

**Universidade Regional do Noroeste do**

**Estado do Rio Grande do Sul**

**Departamento de Física, Estatística e  
Matemática**

**Departamento de Tecnologia**

**Mestrado em Modelagem Matemática**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Simulação Tridimensional do Fluxo de Ar  
em Armazéns Graneleiros**

**por**

**MANUEL OSÓRIO BINELO**

**Ijuí (RS), Novembro de 2007**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**Universidade Regional do Noroeste do  
Estado do Rio Grande do Sul**

**MANUEL OSÓRIO BINELO**

**Simulação Tridimensional do Fluxo de Ar  
em Armazéns Graneleiros**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática – Área de Concentração em Modelagem Matemática da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Modelagem Matemática.

**Área de Concentração:** Modelagem Matemática

**Orientador:** *Prof. Dr. Oleg Khatchatourian*

**Ijuí (RS), Novembro de 2007**

**Universidade Regional do Noroeste do  
Estado do Rio Grande do Sul**

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a dissertação  
intitulada

**Simulação Tridimensional do Fluxo de Ar  
em Armazéns Graneleiros**

por

Manuel Osório Binelo

**Como requisito para a obtenção do grau de Mestre em  
Modelagem Matemática**

**Comissão Examinadora**

---

Prof. *Dr.* Oleg Khatchatourian (Orientador)

---

Prof. *Dr.* Benedito Silva Neto

---

Prof. *Dra.* Fabiane de Oliveira

---

*Dr.* Fernando Pedro Reis Brod

Ijuí (RS), Novembro de 2007

A minha família,  
pelo apoio e  
compreensão.

## **Agradecimentos**

A Deus pela imensa misericórdia com que rege minha vida. A minha família pelo apoio e compreensão. Ao meu orientador Prof. Dr. Oleg Khatchatourian por todo apoio e incentivo. A todos os professores e funcionários do mestrado e colegas de curso.

É conveniente lembrar a frase de Sir Isaac Newton: "*We see so far because we stand on the shoulders of giants*", e agradecer a todos que já contribuíram para o desenvolvimento da mecânica dos fluidos, da modelagem matemática e das ciências. Os ombros de gigantes não são apenas os dos grandes homens da ciência mas também da família, amigos, ou ainda do próximo. Ciência, assim como a vida, é uma arte que só se sustenta na solidariedade.

“Muitos que merecem morrer vivem, muitos que merecem viver morrem, você pode dar-lhes vida ? Não seja tão ávido para condenar a morte em nome da justiça, nem mesmo os sábios conseguem ver dos dois lados.”

J. R.R. Tolkien

---

## Sumário

Agradecimentos.....	5
Sumário.....	7
Lista de Símbolos.....	8
Lista de Figuras.....	10
Resumo.....	11
Abstract.....	12
Introdução.....	13
Capítulo 1 – Revisão Bibliográfica.....	15
1.1 – Armazenagem.....	15
1.2 – A massa de Grãos.....	17
1.2.1 – Efeitos do aumento da temperatura e umidade.....	18
1.2.2 – Porosidade da massa de grãos.....	18
1.3 – Aeração... ..	19
1.3.1 – Efeitos da aeração na conservação do grão.....	20
1.3.2 – Sistemas de aeração.....	21
1.3.3 – Sistemas de termometria e controle de aeração.....	23
1.4 – Modelos matemáticos.....	24
1.5 – O problema.....	28
Capítulo 2 – Modelo Matemático.....	30
2.1 – Modelo matemático.....	30
2.2 – Critério de eficiência da aeração.....	35
2.3 – Método dos elementos finitos.....	37
Capítulo 3 – Programa e Ferramentas Computacionais.....	42
3.1 – Construção da geometria.....	42
3.2 – Geração da malha.....	48
3.2.1 – Tetgen.....	48
3.2.2 – Netgen.....	49
3.2.3 – Refinamento da malha de elementos finitos.....	49
3.2.4 – Refinamento local.....	50
3.2.5 – Refinamento local adaptativo.....	51
3.3 – Resolvedor do sistema.....	54
3.3.1 – Entrada da informação.....	55
3.3.2 – Altura da camada de produto.....	55
3.3.3 – Geração da matriz do sistema.....	58
3.4 – Pós processamento.....	58
Capítulo 4 – Simulações Numéricas.....	60
4.1 – Simulações numéricas e resultados.....	61
Conclusões.....	75
Referências Bibliográficas.....	76

### Lista de Símbolos

A, B, C : Constantes que dependem do tipo e condições do grão.

c(H) : Função de compactação

d : Diâmetro equivalente da partícula (m);

F : Teor de finos

FA : Densidade do fluxo de ar.

F<sub>M</sub> : Fator de fricção (adimensional);

gradP<sub>0</sub> : Gradiente de pressão sem compactação.

gradP<sub>H</sub> : Gradiente de pressão com compactação.

H : Altura da camada de grãos (m).

k : Coeficiente de permeabilidade

K<sub>M</sub> : Coeficiente que depende do produto;

L(x) : Comprimento da trajetória que passa no ponto x

m : metro

P : Pressão do ar em Pascal

Q : Vazão volumétrica por unidade de área (m<sup>3</sup>/s.m<sup>2</sup>)

Re = Número de Reynolds

S : Seção transversal do silo

U : Argumento intermediário

V : Velocidade do ar (m/s);

W : Vetor de velocidade (m/s)

ΔP : Variação da pressão estática com a profundidade (mm CA)

## Lista de Símbolos

---

- $\epsilon$  : Porosidade (decimal);
- $\rho$  : Massa específica do ar ( $\text{kg/m}^3$ ); Densidade do produto
- $q$  :Vazão específica local

## Lista de Figuras

Figura 1.1: Corte frontal de armazém fundo V.....	16
Figura 1.2: Corte frontal de armazém fundo semi-V.....	17
Figura 1.3: Corte frontal de armazém fundo V.....	17
Figura 1.4: Esquema de aeração em armazém horizontal.....	20
Figura 2.1: Curva do modelo e dados experimentais.....	34
Figura 2.2: Vazão específica local.....	37
Figura 3.1: Geração de geometria com Blender 3D.....	45
Figura 3.2: Programa para geração de geometria de armazém.....	46
Figura 3.3: Geometria do armazém.....	47
Figura 3.4: Subdivisão do tetraedro.....	52
Figura 3.5: Casos especiais da subdivisão do tetraedro.....	53
Figura 3.6: Exemplo de malha refinada adaptativamente.....	54
Figura 3.7: Altura da camada de produto para ponto P.....	56
Figura 3.8: Mapa de alturas e altura da camada de produto.....	57
Figura 3.9: Interpolação bilinear para altura da camada.....	57
Figura 4.1: Esquema do armazém simulado.....	61
Figura 4.2: Wireframe da superfície da malha de tetraedros.....	62
Figura 4.3: Superfícies isobárica em seção do armazém.....	62
Figura 4.4: Linhas de fluxos em uma das simetrias do armazém.....	63
Figura 4.5: Superfícies isobáricas e linhas de corrente .....	64
Figura 4.6: Superfícies isóbaras e linhas de corrente na cabeceira do armazém.....	65
Figura 4.7: Comparação dos três esquemas de aeração simulados (Pressão e velocidade).....	66
Figura 4.8: Comparação dos três esquemas simulados (Pressão e Qlocal).....	67
Figura 4.9: Domínios com baixa intensidade de ventilação.....	68
Figura 4.10: Domínios com intensidade excessiva de ventilação.....	69
Figura 4.11: Distribuição da vazão específica local (uma entrada)..	70
Figura 4.12: Distribuição da vazão específica local (três entradas).	70
Figura 4.13: Distribuição da vazão específica local (Diferentes pressões).....	71
Figura 4.14: Distribuição da vazão específica local resultante com o funcionamento não simultâneo das entradas.....	72
Figura 4.15: Domínios com risco na aeração.....	73

## ***Resumo***

Neste trabalho, o modelo matemático proposto por Khatchatourian e Savicki (2004) para simulação do fluxo de ar bidimensional em armazéns graneleiros foi expandido para três dimensões. Foi também desenvolvido um programa para aplicar o método dos elementos finitos ao problema. O programa, escrito em ANSI C++, é multi-plataforma podendo ser compilado em Cygwin em Windows, GCC em plataformas POSIX, ou qualquer outro compilador compatível com ANSI C++.

Para a construção da geometria tridimensional e geração da malha foram utilizados os programas livres Blender3d, Tetgen e Netgen. O programa resolvidor gera um sistema de equações algébricas lineares aplicando o método dos elementos finitos. Para resolver o sistema obtido foi utilizado o método de sobre-relaxação sucessiva. O programa executa três iterações aninhadas: 1) Calcular o fator de permeabilidade em cada ponto do domínio de integração, utilizando a distribuição de pressão calculada no passo anterior, 2) encontrar a pressão na entrada que satisfaça a vazão requerida do aerador, e 3) refinar adaptativamente a malha de acordo com a razão entre o tamanho do tetraedro e o gradiente de pressão.

Também foi utilizado no trabalho o critério para avaliar localmente a eficiência da aeração em sistemas de armazenagem criado por Khatchatourian e Binelo (2007) chamado de vazão específica local. Esse critério permite que seja avaliada a vazão específica em qualquer ponto do armazém. As simulações mostraram um bom desempenho do programa desenvolvido, que pode ser aplicado para otimizar a utilização e o projeto de armazéns e sistemas de aeração.

## ***Abstract***

In this work, the mathematical model created by Khatchatourian and Savicki (2004) for bidimensional airflow simulation in grain storage bins was expanded for tridimensional simulation. A software tool was also developed using finite element method for problem solving. The software, written in ANSI C++, is cross-platform and can be compiled in Cygwin on Windows, GCC on POSIX platforms, or any other ANSI C++ compatible compiler.

For 3D geometry construction and mesh generation, the free software Blender3d and Netgen are used. The solver software generates the system of linear algebraic equations applying the finite element method. The Successive Overrelaxation Method was used to obtain the system solution. Software executes three iterative processes: 1) calculate the permeability coefficient in each point of the integration domain, using the pressure distribution in the immediately previous iteration step, 2) search the system design point located in the performance curve of the aerator fan, and 3) adaptively refine the mesh according to the tetrahedron size per pressure gradient ratio.

This work had made use of the criterion to locally estimate the efficiency of complex aeration system in storage bins proposed by Khatchatourian and Binelo (2007) called local specific airflow rate. This criterion can be used to show the specific airflow rate at any point of the grain store. Using this criterion the aeration system efficiency of several seed storages were compared. The simulations had shown good performance of the developed software, which can be applied to the grain stores performance optimization and to lower the engineering costs of new grain stores projects.

### *Introdução*

O Brasil é um dos maiores produtores de grãos do mundo. Conforme o IBGE, a produção esperada para 2007 é de mais de cinquenta e oito milhões de toneladas de soja e mais de cinquenta e um milhões de toneladas de milho. Essa atividade de grande importância na economia brasileira necessita de uma grande operação de logística após a colheita. Fatores como matriz de transporte deficitária, estratégia de preço e demanda do mercado interno e externo, fazem com que seja necessário armazenar o produto por longos períodos, muitas vezes por mais de um ano.

A produção é armazenada em grandes armazéns verticais ou horizontais, os maiores podem ter milhares de metros cúbicos de capacidade. Para manter a qualidade do produto armazenado, o principal processo empregado é o de aeração. Esse processo consiste na passagem forçada de ar pela massa de grãos, feita através de ventiladores elétricos.

Como esse processo é caro, sua otimização é muito importante. Neste trabalho é desenvolvido um modelo matemático capaz de fazer a simulação tridimensional desse processo. Através da aplicação do

método dos elementos finitos foi também criado um programa de simulação onde o modelo matemático é aplicado.

No primeiro capítulo é feita uma revisão bibliográfica e o problema é apresentado. É descrito o processo de aeração e seu impacto no processo de armazenagem

No segundo capítulo é descrito o modelo matemático que foi baseado no modelo bidimensional apresentado por KHATCHATOURIAN e SAVICKI (2004) e expandido para três dimensões. Também é apresentada a aplicação do método dos elementos finitos para resolver o problema.

No terceiro capítulo são apresentadas as soluções encontradas em computação para a solução do problema, onde foi priorizada a utilização de ferramentas em *software* livre. Também é descrito o programa criado para aplicação do método dos elementos finitos e resolução do sistema.

No quarto capítulo são apresentadas simulações numéricas onde é possível avaliar diferentes configurações de aeração. É possível avaliar a capacidade do programa criado e a integração das ferramentas utilizadas.

Por fim os resultados são discutidos e as conclusões e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas.

## **CAPÍTULO 1**

### *Revisão Bibliográfica*

#### **1.1 Armazenagem**

O cultivo de grãos é de extrema importância para a alimentação humana, entre os principais grãos cultivados estão o arroz, o milho, a soja e o trigo. Após a colheita é necessário um imenso trabalho de logística. Questões como as flutuação de preço, demanda do mercado, deficiência na malha de transporte e exportação dos grãos, tornam a armazenagem da produção um ponto crítico nesse processo.

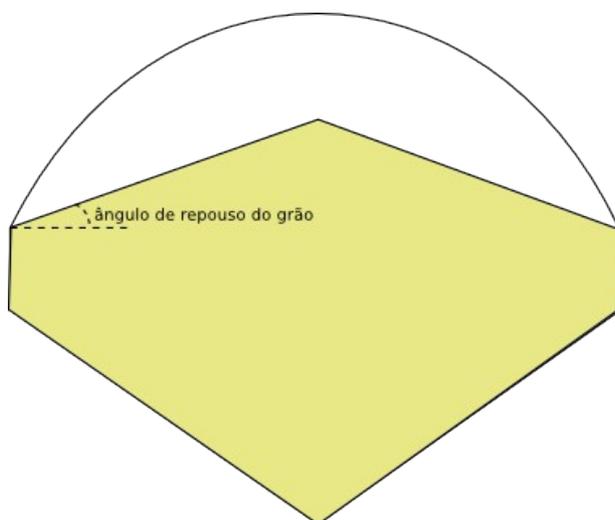
No Brasil, diferentemente de outros países, a armazenagem não acontece dentro das próprias propriedades produtivas. O processo de armazenagem pode acontecer em unidades mantidas por cooperativas de agricultores ou empresas especializadas nesse negócio. Esses fatores contribuem para que o grão seja armazenado a granel em grandes armazéns.

Antes do processo de armazenagem o grão sofre o processo de secagem onde sua umidade é reduzida, depois da secagem o grão pode ser armazenado em silos verticais ou armazéns horizontais.

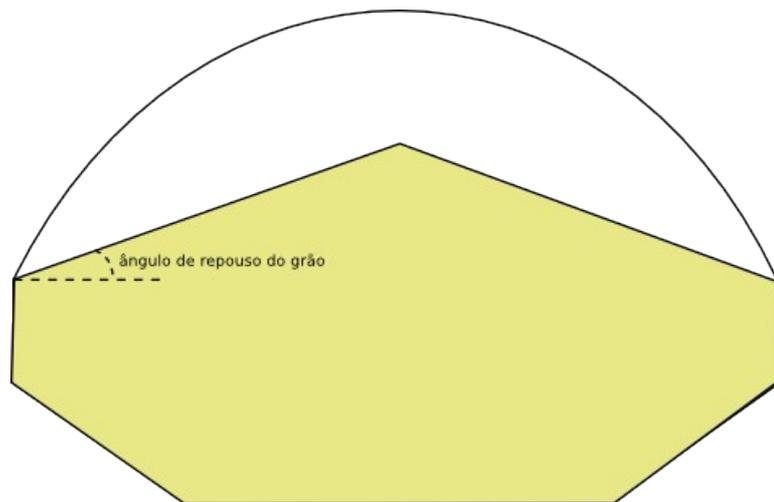
Os silos verticais possuem forma cilíndrica e são construídos de concreto ou aço. Possuem um custo um pouco maior que os armazéns horizontais mas em baterias de silos verticais é possível armazenar grãos de diferentes características separadamente.

Silos horizontais possuem um menor custo, se mal projetada a aeração nestes silos, que possuem grandes dimensões, podem surgir problemas durante a armazenagem. Geralmente parte do armazém fica abaixo da linha do solo, em formato v, semi-v, w, ou semi-w. Ainda que em menor grau, problemas de aeração também podem surgir em silos verticais. Armazéns horizontais possuem capacidade de dezoito a vinte e quatro mil metros cúbicos, já armazéns horizontais podem chegar a mais de cento e trinta mil metros cúbicos; de acordo com o fabricante de silos Kepler Weber.

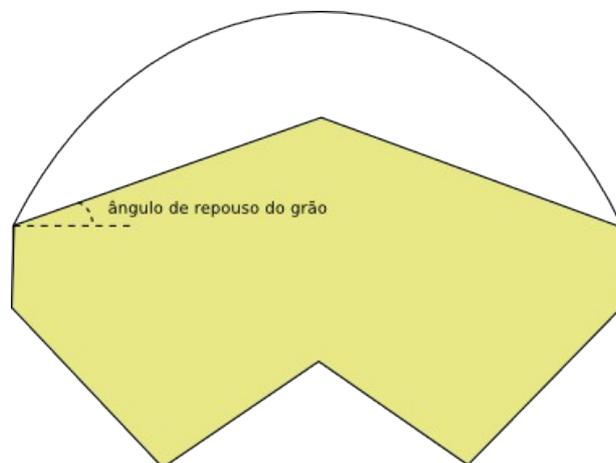
O programa desenvolvido pode simular aeração em qualquer geometria de silo ou armazém, mas devido ao fato de que esse processo é mais crítico em armazéns horizontais, as simulações nesse trabalho se concentram nesse tipo de armazenagem.



*Figura 1.1: Corte frontal de armazém fundo V*



*Figura 1.2: Corte frontal de armazém fundo semi-V*



*Figura 1.3: Corte frontal de armazém fundo V*

## **1.2 A massa de grãos**

A massa de grãos não é um massa estática e sem vida.

Uma massa de grãos é um sistema ecológico criado pelo homem. Nesse sistema os organismos vivos (componentes biológicos) e meio ambiente do interior da massa, onde há componentes que não

são organismos vivos (meio abiótico), interagem entre si. A deterioração dos grãos armazenados é resultante da interação entre variáveis físicas, químicas e biológicas. Nesse sistema ecológico, o principal organismo vivo é o grão, propriamente dito. Tanto o grão como a massa de grãos possuem atributos físicos e biológicos, alguns dos quais dependem principalmente do meio que os circundam. (PEREIRA 1995)

A massa de grãos é um meio poroso composto pelos próprios grãos e pelo ar intersticial. O grão é higroscópico, ou seja, possui a capacidade de entrar em equilíbrio de umidade com o ambiente circundante, quando o grão pode perder umidade para o ar ambiente ou absorver umidade do ar ambiente.

Outro fator importante são os gradientes de temperatura que causarão corrente convectivas do ar intersticial da massa. Essas correntes de ar vão propiciar também a migração de umidade dentro do silo. Durante os períodos frios a umidade migra do grão à temperatura maior, no centro do silo, para a superfície mais fria. Durante os períodos quentes a migração ocorre da superfície, mais quente, para centro e fundo do silo. O aumento da umidade no centro e fundo do silo é especialmente crítico para a conservação do grão.

### **1.2.1 Efeitos do aumento da temperatura e umidade**

O aumento de temperatura e umidade do grão possui um efeito negativo na sua conservação. O grão é um organismo vivo, e como tal, respira, o aumento da temperatura e umidade irá aumentar a atividade biológica. Durante a atividade biológica o grão consome sua própria massa. Outro problema do aumento da atividade biológica é a germinação.

Outro fenômeno impulsionado pelo aumento da temperatura e umidade que prejudica a qualidade do grão é o surgimento de fungos. Os fungos podem diminuir a capacidade de germinação do grão, além de produzir toxinas que podem tornar o produto impróprio para o

consumo. Também pode acontecer o surgimento de insetos. Os insetos irão danificar os grãos consumindo-os ou introduzindo larvas no seu interior ou aumentando a temperatura.

### **1.2.2 Porosidade da massa de grãos**

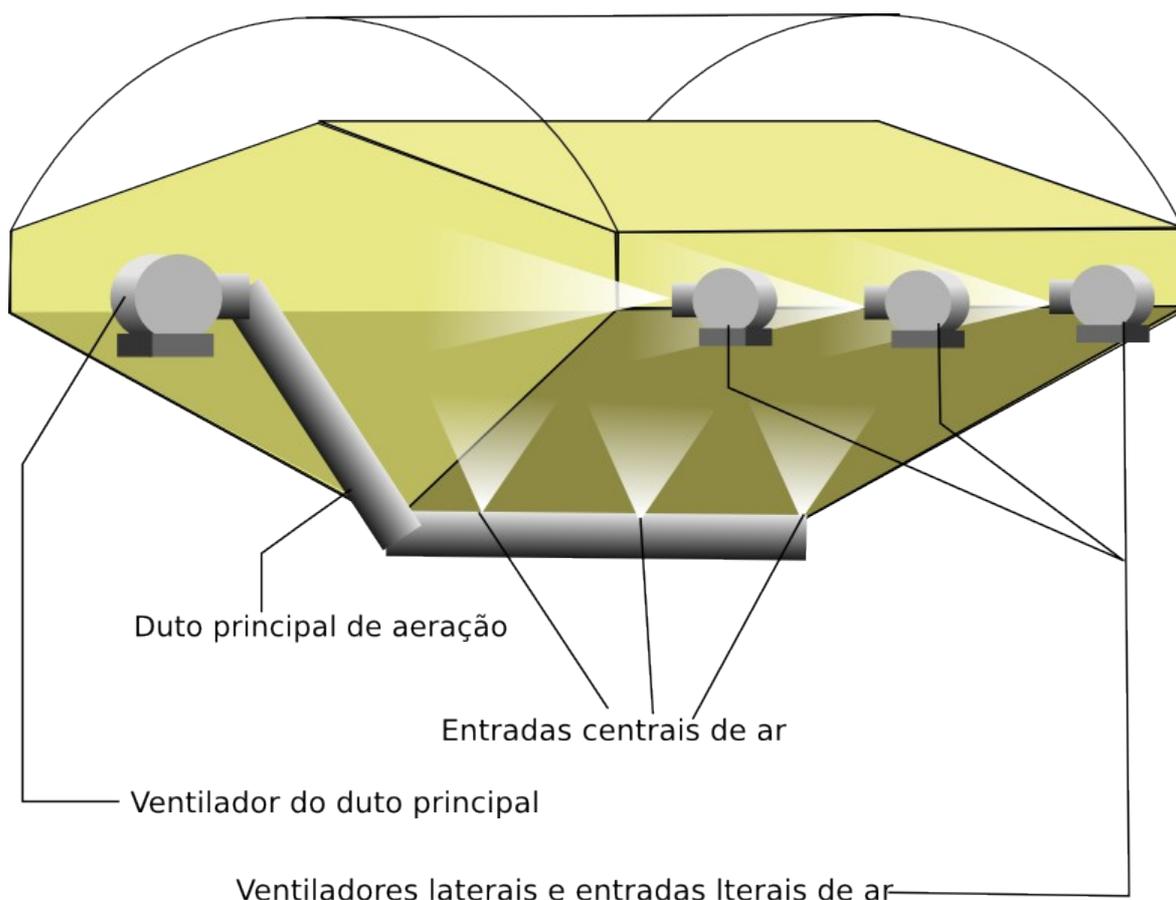
Alguns fatores têm impacto importante na porosidade da massa de grãos. Entre eles a variedade de grão armazenada, impurezas e compactação.

Antes de ser armazenado o grão passa por um processo de limpeza, mas esse processo não é capaz de eliminar todas as impurezas da massa. De acordo com SHEDD (1953), quando a impureza na massa de grãos possui partículas menores que o grão, a resistência à passagem de ar tende a aumentar. Quando as partículas de impurezas são maiores que os grãos a resistência à passagem de ar tende a diminuir. Os sistemas de pré-limpeza e limpeza possuem maior dificuldade de eliminar a impureza mais fina que o grão. Isso significa que a presença de impureza nos sistemas de armazenagem geralmente dificulta a passagem do ar diminuindo a eficiência do sistema de aeração.

SAVICKI (2001) estudou o efeito de compactação da massa de grãos. Como os equipamentos de armazenagem são cada vez maiores, os grãos das camadas inferiores sofrem o peso das camadas superiores. Isso faz com que a porosidade da massa de grãos não seja homogênea no espaço, diminuindo conforme a profundidade da camada.

## **1.3 Aeração**

Aeração é o processo no qual é feita a passagem forçada de ar do ambiente externo pela massa de grãos. Isso é feito para modificar o microclima da massa, inibindo assim o crescimento de fungos e pragas, e diminuindo a atividade biológica do grão. De acordo com LASSERAM (1981), o ar é insuflado ou aspirado por meio de um ventilador e em seguida é distribuído pela massa e grãos por meio de dutos perfurados.



*Figura 1.4: Esquema de aeração em armazém horizontal*

### **1.3.1 Efeitos da aeração na conservação do grão**

Os principais efeitos da aeração são a diminuição da temperatura e da umidade da massa de grão, além da uniformização da temperatura e umidade.

Com a diminuição da temperatura a atividade biológica do grão também diminui. Com a diminuição da atividade biológica do grão sua qualidade é melhor conservada. Durante a respiração, o grão consome sua massa seca e produz gás carbônico. De acordo com PEREIRA (1995), a diminuição de temperatura irá retardar ou até inibir o desenvolvimento de insetos e fungos, pois além de diminuir a atividade biológica do grão, irá diminuir a atividade biológica de toda a microflora da massa.

O processo de aeração poderá também diminuir a umidade da massa de grãos. Isso, em conjunto com a diminuição da temperatura, irá inibir o desenvolvimento de fungos e pragas. A diminuição da umidade irá também evitar a germinação dos grãos. Outro efeito importante da aeração é o de uniformizar as condições de temperatura e umidade do grão. Isso evitará a migração de umidade dentro da massa de grãos.

Os efeitos do processo de aeração irão variar muito conforme as condições iniciais do grão e as condições do ar de entrada. Regiões sub-tropicais, devido a temperatura ambiente mais baixa, possuem melhores condições de aeração. Já em climas tropicais, com temperatura ambiente alta e umidade do ar alta, é muito mais difícil obter uma aeração eficiente, embora seja possível e venha sendo utilizada em todo Brasil. De acordo com PUZZI (1986), a região sul do Brasil, mais o estado de São Paulo, apresentam condições favoráveis para o emprego de aeração. A aeração feita em condições desfavoráveis pode piorar a qualidade do grão.

A aeração também pode ser utilizada para fumigação, ou seja, aplicação de defensivos químicos. Pode ser utilizada para remoção de maus odores e para a secagem parcial do produto.

### **1.3.2 Sistemas de aeração.**

Um sistema de aeração é composto com ventiladores que insuflam ou aspiram ar, dutos de alimentação do ar, registros de ar, e dutos de distribuição do ar.

Os ventiladores são axiais ou centrífugos, alimentados por motores elétricos. Os ventiladores são instalados na parte externa do silo ou armazém. Os dutos de distribuição levam o ar do ventilador até os dutos de distribuição do ar.

Nos silos verticais, o duto de distribuição leva o ar direto para o fundo do silo. No fundo do silo uma determinada área é perfurada e permite a passagem do ar para a massa de grãos. O ar atravessa a massa de grãos saindo pela parte superior do silo. Quanto ao tamanho da área perfurada, o silo pode ser considerado de canal menor, canal maior, fundo falso quadrado ou fundo falso total. O tipo de fundo do silo vai depender da região onde o silo será instalado, do tipo de grão, e do objetivo da aeração (apenas conservação ou secagem).

Armazéns horizontais possuem esquemas mais complexos de aeração. Podemos dividir a aeração do armazém em duto central e dutos laterais. No duto central acontece a maior vazão de ar. O ar atravessa um túnel ou duto pela parte central inferior do armazém. As entradas de ar no fundo do armazém fazem com que o ar atravesse a massa de grãos saindo pela parte superior.

Devido a alta camada de produto, na aeração por duto central é onde acontece a maior vazão de ar e onde existe a maior pressão na entrada de ar. Mas o ar do duto central não consegue atingir as áreas laterais do armazém, por isso, na maioria dos casos, é necessário acrescentar ventiladores e dutos de ar ao logo das laterais do silo. Essa é a chamada aeração lateral. As aerações lateral e central podem ser acionadas de forma independente, isoladas ou simultaneamente.

Quanto ao modo de aeração no duto central, ela pode ser total ou parcial. Quando a aeração é total os ventiladores possuem potência suficiente para alimentar todas as entradas de ar do duto. Quando a aeração é parcial, os ventiladores do duto central são de menor potência e não podem alimentar todas as entradas de ar simultaneamente. Nesse modo existem registros que podem ligar ou desligar determinadas entradas. Nesse tipo de sistema a aeração é feita apenas nos focos onde existe aquecimento, através do acionamento dos registros. A principal desvantagem desse sistema é o custo de automação, já que o acionamento dos registros acontece em

área com risco de explosão onde sistemas elétricos possuem difícil, senão inviável, instalação.

### **1.3.3 Sistemas de termometria e controle de aeração**

Para a correta aplicação da aeração é necessário conhecer várias variáveis do sistema. Quanto a massa de grãos é importante saber o tipo de grão, a temperatura do grão em cada ponto e a umidade do grão. Das condições ambientes é necessário saber a temperatura e a umidade do ar ambiente. Com estas informações e o auxílio de um sistema de simulação ou de tabelas de higroscopia é possível automatizar o processo de acionamento dos ventiladores e tomada de decisão da aeração.

Na massa de grãos a obtenção da temperatura em vários pontos é uma tarefa relativamente simples. Isso é feito através do sistema de termometria, um sistema de telemetria que pode obter remotamente os dados de sensores de temperatura distribuídos pela massa de grãos. Esses sensores ficam distribuídos em cabos que são fixados no teto e na base do silo ou armazém. Cada cabo possui sensores distribuídos de dois em dois metros. A aquisição da umidade em tempo real ainda é uma tarefa tecnologicamente complicada e ainda economicamente inviável. Geralmente a única informação disponível é a umidade com que o grão foi adicionado no silo ou armazém.

A obtenção dos dados do ambiente é feito através de uma estação meteorológica com capacidade de medir a umidade relativa do ar, temperatura do ar e sensor de chuva.

Todos esses sensores podem ser ligados em um sistema computadorizado de automação, capaz de registrar os dados e sempre que as condições forem favoráveis, automaticamente ligar os ventiladores.

O sistema de aeração é utilizado para três objetivos principais. Para conservação, onde os ventiladores serão ligados para que o grão seja mantido em uma determinada condição de temperatura e umidade. É

geralmente utilizado na aeração do produto que ficará um longo tempo armazenado.

No resfriamento o objetivo é resfriar a massa de grãos o mais rápido possível. Geralmente é utilizada para baixar a temperatura do grão depois que o mesmo sai do secador. É feita a aeração com ar ambiente frio independente da umidade.

Também é possível realizar a secagem do produto no próprio silo, nesse caso o objetivo da aeração não é baixar a temperatura mas sim baixar a umidade, é feita a aeração com ar ambiente a uma umidade relativa baixa independente da temperatura.

#### 1.4 Modelos matemáticos

Através de experimentos em uma coluna de grãos, SHEED (1953) propôs um modelo que relaciona a densidade de fluxo a queda de pressão estática:

$$Q = A(\Delta P)^B \quad (1.1)$$

onde:

Q = vazão volumétrica por unidade de área ( $\text{m}^3/\text{s} \cdot \text{m}^2$ )

$\Delta P$  = variação da pressão estática com a profundidade (mm CA)

A, B = constantes que dependem do tipo e condições do grão.

HUKILL e IVES (1955), utilizando os dados experimentais obtidos por Shedd, propuseram a seguinte equação para a perda de pressão em uma camada de grãos, que é recomendada para uma faixa de escoamento no intervalo de 0,61 a 12,2  $\text{m}^3 \text{min}^{-1} \text{m}^{-2}$ .

$$DP = \frac{aQ^2}{\ln(1+bQ)} \quad (1.2)$$

MATTHIES (1965), citado por ARAÚJO (1986), trabalhando com esferas, propôs a seguinte equação:

$$\frac{\Delta P}{H} = K_M F_M \frac{H}{d} \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\rho}{2g} V^2$$

(1.3)

onde:

$\Delta P$  = perda de pressão (mm CA);

$F_M$  = fator de fricção (adimensional);

$K_M$  = coeficiente que depende do produto;

$d$  = diâmetro equivalente da partícula (m);

$\varepsilon$  = porosidade (decimal);

$\rho$  = massa específica do ar (kg/m<sup>3</sup>);

$V$  = velocidade do ar (m/s);

$g$  = fator de conversão (N/m<sup>2</sup>) para (mm CA),  $g=9,81$ ;

$H$  = espessura da camada de grãos (m).

Para escoamento em meio poroso é conhecida a equação de

Blake-Kozeni, válida somente para regime laminar dado por  $\frac{Re'}{(1-e)} < 10$

( onde  $Re' = \frac{V_{\infty} D_p \rho}{\mu}$  é o número de Reynolds modificado):

$$DP = 150 \frac{V_{\infty} \mu L}{D_p} \frac{(1-e)^2}{e^2}$$

(1.4)

onde:

$\mu$  = viscosidade dinâmica (lb<sub>f</sub> s ft<sup>-2</sup>);

$L$  = Comprimento da coluna porosa (ft);

$V_{\infty}$  = Velocidade superficial do fluido (ft/s);

$D_p$  = Diâmetro da partícula (ft);

$\varepsilon$  = porosidade (decimal);

$\rho$  = massa específica do ar (lb<sub>m</sub>/ft<sup>3</sup>).

Para escoamento turbulento, ( $\frac{Re'}{(1-e)} > 1000$ ) é conhecida a equação de Burke-Plumer:

$$DP = 3,50 \frac{L}{D_p} \frac{\rho V_{\text{m}}^2 (1-e)}{2 e^3} \quad (1.5)$$

Para escoamento no regime de transição, ( $10 < \frac{Re'}{(1-e)} < 1000$ ), Ergun mostrou que os dados de diversos pesquisadores apresentam concordância satisfatória com a soma da expressão laminar com a turbulenta, obtendo:

$$\frac{DP}{L} = 150 \frac{V_{\text{m}}^2 (1-e)^2}{D_p^2 e^3} + 1,75 \frac{\rho V_{\text{m}}^2 (1-e)}{D_p e^3} \quad (1.6)$$

BAKKER-ARKEMA (1969), citado por ARAÚJO (1986), testaram a equação de Ergun, trabalhando com sementes de cereja e sugeriram a seguinte modificação:

$$DP = 1,22 \left[ 150 \frac{(1-e)^2}{e^3} m \frac{H}{d^2} \frac{V}{g} + 1,75 \frac{(1-e)}{e^3} \frac{H}{d} \rho \frac{V^2}{g} \right] \quad (1.7)$$

ARAÚJO (1986) investigou a perda de pressão em função da espessura da camada de grãos de soja (H), densidade de fluxo de ar (Fa) e teor de finos (F). Para os intervalos de densidade de fluxo de ar de 0,9 a 30,2 m<sup>3</sup> min<sup>-1</sup> m<sup>-2</sup>, teor de finos de 0,01 a 0,2 decimal e espessura da camada de grãos de 0,4 à 3,0 metros de altura, obteve a seguinte equação:

$$DP = 28,00 - 13,87H - 175,9F - 4,568(Fa) + 0,0948(Fa)^2 + 72,69HF + 2,795H(Fa) + 15,12F(Fa) \quad (1.8)$$

O autor concluiu que a espessura da camada de grãos de soja, considerada explicitamente no modelo, revelou significativo efeito em relação a variável perda de pressão.

TONIAZZO (1997), KHATCHATOURIAN et al (1999), estudaram a influência do teor de umidade para a queda de pressão do ar numa camada de grãos de soja, concluindo que o aumento do teor de umidade reduz a resistência imposta pelos grãos à passagem do ar. Os autores, utilizando dados experimentais próprios, expressaram os

coeficientes A e B da equação de Shedd como uma função linear do teor de umidade, obtendo:

$$A = 0,0014(Tu)-0,013 \quad (1.9)$$

$$B = -0,015(Tu)+0,777 \quad (1.10)$$

Valendo-se de relações entre velocidade e gradiente de pressão e admitindo a homogeneidade da massa de grãos, resolveram, pelo método dos elementos finitos, a equação diferencial parcial não homogênea em relação a pressão:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \quad (1.11)$$

onde  $k$  é expresso como função do número de Reynolds.

KHATCHATOURIAN e SAVICKI (2004), desenvolveram um modelo matemático do escoamento de ar em sistemas de armazenagem de grãos, considerando a não homogeneidade da massa de grãos para o caso bidimensional expresso na forma de duas equações:

$$\text{div } w = 0 \quad (1.12)$$

$$w = -\frac{\text{grad}P}{|\text{grad}P|} \exp \left( \left( \left[ \ln(1+U^2) - 2U \arctan(U) \right] / \pi + 3U \right) / 4a + C \right) \quad (1.13)$$

Onde:

$$U = a \ln(|\text{grad}P|) + b \quad (1.14)$$

Sendo que  $W$  é o vetor de velocidade (m/s);  $P$  é a pressão em (Pa).

Denota-se:

$$k = \exp \left( \left( \left[ \ln(1+U^2) - 2U \arctan(U) \right] / \pi + 3U \right) / 4a + C \right) / |\text{grad}P| \quad (1.15)$$

Onde  $a$  é uma constante,  $C$  é o coeficiente empírico,  $k$  é o coeficiente de permeabilidade ( $\text{m}^3\text{s}/\text{kg}$ ) e  $U$  é o argumento intermediário.

Para levar em conta a influência da profundidade  $H$ , o gradiente de pressão sem compactação  $|\text{grad}P_0|$ , no argumento intermediário  $U$ , foi substituído pela expressão

$$pradP_0 = \frac{|gradP_H|}{(1+c)} \quad (1.16)$$

Então:

$$U = 2.5 \log \left( \frac{|gradP_H|}{(1+c)} \right) + 0.2 \quad (1.17)$$

Onde  $c$  é a função de compactação,  $P_0$  é a pressão inicial e  $P_H$  é a pressão com altura  $H$ . A equação (1.18), chamada de função de compactação, que relaciona os valores os valores dos módulos de gradiente de pressão inicial (sem compactação) e do gradiente de pressão  $|gradP_H|$  para a profundidade  $H$ , considerando assim

$$c(H) = 0.68(1 - \exp^{-0.0373H}) \quad (1.18)$$

Então a equação (1.13), junto com o argumento intermediário (1.16) e a equação (1.18), relaciona a velocidade do ar requerida em uma camada de grãos localizada na profundidade  $H$  com o gradiente necessário de pressão.

## 1.5 O Problema

Falhas no projeto de sistemas de aeração podem trazer enormes prejuízos com a perda do produto armazenado. Por outro lado, o superdimensionamento do sistemas de aeração causam um grande desperdício de energia e um aumento importante no custo de armazenagem. Além disso, um sistema de aeração não homogêneo irá diminuir a qualidade do produto fazendo a secagem excessiva de parte do produto ou aeração ineficiente em outros domínios.

Com o alto custo e dificuldades técnicas da realização de experimentos, a simulação numérica surge como uma ótima opção para abordar o problema. A simulação bidimensional do fluxo ar na massa de grãos, apesar de importante para entender o comportamento fluxo, não traduz totalmente a realidade da aeração em armazéns com geometria complexa, ou com uma distribuição complexa das entradas de ar. A simulação tridimensional do fluxo de ar permite um simulação

mais precisa do processo de aeração permitindo aumentar a eficiência, tanto do projeto do armazém, quanto do projeto do sistema de aeração e ainda tornar mais eficiente a operação do sistema de aeração.

Este trabalho utiliza como base o modelo de KHATCHATOURIAN e SAVICKI (2004) que foi aplicado para duas dimensões e o expande para três dimensões. Essa alteração aumenta bastante a complexidade das ferramentas computacionais necessárias para a resolução do problema, tanto em requisitos de processamento quanto de memória. Esse trabalho também sugere uma solução que integra ferramentas em software livre para pré e pós processamento além da criação de um programa computacional em linguagem C++ para a aplicação do método dos elementos finitos para a resolução do problema.

## CAPÍTULO 2

### *Modelo Matemático*

O modelo criado por KHATCHATOURIAN e SAVICKI (2004) [KHA2004], que representa bem o comportamento do fluxo de ar na massa de grãos, foi empregado apenas para casos bidimensionais. A complexidade na geometria dos armazéns e os diferentes esquemas de aeração podem ter uma análise muito mais eficiente se simulados em três dimensões. O modelo citado acima foi utilizado como base e expandido para o caso tridimensional. Neste capítulo é apresentado o modelo matemático para a simulação tridimensional do fluxo de ar em armazéns graneleiros, e também a aplicação do método dos elementos finitos para o caso.

#### **2.1 Modelo matemático**

O problema do fluxo viscoso incompressível isotermal é descrito pelo sistema de equações de continuidade (2.1) e de Navier-Stokes (2.2):

$$\operatorname{div} w = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\operatorname{grad} P + \mu \nabla^2 w \quad (2.2)$$

onde:  $\mathbf{w}$  é o vetor de velocidade em m/s;  $\rho$  é a densidade em kg/m<sup>3</sup>;  $t$  é o tempo em s;  $P$  é a pressão em Pa;  $\mu$  é a viscosidade dinâmica em Pa.

A solução desse sistema (geralmente reduzido à forma adimensional) depende do número efetivo de Reynolds (calculado na velocidade aparente levando em conta a porosidade da massa de grãos) e mostra a distribuição de pressão e velocidade em cada ponto do domínio de integração para cada momento na forma de uma função-vetor  $\mathbf{w}=\mathbf{f}(\text{grad}P)$ , onde os componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$  da velocidade  $\mathbf{w}$  e  $P$  são variáveis primitivas do sistema inicial.

Contudo, os dados experimentais mostram que mesmo para o mesmo número de Reynolds  $Re$  para o fluxo de ar na massa de vários tipos de grão, a relação entre a velocidade e o gradiente de pressão é diferente para cada tipo de grão. Essa diferença é causada por fatores que provocam variação da resistência ao fluxo de ar: a forma geométrica das partículas (que não é esférica e é diferente para cada produto), existência na massa de grãos de zonas de porosidade com acesso limitado de ar (existência de mais de um tipo de porosidade), diferença de rugosidade na superfície das partículas, *etc.* Existem ainda outros fatores, *e.g.*, compactação da camada de grãos, variação da umidade, presença de impurezas na massa de grãos, *etc.*, que aumenta a diferença entre os valores medidos e os obtidos pela resolução do sistemas das equações (2.1) e (2.2).

Este fato implica que as tentativas de simular o fluxo de ar através da massa de grãos usando as equações de continuidade e Navier-Stokes na forma da equação (2.1) e equação (2.2), embora contribuam para o estudo teórico, estão longe de ter aplicação prática. A velocidade local de ar no armazém graneleiro pode variar muito dependendo da área de seção transversal e no arranjo projetado para o sistema de aeração. Portanto, a massa armazenada de grão pode ter domínios de fluxo laminar, turbulento e transitório. Isso complica muito

a criação de um modelo matemático e um programa numérico, baseando-se nas equações de Navier-Stokes.

Para velocidades menores que correspondem ao fluxo laminar, existe uma relação de proporcionalidade entre a queda de pressão do ar e a velocidade do ar (a fórmula de Hagen-Poiseuille ou a equação de Blake-Kozeny):

$$dP/dy \sim |w| \Rightarrow |w| = k dP/dy \quad (2.3)$$

onde,  $k$  é o coeficiente de proporcionalidade.

Aplicando logaritmos e derivando temos:

$$\frac{d(\ln|w|)}{d(\ln|gradP|)} = 1 \quad (2.4)$$

Para o regime turbulento, que corresponde a valores maiores de velocidade, a queda de pressão é proporcional à velocidade ao quadrado (equação de Burke-Plumer):

$$dP/dy \sim |w|^2 \Rightarrow |w| = k (|dP/dy|)^{1/2} \quad (2.5)$$

Similarmente, para o regime turbulento:

$$\frac{d(\ln|w|)}{d(\ln|dP/dy|)} = 0.5 \quad (2.6)$$

Para o fluxo transitório a relação entre queda de pressão do ar e velocidade do ar é intermediária entre a lei de dependência linear e quadrática.

Existe um grande número de equações não lineares de movimento na literatura que descrevem o fluxo de ar em meio poroso. Uma revisão de boa parte delas é apresentado em SCHEIDEGGER (1960), BEAR (1988). Na maioria destas equações o gradiente de pressão do ar é expresso como uma função da velocidade pela parábola de segunda ordem sem o termo livre, *i.e.* como a soma das dependências para os regimes laminar e turbulento.

Contudo, é difícil descrever precisamente o fluxo de ar através dessas fórmulas para todos os regimes (laminar, transitório e turbulento). Se os coeficientes nestas fórmulas são escolhidos tal que consigam descrever o regime transitório, a influência da velocidade em situações limite (regime laminar ou turbulento) vai ser muito forte. Se os regimes limite forem bem descritos, então a dependência para o regime transitório não será suficientemente exata. Além disso, a aplicação dessas fórmulas para o caso bidimensional ou tridimensional já é suficientemente difícil.

KHATCHATOURIAN e SAVICKI (2004) propuseram a fórmula para descrever a variação da derivada  $d(\ln|\mathbf{w}|)/d(\ln(|dP/dy|))$  para todas as três condições do fluxo correspondendo ao fluxo laminar, turbulento e transitório:

$$\frac{d(\ln|\mathbf{w}|)}{d(\ln|\text{grad}P|)} = \frac{3}{4} - \frac{\arctan(U)}{2\pi} \quad (2.7)$$

onde  $U(P) = a \ln(|\text{grad}P|) + b$  é um argumento intermediário;  $a > 0$  e  $b$  são constantes. Os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são empíricos e precisam ser definidos experimentalmente. Eles variam para cada tipo de grão e seus valores já foram obtidos em trabalhos anteriores como KHATCHATOURIAN e SAVICKI (2004).

Evidentemente, quando  $|\text{grad}P| \rightarrow 0$ ,  $U \rightarrow -\infty$ ,  $(3/4 - \arctan(U)/2\pi) = 1$ , que corresponde ao fluxo laminar; e quando  $|\text{grad}P| \rightarrow \infty$ ,  $U \rightarrow \infty$ ,  $(3/4 - \arctan(U)/2\pi) = 0.5$ , que corresponde ao fluxo turbulento.

Os valores numéricos destas derivadas representam os valores limite da derivada  $d(\ln|\mathbf{w}|)/d(\ln|\text{grad}P|)$  para as variáveis  $|\mathbf{w}|$  e  $\text{grad}P$  acopladas pela função  $|\mathbf{w}| = f(|\text{grad}P|)$  no intervalo total de variação  $|\text{grad}P| \in (0, \infty)$  or  $\ln|\text{grad}P| \in (-\infty, \infty)$ .

Integrando a equação (2.7) em relação ao logaritmo do gradiente de pressão, obtemos a expressão para a velocidade:

$$\ln|w| = \left( \left[ \ln(1+U^2) - 2U \arctan(U) \right] / \pi + 3U \right) / 4a + C \quad (2.8)$$

onde  $C$  é a constante de integração.

Finalmente, o modelo matemático criado por HATCHATOURIAN e SAVICKI (2004) para o fluxo de ar em meio particulado consiste em um sistema de duas equações:

$$\operatorname{div} w = 0 \quad (2.9)$$

$$w = - \frac{\operatorname{grad} P}{|\operatorname{grad} P|} \exp \left( \left( \left[ \ln(1+U^2) - 2U \arctan(U) \right] / \pi + 3U \right) / 4a + C \right) \quad (2.10)$$

A equação escalar (2.9) é a equação de continuidade para fluido incompressível. A equação vetorial (2.10), que substituiu a equação de Navier-Stokes, expressa que o vetor de velocidade e o gradiente de pressão são colineares em todos os pontos do domínio do fluxo de ar, e que a razão dos módulos desses vetores é função do gradiente de pressão.

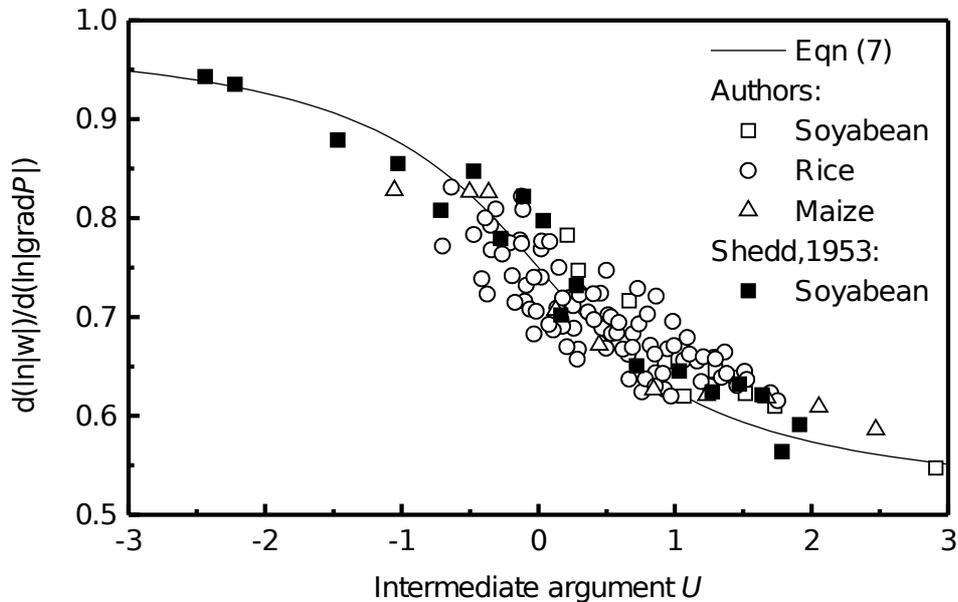


Fig. 2.1: Curva do modelo e dados experimentais. Fonte: KHATCHATOURIAN e SAVICKI (2004)

Expressando o coeficiente de proporcionalidade  $k$  por:

$$k = \exp\left(\left[\frac{\ln(1+U^2) - 2U \arctan(U)}{\pi + 3U}\right] / 4a + C\right) / |\text{grad } P| \quad (2.11)$$

e usando a equação (2.10), os componentes da velocidade  $u$ ,  $v$  e  $w$  para o caso tridimensional podem ser expressos na forma:

$$u = -k \frac{\partial P}{\partial x}; v = -k \frac{\partial P}{\partial y}; w = -k \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.12)$$

onde a coordenada  $y$  em metros corresponde à direção vertical, as coordenadas  $x$  e  $z$  estão localizadas no plano correspondente ao fundo do silo.

Substituindo a equação (2.12) na equação (2.9), a equação diferencial parcial não linear tridimensional é obtida:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -k \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -k \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.13)$$

As condições de contorno para o problema considerado têm a forma:

$$P = P_e \quad (\text{Condição de Dirichlet para entrada e saída de ar}) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad } P = 0 \quad (\text{Condição de Neumann nas paredes}) \quad (2.15)$$

onde  $P_e$  é a pressão na entrada u saída de ar em Pa; e  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à superfície da parede do armazém.

As equações (2.11), (2.12) e (2.13) com as condições de contorno (2.14) e (2.15) descrevem a distribuição de pressão e velocidade do fluxo de ar no estado permanente em um domínio tridimensional de massa de grãos.

## 2.2 Critério de eficiência da aeração

Apesar do campo de velocidades ser uma informação importante para a análise da eficiência da aeração, apenas a sua análise não é suficiente para avaliar a aeração. Regiões onde o fluxo de ar percorre um grande camada de produto precisam uma maior pressão e velocidade do ar, já regiões onde o fluxo de ar percorre uma camada

menor de produto não precisam de uma alta velocidade, se a velocidade do ar foi muito alta pode provocar um secagem excessiva do produto. Para avaliar a eficiência do sistema de aeração o parâmetro mais utilizado é a vazão específica de ar, definida como a razão entre a vazão total de ar e a massa total de produto. Mas esse parâmetro é global e não consegue descrever como é a distribuição da vazão ao longo da massa de grãos. Esse critério possui boa aplicação para armazéns com forma simples e seção transversal constante, onde a velocidade do ar é uniforme em todos os pontos do armazém. Se a variação na geometria do armazém é significativa ou a distribuição das entradas de ar é complexa, esse critério é de difícil aplicação.

Para avaliar a eficiência do sistema de aeração em sistema de armazenagem de grãos com geometria complexa ou com distribuição complexa das entradas de ar, neste trabalho foi utilizado critério criado por KHATCHATOURIAN e BINELO (2007) chamado de vazão específica local. Para silos de geometria simples, com seção transversal constante o volume da vazão específica de ar  $q$  é:

$$q = \frac{Q_a}{m_g} = \frac{W_a S}{\rho_g h S} = \frac{W_a}{\rho_g h} \quad (2.16)$$

Onde  $Q_a$  é a vazão total de ar em  $m^3s^{-1}$ ;  $m_g$  é a massa total de produto em kg;  $W_a$  é velocidade do ar em  $ms^{-1}$ ;  $\rho_a$  é a densidade do produto em  $kg\ m^{-3}s^{-1}$ ;  $S$  é a área de seção transversal em  $m^2$ ;  $h$  é a altura da massa de grãos em m.

A vazão de ar específica local para armazéns com área se seção transversal variável para qualquer ponto interno  $X=X(x, y, z)$ , de acordo com KHATCHATOURIAN e BINELO (2007), pode ser apresentada como:

$$q(X) = \frac{W(X)}{\rho(X)L_x} \quad (2.17)$$

onde  $q(X)$  é a vazão de ar específica local no ponto  $X(x,y,z)$  em  $m^3s^{-1}\ kg^{-1}$ ;  $W(X)$  é a velocidade do ar no ponto  $X$  em  $ms^{-1}$ ;  $\rho(X)$  é a densidade da

massa de grãos no ponto X em  $\text{kg m}^{-3}\text{s}^{-1}$ ; LX é o comprimento total em m da trajetória de ar que passa pelo ponto X.

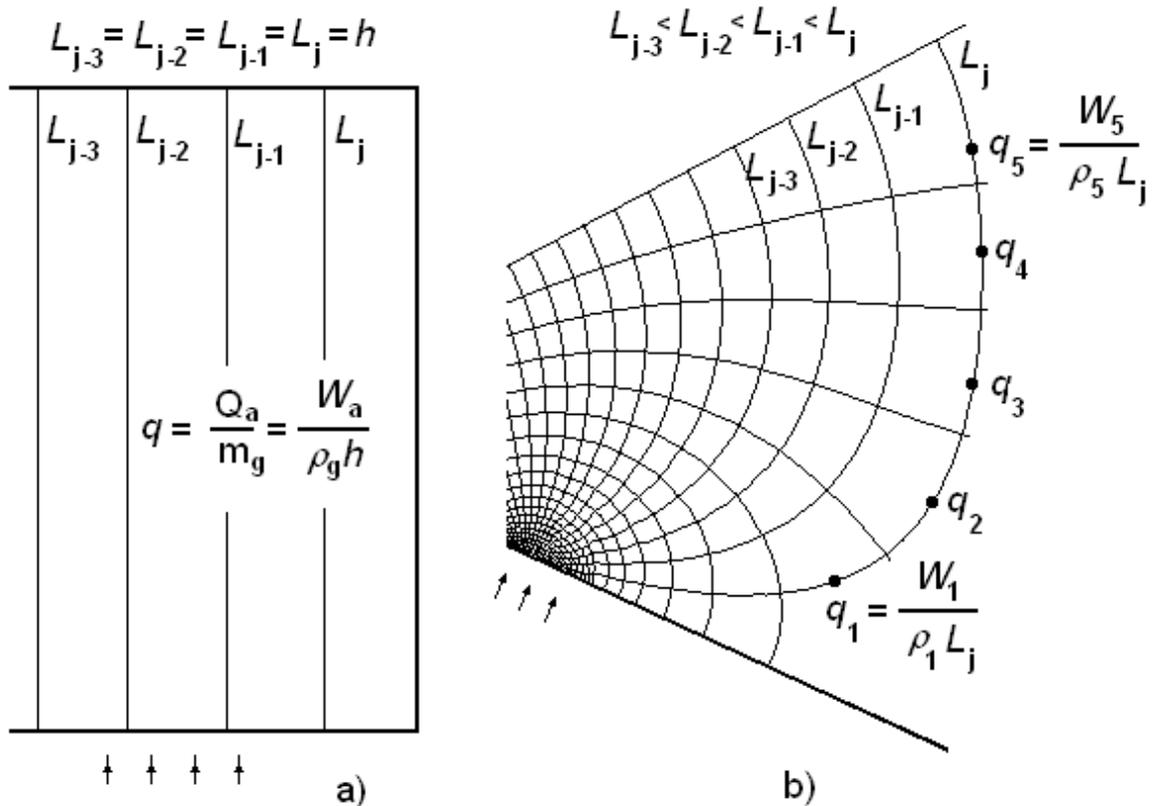


Figura 2.2: Vazão específica local

A vazão específica local, multiplicada pelo tempo de aeração, possui a propriedade de aditividade. Esse parâmetro permite avaliar a qualidade da aeração em qualquer ponto da massa armazenada mesmo se a aeração é feita separadamente para cada entrada e em intervalos de tempo diferentes.

### 2.3 Método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos é uma poderosa ferramenta do cálculo numérico para obter uma solução aproximada para o problema. De acordo com SEGERLIND (1984), o método assume que qualquer distribuição contínua em um domínio pode ser aproximada por um modelo discreto composto de um conjunto de funções contínuas definidas em um número finito de subdomínios ou elementos. Os

elementos são conectados em pontos ao longo do contorno, por meio de nós, e as equações que regem o processo são obtidas pela minimização de um funcional que corresponde ao problema físico ou por métodos de resíduos ponderados. A técnica proporciona flexibilidade e versatilidade necessárias para análises de problemas em que o comportamento do material, configuração e condições de contorno e carregamento são complexos.

No caso tridimensional, o campo de integração, que é a massa de grãos, é dividido em em tetraedros (volume de quadro pontos, seis arestas e quatro faces), cujos vértices  $i, j, k, l$  são chamados de nós. Consideram-se os valores de pressão nos nós  $P_i, P_j, P_k, P_l$  conhecidos e é escolhida uma função linear para a aproximação dos valores da pressão nos pontos internos de cada elemento.

Então, aplicando os elementos finitos na forma de tetraedros temos:

$$P = [N] \{P\} \quad (2.18)$$

$$\text{Onde } [N] = [N_i N_j N_k N_l] \text{ e } \{P\} = \begin{pmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \\ P_l \end{pmatrix}$$

Usando o método de Galerkin, tem-se:

$$\int \int \int_V [N]^T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( -\epsilon k \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\epsilon k \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\epsilon k \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right\} dV = 0 \quad (2.19)$$

Usando a identidade:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( [N]^T \epsilon k \frac{\partial P}{\partial x} \right) = [N]^T \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon k \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \epsilon k \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.20)$$

De onde:

$$[N]^T \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon k \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( [N]^T \epsilon k \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \epsilon k \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.21)$$

Analogamente:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( [N]^T \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial y} = [N]^T \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (2.22)$$

De onde:

$$[N]^T \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( [N]^T \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial y} \right) - \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2.23)$$

Ainda para z:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( [N]^T \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial z} = [N]^T \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (2.24)$$

De onde:

$$[N]^T \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( [N]^T \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial z} \right) - \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.25)$$

Substituindo a equação 2.21, a equação 2.23 e a equação 2.25 na equação 2.19 temos:

$$\begin{aligned} & \int \int \int_V [N]^T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( -\varepsilon k \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\varepsilon k \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\varepsilon k \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right\} dV = \\ & \int \int \int_V [N]^T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( -[N]^T \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -[N]^T \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -[N]^T \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial z} \right) \right\} dV \\ & - \int \int \int_V \left\{ \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial z} \right\} dV = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

E aplicando a equação de Ostrogradski-Gauss:

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{w} dV = \int \int_{\delta} \vec{n} \cdot \vec{w} d\delta \quad (2.27)$$

Tem se:

$$\begin{aligned} & \int \int_{\delta} \vec{n} \cdot \left( \left( [N]^T \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial x} \right)_i + \left( [N]^T \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial y} \right)_j + \left( [N]^T \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial z} \right)_k \right) d\delta \\ & - \int \int \int_V \left\{ \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \varepsilon k \frac{\partial P}{\partial z} \right\} dV = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\int \int_{\delta} ([N]^T \epsilon k \vec{n} \text{grad } P) d\delta - \int \int \int_V \left\{ \frac{\partial [N]^T}{\partial x} \epsilon k \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial [N]^T}{\partial y} \epsilon k \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial [N]^T}{\partial z} \epsilon k \frac{\partial P}{\partial z} \right\} dV = 0 \quad (2.29)$$

Usando a condição de fronteira na parede:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \vec{n} \text{grad } P = 0 \quad (2.30)$$

Então:

$$\int \int_{\delta} ([N]^T \epsilon k \vec{n} \text{grad } P) d\delta = 0 \quad (2.31)$$

Para obter a solução, o domínio de integração (volume tridimensional da massa de grãos) é dividido em vários elementos tetraédricos, cujos vértices,  $i, j, k, l$  são chamados de nós. Consideremos os valores da pressão nos nós de  $P_i, P_j, P_k, P_l$  conhecidos e escolhemos uma função linear para a aproximação dos valores da pressão nos pontos internos deste tetraedro. Como a função é linear, a derivada da pressão é constante em todo o volume do tetraedro, esse tipo de elemento chamamos de elemento *simplex*.

Aplicando a aproximação linear temos:

$$P = \frac{1}{\det C} = (1 \ X \ Y \ Z) \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \\ P_l \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Onde  $(P_i \ P_j \ P_k \ P_l)$  são os valores da pressão nos vértices do elemento.

$C = \begin{pmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{pmatrix}$  é uma matriz de coordenadas dos vértices e

$C_{ij}$  são cofatores desta matriz.

Então:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} [P] = [B][P] \quad (2.33)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} = [B] \quad (2.34)$$

As matrizes de rigidez vão formar a matriz final do sistema, e após aplicadas as condições de contorno e resolvido o sistema de equação lineares algébricas as incógnitas do sistema irão formar o campo de pressão no domínio do problema.

## CAPÍTULO 3

### *Programa e Ferramentas Computacionais*

#### **3.1 Construção da geometria**

Para a aplicação do método dos elementos finitos é necessário o estabelecimento de um domínio de integração. No caso tridimensional esse domínio precisa ser um sólido. A informação do sólido é transmitida ao gerador de malha que irá então decompor o sólido em elementos menores, no caso deste trabalho, em tetraedros. Na etapa da criação do sólido também são definidas as diferentes regiões na superfície do domínio que terão diferentes condições de contorno. Foi feita a opção por separar a criação da geometria do restante das etapas, pois assim é possível usar diferentes métodos ou ferramentas pra criação da mesma sem que isso tenha impacto no restante sistema.

A primeira opção seria escrever diretamente o arquivo de geometria que o gerador da malha iria utilizar como entrada. Apesar de possível, esse método traria vários problemas. O primeiro problema seria a complexidade e o tempo gasto para criação da geometria. O segundo problema seria a necessidade de um especialista no sistema para criar

a malha, ou ainda, um treinamento longo até que o usuário final tivesse condições de escrever o arquivo de geometria.

Existem várias ferramentas no mercado especializadas na criação de geometria e geração da malha de elementos finitos, mas essas ferramentas possuem um custo muito elevado. Embora existam versões acadêmicas com custo mais baixo, o que viabilizaria a pesquisa, o custo comercial alto inviabilizaria sua aplicação em problemas reais da indústria. Já a criação de uma ferramenta para geração de qualquer geometria tridimensional aumentaria muito o escopo do trabalho sendo impossível criá-la dentro dos recursos e prazos disponíveis.

Outra opção seria a criação de um gerador de geometria para o caso específico de armazéns tridimensionais. Esse programa receberia como entrada as dimensões principais do armazém e geraria o sólido em três dimensões. Essa alternativa tornaria fácil e rápida a criação da geometria não necessitando de um especialista para criá-la. Essa idéia foi de fato adotada tendo sido criado um programa para a geração da geometria, o qual será visto em detalhe mais adiante. Mas a adoção de apenas essa estratégia é insuficiente, pois ficamos ainda com o seguinte problema: além dos projetos padronizados de armazém podem existir armazéns das mais diferentes geometrias e seria impossível criar um programa que englobasse qualquer possibilidade, portanto o sistema falharia na premissa de fazer simulação tridimensional em qualquer geometria.

Para resolver esse problema, foi adotada a estratégia de utilizar outros programas de modelagem tridimensional para gerar a geometria em um formato neutro, que pudesse ser interpretada pelo gerador de malha. Existem vários programas com essa capacidade, principalmente os chamados programas de CAD (Computer Aided Design) e CAE (Computer Aided Engeneering), ou ainda programas de modelagem tridimensional artística ou arquitetônica. Esses programas possuem custo mais baixo, muita vezes já estão sendo utilizados no próprio projeto do armazém. Como esses programas possuem a habilidade de

exportar dados para diferentes formatos e podem ainda ser personalizados com a criação de extensões, tornam-se uma ótima alternativa para a geração da geometria.

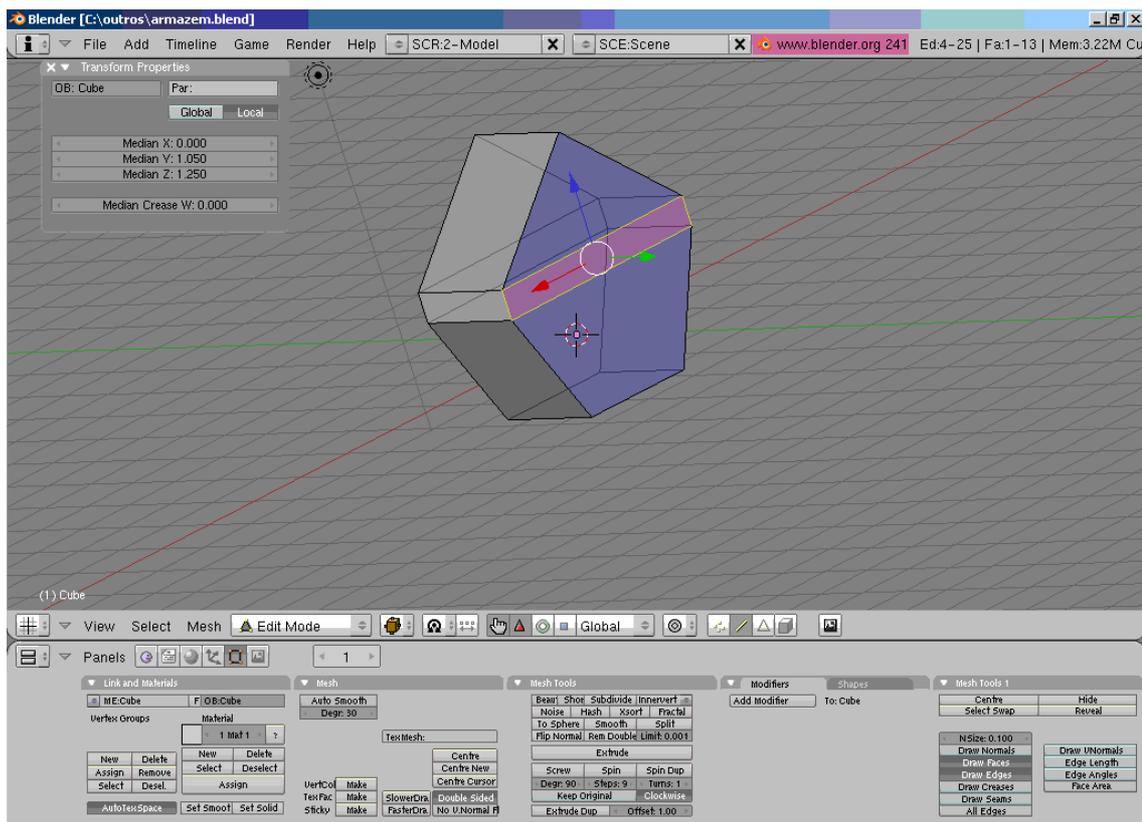
Os formatos escolhidos para exportar os dados foram o smesh e o STL, por serem amplamente usados, por serem formatos aceitos pelos geradores de malha como entrada, e por serem suportados como formato de exportação de dados pela maioria dos programas citados para a geração da geometria. A adoção desta solução torna viável a simulação em qualquer geometria, sem muito custo adicional em desenvolvimento ou licença de programa.

Para gerar as geometrias apresentadas neste trabalho foi escolhido o programa Blender3D, pelos seguintes motivos. Esse programa é software livre, não tendo custo nenhum para licença de uso. É *cross-platform*, ou seja, possui versões nas mais diferentes plataformas como Windows, Linux, Unix, MacOS etc... É facilmente personalizável, primeiro pelo fato de ser software livre sob licença GPL, tendo portando o código fonte aberto, e segundo pelo fato de aceitar a incorporação de *scripts* em linguagem Python para estender suas funcionalidades.

Apesar do programa Blender3D ter como objetivo principal a modelagem artística e arquitetônica, ele mostrou-se muito eficiente para a criação das geometrias utilizadas nas simulações deste trabalho. Já existem scripts que permitem exportar geometrias do Blender3D para o formato smesh, porém os dados exportados não continham uma informação importante, as regiões das condições de contorno. Para resolver esse problema foi utilizada a estratégia de marcar as diferentes regiões de contorno com diferentes materiais e alterar o script de exportação para utilizar essa informação do material para identificar as diferentes condições de contorno.

A superfície é discretizada em polígonos planares. Como o Blender3D é utilizado para computação gráfica, é possível designar

para cada polígono um material. Esse material é utilizado para identificar a cor, textura, ou outros atributos visuais do polígono. Nesse trabalho então utilizamos essa informação do índice de material do polígono como índice de condição de contorno para a geometria. A figura 3.1 mostra a criação da geometria utilizando o software Blender3D.



*Figura 3.1: Geração de geometria com Blender 3D*

Como citado anteriormente, também foi criado um programa para gerar automaticamente a geometria de acordo com as principais medidas do armazém. Esta ferramenta foi escrita na linguagem Object-Pascal, no ambiente de desenvolvimento Lazarus, que utiliza o compilador FreePascal. Tanto o ambiente de desenvolvimento quanto o compilador são software livre. O programa desenvolvido pode ser compilado em diferentes sistemas operacionais (windows, linux, etc...) sem alteração no código fonte.

O software possui uma interface gráfica onde usuário entra com as dimensões do armazém, a dimensão e posição de cada entrada de ar e os índices das condições de contorno. Com esse programa é possível modelar a maioria dos armazéns de grãos existentes. A figura 3.2 mostra a interface do programa.

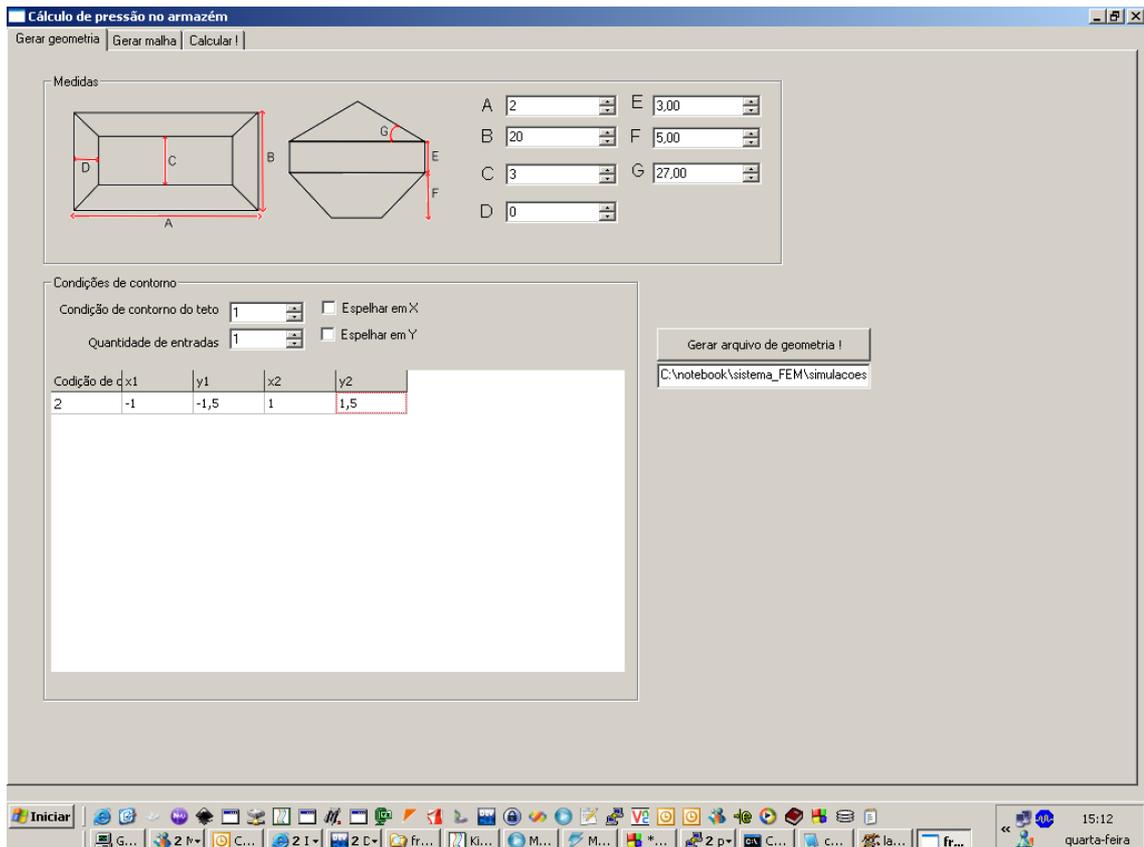


Figura 3.2: Programa para geração de geometria de armazém

As dimensões A e B referem-se ao comprimento e a largura do armazém. Os armazéns podem variar também quanto ao fundo, pode ser plano, V ou semi-V. Caso o armazém tenha o fundo plano a medida F vai ser igual a zero. Caso o Armazém possua fundo V, a medida F vai ser maior que zero e a medida C vai ser zero. Caso o armazém tenha o fundo semi-V, ambas as medidas, F e C serão maiores que zero. No início e no fim do armazém também há um aclave, a cabeceira do armazém, cujo comprimento é indicado na medida D. Cada tipo de grão possui um ângulo de repouso no armazém, que é indicado no ângulo G.

Quanto às condições de contorno, o usuário indica a quantidade de condições diferentes que vai utilizar, indica qual o índice da condição de contorno de saída do ar, e também as coordenadas das entradas de ar com sua respectiva condição de contorno. As entradas de são consideradas quadriláteros, é necessário informar apenas as coordenadas x e y dos vértices e o sistema faz a projeção dos pontos no fundo do armazém encontrando automaticamente a coordenada z. Depois utilizando o programa Tetview é possível ver a geometria criada, como mostra a figura 3.3.

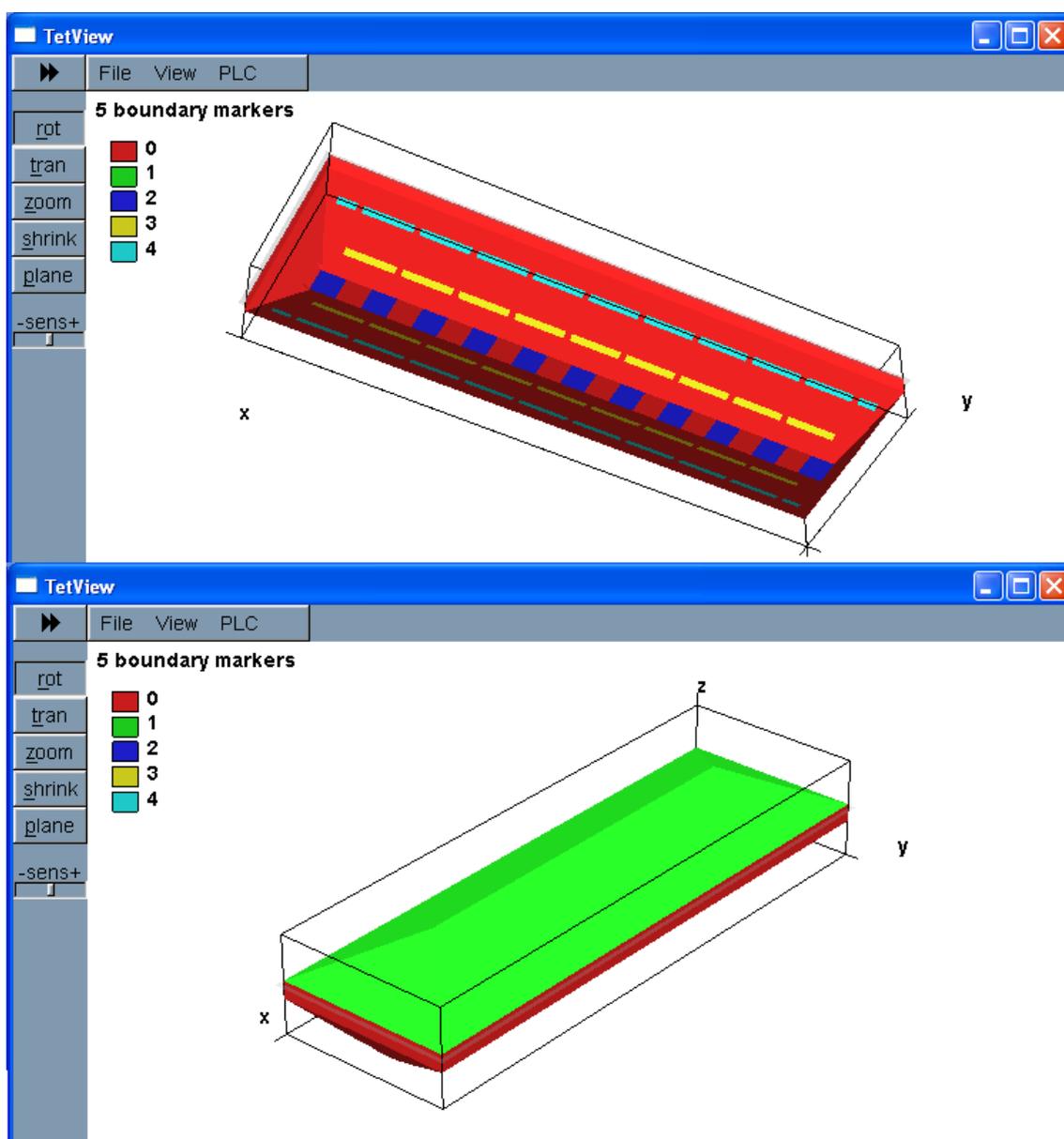


Figura 3.3: Geometria do armazém

## 3.2 Geração da malha

Depois de gerada a geometria, ou seja, a superfície do volume de integração, é necessário decompor esse volume em elementos volumétricos menores, para que possa ser aplicado o método de elementos finitos. A malha utilizada neste trabalho é uma malha não estruturada de tetraedros. A malha não estruturada se adapta mais facilmente a qualquer tipo de geometria, e a utilização de apenas um tipo de elemento, o tetraedro, torna mais simples a geração das matrizes de rigidez. O tetraedro é um volume de quatro vértices e seis arestas.

Foram utilizados neste trabalho dois programas diferentes para a geração de malha. Tetgen e Netgen.

### 3.2.1 Tetgen

O programa Tetgen é um gerador de malha de tetraedros criado por Hang Si no Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, em Berlin, Alemanha. Esse programa foi escrito em C++ e é *cross-platform*. Ele gera a malha de tetraedros utilizando algoritmos Delaunay, com possibilidade de estabelecer uma qualidade mínima do tetraedro. Aqui, qualidade do tetraedro significa que o mesmo não possui ângulos muito pequenos nos vértices. Ele aceita vários tipos de arquivos como entrada, neste trabalho passamos como entrada para o Tetgen arquivos no formato smesh.

O Tetgen possui também um bom sistema de refinamento local da malha. Isso é feito da seguinte forma: após gerada a malha inicial, é possível refiná-la localmente, informando como entrada para o Tetgen o arquivo da malha original e mais um arquivo indicando em cada tetraedro da malha original qual seu volume máximo. Esse parâmetro de volume máximo vai ser utilizado no refinamento, o sistema irá subdividir o tetraedro recursivamente até que nenhum tetraedro resultante da subdivisão possua volume maior do que indicado naquele

ponto. No trabalho esse recurso do Tetgen foi utilizado, isso é descrito com mais detalhes na sessão sobre refinamento da malha.

O software Tetgen é regularmente atualizado e está sob uma licença do tipo MIT modificada. As restrições são de que o sistema seja utilizado apenas para fins de pesquisa, para utilização comercial é necessário entrar em contato com o autor. O Tetgen mostrou um ótimo desempenho e estabilidade, e apesar de não possuir interface gráfica é possível visualizar as malhas geradas através do programa Tetview do mesmo autor.

### **3.2.2 Netgen**

O software Netgen foi inicialmente desenvolvido por SCHOBBERL (1997) no Departamento de Mecânica Computacional e Otimização da Universidade de Linz, Áustria. Netgen também utiliza algoritmos Delaunay para geração de malha de tetraedros.

O Netgen recebe como entrada vários formatos diferentes de arquivo. Neste trabalho foram utilizados os formatos STL, e CSG. O formato STL foi utilizado na exportação de dados de desenhos feitos no Blender3D, e é também suportado por várias ferramentas de CAD. O formato CSG é arquivo texto onde a geometria pode ser construído através de operações de conjunto entre elementos geométricos básicos como planos, cubos cilindros etc...

Durante o trabalho o programa Tetgen mostrou um melhor desempenho, entretanto, a principal vantagem do programa Netgen é sua licença. Sua licença é do tipo LGPL, o que permite seu uso tanto em pesquisa quanto em aplicações comerciais, e permite ainda que seu código seja ligado dinamicamente à uma aplicação sob outro tipo de licença.

### **3.2.3 Refinamento da malha de elementos finitos**

A precisão do método dos elementos finitos depende de vários fatores, dentre eles o número de elementos da malha. Quanto mais

elementos possui a malha, mais fina dizemos que ela é. Quanto mais fina é a malha, maior é o esforço computacional, tanto em processamento quanto em memória. Refinar a malha portanto é aumentar o número de elementos esperando com isso melhorar a precisão do cálculo.

O erro do método também não é constante ao longo da malha, pois vai depender também do gradiente dos valores sendo calculados. Quanto mais brusca a variação destes valores, maior é o erro. Portanto, regiões da malha onde os valores da função variam menos não precisam ser tão refinadas. Já regiões da malha com gradientes altos precisam um refinamento maior. Refinar a malha apenas nas regiões onde isso é mais necessário otimiza a utilização dos recursos computacionais.

### **3.2.4 Refinamento local**

O primeiro sistema de refinamento utilizado no trabalho foi refinamento local. Esse sistema consiste em estabelecer um critério para os elementos. Os elementos então são refinados de acordo com esse critério. O critério escolhido foi a razão entre o comprimento da maior aresta do tetraedro e o gradiente de pressão.

O primeiro passo é gerar uma malha inicial, com poucos elementos (tipicamente em torno de mil elementos). Depois o sistema é resolvido para essa malha inicial. Além dos arquivos de resultado é gerado mais um arquivo. Esse arquivo para refinamento contém o índice de todos os tetraedros e também seu respectivo volume máximo. O volume máximo é estimado para que satisfaça a condição de refinamento local citada acima.

O sistema Tetgen possui opção para refinamento local baseado no volume máximo para cada tetraedro. O sistema refina a malha subdividindo o tetraedro até que nenhum dos tetraedros resultantes tenha volume maior do que o indicado para aquele ponto da malha.

O resultado obtido com a malha inicial e o arquivo com as informações de refinamento são enviados para o programa Tetgen, que então refina a malha localmente. A malha mais fina (tipicamente em torno de um milhão de elementos) é usada então para resolver o sistema novamente, obtendo então um resultado mais preciso. O processo pode ser repetido várias vezes até se obter a malha com a refinamento desejado.

### **3.2.5 Refinamento local adaptativo**

Apesar de bons resultados terem sido obtidos com o processo de refinamento local descrito acima, existiam ainda alguns problemas. O primeiro é que o sistema ficava dependente do programa Tetgen para o refinamento da malha. Outro problema é que era muito difícil adaptar os resultados obtidos na malha mais grossa como condição inicial para a malha mais fina, portanto o cálculo da malha fina consumia muito tempo de processamento. Outro problema era a necessidade da intervenção do usuário no processo de refinamento já que a malha tinha que ser avaliada e os dados transportados entre o sistema desenvolvido e o programa Tetgen.

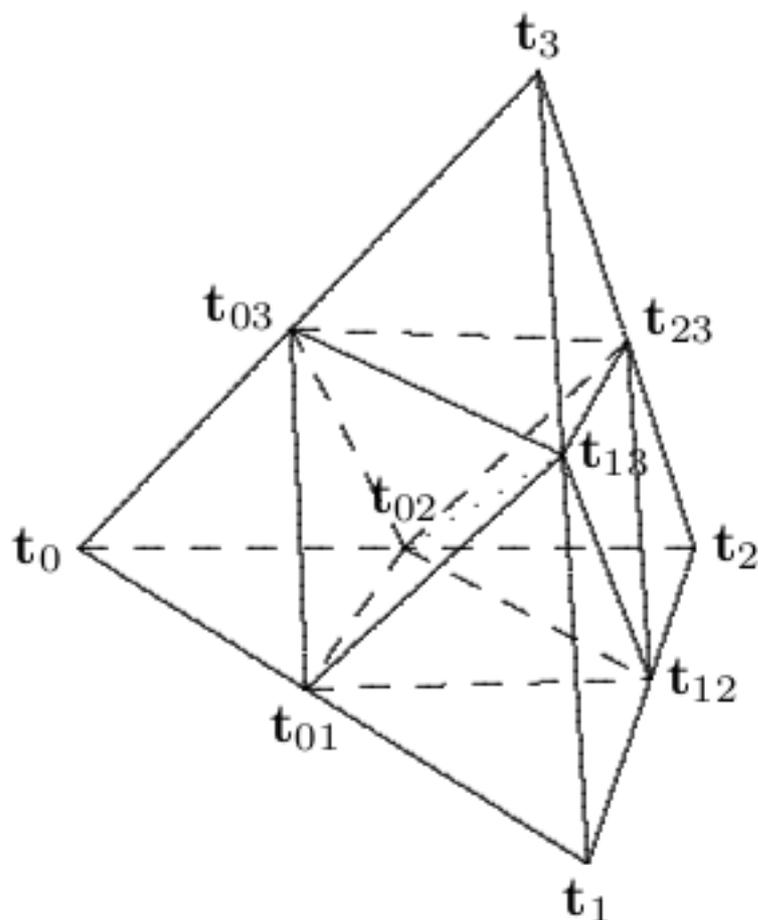


Figura 3.4: Subdivisão do tetraedro

Para resolver essas questões foi criado no sistema o refinamento local adaptativo. Nesse modelo o próprio solver vai dinamicamente refinando a malha enquanto resolve o sistema. Para a aplicação desse modelo foi necessária a criação de um processo de refinamento local no próprio *solver* do sistema. Isso resolve o problema da dependência do programa Tetgen, pois uma malha mais grossa pode ser gerada em qualquer sistema, e depois de importada pelo solver ela é dinamicamente refinada.

Foi adicionada então ao sistema mais uma iteração, a iteração para o refinamento da malha. O sistema é resolvido com a malha mais

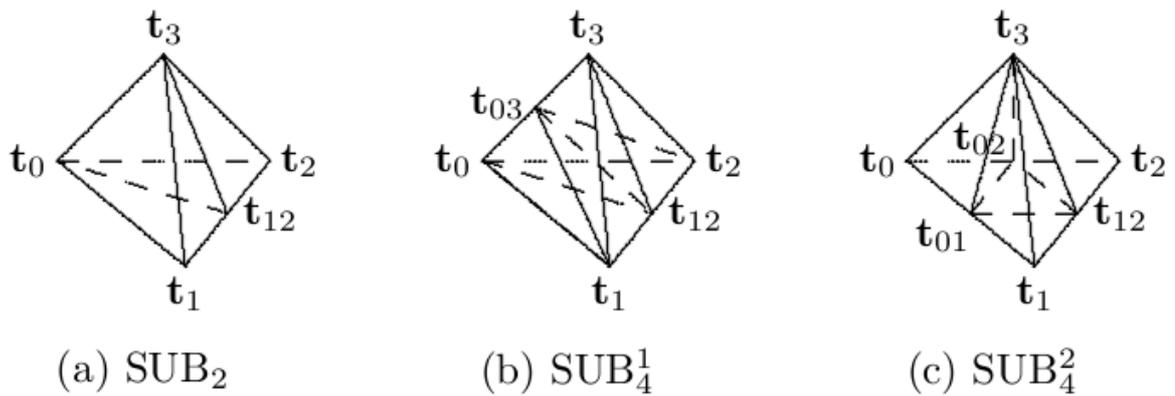


Figura 3.5: Casos especiais da subdivisão do tetraedro

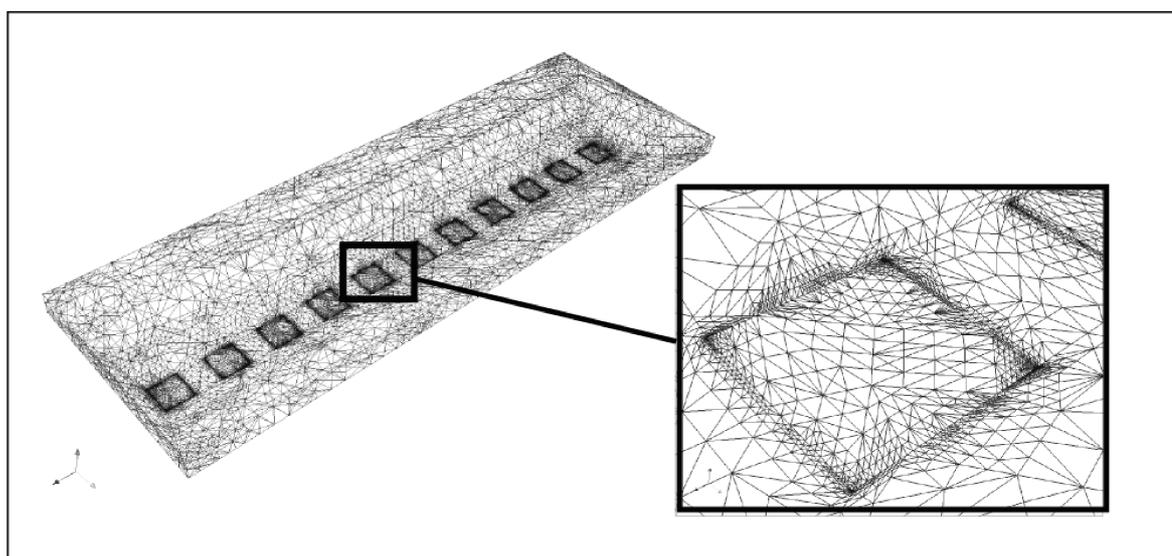
grossa, os elementos que não satisfizerem a condição de refinamento, que continua sendo a razão entre o tamanho do tetraedro e o gradiente de pressão, são então recursivamente subdivididos até que a condição seja satisfeita. O sistema é resolvido então com a malha refinada que então passa novamente pelo processo de refinamento. Esse processo é repetido até que a malha não precise ser mais refinada para que todos os tetraedros estejam de acordo com a condição de refinamento, ou que um número máximo de iterações de refinamento seja atingido.

Cada tetraedro é refinado de acordo com o processo descrito por LIU e JOE (1996). Nesse processo cada tetraedro que precisa ser refinado é subdividido em oito sub-tetraedros como mostra a figura 3.4. Essa subdivisão é feita dividindo ao meio cada aresta do tetraedro e gerando novas arestas internas. Como tetraedros na vizinhança compartilham arestas, estes vão sofrer uma subdivisão parcial.

Uma das condições para que uma malha seja conforme é que não podem existir duas diferentes faces no mesmo plano que possuam interseção. Tetraedros que tiverem uma divisão total (oito sub-tetraedros), não terão este problema. Porém, o problema pode acontecer com os tetraedros da vizinhança que terão subdivisão parcial. LIU e JOE (1996) provam que é possível eliminar este problema desde que seja assegurado que apenas algumas classes de subdivisão parcial aconteçam. As classes permitidas são os tetraedros com apenas uma

aresta dividida, os tetraedros com duas arestas opostas divididas, ou ainda os tetraedros com as três arestas de uma mesma face dividida. As classes são mostradas na figura 3.5. O programa desenvolvido, ao refinar a malha, se certifica que estas condições são obedecidas, e as arestas de um tetraedro são divididas até que o tetraedro pertença às classes de subdivisão permitidas.

Cada vez que um elemento é subdividido mais pontos são adicionados à malha do sistema. Os valores iniciais de pressão para



*Figura 3.6: Exemplo de malha refinada adaptativamente pelo sistema*  
esses pontos são obtidos através de uma interpolação linear dos valores obtidos como resultado para o tetraedro original. Isso permite utilizar o resultado anterior da malha mais grossa como aproximação inicial para a malha mais fina, otimizando consideravelmente o tempo de processamento gasto.

A figura 3.6 mostra uma malha gerada com refinamento local. É possível notar que nas entradas de ar do armazém, onde o gradiente de pressão é maior, a malha é muito mais refinada.

### 3.3 Resolvedor do sistema

O resolvedor, ou *solver* do sistema, é o componente de um programa que aplica o método dos elementos finitos gerando uma

matriz de equações algébricas lineares, e sistema é então resolvido numericamente para que seja obtida uma solução aproximada para o sistema.

O resolvidor foi desenvolvido em linguagem C++, que além de alta portabilidade, possui excelente desempenho e controle preciso da memória utilizada pelo sistema. O compilador escolhido foi o Cygwin, que é software livre e o ambiente de desenvolvimento DevC++, também software livre.

### **3.3.1 Entrada da informação**

A primeira etapa do sistema é carregar as informações das condições de contorno do problema e a malha de elementos finitos. As condições de contorno são definidas pelo usuário em arquivo texto. A malha de tetraedros já deve ter sido inicialmente gerada conforme visto nos capítulos anteriores.

Essas informações são carregadas para uma estrutura de objetos que representam o modelo discretizado do problema. O contêiner principal é o objeto *sistema*, esse objeto contém listas de vértices, arestas, faces e volumes. O objeto aresta possui referências para dois vértices. Faces possuem referências para três arestas. O objeto volume representa um tetraedro e possuem referências para seus respectivos vértices, faces e arestas. As faces e vértices estão associadas as estruturas que representam as condições de contorno.

### **3.3.2 Altura da camada de produto**

Uma parte importante do resolvidor é o cálculo do coeficiente de permeabilidade do ar, que leva em consideração o tipo de grão e a altura da camada de produto. A altura da camada de produto é importante devido ao fenômeno de compactação dos grãos nas camadas mais profundas, que sofrem o peso das camadas superiores.

A altura da camada de produto em um ponto P é a distância desse ponto até a superfície superior do grão (na direção paralela ao vetor da

gravidade). Esse valor precisa ser calculado para o centro de cada tetraedro em cada iteração do coeficiente de permeabilidade do produto. Seria relativamente simples criar um algoritmo para calcular esse valor para alguns casos específicos, conforme o ângulo de repouso do grão. Porém essa alternativa restringiria a capacidade do sistema de simular o fluxo e ar em um domínio de qualquer geometria. A primeira alternativa para calcular a altura do produto seria traçar um raio e calcular sua interseção com as faces da superfície do produto, entretanto, o custo computacional desta operação a torna completamente inviável, principalmente considerando malhas refinadas.

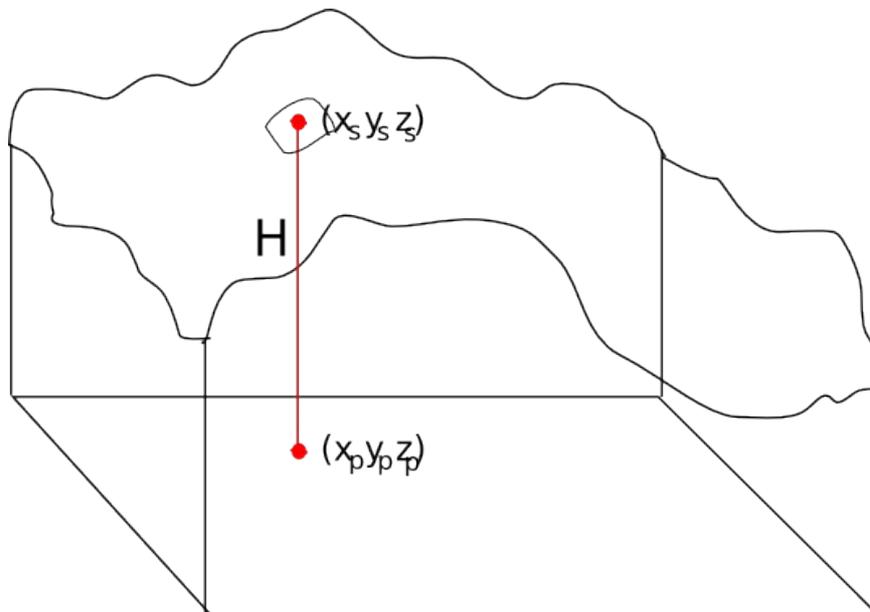


Figura 3.7: Altura da camada de produto para ponto P

Para calcular a altura de produto H, para qualquer geometria tridimensional, com um custo computacional aceitável, outro método foi empregado. Primeiro é gerada uma malha planar de quadriláteros ou triângulos na altura média do armazém. Para cada ponto ij da malha, a altura de produto é pré computada, gerando um mapa de alturas, ou *height map*. Esse mapa é calculado apenas no início do programa e para a malha ainda não refinada, portanto seu custo computacional não é alto.

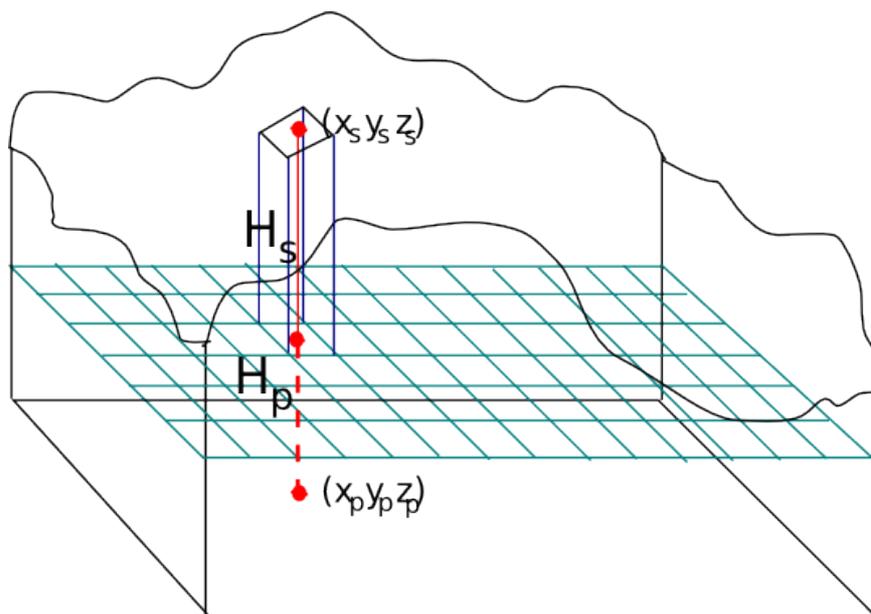


Figura 3.8: Mapa de alturas e altura da camada de produto

Com o mapa de alturas pré calculado, a operação para encontrar a altura de produto para qualquer ponto do domínio consiste em projetar o ponto  $P$  no plano do mapa de alturas em encontrar os pontos  $P_{ij}$ ,  $P_{i+1j}$ ,  $P_{ij+1}$ , e  $P_{i+1j+1}$ .

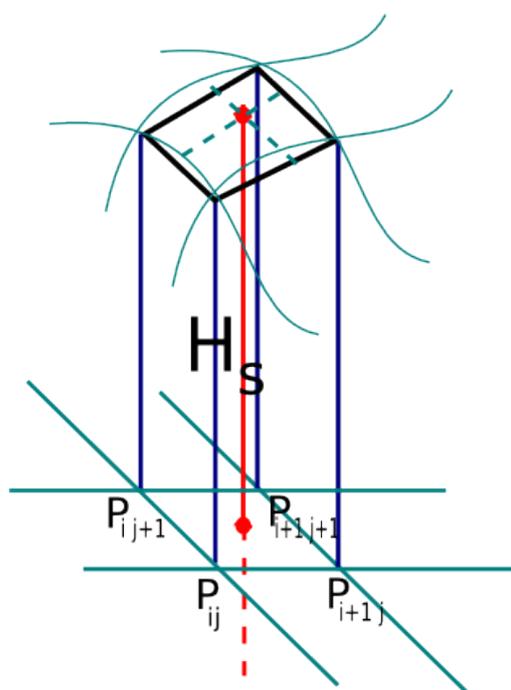


Figura 3.9: Interpolação bilinear para altura da camada de produto

Com altura pré computada nesses pontos, é preciso fazer a interpolação bilinear e encontrar a altura  $H_S$  correspondente ao ponto projetado no mapa. Enfim, para encontrar  $H$  é necessário somar a altura  $H_P$  (altura do ponto  $P$  até sua projeção no plano do mapa de alturas) à  $H_S$ .

### 3.3.3 Geração da matriz do sistema

Essas informações são então utilizadas para a geração das matrizes de rigidez. É gerada uma matriz de rigidez para cada tetraedro e os valores são também acumulados na matriz global do sistema. Como a matriz global é de grande porte e altamente esparsa, foi necessário desenvolver uma classe de armazenasse as informações de forma compacta e fornecesse rápido acesso. Também houve a tentativa de utilizar *frameworks* disponíveis para esse tipo aplicação, como a implementação de BLAS pra C++ UBLAS. Mas como essas ferramentas são desenvolvidos para uso geral, não aproveitavam todas as peculiaridades do sistema, não alcançando o desempenho obtido com a classe de matriz esparsa especialmente desenvolvida para o problema.

Esse sistema de equações lineares algébricas é então resolvido como método SOR (Successive Over Relaxation). Depois de resolvido o sistema é necessário, devido à não linearidade do sistema, calcular e aplicar o fator de compactação do produto, calculando também o vetor de velocidade para cada tetraedro. Essa iteração é repetida até que o erro do fator de compactação seja menor ou igual ao máximo permitido.

Caso seja necessário atingir uma determinada vazão específica, o sistema realiza mais um nível de iteração, aplicando o método de Newton para encontrar a pressão necessária nas entradas de ar para que a condição de vazão específica seja satisfeita.

### 3.4 Pós-processamento

O pós-processamento é uma etapa importante do trabalho para que se possa fazer uma avaliação eficiente dos resultados. Para pós

processamento foi utilizado o programa Paraview. Ele é software livre e possui ferramentas poderosas para análise dos resultados, tais como superfícies isométricas, linhas de fluxo, vetores de direção, campos de seleção, animação etc...

Para que esse programa pudesse ser utilizado para avaliação dos resultados desse trabalho, foi escrito um componente para o resolvidor que exporta os resultados (pontos, elementos, campo de pressão, campo de velocidades, campo de vazão específica local) para o formato VTK, aceito como entrada pelo Paraview.

## CAPÍTULO 4

### *Simulações Numéricas*

A figura 4.1 mostra a estrutura de uma armazém com fundo V, tipicamente utilizado no estado do Rio Grande do Sul (Brasil). O armazém possui largura de 30 m e comprimento de 95 m. Três sistemas de entrada de ar são analisados: 1) sistema de entrada central; 2) sistema de entrada central e lateral superior; e 3) sistema com entrada central, lateral inferior e lateral superior. As simulações de aeração no armazém, para diferentes esquemas de aeração, foram geradas utilizando uma taxa de vazão específica global de  $9 \text{ m}^3\text{h}^{-1}\text{t}^{-1}$  ( $2.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3\text{s}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ), que são valores recomendados para a aeração em armazéns graneleiros. O valor de pressão de ar na entrada lateral inferior foi de 50% da pressão de ar na entrada central, e na entrada lateral superior esse valor foi 25%.

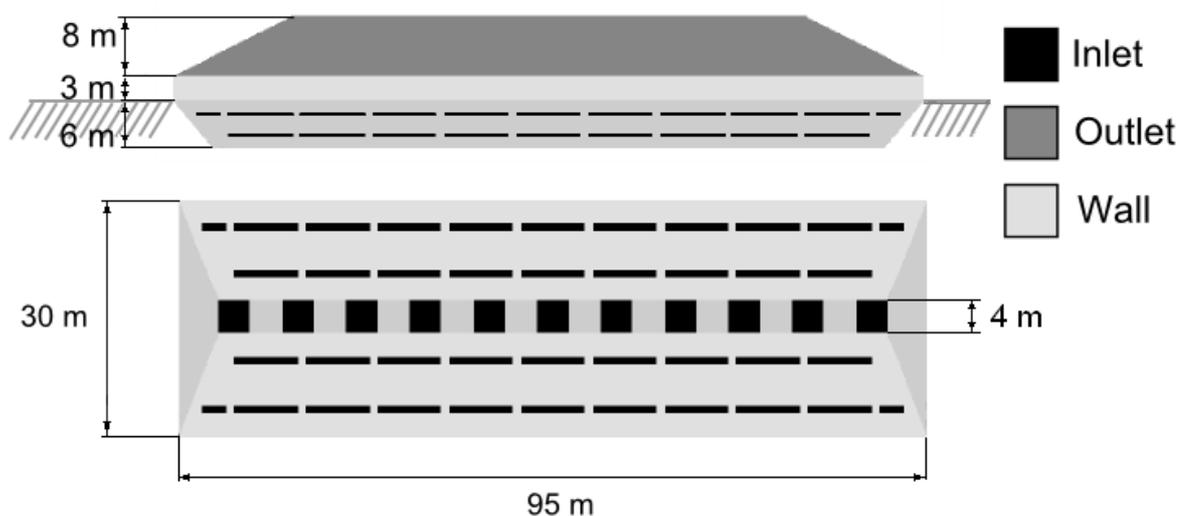


Figura 4.1: Esquema do armazém simulado

#### 4.1 Simulações numéricas e resultados

Primeiro, a simulação do fluxo de ar no armazém graneleiro fundo V foi feita para o caso 1 (dutos para entrada de ar instalados no fundo do armazém). Embora no caso considerado o armazém tenha dois eixos de simetria, sendo possível considerar apenas  $\frac{1}{4}$  de todo o volume de armazenagem, a simulação foi realizada para o domínio completo, pois no caso geral a condição de simetria não existe.

A figura 4.2 apresenta parte da malha computacional usada (*wireframe* da superfície externa). A malha possui maior densidade em domínios onde o módulo do gradiente de pressão é maior. Na malha considerada, o número de tetraedros é de cerca de quinhentos mil.

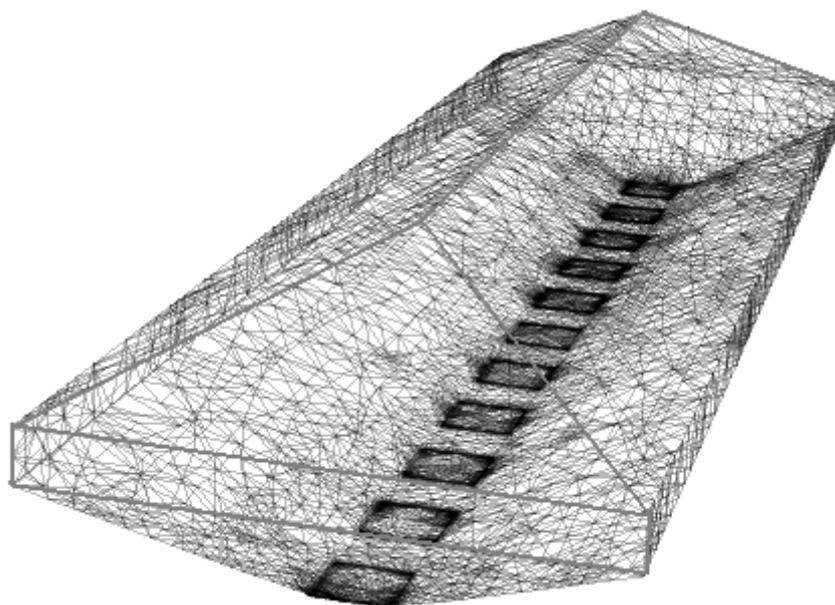


Figura 4.2: Wireframe da superfície da malha de tetraedros

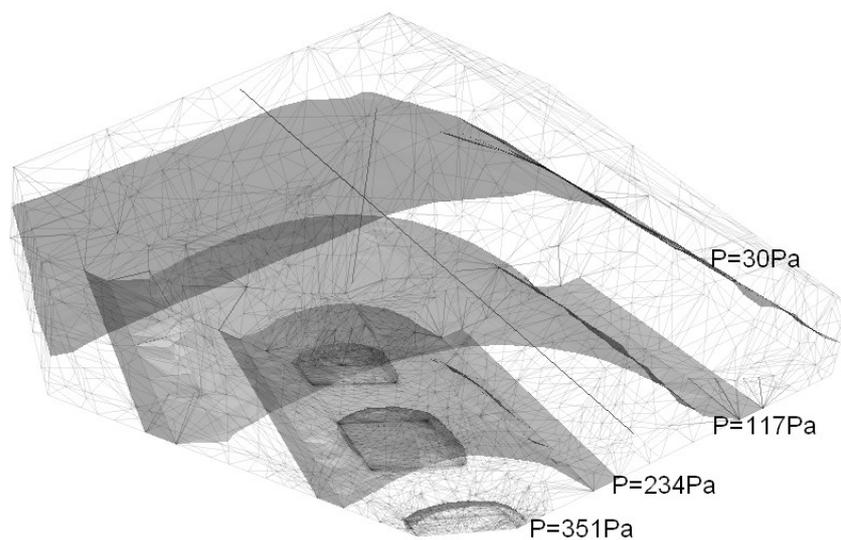
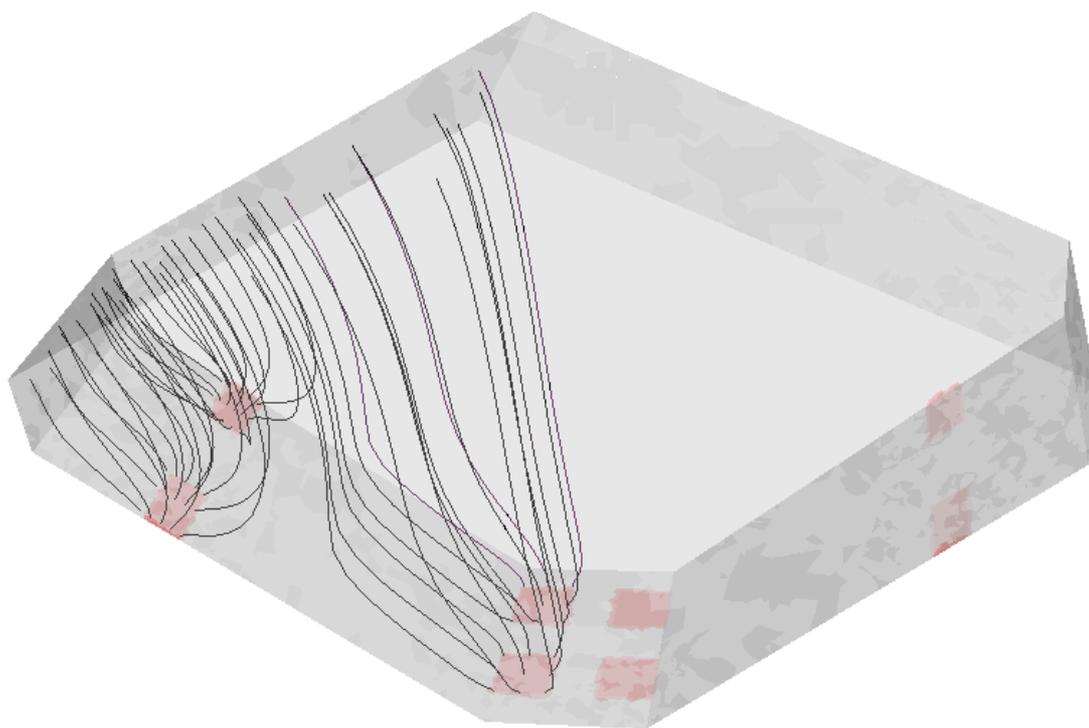


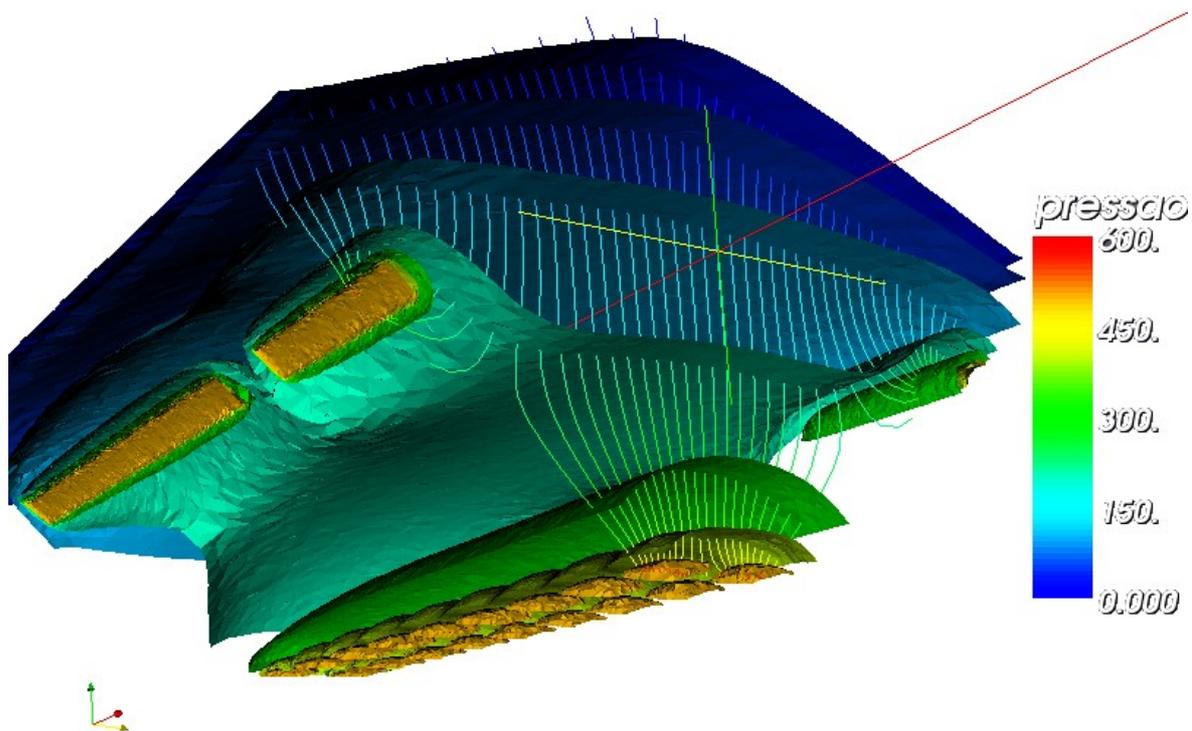
Figura 4.3: Superfícies isobárica em seção do armazém.

Superfícies isobáricas para aeração em armazém para o sistema com entrada de ar central, lateral inferior e lateral superior são mostradas na figura 4.3. É possível notar que na parte inferior do

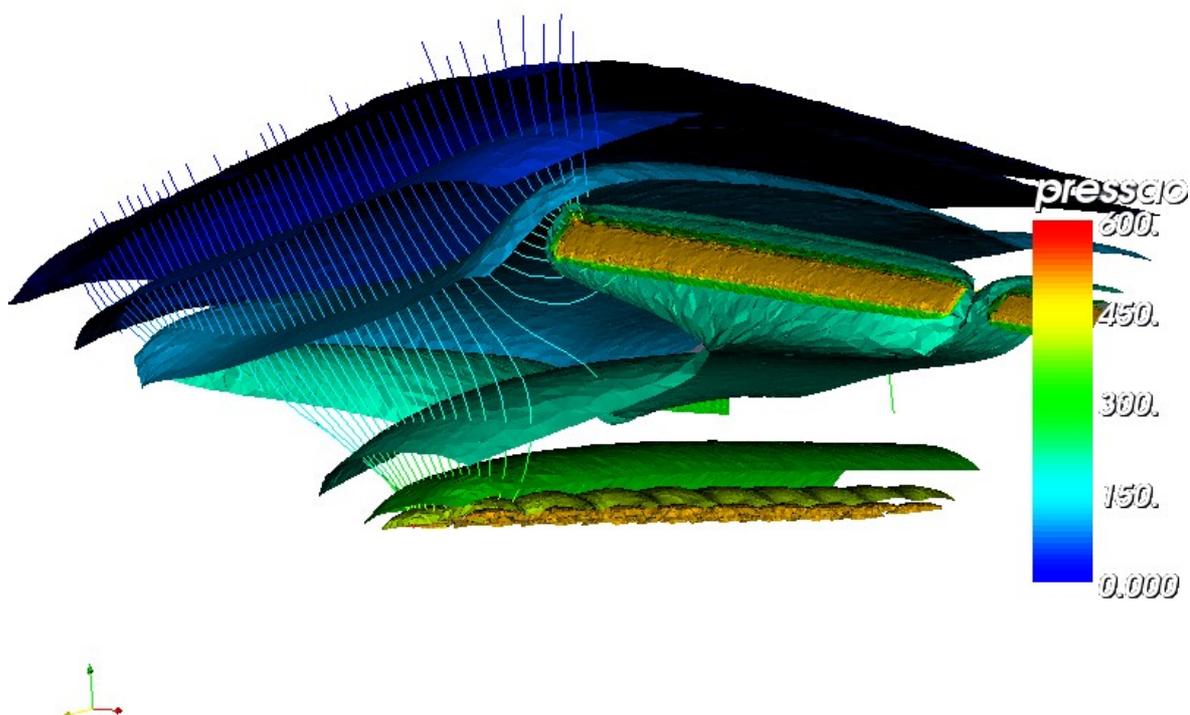
armazém o fluxo tem caráter essencialmente tridimensional. Na parte superior do armazém o fluxo se aproxima do caso bidimensional. Na figura 4.4 podemos ver as linhas de fluxo em uma das simetrias para o caso com entrada central e lateral superior. A figura 4.5 mostra as superfícies isobáricas e linhas de fluxo na parte central de um armazém. A figura 4.6 mostra as superfícies isobáricas e linhas de fluxo na cabeceira do armazém. Essa análise na cabeceira do armazém seria muita mais complexa se tivesse que ter sido feita com simulações bidimensionais.



*Figura 4.4: Linhas de fluxos em uma das simetrias do armazém*

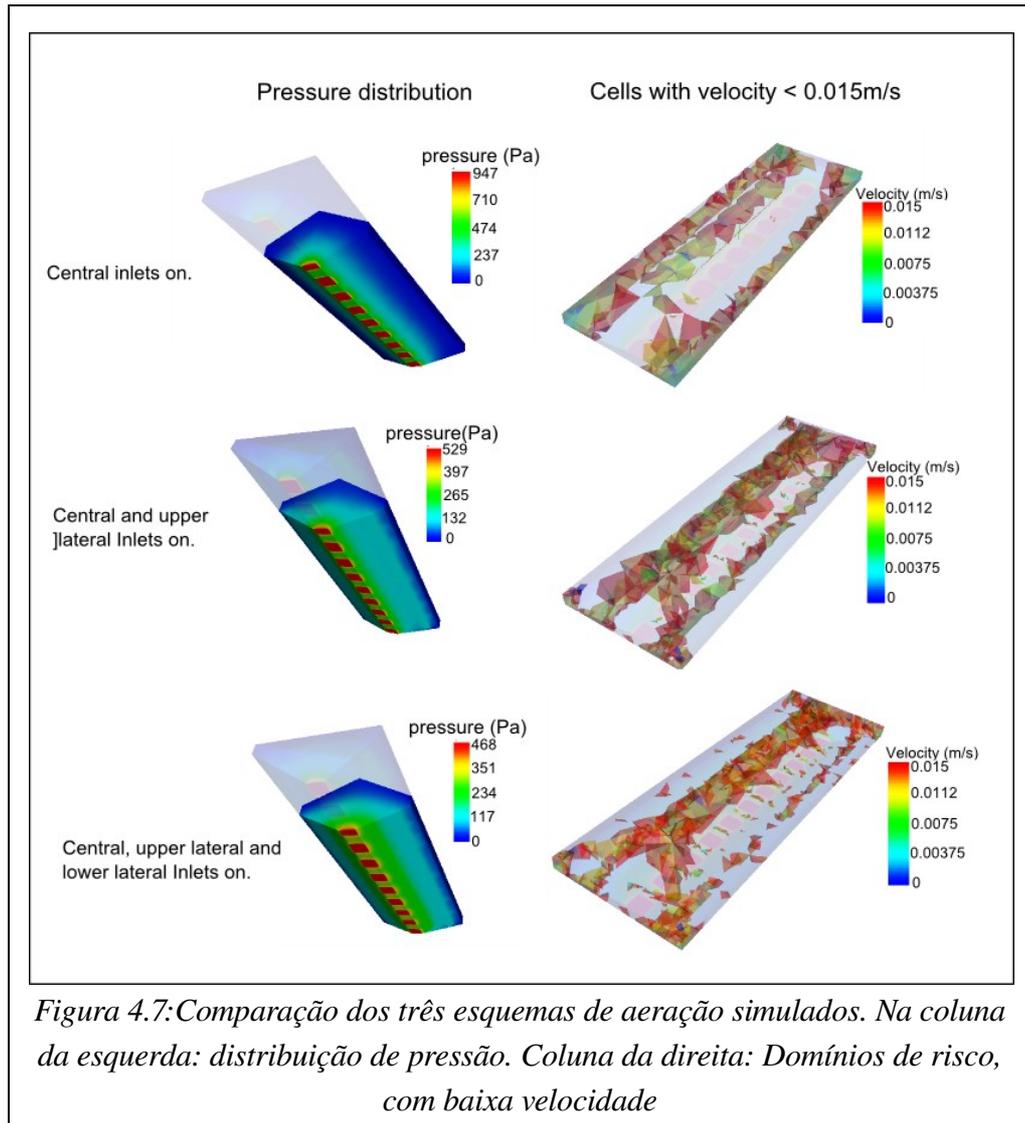


*Figura 4.5: Superfícies isobáricas e linhas de corrente no centro do armazém. Pressão em Pa.*



*Figura 4.6: Superfícies isóbaras e linhas de corrente na cabeceira do armazém*

Os resultados da simulação para os três casos de sistema de aeração considerados são apresentados na figura 4.7. A análise da distribuição de pressão (coluna esquerda) mostrou que a instalação de dutos laterais ajudou a equalizar o fluxo de ar em comparação com o mesmo armazém sem dutos laterais. Além disso, as entradas de ar laterais ajudaram a reduzir a pressão inicial na entrada de ar central exigida para que a vazão de  $9 \text{ m}^3\text{h}^{-1}\text{t}^{-1}$  fosse obtida. Para analisar a distribuição, o programa permite que sejam selecionadas partes do domínio que satisfaçam determinada condição. Como exemplo, as imagens na figura 4.7 (coluna da direita) apresentam apenas elementos com velocidade menor que  $0.015 \text{ m/s}$ , i.e. domínios com capacidade de aeração reduzida.



Podemos também perceber que a velocidade do ar não é o melhor parâmetro para entender as mudanças ocorridas nos três esquemas de aeração. Na figura 4.8 no entanto, a coluna da esquerda mostra imagens onde foram selecionados apenas os elementos com vazão específica local menor que  $6\text{m}^3\text{h}^{-1}\text{t}^{-1}$ . Podemos perceber que no primeiro caso, com aeração apenas central, existem um grande volume de grãos com baixa vazão específica local, tanto no topo do armazém quanto nas áreas laterais do armazém. No segundo esquema de aeração, com entrada central e uma entrada lateral, a quantidade de elementos com baixa vazão nas laterais do armazém diminui bastante. Já no terceiro caso, onde há a entrada central e duas entradas laterais, desaparecem os elementos com baixa vazão específica local nas

laterais; porém a quantidade de elementos com baixa vazão no topo do armazém aumenta muito. isso indica que nesse caso a pressão de ar na entrada central deveria ser maior e nas entradas laterais a pressão deveria ser menor.

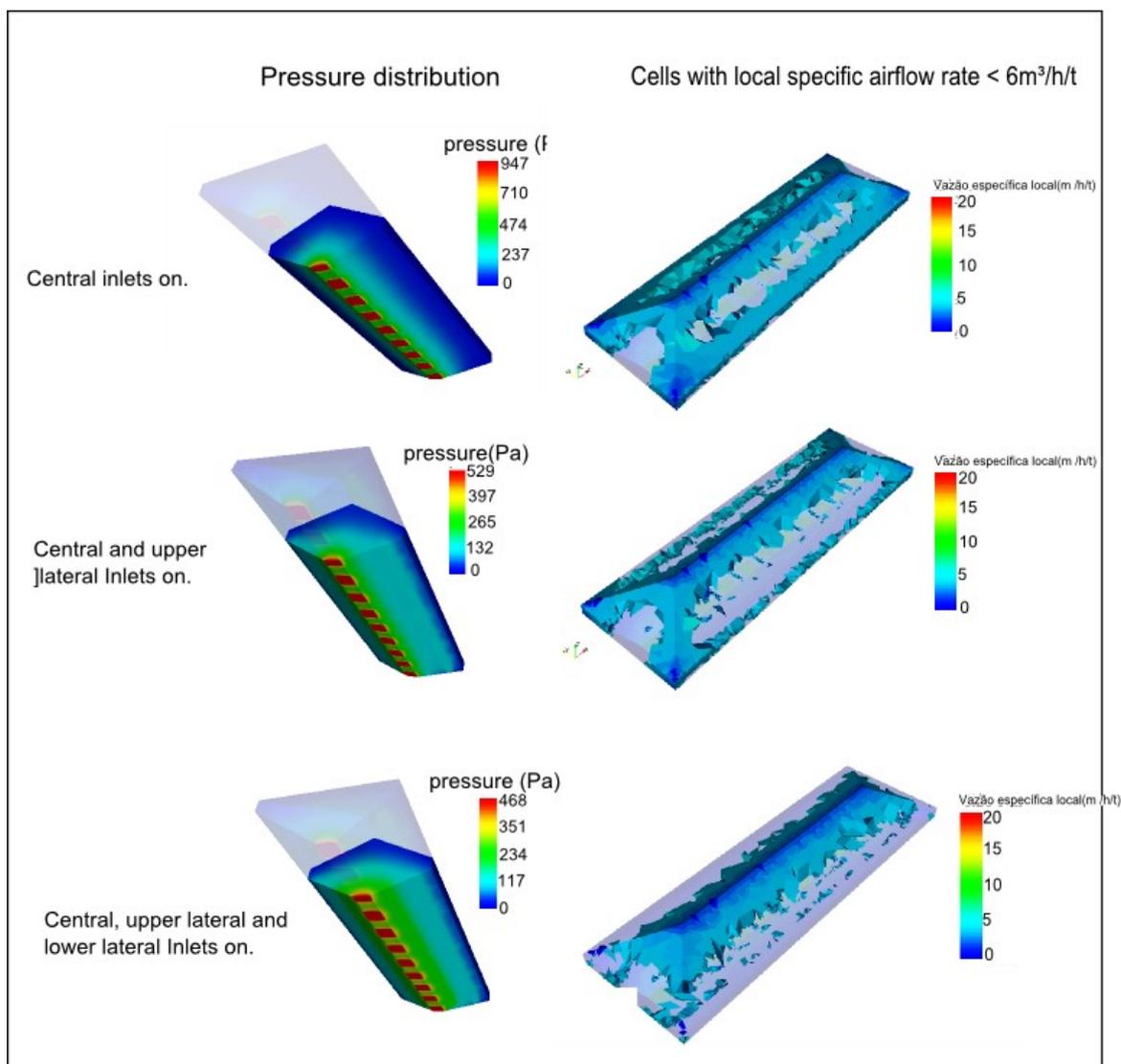
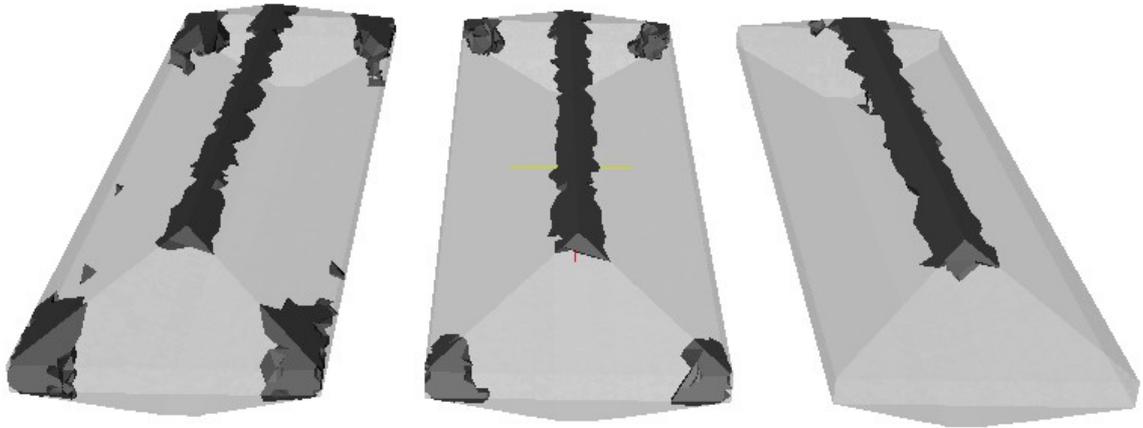


Figura 4.8: Comparação dos três esquemas simulados. Coluna da esquerda: distribuição de pressão. Coluna da direita: Áreas de risco, domínios com vazão específica local menor.

Domínios do armazém com vazão específica local excessiva vão causar secagem dos grãos. Por outro lado, domínios com baixa vazão específica vão ter aeração deficiente, as áreas com aeração excessiva ou deficiente são as áreas de risco do armazém. Para visualizar as zonas de risco do armazém, foi estudada a distribuição da vazão

específica local. A figura 4.9 apresenta os domínios com baixa intensidade de ventilação ( $q_L < 4.5$ ) para três sistemas de aeração diferentes: 1) sistema com entrada de ar central; 2) sistema com entrada de ar central e lateral superior; e 3) entrada de ar central, superior esquerdo e superior direito. As simulações indicam que o sistema do caso 3 teve uma melhora considerável nas condições de armazenagem nos domínios próximos à parede se comparamos com os outros dois esquemas. Para todos os três casos existe uma área de risco na área superior do armazém.



*Figura 4.9: Visualização dos domínios com baixa intensidade de ventilação ( $q_L < 4.5$ ) para os três esquemas de aeração: 1) apenas entrada central; 2) central e lateral superior; e 3) central, lateral inferior e lateral superior;  $Q = 9 \text{ m}^3\text{t}^{-1}\text{h}^{-1}$ .*

Os domínios com intensidade de ventilação elevada ( $q_L > 18$ ) são mostrados na figura 4.10. Os resultados obtidos mostram que o segundo sistema (entrada central e entrada lateral superior) possui um menor volume com intensidade de aeração excessiva quando comparado com os outros dois sistemas, *i.e.* apresenta um melhor desempenho.

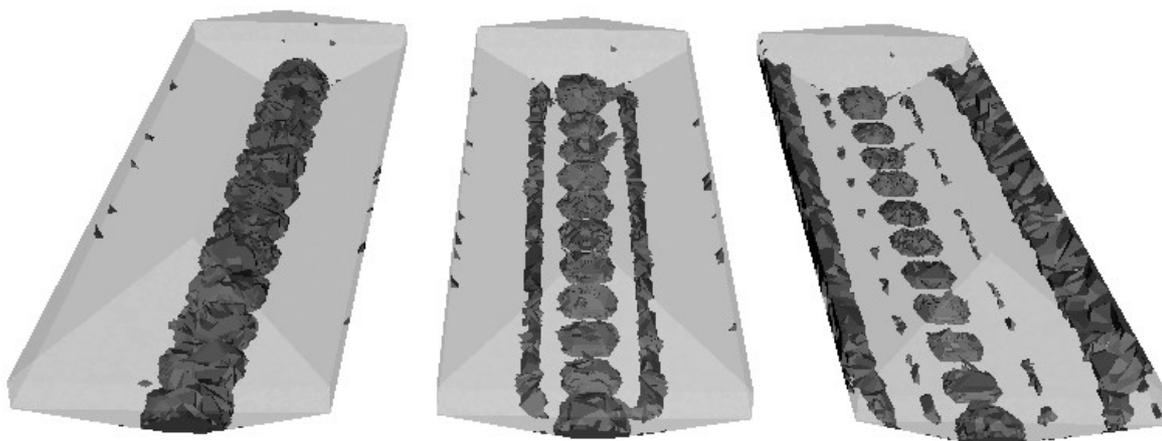


Figura 4.10: Domínios com intensidade excessiva de ventilação ( $qL > 18$ ) para os três esquemas simulados: 1) entrada central; 2) central e lateral superior e 3) central, lateral superior e lateral inferior.  $Q = 9 \text{ m}^3 \text{ t}^{-1} \text{ h}^{-1}$ .

Outra análise comparativa mais detalhada da eficiência de diferentes sistemas de aeração foi feita para o mesmo armazém também com a vazão específica global  $Q = 9 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1} \text{ t}^{-1}$  ( $2.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ). Foi variado o número de entradas (de uma à três), posição das entradas (lateral superior, lateral inferior e central), e a razão da pressão de ar entre as várias entradas. Usando a propriedade de aditividade da vazão específica local, também foi feita a avaliação da eficiência do sistema de aeração quando a aeração é feita separadamente em cada entrada, e com períodos de tempo variados de aeração em cada entrada. Relações entre o tempo de ventilação aplicado em cada entrada e as pressões de ar nas entradas foram escolhidos tal que a vazão específica global  $Q$  seja igual a  $9 \text{ m}^3 \text{ h}^{-1} \text{ t}^{-1}$  ( $2.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ). Os resultados da simulação da distribuição da vazão específica local em um plano simétrico do armazém são apresentados na figuras 4.11-4.14.

Os resultados da simulação apresentados nas figuras 4.11 e 4.12 (a) mostram que sempre que é usada apenas uma entrada de ar é gerada uma grande zona de super ventilação. Como o ar tende a sair pelo caminho mais curto (o caminho com a mínima resistência), a mudança da entrada de ar de uma posição no fundo do armazém para

uma posição mais acima causa uma redução na pressão e prejudica a uniformidade da aeração. Além disso existe uma grande área de super-ventilação no caso em que todas as entradas estão ligadas simultaneamente e com a mesma pressão (Fig. 4.12, b).

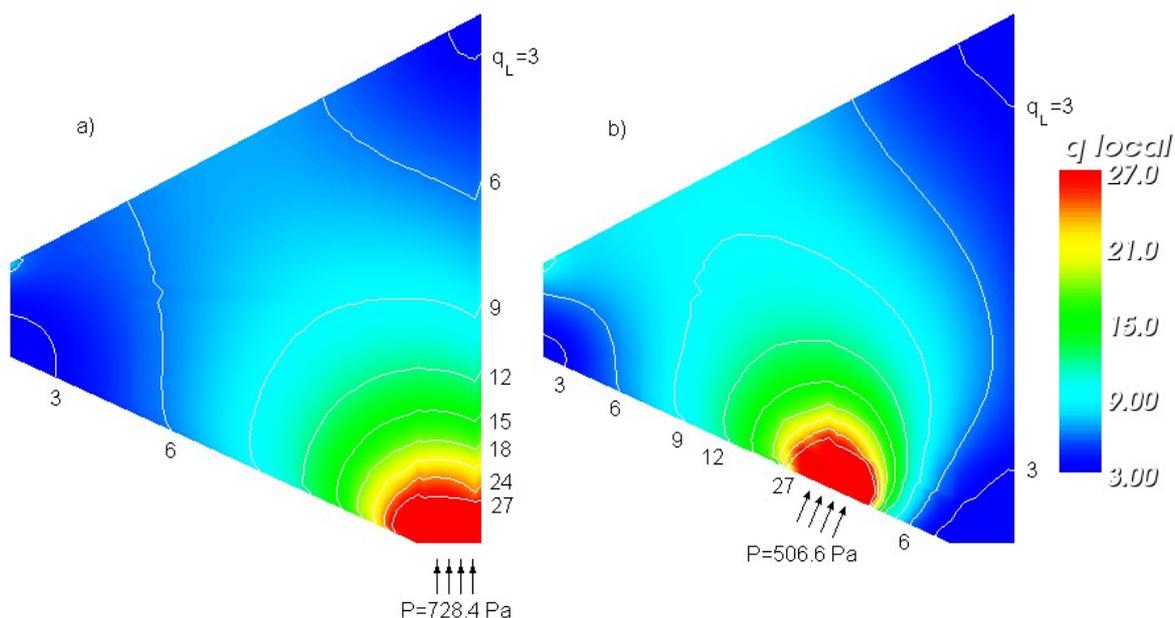


Figura 4.11: Distribuição da vazão específica local,  $Q=9 \text{ m}^3\text{h}^{-1}\text{t}^{-1}$  ( $2.5 \times 10^6 \text{ m}^3\text{s}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ): a) entrada central; b) entrada lateral inferior.

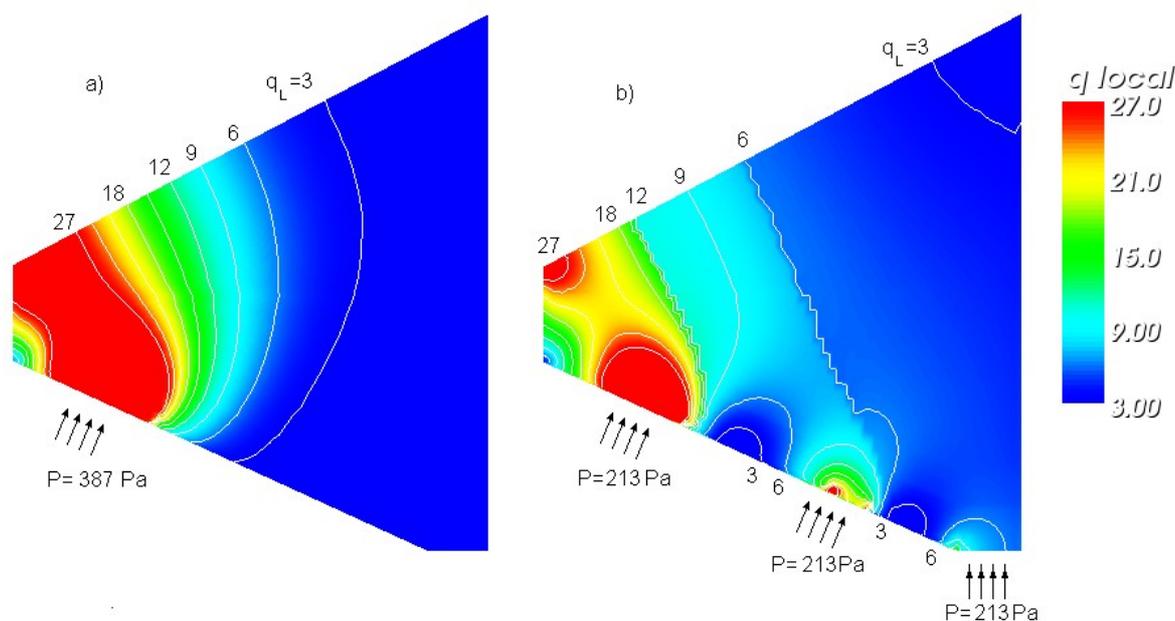


Figura 4.12: Distribuição da vazão específica local,  $Q=9 \text{ m}^3\text{h}^{-1}\text{t}^{-1}$  ( $2.5 \times 10^6 \text{ m}^3\text{s}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ): a) entrada lateral superior; b) entrada central, lateral inferior e lateral superior com pressões iniciais idênticas.

Selecionando as razões de pressão adequadas para as entradas, é possível melhorar consideravelmente a distribuição de ar na massa de grãos, diminuindo as zonas de risco. Isso é mostrado na figura 4.13 (a) para o caso com duas entradas, e na figura 4.13 (b) para o caso com três entradas.

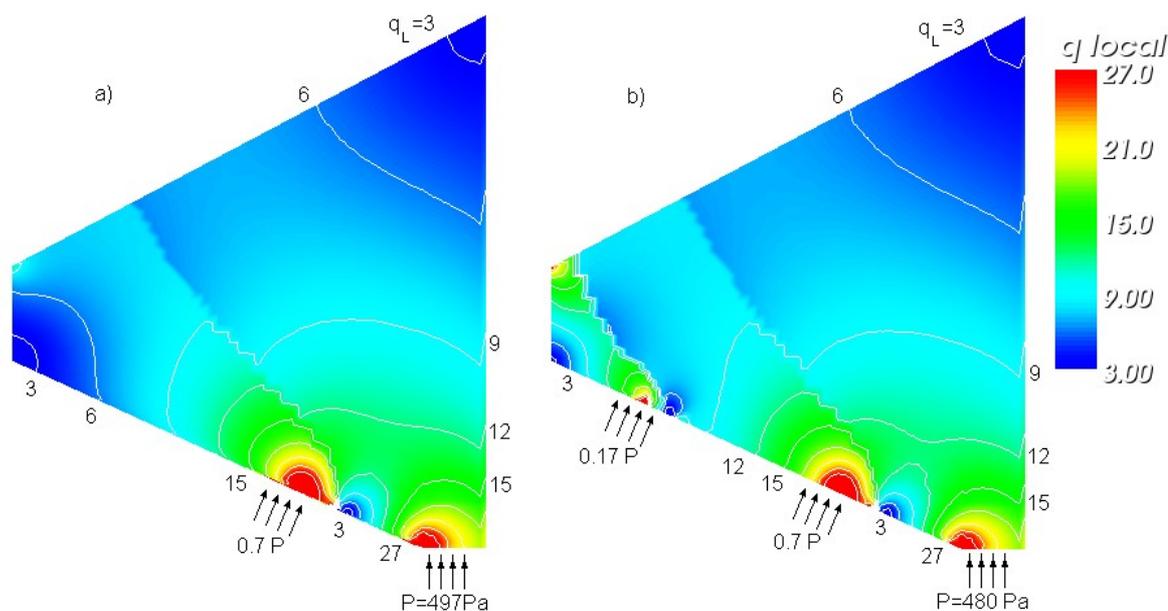


Figura 4.13: Distribuição da vazão específica local,  $Q=9 \text{ m}^3\text{h}^{-1}\text{t}^{-1}$  ( $2.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3\text{s}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ): a) entrada central e lateral inferior com diferentes pressões; b) entrada central, lateral inferior e lateral superior com diferentes pressões iniciais.

Em armazéns de alta capacidade, a aeração do grão é geralmente feita estágio por estágio, utilizando entradas de ar localizadas em diferentes partes do armazém. Nessas condições é especialmente vantajoso utilizar a vazão específica local como parâmetro para avaliar a eficiência do sistema de aeração. Neste caso, a vazão específica local resultante  $q_L$  em cada ponto do armazém pode ser calculada através da expressão:

$$q_L = \frac{\sum_{i=1}^n t_i q_i}{\sum_{i=1}^n t_i} \quad (4.1)$$

onde:  $q_i$  é a vazão específica local correspondente à aeração com apenas uma entrada (estágio de aeração  $i$ );  $t_i$  é o tempo de aeração com apenas uma entrada ( $i$ );  $n$  é o número total de entradas;  $i$  é o número do estágio de aeração correspondente a entrada.

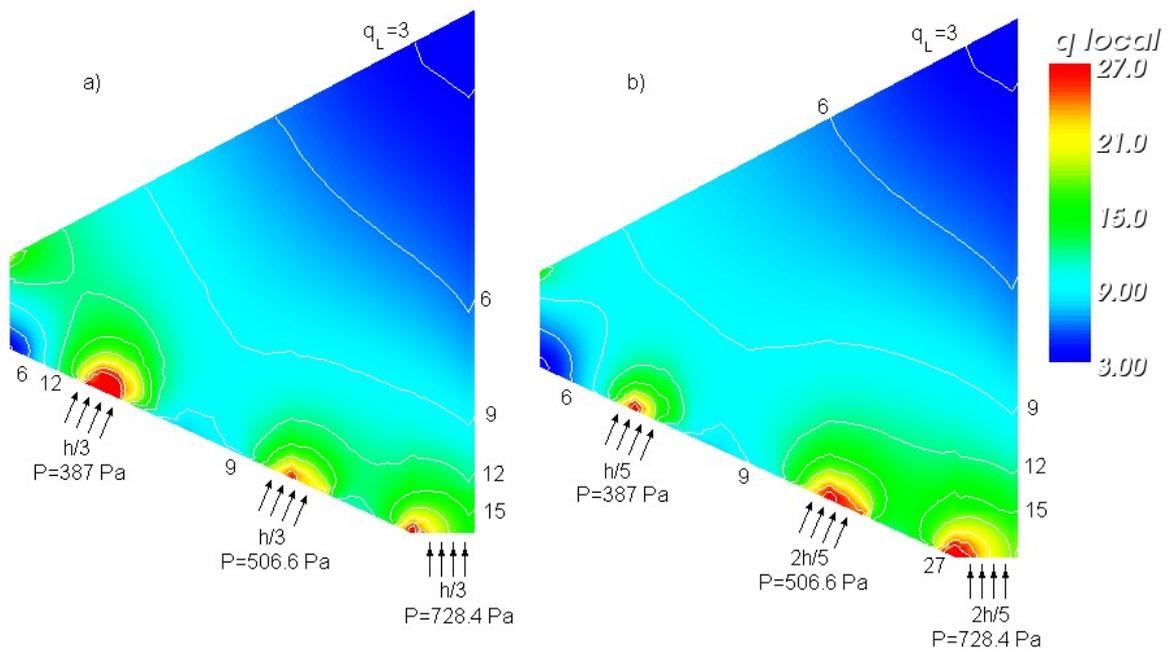


Figura 4.14: Distribuição da vazão específica local resultante com o funcionamento não simultâneo das entradas,  $Q=9 \text{ m}^3\text{h}^{-1}\text{t}^{-1}$  ( $2.5 \times 10^6 \text{ m}^3\text{s}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ): a) entradas lateral superior, lateral inferior e central com distribuição igual de tempo (1:1:1); b) entradas lateral superior, lateral inferior e central com diferentes tempos de aplicação da aeração(1:2:2).

Por exemplo, a figura 4.14 mostra a distribuição da vazão específica local resultante da aeração feita separadamente com a entrada lateral superior, entrada lateral inferior ou entrada central. No caso (a) o tempo de aeração é igual para cada entrada, e a vazão específica local resultante em cada ponto do domínio pode ser calculado através da expressão:

$$q_L = \frac{1}{3}q_1 + \frac{1}{3}q_2 + \frac{1}{3}q_3 \quad (4.2)$$

onde  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  são as taxas de vazão específica local correspondente à entrada lateral superior, entrada lateral inferior ou entrada central.

As simulações apresentadas nas figuras 4.12 (b) e 4.14 (a) indicam uma vantagem significativa quando a aeração é feita em turnos separados para cada entrada em comparação com o uso simultâneo de várias entradas (com a mesma pressão). Essa melhora é causada pela capacidade de penetração do ar em todas as zonas sob a influência de cada entrada provocando assim uma distribuição mais uniforme do parâmetro resultante  $q_L$ .

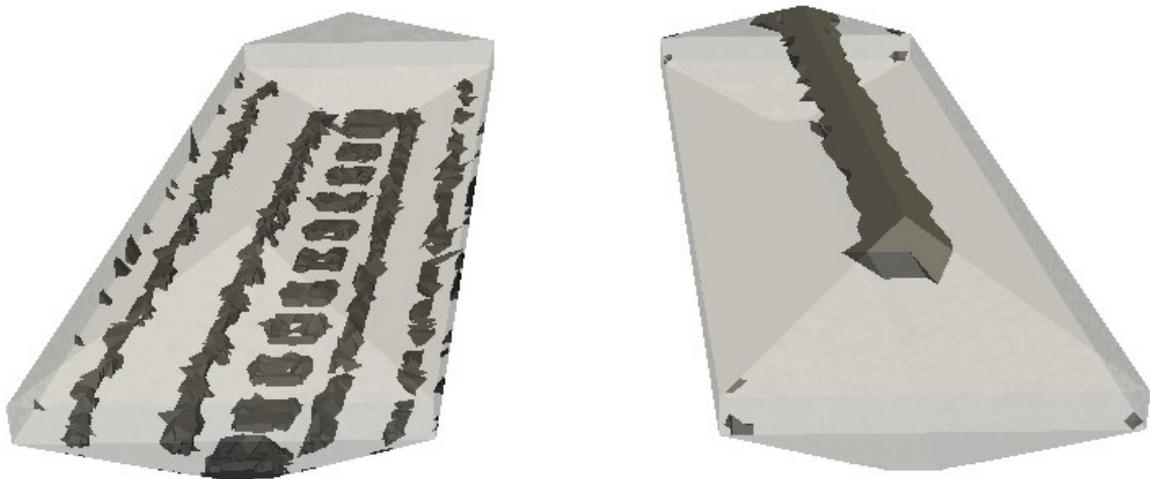


Figura 4.15: Domínios com aeração insuficiente ( $Q_L < 4.5$ ; coluna direita) e com intensidade excessiva de aeração ( $Q_L > 18$ ; coluna esquerda);  $Q_L$  foi obtido pela superposição das simulação com funcionamento separado de cada entrada: lateral superior, lateral inferior e central com diferentes tempos de aplicação (1:2:2);  $Q=9 \text{ m}^3\text{h}^{-1}\text{t}^{-1}$  ( $2.5 \times 10^6 \text{ m}^3\text{s}^{-1} \text{kg}^{-1}$ )

Variando as relações de duração do tempo de aplicação da aeração em cada entrada é possível encontrar uma distribuição ótima de  $q_L$  no domínio.

A figura 4.14 (b) mostra a distribuição de  $q_L$  no armazém graneleiro com a aplicação alterada de aeração na entrada lateral superior, lateral inferior e central com a relação do tempo de aeração de  $t_1:t_2:t_3=1:2:2$ . As observações indicam que esta distribuição possui menos domínios com aeração insuficiente ou excessiva. Esses domínios são apresentados na figura 4.15.

## *Conclusões*

### **Conclusões**

A passagem do problema para três dimensões implica um aumento da complexidade das ferramentas computacionais para solução do problema. A integração de ferramenta de software para pré e pós processamento, e a criação de um programa para aplicar o método dos elementos finitos para o modelo criado, constituíram um solução eficiente para o problema, podendo resolvê-lo em malhas tridimensionais densas mesmo em computadores pessoais.

Com a solução criada foi possível simular e fazer a avaliação de desempenho de vários esquemas de aeração. Também foi constatada a dificuldade de avaliar a eficiência da aeração utilizando apenas os parâmetros de pressão e velocidade do ar. Portanto, esse trabalho sugere um novo parâmetro para a análise de eficiência da aeração, aqui chamado de vazão específica local.

A vazão específica local mostrou-se um bom parâmetro para analisar a eficiência da aeração. Com esse parâmetro também foi possível realizar várias análises com o acionamento individual das entradas de ar e também com diferentes distribuições de tempo de aeração para cada entrada. Foi observado que a aeração feita separadamente permite uma distribuição mais homogênea de ar, se comparada com a utilização simultânea de todas as entradas.

### **Sugestões para trabalhos futuros**

Outros fenômenos presentes no problema podem ser estudados e adicionados ao modelo tridimensional, entre eles o transporte de calor e umidade, e a influência desses parâmetros no escoamento de ar.

No campo computacional, mais pesquisas podem ser feitas para aumentar o desempenho do programa com a criação de uma versão para computação paralela para a resolução do sistema com processamento distribuído.

## Referências Bibliográficas

- ARAÚJO, L. G. *“Variação da Perda de Pressão em Camadas de Grãos de Soja em Função do Teor de Finos, da Densidade de Fluxo de Ar e da Espessura da Camada”*. UFV, Viçosa- MG, Dissertação de Mestrado 1986.
- BAKKER-ARKEMA, F.W., PATERSON, R.J., e BICKERT, W. G., *“Static Pressure Airflow Relationships in Packed Bedsof Granular Biological Materials Such as Cherry Pits”*. Transactions of the ASAE 12 (1):134-136, 40 1969.
- BEAR, J., *“Dinamics of fluids in porous media”*. Elsevier, 1972.
- BROOKER, D.B., *“Pressure patterns in grain drying system established by numerical methods”*, Transactions of the ASAE, 4, pp. 72-77,1961.
- BROOKER, D.B., *“Computing air pressure and velocity distribution when air flows through a porous medium and nonlinear velocity - pressure relationship exists”*, Transaction of the ASAE, 12, pp. 118-120,1969.
- BROOKER, D.B., BAKKER-ARKEMA, F.W., Hall, C..W, *“Drying Cereal Grains”*, AVI Publishing Co., Westport, CT,1982.
- BUNN, J.M., HUKILL, W.V., *“Pressure pattern prediction for non-linear air flow through porous medium”*, Transactions of the ASAE, 6, pp. 32-36,1963.
- HAQUE, E., CHUNG, D.S., FORSTER, G.H.,, *“Pressure and velocity field in airflow through packed bed of corn with fines non-Darcy flow conditions”*, Transactions of the ASAE, 5, pp. 1595-1604, 1981 .
- HUKILL, W. V., e IVES, N. C., *“Radial airflow resistance of grain”*. Agricultural Engineering 36, (2):201-211, 1955.

KHATCHATOURIAN, O. A.; TONIAZZO, N. A.; BORGES P. A. P., *“Um método simples para análise do processo de secagem de soja em camada móvel com fluxo contrário de ar”*. XX CILAMCE, p. 53.1-58.1, São Paulo, 1999.

KHATCHATOURIAN, O. A.; e SAVICKI, D. L., *“Mathematical modelling of airflow in an aerated soya bean store under non-uniform conditions”*. Biosystems Engineering 88, 2 p. 201-211, 2004.

KHATCHATOURIAN, O. A.; e BINELO, M. O., *“Aeration quality estimation through 3D airflow simulation in grain stores”*. XXX CNMAC, 2007.

LASSERAN, J. C., *“Utilização e Desempenho de Secadores Possibilidades de Aperfeiçoamento”*. Revista brasileira de armazenamento, Viçosa, n.1, p. 50-60, 1980.

LIU, A., e JOE B., *“Quality local refinement of tetrahedral meshes based on 8- subtetrahedron subdivision ”*. Mathematics of Computation, Vol.65, No 215, pp. 1183-1200, 1996.

MAIER, D.E., MOREIRA, R.G., BAKKER-ARKEMA, F.W., *“Comparison of conventional and chilled aeration of grains under Texas conditions”*, Applied Engineering in Agriculture, Vol.8, No 5, pp. 661-667, 1992.

MATTHIES, H. J., e PETERSON, H., *“New Data For Calculation the Resistance to Airflow of Stored Granular Materials”*. Transactions of the ASAE ,17(6), p. 1144-1149, 1974.

PEREIRA, J. A. M., *“Aeração de Grãos – Fundamentos e Manejo”*. Centreinar, Viçosa-MG. Notas de aula, 1995.

PIERCE, R.O., THOMPSON, T.L., *“Airflow pattern in coaxial-shaped piles of grain”*, Transactions of the ASAE, 18, 946-949.,1975.

PUZZI, D., *Abastecimento e Armazenagem de Grãos*. Instituto Campineiro de Ensino Agrícola, Campinas, SP, 1986.

## Referências Bibliográficas

---

- RIBEIRO, C.A., FORTES, M., HARA, T., “Escoamento de ar em silos”.  
Revista Brasileira de Armazenamento, Viçosa, Vol.891, No 20, pp. 28-31, 1983 .
- SAVICKI, D.L., “*Modelagem Matemática do Processo de Aeração em Condições Não-Homogêneas da Massa de Grãos de Soja*”. Dissertação de Mestrado, Ijuí, 2001.
- SCHEIDEGGER, A.E., “The physics of flow through porous media”, 2nd ed., University of Toronto Press, Toronto,1960.
- SEGERLIND, L. J., Applied Finite Element Analysis. New York: John Wiley, p.427, 1984.
- SCHÖBERL, J., “*NETGEN - An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules*”. Comput.Visual.Sci, 1:41-52, 1997.
- SHEDD, C. K., “*Resistence of grains and seeds to air flow*”. Agricultural Engineering, St Joseph, Michigan: 34:9, p. 616-619, 1953.
- TONIAZZO, N. A., “*Modelagem Matemática do Escoamento do Ar em Sistemas de Armazenagem de Grãos*”. Disertação de mestrado, Unijuí, 1997.
- WEBER, E., “*Armazenagem Agrícola*”, Kepler Weber Industrial, Porto Alegre,1995 .

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)