto F sobre o lado AB e clique quando aparecer a mensagem "Por este ponto".

iii. Agora mova o cursor até o lado BC e clique quando aparecer a mensagem "Paralela a este lado do triângulo".

3. Marque a intersecção dessa paralela com AC e nomeie de G o ponto encontrado.

Ver item 4.i. da Atividade 1.

4. Meça os segmentos AB, AC, BC, AF, AG e FG.

- Para medir segmentos:

i. Selecione **Distância e comprimento** na caixa de ferramentas **Medir**.

ii. Para medir o segmento AB leve o cursor até o vértice A e clique quando aparecer a mensagem "Distância deste ponto".

iii. Leve o cursor agora até o vértice B e clique após a mensagem "até este ponto".

iv. Repita o procedimento para os demais segmentos.

5. Meça os ângulos: AFG, ABC, AGF, ACB e BAC.

- Para medir ângulos:

i. Selecione **Medida de ângulo** na caixa de ferramentas **Medir**.

ii. Para medir o ângulo AFG mova o cursor até o vértice A e clique quando aparecer a mensagem "Este ponto".

iii. Leve o cursor para o vértice F e clique quando aparecer a mensagem "Este ponto". Repita este procedimento para o vértice G.

O segundo ponto é o ângulo que será medido.

6. Movimente os pontos A, B, C e F.

7. O que você observa com esses movimentos?

Após a realização desta atividade esperamos as seguintes observações:

- Ao movimentar qualquer vértice o lado oposto a ele não sofre alteração quanto à posição e ao tamanho (medida).
- O ponto F quando é movimentado faz com que o ponto G também se movimente garantido o paralelismo entre os segmentos BC e FG.
- As medidas dos ângulos AFG e ABC são iguais.
- As medidas dos ângulos AGF e ACB são iguais.
- A soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos ABC e AFG são iguais a 180°.

ATIVIDADE 3

Objetivos:

- Entender a diferença entre os dois tipos de circunferências existentes no Cabri:
- Aprender a construir reta definida por dois pontos.
- Utilizar os diferentes pontos.
- Observar a conservação das propriedades pelo movimento da figura.

1. Construa duas circunferências: uma com a opção do menu *circunferência* e outra *a partir de dois pontos* (centro e um ponto da circunferência).

   - Construção de circunferências:

   i. Selecione **Circunferência** na caixa de ferramentas **Curvas**.
   ii. Crie o centro da circunferência.
   iii. Mova o cursor do centro e clique uma vez para definir o raio.

   - Criando uma circunferência a partir de dois pontos:

   i. Com a ferramenta **Ponto**, crie dois pontos distintos.
   ii. Selecione a ferramenta **Circunferência**;
   iii. Mova o cursor até um dos pontos e clique quando surgir a mensagem “Este ponto como centro”;
   iv. Leve o cursor até o outro ponto e clique após a mensagem “passando por este ponto”.

2. Movimente ambas. O que você observa ao movimentar a figura?

Esperamos observações no seguinte sentido:

- Ao movimentar a circunferência criada a partir da opção **Circunferência**, notamos que quando “arrastamos” o ponto que determinou o centro da circunferência ela apenas muda sua posição na tela sem alterar o raio. Quando arrastamos um ponto qualquer dessa circunferência o raio é alterado.
- A circunferência criada a partir de dois pontos tem o raio alterado quando movimentamos um desses pontos. Essa circunferência muda de posição na tela, sem alterar o raio, quando arrastamos um outro ponto pertencente a ela.

3. Considere a circunferência construída a partir de dois pontos (centro e um ponto da circunferência). Construa uma reta que passe pelo centro e por um ponto da circunferência. Marque a intersecção da reta com a circunferência, obtendo o diâmetro QR.

- Construção de uma reta:

i. Selecione **Reta** na caixa de ferramentas **Reta.**
ii. Clique em um dos pontos que deu origem à circunferência após aparecer a mensagem “Por este ponto”.
iii. Leve o cursor até o outro ponto e clique após a mensagem “e este ponto”.
iv. Selecione **Ponto de intersecção** na caixa de ferramenta **Ponto.**
v. Selecione a reta e em seguida a circunferência, assim os pontos de intersecção serão criados.
vi. Na caixa de ferramenta **Mostrar** selecione **Rótulo** para nomear os pontos de Q e R.

4. Marque o ponto P sobre a circunferência e crie o triângulo PQR. Meça o ângulo QPR e movimente o ponto P.

i. Selecione **Ponto** e clique sobre a ferramenta quando aparecer a mensagem “Nesta circunferência”.
ii. Selecione **Rótulo** para nomear o ponto P.
iii. Selecione **Segmento** na caixa de ferramenta **Reta.**
iv. Clique no ponto P quando aparecer a mensagem “Este ponto”.
v. Leve o cursor até o ponto Q e clique após a mensagem “Este ponto”.
vi. Repita para criar os segmentos QR e RP e determinar o triângulo PQR.
vii. Para medir o ângulo PQR veja o item 5 da Atividade 2.

5. O que você observa?

O ângulo PQR mede 90°, ao movimentar o ponto P, o triângulo PQR não perde o ângulo reto observado. Em decorrência disso, podem observar que um triângulo inscrito em uma semicircunferência é retângulo.

ATIVIDADE 4

Objetivos:

- Construir um triângulo eqüilátero utilizando suas propriedades.

PARTE A

1. Construa um triângulo eqüilátero ABC. Utilize a ferramenta **Circunferência** como compasso.

- Construção de um triângulo eqüilátero:

   i. Selecione **Segmento** na caixa de ferramenta **Reta**, crie um segmento qualquer e nomeie-o de AB.
   ii. Construiremos duas circunferências conforme segue:
   iii. Selecione **Circunferência**, clique na extremidade A que será o centro, leve o cursor até a extremidade B para definir o raio e clique criando assim uma circunferência.
   iv. Repita esse procedimento agora o centro será a extremidade B e a extremidade A vai definir o raio da segunda circunferência.
   v. Selecione a ferramenta **Ponto** mova o cursor até um dos cruzamentos das circunferências e após aparecer a mensagem "Ponto nesta intersecção" clique para obter o terceiro vértice do triângulo. Chame-o de C.

2. Crie os segmentos AC e CB que formarão os lados do triângulo.
3. Meça os ângulos internos do triângulo.

   Esperamos que após medir os ângulos internos do triângulo ABC, verifiquem que todos têm a mesma medida, ou seja: 60°.

4. Movimente o triângulo. Sua construção é robusta?

O triângulo só pode ser movimentado a partir do primeiro segmento criado que chamamos de AB, de suas extremidades ou pelo movimento de uma das circunferências. O *terceiro vértice C, não pode ser movimentado pois está vinculado a outros objetos (obtido pela intersecção das duas circunferências).*

A figura assim construída é "robusta" pois não perde suas características e ou propriedades geométricas quando movimentada.

PARTE B

1. Construa um triângulo eqüilátero cujo lado mede 5 cm.

Uma dificuldade desta construção é que geralmente os alunos/professores ainda não exploraram com maior profundidade as ferramentas disponíveis no Cabri. Assim, é esperado que tentem conseguir visualmente um segmento de 5 cm apenas arrastando uma de suas extremidades até que o segmento fique com a medida desejada.

2. Escreva os passos de sua construção.

- Construção de um segmento dada sua medida:

i. Selecione **Semi-reta** na caixa de ferramentas **Reta**.

ii. Clique para criar ou selecionar o ponto de extremidade inicial da semi-reta.

iii. Posicione a semi-reta na orientação desejada e clique para especificar a direção e a inclinação.

iv. Selecione **Edição numérica** na caixa de ferramentas **Mostrar**.

v. Clique em qualquer lugar para colocar uma caixa de edição e digite o número 5.

vi. Selecione **Transferência de Medidas** na caixa de ferramentas **Construir**.

vii. Aponte o cursor e clique sobre o número editado "5".

viii. Mova o cursor para a semi-reta e clique quando aparecer a mensagem "Esta semi-reta". Aparecerá um ponto sobre a semi-reta. Você terá então uma distância de 5 cm entre a extremidade inicial e esse ponto criado pela ferramenta **Transferência de Medidas**.

ix. Repita os passos da Parte A dessa atividade para construir o triângulo eqüilátero cujo lado mede 5 cm.

Para que a figura fique mais "limpa", sem as construções auxiliares, podemos escondê-las da seguinte maneira:

ii. Selecione **Esconder/Mostrar** na caixa de ferramentas **Desenhar**.

iii. Clique sobre o objeto que deseja esconder. Um objeto escondido é mostrado em um contorno pontilhado quando a ferramenta Esconder/Mostrar está ativa; caso contrário, ficam invisíveis.

iv. Para torná-lo visível novamente, basta clicar sobre ele.

4.3 - Módulo III

4.3.1 - Objetivo do módulo:

Investigar propriedades dos quadriláteros.

4.3.2 – Expectativa

Esperamos que ao final desse módulo os professores estejam familiarizados com as definições e propriedades dos quadriláteros notáveis (paralelogramo, retângulo, losango e quadrado).

Texto: As diferentes definições dos quadriláteros notáveis (ANEXO 5)

ATIVIDADE 5

Objetivos:

- Construir um paralelogramo ABCD tendo por base suas propriedades geométricas.
- Verificar empiricamente as propriedades do paralelogramo.
- Perceber a diferença entre um segmento e uma reta a partir do movimento da figura.

- Construção de um paralelogramo:

1. Crie três pontos quaisquer A, B, C não alinhados e a seguir os segmentos AB e BC.
   i. Selecione a ferramenta **Ponto** e clique em três lugares distintos criando os pontos A, B e C.
   ii. Selecione a ferramenta **Segmento** e una as extremidades AB e BC criando os segmentos.
2. Construa, pelo ponto C, uma reta ***r*** paralela ao segmento AB.
   i. Selecione a ferramenta **Reta paralela**.
   ii. Aponte o cursor para o segmento AB e clique assim que aparecer a mensagem "Paralela a este segmento". Em seguida, leve o cursor até o ponto C e espere aparecer a mensagem "Por este ponto" para clicar e construir a reta **r**.
3. Construa, pelo ponto A, uma reta ***s*** paralela ao segmento BC.

i. Repita as instruções anteriores para construir a reta **s**.

4. Nomeie a intersecção das retas **r** e **s** de D. Utilize a ferramenta **Ponto de intersecção** e clique sobre as retas **r** e **s** para obter o ponto D.
5. Construa os segmentos AD e CD e esconda essas duas retas.
6. Meça os segmentos AB, BC, CD e AD, lados do paralelogramo ABCD.
   i. Selecione a ferramenta **Segmento** e una as extremidades CD e AD para construir os segmentos com essas extremidades.
   ii. Selecione a ferramenta **Distância ou comprimento** para medir os segmentos que determinaram o paralelogramo ABCD.
7. Movimente um dos pontos A, B ou C e observe as medidas dos quatro lados do paralelogramo. O que você pode observar?

   Esperamos a seguinte observação: ao movimentar um desses pontos o paralelismo entre os lados opostos é sempre mantido. As medidas dos lados opostos são iguais.
8. Meça os ângulos internos do paralelogramo.
   i. Crie uma **Marca de ângulo** selecionando a ferramenta **Mostrar.**
   ii. Clique em três pontos consecutivos; no segundo será criado uma marca de ângulo.
   iii. Selecione a caixa de ferramentas **Medir** e escolha **Medida de ângulo.**
   iv. Clique sobre cada marca de ângulo para medir os ângulos internos do paralelogramo.
9. O que se pode observar?

   Esperamos que observem a igualdade das medidas dos ângulos opostos do paralelogramo, que dois ângulos consecutivos são suplementares, mesmo quando as medidas dos lados são alteradas pela movimentação de um dos vértices.
10. Construa os segmentos BD e AC e obtenha a intersecção M desses segmentos.
    i. Utilize a ferramenta **Segmento** e una as extremidades BD e AC.
    ii. Escolha a ferramenta **Ponto**, leve o cursor até o encontro desses segmentos e clique quando aparecer a mensagem “Ponto nesta intersecção” para obter o ponto M.
11. Meça os segmentos AM, MC, BM e MD.
    i. Selecione a ferramenta **Distância ou comprimento** para medir os segmentos.
12. Movimente um dos pontos A, B ou C. O que você observa?

Esperamos que observem que o ponto M dividiu as diagonais AC e BD em seus respectivos pontos médios.

13. Construa a altura BH relativa ao lado CD.
    i. Selecione a ferramenta **Reta perpendicular** na caixa de ferramentas **Construção.**
    ii. Posicione o cursor sobre a reta **r** (suporte do lado CD) e clique quando surgir a mensagem “Perpendicular a esta reta”, em seguida posicione o cursor sobre o ponto B e espere aparecer a mensagem “Por este ponto” para clicar e traçar a reta **t** perpendicular à reta **r**.
    iii. Selecione a ferramenta **Ponto de intersecção** e clique sobre as retas **r** e **t** para obter o ponto H.
    iv. Crie o segmento BH (altura do paralelogramo relativa ao lado CD).
    v. Esconda as construções auxiliares (retas **r, s** e **t**).
14. Movimente a figura de modo que o ângulo BÂD seja obtuso. A sua altura permanece? Caso a altura tenha desaparecido você sabe por que? Justifique.

    Neste caso quando o ângulo BAD torna-se obtuso, a altura BH estará na região externa do paralelogramo. Se a construção dessa altura foi feita com base no segmento CD, ela irá desaparecer, pois não haverá a intersecção da perpendicular ao segmento CD passando pelo ponto B. Para que isso não ocorra (a altura desaparecer), é necessário tomar a reta **r**, suporte do lado CD, para traçar a perpendicular ao ponto B.

ATIVIDADE 6

Objetivos:
- Construir um retângulo preservando suas características.
- Verificar empiricamente as propriedades de um retângulo.

- Construção do retângulo:
1. Construa um retângulo ABCD, sabendo-se que ele é um quadrilátero que tem os quatro ângulos retos.
2. Descreva os passos de sua construção.
    i. Construa um segmento e nomeie-o de AB (ferramenta **Segmento**).

ii. Trace uma perpendicular ao segmento AB pelo ponto A, depois pelo ponto B (ferramenta **Reta perpendicular**).

iii. Coloque um ponto sobre a perpendicular pelo ponto B e chame-o de C. (ferramenta **Ponto sobre objeto**).

iv. Trace uma paralela ao segmento AB passando por C (ferramenta **Reta paralela**).

v. Marque o ponto D na intersecção dessa paralela com a perpendicular relativa ao ponto A (ferramenta **Ponto de intersecção**).

vi. Crie os segmentos BC, CD e AD.

vii. Esconda as construções auxiliares: retas perpendiculares e a reta paralela (ferramenta **Esconder/mostrar)**.

viii. Coloque uma marca nos ângulos internos desse retângulo (ferramenta **Marca de ângulo** na caixa **Mostrar**).

3. Movimente a figura e observe suas propriedades.

   A figura assim construída não perdeu suas propriedades ao ser movimentada, ou seja: ângulos retos, lados opostos paralelos e congruentes.

ATIVIDADE 7

Objetivos:

- Construir um losango preservando suas características e descrever os passos da construção.
- Verificar empiricamente as propriedades do losango

- Construção do losango:

1. Construa um losango ABCD, sabendo-se que ele é um quadrilátero que tem os quatro lados de mesma medida e as diagonais perpendiculares.
2. Descreva os passos de sua construção.

i. Crie um segmento AC (ferramenta **Segmento**).

ii. Trace a mediatriz desse segmento (ferramenta **Mediatriz** na caixa **Construção**).

iii. Marque o ponto de intersecção da mediatriz com o segmento AC e chame-o de M (ferramenta **Ponto de intersecção**).

iv. Coloque um ponto sobre a mediatriz e chame-o de B (ferramenta **Ponto sobre objeto**).

v. Construa uma circunferência com centro em M e raio MB (ferramenta **Circunferência**).

vi. Encontre o ponto D, intersecção da circunferência com a mediatriz.

Nota: o ponto D também pode ser obtido pelo simétrico de B em relação ao segmento AC (diagonal do losango), do seguinte modo:

Selecione **Simetria axial** na caixa de ferramentas **Transformar**. Leve o cursor até o ponto B e clique quando aparecer a mensagem "Simétrico deste ponto", a seguir mova o cursor até o segmento AC e clique após surgir a mensagem "em relação a este centro".

vii. Crie os segmentos AB, BC, CD, AD (lados do losango) e a diagonal BD.

viii. Esconda as construções auxiliares.

ix. Meça os lados do losango (ferramenta **Distância ou comprimento**); uma vez criados os segmentos para medi-los basta clicar sobre eles;

x. Meça o ângulo AMB (ferramenta **Medida de ângulo**).

xi. Meça os segmentos AM, MC, BM e MD.

xii. Movimente a figura e observe suas propriedades.

Como observação esperamos que verifiquem que o losango tem os quatro lados congruentes, suas diagonais são perpendiculares e se interceptam nos respectivos pontos médios.

ATIVIDADE 8

Objetivo:

- Construir um quadrado preservando suas características.
- Verificar empiricamente as propriedades do quadrado.

- Construção do quadrado:

1. Construa um quadrado sabendo-se que ele é um quadrilátero que tem os quatro ângulos retos e os quatro lados da mesma medida. Descreva os passos de sua construção.

   i. Crie um segmento AB (ferramenta **Segmento**).

ii. Trace uma perpendicular ao segmento AB pelo ponto A, em seguida uma pelo ponto B (ferramenta **Reta perpendicular**).
iii. Construa uma circunferência com centro em A e raio AB.
iv. Marque o ponto de intersecção da circunferência com a perpendicular (ferramenta **Ponto** "Ponto nesta intersecção") e chame-o de D.
v. Construa agora uma circunferência com centro em B e raio BA.
vi. Chame de C o ponto de intersecção da circunferência com a perpendicular (ferramenta **Ponto** "Ponto nesta intersecção").

2. Crie meça os segmentos BC, CD e AD.
3. Meça os ângulos internos da figura construída.
4. Trace as diagonais AC e BD e chame de M seu ponto de intersecção.
5. Meça os segmentos AM, MC, BM e MD.
6. Meça o ângulo AMD.
7. Movimente a figura e observe suas propriedades.

   Movimentamos a figura e observamos que a construção permanece com as mesmas propriedades, ou seja: lados congruentes, ângulos retos, diagonais congruentes e perpendiculares entre si e se interceptam nos respectivos pontos médios.

ATIVIDADE 9

Objetivo:

- Construir quadriláteros a partir de suas diagonais.
- Classificar os quadriláteros construídos quanto às propriedades verificadas.

1. Desenhe um quadrilátero conhecendo suas diagonais, sabendo que elas têm medidas iguais, são perpendiculares entre si e que se interceptam nos respectivos pontos médios. Qual foi o quadrilátero obtido?

i. Crie e meça o segmento AC, que será uma das diagonais do quadrilátero.
ii. Trace a mediatriz do segmento AC (ferramenta **Mediatriz** na caixa **Construção**) e chame-o de M.
iii. Construa uma circunferência com centro em M e raio MA.
iv. Marque os pontos de intersecção dessa circunferência com a mediatriz (ferramenta **Pontos de intersecção**), nomeie-os de B e D.

v. Crie e meça o segmento BD (a outra diagonal do quadrilátero).
vi. Crie e meça os segmentos AB, BC, CD e AD (lados do quadrilátero).
vii. Meça os segmentos AM, MC, DM e MB.
viii. Meça os ângulos internos do quadrilátero.
ix. Meça o ângulo AMB.
x. Movimente a figura e observe usas propriedades.

De acordo com a construção e as propriedades observadas, esse quadrilátero é um **quadrado**, pois tem os quatro ângulos são retos os quatro lados congruentes.

2. Desenhe um quadrilátero conhecendo suas diagonais, sabendo que elas têm medidas iguais, não são perpendiculares entre si e que se interceptam nos respectivos pontos médios. Qual foi o quadrilátero obtido?

i. Crie e meça o segmento AC, que será uma das diagonais do quadrilátero.
ii. Encontre o ponto médio de AC e chame-o de M.
iii. Construa uma circunferência com centro em M e raio até uma das extremidades A ou C.
iv. Trace uma reta que passe por M e por um ponto qualquer da circunferência.
v. Marque os pontos de intersecção dessa reta com a circunferência e chame-os de B e D.
vi. Crie e meça o segmento BD.
vii. Crie e meça os segmentos AB, BC, CD e AD (lados do quadrilátero).
viii. Meça os ângulos internos do quadrilátero.
ix. Meça o ângulo AMB.
x. Meça os segmentos AM, MC, BM e MD.
xi. Movimente a figura e observe usas propriedades.

Após movimentar a figura observamos que apresenta as seguintes propriedades: quatro ângulos retos, lados opostos paralelos e congruentes. Diante disso, verificamos que esse quadrilátero é um **retângulo**.

3. Desenhe um quadrilátero conhecendo suas diagonais, sabendo que elas não têm medidas iguais, são perpendiculares entre si e se interceptam nos respectivos pontos médios. Qual foi o quadrilátero obtido?

i. Crie e meça o segmento AC, que será uma das diagonais do quadrilátero.
ii. Trace a mediatriz do segmento AC (ferramenta **Mediatriz** na caixa **Construção**) e chame-o de M.
iii. Coloque um ponto sobre a mediatriz. Nomeie-o de B.
iv. Selecione **Simetria central** na caixa de ferramentas **Transformar**.
v. Leve o cursor até o ponto B e clique quando aparecer a mensagem "Simétrico deste ponto", a seguir mova o cursor até o segmento AC e clique após surgir a mensagem "em relação a este centro". Chame esse ponto de D.
vi. Crie e meça o segmento BD, que será a outra diagonal do quadrilátero.
vii. Meça os segmentos AM, MC, BM e MD.
viii. Crie e meça os segmentos AB, BC, CD e AD (lados do quadrilátero).
xii. Movimente a figura e observe usas propriedades.

Ao movimentar a figura percebemos que seus lados são congruentes, por isso este quadrilátero é um **losango**.

4. Desenhe um quadrilátero conhecendo suas diagonais, sabendo que elas não têm medidas iguais, não são perpendiculares entre si e se interceptam nos respectivos pontos médios. Qual foi o quadrilátero obtido?

i. Crie e meça o segmento AC, que será uma das diagonais do quadrilátero.
ii. Ache o ponto médio de AC e chame-o de M
iii. Trace uma reta que passe pelo ponto M.
iv. Coloque um ponto sobre essa reta e nomeie-o de B.
v. Encontre o simétrico do ponto B em relação ao ponto M. Chame-o de D.
vi. Selecione a ferramenta **Simetria central** na caixa **Transformar**.
vii. Clique sobre o ponto B, aparece a mensagem: "Simétrico deste ponto", a seguir clique sobre o ponto M após a mensagem "em relação a este centro".
viii. Crie e meça o segmento BD.
ix. Meça o ângulo AMB.
x. Crie e meça os segmentas AB, BC, CD e AD.
xi. Movimente a figura e observe usas propriedades.

Nessa construção observamos que os lados opostos são paralelos e congruentes. Portanto o quadrilátero assim construído é um **paralelogramo**.

Após a realização dessa atividade esperamos que cheguem ou se aproximem das seguintes definições para os quadriláteros construídos a partir de suas diagonais:

- Um quadrilátero cujas diagonais se interceptam em seus pontos médios é um **paralelogramo**.
- Um quadrilátero cujas diagonais se interceptam em seus pontos médios e são congruentes é um **retângulo**.
- Um quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares e se interceptam em seus pontos médios é um **losango**.
- Um quadrilátero cujas diagonais são perpendiculares, se interceptam em seus pontos médios e, além disso, são congruentes é um **quadrado**.

A figura contida no arquivo Q1.FIG, da atividade 10 foi pré-construída e gravada num arquivo do Cabri. A este tipo de construção denominamos **caixa-preta**, as etapas da construção são escondidas para que os alunos tentem descobrir como foi elaborada e assim explorarem as propriedades estudadas.

ATIVIDADE 10

Objetivo:

- Rever as propriedades do paralelogramo e do retângulo.
- Investigar uma relação entre os dois quadriláteros.

Pela posição da figura temos a idéia de que o quadrilátero LOVE é um retângulo e o quadrilátero TUCA aparenta ser um losango ou um quadrado. Por isso pedimos inicialmente que descrevam as características desses quadriláteros sem movimentar a figura.

Após movimentar a figura e observar suas propriedades, verificamos que LOVE é um paralelogramo e TUCA um retângulo. As propriedades desses quadriláteros estudadas anteriormente são revistas durante essa investigação.

Ao relacionar esses quadriláteros e tentar descobrir como a construção foi feita, devem observar que os vértices de TUCA são as intersecções das bissetrizes dos ângulos internos do paralelogramo LOVE. É importante destacar que essa propriedade, as intersecções das bissetrizes dos ângulos internos de um paralelogramo, são sempre os vértices de um retângulo. Podemos justificar usando a soma os ângulos internos de um triângulo e as propriedades do paralelogramo.

i. Abra o arquivo Q1.FIG.

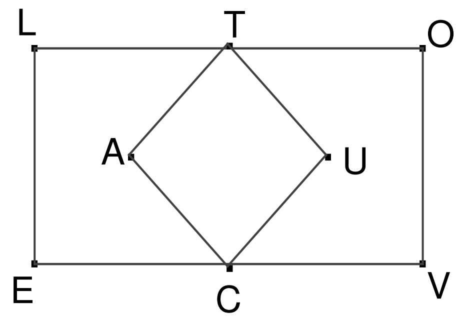


Figura 41 - ARQ1.FIG
Construção feita pelo autor

a) Sem movimentar a figura escreva as características do quadrilátero LOVE;

Aparentemente o quadrilátero LOVE tem os quatro ângulos retos e seus lados opostos são paralelos e têm as medidas iguais. Assim, o quadrilátero LOVE é um **retângulo**.

b) Sem movimentar a figura escreva as características do quadrilátero TUCA;

Aparentemente o quadrilátero TUCA tem os quatro lados com as mesmas medidas e paralelos dois a dois. Assim, o quadrilátero TUCA é um **losango**.

c) Movimente a figura. Investigue as propriedades do quadrilátero LOVE. O que você observa com relação aos lados desse quadrilátero? E quanto aos ângulos?

Os lados opostos são paralelos e com as medidas iguais. Os ângulos não são retos, mas os opostos têm medidas iguais, aparentemente.

d) Investigue as propriedades do quadrilátero TUCA. O que você observa com relação aos lados desse quadrilátero? E quanto aos ângulos?

Agora observamos que os lados opostos são paralelos e congruentes. Os ângulos aparentemente são retos.

e) Você confirma as respostas dadas nos itens (b) e (c)?

Não.

f) Como você classificaria o quadrilátero LOVE?

O quadrilátero LOVE é um paralelogramo.

g) Como você classificaria o quadrilátero TUCA?

O quadrilátero TUCA é um retângulo.

4.4 - Módulo IV

4.4.1 - Objetivo do módulo:

Investigar e validar algumas propriedades dos quadriláteros.

4.4.2 - Expectativa

Esperamos que ao final desse módulo os professores construam uma definição para trapézio, façam conjecturas sobre suas observações, justifiquem propriedades dos quadriláteros e escrevam essas propriedades na forma: “Se **H** então **T**”. Nesse caso, **H** chama-se hipótese e **T** chama-se tese.

ATIVIDADE 11

Objetivo:

- Investigar propriedades dos quadriláteros.
- Definir trapézio.

Esta atividade pretende fazer com que os professores discutam e busquem uma definição para trapézio a partir das propriedades observadas na figura construída. Esperamos que cheguem a pelo menos duas definições: uma que considera o paralelogramo como um caso particular do trapézio, “quadrilátero que possui dois lados paralelos” e outra que particulariza o trapézio, “quadrilátero que possui **apenas** dois lados paralelos”.

Não há consenso entre os autores em adotar uma ou outra definição, pois não há vantagem nem desvantagem na definição que coloca o paralelogramo como um caso particular, nem na que não inclui o paralelogramo como um trapézio.

Essa discussão tende a dividir opiniões. Alguns professores podem não aceitar incluir o paralelogramo como um caso particular dos trapézios, pois trazem gravados os modelos de trapézios apresentados nos livros, isto é, se atêm mais ao figural do que nas definições e nas propriedades do quadrilátero.

Para a realização dessas atividades os participantes precisam conhecer as propriedades de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal e os casos de congruência de triângulos.

- Construção do trapézio:

1. Construir um quadrilátero LMNO cujos lados LM e NO são paralelos.
   i. Crie um ponto fora do segmento LM.
   ii. Trace uma paralela ao segmento LM passando pelo ponto criado. Utilize a ferramenta **Reta paralela** na caixa de **Construção.**
   iii. Coloque um ponto sobre a paralela criada.
   iv. Nomeie esses pontos de N e O seguindo a seqüência LMNO.
   v. Crie os segmentos MN. NO e OL.
   vi. Esconda a reta paralela.
2. Podemos afirmar que LMNO é um paralelogramo? Por quê?

   Esperamos que concluam que não, porque um paralelogramo tem dois pares de lados paralelos e a figura pode ter apenas um. Os participantes poderiam ter feito um desenho cujos lados LO e MN fossem paralelos, assim o paralelogramo poderia ser um caso particular da situação solicitada.
3. Podemos afirmar que LMNO é um retângulo? Por quê?

   Apesar dos retângulos estarem incluídos nos paralelogramos, esperamos que concluam que o desenho não representa um retângulo, pois nada garante que seus ângulos sejam retos.
4. Podemos afirmar que LMNO é um trapézio? Por quê?

   Se considerarem a definição que um trapézio tem apenas um par de lados paralelos, o desenho é um trapézio.
5. Como você define um trapézio?

   Possíveis definições esperadas para trapézio a partir das observações da figura:

   - Trapézio é um quadrilátero que tem dois lados paralelos.
   - Trapézio é um quadrilátero que tem apenas dois lados paralelos.
   - Trapézio é um quadrilátero que tem dois lados paralelos. Os lados paralelos são as bases.

A partir dessa atividade vamos considerar a seguinte definição para trapézio:

Trapézio é um quadrilátero que tem pelo menos um par de lados paralelos.

6. Construir um trapézio qualquer de bases AB e CD.
   i. Construa o segmento AB.

ii. Crie um ponto fora do segmento AB.

iii. Trace uma paralela ao segmento AB passando pelo ponto criado. Utilize a ferramenta **Reta paralela** na caixa **Construção.**

iv. Coloque um ponto sobre a paralela criada.

v. Nomeie esses pontos de C e D seguindo a seqüência ABCD.

vi. Crie os segmentos BC, CD e AD.

vii. Esconda a reta paralela.

7. Qual o valor das medidas das somas dos ângulos $\hat{A}+\hat{D}$ e $\hat{B}+\hat{C}$?
   - A soma das medidas dos ângulos A e D é igual a 180°.
   - A soma das medidas dos ângulos B e C é igual a 180°.

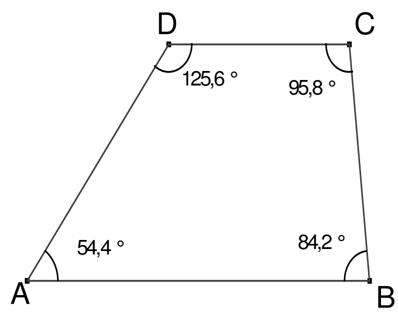


Figura 42 - trapézio qualquer
Construção feita pelo autor

8. O que você pode observar em relação a essas medidas?

   Esperamos que verifiquem que a soma dos ângulos formados pelo lado AD e pelos lados paralelos AB e CD é igual a 180°. O mesmo acontece com os formados pelo lado BC e pelos lados paralelos.

9. Você acredita que esse resultado valha para qualquer trapézio? Por quê?

   A resposta esperada para este item é que o resultado é válido para qualquer trapézio, pois são ângulos colaterais internos cortadas por uma transversal.

ATIVIDADE 12

Objetivo:

- Construir, definir, identificar e enunciar propriedades de um trapézio isósceles.

- Construção do trapézio isósceles:

1. Construa e defina um trapézio isósceles ABCD de bases AB (menor) e CD (maior).

Possíveis etapas para construir um trapézio isósceles:

i. Crie um segmento.
ii. Crie um ponto fora desse segmento.
iii. Trace uma reta **r** paralela ao segmento criado passando pelo ponto criado. Utilize a ferramenta **Reta paralela** na caixa **Construção.**
iv. Trace uma mediatriz ao segmento.
Utilize a ferramenta **Mediatriz** na caixa **Construção.**
v. Marque a intersecção desta mediatriz com a reta **r** .
vi. Construa uma circunferência com centro nesta intersecção e raio qualquer.
vii. Marque as intersecções da circunferência com a reta **r.**
Utilize a ferramenta **Ponto de intersecção** na caixa **Ponto**. Clique na circunferência e em seguida na reta **r** para obter os dois pontos.
viii. Nomeie esses pontos e as extremidades do segmento criado de A, B, C e D de modo que AB seja a base menor e CD a base maior do trapézio.
ix. Crie os segmentos AB, BC, CD e AD (lados do trapézio).
x. Esconda as construções auxiliares.
É comum encontrarmos a seguinte definição para trapézio isósceles:

Trapézio isósceles é aquele cujos lados não-paralelos são congruentes.

Esta definição é aceita sem maiores questionamentos, pois se entende que os lados paralelos são de bases do trapézio. No entanto, esses lados não paralelos poderiam ser uma das bases e um dos outros lados, por exemplo: AB e AD não são paralelos e poderiam ser congruentes. Diante disso, a definição apresentada careceria de uma complementação no sentido de dirimir essa dúvida. Assim, poderíamos chegar a uma definição no seguinte sentido:
Considere um trapézio cujos lados paralelos são as bases. Se os outros dois lados não paralelos são congruentes, o trapézio é isósceles.
Podemos entender ainda que um trapézio isósceles pode ser obtido por meio de um corte paralelo à base de um triângulo isósceles.

2. Construa as perpendiculares às bases pelos vértices A e B da base menor, obtendo os pontos A’ e B’ na base maior CD.
   i. Selecione a ferramenta **Reta perpendicular** na caixa **Construção**.

ii. Clique no ponto A e a seguir no segmento CD.

iii. Marque a intersecção dessa perpendicular com o segmento CD e nomeie-o de A'.

iv. Repita esse procedimento para obter o ponto B'.

v. Crie os segmentos AA' e BB'.

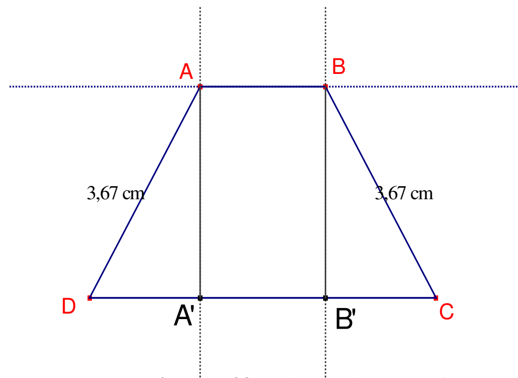


Figura 43 - altura do trapézio
Construção feita pelo autor

a) AA' = BB'? Por quê?

Esperamos que os participantes concordem que AA' = BB' e justifiquem que se tratam de segmentos perpendiculares a dois segmentos paralelos, ou seja: as bases do trapézio.

b) Os triângulos AA'D e BB'C são congruentes? Por quê?

Os triângulos AA'D e BB'C são retângulos, pois os lados AA' e BB' têm como suporte uma reta perpendicular ao segmento CD e os lados A'D e B'C estão sobre o segmento CD.

Esperamos que afirmem que os triângulos AA'D e BB'C são congruentes e justifiquem utilizando o caso especial de congruência de triângulos retângulos, a saber:

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então estes triângulos são congruentes.

Inicialmente, os lados AD e BC têm as mesmas medidas, pois são os lados não paralelos do trapézio (hipotenusas dos triângulos AA'D e BB'C, respectivamente).

No item I, vimos que os lados AA' e BB' são congruentes (catetos dos triângulos AA'D e BB'C, respectivamente).

Logo, os triângulos AA’D e BB’C são congruentes.

c) **As medidas dos ângulos A e B são iguais? Por quê?**

Possível explicação:

De acordo com o item “a” os ângulos DAB e CBA (Fig. 43), foram divididos em dois outros da seguinte forma: A’AB e B’BA retos e A’AD e B’BC que são congruentes como visto no item b.

Desta forma, podemos concluir que os ângulos A e B têm medidas iguais.

Com base nisso esperamos que observem e concluam que os ângulos das bases de um trapézio isósceles são congruentes.

3. Construa as diagonais AC e BD do trapézio ABCD.

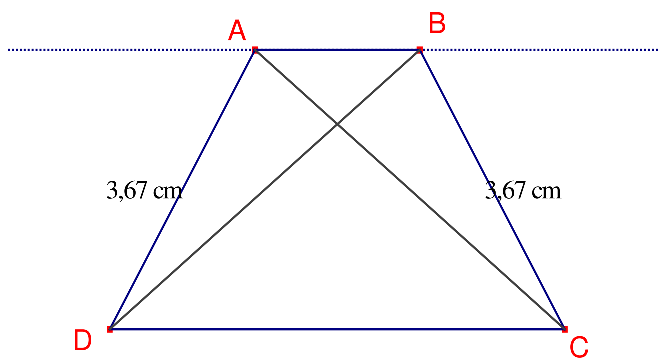


Figura 44 - diagonais do trapézio
Construção feita pelo autor

AC = BD? Por quê?

Para esta questão esperamos que os participantes afirmem que AC = BD. Como justificativa podem recorrer ao caso LAL de congruência para os triângulos ABD e ABC. AB é lado comum; AD e BC são os lados congruentes do trapézio e os ângulos A e B são congruentes.

4. Escreva um enunciado para as propriedades que você observou.

Esperamos como enunciado para essa propriedade algo em torno de:

As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Até este momento, as conclusões observadas são apenas provas empíricas, ou seja: justificadas a partir da visualização das figuras construídas.

Para provar essas justificativas de um modo mais formal precisamos demonstrar um teorema.

Teorema é uma propriedade matemática verdadeira, mas que precisa ser demonstrada. Uma vez demonstrado, o teorema pode se utilizado como ferramenta de resoluções de problemas em outras situações.

Todo teorema pode ser escrito na forma: se **H** então **T**. Nesse caso, **H** chama-se **hipótese** e **T** chama-se **tese.**

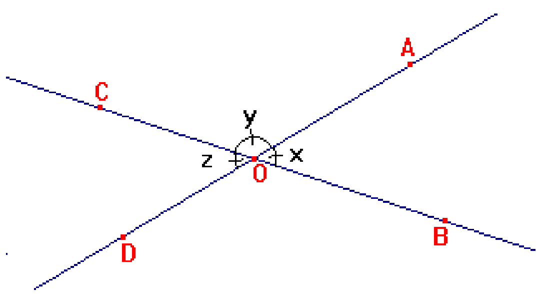
Teorema 1:

Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então suas medidas são iguais.

Hipótese: Dois ângulos são opostos pelo vértice.

Tese: Suas medidas são iguais.

Demonstração:



Considere duas retas $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ que se interceptam no ponto O. Chamaremos de opostos pelo vértice (o.p.v.) os ângulos AÔB e CÔD.

Sejam x, y e z as medidas dos ângulos AÔB, AÔC e CÔD, respectivamente. Teremos:

$x + y = 180^o$ e $y + z = 180^o$.

Então $x + y = y + z$, daí decorre que $x = z$.

Por hipótese, **x** e **z** são as medidas dos ângulos AÔB e CÔD, opostos pelo vértice.

Logo **AÔB = CÔD.**

Figura 45 - ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.).
Construção feita pelo autor

Teorema 2:

Num quadrilátero ABCD, se AB é paralelo a CD então a soma das medidas dos ângulos A e D é igual à soma das medidas dos ângulos B e C. Além disso, essa soma é 180º.

Identifique nesse teorema a hipótese e a tese.

Hipótese: *ABCD é um quadrilátero* e *AB é paralelo à CD.*

Tese: $\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

Utilizando o Cabri como recurso visual, verifique esse teorema. A seguir faça uma prova para ele.

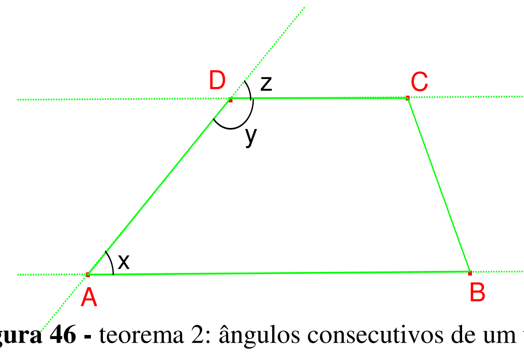


Figura 46 - teorema 2: ângulos consecutivos de um trapézio
Construção feita pelo autor

Possível encaminhamento para uma prova desse teorema:

Sejam x e y respectivamente as medidas dos ângulos internos BÂD e $A\hat{D}C$, do quadrilátero ABCD e seja z a medida do ângulo externo $\hat{D}$, obtido pelo prolongamento do lado AD com o lado CD desse quadrilátero.

Como o ângulo interno $A\hat{D}C$ e o ângulo externo $\hat{D}$ são adjacente e suplementares, temos que y+z = 180°.

Por hipótese, AB//CD então os ângulos BÂD e $\hat{D}$ são congruentes (colaterais externos), em decorrência disso, x = z. Mas y+z = 180°. Portanto, x + y = 180°.

Analogamente para os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Logo, $\hat{A}+\hat{D}=\hat{B}+\hat{C}=180°$.

ATIVIDADE 13

Objetivo:

- Fazer conjecturas e verificar propriedades entre os ângulos opostos de um paralelogramo.

1. Construa um paralelogramo EFGH. Meça e compare seus ângulos opostos.
2. O que você observa?

- Construção do paralelogramo: ver Atividade 5.

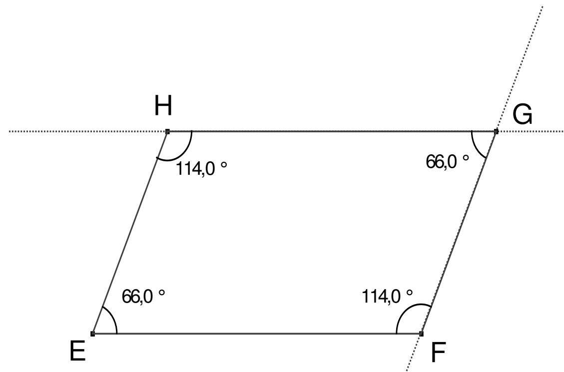


Figura 47 - ângulos do paralelogramo
Construção feita pelo autor

Após movimentar a figura e comparar seus ângulos internos, pretendemos que os participantes observem que as medidas dos ângulos opostos são iguais.

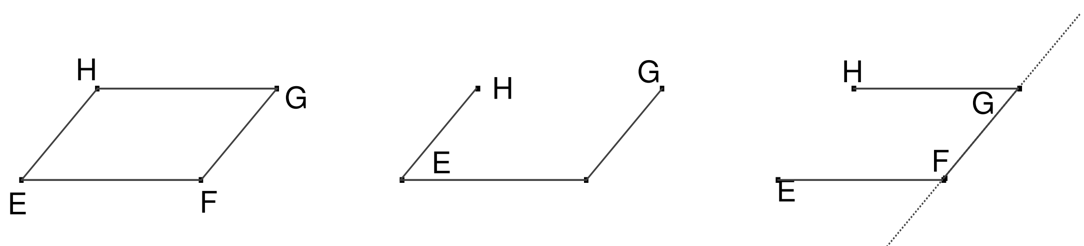
ii. Enuncie os resultados observados no item (a) e dê uma justificativa para esse enunciado.

Possível enunciado e demonstração para essa propriedade.

Se o quadrilátero EFGH é um paralelogramo, então seus ângulos opostos são congruentes.

Hipótese: *EFGH é um paralelogramo.*

Tese: *os ângulos apostos são congruentes.*



$$\text{EFGH é paralelogramo} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} EH // FG \quad \Rightarrow \hat{E} + \hat{F} = 180° \\ EF // GH \quad \Rightarrow \hat{F} + \hat{G} = 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E} \equiv \hat{G}$$

Analogamente mostramos que os ângulos F e H são congruentes.

iii. Enuncie a recíproca dessa propriedade. Verifique se é verdadeira.

A seguir apresentamos um possível enunciado e sua justificativa para essa questão.

Se os ângulos opostos de um quadrilátero são congruentes, então este quadrilátero é um paralelogramo.

Sendo EFGH um quadrilátero.

Hipótese*:* $\hat{E} \equiv \hat{G}$, $\hat{F} \equiv \hat{H}$

Tese: EFGH é paralelogramo

$$\left.\begin{array}{l} \hat{E} \equiv \hat{G},\ \ \hat{F} \equiv \hat{H} \ \Rightarrow\ \hat{E}+\hat{F} = \hat{G}+\hat{H} \\ \text{EFGH é quadrilátero então } \hat{E}+\hat{F}+\hat{G}+\hat{H} = 360° \end{array}\right\} \Rightarrow\ \hat{E}+\hat{F} = \hat{E}+\hat{H} = 180°$$

Daí decorre que EH//FG e EF//GH.

Logo, EFGH é paralelogramo.

iv. Tente escrever os itens (b) e (c) em um único enunciado. Justifique.

Possível enunciado para os itens (b) e (c):

O quadrilátero EFGH é um paralelogramo se, e somente se, seus ângulos opostos são congruentes.

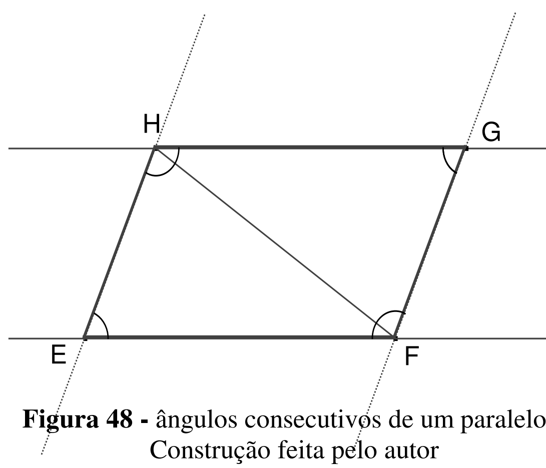


Figura 48 - ângulos consecutivos de um paralelogramo
Construção feita pelo autor

Essa justificativa deve ser feita em duas etapas. Na primeira deve ser mostrado que se o quadrilátero EFGH é paralelogramo, seus ângulos opostos são congruentes (ida). Na segunda, que se os ângulos opostos do quadrilátero são congruentes, ele é um paralelogramo (volta).

I – ida.

Hipótese: EFGH é paralelogramo.

Tese: os ângulos opostos são congruentes.

Seja EFGH um paralelogramo (Fig. 48).

$(\hat{E}\text{ e }\hat{H})$ e $(\hat{F}\text{ e }\hat{G})$ são colaterais internos

$(\hat{E}\text{ e }\hat{F})$ e $(\hat{H}\text{ e }\hat{G})$ são colaterais internos

Temos então $\hat{E}+\hat{H}=180^{\circ}$ e $\hat{F}+\hat{G}=180^{\circ}$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}+\hat{H}=180^{\circ}\\ \hat{E}+\hat{F}=180^{\circ}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{F}\equiv\hat{H}$$

Analogamente, $\hat{E}\equiv\hat{G}$

Logo, os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

II – volta.

Hipótese: Os ângulos opostos do quadrilátero EFGH são congruentes.

Tese: O quadrilátero é um paralelogramo.

Por hipótese $\hat{E}\equiv\hat{G}$ e $\hat{F}\equiv\hat{H}$ (Fig. 48).

Temos que

$(\hat{E}\text{ e }\hat{H})$ e $(\hat{F}\text{ e }\hat{G})$ são colaterais internos

$(\hat{E}\text{ e }\hat{F})$ e $(\hat{H}\text{ e }\hat{G})$ são colaterais internos

Daí decorre que o ângulo correspondente a HEF com o formado pelo prolongamento do lado EF do quadrilátero EFGH são congruentes, pois $\hat{E}+\hat{F}=180^{\circ}$. Então os lados do quadrilátero são paralelos.

Logo, o quadrilátero EFGH é um paralelogramo.

ATIVIDADE 14

Objetivos:

- Identificar e enunciar a propriedade do quadrilátero inscrito numa circunferência.
- Justificar a propriedade observada.

  Para realizar essa atividade os professores precisam conhecer as propriedades dos ângulos numa circunferência.

- Construção do quadrilátero inscrito numa circunferência:

1. Construa uma circunferência de centro **O**. Coloque quatro pontos sobre ela e a seguir obtenha o quadrilátero ABCD.
   ii. Ferramenta **Circunferência.**
   iii. Marcar os pontos A, B, C e D (ferramenta **Ponto sobre objeto**).
   iv. Crie os segmentos AB, BC, CD e AD (lados do quadrilátero).
2. Meça dois ângulos opostos desse quadrilátero, por exemplo, os ângulos A e C.

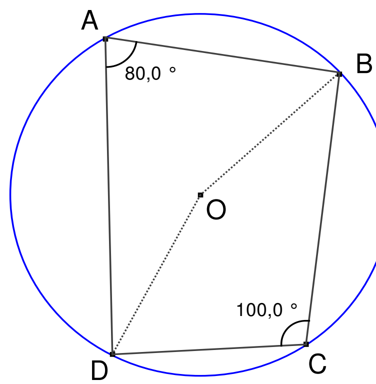


Figura 49 - ângulos do opostos do quadrilátero inscrito
Construção feita pelo autor

3. Movimente um dos vértices, observe e estabeleça uma relação entre as medidas desses ângulos.

Quando movimentamos um dos vértices A ou C, as medidas desses ângulos não são alteradas. Ao movimentar um dos outros dois B ou D, observamos que as medidas de A e de C são alteradas.

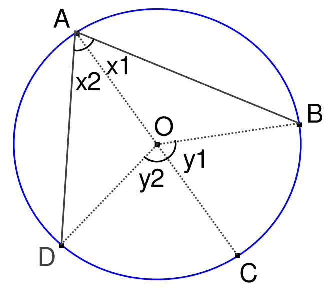
Podemos estabelecer, a partir dessas observações, que a soma das medidas dos ângulos A e C é 180°.

4. Justifique sua resposta.

Possível justificativa para essa propriedade:

Para justificar essa propriedade basta mostrar que um ângulo inscrito relativo a uma circunferência é metade da medida do ângulo central correspondente. Vale lembrar que *ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela*. Em nosso caso, o ângulo BÂD é um ângulo inscrito. Temos, ainda, que AB é o arco correspondente e AÔB é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito BÂD.

Conforme a figura ao lado, seja x a medida do ângulo $B\hat{A}D$ e y a medida do ângulo $B\hat{O}D$ e ainda $x = x1 + x2$ e $y = y1 + y2$, sendo x1 a medida do ângulo $O\hat{A}B$, x2 a medida do ângulo $O\hat{A}D$, y1 a medida do ângulo $B\hat{O}C$ e y2 a medida do ângulo $C\hat{O}D$.



Inicialmente precisamos provar que $x = \frac{y}{2}$. Para isso vamos mostrar antes que $x1 = \frac{y1}{2}$.

De fato, os segmentos OB e OA são congruentes, pois são raios da circunferência. Então, o triângulo AOB é isósceles, daí segue que a medida do ângulo OBA é também x1. Como y1 é a medida de um ângulo externo do triângulo AOB, temos que $y1 = 2x1$ ou seja:

$x1 = \frac{y1}{2}$. Analogamente, $x2 = \frac{y2}{2}$.

Como $x1 + x2 = \frac{y1}{2} + \frac{y2}{2}$, temos que $2(x1 + x2) = y1 + y2$. Portanto $2x = y$.

Logo, $x = \frac{y}{2}$.

5. Essa atividade caracteriza uma propriedade geométrica que costuma ser chamada de **teorema do quadrilátero inscritível.** Tente enunciar esse teorema.

   Após esta atividade esperamos que os participantes enunciem esse teorema de maneira próxima a:

   A soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência é igual a 180°, ou seja: esses ângulos são suplementares.

ATIVIDADE 15
Objetivos:

- Verificar a propriedade do ângulo formado pelas bissetrizes de ângulos consecutivos de um paralelogramo.
- Validar essa conjectura.

1. Construa um paralelogramo ABCD.
2. Trace as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$.
3. Marque a intersecção dessas bissetrizes e nomeie de M.

4. Meça os ângulos internos do triângulo AMD.
5. Movimente os vértices A, B C ou D.

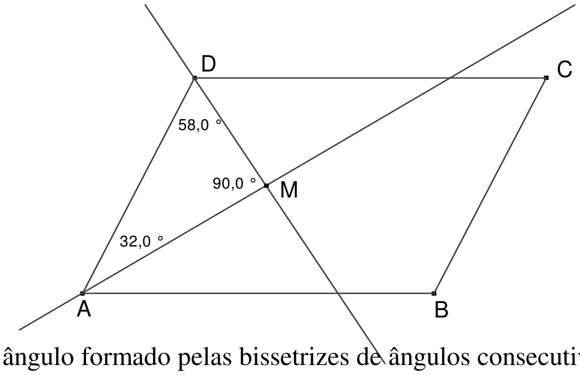


Figura 50 - ângulo formado pelas bissetrizes de ângulos consecutivos de um paralelogramo
Construção feita pelo autor

6. Anote suas observações e conjecturas.

Ao movimentar os vértices A, B e D observamos que apenas as medidas dos ângulos A e D do triângulo AMD se modificam. O ângulo M permanece inalterado com sua medida igual a 90°.

Desta forma, concluímos que as bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são perpendiculares.

Pela construção (Fig. 50), o vértice C não se movimenta pois está na intersecção de duas retas. Isto é, está vinculado a dois outros objetos (neste caso duas retas).

7. Faça uma validação para suas conjecturas.

No quadrilátero ABCD (Fig. 50):

- Os ângulos $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$
- Como se trata de um paralelogramo, os ângulos opostos são congruentes.
- Então os ângulos $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{D} \equiv \hat{B}$
- Substituindo o ângulo C pelo ângulo A e o ângulo B pelo ângulo D, temos:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360$ ====> $\hat{A} + \hat{D} + \hat{A} + \hat{D} = 360°$, daí vem que

$2\,(\hat{A} + \hat{D}) = 360°$. Portanto,

$\hat{A} + \hat{D} = 180°$

No triângulo ADM (Fig. 50):

$\hat{M} = 180° - \left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2}\right)$. Ora, $\hat{A} + \hat{D} = 180°$ então $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = 90°$.

Assim, $\hat{M} = 90°$.

Logo, as bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são perpendiculares.

ATIVIDADE 16

Objetivos:

- Verificar a posição relativa das bissetrizes de dois ângulos opostos de um paralelogramo.
- Validar sua conjectura.

1. Construa um paralelogramo ABCD.
2. Trace as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$.

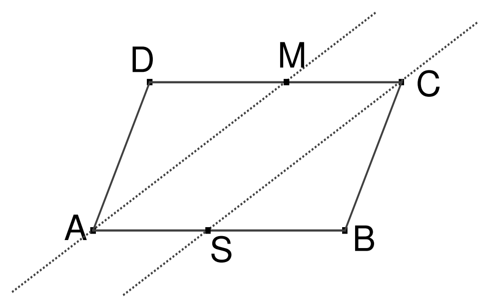


Figura 51 - posição das de ângulos opostos de um paralelogramo
Construção feita pelo autor

3. Movimente um dos vértices e observe as bissetrizes.
4. Que posições assumem as retas das bissetrizes uma em relação à outra?

   Essas bissetrizes são paralelas entre si.
5. Valide sua conjectura.

   Seja o paralelogramo ABCD (Fig. 51).

   Temos $\hat{A} = \hat{C}$. A figura acima mostra que as bissetrizes AM e CS são paralelas visto que cortadas por AB formam ângulos correspondentes congruentes, pois a medida do ângulo BSC, é igual à metade do ângulo DAB.

4.5 - Módulo V

4.5.1 - Objetivo do módulo:

Investigar e validar algumas propriedades dos quadriláteros.

4.5.2 - Expectativa

Ao final desse módulo esperamos que os professores desenvolvam, com autonomia, as justificativas para as propriedades verificadas envolvendo os quadriláteros, quanto aos ângulos, aos lados e às diagonais.

ATIVIDADE 17

A partir desta atividade os participantes já dominam as ferramentas básicas de construção no Cabri, por isso não faremos um passo-a-passo para a construção da figura. Caso necessite de alguma ferramenta que ainda não foi utilizada, aí sim indicaremos as etapas para elaboração da figura.

Objetivo:

- Identificar e justificar propriedades do paralelogramo.

1. Dos vértices B e D de um paralelogramo traçam-se os segmentos BM e DP perpendiculares, sobre a diagonal AC que une os ângulos agudos.

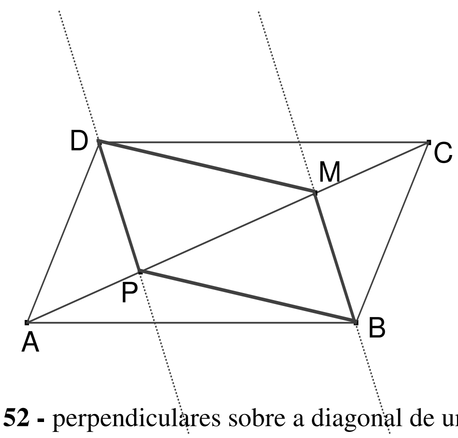


Figura 52 - perpendiculares sobre a diagonal de um paralelogramo
Construção feita pelo autor

2. Mostrar que BM = DP.

   Os triângulos retângulos APD e BMC (Fig. 52) são congruentes pelo caso LAA_o: hipotenusas AD e BC de mesma medida; os ângulos DAP e MCB são congruentes (alternos internos) e os ângulos DPA e BMC são retos.

   Logo, BM é congruente a DP.

3. Mostrar que o quadrilátero DPBM é um paralelogramo.

   Os segmentos DP e BM são congruentes (item a) e paralelos, pois têm como suporte duas perpendiculares à diagonal AC. Por congruência de triângulos, caso LAL, mostramos que são congruentes os triângulos DPM e

BMP. O lado MP é comum aos dois triângulos, os ângulos MPD e PMB são alternos internos portanto, congruentes. Os lados DP e BM são congruentes. Assim, DM é congruente a PB.

Logo, o quadrilátero DMPB é um paralelogramo.

ATIVIDADE 18

Objetivo:

- Observar que as bissetrizes dos ângulos internos de um paralelogramo se cortam formando um retângulo.
- Identificar o quadrilátero formado pela intersecção das bissetrizes dos ângulos internos de um paralelogramo.
- Elaborar e validar uma conjectura para esse quadrilátero.

1. Construa um paralelogramo ABCD.
2. Trace as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e $\hat{D}$.
3. Marque a intersecção dessas bissetrizes e nomeie de M, S, R e P.

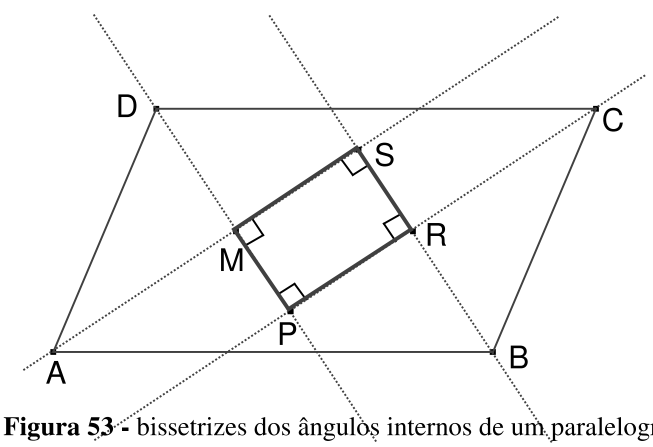


Figura 53 - bissetrizes dos ângulos internos de um paralelogramo
Construção feita pelo autor

4. Movimente um dos vértices e registre suas conjecturas.

   Ao movimentar um dos vértices o quadrilátero MPRS não perde suas características, ou seja: sua forma não é alterada pela movimentação.

5. Qual a natureza do quadrilátero MPRS?

   O quadrilátero MPRS é um **retângulo.**

6. Apresente uma validação para suas conjecturas.

   Possível validação para essa propriedade.

O quadrilátero ABCD (Fig. 53) é um paralelogramo.

Temos, então que $\hat{A}+\hat{D} = 180°$ ou $\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{D}}{2} = 90°$.

Portanto $\hat{S} = 90°$. Analogamente concluímos que $\hat{M} = \hat{P} = \hat{R} = 90°$.

Logo, MPRS é um retângulo.

ATIVIDADE 19

Objetivo:

- Observar e justificar uma propriedade das bissetrizes dos ângulos internos de um retângulo.

1. Construa o retângulo ABCD
2. Trace as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ e $\hat{D}$.
3. Marque as intersecções dessas bissetrizes e nomeie-as de M, S, R e P.
4. Crie e meça os segmentos MS, SR, RP e PM.
5. Meça os ângulos internos do quadrilátero MSRP.

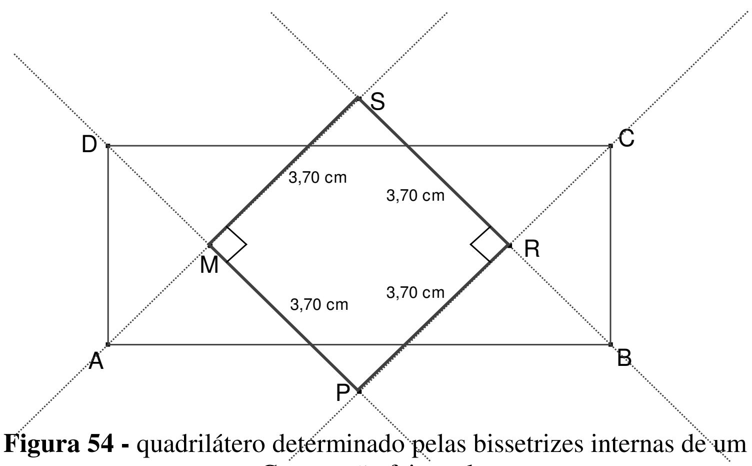


Figura 54 - quadrilátero determinado pelas bissetrizes internas de um retângulo
Construção feita pelo autor

6. Movimente um dos vértices do retângulo e registre suas conjecturas.

   Ao movimentar o retângulo observamos que o quadrilátero MSRP não perde suas características quanto aos lados e aos ângulos.

7. Qual a natureza do quadrilátero MSRP?

   O quadrilátero MSRP é um quadrado.

8. Apresente uma validação para suas conjecturas.

Possível validação:

Seja o retângulo ABCD (Fig. 54).

No quadrilátero MSRP, temos que $\hat{P} = \hat{Q} = \hat{R} = \hat{S} = 90°$ (ver Atividade 18).

Os triângulos AMD e BRC são congruentes pelo caso ALA, pois AD e BC são congruentes. Os ângulos MAD e MDA têm medidas iguais a 45° (bissetriz do ângulo interno do retângulo). Pelo mesmo motivo, também são congruentes os ângulos RBC e RCB.

Logo, AM, MD, BR e RC são congruentes.

O triângulo ASB é isósceles, pois os ângulos da base AB têm medidas iguais (45°). Então, AS e BS são congruentes.

Fazendo AS – AM = MS = BS – BR = SR ====> MS = SR

Analogamente, mostramos a congruência dos outros lados.

Logo, o quadrilátero MSRP é um quadrado.

ATIVIDADE 20

Objetivo:

- Identificar e enunciar uma propriedade da diagonal de um paralelogramo.
- Validar a conjectura.

- Divisão da diagonal de um paralelogramo

1. Construa um paralelogramo ABCD.
2. Trace a diagonal AC.
3. Marque os pontos médios dos lados AD e BC, nomeando-os respectivamente de M e P.
4. Trace os segmentos BM e DP.
5. Marque as intersecções E e F de BM e DP com a diagonal AC, respectivamente.
6. Meça os segmentos AE, EF e FC.

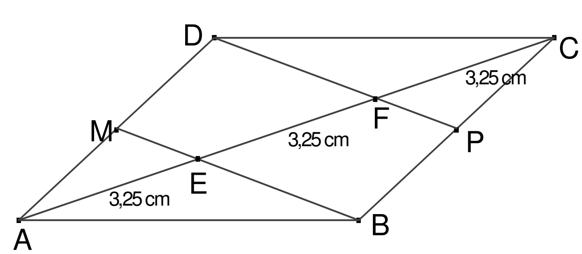


Figura 55 - diagonal dividida em três partes de medidas iguais
Construção feita pelo autor

7. Movimente um dos vértices. O que você observou em relação à diagonal AC?

   Esperamos que observem que a diagonal de um paralelogramo fica dividida em três partes iguais quando cortada pelos segmentos obtidos ligando-se os pontos B e D aos pontos médios dos lados AD e BC, respectivamente (Fig. 55).

8. Valide sua conjectura.

   Para validação dessa conjectura utilizaremos o conceito de semelhança de triângulos.

   Possível validação:

   Vemos que BM (Fig. 55) é paralelo a DP, pois os triângulos AMB e CPD são congruentes pelo caso LAL (são congruentes AB e CD, AM e CP e os ângulos BAM e PCD). Logo, DP é congruente a BM. Como BP e MD são congruentes, concluímos que o quadrilátero BPDM é um paralelogramo. Portanto BM//DP.

   Sendo AM congruente a MD, teremos os segmentos AE e EF com medidas iguais. Os triângulos AME e ADF são semelhantes cuja razão de semelhança é de um para dois, ou seja: $\frac{1}{2}$. Analogamente para os triângulos CPF e CBE.

   Conseqüentemente, os segmentos AE, EF e FC têm a mesma medida.

4.6 - Módulo VI

4.6.1 - Objetivo do módulo:

Investigar e validar algumas propriedades dos quadriláteros.

4.6.2 - Expectativa

Ao final desses módulos esperamos que os professores desenvolvam com autonomia as justificativas para as propriedades verificadas envolvendo os quadriláteros, quanto aos ângulos, aos lados e às diagonais.

ATIVIDADE 21

Objetivo:

- Identificar a natureza do quadrilátero obtido a partir de um triângulo isósceles.

- Construção do quadrilátero:

1. Construa um triângulo isósceles ABC de base BC.

2. Encontre o ponto médio de BC e nomeie-o de M.
3. Trace as paralelas ME ao lado AB e MD ao lado AC.
4. Crie e meça os segmentos AD, DM, ME e AE.
5. Movimente os vértices do triângulo e anote suas observações.

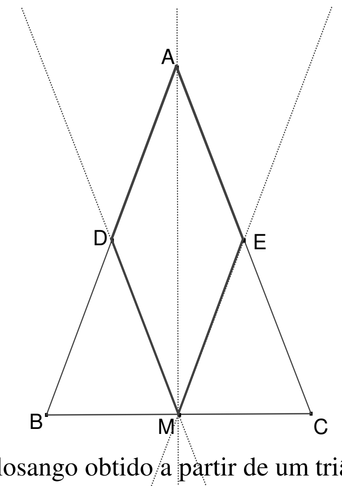


Figura 56 - losango obtido a partir de um triângulo isósceles
Construção feita pelo autor

6. Qual a natureza do quadrilátero ADME?

O quadrilátero ADME é um losango.

7. Justifique sua resposta.

Possível justificativa.

O quadrilátero ADME (Fig. 56) é um paralelogramo.

Os triângulos DBM e EMC são isósceles e congruentes pelo caso ALA.

Portanto, DM e EC são congruentes.

Logo, o quadrilátero ADME é um losango

ATIVIDADE 22

Objetivo:

- Observar e identificar a natureza de um quadrilátero obtido da intersecção das bissetrizes dos ângulos formados por um par de retas paralelas cortadas por uma transversal.
- Justificar essa propriedade.

- Construção da figura:

i. Trace duas retas ***AB (s)*** e ***CD (r)***, paralelas entre si cortadas por uma transversal ***t***.

ii. Marque os pontos de intersecção das retas ***r*** e ***s*** com a reta ***t*** e nomeie-os de P e Q, respectivamente.

iii. Trace as bissetrizes dos ângulos interiores a essas paralelas, que vão se cortar nos pontos R e S.

iv. Crie os segmentos PR, RQ, QS e SP.

v. Trace as diagonais PQ e RS.

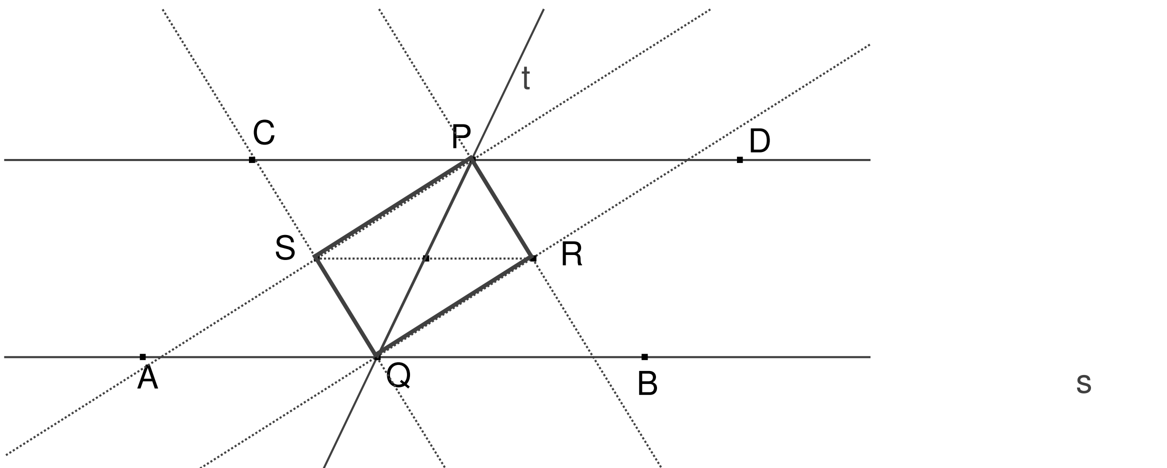


Figura 57 - quadrilátero obtido pelas bissetrizes dos ângulos interiores de duas paralelas cortadas por uma transversal
Construção feita pelo autor

vi. Determinar a natureza do quadrilátero PRQS.

O quadrilátero PRQS é um retângulo.

vii. Verifique se o quadrilátero PQRS pode ser transformado num quadrado. Justifique sua resposta.

PQRS é retângulo, $\hat{P}$ é reto, pois $\hat{P} = 180 - \dfrac{C\hat{P}Q + D\hat{P}Q}{2} = 90°$.

Analogamente, os ângulos $\hat{Q} = \hat{R} = \hat{S} = 90°$.

Esse quadrilátero será um quadrado se as diagonais se cortarem em ângulo reto, isto é, PQ será perpendicular às retas AB e CD.

ATIVIDADE 23 - Propriedades dos quadriláteros notáveis. Disponível em: http://www.mathsciences.ac-versailles.fr/IMG/doc/quadrilateres_TXT.doc acessado em 13/06/07. Tradução nossa.

Objetivo

- Estudar as propriedades dos quadriláteros *notáveis* utilizando o plano cartesiano.
    - Abra o Cabri, no menu *construção*, mostrar eixos e definir grade.

Primeiro quadrilátero:

Com a ferramenta *ponto sobre objeto*, definir os pontos A, B , C e D de coordenadas:

A(1 ; 9) , B(4 ; 5) , C(1 ; 1) , D(-2 ; 5)

O quadrilátero assim obtido é um: (preencha a quadrícula)

☐ Trapézio ☐ Losango ☐ Quadrado ☐ Paralelogramo ☐ Retângulo

Obtenha as diferentes medidas e anote suas observações.

Há lados paralelos ? Se sim, quais ?				
Meça os ângulos (°)	$\hat{A} = \alpha =$	$\hat{B} = \beta =$	$\hat{C} = \gamma =$	$\hat{D} = \delta =$
Há ângulos de medidas iguais ? Se sim, quais ?				
Meça os lados.	AB =	BC =	CD =	DA =
Há lados de medidas iguais ? Se sim, quais ?				
Trace as diagonais e marque o ponto (E) de intersecção entre elas. Meça as semi-diagonais.	EA =	EB =	EC =	ED =
Há semi-diagonais iguais ? Se sim, quais ?				
Há duas diagonais iguais? Elas são perpendiculares?				

B) Segundo quadrilátero:

Com a ferramenta *ponto sobre objeto*, definir os pontos A, B , C e D de coordenadas

A(-2 ; 8) , B(5 ; 8) , C(5 ; 1) , D(-2 ; 1)

O quadrilátero assim obtido é um: (preencha a quadrícula)

☐ Trapézio ☐ Losango ☐ Quadrado ☐ Paralelogramo ☐ Retângulo

Obtenha as diferentes medidas e anote suas observações.

Há lados paralelos ? Se sim, quais ?				
Meça os ângulos (°)	$\hat{A} = \alpha =$	$\hat{B} = \beta =$	$\hat{C} = \gamma =$	$\hat{D} = \delta =$
Há ângulos de medidas iguais ? Se sim, quais ?				
Meça os lados.	AB =	BC =	CD =	DA =
Há lados de medidas iguais ? Se sim, quais ?				
Trace as diagonais e marque o ponto (E) de intersecção entre elas. Meça as semi-diagonais.	EA =	EB =	EC =	ED =
Há semi-diagonais iguais ? Se sim, quais ?				
Há duas diagonais iguais? Elas são perpendiculares?				

C) Terceiro quadrilátero:

Com a ferramenta *ponto sobre objeto*, definir os pontos A, B , C e D de coordenadas :

A(-2 ; 8) , B(6 ; 8) , C(10 ; 3) , D(-3 ; 3)

O quadrilátero assim obtido é um: (preencha a quadrícula)

☐ Trapézio ☐ Losango ☐ Quadrado ☐ Paralelogramo ☐ Retângulo

Obtenha as diferentes medidas e anote suas observações.

Há lados paralelos ? Se sim, quais ?				
Meça os ângulos (°)	$\hat{A} = \alpha =$	$\hat{B} = \beta =$	$\hat{C} = \gamma =$	$\hat{D} = \delta =$
Há ângulos de medidas iguais ? Se sim, quais ?				
Meça os lados.	AB =	BC =	CD =	DA =
Há lados de medidas iguais ? Se sim, quais ?				
Trace as diagonais e marque o ponto (E) de intersecção entre elas. Meça as semi-diagonais.	EA =	EB =	EC =	ED =
Há semi-diagonais iguais ? Se sim, quais ?				
Há duas diagonais iguais? Elas são perpendiculares?				

D) **<u>Quarto quadrilátero:</u>**

Com a ferramenta *ponto sobre objeto*, definir os pontos A, B , C e D de coordenadas :

A(-2 ; 8) , B(9 ; 8) , C(9 ; 3) , D(-2 ; 3)

O quadrilátero assim obtido é um: (preencha a quadrícula)

☐ Trapézio ☐ Losango ☐ Quadrado ☐ Paralelogramo ☐ Retângulo

Obtenha as diferentes medidas e anote suas observações.

Há lados paralelos ? Se sim, quais ?				
Meça os ângulos (°)	$\hat{A} = \alpha =$	$\hat{B} = \beta =$	$\hat{C} = \gamma =$	$\hat{D} = \delta =$
Há ângulos de medidas iguais ? Se sim, quais ?				
Meça os lados.	AB =	BC =	CD =	DA =
Há lados de medidas iguais ? Se sim, quais ?				
Trace as diagonais e marque o ponto (E) de intersecção entre elas. Meça as semidiagonais.	EA =	EB =	EC =	ED =
Há semidiagonais iguais ? Se sim, quais ?				
Há duas diagonais iguais? Elas são perpendiculares?				

E) Quinto quadrilátero :

Com a ferramenta *ponto sobre objeto*, definir os pontos A, B , C e D de coordenadas

A(-2 ; 8) , B(6 ; 8) , C(3 ; 3) , D(-5 ; 3)

O quadrilátero assim obtido é um: (preencha a quadrícula)

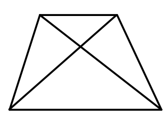
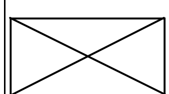
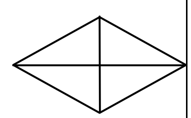
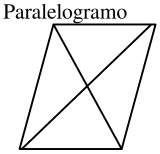
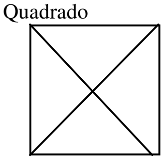
☐ Trapézio ☐ Losango ☐ Quadrado ☐ Paralelogramo ☐ Retângulo

Obtenha as diferentes medidas e anote suas observações.

Há lados paralelos ? Se sim, quais ?				
Meça os ângulos (°)	$\hat{A} = \alpha =$	$\hat{B} = \beta =$	$\hat{C} = \gamma =$	$\hat{D} = \delta =$
Há ângulos de medidas iguais ? Se sim, quais ?				
Meça os lados.	AB =	BC =	CD =	DA =
Há lados de medidas iguais ? Se sim, quais ?				
Trace as diagonais e marque o ponto (E) de intersecção entre elas. Meça as semidiagonais.	EA =	EB =	EC =	ED =
Há semidiagonais iguais ? Se sim, quais ?				
Há duas diagonais iguais? Elas são perpendiculares?				

<u>Conclusão:</u> (propriedades dos quadriláteros)

Com base em suas respostas das atividades anteriores, complete a coluna correspondente ao quadrilátero :

	Trapézio 		Retângulo 		Losango 		Paralelogramo 		Quadrado 	
	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
Lados paralelos 2 a 2										
Lados iguais 2 a 2										
4 lados iguais										
Soma dos ângulos iguais a 360°										
Ângulos opostos iguais 2 a 2										
4 ângulos retos										
Diagonais iguais										
Diagonais se cortam ao meio										
Diagonais perpendiculares										

Anexo 2 – Questionário enviado às escolas divulgando a oficina.

Caro Professor,

Este questionário tem por objetivo fornecer subsídios para a pesquisa referente ao ensino de geometria no segundo ciclo do Ensino Fundamental utilizando as tecnologias da informação e comunicação, em especial o uso do Cabri.

Estamos preocupados com a qualidade do ensino, por isso acreditamos que suas respostas poderão nos ajudar a pensar em melhorias para o processo de ensino-aprendizagem no ensino de Geometria e na utilização das tecnologias nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

1) Nome: ____ Efetivo ( )   OFA ( )

2) E-mail: ____

3) Idade (em anos completos): ____

4) Escola: ____

5) Há quanto tempo leciona nesta escola? ______________________________________

6) Tempo de magistério (em anos completos): __________________________________

7) Carga horária semanal em 2007 (em horas/aula): ______________________________

8) Séries nas quais leciona em 2007:

Séries Ensino Fundamental	5ª ( )	6ª ( )	7ª ( )	8ª ( )
Séries Ensino Médio	1ª ( )	2ª ( )	3ª ( )	

9) Graduação:

a) Matemática ( )

b) Matemática - Complementação Pedagogia ( )

c) Pós-Graduação ( )

d) Outros ( ) Especificar: ___________________________

10) Em sua trajetória escolar como lhe foi ensinado os conteúdos de Geometria?

No Ensino Fundamental II:	
No Ensino Médio	
No Ensino Superior:	

11) Você utiliza o livro didático durante as aulas de Matemática? Qual?

____

12) Antes de escolher um livro didático para utilizar, toma ciência das análises e indicações do MEC a respeito dos livros didáticos?

a) Sim, sempre (   )

b) Sim, ocasionalmente (   )

c) Não, não consulto embora conheça (   )

d) Não, não conheço as orientações contidas no guia do PNLD (   )

e) Não, não uso Livro Didático (   )

Comente sua resposta: ____

13) Qual o seu grau de conhecimento sobre o conteúdo dos Parâmetros Curriculares Nacionais em relação ao Ensino de Geometria?

a) Conheço profundamente. (   )

b) O essencial para aplicação cotidiana. (   )

c) Superficialmente. (   )

d) Apenas por meio de artigos publicados e comentários. (   )

e) Nenhum conhecimento. (   )

Comente sua resposta: ____

14) Você acredita ser importante o ensino de geometria? Se sim, a partir de que série?

____

15) O que você acha importante ensinar do conteúdo de Geometria?

____

16) Tem conhecimento do *Software* Cabri?

Sim (   )   não (   )

17) Qual o seu conhecimento em relação as tecnologia da informação de comunicação?

Pouco (   )   Básico (   )   Avançado (   )

18) Já fez algum curso de informática?

Sim (   ) Qual(is)? ____

Não (   )

19) Já desenvolveu algum trabalho com os alunos utilizando a tecnologia? Qual?

____

20) Você tem interesse e disponibilidade para participar de um curso sobre aplicação do Cabri no ensino de Geometria, oferecido pelo Núcleo de Tecnologia desta Diretoria de Ensino?

Sim (   )   manhã (   )   tarde (   )   sábado (   )

não (   )

Agradecemos sua colaboração.

Anexo 3 – Questionário respondido após a Oficina

Prezado (a) colega Professor (a)

Este questionário tem por objetivo fornecer subsídios para a pesquisa referente ao ensino de geometria no segundo ciclo do Ensino Fundamental utilizando as tecnologias da informação e comunicação, em especial o uso do Cabri.

1) Efetivo (   )   OFA (   )

2) Idade (em anos completos): ________________________

3) Tempo de magistério (em anos completos): _______________

4) Carga horária semanal em 2007 (em horas/aula): ___________

5) Séries nas quais leciona em 2007:

Séries Ensino Fundamental	5ª ( )	6ª ( )	7ª ( )	8ª ( )
Séries Ensino Médio	1ª ( )	2ª ( )	3ª ( )	

6) Graduação:

a) Matemática (   )

b) Matemática - Complementação Pedagogia (   )

c) Pós-Graduação (   )

d) Outros (   ) Especificar: ________________________

7) Na sua trajetória escolar como lhe foi ensinado os conteúdos de Geometria?

No Ensino Fundamental II:	
No Ensino Médio	
No Ensino Superior:	

8)Você utiliza o livro didático durante as aulas de Matemática? Qual?

____

9) Antes de escolher um livro didático para utilizar, toma ciência das análises e indicações do MEC a respeito dos livros didáticos?

a) Sim, sempre (   )

b) Sim, ocasionalmente (   )

c) Não, não consulto embora conheça (   )

d) Não, não conheço as orientações contidas no guia do PNLD (   )

e) Não, não uso Livro Didático (   )

Comente sua resposta

____

____

10) Qual o seu grau de conhecimento sobre o conteúdo dos Parâmetros Curriculares Nacionais em relação ao Ensino de Geometria?

a) Conheço profundamente. (   )

b) O essencial para aplicação cotidiana. (   )

c) Superficialmente. (   )

d) Apenas por meio de artigos publicados e comentários. (   )

e) Nenhum conhecimento. (   )

Comente sua resposta:

____

11) Você acredita ser importante o ensino de geometria? Se sim, a partir de que série?

____

12) O que você acha importante ensinar do conteúdo de Geometria?

____

13) Antes deste curso já tinha conhecimento do Cabri?

Sim (   )   não (   )

14) Qual o seu conhecimento em relação às tecnologias da informação e de comunicação?

Pouco (   )   Básico (   )   Avançado (   )

15) Já desenvolveu algum trabalho com os alunos utilizando alguma tecnologia? Qual?

____

16) Você acha que algumas atividades desse curso podem ser aplicadas com seus alunos?

Sim (   )   Não (   )

Obrigado pela colaboração.

Anexo 4 – Geometria Dinâmica: uma nova geometria.

Gilson Braviano
Mª Helena W. L. Rodrigues

Há alguns anos um novo termo vem sendo usado na área da Matemática e da Educação Matemática: **Geometria Dinâmica**. Não se trata de uma nova Geometria, ou uma alternativa à Geometria Euclidiana, como aquela de Lobachevski, mas simplesmente uma exploração da idéia de movimento para descrições geométricas.

Parece-nos interessante que professores de Matemática conheçam melhor o significado da chamada Geometria Dinâmica e se ela pode ser-lhes útil. Este é o objetivo desse artigo: pôr os leitores da **RPM** a par dessa nova expressão e dar informações que permitam a cada um decidir se vale à pena embrenhar-se nessa trilha.

Histórico

A idéia de *movimento* na Geometria não é recente; os geômetras gregos idealizaram vários instrumentos para descrever curvas mecanicamente definidas. Porém, o uso de *movimento* entre eles era evitado por uma questão de purismo lógico. O século XVII marcou uma quebra com a tradição grega e o uso do movimento para estabelecer propriedades geométricas ou realizar construções geométricas tornou-se explícito. [Colette Laborde (apud Scher 2000)] .

Foi, no entanto, em meados da penúltima década do século XX[1] que nasceu um instrumento que permite a abordagem da Geometria de modo efetivamente dinâmico, usando o computador. Trata-se da possibilidade de fazer construções eletrônicas como aquelas com régua e compasso e outras mais. Além disso, elementos básicos podem ser manipulados através do teclado ou do mouse, deslocando-se na tela e trazendo atrelados a si os elementos construídos a partir deles, ou seja, não alterando a posição relativa entre eles. Nessa mudança automática de posição está o dinamismo, cuja grande vantagem é preservar relações entre os elementos da figura. Assim, por exemplo, se uma reta r foi inicialmente construída de modo a ser a mediatriz de um segmento AB, é possível impor que, ao mudarmos a posição de um dos extremos A ou B, ela se desloque automaticamente, mantendo-se como mediatriz do novo segmento.

O importante é que essa característica permite explorar diversas instâncias de um problema em busca da verificação de uma conjectura. E isso pode ser feito desde cedo por qualquer estudante.

No decorrer deste artigo apresentaremos sucintamente três dos *softwares* que nos permitem trabalhar com a Geometria Dinâmica.

O termo "Dynamic Geometry" é, na verdade, marca registrada da Key Curriculum Press, responsável pela comercialização do Geometer's Sketchpad, um dos programas de Geometria Dinâmica que será mencionado na seqüência deste artigo.

Programas de Geometria Dinâmica

Sant (1995, pág. 36), em artigo publicado no número 29 da **RPM** sob o *título O Cabri-Géomètre*, descreve o *software* como sendo "um programa de computação que traça figuras geométricas, permite sua deformação mantendo algumas características da figura de partida e mede segmentos e ângulos."

O CABRI, ao contrário de muitos programas, é voltado para o uso em sala de aula com o objetivo de facilitar a aprendizagem, funcionando como um caderno de rascunho interativo (em francês: CAhier de BRouillon Intéractif) e informatizado. Sua potencialidade para tratar problemas geométricos (até então resolvidos graficamente com régua e compasso) permite que seja utilizado a partir dos últimos anos do curso Fundamental, dando oportunidade aos professores de verificar o conhecimento dos alunos com relação a questões de Geometria ou a problemas que dificilmente poderiam ser abordados somente com o uso de lápis, papel e instrumentos de desenho.

O Cabri-Géomètre II é dotado de novos recursos (como a construção de certos lugares geométricos, de cônicas por 5 pontos, a associação de elementos de Geometria Analítica às construções, a ilustração de características dinâmicas através de animações, entre outros) e parece ser o *software* de Geometria Dinâmica mais utilizado no Brasil. Existem, inclusive, vários *sites* sugerindo atividades que podem ser realizadas em sala com ele[2] e dois congressos[3] internacionais já foram realizados exclusivamente para divulgar suas potencialidades, o primeiro deles ocorrido no Brasil.

Citamos, a seguir, outros programas de Geometria Dinâmica bem conhecidos:

- **The Geometer's Sketchpad**: tem funcionalidades muito próximas àquelas do Cabri, porém com um menu de opções propositalmente reduzido. Outra diferença é que os elementos devem ser escolhidos antes de selecionar-se a construção a ser realizada. Na home page da Key Curriculum Press (*http://www.keypress.com*) pode ser obtida uma versão demonstração gratuita do Geometer's Sketchpad.

- **Cinderella**: diferentemente dos programas acima citados, este *software*, como destaca Burgiel (1999), foi exclusivamente desenvolvido por e para pesquisadores matemáticos, permitindo o trabalho com as Geometrias euclidiana, hiperbólica e elíptica. Criado na Alemanha, e lançado comercialmente em 1999, pode ser executado em qualquer plataforma. A versão demonstração gratuita deste programa pode ser obtida através do *site* *http://www.cinderella.de*.

Pesquisadores e educadores estão se empenhando em explorar as potencialidades dos programas de Geometria Dinâmica. No Brasil, particularmente, alguns resultados podem ser vistos nos trabalhos publicados em eventos científicos. Apenas como exemplo, cita-se que no VII ENEM[4] (Encontro Nacional de Educação Matemática), realizado no Rio de Janeiro em julho de 2001, foram apresentados mais de dez trabalhos nesse contexto.

Anexo 5 – As diferentes definições de quadriláteros

A geometria que se estuda hoje nas escolas tem suas origens num livro chamado *Os Elementos* escrito aproximadamente em 300 a.C por Euclides. É na Grécia que nasceram as principais idéias da geometria. E é lá que iremos ver como Euclides tratava os quadriláteros.

Na definição 19 do livro I, Euclides define "figura quadrilátera como aquela contida por quatro linhas retas". Em seguida, na definição 22, ele apresenta caracterizações de alguns quadriláteros notáveis:

Quadrado *é uma figura quadrilátera de quatro lados iguais com ângulos retos.*

Oblongo *é uma figura quadrilátera com ângulos retos, mas* ***que não tem quatro lados iguais****.*

Rombo *é uma figura quadrilátera com quatro lados iguais, mas* ***não com ângulos retos****.*

Rombóide *é uma figura quadrilátera que tem lados e ângulos opostos iguais entre si, mas* ***não tem quatro lados iguais e nem ângulos retos****.*

Podemos observar que o oblongo de Euclides é um caso particular do objeto matemático denominado hoje de retângulo, o rombo é um caso particular do nosso losango e que o rombóide é um paralelogramo particular.

Entre os textos de geometria que foram importantes no ensino, depois dos Elementos de Euclides, estão os *Elementos de Geometria* de Legendre (1793) e o tratado de Hadamard (1898) *Leçons de géométrie élémentaire*

Legendre, que preconizava uma geometria mais rigoR. e menos intuitiva, caracterizava os **quadriláteros notáveis** da seguinte maneira:

O quadrado tem seus lados iguais e seus ângulos retos.

O retângulo tem os ângulos retos **sem ter os lados iguais**.

O losango tem os lados iguais **sem que os ângulos sejam retos**.

O paralelogramo tem os lados opostos paralelos.

Podem-se observar algumas diferenças entre as definições de Legendre e as de Euclides. O oblongo e o rombo de Euclides passam a se denominar respectivamente retângulo e losango. O rombóide recebe o nome de paralelogramo, mas o seu conceito é ampliado. Agora o paralelogramo apresenta os lados opostos paralelos.

Mais tarde, Hadamard, na sua obra publicada em 1898, caracteriza os quadriláteros notáveis de uma maneira mais ampla:

Quadrado é um quadrilátero que tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais.

Retângulo é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais, e conseqüentemente retos.
Losango é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais.
Paralelogramo é o quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois.

Nessas novas definições, as restrições impostas aos retângulos e aos losangos foram eliminadas. É importante observar que o processo que permitiu evoluir para as definições modernas de Hadamard levou muitos anos. Durante séculos, a obra de Euclides serviu de modelo para o ensino da geometria e cada autor de manual de geometria respeitava a divisão de conteúdos da obra de Euclides, bem como as definições e proposições.

Voltando ao ensino dos quadriláteros, podemos dizer que as concepções dos nossos alunos relativas às definições dos quadriláteros notáveis, nas séries iniciais, assemelham-se muito às de Euclides e Legendre. Os quadrados, losangos, retângulos e paralelogramos são identificados dentro de quatro classes distintas de objetos matemáticos. Quando as definições mais amplas são introduzidas, parece-nos que uma dificuldade do aluno em aceita-las está no fato de ter que fazer corresponder a um único nome (por exemplo, retângulo) objetos matemáticos representados por formas diferentes (retângulo e quadrado). Compete a nós, professores de Matemática, a tarefa de acolher o saber trazido pelos alunos (e que não está errado!) e de faze-los progredir lentamente para uma concepção mais ampla, como a de Hadamard, generalizando proposições relacionadas com quadriláteros.

Vincenzo Bongiovanni - **PUC – SP**

RPM – Revista do Professor de Matemática, n° 55, pág. 29 – 32.

Anexo 6 – Atividades apresentadas pelos grupos no final da oficina

GRUPO 1

Objetivo da Atividade: Construir e definir um trapézio retângulo

Construir um quadrilátero com dois lados paralelos, sendo AB o lado maior e AD perpendicular a
Passos para construção:

1-traçar o segmento
2-nomear os pontos A e B
3-por uma das extremidades traçar uma reta perpendicular s
4-em um ponto qualquer da reta s, traçar uma reta perpendicular t
5-nomear a intersecção ponto D
6-na outra extremidade do segmento AB, traçar um segmento unindo este ponto à reta perpendicular t, esse será o lado oblíquo do nosso quadrilátero
7-marcar a intersecção e nomear ponto C
8-traçar segmento AD,DC.
9-esconder as retas s e t
10-medir os segmentos AB,AD,BC e DC
11-verificar se o lado AB>DC
12-marcar os ângulos
13-medir os ângulos
14-movimentar os pontos A,B,C e D

1-Movimentando os pontos A,B,C e D, quais os ângulos que não variam?
R: A e D

2- Quais as características dessa figura?
R: Possui um par de lados paralelos , dois ângulos retos e ângulo colaterais suplementares

3-É possível classificar a figura construída como trapézio? Se sim, por quê?
R: Sim, pois possui um par de lados paralelos

4-Esta figura possui características de um retângulo?
R: Sim pois possui dois ângulos retos

5-Defina trapézio retângulo.
R: Quadrilátero com um par de lados paralelos e um dos lados é perpendicular às bases

Referências Bibliográficas
Apostila de desenho geométrico da Universidade do Estado do Pará
Curso de Lic.Matemática à distância
Elaborada pelo Prof.Jorge Henrique de Jesus Berredo Reis

BONJORNO,José Roberto; OLIVARES,Ayrton;BONJORNO,Regina Azenha. Matemática fazendo a diferença.São Paulo: FTD,2006 v.3

GRUPO 2:

EXERCÍCIO:
Construa o paralelogramo ABCD sabendo que os ângulos internos agudos medem 60 graus e que a diagonal AC mede 7 cm e forma ângulo de 15 graus com um dos lados.

OBJETIVO:

Utilizar várias ferramentas e noções de construção geométrica, para partimos dos ângulos internos agudos e da medida da diagonal do paralelogramo.

A IDÉIA GERAL DA CONSTRUÇÃO:

Traçamos um ângulo de 60 graus, de vértice A, determinando a posição de dois lados do paralelogramo.
Traçamos o ângulo de 15 graus e marcamos a diagonal AC, obtendo o vértice C.
Passando por C, traçamos uma paralela à base, que interceptará o lado do ângulo determinando o vértice D. Desse modo, encontramos os lados do polígono, CD e AD.
Transportando a medida CD, ou traçando uma paralela a AD passando pelo vértice C, encontramos o vértice B. Unindo os quatro vértices, obtemos o paralelogramo pedido.

GRUPO 3

Polígonos
Objetivo:
Construir noções relativas à soma dos ângulos internos dos polígonos. Usar ferramentas para medir distâncias e ângulos.

DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE:

a) Construir um triângulo ABC, marcar e medir seus ângulos internos, medir seus lados e calcular a soma dos ângulos internos;

b) Construir um quadrilátero DEFG, marcar e medir seus ângulos internos, medir seus lados e calcular a soma dos ângulos internos;

c) Construir um pentágono MNOPQ, marcar e medir seus ângulos internos, medir seus lados e calcular a soma dos ângulos internos;

d) Movimentar os pontos das figuras e verificar o que muda e o que não muda.

e) Qual a relação entre a soma dos ângulos internos dos polígonos e o número de lados?

GRUPO 4

Objetivo: Investigar as propriedades dos quadriláteros, segundo Hadamard.
Definições:
Quadrado é um quadrilátero que tem todos os lados iguais e todos os ângulos iguais.
Retângulo é um quadrilátero que tem todos os ângulos iguais, e conseqüentemente retos.
Losango é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais.
Paralelogramo é um quadrilátero que tem os lados paralelos dois a dois.

ATIVIDADE 1 PARALELOGRAMO
a-) Construir um paralelogramo conforme a definição de Hadamard;

b-) Marcar seus lados e ângulos;

c-) Movimentar os lados do quadrilátero, registrar suas observações, quanto aos lados e ângulos;

Lados opostos paralelos e congruentes;
Ângulos opostos congruentes;
Soma dos ângulos consecutivos igual a 180 graus.

d-) Movimente o quadrilátero até transformá-lo em um retângulo.

e-) Sem mover a figura verifique se a definição de paralelogramo permanece.

Sim, a figura agora é um retângulo, porém mantêm as características do paralelogramo, ou seja: tem os lados paralelos dois a dois.

f-) Com base no item anterior o que você pode concluir a respeito do retângulo?

Que todo retângulo é um paralelogramo.

g-) Movimente o quadrilátero até transformá-lo em um quadrado.

h-) Sem mover a figura verifique se a definição de paralelogramo permanece.

Sim, a figura agora é um quadrado, porém mantêm as características do paralelogramo, ou seja: tem os lados paralelos dois a dois.

i-) Com base no item anterior o que você pode concluir a respeito do quadrado?

Que todo quadrado é um paralelogramo.

j-) Movimente o quadrilátero até transformá-lo em um losango.

l-) Sem mover a figura verifique se a definição de paralelogramo permanece.

Sim, a figura agora é um losango, porém mantêm as características do paralelogramo, ou seja: tem os lados paralelos dois a dois.

m-) Com base no item anterior o que você pode concluir a respeito do losango?

Que todo losango é um paralelogramo.

GRUPO 5

CONSTRUÇÃO DE UM PARALELOGRAMO ABCD QUALQUER, CLASSIFICANDO AS AFIRMATIVAS ABAIXO EM VERDADEIRAS OU FALSAS:

OBJETIVO Construir um paralelogramo e verificar suas propriedades geométricas
1 - Determinar três pontos quaisquer A , B , C não alinhados e os segmentos AB e BC.
2 - Construir , pelo ponto C, uma reta paralela ao segmento AB.
3 - Construir, pelo ponto A, uma reta paralela ao segmento BC, obtendo o ponto D de interseção dessas duas retas.
4 - Determinar os segmentos AD e CD e esconder as duas retas.
5 - Medir os segmentos AB, BC, CD, e AD.
6 - Movimentar um dos pontos A, B, ou C e observar as medidas dos quatro lados do paralelogramo.
7 - O que se pode concluir ?
8 - Medir os ângulos internos do paralelogramo.
9 - O que se pode observar?
10 - Determinar os segmentos BD e AC e obter a interseção M desses segmentos.
11 - Determinar os segmentos AM, MC, BM e MD e, a seguir, medi-los.
12 - Movimentar um dos pontos A, B ou C e verificar que M é o ponto médio de AC e BD.

Classifique-as em verdadeiro (V) ou falso (F):
A) Os lados opostos AB e DC têm medidas iguais. ( )
B) Os lados opostos AD e BC têm medidas iguais. ( )
C) As diagonais AC e BD têm medidas iguais. ( )
D) Os ângulos Â e C têm medidas iguais. ( )
E) Os ângulos D e B têm medidas iguais. ( )
F) As diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios. ( )
G) Os ângulos BDC e ADB têm medidas iguais. ( )
H) A diagonal AC é bissetriz do ângulo A. ( )
I) Os quatro lados têm medidas iguais. ( )
J) Os ângulos BAC e ACD têm medidas iguais. ( )
L) Os ângulos BAC e ACD têm medidas iguais. ( )
M)Agora que você observou as propriedades geométricas de um paralelogramo de a sua definição de paralelogramo.

Atividade retirada do livro Matemática e Vida e adaptada para o Cabri.