

**UNIJUI – UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO ESTADO DO  
RIO GRANDE DO SUL**

**DeFEM – DPTO DE FÍSICA, ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA**

**DeTEC – DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIA**

**MESTRADO EM MODELAGEM MATEMÁTICA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DA RETIRADA DE ÁGUA DO  
SOLO PELAS RAÍZES DE PLANTAS COM BASE EM DADOS  
DO TEOR DE ÁGUA DO SOLO**

**VANESSA KLAMT**

Ijuí,-RS, 24 de outubro de 2007.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**UNIJUI – UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO ESTADO DO  
RIO GRANDE DO SUL**

**DeFEM – DPTO DE FÍSICA, ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA**

**DeTEC – DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIA**

**MESTRADO EM MODELAGEM MATEMÁTICA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DA RETIRADA DE ÁGUA DO  
SOLO PELAS RAÍZES DE PLANTAS COM BASE EM DADOS  
DO TEOR DE ÁGUA DO SOLO**

Elaborada por

Vanessa Klamt

Dissertação apresentada ao Departamento de Física, Estatística e Matemática da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUI, RS, como parte integrante dos pré-requisitos para obtenção do título de Mestre em Modelagem Matemática.

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges (DEFEM)

Ijuí-RS, 24 de outubro de 2007.

**UNIJUI – UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO ESTADO DO  
RIO GRANDE DO SUL**

**DeFEM – DPTO DE FÍSICA, ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA**

**DeTEC – DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM  
MATEMÁTICA**

**MODELAGEM MATEMÁTICA DA RETIRADA DE ÁGUA DO  
SOLO PELAS RAÍZES DE PLANTAS COM BASE EM DADOS  
DO TEOR DE ÁGUA DO SOLO**

Elaborada por

**VANESSA KLAMT**

Como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática

Comissão Examinadora

---

Prof. Dr. Pedro Augusto Pereira Borges – DeFEM (Orientador)

---

Prof<sup>ª</sup> Dra. Fabiane Avela de Oliveira

---

Prof<sup>ª</sup> Dra. Inês Farias Ferreira

## *AGRADECIMENTOS*

*A Deus, por ter me dado força e determinação para enfrentar as adversidades que surgiram até o momento.*

*Aos meus pais que sempre foram exemplo de força e amor verdadeiro em minha vida. Que acreditaram na minha capacidade e incentivaram a busca incessante pelo estudo.*

*A meu namorado Felipe, que sempre esteve comigo me confortando nas horas difíceis e compartilhando os momentos de emoções.*

*A minha irmã Rubia, pelo incentivo, força e carinho durante toda a trajetória.*

*A minha sogra que sempre me deu apoio para que eu conseguisse chegar até aqui.*

*Ao Professor orientador Dr. Pedro A. Pereira Borges pela orientação e pela compreensão durante o desenvolvimento desta pesquisa. Obrigada pelo exemplo profissional, levarei comigo ao longo de minha formação pessoal e profissional.*

*Aos professores do Curso, pelos conhecimentos que transmitiram.*

*Aos professores do DeFEM – Departamento de Física, Estatística e Matemática, pelo ensinamento durante minha trajetória acadêmica.*

*Aos funcionários do DeFEM – Departamento de Física, Estatística e Matemática, em especial a Geni pelo zelo e pela atenção dedicada às nossas solicitações.*

*Aos meus amigos e pessoas que souberam me ajudar e apoiaram para que eu chegasse até aqui.*

## RESUMO

Na natureza a água é um elemento fundamental para a sobrevivência dos seres vivos. O estudo da absorção de água pelas raízes é de grande interesse para pesquisas em sistemas agrícolas e requer o conhecimento quantitativo dos fenômenos envolvidos, para com isso desenvolver técnicas de melhor aproveitamento da água. A transpiração tem sido pesquisada principalmente associada a evapotranspiração do sistema solo/planta. Neste trabalho foi desenvolvido um modelo matemático do movimento da água no solo, com presença de um sistema radicular e o efeito das condições de superfície, para calcular o volume de água retirada do solo pela ação das raízes. O movimento da água no solo foi modelado com a Equação de Richards em coordenadas cilíndricas, com condições de fronteira de 1ª espécie e termo fonte. Foram usados dados experimentais fictícios para verificação do funcionamento do modelo. A evaporação foi calculada diretamente pelo ajuste dos dados experimentais. O volume de água absorvido pelas raízes foi calculado resolvendo o problema inverso, minimizando a diferença entre o teor de água calculado e o teor de água definido pelos dados experimentais. Foram feitas simulações mostrando as variações do teor de água do solo para diferentes sistemas radiculares, diferentes hipóteses de absorção: fluxo constante, fluxo variável no tempo sem limitação de água, absorção limitada pela oferta de água do solo e absorção dependente do tempo e limitada pela oferta de água. O modelo descreve as variações do teor de água no espaço e tempo, é sensível às variações dos parâmetros, às condições de fronteira e às características do sistema radicular, apresentando resultados esperados pela lógica dos fenômenos envolvidos. Os resultados do problema inverso mostraram que o algoritmo é convergente e que calcula com eficiência o volume de água absorvida pelas raízes para os casos testados.

## ABSTRACT

In the nature the water is an fundamental element for the alive beings' survival. The study of absorption of water for the roots is of great interest for researches in agricultural systems and it requests the quantitative knowledge of the involved phenomena, to that to develop techniques of better use of water. The perspiration has been researched mainly associated the evapotranspiration of the solar system/plant. In this assignment a mathematical model of the movement of water was developed in the soil, with presence of a system of roots and the effect of surface conditions to calculate the volume of removed water of the soil for the action of roots. The movement of water in the soil was modeled with the Richards' Equation in cylindrical coordinates, with conditions of border of first species and term source. Fictitious experimental data were used for verification of operation of model. The evaporation was calculated directly by the adjustment of the experimental data. The absorbed volume of water for the roots was calculated solving the inverse problem, minimizing the difference among the tenor of water made calculations and the defined tenor of water for the experimental data. They were made simulations showing the variations of the meaning of water of the soil for different systems' roots, different absorption hypotheses: constant flow, variable flow in the time without limitation of water, absorption limited for offer of water of the soil and absorption depend of the time limited for offer of water of the soil. The model describes the variations of the meaning of water in the space of time, being sensitive to the variations of the parameters to the border conditions and the characteristics of the system's root, presenting expected results for the logic of the involved phenomena. The results of the inverse problem showed that the algorithm is convergent and that it makes calculations with efficiency the volume of absorbed water for the roots for the tested cases.

## SUMÁRIO

LISTA DE SIMBOLOS.....	IX
LISTA DE LETRAS GREGAS .....	XI
LISTA DE TABELAS.....	XII
LISTA DE FIGURAS.....	XIII
1. INTRODUÇÃO.....	16
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	17
2.1. Solo.....	18
2.2. Estrutura do solo .....	19
2.3. Textura do solo.....	19
2.4. Densidade do solo .....	19
2.5. Teor de umidade do solo.....	20
2.6. Movimento da água no solo.....	22
2.6.1. Condutividade hidráulica.....	23
2.6.2. Curva característica da água no solo.....	23
2.7. Evapotranspiração.....	24
2.8. Anatomia e Fisiologia da raiz.....	24
2.8.1. Raízes.....	25
2.8.2. As partes da raiz.....	27
2.8.3. Zona de absorção.....	28
2.8.4. Estrutura secundária da raiz: Variação do crescimento.....	28
2.9. Transporte de água pelas raízes.....	29
2.10. Evaporação.....	30
2.11. Transpiração.....	30
3. MODELO MATEMÁTICO.....	32
3.1. Modelo para o movimento da água no solo .....	32



3.1.1. Caso solo não saturado.....	34
3.1.2. Cálculos dos potenciais .....	35
3.1.3. Cálculo da função evaporação.....	36
3.1.4. Cálculo do volume de água absorvida pela raiz .....	39
4. SOLUÇÃO NUMÉRICA.....	41
4.1. Solução numérica para o movimento da água no solo.....	41
4.2 Problema inverso.....	42
5. ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	49
5.1. Simulação do movimento da água no solo com absorção de água pelas raízes (Problema direto).....	49
5.2. Fluxo constante de absorção de água pelas raízes.....	51
5.3. Fluxo de absorção variável no tempo.....	51
5.4. Fluxo de absorção limitado pela disponibilidade de água no solo .....	54
5.5. Fluxo variável no tempo e limitado pela disponibilidade de água do solo..	55
5.6. Absorção de água pelas raízes (Problema inverso).....	56
5.7. Análise para diferentes dados experimentais.....	58
6. CONCLUSÕES.....	60
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	62
8. ANEXOS.....	65

## LISTA DE SIMBOLOS

$A$ e $b$	parâmetros de ajuste ( $m^3/h$ e $1/h$ ), respectivamente
$a, m, n$	parâmetros de ajuste da curva característica
$c$	instante de tempo da máxima transpiração diária ( $h$ ),
$d$	valor constante do potencial gravitacional
$\bar{d}$	dados experimentais de tempo ( $h$ )
$dt$	intervalo temporal
$dz$	intervalo espacial em $z$
$dr$	intervalo espacial em $r$
$ET$	volume total de água evaporada ( $m^3/h$ )
$g$	gravidade ( $m/s^2$ )
$h$	profundidade ( $m$ )
$H$	profundidade do cilindro ( $m$ )
$k(\Theta)$	condutividade hidráulica para solo não saturado ( $m^2 s^{-1} Pa^{-1}$ )
$K_r$ e $K_z$	condutividade hidráulica nas direções $r$ e $z$ ( $m^2 s^{-1} Pa^{-1}$ ).
$K_f$	condutividade hidráulica na direção $f$
$K_0$	condutividade hidráulica para o solo não saturado ( $m^2 s^{-1} Pa^{-1}$ )
$m_s$	massa de solo seco ( $g$ )
$m_u$	massa de solo úmido ( $g$ )
$N, S, P$	posições na malha em $z$
$h$	viscosidade do solo
$q$	fluxo de água em cada ápice ( $m^3/h$ ),
$q_1, q_2, q_3, q_4$	taxa de absorção de água pela raiz ( $m^3/h$ )
$q''_{ir}$	fluxo de água ( $m^3/h$ )
$R$	raio do cilindro ( $m$ )
$r$	raio ( $m$ )
$S_0$	volume de água inicial para a evapotranspiração ( $m^3/h$ )
$S_f$	volume de água final para a evapotranspiração ( $m^3/h$ )
$t_i$	tempo de irrigação ( $h$ )

$t_f$	tempo final ( $h$ )
$t$	variável temporal ( $h$ )
$V_E$	volume de água evaporada ( $m^3/h$ )
$V_i$	volume de água inicial para evaporação ( $m^3/h$ )
$V_C$	volume de um volume de controle ( $m^3$ )
$V_f$	volume de água final para evaporação ( $m^3/h$ )
$m$	teor de água dimensional a base de massa ( $m^3 m^{-3}$ )
$z$	profundidade do cilindro ( $m$ )
$a$	constante de proporcionalidade ( $m^3/h$ )
$b$	constante de proporcionalidade ( $m^3/h$ )

## LISTA DE LETRAS GREGAS

$\theta$	teor de água volumétrico dimensional do solo ( $m^3 m^{-3}$ )
$\theta_r$	teor de água volumétrico dimensional residual do solo ( $m^3 m^{-3}$ )
$\theta_s$	teor de água volumétrico dimensional saturado do solo ( $m^3 m^{-3}$ )
$\bar{\Delta y}$	gradiente do potencial hidráulico ( $mm^{-1}$ )
$\psi$	potencial total ( $Pa$ )
$\psi_g$	potencial gravitacional ( $Pa$ )
$\psi_m$	potencial matricial ( $Pa$ )
$\psi_o$	potencial osmótico ( $Pa$ )
T	teor de água adimensional do solo (ad)
$Q_{exp}$	teor de água experimental (ad)
$Q_{cal}$	teor de água calculado (ad)
$\varepsilon$	diferença entre o teor de água experimental e calculado (ad)

## **LISTA DE TABELAS**

### **CAPÍTULO 5**

Tabela 5.1 - Análise da convergência do Problema Inverso

## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO 2

- Figura 2.1 - Desenvolvimento de uma monocotiledônea madura: Planta de trigo com três meses (TAIZ, 2004).....26
- Figura 2.2 - Desenvolvimento de raízes pivotantes irrigadas: Beterraba com 5 meses, alfafa com 2 anos (TAIZ, 2004).....27
- Figura 2.3 - Diagrama do ápice da raiz da cebola em corte longitudinal. (ESAU, 1974).....24

### CAPÍTULO 3

- Figura 3.1 – Sistema radicial.....34
- Figura 3.2 – Esquema dos anéis no volume de controle.....38

### CAPÍTULO 4

- Figura 4.1 – Malha do domínio de integração para diferenças finitas.....41
- Figura 4.2 – Fluxograma.....47

### CAPÍTULO 5

- Figura 5.1 - Simulação do teor de água do solo para  $t = 30h$ ;  $E = -0,0201 t + 0,8448m^3/h$ ;  $Ko = 0,000004 m/dia$ ,  $q = 0 m^3/h$ .....50
- Figura 5.2 - Simulação do teor de água do solo para  $t = 30h$ ;  $q = 0,0116 m^3/h$ ;  $Ko = 0,000004 m/dia$ ;  $E = -0,0201 t + 0,8448m^3/h$ .....50
- Figura 5.3 - Variação do volume de água evaporada e absorvida, para  $t = 24 h$ ;  $q = 0,0116m^3/h$ ;  $E = -0,0201 t + 0,8448m^3/h$ ;  $Ko = 0,000004 m/dia$ .....51

Figura 5.4 - Variação do volume de água evaporada e absorvida, para $q = 0,0116\text{m}^3/\text{h}$ ; $t = 24$ , $E = -0,0201 t + 0,8448\text{m}^3/\text{h}$ ; $K_o = 0,000004$ m/dia.....	52
Figura 5.5 – Teor de água em diferentes profundidades com absorção variável no tempo. $t = 24$ h; $q = 0,0116\text{m}^3/\text{h}$ ; $E = -0,0201 t + 0,8448\text{m}^3/\text{h}$ ; $K_o = 0,000004$ m/dia.....	53
Figura 5.6 – Teor de água em diferentes profundidades com absorção variável no tempo. $t = 24$ h; $q$ variável, eq.(5.1); $E = -0,0201t + 0,8448\text{m}^3/\text{h}$ ; $K_o = 0,000004$ m/dia.....	53
Figura 5.7 – Variação do volume de água evaporada e absorvida limitada pela oferta de água do solo, para $t = 24$ h; $q = 0,0116\text{m}^3/\text{h}$ ; $K_o = 0,000004$ m/dia $E = -0,0201 t + 0,8448\text{m}^3/\text{h}$ .....	54
Figura 5.8 – Teor de água em diferentes profundidades com absorção limitada pela oferta de água no solo. $t = 24$ h; $q = 0,0116\text{m}^3/\text{h}$ ; $E = -0,0201 t + 0,8448\text{m}^3/\text{h}$ ; $K_o = 0,000004$ m/dia.....	55
Figura 5.9 – Variação do volume de água evaporada, absorção variável no tempo e limitada pela oferta de água do solo, para $t = 24$ h; $E = -0,0201 t + 0,8448\text{m}^3/\text{h}$ ; $K_o = 0,000004$ m/dia.....	55
Figura 5.10 – Teor de água em diferentes profundidades com absorção variável no tempo e limitada pela oferta de água no solo, para $t = 24$ h; $E = -0,0201 t + 0,8448\text{m}^3/\text{h}$ ; $K_o = 0,000004$ m/dia.....	56
Figura 5.11 - Simulação dos dados experimentais e calculados. $t = 30$ h; $q = 0,0116\text{m}^3/\text{h}$ ; $K_o = 0,000004$ m/dia; $E = -0,0201 t + 0,8448\text{m}^3/\text{h}$ .....	57
Figura 5.12 – Dados experimentais e calculados. $t = 30$ h; $E = -0,0201 t + 0,8448\text{m}^3/\text{h}$ ; $K_o = 0,000004$ m/dia.....	58
Figura 5.13 - Simulação do teor de água do solo, para $t = 30$ h; $q = 0,0116$ $\text{m}^3/\text{h}$ ; $K_o = 0,000004\text{m}/\text{dia}$ . $E = -0,0201 t + 0,8448\text{m}^3/\text{h}$ (Fagundes, 2006).....	59

## ANEXO 1

Figura 7.1. Pontos de medição do teor de água.....	66
--	----

## **ANEXO 2**

Figura 1 – Teor de água do solo para t = 6h.....	67
Figura 2 – Teor de água do solo para t = 9h.....	67
Figura 3 – Teor de água do solo para t = 12h.....	68
Figura 4 – Teor de água do solo para t = 18h.....	68
Figura 5 – Teor de água do solo para t = 21h.....	68
Figura 6 – Teor de água do solo para t = 27h.....	69
Figura 7 – Teor de água do solo para t = 30h.....	69
Figura 8 – Teor de água do solo para t = 33h.....	69
Figura 9 – Teor de água do solo para t = 36h.....	70
Figura 10 – Teor de água do solo para t = 42h.....	70
Figura 11 – Teor de água do solo para t = 45h.....	70

## **ANEXO 3**

Figura 1 - Teor de água do solo com dados experimentais de Fagundes (2006).....	71
Figura 2 - Teor de água do solo com dados experimentais de Fagundes (2006).....	71

## **ANEXO 4**

Figura 1 – Densidade de Ápices da raiz, FAGUNDES, (2006).....	72
---	----



## 1. INTRODUÇÃO

A má utilização da água potável no planeta e a negligência com a utilização dos reservatórios naturais está se tornando um fato preocupante para as gerações futuras, já que a disponibilidade é cada vez menor e o uso é cada vez maior com o aumento da população. Como a agricultura é uma das atividades produtivas responsáveis pela utilização de água é extremamente importante realizar pesquisas sobre a dinâmica da água no solo e sua conservação, para que ocorra uma melhora na administração dos recursos hídricos.

O movimento da água no solo conjuntamente com a absorção de água pelas raízes é de amplo interesse para as atividades agrícolas e florestais, na otimização da aplicação de adubos e previsão de equilíbrio de nutrientes para explicar os fenômenos que ocorrem no desenvolvimento de plantas e árvores.

Nesse contexto, o solo que funciona como um reservatório aberto para a atmosfera exerce função importante para o crescimento das plantas, fornecendo água, ar e nutrientes.

O estudo dos processos de interações entre arquitetura radicular e eficiência de absorção de água e nutrientes é interesse dos pesquisadores, já que o uso exagerado para a agricultura afeta as reservas hídricas do planeta. Porém, caracterizam o sistema radicular como complexo, na análise de dados dos experimentos nas florestas ou na agricultura.

Para regiões essencialmente agrícolas é importante o conhecimento da água perdida por evapotranspiração (cálculo da evaporação e absorção de água pelas raízes) para saber a sua disponibilidade hídrica e se uma espécie vegetal é indicada para o cultivo.

A presente dissertação é uma pesquisa sobre o movimento da água no solo com presença de um sistema radicular. O problema proposto é a estimação da quantidade de água retirada do solo pelas raízes de plantas, com base em dados do monitoramento do teor de água do solo.

É seqüência das dissertações realizadas anteriormente no Mestrado em Modelagem Matemática da Unijuí, mas está diretamente ligada a FAGUNDES (2006) que realizou sua pesquisa sobre o movimento da água no solo para um caso bidimensional com presença de uma planta da espécie Louro Pardo (*cordia trichotoma*). Se diferencia da pesquisa de Minéia por não apresentar parte experimental, mas com o intuito de validar o modelo proposto e verificar se o algoritmo converge.

A dissertação é composta por 6 capítulos e quatro anexos, onde:

No Capítulo 1 é apresentada a introdução, enfatizando a importância dos mecanismos que envolvem o sistema água/solo/planta para o manejo agrícola.

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica, onde são apresentados os conceitos básicos utilizados e os objetivos específicos a serem abordados no trabalho.

No Capítulo 3 é apresentado o modelo matemático que descreve o movimento da água no solo e as condições de contorno para o cálculo do volume de água absorvida pela raiz.

No Capítulo 4 é apresentado o método numérico – Diferenças Finitas – para a resolução da Equação Diferencial Parcial, e o fluxograma do programa computacional implementado para descrever a retirada de água do solo pelas raízes.

No Capítulo 5 são apresentadas as análises dos resultados sobre as hipóteses propostas para este trabalho.

No Capítulo 6 as conclusões.

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

O crescimento das plantas está diretamente relacionado às condições da água no solo porque nela estão dissolvidas os nutrientes.

Estudos da dinâmica da água em condições de campo, enfatizando principalmente fluxo de água na zona radicular da cultura, são encontrados em trabalhos de FITTER AND STICKLAND, (1992); VASCONCELO ET AL.; (2003); CRUZ ET AL., (2005); COELHO (1999) e outros.

Para entender a dinâmica da água no solo, além do conhecimento da umidade do solo, da transpiração, evaporação, evapotranspiração e dos potenciais de água no solo é de suma importância aprimorar o conhecimento sobre raiz, sua forma e o seu comportamento em busca de água para o vegetal. Uma revisão bibliográfica mais detalhada é encontrada em BULIGON (2005).

### **2.1 Solo**

O solo é um sistema complexo constituído de materiais sólidos, líquidos e gasosos. As partículas sólidas formam um arranjo poroso tal que os espaços vazios são chamados poros, e têm a capacidade de armazenar líquidos e gases (REICHARDT, 1990).

A parte sólida (matriz do solo) é em grande parte mineral e se constitui de partículas classificadas de acordo com o tamanho médio dos grãos, em areia, limo e argila.

A parte líquida do solo constitui-se essencialmente de água, contendo minerais dissolvidos e materiais orgânicos solúveis. Ela ocupa parte do espaço vazio entre as partículas sólidas, dependendo da umidade do solo.

A parte gasosa ocupa os espaços vazios não ocupados pela água. Esta é uma porção importante do sistema solo, pois a maioria das plantas exige certa aeração do sistema radicular.

## 2.2 Estrutura do solo

Refere-se ao arranjo das partículas sólidas e à adesão de partículas menores denominadas agregados. A estrutura do solo é afetada próxima à superfície pelo preparo do solo. Nos horizontes mais profundos, ela é típica para cada solo.

## 2.3 Textura do solo

A textura do solo refere-se tão somente à distribuição das partículas em termos de tamanho por unidade de volume. As partículas grosseiras, médias e finas que são denominadas de areia, limo e argila determinam combinações que são utilizadas para classificar o solo segundo sua textura.

## 2.4 Densidade do solo

Chamada de densidade aparente ou densidade global do solo. Definida como a massa de solo seco por unidade de volume. A densidade do solo é um índice do grau de compactação de um solo (REICHARDT, 2004).

A densidade do solo é uma propriedade física que reflete o arranjo das partículas que por sua vez define as características do sistema poroso.

A densidade global  $d_g$  de um solo é definida pela razão de massa de uma amostra de solo e o volume que ela ocupa:

$$d_g = \frac{m_s}{V_s} \quad (2.1)$$

onde,

$m_s$  massa de solo seco (g)

$V_s$  volume de solo seco ( $cm^3$ )

## 2.5 Teor de água do solo

A fase líquida (água) pode estar presente nos poros do solo completa ou parcialmente, e o solo é chamado de saturado ou não saturado. Quando o espaço poroso está totalmente cheio de água, o solo é dito solo saturado (LIBARDI, 1999).

Normalmente os solos se encontram não saturados, ou seja, o solo não saturado é aquele cujo espaço poroso é parcialmente cheio com água e parcialmente cheio com ar.

A umidade do solo é o índice mais básico para quantificar a água em uma amostra de solo. Tradicionalmente, o teor de água do solo tem sido expressa de duas maneiras: à base de massa ( $m$ ), ou a base de volume ( $q$ ) (LIBARDI, 1999).

A umidade do solo à base de massa é obtida pela equação

$$\mathbf{m} = \frac{m_u - m_s}{m_s} \quad (2.2)$$

onde

$m_s$  massa de solo seco (g)

$m_u$  massa de solo úmido (g)

e à base de volume pela equação

$$\mathbf{q} = \frac{m_u - m_s}{V_s} \quad (2.3)$$

onde,

$m_s$  massa de solo seco (g)

$m_u$  massa de solo úmido (g)

Para cálculos que envolvem água no solo,  $q$  é mais utilizado do que  $m$ , porém em laboratório é mais simples calcular  $m$ . De (2.2) e (2.3) podemos escrever:

$$\mathbf{q} = \mathbf{m} \frac{m_s}{V_s} \quad (2.4)$$

Como  $\frac{m_s}{V_s}$ , é a densidade do solo, para obter o valor da umidade volumétrica  $q$ , a partir de  $m$ , basta multiplicar o valor de  $m$  pela densidade do solo  $d_g$ .

$$q = m \cdot d_g \quad (2.5)$$

Como existem métodos diretos e indiretos para determinar o conteúdo de água no solo, os métodos diretos determinam a medida direta do conteúdo de água de uma amostra, basicamente por evaporação. Dividindo-se em: método gravimétrico com secagem em estufa e método gravimétrico com secagem em forno microondas. Os métodos indiretos se baseiam na medida de propriedades físicas ou físico-químicas do solo que sejam proporcionais ao conteúdo de água no solo.

No método gravimétrico com secagem em estufa, que é o mais básico e considerado padrão, remove-se a amostra desejada e determinam-se as massas úmidas e seca com o auxílio de uma balança e estufa. Tem como desvantagem ser demorado e destrutivo. Para se obter a umidade a base de volume por esse método é necessária conhecer a densidade do solo (LIBARDI, 1999).

Os métodos indiretos exigem conhecimento de uma curva de calibração, e têm a vantagem de não ser destrutivos.

O teor de água do solo possui valores extremos para  $q_r$  (teor de água residual) e  $q_s$  (teor de água saturado).

A adimensionalização do teor de água é feita atribuindo, respectivamente. Então:

$$\Theta = \frac{q - q_r}{q_s - q_r} \quad (2.6)$$

onde,

$\Theta$  é o teor de água adimensional

$q_s$  é o teor de água volumétrico saturado ( $m^3 m^{-3}$ )

$q_r$  é o teor de água volumétrico residual ( $m^3 m^{-3}$ )

Considera-se teor de água saturado o que há entre as partículas do solo e teor de água residual, a água dentro de outras partículas que compõem o solo, como a água que resta dentro de pedaços de raízes.

## 2.6 Movimento da água no solo

Existem duas importantes equações que quantificam o movimento da água no solo sob condições isotérmicas: a equação de Darcy para solos saturados, e a equação de Darcy-Buckingham para solos não saturados (LIBARDI, 1999; REICHARDT, 1990).

A água move-se quando ocorrem diferenças de potencial entre os pontos de um sistema, sendo o movimento no sentido do decréscimo do potencial (REICHARDT, 1990).

A pesquisa sobre o movimento de água no solo faz parte da Área de Concentração em Fenômenos de Transporte do Mestrado em Modelagem Matemática da Unijuí. A primeira dissertação apresentada sobre o tema foi *Modelagem matemática do movimento da água e do cálcio em solos não saturados* de Denice A. F. N. Menegais em 2004, seguida pela dissertação *Modelagem matemática do movimento da água em solos saturados e não saturado* de Silvana Lucia Buligon, em 2005. Esses trabalhos estão associados à pesquisa sobre ciclagem de nutrientes no sistema solo-planta, visto que a água é um dos principais meios de transporte de substâncias no solo. Nesse sentido, a presente dissertação relaciona-se também com a pesquisa sobre serrapilheira, iniciada com a dissertação *Modelagem e simulação da massa de serrapilheira durante o crescimento de espécies arbóreas*, de Arlete Cherobini, defendida em 2005. Cherobini *et al*, 2005 e Buligon *et al*, 2005 são os primeiros artigos publicados dessas pesquisas.

Outras dissertações relacionadas com o tema são de Mônica Giacomini com a pesquisa *Influência da Temperatura no Fator de Decomposição da Serapilheira e Modelagem Matemática do crescimento e absorção de água do solo por sistemas radicais de espécies arbóreas* realizada por Minéia Capellari, ambas defendidas em 2006.

### 2.6.1 Condutividade Hidráulica

A condutividade hidráulica significa o coeficiente que expressa a facilidade com que um fluido (água) pode se deslocar no solo, e que depende das propriedades do solo e do fluido. Tais propriedades têm reflexo na geometria porosa do solo: a superfície específica, a distribuição do tamanho e forma das partículas, a umidade, a porosidade, etc.. Quanto ao fluido, a sua viscosidade ( $\mu$ ) é a propriedade mais importante, pois afeta a condutividade hidráulica de maneira inversa: quanto maior ( $\mu$ ), menor a condutividade (JURY & GARDNER, 1991; LIBARDI, 1999).

O solo agrícola revela umidade inferior à saturação e, pela existência de uma função crescente entre condutividade e umidade, o valor da condutividade hidráulica sob a condição saturada é sempre superior ao das condições não saturadas para o mesmo solo. A condutividade hidráulica é função do teor de umidade do solo, sendo máxima em condições de saturação. À medida que a umidade diminui, a condutividade hidráulica decresce, normalmente de forma exponencial (LIBARDI, 1999).

### 2.6.2 Curva característica da água no solo

A curva de retenção da água no solo ou a curva característica é uma propriedade físico-hídrica do solo que relaciona o conteúdo volumétrico de água ( $\theta$ ) e o potencial matricial  $\Psi_m$ . Ela é típica para cada solo, onde varia em textura, grau de compactação, estrutura, etc.

A curva característica normalmente é determinada em laboratório, com amostras não deformadas.

Dois processos explicam a retenção de água no solo: capilaridade e a adsorção. A primeira é ligada à afinidade entre as partículas sólidas do solo e a água, havendo a necessidade de interfaces água-ar que são chamadas meniscos, e que apresentam uma curvatura que é tanto maior quanto menor o poro. Essa curvatura determina o estado de energia da água. A capilaridade atua na retenção de água dos solos na faixa úmida quando os poros se encontram razoavelmente cheios. A adsorção ocorre quando há seca, os poros vão se esvaziando e filmes de água recobrem as partículas sólidas (REICHARDT, 1990).



## 2.7 Evapotranspiração

A evapotranspiração constitui a transferência de água na forma de vapor, do sistema solo-planta para a atmosfera. (REICHARDT, 1990). Através da evaporação ocorre a perda de água pela superfície do solo e na superfície da planta, a transpiração.

A evapotranspiração é importante para o balanço hídrico agrícola, pois o solo, as plantas e a atmosfera estão interligados, variando conforme o tempo. Em dias ensolarados, a umidade relativa do ar é baixa, ocorrendo maior evapotranspiração. Dias nublados, a umidade relativa do ar é alta, o fluxo geralmente é pequeno e seu potencial total também é alto.

A evaporação é importante apenas nos períodos em que o solo se encontra sem vegetação, enquanto a vegetação é pequena ou quando as plantas estão distantes umas das outras. Isso acontece porque o potencial da água é normalmente menor do que o solo, onde existe um gradiente contínuo de água que provoca o aparecimento de um fluxo no sentido solo-planta. Esse fluxo obedece à equação de Darcy nas camadas superficiais do solo, e, portanto, depende do gradiente de potencial e da condutividade hidráulica do solo (REICHARDT, 1990).

Ao contrário da transpiração, que auxilia nas atividades da planta, devido à diferença de potencial total entre a água do solo e a água da raiz, com destino final a parte aérea da planta.

Desde o plantio, uma cultura vai progressivamente crescendo e ocupando a área disponível, e o conhecimento da evapotranspiração (ET) é fundamental para projetos de irrigação, pois ela representa a quantidade de água que deve ser reposta ao solo para manter o crescimento da espécie (FERREIRA, 2004).

## 2.8 Anatomia e Fisiologia da Raiz

A seguir, apresentam-se os tipos de raízes e a estrutura do sistema radicular para compreender onde os pêlos radiculares absorvem a água do solo.

### 2.8.1 Raízes

A raiz é uma estrutura axial especializada em fixação, absorção e condução, onde o crescimento do meristema apical do embrião resulta a formação da raiz primária. A morfologia externa da raiz é constituída pela coifa, zona lisa ou de crescimento, zona pilífera e zona de ramificação.

Dois tipos de sistema radiculares, as pivotantes têm seu enraizamento aprofundado, enquanto as fasciculadas são raízes superficiais e mais conhecidas que as espécies de raízes mais profundas, resistindo melhor a seca.

Para que ocorra o desenvolvimento adequado das raízes há dependência do teor de umidade, quantidade de nutrientes e grau de mobilização do solo.

O solo determina a forma do sistema radicular de todas as espécies, através das limitações ao crescimento das raízes, onde algumas formas de sistema radicular apresentam tendência natural para explorar determinados tipos de solo.

Nas monocotiledôneas (Figura 2.1) a vida da raiz primária é curta, tendo seu sistema radicular constituído de raízes adventícias e chamado de sistema radicular fasciculado. Raiz em forma de cabeleira e se une com mais firmeza as camadas superficiais do solo. Raízes adventícias são geralmente ineficientes na absorção de água e nutrientes, sua função é mais de suporte. Nas gimnospermas e dicotiledôneas (Figura 2.2) a raiz primária e suas ramificações constituem o sistema radicular pivotante, ou seja, formada por um eixo vertical principal que por sinal penetra mais profundamente o solo e na maioria apresenta desenvolvimento secundário.

No entanto, existem raízes com funções adversas, como: raízes tabulares são as que espam sobre o solo e servem de base para a árvore. Outras raízes são transformadas e adaptadas para desempenhar diferentes funções: a raiz principal, parte carnosa da cenoura (DAUCUS), da beterraba (BETA), do rabanete (RAPHANUS) e outras, exercem a função de órgãos de armazenamento, acumuladoras de vitamina. Como pode ser visto na figura (2.2), onde a beterraba tem a parte superior da raiz engrossada devido a sua função como tecido de armazenamento.

Assim, o tamanho e o formato das raízes são proporcionais ao tamanho e formato de suas copas, para que ocorra um equilíbrio entre a parte sustentadora (raiz) e a parte sustentada (parte aérea).

Dessa maneira, a raiz desenvolve os pêlos radiculares para aumentar a absorção da água no solo, através da capacidade de penetração nos espaços capilares cheios de água entre as partículas de solo. Como os pêlos absorventes são células da epiderme que apresentam uma grande superfície por unidade de volume, contribuem para aumentar a área de contato entre a raiz e o solo e tem uma vida curta, pois a medida que a extremidade da raiz penetra no solo, novos pêlos absorventes são produzidos acima dela, fornecendo a raiz novas superfícies para absorver água e minerais o que faz com que o crescimento da raiz seja necessário para renovar essa superfície de absorção.

Assim, a maior parte da água precisa passar através das células da endoderme, porque o fluxo através das paredes dessas células é impedido pelas estrias de Caspary (AWAD, 1983).

As raízes absorventes ativas na absorção de água, localizam-se no primeiro metro de solo e a massa das raízes está nos primeiros 15cm de solo, ou seja, as raízes jovens se encontram próximo ao ápice da raiz e as raízes velhas são encontradas próximo ao colo da raiz, na região de transição entre a raiz e o caule, o que faz diminuir a absorção de água nessa região.

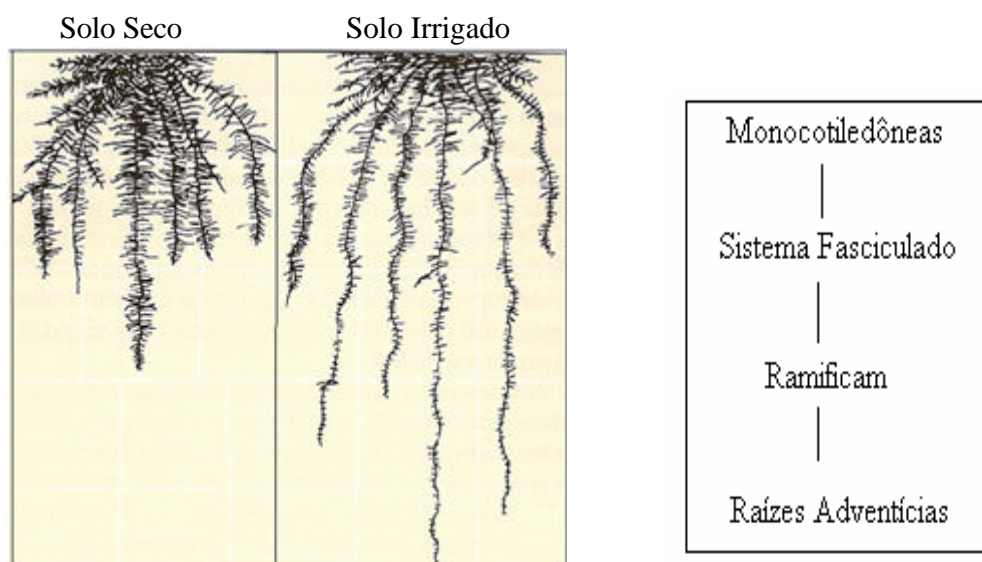


Figura 2.1 - Desenvolvimento de uma monocotiledônea madura: Planta de trigo com três meses (TAIZ, 2004).

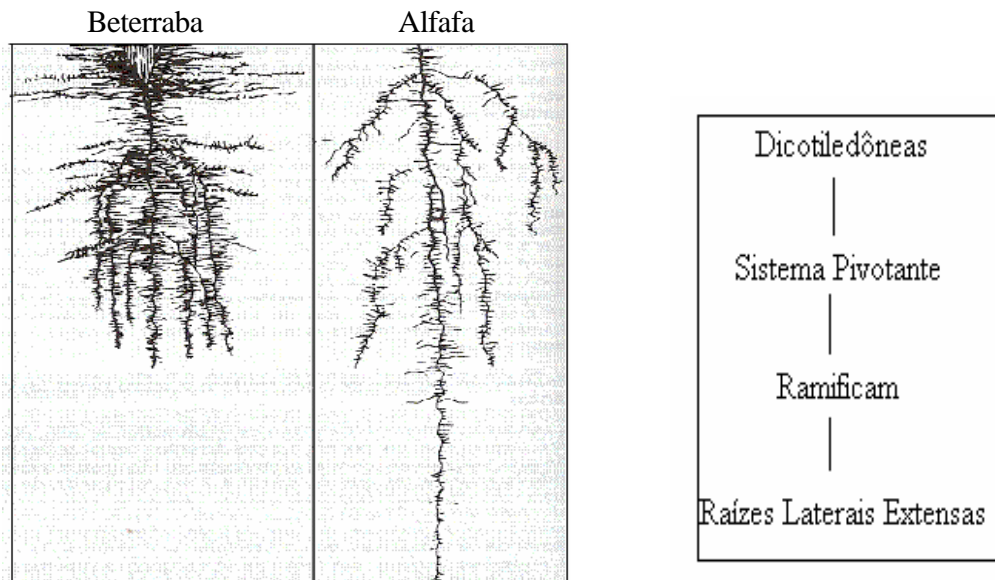


Figura 2.2 - Desenvolvimento de raízes pivotantes irrigadas: Beterraba com 5 meses, alfafa com 2 anos (TAIZ, 2004).

### 2.8.2 As partes da raiz

Na figura (2.3) é apresentado um corte transversal de uma raiz em estágio primário de crescimento que revela nítida separação entre sistemas de raiz. O número (1) está a coifa que cobre o ápice da raiz, protegendo o meristema apical em crescimento vertical. Lubrifica a raiz durante a sua penetração ao solo e controla as respostas da raiz a gravidade. A região lisa ou de crescimento (2) é a região de alongamento das células, onde ocorre o crescimento da raiz. A terceira parte da raiz é a região polífera, representada na figura pelo número (3). Região que se encontra os pêlos absorventes, que retiram do solo água e sais minerais. Chamada de *zona de absorção*. Região suberosa (4) é a região da raiz que se ramifica, originando raízes secundárias que auxiliam a fixação da planta no solo e o aumento da superfície de absorção. E a última parte é o colo (5), ponto onde se encontra com o caule.

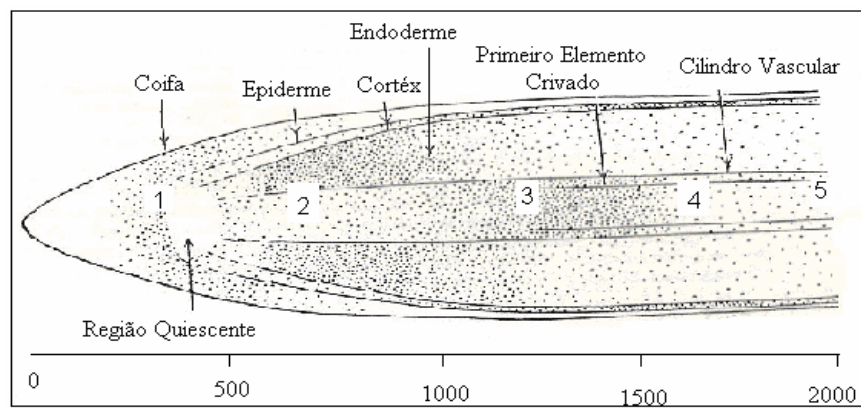


Figura 2.3 - Diagrama do ápice da raiz da cebola em corte longitudinal (ESAU, 1974).

### 2.8.3 Zona de Absorção

O tamanho e distribuição do sistema de raiz são bastante afetados pela distribuição e disponibilidade da água no solo, causando diferenças na capacidade dos cultivos de explorar as reservas mais profundas do solo.

A maior parte da água e sais minerais é absorvida através das porções terminais das raízes, devido a enorme ramificação de pêlos absorventes em suas extremidades radiculares. Na coifa, na zona meristemática e de diferenciação, há pouca entrada de água na raiz. Na zona de alongamento a taxa é mais elevada, mas a máxima absorção de água é a que corresponde à zona pilosa, com grande concentração de pêlos radiculares. Estes, por sua vez são projeções das células epidérmicas que podem ter um comprimento variável, entre alguns milímetros e muitos centímetros.

### 2.8.4 Estrutura Secundária da Raiz: Variação do crescimento.

O crescimento de uma planta não é distribuído uniformemente por todo o organismo, mas se restringe a certas áreas. O aumento do comprimento ou formação de órgãos laterais resulta da atividade meristemática dos ápices dos caules e raízes. A raiz aumenta até 2 mm abaixo do ápice (FERRI, 1986).

Assim, a expansão longitudinal das células nesta região é a responsável pela penetração forçada da ponta da raiz através do solo.

Raízes que armazenam reservas apresentam variações na atividade do câmbio vascular, resultando em estruturas secundárias que fogem do padrão, como nas gimnospermas e dicotiledôneas herbáceas, que se formam dos meristemas laterais câmbio vascular e felogênio.

O felogênio pode se originar em qualquer camada da região cortical. O câmbio vascular se origina das divisões das células do procâmbio entre o floema e o xilema primários. Apresenta o formato de feixes separados, cujo número depende do tipo de raiz.

O tipo comum de crescimento secundário desta região é a planta de funcho (*Foeniculum*) ou cenoura (*Daucus*), onde o parênquima predomina no xilema e no floema. A beterraba tem crescimento anômalo, os câmbios supranumerários, formados fora do câmbio original, produzem camadas de crescimento para dentro que corresponde a xilema repleto de parênquima para fora o floema.

## **2.9 Transporte de água às raízes**

A água move-se por não encontrar nada que a impeça de se mover. A pressão osmótica dentro das células da raiz normalmente excede aquela da água do solo e assim a água tende a entrar. Na maior parte, entra em resposta a gradientes de pressão ou de potencial entre o solo e os tecidos da planta (WINTER, 1984).

Assim, o movimento de água nas raízes ocorre das células epidérmicas até o cilindro central, tanto acompanhando as paredes celulares como também através do protoplasma de célula para célula.

A quantidade de água pode ser diferente nas diversas regiões do sistema radicular. No eixo horizontal do solo podem ter características variadas de retenção de água, mas como o crescimento das raízes também se dá na direção da água existente no solo, esta flui para dentro da raiz principalmente em solo úmido de tal maneira que o sistema tende a ser auto-equilibrado.

## 2.10 Evaporação

A evaporação é o processo físico pelo qual as moléculas de água na superfície líquida ou na umidade do solo, conseguem energia necessária através da radiação solar e outros fatores climáticos e passam do estado líquido para o gasoso. É com o aumento da temperatura do ar que a superfície da terra aquece, provocando lentamente a evaporação.

Dois processos estimam a evaporação a partir de dados climatológicos, como o método do balanço de energia considera as entradas de energia térmica e solar com as saídas de calor por radiação, condução e evaporação. E o método de transferência de massa que determina a pressão de vapor e o fenômeno estudado.

Segundo HILLEL (1980), existem três estágios de evaporação. Na primeira fase, a superfície do solo possui grande disponibilidade de água e é exposta livremente à radiação solar, umidade do ar, vento e temperatura. No segundo estágio de evaporação as condições ambientais e as condições intrínsecas do solo que governam o transporte de água e a velocidade de evaporação. A terceira etapa do processo evaporativo do solo ocorre quando existe um movimento muito lento de água no solo e uma condutividade hidráulica muito baixa.

A evaporação da água no solo é importante para o ciclo de uma cultura, pois pode responder a cerca de 50% da evapotranspiração. Por isso, é válido pesquisar os fatores que determinam a evaporação de água no solo para possibilitar a conservação de maior quantidade de água no solo e o aprimoramento de práticas com irrigação.

## 2.11 Transpiração

A transpiração é um processo passível de evaporação. Considerada a perda de água desejada, pois esta água participa das atividades biológicas, por entrar na planta e se perder na atmosfera pelos poros. É a água que evapora das plantas quando se dá o processo de fotossíntese. A transpiração das plantas tende a aumentar quando o gradiente de pressão de vapor entre a folha e o ar atmosférico se eleva. Este gradiente é calculado em função da temperatura e da umidade relativa do ar, que também pode aumentar quando ocorre o secamento do solo (HOPKINS, 1995).

O potencial de água da folha também diminui com o declínio da disponibilidade de água no solo, levando à perda da turgescência e ao fechamento estomático (MANSUR e BARBOSA, 2000), ou seja, a perda d'água cria um déficit hídrico nas células, implicando em potenciais negativos no xilema que provocam a sucção d'água do solo através das raízes.

Como a transpiração de plantas é uma variável que não depende somente das condições climáticas, mas da planta e do solo, esta é de difícil medição, principalmente em árvores de grande porte. Destacam-se alguns métodos para o cálculo da transpiração através da evapotranspiração (ET) como o modelo empírico que estima os potenciais da evaporação e transpiração em várias etapas de crescimento das plantas (TANNER E RITCHIE, 1974). O modelo de Tanner para a ET baseia-se na fórmula de Priestley e Taylor, onde calcula a evaporação separadamente da transpiração, não havendo variação proporcional.



### 3-MODELO MATEMÁTICO

Neste capítulo, é apresentada a Equação de Richards que modela o movimento de água em solos, o modelo de evaporação e o problema inverso para o cálculo da absorção de água pelas raízes.

#### 3.1-Modelo para movimento da água no solo

A quantidade de água absorvida pelas raízes e o movimento da água no solo têm sido pesquisados empírica e teoricamente associada ao fenômeno de transpiração e à perda de água do solo por evaporação. Tal abordagem tem o nome de *evapotranspiração*. São alguns dos pesquisadores que vêm estudando o movimento da água no solo:

- REICHARDT, 1985 e 1990;
- BOAST e ROBERTSON, 1982;
- RITCHIE E JONHSON, 1990
- KANEMASU *et al* , 1976;
- KLOCKE *et al.* 1990;
- RODRÍGUEZ *et al.* 1997.

. Não foram encontrados na literatura modelos para calcular a absorção de água pelas raízes considerando as variações do teor de água do solo, que se constitui no problema proposto para esta dissertação.

O modelo matemático que descreve o movimento da água no solo em condições isotrópicas (solo homogêneo) foi obtido a partir da equação de conservação de massa e da Lei de Darcy, conhecido como equação de Richards. Esta equação relaciona as variações do teor de água com as variações do potencial total em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ K_r(\Theta) r \frac{\partial y}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial f} \left[ K_f(\Theta) \frac{\partial y}{\partial f} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_z(\Theta) r \frac{\partial y}{\partial z} \right] \quad (3.1)$$

Com eixo simétrico as variações do potencial em relação ao ângulo polar ( $f$ ) são nulos.

A primeira equação que quantificou o movimento de água em solo saturado encontra-se em FAGUNDES (2006) que desenvolveu sua pesquisa para solo saturado e solo-não saturado. Neste trabalho será utilizado para solo não saturado. Em coordenadas cilíndricas tem sua formulação matemática para o caso 2D dado por

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ K_r(\Theta) r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_z(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right] - S(r, z, t) \quad (3.2)$$

com condições de fronteira

$$Q(r, 0, t) = Q_{exp}(r, t) \quad \text{para } 0 < r < R \text{ e } t > 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z}(r, H, t) = 0 \quad \text{para } 0 < r < R \text{ e } t > 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r}(R, z, t) = 0 \quad \text{para } 0 < z < H \text{ e } t > 0 \quad (3.5)$$

$$\Theta(r, z, 0) = \Theta_0 \quad \text{para } 0 < r < R \text{ e } 0 < z < H \quad (3.6)$$

onde

$\Psi$  potencial total (Pa)

$Q$  é o teor de água volumétrica do solo (adimensional)

$R$  é o raio do cilindro (m)

$H$  é a altura do cilindro (m)

$t$  é o tempo (s)

$K_r$  e  $K_z$  são as condutividades hidráulicas nas direções r e z, respectivamente.

$S$  é a absorção de água pelas raízes (1/h)

$z$  profundidade do tubo(m)

A figura (3.1) apresenta uma ilustração do problema do movimento da água no solo com presença de um sistema radicial, simétrico em relação ao eixo vertical z.

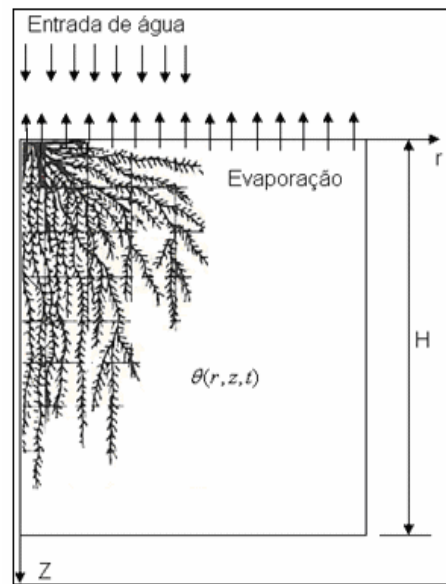


Figura 3.1 – Sistema radicial.

O potencial total (?) de água no solo é a soma de todos os potenciais (gravitacional, pressão, matricial e osmótico), no entanto dependendo das condições hídricas do solo, esses potenciais podem assumir valores nulos, permitindo escrever a Equação de Richards de formas específicas para cada condição. A presente dissertação apresentará apenas o caso solo não saturado (solo com presença de água).

### 3.1.1 Caso solo não saturado

Para solo não saturado o potencial total é a soma do  $y_m$  e o  $y_g$ , e a equação (3.2)

torna-se:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ K_r(\Theta) r \frac{\partial (y_m + y_g)}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_z(\Theta) \frac{\partial (y_m + y_g)}{\partial z} \right] - S(r, z, t) \quad (3.7)$$

onde,

$\varphi_g$  é o potencial gravitacional (mm/ coluna água)

$\varphi_m$  é o potencial matricial (mm/ coluna água)

$\frac{\partial(\varphi_g)}{\partial r} = 0$  e  $\varphi_g = d$ , logo a equação (3.6) torna-se

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ K_r(\Theta) r \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_z(\Theta) \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \right] + \frac{\partial K(\Theta)}{\partial z} - S(r, z, t) \quad (3.8)$$

onde,

$K_z(\Theta)$  é a condutividade hidráulica para solo não saturado ( $m^2 s^{-1} Pa^{-1}$ ).

### 3.1.2 Cálculo dos potenciais

O modelo proposto utiliza o potencial matricial ( $\Psi_m$ ) que é obtido experimentalmente através do ajuste da curva característica do solo. Um modelo empírico bastante usado foi proposto por VAN GENUCHTEN (1980)

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_r + \frac{\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_r}{\left[ 1 + |a\Psi_m|^n \right]^m} \quad (3.9)$$

onde

$\mathbf{q}_s$  é o teor de água volumétrico saturado ( $m^3 m^{-3}$ )

$\mathbf{q}_r$  é o teor de água volumétrico residual ( $m^3 m^{-3}$ )

$a, m, n$  são parâmetros do ajuste de curvas.

E substituindo (2.6) em (3.9), teor de água volumétrica do solo ( $\Theta$ ) também pode ser expresso por

$$\Theta = \frac{1}{\left[ 1 + |a\Psi_m|^n \right]^m} \quad (3.10)$$

Logo, o potencial matricial é expresso por

$$\Psi_m = \frac{1}{a} \sqrt[n]{\Theta^{-1/m} - 1} \quad (3.11)$$

MUALEN (1976) e VAN GENUCHTEN (1980) desenvolveram a equação para determinar a condutividade hidráulica para solo não saturados, por meio de parâmetros da curva de retenção de água no solo:

$$k(\Theta) = k_0 \Theta^l \left[ 1 - (1 - \Theta^{1/m})^m \right] \quad (3.12)$$

onde,

$k_0$  é a condutividade hidráulica do solo saturado,

$m$  é o parâmetro da curva característica

$l$  é um parâmetro considerado por MUALEN (1976) igual a 2.

Os parâmetros usados para a equação de van Genuchten (3.8):  $m = 0,534$ ,  $n = 30,3030$ ,  $a = 0,467$ , os quais foram calculados através do ajuste de curvas num programa computacional próprio e usados nos cálculos que envolvem teor de umidade neste trabalho.

### 3.1.3 Cálculo da função evaporação

A evaporação foi calculada ajustando os parâmetros de equação (3.13) com base em dados experimentais pelo Método dos Mínimos Quadrados na sua forma matricial (VIONE, 2007):

$$\mathbf{q}(t) = at + b \quad (3.13)$$

onde,

$a$  e  $b$  são os coeficientes angular e linear

$q(t)$  é o teor de água da primeira camada de superfície, para cada instante de tempo ( $m^3 m^{-3}$ )

$t$  é o tempo

Substituindo os dados experimentais (valores fictícios), onde  $\vec{d} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  e  $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n)$  em (3.13) resulta num sistema de equações lineares, na forma

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= at_0 + b \\ \Theta_1 &= at_1 + b \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \Theta_2 &= at_2 + b \end{aligned} \tag{3.14}$$

Escrevendo (3.14) na forma matricial, obtém-se

$$\vec{\Theta} = A \cdot \vec{x} \tag{3.15}$$

onde,

$\vec{\Theta}$  é o vetor dos teores de água

$$A = \begin{pmatrix} t_0 & 1 \\ t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_n & 1 \end{pmatrix} \text{ é a matriz dos coeficientes} \tag{3.16}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ é o vetor das incógnitas} \tag{3.17}$$

A solução do sistema (3.15) é obtida usando a matriz Pseudo-inversa (que corresponde à solução pelo Método dos Mínimos Quadrados).

$$\vec{x} = (A^T A)^{-1} \cdot A^T \vec{\Theta} \tag{3.18}$$

A função evaporação (3.14) foi utilizada para determinar a condição de fronteira (3.2) em  $z = 0m$ , para cada instante de tempo.

O volume de água retirada do solo por evaporação foi calculado pela diferença entre os volumes de água inicial e final do solo, sem a presença de sucção pelo sistema radicular.

O volume de controle para um problema de transferência de massa de eixo simétrico em coordenadas cilíndricas é um anel conforme figura (3.2)

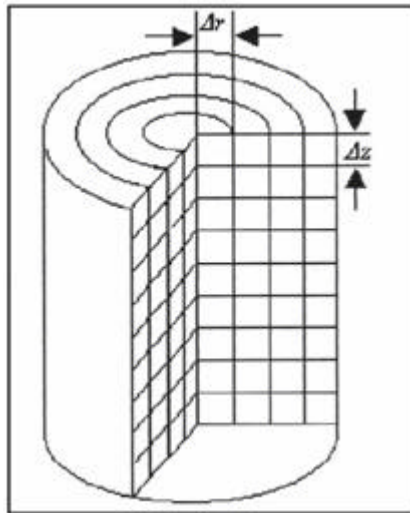


Figura 3.2 – Esquema dos anéis no volume de controle

O volume de um volume de controle é obtido fazendo a diferença entre os volumes de dois cilindros de raio  $r_i$  e  $r_{i-1}$ , sendo  $r_1 < r_2$  no intervalo  $0 < r < R$ .

$$V_{C_i} = \pi r_i^2 \Delta z - \pi r_{i-1}^2 \Delta z \quad (3.19)$$

ou

$$V_{C_i} = \pi \left( r_i^2 - r_{i-1}^2 \right) \Delta z = \pi (r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1}) \Delta z \quad (3.20)$$

para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  onde  $n$  é o número de  $V_{C_i}$  e  $r_0 = 0, r_1 = \Delta r, r_2 = 2\Delta r, \dots, r_n = n\Delta r$ .

$V_{C_i}$  é o volume de um volume de controle ( $m^3$ )

Então,

$$r_i = i\Delta r \quad \text{e} \quad r_{i-1} = (i-1)\Delta r \quad (3.21)$$

e levando (3.21) em (3.20) obtém-se

$$V_{C_i} = p(2i-1)\Delta r^2 \Delta z. \quad (3.22)$$

O volume de água inicial em  $t = 0$  é calculado como

$$V_i = \sum_{i=1}^n q \cdot V_{C_i}$$

$$V_i = p(2i-1)\Delta r^2 \Delta z; \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ onde } n \text{ é o número de } V_{C_i} \quad (3.23)$$

onde,

$V_i$  é o volume inicial de água do solo ( $m^3$ ).

$\sum_{i=1}^n q \cdot V_{C_i}$  é o somatório dos teor de água pelo volume de controle

Para o volume final com o tempo  $t = t_f$  tem-se a seguinte equação

$$V_f = \sum_{i=1}^n q \cdot V_{C_i}$$

$$V_f = p(2i-1)\Delta r^2 \Delta z; \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ onde } n \text{ é o número de } V_{C_i} \quad (3.24)$$

O volume final de água evaporada é dado por

$$V_E = V_i - V_f \quad (3.25)$$

onde,

$V_E$  é o volume de água total por evaporação

$V_i$  é o volume de água inicial para a evaporação

$V_f$  é o volume de água final numérico para a evaporação.

### 3.1.4 Cálculo do volume da água absorvida pela raiz

Para encontrar o volume de água absorvido pelas raízes foi necessário determinar a evapotranspiração através do mesmo método descrito pela equação (3.25), porém com a ação da evaporação e da absorção de água pelas raízes.



$$ET = S_0 - S_f \quad (3.26)$$

onde,

$ET$  é a soma de água evaporada e absorvida pelas raízes ( $m^3$ )

$S_0$  é o volume de água inicial ( $m^3$ )

$S_f$  é o volume de água final ( $m^3$ )

Para o cálculo do volume total de água absorvida, utilizou-se a equação (3.26) menos a evaporação

$$T_r = S_0 - S_f - V_E \quad (3.27)$$

onde,

$T_r$  é o volume total de água absorvida pelas raízes ( $m^3$ )

$V_E$  é o volume final de água evaporada ( $m^3$ )

## 4. SOLUÇÃO NUMÉRICA

O método numérico para a resolução das equações diferenciais foi de Diferenças Finitas. Neste capítulo são apresentadas as condições de contorno do problema, discretização das equações diferenciais e fluxograma do programa computacional elaborado.

### 4.1 Solução numérica para o movimento da água no solo

A simulação da irrigação considera um fluxo de água  $q''_{ir}$  em toda a região da superfície ( $0 < r < R$ ), sendo ela uma condição de fronteira de Newmann, as condições de fronteira de  $r = R$ ,  $z = H$  são de isolamento e em  $r = 0$  é um eixo simétrico (onde há a presença da raiz), de acordo com a figura abaixo:

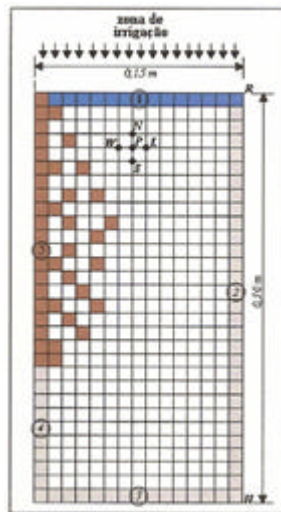


Figura 4.1 – Malha do domínio de integração para diferenças finitas.

Na figura (4.1) são mostrados as condições de fronteira usadas para a solução do problema, onde

1. Irrigação, condição de fronteira de Newmann.
2. Fronteira lateral do cilindro (isolamento).
3. Fundo do cilindro (isolamento)

4. Eixo central (simetria sem presença de raiz)
5. Eixo central (simetria com presença de raiz)

O anexo 1 apresenta a localização dos ápices determinado artificialmente para a simulação do programa computacional, ou seja, os pontos onde há medição de teor de água.

Para a discretização da equação

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ K_r(\Theta) r \frac{\partial \mathbf{y}_m}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_z(\Theta) \frac{\partial \mathbf{y}_m}{\partial z} \right] + \frac{\partial k(\Theta)}{\partial z} - S(r, z, t) \quad (3.7)$$

foi usado o método das Diferenças Finitas Centrais (CDS – Central Difference Scheme), com o esquema temporal explícito, por se tratar de um problema onde predomina a difusão, devido a reduzida velocidade com que a água se desloca no solo.

MALISKA, 1985 e SMITH, 1985 adotaram  $W, E$  para as posições em  $r$ ;  $N, S, P$  para as posições em  $z$ , e  $(^0)$  e  $(^1)$  para tempos anteriores e atuais, respectivamente, além da discretização pela fórmula de Taylor para as primeiras e segundas derivadas, obtém-se:

Para a parte temporal:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\Theta^1_P - \Theta^0_P}{\Delta t} \quad (4.1)$$

Para a parte espacial:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial r} = \frac{\mathbf{y}^0_E - \mathbf{y}^0_W}{2\Delta r} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial r^2} = \frac{\mathbf{y}^0_E - 2\mathbf{y}^0_P + \mathbf{y}^0_W}{2\Delta r^2} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial z} = \frac{\mathbf{y}^0_N - \mathbf{y}^0_S}{2\Delta z} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial z^2} = \frac{\mathbf{y}^0_N - 2\mathbf{y}^0_P + \mathbf{y}^0_S}{2\Delta z^2}$$

Substituindo as equações (4.1) e (4.2) na equação (3.7), que rege o movimento da água em solo não saturado, a mesma toma a forma discretizada por diferenças finitas centrais:

$$\frac{\Theta_P^1 - \Theta_P^0}{\Delta t} = \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{k_E - k_W}{2\Delta r} \cdot r + k_P \right) \left( \frac{\Psi_E^0 - \Psi_W^0}{2\Delta r} \right) + k_P r \left( \frac{\Psi_E^0 - 2\Psi_P^0}{\Delta r^2} \right) \right] + \left( \frac{k_N - k_S}{2\Psi_z} \right) \left( \frac{\Psi_N - \Psi_S}{2\Delta z} \right) + k_P \left( \frac{\Psi_N^0 - 2\Psi_P^0 + \Psi_S^0}{\Delta z^2} \right) + \left( \frac{k_N - k_S}{2\Delta z} \right) - S(r, z, t) \quad (4.3)$$

$$\Theta_P^1 = \Delta t \cdot \Psi_E^0 \left( \frac{k_E}{4\Delta r^2} - \frac{k_W}{4\Delta r^2} + \frac{k_P}{2r\Delta r} + \frac{k_P}{\Delta r^2} \right) + \Psi_W^0 \left( -\frac{k_E}{4\Delta r^2} + \frac{k_W}{4\Delta r^2} + \frac{k_P}{2r\Delta r} + \frac{k_P}{\Delta r^2} \right) + \Psi_P^0 \left( -\frac{2k_P}{\Delta r^2} - \frac{2k_P}{\Delta z^2} \right) + \Psi_N^0 \left( \frac{k_N}{4\Delta z^2} - \frac{k_S}{4\Delta z^2} + \frac{k_P}{\Delta z^2} \right) + \Psi_S^0 \left( -\frac{k_N}{4\Delta z^2} + \frac{k_S}{4\Delta z^2} + \frac{k_P}{\Delta z^2} \right) + \left( \frac{k_N - k_S}{2\Delta z} \right) + \mathbf{q}_P^0 - S(r, z, t) \cdot \Delta t \quad (4.4)$$

Denotando:

$$A_E^0 = \Delta t \left( \frac{k_E}{4\Delta r^2} - \frac{k_W}{4\Delta r^2} + \frac{k_P}{2r\Delta r} + \frac{k_P}{\Delta r^2} \right) \quad (4.5)$$

$$A_W^0 = \Delta t \left( -\frac{k_E}{4\Delta r^2} + \frac{k_W}{4\Delta r^2} - \frac{k_P}{2r\Delta r} + \frac{k_P}{\Delta r^2} \right) \quad (4.6)$$

$$A_P^0 = \Delta t \left( -\frac{2k_P}{\Delta r^2} - \frac{2k_P}{\Delta z^2} \right) \quad (4.7)$$

$$A_N^0 = \Delta t \left( \frac{k_N}{4\Delta z^2} - \frac{k_S}{4\Delta z^2} + \frac{k_P}{\Delta r} \right) \quad (4.8)$$

$$A_S^0 = \Delta t \left( \frac{k_N}{4\Delta z^2} + \frac{k_S}{4\Delta z^2} + \frac{k_P}{\Delta z^2} \right) \quad (4.9)$$

A equação (4.4) torna:

$$\Theta_P^1 = A_E^0 \Psi_E^0 + A_W^0 \Psi_W^0 + A_P^0 \Psi_P^0 + A_N^0 \Psi_N^0 + A_S^0 \Psi_S^0 + \left( \frac{k_N - k_S}{2\Delta z} \right) + \Theta_P^0 - S(r, z, t) \cdot \Delta t \quad (4.10)$$

## 4.2. Problema Inverso

O volume de água absorvida pelas raízes foi calculado com base em dados fictícios da distribuição da água no solo. Dados experimentais do monitoramento do teor de água do solo em função do espaço e do tempo, com presença de sistema radicular não foram encontrados na literatura. O objetivo de usar dados fictícios é restrito a verificação do funcionamento do modelo matemático e funcionamento do problema inverso, sem a menor intenção em discutir se os resultados do modelo descrevem com precisão os dados.

Foram elaboradas quatro hipóteses de absorção de água pela raiz:

### 1ª Hipótese: Fluxo Constante

Nessa hipótese a absorção (taxa de retirada de água do solo pelas raízes) é constante no tempo e é a mesma para cada ponto onde se localiza um ápice. Trata-se de uma hipótese simples, cuja validade pode estar condicionada para situações especiais, tais como: abundância de água no solo e pequenos períodos de tempo, quando as condições atmosféricas não apresentam variações significativas.

### 2ª Hipótese: Fluxo variável no tempo sem limitação de água

Nessa hipótese a absorção depende das condições de superfície. Foi proposta uma função exponencial (4.11) para o ciclo diário, que descreve aproximadamente a intensidade da absorção como consequência da incidência de luz natural na planta.

$$q_2 = Ae^{-b(t-c)^2} \quad (4.11)$$

onde

$q_2$  é a taxa de absorção de água pela raiz em cada ápice ( $m^3/h$ )

$A, b$  são parâmetros ( $m^3/h$ ), ( $1/h$ ) e ( $h$ ), respectivamente

$c$  é o instante de tempo da máxima absorção diária ( $h$ ),

$t$  é o tempo ( $h$ )

Os parâmetros  $A$ ,  $b$  e  $c$  podem variar conforme dados experimentais de radiação solar, porém, neste trabalho foi proposta uma simetria em relação ao meio dia (portanto  $c = 12 h$ ) e  $b$  foi considerado constante e determinado de tal forma que os valores mais significativos da absorção ficassem no período das 6 as 18 h. O parâmetro  $A$  é a absorção máxima e foi determinado por ajuste (Problema Inverso) em função dos dados experimentais fictícios.

### 3ª Hipótese: Absorção limitada pela oferta de água do solo

Nessa hipótese a absorção é limitada pela disponibilidade de água do solo e proporcional à diferença entre o teor de água na região dos ápices e o teor de água residual, como mostra a equação (4.12)

$$q_3 = a(Q - Q_r) \quad (4.12)$$

onde,

$q_3$  é a taxa de absorção de água pela raiz ( $m^3/h$ )

$a$  é a constante de proporcionalidade ( $m^3/h$ )

$Q$  e  $Q_r$  é o teor de água no ápice e residual, respectivamente (adimensional)

A constante de proporcionalidade  $\alpha$  foi determinada por ajuste (Problema Inverso) em função dos dados experimentais fictícios.

### 4ª Hipótese: Absorção dependente do tempo e limitada pela oferta de água do solo

Essa hipótese considera as hipóteses (2) e (3) conjuntamente, como mostra a equação (4.13). O parâmetro  $b$  é a absorção máxima e foi determinado por ajuste (Problema Inverso) em função dos dados experimentais fictícios.

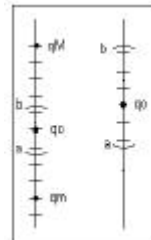
$$q_4 = b(Q - Q_r)e^{b(t-c)} \quad (4.13)$$

onde

$q_4$  é a taxa de absorção de água pela raiz ( $m^3/h$ ) e

$b$  é a constante de proporcionalidade ( $m^3/h$ ).

O problema inverso foi resolvido pelo Método de Procura em Rede. Este método consiste em estimar um intervalo de valores em seqüência crescente para os parâmetros a ajustar, admitindo que os valores ótimos estão contidos no intervalo estimado. Assim, a matriz  $\vec{b}$  tem os valores  $b_i$ , com  $i=1,2, \dots, n$ .



Localiza um ponto mínimo ( $qm$ ) e um ponto máximo ( $qM$ ) e pesquisa o ponto ótimo ( $qo$ ). Restringe o intervalo dos parâmetros  $a$  e  $b$  e encontra um novo  $qo$ , até chegar ao fluxo ótimo.

Calculando valores de  $Q$  com o problema direto (resolução numérica da equação de Richards) para cada  $b_i$  (rede) obtém-se o vetor de erros

$$\bar{e} = \Theta_{exp} - \Theta_{cal} \quad (4.23)$$

onde

$\bar{e}$  é a diferença entre o teor de água experimental e calculado (ad)

$Q_{exp}$  é o teor de água experimental (ad)

$Q_{cal}$  é o teor de água calculado (ad)

Para encontrar o melhor valor dos parâmetros a ajustar, escolhe-se aquela em que o erro foi menor. Aumentando o valor de  $n$  e/ou restringindo o intervalo de estimação dos parâmetros, o algoritmo descrito tende para os valores ótimos dos parâmetros. Apesar do evidente alto custo computacional, o método é bastante eficiente e dispensa o uso de derivadas e solução de sistema de equações lineares (características dos métodos baseados no Método de Newton), além de ser convergente para a solução ótima, desde que ela esteja presente nos intervalos estimados.

O fluxograma do programa computacional usado para calcular os parâmetros das hipóteses de absorção, composto por 6 blocos é mostrado na figura (4.2)

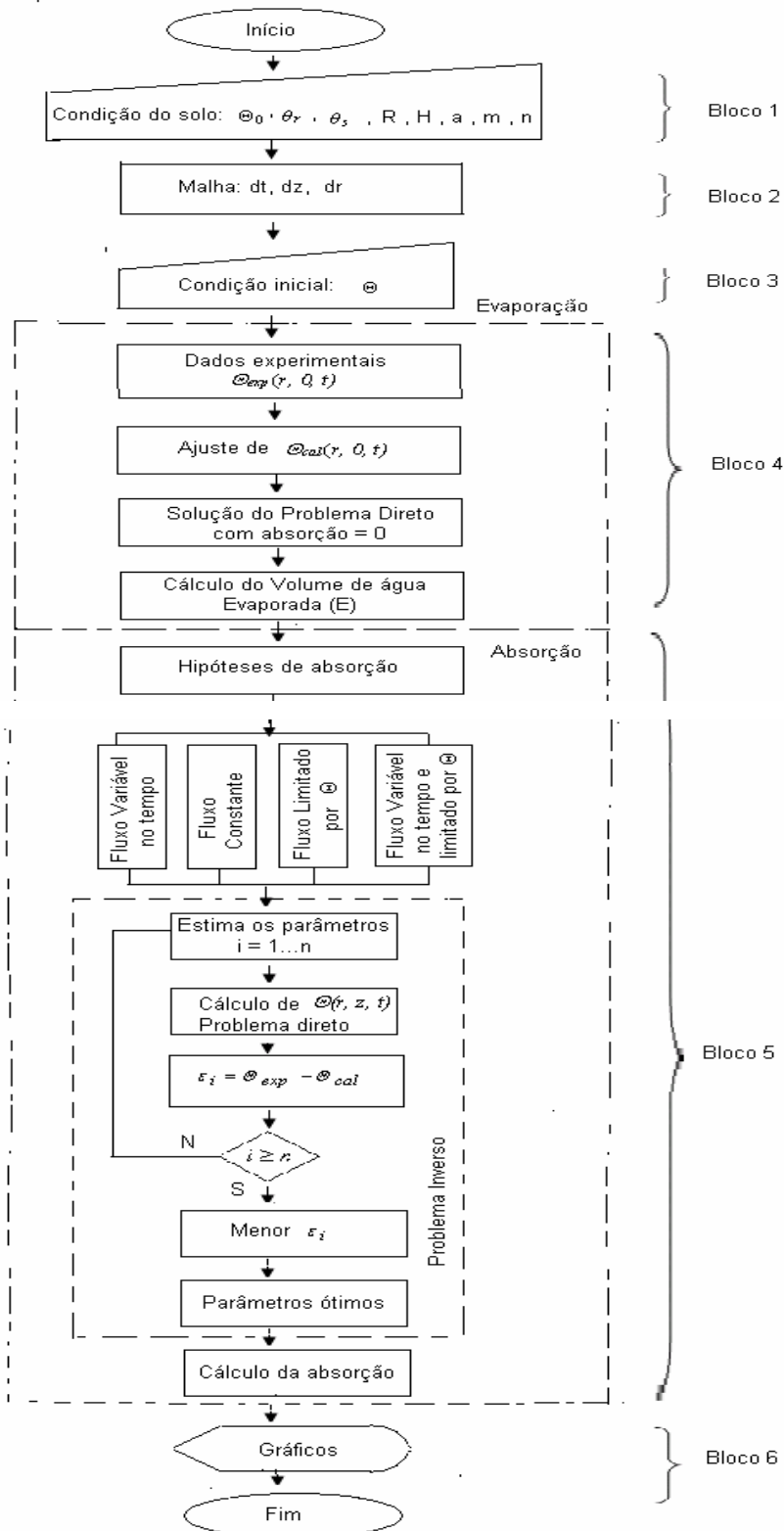


Figura 4.2 – Fluxograma do programa sobre as variações do teor de água considerando a absorção de água pelas raízes.



**Bloco 1 - Definição da malha**

- Entrada de dados referentes às condições em que o solo se apresenta: teor de umidade inicial, teor de umidade do solo saturado, teor de umidade do solo residual, condutividade hidráulica, raio do cilindro, altura do cilindro e parâmetros de ajuste da curva característica.

**Bloco 2 – Cálculo da malha**

- Neste bloco é feito o cálculo da malha por diferenças finitas.

**Bloco 3 – Condição inicial**

- Entrada com os dados experimentais de teor de água no solo.

**Bloco 4 - Cálculo da evaporação ( $E$ )**

- O cálculo da evaporação é feito através do problema direto com absorção constante, onde há entrada dos dados experimentais de teor de água na profundidade  $z = 0$  e o ajuste dos dados calculados.

**Bloco 5 – Cálculo de  $T$** 

- Neste bloco é feito o cálculo do volume de água absorvido pelas raízes através do problema inverso. Foram elaboradas quatro hipóteses de absorção de água pela raiz: fluxo constante no espaço e no tempo, fluxo variável no tempo sem limitação de água, fluxo de absorção limitada pela oferta de água do solo e fluxo variável no tempo com limitação de água. O problema inverso foi resolvido pelo Método de Procura em Rede que estima um intervalo de valores em seqüência crescente para os parâmetros a ajustar. Escolhe-se o erro que for menor para encontrar o melhor valor dos parâmetros a ajustar afim de determinar o cálculo da absorção de água.

**Bloco 6 – Saída de dados**

- São apresentados gráficos referentes às simulações.

## 5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados das simulações que descrevem o movimento da água no solo com a presença de raízes de uma planta, (problema direto), as hipóteses de absorção de água pelas raízes com parâmetro de tempo ou limitação de água no solo a ser considerado.

### 5.1 Simulações do movimento da água no solo com absorção de água pelas raízes (Problema Direto).

A análise dos resultados do Problema Direto visa mostrar a coerência do modelo com o que pode ser esperado experimentalmente, sobre a distribuição do teor de água do solo, considerando as variações na posição e intensidade de fluxo nos ápices em função do espaço e do tempo.

A Figura (5.1) apresenta a superfície de teor de água calculada com fluxo de água constante em todos os ápices e em relação ao tempo, para um intervalo de tempo de 30 h. A localização dos ápices foi determinada artificialmente e é apresentada no anexo 1. A função da evaporação foi considerada linear após ajuste de curvas dos dados de teor de água da primeira camada de solo, conforme hipótese descrita em VIONE (2007). A ação da evaporação nas camadas superiores de solo é constatada pelo baixo teor de água em relação às camadas inferiores, o que forma uma curva  $\Theta(z)$ . Se estas curvas fossem construídas para cada instante de tempo mostrariam a variação do teor de água e o deslocamento da água na direção vertical, de baixo para cima, em função do gradiente de teor de água ocasionado pela evaporação na superfície. Observa-se também a redução do teor de água na região onde se localizam os ápices, que é o efeito da absorção de água no solo pelas raízes. Para os parâmetros usados ( $q = 0,004 \text{ m}^3/\text{h}$ ), a água retirada pela evaporação é bem superior à água retirada pela absorção.

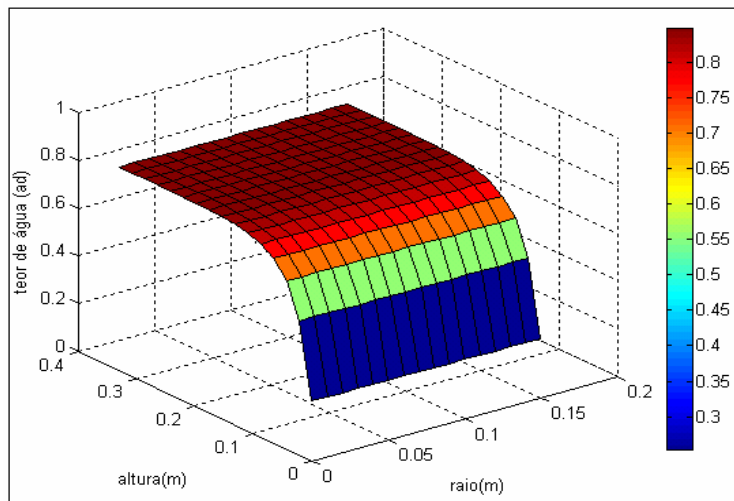


Figura 5.1 - Simulação do teor de água do solo para  $t = 30h$ ;  
 $E = -0,0201 t + 0,8448 m^3/h$ ;  $Ko = 0,000004 m/dia$   
 $q = 0 m^3/h$ ; Teor de água diminui, quanto mais próximo da superfície.

Na Figura (5.2) foi mantida a mesma taxa de evaporação, o tempo e posicionamento dos ápices, porém foi modificado o fluxo de absorção ( $q = 0,0116 m^3/h$ ). O efeito desta mudança é observado claramente na posição dos ápices e de modo geral nos valores do teor de água na superfície. Há presença de raízes absorvendo água.

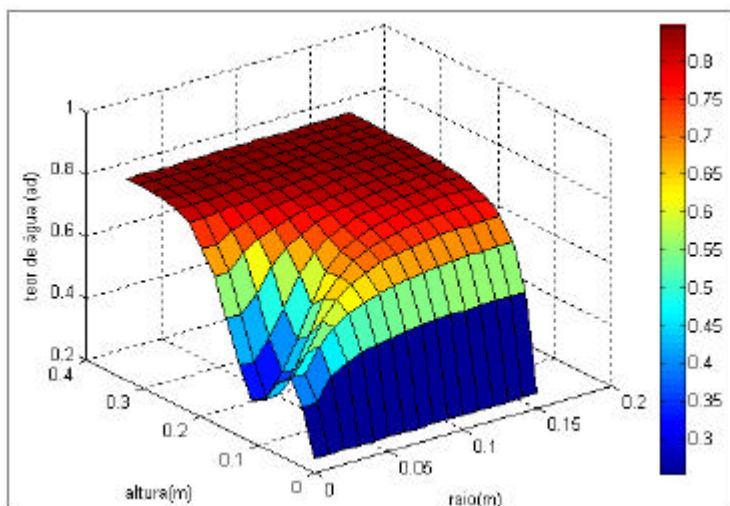


Figura 5.2 - Simulação do teor de água do solo para  $t = 30h$ ;  
 $q = 0,0116 m^3/h$ ;  $E = -0,0201 t + 0,8448 m^3/h$ ;  
 $Ko = 0,000004 m/dia$ .

## 5.2. Fluxo constante de absorção de água pelas raízes

A Figura (5.3) apresenta os resultados do cálculo da água retirada do solo por evaporação e absorção de água pela raiz. Observa-se que a absorção de água pelas raízes varia linearmente em função do tempo, consequência da hipótese adotada de taxa de absorção de água constante. A evaporação apresenta uma pequena curvatura, consequência da hipótese de ajuste dos dados experimentais.

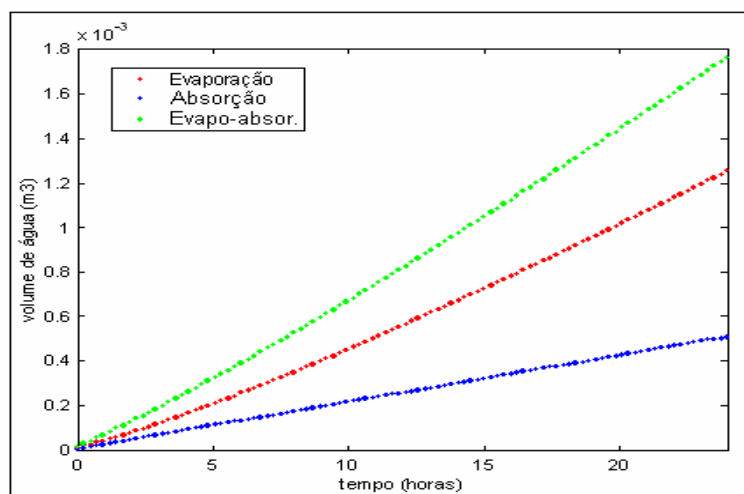


Figura 5.3 – Variação do volume de água evaporada e absorvida, para  $t = 24 \text{ h}$ ;  $q = 0,0116 \text{ m}^3/\text{h}$ ;  $E = -0,0201 t + 0,8448 \text{ m}^3/\text{h}$ ;  $Ko = 0,000004 \text{ m}/\text{dia}$ .

## 5.3. Fluxo de absorção variável no tempo

A Figura (5.4) apresenta o volume de água retirado por evaporação e absorção de água do solo pela raiz, porém com a absorção variável no período de 24 h, simulando a demanda da planta em função da incidência de luz. Foi utilizada uma função exponencial (4.11) simétrica em relação ao ponto máximo de absorção durante o dia, como função fluxo de água em cada ápice.

A comparação das Figuras (5.3) e (5.4) evidencia a diferença das hipóteses de absorção constante e variável no tempo. Nos períodos noturnos (0 a 6h e 18 a 24h) a absorção é praticamente nula. A partir das 6h começa a intensificar-se atingindo o máximo

as 12h, quando decresce até as 18 h. A variação da absorção de água no solo pelas raízes nestes períodos pode ser observada na Figura (5.4), através da linha pontilhada azul que se apresenta curvada, ao contrário da figura (5.3) que se apresenta linearmente.

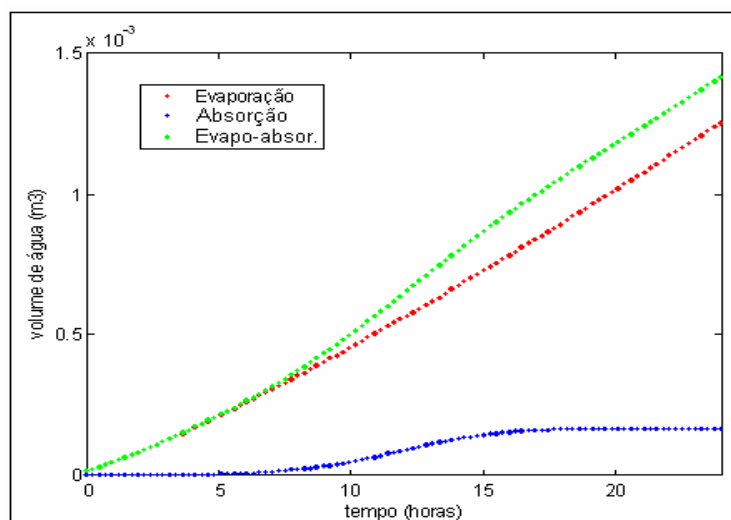


Figura 5.4 – Variação do volume de água evapora e absorvida para  $t = 24$  h;  $q$  variável, eq. (4.11)  $m^3/h$ ;  $K_0=0,000004$  m/dia;  $E=-0,0201 t + 0,8448m^3/h$ .

As Figura (5.5) e (5.6) apresentam a variação do teor de água em diferentes profundidades com absorção constante e variável no tempo, respectivamente. Com absorção constante a água é retirada do solo pelas raízes sem qualquer limitação – caracterizando uma hipótese irreal para solos secos - não há oscilação do teor de água figura (5.5), enquanto que com absorção variável, observa-se uma forte oscilação figura (5.6). Este fato pode ser justificado com a re-acomodação da água na medida que a transpiração diminui. Ou seja, a absorção, quando ativa, provoca gradientes de umidade, diminuindo o teor de água nas posições próximas aos ápices. A redução da absorção faz com que não seja mais retirada água do solo, mas o gradiente permanece, fazendo com que a água existente nas proximidades dos ápices se desloque de pontos de maior para os de menor umidade.

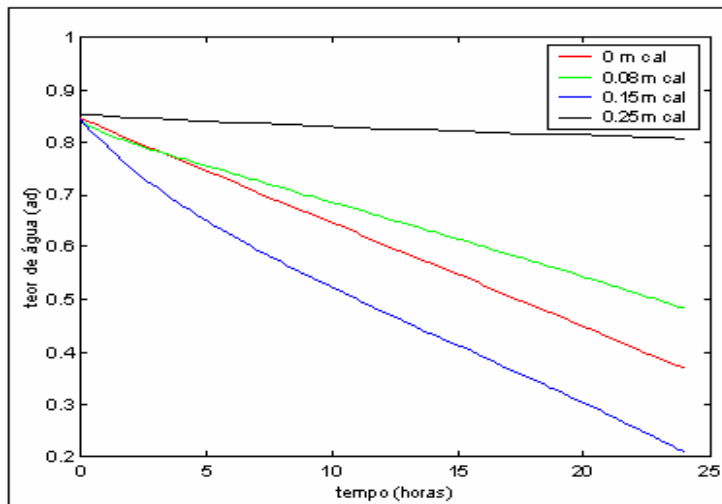


Figura 5.5 – Teor de água em diferentes profundidades com absorção variável no tempo.  $t = 24$  h;  $q = 0,0116 \text{ m}^3/\text{h}$ ;  $E = -0,0201 t + 0,8448 \text{ m}^3/\text{h}$ ;  $Ko = 0,000004 \text{ m}/\text{dia}$ .

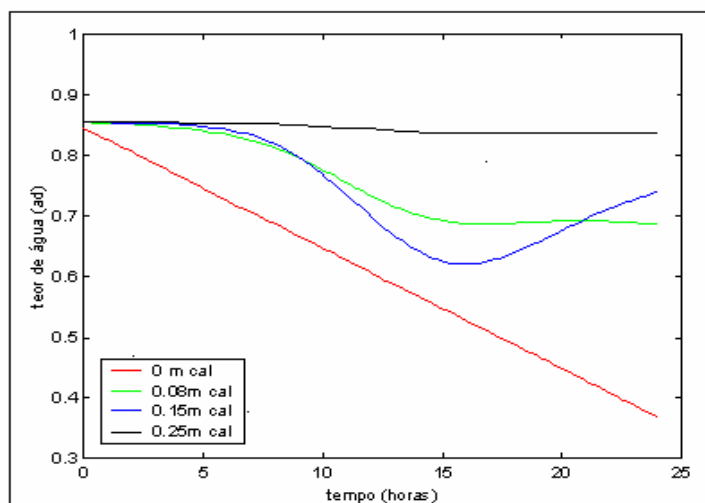


Figura 5.6 – Teor de água em diferentes profundidades com absorção variável no tempo  $t = 24$  h;  $q$  variável, eq. (4.11)  $\text{m}^3/\text{h}$ ;  $Ko = 0,000004 \text{ m}/\text{dia}$ .  $E = -0,0201 t + 0,8448 \text{ m}^3/\text{h}$ ;

O gráfico (5.6) simula o que acontece com o sistema radicular, onde a oscilação, demonstra que tem radiação e absorção de água pela planta. Isto está expresso pela linha azul no gráfico na profundidade  $z = 0,15 \text{ m}$ , onde neste ponto ocorre a maior concentração de raízes e variação significativa de teor de água. Na figura anterior isso não ocorre porque as raízes permanecerão absorvendo água com a mesma intensidade ao passar das horas.

#### 5.4. Fluxo de absorção limitado pela disponibilidade de água no solo

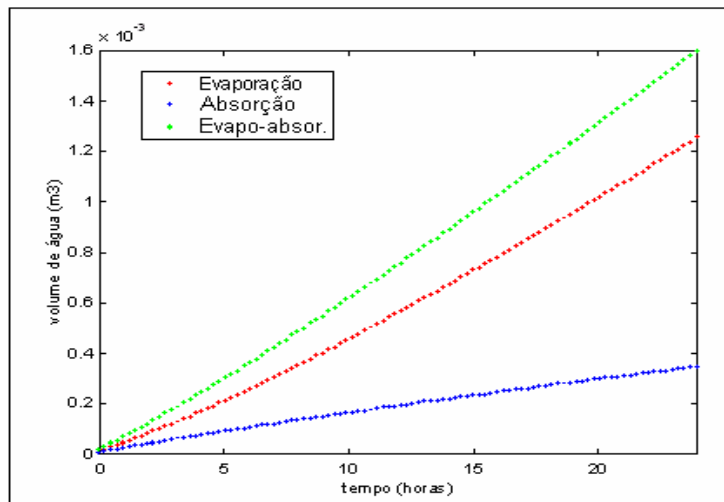


Figura 5.7 – Variação do volume de água evaporada e absorvida limitada pela oferta de água do solo, para  $t = 24 \text{ h}$ ;  $q = 0,0116 \text{ m}^3/\text{h}$ ;  $Ko = 0,000004 \text{ m/dia}$ ;  $E = -0,0201 t + 0,8448 \text{ m}^3/\text{h}$ ;

A limitação da disponibilidade de água pode ser observada quando é comparada a absorção nas Figuras (5.3) e (5.7). Com a limitação, a absorção diminuiu ligeiramente de  $0,00050 \text{ m}^3$  para  $0,00038 \text{ m}^3$  em  $24 \text{ h}$ , aproximadamente, mesmo mantendo a tendência linear. O efeito da limitação também pode ser observado comparando a distribuição do teor de água apresentado pelas Figuras (5.5) e (5.8). Com absorção constante o teor de água é regularmente decrescente para todas as profundidades. Com absorção limitada continua decrescente, porém apresenta irregularidades, como a interseção de curvas de alturas diferentes. Ou seja, a forte absorção dos primeiros instantes na altura de  $0,15 \text{ m}$  diminui depois de  $5 \text{ h}$  pela redução do teor de água, fazendo com que o teor de água do solo reduza a taxa de decrescimento. Esta taxa deve tender a zero quando o tempo tende a infinito e/ou quando a diferença do teor de água no solo se aproxima do teor de água residual.

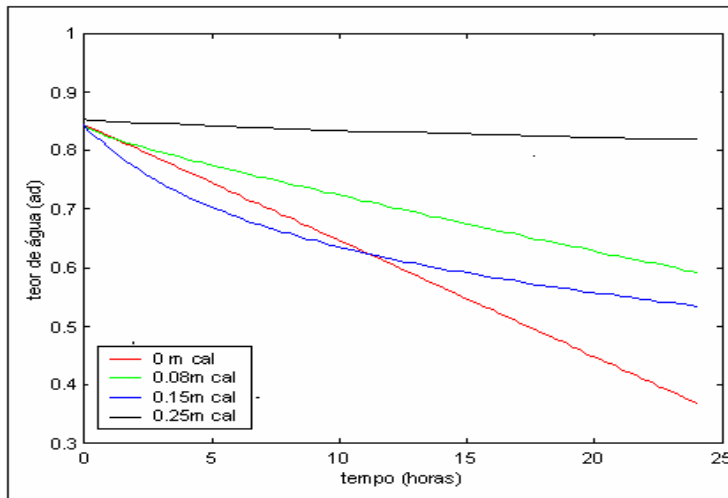


Figura 5.8 – Teor de água em diferentes profundidades com absorção limitada pela oferta de água no solo. Para  $t = 24 \text{ h}$ ;  $q=0,0116\text{m}^3/\text{h}$ ;  $E=-0,0201 t + 0,8448\text{m}^3/\text{h}$ ;  $Ko=0,000004 \text{ m/dia}$ .

### 5.5. Fluxo variável no tempo e limitado pela disponibilidade de água do solo

A comparação da absorção variável no tempo e limitada pela disponibilidade de água do solo apresentou somente diferenças quantitativas, como se pode observar nas Figuras (5.4) e (5.9) com relação ao volume de água e nas Figuras (5.6) e (5.10) com relação à distribuição do teor de água.

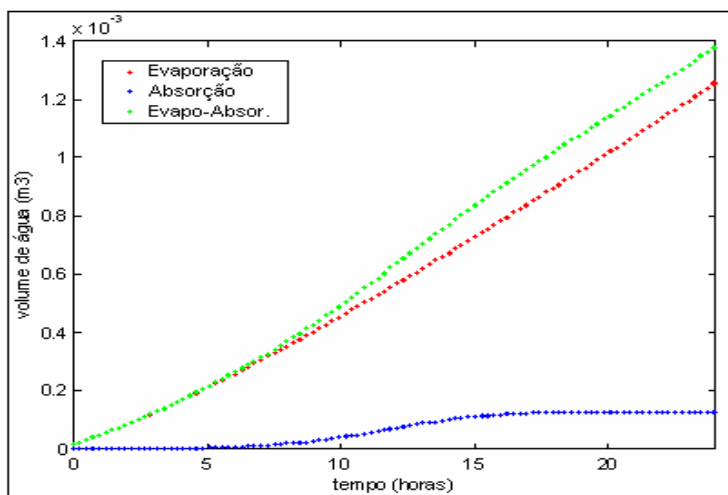


Figura 5.9 – Variação do volume de água evaporada, absorção variável no tempo e limitada pela oferta de água do solo, para  $t = 24 \text{ h}$ ;  $Ko=0,000004 \text{ m/dia}$ ;  $E=-0,0201 t + 0,8448\text{m}^3/\text{h}$ .



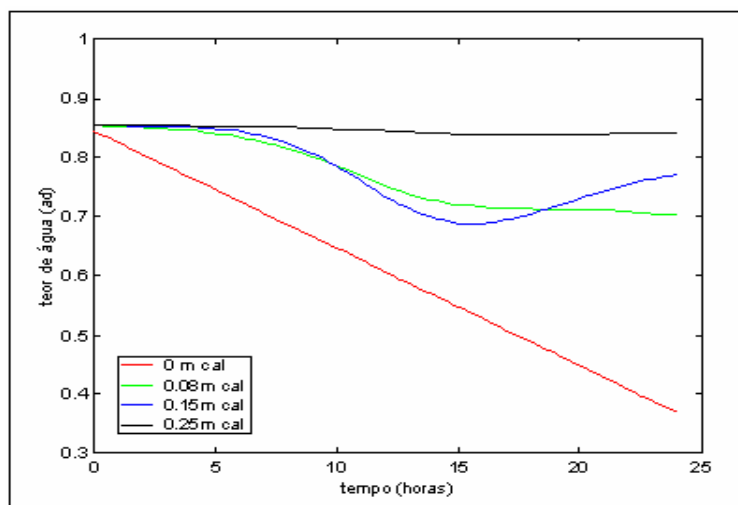


Figura 5.10 – Teor de água em diferentes profundidades com absorção variável no tempo e limitada pela oferta de água no solo.  $t = 24 h$ ;  $K_0 = 0,000004 m/dia$ ;  $E = -0,0201 t + 0,8448 m^3/h$ ;

A oscilação na figura (5.10) significa que na região  $z = 0, 15m$  (linha azul) é onde se encontra o maior número de raízes absorvendo água.

Dessa forma, ambos os fenômenos que acontecem na natureza são importantes para a planta, mas apresentam processos diferentes de envio de água para atmosfera. Na evaporação ocorre a perda indesejável de água, no processo pelo qual a água se transforma do estado líquido para o de vapor. Ou então, através da absorção, que ao ser absorvida pelos vegetais é evaporada a partir de suas folhas.

## 5.6 Absorção de água pelas raízes (Problema inverso)

A Figura (5.11) apresenta os dados experimentais fictícios e os resultados do problema direto, com absorção constante ótima calculada pelo problema inverso. A concordância para  $0 m$  era esperada porque o modelo de evaporação foi implantado em função do teor de água desta posição. Para  $0,25 m$  existe boa concordância devido à tendência uniforme dos dados e porque não há variação significativa do teor de água. Para as demais profundidades observa-se que os resultados obtidos são apenas razoáveis. Porém,

deve-se observar que os dados experimentais são fictícios e que tem, neste trabalho, somente função ilustrativa e de teste da convergência do algoritmo do problema inverso.

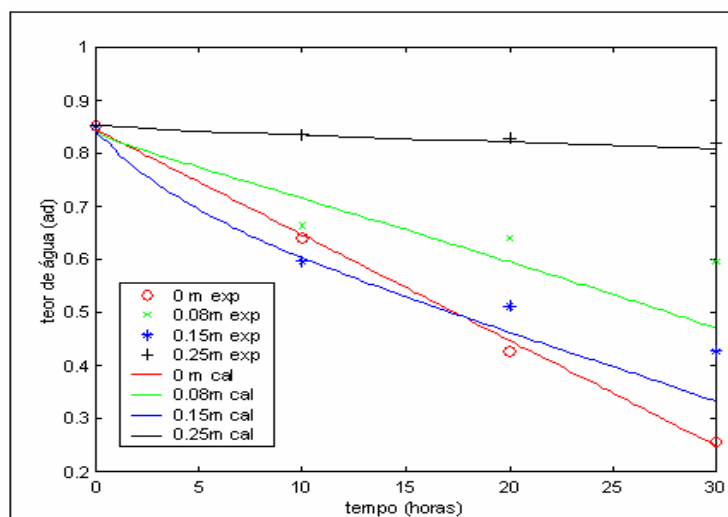


Figura 5.11 - Simulação dos dados experimentais e calculados para  $t=30h$ ;  $q=0,0116m^3/h$ ;  $Ko=0,000004 m/dia$ ;  $E=-0,0201 t + 0,8448m^3/h$ .

A Figura (5.12) apresenta os resultados do problema inverso para os mesmo dados experimentais fictícios da Figura (5.11), porém com a hipótese de absorção variável no tempo e limitada pela disponibilidade de água no solo. O problema inverso consiste, neste caso, do ajuste do coeficiente  $A$  da equação (4.11), minimizando a diferença entre o teor de água calculado e os dados experimentais. A Tabela (5.1) apresenta os valores de  $A$  para diferentes divisões do intervalo de busca do Método de Procura em Rede, sendo que o valor do coeficiente procurado converge para  $0,065 (m^3/h)$ , onde o coeficiente de correlação é tanto melhor quanto mais próximo de 1. Neste caso, o coeficiente de correlação máximo seguiu essa tendência, foi de  $0,6929$ , o que confirma a eficiência do algoritmo.

Tabela 5.1 – Análise da convergência do Problema Inverso

n	A	R <sup>2</sup>
3	0,0717	0,6874
10	0,0680	0,6920
13	0,0646	0,6928
17	0,0641	0,6927
22	0,0650	0,6929
31	0,0652	0,6929
41	0,0659	0,6929
52	0,06567	0,6929
59	0,06576	0,6929

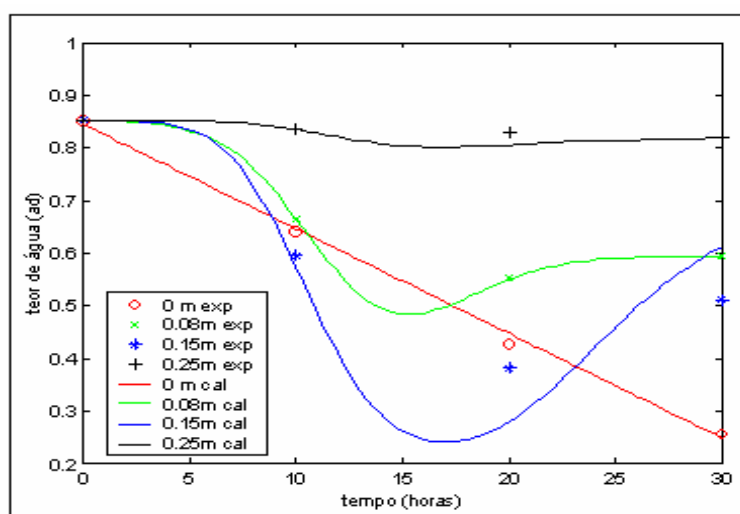


Figura 5.12 – Dados experimentais e calculados.  $t = 30 h$ ;  
 $E = -0,0201 t + 0,8448 m^3/h$ ;  $Ko = 0,000004 m/dia$ .

Com a figura (5.12) é possível visualizar a disponibilidade de água no solo. A linha azul significa que na região  $z = 0,15m$  há oscilação do teor de água com o passar das horas por causa da grande concentração de raízes absorvendo esta água.

### 5.7. Análise para diferentes dados experimentais

Foi simulada a absorção de água pelas raízes utilizando uma amostra de sistema radicular planejado da espécie Louro pardo (*Cordia trichotoma*), sacrificada com 21 dias da dissertação de FAGUNDES (2006) que se encontra em anexo 4, para verificar se o

modelo proposto por esta é significativo. FAGUNDES realizou a parte experimental monitorando o crescimento do sistema radicular e posteriormente sacrificou as plantas para realizar a contagem de ápices.

Foram mapeadas as posições dos ápices da raiz e aplicado no programa computacional para verificar a distribuição da água em função do tempo e da profundidade. A Figura (5.13) que apresenta o mesmo fluxo de absorção da figura (5.2),  $q=0,0116m^3/h$  e em relação ao tempo, para um intervalo de tempo de 30h teve seu comportamento modificado, demonstrando que a localização dos ápices foi determinante para que ocorresse redução do teor de água na região.

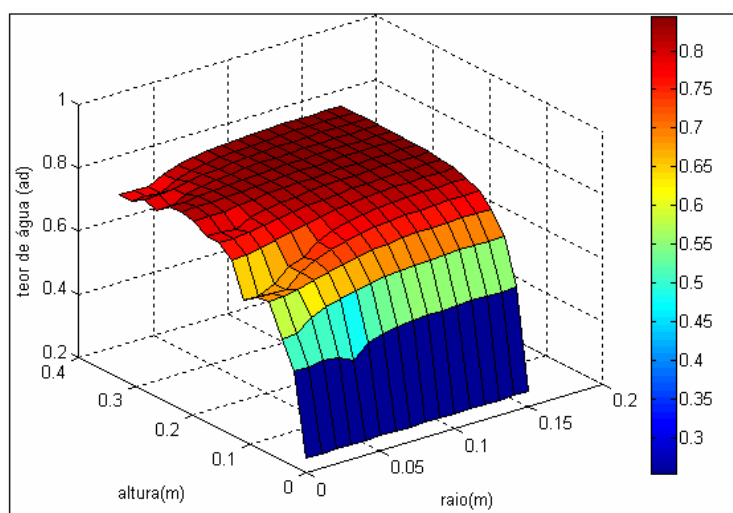


Figura 5.13 – Simulação do teor de água do solo para  $t=30h$ ;  $E=-0,0201 t + 0,8448m^3/h$ ;  $q=0,0116 m^3/h$ ;  $Ko=0,000004 m/dia$ . (FAGUNDES, 2006).

## 6. CONCLUSÕES

Sobre a descrição da tendência dos dados experimentais e o cálculo da absorção de água pelas raízes.

1. O modelo descreve as variações do teor de água no espaço e tempo, é sensível às variações dos parâmetros, às condições de fronteira e às características do sistema radicular, apresentando resultados esperados pela lógica dos fenômenos envolvidos. Os resultados do problema inverso mostraram que o algoritmo é convergente e que calcula com eficiência o volume de água absorvida pelas raízes para os casos testados.
2. Este trabalho é exclusivamente para testar o programa matemático. Tem o intuito de validar o modelo, o que possivelmente poderá servir de base para trabalhos futuros, onde poderão realizar experimentos e realizar a comparação dos dados experimentais e calculados.
3. A dissertação foi fundamentada baseada numa seqüência de dissertações realizadas pelo Mestrado em Modelagem Matemática da Unijuí, com enfoque principal, a pesquisa de FAGUNDES (2006) sobre o teor de água retirado pela raiz da planta no solo, a qual realizou experimentos em laboratório para concluir sua pesquisa. Diferente desta, que apresenta apenas resultados calculados.
4. Provavelmente a hipótese de absorção de água variável no dia é mais adequada para descrever dados reais, quando existe água em abundância no solo.
5. É possível que a hipótese de absorção variável no dia e com limitação da água disponível é mais adequada para descrever dados reais, quando existe limitação de água no solo.

6. As simulações feitas mostraram a ação de absorção de água pela raiz. Para cada intervalo de tempo, nos pontos onde havia presença de raízes, o teor de água diminuiu, o qual demonstra o poder de sucção do sistema radicular no solo diante da água.
7. As simulações feitas com os dados experimentais de FAGUNDES (2006) também demonstraram que o programa computacional converge, desde que esteja nos intervalos estimados.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AWAD, M.; CASTRO, P. R. DE C. *Introdução à Fisiologia Vegetal*. São Paulo: Nobel, 1983.
- BERLATO, M.A.; MOLINA, L. C. B. *Evaporação e evapotranspiração*. Porto Alegre: IPAGRO, 95p (IPAGRO. Boletim Técnico, 7), 1981.
- BOAST, C.W., ROBERTSON, T.M. A micro-lysimeter method for determining evaporation from bare soil: description and laboratory evaluation. *Soil sci. Soc. Am. J.*, Madison, V.46, p.689-696, 1982.
- BRUGGE and THORNLEY JHM. A growth model of root mass and vertical distribution, dependent on carbon substrate from photosynthesis and with non-limiting soil conditions. *Anal. of Botany*. 55: 563-577, 1985.
- BULIGON, S.L. *Modelagem matemática do movimento da água em solos saturados e não saturado*. Dissertação de Mestrado, Ijuí, 2005.
- CHEROBINI, A. *Modelagem e simulação da massa de serapilheira durante o crescimento de espécies arbóreas*. Dissertação de Mestrado, Ijuí, 2005.
- COELHO, E. F.. *Modelo de distribuição de água e de potencial matricial no solo sob gotejamento com extração de água por raízes*. Brasília, v 34. p. 225-234. n°2, 1999.
- CRUZ, A. C. R.; LIBARDI, P. L.; CARVALHO, L. A.; ROCHA, G. C. *Balanço de água no volume de solo explorado pelo sistema radicular de uma planta de citros*. R. Brás. Ci. Solo. Campinas, v.29, p.1-10, n°1, 2005.
- ESAU, K. *Anatomia das plantas com sementes*. ESAU, K., trad. por Berta Lange de Morretes. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- FAGUNDES, M. C. *Modelagem Matemática do crescimento e absorção de água do solo por sistemas radicais de espécies arbóreas*. Dissertação de Mestrado, 2006.
- FERREIRA, M., N., L. *Distribuição Radicular e Consumo de Água de Goiabeira (Psidium guajava L.) irrigada por micro aspersão em Petrolina – PE*. Tese (Doutorado). Piracicaba, 2004.
- FERRI, M. G. *Fisiologia Vegetal 2*. São Paulo: 2° ed. Revista e atualizada, EPU, 1979-1986.
- FITTER, A. H., STICKLAND, T. Architectural analysis of plant root systems: Studies plants under field conditions. *New Phytol*, p. 143-248, 1992.
- GIACOMINI, MÔNICA, *Análise de modelos matemáticos de decomposição da serapilheira Influência da Temperatura no Fator de Decomposição da Serapilheira*. Dissertação de Mestrado, Ijuí, 2006.
- HAYHOE H. Analysis of a model for plant root growth and an application to plant soil-water root system. *Plant and Soil* 131: 334-343, 1981.

- HILLEL, D. *Soil and water: Physical principles and processes*. New York: Academic Press, 1980.
- HOPKINS, W. G. *Introduction to Plant. Physiology*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- JONG VAN LIER, Q.; LIBARDI, P., L. Variabilidade dos parâmetros da equação que relaciona a condutividade hidráulica com a umidade do solo no método do perfil instantâneo. R. Brás. Ci Solo. Campinas, v.23, p. 1005-1014, n° 2 , 1999.
- JURY, W.; GARDNER, W. R.; Gardner, W. H. *Soil physics*. New York, 5ª ed. John Wiley & Sons, 328p. 1991.
- KANEMASU, E.T., Stone, L.R., POWERS, W.L. Evapotranspiration model tested for soybean and sorghum. *Agron. J.*, Madson, V.68, p.569-572, 1976.
- KLOCKE, D.L., MARTIN, D.L., TODD, R.W. et al. Evaporation measurements and predictions from soils under crop canopies. *Trans. ASAE*, St. Joseph, V.33, n.5, p.1590-1596, 1990.
- LIBARDI, P.L. *Dinâmica da água no solo*. Piracicaba: P. L. Libardi, 497p, Cap. 7: Movimento da água no solo, 1995.
- LIBARDI, P.L. *Dinâmica da água no solo*. 2ª ed. Piracicaba, 509p, 1999.
- MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. Rio de Janeiro, Livros Técnicos Científicos, 1995
- MANSUR, R. J. C. N. & BARBOSA, D. C. A. *Comportamento fisiológico em plantas jovens de quatro espécies lenhosas da caatinga submetidas a dois ciclos de estresse hídrico*. *Phyton* 68:97-106, 2000.
- MENEGAIS, D. A. F. N. *Modelagem matemática do movimento da água e do cálcio em solos não saturados*. Dissertação de Mestrado, Ijuí, 2004.
- MUALLEN, Y. *A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media*. *Water Resour. Res.*; Washington v. 12, p. 513-522, 1976.
- OZISIK, M., N.; Orlande, H. R. B. *Inverse heat transfer: Fundamentals and applications*. New York: Taylor Francis, 2000.
- PAGE, E., GERWITZ, A. Mathematical models based on diffusion equations, to describe root systems of isolated plants, row crops and swards. *Plant and Soil*, Dordrecht, v. 41p, 243-254, 1974.
- PAGES, L.; JORDAN M; PICARD, D. A simulation model of the three-dimensional architecture of the maize root system. *Plant and Soil*, Dordrecht, v. 119, p. 147-154, 1989.
- PHILIP, J.R. Evaporation, and moisture and heat fields in the soil. *J. Meteorol.*; Washington, v.14, p.354-366, 1957.
- PRIESTLEY, C.H.B., TAYLOR, R.J. On the assessment of surface heat flux and evaporation using large-scale parameters. *Mon. Weather Review*, V.100, p.81-92, 1972.



- REICHARDT, K., *Processos de transferência no sistema solo-planta-atmosfera*. 4. ed. Campinas: Fundação Cargill, 445p, 1985.
- REICHARDT, K. *A água em sistemas agrícolas*. São Paulo: Editora Manole LTDA., 1990.
- REICHARDT, K. *Solo, planta e atmosfera: conceito, processos e aplicações*. São Paulo: Manole LTDA, 2004.
- RITCHIE, J.T. Model for predicting evaporation from a row crop with an incomplete cover. *Water Resources Research*, v.8, p.1204-1213, 1972.
- RITCHIE, J.T.; JOHNSON, B.S. Soil and plant factors affecting evaporation. In: STEWART, B.A.; NIELSEN, D.R.(Ed). *Irrigation of agricultural crops*, Am. Soc. Agron. 1990a (Agronomy Series 30), p.363, 390.
- RODRIGUES, L.N., MANTOVANI, E.C., RAMOS, M.M. et al. O modelo de Ritchie na determinação da evapotranspiração do feijoeiro (*Phaseolus vulgaris*, L.) irrigado. *Revista Ceres*, Viçosa, v.44, n.252, p.191-204, 1997.
- ROSE, D. A . The description of the growth of root systems. *Plant and Soil*, p. 405-415, 1983
- SHAWCROFT, R.W., GARDNER, H.R. Direct evaporation from soil under a row crop canopy. *Agric. Meteorol*, v.28, p.229-238, 1983.
- SMITH, G. D. *Numerical solution of partial differential equations: Finite Difference Methods*. 3ª ed. Clarendon Press Oxford, New York, 1985.
- TAIZ, L. E. *Fisiologia Vegetal*. Taiz, L. E. trad. por Santarém...[et al], 3ª ed. – Porto Alegre: Artmed, 2004.
- TANER, C.R., JURY, W.A. Estimating evaporation and transpiration from a row crop during incomplete cover. *Agron. J.*, Madison, v.68, p.239-243, 1976.
- VASCONCELOS, A. C. M.; CASAGRANDE, A. A.; PERECIN, D.; JORGE, L. A. C.; LANDELL, A. *Crescimento do sistema radicular da cana-de-açúcar por diferentes métodos*. R. Bras. Ci. Solo. Campinas, São Paulo, v.27, p.253-260, n° 5, 2003.
- VAN GENUCHTEN, M. *A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils*. Soil Science Society of America Journal, Madison, v.44, n.5, p.892-898, Sept/Oct. 1980.
- VIONE, M. TADEU, *Modelagem Matemática da evaporação da água no solo*. Dissertação de Mestrado, Ijuí, 2007.
- WINTER, E. J. *A água, solo e a planta*/ E.J. Winter, trad. por Klaus Reichardt e Paulo L. Libardi, 2ª ed. São Paulo: Nobel, 1984.

## **ANEXOS**

## ANEXO 1

A figura a seguir apresenta a localização dos ápices determinado artificialmente para a simulação do programa computacional como se fosse uma planta real.

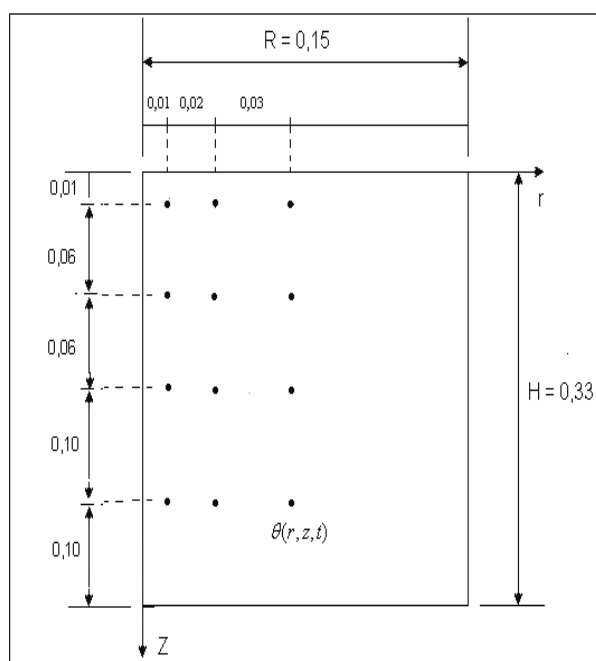


Figura 7.1. Pontos de medição do teor de água

## ANEXO 2

A seqüência de gráficos a seguir, apresenta a distribuição de água no solo em função do raio, altura e tempo para o fluxo de absorção  $q=0,0116$ . A idéia é mostrar a redução do teor de água como o aumento das horas. Para o tempo inicial o teor de água era elevado em todo o cilindro. No decorrer das horas, quanto mais próximo da superfície maior a evaporação de água.

$t = 6 h$

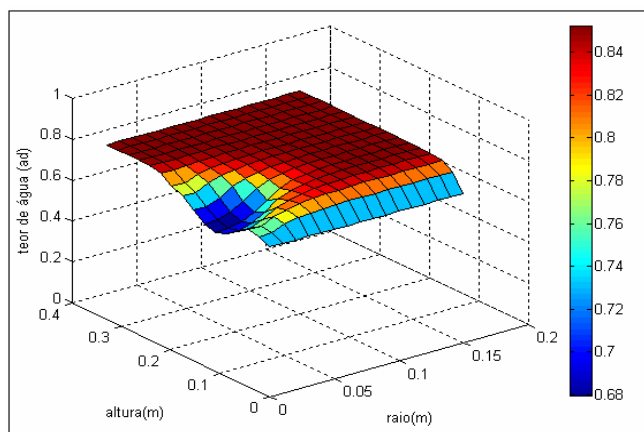


Figura 1 – Teor de água do solo.

$t = 9h$

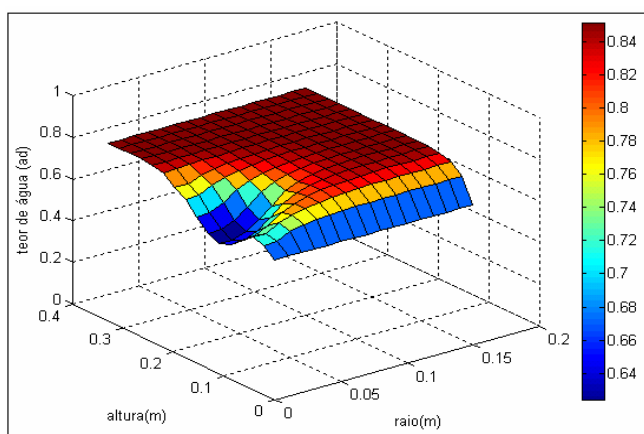


Figura 2 - Teor de água do solo.

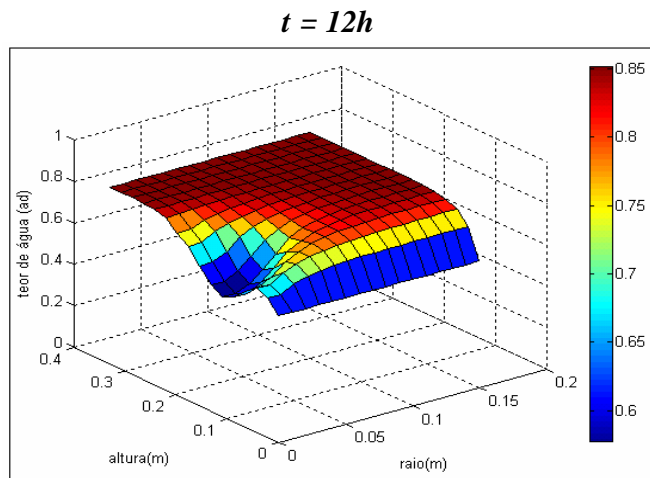


Figura 3 – Teor de água do solo.

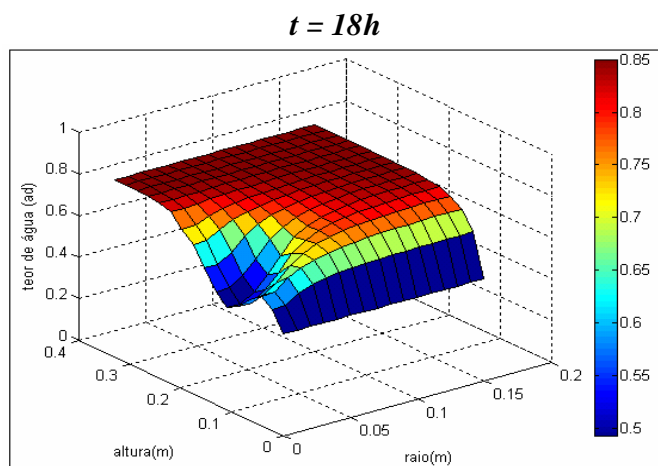


Figura 4 – Teor de água do solo.

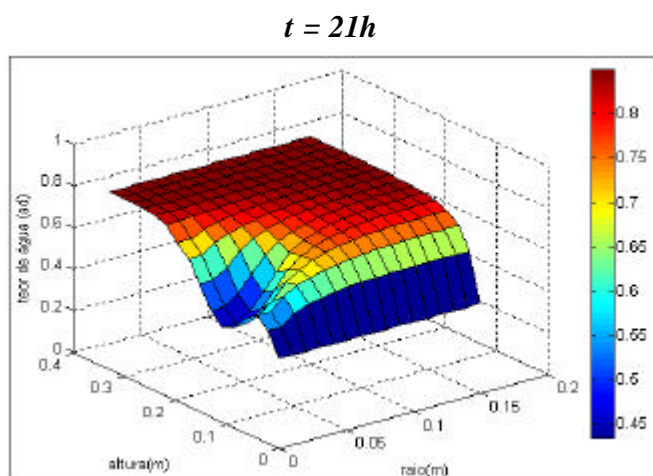


Figura 5 – Teor de água do solo.

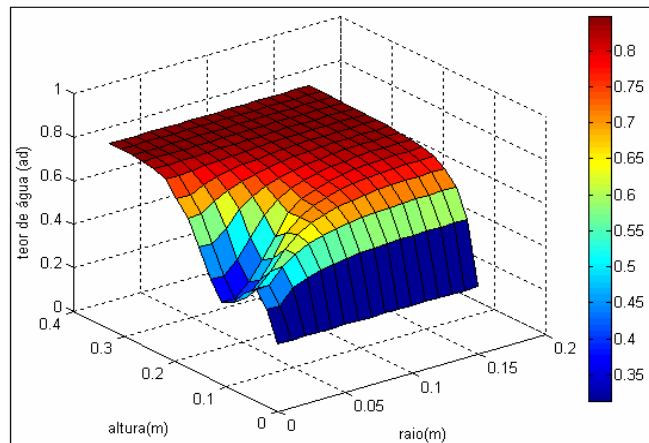
$t = 27h$ 

Figura 6 – Teor de água do solo.

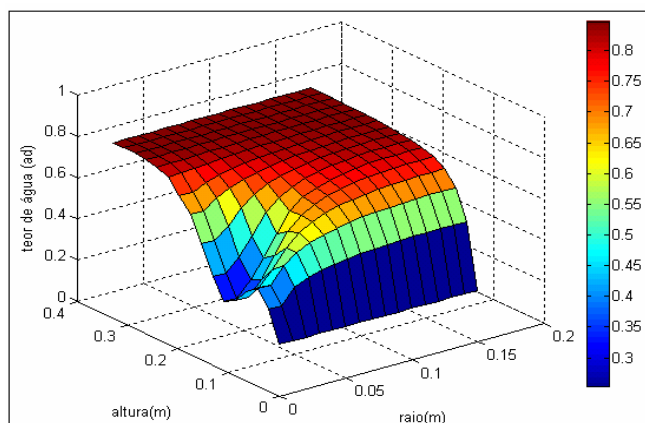
 $t = 30h$ 

Figura 7 – Teor de água do solo.

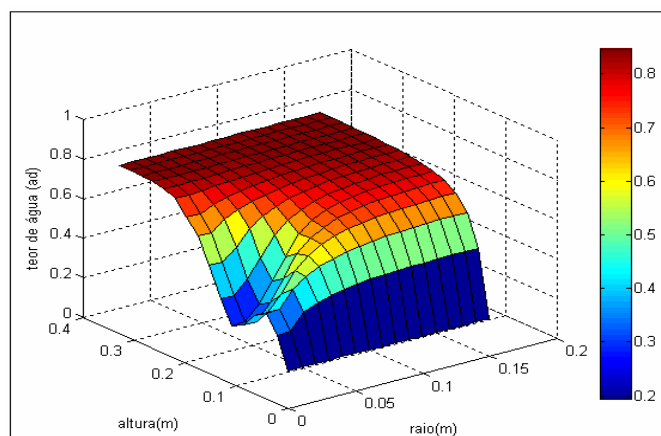
 $t = 33h$ 

Figura 8 – Teor de água do solo.

$t = 36h$

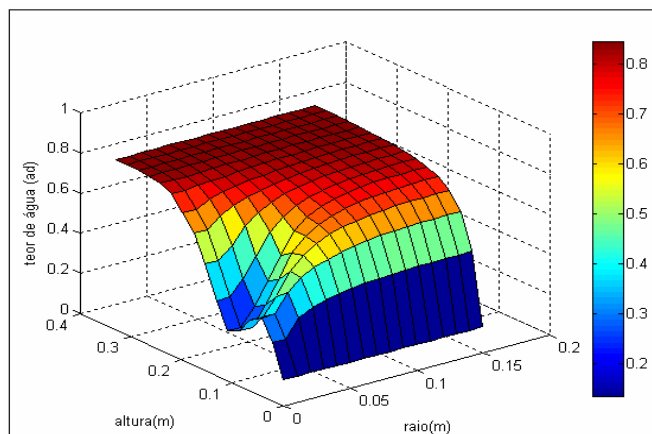


Figura 9 – Teor de água do solo.

$t = 42h$

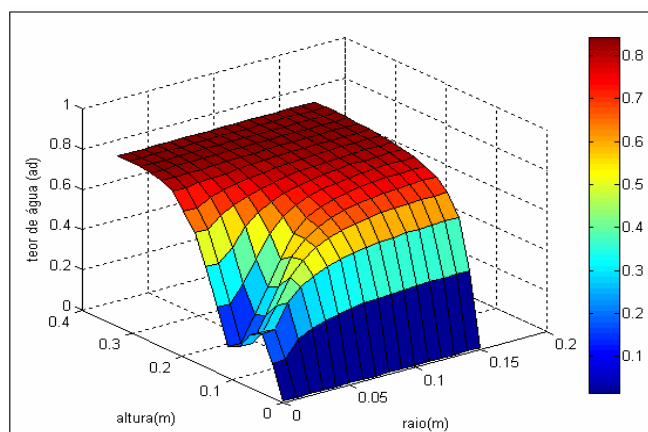


Figura 10 – Teor de água do solo.

$t = 45h$

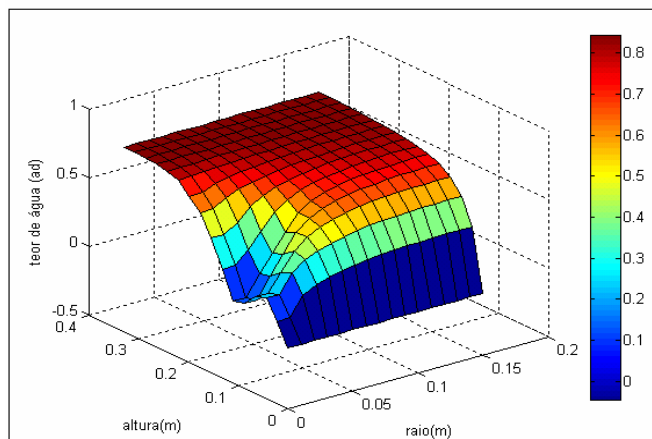


Figura 11 – Teor de água do solo.

## ANEXO 3

A seguir, apresenta-se algumas figuras para o fluxo variável, utilizando a localização dos ápices de uma planta da espécie Louro pardo (*Cordia trichotomaa*) da dissertação de Fagundes (2006).

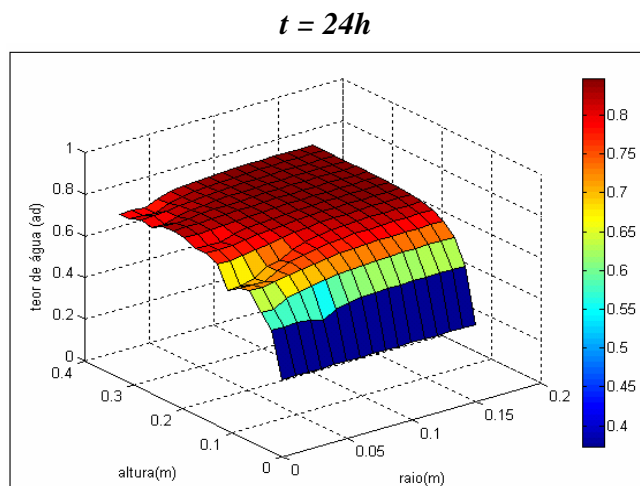


Figura 1 - Teor de água do solo com dados experimentais de Fagundes (2006).

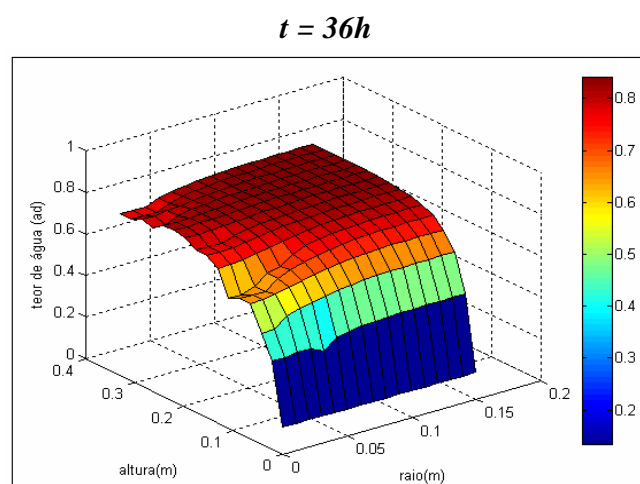


Figura 2 - Teor de água do solo com dados experimentais de Fagundes (2006).



#### ANEXO 4

Imagem da raiz obtida por scanner de 21 dias de vida. Espécie Louro pardo (*Cordia trichotoma*) da dissertação de Fagundes (2006). Os pontos indicam onde ocorreu a localização dos ápices e consequentemente a medição do teor de água no solo.



Figura 1 – Densidade de ápices da raiz, Fagundes (2006).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)